



**HAL**  
open science

# Estimation dynamique non-linéaire de canaux de transmission pour récepteurs satellites mobiles

Jordi Vilà Valls

► **To cite this version:**

Jordi Vilà Valls. Estimation dynamique non-linéaire de canaux de transmission pour récepteurs satellites mobiles. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2010. Français. NNT : . tel-00533731

**HAL Id: tel-00533731**

**<https://theses.hal.science/tel-00533731>**

Submitted on 8 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**INSTITUT POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

N° attribué par la bibliothèque

---

*THÈSE*

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'Institut polytechnique de Grenoble

**Spécialité : «Signal, Image, Parole, Télécommunications»**

préparée au laboratoire Grenoble Image Parole Signal et Automatique

dans le cadre de l'**École Doctorale EEATS**

**«Électronique, Électrotechnique, Automatique, Télécommunications, Signal»**

présentée et soutenue publiquement

par

**Jordi VILÀ VALLS**

le 29 Mars 2010

*Titre :*

**ESTIMATION DYNAMIQUE NON-LINÉAIRE DE CANAUX DE  
TRANSMISSION POUR RÉCEPTEURS SATELLITES MOBILES**

**Directeur de thèse : Jean-Marc BROSSIER**

**Directeur de thèse : Laurent ROS**

**JURY**

Monsieur	Pierre-Olivier AMBLARD	Président
Monsieur	Juan A. FERNÁNDEZ RUBIO	Rapporteur
Monsieur	Jean-Yves TOURNERET	Rapporteur
Monsieur	Benoit GELLER	Examineur
Monsieur	Didier LE RUYET	Examineur
Monsieur	Jean-Marc BROSSIER	Directeur
Monsieur	Laurent ROS	Directeur
Monsieur	Carles FERNÁNDEZ PRADES	Invité



*al papa i a la mama,  
i a la Clara,*



# Remerciements

Ce travail s'est déroulé avec beaucoup de plaisir au Laboratoire Grenoble, Image, Parole, Signal, Automatique (GIPSA), dans le département Image et Signal (DIS), démarré en Octobre/Novembre 2006.

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse, Jean-Marc Brossier et Laurent Ros, pour avoir eu l'immense patience de m'encourager sans faille et d'avoir suivi de très près mon travail. Ils ont réussi à me transmettre leur enthousiasme, leur savoir-faire et, en petite partie, leur vastes connaissances, ce qui a été le point clé pour faire évoluer et mener au bout cette thèse. Un grand merci.

Je remercie Monsieur Pierre-Olivier Amblard, Directeur de Recherche au CNRS, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury, ainsi que Monsieur Juan A. Ferández Rubio, Professeur à l'UPC de Barcelone, et Monsieur Jean-Yves Tournet, Professeur à l'ENSEEIH de Toulouse, d'avoir rapporté de façon extrêmement détaillée et constructive ce travail. Merci également à Monsieur Benoît Geller, Professeur à l'ENSTA de Paris, et Monsieur Didier Le Ruyet, Maître de Conférences au CNAM de Paris, d'avoir examiné ce travail. Aussi un grand merci à Carles Fernández Prades, chercheur au CTTC de Barcelone, d'avoir accepté d'être l'invité d'honneur.

Merci à tous ceux qui m'ont apporté leur aide, de près ou de loin, dans le déroulement de ce travail, en particulier : Steeve Zozor, Michel Gay, Olivier Michel, Éric Moisan, Cyrille Siclet, Jean-Michel Vanpé, Daniel Baudois, Habi Abeida ... I moltíssimes gràcies a en Carles i en Pau, que m'han ensenyat molt més del que es pensen, una part d'aquesta tesi és vostra.

También doy las gracias a las dos personas que han vivido lo más íntimo de esta tesis, con quién he compartido mi vida dentro y fuera del laboratorio, mis compañeros de despacho : Ion el grande y Pepa la magnífica. Sin vosotros no hubiera sido lo mismo. Aussi je tiens à remercier sincèrement Benjamin et Mathieu Causse, avec qui j'ai aussi partager des bons et des mauvais moments, leur encouragement a dépassé des limites, toujours si près sans s'en rendre compte. Monsieur Maurice Prestail mérite d'être sanctifié pour être la meilleure personne que je puisse connaître, et qui m'a transmis un autre type de connaissance, tout aussi importante que la scientifique, merci.

Pels de casa (la francesa), en Lluç i en Marc, no hi ha paraules, massa hores, massa muntanya, massa coses, ja està tot dit, gràcies. Y mil gracias a todos los que me han soportado, Lara y Ruben, Diego y Elisa, Joaquin, Ian, Lluç y Laia, con quién ha sido un verdadero placer compartir estos años en Grenoble.

I la família, impossible no citar-la. Suposo que van ser el papa i la mama qui em van quadrificar el cap de manera científica, moltes gràcies pel vostre suport, us dedico aquesta tesi que representa el final d'una etapa. I en Marc i en Martí, i en Joan i en Roger, de qui segurament he après moltes coses. I l'avi, el més savi de tots. I evidentment, infinites gràcies a la Clara, qui m'ha ensenyat molt més que cap tesi.



# Table des matières

Liste de Notations	xv
Liste de Sigles	xix
Introduction	1
<b>1 Communications par satellite et synchronisation</b>	<b>3</b>
1.1 Plan du document	4
1.2 Background	5
1.2.1 GNSS : synchronisation et localisation	5
1.2.2 GPS, GLONASS et Galileo	7
1.2.3 Modélisation	8
1.2.3.1 Le signal	9
1.2.3.2 Les paramètres	10
1.2.3.3 Communications à faible SNR	11
1.2.4 Modulation BOC	11
1.3 Synchronisation en GNSS	13
1.3.1 Principes	13
1.3.2 État de l’art	14
1.4 Contributions et publications	17
1.4.1 Principales contributions	17
1.4.2 Liste de publications	18
<b>2 Estimation Bayésienne</b>	<b>19</b>
2.1 Estimation Bayésienne optimale	21
2.1.1 La problématique	21
2.1.2 Solution optimale	22
2.1.3 État de l’art	23
2.2 Filtrage de Kalman	26
2.2.1 Introduction et modélisation d’état	26
2.2.2 Filtre de Kalman et Kalman étendu	27
2.3 Méthodes particulières	27
2.3.1 Les principes	28
2.3.1.1 Échantillonnage d’importance	28
2.3.1.2 Re-échantillonnage et choix de la fonction d’importance	30
2.3.2 Le filtre particulière	31
2.3.2.1 Rao-Blackwellisation	31
2.4 Méthodes déterministes	33



2.4.1	Introduction . . . . .	33
2.4.2	Le filtre Bayésien sous l'hypothèse Gaussienne . . . . .	34
2.4.3	Différents approches et calcul des échantillons déterministes . . . . .	36
2.4.3.1	Approche unscented . . . . .	36
2.4.3.2	Approche différences finies . . . . .	37
2.4.3.3	Approche quadrature de Gauss-Hermite . . . . .	38
2.4.3.4	Approche cubature . . . . .	40
2.4.4	Approximation du filtre Bayésien . . . . .	42
2.4.4.1	Unscented Kalman Filter . . . . .	42
2.4.4.2	Central Difference Kalman Filter . . . . .	43
2.4.4.3	Quadrature Kalman Filter . . . . .	43
2.4.4.4	Cubature Kalman Filter . . . . .	45
2.4.5	Vision d'ensemble des méthodes déterministes . . . . .	45
2.4.5.1	Méthode déterministe globale . . . . .	45
2.4.5.2	Comparaison des ensembles d'échantillons . . . . .	49
2.4.6	Version racine-carrée des méthodes déterministes . . . . .	49
2.5	Bornes Bayésiennes . . . . .	50
2.5.1	Introduction . . . . .	51
2.5.2	État de l'art . . . . .	51
2.5.3	Bornes de Cramér-Rao . . . . .	52
2.5.3.1	Borne de Cramér-Rao standard et modifiée . . . . .	53
2.5.3.2	Borne de Cramér-Rao Bayésienne et Bayésienne modifiée . . . . .	53
2.5.3.3	Borne de Cramér-Rao Bayésienne asymptotique . . . . .	54
2.5.3.4	Borne de Cramér-Rao Bayésienne hybride . . . . .	55
2.5.3.5	Borne de Cramér-Rao Bayésienne récursive . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Synchronisation fractionnée : modélisation et bornes</b>	<b>57</b>
3.1	Modélisation . . . . .	58
3.1.1	Modèle de signal suréchantillonné . . . . .	58
3.1.1.1	Formulation discrète générale . . . . .	58
3.1.1.2	Re-formulation discrète pour le bruit . . . . .	60
3.1.2	Modèles d'évolution . . . . .	61
3.1.2.1	Modèle de phase . . . . .	62
3.1.2.2	Modèle conjoint de phase et de Doppler . . . . .	62
3.1.3	Modèle d'état . . . . .	62
3.2	Bornes de Cramér-Rao pour la synchronisation fractionnée . . . . .	64
3.2.1	Borne de Cramér-Rao Bayésienne pour l'estimation de phase . . . . .	64
3.2.2	Borne de Cramér-Rao Hybride pour l'estimation conjointe de phase et d'offset de fréquence . . . . .	67
3.2.3	Comportement des bornes . . . . .	69
3.2.3.1	Borne HCRB pour les points de référence au pas $T_c$ . . . . .	70
3.2.3.2	Borne HCRB pour les points intermédiaires $T_c$ -espacés . . . . .	73
3.3	Conclusion . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Synchronisation fractionnée : méthodes d'estimation</b>	<b>75</b>
4.1	Estimation de phase . . . . .	76
4.1.1	Algorithmes pour l'estimation dynamique de phase . . . . .	76
4.1.1.1	EKF . . . . .	76

4.1.1.2	Méthodes particulières et déterministes . . . . .	76
4.1.2	Discussion . . . . .	77
4.1.2.1	Estimation avec les points de référence au pas $T_c$ . . . . .	77
4.1.2.2	Estimation avec les points intermédiaires $T_c$ -espacés . . . . .	79
4.1.2.3	Comparaison entre l'EKF et d'autres méthodes Bayésiennes . . . . .	82
4.1.2.4	Analyse dans des conditions réelles . . . . .	84
4.2	Estimation conjointe de phase et d'offset de fréquence . . . . .	85
4.2.1	Discussion . . . . .	86
4.2.1.1	Estimation avec les points de référence au pas $T_c$ . . . . .	86
4.2.1.2	Estimation avec les points intermédiaires $T_c$ -espacés . . . . .	87
4.3	Estimation de retard . . . . .	89
4.3.1	Introduction . . . . .	90
4.3.2	Maximum de vraisemblance . . . . .	90
4.3.3	Maximum a Posteriori . . . . .	90
4.3.4	Méthode itérative pour l'estimation de délai . . . . .	91
4.3.5	Discussion . . . . .	93
4.4	Estimation de phase et bruits non-Gaussiens . . . . .	95
4.4.1	Bruit d'état non-Gaussien . . . . .	95
4.4.2	Discussion . . . . .	95
4.5	Conclusion . . . . .	97
<b>Commentaires sur les travaux annexes</b>		<b>99</b>
<b>Conclusion générale et perspectives</b>		<b>101</b>
<b>Annexes</b>		<b>107</b>
<b>A Dérivation des équations du filtre de Kalman</b>		<b>107</b>
<b>B Filtre Bayésien sous l'hypothèse Gaussienne</b>		<b>111</b>
<b>C Méthodes déterministes : calculs détaillés</b>		<b>115</b>
C.1	Différentes approches et calcul des échantillons déterministes . . . . .	115
C.1.1	Approche <i>Unscented</i> . . . . .	115
C.1.2	Approche différences finies . . . . .	117
C.1.3	Approche quadrature de Gauss-Hermite . . . . .	119
C.1.4	Approche cubature . . . . .	122
C.2	Approximation du filtre Bayésien . . . . .	124
C.2.1	Central Difference Kalman Filter . . . . .	124
<b>D Algorithmes déterministes</b>		<b>127</b>
<b>E Preuve du Théorème 2.2 (Borne de Cramér-Rao)</b>		<b>131</b>
<b>F Preuve du Théorème 2.3 (Borne de Cramér-Rao Bayésienne)</b>		<b>133</b>

<b>G</b>	<b>An EM algorithm for path delay and complex gain estimation of a slowly varying fading channel for CPM signals</b>	<b>135</b>
G.1	Introduction . . . . .	135
G.2	Problem statement and estimation objectives . . . . .	136
G.3	The EM algorithm . . . . .	138
G.4	Hybrid Cramér Rao bound . . . . .	139
G.5	Simulation results . . . . .	140
G.6	Conclusion . . . . .	142
G.7	Appendix : Proof of rel. (13) . . . . .	143
<b>H</b>	<b>Bayesian nonlinear filtering using quadrature and cubature rules applied to sensor data fusion for positioning</b>	<b>145</b>
H.1	Motion models . . . . .	145
H.2	Measurement model . . . . .	146
H.3	Computer simulations . . . . .	147
H.4	Conclusions . . . . .	149
<b>I</b>	<b>Nonlinear filtering for ultra-tight GNSS/INS integration</b>	<b>151</b>
I.1	Introduction . . . . .	151
I.2	System model . . . . .	152
I.2.1	GNSS model . . . . .	152
I.2.2	INS model . . . . .	153
I.2.3	GNSS/INS coupling . . . . .	154
I.3	Computer Simulations . . . . .	156
I.4	Conclusions . . . . .	156

# Table des figures

1.1	Méthode de triangulation pour déterminer la position du récepteur (Copyright www.sxbluegps.com) . . . . .	6
1.2	Structure d'un récepteur GNSS . . . . .	7
1.3	Constellation des satellites Galileo (Copyright ESA) . . . . .	8
1.4	Fonctions d'autocorrélation BPSK, BOC(1,1), BOC(10,5) et BOC(15,2.5) . . . . .	12
1.5	Spectres des fonctions BPSK, BOC(1,1), BOC(10,5) et BOC(15,2.5) . . . . .	13
2.1	Modèle de Markov Caché . . . . .	22
2.2	Schéma général des méthodes d'estimation Bayésienne . . . . .	24
2.3	Schéma général de l'articulation des méthodes déterministes . . . . .	34
3.1	Séquence chip émise et signal reçu avec un canal idéal. On peut distinguer les échantillons pour $S = 1, 2$ et $4$ . . . . .	60
3.2	Mise en forme BOC, $p(t)$ et sa fonction d'autocorrélation $g(t)$ . . . . .	70
3.3	$HCRB_\theta$ en fonction du SNR pour trois facteurs de suréchantillonnage $S = 1, 2$ et $4$ , et deux valeurs pour la variance du bruit d'observation, $\sigma_w^2 = 0.001 \text{ rad}^2$ et $\sigma_w^2 = 0.1 \text{ rad}^2$ . . . . .	71
3.4	$HCRB_\theta$ en fonction de la variance du bruit de phase, pour trois facteurs de suréchantillonnage, $S = 1, 2$ et $4$ , $\text{SNR} = 0 \text{ dB}$ . . . . .	71
3.5	$HCRB_\theta$ en fonction du SNR, pour trois facteurs de suréchantillonnage différents, $S = 1, 2$ et $4$ . On considère une variance du bruit de phase $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ et une erreur d'estimation du délai $\tau_o = \frac{T_c}{8}$ . . . . .	72
3.6	$HCRB_\delta$ en fonction du SNR, pour trois facteurs de suréchantillonnage, $S = 1, 2$ et $4$ . On considère une variance du bruit de phase $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ . . . . .	72
3.7	$HCRB_\theta$ en fonction du SNR pour trois facteur de suréchantillonnage $S = 1, 2$ et $4$ , et une variance du bruit de phase $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ . . . . .	73
4.1	Estimation de phase avec $S = 2$ , $\sigma_w^2 = 0.001$ , $\sigma_n^2 = 0.1$ . . . . .	78
4.2	MSE pour l'EKF et BCRB en fonction du SNR pour trois facteurs de suréchantillonnage $S = 1, 2$ et $4$ , avec une variance du bruit de phase $\sigma_w^2 = 0.001 \text{ rad}^2$ (évolution lente) et $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ (évolution rapide). . . . .	79
4.3	MSE pour l'EKF et BCRB en fonction de la variance du bruit de phase pour trois facteurs de suréchantillonnage $S = 1, 2$ and $4$ , $\text{SNR} = 0 \text{ dB}$ . . . . .	80
4.4	MSE pour l'EKF et BCRB en fonction du SNR, en présence d'une mauvaise synchronisation (connue) du délai, pour deux facteurs de suréchantillonnage $S = 1$ and $2$ . . . . .	80
4.5	MSE pour l'EKF et BCRB en fonction de $\tau_o$ pour $\text{SNR}=0 \text{ dB}$ et $\sigma_w^2 = 0.001$ . . . . .	81

4.6	MSE pour l'EKF et BCRB en fonction du SNR pour les points intermédiaires, trois facteurs de suréchantillonnage $S = 1, 2$ et $4$ , et une variance du bruit de phase $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ . . . . .	82
4.7	EKF, PF et BCRB en fonction du SNR pour deux facteurs de suréchantillonnage $S = 1, 2$ , avec une variance du bruit de phase $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ . . . . .	83
4.8	EKF, SQKF, SCKF et BCRB en fonction du SNR pour deux facteurs de suréchantillonnage $S = 1, 2$ , avec une variance du bruit de phase $\sigma_w^2 = 0.001 \text{ rad}^2$ . . . . .	83
4.9	EKF MSE pour deux fonctions BOC et BCRB, versus le SNR pour deux facteurs de suréchantillonnage $S = 1, 2$ , avec une variance du bruit de phase $\sigma_w^2 = 0.001 \text{ rad}^2$ . $W = 4/T_c$ . . . . .	84
4.10	EKF MSE pour une fonction de mise en forme BOC à bande limitée ( $W = 1/T_c, 2/T_c$ et $4/T_c$ ) versus le SNR, pour deux facteurs de suréchantillonnage $S = 1, 2$ , avec une variance du bruit de phase $\sigma_w^2 = 0.001 \text{ rad}^2$ . . . . .	85
4.11	Estimation de phase avec $S = 2$ , $\sigma_w^2 = 0.1$ , $\sigma_n^2 = 0.1$ , $\delta = 0.002$ . . . . .	86
4.12	MSE de l'EKF et HCRB en fonction du SNR pour trois facteurs de suréchantillonnage, $S = 1, 2$ et $4$ , avec une variance du bruit de phase $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ . . . . .	87
4.13	MSE pour l'EKF et HCRB, pour l'estimation de phase, en fonction de la variance du bruit de phase, pour $S = 1, 2$ et $4$ , et $SNR = 0 \text{ dB}$ . . . . .	88
4.14	$MSE_{\text{EKF}}(S, 0)$ et $HCRB_\delta$ , pour l'estimation de la dérive, en fonction du SNR, pour $S = 1, 2$ et $4$ . On considère une variance $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ . . . . .	88
4.15	EKF et HCRB versus le SNR pour les points intermédiaires, $S = 1, 2$ et $4$ , et la variance de bruit de phase est $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ . . . . .	89
4.16	Schéma bloc de l'algorithme d'estimation du délai. . . . .	93
4.17	Valeurs de la fonction à optimiser. On considère $\sigma_w^2 = 0.1$ , $SNR = 0 \text{ dB}$ , $\tau = T_c/8$ et $\tau_{init} = 3T_c/8$ . . . . .	94
4.18	Convergence de l'algorithme pour trois réalisations avec des valeurs de la vitesse d'évolution de la phase différentes : $\sigma_w^2 = 0.001$ , $\sigma_w^2 = 0.01$ et $\sigma_w^2 = 0.1$ . On considère $SNR = 0 \text{ dB}$ , $\tau = T_c/8$ et $\tau_{init} = 3T_c/8$ . . . . .	94
4.19	Évolution du bruit de phase (haut) et de la phase (bas), dans le cas où l'on considère un bruit Gaussien plus un bruit impulsionnel. . . . .	96
4.20	Vraie évolution de phase, estimation avec un filtre EKF de variance modifiée, et avec un filtre EKF standard qui considère seulement le bruit Gaussien. . . . .	97
4.21	Performance de l'EKF et du PF pour l'estimation de phase avec un bruit d'état non-Gaussien. On considère $\sigma_{asy}^2 = 0.001$ et $\tau_o = 0$ . . . . .	98
G.1	An EM trajectory for two values of $f_d T$ with $SNR = 30 \text{ dB}$ . . . . .	141
G.2	Normalized MHCRB( $\tau$ )/ $T^2$ , and estimated MSE $E(\hat{\tau} - \tau)^2/T^2$ given by the EM algorithm (ten iterations) and by the correlation method for $f_d T = 0.000738$ , versus SNR. . . . .	141
G.3	Normalized MHCRB( $\alpha$ ), and estimated normalized MSE $\frac{1}{N} E(\ \hat{\alpha} - \alpha\ ^2)$ given by the EM algorithm (ten iterations) for $f_d T = 0.000738$ , versus SNR. . . . .	142
G.4	The normalized MSE $E(\hat{\tau} - \tau)^2/T^2$ given by the EM algorithm (ten iterations) and by the correlation method for $SNR = 30 \text{ dB}$ , versus $f_d T$ . . . . .	143
H.1	Example of a true trajectory, and the estimate for a SQKF, a SCKF, and a PF using 12 and 729 particles . . . . .	148
H.2	RMSE for the estimation of the position, for the SQKF, the SCKF and the PF using 729 and 12 particles . . . . .	148

I.1 RMSE of pseudorange estimates, CRB and Bayesian CRB over time. . . . . 157



# Liste de Notations

$x$	Valeur scalaire $x$ (lettre minuscule)
$\mathbf{x}$	Vecteur $\mathbf{x}$ (lettre minuscule en gras)
$\mathbf{X}$	Matrice $\mathbf{X}$ (lettre majuscule en gras)
$[\mathbf{x}]_k$	$k$ -ème élément du vecteur $\mathbf{x}$
$[\mathbf{X}]_{k,m}$	Ligne $k$ et colonne $m$ de la matrice $\mathbf{X}$
$[\mathbf{X}]_m$	Colonne $m$ de la matrice $\mathbf{X}$
$\mathbf{x}_k$	Valeur du vecteur $\mathbf{x}$ à l'instant discret $k$
$\mathbf{x}_{k:k+l}$	Concatenation des vecteurs $\mathbf{x}_k$ à $\mathbf{x}_{k+l}$ sous la forme $[\mathbf{x}_k^T, \dots, \mathbf{x}_{k+l}^T]^T$
$(\cdot)^*$	Opérateur de conjugaison
$(\cdot)^T$	Opérateur de transposition
$(\cdot)^H$	Opérateur de transposition-conjugaison
$\text{diag}\{\mathbf{x}\}$	Matrice diagonale avec $\mathbf{x}$ sur sa diagonale principale
$\nabla_{\mathbf{x}} = [\frac{\partial}{\partial[\mathbf{x}]_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial[\mathbf{x}]_N}]^T$	Opérateur différentiel d'ordre 1
$\Delta_{\mathbf{y}}^{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{y}} \nabla_{\mathbf{x}}^T$	Opérateur différentiel d'ordre 2
$\mathbf{I}_N$	Matrice identité $N \times N$
$\mathbf{0}_N$	Matrice $N \times N$ de zéros
$\Re(\cdot)$	Partie réelle
$\Im(\cdot)$	Partie imaginaire



---

$\text{Tr}(\mathbf{X})$	Trace de la matrice $\mathbf{X}$
$a(t) * b(t)$	Convolution entre $a(t)$ et $b(t)$
$\mathbb{E}_{x,y}[\cdot]$	Espérance sur $x$ et $y$
$\boldsymbol{\mu}$	Vecteur de paramètres à estimer
$\boldsymbol{\theta}$	Vecteur de phase
$\delta$	Offset de fréquence
$r(t)$	Signal reçu à l'antenne du récepteur en bande de base
$y(t)$	Signal reçu après filtrage adapté à la mise en forme chip en bande de base
$t_k$	Instants d'échantillonnage
$y_k$	Signal discret à l'instant $k$ , $y_k = y(t_k)$
$N$	Taille du vecteur d'observations
$\mathbf{y}$	Vecteur d'observations, $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_N]^T$
$p(t)$	Fonction de mise en forme chip
$g(t)$	Fonction d'autocorrélation de la mise en forme $p(t)$ , $g(t) = p(t) * p^*(-t)$
$T_c$	Période chip
$T$	Période des données émises
$s_T(t)$	Signal émis par le satellite en bande de base
$a_m$ for $m = 1 : L_a$	Séquence chip d'étalement
$L_a$	Longueur du code
$d_n$ for $n = 1 : N_d$	Séquence de données
$N_d$	Nombre de symboles émis
$N_c$	Nombre de codes par bit de données
$A_k$	Séquence équivalente chip, après filtrage adapté, et suréchantillonnage

---

$n(t)$	Bruit blanc Gaussien additif introduit par le canal
$N_0$	Densité Spectrale de Puissance bilatérale du bruit de canal
$b(t)$	Bruit d'observation après filtrage adapté, $b(t) = n(t) * p^*(-t)$
$b_k$	Bruit d'observation discret, $b_k = b(t_k)$
$\mathbf{\Gamma}$	Matrice de covariance du bruit d'observation $N \times N$
$S$	Facteur de suréchantillonnage
$v(t)$	Bruit d'état
$h(t)$	Réponse impulsionnelle du canal en bande de base
$\delta(t)$	Fonction delta de Dirac
$\delta_{k,m}$	Symbole de Kronecker, $\delta_{k,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
$\tau(t)$	Délai introduit par le canal
$\tau_o$	Décalage par rapport aux instants d'échantillonnage optimaux
$\theta(t)$	Phase introuite par le canal
$\rho(t)$	Gain du canal
$f_d$	Fréquence Doppler
$c$	Célérité de l'onde radio-électrique
$f_c$	Fréquence porteuse
$\sigma_n^2$	Variance du bruit du canal
$p_S$	Indice symbole
$s$	Position de l'échantillon dans l'intervalle symbole
$\Pi_j$	Coefficients du filtrage du bruit d'observation
$\mathbf{M}_K$	Matrice d'évolution de l'état pour la synchronisation fractionné
$M$	Indice du symbol courant
$\mathcal{N}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$	Densité de probabilité Gaussienne, de moyenne $\boldsymbol{\mu}$ et matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$



# Liste de Sigles

ABCRB	Asymptotic Bayesian Cramér-Rao Bound
AWGN	Additif White Gaussian Noise (cf. BBAG)
BAB	Bayesian Abel Bound
BER	Bit Error Rate (cf. TEB)
BBAG	Bruit Blanc Additif Gaussien (cf. AWGN)
BBHB	Bayesian BHattacharyya Bound
BCR	Borne de Cramér-Rao (cf. CRB)
BCRB	Borne de Cramér-Rao Bayésienne / Bayesian Cramé-Rao Bound
BCRBM	Borne de Cramér-Rao Bayésienne Modifié (cf. MBCRB)
BCRH	Borne de Cramér-Rao Hybride (cf. HCRB)
BCRS	Borne de Cramér-Rao Standard (cf. SCRБ)
BIM	Bayesian Information Matrix (cf. MIB)
BOC	Binary Offset Carrier
BPSK	Binary Phase Shift Keying
BZB	Bobrovsky-Zakai Bound
CA	Code Aided
CDKF	Central Difference Kalman Filter

---

CDMA	Code Division Multiple Access
CKF	Cubature Kalman Filter
CPM	Constant Phase Modulation
CRB	Cramér-Rao Bound (cf. BCR)
DA	Data Aided
DLL	Delay Locked Loop (Boucle à verrouillage de délai)
DS-SS	Direct Sequence Spread Spectrum
EKF	Extended Kalman Filter (Filtre de Kalman étendu)
EM	Expectation Maximization
EMV	Estimateur du Maximum de Vraisemblance (cf. MLE)
EQM	Erreur Quadratique Moyenne (cf. MSE)
EQMM	Erreur Quadratique Moyenne Minimale (cf. MMSE)
ESA	European Space Agency
FDMA	Frequency Division Multiple Acces
FFT	Fast Fourier Transform
FIM	Fisher Information Matrix (cf. MIF)
FLL	Frequency Locked Loop (Boucle à verrouillage de fréquence)
GHF	Gauss-Hermite Filter
GIOVE	Galileo In-Orbit Validation Element
GLONASS	GLObalnaya Navigasionnay Sputnikovaya Sistema
GNSS	Global Navigation Satellite Systems
GPS	Global Positioning System
GSF	Gaussian Sum Filter

---

HCRB	Hybrid Cramér-Rao Bound (cf. BCRH)
HIM	Hybrid Information Matrix
HMM	Hidden Markov Model
I	Voie en phase
IMU	Inertial Measurement Unit
INS	Inertial Navigation System
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineer
KF	Kalman Filter (Filtre de Kalman)
LOSS	Line Of Sight Signal
MAP	Maximum A Posteriori
MBCRB	Modified Bayesian Cramér-Rao Bound (cf. BCRBM)
MCRB	Modified Cramér-Rao Bound (cf. BCRM)
MFIM	Modified Fisher Information Matrix
MIB	Matrice d'Information Bayésienne (cf. BIM)
MIF	Matrice d'Information de Fisher (cf. FIM)
MIMO	Multiple Input Multiple Output
ML	Maximum likelihood (cf. MV)
MLE	Maximum Likelihood Estimator (cf. EMV)
MLS	Maximum Length Sequence (cf. SBLM)
MMSE	Minimum Mean Square Error (cf. EQMM)
MSE	Mean Square Error (cf. EQM)
MV	Maximum de Vraisemblance (cf. ML)

---

NDA	Non Data Aided
NLOS	No Line Of Sight
OFDM	Orthogonal Frequency Division Multiplexing
PF	Particle Filter ( Filtrage particulaire )
PLL	Phase Locked Loop ( Boucle à verrouillage de phase )
PRN	Pseudo Random Noise
Q	Voie en quadrature
QAM	Quadrature Amplitude Modulation
QKF	Quadrature Kalman Filter
RSB	Rapport Signal sur Bruit (cf. SNR)
SBLM	Séquence Binaire à Longueur Minimale (cf. MLS)
SCRB	Standard Cramér-Rao Bound (cf. BCRS)
SLR	Statistical Linear Regression
SNR	Signal to Noise Ratio (cf. RSB)
SPF	Sigma-Point Filter
<i>Sfilter</i>	Square-Root ( <i>e.g.</i> SUKF)
UKF	Unscented Kalman Filter
UT	Unscented Transformation
WWB	Weiss-Weinstein Bound
ZZB	Ziv-Zakai Bound

# Introduction

LE titre de ce document nous indique subtilement tous les ingrédients de la recette élaborée pendant mes travaux de thèse : estimation, dynamique, non-linéaire, canaux de transmission et récepteurs satellites mobiles. On peut voir le problème sous deux optiques différentes : théorique et applicative.

Si l'on cherche le côté théorique, le problème principal que l'on aborde, est l'étude des techniques d'estimation et plus précisément, d'estimation dynamique non-linéaire. C'est-à-dire, on cherche à estimer des processus, des variables ou des paramètres, dynamiques (aléatoires), qui agissent sur notre système d'une façon non-linéaire. Sans oublier le côté Bayésien de l'affaire, car on a une information *a priori* que l'on veut exploiter. Un des objectifs de cette thèse est de faire une étude approfondie des méthodes Bayésiennes de filtrage non-linéaire. Ces dernières années, les méthodes qui ont connu le plus de succès sont les méthodes de Monte Carlo séquentielles, dites aussi, méthodes particulières. Ces méthodes, sont adaptées à des problèmes non-linéaires et/ou non-Gaussiens. En général, ce sont des méthodes avec des calculs très lourds, et même pour les nouveaux récepteurs, ces techniques ne sont pas adaptées pour des applications temps réel. Parallèlement aux méthodes particulières, une autre famille a été développée, la famille des méthodes déterministes (dites Sigma-Point), basée sur l'hypothèse de Gaussiannité des densités de probabilité qui interviennent dans la solution optimale. Ces méthodes, basées sur un échantillonnage déterministe, sont plus simples à régler et ont une faible charge de calcul. Par rapport aux méthodes particulières, les méthodes déterministes ont été un peu délaissées dans la littérature, mais de notre côté on a concentré une partie de nos efforts à l'étude de ces techniques et l'on a proposé une nouvelle vue d'ensemble. Ces techniques sont tout à fait appropriées pour résoudre les problèmes de synchronisation, car l'hypothèse Gaussienne est, en général, vérifiée.

Quand on parle d'estimation de canaux de transmission, on fait référence à l'estimation de tous les paramètres inconnus d'un canal, qui sont nécessaires pour récupérer l'information utile cachée dans le signal reçu. L'estimation des canaux de transmission est le côté applicatif des travaux menés dans l'étude présentée. Dans certains cas, on appelle l'étape d'estimation de canal, *synchronisation*, car on synchronise l'émetteur et le récepteur.

L'étape d'estimation de canal ou de synchronisation, est présente dans tous les systèmes de communication, ainsi il faut affiner un peu plus la description du problème, et c'est ici que l'on introduit les récepteurs satellites mobiles, qui définissent l'application finale des techniques étudiées. Les systèmes de communication par satellite, sont aujourd'hui en plein développement. Le GPS est le seul système de positionnement par satellite complètement opérationnel, mais dans peu de temps, nous aurons à notre disposition le nouveau système Galileo, conçu directement pour des applications civiles, avec tout ce que cela implique. Le système Galileo et le nouveau GPS modifié, utiliseront une nouvelle modulation appelée BOC, plus performante, et les technologies modernes permettront d'implémenter dans les récepteurs, des algorithmes beaucoup plus sophistiqués et calculatoirement plus lourds que les méthodes conventionnelles.

Dans les récepteurs satellitaires, la synchronisation consiste à estimer, à partir du signal



reçu, le délai de propagation entre chaque satellite visible, et le récepteur. À partir de ce temps de propagation, on peut calculer des distances, et à partir de celles-ci, calculer la position du récepteur. Pour estimer ces délais il faut aussi estimer d'autres paramètres parasites, introduits par le canal et les mouvements relatifs entre les satellites et le récepteur, comme les décalages de phase et de fréquence. Si ce que l'on cherche sont des données transmises, on a besoin aussi des paramètres de synchronisation pour les récupérer correctement.

Un point important, quand on étudie un estimateur, est d'avoir une référence, pour placer les performances obtenues par rapport aux limites théoriques. Il existe beaucoup des bornes inférieures, mais dans les systèmes de communication, les plus utilisées, sont les bornes de Cramér-Rao. Dans notre étude, on a consacré une bonne partie de l'effort à calculer les bornes de Cramér-Rao associées à nos problèmes d'estimation. Celles-ci sont utilisées comme un outil de comparaison.

En résumé, cette thèse étudie des techniques d'estimation non-linéaire et la mise au point de méthodes performantes de synchronisation, pour des systèmes de communication par satellite.

Dans le prochain chapitre, on présente d'abord le plan de cette thèse, puis on introduit les systèmes de communication par satellite et le problème de synchronisation.

# Chapitre 1

## Communications par satellite et synchronisation

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Plan du document</b>	<b>4</b>
<b>1.2</b>	<b>Background</b>	<b>5</b>
1.2.1	GNSS : synchronisation et localisation	5
1.2.2	GPS, GLONASS et Galileo	7
1.2.3	Modélisation	8
1.2.3.1	Le signal	9
1.2.3.2	Les paramètres	10
1.2.3.3	Communications à faible SNR	11
1.2.4	Modulation BOC	11
<b>1.3</b>	<b>Synchronisation en GNSS</b>	<b>13</b>
1.3.1	Principes	13
1.3.2	État de l'art	14
<b>1.4</b>	<b>Contributions et publications</b>	<b>17</b>
1.4.1	Principales contributions	17
1.4.2	Liste de publications	18

---

LES systèmes de communication par satellite sont aujourd’hui en plein essor. Le nouveau système de positionnement par satellite européen, Galileo, sera bientôt opérationnel, avec tout ce que cela suppose dans le domaine satellite. Les applications qui utilisent les systèmes de navigation par satellite (dites GNSS pour Global Navigation Satellite Systems) sont de plus en plus courantes. On a cru intéressant, avant de présenter les méthodes étudiées et les résultats obtenus dans cette thèse, de faire une présentation de la problématique.

Ce chapitre, propose une vue d’ensemble des systèmes GNSS, du problème de synchronisation et des concepts de base pour comprendre la suite du document. D’abord, on donne le plan du document, puis la section 1.2 présente les principes des systèmes GNSS. Dans la section 1.3, on présente les principes de la synchronisation, et l’on donne un état de l’art des méthodes et bornes Bayésiennes, appliquées à ce contexte. Avec cela, on fait le point sur ce qui avait déjà été fait, et les problèmes qui restaient à traiter, en faisant le lien avec les problématiques abordées ici, et les problèmes que l’on a résolu dans cette thèse. Enfin, on liste les principales contributions et publications.

## 1.1 Plan du document

Le présent mémoire contient quatre chapitres principaux et les annexes, où l’on présente les notions et théories de base pour comprendre le reste du document, et les nouveaux résultats obtenus pendant cette thèse. Les notations et acronymes utilisés dans ce mémoire, peuvent être consultés au début du document.

Le **Chapitre 1**, introduit la problématique et les notions de base pour comprendre le reste du document. Ce chapitre présente les bases des systèmes GNSS, ainsi qu’une modélisation générale des communications par satellite. Les systèmes GNSS les plus courants sont le GPS et le Galileo ; leurs caractéristiques et les particularités des communications par satellite, sont présentées. Pour finir ce chapitre, les principes de la synchronisation et un état de l’art des méthodes et bornes Bayésiennes dans ce contexte, sont présentées. Enfin, on présente la motivation de la thèse, les principales contributions et l’on donne une liste de publications.

Le **Chapitre 2**, présente les principes de l’estimation Bayésienne optimale et propose une nouvelle vue d’ensemble des méthodes déterministes. D’abord, on établit la solution optimale au problème et l’on donne un état de l’art des techniques existantes. Ensuite, on introduit le filtre de Kalman comme une solution analytique au problème pour des systèmes linéaires et Gaussiens. Dans le cas général des systèmes non-linéaires, on présente le filtre de Kalman étendu et les méthodes particulières. Suite au récent développement des méthodes déterministes (QKF et CKF) et le manque de synthèse à jour dans la littérature, on donne une synthèse complète des méthodes déterministes existantes et l’on propose une nouvelle vue d’ensemble. Enfin, on présente les bornes Bayésiennes, on donne un état de l’art des bornes existantes et la théorie des bornes de Cramér-Rao.

Les **Chapitres 3 et 4**, étudient en profondeur le problème de la synchronisation fractionnée. D’abord, dans le Chapitre 3, un modèle est dérivé, en introduisant le bruit d’observation coloré dans le modèle d’état. Ensuite, le chapitre présente les bornes de Cramér-Rao, Bayésienne et hybride, pour le problème d’estimation de phase, et l’estimation conjointe de phase et de décalage ou “offset” de fréquence, respectivement. Dans le Chapitre 4, les méthodes de filtrage non-linéaire sont utilisées dans les problèmes d’estimation de phase, et d’estimation conjointe de phase et d’offset de fréquence. On étudie aussi le problème d’estimation de délai. À la fin du chapitre, le cas de l’estimation avec des bruits non-Gaussiens est présenté.

Dans le chapitre **Commentaires sur les travaux annexes**, on introduit les travaux présentés en annexe (voir plus loin).

Finalement, on donne les **Conclusions et perspectives**.

Dans les **Annexes**, en plus des démonstrations, les calculs détaillés et les algorithmes déterministes, on présente des travaux que l'on a réalisés pendant la thèse mais qui concernent des cadres d'étude un peu à l'écart de ce que l'on présente dans le corps du manuscrit :

- On présente l'estimation du délai et des gains complexes d'un canal de Rayleigh à variation lente pour des signaux qui utilisent une modulation à phase continue (CPM), basée sur un algorithme EM et une méthode de Kalman (annexe G).
- On présente l'utilisation des méthodes déterministes (quadrature et cubature) pour la localisation d'une cible en utilisant un réseau de capteurs. On propose un système qui utilise deux types différents de capteurs pour réaliser l'estimation. On compare les résultats à une méthode particulière et on montre que les performances avec les méthodes déterministes sont meilleures (annexe H).
- On présente le couplage des données satellitaires et inertielles ultra-précis pour la localisation. On propose de nouveau formalisme pour la relation entre l'évolution des paramètres de synchronisation et les mesures inertielles, et l'on utilise une méthode déterministe (méthode de cubature racine-carrée) pour l'estimation de ces paramètres (annexe I).

## 1.2 Background

Dans cette section, on présente le fonctionnement des systèmes de communication par satellite, et plus particulièrement, des systèmes GNSS. À partir de cette description on argumente la nécessité d'une étape de synchronisation dans tout récepteur satellite. Ensuite, on présente le modèle de signal général concernant ces systèmes et leurs modélisations possibles. Enfin, on présente brièvement les systèmes GNSS les plus connus et la nouvelle modulation BOC, utilisée dans les systèmes Galileo.

### 1.2.1 GNSS : synchronisation et localisation

Les systèmes de communication par satellite ont connu un énorme développement ces dernières années et les recherches menées sur ce sujet sont en plein essor. Jusqu'à présent, on n'utilise que des solutions simples et pas toujours très performantes, pour résoudre des situations critiques. L'application de techniques plus sophistiquées aux problèmes classiques, pour améliorer les performances du récepteur, pour résoudre des problèmes plus complexes, ou pour remplacer les architectures actuelles, est d'actualité.

Le terme GNSS fait référence aux systèmes de localisation basés sur les communications satellite-terminal. Les systèmes GNSS commerciaux les plus connus sont le GPS, qui opère depuis plusieurs années, et le nouveau système Galileo, en plein développement et mis au point, pour sa mise en service dans les années qui viennent. Les systèmes GNSS reposent tous sur le même principe de fonctionnement, une constellation de satellites autour de la Terre, qui émettent leur position précise dans l'espace vers toutes les zones visibles. Le principe est le calcul de la position à partir des distances entre le récepteur et plusieurs satellites visibles, en utilisant un algorithme de triangulation. Cet algorithme combine les mesures de distance avec les informations de position de chacun des satellites, diffusées dans leurs signaux. Intuitivement, on peut penser que l'on peut déterminer la position si l'on connaît la distance entre le récepteur et trois satellites (fig. 1.1). Cependant, le récepteur n'a pas l'heure exacte et donc, le calcul de la position comporte une quatrième inconnue de temps, qui ne peut être résolue que par la donnée d'un quatrième satellite. Alors pour déterminer la position du récepteur on a besoin, au moins, de quatre satellites visibles. En pratique, le récepteur utilise plus de 4 satellites, car

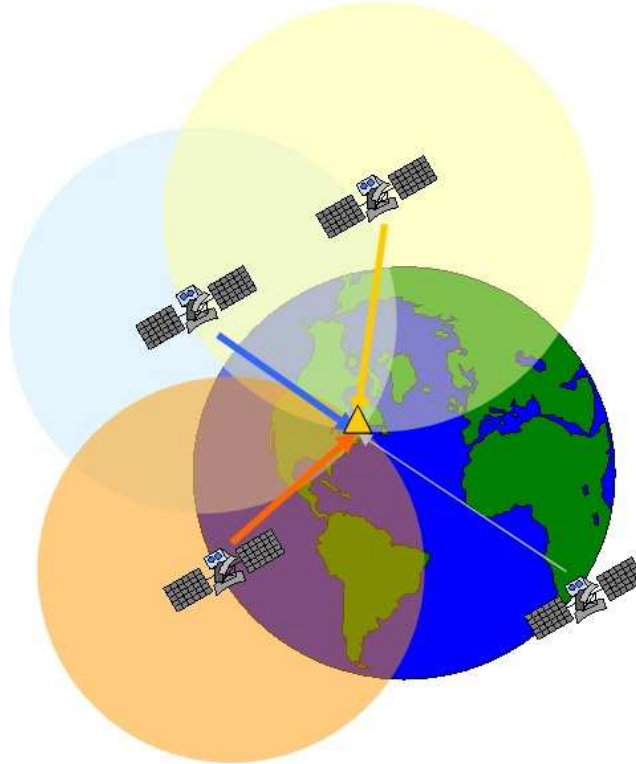


FIG. 1.1 – Méthode de triangulation pour déterminer la position du récepteur (Copyright www.sxbluegps.com)

le problème réel comporte en plus de ces 4 inconnues, plusieurs corrections : les distances sont estimées à partir du signal reçu, en estimant les temps de propagation entre le récepteur et les satellites (appelés dans la suite *délais*). Pour estimer ces temps, il faut estimer d'autres paramètres parasites introduits par le canal et les mouvements relatifs entre les satellites et le récepteur, comme les décalages de phase et de fréquence. L'estimation de ces paramètres ne peut pas être découplée de l'estimation du délai, car l'estimation de celui-ci sans prendre en compte la phase ou les effets Doppler, peut être très mauvaise. Ce procédé d'estimation s'appelle synchronisation, car on estime des paramètres du signal reçu qui nous permettent de synchroniser émetteur et récepteur. En communications numériques, l'estimation des décalages de phase s'appelle *récupération de porteuse* et l'estimation du délai *récupération de rythme*.

Le signal émis par le satellite est un signal modulé (haute fréquence). Le récepteur obtient les deux composantes (I & Q) du signal en bande de base en effectuant une démodulation cohérente. La fréquence et la phase de la porteuse utilisée par le récepteur, doivent être calées sur celles du signal reçu, à la déformation du canal près. Lorsque ce n'est pas le cas, et que l'on a une phase différente de celle de la porteuse, cela introduit des interférences entre la voie en phase et la voie en quadrature. Si le récepteur est mobile, on a en plus du déphasage, des décalages de fréquence, appelés décalages Doppler. Si l'on a une mauvaise estimation du rythme, on a une augmentation de l'interférence entre symboles. Dans les problèmes de communications numériques, on cherche à estimer le délai, la phase et les décalages de fréquence, pour bien estimer les symboles d'information. Par contre, dans les systèmes GNSS, l'estimation du délai est l'objectif en soi. Dans les deux cas, l'étape de synchronisation est la même. On peut conclure

que l'étape de synchronisation est nécessaire dans tous les récepteurs satellites, tant si l'on cherche à connaître la position du récepteur que si l'on veut retrouver des données utiles.

D'après ce que l'on a vu, on peut dire qu'un système GNSS est composé de deux étapes (fig. 1.2) : synchronisation et localisation.

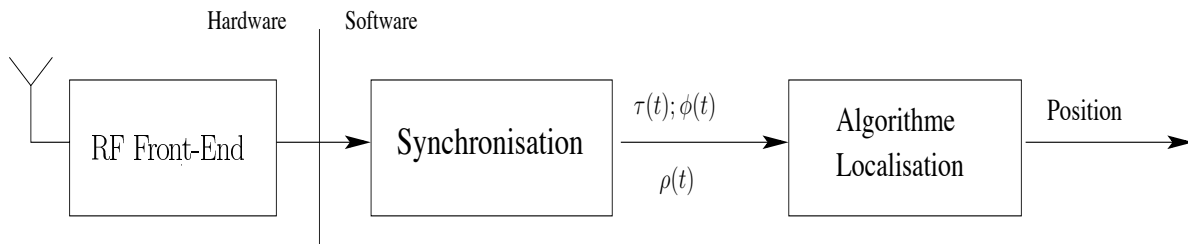


FIG. 1.2 – Structure d'un récepteur GNSS

Dans cette thèse on s'intéresse à l'étape de synchronisation, qui est le point critique du récepteur. Une meilleure estimation des paramètres de synchronisation implique une meilleure performance des algorithmes de localisation.

### 1.2.2 GPS, GLONASS et Galileo

Actuellement, il existe plusieurs systèmes GNSS : les plus connus sont le système américain GPS, le système russe GLONASS et le système européen Galileo. Dans la suite, on fait une brève introduction à ces trois systèmes GNSS.

**GPS :** Le Global Positioning System (GPS) opère depuis l'année 1993. Le GPS est le seul système GNSS complètement opérationnel. Ce système utilise 24 satellites distribués sur 6 orbites avec un rayon de 26560 km, inclinés de  $55^\circ$  par rapport à l'équateur. Le système GPS utilise trois bandes de fréquences dans la bande  $L$  du spectre : L1 centrée sur 1575.42 MHz, L2 centrée sur 1227.60 MHz et L5 centrée sur 1176.45 MHz. Il existe deux autres bandes de fréquences, L3 et L4, utilisées seulement dans des applications militaires.

Les signaux GPS existants, utilisent une modulation BPSK, associée à des codes PRN (pseudo random noise), mais dans les nouvelles améliorations, l'utilisation de la modulation BOC est envisagé [Kapl 06]. La connaissance des codes PRN (codes d'étalement) permet un multiplexage à division par code. Le signal généré par un satellite GPS particulier, peut être sélectionné en corrélant la séquence PRN pour ce satellite avec le signal reçu.

**GLONASS :** Le système russe de navigation par satellite GLONASS (GLObalnaya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema), a été créé en 1982, et sera complètement opérationnel en 2010. Ce système est composé de 24 satellites distribués uniformément sur 3 orbites, inclinées de  $64.8^\circ$  par rapport à l'équateur, et avec un rayon de 25510 km. GLONASS utilise un multiplexage en fréquence (FDMA) mais utilise encore des codes PRN. Ce système opère aussi dans la bande  $L$  du spectre, sur 3 bandes, centrées sur 1602 MHz (G1), 1246 MHz (G2) et 1204.704 MHz (G3). Les récepteurs sont similaires aux récepteurs GPS, et l'on trouve beaucoup de travaux qui essaient de combiner ce systèmes avec les autres systèmes GNSS pour améliorer les performances [Grew 07].

**Galileo :** Galileo est le nouveau système européen de navigation et de positionnement par satellite. Ce système est le premier conçu spécifiquement à des fins civiles, et deviendra une alternative au monopole que détiennent actuellement les États-Unis avec le GPS. Galileo aura une constellation de 30 satellites (fig. 1.3), répartis en trois orbites inclinées de  $56^\circ$  par rapport à l'équateur [Kapl 06]. Le programme Galileo a trois phases distinctes : définition, validation et mise en service. La première phase a été achevée en 2003, et toutes les spécifications basiques du système ont été fixées. Le premier satellite de la phase de validation a été envoyé en 2005, le GIOVE-A. Aujourd'hui il y a deux autres satellites de la phase de validation en orbite, GIOVE-B et GIOVE-A2, qui servent à tester les signaux Galileo dans l'environnement réel. L'envoi de satellites complètement opérationnels est prévue pour 2013. En juin 2009, le premier contrat entre l'Agence Spatiale Européenne (ESA) et l'entreprise Arianespace pour l'envoi des 4 premiers satellites Galileo opérationnels, a été signé.

Les signaux Galileo sont émis, comme dans le GPS et le GLONASS, dans la bande *L*. Cinq fréquences porteuses ont été définies : 1575.420 MHz (E1), 1278.75 MHz (E6), 1207.14 MHz (E5b), 1191.795 MHz (E5) et 1176.45 MHz (E5a). Galileo utilise des signaux à spectre étalé modulés en utilisant la modulation BOC. On trouve toutes les spécifications du système Galileo dans [ESA 08].

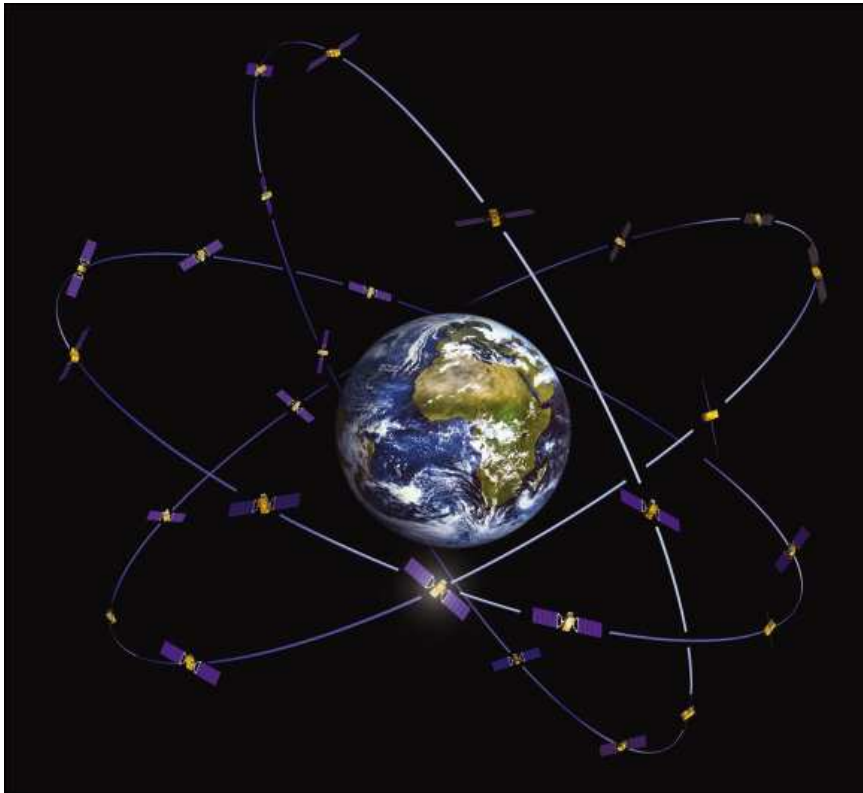


FIG. 1.3 – Constellation des satellites Galileo (Copyright ESA)

### 1.2.3 Modélisation

On présente ici le modèle de signal général pour des systèmes satellite, on modélise les différents paramètres qui interviennent dans le modèle, on montre l'influence du délai sur les

décalages de phase et de fréquence. Enfin, on argumente les conditions de transmission à faible rapport signal sur bruit dans les systèmes satellitaires.

### 1.2.3.1 Le signal

Les systèmes de communication par satellite utilisent un signal à étalement de spectre par séquence directe (DS-SS). Cette technique rend possible une transmission à accès multiple par répartition en code (CDMA). Le signal émis par chaque satellite est composé d'une composante en phase  $s_I(t)$  et d'une autre en quadrature  $s_Q(t)$ . Ces deux composantes ont la même structure, et le signal en bande de base s'écrit

$$s_T(t) = s_I(t) + is_Q(t) \quad (1.1)$$

avec la structure des voies en phase et quadrature suivante

$$s_I(t) = \sqrt{2P} \sum_{n=1}^{N_d} d_{I,n} \sum_{u=1}^{N_c} \sum_{m=1}^{L_a} a_{I,m} p(t - nT - uL_aT_c - mT_c) \quad (1.2)$$

où l'on définit :  $P$  la puissance émise,  $d_{I,n} \in \{-1, 1\}$  la séquence de données émise, avec période  $T$  et taille  $N_d$ ,  $a_{I,m} \in \{-1, 1\}$  est le code d'étalement, de longueur  $L_a$  chips et période  $T_c$ , et  $N_c$  est le nombre de codes par bit de données.  $p(t)$  est la mise en forme par chip.

Le signal émis passe à travers le canal de transmission (chemin entre l'émetteur et le récepteur) et subit des modifications dues à ce canal. Plus précisément, le canal introduit sur le signal émis un retard et un déphasage, et modifie son amplitude. Le récepteur peut recevoir plusieurs versions du signal émis due à de multiples réflexions (NLOS), en plus du signal direct (LOSS). Ce canal peut être modélisé à partir d'une réponse impulsionnelle équivalente en bande de base

$$h(t, \tau) = \sum_{m=0}^{M_s-1} \rho_m(t) e^{i\theta_m(t)} \delta(\tau - \tau_m(t)) \quad (1.3)$$

où  $M_s$  est le nombre de trajets,  $\rho_m(t)$ ,  $\theta_m(t)$  et  $\tau_m(t)$ , sont respectivement, amplitude réelle, phase et délai du  $m$ -ème trajet.

Finalement, si l'on considère le signal direct (LOSS) reçu, provenant d'un satellite, son expression en bande de base est

$$r(t) = \rho(t) e^{i\theta(t)} s_T(t - \tau(t)) + n(t) \quad (1.4)$$

avec  $n(t)$  un bruit Gaussien additif et blanc (AWGN).

Si le signal reçu au récepteur, passe à travers un filtre adapté à la mise en forme chip, en considérant que l'on a transmis seulement de l'information sur la voie I, on a

$$y(t) = \rho(t) e^{i\theta(t)} s_I(t - \tau(t)) * p^*(-t) + b(t) \quad (1.5)$$

avec  $b(t)$ , le bruit AWGN filtré,

$$y(t) = \sqrt{2P} \sum_{n=1}^{N_d} d_n \sum_{u=1}^{N_c} \sum_{m=1}^{L_a} \rho(t) a_m p(t - nT - uL_aT_c - mT_c - \tau(t)) e^{i\theta(t)} * p^*(-t) + b(t) \quad (1.6)$$

Dans la suite on fait quelques simplifications pour étudier ce signal. Le modèle que l'on présente sera le modèle que l'on traitera tout au long de cette dissertation. Si l'on ne considère



pas les données émises, on suppose que le code et la mise en forme sont normalisés, et l'on a un seul code, le signal complexe résultant est

$$y(t) = T_c \sum_{m=1}^{L_a} \rho(t) a_m p(t - mT_c - \tau(t)) e^{i\theta(t)} * p^*(-t) + b(t) \quad (1.7)$$

La tendance des récepteurs modernes est de travailler en numérique au plus proche de l'antenne. Les techniques analogiques ne sont plus d'actualité, et les algorithmes opèrent toujours sur le signal discret. On présentera en détail la modélisation discrète dans le chapitre 3.

### 1.2.3.2 Les paramètres

Une fois que l'on a le modèle de signal, il nous faut modéliser les paramètres à estimer, pour mettre au point les algorithmes d'estimation. Certains paramètres peuvent être considérés déterministes et d'autres aléatoires. Si l'on connaît les caractéristiques statistiques des paramètres de synchronisation, on peut utiliser une solution de filtrage optimal.

**Caractérisation des paramètres du canal.** On doit caractériser les paramètres suivants : les délais, les décalages de phase et de fréquence, et les amplitudes. La littérature propose différentes modélisations de ces paramètres, qui dans certains cas, pourront être vus comme des réalisations de variables aléatoires avec leur densités de probabilité associées. On peut supposer que le délai est constant par morceau [Nee 94], donc constant dans la fenêtre d'observation, mais on peut aussi trouver exactement comment varie le délai, en calculant les relations géométriques du mouvement entre le satellite et le récepteur. On peut supposer que les amplitudes sont distribuées selon une loi de Rice ou une loi de Rayleigh, selon que l'on a une vue directe ou non [Proa 00], mais on peut aussi supposer que les amplitudes sont constantes dans certains cas, sur des courtes périodes (modèles déterministes). Normalement, on considère que la phase du signal reçu est distribuée uniformément [Jake 74] ou suivant un mouvement Brownien [Ambl 03]. Souvent, les propriétés statistiques des paramètres de synchronisation peuvent être supposées constantes pendant un intervalle de temps suffisamment long, et il est standard de supposer un canal stationnaire au sens large [Jake 74].

**Effet Doppler : influence du délai dans les décalages de phase et fréquence.** L'effet Doppler, produit un décalage fréquentiel, et apparaît quand il existe un mouvement relatif entre l'émetteur et le récepteur, ou ce qui est équivalent, quand on a un canal avec un délai variant dans le temps. Si l'on considère le signal en bande portée (ou haute fréquence (HF)) émis par un satellite  $\Re \{s_T(t) e^{i2\pi f_c t}\}$ , le signal reçu réel, avec un seul trajet (LOSS) et sans bruit, peut être écrit comme

$$r_{HF}(t) = \Re \left\{ \rho(t) s_T(t - \tau(t)) e^{i2\pi f_c (t - \tau(t))} \right\} = \Re \left\{ s_B(t) e^{i2\pi f_c t} \right\} \quad (1.8)$$

où  $f_c$  est la fréquence porteuse et  $s_B(t)$  est le signal complexe reçu en bande de base

$$s_B(t) = \rho(t) s_T(t - \tau(t)) e^{-i2\pi f_c \tau(t)} \quad (1.9)$$

Si l'on prend le développement de Taylor au premier ordre du délai, autour de l'instant

arbitraire  $t_0$

$$\begin{aligned}\tau(t) &\approx \tau(t_0) + \left. \frac{\partial \tau(t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} (t - t_0) \\ &= \tau(t_0) + \left. \frac{\partial \tau(t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} t - \left. \frac{\partial \tau(t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} t_0\end{aligned}\tag{1.10}$$

on a

$$\begin{aligned}e^{-i2\pi f_c \tau(t)} &\approx e^{-i2\pi f_c \left. \frac{\partial \tau(t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} t - i2\pi f_c \left( \tau(t_0) - \left. \frac{\partial \tau(t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} t_0 \right)} \\ &= e^{i2\pi f_d t + \psi}\end{aligned}\tag{1.11}$$

où

$$\begin{aligned}f_d &= -f_c \left. \frac{\partial \tau(t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} \\ \psi &= -i2\pi f_c \left( \tau(t_0) - \left. \frac{\partial \tau(t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} t_0 \right)\end{aligned}\tag{1.12}$$

sont le décalage Doppler et la variation de phase constante à cause du délai variant uniformément dans le temps. Ce décalage de phase constant se rajoutera aux décalages de phase  $\theta(t)$ , dues à d'autres phénomènes. Le décalage Doppler maximal dépend de la vitesse radiale entre le satellite et le récepteur, et de la fréquence porteuse. Dans les applications de localisation par satellite, le décalage Doppler maximal est de  $\pm 12$  kHz [Clos 09a].

### 1.2.3.3 Communications à faible SNR

Les communications par satellite ont des canaux de transmission avec des conditions difficiles et la puissance émise par le satellite est bornée par des raisons technologiques. Normalement, on travaille à de très bas SNR, en reportant les difficultés au niveau du récepteur. Il y a plusieurs causes qui font que la réception du signal est difficile : le bruit introduit par le canal et celui introduit par le "front-end" radiofréquence, les pertes de propagation entre le satellite et le récepteur et l'atténuation atmosphérique. Dans [Fern 05], on trouve un calcul détaillée du rapport signal sur bruit, qui est pour les systèmes GNSS, dans le pire des cas d'environ  $SNR = -20$  dB (le signal est alors satellite est complètement caché dans le bruit).

### 1.2.4 Modulation BOC

La modulation BOC, pour Binary Offset Carrier, est la nouvelle modulation qui est utilisée par le système Galileo. Un signal modulé BOC est formé d'un code, de période  $T_c$  à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ , modulé par un signal carré de fréquence  $f_s \geq \frac{1}{T_c}$ . En général, on a un signal du type :

$$x_{BOC}(t) = x(t) \text{sign}(\sin(2\pi f_s t))\tag{1.13}$$

où  $x(t)$  est le code, et le  $\text{sign}(\sin(\cdot))$  est le signal carré qui module le code. La modulation par un signal carré, à l'effet de couper le lobe principal du spectre du code, en deux lobes centrés à  $\pm f_s$  de la fréquence centrale. L'objectif est d'obtenir un spectre qui interfère le moins possible avec le spectre GPS, qui utilise une modulation BPSK, et dont le lobe principal est sur la fréquence centrale.

On note  $BOC(n, m)$  ou  $BOC(f_s, r_c)$ , la mise en forme BOC, de longueur  $T_c$ , où les valeurs  $n$  et  $m$  nous indiquent la relation entre la fréquence du signal carré et celle du code. On définit

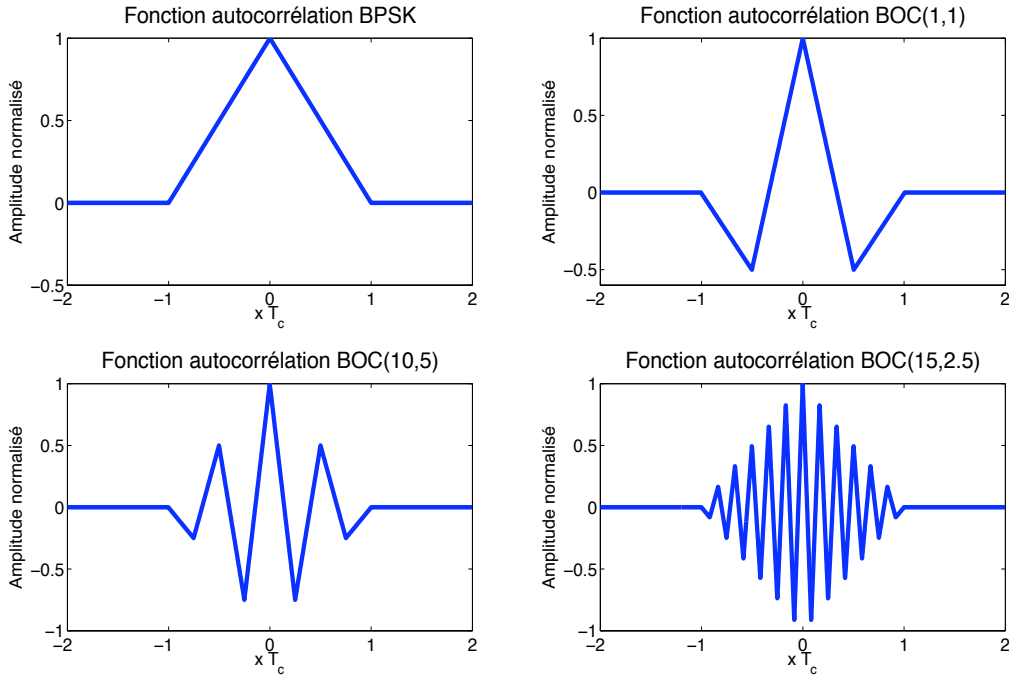


FIG. 1.4 – Fonctions d'autocorrélation BPSK, BOC(1,1), BOC(10,5) et BOC(15,2.5)

$n = \frac{f_s}{\beta}$ ,  $m = \frac{1/T_c}{\beta}$  et  $r_c = \frac{1}{T_c}$ , où  $\beta = 1.023$  MHz est un facteur de normalisation. Si l'on définit la fonction porte de longueur  $T$ ,  $\Pi_T(t)$ , de la façon suivante

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, T) \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (1.14)$$

on peut écrire l'équation de la mise en forme BOC

$$BOC(n, m) = \sum_{i=0}^{(n/m)-1} \left( \Pi_{T_s/2}(t - iT_s) - \Pi_{T_s/2}(t - \frac{T_s}{2} - iT_s) \right) \quad (1.15)$$

avec  $T_s = 1/f_s$ .

On montre dans la figure 1.4, les fonctions d'autocorrélation pour une mise en forme BPSK, une  $BOC(1, 1)$  où  $f_s = r_c$ , une  $BOC(10, 5)$  où  $f_s = 2r_c$  et une  $BOC(15, 2.5)$  où  $f_s = 6r_c$ . Plus l'écart entre les deux fréquences est grand, plus l'écart entre les deux lobes principaux est grand, mais plus on a d'énergie sur les lobes secondaires. Selon la largeur de bande de Gabor [Gabo 46], plus on a de l'énergie loin de la fréquence centrale, meilleure est l'estimation que l'on est capable de faire [Fern 05]. On peut voir que plus l'écart entre la fréquence  $f_s$  et le débit chip est grand, plus le pic central de la fonction de corrélation est étroit. Dans le cas d'estimation de délai, on peut voir intuitivement que l'estimation sera meilleure avec la fonction BOC qu'avec une mise en forme BPSK, car le pic de la fonction d'autocorrélation est plus étroit.

Dans la figure 1.5, on peut voir les spectres correspondant aux fonctions d'autocorrélation de la figure 1.4. La modulation BOC est réputée plus robuste aux trajets multiples, et en général plus performante pour la synchronisation que la modulation BPSK, qui est celle qui est utilisée dans les systèmes GPS classiques [Fern 05].

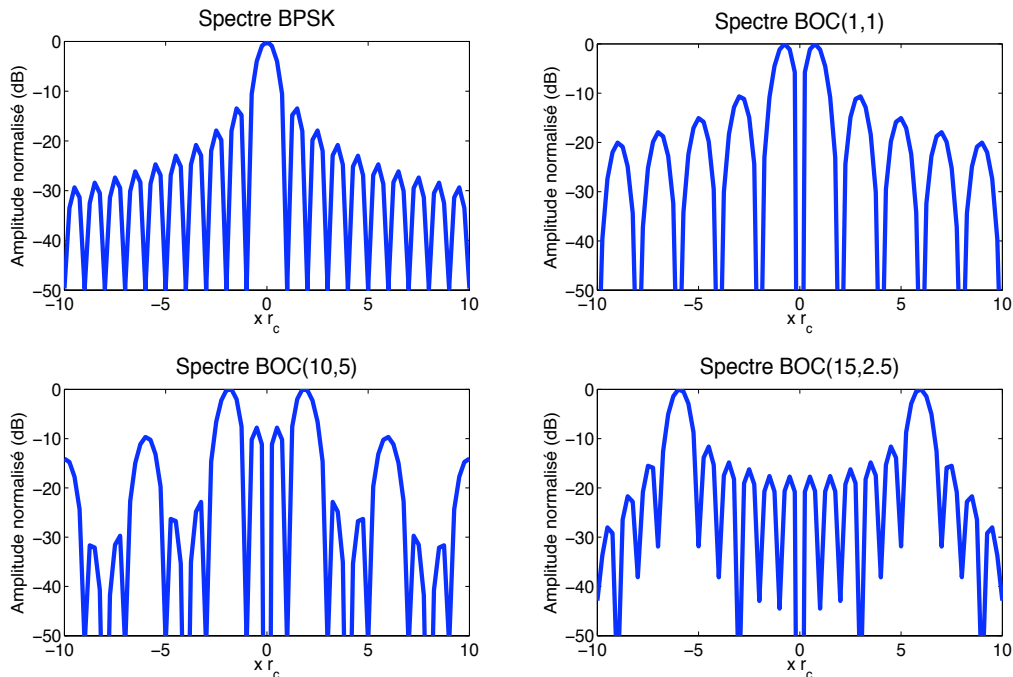


FIG. 1.5 – Spectres des fonctions BPSK, BOC(1,1), BOC(10,5) et BOC(15,2,5)

## 1.3 Synchronisation en GNSS

Dans cette section, on présente les principes de base liés aux problèmes de synchronisation, et en particulier, l'application aux récepteurs GNSS. On donne aussi un état de l'art des techniques Bayésiennes pour la synchronisation, ainsi que des bornes associées à ces problèmes. L'objectif est de relier les méthodes de filtrage optimal et les bornes Bayésiennes aux problèmes de synchronisation. Avec cela, on fait le lien avec ce qui était déjà fait, et les nouveaux problèmes que l'on a traité dans cette thèse.

### 1.3.1 Principes

Actuellement, les récepteurs sont de plus en plus numériques, et ce que l'on essaye est de pousser, le plus possible, la frontière *analogique/numérique* vers l'antenne. Lorsque l'étape de synchronisation est dans la partie *numérique* du récepteur, on fait face à un problème de synchronisation numérique. Le concept *numérique*, implique que l'on peut opérer seulement sur le signal numérique, qui est composé d'échantillons prélevés du signal analogique à un certain taux d'échantillonnage fixé.

Le procédé de synchronisation a pour objectif l'estimation des paramètres de synchronisation : délai, phase de la porteuse et décalage Doppler (ou décalage de fréquence porteuse de manière générale), pour chacun des satellites visibles. De manière générale, les méthodes classiques basées sur des boucles numériques, séparent le procédé en deux étapes : *acquisition* et *poursuite*. Dans la première étape, on fait une estimation grossière des paramètres de synchronisation, et dans la deuxième on essaie d'affiner leur estimation et poursuivre leur évolution.

