



HAL
open science

Etudes de quelques modélisations de structures en composite à haute rigidité en flexion

Marie-Hélène Philippe

► **To cite this version:**

Marie-Hélène Philippe. Etudes de quelques modélisations de structures en composite à haute rigidité en flexion. Matériaux. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1997. Français. NNT: . tel-00529473

HAL Id: tel-00529473

<https://pastel.hal.science/tel-00529473>

Submitted on 25 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE
présentée pour l'obtention du diplôme de
DOCTEUR
DE
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Spécialité : Structures et Matériaux

présentée par :

Marie-Hélène PHILIPPE

Sujet de la thèse :

**ÉTUDES DE QUELQUES MODÉLISATIONS
DE STRUCTURES EN COMPOSITE
A HAUTE RIGIDITÉ EN FLEXION**

**Soutenue à Champs-sur-Marne, le 22 avril 1997
devant le jury composé de :**

Président : S.W. TSAI

**Rapporteurs : P. HAMELIN
G. INGLEBERT**

**Examineurs : M. BUTEAU
T. NACIRI**

Directeur de thèse : A. EHRLACHER

RESUME

L'objet de ce mémoire est de proposer des outils de conception pour le dimensionnement en raideur de panneaux fléchissants en composite à rigidité spécifique élevée.

On y présente dans une première partie, une nouvelle formulation de la théorie classique des stratifiés de Reissner-Mindlin (Théorie de Sab), et des modélisations multiparticulaires issues de la théorie M4 (Modélisation Multiparticulaire des Matériaux Multicouches), adaptées à la description du comportement des structures traditionnelles sandwich en composite, dont on connaît les propriétés mécaniques équivalentes de l'âme.

Dans une seconde partie, on s'intéresse au développement d'une modélisation d'une nouvelle structure sandwich en composite possédant une âme hétérogène constituée de parois raidissantes transversales, baptisée structure alvéolaire et mise au point au CERAM de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (ENPC). Une méthode d'homogénéisation a permis de remplacer le milieu hétérogène alvéolaire 3D par un milieu homogène équivalent 2D.

Les validations de ces modèles ont été effectuées en comparant les résultats obtenus avec des solutions exactes ou des maillages éléments-finis réalisés avec le code de calcul SAMCEF. Elles ont permis de montrer la pertinence des différentes modélisations développées dans ce mémoire. Leur intégration prévue dans un code de calcul par éléments-finis industriel permettra de disposer d'outils numériques 2D permettant de dimensionner simplement et efficacement les structures sandwichs et alvéolaires.

ABSTRACT

This work is devoted to the development of new modellings of composite structures with high specific bending stiffness. The purpose is to propose suitable tools for the analysis of flexural stiffness.

In the first part of the thesis, new plate modellings (2D modellings) are proposed to describe sandwich structures which core is homogeneous (foams) or can be considered as homogeneous (honeycombs). A new formulation of the classical sandwich theory based upon the Reissner-Mindlin kinematic assumptions (the Sab's theory), and multiparticle sandwich modellings based upon the M4 theory (Multiparticle Modelling of the Multilayered Materials), are developed.

The second part is devoted to a modelling of a new sandwich structure called « hollow-core composite », with an heterogeneous core made of a serie of diagonal stiffeners, and which technology was developed at the CERAM laboratory of the ENPC. The hollow-core heterogeneous 3D medium was turn into an equivalent homogeous 2D medium by using an homogeneization process.

Assessments of these modellings were conducted by comparing results from analytical exact solutions or finite-element meshes of the software SAMCEF. The accuracy of the different modellings developed in this thesis were shown. They should be used to develop 2D finite-element meshes integrated in a market software, which will simplify the design of the sandwich and hollow-core structures.

MOTS-CLES

Composite - Sandwich - Alvéolaire - Dimensionnement - Flexion - Plaque - Théories des stratifiés - Milieux homogènes équivalents - Milieux multiparticulaires

REMERCIEMENTS

La préparation d'une thèse est une oeuvre de longue haleine qui demande un moral suffisamment constant. L'équipe du CERAM que j'ai connue au cours de cette préparation m'a beaucoup soutenue moralement par son amitié et ses encouragements qui n'ont jamais fait défaut. C'est donc à l'ensemble du laboratoire qui m'a accueillie et formée durant cette période que j'adresse mes remerciements.

J'exprime particulièrement toute ma gratitude à Alain EHLACHER, Directeur du Centre d'Enseignement et de Recherche en Analyse des Matériaux (CERAM) de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (ENPC), qui m'a acceptée dans son équipe et qui malgré l'énorme charge de travail à laquelle il avait à faire face, a assumé la direction de ma thèse. Son immense culture et la justesse de ses analyses ont été pour moi des phares de grande clarté dans l'univers encore mal connu des matériaux composites.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Taieb NACIRI qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés. Je lui dois beaucoup et notamment la connaissance et la maîtrise de la modélisation M4.

Pour la partie pratique d'élaboration des panneaux composites alvéolaires, et les essais, je voudrais remercier Jean-François CARON, Gilles FORET, Jacques MANOUKIAN, et Patrice MONTES qui m'ont aidée de façon très sympathique. J'espère atteindre un jour leur habileté à manier les matériaux composites.

Une partie notable de ma thèse est le fruit d'une collaboration entre le CERAM, la SNCF, GEC-Alstom Transport, l'Institut de Recherches de la Construction Navale (IRCN), le ministère chargé de l'Industrie et le ministère chargé des Transports (Direction des Transports Terrestres). Je voudrais remercier tous ces grands partenaires du CERAM qui nous ont permis de vérifier la pertinence de nos calculs et méthodes sur des problèmes précis et concrets. Je voudrais remercier plus particulièrement Michel BUTEAU qui a été du côté SNCF le responsable technique du projet « remorque intermédiaire en composite » (RIC) et qui a eu la gentillesse d'accepter de participer à mon jury de thèse.

Je remercie très chaleureusement mes deux rapporteurs, Geneviève INGLEBERT et Patrice HAMELIN qui ont pris le temps d'examiner avec une attention bienveillante mon travail et d'apporter quelques critiques constructives.

Enfin je n'oublie pas le président du jury le Professeur Stephen W. TSAI, qui malgré ses nombreuses charges à l'Université de Stanford et en Europe, a pris le temps de passer un après midi à l'ENPC pour la soutenance de ma thèse. Je serais heureuse de voir là, le début d'une coopération franche et amicale entre l'équipe du Professeur TSAI à Stanford et le CERAM.

A mes parents

TABLES DES MATIERES

NOTATIONS	8
-----------	---

INTRODUCTION	11
--------------	----

1^{ERE} PARTIE: NOUVELLES MODELISATIONS DE PLAQUES SANDWICHS EN COMPOSITE	16
--	-----------

CHAPITRE I: MODELISATIONS DE PLAQUES SANDWICHS	17
---	-----------

I.1 INTRODUCTION	17
------------------	----

I.2 MODELISATION CLASSIQUE DE SANDWICHS	23
---	----

I.2.1 Modélisation classique des multicouches (modèle de Sab)	24
I.2.1.1 Puissance virtuelle des efforts intérieurs	25
I.2.1.2 Puissance virtuelle des efforts extérieurs	27
I.2.1.3 Application du principe des puissances virtuelles: Equations d'équilibre et conditions aux limites du modèle classique	28
I.2.1.4 Identification du comportement	31
I.2.2 Application aux sandwichs	34
I.2.3 Conclusion	39

I.3 MODELES SANDWICHS MULTIPARTICULAIRES	40
--	----

I.3.1 Le modèle triparticulaire complet	40
I.3.1.1 Ecriture des équations d'équilibre et des conditions aux limites	41
I.3.1.2 Changement d'échelle avec le milieu 3D	46
I.3.1.3 Identification du comportement du modèle triparticulaire complet	50
I.3.2 Le modèle triparticulaire simplifié	52
I.3.2.1 Ecriture des équations d'équilibre et des conditions aux limites	53
I.3.2.2 Changement d'échelle avec le milieu 3D	54
I.3.2.3 Comportement du modèle triparticulaire simplifié	56
I.3.3 Conclusion	57

CHAPITRE II: ETUDE COMPARATIVE DE LA FLEXION DE PANNEAUX SANDWICHS	60
---	-----------

II.1 ETUDES DE PANNEAUX SANDWICHS EN FLEXION CYLINDRIQUE: COMPARAISON AVEC UNE SOLUTION ANALYTIQUE EXACTE	60
--	----

II.1.1 Formulation du problème de flexion cylindrique pour les différentes théories	61
II.1.1.1 Solution exacte de Pagano	63
II.1.1.2 Théorie sandwich classique et théorie de Sab	63
II.1.1.3 Théories sandwichs multiparticulaires	64
II.1.2 Exemples d'application	70
II.1.2.1 Présentation de l'étude	70
II.1.2.2 Résultats	70

II.2 COMPARAISON NUMERIQUE	
AVEC LE CODE DE CALCUL PAR ELEMENTS-FINIS SAMCEF	78
II.2.1 Modélisation de structures sandwichs par éléments-finis avec le logiciel SAMCEF	79
II.2.1.1 Les éléments quadrangles multicouches de SAMCEF pour les composites stratifiés	79
II.2.1.2 Techniques de modélisation des plaques sandwichs en composite	80
II.2.2 Exemples d'application	82
II.2.2.1 Exemple 1: Flexion 3 points de plaque sandwich	83
II.2.2.2 Exemple 2: Flexion 4 points de poutres sandwichs	84
II.2.2.3 Synthèse des résultats	87
II.3 CONCLUSION	89

2^{EME} PARTIE: MODELISATION DE PLAQUES SANDWICHS ALVEOLAIRES EN COMPOSITE	90
---	-----------

**CHAPITRE III: CONCEPTION ET ELABORATION
DES STRUCTURES ALVEOLAIRES DU CERAM** **91**

III.1 MOTIVATION ET ETUDES PRELIMINAIRES	92
III.2 ELABORATION	95
III.3 COMPARAISON ESSAIS/SIMULATIONS: VALIDATION DES MODELES ELEMENTS-FINIS	96
III.3.1 Modélisation éléments-finis des structures alvéolaires	97
III.3.2 Essais de flexion	99
III.3.2.1 Flexion transversale suivant e_1	99
III.3.2.2 Flexion longitudinale suivant e_2	102
III.3.2.3 Pression uniforme	105
III.3.3 Conclusion	108

**CHAPITRE IV: MISE AU POINT
D'UN MODELE MECANIQUE ALVEOLAIRE** **109**

IV.1 INTRODUCTION	109
IV.2 HYPOTHESES DE TRAVAIL	111
IV.2.1 Choix de la cellule élémentaire	111
IV.2.2 Description des champs mésoscopiques	112
IV.3 IDENTIFICATION DES EFFORTS MACROSCOPIQUES	114
IV.3.1 Champs résultants sur la face $x = 0^+$	116
IV.3.2 Champs résultants sur la face $x = 0^-$	119
IV.3.3 Champs résultants sur la face $y = 0$	121
IV.3.4 Mise en évidence des efforts macroscopiques	125
IV.4 ECRITURE DES EFFORTS MESOSCOPIQUES EN FONCTION DES EFFORTS MACROSCOPIQUES	126
IV.5 DETERMINATION DE LA LOI DE COMPORTEMENT EQUIVALENTE	127
IV.5.1 Définitions et notations	128
IV.5.2 Détermination des inconnues hyperstatiques	130
IV.5.2 Détermination de la loi de comportement de la plaque alvéolaire	130
IV.6 CONCLUSION	132

CHAPITRE V: VALIDATION ANALYTIQUE	
DU MODELE DE PLAQUE ALVEOLAIRE EQUIVALENT	133
V.1 COHERENCE ET VALIDATION DU MODELE SUR UN CAS SIMPLE:	
LA PLAQUE ALVEOLAIRE EN MATERIAU ISOTROPE	133
V.1.1 Comportement d'une plaque alvéolaire en matériau isotrope	134
V.1.2 Etude de la flexion pure suivant la direction e_1	135
V.1.3 Etude de la flexion pure suivant la direction e_2	143
V.1.4 Conclusion	145
V.2 VALIDATION DU MODELE DE PLAQUE ALVEOLAIRE EQUIVALENT	
EN FLEXION CYLINDRIQUE	145
V.2.1 Détermination de la déflexion avec la modélisation éléments-finis	147
V.2.2 Détermination de la déflexion avec le modèle alvéolaire homogénéisé	148
V.2.3 Résultats	151
V.2.3.1 Résultats de l'exemple 1	151
V.2.3.2 Résultats de l'exemple 2	156
V.2.4 Conclusion	159
CHAPITRE VI: APPLICATION AU FLAMBEMENT	
TRANSVERSE DE PANNEAUX ALVEOLAIRES	160
VI.1 INTRODUCTION	160
VI.2 ETUDE DU FLAMBEMENT GLOBAL	161
VI.3 ETUDE DU FLAMBEMENT LOCAL	168
VI.4 LONGUEUR CARACTERISTIQUE DE FLAMBEMENT	170
VI.5 APPLICATION	171
VI.5.1 Analyse théorique du flambement	172
VI.5.2 Comparaison avec une modélisation numérique de SAMCEF	174
VI.5.3 Autres conditions aux limites	176
VI.5.4 Comparaison avec les premiers résultats expérimentaux	177
VI.6 CONCLUSION	178
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES	179
REFERENCES	182
ANNEXES	189

NOTATIONS

Dans ce mémoire, nous utiliserons les notations suivantes:

Un vecteur quelconque x de l'espace euclidien 3D sera noté:	\underline{x} ,
Un tenseur quelconque A d'ordre 2 de l'espace euclidien 3D:	$\underline{\underline{A}}$,
Un vecteur quelconque x de l'espace euclidien 2D:	\tilde{x} ,
Un tenseur quelconque A d'ordre 2 de l'espace euclidien 2D :	$\tilde{\underline{\underline{A}}}$,

Ω désignera un cylindre ouvert de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , de base $\omega \subset \mathbb{R}^2$ et de hauteur h ,

$(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ un repère orthonormé de l'objet 3D Ω , tel que $\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \wedge \underline{e}_2$ et tel que le plan défini par $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ coïncide avec le plan moyen des panneaux sandwichs ou alvéolaires,

$\underline{v}^*(x, y, z)$ le tenseur du champ de vitesses virtuelles,

$\tilde{V}^*, \tilde{\varphi}^*$ les composantes de $\underline{v}^*(x, y, z)$ dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$,

W^* la composante normale au plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ de $\underline{v}^*(x, y, z)$,

$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*)$ le tenseur des taux de déformations associés au champ de vitesse virtuelle $\underline{v}^*(x, y, z)$,

$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}^*)$ le tenseur des contraintes associées au champ de vitesse virtuelle $\underline{v}^*(x, y, z)$,

$\tilde{\underline{\underline{N}}}$ le tenseur des résultantes de plaque en membrane,

$\tilde{\underline{Q}}$ le vecteur des résultantes de plaque en cisaillement,

$\tilde{\underline{M}}$ le tenseur des moments de plaque en flexion-torsion,

$\tilde{\underline{N}}^j$ le tenseur des résultantes de plaque en membrane par couche de matériau,

$\tilde{\underline{Q}}^j$ le vecteur des résultantes de plaque en cisaillement par couche de matériau,

$\tilde{\tau}^{j,j+1}$ le vecteur des efforts de cisaillement à l'interface entre la couche j et la couche $j+1$,

$\underline{v}^{j,j+1}$ le vecteur des efforts d'arrachement à l'interface entre la couche j et la couche $j+1$,

$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{M} \\ \tilde{Q} \end{pmatrix}$ le vecteur des efforts intérieurs de plaque généralisés (en notation ingénieur),

\underline{F} la densité surfacique des efforts extérieurs sur le domaine ω ,
 $\underline{\tilde{C}}$ la densité surfacique des moments extérieurs sur le domaine ω ,
 \underline{R} la densité linéique des efforts sur le bord γ du domaine ω ,
 $\underline{\tilde{H}}$ la densité linéique des moments extérieurs sur le bord γ du domaine ω .

$\underline{u}(x, y, z)$ le vecteur des déplacements,
 u_1, u_2, w les composantes membranaires et transversale du vecteur déplacement $\underline{u}(x, y, z)$ respectivement dans les axes $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$,
 ψ_1, ψ_2 les composantes de rotation du vecteur déplacement $\underline{u}(x, y, z)$ respectivement dans les axes $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$,

$\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}_0(\underline{u})$ le tenseur des déformations de plaque membranaires,
 $\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}_1(\underline{u})$ le tenseur des courbures de plaque en flexion et en torsion,
 $\tilde{\underline{V}}_w + \tilde{\underline{\Psi}}$ le vecteur des déformations de plaque en cisaillement transverse,

$\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}^j(\underline{u})$ le tenseur des déformations de plaque membranaires de la couche j ,
 $\tilde{\underline{D}}^{j,j+1}$ le vecteur des discontinuités tangentes à l'interface entre la couche j et la couche $j+1$,
 $\underline{D}_3^{j,j+1}$ le vecteur des discontinuités normales à l'interface entre la couche j et la couche $j+1$,

$\underline{\underline{E}} = \begin{Bmatrix} \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}_0(\underline{u}) \\ \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}_1(\underline{u}) \\ \tilde{\underline{V}}_w + \tilde{\underline{\Psi}} \end{Bmatrix}$ le vecteur des déformations généralisées de plaque (en notation ingénieur),

$\underline{\underline{\Lambda}}$ la matrice du tenseur des souplesses généralisées de plaque (en notation ingénieur),

$\underline{\underline{C}}$ le tenseur des constantes de rigidité de coefficients C_{ijkl} ,
 $\underline{\underline{S}}$ le tenseur des constantes de souplesse de coefficients S_{ijkl} ,

$\underline{\underline{Q}}$ le tenseur des rigidités réduites (en notation ingénieur),

E_i	le module d'Young dans la direction i ,
G_{ij}	le module de cisaillement transverse dans le plan (i, j) ,
ν_{ij}	le coefficient de Poisson,
$\underline{\underline{A}}$	le tenseur des rigidités membranaires de plaque,
$\underline{\underline{D}}$	le tenseur des rigidités en flexion et torsion de plaque,
$\underline{\underline{B}}$	le tenseur des couplages membrane-flexion-torsion de plaque,
$\underline{\underline{F}}$	le tenseur de rigidité en cisaillement transverse de plaque (théorie classique),
$\underline{\underline{P}}^{-1}$	le tenseur de rigidité en cisaillement transverse de plaque (théorie de Sab),
L	la longueur d'un panneau sandwich,
b	la largeur d'un panneau sandwich,
h	la hauteur d'un panneau sandwich,

INTRODUCTION GENERALE

Ce mémoire est dédié au développement de nouvelles modélisations de composites fléchissants à rigidité en flexion spécifique élevée, utilisés dans la réalisation de pièces de structures travaillantes. L'objectif est de présenter des outils de dimensionnement pertinents vis à vis de leur rigidité en flexion qui constitue le critère dimensionnant principal des structures fléchissantes en composite.

Les structures sandwichs dont l'utilisation n'a cessé d'augmenter depuis un demi-siècle, sont les composites les plus utilisés en tant que pièces de structures travaillantes, grâce à des propriétés de flexion supérieures à celles des composites monolithiques ou stratifiés. A l'origine, les sandwichs étaient considérés comme des matériaux « high-tech » réservés aux secteurs de pointe comme l'industrie aéronautique où ils ont été introduits dès la seconde guerre mondiale. Depuis, les sandwichs ont envahi tous les secteurs d'activités. Ils sont maintenant utilisés dans les secteurs de grande consommation comme l'automobile, le génie civil, la navigation ou le sport (*Hamelin 1994*). Leur introduction dans le secteur ferroviaire est d'actualité avec la conception et la réalisation d'un premier prototype de TGV 2 niveaux en composite sandwich (*Cléon 1994*), (*Erguez 1992*).

Leurs propriétés mécaniques exceptionnelles de flexion viennent de leur géométrie particulière en « sandwich ». Ces structures sont composées de deux peaux (ou semelles) qui enserrant une âme (ou coeur) définie par une couche de matériau plus épaisse (cf. figure 0.1). Les peaux sont constituées par un matériau dense, résistant et rigide (métal, stratifiés, contre-plaqués, thermoplastiques...) et l'âme, par un matériau de plus faible densité et de moins bonnes caractéristiques mécaniques (mousses, nids d'abeille, balsas...). Le rôle mécanique des peaux est de reprendre les efforts de tension et de compression, celui de l'âme de maintenir l'écartement des peaux et de transmettre les efforts de cisaillement d'une peau à l'autre (*Hamelin 1994*).

Ce concept de structure permet ainsi d'augmenter l'inertie de flexion des plaques stratifiées en augmentant les moments quadratiques de flexion qu'induit l'éloignement des plans moyens des peaux par rapport à celui de la structure. Ainsi, les sandwichs reprennent mieux les moments de flexion au niveau des peaux et les efforts tranchants au niveau de l'âme.

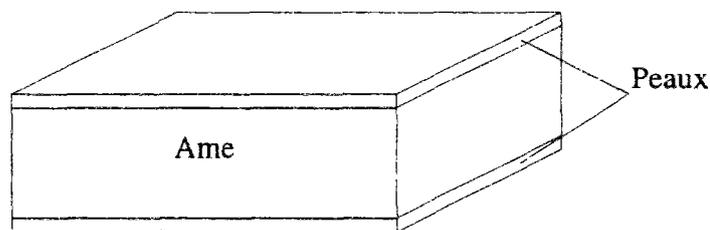


Figure 0.1: Structures sandwichs

Les structures sandwichs en composite représentent un domaine de recherche très vaste et d'applications immenses tant il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles. Ce sont en général des outils bâtis à partir de modèles

mécaniques bidimensionnels (2D). La principale difficulté dans la modélisation des composites sandwichs (et des composites en général) est liée à leur caractère hétérogène.

Dans ce mémoire, nous mettrons au point dans une première partie, de nouvelles modélisations 2D de structures sandwichs classiques dont l'âme est homogène (mousses) ou assimilable à un matériau homogène (nids d'abeilles), et nous développerons dans une seconde partie, des modélisations classiques de nouvelles structures sandwichs dont le coeur creux est hétérogène, ce qui nécessite l'emploi de procédé d'homogénéisation pour bâtir une modélisation 2D.

Passons en revue rapidement les différentes familles de théories de plaques sandwichs existant à ce jour, pour situer les modélisations que nous proposons, et pour souligner les objectifs que nous poursuivons dans le cadre de la première partie de ce mémoire.

Les analyses de plaques sandwichs, proposées au cours de ces trois dernières décennies, sont pour la grande majorité issues de théories de plaques stratifiées.

Une première famille de théories est destinée à l'étude des caractéristiques globales d'un stratifié (déflexion maximale, modes propres de vibration, charge critique d'instabilité,...). Il s'agit de théories de plaques multicouches qui décrivent le stratifié comme un milieu homogène équivalent. Les théories dites classiques font partie de cette famille. Elles sont bâties à partir des hypothèses de Love-Kirchhoff pour les plaques minces (*Ambarsumyan 1958*), (*Dong, Pister et Taylor 1962*), (*Librescu 1975*) et de Reissner-Mindlin pour les plaques épaisses ou sandwichs (*Reissner 1972*), (*Whitney et Pagano 1970*). Ces dernières, qui ne vérifient pas les conditions de continuité aux interfaces, ont été améliorées avec le développement de théories fondées sur des hypothèses plus riches d'ordre trois ou quatre dans l'épaisseur (*Sun et Whitney 1973*), (*Levinson 1980*), (*Reddy 1984*).

Nous proposerons une modélisation des plaques sandwichs pour résoudre les problèmes de raideur, issue de la théorie classique des plaques stratifiées de Reissner-Mindlin améliorée par Sab (*1995a*). Nous verrons que l'avantage de cette théorie est de pouvoir s'adapter à tous les types de problèmes de sandwichs minces ou épais.

Ces théories où le stratifié est vu comme un milieu homogène équivalent sont cependant inadaptées à la description des endommagements des composites (délaminage, fissurations transverses,...) puisqu'elles postulent des champs continus dans l'épaisseur.

Pour étudier ces phénomènes d'endommagement, on utilise d'autres théories pour lesquelles on définit des champs par couche. Ces théories donnent ainsi accès aux déformations et aux contraintes par couche et interlaminaires (*Seide 1980*), (*Murakami 1986*), (*Robbins et Reddy 1993*).

Afin d'analyser les problèmes d'endommagements des plaques sandwichs, nous développerons également dans ce mémoire des modélisations qui postulent des cinématiques par couche. Nous construirons des théories sandwichs multiparticulaires basées sur le modèle M4 (Modèle Multiparticulaire des Matériaux Multicouches). L'intérêt de ce modèle est qu'il met en évidence les contraintes d'interfaces (ou interlaminaires) entre les couches de matériau, qui gouvernent les processus d'endommagement des matériaux composites et les effets de bords (*Ehrlacher, Chabot et Naciri 1994*). Nous présenterons deux théories multiparticulaires différentes.

Les composites sandwichs présentent cependant quelques inconvénients. Ils sont sujets aux problèmes d'endommagement par décohésion qui constituent leur principal point faible. L'assemblage des peaux et de l'âme d'un sandwich s'effectuant généralement par collage, la

liaison peau/âme n'est donc jamais parfaite pour des matériaux d'âmes de type nids d'abeille. D'où les risques de décohésion par décollement par fatigue ou vieillissement.

Dans la seconde partie du mémoire, nous nous intéresserons donc à une nouvelle structure sandwich en composite, à âme creuse en Δ et à rigidité spécifique élevée, mise au point au Centre d'Enseignement et de Recherche en Analyse des Matériaux (CERAM) de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. Ces composites sandwichs, baptisés *structures alvéolaires*, ont été conçus pour tenter d'améliorer les propriétés de rigidité en flexion des matériaux sandwichs et pour éliminer les problèmes d'endommagement par décohésion.

Les composites alvéolaires sont comme les sandwichs, constitués de deux peaux chargées de reprendre les efforts de tension et de compression, mais l'âme y est remplacée par une structure creuse formée de parois intérieures disposées transversalement en treillis, pour reprendre les efforts de cisaillement et maintenir l'écartement des peaux (figure 0.2). L'élaboration de ces structures alvéolaires s'effectue par une technologie de type moulage au sac sous vide, à partir d'un matériau composite préimprégné.

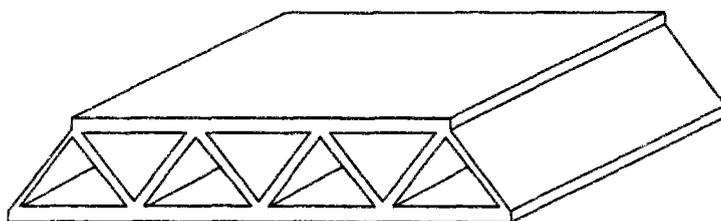


Figure 0.2: Structure en composite alvéolaire

Le composite alvéolaire présente en outre quelques avantages intrinsèques à sa géométrie par rapport à la structure sandwich classique. Il est possible d'adapter les qualités du composite alvéolaire en jouant sur la quantité, l'orientation et la nature des fibres dans les peaux et les raidisseurs. Les plaques qui sont des structures creuses permettent durant la fabrication, le passage et même l'intégration d'autres pièces (câbles, canalisation).

