



**HAL**  
open science

# Modélisation analytique du transfert instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait et soumis à une source de chaleur en mouvement

Hamid Belghazi

► **To cite this version:**

Hamid Belghazi. Modélisation analytique du transfert instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait et soumis à une source de chaleur en mouvement. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université de Limoges, 2008. Français. NNT : . tel-00530322

**HAL Id: tel-00530322**

**<https://theses.hal.science/tel-00530322>**

Submitted on 28 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE LIMOGES

ECOLE DOCTORALE Science – Technologie – Santé

FACULTE des Sciences et Techniques

Thèse N° [ ]

Thèse pour obtenir le grade de  
Docteur de l'Université de Limoges

Discipline : *Matériaux et Procédés*  
Spécialité : *Céramiques et Traitement de Surfaces*

**Présentée et soutenue par**

M. Hamid BELGHAZI

Le 11 juillet 2008

Modélisation analytique du transfert instationnaire de la  
chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait et  
soumis à une source de chaleur en mouvement

JURY :

Rapporteurs :

**M'Hamed BOUZIDI**, Maître de conférences (HDR), Université Blaise Pascal, Clermont II

**Roger MARTIN**, Professeur, Université de Provence, Marseille

Examineurs :

**Joseph ABSI**, Professeur, ENSCI, Limoges

**Rachid BENNACER**, Maître de conférences (HDR), Université Cergy Pontoise (LEEVAM)

**Jean-Jacques BEZIAN**, Maître de conférences (HDR), Ecole des Mines d'Albi

**Jean-Claude LABBE**, Professeur, Université de Limoges

**Mohamed EL GANAOU**, Maître de conférences, Université de Limoges

**Bernard PATEYRON**, Ingénieur de Recherche CNRS, Docteur ès Sciences physiques

Invité :

**Jean-pierre Lecompte**, Professeur, ENSIL, Limoges

## *Dédicace*

*A mes grands parents*

*Mes parents*

*Mes frères et sœurs*

*Pour leur amour et soutien inconditionnel*

*leur patience,*

*et leurs encouragements*

*Ma future femme et futures enfants*

*A tous mes amis*

---

## *Remerciements :*

Ce travail de thèse a été mené au laboratoire Sciences des Procédés Céramiques et de Traitements de Surfaces (SPCTS), unité mixte de recherche UMR 6638, CNRS/Université de Limoges. Je tiens à remercier son directeur, Monsieur le professeur Thierry Chartier de m'y avoir accueilli.

J'exprime ma très sincère reconnaissance à mon directeur de thèse, Monsieur le professeur Jean Claude LABBE, responsable de l'axe II, pour avoir assuré la direction de ce travail, et pour avoir facilité le bon déroulement de cette thèse, ainsi que pour ses conseils et encouragements.

A l'ensemble des membres du jury, qui m'ont fait l'honneur d'accepter de juger mes travaux, tout particulièrement

Monsieur Roger MARTIN, Professeur à l'Université de Provence, Marseille

Et Monsieur M'Hamed BOUZIDI Maître de conférences (HDR) à l'Université Blaise Pascal, ClermontII, qui ont examiné ce travail, et qui en sont les rapporteurs, et m'ont fait part de leurs observations constructives,

Monsieur Joseph ABSI, Professeur, l'ENSCI-Limoges,

Monsieur Jean-Jacques BEZIAN, Maître de conférences (HDR), l'Ecole des Mines d'Albi,

J'adresse mes sincères et respectueux remerciements.

Je remercie Monsieur Mohammed El GANAOU, maître de conférences à l'université de Limoges, d'avoir assuré l'encadrement de ce travail et pour m'avoir donné recommandations, et conseils au cours de cette thèse. Je l'admire pour son énergie et pour sa disponibilité: soirs, weekends et jours fériés.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur Bernard PATEYRON, ingénieur de recherche CNRS, pour son soutien, ses encouragements, conseils et moyens mis à ma disposition.

J'exprime ma gratitude à Monsieur Rachid BENNACER, qui m'a apporté son soutien, ses conseils et remarques pertinentes lors de nos discussions. Avec lui aimer la recherche devient spontané.

Je remercie Monsieur le Professeur Abbas Chazad MOVAHHEDI, directeur de l'école doctorale, et Madame Gaëlle PEYRAT, pour leurs encouragements et conseils lors des réunions des membres du conseil de l'Ecole doctorale STS où j'étais représentant des doctorants, ainsi que pour la qualité des formations reçues et le soutien de l'Ecole doctorale STS pour la participation à des congrès internationaux.

J'exprime ma sincère amitié à tous les enseignants, étudiants et doctorants que j'ai côtoyés durant ces années et qui, par leur conseil et leur sympathie, ont su rendre agréable le travail au sein de cette équipe, en particulier à Monsieur Nicolas CALVE Ingénieur Informaticien, qui est indispensable et « médecin » de notre principal outil de travail.

---

## Table des matières

Table des matières .....	1
Liste des figures.....	9
Liste des tableaux.....	5
Introduction générale .....	21
Références .....	25
Chapitre I : Etude bibliographique .....	29
I.1. Introduction .....	31
I.2. Généralités sur les transferts de chaleur .....	31
I.2.1. Approche thermodynamique.....	31
I.2.2. Les principaux modes de transfert de chaleur .....	32
I.2.2.2. Convection .....	33
I.2.2.3. Rayonnement.....	34
I.3. Paramètres influençant la conduction.....	35
I.3.1. Propriétés thermophysiques .....	35
I.3.2. Conductivité thermique des solides .....	35
I.4. Les facteurs influençant la conductivité thermique .....	36
I.4.1. La température .....	36
I.4.2. L'humidité.....	37
I.4.3. La pression .....	37
I.5. Modélisation.....	38
I.5.1. Equation de la chaleur .....	38
I.5.1.1. Conditions de l'unicité .....	38
I.5.1.2. Conditions aux limites spatiales et temporelles .....	38
I.5.2. Les différentes méthodes analytiques .....	40
I.6. La technologie laser.....	41
I.6.1. Les traitements thermiques et thermochimiques de surface .....	41
I.6.2. Traitements mécaniques de surface (choc laser) .....	41
I.7. Spécificités des faisceaux lasers .....	42
I.7.1. Application aux traitements de surfaces .....	42
I.7.1.1. Les types de laser .....	42
I.7.2. Procédés de traitement.....	43
I.7.2.1. Traitements en régime thermique .....	43
I.7.2.2. Vitesse de chauffage et vitesse de refroidissement.....	44
I.7.2.3. Vitesse de solidification.....	45
I.8. Applications des lasers aux traitements de surface.....	46
I.8.1. Interaction laser-matière .....	46
I.8.1.1. Paramètres de l'interaction .....	46
I.8.1.2. Effets de l'interaction laser-matière.....	47
I.9. Description des procédés de projection thermique.....	48
I.9.1. Principe de base .....	50
I.9.2. Formation du dépôt.....	52
I.9.3. Les principaux types de projection thermique.....	52
I.9.3.1. Flamme simple.....	52
I.9.3.2. Projection à l'arc .....	52
I.9.3.3. Projection plasma .....	52
I.10. Conclusion .....	53
Références .....	54
Chapitre II : Methodes analytiques .....	67
II.1. Introduction .....	69

II.2. Cas d'un matériau bicouche en contact imparfait .....	69
II.2.1. Description du problème physique .....	70
II.2.2. Mise en équation .....	71
II.2.3. Résolution par la méthode de séparation des variables .....	72
II.2.3.1. Calcul des valeurs propres .....	74
II.2.3.2. Résistance thermique de contact .....	76
II.2.4. Validation du modèle .....	77
II.2.4.1. La méthode de la transformée de Laplace .....	77
II.2.4.2. Cas deux milieux semi-infinies en contact thermique imparfait .....	78
II.2.5. Application dans le domaine des traitements de surface .....	80
II.3. Extension au cas d'une source de chaleur en mouvement .....	84
II.3.1. Problème physique et formulation mathématique .....	84
II.3.1.1. Répartition du flux incident .....	85
II.3.1.2. Formulation mathématique .....	85
II.3.2. Elaboration d'une solution analytique .....	86
II.3.2.2. Estimation des coefficients de transferts de $h_1$ et de $h_2$ .....	88
II.4. Cas 2D sans terme source .....	92
II.4.1. Formulation caractéristique et méthode de résolution .....	93
II.4.1.2. Résolution analytique .....	94
II.4.2. Validation du modèle .....	95
II.5. quelques résultats .....	97
II.5.1. Résultats dans le cas 2D homogène .....	98
II.5.2. Etude paramétrique .....	98
II.5.2.1. Effet du rapport de conductivité $k_2/k_1$ .....	98
II.5.2.2. Effets du rapport $h_2/h_1$ .....	100
II.5.2.3. Effets du rapport $a_2/a_1$ .....	101
II.5.3. Evolution de la température à l'interface .....	103
II.5.3.1. Cas du contact thermique parfait ( $RTC = 0$ ) .....	103
II.5.3.2. Cas de contact thermique imparfait ( $RTC \neq 0$ ) .....	103
II.6. Cas 2D avec terme source .....	106
II.6.1. Application d'un flux de type flash .....	106
II.6.1.1. Formulation .....	107
II.6.1.2. Quelques résultats .....	107
II.6.2. Réponse à un flux laser gaussien continu .....	112
II.6.3. Matériau thermiquement mince .....	116
II.7. Conclusion .....	117
Références .....	118
Chapitre III : Diffusion de la chaleur dans un matériau poreux .....	125
III.1. Introduction .....	125
III.2. Modélisation du phénomène .....	127
III.3. Applications du modèle à un cas réel .....	128
III.3.1. Estimation de certains paramètres opérationnels .....	129
III.3.1.1. Estimation de conductivité thermique effective .....	129
III.3.1.2. Estimation de la porosité théorique .....	132
III.3.1.3. Coefficients d'échange .....	133
III.3.1.4. Données thermophysiques .....	133
III.3.2. Quelques simulations du problème étudié .....	133
III.3.3. Application au frittage .....	141
III.4. Conclusion .....	143
Références .....	145
Chapitre IV: Changement de phase solide-liquide .....	151
V.1. Introduction .....	151
IV.2. Le problème de Stefan .....	151

## Table des matières

---

IV.3. Mise en équations du problème .....	152
IV.4. Méthodes analytiques .....	154
IV.4.1. Solutions approchées .....	154
IV.4.2. Solutions exactes .....	155
IV.5. Solutions analytiques sans flux .....	156
IV.5.1. Solution analytique dans le cas d'un domaine semi-infini .....	156
IV.5.1.1. modèle mathématique .....	156
IV.5.1.2. Résultats et discussions .....	158
IV.5.2. Solution analytique dans un domaine borné .....	160
IV.6. Solutions analytiques avec flux .....	162
IV.6.1. Cas de domaine semi-infini .....	162
IV.6.1.1. Résultats et discussions .....	165
IV.6.1.2. Effet de la densité de flux .....	165
IV.6.1.3. Conditions aux limites de type densité de flux en mouvement .....	168
IV.6.2. Domaine borné soumis à un flux .....	168
IV.7. La solidification .....	171
IV.8. Conclusion.....	172
Références .....	173
Chapitre V: Conclusions et Perspectives.....	176

---

**Nomenclature**

$a_i$	épaisseur de la couche $i$	[m]
$A_i$	coefficient d'absorption du laser par la couche $i$	[-]
$A_s$	coefficient d'absorption du laser par la phase solide	[-]
$A_L$	coefficient d'absorption du laser par la phase liquide	[-]
$Biot_i$	nombre de biot : $Biot_i = h_i a_i / k_i$	[-]
$C_n$	constante fonction de $n$ (cas 1D)	
$C_{nm}$	constante fonction de $n$ et $m$ (cas 2D)	
$C_{p_i}$	capacité calorifique de la couche $i$	[J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]
$\rho_s$	capacité calorifique de la phase solide	[J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]
$C_{p_l}$	capacité calorifique de la phase liquide	[J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]
$D$	constante (eq 2.52).	
erf	fonction erreur	[-]
erfc	fonction erreur complémentaire	[-]
$f_i$	température initiale dans la couche $i$ $f_i = T_{amb} - T_i(y,0)$	[K]
$F(t)$	front de fusion	[m]
$F_\infty$	constante définie dans eq 4-b.25	[m]
$G_i$	fonction temporelle dans la couche $i$	[-]
$g$	terme source volumique	[W.m <sup>-3</sup> ]
$Gr$	nombre de Grashof	[-]
$H_{L_s}$	chaleur latente de solidification	[J.kg <sup>-1</sup> ]
$H_f$	chaleur latente de fusion	[J.kg <sup>-1</sup> ]
$h_i$	coefficient de transfert entre le milieu ambiant et la couche $i$	[W.m <sup>2</sup> .K <sup>-1</sup> ]
$k_i$	conductivité thermique de la couche $i$	[W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]
$k_s$	conductivité thermique de la phase solide	[W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]
	conductivité thermique du liquide	[W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]



## Nomenclature

---

$k_i$		
$k_m$	conductivité thermique du melange	$[W.m^{-1}.K^{-1}]$
$k_{eff}$	conductivité thermique effective	$[W.m^{-1}.K^{-1}]$
$k_D$	conductivité thermique du matériau dense	$[W.m^{-1}.K^{-1}]$
$L$	épaisseur du domaine	$[m]$
$L_{sl}$	chaleur latente de fusion	$[J.kg^{-1}]$
$L_{lv}$	chaleur latente d'ébullition	$[J.kg^{-1}]$
$N_n$	nième norme suivant y (cas 1D)	
$N_{y,nm}$	mnième norme suivant y ( cas 2D)	
$N_u$	nombre de Nusselt	$[-]$
$P_0$	puissance	$[W]$
$P$	densité de puissance définie dans eq 2.44.	
$P_r$	nombre de Prandlt	$[-]$
$p_e$	nombre de peclet	$[-]$
$q_x$	densité de flux suivant l'axe des x	$[W.m^{-2}]$
$q_y$	densité de flux suivant l'axe des y	$[W.m^{-2}]$
$q_z$	densité de flux suivant l'axe des z	$[W.m^{-2}]$
$q_{cond}$	densité de flux conductive	$[W.m^{-2}]$
$q_{conv}$	densité de flux convective	$[W.m^{-2}]$
$q_{rad}$	densité de flux radiative	$[W.m^{-2}]$
$q_s$	terme source dans la phase solide	$[W.m^{-3}]$
$q_f$	terme source dans la phase fluide	$[W.m^{-3}]$
$q_m$	terme source dans le melange	$[W.m^{-3}]$
$q_1$	terme source dans la première couche	$[W.m^{-3}]$
$q_2$	terme source dans la deuxième couche	$[W.m^{-3}]$
		$[W.m^{-2}]$
$q$	densité de flux à la surface	
$R_{in}(\lambda_{i,n})$	fonction adimensionnelle de valeurs propres $\lambda_i$	

## Nomenclature

---

$r_0$	rayon de la Gaussienne à $1/e^2$	[m]
RTC	résistance thermique de contacte	[K.m <sup>2</sup> .W <sup>-1</sup> ]
Ste	nombre de stefan	
$T_{10}$	température initiale de la première couche	[K]
$T_{20}$	température initiale de la seconde couche	[K]
$T_{amb}$	température ambiante	[K]
$T_{eq}$	température d'équilibre	[K]
$T_f$	température du fluide	[K]
$T_F$	température de fusion	[K]
$T_m$	température du mélange	[K]
$T_{init}$	température initiale uniforme dans la bicouche [K]	
$T_s$	température de la surface	[K]
$T_v$	température de vaporisation	[K]
t	temps	[s]
$t_0$	temps de raccordement e q 4-b.32	[s]
$t_f$	temps nécessaire pour atteindre $T_f$ à la surface	[s]
$t_v$	temps nécessaire pour atteindre $T_v$ à la surface	[s]
v	vitesse de balayage laser	[m.s <sup>-1</sup> ]
$X_i$	fonction suivant x dans la couche i	
$Y_i$	fonction suivant y dans la couche i	
$X_{i\ ad}$	fonction adimensionnelle suivant x dans la couche i	
$Y_{i\ ad}$	fonction adimensionnelle suivant y dans la couche i	

## Symboles Grecs

$\alpha_i$	diffusivité thermique de la couche i	[m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> ]
$\beta_i$	valeurs propres adimensionnelles $\beta_i = a_i \lambda_i$	[-]

## Nomenclature

---

$\beta_0$	paramètre définie dans eq 4-b.33	[-]
$\gamma$	$a_2/a_1$	
$\varphi$	taux de porosité	[%]
$\Phi_n(t)$	fonction temporelle (cas 1D)	
$\Phi_{nm}(t)$	fonction temporelle (cas 2D)	
$\Omega_f$	viscosité dynamique	[kg.m <sup>-1</sup> .s <sup>-1</sup> ]
$\kappa$	$k_2/k_1$	
$\lambda_{i,n}$	valeurs propres suivant y dans la couche i (cas 1D)	
$\lambda_{i,mn}$	valeurs propres suivant y dans la couche i (cas 2D)	
$\mu_i$	valeurs propres suivant x dans la couche i	
$\rho_i$	masse volumique de la couche i	[kg.m <sup>-3</sup> ]
$\rho_s$	masse volumique de la phase solide	[kg.m <sup>-3</sup> ]
$\rho_l$	masse volumique de la phase liquide	[kg.m <sup>-3</sup> ]
$\rho_i$	masse volumique de la couche i	[kg.m <sup>-3</sup> ]
$\lambda_{i,n}$	n <sup>ieme</sup> valeur propre suivant y	[m <sup>-1</sup> ]
$\varepsilon_i$	coefficient de transmission de la couche i	
$\varepsilon$	fonction empirique comprise entre 0 et 1	
$\sigma$	constante de Stefan-Boltzmann	[W.m <sup>-2</sup> .K <sup>-4</sup> ]
$\theta_i$	différence de température : $\theta_i = T_{amb} - T_i$	[K]
$\Theta$	différence de température adimensionnelle $\Theta = \theta_i / \theta_0$	[-]
$\theta_s$	différence de température à la surface : $\theta_s = T_s - T_0$	[K]
$\theta_L$	différence de température dans le liquide: $\theta_L = T_L - T_0$	[K]
$\theta_f$	différence de température de fusion : $\theta_f = T_f - T_0$	[K]
$\theta_w(t)$	température à la surface du solide eq 4-c.6	[K]
$\theta_{Lw}(t)$	température à la surface du liquide eq 4-c.18	[K]
$\tau$	temps adimensionnel $\tau = \alpha_1.t / a_1^2$	
$\xi$	longueur adimensionnelle de l'échantillon : $\xi = x/a_1$	[-]
$\psi$	longueur adimensionnelle de l'échantillon : $\psi = y/a_1$	[-]
$\delta$	fonction de Dirac	

## Indices

$i$	indice de la couche i
$m$	nombre entier
$n$	nombre entier

w	surface de la phase solide
Lw	surface de la phase liquide

### Liste des figures

Figure 1-1: Représentation sur un élément de volume, du flux thermique dans les trois directions.	32
Figure 1-2: Transfert de chaleur par convection à la surface d'un solide .....	34
Figure 1-3: Transfert de chaleur par rayonnement à la surface d'un solide .....	34
Figure 1-4: Conductivité thermique des métaux et alliages d'après [62] .....	37
Figure 1-5: Exemples de conditions aux limites .....	39
Figure 1-6: Saut de température due à la résistance thermique de contact .....	40
Figure 1-7: Représentation de l'irradiation laser d'un substrat .....	43
Figure 1-8: Effet sur un matériau de l'exposition à un faisceau laser de densité de puissance et de durée d'interaction données [48]. .....	48
Figure 1-9: Comparaison de la température d'utilisation en fonction de la vitesse des particules dans les différents procédés de projection thermique .....	49
Figure 1-10: Principe de la projection thermique .....	50
Figure 1- 11: Division du procédé de la projection thermique en trois zones .....	51
Figure 1-12: Formation de splat sur un substrat .....	51

Figure 1-13: Formation d'un dépôt par une succession de splat.....	52
Figure 1-14: Schéma de principe de la projection plasma par arc soufflé.....	53
Figure 2-1: Schéma simplifié du modèle du problème physique de conduction.....	71
Figure 2-2: Représentation graphique des valeurs propres .....	75
Figure 2-3: Transfert de chaleur à l'interface de deux solides en contact imparfait.....	77
Figure 2-4: Deux corps semi-infinis en contact imparfait.....	78
Figure 2- 5: Validation de notre modèle par la solution obtenue par la transformée .....	80
Figure 2-6: Estimation de la résistance thermique de contact pour une lamelle étalée de zircon liquide sur substrat de zircon non préchauffé .....	81
Figure 2-7: Estimation de la résistance thermique de contact pour une lamelle étalée de zircon liquide sur substrat de zircon préchauffé à 520 K.....	81
Figure 2-8: $RTC=0 \text{ m}^2.K.W^{-1}$ .....	83
Figure 2- 9: $RTC = 10^{-8} \text{ m}^2.K.W^{-1}$ .....	83
Figure 2- 10: $RTC= 5.10^{-6} \text{ m}^2.K.W^{-1}$ .....	83
Figure 2-11: Le saut de température $T_1(0,t)-T_2(0,t)$ en fonction temps, pour la $RTC=5.10^{-6} \text{ m}^2.K.W^{-1}$ .....	83
Figure 2-12: Schéma simplifié du problème physique modélisé (bicouche soumis à une source de chaleur gaussienne en mouvement).....	85
Figure 2-13: Tansmission et répartition de l'énergie laser dan un matériau bicouche dont le dépôt est de type film mince. ....	85
Figure 2-14: Principe de modélisation de l'évolution de la température en un point de la surface soumis à un flux laser Gaussien en mouvement. ....	86
Figure 2-15: Comparaison des résultats analytiques et numériques, de l'évolution de température en un point de surface dépôt du couple cuivre/alumine: $A_1=0.2$ , $h_1=15 \text{ W.m}^{-2}.K^{-1}$ , $h_2=0.0 \text{ W.m}^{-2}.K^{-1}$ $TCR=10^{-5} \text{ m}^2.K.W^{-1}$ , $P =50 \text{ W}$ , $r_0=1 \text{ mm}$ , $V=2 \text{ m m.s}^{-1}$ , $T_{init}=300 \text{ K}$ .....	89
Figure 2-16: Evolution dans le temps, de la température $T_1(y=0^+,t)$ et $T_2(y=0^-,t)$ de part et d'autres de l'interface ( $y=0$ ), dans le bicouche (dépôt de cuivre dense/substrat en alumine), sous les conditions suivantes: $RTC=10^{-4} \text{ m}^2.K.W^{-1}$ , $T_{init}=300 \text{ K}$ , $h_1=15\text{W.m}^{-2}.K^{-1}$ , $V=2 \text{ mm.s}^{-1}$ , $P_0=10\text{W}$ , $r_0=0.5\text{mm}$ , $A_1=0.2$ , $A_2=0$ .....	90
Figure 2-17: Effet de la RTC sur l'évolution de la temperature dans le temps, $T_1(y=a_1,t)$ en un point de la surface du dépôt, pour le bicouche cuivre/alumine: $A_1=0.20$ , $h_1=15 \text{ W.m}^{-2}.K^{-1}$ , $h_2=0.0$ $\text{W.m}^{-2}.K^{-1}$ , $P=20 \text{ W}$ , $r_0=1 \text{ mm}$ , $V=1 \text{ mm.s}^{-1}$ , $T_{init}=300 \text{ K}$ .....	91
Figure 2-18: Évolution de la tempéature du couple cuivre/alumine, au point $T(y=a_1,t)$ pour différentes valeurs de la vitesse et sous les conditions suivantes: $RTC=10^{-6} \text{ m}^2.K.W^{-1}$ , $T_{init}=300\text{K}$ , $P_0=50 \text{ W}$ , $r_0=2.5\text{mm}$ , $A_1=0.2$ , $A_2=0$ . ....	91
Figure 2-19 : Évolution de la température du couple cuivre/alumine, au point $T(y=a_1,t)$ pour différentes valeurs de la puissance du laser et sous les conditions suivantes: $V= 1\text{mm.s}^{-1}$ , ..	92
Figure 2- 20: Schéma simplifié du problème de conduction en 2D, avec les dimensions et conditions aux limites.....	93
Figure 2-21: Schéma simplifié du problème de conduction en 2D, avec les dimensions et conditions aux limites [7].....	95
Figure 2- 22: Résultats de F. De Monte [4]; (a) $\tau =0.5$ ; (b) $\tau =2$ .....	96
Figure 2-23: Résultats de notre modèle; (a) $\tau = 0.5$ ; (b) $\tau =2$ .....	96
Figure 2- 24: Résultats distributions de la température à $\tau=0.5$ .....	97
Figure 2- 25: La distribution du gradient thermique dans le bicouche .....	97
Figure 2- 26: Evolution de la température dans le bicouche dans le cas où les deux pièces sont de même nature, et $RTC=0$ ; (a) à $\tau = 0.5$ , (b) à $\tau = 1.5$ .....	98
Figure 2- 27: Evolution de la temperature dans le bicouche en fonction du rapport de conductivites thermiques $k_2/k_1$ , en $x=-a_1$ , $x=0$ et $x=a_2$ .....	99
Figure 2- 28: Evolution de la température dans le bicouche pour différentes valeurs du rapport de conductivité thermiques des deux couches en contact.....	99
Figure 2- 29: Evolution de température dans le bicouche à l'instant $\tau =0.5$ , pour deux valeurs limites du rapport $k_2/k_1$ . (a) $k_2/k_1=0.1$ , (b) $k_2/k_1=10$ .....	100

Liste des figures

Figure 2-30: Evolution de la température suivant l'axe des x pour différentes valeurs du rapport $h_2/h_1$ .....	101
Figure 2-31: Les isothermes dans le bicouche à $\tau = 0.5$ . pour (a) $h_2/h_1=0.1$ et (b) $h_2/h_1=100$ .....	101
Figure 2-32: Distribution de la température dans le bicouche suivant l'axe des x pour différentes valeurs du rapport $a_2/a_1$ .....	102
Figure 2-33: La distribution des isothermes dans le bicouche.....	103
Figure 2-34: Evolution de la température à l'interface du bicouche.....	103
Figure 2- 35: Effet de la résistance thermique de contact .....	104
Figure 2- 36: Distribution de la température dans le bicouche, à l'instant $\tau=0.5$ , pour différentes valeurs de la résistance thermique de contact.....	104
Figure 2-37: Distribution spatiale de la température dans le bicouche, à différents instants ( $\tau=0.5$ ; 1 ; 1.5 ; 2), pour une valeur de la résistance thermique de contact $R_c = 1$ .....	105
Figure 2-38: Evolution du saut de température à l'interface en fonction du temps, pour différentes valeurs de la résistance thermique de contact.....	105
Figure 2- 39: (a) la température de part et d'autre de l'interface à $\tau=0.5$ , et $R_c=0.5$ (b) saut de température à l'interface du bicouche à $\tau =0.5$ et $R_c = 0.5$ .....	106
Figure 2- 40: Représentation schématique du problème en 2D tenant compte de la RTC et un flux laser en mouvement .....	107
Figure 2-41: Distribution verticale de $T(x=b/2,y,t=20 \text{ s})$ , pour $RTC=10^{-4}m^2.K.W^{-1}$ .....	109
Figure 2- 42: Réponse thermique à une impulsion de type Gaussien, à la surface du bicouche (étain/aluminium) dans le cas isotherme (a) à différents instants $T(x, y=a_1, t)$ , (b) à $T(x=b/2,y, t=10 \text{ s})$ et $RTC=10^{-5} m^2.^\circ C.W^{-1}$ .....	109
Figure 2- 43: Réponse thermique à une impulsion de type Gaussien, à la surface du Bicouche (étain/aluminium) dans le cas isotherme. Champs thermique $T(x, y =0, t =10 \text{ s})$ de part et d'autre de l'interface pour : (a) $RTC=10^{-5} m^2.^\circ C.W^{-1}$ , (b) $RTC=10^{-4} m^2.^\circ C.W^{-1}$ .....	110
Figure 2- 44: Distribution verticale de la Température à $t=20 \text{ s}$ , pour $RTC=10^{-4} m^2.^\circ C.W^{-1}$ , .....	110
Figure 2- 45: Evolution de l'écart de température ( $T_2-T_1$ ) en ( $x=b/2,y=0$ ) du bicouche étain/aluminium en fonction du temps et pour différentes valeurs de RTC. ....	111
Figure 2- 46: Réponse thermique à une impulsion de type Gaussien, à la surface du bicouche (étain/aluminium) dans le cas isotherme. ....	111
Figure 2- 47:La réponse thermique $T(x, y, t=0.1s)$ du bicouche (étain/aluminium), dans le Cas isotherme, à une sollicitation par flux laser du type gaussien (flash), avec $RTC=10^{-5} m^2.K.W^{-1}$ .....	112
Figure 2- 48: distribution de la temperature dans le bicouche, soumis à une source de chaleur de type gaussien.....	115
Figure 2- 49: evolution de la temperature dans le bicouche à différents instants.....	115
Figure 2- 50: Représentation imagée de la distribution de température dimensionnelle dans le bicouche soumis à un flux de chaleur gaussien, à deux instants différents. à $\tau=0.2$ ; (b) à $\tau =0.5$ .....	116
Figure 2- 51: Cartographie des isothermes dans le bicouche suite à une sollicitation de type gaussienne à deux instants différents ; à $\tau =0.2$ ; (b) à $\tau =0.5$ . ....	116
Figure 3- 1: Les deux principaux procédés de revêtement par traitement laser.....	126
Figure 3- 2 : Fabrication de pistes électronique.....	126
Figure 3- 3: Traitement par laser d'une couche granulaire de cuivre sur un substrat en alumine. ....	127
Figure 3- 4: Représentation schématique d'un bicouche avec dépôt granulaire soumis à une flux laser gaussien.....	127
Figure 3- 5: Schéma simplifié du problème physique dans le cas d'un dépôt poreux granulaire ..	129
Figure 3-6: Microanalyse MEB des poudres de cuivre [1] : a) poudre fine, b) détail d'un grain, c) poudre intermédiaire, d) détail d'un grain, e) poudre grossière, f) détail d'un grain.....	131
Figure 3- 7: Conductivité thermique effective de la couche poreuse en fonction du pourcentage de porosité. ....	132
Figure 3- 8: Empilement dans le plan de disques en réseaux carré et hexagonal .....	133

Figure 3- 9: Empilements de sphères en 3 dimensions.....	133
Figure 3- 10: Effet de la RTC sur l'évolution de la température $T_1(y=a_1,t)$ on un point de la surface du dépôt en fonction du temps, pour le bicouche cuivre/alumine: $A_1=59\%$ , $h_1=15 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ , $h_2=0.0 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ , $P_0=10 \text{ W}$ , $r_0=0.5 \text{ mm}$ , $V=1 \text{ m m.s}^{-1}$ , $T_{\text{init}}=300^\circ\text{C}$ , $\phi=30\%$ .....	134
Figure 3- 11: Evolution des températures à l'interface, $y=0$ , $T_1(y=0^+,t)$ et $T_2(y=0^-,t)$ en fonction du temps, pour le bicouche(poudre de cuivre/alumine), et: $\text{RTC}=10^{-4} \text{ m}^2.\text{K.W}^{-1}$ , $T_{\text{init}}=300\text{K}$ , $\phi=30\%$ , $h_1=15\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ , $V=2 \text{ mm.s}^{-1}$ , $P_0=15\text{W}$ , $r_0=0.5\text{mm}$ , $A_1=0.2$ , $A_2=0$ .....	135
Figure 3- 12: Effet de la RTC sur le saut de température ( $T_1(y=0^+,t)-T_2(y=0^-,t)$ ) de part et d'autre de l'interface interface( $y=0$ ) en fonction du temps, pour le matériau bicouche (poudre de cuivre/alumine), sous les conditions suivantes: $T_{\text{init}}=300^\circ\text{C}$ , $\phi=30\%$ , $h_1=15 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ , $V=1 \text{ mm.s}^{-1}$ , $P_0=10\text{W}$ , $r_0=0.5\text{mm}$ , $A_1=0.59$ , $A_2=0$ .....	136
Figure 3-13: Evolution de la température $T_1(a_1, t)$ en fonction du temps, pour différents pourcentages de la porosité du dépôt: $\text{RTC}=10^{-6} \text{ m}^2.\text{K.W}^{-1}$ , $h_1=15\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ , $T_{\text{init}}=300\text{K}$ , $V=1 \text{ mm.s}^{-1}$ , $P_0=10 \text{ W}$ , $r_0=0.5\text{mm}$ , $A_1=0.59$ , $A_2=0$ .....	136
Figure 3- 14: Evolution de la température $T_1(a_1, t)$ en fonction du temps, pour différentes valeurs de la porosité du dépôt, sous les conditions suivantes: $\text{TCR}=10^{-5} \text{ m}^2.\text{K.W}^{-1}$ , $h_1=15\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ , $T_{\text{init}}=300\text{K}$ , $P_0=10 \text{ W}$ , $r_0=0.5\text{mm}$ , $A_1=0.59$ , $A_2=0$ , $\phi=20\%$ .....	137
Figure 3- 15: Evolution de la température spatio-temporelle dans le dépôt.....	138
Figure 3- 16: Evolution de la température spatio-temporelle dans le substrat.....	138
Figure 3- 17: Evolution spatio-temporelle de la température dans le bicouche pour $V=1 \text{ mm.s}^{-1}$ et $\text{RTC}=10^{-5} \text{ m}^2.\text{K.W}^{-1}$ .....	139
Figure 3- 18 : Evolution spatio-temporelle de la température dans le bicouche pour.....	139
Figure 3- 19 : Flux incident à la surface du dépôt.....	140
Figure 3- 20 : flux radiatif à la surface du dépôt.....	140
Figure 3- 21 : Flux conductif à la surface du dépôt.....	141
Figure 3- 22 : Flux convectif à la surface du dépôt.....	141
Figure 3- 23: Principe du spark plasma sintering.....	141
Figure 3- 24: Echantillon à fritter et conditions aux limites.....	142
Figure 3- 25: Evolution temporelle de la température à la surface irradiée.....	142
Figure 3- 26: Evolution spatiale de la température de l'échantillon à $t = 1\text{s}$ .....	143
Figure 4-1: Schématisation du phénomène de changement de phase, de fusion et solidification.....	153
Figure 4- 2: Evolution de l'interface liquide-solide, problème plan-température de paroi imposée: comparaison des différentes méthodes.....	155
Figure 4-3: Schéma simplifié du problème de changement de phase dans un milieu semi-infini.....	156
Figure 4-4: Illustration schématique du problème de Stefan.....	157
Figure 4-5: Front de fusion en fonction du temps pour l'étain pur, soumis à en $x=0$ à une température imposée $T= 550 \text{ K}$ .....	158
Figure 4-6: Front de fusion en fonction du temps pour l'étain et l'aluminium, soumis à une température imposée en $x=0$ , $T=550 \text{ K}$ pour l'étain, et $T= 950 \text{ K}$ l'aluminium.....	159
Figure 4-7: Front de fusion en fonction du temps pour les matériaux (Al, Cu et Ag), soumis à une température imposée en $x=0$ $T= 1400 \text{ K}$ .....	159
Figure 4- 8: Evolution de la vitesse du front de fusion de l'aluminium en fonction du temps.....	160
Figure 4- 9: Evolution de la vitesse du front de fusion en fonction de la position du front.....	160
Figure 4-10: Evolution en fonction du temps de la profondeur de fusion de trois matériaux (Al, Cu et Ti) pour une densité de flux $q= 10^9 \text{ W.m}^{-2}$ .....	166
Figure 4- 11: Evolution du front de fusion en fonction de la densité de flux à l'instant $t=15 \text{ s}$ .....	166
Figure 4- 12: Evolution de la vitesse du front de fusion en fonction du temps pour une densité de flux $q=10^9 \text{ W.m}^{-2}$ .....	167
Figure 4- 13: Evolution de la température en fonction du temps à la surface du cuivre, pour une densité de flux $q=10^9 \text{ W.m}^{-2}$ .....	167
Figure 4-14: Distribution de la température à différents instants, dans une pièce d'aluminium irradié par un laser de densité de puissance $q=7.10^8 \text{ W.m}^{-2}$ .....	168

## Liste des figures

---

Figure 4- 15: Changement de phase dans matériau solide soumis à un flux à la surface .....	169
Figure 4- 16: Evolution du front de fusion en fonction du temps pour $q = 0 \text{ W.m}^{-2}$ .....	171
Figure 4- 17: Croissance cristalline dans le cas de solidification rapide, et lente .....	172

## Liste des tableaux

Tableau 2- 1: Dimensions et conditions aux limites.....	75
Tableau 2- 2 : Propriétés thermophysiques moyennes des matériaux étudiés .....	75
Tableau 2-3: Précision de calcul des valeurs propres .....	76
Tableau 2- 4 : Conditions aux limites.....	108
Tableau 2- 5 : Propriétés thermophysiques des .....	108
Tableau 4- 1: Valeurs du nombre de Stefan pour différents matériaux à changement de phase (MCP).....	154
Tableau 4-2: Propriétés thermophysiques des matériaux utilisés .....	158
Tableau 4- 3: Propriétés thermophysiques des matériaux (Al, Cu, et Ti ), [18-20] .....	165
Tableau 4- 4: Coefficients d'absorption.....	165
Tableau 4-5: les temps nécessaires à la fusion et la vaporisation de certains métaux (aluminium, cuivre et titane), pour différentes valeurs de la densité de flux.....	166



**Introduction générale**



## Introduction générale

La modélisation d'un problème physico-chimique, consiste en la formulation mathématique des différents phénomènes intervenant dans le processus, sous forme d'équations aux dérivées partielles couplées. Ces équations sont le plus souvent à plusieurs variables, et non homogènes, ce qui rend leur résolution analytique très délicate. Les méthodes numériques souvent utilisées ne fournissent que des solutions approximatives, et le besoin en solutions analytiques (dites solutions exactes) ne cesse de se développer. Ces dernières décennies, l'apparition et le développement de logiciels de calcul formel a naturellement amplifié le phénomène.

La modélisation des problèmes liés aux phénomènes de transferts en général et de la thermique en particulier est primordiale, d'une part, pour la phase étude ou conception d'un produit, et d'autre part, pour le suivi du produit en phase de fonctionnement. Parallèlement aux progrès technologiques, des avancées importantes ont vu le jour dans le domaine des transferts de chaleur et de masse, et les sciences liées à la thermique en particulier et cette discipline se développe depuis quelques décennies à un rythme élevé dans de nombreux secteurs: nucléaire, spatial, aéronautique, automobile, pétrochimie, etc.

Le laboratoire: **Sciences des Procédés Céramiques et de Traitements de Surface (SPCTS)**, étudie depuis de nombreuses années le transfert de chaleur et de masse de façon théorique et expérimentale [1-52]. En fait, les traitements de surface par laser ou par projection plasma peuvent procurer aux matériaux traités des propriétés : anti-usure et anti-corrosion par exemple. Elles sont d'applications courantes depuis près d'un demi-siècle dans plusieurs domaines de pointe : aéronautique, spatial, nucléaire, ainsi que dans les secteurs de l'automobile, du textile, de la chimie, de la pétrochimie, de l'électronique et du biomédical. Ces procédés permettent d'apporter des solutions à des problèmes de corrosion, d'usure, de fatigue, de protections électromagnétique et thermique [19-21], par l'élaboration de revêtements de plus en plus élaborés. La projection thermique est actuellement utilisée pour la synthèse de nouveaux matériaux [21] dans des domaines où une grande pureté du produit est nécessaire.

Le champ d'application de la technologie laser est très vaste, allant de la chirurgie des yeux dans le domaine médical, jusqu'aux applications de découpage et de fusion des métaux dans les industries lourdes.

Les phénomènes physico-chimiques liés aux processus de traitement par laser ou projection plasma, sont nombreux, complexes, et dans la plupart des cas, l'accès à la mesure de certains paramètres pertinents (température, flux thermique...etc.) sont difficilement accessibles, voir même impossible lorsqu'il s'agit de caractériser l'interface d'un bicouche ou la température dans une couche mince par exemple. Devant toutes ces difficultés expérimentales, l'intérêt de la modélisation est majeur, car cette dernière permet moyennant des outils simples (codes de laboratoires ou commerciaux) de modéliser et de simuler la plupart des phénomènes physico-chimiques.

Dans le laboratoire SPCTS, l'un des sujets les plus étudié en traitement de surface est le transfert de chaleur et de masse dans des matériaux bicouches, rencontrés souvent sous forme de dépôt /substrat.

Le but de cette thèse est de recueillir et d'établir des solutions analytiques simplifiées de transfert instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait et soumis à une source de chaleur en mouvement. Il s'agira d'établir des estimations théoriques de l'évolution et la distribution du champ thermique dans le bicouche, en particulier à l'interface dans le cas de matériau hétérogène, et d'étudier l'effet de certains paramètres géométriques et

thermophysiques telle que l'étude de l'influence de la qualité du contact à l'interface du multicouche sur le transfert de chaleur dans le milieu étudié. Ceci permettra, par la suite, de développer un modèle analytique permettant d'optimiser les paramètres essentiels d'un procédé, à condition de connaître les propriétés thermophysiques des matériaux projetés. Il permettra aussi de valider les codes numériques avant leur extension à des cas plus complexes.

Ces approches théoriques sont confrontées à des cas pratiques dans le domaine de traitements:

- 1/ estimation de la résistance thermique de contact dépôt - substrat lors des premiers instants de refroidissement d'un splat sur un substrat ;
- 2/ extension de la solution analytique au cas d'une source de chaleur en mouvement ;
- 3/ fabrication de pistes électroniques par traitement laser d'une fine couche de cuivre en poudre sur un substrat en alumine ;
- 4/ mise en forme par frittage flash (appliquée aux matériaux sous forme de poudre);
- 5/ changement de phase et suivi du front de fusion à l'aide des solutions analytiques.
- 6/ usage de solutions analytiques comme un point de départ de calculs complexes menés par le biais d'un logiciel commercial.

Dans tous les cas, les calculs utiliseront la méthode de séparation des variables, ce qui ramène les cas étudiés à des problèmes aux valeurs propres.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres. Le premier chapitre met à la disposition du lecteur des éléments bibliographiques relatifs aux principaux thèmes abordés dans la suite du texte. La première partie a pour but de préciser les différentes notions liées aux transferts de chaleur par conduction dans des solides, et plus spécifiquement dans les matériaux hétérogènes multicouches, appliqués aux traitements de surfaces par laser et projection plasma, où une deuxième partie est relative au comportement thermique à l'interface du bicouche.

Le chapitre 2 expose la méthodologie employée ainsi que le problème test relatif à la modélisation analytique de la conduction instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait soumis à une source de chaleur en mouvement. Ce chapitre dresse un large panorama des solutions analytiques appliquées aux situations réelles.

Le chapitre 3 est consacré à l'extension des solutions analytiques du chapitre 2 aux cas des matériaux poreux. L'application pratique des résultats concernera la fabrication de pistes électroniques par traitement laser d'un dépôt granulaire de cuivre sur un substrat en alumine et qui fait l'objet d'un autre travail de thèse au laboratoire. Nous tenterons à la fin de ce chapitre d'ouvrir des perspectives d'application de ce travail dans des domaines nouveaux dans le traitement de surface, par exemple le frittage laser, qu'on pourra d'ailleurs imaginer dans un deuxième temps intervenir de façon concomitante avec la projection plasma.

Le chapitre 4 étendra le problème précédemment abordé au cas où le traitement thermique est accompagné d'un changement de phase. Nous postulerons dans les cas étudiés, successivement que le substrat est en dimensions semi-infinies le traitement analytique du problème en incluant le changement de phase en dimensions semi-infinies puis finies avec des conditions aux limites de type température imposée, puis une densité de flux à la surface.

La conclusion générale qui clôt ce mémoire fera ressortir les principaux résultats de l'étude et suggérera quelques perspectives générales, ouvertes dans le domaine en fort développement des traitements de surfaces par laser et par projection thermique.

## Références

- [1] **J. Aubreton, B. Pateyron, P. Fauchais**, Les fours à Plasma, *Rev. Int. Hautes Temp. et Réfract.*, 18, 293, (1981)
- [2] **F. Kassabji, B. Pateyron, J. Aubreton, M. Boulos, P. Fauchais**, Conception d'un four à plasma de 0,7 MW pour la réduction des oxydes de fer. *Rev. Int. des Hautes Temp. et Réfract.*, 18, (1981)
- [3] **B. Pateyron, M.F. Elchinger, P. Fauchais**, Unidimensional Modeling Of The Thermomigration Of Moisture In Multi-Layer Walls In Response To Thermal And Humidity Excitations. *Revue generale de thermique* (1987) 26 (305), pp. 311-321
- [4] **M.F. Lerrol, B. Pateyron, G. Delluc, P. Fauchais**. Etude dimensionnelle de l'arc électrique transféré utilisé en réacteur plasma. *Rev. Int. Hautes Temp. et Réfract.*, 24, p 93-104, (1988)
- [5] **M. I. Boulos et al**, Plasma spraying, Theory and Applications. (Ed.) Suryanarayanan, World Scientific, 3-60, (1993).
- [6] **C. Alemany, C.Trassy, B. Pateyron, K.-I Li, Y. Delannoy**, refining of metallurgical-grade silicon by inductive plasma. *Solar Energy Materials and Solar Cells* (2002), 72(1-4), 41-48.
- [7] **P. Fauchais et al**, Quo vadis thermal spraying? *Journal of Thermal Spray Tech.*, Volume 10, Issue 1, 44-65, March (2001).
- [8] **P. Fauchais, A. et M. Vardelle, J.F. Coudert, B. Pateyron**. State of the art in the field of plasma spraying and of extractive metallurgy with transferred arc: modelling, measurement, comparison between both, applications and developments, *Pure and Applied Chemistry*, 57 (9), 1171, (1985)
- [9] **G. Mariaux, P. Fauchais, A. Vardelle, B. Pateyron**, Modeling of the plasma spray process : From powder injection to coating formation, *High Temperature Material Processes*, 5 (1), p 61-85, (2001)
- [10] **J. Cedelle, M. Vardelle, B. Pateyron, P. Fauchais**, Investigation of plasma sprayed coatings formation by visualization of droplet impact and splashing on a smooth substrate, *IEEE Transactions on Plasma Science*, 33 (2 1), p 414-415, (2005)
- [11] **J. Cedelle, M. Vardelle, B. Pateyron, P. Fauchais**, Study Of Droplet Behaviour At Impact In Plasma Spraying *High Temp. Mat. Processes*, 8, p 353-380, (2004)
- [12] **G. Delluc, H. Ageorges, B. Pateyron, P. Fauchais**, Fast modeling of plasma jet and particle behaviours in spray conditions, *High Temperature Material Processes* 9 (2), p 211-226, (2005)
- [13] **S. Dyshlovenko, L. Pawlowski, B. Pateyron, I. Smurov, J.H. Harding**, Modeling of plasma particle interactions and coating growth for plasma spraying of hydroxyapatite, *J.H. Surface & Coatings Technology* 200 (12-13), p 3757-3769, (2006).
- [14] **B. Pateyron, G. Delluc, M.F. Elchinger, P. Fauchais** Thermodynamic and transport properties of Ar-H<sub>2</sub> and Ar-H<sub>2</sub>-Air plasma gases used for spraying at atmospheric pressure *Plasma Chemistry Plasma Processing, Colloque, supplément au n°3*, 1, p 325-332, (1992)
- [15] **B. Pateyron, M.F. Elchinger, G. Delluc, P. Fauchais** Sound velocity in different reacting thermal plasma coatings *Plasma Chemistry Plasma Processing* 16 (1), p 39-57, (1996)
- [16] **W.L.T. Chen, J. Heberlein, E. Pfender, B. Pateyron, G. Delluc, M.F. Elchinger, P. Fauchais** Thermodynamic and transport properties of argon/helium plasmas at atmospheric pressure *Plasma chemistry and plasma processing*, 15 (3), p 559-579, (1995)
- [17] **H. Belghazi et al**, analytical solution of unsteady heat diffusion within a porous copper layer deposited on alumina substrate and subjected to a moving laser beam, *Defect and Diffusion Forum*, Vols. 273-276, pp 52-57 (2008).
- [18] **L. Pawlowski**, The science and engineering of thermal spray coating. Wiley, New York, (1995).

- [19] **National Research Council**, Coatings for high-temperature structural materials: Trends and opportunities. National Academy Press, Washington DC, (1996).
- [20] **A. Grimaud et al**, Faisabilité d'une méthode d'évaluation de la résistance thermique de contact entre une lamelle céramique écrasée sur un substrat métallique, *Mécanique & Industries* 8, 71-75, (2007).
- [21] **F. Gitzhofer**, Induction plasma synthesis of ultra fine SiC. *Pure & Appl. Chem.*, Vol. 68, 1113-1120, (1996).
- [22] **J.F. Brilhac, B. Pateyron, P. Fauchais** Investigation of the thermal characteristics of d.c. vortex plasma torches *High Temp. Chem. Processes*, 3, p 419-425, (1994)
- [23] **J.F. Brilhac, B. Pateyron, J.F. Coudert, P. Fauchais, A. Bouvier** Study of the dynamic and static behavior of DC vortex plasma torches : Part 1 : Button type cathode *Plasma chemistry and plasma processing*, 15 (1), p 257-277, (1995)
- [24] **J.F. Brilhac, B. Pateyron, J.F. Coudert, P. Fauchais, A. Bouvier** Study of the dynamic and static behavior of DC vortex plasma torches : Part 2 : Well-type cathode *Plasma chemistry and plasma processing*, 15 (1), p 231-255, (1995)
- [25] **B. Pateyron and G. Delluc**, Logiciel TTWinner, ADEP Banque de données de l'Université de Limoges et du CNRS. (Ed.) Direction des bibliothèques, des Musées et de l'Information Scientifique et technique, France (1986), disponible sur le site <http://www.ttwinner.free.fr>
- [26] **B. Pateyron, G. Delluc, N. Calvé**, T&TWinner, la chimie et les propriétés de transport en ligne, dans l'intervalle de 300 K à 20 000 K, *Mécanique & Industries* 6, p 651–654, (2006)
- [27] **L. Jestin, B. Pateyron, P. Fauchais**, Dimensionless study of experimental pressure related behaviour for two powerful vortex blown arc and vortex-stabilized power plasma torches, *High-Temp. Dust Laden Jets*, pp. 211-231 (1989) Solonenko and Fedorchenko (Eds).
- [28] **B. Pateyron, G. Delluc, M.F. Lerrol, P. Fauchais**, Etude du fonctionnement d'un plasma d'arc électrique transféré utilisé en métallurgie extractive. *Rev. Int. Hautes Temp. et Réfract.*, 26, 1990, 1-7.
- [28] **J.F. Brilhac, B. Pateyron, P. Fauchais, A. Bouvier, P. Pasquini, L. Jestin** Dimensionless relationships to calculate arc characteristics in a vortex D.C. plasma torch, *Journal of High Temperature Chemical Processes*, Colloque, supplément au n°3, 1 (1992) pp 557-562
- [29] **Fauchais, P. Pasquini, A. Bouvier, L. Jestin**, Diagnostics of the dynamic behavior of the electric arc in a plasma torch *Journal of High Temperature Chemical Processes*, Colloque, supplément au n°3, 1 (1992) pp 421-428
- [30] **M. Afifi, B. Pateyron, G. Delluc, P. Fauchais**, Modélisation tridimensionnelle de l'histoire thermique de matériaux chauffés par un jet plasma. Application à la projection plasma et aux traitements thermiques *Journal of High Temperature Chemical Processes*, Colloque, supplément au n°3, 1 (1992) pp 397-402
- [31] **B. Pateyron, G. Delluc, B. Alboukassim, M.F. Elchinger, P. Fauchais**, Destruction of carbofluoride wastes in a fluidized bed reactor. Part II: designing of the fluidized bed *Inter. Seminar on Heat and Mass Transfer, Izmir, T, July (1994) (Pub.) Begell N.Y. (1995) pp 453-462*
- [32] **A.Smith, J.M. Laurent, B. Pateyron And G. Delluc, J. Dutta and J. Perrin**, Importance of precursor chemistry for the control of surface morphology and quality of SnO<sub>2</sub> : thin films" 12th Photovoltaic Solar Energy Conference Amsterdam, 11-15 April 1994 .
- [33] **J. Erin, B. Pateyron, G. Delluc, P. Fauchais, M. Labrousse, A. Bouvier**, Hydrogen and argon-hydrogen plasma from d.c. vortex plasma torches: study of the dynamic and static behaviours *Proc. of the 12th ISPC, Minneapolis (USA), 1995 Conference Proceedings ed. Prof J. Heberlein 6 pages.*
- [34] **B. Pateyron, G. Delluc, J. Erin, M.F. Elchinger, P. Fauchais**, Calcite fluidized bed reactor heated by argon-hydrogen plasma for destruction of carbofluorine wastes *Proc. of the 12th ISPC, Minneapolis (USA), 1995 Conference Proceedings ed. Prof J. Heberlein 6 pages.*
- [35] **B. Pateyron, G. Delluc, M.F. Elchinger, P. Fauchais**, Thermodynamic and transport properties of H-S gases including sulphur dihydride : H<sub>2</sub>S. Fourth European Conference on Thermal Plasma Processes, Athènes (Grèce), 15-18 July 1996, P. Fauchais Ed., Begell House, NY (USA), 1997, 601-607.

- [36] **S. Janisson, A. Vardelle, J.F. Coudert, E. Meillot, B. Pateyron, P. Fauchais**, Plasma spraying using Ar-He-H<sub>2</sub> gas mixtures J. Thermal Spray Technology, 8, 1999, 545-552
- [37] **Leger A.C., Haddadi A., Pateyron B., Delluc G., Grimaud A., Fauchais P.**, Residual stresses during coating generation : plasma sprayed alumina coating on XC18 measurements and calculations. 15th International Thermal Spray Conference, Nice (France), 24-29 Mai 1998, C. Coddet Ed., IPSE, ASM Int., Ohio (USA) 1998, 895-903.
- [38] **P. Fauchais, M. Vardelle, A. Vardelle, B. Pateyron**, Effets thermiques sur la construction des dépôts céramiques oxydes projetés par plasma d'arc. Actes du Congrès de la Société Française des Thermiciens, Arcachon, 17-19 Mai 1999, Elsevier, 1999, 581-586
- [39] **B. Pateyron, G. Delluc, A. Haddadi, P. Fauchais**, **Modeling of thermal history of splats layer during coating formation. Fifth International on Thermal Plasma Processing Conference**, , St Petersburg (Russia) July 13-16, 1998, Progress in Plasma processing of materials 1999, P. Fauchais and J. Amouroux Ed., Begell House, NY (USA), 1999, 451-459
- [40] **Fauchais P., A. Vardelle, M. Vardelle, A. Denoirjean, B. Pateyron, M. El Ganaoui**, Formation and layering of alumina splats : thermal history of coating formation, resulting residual stresses and coating microstructure. ITSC 2001, Singapour, 28 may-1 june 2001.
- [41] **G. Delluc, B. Pateyron, H. Ageorges, M. El Ganaoui et P. Fauchais**  
Recherche d'une méthode numérique rapide d'évaluation de l'histoire thermique et des changements de phase d'une sphère mono matériau. Congrès Français de Thermique SFT 2001, Nantes 29-31 mai 2001. (poster)
- [42] **B. Pateyron, El Ganaoui, A. Vardelle, G. Delluc, P. Fauchais**, 1D modeling of coating formation under plasma spraying conditions : splat cooling and layering  
Progress in Plasma Processing of Materials. E-MRS-IUMRS-ICEM 2000, TPP6, Strasbourg, 30 Mai-2 Juin 2000, P. Fauchais, J. Amouroux, M.F. Elchinger Eds., Begell House, N.Y.(USA), 2001, 519-526
- [43] **S. Bernard, P. Fauchais, J. Jarrige, J.P. Lecompte, B. Pateyron**, Lead and zinc evaporation competition in the treatment of fly ashes model by plasma transferred arc. Proceedings 15th International Symposium on Plasma Chemistry, Orleans, 9-13 juillet 2001, A. Bouchoule, J.M. Pouvesle, A.L. Thomann, J.M. Bauchire, E. Robert Eds., Vol. V, 2029-2036
- [44] **C. Alemany, K.I. Li, Y. Delannoy, B. Pateyron, P. Proulx, D. Morvan, C. Trassy**, Plasma refining of metallurgical silicon : thermodynamic and chemical aspects, Proceedings of the 7th European Conference on Thermal Plasma Processes, Strasbourg, 18-21 Juin 2002, Progress in Plasma Processing of Materials, P. Fauchais Ed., Begell House, N.Y. (USA), 2003, 717-722
- [45] **B. Pateyron, P. Proulx, C. Trassy**, Effect of electric fields on the non-equilibrium in an inductively coupled plasma Progress in Plasma Processing of Materials 2003, E MRS-IUMRS-ICEM 2002, TPP7 Thermal Plasma Processes, Strasbourg, 18-21 juin 2002, P. Fauchais Eds., Begell House, N.Y.(USA), 2003, 717-722
- [46] **B. Pateyron, J.F. Coudert, G. Delluc, P. Fauchais**, Plasma torch arc voltage analysis : the wavelet transform approach. Progress in Plasma Processing of Materials. E-MRS-IUMRS-ICEM 2000, TPP6, Strasbourg, 30 Mai-2 Juin 2000, P. Fauchais, J. Amouroux, M.F. Elchinger Eds., Begell House, N.Y.(USA), 2001, 89-96
- [47] **B. Pateyron, G. Delluc, P. Fauchais**, The forecast of the chemical and transport properties of a carbon-oxygen plasma in isochoric conditions. Progress in Plasma Processing of Materials. E-MRS-IUMRS-ICEM 2000, TPP6, Strasbourg, 30 Mai-2 Juin 2000, P. Fauchais, J. Amouroux, M.F. Elchinger Eds., Begell House, N.Y.(USA), 2001, 419-426
- [48] **H. Belghazi et al.** Analytical solution of the unsteady heat conduction in two layered material within imperfect thermal contact. Proceedings of the 2nd International Conference on Thermal Engineering Theory and Applications, Y. Haik et al, 49-55,(2006).
- [49] **Bouneider, M., El Ganaoui, M., Pateyron, B., Fauchais, P.**  
Coupled heat transfer modeling in composite (metal/ceramic) particle immersed in a plasma pool. Part II: Phase change High Temperature Material Processes (2005) 9 (4), pp. 607-617
- [50] **S. Ben Naoua et al**, A Model for Rapid Solidification for Plasma Spraying. Materials Science Forum (MSF) by Trans Tech Publications (TTP), Switzerland, Vol. 553, 223 – 230, (2007).
- [51] **Ettouil, F.B., Mazhorova, O., Pateyron, B., Ageorges, H., El Ganaoui, M., Fauchais, P.**  
Predicting dynamic and thermal histories of agglomerated particles injected within a d.c. plasma jet

surface and Coatings Technology (2008) 202 (18), pp. 4491-4495

[52] **Ettouil, F.B., Pateyron, B., Ageorges, H., El Ganaoui, M., Fauchais, P., Mazhorova, O.**

Fast modeling of phase changes in a particle injected within a d.c plasma jet

Journal of Thermal Spray Technology (2007) 16 (5-6), pp. 744-750



## Chapitre I : Etude bibliographique

Chapitre I: Etude bibliographique .....	31
I.1. Introduction .....	31
I.2. Généralités sur les transferts de chaleur .....	31
I.2.1. Approche thermodynamique .....	31
I.2.2. Les principaux modes de transfert de chaleur .....	32
I.3. Paramètres influençant la conduction .....	35
I.3.1. Propriétés thermophysiques .....	35
I.3.2. Conductivité thermique des solides .....	35
I.4. Les facteurs influençant la conductivité thermique .....	36
I.4.1. La température .....	36
I.4.2. L'humidité .....	37
I.4.3. La pression .....	37
I.5. Modélisation .....	38
I.5.1. Equation de la chaleur .....	38
I.5.2. Les différentes méthodes analytiques .....	40
I.6. La technologie laser .....	41
I.6.1. Les traitements thermiques et thermochimiques de surface .....	41
I.6.2. Traitements mécaniques de surface (choc laser) .....	41
I.7. Spécificités des faisceaux lasers .....	42
I.7.1. Application aux traitements de surfaces .....	42
I.7.2. Procédés de traitement .....	43
I.8. Applications des lasers aux traitements de surface .....	46
I.8.1. Interaction laser matière .....	46
I.9. Description des procédés de projection thermiques .....	48
I.9.1. Principe de base .....	50
I.9.2. Formation du dépôt .....	52
I.9.3. Les principaux types de projection thermiques .....	52
I.10. Conclusion .....	53
Références .....	54

## Chapitre I: Etude bibliographique

### I.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude bibliographique de modèles analytiques relatif au transfert de chaleur, dans le cas d'un matériau bicouche en contact thermique imparfait au niveau de l'interface, et soumis à une source de chaleur fixe ou en mouvement, pour des applications de traitements par laser ou projection thermique,...etc. Etant donné la complexité du modèle mathématique à résoudre ainsi que les phénomènes physico-chimiques inhérents aux différentes transformations lors du chauffage, et le nombre important de travaux recensés, la liste des travaux rapportée dans ce chapitre n'est pas exhaustive et pour une meilleure clarté de l'exposé, nous avons jugé utile de nous limiter à l'essentiel, et de scinder l'étude en deux parties principales.

La première est relative aux généralités sur la théorie de conduction de chaleur dans un matériau solide. On y abordera les effets des propriétés thermophysiques sur la propagation de la chaleur, et on donnera un aperçu des principales conditions de la modélisation du transfert ou diffusion thermique instationnaire appliqué aux traitements de surfaces, ainsi que les différentes méthodes analytiques. La deuxième partie concernera les procédés laser et les techniques de projections thermiques, appliquées aux traitements de surface.

### I.2. Généralités sur les transferts de chaleur

Le transfert de chaleur par conduction est très utilisé dans divers applications technologiques. Contrairement au rayonnement qui peut se propager dans le vide, la conduction suppose la présence de matière. Au niveau microscopique, la conduction dans les fluides stationnaires est le résultat d'un échange d'énergie entre les molécules à haute température avec celles qui sont à basse température. Dans les solides nano-conducteurs, le transfert d'énergie se fait exclusivement par les ondes des lacunes (phonons) dues aux mouvements des atomes. Si le solide est conducteur, le transfert d'énergie est aussi associé au déplacement des électrons. L'approche microscopique suscite un intérêt particulier depuis quelques années, du fait de ses applications dans la miniaturisation, telles que les fines couches supraconductrices, les micro-capteurs et plus généralement les applications en micro-mécanique [1-4]. Cependant, pour une grande partie de ces applications technologiques, l'approche macroscopique fondée sur la loi de Fourier est adéquate.

#### I.2.1. Approche thermodynamique

Entre deux instants successifs  $t$  et  $t + dt$ , le premier principe de la thermodynamique pour un système s'écrit :

$$dE + dU = \delta Q + \delta W \quad (1. 1)$$

- $dE$  inclut tous les échanges d'énergie ayant lieu au sein du milieu. C'est le cas par exemple de l'effet Joule ou de l'énergie calorifique résultant d'une réaction exothermique ou endothermique. Dans ce travail, nous appelons ce type d'énergie : sources de chaleur internes...
- $dU$  est la variation d'énergie interne.
- $\delta Q$  représente les échanges de chaleur aux frontières du système. Dans le cas traité, il s'agit essentiellement du transfert de chaleur par conduction.

- $\delta W$  représente les échanges de travail mécanique aux frontières du système.

## I.2.2. Les principaux modes de transfert de chaleur

Le transfert thermique est un processus complexe qui, dans le cas général, résulte de la superposition des trois modes fondamentaux de transfert : conduction, convection et rayonnement. Dans le cas où l'un de ces trois modes est prépondérant, les effets des autres sont faibles et ils peuvent être négligés, ce qui simplifie considérablement l'analyse du problème [5-7]. Le mécanisme d'apparition de chacun de ces modes est présenté brièvement ci-dessous.

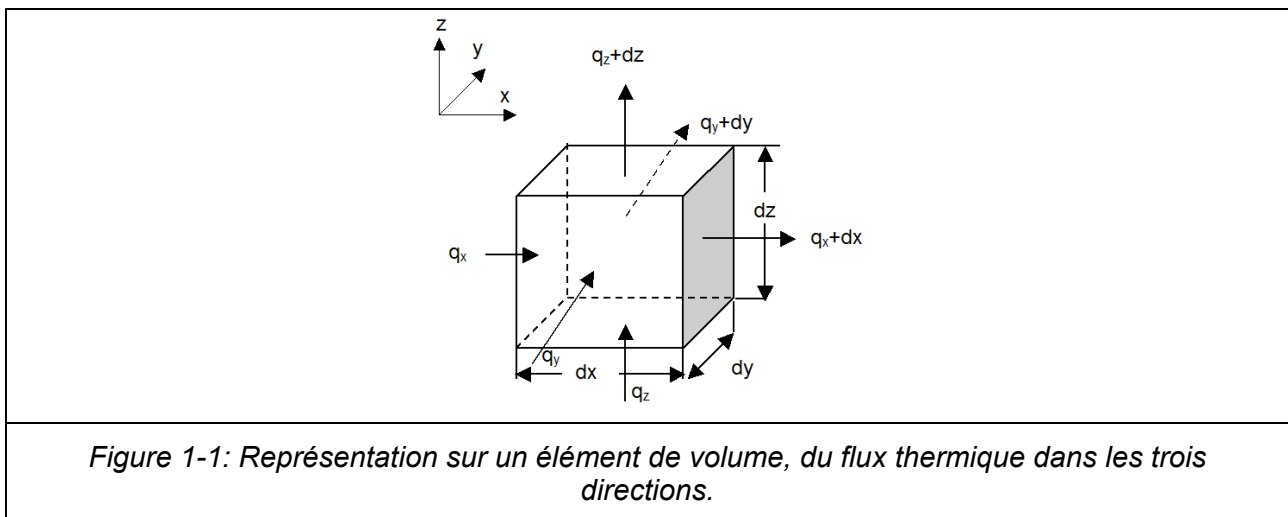
### I.2.2.1. Conduction

L'énergie interne d'un corps solide, liquide ou gazeux correspond à l'énergie cinétique de ses éléments constitutifs qui sont en mouvement permanent (atomes, molécules, électrons libres). La conduction [8-32], représente le processus de propagation de la chaleur par contact direct entre les particules d'un corps ou entre des corps ayant des niveaux d'énergie – donc des températures – différents en raison du mouvement de ces particules élémentaires.

Dans le cas des gaz, le transfert thermique par conduction est le résultat de la diffusion moléculaire et dans les liquides et les solides diélectriques, il s'effectue par ondes élastiques.

Pour les métaux, la conduction est essentiellement le fait de la diffusion des électrons libres des zones plus chaudes vers les zones plus froides, les oscillations élastiques de la matrice cristalline jouant un rôle mineur.

Dans n'importe quel milieu, ce mode de transfert thermique tend à uniformiser la répartition d'énergie cinétique des particules qui constituent le corps.



La méthode analytique d'étude de la conduction considère les corps comme des milieux continus, en négligeant leur structure moléculaire. Cette hypothèse n'est pas gênante, du fait que dans la majorité des cas, les dimensions des corps observés sont beaucoup plus grandes que celles de leurs particules élémentaires ainsi que les distances qui les séparent. Il faut mentionner que le plus souvent, les applications techniques de la conduction thermique sont relatives à des corps solides (figure 1-1); dans les liquides et les gaz, elle ne se manifeste que si le transfert par convection est totalement exclu.

La conduction thermique est régie par la loi de Fourier :

$$\operatorname{div}(k_i \cdot \vec{\nabla} T) + \dot{q} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$q_{\text{cond}} = -k \frac{dT}{dx} \quad [\text{W.m}^{-2}] \quad (1.3)$$

où

$\dot{q}$	le terme source	$[\text{W.m}^{-3}]$ ;
$\rho$	la masse volumique	$[\text{kg.m}^{-3}]$ ;
$C_p$	la capacité calorifique du matériau	$[\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}]$ ;
$k_i$	la conductivité thermique	$[\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}]$ ;
$T$	la température dans le solide	$[\text{K}]$ ;
$q_{\text{cond}}$	la densité du flux thermique	$[\text{W.m}^{-2}]$ ;
$t$	le temps	$[\text{s}]$ ;
$x$	l'espace	$[\text{m}]$ .

L'indice  $i$  de  $k_i$  est relatif aux différentes directions (si le matériau est considéré isotrope alors  $k_i = k$ ), dans ce cas une autre grandeur physique est utilisée, c'est la diffusivité thermique définie par :

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p} \quad [\text{m}^2.\text{s}^{-1}] \quad (1.4)$$

Ces propriétés ne sont pas constantes et varient avec la température. Dans le cas général, et afin de réduire la complexité des équations à résoudre, les modèles analytiques supposent le plus souvent que les propriétés thermophysiques sont constantes dans la plage de température utilisée.

### I.2.2.2. Convection

Le phénomène de convection [33-36] est relatif aux transferts thermiques, ayant lieu dans les fluides – liquides ou gaz – en mouvement.

Il est déterminé par le mouvement des particules élémentaires du fluide –liquide ou gaz – entre des zones ayant des températures différentes; ce mélange génère des échanges d'énergie (chaleur) et de quantité de mouvement.

C'est le phénomène observé entre un fluide en mouvement et une paroi (fig. 1-2), il est majoritaire dans la plupart des échangeurs de chaleur.

Le flux de chaleur convectif  $q_{\text{conv}}$  ( $\text{W.m}^{-2}$ ) est proportionnel à la différence de température entre la surface du solide et la température du fluide,  $T_s$  et  $T_f$  respectivement.

$$q_{\text{conv}} = h(T_s - T_f) \quad q_{\text{conv}} \text{ en } (\text{W.m}^{-2}) \quad (1.5)$$

à la surface 
$$q_{conv} = h(T_s - T_f) = -k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_s = q_{cond} \quad (1.6)$$

avec  $T_f$  la température du fluide.

Cette expression est connue sous le nom de la loi de Newton [31]. La constante de proportionnalité  $h$  ( $W.m^{-2}.K^{-1}$ ), nommée coefficient de transfert thermique par convection est fonction des conditions aux limites, qui sont influencées par la géométrie de la surface, la nature du fluide en mouvement et les propriétés de transport.