**Acquisition ou estimation grossière.** L'étape d'acquisition est l'étape préliminaire qui a pour objectif de faire une estimation grossière des paramètres de synchronisation. Dans un premier temps le récepteur détecte le nombre de satellites visibles en faisant la corrélation du signal reçu par les différents codes d'étalement. Le récepteur fait cette corrélation en déplaçant le code en temps et en fréquence pour couvrir tout l'espace des délais et décalages Doppler possibles. Le résultat est un plan bidimensionnel, dont le maximum nous donne une première estimation du délai et de la fréquence Doppler du satellite analysé [Clos 09a]. Pour détecter un satellite, le pic de corrélation doit dépasser un certain seuil au-dessus du niveau de bruit. Ce seuil est fixé par rapport à la probabilité de fausse alarme désirée. Cette étape peut être vue comme l'étape de convergence initiale dans le procédé d'estimation. Une fois que l'on a une première estimation des paramètres on peut mettre en place d'autres techniques pour affiner l'estimation.

**Poursuite et estimation fine.** L'étape de poursuite a pour objectif de poursuivre les paramètres de synchronisation, délai, phase de la porteuse et décalage Doppler, et de donner une estimation la plus précise possible de ces paramètres. Les méthodes classiques de poursuite des paramètres de synchronisation sont basées sur les boucles [Meng 97], qui cherchent à affiner l'estimation et poursuivre l'évolution des paramètres de synchronisation. Parmi les boucles les plus utilisées, on trouve les boucles à verrouillage de délai (DLLs), les boucles à verrouillage de phase (PLLs) et les boucles à verrouillage de fréquence (FLLs), pour l'estimation, respectivement, du délai, de la phase et des décalages Doppler. Dans les récepteurs actuels, on implémente des versions numériques des boucles.

Les boucles peuvent découler d'une implémentation récursive approchée de l'estimateur de *maximum de vraisemblance* (ML). On peut écrire l'estimateur ML d'une façon générale

$$[\hat{\tau}, \hat{\phi}, \hat{f}_d] = \arg \max_{\tau, \phi, f_d} \Delta(\tau, \phi, f_d) \quad (1.16)$$

où  $\Delta(\tau, \phi, f_d)$  est la fonction de vraisemblance de l'observation, dont le maximum nous donne les estimés des paramètres de synchronisation.

Le principe *acquisition/poursuite* a un sens si l'on considère des méthodes basées sur des boucles ou des méthodes adaptatives, car on a besoin d'une première étape de convergence de l'algorithme et d'une étape de poursuite qui est différente. Dans le cas où l'on utilise des méthodes de filtrage optimal, la différence entre ces deux étapes est beaucoup plus vague, car c'est le même algorithme qui converge vers la valeur à estimer dans l'initialisation et s'adapte à son évolution dans la suite.

Les algorithmes de synchronisation peuvent être classifiés, généralement, en deux catégories :

- *Supervisés* (DA : "data-aided") : on suppose une séquence d'apprentissage connue.
- *Aveugles* (NDA : "non-data-aided") : les estimateurs supposent qu'on n'a pas de séquence d'apprentissage.

### 1.3.2 État de l'art

Du fait que les systèmes GNSS ont été beaucoup moins étudiés que les systèmes radiomobiles, on trouve moins de contributions consacrées à l'étude de la synchronisation dans ces systèmes que dans les autres, mais les techniques de base sont les mêmes. Pour les méthodes classiques de synchronisation dans le contexte des communications numériques, deux livres font référence dans le domaine [Meng 97, Meyr 98].

**Méthodes classiques .** Les techniques classiques, sont celles basées sur l'optimisation du critère ML. L'implémentation pratique de cette solution repose sur des boucles numériques. Les DLL, PLL et FLL sont la base de tous les systèmes de synchronisation classiques.

Un problème qui cause une dégradation importante des performances dans les systèmes GNSS est le problème des trajets multiples, qui introduit un biais dans l'estimation des paramètres de synchronisation. Le phénomène de trajets multiples complique le problème de synchronisation, car on doit estimer un ensemble de paramètres pour chaque trajet. Les récepteurs standards dans des systèmes à spectre étalé, utilisent les DLLs au temps chip pour estimer le délai [Irsi 03], mais cette solution obtient des performances très pauvres si l'on a un modèle à trajets multiples. Plusieurs techniques basées sur les DLL ont été proposées pour résoudre ce problème, par exemple, le Narrowband Correlator, le Pulse Aperture Correlator, ou de multiples versions de la méthode Early/Late [Simo 07]. D'autres techniques plus performantes ont aussi été proposées, comme le Multipath Estimation DLL (MEDLL) [Nee 94]. On trouve une comparaison des techniques basées sur les DLL et une solution ML dans [Lent 06].

On trouve aussi plusieurs contributions qui cherchent à améliorer les performances des méthodes de synchronisation, en utilisant la diversité spatiale avec des traitements multiantenne [Seco 00, Fern 05].

**Méthodes Bayésiennes.** L'alternative aux solutions classiques et leurs variantes est venue des techniques de filtrage Bayésiennes (qui prennent en compte des informations *a priori* sur les paramètres) et de leur développement dans les dernières années. La technique la plus utilisée a été le filtrage particulaire (PF). Parmi de nombreux exemples, citons [Gire 04], où on trouve une version Rao-Blackwellisée du PF pour intégrer des données GPS et des systèmes inertiels. Le PF a été proposé pour les problèmes de synchronisation dans un canal GNSS à trajets multiples, par Closas [Clos 06] et Giremus [Gire 07] avec des points de vue différents. Récemment, de nombreuses contributions qui utilisent différentes versions du PF pour estimer les paramètres de plusieurs trajets, sont apparues [Clos 08, Lent 08, Krac 08, Clos 09b].

Les méthodes Bayésiennes que l'on trouve dans la littérature, considèrent le problème d'estimation des paramètres de synchronisation, mais en général ne tiennent pas compte du fait que normalement on a un signal sur-échantillonné. En général, les méthodes proposées considèrent des bruits AWGN et des signaux stationnaires. Dans nos travaux, on a considéré *l'estimation des paramètres de synchronisation*, en utilisant un *signal sur-échantillonné, avec un bruit Gaussien mais coloré, et une séquence avec une puissance non-stationnaire* due au filtrage adapté en réception et au sur-échantillonnage.

La solution particulaire pour des problèmes d'estimation des canaux de transmission et synchronisation, a été étudiée pour d'autres systèmes de communication, que ceux par satellite, voir par exemple [Sale 02, Bert 03, Lee 05]. Dans nos travaux, on a étudié aussi l'utilisation des *méthodes particulières* pour le problème d'*estimation de phase en utilisant des bruits non-Gaussiens*.

Le problème des méthodes particulières est qu'elles ont un coût calculatoire très élevé, et l'implémentation dans des systèmes embarqués ou l'utilisation pour des applications temps réel n'est pas possible. En plus, ces méthodes sont difficiles à contrôler, car il y a des paramètres qui doivent être choisis d'une façon empirique, et un mauvais choix peut avoir un impact énorme sur les performances.

Une alternative possible aux méthodes de filtrage particulaire réside dans les méthodes déterministes, dites Sigma-Point. Cette famille inclut le Unscented Kalman Filter (UKF) [Juli 00], le Central Difference Kalman Filter (CDKF) [Ito 00, Norg 00], le Quadrature Kalman Filter [Ito 00, Aras 07] et le Cubature Kalman Filter [Aras 09]. L'avantage de ces méthodes est que

les échantillons déterministes peuvent être calculés *a priori*, et le coût calculatoire est faible. On peut les implémenter sur des applications temps réel et, selon les conditions, les performances peuvent être meilleures qu'en utilisant des méthodes particulières. Les méthodes déterministes (surtout le UKF) ont été utilisées pour la synchronisation dans beaucoup de systèmes, par exemple pour l'estimation de canal et délai dans des communications CDMA [Kim 09], pour le MIMO-OFDM [Kim 06] ou dans beaucoup d'applications de poursuite de cibles et réseaux de capteurs [Verc 05, Lei 07, Zhan 08]. On peut aussi coupler les méthodes déterministes et les méthodes particulières pour traiter des problèmes plus complexes [Huer 09]. Dans le contexte des communications par satellite, on trouve quelques contributions qui utilisent le UKF dans des systèmes qui fusionnent le GPS avec des mesures inertielles [Cras 06, Reza 07, Li 08]. Mais à notre connaissance il n'existe aucune application des méthodes déterministes pour la synchronisation dans le cas d'un système Galileo, et les travaux qui utilisent ces méthodes pour la synchronisation dans les systèmes GPS, sont très limités, et envisagent seulement l'utilisation des premières techniques déterministes, c'est-à-dire l'UKF et le CDKF.

Dans nos travaux, on a étudié les *méthodes déterministes* et l'on a proposé une *nouvelle vue d'ensemble*. On a utilisé ces méthodes, et surtout les approches *quadrature et cubature*, pour la *synchronisation en Galileo*.

**Bornes pour la synchronisation.** Ces dernières années, un énorme travail a été consacré à l'étude des bornes, classiques et Bayésiennes, pour les problèmes de synchronisation. La plupart des travaux considèrent la famille des bornes de Cramér-Rao.

Dans le contexte d'estimation de phase, Rife *et al.* [Rife 74] et Cowley [Cowl 96], ont établi l'expression de la CRB, pour l'estimation de phase constante, dans le cas supervisé (DA), et aveugle (NDA), respectivement, pour une modulation PSK. Dans [Rice 01], Rice *et al.* ont déterminé la CRB pour l'estimation de phase pour les systèmes qui utilisent des modulations QAM, et Noels *et al.* [Noel 03], ont établi la CRB pour des systèmes avec des codes supervisés (CA). Bay *et al.*, ont établi la BCRB et la ABCRB pour l'estimation de phase aléatoire [Bay 08b], et la borne hybride [Bay 08a] pour le même problème, avec un offset de fréquence. On trouve d'autres contributions à l'étude des bornes pour l'estimation de phase dans [Moen 94, Moen 98, Tava 04]

Un autre problème intéressant est l'estimation des décalages en fréquence (décalages Doppler). Dans [Gini 00, Ghog 01] on trouve la dérivation des bornes CRB dans ce contexte. Atallah *et al.* [Atal 04] et Renaux [Rena 07, Rena 08], ont récemment établi la borne de Chapman-Robbins et la WWB pour ce problème.

Un autre cas d'intérêt, est l'estimation des gains complexes, amplitude et phase. Citons [Hija 09], sur l'étude des bornes de Cramér-Rao pour l'estimation des gains complexes d'un canal de Rayleigh, dans un contexte OFDM.

On trouve aussi beaucoup de travaux sur les CRB pour l'estimation de délai dans différents contextes. Tavares *et al.* [Tava 06], ont dérivé la CRB pour l'estimation de délai, en considérant la phase comme un paramètre parasite et Noels *et al.*, ont dérivé une borne pour l'estimation de délai avec phase et fréquence inconnues [Noel 04b]. On trouve d'autres bornes pour l'estimation de délai pour la synchronisation dans [Berg 03, Riba 01, Riba 04, Naya 06]

Normalement on cherche à faire une estimation conjointe des différents paramètres de synchronisation, et dans ce cas on cherche les bornes minimales d'estimation conjointe de délai et phase, ou délai et fréquence. Dans [Jian 00] and [Jian 03], on trouve des CRB pour l'estimation conjointe de phase et délai. Noels *et al.* [Noel 04a] ont dérivé la CRB pour l'estimation conjointe de phase et fréquence pour des signaux PSK et pour de communications "pilot-assisted" [Noel 05], et Rice [Rice 06] l'a fait pour des communications "burst".

Dans [DAnd 94], la borne de Cramér-Rao modifiée (MCRB) a été déterminé pour les pro-

blèmes de synchronisation, et Alberty [Albe 95], a présenté une interprétation fréquentielle de la CRB pour l'estimation conjointe de phase et délai. Une expression de la CRB pour l'estimation conjointe de délai, phase et décalage en fréquence pour des systèmes GNSS est donnée dans [Clos 09c].

Les bornes que l'on trouve dans la littérature pour l'estimation de phase et offset de fréquence, considèrent normalement un échantillonnage au temps symbole, des bruits blancs et des séquences symbole à puissance stationnaire. Dans cette thèse, on s'est intéressé au *calcul des bornes dans des systèmes sur-échantillonnés, avec bruit d'observation coloré et séquence à puissance non-stationnaire*.

## 1.4 Contributions et publications

Dans cette section, on liste les principales contributions de cette thèse et les publications liées aux travaux réalisés.

### 1.4.1 Principales contributions

On liste les principales contributions de cette thèse :

- Modélisation pour la synchronisation fractionnée, qui permet d'estimer les paramètres de synchronisation, et prendre en compte le bruit d'observation coloré après filtrage adapté.
- Calcul des bornes de Cramér-Rao pour la synchronisation fractionnée, en considérant des bruits colorés et une séquence à puissance non-stationnaire : borne pour l'estimation de phase et borne pour l'estimation conjointe de phase et d'offset de fréquence.
- Étude des méthodes de Kalman pour la synchronisation fractionnée dans les systèmes GNSS, qui utilisent des fonctions de mise en forme avec un grand excès de bande. On considère des bruits colorés et des séquences (après sur-échantillonnage) à puissance non-stationnaire.
- Étude d'une approche hybride pour l'estimation conjointe de phase et de délai. On propose une solution itérative ensemble avec une méthode de Kalman pour résoudre cette problématique.
- Utilisation des méthodes particulières pour l'estimation de phase, dans le cadre des bruits Gaussiens et non-Gaussiens.
- Nouvelle vue d'ensemble et synthèse à jour des méthodes déterministes, ainsi que leur application à la synchronisation en Galileo.
- Nouvelle formulation du problème d'intégration ultra-précis GNSS/INS et utilisation d'une approche cubature pour résoudre le problème d'estimation.
- Étude d'un problème de localisation basé sur un réseau hétérogène de capteurs et utilisation des méthodes déterministes comme outils d'estimation.
- Étude de l'estimation conjointe du délai et des gains complexes d'un canal de Rayleigh à variation lente, pour des signaux qui utilisent une modulation à phase continue. La



méthode proposée utilise la méthode EM couplé avec un lisseur de Kalman.

### 1.4.2 Liste de publications

Ci-dessous, sont citées les publications liées aux travaux réalisés par l'auteur dans le cadre de sa thèse, préparé au sein du laboratoire GIPSA-Lab, Grenoble, France.

#### – Journaux

[Vila 10] J. Vilà-Valls, J.-M. Brossier et L. Ros, "Oversampled phase tracking in digital communications with large excess bandwidth", *Signal Processing*, vol. 90, issue 3, pp. 821–833, Mars 2010.

[–] H. Abeida, J. Vilà-Valls, J.-M. Brossier et L. Ros, "An EM algorithm for path delay and complex gain estimation of slowly varying fading channel for CPM signals", *en cours de rédaction*.

[–] C. Fernández-Prades, P. Closas et J. Vilà-Valls, "Ultra-tight GNSS/INS integration", *en cours de rédaction*.

[–] J. Vilà-Valls, J.-M. Brossier et L. Ros, "Nonlinear filtering for joint oversampled carrier and time-delay synchronization", *en cours de rédaction*.

#### – Conférence

[Fern 10a] C. Fernández-Prades, P. Closas et J. Vilà-Valls, "Nonlinear filtering for ultra-tight GNSS/INS integration", *Accepté à the IEEE International Conference on Communications, ICC 2010*, Cape Town, South Africa, May 2010.

[Fern 10b] C. Fernández-Prades et J. Vilà-Valls, "Bayesian nonlinear filtering using quadrature and cubature rules applied to sensor data fusion for positioning", *Accepté à the IEEE International Conference on Communications, ICC 2010*, Cape Town, South Africa, May 2010.

[Abei 09] H. Abeida, J.-M. Brossier, L. Ros et J. Vilà-Valls, "An EM algorithm for path delay and complex gain estimation of slowly varying fading channel for CPM signals", *Proc. of the IEEE Global Communications Conference, Globecom 2009*, Hawaii, USA, December 2009.

[Vila 09b] J. Vilà-Valls, J.-M. Brossier et L. Ros, "On-line hybrid Cramér-Rao bound for oversampled dynamical phase and frequency offset estimation", *Proc. of the IEEE Global Communications Conference, Globecom 2009*, Hawaii, USA, December 2009.

[Vila 09a] J. Vilà-Valls, J.-M. Brossier et L. Ros, "Extended Kalman filter for oversampled dynamical phase offset estimation", *Proc. of the IEEE International Conference on Communications, ICC 2009*, Dresden, Germany, June 2009

[Vila 08] J. Vilà-Valls, J.-M. Brossier et L. Ros, "On-line Bayesian Cramér-Rao bound for oversampled dynamical phase offset estimation", *Proc. of the IEEE International Symposium on Communications, Control and Signal Processing, ISCCSP 2008*, Malta, March 2008.

## Chapitre 2

# Estimation Bayésienne

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Estimation Bayésienne optimale</b>	<b>21</b>
2.1.1	La problématique	21
2.1.2	Solution optimale	22
2.1.3	État de l'art	23
<b>2.2</b>	<b>Filtrage de Kalman</b>	<b>26</b>
2.2.1	Introduction et modélisation d'état	26
2.2.2	Filtre de Kalman et Kalman étendu	27
<b>2.3</b>	<b>Méthodes particulières</b>	<b>27</b>
2.3.1	Les principes	28
2.3.1.1	Échantillonnage d'importance	28
2.3.1.2	Re-échantillonnage et choix de la fonction d'importance	30
2.3.2	Le filtre particulière	31
2.3.2.1	Rao-Blackwellisation	31
<b>2.4</b>	<b>Méthodes déterministes</b>	<b>33</b>
2.4.1	Introduction	33
2.4.2	Le filtre Bayésien sous l'hypothèse Gaussienne	34
2.4.3	Différents approches et calcul des échantillons déterministes	36
2.4.3.1	Approche unscented	36
2.4.3.2	Approche différences finies	37
2.4.3.3	Approche quadrature de Gauss-Hermite	38
2.4.3.4	Approche cubature	40
2.4.4	Approximation du filtre Bayésien	42
2.4.4.1	Unscented Kalman Filter	42
2.4.4.2	Central Difference Kalman Filter	43
2.4.4.3	Quadrature Kalman Filter	43
2.4.4.4	Cubature Kalman Filter	45
2.4.5	Vision d'ensemble des méthodes déterministes	45
2.4.5.1	Méthode déterministe globale	45
2.4.5.2	Comparaison des ensembles d'échantillons	49
2.4.6	Version racine-carrée des méthodes déterministes	49
<b>2.5</b>	<b>Bornes Bayésiennes</b>	<b>50</b>
2.5.1	Introduction	51
2.5.2	État de l'art	51

2.5.3	Bornes de Cramér-Rao . . . . .	52
2.5.3.1	Borne de Cramér-Rao standard et modifiée . . . . .	53
2.5.3.2	Borne de Cramér-Rao Bayésienne et Bayésienne modifiée . . .	53
2.5.3.3	Borne de Cramér-Rao Bayésienne asymptotique . . . . .	54
2.5.3.4	Borne de Cramér-Rao Bayésienne hybride . . . . .	55
2.5.3.5	Borne de Cramér-Rao Bayésienne récursive . . . . .	55

---

Du problème du filtrage non-linéaire optimal, découle généralement l'implémentation de méthodes sous-optimales, car la solution analytique, en général n'existe pas. Il existe plusieurs méthodes sous-optimales pour résoudre ce problème, dont les plus utilisées sont le filtre de Kalman étendu, les méthodes particulières et les méthodes déterministes. Chacune de ces méthodes a ses points forts et ses points faibles.

Ce chapitre, présente une vue d'ensemble sur l'estimation Bayésienne. D'abord, on présente le problème du filtrage Bayésien optimal, sa solution et un état de l'art (non exhaustif) des méthodes existantes, dans la section 2.1. Ensuite, on introduit le filtrage de Kalman et les méthodes particulières dans les sections 2.2 et 2.3, respectivement.

Dans la section 2.4 on propose une nouvelle vue d'ensemble des méthodes dites *méthodes déterministes*. D'abord, dans la section 2.4.2, on présente le filtre Bayésien sous l'hypothèse Gaussienne. Ensuite, dans les sections 2.4.3 et 2.4.4, on présente les différentes approches existantes et leur application pour approcher la solution du filtre Bayésien, ainsi que la construction des différentes méthodes déterministes. Dans la section 2.4.5, on compare les différentes méthodes et l'on propose une vision d'ensemble sous la forme d'une seule méthode. Enfin, on montre la version racine-carrée des méthodes dans la section 2.4.6.

Pour finir ce chapitre, on introduit les bornes Bayésiennes, on donne un état de l'art de celles-ci, et l'on présente la théorie de base des bornes de Cramér-Rao, dans la section 2.5.

## 2.1 Estimation Bayésienne optimale

Cette section, introduit la notion d'estimation optimale, la modélisation du problème en modèle de Markov caché et la solution Bayésienne. Dans un deuxième temps, on présente un état de l'art des méthodes de filtrage Bayésiennes existantes.

### 2.1.1 La problématique

On considère un système dynamique pouvant être non-linéaire et/ou non Gaussien modélisé à l'aide d'un modèle de Markov caché (HMM). On a des états cachés et des observations liées aux états (fig. 1.6). Le modèle est composé d'une équation d'état, qui détermine l'évolution des paramètres inconnus, et d'une équation d'observation qui exprime le lien entre les observations et les états :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}_{k-1}) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{n}_k) \quad (2.2)$$

où  $k \in \mathbb{Z}$  fait référence aux instants discrets,  $\mathbf{x}_k \in \mathcal{X}$ , où  $\mathcal{X}$  est l'espace des états,  $\mathbf{y}_k \in \mathcal{Y}$ , où  $\mathcal{Y}$  est l'espace des observations,  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{h}$  sont les fonctions d'état et d'observation, supposées connues et en général non-linéaires.  $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_k, k \in \mathcal{Z}\}$  et  $\mathbf{n} = \{\mathbf{n}_k, k \in \mathcal{Z}\}$  sont les bruits d'état et d'observation, que l'on suppose mutuellement indépendants et de statistiques connues.

Si l'on suppose que dans le système on a une commande,  $\mathbf{u}_{1:k} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ , on peut généraliser le modèle d'état et écrire

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{v}_{k-1}) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{n}_k) \quad (2.4)$$

Le problème d'estimation optimale est celui de l'obtention récursive d'une estimée des états à partir des observations. On peut considérer trois cas différents :

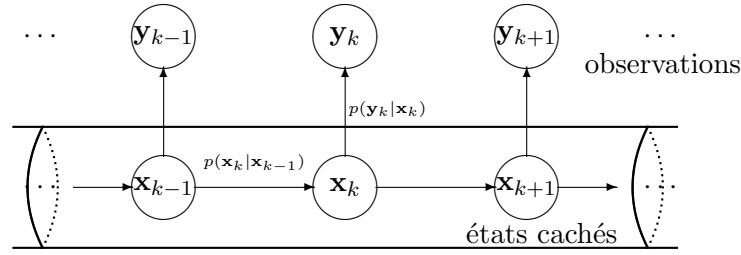


FIG. 2.1 – Modèle de Markov Caché

- *Filtrage* : on veut estimer l'état à l'instant  $k$ ,  $\mathbf{x}_k$ , à partir des observations jusqu'à cet instant,  $\mathbf{y}_{1:k}$ .
- *Lissage* : on veut estimer l'état à l'instant  $k$ ,  $\mathbf{x}_k$ , à partir d'observations passées et futures,  $\mathbf{y}_{1:K}$ , avec  $K > k$ . On distingue trois cas :
  - *Lissage à horizon fini*. Estimation de  $\mathbf{x}_k$ , à partir de  $\mathbf{y}_{1:k+L}$ , avec  $L$  un entier positif fixe.
  - *Lissage à intervalle fini*. Estimation de  $\mathbf{x}_k$ , à partir de  $\mathbf{y}_{1:L}$ , avec  $L$  un entier positif fixe et  $L \geq k$ .
  - *Lissage à point fini*. Estimation de  $\mathbf{x}_K$ , avec  $K$  un entier fixe, à partir de  $\mathbf{y}_{1:l}$ , avec  $l$  un entier positif variant.
- *Prédiction* : on veut prédire l'état à l'instant  $k + L$ , avec  $L > 0$ ,  $\mathbf{x}_{k+L}$ , à partir des observations jusqu'à l'instant  $k$ ,  $\mathbf{y}_{1:k}$ .

### 2.1.2 Solution optimale

La solution Bayésienne optimale du problème d'estimation est obtenue à partir de la densité *a posteriori* des états conditionnée aux observations disponibles,  $p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:j})$ . Cette densité de probabilité (pdf) contient toute l'information sur les états  $\mathbf{x}_{0:k}$ , contenue dans les observations  $\mathbf{y}_{1:j}$ . La clé pour obtenir cette pdf est donnée par le théorème de Bayes. Dans la suite on présente la solution Bayésienne du problème de *filtrage* qui se résume à la détermination de  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$ .

Pour des raisons de simplicité de calcul et pour certaines applications, on veut obtenir la densité *a posteriori* de manière récursive, c'est-à-dire  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$  à partir de  $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1})$ .

On suppose que l'on connaît la densité  $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1})$  à l'instant  $k - 1$ . Étant donné que le modèle d'état est un modèle de Markov de premier ordre, on peut considérer  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1})$ . En utilisant l'équation de Chapman-Kolmogorov, on trouve directement la densité prédite :

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1})d\mathbf{x}_{k-1} \quad (2.5)$$

Quand une nouvelle observation est disponible,  $\mathbf{y}_k$ , on peut calculer la densité *a posteriori* en utilisant le théorème de Bayes et la fonction de vraisemblance  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) &= p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{1:k-1}) \\ &= \frac{1}{c_k} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_{1:k-1})p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) \\ &= \frac{1}{c_k} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

où le facteur de normalisation peut se calculer aussi avec l'équation de Chapman-Kolmogorov

$$c_k = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})d\mathbf{x}_k$$

Les relations (2.5) et (2.6), sont appelées équations de *prédiction* et de *correction*.

À partir de la densité *a posteriori* on peut obtenir une estimation optimale des états [Kay 93], respectant n'importe quel critère d'optimisation. Par exemple, on peut calculer l'estimée en utilisant le critère de l'Erreur Quadratique Moyenne Minimale (MMSE),

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{MMSE} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}\} = \int \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_k \quad (2.7)$$

ou le critère du *maximum a posteriori* (MAP),

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{MAP} = \arg \max_{\mathbf{x}_k} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) \quad (2.8)$$

En général, la solution récursive optimale n'est pas tractable, parce que les intégrales dans la *prédiction* et la *mise à jour* n'ont pas une solution analytique. L'essence du filtrage Bayésien est l'approximation de ces intégrales.

### 2.1.3 État de l'art

La solution analytique aux équations (2.5) et (2.6) n'existe que dans des cas très particuliers. Normalement, on doit faire face à des problèmes non-linéaires et/ou non-Gaussiens pour lesquels une solution sous-optimale s'impose. Dans la suite, on fait une présentation des méthodes les plus représentatives pour résoudre ces problèmes. Le schéma de la figure 2.2 montre l'articulation générale des méthodes.

#### Solutions exactes

1. Le premier cas qui a été résolu, et le plus simple, est celui des systèmes linéaires Gaussiens. On définit un système comme linéaire Gaussien, si les équations d'observation et d'évolution d'état sont linéaires vis à vis de l'état, et les bruits du système et de mesure, sont des bruits blancs additifs et Gaussiens (AWGN). Dans ce cas, la solution est le filtre de Kalman (KF) [Kalm 60, Kalm 61], largement utilisé dans de multiples applications. Le KF donne la solution optimale, pour estimer les états d'une façon récursive : prédiction des états et correction à partir de la dernière observation obtenue. Il existe plusieurs livres qui étudient largement les filtres de Kalman, citons [Ande 79, Jazw 70] pour découvrir en détail cette méthode.
2. Dans le cas d'un modèle d'état discret au nombre d'états fini, la solution analytique existe aussi, la solution optimale est le filtre HMM (Hidden Markov Model) [Bucy 71].
3. La solution donnée dans [Bene 81], traite un type particulier de non-linéarité pour lequel on arrive à résoudre le problème.
4. Le filtre de Lévy [Sorn 01], donne une solution pour le cas des densités alpha-stables.

#### Méthodes sous-optimales

Dans la majorité des problèmes réels on a des systèmes non-linéaires et/ou non Gaussiens, et l'on doit oublier l'idée de trouver la solution optimale et chercher une bonne solution sous-optimale de la solution Bayésienne. Les méthodes sous-optimales cherchent à approcher les intégrales de la solution optimale numériquement. On peut distinguer deux approches différentes :

- *Approche locale* : on suppose que la densité *a posteriori* a une forme connue et fixée *a priori*, par exemple, on suppose qu'elle est Gaussienne. On approche cette densité localement, à partir de certaines propriétés statistiques. Dans cette catégorie on peut inclure le filtre de Kalman étendu [Ande 79], la famille des méthodes déterministes [Merw 04, Aras 07, Aras 09] ou le filtre particulière Gaussien [Kote 03].

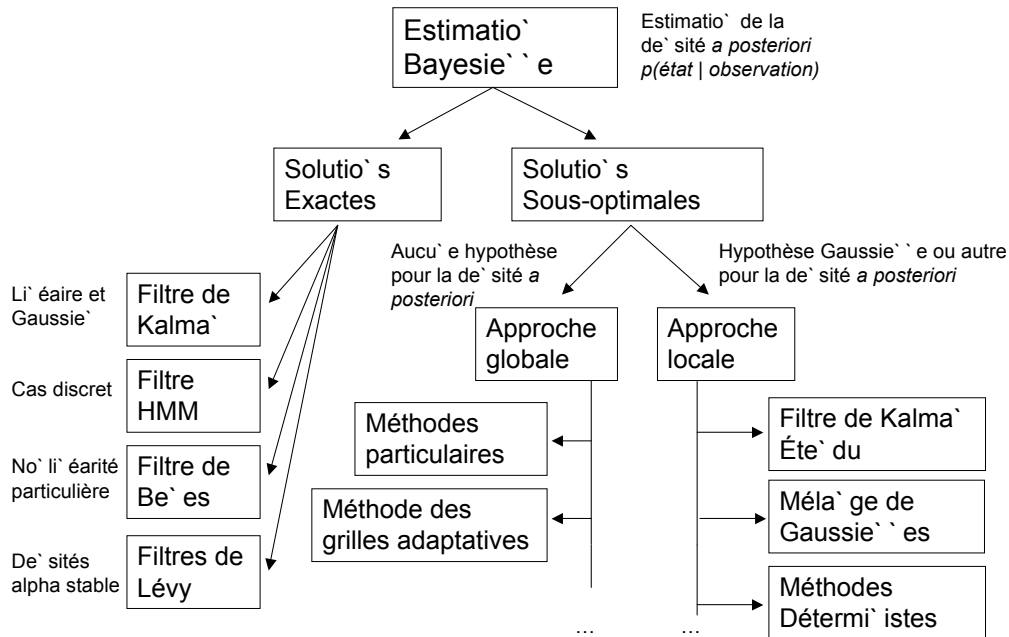


FIG. 2.2 – Schéma général des méthodes d'estimation Bayésienne

- *Approche globale* : on ne fixe aucune forme *a priori* pour la densité *a posteriori*. On caractérise cette densité globalement. Dans cette deuxième catégorie, on peut inclure les méthodes particulières [Douc 01] ou les versions adaptatives du cas discret [Bucy 74].

Normalement les méthodes qui utilisent une *approche locale*, sont plus faciles à implémenter et préférables pour des applications en temps réel. Par contre, les méthodes de type *approche globale*, sont très lourdes en temps de calcul mais préférables dans des contextes non-Gaussiens.

**Préliminaires :** la première méthode, pour traiter des problèmes non-linéaires, qui a été développée est le filtre de Kalman étendu (EKF) [Ande 79]. C'est la façon la plus intuitive de traiter des problèmes non-linéaires en utilisant la solution proposée par Kalman. On prend un développement de Taylor de premier ordre des fonctions nonlinéaires  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{h}$  autour de la prédiction et l'estimation courante et l'on applique les équations du filtre de Kalman. Les principaux problèmes de l'EKF sont que l'approximation est suffisamment bonne seulement pour des non-linéarités peu sévères, et que la convergence du filtre, n'est pas assurée (on a une convergence locale) et dépend des conditions initiales. On peut garder des termes d'ordre supérieur dans le développement de Taylor, mais ça ne résout pas les problèmes de convergence de l'EKF [Jazw 70].

Dans les années 70 et 80, plusieurs alternatives à l'EKF ont été proposées. Par exemple, Alspach et Sorenson [Alsp 72] ont proposé un filtre basé sur les mélanges de Gaussiennes (GSF) pour approcher la densité *a posteriori*, et Bucy *et al.* ont proposé une approximation discrète avec des grilles [Bucy 71], et en utilisant des fonctions spline [Bucy 74], ainsi que [Figu 71]. Mais

c'est à partir des années 90, que l'on a observé une croissance notable des méthodes de filtrage non-linéaire, surtout avec l'apparition des méthodes particulières [Douc 01] et la famille de filtres Sigma-Point [Merw 04].

**Méthodes particulières :** les méthodes particulières (PF) utilisent un ensemble d'échantillons (appelés *particules*) tirés aléatoirement et des poids associés à chaque échantillon pour approcher la densité *a posteriori*. Le principe de ces méthodes est l'échantillonnage d'importance séquentiel [Gord 93, Douc 00], utilisé pour approcher les intégrales de la solution Bayésienne. Les problèmes liés aux méthodes particulières, et la nécessité d'un grand nombre de particules pour avoir une bonne caractérisation de la densité, avec la charge de calcul que cela entraîne, font que les PF restent difficiles à utiliser et pas toujours intéressants pour des applications réelles. La communauté scientifique a beaucoup investi dans l'étude des PF, et de multiples variantes sont apparues ces dernières années, essayant d'améliorer les performances statistiques et de calcul. On peut trouver une introduction aux PF dans [Arul 02, Djur 03], un livre de référence est [Douc 01], Chen a fait un état de l'art très complet [Chen 03], Cappé *et al.* et Daum [Capp 07, Daum 05] ont fait récemment des synthèses des techniques existantes. Plusieurs thèses ont eu comme point fort l'étude de ces méthodes, et certaines les ont appliquées aux communications numériques, par exemple [Sale 02, Bert 03, Clos 09a]. Pour une étude détaillée des méthodes particulières voir la section 2.3.

**Méthodes déterministes :** la famille des méthodes que l'on nomme déterministes est un ensemble de méthodes apparues pendant les 15 dernières années, qui partagent les mêmes principes. Ces filtres peuvent aussi être appelés filtres Gaussiens, car l'hypothèse de base est que la densité *a posteriori* est supposée Gaussienne. Cette supposition donne lieu à une densité de transition et une fonction de vraisemblance Gaussiennes, et par conséquent, une densité *a posteriori* Gaussienne aussi. Le principe des méthodes repose sur un échantillonnage déterministe pour approcher la solution du filtre Bayésien sous l'hypothèse Gaussienne.

Les premiers qui ont eu cette idée sont Julier et Uhlmann, qui ont utilisé un échantillonnage déterministe en utilisant la *unscented transformation* pour obtenir le Unscented Kalman Filter (UKF) [Juli 00, Juli 04]. Un autre filtre de la famille, qui a été proposé en même temps par Norgaard et Ito, est le Central Difference Kalman Filter (CDKF) [Ito 00] ou Divided Difference Filter [Norg 00]. Ce filtre est basé sur une approximation par différences finies et utilise la formule d'interpolation de Stirling. De la même façon que l'UKF, ce filtre utilise un échantillonnage déterministe pour propager les statistiques d'une densité Gaussienne à travers une fonction nonlinéaire.

Au même moment, Ito [Ito 00] a proposé un nouveau filtre basé sur la méthode de quadrature de Gauss-Hermite pour approcher les intégrales du filtre Gaussien, le Gauss-Hermite Filter (GHF). La méthode de Gauss-Hermite utilise des échantillons déterministes et ses poids correspondants pour approcher une intégrale comme une somme finie, et on peut voir que l'on retrouve le même principe qu'avec l'UKF et le CDKF. Récemment, Arasaratnam *et al.* ont reformulé le GHF de Ito, en l'appelant Quadrature Kalman Filter (QKF) [Aras 07]. Ils démontrent que ce filtre est plus performant que l'UKF et le CDKF.

La dernière incorporation à la famille est le Cubature Kalman Filter (CKF) [Aras 09], basée sur les lois de cubature pour approcher les intégrales du filtre Gaussien. Ce filtre résout le problème de l'incrément du coût de calcul quand la dimension de l'état croît.

Un problème dans ces méthodes est d'assurer la stabilité numérique. Pour y arriver il faut conserver les matrices de covariance symétriques et définies positives. À cause des problèmes de calcul ou pour des problèmes d'instabilité, on n'arrive pas toujours à assurer ces deux propriétés



et l'algorithme diverge. Une solution est la version *racine-carrée* des méthodes, basée sur la propagation des racines carrées des matrices de covariance dans la prédiction et la mise à jour. Le résultat sont des versions stables des méthodes déterministes (S pour Square-root), les SUKF, SCDKF, SQKF et SCKF [Merw 01b, Merw 01a, Aras 08, Aras 09].

## 2.2 Filtrage de Kalman

Dans cette section on introduit le filtrage de Kalman et sa version étendue pour les systèmes non-linéaires. D'abord on présente la modélisation d'état que l'on utilise, et ensuite on établit les équations du filtre de Kalman et du filtre de Kalman étendu. Pour le calcul des équations du filtre voir l'annexe A.

### 2.2.1 Introduction et modélisation d'état

Le Filtre de Kalman (KF) [Kalm 60, Kalm 61], a été étudié et appliqué dans beaucoup de domaines. On trouve l'explication du filtre et de ses propriétés dans d'innombrables publications. Citons deux livres de référence pour l'étude du KF, le livre de Anderson et Moore [Ande 79], et celui de Jazwinski [Jazw 70].

On part du modèle présenté dans la section 2.1, où on a une première équation qui nous donne l'évolution de l'état, et une deuxième qui établit le lien entre l'observation et l'état. Le filtre de Kalman a été obtenu dans le cas où le modèle est linéaire, et les bruit  $\mathbf{n}_k$  et  $\mathbf{v}_{k-1}$ , sont additifs Gaussiens. Le modèle d'état s'écrit alors :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-1} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k \quad (2.10)$$

avec les notations suivantes

- $\mathbf{x}_k$  est le vecteur d'état à l'instant  $k$ .
- $\mathbf{y}_k$  est le vecteur d'observation à l'instant  $k$ .
- $\mathbf{F}_{k-1}$  est la matrice de transition de l'état.
- $\mathbf{H}_k$  est appelé matrice d'observation, et indique la façon dont l'état est observé.
- $\mathbf{v}_k$  est le bruit d'état ou du système qui est un bruit blanc Gaussien centré de matrice de covariance  $\mathbf{Q}_k$ .
- $\mathbf{n}_k$  est le bruit d'observation, blanc, Gaussien, centré, de matrice de covariance  $\mathbf{R}_k$ , et indépendant de  $\mathbf{v}_k$ .

On note  $\hat{\mathbf{x}}_{k|l}$  l'estimation optimale de l'état à l'instant  $k$ ,  $\mathbf{x}_k$ , en connaissant toutes les observations jusqu'à l'instant  $l$ ,  $\mathbf{y}_{1:l}$ , et l'erreur d'estimation  $\tilde{\mathbf{x}}_{k|l}$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|l} = \mathbb{E}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:l}) \quad ; \quad \tilde{\mathbf{x}}_{k|l} = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|l} \quad (2.11)$$

On définit la matrice de covariance de l'erreur d'estimation

$$\mathbf{P}_{k|l} = \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{x}}_{k|l}\tilde{\mathbf{x}}_{k|l}^T) \quad (2.12)$$

Le KF suppose la densité *a posteriori* Gaussienne, ainsi caractérisée par sa moyenne et sa matrice de covariance. Les étapes de prédiction et correction s'écrivent

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) \quad (2.13)$$

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}) \quad (2.14)$$

où  $\mathcal{N}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  représente la densité de probabilité d'une variable aléatoire Gaussienne  $\mathbf{x}$ , de moyenne  $\boldsymbol{\mu}$  et de matrice de covariance  $\boldsymbol{\Sigma}$ . L'objectif du filtre de Kalman est de déterminer récursivement l'estimateur  $\widehat{\mathbf{x}}_{k|k}$ .

Dans le filtre de Kalman ordinaire, les équations d'état et d'observation sont supposées linéaires. Cependant, certains systèmes réels sont décrits par des non-linéarités. Dans ce cas, un modèle possible est

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{v}_{k-1} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{n}_k \quad (2.16)$$

où  $\mathbf{f}_{k-1}$  et  $\mathbf{h}_k$ , sont des fonctions non-linéaires. La solution la plus simple pour résoudre le problème d'estimation dans le cas non-linéaire, est d'appliquer la version non-linéaire du KF, appelé filtre de Kalman étendu (EKF) [Ade 79], dont le principe est la linéarisation des fonctions d'état et d'observation, en utilisant un développement de Taylor du premier ordre autour de la dernière valeur prédite ou estimée. Alors on fait les approximations suivantes

$$\mathbf{F}_{k-1}^* = \nabla_{\mathbf{x}_{k-1}} \mathbf{f}_{k-1}(\widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}) \quad (2.17)$$

$$\mathbf{H}_k^* = \nabla_{\mathbf{x}_k} \mathbf{h}_k(\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \quad (2.18)$$

et on applique la solution classique du KF linéaire à chaque itération.

### 2.2.2 Filtre de Kalman et Kalman étendu

À partir du modèle d'observation, on peut voir que  $\mathbf{y}_k$  n'est qu'une observation partielle et bruitée de l'état  $\mathbf{x}_k$ . Le filtre de Kalman nous donne la meilleure estimation au sens du critère MSE,  $\widehat{\mathbf{x}}_{k|k}$ , de l'état  $\mathbf{x}_k$  à partir de l'ensemble d'observations jusqu'à l'instant  $k$ ,  $\mathbf{y}_{1:k}$ , de façon récursive.

Dans l'algorithme 1, on a synthétisé la structure générale du KF, qui est valable pour le KF classique, et pour le KF étendu en changeant les matrices d'évolution  $\mathbf{F}_{k-1}$  et  $\mathbf{H}_k$ , par les fonctions linéarisées  $\mathbf{F}_{k-1}^*$  et  $\mathbf{H}_k^*$  (eqs. (2.17,2.18)).

La matrice  $\mathbf{I}$  est la matrice identité de taille appropriée. On note que  $\widehat{\mathbf{x}}_{0|0}$  et  $\mathbf{P}_{0|0}$ , l'état initial et sa matrice de covariance, sont fixés à une valeur arbitraire dans un intervalle approprié (e.g., si l'on estime une phase, on prendra une valeur distribuée uniformément dans  $[0, 2\pi)$ ).

## 2.3 Méthodes particulières

Les méthodes particulières (en anglais connues comme Sequential Monte Carlo (SMC) methods), sont un ensemble de méthodes qui utilisent des simulations Monte Carlo pour calculer la densité de probabilité *a posteriori*, dans des problèmes d'estimation optimale. Ces méthodes rentrent dans la catégorie *approche globale*, car elles ne fixent aucune forme pour cette densité, alors, on peut les utiliser dans des contextes très généraux (non-linéaires et/ou non-Gaussiens).

Les méthodes de simulation par Monte Carlo existent depuis les années 50, mais ce n'est qu'à partir des années 90 que les méthodes particulières ont été développées, grâce à l'augmentation de la puissance de calcul. Dans les dernières années, les méthodes SMC ont été appliquées dans tous les domaines de l'ingénierie, et d'autres comme la biologie et l'économie [Douc 01].

**Algorithm 1** Filtre de Kalman

**Require:** Les observations  $\mathbf{y}$  (que l'on peut obtenir de façon séquentielle), l'état initial  $\mathbf{x}_0$ , la covariance de l'état initial  $\mathbf{P}_0$ , et les statistiques des bruit d'état et d'observation,  $\mathbf{Q}_k$  et  $\mathbf{R}_k$ .

*Initialisation :*

1: Fixer  $\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{P}_{0|0} = \mathbf{P}_0$

*Estimation :*

2: **for**  $k = 1$  to  $\infty$  **do**

3:   **Prédiction :**

4:   Prédiction de l'état :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$$

5:   Prédiction de la matrice de covariance :

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_{k-1}^H + \mathbf{Q}_{k-1}.$$

6:   **Correction :**

7:   Calcul du Gain de Kalman :

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^H \{ \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^H + \mathbf{R}_k \}^{-1}.$$

8:   Correction du vecteur d'état :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k [\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}].$$

9:   Correction de la matrice de covariance :

$$\mathbf{P}_{k|k} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}] \mathbf{P}_{k|k-1}.$$

10: **end for**

### 2.3.1 Les principes

Pour le problème de filtrage présenté dans la section 2.1, l'objectif est d'obtenir une estimation récursive de la densité *a posteriori*,  $p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})$ .

Si l'on suppose que l'on peut obtenir  $N_e$  échantillons aléatoires i.i.d de la densité *a posteriori*,  $p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})$ , que l'on appelle  $\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}$ , on peut approcher cette densité comme suit

$$p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) \approx \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \delta(\mathbf{x}_{0:k} - \mathbf{x}_{0:k}^{(i)}) \quad (2.19)$$

et alors, par exemple, on peut approcher l'espérance mathématique  $I(\mathbf{h}) = \mathbb{E}(\mathbf{h}(\mathbf{x}_{0:k}) | \mathbf{y}_{1:k})$  par

$$I(\mathbf{h}) = \int \mathbf{h}(\mathbf{x}_{0:k}) p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_{0:k} \approx \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{h}(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}) \quad (2.20)$$

Normalement, il est difficile d'échantillonner selon la densité *a posteriori* et une alternative s'impose. Une alternative classique est la technique connue comme échantillonnage d'importance, que l'on détaille dans la suite.

#### 2.3.1.1 Échantillonnage d'importance

Supposons que l'on ne puisse pas obtenir des échantillons de la densité d'intérêt, dans notre cas, la densité *a posteriori*. On considère une deuxième densité, que l'on appelle densité d'importance,  $\pi(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})$ , pour laquelle il est facile de tirer des échantillons aléatoires. On suppose

que la densité d'importance a au moins le même support que la densité *a posteriori*. On peut écrire,

$$I(\mathbf{h}) = \int \mathbf{h}(\mathbf{x}_{0:k}) p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_{0:k} \quad (2.21)$$

$$= \int \mathbf{h}(\mathbf{x}_{0:k}) \frac{p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})}{\pi(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})} \pi(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_{0:k} \quad (2.22)$$

$$= \int \mathbf{h}(\mathbf{x}_{0:k}) \tilde{w}(\mathbf{x}_{0:k}) \pi(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_{0:k} \quad (2.23)$$

où  $\tilde{w}(\mathbf{x}_{0:k}) = \frac{p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})}{\pi(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})}$  sont les poids d'importance. Si l'on applique la méthode d'intégration de Monte Carlo, en utilisant  $N_e$  échantillons tirés selon la fonction d'importance, l'approximation de cette intégrale s'écrit

$$I(\mathbf{h}) \approx \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{h}(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}) w(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}) \quad (2.24)$$

où on a défini des poids d'importance normalisés

$$w(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}) = \frac{\tilde{w}(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)})}{\sum_{j=1}^{N_e} \tilde{w}(\mathbf{x}_{0:k}^{(j)})}$$

Dans ce cas, on utilise des échantillons tirés selon la densité d'importance. Pour calculer les poids d'importance, on doit seulement évaluer la densité *a posteriori* aux positions des échantillons obtenus.

Pour résoudre le problème d'estimation Bayésienne optimale, on désire avoir une forme réursive de l'estimateur. De plus, dans l'échantillonnage d'importance, pour calculer la densité *a posteriori*, on a besoin de toutes les données, car on doit recalculer les poids pour toutes les données à chaque nouvelle mesure. Pour résoudre ce problème, une version réursive de la méthode a été proposée, l'*échantillonnage d'importance séquentiel (SIS)*. Cette méthode est la base de toutes les méthodes particulières.

Pour construire la méthode SIS, on suppose que la fonction d'importance se factorise de la manière suivante

$$\pi(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) = \pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k}) \pi(\mathbf{x}_{0:k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) \quad (2.25)$$

À partir du théorème de Bayes et de la markoviannité du modèle d'état, on peut écrire la densité *a posteriori* à l'instant  $k$  à partir de celle à l'instant  $k-1$ ,

$$p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})} p(\mathbf{x}_{0:k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) \quad (2.26)$$

Si l'on suppose que l'on a une approximation de la densité *a posteriori* à l'instant  $k-1$ , on peut écrire l'équation de mise à jour des poids de manière séquentielle

$$w_k^{(i)} = \frac{1}{\beta} w_{k-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}) p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)})}{\pi(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k})} \quad (2.27)$$

où les échantillons  $\mathbf{x}_k^{(i)}$ , sont des échantillons tirés selon  $\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k})$ , et  $\beta = \sum_{j=1}^{N_e} w_k^{(j)}$  est le facteur de normalisation. Avec cette formulation, on peut trouver une approximation de la densité qui nous donne la solution du problème de filtrage optimal :

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^{N_e} w_k^{(i)} \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{(i)}) \quad (2.28)$$

et l'on en déduit facilement, que l'estimateur MMSE, s'écrit

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{MMSE} = \sum_{i=1}^{N_e} w_k^{(i)} \mathbf{x}_k^{(i)} \quad (2.29)$$

Dans cette méthode, apparaissent deux points critiques : le choix de la fonction d'importance, et un problème appelé *dégénérescence*.

### 2.3.1.2 Re-échantillonnage et choix de la fonction d'importance

Un des points critiques de la méthode SIS, est le problème appelé *dégénérescence*. Ce problème indique qu'après quelques itérations, tous les poids sauf un, tendent vers 0, et cela implique aussi une divergence de l'algorithme et une mauvaise estimation [Douc 00].

Une solution à ce problème est le re-échantillonnage [Gord 93], qui consiste à éliminer les échantillons avec un poids d'importance faible, et à dupliquer ceux qui ont des poids d'importance avec de grandes valeurs. Cela implique, que l'on multiplie les particules de fort poids et que l'on élimine les particules qui se trouvent dans des endroits qui nous apportent peu d'information. On peut définir une mesure de dégénérescence,

$$N_{eff} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{N_e} (w_k^{(j)})^2} \quad (2.30)$$

où  $1 \leq N_{eff} \leq N_e$ . Normalement, les méthodes particulières appliquent le re-échantillonnage seulement dans les cas où  $N_{eff}$  est au-dessous d'un seuil, car ce re-échantillonnage génère un appauvrissement des particules. Ce seuil de re-échantillonnage, est souvent choisi empiriquement.

On trouve dans la littérature, plusieurs méthodes de re-échantillonnage : parmi les plus utilisées, on trouve le re-échantillonnage multinomial, le résiduel, et le systématique [Douc 01]. On note que le re-échantillonnage, est un point critique dans toutes les implémentations parallélisées des méthodes particulières mais c'est une étape indispensable.

Le deuxième point critique dans l'implémentation des méthodes particulières, est le choix de la fonction d'importance,  $\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k})$ . Selon la fonction d'importance que l'on choisit on obtiendra des bonnes performances ou pas.

**Fonction optimale :** la fonction optimale, dans le sens qu'elle minimise la variance des poids d'importance conditionnée aux observations [Douc 00], est

$$\pi^{opt}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k}) \quad (2.31)$$

Dans le cas où on choisit cette fonction d'importance, les poids sont calculés selon

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}) \quad (2.32)$$

En général, on ne peut pas utiliser cette fonction d'importance, car il faut pouvoir obtenir des échantillons selon  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k})$ , et pouvoir évaluer  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})$ , ce qui n'est en général pas possible.

**Choix sous-optimaux :** on trouve plusieurs alternatives dans la littérature, mais une méthode générale, pour trouver cette densité, n'existe pas. Le choix le plus simple et le plus utilisé en pratique, est la densité de transition *a priori* de l'état, pour laquelle le calcul des poids devient très simple,

$$\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}) \quad (2.33)$$

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) \quad (2.34)$$

D'autres possibilités, impliquent l'approximation directe de la fonction d'importance optimale (eq.(2.31)), par exemple, en utilisant une linéarisation locale du modèle [Douc 00] ou la Unscented Transformation [Merw 00].

### 2.3.2 Le filtre particulière

Les filtres particuliers (PF), sont l'application directe de l'échantillonnage d'importance séquentiel et du re-échantillonnage au problème de filtrage Bayésien optimal. Il existe beaucoup de PF différents, selon les schémas de re-échantillonnage ou le choix de la fonction d'importance. Dans l'algorithme 2, on présente la structure générale du filtre particulière.

---

#### Algorithm 2 Filtrage particulière (PF)

---

**Require:** Les observations  $\mathbf{y}$  et une initialisation  $\left\{ \mathbf{x}_0^{(i)}, w_0^{(i)} \right\}_{i=1}^{N_e}$ .

- 1: **for**  $k = 1$  to  $\infty$  **do**
  - 2:   **for**  $i = 1$  to  $N_e$  **do**
  - 3:     Générer les particules  $\mathbf{x}_k^{(i)} \sim \pi \left( \mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k} \right)$
  - 4:     Calculer les poids  $\tilde{w}_k^{(i)} = w_{k-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}) p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)})}{\pi(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k})}$
  - 5:   **end for**
  - 6:   Normaliser les poids  $w_k^{(i)} = \frac{\tilde{w}_k^{(i)}}{\sum_{j=1}^{N_e} \tilde{w}_k^{(j)}}$  pour  $i = 1, \dots, N_e$
  - 7:   Estimation  $\hat{\mathbf{x}}_k = \sum_{i=1}^{N_e} w_k^{(i)} \mathbf{x}_k^{(i)}$
  - 8:   Calculer  $N_{eff} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{N_e} (w_k^{(j)})^2}$
  - 9:   **if**  $N_{eff} < \text{seuil}$  **then**
  - 10:     Re-échantillonnage  $\left[ \left\{ \mathbf{x}_k^{(i)}, w_k^{(i)} \right\}_{i=1}^{N_e} \right]$
  - 11:   **end if**
  - 12: **end for**
- 

Le filtre particulière le plus simple et le plus utilisé, est le filtre Bootstrap ou SIR (SIS avec Re-échantillonnage) [Gord 93]. Ce filtre utilise comme fonction d'importance, la densité de transition de l'état, et applique le re-échantillonnage à chaque itération.

#### 2.3.2.1 Rao-Blackwellisation

La Rao-Blackwellisation est une méthode utilisée pour réduire la variance d'estimation dans les problèmes de filtrage optimal. L'idée est de profiter des sous-structures linéaires dans le modèle d'état, et de traiter celles-ci avec un filtre de Kalman. C'est-à-dire, si l'on peut séparer l'état en deux parties, une partie non-linéaire et l'autre linéaire conditionnée à la première, on peut les traiter séparément, une avec une méthode sous-optimale et l'autre avec filtre de Kalman.

Le filtre particulière Rao-Blackwellisé (RBPF) [Douc 01], utilise une solution particulière pour la partie non-linéaire du problème. Dans la suite on détaille cet algorithme, qui peut être

très utile car on réduit le coût de calcul (partie particulière) et l'on peut traiter des états à grande dimension.

---

**Algorithm 3** Filtrage particulière Rao-Blackwellisé (RBPF)
 

---

**Require:** Les observations  $\mathbf{y}$  et une initialisation  $\left\{ \mathbf{x}_0^{(i,2)}, w_0^{(i,2)}, \hat{\mathbf{x}}_{0|0}^{(i,1)}, \mathbf{P}_{0|0}^i \right\}_{i=1}^{N_e}$ .

1: **for**  $k = 1$  to  $\infty$  **do**

2:   **for**  $i = 1$  to  $N_e$  **do**

3:     Prédiction de Kalman : calculer  $\left\{ \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i,1)}, \mathbf{P}_{k|k-1}^i \right\}$  selon le filtre de Kalman. On peut caractériser la densité de prédiction

$$p(\mathbf{x}_k^{(1)} | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(2)}, \mathbf{y}_{1:k-1}) = \mathcal{N} \left( \mathbf{x}_k^{(1)}; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i,1)}, \mathbf{P}_{k|k-1}^i \right)$$

4:     Générer les particules  $\mathbf{x}_k^{(i,2)} \sim \pi \left( \mathbf{x}_k^{(2)} | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(2)}, \mathbf{y}_{1:k} \right)$

5:     Calculer les poids  $\tilde{w}_k^{(i,2)} = w_{k-1}^{(i,2)} \frac{p(\mathbf{x}_k^{(i,2)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i,2)}) p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{0:k}^{(i,2)}, \mathbf{y}_{1:k-1})}{\pi(\mathbf{x}_k^{(i,2)} | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i,2)}, \mathbf{y}_{1:k})}$

6:   **end for**

7:   Normaliser les poids  $w_k^{(i,2)} = \frac{\tilde{w}_k^{(i,2)}}{\sum_{j=1}^{N_e} \tilde{w}_k^{(j,2)}}$  pour  $i = 1, \dots, N_e$

8:   Estimation partie non-linéaire  $\hat{\mathbf{x}}_k^{(2)} = \sum_{i=1}^{N_e} w_k^{(i,2)} \mathbf{x}_k^{(i,2)}$

9:   **for**  $i = 1$  to  $N_e$  **do**

10:     Correction de Kalman : calculer  $\left\{ \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i,1)}, \mathbf{P}_{k|k}^i \right\}$  selon le filtre de Kalman. On peut caractériser la densité de

$$p(\mathbf{x}_k^{(1)} | \mathbf{x}_{0:k}^{(2)}, \mathbf{y}_{1:k}) = \mathcal{N} \left( \mathbf{x}_k^{(1)}; \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i,1)}, \mathbf{P}_{k|k}^i \right)$$

11:   **end for**

12:   Estimation partie linéaire  $\hat{\mathbf{x}}_k^{(1)} = \sum_{i=1}^{N_e} w_k^{(i,2)} \mathbf{x}_{k|k}^{(i,1)}$

13:   Calculer  $N_{eff} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{N_e} (w_k^{(j,2)})^2}$

14:   **if**  $N_{eff} <$  seuil **then**

15:     Re-échantillonnage  $\left[ \left\{ \mathbf{x}_k^{(i,2)}, w_k^{(i,2)} \right\}_{i=1}^{N_e} \right]$

16:   **end if**

17: **end for**

---

Supposons que l'on ait un état  $\mathbf{x}_k = \left[ \left( \mathbf{x}_k^{(1)} \right)^T, \left( \mathbf{x}_k^{(2)} \right)^T \right]^T$ , où  $\mathbf{x}_k^{(1)}$  est une partie linéaire et Gaussienne conditionnée à la connaissance de  $\mathbf{x}_k^{(2)}$ , et  $\mathbf{x}_k^{(2)}$  est la partie non-linéaire. La distribution  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$  peut être calculée directement avec un filtre de particules, mais il est préférable de prendre en compte la sous-structure linéaire Gaussienne du modèle d'état. On écrit

$$p(\mathbf{x}_k^{(1)}, \mathbf{x}_k^{(2)} | \mathbf{y}_{1:k}) = p(\mathbf{x}_k^{(1)} | \mathbf{x}_k^{(2)}, \mathbf{y}_{1:k}) p(\mathbf{x}_k^{(2)} | \mathbf{y}_{1:k}) \quad (2.35)$$

ainsi on peut estimer la densité  $p(\mathbf{x}_k^{(1)} | \mathbf{x}_k^{(2)}, \mathbf{y}_{1:k})$  avec un filtre de Kalman et  $p(\mathbf{x}_k^{(2)} | \mathbf{y}_{1:k})$  utilisant un filtre particulière. Étant donné que la densité de probabilité qui concerne la partie linéaire dépend de la partie non-linéaire, en pratique on aura une estimation de Kalman pour chacune des particules. On résume la méthode RBPF dans l'algorithme 3.

On note que les performances d'un RBPF sont généralement meilleures que celles d'un PF standard, car à nombre de particules identique, la dimension de l'état "non-linéaire" est moindre. De plus, la partie linéaire est estimée avec un algorithme optimal.

## 2.4 Méthodes déterministes

Dans cette section, on propose une nouvelle vue d'ensemble des méthodes dites *méthodes déterministes*. Sous cette appellation, on regroupe les méthodes dites Sigma-Point [Merw 04] (UKF et CDKF) et les méthodes de quadrature (QKF) et cubature (CKF) proposées récemment dans [Ito 00, Aras 07, Aras 09]. Le fait que dans la littérature il n'existe pas (à notre connaissance) des travaux qui regroupent ces méthodes, ou qui traitent cet ensemble sous la même optique, a motivé ce travail de synthèse. Ces méthodes sont une alternative puissante aux méthodes particulières et au filtrage de Kalman étendu pour résoudre le problème du filtrage Bayésien optimal.

### 2.4.1 Introduction

Le cadre de départ est celui de Kalman. On a vu (voir la section 2.2) que le filtre de Kalman est une solution analytique au problème de filtrage optimal sous des contraintes de linéarité et de Gaussiannité. On a aussi présenté le filtre de Kalman étendu, qui est la version non-linéaire du KF. Les premières méthodes déterministes ont été motivées par les limitations de l'EKF. On sait que la linéarisation est fiable seulement si la propagation de l'erreur peut être bien approchée par une fonction linéaire, et que dans le cas contraire le filtre diverge. De plus, on peut linéariser seulement si les matrices jacobiniennes existent, ce qui n'est pas toujours le cas. Dans le cas où cette matrice jacobienne existe, elle peut être difficile à calculer et peut générer des erreurs dans l'algorithme. Tous ces problèmes ont motivé la recherche de méthodes sans dérivation et fiables pour des problèmes fortement non-linéaires.

La première méthode dans cet état d'esprit qui a été proposée, a été l'UKF [Juli 00, Juli 04], qui est basé sur la *unscented transformation* (UT). Cette transformée est valide dans un cadre général mais elle a été appliquée dans un cadre Gaussien pour en déduire l'algorithme. L'idée est d'utiliser un échantillonnage déterministe pour calculer les statistiques d'une variable aléatoire qui subit une transformation non-linéaire.

Le CDKF [Ito 00, Norg 00] a été proposé quelques années plus tard. Cette méthode utilise les *formules d'interpolation polynomiale de Stirling* (différences finies) pour linéariser les fonctions non-linéaires du modèle et calculer les statistiques des variables aléatoires transformées par ces fonctions.

Le QKF [Ito 00, Aras 07], au lieu d'utiliser les méthodes *unscented* et *différences finies* pour approcher les statistiques d'une variable aléatoire transformée par une fonction non-linéaire, utilise la *quadrature de Gauss-Hermite* pour calculer les intégrales du filtre Bayésien exactement, et le CKF [Aras 09], fait de même avec les *lois de cubature* (méthodes numériques pour calculer des intégrales multidimensionnelles) [Cool 97].

Dans la figure 2.3, on montre l'articulation des différentes méthodes déterministes. On peut voir que ces méthodes peuvent être séparées en deux approches distinctes, et, pour chacune, le point de départ est complètement différent. Une approche considère l'approximation des statistiques d'une variable aléatoire qui subit une transformation non-linéaire, et l'autre calcule numériquement les intégrales du filtre Bayésien.

La point commun entre les deux approches est qu'elles utilisent un ensemble d'échantillons déterministes pour approcher la solution du filtre Bayésien sous l'hypothèse Gaussienne. Dans tous les cas on caractérise les moyennes et matrices de covariance des variables Gaussiennes à l'aide des échantillons déterministes. Selon la méthode que l'on utilise pour le calcul de cet ensemble déterministe d'échantillons, on obtient les différentes méthodes proposées dans la littérature. Mais le point le plus important est le fait qu'à part quelques légères différences, on



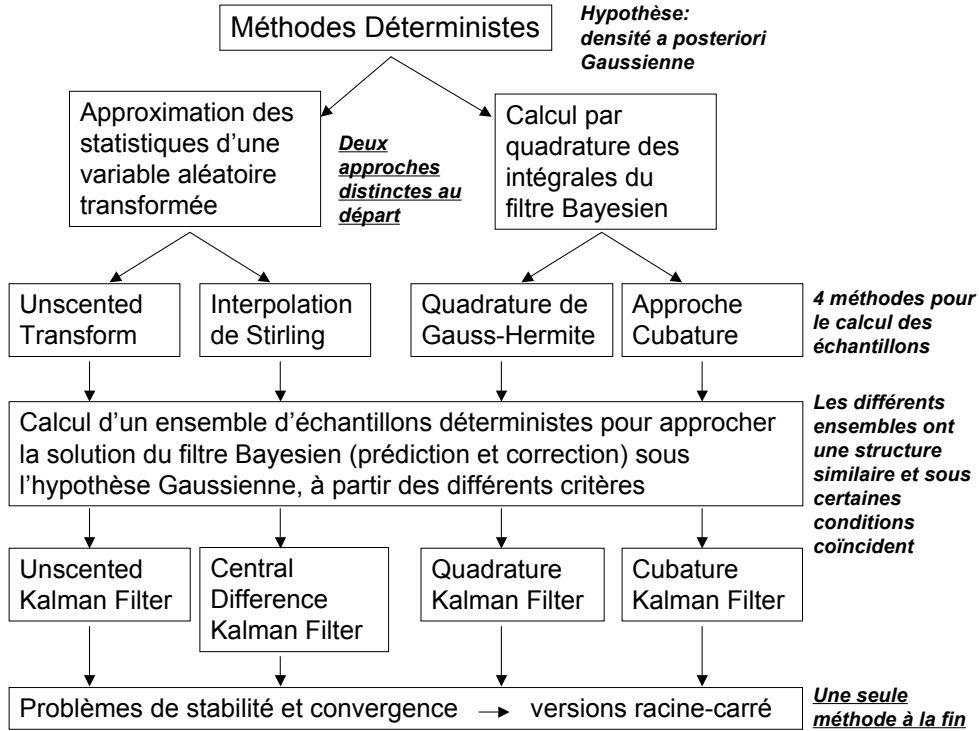


FIG. 2.3 – Schéma général de l'articulation des méthodes déterministes

s'aperçoit que toutes les méthodes suivent la même structure et qu'elles peuvent être vues comme une seule méthode.

Dans tous les cas, le point de départ est l'hypothèse Gaussienne de la densité *a posteriori*. Pour cela, on trouve dans certaines publications ces méthodes sous le nom de *filtres Gaussiens*.

### 2.4.2 Le filtre Bayésien sous l'hypothèse Gaussienne

On rappelle le modèle d'état de la section 2.1, où l'on a supposé les bruits additifs Gaussiens

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{v}_{k-1} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{n}_k \quad (2.37)$$

$\mathbf{v}_{k-1}$  et  $\mathbf{n}_k$ , sont indépendants, centrés, et de matrices de covariance,  $\mathbf{Q}_{k-1}$  et  $\mathbf{R}_k$ , respectivement.

Le point clé pour dériver le filtre Bayésien dans un cadre Gaussien, est l'hypothèse que la densité de prédiction de l'état,  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1})$ , et la vraisemblance,  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{1:k}, \mathbf{u}_{1:k})$ , sont des densités Gaussiennes, ce qui implique une densité *a posteriori*,  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}, \mathbf{u}_{1:k})$ , aussi Gaussienne.

Le filtre Bayésien est composé de deux étapes récursives (voir section 2.1) : *prédiction* et *correction*. Dans le contexte Gaussien que l'on traite dans cette section, la structure du filtre est la suivante (voir l'annexe B pour les calculs détaillés) :

**Prédiction.** Dans cette étape, on cherche la moyenne et la matrice de covariance de la densité de prédiction. Cette moyenne peut s'écrire comme l'espérance de l'état sachant toutes les

observations et entrées passées. Sous l'hypothèse Gaussienne, on écrit

$$\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (2.38)$$

La matrice de covariance associée à l'erreur de prédiction s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k-1} &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \mathbf{f}_{k-1}^T(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \\ &\quad - \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \end{aligned} \quad (2.39)$$

**Correction.** Dans cette étape, le filtre calcule la densité *a posteriori*,  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}, \mathbf{u}_{1:k})$ , à partir de la densité prédite. Étant donné que l'on est sous l'hypothèse Gaussienne, il nous faut seulement calculer la moyenne,  $\widehat{\mathbf{x}}_{k|k}$ , et la covariance,  $\mathbf{P}_{k|k}$ , de cette densité

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}, \mathbf{u}_{1:k}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \widehat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k})$$

La solution optimale est donnée par :

$$\widehat{\mathbf{x}}_{k|k} = \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) \quad (2.40)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{yy,k|k-1} \mathbf{K}_k^T \quad (2.41)$$

où  $\mathbf{K}_k$ , est le gain de Kalman, et  $\mathbf{P}_{yy,k|k-1}$ , est la matrice de covariance associée à l'erreur de prédiction de l'observation  $\widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1}$ . L'expression du gain de Kalman est la suivante

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xy,k|k-1} \mathbf{P}_{yy,k|k-1}^{-1} \quad (2.42)$$

où  $\mathbf{P}_{xy,k|k-1}$ , représente la matrice de covariance croisée de l'erreur de prédiction de l'état et de l'observation.

La prédiction de l'observation peut s'écrire comme

$$\widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k \quad (2.43)$$

et la matrice de covariance associée à l'erreur de prédiction de l'observation

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{yy,k|k-1} &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \mathbf{h}_k^T(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k \\ &\quad - \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T + \mathbf{R}_k \end{aligned} \quad (2.44)$$

Il nous reste à trouver l'expression de la matrice de covariance croisée de l'erreur de prédiction de l'état et l'observation qui prend la forme suivante

$$\mathbf{P}_{xy,k|k-1} = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{x}_k \mathbf{h}_k^T(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k - \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T \quad (2.45)$$

On peut voir que toutes les intégrales, dans la solution du filtre Bayésien dans le cadre Gaussien, ont la même forme

$$I = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} (\text{fonction non-linéaire}) \cdot (\text{densité Gaussienne}) \cdot d\mathbf{x}, \quad (2.46)$$

alors, le problème d'estimation optimale est réduit à un problème d'approximation de ces intégrales, ou d'approximation des statistiques de la densité Gaussienne. Les différentes méthodes déterministes utilisent un ensemble d'échantillon déterministe pour approcher cette solution. On résume le filtre Bayésien dans l'algorithme 6 (voir l'annexe B).

### 2.4.3 Différents approches et calcul des échantillons déterministes

Dans cette section, on présente brièvement les différentes techniques existantes pour le calcul des échantillons déterministes séparément, et l'idée sous-jacente dans chacune des méthodes pour l'approximation du filtre Bayésien. Pour les calculs détaillés voir l'annexe C.

Dans la littérature on trouve quatre approches distinctes : l'*unscented transformation*, l'*interpolation polynomiale de Stirling*, la *quadrature de Gauss-Hermite* et l'*approche cubature*.

#### 2.4.3.1 Approche unscented

L'*unscented transformation* (UT) est une méthode pour calculer les statistiques d'une variable aléatoire qui subit une transformation non-linéaire.

On considère une variable aléatoire  $n_x$ -dimensionnelle  $\mathbf{x}$ , de moyenne  $\bar{\mathbf{x}}$  et matrice de covariance  $\mathbf{P}_x$ , qui subit une transformation non-linéaire arbitraire,  $\mathbf{y} = \mathbf{h}_{NL}(\mathbf{x})$ , et l'on veut calculer les deux premiers moments de la variable aléatoire transformée  $\mathbf{y}$ .

La procédure est la suivante : on choisit un ensemble d'échantillons déterministes (dits *sigma-points* dans la littérature), et leurs poids associés, de façon à ce que ces échantillons pondérés captent complètement la vraie moyenne et covariance de la variable aléatoire de départ,  $\mathbf{x}$ . Ensuite on transforme cet ensemble d'échantillons selon la fonction nonlinéaire que l'on étudie, c'est-à-dire, on calcule l'image de l'ensemble d'échantillons, et enfin, on calcule les statistiques désirées à partir de l'ensemble transformé.