Une étude bibliographique nous a permis de révéler l'existence de deux types de structures composites semblables aux composites alvéolaires. Il s'agit dans un cas, d'une technologie de composite tissé tridimensionnel (3D) qui permet actuellement de fabriquer des panneaux de petites dimensions, d'environ quelques mm d'épaisseur (Ko 1990). Dans l'autre cas, il s'agit de tabliers de ponts élaborés avec une nouvelle technologie composite: la technologie de moulage par infusion mise au point par une grande société américaine de l'industrie chimique (Eveno et al. 1996). Ces structures peuvent cette fois atteindre plusieurs dizaines de cm d'épaisseur. Cependant les technologies utilisées pour les élaborer sont complètement différentes de la technologie du CERAM. La géométrie et les propriétés physiques et mécaniques du composite alvéolaire (épaisseurs des parois, poids, rigidité,...) sont donc différentes de celles de ses homologues.

Dans la seconde partie du mémoire, nous proposerons de construire des outils d'analyse et de conception pour les structures alvéolaires, en développant un modèle de plaque équivalent bidimensionnel. Celui s'appuiera sur le processus d'homogénéisation des milieux hétérogènes périodiques.

Nous présenterons également une application de ce modèle à l'étude de flambement de panneaux alvéolaires. Nous nous intéresserons à la direction transversale (direction perpendiculaire aux alvéoles de la structure), plus sensible aux efforts de compression que la direction longitudinale (sens des alvéoles). Nous développerons ainsi des modèles de flambement transverse, destinés à résoudre les problèmes d'instabilités des treillis.

Dans ce présent mémoire de thèse, on trouvera deux parties distinctes, l'une dédiée aux modélisations de sandwich, l'autre aux structures en composite alvéolaire.

La première partie, intitulée « Nouvelles modélisations de plaques sandwichs en composite » comprendra les chapitres suivants,

- Un premier chapitre (Chapitre I) sera consacré aux modélisations des plaques sandwichs. Deux types de modélisations y seront présentées.
 - ☞ Un modèle issu de la théorie des stratifiés de Sab, appartenant à la famille des théories classiques, au même titre que les modèles des stratifiés fondées sur les hypothèses cinématiques de Reissner-Mindlin, et qui se distingue de ceux - ci par l'écriture du coefficient de rigidité en cisaillement.
 - ☞ Des modélisations multiparticulaires basées sur le modèle M4 (Modélisation Multiparticulaire des Matériaux Multicouches) du CERAM, mieux adaptées à la description des endommagements.
- Un second chapitre (Chapitre II) présentera dans une première partie, les résultats obtenus par les modèles précédents et la modélisation de sandwich classique de Reissner-Mindlin, dans le cas d'une flexion cylindrique de panneaux de grande largeur, vis à vis de la solution analytique exacte de Pagano. La seconde partie de ce chapitre proposera de comparer la maille élément-fini multiparticulaire par rapport à des mailles éléments finis classiquement utilisées dans la description de plaques sandwichs, et élaborées avec le code de calcul SAMCEF. Nous y montrerons, pour les deux exemples, la pertinence de la modélisation de Sab et des théories multiparticulaires pour un dimensionnement en raideur.

La seconde partie du mémoire, qui a pour titre « Modélisation de plaques sandwichs alvéolaires en composite », comprendra les chapitres suivants,

- Un premier chapitre (Chapitre III) fera une synthèse des études préliminaires de conception et de dimensionnement des composites alvéolaires avec le logiciel SAMCEF, de la technologie actuellement employée pour la fabrication des composites alvéolaires et présentera des essais de validation en raideur du concept alvéolaire, permettant de juger de la pertinence des calculs éléments finis SAMCEF réalisés avec des maillages 3D de coques minces.
- Un deuxième chapitre (Chapitre IV) sera consacré à une modélisation de la plaque alvéolaire. L'objectif sera de transformer le milieu alvéolaire hétérogène en un milieu homogène équivalent, en effectuant un changement d'échelle par une méthode d'homogénéisation. La méthode mise en oeuvre s'inspirera de la technique d'homogénéisation des milieux périodiques. L'écriture de l'énergie élastique du milieu permettra d'en déduire une loi de comportement du milieu alvéolaire.

- Un troisième chapitre (Chapitre V) aura pour objectif de valider le modèle de plaque alvéolaire en flexion vis à vis de simulations numériques SAMCEF. Nous étudierons d'abord le cas d'un panneau alvéolaire en matériau homogène en flexion pure. Nous mettrons en évidence l'originalité du comportement global de la structure alvéolaire. Nous verrons que dans une direction du plan nous pourrions comparer l'expression de la rigidité en flexion du modèle par rapport à une solution analytique exacte issue d'un calcul d'inertie de flexion. Puis dans une seconde partie, nous aborderons l'exemple de poutre alvéolaire en composite en flexion cylindrique, dans lequel nous étudierons l'influence des caractéristiques composites sur les résultats. Dans ces exemples, nous montrerons la précision du modèle de plaque alvéolaire équivalent par rapport à la solution exacte et à SAMCEF.
- Un quatrième chapitre (Chapitre VI) présentera des modèles de flambement dans la direction transverse du composite alvéolaire. Ils seront validés par des essais réalisés par l'Institut de Recherches de la Construction Navale (IRCN).



PREMIERE PARTIE

NOUVELLES MODELISATIONS

DE PLAQUES SANDWICHES EN COMPOSITE

CHAPITRE I

MODELISATIONS DE PLAQUES SANDWICHES

I.1 INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à la construction de modélisations de plaques sandwichs, destinées à la résolution de problèmes de mécanique en approximation quasi-statique, et s'appuyant sur la méthode des puissances virtuelles. Celle-ci nous permettra de présenter, dans une première partie, une formulation de la théorie des plaques stratifiées (*Sab 1995a*) dont est issue la théorie classique des plaques sandwichs que nous proposons. Puis, dans une seconde partie, nous développerons de nouveaux modèles de plaques sandwichs, à partir de la modélisation multiparticulaire des matériaux multicouches (modèle M4) (*Ehrlacher et Naciri 1995a*).

Auparavant, nous proposons d'effectuer une revue bibliographique afin de donner un aperçu des modélisations existantes pour les plaques sandwichs, et de poser le problème à résoudre.

Synthèse bibliographique

L'introduction des composites sandwichs dans la plupart des secteurs d'activités a conduit les chercheurs à développer des théories de plaques sandwichs, dédiées à l'analyse et à la prévision de leur comportement et de leur tenue en service.

Quelques analyses de plaques sandwichs sont basées sur des formulations d'élasticité tridimensionnelle (*Pagano 1969*), (*Pagano 1970*), (*Srinivas et Rao 1970*), (*Srinivas 1973*), mais la majorité des analyses développées sont des études 2D issues des théories de plaques multicouches (elles-mêmes élaborées, pour la plupart, à partir de théories de plaques homogènes).

Notez cependant, que les toutes premières analyses de plaques sandwichs, publiées entre le milieu des années 1940 et la fin des années 60, ont été développées directement à partir d'études de plaques homogènes. Citons Reissner qui a développé des études de plaques sandwichs (*1948*), (*1950*), en utilisant le principe du minimum de l'énergie complémentaire. Il a résolu le problème d'une plaque sandwich à peaux et âme isotropes en supposant que l'âme ne reprend que les contraintes en cisaillement transverse et les peaux uniquement les efforts de membrane. Des chercheurs vont tenter d'améliorer et de généraliser sa théorie sandwich (*Goodier et Neou 1951*), (*Heath 1960*), (*Raville 1955*), (*Allen 1969*). Cheng en 1962 modifie le problème de Reissner pour résoudre des plaques sandwichs à âme orthotrope et à peaux isotropes. Cette étude sera complétée par celle de Liaw et Little (*1967*), et celle de Azar (*1968*). Evoquons également Libove et Batdorf (*1948*) qui traitent le problème de plaques sandwichs anisotropes à peaux minces, à partir de la théorie classique de Love-Kirchhoff qu'ils modifient en introduisant des rigidités de cisaillement, de flexion et de torsion. Ces travaux seront plus tard étendus par ceux de Seide et Stowell (*1949*) et de Robinson (*1955*). Enfin, indiquons que Ericksen et March (*1950*) proposent de résoudre le cas général d'un panneau sandwich non symétrique à peaux épaisses en développant une méthode de Rayleigh-

Ritz qui consiste à écrire les solutions sous forme de séries. Ces analyses sont ainsi généralement complexes et aboutissent à des solutions au prix de l'utilisation de nombreuses hypothèses. Signalons néanmoins, que l'on utilise encore certaines de ces théories pour résoudre des problèmes de poutres sandwichs (*Mukhopadhyay et Sierakowski 1990*), (*Van Voorhees et Green 1992*), (*Mukhopadhyay, Sierakowski et Yu 1994*).

A partir de 1970, une nouvelle méthode d'investigation va être mise en oeuvre pour l'étude des sandwichs, avec le développement des théories de plaques stratifiées dont les premières formulations datent de la fin des années 1950. Les chercheurs vont associer étroitement l'étude des stratifiés à celles des plaques sandwichs, qui ne sont après tout que des stratifiés un peu particuliers.

Jusqu'à présent, la majorité des analyses de plaques stratifiées propose de décrire le multicouche comme un milieu homogène équivalent. Les méthodes employées pour la construction de ces théories s'appuient essentiellement sur l'introduction d'hypothèses initiales de type cinématique. Les premiers développements des stratifiées pour les plaques minces (peu sensibles au cisaillement transverse) sont dus à Ambarsumyan (1958), Lekhnitskii (1968), Reissner et Stavsky (1961), et pour les plaques plus épaisses et sandwichs, par Yang, Norris et Stavsky (1966). Les théories des stratifiés, dites classiques, sont construites à partir d'un schéma de déformation du premier degré, soit de Love-Kirchhoff (Love 1934), (Kirchhoff 1876) pour les plaques minces (Librescu 1975), (Tsai 1988), soit à partir de celles de Reissner-Mindlin (Reissner 1945), (Mindlin 1951) pour des plaques plus épaisses et les plaques sandwichs (Whitney 1972), (Berthelot 1992).

La description de Reissner-Mindlin est toutefois la plus répandue car les stratifiés présentent toujours une sensibilité au cisaillement transverse. Elle postule un champ de déplacement linéaire dans l'épaisseur. Elle induit ainsi une valeur de la contrainte de cisaillement transverse constante dans l'épaisseur du multicouche qui demande l'introduction de facteurs de correction. De nombreuses études ont été réalisées visant à améliorer cette théorie en éliminant les facteurs de correction. Il existe ainsi des analyses plus sophistiquées qui, moyennant l'introduction de nouvelles inconnues, proposent de vérifier les conditions aux limites en définissant des champs cinématiques dans l'épaisseur d'ordre trois (Lo, Christensen et Wu 1977), (Murthy 1981), (Krishna Murty 1988), d'ordre quatre ou supérieur (Librescu et Reddy 1989) ou encore sous la forme d'une répartition sinusoïdale dans l'épaisseur (Touratier 1989), (Ossadzo, Muller et Touratier 1995).

Ces théories ont l'inconvénient de supposer la composante verticale du déplacement constante dans l'épaisseur du sandwich. Les déformations transverses sont ainsi continues aux interfaces et les déformations et les contraintes au niveau des interfaces ne sont pas accessibles. Les théories de plaques équivalentes ne peuvent donc pas décrire et prédire les endommagements dans les stratifiés. Ces constatations ont motivé le développement de théories définissant les champs par couche.

Les premières théories datent des années 1970 (Nelson et Lorch 1974), (Epstein et Glockner 1977), (Macquire, Petitpas et Valentin 1977). La plupart des théories définissent des champs cinématiques par couche (Owen et Li 1987), (Rio 1990), (Di Sciuva et Icardi 1993). Elles se distinguent par le choix de la cinématique employée pour décrire le déplacement de chaque couche. Les choix sont très divers. Ainsi, Garrett et Bailey (1977) ont considéré une cinématique à $2n$ champs scalaires (en notant n le nombre de couches), pour bâtir le modèle du Shear-Lag: les deux composantes de déplacement moyen dans le plan de chaque couche. Pagano et Soni (1983) ont eux, défini une cinématique à $7n$ champs scalaires: trois composantes de déplacement moyen dans chaque couche, plus deux composantes de rotation

normale et enfin le premier et le second moment de la composante normale dans l'épaisseur de chaque couche. (Notez que la signification physique de ces deux derniers paramètres n'est pas aussi évidente que pour les cinq autres).

Le modèle multiparticulaire des matériaux multicouches (modèle M4) du CERAM de l'ENPC entre dans cette catégorie (Ehrlacher et Naciri 1995a). Il est bien adapté à l'étude des endommagements dans les composites et des effets de bords, puisqu'il exhibe les contraintes responsables, au niveau des interfaces entre les couches (Ehrlacher, Naciri, Chabot et Caron 1994). Il a été appliqué à l'étude de la fissuration transverse des matériaux composites (Caron 1993), à l'étude de la rupture des composites unidirectionnels (Foret 1995), et à l'étude du délaminage des multicouches (Ehrlacher, Chabot et Naciri 1994). Des analyses de composites stratifiés en dynamique rapide ont également été effectuées avec le modèle M4 (Smaoui 1996).

Le choix de la cinématique du modèle M4 a fait l'objet de plusieurs études. Le premier choix s'est porté sur une cinématique à $3n$ champs scalaires (trois composantes de déplacement moyen dans chaque couche). Puis une version simplifiée du M4, destinée uniquement à la résolution de problèmes de réponse globale a été développée avec une cinématique à $2n+1$ champs scalaires (deux composantes de déplacement moyen dans le plan dans chaque couche, plus une composante normale identique dans chaque couche). Des cinématiques plus riches sont également à l'étude. Il s'agit de cinématiques à $5n$ champs scalaires (trois composantes de déplacement moyen dans chaque couche, plus deux composantes normales de rotation) et à $7n$ champs scalaires comme pour le modèle de Pagano et Soni (1983), (Carreira 1998), (Chabot 1997). Ces deux dernières cinématiques du modèle M4 se montrent d'une très grande précision pour la description du comportement des stratifiés; notamment pour celle des effets de bord. Cependant le nombre d'inconnues augmente très rapidement avec le nombre de couches, ce qui conduit à des calculs d'une très grande complexité d'autant plus que le nombre de champs scalaires de la cinématique est élevé.

Nous proposons dans ce chapitre, deux types de modélisations de composites sandwichs.

Dans un premier temps nous développerons une théorie « classique », basée sur les hypothèses cinématiques de Reissner-Mindlin, qui propose une nouvelle expression du coefficient de rigidité au cisaillement transverse (Sab 1995a). L'intérêt de cette modélisation est qu'elle permet de s'affranchir des facteurs de correction, sans augmenter le nombre d'inconnues cinématiques.

Dans un second temps, nous construirons des modélisations sandwichs multiparticulaires à partir du modèle M4. Ces modélisations ont l'avantage, par rapport aux modélisations classiques, d'être également applicables à des problèmes d'endommagement de plaques sandwichs. La cinématique d'un modèle sandwich multiparticulaire sera cependant particulièrement riche par rapport à une modélisation sandwich classique, au détriment sans doute du caractère opératoire du modèle. Nous montrerons cependant qu'il est possible de construire pour les sandwichs des théories multiparticulaires qui soient opératoires en considérant le sandwich comme un empilement de trois couches ($n=3$). Nous simplifierons autant que possible la cinématique des modèles multiparticulaires sandwichs en envisageant une cinématique à $3n$ champs scalaires, soit à 9 champs scalaires (3×3), puis une seconde cinématique à $2n+1$ champs scalaires, soit à 7 champs scalaires ($2 \times 3 + 1$). Nous appellerons ces modélisations, *modèles triparticulaires* (ou à trois particules), en référence au nombre de couches présentes dans la modélisation.

Position du problème

Dans ce qui suit, nous considérons une plaque sandwich constituée de 2 peaux et d'une âme (figure 1.1).

A cet objet 3D, on associe un repère orthonormé $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ tel que $\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \wedge \underline{e}_2$ et tel que le plan défini par $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ coïncide avec le plan moyen du sandwich.

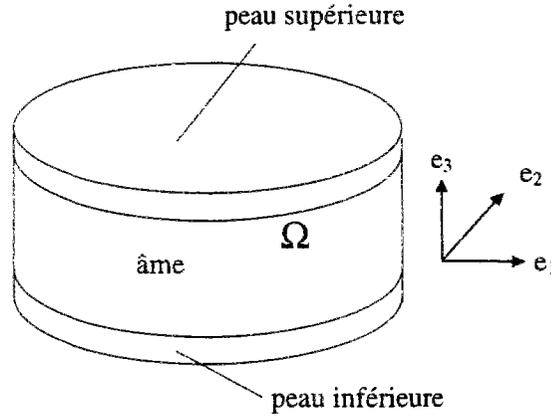


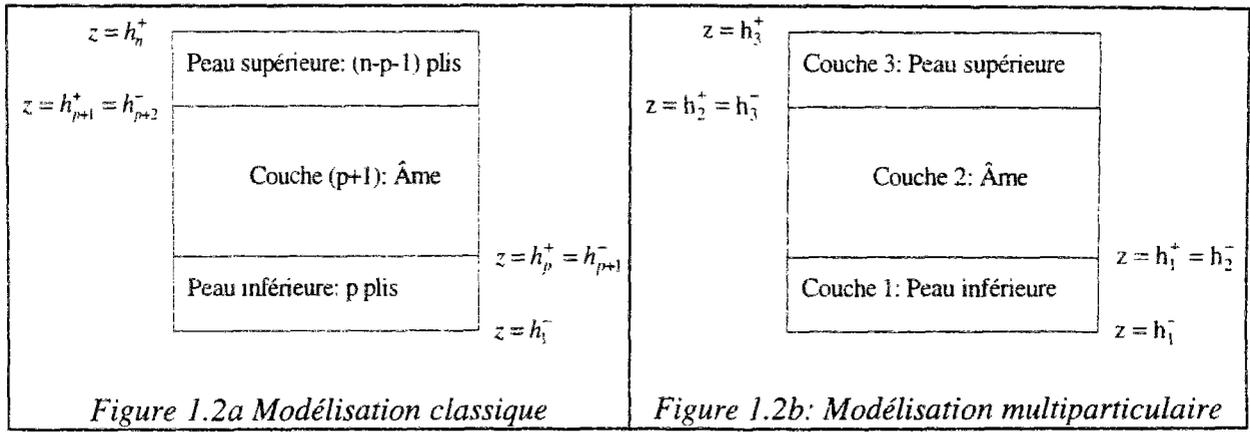
Figure 1.1: Description de l'objet sandwich 3D

La plaque sandwich 3D peut être décrite comme un cylindre ouvert Ω de l'espace \mathbb{R}^3 de base $\omega \subset \mathbb{R}^2$ et de hauteur h .

$$\Omega = \omega \times]h^-, h^+[$$

$$\text{où } h^- = -\frac{h}{2} < 0 \quad h^+ = \frac{h}{2} > 0$$

Nous noterons h_j^+ , h_j^- , et \bar{h}_j la côte supérieure, la côte inférieure, et la côte médiane de la couche j , e^j l'épaisseur de la couche j , tel que $e^j = h_j^+ - h_j^-$. L'épaisseur de l'âme sera désignée par la grandeur d . Nous supposons pour la modélisation classique, que le sandwich est constitué de n couches (p plis pour la peau inférieure numérotés de 1 à p , $(n-p-1)$ plis pour la peau supérieure, numérotés de $p+2$ à n , l'âme est la couche numérotée $p+1$), et pour les modélisations multiparticulaires, de 3 couches en considérant les peaux comme des couches homogènes (cf. figure 1.2a et 1.2b).



Figures 1.2a et 1.2b : Description du sandwich dans l'épaisseur

On introduit ensuite les notations de frontière de Ω .

Le bord de la plaque est noté $\Gamma = \gamma \times]h^-, h^+[$ avec γ la frontière de ω . Les faces inférieure et supérieure du sandwich sont notées $\Gamma^- = \omega \times \{h^-\}$ et $\Gamma^+ = \omega \times \{h^+\}$ respectivement.

Décrivons maintenant les efforts extérieurs qui s'exercent sur l'objet 3D. On distingue:

- les efforts de volume dans Ω : \underline{f}
- les efforts de surface sur Γ : \underline{T}
- les efforts de surface sur Γ^+ : \underline{T}^+
- les efforts de surface sur Γ^- : \underline{T}^-

Nous supposons que la plaque est en équilibre sous l'action de ces efforts extérieurs. Notons $\underline{\underline{\sigma}}$ le champ de contraintes du milieu 3D. Ce champ vérifie alors les équations d'équilibre suivantes:

$$(1.1) \quad \begin{cases} \underline{\underline{\text{div}}}\underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T} & \text{sur } \Gamma \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T}^+ & \text{sur } \Gamma^+ \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T}^- & \text{sur } \Gamma^- \end{cases}$$

L'écriture du principe des puissances virtuelles nous donne de façon équivalente, en notant $PI(\underline{v}^*)$ la puissance virtuelle des efforts intérieurs et $PE(\underline{v}^*)$ la puissance virtuelle des efforts extérieurs,

$$(1.2) \quad PI(\underline{v}^*) + PE(\underline{v}^*) = 0$$

pour tout champ de vitesses virtuelles \underline{v}^* .

Nous construirons des modèles de plaques sandwichs en utilisant la méthode des puissances virtuelles. Nous choisirons l'espace vectoriel des vitesses virtuelles qui nous permettront de faire travailler les efforts que l'on désire étudier. Nous écrirons l'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs à partir de laquelle nous ferons apparaître naturellement les efforts intérieurs généralisés des modèles. De même, nous écrirons l'expression de la puissance virtuelle des efforts extérieurs pour exhiber les efforts extérieurs généralisés avant d'appliquer le principe des puissances virtuelles.

Nous obtiendrons ainsi les équations d'équilibre reliant les efforts de plaque et les conditions aux limites des différentes modélisations sandwichs. Le comportement sera déterminé en identifiant l'énergie élastique du milieu 3D à celui du milieu 2D.

Nous adopterons l'hypothèse de petites perturbations. La configuration actuelle sera donc confondue avec la configuration de référence. Le mouvement de chacune des particules pourra être décrit par les champs de vitesse virtuelle sur la configuration d'origine.

La pertinence des modélisations sandwichs de Sab et multiparticulaires, développées dans ce chapitre, sera évaluée au chapitre suivant par rapport à la modélisation classique de sandwich de Reissner-Mindlin.

Notations

Dans ce chapitre consacré à la présentation de différentes modélisations de plaques sandwichs, nous utiliserons un certain nombre de notations pour repérer les différentes grandeurs intervenant dans ce travail.

Les indices grecs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ prendront leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2\}$, les indices latins i, j, k, l, m dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Nous noterons les différents champs intervenant dans ce travail de la façon suivante,

\underline{x} désignera un vecteur de l'espace 3D $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$,

$\underline{\underline{A}}$ un tenseur d'ordre 2 de l'espace 3D $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$,

\tilde{x} un vecteur de l'espace 2D $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$

$\tilde{\underline{\underline{A}}}$ un tenseur d'ordre 2 de l'espace 2D $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$,

Nous utiliserons les notations symboliques suivantes pour écrire les vecteurs et les tenseurs d'ordre 2 sous forme matricielle.

Soit \underline{x} un vecteur de l'espace 3D de coordonnées (x, y, z) nous noterons,

$$\{\underline{x}\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \{\underline{x}\} = \begin{Bmatrix} \{\tilde{x}\} \\ z \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \{\tilde{x}\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

$\{\tilde{x}\}$ étant la matrice colonne des coordonnées dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ de \tilde{x} .

Soit \underline{A} un tenseur symétrique d'ordre 2 de l'espace 3D de coordonnées $(a_{ij})_{i,j=1,3}$ nous noterons les composantes de \underline{A} sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{aligned} [\underline{A}] &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} & \text{ou} & [\underline{A}] = \begin{pmatrix} [\tilde{a}] & \{\tilde{a}_{\alpha 3}\} \\ \{\tilde{a}_{\alpha 3}\} & a_{33} \end{pmatrix} \\ & \text{avec} & [\tilde{a}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} & \text{et} & \{\tilde{a}_{\alpha 3}\} = \begin{Bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$[\underline{A}]$ représente ainsi la matrice des composantes de tenseur \underline{A} dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$,

$[\tilde{a}]$ la matrice des composantes de tenseur \tilde{a} dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$, \tilde{a} étant la restriction du tenseur \underline{A} dans le repère $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$,

$\{\tilde{a}_{\alpha 3}\}$ la matrice colonne des composantes a_{13}, a_{23} de \underline{A} .

I.2 MODELISATION CLASSIQUE DE SANDWICHS

Nous proposons dans cette partie de construire une formulation de la théorie classique des stratifiés fondée sur les hypothèses cinématiques de Reissner-Mindlin que nous appellerons par la suite théorie de Sab (*Sab 1995a*), puis de déduire le modèle de sandwich à partir de cette théorie des stratifiés en effectuant les hypothèses classiques de comportement des peaux et de l'âme de la structure. Nous mettrons en évidence les différences entre la théorie présentée (Théorie de Sab) et la théorie classiquement utilisée pour l'étude des plaques stratifiées et sandwichs (Théorie de Reissner-Mindlin), elle-même basée sur les hypothèses de Reissner-Mindlin mais dont la démarche de construction diffère de celle de Sab (*cf. Berthelot 1992*).

I.2.1 Modélisation classique des multicouches (modèle de Sab)

Pour bâtir cette théorie, considérons le champ de vitesse virtuelle de Reissner-Mindlin, à cinq champs scalaires, continu sur Ω ,

$$(1.3) \quad \underline{v}^*(x, y, z) = \begin{cases} \tilde{V}^*(x, y) + z\tilde{\varphi}^*(x, y) \\ W^*(x, y) \end{cases}$$

où $\tilde{V}^* + z\tilde{\varphi}^*$ sont les deux composantes de \underline{v}^* dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$, telles que,

$$\tilde{V}^*(x, y) + z\tilde{\varphi}^*(x, y) = \begin{cases} V_1^*(x, y) + z\varphi_1^*(x, y) \\ V_2^*(x, y) + z\varphi_2^*(x, y) \end{cases}$$

et W^* est la composante normale au plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

En hypothèse de petites perturbations, le tenseur des taux de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*)$ associé au champ de vitesse virtuelle \underline{v}^* (1.3) sur le domaine Ω , que nous noterons $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ par la suite, peut s'écrire sous une forme linéaire en z ,

$$(1.4) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^*(x, y, z) = \underline{\underline{\varepsilon}}_0^*(x, y) + z\underline{\underline{\varepsilon}}_1^*(x, y)$$

où,

$$(1.5) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_0^* = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\underline{\varepsilon}}_0^* \\ \frac{1}{2}(\tilde{V}W^* + \tilde{\varphi}^*) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\tilde{V}W^* + \tilde{\varphi}^*) \\ 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (1.6) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_1^* = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\underline{\varepsilon}}_1^* \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}}_0^* &= \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1^*}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_1^*}{\partial y} + \frac{\partial V_2^*}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_1^*}{\partial y} + \frac{\partial V_2^*}{\partial x} \right) & \frac{\partial V_2^*}{\partial y} \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}_1^* &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial x} \right) & \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \{\tilde{V}W^*\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial W^*}{\partial x} \\ \frac{\partial W^*}{\partial y} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Pour déterminer les équations d'équilibre et les conditions aux limites du modèle classique de sandwich, nous allons écrire le principe des puissances virtuelles pour ce champ de vitesse virtuelle à 5 composantes scalaires, en exprimant dans un premier temps la puissance virtuelle des efforts intérieurs, puis la puissance virtuelle des efforts extérieurs.

Nous déduirons par la suite, le comportement du modèle de plaque sandwich que nous présentons, en identifiant l'énergie en contraintes 3D avec l'énergie de plaque.