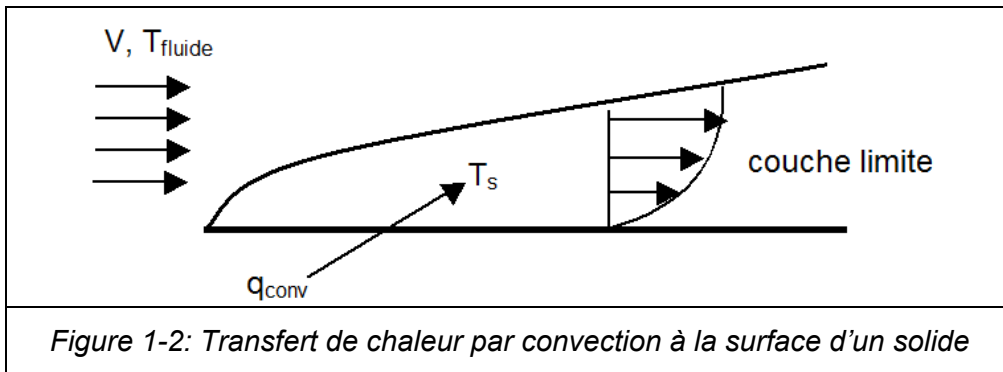


Figure 1-2: Transfert de chaleur par convection à la surface d'un solide

### I.2.2.3. Rayonnement

Le phénomène de rayonnement thermique [37- 41] constitue une forme particulière de transfert thermique dans laquelle le porteur d'énergie n'est plus constitué par des particules, mais par des ondes électromagnétiques ayant à l'origine l'agitation atomique à la surface d'un corps. Le mécanisme de rayonnement est créé par l'émission et l'absorption des ondes électromagnétiques porteuses d'énergie rayonnante et par la transformation de celle-ci en chaleur par changement d'état énergétique – énergie interne – des corps qui la retiennent. Ayant la même nature que le rayonnement lumineux, le rayonnement thermique est gouverné par les mêmes lois que celui-ci.

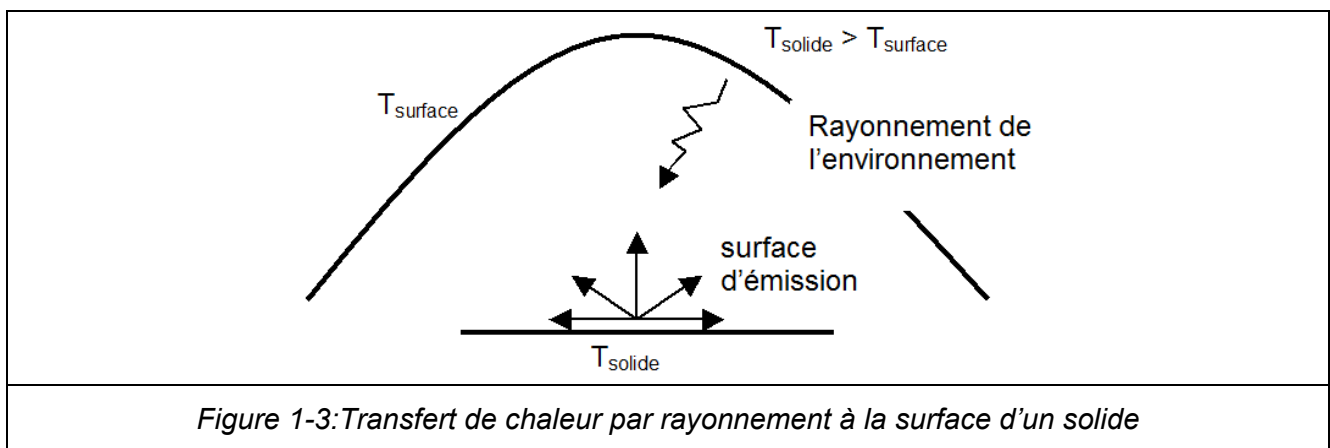


Figure 1-3: Transfert de chaleur par rayonnement à la surface d'un solide

## I.3. Paramètres influençant la conduction

### I.3.1. Propriétés thermophysiques

Un bon modèle appliqué aux domaines de l'ingénierie suppose des propriétés thermophysiques bien déterminées et fiables.

Un des paramètres les plus importants est la conductivité thermique ( $k$ ) qui caractérise le transfert thermique dans un matériau; ce paramètre est déterminé habituellement par une méthode indirecte à partir de la diffusivité thermique ( $\alpha$ ), de la chaleur massique ( $C_p$ ) et de la masse volumique ( $\rho$ ) par la relation  $k = \alpha\rho C_p$ . Cette relation n'est appliquée qu'aux matériaux homogènes.

### I.3.2. Conductivité thermique des solides

Dans le cas des solides, le mécanisme de transfert thermique par conduction est constitué de deux processus intimement couplés : le mouvement des électrons libres et les oscillations des ions autour de leur position d'équilibre qui se traduit par une vibration de réseau. Dans les substances à l'état solide, les molécules n'ont plus la liberté de mouvement caractéristique de la phase gazeuse ou même liquide. Les atomes des molécules ne restent plus neutres, par la suite des échanges d'électrons situés sur les orbites extérieures. Ces atomes – ions positifs ou négatifs - forment un réseau tridimensionnel, et oscillent autour de positions moyennes déterminées, tandis que les électrons libres se déplacent aléatoirement dans l'espace entre les noyaux du réseau. Quand le corps solide reçoit de l'énergie, les ions intensifient leurs oscillations et les électrons libres ont un mouvement semblable à l'agitation thermique d'un gaz. Néanmoins, cette agitation se propage toujours des zones de haute température vers les zones à basse température. Ainsi l'énergie reçue par le corps se retrouve dans l'énergie cinétique de déplacement d'électrons et dans l'énergie d'oscillation des ions placés aux nœuds du réseau. La conductivité thermique des solides est due tant aux électrons et aux phonons (par analogie avec les photons correspondant aux ondes élastiques de vibration des ions). C'est ainsi que  $k$  a deux composantes:

$$k = k_{\text{électrons}} + k_{\text{phonons}} \quad (1.7)$$

Avec un poids différents, en fonction de la nature du solide.

- $k_{\text{électrons}}$  est la contribution des porteurs de charge (électrons ou trous).
- $k_{\text{phonons}}$  est la contribution des vibrations des atomes (phonons)

La contribution des porteurs de charge est liée à la conductivité électrique  $\sigma$  du matériau par la relation de Wiedemann-Franz :

$$k_e = LT\sigma \quad (1.8)$$

où  $L$  est appelé « Facteur de Lorentz ». Il dépend du processus de diffusion des porteurs de charge (ce qui correspond plus ou moins à la façon dont ils sont gênés par des obstacles lors de leurs déplacements, ainsi que de la position du niveau de Fermi. Dans les métaux, il est égal au nombre de Lorentz  $L_0$ , avec :

$$L_0 = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k}{e} \right)^2 = 2,45 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2 \text{ K}^{-2} \quad (1.9)$$

Dans le cas des métaux, où il y a une forte concentration d'électrons libres, l'approximation  $k_m \approx k_{\text{électrons}}$  est valide. Pour les matériaux non métalliques, on n'admet en général que  $k_{nm} \approx k_{\text{phonons}}$ . Compte tenu du fait que la contribution des électrons à l'établissement de la conductivité thermique  $k$  est bien supérieure à celle des phonons, on a  $k_m \gg k_{nm}$ .

La conductivité thermique des matériaux semi-conducteurs est intermédiaire entre les deux composantes  $k_{\text{électrons}}$  et  $k_{\text{phonons}}$  qui ont des poids différents en fonction du matériau.

Le facteur qui influence le plus la conductivité thermique des solides est la température. En général, pour les corps solides homogènes, cette dépendance peut être formulée par une relation linéaire :

$$k = k_0(1 + \beta T) \quad [\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}] \quad (1.10)$$

où  $k_0$  la conductivité thermique du corps à la température  $0^\circ\text{C}$  ;

$\beta$  le coefficient caractéristique de chaque matériau (pour des métaux il a usuellement une valeur négative);

$T$  la température en  $^\circ\text{C}$ .

## I.4. Les facteurs influençant la conductivité thermique

### I.4.1. La température

On remarque la dépendance importante entre la conductivité thermique et la température.

La figure 1-4 montre l'influence de la température sur la conductivité thermique pour quelques métaux purs.

Dans le cas de certains matériaux solides non homogènes, tels que les matériaux de construction utilisés comme isolants thermiques, la structure est fibreuse ou granulaire et comporte des espaces libres remplis d'air. De ce fait, la conductivité est d'autant plus faible que les espaces sont plus nombreux et de dimensions plus petites. L'explication réside dans le fait que la conductivité thermique de l'air est faible et qu'il est piégé dans les pores, ce qui empêche la formation de courants convectifs.

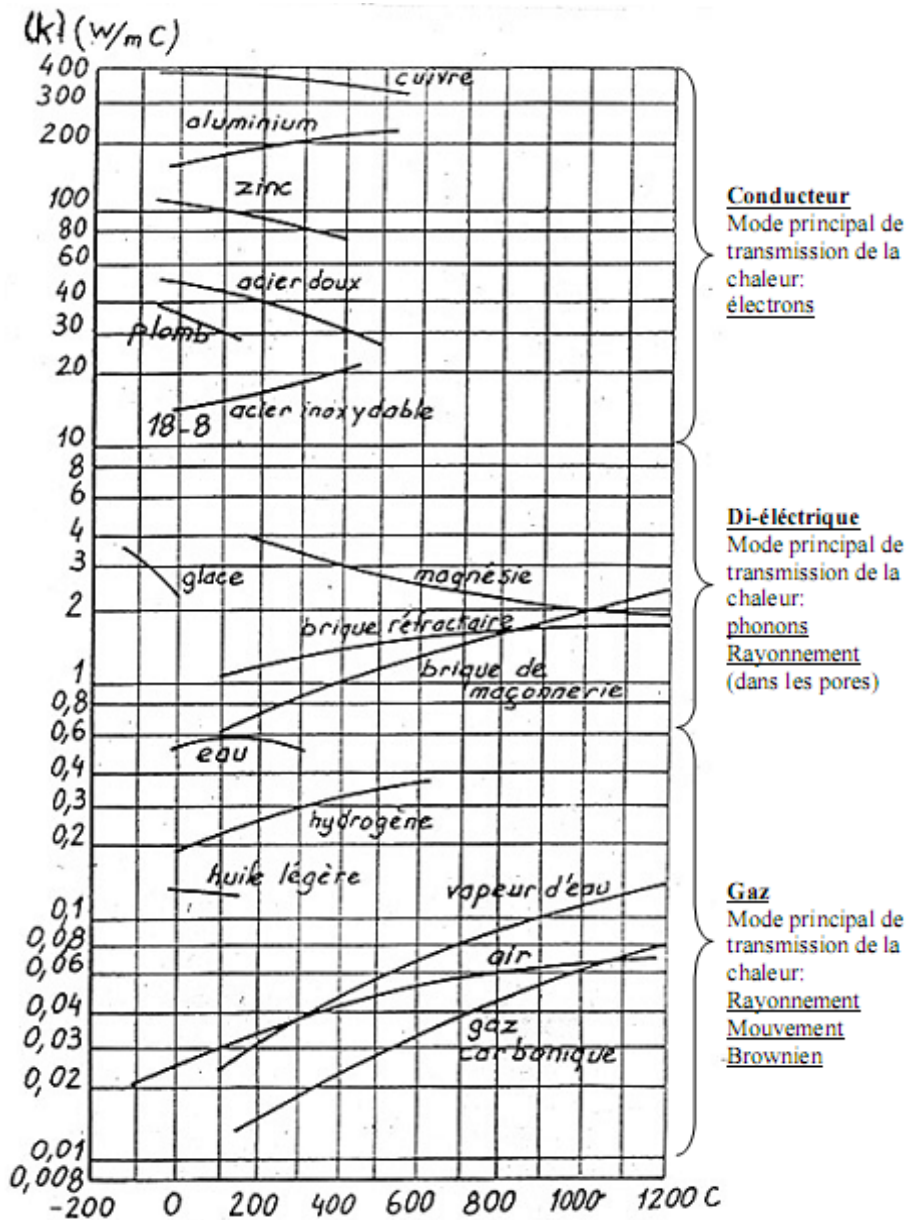


Figure 1-4: Conductivité thermique des métaux et alliages d'après [62]

### I.4.2. L'humidité

L'humidité a une influence importante sur  $k$ . Pour les matériaux de construction, on recommande l'utilisation de la relation suivante :

$$k = k_0 e^{0.08\psi} \quad [W.m^{-1}.K^{-1}] \quad (1.11)$$

Où  $k_0$  est la conductivité du matériau sec et  $\psi$  l'humidité relative (en %).

### I.4.3. La pression

La pression a un effet important sur la conductivité thermique des fluides. Par contre son effet est moins important sur celle des solides et elle dépend surtout de la porosité et de l'air contenu dans les micro-fissures. Dans [42], les auteurs ont étudié l'influence de la pression sur la conductivité d'un revêtement en zircone yttrée déposé par projection plasma (utilisé comme barrières thermiques pour protéger de pièces des moteurs aéronautiques, en particulier les parois de chambres de combustion), ils ont trouvé que sa valeur augmente significativement



avec la pression. C'est aussi le cas dans la zone de contact entre deux solides (la résistance thermique de contact), dans le cas de laminage, de forgeage ou de poinçonnage, techniques utilisées dans le domaine de la mécanique par exemple [43-44].

## **I.5. Modélisation**

Dans un solide, la diffusion de chaleur d'une zone chaude vers une zone froide, est régit par la loi de Fourier, qui stipule qu'il existe une relation linéaire entre la densité de flux et le gradient de température. Dans le cas d'un milieu isotrope, la densité de flux est proportionnelle au gradient de température (eq 1.3), et des solutions analytiques de l'équation générale de Fourier existent, mais généralement pour des conditions aux limites homogènes, c'est valable aussi pour des conditions aux limites non-homogènes.

Dans le domaine des traitements de surfaces par laser ou projection plasma, la modélisation du transfert de chaleur et de masse est indispensable, car la mesure expérimentale de certaines grandeurs s'avèrent coûteuses, difficiles, voire même impossible. C'est le cas par exemple de la cartographie des températures à un instant donné, l'évaluation des flux de chaleur, la résistance thermique de contact et l'évolution des propriétés thermophysiques en fonction de la température et du temps.

### **I.5.1. Equation de la chaleur**

#### **I.5.1.1. Conditions de l'unicité**

L'équation générale de la chaleur est une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre en espace et du premier ordre en temps. Cela se traduit par une constante d'intégration dans le temps et deux constantes d'intégrations dans chaque direction de l'espace. Elle admet en principe une infinité de solutions. Pour que le problème ait une solution unique, il est nécessaire de connaître la répartition des températures en tout point de l'espace à un temps donné pris pour origine (conditions initiales), ainsi que les lois de variations de la température  $T$  (ou de ses dérivées) sur les frontières du domaine étudié (conditions aux limites).

#### **I.5.1.2. Conditions aux limites spatiales et temporelles**

##### a) Conditions initiales

C'est la distribution des températures à  $t=0$  :  $T(x, y, z, t=0) = T_0(x, y, z)$ . Dans le cas général, la température initiale est homogène, constante est bien définie dans le matériau bicouche. Dans le cas d'un matériau multicouche, chaque couche peut avoir sa propre température initiale.

##### b) Conditions aux limites

Ces conditions dépendent évidemment du problème étudié. Elles traduisent le lien entre le milieu étudié et le milieu extérieur. Comme l'équation de la chaleur est de premier ordre en temps et de second ordre en espace, on rappelle que deux conditions aux limites dans chaque direction et une condition temporelle (condition initiale) sont exigées pour aboutir à une solution de l'équation de départ (cf. figure 1-5).

Les trois types de conditions aux limites souvent rencontrées dans les transferts de chaleur sont :

- i. Les condition aux limites de première espèce dite aussi conditions aux limites de type température imposée (problème de Dirichlet), la température à la surface est connue à tout instant.

$$T_s = f_s (M_s, t), \quad \text{avec } M_s \text{ point de la surface du système} \quad (1.12)$$

Cas particulier : surface isotherme ( $T_s = \text{cte}$ ).

- ii. Condition aux limites de deuxième espèce dites aussi conditions aux limites de type flux imposée (problème de Neumann), dans ce cas, la densité de flux à la frontière du domaine étudié, est connue à tout instant.

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_s = f(M_s, t) \quad (1.13)$$

cas particulier : surface adiabatique ou système isolé.  $-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_s = 0$

- iii. Condition aux limites de troisième espèce dites conditions de Fourier ou aussi de Newton; transfert linéaire (problème de Fourier).

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_s = h(T_s - T_{amb}) \quad (1.14)$$

avec  $h$  : coefficient d'échange thermique superficiel (en  $W.m^{-2}.K^{-1}$ )  
 $T_{amb}$ : température de référence du milieu extérieur.

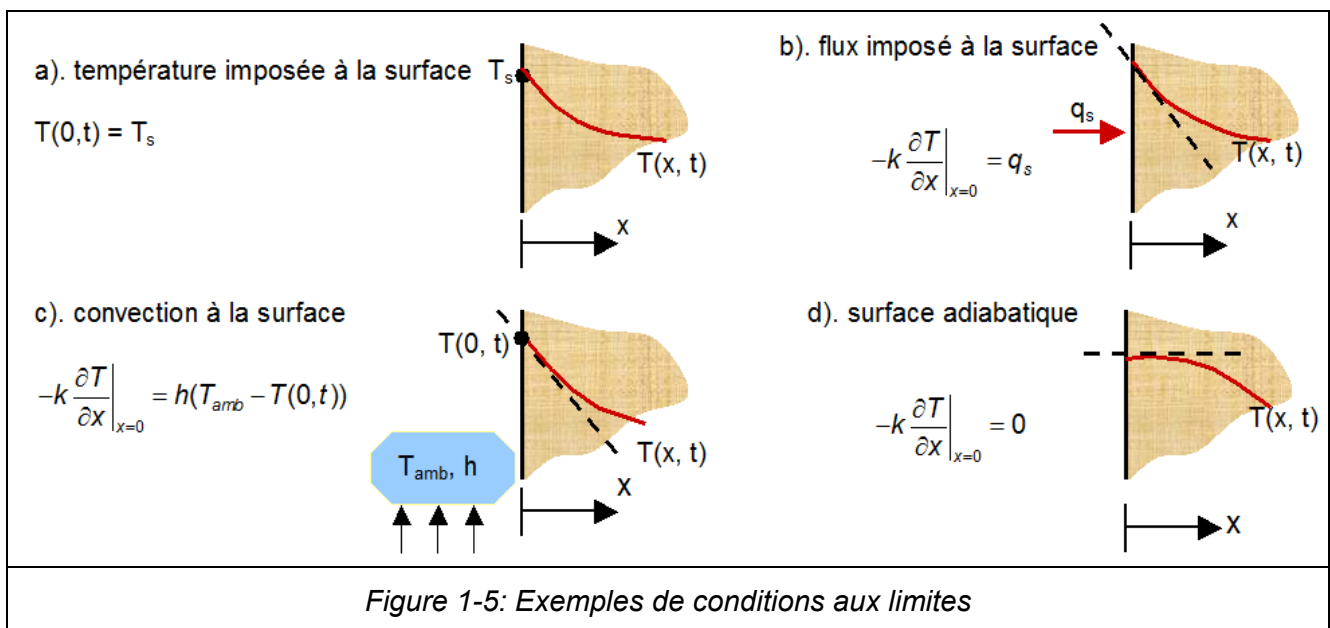


Figure 1-5: Exemples de conditions aux limites

#### IV. Conditions aux interfaces

La résistance thermique de contact (R.T.C) est une grandeur physique qui caractérise la qualité du contact thermique entre deux matériaux. Elle intervient dans les études relatives de transferts de chaleur dans les matériaux composites et dépend en particulier des propriétés thermiques des matériaux, de la géométrie et de l'état de surface des faces en contact. Deux cas sont distingués:

- **Contact parfait**

Il y a égalité des températures et des flux à l'interface.

$$k_1 \cdot \vec{\nabla} T_1 = k_2 \cdot \vec{\nabla} T_2 \quad (1.15)$$

$$T_1 = T_2 \quad (1.16)$$

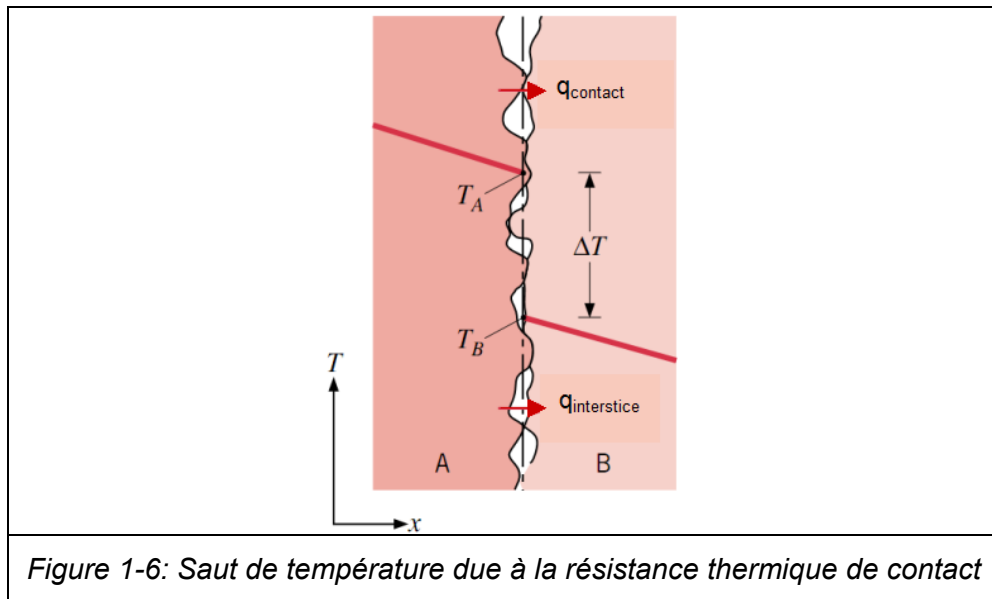
▪ **Contact imparfait**

Les deux surfaces ne sont pas strictement en contact, du fait de leurs rugosités, et il existe une « résistance » thermique de contact (RTC) due à la lame d'air présente entre les deux milieux (figure 1-6).

$$k_1 \cdot \vec{\nabla} T_1 = k_2 \cdot \vec{\nabla} T_2 \quad (1.17)$$

$$q_{cond} = \frac{1}{RTC} (T_1 - T_2) \quad (1.18)$$

$$q_{cond} = -k_1 \vec{\nabla} T_1 \cdot \vec{n}_1 \quad (1.19)$$



**1.5.2. Les différentes méthodes analytiques**

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour résoudre analytiquement l'équation de la chaleur. Parmi elles citons:

- Les méthodes de transformées intégrales (Laplace, Fourier, Hankel, etc.), elles sont plus pratiques à appliquer dans des géométries semi-infinies, mais elles posent certains problèmes surtout pour le calcul des transformées inverses ;
- La méthode de séparation des variables (problèmes aux valeurs propres); elle est plus pratique à appliquer en dimensions finies. Elle se ramène à un problème aux valeurs propres, qui devient compliqué à résoudre dans le cas multidimensionnel, car les valeurs propres dans les différentes directions sont liées;
- Les Fonctions de Green, se ramènent généralement à la résolution de l'équation homogène par la méthode de séparation des variables; on exprime ensuite la solution générale sous forme d'une somme de combinaisons, de la solution homogène, des termes sources, des conditions aux limites et des conditions initiales.

## **I.6. La technologie laser**

Les traitements de surface par laser couvrent un champ d'applications très large. La diversité des lasers industriels disponibles pour les traitements de surfaces permettent aujourd'hui d'adapter les procédés de traitement laser aux propriétés requises pour les pièces. Ces traitements peuvent être purement thermiques (durcissement structural), thermo-chimiques (nituration, cémentation), mécaniques (grenaillage photonique), ou thermomécaniques (découpage, fusionnage, soudage...etc).

### **I.6.1. Les traitements thermiques et thermo-chimiques de surface**

Les traitements thermiques par laser offrent une possibilité de traitement localisé de la surface en vue de l'amélioration des propriétés tribologiques de surface sans dégradation des propriétés mécaniques des pièces traitées. Ces traitements de surfaces sont obtenus en illuminant la surface par un laser émettant dans l'Infra Rouge avec des densités d'énergie de l'ordre du  $\text{kW.cm}^{-2}$ . Un échauffement rapide de la pièce peut conduire à une fusion suivie d'un refroidissement rapide permet des modifications structurales et/ou micro-structurales induisant un durcissement de la surface. Ce procédé a été mis au point pour la trempe des aciers par laser  $\text{CO}_2$  ou encore pour la refusion de surface d'arbre à cames dans le secteur automobile. La réalisation de traitements thermiques par laser sous atmosphère réactive (à pression atmosphérique) peut également être aisément mise en oeuvre. Cette technique est utilisée pour la nituration d'alliage de titane.

Dans le laboratoire SPCTS, le traitement laser est très utilisé, on peut citer par exemple : la fabrication de pistes électroniques en poudre de cuivre sur un substrat alumine, ou en nitrure d'aluminium, en chauffant le pré-dépôt par un balayage laser jusqu'à la fusion [45]. Une autre application est le frittage par laser ou encore la synthèse de nanopoudres à partir d'une phase gazeuse [46].

### **I.6.2. Traitements mécaniques de surface (choc laser)**

Le choc laser ou grenaillage photonique, est un procédé qui vise à générer des ondes de choc dans un matériau afin d'améliorer ses propriétés de surface. L'onde de choc est obtenue en focalisant sur la surface du matériau une impulsion laser très intense (de l'ordre de  $1 \text{ GW.cm}^{-2}$ ) en présence d'un milieu de confinement. Le traitement est susceptible d'induire sur des épaisseurs atteignant plusieurs centaines de micromètres des contraintes résiduelles de compression en surface et ce sur une grande variété de matériaux (aciers, alliages d'aluminium, de titane). Le traitement permet l'amélioration des propriétés de surface comme la résistance à la fatigue, les propriétés d'usure ou encore l'amélioration des propriétés anticorrosion. L'un des intérêts de cette technique, par rapport au grenaillage classique, réside dans le fait que les états de surface des pièces sont peu modifiés.

La technologie laser est très utilisée dans de nombreuses applications industrielles : le durcissement ou traitement de surface par laser, le découpage de matériaux durs, le fusionnage, etc.

La recherche de l'optimisation entre les sollicitations mécaniques, telles que la tribologie (usure, frottement...), ou physico-chimiques (oxydation), et les propriétés des matériaux, conduit naturellement à l'élaboration de structures à gradients fonctionnels. Le corollaire est la notion de traitement de surface. Aujourd'hui, le florilège des techniques qui permettent de réaliser de tels traitements est très vaste; leur pertinence dépend des cahiers des charges aussi bien techniques qu'économiques. Les techniques qui s'appuient sur la mise en oeuvre d'un faisceau laser, occupent une place particulière et privilégiée, ne serait-ce que parce que le panel des traitements envisageables déjà en production industrielle est très large.

## I.7. Spécificités des faisceaux lasers

### I.7.1. Application aux traitements de surfaces

Quand un matériau est irradié à sa surface par un faisceau laser, une partie de l'énergie incidente est absorbée et convertie en chaleur. Si la densité de puissance du faisceau laser (en  $W.m^{-2}$ ), générée à la surface est suffisamment élevée, la chaleur générée à la surface est plus importante que la diffusion de chaleur par conduction à l'intérieur du matériau (en fonction de la densité de flux et de la conductivité thermique du matériau), et donc la température de la couche mince superficielle augmente rapidement, ce qui peut atteindre rapidement la température de fusion ou même l'évaporation. Le choix de la puissance, de diamètre du faisceau et la vitesse de balayage, permet de chauffer la pièce à la température et la profondeur voulues.

#### I.7.1.1. Les types de laser

L'émission du faisceau laser se fait selon trois modes principaux :

- **émission continue** : c'est le mode de prédilection pour traitements à effet thermique induit. Dans les cas extrêmes, le faisceau peut être modulé temporellement afin d'asservir la puissance incidente à la température de la zone d'interaction ;
- **émission pulsée (relaxée)**: le faisceau est émis pendant quelques millisecondes (0.5 à 20 ms) et la fréquence de répétition s'étend de quelques dixièmes de hertz à quelques centaines de hertz. Ce type d'outil est adapté pour des traitements à effets thermiques localisés (fréquence faible: jusqu'à quelques hertz) ou en remplacement des faisceaux continus lorsqu'une haute fréquence est choisie (supérieure à une centaine de hertz);
- **émission pulsée (déclenchée)** : dans cette configuration le faisceau est actif pendant des durées inférieures à une dizaine de nanoseconde. Actuellement, des durées d'impulsions de l'ordre de femtoseconde ( $10^{-15}$  s) sont disponibles.

Selon le type de fonctionnement, les effets du rayonnement sur les matériaux pourront être maîtrisés et seront essentiellement de type « thermique » [1]. Un tel effet apparaît dès lors que la longueur de diffusion thermique  $l_D$  est supérieure à la longueur d'absorption  $l_A$  du rayonnement par le substrat :

$$l_D = 2\sqrt{\alpha\tau} \quad \text{et} \quad l_A = \frac{\lambda}{4\pi k_E} \quad (1.20)$$

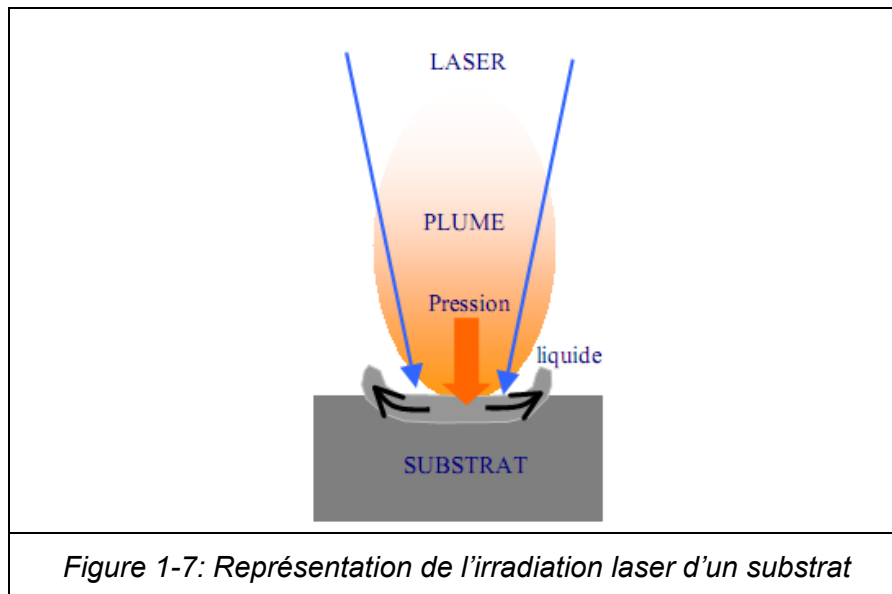
avec  $l_D$  la diffusivité thermique du substrat (10 à 100  $mm^2.s^{-1}$  pour les métaux et quelques 0.1  $mm^2.s^{-1}$  pour les polymères),

$\tau$  est le temps d'interaction ;

$\lambda$  est la longueur d'onde de la radiation ;

$k_E$  est le coefficient d'extinction.

Si on admet que  $l_A$  est de l'ordre de 15 nm et si on cherche le temps d'interaction critique  $\tau_c$  pour lequel  $l_A \approx l_D$ , on en déduit que  $\tau_c$  est de l'ordre de  $10^{-11}$  à  $10^{-12}$  s pour les métaux.



## I.7.2. Procédés de traitement

La quasi-totalité des traitements lasers sur les pièces métalliques repose sur des effets thermiques. Cependant, le développement de nouvelles sources laser avec des temps d'interaction très courts et les applications de ces traitements de surfaces aux polymères et céramiques ont favorisé la mise au point de nouveaux traitements basés alors sur des effets mécaniques ou photochimiques.

### I.7.2.1. Traitements en régime thermique

Comme nous l'avons vu ci-dessus, un traitement par faisceau de haute énergie (le rayonnement laser ne constituant qu'un cas particulier) se caractérise par différents facteurs, à savoir :

- A le coefficient d'absorption ;
- $l_A$  la longueur de pénétration ;
- $T_c$  le temps d'interaction ;
- $l_D$  le transfert thermique et la longueur de diffusion thermique ;
- $Q_0$  la puissance surfacique ou éclairement (souvent désignée par la locution abusive densité de puissance), exprimée en  $W.cm^{-2}$ .

L'influence de ces paramètres a déjà été discutée, mais il convient ici de souligner l'importance de la puissance surfacique  $Q_0 [W.cm^{-2}]$ . En effet, ce paramètre est capital pour la réalisation des traitements de surface; il intervient dans l'optimisation des autres critères. Son niveau dépend, entre autre, du rayonnement (en corrélation avec le coefficient d'absorption) et des effets recherchés (il est compris entre  $10^2$  et  $10^6 W.cm^{-2}$ ).

L'estimation des effets superficiels dépend de plusieurs paramètres tels que la vitesse de chauffe et la vitesse de refroidissement.

### I.7.2.2. Vitesse de chauffage et vitesse de refroidissement

Les photons échangent leur énergie avec les phonons dans la longueur d'absorption, donc en extrême surface, et ce pendant un temps de l'ordre  $10^{-13}$  s. C'est donc en surface que la vitesse de chauffe  $V_c$  et de refroidissement  $V_r$  sont maximales. En première approximation, il est possible d'écrire que :

$$V_c = cAQ_0\sqrt{\tau} \quad (1.21)$$

Avec  $c$  constante expérimentale fonction du matériau et du système et  $\tau$  durée de l'interaction laser-matière.

Cette vitesse est de l'ordre de  $10^3$  à  $10^5$  K.s<sup>-1</sup>. Celle de refroidissement est légèrement inférieure tout en restant du même d'ordre de grandeur.

#### a) Température de surface

Les températures de surface  $T_s$  dépendent de multiples facteurs qui sont intégrés dans la formule simplifiée suivante :

$$T_s = \left(\frac{AQ_0}{k}\right)\sqrt{\frac{\alpha\tau}{\pi}} \quad (1.22)$$

$k$  est la conductivité thermique pour les métaux, comprise entre 50 et 300 W. m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>.

Pour donner un ordre de grandeur, en prenant comme critère le fait de porter à fusion la surface de l'échantillon et en considérant un temps d'interaction de 100 ms, pour un rayonnement CO<sub>2</sub> avec  $A \approx 0.1$ ,  $Q_0$  sera de l'ordre de quelques  $10^5$  W/cm<sup>2</sup> (pour le Fe, le Cr ou le W par exemple). Si nous avons considéré une diode laser de puissance avec une valeur de  $A$  cinq fois plus élevée, il aurait suffi d'un ordre de grandeur de moins ; pour le rayonnement Nd: YAG, il s'agit d'une situation intermédiaire.

Pour les traitements avec passage à l'état liquide, un autre facteur est à prendre en compte : il faut éviter de créer un plasma à la surface de la pièce, voire même de provoquer l'évaporation d'un ou plusieurs des constituants. En effet, si un panache est formé, la zone traitée est en général poreuse. Ceci a deux conséquences principales :

#### b) La limitation de la puissance surfacique,

Elle est le plus souvent en dessous de quelques  $10^6$ W.cm<sup>-2</sup>. C'est l'une des raisons, avec la maîtrise de la régularité de la profondeur traitée, qui fait qu'il est préférable de disposer de faisceau présentant une répartition d'énergie relativement plate ;

#### c) Le gradient thermique

Les relations classiques concernant les transferts thermiques peuvent s'appliquer. Ainsi, dans le cas monodimensionnel, on peut écrire dans une direction perpendiculaire à la surface [46] :

$$\Delta T(z,t) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{AQ_0}{k\rho C}} \sqrt{\tau} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right) \quad (1.23)$$

avec

erfc	la fonction erreur complémentaire;
t	le temps en (s);
z	la cote en profondeur en (m);
C	la capacité thermique (J.Kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> );
ρ	la masse volumique (kg.m <sup>-3</sup> ).

### 1.7.2.3. Vitesse de solidification

Si l'on se place dans les conditions d'un passage à l'état liquide (soit pour un revêtement soit pour la formation d'un alliage de surface), le bain liquide se caractérise du point de vue de la forme selon les mêmes modalités que celui formé lors des opérations de soudage. Suivant les conditions de traitement, le bain peut présenter une forme plus ou moins allongée. Le nombre de Peclet  $P_e$  permet de se positionner soit :

$$P_e = \frac{RV}{\alpha} \quad (1.24)$$

avec R est le rayon du faisceau en (m) ;

V est la vitesse du traitement en ( m.s<sup>-1</sup>) ;

α est la diffusivité thermique en (m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>)

Dans des conditions classiques de traitement,  $P_e$  est très supérieur à 1, et le bain a la forme d'une goutte d'eau allongée. Pour mieux comprendre les phénomènes de solidification, il faut se souvenir que les photons étant échangés en extrême surface, le chauffage est amorcé en surface et se propage vers l'intérieur de la pièce. Pendant la durée de l'interaction et un peu au-delà, le front de fusion progresse. Au refroidissement, il y a inversion et le front de solidification va se développer de l'intérieur vers l'extérieur. Par conséquent au moment de l'inversion, la vitesse de solidification est nulle puis s'accroît pour être au plus égale à la vitesse V de traitement.

- **Modification de l'état de surface**

Ce traitement vise à modifier l'état de surface d'un substrat par une évaporation superficielle contrôlée.

- **Effets mécaniques**

Un traitement mécanique par laser à pour objectif la mise en contrainte du matériau en vue de l'amélioration de sa tenue en fatigue. Il s'agit d'un procédé au stade de l'étude en laboratoire [47].

Le principe du traitement repose sur la création d'une onde de choc dans le matériau avec une pression suffisante en surface pour déformer plastiquement le matériau. Cette onde de choc résulte de l'interaction d'un laser Nd:YAG pulsé délivrant des impulsions atteignant quelques GW/cm<sup>2</sup> sur le matériau en milieu confiné (eau, verre...). On obtient alors une mise en



compression du matériau sur des épaisseurs qui peuvent atteindre quelques millimètres. Cette approche doit être comparée au grenailage avec des problèmes liés à la cadence et, par conséquent, au coût.

- **Effets photochimiques**

Un traitement photochimique permet de modifier la réactivité chimique d'une surface en provoquant une perturbation des liaisons interatomiques, perturbation en particulier induite par l'excitation des électrons par absorption d'au moins un photon. Ceci intéresse essentiellement l'industrie microélectronique.

## **I.8. Applications des lasers aux traitements de surface**

Le laser utilisé comme outil pour induire des transformations dans les matériaux, notamment dans le domaine des traitements de surface, est une technologie innovante. Si l'essentiel des idées d'utilisation des effets de l'interaction laser-matériaux sont avancées depuis près de vingt ans, leur mise en pratique sur des sites de production industrielle nécessite, d'une part d'améliorer la compatibilité de la technologie des sources et des systèmes avec les contraintes liées au monde industriel (fiabilité, maintenance, formation des équipes, baisse du coût des sources,...), et d'autre part, de poursuivre les efforts en vue de maîtriser les applications (connaissances des phénomènes de base, élaboration de cahier des charges de système laser, méthodes de contrôle et d'assurance qualité...). Enfin, le transfert suppose également une adaptation et une maturation des acteurs industriels. C'est effectivement cette maturité de l'offre, des connaissances scientifiques et de la demande qui marque l'évolution actuelle de la diffusion des applications des lasers de puissance dans l'industrie.

**Les différentes sources laser sont:**

- Laser au CO<sub>2</sub>
- Laser à solide (YAG)
- Laser à excimère

### **I.8.1. Interaction laser-matière**

#### **I.8.1.1. Paramètres de l'interaction**

Les paramètres qui régissent l'interaction laser-matière sont nombreux et les effets produits sont fonction :

- de la source laser (longueur d'onde, temps d'interaction, densité de puissance délivrée) ;
- de la nature du matériau (métal, semi-conducteur, diélectrique), phase (solide, liquide ou gazeuse), propriétés physique (optiques, thermiques), état de surface (nature et pression de l'atmosphère de traitement);
- de l'environnement (nature et pression de l'atmosphère de traitement).

Dans le cas de l'interaction laser-métal, l'interaction du rayonnement se fait avec les électrons libres au voisinage de la surface. Le coefficient d'absorption (ou couplage),  $A_\lambda$ , est le rapport entre la puissance absorbée et la puissance incidente et qui peut être relié aux paramètres optiques de la surface par la relation :

$$A_{\lambda} + 1 - R_{\lambda} = \frac{4n_{\lambda}}{(n_{\lambda} + 1)^2 + k_{\lambda}^2} \quad (1.25)$$

avec  $R_{\lambda}$  coefficient de réflexion à la longueur d'onde incidente  $\lambda$  ;

$n_{\lambda}$ ,  $k_{\lambda}$  indices optiques du matériau à la longueur d'onde incidente  $\lambda$ .

De façon générale, une augmentation du coefficient d'absorption est observée lorsque la longueur d'onde diminue. La valeur du coefficient d'absorption est par ailleurs soumise à de nombreux effets perturbateurs: température de la surface (figure 1-8), état de la surface (rugosité), nature chimique de la surface (impuretés, oxydes,...) par exemple.

La profondeur de pénétration,  $\delta_{\lambda}$  du rayonnement électromagnétique qui est absorbé selon la loi de Beer - Lambert est définie par:

$$\delta_{\lambda} = \frac{\lambda}{4\pi k} \quad (1.26)$$

et la profondeur thermique affectée  $Z$  qui peut, en première approximation, être définie par la relation :

$$Z = 2\sqrt{\alpha t} \quad (1.28)$$

avec  $t$  le temps d'interaction en (s) ;

$\alpha$  la diffusivité thermique du matériau en ( $m^2.s^{-1}$ ).

En général, pour les métaux, la profondeur affectée thermiquement est supérieure à la profondeur de pénétration du rayonnement. Le couplage laser-métal peut donc être, en pratique, généralement considéré comme un phénomène de surface.

### **1.8.1.2. Effets de l'interaction laser-matière**

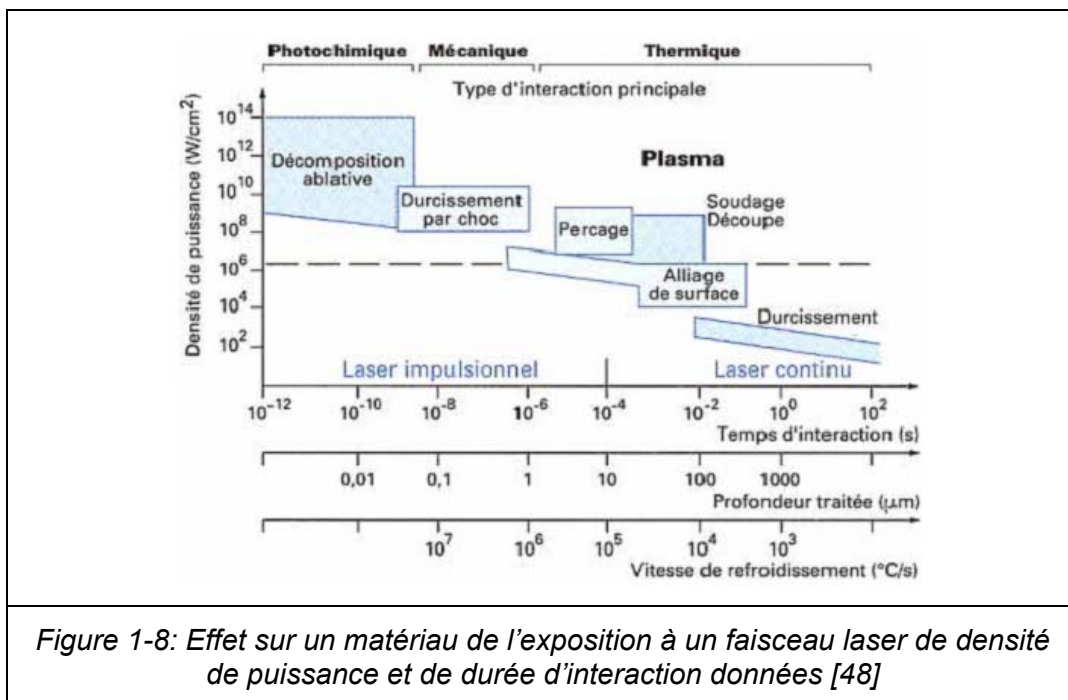
L'interaction laser-matière a pour conséquence l'excitation des électrons au voisinage de la surface du matériau par absorption des photons incidents suivie de la relaxation en un temps très court ( $10^{-12}$  s) de ces électrons induisant trois effets :

- Un effet thermique par propagation de la chaleur dans le matériau conduisant au chauffage, à la fusion ou à la vaporisation du matériau selon la densité de puissance ( $10^2$  à  $10^8$  W.cm<sup>-2</sup>) pour des temps d'interaction variant de la microseconde à la seconde. Ces effets thermiques sont utilisés pour les traitements de surface en phase solide ou liquide (durcissement, formation d'alliage), la découpe, le soudage et le perçage. Dans le cas où l'énergie est très localisée en surface et imposée en un temps très court (< microseconde), on peut avoir liquéfaction et vaporisation quasi instantanée du matériau induisant les phénomènes d'ablation et la formation d'un plasma sur la cible. Les effets thermiques sur le matériau sont alors faibles car l'énergie est principalement stockée dans les particules enlevées. Ces effets sont utilisés pour le nettoyage, le décapage de surface et les dépôts (LPVD).

- Un effet photochimique provoquant des perturbations des liaisons inter atomiques pouvant altérer les propriétés chimiques du solide, du gaz ou l'interface solide-gaz. Dans le cas où l'énergie des photons est de l'ordre de l'énergie de liaison du solide, le traitement pourra induire des ruptures de liaison en surface (traitement des polymères ou gravure du silicium en

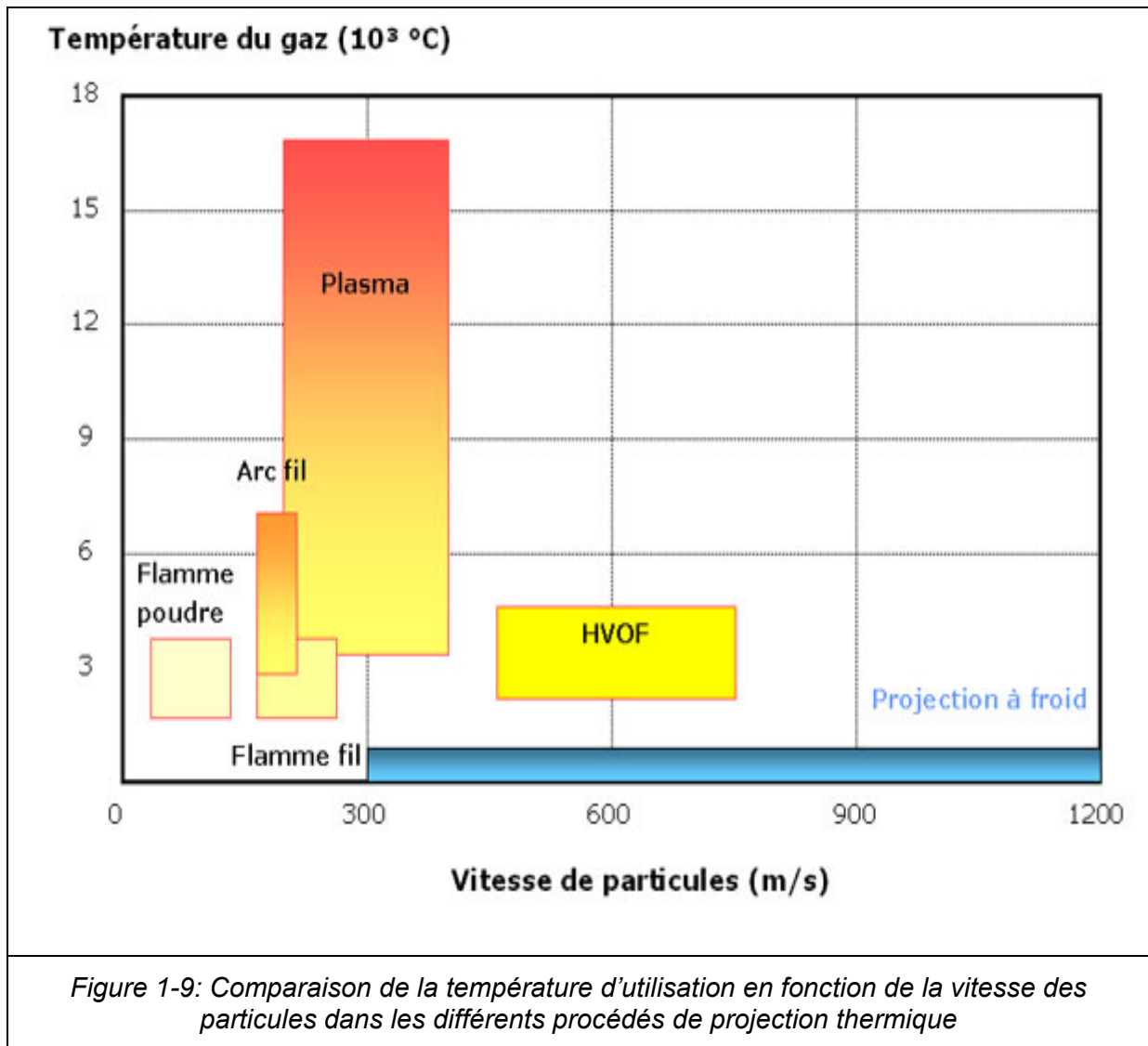
présence de chlore par laser excimère). Ces effets font principalement l'objet d'étude en laboratoire. Les principales applications concernent les secteurs de la microélectronique et de l'optoélectronique (dépôt et gravure avec des résolutions spatiales submicroniques).

- Un effet mécanique pour des durées d'impulsion de l'ordre de la dizaine de nanosecondes et des intensités sur la cible de quelques  $\text{GW.cm}^{-2}$ . Le plasma formé lors de l'interaction est intense et se détend dans l'espace en exerçant une pression sur la surface. Il en résulte la formation d'une onde de choc qui se propage dans le matériau et induit une déformation plastique et une mise en contrainte de la matière impactée (amélioration de la tenue en fatigue du matériau). Le temps d'application de cette pression sur la surface solide est augmenté en interposant devant la cible un matériau transparent à la longueur d'onde du laser incident ce qui a pour effet de retarder la détente du plasma (traitement en milieu confiné). Les pressions générées à la surface de la cible peuvent atteindre plusieurs dizaines de kbars. Le phénomène est cependant limité pour des flux incidents supérieurs à  $10 \text{ GW.cm}^{-2}$  à partir desquels le matériau de confinement devient absorbant (claquage dans le diélectrique).



### I.9. Description des procédés de projection thermique

La projection thermique [49-60] fait partie des techniques de traitement de surface. Elle regroupe l'ensemble des procédés grâce auxquels un matériau d'apport est fondu ou porté à l'état plastique grâce à une source de chaleur puis, il est projeté sur la surface à revêtir sur laquelle il se solidifie. L'épaisseur du revêtement est de l'ordre de quelques dizaines à quelques centaines de micromètres. La surface du substrat n'est jamais fondue. L'adhérence du dépôt est mécanique.



La Figure 1-10 présente le principe général de la projection thermique : la matière à déposer, sous forme de poudre, de fil, de cordon ou de baguette est fondue totalement ou partiellement dans une source de chaleur (flamme, arc électrique, plasma). Un gaz vecteur permet une pulvérisation de la matière et le transport des gouttelettes ainsi formées jusqu'à la surface à revêtir.

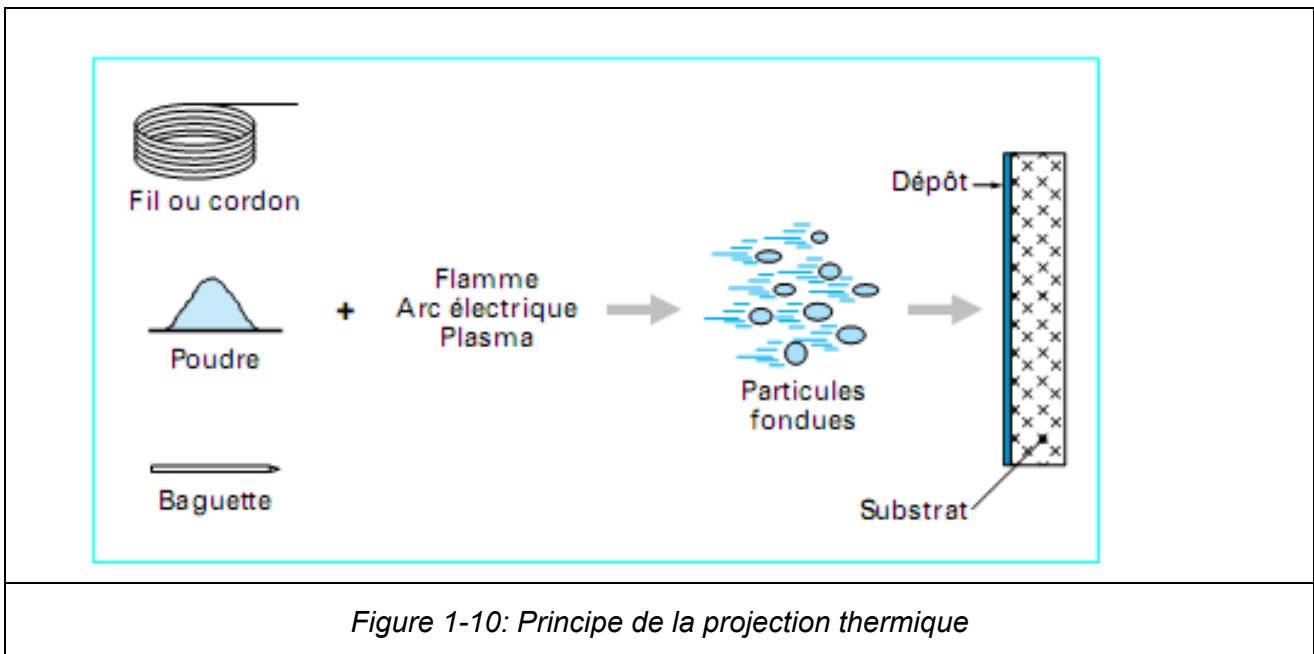


Figure 1-10: Principe de la projection thermique

### I.9.1. Principe de base

Tous les systèmes de projection thermique utilisent un gaz vecteur qui sert à accélérer et transporter jusqu'au substrat de fines particules (typiquement de 5 à 100 micromètres) qui peuvent être à l'état liquide, pâteux voir solide. Ce gaz vecteur peut être aussi source enthalpique, permettant de chauffer ces particules jusqu'au point de fusion. D'autres procédés utilisent un arc électrique pour fondre le matériau. Les particules ainsi projetées sur le substrat, s'écrasent selon leur vitesse, état physique, température etc. L'accumulation des particules sur le substrat permet de réaliser le revêtement.

Le principe consiste à chauffer des particules (poudre ou fil) pour qu'elles arrivent à un état fondu ou semi-fondu. Ces particules seront projetées (vitesse sonique ou supersonique) sur un substrat. Elles vont alors se solidifier sous forme de lamelles en « crêpes » très fines ou « splat ». Le revêtement est obtenu par empilements de ces lamelles individuelles. Ces particules adhèrent au substrat soit par liaisons mécaniques, soit par liaisons métallurgiques.

Cette étude s'intéresse à la zone 3 (cf. figure 2-11), qui correspond à la déposition du splat sur le substrat.

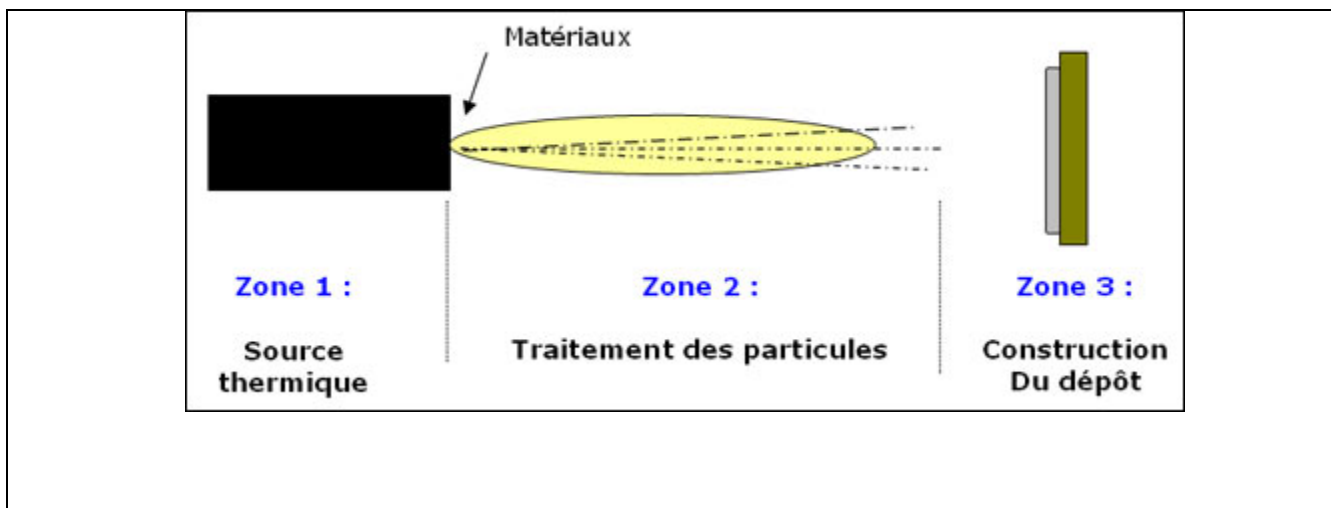


Figure 1- 11: *Division du procédé de la projection thermique en trois zones*

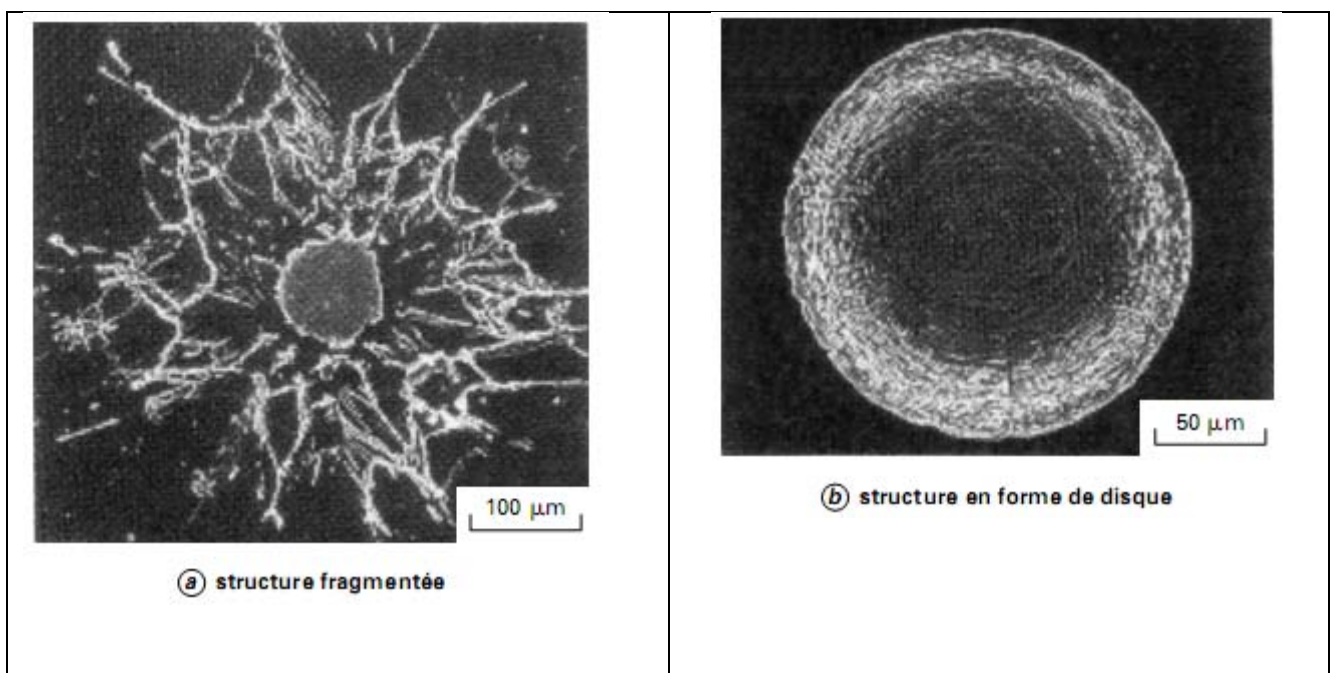
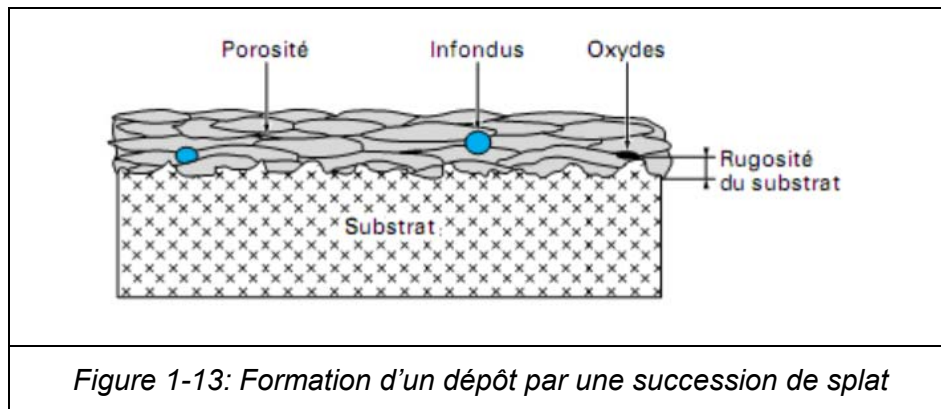


Figure 1-12: *Formation de splat sur un substrat*



### I.9.2. Formation du dépôt

Les dépôts formés par projection thermique sont obtenus par empilements successifs de gouttelettes de matériau fondu ou à l'état pâteux. La structure ainsi formée est du type lamellaire. Afin de réaliser un bon accrochage mécanique, la surface des pièces à revêtir est préalablement sablée pour en augmenter la rugosité et permettre aux particules de s'ancrer dans les irrégularités de surface.

### I.9.3. Les principaux types de projection thermique

Il existe de nombreuses manières de réaliser la projection thermique mais les plus couramment utilisées dans l'industrie sont la projection par chalumeau, par arc fil, par flamme supersonique et par plasma d'arc soufflé.

#### I.9.3.1. Flamme simple

Parmi les techniques de projection thermique, la projection à la flamme est la plus simple et la moins coûteuse. Les matériaux sont introduits sous forme de poudre ou de fil.

Le procédé utilise la réaction chimique entre l'oxygène et un gaz carburant de combustion (acétylène, hydrogène) pour produire une source de chaleur. Cette source thermique crée la flamme. Dans le cas où le matériau d'apport est sous forme de fil, la seule fonction de la flamme est de fondre le matériau, ce dernier étant projeté par de l'air comprimé. Dans le procédé de projection à la flamme avec poudre, les particules sont injectées dans la torche, puis fondues et projetées par la flamme. Le principal avantage de cette technique est la grande variété des poudres utilisées offrant ainsi un large choix de revêtements.

Néanmoins, ce procédé est limité pour les matériaux à faible point de fusion en raison de la température faible du milieu et par la même des particules en vol. Les revêtements sont poreux et peu adhérents au substrat.

#### I.9.3.2. Projection à l'arc

Le principe consiste à créer un arc entre deux fils métalliques agissant en tant que deux électrodes. Un jet d'air comprimé, situé dans l'axe du point de création de l'arc, propulse le métal fondu sur le substrat. L'un des avantages de ce procédé est que deux fils de nature différente peuvent être utilisés simultanément pour produire un pseudo alliage. Les principales applications de la technique de projection à l'arc sont les revêtements résistants à la corrosion (zinc, aluminium). Les propriétés des dépôts obtenus sont meilleures que pour la projection à la flamme, en raison d'une vitesse de particules plus élevée (100 m/s).

#### I.9.3.3. Projection plasma

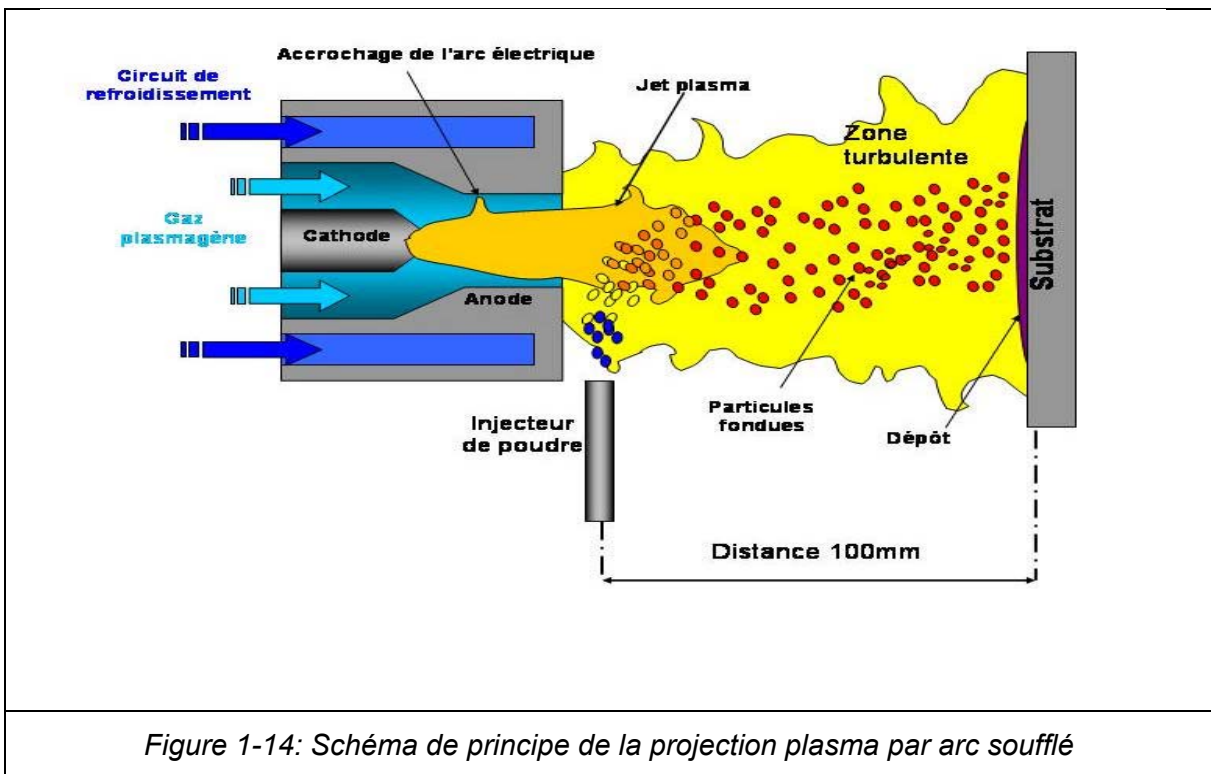
Entre une cathode axiale en tungstène et une anode en cuivre en forme de tuyère, toutes deux refroidies par eau, un arc électrique est amorcé par haute fréquence et entretenu par une source

de courant à basse tension dans un flux de gaz plasmagène (800 A - 100 V) (cf figure 1-14). Le mélange de gaz généralement utilisé pour former l'atmosphère plasmagène est constitué d'argon ou d'azote avec de l'hydrogène ou de l'hélium. Sous l'effet de températures élevées ou l'action de courants H.F., il y a dissociation puis ionisation des molécules de gaz et obtention d'un milieu très conducteur permettant l'entretien de l'arc électrique entre la cathode et l'anode sous une différence de potentiels.

Lors de son passage dans la torche, le gaz plasmagène, par ailleurs soumis à une expansion thermique considérable (plus de 100 fois son volume), contribue à la constriction de l'arc, ce qui a pour effet d'élever la température de l'arc et de le forcer à sortir de l'anode.

Dans la tuyère anode qui est relativement longue, il y a échange de chaleur entre l'arc et le gaz utilisé. La flamme plasma, constituée de gaz dissociés et partiellement ionisés, émerge de la tuyère à grande vitesse ( $650 \text{ m.s}^{-1}$ ) et à haute température (15.000 K).

Le matériau en poudre est entraîné par le gaz vecteur et injecté dans la tuyère ou plus souvent à la sortie de celle-ci. Accéléérées et fondues, les particules sont projetées sur la surface à revêtir avec une énergie cinétique très importante permettant un accrochage optimum.



## I.10. Conclusion

Dan le premier chapitre, nous avons présenté en bref, les techniques de traitements de surface par laser et projection thermique, ainsi que les différents modes de transferts (conduction, convection et rayonnement). Le principe de la modélisation a été présenté, l'unicité d'une solution analytique a été discuté, et les quelques méthodes de modélisation analytiques sont donnés avec les conditions aux limites, et initiales.



## Références

- [1] **A. B Duncan, G. P. Peterson**, Review of Microscale Heat Transfer, *Appl. Mech. Rev.*, 47, 397-428. (1994).
- [2] **C. L. Tien, G. Chen**, Challenges in Microscale Conduction and Radiative Heat Transfer, *J. Heat Transfer*, 116, 799-807. (1994).
- [3] **C. L. Tien et al**, Microscale energy Transport, Taylor & Francis, Washington , DC.(1998).
- [4] **D. Y. Tzou**, Macro- to Microscale Heat Transfer, Taylor & Francis, Washington, DC. (1997).
- [5] **Ana-Maria Bianchi et al**, transferts thermiques, presses polytechniques et universitaire Romandes, Lausanne, 1<sup>ère</sup> édition, (2004).
- [6] **Jean Taine, Jean-Pierre petit**, transferts thermiques « introduction aux sciences des transferts », édition 3, dunod, paris, (2003).
- [7] **Dominique MARCHIO, paul REBOUX**, Introduction aux transferts thermiques, les presses de l'école des Mines, paris, (2003).
- [8] **A.Haji-Sheikh, J. V. Beck**, Temperature solution in multi-dimensional multi-layer bodies, *Int. J. Heat Mass Transfer* 45, 1865-1877, (2002).
- [9] **Ingersoll et Zobel**, heat conduction with engineering and geological applications, London, Mc Graw Hill,( 1948).
- [10] **A. Degiovanni**, Transmission de l'énergie thermique par conduction, Technique de l'ingénieur Mécanique et chaleur, A 1530,(1990).
- [11] **H. John, Lienhard IV, Lienhard V**, A heat transfer Textbook, third edition, Phlogiston press, cambridge, massachusetts,USA, (2006).
- [12] **Hans Dieter Baehr, Karl Stephan**, Heat and mass transfer, 2<sup>nd</sup> edition, springer, Germany, (2006).
- [13] **H. S. Carslaw, J.C. Jaeger**, Conduction of heat in solids. 2nd ed. Oxford: Clarendon Press, (1986).
- [14] **M. Jakob**, Heat transfer. Vol. 1. New York: J. Wiley & Sons, (1949).
- [15] **S.-Y. Chen, G.L. Zyskowski**, Steady-state heat conduction in a straight fin with variable film coefficient. ASME-Paper No. 63-HT-12, (1963).
- [16] **L.S. Han, S.G. Lefkowitz**, Constant cross-section fin efficiencies for nonuniform surface heat-transfer coefficients. ASME-Paper No. 60-WA-41, (1960).
- [17] **H.C. Unal**, Determination of the temperature distribution in an extended surface with a non-uniform heat transfer coefficient. *Int. J. Heat Mass Transfer* 28, 2279–2284, (1985).
- [18] **D.R. Harper, W.B. Brown**, Mathematical equations for heat conduction in the fins of air-cooled engines. Natl. Advisory Comm. Aeronautics, Report no. 158, (1922).