Il existe plusieurs ensembles qui satisfont ces contraintes, ici on présente la Scaled UT (SUT) [Juli 97], qui utilise un ensemble de  $2n_x + 1$  échantillons. Cette formulation rend possible le contrôle de la distribution des sigma-points, sans permettre que la covariance devienne semi-définie négative. L'ensemble d'échantillons déterministes  $\mathcal{X}_i$ , et leurs poids associés  $w_i$ , s'écrit

$$\begin{array}{llll}
 \mathcal{X}_0 = \bar{\mathbf{x}} & i = 0 & w_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n_x + \lambda} & i = 0 \\
 \mathcal{X}_i = \bar{\mathbf{x}} + \left[ \sqrt{(n_x + \lambda) \mathbf{P}_x} \right]_i & i = 1, \dots, n_x & w_0^{(c)} = \frac{\lambda}{n_x + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) & i = 0 \\
 \mathcal{X}_i = \bar{\mathbf{x}} - \left[ \sqrt{(n_x + \lambda) \mathbf{P}_x} \right]_i & i = n_x + 1, \dots, 2n_x & w_i^{(m)} = w_i^{(c)} = \frac{1}{2(n_x + \lambda)} & i = 1, \dots, 2n_x
 \end{array} \quad (2.47)$$

où  $\left[ \sqrt{(n_x + \kappa) \mathbf{P}_x} \right]_i$  fait référence à la  $i$ -ème colonne de la matrice.

On définit  $\lambda = \alpha^2 (n_x + \kappa) - n_x$ , où  $(\kappa, \alpha, \beta)$  est un ensemble de paramètres pour contrôler la SUT, pour lesquels il n'existe pas de valeurs optimales de manière générale. La racine-carrée d'une matrice peut être calculée, par exemple, avec la décomposition de Cholesky. On peut construire des ensembles, qui en plus de capter la moyenne et la covariance, capturent aussi le coefficient de dissymétrie et le kurtosis.

On propage les sigma-points, au travers de la fonction non-linéaire, pour produire un nouvel ensemble de points

$$\mathcal{Y}_i = \mathbf{h}_{NL}(\mathcal{X}_i) \quad i = 0, \dots, 2n_x \quad (2.48)$$

À partir de ce nouvel ensemble d'échantillons, on peut estimer les statistiques de la variable

aléatoire transformée de la façon suivante

$$\bar{\mathbf{y}} \approx \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(m)} \mathcal{Y}_i \quad (2.49)$$

$$\mathbf{P}_y \approx \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(c)} (\mathcal{Y}_i - \bar{\mathbf{y}}) (\mathcal{Y}_i - \bar{\mathbf{y}})^T \quad (2.50)$$

$$\mathbf{P}_{xy} \approx \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(c)} (\mathcal{X}_i - \bar{\mathbf{x}}) (\mathcal{Y}_i - \bar{\mathbf{y}})^T \quad (2.51)$$

### 2.4.3.2 Approche différences finies

Dans cette section, on présente l'approche différences finies. Comme dans la SUT, on cherche à calculer les statistiques d'une variable aléatoire qui subit une transformation non-linéaire. L'idée est d'approcher cette fonction non-linéaire jusqu'au deuxième ordre en utilisant une méthode à différences finies, et ensuite calculer la moyenne et la covariance de la variable aléatoire transformée.

Cette approche est similaire à une approximation par développement en série de Taylor, mais dans ce cas on utilise un nombre fini d'évaluations de la fonction que l'on veut approcher, au lieu des dérivées analytiques de cette fonction. Le problème du développement en série de Taylor est que l'on peut l'appliquer seulement si la fonction que l'on veut approcher est dérivable. Normalement, il est plus facile de calculer des approximations avec les formules d'interpolation, qu'avec le développement de Taylor, car on ne doit pas calculer de dérivées.

Une des méthodes d'interpolation, est l'*interpolation polynomiale de Stirling* [Norg 00]. Cette méthode utilise des différences finies pour évaluer la fonction non-linéaire que l'on veut approcher. Dans ce cas, les échantillons déterministes sont les points auxquels on fait les évaluations de la fonction dans la méthode de différences finies.

On considère une variable aléatoire  $n_x$ -dimensionnelle  $\mathbf{x}$ , de moyenne  $\bar{\mathbf{x}}$  et matrice de covariance  $\mathbf{P}_x$ , et  $\mathbf{S}_x$  est la factorisation de Cholesky de cette matrice de covariance,  $\mathbf{P}_x = \mathbf{S}_x \mathbf{S}_x^T$ . Cette variable aléatoire subit une transformation non-linéaire arbitraire,  $\mathbf{y} = \mathbf{h}_{NL}(\mathbf{x})$ , et l'on veut calculer la moyenne  $\bar{\mathbf{y}}$ , la covariance  $\mathbf{P}_y$  et la covariance croisée  $\mathbf{P}_{xy}$ , de la variable aléatoire transformée  $\mathbf{y}$ . On définit aussi  $\mathbf{e}_i$  comme le  $i$ -ème vecteur unitaire (vecteur nul avec une seule composante égale à 1 dans la  $i$ -ème position) et  $\mathbf{s}_{x_i} = [\mathbf{S}_x]_i$ , la  $i$ -ème colonne du facteur de Cholesky de la matrice de covariance.

Pour les calculs détaillés et les expressions des opérateurs de Stirling multidimensionnels, voir l'annexe C ou [Norg 00].

L'interpolation de Stirling scalaire de deuxième ordre s'écrit de la façon suivante,

$$h_{NL}(x) = h_{NL}(\bar{x}) + D_{\Delta_x} h_{NL} + \frac{1}{2} D_{\Delta_x}^2 h_{NL} \quad (2.52)$$

où les évaluation fonctionnelles, de premier et deuxième ordre, prennent respectivement la forme suivante

$$D_{\Delta_x} h_{NL} = (x - \bar{x}) \frac{h_{NL}(\bar{x} + h) - h_{NL}(\bar{x} - h)}{2h} \quad (2.53)$$

$$D_{\Delta_x}^2 h_{NL} = (x - \bar{x})^2 \frac{h_{NL}(\bar{x} + h) + h_{NL}(\bar{x} - h) - 2h_{NL}(\bar{x})}{h^2} \quad (2.54)$$

avec  $h$  la longueur de l'intervalle, et dans ce cas on a fait l'interpolation autour de la moyenne  $\bar{x}$ .

Pour généraliser cette formulation, on cherche à blanchir la variable aléatoire  $\mathbf{x}$  pour appliquer indépendamment la formulation scalaire pour chaque dimension. On définit :

$$\mathbf{z} \stackrel{def}{=} \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{x} \quad (2.55)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\mathbf{z}) \stackrel{def}{=} \mathbf{h}_{NL}(\mathbf{S}_x \mathbf{z}) = \mathbf{h}_{NL}(\mathbf{x}) \quad (2.56)$$

Si l'on définit  $\bar{\mathbf{z}}$  comme la moyenne de la variable aléatoire  $\mathbf{z}$ , on peut approcher la variable aléatoire  $\mathbf{y}$  de la façon suivante

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}_{NL}(\mathbf{x}) \approx \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}}) + \tilde{\mathbf{D}}_{\Delta_z} \tilde{\mathbf{h}}_{NL} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{D}}_{\Delta_z}^2 \tilde{\mathbf{h}}_{NL} \quad (2.57)$$

et sa moyenne,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}} &\approx \mathbb{E} \left[ \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}}) + \tilde{\mathbf{D}}_{\Delta_z} \tilde{\mathbf{h}}_{NL} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{D}}_{\Delta_z}^2 \tilde{\mathbf{h}}_{NL} \right] \\ &= \frac{h^2 - n_x}{h^2} \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{i=1}^{n_x} \left( \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_{x_i}) + \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_{x_i}) \right) \end{aligned} \quad (2.58)$$

De la même façon que pour la moyenne, et utilisant quelques manipulations algébriques, on peut calculer la matrice de covariance et covariance croisée (pour un calcul détaillé voir [Norg 00]),

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_y &\approx \frac{1}{4h^2} \sum_{i=1}^{n_x} \left( \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_{x_i}) - \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_{x_i}) \right) \left( \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_{x_i}) - \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_{x_i}) \right)^T \\ &\quad + \frac{h^2 - 1}{4h^4} \sum_{i=1}^{n_x} \left( \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_{x_i}) + \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_{x_i}) - 2\tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}}) \right) \times \\ &\quad \times \left( \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_{x_i}) + \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_{x_i}) - 2\tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}}) \right)^T \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\mathbf{P}_{xy} \approx \frac{1}{2h} \sum_{i=1}^{n_x} \mathbf{s}_{x_i} \left( \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_{x_i}) - \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_{x_i}) \right)^T \quad (2.60)$$

On peut voir, que dans la formule d'interpolation de Stirling, on utilise un ensemble de points,  $\bar{\mathbf{x}} \pm h\mathbf{s}_{x_i}$ , pour évaluer les fonctions. Ces points sont générés de façon très similaire à l'ensemble de points de l'UT. La valeur optimale de la longueur de l'intervalle,  $h$ , dépend de la distribution de la variable aléatoire  $\mathbf{z}$ . Pour minimiser l'erreur entre l'estimation de la moyenne et la covariance, et le développement de Taylor de la vraie moyenne et covariance,  $h^2$  doit être égal au kurtosis de  $\mathbf{z}$  [Norg 00]. Pour une variable aléatoire Gaussienne la valeur optimale est  $h = \sqrt{3}$ .

### 2.4.3.3 Approche quadrature de Gauss-Hermite

On appelle *méthodes de quadrature*, un type de méthodes d'approximation numérique d'une intégrale. En général, on remplace le calcul de l'intégrale par une somme pondérée sur un certain nombre de points du domaine d'intégration. La *méthode de quadrature Gaussienne* est une méthode de quadrature exacte pour un polynôme de degré  $2m - 1$ , si l'on utilise  $m$  points sur le domaine d'intégration.

Considérons l'intégrale suivante

$$I(g(x)) = \int_a^b W(x)g(x)dx$$

où  $\{W(x) \geq 0 \forall x\}$  est une fonction de pondération. Une approximation possible par quadrature de  $I(g(x))$  qui utilise  $m$  points est

$$I(g(x)) \approx \sum_{i=1}^m w_i g(\xi_i)$$

où  $\{\xi_i, w_i\}$  sont appelés les points et poids de quadrature, respectivement. Les points de quadrature sont réels, distincts et uniques, et on les choisit de façon à obtenir des degrés d'exactitude les plus grands possibles. Alors, le problème principal dans ces méthodes est la recherche des points de quadrature  $\xi_i$  et leurs poids associés  $w_i$ .

Toutes les méthodes de quadrature Gaussienne reposent sur le théorème suivant :

**Théorème 2.1 :** Supposons que  $q(x)$  est un polynôme de degré  $N$ , tel que :

$$\int_a^b q(x)\rho(x)x^k dx = 0$$

où  $k$  est un entier quelconque dans  $[0, N - 1]$ , et  $\rho$  est une fonction de pondération quelconque.  $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$  sont  $N$  racines de  $q(x)$ . On peut construire la formule d'intégration suivante :

$$\int_a^b g(x)\rho(x) \approx \sum_{i=0}^N w_i g(\xi_i)$$

On est sûr qu'il existe au moins un ensemble de poids  $\{w_i\}$ , indépendant de  $g(x)$ , tel que l'approximation est exacte si  $g(x)$  est un polynôme de degré  $< 2N$ .

### Méthode de Gauss-Hermite

Dans la méthode de quadrature de Gauss-Hermite, la fonction de pondération est une densité Gaussienne, centrée et réduite,  $W(x) = e^{-x^2}$ , et l'intervalle d'intérêt est  $(-\infty, \infty)$ .

Le théorème de Gauss-Hermite dit que l'on choisit les points de quadrature comme les racines du polynôme d'Hermite de  $m$ -ème ordre. Cette méthode est exacte pour tous les polynômes de degré  $\leq (2m - 1)$ . À partir des points de quadrature on peut déterminer les poids correspondants [Aras 07]. Le calcul des points et poids de quadrature est fait une fois pour toutes, et ces valeurs peuvent être stockées en mémoire pour faire tourner l'algorithme. Mais le calcul des racines de ces polynômes peut s'avérer très compliqué. Pour résoudre cette problématique il existe des méthodes efficaces et plus simples pour calculer les points et poids de quadrature (voir l'annexe C).

Si l'on suppose que l'on a ces deux ensembles (points  $\xi_i$  et poids  $w_i$ ), on peut écrire

$$I(g(x)) = \int g(x)\mathcal{N}(x; 0, 1) dx \approx \sum_{i=1}^m w_i g(\xi_i) \quad (2.61)$$

Dans le cas multidimensionnel, la quadrature de Gauss-Hermite s'écrit

$$I(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \approx \sum_{l_{n_x}=1}^m \cdots \sum_{l_1=1}^m w_{l_{n_x}} \cdots w_{l_1} \mathbf{g}(\xi_{l_1} \cdots \xi_{l_{n_x}}) = \sum_{l=1}^{m^{n_x}} \tilde{w}_l \mathbf{g}(\xi_l) \quad (2.62)$$

avec  $\tilde{w}_l = \prod_{j=1}^{n_x} w_{l_j}$  et  $\xi_l = [\xi_{l_1} \cdots \xi_{l_{n_x}}]$ .

Alors, la méthode de Gauss-Hermite, nous sert à approcher des intégrales de la forme  $\int \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathcal{N}(\mathbf{x}; \mathbf{0}, \mathbf{I}_{n_x})d\mathbf{x}$ . Cette intégrale peut être vue comme l'espérance mathématique de  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ , si la variable aléatoire  $\mathbf{x}$  suit une distribution Gaussienne, centrée et réduite. Dans un cas général, les composantes de  $\mathbf{x}$ , peuvent être corrélées, alors les intégrales d'intérêt sont de la forme

$$\mathbb{E}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \int \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathcal{N}(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}, \Sigma)d\mathbf{x} \quad (2.63)$$

Dans ce cas la solution de quadrature s'écrit

$$\mathbb{E}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \approx \sum_{l_{n_x}=1}^m \cdots \sum_{l_1=1}^m w_{l_{n_x}} \cdots w_{l_1} \mathbf{g} \left( \sqrt{\Sigma}[\xi_{l_1} \cdots \xi_{l_{n_x}}]^T + \bar{\mathbf{x}} \right) = \sum_{l=1}^{m^{n_x}} \tilde{w}_l \mathbf{g}(\sqrt{\Sigma}\boldsymbol{\xi}_l + \bar{\mathbf{x}}) \quad (2.64)$$

avec  $\tilde{w}_l = \prod_{j=1}^{n_x} w_{l_j}$  et  $\boldsymbol{\xi}_l = [\xi_{l_1} \cdots \xi_{l_{n_x}}]^T$ . Si l'on écrit  $\mathcal{X}_l = \sqrt{\Sigma}\boldsymbol{\xi}_l + \bar{\mathbf{x}}$ , on peut écrire finalement

$$\mathbb{E}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \approx \sum_{l=1}^{m^{n_x}} \tilde{w}_l \mathbf{g}(\mathcal{X}_l) \quad (2.65)$$

On peut voir qu'avec cette formulation, on peut approcher de façon déterministe, effectuant une somme pondérée d'évaluations d'une fonction, une intégrale Gaussienne. Pour voir le lien avec les deux méthodes précédentes, la SUT et la méthode d'interpolation de Stirling, il nous faut voir comment approcher la moyenne et la covariance d'une variable aléatoire qui a subit une transformation non-linéaire.

Pour une variable aléatoire  $\mathbf{x}$ , de moyenne  $\bar{\mathbf{x}}$  et matrice de covariance  $\mathbf{P}_{xx}$ , on peut approcher ces paramètres utilisant la quadrature de Gauss-Hermite. Si l'on prend  $m$  points par dimension, l'approximation s'écrit

$$\bar{\mathbf{x}} = \sum_{l=1}^{m^{n_x}} \tilde{w}_l \mathcal{X}_l \quad (2.66)$$

$$\mathbf{P}_{xx} = \sum_{l=1}^{m^{n_x}} \tilde{w}_l (\mathcal{X}_l - \bar{\mathbf{x}}) (\mathcal{X}_l - \bar{\mathbf{x}})^T \quad (2.67)$$

Si l'on calcule la transformation des points de quadrature,  $\mathcal{Y}_l = \mathbf{g}(\mathcal{X}_l)$ , on peut estimer la moyenne, la covariance, et la covariance croisée de  $\mathbf{y}$

$$\bar{\mathbf{y}} \approx \sum_{l=1}^{m^{n_x}} \tilde{w}_l \mathcal{Y}_l \quad (2.68)$$

$$\mathbf{P}_{yy} \approx \sum_{l=1}^{m^{n_x}} \tilde{w}_l (\mathcal{Y}_l - \bar{\mathbf{y}}) (\mathcal{Y}_l - \bar{\mathbf{y}})^T \quad (2.69)$$

$$\mathbf{P}_{xy} \approx \sum_{l=1}^{m^{n_x}} \tilde{w}_l (\mathcal{X}_l - \bar{\mathbf{x}}) (\mathcal{Y}_l - \bar{\mathbf{y}})^T \quad (2.70)$$

#### 2.4.3.4 Approche cubature

Les règles de cubature, sont des méthodes fortement efficaces pour approcher numériquement des intégrales multidimensionnelles. Le problème des méthodes de quadrature présentées dans

la section précédente, est principalement la croissance démesurée du nombre de points à évaluer, avec l'augmentation de la dimension de l'état. Si l'on considère que pour avoir un bon résultat on a besoin de  $\alpha = 5$  points par dimension, la méthode de quadrature de Gauss-Hermite est seulement envisageable pour des dimensions  $n_x \leq 4$ . Au détriment de la qualité de l'estimation, on peut prendre  $\alpha = 3$  points par dimension, dans ce cas on peut utiliser la méthode pour  $n_x \leq 6$ , mais cela reste un état à dimension réduite. Aussi dans les autres méthodes présentées, la SUT et l'interpolation de Stirling, l'estimation n'est bonne que pour des états à faible dimension.

Dans [Aras 09], les auteurs ont proposé des règles de cubature pour approcher les intégrales du filtre Bayésien. La formulation du problème est la même que dans le cas de la quadrature de Gauss-Hermite [Aras 07] et la solution est très similaire. La différence réside dans la façon dont on calcule les points et poids pour approcher numériquement les intégrales (dans ce cas appelés points et poids de cubature) et le nombre de points nécessaire.

L'idée est de profiter de la symétrie des densités Gaussiennes pour réduire énormément le nombre de points à évaluer pour des états à grande dimension. Cela laisse envisager des implémentations en temps réel. Dans la suite, on présente brièvement l'approche cubature de [Aras 09].

On cherche à approcher l'intégrale du produit d'une fonction arbitraire par une densité Gaussienne,

$$I(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{x}\mathbf{x}^T} d\mathbf{x} \quad (2.71)$$

Si l'on prend  $\mathbf{x} = r\mathbf{y}$ , où  $r$  est un rayon et  $\mathbf{y}$  un vecteur directeur, avec  $\mathbf{y}^T\mathbf{y} = 1$  et  $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = r^2$  pour  $r \in [0, \infty)$ , on peut réécrire l'intégrale (eq.(2.71)) sous une forme sphérique

$$I(\mathbf{f}) = \int_0^\infty \int_{U_n} \mathbf{f}(r\mathbf{y}) r^{n-1} e^{-r^2} d\sigma(\mathbf{y}) dr \quad (2.72)$$

$$= \int_0^\infty S(r) r^{n-1} e^{-r^2} dr \quad (2.73)$$

où la surface de la sphère est définie comme  $U_n = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_x} | \mathbf{y}^T\mathbf{y} = 1\}$  et  $\sigma(\cdot)$  est la mesure de surface. L'intégrale (2.73) est une intégrale radiale, et  $S(r)$  est une intégrale sphérique avec fonction de pondération  $\mathbf{w}(\mathbf{y}) = 1$ ,

$$S(r) = \int_{U_n} \mathbf{f}(r\mathbf{y}) d\sigma(\mathbf{y}) \quad (2.74)$$

L'idée est de calculer l'intégrale radiale avec une méthode de quadrature Gaussienne, et l'intégrale sphérique avec une règle de cubature sphérique qui profite de la symétrie de la densité Gaussienne pour réduire la nombre de points à évaluer. Dans [Aras 09], les auteurs argumentent le fait qu'une règle symétrique de troisième ordre est suffisante.

On définit :

- Dans une région complètement symétrique, on appelle un point  $\mathbf{q}$  un générateur, si  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n_x}$ , avec  $q_i \geq q_{i+1} > 0$ ,  $i = 1, \dots, (r-1)$ .
- On note  $[q_1, q_2, \dots, q_r]$  l'ensemble de points complètement symétriques, obtenus à partir de toutes les permutations et changements de signes possibles du générateur.
- $[q_1, q_2, \dots, q_r]_i$  représente le  $i$ -ème élément de l'ensemble  $[q_1, q_2, \dots, q_r]$ .
- Exemple : l'ensemble de points  $[1] \in \mathbb{R}^2$ , est

$$\{[1, 0], [0, 1], [-1, 0], [0, -1]\}$$



**Règle sphéro-radiale :** on suppose que l'on calcule l'intégrale radiale à partir de  $m_r$  points de quadrature, et l'intégrale sphérique, à partir de  $m_s$  points de cubature,

$$\int_0^\infty f(r)r^{n_x-1}e^{-r^2}dr \approx \sum_{i=1}^{m_r} a_i f(r_i) \quad (2.75)$$

$$\int_{U_n} \mathbf{f}(r\mathbf{s})d\sigma(\mathbf{s}) \approx \sum_{j=1}^{m_s} b_j \mathbf{f}(r\mathbf{s}_j) \quad (2.76)$$

Alors une règle sphéro-radiale de cubature qui utilise  $(m_s \times m_r)$  points, s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})e^{-\mathbf{x}^T\mathbf{x}}d\mathbf{x} \approx \sum_{j=1}^{m_s} \sum_{i=1}^{m_r} a_i b_j \mathbf{f}(r_i \mathbf{s}_j) \quad (2.77)$$

En faisant un changement de variable on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathcal{N}(\mathbf{x}; \mu, \Sigma) d\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{\pi^{n_x}}} \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{f}(\sqrt{2\Sigma}\mathbf{x} + \mu)e^{-\mathbf{x}^T\mathbf{x}}d\mathbf{x} \quad (2.78)$$

Si l'on particularise le résultat pour la règle de cubature sphéro-radiale de troisième ordre (voir l'annexe C), on a  $m_r = 1$  et  $m_s = 2n_x$ , alors le nombre total de points de cubature est  $m = 2n_x$ , et l'on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathcal{N}(\mathbf{x}; \mathbf{0}, \mathbf{I}) d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^m w_i \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}_i) \quad (2.79)$$

avec

$$\boldsymbol{\xi}_i = \sqrt{\frac{m}{2}}[1]_i$$

$$w_i = \frac{1}{m}, \quad i = 1, \dots, m$$

Avec cette approximation, on obtient une estimation de la moyenne et la covariance d'une variable aléatoire qui a subi une transformation non-linéaire de la même façon qu'avec les règles de quadrature de Gauss-Hermite.

## 2.4.4 Approximation du filtre Bayésien

Dans cette section, on présente séparément les différentes méthodes que l'on trouve dans la littérature : le UKF, le CDKF, le QKF et le CKF. Chacune de ces méthodes correspond à l'utilisation d'une des approches présentées dans la section précédente.

### 2.4.4.1 Unscented Kalman Filter

L'*Unscented Kalman Filter* est l'application directe de la SUT (voir section 2.4.3.1), à la solution du filtre Bayésien sous l'hypothèse Gaussienne (voir section 2.4.2). On utilise la SUT pour la propagation de la moyenne et la covariance dans la solution de Kalman.

Pour obtenir l'UKF, on calcule les points déterministes,  $\mathcal{X}_i$ , et leurs poids associés, avec la méthode SUT (eq. (2.47)), et l'on introduit le calcul des moyennes et covariances que l'on a développé pour approcher la solution du filtre Bayésien sous l'hypothèse Gaussienne. On résume la méthode pour le modèle avec des bruits additifs Gaussiens dans l'algorithme 9 (voir l'annexe D).

### 2.4.4.2 Central Difference Kalman Filter

Le CDKF applique la méthode d'interpolation de Stirling (voir section 2.4.3.2) à la solution du filtre Bayésien sous l'hypothèse Gaussienne. On verra que la formulation est très similaire à celle que l'on obtient avec l'UKF.

On a vu que dans la méthode d'interpolation de Stirling, les fonctions sont évaluées aux points déterministes suivants

$$\bar{\mathbf{x}} \pm h\mathbf{s}_{x_i} \quad (2.80)$$

où  $\mathbf{s}_{x_i}$  est la  $i$ -ème colonne de la racine-carrée de la matrice de covariance de  $\mathbf{x}$ . On peut définir l'ensemble d'échantillons déterministes suivant,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_0 &= \bar{\mathbf{x}} & i &= 0 & w_0^{(m)} &= \frac{h^2 - n_x}{h^2} \\ \mathcal{X}_i &= \bar{\mathbf{x}} + \left[ h\sqrt{\mathbf{P}_x} \right]_i & i &= 1, \dots, n_x & w_i^{(m)} &= \frac{1}{2h} & i &= 1, \dots, 2n_x \\ \mathcal{X}_i &= \bar{\mathbf{x}} - \left[ h\sqrt{\mathbf{P}_x} \right]_i & i &= n_x + 1, \dots, 2n_x & w_i^{(c1)} &= \frac{1}{4h^2} & i &= 1, \dots, 2n_x \\ & & & & w_i^{(c2)} &= \frac{h^2 - 1}{4h^4} & i &= 1, \dots, 2n_x \end{aligned} \quad (2.81)$$

Comme dans le cas de la transformation SUT, on peut propager chaque échantillon au travers de la fonction non-linéaire pour générer l'ensemble des points suivants

$$\mathcal{Y}_i = \mathbf{h}_{NL}(\mathcal{X}_i) \quad i = 0, \dots, 2n_x \quad (2.82)$$

On peut réécrire l'estimation des statistiques de la variable aléatoire transformée,  $\mathbf{y}$ , de la manière suivante [Merw 04]

$$\bar{\mathbf{y}} \approx \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(m)} \mathcal{Y}_i \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_y &\approx \sum_{i=0}^{n_x} w_i^{(c1)} [\mathcal{Y}_i - \mathcal{Y}_{i+n_x}] [\mathcal{Y}_i - \mathcal{Y}_{i+n_x}]^T \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n_x} w_i^{(c2)} [\mathcal{Y}_i + \mathcal{Y}_{i+n_x} - 2\mathcal{Y}_0] [\mathcal{Y}_i + \mathcal{Y}_{i+n_x} - 2\mathcal{Y}_0]^T \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\mathbf{P}_{xy} \approx \sum_{i=0}^{n_x} w_i^{(m)} [\mathcal{X}_i - \bar{\mathbf{x}}] [\mathcal{Y}_i - \mathcal{Y}_{i+n_x}]^T \quad (2.85)$$

On note que cette formulation ressemble beaucoup à celle de la SUT. Si l'on compare les deux approches, on voit que l'on a seulement une différence dans la façon de calculer la matrice de covariance. La SUT utilise une formulation indirecte (on utilise la valeur estimée de la moyenne pour calculer la covariance), et la formule d'interpolation de Stirling utilise une formulation directe (la covariance est une fonction directe des points transformés). On résume le CDKF pour le modèle avec des bruits additifs Gaussiens dans l'algorithme 10 (voir l'annexe D).

### 2.4.4.3 Quadrature Kalman Filter

Le Quadrature Kalman Filter a été proposé la première fois par Ito [Ito 00], et quelques années plus tard a été reformulé à partir d'une approche régression statistique linéaire, par Arasaratnam et Haykin [Aras 07]. Ce filtre utilise la méthode de quadrature de Gauss-Hermite pour calculer les intégrales du filtre Bayésien Gaussien.

On considère d'abord un modèle sans bruit, et l'on ajoutera l'effet de celui-ci à la fin. On suppose qu'à l'instant  $k-1$ , on a une estimation de l'état,  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ , et de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation,  $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$ . On calcule un ensemble de  $m$  points et poids de quadrature, selon la règle de Gauss-Hermite, qui approchent une densité Gaussienne centrée et réduite,  $\{\boldsymbol{\xi}_i, w_i\}$ . À partir des points de quadrature, on peut calculer un nouvel ensemble de points, de façon que leur moyenne et covariance soient  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$  et  $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$ ,

$$\mathcal{X}_{i,k-1|k-1} = \sqrt{\mathbf{P}_{k-1|k-1}} \boldsymbol{\xi}_i + \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.86)$$

Comme on a fait avec l'UKF et le CDKF, on passe chaque échantillon déterministe au travers la fonction de transition de l'état, pour obtenir la prédiction

$$\tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{i,k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \quad i = 1, \dots, m \quad (2.87)$$

On a vu dans la section 2.4.3.3, que l'on peut faire une estimation de la prédiction de l'état, et de la matrice de covariance de l'erreur de prédiction

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} \quad (2.88)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i \left( \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \left( \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right)^T \quad (2.89)$$

Si l'on rajoute l'effet du bruit, la prédiction de l'état est la même, car le bruit est centré, et la matrice de covariance de l'erreur de prédiction s'écrit

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1}^T - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T + \mathbf{Q}_k \quad (2.90)$$

Pour calculer la mise à jour de la prédiction, avec la nouvelle observation, on suit la même procédure. On calcule un nouvel ensemble d'échantillons

$$\mathcal{X}_{i,k|k-1} = \sqrt{\mathbf{P}_{k|k-1}} \boldsymbol{\xi}_i + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.91)$$

que l'on propage au travers de la fonction d'observation

$$\tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{i,k|k-1}, \mathbf{u}_k) \quad i = 1, \dots, m \quad (2.92)$$

Si l'on linéarise le modèle d'observation et l'on applique la SLR [Aras 07], on peut obtenir une estimation de la prédiction de l'observation, de la covariance de l'erreur de prédiction et de la covariance croisée

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} \quad (2.93)$$

$$\mathbf{P}_{yy,k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1}^T - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T + \mathbf{R}_k \quad (2.94)$$

$$\mathbf{P}_{xy,k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i \mathcal{X}_{i,k|k-1} \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1}^T - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T \quad (2.95)$$

Avec ces approximations, il nous reste seulement à appliquer les équations de la correction du filtre de Kalman (eqs. (2.40,2.41,2.42)). On voit que cette formulation est très similaire à celle de l'UKF ou le CDKF. On note que dans le cas du QKF, le nombre d'échantillons est  $m = \alpha^{n_x}$ , où  $\alpha$  est le nombre de points par dimension. On voit que le nombre d'échantillons augmente beaucoup plus rapidement avec la dimension de l'état dans le QKF que dans les autres méthodes, qui utilisent  $(2n_x + 1)$  points. On résume le filtre dans l'algorithme 11 (voir annexe).

Étant donné que la génération des points de quadrature, n'est pas tout à fait simple pour un cas multidimensionnel, on résume la procédure dans l'algorithme 7 (voir annexe). Le symbole  $\otimes$  est le produit de Kronecker pour des tenseurs, et  $\mathbf{A}_{1:i,:}$  fait référence aux  $i$  premières lignes de la matrice  $\mathbf{A}$ .

#### 2.4.4.4 Cubature Kalman Filter

Le Cubature Kalman Filter est une application directe de la règle de cubature sphéro-radiale de troisième ordre développée dans la section 2.4.3.4. La structure du filtre est exactement la même que celle du QKF présenté dans la section 2.4.4.3, mais au lieu d'utiliser les points et poids de quadrature, on utilise les points et poids de cubature. On note que dans ce cas on utilise  $m = 2n_x$  points de cubature, ce qui est similaire au nombre de points utilisés dans l'UKF ou le CDKF, et moindre comparé avec le nombre d'échantillons que l'on utilise dans le QKF. Le filtre est résumé dans l'algorithme 11 (voir l'annexe D). Dans l'algorithme 8 (voir l'annexe D), on a résumé le calcul des points et poids de cubature.

#### 2.4.5 Vision d'ensemble des méthodes déterministes

Dans cette section, on donne une vision d'ensemble des méthodes que l'on a présenté dans les sections précédentes : UKF, CDKF, QKF et CKF ; et avec cela on boucle la synthèse des méthodes déterministes. On verra que toutes ces méthodes ont la même structure et qu'elles peuvent être regroupées sous une même forme. On compare aussi les différents ensembles d'échantillons.

##### 2.4.5.1 Méthode déterministe globale

On a présenté dans la section 2.4.3 les différentes approches existantes dans la littérature pour la construction de méthodes déterministes, et dans la section 2.4.4 on a vu la construction de chacune de ces méthodes.

Si l'on regarde les algorithmes que l'on a résumé dans l'annexe D (UKF, CDKF, QKF et CKF), on peut voir que ces méthodes suivent une même structure. On présente dans la suite la structure globale des méthodes déterministes :

##### Structure schématique des méthodes déterministes

- Initialisation
- Itération  $k$ 
  - Prédiction
    1. Calcul d'un ensemble d'échantillons déterministes, à partir de l'estimation de l'état et de la matrice de covariance disponible de l'itération précédente
    2. Propagation des échantillons au travers de la fonction d'état
    3. Estimation de la prédiction de l'état ( $k|k-1$ )
    4. Estimation de la matrice de covariance de l'erreur de prédiction de l'état
- Correction

1. Calcul d'un nouvel ensemble d'échantillons déterministes. On utilise l'estimation de l'état et l'estimation de la matrice de covariance obtenues dans l'étape de prédiction.
2. Propagation des échantillons au travers la fonction d'observation
3. Estimation de la prédiction de l'observation
4. Estimation de la matrice de covariance de l'erreur de prédiction de l'observation
5. Estimation de la matrice de covariance croisée entre l'observation et l'état
6. Calcul du gain de Kalman
7. Correction de l'état ( $k|k$ )
8. Correction de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation de l'état

On note que l'étape qui fait la plus grande différence entre les différentes méthodes, est le calcul de l'ensemble d'échantillons déterministes dans les étapes de prédiction et de correction, car ce calcul dépend de l'approche adoptée (voir section 2.4.3). Dans la suite on détaille les différences précises entre méthodes dans cette structure globale.

**Initialisation :** pour les quatre méthodes on a la même initialisation dans laquelle on détermine l'état initial et sa matrice de covariance. De plus, on calcule les poids  $w_i$  selon l'approche adoptée. Pour les méthodes QKF et CKF on rajoute dans cette étape le calcul des échantillons  $\{\xi_i\}$  selon les algorithmes 7 et 8.

**Calcul des échantillons pour l'étape de prédiction :** selon l'approche adoptée, on utilisera une méthode différente pour calculer l'ensemble de  $m$  échantillons déterministes. La valeur de  $m$  dépend de chaque méthode. Pour calculer cet ensemble, on utilise l'équation (2.47) pour l'UKF, l'équation (2.81) pour le CDKF, et pour le QKF et le CKF, on utilise l'équation (2.86) avec l'ensemble  $\{\xi_i, w_i\}$  correspondant. Dans cette étape, on utilise l'estimation de l'état  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ , et de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation  $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$ , disponibles à l'itération précédente ( $k-1$ ).

**Propagation :** on propage les échantillons au travers de la fonction non-linéaire d'état, pour obtenir un ensemble d'échantillons image. Cette étape est la même pour toutes les méthodes,

$$\tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{i,k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \quad i = 1, \dots, m \quad (2.96)$$

**Estimation de la prédiction de l'état :** cette étape est la même pour les quatre méthodes,

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} \quad (2.97)$$

**Estimation de la matrice de covariance :** pour estimer la matrice de covariance de l'erreur de prédiction on a deux expressions différentes. Pour l'UKF, le QKF et le CKF, on calcule cette matrice selon

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1}^T - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T + \mathbf{Q} \quad (2.98)$$

et dans le CDKF on utilise une expression un peu différente

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k-1} = & \sum_{i=1}^{n_x} \left[ w_i^{(c_1)} \left( \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} - \tilde{\mathcal{X}}_{n_x+i,k|k-1} \right)^2 \right. \\ & \left. + w_i^{(c_2)} \left( \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} + \tilde{\mathcal{X}}_{n_x+i,k|k-1} - 2\tilde{\mathcal{X}}_{0,k|k-1} \right)^2 \right] + \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (2.99)$$

**Calcul des échantillons pour l'étape de correction :** pour calculer le nouvel ensemble d'échantillons pour l'étape de correction, on utilise les mêmes expressions qu'à l'étape de prédiction, sauf que l'on utilise les valeurs obtenues dans l'étape de prédiction,  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$  et  $\mathbf{P}_{k|k-1}$ .

**Propagation :** on propage les échantillons au travers de la fonction non-linéaire d'observation. Cette étape est la même pour toutes les méthodes,

$$\tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} = \mathbf{h}(\mathcal{X}_{i,k|k-1}, \mathbf{u}_k) \quad i = 1, \dots, m \quad (2.100)$$

**Estimation de la prédiction de l'observation :** comme dans l'étape de prédiction, l'estimation de la prédiction de l'observation est la même pour toutes les méthodes,

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} \quad (2.101)$$

**Estimation de la matrice de covariance :** pour estimer la matrice de covariance de l'erreur de prédiction de l'observation on a deux expressions différentes. Pour l'UKF, le QKF et le CKF, on calcule cette matrice selon

$$\mathbf{P}_{yy,k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1}^T - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T + \mathbf{R} \quad (2.102)$$

et dans le CDKF on utilise une expression un peu différente

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{yy,k|k-1} = & \sum_{i=1}^{n_x} \left[ w_i^{(c_1)} \left( \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} - \tilde{\mathcal{Y}}_{n_x+i,k|k-1} \right)^2 \right. \\ & \left. + w_i^{(c_2)} \left( \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} + \tilde{\mathcal{Y}}_{n_x+i,k|k-1} - 2\tilde{\mathcal{Y}}_{0,k|k-1} \right)^2 \right] + \mathbf{R} \end{aligned} \quad (2.103)$$

**Estimation de la matrice de covariance croisée :** pour estimer la matrice de covariance croisée, comme pour la matrice de covariance de l'erreur de prédiction, on a deux expressions différentes. Pour l'UKF, le QKF et le CKF, on calcule cette matrice selon

$$\mathbf{P}_{xy,k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i \mathcal{X}_{i,k|k-1} \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1}^T - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T \quad (2.104)$$

et dans le CDKF on utilise une expression un peu différente

$$\mathbf{P}_{xy,k|k-1} = \sqrt{w_1^{(c_1)} \mathbf{P}_{k|k-1}} \left[ \tilde{\mathcal{Y}}_{1:n_x,k|k-1} - \tilde{\mathcal{Y}}_{n_x+1:2n_x,k|k-1} \right]^T \quad (2.105)$$

**Solution de Kalman :** le calcul du gain de Kalman, et les équations de correction de l'estimation de l'état et de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation, sont les mêmes pour toutes les méthodes (eqs. (2.40,2.41,2.42)).

On résume cette méthode dans l'algorithme 4. Avec cela on a une méthode déterministe globale, qui englobe toutes les méthodes présentées précédemment. Dans la suite on donne quelques similarités entre les différents ensembles d'échantillons déterministes.

---

**Algorithm 4** Méthode déterministe globale

---

**Require:** Les observations  $\mathbf{y}$ , les entrées  $\mathbf{u}$ , l'état initial  $\mathbf{x}_0$ , la covariance de l'état initial  $\mathbf{P}_0$ , et les statistiques des bruit d'état et d'observation,  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$ .

- 1: Fixer  $\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{P}_{0|0} = \mathbf{P}_0$
- 2: Déterminer le nombre d'échantillons  $m$ , en fonction de la dimension de l'état  $n_x$  et du nombre d'échantillons par dimension  $\alpha$ .
- 3: Calculer un ensemble de poids  $\{w_i\}$ , selon l'approche adoptée.
- 4: Si l'on implémente le QKF ou le CKF, calculer un ensemble de points de quadrature  $\{\xi_i\}$ , selon l'algorithme 7 ou 8, respectivement.
- 5: **for**  $k = 1$  to  $\infty$  **do**

6: **Prédiction**

- 7: Calcul des échantillons pour l'étape de prédiction selon l'approche adoptée ( eq. (2.47) pour l'UKF, eq. (2.81) pour le CDKF, et eq. (2.86) pour le QKF et le CKF), avec  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$  et  $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$  :  $\{\mathcal{X}_{i,k-1|k-1}, i = 1, \dots, m\}$ .
- 8: Propagation des échantillons au travers de la fonction d'état

$$\tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{i,k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \quad i = 1, \dots, m \quad (2.106)$$

- 9: Estimation de la prédiction de l'état

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} \quad (2.107)$$

- 10: Estimation de la matrice de covariance de l'erreur de prédiction de l'état  $\mathbf{P}_{k|k-1}$ , avec l'équation correspondante selon l'approche adoptée : eq. (2.98) ou eq. (2.99).

11: **Correction**

- 12: Calcul des échantillons pour l'étape de prédiction selon l'approche adoptée ( eq. (2.47) pour l'UKF, eq. (2.81) pour le CDKF, et eq. (2.86) pour le QKF et le CKF), avec  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$  et  $\mathbf{P}_{k|k-1}$  :  $\{\mathcal{X}_{i,k|k-1}, i = 1, \dots, m\}$ .
- 13: Propagation des échantillons au travers de la fonction d'observation :

$$\tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} = \mathbf{h}(\mathcal{X}_{i,k|k-1}, \mathbf{u}_k) \quad i = 1, \dots, m \quad (2.108)$$

- 14: Estimation de la prédiction de l'observation

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} \quad (2.109)$$

- 15: Estimation de la matrice de covariance de l'erreur de prédiction de l'observation  $\mathbf{P}_{yy,k|k-1}$ , avec l'équation correspondante selon l'approche adoptée : eq. (2.102) ou eq. (2.103).
- 16: Estimation de la matrice de covariance croisée  $\mathbf{P}_{xy,k|k-1}$ , avec l'équation correspondante selon l'approche adoptée : eq. (2.104) ou eq. (2.105).
- 17: Correction de l'état et de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation avec la solution de Kalman :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) \quad (2.110)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{yy,k|k-1} \mathbf{K}_k^T \quad (2.111)$$

avec le gain de Kalman  $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xy,k|k-1} \mathbf{P}_{yy,k|k-1}^{-1}$ .

- 18: **end for**
-

### 2.4.5.2 Comparaison des ensembles d'échantillons

Chacun des ensembles que l'on a présenté dans la section 2.4.3 est construit à partir de bases théoriques distinctes mais certains points coïncident. On note que sous certaines conditions les différentes formulations donnent lieu au même ensemble.

Pour une dimension de l'état  $n_x = 1$  et  $\kappa = 2$ , l'ensemble UKF coïncide avec celui généré par le QKF [Ito 00]. L'ensemble UKF coïncide aussi avec l'ensemble CKF si l'on considère  $\kappa = 0$ , mais la justification théorique n'existait pas jusqu'au développement du CKF [Aras 09]. Dans d'autres conditions, on peut trouver des valeurs pour lesquelles les points coïncident mais les poids sont différents.

### 2.4.6 Version racine-carrée des méthodes déterministes

Dans les sections précédentes, on a vu comment construire l'UKF à partir de la SUT, le CDKF en utilisant les formules d'interpolation de Stirling, et les QKF/CKF avec les méthodes de quadrature et cubature. Ensuite on a vu que toutes ces méthodes ont des points en commun, et c'est pour cela que l'on les classe dans la même famille : les méthodes déterministes.

Du point de vue de la stabilité numérique des méthodes déterministes, le point clé est le calcul de la racine-carrée de la matrice de covariance à chaque itération. Une matrice de covariance est symétrique et définie positive, et ce sont deux propriétés qu'il faut conserver pour avoir un filtre stable.

Dans les solutions déterministes, le calcul de la racine-carrée de la matrice de covariance, l'inversion de cette matrice ou la soustraction de deux matrices définies positives, peut provoquer que les matrices de covariance deviennent non-symétriques ou non-définies positives et cela peut impliquer la divergence des filtres. Les solutions à ces problèmes sont les solutions racine-carrée des méthodes déterministes.

L'idée des versions racine-carrée est de propager la racine-carrée des matrices de covariance dans les étapes de prédiction et correction, au lieu de propager la matrice de covariance directement. Cela implique la conservation des propriétés des matrices et une meilleure précision numérique. On note que d'un point de vue algébrique la version standard et la version racine-carrée sont équivalentes.

Il existe des versions racine-carrée des quatre méthodes déterministes [Merw 04, Aras 08, Aras 09], que l'on nomme SUKF, SCDKF, SQKF et SCKF. Étant donné que les deux filtres qui obtiennent des meilleurs performances sont le QKF et le CKF, on ne présente que la version racine-carrée de ces deux filtres.

On définit  $\mathbf{S} = \mathbf{Tri}(\mathbf{A})$  comme une méthode de triangulation générale (par exemple, une décomposition QR), où  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ,  $p < q$ , et  $\mathbf{S}$  est une matrice triangulaire inférieure. On veut avoir une matrice racine-carrée triangulaire de dimension  $p \times p$  pour des facilités de calcul. On peut assurer cela, par exemple, avec une décomposition QR. Si la matrice  $\mathbf{A}^T$  est décomposée en deux matrices, une matrice orthogonale  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{q \times p}$  et une matrice triangulaire supérieure  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , telles que  $\mathbf{A}^T = \mathbf{QR}$ , la matrice de covariance  $\mathbf{P}$  peut s'écrire

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{R} = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{S}\mathbf{S}^T \quad (2.112)$$

avec  $\mathbf{S} = \mathbf{R}^T$ .

Cette structure triangulaire rend possible la substitution en arrière ou en avant, à la place de l'inversion d'une matrice. On note cette opération “/”, qui fait référence à une substitution en arrière pour une matrice triangulaire supérieure et substitution en avant pour une matrice triangulaire inférieure. On résume la version racine-carrée des méthodes QKF et CKF, dans l'algorithme 5.



**Algorithm 5** Square-root Quadrature/Cubature Kalman Filter (SQKF/SCKF)

**Require:** Les observations  $\mathbf{y}$ , l'état initial  $\mathbf{x}_0 = \hat{\mathbf{x}}_{0|0}$ , la covariance de l'état initial  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{S}_{0|0}\mathbf{S}_{0|0}^T$ , et les statistiques des bruit d'état et d'observation,  $\mathbf{Q}_k$  et  $\mathbf{R}_k$ .

1: Calculer un ensemble de points et poids de quadrature,  $\{\xi_i, w_i\}$ , selon l'algorithme 7 ou 8, selon si l'on implémente le QKF ou le CKF.

2: Fixer  $\mathbf{W} = \text{diag}(\sqrt{w_i})$

3: **for**  $k = 1$  to  $\infty$  **do**

4: **Prédiction :**

5: Évaluation des échantillons :

$$\mathcal{X}_{i,k-1|k-1} = \mathbf{S}_{x,k-1|k-1}\xi_i + \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \quad i = 1, \dots, m.$$

6: Évaluation des échantillons propagés :

$$\tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{i,k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}).$$

7: Estimation de la prédiction de l'état :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1}.$$

8: Estimation de la racine-carrée de covariance de l'erreur de prédiction :

$$\mathbf{S}_{k|k-1} = \mathbf{Tria} \left( \left[ \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1} \vdots \mathbf{S}_{\mathbf{Q}_{k-1}} \right] \right), \quad \text{où :}$$

$\mathbf{S}_{\mathbf{Q}_{k-1}}$  est la racine-carrée de la matrice  $\mathbf{Q}_{k-1}$ , et

$$\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{X}}_{1,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} & \cdots & \tilde{\mathcal{X}}_{m,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \end{bmatrix} \mathbf{W}.$$

9: **Correction :**

10: Évaluation des échantillons pour la correction :

$$\mathcal{X}_{i,k|k-1} = \mathbf{S}_{k|k-1}\xi_i + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \quad i = 1, \dots, m.$$

11: Évaluer les échantillons propagés :

$$\tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} = \mathbf{h}(\mathcal{X}_{i,k|k-1}, \mathbf{u}_k).$$

12: Estimer la prédiction de l'observation :

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1}.$$

13: Estimer la racine-carrée de la matrice de covariance de l'innovation :

$$\mathbf{S}_{y,k|k-1} = \mathbf{Tria} \left( \left[ \mathbf{Y}_{k|k-1} \vdots \mathbf{S}_{\mathbf{R}_k} \right] \right), \quad \text{où :}$$

$\mathbf{S}_{\mathbf{R}_k}$  est la racine-carrée de la matrice  $\mathbf{R}_k$ , et

$$\mathbf{Y}_{k|k-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{Y}}_{1,k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} & \cdots & \tilde{\mathcal{Y}}_{m,k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \end{bmatrix} \mathbf{W}.$$

14: Estimer la matrice de covariance croisée :

$$\mathbf{P}_{xy,k|k-1} = \mathbf{X}_{k|k-1}\mathbf{Y}_{k|k-1}^T, \quad \text{où :}$$

$$\mathbf{X}_{k|k-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{1,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} & \cdots & \mathcal{X}_{m,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \end{bmatrix} \mathbf{W}.$$

15: Estimer le gain de Kalman :

$$\mathbf{K}_k = \left( \Sigma_{xy,k|k-1} / \mathbf{S}_{y,k|k-1}^T \right) / \mathbf{S}_{y,k|k-1}.$$

16: Correction de l'état :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}).$$

17: Estimer la racine carrée de la correction de la matrice de covariance de l'erreur :

$$\mathbf{S}_{k|k} = \mathbf{Tria} \left( \left[ \mathbf{X}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{Y}_{k|k-1} \vdots \mathbf{K}_k \mathbf{S}_{\mathbf{R}_k} \right] \right).$$

18: **end for**

## 2.5 Bornes Bayésiennes

Cette section donne une brève introduction aux bornes Bayésiennes. On donne un état de l'art et l'on présente la théorie de base pour la famille des bornes de Cramér-Rao, qui sont les plus utilisées en traitement du signal, et celles que l'on utilise dans cette thèse comme référence.

### 2.5.1 Introduction

Les problèmes d'estimation sont présents dans presque tous les domaines scientifiques et en particulier dans les systèmes de communication numérique. Dans des problèmes de synchronisation, il faut estimer des délais et des décalages de phase et de fréquence. En radiocommunication, il faut estimer le canal de propagation. Dans des systèmes de navigation, il faut estimer la position d'un récepteur mobile, etc.

Un point crucial dans les problèmes d'estimation est l'obtention de bornes minimales de performance, qui nous servent comme référence pour savoir si l'on a un "bon" estimateur ou non.

Il y a deux approches possibles pour caractériser les problèmes d'estimation :

- Estimation classique, non-Bayésienne : on suppose que les paramètres à estimer sont des inconnus déterministes.
- Estimation Bayésienne : on suppose que les paramètres à estimer sont des variables aléatoires avec une densité de probabilité *a priori*, ou des paramètres déterministes pour lesquels on a une information *a priori*. Dans cette catégorie on peut inclure l'estimation *hybride*, adapté au mélange de paramètres aléatoires et déterministes.

On appelle bornes Bayésiennes, les bornes associées à un problème d'estimation Bayésienne. Une très bonne synthèse des bornes Bayésiennes a été faite récemment par Van Trees et Bell [Tree 07]. Dans le calcul des bornes minimales Bayésiennes on peut distinguer deux familles

1. Bornes basées sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz (famille de Weiss-Weinstein)
2. Bornes basées sur l'inégalité de Kotelnikov (famille de Ziv-Zakai)

On cite deux thèses dédiées à l'étude de ces deux familles, que l'on peut consulter pour avoir une analyse très complète des bornes minimales : la thèse de Renaux sur la famille Weiss-Weinstein [Rena 06] et la thèse de Bell pour la famille de Ziv-Zakai [Bell 95].

### 2.5.2 État de l'art

Dans la suite on donne l'état de l'art des bornes Bayésiennes les plus représentatives.

#### Bornes classiques

Avant les années 60, plusieurs bornes minimales, sur l'erreur quadratique minimale, pour l'estimation des paramètres déterministes étaient apparues et déjà devenues classiques. Ces bornes étaient toutes basées sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Par exemple, la borne de Cramér-Rao (CRB) [Tree 68] et la borne de Bhattacharyya [Bhat 46, Tree 68] pour de petites erreurs, ou la borne de Barankin [Bara 49] et la borne de Hammersley-Chapman-Robbins [Hamm 50, Chap 51], qui est la variante la plus souvent utilisée de la borne de Barankin.

Une des bornes les plus utilisées est la CRB. Toutes les autres bornes (la borne de Bhattacharyya, la borne de Barankin et la borne de Hammersley-Chapman-Robbins) convergent vers celle-ci dans la région d'erreurs faibles (fort SNR). Dans la région d'erreurs fortes, les estimateurs ne peuvent pas atteindre la CRB, qui n'est pas une bonne borne dans ces conditions. C'est pour cela que d'autres bornes ont été établies, afin d'offrir des résultats plus précis dans les régions d'erreurs fortes. On dit qu'une borne est précise si elle approche bien les performances limites de l'estimateur.

### Bornes Bayésiennes

On peut situer le début des bornes Bayésiennes à la fin des années 60, de la main de Van Trees, qui a établi la version Bayésienne de la borne de Cramér-Rao (BCRB) et de la borne de Bhattacharyya (BBHB) [Tree 68].

Dans la même période, Ziv et Zakai ont établi la borne qui est la base d'une nouvelle famille [Ziv 69], la borne de Ziv-Zakai (ZZB). Cette borne relie l'erreur d'estimation avec la probabilité d'erreur dans un problème de décision.

Dans les années suivantes, les bornes Bayésiennes (pour les deux familles : Weiss-Weinstein et Ziv-Zakai) ont continué à évoluer, et beaucoup de nouveaux résultats ont été publiés. Bobrovsky et Zakai, ont proposé la version Bayésienne de la borne de Barankin, la borne Bobrovsky-Zakai (BZB) [Bobr 75, Bobr 76]. Weiss et Weinstein ont établi une borne qui généralise les bornes basées sur l'inégalité de la covariance, la borne de Weiss-Weinstein (WWB) [Weis 85, Wein 88b]. La BCRB et la BZB sont des cas particuliers de la WWB. Au même moment, Bobrovsky *et al.* [Bobr 87] ont proposé une borne Bayésienne de Cramér-Rao pondérée (Weighted BCRB), qui est une version améliorée de la BCRB.

Bellini et Tartara [Bell 74] et Weinstein [Wein 88a] ont proposé des extensions de la ZZB, mais la plus significative est la borne déterminée par Bell *et al.* [Bell 97, Bell 95], qui est une extension de la ZZB adaptée à des paramètres vectoriels avec une distribution *a priori* arbitraire.

La combinaison de bornes (mélange de plusieurs types de bornes) Bayésiennes avait déjà été étudié par Weiss dans sa thèse, mais récemment a été reprise par Renaux [Rena 06, Rena 08], qui a étudié la version Bayésienne de la borne de Abel (BAB) [Abel 93]. Dans [Bell 06] on trouve aussi la combinaison de différentes bornes.

**Formes récursives :** le premier article qui a proposé une borne Bayésienne récursive est [Tich 98]. Cette borne a été étendue aux problèmes de lissage et prédiction [Sima 01]. Dans [Bell 06], les auteurs proposent une borne combinée récursive. Il faut aussi citer des articles récents, qui ont déterminé les versions récursives des bornes WWB, BBZ et BBHB [Rapo 07a, Rapo 07b, Reec 05].

**Formes simplifiées :** généralement, les bornes Bayésiennes sont très difficiles à calculer, et c'est pour résoudre ce problème qu'une borne de Cramér-Rao modifiée (MCRB) a été proposée [DAnd 94, Gini 98]. Cette borne est normalement moins précise que la CRB, mais équivalente à haut SNR. La version Bayésienne de cette borne (BMCRB) a été étudiée dans [Bobr 87]. Pour le cas d'un mélange de paramètres déterministes et aléatoires, une borne *hybride* a été proposée (HCRB) [Tree 07, Bay 08a]. Une autre variante intéressante est la BCRB *asymptotique* (ABCRB) [Bay 08b], qui est une combinaison des BCRB à haut et bas SNR. Cette borne est moins précise que la BCRB, mais meilleure que la MBCRB.

### 2.5.3 Bornes de Cramér-Rao

La famille des bornes de Cramér-Rao (CRBs) est la famille des bornes la plus utilisée en traitement de signal, à cause de sa (relative) simplicité de calcul par rapport aux autres bornes de la famille de Weiss-Weinstein.

On note que l'on peut considérer deux cas d'estimation :

- Estimation *en-ligne* : on utilise, pour estimer le paramètre à l'instant courant  $\boldsymbol{\mu}_k$ , toutes les observations obtenues jusqu'à ce moment,  $\mathbf{y}_{1:k}$ .
- Estimation *hors-ligne* : on veut faire une estimation par bloc. On attend la réception de tout le bloc,  $\mathbf{y}_{1:K}$ , pour estimer le bloc de paramètres,  $\boldsymbol{\mu}_{1:K}$

### 2.5.3.1 Borne de Cramér-Rao standard et modifiée

On a un ensemble d'observation  $\mathbf{y}$  et l'on veut estimer un vecteur de paramètres déterministes  $N$ -dimensionnel  $\boldsymbol{\mu}$ . On note  $\boldsymbol{\mu}^*$  la valeur effective du paramètre.

**Théorème 2.2 :** si  $\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y})$  est un estimateur non-biaisé de la variable réelle  $\boldsymbol{\mu}$ , il satisfait l'inégalité suivante :

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*} \{[\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}^*][\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}^*]^T\} \geq \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\mu}^*) \quad (2.113)$$

où  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}^*)$  est la matrice d'information de Fisher (FIM) [Cram 46],

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}^*) = \mathbb{E}_{\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\mu}} \log p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu}) |_{\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*} \right] \quad (2.114)$$

avec la condition que,  $\nabla_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\mu}} \log p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu})$  et  $\Delta_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\mu}} \log p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu})$ , existent et sont intégrables.

Note : Voir l'annexe E pour la preuve.

**Borne modifiée :** il n'est pas toujours possible de trouver une forme analytique de la borne de Cramér-Rao standard (SCRB). Pour avoir une référence dans ces cas, une borne modifiée a été proposée (MCRB) [DAnd 94, Gini 98]. Le principe est d'éliminer la dépendance entre les paramètres parasites et la vraisemblance, en utilisant une vraisemblance conditionnée aux paramètres et une espérance. Dans ce cas, la MCRB est égale à l'inverse de la matrice d'information modifiée  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\mu}^*)$  (MFIM). Si l'on note les paramètres parasites  $\boldsymbol{\beta}$ , la matrice MFIM peut être définie

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\mu}^*) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\beta}} \mathbb{E}_{\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\mu}} \log p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\mu}) |_{\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*} \right] \quad (2.115)$$

La borne MCRB est normalement moins précise que la SCRB mais plus facile à évaluer.

### 2.5.3.2 Borne de Cramér-Rao Bayésienne et Bayésienne modifiée

Les bornes SCRB et MCRB sont adaptées aux paramètres déterministes et non aux paramètres aléatoires. En particulier, ces bornes ne prennent pas compte des propriétés statistiques des paramètres à estimer. La solution pour lever ces restrictions se trouve dans le contexte Bayésien, où on suppose que l'on connaît et on exploite la densité de probabilité *a priori* des paramètres,  $p(\boldsymbol{\mu})$ .

Van Trees [Tree 68] a proposé la version Bayésienne de la borne de Cramér-Rao standard (BCRB), pour l'estimation de paramètres aléatoires.

**Théorème 2.3 :** si l'on a un paramètre aléatoire  $\boldsymbol{\mu}$  et un vecteur d'observations  $\mathbf{y}$ . L'estimateur  $\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y})$  satisfait l'inégalité suivante

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}} \{[\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}][\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}]^T\} \geq \mathbf{B}^{-1} \quad (2.116)$$

où  $\mathbf{B}$  est la matrice d'information Bayésienne (BIM),

$$\mathbf{B} = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\mu}} [\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu})] + \mathbb{E}_{\boldsymbol{\mu}} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\mu}} \log p(\boldsymbol{\mu}) \right] \quad (2.117)$$

et où  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu})$  est la FIM (2.114).

Les conditions suivantes doivent être vérifiées pour que l'inégalité (2.116) soit vérifiée :  $\nabla_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\mu}} \log p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$  et  $\Delta_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\mu}} \log p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$ , existent et sont intégrables par rapport à  $\mathbf{y}$  et  $\boldsymbol{\mu}$ , et

$$\lim_{\boldsymbol{\mu} \rightarrow \pm\infty} \int [\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}] p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu}) p(\boldsymbol{\mu}) d\mathbf{y} = 0$$

On définit

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \int [\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}] p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu}) d\mathbf{y} \quad (2.118)$$

Note : Voir l'annexe F pour la preuve.

**Borne modifiée :** de la même façon que pour la borne standard, on peut définir une borne de Cramér-Rao Bayésienne modifiée (MBCRB) [Bobr 87], qui est l'inverse de la matrice d'information suivante,

$$\mathbf{C} = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\mu}} [\mathbf{G}(\boldsymbol{\mu})] + \mathbb{E}_{\boldsymbol{\mu}} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\mu}} \log p(\boldsymbol{\mu}) \right] \quad (2.119)$$

où  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\mu})$  est la MFIM (2.115). Cette borne, comme dans le cas déterministe, est plus facile à calculer que la BCRB, mais moins précise.

On peut noter que dans (2.117) il y a deux termes bien différents : le premier fait référence à l'information, relative aux paramètres à estimer, contenue dans les observations ; le deuxième, fait référence à l'information *a priori* que l'on a sur les paramètres.

Note : on fait brièvement le lien entre les matrices qui nous donnent les bornes, et les cas d'estimation *en ligne* et *hors ligne*. On peut voir que dans le premier cas, la borne est le dernier élément de la diagonale de la matrice, ce qui correspond à l'estimation des paramètres à l'instant courant à partir des observations présentes et passées. Par contre, dans le deuxième cas, à chaque élément du bloc d'observation, correspond un élément de la diagonale de la matrice, par exemple, pour l'estimation de  $\boldsymbol{\mu}_L$  sachant  $\mathbf{y}_{1:K}$  ( $L < K$ ), la borne est l'élément  $(L, L)$  de la matrice ( $[\mathbf{B}^{-1}]_{L, L}$  si l'on prend la BCRB).

### 2.5.3.3 Borne de Cramér-Rao Bayésienne asymptotique

La borne de Cramér-Rao Bayésienne asymptotique (ABCRB) [Bay 08b] est intéressante, car elle est plus facile à calculer que la BCRB mais plus précise que la MBCRB. Le principe est la combinaison des résultats à haut et bas SNR.

Si l'on regarde l'expression de la matrice d'information Bayésienne (2.117), on peut voir que seul le premier terme dépend du SNR. On appelle ce terme  $\mathbf{J}$ , alors

$$\mathbf{B} = \mathbf{J} + \mathbb{E}_{\boldsymbol{\mu}} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\mu}} \log p(\boldsymbol{\mu}) \right] \quad (2.120)$$

On peut calculer ce terme à haut SNR,  $\mathbf{J}_h$  et à bas SNR,  $\mathbf{J}_l$ .

La borne asymptotique a été définie [Bay 08b] dans une application, où le terme  $\mathbf{J} = J_D \mathbf{I}_K$  est une matrice diagonale. Dans ce cas, la borne asymptotique est l'inverse de la matrice suivante

$$\mathbf{B}_A = \min(J_{D_h}, J_{D_l}) \mathbf{I}_K + \mathbb{E}_{\boldsymbol{\mu}} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\mu}} \log p(\boldsymbol{\mu}) \right] \quad (2.121)$$

et l'on peut démontrer que

$$MBCRB \leq ABCRB \leq BCRB \quad (2.122)$$

Dans le cas où la matrice  $\mathbf{J}$  n'est pas diagonale, une formulation générale n'existe pas.

### 2.5.3.4 Borne de Cramér-Rao Bayésienne hybride

On a un ensemble d'observations  $\mathbf{y}$  et l'on veut estimer un vecteur de paramètres  $N$ -dimensionnel hybride  $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_r^T \boldsymbol{\mu}_d^T)^T$ . On considère que notre vecteur de paramètres a une partie aléatoire ( $\boldsymbol{\mu}_r$ ) et une partie déterministe ( $\boldsymbol{\mu}_d$ ), et ces deux parties peuvent être "statistiquement dépendantes", c'est-à-dire les deux parties ne sont pas décorrélées. Dans ce cas, on doit utiliser une borne hybride [Reuv 97]. On note  $\boldsymbol{\mu}_d^*$  la vraie valeur de la partie déterministe  $\boldsymbol{\mu}_d$ . La densité de probabilité conjointe du couple  $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$  est  $p_{\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$  et la densité de probabilité *a priori* de la partie aléatoire  $\boldsymbol{\mu}$  est  $p(\boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d^*) \neq p(\boldsymbol{\mu}_r)$ .

Si  $\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y})$  est notre estimée de  $\boldsymbol{\mu}$ , la borne de Cramér-Rao Bayésienne hybride (HCRB) satisfait l'inégalité suivante [Bay 08a],

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu} | \boldsymbol{\mu}_d^*} \{ [\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}] [\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}]^T | \boldsymbol{\mu}_d^* \} \geq \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_d^*) \quad (2.123)$$

où  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\mu}_d^*)$  est la matrice d'information hybride (HIM)

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\mu}_d^*) = \mathbb{E}_{\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d^*} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\mu}} \log p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d) | \boldsymbol{\mu}_d^* \right] \quad (2.124)$$

La HIM peut être réécrite en utilisant l'expansion logarithmique,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\boldsymbol{\mu}_d^*) &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d^*} [\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}_r, \boldsymbol{\mu}_d^*)] \\ &\quad + \mathbb{E}_{\boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d^*} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\mu}} \log p(\boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d) | \boldsymbol{\mu}_d^* \right] \end{aligned} \quad (2.125)$$

où on retrouve la matrice d'information de Fisher,  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}_r, \boldsymbol{\mu}_d^*)$ . De cette expression, on peut retrouver facilement la SCRB ou la BCRB, en mettant à zéro, soit la partie aléatoire, soit la partie déterministe.

Si l'on sépare la partie aléatoire de la partie déterministe, on peut écrire la HIM de la façon suivante :

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\mu}_d^*) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d^*} [\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}_r, \boldsymbol{\mu}_d^*)] - \mathbb{E}_{\boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d^*} \begin{pmatrix} \Delta_{\boldsymbol{\mu}_r}^{\boldsymbol{\mu}_r} \log p(\boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d^*) & \Delta_{\boldsymbol{\mu}_d}^{\boldsymbol{\mu}_r} \log p(\boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d) | \boldsymbol{\mu}_d^* \\ (\Delta_{\boldsymbol{\mu}_d}^{\boldsymbol{\mu}_r} \log p(\boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d) | \boldsymbol{\mu}_d^*)^T & \Delta_{\boldsymbol{\mu}_d}^{\boldsymbol{\mu}_d} \log p(\boldsymbol{\mu}_r | \boldsymbol{\mu}_d) | \boldsymbol{\mu}_d^* \end{pmatrix}$$

### 2.5.3.5 Borne de Cramér-Rao Bayésienne récursive

Quand on cherche une borne *en ligne*, on a souvent envie de trouver une forme récursive de calcul. La première formulation récursive pour la borne de Cramér-Rao Bayésienne a été déterminée par Tichavský *et al.* [Tich 98].

On note  $\mathbf{J}$  la FIM (2.114). Si l'on suppose que le paramètre à estimer peut être séparé en deux parties,  $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_\alpha^T & \boldsymbol{\mu}_\beta^T \end{pmatrix}^T$ , on peut écrire la FIM comme une matrice bloc,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\alpha\alpha} & \mathbf{J}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{J}_{\beta\alpha} & \mathbf{J}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

On peut démontrer que la borne de Cramér-Rao pour l'estimation de  $\boldsymbol{\mu}_\beta$ , est l'inverse de la matrice bloc du coin en bas, à droite de  $\mathbf{J}^{-1}$ , soit

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}_\beta} \{ [\hat{\boldsymbol{\mu}}_\beta(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}_\beta] [\hat{\boldsymbol{\mu}}_\beta(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}_\beta]^T \} \geq (\mathbf{J}_{\beta\beta} - \mathbf{J}_{\beta\alpha} \mathbf{J}_{\alpha\alpha}^{-1} \mathbf{J}_{\alpha\beta})^{-1} \quad (2.127)$$

Si l'on prend maintenant un problème d'estimation récursive, on peut séparer le vecteur de paramètres de la manière suivante  $\boldsymbol{\mu}_{1:k+1} = (\boldsymbol{\mu}_{1:k}^T \boldsymbol{\mu}_{k+1}^T)^T$ . Dans [Tich 98], on peut trouver la démonstration qui établit le résultat suivant,

$$\mathbf{J}_{k+1} = \mathbf{D}_k^{22} - \mathbf{D}_k^{21}(\mathbf{J}_k + \mathbf{D}_k^{11})^{-1}\mathbf{D}_k^{12} \quad (2.128)$$

où  $\mathbf{J}_{k+1}$  représente la FIM associée à l'estimation de  $\boldsymbol{\mu}_{k+1}$ , et la définition des matrices  $\mathbf{D}_k^{ij}$  est

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_k^{11} &= \mathbb{E} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\mu}_k}^{\boldsymbol{\mu}_k} \log p(\boldsymbol{\mu}_{k+1} | \boldsymbol{\mu}_k) \right] \\ \mathbf{D}_k^{12} &= \mathbb{E} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\mu}_k}^{\boldsymbol{\mu}_{k+1}} \log p(\boldsymbol{\mu}_{k+1} | \boldsymbol{\mu}_k) \right] \\ \mathbf{D}_k^{21} &= \mathbb{E} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\mu}_{k+1}}^{\boldsymbol{\mu}_k} \log p(\boldsymbol{\mu}_{k+1} | \boldsymbol{\mu}_k) \right] = (\mathbf{D}_k^{12})^T \\ \mathbf{D}_k^{22} &= \mathbb{E} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\mu}_{k+1}}^{\boldsymbol{\mu}_{k+1}} \log p(\boldsymbol{\mu}_{k+1} | \boldsymbol{\mu}_k) \right] + \mathbb{E} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\mu}_{k+1}}^{\boldsymbol{\mu}_{k+1}} \log p(\mathbf{y}_{k+1} | \boldsymbol{\mu}_{k+1}) \right] \end{aligned}$$

Avec cela, on a une forme récursive pour calculer la borne de Cramér-Rao Bayésienne associée à l'estimation de  $\boldsymbol{\mu}_{k+1}$  à partir de  $\mathbf{y}_{1:k+1}$ .

## Chapitre 3

# Synchronisation fractionnée : modélisation et bornes

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Modélisation</b>	<b>58</b>
3.1.1	Modèle de signal suréchantillonné	58
3.1.1.1	Formulation discrète générale	58
3.1.1.2	Re-formulation discrète pour le bruit	60
3.1.2	Modèles d'évolution	61
3.1.2.1	Modèle de phase	62
3.1.2.2	Modèle conjoint de phase et de Doppler	62
3.1.3	Modèle d'état	62
<b>3.2</b>	<b>Bornes de Cramér-Rao pour la synchronisation fractionnée</b>	<b>64</b>
3.2.1	Borne de Cramér-Rao Bayésienne pour l'estimation de phase	64
3.2.2	Borne de Cramér-Rao Hybride pour l'estimation conjointe de phase et d'offset de fréquence	67
3.2.3	Comportement des bornes	69
3.2.3.1	Borne HCRB pour les points de référence au pas $T_c$	70
3.2.3.2	Borne HCRB pour les points intermédiaires $T_c$ -espacés	73
<b>3.3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>74</b>

---



LES méthodes *fractionnées*, sont présentes dans plusieurs étapes des récepteur, par exemple, dans l'étape d'égalisation ou de synchronisation. Le concept fractionné fait référence à l'utilisation d'un signal suréchantillonné, relativement au temps symbole. Intuitivement, on peut penser que si l'on a plus d'échantillons par symbole, on a plus d'information pour récupérer l'information utile, mais ça n'est pas toujours vrai, car il suffit par exemple de vérifier le théorème de Nyquist-Shannon [Shan 48], pour que notre signal discret contienne toute l'information nécessaire pour récupérer l'information utile. Dans les systèmes de communication par satellite, on utilise des fonctions de mise en forme avec un grand excès de bande, où le théorème de Nyquist-Shannon n'est pas vérifié avec un seul échantillon par temps symbole. C'est dans ce cas, que l'on envisage d'étudier théoriquement le problème de la synchronisation fractionnée, face aux méthodes qui utiliseraient un signal échantillonné au temps symbole.