1.2.1.1 Puissance virtuelle des efforts intérieurs

La puissance virtuelle des efforts intérieurs $PI(\underline{v}^*)$ de la plaque stratifiée, pour le champ de vitesse virtuelle \underline{v}^* , est par définition l'opposé de l'intégrale sur Ω du produit doublement contracté entre les contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ et les taux de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*)$.

$$(1.7) \quad PI(\underline{v}^*) = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*) d\Omega$$

Soit, en utilisant la relation (1.4) et en distinguant les intégrales dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ et dans l'épaisseur,

$$(1.8) \quad PI(\underline{v}^*) = - \int_{\omega} \left(\int_{h^-}^{h^+} \underline{\underline{\sigma}} dz \right) : \underline{\underline{\varepsilon}}_0^* d\omega - \int_{\omega} \left(\int_{h^-}^{h^+} \underline{\underline{\sigma}} z dz \right) : \underline{\underline{\varepsilon}}_1^* d\omega$$

Dans cette dernière relation, faisons apparaître les composantes des tenseurs de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ et des taux de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*)$, dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$, et orthogonaux au plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ en introduisant la notation suivante pour les composantes du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$, similaire à celles du tenseur des taux de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*)$,

$$(1.9) \quad [\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} [\tilde{\underline{\sigma}}] & \{\tilde{\underline{\sigma}}_{\alpha 3}\} \\ \{\tilde{\underline{\sigma}}_{\alpha 3}\} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

où

$$[\tilde{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad \{\tilde{\underline{\sigma}}_{\alpha 3}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

En décomposant la relation (1.8) à l'aide des expressions des champs de déformations (1.5) et (1.6) et des contraintes (1.9), on obtient une nouvelle écriture de la puissance virtuelle des efforts intérieurs $PI(\underline{v}^*)$:

$$(1.10) \quad PI(\underline{v}^*) = - \int_{\omega} \left[\left(\int_{h^-}^{h^+} \tilde{\sigma} dz \right) : \tilde{\varepsilon}_0^* + \left(\int_{h^-}^{h^+} \tilde{\sigma}_{\alpha 3} dz \right) \cdot (\tilde{\nabla} W^* + \tilde{\varphi}^*) \right] d\omega - \int_{\omega} \left(\int_{h^-}^{h^+} \tilde{\sigma} z dz \right) : \tilde{\varepsilon}_1^* d\omega$$

A partir de cette relation, on fait apparaître les efforts classiques de plaque, en introduisant les notations suivantes,

$$(1.11) \quad \tilde{N}(x, y) = \int_{h^-}^{h^+} \tilde{\sigma}(x, y, z) dz$$

$$(1.12) \quad \tilde{Q}(x, y) = \int_{h^-}^{h^+} \tilde{\sigma}_{\alpha 3}(x, y, z) dz$$

$$(1.13) \quad \tilde{M}(x, y) = \int_{h^-}^{h^+} \tilde{\sigma}(x, y, z) \cdot z dz$$

où \tilde{N} est le tenseur des résultantes en membrane,
 \tilde{Q} le vecteur des résultantes en cisaillement,
 \tilde{M} le tenseur des moments de flexion-torsion.

Ces efforts de plaque sont définis par unité de largeur.

La relation (1.10) devient,

$$(1.14) \quad PI(\underline{v}^*) = - \int_{\omega} \left[\tilde{N} : \tilde{\varepsilon}_0^* + \tilde{Q} \cdot (\tilde{\nabla} W^* + \tilde{\varphi}^*) + \tilde{M} : \tilde{\varepsilon}_1^* \right] d\omega$$

Intégrons par parties la relation précédente, pour faire apparaître une expression de $PI(\underline{v}^*)$ qui ne dépend que des composantes du champ de vitesse virtuelle \underline{v}^* ,

$$(1.15) \quad PI(\underline{v}^*) = \int_{\omega} \left[\operatorname{div} \tilde{N} \cdot \tilde{V}^* + \operatorname{div} \tilde{Q} \cdot W^* - \tilde{Q} \cdot \tilde{\varphi}^* + \operatorname{div} \tilde{M} \cdot \tilde{\varphi}^* \right] d\omega \\ - \int_{\gamma} \left[\tilde{N} \cdot \tilde{V}^* \cdot \underline{n} + \tilde{Q} \cdot W^* \cdot \underline{n} + \tilde{M} \cdot \tilde{\varphi}^* \cdot \underline{n} \right] d\gamma$$

où \underline{n} désigne le vecteur normal au bord γ , tangent à ω .

Nous avons ainsi calculé une expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs en fonction uniquement des composantes du champ de vitesse virtuelle et des efforts intérieurs du modèle, sur ω et son bord γ .

Ecrivons à présent la puissance virtuelle des efforts extérieurs.

1.2.1.2 Puissance virtuelle des efforts extérieurs

La puissance des efforts extérieurs $PE(\underline{v}^*)$ s'écrit classiquement comme la somme de deux termes d'intégrales des efforts de volume et de surface.

$$(1.16) \quad PE(\underline{v}^*) = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v}^* d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{T} \cdot \underline{v}^* d\Gamma + \int_{\Gamma^+} \underline{T}^+ \cdot \underline{v}^* d\Gamma^+ + \int_{\Gamma^-} \underline{T}^- \cdot \underline{v}^* d\Gamma^-$$

Soit, en distinguant les intégrations dans le plan ω et dans l'épaisseur,

$$(1.17) \quad PE(\underline{v}^*) = \int_{\omega} \left\{ \int_{h^-}^{h^+} \underline{f} \cdot \underline{v}^* dz \right\} + \underline{T}^+ \cdot \underline{v}^*(x, y, h^+) + \underline{T}^- \cdot \underline{v}^*(x, y, h^-) \Bigg\} d\omega + \int_{\gamma} \left(\int_{h^-}^{h^+} \underline{T} \cdot \underline{v}^* dz \right) d\gamma$$

Posons,

$$(1.18) \quad \underline{F} \text{ défini par} \quad \{\underline{F}\} = \begin{Bmatrix} \underline{\tilde{F}} \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{h^-}^{h^+} \tilde{f} dz + \tilde{T}^+ + \tilde{T}^- \\ \int_{h^-}^{h^+} f_3 dz + T_3^+ + T_3^- \end{Bmatrix}$$

$$(1.19) \quad \tilde{C} \text{ défini par} \quad \{\tilde{C}\} = \begin{Bmatrix} \int_{h^-}^{h^+} \tilde{f} \cdot z dz + \tilde{T}^+ h^+ + \tilde{T}^- h^- \end{Bmatrix}$$

$$(1.20) \quad \underline{R} \text{ défini par} \quad \{\underline{R}\} = \begin{Bmatrix} \underline{\tilde{R}} \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{h^-}^{h^+} \tilde{T} dz \\ \int_{h^-}^{h^+} T_3 dz \end{Bmatrix}$$

$$(1.21) \quad \tilde{H} \text{ défini par} \quad \{\tilde{H}\} = \begin{Bmatrix} \int_{h^-}^{h^+} \tilde{T} \cdot z dz \end{Bmatrix}$$

\underline{F} représente la densité surfacique des efforts extérieurs sur le domaine ω ,

\tilde{C} la densité surfacique des moments extérieurs sur le domaine ω ,

\underline{R} la densité linéique des efforts sur le bord γ du domaine ω ,

\tilde{H} la densité linéique des moments extérieurs sur le bord γ du domaine ω .

La relation (1.17) devient ainsi, en introduisant les relations (1.18) à (1.21),

$$(1.22) \quad PE(\underline{v}^*) = \int_{\omega} (\underline{\tilde{F}} \cdot \underline{\tilde{V}}^* + F_3 \cdot W^* + \tilde{C} \cdot \tilde{\varphi}^*) d\omega + \int_{\gamma} (\underline{\tilde{R}} \cdot \underline{\tilde{V}}^* + R_3 \cdot W^* + \tilde{H} \cdot \tilde{\varphi}^*) d\gamma$$

Cette relation s'exprime uniquement en fonction des composantes du champ de vitesses virtuelles et des efforts extérieurs.

Appliquons maintenant le principe des puissances virtuelles pour relier les efforts intérieurs de la plaque stratifiée, aux efforts extérieurs.

I.2.1.3 Application du principe des puissances virtuelles: Equations d'équilibre et conditions aux limites du modèle classique

L'exploitation de la relation (1.2) valable pour tout champ de vitesse virtuelle \underline{v}^* nous permet d'écrire les équations d'équilibre qui régissent les efforts intérieurs généralisés \tilde{N} , \tilde{Q} et \tilde{M} .

En choisissant $\tilde{\varphi}^* = W^* = 0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{N} + \tilde{F} &= 0 && \text{sur } \omega \\ \tilde{N} \cdot \underline{n} &= \tilde{R} && \text{sur } \gamma \end{aligned}$$

En choisissant $\tilde{V}^* = \tilde{\varphi}^* = 0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{Q} + F_3 &= 0 && \text{sur } \omega \\ \tilde{Q} \cdot \underline{n} &= R_3 && \text{sur } \gamma \end{aligned}$$

En choisissant $\tilde{V}^* = W^* = 0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{M} + \tilde{C} - \tilde{Q} &= 0 && \text{sur } \omega \\ \tilde{M} \cdot \underline{n} &= \tilde{H} && \text{sur } \gamma \end{aligned}$$

En résumé les équations d'équilibre et les conditions aux limites du modèle classique de plaque stratifiée sont,

$$(1.23) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \tilde{N} + \tilde{F} = 0 \\ \operatorname{div} \tilde{Q} + F_3 = 0 \\ \operatorname{div} \tilde{M} + \tilde{C} - \tilde{Q} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \omega$$

$$(1.24) \quad \begin{cases} \tilde{N} \cdot \underline{n} = \tilde{R} \\ \tilde{Q} \cdot \underline{n} = R_3 \\ \tilde{M} \cdot \underline{n} = \tilde{H} \end{cases} \quad \text{sur } \gamma$$

Les efforts intérieurs généralisés du modèle sont donc les efforts de plaque $(\tilde{N}, \tilde{M}, \tilde{Q})$ que nous noterons dans la suite $\{\underline{\Sigma}\}$. Nous noterons les composantes de $\{\underline{\Sigma}\}$ sous la forme matricielle suivante:

$$(1.25) \quad \{\underline{\Sigma}\} = \begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ Q_2 \\ Q_1 \end{Bmatrix}$$

Remarque: Dans la notation de $\{\underline{\Sigma}\}$, nous utilisons ce qui est communément appelé la notation d'ingénieur (*Ehrlacher et Naciri 1995b*). Cette notation utilise les propriétés de symétrie des tenseurs \tilde{N} et \tilde{M} .

Les taux de déformations généralisés associés aux efforts généralisés apparaissent comme les opposés des cofacteurs des efforts généralisés dans l'expression de la puissance des efforts intérieurs (1.14). En hypothèse de petites perturbations, les déformations généralisées sont « naturellement » associées à ces taux de déformations. Nous choisissons d'écrire les déplacements sous la forme suivante,

$$(1.26) \quad \underline{u}(x, y, z) = \tilde{u}_p(x, y, z) + w(x, y) \cdot \underline{e}_3$$

$$\text{avec } \tilde{u}_p(x, y, z) = \tilde{u}(x, y) + z\tilde{\psi}(x, y)$$

$$\text{où } \{\tilde{u}(x, y)\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \{\tilde{\psi}(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}$$

u_1, u_2 représentent les composantes membranaires du déplacement $\underline{u}(x, y, z)$,

w la composante transversale de $\underline{u}(x, y, z)$,

ψ_1, ψ_2 les composantes du vecteur des rotations de section dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$

Les déformations généralisées sont donc,

$\tilde{\varepsilon}_0(\underline{u})$ le tenseur des déformations membranaires,

$\tilde{\varepsilon}_1(\underline{u})$ le tenseur des courbures en flexion et en torsion,

$\tilde{\nabla}w + \tilde{\psi}$ le vecteur des déformations en cisaillement transverse.

dont les composantes sont,

$$\left[\tilde{\varepsilon}_0(\underline{u}) \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\left[\tilde{\varepsilon}_1(\underline{u}) \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

et $\left\{ \tilde{\nabla}w + \tilde{\psi} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_1 \end{Bmatrix}$

Nous utiliserons comme pour les efforts généralisés la notation d'ingénieur $\{\underline{E}\}$ suivante pour désigner l'ensemble des déformations généralisées,

$$(1.27) \quad \{\underline{E}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_1 \end{Bmatrix}$$

Nous venons d'identifier les équations d'équilibre et les conditions aux limites du modèle classique qui relie les efforts intérieurs généralisés aux efforts extérieurs généralisés. Déterminons à présent son comportement. Nous postulons pour cela l'existence d'un tenseur des souplesses d'ordre 4 que nous noterons sous sa forme matricielle en notation d'ingénieur $\underline{\underline{\Lambda}}$ qui relie les efforts généralisés $\{\underline{\Sigma}\}$ aux déformations généralisées $\{\underline{E}\}$ par la relation:

$$\{\underline{E}\} = \underline{\underline{\Lambda}}\{\underline{\Sigma}\}$$

I.2.1.4 Identification du comportement

Pour identifier la matrice de comportement $\underline{\underline{\Lambda}}$ de la plaque multicouche, la démarche employée par Sab consiste dans un premier temps à considérer le problème 3D de la plaque multicouche (1.1) pour laquelle on recherche une famille de chargements extérieurs du milieu tridimensionnel notée $(\underline{f}^d, \underline{T}^d, \underline{T}^{+d}, \underline{T}^{-d})$ qui engendre un champ solution 3D $\underline{\underline{\sigma}}^{sol}$, et qui génère un champ d'efforts intérieurs généralisés $\underline{\underline{\Sigma}}^{sol} = (\tilde{N}, \tilde{M}, \tilde{Q})^{sol}$ uniforme dans la plaque. Puis en identifiant l'énergie élastique en contraintes 3D à celle du milieu 2D, on détermine le tenseur des souplesses généralisées $\underline{\underline{\Lambda}}$, tel que,

$$(1.28) \quad W_c(\underline{\underline{\sigma}}^{sol}) = \int_{\omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}^{sol} \cdot \underline{\underline{S}}(x, y, z) \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{sol} d\omega dz \approx \int_{\omega} \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}}^{sol} \cdot \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}^{sol} d\omega$$

avec $\underline{\underline{S}}(x, y, z)$ tenseur des souplesses du milieu 3D

On considère le chargement extérieur $(\underline{f}^d, \underline{T}^d, \underline{T}^{+d}, \underline{T}^{-d})$ suivant, qui vérifie,

$$(1.29) \quad \begin{aligned} \underline{f}^d &= 0 \\ \underline{T}^+ + \underline{T}^- &= 0 \\ \underline{T}^+ &\text{ est uniforme en } x \text{ et } y \\ \underline{T}^+ \cdot \underline{e}_3 &= 0 \\ \underline{T}^d &\text{ quelconque,} \end{aligned}$$

On cherche $\underline{\underline{\sigma}}^{sol}$ sous la forme suivante,

$$\underline{\underline{\sigma}}^{sol} = \underline{\underline{\sigma}}^{sol}(z)$$

Sab (1995a) a montré que cette famille de chargement était suffisamment riche pour engendrer tous les champs $\underline{\underline{\Sigma}}^{sol}$ uniformes possibles. Elle permet ainsi d'identifier complètement le tenseur des souplesses généralisées $\underline{\underline{\Lambda}}$.

$$(1.30) \quad \underline{\underline{\Lambda}} = \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{cc} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \end{array} \right]^{-1} & 0 \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \\ 0 & \underline{\underline{P}} \end{bmatrix}$$

ou de façon équivalente, la matrice des raideurs généralisées $\underline{\underline{\Lambda}}^{-1}$ vérifiant (1.28) est,

$$(1.31) \quad \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} & 0 \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} & \\ 0 & & \underline{\underline{P}}^{-1} \end{bmatrix}$$

où $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{D}}$, $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{P}}^{-1}$ représentent respectivement, le tenseur des rigidités membranaires, le tenseur des rigidités en flexion et torsion, le tenseur des couplages membrane-flexion-torsion et le tenseur des rigidités en cisaillement transverse.

$\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{D}}$, $\underline{\underline{B}}$ s'expriment en fonction du tenseur des rigidités réduites $\underline{\underline{Q}}^j$ de chaque couche ($j = 1, n$), et $\underline{\underline{P}}^{-1}$ en fonction des composantes du tenseur des rigidités complètes C_{44}^j , C_{45}^j , et C_{55}^j dans les axes d'orthotropie de la structure.

Rappelons que les rigidités réduites $\underline{\underline{Q}}$ s'expriment en fonction des constantes de rigidités complètes. Si $\underline{\underline{S}} = (S_{ij})_{i,j=1,6}$ désigne la matrice des souplesses et $\underline{\underline{C}} = (C_{ij})_{i,j=1,6}$ la matrice des raideurs telle que $\underline{\underline{C}}^{-1} = \underline{\underline{S}}$, alors la matrice des rigidités réduites $\underline{\underline{Q}}$ a pour coefficients,

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}} \quad \forall i, j = 1, 2, 6$$

Nous avons les relations suivantes pour $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{D}}$, $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{P}}$,

$$(1.32) \quad \underline{\underline{A}} = \sum_{j=1}^n (h_j^+ - h_{j-1}^+) \underline{\underline{Q}}^j = \sum_{j=1}^n \underline{\underline{Q}}^j \cdot e^j$$

$$(1.33) \quad \underline{\underline{D}} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n \left((h_j^+)^3 - (h_{j-1}^+)^3 \right) \underline{\underline{Q}}^j$$

$$(1.34) \quad \underline{\underline{B}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left((h_j^+)^2 - (h_{j-1}^+)^2 \right) \underline{\underline{Q}}^j$$

$$(1.35) \quad [\underline{\underline{P}}] = \sum_{j=1}^n \frac{h_j^+ - h_{j-1}^+}{(h_j^+ - h_{j-1}^+)^2} \begin{bmatrix} C_{44}^j & C_{45}^j \\ C_{45}^j & C_{55}^j \end{bmatrix}^{-1}$$

La démarche de Sab permet de trouver une nouvelle formulation de la théorie des plaques multicouches de Reissner-Mindlin, avec une modification de l'expression de la matrice de rigidité en cisaillement, que l'on note pour cette théorie P^{-1} .

On obtient les mêmes efforts généralisés, les mêmes déformations généralisées et le même équilibre généralisé que pour le modèle classique des multicouches de Reissner-Mindlin dont la formulation classique est présentée par exemple dans Berthelot (1992). Seule la rigidité en cisaillement présente une expression différente, notée $[\underline{\underline{F}}]$,

$$(1.36) \quad [\underline{\underline{F}}] = k_c \sum_{j=1}^n (h_j^+ - h_{j-1}^+) \begin{pmatrix} C_{44}^j & C_{45}^j \\ C_{45}^j & C_{55}^j \end{pmatrix} = k_c \sum_{j=1}^n e^j \begin{pmatrix} C_{44}^j & C_{45}^j \\ C_{45}^j & C_{55}^j \end{pmatrix}$$

où k_c est un facteur de correction dont la valeur dépend à la fois de l'approche mise en oeuvre pour obtenir la théorie classique des stratifiés de Reissner-Mindlin (équilibre des contraintes 3D, conservation de l'énergie élastique de déformation) et du problème considéré (flexion pure, flexion cylindrique,...). En général, on considère pour les plaques stratifiées, des valeurs du coefficient k_c déterminées dans le cas de plaques constituées d'une couche de matériau homogène: 1, $\frac{2}{3}$, ou $\frac{5}{6}$.

Remarque: Pour une plaque homogène d'épaisseur h , constituée d'un matériau orthotrope, et de constantes de rigidités complètes C_{44} , et C_{55} , on montre que $[\underline{\underline{P}}^{-1}]$ à la même expression que $[\underline{\underline{F}}]$ ($k_c = 1$),

$$[\underline{\underline{P}}^{-1}] = h \begin{pmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{pmatrix} = [\underline{\underline{F}}]$$

Dans ce cas, la théorie classique de Sab et de Reissner-Mindlin sont identiques.

La théorie sandwich issue de la théorie classique des stratifiés de Reissner-Mindlin fait également intervenir un facteur de correction dans l'expression de la raideur en cisaillement $[F]$. Cependant la valeur de k_c est généralement prise égale à 1. Celle-ci constitue en effet une excellente approximation de la description dans l'épaisseur du sandwich du cisaillement transverse, qui est essentiellement repris par une seule couche, plus épaisse que les autres: l'âme.

Dans la suite, nous poserons $k_c = 1$.

I.2.2 Application aux sandwiches

Les plaques sandwiches sont des stratifiés particuliers pour lesquelles les peaux sont généralement constituées de plusieurs couches d'un matériau à fortes caractéristiques mécaniques, dont le rôle est de reprendre les efforts de traction et de compression, et l'âme d'une seule couche d'un matériau homogène orthotrope à faibles caractéristiques mécaniques dont le rôle est de maintenir l'écartement des peaux et de reprendre les efforts de cisaillement. Ces différences de propriétés physiques et mécaniques entre les peaux et l'âme vont nous permettre de faire quelques simplifications sur les relations de comportement (1.32) à (1.35). On suppose pour cela que la peau inférieure du sandwich est constituée d'un empilement de p couches numérotées de 1 à p et la peau supérieure d'un empilement de $(n-p-1)$ couches, numérotées de $p+2$ à n . L'âme du sandwich est une couche homogène orthotrope d'épaisseur d numérotée $p+1$ dont les grandeurs seront repérées dans ce qui suit, par l'indice $p+1$.

Introduisons à présent les hypothèses classiques du comportement pour les peaux et l'âme du sandwich, qui permettent d'exprimer très simplement les différentes matrices de rigidité. En premier lieu, on suppose que le coeur, dont le rôle mécanique est essentiellement de reprendre les efforts de cisaillement transverse du sandwich, a un tenseur des rigidités membranaires dont les composantes sont négligeables par rapport à celles des tenseurs de rigidités membranaires des peaux, relativement à leurs épaisseurs, soit,

$$dQ_{lm}^{p+1} \ll \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p+1}}^n Q_{lm}^j \cdot e^j \quad l, m = 1, 2, 6$$

Les expressions (1.32) à (1.34) des tenseurs de rigidité $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}},$ et $\underline{\underline{D}}$ s'écrivent avec cette hypothèse,

$$(1.37) \quad \underline{\underline{A}} = \sum_{j=1}^n \underline{\underline{Q}}^j \cdot e^j \approx \sum_{j=1}^p \underline{\underline{Q}}^j \cdot e^j + \sum_{j=p+2}^n \underline{\underline{Q}}^j \cdot e^j$$

$$(1.38) \quad \underline{\underline{B}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left((h_j^+)^2 - (h_{j-1}^+)^2 \right) \underline{\underline{Q}}^j \approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \left((h_j^+)^2 - (h_{j-1}^+)^2 \right) \underline{\underline{Q}}^j + \frac{1}{2} \sum_{j=p+2}^n \left((h_j^+)^2 - (h_{j-1}^+)^2 \right) \underline{\underline{Q}}^j$$

$$(1.39) \quad \underline{\underline{D}} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n \left((h_j^+)^3 - (h_{j-1}^+)^3 \right) \underline{\underline{Q}}^j \approx \frac{1}{3} \sum_{j=1}^p \left((h_j^+)^3 - (h_{j-1}^+)^3 \right) \underline{\underline{Q}}^j + \frac{1}{3} \sum_{j=p+2}^n \left((h_j^+)^3 - (h_{j-1}^+)^3 \right) \underline{\underline{Q}}^j$$

De plus, si le sandwich présente un plan de symétrie, les tenseurs des rigidités des peaux obéissent aux relations suivantes,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^p \underline{\underline{Q}}^j . e^j &= \sum_{j=p+2}^n \underline{\underline{Q}}^j . e^j \\ \sum_{j=1}^p \left((h_j^+)^2 - (h_{j-1}^+)^2 \right) \underline{\underline{Q}}^j &= - \sum_{j=p+2}^n \left((h_j^+)^2 - (h_{j-1}^+)^2 \right) \underline{\underline{Q}}^j \\ \sum_{j=1}^p \left((h_j^+)^3 - (h_{j-1}^+)^3 \right) \underline{\underline{Q}}^j &= \sum_{j=p+2}^n \left((h_j^+)^3 - (h_{j-1}^+)^3 \right) \underline{\underline{Q}}^j\end{aligned}$$

d'où,

$$(1.40) \quad \underline{\underline{A}} = 2 \sum_{j=1}^p \underline{\underline{Q}}^j . e^j$$

$$(1.41) \quad \underline{\underline{B}} = 0$$

$$(1.42) \quad \underline{\underline{D}} = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^p \left((h_j^+)^3 - (h_{j-1}^+)^3 \right) \underline{\underline{Q}}^j$$

Réécrivons à présent l'expression de $\underline{\underline{P}}$ (1.35), pour les sandwichs en fonction des constantes de souplesses écrites pour une couche de matériau hors de ses axes d'orthotropie,

$$(1.43) \quad \underline{\underline{[P]}} = \sum_{j=1}^p \frac{e^j}{h^2} \begin{bmatrix} S_{44}^j & S_{45}^j \\ S_{45}^j & S_{55}^j \end{bmatrix} + \frac{d}{h^2} \begin{bmatrix} S_{44}^{p+1} & S_{45}^{p+1} \\ S_{45}^{p+1} & S_{55}^{p+1} \end{bmatrix} + \sum_{j=p+2}^n \frac{e^j}{h^2} \begin{bmatrix} S_{44}^j & S_{45}^j \\ S_{45}^j & S_{55}^j \end{bmatrix}$$

avec, $\forall j = 1, n$,

$$S_{44}^j = \frac{1}{G_{23}^j} \cos^2 \theta_j + \frac{1}{G_{13}^j} \sin^2 \theta_j$$

$$S_{45}^j = \left(\frac{1}{G_{13}^j} - \frac{1}{G_{23}^j} \right) \cos \theta_j \sin \theta_j$$

$$S_{55}^j = \frac{1}{G_{13}^j} \cos^2 \theta_j + \frac{1}{G_{23}^j} \sin^2 \theta_j$$

où θ_j est l'angle que fait le repère local d'orthotropie de la couche j avec le repère de la structure $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.