- [19] **K.A. Gardner**, Efficiency of extended surfaces. *Trans. ASME* 67, 621–631, (1945).
- [20] **D.Q. Kern, A.D. Kraus**, Extended surface heat transfer. New York: McGraw-Hill, (1972).
- [21] **A. Ullmann, H. Kalman**, Efficiency and optimized dimensions of annular fins of different cross-section shapes. *Int. J. Heat Mass Transfer* 32, 1105–1110, (1989).
- [22] **E.M. Sparrow, S.H. Lin**, Heat-transfer characteristics of polygonal and plate fins. *Int. J. Heat Mass Transfer* 7, 951–953, (1964).
- [23] **S. Kaka, Y. Yener**, Heat conduction. 3rd ed. Washington: Hemisphere Publ. Comp, (2001).
- [24] **U. Grigull, H. Sandner**, Heat conduction. Berlin: Springer, (1992).
- [25] **H.S. Chu et al**, Applications of Fourier series technique to transient heat transfer problems. *Chem. Eng. Commun.* 16, 215–225, (1982).
- [26] **M. Abramowitz, I.A. Stegun**, Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. Washington: U.S. Government Printing Of, (1972).
- [27] **P.J. Schneider**, Temperature response charts. New York: J. Wiley & Sons, (1963).
- [28] **S. Goldstein**, On the calculation of the surface temperature of geometrically simple bodies. *Z. angew. Math. Mech.* 14, 158–162, (1934).
- [29] **J.R. Ockendon, W.R. Hodgkins**, Moving boundary problems in heat flow and diffusion. Oxford: Clarendon Press, (1975).
- [30] **D.G. Wilson**, Moving boundary problems. New York: Academic Press, (1978).
- [31] **F.P. Incropera, D.P. De Witt**, Fundamentals of heat and mass transfer. 5th ed. New York: J. Wiley & Sons, (2002).
- [32] **J. Crank**, The mathematics of diffusion. 2nd ed. Oxford: Clarendon Press (1975), reprint (2004).
- [33] **J. Collier**, convective boiling et condensation, Mc Graw Hill Book Co, Oxford, (1972).
- [34] **R. Giblin**, Transmission de la chaleur par convection naturelle, collection de l'ANRT, Eroylles, paris, (1974).
- [35] **R. Marchal**, transmission de chaleur par convection dans les tubes, collection de l'ANRT, Eroylles, paris, (1974).
- [36] **J. Huetz, J-P Petit**, Notions de transfert thermique par convection, Techniques de l'Ingenieur Mecanique et chaleur, A 1540.
- [37] **A. Gouffre**, transmission de la chaleur par rayonnement, collection de l'ANRT, Eroylles. paris, (1968).
- [38] **H. C hottel, a. f sarofim**, radiative transfer, Mc Graw Hill, New York, (1972).
- [38] **M. N ozisik**, radiative transfer and interactions with conduction and convection, Mc Graw Hill, New York, (1980).

- [39] **R. Siegel** **Ej. R Howell**, Thermal radiation heat transfer, Mc Graw Hill, New york
- [40] **M. Huetz Aubert**, rayonnement thermique des matériaux opaques. Techniques de l'ingénieur mécanique et chaleur, A 1520.
- [41] **Y. S Touloukian**, thermal radiative properties, mettalic elements and alloys, coatings, non metallic solids. Books on demand.
- [42] **M. Poulain et al**, Influence de la pression sur la conductivité thermique de barrière thermiques, J. Phys. France 10, pr 4-131-Pr4-136, (2000).
- [43] **A. Erner**, étude expérimentale du thermoformage assisté par poinçon de mélange polystyrènes, thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris, (2005).
- [44] **A. S. Marchand**, étude de la résistance thermique de contact à l'interface de solides déformables en frottement. Application aux procédés de forgeage, Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, (1998).  
Disponible sur : <http://docinsa.insa-lyon.fr/these/pont.php?id=marchand>
- [45] **S. Menecier**, Réactivité entre le cuivre et l'alumine sous irradiation laser, Thèse de Doctorat N°54, Université de Limoges, ( 2006).
- [46] **M. Amara**, Céramiques Nanocompoistes Si/C/N/O: Simulation numérique d'un réacteur de synthèse de nanopoudres par pyrolyse laser, Thèse de Doctorat N°51, Université de Limoges, (2004).
- [47] **D. Bäuerle**, laser processing and chemistry. Second edition, Springer, 649 p.
- [48] **R. Fabro, P. Peyrie**, le principe du choc laser et ses applications au traitement des matériaux. Revue Française de Mécanique.N 1995-4.
- [49] Technique d'Utilisation des Photons. Collection Electra, (1993).
- [50] **P. Fauchais**, Progress in plasma processing of material. 943 p., Begell House Inc. New York, (1997).
- [51] **C. Coddet**. Proceedings of the 15th international thermal spraying conference. 1693 p., ASM Etats-Unis, avr, (1998).
- [52] **B. Hansz**. Les applications industrielles de la projection thermique. Forum industriel ITSC (1998).
- [53] **P. Dumon**. Revêtements par soudage et projection thermique. 345 p, Publications du soudage et de ses applications, juin (1995).
- [54] **M. Fukumoto, Y. Huang**. Proceedings of 15th international thermal spray conference. p. 401-406, mai (1998).
- [55] **C. Robert, A. Vardelle**. Proceedings of 15th international thermal spray conference, p. 729-740, mai (1998).
- [56] **V. Gourlaouen et al**. Proceedings of 15th international thermal spray conference, p. 861-866, mai (1998).

- [57] **J-M. Leger et al.** Influence des gaz en projection plasma. Revue Surfaces. n° 262, mai-juin (1996).
- [58] **R. Bonnet, et al**, Simulation de l'élaboration d'un dépôt en projection thermique. Forum industriel ITSC, (1998).
- [59] **F. Tourenne**. Projection thermique: contrôle des revêtements en production. Colloque industriel outillages de mise en forme, université de technologie de Belfort-Montbéliard - site de Sévenans. Déc (1998).
- [60] Qualification de dépôts plasma. CETIM informations no 160, p. 35-38, oct. (1998).
- [61] **M. Vardelle**. Application du diagnostic en ligne pour contrôle du procédé de projection thermique. Colloque industriel 'outillages de mise en forme, , université de technologie de Belfort-Montbéliard. site de Sévenans. déc. (1998).
- [62] [http://ltp2.epfl.ch/Cours/Ph\\_trans\\_chapitre\\_7.pdf](http://ltp2.epfl.ch/Cours/Ph_trans_chapitre_7.pdf)



Chapitre II : Méthodes analytiques

Chapitre II: Méthodes analytiques.....	69
II.1. Introduction .....	69
II.2. Cas d'un matériau bicouche en contact imparfait.....	69
II.2.1. Description du problème physique.....	70
II.2.2. Mise en équation.....	71
II.2.3. Résolution par la méthode de séparation des variables.....	72
II.2.4. Validation du modèle .....	77
II.2.5. Application dans le domaine des traitements de surface.....	80
II.3. Extension au cas d'une source de chaleur en mouvement .....	84
II.3.1. Problème physique et formulation .....	84
II.3.2. Extraction d'une solution analytique .....	86
II.4. Cas 2D sans terme source .....	92
II.4.1. Formulation et méthode de résolution .....	93
II.4.2. Validation du modèle .....	95
II.5. quelques résultats.....	97
II.5.1. Résultats dans le cas 2D homogène .....	98
II.5.2. Etude paramétrique .....	98
II.5.3. Evolution de la température à l'interface.....	103
II.6. Cas 2D avec terme source .....	106
II.6.1. Application d'un flux de type flash.....	106
II.6.2. Réponse à un flux laser gaussien continu .....	112
II.6.3. Matériau thermiquement mince .....	116
II.7. Conclusion .....	117
Références .....	118

## Chapitre II: Méthodes analytiques

### II.1. Introduction

Ce chapitre est consacré aux développements de méthodes analytiques décrivant la conduction de la chaleur dans des matériaux bicouches. La première partie sera consacrée à l'établissement d'une solution analytique de base, dans le cas de la conduction instationnaire dans un matériau bicouche en 1D, tenant compte de la résistance thermique de contact à l'interface. Un exemple pratique de l'application directe de ce modèle est illustré, par l'estimation de la résistance thermique de contact lors des premiers instants de refroidissement d'un splat sur un substrat. La deuxième partie développera à l'extension de cette solution à une source de chaleur en déplacement. La troisième partie est dédiée à l'extension des précédents résultats à une configuration 2D avec une source thermique fixe. Enfin nous généralisons le problème en établissant une solution analytique 2D tenant compte de la résistance thermique de contact et une source de chaleur en mouvement.

Dans tous les cas, nous commencerons par décrire le problème de conduction thermique ou tout simplement les phénomènes physiques sous forme d'équations aux dérivées partielles. Les méthodes mathématiques de résolution seront ensuite choisies en fonction de leur complexité (géométrique, conditions aux limites non homogènes, anisotropie, etc.), et mises en œuvre pour aboutir à une solution satisfaisante.

### II.2. Cas d'un matériau bicouche en contact imparfait

Dans la littérature les études concernant la modélisation des phénomènes de transferts de chaleur sont nombreuses (expérimentales, analytiques et numériques). La plupart de ces études sont basées sur la résolution des équations aux dérivées partielles, servant à la modélisation. Les résolutions sont souvent réalisées par des méthodes numériques (différences finies, volumes finis, éléments finis, etc.), dans le cas de problèmes non-lineaires et dans des géométries complexes.

Les Solutions analytiques de l'équation de conduction instationnaire de la chaleur dans des matériaux multicouches, avec des conditions aux limites non homogènes, sont généralement données en géométrie 1D ou 2D [1-8], mais en considérant que le contact thermique est parfait. Celles traitant le problème en 2D, en tenant compte de la résistance thermique de contact (RTC) sont moins nombreuses, et sont limitées au cas stationnaire, ou pour les cas les matériaux de diffusivité thermique [9]. Certains ouvrages ont été consacrés à la détermination de la RTC, dans le cas de contacts uniformes [10,11] ou aléatoires [12].

Dans ce travail, nous proposons un développement d'une solution analytique de la conduction instationnaire de la chaleur en 1D pour deux couches, de dimensions finies suivant la direction privilégiée. en contact imparfait ( $RTC \neq 0$ ), par la méthode de séparation des variables. Cette solution sera ensuite validée par une autre solution obtenue par la transformée de Laplace, appliquée à deux corps semi-infinis en contact thermique imparfait. L'intérêt d'un tel modèle, est d'avoir accès à un outil de calcul qui permet d'une part une estimation rapide de la conduction de la chaleur dans les deux couches de matériau de dimensions finies ainsi que l'estimation de la résistance thermique de contact à l'interface. D'autre part, il fournira une solution de référence pour la validation des codes numériques avant leur extension à des conditions aux limites plus complexes (ce qui est le cas dans le domaine des traitements de surface par laser ou projection plasma).



### II.2.1. Description du problème physique

Il s'agit du transfert instationnaire de la chaleur par conduction dans un matériau bicouche en contact imparfait. Les deux couches sont d'épaisseurs finies, initialement à des températures  $T_{10}$  et  $T_{20}$ . Ce cas décrit par exemple un dépôt à une température au delà de sa température de fusion, déposé sur un substrat à température ambiante ou légèrement préchauffé (pour des raisons de choc thermique, ...etc). Lors d'un processus de projection plasma (la troisième phase de la figure 1-11), les particules en fusion arrivent et s'écrasent successivement sur le substrat sous forme de splat. En refroidissant, ces splats donnent un dépôt qui forme une couche protectrice (figures 1-12, et 1-13). La qualité du dépôt conditionne fortement les propriétés de la pièce traitée. Du point de vue de la thermique, le paramètre RTC permet de quantifier la qualité du contact dépôt - substrat, qui dépend en général, pour des paramètres de du procédé fixes, de la nature des deux matériaux, de la température, de l'état de surface du substrat, etc.

Ce modèle (figure 2-1), servira donc, d'une part à prévoir la distribution et l'évolution du champ de température dans le bicouche, et aussi à estimer la résistance thermique de contact [13-17]. Les résultats seront confrontés aux courbes de température obtenues par mesure directe des températures, à des points déterminés.

Afin de ne pas s'éloigner de la réalité physique et rester proche des problèmes appliqués, la méthode est présentée pour un cas simplifié illustré sur la figure 2-1. Dans le calcul, la ligne de l'interface est choisie pour coïncider avec  $y=0$ , et on pose  $\theta_i = T_{amb} - T_i$ , avec  $i = 1$  pour le dépôt et  $i=2$  pour le substrat. Les deux matériaux sont supposés isotropes, avec des propriétés thermo-physiques constantes. Le fluide environnant est supposé à température constante et uniforme. Les coefficients d'échange sont constants, la résistance thermique de contact (RTC) reste homogène et constante tout aux long de l'interface. Les changements de phase et les pertes de chaleur par rayonnement ne sont pas pris en compte.

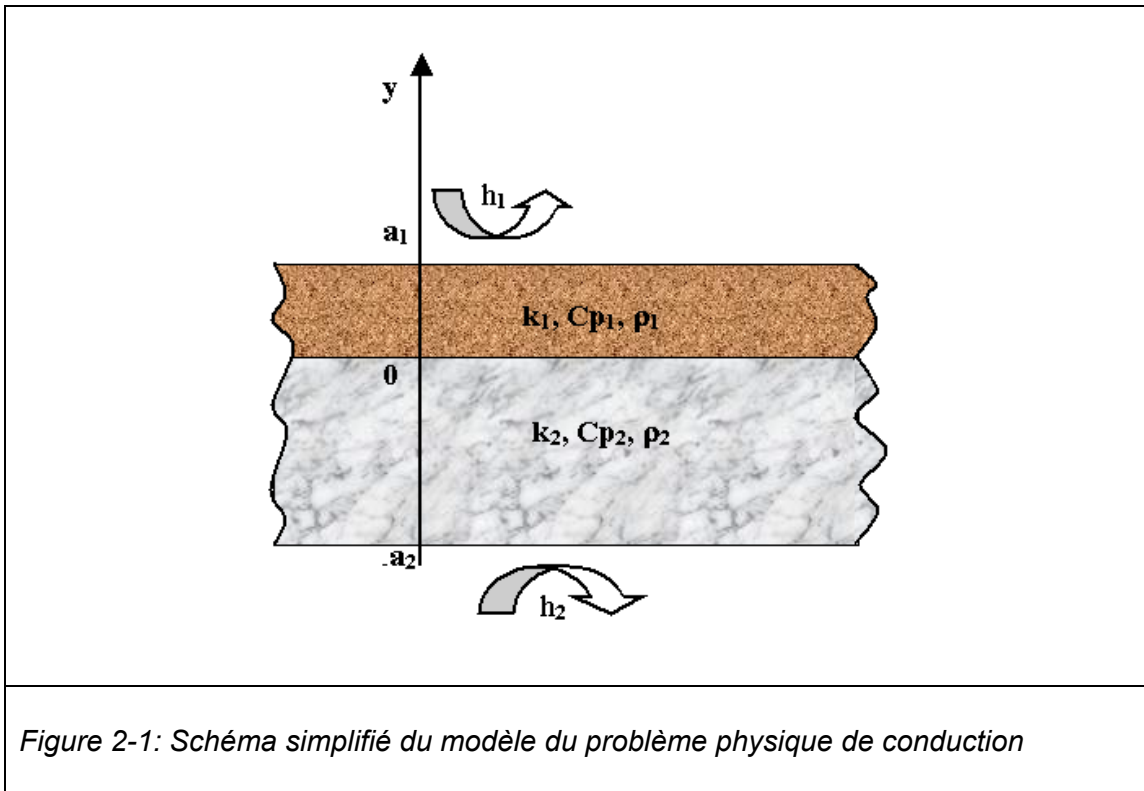


Figure 2-1: Schéma simplifié du modèle du problème physique de conduction

### II.2.2. Mise en équation

L'équation de conduction instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche est exprimée en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t}, \quad -a_2 < y < a_1, \quad t > 0 \quad (2.1)$$

L'indice i est: i=1 pour la couche supérieure "dépôt", i=2 pour la couche inférieure "substrat".

#### les conditions aux limites externes

$$\pm k_i \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial y} \right)_{y=\pm a_i} + h_i \theta_i(y = \pm a_i, t) = 0 \quad (2.2)$$

le signe (+) est valable pour i=1, et le signe (-) est valable pour i=2.

#### Les conditions aux limites interfaciales

la continuité de la densité du flux thermique (eq 2.3), ainsi que la discontinuité de la température (eq 2.4), de part et d'autre de l'interface s'expriment par:

$$k_1 \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right)_{y=0} = k_2 \left( \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (2.3)$$

$$\frac{\theta_2(y=0,t) - \theta_1(y=0,t)}{RTC} = k_1 \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (2.4)$$

les conditions initiales :

$$\theta_1(y,t=0) = f_1(y) , \quad \theta_2(y,t=0) = f_2(y) \quad (2.5)$$

$$\text{avec: } f_i(y) = T_{amb} - T_i(y,t=0)$$

### II.2.3. Résolution par la méthode de séparation des variables

L'usage de la méthode de séparation des variables nous permet d'écrire la solution de l'équation eq (2.1), sous la forme:

$$\theta_i(y,t) = Y_i(y)G_i(t) \quad (2.6)$$

où  $Y_i(y)$  et  $G_i(t)$  sont respectivement: la fonction spatiale et la fonction temporelle dans la première et deuxième couche.

On remplaçant la relation (eq 2.6) dans ( eq 2.1) on obtient :

$$\frac{Y_i''}{Y_i} = \frac{G_i'}{G_i} = -\lambda_i^2 \quad (2.7)$$

$$\frac{d^2 Y(y)_i}{dy^2} + \lambda_i^2 Y_i(y) = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{dG_i(t)}{dt} + \lambda_i^2 \alpha_i G_i(t) = 0 \quad (2.9)$$

on obtient:  $Y_i(y) = A_i \cos(\lambda_i y) + B_i \sin(\lambda_i y) \quad (2.10)$

$$G_i(t) = \exp(-\lambda_i^2 \alpha_i t) \quad (2.11)$$

en appliquant les conditions aux limites interfaciales, on obtient:

$$A_i = \mp B_i R_i(\lambda_i) \quad \text{le signe (-) est valable pour } i=1 \quad (2.12)$$

où :  $R_i(\lambda_i) = \frac{k_i \lambda_i + h_i \tan(\lambda_i a_i)}{h_i - k_i \lambda_i \tan(\lambda_i a_i)}$  ,  $\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$  , et  $k_1 \lambda_1 B_1 = k_2 \lambda_2 B_2$  (2.13)

Et par suite on obtient :  $R_1(\lambda_1) + \left( \frac{k_1 \lambda_1}{k_2 \lambda_2} \right) R_2(\lambda_2) + (\lambda_1 k_1 RTC) = 0$  (2.14)

En remplaçant (eq 2.12) dans (eq 2.10), on obtient :

$$Y_1(y) = B_1 (\sin(\lambda_1 y) - R_1(\lambda_1) \cos(\lambda_1 y)) \quad (2.15)$$

$$Y_2(y) = B_2(\sin(\lambda_2 y) + R_2(\lambda_2) \cos(\lambda_2 y)) \quad (2.16)$$

En remplaçant  $B_2$  par son expression obtenue en (2.13), et en posant  $B_1 = C$ , on obtient :

$$Y_1(y) = C(\sin(\lambda_1 y) - R_1(\lambda_1) \cos(\lambda_1 y)) \quad (2.17)$$

$$Y_2(y) = C \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \right) (\sin(\lambda_2 y) + R_2(\lambda_2) \cos(\lambda_2 y)) \quad (2.18)$$

on transforme l'équation (eq 2.14) en (eq 2.19), où les valeurs propres ( $\lambda_{i,n}$ ) sont des réels positifs solutions de l'équation suivante:

$$R_{1,n}(\lambda_{1,n}) + \left( \frac{k_1 \lambda_{1,n}}{k_2 \lambda_{2,n}} \right) R_{2,n}(\lambda_{2,n}) + (k \lambda_{1,n} TCR) = 0 \quad (2.19)$$

ce qui correspond à l'équation aux valeurs propres.

Avec: 
$$R_{i,n}(\lambda_{i,n}) = \frac{k_i \lambda_{i,n} + h_i \tan(\lambda_{i,n} a_i)}{h_i - k_i \lambda_{i,n} \tan(\lambda_{i,n} a_i)} \quad (2.20)$$

On en déduit les expressions des fonctions propres (dimensionnelles et adimensionnelles):

dans la première couche

$$Y_{1,n}(y) = C_n (\sin(\lambda_{1,n} y) - R_{1,n}(\lambda_{1,n}) \cos(\lambda_{1,n} y)) \quad (2.21)$$

$$Y_{1,n}(y) = C_n Y_{1d,n}(y) \quad (2.22)$$

$$Y_{1ad,n}(y) = (\sin(\lambda_{1,n} y) - R_{1,n}(\lambda_{1,n}) \cos(\lambda_{1,n} y)) \quad (2.23)$$

dans la seconde couche

$$Y_{2,n}(y) = C_n \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \right) (\sin(\lambda_{2,n} y) + R_{2,n}(\lambda_{2,n}) \cos(\lambda_{2,n} y)) \quad (2.24)$$

$$Y_{2,n}(y) = C_n \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \right) Y_{2d,n}(y) \quad (2.25)$$

$$Y_{2ad,n}(y) = (\sin(\lambda_{2,n} y) + R_{2,n}(\lambda_{2,n}) \cos(\lambda_{2,n} y)) \quad (2.26)$$

les expressions de température pour chaque valeur propre dans les deux couches sont:

$$\theta_{1,n}(y, t) = C_n Y_{1d,n}(y) \exp(-\lambda_{1,n}^2 \alpha_1 t) \quad (2.27)$$

$$\theta_{2,n}(y, t) = C_n \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \right) Y_{2d,n}(y) \exp(-\lambda_{1,n}^2 \alpha_1 t) \quad (2.28)$$

les expressions de température dans les deux domaines sont données sous forme de séries:

$$\theta_1(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_{1d,n}(y) \exp(-\lambda_{1,n}^2 \alpha_1 t) \quad (2.29)$$

$$\theta_2(y, t) = \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_{2d,n}(y) \exp(-\lambda_{1,n}^2 \alpha_1 t) \quad (2.30)$$

Les coefficients  $C_n$  sont déterminés en utilisant la relation d'orthogonalité suivante et les conditions initiales.

$$k_2 \int_0^{a_1} Y_{1d,n}(y) Y_{1d,m}(y) dy + k_1 \int_{-a_2}^0 Y_{2d,n}(y) Y_{2d,m}(y) dy = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq m \\ N_n & \text{for } n = m \end{cases} \quad (2.31)$$

$$N_n = k_2 \int_0^{a_1} Y_{1d,n}(y)^2 dy + k_1 \int_{-a_2}^0 Y_{2d,n}(y)^2 dy \quad (2.32)$$

Finalement les coefficients  $N_n$  peuvent être exprimés sous la forme suivante:

$$N_n = \frac{k_2}{2} (1 + R_{1,n}^2(\lambda_{1,n})) \left( a_1 + \frac{h_1 k_1}{(\lambda_{1,n}^2 k_1^2) + h_1^2} \right) + \frac{k_1}{2} (1 + R_{2,n}^2(\lambda_{2,n})) \left( a_2 + \frac{h_2 k_2}{(\lambda_{2,n}^2 k_2^2) + h_2^2} \right) + k_1 k_2 RTC \quad (2.33)$$

la relation ( eq 2.33) est valable dans les deux cas  $RTC \neq 0$  et  $RTC = 0$ .

Application des conditions initiales:

$$f_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_{1d,n}(y) \quad (2.34)$$

$$f_2(y) = \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_{2d,n}(y) \quad (2.35)$$

$$C_n = \frac{k_2}{N_n} \left[ \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \int_{-a_2}^0 f_2(y) Y_{2d,n}(y) dy + \int_0^{a_1} f_1(y) Y_{1d,n}(y) dy \right] \quad (2.36)$$

et finalement on obtient :

$$T_i(y, t) = T_{amb} - \theta_i(y, t) \quad (2.37)$$

### II.2.3.1. Calcul des valeurs propres

Plusieurs auteurs se sont intéressés à la formulation et la résolutions des équations aux valeurs propres [1-9]. F. De Monte [6, 9] démontre que toutes les valeurs propres sont des réels (sans partie imaginaire), et ce que pour un rapport d'épaisseur  $\gamma = \frac{a_2}{a_1} = 2$ , le nombre de valeurs propres nécessaire pour atteindre la convergence est de l'ordre de 20. L'erreur commise dans ce cas est de l'ordre de 3.6 %. Pour l'exemple de refroidissement d'un splat de 1 micron sur substrat de 4 mm; le nombre de valeurs propres nécessaire est de l'ordre de 3000, l'erreur est inférieure à 2%. Les valeurs propres sont calculées numériquement par la méthode de Newton-Raphson.

D'autres auteurs ont élaborés d'autres méthodes telles que [18-22]. Il convient de préciser que les valeurs propres sont calculées par la formule (2.14 ou 2.19) sous forme adimensionnelle:

$$\kappa R_{1,n}(\beta) + R_{2,n}(\beta) + \kappa \beta R_c = 0 \quad (2.37)$$

$$F(\beta) = \kappa R_{1,n}(\beta) + R_{2,n}(\beta) + \kappa \beta R_c = 0 \quad (2.38)$$

avec :  $\beta_{i,n} = \lambda_{i,n} a_i$  ;  $Biot_i = \frac{h_i a_i}{k_i}$  ;  $\beta_n = \beta_{1,n}$  ;

$$\beta_{2,n} = \kappa \beta_{1,n} = \kappa \beta_n ; \quad \kappa = \frac{k_2}{k_1} ; \quad \gamma = \frac{a_2}{a_1} ;$$

$$R_{1,n}(\beta_n) = \frac{\beta_n + Biot_1 \tan(\beta_n)}{Biot_1 - \beta_n \tan(\beta_n)} ; \quad R_{2,n}(\beta_n) = \frac{\kappa\beta_n + Biot_2 \tan(\gamma\beta_n)}{Biot_2 - \kappa\beta_n \tan(\gamma\beta_n)}$$

Les valeurs propres pour le couple étain /Aluminium (cas 1 du tableau 2-1 et tableau 2-2), avec  $RTC = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{C}/\text{W}$ , sont représentées sur la figure 2-2, les 20 premières valeurs sont données, ainsi que leurs précisions (tableau 2-3).

	$h_1$	$h_2$	$a_1$	$a_2$
	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$		m	
<b>Cas 1</b>	0	0	$2 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$
<b>Cas 2</b>	20	0.1	$10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-3}$

Tableau 2- 2 : Propriétés thermophysiques moyennes des matériaux étudiés

Tableau 2- 1: Dimensions et conditions aux limites

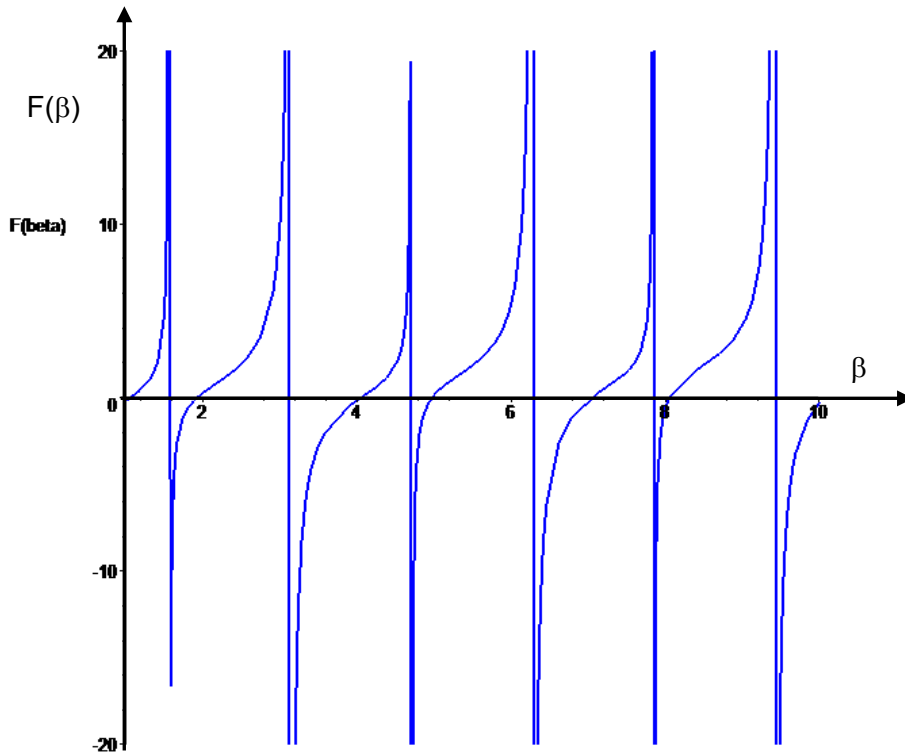


Figure 2-2: Représentation graphique des valeurs propres

Sr  
Al  
Zr  
(lic  
Zr  
(sc

i	$\beta_i$	F( $\beta$ )
1	1.070932318	0.1422020234 e <sup>-8</sup>
2	1.935286307	-0.4820441770 e <sup>-9</sup>
3	4.057187741	-0.4568029248 e <sup>-9</sup>
4	4.978413003	-0.7150818175 e <sup>-9</sup>
5	7.050783637	-0.1440986413 e <sup>-8</sup>
6	8.054899603	0.1970039350 e <sup>-7</sup>
7	10.06782808	-0.4344034266 e <sup>-8</sup>
8	11.15377636	0.2278159312 e <sup>-7</sup>
9	13.11058630	0.2616245988 e <sup>-7</sup>
10	14.26637672	-0.2762184316 e <sup>-7</sup>
11	16.17508588	-0.8284447335 e <sup>-8</sup>
12	17.38742336	0.6997932045 e <sup>-7</sup>
13	19.25632353	0.2434599936 e <sup>-7</sup>
14	20.51385831	0.5942356805 e <sup>-7</sup>
15	22.35007141	-0.4328069416 e <sup>-7</sup>
16	23.64387785	-0.1845174228 e <sup>-6</sup>
17	25.45314914	0.6372979595 e <sup>-7</sup>
18	26.77637778	-0.6906994525 e <sup>-7</sup>
19	28.56325117	-0.3212881016 e <sup>-8</sup>
20	29.91065448	0.1150365446 e <sup>-7</sup>

Tableau 2-3: Précision de calcul des valeurs propres

### II.2.3.2. Résistance thermique de contact

Dans la configuration multicouche, la qualité du contact thermique entre deux couches successives peut être décrite par un seul paramètre qui est la résistance thermique de contact (RTC). Dans la plupart des études théoriques, on suppose que le contact physique entre deux milieux isotropes est thermiquement parfait [6-8], alors que dans la réalité, une résistance thermique de contact non négligeable existe du fait de la présence d'une fine couche intermédiaire ou de transition, due aux irrégularités et à la rugosité des surfaces de matériaux en contact, ainsi que la présence éventuelle d'une phase interstitielle, ou d'impuretés, qui constituent une barrière à la circulation normale du flux thermique.

Cette résistance est d'autant plus importante lorsque il s'agit de solides en contact. Dans ce cas deux modes de transfert thermiques se superposent (figure 2-3):

- un transfert par conduction au niveau des zones de contact ;
- un transfert complexe à travers le milieu interstitiel.

Dans le cas de milieux solides conducteurs, il se produit une convergence des lignes de flux vers les zones de contact où le passage de la chaleur est plus facile appelée **effet de constriction**. Lorsque la conductivité du milieu interstitiel est voisine de celle des milieux en contact, l'effet de constriction devient très faible et peut être négligé.

Pour estimer ce paramètre [13] ainsi que [24 - 25], il faut combiner à la fois un travail de modélisation et les mesures expérimentales de températures de points bien déterminés. En général, la valeur de la RTC varie entre  $10^{-8} m^2.K.W^{-1}$  (contact quasi-parfait) et  $10^{-4} m^2.K.W^{-1}$ . Différentes valeurs de la RTC dans cet intervalle sont utilisées pour tester ce modèle. L'équilibre thermique ne s'établit pas instantanément. Au contraire un saut de température à l'interface est constaté, les températures de part et d'autre de l'interface tendent lentement vers

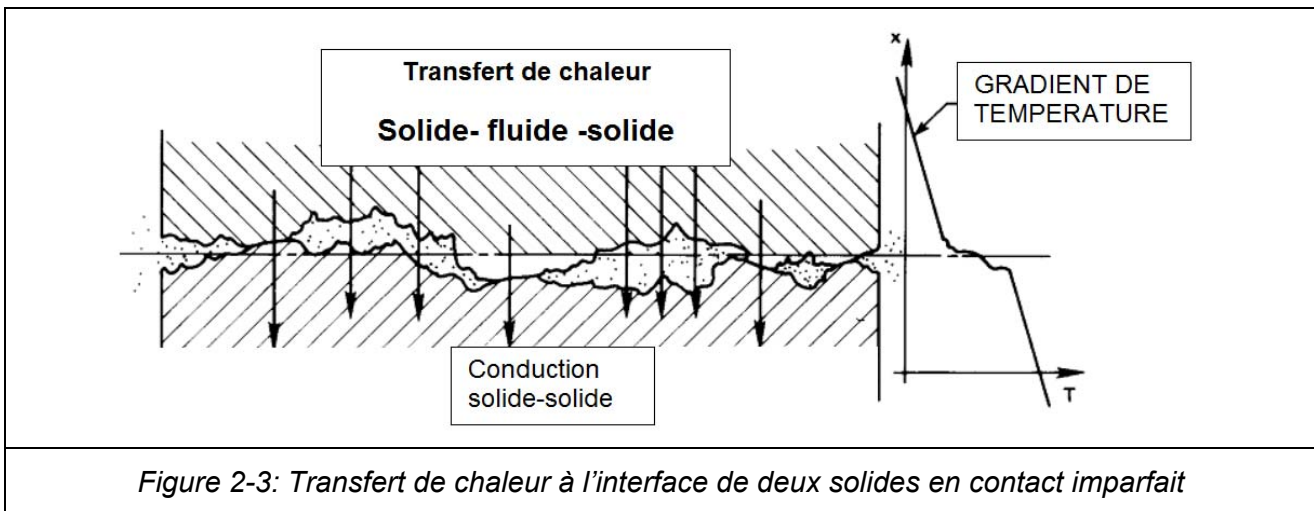


Figure 2-3: Transfert de chaleur à l'interface de deux solides en contact imparfait

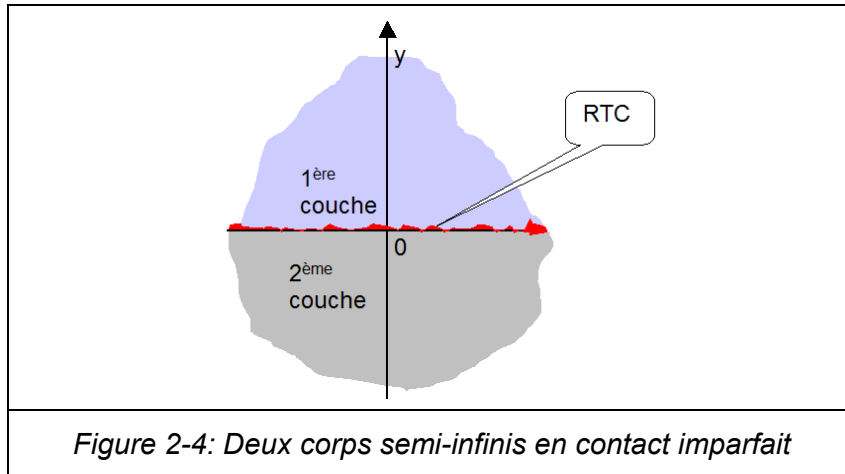
leur valeur d'équilibre  $T_{eq}$  qui est donnée par:  $T_{eq} = \frac{BT_{10} + T_{20}}{B + 1}$  où  $B = (k_1\rho_1Cp_1)^{0.5} / (k_2\rho_2Cp_2)^{0.5}$

## II.2.4. Validation du modèle

### II.2.4.1. La méthode de la transformée de Laplace

Les solutions analytiques en 1D de l'équation instationnaire de conduction de la chaleur, dans un matériau bicouche en contact imparfait, existent mais dans le cas semi-infini. Celles traitant le problème en dimensions finies et tenant compte de la RTC sont très rares. Une formulation générale a été fournie par [3], mais le problème étudié ici en particulier, n'a pas été traité. Le même auteur a donné dans [4] une formulation de ce type de problème en utilisant la transformée de Fourier (Kernels et valeurs propres), mais seulement pour des conditions aux limites de types températures imposées sur les deux faces externes. Nous avons élaboré donc, une solution analytique en utilisant la transformée de Laplace, en 1D de deux corps semi-infinis en contact imparfait (figure 2-4), ce qui va permettre de valider le modèle en dimensions finies sous certaines conditions (cf. II. 2. 4. 2).





Dans ce qui suit, l'interface est choisie à  $y=0$ , la première couche pour  $y > 0$  et la deuxième couche pour  $y < 0$ . En utilisant la transformée de Laplace, on obtient:

$$T_1(y,t) = T_{10} + \frac{A}{B} \left[ \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{\alpha_1 t}}\right) - \exp\left(\frac{yB}{\sqrt{\alpha_1}} + B^2 t\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{\alpha_1 t}} + B\sqrt{t}\right) \right] \quad (2.39)$$

$$T_2(y,t) = T_{20} + \frac{C}{B} \left[ \operatorname{erfc}\left(-\frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{\alpha_2 t}}\right) - \exp\left(-\frac{yB}{\sqrt{\alpha_2}} + B^2 t\right) \operatorname{erfc}\left(-\frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{\alpha_2 t}} + B\sqrt{t}\right) \right] \quad (2.40)$$

avec: 
$$A = \frac{-T_e \sqrt{\alpha_1}}{k_1 RTC}, \quad C = \frac{\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} T_e \sqrt{\alpha_1}}{k_2 RTC}, \quad B = \left( \frac{k_2 \sqrt{\alpha_1} + k_1 \sqrt{\alpha_2}}{k_2 k_1 RTC} \right) \quad (2.41)$$

$T_e = T_{10} - T_{20}$ , où  $T_{10}$  et  $T_{20}$  sont les températures initiales respectivement dans la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>ème</sup> couche.

### II.2.4.2. Cas deux milieux semi-infinis en contact thermique imparfait

La validation de la solution analytique obtenue par la méthode de séparation des variables en dimensions finies, par celle obtenue en utilisant la transformée de Laplace, appliquée à deux couches semi-infinies en contact imparfait, nécessite de respecter plusieurs conditions. La première condition à remplir est celle de l'hypothèse d'un domaine constitué de deux milieux semi-infinis. Les deux couches de la figure 2-4, peuvent être assimilées à deux milieux semi-infinis, lorsque le nombre de Fourier (la longueur de la diffusion thermique) satisfait la condition suivante:

$$2\sqrt{\alpha_1 t} \ll a_1 \quad \text{et} \quad 2\sqrt{\alpha_2 t} \ll a_2 \quad (2.42)$$

donc la validation est valable pour une durée  $t$  vérifiant: 
$$t \ll \min\left(\frac{a_1^2}{4\alpha_1}, \frac{a_2^2}{4\alpha_2}\right).$$

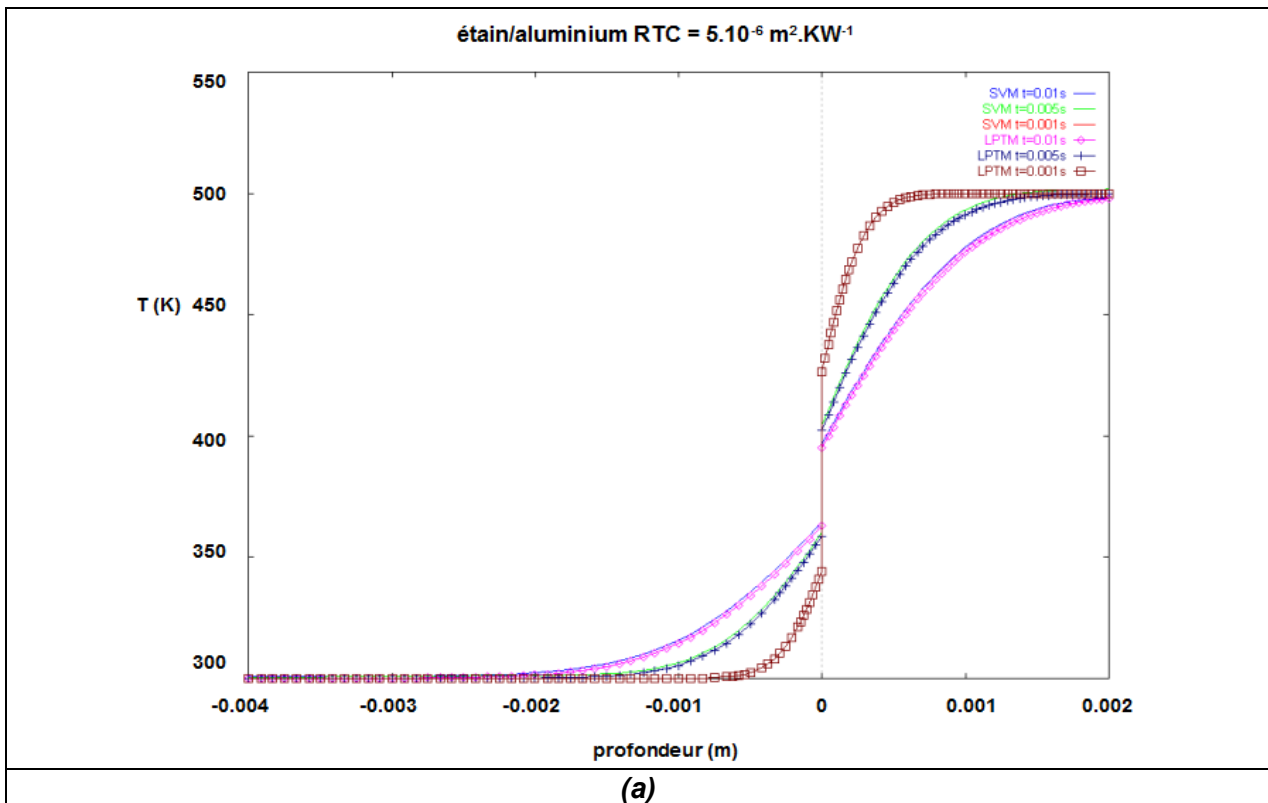
cas pratique 1:

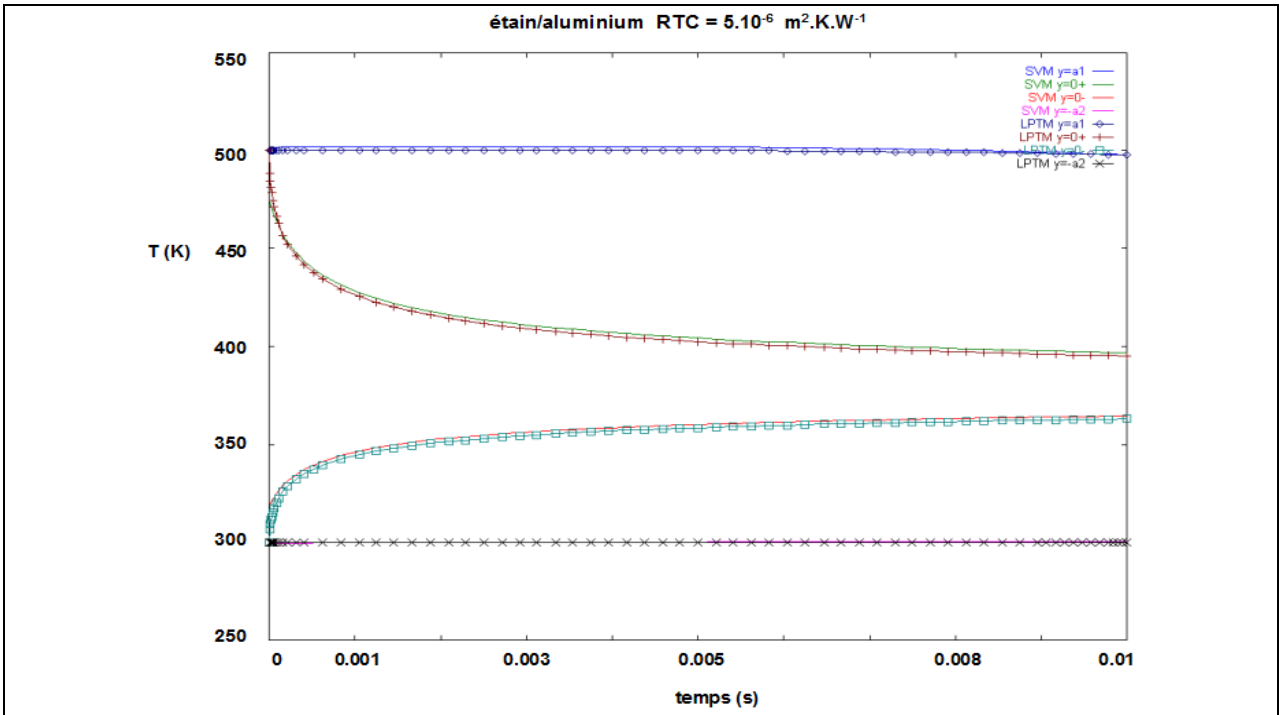
Chapitre II : Méthodes analytiques

On a choisi un couple de matériaux étain/aluminium, qui ont la même diffusivité thermique:  $\alpha_1=\alpha_2 = 4.10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ . Les dimensions choisies sont:  $a_1= 2.10^{-3} \text{ m}$ ,  $a_2= 4.10^{-3} \text{ m}$  (cas 1 de la tableau 2-1), et

par suite :  $t \ll \min(\frac{a_1^2}{4\alpha_1} = 0.025\text{s}, \frac{a_2^2}{4\alpha_2} = 0.1\text{s})$

Dans cet exemple de validation, on notera que  $a_1 \neq a_2$  ce qui évite de tomber dans des cas spéciaux liées à la symétrie par rapport à l'interface, en particulier pour des matériaux de même diffusivité thermique. Les résultats de cette validation sont données pour le couple étain/aluminium, mais les tests effectués sur un bien plus large éventail de matériaux, et pour différentes valeurs de RTC, conduisent à des résultats qui sont en bons accord avec ceux obtenus par la méthode de la transformée de Laplace. Les résultats des figures 2-5 (a) et (b), supposent une RTC =  $5.10^{-6} \text{ m}^2.\text{°K.W}^{-1}$ , pour les températures initiales ( $T_{10} = 500\text{°C}$ ,  $T_{20} = 300\text{°C}$ ,  $T_e = T_{10} - T_{20} = 200\text{°C}$ ). La figure 2-5 (a) montre la validation des champs de température dans l'espace pour des instants donnés ( $t=0.001 \text{ s}$ ,  $t=0.005 \text{ s}$  et  $t=0.01 \text{ s}$ ), ce qui respecte la condition du nombre de Fourier ( $t \ll 0.025 \text{ s}$ , "cas 1 du tableau 1"). La figure 2-5 (b) montre la validation de l'évolution de la température dans le temps pour différentes positions dans le matériau bicouche ( $y=a_1$ ,  $y=0^+$ ,  $y=0^-$  et  $y=-a_2$ ).





(b)

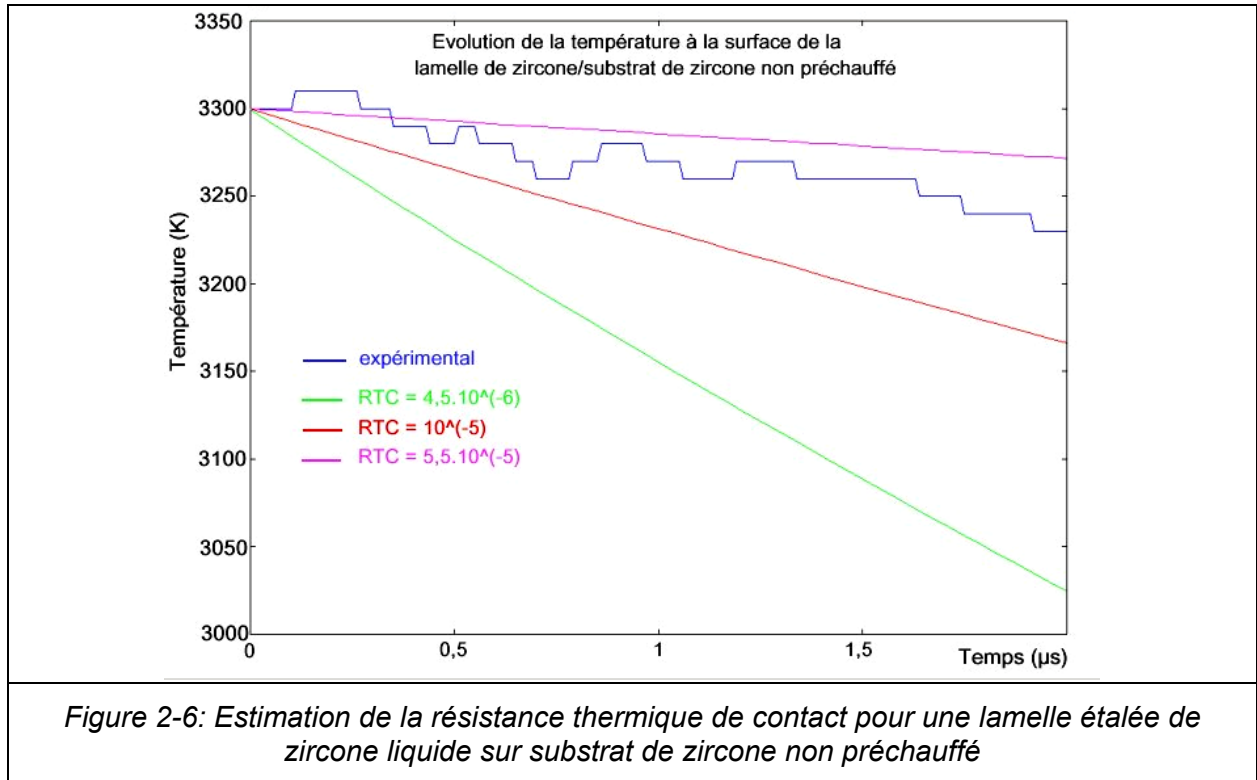
Figure 2- 5: Validation de notre modèle par la solution obtenue par la transformée de Laplace, pour le couple Sn / Al (cas 1 du tableau 2-1).

(a) validation dans l'espace, (b) validation dans le temps

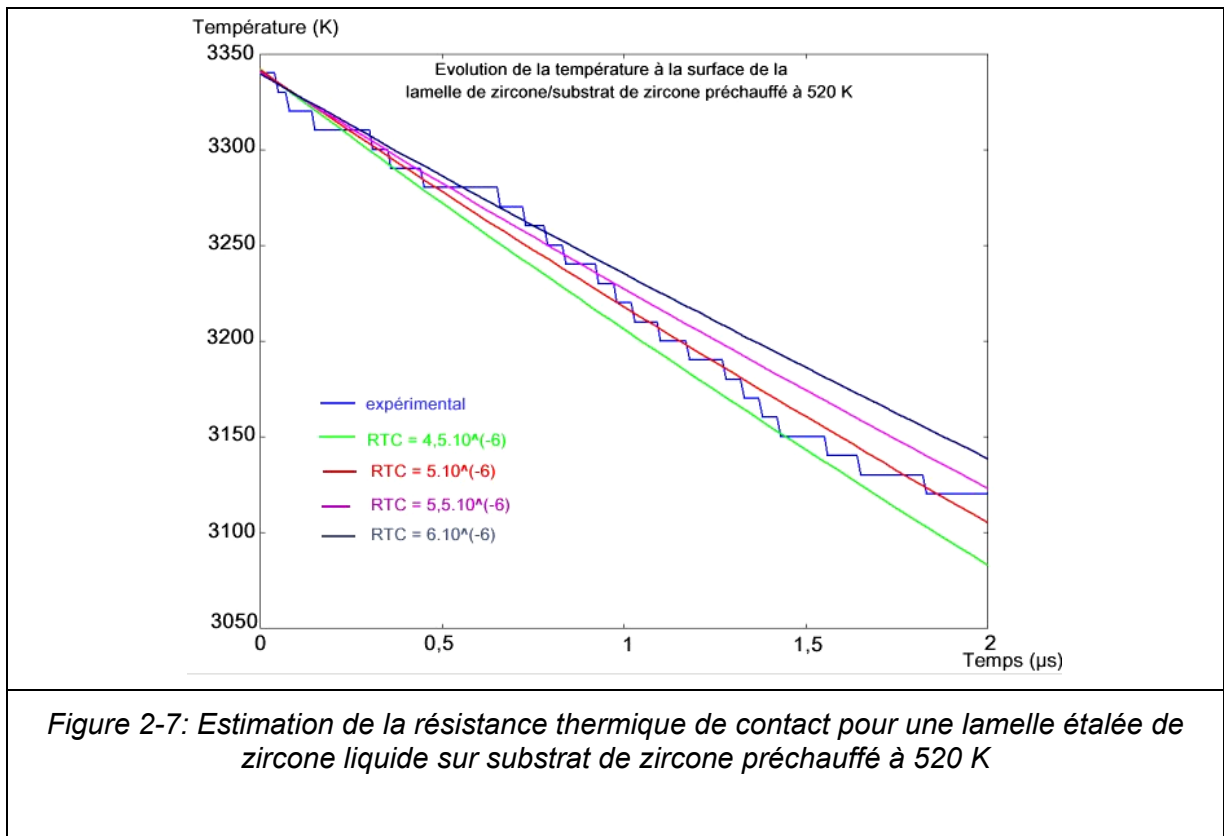
### II.2.5. Application dans le domaine des traitements de surface

Une application typique de ce modèle analytique 1D, en dimensions finies, dans le domaine de traitement de surface par la projection thermique est la solidification d'un splat sur un substrat juste après l'impact (la taille du splat est de l'ordre de quelques microns). Ce modèle permet donc, d'accéder à la distribution de la température en différents points du splat et du substrat. La RTC est déterminée en recalant les résultats du modèle aux températures expérimentales mesurées à la surface sur le splat, à ceux obtenus par le modèle [13].

L'utilisation du modèle analytique développé nous a permis d'estimer la résistance thermique de contact de la lamelle liquide étalée sur le substrat de zircon préchauffé et non préchauffé. Le principe est d'ajuster la valeur de la résistance thermique dans le modèle pour se rapprocher au maximum de la courbe expérimentale pendant les deux premières microsecondes après l'étalement (avant le palier de la solidification). La figure 2-6 montre la comparaison de la courbe expérimentale obtenue sur substrat de zircon non préchauffé avec les courbes obtenues à partir du modèle analytique pour différentes valeurs de la RTC. On peut estimer ainsi une résistance thermique comprise entre  $5,5 \cdot 10^{-5}$  et  $10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$  entre la lamelle liquide étalée et le substrat.



Le cas d'un substrat de zircon préchauffé à 520 K est illustré sur la figure 2-7. La RTC est plus faible que dans le cas du substrat non préchauffé, elle est comprise entre  $4,5 \cdot 10^{-6}$  et  $6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$  entre la lamelle liquide étalée et le substrat.



Ces résultats montrent que le comportement de la lamelle ne dépend pas uniquement d'une topographie de surface (rugosité), mais aussi de la température du substrat. Le maintien en température du substrat peut en effet permettre un nettoyage des contaminants présents en surface (molécules d'eau, graisse, poussières...) et améliorer ainsi le contact liquide solide. Le substrat de zircon non préchauffé contient probablement une couche d'adsorbats en surface, nuisible à une bonne mouillabilité et par conséquent à un bon contact de la lamelle liquide de zircon.

D'autres résultats du modèle; dans le cas de la solidification d'un splot de zircon liquide, initialement à  $T_{10} = 3300$  K, déposé sur un substrat en zircon solide préchauffé initialement à la température  $T_{20} = 520$  K sont étudiés. Dans ce cas, le modèle de deux corps semi-infinies en contact imparfait [14] est insuffisant parce que sa validité est seulement pour

$t \ll \left( \frac{a_1^2}{4\alpha_1} = 3.5 \cdot 10^{-7} \text{ s} \right)$ , (cas 2 du tableau 2-1). Cependant cette restriction disparaît en utilisant le présent modèle basé sur la méthode de séparation des variables.

Les figures 2-8 à 2-11, illustrent les résultats du modèle 1D de conduction instationnaire de la chaleur pour un couple (zircon liquide/zircon solide), considéré comme un matériau bicouche en contact thermique imparfait. Ce modèle est très utile à l'estimation de la résistance thermique de contact aux premiers instants de solidification d'un splot sur le substrat (temps très courts de l'ordre de quelques microsecondes). Dans ce genre de cas pratique, on peut négliger les pertes thermiques par convection, donc l'introduction de conditions aux limites de types adiabatiques est justifiée [15-17].

On peut remarquer sur les figures 2-8 et 2-9, que pour le cas étudié (la zircon liquide/ zircon solide), le contact peut être considéré comme parfait pour des valeurs de la RTC inférieures à  $10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$ , car l'équilibre thermique à l'interface est quasi-instantané (moins d'une seconde); ce qui confirme les résultats donnés par Fauchais et al [18].

Il ne faut pas oublier que les propriétés thermophysiques des matériaux utilisées varient avec la température, et par conséquent avec le temps. Le présent modèle permet donc d'avoir une bonne estimation de la température, en utilisant les valeurs moyennes des propriétés thermophysiques.

Les résultats des figures 2-5 à 2-11 sont données pour  $T_{10} = 3300$  K,  $T_{20} = 520$  K, pour différentes positions sur le bicouche  $T_1(y=a_1,t)$ ,  $T_1(y=0,t)$ ,  $T_2(y=0,t)$  et  $T_2(y=-a_2,t)$ , cas 2 du tableau 2-1.

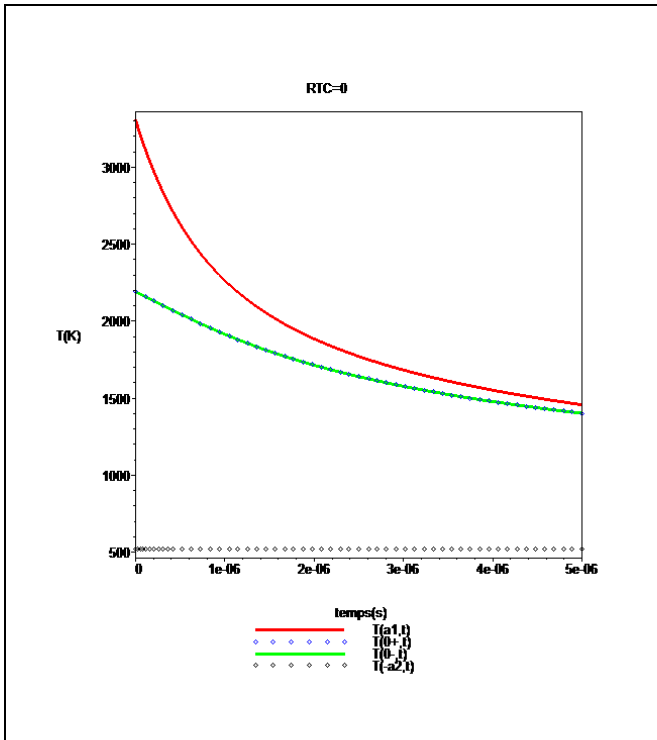


Figure 2-8:  $RTC=0 \text{ m}^2.K.W^{-1}$

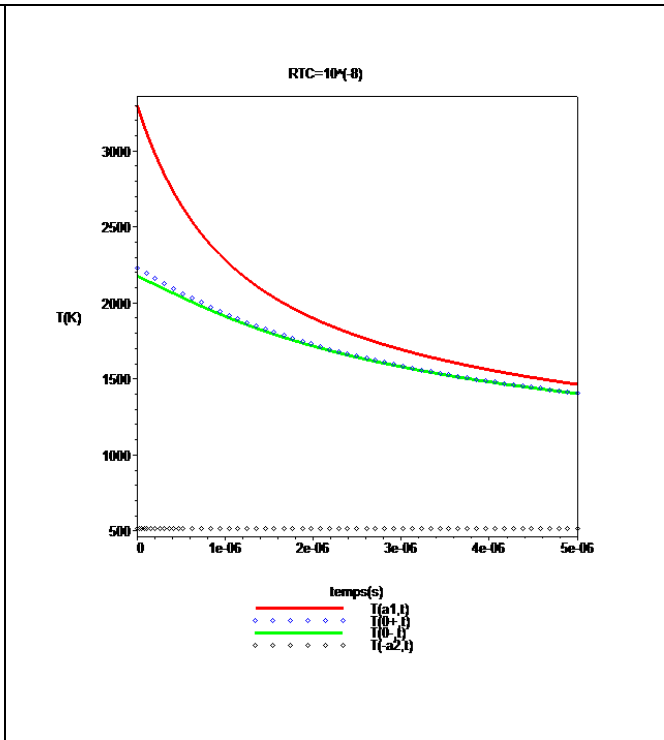


Figure 2-9:  $RTC = 10^{-8} \text{ m}^2.K.W^{-1}$

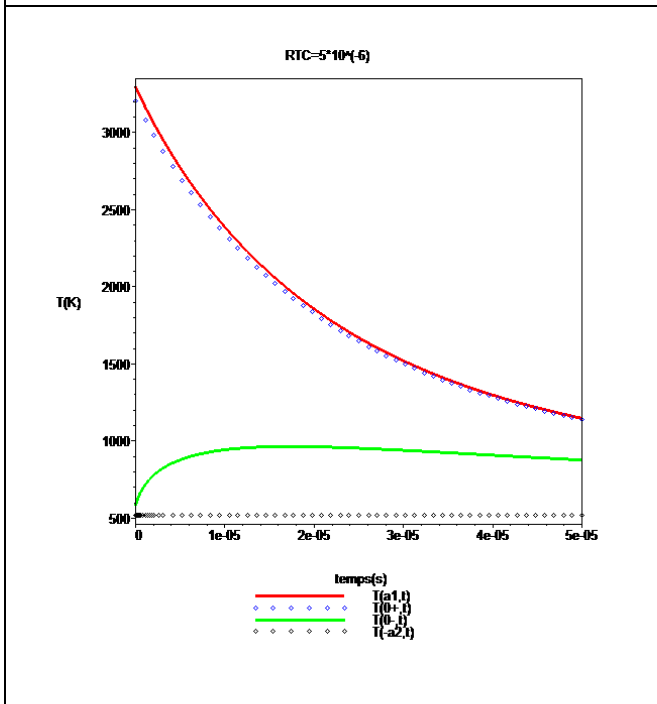


Figure 2-10:  $RTC= 5.10^{-6} \text{ m}^2.K.W^{-1}$

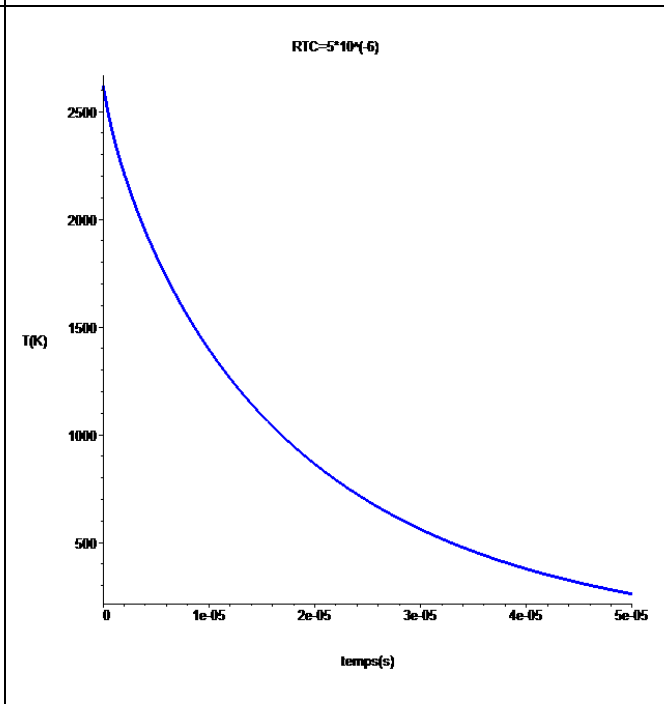


Figure 2-11: Le saut de température  $T_1(0,t)-T_2(0,t)$  en fonction temps, pour la  $RTC=5.10^{-6} \text{ m}^2.K.W^{-1}$

### II.3. Extension au cas d'une source de chaleur en mouvement

Il convient donc maintenant d'étendre la solution analytique 1D obtenue précédemment à la conduction instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait, assujetti à une source de chaleur en mouvement. En l'espèce, nous prenons un flux laser continu gaussien en mouvement, étant entendu que la méthode de résolution est applicable à tout autre type de source de chaleur en mouvement. Cette étude peut être aisément étendue à trois couches ou plus.

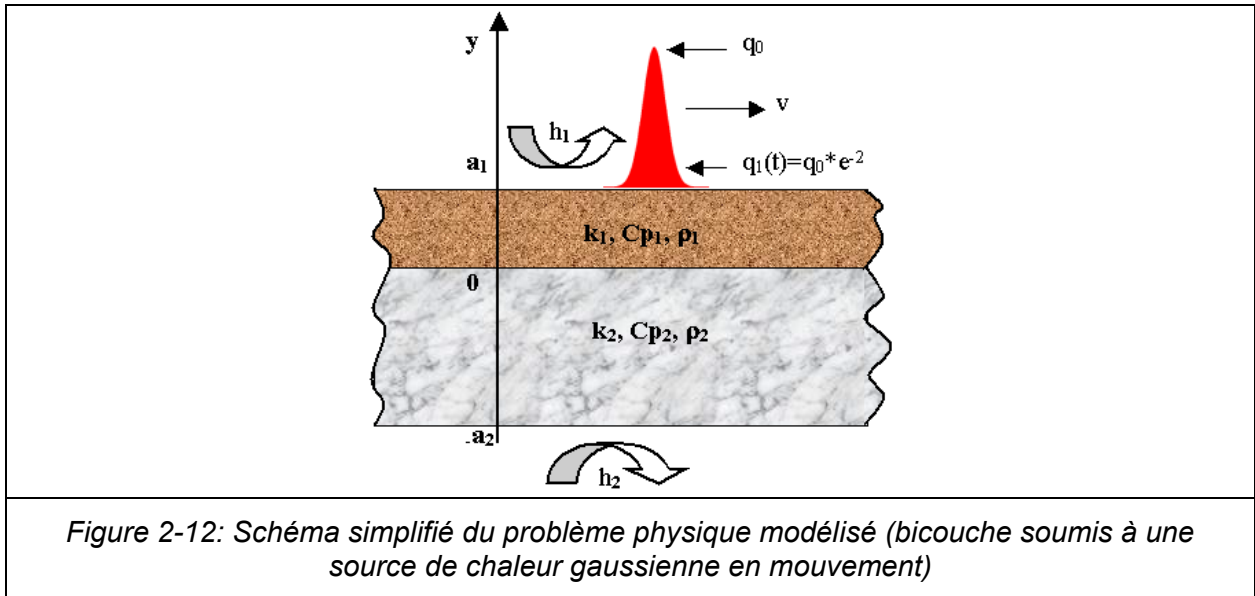
Les problèmes de physique liés aux sources de chaleur en mouvement sont rencontrés dans de nombreuses applications industrielles, au cours des processus de transformation ou traitement des matériaux, citons par exemple: le découpage, le forage, le soudage, les traitements thermiques et les traitements de surface. D'autres techniques très récentes progressent rapidement comme le découpage par évaporation laser et l'usinage laser.

Les références bibliographiques consacrées à la modélisation analytique du transfert de chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait soumis à une source de chaleur en mouvement, sont peu nombreuses, et la plupart des études sont relatives au transfert dans un monocouche.

En 1946, le travail de Rosenthal [27] était précurseur en matière de solutions analytiques aux problèmes liés aux transferts de chaleur dans un solide soumis à une source en mouvement, appliquée aux techniques de soudage en générale. En 1973 Swift Hook et Gick [28] ont développé le premier modèle pour le soudage continu par laser. Ce modèle est construit sur le même principe que celui de Rosenthal, le flux laser est représenté par une source linéaire en mouvement. Ces auteurs se sont fondés sur les isothermes pour localiser la zone de fusion. La largeur et la profondeur de la zone fondue sont donc reliées à la puissance et la vitesse du flux laser, mais leurs résultats ne sont qu'en accord relatif avec l'expérience. D'autres études ont été menées ces dernières années qui couvrent la modélisation du traitement par laser appliqué à des matériaux monocouches [28-33], en particulier dans les domaines liés aux soudages par laser. La plupart des études de la littérature qui traitent ce type de problème (multicouches avec source de chaleur), ont été établies avec plusieurs hypothèses simplificatrices. Parmi ces études, El Adawi et al [35] ont obtenu par transformée de Laplace une solution analytique monodimensionnelle, en considérant le substrat comme semi-infini, le flux laser est ponctuel et fixe. La vitesse du balayage, la forme Gaussienne du faisceaux laser, de même que la RTC sont négligées. Les pertes convectives ne sont pas prises en compte sur les bords, ce qui réduit la validité de ce modèle à des temps d'interaction laser-matière très brefs. H. Sheikh et al [36], ont traité ce même type de problème en utilisant les fonctions de Green, mais les résultats numériques sont donnés pour un cas simplifié. Plusieurs autres solutions analytiques de transmission de la chaleur par conduction sont données par Jaeger et Carslaw [1], J. Crank [2], Ozisik [3-4], etc. mais la plupart des solutions ne correspondent pas à des conditions souhaitées pratiquement.

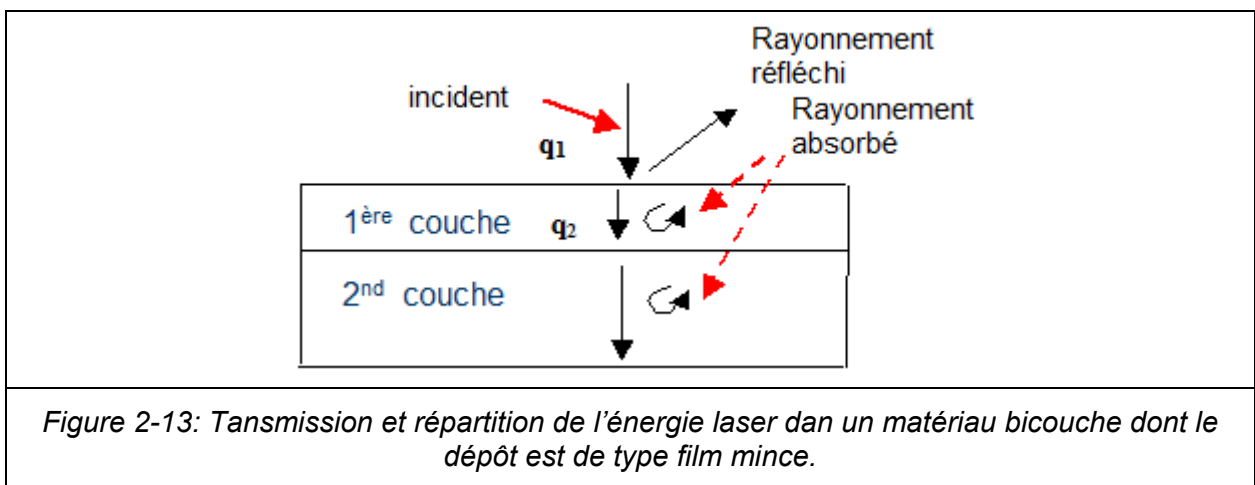
#### II.3.1. Problème physique et formulation mathématique

Dans le cas du transfert de chaleur instationnaire dans un matériau bicouche en contact imparfait, le milieu est irradié par un faisceau laser continu Gaussien ( $TEM_{00}$ ), animé d'une vitesse de balayage constante (figure 2-12). Dans le cas de couches minces, ce modèle prend en considération la transmission d'une portion de l'énergie incidente directement au substrat (figure 2-13). Ce modèle servira à l'estimation du champ thermique dans le bicouche dépôt-substrat, dans les cas pratiques par exemple: la fabrication de pistes électriques conductrices en cuivre sur un substrat en alumine, l'estimation de la RTC par confrontation des résultats modèle/expérience [37-38] et la détermination de la diffusivité thermique par la méthode flash.