Ce chapitre analyse le problème de la synchronisation fractionnée, c'est à dire, l'estimation de phase et d'offset de fréquence en utilisant le signal reçu suréchantillonné. La section 3.1 présente le modèle que l'on utilise dans le reste du chapitre. Le principe est de proposer une modélisation d'état qui inclut le bruit coloré, pour le prendre en compte au même temps que l'on estime les paramètres d'intérêt. Les bornes de Cramér-Rao associées aux problèmes d'estimation de phase et d'estimation conjointe de phase et d'offset de fréquence, sont présentées dans la section 3.2.

## 3.1 Modélisation

On veut étudier en profondeur le problème d'estimation des paramètres de synchronisation. Pour mener cette étude, on considère le modèle présenté dans le chapitre 1. On suppose une séquence complexe connue  $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  (synchronisation supervisée), transmise au travers d'un canal avec bruit AWGN, une porteuse perturbée par un déphasage  $\theta(t)$  et une amplitude  $\rho(t) = 1$ .

### 3.1.1 Modèle de signal suréchantillonné

#### 3.1.1.1 Formulation discrète générale

Le signal complexe reçu en bande de base, après filtrage adapté au récepteur peut être écrit comme

$$y(t) = \left[ \left\{ T_c \sum_{m=1}^{L_a} a_m p(t - mT_c - \tau(t)) \right\} e^{i\theta(t)} + n(t) \right] * p^*(-t) \quad (3.1)$$

où  $T_c$ ,  $p(t)$  et  $n(t)$  sont la période chip, la fonction de mise en forme, et un bruit Gaussien complexe circulaire avec une densité spectrale de puissance (psd) connue  $N_0$ . On considère que le délai est constant dans la fenêtre d'observation  $\tau(t) = \tau$  et l'on réécrit l'équation

$$y(t) = T_c \sum_{m=1}^{L_a} a_m \left\{ p(t) e^{i\theta(t+mT_c+\tau)} \right\} * \delta(t - mT_c - \tau) * p^*(-t) + n(t) * p^*(-t) \quad (3.2)$$

On définit le bruit coloré filtré comme

$$b(t) = n(t) * p^*(-t) \quad (3.3)$$

et la fonction de mise en forme  $\tilde{g}_m(t)$  comme

$$\tilde{g}_m(t) = T_c \int_{-\infty}^{+\infty} p^*(-\alpha) e^{i\theta(t-\alpha+mT_c+\tau)} p(t-\alpha) d\alpha \quad (3.4)$$

D'après cela, le signal peut être écrit comme

$$\begin{aligned} y(t) &= T_c \sum_{m=1}^{L_a} a_m p(t - mT_c - \tau) e^{i\theta(t)} * p^*(-t) + b(t) \\ &= \sum_{m=1}^{L_a} a_m \tilde{g}_m(t - mT_c - \tau) + b(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Désormais, on suppose que le support de la mise en forme  $p(t)$ , est  $[0, T_c]$  et l'on suppose une phase qui varie lentement dans une période  $T_c$ . Cette dernière hypothèse est normale dans les systèmes de communication par satellite, car la variation de phase (à cause du bruit de phase des oscillateurs, des effets Doppler, ...) dans une période chip est faible. Normalement, le bruit de phase introduit par les oscillateurs, est moindre comparé à la variation en raison des décalages Doppler [Meng 97]. Par rapport aux effets Doppler, il est facile de vérifier l'hypothèse dans un scénario réel comme le système Galileo : dans le pire des cas, on peut considérer un décalage Doppler maximal d'environ  $\pm 20$  kHz. Si l'on suppose un taux chip de  $\frac{1}{T_c} = 1$  Mchip/s, la variation de phase maximale dans une période est d'environ  $\Delta_\theta = 0.1$  rad, ce qui correspond à une gigue d'amplitude faible ( $0.1/2\pi = 1.6\%$ ) ou une variation de  $0.01$  rad<sup>2</sup>. Dans la suite on considérera une phase avec une variance maximale de  $\sigma_w^2 = 0.1$  rad<sup>2</sup>, pour prendre en compte des bruits de phase plus forts, et en même temps vérifier l'hypothèse de variation faible dans une période  $T_c$ .

D'après les hypothèses, on peut approcher  $\tilde{g}_m(t)$  de la façon suivante

$$\tilde{g}_m(t) \approx g(t) e^{i\theta(t + (m + \frac{1}{2})T_c + \tau)} \quad (3.6)$$

où

$$g(t) = T_c \int_{-T_c}^0 p^*(-\alpha) p(t - \alpha) d\alpha \quad (3.7)$$

Si le signal reçu filtré, est suréchantillonné aux instants  $t_k = k\frac{T_c}{S} + \tau + \tau_o$ , avec  $S$  un facteur de suréchantillonnage entier et  $\tau_o$  le décalage par rapport aux instants d'échantillonnage optimaux (équivalent à l'erreur dans notre connaissance de  $\tau$ ), supposés connus et  $0 \leq \tau_o < \frac{T_c}{S}$ , on a

$$y\left(k\frac{T_c}{S} + \tau + \tau_o\right) = \sum_m a_m \tilde{g}_m\left(k\frac{T_c}{S} + \tau_o - mT_c\right) + b\left(k\frac{T_c}{S} + \tau + \tau_o\right) \quad (3.8)$$

et d'après l'approximation (eq. 3.6) on peut écrire

$$y\left(k\frac{T_c}{S} + \tau + \tau_o\right) = A_k e^{i\theta(k\frac{T_c}{S} + \tau + \tau_o + \frac{T_c}{2})} + b\left(k\frac{T_c}{S} + \tau + \tau_o\right) \quad (3.9)$$

où

$$A_k = \sum_m a_m g\left(k\frac{T_c}{S} + \tau_o - mT_c\right). \quad (3.10)$$

On peut écrire finalement, d'une façon compacte, le modèle discret d'observation

$$y_k = A_k e^{i\theta_k} + b'_k \quad (3.11)$$

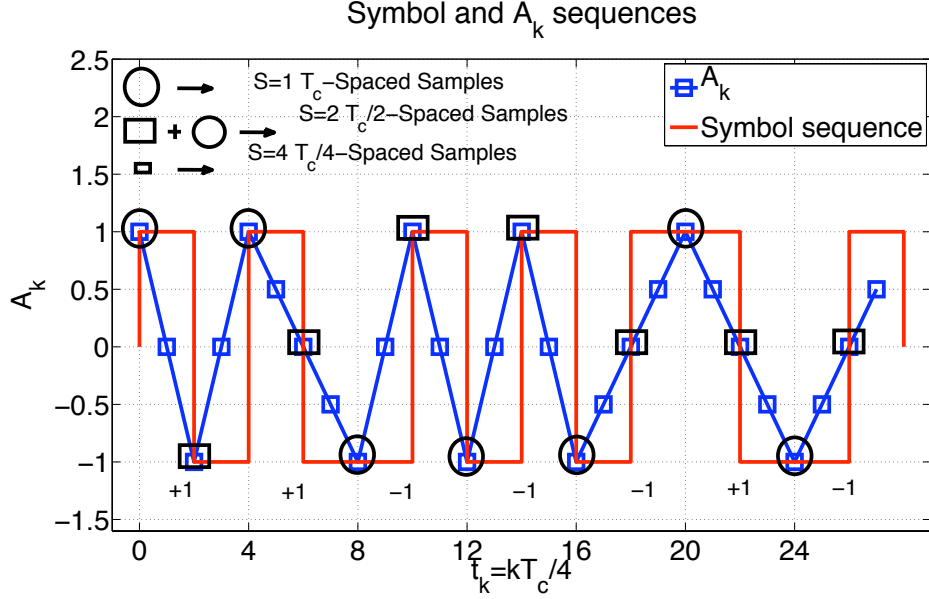


FIG. 3.1 – Séquence chip émise et signal reçu avec un canal idéal. On peut distinguer les échantillons pour  $S = 1, 2$  et  $4$ .

où  $k$  fait référence aux instants  $t_k$ .  $\theta_k = \theta(k\frac{T_c}{S} + \tau + \tau_o + \frac{T_c}{2})$  et  $b'_k = b(k\frac{T_c}{S} + \tau + \tau_o)$ . On note que le bruit  $b'_k$  est un bruit coloré de variance  $\sigma_n^2$ , qui est la variance du bruit Gaussien additif  $n(t)$  mesuré dans la bande équivalente du filtre de réception  $p^*(-t)$ . Si l'on note la transformée de Fourier du filtre de mise en forme  $P(f)$ , cette variance s'écrit

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} N_0 |P(f)|^2 df = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |p(t)|^2 dt = N_0 \frac{g(0)}{T_c} \quad (3.12)$$

On peut définir l'indice symbole  $p_S = \lfloor \frac{k}{S} \rfloor$  (partie entière de  $k/S$ ), ou de manière équivalente,  $k = p_S S + s$  avec  $s$  ( $s = 0, \dots, S - 1$ ) l'indice sous-symbole (*i.e.* la position dans l'intervalle symbole).  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une séquence avec une puissance non-stationnaire pour  $S > 1$ , même si  $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  est une séquence de puissance stationnaire ( $|a_m|^2 = 1$ ).

Dans la figure 3.1, on montre un exemple de transmission d'une séquence  $\mathbf{a}$  de longueur 7 symboles, avec mise en forme BOC (voir la section 1.2), à travers un canal parfait (sans déphasage, sans bruit additif et synchronisé ( $\tau$  connu et  $\tau_o = 0$ )). On peut voir le signal émis (rouge) et le signal reçu après filtrage adapté (bleu). On a marqué avec de grands cercles, les échantillons du cas  $S = 1$  (points de référence). Si l'on prend les grands cercles plus les grands carrés, on a les échantillons du cas  $S = 2$  (on appelle les grands carrés, points intermédiaires). Et finalement, les petits carrés sont les échantillons que l'on obtient si l'on utilise un facteur de suréchantillonnage égal à  $S = 4$ .

Si l'on regarde le résultat avec  $S = 4$ , on voit que les échantillons que l'on rajoute par rapport au cas  $S = 2$ , sont presque tous nuls, ainsi ces échantillons apportent peu d'information pour l'estimation.

### 3.1.1.2 Re-formulation discrète pour le bruit

Dans la sous-section précédente, on a défini la séquence de bruit  $\{b'_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , à partir du bruit analogique  $n(t)$ . Ici on présente une reformulation du problème, pour remplacer cette série tem-

porielle par une nouvelle séquence de bruit  $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  avec les mêmes propriétés statistiques, mais obtenue à partir d'une formulation discrète. Cette formulation sera utile pour inclure ce bruit dans la formulation d'état. On peut écrire

$$\begin{aligned} b'_k &= \int_0^{T_c} n\left(\alpha + k\frac{T_c}{S} + \tau + \tau_o\right) p^*(\alpha) d\alpha \\ &= \sum_{j=0}^{S-1} \int_{j\frac{T_c}{S}}^{(j+1)\frac{T_c}{S}} n\left(\alpha + k\frac{T_c}{S} + \tau + \tau_o\right) p^*(\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (3.13)$$

Si l'on a  $N$  mesures, la matrice de covariance  $N \times N$ ,  $\mathbf{\Gamma}$ , du bruit d'observation  $(b'_0, \dots, b'_{N-1})$ , dépend du facteur de suréchantillonnage  $S$ . Par exemple, pour  $S = 2$ , on a une matrice tri-diagonale

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{N_0}{T_c} \begin{pmatrix} g(0) & g(-\frac{T_c}{2}) & & & \\ g(\frac{T_c}{2}) & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & g(-\frac{T_c}{2}) & \\ & & & g(\frac{T_c}{2}) & g(0) \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Les variables aléatoires

$$Z_{k,j} = \int_{j\frac{T_c}{S}}^{(j+1)\frac{T_c}{S}} n\left(\alpha + k\frac{T_c}{S} + \tau + \tau_o\right) p^*(\alpha) d\alpha \quad (3.15)$$

sont Gaussiennes de moyennes nulles. De plus, à  $k$  fixé, les variables aléatoires  $Z_{k,j}$  et  $Z_{k,j'}$  sont indépendantes pour  $j \neq j'$ . Leur variance est

$$\mathbb{E}\left(|Z_{k,j}|^2\right) = N_0 \int_{j\frac{T_c}{S}}^{(j+1)\frac{T_c}{S}} |p(\alpha)|^2 d\alpha \quad (3.16)$$

On peut définir une séquence stationnaire Gaussienne i.i.d., de moyenne nulle et variance unité  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et

$$\Pi_j = \left\{ N_0 \int_{j\frac{T_c}{S}}^{(j+1)\frac{T_c}{S}} |p(\alpha)|^2 d\alpha \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.17)$$

Les échantillons  $b'_k$  ont les mêmes propriétés statistiques que les échantillons  $b_k$ , obtenus à partir du filtrage de la série temporelle  $n_k$  :

$$b_k = \sum_{j=0}^{S-1} \Pi_j n_{k-j-1} \quad (3.18)$$

Avec cette formulation, on peut inclure le bruit d'observation coloré dans le modèle d'état, pour prendre en compte la corrélation entre les différents échantillons du bruit.

### 3.1.2 Modèles d'évolution

Dans cette sous-section, on introduit la modélisation des paramètres de synchronisation. On considère deux cas différents : l'estimation de phase, et l'estimation conjointe de la phase et du décalage Doppler.

### 3.1.2.1 Modèle de phase

En pratique, on doit considérer des gigues introduites par les imperfections des oscillateurs et les perturbation du canal. Pour prendre en compte ces effets on considère une évolution de la phase Brownienne [Ambl 03] :

$$\theta_k = \theta_{k-1} + w_k \quad k \geq 2 \quad (3.19)$$

avec  $w_k$ , une séquence Gaussienne, i.i.d. et de moyenne nulle, avec une variance connue  $\frac{\sigma_w^2}{S}$ , où  $\sigma_w^2$  est la variance de l'incrément de phase dans une période. On note que la variance du bruit Gaussien est liée directement à la vitesse d'évolution de la phase. La matrice de covariance  $N \times N$ , du décalage de phase  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \cdots \theta_N]^T$ , si l'on considère que  $\sigma_{\theta_0}^2 = 0$ , s'écrit

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\sigma_w^2}{S} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 2 & 3 & & N \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

et son inverse prend une forme tri-diagonale.

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \frac{S}{\sigma_w^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

### 3.1.2.2 Modèle conjoint de phase et de Doppler

Normalement, on a un décalage de fréquence entre la porteuse d'émission et celle du récepteur, ou des effets Doppler, et donc, la distorsion de phase est linéaire avec le temps. On modifie le modèle de phase du paragraphe précédent (eq. (3.19)) pour prendre en compte les décalages fréquentiels. On suppose une phase Brownienne avec une dérive constante [Ambl 03] :

$$\begin{aligned} \theta_k &= \theta_{k-1} + \delta_{k-1} + w_k \\ \delta_k &= \delta_{k-1} \end{aligned} \quad (3.22)$$

avec  $k \geq 2$ ,  $w_k$  est une séquence Gaussienne, de moyenne nulle, i.i.d. et de variance connue  $\frac{\sigma_w^2}{S}$ , et  $\delta_k$  est une dérive constante inconnue.  $\sigma_w^2$  est la variance de l'incrément de phase dans une période. La matrice de covariance du décalage de phase dans ce cas, est la même que dans le paragraphe précédent (eq. (3.20)).

### 3.1.3 Modèle d'état

Quand on veut utiliser une approche de filtrage optimal, on a besoin d'une formulation en modèle d'état. Étant donné que l'on veut prendre en compte que le bruit, à la sortie du filtre adapté, est coloré, on doit l'inclure dans le modèle d'état.

D'abord on considère un vecteur glissant  $[\nu_k \ \nu_{k-1} \ \cdots \ \nu_{k-S+1}]^T$  sur un bruit i.i.d.  $n_k$ . On peut écrire l'évolution de ce vecteur

$$\begin{bmatrix} \nu_k \\ \nu_{k-1} \\ \vdots \\ \nu_{k-S+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{k-1} \\ \nu_{k-2} \\ \vdots \\ \nu_{k-S} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Le bruit coloré  $b_k$  peut s'écrire de la façon suivante

$$b_k = [\Pi_0 \cdots \Pi_{S-1}] \begin{bmatrix} \nu_{k-1} \\ \nu_{k-2} \\ \vdots \\ \nu_{k-S} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

L'état dépend des paramètres que l'on veut prendre en compte. Si l'on considère l'estimation de phase, l'état inclut les décalages de phase et le bruit coloré. Si l'on considère l'estimation de phase et d'offset de fréquence, l'état inclut, en plus du décalage de phase et du bruit coloré, l'offset de fréquence. On présente le cas le plus général :

$$\mathbf{x}_k = [\theta_k \ \delta_k \ b_k \ \nu_k \ \cdots \ \nu_{k-S+1}]^T \quad (3.25)$$

On définit la matrice d'évolution

$$\mathbf{M}_K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \Pi_0 & \Pi_1 & \cdots & \Pi_{S-1} \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

et le vecteur  $\mathbf{v}_k = [w_k \ 0 \ 0 \ n_k \ 0 \ \cdots \ 0]^T$ . Avec ça on peut définir l'évolution de l'état

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{M}_K \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}_k \quad (3.27)$$

L'équation d'observation peut s'écrire en fonction de l'état

$$\begin{aligned} y_k &= A_k \exp\left(i [1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T \mathbf{x}_k\right) \\ &+ [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T \mathbf{x}_k \\ &= A_k \exp(i\theta_k) + b_k \end{aligned} \quad (3.28)$$

On remarque que l'équation d'état est linéaire et que l'observation dépend, de façon non-linéaire, de l'état. Avec cette formulation, on n'a pas de bruit d'observation, car on l'a inclut dans l'état.

## 3.2 Bornes de Cramér-Rao pour la synchronisation fractionnée

La famille des bornes de Cramér-Rao (CRBs) donne des bornes minimales sur l'erreur quadratique moyenne (MSE) qu'un estimateur non biaisé peut atteindre. Dans la Section 2.5 du Chapitre 2 on a présenté la théorie de base des CRBs, qui sera appliquée dans cette section à nos problèmes d'estimation.

Dans cette section, on présente le calcul des bornes associées au problème modélisé dans la section 3.1. D'abord, on établit la borne de Cramér-Rao Bayésienne pour l'estimation de phase, et ensuite la borne hybride pour l'estimation de phase et d'offset de fréquence, qui est similaire à la première. Ensuite, on présente les résultats pour quelques scénarios précis, où l'on trace les bornes en considérant plusieurs facteurs de suréchantillonnage, par rapport au SNR, à la vitesse de variation de la phase et à l'erreur d'estimation du délai. On note que pour  $S = 1$  le bruit d'observation est blanc, par contre, pour  $S > 1$ , ce bruit est coloré. Ainsi, la borne que l'on détermine est valable pour des bruits colorés.

### 3.2.1 Borne de Cramér-Rao Bayésienne pour l'estimation de phase

On veut établir une CRB pour l'estimation des décalages de phase, qui sont des paramètres aléatoires, avec une densité de probabilité *a priori* connue, donc on calculera une borne Bayésienne. On veut calculer la borne *en-ligne*, cela veut dire qu'à l'instant  $k$ , le récepteur fait la mise à jour du vecteur d'observation, en ajoutant la nouvelle mesure,  $y_k$ , pour estimer le paramètre à cet instant,  $\theta_k$ . On considère  $\mathbf{y}$  le vecteur  $N$ -dimensionnel qui contient toutes les mesures.

On se place dans un contexte d'estimation supervisée (borne DA) et l'on suppose que la séquence de symboles transmise est connue, ainsi que les statistiques du modèle d'état,  $\sigma_w^2$ , et le délai,  $\tau$ .

On utilise le modèle présenté dans la section 3.1 (eqs. (3.19,3.28)) :

$$\theta_k = \theta_{k-1} + w_k \quad (3.29)$$

$$y_k = A_k \exp(i\theta_k) + b_k \quad (3.30)$$

où, comme on l'a déjà dit,  $\{b_k \ k = 1, \dots, N\}$  est un bruit coloré avec matrice de covariance  $\mathbf{\Gamma}$ , de taille  $N \times N$ . L'indice  $k$  fait référence aux instants  $t_k$ , les  $A_k$  sont les coefficients définis dans l'équation (3.10) et  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \dots \theta_N]^T$ .

On rappelle l'expression de la BIM

$$\mathbf{B} = E_{\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\theta}} \log p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) \right] + E_{\boldsymbol{\theta}} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\theta}} \log p(\boldsymbol{\theta}) \right] = \mathbf{B}^D + \mathbf{B}^P \quad (3.31)$$

Pour calculer cette matrice, on a besoin de la fonction de vraisemblance et de la densité de probabilité *a priori*. De l'équation d'observation (3.28), on sait que la log-vraisemblance s'écrit

$$\log p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) = \log \frac{1}{\pi^N |\det(\mathbf{\Gamma})|} - [\mathbf{y} - \mathbf{m}]^H \mathbf{\Gamma}^{-1} [\mathbf{y} - \mathbf{m}] \quad (3.32)$$

où  $\mathbf{m}$  est le vecteur moyenne de  $\mathbf{y}$ , de  $k^{ieme}$  élément  $[\mathbf{m}]_k = A_k e^{i\theta_k}$ . Le logarithme de la densité de probabilité *a priori* s'écrit

$$\begin{aligned} \log p(\boldsymbol{\theta}) &= \log p(\theta_1) + (N-1) \log \left( \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} \right) \\ &\quad - \sum_{k=2}^N \frac{(S\theta_k - \theta_{k-1})^2}{2\sigma_w^2} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Le premier terme de la BIM (eq.(3.31)) peut être calculé à partir de la vraisemblance (eq.(3.32)). On note  $\Lambda(\boldsymbol{\theta}) = \log p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta})$ . Si l'on calcule la dérivée par rapport aux  $l^{ieme}$  et  $k^{ieme}$  éléments de  $\boldsymbol{\theta}$ , on obtient

$$\frac{\partial^2 \Lambda(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k \partial \theta_l} = 2\Re \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{m}^H}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \boldsymbol{\Gamma}^{-1} [\mathbf{y} - \mathbf{m}] - \frac{\partial \mathbf{m}^H}{\partial \theta_l} \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \theta_k} \right\} \quad (3.34)$$

Le  $(k, l)^{ieme}$  élément de la matrice  $\mathbf{B}^D$  est

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}^D]_{k,l} &= E_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ E_{\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}} \left\{ -\frac{\partial^2 \Lambda(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \right\} \right\} \\ &= E_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ 2\Re \left\{ \frac{\partial \mathbf{m}^H}{\partial \theta_l} \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \theta_k} \right\} \right\} \\ &= 2\Re \left\{ A_l^* A_k \cdot [\boldsymbol{\Gamma}^{-1}]_{k,l} E_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ e^{j(\theta_k - \theta_l)} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (3.35)$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} E_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ e^{i(\theta_k - \theta_l)} \right\} &= E_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ e^{i(\mathbf{u}_{kl}^T \boldsymbol{\theta})} \right\} \\ &= \phi(\mathbf{u}_{kl}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

avec  $\mathbf{u}_{kl}^T = [0, \dots, 0, (+1), 0, \dots, 0, (-1), 0, \dots, 0]$ , +1 dans la  $k^{ieme}$  position du vecteur et -1 dans la  $l^{ieme}$ ,  $\phi(\cdot)$  est la fonction caractéristique d'une variable Gaussienne  $\boldsymbol{\theta}$  :

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{u}_{kl}) &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{u}_{kl}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{u}_{kl} \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( [\boldsymbol{\Sigma}^{-1}]_{k,k} + [\boldsymbol{\Sigma}^{-1}]_{l,l} - 2 [\boldsymbol{\Sigma}^{-1}]_{k,l} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.37)$$

avec  $\boldsymbol{\Sigma}$  la matrice de covariance des décalages de phase  $\boldsymbol{\theta}$  (eq.(3.20)). Finalement,

$$[\mathbf{B}^D]_{k,l} = 2\Re \left\{ A_l^* A_k [\boldsymbol{\Gamma}^{-1}]_{k,l} e^{\Psi_{k,l}} \right\} \quad (3.38)$$

avec

$$\Psi_{k,l} = \left\{ -\frac{1}{2} \left( [\boldsymbol{\Sigma}^{-1}]_{k,k} + [\boldsymbol{\Sigma}^{-1}]_{l,l} - 2 [\boldsymbol{\Sigma}^{-1}]_{k,l} \right) \right\} \quad (3.39)$$

On note que puisque  $[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}]$  prend une forme tri-diagonale (voir eq.(3.21)), les éléments  $[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}]_{k,l}$  sont non-nuls seulement si  $|k - l| \leq 1$ . On en déduit les valeurs suivantes :

- $[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}]_{|k-l|=1} = -S/\sigma_w^2$
- $[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}]_{k,k} = 2\frac{S}{\sigma_w^2}$ , pour  $2 < k < N - 1$
- $[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}]_{1,1} = [\boldsymbol{\Sigma}^{-1}]_{N,N} = S/\sigma_w^2$

On doit considérer deux cas :

- $\Psi_{k,k} = 0$  for  $k = l$
- $\Psi_{k,l} = -\beta \frac{S}{\sigma_w^2}$  pour  $|k - l| \geq 1$

avec  $1 \leq \beta \leq 3$  si  $\sigma_{\theta_0}^2 = 0$ .

On peut conclure que  $e^{\Psi_{k,l}} \sim 0$ , quand  $\sigma_w^2$  est faible et  $k \neq l$ . Le pire des cas est si  $k = 1$ ,  $l = N$  et  $S = 1$ ; dans ce cas, on a  $\Psi_{1,N} = -\frac{1}{\sigma_w^2}$ , et alors  $e^{\Psi_{k,l}} = e^{-\frac{1}{\sigma_w^2}}$  peut être négligé lorsque  $\sigma_w^2 \leq 0.1$ , si l'on compare cette valeur avec les valeurs de la diagonale principale.

Étant donné que l'on considère une variation faible dans une période (pour que l'approximation dans eq.(3.6) soit valide), on peut considérer que la matrice  $\mathbf{B}^D$  est diagonale, avec

$$[\mathbf{B}^D]_{k,k} = 2 |A_k|^2 [\boldsymbol{\Gamma}^{-1}]_{k,k} \quad (3.40)$$



Dans la suite, on calcule le deuxième terme de la BIM (eq.(3.31)). De l'équation d'évolution de l'état (eq.(3.19)) on a

$$\Delta_{\boldsymbol{\theta}} \ln p(\boldsymbol{\theta}) = \Delta_{\boldsymbol{\theta}} \ln p(\theta_1) + \sum_{k=1}^N \Delta_{\boldsymbol{\theta}} \ln p(\theta_k | \theta_{k-1}) \quad (3.41)$$

Le premier terme de l'équation (3.41) est une matrice avec un seul élément non-nul, l'élément (1, 1)

$$\left[ \Delta_{\boldsymbol{\theta}} \ln p(\theta_1) \right]_{1,1} = \frac{\partial^2 \ln p(\theta_1)}{\partial \theta_1^2} \quad (3.42)$$

Les autres termes sont des matrices avec quatre termes non-nuls, les éléments  $(k-1, k-1)$ ,  $(k-1, k)$ ,  $(k, k-1)$  et  $(k, k)$ . À cause de la nature Gaussienne du bruit, on a

$$\begin{aligned} \left[ \Delta_{\boldsymbol{\theta}} \ln p(\theta_k | \theta_{k-1}) \right]_{k,k} &= \left[ \Delta_{\boldsymbol{\theta}} \ln p(\theta_k | \theta_{k-1}) \right]_{k-1,k-1} \\ &= \frac{-S}{\sigma_w^2} \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \left[ \Delta_{\boldsymbol{\theta}} \ln p(\theta_k | \theta_{k-1}) \right]_{k,k-1} &= \left[ \Delta_{\boldsymbol{\theta}} \ln p(\theta_k | \theta_{k-1}) \right]_{k-1,k} \\ &= \frac{S}{\sigma_w^2} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Si l'on considère que  $E_{\theta_1} \left[ \Delta_{\boldsymbol{\theta}} \ln p(\theta_1) \right] = 0$  (*a priori* sur  $\theta_1$  non-informatif, voir [Kay 93]),

$$\mathbf{B}^P = \frac{1}{\sigma_w^2/S} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

D'après les équations (3.40,3.45), la BIM a une forme tri-diagonale

$$\mathbf{B} = \beta \begin{pmatrix} (C_1 + 1) & 1 & & & \\ 1 & C_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & C_{N-1} & 1 \\ & & & 1 & (C_N + 1) \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

avec  $\beta = -S/\sigma_w^2$  et  $C_k = (1/\beta) [\mathbf{B}^P]_{k,k} - 2$ .

La borne *en-ligne* pour l'estimation de  $\theta_N$ , est égale à l'élément  $(N, N)$  de l'inverse de la BIM,  $[\mathbf{B}^{-1}]_{N,N}$ . D'après [Usma 94], les éléments de la diagonale de l'inverse d'une matrice tri-diagonale, peuvent s'écrire

$$[\mathbf{B}^{-1}]_{k,k} = \frac{d_{k-1}h_{k+1}}{d_k} \quad (3.47)$$

avec

$$\begin{aligned} d_k &= \beta C_k d_{k-1} - \beta^2 d_{k-2} \quad \text{for } k = 2, \dots, N-1 \\ h_k &= \beta C_k h_{k+1} - \beta^2 h_{k+2} \quad \text{for } k = 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.48)$$

et

$$\begin{aligned} d_0 &= 1, d_1 = \beta(C_1 + 1) \\ d_N &= \beta(C_N + 1)d_{N-1} - \beta^2 d_{N-2} \\ h_1 &= \beta(C_1 + 1)h_2 - \beta^2 h_3 \\ h_N &= \beta(C_N + 1), h_{N+1} = 1 \end{aligned}$$

alors, la BCRB *en-ligne* peut s'écrire

$$BCRB = [\mathbf{B}^{-1}]_{N,N} = \frac{d_{N-1}}{d_N} \quad (3.49)$$

On note que cette expression correspond à l'adjoint de  $[\mathbf{B}]_{N,N}$ , sur le déterminant de  $\mathbf{B}$ . En utilisant la borne calculé avec l'approximation de façon récursive, et la vraie borne à partir de l'inversion de la matrice d'information Bayésienne, on obtient le même résultat.

**Remarques.** Si l'on étudie le problème dans le cas DA, la borne dépend généralement de la séquence émise  $\mathbf{a}$ , alors, il faut la calculer pour une séquence donnée. D'après l'équation (3.40), on voit que pour  $S = 1$ ,  $s = 0$  (points de référence) et  $\tau_o = 0$ , la borne est indépendante de la séquence émise, car  $|A_k| = 1 \forall k$ . Dans les autres cas, la borne dépend de la séquence, du facteur de suréchantillonnage  $S$  et de la position  $s$  dans le symbole courant (indice  $M$ ), ainsi que de l'erreur de synchronisation du délai  $\tau_o$  :

$$BCRB(\mathbf{a}, S, s) = [\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{a})]_{N,N} \quad (3.50)$$

avec  $N = (M - 1) * S + 1 + s$ .

**Synthèse du calcul** Ici on donne une brève synthèse de calcul, pour obtenir la BCRB pour l'estimation de phase dans le cas DA. Si les symboles et les statistiques, des bruits de phase et d'observation, sont connues, on peut calculer la borne de deux manières différentes : calcul de la matrice  $[\mathbf{B}]$  et son inverse, ou calcul des éléments  $C_k$  et on détermine récursivement la borne.

1. Calcul direct de la BCRB :
  - Calculer la matrice  $[\mathbf{B}^D]$  à partir de l'eq.(3.40).
  - Calculer la matrice  $[\mathbf{B}^P]$  à partir de l'eq.(3.45).
  - Calculer l'inverse de la BIM (eq.(2.117)) et prendre le dernier élément de la diagonale pour obtenir la BCRB *en-ligne* (eq.(3.50)).
2. Calcul récursif de la BCRB :
  - Calculer les coefficients  $C_k$ , à partir des éléments  $[\mathbf{B}^D]_{k,k}$  (eq.(3.40)).
  - Utiliser la récursion eq.(3.48) pour obtenir eq.(3.49).

### 3.2.2 Borne de Cramér-Rao Hybride pour l'estimation conjointe de phase et d'offset de fréquence

Dans cette section, on établit la CRB pour l'estimation conjointe de phase et d'offset de fréquence. Étant donné que la phase,  $\theta$ , est aléatoire et a une densité de probabilité *a priori*  $p(\theta)$  connue, et que la dérive est un paramètre constant, on utilise la borne de Cramér-Rao hybride (HCRB) (voir section 2.5).

Dans la suite, étant donné que l'offset de fréquence est constant, on note  $\delta_k = \delta$ , et  $\delta^*$  comme la vraie valeur de  $\delta$ .

Comme dans le cas précédent, on utilise le modèle d'état (avec dérive) et d'observation définis dans la section 3.1 (eqs.(3.22,3.28)) :

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \delta + w_k \quad (3.51)$$

$$y_k = A_k \exp(i\theta_k) + b_k \quad (3.52)$$

où  $b_k$  est un bruit coloré avec matrice de covariance  $\mathbf{\Gamma}$ . L'indice  $k$  fait référence aux instants  $t_k$  et  $A_k$  sont les coefficients définis dans l'équation (3.10).

Si l'on suppose que l'on a  $N$  mesures disponibles, on aura  $N$  paramètres de phase,  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \cdots \theta_N]^T$ , plus la dérive  $\delta$ . Pour calculer la borne, on doit d'abord calculer la HIM (eq. 2.125). Dans la HIM, on peut voir deux termes bien différenciés, et la matrice  $((N+1) \times (N+1))$  de la borne peut s'écrire comme :

$$\mathbf{HCRB} = \{\mathbf{H}\}^{-1} = \{\mathbf{H}^D + \mathbf{H}^P\}^{-1} \quad (3.53)$$

où le  $k^{ieme}$  élément de la diagonale,  $[\mathbf{HCRB}]_{k,k}$  représente la borne pour l'estimation de  $[\boldsymbol{\mu}]_k$  à partir du bloc d'observation  $\mathbf{y} = [y_1 \cdots y_N]$ .

La HIM peut être réécrite sous la forme de matrice par blocs

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{11} &= E_{\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta} | \delta^*} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\theta}} \log p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}, \delta) | \delta^* \right] \\ &\quad + E_{\boldsymbol{\theta} | \delta^*} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\theta}} \log p(\boldsymbol{\theta} | \delta^*) \right] \\ \mathbf{h}_{12} &= \mathbf{h}_{21}^T = E_{\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta} | \delta^*} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\theta}} \log p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}, \delta) | \delta^* \right] \\ &\quad + E_{\boldsymbol{\theta} | \delta^*} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\theta}} \log p(\boldsymbol{\theta} | \delta^*) \right] \\ H_{22} &= E_{\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta} | \delta^*} \left[ -\Delta_{\delta} \log p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}, \delta) | \delta^* \right] \\ &\quad + E_{\boldsymbol{\theta} | \delta^*} \left[ -\Delta_{\delta} \log p(\boldsymbol{\theta} | \delta^*) \right] \end{aligned}$$

À partir du modèle, on obtient la log-vraisemblance

$$\log p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}, \delta^*) = \log \frac{1}{\pi^N |\det(\mathbf{\Gamma})|} - [\mathbf{y} - \mathbf{m}]^H \mathbf{\Gamma}^{-1} [\mathbf{y} - \mathbf{m}] \quad (3.55)$$

où  $\mathbf{y}$  est le vecteur d'observation  $N$ -dimensionnel,  $\mathbf{m}$  le vecteur moyenne de  $\mathbf{y}$ , dont le  $k^{ieme}$  élément est  $[\mathbf{m}]_k = A_k e^{i\theta_k}$ . La densité de probabilité *a priori* de  $\boldsymbol{\theta}$  s'écrit

$$\begin{aligned} \log p(\boldsymbol{\theta} | \delta^*) &= \log p(\theta_1) + (N-1) \log \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} \right) \\ &\quad - \sum_{k=2}^N \frac{(\theta_k - \theta_{k-1} - \delta^*)^2}{2\sigma_w^2} \end{aligned} \quad (3.56)$$

- Expression de  $\mathbf{H}_{11}$  : on peut écrire

$$\mathbf{H}_{11} = \mathbf{H}_{11}^D + \mathbf{H}_{11}^P \quad (3.57)$$

où

$$\mathbf{H}_{11}^D = E_{\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta} | \delta^*} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\theta}} \log p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}, \delta) | \delta^* \right]$$

$$\mathbf{H}_{11}^P = E_{\boldsymbol{\theta}|\delta^*} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\theta}} \log p(\boldsymbol{\theta} | \delta^*) \right]$$

On peut voir qu'il y a une équivalence entre ces expressions et celles calculées dans la section précédente :  $\mathbf{H}_{11}^D = \mathbf{B}^D$  et  $\mathbf{H}_{11}^P = \mathbf{B}^P$ .

- Expression de  $\mathbf{h}_{12}$  : la log-vraisemblance (eq.3.55) ne dépend pas de  $\delta$ , alors le premier terme de  $\mathbf{h}_{12}$  est nul, d'où

$$\mathbf{h}_{12} = E_{\boldsymbol{\theta}|\delta^*} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\theta}}^{\delta} \log p(\boldsymbol{\theta} | \delta^*) \right]$$

et à partir du modèle d'état, on obtient

$$\mathbf{h}_{12} = \left[ \frac{S}{\sigma_w^2} \mathbf{0}_{1 \times N-2} \quad -\frac{S}{\sigma_w^2} \right]^T \quad (3.58)$$

- Expression de  $H_{22}$  : étant donné que la log-vraisemblance ne dépend pas de  $\delta$ , et utilisant eq.(3.56), on peut calculer

$$\begin{aligned} H_{22} &= E_{\boldsymbol{\theta}|\delta^*} \left[ -\Delta_{\delta}^{\delta} \log p(\boldsymbol{\theta} | \delta^*) \right] \\ &= E_{\boldsymbol{\theta}|\delta^*} \left[ -\frac{\partial^2}{\partial \delta^2} \log p(\boldsymbol{\theta} | \delta^*) \right] \\ &= \frac{S(N-1)}{\sigma_w^2} \end{aligned} \quad (3.59)$$

**Remarques.** Pour la HCRB dans le cas DA, on peut faire les mêmes remarques qu'avec la BCRB. Alors on donne directement

$$HCRB_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{a}, S, s) = [\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{a})]_{N,N} \quad (3.60)$$

$$HCRB_{\delta}(\mathbf{a}, S, s) = [\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{a})]_{N+1,N+1} \quad (3.61)$$

avec  $N = (M - 1) * S + 1 + s$ .

### 3.2.3 Comportement des bornes

Dans cette section, on veut tracer les bornes de Cramér-Rao pour l'estimation de phase, et l'estimation conjointe de phase et d'offset de fréquence, en considérant différents scénarios. Ces bornes montrent, qu'avec le signal suréchantillonné, on peut améliorer les performances d'estimation des paramètres de synchronisation.

On note que les comportements de la BCRB et la HCRB pour l'estimation de phase sont très similaires, ainsi on ne présente les courbes que pour la borne hybride. Cela vient du fait que la matrice  $\mathbf{H}_{11}$  dans la borne hybride correspond à la BIM  $\mathbf{B}$ , et quand on calcule l'inverse de  $\mathbf{H}$ , le fait d'avoir  $\mathbf{h}_{12}$  et  $H_{22}$  a une influence limitée sur  $[\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{a})]_{N,N}$ .

On considère la transmission sur un canal à bruit blanc, Gaussien, additif, d'une séquence binaire à longueur minimale (MLS) de longueur 511 bits, générée avec un registre à décalages de polynôme caractéristique  $[1021]_8$  (représentation octale). On considère trois facteurs de suréchantillonnage ( $S = 1, 2$  et  $4$ ) et une mise en forme BOC (voir figure 3.2). La mise en forme BOC est utilisée dans le système de positionnement Galileo [ESA 08]. On suppose que l'on a une estimation de  $\tau$ , avec une erreur d'estimation  $\tau_o$  connue.

Dans les figures, on considère deux cas :

1. On calcule  $BCRB(\mathbf{a}, S, 0)$  pour les points de référence ( $T_c$ -espacés), pour  $S = 1, 2, 4$ .

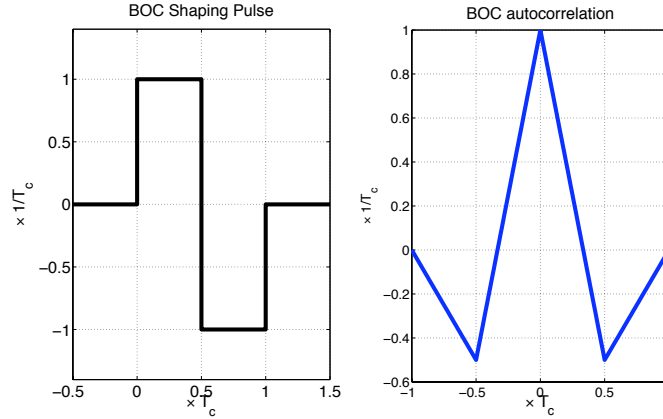


FIG. 3.2 – Mise en forme BOC,  $p(t)$  et sa fonction d'autocorrélation  $g(t)$

2. On calcule la borne pour les points intermédiaires ( $s = S/2$ ). Ce scénario est intéressant, car les points intermédiaires peuvent être utiles quand on utilise des algorithmes fractionnés (par exemple l'égaliseur "half symbol spaced" ou l'algorithme de récupération de rythme de Gardner, ou encore la boucle "early-late").

### 3.2.3.1 Borne HCRB pour les points de référence au pas $T_c$

La figure 3.3 représente en fonction du SNR, la HCRB en-ligne, pour deux variances différentes du bruit de phase : une première phase qui varie lentement,  $\sigma_w^2 = 0.001 \text{ rad}^2$ , et une plus rapide,  $\sigma_w^2 = 0.1 \text{ rad}^2$ . Dans les deux cas, on suppose une erreur d'estimation du délai nulle,  $\tau_o = 0$ .

On peut voir que si l'on utilise le signal suréchantillonné on peut gagner, et que ce gain est plus important à bas SNR. Si le SNR augmente, les bornes pour les différents valeurs de  $S$  tendent à se rapprocher, ce qui indique que l'on gagne moins en suréchantillonnant. On note que les performances diminuent si l'on augmente la variance du bruit de phase, et qu'à fort SNR, les bornes tendent vers une asymptote indépendante du bruit de phase.

Dans la figure 3.4, on trace le comportement de la borne en fonction de la variance du bruit de phase, pour une valeur du SNR fixé (0 dB). On peut encore voir le gain possible avec une synchronisation fractionnée. Le gain obtenu est plus fort à faible variance  $\sigma_w^2$ .

La figure 3.5 montre en fonction du SNR, la borne HCRB en-ligne,  $HCRB_\theta(\mathbf{a}, S, 0)$ , pour une variance du bruit de phase modérée,  $\sigma_w^2 = 0.01$ , et une erreur d'estimation de  $\tau$  connue,  $\tau_o = \frac{T_c}{8}$ . Pour  $\tau_o \neq 0$ , la borne indique que les performances sont moins bonnes, ce qui est assez intuitif, car on a une mauvaise estimation du délai. La borne est de plus en plus mauvaise, quand on augmente  $\tau_o$ .

La figure 3.6 représente en fonction du SNR, la borne HCRB en-ligne, pour l'estimation de l'offset de fréquence  $\delta$ ,  $HCRB_\delta(\mathbf{a}, S, 0)$ , pour deux tailles du bloc d'observation différentes,  $N = 200$  et  $N = 511$ . On considère une variance du bruit d'observation  $\sigma_w^2 = 0.01$ . Les performances s'améliorent avec la taille du bloc d'observation  $N$ , car on estime une valeur constante. Les performances augmentent avec le facteur de suréchantillonnage  $S$ , et contrairement à la borne de phase, tend vers 0 si l'on a  $N \rightarrow \infty$ .

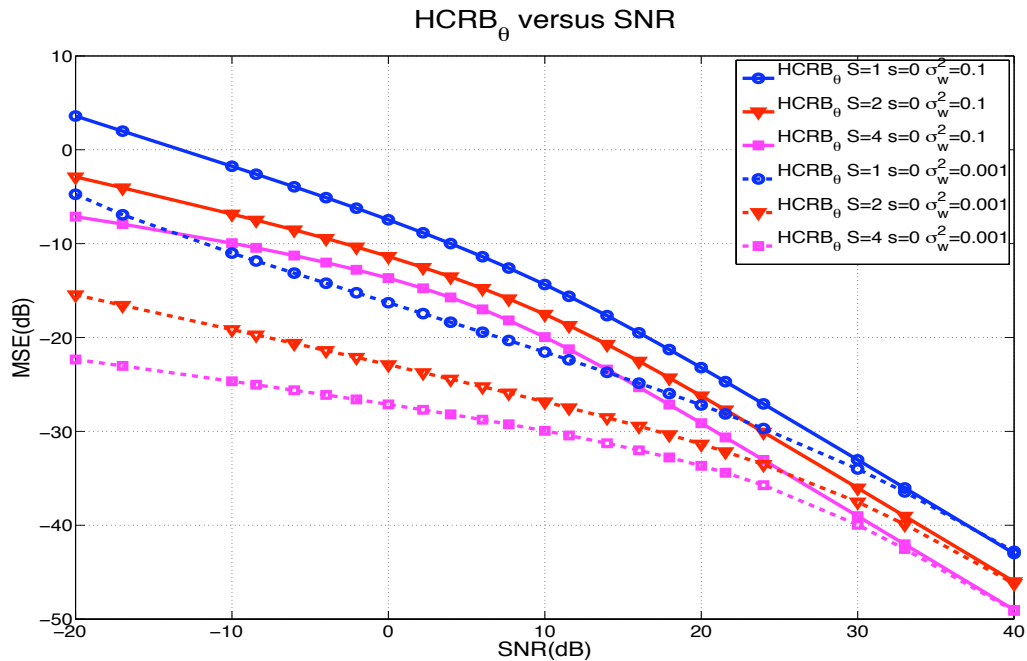


FIG. 3.3 –  $HCRB_{\theta}$  en fonction du SNR pour trois facteurs de suréchantillonnage  $S = 1, 2$  et  $4$ , et deux valeurs pour la variance du bruit d'observation,  $\sigma_w^2 = 0.001 \text{ rad}^2$  et  $\sigma_w^2 = 0.1 \text{ rad}^2$ .

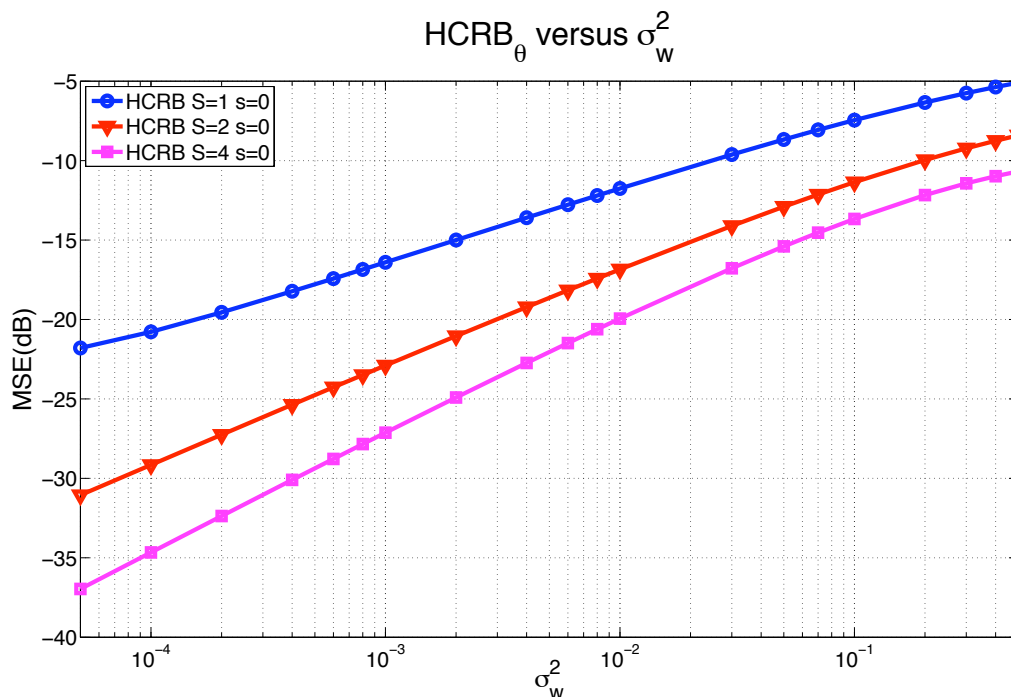


FIG. 3.4 –  $HCRB_{\theta}$  en fonction de la variance du bruit de phase, pour trois facteurs de suréchantillonnage,  $S = 1, 2$  et  $4$ , SNR = 0 dB.

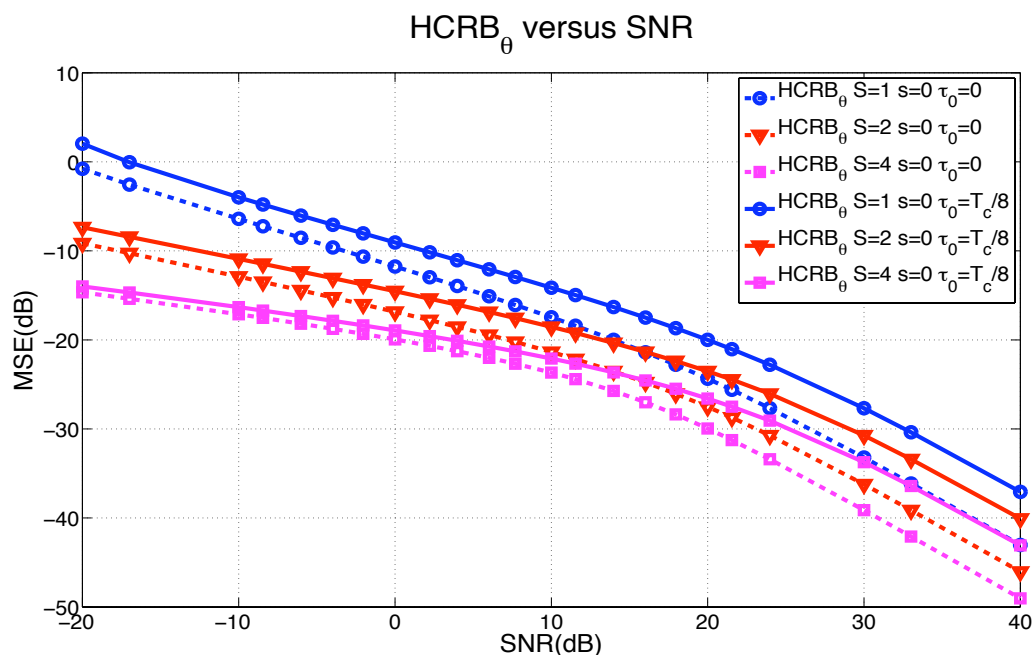


FIG. 3.5 –  $HCRB_{\theta}$  en fonction du SNR, pour trois facteurs de suréchantillonnage différents,  $S = 1, 2$  et  $4$ . On considère une variance du bruit de phase  $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$  et une erreur d'estimation du délai  $\tau_o = \frac{T_c}{8}$ .

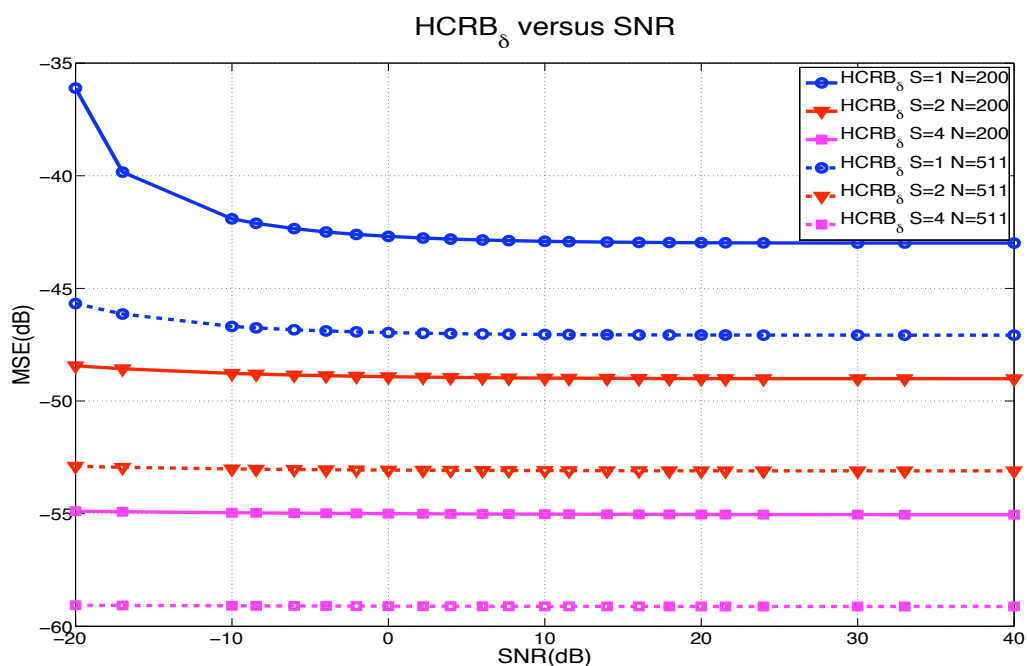


FIG. 3.6 –  $HCRB_{\delta}$  en fonction du SNR, pour trois facteurs de suréchantillonnage,  $S = 1, 2$  et  $4$ . On considère une variance du bruit de phase  $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ .

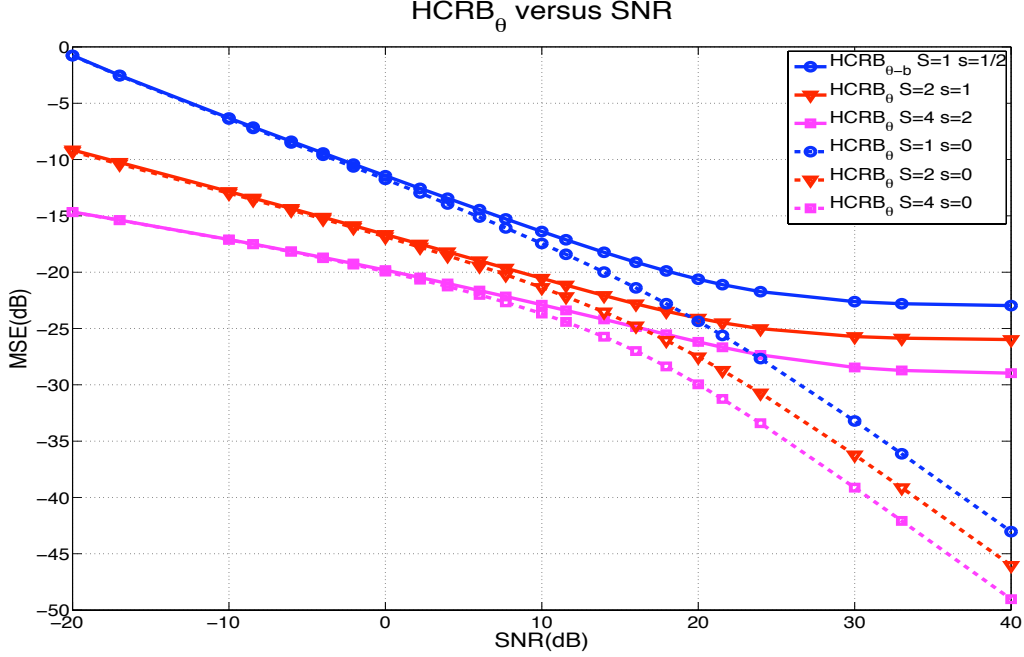


FIG. 3.7 –  $HCRB_\theta$  en fonction du SNR pour trois facteur de suréchantillonnage  $S = 1, 2$  et  $4$ , et une variance du bruit de phase  $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ .

### 3.2.3.2 Borne HCRB pour les points intermédiaires $T_c$ -espacés

Pour  $S = 1$ , on a seulement 1 échantillon dans chaque symbole, alors, pour comparer avec  $S = 2, 4$ , on doit générer les points intermédiaires qui manquent. On génère ces points, en gardant la valeur estimée ( $s = 0$ ) sur toute la période, c'est-à-dire, on calcule l'erreur d'estimation aux points intermédiaires à 1 point par symbole, avec la valeur estimée avec  $S = 1$  aux points de référence.

On peut calculer la HCRB pour les points intermédiaires du cas  $S = 1$ , que l'on note  $HCRB_{\theta-b}(\mathbf{a}, 1, 1/2)$

$$HCRB_{\theta-b}(\mathbf{a}, 1, 1/2) = HCRB_\theta(\mathbf{a}, 1, 0) + \sigma_w^2/2.$$

Étant donné que l'on compare les valeurs estimés à la position de référence avec les points au milieu du symbole, on rajoute à la borne pour  $S = 1$ , la moitié de l'incrément de variance dans un symbole,  $\sigma_w^2/2$ .

Pour  $S > 1$ , la borne dépend fortement de la dernière valeur observée  $A_N$ , à cause de la puissance non-stationnaire. Dans ce cas, on renomme la borne comme  $BCRB(A_N, S, s)$ . Pour  $\tau_o = 0$  et  $S = 2$ ,  $|A_N|$  vaut 0 ou 1 (voir fig.3.1), alors il y a deux bornes possibles. On peut définir une nouvelle borne moyenne :

$$HCRB_\theta(S, s) = p_0 \cdot HCRB_\theta(|A_N| = 0, S, s) + (1 - p_0) \cdot HCRB_\theta(|A_N| = 1, S, s) \quad (3.62)$$

où  $p_0$  est la proportion de valeurs  $A_k = 0$ .



**Comportement.** Pour le cas des points intermédiaires, la figure 3.7 montre en fonction du SNR, la borne HCRB en-ligne ( $HCRB_{\theta-b}(1, 1/2)$ ,  $HCRB_{\theta}(2, 1)$ ,  $HCRB_{\theta}(4, 2)$ ), pour une phase à évolution rapide, avec variance  $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ , et  $\tau_o = 0$ . On trace aussi, comme une référence, les bornes pour les points de référence.

Le gain augmente avec le facteur de suréchantillonnage  $S$ , et l'intérêt d'utiliser une synchronisation fractionnée, comme dans le cas des points de référence, est clair à bas SNR. À fort SNR,  $MSE \rightarrow \sigma_w^2/(2S)$ , à cause des points intermédiaires que l'on a généré pour  $S = 1$ , et de la puissance non-stationnaire de la séquence  $A_k$  pour  $S = 2$  et 4. On peut voir aussi cette saturation dans l'équation (3.62), qui pour  $p_0 = 0.5$  et à fort SNR, devient  $HCRB(S, s) \sim \frac{1}{2}HCRB(0, S, s)$ .

### 3.3 Conclusion

Ce chapitre a étudié le problème de synchronisation fractionnée. Dans la section 3.1, on a présenté une modélisation simple qui permet d'inclure les bruits colorés dans le modèle d'état, ce qui rend possible l'estimation conjointe des paramètres de synchronisation et prendre en compte la coloration du bruit d'observation. Ensuite, basé sur ce modèle, on a établi la borne de Cramér-Rao Bayésienne pour le problème d'estimation de phase et la borne de Cramér-Rao hybride, pour le problème d'estimation conjointe de phase et d'offset de fréquence.

Dans les systèmes de communication courants, le roll-off est compris entre 0 et 100% ; ainsi, un ou deux échantillons par symbole sont suffisants pour récupérer l'information du signal analogique, mais dans le contexte des systèmes GNSS, les fonctions de mise en forme utilisées ne vérifient pas le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon avec seulement 1 ou 2 échantillons par symbole (roll-off  $\gg 100\%$ ). Ces conditions spéciales, nous laissent espérer une amélioration des performances si l'on utilise un signal suréchantillonné. Le comportement des bornes que l'on a obtenu montrent ce possible gain.

Les résultats présentés dans ce chapitre, ont été, en partie, publiés dans :

– **Journal**

[Vila 10] J. Vilà-Valls, J.-M. Brossier et L. Ros, "Oversampled phase tracking in digital communications with large excess bandwidth", *Signal Processing*, vol. 90, issue 3, pp. 821-833, Mars 2010.

– **Conférence**

[Vila 09b] J. Vilà-Valls, J.-M. Brossier et L. Ros, "On-line hybrid Cramér-Rao bound for oversampled dynamical phase and frequency offset estimation", *Proc. of the IEEE Global Communications Conference, Globecom 2009*, Hawaii, USA, December 2009.

[Vila 08] J. Vilà-Valls, J.-M. Brossier et L. Ros, "On-line Bayesian Cramér-Rao bound for oversampled dynamical phase offset estimation", *Proc. of the IEEE International Symposium on Communications, Control and Signal Processing, ISCCSP 2010*, Malta, March 2008.

## Chapitre 4

# Synchronisation fractionnée : méthodes d'estimation

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Estimation de phase</b> . . . . .	<b>76</b>
4.1.1	Algorithmes pour l'estimation dynamique de phase . . . . .	76
4.1.1.1	EKF . . . . .	76
4.1.1.2	Méthodes particulières et déterministes . . . . .	76
4.1.2	Discussion . . . . .	77
4.1.2.1	Estimation avec les points de référence au pas $T_c$ . . . . .	77
4.1.2.2	Estimation avec les points intermédiaires $T_c$ -espacés . . . . .	79
4.1.2.3	Comparaison entre l'EKF et d'autres méthodes Bayésiennes . . . . .	82
4.1.2.4	Analyse dans des conditions réelles . . . . .	84
<b>4.2</b>	<b>Estimation conjointe de phase et d'offset de fréquence</b> . . . . .	<b>85</b>
4.2.1	Discussion . . . . .	86
4.2.1.1	Estimation avec les points de référence au pas $T_c$ . . . . .	86
4.2.1.2	Estimation avec les points intermédiaires $T_c$ -espacés . . . . .	87
<b>4.3</b>	<b>Estimation de retard</b> . . . . .	<b>89</b>
4.3.1	Introduction . . . . .	90
4.3.2	Maximum de vraisemblance . . . . .	90
4.3.3	Maximum a Posteriori . . . . .	90
4.3.4	Méthode itérative pour l'estimation de délai . . . . .	91
4.3.5	Discussion . . . . .	93
<b>4.4</b>	<b>Estimation de phase et bruits non-Gaussiens</b> . . . . .	<b>95</b>
4.4.1	Bruit d'état non-Gaussien . . . . .	95
4.4.2	Discussion . . . . .	95
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>97</b>

---

DANS le chapitre 3, on a présenté une modélisation pour traiter le problème de la synchronisation *fractionnée*. Ensuite, les bornes de Cramér-Rao associées aux problèmes d'estimation de phase, d'estimation conjointe de phase et d'offset de fréquence, ont été calculées.

Le présent chapitre est lié directement au chapitre précédent. On propose des algorithmes pour résoudre le problème de la synchronisation fractionnée. Pour cela, on utilise la modélisation présentée dans la section 3.1 et les méthodes présentées dans le chapitre 2. De plus, on utilise les bornes de Cramér-Rao comme référence (voir la section 3.2). Les sections 4.1, 4.2 et 4.3, présentent respectivement, une solution aux problèmes d'estimation de phase, d'estimation conjointe de phase et de décalage de fréquence, et d'estimation de délai. Pour conclure cette étude, la section 4.4, montre les résultats obtenus pour l'estimation de phase avec des bruits non-Gaussiens.

## 4.1 Estimation de phase

On a présenté le modèle de signal pour l'estimation de phase et l'on a établi la borne de Cramér-Rao associée dans le chapitre 3. Dans le chapitre 2, on a présenté le problème du filtrage optimal et quelques solutions sous-optimales : le filtrage de Kalman, les méthodes particulières et les méthodes déterministes. Il nous reste seulement, et c'est ce que l'on fait dans cette section, à présenter les résultats obtenus en appliquant les méthodes de filtrage au modèle présenté dans la section 3.1, et comparer les résultats avec la BCRB de la section 3.2. Principalement on a utilisé le filtre de Kalman étendu pour résoudre le problème, et l'on a comparé les résultats obtenus avec les méthodes particulières et les méthodes déterministes. On se place dans un contexte d'estimation supervisée (borne DA) et l'on suppose que la séquence de symboles transmise est connue, ainsi que les statistiques du modèle d'état,  $\sigma_w^2$ , et le délai,  $\tau$ , ou l'erreur  $\tau_o$ .

### 4.1.1 Algorithmes pour l'estimation dynamique de phase

#### 4.1.1.1 EKF

Le problème étant non-linéaire, on ne peut pas appliquer directement le KF, et l'on doit linéariser le problème et appliquer le KF étendu. Dans ce cas, d'après le modèle de signal (eqs.(3.27,3.28) sans dérive), on voit que  $\mathbf{F}_k^* = \mathbf{M}_K$  (sans dérive), car le modèle d'état est linéaire, et

$$\mathbf{H}_k^* = \frac{\partial \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})}{\partial \mathbf{x}_k} = \begin{bmatrix} iA_k e^{i\hat{\theta}_{k|k-1}} & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4.1)$$

La matrice de covariance du bruit d'état,  $\mathbf{Q}_k$ , est indépendante de  $k$ , et a seulement deux valeurs non-nulles :  $[\mathbf{Q}]_{1,1} = \sigma_w^2/S$  et  $[\mathbf{Q}]_{3,3} = \sigma_n^2$ . Étant donné que l'on a introduit le bruit coloré  $b_k$  dans l'état, à des fins pratiques, on n'a pas de bruit d'observation, et la matrice de covariance  $\mathbf{R}_k$  est nulle. Si l'on introduit cela dans l'algorithme 1, on obtient l'algorithme pour l'estimation dynamique de phase.

Les résultats obtenus vont dépendre du facteur de suréchantillonnage  $S$ , et de l'indice  $s$ . On note  $\text{MSE}_{\text{EKF}}(S, s)$ , la MSE obtenue avec un EKF qui travaille en utilisant les  $s^{\text{eme}}$  points d'un signal suréchantillonné avec un facteur  $S$ .

#### 4.1.1.2 Méthodes particulières et déterministes

Si l'on veut appliquer une méthode particulière au problème d'estimation de phase, on doit tout d'abord décider quelle fonction d'importance et quel type de re-échantillonnage on veut utiliser, et éventuellement voir si l'on peut appliquer la Rao-Blackwellisation ou pas.

Dans notre cas, on choisit d'utiliser comme fonction d'importance la densité de transition *a priori* de l'état,  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})$ , et un re-échantillonnage résiduel. Étant donné notre choix, les poids vont évoluer selon la fonction de vraisemblance  $p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)$ . Pour faire évoluer les particules on utilise la fonction d'importance de la façon suivante

$$\mathbf{x}_k^{(i)} \sim p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}) \quad (4.2)$$

ce qui est facile dans notre modèle, car il suffit de générer des bruits Gaussiens, et faire évoluer les particules à partir des particules obtenues dans l'itération précédente, selon le modèle d'état.

Dans le cas où l'on utilise une méthode déterministe on ne doit faire aucune linéarisation ainsi l'application est directe. D'abord on détermine quelle sous-méthode on veut utiliser, et ensuite on applique la méthode résumée dans l'algorithme 4 au modèle de signal désiré.

### 4.1.2 Discussion

Ici, on illustre le comportement de l'EKF en considérant différents scénarios, et l'on compare ses performances avec la BCRB. On compare aussi, les résultats obtenus, avec une méthode particulière et une méthode déterministe, pour justifier l'utilisation de l'EKF, et l'on analyse les pertes de performance quand on utilise une mise en forme à bande limitée. On considère, comme on l'a fait pour les bornes, un scénario supervisé ou l'on transmet sur un canal à bruit blanc, Gaussien, additif, une séquence MLS de longueur 511 bits connue, générée avec un registre à décalages de polynôme caractéristique  $[1021]_8$  (représentation octale). On considère trois facteurs de suréchantillonnage ( $S = 1, 2$  et  $4$ ) et une mise en forme BOC (voir figure 3.2). Dans cette section, on considère que l'on connaît l'erreur de synchronisation de délai,  $\tau_o$ , et la séquence émise (synchronisation supervisée).

Dans les figures, on trace la MSE obtenue avec des simulations Monte Carlo en fonction du rapport signal sur bruit. Le SNR correspond au rapport porteuse sur bruit ( $\frac{C}{N}$ ) à l'entrée du récepteur. Dans notre cas, la mise en forme et les symboles  $a_k$  sont normalisés (*i.e.*  $\sigma_a^2 = 1$  et  $g(0) = 1$ ), et ce rapport est simplement  $\frac{C}{N} = \frac{1}{\sigma_n^2}$ .

La figure 4.1 montre une réalisation de la sortie du filtre de Kalman étendu pour l'estimation de phase. On peut voir que l'on a une estimation correcte. Dans la suite on fait une analyse des performances en calculant la MSE sur un nombre élevé de réalisations.

Pour la MSE on considère deux cas :

1. On calcule  $BCRB(\mathbf{a}, S, 0)$  et  $MSE_{\text{EKF}}(S, 0)$  pour les points de référence au pas  $T_c$ , pour  $S = 1, 2, 4$ .
2. On calcule la MSE pour les points intermédiaires ( $s = S/2$ ).

On utilisera le même scénario dans la section d'estimation conjointe de phase et d'offset de fréquence.

#### 4.1.2.1 Estimation avec les points de référence au pas $T_c$

La figure 4.2 montre en fonction du SNR, la BCRB en-ligne (voir eq.(3.49)) et la MSE obtenue avec l'EKF. On a deux cas : le premier considère une phase qui varie lentement, avec une variance du bruit de phase  $\sigma_w^2 = 0.001 \text{ rad}^2$ , et le deuxième considère une phase avec une évolution rapide,  $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ . Dans les deux scénarios, l'erreur dans l'estimation du délai est nulle,  $\tau_o = 0$ , ce qui est équivalent à considérer le délai parfaitement synchronisé.

Pour  $S = 1$ , la performance de l'EKF coïncide avec la BCRB, alors on ne peut pas faire mieux. Pour  $S = 2$ , les performances de l'EKF sont un petit peu moins bonnes, mais on est

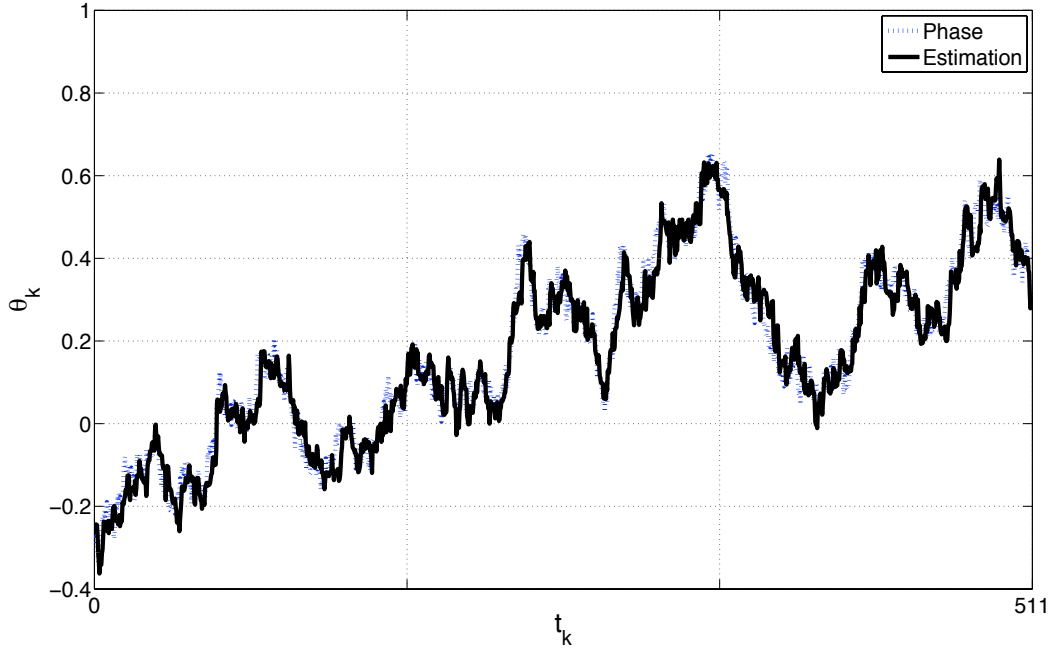


FIG. 4.1 – Estimation de phase avec  $S = 2$ ,  $\sigma_w^2 = 0.001$ ,  $\sigma_n^2 = 0.1$

très proche de la borne. Pour  $S = 4$ , la MSE obtenue, est un peu meilleure qu'avec  $S = 2$  à haut SNR; en outre, l'EKF ne coïncide plus avec la borne. On n'obtient pas des meilleures performances en utilisant  $S = 4$ , parce que les échantillons que l'on ajoute sont presque tous nuls (voir fig. 3.1), alors on a peu d'information en plus.