Pour un sandwich, les modules de cisaillement des couches constituant les peaux sont généralement plus élevés que ceux de l'âme, tandis que les épaisseurs des couches des peaux sont beaucoup plus faibles. On peut donc faire les hypothèses suivantes,

$$(1.44) \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p+1}}^n e^j S_{lm}^j \ll d S_{lm}^{p+1} \quad \forall l, m = 4, 5$$

qui conduisent à une expression de P ne faisant intervenir que les caractéristiques de l'âme et l'épaisseur totale du sandwich,

$$(1.45) \quad [\underline{P}] = \frac{d}{h^2} \begin{bmatrix} S_{44}^{p+1} & S_{45}^{p+1} \\ S_{45}^{p+1} & S_{55}^{p+1} \end{bmatrix}$$

soit,

$$(1.46) \quad [\underline{P}^{-1}] = \frac{h^2}{d} \begin{bmatrix} C_{44}^{p+1} & C_{45}^{p+1} \\ C_{45}^{p+1} & C_{55}^{p+1} \end{bmatrix}$$

où, C_{44}^{p+1} , C_{45}^{p+1} , et C_{55}^{p+1} sont les constantes de rigidité complète de l'âme,

$$(1.47) \quad C_{44}^{p+1} = G_{23}^{p+1} \cos^2 \theta_{p+1} + G_{13}^{p+1} \sin^2 \theta_{p+1}$$

$$(1.48) \quad C_{45}^{p+1} = (G_{13}^{p+1} - G_{23}^{p+1}) \cos \theta_{p+1} \sin \theta_{p+1}$$

$$(1.49) \quad C_{55}^{p+1} = G_{13}^{p+1} \cos^2 \theta_{p+1} + G_{23}^{p+1} \sin^2 \theta_{p+1}$$

Lorsque $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ est un repère d'orthotropie de l'âme, les relations (1.47) à (1.49) se simplifient,

$$(1.50) \quad C_{44}^{p+1} = G_{23}^{p+1}$$

$$(1.51) \quad C_{45}^{p+1} = 0$$

$$(1.52) \quad C_{55}^{p+1} = G_{13}^{p+1}$$

La relation (1.46) s'écrit dans ce cas,

$$(1.53) \quad [\underline{P}^{-1}] = \frac{h^2}{d} \begin{bmatrix} G_{23}^{p+1} & 0 \\ 0 & G_{13}^{p+1} \end{bmatrix}$$

Dans le cas de la théorie classique des plaques multicouches de Reissner-Mindlin (Berthelot 1992), la rigidité en cisaillement s'écrit,

$$(1.54) \quad [\underline{F}] = \sum_{j=1}^p e^j \begin{pmatrix} C_{44}^j & C_{45}^j \\ C_{45}^j & C_{55}^j \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} C_{44}^{p+1} & C_{45}^{p+1} \\ C_{45}^{p+1} & C_{55}^{p+1} \end{pmatrix} + \sum_{j=p+2}^n e^j \begin{pmatrix} C_{44}^j & C_{45}^j \\ C_{45}^j & C_{55}^j \end{pmatrix}$$

Pour cette théorie, on suppose que la rigidité en cisaillement transverse d'un sandwich ne s'exprime qu'en fonction des grandeurs de l'âme, en posant,

$$(1.55) \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p+1}}^n e^j C_{lm}^j \ll d C_{lm}^{p+1} \quad \forall l, m = 4, 5$$

La matrice des rigidités en cisaillement F s'écrit avec cette hypothèse (1.55), en supposant que $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ est un repère d'orthotropie,

$$(1.56) \quad [\underline{F}] = d \begin{bmatrix} G_{23}^{p+1} & 0 \\ 0 & G_{13}^{p+1} \end{bmatrix}$$

Les relations (1.53) et (1.56) montrent donc que les deux formulations de la théorie classique de sandwich diffèrent par l'écriture du coefficient de rigidité en cisaillement.

Remarque: L'hypothèse (1.55) n'est pas évidente a priori. Considérons par exemple un sandwich de trois couches, dont les peaux ne sont constituées que d'un seul pli homogène. Alors, nous avons les relations suivantes,

$$\begin{aligned} G_{\alpha 3}^j &> G_{\alpha 3}^2 & j = 1, 3 \\ e^j &< d \end{aligned}$$

A titre d'illustration, on suppose que les peaux sont identiques, d'épaisseur e et constituées d'un matériau carbone/époxyde de constante de raideur en cisaillement $G_{13}^{1,3} = 5000$ MPA et d'une âme en nid d'abeille aluminium de raideur $G_{13}^2 = 350$ MPA. La base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ est un repère d'orthotropie pour les peaux et l'âme. Supposons $d = 10e$. Dans ce cas, la relation (1.55) n'est pas vérifiée (alors que la relation 1.44 l'est).

Pour finir, faisons une synthèse des caractéristiques et des grandeurs du modèle de sandwich issu de la théorie de Sab.

Les efforts intérieurs généralisés du modèle sont les efforts de plaque classique,

$$\{\Sigma\} = \begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ Q_2 \\ Q_1 \end{Bmatrix}$$

Les déformations généralisées associées sont,

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_1 \end{Bmatrix}$$

Les relations entre les efforts intérieurs du milieu 3D et les efforts intérieurs généralisés du modèle sont donnés par (1.11) (1.12) et (1.13). Les relations entre les efforts extérieurs du milieu 3D et les efforts extérieurs généralisés du modèle sont donnés par (1.18), (1.19), (1.20) et (1.21). L'équilibre généralisé est donné par les relations (1.23) et (1.24).

La loi de comportement s'écrit pour une plaque sandwich,

$$\{\underline{\Sigma}\} = \begin{pmatrix} \underline{[A]} & \underline{[B]} & 0 \\ \underline{[B]} & \underline{[D]} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{[P^{-1}]} \end{pmatrix} \{\underline{E}\}$$

avec,

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \sum_{j=1}^p \underline{Q}^j \cdot e^j + \sum_{j=p+2}^n \underline{Q}^j \cdot e^j \\ \underline{B} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \left((h_j^+)^2 - (h_{j-1}^+)^2 \right) \underline{Q}^j + \frac{1}{2} \sum_{j=p+2}^n \left((h_j^+)^2 - (h_{j-1}^+)^2 \right) \underline{Q}^j \\ \underline{D} &= \frac{1}{3} \sum_{j=1}^p \left((h_j^+)^3 - (h_{j-1}^+)^3 \right) \underline{Q}^j + \frac{1}{3} \sum_{j=p+2}^n \left((h_j^+)^3 - (h_{j-1}^+)^3 \right) \underline{Q}^j \\ \underline{[P^{-1}]} &= \frac{h^2}{d} \begin{bmatrix} C_{44}^{p+1} & C_{45}^{p+1} \\ C_{45}^{p+1} & C_{55}^{p+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et dans le cas particulier où $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ est un repère d'orthotropie de l'âme,

$$\underline{[P^{-1}]} = \frac{h^2}{d} \begin{bmatrix} G_{23}^{p+1} & 0 \\ 0 & G_{13}^{p+1} \end{bmatrix}$$

Si le sandwich présente une symétrie par rapport à son plan médian,

$$\underline{A} = 2 \sum_{j=1}^{n_p} \underline{Q}^j \cdot e^j \quad \underline{B} = 0 \quad \underline{D} = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{n_p} \left((h_j^+)^3 - (h_{j-1}^+)^3 \right) \underline{Q}^j$$

I.2.3 Conclusion

Nous avons présenté dans cette partie la théorie de plaque sandwich issue de la théorie des multicouches de Sab. Nous avons montré qu'elle diffèrait de la théorie classique des sandwichs par l'écriture de la matrice de rigidité en cisaillement.

Pour la théorie de Sab, cette matrice notée $\underline{[P^{-1}]}$ ne nécessite pas l'introduction de facteurs de correction. L'expression de $\underline{[P^{-1}]}$ a donc l'avantage sur la théorie classique de Reissner d'être unique et indépendant du problème considéré. Nous montrerons au chapitre suivant, la pertinence de la théorie sandwich de Sab vis à vis de la théorie sandwich classique de Reissner-Mindlin, pour des problèmes de dimensionnement en raideur de plaque sandwich.

I.3 MODELES SANDWICHS MULTIPARTICULAIRES

Dans cette partie, on considère que l'objet 3D Ω peut-être discrétisé en trois sous-domaines 3D ouverts Ω_j représentant chacun la peau inférieure, l'âme, et la peau supérieure ($j = \{1,2,3\}$), contrairement à la théorie classique où la discrétisation était également effectuée dans les peaux.

Nous choisissons de définir un champ de vitesses virtuelles \underline{v}^{j*} par couche, continu dans l'épaisseur de chacune des couches ($j = \{1,2,3\}$).

Le choix du champ de vitesses virtuelles \underline{v}^{j*} nous permettra de construire une modélisation à trois particules (ou triparticulaire) à $3n$ champs scalaires (n est le nombre de couches), que nous appellerons *modèle triparticulaire complet*. Nous montrerons que ce modèle présente un caractère opératoire limité. Nous proposerons donc une modélisation triparticulaire plus simple à $2n+1$ champs scalaires que nous appellerons *modèle triparticulaire simplifié*.

I.3.1 Le modèle triparticulaire complet

Intéressons-nous en premier lieu à la détermination des équations d'équilibre et de la loi de comportement du modèle triparticulaire complet.

Nous choisissons de considérer les champs de vitesses virtuelles indépendants de z par morceaux. L'espace des mouvements virtuels \underline{v}^* s'écrit sous la forme,

$$(1.57) \quad \underline{v}^*(x, y, z) = \{ \underline{v}^{j*}(x, y) \text{ sur } \Omega_j, j = 1,2,3 \}, \quad \Omega_j = \omega \times]h_j^+ - h_j^-[$$

tel que,

$$(1.58) \quad \underline{v}^{j*}(x, y) = \tilde{V}^{j*}(x, y) + W^{j*}(x, y) \underline{e}_3 \quad j = \{1,2,3\}$$

où \tilde{V}^{j*} désigne les deux composantes de \underline{v}^* dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$,

$$\tilde{V}^{j*}(x, y) = \begin{cases} V_1^{j*}(x, y) \\ V_2^{j*}(x, y) \end{cases}$$

W^{j*} est la composante normale au plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

On choisit donc de développer un modèle à partir d'un champ de vitesse virtuelle à 9 champs scalaires (3 champs \times 3 couches).

Le tenseur des taux de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*)$ associés au champ de vitesse virtuelle \underline{v}^* , est l'ensemble des tenseurs des taux de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}^{j*}(\underline{v}^*)$ définis sur les sous-domaines ouverts Ω_j .

$$(1.59) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*) = \left\{ \underline{\underline{\varepsilon}}^{j*}(\underline{v}^*) \text{ sur } \Omega_j, j = 1, 2, 3 \right\}$$

tel que,

$$(1.60) \quad \left[\underline{\underline{\varepsilon}}^{j*} \right] = \begin{pmatrix} \left[\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}_0^{j*} \right] & \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\nabla} W^{j*} \right\} \\ \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\nabla} W^{j*} \right\} & 0 \end{pmatrix}$$

avec,

$$\left[\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}_0^{j*} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1^{j*}}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_1^{j*}}{\partial y} + \frac{\partial V_2^{j*}}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_1^{j*}}{\partial y} + \frac{\partial V_2^{j*}}{\partial x} \right) & \frac{\partial V_2^{j*}}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left\{ \tilde{\nabla} W^{j*} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W^{j*}}{\partial x} \\ \frac{\partial W^{j*}}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Ecrivons comme dans la partie précédente les équations d'équilibre et les conditions aux limites du modèle multiparticulaire en exprimant d'abord la puissance virtuelle des efforts intérieurs puis celle des efforts extérieurs.

1.3.1.1 Ecriture des équations d'équilibre et des conditions aux limites

1.3.1.1a Puissance virtuelle des efforts intérieurs

La puissance virtuelle des efforts intérieurs $PI(\underline{v}^*)$ s'écrit (au sens des distributions),

$$(1.61) \quad PI(\underline{v}^*) = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*) d\Omega$$

Réécrivons la puissance virtuelle des efforts intérieurs en décomposant le domaine Ω en sous-domaines Ω_j ($j = \{1, 2, 3\}$).

Les champs de vitesse virtuelle \underline{v}^{j*} n'étant définis que sur les ouverts Ω_j , le champ de vitesses virtuelles \underline{v}^* est discontinu entre les couches au niveau des interfaces. Par conséquent,

les champs de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$, comme les champs des taux de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*)$, associés au champ de vitesse virtuelle \underline{v}^* sont discontinus entre les couches. Pour prendre en compte ces discontinuités dans $PI(\underline{v}^*)$, on introduit des sauts de discontinuités dans l'expression (1.61). On obtient ainsi,

$$(1.62) \quad \begin{aligned} PI(\underline{v}^*) = & - \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega_j} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^{j*}) d\Omega_j \\ & - \int_{\omega} \sum_{j=1}^2 \underline{\underline{\sigma}}(x, y, h_j^+) \cdot \underline{e}_3 (\underline{v}^{j+1*}(x, y) - \underline{v}^{j*}(x, y)) d\omega \end{aligned}$$

Comme dans la première partie, introduisons la notation suivante pour le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$,

$$(1.63) \quad [\underline{\underline{\sigma}}(x, y, z)] = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\underline{\underline{\sigma}}} & \{\tilde{\underline{\sigma}}_{\alpha 3}\} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \{\tilde{\underline{\sigma}}_{\alpha 3}\} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\text{où} \quad \begin{bmatrix} \tilde{\underline{\underline{\sigma}}} \\ \{\tilde{\underline{\sigma}}_{\alpha 3}\} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad \{\tilde{\underline{\sigma}}_{\alpha 3}\} = \begin{pmatrix} \sigma'_{13} \\ \sigma'_{23} \end{pmatrix}$$

On obtient une nouvelle écriture de la puissance virtuelle des efforts intérieurs $PI(\underline{v}^*)$,

$$(1.64) \quad \begin{aligned} PI(\underline{v}^*) = & - \sum_{j=1}^3 \int_{\omega} \int_{h_j^-}^{h_j^+} \left(\tilde{\underline{\underline{\sigma}}} : \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{j*} + \tilde{\underline{\sigma}}_{\alpha 3} : \tilde{\underline{v}} W^{j*} \right) dz d\omega \\ & - \int_{\omega} \sum_{j=1}^2 \left(\begin{aligned} & \tilde{\underline{\sigma}}_{\alpha 3}(x, y, h_j^+) \cdot (\tilde{V}^{j+1*}(x, y) - \tilde{V}^{j*}(x, y)) \\ & + \sigma_{33}(x, y, h_j^+) \cdot (W^{j+1*}(x, y) - W^{j*}(x, y)) \end{aligned} \right) d\omega \end{aligned}$$

Pour identifier les efforts intérieurs du modèle triparticulaire complet, introduisons les notations suivantes,

$$(1.65) \quad \tilde{N}^j(x, y) = \int_{h_j^-}^{h_j^+} \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}(x, y, z) dz \quad \forall j = 1, n \quad \cdot$$

$$(1.66) \quad \tilde{Q}^j(x, y) = \int_{h_j^-}^{h_j^+} \tilde{\underline{\sigma}}_{\alpha 3}(x, y, z) dz \quad \forall j = 1, n$$

$$(1.67) \quad \tilde{\tau}^{j, j+1}(x, y) = \tilde{\underline{\sigma}}_{\alpha 3}(x, y, h_j^+) \quad \forall j = 1, n-1$$

$$(1.68) \quad \underline{v}^{j, j+1}(x, y) = \sigma_{33}(x, y, h_j^+) \quad \forall j = 1, n-1$$

On met en évidence le tenseur des efforts intérieurs résultants en membrane de la couche j , \tilde{N}^j , ainsi que le vecteur des efforts intérieurs résultants de cisaillement transverse de la couche j , \tilde{Q}^j . Ces efforts sont définis dans la théorie classique sur toute l'épaisseur de la plaque alors qu'ici ils sont définis par couche.

En plus de ces résultantes d'efforts, nous avons introduit deux notations d'efforts supplémentaires $\tilde{\tau}^{j,j+1}$ et $\nu^{j,j+1}$ qui représentent les composantes du vecteur contrainte $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_3$ aux interfaces, entre les couches j et $j+1$.

Nous appellerons $\tilde{\tau}^{j,j+1}$ *le vecteur des efforts de cisaillement d'interface*, et $\nu^{j,j+1}$ *le vecteur des efforts d'arrachement d'interface*. C'est ce dernier effort qui est à l'origine de l'apparition de phénomènes de délaminage dans les stratifiés.

Vous noterez que le vecteur contrainte $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_3$ se doit d'être continu dans l'épaisseur aux interfaces, même si le tenseur des contraintes \underline{y} est discontinu. A l'interface $j/j+1$ nous avons donc aussi les relations suivantes:

$$(1.69) \quad \tilde{\tau}^{j,j+1}(x, y) = \tilde{\sigma}_{\alpha 3}(x, y, h_j^+) = \tilde{\sigma}_{\alpha 3}(x, y, h_{j+1}^-)$$

$$(1.70) \quad \nu^{j,j+1}(x, y) = \sigma_{33}(x, y, h_j^+) = \sigma_{33}(x, y, h_{j+1}^-)$$

La puissance virtuelle des efforts intérieurs peut s'écrire,

$$(1.71) \quad \begin{aligned} PI(\underline{v}^*) = & - \sum_{j=1}^3 \int_{\omega} \left(\tilde{N}^j : \tilde{\underline{\underline{e}}}'_0 + \tilde{Q}^j : \tilde{\underline{V}} W^{j*} \right) d\omega \\ & - \int_{\omega} \sum_{j=1}^2 \left(\tilde{\tau}^{j,j+1} \cdot \left(\tilde{V}^{j+1*}(x, y) - \tilde{V}^{j*}(x, y) \right) \right. \\ & \left. + \nu^{j,j+1} \cdot \left(W^{j+1*}(x, y) - W^{j*}(x, y) \right) \right) d\omega \end{aligned}$$

Intégrons par parties la relation précédente, pour faire apparaître une expression de $PI(\underline{v}^*)$ qui ne dépend que des composantes du champ de vitesse virtuelle \underline{v}^* ,

$$(1.72) \quad \begin{aligned} PI(\underline{v}^*) = & \sum_{j=1}^3 \int_{\omega} \left(\text{div} \tilde{N}^j \cdot \tilde{V}^{j*} + \text{div} \tilde{Q}^j \cdot W^{j*} \right) d\omega \\ & - \int_{\omega} \sum_{j=1}^2 \left(\tilde{\tau}^{j,j+1} \cdot \left(\tilde{V}^{j+1*}(x, y) - \tilde{V}^{j*}(x, y) \right) \right. \\ & \left. + \nu^{j,j+1} \cdot \left(W^{j+1*}(x, y) - W^{j*}(x, y) \right) \right) d\omega \\ & - \sum_{j=1}^3 \int_{\gamma} \left(\tilde{N}^j \cdot \tilde{V}^{j*} \cdot \underline{n} + \tilde{Q}^j \cdot W^{j*} \cdot \underline{n} \right) d\gamma \end{aligned}$$

où \underline{n} désigne le vecteur normal au bord γ , tangent à ω .

Cette expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs va nous permettre de déterminer les équations d'équilibres et les conditions aux limites, via le principe des puissances virtuelles.

Déterminons auparavant l'expression de la puissance virtuelle des efforts extérieurs.

1.3.1.1b Puissance virtuelle des efforts extérieurs

Comme nous l'avons vu au paragraphe (1.2.1.2), la puissance des efforts extérieurs $PE(\underline{v}^*)$ s'écrit,

$$(1.73) \quad PE(\underline{v}^*) = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v}^* d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{T} \cdot \underline{v}^* d\Gamma + \int_{\Gamma^+} \underline{T}^+ \cdot \underline{v}^* d\Gamma^+ + \int_{\Gamma^-} \underline{T}^- \cdot \underline{v}^* d\Gamma^-$$

Soit, en décomposant sur les trois couches:

$$(1.74) \quad PE(\underline{v}^*) = \int_{\omega} \left(\sum_{j=1}^3 \left(\int_{h_j^-}^{h_j^+} \underline{f} \cdot \underline{v}^{j*} dz \right) + \underline{T}^+ \cdot \underline{v}^{3*} + \underline{T}^- \cdot \underline{v}^{1*} \right) d\Omega + \int_{\gamma} \sum_{j=1}^3 \left(\int_{h_j^-}^{h_j^+} \underline{T} \cdot \underline{v}^{j*} dz \right) d\gamma$$

En posant,

$$(1.75) \quad \underline{F}^j = \begin{pmatrix} \tilde{F}^j \\ F_3^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{h_j^-}^{h_j^+} \tilde{f}^j dz \\ \int_{h_j^-}^{h_j^+} f_3^j dz \end{pmatrix} \quad (1.76) \quad \underline{R}^j = \begin{pmatrix} \tilde{R}^j \\ R_3^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{h_j^-}^{h_j^+} \tilde{T}^j dz \\ \int_{h_j^-}^{h_j^+} T_3^j dz \end{pmatrix}$$

La puissance virtuelle des efforts extérieurs s'écrit alors,

$$(1.77) \quad PE(\underline{v}^*) = \int_{\omega} \left(\sum_{j=1}^3 \left(\tilde{F}^j \cdot \tilde{v}^{j*} + F_3^j \cdot W^{j*} \right) + \tilde{T}^+ \cdot \tilde{v}^{3*} + \tilde{T}^- \cdot \tilde{v}^{1*} + T_3^+ \cdot W^{3*} + T_3^- \cdot W^{1*} \right) d\omega + \int_{\gamma} \sum_{j=1}^3 \left(\tilde{R}^j \cdot \tilde{v}^{j*} + R_3^j \cdot W^{j*} \right) d\gamma$$

Relions à présent ces efforts extérieurs aux efforts intérieurs du modèle triparticulaire complet.

I.3.1.1c Application du principe des puissances virtuelles: Relations d'équilibre et conditions aux limites du modèle triparticulaire complet

La relation (1.2) valable pour tout champ de vitesse virtuelle \underline{v}^* nous permet d'écrire les équations qui régissent les efforts intérieurs généralisés du modèle triparticulaire complet \tilde{N}^j , \tilde{Q}^j , $\tilde{\tau}^{j,j+1}$, $v^{j,j+1}$.

Les relations d'équilibre s'obtiennent à partir des relations (1.70) et (1.75) en choisissant des champs de vitesse particuliers.

Si $\tilde{v}^{2*} = \tilde{v}^{3*} = W^* = 0$,

$$\begin{aligned} \text{div} \tilde{N}^1 + \tilde{\tau}^{1,2} - \tilde{\tau}^{0,1} + \tilde{F}^1 &= 0 & \text{sur } \omega \\ \text{avec } \tilde{\tau}^{0,1} &= -\tilde{T}^- \end{aligned}$$

$$\tilde{N}^1 \cdot \underline{n} = \tilde{R}^1 \quad \text{sur } \gamma$$

Si $\tilde{v}^{1*} = \tilde{v}^{3*} = W^* = 0$

$$\text{div} \tilde{N}^2 + \tilde{\tau}^{1,2} - \tilde{\tau}^{2,3} + \tilde{F}^2 = 0 \quad \text{sur } \omega$$

$$\tilde{N}^2 \cdot \underline{n} = \tilde{R}^2 \quad \text{sur } \gamma$$

Si $\tilde{v}^{1*} = \tilde{v}^{2*} = W^* = 0$,

$$\begin{aligned} \text{div} \tilde{N}^3 + \tilde{\tau}^{3,4} - \tilde{\tau}^{2,3} + \tilde{F}^3 &= 0 & \text{sur } \omega \\ \text{avec } \tilde{\tau}^{3,4} &= \tilde{T}^+ \end{aligned}$$

$$\tilde{N}^3 \cdot \underline{n} = \tilde{R}^3 \quad \text{sur } \gamma$$

Si $\tilde{v}^{1*} = \tilde{v}^{2*} = \tilde{v}^{3*} = 0$,

$$\begin{aligned} \forall j = 1,2,3 \quad \text{div} \tilde{Q}^j + v^{j,j+1} - v^{j-1,j} + F_3^j &= 0 & \text{sur } \omega \\ \text{avec } v^{0,1} &= -T_3^- \quad v^{3,4} = T_3^+ \end{aligned}$$

$$\forall j = 1,2,3 \quad \tilde{Q}^j \cdot \underline{n} = R_3^j \quad \text{sur } \gamma$$

Les relations d'équilibre du modèle triparticulaire complet peuvent donc s'écrire sous la forme:

$$(1.78) \quad \text{div} \tilde{N}^j + \tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j} + \tilde{F}^j = 0 \quad \forall j = 1,2,3$$

$$(1.79) \quad \text{div} \tilde{Q}^j + v^{j,j+1} - v^{j-1,j} + F_3^j = 0 \quad \forall j = 1,2,3$$

$$\begin{aligned} \text{en posant } \tilde{\tau}^{0,1} &= -\tilde{T}^- & \tilde{\tau}^{3,4} &= \tilde{T}^+ \\ v^{0,1} &= -T_3^- & v^{3,4} &= T_3^+ \end{aligned}$$

Les conditions aux limites du modèle triparticulaire complet peuvent s'écrire:

$$(1.80) \quad \tilde{N}^j \cdot \underline{n} = \tilde{R}^j \quad \forall j = 1, 2, 3$$

$$(1.81) \quad \tilde{Q}^j \cdot \underline{n} = R_3^j \quad \forall j = 1, 2, 3$$

Les relations d'équilibres et les conditions aux limites, ainsi obtenues, s'expriment en fonction de résultantes d'efforts par couche \tilde{N}^j et \tilde{Q}^j , et en fonction d'efforts d'interfaces $\tilde{\tau}^{j,j+1}$ et $\nu^{j,j+1}$. \tilde{N}^j et \tilde{Q}^j sont des efforts de plaque classiques bien que définis ici sur chaque couche de matériau. Par contre $\tilde{\tau}^{j,j+1}$ et $\nu^{j,j+1}$ sont des efforts inédits pour des modèles de plaque.

Vous noterez que les équations (1.78) et (1.79) correspondent exactement à l'intégration des équations d'équilibre 3D dans l'épaisseur de la plaque.

Intéressons-nous maintenant à la méthode que nous allons mettre en oeuvre pour déterminer le comportement associé à cette modélisation.

Nous allons adopter une démarche un peu différente de celle que Sab a utilisé pour résoudre le problème du multicouche.

Nous allons d'abord rechercher une forme approchée des champs de contrainte solutions du problème 3D en fonction des efforts intérieurs généralisés, solutions du problème multiparticulaire. Les relations (1.65) à (1.68) sont en effet insuffisantes pour déterminer complètement le tenseur des contraintes 3D en fonction des efforts généralisés. Nous allons donc effectuer un changement d'échelle entre les milieux 3D et multiparticulaire, en intégrant les équations d'équilibre (1.1) du problème tridimensionnel.

Nous allons approcher dans un premier temps le champ de contraintes 3D régnant dans le sandwich par le champ $\underline{\underline{\sigma}}^{ap}$ vérifiant l'équilibre en moyenne sur chacune des couches. Nous verrons que nous pourrons simplifier l'écriture des efforts généralisés.

La seconde étape de la démarche consistera à identifier l'énergie élastique du milieu 3D approchée avec celle du milieu 2D. Le développement de ces deux étapes de résolution font l'objet des deux paragraphes qui suivent.

Notez qu'une autre démarche, utilisant l'approche mixte d'Hellinger-Reissner, a été mise en oeuvre pour déterminer le comportement du milieu multiparticulaire (Chabot 1997).

1.3.1.2 Changement d'échelle avec le milieu 3D

Approchons le champ de contraintes membranaires 3D, par un champ de contraintes approchées $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}^{ap}$ constant dans l'épaisseur de chaque couche j , tel que,

$$(1.82) \quad \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}^{ap}(x, y, z) = \frac{1}{e^j} \tilde{N}^j(x, y) \quad \forall z \in]h_j^-, h_j^+[$$

où e^j désigne l'épaisseur de la couche j , $e^j = h_j^+ - h_j^-$

Cette approximation du champ de contraintes membranaires est la plus simple que l'on puisse faire. Nous devons rechercher une forme approchée du champ de contraintes $\tilde{\sigma}_{\alpha 3}$ du milieu 3D, telle que,

$$\tilde{\sigma}_{\alpha 3}(x, y, h_j^+) = \tilde{\tau}^{j,j+1}(x, y) \quad \tilde{\sigma}_{\alpha 3}(x, y, h_j^-) = \tilde{\tau}^{j-1,j}(x, y)$$

Or compte tenu de la relation (1.82) les termes $\sigma_{\alpha 3,3}$ sont constants dans l'épaisseur, ce qui nous conduit, à considérer une forme du champ approché $\tilde{\sigma}_{\alpha 3}$ affine en z , par couche vérifiant,

$$(1.83) \quad \tilde{\sigma}_{\alpha 3}^{ap}(x, y, z) = \frac{\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}}{2} + \frac{z - \bar{h}_j}{e^j} (\tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j}) \quad \forall z \in [h_j^-, h_j^+]$$

où \bar{h}_j est la côte médiane de la couche j

De plus, nous avons défini les efforts de cisaillement \tilde{Q}^j , classiquement, comme l'intégrale des contraintes de cisaillement $\tilde{\sigma}_{\alpha 3}$ (relation 1.66). Nous pouvons donc en déduire une relation entre les efforts classiques \tilde{Q}^j et les efforts d'interface $\tilde{\tau}^{j,j+1}$.

$$(1.84) \quad \tilde{Q}^j(x, y) = \int_{h_j^-}^{h_j^+} \tilde{\sigma}_{\alpha 3}(x, y, z) dz = \frac{\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}}{2} e^j$$

Considérons à présent la dernière relation d'équilibre du milieu 3D et du milieu triparticulaire complet.