### II.3.1.1. Répartition du flux incident

Une portion du flux laser incident est réfléchi, ( $R_1 q_1$ ), une autre proportion est absorbée par la première couche et convertie en chaleur, ( $A_1 q_1$ ), et le reste ( $(1-A_1-R_1) q_1$ ) est transmis à la deuxième couche, et qui à son tour suit le même processus dans la deuxième couche (figure 2-13).



### II.3.1.2. Formulation mathématique

Le modèle mathématique du problème physique étudié (figure 2-12), tenant compte du terme source volumique en mouvement (figure 2-14), est donné comme suit en coordonnées cartésiennes: (avec  $i=1,2$  pour la couche 1 et 2).

$$\frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial y^2} + \frac{q_i}{k_i}, \quad 0 \leq y \leq a_i, \quad t > 0 \quad \text{avec} \quad p = \frac{2 \cdot P_0}{\pi \cdot r_0^2} \quad (2.43)$$

où  $\alpha_i$ ,  $k_i$  et  $q_i$  sont respectivement: la diffusivité thermique, la conductivité thermique, et les termes sources volumiques dans les deux couches.



où: 
$$q_1 = A_1 \cdot P \cdot \exp\left(-\frac{2}{r_0^2}(r_0 - vt)^2\right) \cdot \delta(y - a_1) \tag{2.44}$$

et 
$$q_2 = A_2 \cdot (1 - \varepsilon_1) \cdot P \cdot \exp\left(-\frac{2}{r_0^2}(r_0 - vt)^2\right) \cdot \delta(y - 0), \quad -a_2 \leq y \leq 0, \quad t > 0 \tag{2.45}$$

$a_1$  et  $a_2$  les épaisseurs des deux couches,  $A_1$  et  $A_2$  sont (respectivement) les coefficients d'absorption dans les deux couches;  $r_0$  et  $v$  sont respectivement le rayon et la vitesse du faisceau laser, et  $\delta$  est la fonction de Dirac.

Les conditions aux limites et les conditions initiales sont les mêmes que pour les équations (eq 2.2 à eq 2.5).

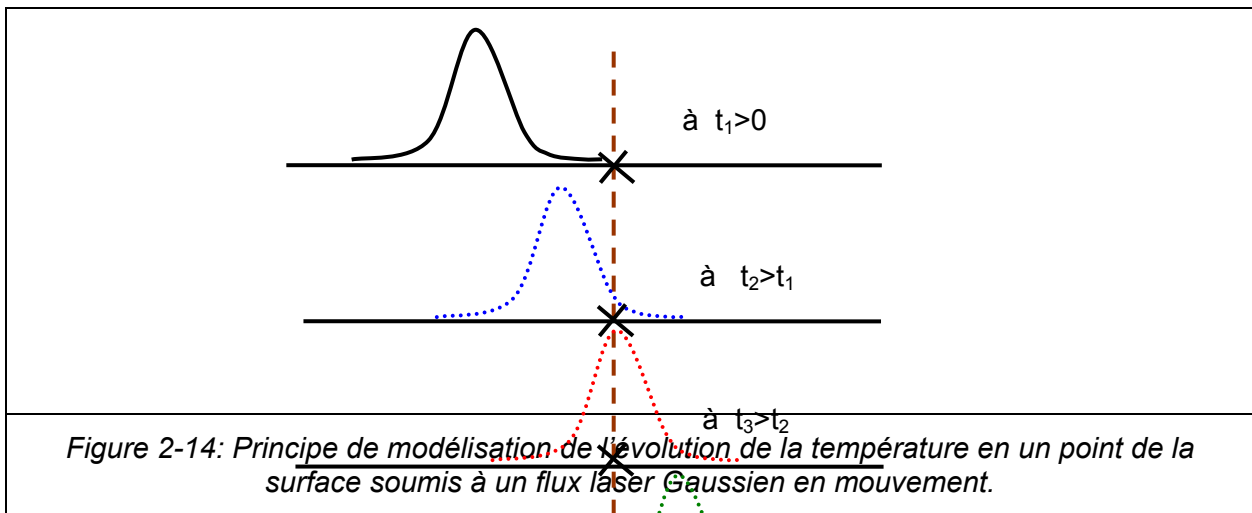


Figure 2-14: Principe de modélisation de l'évolution de la température en un point de la surface soumis à un flux laser Gaussien en mouvement.

### II.3.2. Elaboration d'une solution analytique

La solution analytique est obtenue par la méthode de séparation des variables. Cette méthode est appropriée à la résolution des équations différentielles linéaires en dimensions finies à propriétés constantes. Les équations ci-dessus sont résolues en deux temps, le premier temps consiste à résoudre les équations homogènes (en posant  $q_i=0$ ), et ainsi les valeurs propres sont aisément calculables, et par suite les fonctions propres. Cela correspond au cas déjà étudié précédemment (cf. II. 2). Les solutions homogènes dans les bicouches sont exprimées comme le produit deux fonctions à une seule variable, la première dépendant de l'espace  $y$  et la deuxième du temps  $t$ .

$$\theta_{Hi}(y,t) = Y_{Hi}(y) \cdot G_{Hi}(t) \tag{2.46}$$

L'indice  $H$  correspond aux équations homogènes.

Dans le cas de l'équation homogène (sans terme source), les expressions des températures dans les deux couches sont :

$$\theta_{1H}(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \exp(-\lambda_{1,n}^2 \cdot \alpha_1 \cdot t) \cdot Y_{1d,n}(y) \tag{2.47}$$

$$\theta_{2H}(y,t) = \frac{k_1}{k_2} \cdot \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \left[ \exp(-\lambda_{1,n}^2 \cdot \alpha_1 \cdot t) \cdot Y_{2d,n}(y) \right] \tag{2.48}$$

Il est possible d'exprimer les termes non-homogènes (termes sources) sous la forme de combinaisons linéaires des fonctions propres.

$$q_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t) \cdot Y_{1ad,n}(y) \quad (2.49)$$

$$q_2 = \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t) \cdot Y_{2ad,n}(y) \quad (2.50)$$

En multipliant les membres de gauche et de droite respectivement par  $q_1$  et  $q_2$  dans les équations (eq 2.49 et eq 2.50), et par les fonctions propres correspondantes à chaque couche, puis sommation.

$$\int_0^{a_1} k_2 \cdot q_1 \cdot Y_{1ad,n}(y) \cdot dy = \int_0^{a_1} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t) \cdot k_2 \cdot Y_{1ad,n}^2(y) \right) \cdot dy \quad (2.51)$$

$$\int_{-a_2}^0 \left( \frac{k_1}{D} \cdot q_2 \cdot Y_{2ad,n}(y) \right) \cdot dy = \int_{-a_2}^0 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t) \cdot k_2 \cdot Y_{1ad,n}^2(y) \right) \cdot dy \quad (2.52)$$

avec: 
$$D = \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$$

Les coefficients  $N_n$  sont obtenues à partir de la relation d'orthogonalité suivante:

$$N_n = k_2 \int_0^{a_1} Y_{1ad,n}(y)^2 dy + k_1 \int_{-a_2}^0 Y_{2ad,n}(y)^2 dy \quad (2.53)$$

ce qui permet de déterminer l'expression de  $\phi_n(t)$  :

$$\phi_n(t) = \frac{1}{N_n} \left( \int_0^{a_1} k_2 \cdot q_1 \cdot Y_{1ad,n}(y) \cdot dy + \int_{-a_2}^0 \left( \frac{k_1}{D} \cdot q_2 \cdot Y_{2ad,n}(y) \right) \cdot dy \right) \quad (2.54)$$

Ainsi, les expressions finales de la température dans le bicouche sont sous forme de séries:

$$\theta_1(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) \cdot Y_{1ad,n}(y) \quad (2.55)$$

$$\theta_2(y,t) = \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) \cdot Y_{2ad,n}(y) \quad (2.56)$$

où  $\Phi_n(t)$  est déterminée à partir de l'équation (eq 2.57), en substituant et en les combinant les expressions (eq.2.49), (eq.2.50), (eq.2.55) et (eq.2.56) dans (eq.2.43), on obtient:

$$\frac{d\Phi_n(t)}{dt} + \frac{(\lambda_{1,n}^2 \alpha_1 + \lambda_{2,n}^2 \alpha_2)}{2} \Phi_n(t) = \left( \frac{\alpha_1}{k_1} + \frac{\alpha_2}{k_2} \right) \phi_n(t) \quad (2.57)$$

En introduisant les conditions initiales (eq.2.5) et en résolvant (eq.2.57) par la transformée de Laplace, pour  $\theta_i(y,t=0) = f_i(y) = 0$  :

$$\Phi_n(t) = \int_0^t \exp\left(-\frac{(\lambda_{1,n}^2 \cdot \alpha_1 + \lambda_{2,n}^2 \cdot \alpha_2)}{2} \cdot (t - \tau)\right) \cdot \left(\frac{\alpha_1}{k_1} + \frac{\alpha_2}{k_2}\right) \cdot \phi_n(\tau) d\tau \quad (2.58) \text{ En}$$

injectant l'expression de  $\phi_n(t)$  de (eq 2.54) dans (eq 2.58), et ensuite l'expression  $\Phi_n(t)$  est obtenue. Les températures finales sont:

$$T_j(y,t) = T_{amb} - \theta_j(y,t) \quad (2.59)$$

En ayant remplacé  $\Phi_n(t)$  par son expression dans  $\theta_1(y,t)$  (eq.2-55) et  $\theta_2(y,t)$  (eq.2-56).

### II.3.2.1. Estimation de la RTC

Dans la configuration multicouche, la qualité du contact thermique entre deux couches contiguës peut être quantifiée par un seul paramètre qui est la résistance thermique de contact. Pour estimer ce paramètre, il faut combiner à la fois le travail de modélisation et les mesures expérimentales de températures en des points déterminés. En général, la RTC dépend de la nature des matériaux en contact, de l'état de surface, de la température, etc. Sa valeur varie de  $10^{-8} m^2.K.W^{-1}$  (contact quasi-parfait, à  $10^{-4} m^2.K.W^{-1}$ ). Différentes valeurs de la RTC dans cet intervalle seront utilisées pour tester ce modèle.

### II.3.2.2. Estimation des coefficients de transferts de $h_1$ et de $h_2$

Contrairement au cas étudié dans la première partie de ce chapitre, où le processus était très rapide, de l'ordre de quelques microsecondes, le traitement par faisceau laser (ou plasma) dure de quelques secondes à quelques minutes.

Les échanges convectifs ne peuvent plus être négligés et le transfert convectif à la surface supérieure du dépôt ( $h_1$ ), qui dépend de la température et la taille de la surface d'échange [38] prend la valeur:

$$h_1 = \frac{Nu \cdot k_f}{L} \quad (2.60)$$

$L$  est la longueur caractéristique de l'échantillon,  $Nu$  est le nombre de Nusselt, et  $k_f$  la conductivité thermique du fluide. L'expression de  $Nu$  est donnée dans [39].

$$Nu = \left[ \sqrt{Nu_0} + \left[ Gr \cdot Pr / 300 \left( \left( 1 + (0.5 / Pr)^{9/16} \right)^{16/9} \right) \right]^{1/6} \right]^2 \quad (2.61)$$

où  $10^{-4} \leq Gr \cdot Pr \leq 4.10^{14}$ ,  $0.022 \leq Pr \leq 7.640$  et  $Nu_0 = 0.67$  pour une surface horizontale [39].  $Gr$  et  $Pr$  dans l'équation ci-dessus sont respectivement les nombres de Grashof et Prandtl:

$$Gr = g \frac{L^3 \rho_f^2 \hbar_f (T_1 - T_{amb})}{\Omega_f^2} \quad \text{et} \quad Pr = \frac{Cp_f \Omega_f}{k_f} \quad (2.62)$$

où,  $\Omega_f$  est la viscosité de l'air, et  $\hbar_f$  la dilatation thermique volumique,  $\hbar_f = 1/T_{moy}$  pour les gaz parfaits. L'effet de la variation des propriétés de l'air avec la température est évalué à la température  $T_{moy} = 0.5 \cdot (T_1 + T_{amb})$ ,  $h_2$  est supposé nul (cas adiabatique).

**Données thermophysiques.**

Le modèle obtenu est appliqué à la fabrication de pistes électroniques de cuivre sur un substrat d'alumine en utilisant le traitement par une source laser en mouvement du matériau bicouche. Ces propriétés thermophysiques sont moyennées sur la plage de température de fonctionnement: air ( $k=46.35 \cdot 10^{-3} \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $\rho=0.758 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $C_p=1074 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ); cuivre dense ( $k=360 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $\rho=8954 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $C_p=750 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ); alumine ( $k=20 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $\rho=3900 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $C_p=1075 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ); les dimensions sont :  $a_1=100 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ ; et  $a_2=4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ , les coefficients d'échanges convectifs sont:  $h_1=15 \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ;  $h_2=0$ . Le coefficient d'absorption pour une longueur d'onde de  $1,062 \mu\text{m}$ , est  $A_1=0.2$  pour le cuivre dense [40].

La comparaison de cette solution analytique monodimensionnelle en dimensions finies avec celle obtenue numériquement dans les mêmes conditions (figure 2-15) permet de tester la validité de notre solution. Les résultats de la figure 2-15, sont obtenus sous les conditions suivantes: les matériaux choisis sont cuivre/alumine, le faisceau laser est de type  $TEM_{00}$ , avec  $h_1=15 \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $h_2=0$ ,  $T_{init}=300 \text{ K}$ ,  $RTC=10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$ ,  $P=50 \text{ W}$ ,  $r_0=1 \text{ mm}$ ,  $V=2 \text{ mm.s}^{-1}$ ,  $A=0.2$ .

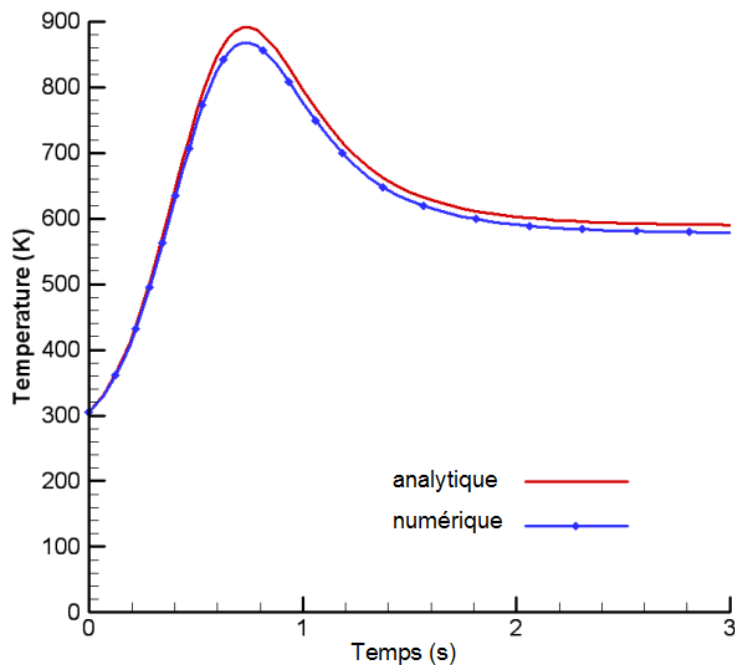


Figure 2-15: Comparaison des résultats analytiques et numériques, de l'évolution de température en un point de surface dépôt du couple cuivre/alumine:  $A_1=0.2$ ,  $h_1=15 \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $h_2=0.0 \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $TCR=10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$ ,  $P=50 \text{ W}$ ,  $r_0=1 \text{ mm}$ ,  $V=2 \text{ m.m.s}^{-1}$ ,  $T_{init}=300 \text{ K}$

La figure 2-16 montre l'évolution de la température de part et d'autre de l'interface ( $y=0^+$  et  $y=0^-$ ) du bicouche cuivre/alumine, pour une valeur de la RTC relativement élevée;  $TCR=10^{-4} \text{ m}^2.K.W^{-1}$ , avec,  $T_{init}=300 \text{ K}$ ,  $h_1=15W.m^{-2}.K^{-1}$ ,  $V=2 \text{ mm}.s^{-1}$ ,  $P_0=10W$ ,  $r_0=0.5\text{mm}$ ,  $A_1=0.2$ ,  $A_2=0$ . Sous ces conditions, l'écart de température est important (600K) et l'équilibre est établi rapidement (au bout d'une seconde), ce qui s'explique par la conductivité thermique élevée du cuivre.

La figure 2-17 montre l'effet de la résistance thermique de contact sur l'évolution de la température en un point de la surface du dépôt. La figure 2-18 illustre l'évolution de la température en un point de la face supérieure du bicouche, pour différentes valeurs de la vitesse de balayage laser ( $v=1, 2.5$  et  $5 \text{ mm}.s^{-1}$ ). Plus la vitesse est importante plus la température maximale atteinte est faible du fait du temps très court d'interaction laser-matière. Les courbes sont décalées par rapport à l'axe des temps, les courbes de température sont amplifiées pour des vitesses faibles.

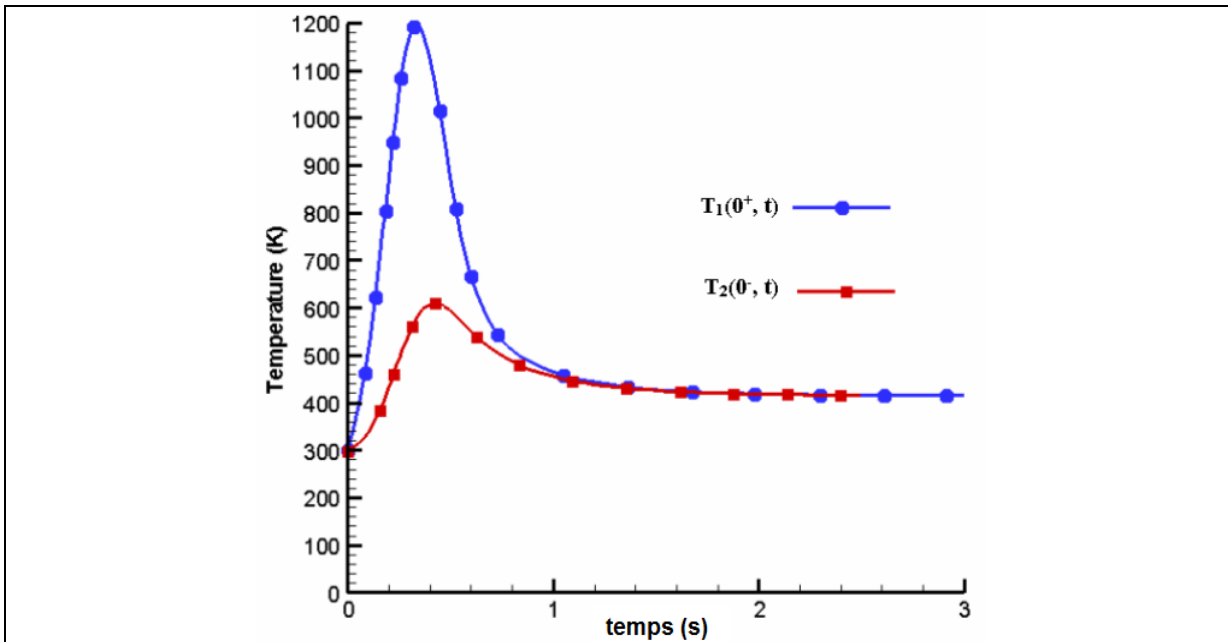


Figure 2-16: Evolution dans le temps, de la température  $T_1(y=0^+,t)$  et  $T_2(y=0^-,t)$  de part et d'autres de l'interface ( $y=0$ ), dans le bicouche (dépôt de cuivre dense/substrat en alumine), sous les conditions suivantes:  $RTC=10^{-4} \text{ m}^2.K.W^{-1}$ ,  $T_{init}=300 \text{ K}$ ,  $h_1=15W.m^{-2}.K^{-1}$ ,  $V=2 \text{ mm}.s^{-1}$ ,  $P_0=10W$ ,  $r_0=0.5\text{mm}$ ,  $A_1=0.2$ ,  $A_2=0$ .

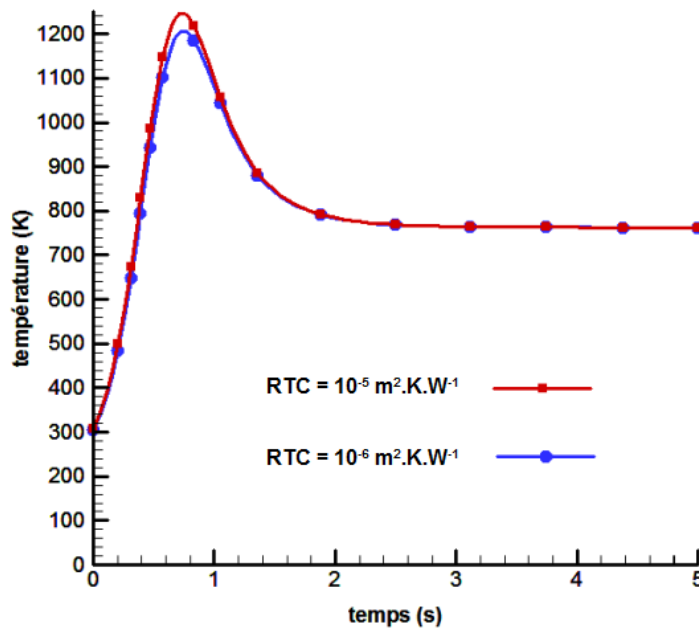


Figure 2-17: Effet de la RTC sur l'évolution de la température dans le temps,  $T_1(y=a_1,t)$  en un point de la surface du dépôt, pour le bicouche cuivre/alumine:  $A_1=0.20$ ,  $h_1=15 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ ,  $h_2=0.0 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ ,  $P=20 \text{ W}$ ,  $r_0=1 \text{ mm}$ ,  $V=1 \text{ mm.s}^{-1}$ ,  $T_{init}=300 \text{ K}$ .

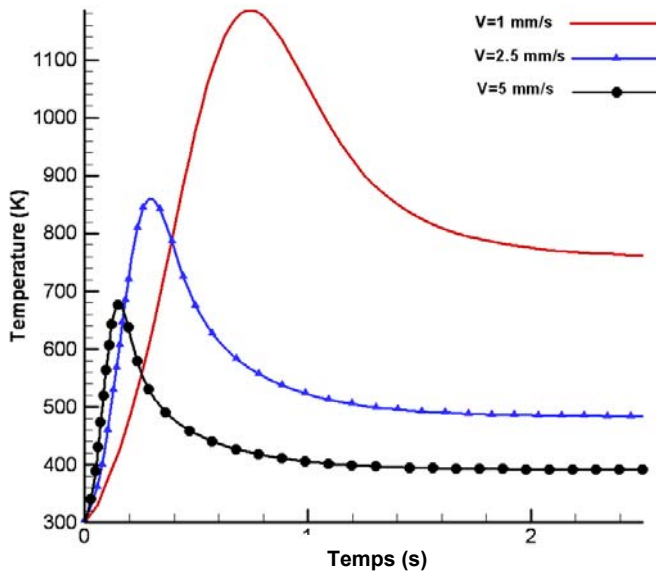


Figure 2-18: Évolution de la température du couple cuivre/alumine, au point  $T(y=a_1,t)$  pour différentes valeurs de la vitesse et sous les conditions suivantes:  $RTC=10^{-6} \text{ m}^2.\text{K.W}^{-1}$ ,  $T_{init}=300\text{K}$ ,  $P_0=50 \text{ W}$ ,  $r_0=2.5\text{mm}$ ,  $A_1=0.2$ ,  $A_2=0$ .

On peut noter que l'augmentation de la puissance laser (figure 2-19), a pour effet une translation de la courbe de température vers le haut (des températures élevées).

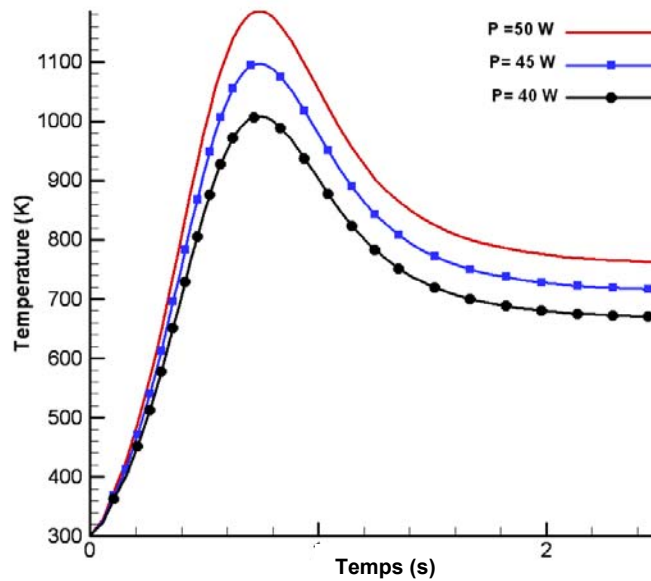


Figure 2-19 : Évolution de la température du couple cuivre/alumine, au point  $T(y=a_1,t)$  pour différentes valeurs de la puissance du laser et sous les conditions suivantes:  $V= 1\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $RTC=10^{-6}\text{ m}^2\cdot\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$ ,  $T_{init}=300\text{K}$ ,  $r_0=2.5\text{mm}$ ,  $A_1=0.2$ ,  $A_2=0$ .

## II.4. Cas 2D sans terme source

Dans le cas où l'hypothèse de transfert unidimensionnel n'est pas satisfaisante, alors une configuration 2D ou 3D s'impose. Dans le cas 2D, on suppose que le matériau bicouche est de dimensions finies selon  $x$  et  $y$ , et suffisamment long selon l'axe des  $z$ .

Dans la littérature, certains travaux traitent les problèmes de transfert instationnaire de la chaleur, dans des géométries multidimensionnelles [1-5], mais ces études se limitent au cas monocouche, en dimensions finies ou semi-infinies. D'autres travaux [4, 7, 8] traitent le problème bicouche en 2D, mais sans tenir compte de la résistance thermique de contact à l'interface. Une généralisation a été donnée par Haji Sheikh et al [36], mais les résultats numériques ont été fournis seulement pour un cas simplifié (1D). Citons également d'autres travaux concernant le transfert instationnaire de la chaleur, dans des géométries multidimensionnelles [42]. L'analyse de la diffusion transitoire de la chaleur en configurations multidimensionnelle, de plusieurs couche parallèles en contact; peut être fait analytiquement selon les approches ci-dessous. Technique de développement orthogonal établie par Padovan [44], Salt [45, 46] et Mikhailov et Ozisik [47, 48].

Padovan [44] a analysé en 3D plusieurs sous-domaines anisotropiques en contact parfait, avec une source interne. Une version généralisée en 3D de la procédure de Sturm-Liouville [49 - 54] a été établi.

Cependant « la formulation en produit » n'a pas été appliquée au cas 3D aux fonctions d'espace. Salt [45,46 ] a étudié en 2D la conduction instationnaire dans un matériau bicouche en contact parfait, et sans terme source et avec des conditions aux limites homogènes dans la direction perpendiculaire aux couches. Salt [46] a démontré que les valeurs propres de la solution transverse aux couches, peuvent devenir imaginaires dans les régions ayant une haute diffusivité thermique. Mais aucun exemple numérique n'a été présenté. Mikhailov et Ozisik [47] ont analysé la version 3D du problème de Salt. Ils ont simplifié le problème comme le produit de trois cas

monodimensionnels. Une bonne méthode algébrique a été introduite, mais aucun exemple numérique n'a été fourni.

Beck et al [52, 54] ont utilisé la méthode des fonctions de Green. Dans [55] les auteurs l'ont appliqué à un matériau bicouche avec couches isotropes en 3D, et un terme source. Quelques exemples numériques ont été présentés mais la contribution imaginaire dans les valeurs propres n'a pas été précisée. La résistance thermique de contact est prise en compte dans cette étude. Dans [56] les auteurs ont appliqué cette technique en 3D à un bicouche orthotrope avec une source interne, et une résistance thermique de contact à l'interface.

La méthode de la transformée de Laplace a été utilisée par Levine [57], et Kozlov et Mandrix [58,59]. Levine [59] a considéré une surface sphérique soumise à des conditions aux limites homogènes.

## II.4.1. Formulation caractéristique et méthode de résolution

### II.4.1.1. Formulation mathématique

Le problème étudié en 2D, est schématisé dans la figure 2-20, de la même façon que dans les cas précédents, l'interface du bicouche est située en  $y=0$ . On pose  $\theta_i = T_0 - T_i$ , avec  $i=1$  pour la couche supérieure et  $i=2$  pour la couche inférieure. Ce modèle ne tient pas compte du changement de phases ainsi que de la dilatation thermique.

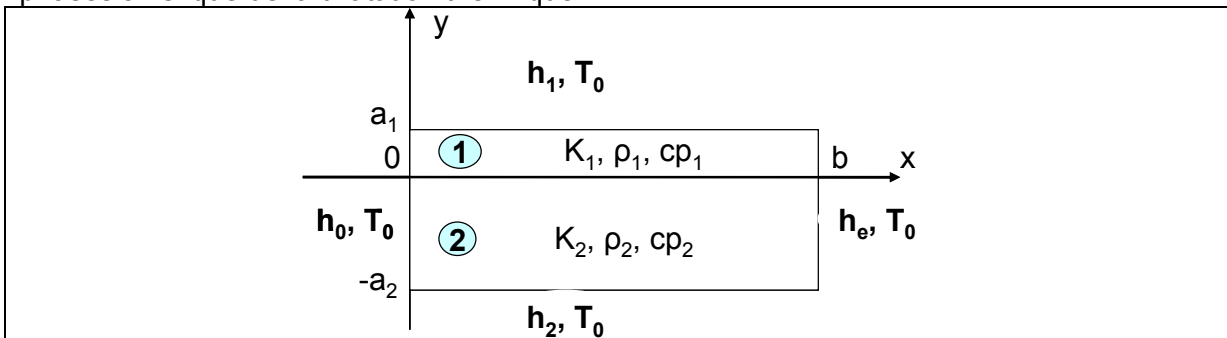


Figure 2- 20: Schéma simplifié du problème de conduction en 2D, avec les dimensions et conditions aux limites

La formulation mathématique du problème de conduction dans le bicouche en 2D, sans terme source s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \theta_i(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_i(x, y, t)}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \theta_i(x, y, t)}{\partial t} \quad (2.63)$$

$$0 < x < b \quad , \quad -a_2 < y < a_1 \quad , \quad t > 0$$

les conditions aux limites selon l'axe des x sont :

$$k_i \left( \frac{\partial \theta_i(x=0, y, t)}{\partial x} \right) + h_0 \theta_i(x=0, y, t) = 0 \quad (2.64)$$

$$k_i \left( \frac{\partial \theta_i(x=b, y, t)}{\partial x} \right) + h_e \theta_i(x=b, y, t) = 0 \quad (2.65)$$

les conditions aux limites selon l'axe des y sont :



$$(-1)^{i+1} \times k_i \left( \frac{\partial \theta_i(x, y = (-1)^{i+1} a_i, t)}{\partial y} \right) + h_i \theta_i(x, y = (-1)^{i+1} a_i, t) = 0 \quad (2.66)$$

$$k_1 \left( \frac{\partial \theta_1(x, y = 0, t)}{\partial y} \right) = k_2 \left( \frac{\partial \theta_2(x, y = 0, t)}{\partial y} \right) \quad (2.67)$$

les conditions à l'interface  $y = 0$  :

$$k_1 \frac{\partial \theta_1(x, y = 0, t)}{\partial y} = \frac{\theta_1(x, y = 0, t) - \theta_2(x, y = 0, t)}{RTC} \quad (2.68)$$

$$\theta_i(x, y, t = 0) = F_i(x, y) \quad \text{avec } i=1, 2 \quad (2.69)$$

### II.4.1.2. Résolution analytique

La résolution des équations précédentes est effectuée par la méthode de séparation des variables:

$$\theta_i(x, y, t) = X_i(x) \cdot Y_i(y) \cdot G_i(t), \quad \text{avec } i=1, 2 \quad (2.70)$$

$$X_i(x) = C_i \cos(\mu_i x) + D_i \sin(\mu_i x) \quad (2.71)$$

$$Y_i(y) = A_i \cos(\lambda_i y) + B_i \sin(\lambda_i y) \quad (2.72)$$

$$G_i(t) = \exp(-(\lambda_i^2 + \mu_i^2) \cdot \alpha_i \cdot t) \quad (2.73)$$

$$R_i(\lambda_i) = \left( \frac{k_i \lambda_i + h_i \tan(\lambda_i a_i)}{h_i - k_i \lambda_i \tan(\lambda_i a_i)} \right) \quad (2.74)$$

Les valeurs propres ( $\mu_m$ ) selon  $x$  sont égales dans les deux couches et indépendantes de celles de  $\lambda_{i,mn}$

$$X_m(x) = C_{1,m} X_{ad,m}(x) \quad (2.75)$$

$$Y_{1,mn}(y) = B_{1,mn} Y_{1ad,mn}(y) \quad (2.76)$$

$$Y_{2,mn}(y) = B_{1,mn} \frac{k_1 \lambda_{1,mn}}{k_2 \lambda_{2,mn}} Y_{2ad,mn}(y) \quad (2.77)$$

$$R_1(\lambda_1) + \left( \frac{k_1 \lambda_1}{k_2 \lambda_2} \right) R_2(\lambda_2) + (\lambda_1 k_1 RTC) = 0 \quad (2.78)$$

$$\lambda_2 = \left[ \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) \lambda_1^2 + \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1 \right) \mu^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.79)$$

Les expressions finales des températures dans les deux domaines sont données

$$\text{par : } \theta_1(x, y, t) = \sum_{m=0,1}^{\infty} X_{ad,m}(x) e^{-\mu_m^2 \alpha_1 t} \left[ \sum_{n=0,1}^{\infty} c_{mn} Y_{1ad,mn}(y) e^{-\lambda_{1,mn}^2 \alpha_1 t} \right] \quad (2.80)$$

avec :  $(0 \leq x \leq b; 0 \leq y \leq a_1; t \geq 0)$

$$\theta_2(x, y, t) = \frac{k_1}{k_2} \sum_{m=0,1}^{\infty} X_{ad,m}(x) e^{-\mu_m^2 \alpha_1 t} \left[ \sum_{n=0,1}^{\infty} c_{mn} \frac{\lambda_{1,mn}}{\lambda_{2,mn}} Y_{2ad,mn}(y) e^{-\lambda_{1,mn}^2 \alpha_1 t} \right] \quad (2.81)$$

avec :  $(0 \leq x \leq b; -a_2 \leq y \leq 0; t \geq 0)$

Les coefficients  $c_{mn}$  sont calculés à l'aide des propriétés d'orthogonalités (2.82) et (2.83) et des conditions initiales.

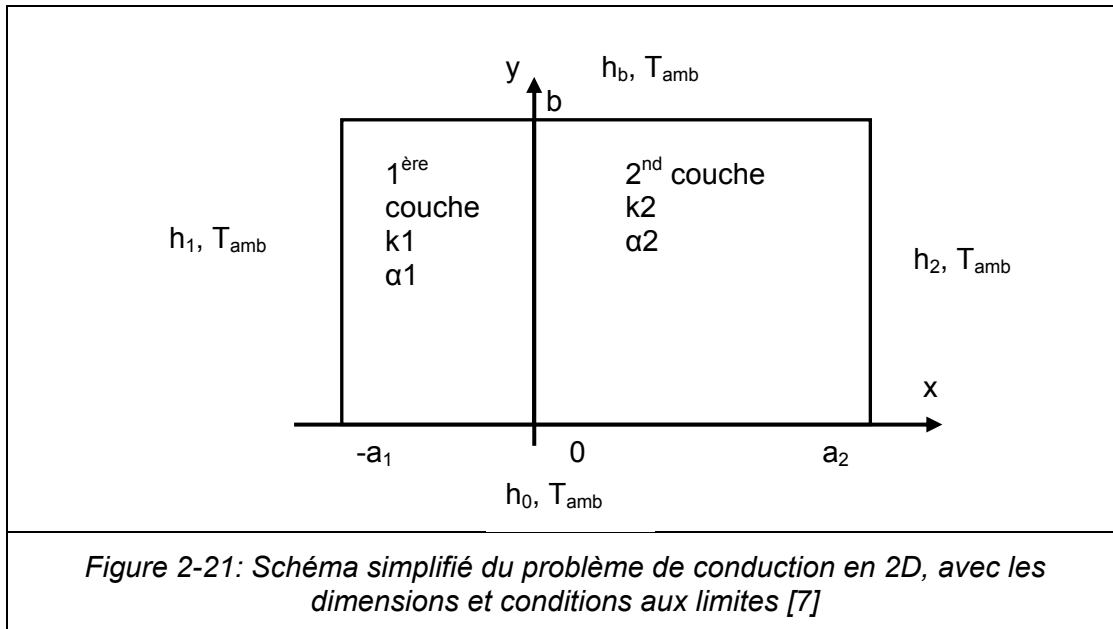
$$\int_0^b X_{ad,m} X_{ad,j} dx = \begin{cases} 0 & \text{pour } m \neq j \\ N_{x,m} & \text{pour } m = j \end{cases} \quad (2.82)$$

$$\frac{\lambda_{2,mn}}{\lambda_{1,mn}} \int_{y=0}^{a_1} Y_{1ad,mn} Y_{1ad,mk} dy + \frac{\alpha_1 k_1 \lambda_{1,mn}}{\alpha_2 k_2 \lambda_{2,mn}} \int_{-a_2}^0 Y_{2ad,mn} Y_{2ad,mk} dy = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \neq k \\ N_{y,mn} & \text{pour } n = k \end{cases} \quad (2.83)$$

$$c_{mn} = \frac{1}{N_{y,mn} N_{x,m}} \int_0^b X_{ad,m}(x) \left[ \frac{\lambda_{2,mn}}{\lambda_{1,mn}} \int_0^{a_1} F_1(x, y) Y_{1ad,mn}(y) dy + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \int_{-a_2}^0 F_2(x, y) Y_{2ad,mn}(y) dy \right] dx \quad (2.84)$$

### II.4.2. Validation du modèle

Afin de valider ce modèle tenant compte de la RTC, il est ramené au contact thermique parfait (RTC), établi par De Monte [7], (fig. 2-21):



#### a) Adimensionnement :

La résolution de ce type de problèmes, peut être simplifiée par l'introduction de variables adimensionnelles.

$$\Theta_i = \frac{\theta_i}{\theta_0}, \quad \text{avec} \quad \theta_i = T_{amb} - T_i, \quad \text{et} \quad \theta_0 = T_{amb} - T_0$$

$$Biot_i = \frac{h_i a_1}{k_1}, \quad \gamma = \frac{a_2}{a_1}, \quad \omega = \frac{b}{a_1}, \quad \kappa = \frac{k_2}{k_1}, \quad \xi = \frac{x}{a_1}, \quad \psi = \frac{y}{a_1}, \quad Rc = RTC \frac{k_1}{a_1}$$

**b) Conditions de validation:**

$\gamma = 2, \omega = 4, Biot_1 = 1, Biot_2 = 2, \kappa = 4, RTC=0,$  et  $\alpha_1=\alpha_2$

L'évolution de la température (pour  $RTC = 0$ ), donnée par les deux modèles représentées sur les figures 2-22 et 2-23 concordent, ce qui valide notre modèle bidimensionnel.

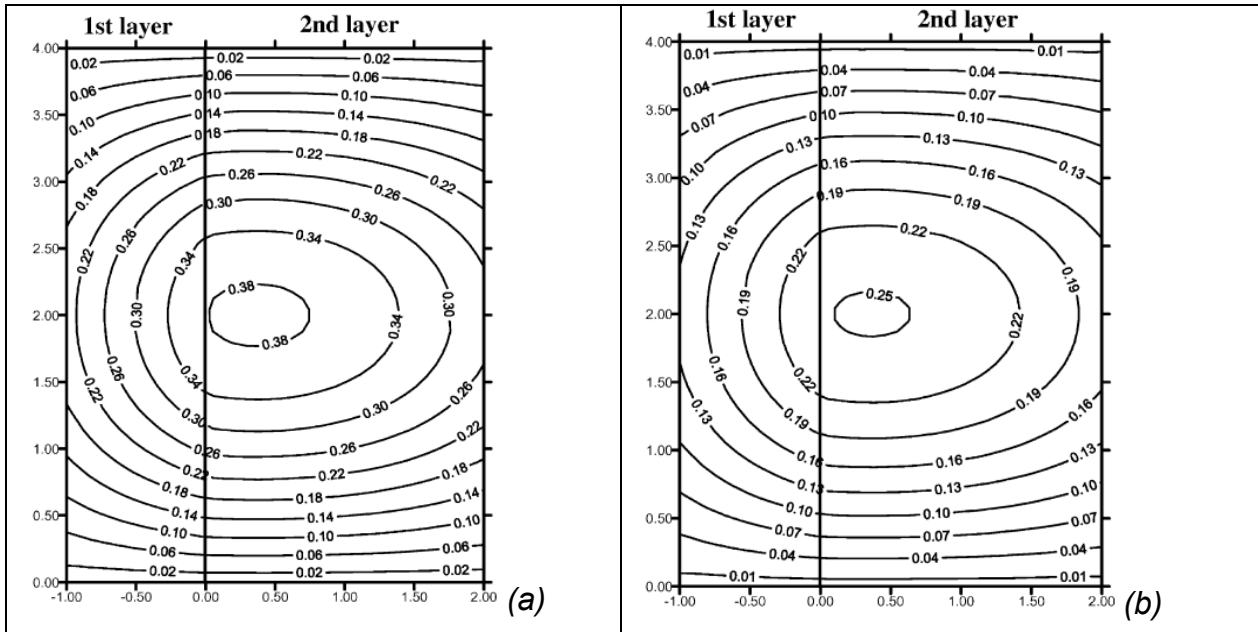


Figure 2-22: Résultats de F. De Monte [4]; (a)  $\tau = 0.5$  ; (b)  $\tau = 2$

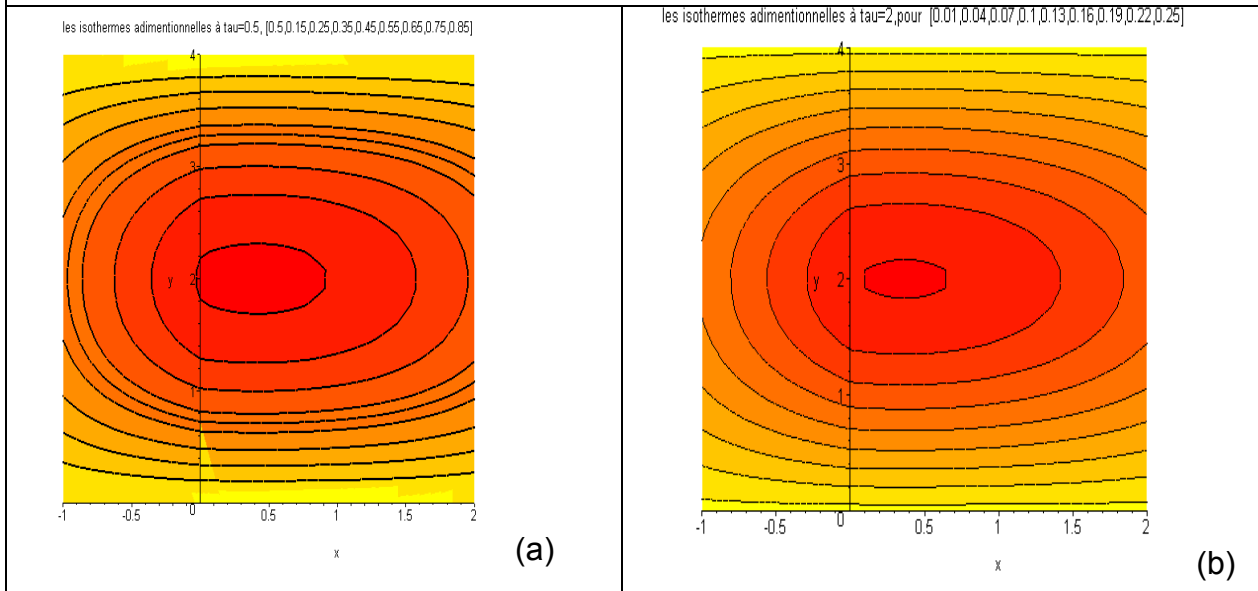


Figure 2-23: Résultats de notre modèle; (a)  $\tau = 0.5$  ; (b)  $\tau = 2$

II.5. quelques résultats

Le profil de température le long de plusieurs coupes  $\Psi = \text{constante}$ , est donné à la figure 2-24. Le comportement en  $t$  de la discontinuité du flux au point de contact varie selon les coupes d'où l'intérêt d'une modélisation 2D. La température est maximale sur la ligne  $\Psi=2$  (à mi-hauteur), et en raison de la symétrie; selon l'axe  $y$  en ( $\Psi = 0$ , et  $\Psi = b$ ).

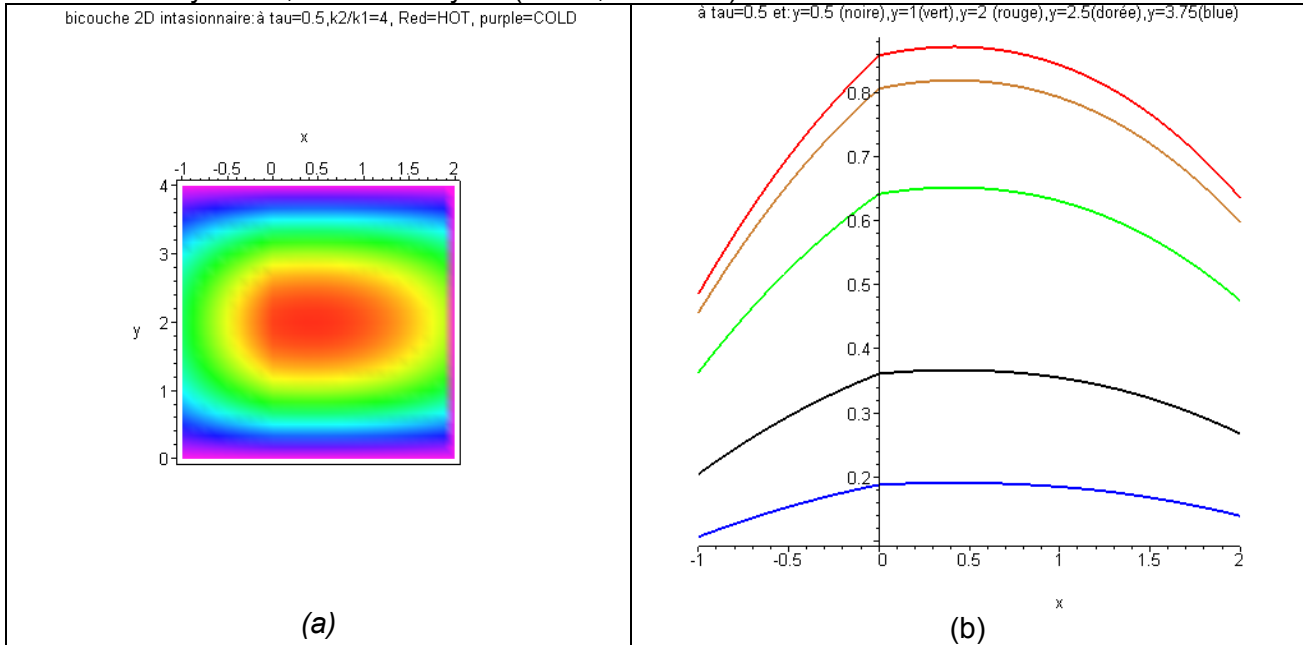


Figure 2- 24: Résultats distributions de la température à  $\tau=0.5$

(a) Vue d'ensemble du bicouche. (b) Evolution de la température en  $\psi=1$  ;  $\psi =1.5$  ;  $\psi =2$  ;  $\psi = 2.5$  ;  $\psi =3.75$

La figure 2-25 montre l'orientation des vecteurs gradients de température, sur le plan  $(x, y)$  dans les deux couches. (La couleur des flèches n'a pas de signification), par rapport aux isothermes (le gradient de température en chaque point est normal à la surface isotherme passant par ce point).

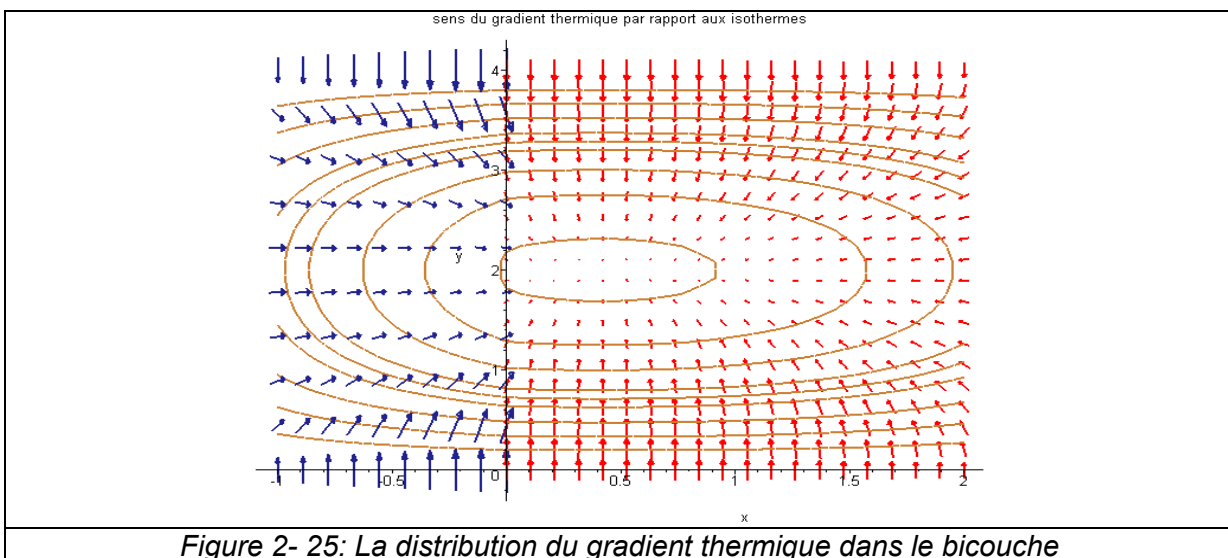
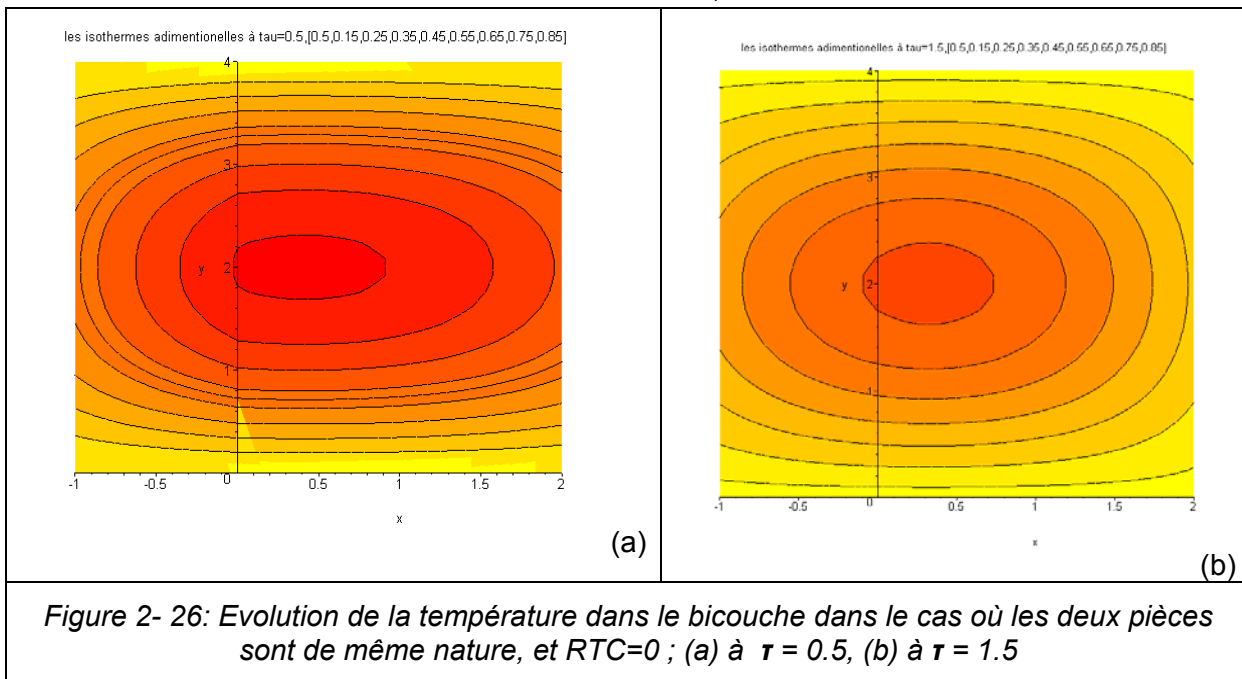


Figure 2- 25: La distribution du gradient thermique dans le bicouche

### II.5.1. Résultats dans le cas 2D homogène

Les résultats 2D homogène correspondent au cas 2D monocouche (figure 2-25), en posant tout simplement ( $k_2 = k_1, \alpha_1 = \alpha_2$ ), et un contact parfait à l'interface ( $R_c = 0$ ). ***Rc est la résistance***

***thermique de contact adimensionnelle***  $R_c = RTC \frac{k_1}{a_1}$ .



### II.5.2. Etude paramétrique

Le but est ici de montrer le comportement thermique dans des cas limites, par l'étude des rapports de conductivités ( $k_2/k_1$ ), de coefficients d'échanges convectifs à l'entrée et à la sortie ( $h_2/h_1$ ), ainsi que les rapports de d'épaisseurs, substrat /dépôt. Dans cette partie de l'étude, les résultats sont donnés sous des formes adimensionnelles. Les données de la première couche sont fixées comme référence pour les différents rapports cités ci-dessus. On change un seul rapport à la fois.

#### II.5.2.1. Effet du rapport de conductivité $k_2/k_1$

En maintenant  $k_1$  comme conductivité de référence, et en variant  $k_2$ , on a 2 cas de figures limites à envisager,  $k_2/k_1 \ll 1$ , et  $k_2/k_1 \gg 1$ , la figure 2-27 montre que, plus le rapport de conductivité est important, plus la vitesse de refroidissement devient lente. La figure 2-28, montre que la température de sortie (en  $x = a_2$ ) et à l'interface ( $x = 0$ ), croissent avec le rapport  $k_2/k_1$ .

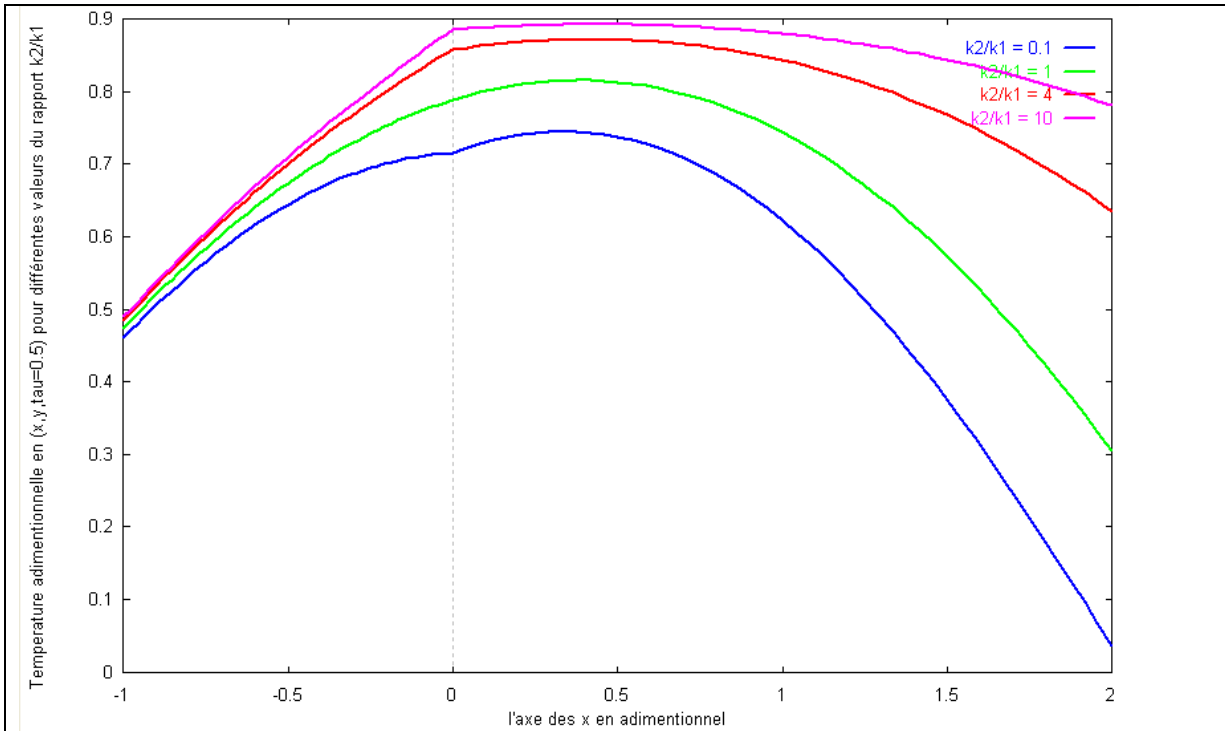


Figure 2- 27: Evolution de la température dans le bicouche en fonction du rapport de conductivités thermiques  $k_2/k_1$ , en  $x=-a_1$ ,  $x=0$  et  $x=a_2$ .

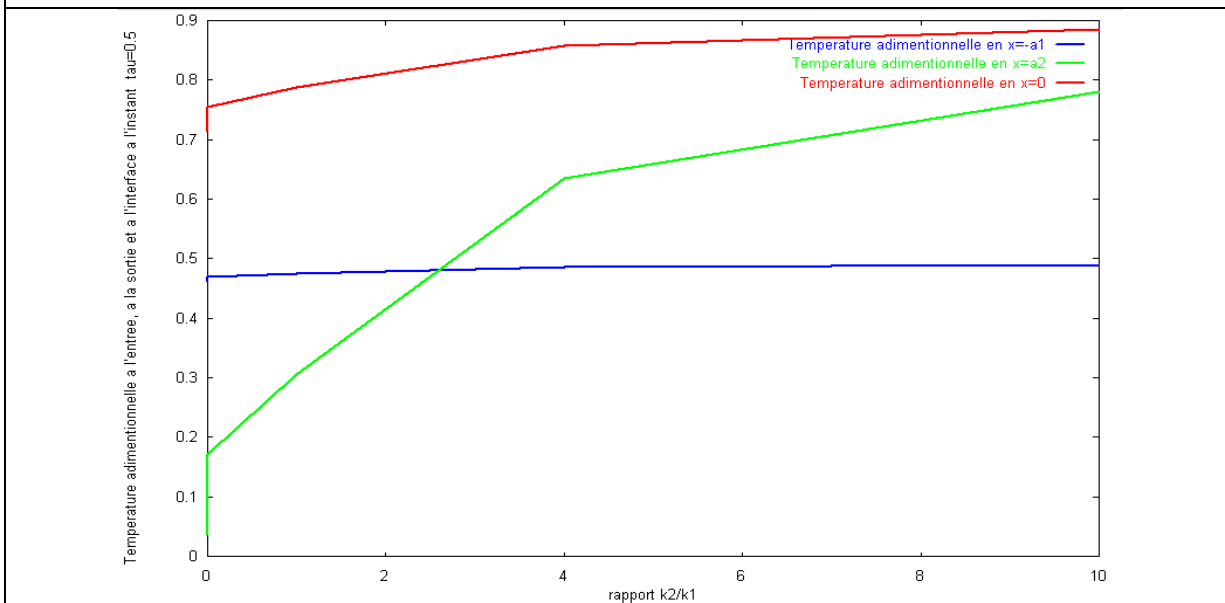
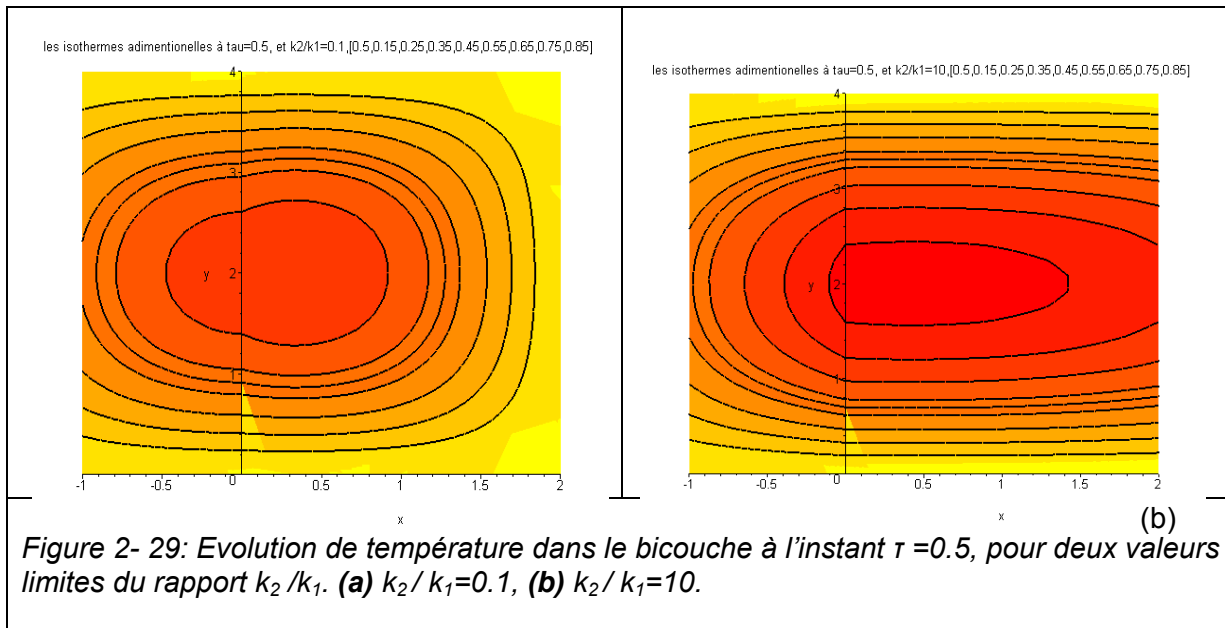


Figure 2- 28: Evolution de la température dans le bicouche pour différentes valeurs du rapport de conductivité thermique des deux couches en contact.

Les deux figures 2-29 (a) et (b), montrent clairement, par comparaison des isothermes à l'instant  $\tau=0.5$ , le comportement du bicouche dans les deux cas :  $k_2/k_1 = 0.1$  (la conductivité du dépôt est supérieure à celle du substrat), et  $k_2/k_1 = 10$ .



- **Cas  $k_2/k_1=0.1$**  : On remarque un changement de concavité des lignes de champ thermique au niveau de l'interface ( $x = 0$ ), et par suites les sens des gradients de températures perpendiculaires à ses lignes. A la sortie, les isothermes s'approchent du cas de température imposée.
- **Cas  $k_2/k_1=10$**  : On constate dans ce cas le changement de la forme des isothermes à la sortie ( $x = a_2$ ) qui tend vers le cas adiabatique (refroidissement très lent). Au niveau de l'interface la courbure des linges isothermes est tournée vers l'intérieur.

### II.5.2.2. Effets du rapport $h_2/h_1$

D'une manière semblable au cas précédent, on prend  $h_1$  comme référence. On représente une coupe à mi-largeur ( $\Psi = 2$ ), où la température est maximale (figure 2-30).

- **Cas de  $h_2/h_1$  faible** : On constate que pour un rapport de  $h_2/h_1$  très faible, la température dans le substrat reste presque constante pour chaque coupe de  $y = cte$ , tout au long de la pièce, se qui entraîne la chute de la vitesse de refroidissement. En outre la forme des isothermes rappelle celle d'un comportement adiabatique la figure 2-31 (a). Les linges de champs thermiques à la frontière de sortie ( $x=a_2$ ) sont presque parallèles (figure 2-31 (b)), ce qui illustre un comportement isotherme (température imposée).

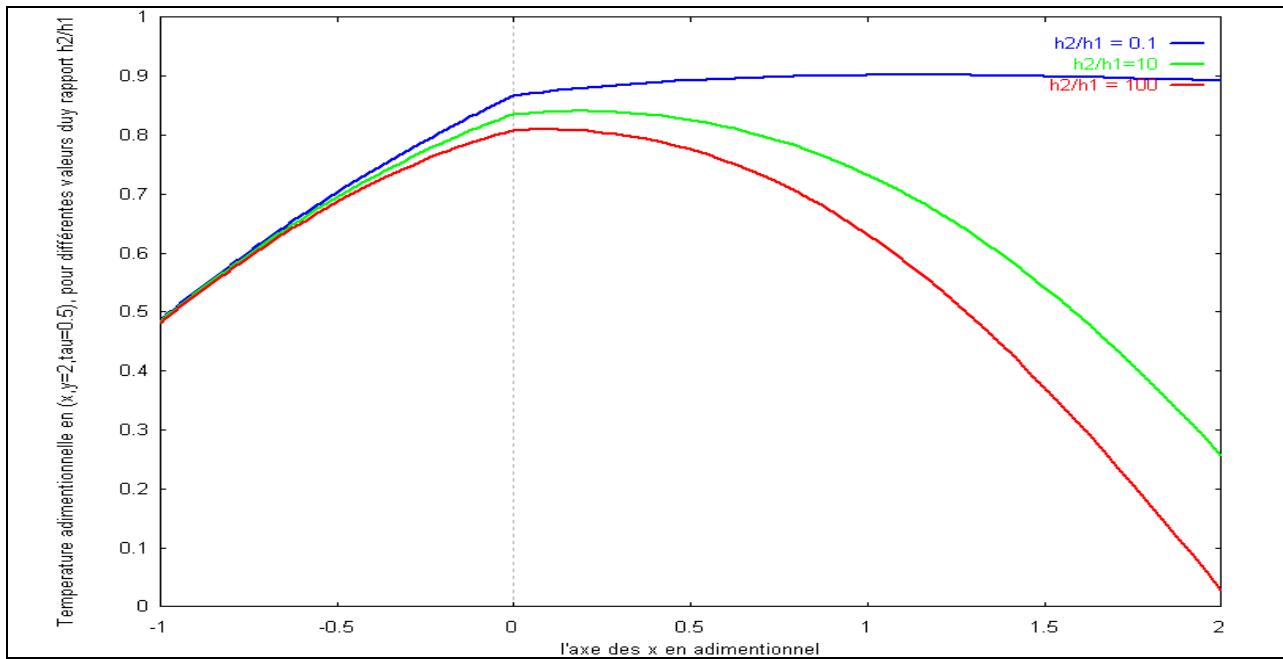


Figure 2-30: Evolution de la température suivant l'axe des x pour différentes valeurs du rapport  $h_2/h_1$

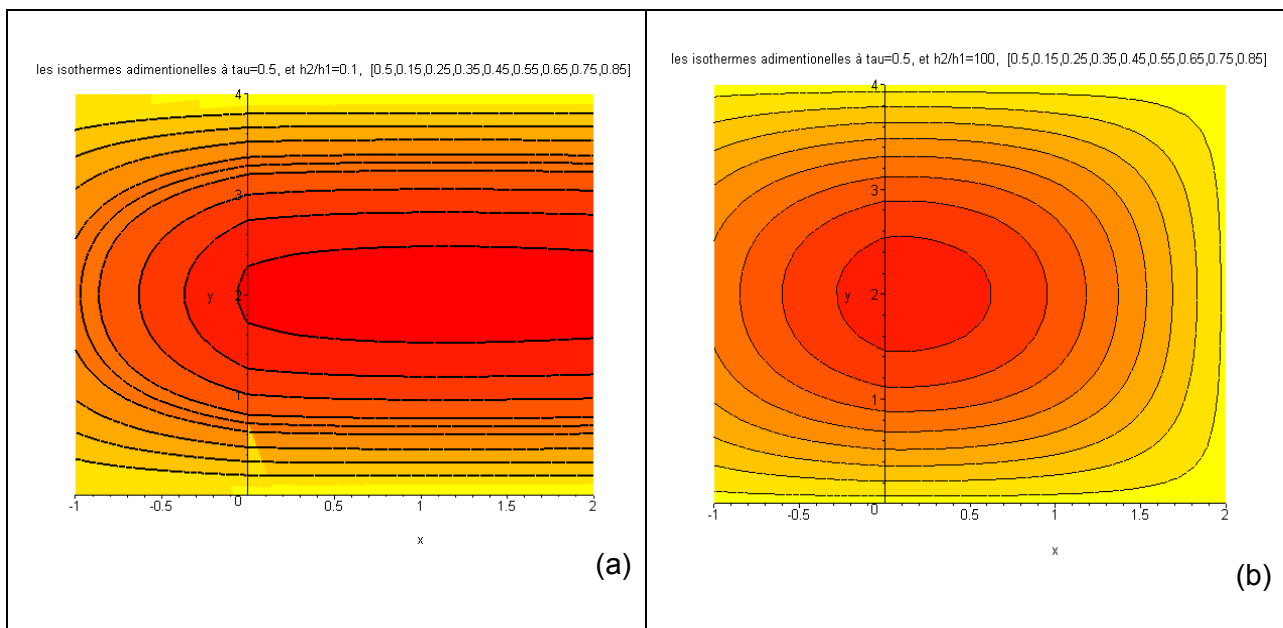


Figure 2-31: Les isothermes dans le bicouche à  $\tau = 0.5$ . pour (a)  $h_2/h_1=0.1$  et (b)  $h_2/h_1=100$

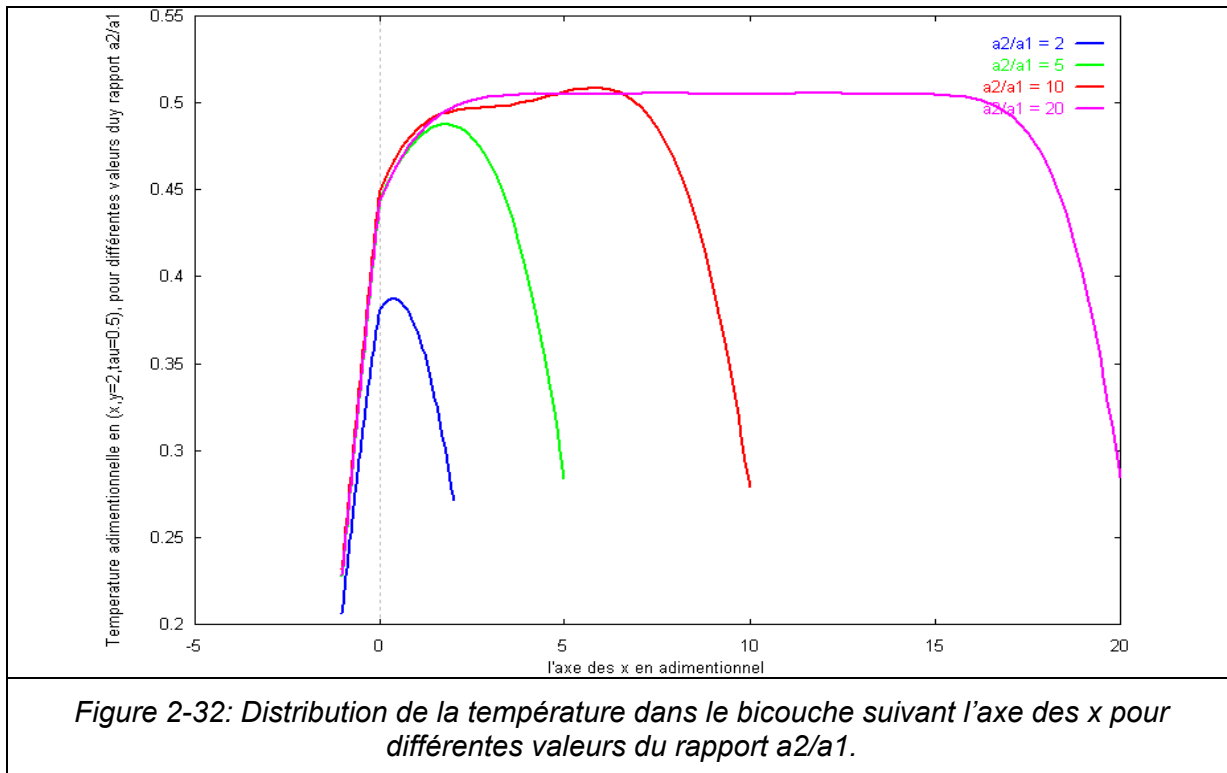
▪ Cas de  $h_2/h_1$  élevé

Dans ce cas, on remarque un refroidissement rapide, cas où les températures à l'interface et à la sortie sont plus faibles par rapport au cas précédent.