Le gain obtenu augmente avec le facteur de suréchantillonnage  $S$ , et l'intérêt de suréchantillonner est clair à bas SNR, ce qui est le cas dans les communications par satellite. Le gain grâce au suréchantillonnage diminue quand le SNR augmente.

Dans la figure 4.3, on analyse le comportement de l'EKF en fonction de la variance du bruit de phase, pour un SNR fixé. On considère le cas d'un SNR faible (0 dB). Ici, on peut encore mesurer le gain de performance apporté par le suréchantillonnage et le bon fonctionnement de l'algorithme. L'amélioration est plus importante à faible variance  $\sigma_w^2$ , et dans ce cas la MSE de l'EKF coïncide avec la borne. Quand on a une variance  $\sigma_w^2$  très importante, les performances s'éloignent de la borne, ce qui est normal, car à forte variance, l'erreur de linéarisation dans l'EKF n'est pas négligeable, par rapport au niveau de bruit d'observation.

La figure 4.4 superpose, en fonction du SNR, la BCRB en-ligne,  $BCRB(S, 0)$ , et la MSE de l'EKF pour une phase avec une variation faible,  $\sigma_w^2 = 0.001$ , mais avec une erreur connue dans la synchronisation du délai,  $\tau = \frac{T_c}{8}$ . On considère deux facteurs de suréchantillonnage  $S = 1, 2$ . On trace, comme référence, les performances de l'EKF pour la même variance et  $\tau_o = 0$ . On voit que pour  $\tau_o \neq 0$ , la borne et l'algorithme ont des performances moins bonnes. Le gain entre différents facteurs de suréchantillonnage est plus grand à fort SNR avec un décalage non-nul.

Pour montrer que les performances sont de moins en moins bonnes, au fur à mesure que  $\tau_o$  augmente, on trace dans la figure 4.5, la BCRB en-ligne et la MSE de l'EKF en fonction de  $\tau_o$ . On considère  $0 \leq \tau_o < \frac{T_c}{4}$ , un rapport signal sur bruit fixé, SNR=0 dB et une phase à évolution lente,  $\sigma_w^2 = 0.001$ . On note que les performances pour  $S = 4$  sont symétriques en  $\tau$ , chaque  $\frac{T_c}{8}$ , pour  $S = 2$  chaque  $\frac{T_c}{4}$ , et pour  $S = 1$  chaque  $\frac{T_c}{2}$ .

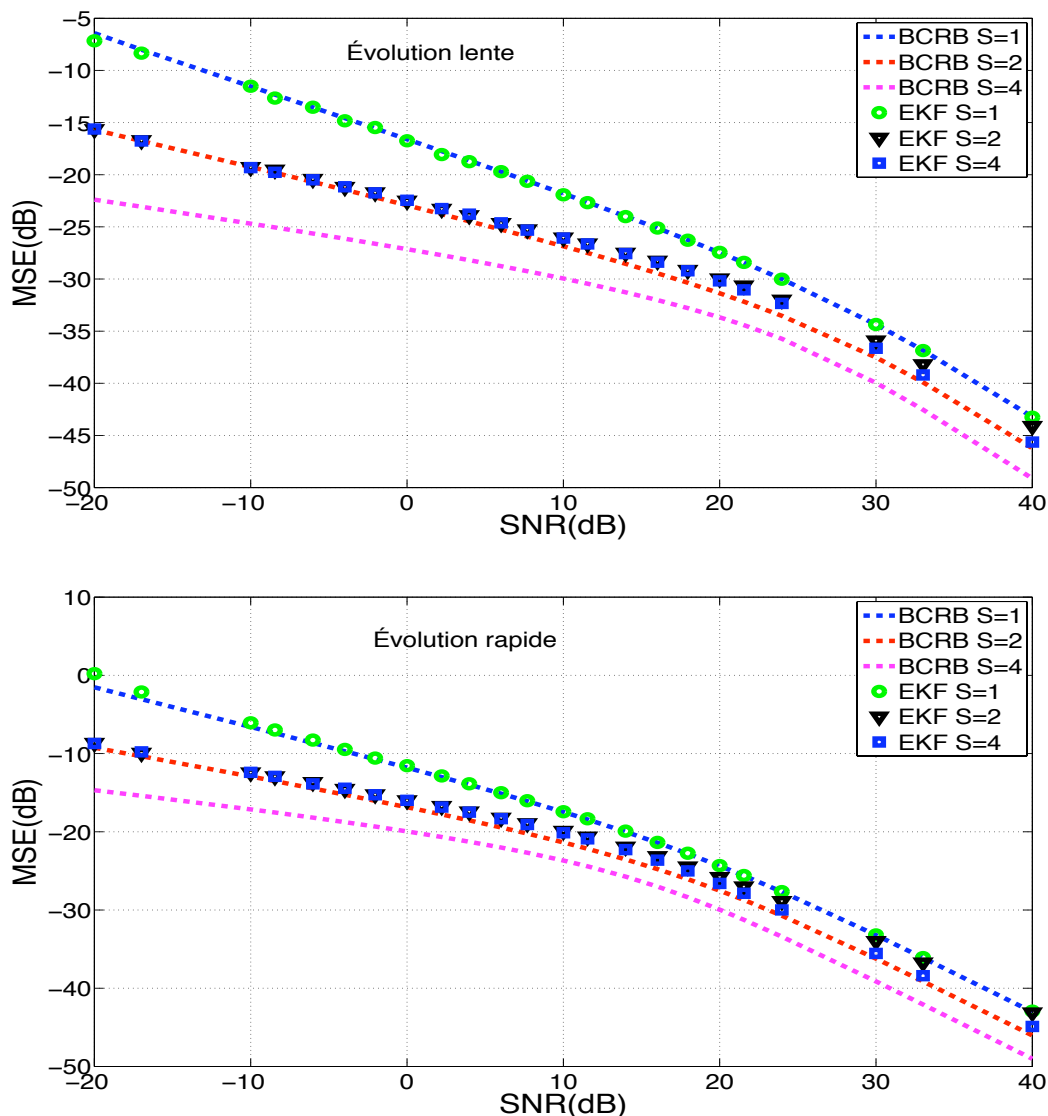


FIG. 4.2 – MSE pour l'EKF et BCRB en fonction du SNR pour trois facteurs de suréchantillonnage  $S = 1, 2$  et  $4$ , avec une variance du bruit de phase  $\sigma_w^2 = 0.001 \text{ rad}^2$  (évolution lente) et  $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$  (évolution rapide).

#### 4.1.2.2 Estimation avec les points intermédiaires $T_c$ -espacés

Dans cette partie, on prend le cas  $S = 4$  comme référence. Pour  $S = 1$ , on a seulement 1 valeur estimée par symbole, alors, pour comparer avec  $S = 2, 4$ , on doit générer les points intermédiaires qui manquent. On obtient ces points intermédiaires, en gardant la valeur estimée ( $s = 0$ ) sur toute la période. On note  $\text{MSE}_{\text{EKF}}(1, 1/2)$ .

La BCRB pour les point intermédiaires dans le cas  $S = 1$ , peut être calculée facilement comme

$$\text{BCRB}_b(\mathbf{a}, 1, 1/2) = \text{BCRB}(\mathbf{a}, 1, 0) + \sigma_w^2/2. \quad (4.3)$$

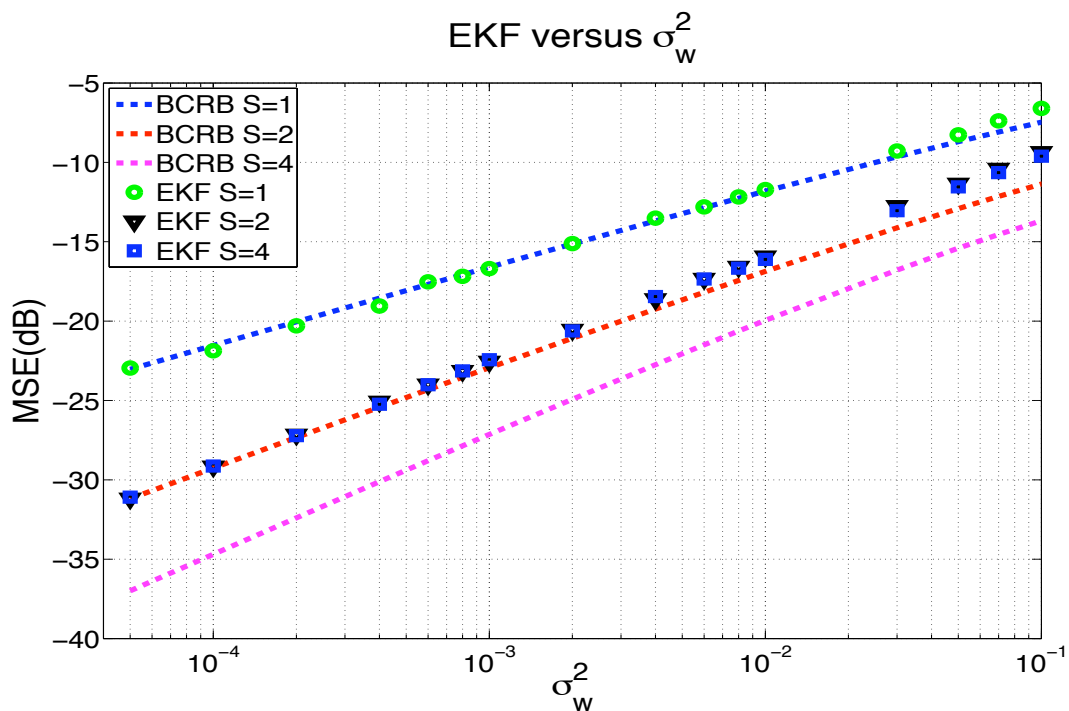


FIG. 4.3 – MSE pour l'EKF et BCRB en fonction de la variance du bruit de phase pour trois facteurs de suréchantillonnage  $S = 1, 2$  and  $4$ ,  $\text{SNR} = 0$  dB.

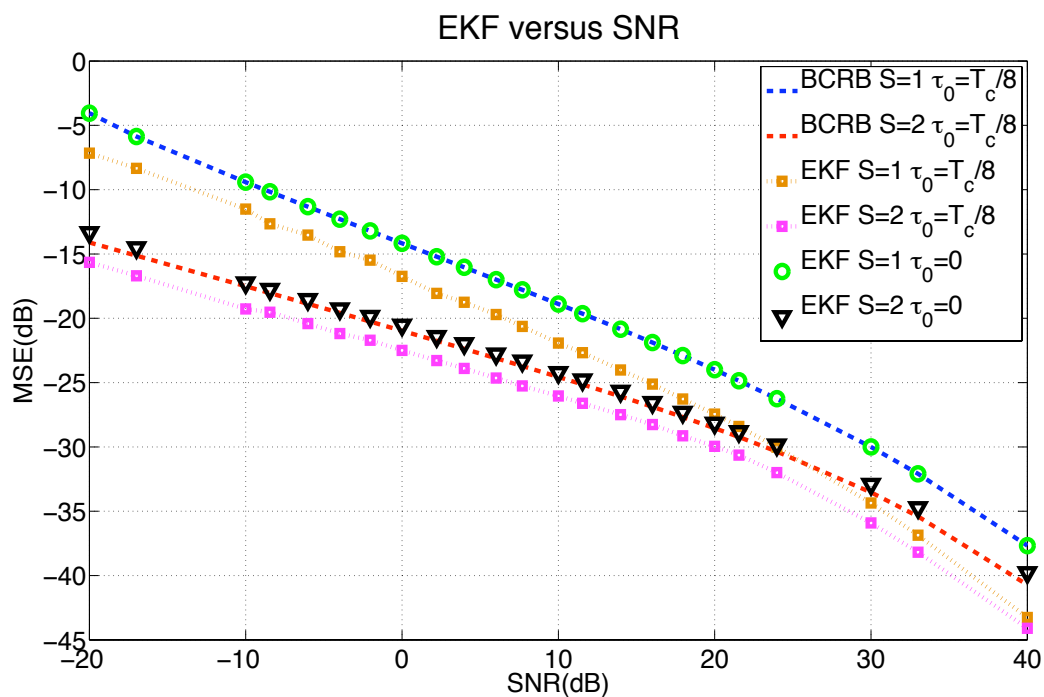


FIG. 4.4 – MSE pour l'EKF et BCRB en fonction du SNR, en présence d'une mauvaise synchronisation (connue) du délai, pour deux facteurs de suréchantillonnage  $S = 1$  and  $2$ .

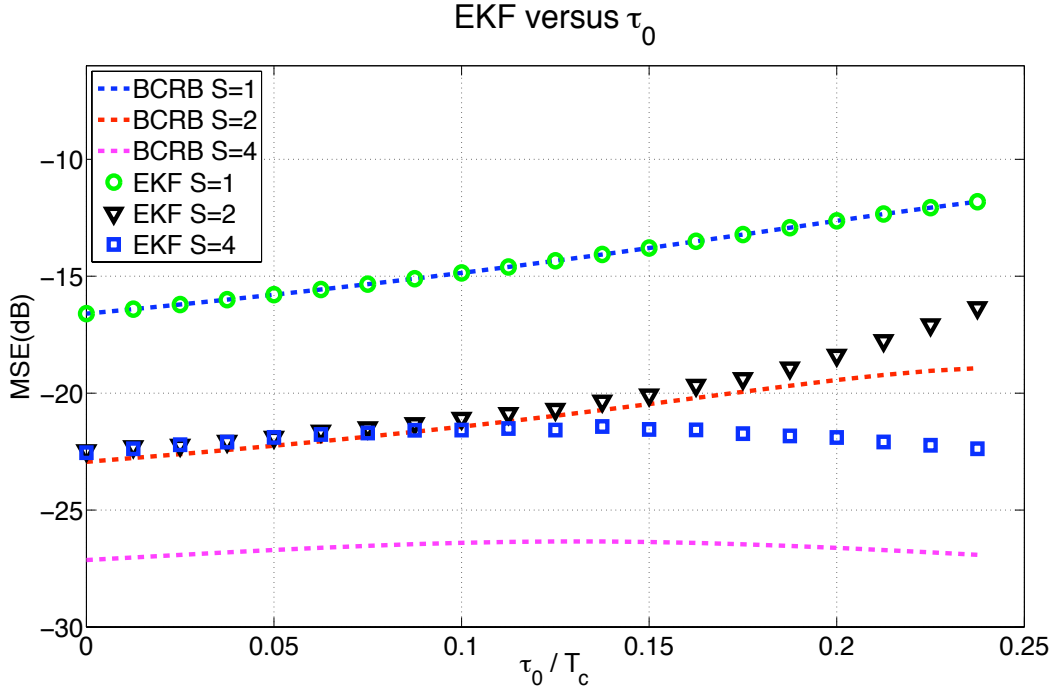


FIG. 4.5 – MSE pour l'EKF et BCRB en fonction de  $\tau_0$  pour  $\text{SNR}=0$  dB et  $\sigma_w^2 = 0.001$ .

Comme on a fait dans la section 3.2.3, on peut définir une nouvelle borne moyenne :

$$\begin{aligned} BCRB(S, s) &= p_0 \cdot BCRB(|A_N|=0, S, s) \\ &\quad + (1 - p_0) \cdot BCRB(|A_N|=1, S, s) \end{aligned} \quad (4.4)$$

où  $p_0$  est la proportion de  $A_k = 0$ . Cette borne moyenne est complètement adaptée pour comparer avec la MSE obtenue avec un EKF qui utilise la même proportion connue  $p_0$ . Dans notre simulation  $p_0 = 0.5$ .

**Résultats :** Pour le cas des points intermédiaires, la figure 4.6 superpose, en fonction du SNR, les BCRBs en-ligne ( $BCRB_b(1, 1/2)$ ,  $BCRB(2, 1)$ ,  $BCRB(4, 2)$ ) et la MSE obtenue avec l'EKF pour une phase à évolution rapide, avec variance  $\sigma_w^2 = 0.01$  rad<sup>2</sup>, et  $\tau = 0$ . Pour  $S = 1$  et 2, la variance de l'EKF est proche de la BCRB. Pour  $S = 4$ , à faible SNR, la MSE obtenue avec l'EKF est presque la même que pour  $S = 2$ , mais à fort SNR, elle tend vers la borne.

Le gain augmente avec le facteur de suréchantillonnage, et l'intérêt de suréchantillonner est plus important à faible SNR. À fort SNR,  $MSE \rightarrow \sigma_w^2/2S$ , à cause du procédé de blocage pour  $S = 1$ , et à cause de la puissance non-stationnaire de la séquence  $A_k$  pour  $S = 2$  et 4. On peut voir cette saturation dans l'eq. (4.4), qui devient à fort SNR, pour  $p_0 = 0.5$

$$BCRB(S, s) \sim \frac{1}{2} BCRB(0, S, s) \quad (4.5)$$

et alors,  $BCRB(0, S, s) = \sigma_w^2/S$ . Si l'on compare la performance de l'algorithme dans ce cas, avec les performances pour  $s = 0$  (voir fig.4.2), on obtient le même résultat à faible SNR, mais des performances moins bonnes à fort SNR, à cause de la saturation.



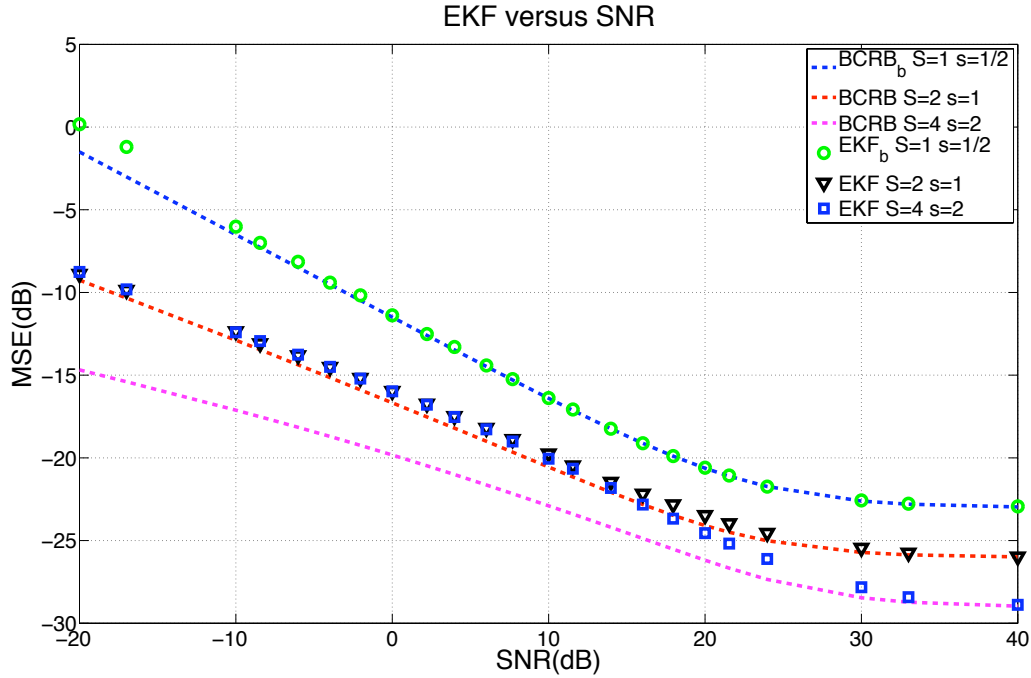


FIG. 4.6 – MSE pour l'EKF et BCRB en fonction du SNR pour les points intermédiaires, trois facteurs de suréchantillonnage  $S = 1, 2$  et  $4$ , et une variance du bruit de phase  $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ .

#### 4.1.2.3 Comparaison entre l'EKF et d'autres méthodes Bayésiennes

Dans cette partie on compare les performances de l'EKF avec une méthode particulière (PF avec rééchantillonnage résiduel), et avec deux méthodes déterministes (SQKF et SCKF).

La comparaison est faite dans le cas qui utilise les points de référence. Les paramètres qui ne sont pas spécifiés, sont les mêmes que ceux utilisés au début de la section.

La figure 4.7 superpose, en fonction du SNR, la BCRB en-ligne et la MSE obtenues avec deux algorithmes différents : l'EKF et un PF qui utilise 200 particules pour une phase de variance modérée  $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$  et  $\tau_o = 0$ .

Pour  $S = 1$ , les résultats obtenus avec le PF sont les mêmes qu'avec l'EKF, sauf à fort SNR, où le PF sature, ce qui est normal, car un fort SNR signifie un bruit d'observation très faible, et le PF ne marche pas si le bruit d'observation est trop faible. Pour  $S = 2$ , la performance du PF est presque la même que celle obtenue avec l'EKF, entre 5 dB et 25 dB, mais moins bonne ailleurs, c'est-à-dire, sans bruit ou avec un bruit très fort.

La complexité et charge de calcul du PF est beaucoup plus forte qu'avec l'EKF, qui est la méthode de filtrage non-linéaire la plus simple, car on doit évaluer les fonctions pour chaque particule. Sa charge de calcul augmente de manière linéaire avec le nombre de particules. Dans notre cas, en utilisant 200 particules, l'EKF est 10 fois plus rapide que le PF, pour des résultats presque identiques. Pour ces raisons, dans ce type de problème, légèrement non-linéaire et avec une dimension de l'état faible, l'EKF reste la meilleure option.

La figure 4.8 superpose, en fonction du SNR, la BCRB en-ligne et la MSE obtenue avec trois algorithmes différents : un filtre de Kalman (EKF) et deux méthodes déterministes (SQKF et SCKF). On a considéré une phase de variance faible  $\sigma_w^2 = 0.001 \text{ rad}^2$  et une bonne synchronisation du délai  $\tau_o = 0$

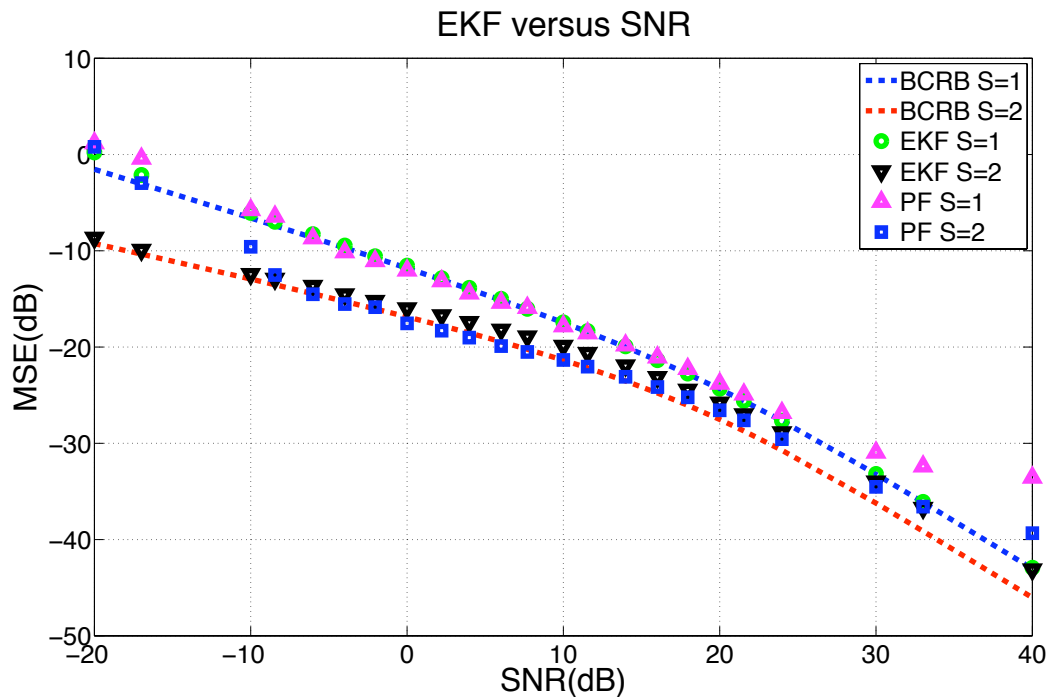


FIG. 4.7 – EKF, PF et BCRB en fonction du SNR pour deux facteurs de suréchantillonnage  $S = 1, 2$ , avec une variance du bruit de phase  $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ .

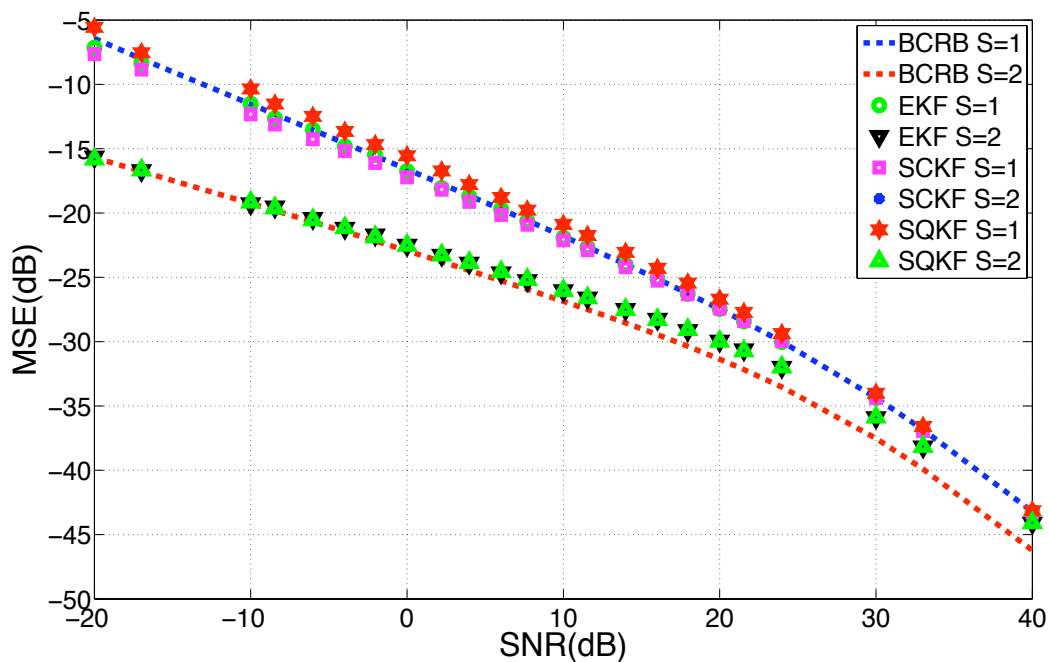


FIG. 4.8 – EKF, SQKF, SCKF et BCRB en fonction du SNR pour deux facteurs de suréchantillonnage  $S = 1, 2$ , avec une variance du bruit de phase  $\sigma_w^2 = 0.001 \text{ rad}^2$ .

On peut voir que les résultats obtenus avec le SQKF et le SCKF sont les mêmes qu'avec l'EKF. Ce résultat est cohérent avec ce que l'on attendait, car les méthodes déterministes sont des améliorations de l'EKF mais le noyau de l'algorithme est le même. Étant donné que notre problème est Gaussien et faiblement non-linéaire, la méthode de Kalman implémentée est presque optimale.

#### 4.1.2.4 Analyse dans des conditions réelles

Dans cette section, on trace les performances obtenues avec l'EKF, si l'on considère une mise en forme réelle, à bande limitée. Dans ce cas, on prend une mise en forme BOC à bande limitée, qui est une fonction BOC convoluée avec une fonction sinc dans le domaine temporel.

On présente dans la figure 4.9, la comparaison entre les résultats obtenus avec la fonction BOC idéale et une fonction BOC à bande limitée, qui serait celle que l'on aurait dans une application réelle.

Cette fonction BOC à bande limitée est obtenue en filtrant la fonction BOC idéale, avec une fonction  $\text{sinc}(\pi Wt)$ . On note que pour Galileo, on a un taux chip de  $1/T_c = 10$  Mchip/s, et la largeur de bande du récepteur est  $W = 20$  MHz (*i.e*  $2/T_c$ ) ou  $W = 40$  MHz (*i.e*  $4/T_c$ ), ce qui permet d'utiliser, respectivement,  $S = 2$  ou  $S = 4$ , échantillons/symbole, ce qui est normal dans les récepteurs satellite.

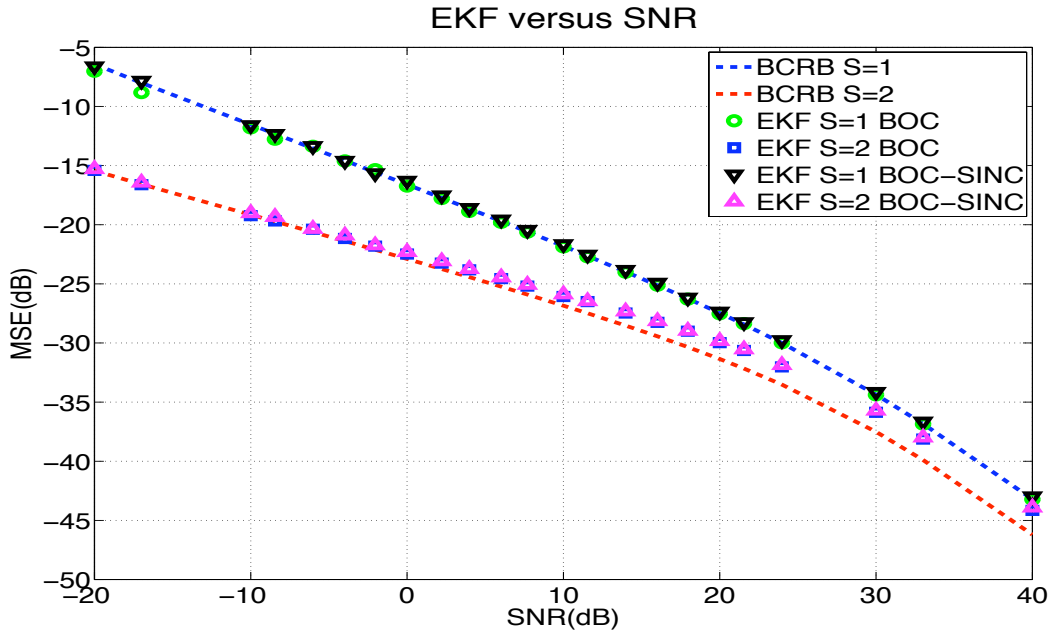


FIG. 4.9 – EKF MSE pour deux fonctions BOC et BCRB, versus le SNR pour deux facteurs de suréchantillonnage  $S = 1, 2$ , avec une variance du bruit de phase  $\sigma_w^2 = 0.001 \text{ rad}^2$ .  $W = 4/T_c$ .

On présente les résultats obtenus avec une variance du bruit de phase  $\sigma_w^2 = 0.001 \text{ rad}^2$ ,  $\tau_o = 0$  et une largeur de bande  $W = 4/T_c$ .

Les résultats utilisant le fonction BOC à bande limitée, sont les mêmes qu'avec une fonction BOC idéale, car la largeur de bande du récepteur est suffisamment grande.

Dans la figure 4.10, on présente les résultats obtenus dans le même scénario, mais en utilisant une fonction sinc avec trois largeurs de bande différentes,  $W = 4/T_c, 2/T_c$  et  $1/T_c$ . On peut voir que dans le premier cas,  $W = 4/T_c$ , les résultats sont les mêmes qu'avec la fonction BOC idéale.

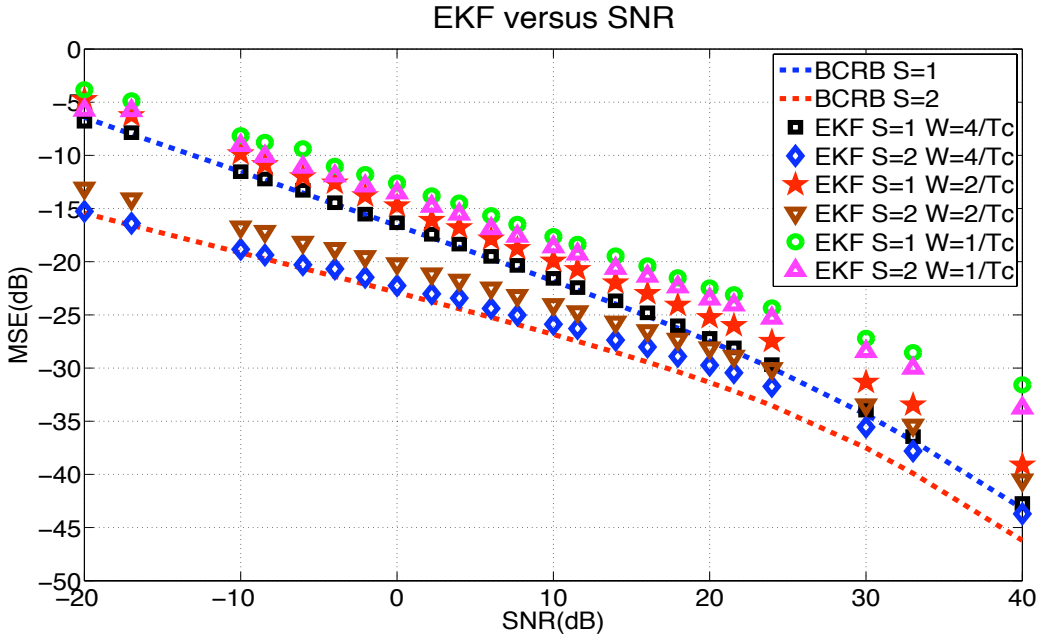


FIG. 4.10 – EKF MSE pour une fonction de mise en forme BOC à bande limité ( $W = 1/T_c, 2/T_c$  et  $4/T_c$ ) versus le SNR, pour deux facteurs de suréchantillonnage  $S = 1, 2$ , avec une variance du bruit de phase  $\sigma_w^2 = 0.001 \text{ rad}^2$ .

En utilisant  $W = 2/T_c$  et  $W = 1/T_c$ , la largeur de bande n'est pas suffisante et les performances sont moins bonnes (perte de 2.5 dB pour  $W = 2/T_c$  et jusqu'à 8 dB pour  $W = 1/T_c$  et  $S = 2$ ). Étant donné qu'il est normal d'utiliser  $S = 4$  échantillons/symbole dans les récepteurs satellite, on peut conclure que les résultats obtenus avec la modulation BOC idéale, sont corrects dans un scénario réel.

**Note** : si l'on considèrait des bits de données, à bas débit, superposés à la séquence d'apprentissage, l'algorithme ne fonctionne pas correctement si la valeur qui module est  $-1$ . On pourrait résoudre facilement ce problème en considérant que l'on peut démarrer l'algorithme pour les deux valeurs possibles en parallèle,  $+1$  et  $-1$ , et rapidement détecter la valeur correcte, par exemple, à partir de la covariance d'estimation du filtre de Kalman. Une fois détectée, on laisse tourner seulement l'algorithme avec la valeur correcte.

## 4.2 Estimation conjointe de phase et d'offset de fréquence

Dans cette section, on étudie le problème d'estimation conjointe de phase et d'offset de fréquence. La structure de la section est la même que la précédente. On note que les résultats pour l'estimation de phase, sont similaires à ceux présentés dans la section 4.1, ainsi on ne présente que quelques scénarios.

On utilise le modèle présenté dans la section 3.1 (eqs. (3.27,3.28)), et le filtre de Kalman présenté dans la section 2.2. On compare les résultats à la borne hybride HCRB (voir section 3.2). On obtient le filtre de Kalman pour l'estimation conjointe de phase et offset de fréquence, comme dans la section précédente. On considère toujours une bonne synchronisation du délai ou erreur  $\tau_o$  connue, un contexte DA, ainsi que la connaissance des statistiques du bruit d'état,  $\sigma_w^2$ .

### 4.2.1 Discussion

La figure 4.11, montre une réalisation du filtre de Kalman étendu pour l'estimation de phase avec un offset de fréquence  $\delta = 0.002$ . On peut voir dans ce cas que l'évolution de la phase est fortement perturbée par la dérive de fréquence (pente ascendante intrinsèque), mais que l'on a une estimation correcte. On note que la vraie valeur de phase est modulo  $2\pi$ .

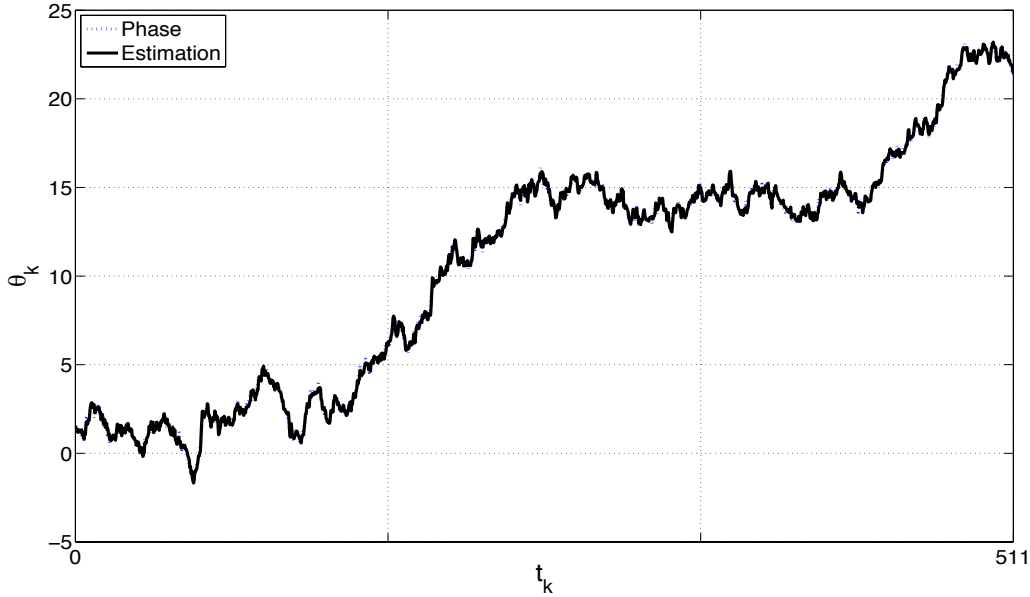


FIG. 4.11 – Estimation de phase avec  $S = 2$ ,  $\sigma_w^2 = 0.1$ ,  $\sigma_n^2 = 0.1$ ,  $\delta = 0.002$

Dans la suite on fait une analyse des performances en calculant la MSE sur un nombre élevé de réalisations. On utilise le même scénario que l'on a présenté dans la section 4.1, et on prend une dérive de fréquence  $\delta = 0.2$ .

#### 4.2.1.1 Estimation avec les points de référence au pas $T_c$

La figure 4.12 superpose, en fonction du SNR, la borne HCRB en-ligne et la MSE de l'EKF. On considère une variance à évolution modérée,  $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ , et une synchronisation parfaite du délai,  $\tau_o = 0$ .

Pour  $S = 1$ , les performances de l'EKF coïncident avec la HCRB, sauf à bas SNR, où on obtient des mauvais résultats. Pour  $S = 2$ , la MSE obtenue avec l'EKF est légèrement supérieure à la borne. Pour  $S = 4$ , la MSE est un peu meilleure que celle que l'on obtient avec  $S = 2$ , à fort SNR ; en plus, dans ce cas, l'EKF ne coïncide plus avec la borne, ce qui est normal, car les échantillons que l'on ajoute avec  $S = 4$ , sont presque tous nuls, et apportent peu d'information (voir fig. 3.1).

On peut voir qu'en suréchantillonnant on gagne, et que ce gain est plus important à bas SNR. Au fur et à mesure que le SNR augmente, le gain diminue. Le gain en performance obtenu avec différents facteurs de suréchantillonnage  $S$ , diminue quand la variance du bruit d'état  $\sigma_w^2$  augmente.

Dans la figure 4.13, on analyse le comportement de la HCRB et le EKF, pour un SNR fixé, en fonction de la variance du bruit de phase. On présente un scénario avec un SNR bas,  $\text{SNR} = 0$

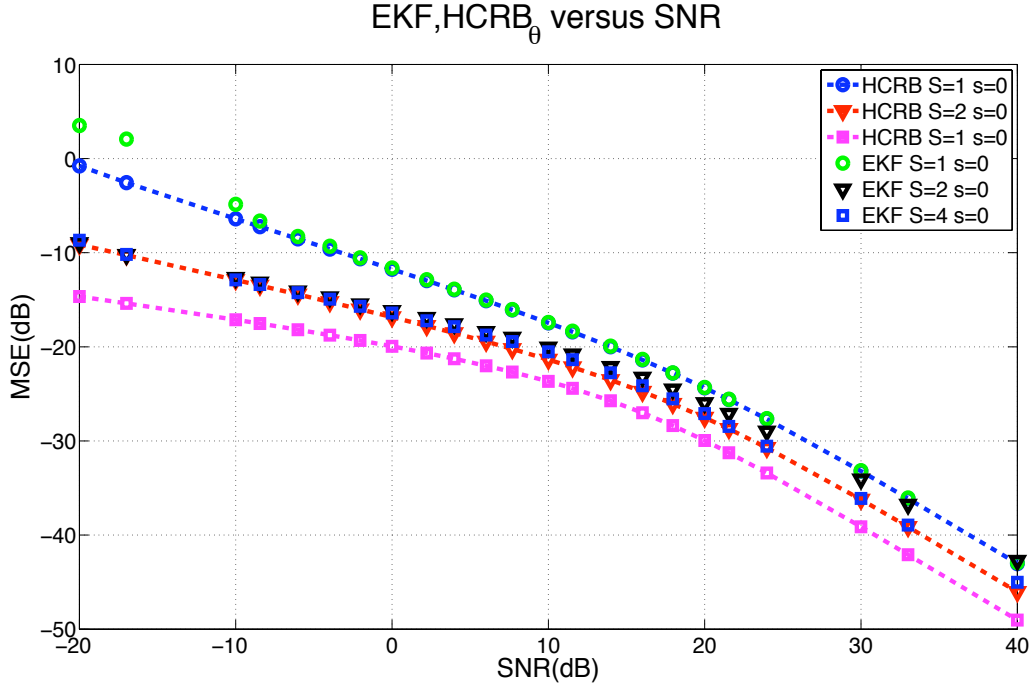


FIG. 4.12 – MSE de l'EKF et HCRB en fonction du SNR pour trois facteurs de suréchantillonnage,  $S = 1, 2$  et  $4$ , avec une variance du bruit de phase  $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ .

dB. Dans ce cas, on peut encore mesurer le gain apporté par le suréchantillonnage et les bonnes performances de l'algorithme. Le gain est plus important pour de faibles valeurs de  $\sigma_w^2$ . On note que les performances à variance faible, sont très proches de la borne. Pour de fortes valeurs de  $\sigma_w^2$ , les performances sont de plus en plus mauvaises, ce qui est normal, car à forte variance, l'erreur de linéarisation dans l'EKF n'est pas négligeable, par rapport au niveau de bruit d'observation.

Si l'on considère le problème d'estimation de la dérive, les performances d'estimation doivent dépendre de la taille du bloc d'observations  $N$ , car le paramètre à estimer est constant. La figure 4.14 superpose, en fonction du SNR, la MSE pour l'EKF et la borne HCRB pour l'estimation de l'offset de fréquence ( $\text{MSE}_{\text{EKF}}(S, 0)$  and  $\text{HCRB}_\delta(\mathbf{a}, S, 0)$ ). On considère une variance du bruit de phase modérée  $\sigma_w^2 = 0.01$ ,  $S = 1, 2, 4$  et une taille fixée à  $N = 511$ .

Pour  $S = 1$ , la MSE pour l'EKF coïncide avec la borne, sauf à très bas SNR, où les performances sont moins bonnes. Pour  $S = 2$  et  $4$ , la MSE pour l'EKF est proche de la borne. On note que l'on a un gain qui augmente avec  $S$ .

#### 4.2.1.2 Estimation avec les points intermédiaires $T_c$ -espacés

Pour  $S = 1$ , on a seulement 1 valeur estimée dans chaque symbole, alors, pour comparer avec  $S = 2, 4$  on doit générer les points intermédiaires qui manquent. On génère ces points, en gardant la valeur estimée ( $s = 0$ ) sur toute la période.

On peut calculer la HCRB pour les points intermédiaires du cas  $S = 1$

$$\text{HCRB}_{\theta-b}(\mathbf{a}, 1, 1/2) = \text{HCRB}_\theta(\mathbf{a}, 1, 0) + \sigma_w^2/2.$$

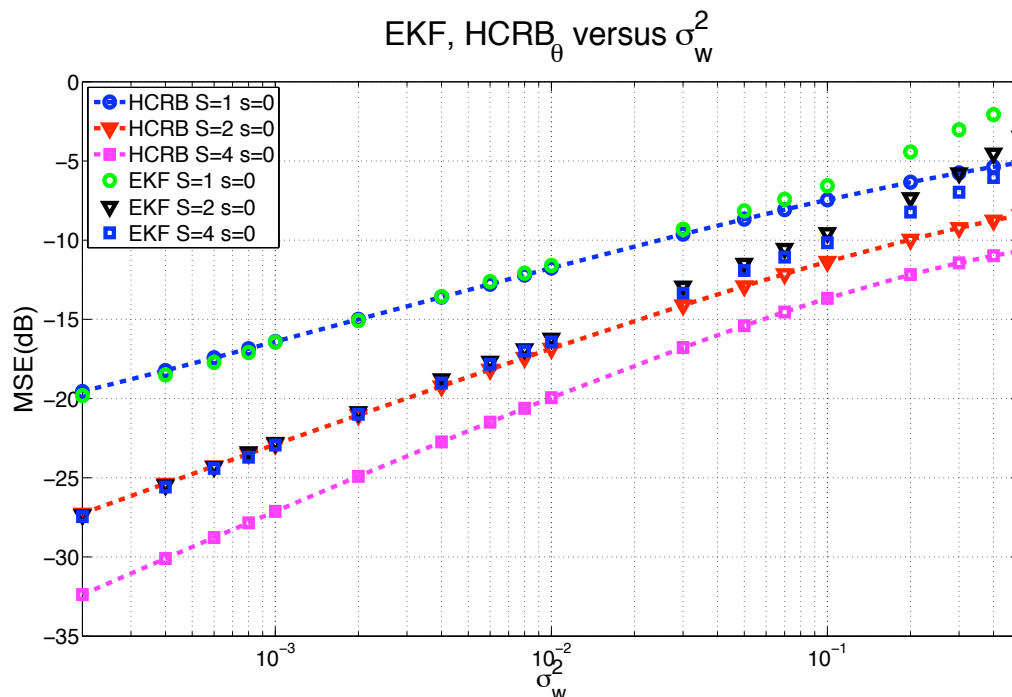


FIG. 4.13 – MSE pour l'EKF et HCRB, pour l'estimation de phase, en fonction de la variance du bruit de phase, pour  $S = 1, 2$  et  $4$ , et SNR = 0 dB.

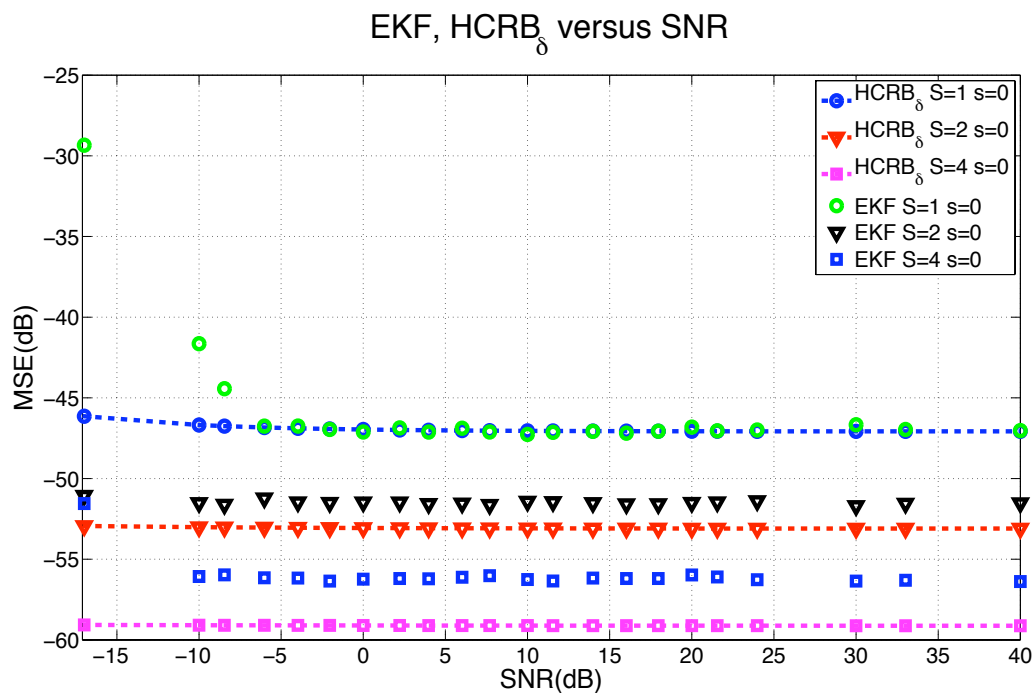


FIG. 4.14 –  $MSE_{EKF}(S, 0)$  et  $HCRB_{\delta}$ , pour l'estimation de la dérive, en fonction du SNR, pour  $S = 1, 2$  et  $4$ . On considère une variance  $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ .

Pour  $S > 1$ , comme dans la section 4.1, on définit une borne moyenne comme

$$HCRB_{\theta}(S, s) = p_0 \cdot HCRB_{\theta}(|A_N| = 0, S, s) + (1 - p_0) \cdot HCRB_{\theta}(|A_N| = 1, S, s) \quad (4.6)$$

où  $p_0$  est la proportion d' $A_k = 0$ .

Pour le cas de points intermédiaires, la figure 4.15 superpose, en fonction du SNR, la MSE obtenue avec l'EKF et la borne HCRB, pour une phase à évolution rapide  $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ , et  $\tau = 0$ . Cet scénario est intéressant quand on utilise des méthodes fractionnées.

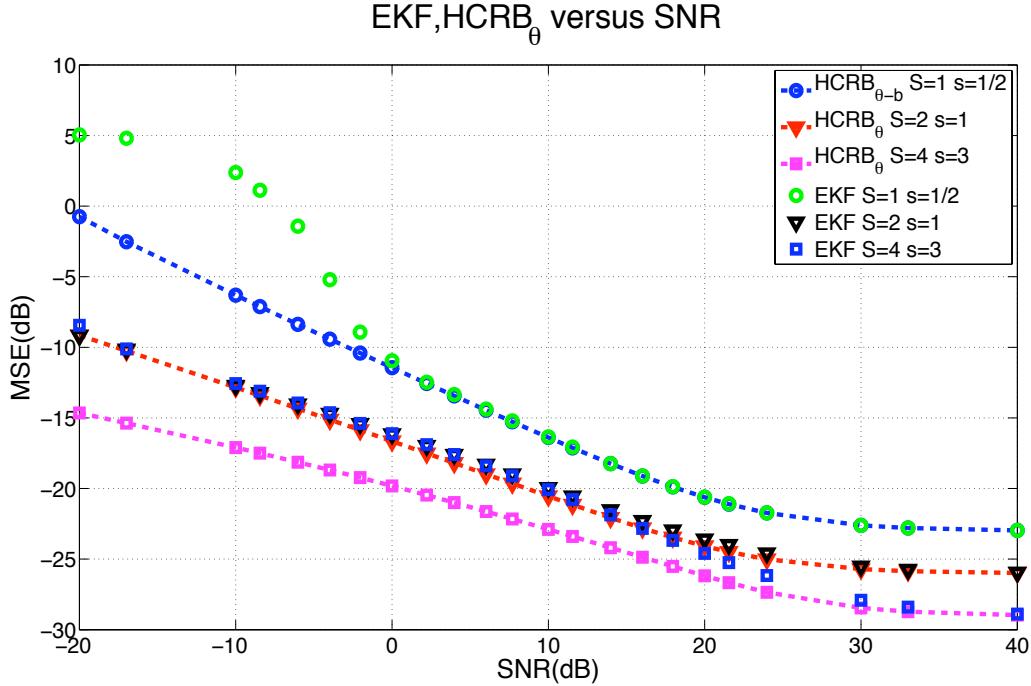


FIG. 4.15 – EKF et HCRB versus le SNR pour les points intermédiaires,  $S = 1, 2$  et  $4$ , et la variance de bruit de phase est  $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ .

Pour  $S = 1$ , les performances coïncident avec la borne, à SNR moyen et fort, mais à bas SNR, on a une dégradation importante. Pour  $S = 2$ , la MSE est très proche de la borne, et pour  $S = 4$ , à bas SNR, la MSE est presque la même que pour  $S = 2$ , et tend vers la borne à fort SNR. Dans tous les cas, les performances pour  $S > 1$  sont meilleures que pour  $S = 1$ .

### 4.3 Estimation de retard

Jusqu'à présent, dans ce chapitre on a seulement présenté le problème d'estimation de phase, et d'estimation conjointe de phase et d'offset de fréquence, pour lesquels on a fait une étude approfondie, en considérant une erreur d'estimation du délai nulle (c'est-à-dire une bonne synchronisation de délai), ou connue. Dans une perspective de localisation, le délai est le paramètre d'intérêt principal, tandis que la phase et le décalage de fréquence sont des paramètres de nuisance. En pratique, on ne peut pas estimer le délai sans estimer la phase et le décalage de fréquence, car ce sont ces paramètres parasites qui rendent difficile une bonne estimation du délai. C'est pour cela que l'on a fait une étude approfondie du problème d'estimation de phase



et de décalage Doppler dans les sections précédentes. Dans cette section, on discute le problème d'estimation de délai dans un contexte de synchronisation supervisée.

### 4.3.1 Introduction

En général on peut considérer deux cas pour résoudre le problème d'estimation de délai :

1. On considère seulement le délai. Dans ce cas la phase est un paramètre de nuisance. On peut se dire que la meilleure solution est donnée par l'estimateur du maximum de vraisemblance du délai. Mais dans ce cas la vraisemblance n'est pas calculable, car les paramètres de nuisance sont non-observés. Pour résoudre ce problème il existe plusieurs solutions, mais dans tous les cas on doit utiliser une solution sous-optimale, par exemple une solution type Expectation-Maximization (EM), où l'on construit une méthode itérative en découplant l'estimation du délai de celle des paramètres de nuisance.
2. On considère l'estimation conjointe de la phase et du délai. On peut écrire directement l'estimation conjointe du délai et des paramètres de nuisance. Une solution peut être l'estimateur *maximum a posteriori* (MAP) de l'ensemble des paramètres. De multiples solutions sous-optimales sont possibles.

### 4.3.2 Maximum de vraisemblance

La méthode d'estimation du maximum de vraisemblance (ML) est une méthode statistique utilisée pour inférer les paramètres d'une distribution de probabilité à partir d'un échantillon donné. On a un ensemble d'échantillons d'une variable aléatoire  $\mathbf{y}$  et un vecteur de paramètres à estimer  $\boldsymbol{\mu}$ . La fonction de vraisemblance s'écrit

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\mu}) = p(\mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}) \quad (4.7)$$

La méthode du maximum de vraisemblance estime  $\boldsymbol{\mu}$ , en cherchant la valeur de  $\boldsymbol{\mu}$  qui maximise la fonction de vraisemblance  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\mu})$ ,

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{ML} = \arg \max_{\boldsymbol{\mu}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\mu}) \quad (4.8)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance est un estimateur asymptotiquement non-biaisé, asymptotiquement efficace (atteint la borne de Cramér-Rao lorsque le nombre d'observations tend vers l'infini), et asymptotiquement distribué selon une loi normale.

### 4.3.3 Maximum a Posteriori

L'estimateur du *maximum a posteriori* (MAP) est un estimateur Bayésien, c'est-à-dire, qui prend en compte des informations *a priori* sur les paramètres à estimer. Si l'on considère un vecteur de paramètres à estimer  $\boldsymbol{\mu}$ , et un ensemble d'observations  $\mathbf{y}$  qui dépend de ces paramètres, l'estimateur MAP s'écrit

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{MAP} = \arg \max_{\boldsymbol{\mu}} p(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{y}) = \arg \max_{\boldsymbol{\mu}} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu})p(\boldsymbol{\mu}) \quad (4.9)$$

où  $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu})$  est la fonction de vraisemblance et  $p(\boldsymbol{\mu})$  est la densité de probabilité des paramètres, correspondant à l'information *a priori*.

### 4.3.4 Méthode itérative pour l'estimation de délai

Dans cette section, on propose une méthode itérative sous-optimale simple pour illustrer une possible estimation de délai. Le délai est considéré déterministe et constant dans cette étude. La solution proposée est une méthode bloc, basée sur une optimisation numérique pour trouver itérativement le délai, couplée avec une solution de Kalman pour l'estimation des paramètres de nuisance.

#### Estimation ML pour le délai

Si l'on considère le modèle d'observation défini dans la section 3.1, on écrit

$$y_k = A_k(\tau)e^{i\theta_k} + b_k \quad (4.10)$$

$$\theta_k = \theta_{k-1} + w_k \quad (4.11)$$

Si l'on veut estimer le délai  $\tau$ , dans un contexte supervisé (DA) la vraisemblance est  $p(\mathbf{y}; \mathbf{a}, \tau)$ . Cette vraisemblance n'admet pas de forme analytique puisque le vecteur des paramètres de phase  $\boldsymbol{\theta}$  est non observé, ainsi on ne peut pas obtenir directement l'estimateur ML en utilisant des techniques d'optimisation classiques qui nécessitent le calcul de la fonction à optimiser. Une solution à ce problème est l'utilisation de l'algorithme EM, qui considère la log-vraisemblance de l'observation complétée ( $\log p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}; \mathbf{a}, \tau)$ ). L'utilisation de cette méthode dans un cadre d'estimation du délai pour un canal Rayleigh et des signaux CPM est présentée dans l'annexe G, où l'on a utilisé pour estimer les paramètres de nuisance un lisseur de Kalman [Abei 09].

#### Méthode sous-optimale proposée

Le problème pour écrire l'estimateur ML est la présence des paramètres de nuisance. Notre objectif est l'obtention d'une fonction du délai  $\mathcal{L}(\tau)$ , que l'on optimisera de façon itérative. On part de la densité de probabilité conjointe, ce qui est équivalent à considérer la fonction de vraisemblance des données complètes  $\{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}\}$ ,

$$p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}; \tau) = p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}; \tau)p(\boldsymbol{\theta}; \tau) \quad (4.12)$$

D'après la modélisation d'état, la densité *a priori*  $p(\boldsymbol{\theta})$  s'écrit

$$p(\boldsymbol{\theta}) = p(\theta_1) \prod_{k=2}^N p(\theta_k|\theta_{k-1}) \quad (4.13)$$

Les densités  $p(\theta_k|\theta_{k-1})$  sont Gaussiennes de moyenne  $\theta_{k-1}$  et de variance  $\sigma_w^2$ , ainsi on écrit

$$p(\boldsymbol{\theta}) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} \right)^{N-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_w^2} \sum_{k=2}^N (\theta_k - \theta_{k-1})^2 \right\} \quad (4.14)$$

et la vraisemblance dans un contexte supervisé avec un délai constant s'écrit  $p(\mathbf{y}|\mathbf{a}, \boldsymbol{\theta}; \tau) = \mathcal{N}(\mathbf{y}; \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau), \boldsymbol{\Gamma})$ , où  $\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau)$  est un vecteur moyenne avec  $[\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau)]_k = A_k(\tau)e^{i\theta_k}$  et  $\boldsymbol{\Gamma}$  est la matrice de covariance du bruit d'observation. Le produit de la fonction de vraisemblance et de la densité *a priori*, s'écrit

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}; \tau)p(\boldsymbol{\theta}) &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} \right)^{N-1} \frac{1}{\pi^N |\det(\boldsymbol{\Gamma})|} \\ &\times \exp \left\{ -[\mathbf{y} - \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau)]^H \boldsymbol{\Gamma}^{-1} [\mathbf{y} - \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau)] - \frac{1}{2\sigma_w^2} \sum_{k=2}^N (\theta_k - \theta_{k-1})^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

d'où

$$\ln p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}; \tau) = C(\sigma_w^2, \boldsymbol{\Gamma}) - [\mathbf{y} - \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau)]^H \boldsymbol{\Gamma}^{-1} [\mathbf{y} - \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau)] - \frac{1}{2\sigma_w^2} \sum_{k=2}^N (\theta_k - \theta_{k-1})^2 \quad (4.16)$$

Pour estimer le délai de façon itérative, on considère que, à l'itération présente ( $j$ ), on a une estimation du délai  $\hat{\tau}^{(j-1)}$  obtenue dans l'itération précédente ( $j-1$ ). Dans l'étape d'optimisation par rapport au délai, les termes de la densité conjointe qui ne dépendent pas du délai ne nous intéressent pas. Ainsi, on considère la fonction suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, \tau) &= -[\mathbf{y} - \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau)]^H \boldsymbol{\Gamma}^{-1} [\mathbf{y} - \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau)] \\ &= -\mathbf{y}^H \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{y} + \mathbf{y}^H \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau) + \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau)^H \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{y} - \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau)^H \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau) \end{aligned} \quad (4.17)$$

On obtient une fonction qui dépend seulement du délai en prenant l'espérance de  $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, \tau)$  par rapport à  $\boldsymbol{\theta}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tau) &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{a}, \hat{\tau}^{(j-1)}} [\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, \tau)] \\ &= -\mathbf{y}^H \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{y} + \mathbf{y}^H \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{a}, \hat{\tau}^{(j-1)}} [\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau)] + \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{a}, \hat{\tau}^{(j-1)}} [\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau)^H] \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{y} \\ &\quad - \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{a}, \hat{\tau}^{(j-1)}} [\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau)^H \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau)] \end{aligned} \quad (4.18)$$

$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{a}, \hat{\tau}^{(j-1)}} [\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau)]$  et  $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{a}, \hat{\tau}^{(j-1)}} [\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau)^H \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau)]$  dépendent directement des paramètres de nuisance. Si l'on considère que, à l'instant ( $j$ ), on a une estimation de ces expressions, en utilisant le délai  $\hat{\tau}^{(j-1)}$  estimé à l'itération précédente, on estime le paramètre  $\tau$  à l'itération courante par

$$\hat{\tau}^{(j)} = \arg \max_{\tau} \mathcal{L}(\tau) |_{\hat{\tau}^{(j-1)}} \quad (4.19)$$

On itère l'algorithme jusqu'à la convergence de la suite  $(\dots, \hat{\tau}^{(j)}, \hat{\tau}^{(j+1)}, \dots)$ .

Dans la suite, on suppose un bruit d'observation blanc ( $\boldsymbol{\Gamma}^{-1} = \frac{1}{\sigma_n^2} \mathbf{I}$ ), ce qui est vrai si l'on utilise un échantillon par symbole ( $S = 1$ ). Pour un bruit Gaussien la première expression peut alors s'exprimer, en utilisant la fonction caractéristique, comme un vecteur dont les composantes sont

$$\left[ \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{a}, \tau^{(j-1)}} [\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau)] \right]_k = A_k(\tau) \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{a}, \hat{\tau}^{(j-1)}} \left[ e^{i\theta_k} \right] = A_k(\tau) e^{i\hat{\theta}_k} e^{-\frac{1}{2}\sigma_{\hat{\theta}_k}^2}$$

où  $\hat{\theta}_k$  et  $\sigma_{\hat{\theta}_k}^2$  peuvent être estimées avec une méthode de Kalman, comme dans les sections précédentes. La deuxième expression s'écrit

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{a}, \tau^{(j-1)}} \left[ \frac{1}{\sigma_n^2} \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau)^H \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \tau) \right] = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_k |A_k(\tau)|^2$$

Finalement, la fonction à optimiser pour obtenir itérativement le retard s'écrit

$$\hat{\tau}^{(j)} = \arg \max_{\tau} \left\{ -\mathbf{y}^H \mathbf{y} + \mathbf{y}^H \text{diag}(\mathbf{d}(\tau)) \mathbf{t}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(j)}) + \mathbf{t}^H(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(j)}) \text{diag}(\mathbf{d}(\tau)^*) \mathbf{y} - \sum_k |A_k(\tau)|^2 \right\} \Big|_{\hat{\tau}^{(j-1)}} \quad (4.20)$$

où  $[\mathbf{d}(\tau)]_k = A_k(\tau)$  et  $[\mathbf{t}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]_k = \left( e^{i\hat{\theta}_k^{(j)}} e^{-\frac{1}{2}\sigma_{\hat{\theta}_k}^2^{(j)}} \right)$ .

On illustre l'algorithme de façon schématique dans la figure 4.16.

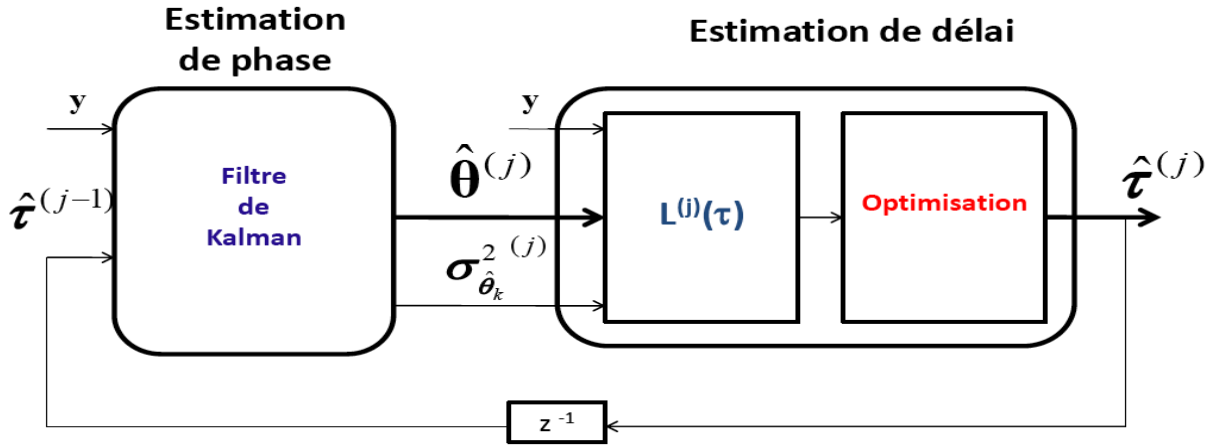


FIG. 4.16 – Schéma bloc de l'algorithme d'estimation du délai.

#### 4.3.5 Discussion

Dans cette section, on illustre les résultats obtenus avec la méthode proposée pour l'estimation de délai. On considère, comme dans les sections 4.1 et 4.2, la transmission sur un canal à bruit blanc, Gaussien, additif, d'une séquence MLS de longueur 511 bits, générée avec un registre à décalage de polynôme caractéristique  $[1021]_8$  (représentation octale), ainsi qu'une mise en forme BOC (voir figure 3.2). Dans l'étape d'optimisation de la fonction  $\mathcal{L}(\tau)$ , on cherche le maximum dans une grille de valeurs pour le délai. On définit  $\delta_{tau}$  comme la précision avec laquelle on exécute l'algorithme, c'est-à-dire, le décalage entre deux valeurs de la grille que l'on utilise pour l'optimisation.

Dans la figure 4.17, on présente les valeurs de la fonction à optimiser pour une réalisation de l'algorithme, pour une phase à variation rapide avec une variance  $\sigma_w^2 = 0.1$ , un facteur de suréchantillonnage  $S = 1$  et un rapport signal sur bruit  $SNR = 0$  dB. Le délai est  $\tau = T_c/8$  et l'algorithme est initialisé à  $\tau_{init} = 3T_c/8$ . L'algorithme converge après 4 itérations. On note que la vitesse de convergence dépend du bruit de phase et du bruit d'observation, ainsi la performance d'estimation dépend directement de la précision de l'algorithme. Dans le cas présenté, la précision est de  $\delta_\tau = T_c/80$ .

Dans la figure 4.18, on présente la convergence de l'algorithme pour différentes vitesses d'évolution de la phase. On considère un rapport signal sur bruit  $SNR = 0$  dB, un facteur de suréchantillonnage  $S = 1$  et trois cas pour la vitesse d'évolution de la phase :  $\sigma_w^2 = 0.001$  (variation lente),  $\sigma_w^2 = 0.01$  (variation modérée) et  $\sigma_w^2 = 0.1$  (variation rapide). On considère un délai  $\tau = T_c/8$  et une valeur initiale  $\tau_{init} = 3T_c/8$ .

On note que les résultats présentés sont des résultats obtenus pour une seule réalisation de l'algorithme, et que selon les cas on peut obtenir des performances un peu meilleures ou un peu moins bonnes. Dans ce cas, l'algorithme converge en deux itérations pour une vitesse d'évolution de la phase faible, en trois itérations pour une vitesse modérée et en quatre pour une vitesse forte.

En général, cet algorithme simple donne des performances correctes. L'erreur d'estimation et la vitesse de convergence, dépendent de la précision utilisée dans l'étape d'optimisation, et des variances des bruits d'état et d'observation. Notre but ici était seulement d'illustrer une procédure possible d'estimation conjointe phase-délai. Bien sûr cette étude et les scénarios de simulations pourraient être largement approfondis.

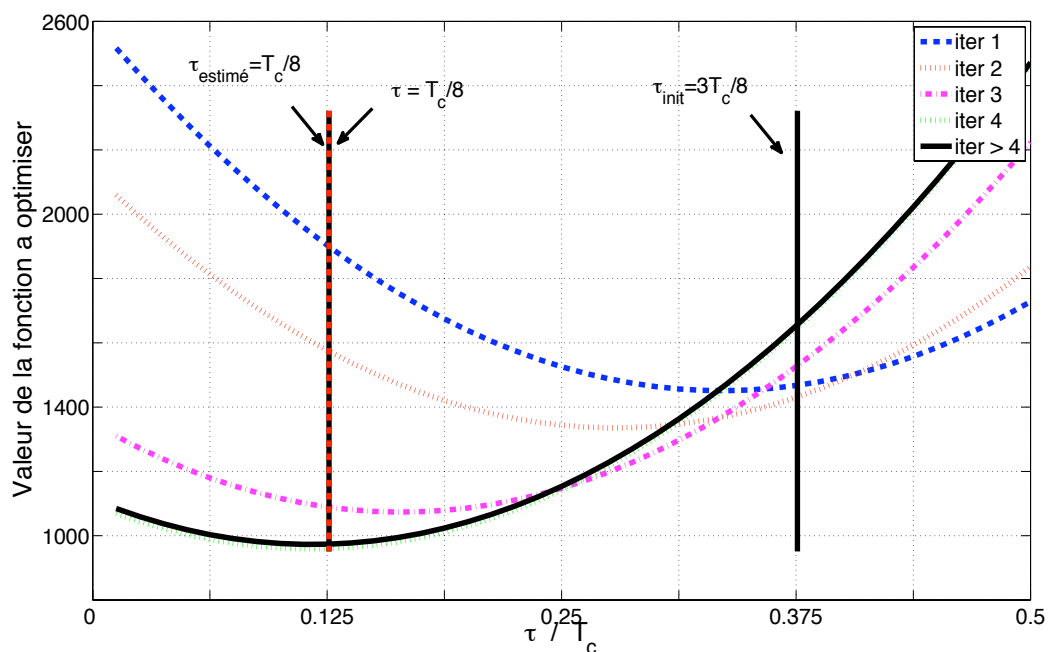


FIG. 4.17 – Valeurs de la fonction à optimiser. On considère  $\sigma_w^2 = 0.1$ ,  $SNR = 0$  dB,  $\tau = T_c/8$  et  $\tau_{init} = 3T_c/8$ .