L'intégration des deux premiers termes $\sigma_{13,1}$ et $\sigma_{23,2}$ correspond bien à la divergence de \tilde{Q}^j . Puisque nous avons une forme linéaire en z des champs de contraintes de cisaillement transverse $\tilde{\sigma}_{\alpha 3}$, la forme approchée des champs σ_{33} est cette fois un polynôme de degré 2 en z et doit vérifier les relations de définition de $v^{j,j+1}$ (1.68) et (1.70),

$$\sigma_{33}(x, y, h_j^+) = v^{j,j+1}(x, y) \quad \sigma_{33}(x, y, h_j^-) = v^{j-1,j}(x, y)$$

Nous souhaitons proposer une forme approchée des contraintes σ_{33} ne faisant intervenir que les efforts intérieurs généralisés et vérifiant l'équilibre 3D. Une forme possible est,

$$(1.85) \quad \sigma_{33}^{ap} = \frac{v^{j,j+1} + v^{j-1,j}}{2} + \frac{z - \bar{h}_j}{e^j} (v^{j,j+1} - v^{j-1,j}) - \frac{1}{2e^j} (z - h_j^+) (z - h_j^-) \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j}) \quad \forall z \in [h_j^-, h_j^+]$$

Rappelons que le champ de contrainte $\tilde{\sigma}^{ap}$ est discontinu dans l'épaisseur aux interfaces, tandis que les champs de contraintes $\tilde{\sigma}_{\alpha 3}^{ap}$ et σ_{33}^{ap} sont continus.

Réécrivons à présent les équations d'équilibre et les conditions aux limites des modèles à trois particules en remplaçant les résultantes par couches \tilde{Q}^j par les efforts d'interfaces $\tilde{\tau}^{j,j+1}$ via la relation (1.84) dans les expressions (1.79) et (1.81),

Les équations d'équilibre et les conditions aux limites du modèle triparticulaire complet s'écrivent,

Sur le domaine plan ω , $\forall j = 1,3$,	
(1.86)	$div \tilde{N}^j + \tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j} + \tilde{F}^j = 0$
(1.87)	$div \left(\frac{e^j}{2} (\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}) \right) + v^{j,j+1} - v^{j-1,j} + F_3^j = 0$
Sur la frontière γ de ω , $\forall j = 1,3$,	
(1.88)	$\tilde{N}^j \cdot \underline{n} = \tilde{R}^j$
(1.89)	$\frac{e^j}{2} (\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}) \cdot \underline{n} = R_3^j$

Notez que les équations (1.89) supposent qu'il existe une relation supplémentaire entre les efforts extérieurs.

Les équations (1.86) à (1.89) montrent que les efforts intérieurs généralisés du modèle se réduisent à:

- la résultante des efforts membranaires par couche \tilde{N}^j , $j = 1,3$
- les efforts de cisaillement d'interface tangent $\tilde{\tau}^{j,j+1}$, $j = 1,2$
- les efforts d'arrachement d'interface $v^{j,j+1}$, $j = 1,2$

Pour clore cette partie, déterminons les déformations généralisées du modèle triparticulaire complet en identifiant les taux de déformations à partir de la puissance virtuelle des efforts intérieurs (1.71), en remplaçant \tilde{Q}^j par son expression en fonction des efforts $\tilde{\tau}^{j,j+1}$, à l'aide de la relation (1.84),

$$(1.90) \quad PI(\underline{v}^*) = - \sum_{j=1}^3 \int_{\omega} \left(\tilde{N}^j : \tilde{\epsilon}_0^{j*} + \frac{\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}}{2} e^j \cdot \tilde{\nabla} W^{j*} \right) d\omega - \int_{\omega} \sum_{j=1}^2 \left(\tilde{\tau}^{j,j+1} \cdot (\tilde{V}^{j+1*}(x,y) - \tilde{V}^{j*}(x,y)) + v^{j,j+1} \cdot (W^{j+1*}(x,y) - W^{j*}(x,y)) \right) d\omega$$

Les déformations généralisées apparaissent comme les cofacteurs des contraintes généralisées dans l'écriture de la puissance virtuelle des efforts intérieurs quand le champ de vitesse virtuelle est pris égal au champ de déplacement.

Le champ de déplacement s'écrit sous la forme,

$$(1.91) \quad \underline{u}(x, y, z) = \tilde{U}(x, y, z) + W(x, y, z)\underline{e}_3$$

En notant les composantes moyennes du champ de déplacement par les relations suivantes,

$$(1.92) \quad \begin{cases} \tilde{u}^j(x, y) = \frac{1}{e^j} \int_{h_j^-}^{h_j^+} \tilde{U}(x, y, z) dz \\ w^j(x, y) = \frac{1}{e^j} \int_{h_j^-}^{h_j^+} W(x, y, z) dz \end{cases}$$

la puissance des efforts intérieurs pour le champ de déplacement \underline{u} s'écrit,

$$(1.93) \quad \begin{aligned} PI(\underline{u}) = & - \sum_{j=1}^3 \int_{\omega} \left(\tilde{N}^j : \tilde{\varepsilon}^j(\tilde{u}^j) + \frac{\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}}{2} e^j \cdot \tilde{\nabla} w^j \right) d\omega \\ & - \int_{\omega} \sum_{j=1}^2 \left(\begin{array}{l} \tilde{\tau}^{j,j+1} \cdot (\tilde{u}^{j+1} - \tilde{u}^j) \\ + \nu^{j,j+1} \cdot (w^{j+1} - w^j) \end{array} \right) d\omega \end{aligned}$$

Nous pouvons alors identifier les déformations généralisées suivantes (cf. tableau 1.1),

- Les déformations généralisées $\tilde{\varepsilon}^j(\tilde{u}^j)$, associées au tenseur des contraintes membranaires dans chaque couche j , que nous appellerons *tenseur des déformations membranaires par couche*,
- Les déformations généralisées $\tilde{D}^{j,j+1} = \tilde{u}^{j+1} - \tilde{u}^j + \frac{e^j}{2} \tilde{\nabla} w^j + \frac{e^{j+1}}{2} \tilde{\nabla} w^{j+1}$, associées aux efforts de cisaillement d'interface, que nous appellerons *discontinuité tangente d'interface*,
- Les déformations généralisées $D_3^{j,j+1} = w^{j+1} - w^j$, associées aux efforts d'arrachement d'interface, que nous appellerons *discontinuité normale d'interface*.

Contraintes généralisées	Déformations généralisées associées
Résultante d'efforts membranaires par couche j : \tilde{N}^j	$\tilde{\varepsilon}^j(\tilde{u}^j)$
Effort de cisaillement à l'interface $j/j+1$: $\tilde{\tau}^{j,j+1}$	$\tilde{D}^{j,j+1} = \tilde{u}^{j+1} - \tilde{u}^j + \frac{e^j}{2} \tilde{\nabla} w^j + \frac{e^{j+1}}{2} \tilde{\nabla} w^{j+1}$
Effort d'arrachement à l'interface $j/j+1$: $\nu^{j,j+1}$	$D_3^{j,j+1} = w^{j+1} - w^j$

Tableau 1.1: Contraintes et déformations généralisées du modèle triparticulaire complet

Recherchons à présent le comportement du modèle en reliant les efforts généralisés aux déformations généralisées.

I.3.1.3 Identification du comportement du modèle triparticulaire complet

Pour écrire la loi de comportement du modèle triparticulaire complet, écrivons l'énergie complémentaire du milieu tridimensionnel que l'on identifie à celle du milieu multiparticulaire en utilisant les champs approchés 3D.

$$(1.94) \quad W_c(3D) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}} d\Omega \approx \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^{ap} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}^{ap} d\Omega \approx W_c(Tri)$$

Faisons apparaître les différentes composantes du champ de contraintes approchées dans (1.94),

$$(1.95) \quad W_c(Tri) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left[\int_{\omega} (\sigma_{\alpha\beta}^{ap} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i \sigma_{\gamma\delta}^{ap} + 2\sigma_{\alpha\beta}^{ap} S_{\alpha\beta 33}^i \sigma_{33}^{ap} + \sigma_{33}^{ap} S_{3333}^i \sigma_{33}^{ap} + 4\sigma_{\alpha 3}^{ap} S_{\alpha 3\beta 3}^i \sigma_{\beta 3}^{ap}) d\omega \right] dz \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = \{1,2\}$$

Exprimons l'énergie complémentaire en fonction des efforts généralisés triparticulaires à l'aide des relations (1.82) (1.83) et (1.85), qui expriment les champs $\underline{\underline{\sigma}}^{ap}$ en fonction des efforts généralisés du modèle.

Pour ce faire, on utilise une hypothèse simplificatrice. On suppose que le terme en $div(\tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j})$ de σ_{33} (relation 1.85) apporte une contribution énergétique très faible par rapport aux autres termes de σ_{33} . Par conséquent, on néglige dans les calculs de l'énergie, les termes faisant intervenir $div(\tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j})$. La relation (1.95) devient,

$$(1.96) \quad W_c(Tri) = \frac{1}{2} \int_{\omega} \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{e^j} N_{\alpha\beta}^j S_{\alpha\beta\gamma\delta}^j N_{\gamma\delta}^j + S_{\alpha\beta 33}^j N_{\alpha\beta}^j (v^{j-1,j} + v^{j,j+1}) + \frac{e^j}{3} S_{3333}^j \left((v^{j,j+1})^2 + (v^{j-1,j})^2 + v^{j,j+1} \cdot v^{j-1,j} \right) + \frac{2e^j}{3} S_{\alpha 3\beta 3}^j \left[2\tau_{\alpha}^{j,j+1} \tau_{\beta}^{j,j+1} + 2\tau_{\alpha}^{j-1,j} \tau_{\beta}^{j-1,j} + \tau_{\alpha}^{j-1,j} \tau_{\beta}^{j,j+1} + \tau_{\alpha}^{j,j+1} \tau_{\beta}^{j-1,j} \right] \right] d\omega \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = \{1,2\}$$

On peut alors en déduire le comportement suivant,

$$(1.97) \quad \forall j = 1, 3, \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^j = \frac{1}{e^j} S_{\alpha\beta\delta\gamma}^j N_{\delta\gamma}^j + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta 33}^j (v^{j-1,j} + v^{j,j+1})$$

$$(1.98) \quad \forall j = 1, 2, \quad D_{\alpha}^{j,j+1} = \frac{4}{3} [e^j S_{\alpha 3\beta 3}^j + e^{j+1} S_{\alpha 3\beta 3}^{j+1}] \tau_{\beta}^{j,j+1} + \frac{2}{3} e^{j+1} S_{\alpha 3\beta 3}^{j+1} \cdot \tau_{\beta}^{j+1,j+2} + \frac{2}{3} e^j S_{\alpha 3\beta 3}^j \cdot \tau_{\beta}^{j-1,j}$$

$$(1.99) \quad D_3^{j,j+1} = \frac{1}{3} [e^j S_{3333}^j + e^{j+1} S_{3333}^{j+1}] v^{j,j+1} + \frac{1}{6} e^{j+1} S_{3333}^{j+1} \cdot v^{j+1,j+2} + \frac{1}{6} e^j S_{3333}^j \cdot v^{j-1,j} \\ + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta 33}^{j+1} N_{\alpha\beta}^{j+1} + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta 33}^j N_{\alpha\beta}^j$$

Au regard des expressions (1.97) à (1.99), il apparaît que le modèle à trois particules que nous venons de développer, présente un comportement complexe malgré l'hypothèse d'absence de termes en $div(\tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j})$. Il existe en effet, de nombreux couplages entre les efforts, au niveau des interfaces et des couches.

Ce modèle n'est donc pas très opératoire sous cette forme. On peut toutefois introduire une nouvelle hypothèse simplificatrice pour améliorer son caractère opératoire. Ainsi, en négligeant les composantes du tenseur des souplesses $S_{\alpha\beta 33}^j$, les relations (1.97) à (1.99) peuvent s'écrire,

$$(1.100) \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^j = \frac{1}{e^j} S_{\alpha\beta\delta\gamma}^j N_{\delta\gamma}^j$$

$$(1.101) \quad D_{\alpha}^{j,j+1} = \frac{4}{3} [e^j S_{\alpha 3\beta 3}^j + e^{j+1} S_{\alpha 3\beta 3}^{j+1}] \tau_{\beta}^{j,j+1} + \frac{2}{3} e^{j+1} S_{\alpha 3\beta 3}^{j+1} \cdot \tau_{\beta}^{j+1,j+2} + \frac{2}{3} e^j S_{\alpha 3\beta 3}^j \cdot \tau_{\beta}^{j-1,j}$$

$$(1.102) \quad D_3^{j,j+1} = \frac{1}{3} [e^j S_{3333}^j + e^{j+1} S_{3333}^{j+1}] v^{j,j+1} + \frac{1}{6} e^{j+1} S_{3333}^{j+1} \cdot v^{j+1,j+2} + \frac{1}{6} e^j S_{3333}^j \cdot v^{j-1,j}$$

On peut ainsi obtenir un modèle beaucoup plus opératoire, au prix cependant d'un certain nombre d'hypothèses.

Il est possible d'imaginer un modèle plus simple, en introduisant une hypothèse au niveau de la cinématique du modèle.

L'examen des expressions (1.97) à (1.99) montre que la complexité du modèle tient pour l'essentiel à la présence d'efforts d'arrachement d'interface $v^{j,j+1}$. Au paragraphe suivant nous développerons une formulation simplifiée du modèle triparticulaire complet en supposant que,

$$W^{1*} = W^{2*} = W^{3*}$$

qui permet de faire disparaître ces efforts $v^{j,j+1}$ du modèle.

I.3.2 Le modèle triparticulaire simplifié

Dans cette partie, nous présentons le développement du modèle triparticulaire simplifié. Nous introduisons pour cela, une condition de liaison cinématique entre les couches dans la direction e_3 . Les composantes du champ de vitesses virtuelles normales au plan vérifient ainsi,

$$(1.103) \quad W^{1*} = W^{2*} = W^{3*} = W^*$$

La cinématique du milieu triparticulaire simplifié s'écrit,

$$(1.104) \quad \underline{v}^{j*}(x, y) = \tilde{V}^{j*}(x, y) + W^*(x, y) e_3 \quad j = \{1, 2, 3\}$$

On obtient ainsi un champ de vitesses virtuelles à 7 champs scalaires pour le modèle simplifié à trois particules.

En utilisant une nouvelle fois la méthode du principe des puissances virtuelles, on se propose dans le paragraphe suivant, de déterminer les équations d'équilibre et les conditions aux limites du modèle triparticulaire simplifié, en exprimant la puissance virtuelle des efforts intérieurs et celle des efforts extérieurs.

Puis, en approchant les contraintes 3D à l'aide des efforts généralisés et en identifiant l'énergie élastique en contraintes 3D avec celle du milieu triparticulaire simplifié, nous en déduisons la loi de comportement du modèle, exactement comme pour le modèle complet.

1.3.2.1 Ecriture des équations d'équilibre et des conditions aux limites

1.3.2.1a Puissance virtuelle des efforts intérieurs

La puissance virtuelle des efforts intérieurs (1.71) devient pour le modèle triparticulaire simplifié,

$$(1.105) \quad \begin{aligned} PI(\underline{v}^*) = & - \sum_{j=1}^3 \int_{\omega} \left(\tilde{N}^j : \tilde{\epsilon}_0^{j*} + \tilde{Q}^j : \tilde{\nabla} W^* \right) d\omega \\ & - \int_{\omega} \sum_{j=1}^2 \tilde{\tau}^{j,j+1} \cdot \left(\tilde{V}^{j+1*}(x, y) - \tilde{V}^{j*}(x, y) \right) d\omega \end{aligned}$$

1.3.2.1b Puissance virtuelle des efforts extérieurs

L'expression de la puissance virtuelle des efforts extérieurs est identique (relation 1.77),

$$\begin{aligned} PE(\underline{v}^*) = & \int_{\omega} \left(\sum_{j=1}^3 \left(\tilde{F}^j \cdot \tilde{v}^{j*} + F_3^j \cdot W^{j*} \right) + \tilde{T}^+ \cdot \tilde{v}^{3*} + \tilde{T}^- \cdot \tilde{v}^{1*} + T_3^+ \cdot W^{3*} + T_3^- \cdot W^{1*} \right) d\omega \\ & + \int_{\gamma} \sum_{j=1}^3 \left(\tilde{R}^j \cdot \tilde{v}^{j*} + R_3^j \cdot W^{j*} \right) d\gamma \end{aligned}$$

1.3.2.1c Application du principe des puissances virtuelles: Relations d'équilibre et conditions aux limites du modèle triparticulaire simplifié

Cherchons les relations d'équilibre du modèle triparticulaire simplifié qui régissent les efforts intérieurs généralisées \tilde{N}^j , \tilde{Q}^j , $\tilde{\tau}^{j,j+1}$.

Pour le modèle triparticulaire simplifié, les équations d'équilibre et les conditions aux limites se déduisent des expressions des puissances virtuelles des efforts intérieurs (1.105) et des puissances virtuelles des efforts extérieurs (1.77).

Les choix $\tilde{v}^{2*} = \tilde{v}^{3*} = W^* = 0$, $\tilde{v}^{1*} = \tilde{v}^{3*} = W^* = 0$, et $\tilde{v}^{1*} = \tilde{v}^{2*} = W^* = 0$ conduisent aux mêmes équations d'équilibre reliant \tilde{N}^j et $\tilde{\tau}^{j,j+1}$ et aux mêmes conditions aux limites en \tilde{N}^j , que le modèle non simplifié.

Par contre, en choisissant $\tilde{v}^{1*} = \tilde{v}^{2*} = \tilde{v}^{3*} = 0$ on obtient des équations simplifiées de (1.79) et (1.81),

$$(1.106) \quad \sum_{j=1}^3 \operatorname{div} Q^j + \sum_{j=1}^3 F_3^j = 0 \quad \text{sur } \omega$$

$$(1.107) \quad \sum_{j=1}^3 \tilde{Q}^j \cdot \underline{n} = \sum_{j=1}^3 R_3^j \quad \text{sur } \gamma$$

Les relations d'équilibre du modèle triparticulaire simplifié sont,

$$(1.108) \quad \operatorname{div} \tilde{N}^j + \tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j} + \tilde{F}^j = 0 \quad \forall j = 1, 2, 3$$

en posant $\tilde{\tau}^{0,1} = -\tilde{T}^- \quad \tilde{\tau}^{3,4} = \tilde{T}^+$

$$(1.109) \quad \sum_{j=1}^3 (\operatorname{div} \tilde{Q}^j + F_3^j) = 0$$

Les conditions aux limites du modèle triparticulaire simplifié sont,

$$(1.110) \quad \tilde{N}^j \cdot \underline{n} = \tilde{R}^j \quad \forall j = 1, 2, 3$$

$$(1.111) \quad \sum_{j=1}^3 \tilde{Q}^j \cdot \underline{n} = \sum_{j=1}^3 R_3^j$$

I.3.2.2 Changement d'échelle avec le milieu 3D

Les champs 3D approchés, recherchés dans le cadre d'une modélisation triparticulaire simplifiée, sont déterminés de la même façon que pour le milieu triparticulaire complet.

Nous effectuons la même hypothèse (1.82) sur la forme des champs de contrainte $\tilde{\sigma}^{ap}$, que pour le modèle complet. La relation (1.83) relative aux contraintes $\tilde{\sigma}_{\alpha 3}^{ap}$ reste valable pour le modèle simplifié.

$$\tilde{\sigma}^{ap}(x, y, z) = \frac{1}{e^j} \tilde{N}^j(x, y) \quad \forall z \in]h_j^-, h_j^+[$$

$$\tilde{\sigma}_{\alpha 3}^{ap}(x, y, z) = \frac{\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}}{2} + \frac{z - \bar{h}_j}{e^j} (\tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j}) \quad \forall z \in [h_j^-, h_j^+]$$

Notez qu'ici nous ne nous intéressons pas au champ de contraintes σ_{33} dans la mesure où il n'intervient pas dans l'équilibre et que nous allons négliger sa contribution dans l'énergie élastique complémentaire lors de l'identification du comportement.

La relation (1.84) reliant \tilde{Q}^j à $\tilde{\tau}^{j,j+1}$ est inchangée.

$$\tilde{Q}^j(x, y) = \int_{h_j^-}^{h_j^+} \tilde{\sigma}_{\alpha 3}(x, y, z) dz = \frac{\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}}{2} e^j$$

On peut donc réécrire les relations (1.108) à (1.111) en introduisant cette dernière relation.

Les équations d'équilibre et les conditions aux limites du modèle triparticulaire simplifié sont,

Relations d'équilibre,	
(1.112)	$div \tilde{N}^j + \tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j} + \tilde{F}^j = 0 \quad \forall j = 1, 2, 3$
(1.113)	$\sum_{j=1}^3 \left\{ div \left(\frac{e^j}{2} (\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}) \right) + F_3^j \right\} = 0$
Conditions aux limites,	
(1.114)	$\tilde{N}^j \cdot \underline{n} = \tilde{R}^j \quad \forall j = 1, 2, 3$
(1.115)	$\sum_{j=1}^3 \frac{e^j}{2} (\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}) \cdot \underline{n} = \sum_{j=1}^3 R_3^j$

Identifions à présent les déformations généralisées du modèle triparticulaire simplifié à partir de la puissance virtuelle des efforts intérieurs (1.105), en remplaçant \tilde{Q}^j par son expression en fonction des efforts $\tilde{\tau}^{j,j+1}$, à l'aide de la relation (1.84),

$$(1.116) \quad \begin{aligned} PI(\underline{v}^*) = & - \sum_{j=1}^3 \int_{\omega} \left(\tilde{N}^j : \tilde{\epsilon}_0^{j*} + \frac{\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}}{2} e^j : \tilde{\nabla} W^* \right) d\omega \\ & - \int_{\omega} \sum_{j=1}^2 \tilde{\tau}^{j,j+1} \cdot \left(\tilde{V}^{j+1*}(x, y) - \tilde{V}^{j*}(x, y) \right) d\omega \end{aligned}$$

En considérant la forme des champs de déplacement (1.91), et en considérant les composantes moyennes du champ de déplacement (1.92) suivantes,

$$(1.117) \quad \begin{cases} \tilde{u}^j(x, y) = \frac{1}{e^j} \int_{h_j^-}^{h_j^+} \tilde{U}(x, y, z) dz \\ w(x, y) = \frac{1}{h^+ - h^-} \int_{h_j^-}^{h_j^+} W(x, y, z) dz \end{cases},$$

on peut écrire la puissance des efforts intérieurs pour le champ de déplacement \underline{u} ,

$$(1.118) \quad \begin{aligned} PI(\underline{u}) = & - \sum_{j=1}^3 \int_{\omega} \left(\tilde{N}^j : \tilde{\varepsilon}^j(\tilde{u}^j) + \frac{\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}}{2} e^j \cdot \tilde{\nabla} w \right) d\omega \\ & - \int_{\omega} \sum_{j=1}^2 \tilde{\tau}^{j,j+1} \cdot (\tilde{u}^{j+1} - \tilde{u}^j) d\omega \end{aligned}$$

Nous pouvons alors identifier les déformations généralisées suivantes (cf. tableau 1.2),

Contraintes généralisées	Déformations généralisées associées
Résultante d'efforts membranaires par couche j : \tilde{N}^j	Déformation membranaire de la couche j , $\tilde{\varepsilon}^j(\tilde{u}^j)$
Effort de cisaillement à l'interface $j/j+1$: $\tilde{\tau}^{j,j+1}$	Discontinuité tangente d'interface $j/j+1$, $\tilde{D}^{j,j+1} = \tilde{u}^{j+1} - \tilde{u}^j + \frac{e^j + e^{j+1}}{2} \tilde{\nabla} w$

Tableau 1.2: Contraintes et déformations généralisées du modèle triparticulaire simplifié

1.3.2.3 Comportement du modèle triparticulaire simplifié

Déterminons à présent le comportement du modèle triparticulaire simplifié qui permet de relier les efforts généralisés aux déformations généralisées du modèle.

En supposant que la contribution énergétique de la contrainte σ_{33} est négligeable, les calculs des termes de l'énergie complémentaire (1.95) pour le modèle triparticulaire simplifié donne une expression de W_c en fonction des efforts membranaires \tilde{N}^j , et des efforts de cisaillement d'interfaces $\tilde{\tau}^{j,j+1}$.

$$(1.119) \quad \begin{aligned} W_c(Tris) = & \frac{1}{2} \int_{\omega} \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{e^j} N_{\beta\alpha}^j S_{\alpha\beta\gamma\delta}^j N_{\delta\gamma}^j + \frac{2e^j}{3} S_{\alpha 3\beta 3}^j \left[2\tau_{\alpha}^{j,j+1} \tau_{\beta}^{j,j+1} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\tau_{\alpha}^{j-1,j} \tau_{\beta}^{j-1,j} + \tau_{\alpha}^{j-1,j} \tau_{\beta}^{j,j+1} + \tau_{\alpha}^{j,j+1} \tau_{\beta}^{j-1,j} \right] \right] d\omega \\ & \alpha, \beta, \gamma, \delta = \{1,2\}, \end{aligned}$$

On en déduit le comportement du modèle simplifié,

$$(1.120) \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^j = \frac{1}{e^j} S_{\alpha\beta\delta\gamma}^j N_{\delta\gamma}^j$$

$$(1.121) \quad D_{\alpha}^{j,j+1} = \frac{4}{3} \left[e^j S_{\alpha 3\beta 3}^j + e^{j+1} S_{\alpha 3\beta 3}^{j+1} \right] \tau_{\beta}^{j,j+1} + \frac{2}{3} e^{j+1} S_{\alpha 3\beta 3}^{j+1} \cdot \tau_{\beta}^{j+1,j+2} + \frac{2}{3} e^j S_{\alpha 3\beta 3}^j \cdot \tau_{\beta}^{j-1,j}$$

Les relations de comportement du modèle triparticulaire simplifié se réduisent ainsi aux deux expressions (1.120) et (1.121) donnant les déformations $\tilde{\varepsilon}^j$ et $\tilde{D}^{j,j+1}$ en fonction de \tilde{N}^j et $\tilde{\tau}^{j,j+1}$.

Le couplage entre les efforts d'interface subsiste pour des couches successives. Par contre les couplages entre les efforts membranaires et les efforts d'interface ont disparu. En outre, comme prévu, la relation (1.99) du modèle triparticulaire complet n'existe plus.

On aboutit ainsi directement aux expressions du comportement du modèle triparticulaire complet (1.100) et (1.101), sans qu'il y ait eu besoin de formuler pour le modèle simplifié d'autres hypothèses sur le comportement de la plaque sandwich que la condition cinématique initiale (1.103).

I.3.3 Conclusion

Nous avons mis au point dans cette partie I.3, deux modélisations triparticulaires dédiées à l'étude du comportement des structures sandwichs en matériaux classiques: le modèle triparticulaire complet, le modèle triparticulaire simplifié.

Faisons une synthèse de ces modèles en rappelant les équations d'équilibres, les conditions aux limites et la loi de comportement pour chacun d'entre eux.