**II.5.2.3. Effets du rapport  $a_2/a_1$**

On remarque sur la figure 2-32, que la température à l'interface ( $x=0$ ) dépend de la valeur du rapport de forme  $a_2/a_1$ . Au delà d'un rapport de forme ( $a_2/a_1 > 5$ ), on peut considérer que, ce rapport à très peu d'influence sur la température de l'interface. D'autre part, la température de sortie est peu sensible au rapport  $a_2/a_1$  (figure 2-33).





On constate aussi que lorsque le rapport  $a_2/a_1$  augmente, les valeurs propres se rapprochent de zéro. Par exemple pour  $a_2/a_1=2$ , les 20 premières valeurs propres se situent dans l'intervalle  $[0 ; 20.2]$ , alors que dans le cas de  $a_2/a_1=5$  l'intervalle est  $[0 ; 10.5]$ , et dans l'intervalle  $[0 ; 6]$  pour  $a_2/a_1=10$ .

Ce qui conduit à la conclusion suivante : quand le rapport de dimensions dépôt / substrat, est très faible, les valeurs propres sont de plus en plus proches et concentrées au voisinage de zéro. Cela rend la tâche plus délicate car, d'une part il sera difficile de trouver toutes les valeurs propres, et selon la précision recherchée, et d'autre part, il faudra calculer plus de valeurs propres pour atteindre la convergence.

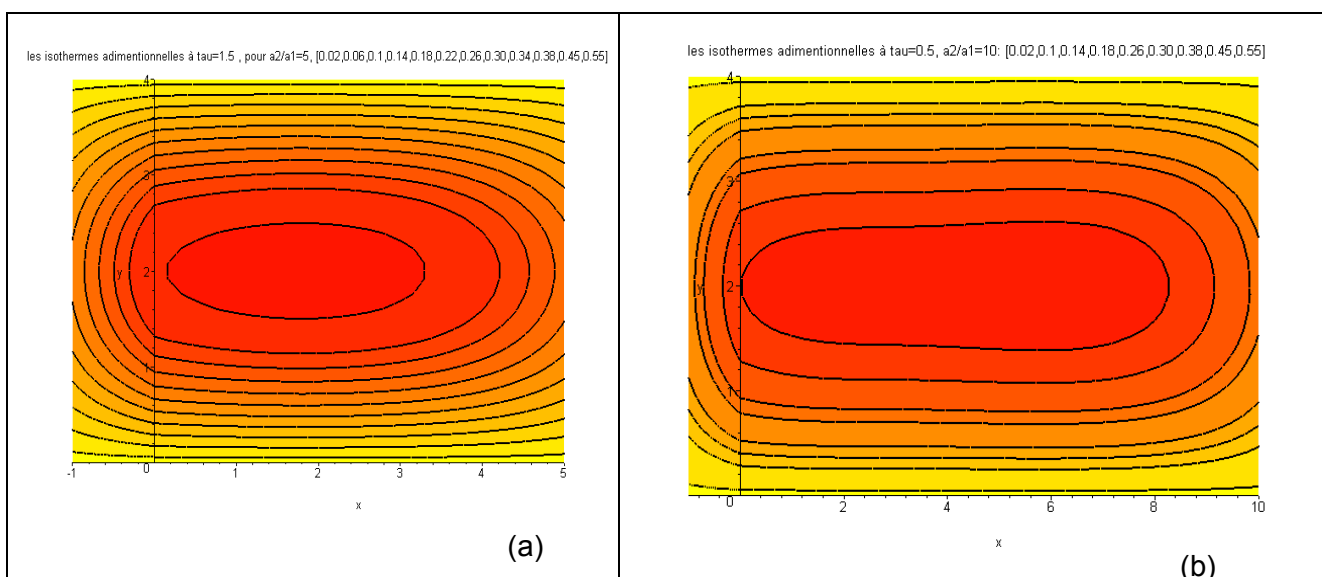


Figure 2-33: La distribution des isothermes dans le bicouche

- (a)  $\tau = 0.5$  et  $a_2/a_1 = 5$
- (b)  $\tau = 10$  et  $a_2/a_1 = 10$

### II.5.3. Evolution de la température à l'interface

#### II.5.3.1. Cas du contact thermique parfait (RTC = 0)

On constate sur les deux figures 2-34 (a) et (b), que lorsque l'on considère un contact parfait, l'écart de température à l'interface du bicouche (entre  $x = 0^-$  et  $x = 0^+$ ), est très faible, de l'ordre de  $10^{-10}$ .

Dans cette étude nous avons introduit la RTC comme une discontinuité dans l'expression analytique de la température à l'interface. D'autres études l'introduisent sous forme d'une couche d'air de faible épaisseur.

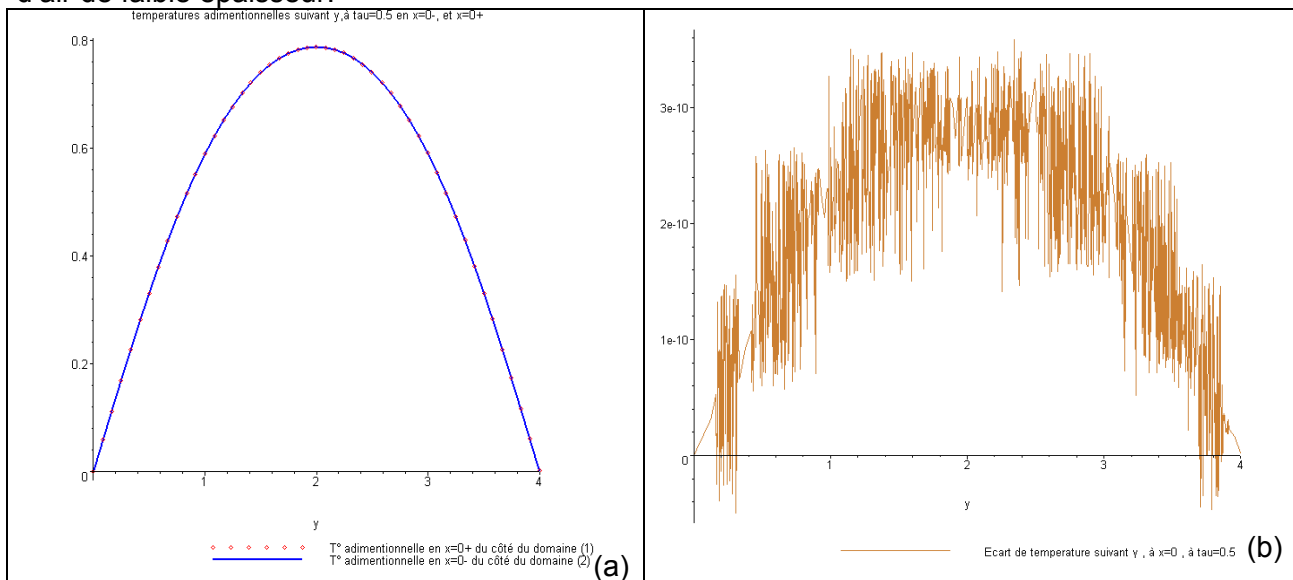


Figure 2-34: Evolution de la température à l'interface du bicouche  
 (a) évolution de la température de part et d'autre de l'interface pour  $Rc = 0$ , à  $\tau = 0.5$   
 (a) différence de température à l'interface du bicouche

#### II.5.3.2. Cas de contact thermique imparfait (RTC $\neq 0$ )

Les figures 2-35 (a) et (b) illustrent la discontinuité de la température à l'interface du bicouche, ce qui montre clairement, la prise en compte de la RTC dans ce modèle.

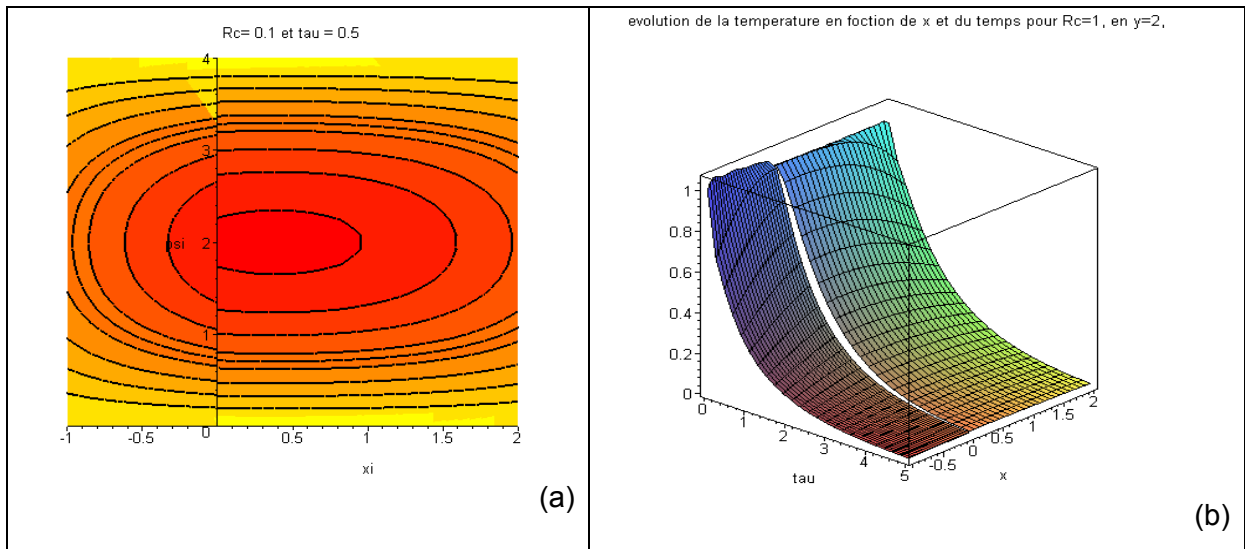


figure 2- 35: Effet de la résistance thermique de contact  
 (a) distribution des isothermes à l'instant  $\tau = 0.5$ , pour  $R_c = 0.1$   
 (b) distribution spatio-temporelle de la température dans le bicouche pour  $R_c=1$

La figure 2-36, montre l'évolution de la température dans le bicouche à un instant donné, en fonction de la résistance thermique de contact en adimensionnelle. L'écart de température à l'interface est conséquent pour des RTC élevées. La figure 2-37, montre l'évolution de la température à différents instants, pour une valeur donnée de la RTC.

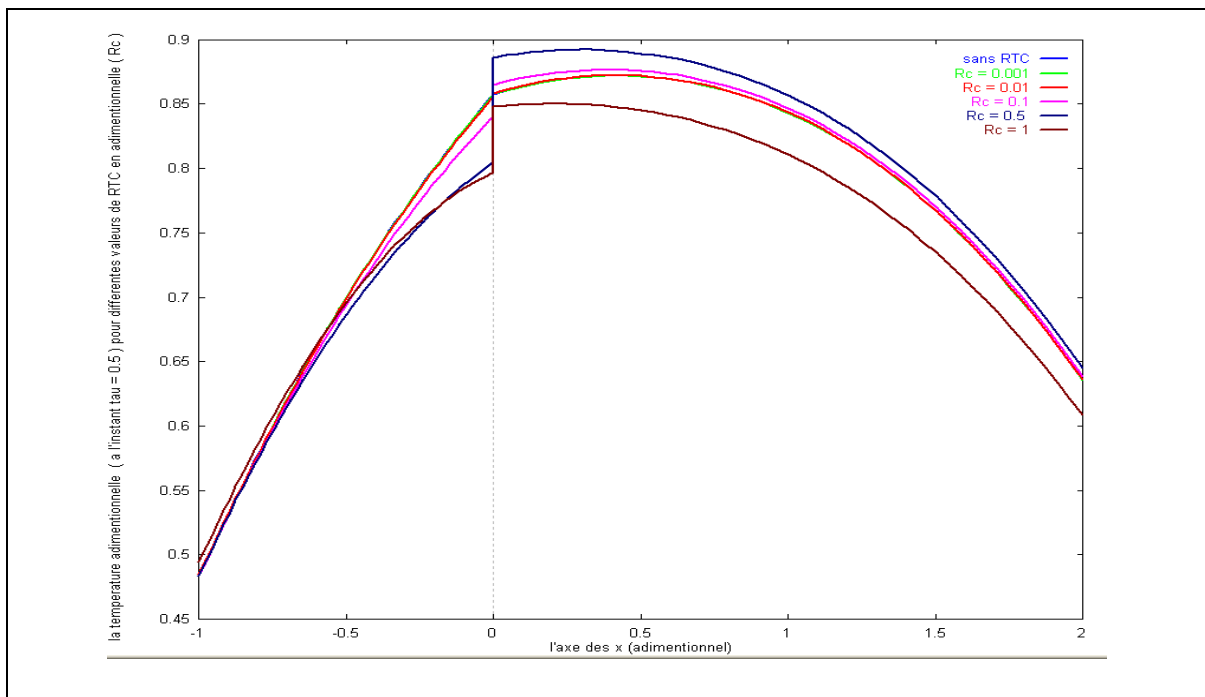


Figure 2- 36: Distribution de la température dans le bicouche, à l'instant  $\tau=0.5$ , pour différentes valeurs de la résistance thermique de contact.

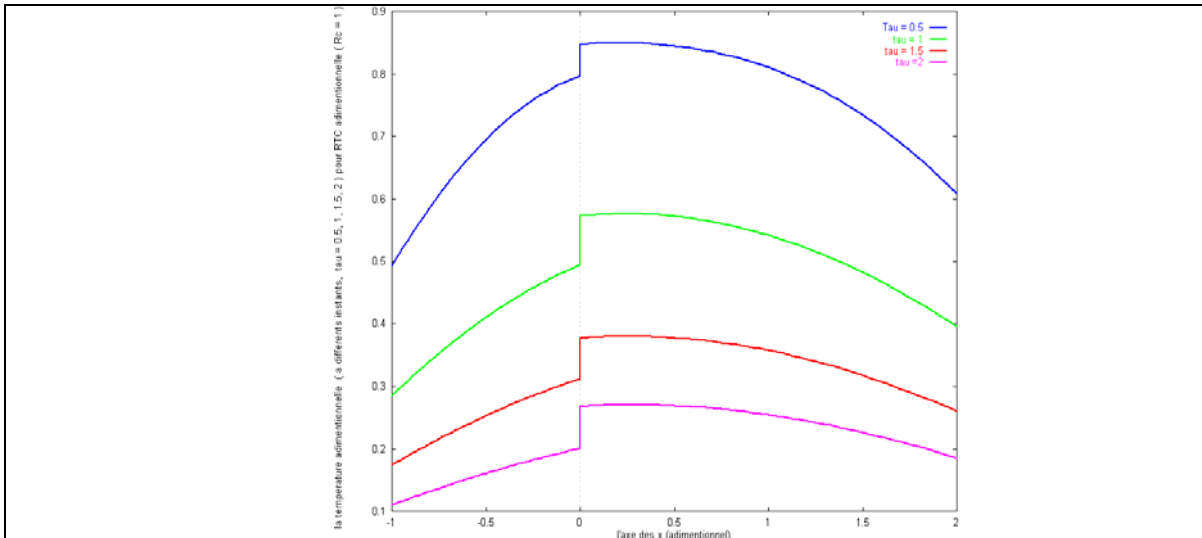


Figure 2-37: Distribution spatiale de la température dans le bicouche, à différents instants ( $\tau=0.5 ; 1 ; 1.5 ; 2$ ), pour une valeur de la résistance thermique de contact  $R_c = 1$

La figure 2-38 montre l'évolution du saut de température adimensionnelle en fonction du temps, pour différentes valeurs de la RTC. On peut remarquer qu'au début, l'écart de température augmente jusqu'à atteindre un maximum et qui diminue lentement jusqu'à la stabilisation de la température de part et d'autre de l'interface. L'écart de température est quantifié sur les figures 2-39 (a) et (b).

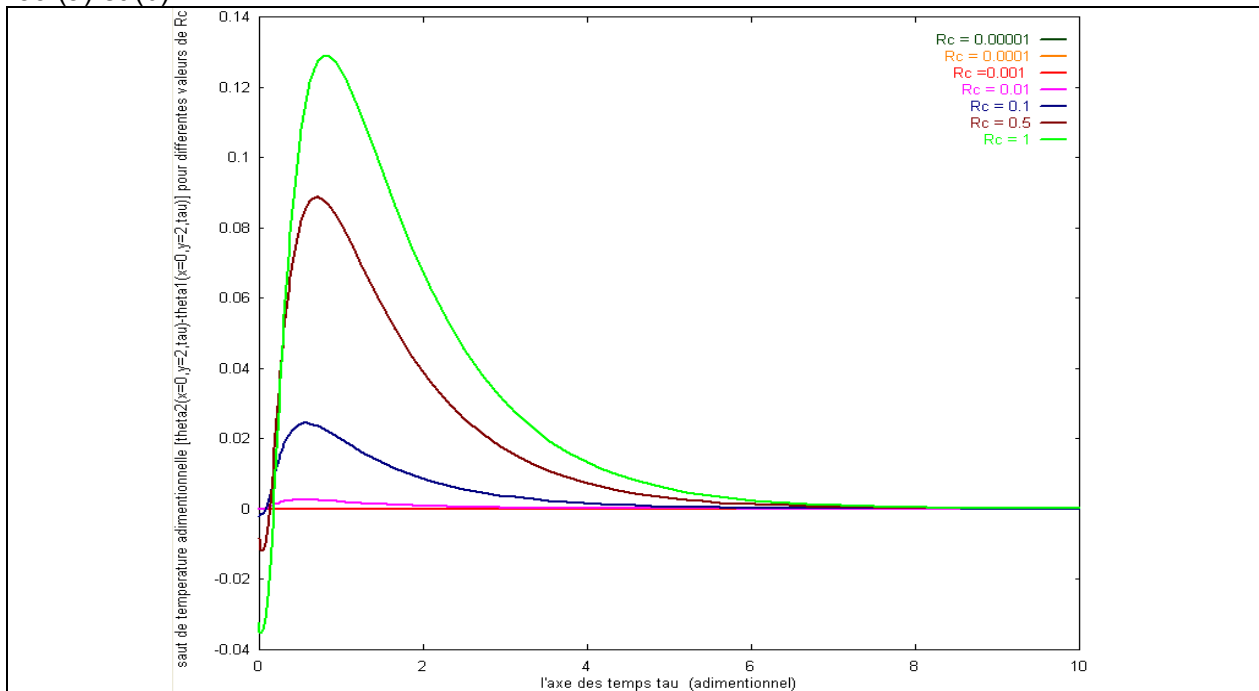
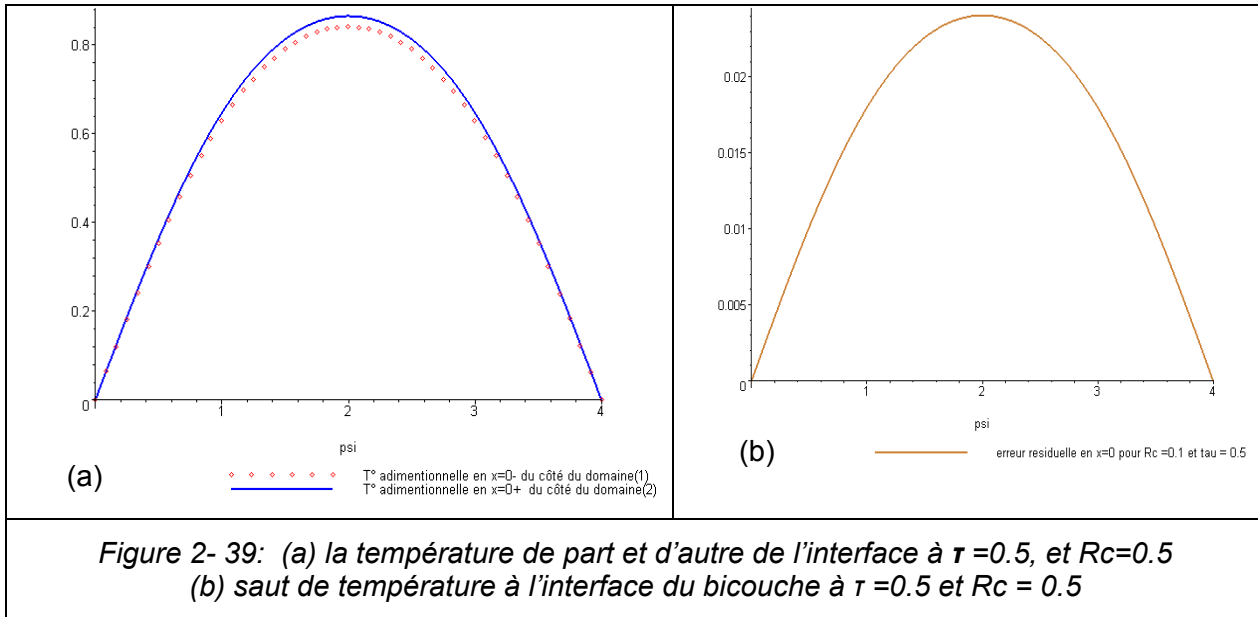


Figure 2-38: Evolution du saut de température à l'interface en fonction du temps, pour différentes valeurs de la résistance thermique de contact.



## II.6. Cas 2D avec terme source

Dans cette partie, nous avons étendu la solution analytique en 2D de l'équation instationnaire de la chaleur, appliquée à un matériau bicouche en présence d'une RTC, élaborée dans le paragraphe (2.4), en utilisant la méthode de séparation des variables, à un flux gaussien de type flash. Les résultats de cette étude peuvent servir à la détermination de diffusivités thermiques par la méthode connue sous le nom de « la méthode flash ». Dans la littérature, plusieurs travaux sont consacrés à des études similaires. Milosevic *et al* [60- 61] ont élaboré une solution analytique dans un bicouche de forme cylindrique, tenant compte de la résistance thermique de contact à l'interface, et soumis à un flash laser de profil carré au niveau de l'axe de symétrie de la pièces, les auteurs ont également précisé que le calcul de valeurs propres dans ce type de problème est compliqué car les valeurs propres dans les différentes directions, et dans les deux couches, sont dépendantes. Quelques résultats numériques ont été fournis. Dans [61] les auteurs ont fourni dans ce travail une étude expérimentale ainsi qu'un modèle analytique qui permet de déterminer à la fois la résistance thermique de contact et la diffusion thermique par la méthode de flash laser.

### II.6.1. Application d'un flux de type flash

Dans cette partie, on se basera sur les expressions de températures obtenues dans le paragraphe précédent, pour un bicouche en contact imparfait auquel on ajoute un flux surfacique de type flash (Figure 2-40).

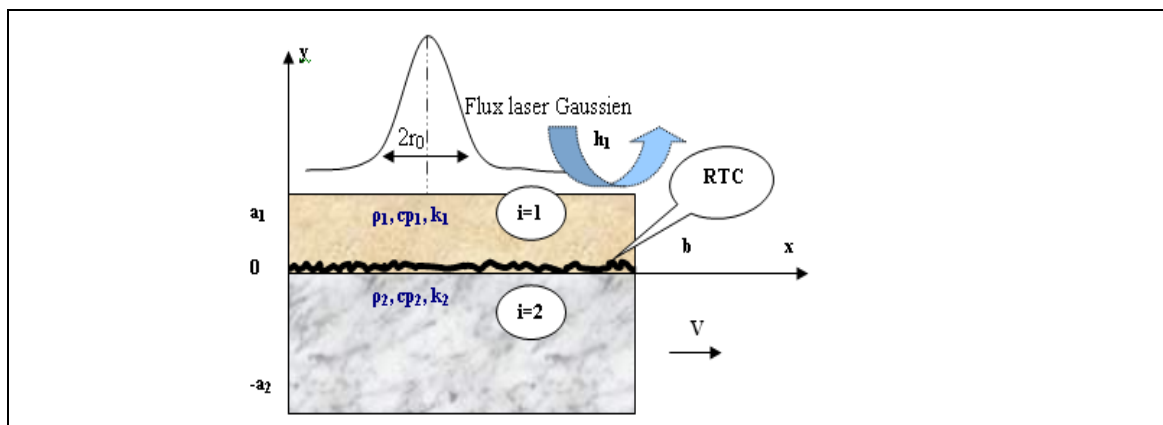


Figure 2- 40: Représentation schématique du problème en 2D tenant compte de la RTC et un flux laser en mouvement

### II.6.1.1. Formulation

On reprend les expressions des températures (eq 2.80 et eq 2.81), dans les deux couches (cas homogènes), puis on applique un flux gaussien très bref, à la surface du dépôt.

$$\theta_1(x, y, t) = \sum_{m=0,1}^{\infty} X_{ad,m}(x) e^{-\mu_m^2 \alpha t} \left[ \sum_{n=0,1}^{\infty} c_{mn} Y_{1ad,mn}(y) e^{-\lambda_{1,mn}^2 \alpha t} \right] \quad (2.80)$$

avec :  $0 \leq x \leq b; 0 \leq y \leq a_1; t \geq 0$

$$\theta_2(x, y, t) = \frac{k_1}{k_2} \sum_{m=0,1}^{\infty} X_{ad,m}(x) e^{-\mu_m^2 \alpha t} \left[ \sum_{n=0,1}^{\infty} c_{mn} \frac{\lambda_{1,mn}}{\lambda_{2,mn}} Y_{2ad,mn}(y) e^{-\lambda_{1,mn}^2 \alpha t} \right] \quad (2.81)$$

avec :  $0 \leq x \leq b; -a_2 \leq y \leq 0; t \geq 0$

le flux de flash gaussien est appliqué comme condition initiale (à t=0 s).

$$\theta_1(x, y, t = 0) = \sum_{m=0,1}^{\infty} X_{ad,m}(x) \left[ \sum_{n=0,1}^{\infty} c_{mn} Y_{ad,mn}(y) \right] \quad (2.85)$$

l'expression (eq.2.85) est dérivée par rapport à y, et ensuite multipliée par (-k<sub>1</sub>) pour exprimer le flux entrant.

$$f(x, y = a_1) = -k_1 \left[ \frac{\partial \theta_1(x, y, t = 0)}{\partial y} \right]_{y=a_1} \quad (2.87)$$

avec :

$$f(x, y) = A_1 P_0 \exp\left(-\left(\frac{x - 0.5 \cdot b}{r_0}\right)^2\right) \quad (2.88)$$

P<sub>0</sub> est la densité maximale du flux (au sommet de la gaussienne), et A<sub>1</sub> est le coefficient d'absorption du laser, ce qui permet donc de calculer les coefficients C<sub>mn</sub>.

$$c_{mn} = -\frac{1}{k_1} \frac{\int_0^b A_1 P_0 \exp\left(-\left(\frac{x - 0.5 \times b}{r_0}\right)^2\right) X_{ad,m}(x) dx}{N_{x,m} \left(\frac{dY_{ad,mn}(y)}{dy}\right)_{y=a_1}} \quad (2.89)$$

### II.6.1.2. Quelques résultats

Deux situations de conditions aux limites sont données dans le tableau 2-5: le cas adiabatique, où le matériau bicouche est isolé des 3 côtés (y=-a<sub>2</sub>, x=0 et x=b), ce cas se ramène physiquement à une situation monodimensionnelle pour laquelle des solutions analytiques sont disponibles.

L'application concerne les couples cuivre-alumine et cuivre-titane ayant des diffusivités thermiques

différentes ( $\alpha_{\text{cuivre}}/\alpha_{\text{titane}}=13,44$  et  $\alpha_{\text{cuivre}}/\alpha_{\text{alumine}}=13,81$ ). Dans un autre cas plus représentatif de la situation 2D où on impose une température en ( $x=0$  et  $x=b$ ): cas isotherme, l'application concerne le couple étain-aluminium présentant les même diffusivités thermiques (tableau 2-4).

	$h_1$	$h_2$	$h_0$	$h_e$	$X_{ad,m}$
	$W.m^{-2}.K^{-1}$				adimensionnel
Cas isotherme	200	100	$\infty$	$\infty$	$\sin(\mu_m x)$
adiabatique	200	0	0	0	$\cos(\mu_m x)$

*Tableau 2- 4 : Conditions aux limites*

Les résultats représentés sur les figures 2-41 (a) et (b), sont obtenus pour la condition initiale  $\theta(x,y,0)=T_0-T_{init}=F_i(x,y)$ , avec ( $T_{init}=200^\circ C$  et  $T_0=15^\circ C$ ). Tandis que ceux des figures 2-42 (a) et (b), correspondent au cas isotherme – aluminium, avec l'application initiale d'un flux laser flash centré à  $t=0$ ,  $f(x,y=a_1)=A_1 P_0 \exp(-(\frac{x-b/2}{r_0})^2)$ ,  $A_1=100\%$ ,  $r_0=1.5\text{ mm}$  et  $P_0=1.5 \cdot 10^{-6} W.m^{-2}$ . Les

longueurs en m ( $a_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $a_2 = 4.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $b=50 \cdot 10^{-3}$ ). On peut remarquer sur les figures 2-41 (a), et (b) le changement de pentes de température au niveau de l'interface pour les deux bicouches (cuivre/alumine et cuivre/titane). La réponse à une impulsion Gaussienne est illustrée sur la figure 2-42-a pour différents instants, et la figure 2-42-b montre sa répartition sur le bicouche à un instant donné ( $t=10\text{ s}$ ) et  $RTC=10^{-5} m^2 \cdot ^\circ C.W^{-1}$ ; comparée à la figure 2-41 (a) et (b), l'écart de température est plus significatif.

	$k$	$\rho$	$C_p$	$\alpha$
	$W.m^{-1}.K^{-1}$	$kg.m^{-3}$	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	$m^2.s^{-1}$
Sn	60	200	7500	$4 \cdot 10^{-5}$
Al	100	2500	1000	$4 \cdot 10^{-5}$
Cu	386	8954	383	$1.25 \cdot 10^{-4}$
Ti	21.9	4500	523	$0.93 \cdot 10^{-5}$
$Al_2O_3$	30	3900	850	$9.05 \cdot 10^{-6}$

*Tableau 2- 5 : Propriétés thermophysiques des matériaux utilisés*

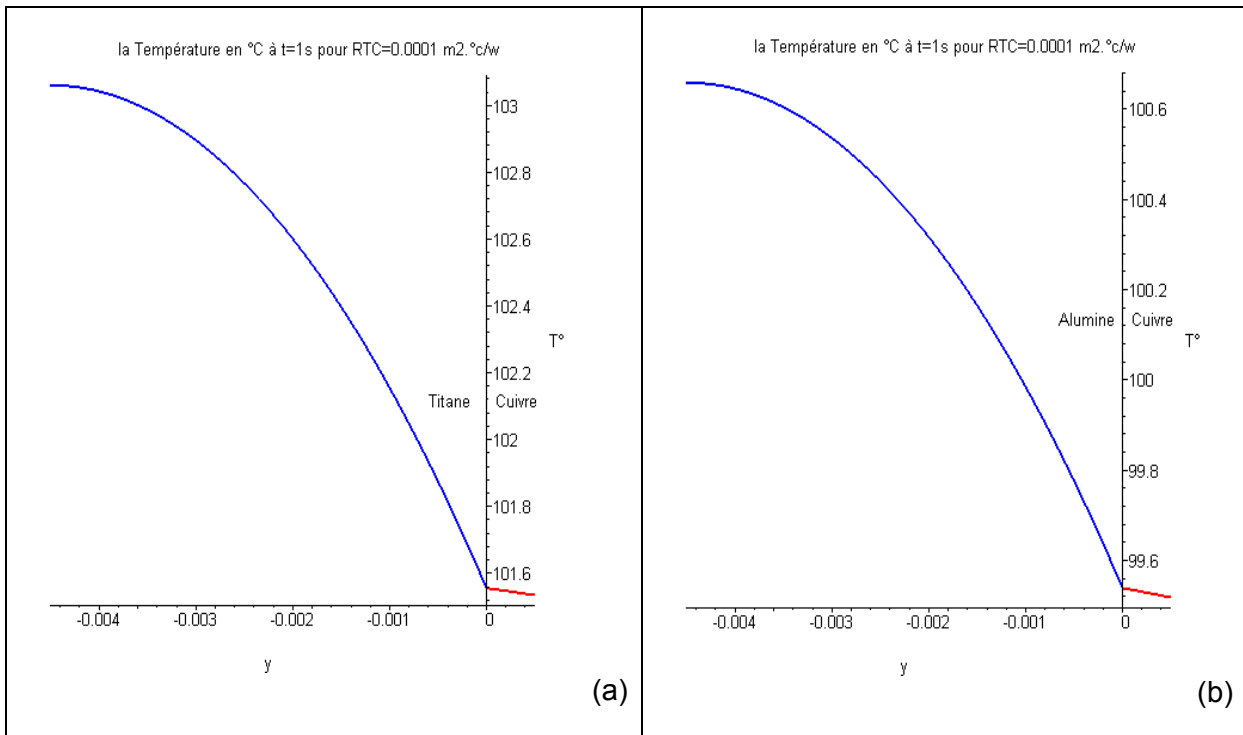


Figure 2-41: Distribution verticale de  $T(x=b/2, y, t=20 \text{ s})$ , pour  $RTC=10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$   
 (a) cuivre / titane (b) cuivre / alumine

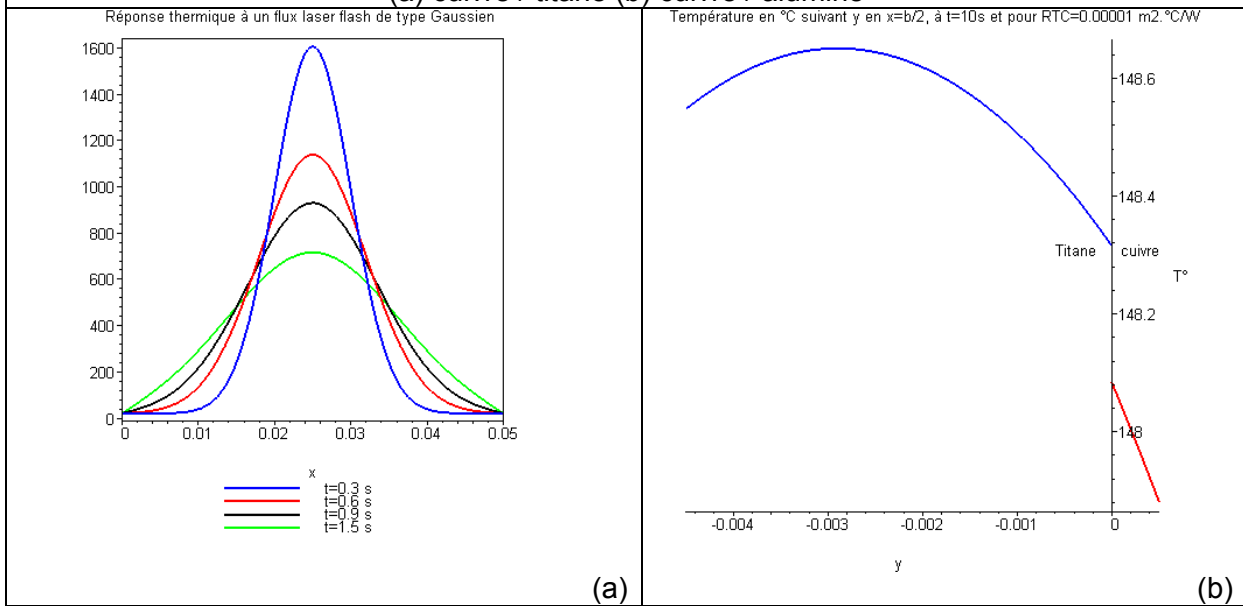


Figure 2- 42: Réponse thermique à une impulsion de type Gaussien, à la surface du bicouche (étain/aluminium) dans le cas isotherme (a) à différents instants  $T(x, y=a_1, t)$ , (b) à  $T(x=b/2, y, t=10 \text{ s})$  et  $RTC=10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{°C} \cdot \text{W}^{-1}$ .

Les figures 2-43 (a) et (b) à 2-47 montrent l'effet de la RTC à l'interface du bicouche pour deux valeurs de RTC, ainsi que l'évolution de la température en fonction du temps.



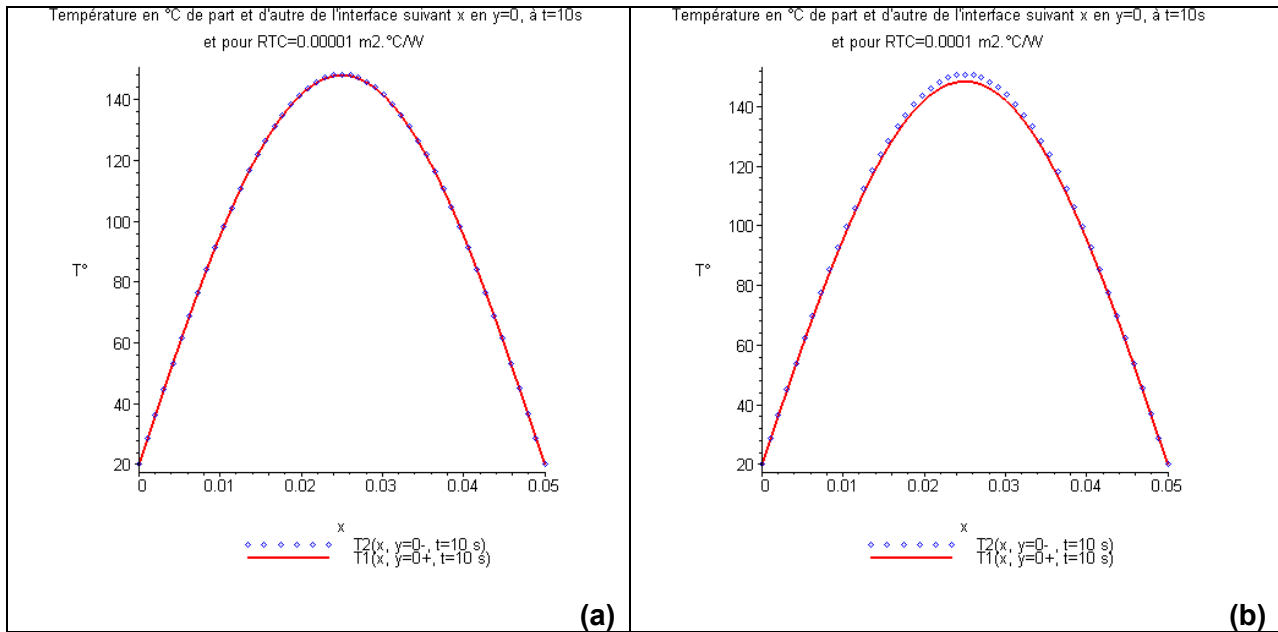


Figure 2- 43: Réponse thermique à une impulsion de type Gaussien, à la surface du Bicouche (étain/aluminium) dans le cas isotherme. Champs thermique  $T(x, y=0, t=10\text{ s})$  de part et d'autre de l'interface pour : (a)  $RTC=10^{-5}\text{ m}^2\cdot^{\circ}\text{C}\cdot\text{W}^{-1}$ , (b)  $RTC=10^{-4}\text{ m}^2\cdot^{\circ}\text{C}\cdot\text{W}^{-1}$ .

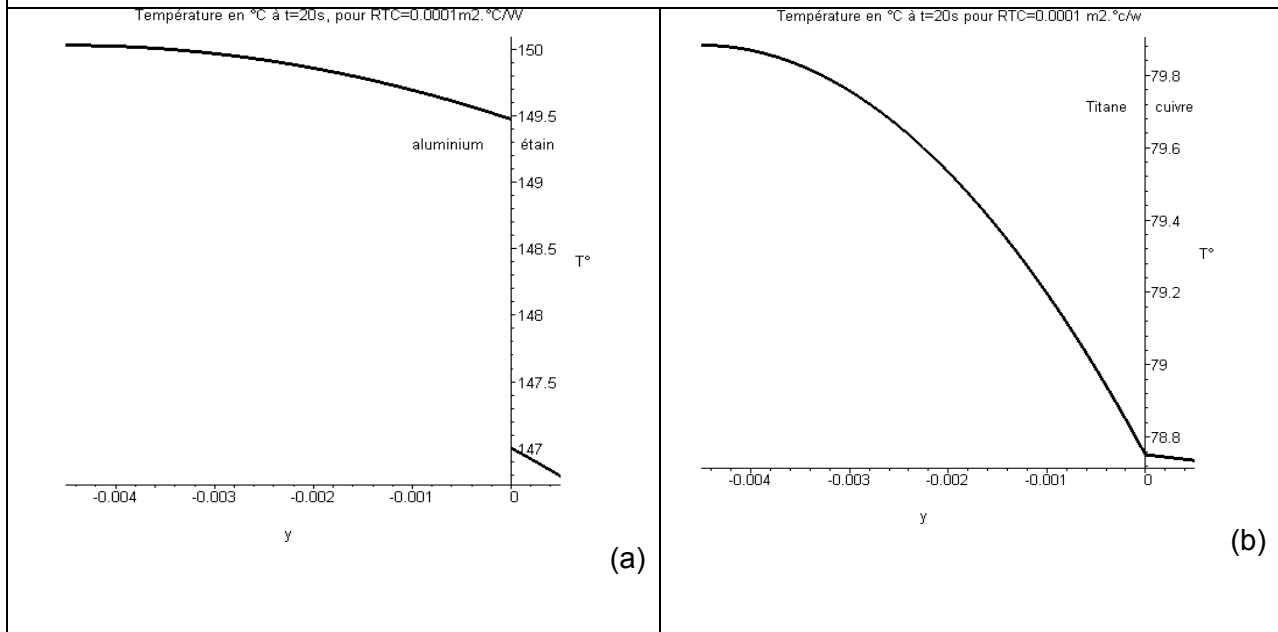


Figure 2- 44: Distribution verticale de la Température à  $t=20\text{ s}$ , pour  $RTC=10^{-4}\text{ m}^2\cdot^{\circ}\text{C}\cdot\text{W}^{-1}$ , (a) étain /aluminium, (b) cuivre / titane.

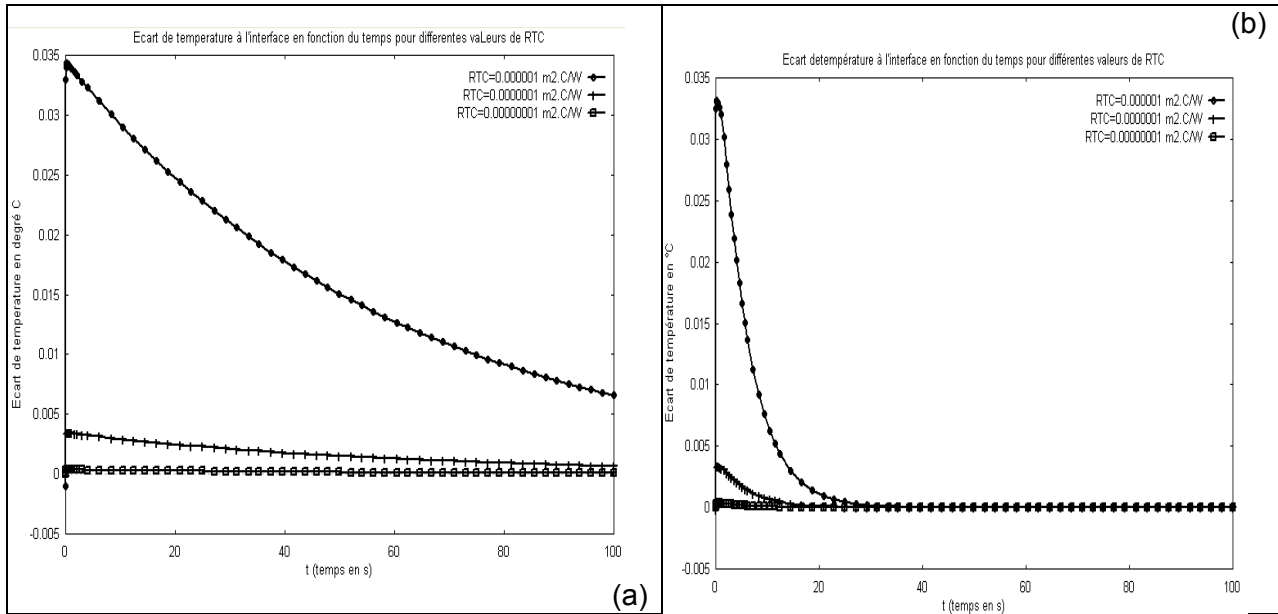


Figure 2- 45: Evolution de l'écart de température ( $T_2 - T_1$ ) en ( $x=b/2, y=0$ ) du bicouche étain/aluminium en fonction du temps et pour différentes valeurs de RTC.

(a) le cas adiabatique, (b) le cas isotherme.

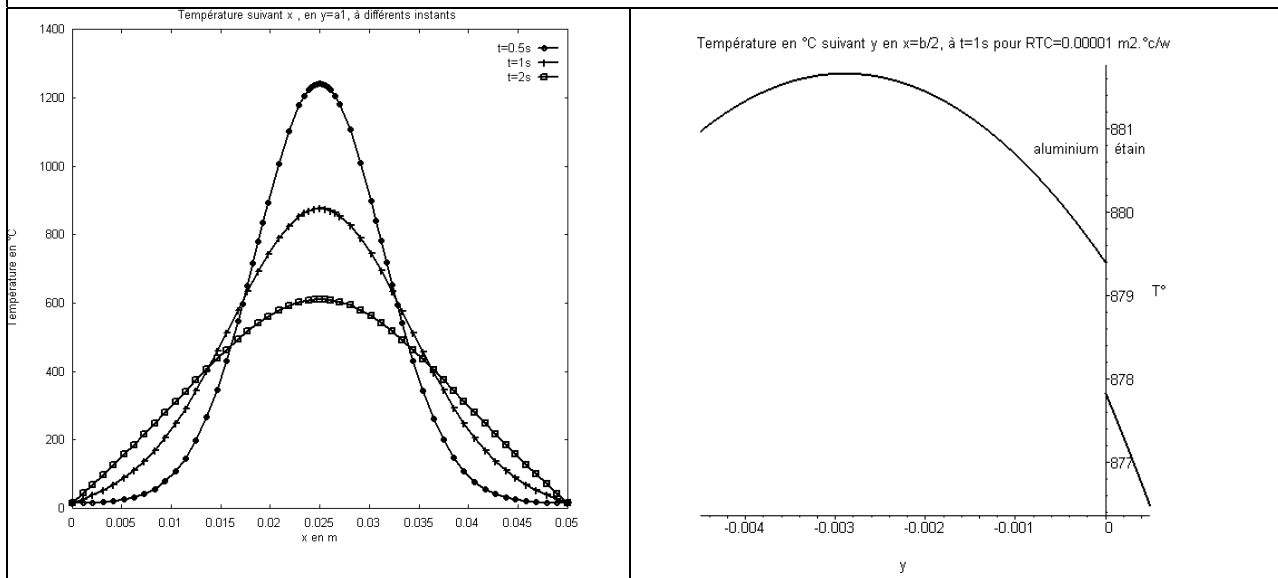
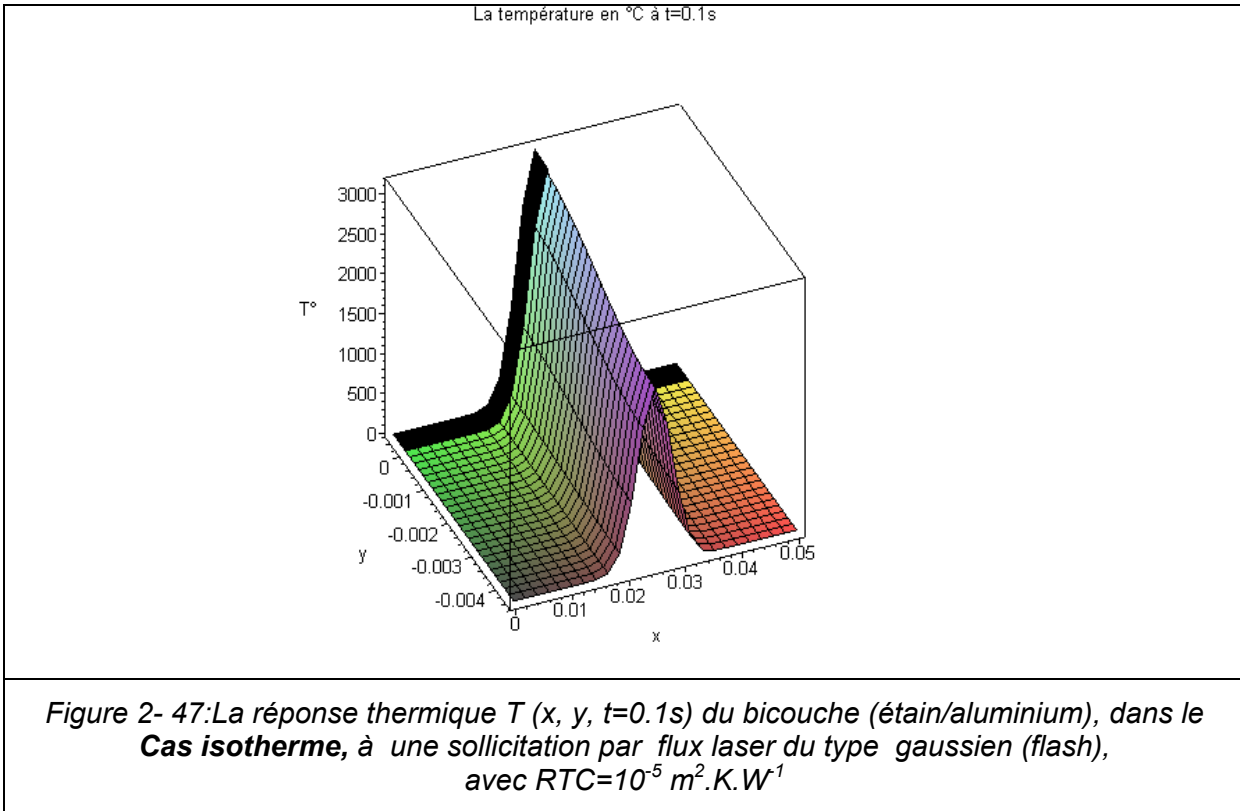


Figure 2- 46: Réponse thermique à une impulsion de type Gaussien, à la surface du bicouche (étain/aluminium) dans le cas isotherme.

(a) pour différents instants  $T(x, y=a_1, t)$   
 (b) à  $T(x=b/2, y, t=1s)$  et  $RTC=10^{-5} m^2.C.W^{-1}$ .



### II.6.2. Réponse à un flux laser gaussien continu

Nous avons étendu le travail du (II.4) au cas avec une source de chaleur gaussienne en mouvement (laser ou plasma). Le principe de la méthode est le même déjà appliqué au cas 1D. Haji Sheikh et al [36] ont élaboré par les fonctions de Green, une solution analytique de conduction in stationnaire dans un bicouche en 3D, tenant compte de la RTC et un terme source, mais des résultats numériques ont été donnés seulement pour un cas 1D. Notre méthode développée ci-dessous est différente de celle les fonctions de Green.

Les expressions de températures (solutions des équations homogènes) sont données dans le bicouche par :

$$\theta_{1H}(x, y, t) = \sum_{m=0,1}^{\infty} X_{ad,m}(x) e^{-\mu_m^2 \alpha_1 t} \left[ \sum_{n=0,1}^{\infty} c_{mn} Y_{1ad,mn}(y) e^{-\lambda_{1,mn}^2 \alpha_1 t} \right] \quad (2.90)$$

$$\theta_{2H}(x, y, t) = \frac{k_1}{k_2} \sum_{m=0,1}^{\infty} X_{ad,m}(x) e^{-\mu_m^2 \alpha_1 t} \left[ \sum_{n=0,1}^{\infty} c_{mn} \frac{\lambda_{1,mn}}{\lambda_{2,mn}} Y_{2ad,mn}(y) e^{-\lambda_{1,mn}^2 \alpha_1 t} \right] \quad (2.91)$$

Les termes sources sont exprimés en séries des fonctions propres qui apparaissent dans les solutions homogènes.

$$q_1(x, y, t) = \sum X_{ad,m}(x) \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{mn}(t) Y_{1ad,n}(y) \quad (2.92)$$

$$q_2(x, y, t) = \frac{k_1}{k_2} \sum X_{ad,m}(x) \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{mn}(t) \frac{\lambda_{1,mn}}{\lambda_{2,mn}} Y_{1ad,n}(y) \quad (2.93)$$

Afin de trouver l'expression de  $\phi_{mn}(t)$ , nous procédons comme suit :

$$\int_0^b \int_0^{a_1} q_1(x, y, t) X_{ad,m}(x) Y_{1ad,n}(y) dx dy = \phi_{mn}(t) \int_0^b X_{ad,m}^2(x) dx \int_0^{a_1} Y_{1ad,mn}^2(y) dy \quad (2.94)$$

$$\int_0^b \int_{-a_2}^0 q_2(x, y, t) X_{ad,m}(x) Y_{2ad,n}(y) dx dy = D \phi_{mn}(t) \int_0^b X_{ad,m}^2(x) dx \int_{-a_2}^0 Y_{2ad,mn}^2(y) dy \quad (2.95)$$

En posant S1 et S2 définis comme suit:

$$S_1 = \int_0^b \int_0^{a_1} q_1(x, y, t) X_{ad,m}(x) Y_{1ad,n}(y) dx dy \quad (2.96)$$

$$S_2 = \int_0^b \int_{-a_2}^0 q_2(x, y, t) X_{ad,m}(x) Y_{2ad,n}(y) dx dy \quad (2.97)$$

On calcule les intégrales suivantes, avec  $D = \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$

$$\int_{-a_2}^0 Y_{2ad,mn}^2(y) dy = \frac{S_2}{D \phi_{mn}(t) \int_0^b X_{ad,m}^2(x) dx} \quad (2.98)$$

en remplaçant les intégrales ci-dessus dans la relation d'orthogonalité :

$$\frac{\lambda_{2,mn}}{\lambda_{1,mn}} \int_{y=0}^{a_1} Y_{1ad,mn} Y_{1ad,mk} dy + \frac{\alpha_1 k_1 \lambda_{1,mn}}{\alpha_2 k_2 \lambda_{2,mn}} \int_{y=-a_2}^0 Y_{2ad,mn} Y_{2ad,mk} dy = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \neq k \\ N_{y,mn} & \text{pour } n = k \end{cases} \quad (2.99)$$

$$\frac{\lambda_{2,mn}}{\lambda_{1,mn}} \int_0^{a_1} Y_{1ad,mn}^2 dy + \frac{\alpha_1 k_1 \lambda_{1,mn}}{\alpha_2 k_2 \lambda_{2,mn}} \int_{-a_2}^0 Y_{2ad,mn}^2 dy = N_{y,mn} \quad (2.100)$$

$$\frac{\lambda_{2,mn}}{\lambda_{1,mn}} \frac{S_1}{\phi_{mn}(t) \int_0^b X_{ad,m}^2(x) dx} + \frac{\alpha_1 k_1 \lambda_{1,mn}}{\alpha_2 k_2 \lambda_{2,mn}} \frac{S_2}{D \phi_{mn}(t) \int_0^b X_{ad,m}^2(x) dx} = N_{y,mn} \quad (2.101)$$

Et par suite l'expression de  $\phi_{mn}(t)$  est:

$$\phi_{mn}(t) = \frac{\lambda_{2,mn}}{\lambda_{1,mn}} \frac{S_1}{N_{y,mn} \int_0^b X_{ad,m}^2(x) dx} + \frac{\alpha_1 k_1 \lambda_{1,mn}}{\alpha_2 k_2 \lambda_{2,mn}} \frac{S_2}{D N_{y,mn} \int_0^b X_{ad,m}^2(x) dx} \quad (2.102)$$

ou sous la forme simplifiée :

$$\phi_{mn}(t) = \frac{1}{N_{y,mn} N_{x,m}} \left( \frac{\lambda_{2,mn}}{\lambda_{1,mn}} S_1 + \frac{\alpha_1 k_1 \lambda_{1,mn}}{\alpha_2 k_2 \lambda_{2,mn}} \frac{S_2}{D} \right) \quad (2.103)$$

Pour établir la solution générale, il suffit de trouver l'expression de  $\Phi_{mn}(t)$

$$\theta_{1g}(x, y, t) = \sum_{m=0,1}^{\infty} X_{ad,m}(x) e^{-\mu_m^2 \alpha_1 t} \left[ \sum_{n=0,1}^{\infty} \Phi_{mn}(t) Y_{1ad,mn}(y) e^{-\lambda_{1,mn}^2 \alpha_1 t} \right] \quad (2.104)$$

$$\theta_{2g}(x, y, t) = \frac{k_1}{k_2} \sum_{m=0,1}^{\infty} X_{ad,m}(x) e^{-\mu_m^2 \alpha_1 t} \times \left[ \sum_{n=0,1}^{\infty} \Phi_{mn}(t) \frac{\lambda_{1,mn}}{\lambda_{2,mn}} Y_{2ad,mn}(y) e^{-\lambda_{1,mn}^2 \alpha_1 t} \right] \quad (2.105)$$

Calcul de l'expression de de  $\Phi_{mn}(t)$  :

$$\theta_{1g}(x, y, t) = \sum_{m=0,1}^{\infty} \sum_{n=0,1}^{\infty} \Phi_{mn}(t) \cdot X_{ad,m}(x) \cdot Y_{1ad,mn}(y) \quad (2.106)$$

$$\frac{\partial \theta_{1g}(x, y, t)}{\partial t} = \sum_{m=0,1}^{\infty} \sum_{n=0,1}^{\infty} \frac{d\Phi_{mn}(t)}{dt} \cdot X_{ad,m}(x) \cdot Y_{1ad,mn}(y) \quad (2.107)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{1g}(x, y, t)}{\partial x^2} = \sum_{m=0,1}^{\infty} \sum_{n=0,1}^{\infty} \Phi_{mn}(t) \frac{d^2 X_{ad,m}(x)}{dx^2} Y_{1ad,mn}(y) \quad (2.108)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{1g}(x, y, t)}{\partial y^2} = \sum_{m=0,1}^{\infty} \sum_{n=0,1}^{\infty} \Phi_{mn}(t) X_{ad,m}(x) \frac{d^2 Y_{1ad,mn}(y)}{dy^2} \quad (2.109)$$

On aboutit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{\alpha_1} \frac{d\Phi_{mn}(t)}{dt} = -(\mu_m^2 + \lambda_{1,mn}^2) \Phi_{mn}(t) + \frac{\phi_{mn}(t)}{k_1} \quad (2.110)$$

de même pour la deuxième couche

$$\theta_{2g}(x, y, t) = \frac{k_1}{k_2} \sum_{m=0,1}^{\infty} \sum_{n=0,1}^{\infty} \Phi_{mn}(t) \cdot \frac{\lambda_{1,mn}}{\lambda_{2,mn}} \cdot X_{ad,m}(x) \cdot Y_{2ad,mn}(y) \quad (2.111)$$

$$\frac{\partial \theta_{2g}(x, y, t)}{\partial t} = \frac{k_1}{k_2} \sum_{m=0,1}^{\infty} \sum_{n=0,1}^{\infty} \frac{d\Phi_{mn}(t)}{dt} \cdot \frac{\lambda_{1,mn}}{\lambda_{2,mn}} \cdot X_{ad,m}(x) \cdot Y_{2ad,mn}(y) \quad (2.112)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{2g}(x, y, t)}{\partial x^2} = \frac{k_1}{k_2} \sum_{m=0,1}^{\infty} \sum_{n=0,1}^{\infty} \Phi_{mn}(t) \cdot \frac{\lambda_{1,mn}}{\lambda_{2,mn}} \cdot \frac{\partial^2 X_{ad,m}(x)}{\partial x^2} \cdot Y_{2ad,mn}(y) \quad (2.113)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{2g}(x, y, t)}{\partial y^2} = \frac{k_1}{k_2} \sum_{m=0,1}^{\infty} \sum_{n=0,1}^{\infty} \Phi_{mn}(t) \cdot \frac{\lambda_{1,mn}}{\lambda_{2,mn}} \cdot X_{ad,m}(x) \cdot \frac{\partial^2 Y_{2ad,mn}(y)}{\partial y^2} \quad (2.114)$$

Ce qui aboutit à une équation différentielle semblable à (eq. 2-10):

$$\frac{1}{\alpha_2} \frac{d\Phi_{mn}(t)}{dt} = -(\mu_m^2 + \lambda_{2,mn}^2) \Phi_{mn}(t) + \frac{\phi_{mn}(t)}{k_2} \quad (2.115)$$

En mettant les équations (eq 2.110) et (eq 2.115) sous la forme :

$$\frac{d\Phi_{mn}(t)}{dt} = -\alpha_1 (\mu_m^2 + \lambda_{1,mn}^2) \Phi_{mn}(t) + \frac{\alpha_1}{k_1} \phi_{mn}(t) \quad (2.116)$$

$$\frac{d\Phi_{mn}(t)}{dt} = -\alpha_2 (\mu_m^2 + \lambda_{2,mn}^2) \Phi_{mn}(t) + \frac{\alpha_2}{k_2} \phi_{mn}(t) \quad (2.117)$$

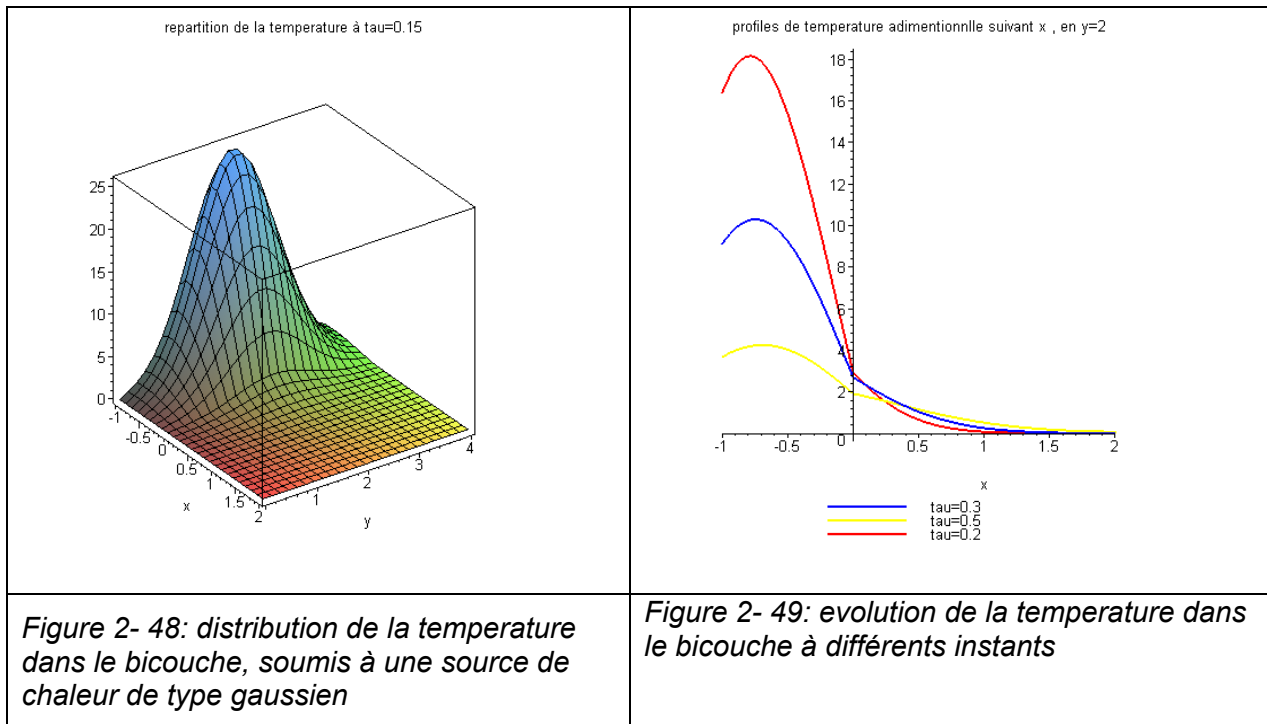
Et par une opération de soustraction, on trouve:

$$\Phi_{mn}(t) = \left( \frac{1}{k_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{1}{k_1} \right) \phi_{mn}(t) \cdot \frac{1}{\left[ \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_2} \mu_m^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \lambda_{1,mn}^2 - \lambda_{2,mn}^2 \right]} \quad (2.118)$$

Lorsque  $\alpha_1 = \alpha_2$  cette formule n'est plus valable (division par zéro). Dans ce cas on fait une somme des équations (2.110) et (2.115):

$$\frac{d\Phi_{mn}(t)}{dt} = -\frac{1}{2} \left[ ((\alpha_1 + \alpha_2) \mu_m^2 + (\alpha_1 \lambda_{1,mn}^2 + \alpha_2 \lambda_{2,mn}^2)) \Phi_{mn}(t) - \left( \frac{\alpha_2}{k_2} + \frac{\alpha_1}{k_1} \right) \phi_{mn}(t) \right] \quad (2.119)$$

Les expressions finales des températures dans le bicouche sont obtenues, de manière analogue à la démarche développée en (cf. II. 2). Les figures (2-48, 2-49) montrent la prise en compte du profil gaussien de la source de chaleur. La figure 2-48, représente la répartition spatiale de la température adimensionnelle dans le bicouche, à l'instant  $\tau = 0.15$  (adimensionnel).



La figure 2-49, montre la distribution de la température dans le bicouche à différents instants, après une sollicitation de type gaussienne. La prise en compte d'échange convectif à la surface accélère le refroidissement du bicouche.

Les figures 2-50 et (a) et (b) illustrent la répartition de la température dans le bicouche à deux instants  $\tau = 0.15$  et  $\tau = 1$  (adimensionnel). On peut remarquer que juste après la fin de la sollicitation, la température à la surface du dépôt est plus élevée que dans le substrat. Quelques instants plus tard (fig 2-50-a), la chaleur est transmise au substrat par conduction. On peut noter que la prise en compte de la convection naturelle à la surface du dépôt se traduit par un refroidissement rapide par rapport à la zone interne du bicouche.

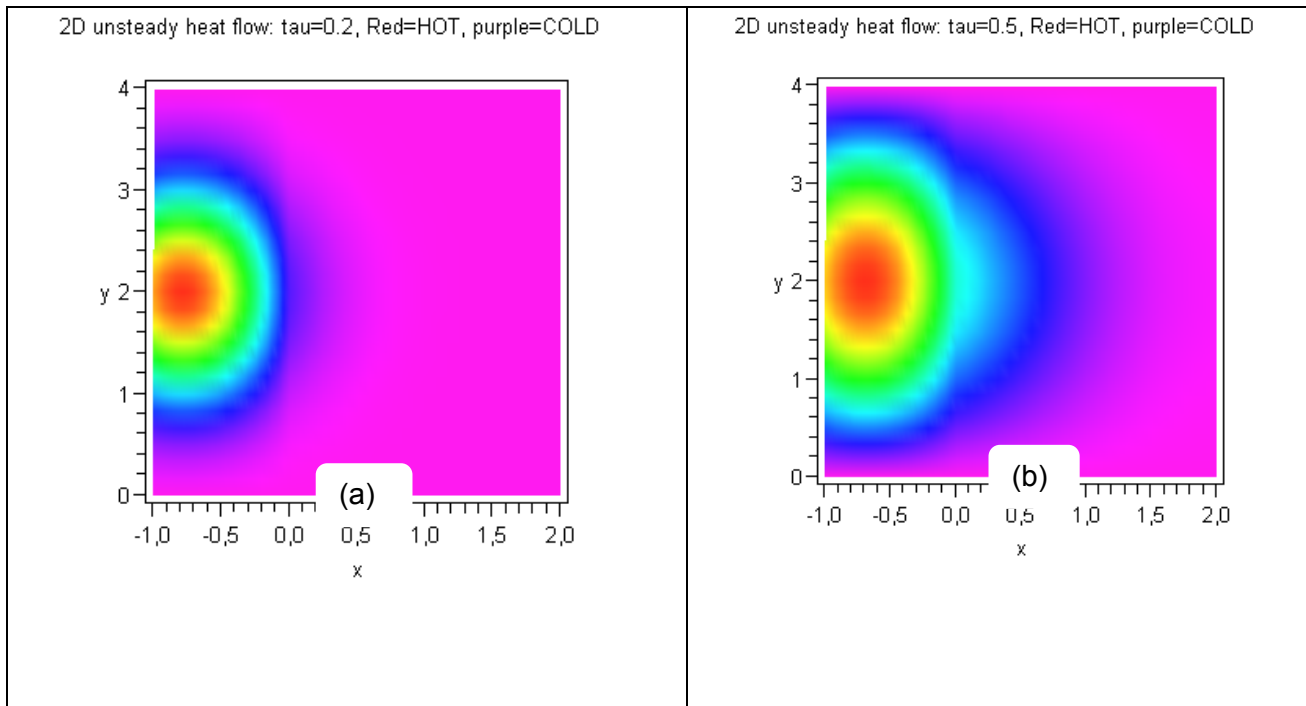
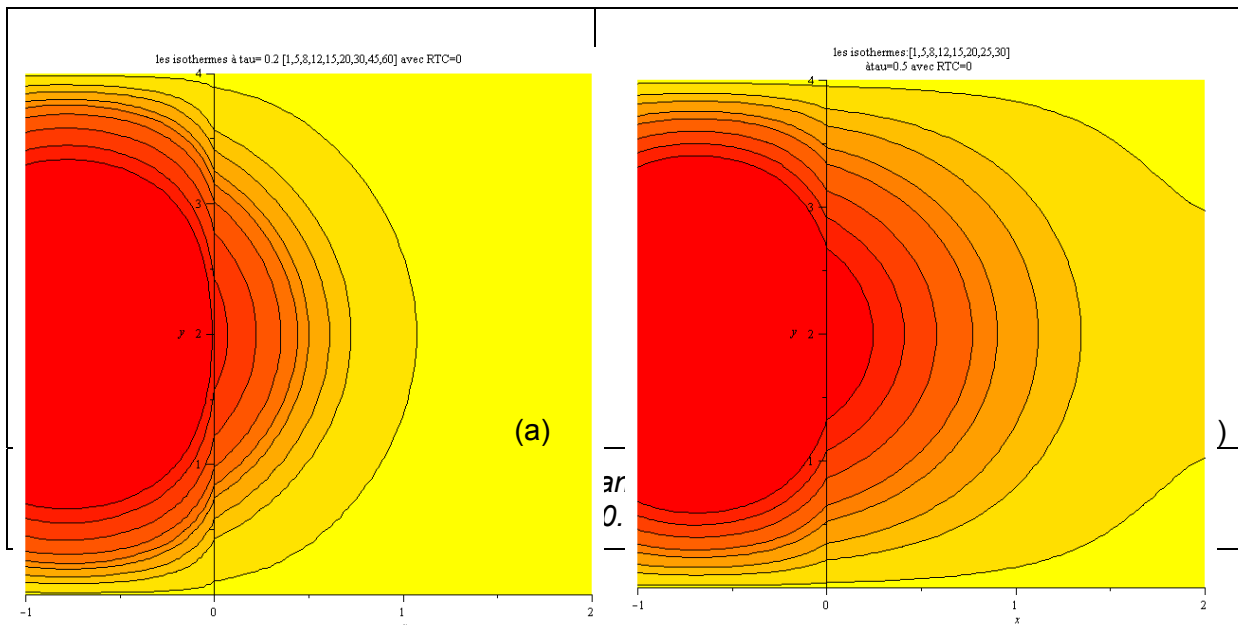


Figure 2- 50: Représentation imagée de la distribution de température dimensionnelle dans le bicouche soumis à un flux de chaleur gaussien, à deux instants différents. à  $\tau=0.2$  ; (b) à  $\tau=0.5$ .