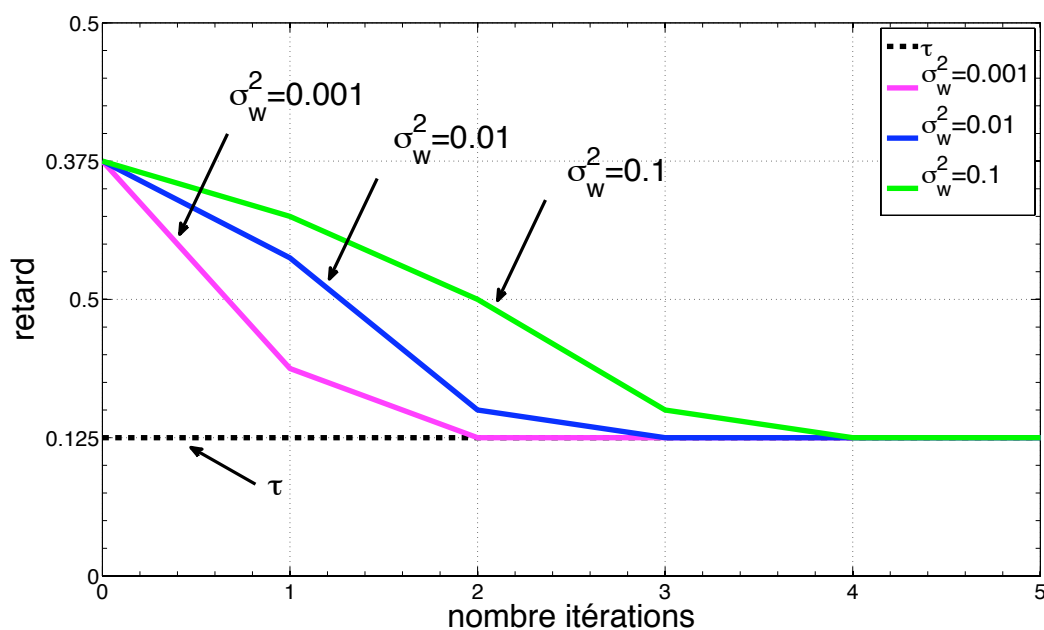


FIG. 4.18 – Convergence de l'algorithme pour trois réalisations avec des valeurs de la vitesse d'évolution de la phase différentes :  $\sigma_w^2 = 0.001$ ,  $\sigma_w^2 = 0.01$  et  $\sigma_w^2 = 0.1$ . On considère  $SNR = 0$  dB,  $\tau = T_c/8$  et  $\tau_{init} = 3T_c/8$ .

## 4.4 Estimation de phase et bruits non-Gaussiens

L'étude que l'on a fait dans les sections précédentes a porté sur l'estimation de phase, l'estimation conjointe de phase et d'offset de fréquence, et l'estimation de délai. Dans tous les cas, on a considéré que les séquences de bruit d'observation,  $b_k$ , et de bruit d'état,  $w_k$ , étaient Gaussiennes. Dans cette section, on présente le cas de l'estimation de phase avec un bruit d'état non-Gaussien.

### 4.4.1 Bruit d'état non-Gaussien

On considère la même modélisation qu'à la section 3.1.

$$y_k = A_k e^{i\theta_k} + b_k \quad (4.21)$$

où les  $A_k$  sont les symboles équivalents,  $\theta_k$  la phase du signal reçu, et  $b_k$  le bruit d'observation, Gaussien centré et coloré. On considère une phase qui évolue de la façon suivante,

$$\theta_k = \theta_{k-1} + w_k \quad (4.22)$$

où le bruit d'état peut être modélisé comme la somme d'un bruit blanc centré Gaussien  $w_k^{(1)}$ , et d'un bruit impulsionnel  $w_k^{(2)}$  :

$$w_k = w_k^{(1)} + w_k^{(2)} \quad (4.23)$$

Cela peut modéliser dans certains cas les décalages de phase introduits par les imperfections dans les oscillateurs, les déphasages introduits par les perturbations du canal et le mouvement relatif entre le récepteur et le satellite, comme dans la section 4.1. De plus, cela pourrait représenter la prise en compte des sauts de phase dues à des accélérations du récepteur, des zones d'ombre ou des changements brusques de direction.

### Modélisation du bruit impulsionnel

On modélise le bruit impulsionnel de la façon suivante :

$$w_k^{(2)} = \begin{cases} \mathcal{U}[-\pi, \pi] & \text{pour certains } k \text{ choisis aléatoirement} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (4.24)$$

c'est-à-dire, pour certains valeurs de  $k$ , on simule des sauts de phase avec une amplitude distribuée selon une loi uniforme dans l'intervalle  $[-\pi, \pi)$ ,  $\mathcal{U}[-\pi, \pi)$ . Dans la figure 4.19, on représente  $N = 350$  échantillons d'une réalisation du bruit  $w_k$  et de la phase  $\theta_k$  associée, où l'on peut voir la superposition du comportement Gaussien ( $\sigma_{w_1}^2 = 0.01$ ) et du comportement impulsionnel.

### 4.4.2 Discussion

On présente une solution au problème d'estimation de phase dans le cas d'un bruit d'état non-Gaussien. On a utilisé deux méthodes : un filtre de Kalman étendu et une méthode particulière. Ces algorithmes peuvent être modifiés par rapport aux algorithmes utilisés dans les autres sections de ce chapitre, pour prendre en compte dans la mesure possible, l'effet du bruit non-Gaussien. On considère une bonne synchronisation de délai et un contexte de synchronisation supervisée (DA).

Le filtre de Kalman étendu, considère intrinsèquement des bruits d'état et d'observation Gaussiens. En conséquence, on peut envisager de considérer un bruit Gaussien avec une variance

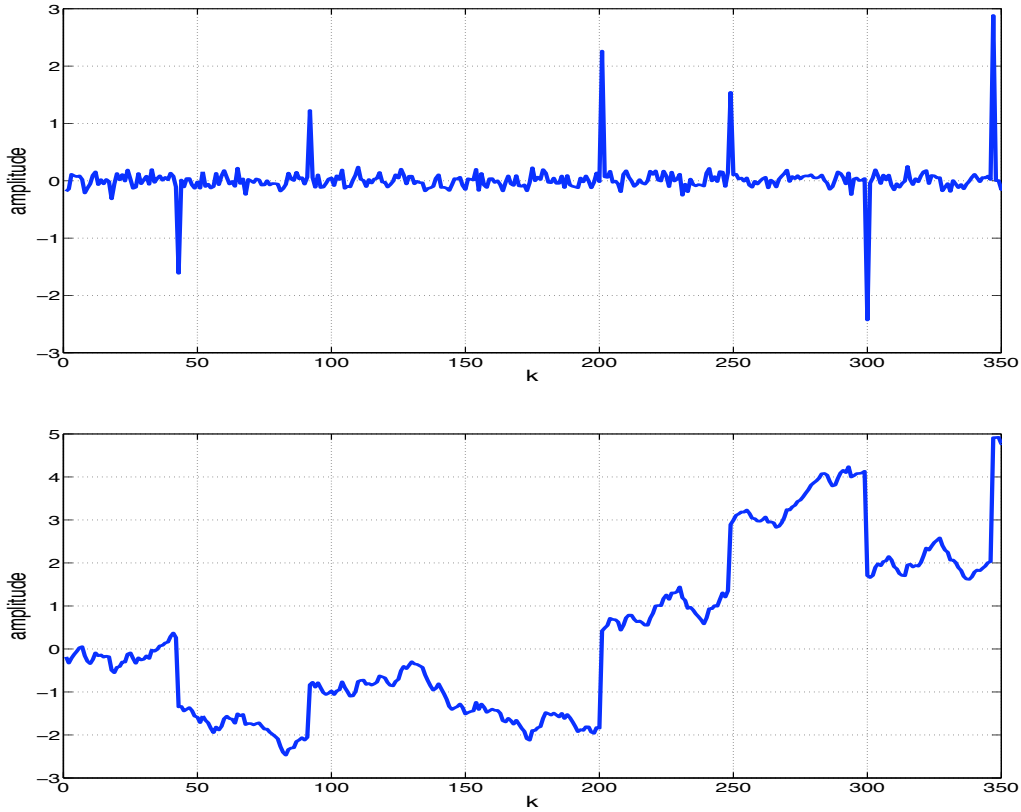


FIG. 4.19 – Évolution du bruit de phase (haut) et de la phase (bas), dans le cas où l'on considère un bruit Gaussien plus un bruit impulsionnel.

plus forte pour que le filtre s'adapte mieux aux sauts de phase, au détriment d'une variance en régime stationnaire plus forte. Pour la méthode particulière, on prend en compte le bruit non-Gaussien dans l'évolution des particules, où l'on utilise la distribution  $p(\theta_k|\theta_{k-1})$ . Pour les simulations, on utilise le scénario présenté dans la section 4.1, mais l'on considère seulement le cas des points de référence au pas  $T_c$ .

La figure 4.20, montre une réalisation de l'évolution de la phase, générée avec un bruit non-Gaussien. On superpose l'estimation réalisée avec deux filtres de Kalman, l'un avec une variance  $\sigma_w^2 = \sigma_{w_1}^2$ , et l'autre avec une variance  $\sigma_w^2 = \sigma_{w_1}^2 + \sigma_{w_2}^2$ , où  $\sigma_{w_2}^2 = \frac{K\pi^2}{3N}$  et  $K$  est le nombre de sauts de phase dans une réalisation. On considère une variance du bruit Gaussien faible,  $\sigma_{w_1}^2 = 0.001$ , pour que la partie impulsionnelle ait un impact plus important sur l'estimation, une synchronisation parfaite du délai,  $\tau_o = 0$ , et un facteur de suréchantillonnage  $S = 1$ . Cela montre que la prise en compte que l'on fait du bruit non-Gaussien, avec une variance plus forte, peut améliorer l'estimation lors des sauts de phase car on a une convergence plus rapide mais la variance asymptotique est très forte.

Maintenant on veut comparer l'EKF et une méthode particulière qui prend en compte le bruit impulsionnel. Pour cela, on compare le comportement des deux algorithmes face à un saut de phase à variance asymptotique constante.

Dans la figure 4.21, on présente une réalisation des deux algorithmes pour une variance asymptotique  $\sigma_{asy}^2 = 0.001$  et  $S = 1$ . On peut voir qu'avec la méthode particulière on obtient de meilleures performances dans les sauts de phase pour une même variance asymptotique, ainsi

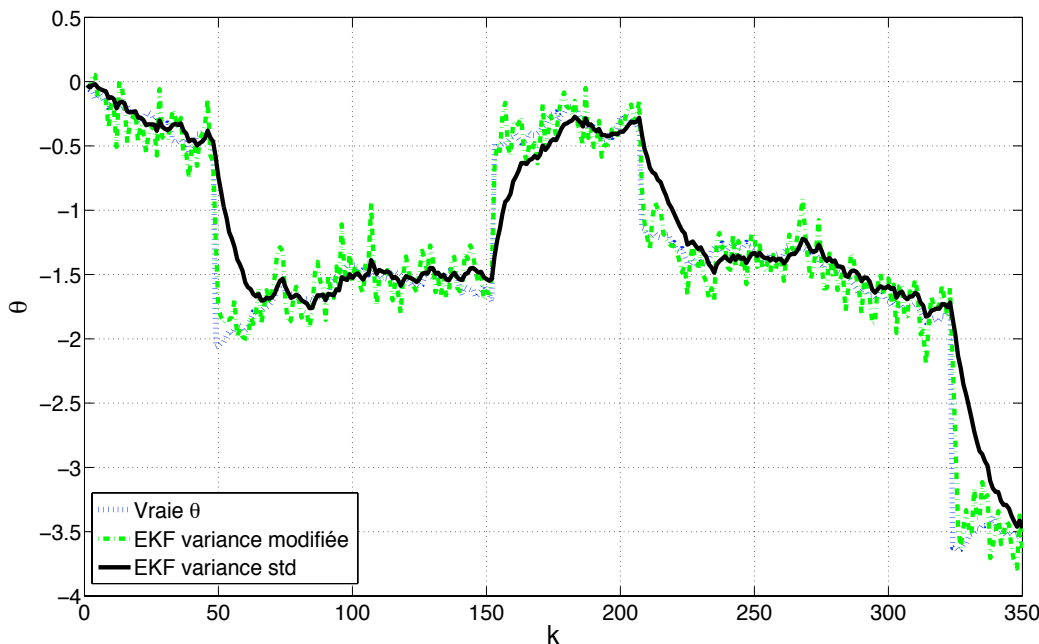


FIG. 4.20 – Vraie évolution de phase, estimation avec un filtre EKF de variance modifiée, et avec un filtre EKF standard qui considère seulement le bruit Gaussien.

cela sera la méthode à préférer dans des environnements non-Gaussiens.

## 4.5 Conclusion

Ce chapitre a étudié le problème de la synchronisation fractionnée. Les systèmes GNSS utilisent des fonctions de mise en forme qui ne vérifient pas le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon (roll-off  $\gg 100\%$ ), ce qui nous laisse espérer une amélioration des performances si l'on utilise un signal suréchantillonné.

On a appliqué l'EKF pour résoudre le problème d'estimation de phase, d'estimation conjointe de phase et d'offset de fréquence, et l'estimation de délai. Dans le cas de l'estimation de phase, on a comparé les performances de l'EKF avec une méthode particulière et deux méthodes déterministes. On a montré que dans ce problème, faiblement non-linéaire, il n'est pas nécessaire d'utiliser des méthodes sophistiquées car avec la méthode de Kalman on obtient de bonnes performances. On a aussi fait l'étude dans des conditions réelles, utilisant une fonction de mise en forme BOC à bande limitée.

Cette étude, montre plusieurs améliorations, quand on utilise une méthode fractionnée pour l'estimation. La MSE d'estimation diminue quand on augmente le facteur  $S$ , et l'intérêt de suréchantillonner est clair à bas SNR, ce qui est le cas pour les systèmes de communication par satellite.

On a aussi proposé une méthode simple pour résoudre le problème d'estimation de délai, montrant que si on connaît ou si on a une bonne estimation des paramètres de nuisance, il est facile d'estimer le délai.

Finalement, on a présenté le problème d'estimation avec un bruit d'état non-Gaussien, pour lequel le filtre de Kalman doit être légèrement modifiée pour prendre en compte l'effet de ce



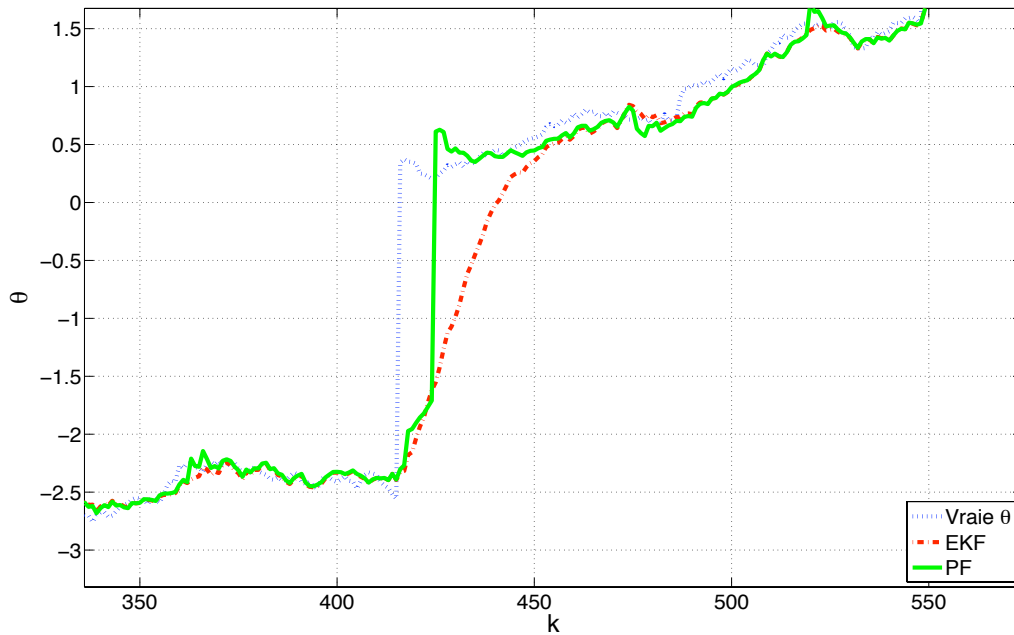


FIG. 4.21 – Performance de l'EKF et du PF pour l'estimation de phase avec un bruit d'état non-Gaussien. On considère  $\sigma_{asy}^2 = 0.001$  et  $\tau_o = 0$ .

bruit.

Les résultats présentés dans ce chapitre, ont été, en partie, publiés dans :

– **Journal**

[Vila 10] J. Vilà-Valls, J.-M. Brossier et L. Ros, "Oversampled phase tracking in digital communications with large excess bandwidth", *Signal Processing*, vol. 90, issue 3, pp. 821-833, Mars 2010.

– **Conférence**

[Vila 09a] J. Vilà-Valls, J.-M. Brossier et L. Ros, "Extended Kalman filter for oversampled dynamical phase offset estimation", *Proc. of the IEEE International Communications Conference, ICC 2009*, Dresden, Germany, June 2009

# Commentaires sur les travaux annexes

DANS ce chapitre, on présente brièvement des travaux réalisés pendant cette thèse, mais qui n'ont pas été inclus dans le corps du manuscrit parce qu'ils concernent des cadres d'étude légèrement différents. Le premier travail que l'on présente a été effectué en collaboration avec Habti Abeida pendant son post-doc au Gipsa-lab entre octobre 2008 et septembre 2009. Les deux autres travaux, ont été réalisés en collaboration avec Carles Fernández Prades et Pau Closas, du Centre Tecnològic de Telecomunicacions de Catalunya (CTTC) à Barcelone. Ces travaux ont été menés lors d'un séjour que j'ai réalisé dans son laboratoire entre juin et août 2009. Le lecteur intéressé peut trouver ces travaux dans les annexes G, H et I, respectivement.

## **Un algorithme EM pour l'estimation conjointe des gains complexes et du délai, dans un canal de Rayleigh à variations lentes pour des signaux CPM**

Ce travail présente l'estimation conjointe du délai et des gains complexes d'un canal de Rayleigh à variation lente, pour des signaux à phase continue (CPM). La méthode proposée considère une méthode EM pour estimer le délai, conjointement avec un lisseur de Kalman pour estimer les gains complexes. Ces gains sont modélisés à l'aide d'un processus autorégressif du premier ordre.

On présente aussi le calcul de la borne de Cramér-Rao hybride modifiée, pour l'estimation conjointe du délai et des gains complexes. Cette borne nous sert comme référence pour situer les performances obtenues avec la méthode proposée.

Les simulations montrent le bon fonctionnement de l'algorithme. La méthode converge assez rapidement vers la bonne valeur du délai, et la performance du lisseur de Kalman pour l'estimation des gains complexes est proche de la borne.

## **Méthodes déterministes pour la localisation avec un réseau de capteurs hétérogène**

Ce travail présente l'utilisation d'un réseau de capteurs pour la localisation d'une cible. On a proposé un nouveau modèle de mouvement pour la cible, basé sur un système de mesures inertielles. Dans le modèle, on prend en compte les biais introduits par le système inertiel, et on les estime en même temps que la position et la vitesse pour obtenir un meilleur résultat.

Concernant le modèle d'observation, on peut avoir différents types de capteurs disponibles. On a considéré que l'on a deux types différents de capteurs, un qui utilise des mesures de temps de propagation, et l'autre qui utilise des mesures de puissance.

Le problème de localisation peut se formuler comme un problème d'estimation non-linéaire. On propose d'utiliser des méthodes de quadrature et de cubature pour résoudre le problème d'estimation. On a comparé les résultats avec une méthode particulière, qui utilise le même

nombre de particules que d'échantillons déterministes selon les cas (quadrature et cubature). Dans les deux cas, les simulations ont montré qu'avec les méthodes déterministes on obtient des meilleures performances qu'avec les méthodes particulières avec une complexité moindre.

### **Filtrage non-linéaire pour le couplage GNSS/INS ultra-précis**

Ce travail considère le problème du couplage des données satellitaires et inertielles pour la localisation, ce qui est couramment appelé couplage GNSS/INS. Il existe plusieurs types de couplages entre ces deux systèmes dont le plus simple considère la position estimée par le système inertiel et la position estimée par le système GNSS séparément, et les combine pour obtenir une meilleure estimation. Cette approche apporte peu d'améliorations à la performance du récepteur.

Une autre approche est le couplage précis, qui utilise les mesures inertielles pour améliorer l'estimation des pseudo-distances du récepteur GNSS. Cela améliore les performances d'estimation de la position car on a une meilleure estimation des pseudo-distances. Une extension de cette approche est le couplage ultra-précis, que l'on a considéré dans ce travail, et qui consiste à introduire le système de mesures inertielles directement dans l'étape de synchronisation du récepteur GNSS.

Dans ce travail, on a proposé un nouveau formalisme pour coupler les données inertielles directement avec l'évolution des paramètres de synchronisation, en considérant un possible biais dans les mesures. Ce problème étant non-linéaire, on a proposé une solution basée sur une méthode de cubature. Cette nouvelle approche peut remplacer la structure classique des boucles à verrouillage. Les simulations avec un système GPS ont corroboré la pertinence de la méthode.

# Conclusion générale et perspectives

DANS ce mémoire, on s'est intéressé, d'un point de vue théorique, à l'étude des techniques Bayésiennes de filtrage non-linéaire, et d'un point de vue applicatif, aux problèmes de synchronisation pour les systèmes de communication par satellite et au calcul des bornes de Cramér-Rao associées à ces problématiques. Ces trois points forment le corps du manuscrit. En parallèle aux travaux principaux, on a abordé trois autres problématiques, liées d'une certaine façon à la problématique principale. Ces trois études sont présentées en annexe. Dans ce dernier chapitre, on donne les conclusions générales aux travaux présentés dans le corps du texte et en annexe, ainsi qu'une énumération des perspectives pour le travail futur.

Concernant l'étude théorique, on s'est intéressé aux problèmes d'estimation Bayésienne et aux techniques Bayésiennes sous-optimales de filtrage non-linéaire, que l'on a présenté dans le chapitre 2. En particulier, en plus des méthodes de Kalman et des méthodes particulières, on a étudié les méthodes que l'on a appelé déterministes. Ces méthodes ont toujours été un peu délaissées dans la littérature en faveur des méthodes particulières, mais récemment une méthode qui utilise la quadrature de Gauss-Hermite a été reformulée (le Quadrature Kalman Filter (QKF)) et une nouvelle méthode basée sur les lois de cubature a été proposée (le Cubature Kalman Filter (CKF)). Ces derniers développements, et le manque de synthèse à jour dans la littérature, ont motivé une nouvelle vue d'ensemble des méthodes déterministes, regroupant plusieurs méthodes sous une même *méthode déterministe globale*.

Les méthodes déterministes sont une alternative puissante aux méthodes particulières (PF) et au filtrage de Kalman étendu (EKF) pour résoudre le problème du filtrage Bayésien optimal. Par rapport à l'EKF, ces méthodes évitent la linéarisation des fonctions d'état et d'observation, évitant des possibles problèmes de stabilité et de convergence du filtre. De plus, ces méthodes peuvent être appliquées à des problèmes fortement non-linéaires. Les méthodes particulières ont l'avantage de n'imposer aucune forme pour la densité *a posteriori* et d'être plus pertinentes pour des problèmes non-Gaussiens, mais en contrepartie, elles ont un coût calculatoire très élevé et présentent des problèmes tels que la dégénérescence des échantillons, le choix de la fonction d'importance ou le re-échantillonnage. Par rapport à ces méthodes, les méthodes déterministes proposent des méthodes à faible coût de calcul, ce qui laisse envisager des applications temps réel, et une solution performante pour des états à forte dimension. De plus, dans la plupart des problèmes, l'hypothèse Gaussienne est approximativement vérifiée.

Dans les chapitres 3 et 4, on s'est intéressé au problème de synchronisation pour des systèmes de communication par satellite, en utilisant un signal suréchantillonné. Ces systèmes utilisent des fonctions de mise en forme à fort excès de bande, pour lesquelles le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon n'est pas vérifié à 1 ou 2 échantillons par symbole. Ceci nous laisse espérer une amélioration des performances si l'on utilise un facteur de suréchantillonnage supérieur à 1 échantillon par symbole.

On a considéré que le signal reçu au récepteur passe au travers d'un filtre adapté à la mise en forme d'émission et est ensuite suréchantillonné. Dans la première partie du chapitre 3, on a proposé une modélisation pour ce signal, et l'on a établi la modélisation pour les paramètres de synchronisation. Dans le modèle d'observation proposé, on a une séquence de "symboles" équivalents avec une puissance non-stationnaire et un bruit d'état coloré. On a proposé un modèle d'état qui prend en compte le bruit coloré.

Dans la deuxième partie du chapitre 3, on a étudié des bornes inférieures pour l'erreur quadratique moyenne dans les problèmes de synchronisation. Plus précisément, on a calculé la borne de Cramér-Rao Bayésienne pour l'estimation dynamique de phase, et la borne de Cramér-Rao hybride pour l'estimation conjointe de phase et d'offset de fréquence. Le comportement des bornes nous laisse présager une amélioration des performances dans la synchronisation si l'on utilise un signal suréchantillonné. Ces bornes ont été utilisées comme référence pour évaluer les performances obtenues avec les algorithmes proposés dans le chapitre 4.

Dans le chapitre 4, on a proposé des méthodes pour résoudre les problèmes d'estimation établis dans le chapitre 3. D'abord on a proposé un filtre de Kalman étendu pour résoudre le problème d'estimation de phase, et l'on a présenté les résultats obtenus dans plusieurs scénarios différents, considérant deux cas distincts :

- Calcul de l'erreur quadratique moyenne pour les points de référence
- Calcul de l'erreur quadratique moyenne pour les points intermédiaires

On a comparé les performances obtenues avec l'EKF avec des méthodes particulières et déterministes. Cette comparaison a montré qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser des techniques sophistiquées pour résoudre des problèmes faiblement non-linéaires. On a fait aussi l'étude dans des conditions plus réalistes, utilisant une fonction de mise en forme BOC à bande limitée, ce qui a montré que dans des cas pratiques les résultats obtenus avec la BOC idéale sont corrects. Ensuite, on a fait de même avec le problème d'estimation conjointe de phase et d'offset de fréquence. Étant donné la similitude des résultats, on n'a présenté que quelques scénarios. Cette étude montre plusieurs améliorations quand on utilise une méthode fractionnée pour l'estimation. L'erreur quadratique moyenne d'estimation diminue quand on augmente le facteur de suréchantillonnage, et l'intérêt de suréchantillonner est clair à bas rapport signal sur bruit, ce qui est le cas dans les communications par satellite.

Dans un deuxième temps, on a présenté le problème d'estimation de délai, et l'on a proposé une méthode itérative simple qui combine une solution de type maximum de vraisemblance avec une méthode de Kalman. Avec cela on a bouclé tous les aspects de la synchronisation fractionnée, et on a justifié l'étude exhaustive que l'on a fait du problème d'estimation des paramètres de nuisance (*i.e.* la phase du canal). Enfin, on a brièvement étudié le problème d'estimation de phase avec des bruits non-Gaussiens, pour lequel on a comparé une solution de type Kalman avec une méthode particulière.

En conclusion, tous les aspects de la synchronisation fractionnée pour des systèmes de communication par satellite ont été abordés pendant ce travail. Une modélisation complète du problème a été présentée, ainsi que le calcul des bornes de Cramér-Rao pour les différents problèmes traités. Une étude exhaustive des méthodes les plus importantes dans le domaine du filtrage Bayésien optimal a été menée, et une nouvelle vue d'ensemble des méthodes déterministes a été proposée. Ces méthodes ont été appliquées aux problèmes d'estimation des paramètres de synchronisation pour des systèmes de communication par satellite, montrant la pertinence de l'approche présentée.

Les méthodes étudiées dans cette thèse peuvent s'appliquer à d'autres problèmes dont certains ont fait l'objet de publications et sont détaillées dans les annexes. Le premier travail propose l'étude du problème de synchronisation avec un canal de Rayleigh à variation lente pour des signaux CPM, et une solution qui combine l'EM et un lisseur de Kalman. Le deuxième, présente l'utilisation de méthodes déterministes pour la localisation d'une cible en utilisant un réseau de capteurs hétérogène. Dans le dernier, on introduit un nouveau formalisme pour le couplage GNSS/INS, et l'on utilise des méthodes déterministes pour résoudre le problème d'estimation des paramètres de synchronisation.

## Perspectives

On présente ici quelques perspectives de travail à court et à long terme, c'est-à-dire, des travaux qui sont la suite logique des travaux présentés dans ce manuscrit, et des travaux ou lignes de recherche à envisager dans un deuxième temps.

Le suite logique des travaux présentés dans le corps du texte, est l'étude des problématiques plus complexes, dans le cadre de la synchronisation pour des systèmes GNSS. Dans le cadre de l'estimation de phase, on a considéré le problème d'estimation avec un bruit d'état non-Gaussien. Une deuxième étude possible serait de considérer un bruit d'observation non-Gaussien pour modéliser des canaux plus perturbés. Pour l'estimation du délai, on a considéré une méthode itérative couplée avec une méthode de Kalman. Il serait intéressant de proposer une méthode Bayésienne pour l'estimation conjointe du délai et des paramètres de nuisance.

Une deuxième approche consisterait à considérer le même modèle mais avec un canal à trajets multiples. Dans ce cas, les trajets parasites perturbent l'estimation des paramètres du trajet principal. Pour résoudre cette problématique, on doit estimer les paramètres de synchronisation pour chaque trajet. Une deuxième extension de ce problème, serait de considérer un système multiantenne, soit du côté du récepteur, soit des deux côtés de la transmission, dans les deux cas, monotrajet et multitrajet.

Dans notre modèle, on a considéré que les paramètres de nuisance ne varient pas à l'intérieur d'un symbole. Il serait intéressant de ne pas faire cette hypothèse, et reformuler le problème de la synchronisation fractionné dans ce cadre : réécrire le modèle, recalculer les bornes et évaluer les performances des estimateurs pour le cas où le canal varie à l'intérieur d'un symbole.

Concernant les bornes, on a considéré seulement le calcul des bornes de Cramér-Rao. On sait que ces bornes ne sont pas adaptées aux zones d'erreur fortes, alors il serait intéressant de faire une étude d'autres bornes Bayésiennes (bornes de Weiss-Weinstein ou de Ziv-Zakai) pour les problèmes de synchronisation.

Le modèle que l'on a utilisé dans cette thèse est une version simplifiée des vrais modèles de communications par satellite. Il serait très intéressant de reformuler le problème en prenant le vrai modèle GPS ou Galileo, et considérer toutes les problématiques cités précédemment. Dans ce cadre, on pourrait analyser aussi l'effet d'avoir plusieurs satellites.

Sous une optique plus théorique, on pourrait envisager d'approfondir d'avantage le problème de l'estimation Bayésienne et les méthodes Bayésiennes sous-optimales, car il y a plusieurs points qui restent à élucider. On liste quelques pistes possibles :

- Il serait intéressant d'étudier le problème de la robustesse dans les méthodes déterministes, car elles sont très dépendantes de l'initialisation. Une solution possible pourrait être d'estimer les matrices de covariance des bruits à chaque itération.

- Avec la même idée sous-jacente que dans les méthodes déterministes, est-ce que l'on peut envisager d'autres solutions qui tiennent compte des informations *a priori* sur les paramètres à estimer ?
- Dans les méthodes particulières et déterministes, on essaye de caractériser une densité de probabilité *a posteriori*. Si l'on veut estimer un ensemble de paramètres, est-ce que cela est la meilleure représentation ?
- Couplage des méthodes de cubature avec des méthodes particulières ou quasi monte carlo.
- Profiter des propriétés de cyclostationnarité dans les méthodes d'estimation particulières et déterministes.

# Annexes





## Annexe A

# Dérivation des équations du filtre de Kalman

On veut dériver les équations du filtre de Kalman à partir du modèle d'état et la structure du filtre. L'objectif est de trouver l'estimateur non-biaisé de variance minimale, de la forme

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{D}_k \mathbf{y}_k \quad (\text{A.1})$$

avec  $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ , l'estimé à l'instant  $k$ . On note que cet estimateur est linéaire, par rapport à l'état et à l'observation, et en plus il est récursif, étant donné qu'il n'utilise que la dernière observation disponible.

Si l'on veut que l'estimateur soit non-biaisé, ça implique

$$\mathbb{E}(\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k) = 0 \quad (\text{A.2})$$

On peut écrire

$$\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k = \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{D}_k \mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k = \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{D}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k) - \mathbf{x}_k = \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{D}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k) - \mathbf{x}_k + \mathbf{C}_k \mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{C}_k \mathbf{x}_{k-1} = \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{C}_k (\hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{D}_k (\mathbf{H}_k \{\mathbf{F}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-1}\} + \mathbf{n}_k) - \mathbf{x}_k + \mathbf{C}_k \mathbf{x}_{k-1} \quad (\text{A.7})$$

Si l'on remplace  $\mathbf{x}_k$  par  $\mathbf{F}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-1}$ , et l'on arrange les termes

$$\mathbf{C}_k [\hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \mathbf{x}_{k-1}] + [\mathbf{D}_k \mathbf{H}_k \mathbf{F}_{k-1} - \mathbf{F}_{k-1} + \mathbf{C}_k] \mathbf{x}_{k-1} + [\mathbf{D}_k \mathbf{H}_k - \mathbf{I}] \mathbf{v}_{k-1} + \mathbf{D}_k \mathbf{n}_k \quad (\text{A.8})$$

Étant donné que les bruits sont centrés, pour que l'estimateur soit non-biaisé, il faut que

$$\mathbb{E}[\mathbf{D}_k \mathbf{H}_k \mathbf{F}_{k-1} - \mathbf{F}_{k-1} + \mathbf{C}_k] \mathbb{E}[\mathbf{x}_{k-1}] = 0 \quad (\text{A.9})$$

et ça implique que

$$\mathbf{D}_k \mathbf{H}_k \mathbf{F}_{k-1} - \mathbf{F}_{k-1} + \mathbf{C}_k = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{C}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{D}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{F}_{k-1} \quad (\text{A.11})$$

Avec ça on peut écrire l'estimateur comme

$$\hat{\mathbf{x}}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{D}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{D}_k \mathbf{y}_k \quad (\text{A.12})$$

où de manière équivalente

$$\widehat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}_{k-1}\widehat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{D}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{F}_{k-1}\widehat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (\text{A.13})$$

qui est l'équation de la mise à jour de l'état. Il faut seulement déterminer la valeur de  $\mathbf{D}_k$  qui minimise la variance de l'erreur d'estimation  $\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}$ , ou ce qui est équivalent, minimiser la trace de la matrice de covariance de l'erreur,  $\mathbf{P}_{k|k}$ . On rappelle l'expression de la valeur prédite de l'état,  $\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$

$$\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1}\widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \quad (\text{A.14})$$

et son erreur d'estimation

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}(\widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} - \mathbf{x}_{k-1}) - \mathbf{v}_{k-1} \quad (\text{A.15})$$

La matrice de covariance de l'erreur de prédiction peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k-1} &= \mathbb{E} \left( \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1} \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T \right) \\ &= \mathbb{E} \left( [\mathbf{F}_{k-1}(\widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} - \mathbf{x}_{k-1}) - \mathbf{v}_{k-1}] [(\widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} - \mathbf{x}_{k-1})^T \mathbf{F}_{k-1}^T - \mathbf{v}_{k-1}^T] \right) \\ &= \mathbf{F}_{k-1} \mathbb{E} \left( (\widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} - \mathbf{x}_{k-1})(\widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} - \mathbf{x}_{k-1})^T \right) \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbb{E} (\mathbf{v}_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}^T) \\ &= \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

qui est l'équation de la prédiction de la covariance.

Maintenant, il nous faut trouver l'expression de la covariance  $\mathbf{P}_{k|k}$ , qui sera fonction de  $\mathbf{P}_{k|k-1}$  et  $\mathbf{D}_k$ . Si l'on introduit l'expression de l'estimateur

$$\widehat{\mathbf{x}}_{k|k} = \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{D}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \quad (\text{A.17})$$

dans l'expression de l'erreur d'estimation

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k|k} = \widehat{\mathbf{x}}_{k|k} - \mathbf{x}_k \quad (\text{A.18})$$

on obtient après quelques manipulations

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k|k} = [\mathbf{I} - \mathbf{D}_k \mathbf{H}_k] \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{D}_k \mathbf{n}_k \quad (\text{A.19})$$

et l'on calcule facilement, l'expression de la matrice de covariance de l'erreur

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbb{E} \left( \tilde{\mathbf{x}}_{k|k} \tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^T \right) = [\mathbf{I} - \mathbf{D}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_{k|k-1} [\mathbf{I} - \mathbf{D}_k \mathbf{H}_k]^T + \mathbf{D}_k \mathbf{R}_k \mathbf{D}_k^T \quad (\text{A.20})$$

Il nous reste seulement, à trouver l'expression de  $\mathbf{D}_k$ , qui minimise la trace de  $\mathbf{P}_{k|k}$ . On réécrit l'expression de la matrice de covariance de l'erreur

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k} &= [\mathbf{I} - \mathbf{D}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_{k|k-1} [\mathbf{I} - \mathbf{D}_k \mathbf{H}_k]^T + \mathbf{D}_k \mathbf{R}_k \mathbf{D}_k^T \\ &= [\mathbf{I} - \mathbf{D}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_{k|k-1} [\mathbf{I} - \mathbf{H}_k^T \mathbf{D}_k^T] + \mathbf{D}_k \mathbf{R}_k \mathbf{D}_k^T \\ &= \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{D}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{D}_k^T + \mathbf{D}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{D}_k^T + \mathbf{D}_k \mathbf{R}_k \mathbf{D}_k^T \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

dont la trace est

$$\text{tr}(\mathbf{P}_{k|k}) = \text{tr}(\mathbf{P}_{k|k-1}) - 2\text{tr}(\mathbf{D}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1}) + \text{tr}(\mathbf{D}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{D}_k^T) + \text{tr}(\mathbf{D}_k \mathbf{R}_k \mathbf{D}_k^T) \quad (\text{A.22})$$

La dérivée partielle de  $\text{tr}(\mathbf{P}_{k|k})$ , par rapport à  $\mathbf{D}_k$ , est

$$\frac{\partial \text{tr}(\mathbf{P}_{k|k})}{\partial \mathbf{D}_k} = -2\mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + 2\mathbf{D}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + 2\mathbf{R}_k \quad (\text{A.23})$$

Si l'on résoud l'équation  $\frac{\partial \text{tr}(\mathbf{P}_{k|k})}{\partial \mathbf{D}_k} = 0$ , pour  $\mathbf{D}_k$ , on trouve l'expression du *gain de Kalman*

$$\mathbf{D}_k = \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (\text{A.24})$$

Avec cette expression du gain de Kalman, on peut réécrire la matrice de covariance de l'erreur d'une façon simplifiée

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k} \quad (\text{A.25})$$



## Annexe B

# Filtre Bayésien sous l'hypothèse Gaussienne

Dans cette annexe on détaille les équations de la section 2.4.2 et on résume le filtre dans l'algorithme 6. Le filtre Bayésien est composé de deux étapes récursives (voir section 2.1) : *prédiction* et *correction*. Dans le contexte Gaussien que l'on traite dans cette section, la structure du filtre est la suivante :

**Prédiction** Dans cette étape, on cherche la moyenne et la matrice de covariance de la densité de prédiction. Cette moyenne peut s'écrire comme l'espérance de l'état sachant toutes les observations et entrées passées.

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= \mathbb{E} [\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1}] \\
 &= \mathbb{E} [\mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{v}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1}] \\
 &= \mathbb{E} [\mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) | \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1}] \\
 &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}
 \end{aligned}$$

sous l'hypothèse Gaussienne, on écrit

$$\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}$$

La matrice de covariance associée à l'erreur de prédiction s'écrit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{k|k-1} &= \mathbb{E} \left[ (\mathbf{x}_k - \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) (\mathbf{x}_k - \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T | \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1} \right] \\
 &= \mathbb{E} [\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T | \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1}] - 2\mathbb{E} [\mathbf{x}_k \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T | \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1}] \\
 &\quad + \mathbb{E} [\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T | \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1}] \\
 &= \mathbb{E} \left[ (\mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{v}_{k-1}) (\mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{v}_{k-1})^T | \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1} \right] \\
 &\quad - \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T \\
 &= \mathbb{E} [\mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \mathbf{f}_{k-1}^T(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) | \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1}] \\
 &\quad - \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}
 \end{aligned}$$

qui sous l'hypothèse Gaussienne, prend la forme suivante

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \mathbf{f}_{k-1}^T(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \\ - \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$$

**Correction** Dans cette étape, le filtre calcule la densité *a posteriori*,  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}, \mathbf{u}_{1:k})$ , à partir de la densité prédite. Étant donné que l'on est sous l'hypothèse Gaussienne, il nous faut seulement calculer la moyenne,  $\widehat{\mathbf{x}}_{k|k}$ , et la covariance,  $\mathbf{P}_{k|k}$ , de cette densité

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}, \mathbf{u}_{1:k}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \widehat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k})$$

Dans le cadre de la solution de Kalman, la correction de la moyenne et la matrice de covariance s'écrit :

$$\widehat{\mathbf{x}}_{k|k} = \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) \\ \mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{yy,k|k-1} \mathbf{K}_k^T$$

où  $\mathbf{K}_k$ , est le gain de Kalman, et  $\mathbf{P}_{yy,k|k-1}$ , est la matrice de covariance associée à l'erreur de prédiction de l'observation  $\widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1}$ . L'expression du gain de Kalman est la suivante

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xy,k|k-1} \mathbf{P}_{yy,k|k-1}^{-1}$$

où  $\mathbf{P}_{xy,k|k-1}$ , représente la matrice de covariance croisée de l'erreur de prédiction de l'état et de l'observation.

La prédiction de l'observation peut s'écrire comme

$$\widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \mathbb{E}[\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1}] \\ = \mathbb{E}[\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{n}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1}] \\ = \mathbb{E}[\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) | \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1}] \\ = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_k \\ = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k$$

et la matrice de covariance associée à l'erreur de prédiction de l'observation

$$\mathbf{P}_{yy,k|k-1} = \mathbb{E}[(\mathbf{y}_k - \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) (\mathbf{y}_k - \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1})^T | \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1}] \\ = \mathbb{E}[\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^T | \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1}] - 2\mathbb{E}[\mathbf{y}_k \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T | \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1}] \\ + \mathbb{E}[\widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T | \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1}] \\ = \mathbb{E}[(\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{n}_k) (\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{n}_k)^T | \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1}] \\ - \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T \\ = \mathbb{E}[\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \mathbf{h}_k^T(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) | \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1}] \\ - \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T + \mathbf{R}_k \\ = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \mathbf{h}_k^T(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k \\ - \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T + \mathbf{R}_k$$

Il nous reste à trouver l'expression de la matrice de covariance croisée de l'erreur de prédiction de l'état et l'observation,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{xy,k|k-1} &= \mathbb{E} \left[ (\mathbf{x}_k - \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) (\mathbf{y}_k - \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1})^T \mid \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \mathbf{x}_k \mathbf{y}_k^T \mid \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1} \right] - \mathbb{E} \left[ \mathbf{x}_k \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T \mid \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1} \right] \\
&\quad - \mathbb{E} \left[ \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \mathbf{y}_k^T \mid \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1} \right] + \mathbb{E} \left[ \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T \mid \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \mathbf{x}_k (\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{n}_k)^T \mid \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1} \right] \\
&\quad - \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T \\
&= \mathbb{E} \left[ \mathbf{x}_k \mathbf{h}_k^T(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \mid \mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{u}_{1:k-1} \right] - \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{x}_k \mathbf{h}_k^T(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k - \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T
\end{aligned}$$



---

**Algorithm 6** Filtre Bayésien Optimal sous l'hypothèse Gaussienne

---

**Require:** Les observations  $\mathbf{y}$  (que l'on peut obtenir de manière séquentielle), l'état initial  $\mathbf{x}_0$ , la covariance de l'état initial  $\mathbf{P}_0$ , et les statistiques des bruit d'état et d'observation,  $\mathbf{Q}_k$  et  $\mathbf{R}_k$ .

1: Fixer  $\widehat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{P}_{0|0} = \mathbf{P}_0$

2: **for**  $k = 1$  to  $\infty$  **do**

3:   **Prédiction :**

4:   Prédiction de l'état :

$$\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (\text{B.1})$$

5:   Prédiction de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation de l'état :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k-1} &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \mathbf{f}_{k-1}^T(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \\ &\quad - \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

6:   **Correction :**

7:   Prédiction de l'observation :

$$\widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k \quad (\text{B.3})$$

8:   Calcul de la matrice de covariance de l'erreur de prédiction :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{yy,k|k-1} &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \mathbf{h}_k^T(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k \\ &\quad - \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T + \mathbf{R}_k \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

9:   Calcul de la matrice de covariance croisée :

$$\mathbf{P}_{xy,k|k-1} = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{x}_k \mathbf{h}_k^T(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k - \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T \quad (\text{B.5})$$

10:   Calcul du Gain de Kalman :

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xy,k|k-1} \mathbf{P}_{yy,k|k-1}^{-1} \quad (\text{B.6})$$

11:   Correction de l'état :

$$\widehat{\mathbf{x}}_{k|k} = \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) \quad (\text{B.7})$$

12:   Correction de la matrice de covariance :

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{yy,k|k-1} \mathbf{K}_k^T \quad (\text{B.8})$$

13: **end for**

---

## Annexe C

# Méthodes déterministes : calculs détaillés

Dans cette annexe, on présente le détail de certains calculs de la section 2.4.

### C.1 Différentes approches et calcul des échantillons déterministes

#### C.1.1 Approche *Unscented*

On considère une variable aléatoire  $n_x$ -dimensionnelle  $\mathbf{x}$ , de moyenne  $\bar{\mathbf{x}}$  et matrice de covariance  $\mathbf{P}_x$ , qui subit une transformation non-linéaire arbitraire,

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}_{NL}(\mathbf{x})$$

On veut calculer les deux premiers moments de la variable aléatoire  $\mathbf{y}$ , utilisant un échantillonnage déterministe. La procédure est la suivante : on choisit un ensemble d'échantillons et leurs poids associés, de façon à ce que ces échantillons pondérés captent complètement la vraie moyenne et covariance de la variable aléatoire de départ,  $\mathbf{x}$ . Un ensemble qui satisfait ces contraintes, est l'ensemble de  $2n_x + 1$  échantillons suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_0 &= \bar{\mathbf{x}} & w_0 &= \frac{\kappa}{n_x + \kappa} \\ \mathcal{X}_i &= \bar{\mathbf{x}} + \left[ \sqrt{(n_x + \kappa) \mathbf{P}_x} \right]_i & w_i &= \frac{1}{2(n_x + \kappa)} & i &= 1, \dots, n_x \\ \mathcal{X}_i &= \bar{\mathbf{x}} - \left[ \sqrt{(n_x + \kappa) \mathbf{P}_x} \right]_i & w_i &= \frac{1}{2(n_x + \kappa)} & i &= n_x + 1, \dots, 2n_x \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

où  $\mathcal{X}_i$  et  $w_i$ , sont les échantillons déterministes et leurs poids associés,  $\kappa$  est un paramètre de la transformation et  $\left[ \sqrt{(n_x + \kappa) \mathbf{P}_x} \right]_i$  fait référence à la  $i$ -ème colonne de la matrice. La racine carrée d'une matrice peut être calculée, par exemple, avec la décomposition de Cholesky. On peut construire des ensembles, qui en plus de capter la moyenne et la covariance, capturent aussi le coefficient de dissymétrie et le kurtosis.

On propage les sigma-points, au travers de la fonction non-linéaire, pour produire un nouvel ensemble de points

$$\mathcal{Y}_i = \mathbf{h}_{NL}(\mathcal{X}_i) \quad i = 0, \dots, 2n_x \quad (\text{C.2})$$

À partir de ce nouvel ensemble d'échantillons, on peut estimer la moyenne et la covariance de la variable aléatoire transformée, de la façon suivante

$$\bar{\mathbf{y}} \approx \sum_{i=0}^{2n_x} w_i \mathcal{Y}_i \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{P}_y \approx \sum_{i=0}^{2n_x} w_i (\mathcal{Y}_i - \bar{\mathbf{y}}) (\mathcal{Y}_i - \bar{\mathbf{y}})^T \quad (\text{C.4})$$

Les estimations de la moyenne et la covariance, sont précises jusqu'au deuxième ordre (troisième si  $\mathbf{x}$  est une variable aléatoire Gaussienne) du développement en série de Taylor de  $\mathbf{h}_{NL}$ , pour n'importe quelle fonction non-linéaire. Avec le paramètre  $\kappa$ , on peut contrôler la distribution des sigma-points, ce qui nous laisse un degré de liberté pour résoudre des problèmes quand la dimension  $n_x$  augmente. Pour annuler l'effet de la dimension, il faudrait choisir  $\kappa = 3 - n_x$ , qui peut être négatif, ce qui impliquerait un poids  $w_0 < 0$  et une matrice de covariance qui peut devenir semi-définie négative. Pour résoudre ce problème, une UT alternative a été proposée, la Scaled UT (SUT) [Juli 97].

Le principe de la SUT est de rajouter un degré de liberté pour contrôler les éventuels effets d'ordre supérieur. Le nouveau ensemble d'échantillons est construit à partir de l'ancien comme

$$\mathcal{X}'_i = \mathcal{X}_0 + \alpha (\mathcal{X}_i - \mathcal{X}_0) \quad i = 0, \dots, 2n_x \quad (\text{C.5})$$

Cette formulation rend possible le contrôle de la distribution des sigma-points, sans permettre que la covariance devienne semi-définie négative. On peut calculer l'ensemble d'échantillons directement de la façon suivante : on définit  $\lambda = \alpha^2 (n_x + \kappa) - n_x$ , et l'on calcule

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_0 &= \bar{\mathbf{x}} & i &= 0 \\ \mathcal{X}_i &= \bar{\mathbf{x}} + \left[ \sqrt{(n_x + \lambda) \mathbf{P}_x} \right]_i & i &= 1, \dots, n_x \\ \mathcal{X}_i &= \bar{\mathbf{x}} - \left[ \sqrt{(n_x + \lambda) \mathbf{P}_x} \right]_i & i &= n_x + 1, \dots, 2n_x \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

avec leurs poids associés

$$\begin{aligned} w_0^{(m)} &= \frac{\lambda}{n_x + \lambda} & i &= 0 \\ w_0^{(c)} &= \frac{\lambda}{n_x + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) & i &= 0 \\ w_i^{(m)} &= w_i^{(c)} = \frac{1}{2(n_x + \lambda)} & i &= 1, \dots, 2n_x \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Le poids associé à l'échantillon  $\mathcal{X}_0$ , affecte directement les erreurs au quatrième ordre et supérieurs. Pour cela, un troisième paramètre,  $\beta$ , sert à contrôler cet effet. Ainsi l'ensemble des paramètres que l'on a pour contrôler la SUT est  $(\kappa, \alpha, \beta)$ , pour lesquels il n'existe pas de valeurs optimales de manière générale. Avec ce nouveau ensemble, on calcule les statistiques de la variable aléatoire

transformée de la même façon qu'avant, mais utilisant les nouveau poids.

$$\bar{\mathbf{y}} \approx \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(m)} \mathcal{Y}_i \quad (\text{C.8})$$

$$\mathbf{P}_y \approx \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(c)} (\mathcal{Y}_i - \bar{\mathbf{y}}) (\mathcal{Y}_i - \bar{\mathbf{y}})^T \quad (\text{C.9})$$

$$\mathbf{P}_{xy} \approx \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(c)} (\mathcal{X}_i - \bar{\mathbf{x}}) (\mathcal{Y}_i - \bar{\mathbf{y}})^T \quad (\text{C.10})$$

### C.1.2 Approche différences finies

Si l'on suppose que l'on veut approcher la fonction non-linéaire  $h_{NL}(x)$ , l'approximation de Stirling de deuxième ordre s'écrit, dans le cas scalaire,

$$h_{NL}(x) = h_{NL}(\bar{x}) + D_{\Delta_x} h_{NL} + \frac{1}{2} D_{\Delta_x}^2 h_{NL} \quad (\text{C.11})$$

où les évaluation fonctionnelles, de premier et deuxième ordre, prennent respectivement la forme suivante

$$D_{\Delta_x} = (x - \bar{x}) \frac{h_{NL}(\bar{x} + h) - h_{NL}(\bar{x} - h)}{2h} \quad (\text{C.12})$$

$$D_{\Delta_x}^2 = (x - \bar{x})^2 \frac{h_{NL}(\bar{x} + h) + h_{NL}(\bar{x} - h) - 2h_{NL}(\bar{x})}{h^2} \quad (\text{C.13})$$

avec  $h$  la longueur de l'intervalle, et dans ce cas on a fait l'interpolation autour de la moyenne  $\bar{x}$ . Alors, on peut voir que l'interpolation de Stirling, est comme un développement en série de Taylor, où les dérivés ont été remplacées par des différences finies.

Dans le cas multidimensionnel, l'idée est de construire une nouvelle variable aléatoire avec leur composantes décorréelées, et d'appliquer les opérations du cas scalaire. On suppose que l'on a la variable aléatoire  $n_x$ -dimensionnelle  $\mathbf{x}$ , de moyenne  $\bar{\mathbf{x}}$  et covariance  $\mathbf{P}_x$ , et que  $\mathbf{S}_x$  est la factorisation de Cholesky de cette matrice de covariance,  $\mathbf{P}_x = \mathbf{S}_x \mathbf{S}_x^T$ . On construit la variable aléatoire  $\mathbf{z}$

$$\mathbf{z} = \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{x} \quad (\text{C.14})$$

$$\tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\mathbf{z}) = \mathbf{h}_{NL}(\mathbf{S}_x \mathbf{z}) = \mathbf{h}_{NL}(\mathbf{x}) \quad (\text{C.15})$$

Étant donné que les composantes de  $\mathbf{z}$  sont décorréelées, on peut appliquer directement la formulation de Stirling scalaire indépendamment aux composantes de  $\tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\mathbf{z})$ . On définit les opérateurs suivants

$$\mathbf{m}_i \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2} \left( \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}} + h \mathbf{e}_i) + \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}} - h \mathbf{e}_i) \right) \quad (\text{C.16})$$

$$\mathbf{d}_i \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2h} \left( \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}} + h \mathbf{e}_i) - \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}} - h \mathbf{e}_i) \right) \quad (\text{C.17})$$

$$\mathbf{d}_i^2 \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2h^2} \left( \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}} + h \mathbf{e}_i) + \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}} - h \mathbf{e}_i) - 2\tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}}) \right) \quad (\text{C.18})$$

où  $\mathbf{e}_i$  est le  $i$ -ème vecteur unitaire.

L'interpolation de Stirling multidimensionnelle de deuxième ordre s'écrit

$$\mathbf{h}_{NL}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\mathbf{z}) \approx \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}}) + \tilde{\mathbf{D}}_{\Delta_{\mathbf{z}}} \tilde{\mathbf{h}}_{NL} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{D}}_{\Delta_{\mathbf{z}}}^2 \tilde{\mathbf{h}}_{NL} \quad (\text{C.19})$$

où les opérateurs de Stirling multidimensionnels, prennent la forme suivante [Norg 00]

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\Delta_{\mathbf{z}}} \tilde{\mathbf{h}}_{NL} = \left( \sum_{i=1}^{n_x} [\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}]_i \mathbf{m}_i \mathbf{d}_i \right) \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}}) \quad (\text{C.20})$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\Delta_{\mathbf{z}}}^2 \tilde{\mathbf{h}}_{NL} = \left( \sum_{i=1}^{n_x} [\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}]_i^2 \mathbf{d}_i^2 + \sum_{j=1}^{n_x} \sum_{q=1, q \neq j}^{n_x} [\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}]_j [\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}]_q (\mathbf{m}_j \mathbf{d}_j) (\mathbf{m}_q \mathbf{d}_q) \right) \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}}) \quad (\text{C.21})$$

On note que

$$\tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}} \pm h \mathbf{e}_i) = \mathbf{h}_{NL}(\mathbf{S}_x [\bar{\mathbf{z}} \pm h \mathbf{e}_i]) \quad (\text{C.22})$$

$$= \mathbf{h}_{NL}(\mathbf{S}_x \bar{\mathbf{z}} \pm h \mathbf{S}_x \mathbf{e}_i) \quad (\text{C.23})$$

$$= \mathbf{h}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} \pm h \mathbf{s}_{x_i}) \quad (\text{C.24})$$

avec  $\mathbf{s}_{x_i} = [\mathbf{S}_x]_i$ , la  $i$ -ème colonne du facteur de Cholesky de la matrice de covariance. On peut voir, que dans la formule d'interpolation de Stirling, on utilise un ensemble de points,  $\bar{\mathbf{x}} \pm h \mathbf{s}_{x_i}$ , pour évaluer les fonctions. Ces points sont générés de façon très similaire à l'ensemble de points de l'UT.

Mais le point le plus important reste à éclaircir, comment approcher la moyenne et la covariance d'une variable aléatoire transformée par une fonction non-linéaire. On prend le même problème que dans le cas de la UT : on a  $\mathbf{y} = \mathbf{h}_{NL}(\mathbf{x})$  et l'on veut calculer la moyenne  $\bar{\mathbf{y}}$ , la covariance  $\mathbf{P}_y$  et la covariance croisée  $\mathbf{P}_{xy}$ . On peut approcher cette variable aléatoire en utilisant l'interpolation de Stirling, comme

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}_{NL}(\mathbf{x}) \approx \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}}) + \tilde{\mathbf{D}}_{\Delta_{\mathbf{z}}} \tilde{\mathbf{h}}_{NL} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{D}}_{\Delta_{\mathbf{z}}}^2 \tilde{\mathbf{h}}_{NL} \quad (\text{C.25})$$

On suppose que  $[\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}]$  est une variable aléatoire centrée, réduite et symétrique. La moyenne peut s'approcher comme

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}} &\approx \mathbb{E} \left[ \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}}) + \tilde{\mathbf{D}}_{\Delta_{\mathbf{z}}} \tilde{\mathbf{h}}_{NL} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{D}}_{\Delta_{\mathbf{z}}}^2 \tilde{\mathbf{h}}_{NL} \right] \\ &= \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{i=1}^{n_x} \left( \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}} + h \mathbf{e}_i) + \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}} - h \mathbf{e}_i) - 2\tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}}) \right) \\ &= \frac{h^2 - n_x}{h^2} \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{i=1}^{n_x} \left( \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}} + h \mathbf{e}_i) + \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{z}} - h \mathbf{e}_i) \right) \\ &= \frac{h^2 - n_x}{h^2} \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{i=1}^{n_x} \left( \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} + h \mathbf{s}_{x_i}) + \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} - h \mathbf{s}_{x_i}) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

De la même façon que pour la moyenne, et utilisant quelques manipulations algébriques, on peut

calculer la matrice de covariance et covariance croisée (pour un calcul détaillé, voir [Norg 00]),

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_y &\approx \frac{1}{4h^2} \sum_{i=1}^{n_x} \left( \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_{x_i}) - \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_{x_i}) \right) \left( \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_{x_i}) - \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_{x_i}) \right)^T \\ &\quad + \frac{h^2 - 1}{4h^4} \sum_{i=1}^{n_x} \left( \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_{x_i}) + \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_{x_i}) - 2\tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}}) \right) \times \\ &\quad \times \left( \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_{x_i}) + \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_{x_i}) - 2\tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}}) \right)^T \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

$$\mathbf{P}_{xy} \approx \frac{1}{2h} \sum_{i=1}^{n_x} \mathbf{s}_{x_i} \left( \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_{x_i}) - \tilde{\mathbf{h}}_{NL}(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_{x_i}) \right)^T \quad (\text{C.28})$$

La valeur optimale de la longueur de l'intervalle,  $h$ , dépend de la distribution de la variable aléatoire  $\mathbf{z}$ . Pour minimiser l'erreur entre l'estimation de la moyenne et la covariance, et le développement de Taylor de la vraie moyenne et covariance,  $h^2$  doit être égal au kurtosis de  $\mathbf{z}$  [Norg 00]. Pour une variable aléatoire Gaussienne la valeur optimale est  $h = \sqrt{3}$ .

### C.1.3 Approche quadrature de Gauss-Hermite

#### Méthode de Gauss-Hermite

Dans la méthode de quadrature de Gauss-Hermite, la fonction de pondération est une densité Gaussienne, centrée et réduite,  $W(x) = e^{-x^2}$ , et l'intervalle d'intérêt est  $(-\infty, \infty)$ .

Le théorème de Gauss-Hermite dit que l'on choisit les points de quadrature comme les racines du polynôme d'Hermite de  $m$ -ème ordre. Cette méthode est exacte pour tous les polynômes de degré  $\leq (2m - 1)$ . Dans un premier cas on s'intéresse à approcher une intégrale de la forme (dans le cas monodimensionnel) suivante

$$I(g(x)) = \int g(x) \mathcal{N}(x; 0, 1) dx \quad (\text{C.29})$$

et pour appliquer la méthode de Gauss-Hermite on prend la variable  $z = \frac{1}{\sqrt{2}}x$ . La méthode de Gauss-Hermite nous donne

$$\int g(z) e^{-z^2} dz \approx \sum_{i=1}^m w_i g(\mathbf{Z}_i) \quad (\text{C.30})$$

où les points de quadrature sont les  $m$  racines du  $m$ -ème polynôme d'Hermite. Dans la suite, on présente une méthode efficace pour calculer les points et poids de quadrature dans le cas de Gauss-Hermite. On peut générer un ensemble orthonormal de polynômes d'Hermite

$$\begin{aligned} H_{-1}(z) &= 0, \quad H_0(z) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \\ H_{j+1}(z) &= x \sqrt{\frac{2}{j+1}} H_j(z) - \sqrt{\frac{j}{j+1}} H_{j-1}(z) ; \quad j = 0, \dots, m-1 \end{aligned}$$

Si l'on pose  $\beta_j = \sqrt{j/2}$ , la récursion s'écrit

$$zH_j(z) = \beta_{j+1}H_{j+1}(z) + \beta_jH_{j-1}(z)$$

On peut écrire le résultat pour toutes les valeurs de  $j$  utilisant une forme matricielle,

$$z\mathbf{h}(z) = \mathbf{J}_m \mathbf{h}(z) + \beta_m H_m(z) \mathbf{e}_m \quad (\text{C.31})$$

où  $\mathbf{e}_m = [0, \dots, 0, 1]^T$  et

$$\mathbf{J}_m = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & 0 & \beta_2 & & \\ & \beta_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & \beta_{m-1} \\ & & & \beta_{m-1} & 0 \end{pmatrix}$$

De l'équation (C.31), on peut voir que si  $H_m(z) = 0$  cette équation détermine les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{J}_m$ . Ainsi, si l'on cherche les valeurs de  $y$  pour lesquels  $H_m(z) = 0$ , l'équation (C.31) nous donne les valeurs et vecteurs propres de  $\mathbf{J}_m$ . Les valeurs propres  $z_i$ , avec  $i = 1, \dots, m$ , correspondent aux  $m$  racines de  $H_m(z)$  qui d'après le théorème de Gauss-Hermite, sont les points de quadrature.

Mais on doit encore trouver les poids associés. Les vecteurs propres prennent la forme suivante

$$\nu_j(z_i) = \frac{H_j(z_i)}{\sqrt{W_i}}$$

$$\nu(z_i) = [\nu_1(z_i), \dots, \nu_m(z_i)]^T = \frac{1}{\sqrt{W_i}} [H_0(z_i), \dots, H_{m-1}(z_i)]^T$$

avec  $W_i = \sum_{j=1}^m H_j^2(z_i)$ . On sait que les vecteurs propres vérifient les conditions d'orthogonalité suivantes

$$\begin{aligned} \nu(z_k)^T \nu(z_l) &= \sum_{j=1}^m \nu_j(z_k) \nu_j(z_l) = \delta_{kl} \\ \sum_{i=1}^m \nu_k(z_i) \nu_l(z_i) &= \sum_{i=1}^m H_k(z_i) H_l(z_i) \frac{1}{W_i} = \delta_{kl} \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

D'après cela, l'orthogonalité des polynômes d'Hermite peut s'exprimer comme

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_k(z) H_l(z) W(z) dz = \delta_{kl} \quad (\text{C.33})$$

Si l'on compare (C.32) et (C.33), on peut voir que dans le cas discret,  $W(x)$  est remplacé par  $\frac{1}{W_i}$ , pour les fonctions évaluées aux valeurs propres  $z_i$ , alors on peut dire que les poids associés sont  $w_i = \frac{1}{W_i}$ .

On a obtenu une méthode alternative pour trouver les points et poids de quadrature, à la solution qui cherche les racines des polynômes. On cherche les vecteurs et valeurs propres de  $\mathbf{J}_m$  et les points de quadrature sont directement les valeurs propres  $\mathcal{Z}_i = z_i$ , et les poids associés s'écrivent  $w_i = \nu_{i,1}^2$ , où  $\nu_{i,1}$  est le premier élément de l' $i$ -ème vecteur propre normalisé de  $\mathbf{J}_m$ .

Si l'on pense à la définition de  $z$  que l'on a effectué, on a que les points de quadrature pour l'intégrale que l'on veut calculer sont  $\xi_i = \sqrt{2}\mathcal{Z}_i$ . Alors on obtient

$$I(g(x)) = \int g(x) \mathcal{N}(x; 0, 1) dx \approx \sum_{i=1}^m w_i g(\xi_i) \quad (\text{C.34})$$

**Cas multidimensionnel :** si l'on a une variable aléatoire multidimensionnelle  $\mathbf{x}$ , et une fonction de pondération  $W(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}; \mathbf{0}, \mathbf{I}_{n_x})$ , la méthode de quadrature de Gauss-Hermite s'écrit,

$$I(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \approx \sum_{l_{n_x}=1}^m \cdots \sum_{l_1=1}^m w_{l_{n_x}} \cdots w_{l_1} \mathbf{g}(\xi_{l_1} \cdots \xi_{l_{n_x}}) = \sum_{l=1}^{m^{n_x}} \tilde{w}_l \mathbf{g}(\xi_l) \quad (\text{C.35})$$

avec  $\tilde{w}_l = \prod_{j=1}^{n_x} w_{l_j}$  et  $\xi_l = [\xi_{l_1} \cdots \xi_{l_{n_x}}]$ .

Alors, la méthode de Gauss-Hermite, nous sert à approcher des intégrales de la forme  $\int \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathcal{N}(\mathbf{x}; \mathbf{0}, \mathbf{I}_{n_x}) d\mathbf{x}$ . Cette intégrale peut être vue comme l'espérance mathématique de  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ , si la variable aléatoire  $\mathbf{x}$  suit une distribution Gaussienne, centrée et réduite. Dans un cas général, les composantes de  $\mathbf{x}$ , peuvent être corrélées, alors les intégrales d'intérêt sont de la forme

$$\mathbb{E}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \int \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathcal{N}(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}, \Sigma) d\mathbf{x} \quad (\text{C.36})$$

Dans ce cas on ne peut pas appliquer directement l'équation (2.62). Pour résoudre ce problème, on fait un changement de variable pour rendre les composantes non-corrélés. On écrit

$$\mathbf{y} = \left( \sqrt{\Sigma} \right)^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$$

Avec cela, on peut écrire

$$\mathbb{E}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \int \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathcal{N}(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}, \Sigma) d\mathbf{x} = \int \mathbf{g}(\sqrt{\Sigma} \mathbf{y} + \bar{\mathbf{x}}) \mathcal{N}(\mathbf{y}; \mathbf{0}, \mathbf{I}_{n_x}) d\mathbf{y} \quad (\text{C.37})$$

Avec cette nouvelle formulation, on peut appliquer la quadrature de Gauss-Hermite, et l'on obtient

$$\mathbb{E}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \approx \sum_{l_{n_x}=1}^m \cdots \sum_{l_1=1}^m w_{l_{n_x}} \cdots w_{l_1} \mathbf{g} \left( \sqrt{\Sigma} [\xi_{l_1} \cdots \xi_{l_{n_x}}] + \bar{\mathbf{x}} \right) = \sum_{l=1}^{m^{n_x}} \tilde{w}_l \mathbf{g}(\sqrt{\Sigma} \xi_l + \bar{\mathbf{x}}) \quad (\text{C.38})$$

avec  $\tilde{w}_l = \prod_{j=1}^{n_x} w_{l_j}$  et  $\xi_l = [\xi_{l_1} \cdots \xi_{l_{n_x}}]$ . Si l'on écrit  $\mathcal{X}_l = \sqrt{\Sigma} \xi_l + \bar{\mathbf{x}}$ , on peut écrire finalement

$$\mathbb{E}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \approx \sum_{l=1}^{m^{n_x}} \tilde{w}_l \mathbf{g}(\mathcal{X}_l) \quad (\text{C.39})$$

On peut voir qu'avec cette formulation, on peut approcher de façon déterministe, effectuant une somme pondérée d'évaluations d'une fonction, une intégrale Gaussienne. Pour voir le lien avec les deux méthodes précédentes, la SUT et la méthode d'interpolation de Stirling, il nous faut voir comment on fait pour approcher la moyenne et la covariance d'une variable aléatoire qui a subi une transformation non-linéaire.

D'après [Aras 07], on peut démontrer que l'on peut approcher la moyenne et la covariance de la variable aléatoire  $\mathbf{y}$  à partir de la variable Gaussienne  $\mathbf{x}$ , utilisant la quadrature de Gauss-Hermite.

On a une variable aléatoire  $\mathbf{x}$ , de moyenne  $\bar{\mathbf{x}}$  et matrice de covariance  $\mathbf{P}_{xx}$ . On peut écrire

$$\bar{\mathbf{x}} = \sum_{l=1}^{m^{n_x}} \tilde{w}_l \mathcal{X}_l \quad (\text{C.40})$$

$$\mathbf{P}_{xx} = \sum_{l=1}^{m^{n_x}} \tilde{w}_l (\mathcal{X}_l - \bar{\mathbf{x}}) (\mathcal{X}_l - \bar{\mathbf{x}})^T \quad (\text{C.41})$$



Si l'on calcule la transformation des points de quadrature,  $\mathcal{Y}_l = \mathbf{g}(\mathcal{X}_l)$ , on peut estimer la moyenne, la covariance, et la covariance croisée de  $\mathbf{y}$

$$\bar{\mathbf{y}} \approx \sum_{l=1}^{m^{n_x}} \tilde{w}_l \mathcal{Y}_l \quad (\text{C.42})$$

$$\mathbf{P}_{yy} \approx \sum_{l=1}^{m^{n_x}} \tilde{w}_l (\mathcal{Y}_l - \bar{\mathbf{y}}) (\mathcal{Y}_l - \bar{\mathbf{y}})^T \quad (\text{C.43})$$

$$\mathbf{P}_{xy} \approx \sum_{l=1}^{m^{n_x}} \tilde{w}_l (\mathcal{X}_l - \bar{\mathbf{x}}) (\mathcal{Y}_l - \bar{\mathbf{y}})^T \quad (\text{C.44})$$

### C.1.4 Approche cubature

On cherche à approcher l'intégrale du produit d'une fonction arbitraire par une densité Gaussienne,

$$I(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{x}\mathbf{x}^T} d\mathbf{x} \quad (\text{C.45})$$

Si l'on prend  $\mathbf{x} = r\mathbf{y}$ , où  $r$  est un rayon et  $\mathbf{y}$  un vecteur directeur, avec  $\mathbf{y}^T \mathbf{y} = 1$  et  $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = r^2$  pour  $r \in [0, \infty)$ , on peut réécrire l'intégrale (eq.(2.71)) sous une forme sphérique

$$I(\mathbf{f}) = \int_0^\infty \int_{U_n} \mathbf{f}(r\mathbf{y}) r^{n-1} e^{-r^2} d\sigma(\mathbf{y}) dr \quad (\text{C.46})$$

$$= \int_0^\infty S(r) r^{n-1} e^{-r^2} dr \quad (\text{C.47})$$

où la surface de la sphère est définie comme  $U_n = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_x} | \mathbf{y}^T \mathbf{y} = 1\}$  et  $\sigma(\cdot)$  est la mesure de surface. L'intégrale (C.47) est une intégrale radiale, et  $S(r)$  est une intégrale sphérique avec fonction de pondération  $\mathbf{w}(\mathbf{y}) = 1$ ,

$$S(r) = \int_{U_n} \mathbf{f}(r\mathbf{y}) d\sigma(\mathbf{y}) \quad (\text{C.48})$$

L'idée est de calculer l'intégrale radiale avec une méthode de quadrature Gaussienne, et l'intégrale sphérique avec une règle de cubature sphérique. On veut construire une règle de cubature sphérido-radiale symétrique de troisième ordre.