☛ Modèle triparticulaire complet

<i>Relations d'équilibre et conditions aux limites</i>	<i>Loi de comportement</i>
$\text{div} \tilde{N}^j + \tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j} + \tilde{F}^j = 0$ $\text{div} \left(\frac{e^j}{2} (\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}) \right) + v^{j,j+1} - v^{j-1,j} + F_3^j = 0$ $\tilde{N}^j \cdot \underline{n} = \tilde{R}^j$ $\frac{e^j}{2} (\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}) \cdot \underline{n} = R_3^j$	$\varepsilon_{\alpha\beta}^j = \frac{1}{e^j} S_{\alpha\beta\delta\gamma}^j N_{\delta\gamma}^j$ $D_{\alpha}^{j,j+1} = \frac{4}{3} \left[e^j S_{\alpha 3\beta 3}^j + e^{j+1} S_{\alpha 3\beta 3}^{j+1} \right] \tau_{\beta}^{j,j+1}$ $+ \frac{2}{3} e^{j+1} S_{\alpha 3\beta 3}^{j+1} \cdot \tau_{\beta}^{j+1,j+2} + \frac{2}{3} e^j S_{\alpha 3\beta 3}^j \cdot \tau_{\beta}^{j-1,j}$ $D_3^{j,j+1} = \frac{1}{3} \left[e^j S_{3333}^j + e^{j+1} S_{3333}^{j+1} \right] v^{j,j+1}$ $+ \frac{1}{6} e^{j+1} S_{3333}^{j+1} \cdot v^{j+1,j+2} + \frac{1}{6} e^j S_{3333}^j \cdot v^{j-1,j}$

☛ **Modèle tripartculaire simplifié**

<i>Relations d'équilibre et conditions aux limites</i>	<i>Loi de comportement</i>
$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{N}}^j + \tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j} + \tilde{\mathbf{F}}^j = 0$ $\sum_{j=1}^3 \left\{ \operatorname{div} \left(\frac{e^j}{2} (\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}) \right) + \mathbf{F}_3^j \right\} = 0$ $\tilde{\mathbf{N}}^j \cdot \underline{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{R}}^j$ $\sum_{j=1}^3 \frac{e^j}{2} (\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}) \cdot \underline{\mathbf{n}} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{R}_3^j$	$\varepsilon_{\alpha\beta}^j = \frac{1}{e^j} S_{\alpha\beta\delta\gamma}^j N_{\delta\gamma}^j$ $D_{\alpha}^{j,j+1} = \frac{4}{3} [e^j S_{\alpha 3\beta 3}^j + e^{j+1} S_{\alpha 3\beta 3}^{j+1}] \tau_{\beta}^{j,j+1}$ $+ \frac{2}{3} e^{j+1} S_{\alpha 3\beta 3}^{j+1} \tau_{\beta}^{j+1,j+2} + \frac{2}{3} e^j S_{\alpha 3\beta 3}^j \tau_{\beta}^{j-1,j}$

On aurait pu développer des modélisations multiparticulaires encore plus simples en considérant par exemple, les formes de champ de vitesse virtuelle suivantes,

—Un champ de vitesse virtuelle à 7 paramètres, en supposant que l'âme ne reprend pas les déformations membranaires,

$$\underline{v}^{j*}(x, y) = \tilde{V}^{j*}(x, y) + W^{j*}(x, y) \underline{e}_3 \quad j = \{1, 3\}$$

$$\underline{v}^{2*}(x, y) = W^{2*}$$

—Un champ de vitesse virtuelle à 6 paramètres, en écrivant le champ de déplacement de l'âme comme une moyenne des déplacements dans les peaux,

$$\underline{v}^{j*}(x, y) = \tilde{V}^{j*}(x, y) + W^{j*}(x, y) \underline{e}_3 \quad j = \{1, 3\}$$

$$\underline{v}^{2*}(x, y) = \frac{1}{2} \tilde{V}^{1*}(x, y) + \frac{1}{2} \tilde{V}^{3*}(x, y)$$

$$+ \frac{1}{2} W^{1*}(x, y) \underline{e}_3 + \frac{1}{2} W^{3*}(x, y) \underline{e}_3$$

—Un champ de vitesse virtuelle à 5 paramètres, en supposant que l'âme ne reprend pas les déformations membranaires et qu'il existe une liaison entre les composantes verticales du champ de vitesse virtuelle,

$$\underline{v}^{j*}(x, y) = \tilde{V}^{j*}(x, y) + W^*(x, y) \underline{e}_3 \quad j = \{1, 3\}$$

$$\underline{v}^{2*}(x, y) = W^{2*}$$

En construisant un modèle multiparticulaire à partir de ce dernier champ de vitesse virtuelle, on retrouve pratiquement le modèle classique de Reissner-Mindlin. Le modèle multiparticulaire a l'avantage sur le modèle de Reissner, de prendre en compte les énergies de cisaillement dans les peaux.

—Un champ de vitesse virtuelle à 3 paramètres en écrivant le champ de déplacement de l'âme comme une moyenne des déplacements dans les peaux et en supposant une liaison entre les composantes verticales du champ de vitesse virtuelle,

$$\underline{v}^j(x, y) = \tilde{V}^j(x, y) + W^*(x, y) \underline{e}_3 \quad j = \{1, 3\}$$

$$\underline{v}^2(x, y) = \frac{1}{2} \tilde{V}^1(x, y) + \frac{1}{2} \tilde{V}^3(x, y) + W^*(x, y) \underline{e}_3$$

CHAPITRE II

ETUDE COMPARATIVE DE LA FLEXION DE PANNEAUX SANDWICHS

Dans ce chapitre, nous nous proposons de montrer la pertinence des modèles multiparticulaires et du modèle sandwich issu de la théorie de Sab, pour le dimensionnement en flexion de panneaux sandwichs.

La première partie fera l'objet d'une comparaison entre les modèles à trois particules, la théorie sandwich classique (de Reissner-Mindlin), la théorie classique modifiée de Sab, et une solution analytique tridimensionnelle exacte développée par Pagano, dans le cas classique d'une flexion cylindrique sur des panneaux sandwichs.

La seconde partie consistera à vérifier la pertinence de la maille élément-fini développée à partir de la modélisation multiparticulaire des matériaux multicouches (maille M4) (*Smaoui 1996*). Nous confronterons les résultats de la maille M4 avec des modélisations sandwichs réalisées avec le code de calcul par éléments finis SAMCEF.

II.1 ETUDES DE PANNEAUX SANDWICHS EN FLEXION CYLINDRIQUE: COMPARAISON AVEC UNE SOLUTION ANALYTIQUE EXACTE

Cette partie est consacrée à l'étude de panneaux sandwichs en flexion cylindrique, dont l'objectif est de comparer les solutions données par les différentes théories classiques de Reissner et de Sab et les théories multiparticulaires du chapitre I, avec la solution exacte de Pagano (*1969*) issue d'une analyse tridimensionnelle du problème.

Nous confronterons cinq solutions analytiques sur trois exemples de panneaux sandwichs,

- La solution exacte de Pagano prise comme la référence des résultats que nous déterminerons,
- La solution de la théorie sandwich classique (TC),
- La solution de la théorie sandwich déduite de la théorie multicouche de Sab (TS),
- La solution du modèle triparticulaire complet (Tri),
- La solution du modèle triparticulaire simplifié (TriS),

Nous traiterons le cas de plaques en appuis simples aux extrémités, soumises à un chargement en flexion sinusoïdale.

Nous nous intéresserons aux déflexions maximales au centre de chaque plaque sandwich, et à la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur aux bords, pour chacune des différentes modélisations sandwichs citées précédemment.

Dans un premier paragraphe, nous présenterons le problème de flexion cylindrique avec les hypothèses de comportement qui en découlent. Nous donnerons les expressions des déflexions et des contraintes de cisaillement de la théorie classique de sandwich, de la théorie de Sab et des théories multiparticulaires. On trouvera en annexe 2 les expressions de la solution de Pagano et quelques calculs qui ont conduit aux expressions des modèles multiparticulaires.

Dans un second paragraphe, nous étudierons des exemples de panneaux sandwichs en flexion cylindrique pour lesquels nous déterminerons numériquement, pour les différentes modélisations, les déflexions maximales au centre de la plaque et les contraintes de cisaillement à une extrémité, à partir de leurs expressions analytiques.

II.1.1 Formulation du problème de flexion cylindrique pour les différentes théories

La flexion cylindrique désigne un problème de flexion unidimensionnelle de panneaux. Elle englobe en fait deux types de problèmes possibles selon que l'on puisse négliger la largeur b du panneau devant la longueur L , ou l'inverse (cf. figure 2.1).

Cette distinction sur la géométrie du panneau sous-tend l'utilisation de deux types d'hypothèses de comportements différents. Dans le premier cas on utilise l'hypothèse de contraintes planes, et dans le second cas l'hypothèse de déformations planes.

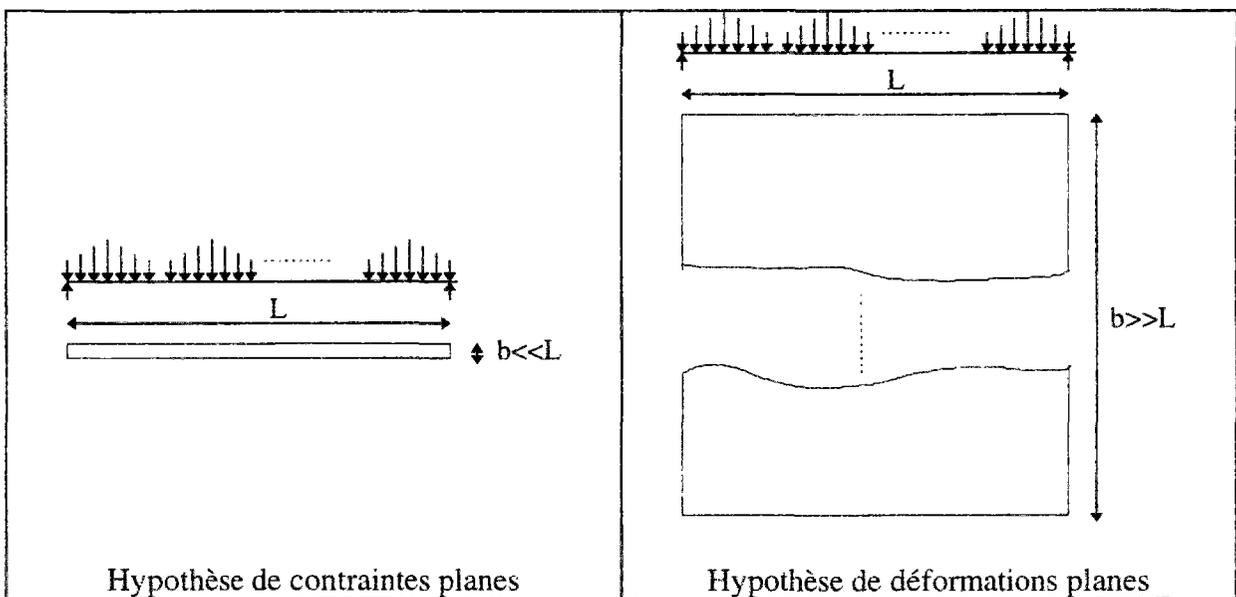


Figure 2.1: Hypothèses de flexion cylindrique

Pagano a résolu les problèmes de flexion cylindrique pour des panneaux de très grandes largeurs. Nous introduirons donc l'hypothèse de déformations planes dans l'étude de la flexion cylindrique avec le modèle classique de Reissner-Mindlin, celui de Sab et les théories multiparticulaires. Ainsi, les composantes du champ de déplacement pourront être approchées par l'écriture suivante, si la direction de sollicitation est l'axe e_1 ,

Pour la théorie classique et la théorie de Sab,

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \tilde{u}(x, y) &= \tilde{u}(x) \\ w(x, y) &= w(x) \end{aligned}$$

Pour les théories multiparticulaires,

$$(2.2) \quad \forall j = 1, 2, 3 \quad \begin{aligned} \tilde{u}^j(x, y) &= \tilde{u}^j(x) \\ w^j(x, y) &= w^j(x) \quad \text{ou} \quad w(x, y) = w(x) \end{aligned}$$

On considérera une plaque sandwich de longueur L , de largeur b et d'épaisseur totale h , constituée de deux peaux identiques et homogènes d'épaisseur e , d'une âme d'épaisseur d , soumise à un chargement en pression sinusoïdale $p(x) = q_0 \sin \frac{\pi x}{L}$. Le repère $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ sera confondu avec les repères d'orthotropie des peaux et de l'âme.

Nous considérerons la direction de sollicitation \underline{e}_1 . Les extrémités de la plaque seront repérées par les abscisses $x = 0$ et $x = L$, le centre de la plaque par l'abscisse $x = \frac{L}{2}$ (figure 2.2).

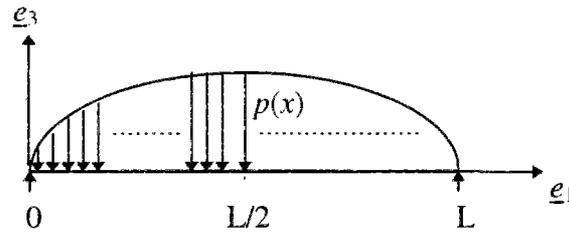


Figure 2.2: Flexion cylindrique étudiée

Remarque: Puisque l'on considère que les peaux sont constituées par un matériau homogène, le sandwich est donc constitué d'un empilement de trois couches homogènes dont les constantes de souplesses se déterminent classiquement en fonction des propriétés des matériaux d'âme et des peaux.

Nous adopterons les notations suivantes: Les exposants 1 et 3 feront références aux peaux, l'exposant 2 à l'âme.

Pour les modélisations multiparticulaires, les constantes de souplesses dans la direction de sollicitation s'exprimeront de la façon suivante,

$$\begin{aligned} S_{1111}^j &= \frac{1}{Q_{11}^j} & \text{avec} & & Q_{11}^j &= \frac{E_1^j}{1 - \frac{E_2^j}{E_1^j} (v_{12}^j)^2} \\ S_{1313}^j &= \frac{1}{4G_{13}^j} & & & S_{3333}^j &= \frac{1}{E_3^j} \end{aligned}$$

où $E_1^j, E_2^j, E_3^j, G_{13}^j, v_{12}^j$ sont respectivement le module d'Young dans la direction \underline{e}_1 , le module d'Young dans la direction \underline{e}_2 , le module d'Young dans la direction \underline{e}_3 , le module de cisaillement dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_3)$ et le coefficient de Poisson dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$, de la couche j ($j = 1, 2, 3$).

II.1.1.1 Solution exacte de Pagano

Pagano a publié à la fin des années 60 les solutions exactes des champs de déplacements et des champs de contraintes des milieux composites multicouches dans le cas général d'une plaque de grande largeur sous un chargement sinusoïdal (*Pagano 1969*),

$$(2.3) \quad W^j = \sin \frac{\pi x}{L} \sum_{i=1}^4 A_{ij} \left[R_{13}^j r_{ij} - \frac{R_{33}^j \pi^2}{r_{ij} L^2} \right] \exp(r_{ij} z)$$

$$(2.4) \quad \sigma_{xz}^j = -\frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \sum_{i=1}^4 A_{ij} r_{ij} \exp(r_{ij} z)$$

où les constantes R_{13}^j , R_{33}^j , r_{ij} , s'expriment en fonction des constantes de souplesse de chaque couche j (cf. annexe 2.1), et les constantes A_{ij} sont des inconnues déterminées en écrivant les conditions de continuité des déplacements et des contraintes entre chaque couche et les conditions aux limites des contraintes sur les faces supérieure et inférieure du sandwich.

II.1.1.2 Théorie sandwich classique et théorie de Sab

L'analyse d'un problème de flexion cylindrique, avec la théorie classique de sandwich, a fait l'objet de nombreux développements dans la littérature des composites multicouches et sandwichs (*Berthelot 1992*). Nous ne ferons donc que rappeler les expressions utiles à notre étude.

Pour la théorie classique de sandwich, la déflexion a pour expression,

$$(2.5) \quad w_{TC} \left(\frac{L}{2} \right) = \left(1 + \frac{\pi^2 D_{11}^1}{F_{55} L^2} \right) \frac{q_0 L^4}{\pi^4 D_{11}^1}$$

où D_{11}^1 est la raideur en flexion/torsion des peaux dans la direction de sollicitation \underline{e}_1 ,

$$D_{11}^1 = \frac{2}{3} \left(\left(e + \frac{d}{2} \right)^3 - \left(\frac{d}{2} \right)^3 \right) Q_{11}^1$$

$$\text{avec } Q_{11}^1 = \frac{E_1^1}{1 - \frac{E_2^1}{E_1^1} (\nu_{12}^1)^2}$$

F_{55} la raideur en cisaillement de l'âme dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$,

$$F_{55} = dG_{13}^2$$

Les contraintes de cisaillement au bord ont pour expression,

$$(2.6) \quad \sigma_{xz}(0, y, z) = \begin{cases} -\frac{Q_{11}^1 q_0 L}{D_{11}^1 \pi} \left(-\frac{z^2}{2} + \frac{h^2}{8} \right) & \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq -\frac{d}{2} \\ \frac{Q_{11}^1 q_0 L (d^2 - h^2)}{D_{11}^1 \pi \cdot 8} & \text{pour } -\frac{d}{2} \leq z \leq \frac{d}{2} \\ \frac{Q_{11}^1 q_0 L}{D_{11}^1 \pi} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) & \text{pour } \frac{d}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases}$$

La théorie de Sab fait intervenir un coefficient de rigidité en cisaillement transverse qui diffère de celui de la théorie classique. Nous l'avons noté P_{55}^{-1} (cf. I.1.1).

L'expression de la déflexion (2.5) de la théorie classique devient donc,

$$(2.7) \quad w_{TS} \left(\frac{L}{2} \right) = \left(1 + \frac{\pi^2 D_{11}^1}{P_{55}^{-1} L^2} \right) \frac{q_0 L^4}{\pi^4 D_{11}^1}$$

où
$$P_{55}^{-1} = \frac{1}{2 \frac{e}{h^2 G_{13}^1} + \frac{d}{h^2 G_{13}^2}}$$

L'expression (2.6) donnant les contraintes au bord $\sigma_{xz}(0, y, z)$, est identique dans le cas du modèle de sandwich de Sab.

Remarque: Le rapport $\frac{q_0 L^4}{\pi^4 D_{11}^1}$ intervenant dans l'expression de la déflexion w_{TC} et de la

déflexion w_{TS} n'est rien d'autre que l'expression de la déflexion maximale au centre d'un panneau composite multicouche symétrique en flexion cylindrique, déterminée dans le cadre de la théorie de Love-Kirchhoff. Cette expression de la flèche n'est bien sûr valable que pour des plaques de faibles épaisseurs où le cisaillement transverse peut être négligé. Elle n'est donc pas appropriée à la détermination des déflexions de panneaux sandwichs.

Néanmoins, nous l'utiliserons dans la présentation des résultats de déflexions maximales de façon à conserver celle de Pagano, où nous la noterons w_0 .

II.1.1.3 Théories sandwichs multiparticulaires

Pour déterminer les solutions d'un problème de flexion cylindrique d'une plaque sandwich en pression sinusoïdale, nous utilisons les équations d'équilibre, les conditions aux limites, et les lois de comportement des différentes théories multiparticulaires, dont le développement a fait l'objet du chapitre I.

Nous détaillons les calculs pour la théorie triparticulaire simplifiée, correspondant au problème de flexion cylindrique présenté figure (2.2), pour un sandwich présentant des peaux

identiques et constituées d'un matériau homogène. Les calculs pour le modèle triparticulaire complet sont présentés en annexe (2.2).

Les relations d'équilibre du modèle triparticulaire simplifié (1.113) et (1.114) ainsi que les conditions aux limites (1.115) et (1.116) s'écrivent dans la direction de sollicitation.

$$(2.8) \quad \begin{cases} N_{11,x}^1 + \tau_1^{1,2} = 0 \\ N_{11,x}^2 + \tau_1^{2,3} - \tau_1^{1,2} = 0 \\ N_{11,x}^3 - \tau_1^{2,3} = 0 \\ \frac{e+d}{2} (\tau_1^{2,3} + \tau_1^{1,2})_{,x} = q_0 \sin \frac{\pi x}{L} \end{cases}$$

$$(2.9) \quad \begin{cases} N_{11}^1(0) = N_{11}^2(0) = N_{11}^3(0) = 0 \\ N_{11}^1(L) = N_{11}^2(L) = N_{11}^3(L) = 0 \\ w(0) = w(L) = 0 \end{cases}$$

Le champ de contraintes σ_{xz} s'écrit,

$$\sigma_{xz}(x, y, z) = \frac{\tau_1^{j,j+1} + \tau_1^{j-1,j}}{2} + \frac{z - \bar{h}_j}{e^j} (\tau_1^{j,j+1} - \tau_1^{j-1,j}) \quad \forall z \in [h_j, h_j^+]$$

La loi de comportement s'écrit,

$$\textcircled{2.10} \quad \varepsilon_{11}^j = \frac{1}{e^j} S_{1111}^j N_{11}^j \quad \Leftrightarrow \quad N_{11}^j = e^j Q_{11}^j \varepsilon_{11}^j = A_{11}^j \varepsilon_{11}^j$$

$$\text{avec} \quad \varepsilon_{11}^j = \frac{du_1^j}{dx} \quad \text{et} \quad A_{11}^1 = A_{11}^3$$

$$\textcircled{\quad} \quad \begin{cases} D_1^{1,2} = \frac{4}{3} (eS_{1313}^1 + dS_{1313}^2) \tau_1^{1,2} + \frac{2}{3} dS_{1313}^2 \tau_1^{2,3} \\ D_1^{2,3} = \frac{2}{3} dS_{1313}^2 \tau_1^{1,2} + \frac{4}{3} (eS_{1313}^1 + dS_{1313}^2) \tau_1^{2,3} \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad S_{1313}^j = \frac{1}{4G_{13}^j} \quad \text{et} \quad S_{1313}^1 = S_{1313}^3$$

Soit,

$$(2.11) \quad \begin{cases} \tau_1^{1,2} = \eta_1 D_1^{1,2} + \xi_1 D_1^{2,3} \\ \tau_1^{2,3} = \xi_1 D_1^{1,2} + \eta_1 D_1^{2,3} \end{cases}$$

avec,

$$(2.12) \quad \begin{cases} D_1^{1,2} = u_1^2 - u_1^1 + \frac{e+d}{2} \frac{dw}{dx} \\ D_1^{2,3} = u_1^3 - u_1^2 + \frac{e+d}{2} \frac{dw}{dx} \end{cases}$$

$$(2.13) \quad \eta_1 = \frac{12}{4 \left(\frac{e}{G_{13}^1} + \frac{d}{G_{13}^2} \right)^2 - \frac{d^2}{(G_{13}^2)^2}} \left(\frac{e}{G_{13}^1} + \frac{d}{G_{13}^2} \right)$$

$$(2.14) \quad \xi_1 = - \frac{6}{4 \left(\frac{e}{G_{13}^1} + \frac{d}{G_{13}^2} \right)^2 - \frac{d^2}{(G_{13}^2)^2}} \frac{d}{G_{13}^2}$$

Déterminons les déplacements u_1^1, u_1^2, u_1^3 et w en introduisant les relations (2.10), (2.11) et (2.12) dans les relations d'équilibre (2.8),

$$(2.15) \quad A_{11}^1 \frac{d^2 u_1^1}{dx^2} + \eta_1 \left(u_1^2 - u_1^1 + \frac{e+d}{2} \frac{dw}{dx} \right) + \xi_1 \left(u_1^3 - u_1^2 + \frac{e+d}{2} \frac{dw}{dx} \right) = 0$$

$$(2.16) \quad A_{11}^2 \frac{d^2 u_1^2}{dx^2} - (\eta_1 - \xi_1) \left(u_1^2 - u_1^1 + \frac{e+d}{2} \frac{dw}{dx} \right) + (\eta_1 - \xi_1) \left(u_1^3 - u_1^2 + \frac{e+d}{2} \frac{dw}{dx} \right) = 0$$

$$(2.17) \quad A_{11}^3 \frac{d^2 u_1^3}{dx^2} - \xi_1 \left(u_1^2 - u_1^1 + \frac{e+d}{2} \frac{dw}{dx} \right) - \eta_1 \left(u_1^3 - u_1^2 + \frac{e+d}{2} \frac{dw}{dx} \right) = 0$$

$$(2.18) \quad \frac{d}{dx} (u_1^3 - u_1^1) + (e+d) \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{2q_0}{(e+d)(\eta_1 + \xi_1)} \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$\text{où} \quad \eta_1 + \xi_1 = 6 \left[2 \frac{e}{G_{13}^1} + 3 \frac{d}{G_{13}^2} \right]^{-1}$$

L'intégration de (2.18) avec les conditions de symétrie (2.14) donne,

$$(2.19) \quad u_1^3 - u_1^1 + (e+d) \frac{dw}{dx} = - \frac{2q_0 L}{\pi(e+d)(\eta_1 + \xi_1)} \cos \frac{\pi x}{L}$$

En retranchant la relation (2.17) à la relation (2.15), on obtient,

$$(2.20) \quad A_{11}^1 \frac{d^2}{dx^2} (u_1^3 - u_1^1) - (\eta_1 + \xi_1) \left(u_1^3 - u_1^1 + (e+d) \frac{dw}{dx} \right) = 0$$

En intégrant (2.20) en tenant compte des conditions (2.9), on en déduit,

$$(2.21) \quad u_1^3 - u_1^1 = \frac{2q_0 L^3}{\pi^3 (e+d) A_{11}^1} \cos \frac{\pi x}{L}$$

On en déduit alors l'expression de $w(x)$ avec les conditions aux limites (2.9),

$$(2.22) \quad w(x) = -\frac{2q_0 L^2}{\pi^2 (e+d)^2 (\eta_1 + \xi_1)} \sin \frac{\pi x}{L} - \frac{2q_0 L^4}{A_{11}^1 \pi^4 (e+d)^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

De plus, en additionnant les relations (2.15) (2.16) et (2.17), on obtient,

$$u_1^2 = -\frac{A_{11}^1}{A_{11}^2} (u_1^1 + u_1^3)$$

qui permet avec la relation (2.21) de trouver des relations qui lient u_1^2 et u_1^3 à u_1^1 .

$$(2.23) \quad u_1^2 = -2 \frac{A_{11}^1}{A_{11}^2} u_1^1 - \frac{2q_0 L^3}{\pi^3 (e+d) A_{11}^2} \cos \frac{\pi x}{L}$$

$$(2.24) \quad u_1^3 = u_1^1 + \frac{2q_0 L^3}{\pi^3 (e+d) A_{11}^1} \cos \frac{\pi x}{L}$$

En introduisant les expressions de w , u_1^2 et u_1^3 (relations 2.22, 2.23 et 2.24) dans l'équation (2.15), on trouve une équation différentielle du second ordre en u_1^1 qui peut s'écrire sous la forme suivante,

$$(2.25) \quad \frac{d^2 u_1^1}{dx^2} - \omega^2 u_1^1 = B \cos \frac{\pi x}{L}$$

$$\text{avec } \omega = \sqrt{(\eta_1 - \xi_1) \left(\frac{1}{A_{11}^1} + \frac{2}{A_{11}^2} \right)}$$

$$B = \left(\omega^2 + \frac{\pi^2}{L^2} \right) \frac{q_0 L^3}{\pi^3 (e+d) A_{11}^1}$$

L'équation (2.25) a pour solution,

$$u_1^1 = A \operatorname{sh}(\omega x) - \frac{B}{\omega^2 + \frac{\pi^2}{L^2}} \cos \frac{\pi x}{L} \quad (A, B, \omega) \in \mathbb{R}^3$$

Or en tenant compte des conditions de symétrie (2.9) la constante A est nulle. On en déduit l'expression de u_1^1 , puis celles de u_1^2 et u_1^3 à l'aide des expressions (2.23) et (2.24),

$$(2.26) \quad \begin{cases} u_1^1 = -\frac{q_0 L^3}{\pi^3 (e+d) A_{11}^1} \cos \frac{\pi x}{L} \\ u_1^2 = 0 \\ u_1^3 = -u_1^1 \end{cases}$$

A partir des relations (2.26) on peut alors déterminer les expressions de $D_1^{1,2}$ et $D_1^{2,3}$ puis celles de $\tau_1^{1,2}$ et $\tau_1^{2,3}$,

$$D_1^{1,2} = D_1^{2,3} = -\frac{q_0 L}{\pi(e+d)(\eta_1 + \xi_1)} \cos \frac{\pi x}{L}$$

$$\tau_1^{1,2} = \tau_1^{2,3} = -\frac{q_0 L}{\pi(e+d)} \cos \frac{\pi x}{L}$$

Pour le modèle triparticulaire simplifié, la flèche au centre $w\left(\frac{L}{2}\right)$ s'écrit,

$$w_{\text{Tris}}\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{2q_0 L^4}{A_{11}^1 \pi^4 (e+d)^2} \left(1 + \frac{\pi^2}{L^2} \frac{A_{11}^1}{(\eta_1 + \xi_1)}\right)$$

Soit, en introduisant dans la relation précédente les expressions de A_{11}^1 et $\eta_1 + \xi_1$,

$$(2.27) \quad w_{\text{Tris}}\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{2q_0 L^4}{\pi^4 e(e+d)^2 Q_{11}^1} \left(1 + \frac{\pi^2}{L^2} e Q_{11}^1 \left(\frac{e}{3G_{13}^1} + \frac{d}{2G_{13}^2}\right)\right)$$

Pour le modèle triparticulaire simplifié, la contrainte au bord $\sigma_{xz}(0, y, z)$ s'écrit,

$$\sigma_{xz}(0, y, z) = \begin{cases} \frac{z + \frac{h}{2}}{e} \frac{q_0 L}{\pi(e+d)} & \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq -\frac{d}{2} \\ \frac{q_0 L}{\pi(e+d)} & \text{pour } -\frac{d}{2} \leq z \leq \frac{d}{2} \\ \frac{-z + \frac{h}{2}}{e} \frac{q_0 L}{\pi(e+d)} & \text{pour } \frac{d}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases}$$

On peut déterminer par une démarche analogue les expressions du déplacement maximal et des contraintes de cisaillement du modèle triparticulaire complet (cf. annexe 2.2).