Les figures 2-51 (a) et (b) montrent la repartition des isothermes à  $\tau = 0.2$  et  $\tau = 0.5$ , correspondant quantitativement aux descriptions qualitatives des figures 2-50 (a) et (b) respectivement.



II.0.3. matériau thermiquement mince

Dans le cas où le dépôt est de type couche mince, et la résistance thermique de contact négligeable, le modèle bicouche peut se ramener au cas monocouche, ce qui permet un gain de temps de calcul relativement important. En effet, pour un traitement par laser, le fait d'utiliser un monocouche (substrat) avec le coefficient d'absorption du dépôt, permet d'avoir des estimations de la distribution du champs thermique.

### II.7. Conclusion

Une modélisation analytique du transfert instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait, soumis à une source de chaleur en mouvement a été établie. La méthode de séparation des variables a été utilisée grâce à sa flexibilité lorsqu'il s'agit de résoudre des problèmes homogènes en dimensions finies.

Le transfert de chaleur dans un bicouche en 1D tenant compte de la résistance thermique de contact est étudié analytiquement par la méthode de séparation des variables. Les résultats de ce modèle sont utiles dans le domaine des traitements de surface, en particulier à la détermination de la résistance thermique de contact lors des premiers instants de refroidissement d'un splat sur un substrat après impact. Ce modèle nous a permis de voir que pour le cas particulier de refroidissement d'un splat de zircone à l'état liquide sur un substrat en zircone, le contact thermique à l'interface peut être considéré comme parfait et ce pour des valeurs de la  $RTC < 10^{-8}$ . En outre le calcul des valeurs propres a été explicité.

Ce premier modèle 1D a été ensuite étendu au cas d'une source de chaleur Gaussienne en mouvement, ce qui permet d'avoir des estimations théorique rapides de la distribution du gradient thermique, ainsi que le réglage de paramètres pertinents et optimaux d'un processus. Contrairement aux modèles monodimensionnels cités dans la littérature, qui considèrent un contact parfait et une source de chaleur ponctuelle sans déplacement, notre modèle a l'avantage de sa simplicité et aussi la prise en compte de la RTC, du profil gaussien et la vitesse de déplacement de la source, ce qui réduit le nombre d'hypothèse de l'élaboration du modèle.

Dans les cas où l'hypothèse 1D n'est plus valable, un modèle 2D est établi pour palier aux insuffisances des modèles monodimensionnels. Après sa validation une étude paramétrique a été menée dans le but de comprendre les effets des différents paramètres intervenant dans les expressions de températures. Un flux thermique de type flash est ensuite pris en compte, puis étendu à une source continue dans le temps, fixe ou mobile. Le calcul des valeurs propres s'avère compliqué dans le cas 2D, car leur calcul est une combinaison d'une part, des valeurs propres dans les deux couches, et d'autre part dans les 2D directions. Cette difficulté disparaît dans le cas de deux matériaux de même diffusivités thermiques.

Ces modèles analytiques élaborés et améliorés, sont très utiles pour des applications en traitement de surface (par laser ou projection thermique) : détermination de la RTC, processus de fabrication de pistes électroniques en cuivre sur un substrat en céramique...etc. Ils peuvent servir aussi à la validation de codes numériques (du laboratoire, ou commerciaux), avant leur extension à des cas plus complexes.



## Références

- [1] **H. S. Carslaw and J. C. Jeager**, Conduction of heat in solids, second edition, Clarendon press Oxford, pp. 87 - 89, (1993).
- [2] **J. Crank**, The mathematics of diffusion, second edition, Clarendon press Oxford, pp. 38 - 41, (1993).
- [3] **M. N. Özisik, et al**, unified analysis and solutions of heat and mass diffusion, second edition, A Wiley-Interscience publication, pp.378-398, (1984).
- [4] **M. Necati Ozisik**, Boundary Value Problem, Dover publications, INC., New York, 1989.
- [5] **André B. De Vriendt**, La transmission de la chaleur , Gaëtan morin éditeur, 1990.
- [6] **F. de Monte**, Transient heat conduction in one-dimensional composite slab. A natural analytic approach, Int. J. Heat Mass Transfer 43(19) 3607-3619, (2000).
- [7] **F. de Monte**, Unsteady heat conduction in two-dimensional two slab-shaped regions. Exact closed-form solution and results, Int. J. Heat Mass Transfer 46(8), 1455-1469, (2003).
- [8] **H. Salt**, Transient conduction in a two-dimensional composite slab-1. Int. J. Heat Mass Transfer 26 (11) 1611-1616, (1983).
- [9] **F. de Monte**, Transverse eigenproblem of steady-state heat conduction for multi-dimensional two-layered slabs with automatic computation of eigenvalues, Int. J. Heat Mass Transfer 47 191–201, (2004).
- [10] **A. Degiovanni**, Moyen, Résistance thermique de contact en régime permanent. Influence de la géométrie du contact, Rev. Gén. Ther. 334, 557-563, (1989).
- [11] **J.P. Bardou**, Introduction à l'étude des résistances thermiques de contact, Rev. Gén. Ther. 125, 429-447, (1972).
- [12] **N. Laraqi**, Thermal resistance for random contacts on the surface of a semi infinite heat flux tube, ASME J. Heat Transfer, 125 (3), 532-535, (2003).
- [13] **H. Belghazi et al**, Analytical solution of unsteady heat conduction in two-layered material

within imperfect thermal contact. Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Thermal Engineering, Theory and Applications-ICTEA-2006. Al Ain: United Arab Emirates, Eds: y. Haik, Z. Saghir, Mama Chacha. PP 49-55.

- [14] **J. Cedelle**, Etude de la formation de lamelles résultant de l'impact de gouttes millimétriques et micrométriques: application à la réalisation d'un dépôt par projection plasma, thèse de Doctorat, Université de Limoges, (2005).
- [15] **Shiraz D. Aziz, et al**, Impact, recoil and splashing of molten metal droplets, International Journal of Heat and Mass Transfer 43, 2841±2857, (2000).
- [16] **J. Mostaghimi et al**, Dynamics of Splat Formation in Plasma Spray Coating Process, Plasma Chemistry and Plasma Processing, Vol.22, No.1, March, (2002).
- [17] **W. LIU et al**, Thermal analysis and measurements for a molten metal drop impacting on a substrate : cooling, solidification and heat transfer coefficient, Int. J. Heat Mass Transf. Vol. 38, No. 8, pp. 1387-1395, (1995).
- [18] **P. Fauchais et al**, Knowledge Concerning Splat Formation: An Invited Review, Journal of Thermal Spray Technology, Volume13 (3) – 337, September (2004).
- [19] **M. Bouzidi et al**, An algorithm for solving the eigenvalue problems associated with heat diffusion in composite slabs, Num Meth. Thermal problems, Proc. 5<sup>th</sup> Int. Conf. Montreal, Vol. V, PP. 1506-1517, (1987).
- [20] **M. Bouzidi et al**, Non-stationary heat conduction in composite slabs with coupling. Application to enclosure: numerical computation of the analytical solution, Comp. And Maths. With Appls 11, 1043 –1045, (1985).
- [21] **M. Bouzidi et al**, Study of the transient heat conduction regime in the composite wall of an anode firing furnace, Int. Heat Transf. Conf., Munich, (1982).
- [22] **M. D. Mikhailov et al**, Acomputational procedure for Sturm-Liouville problems, J. Comp. Phys. 50, 323 – 336, (1983).
- [23] **M. D. Mikhailov, et al**, Transient Heat Diffusion in pne dimensional Composite Media and Automatic solution of the eigenvalue problem, Int. J. Heat Mass Transf., 26, 1131 – 1141, (1983).
- [24] **N. Hmina et al**, Détermination expérimentale de la résistance thermique d'interface d'un dépôt métallique submicronique sur un substrat. J. Phys. III France 5, 881-901, (1995).
- [25] **L. Loulou et al**, Estimation of thermal contact resistance during the first stages of metal solidification process I: experiment principle and modelisation, International Journal of Heat and Mass Transfer 42, 2119-2127, (1999).
- [26] **L. Loulou et al**, Estimation of thermal contact resistance during the first stages of metal solidification process II: experimental setup and results. International Journal of Heat and Mass Transfer 42, 2129-2142, (1999).
- [27] **D. Rosenthal**, The theory of moving sources of heat and its application to metal treatments. Trans. ASME 43 (11): 849 – 866, (1946).

- [28] **D.T. Swift-Hook et al**, Penetration welding with lasers. *Welding Journal* 52(11): 492-s to 499-s, (1973).
- [29] **P. Majumdar et al**, a Green's function model for the analysis of laser heating of materials. *Applied mathematical modelling* 31,1186-1200, (2007).
- [30] **K. Brockmann et al**, Calculation of temperature field in a thin moving sheet heated with laser beam. *R. Int journal of heat and mass transfer* 46, 717-723, (2003).
- [31] **P. J. Cheng et al**, An analytical model for the temperature field in the laser forming of sheet metal, *J. Materials Processing Technology* 101, 260-267, (2000).
- [32] **S. H. Kang et al**, Analytical solution for transient temperature distribution in gas tungsten arc, welding with consideration of filler wire, *Proc Instant Mech Engrs*, Vol. 213 Part B pp. 799-811, (1999).
- [33] **S. M. Zubair et al**, Heat conduction in a semi-infinite solid due to a time-dependent laser source, *Int. J. Heat Mass Transf.*, Vol. 39 pp. 3067-3074, (1996).
- [34] **B. S. Yilbas**, 3-dimensional laser heating model including a moving heat source consideration and phase change process, *Heat and Mass Transfer*, 33, 495, (1998).
- [35] **M. K. El-Adawi et al**, Laser heating of two – layer system with constant surface absorption an exact solution, *Int. J. Heat Mass Transfer* 0017-9310(94)00162-6, 947-952, (1994).
- [36] **A.Haji-Sheikh et al**, Température solution in multi-dimensional multi-layer bodies, *Int. J. Heat Mass Transfer* 45, 1865-1877 (2002).
- [37] **N. Hmina et al**, Détermination expérimentale de la résistance thermique d'interface d'un dépôt métallique submicronique sur un substrat. *J. phys. III France* 5, 881-901, (1995).
- [38] **A. Grimaud et al**, Faisabilité d'une méthode d'évaluation de la résistance thermique de contact entre une lamelle céramique écrasée sur un substrat métallique, *Mécanique & Industries* 8, 71-75, DOI: 10.1051/meca: 2007023, (2007).
- [39] **D. R. Poirier et al**, transport phenomena in materials processing, *The Minerals, Metals and materials Society*, Warrendale, PA. February (1998).
- [40] **E. U. Schlunder**, heat exchanger Design Handbook, Hemisphere publishing corporation, New York, NY (1983).
- [41] **A. F. H. Kaplan**, Model of the absorption variation during pulsed laser heating applied to welding of electronic Au/Ni-coated Cu-leadframes, *Applied Surface Science*, 241, 362–370, , (2005).
- [42] **C.W. Tittle**, Boundary value problems in composite media, *J. Appl. Phys.* 36, 1486–1488, (1965).
- [43] **D. Amos et al**, User manual for three-dimensional subroutine for exact transient heat conduction solutions in parallelepipeds, Prepared for Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM, August, 2000.
- [44] **J. Padovan**, Generalized Sturm–Liouville procedure for composite domain anisotropic transient heat conduction problems, *AIAA J.* 12,1158–1160, (1974).

- [45] **H. Salt**, Transient conduction in a two-dimensional composite slab – I. Theoretical development of temperature modes, *Int. J. Heat Mass Transfer* 26, 1611–1616 (1983).
- [46] **H. Salt**, Transient conduction in two-dimensional composite slab – II. Physical interpretation of temperature modes, *Int. J. Heat Mass Transfer* 26 1617–1623, (1983).
- [47] **M.D. Mikhailov et al**, Transient conduction in a three-dimensional composite slab, *Int. J. Heat Mass Transfer* 29, 340–342, (1986).
- [48] **M.N. Ozisik**, *Heat Conduction*, second ed., Wiley, New York, (1993).
- [49] **Ling Yan et al**, Thermal characteristics of two-layered bodies with embedded thin-film heat source, *ASME J. Electron. Packaging* 115, 276–283, (1993).
- [50] **B.V. Averin et al**, Sturm–Liouville problem for a differential equation of second order with discontinuous coefficients, *Journal of Engineering Physics and Thermophysics* 73 (4), 735–740, (2000).
- [51] **L. Yan et al**, Thermal characteristics of two-layered bodies with embedded thin-film source, *ASME Journal of Electronic Packaging* 115(3) (1993) 276–283.
- [52] **A. Haji-Sheikh et al**, Temperature solution in multi-dimensional multi-layer bodies, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 45(9) (2002) 1865–1877.
- [53] **C. Aviles-Ramos et al**, Exact solution of heat conduction in composites and application to inverse problems, *ASME J. Heat Transfer* 120, (1998).
- [54] **J.V. Beck et al**, *Heat Conduction Using Green’s Functions*, Hemisphere, Washington, DC, (1992).
- [55] **K.J. Dowding et al**, Estimation of directional-dependent thermal properties in a carbon–carbon composite, *Int. J. Heat Mass Transfer* 39, 3157–3164, (1996).
- [56] **A. Haji-Sheikh et al**, An efficient method of computing eigenvalues in heat conduction, *Numer. Heat Transfer (B)* 38, 133–156, (2000).
- [57] **H. Levine**, Unsteady diffusion in a composite medium, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 52 (4) (1999) 499–512.
- [58] **V.P. Kozlov, P.A. Mandrix**, Method of summation-integral equations for solving the mixed problem of nonstationary heat conduction, *Journal of Engineering Physics and Thermophysics* 74 (2) (2001) 477–486.
- [59] **V.P. Kozlov, P.A. Mandrix**, Solution of mixed contact problems in the theory of nonstationary heat conduction by the method of summation-integral equations, *Journal of Engineering Physics and Thermophysics* 74 (3) (2001) 632–637.
- [60] **N. D. Milosevic et al**, Analytical solution of transient heat conduction in a twolayer anisotropic cylindrical slab excited superficially, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47, 1627-1641, (2004).

- [61] **N. D. Milosevic et al**, Simulation of the Thermal Diffusivity and Thermal Contact Resistance of Thin Solid Films and Coatings Using the Two-Dimensional Flash Method, International Journal Thermophysics, Vol 24, N°. 3. May (2003).

**Chapitre III : Diffusion de la chaleur dans  
un matériau poreux**

Chapitre III : Diffusion de la chaleur dans un matériau poreux.....	125
III.1. Introduction .....	125
III.2. Modélisation du phénomène.....	127
III.3. Applications du modèle à un cas réel .....	128
III.3.1. Estimation de certains paramètres opérationnels.....	129
III.3.1.1. Estimation de conductivité thermique effective.....	129
III.3.1.2. Estimation de la porosité théorique.....	132
III.3.1.3. Coefficients d'échange.....	133
III.3.1.4. Données thermophysiques .....	133
III.3.2. Quelques simulations du problème étudié.....	133
III.3.3. Application au frittage .....	141
III.4. Conclusion .....	143
Références .....	145

## Chapitre III : Diffusion de la chaleur dans un matériau poreux

### III.1. Introduction

On désigne par milieux poreux tout matériau, constitué d'une portion de solide délimitant ou englobant une ou plusieurs phases fluides qui peuvent s'écouler et, éventuellement, échanger avec le solide de la matière, de l'énergie.

La partie solide est aussi appelée matrice, elle peut être déformable mais cohérente, ce qui exclut les lits fluidisés, constitués de particules solides tenues en suspension sous l'effet de l'écoulement d'un fluide interstitiel.

Les milieux poreux sont très communs: textile, papier, matériaux de constructions, isolants, sols, filtres, sable, poudre,...etc. d'une très grande variété, aussi bien de structure (forme et taille des grains et des pores de la matrice) que de propriétés physico-chimiques. Les milieux poreux occupent une large place et jouent un rôle important dans de nombreux secteurs industriels et phénomènes naturels. En se limitant à quelques exemples typiques, citons: le génie pétrolier, le génie chimique et l'électrochimie, la thermique, ...etc.

Les phénomènes physiques en milieux poreux dépendent, en général, d'un certain nombre de propriétés telles que: les propriétés de stockage des fluides (soit sous forme adsorbée sur le solide, soit remplissant les pores), les propriétés de transferts (masse, quantité de mouvement, énergie) et enfin les propriétés mécaniques. Comme pour tous les systèmes hétérogènes polyphasiques, ces propriétés sont fonctions de la morphologie de la matrice et des phénomènes qui se développent et interagissent dans les différentes phases, ce qui rend le champ d'étude des transferts de chaleur en milieux poreux particulièrement vaste. Dans ce chapitre nous traiterons un aspect particulier des matériaux poreux qui est le transfert par conduction en milieu granulaire, et nous choisissons comme exemple d'application le traitement laser de couches poreuses granulaires, qui est un procédé industriel très répandu. Dans ce type d'applications, le dépôt est sous forme granulaire. Il existe plusieurs techniques, citons les deux principales.

**Le premier procédé** consiste à balayer la couche pré-déposée sur un substrat (figure 3-1), à température ambiante ou préchauffée, par un faisceau laser [1-7]. Le profil du faisceau laser, l'intensité et la vitesse de balayage,...etc, sont choisis de façon à permettre la fusion de la couche granulaire pour qu'elle adhère au substrat.



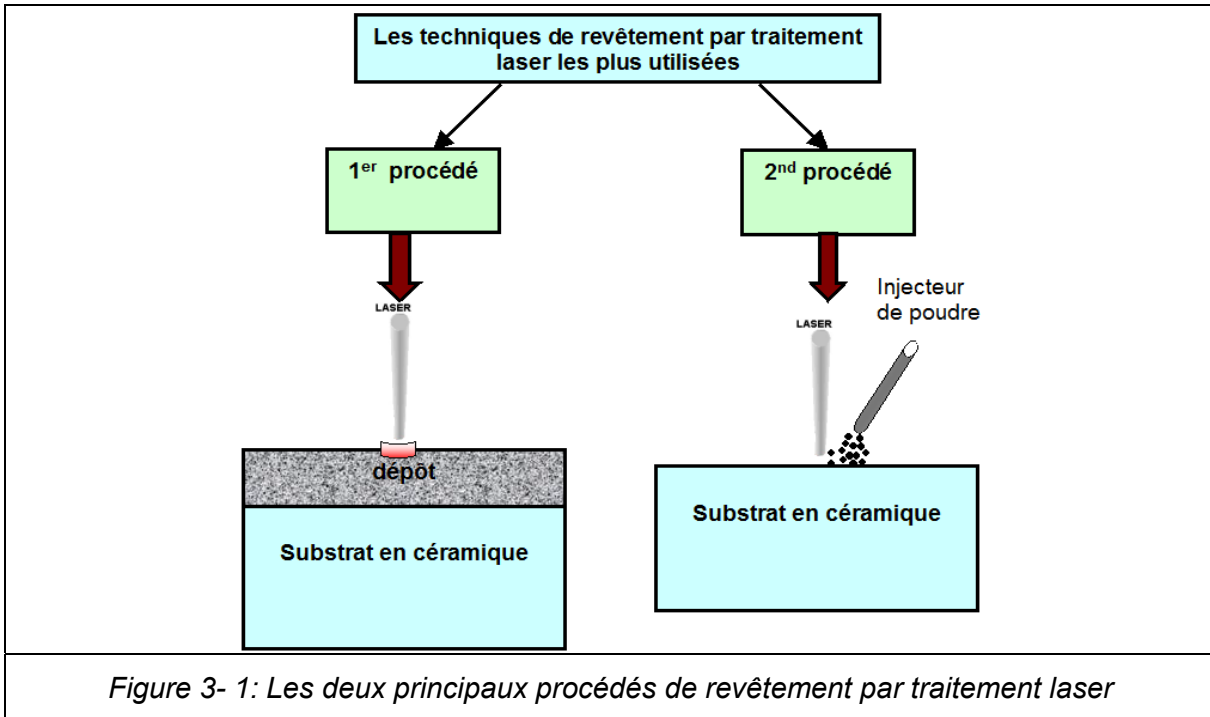


Figure 3- 1: Les deux principaux procédés de revêtement par traitement laser

Ce processus est utilisé dans l'industrie électronique, pour fabriquer des pistes électroniques sur un substrat (figure 3-2). La poudre granulaire est choisie en fonction des propriétés souhaitées, (conductivité électrique par exemple,...etc.). Le substrat est choisi en fonction de ses propriétés thermiques (bonne conductivité thermique) de façon à faciliter l'évacuation de la chaleur, et éviter la surchauffe des pièces électroniques.

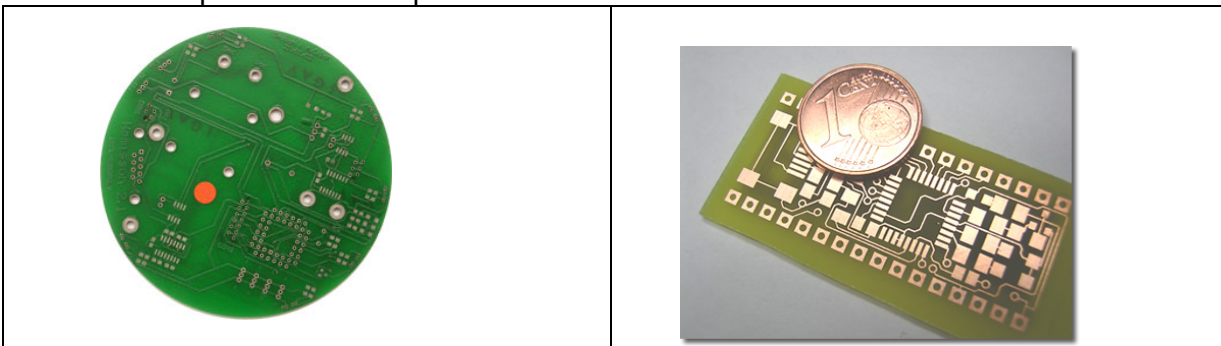
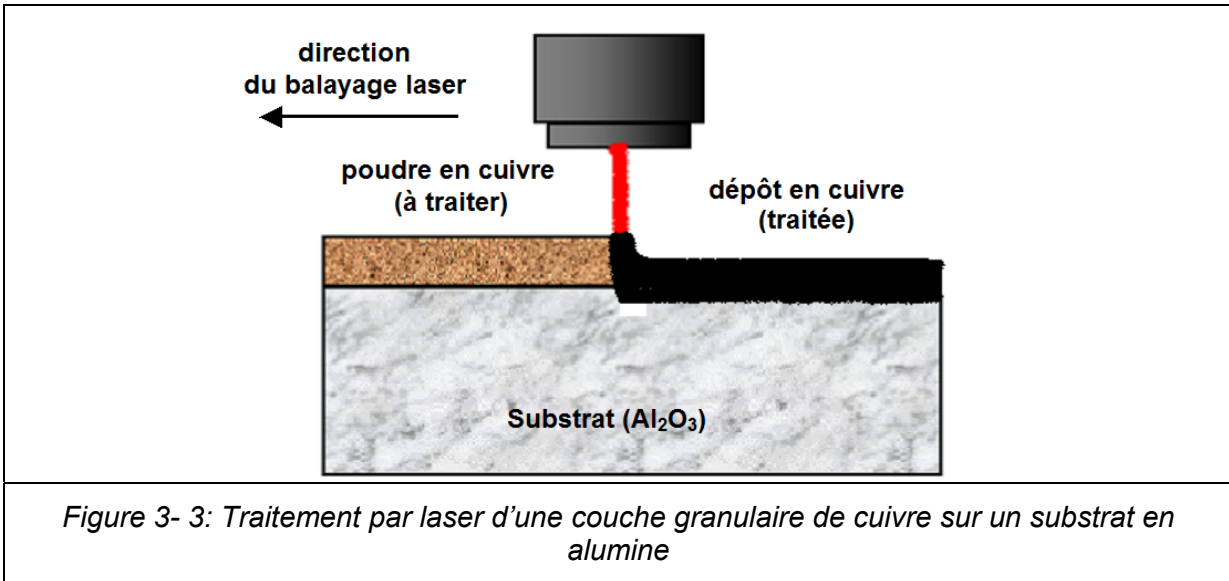


Figure 3- 2 : Fabrication de pistes électronique

**Le second procédé** consiste à injecter la poudre au fur et à mesure du balayage laser (figure 3-1). Ce type de procédé a l'avantage de permettre le réglage du débit de poudre pendant les différentes phases du traitement. Par contre il peut présenter des inconvénients tels que l'absorption de l'énergie, si le substrat a un faible coefficient d'absorption.

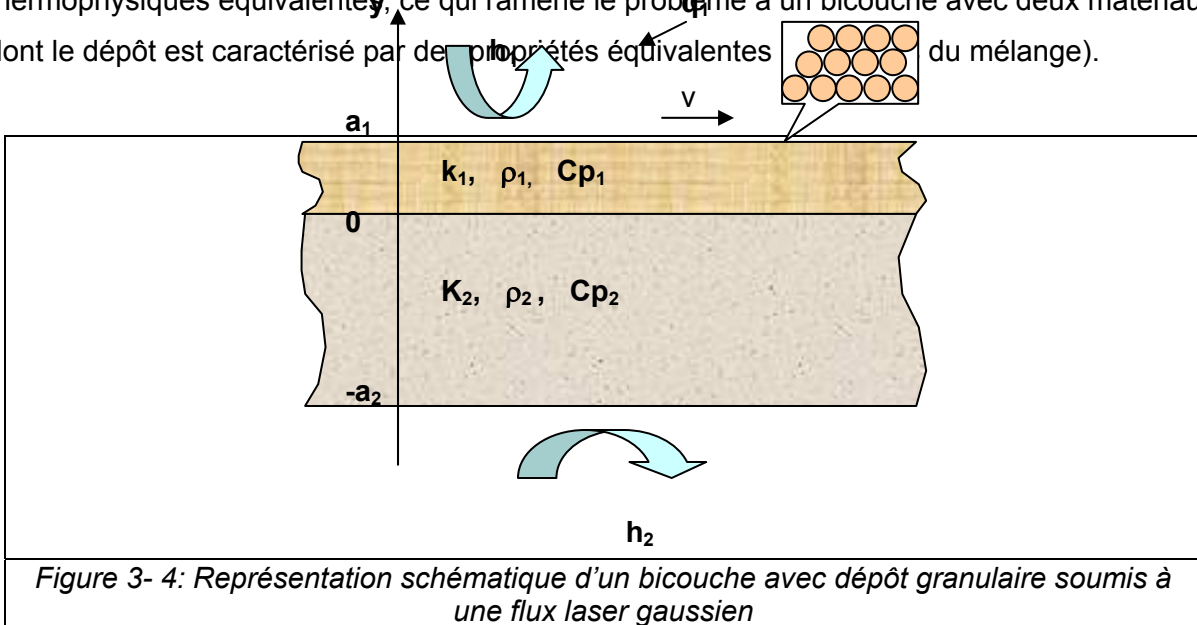
Dans la suite de ce chapitre, nous traitons le cas du premier procédé, car c'est ce qui est utilisé au laboratoire [1]. Le problème revient à étudier un matériau bicouche dont la couche supérieure (dépôt) est poreuse (granulaire). Nous détaillerons le cas d'une couche granulaire de cuivre sur un substrat en alumine (figure 3-3).



### III.2. Modélisation du phénomène

La plupart des matériaux étudiés dans des applications en ingénierie ne sont pas denses mais poreux. Pour cette raison, nous allons étendre la solution analytique obtenue dans le cas bicouche 1D (figure 3-4), au cas d'un dépôt poreux de type granulaire.

La méthode nécessite d'exprimer les équations du mélange (poudre, air), ainsi que les propriétés thermophysiques équivalentes, ce qui ramène le problème à un bicouche avec deux matériaux dont le dépôt est caractérisé par des propriétés équivalentes du mélange).



Ce modèle est utilisé pour des matériaux poreux granulaires, mais le principe de la méthode peut être généralisé à d'autres morphologies. La formulation de la conservation d'énergie dans le bicouche [8-17], est exprimée dans la phase solide par :

$$(1-\varphi)(\rho C_p)_{1s} \frac{\partial T_{1s}}{\partial t} = (1-\varphi) \nabla \cdot (k_{1s} \nabla T_{1s}) + (1-\varphi) q_{1s} \tag{3.1}$$

Et dans la phase fluide par:

$$(\rho C_p)_{1f} \left( \varphi \frac{\partial T_{1f}}{\partial t} + v_f \cdot \nabla T_{1f} \right) = \varphi \nabla \cdot (k_{1f} \nabla T_{1f}) + \varphi q_{1f} \quad (3.2)$$

En admettant que la température à l'interface solide-fluide est la même,  $T_{1s} = T_{1f} = T_1$ , et en combinant les deux équations ci-dessus on obtient:

$$(\rho C_p)_m \frac{\partial T_1}{\partial t} + (\rho C_p)_f v_f \cdot \nabla T_1 = \nabla \cdot (k_m \nabla T) + q_1 \quad (3.3)$$

où :

$$(\rho C_p)_m = (1 - \varphi)(\rho C_p)_{1s} + \varphi(\rho C_p)_{1f} \quad (3.4)$$

$$q_1 = (1 - \varphi)q_{1s} + \varphi q_{1f} \quad (3.5)$$

$$k_m = (1 - \varphi)k_{1s} + \varphi k_{1f} \quad (3.6)$$

Dans le cas où la vitesse du fluide  $v_f$  est négligeable l'équation (3.3) devient:

$$(\rho C_p)_m \frac{\partial T_1}{\partial t} = \nabla \cdot (k_m \nabla T) + q_1 \quad (3.7)$$

Cela permet de ramener la cas bicouche avec un dépôt poreux au cas étudié dans le deuxième partie du chapitre 2.

Les indices  $m$ ,  $f$ , et  $s$ , sont relatifs respectivement au mélange, au fluide (éventuellement de l'air) présent dans les pores et au solide.

### III.3. Applications du modèle à un cas réel

Le modèle obtenu, peut être appliqué à un nombre important d'applications technologiques, faisant appel aux matériaux hétérogènes assujettis à une source de chaleur en mouvement. Les solutions analytiques de transfert instationnaire dans les matériaux multicouches assujettis à une source de chaleur en mouvement, sont des problèmes complexes. Ces problèmes introduisent parfois différents paramètres, telles que l'anisotropie thermique, la qualité du contact, les pertes thermiques, ...etc.

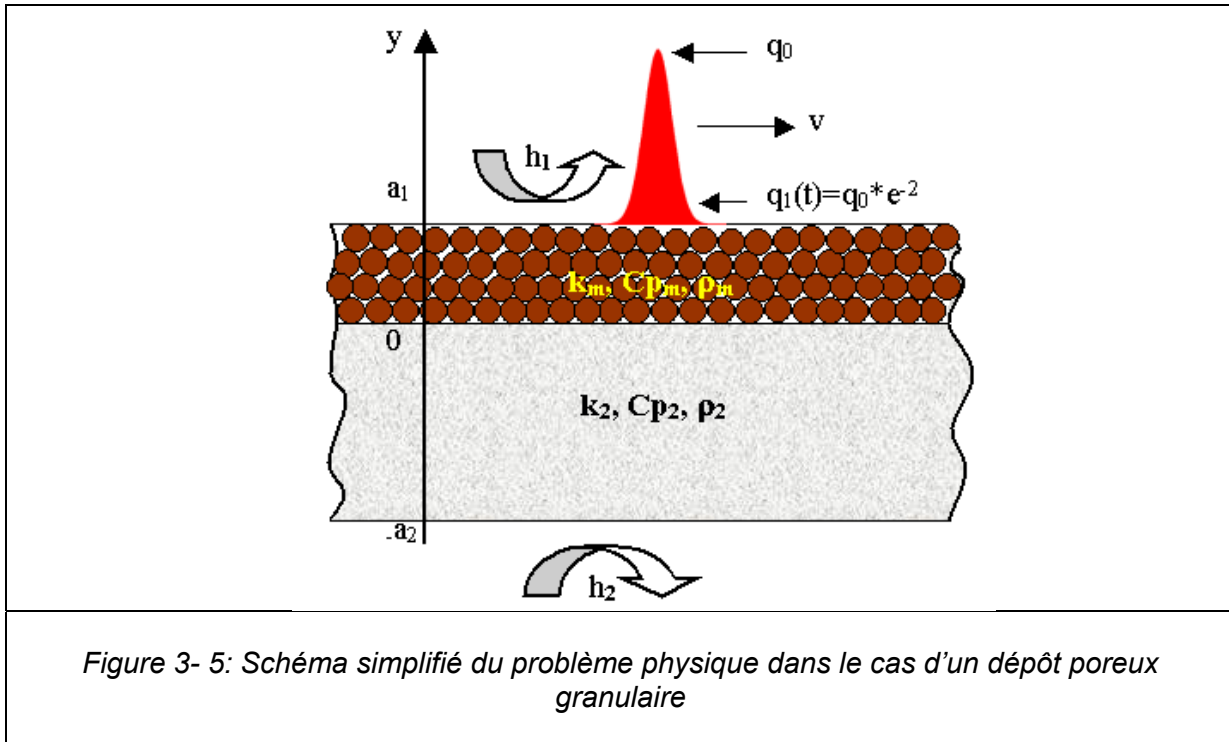
Afin de justifier la validité du modèle obtenu, nous l'avons appliqué à quelques cas élémentaires. Les résultats donnés par ce modèle ont été comparés à ceux obtenus par un code numérique en volumes finis (cf. chapitre II, figure 2-15), dans les conditions suivantes: cuivre dense/alumine, un faisceau laser de profile gaussien ( $TEM_{00}$ ).

Afin de résoudre ce problème, nous avons besoin d'estimer les différents paramètres tels que: la conductivité thermique effective, la résistance thermique de contact ainsi que les coefficients de transferts.

L'application traitée dans cet exemple concerne la fabrication de pistes électroniques à partir une couche fine de poudre de cuivre (sous forme granulaire), déposée sur un substrat en alumine, par un traitement laser.

Un matériau bicouche de forme rectangulaire ( $-a_2 \leq y \leq a_1$ ; figure 3-5), initialement à la température uniforme,  $T_0 = T_{amb}$ . Pour  $t > 0$ , les coefficients d'échange convectifs  $h_1$  à la surface du dépôt,  $y = a_1$ , sont estimés dans (3. 2. 1). L'autre condition aux limites est considérée comme adiabatique ( $h_2 = 0$ ).

Le nombre de valeurs propres nécessaires pour atteindre la convergence est les vingt premières valeurs. Des détails concernant l'estimation des paramètres de la conductivité thermique effective, du coefficient d'échange convectif à la surface, et la RTC, sont donnés dans les paragraphes suivants.



### III.3.1. Estimation de certains paramètres opérationnels

Dans le cas de matériau poreux, certains paramètres doivent être estimés, tels que la conductivité thermique équivalente de la couche poreuse, la capacité calorifique, et la masse volumique.

#### III.3.1.1. Estimation de conductivité thermique effective

Les modèles utilisés pour évaluer la conductivité thermique effective sont fondés sur l'identification du milieu poreux à une structure géométrique simple régulière. Celle-ci étant choisie, la conductivité est calculée par résolution théorique rigoureuse, par calcul numérique ou à l'aide d'hypothèses simplificatrices. Dans ce dernier cas, on aboutit généralement à des formulations plus ou moins explicites de  $k_{eff}$  en fonction des conductivités thermiques des phases en présence de la

porosité. Dans le cas où le fluide qui sature l'espace des pores est un gaz, la conductivité thermique effective dépend également de la pression.

Dans notre cas, la conductivité thermique équivalente dépend à la fois de la conductivité thermique de la phase solide (grains) et celle de la phase fluide (air). Plusieurs modèles d'estimation de la conductivité thermique effective existent dans la littérature [25-27].

En plus du modèle linéaire (eq 3.6), d'autres modèles d'estimation de la conductivité thermique équivalente peuvent être trouvés dans [18 - 25], parmi les plus utilisés on cite :

$$k_{eff} = k_D (1 - \varphi)^{\frac{4}{3}} \quad (\text{Kanan Bala et al [19], 1989}) \quad (3.8)$$

$$k_{eff} = k_D \frac{(1 - \varphi)}{(1 + 0.5\varphi)} \quad (\text{Wimmer et al [20], 1974}) \quad (3.9)$$

$$k_{eff} = k_f \left( \frac{\varphi \varepsilon + \frac{k_D}{k_f} (1 - \varphi \varepsilon)}{1 - \varphi(1 - \varepsilon) + \frac{k_D}{k_f} \varphi(1 - \varepsilon)} \right) \quad (\text{Hadley et al [21], 1986}) \quad (3.10)$$

avec :

- $k_{eff}$  la conductivité thermique effective du matériau granulaire ;
- $k_D$  la conductivité thermique du matériau dense ;
- $k_f$  la conductivité thermique du fluide ;
- $\varphi$  la porosité du système ;

$\varepsilon$  une fonction empirique dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1.

Le choix arbitraire de  $\varepsilon$  dans le modèle de Hardley, le rend moins utilisé, ce qui justifie que nous nous intéressons en particulier aux modèles de Kanan et Wimmer.

D'autres modèles existent dans la littérature, tels que celui de Maxwell, Rayleigh...etc. Mais cela concerne plus des inclusions de particules solides (sphériques ou non) dans un fluide [8, 21], et sont plus éloignés de nos préoccupations.

Afin de respecter les hypothèses faites sur l'isotropie des deux couches, nous avons choisi dans cette étude une couche poreuse granulaire dont la taille des grains est de l'ordre de 30  $\mu\text{m}$  (figure 3-6). Les grains sont tous supposés avoir la même taille. La conductivité thermique effective est calculée pour une porosité de 30%, en utilisant différents modèles (figure 3-7), donne les résultats suivants:

- $k_m = 252 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ , en utilisant le modèle linéaire de l'équation (3.6) ;
- $k_m = 224 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ , en utilisant (eq 3.8), de modèle de Kanan et al [19] ;

- $k_m = 219 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ , en utilisant (eq 3.9), du modèle de Wimmer [20].

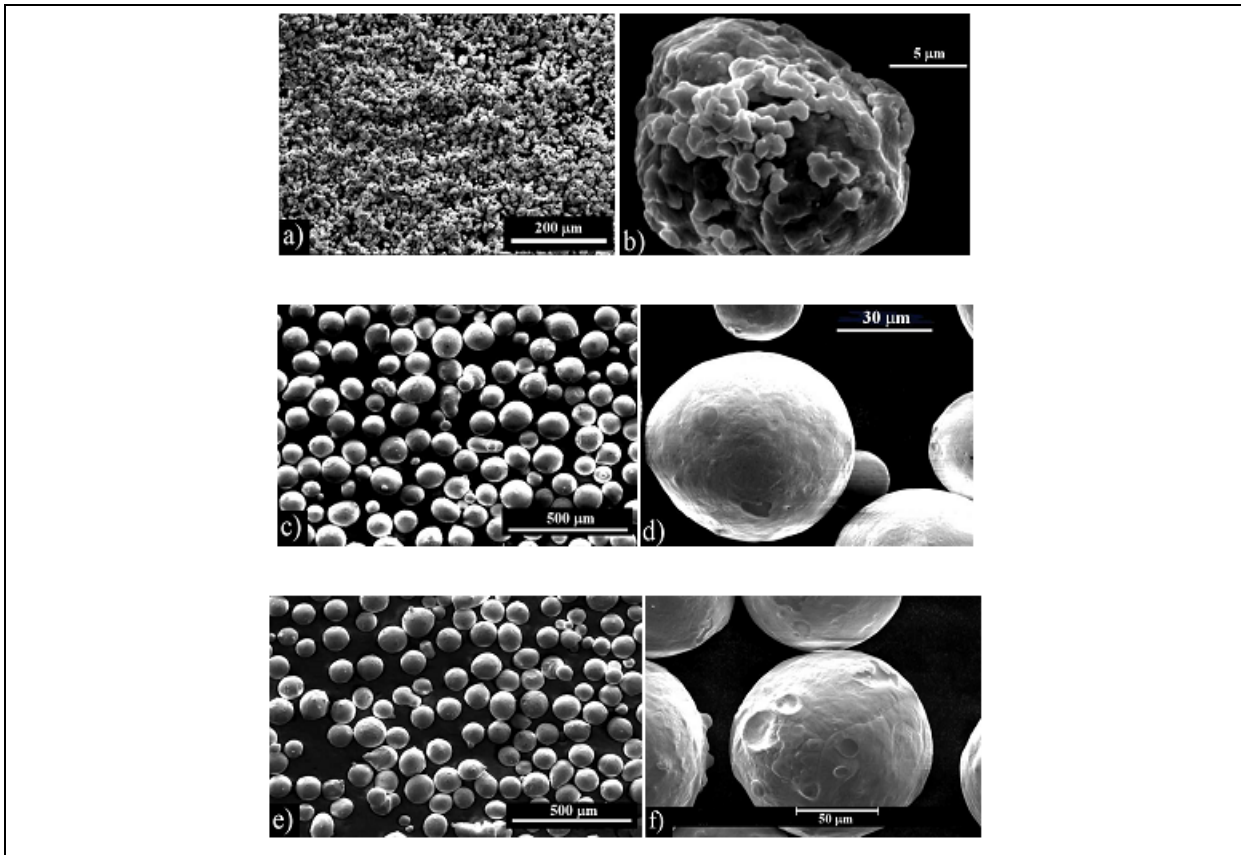
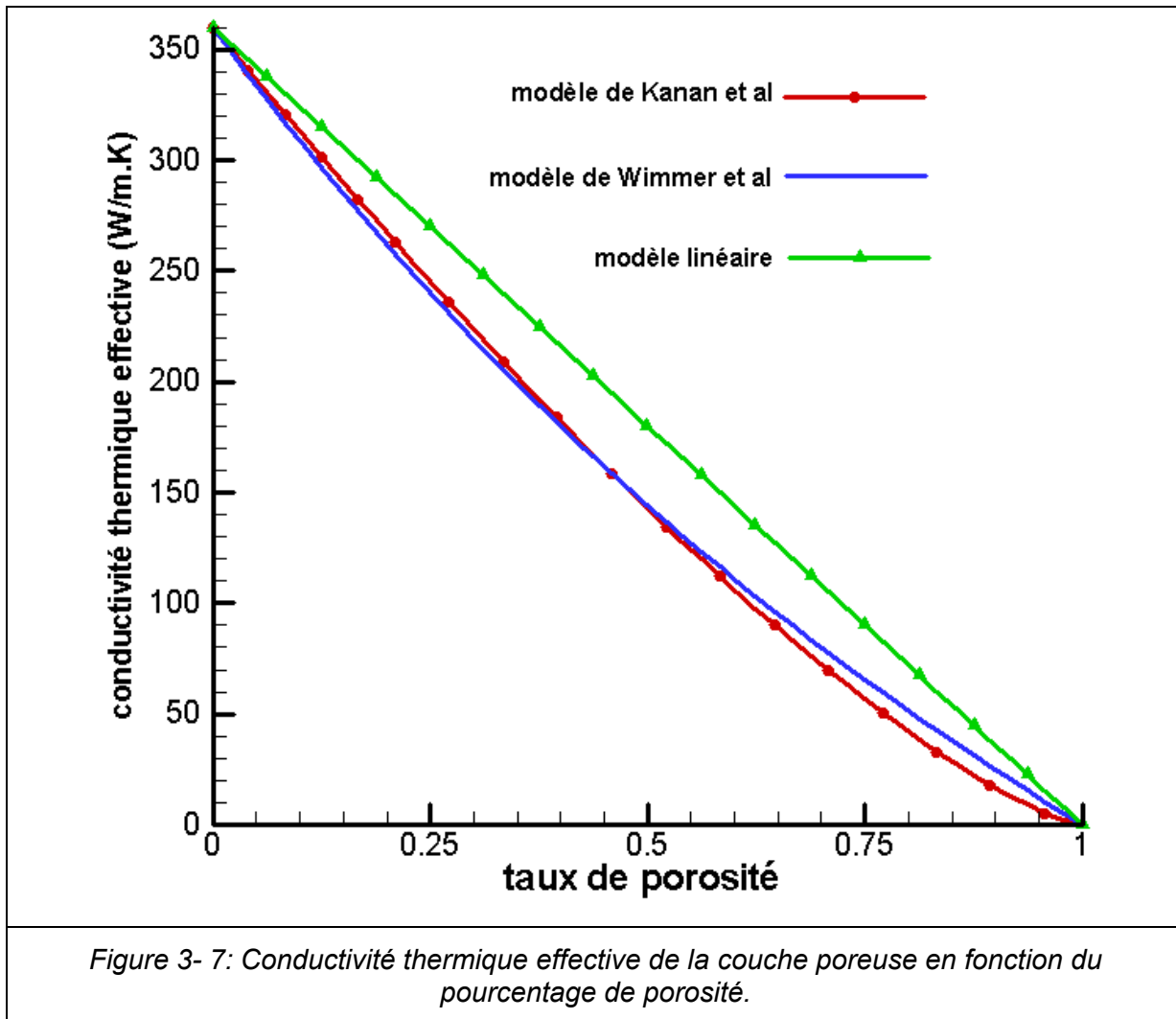


Figure 3-6: Microanalyse MEB des poudres de cuivre [1] : a) poudre fine, b) détail d'un grain, c) poudre intermédiaire, d) détail d'un grain, e) poudre grossière, f) détail d'un grain

Une comparaison des trois modèles est donnée sur la figure 3-7. Les propriétés thermophysiques sont moyennées sur la plage de température de fonctionnement. On remarque que les deux modèles de Kanan et de Wimmer concordent, et que le modèle linéaire surestime la conductivité thermique effective par rapport aux deux précédents.



### III.3.1.2. Estimation de la porosité théorique

Nous considérons que les grains sont de forme sphérique.

Un empilement de disques dans le plan correspond à une densité de l'ordre de  $\frac{\pi}{\sqrt{12}} \cong 0.90$ , obtenue dans la configuration hexagonale, et à  $\frac{\pi}{4} \cong 0.785$  pour une configuration carré (figure 3.8).

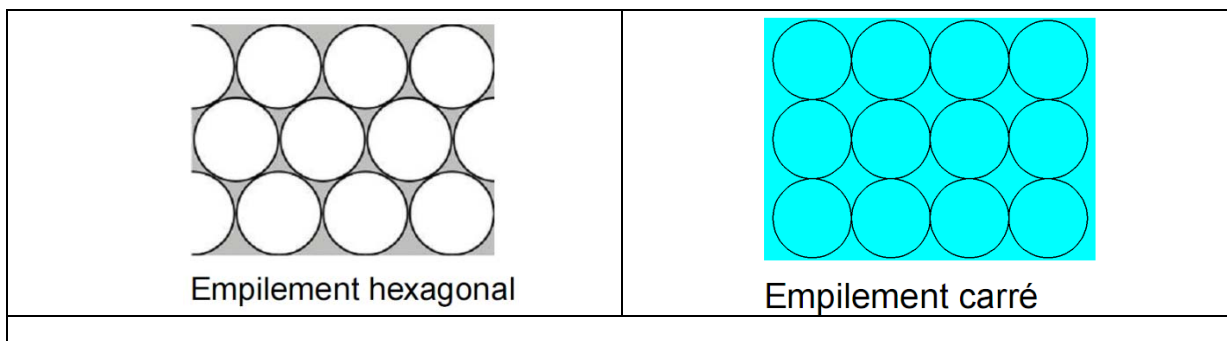
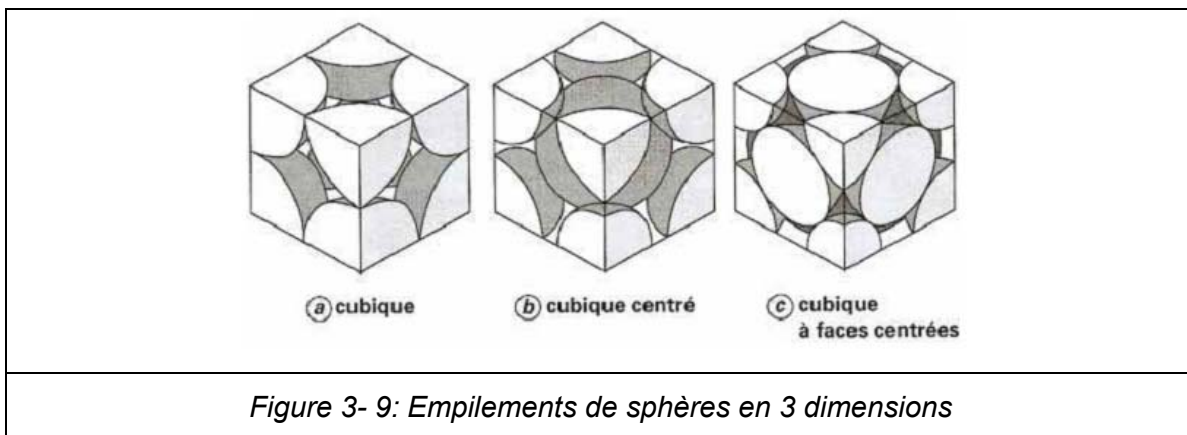


Figure 3- 8: Empilement dans le plan de disques en réseaux carré et hexagonal

Alors que la densité maximale d'un empilement de sphères en dimension 3 est de  $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \cong 0.7405$ , obtenue pour une configuration cubique à faces centrées (figure 3-9). Elle est de l'ordre de 0.68 pour une configuration cubique centrée, et 0.524 pour un empilement cubique. Lorsque des sphères sont déposées en vrac, on démontre que la densité obtenue dans ce cas est comprise entre 55% et 60%.



### III.3.1.3. Coefficients d'échange

Les coefficients d'échange, ainsi que la RTC, sont calculables de la même façon qu'au paragraphe (2. 3. 1) du chapitre 2.

### III.3.1.4. Données thermophysiques

Le modèle analytique élaboré, a été appliqué au cas de la fabrication de pistes électroniques en utilisant une source laser en mouvement appliquée au bicouche (dépôt de cuivre en poudre sur un substrat en alumine). Les valeurs moyennes des propriétés thermophysiques utilisées sont: air ( $k=46.35 \cdot 10^{-3} \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $\rho=0.758 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $C_p=1074 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ); cuivre dense ( $k=360 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $\rho=8954 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $C_p=750 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ); alumine ( $k=20 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $\rho=3900 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $C_p=1075 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ); les dimensions sont:  $a_1=100 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ ; et  $a_2= 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ . Les coefficients d'échanges convectifs sont:  $h_1= 15 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ ;  $h_2=0$ . Le coefficient d'absorption, pour une longueur d'onde du laser de l'ordre de  $\lambda=1,062 \mu\text{m}$ , est de  $A_1=0.2$ , comme valeur moyenne pour un cuivre dense [26], et  $A_1=0.59$  pour le cuivre en poudre [27].

### III.3.2. Quelques simulations du problème étudié



Afin de vérifier le présent modèle analytique, nous l'avons comparé à une solution numérique. Les résultats de ce modèle analytique concordent avec ceux obtenus par un code numérique en volumes finis (cf. chapitre II, figure 2-15).

Lorsqu'on insère les données thermophysiques ci-dessus dans les expressions de températures établies pour le cas de dépôt poreux (cas du problème physique schématisé sur la figure 3-5, donne quelques résultats illustrés dans les figures 3-10 à 3-14.

La figure 3-11, montre l'effet de la RTC sur l'évolution de la température en un point bien déterminé de la surface du dépôt. On peut remarquer que dans le cas de faible valeur de la RTC (contact thermique quasi-parfait), l'évacuation du flux thermique de la première couche (dépôt) vers la deuxième couche (substrat) est facilité.

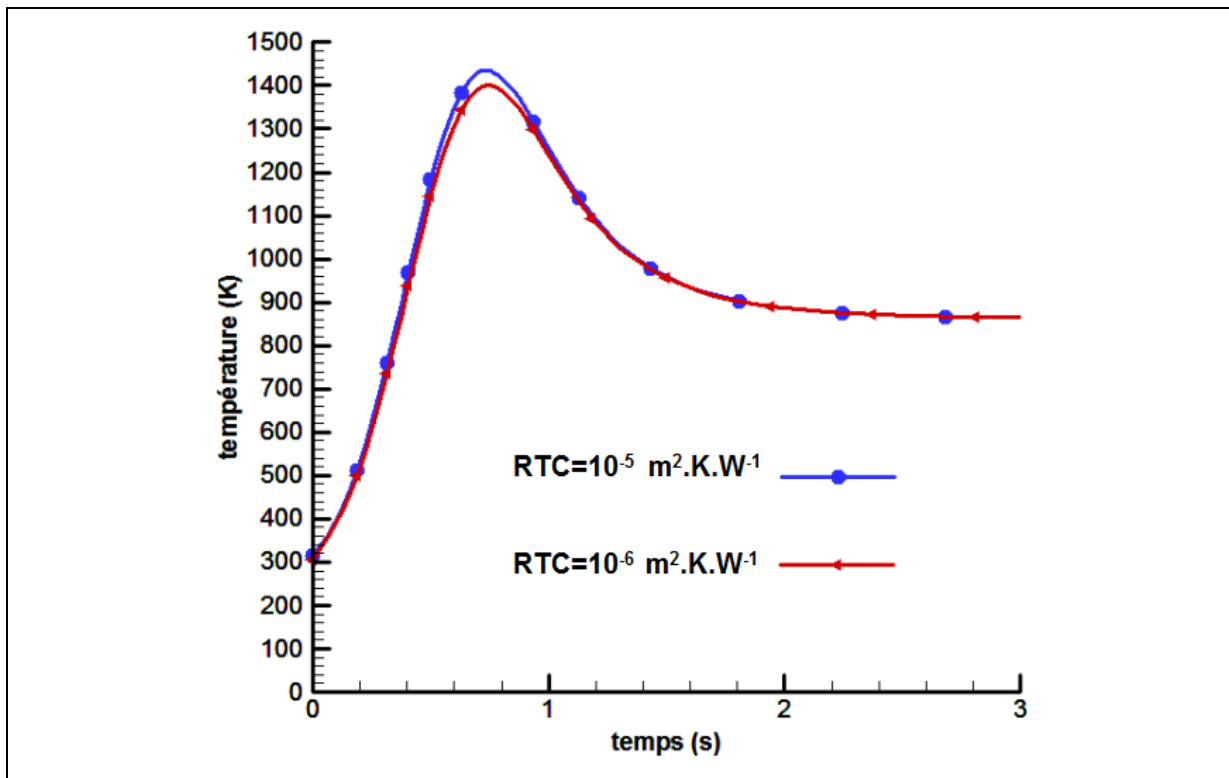


Figure 3- 10: Effet de la RTC sur l'évolution de la température  $T_1(y=a_1,t)$  on un point de la surface du dépôt en fonction du temps, pour le bicouche cuivre/alumine:  $A_1=59\%$ ,  $h_1=15 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ ,  $h_2=0.0 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ ,  $P_0=10 \text{ W}$ ,  $r_0=0.5 \text{ mm}$ ,  $V=1 \text{ m m.s}^{-1}$ ,  $T_{init}=300^\circ\text{C}$ ,  $\phi=30\%$ .

L'évolution de la température à l'interface (figure 3-11), ainsi que le saut de température à ( $\Delta T = T_1(0^+, t) - T_2(0^-, t)$ ) sont illustrés sur la figure 3-12. Le saut de température est d'autant plus important pour des valeurs élevées de la RTC. Comme le dépôt est granulaire, la valeur de la RTC est plus forte, c'est pour cette raison que nous avons simulé l'évolution de la température pour une  $RTC = 10^{-4} \text{ m}^2.\text{K.W}^{-1}$ .

L'effet du pourcentage de porosité sur l'évolution de la température en un point de la surface du dépôt est illustré sur la figure 3-13. Il est évident que lorsque la porosité croît, la conductivité thermique effective diminue, donc le dépôt chauffe moins vite, et les valeurs maximales de températures atteintes diminuent avec l'augmentation de la porosité.

La figure 3-14 montre l'évolution de la température en un point de la surface du dépôt, lors d'un passage de flux laser gaussien, pour un rayon de la gaussienne  $r = 0.5$  mm, une puissance de  $P = 10$  W, une porosité de 20%, et ce pour différentes valeurs de la vitesse de balayage laser ( $v=1, 2, 3$  et  $5$  mm/s). La température maximale atteinte est de 1000 K pour  $v=1$  mm.s<sup>-1</sup>, et 700 K pour  $v = 5$  mm.s<sup>-1</sup>. Lorsque la vitesse de balayage est moins importante, le temps d'interaction laser – matière est plus grand et par conséquent la température est plus élevée et la zone thermiquement affectée est plus importante.

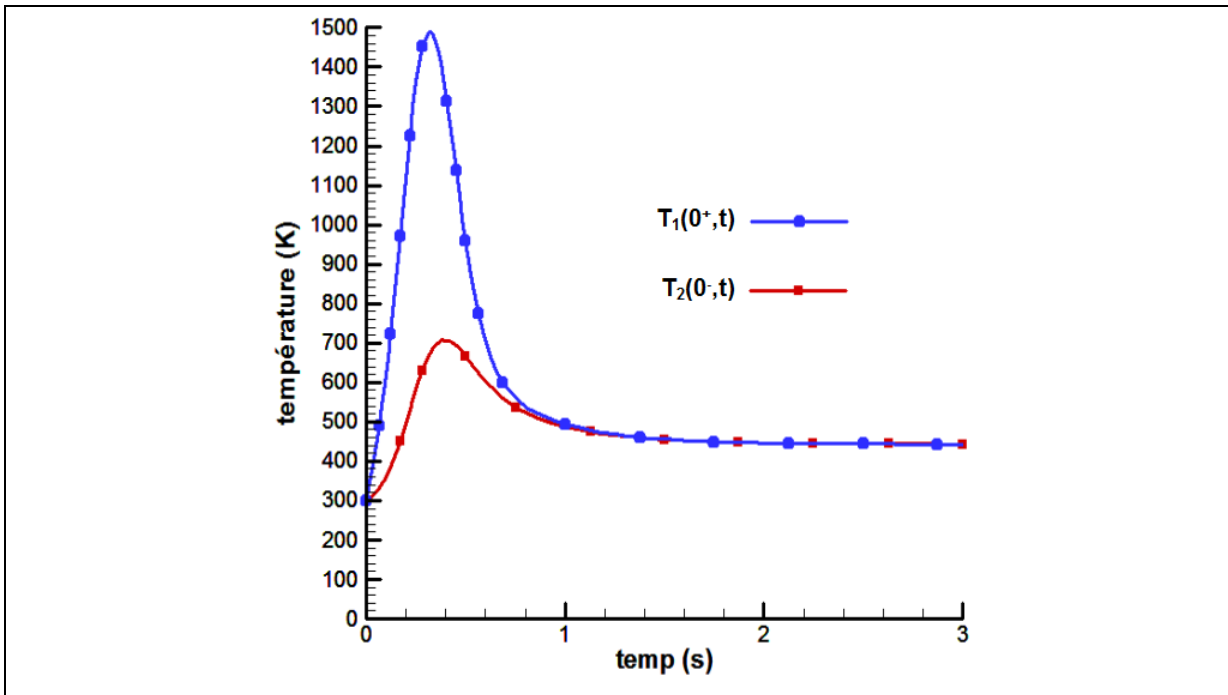


Figure 3- 11: Evolution des températures à l'interface,  $y=0$ ,  $T_1(y=0^+,t)$  et  $T_2(y=0^-,t)$  en fonction du temps, pour le bicouche (poudre de cuivre/alumine), et:  $RTC=10^{-4} \text{ m}^2.K.W^{-1}$ ,  $T_{init}=300K$ ,  $\phi=30\%$ ,  $h_1=15W.m^{-2}.K^{-1}$ ,  $V=2 \text{ mm}.s^{-1}$ ,  $P_0=15W$ ,  $r_0=0.5mm$ ,  $A_1=0.2$ ,  $A_2=0$ .

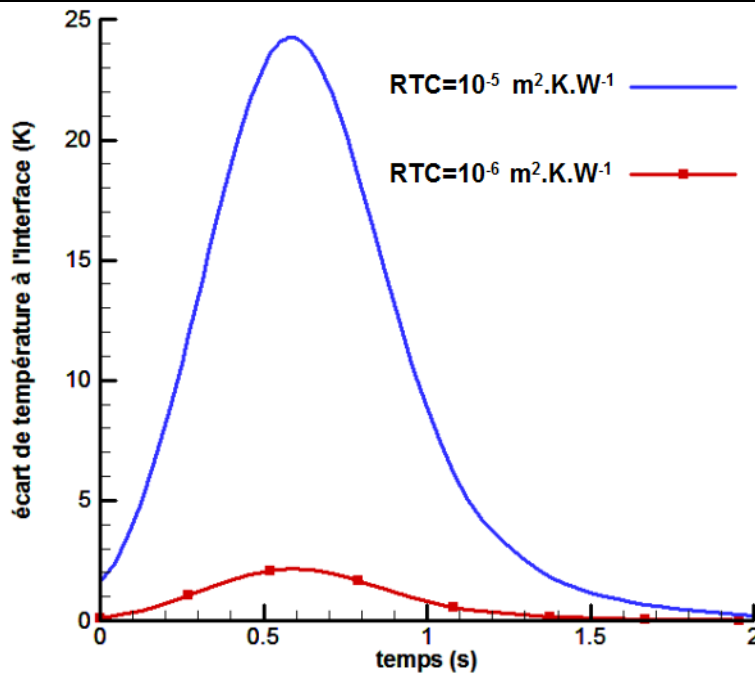


Figure 3- 12: Effet de la RTC sur le saut de temperature ( $T_1(y=0^+,t)-T_2(y=0^-,t)$ ) de part et d'autre de l'interface interface( $y=0$ ) en fonction du temps, pour le matériau bicouche (poudre de cuivre/alumine), sous les conditions suivantes:  $T_{init}=300^\circ\text{C}$ ,  $\varphi=30\%$ ,  $h_1=15 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $V=1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $P_0=10\text{W}$ ,  $r_0=0.5\text{mm}$ ,  $A_1=0.59$ ,  $A_2=0$ .

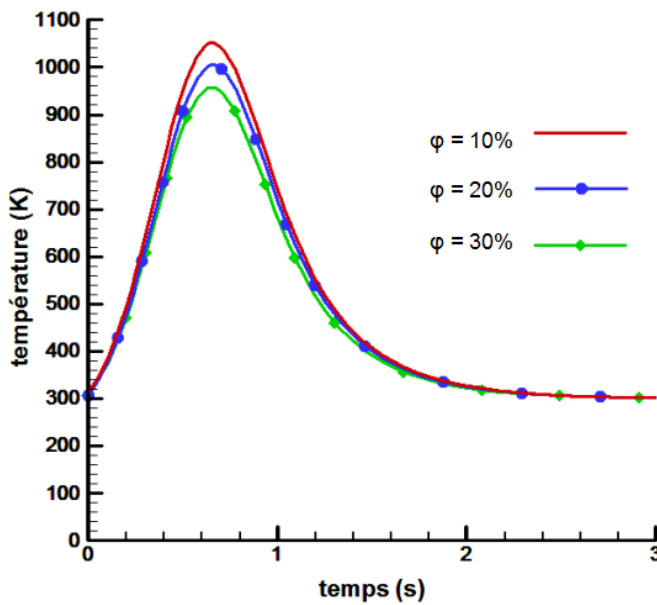


Figure 3-13: Evolution de la température  $T_1(a_1, t)$  en fonction du temps, pour différents pourcentages de la porosité du dépôt:  $RTC=10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$ ,  $h_1=15\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $T_{init}=300\text{K}$ ,  $V=1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $P_0=10 \text{ W}$ ,  $r_0=0.5\text{mm}$ ,  $A_1=0.59$ ,  $A_2=0$ .

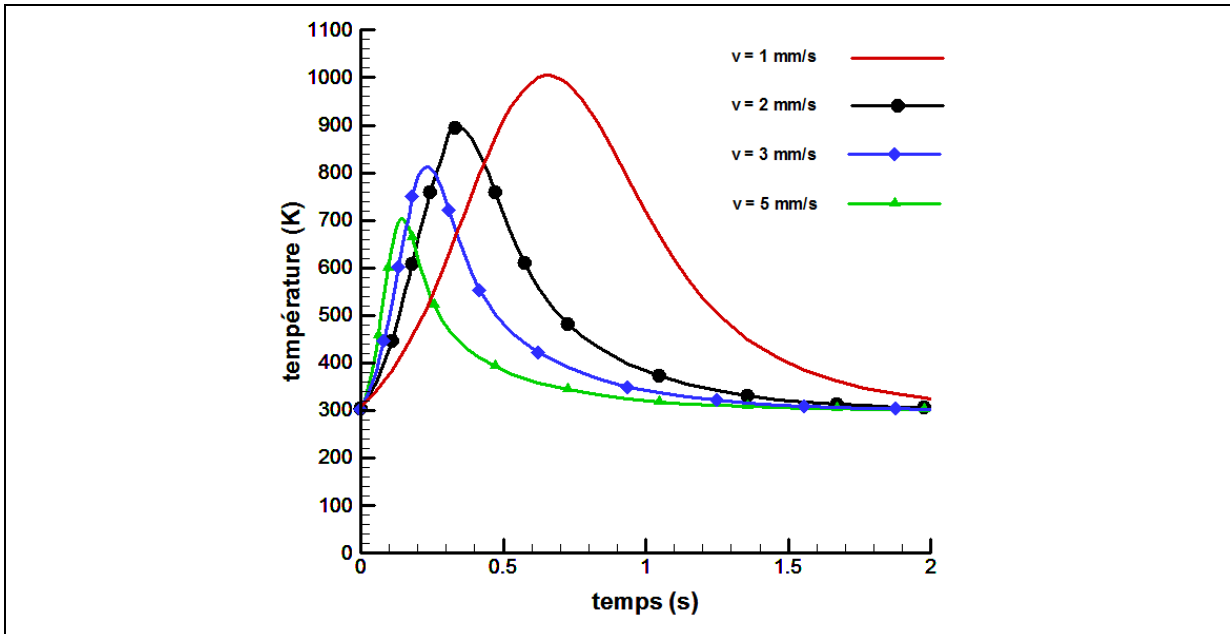


Figure 3- 14: Evolution de la température  $T_1(a_1, t)$  en fonction du temps, pour différentes valeurs de la porosité du dépôt, sous les conditions suivantes:  $TCR=10^{-5} m^2.K.W^{-1}$ ,  $h_1=15W.m^{-2}.K^{-1}$ ,  $T_{init}=300K$ ,  $P_0=10 W$ ,  $r_0=0.5mm$ ,  $A_1=0.59$ ,  $A_2=0$ ,  $\varphi=20\%$ .

Les figures 3-15 et 3-16, montrent l'évolution spatio-temporelle de la température, respectivement dans le dépôt et le substrat, sous les conditions suivantes : le bicouche est la poudre de cuivre/alumine,  $RTC=10^{-5} m^2.K.W^{-1}$ ,  $T_{init} = 300 K$ ,  $\varphi=30\%$ ,  $h_1=15 W.m^{-2}.K^{-1}$ ,  $V=1 mm.s^{-1}$ ,  $P_0=10W$ ,  $r_0=0.5mm$ ,  $A_1=0.59$ ,  $A_2=0$ . On peut remarquer que le dépôt a un comportement thermiquement mince, due à sa faible épaisseur (100  $\mu m$ ). La RTC est relativement faible, car l'écart de température de part et d'autre de l'interface est faible.

Les figures 3-17 et 3-18 montrent l'évolution spatio-temporelle de la température, respectivement dans le bicouche (poudre de cuivre/alumine),  $T_{init}=300^\circ C$ ,  $\varphi=30\%$ ,  $h_1=15 W.m^{-2}.K^{-1}$ ,  $P_0=10W$ ,  $r_0=0.5mm$ ,  $A_1=0.59$ ,  $A_2=0$ . La figure 3-17 est obtenue pour une vitesse de déplacement de la source  $V=1 mm.s^{-1}$  et  $RTC=10^{-5} m^2.K.W^{-1}$ . La figure 3-18 est obtenue pour une vitesse et une RTC différentes de celles de la figure 3-17:  $V=5 mm.s^{-1}$ , et  $RTC=10^{-4} m^2.K.W^{-1}$ , dans ce cas le saut de température à l'interface est amplifié.