On définit :

- Dans une région complètement symétrique, on appelle un point  $\mathbf{q}$  un générateur, si  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n_x}$ , avec  $q_i \geq q_{i+1} > 0$ ,  $i = 1, \dots, (r-1)$ .
- On note  $[q_1, q_2, \dots, q_r]$  l'ensemble de points complètement symétriques, obtenus à partir de toutes les permutations et changements de signe possibles du générateur.
- $[q_1, q_2, \dots, q_r]_i$  représente le  $i$ -ème élément de l'ensemble  $[q_1, q_2, \dots, q_r]$ .
- Exemple : l'ensemble de points  $[1] \in \mathbb{R}^2$ , est

$$\{[1, 0], [0, 1], [-1, 0], [0, -1]\}$$

**Règle de cubature sphérique :** on cherche la règle de cubature sphérique de troisième degré qui prend la forme suivante

$$\int_{U_n} \mathbf{f}(\mathbf{y}) d\sigma(\mathbf{y}) \approx w \sum_{i=1}^{2n_x} \mathbf{f}[q]_i \quad (\text{C.49})$$

L'ensemble de points  $[q]$  est invariant par rapport aux permutations et changements de signe. Cette règle est exacte pour tous les polynômes d'ordre impair, ainsi pour avoir une règle de troisième ordre, il nous suffit de garantir que l'approximation soit exacte pour  $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = 1$  et  $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = y_1^2$ . On peut écrire

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = 1 : \quad 2n_x w = \int_{U_n} d\sigma(\mathbf{y}) = A_n \quad (\text{C.50})$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = y_1^2 : \quad 2wq^2 = \int_{U_n} y_1^2 d\sigma(\mathbf{y}) = \frac{A_n}{n_x} \quad (\text{C.51})$$

avec  $A_n$  la surface de la sphère unitaire  $A_n = \frac{2\sqrt{\pi^{n_x}}}{\Gamma(n_x/2)}$ , avec  $\Gamma(n)$  la fonction Gamma. Si l'on résoud le système on trouve que  $w = \frac{A_n}{2n_x}$  et  $q^2 = 1$ . Alors les points de cubature se trouvent à l'intersection de la sphère unitaire et ses axes.

**Règle radiale :** On cherche une règle de quadrature Gaussienne pour approcher l'intégrale radiale

$$\int_0^\infty f(x)x^{n_x-1}e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \tilde{f}(t)t^{\frac{n_x}{2}-1}e^{-t} dt \approx \sum_{i=1}^m w_i f(x_i) \quad (\text{C.52})$$

où  $\tilde{f}(t) = f(\sqrt{t})$ , et  $\{x_i, w_i\}$  est l'ensemble de points et poids de quadrature. L'intégrale d'intérêt prend la forme d'une intégrale de Gauss-Laguerre généralisée. Une approximation de Gauss-Laguerre de premier degré est exacte pour  $\tilde{f}(t) = 1, t$ , alors pour,  $f(x) = 1, x^2$ . Quand on combine cette règle avec la règle de cubature sphérique, tous les coefficients pour les polynômes d'ordre impair sont nuls, ainsi pour que cette approximation soit exacte pour tous les polynômes de troisième degré, il suffit de considérer la règle de Gauss-Laguerre généralisée de premier ordre. On peut écrire

$$\int_0^\infty f(x)x^{n_x-1}e^{-x^2} dx \approx w_1 f(x_1) \quad (\text{C.53})$$

où  $x_1$  est la racine-carré, de la racine du polynôme de Laguerre de premier ordre, à cause du changement de variable que l'on a fait. On sait que  $x_1 = \sqrt{\frac{n_x}{2}}$  et  $w_1 = \frac{\Gamma(n_x/2)}{2}$ .

**Règle sphérido-radiale :** ici on combine les deux règles obtenues séparément. On suppose que l'on calcule l'intégrale radiale à partir de  $m_r$  points de quadrature, et l'intégrale sphérique, à partir de  $m_s$  points de cubature,

$$\int_0^\infty f(r)r^{n_x-1}e^{-r^2} dr \approx \sum_{i=1}^{m_r} a_i f(r_i) \quad (\text{C.54})$$

$$\int_{U_n} \mathbf{f}(r\mathbf{s})d\sigma(\mathbf{s}) \approx \sum_{j=1}^{m_s} b_j \mathbf{f}(r\mathbf{s}_j) \quad (\text{C.55})$$

Alors une règle sphérido-radiale de cubature qui utilise  $(m_s \times m_r)$  points, s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})e^{-\mathbf{x}^T \mathbf{x}} d\mathbf{x} \approx \sum_{j=1}^{m_s} \sum_{i=1}^{m_r} a_i b_j \mathbf{f}(r_i \mathbf{s}_j) \quad (\text{C.56})$$

En faisant un changement de variable on peut écrire l'égalité suivante

$$\int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathcal{N}(\mathbf{x}; \mu, \Sigma) d\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{\pi^{n_x}}} \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{f}(\sqrt{2\Sigma}\mathbf{x} + \mu)e^{-\mathbf{x}^T \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (\text{C.57})$$

Pour finir, on particularise pour la règle de cubature sphérido-radiale de troisième ordre. On a  $m_r = 1$  et  $m_s = 2n_x$ , alors le nombre total de points de cubature est  $m = 2n_x$ , et l'on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mathcal{N}(\mathbf{x}; \mathbf{0}, \mathbf{I}) d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^m w_i \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}_i) \quad (\text{C.58})$$

avec

$$\boldsymbol{\xi}_i = \sqrt{\frac{m}{2}} [1]_i$$

$$w_i = \frac{1}{m}, \quad i = 1, \dots, m$$

Avec cette approximation, comme on a fait avec la méthode de Gauss-Hermite, on peut faire une estimation de la moyenne et la covariance d'une variable aléatoire qui a subi une transformation non-linéaire.

## C.2 Approximation du filtre Bayésien

### C.2.1 Central Difference Kalman Filter

L'UKF est une application directe de la SUT à la solution de Kalman. Dans cette section, on montre que le CDKF est obtenu de la même manière, mais en utilisant la méthode d'interpolation de Stirling (voir section 2.4.3.2).

On a vu que dans la méthode d'interpolation de Stirling, les fonctions sont évaluées aux points déterministes suivants

$$\bar{\mathbf{x}} \pm h\mathbf{s}_{x_i} \quad (\text{C.59})$$

où  $\mathbf{s}_{x_i}$  est la  $i$ -ème colonne de la racine-carrée de la matrice de covariance de  $\mathbf{x}$ . Dans ce cas, comme dans l'UKF, on veut prendre en compte aussi l'effet des bruit d'état et d'observation dans l'interpolation. On définit les coefficients suivants

$$\mathbf{s}_{i,k-1|k-1}^x = \left[ \sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{k}-1|\mathbf{k}-1}} \right]_i \quad i = 1, \dots, n_x \quad (\text{C.60})$$

$$\mathbf{s}_{i,k|k-1}^x = \left[ \sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{k}|k-1}} \right]_i \quad i = 1, \dots, n_x \quad (\text{C.61})$$

$$\mathbf{s}_{i,k-1|k-1}^v = \left[ \sqrt{\mathbf{Q}} \right]_i \quad i = 1, \dots, n_v \quad (\text{C.62})$$

$$\mathbf{s}_{i,k|k-1}^n = \left[ \sqrt{\mathbf{R}} \right]_i \quad i = 1, \dots, n_n \quad (\text{C.63})$$

Étant donné que l'on veut appliquer la méthode d'interpolation de Stirling à la solution de Kalman, on suppose qu'à l'instant  $k-1$  on dispose d'une estimation de la moyenne et de la covariance de  $\mathbf{x}$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$  et  $\mathbf{P}_{\mathbf{k}-1|\mathbf{k}-1}$ , de plus on connaît les statistiques du bruit d'état. Ainsi on peut faire une estimation de la prédiction de l'état et la covariance. Pour simplifier, on note  $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}\mathbf{x}^T$ .

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= \frac{h^2 - n_x - n_v}{h^2} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{u}_{k-1}) \\ &+ \frac{1}{2h^2} \sum_{i=1}^{n_x} [\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + h\mathbf{s}_{i,k-1|k-1}^x, \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} - h\mathbf{s}_{i,k-1|k-1}^x, \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{u}_{k-1})] \\ &+ \frac{1}{2h^2} \sum_{i=1}^{n_v} [\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \bar{\mathbf{v}} + h\mathbf{s}_{i,k-1|k-1}^v, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \bar{\mathbf{v}} - h\mathbf{s}_{i,k-1|k-1}^v, \mathbf{u}_{k-1})] \end{aligned} \quad (\text{C.64})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{k|k-1} &= \frac{1}{4h^2} \sum_{i=1}^{n_x} [\mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + h\mathbf{s}_{i,k-1|k-1}^x, \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{u}_{k-1}) - \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} - h\mathbf{s}_{i,k-1|k-1}^x, \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{u}_{k-1})]^2 \\
&+ \frac{1}{2h^2} \sum_{i=1}^{n_v} [\mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \bar{\mathbf{v}} + h\mathbf{s}_{i,k-1|k-1}^v, \mathbf{u}_{k-1}) - \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \bar{\mathbf{v}} - h\mathbf{s}_{i,k-1|k-1}^v, \mathbf{u}_{k-1})]^2 \\
&+ \frac{h^2 - 1}{4h^4} \sum_{i=1}^{n_x} [\mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + h\mathbf{s}_{i,k-1|k-1}^x, \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} - h\mathbf{s}_{i,k-1|k-1}^x, \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{u}_{k-1}) \\
&\quad - 2\mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{u}_{k-1})]^2 \\
&+ \frac{h^2 - 1}{4h^4} \sum_{i=1}^{n_v} [\mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \bar{\mathbf{v}} + h\mathbf{s}_{i,k-1|k-1}^v, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \bar{\mathbf{v}} - h\mathbf{s}_{i,k-1|k-1}^v, \mathbf{u}_{k-1}) \\
&\quad - 2\mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{u}_{k-1})]^2 \tag{C.65}
\end{aligned}$$

Si l'on connaît les statistiques du bruit d'observation, on peut faire de même avec la prédiction de l'observation et la prédiction des matrices de covariance  $\mathbf{P}_{yy,k|k-1}$  et  $\mathbf{P}_{xy,k|k-1}$ ,

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1} &= \frac{h^2 - n_x - n_n}{h^2} \mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \bar{\mathbf{n}}, \mathbf{u}_k) \tag{C.66} \\
&+ \frac{1}{2h^2} \sum_{i=1}^{n_x} [\mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + h\mathbf{s}_{i,k|k-1}^x, \bar{\mathbf{n}}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - h\mathbf{s}_{i,k|k-1}^x, \bar{\mathbf{n}}, \mathbf{u}_k)] \\
&+ \frac{1}{2h^2} \sum_{i=1}^{n_n} [\mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \bar{\mathbf{n}} + h\mathbf{s}_{i,k|k-1}^n, \mathbf{u}_k) + \mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \bar{\mathbf{n}} - h\mathbf{s}_{i,k|k-1}^n, \mathbf{u}_k)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{yy,k|k-1} &= \frac{1}{4h^2} \sum_{i=1}^{n_x} [\mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + h\mathbf{s}_{i,k|k-1}^x, \bar{\mathbf{n}}, \mathbf{u}_k) - \mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - h\mathbf{s}_{i,k|k-1}^x, \bar{\mathbf{n}}, \mathbf{u}_k)]^2 \\
&+ \frac{1}{2h^2} \sum_{i=1}^{n_n} [\mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \bar{\mathbf{n}} + h\mathbf{s}_{i,k|k-1}^n, \mathbf{u}_k) - \mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \bar{\mathbf{n}} - h\mathbf{s}_{i,k|k-1}^n, \mathbf{u}_k)]^2 \\
&+ \frac{h^2 - 1}{4h^4} \sum_{i=1}^{n_x} [\mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + h\mathbf{s}_{i,k|k-1}^x, \bar{\mathbf{n}}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - h\mathbf{s}_{i,k|k-1}^x, \bar{\mathbf{n}}, \mathbf{u}_k) \\
&\quad - 2\mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \bar{\mathbf{n}}, \mathbf{u}_k)]^2 \\
&+ \frac{h^2 - 1}{4h^4} \sum_{i=1}^{n_n} [\mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \bar{\mathbf{n}} + h\mathbf{s}_{i,k|k-1}^n, \mathbf{u}_k) + \mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \bar{\mathbf{n}} - h\mathbf{s}_{i,k|k-1}^n, \mathbf{u}_k) \\
&\quad - 2\mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \bar{\mathbf{n}}, \mathbf{u}_k)]^2 \tag{C.67}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_{xy,k|k-1} = \frac{1}{2h} \sum_{i=1}^{n_x} \mathbf{s}_{i,k|k-1}^x [\mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + h\mathbf{s}_{i,k|k-1}^x, \bar{\mathbf{n}}, \mathbf{u}_k) - \mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - h\mathbf{s}_{i,k|k-1}^x, \bar{\mathbf{n}}, \mathbf{u}_k)]^T \tag{C.68}$$

avec ces approximations, on obtient directement le CDKF si l'on utilise les formules de Kalman suivantes

$$\widehat{\mathbf{x}}_{k|k} = \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \widehat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) \tag{C.69}$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{yy,k|k-1} \mathbf{K}_k^T \tag{C.70}$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xy,k|k-1} \mathbf{P}_{yy,k|k-1}^{-1} \tag{C.71}$$

Dans tous les cas, l'intervalle d'interpolation vérifie  $h \geq 1$ . Dans le cas Gaussien, la valeur optimale est  $h = \sqrt{3}$ . Mais cette formulation, est apparemment très différente de celle que l'on a obtenu pour l'UKF.

On peut définir l'ensemble d'échantillons déterministes et leurs poids associés,

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_0 &= \bar{\mathbf{x}} & i &= 0 & w_0^{(m)} &= \frac{h^2 - n_x}{h^2} \\
\mathcal{X}_i &= \bar{\mathbf{x}} + \left[ h\sqrt{\mathbf{P}_x} \right]_i & i &= 1, \dots, n_x & w_i^{(m)} &= \frac{1}{2h} & i &= 1, \dots, 2n_x \\
\mathcal{X}_i &= \bar{\mathbf{x}} - \left[ h\sqrt{\mathbf{P}_x} \right]_i & i &= n_x + 1, \dots, 2n_x & w_i^{(c_1)} &= \frac{1}{4h^2} & i &= 1, \dots, 2n_x \\
& & & & w_i^{(c_2)} &= \frac{h^2 - 1}{4h^4} & i &= 1, \dots, 2n_x
\end{aligned} \tag{C.72}$$

Comme dans le cas de la transformation SUT, on peut propager chaque sigma-point au travers de la fonction non-linéaire pour générer l'ensemble des points suivants

$$\mathcal{Y}_i = \mathbf{h}_{NL}(\mathcal{X}_i) \quad i = 0, \dots, 2n_x \tag{C.73}$$

On peut réécrire l'estimation des statistiques de la variable aléatoire transformée,  $\mathbf{y}$ , de la manière suivante

$$\bar{\mathbf{y}} \approx \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(m)} \mathcal{Y}_i \tag{C.74}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_y &\approx \sum_{i=0}^{n_x} w_i^{(c_1)} [\mathcal{Y}_i - \mathcal{Y}_{i+n_x}] [\mathcal{Y}_i - \mathcal{Y}_{i+n_x}]^T \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n_x} w_i^{(c_2)} [\mathcal{Y}_i + \mathcal{Y}_{i+n_x} - 2\mathcal{Y}_0] [\mathcal{Y}_i + \mathcal{Y}_{i+n_x} - 2\mathcal{Y}_0]^T
\end{aligned} \tag{C.75}$$

$$\mathbf{P}_{xy} \approx \sum_{i=0}^{n_x} w_i^{(m)} [\mathcal{X}_i - \bar{\mathbf{x}}] [\mathcal{Y}_i - \mathcal{Y}_{i+n_x}]^T \tag{C.76}$$

On note que cette formulation ressemble beaucoup plus à celle de la SUT. Si l'on compare les deux approches, on voit que l'on a seulement une différence dans la façon de calculer la matrice de covariance. La SUT utilise une formulation indirecte (on utilise la valeur estimée de la moyenne pour calculer la covariance), et la formule d'interpolation de Stirling utilise une formulation directe (la covariance est une fonction directe des points transformés) [Merw 04].

## Annexe D

# Algorithmes déterministes

---

**Algorithm 7** Génération des points et poids pour la méthode de quadrature de Gauss–Hermite multidimensionnelle

---

- 1: On fixe le nombre de points par dimension,  $\alpha$ , et  $L = \alpha^{\dim(\mathbf{x})}$
  - 2: Construire la matrice  $J_{i,i+1} = \sqrt{\frac{i}{2}}$ , où  $i = 1, \dots, (\alpha - 1)$
  - 3: Calculer les valeurs propres,  $\lambda_i$ , de la matrice  $\mathbf{J}$
  - 4: Fixer  $\boldsymbol{\xi}_i = \sqrt{2}\lambda_i$
  - 5: Fixer  $w_i = [\nu_i]_1^2$ , où  $[\nu_i]_1$  est le premier élément, de l' $i$ -ème vecteur propre normalisé de  $\mathbf{J}$ .
  - 6: **if**  $\dim(\mathbf{x}) > 1$  **then**
  - 7:   Fixer  $\boldsymbol{\zeta}_{1,:} = \boldsymbol{\xi}_i$  et  $\boldsymbol{\varpi}_{1,:} = w_i$
  - 8:   **for**  $m = 2$  to  $\dim(\mathbf{x})$  **do**
  - 9:     Fixer  $\boldsymbol{\Xi}_{1:m-1,:} = \boldsymbol{\zeta} \otimes \mathbf{1}_{1 \times \alpha}$
  - 10:     Fixer  $\boldsymbol{\Xi}_{m,:} = \mathbf{1}_{1 \times \alpha} \otimes \boldsymbol{\zeta}_{m-1,:}$
  - 11:     Fixer  $\boldsymbol{\Omega}_{1:m-1,:} = \boldsymbol{\varpi} \otimes \mathbf{1}_{1 \times \alpha}$
  - 12:     Fixer  $\boldsymbol{\Omega}_{m,:} = \mathbf{1}_{1 \times \alpha} \otimes \boldsymbol{\varpi}_{m-1,:}$
  - 13:     Fixer  $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\Xi}$  et  $\boldsymbol{\varpi} = \boldsymbol{\Omega}$
  - 14:   **end for**
  - 15:    $\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{\Xi}_{:,i}$ , pour  $i = 1, \dots, L$
  - 16:    $\mathbf{w}_i = \prod_{l=1}^{\dim(\mathbf{x})} \Omega_{l,i}$
  - 17: **end if**
- 

---

**Algorithm 8** Génération des points et poids pour la règle de cubature sphéro-radiale de troisième ordre

---

- 1: Fixer  $M = \dim(\mathbf{x})$  et  $L = 2M$ .
  - 2: Calculer les points de cubature selon  $\boldsymbol{\xi}_i = \sqrt{M} \left[ \mathbf{I}_{M \times M} \vdots -\mathbf{I}_{M \times M} \right]_i$ , où  $[\cdot]_{i=1, \dots, L}$  indique la  $i$ -ème colonne.
  - 3: Calculer les poids de cubature selon  $\omega_i = \frac{1}{2M}$ ,  $i = 1, \dots, L$ .
-

---

**Algorithm 9** Unscented Kalman Filter (UKF)
 

---

**Require:** Les observations  $\mathbf{y}$ , les entrées  $\mathbf{u}$ , l'état initial  $\mathbf{x}_0$ , la covariance de l'état initial  $\mathbf{P}_0$ , et les statistiques des bruit d'état et d'observation,  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$ .

- 1: Fixer  $\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{P}_{0|0} = \mathbf{P}_0$
- 2: Calculer les poids  $w_i$  avec eq.(2.47).

*Estimation :*

- 3: **for**  $k = 1$  to  $\infty$  **do**

- 4: **Prédiction**

- 5: Calcul des échantillons  $\mathcal{X}_{k-1|k-1}$ , avec eq.(2.47),

$$\mathcal{X}_{k-1|k-1} = \left[ \left( \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \right)^T \left( \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \gamma \sqrt{\mathbf{P}_{k-1|k-1}} \right)^T \left( \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} - \gamma \sqrt{\mathbf{P}_{k-1|k-1}} \right)^T \right]^T \quad (\text{D.1})$$

- 6: Évaluation des échantillons propagés :

$$\tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} = \mathbf{f} \left( \mathcal{X}_{i,k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1} \right) \quad i = 0, \dots, 2n_x \quad (\text{D.2})$$

- 7: Estimation de la prédiction de l'état et la covariance de l'erreur de prédiction associée :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(m)} \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} \quad (\text{D.3})$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(c)} \left( \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \left( \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right)^T + \mathbf{Q} \quad (\text{D.4})$$

- 8: **Correction**

- 9: Évaluation des échantillons pour la correction et propagation :

$$\mathcal{X}_{k|k-1} = \left[ \left( \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right)^T \left( \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \gamma \sqrt{\mathbf{P}_{k|k-1}} \right)^T \left( \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \gamma \sqrt{\mathbf{P}_{k|k-1}} \right)^T \right]^T \quad (\text{D.5})$$

$$\tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} = \mathbf{h} \left( \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1}, \mathbf{u}_k \right) \quad i = 0, \dots, 2n_x \quad (\text{D.6})$$

- 10: Estimation de la prédiction de l'observation, la covariance de l'erreur de prédiction, et la covariance croisée :

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(m)} \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} \quad (\text{D.7})$$

$$\mathbf{P}_{yy,k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(c)} \left( \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \right) \left( \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \right)^T + \mathbf{R} \quad (\text{D.8})$$

$$\mathbf{P}_{xy,k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(c)} \left( \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \left( \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \right)^T \quad (\text{D.9})$$

- 11: Correction de l'état et la matrice de covariance de l'erreur :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \right) \quad (\text{D.10})$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{yy,k|k-1} \mathbf{K}_k^T \quad (\text{D.11})$$

avec le gain de Kalman  $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xy,k|k-1} \mathbf{P}_{yy,k|k-1}^{-1}$ .

- 12: **end for**
-

---

**Algorithm 10** Central Difference Kalman Filter (CDKF)

---

**Require:** Les observations  $\mathbf{y}$ , les entrées  $\mathbf{u}$ , l'état initial  $\mathbf{x}_0$ , la covariance de l'état initial  $\mathbf{P}_0$ , et les statistiques des bruit d'état et d'observation,  $\bar{\mathbf{v}}$ ,  $\bar{\mathbf{n}}$ ,  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$ .

- 1: Fixer  $\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{P}_{0|0} = \mathbf{P}_0$
- 2: Calculer les poids  $w_i$  avec eq.(2.81).

*Estimation :*

- 3: **for**  $k = 1$  to  $\infty$  **do**

- 4: **Prédiction**

- 5: Calcul des échantillons avec eq.(2.81),

$$\mathcal{X}_{k-1|k-1} = \left[ (\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1})^T \left( \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + h\sqrt{\mathbf{P}_{k-1|k-1}} \right)^T \left( \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} - h\sqrt{\mathbf{P}_{k-1|k-1}} \right)^T \right]^T \quad (\text{D.12})$$

- 6: Évaluation des échantillons propagés :

$$\tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{i,k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \quad (\text{D.13})$$

- 7: Estimation de la prédiction de l'état et la matrice de covariance de l'erreur de prédiction associée :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(m)} \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} \quad (\text{D.14})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k-1} &= \sum_{i=1}^{n_x} \left[ w_i^{(c1)} \left( \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} - \tilde{\mathcal{X}}_{n_x+i,k|k-1} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + w_i^{(c2)} \left( \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} + \tilde{\mathcal{X}}_{n_x+i,k|k-1} - 2\tilde{\mathcal{X}}_{0,k|k-1} \right)^2 \right] + \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

- 8: **Correction**

- 9: Évaluation des échantillons pour la correction et propagation :

$$\mathcal{X}_{k|k-1} = \left[ (\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T \left( \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + h\sqrt{\mathbf{P}_{k|k-1}} \right)^T \left( \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - h\sqrt{\mathbf{P}_{k|k-1}} \right)^T \right]^T \quad (\text{D.16})$$

$$\tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} = \mathbf{h}(\mathcal{X}_{i,k|k-1}, \mathbf{u}_k) \quad i = 0, \dots, 2n_x \quad (\text{D.17})$$

- 10: Estimation de la prédiction de l'observation, la covariance de l'erreur de prédiction et la covariance croisée :

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(m)} \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} \quad (\text{D.18})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{yy,k|k-1} &= \sum_{i=1}^{n_x} \left[ w_i^{(c1)} \left( \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} - \tilde{\mathcal{Y}}_{n_x+i,k|k-1} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + w_i^{(c2)} \left( \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} + \tilde{\mathcal{Y}}_{n_x+i,k|k-1} - 2\tilde{\mathcal{Y}}_{0,k|k-1} \right)^2 \right] + \mathbf{R} \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

$$\mathbf{P}_{xy,k|k-1} = \sqrt{w_1^{(c1)} \mathbf{P}_{k|k-1}} \left[ \tilde{\mathcal{Y}}_{1:n_x,k|k-1} - \tilde{\mathcal{Y}}_{n_x+1:2n_x,k|k-1} \right]^T \quad (\text{D.20})$$

- 11: Correction de l'état et la matrice de covariance de l'erreur :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) \quad (\text{D.21})$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{yy,k|k-1} \mathbf{K}_k^T \quad (\text{D.22})$$

avec le gain de Kalman  $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xy,k|k-1} \mathbf{P}_{yy,k|k-1}^{-1}$ .

- 12: **end for**
-



---

**Algorithm 11** Quadrature/Cubature Kalman Filter (QKF/CKF)
 

---

**Require:** Les observations  $\mathbf{y}$ , les entrées  $\mathbf{u}$ , l'état initial  $\mathbf{x}_0$ , la covariance de l'état initial  $\mathbf{P}_0$ , et les statistiques des bruit d'état et d'observation,  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$ .

- 1: Fixer  $\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{P}_{0|0} = \mathbf{P}_0$
- 2: Calculer un ensemble de points et poids de quadrature,  $\{\xi_i, w_i\}$ , selon l'algorithme 7 ou 8, selon si l'on implémente le QKF ou le CKF.

Estimation :

3: **for**  $k = 1$  to  $\infty$  **do**

4:   **Prédiction**

5:   Évaluation des échantillons

$$\mathcal{X}_{i,k-1|k-1} = \sqrt{\mathbf{P}_{k-1|k-1}} \xi_i + \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{D.23})$$

6:   Évaluation des échantillons propagés

$$\tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{i,k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{D.24})$$

7:   Estimation de la prédiction de l'état et la matrice de covariance de l'erreur de prédiction associée

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} \quad (\text{D.25})$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1} \tilde{\mathcal{X}}_{i,k|k-1}^T - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T + \mathbf{Q} \quad (\text{D.26})$$

8:   **Correction**

9:   Évaluation des échantillons pour la correction et propagation

$$\mathcal{X}_{i,k|k-1} = \sqrt{\mathbf{P}_{k|k-1}} \xi_i + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{D.27})$$

$$\tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{i,k|k-1}, \mathbf{u}_k) \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{D.28})$$

10:   Estimation de la prédiction de l'observation, et matrices de covariance associées

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} \quad (\text{D.29})$$

$$\mathbf{P}_{yy,k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1} \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1}^T - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T + \mathbf{R} \quad (\text{D.30})$$

$$\mathbf{P}_{xy,k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i \mathcal{X}_{i,k|k-1} \tilde{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1}^T - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T \quad (\text{D.31})$$

11:   Correction de l'état et la matrice de covariance de l'erreur :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) \quad (\text{D.32})$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{yy,k|k-1} \mathbf{K}_k^T \quad (\text{D.33})$$

avec le gain de Kalman  $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xy,k|k-1} \mathbf{P}_{yy,k|k-1}^{-1}$ .

12: **end for**

---

## Annexe E

# Preuve du Théorème 2.2 (Borne de Cramér-Rao)

La preuve du théorème 2.2 est basée sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Par simplicité, on n'utilise pas la notation  $\boldsymbol{\mu}^*$  pour la valeur effective, mais  $\boldsymbol{\mu}$ . Étant donné que l'on suppose un estimateur non-biaisé,

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu}} \{[\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}]\} = \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}] p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu}) d\mathbf{y} = 0 \quad (\text{E.1})$$

Si l'on dérive des deux côtés par rapport à  $\boldsymbol{\mu}$ ,

$$\int \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mu}} \{[\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}] p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu})\} d\mathbf{y} = 0 \quad (\text{E.2})$$

$$- \int p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu}) d\mathbf{y} + \int \frac{\partial p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} (\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}) d\mathbf{y} = 0 \quad (\text{E.3})$$

$$\int \frac{\partial p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} (\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}) d\mathbf{y} = 1 \quad (\text{E.4})$$

$$\int \frac{\partial \ln p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu}) (\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}) d\mathbf{y} = 1 \quad (\text{E.5})$$

On peut réécrire la dernière équation comme

$$\int \left[ \frac{\partial \ln p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} \sqrt{p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu})} \right] \left[ \sqrt{p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu})} (\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}) \right] d\mathbf{y} = 1 \quad (\text{E.6})$$

et utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left\{ \int \left[ \frac{\partial \ln p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right]^2 p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu}) d\mathbf{y} \right\} \times \left\{ \int [\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}]^2 p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu}) d\mathbf{y} \right\} \geq 1 \quad (\text{E.7})$$

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu}} \left[ \left( \frac{\partial \ln p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)^2 \right] \times \mathbb{E}_{\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu}} \left[ (\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu})^2 \right] \geq 1 \quad (\text{E.8})$$

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu}} \left[ (\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu})^2 \right] \geq \left( \mathbb{E}_{\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu}} \left[ \left( \frac{\partial \ln p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)^2 \right] \right)^{-1} \quad (\text{E.9})$$

on obtient l'égalité seulement si  $\frac{\partial \ln p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}$

Il nous reste à démontrer que

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu}} \left[ \left( \frac{\partial \ln p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)^2 \right] = -\mathbb{E}_{\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu}} \left[ \left( \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}^2} \right) \right] \quad (\text{E.10})$$

Si l'on dérive l'égalité  $\int p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu})d\mathbf{y} = 1$  par rapport a  $\boldsymbol{\mu}$ ,

$$\int \frac{\partial p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} d\mathbf{y} = \int \frac{\partial \ln p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu}) d\mathbf{y} = 0 \quad (\text{E.11})$$

et si l'on dérive une deuxième fois par rapport a  $\boldsymbol{\mu}$ , on a bouclé la démonstration

$$\int \frac{\partial^2 p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}^2} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu})d\mathbf{y} + \int \left( \frac{\partial \ln p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)^2 p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu})d\mathbf{y} = 0 \quad (\text{E.12})$$

## Annexe F

# Preuve du Théorème 2.3 (Borne de Cramér-Rao Bayésienne)

La preuve du théorème 2.3 est très similaire à celle de la borne de Cramér-Rao standard. Si l'on multiplie les deux cotés de l'eq.(2.118) par  $p(\boldsymbol{\mu})$ , et qu'après on dérive par rapport à  $\boldsymbol{\mu}$ , on a

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mu}} p(\boldsymbol{\mu}) L(\boldsymbol{\mu}) = - \int p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) d\mathbf{y} + \int \frac{\partial p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} [\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}] d\mathbf{y} \quad (\text{F.1})$$

On intègre l'eq.(F.1) par rapport à  $\boldsymbol{\mu}$ , et l'on obtient

$$p(\boldsymbol{\mu}) L(\boldsymbol{\mu}) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = -1 + \int \int \frac{\partial p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} [\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}] d\boldsymbol{\mu} d\mathbf{y} \quad (\text{F.2})$$

Le terme à gauche de l'égalité est nul pour les hypothèses. Le reste de la démonstration est le même que pour le cas standard (voir l'Annexe B).



## Annexe G

# An EM algorithm for path delay and complex gain estimation of a slowly varying fading channel for CPM signals

This work has been presented in [Abei 09].

### G.1 Introduction

Continuous phase modulation (CPM) is preferred in numerous wireless communications and mobile applications for its constant envelope property and high spectral efficiency [Auli 81]. Binary CPM systems, such as minimum-shift keying (MSK) and Gaussian MSK (GMSK), containing non-circular (or improper) process [Chev 06, Abei 08], have been widely employed in many applications.

Due to the importance of CPM signals, many frequency and timing synchronization algorithms have been developed for such signals [Meng 97, Auli 82]. These algorithms, typically categorized in Data-Aided (DA) (see, *e.g.* [Hube 92]) and Non-Data-Aided (NDA) (see, *e.g.* [Riba 00, DAnd 96, More 99]) methods, have been designed under the assumption of additive white Gaussian noise channel (AWGN). However, few research works address CPM time synchronization over a time-varying channel. We can cite the recent works proposed in [Dabo 04, Pate 91] for flat-fading channels. A maximum likelihood (ML) approach was employed in [Dabo 04] for estimating time delay for CPM signals in the special case of MSK signal. However, [Dabo 04, Pate 91] do not consider the bayesian approach to take into account the prior distribution of the unknown time-varying complex gains of the channel, which need to be estimated in practice.

Assuming that the time-varying complex gains can be modeled by a first order autoregressive (AR1) process (*e.g.* [Badd 05]), the problem of time synchronization over Rayleigh flat-fading channels can be formulated as a dynamic state-space bayesian system with unknown (hidden) complex gains. So, we are facing a problem of state estimation in a nonlinear dynamical system with unknown parameters, which is a problem of practical interest in numerous applications. In many cases, the parameters of the dynamic model for a real system are not known exactly and need to be estimated. In reference [Diga 93], an EM algorithm [Demp 77] combined with a Kalman smoother [Rauc 63] was proposed to compute the ML estimates of the speech recognition system parameters while also providing the state estimates. Recently, the EM algorithm has been

applied to a lot of problems for parameter estimation and learning (see *e.g.* [Khan 07, Chen 01, Frei 98]).

In order to evaluate the estimator performance, lower bounds on the Mean Square Error (MSE) are needed. One of the most used is the Cramér-Rao Bound (CRB) [Cram 46]. Depending on the prior knowledge available on parameters, the CRB has different expressions. Among which, the Hybrid CRB (HCRB) is considered in the case of hybrid vector that contains deterministic and random parameters (see *e.g.*, [Rock 87, Bay 08a]). We note that the HCRB generalizes the classical CRB (see *e.g.*, [Cram 46]) and the bayesian CRB (BCRB) [Tree 68]. However, the true expression of CRB is sometimes difficult to derive analytically. To overcome this difficulty, other CRB's have been considered in the literature such as the Modified CRB (MCRB) (see, *e.g.*, [Meng 97]), which is in general looser (*i.e.*, lower) than the CRB.

In this work, we describe the EM algorithm for jointly estimating path delay and complex gains over a slow Rayleigh flat-fading channel in the general case of a CPM signal. We first model the time-varying complex gains with a state space model. Then, we estimate the path delay with an EM algorithm. Once we have the estimate of the path delay, complex gains estimates are computed with Kalman smoother. We also derive an analytical closed-form expression of the modified HCRB (MHCRB) for path delay and complex gains. This bound is used to evaluate the performance of the proposed EM algorithm.

The chapter is organized as follows. Section G.2 describes the CPM signal model, the AR model and the state-space representation of the problem. The EM algorithm is presented in section G.3. The MHCRB is derived in section G.4 and finally some simulations are presented in section G.5.

## G.2 Problem statement and estimation objectives

Following [Auli 81], the complex envelope  $s(t, \mathbf{a})$  of a CPM signal can be written as  $s(t, \mathbf{a}) = e^{i\phi(t, \mathbf{a})}$  where the phase  $\phi(t, \mathbf{a})$  of  $s(t, \mathbf{a})$  is given by

$$\phi(t, \mathbf{a}) = 2\pi h \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j q(t - jT), \quad (\text{G.1})$$

where  $T$  is the symbol period and  $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$  is the independent identically distributed (*i.i.d.*) binary data sequence, with each element taking on values  $\{\pm 1\}$ .  $q(t) = \int_0^t g(u) du$  corresponds to the phase pulse shaping function that describes how the underlying phase change  $\pm\pi h$  evolves with time where  $g(t)$ , the frequency shaping filter, is positive and non-zero on the interval  $[0, LT]$ ,  $L$  is the correlation length. The modulation index  $h$  determines the rate of change of frequency in the signalling interval. Finally, we note that if  $nT \leq t \leq (n+1)T$  the phase  $\phi(t, \mathbf{a})$  given by (G.1) can be written as

$$\phi(t, \mathbf{a}) = \pi h \sum_{j=-\infty}^{n-L} a_j + 2\pi h \sum_{j=0}^{L-1} a_{n-j} q(t - (n-j)T). \quad (\text{G.2})$$

Transmitting  $s(t, \mathbf{a})$  over a frequency-flat, slow fading Rayleigh channel results in the following received waveform

$$y(t) = \alpha(t)s(t - \tau, \mathbf{a}) + b(t), \quad (\text{G.3})$$

where  $\alpha(t)$  is a zero-mean Gaussian complex circular multiplicative gain of variance  $\sigma_\alpha^2$ , introduced by the flat fading channel with autocorrelation function  $R_\alpha(\Delta t) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_\alpha^2 \text{E}(\alpha(t) \alpha^*(t - \Delta t))$ ,

$\tau$  is the fixed unknown path delay, and  $b(t)$  is an additive white Gaussian complex circular noise with bilateral spectral power density  $N_0$ .

The equivalent discrete-time signal model observed during  $N$  signaling intervals, after low-pass filtering and sampling at rate  $T_s = T/M$  is given by

$$y(kT_s) = \alpha(kT_s)s_k(\tau, \mathbf{a}) + b(kT_s), \quad k = 0, \dots, MN - 1 \quad (\text{G.4})$$

where  $s_k(\tau, \mathbf{a}) \stackrel{\text{def}}{=} s(kT_s - \tau, \mathbf{a}) = e^{i\phi_k(\tau, \mathbf{a})}$  and  $\phi_k(\tau, \mathbf{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(kT_s - \tau, \mathbf{a})$ . Note that, after antialiasing filtering (with cut-off frequency  $M/T$ ) and sampling, the noise term  $b(k)$  is assumed white with a known variance  $\sigma^2 = \frac{N_0}{T_s}$ .

From (G.2), we obtain after some easy manipulations of indices that the phase term  $\phi_k(\tau, \mathbf{a})$  can be expressed as

$$\begin{aligned} \phi_{nM+m}(\tau, \mathbf{a}) &\stackrel{\text{def}}{=} \phi((nM + m)T_s - \tau, \mathbf{a}) \\ &= \pi h \sum_{j=-\infty}^{n-L} a_j + 2\pi h \sum_{j=0}^{L-1} a_{n-j} q_{j,m}(\tau), \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

for each  $n \geq 0$  and for each  $m$  such as  $0 \leq m \leq M - 1$ , the  $\tau$ -dependent coefficients  $q_{j,m}(\tau)$  are defined by  $q_{j,m}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} q(mT_s + jT - \tau)$ . The complex gain of the channel  $\alpha(\cdot)$  does not change during symbol period but varies from symbol to symbol because the gain is assumed to be slowly time-varying. This implies that the coefficients  $\alpha((nM + m)T_s)$  for  $m = 0, \dots, M - 1$ , all equal to the same value denoted by  $\alpha_n$ . Then the discrete-time version of (G.4) can be written as follows :

$$y((nM + m)T_s) = \alpha_n s_{nM+m}(\tau, \mathbf{a}) + b((nM + m)T_s). \quad (\text{G.6})$$

Collecting the samples of the received signal within one slot to form a vector

$$\mathbf{y}_n \stackrel{\text{def}}{=} (y((nM)T_s), \dots, y((nM + M - 1)T_s))^T$$

yields the following model

$$\mathbf{y}_n = \alpha_n \mathbf{g}_n(\tau, \mathbf{a}) + \mathbf{b}_n, \quad (\text{G.7})$$

where  $\mathbf{g}_n(\tau, \mathbf{a}) \stackrel{\text{def}}{=} (e^{i\phi_{nM}(\tau, \mathbf{a})}, \dots, e^{i\phi_{nM+M-1}(\tau, \mathbf{a})})^T$ , and  $\mathbf{b}_n \stackrel{\text{def}}{=} (b((nM)T_s), \dots, b((nM + M - 1)T_s))^T$  is a  $M \times 1$  noise vector with covariance matrix  $\sigma^2 \mathbf{I}$ .

Among various channel models, the information theoretic results in [Wang 96] show that the first-order AR model provides a sufficiently accurate model for time-selective fading channels and therefore, will be adapted henceforth. Specifically,  $\alpha_n$  varies according to

$$\alpha_n = \gamma \alpha_{n-1} + e_n \quad (\text{G.8})$$

where the noise  $e_n$  is zero-mean Gaussian complex circular with a known variance  $\sigma_e^2$  and is statistically independent of  $\alpha_{n-1}$ . Using (G.8), simple manipulations lead to

$$\sigma_e^2 = \sigma_\alpha^2(1 - \gamma^2) \text{ and } \gamma = \text{E}(\alpha_n \alpha_{n-1}^*) \quad (\text{G.9})$$

According to Jakes' model [Jake 74], we have  $\gamma = J_0(2\pi f_d T)$ , where  $J_0(\cdot)$  is the first kind 0th-order Bessel function and  $f_d$  denotes the maximum Doppler shift.

Having the model for the variation of the channel, and from eq. (G.7), we can obtain the following state space representation of the problem

$$\begin{cases} \alpha_n &= \gamma \alpha_{n-1} + e_n \\ \mathbf{y}_n &= \alpha_n \mathbf{g}_n(\tau, \mathbf{a}) + \mathbf{b}_n. \end{cases} \quad (\text{G.10})$$



The initial state  $\alpha_0$  is assumed to be Gaussian complex circular with a known variance  $\sigma_0^2$ . In general, the objective is to jointly estimate the path delay parameter  $\tau$  and the state  $\boldsymbol{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1})$  using the set of received signals  $\mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{y}_0^T, \dots, \mathbf{y}_{N-1}^T)^T$ . In this paper, however, we will assume, except in section G.4, that the transmit symbol sequence  $\mathbf{a}$  is known at the receiver, and in order to simplify notation we use  $\mathbf{g}_n(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}_n(\tau, \mathbf{a})$ .

Note that if  $\tau$  is known, the state parameters  $\alpha_n$  can be inferred using a Kalman smoother [Kalm 60]. We note that, due to the presence of unobserved data  $\boldsymbol{\alpha}$ , the maximum likelihood (ML) method can not be used because the computation of the likelihood function  $f(\mathbf{y}|\mathbf{a}; \tau) = \mathbb{E}(f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a}; \tau))$  in a closed-form and its maximization w.r.t.  $\tau$  seems to be an intractable problem. In the following section, we describe the Expectation-Maximization (EM) algorithm to find the ML estimates.

### G.3 The EM algorithm

The EM algorithm [Demp 77] is an iterative method to find the ML estimates of parameters in the presence of unobserved data. The idea behind the algorithm is to augment the observed data with latent data, which can be either missing data or parameter values. The algorithm can be broken down into two steps : the E-step and the M-step. We now describe an EM algorithm for our model. Following the procedure given in [Diga 93, Sec. B], we consider the received data  $\mathbf{y}$  as incomplete data, and define the complete data as  $\mathbf{z} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{y}^T, \boldsymbol{\alpha}^T)^T$ . Since the state is Markov, the likelihood function of the complete data is given by

$$P(\mathbf{z}|\mathbf{a}; \tau) = P(\alpha_0) \prod_{n=1}^{N-1} P(\alpha_n|\alpha_{n-1}) \prod_{n=0}^{N-1} P(\mathbf{y}_n|\alpha_n, \mathbf{a}; \tau) \quad (\text{G.11})$$

Due to the Gaussian noise assumption, we have

$$\begin{aligned} \ln(P(\mathbf{z}; \tau)) &= C - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \|\mathbf{y}_n - \alpha_n \mathbf{g}_n(\tau)\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_{n=1}^{N-1} |\alpha_n - \gamma \alpha_{n-1}|^2 - \frac{1}{\sigma_0^2} \|\alpha_0\|^2, \end{aligned} \quad (\text{G.12})$$

where  $C$  is a constant that only depends on the state noise variances. Each iterative process  $p = 0, 1, 2, \dots$ , in the EM algorithm for estimating  $\tau$  from  $\mathbf{y}$  consists of the following two steps :

**E-step.** Given the measurements  $\mathbf{y}$  and an estimate of the model parameter from the previous iteration  $\tau^{(p)}$ , we calculate :

$$Q(\tau, \tau^{(p)}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\ln P(\mathbf{z}; \tau) | \mathbf{y}, \mathbf{a}; \tau^{(p)}),$$

where the expectation is taken with respect to  $\boldsymbol{\alpha}$  conditioned on  $\mathbf{y}$  and the latest estimate of  $\tau$ ,  $\tau^{(p)}$ .

**M-step.** This step finds  $\boldsymbol{\tau}^{(p+1)}$ , the value of  $\tau$  that maximizes  $Q(\tau, \tau^{(p)})$  over all possible values of  $\tau$  :

$$\boldsymbol{\tau}^{(p+1)} = \operatorname{argmax}_{\tau} Q(\tau, \tau^{(p)})$$

This procedure is repeated until the sequences  $\tau^{(0)}, \tau^{(1)}, \dots$  converges.

The E-step uses a Kalman smoother to estimate the state  $\alpha_n$  for which the function Q can be expressed as (see Appendix A) :

$$\begin{aligned} Q(\tau, \tau^{(p)}) = & -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \left( \text{Tr} \left( S_{n|N}^{(p)} \mathbf{g}_n(\tau) \mathbf{g}_n^H(\tau) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \mathbf{y}_n - \hat{\alpha}_{n|N}^{(p)} \mathbf{g}_n(\tau) \right) \left( \mathbf{y}_n - \hat{\alpha}_{n|N}^{(p)} \mathbf{g}_n(\tau) \right)^H \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{G.13})$$

where  $\hat{\alpha}_{n|N}^{(p)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\alpha_n | \mathbf{y}, \mathbf{a}; \tau^{(p)})$  and  $S_{n|N}^{(p)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}((\alpha_n - \hat{\alpha}_{n|N}^{(p)}) (\alpha_n - \hat{\alpha}_{n|N}^{(p)})^H | \mathbf{y}, \mathbf{a}; \tau^{(p)})$  can be computed for all  $n = 0, \dots, N-1$  from the fixed interval Kalman smoother [Diga 93, Rauc 63], using the parameter estimates obtained at iteration  $p$ . The smoother consists of a Backward pass that follows the standard Kalman filter Forward recursions given as :

Forward recursion :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{n+1|n}^{(p)} &= \gamma \hat{\alpha}_n^{(p)} \\ S_{n+1|n}^{(p)} &= \gamma^2 S_n^{(p)} + \sigma_e^2 \\ K_{n+1} &= S_{n+1|n}^{(p)} \mathbf{g}_n^H(\tau^{(p)}) (\sigma^2 \mathbf{I} + S_{n+1|n}^{(p)} \mathbf{g}_n(\tau^{(p)}) \mathbf{g}_n^H(\tau^{(p)}))^{-1} \\ \hat{\alpha}_{n+1}^{(p)} &= \hat{\alpha}_{n+1|n}^{(p)} + K_{n+1} (\mathbf{y}_n - \mathbf{g}_n(\tau^{(p)}) \hat{\alpha}_{n+1|n}^{(p)}) \\ S_{n+1}^{(p)} &= S_{n+1|n}^{(p)} - S_{n+1|n}^{(p)} K_{n+1} \mathbf{g}_n(\tau^{(p)}) \end{aligned} \quad (\text{G.14})$$

Backward recursion :

$$\begin{aligned} J_{n-1} &= \gamma S_{n-1}^{(p)} S_{n|n-1}^{(p)-1} \\ \hat{\alpha}_{n-1|N}^{(p)} &= \hat{\alpha}_{n-1}^{(p)} J_{n-1} (\hat{\alpha}_{n|N}^{(p)} - \gamma \hat{\alpha}_{n-1}^{(p)}) \\ S_{n-1|N}^{(p)} &= S_{n-1}^{(p)} + J_{n-1} (S_{n|N}^{(p)} - S_{n|n-1}^{(p)}) J_{n-1}^* \\ S_{n,n-1|N}^{(p)} &= S_n^{(p)} J_{n-1}^H + J_n (S_{n+1,n|N}^{(p)} - \gamma S_n^{(p)}) J_{n-1}^* \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

**Remark 1.** We note that the steps of the EM algorithm can be extended in the case where the parameters  $(\sigma^2, \sigma_e^2, \sigma_0^2, \gamma)$  are assumed unknown. By adapting the same steps of the approach proposed in [Khan 07], the estimates of these parameters can be obtained in E-step by maximizing the function Q given by (G.18).

## G.4 Hybrid Cramér Rao bound

The CRB is an important criterion to evaluate how good any unbiased estimator can be since it provides the MSE bound among all unbiased estimators. In this section we assume that the symbol  $\{a_n\}$  are i.i.d. and equiprobable with each element taking on values  $\{\pm 1\}$ . Since the parameters of interest are the deterministic parameter  $\tau$  and the random parameter state  $\alpha$ , we have derived an analytical expression of the MHCRB using well known properties of the gaussian distribution and Markov state evolution of AR parameters. In Section G.5, we will show the performance of the proposed EM algorithm and compare it to the MHCRB.

**Result 1.** The state and delay parameters are decoupled in the modified hybrid Fisher information matrix (MHFIM) in the case of CPM signals as follows :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{(\tau, \tau)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{(\alpha, \alpha)} + \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

where  $I_{(\tau,\tau)} = 8\pi^2 h^2 N \rho \xi(\tau)$ ,  $\mathbf{I}_{(\alpha,\alpha)} = \frac{M}{\sigma_e^2} \mathbf{I}$  and the matrix  $\mathbf{B}$  has the following non-zeros elements  $\mathbf{B}(1,1) = \frac{1+\gamma^2}{\sigma_e^2} - \mathbb{E}_{\alpha_0} \left( \frac{\partial^2 \ln P(\alpha_0)}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_0^*} \right)$ ,  $\mathbf{B}(k,k) = \frac{1+\gamma^2}{\sigma_e^2}$  and  $\mathbf{B}(k,k-1) = \mathbf{B}(k-1,k) = -\frac{\gamma}{\sigma_e^2}$ , for  $k = 2, \dots, N$ , and where  $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_e^2}$  is the SNR and  $\xi(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{L-1} g^2(mT_e + jT - \tau)$ . Consequently

$$\text{MHCRB}(\tau) = \frac{1}{8\pi^2 h^2 N \xi(\tau)} \frac{1}{\rho} \quad (\text{G.16})$$

$$\text{MHCRB}(\boldsymbol{\alpha}) = \left( \frac{M}{\sigma^2} + \mathbf{B} \right)^{-1} \quad (\text{G.17})$$

We assume a classical non-informative prior on  $\alpha_0$  (see, e.g., [Tich 98]). As a consequence,  $\mathbb{E}_{\alpha_0} \left( \frac{\partial^2 \ln P(\alpha_0)}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_0^*} \right) = 0$ . We remark that the  $\text{MHCRB}(\tau)$  is inversely proportional to  $\rho$  and depends on the modulation index  $h$ , the shaping filter  $g$  and the correlation length. (G.16) remains valid for all CPM signal. This expression is similar to the MCRB derived in [Meng 97, rel. (2.4.54)]. Finally, we remark that the  $\text{MHCRB}(\boldsymbol{\alpha})$  does not depend on the parameter  $\tau$ .

## G.5 Simulation results

In this section, we present numerical examples to illustrate the performance of the proposed algorithm to estimate jointly the path delay and complex gains in the special case of binary GMSK signal with a bandwidth-bit time product  $BT = 0.3$ , a modulation index  $h = \frac{1}{2}$  and a  $4T$ -wide approximation of the Gaussian shaping filter, *i.e.*  $L = 4$  (see *e.g.* [Meng 97, rel. (4.2.8)]). These parameters are those of GSM systems. The channel is simulated according to the Jakes model [Jake 74, Badd 05] with doppler-time product of  $f_d T = 0.000738$ , corresponding to a carrier frequency of 1.8 GHz, a mobile speed of 120 km/h, and a transmission rate of 270 kb/s. First order AR process, with a known coefficient  $\gamma = 0.99999$  (which corresponds to a slow fading channel) is chosen to model the time variation of the complex gains of the channel. The symbols  $\{a_n\}$  are assumed known at the receiver, the number  $N$  of signaling intervals is set to  $N = 200$ , the oversampling ratio is equal to  $M = 8$ , and a fixed value ( $\tau = 0.4$ ) is used as the normalized unknown delay  $\tau/T$ . In the simulations, each value of the MSE is obtained by averaging over 1000 independent runs.

The initial estimate of the unknown parameter  $\tau$  is given by the correlation method or chosen in the vicinity of  $0.4T$ , and the channel is initialized to the known state  $\alpha_0$  assumed to be a trial of a complex Gaussian random variable with a known variance  $\sigma_0^2 = 1$ .

Fig. G.1 shows one realization of the recursive estimates of the normalized path delay obtained with the EM algorithm versus the number of iterations for a SNR of 30 dB. This figure shows the estimated normalized path delay parameter converges to the true value fairly quickly in the case of slow flat-fading channel. We note that the EM algorithm still gives a valid estimate of  $\tau$  when  $f_d T > 0.001$ ; however, in this case, the EM algorithm converges after about 30 iterations as shown in this figure with  $f_d T = 0.02$ .

Fig. G.2 compares the  $\text{MHCRB}(\tau)$  normalized to  $T^2$  (given by (G.16)) to the MSE of the normalized path delay (*i.e.*  $\mathbb{E}(\hat{\tau} - \tau)^2 / T^2$ ) given by the EM algorithm initialized by the estimate given by the correlation method (see, *e.g.* [Knap 76]), and the correlation method, as a function of the SNR. For comparison purpose, we have computed the MSE associated to the ML method with a perfect knowledge of the complex gains. As seen from the shown simulation results, performance of the EM algorithm is very close to the ML method in the case of perfect knowledge of the complex gains. We observe also that the EM algorithm significantly outperforms the correlation

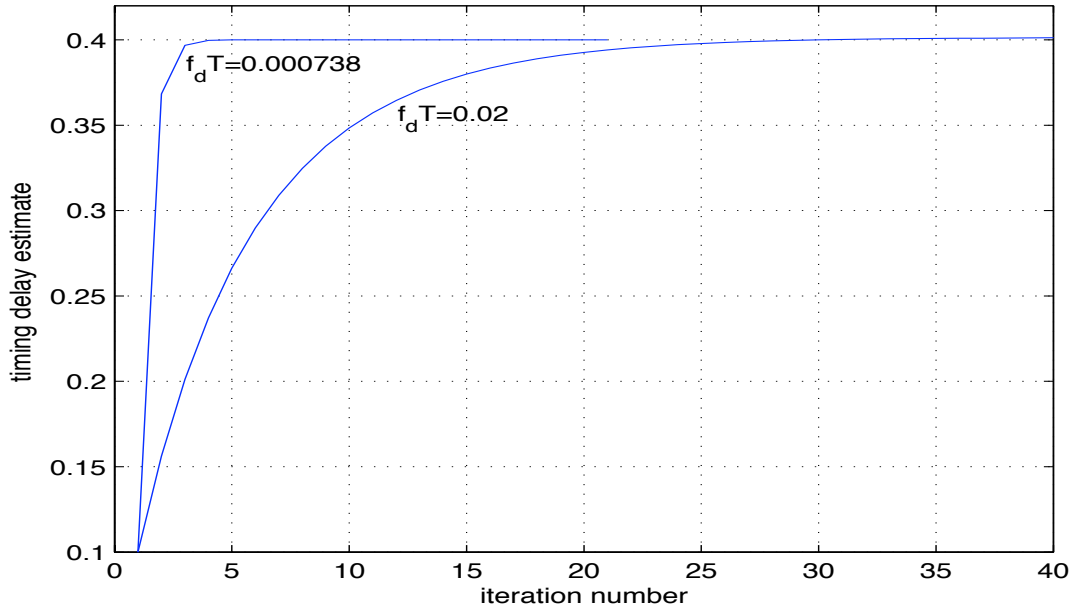


FIG. G.1 – An EM trajectory for two values of  $f_d T$  with  $SNR = 30$  dB

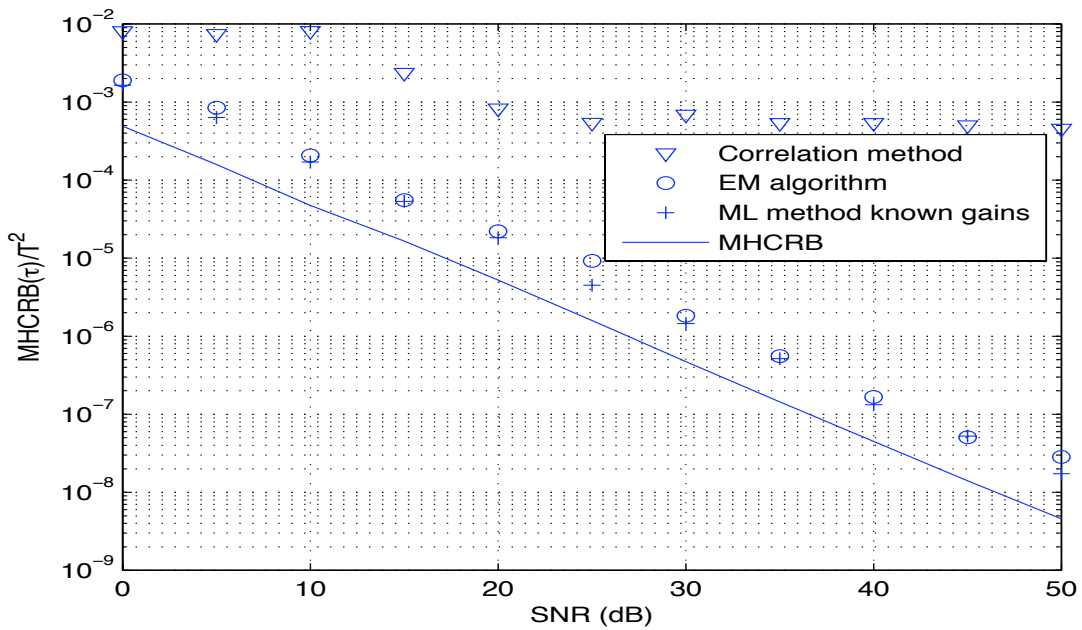


FIG. G.2 – Normalized  $MHCRB(\tau)/T^2$ , and estimated MSE  $E(\hat{\tau} - \tau)^2/T^2$  given by the EM algorithm (ten iterations) and by the correlation method for  $f_d T = 0.000738$ , versus SNR.

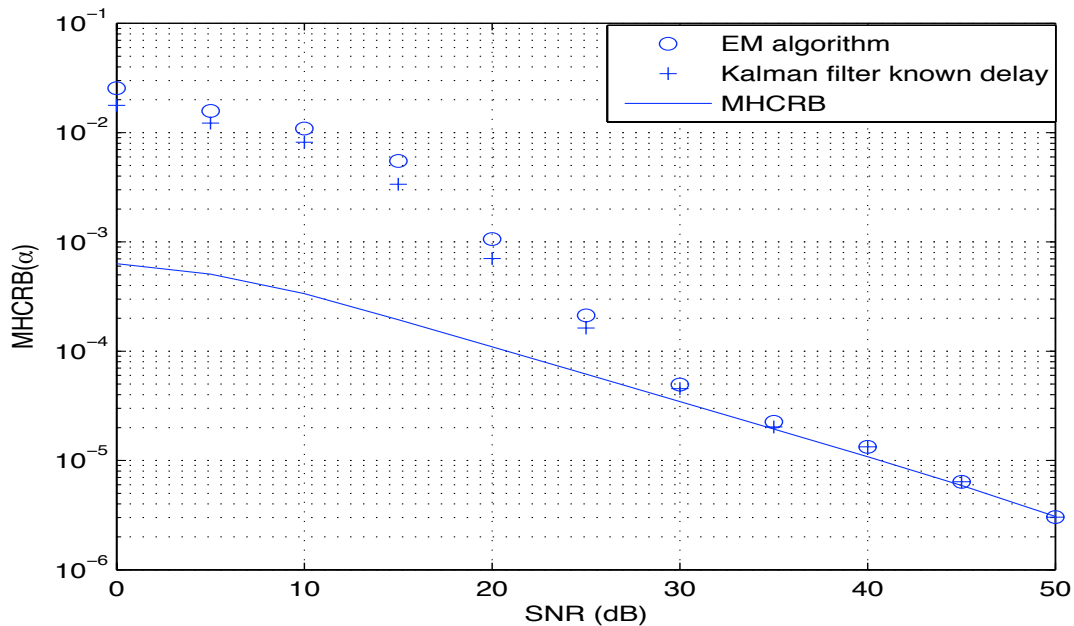


FIG. G.3 – Normalized  $\text{MHCRB}(\alpha)$ , and estimated normalized MSE  $\frac{1}{N}E(\|\hat{\alpha} - \alpha\|^2)$  given by the EM algorithm (ten iterations) for  $f_d T = 0.000738$ , versus SNR.

method based on the maximum of the delay-Doppler ambiguity function. On the other hand, the performance of the EM algorithm is close to the MHCRB contrarily to those of the correlation method. Fig. G.3 compares the MSE for the complex gains  $E(\|\hat{\alpha} - \alpha\|^2)$  given by the EM algorithm, the Kalman smoother with a perfect knowledge of the delay path to the  $\text{MHCRB}(\alpha)$  given by (G.17), as a function of SNR. We see that the performance of the EM algorithm and the Kalman smoother are very close, and the associated estimates reach the MHCRB when the SNR increases. At low SNR, We recall that the Modified CRB is, in general, looser than the true CRB.

Fig G.4 compares the normalized MSE  $E(\hat{\tau} - \tau)^2/T^2$  given by the EM algorithm and the correlation method (see, *e.g.* [Knap 76]), as a function of  $f_d T$  with  $\text{SNR} = 30$  dB. We observe from this figure that as  $f_d T$  increases, the MSE of the delay given by the EM algorithm remains almost constant contrarily to the MSE given by the correlation method which increases when  $f_d T$  increases.

## G.6 Conclusion

We have presented an EM algorithm for joint path delay and time-varying complex gains estimation for CPM signals over a time-selective slowly varying flat Rayleigh fading channel. We have modeled the flat fading channel as a first order autoregressive process. The EM algorithm has been combined with Kalman smoother to yield time-varying complex gains estimation and ML estimate of the path delay. The proposed algorithm was reduced to a single-parameter search over the path delay only. We have also derived a closed-form expression of the MHCRB for path delay and time-varying complex gains parameters. The performance of the proposed algorithm have been evaluated in terms of the MSE and the MHCRB. Finally, the simulation results have shown that the proposed algorithm provides better estimation of the delay and complex gains

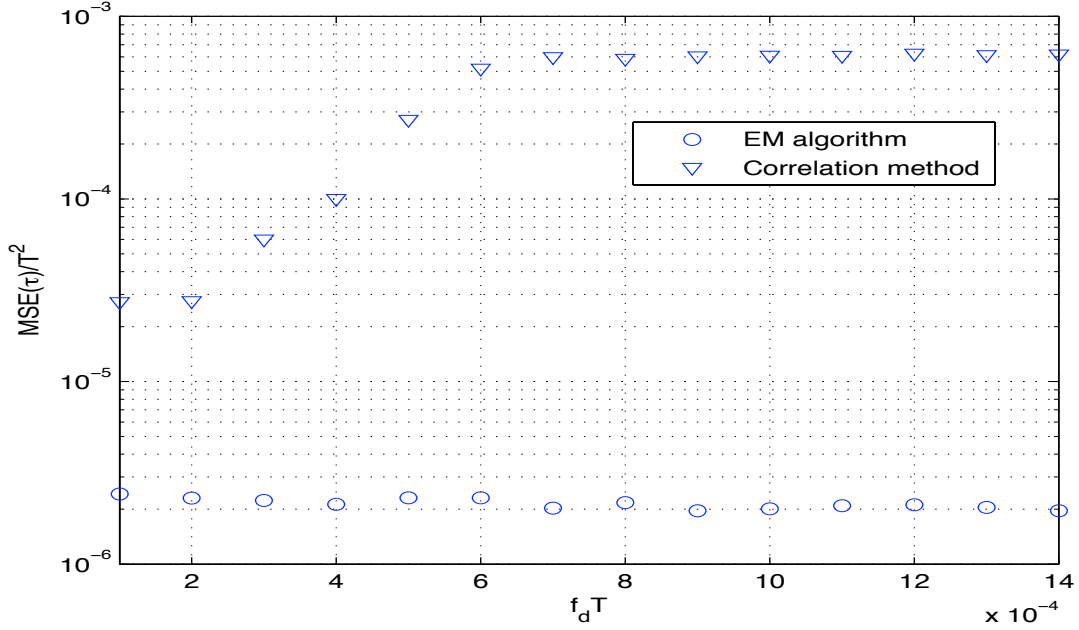


FIG. G.4 – The normalized MSE  $E(\hat{\tau} - \tau)^2/T^2$  given by the EM algorithm (ten iterations) and by the correlation method for  $SNR = 30$  dB, versus  $f_d T$ .

parameters compared to the conventional correlation method. Moreover, the performance of the proposed algorithm in term of delay estimation is very close to the performance of the ML method in the case of perfect knowledge of complex gains.

## G.7 Appendix : Proof of rel. (13)

Taking the expectation with respect to  $\alpha$  conditioned on  $\mathbf{y}$ , given the current parameter estimate  $\tau^{(p)}$ , we obtain from (G.12) the expectation of the log-likelihood function of the complete data which can be expressed as

$$Q(\tau, \tau^{(p)}) = E(\ln(P(\mathbf{z}; \tau) | \mathbf{y}, \mathbf{a}; \tau^{(p)})) \quad (\text{G.18})$$

$$\begin{aligned} &= c(\sigma^2, \sigma_e^2, \sigma_0^2) - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \text{Tr}(\mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^H \\ &+ P_{n|N}^{(p)} \mathbf{g}_n(\tau) \mathbf{g}_n^H(\tau) - \hat{\alpha}_{n|N}^{(p)*} \mathbf{y}_n \mathbf{g}_n^H(\tau) - \hat{\alpha}_{n|N}^{(p)} \mathbf{g}_n(\tau) \mathbf{y}_n^H) \\ &- \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_{n=0}^{N-1} (P_{n|N}^{(p)} + \gamma^2 P_{n-1|N}^{(p)} - \gamma (P_{n,n-1|N}^{(p)} + P_{n-1,n|N}^{(p)})) \end{aligned} \quad (\text{G.19})$$

$$- \frac{1}{\sigma_0^2} |P_{0|N}^{(p)}|^2, \quad (\text{G.20})$$

with  $P_{n|N}^{(p)} \stackrel{\text{def}}{=} E(\alpha_n \alpha_n^* | \mathbf{y}, \mathbf{a}; \tau^{(p)})$ ,  $P_{n,n-1|N}^{(p)} \stackrel{\text{def}}{=} E(\alpha_n \alpha_{n-1}^* | \mathbf{y}, \mathbf{a}; \tau^{(p)})$ ,  $P_{n-1,n|N}^{(p)} \stackrel{\text{def}}{=} E(\alpha_{n-1} \alpha_n^* | \mathbf{y}, \mathbf{a}; \tau^{(p)})$  and  $\hat{\alpha}_{n|N}^{(p)} \stackrel{\text{def}}{=} E(\alpha_n | \mathbf{y}, \mathbf{a}; \tau^{(p)})$ . We remark that the terms given by (G.20), (G.19) and the

variance-dependent constant  $C$  do not depend on  $\tau$ , then these terms can be removed from (G.18).

Since

$$\begin{aligned} S_{n|N}^{(p)} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left( |\alpha(n) - \hat{\alpha}_{n|N}^{(p)}|^2 | \mathbf{y}, \mathbf{a}; \tau^{(p)} \right) \\ &= P_{n|N}^{(p)} - \hat{\alpha}_{n|N}^{(p)} \hat{\alpha}_{n|N}^{(p)*} \end{aligned} \quad (\text{G.21})$$

By deducing the value of  $\hat{P}_{n|N}^{(p)}$  from the relation (G.21) and replacing it into (G.18), we obtain (G.13).

## Annexe H

# Bayesian nonlinear filtering using quadrature and cubature rules applied to sensor data fusion for positioning

This work has been presented in [Fern 10b], where we presented the nonlinear Bayesian estimation problem, and we summarized the recently-developed methods : the Quadrature Kalman Filter (QKF) [Aras 07] and the Cubature Kalman Filter (CKF) [Aras 09] (see chapter 2). We proposed a motion model, following a new approach, which includes the biases introduced by the Inertial Measurement Unit, into the state. We considered two different measurement models and we combined them into a nonlinear Bayesian filter. This approach can be useful when having different types of sensors for the same application. These methods, from the best of our knowledge, has never been used for data fusion for positioning.

See chapter 2 for an introduction to Bayesian filtering, Gaussian nonlinear filtering and quadrature/cubature methods.

### H.1 Motion models

The choosing of a motion model will depend on the targeted application, the availability of different technologies and the computational capability. In this paper, we propose a new motion model, inspired in the one presented in [Gods 07], based on an intrinsic coordinate system (i.e., the heading angle and the distance moved along the path), and focused on the thrusts applied when turning a vehicle. In an intrinsic coordinate system, applied forces can be represented relative to the heading of the object, rather than relative to the more standard Cartesian or polar fixed coordinate frame. Distance traveled along the path of motion is denoted  $s$ , while angle of the path relative to horizontal is denoted  $\psi$ . We assume that a piecewise constant thrust, relative to the direction of heading, is applied between any two times  $\tau_k$  and  $\tau_{k+1}$ , with tangential component  $F_T$  and perpendicular component  $F_P$ . We also assume a damping term  $\lambda \frac{ds}{dt}$ , applied in the opposite direction to the heading. Thus :

$$F_T = \lambda \frac{ds}{dt} + m \frac{d^2s}{dt^2}, \quad F_P = m \frac{ds}{dt} \frac{d\psi}{dt} \quad (\text{H.1})$$

where  $m$  is the mass of the object and  $\lambda$  the coefficient of resistance. Accelerations tangential



to and perpendicular to the motion are then given by standard dynamics of a point mass :

$$a_T(t) = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad a_P(t) = \frac{ds}{dt} \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{R} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \quad (\text{H.2})$$

where  $R$  is the instantaneous radius of curvature of the path.