Pour le modèle complet, la déflexion s'exprime de manières différentes selon la couche du sandwich que l'on considère. Pagano a calculé les déflexions au milieu de l'épaisseur du sandwich. Nous utiliserons donc l'expression de la déflexion de l'âme pour effectuer les comparaisons des déflexions. Elle s'écrit,

$$(2.28) \quad w_{Tri}^2\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{2q_0 L^4}{\pi^4 e(e+d)^2 Q_{11}^1} \left(1 + \frac{\pi^2}{L^2} e Q_{11}^1 \left(\frac{e}{3G_{13}^1} + \frac{d}{2G_{13}^2} \right) \right) - \frac{q_0 e d}{2(e+d)^2} \left(\frac{e}{3E_3^1} + \frac{d}{6E_3^2} \right)$$

Voyons à présent les expressions des contraintes de cisaillement $\sigma_{xz}(0, y, z)$ dans l'épaisseur du sandwich, pour le modèle complet.

L'expression des contraintes de cisaillement se déduit du calcul des champs de déplacement comme pour le modèle simplifié (cf. annexe 2.2). On constate qu'elle est identique pour les deux théories multiparticulaires sandwichs,

$$(2.29) \quad \sigma_{xz}(0, y, z) = \begin{cases} \frac{z + \frac{h}{2}}{e} \frac{q_0 L}{\pi(e+d)} & \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq -\frac{d}{2} \\ \frac{q_0 L}{\pi(e+d)} & \text{pour } -\frac{d}{2} \leq z \leq \frac{d}{2} \\ \frac{-z + \frac{h}{2}}{e} \frac{q_0 L}{\pi(e+d)} & \text{pour } \frac{d}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases}$$

Nous verrons par ailleurs dans les exemples qui suivent, que les valeurs numériques de $w\left(\frac{L}{2}\right)$ pour le modèle complet sont très voisines de celles du modèle simplifié. Ceci nous permettra de considérer que les deux théories multiparticulaires sont équivalentes pour le problème traité.

II.1.2 Exemples d'application

II.1.2.1 Présentation de l'étude

Nous nous intéressons à l'étude de panneaux sandwichs constitués d'une mousse isotrope Rohacell 71 et de peaux multicouches en matériau composite T300/174, à fibres en carbone préimprégnées dans une matrice époxyde. Les caractéristiques mécaniques sont données tableau (2.1) pour l'âme du sandwich et tableau (2.2) pour les peaux.

$E_x = E_y = E_z$	$G_{xy} = G_{yz} = G_{xz}$	$\nu_{xy} = \nu_{yz} = \nu_{xz}$
92 MPA	30 MPA	0,53

Tableau 2.1: Caractéristiques mécaniques de l'âme

E_x	$E_y = E_z$	$G_{xy} = G_{xz}$	ν_{xy}	$\nu_{yz} = \nu_{xz}$
119 GPA	9,25 GPA	5,1 GPA	0,32	0,49

Tableau 2.2: Caractéristiques mécaniques des peaux

Pour simplifier, nous avons supposé que les fibres de carbone avaient la même orientation dans toutes les couches du sandwich, correspondant à la direction de sollicitation \underline{e}_1 . Nous avons ainsi donné les propriétés mécaniques des peaux dans le repère structural $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ qui coïncide dans notre cas avec le repère d'orthotropie local de chacune des couches qui composent les peaux (cf. tableau 2.2).

Nous étudierons trois exemples de panneaux sandwichs en flexion cylindrique, en changeant le rapport de l'épaisseur de l'âme sur l'épaisseur des peaux $\alpha = \frac{d}{e}$, mais en gardant les mêmes propriétés mécaniques.

Le premier cas correspondra à un rapport classique de sandwich $\alpha = 20$. Le deuxième correspondra au rapport minimum $\alpha = 10$ défini par Gay (1989), pour lequel un sandwich doit être, selon lui, défini. Enfin, puisqu'il arrive de rencontrer dans la littérature des panneaux sandwichs qui ne respectent pas tout à fait cette règle, nous regarderons également un cas où le rapport α est inférieur à 10. Nous étudierons le cas limite $\alpha = 5$.

II.1.2.2 Résultats

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats des déflexions maximales et les répartitions de contraintes de cisaillement dans l'épaisseur des panneaux sandwichs définis au paragraphe précédent, pour les trois rapports α , et obtenus pour les cinq théories, classiques et multiparticulaires, sous forme de graphiques.

L'ensemble des résultats numériques a été regroupé dans les tableaux (A2.1) à (A2.3) en annexe (2.3). Notez que les valeurs numériques des déflexions obtenues avec les expressions (2.8) et (2.10) pour les différentes modélisations multiparticulaires sont comparables. Le modèle triparticulaire complet fournit des valeurs très légèrement inférieures au modèle simplifié. Nous avons donc représenté sur les graphes des déflexions, qu'une seule courbe pour les modélisations multiparticulaires.

Sur les figures (2.3) à (2.8), nous avons représenté l'évolution des déflexions maximales au centre du panneau rapportées à $w_0 = \frac{q_0 L^4}{\pi^4 D_{11}^1}$, en fonction du rapport $\lambda = \frac{L}{h}$ de la longueur du panneau sur l'épaisseur, qui représente l'élancement de la structure.

Les contraintes de cisaillement sont présentées sur les figures (2.9) à (2.11). Les répartitions de ces contraintes sont données dans l'épaisseur du panneau $\frac{z}{h}$ pour une valeur du rapport λ égale à 20. Les valeurs des contraintes figurent en abscisse, les valeurs de $\frac{z}{h}$ en ordonnée.

Nous indiquerons l'erreur commise avec la solution exacte de Pagano pour toutes les modélisations étudiées. Pour une grandeur G , l'erreur commise sera définie par la relation suivante,

$$(2.30) \quad Erreur = \frac{G_t - G_p}{G_p}$$

en notant G_p la valeur de G obtenue par Pagano,
et G_t la valeur de G obtenue par une des modélisations 2D (théorie de Reissner, théorie de Sab, théories multiparticulaires).

Nous nous intéressons d'abord aux résultats de déflexions des panneaux sandwichs. puis nous présentons les résultats concernant la répartition de contraintes de cisaillement transverse dans l'épaisseur des plaques.

II.1.2.2a Comparaison des déflexions au centre

Exemple 1: $\alpha = 20$

Pour $\alpha = 20$, la figure (2.3a) montrent que l'allure générale des courbes de déflexions obtenues par la théorie classique de Reissner-Mindlin, celle de Sab, et les modèles multiparticulaires coïncident avec celle de Pagano sauf pour les toutes premières valeurs du rapport d'élancement λ . La figure (2.3b) qui propose un zoom de ces courbes pour λ supérieurs à 20, montre la parfaite adéquation entre les courbes de Pagano et celles des modèles multiparticulaires. Les courbes des modèles de Reissner-Mindlin et de Sab sont légèrement décalées par rapport à la solution exacte, mais la prédiction des déflexions reste satisfaisante.

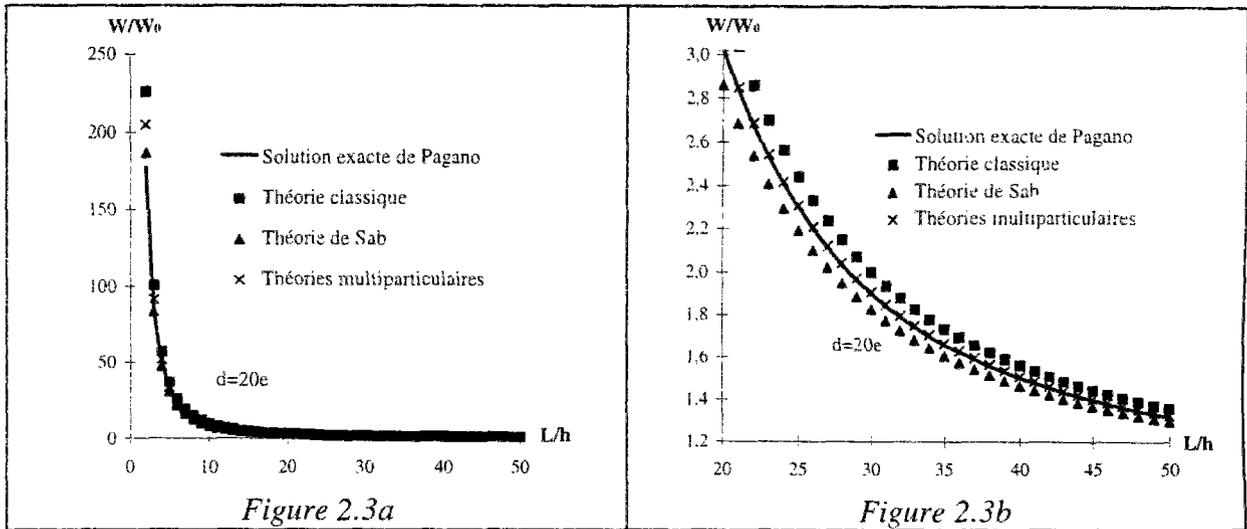


Figure 2.3a et b: Evolution des déflexions maximales en fonction de $\lambda=L/h$ pour $d=20e$

Vu la figure (2.4) et les valeurs numériques regroupées dans le tableau (A2.1) de l'annexe (2.3), les écarts varient rapidement pour les valeurs de λ comprise entre 2 et 10, pour les différents modèles par rapport à la solution de Pagano. Les modèles multiparticulaires qui donnent des résultats de déflexions pratiquement identiques, présentent des écarts qui varient entre une vingtaine de % pour $\lambda = 2$ et environ 1% pour $\lambda = 10$, écarts qui descendent en dessous de 10% dès $\lambda = 3$. Pour le modèle de Sab, les écarts avec la solution exacte varient de 5,2% pour $\lambda = 2$ à 7,2% pour $\lambda = 10$ et diminuent progressivement pour arriver à moins de 2% pour $\lambda = 50$. Cette théorie est donc excellente dans ce cas puisqu'elle est capable de prédire des déflexions avec une bonne précision dès les premières valeurs de λ . Pour la théorie sandwich classique, les écarts passent de 31% pour $\lambda = 2$ à 10% pour $\lambda = 10$ pour atteindre 5% pour $\lambda = 31$ et passer en dessous des 3% pour $\lambda = 50$.

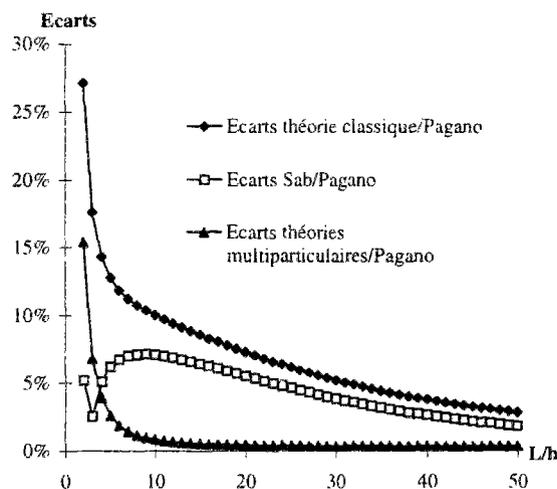
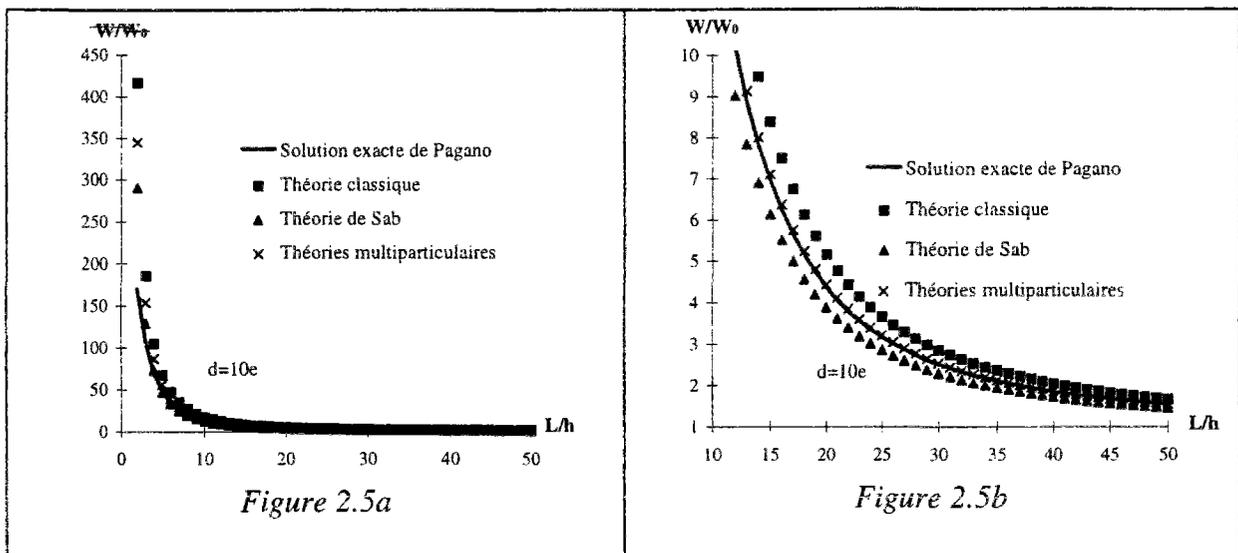


Figure 2.4: Erreur commise avec la solution de Pagano en fonction de $\lambda=L/h$ pour $d=20e$

Les modèles multiparticulaires et le modèle de Sab prédisent donc des déflexions avec une très grande précision, pour toutes les valeurs de λ sauf $\lambda = 2$ pour les théories multiparticulaires, pour toutes les valeurs de λ pour le modèle de Sab. Les modèles multiparticulaires s'avèrent être néanmoins plus précis que la théorie de Sab dès que le rapport λ dépasse 5. Le modèle sandwich quant à lui, donne des résultats satisfaisants à partir du rapport $\lambda = 10$.

Exemple 2: $\alpha = 10$

Pour $\alpha = 10$, on remarque que le phénomène observé précédemment s'amplifie: si les courbes de déflexions des modèles classiques et multiparticulaires épousent de façon satisfaisante celle de Pagano, elles démarrent toutefois beaucoup plus haut que la solution exacte (cf. figure 2.5).



Figures 2.5a et b: Evolution des déflexions maximales en fonction du rapport $\lambda=L/h$ pour $d=10e$

La figure (2.6) et le tableau (A2.2) en annexe (2.3) mettent en évidence les faiblesses des théories classiques et multiparticulaires pour la prédiction des déflexions maximales au centre des panneaux sandwichs pour les valeurs de λ inférieures à 6. Les écarts sont supérieurs à 100% pour $\lambda = 2$ pour toutes ces théories, et pour $\lambda = 3$ ils atteignent environ 45% pour les modèles multiparticulaires et 74% pour la théorie classique. La théorie de Sab se comporte mieux pour ces premières valeurs puisque les écarts sont de 70% et de 21%, respectivement pour $\lambda = 2$ et $\lambda = 3$. Cependant pour la théorie de Sab dès que $\lambda \geq 5$, les écarts augmentent et dépassent même 10% pour $\lambda = 9$. L'écart le plus important est atteint pour $\lambda = 13$ et vaut à peu près 12%. A partir de cette valeur, les écarts baissent de nouveau pour atteindre 5 % pour $\lambda = 50$.

Les théories multiparticulaires, quant à elles, présentent des écarts inférieurs à 10% avec la solution exacte de Pagano lorsque $\lambda > 6$, de moins de 5% pour $\lambda \geq 10$ et ces écarts tombent en dessous de 1% pour $\lambda \geq 25$. La théorie sandwich classique, quant à elle, est satisfaisante pour des valeurs de $\lambda > 40$ où les écarts avec la solution exacte deviennent inférieurs à 10%.

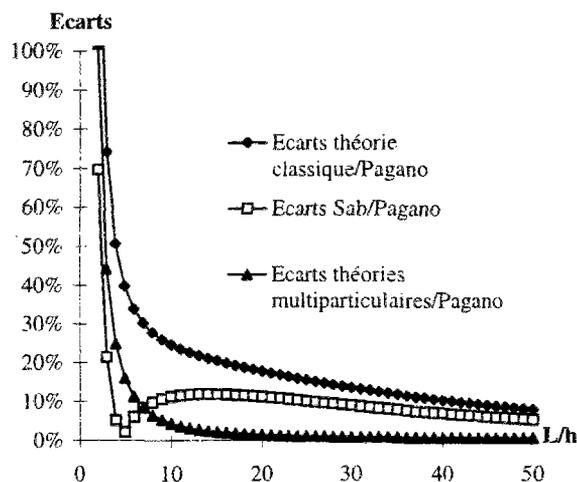


Figure 2.6: Erreur commise avec la solution exacte de Pagano en fonction du rapport $\lambda=L/h$, pour $d=10e$

La théorie de Sab est donc également très intéressante dans ce cas pour toutes les valeurs de λ . Les théories multiparticulaires prédisent mal les déflexions pour de très faibles rapports λ , mais deviennent très rapidement les plus pertinentes pour des élancements de plaques classiques. La théorie sandwich classique n'est satisfaisante que pour de très grandes valeurs de λ .

Exemple 3: $\alpha = 5$

Pour le dernier cas $\alpha = 5$, les observations effectuées dans le cas précédent, sont encore plus évidentes (cf. figure 2.7). Le modèle classique, celui de Sab et les théories multiparticulaires prédisent des valeurs de déflexions maximales très élevées par rapport à celles de Pagano.

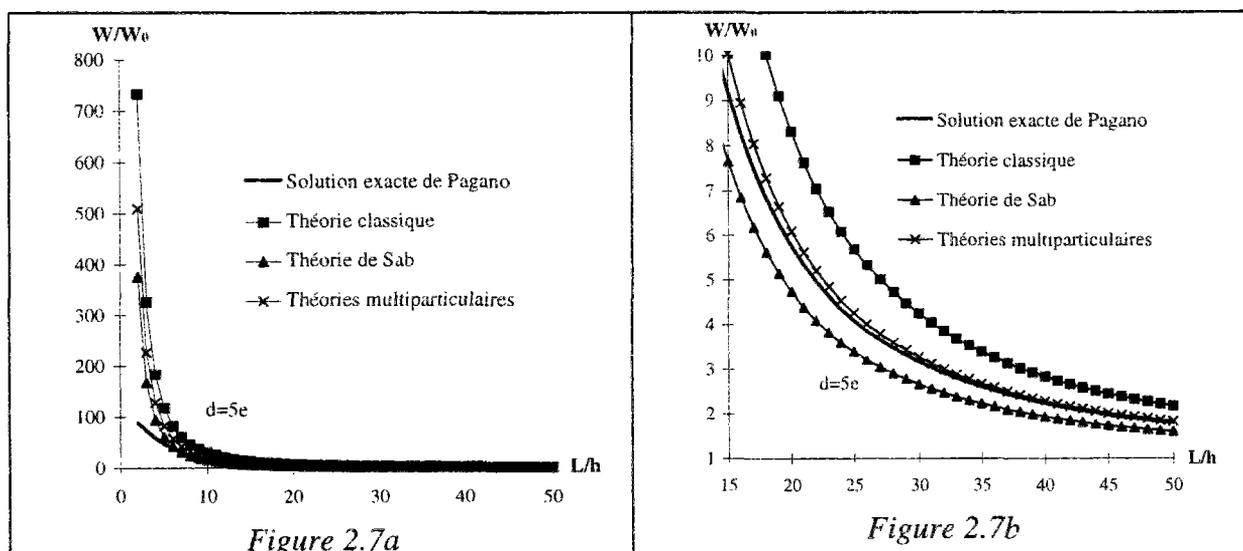


Figure 2.7a et b: Evolution des déflexions maximales en fonction du rapport L/h pour $d=5e$

Ce phénomène se propage jusque pour des valeurs de λ égales à 15 pour les modèles multiparticulaires, où les écarts avec Pagano décroissent de 480% à 10% pour $2 < \lambda < 15$. Pour $\lambda > 15$ les déflexions prédites par les modèles multiparticulaires sont en accord avec celles de la solution exacte. Les écarts du modèle de Sab avec Pagano diminuent rapidement pour $2 < \lambda < 8$ où ils passent de 320% à 3%. Cependant ils augmentent pour $9 < \lambda < 22$ où ils atteignent 18% pour $\lambda = 22$. Ils diminuent ensuite progressivement jusqu'à 10% pour $\lambda = 50$ (cf. figure 2.8 et tableau A2.3 de l'annexe 2.3).

La théorie classique de sandwich présente des écarts variant entre 722% à 21% pour $2 < \lambda < 50$.

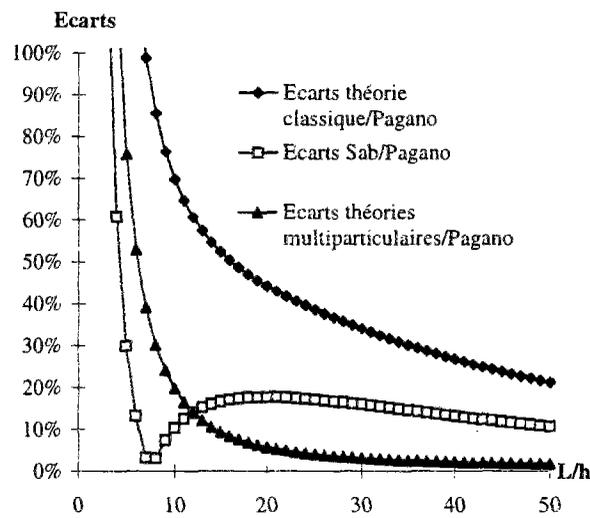


Figure 2.8: Erreur commise avec la solution exacte de Pagano en fonction du rapport $\lambda=L/h$, pour $d=5e$

La théorie sandwich n'est donc pas satisfaisante dans ce cas. La théorie de Sab n'est plus aussi performante que dans les deux cas précédents. Seules les théories multiparticulaires fournissent des résultats qui restent pertinents, pour des valeurs de $\lambda \geq 15$.

Synthèse des résultats

Faisons tout d'abord quelques remarques sur l'ensemble des courbes de déflexions avant de proposer une synthèse des résultats par théorie.

Nous constatons en premier lieu qu'en augmentant l'épaisseur de peaux vis à vis de celle de l'âme (soit en diminuant le rapport α) les solutions de déflexions obtenues par les modèles classiques de Reissner, de Sab et multiparticulaires s'écartent de plus en plus des solutions exactes de Pagano. Ceci est surtout vrai pour les premières valeurs du rapport λ où les écarts augmentent très vite lorsque α diminue. Il est intéressant de noter que cette inflation des écarts en début de courbes est liée d'un côté à une prévision de déflexions de plus en plus élevées pour les théories classiques et multiparticulaires, et de l'autre d'une diminution de la prévision des déflexions par Pagano, au fur et à mesure que α diminue.

La théorie sandwich donne des résultats inférieurs à 10% pour les deux premiers cas, pour $\lambda \geq 10$ dans le premier cas mais seulement pour $\lambda > 40$ dans le deuxième cas. Pour le troisième cas la théorie classique ne convient plus puisque les écarts sont tous supérieurs à 20%.

La théorie sandwich classique fait donc les preuves de ses limites dès qu'on avoisine des rapports α de 10 ou que l'on se situe en dessous. Cependant la théorie sandwich reste performante pour des rapports α élevés dépassant 20.

La théorie de Sab, qui propose une autre expression de la raideur en cisaillement transverse de la théorie classique, se montre d'une très grande précision pour des rapports α supérieurs à 10, quelque soit l'élanement du panneau. Par contre pour des cas limites tels que $\alpha = 5$ cette théorie n'est plus aussi pertinente.

Les théories multiparticulaires, quant à elles semblent s'adapter à toutes les situations de panneaux sandwichs, même dans les cas limites où les rapports α sont très faibles, si toutefois les panneaux sandwichs ne présentent pas des élanements trop petits.

Pour $\alpha = 20$, les prévisions des modèles multiparticulaires sont pratiquement les mêmes que celles de la théorie de Pagano. Pour $\alpha = 10$, les écarts sont inférieurs à 10% pour $\lambda \geq 7$ et inférieurs à 5% pour $\lambda \geq 10$. Les résultats des modèles multiparticulaires sont donc encore une fois très satisfaisants. Enfin dans le dernier cas, les écarts sont inférieurs à 10% pour $\lambda \geq 15$. Là encore les théories triparticulaires se comportent correctement pour la prévision des déflexions.

En conclusion de ces constatations sur les déflexions, il est clair que les théories de Sab et multiparticulaires sont plus précises dans leurs prévisions que la théorie sandwich classique, issue de la théorie des stratifiés de Reissner-Mindlin, vu les résultats présentés dans cette partie.

Voyons à présent, si les résultats obtenus pour les contraintes de cisaillement des modèles triparticulaires sont aussi pertinents vis à vis de la solution exacte donnée par Pagano.

II.1.2.2b Comparaison des contraintes de cisaillement

Nous avons représenté sur les figures (2.9) à (2.11) les contraintes de cisaillement, au bord dans l'épaisseur du sandwich, fournies par le modèle de Pagano, la théorie classique, la théorie de Sab et les modèles multiparticulaires. Nous constatons que ces répartitions de contraintes $\sigma_{xz}(0, y, z)$ sont quasiment identiques.