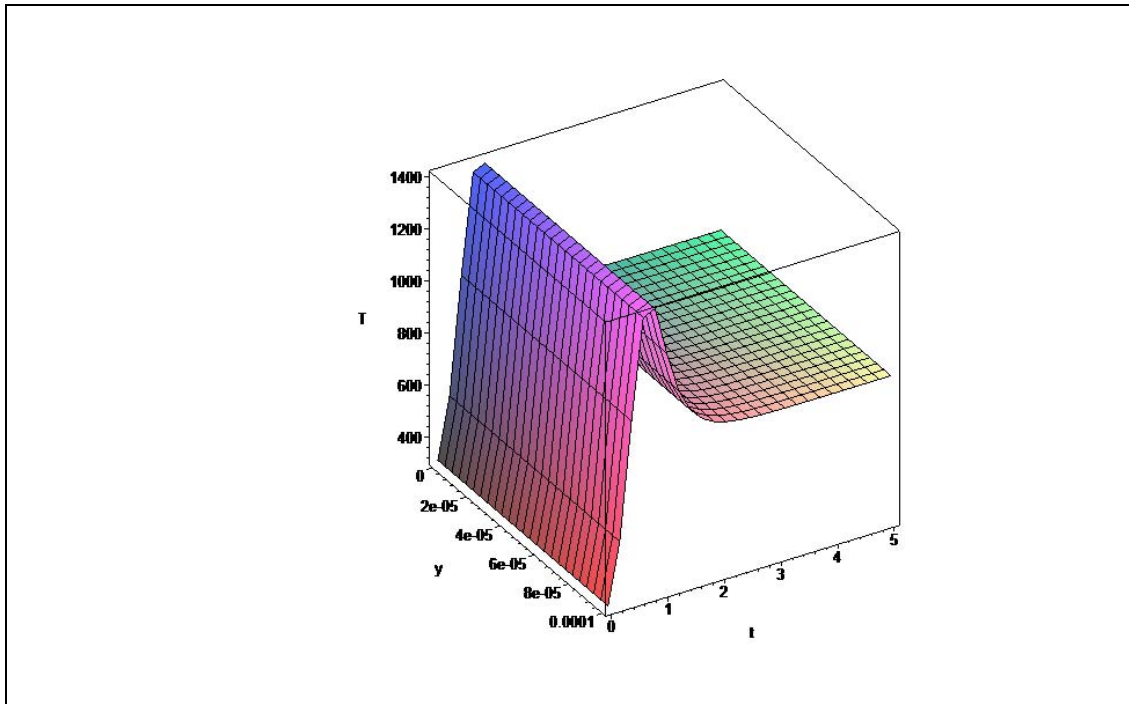


Figure 3- 15: Evolution de la température spatio-temporelle dans le dépôt

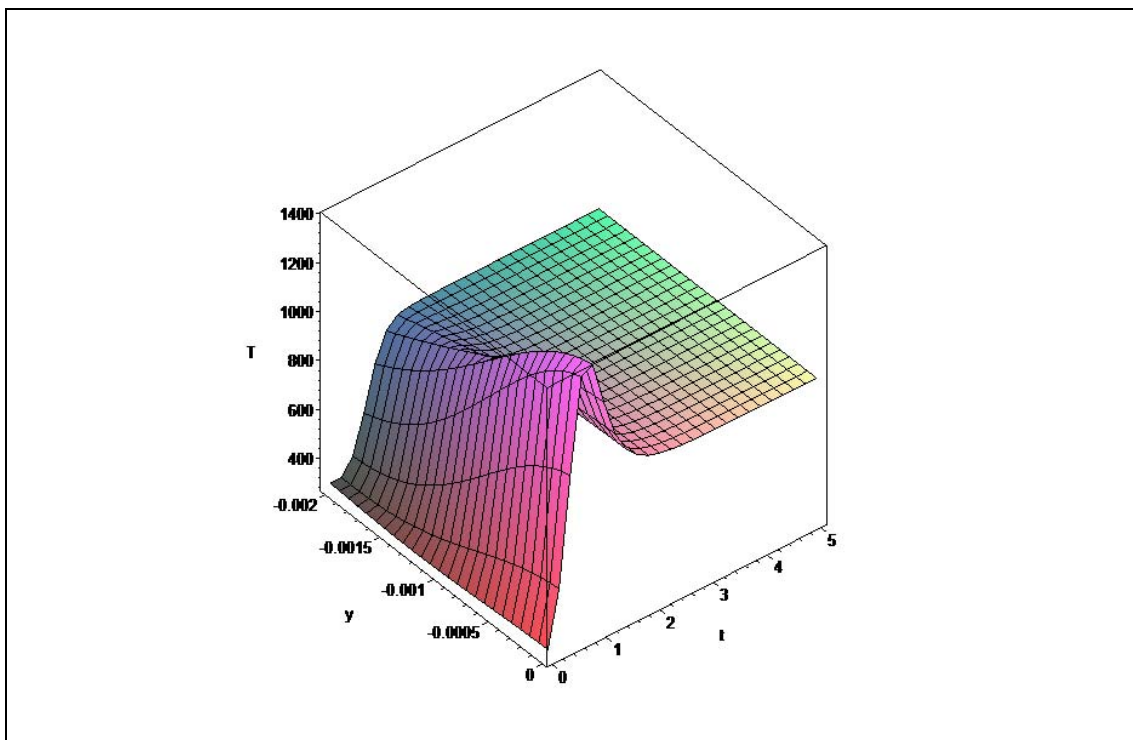


Figure 3- 16: Evolution de la température spatio-temporelle dans le substrat

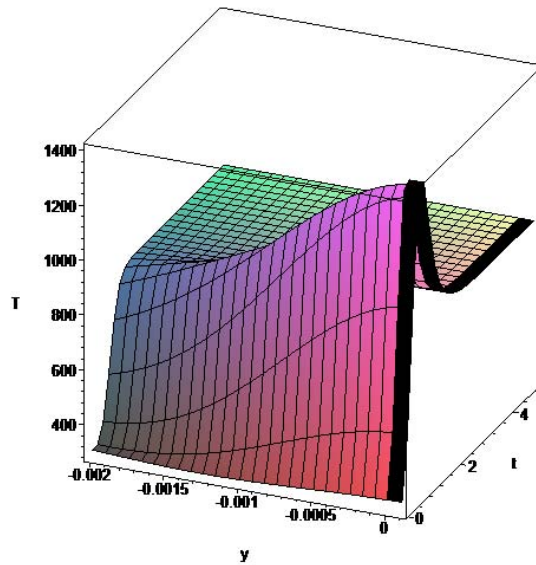


Figure 3- 17: Evolution spatio-temporelle de la température dans le bicouche pour  $V=1 \text{ mm.s}^{-1}$  et  $RTC=10^{-5} \text{ m}^2.K.W^{-1}$

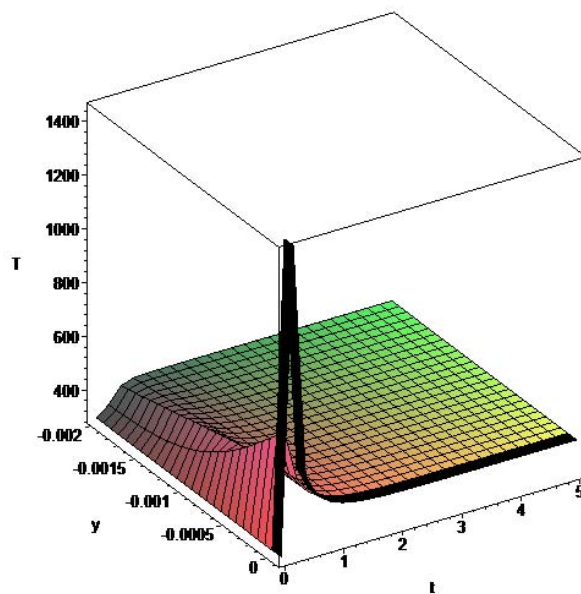


Figure 3- 18 : Evolution spatio-temporelle de la température dans le bicouche pour  $V=5 \text{ mm.s}^{-1}$ , et  $RTC=10^{-4} \text{ m}^2.K.W^{-1}$

Les figures 3-19 à 3-22 montrent l'évolution temporelle des différents flux à la surface du dépôt (flux entrant par irradiation laser, flux conductif, flux convectif à la surface, et le flux radiatif), dans le bicouche (poudre de cuivre/alumine), avec les données suivantes:  $V=1 \text{ mm.s}^{-1}$ ,  $RTC=10^{-5} \text{ m}^2.K.W^{-1}$ ,  $T_{init}=300^\circ\text{C}$ ,  $\varphi=30\%$ ,  $h_1=15 \text{ W.m}^{-2}.K^{-1}$ ,  $P_0=10\text{W}$ ,  $r_0=0.5\text{mm}$ ,  $A_1=0.59$ ,  $A_2=0$ .

$$q_{incident} = A_1 P \exp\left(-\frac{2}{r_0^2}(r_0 - vt)^2\right) \quad \text{avec} \quad p = \frac{2.P_0}{\pi.r_0^2}$$

$$q_{rad} = \varepsilon \sigma (T_1^4(a_1, t) - T_{amb}^4),$$

$\varepsilon$  est l'émissivité  $\varepsilon = 0.66$  (valeur moyenne)

$\sigma$  est la constante de Stefan-Boltzmann

$$q_{cond} = -k_1 \frac{\partial T_1(y, t)}{\partial y} \Big|_{y=a_1}, \quad q_{conv} = h_1 (T_1(a_1, t) - T_{amb})$$

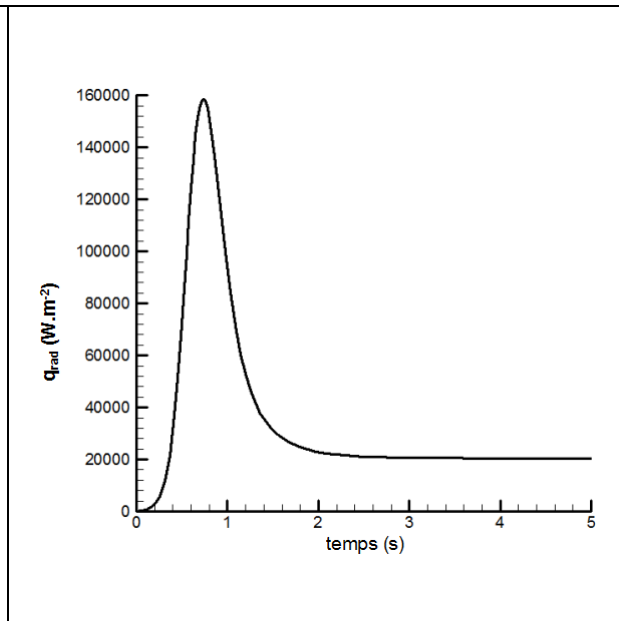
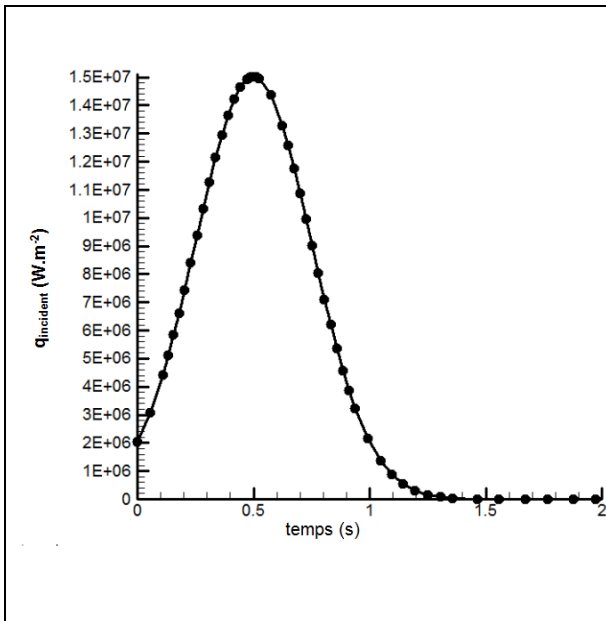


Figure 3- 19 : Flux incident à la surface du dépôt

Figure 3- 20 : flux radiatif à la surface du dépôt

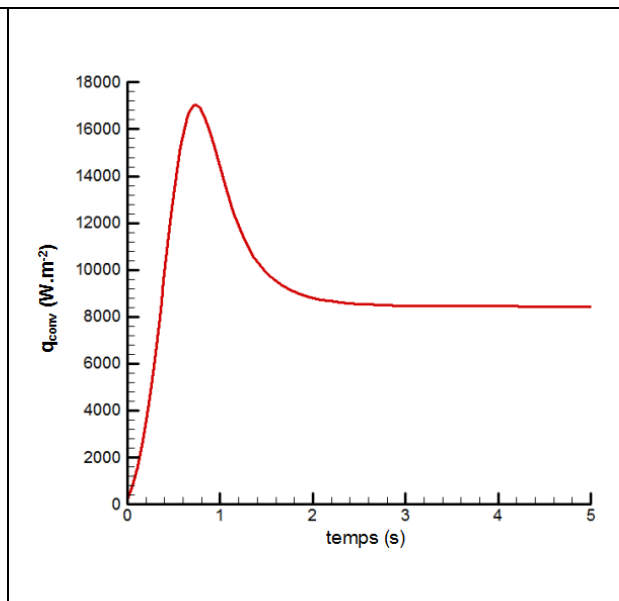
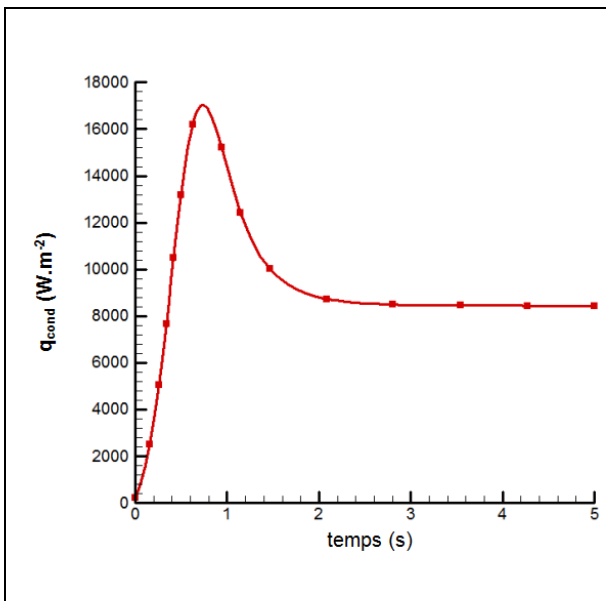


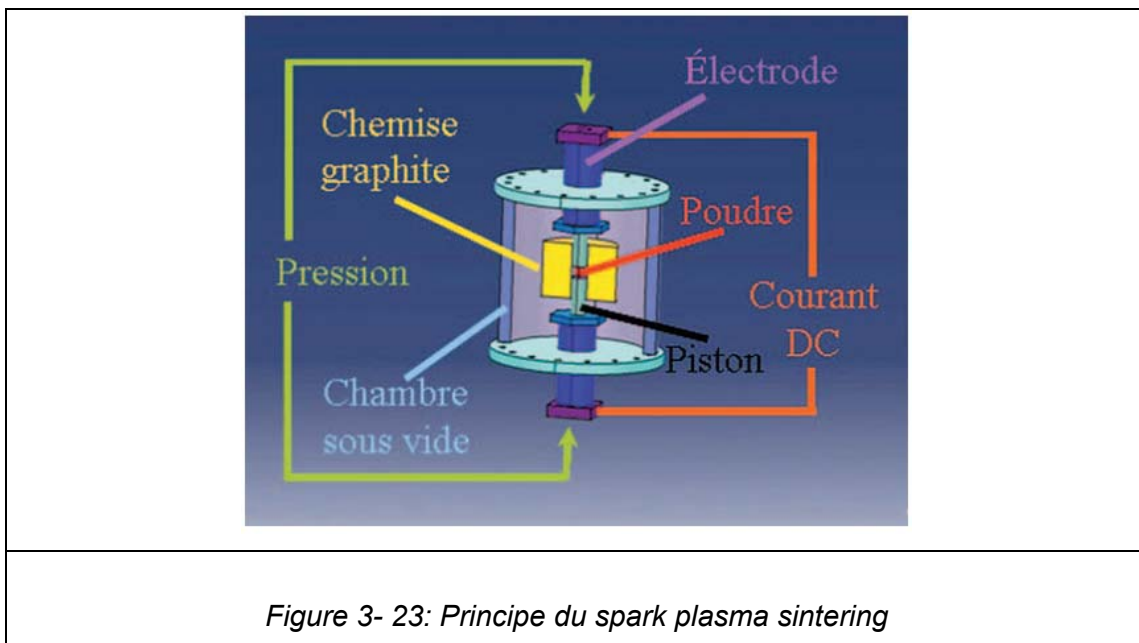
Figure 3- 21 : Flux conductif à la surface du dépôt

Figure 3- 22 : Flux convectif à la surface du dépôt

### III.3.3. Application au frittage

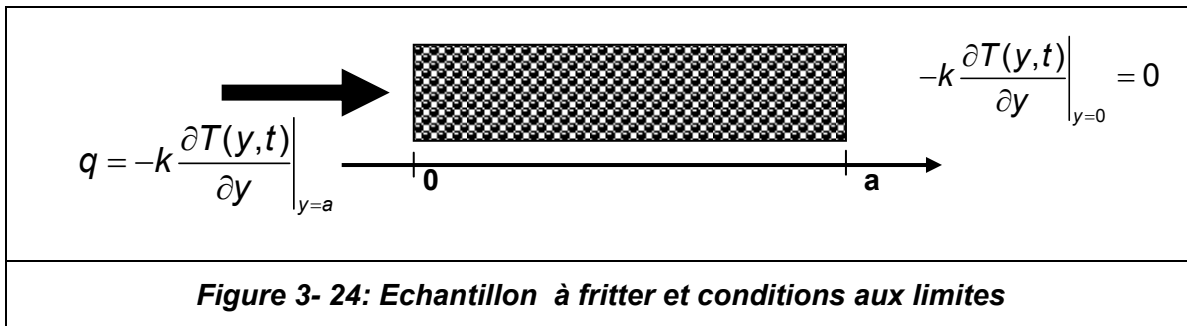
Parmi les applications industrielles les plus usuelles se trouve le frittage (en phase solide ou liquide). Le frittage est la densification de matériaux pulvérulents spécifiques tels que les métaux, les alliages ou les céramiques nanostructurées, les nanocomposites. Le frittage par traitement thermique est systématiquement accompagné d'une diminution de volume (retrait). Plusieurs techniques existent [27-41], citons :

- ✓ le frittage par laser, appelé frittage sélectif au laser (Selective Laser Sintering « SLS »).
- ✓ Ou aussi le frittage flash ( Spark plasma sintering « SPS »), voir figure 3-23.



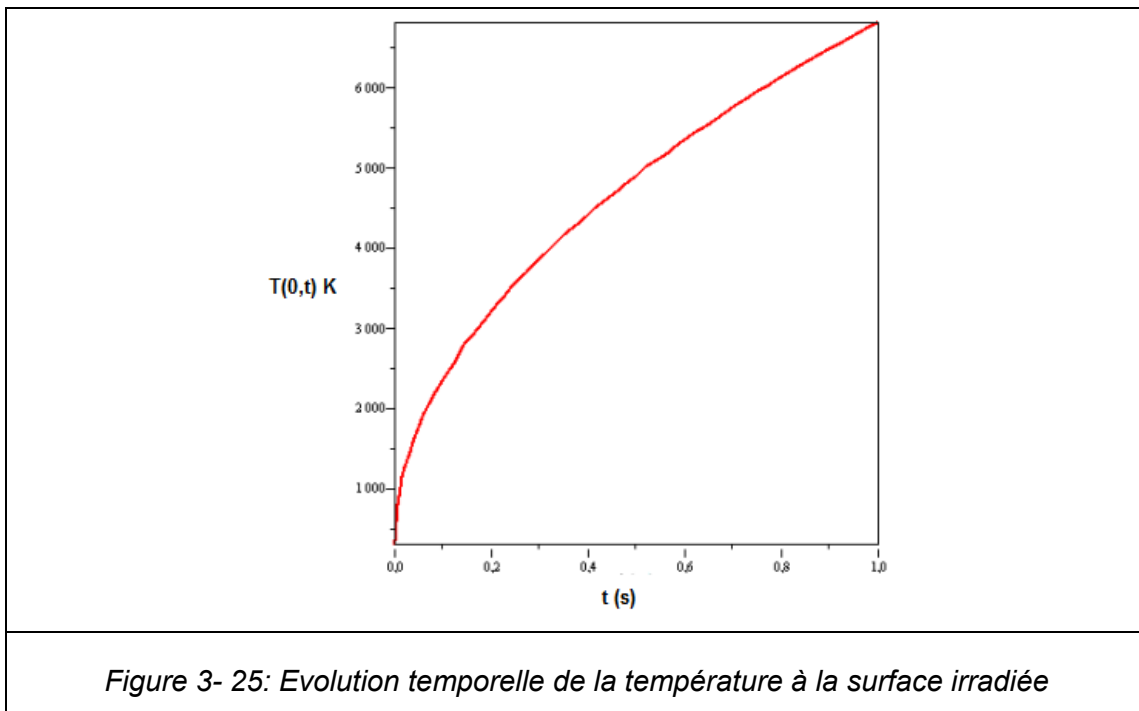
La modélisation simplifiée du frittage est semblable au travail présenté pour le traitement d'une couche poreuse, appliqué à un monocouche. Mais dans ce dernier cas le retrait est important et doit être pris en compte. Par souci de simplification, le modèle analytique ne tient pas compte de la variation du volume (figure 3-24).

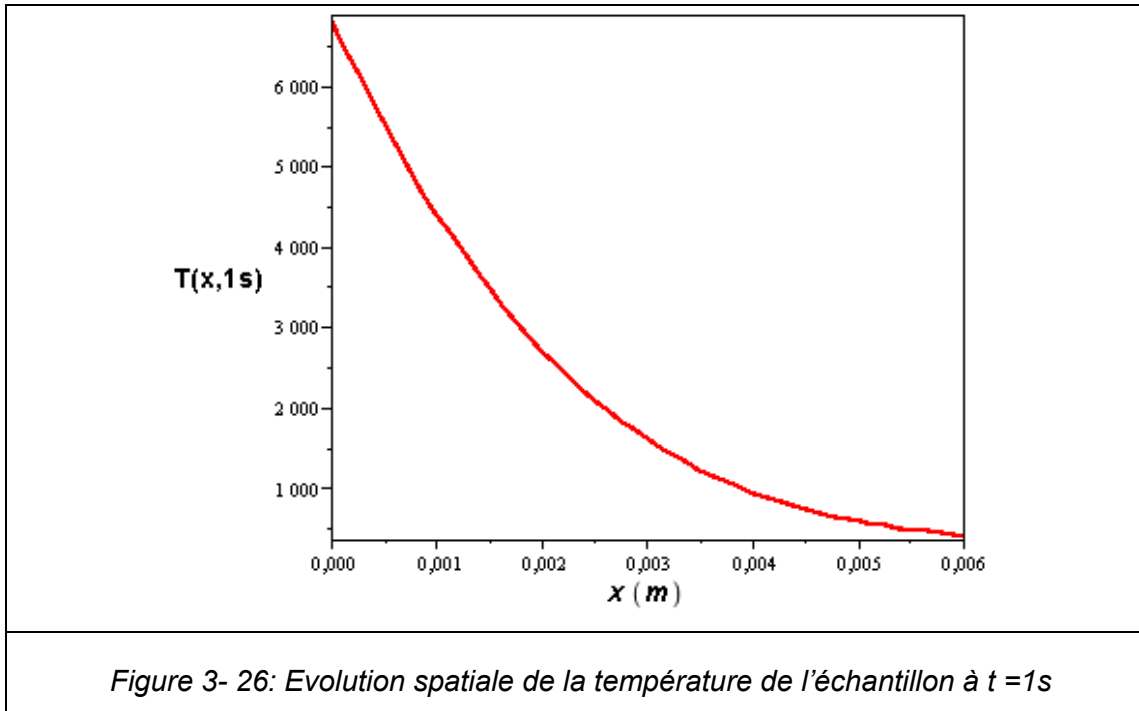




L'échantillon choisi est une pièce d'alumine (a = 6 mm), ayant une porosité de 25%

soumis à une densité de flux laser  $q = 1.4 \cdot 10^8 \text{ W.m}^{-2}$  ( le coefficient d'absorption supposé égale à l'unité). L'évolution temporelle de la température à  $x=0$  est illustré sur la figure 3-25 ainsi que l'évolution spatiale à  $t=1\text{s}$  (figure 3-26).





#### III.4. Conclusion

Le modèle analytique du transfert instationnaire de la chaleur dans les matériaux poreux en général, et ceux de type granulaire en particulier, est abordé. Le modèle de conduction établi dans le chapitre deux est étendu au cas poreux, en remplaçant les propriétés thermophysiques du solide par les propriétés équivalentes (effectives) du mélange (particules métalliques et les poches d'air), tout en respectant certaines conditions (la vitesses du fluide est négligeable).

La méthodologie a été développée, des hypothèses et conditions d'utilisation du modèle sont précisées. D'autres aspects peuvent être ajoutés à ce modèle tels que, le transfert de masse, et changement de phase, ainsi que la dilatation ou le retrait dans le cas du frittage.

Plusieurs modèles de calcul de la conductivité thermique effective ont été comparés, et la porosité est estimée théoriquement en fonction de la configuration d'empilement tridimensionnel des grains supposés de forme sphérique.

Un exemple pratique dans le domaine de traitement de surface est étudié. Il est relatif à la fabrication de pistes électroniques, par traitement laser direct d'un dépôt poreux de cuivre granulaire sur un substrat en alumine.

La résistance thermique de contact est prise en compte, pour mettre en évidence le mauvais contact thermique entre les deux couches due aux contacts quasi-ponctuels des particules sphériques sur le substrat. D'une part le contact granulaire sur le substrat accentue la valeur de la RTC, ce qui induit un écart de température important de part et d'autre de l'interface. D'autre part la couche granulaire absorbe plus d'énergie fournie par le faisceau laser, car son coefficient d'absorption est plus élevé (variable en fonction de la taille et la nature des grains, de la longueur d'onde du laser, et de la température) que celui du métal dense (cas du cuivre).

Malgré sa simplicité, ce modèle analytique permet une estimation théorique de la distribution de la température, en tenant compte de plusieurs aspects : la porosité, la résistance de contact, le profil gaussien du faisceau laser, la vitesse de balayage, ...etc.

Ce modèle pourra aussi servir à la modélisation du procédé de frittage. Il permet donc de faire un premier choix de paramètres optimaux aidant à la maîtrise du procédé.

Il peut servir aussi de modèle de référence à la validation des codes numériques avant leurs extensions à des géométries et des conditions aux limites plus complexes.

## Références

- [1] **S. Menecier**, Réactivité entre le cuivre et l'alumine sous irradiation laser, Thèse de Doctorat N°54, Université de Limoges (2006).
- [2] **S. Datta**, Heat transfer analysis in laser cladding – a three dimensional conduction model, Indian Institute of Technology, Kharagpur, May (2001).
- [3] **A. J. Pinkerton**, Modelling the geometry of moving laser melt pool and deposition track via energy and mass balance, *J. Phys. D: Appl. Phys.* 37, 1885 – 1895, (2004).
- [4] **V. Yevko**, Cladding Formation in Laser-Beam Fusion of Metal Powder, M.A.Sc. Thesis, Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Toronto, (1997).
- [5] **J. L. Koch et al**, Rapid Prototyping by Laser Cladding, Proceedings of International Conference on Applications of Lasers and Electro-Optics, Orlando, FL, pp. 556-565, , October (1993).
- [6] **S. Sarkar et al**, Transport phenomena in laser surface alloying, *Journal of materials science*, 38-155 – 164, (2003).
- [7] **A. Kar, et al**, Modeling in Laser Materials Processing: Melting, Alloying, Cladding, Laser Processing: Surface Treatment and Film Deposition, J. Mazumder - Editor, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 129-155, (1996).
- [8] **M. Kaviany**, Principles of heat transfer in porous media. Springer Verlag, (1991).
- [9] **D. A. Nield et al**, Convection in porous Media, 2<sup>nd</sup> ed., Springer-Verlag, New york, (1992).
- [10] **K. Trojan**, Simulation of granular deposits, thèse de doctorat, Université de Liège, (2006).
- [11] **R. Bennacer et al**, Analytical and numerical investigation of double diffusion in thermally anisotropy multilayer porous medium, *Heat Mass Transfer* 41: 298–305, (2005).
- [12] **K. Ichimiya**, Research News Heat Transfer and Flow in a Porous Medium, *Chem. Eng. Technol.* 24 – 8, (2001).
- [13] **Ka Kheng TAN et al**, Simulations of the onset of transient convection in porous media under fixed surface temperature boundary condition, second International Conference on CFD in the Minerals and Process Industries, CSIRO, Melbourne, Australia, 6-8 December, (1999).
- [14] **L. Watson et al**, Heat Conduction in Granular Materials, *AIChE Journal*, Vol.47, No. 5, (2001).
- [15] **D. Marchesin et al**, Oxidation heat pulses in two-phase expansive flow in porous media, *Z. angew. Math. Phys.* 54, 48 – 83, (2003).
- [16] **E. A. Santillan Marcus et al**, Exact solutions for drying with coupled phase-change in a porous

- medium with a heat flux condition on the surface, *Comp. Appl. Math.*, Vol. 22, N. 3, (2003).
- [17] **Don Kulasiri et al**, On Modelling The Drying Of Porous Materials: Analytical Solutions To Coupled Partial Differential Equations Governing Heat And Moisture Transfer, *Mathematical Problems in Engineering* 2005:3, 275–291, (2005).
- [18] **A. Bejan et al**, Natural convection in a horizontal porous medium subjected to an end-to-end temperature difference. *ASME J Heat Transfer*, 100, 191-198; errata 105, 683-684, (1978).
- [19] **Kanan Bala et al**, Effective thermal conductivity of copper powders. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 22,1068-1072, (1989).
- [20] **J. M. Wimmer et al**, *Electrical Conductivity in Ceramics and Glass* part B ed N M Tallan (New York: Marcel Dekker), p 619. [28] **D. R. Poirier et al**, *transport phenomena in materials processing*, The Minerals, Metals and materials Society, Warrendale, PA. February, (1998).
- [21] **K. J. Singh et al**, **Heat conduction and a porosity correction term for spherical and cubic particles in a simple cubic packing**, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **31**, 1681-1687, (1998).
- [22] **R. Yang**, Thermal conductivity of simple and tubular nanowire composites in the longitudinal direction, *Physical Review B* 72,125418, (2005).
- [23] **S. W. Churchill**, The Thermal Conductivity of Dispersions and Packed Beds - an Illustration of the Unexploited Potential of Limiting Solutions for Correlation, in *Advances in Transport Processes*, Vol. 4, J. Wiley, pp. 394-418, (1986).
- [24] **A. A. Babanov**, Method of calculation of thermal conduction coefficient of capillary porous material *Sov. Phys.–Tech.Phys.* 2, 476–84, (1957).
- [25] **S. Leonard**, **Effective Thermal Conductivity of Porous Solder Layers**, *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies*, **VOL.27, NO.2, June, (2004)**.
- [26] **A. F. H. Kaplan**, Model of the absorption variation during pulsed laser heating applied to welding of electronic Au/Ni-coated Cu-leadframes, *Applied Surface Science*, 241, 362–370, (2005).
- [27] **N. K. Tolochko**, Absorptance of powder materials suitable for laser sintering, *Rapid Prototyping Journal* Volume 6 . Number 3. pp. 155±160, (2000).
- [28] **S. Faure**, Etude de l'interaction rayonnement - matière dans un milieu granulaire en vue de l'application au procédé de frittage laser.
- [29] **S. Sayar**, Thesis heat transfer during melting and solidification in heterogeneous materials, Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, December, (2000).
- [30] **S. Das**, Physical Aspects of Process Control in Selective Laser Sintering of Metals, *advanced engineering materials*, 5, N°.10, (2003).
- [31] **J-P. Kruth et al**, Binding mechanisms in selective laser sintering and selective laser melting. *Rapid Prototyping Journal*, Volume 11, Number 1, 26 – 36, (2005).

- [32] **B. Van der Schueren**, Selective metal powder sintering: a metal accretion manufacturing system EARP Newsletter, No. 4, pp. 6-7, August, (1994).
- [33] **J-P. Kruth et al**, Lasers and materials in selective laser sintering. Assembly Automation, Volume 23, Number 4, 357– 371, (2003).
- [34] **K. Dai et al**, Comparisons between thermal modeling and experiments, Rapid Prototyping Journal, Volume 10, Number 1, 24-34, (2004).
- [35] **D. Bourell et al**, Powder Densification Maps in Selective Laser Sintering, Advanced Engineering Materials, 4, N°. 9, (2002).
- [36] **B. Van der Schueren**, Powder deposition in selective metal powder sintering, Rapid Prototyping Journal, Volume 1. Number 3. 23 – 31, (1995).
- [37] **N. K. Tolochko et al**, Selective laser sintering and cladding of single – component powders, Rapid prototyping Journal, Volume 10, Number 2. 88 – 97, (2004).
- [38] **J. Cheng et al**, Mathematical model for laser densification of ceramic coating, Journal of Materials Science 32, 6269 – 6278, (1997).
- [39] **T. Chen et al**, Numerical simulation of two-dimensional melting and resolidification of a two component metal powder layer in selective laser sintering process, Numerical Heat Transfer, part A, 46: 633-649, (2004).
- [40] **R. Colaco et al**, A Simple Correlation between the Geometry of Laser Cladding Tracks and the Process Parameters, Laser Processing: Surface Treatment and Film Deposition, J. Mazumder - Editor, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 421-429, (1996).
- [41] **F. Hensel, et al**, A Comparison of Powder- and Wire-Fed Laser Beam Cladding, Laser Treatment of Materials, DGM GmbH, Germany, pp. 39-45, (1992).



**Chapitre IV : Changement de  
phase solide - liquide**



Chapitre IV: Changement de phase solide-liquide.....	151
IV.1. Introduction.....	151
IV.2. Le problème de Stefan .....	151
IV.3. Mise en équations .....	152
IV.4. Méthodes analytiques .....	154
IV.4.1. Solutions approchées .....	154
IV.4.2. Solutions exactes .....	155
IV.5. Solutions analytiques sans flux .....	156
IV.5.1. Solution analytique dans le cas d'un domaine semi-infini .....	156
IV.5.2. Solution analytique dans un domaine borné .....	160
IV.6. Solutions analytique avec flux .....	162
IV.6.1. Cas de domaine semi-infini .....	162
IV.6.2. Domaine borné soumis à un flux .....	168
IV.7. La solidification .....	171
IV.8. Conclusion.....	172
Références .....	173

## Chapitre IV: Changement de phase solide-liquide

### IV.1. Introduction

L'un des phénomènes physiques important est le changement phase d'un état à un autre (solide – liquide- vapeur), avec absorption ou émission de chaleur.

Ces processus de changement de phases sont souvent rencontrés dans l'industrie. Citons à titre d'exemple, la solidification de l'eau dans les conduites d'un échangeur de chaleur, la solidification des métaux fondus en coulée continue et la cristallisation à partir de la phase liquide. La solidification, la liquéfaction, l'évaporation, et le changement de structure des matériaux sont caractérisés par des changements discontinus des propriétés thermodynamiques pour certaines températures, et pressions finies sans changement de la composition chimique.

Un paramètre crucial est la capacité calorifique. Sa sous-estimation tout comme sa sur estimation conduisent à des réactions incomplètes. C'est pourquoi une bonne estimation de transfert instationnaire de la chaleur durant le changement de phase est important.

### IV.2. Le problème de Stefan

Le problème de Stefan décrit l'évolution en temps d'une interface liquide - solide dans des processus de changement de phase. Le problème consiste à trouver la température et la position de l'interface entre deux phases d'un matériau pur.

Depuis de nombreuses années, seules les solutions analytiques permettaient de rendre compte mathématiquement de la compréhension des processus de la physique traitant les problèmes de type conditions aux limites en mouvements. Les premières études de Lamé et Clapeyron [1] remontent à 1831. Les articles [2, 3] ont abordés le problème qui est maintenant connu sous le nom de l'auteur. Les solutions analytiques offrent certes une formulation généralisée et élégante, mais elles sont limitées à des cas des applications mono-dimensionnelles de dimensions infinies ou semi-infinies, avec des conditions aux limites simples et des propriétés thermo-physiques constantes [4].

Les méthodes numériques apportent une meilleure flexibilité pour des applications à configurations multidimensionnelles avec des conditions aux limites complexes.

Malgré leurs limitations, les solutions analytiques [1-4] servent jusqu'à présent de standard de validation de solutions numériques.

La simulation de ce type de problème est plus difficile que celle du problème d'advection à cause du couplage non-trivial entre la vitesse de propagation de l'interface et la solution.

Bart et Hoogendoorn [5] (1992), ont établi que les solutions analytiques (exactes) sont connues seulement pour un petit nombre de problèmes physiques, et que l'un des modèles les plus connus et les plus utilisés, est la solution exacte appelée communément la solution de Neumann pour le problème de Stefan, qui est la solution analytique de fusion ou de solidification dans un domaine semi-infini, avec une condition au limite de type température imposée. Le milieu est caractérisé par un point de transition, la densité est la même dans les deux phases et les autres propriétés sont

considérées constantes et indépendante de la température. La conduction est le seul mode de transfert considéré. D'autres travaux ont abouti à des approximations pour différentes géométries et conditions aux limites. D'autres auteurs ont développé des solutions analytiques et semi-analytiques par des méthodes diverses dont les deux plus connues sont les méthodes dites de perturbations et les méthodes intégrales. Un étendu de ses méthodes peut être trouvé dans [4] et [6-12]. Une autre méthode très fréquemment rencontrée et qui peut trouver un champ d'application important dans le cas de configurations plus complexes, consiste à immobiliser l'interface par une transformation de coordonnées. Cette transformation, initialement proposée par Landau [13], permet de faire correspondre un domaine de calcul fixe à chacune des deux phases. L'extension aux problèmes à plusieurs dimensions ne pose pas de difficulté tant qu'une seule surface est irrégulière.

Le changement d'état liquide-solide d'un matériau pur est caractérisé par la transformation, à température constante, d'une phase liquide en une phase solide ou inversement. Cette réaction réversible s'accompagne d'une consommation (fusion) ou d'une restitution (solidification) d'énergie : l'enthalpie massique de fusion (ou la chaleur latente de fusion). Le but de ce chapitre est de faire le point sur les connaissances acquises sur le transfert de chaleur avec changement d'état dans un matériau à changement de phase (MCP) où les deux phases liquide et solide sont en présence.

### IV.3. Mise en équations du problème

La formulation mathématique du problème de changement de phase est gouvernée par l'équation parabolique de la chaleur. La position du front de fusion ou de solidification (interface solide - liquide), est a priori inconnue, est doit être déterminée comme partie de la solution. En effet, les problèmes de changement de phase sont non-linéaires, ce qui rend l'élaboration de solutions analytiques très délicate.

La mise en équations du problème de transfert de chaleur par conduction en présence d'un front de fusion ou de solidification (figure 4-1), s'appuie, dans le cas d'un corps pur :

- D'une part, sur l'équation de la chaleur dans les phases solide et liquide :  
Avec  $i = L, S$

$$\rho C p_i(T) \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{1}{x^m} \frac{\partial}{\partial x} \left( k_i(T) x^m \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) \quad (4-a.1)$$

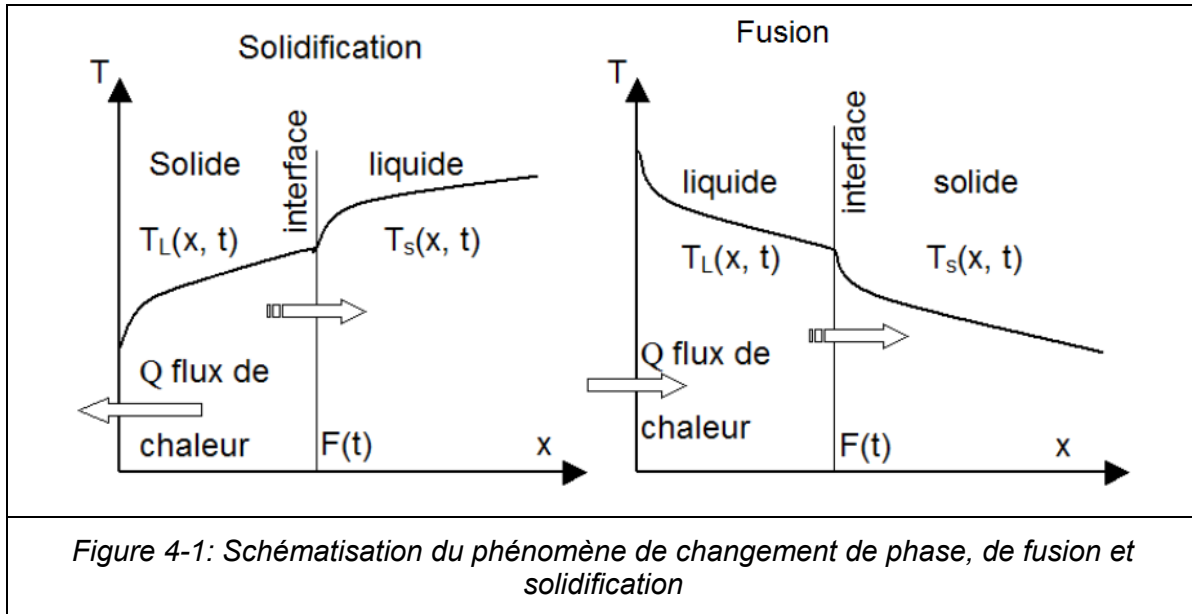
Pour la simplicité de l'écriture, nous donnons les équations dans le cas Mono-dimensionnel, avec  $m = 0, 1$  ou  $2$  suivant la géométrie, plane, cylindrique ou sphérique);

- d'autre part, sur la continuité des flux à l'interface solide-liquide, en posant que la différence entre les flux de part et d'autre de l'interface est égale à la quantité de chaleur instantanée libérée ou absorbée sous forme d'enthalpie de changement d'état par la progression du front :

$$\left( k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - k_L \frac{\partial T_L}{\partial x} \right)_{x=F(t)} = \rho_s H_{LS} \frac{dF(t)}{dt} \quad (4-a.2)$$

avec  $F(t)$  abscisse du front de fusion,  
 $k$  conductivité thermique,  
 $\rho$  masse volumique,  
 $H_{LS}$  enthalpie massique de fusion ;

les indices L et S étant respectivement relatifs aux phases liquide et solide.



On dispose par ailleurs des conditions aux limites aux surfaces frontières du domaine considéré: ces conditions peuvent être soit des températures imposées, soit des flux spécifiés, ou bien être décrites par un coefficient d'échange à la paroi.

Une rapide analyse des lois d'échelle permet d'introduire le paramètre pertinent des problèmes de changement de phase, le nombre de Stefan. Considérons en effet le cas de la fusion en géométrie plane par exemple, où on impose une température de paroi  $T_p$ , la phase initiale étant solide à la température de fusion  $T_F$ . Si on suppose – en ordre de grandeur- que le régime transitoire est négligeable à l'échelle du temps caractéristique du processus de fusion, l'équation (4-a. 2) devient :

$$k_L \frac{(T_p - T_F)}{F(t)} = \rho_s H_{LS} \frac{dF(t)}{dt} \quad (4-a.3)$$

la résolution de cette équation différentielle ordinaire, en faisant apparaître la diffusivité du

liquide:  $\alpha_L = \frac{k_L}{\rho_L C p_L}$

donne la loi d'évolution de la position de l'interface :

$$F(t) \approx (2Ste)^{\frac{1}{2}} \times (\alpha_L t)^{\frac{1}{2}} \quad (4-a.4)$$

qui met en évidence la variation de  $F(t)$  en fonction de la racine carrée du temps, et la pertinence du paramètre:

$$Ste = C p_L \frac{\Delta T}{H_{LS}} \quad (4-a.5)$$

appelé nombre de Stefan et qui est défini comme le rapport des enthalpies sensible et de changement d'état mises en jeu ( $\Delta T$  étant une différence de température de référence associée au terme moteur du changement d'état et  $C p_L$  la capacité thermique massique du liquide). Le tableau 4-1 donne quelques valeurs usuelles du nombre de Stefan pour des

matériaux courants (comme le nombre de Stefan dépend directement de l'écart de température du processus, on a mis en évidence le rapport  $C_{pL}/H_{LS}$  ).

MCP	Température de fusion (°C)	Nombre de Stefan Ste / ΔT
Glace	0	0.0125
Etain	232	0.0038
Aluminium	660	0.0027
Cuivre	1085	0.0023
Titane	1667	0.0019
Argent	961	0.0026

*Tableau 4- 1: Valeurs du nombre de Stefan pour différents matériaux à changement de phase (MCP).*

D'un point de vue très général, la résolution du problème de transfert de chaleur avec changement de phase ainsi défini appartient à une classe de problèmes dits à frontière mobile, et la solution recherchée consiste à déterminer, au cours du temps, le champ de température dans les deux phases solide et liquide, ainsi que la position de l'interface  $F(t)$ . La difficulté réside essentiellement dans le fait que la position de l'une des frontières du domaine de calcul, où sont définies les conditions aux limites, est elle-même une inconnue du problème. La solution analytique de ce problème non linéaire n'a été obtenue que dans des cas très particuliers.

## IV.4. Méthodes analytiques

### IV.4.1. Solutions approchées

On peut citer tout d'abord les méthodes intégrales qui concernent des milieux semi-infinis à une phase (la phase initiale étant supposée isotherme à la température de fusion) avec les mêmes hypothèses que précédemment. L'équation de la chaleur est intégrée sur le domaine mobile en supposant que le champ de température dans la phase en formation suit une loi polynomiale du premier degré, (Karman et Polhausen, [14]) ou de degré 2 avec Goodman [9] et dont il faut déterminer les coefficients. Diverses conditions aux limites peuvent être abordées (température ou flux de paroi imposés, coefficient d'échange).

Dans le cas de la paroi à température imposée, la progression du front de fusion s'exprime par :

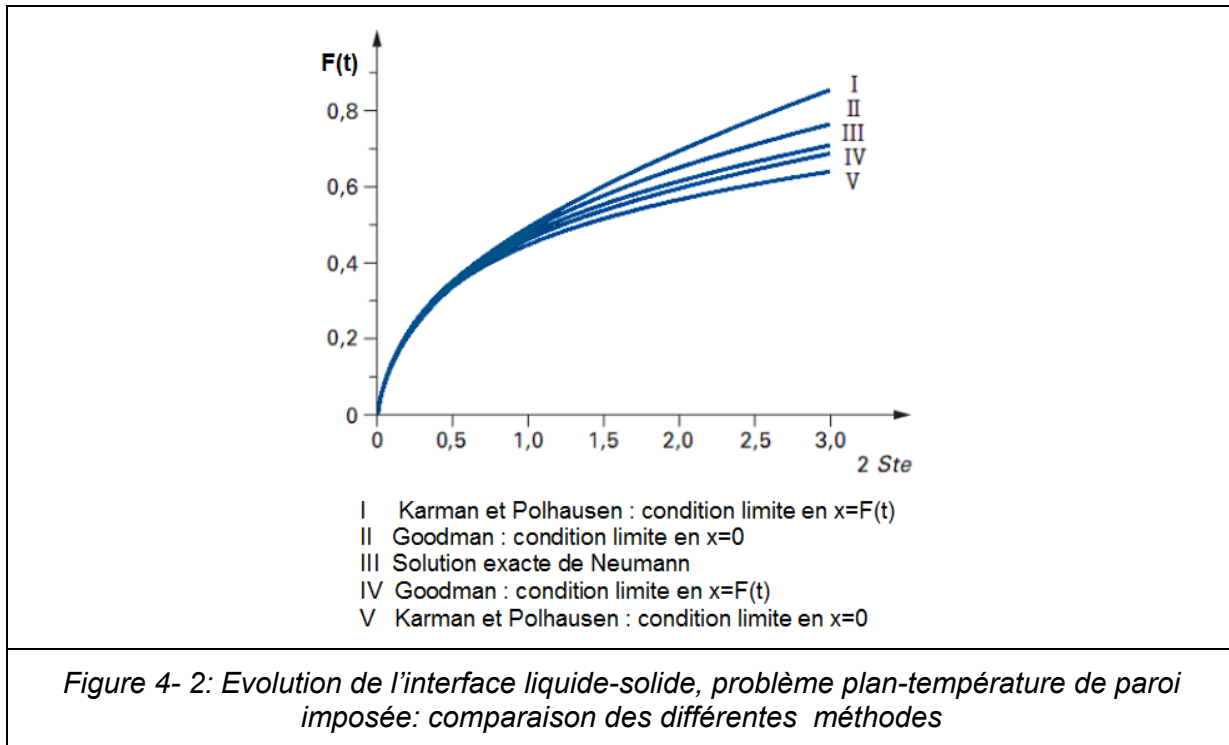
$$F(t) = \sqrt{\frac{4Ste}{Ste + 2}} \sqrt{\alpha_s t} \quad (\text{Karman et Polhausen}) \quad (4-a.6)$$

$$F(t) = 2 \sqrt{\frac{\sqrt{1 + 2Ste} - 1}{2}} \sqrt{\alpha_s t} \quad (\text{Megerlin}) \quad (4-a.7)$$

$$F(t) = \sqrt{2(\sqrt{1 + 2Ste} - 1)} \alpha_s t \quad (\text{Goodman}) \quad (4-a.8)$$

La comparaison des solutions obtenues par ces deux méthodes avec la solution exacte de Neumann, montre que l'approximation par un profil de température polynomial est d'autant

plus justifiée que le nombre de Stefan est faible (figure 4-2). Remarquons à ce sujet que des solutions approchées d'intérêt pratique peuvent être obtenues en considérant l'enthalpie sensible mise en jeu.



### IV.4.2. Solutions exactes

Le premier problème traité est celui de la progression d'un front plan de solidification (problème de Stefan dont la description complète est fournie dans [10]), ce problème devient plus compliqué dans un milieu d'épaisseur finie. Dans le cas du milieu semi-infini délimité par une surface plane, initialement liquide à une température uniforme, avec des propriétés thermo-physiques constantes, Neumann [6], a proposé en 1860 une solution dans le cas d'une température de paroi constante inférieure à la température de fusion :

$$t = 0, \quad x > 0, \quad T_L(x,0) = T_\infty < T_F \tag{4-a. 9}$$

$$t > 0, \quad x = 0, \quad T_s(0,t) = T_p \tag{4-a.10}$$

La position de l'interface est alors donnée par l'expression:

$$F(t) = C(\alpha_s t)^{\frac{1}{2}} \tag{4-a.11}$$

avec :  $\alpha_s$  diffusivité thermique du solide ;

$C$  facteur de proportionnalité fonction du nombre de Stefan.

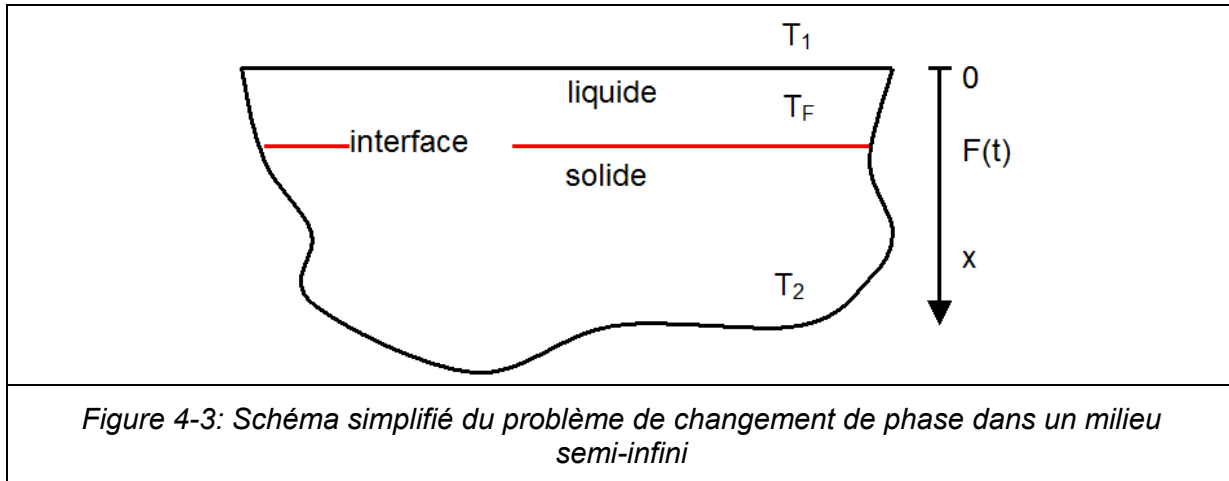
L'intérêt majeur de cette relation est de fournir une solution de référence pour la validation de solutions approchées ou numériques, mais des méthodes approchées peuvent être parfois utiles pour évaluer les tendances des solutions 1D dans des cas plus complexes [4, 15].

## IV.5. Solutions analytiques sans flux

Dans un premier temps, nous nous basons sur la solution analytique connue pour la cas de fusion d'un domaine semi-infini, qui sera ensuite étendue au cas d'un domaine bornée.

### IV.5.1. Solution analytique dans le cas d'un domaine semi-infini

#### IV.5.1.1. modèle mathématique



L'équation de la conduction de chaleur :

dans la phase liquide

$$\frac{\partial^2 T_L}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_L} \frac{\partial T_L}{\partial t} \quad \text{pour} \quad 0 < x < F(t), \quad t > 0 \quad (4-b.1)$$

dans la phase solide

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial T_s}{\partial t} \quad \text{pour} \quad F(t) < x, \quad t > 0 \quad (4-b.2)$$

la condition initiale est :

$$T(x,0) = T_2 < T_f \quad \text{pour} \quad x > 0, \quad F(0) = 0 \quad (4-b.3)$$

les conditions aux limites sont :

$$T(0,t) = T_1 > T_f \quad \text{pour} \quad t > 0 \quad (4-b.4)$$

$$T(x,t) = T_2 \quad \text{pour} \quad x \rightarrow \infty, \quad t > 0 \quad (4-b.5)$$

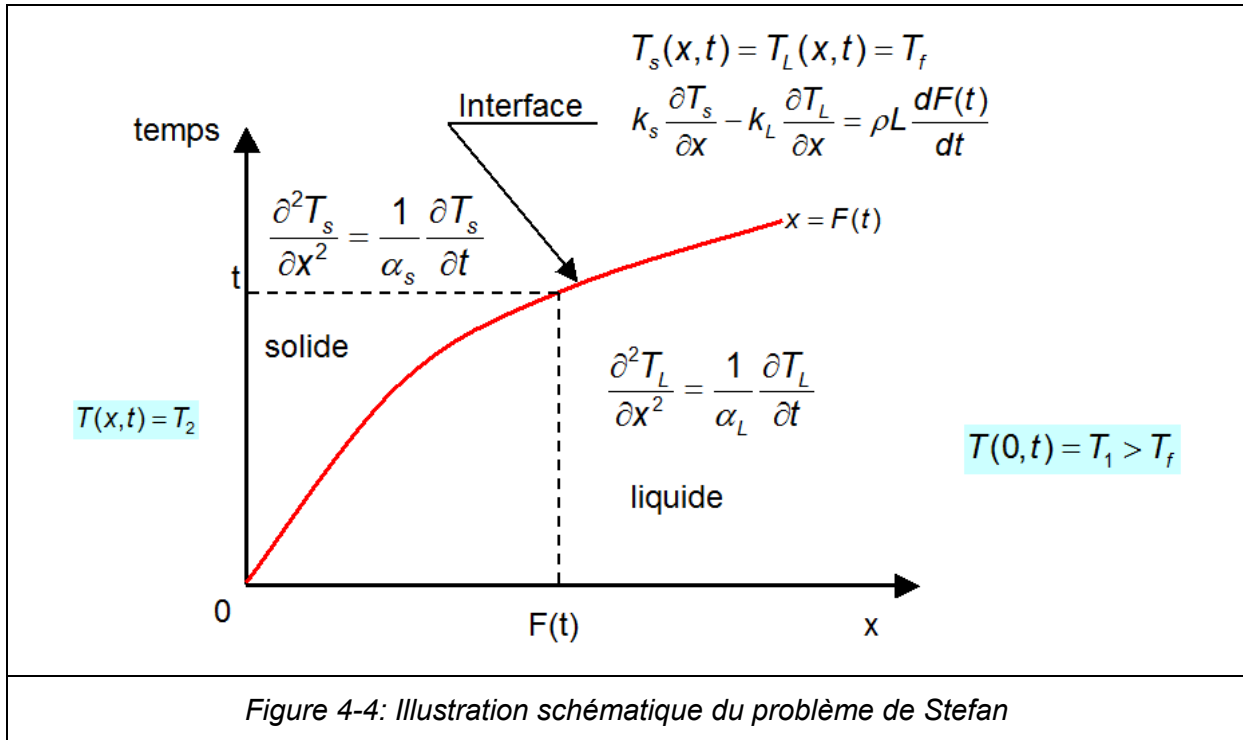
la température à l'interface est :

$$T_s(x,t) = T_L(x,t) = T_f \quad (4-b.6)$$

la condition de Stefan

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - k_L \frac{\partial T_L}{\partial x} = \rho_s H_{Ls} \frac{dF(t)}{dt} \quad \text{pour} \quad x = F(t), \quad t > 0 \quad (4-b.7)$$

avec  $F(t)$  est la position du front de fusion (en mouvement). La figure 4-4 illustre ce type de problème.



le problème de Neumann pour la cavité semi-infinie décrit ci-dessus est résolu en cherchant des solutions de la forme:

$$T_L(x,t) = A \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_L t}}\right) + T_{10} \quad (4-b.8)$$

$$T_s(x,t) = B \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}}\right) + T_{20} \quad (4-b.9)$$

A, B,  $T_{10}$  et  $T_{20}$  sont des constantes déterminées à partir des conditions ci-dessus.

Finalement, on trouve :

La position de l'interface  $F(t) = 2\eta\sqrt{\alpha_L t} \quad (4-b.10)$

la température dans la phase liquide

$$T_L(x,t) = T_1 - (T_1 - T_f) \frac{\operatorname{erf}(x / 2\sqrt{\alpha_L t})}{\operatorname{erf}(\eta)} \quad (4-b.11)$$

la température dans la phase solide

$$T_s(x,t) = T_2 + (T_f - T_2) \frac{\operatorname{erfc}(x / 2\sqrt{\alpha_s t})}{\operatorname{erfc}(\eta\sqrt{\alpha_L / \alpha_s})} \quad (4-b.12)$$

avec  $\eta$  solution de l'équation :

$$\frac{e^{-\eta^2}}{\operatorname{erf}(\eta)} + \frac{k_L}{k_s} \sqrt{\frac{\alpha_s}{\alpha_L}} \frac{T_f - T_2}{T_f - T_1} - \frac{e^{-\eta^2(\frac{\alpha_s}{\alpha_L})}}{\operatorname{erfc}\left(\eta\sqrt{\frac{\alpha_L}{\alpha_s}}\right)} = \frac{\eta L \sqrt{\pi}}{Cp_s(T_f - T_1)} \quad (4-b.13)$$

que l'on peut aussi exprimer en fonction du nombre de Stefan sous la forme:

$$\frac{Ste_L}{\exp(\eta^2)\operatorname{erf}(\eta)} - \frac{Ste_s \sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_L} \exp(\eta^2 \alpha_L / \alpha_s) \operatorname{erfc}(\eta\sqrt{\alpha_L / \alpha_s})} = \eta\sqrt{\pi} \quad (4-b.14)$$



$$\text{où : } \quad Ste_L = Cp_L \frac{T_1 - T_f}{H_{L_s}} \quad , \quad Ste_s = Cp_s \frac{T_f - T_2}{H_{L_s}} \quad (4-b.15)$$

### IV.5.1.2. Résultats et discussions

Quelques résultats pratiques sont établis pour l'aluminium et l'étain, en utilisant des propriétés thermophysiques constantes (tableau 4-2).

	aluminium	étain
conductivité thermique, k (W.m <sup>-1</sup> .°C <sup>-1</sup> )	100	60
chaleur spécifique Cp (J.kg <sup>-1</sup> .°C <sup>-1</sup> )	1000	200
masse volumique ρ (kg.m <sup>-3</sup> )	2500	7500
chaleur latente H <sub>Ls</sub> (J.kg <sup>-1</sup> )	400000	60000
température de fusion T <sub>f</sub> (°C)	600	232

Tableau 4-2: Propriétés thermophysiques des matériaux utilisés

On considère que les deux phases solide et liquide ont les mêmes propriétés thermophysiques.

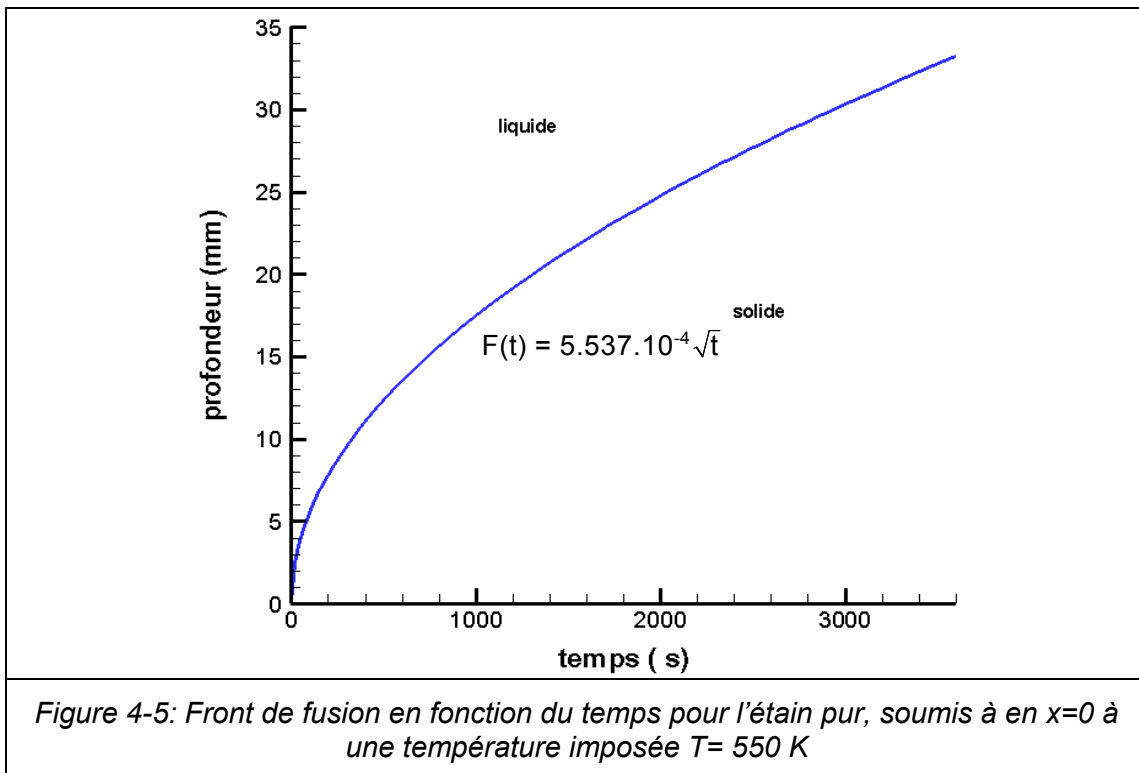


Figure 4-5: Front de fusion en fonction du temps pour l'étain pur, soumis à en  $x=0$  à une température imposée  $T= 550$  K

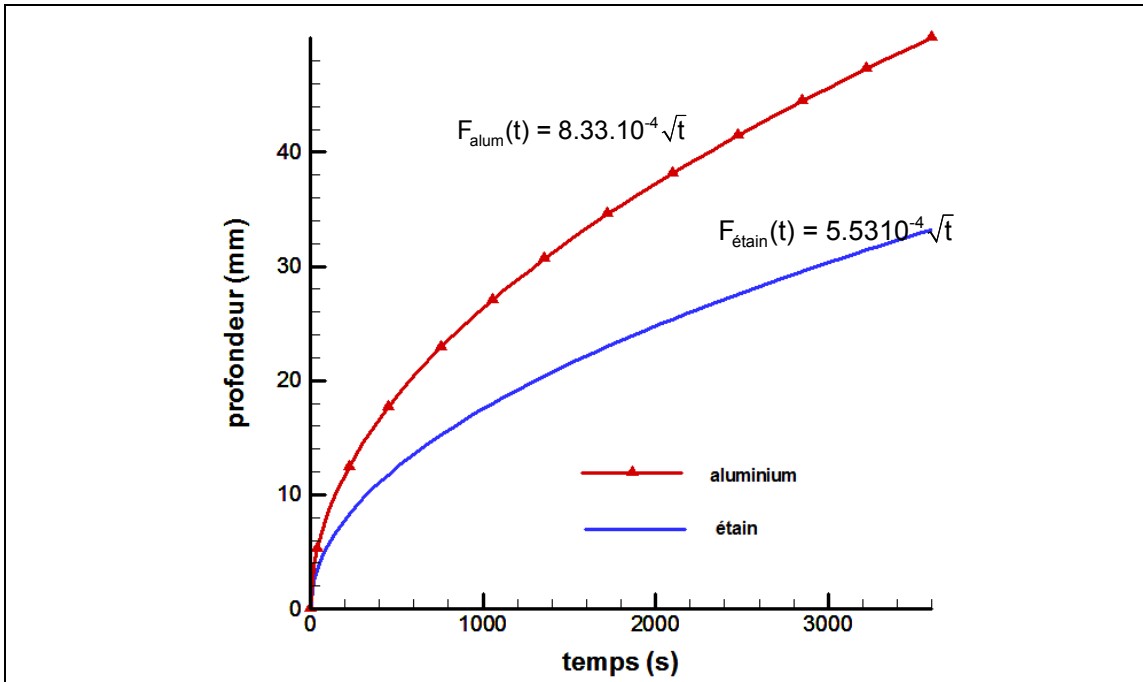


Figure 4-6: Front de fusion en fonction du temps pour l'étain et l'aluminium, soumis à une température imposée en  $x=0$ ,  $T=550$  K pour l'étain, et  $T=950$  K l'aluminium

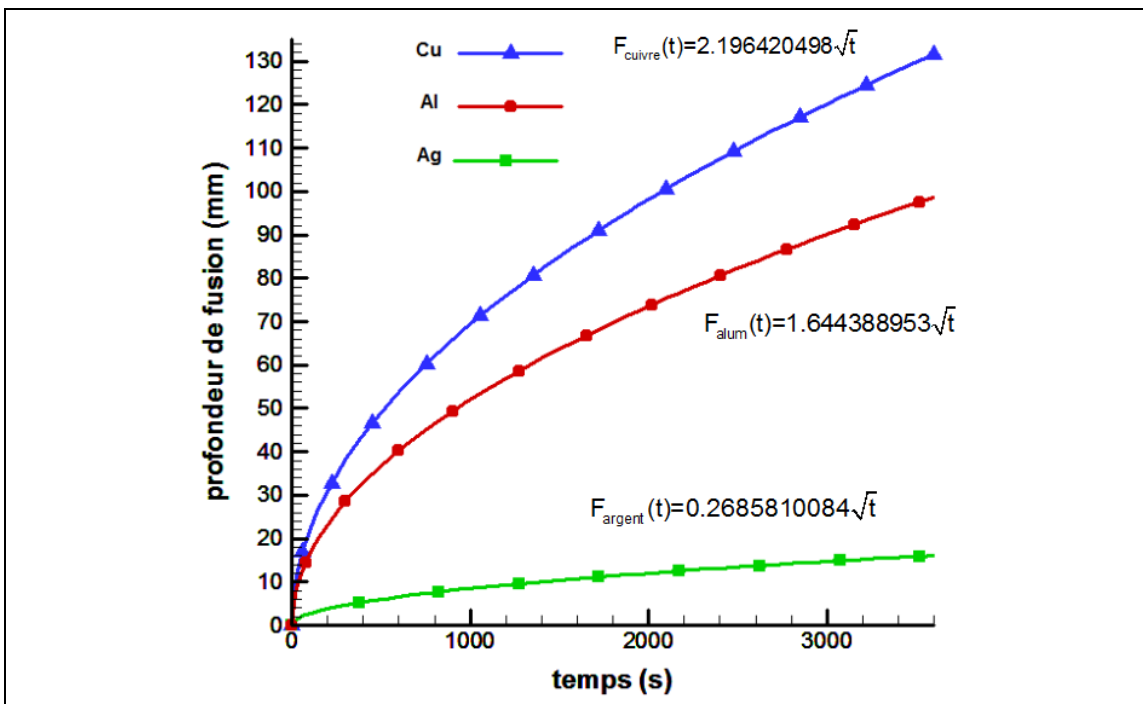


Figure 4-7: Front de fusion en fonction du temps pour les matériaux (Al, Cu et Ag), soumis à une température imposée en  $x=0$   $T=1400$  K

Dans des figures 4-8 et 4-9, on remarque que la vitesse du front de fusion est une fonction décroissante du temps et de la position de fusion.