The tangential equation is readily integrated from time  $\tau_k$  to  $\tau_{k+1}$  to give the speed  $v(t)$  along the path at time  $t = \tau_k + T$  :

$$v(\tau_k + T) = v_{k+1} = \frac{1}{\lambda} \left( F_{T_k} - (F_{T_k} - \lambda v(\tau_k)) e^{-\frac{T\lambda}{m}} \right) \quad (\text{H.3})$$

Using (H.3), the perpendicular equation can be integrated from  $\tau_k$  to  $\tau_k + T$ , obtaining

$$\psi(\tau_k + T) = \psi_{k+1} = \psi_k + \frac{F_{P_k}}{F_{T_k}} \left( \frac{\lambda T}{m} - \log \left| \frac{v(\tau_k)}{v(\tau_k + T)} \right| \right) \quad (\text{H.4})$$

The Cartesian position can be computed by an Euler approximation on a fine time grid, so the changes in  $x$  and  $y$  coordinates over a time interval  $T$  can be expressed as

$$x_{k+1} \approx x_k + v_{k+1} T \cos(\psi_k) \quad (\text{H.5})$$

$$y_{k+1} \approx x_k + v_{k+1} T \sin(\psi_k) \quad (\text{H.6})$$

Inertial Measurement Units (IMUs) are known to deliver biased estimations, and these biases are an underlying source of error. We propose to include those biases in the model :

$$\tilde{a}_{T_k} = a_{T_k} + \delta a_{T_k}, \quad \tilde{a}_{P_k} = a_{P_k} + \delta a_{P_k}, \quad \tilde{\psi}_k = \psi_k + \delta \psi_k \quad (\text{H.7})$$

The state space is then defined as

$$\mathbf{x}_k = [ x_k \quad y_k \quad v_k \quad \delta a_{T_k} \quad \delta a_{P_k} \quad \delta \psi_k ]^T \quad (\text{H.8})$$

and the input signal

$$\mathbf{u}_k = [ \tilde{a}_{T_k} \quad \tilde{a}_{P_k} \quad \tilde{\psi}_k ]^T, \quad (\text{H.9})$$

and thus the state transition  $\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$  is completely defined by equations (H.1)-(H.6), plus the assumptions  $\delta a_{T_k} = \delta a_{T_{k-1}}$ ,  $\delta a_{P_k} = \delta a_{P_{k-1}}$ , and  $\delta \psi_k = \delta \psi_{k-1}$ .

An advantage of this model is that we can interpolate position, speed, and angle at any time between  $\tau_k$  and  $\tau_{k+1}$ , by substituting  $T$  by  $\Delta\tau$  in the above equations (where  $0 < \Delta\tau < T$ ), thus easing time alignment between inertial measurements and other measurements coming from wireless systems.

The reason for including the path angle bias  $\delta \psi_k$  and the acceleration biases  $\delta a_{T_k}$  and  $\delta a_{P_k}$  in the state vector, and the measured angle  $\psi_k$  and accelerations  $a_{T_k}$  and  $a_{P_k}$  in the input signal is due to the well-known behavior of the gyroscopes and accelerometers of an IMU, and the high impact of such biases in dead reckoning methods used for position computation. Inertial measurement units are typically biased, and thus this effect is included in the model.

## H.2 Measurement model

We assume a receiver equipped with a set of wireless system interfaces. Measurements taken from these systems (mainly time delay or received power strength) are nonlinearly related to the device position.

If we use technologies in which the natural measurement is time delay, it can be converted to range multiplying by the speed of light  $c$ , but taking into account the desynchronization between emitter and receiver (time stamp of measures has been omitted for clarity) :

$$y = \underbrace{c(t_{Rx} - t_{Tx})}_d + c(\Delta t_{Rx} - \Delta t_{Tx}) + e \quad (\text{H.10})$$

where  $d = \sqrt{(r_{Tx_x} - r_{Rx_x})^2 + (r_{Tx_y} - r_{Rx_y})^2 + (r_{Tx_z} - r_{Rx_z})^2}$  is the geometric distance,  $\Delta t$  refers to the device's clock bias with respect to an agreed time framework, and  $e$  is a random variable modeling noise.

In case of technologies in which we can easily have access to the received signal strength, we will assume an stochastic model for the strength loss :

$$y = P_{Tx} - \bar{P}_L(d_0) - 10n \log_{10} \left( \frac{d}{d_0} \right) + \epsilon, \quad (\text{H.11})$$

where  $P_{Tx}$  is the transmitted power,  $d_0$  is the reference distance,  $\bar{P}_L(d_0)$  is the mean loss at  $d_0$ ,  $n$  is the slope of the loss (depending on the scenario) and  $\epsilon$  is a random variable modeling noise.

### H.3 Computer simulations

In order to provide illustrative numerical results, we have particularized the system model to the following network deployment. Let us assume a 2D field  $\mathcal{R}$ , a square centered at  $(0, 0)$  with sides of 500 m length, where we have a total number of  $N_p = 20$  beacons of a power-based ranging technology (with the measurement function of equation (H.11)) and  $N_t = 5$  beacons of time-based ranging (equation (H.10)), all with known positions and a coverage of 30 m. We have assumed a random, uniformly distributed beacon deployment over  $\mathcal{R}$ . The chosen values for the simulations have been  $P_{Tx} = 0$  dBm,  $d_0 = 1$  m,  $\bar{P}_L(d_0) = 30$  dB,  $n = 3$  (a typical value for urban area cellular radio) and  $\epsilon$  is a random variable with a log-normal distribution with zero mean and  $\sigma_\epsilon = 3$  dBm. The noise  $e$  is Gaussian with zero mean and  $\sigma_e = 1$  m. We have simulated  $F_{T_k} \sim \mathcal{N}(\mu_T + m \cdot \delta a_{T_k}, \sigma_T^2)$  and  $F_{P_k} \sim \mathcal{N}(m \cdot \delta a_{P_k}, \sigma_P^2)$ . The parameters of the motion model and the IMU are  $m = 500$  kg,  $\lambda = 0.3$ ,  $\mu_T = 200$  N,  $\sigma_T = 5000$  N,  $\sigma_P = 3000$  N, and  $T = 1$  s. Results are averaged over 500 independent computer simulations, each one with a different network deployment and target trajectory. Both filters have been initialized with  $\hat{\mathbf{x}}_0 = [0 \ 0 \ 2 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.1]^T$ ,  $\Sigma_{x,0} = \text{diag}([10 \ 10 \ 5 \ 1 \ 1 \ 0.1])$ ,  $\Sigma_{v,0} = \text{diag}([1 \ 1 \ 1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1])$ , and  $\Sigma_{n,0} = \text{diag}([\sigma_\epsilon \mathbf{I}_{N_p \times N_p} \ \sigma_e \mathbf{I}_{N_t \times N_t}])$ .

We compare the results with a Particle Filter (PF) using a residual resampling step [Douc 01]. We note that we are using  $L = 2\text{dim}(\mathbf{x}) = 12$  deterministic samples for the SCKF, and  $L = 3\text{dim}(\mathbf{x}) = 729$  deterministic samples for the SQKF, which considers 3 samples per dimension. To have a coherent comparison, we consider two PFs, using 12 and 729 particles, respectively. In figure H.1, we plot a trajectory example in  $\mathcal{R}$ , and the estimated trajectories using both methods. We can see that using both Sigma-point methods, and the PF with 729 particles, we obtain a correct estimation of the trajectory. Using the PF with 12 particles, we obtain a worse estimation, because the PF needs more particles to obtain good results. In figure H.2, we plot the RMSE of the estimation of the position. We can see that the deterministic methods obtain better results than the PF. If we have no computational constraints, we will prefer the SQKF, otherwise, the SCKF will be the choice for real-time applications.

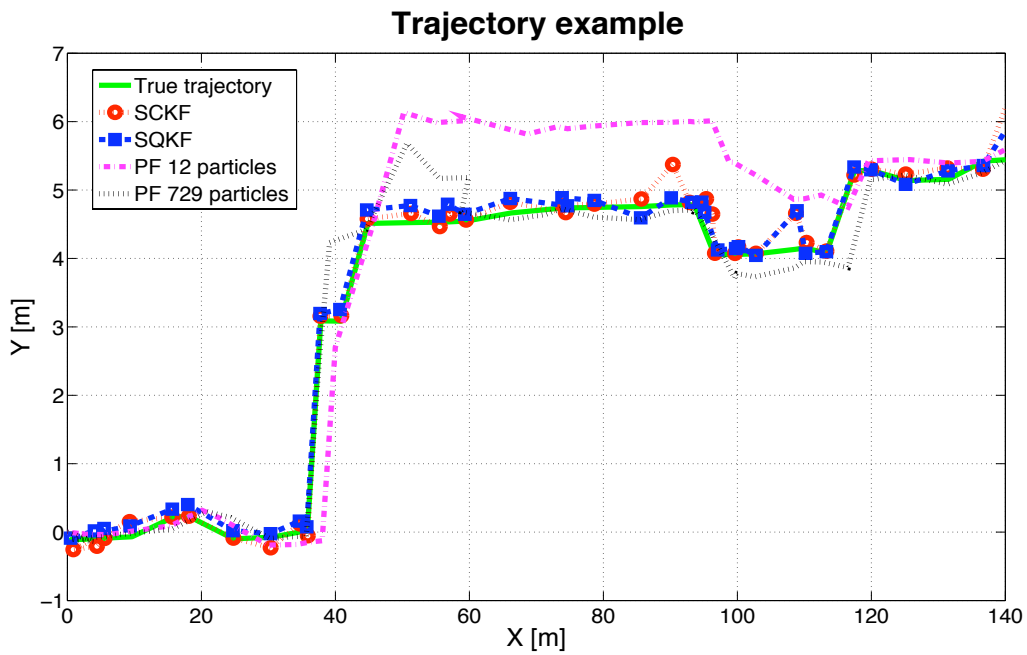


FIG. H.1 – Example of a true trajectory, and the estimate for a SQKF, a SCKF, and a PF using 12 and 729 particles

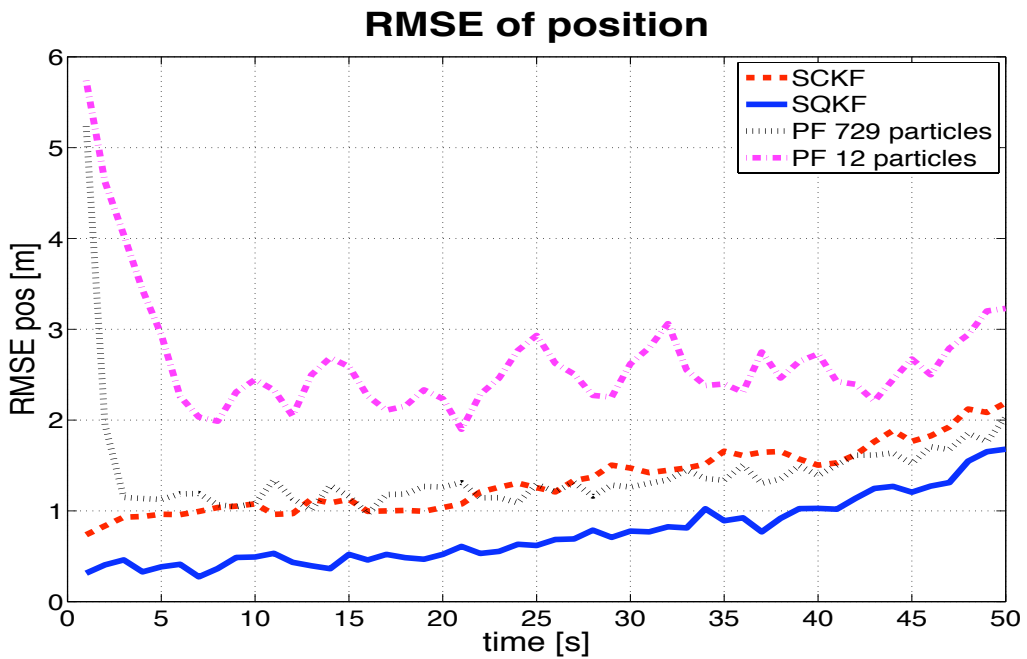


FIG. H.2 – RMSE for the estimation of the position, for the SQKF, the SCKF and the PF using 729 and 12 particles

## H.4 Conclusions

This work has presented the applicability of Gaussian nonlinear filters to the data fusion of heterogeneous sensors for positioning. We have proposed a state-space approach, which includes the biases introduced by the into the state, to compensate measurement errors. Our numerical results indicate that the square-root versions of both, the Gauss-Hermite quadrature Kalman filter and the third-degree spherical-radial cubature Kalman filter, achieve good performance in scenarios where the square-root Unscented Kalman filter fails, while maintaining numerical stability. We have also compared the results with a SMC method, which give poorer performances while being computationally heavier. The quadrature filter attains a lower estimation error, while the cubature filter requires much less computational load, being the algorithm of choice for real-time implementations.



# Annexe I

## Nonlinear filtering for ultra-tight GNSS/INS integration

This work has been presented in [Fern 10a], see chapter 2 for an introduction to nonlinear Bayesian filtering and quadrature/cubature methods.

### I.1 Introduction

Accuracy and availability are the main objectives of a navigation system. Since Global Navigation Satellite Systems (GNSS) performance is not sufficient for all applications in geodesy and navigation, it is common to hybridize them with Inertial Navigation Systems (INS), in order to combine the only short-time stability of an inertial sensor and the long-time stability but noise behavior of a GNSS receiver, taking advantage of their complementary nature.

In most GNSS/INS integrations the position and velocity estimates of a GNSS receiver are used as observations in a navigation filter for the estimation of INS errors, making possible a reduction of GNSS-noise, bridging of GNSS outages, and even GNSS measurements are also usable when fewer than four satellites are tracked. This combination, known as loosely coupled integration, provides good performance combined with simplicity of integration. The mathematical problem posed by this integration can be cast into a nonlinear filter, that traditionally has been solved by means of the Extended Kalman Filter (EKF).

In case of high dynamic applications or in jamming environments, information about the receiver dynamics measured by the inertial sensor can be used to enhance the pseudorange/Doppler estimations of the GNSS receiver. This principle is known as tightly coupled integration, and it poses a nonlinear problem. Examples of this approach can be found in [Yi 06, Reza 07, Li 08], making use of the UKF, Sigma-Point Kalman Filter (SPKF), and Particle Filtering (PF) methods. In [Bern 09], the approach is cast into a convex, linearly constrained least-squares problem and solved via dual decomposition.

An extension of this concept is the ultra-tightly coupled integration. In this case the integrating navigation filter is implemented as one element of the receiver tracking loop. An optimal controlling value for the numerical oscillator can be computed by using inertial information in combination with the in-phase (I) and quadrature (Q) signals at the receiver. Examples of this approach can be found in [Peto 06, Bern 08, Babu 09], where the errors in position and velocity between the measured and estimated values act as a link between I & Q samples and INS measurements, and lead to slight modifications of the tracking loops.

This paper proposes a new approach to ultra-tight GNSS/INS integration by deriving the

evolution of the synchronization parameters from the INS measurements, considering the eventual biased behavior of the latter, and taking advantage of the numerical efficiency of the Square-root Cubature Kalman Filter (SCKF), a nonlinear Gaussian filter recently developed [Aras 09], that could substitute the structure of conventional tracking loops.

## I.2 System model

### I.2.1 GNSS model

Considering the signals coming from  $M_s$  satellites in a multipath channel, the received signal is

$$r(t) = \sum_{i=0}^{M_s-1} \sum_{m=0}^{M(i)-1} \alpha_{m,i}(t) \Re \left\{ e^{j(2\pi f_c(t-\tau_{m,i}(t))+\phi_{m,i})} \times s_{T,i}(t - \tau_{m,i}(t)) \right\} + w(t) \quad (\text{I.1})$$

where  $\Re\{\cdot\}$  denotes the real part of the complex-valued quantity in the brackets,  $M(i)$  is the number of propagation paths from the  $i^{\text{th}}$  satellite to the receiver,  $f_c$  is the carrier frequency,  $\{\alpha_{m,i}(t), \tau_{m,i}(t), \phi_{m,i}\}$  are the amplitude, delay and carrier phase of the  $i^{\text{th}}$  satellite in the  $m^{\text{th}}$  path,  $w(t)$  is additive white Gaussian noise, and  $s_{T,i}(t)$  is the Direct-Sequence Spread-Spectrum (DS-SS) baseband signal transmitted by the  $i^{\text{th}}$  satellite. In order to compute the position, the receiver should estimate the pseudoranges (directly related to time delay of the line-of-sight (LOS) paths,  $\tau_{0,i}(t)$ ) and pseudorange rate (related to the evolution of the carrier phase). Considering the orthogonality between spreading codes, and the usual parallel architecture of a GNSS receiver, we will simplify the signal model to

$$r(t) = \alpha_0(t) \Re \left\{ e^{j(2\pi f_c(t-\tau_0(t))+\phi_0)} s_T(t - \tau_0(t)) \right\} + n(t) \quad (\text{I.2})$$

where the subindex 0 denotes the direct path, and  $n(t)$  gathers all the unwanted signals (multiuser interference, multipath and thermal noise) in a term which is considered Gaussian but not white, thus admitting a degree of correlation of the unwanted terms with the desired signal.

When this signal impinges the antenna, it passes through a Low Noise Amplifier (LNA) and a downconversion stage to an intermediate frequency. This can be modeled as

$$y(t) = \Re \left\{ (r(t) * h_{LNA}(t)) e^{-j(2\pi f_{LO}t + \phi_{LO})} \right\} \quad (\text{I.3})$$

where  $*$  stands for the convolution operator,  $h_{LNA}(t)$  is the impulse response for the RF front-end filter,  $f_{LO}$  is the frequency of the local oscillator and  $\phi_{LO}$  is its carrier phase. Defining  $f_{IF} = f_c - f_{LO}$ ,  $\psi_0 = \phi_0 - \phi_{LO}$ ,  $s_R(t)$  as the filtered version of  $s_T(t)$ ,  $a_0(t)$  as the signal amplitude, and  $\eta(t)$  as the filtered and down-converted noise term  $n(t)$ , we can write

$$y(t) = a_0(t) \Re \left\{ s_R(t - \tau_0(t)) e^{j(2\pi f_{IF}t - 2\pi f_c \tau_0(t) + \psi_0)} \right\} + \eta(t) \quad (\text{I.4})$$

Sampling this signal at  $t_k = kT_s$ , we obtain the discrete version of the received signal

$$y_k = a_{0,k} \Re \left\{ s_R(t_k - \tau_{0,k}) e^{j(2\pi f_{IF}t_k - 2\pi f_c \tau_{0,k} + \psi_0)} \right\} + \eta_k \quad (\text{I.5})$$

where the subindex  $k$  refers to  $t_k$  instants.

Defining  $\mathbf{p}^{(s)}$  and  $\mathbf{p}^{(u)}$  as the position vector of the satellite and the user receiver, respectively, and neglecting atmospheric effects, the delay can be written as

$$\tau_0(t) = \frac{1}{c} \left\| \mathbf{p}^{(s)}(t_{T_x}) - \mathbf{p}^{(u)}(t) \right\| = t - t_{T_x} \quad (\text{I.6})$$

being  $c$  the speed of light,  $t_{T_x}$  is the transmission instant, and  $\|\cdot\|$  stands for the Euclidean norm. Approximating (I.6) by its second-order Taylor expansion around an arbitrary point  $t_0$  we get

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{p}^{(s)}(t_{T_x}) - \mathbf{p}^{(u)}(t) \right\| &\approx \left\| \mathbf{p}^{(s)}(t_0 - \tau_0(t_0)) - \mathbf{p}^{(u)}(t_0) \right\| + \\ &+ \frac{d}{dt} \left\| \mathbf{p}^{(s)}(t_0 - \tau_0(t_0)) - \mathbf{p}^{(u)}(t_0) \right\| (t - t_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left\| \mathbf{p}^{(s)}(t_0 - \tau_0(t_0)) - \mathbf{p}^{(u)}(t_0) \right\| (t - t_0)^2 \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

Substituting equations (I.7) and (I.6) into equation (I.5) yields

$$y_k = a_{0,k} \Re \left\{ s_R(t_k - \tau_{0,k}) e^{j(2\pi \tilde{f}_k t_k + \tilde{\psi}_k)} \right\} + \eta_k \quad (\text{I.8})$$

where we have made use of the following definitions :

$$\tilde{f}_k = f_{IF} - \frac{f_c}{c} v_r \quad (\text{I.9})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_k &= - \frac{2\pi f_c}{c} \left( \left\| \mathbf{p}^{(s)}(t_0 - \tau_0(t_0)) - \mathbf{p}^{(u)}(t_0) \right\| + \right. \\ &\quad \left. - v_r t_0 + a_r (t_k - t_0)^2 \right) + \psi_0 \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

$$v_r = \frac{d}{dt} \left\| \mathbf{p}^{(s)}(t - \tau_0(t)) - \mathbf{p}^{(u)}(t) \right\|_{t=t_0} \quad (\text{I.11})$$

$$a_r = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left\| \mathbf{p}^{(s)}(t - \tau_0(t)) - \mathbf{p}^{(u)}(t) \right\|_{t=t_0} \quad (\text{I.12})$$

Terms  $v_r$  and  $a_r$  are usually referred to as radial velocity and radial acceleration, respectively, while the term  $f_d = \frac{f_c}{c} v_r$  is commonly known as the Doppler shift.

## I.2.2 INS model

Inertial measurement units (IMUs) typically contain three orthogonal rate-gyroscopes and three orthogonal accelerometers, measuring angular velocity and linear acceleration respectively. Let us assume a strapdown INS system in which the inertial sensors are mounted rigidly onto the receiver device, and therefore outputs quantities measured in a body frame. A typical strapdown navigation algorithm works as follows : the rate-gyroscope measurements  $\boldsymbol{\omega}_b(t) = [\omega_{b_x}(t) \ \omega_{b_y}(t) \ \omega_{b_z}(t)]^T$  (that is, the angular velocity) are integrated to obtain the orientation of the tracked device. Rate-gyroscopes are known to suffer from bias, that is, the average output (usually given in  $^\circ/h$ ) from the gyroscope when it is not undergoing any rotation is not zero. A constant bias error, when integrated, causes an angular error which grows linearly with time. This effect can be modeled by a bias term, in the form

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_b(t) = \boldsymbol{\omega}_b(t) - \delta\boldsymbol{\omega}_b(t), \quad (\text{I.13})$$

where  $\delta\boldsymbol{\omega}_b(t) = [\delta\omega_{b_x}(t) \ \delta\omega_{b_y}(t) \ \delta\omega_{b_z}(t)]^T$ .



Since those measurements are given with respect to a body frame and we need them expressed in a global frame, a rotation matrix  $\mathbf{C}_b^g$  such that  $\check{\boldsymbol{\omega}}_g(t) = \mathbf{C}_b^g \check{\boldsymbol{\omega}}_b(t)$  must be tracked through time. The rate of change of  $\mathbf{C}_b^g$  at time  $t$  is given by  $\frac{d}{dt} \mathbf{C}_b^g(t)$ . Using the small angle approximation, it comes out that the orientation algorithm must solve the differential equation

$$\frac{d}{dt} \mathbf{C}_b^g(t) = \mathbf{C}_b^g(t) \boldsymbol{\Omega}(t) \quad (\text{I.14})$$

where  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  is the skew-symmetric form of the angular vector  $\check{\boldsymbol{\omega}}_b(t)$  :

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\check{\omega}_{b_z}(t) & \check{\omega}_{b_y}(t) \\ \check{\omega}_{b_z}(t) & 0 & -\check{\omega}_{b_x}(t) \\ -\check{\omega}_{b_y}(t) & \check{\omega}_{b_x}(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.15})$$

Taking into account that IMUs provide samples of the angular velocity at a constant rate of period  $T_i$ , equation (I.14) can be solved as

$$\mathbf{C}_b^g(t + T_i) = \mathbf{C}_b^g(t) e^{\int_t^{t+T_i} \boldsymbol{\Omega}(t) dt} \quad (\text{I.16})$$

Solving the integral as  $\int_t^{t+T_i} \boldsymbol{\Omega}(t) dt = \boldsymbol{\Omega}(t) T_i$  and performing a Taylor expansion of the exponential term yields

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_b^g(t + T_i) = & \mathbf{C}_b^g(t) \left( \mathbf{I} - \frac{\sin(|\check{\boldsymbol{\omega}}_b T_i|)}{|\check{\boldsymbol{\omega}}_b T_i|} \boldsymbol{\Omega}(t) T_i + \right. \\ & \left. + \frac{1 - \cos(|\check{\boldsymbol{\omega}}_b T_i|)}{|\check{\boldsymbol{\omega}}_b T_i|^2} (\boldsymbol{\Omega}(t) T_i)^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

To track the position of an INS the acceleration signal  $\mathbf{a}_b(t) = [a_{b_x}(t) \ a_{b_y}(t) \ a_{b_z}(t)]^T$  obtained from the accelerometers is projected into the global frame of reference. Again, accelerometers are also biased. A constant bias error, when double integrated, causes an error in position which grows quadratically with time. This is modeled with a bias term

$$\check{\mathbf{a}}_b(t) = \mathbf{a}_b(t) - \delta \mathbf{a}_b(t), \quad (\text{I.18})$$

where  $\delta \mathbf{a}_b(t) = [\delta a_{b_x}(t) \ \delta a_{b_y}(t) \ \delta a_{b_z}(t)]^T$ . Thus, the acceleration in a global frame can be written as  $\check{\mathbf{a}}_g(t) = \mathbf{C}_b^g(t) \check{\mathbf{a}}_b(t)$ . Acceleration due to gravity is then subtracted and the remaining acceleration is integrated once to obtain velocity, and again to obtain displacement. In discrete form :

$$\mathbf{v}_{g,k} = \mathbf{v}_{g,k-1} + T_i (\check{\mathbf{a}}_{g,k} - \mathbf{g}_g) \quad (\text{I.19})$$

$$\mathbf{p}_{g,k} = \mathbf{p}_{g,k-1} + T_i \mathbf{v}_{g,k} \quad (\text{I.20})$$

We also define i.i.d zero-mean Gaussian terms  $\mathbf{w}_{\omega,k}$  and  $\mathbf{w}_{a,k}$  modeling gyroscopes and accelerometers noise.

### I.2.3 GNSS/INS coupling

We propose here a new GNSS/INS coupling approach, which consists on the derivation of the evolution of the synchronization parameters from the IMU measures. Taking into account

the geometry of the satellite-user link, we can write that

$$\begin{aligned}
\tau_k &= \tau_{k-1} - \frac{1}{c} (\mathbf{p}_{g,k} - \mathbf{p}_{g,k-1})^T \mathbf{d}_{k-1} + \\
&\quad + \frac{1}{c} \left( \mathbf{p}^{(s)}(t_k - \tau_k) - \mathbf{p}^{(s)}(t_{k-1} - \tau_{k-1}) \right)^T \mathbf{d}_{k-1} + w_{\tau,k} \\
&= \tau_{k-1} + \beta_k^{(\tau)} + w_{\tau,k}
\end{aligned} \tag{I.21}$$

where  $\mathbf{d}_k$  is the unitary vector pointing from the user receiver to the satellite :

$$\mathbf{d}_k = \frac{\mathbf{p}^{(s)}(t_k - \tau_k) - \mathbf{p}_{g,k}}{\|\mathbf{p}^{(s)}(t_k - \tau_k) - \mathbf{p}_{g,k}\|} \tag{I.22}$$

The term  $\mathbf{p}^{(s)}(t_k - \tau_k)$  represents the position from where the satellite emitted the signal received at  $t_k$ , an information that can be inferred from the navigation message. Since  $\tau_k$  is what we are looking for, we make the approximation  $\mathbf{p}^{(s)}(t_k - \tau_k) \approx \mathbf{p}^{(s)}(t_k - \tau_{k-1})$ . Proceeding in the same way, from (I.9) we can derive

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_k &= \tilde{f}_{k-1} + \frac{f_c}{c} \left( \left( \mathbf{v}^{(s)}(t_{k-1} - \tau_{k-1}) - \mathbf{v}_{g,k-1} \right)^T \mathbf{d}_{k-1} + \right. \\
&\quad \left. - \left( \mathbf{v}^{(s)}(t_k - \tau_k) - \mathbf{v}_{g,k} \right)^T \mathbf{d}_k \right) + w_{f,k} \\
&= \tilde{f}_{k-1} + \beta_k^{(f)} + w_{f,k}
\end{aligned} \tag{I.23}$$

where  $\mathbf{v}_{g,k}$  is the velocity given by the IMU, and  $\mathbf{v}^{(s)}(t)$  is the velocity of the satellite that can be extracted from the navigation message. Again, we will accept  $\mathbf{v}^{(s)}(t_k - \tau_k) \approx \mathbf{v}^{(s)}(t_k - \tau_{k-1})$ . The phase evolution can be predicted from (I.10) as

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_k &= \tilde{\psi}_{k-1} - \frac{2\pi f_c}{c} \left( \|\mathbf{p}^{(s)}(t_k - \tau_k) - \mathbf{p}_{g,t_k}\| + \right. \\
&\quad \left. - \|\mathbf{p}^{(s)}(t_{k-1} - \tau_{k-1}) - \mathbf{p}_{g,t_{k-1}}\| + \right. \\
&\quad \left. + \left( \mathbf{v}^{(s)}(t_{k-1} - \tau_{k-1}) - \mathbf{v}_{g,k-1} \right)^T \mathbf{d}_{k-1} t_0 + \right. \\
&\quad \left. - \left( \mathbf{v}^{(s)}(t_k - \tau_k) - \mathbf{v}_{g,k} \right)^T \mathbf{d}_k t_0 + \right. \\
&\quad \left. - \left( \mathbf{a}^{(s)}(t_{k-1} - \tau_{k-1}) - \mathbf{a}_{g,k-1} \right)^T \mathbf{d}_{k-1} (t_{k-1} - t_0)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left( \mathbf{a}^{(s)}(t_k - \tau_k) - \mathbf{a}_{g,k} \right)^T \mathbf{d}_k (t_k - t_0)^2 \right) + w_{\psi,k} \\
&= \tilde{\psi}_{k-1} + \beta_k^{(\psi)} + w_{\psi,k}
\end{aligned} \tag{I.24}$$

where  $\mathbf{a}_{g,k}$  is the acceleration measured by the IMU, and  $\mathbf{a}^{(s)}(t)$  is the acceleration of the satellite, also extracted from the navigation message. Terms  $w_{\tau,k}$ ,  $w_{f,k}$  and  $w_{\psi,k}$  are white Gaussian i.i.d. noise sequences.

We take a state-space approach in order to use an optimal Bayesian filtering solution. In equation (I.8), we have defined the discrete measurement equation. As we want to consider the biased behavior of the IMU, we introduce the bias of the rate-gyroscopes,  $\delta\boldsymbol{\omega}_{b,k}$ , and accelerometers,  $\delta\mathbf{a}_{b,k}$ , into the state, using a random walk evolution. We define the vector state

$$\mathbf{x}_k = \left[ \tau_k, \tilde{f}_k, \tilde{\psi}_k, \delta\boldsymbol{\omega}_{b,k}^T, \delta\mathbf{a}_{b,k}^T \right]^T, \tag{I.25}$$

and its evolution as

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{\Phi}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (\text{I.26})$$

where  $\mathbf{\Phi}_k = \mathbf{I}_{9 \times 9}$  is the identity matrix, the input vector is  $\mathbf{u}_k = [\beta_k^{(\tau)}, \beta_k^{(f)}, \beta_k^{(\psi)}, \mathbf{0}_{1 \times 6}]^T$ , and the noise vector is  $\mathbf{w}_k = [w_{\tau,k}, w_{f,k}, w_{\psi,k}, \mathbf{w}_{\omega,k}^T, \mathbf{w}_{a,k}^T]^T$ .

### I.3 Computer Simulations

The proposed integration solution was tested by computer simulation. We used a realistic GPS signal generator which considered aspects such as constellation geometry, receiver/satellites relative motion and time-varying delay/Doppler signal parameterizations. In particular, we tested the tracking of the synchronization parameters of one satellite by a static receiver (considering the biases of a typical MEMS-based IMU) over 1 second. The nominal Carrier-to-Noise density ratio was set to  $C/N_0 = 46$  dB-Hz, although we took into account that the instantaneous value of such parameter will depend on the elevation angle and on satellite's antenna radiation pattern. On the other hand, the considered GPS receiver had a pre-correlation filter of 2 MHz, a sampling frequency of 5.7143 MHz, an intermediate frequency of 4.308 MHz, and the tracked signal corresponded to that of the C/A code transmitted in the L1 link. With this setup, the receiver was able to track the synchronization parameters of the satellite, with an initial ambiguity given by the acquisition process, i.e., a standard deviation of half the sampling period. Figure I.1 shows the Root Mean Squared Error (RMSE) results obtained with the SCKF in estimating the pseudorange. In Figure I.1 we also plotted the Cramér-Rao Bound (CRB), which is the minimum variance that any unbiased estimator can achieve. The CRB in its standard formulation is valid for ML-like estimators, that is to say when no use of prior information is done. However, this is not our case since we are considering prior data, which is expressed in the state-evolution models proposed in Section I.2.3. Therefore, we must resort to the Bayesian CRB as a valid benchmark for our algorithm. From the figure it follows that the obtained pseudorange variances are in accordance to the theoretical bound. In addition, we can see the enhancement given by the use of prior information.

### I.4 Conclusions

This work presented a new approach to GNSS/INS integration. The main objective was to establish the pertinent mathematical relationships that allow the ultra-tight coupling of both systems, casting the problem into the Bayesian framework and proposing a solution based on Gaussian nonlinear filtering. Detailed computer simulations confirmed the validity of the approach.

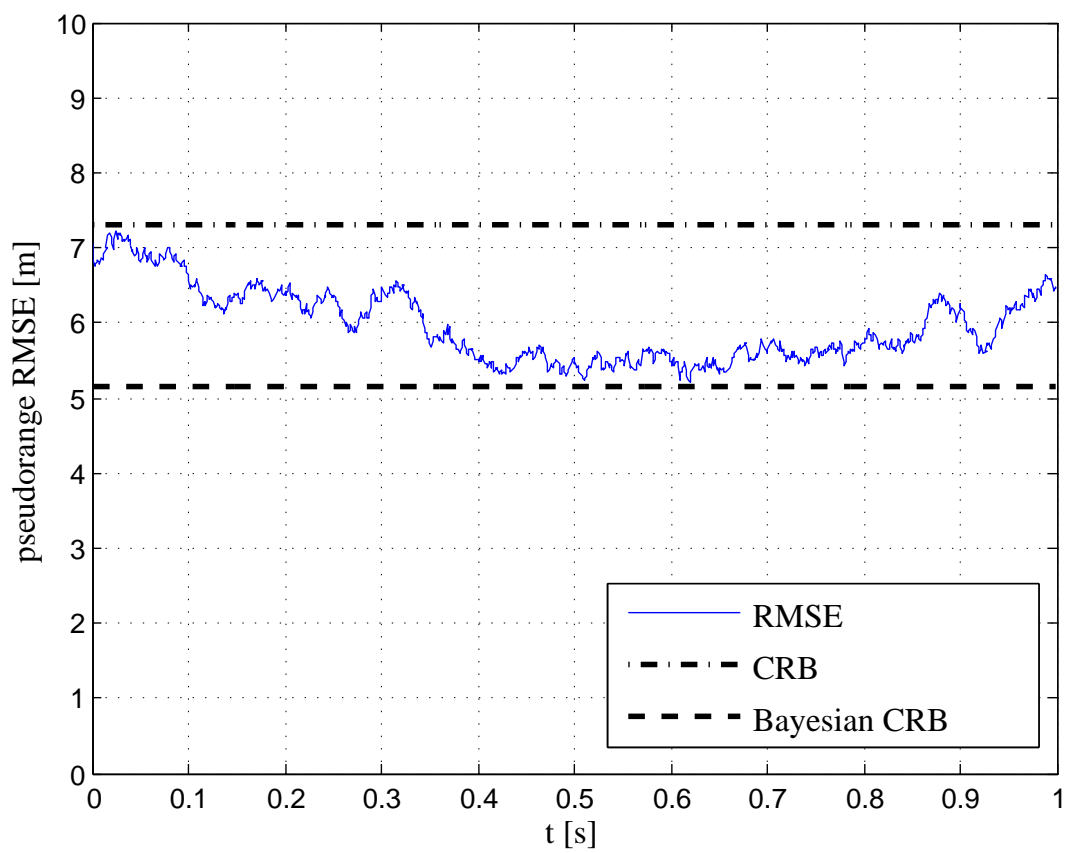


FIG. I.1 – RMSE of pseudorange estimates, CRB and Bayesian CRB over time.



# Bibliographie

- [Abei 08] H. Abeida and J. P. Delmas. “Statistical performance of MUSIC-like algorithms in resolving noncircular sources”. *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 56, No. 9, pp. 4317–4329, September 2008.
- [Abei 09] H. Abeida, J.-M. Brossier, L. Ros, and J. Vilà-Valls. “An EM algorithm for path delay and complex gain estimation of slowly varying fading channel for CPM signals”. Proc. of the IEEE Global Communications Conference, Globecom 2009, Honolulu, Hawaii, December 2009.
- [Abel 93] J. S. Abel. “A bound on mean-square-estimate error”. *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 39, No. 5, pp. 1675–1680, Sept. 1993.
- [Albe 95] T. Albery. “Frequency domain interpretation of the Cramér-Rao bound for carrier and clock synchronization”. *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 43, No. 2/3/4, pp. 1185–1191, Feb./March/April 1995.
- [Alsp 72] D. L. Alspach and H. W. Sorenson. “Nonlinear bayesian estimation using Gaussian sum approximations”. *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 17, No. 4, pp. 439–448, Aug. 1972.
- [Ambl 03] P. O. Amblard, J.-M. Brossier, and E. Moisan. “Phase tracking : what do we gain from optimality”. *Elsevier Signal Processing*, Vol. 83, pp. 151–167, 2003.
- [Ande 79] B. Anderson and J. B. Moore. *Optimal filtering*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1979.
- [Aras 07] I. Arasaratnam, S. Haykin, and R. J. Elliot. “Discrete-time Nonlinear Filtering Algorithms using Gauss-Hermite Quadrature”. *Proc. of the IEEE*, Vol. 95, No. 5, pp. 953–977, 2007.
- [Aras 08] I. Arasaratnam and S. Haykin. “Square-Root Quadrature Kalman Filtering”. *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 56, No. 6, pp. 2589–2593, June 2008.
- [Aras 09] I. Arasaratnam and S. Haykin. “Cubature Kalman Filters”. *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 54, No. 6, pp. 1254–1269, June 2009.
- [Arul 02] M. S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, and T. Clapp. “A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian bayesian tracking”. *Special Issue of IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 50, No. 2, pp. 174–188, Feb. 2002.
- [Atal 04] L. N. Atallah, J.-P. Barbot, and P. Larzabal. “SNR threshold indicator in Data-Aided frequency synchronization”. *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 11, No. 8, pp. 652–654, August 2004.

- [Auli 81] T. Aulin and C. E. Sundberg. “Continuous phase modulation - parts I and II”. *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 29, pp. 196–225, March 1981.
- [Auli 82] T. Aulin and C. E. Sundberg. “Synchronization properties of continuous phase modulation”. *Proc. of Globecom*, November 1982.
- [Babu 09] R. Babu and J. Wang. “Ultra-tight GPS/INS/PL integration : a system concept and performance analysis”. *GPS Solutions*, Vol. 13, No. 1, pp. 75–82, Jan. 2009.
- [Badd 05] K. E. Baddour and N. C. Beaulieu. “Autoregressive modeling for fading channel simulation”. *IEEE Trans. on Wireless Communications*, Vol. 4, No. 4, pp. 1650–1662, July 2005.
- [Bara 49] E. W. Barankin. “Locally best unbiased estimates”. *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 20, pp. 477–501, 1949.
- [Bay 08a] S. Bay, B. Geller, A. Renaux, J.-P. Barbot, and J.-M. Brossier. “On the hybrid Cramér-Rao bound and its application to dynamical phase estimation”. *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 15, pp. 453–456, 2008.
- [Bay 08b] S. Bay, C. Herzet, J.-M. Brossier, J.-P. Barbot, and B. Geller. “Analytic and asymptotic analysis of bayesian Cramér-Rao bound for dynamical phase offset estimation”. *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 56, No. 1, pp. 61–70, Jan. 2008.
- [Bell 06] K. L. Bell and H. L. V. Trees. “Combined Cramér-Rao/Weiss-Weinstein bound for tracking target bearing”. In : *4th IEEE Workshop on Sensor Array and Multi-Channel Processing (SAM 2006)*, Waltham, MA, pp. 273–277, July 2006.
- [Bell 74] S. Bellini and G. Tartara. “Bounds on error in signal parameter estimation”. *IEEE Trans. Communications*, Vol. 22, pp. 340–342, Mars 1974.
- [Bell 95] K. Bell. *Performance bounds in parameter estimation with application to bearing estimation*. PhD thesis, George Mason University, Fairfax, Virginia, USA, Printemps 1995.
- [Bell 97] K. Bell, Y. Steinberg, Y. Ephraim, and H. L. V. Trees. “Extended Ziv-Zakai lower bound for vector parameter estimation”. *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 43, No. 2, pp. 624–637, Mars 1997.
- [Bene 81] V. E. Benes. “Exact finite-dimensional filters with certain diffusion with nonlinear drift”. *Stochastics*, Vol. 5, No. 1, pp. 65–92, 1981.
- [Berg 03] I. Bergel and J. Weiss. “Cramér-Rao bound on timing recovery of linearly modulated signals with no ISI”. *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 51, No. 4, pp. 634–640, April 2003.
- [Bern 08] D. Bernal, P. Closas, and J. A. Fernández-Rubio. “Particle Filtering Algorithm for Ultra-tight GNSS/INS Integration”. In : *Proc. ION GNSS*, pp. 2137–2144, Savannah, GA, Sept. 2008.
- [Bern 09] D. Bernal, P. Closas, E. Calvo, and J. A. Fernández-Rubio. “Tight GNSS/INS Integration as a Constrained Least-Squares Problem”. In : *Proc. EUSIPCO*, pp. 85–89, Glasgow, Scotland, Aug. 2009.

- [Bert 03] T. Bertozzi. *Applications of Particle Filtering Methods to Digital Communications*. PhD thesis, Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris, France, Décembre 2003.
- [Bhat 46] A. Bhattacharyya. “On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation”. *Sankhya Indian Journal of Statistics*, Vol. 8, pp. 1–14, 201–218, 315–328, 1946.
- [Bobr 75] B. Z. Bobrovsky and M. Zakai. “A lower bound on the estimation error for Markov processes”. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 20, No. 6, pp. 785–788, Dec. 1975.
- [Bobr 76] B. Z. Bobrovsky and M. Zakai. “A lower bound on the estimation error for certain diffusion processes”. *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 22, No. 1, pp. 45–52, Jan. 1976.
- [Bobr 87] B. Z. Bobrovsky, E. Mayer-Wolf, and M. Zakai. “Some classes of global Cramér-Rao bounds”. *Annals of Statistics*, Vol. 14, pp. 1421–1438, 1987.
- [Bucy 71] R. S. Bucy and K. D. Senne. “Digital synthesis of nonlinear filters”. *Automatica*, No. 7, pp. 287–298, 1971.
- [Bucy 74] R. S. Bucy and H. Youssef. “Nonlinear filter representation via spline functions”. In : *the 5<sup>th</sup> Symp. Nonlinear Estimation*, pp. 51–60, 1974.
- [Capp 07] O. Cappe, S. J. Godsill, and E. Moulines. “An overview of existing methods and recent advances in sequential Monte Carlo”. *Proc. of the IEEE*, Vol. 95, No. 5, pp. 899–924, 2007.
- [Chap 51] D. G. Chapman and H. Robbins. “Minimum variance estimation without regularity assumptions”. *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 22, pp. 581–586, 1951.
- [Chen 01] H. Chen, R. Perry, and K. Buckley. “Direct and EM-based MAP sequence estimation with unknown time-varying channels”. *Proc. of the IEEE ICASSP*, Vol. 4, pp. 2129–2132, May 2001.
- [Chen 03] Z. Chen. “Bayesian Filtering : From Kalman Filters to Particle Filters, and Beyond”. Tech. Rep., McMaster University, 2003.
- [Chev 06] P. Chevalier and F. Pipon. “New insights into optimal widely linear array receivers for the demodulation of BPSK, MSK, and GMSK signals corrupted by noncircular interferences - application to SAIC”. *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 54, No. 3, pp. 870–883, March 2006.
- [Clos 06] P. Closas, C. Fernández-Prades, and J. A. Fernández-Rubio. “Bayesian DLL for multipath mitigation in navigation systems using particle filters”. *Proc. of the IEEE ICASSP '06*, pp. 695–706, May 2006.
- [Clos 08] P. Closas, C. Fernández-Prades, and J. A. Fernández-Rubio. “A particle filter tracking algorithm for GNSS synchronization using Laplace’s method”. *Proc. of the IEEE ICASSP '08*, pp. 3409–3412, Mars-April 2008.



- [Clos 09a] P. Closas. *Bayesian signal processing techniques for GNSS receivers*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Espagne, Juin 2009.
- [Clos 09b] P. Closas, C. Fernández-Prades, and J. A. Fernández-Rubio. “A Bayesian approach to multipath mitigation in GNSS receivers”. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, Vol. 3, No. 4, pp. 695–706, Aug. 2009.
- [Clos 09c] P. Closas, C. Fernández-Prades, and J. A. Fernández-Rubio. “Cramér-Rao bound analysis of positioning approaches in GNSS receivers”. *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. , No. , p. , 2009.
- [Cool 97] R. Cools. “Constructing cubature formulas : the science behind the art”. *Acta Numerica*, pp. 1–54, 1997.
- [Cowl 96] W. G. Cowley. “Phase and frequency estimation for PSK packets : bounds and algorithms”. *IEEE Trans. Communications*, Vol. 44, No. 1, pp. 26–28, Jan. 1996.
- [Cram 46] H. Cramér. *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, USA, 1946.
- [Cras 06] J. Crassidis. “Sigma-point Kalman filtering for integrated GPS and inertial navigation”. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 42, No. 2, pp. 750–756, April 2006.
- [Dabo 04] R. Dabora, J. Goldberg, and H. Messer. “Training-based time-delay estimation for CPM signals over time-selective fading channels”. *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 52, No. 7, pp. 1169–1177, July 2004.
- [DAnd 94] A. N. D’Andrea, U. Mengali, and R. Reggiannini. “The modified Cramér-Rao bounds and its application to synchronization problems”. *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 42, No. 2-4, pp. 1391–1399, Feb.-Apr. 1994.
- [DAnd 96] A. N. D’Andrea and U. Mengali. “Symbol timing estimation with CPM modulation”. *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 44, No. 10, pp. 1362–1372, October 1996.
- [Daum 05] F. Daum. “Nonlinear filters : beyond the kalman filter”. *Aerospace and Electronic Sys. Magazine*, Vol. 20, No. 8, pp. 57–69, Aug. 2005.
- [Demp 77] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin. “Maximum-likelihood from incomplete data via the EM algorithm”. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 39, No. 1, pp. 1–38, 1977.
- [Diga 93] V. Digalakis, J. Rohlicek, and M. Ostendorf. “ML estimation of a stochastic linear system with the EM algorithm and its application to speech recognition”. *IEEE Trans. on Speech Audio Processing*, Vol. 1, No. 4, pp. 431–442, September 1993.
- [Djur 03] P. Djurić, J. H. Kotecha, J. Zhang, Y. Huang, T. Ghirmai, M. F. Bugallo, and J. Míguez. “Particle filtering”. *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 140, No. 2, pp. 19–38, Sept. 2003.
- [Douc 00] A. Doucet, S. J. Godsill, and C. Andrieu. “On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering”. *Statistics and Computing*, Vol. 10, pp. 197–208, 2000.

- [Douc 01] A. Doucet, N. D. Freitas, and N. Gordon, Eds. *Sequential Monte Carlo methods in practice*. Springer, 2001.
- [ESA 08] ESA. “Galileo Open Service Signal in Space Interface Control Document - Draft 1”. Tech. Rep., European Space Agency / Galileo Joint Undertaking, 2008.
- [Fern 05] C. Fernández. *Advanced signal processing techniques for global navigation satellite systems receivers*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Espagne, December 2005.
- [Fern 10a] C. Fernández-Prades, P. Closas, and J. Vilà-Valls. “Nonlinear filtering for ultra-tight GNSS/INS integration”. Proc. of the IEEE International Communications Conference, ICC 2009, Cape Town, South Africa, May 2010.
- [Fern 10b] C. Fernández-Prades and J. Vilà-Valls. “Bayesian nonlinear filtering using quadrature and cubature rules applied to sensor data fusion for positioning”. Proc. of the IEEE International Communications Conference, ICC 2010, Cape Town, South Africa, May 2010.
- [Figu 71] R. J. P. Figueiredo and J. G. Jan. “Spline filters”. In : *in Proc. of the 2<sup>th</sup> Symp. Nonlinear Estimation*, pp. 127–138, 1971.
- [Frei 98] J. F. G. Freitas, M. Niranjan, and A. H. Gee. “Nonlinear state space learning with EM and neural networks”. *Proc. of the IEEE IWNNSP*, pp. 254–263, September 1998.
- [Gabo 46] D. Gabor. “Theory of communication”. *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, Vol. 93, No. 3, pp. 429–457, 1946.
- [Ghog 01] M. Ghogho, A. Swami, and T. Durrani. “Frequency estimation in the presence of Doppler spread : performance analysis”. *itsp*, Vol. 49, No. 4, pp. 777–789, April 2001.
- [Gini 00] F. Gini and R. Reggiannini. “On the use of Cramér-Rao-like bounds in the presence of random nuisance parameters”. *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 48, No. 12, pp. 2120–2126, December 2000.
- [Gini 98] F. Gini, R. Reggiannini, and U. Mengali. “The modified Cramér-Rao bound in vector parameter estimation”. *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 46, No. 1, pp. 52–60, Jan. 1998.
- [Gire 04] A. Giremus, A. Doucet, V. Calmettes, and J.-Y. Tournet. “A Rao-Blackwellized particle filter for INS/GPS integration”. *Proc. of the IEEE ICASSP '01*, April 2004.
- [Gire 07] A. Giremus, J.-Y. Tournet, and V. Calmettes. “A particle filter approach for joint detection/estimation of multipath effects on GPS measurements”. *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 4, No. 55, pp. 1275–1285, April 2007.
- [Gods 07] S. Godsill, J. Vermaak, W. Ng, and J. Li. “Models and Algorithms for tracking of maneuvering objects using Variable Rate Particle Filters”. *Proceedings of the IEEE*, Vol. 950, No. 5, pp. 925–952, May 2007.

- [Gord 93] N. J. Gordon, D. J. Salmond, and A. F. M. Smith. “Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation”. *IEE Proc.*, Vol. 140, No. 2, pp. 107–113, April 1993.
- [Grew 07] M. S. Grewal, L. R. Weill, and A. P. Andrews, Eds. *Global positioning systems, inertial navigation and integration*. John Wiley and Sons, Inc., 2nd Ed., 2007.
- [Hamm 50] J. M. Hammersley. “On estimating restricted parameters”. *Annals of the Royal Statistics Society (Series B)*, Vol. 12, pp. 192–240, 1950.
- [Hija 09] H. Hijazi and L. Ros. “Analytical Analysis of Bayesian Cramer-Rao Bound for Dynamical Rayleigh Channel Complex Gains Estimation in OFDM systems”. *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 57, No. 5, pp. 1889–1900, May 2009.
- [Hube 92] J. Huber and W. Liu. “Data-aided synchronization of coherent CPM receivers”. *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 40, No. 1, pp. 178–188, January 1992.
- [Huer 09] J. M. Huerta, J. Vidal, A. Giremus, and J.-Y. Tournet. “Joint particle filter and UKF position tracking in severe non-line-of-sight situations”. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, Vol. 3, No. 5, pp. 874–888, October 2009.
- [Irsi 03] M. Irsigler and B. Eissfeller. “Comparison of multipath mitigation techniques with consideration of future signal structures”. *Proc. of the ION GPS/GNSS '03*, Sep. 2003.
- [Ito 00] K. Ito and K. Xiong. “Gaussian filters for nonlinear filtering problems”. *Trans. Automatic Control*, Vol. 45, No. 5, pp. 910–927, May 2000.
- [Jake 74] W. C. Jakes. *Microwave mobile communications*. Wiley, New York, USA, 1974.
- [Jazw 70] A. H. Jazwinski. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press, New York, USA, 1970.
- [Jian 00] Y. Jiang, F. Sun, and J. Baras. “On the true Cramér-Rao lower bound for DA joint estimation of carrier phase and timing offsets”. *Proc. of the IEEE ICC '00*, pp. 331–335, June 2000.
- [Jian 03] Y. Jiang, F.-W. Sun, and J. S. Baras. “On the performance limits of Data-Aided synchronization”. *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 49, No. 1, pp. 191–203, January 2003.
- [Juli 00] S. J. Julier, J. K. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte. “A new method for nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators”. *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 45, No. 3, pp. 472–482, March 2000.
- [Juli 04] S. J. Julier and J. K. Uhlmann. “Unscented filtering and nonlinear estimation”. *Proc. of the IEEE*, Vol. 92, No. 3, pp. 401–422, March 2004.
- [Juli 97] S. J. Julier. “The scaled unscented transformation”. pp. 4555–4559, Proc. of the American Control Conference, ICC 2009, May 1997.
- [Kalm 60] R. E. Kalman. “A new approach to linear filtering and prediction problems”. *J. Basic Eng., Trans. ASME*, Vol. 82, No. 1, pp. 35–45, 1960.

- [Kalm 61] R. E. Kalman and R. S. Bucy. “New results in linear filtering and prediction theory”. *J. Basic Eng., Trans. ASME*, Vol. 83, No. 3, pp. 95–108, 1961.
- [Kapl 06] E. D. Kaplan, Ed. *Understanding GPS : principles and applications*. Artech House, 2nd Ed., 2006.
- [Kay 93] S. M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Estimation Theory*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1993.
- [Khan 07] M. E. Khan and D. N. Dutt. “An expectation-maximization algorithm based kalman smoother approach for event-related desynchronization (ERD) estimation from EEG”. *IEEE Trans. on Biom.*, Vol. 54, No. 7, pp. 1191–1198, July 2007.
- [Kim 06] K. J. Kim and R. A. Iltis. “Frequency offset synchronization and channel estimation for the MIMO-OFDM system using Rao-Blackwellized Gauss-Hermite filter”. *Proc. of the WCNC '06*, pp. 860–865, 2006.
- [Kim 09] J.-S. Kim, D.-R. Shin, and E. Serpedin. “Adaptive multiuser receiver with joint channel and time delay estimation of CDMA signals based on the square-root unscented filter”. *Elsevier Digital Signal Processing*, Vol. 19, pp. 504–520, 2009.
- [Knap 76] C. H. Knapp and G. C. Carter. “The generalized correlation method for estimation of time delay”. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Sig. Processing*, Vol. 24, pp. 320–327, August 1976.
- [Kote 03] J. Kotecha and P. M. Djuric. “Gaussian particle filtering”. *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 51, No. 10, pp. 2592–2601, October 2003.
- [Krac 08] B. Krach, M. Lentmaier, and P. Robertson. “Bayesian detection and tracking for joint positioning and multipath mitigation in GNSS”. *IEEE WPNC '08*, pp. 173–180, 2008.
- [Lee 05] D.-J. Lee. *Nonlinear bayesian filtering with applications to estimation and navigation*. PhD thesis, Texas A & M University, Texas, USA, May 2005.
- [Lei 07] M. Lei and C. Han. “Sequential nonlinear tracking using UKF and raw range-rate measurements”. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 43, No. 1, pp. 239–250, Jan. 2007.
- [Lent 06] M. Lentmaier, B. Krach, and P. Robertson. “Maximum likelihood multipath estimation in comparison with conventional delay lock loops”. *International Journal of Navigation and Observation*, pp. 1741–1751, Sep. 2006.
- [Lent 08] M. Lentmaier and B. Krach. “A Bayesian approach to multipath mitigation in GNSS receivers”. *Proc. of the ION GNSS '06*, 2008.
- [Li 08] Y. Li, C. Rizos, J. Wang, P. Mumford, and W. Ding. “Sigma-point kalman filtering for tightly coupled GPS/INS integration”. *Navigation*, Vol. 55, No. 3, pp. 167–178, Fall 2008.
- [Meng 97] U. Mengali and A. N. D’Andrea. *Synchronization Techniques for Digital Receivers*. Plenum Press, New York, USA, 1997.

- [Merw 00] R. V. der Merwe, A. Doucet, N. Freitas, and E. Wan. “The Unscented Particle Filter”. Tech. Rep., University of Cambridge, 2000.
- [Merw 01a] R. V. der Merwe and E. A. Wan. “Efficient derivative-free Kalman filters for online learning”. In : *European Symposium on Artificial Neural Networks*, pp. 205–210, 2001.
- [Merw 01b] R. V. der Merwe and E. A. Wan. “The Square-Root Unscented Kalman Filter for State and Parameter-Estimation”. In : *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. 3461–3464, 2001.
- [Merw 04] R. V. der Merwe. *Sigma-point kalman filters for probabilistic inference in dynamic state-space models*. PhD thesis, Oregon Health and Science University, Portland, Oregon, USA, April 2004.
- [Meyr 98] H. Meyr, M. Moeneclaey, and S. Fetchel. *Digital Communication Receivers : Synchronization, Channel Estimation and Signal Processing*. Wiley Series in Telecommunications and Signal Processing, New York, USA, 1998.
- [Moen 94] M. Moeneclaey and G. Jonghe. “ML-orientated NDA carrier synchronization for general rotationally symmetric signal constellations”. *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 42, No. 8, pp. 2531–2533, August 1994.
- [Moen 98] M. Moeneclaey. “On the true and modified Cramér-Rao bounds for the estimation of a scalar parameter in the presence of nuisance parameters”. *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 46, No. 11, pp. 1536–1544, November 1998.
- [More 99] M. Morelli and U. Mengali. “Joint frequency and timing recovery for MSK-type modulation”. *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 47, No. 6, pp. 938–946, June 1999.
- [Naya 06] A. R. Nayak, J. R. Barry, G. Feyh, and S. W. McLaughlin. “Timing recovery with frequency offset and random walk : Cramér-Rao bound and a Phase-Locked loop postprocessor”. *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 54, No. 11, pp. 2004–2013, November 2006.
- [Nee 94] R. D. J. V. Nee, J. Sierveveld, P. C. Fenton, and B. R. Townsend. “The multipath estimating delay loop lock : approaching theoretical accuracy limits”. pp. 246–251, Position, Location and Navigation Symposium, PLANS 1994, April 1994.
- [Noel 03] N. Noels, H. Steendam, and M. Moeneclaey. “The Cramér-Rao bound for phase estimation from coded linearly modulated signals”. *IEEE Communications Letters*, Vol. 7, No. 5, pp. 207–209, May 2003.
- [Noel 04a] N. Noels, H. Steendam, and M. Moeneclaey. “The true Cramér-Rao bound for carrier frequency estimation from a psk signal”. *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 52, No. 5, pp. 834–844, May 2004.
- [Noel 04b] N. Noels, H. Wymeersch, H. Steendam, and M. Moeneclaey. “The Cramér-Rao bound for timing recovery from a bandlimited linearly modulated waveform with unknown carrier phase and frequency”. *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 52, No. 3, pp. 473–483, March 2004.

- [Noel 05] N. Noels, H. Steendam, M. Moeneclaey, and H. Brueel. “Carrier phase and frequency estimation for pilot-assisted transmission : bounds and algorithms”. *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 53, No. 12, pp. 4578–4587, December 2005.
- [Norg 00] M. Norgaard, N. K. Poulsen, and O. Ravn. “New developments in state estimation of nonlinear systems”. *Automatica*, Vol. 36, pp. 1627–1638, 2000.
- [Pate 91] F. Patenaude, J. H. Lodge, and P. A. Galko. “Symbol timing tracking for continuous phase modulation over fast flat-fading channels”. *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, Vol. 40, pp. 615–626, August 1991.
- [Peto 06] M. Petovello and G. Lachapelle. “Comparison of Vector-Based Software Receiver Implementations with Application to Ultra-Tight GPS/INS Integration”. In : *Proc. ION GNSS*, pp. 1790–1799, Fort Worth, TX, Sept. 2006.
- [Proa 00] J. G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw-Hill, Boston, USA, 2000.
- [Rapo 07a] I. Rapoport and Y. Oshman. “Weiss-Weinstein lower bounds for Markovian systems. Part 1 : theory”. *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 55, No. 5, pp. 2016–2030, May 2007.
- [Rapo 07b] I. Rapoport and Y. Oshman. “Weiss-Weinstein lower bounds for Markovian systems. Part 2 : applications to fault-tolerant filtering”. *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 55, No. 2, pp. 2031–2042, May 2007.
- [Rauc 63] H. E. Rauch. “Solutions to the linear smoothing problem”. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 8, pp. 371–372, 1963.
- [Reec 05] S. Reece and D. Nicholson. “Tighter alternatives to the Cramér-Rao lower bound for discrete-time filtering”. In : *7th. Intl. Conf. Info. Fusion*, pp. 101–106, July 2005.
- [Rena 06] A. Renaux. *Contribution à l’analyse des performances d’estimation en traitement statistique du signal*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Cachan, Cachan, France, Juillet 2006.
- [Rena 07] A. Renaux. “Weiss-Weinstein bound for Data-Aided carrier synchronization”. *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 14, No. 4, pp. 283–286, April 2007.
- [Rena 08] A. Renaux, P. Forster, P. Larzabal, C. D. Richmond, and A. Nehorai. “A fresh look at the Bayesian bounds of the Weiss-Weinstein family”. *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 56, No. 11, pp. 5334–5352, Nov. 2008.
- [Reuv 97] I. Reuven and H. Messer. “A Barankin-type lower bound on the estimation error of a hybrid parameter vector”. *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 43, No. 3, pp. 1084–1093, May 1997.
- [Reza 07] J. Rezaie, B. Moshiri, B. N. Araabi, and A. Asadian. “GPS/INS integration using nonlinear blending filters”. pp. 1674–1680, Proc. of the International Conference on Instrumentation, Control and Information Technology, SCIE 2007, Kagawa, Japan, September 2007.
- [Riba 00] J. Riba and G. Vazquez. “Non-data-aided frequency offset and symbol timing estimation for binary CPM : performance bounds”. *Proc. of ICASSP*, Vol. 5, pp. 2549–2552, January 2000.

- [Riba 01] J. Riba, J. Sala, and G. Vázquez. “Conditional maximum likelihood timing recovery : estimators and bounds”. *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 49, No. 4, pp. 835–850, April 2001.
- [Riba 04] J. Riba. “A performance lower bound for quadratic timing recovery accounting for the symbol transition density”. *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 52, No. 11, pp. 3278–3288, November 2004.
- [Rice 01] B. M. F. Rice, B. Cowley, and M. Rice. “Cramér-Rao lower bounds for QAM phase and frequency estimation”. *IEEE Trans. Communications*, Vol. 49, No. 9, pp. 1582–1591, Sept. 2001.
- [Rice 06] F. Rice. “Carrier-phase and frequency-estimation bounds for transmissions with embedded reference symbols”. *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 54, No. 2, pp. 221–225, February 2006.
- [Rife 74] D. C. Rife and R. R. Boorstyn. “Single tone parameter estimation from discrete-time observations”. *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 20, pp. 591–598, 1974.
- [Rock 87] Y. Rockah and P. M. Schultheiss. “Array shape calibration using sources in unknown locations- Part I : near-field sources”. *IEEE Trans. on Acous. Speech and Sig. Processing*, Vol. 35, pp. 286–299, March 1987.
- [Sale 02] F. B. Salem. *Réception particulière pour canaux multi-trajets évanescents en communications radiomobiles*. PhD thesis, Université Paul Sabatier de Toulouse, Toulouse, France, Novembre 2002.
- [Seco 00] G. Seco. *Antenna arrays for multipath and interference mitigation in GNSS*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Espagne, July 2000.
- [Shan 48] C. E. Shannon. “A mathematical theory of communication”. *Bell systems technical journal*, 1948.
- [Sima 01] M. Simandl, J. Královec, and P. Tichavský. “Filtering, predictive, and smoothing Cramér-Rao bounds for discrete-time nonlinear dynamic systems”. *Automatica*, Vol. 37, pp. 1703–1716, 2001.
- [Simo 07] E. Simon, L. Ros, and K. Raouf. “Synchronization over rapidly time-varying multipath channels for CDMA downlink receiver in Time-Division mode”. *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, Vol. 56, No. 4, pp. 2216–2225, July 2007.
- [Sorn 01] D. Sornette and K. Ide. “The Kalman-Lévy filter”. *Elsevier Physica D*, Vol. 151, pp. 142–174, 2001.
- [Tava 04] G. N. Tavares, L. M. Tavares, and M. S. Piedade. “On the Miller-Chang lower bound for NDA carrier phase estimation”. *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 52, No. 11, pp. 128–140, November 2004.
- [Tava 06] G. N. Tavares and L. M. Tavares. “The true Cramér-Rao lower bound for Data-Aided carrier-phase-independent time-delay estimation from linearly modulated waveforms”. *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 54, No. 1, pp. 128–140, January 2006.

- [Tich 98] P. Tichavský, C. H. Muravchik, and A. Nehorai. “Posterior Cramér-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering”. *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 46, No. 5, pp. 1386–1396, May 1998.
- [Tree 07] H. L. V. Trees and K. L. Bell. *Bayesian bounds for parameter estimation and nonlinear filtering/tracking*. IEEE Press, 2007.
- [Tree 68] H. L. V. Trees. *Detection, estimation, and modulation theory : Part I*. Wiley, New York, USA, 1968.
- [Usma 94] R. Usmani. “Inversion of Jacobi’s tridiagonal matrix”. *Computers Math. Applic.*, Vol. 27, No. 8, pp. 56–59, 1994.
- [Verc 05] T. Vercauteren and X. Wang. “Decentralized sigma-point information filters for target tracking in collaborative sensor networks”. *itsp*, Vol. 53, No. 8, pp. 2997–3009, Aug. 2005.
- [Vila 08] J. Vilà-Valls, J.-M. Brossier, and L. Ros. “On-line Bayesian Cramér-Rao bound for oversampled dynamical phase offset estimation”. Proc. of the IEEE 3rd International Symposium on Communications, Control and Signal Processing, ISCCSP 2008, Malta, March 2008.
- [Vila 09a] J. Vilà-Valls, J.-M. Brossier, and L. Ros. “Extended Kalman filter for oversampled dynamical phase offset estimation”. Proc. of the IEEE International Conference on Communications, ICC 2009, Dresden, Germany, June 2009.
- [Vila 09b] J. Vilà-Valls, J.-M. Brossier, and L. Ros. “On-line hybrid Cramér-Rao bound for oversampled dynamical phase and frequency offset estimation”. Proc. of the IEEE Global Communications Conference, Globecom 2009, Honolulu, Hawaii, December 2009.
- [Vila 10] J. Vilà-Valls, J.-M. Brossier, and L. Ros. “Oversampled phase tracking in digital communications with large excess bandwidth”. *Elsevier Signal Processing*, Vol. 90, No. 3, pp. 821–833, March 2010.
- [Wang 96] H. Wang and P. Chang. “On verifying the first-order Markovian assumption for a Rayleigh fading channel model”. *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, Vol. 45, pp. 353–357, May 1996.
- [Wein 88a] E. Weinstein. “Relations between Belini-Tartara, Chazan-Zakai-Ziv, and Wax-Ziv lower bounds”. *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 34, No. 2, pp. 342–343, Mars 1988.
- [Wein 88b] E. Weinstein and A. Weiss. “A general class of lower bounds in parameter estimation”. *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 34, pp. 338–342, Mars 1988.
- [Weis 85] A. Weiss and E. Weinstein. “A lower bound on the mean square error in random parameter estimation”. *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 31, No. 5, pp. 680–682, Sept. 1985.
- [Yi 06] Y. Yi and D. A. Grejner-Brzezinska. “Tightly-coupled GPS/INS Integration Using Unscented Kalman Filter and Particle Filter”. In : *Proc. ION GNSS*, pp. 2182–2191, Fort Worth, TX, Sept. 2006.



- [Zhan 08] L. Zhang, Q. Cheng, Y. Wang, and S. Zeadally. “A novel distributed sensor positioning system using de dual of target tracking”. *IEEE Trans. on Computers*, Vol. 57, No. 2, pp. 246–260, Feb. 2008.
- [Ziv 69] J. Ziv and M. Zakai. “Some lower bounds on signal parameter estimation”. *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 15, No. 3, pp. 386–391, May 1969.



---

## Résumé

Cette thèse porte sur l'étude des techniques d'estimation Bayésienne non-linéaire, et leur applications aux problèmes de synchronisation pour des systèmes de communication par satellite, ainsi qu'au calcul des bornes Bayésiennes pour le problème de synchronisation suréchantillonné. D'abord, on présente le filtrage de Kalman et les méthodes particulières, et l'on propose une nouvelle vue d'ensemble des méthodes déterministes. Ensuite, on établit la modélisation pour le problème de la synchronisation fractionné dans des systèmes satellite, et l'on calcule la borne de Cramér-Rao Bayésienne pour le problème d'estimation de phase, et la borne de Cramér-Rao hybride pour le problème d'estimation conjointe de phase et d'offset de fréquence. Dans un deuxième temps, on applique les méthodes de filtrage (Kalman, particulières et déterministes) aux problèmes d'estimation de phase, d'estimation conjointe de phase et d'offset de fréquence, d'estimation de délai et d'estimation de phase avec des bruits non-Gaussiens. Les méthodes proposées ont montré de bonnes performances pour nos problèmes de synchronisation.

On présente aussi dans cette thèse, trois études liées aux travaux principaux. Le premier concerne l'estimation conjointe des gains complexes et du délai dans un canal de Rayleigh à variations lentes pour des signaux CPM. Le deuxième présente l'utilisation des méthodes déterministes pour la localisation avec un réseau de capteurs. Et finalement, le troisième présente le couplage GNSS/INS ultra précis et une solution déterministes à cette problématique.

---

**Mots-clés :** GNSS, communications par satellite, estimation, filtrage Bayésien non-linéaire, synchronisation, localisation, filtrage de Kalman, méthodes particulières, méthodes déterministes, bornes de Cramér-Rao (CRBs), suréchantillonnage, GALILEO, BOC, couplage GNSS/INS.

---

## Abstract

This thesis deals with nonlinear Bayesian estimation methods, and its application to synchronization for satellite communications systems. Moreover, we compute Bayesian bounds for the oversampled synchronization problem. First, we introduce Kalman and particle filtering, and we propose a new overview of sigma-point filters. Then, we propose a modelisation for the oversampled synchronization problem, and we compute two Bayesian bounds : the Bayesian Cramér-Rao bound for phase estimation and the hybrid Cramér-Rao bound for joint phase and frequency offset estimation. We apply the nonlinear filtering methods (Kalman, particle and sigma-point filters) to solve the following problems : phase estimation, joint phase and frequency offset estimation, delay estimation and phase estimation with non-Gaussian noises. The proposed methods has shown good performances for our synchronization problems.

We also present in this thesis three studies related with the main problem treated overall the dissertation. The first one concerns the joint delay and complex gains estimation for a slowly varying Rayleigh channel for CPM signals. On the second one, we use sigma-point filtering techniques for sensor data fusion for positioning applications. Finally, we present a new approach to ultra-tight GNSS/INS integration and the solution using a cubature method.

---

**Key-words :** GNSS, satellite communications, estimation, nonlinear Bayesian filtering, synchronization, positioning, Kalman filtering, particle filters, sigma-point filters, Cramér-Rao bounds (CRBs), oversampling, GALILEO, BOC, GNSS/INS integration.

---

Laboratoire Grenoble Image Parole Signal Automatique (GIPSA-Lab)  
Département Image Signal (DIS), équipe Communication Signal et Sécurité (C2S)  
ENSE3, Domaine Universitaire, BP 46,  
38402 St-Martin-d'Hères Cedex, France