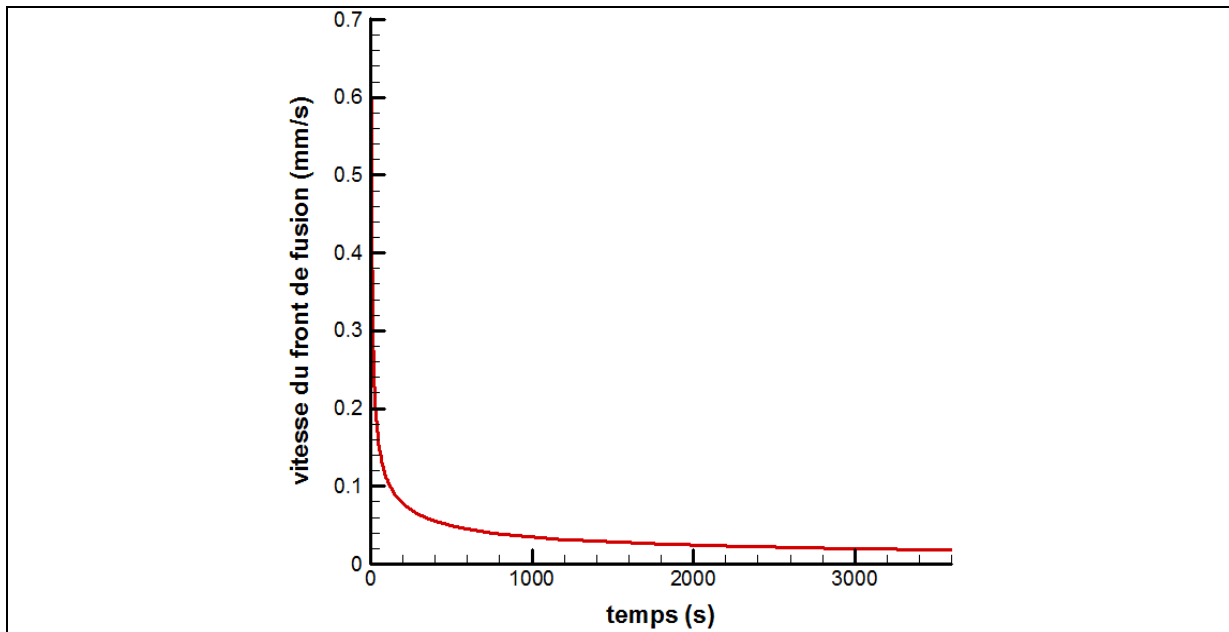


Figure 4- 8: Evolution de la vitesse du front de fusion de l'aluminium en fonction du temps

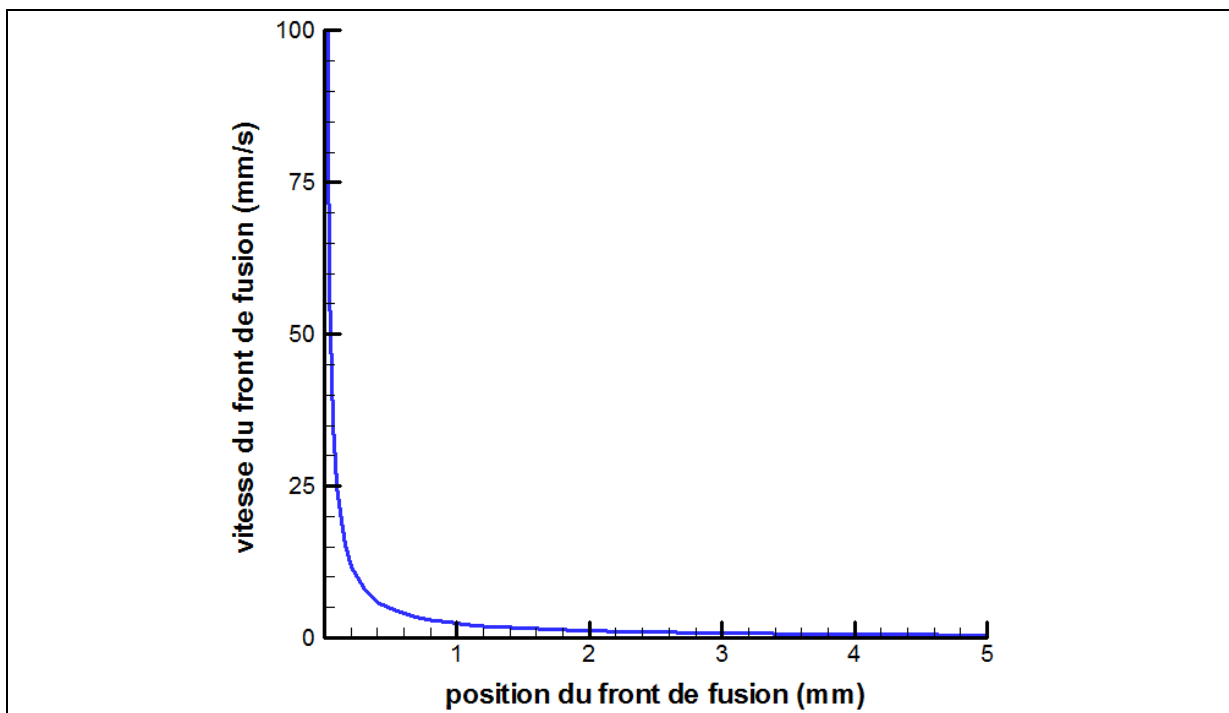


Figure 4- 9: Evolution de la vitesse du front de fusion en fonction de la position du front

### IV.5.2. Solution analytique dans un domaine borné

Le principe est de traiter le problème en trois étapes:

- premièrement, en considérant le domaine borné comme semi-infini pour des temps suffisamment courts (en respectant la règle de validité de la semi-infinité) ;

- deuxièmement, traiter le problème relatif dans le cas stationnaire ;
- enfin, établir les conditions de liaison des deux étapes (cas quasi-stationnaire) en respectant la condition la validité de l'hypothèse du domaine semi-infini  $L \ll 2\sqrt{at}$ .

L'équation de la conduction de chaleur :

dans la phase liquide

$$\frac{d^2 T_L}{dx^2} = 0 \quad \text{soit} \quad T_L(x) = a_1 x + b_1 \quad (4-b.16)$$

dans la phase solide

$$\frac{d^2 T_s}{dx^2} = 0 \quad \text{soit} \quad T_s(x) = a_2 x + b_2 \quad (4-b.17)$$

et comme

$$T_L(x=0) = T_1 \quad \text{donc} \quad T_L(x) = a_1 x + T_1 \quad (4-b.18)$$

et

$$T_s(x=L) = T_2 \quad \text{donc} \quad T_s(x) = a_2(x-L) + T_2 \quad (4-b.19)$$

$a_1$  et  $a_2$  sont déterminés comme suit:

$$T_s(x=F(t)) = T_L(x=F(t)) = T_f \quad \text{donc} \quad a_1 = \frac{T_f - T_1}{F(t)} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{T_f - T_2}{F(t) - L} \quad (4-b.20)$$

d'où:

$$T_L(x) = \frac{T_f - T_1}{F(t)} x + T_1 \quad (4-b.21)$$

et

$$T_s(x) = \frac{T_f - T_2}{F(t) - L} (x - L) + T_2 \quad (4-b.22)$$

et comme en stationnaire:

$$k_s \frac{dT_s}{dx} - k_L \frac{dT_L}{dx} = 0 \quad (4-b.23)$$

alors:

$$k_s \frac{T_f - T_2}{F(t) - L} - k_L \frac{T_f - T_1}{F(t)} = 0 \quad (4-b.24)$$

ce qui entraîne

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(t) = F_\infty = \frac{L}{1 + \frac{k_s T_2 - T_f}{k_L T_f - T_1}} \quad (4-b.25)$$

Pour trouver la solution intermédiaire (approximation quasi-stationnaire)

$$T = T_f \quad \text{à} \quad x = F(t) \quad (4-b.26)$$

$$T_L(x,t) = \frac{T_f - T_1}{F(t)} x + T_1 \quad \text{pour} \quad x \leq F(t) \quad (4-b.27)$$

$$T_s(x,t) = \frac{T_f - T_2}{F(t) - L} (x - L) + T_2 \quad \text{pour} \quad F(t) \leq x \quad (4-b.28)$$

Dans ce cas l'équation (4-b.24) devient:

$$k_s \frac{T_f - T_2}{F(t) - L} - k_L \frac{T_f - T_1}{F(t)} = \rho H_f \frac{dF(t)}{dt} \quad (4-b.29)$$

par conséquent, F(t) est solution de l'équation différentielle:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{1}{\rho H_f} \left[ k_s \frac{T_f - T_2}{F(t) - L} - k_L \frac{T_f - T_1}{F(t)} \right] \quad (4-b.30)$$

Enfin, on peut écrire:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \beta_0 \left[ \frac{F(t)(1 - 2F_\infty / L) + F_\infty}{F(t)(F(t) - L)} \right] \quad \text{pour } t_0 \leq t \quad (4-b.31)$$

$$\text{condition de continuité à : } t = t_0, \quad F(t_0) = 2\eta\sqrt{\alpha_L t_0} \quad (4-b.32)$$

$$\text{avec: } \beta_0 = \frac{Lk_L(T_f - T_1)}{\rho H_f F_\infty} \quad (4-b.33)$$

Cette équation différentielle du premier degré peut être résolue numériquement. On peut utiliser pour sa résolution le schéma d'Euler :

$$\frac{F(t_{n+1}) - F(t_n)}{\Delta t} = \beta_0 \left[ \frac{F(t_n)(1 - 2F_\infty / L) + F_\infty}{F(t_n)(F(t_n) - L)} \right] \quad (4-b.34)$$

Cependant en intégrant l'équation (4-b.31) entre  $t_0$  et  $t$ , on peut montrer que F(t) est solution de l'équation:

$$g(F(t)) = g(2\eta\sqrt{\alpha_L t_0}) + \beta_0(t - t_0) \quad (4-b.35)$$

$$\text{avec : } g(x) = \frac{x^2}{2} + (F_\infty - L)x + F_\infty(F_\infty - L)\ln(x - F_\infty) \quad (4-b.36)$$

Il reste maintenant à trouver  $t_0$  : temps de raccordement entre le modèle de départ (semi-infini) et le modèle quasi-stationnaire.  $t_0$  est choisi de telle sorte que la vitesse du front de fusion est continue.

$$\left. \frac{dF(t)}{dt} \right|_{t_0} = \left. \frac{dF(t)}{dt} \right|_{t_0} \quad \text{à } t = t_0 \quad (4-b.37)$$

$$\text{ainsi : } \frac{\eta\sqrt{\alpha_L}}{\sqrt{t_0}} = \beta_0 \left[ \frac{F(t_0)(1 - 2F_\infty / L) + F_\infty}{F(t_0)(F(t_0) - L)} \right] \quad \text{avec } F(t_0) = 2\eta\sqrt{\alpha_L t_0} \quad (4-b.38)$$

$$\text{alors: } t_0 = \frac{1}{4\eta^2\alpha_L} \left[ \frac{L^2(\beta_0 F_\infty + 2\eta^2\alpha_L L)^2}{(2\eta^2\alpha_L L - \beta_0 L + 2\beta_0 F_\infty)^2} \right] \quad (4-b.39)$$

En résumé, la position du front de fusion est donnée par :

$$F(t) = 2\eta\sqrt{\alpha_L t} \quad \text{pour } t \in [0, t_0] \quad (4-b.40)$$

$$\frac{dF(t)}{dt} = \beta_0 \left[ \frac{F(t) - F_\infty}{F(t)(F(t) - L)} \right] \quad \text{pour } t \in [t_0, +\infty] \quad (4-b.41)$$

$$\text{avec : } F(t) = g^{-1}(g(2\eta\sqrt{\alpha_L t_0}) + \beta_0(t - t_0)) \quad (4-b.42)$$

Dans le cas d'un échantillon de cuivre de dimension  $L=0.01\text{m}$ , avec des conditions aux limites de types températures imposées  $T_1=1400\text{ K}$ ,  $T_2 = 300\text{ K}$ , le temps de accordement est  $t_0 = 0.00034\text{ s}$ .

## IV.6. Solutions analytique avec flux

### IV.6.1. Cas de domaine semi-infini

Lorsqu'un matériau est irradié par un flux laser, une portion de l'énergie incidente absorbée est ensuite diffusée dans le matériau sous forme de chaleur. Dans la plupart des cas, l'énergie absorbée ainsi que le temps d'interaction laser- matière sont suffisamment importants pour

atteindre la température de fusion (les traitements thermiques, le soudage...etc.), voire même l'évaporation si on cherche la découpe de matériaux par exemple.

De nombreuses études numériques existent mais les solutions analytiques de changement de phase avec flux, sont très rares [16,17].

Dans cette partie de l'étude, nous allons traiter le changement de phase dans un matériau soumis à un flux laser, utilisé comme condition au limite à la surface, dans le but de déterminer les ordres de grandeurs des temps de fusion, la puissance, ...etc, paramètres nécessaires à la maîtrise du processus.

Pour simplifier le problème, nous considérons que le processus est linéaire, ce qui conduit à supposer que les propriétés thermophysiques, et optiques (coefficient d'absorption) sont constantes.

Le modèle du problème mono dimensionnel est élaboré en deux étapes :

**Etape 1 : avant la fusion,  $t \leq t_{fusion}$**

Problème de conduction avant que le solide n'atteigne la température de fusion :

$$\alpha_s \frac{\partial \theta_s(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta_s(x,t)}{\partial x^2} \quad , \quad 0 \leq x \leq \infty \quad (4-c.1)$$

conditions aux limites:

$$-k_s \frac{\partial \theta_s(x,t)}{\partial x} = A_s q \quad , \quad x = 0 \quad (4-c.2)$$

$$\theta_s(x,t) = 0 \quad , \quad x \rightarrow \infty \quad (4-c.3)$$

condition initiale:

$$\theta_s(x,t) = 0 \quad , \quad t = 0 \quad (4-c.4)$$

avec :

$$\theta_s(x,t) = T_s(x,t) - T_0 \quad (4-c.5)$$

$T_s$ ,  $k_s$ ,  $\alpha_s$  et  $A_s$  sont respectivement, la température, la conductivité thermique, la diffusivité thermique et le coefficient d'absorption du laser, dans la phase solide. Le solide est considéré initialement à la température ambiante  $T_0$ .

On considère que l'expression de la température dans le solide satisfaisant aux conditions aux limites ci-dessus, est sous la forme suivante:

$$\theta_s(x,t) = \theta_w(t) \cdot e^{-\frac{x}{\delta(t)}} \quad (4-c.6)$$

Où  $\theta_w(t)$  représente la température de surface (à  $x = 0$ ), et  $\delta(t)$  représente la profondeur thermiquement affectée dans le solide. A partir des équations (4-c.1, 4-c. 2, et 4-c. 5), on obtient :

$$\frac{d\theta_w(t)}{dt} = \frac{\alpha_s}{\delta^2(t)} \theta_w(t) \quad (4-c.7)$$

$$\theta_w(t) = \frac{A_s q}{k_s} \delta(t) \quad (4-c.8)$$

et d'après les équations (4-c. 6) et (4-c. 7) :

$$\theta_w(t) = \frac{A_s q}{Cp_s \rho_s k_s} \sqrt{2t} \quad (4-c.9)$$

$$\delta(t) = \sqrt{2\alpha_s t} \quad (4-c.10)$$

**Etape 2 : après la fusion,  $t \geq t_{fusion}$**

Les équations de conduction dans les deux phases, liquide et solide sont :

dans la phase liquide

$$\alpha_L \frac{\partial \theta_L(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta_L(x,t)}{\partial x^2} \quad , \quad 0 \leq x \leq F(t) \quad (4-c.11)$$

dans la phase solide

$$\alpha_s \frac{\partial \theta_s(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta_s(x,t)}{\partial x^2} \quad , \quad F(t) \leq x \leq \infty \quad (4-c.12)$$

les conditions aux limites et à l'interface sont :

$$-k_L \frac{\partial \theta_L(x,t)}{\partial x} = A_L q \quad (4-c.13)$$

$$\theta_s(x,t) = \theta_L(x,t) = \theta_f = T_f - T_0, \quad x = F(t) \quad (4-c.14)$$

$$k_s \frac{\partial \theta_s(x,t)}{\partial x} - k_L \frac{\partial \theta_L(x,t)}{\partial x} = \rho_s H_f \frac{dF(t)}{dt} \quad (4-c.15)$$

$$\theta_s(x,t) = 0, \quad x \rightarrow \infty \quad (4-c.16)$$

et la condition initiale est :

$$F(t) = 0 \quad , \quad t = t_{fusion} \quad (4-c.17)$$

Les indices s et L sont respectivement relatifs à la phase solide et liquide. F(t) est le front de fusion qui est une fonction du temps, et q est la densité de flux surfacique.

Les expressions de température dans les deux phases sont données par:

$$\theta_L(x,t) = \theta_{Lw}(t) \cdot e^{-\frac{x}{\delta_L(t)}} \quad (4-c.18)$$

$$\theta_s(x,t) = \theta_f \cdot e^{-\frac{-(x-F(t))}{\delta_s(t)}} \quad (4-c.19)$$

où  $\theta_{Lw}(t)$  et  $\theta_f$  représentent respectivement la température réduite de surface (à  $x = 0$ ) en phase liquide et la température réduite de fusion .

Les expressions ci-dessus satisfont aux équations (4-c.14) et (4-c.16)  $\delta_L(t)$  et  $\delta_s(t)$  sont deux fonctions temporelles représentant la profondeur de la zone thermiquement affectée pour la phase liquide et solide. L'équation (4-c.11) est satisfaite en utilisant les équations (4-c.18) et (4-c.12) à  $x = F(t)$  et en utilisant l'équation (4-c.14), on obtient:

$$\frac{d\theta_{Lw}(t)}{dt} = \frac{\alpha_L}{\delta_L^2(t)} \theta_{Lw}(t) \quad (4-c.20)$$

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{\alpha_s}{\delta_s(t)} \quad (4-c.21)$$

En substituant l'expression (4. 18) dans l'équation (4. 13), on obtient :

$$k_L \frac{\theta_{Lw}(t)}{\delta_L(t)} = A_L q \quad (4-c. 22)$$

La substitution de l'expression (4. 18) et (4. 18) dans l'équation (4. 15) donne :

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{\theta_f}{\rho_s H_f} \left( \frac{k_L}{\delta_L(t)} - \frac{k_s}{\delta_s(t)} \right) \quad (4-c.23)$$

D'après les équations (4. 20) – (4. 23), on obtient les relations suivantes :

$$\theta_{Lw}(t) = \sqrt{2 \frac{\alpha_L A_L^2 q^2}{k_L^2} t + C_0} \quad (4-c.24)$$

$$\delta_L(t) = \frac{k_L}{A_L I} \sqrt{2 \frac{\alpha_L A_L^2 q^2}{k_L^2} t + C_0} \quad (4-c.25)$$

$$\delta_s(t) = \frac{\rho_s H_f}{A_L I \theta_f} \left( \alpha_s + \frac{\theta_f k_s}{\rho_s H_f} \right) \sqrt{2 \frac{\alpha_L A_L^2 q^2}{k_L^2} t + C_0} \quad (4-c.26)$$

$$F(t) = \delta_L(t) \ln \left( \frac{A_L q \delta_L(t)}{k_L \theta_f} \right) \quad (4-c.27)$$

$$C_0 = \theta_f^2 - \frac{\alpha_L k_s^2 A_L^2}{\alpha_s k_L^2 A_s^2} (\theta_f - \theta_0)^2 \quad (4-c.28)$$

### IV.6.1.1. Résultats et discussions

Nos résultats ci-dessous, sont obtenus en incluant les propriétés thermophysiques du tableau 4-3.

	Aluminium	Cuivre	Titane
$\rho_s$ (kg.m <sup>-3</sup> )	2700	8960	4500
$\rho_L$ (kg.m <sup>-3</sup> )	2385	8000	4110
$C_{ps}$ (J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> )	917	386	528
$C_{pL}$ (J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> )	1080	480	700
$K_s$ (W.m <sup>-2</sup> .K <sup>-1</sup> )	238	401	21.6
$k_L$ (W.m <sup>-2</sup> .K <sup>-1</sup> )	100	342	20.28
$T_f$ (K)	933	1358	1940
$T_v$ (K)	2793	2836	3558
$H_{Ls}$ (J.kg <sup>-1</sup> )	388000	204700	365000

Tableau 4- 3: Propriétés thermophysiques des matériaux (Al, Cu, et Ti ), [18-20]

	Al	Cu	Ti
La phase solide ( $A_s$ )	0.0588	0.02	0.257
La phase liquide ( $A_L$ )	0.064	0.058	0.433

Tableau 4- 4: Coefficients d'absorption de certain matériau pour un laser de longueur d'onde 1.06  $\mu\text{m}$  [20]

### IV.6.1.2. Effet de la densité de flux

D'après l'équation (4-c.9), en prenant  $\theta_{Lw}(t_f) = \theta_f$ , on obtient le temps  $t_m$  nécessaire pour atteindre la température de fusion à la surface.

De même, en utilisant l'équation (4-c.24) on obtient le temps  $t_v$  nécessaire pour atteindre la température de vaporisation à la surface.

Quelques valeurs indicatives sont résumées dans le tableau suivant.

	$I=10^8$ (W.m <sup>-2</sup> )			$I=10^9$ (W.m <sup>-2</sup> )		
	Al	Cu	Ti	Al	Cu	Ti
$T_f$ (s)	3.41	194.05	0.1045	0.0341	1.94	$0.1045 \cdot 10^{-2}$



Chapitre IV : Changement de phase solide - liquide

$t_v$ (s)	25.20	414.19	0.243	0.252	4.14	$0.243 \cdot 10^{-2}$
-----------	-------	--------	-------	-------	------	-----------------------

Tableau 4-5: les temps nécessaires à la fusion et la vaporisation de certains métaux (aluminium, cuivre et titane), pour différentes valeurs de la densité de flux.

La figure 4-10 montre l'évolution de la profondeur de fusion dans différents matériaux traités dans les mêmes conditions par un laser ( $1.06 \mu m$ ). On constate que la vitesse du front de fusion est plus importante au début de la fusion et à tendance à diminuer avec le temps.

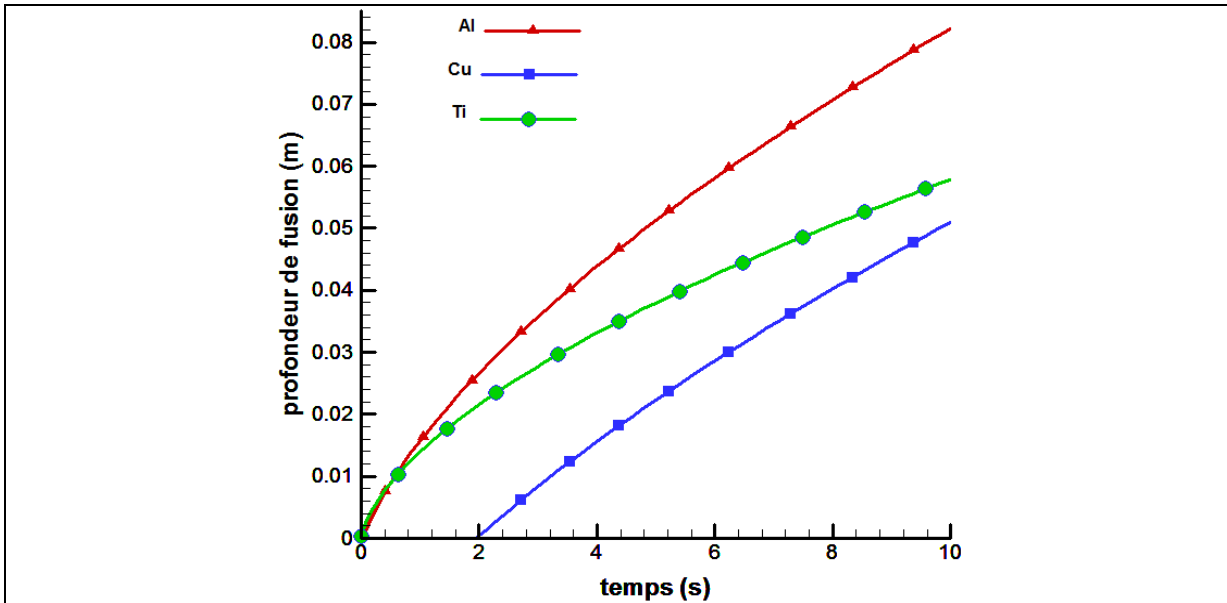


Figure 4-10: Evolution en fonction du temps de la profondeur de fusion de trois matériaux (Al, Cu et Ti) pour une densité de flux  $q = 10^9 \text{ W.m}^{-2}$

Un profil similaire est aussi constaté de l'évolution du front de fusion en fonction de la densité de puissance sur la figure 4-11.

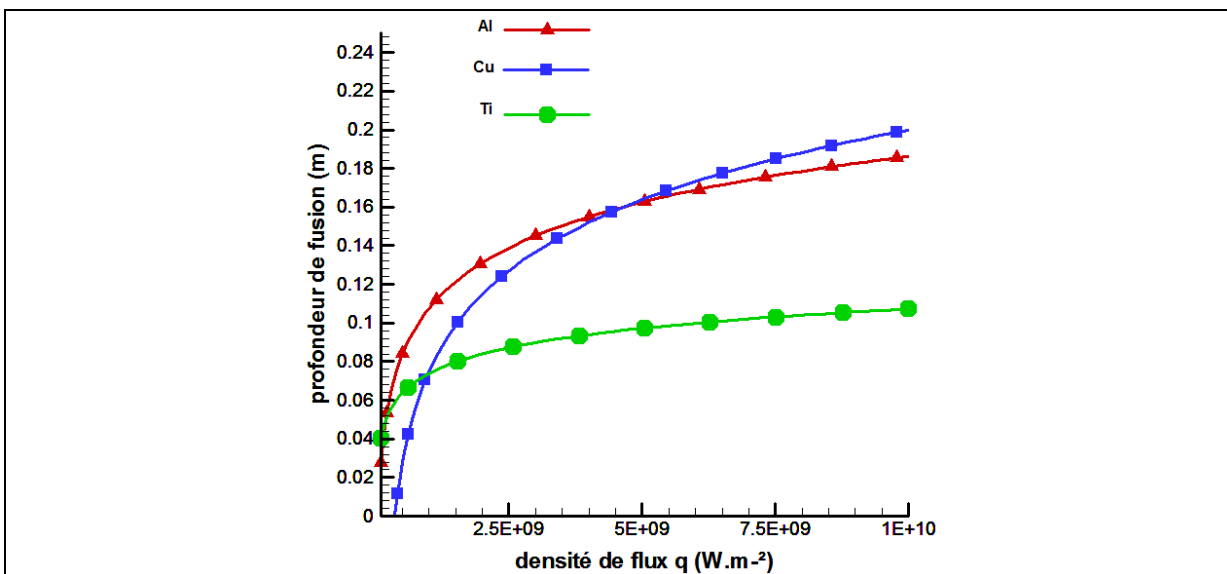
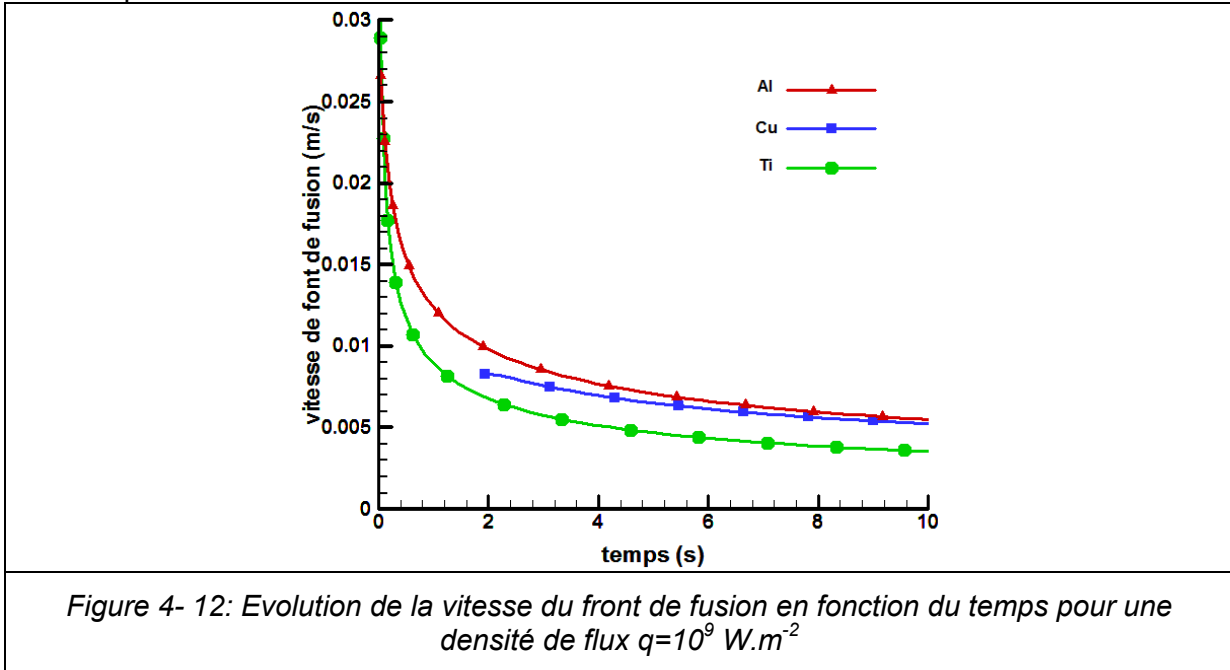
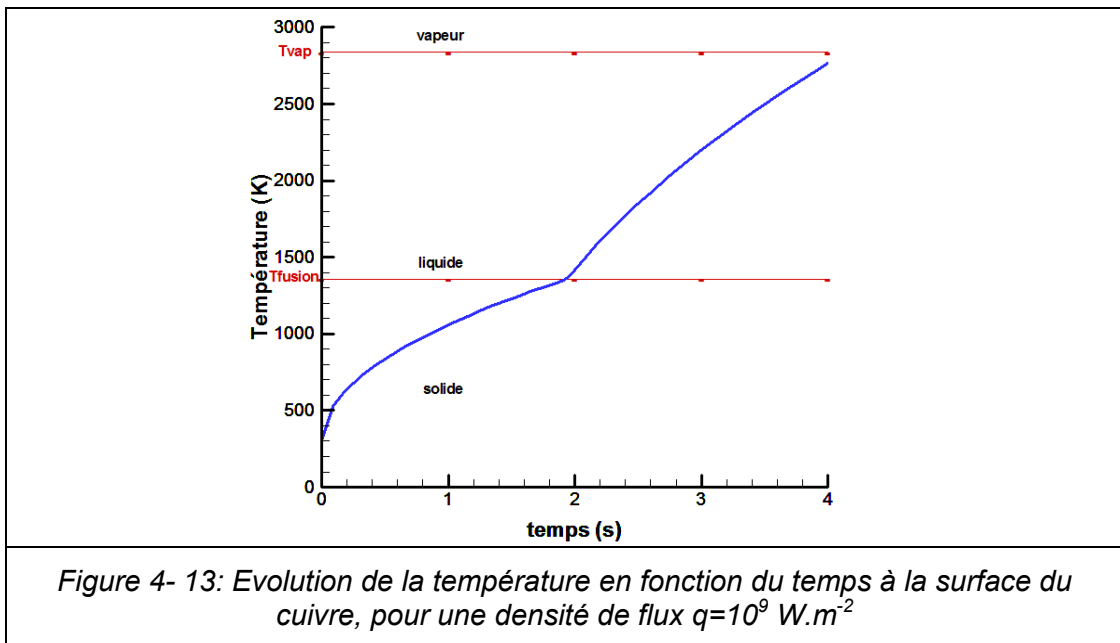


Figure 4- 11: Evolution du front de fusion en fonction de la densité de flux à l'instant  $t = 15 \text{ s}$ .

Comme précisée précédemment, la vitesse de front de fusion diminue dans le temps (figure 4-12). Le cuivre ne commence à fondre dans ces conditions, qu'à partir de  $t_f=1.94$  secondes (tableau 4-5). On remarque qu'au bout de 10 secondes, la vitesse du front de fusion diminue d'un rapport de 5 environ pour l'aluminium et le titane.



La figure 4-13, permet de visualiser l'évolution de la température à la surface d'une pièce de cuivre. En effet, pour une densité de puissance  $q=10^9 \text{ W.m}^{-2}$ , la surface du cuivre atteint la température de fusion au bout de 2 s et la température d'évaporation au bout de 4 s.



La figure 4-14 illustre les profils de température dans le matériau, à différents instants avant et après la fusion. La température dans la phase liquide croît plus rapidement que dans la phase

solide, cela étant dû en partie au coefficient d'absorption du laser qui est relativement élevé en phase liquide par rapport à la phase solide. On peut observer également la discontinuité de la température au niveau de l'interface solide – liquide, due à la chaleur latente de fusion, ainsi que la conductivité thermique relativement élevée dans la phase solide.

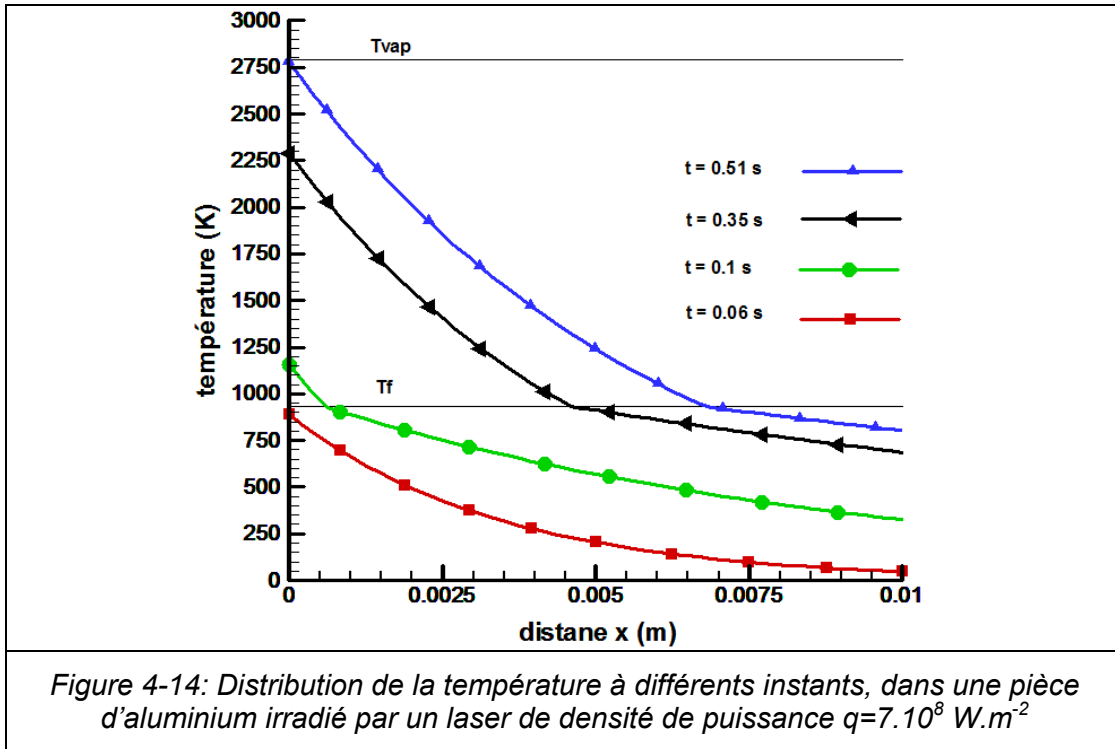


Figure 4-14: Distribution de la température à différents instants, dans une pièce d'aluminium irradié par un laser de densité de puissance  $q=7.10^8 \text{ W.m}^{-2}$

### IV.6.1.3. Conditions aux limites de type densité de flux en mouvement

C'est le cas où le flux appliqué à la surface est de type gaussien en mouvement. La même démarche est valable, en remplaçant le flux constant  $q$  par :

$$q = P \cdot e^{-\frac{2}{r_0^2}(r_0 - vt)^2} \quad \text{avec} \quad P = \frac{2P_0}{\pi r_0^2}$$

### IV.6.2. Domaine borné soumis à un flux

Dans cette section nous traitons le problème de changement de phase dans un domaine borné soumis à un flux à sa surface [4,7,21], le principe est schématisé sur la figure 4-15.

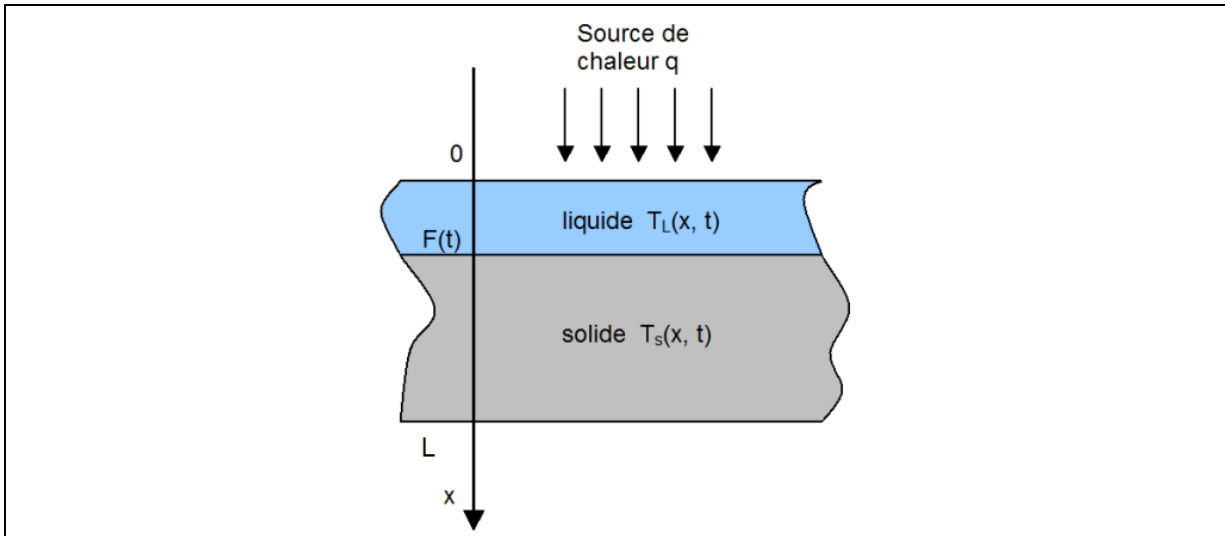


Figure 4- 15: Changement de phase dans matériau solide soumis à un flux à la surface

Mise en équation:

Dans la phase liquide, l'équation de conduction est:

$$\frac{\partial^2 T_L(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_L} \frac{\partial T_L(x,t)}{\partial t} \quad \text{pour} \quad 0 < x < F(t), \quad t > 0 \quad (4-d.1)$$

$$k_L \frac{\partial T_L(0,t)}{\partial x} = Aq \quad \text{à} \quad x = 0 \quad (4-d.2)$$

Dans la phase solide, l'équation de diffusion thermique est:

$$\frac{\partial^2 T_s(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial T_s(x,t)}{\partial t} \quad \text{pour} \quad F(t) < x < L, \quad t > 0 \quad (4-d.3)$$

$$h[T_s(d,t) - T_{amb}] = k_s \frac{\partial T_s(d,t)}{\partial t} \quad \text{quand} \quad x = L, \quad t > 0 \quad (4-d.4)$$

avec A est le coefficient d'absorption dans le cas d'un flux laser. Dans le cas de la projection plasma, A= 1.

conditions initiales :

$$F(t) = 0 \quad \text{à} \quad t = 0 \quad (4-d.5)$$

$$T_s(x,t) = T_{s0} \quad \text{pour} \quad t = 0, \quad \text{et} \quad x > 0 \quad (4-d.6)$$

les conditions à la frontière liquide-solide en  $x = F(t)$  sont:

$$T_s(x,t) = T_L(x,t) = T_F \quad \text{à} \quad x = F(t), \quad \text{et} \quad t > 0 \quad (4-d.7)$$

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - k_L \frac{\partial T_L}{\partial x} = \rho L \frac{ds(t)}{dt} \quad \text{à} \quad x = F(t), \quad \text{et} \quad t > 0 \quad (4-d.8)$$

il est à noter que l'équation  $k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - k_L \frac{\partial T_L}{\partial x} = \rho L \frac{ds(t)}{dt}$  est l'équation de la vitesse de l'interface.

La solution exacte du problème décrit ci-dessus est difficile à déterminer à cause de l'effet de couplage de l'interface en mouvement. Cependant si le processus de fusion prend place lentement (faible densité de puissance), il est raisonnable d'assumer une distribution quasi-stationnaire de la température dans la phase solide. En intégrant l'équation  $\frac{\partial^2 T_L(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_L} \frac{\partial T_L(x,t)}{\partial t}$

pour les conditions stationnaires, la variation de la température dans la phase liquide satisfaisant la condition aux limites est:

$$T_L - T_F = \frac{q}{k_L} [x - F(t)] \quad (4-d.9)$$

sachant que : 
$$\frac{\partial T_L}{\partial x} [F(t), t] = \frac{q}{k_L} \quad (4-d.10)$$

et l'équation de mouvement de l'interface devient :

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - q = \rho_s H_{LS} \frac{dF(t)}{dt} \quad \text{pour } x = F(t) \quad (4-d.11)$$

adimensionnement :

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{F(t)}{L}, \quad \tau = \frac{\alpha_s t}{L^2}, \quad \text{Biot} = \frac{hL}{k_s}, \quad \theta_{as} = \frac{T_F - T_s}{T_F - T_{amb}}$$

la formulation du problème se réduit à :

$$\frac{\partial \theta_{as}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_{as}}{\partial \xi^2} \quad (4-d.12)$$

$$\theta_{as}(\xi, 0) = \theta_{as0} \quad (4-d.13)$$

$$\text{Biot}[\theta_{as}(0, \tau) - 1] = \frac{\partial \theta_{as}(0, \tau)}{\partial \xi} \quad (4-d.14)$$

$$\theta_{as}(\eta, \tau) = 0 \quad (4-d.15)$$

$$\frac{\partial \theta_{as}}{\partial \xi} + Q = -\frac{\partial \eta}{\partial \tau} \text{Ste} \quad \text{à } \xi = \eta(\tau) \quad (4-d.16)$$

où : 
$$Q = \frac{qL}{k_s(T_F - T_{amb})} \quad (4-d.17)$$

Afin de résoudre la distribution de température dans la phase solide, le polynôme de second degré suivant est utilisé comme approximation.

$$\theta_s(\xi, \eta) = A(\eta) + B(\eta)(\eta - \xi) + C(\eta)(\eta - \xi)^2, \quad \text{avec } \eta = \eta(\tau) \quad (4-d.18)$$

$$\left. \frac{d\eta}{d\tau} \right|_{\xi=\eta} = [B(\eta) - Q] \text{Ste} \quad (4-d.18)$$

les coefficients  $A(\eta)$ ,  $B(\eta)$  et  $C(\eta)$  sont déterminés à partir des conditions aux limites d'après  $\theta_{as}(\eta, \tau) = 0$  on trouve que  $A(\eta) = 0$ .

or 
$$\frac{\partial \theta_{as}}{\partial \tau} = \frac{\partial \theta_{as}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \quad (4-d.19)$$

l'équation de la vitesse de déplacement de l'interface combiné à l'équation

$$\frac{\partial \theta_{as}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_{as}}{\partial \xi^2} \quad \text{donne} \quad 2C = (B^2 - BQ) \text{Ste} \quad (4-d.20)$$

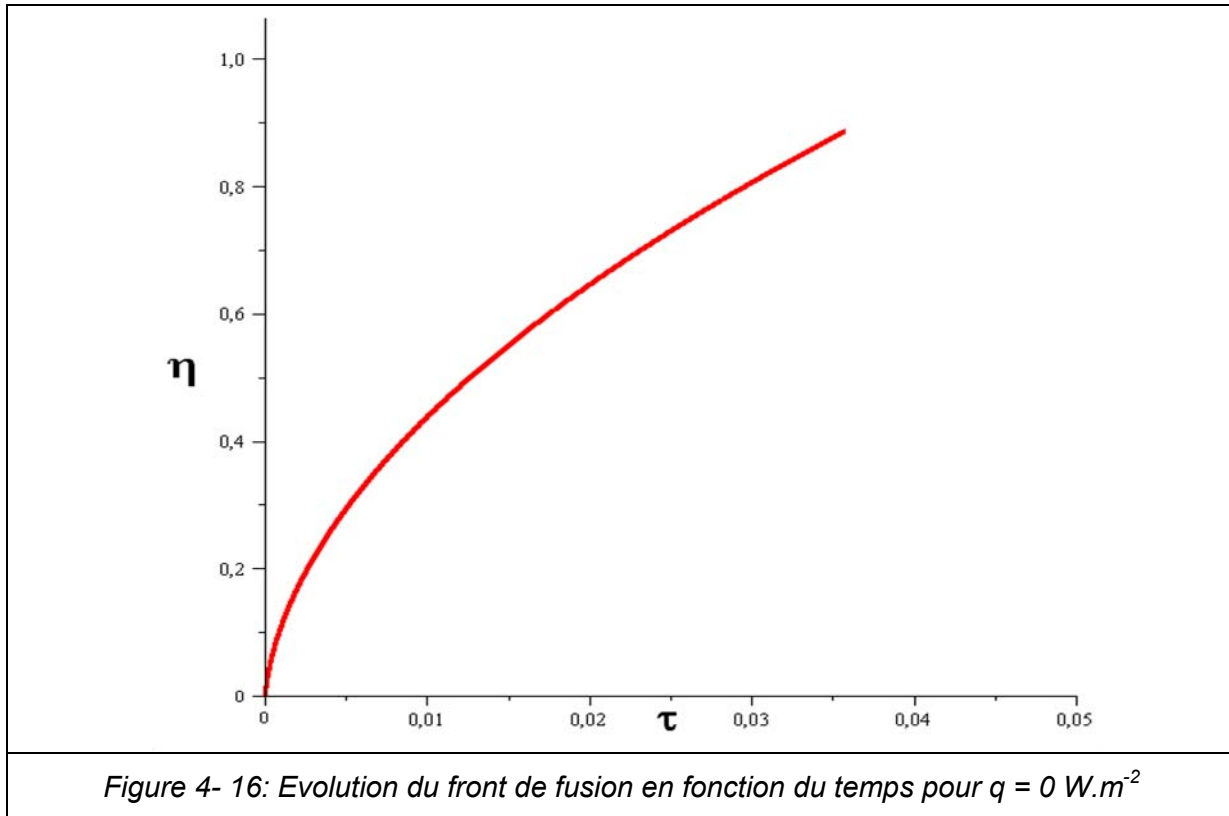


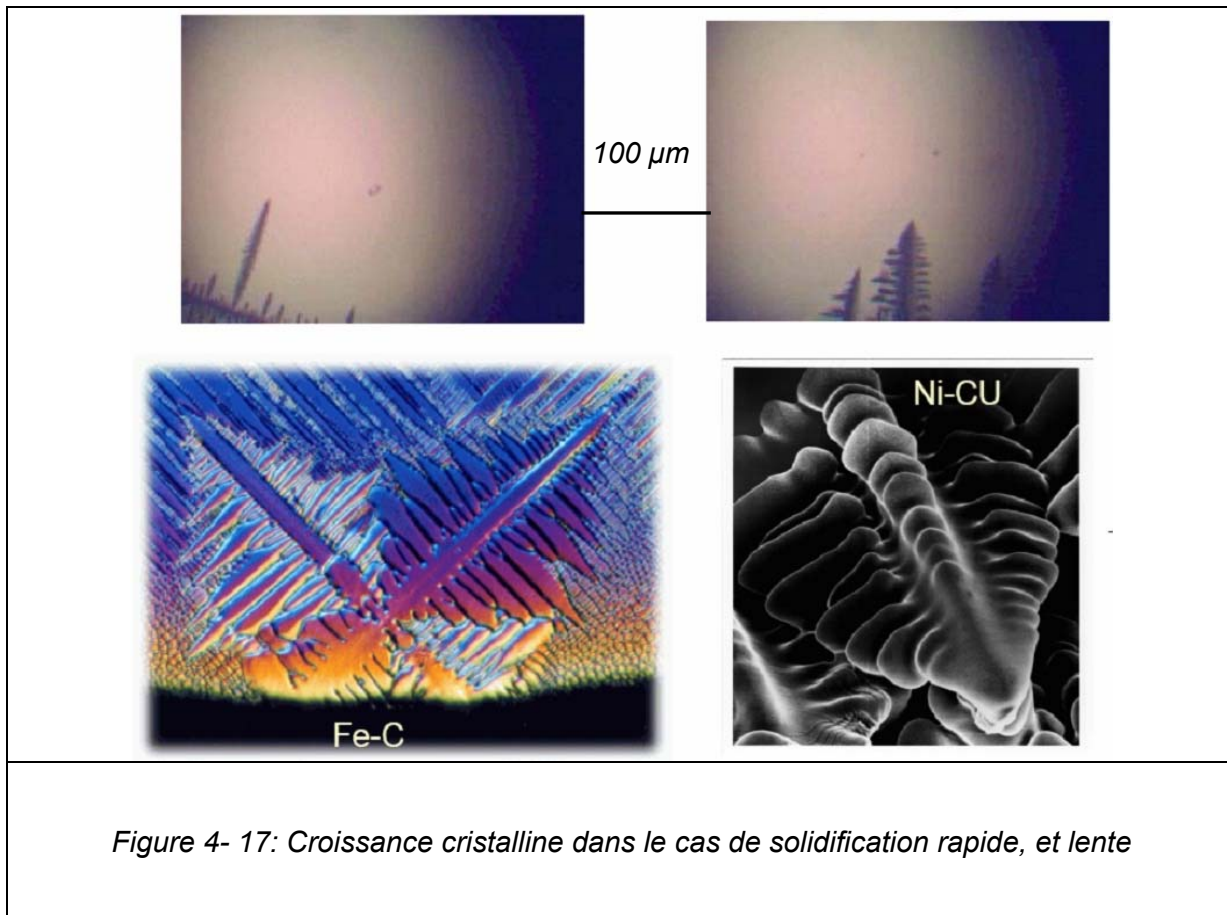
Figure 4- 16: Evolution du front de fusion en fonction du temps pour  $q = 0 \text{ W.m}^{-2}$

### IV.7. La solidification

A l'opposé de la fusion, la solidification constitue le phénomène inverse, lorsqu'un liquide passe progressivement de l'état liquide à l'état solide en libérant de l'énergie (enthalpie de changement de phase). Cette enthalpie diffuse dans le voisinage de l'interface. La compétition entre la diffusion massique et la diffusion thermique impose les structures solides donc les limites de grains et ainsi la forme finale de la phase solide. Le processus de solidification prend place à température constante. La démarche analytique est la même que pour la fusion.

La rapidité de la solidification gouverne la structure et les propriétés du matériau finale (figure 4-17).

Vitesse de solidification faible	Vitesse de solidification élevée
----------------------------------	----------------------------------



## IV.8. Conclusion

Les applications technologiques faisant intervenir une source de chaleur sont nombreuses, notamment dans le domaine de traitements de surfaces. Généralement l'énergie fournie au système est suffisamment élevée pour atteindre et dépasser la température de fusion. La modélisation des phénomènes de changements de phases sont d'une aide précieuse à la compréhension du processus de transformation d'état, de fusion et solidification.

Dans ce chapitre, nous avons fait un recueil des solutions analytiques existantes, avec leur amélioration et adaptation aux cas de problèmes de dimensions finies. Les méthodes analytiques développées permettent aujourd'hui de rendre compte des phénomènes mis en évidence par l'expérience.

Les modèles analytiques, malgré les nombreuses hypothèses simplificatrices, fournissent des appréciations fiables pour l'étude de processus industriels, en évitant le recours systématique à des modèles physiques détaillés nécessitant un investissement important du point de vue mémoires et temps de calcul.

Dans un premier temps, les solutions approchées ont été traitées. Celles de Goodman, Karman-Polhausen, et Megerlin, ont été comparés à la solution exacte de Neumann. Nous avons constaté que ces solutions approchées sont plus fiables pour les nombres de Stefan  $Ste < 1$ , et que pour  $Ste > 1$ , les solutions approchées de Karman – Polhausen, et Megerlin sur-estiment l'évaluation du front de fusion.

Dans un deuxième temps nous avons étudié l'évolution du front de fusion, pour une condition au limite de type température imposé, dans le cas semi-infinie, ensuite cette solution a été étendue au cas d'un domaine borné, en cherchant les conditions de raccordement (cas quasi-stationnaire), entre le cas transitoire (modèle semi-infini), et le cas stationnaire. Quelques résultats ont été fournis pour des matériaux purs (aluminium, étain, cuivre...etc.).

Dans la dernière partie de ce chapitre, les modèles mathématiques de changement de phases (liquide – solide) ont été étudiés pour une condition aux limites de type flux à la surface. Un exemple de traitement thermique par laser d'un domaine semi-infini a été étudié. Les expressions analytiques de températures, ainsi que celle du front de fusion ont été fournies. Les temps nécessaires pour atteindre la température de fusion et de vaporisation ont été établis pour différents matériaux et différentes valeurs de l'intensité de la densité d'énergie du flux laser.

Enfin, un modèle similaire, dans un domaine borné soumis à un flux surfacique, a été développé en se basant sur une approximation des températures sous forme d'une expansion polynomiale de second degré. d'investissement important par rapport à l'amortissement des coûts. C'est pourquoi une

## Références

- [1] **G. Lamé et al**, mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe solide. Ann. Chem. Phys. 47. 250, 1831.
- [2] **J. Stefan et al**. Mat. Natur. 98 473 – 84, 965-83, 1889.
- [3] **J. Stefan**, Uber die theorie der eisbildung, insbesondere unber die eisbildung im polarmeer Ann. Chem. Phys. 42 269- 86, 1891.



- [4] **J. Crank**, Free and moving boundary problems, ed Oxford, Clarendon, 1984.
- [5] **G. C.J. Bart et al**, A model for the extracted heat and phase front position in solidification with boundary condition of the third kind, International Journal of Heat and Mass Transfer, 35 (2): 375– 382, 1992.
- [6] **H.S. Carslaw et al**, Conduction of Heat in Solids. Oxford University Press, Chap. 11, 1959.
- [7] **V. Alexiades et al**, Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes. Hemisphere Publ. Corp, 1993.
- [8] **R. Viskanta**, Phase Change Heat Transfer in Solar Heat Storage : Latent Heat Materials. Vol. 1, ch. 5, p. 153-222, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1983.
- [9] **T.R Goodman**, Application of integral methods to transient non-linear heat transfer. Advances in Heat Mass Transfer, p. 51-122, 1964.
- [10] **B.Sarler**, Stefan's work on solid-liquid phase changes. Engin. Analysis, 16 , p. 83-92, 1995.
- [11] **P. Papon et al**, Physique des Transitions de Phase. Dunod, 1999.
- [12] **L.S. YAO et al**, Heat Transfer, 19, p. 1-95 (1989).
- [13] **H.G.Landau**, Heat conduction in a melting solid. Quart. Applied Math.8, p. 81-94, 1950.
- [14] **G. Poots**, on the application of the integral method to the solution of problems involving the solidification of liquids initially at fusion temperature. Int. J. Heat Mass Transfer, 5, P 525 – 531, 1962.
- [15] **J. M. Hill**, One-Dimensional Stefan Problems: an introduction. Longman Scientific and Technical, 1987.
- [16] **W.-J. Chang, T.-H. Fang**, Modelling of solid-liquid interface during laser processing using inverse methodology, App. Phys. B 80, 373-376 (2005).
- [17] **Z. H. Shen et al**, Mathematical of laser induced heating and melting in solids, Optics & Laser Technology, 33, 533-537 (2001).
- [18] **A. Kar et al**, Mathematical modeling of key-hole laser welding, J Appl Phys, 78 (11), 6353-60, 1995.
- [19] **W. M. Rohsenow et al**, Handbook of heat transfer fundamentals, 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1985.
- [20] **M. Von Allmen**, Laser beam interactions with materials. Berlin: Springer, 1987.
- [21] **A. z. Sahin, B. Dincer**, Analytical modelling of transient phase –change problems, Int. J. Energy. Res. 24, 1029-1039, (2000).



**Chapitre V : Conclusions et  
perspectives**



## Chapitre V: Conclusions et Perspectives

Les phénomènes physico-chimiques liés aux processus de traitement par laser ou projection plasma, sont nombreux, complexes, et dans la plupart des cas l'accès à la mesure de certains paramètres essentiels (température, flux thermique, vitesse de particules, résistance thermique de contact....etc.) est très difficile. Elle devient même impossible lorsqu'il s'agit par exemple de mesurer la température à l'interface d'un bicouche ou la température dans une couche mince. Devant ces difficultés expérimentales, l'intérêt de la modélisation est majeur.

La nécessité d'avoir des modèles ou des solutions analytiques (solutions exactes) aux problèmes de transfert de chaleur et de masse simples, fiables (1D ou 2D) économes en investissements (matériel, humain, temps de calcul, etc.), et capables de donner avec des marges d'erreurs acceptables de bonnes estimations théoriques de l'évolution spatio-temporelle de la température dans un matériau bicouche est primordiale. Cela permet de mieux comprendre les divers phénomènes en présence, et aide à mieux maîtriser le procédé. Les matériaux les plus communément rencontrés dans le domaine des traitements de surfaces sont sous la forme bicouche ou multicouches (dépôt - substrat), avec des dimensions limitées, ce qui conduit à travailler en dimensions finies. La résistance thermiques de contact au niveau de l'interface est variable, et dépend largement des matériaux choisis et des procédés de préparation utilisés. La prise en compte d'une source de chaleur en mouvement est inévitable lorsqu'on s'intéresse à des technologies plasma ou laser.

L'étude présentée dans ce mémoire a concerné la modélisation du transfert instationnaire de chaleur, dans le cas de matériaux bicouches, en tenant compte des particularités suivantes:

- l'aspect transitoire du transfert de la chaleur dans le bicouche;
- la résistance thermique de contact à l'interface;
- le mouvement de la source chaleur (laser, ou plasma, , etc.);
- le profil gaussien de la source de chaleur;
- les dimensions finies imposées par la géométrie des pièces;
- la transmission d'une portion de l'énergie incidente directement au substrat. C'est systématiquement le cas d'un traitement laser de couches minces, qui, selon la longueur d'onde du laser utilisé, devient au dessous de certaine épaisseurs semi-transparentes;
- La porosité du dépôt formé de grains;
- Le changement de phase.

Dans le premier chapitre nous avons présenté brièvement les techniques de traitements de surface par laser et projection thermique. Nous avons aussi dans ce chapitre donné les différents modes de transferts de chaleur, et développé quelques méthodes de modélisation analytiques avec des conditions aux limites, et initiales, simples.

Dans le deuxième chapitre, nous avons élaboré des solutions analytiques de transfert instationnaire de la chaleur en 1D, dans un matériau bicouche de dimensions finies, en tentant

compte de la résistance thermique de contact à l'interface. La méthode utilisée est la séparation des variables. Le problème est ainsi ramené à un problème aux valeurs propres, dont le calcul est possible en utilisant la méthode de Newton-Raphson. Les propriétés d'orthogonalités n'ont pas la forme classique du problème de Sturm-Liouville. Le nombre de valeurs propres nécessaire pour atteindre la convergence des solutions est lié aux rapport de dimensions des dépôts ( $a_1$ ), et des substrats ( $a_2$ ). Pour un rapport  $a_2/a_1=2$ , le nombre de valeurs propres nécessaire est de 20, pour  $a_2/a_1=160$  le nombre nécessaire est de l'ordre de 3000. Généralement on peut postuler que le nombre de valeurs propres nécessaire est compris entre 10 et 20 fois le rapport de l'épaisseur du substrat sur celle du dépôt.

Dans un premier temps, la solution obtenue a été validée par une autre solution obtenue en utilisant la transformée de Laplace appliquée à deux corps semi-infinis à des températures initiales différentes, mis en contact imparfait à leur interface. Le modèle est ensuite appliqué au cas pratique d'estimation de la résistance thermique de contact lors des premiers instants de refroidissement d'un splat sur un substrat après impact. On déduit de nos résultats que dans le cas particulier du refroidissement d'un splat de zircone liquide sur un substrat en zircone solide, le contact thermique à l'interface peut être assumé à un contact parfait pour des valeurs de la RTC  $< 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$ , car l'équilibre thermique est atteint rapidement en moins d'une seconde.

Dans un deuxième temps le terme source est pris en compte sous la forme d'une source volumique (laser ou plasma), ayant un profil gaussien. La vitesse de déplacement de la source est prise en considération, ainsi que les échanges convectifs à la surface de la couche irradiée. Ce problème non homogène est résolu en deux étapes : sans et avec terme source. Le modèle monodimensionnel élaboré, permet d'avoir des estimations théorique rapides de la distribution du gradient thermique, ainsi que le réglage de paramètres pertinents du processus (puissance, diamètre de la gaussienne, vitesse de déplacement de la source). Contrairement aux modèles monodimensionnels trouvés dans la littérature, qui considèrent un contact parfait et une source de chaleur ponctuelle sans déplacement, notre modèle ajoute à sa simplicité la prise en compte de la RTC, du profil gaussien et la vitesse de déplacement de la source, ce qui réduit le nombre d'hypothèses nécessaires à l'élaboration du modèle.

Le modèle 2D établi permet de pallier aux insuffisances des modèles monodimensionnels. Après sa validation, une étude paramétrique a été menée dans le but de comprendre les effets des différents paramètres intervenant dans les expressions des températures. Un flux thermique de type flash est ensuite pris en compte, puis étendu à une source continue dans le temps, fixe ou mobile.

Les matériaux poreux sont très fréquemment utilisés dans l'industrie et doivent être traités à part, c'est ce qui a été fait dans le troisième chapitre, au cours duquel, nous avons étendu l'étude présentée au chapitre deux au cas d'un dépôt poreux de type granulaire. Le principe est de remplacer les propriétés thermophysiques du solide par les propriétés équivalentes (effectives) du mélange (particules et poches d'air), tout en respectant certaines conditions, par exemple, la vitesse du fluide est toujours considérée comme négligeable.

Plusieurs modèles de calcul de la conductivité thermique effective ont été comparés, et la porosité est estimée théoriquement en fonction de la configuration d'empilement tridimensionnel des grains supposés de forme sphérique.

Ces résultats ont été appliqués à un exemple pratique dans le domaine de traitement de surface. Il est relatif à la fabrication de pistes électroniques, par traitement laser direct d'un dépôt poreux de cuivre granulaire prédéposé sur un substrat en alumine. Les résultats ont été fournis pour des pourcentages de porosités variants de 0 à 30%. L'augmentation de la porosité à pour effet la

diminution de la conductivité thermique, par contre, le coefficient d'absorption augmente. La résistance thermique de contact est prise en compte, pour mettre en évidence le mauvais contact thermique entre les couches du fait des contacts quasi-ponctuels des particules sphériques sur le substrat. On note donc d'une part que le contact granulaire sur le substrat accentue la valeur de la RTC, ce qui induit un écart de température important de part et d'autre de l'interface. D'autre part, on note que la couche granulaire absorbe plus efficacement l'énergie fournie par le faisceau laser, du fait de la valeur élevée de son coefficient d'absorption (variable en fonction de la taille et la nature des grains, de la longueur d'onde du laser, et de la température), que celui du métal dense (cas du cuivre).

Malgré sa simplicité on voit donc que notre modèle analytique a permis une estimation théorique correcte de la distribution de la température, en tenant compte au plus près des caractéristiques des matériaux et du procédé: porosité, résistance de contact, profil gaussien du faisceau laser, la vitesse de balayage par exemple. Signalons ici que ce modèle est aussi susceptible de servir à la modélisation du procédé de frittage. Il est utile, et permet rapidement de faire un premier choix de paramètres optimaux aidant à la maîtrise du procédé.

Les applications technologiques faisant intervenir une source de chaleur sont nombreuses, notamment dans le domaine de traitements de surfaces. Généralement, l'énergie fournie au système est suffisamment élevée pour atteindre et dépasser la température de fusion. A ces températures élevées, les phénomènes de changements de phases sont courants et doivent être pris en compte si on veut comprendre et maîtriser le procédé.

Logiquement, lorsque les expressions analytiques des distributions de températures sont obtenues, le fait de fixer la valeur de la température à  $T=T_f$  (ou  $T_f$  est la température de fusion) permettrait par une fonction inverse de trouver la position ou l'instant où un point donné atteint la température de fusion (dans le cas du chauffage), ou la température de solidification (dans le cas d'un refroidissement). Au vu de la complexité des expressions de la température (sous la forme intégrale ou de séries) une telle opération serait très onéreuse, et on préfère faire appel à la modélisation du changement de phase par une approche analytique classique, en dimensions semi-infinies, ou finies.

C'est ce type de problématique que nous avons abordé dans le quatrième chapitre, au cours duquel nous avons présenté les solutions analytiques les plus connues, en les adaptant au cas des problèmes de dimensions finies. Nous avons ainsi pu rendre compte et décrire les phénomènes observés au cours des expérimentations en présentant des solutions analytiques de changement de phase de fusion partielle d'un matériau de dimensions finies.

Dans un premier temps, les solutions approchées ont été traitées. Celles de Goodman, Karman-Polhausen, et Megerlin, ont été comparés à la solution exacte de Neumann. Nous avons constaté que ces solutions approchées sont plus fiables pour les nombres de Stefan  $Ste < 1$ , et que pour  $Ste > 1$ , nous montrons que les solutions approchées de Karman – Polhausen, et Megerlin surestiment l'évaluation du front de fusion.

Dans un deuxième temps, nous avons étudié l'évolution du front de fusion pour une condition au limite de type température imposé dans le cas semi-infini. Cette solution a ensuite été étendue au cas d'un domaine borné, en cherchant les conditions de raccordement (cas quasi-stationnaire), entre le cas transitoire (modèle semi-infini), et le cas stationnaire. Quelques résultats ont été fournis pour des matériaux métalliques purs (aluminium, étain, cuivre...etc.).

Les modèles de changement de phases (liquide – solide) ont enfin été étudiés pour une condition aux limites de type flux à la surface. Le traitement thermique par laser d'un domaine semi-infini a été choisi comme exemple. Les expressions analytiques de températures, ainsi que celle du front de fusion ont été fournies. Les temps nécessaires pour atteindre la température de fusion et de vaporisation ont été établis pour différents matériaux et différentes valeurs de l'intensité de la densité de puissance du flux laser.

Dans un domaine borné soumis à un flux surfacique, un modèle similaire a été abordé en se basant sur une approximation des températures sous forme d'une expression polynomiale du second degré.

Les tests auxquels nous nous sommes livrés montrent que notre approche donne de bonnes estimations de température dans les applications bicouches. Néanmoins, on peut signaler que la méthode de séparation des variables présente certaines difficultés d'ordre informatique, qui sont rencontrées surtout lors de la résolution des équations aux valeurs propres dans le cas bicouche en 2D. Cette difficulté est due au fait que les valeurs propres suivant les deux directions sont interdépendantes de celle suivant la direction parallèle à l'interface, ce qui rend la résolution numérique de cette équation très difficile, et les erreurs de calcul se multiplient et se transmettent d'une étape à la suivante. Cette difficulté disparaît lorsque les deux couches ont la même diffusivité thermique, ce qu'il faut bien reconnaître est relativement rare.

Les modes de calcul que nous proposons dans nos modèles analytiques obtenus par séparation des variables, n'est donc pas parfait et nous pouvons identifier plusieurs sources d'erreurs. Les origines principales sont de deux types:

❑ **origine numérique:**

- le calcul des valeurs propres par des méthodes numériques, qui comme nous venons de le voir est relativement imprécis dans le cas 2D bicouche ;
- le nombre de valeurs à calculer, qui est très élevé;

❑ **origine physique**

- on utilise les valeurs moyennes des propriétés thermophysiques sur une plage de température de fonctionnement;
- les pertes thermiques par rayonnement ne sont pas prises en compte du fait de la non linéarité de leurs expressions dans les conditions aux limites. Ces pertes sont faibles aux températures les plus basses, mais deviennent non négligeables à des température élevées.

Malgré les nombreuses hypothèses simplificatrices, les modèles analytiques développés en 1D et 2D avec termes sources, fournissent cependant des résultats fiables utilisables pour l'étude de processus industriels, en évitant le recours systématique à des modèles physiques détaillés nécessitant un investissement important en mémoire informatique et en temps de calcul. Dans le domaine de traitements de surface, ils peuvent servir d'une part à la détermination de nombreuses propriétés thermophysiques telles que la RTC, la diffusivité et la conductivité thermiques par la méthode flash, et d'autre part à la validation des codes numériques avant leur extensions à des géométries et des conditions aux limites plus complexes.



Les différents modèles présentés sont améliorables. Les différentes hypothèses simplificatrices peuvent être revue et réduites graduellement. Les effets suivant pourraient être introduits, en particulier:

- le couplage du modèle de conduction avec terme source avec les changements de phase dans le bicouche, et l'échange convectif avec le milieux environnant;
- la résistance thermique de contact qui peut être considérée comme variable en instationnaire;
- la dilatation thermique, les contraintes thermomécaniques et plus généralement les propriétés thermophysiques qui varient avec la température peuvent être prises en considération. En particulier la conductivité thermique qui varie fortement en fonction de la température surtout pour les métaux, pourrait être introduite dans le calcul par une transformée de Kirchhoff.
- les pertes de chaleur par rayonnement qui peuvent être estimées, sous forme d'un coefficient  $h_r$  combinant la convection et le rayonnement;

Enfin, et il s'agit là d'un élément très important il serait sûrement intéressant de prendre en compte l'effet des réactions chimiques susceptibles de se produire. Dans cet environnement porté à une très haute température, le plus souvent dans l'air, la réactivité, et tout particulièrement l'oxydation, est souvent active et intervient par le biais de la modification des propriétés globales du bicouche mais aussi de l'introduction d'une phase complémentaire oxydée faisant évoluer le concept du bicouche au tricouche, dans un processus thermodynamique mettant en jeu des énergies qui peuvent être importantes.

## Résumé

Ce travail concerne la modélisation analytique du transfert de chaleur par conduction dans un matériau bicouche en contact imparfait, et soumis à une source de chaleur en mouvement. L'élaboration des solutions analytiques est basée principalement sur la méthode de séparation des variables, ce qui ramène les cas étudiés à des problèmes aux valeurs propres. Les résultats de cette étude sont appliqués aux transferts de chaleur dans les matériaux bicouches.

Nous avons donc établi des modèles ou des solutions analytiques aux problèmes de transfert de chaleur simples, fiables (1D ou 2D) économes en investissements (matériel, humain, temps de calcul, , etc.), capables de donner avec des marges d'erreurs acceptables de bonnes estimations théoriques de l'évolution spatio-temporelle de la température dans un matériau bicouche, ce qui permet de mieux maîtriser le procédé de dépôt. Nous avons travaillé en dimensions finies en intégrant au calcul la résistance thermique de contact, l'aspect transitoire du transfert de la chaleur dans le bicouche, le mouvement de la source chaleur, le profil gaussien de la source de chaleur, les pertes d'énergie dans le substrat, la porosité du dépôt ainsi que des changement de phase.

Nous avons tout d'abord élaboré des solutions analytiques simplifiées de transfert instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait et soumis à une source de chaleur en mouvement. L'approche théorique a été confrontée à des cas pratiques dans le domaine de traitements de surface par plasma ou laser puis étendues aux cas où le traitement de surface est accompagné d'un changement de phase , de fusion ou solidification.

Malgré les nombreuses hypothèses simplificatrices nécessairement introduites dans les calculs, les modèles analytiques développés en 1D et 2D avec termes sources, fournissent cependant des résultats fiables utilisables pour l'étude de processus industriels, en évitant le recours systématique à des modèles physiques détaillés nécessitant un investissement important en mémoire informatique et en temps de calcul. Dans le domaine de traitements de surface, ils peuvent servir à la détermination de nombreuses propriétés thermophysiques telles que la RTC, la diffusivité et la conductivité thermiques par la méthode flash. Ils peuvent être aussi utiles à la validation des codes numériques avant leurs extensions à des géométries et des conditions aux limites plus complexes.

Mots-clés: Solutions analytiques, conduction, résistance thermique de contact, matériau bicouche, source de chaleur en mouvement, milieu poreux, changement de phase.

## **Abstract**

The aim of this work is to find and derive analytical solutions of unsteady heat conduction in a two-layered material with imperfect thermal contact, subjected to a moving heat source. The used analytical method is based in most cases on the method of separation of variables, which lead to solve an eigenproblem. The results of this study are applied to heat transfer in two-layered materials.

Simple and reliable analytical 1D and 2D heat transfer models were derived, owing to their high efficiency in terms of calculation time and equipment. These models are able to give reasonably good theoretical estimates of the evolution of the time dependant temperature in the layered material.

We worked in finite dimensions taking into account the thermal resistance of contact, the transient aspect of the transfer in the two-layered sample. The velocity of the moving heat source and the gaussian profil of the source energy, losses of heat by convection above the coating and the porosity of the deposit were taken into account. The results are applied to a practical cases of surface treatment like laser cladding of electronic tracks of copper on alumina substrate, thermal contact estimation in solidification of splat on substrate in plasma spraying.

Inspite of numerous necessary assumptions introduced, the developed analytical models in 1D and 2D with heat source terms, provide useful results for studying industrial processes, avoiding use of industrial packages. In addition the present study is useful to thermal diffusivity and thermal contact resistance determination using a flash method. They can be also useful for verification and validation of numerical codes before extending their use to more complex geometries and boundary conditions.

Keywords: Analytical solution, conduction, thermal contact resistance, two-layered material, moving heat source, porous media, phase change.