Dans les cas où $\alpha = 20$ et $\alpha = 10$, les modèles multiparticulaires prévoient la même répartition de contraintes $\sigma_{xz}(0, y, z)$ au bord pour $\lambda = 20$ que la solution exacte. Les écarts sont inférieurs à 1‰ dans le premier cas et inférieur à 1% dans le second cas. Pour le dernier cas où $\alpha = 5$, la courbe des contraintes du modèle triparticulaire se différencie un peu de celle de Pagano. Mais les écarts restent inférieurs à 6%. Les résultats obtenus avec les modèles multiparticulaires sont donc excellents vis à vis de la solution exacte de Pagano.

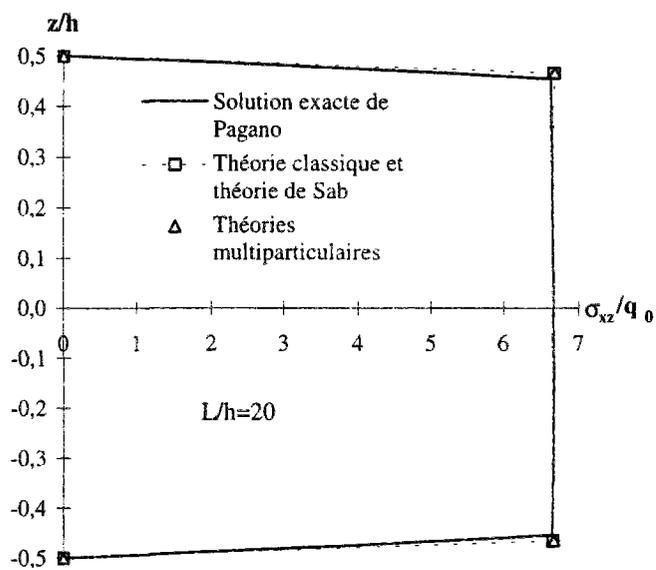


Figure 2.9 : Evolution des contraintes de cisaillement pour $d=20e$

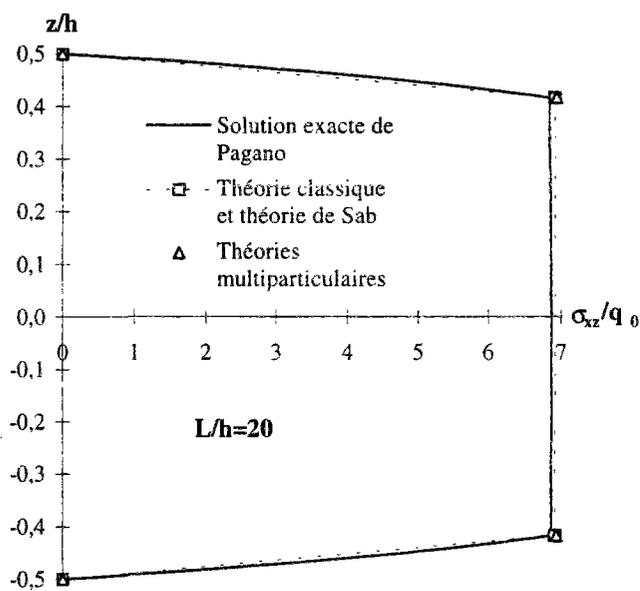


Figure 2.10 : Evolution des contraintes de cisaillement pour $d=10e$

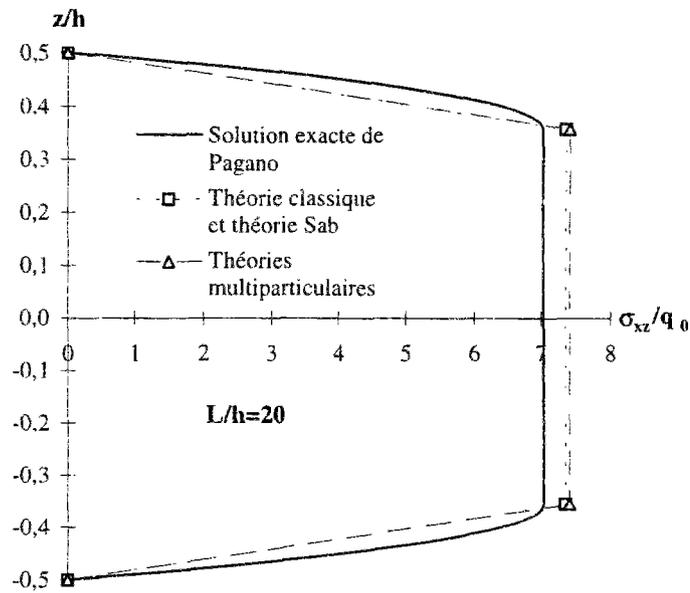


Figure 2.11 : Evolution des contraintes de cisaillement pour $d=5e$

Pour conclure, nous avons vu que les modélisations multiparticulaires étaient très pertinentes, ainsi que la théorie de Sab lorsque les peaux ne sont pas trop épaisses par rapport à l'âme. La pertinence des modèles multiparticulaires nous a conduit à développer une maille éléments-finis M4 pour les multicouches et pour les sandwichs (Smaoui 1996). Nous avons effectué les calculs dans le cas du modèle simplifié.

La maille élément-fini de la théorie de Sab n'a malheureusement pas été développée. Dans la partie suivante, nous nous contenterons de valider uniquement la maille multiparticulaire vis à vis de modélisations sandwichs éléments-finis.

II.2 COMPARAISON NUMERIQUE AVEC LE CODE DE CALCUL PAR ELEMENTS-FINIS SAMCEF

Dans cette partie, nous confrontons la maille élément-fini triparticulaire en version simplifiée (maille M4S), avec des modèles numériques éléments-finis réalisés avec le code de calcul SAMCEF.

En premier lieu, nous indiquons les différentes techniques de modélisations possibles pour les structures sandwichs SAMCEF, puis nous présentons les exemples d'application.

II.2.1 Modélisation de structures sandwichs par éléments-finis avec le logiciel SAMCEF

Le logiciel de calcul de structures par éléments finis SAMCEF a été développé conjointement par la société SAMTECH et l'université de Liège. Il possède des modules de simulation et d'analyse de structures, utilisables pour les composites multicouches. Il présente de nombreuses possibilités de contrôle par assistance graphique, au niveau de la définition du stratifié (visualisation des plis, visualisation des laminés, visualisation des épaisseurs, visualisation des matériaux...) ainsi qu'au niveau de l'analyse des résultats (contraintes et déformations par pli, critères de dégradation). Il dispose également d'éléments « classiques » en version multicouche pour lesquels les caractéristiques de chaque couche sont des données d'entrée (matériau, orientation, épaisseur du pli). Enfin ce logiciel permet de réaliser la plupart des analyses thermomécaniques de structures composites: analyse statique linéaire et non linéaire, analyse dynamique (modes propres, réponse transitoire et harmonique), flambement et post-flambement (cf. manuels utilisateurs).

II.2.1.1 Les éléments quadrangles multicouches de SAMCEF pour les composites stratifiés

Il existe deux types d'éléments finis quadrangulaires dans la bibliothèque d'éléments de SAMCEF destinés à modéliser des objets composites 3D multicouches:

- Les éléments T11 de volume isoparamétrique
- Les éléments T56 de coque hybride de Marguerre

Le premier type d'éléments est utilisé pour la modélisation de coques épaisses ou de volumes. Le deuxième type d'élément est plutôt dédié à la modélisation de coques minces stratifiées en version multicouche.

■ Description de l'élément T11

L'élément se présente sous la forme d'un parallélépipède curviligne à 8 sommets. Le nombre de degrés de libertés de l'élément est fixé par le degré général de l'élément, choisi par l'utilisateur. Les éléments peuvent être du 1^{er} degré, du 2^{ème} degré, ou du 3^{ème} degré. Il existe deux formulations de l'élément: une version volumique et une version coque. Pour l'élément de volume, le nombre de degrés de libertés est de 24, 60 et 96 pour le degré général 1, le degré 2 et le degré 3, respectivement. Pour l'élément de coque, quelque soit le degré considéré, les arêtes suivant l'épaisseur de l'élément sont toujours de degré 1. Le nombre de degré de libertés est donc égal à 24, 48, et 72 en degré 1, 2 et 3 respectivement. De plus les contraintes dans l'épaisseur σ_{zz} sont nulles. Notons qu'il est également possible de définir explicitement des noeuds d'interface sur les arêtes des éléments de SAMCEF. L'élément T11 peut ainsi compter jusqu'à 32 noeuds en degré 3 (deux noeuds d'interface par arêtes). Par cette méthode, on peut imposer le degré 2 dans l'épaisseur de l'élément en version coque, en définissant un noeud supplémentaire sur les arêtes correspondantes.

■ Description de l'élément T56

L'élément T56 est constitué par la superposition d'une membrane isoparamétrique de Marguerre et d'une plaque hybride de Love/Kirchhoff. Il est défini par 4 ou 8 noeuds selon qu'il soit du 1^{er} ou du 2^{ème} degré. Dans ce dernier cas les 4 noeuds supplémentaires sont les noeuds d'interfaces situés au milieu des arêtes.

II.2.1.2 Techniques de modélisation des plaques sandwichs en composite

Il existe différentes techniques de modélisations de matériaux sandwichs utilisant les éléments T11 ou/et T56 en version mono ou multicouches (*Maréchal 1989*), (*Craveur 1996*). Toutes ces techniques visent à obtenir des résultats d'une bonne précision pour un temps de calcul minimal.

La première technique consiste à n'employer que des éléments T56 multicouches de degré 2 (cf. figure 2.12). Cette technique permet de simuler une structure sandwich de faible épaisseur dont le comportement est peu différent de celui d'une plaque mince stratifiée. On peut en effet négliger dans ce cas, les déformations dues aux effets du cisaillement transverse et considérer que les sections droites du panneau restent droites et normales à la déformée moyenne après déformation. Les hypothèses de Love/Kirchhoff utilisées dans la formulation de l'élément T56 sont bien vérifiées.

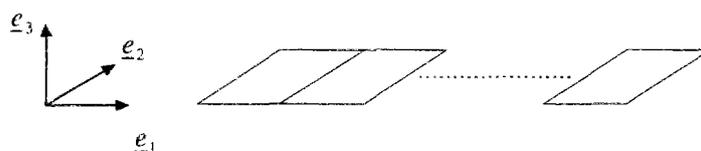


Figure 2.12: *Éléments multicouches de type 56*

Une structure sandwich sera donc modélisée de façon satisfaisante par les éléments T56 lorsqu'on pourra approcher son champ de déformation par celui de Love/Kirchhoff, c'est à dire si elle est peu sensible aux efforts tranchants.

La deuxième technique consiste à n'utiliser que des éléments volumiques multicouches T11 qui semblent a priori mieux adaptés que les éléments bidimensionnels T56 à la modélisation des sandwichs (cf. figure 2.13). Chaque section du sandwich peut se déformer en une courbe linéaire, quadratique ou cubique selon le degré général du champ de déplacement choisi par l'utilisateur. Les éléments T11 ne sont plus limités par l'hypothèse de conservation des sections droites.

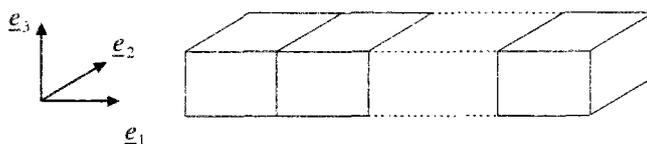


Figure 2.13: *Éléments multicouches de type 11*

Pour des structures sandwichs très déformables à l'effort tranchant, l'utilisation d'éléments T11 du 1^{er} ou du 2^{ème} degré peut s'avérer insuffisante pour modéliser correctement les déformations dans l'épaisseur du sandwich. On leur préférera l'utilisation d'éléments de degré 3 dont le champ de déplacement représente une déformée de section droite plus conforme à la réalité.

Une variante de cette technique consiste à négliger les effets du cisaillement transverse dans les peaux en fixant leurs modules de cisaillement à zéro.

La troisième et dernière technique de modélisation est un compromis entre la première et la deuxième technique. Son objectif est de modéliser chacun des constituants du sandwich (peaux et âme) par un élément différent de façon à mieux tenir compte des écarts importants entre les propriétés matérielles de l'âme et des peaux. La modélisation du sandwich est effectuée en superposant dans l'épaisseur un élément monocouche T11 pour l'âme et deux éléments multicouches T56 pour les peaux (cf. figure 2.14). De cette façon les propriétés matérielles ne varient plus de façon importante au sein d'un même élément.

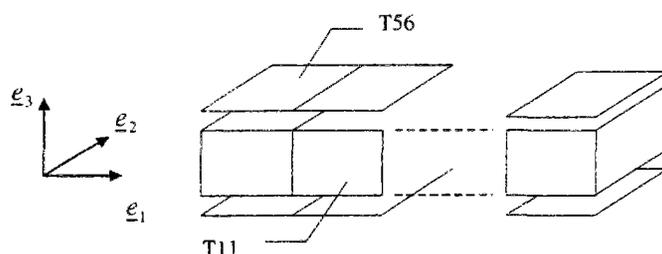


Figure 2.14: Superposition d'éléments T11 et T56 - Vue éclatée suivant e_3 .

Pour reprendre correctement la rigidité flexionnelle des peaux, on modifie l'épaisseur du coeur de manière à ramener le plan moyen des peaux à leur position réelle (cf. figure 2.15).

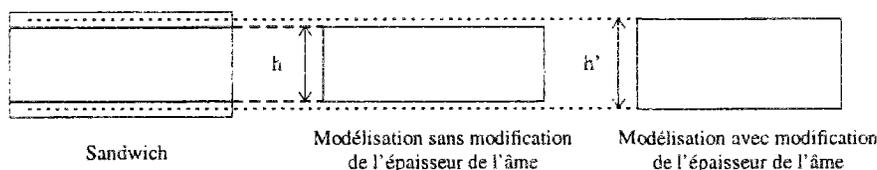


Figure 2.15: Position des plans moyens

L'augmentation de l'épaisseur du coeur s'accompagne d'une diminution de ses modules élastiques proportionnellement au rapport $\frac{h'}{h}$.

Dans les exemples d'application qui suivent nous modéliserons les structures sandwichs par ces trois techniques de modélisation, en choisissant pour les éléments, différentes hypothèses concernant le degré du champ de déplacement et le nombre de points d'intégration (ou points de Gauss) (cf. tableau 2.3).

Maillages	Type d'éléments	Degré général	Nombre de points de Gauss (e_1, e_2, e_3)
Maillage n°1	T56	degré 2	2×2
Maillage n°2	T11	degré 2	2×2×2
Maillage n°3	T11	degré 3	2×2×2
Maillage n°4	T11 + G_{xz} et G_{yz} nuls dans les peaux	degré 2	3×2×2
Maillage n°5	T11+T56	degré 2	2×2×2

Tableau 2.3: Modélisations retenues pour l'étude

A toutes ces modélisations, nous rajouterons une modélisation éléments finis réalisée avec une très grande finesse de maillage, que nous pourrons considérer comme la référence des calculs de simulation (cf. figure 2.16). Cette modélisation est constituée uniquement d'éléments T11 en hypothèse de volume, en version monocouche pour l'âme et multicouche pour les peaux.

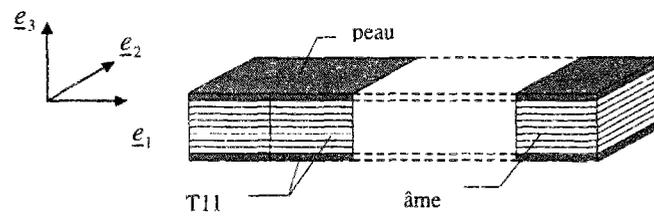


Figure 2.16: Maillage fin en T11

La discrétisation est effectuée dans les 3 directions de l'espace. Les éléments sont de degré 2 dans toutes les directions. Des noeuds d'interfaces ont été explicitement définis dans les deux directions du plan e_1 et e_2 . Ce maillage fin comporte ainsi beaucoup de degrés de liberté. Ce maillage tridimensionnel fournit des résultats d'une très grande précision. Cependant il est très coûteux pour un calcul de structures de plaque (cf. tableaux 2.5, 2.9 et 2.11).

II.2.2 Exemples d'application

Les exemples que nous traitons dans ce paragraphe sont issus d'études sur la modélisation numérique des sandwichs, réalisées par la société SAMTECH qui est chargée de développer et de maintenir le logiciel SAMCEF.

La grandeur qui nous intéresse est la déflexion maximale au centre de la structure.

Nous indiquerons les temps de calcul obtenus sur station de travail SUN SS10. Vous noterez que les temps de calcul de la maille M4S n'étant pas optimisés, ces valeurs ne sont données qu'à titre indicatif. Cependant, nous indiquons le nombre de degré de liberté pour avoir un ordre d'idée des temps de calculs du modèle multiparticulaire par rapport aux autres modélisations éléments-finis.

II.2.2.1 Exemple 1: Flexion 3 points de plaque sandwich

Ce premier exemple provient d'un rapport SAMTECH sur la modélisation de sandwich par éléments-finis (Maréchal 1989).

On considère une plaque, soumise à un chargement en flexion 3 points, constituée d'une âme en nid d'abeille de 10mm d'épaisseur et de deux peaux composées de 6 plis d'épaisseur 0,125 mm et d'empilement $[90^\circ, 0^\circ]_3$ pour la peau inférieure et $[0^\circ, 90^\circ]_3$ pour la peau supérieure. Le repère (e_1, e_2, e_3) est un repère d'orthotropie pour les peaux et l'âme.

Les caractéristiques mécaniques du nid d'abeille et du préimprégné sont données tableau (2.4).

Les dimensions ainsi que les propriétés matérielles sont indiquées figures (2.17).

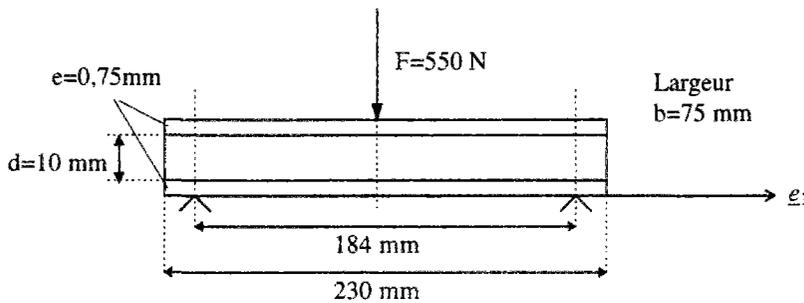


Figure 2.17: Dimensions de la poutre

	E_1 (MPa)	E_2	E_3	G_{12}	G_{13}	G_{23}	$\nu_{12}=\nu_{23}=\nu_{13}$
nida	5	5	67	30	24	35	0,35
préimprégné	47000	3000	3000	1600	1600	1600	0,35

Tableau 2.4: Propriétés matérielles

Pour des raisons de symétrie, nous n'avons modélisé qu'un quart de plaque. Les maillages n°1,2,3,4 et multiparticulaire sont constitués de 10 éléments dans la longueur et de 5 éléments dans la largeur, soit en tout, de 10×5 éléments. Le maillage 5 qui possède trois rangées d'éléments dans l'épaisseur, comprend $10 \times 5 \times 3$ éléments.

Le nombre de degré de liberté des maillages est indiqué tableau (2.5). On y trouvera également les résultats des déflexions maximales (au centre) obtenues pour les différentes modélisations du sandwich, ainsi que les temps de calcul CPU.

Maillages	Nombre de degrés de liberté	Déflexion au centre en (mm)	Temps CPU
Maillage fin de référence	6802	2,15	3mn16s
Maillage n°1 (T56 de degré 2)	710	0,89	5,9s
Maillage n°2 (T11 de degré 2)	1187	1,03	19,6s
Maillage n°3 (T11 de degré 3)	1368	2,10	23,4s
Maillage n°4 (T11 + $G_{ij}=0$ dans les peaux)	1187	2,57	24,5s
Maillage n°5 (T11+T56)	1617	2,54	16,6s
Maillage Multiparticulaire (TriS)	1267	2,14	45,4s

Tableau 2.5: Exemple 1 - Nombre de degrés de liberté, résultats de déflexions et temps de calcul machine

Remarques: ☞ Le nombre de degré de liberté d'un maillage éléments-finis est classiquement le nombre de degré de liberté en un noeud multiplié par le nombre de noeuds du maillage. Pour le modèle multiparticulaire, nous avons défini une cinématique à 7 champs scalaires. Le nombre de degrés de liberté du maillage est donc 7 que multiplie le nombre de noeuds.

☞ La finesse des maillages assure la convergence des solutions.

On constate que les maillages n°1, 2 donnent des résultats très éloignés de ceux de référence, et dans une moindre mesure les maillages 4 et 5. Seul le maillage n°3 est satisfaisant.

Le meilleur résultat est obtenu par la maille élément-fini multiparticulaire qui prévoit une déflexion pratiquement identique à celle du maillage fin de référence. La modélisation multiparticulaire éléments-finis est donc extrêmement pertinente pour cet exemple.

II.2.2.2 Exemple 2: Flexion 4 points de poutres sandwichs

Dans cette partie, nous reprenons l'étude réalisée par E. Maréchal sur la comparaison de différents modèles éléments finis de poutres sandwichs en flexion 4 points (Maréchal 1990).

Nous nous intéressons à 3 exemples de poutres sandwichs, plus ou moins déformables à l'effort tranchant.

Test n°1: la poutre est peu déformable à l'effort tranchant ($\rho = 0,04$).

Test n°2: La poutre est moyennement déformable à l'effort tranchant ($\rho = 1,7$).

Test n°3: la poutre est très déformable à l'effort tranchant ($\rho = 3,1$).

où $\rho = \frac{E_{peaux}}{G_{âme}} \left(\frac{h}{L} \right)^2$ permet d'estimer l'influence du cisaillement transverse du sandwich.

h est l'épaisseur du sandwich et L la distance entre appuis.

La géométrie et les dimensions des panneaux sont indiquées figures (2.18) à (2.20), respectivement pour les trois cas. Les caractéristiques des matériaux sont données dans le repère structural de la poutre, tableaux (2.6) à (2.8).

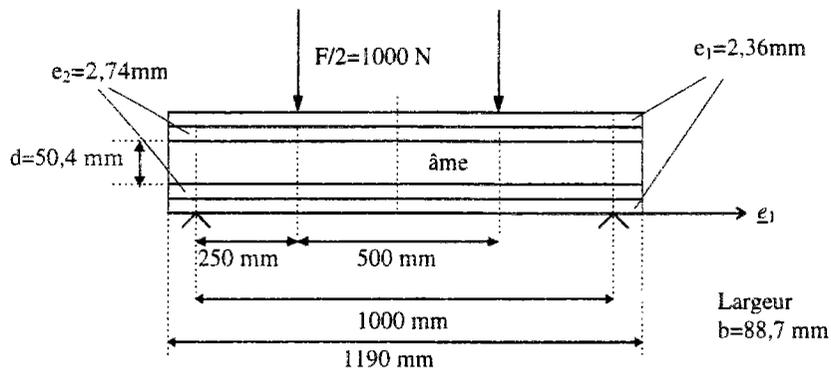


Figure 2.18: Test n°1 - dimensions de la structure

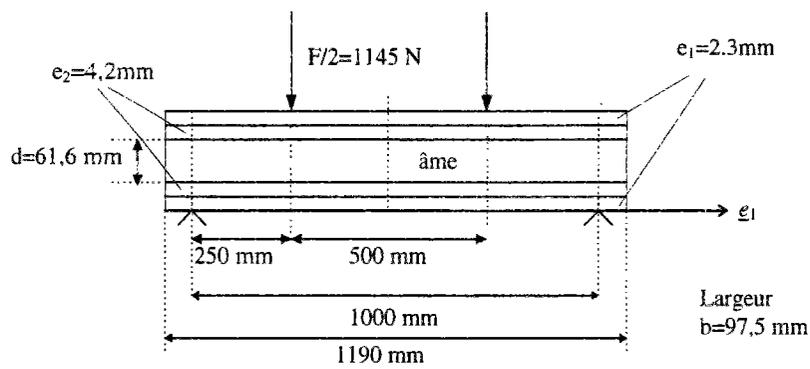


Figure 2.19: Test n°2 - Dimensions de la structure.

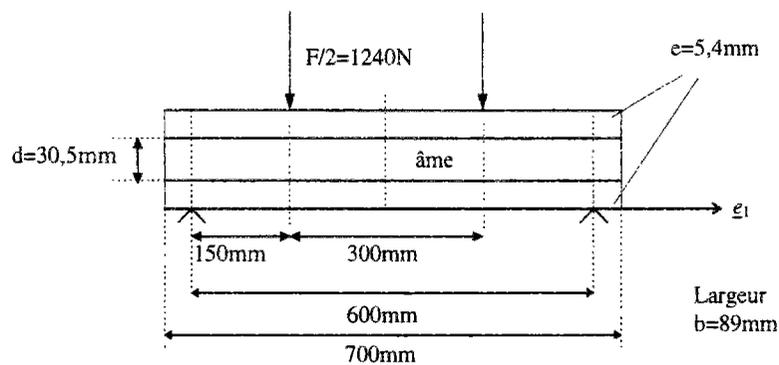


Figure 2.20: Test n°3 - Dimensions de la structure

	<i>Epaisseur (mm)</i>	E_1 (MPa)	E_2	E_3	G_{12}	$G_{13}=G_{23}$	ν_{12}	$\nu_{23}=\nu_{13}$
<i>Ame</i>	50,4	380	380	3000	140	1400	0,30	0,30
<i>Pli n°1</i>	2,36	15480	15480	5600	2450	4000	0,13	0,30
<i>Pli n°2</i>	2,74	16690	16690	6270	2650	4000	0,13	0,30

Tableau 2.6: Test n°1 - Propriétés matérielles

	<i>Epaisseur (mm)</i>	$E_1=E_2$ (MPa)	E_3	G_{12}	$G_{13}=G_{23}$	ν_{12}	$\nu_{23}=\nu_{13}$
<i>Ame</i>	61,6	150	150	57,7	57,7	0,30	0,30
<i>Pli n°1</i>	2,3	17970	6740	2820	4000	0,15	0,30
<i>Pli n°2</i>	4,2	16690	6270	2640	4000	0,13	0,30

Tableau 2.7: Test n°2 - Propriétés matérielles

	<i>Epaisseur (mm)</i>	$E_1=E_2$ (MPa)	E_3	G_{12}	$G_{13}=G_{23}$	ν_{12}	$\nu_{23}=\nu_{13}$
<i>Ame</i>	30,5	60	60	23	23	0,30	0,30
<i>Pli</i>	5,4	15000	5000	2450	4000	0,13	0,30

Tableau 2.8: Test n°3 - Propriétés matérielles

La symétrie du problème permet de ne modéliser qu'une moitié de structure.

Pour les tests 1 et 2,

- 20×1 éléments (maillages n°1,2,3,4 et multiparticulaire)
- 20×1×3 éléments (maillage n°5)

Pour le test 3,

- 17×1 éléments (maillages n°1,2,3,4 et multiparticulaire)
- 17×1×3 éléments (maillage n°5)

Le tableau (2.9) indique le nombre de degrés de liberté des différents maillages.

<i>Maillages</i>	<i>Test 1</i>	<i>Test 2</i>	<i>Test 3</i>
<i>Maillage fin de référence</i>	6347	6319	5392
<i>Maillage n°1 (T56 de degré 1)</i>	421	421	358
<i>Maillage n°2 (T11 de degré 2)</i>	732	732	622
<i>Maillage n°3 (T11 de degré 3)</i>	854	854	728
<i>Maillage n°4 (T11 + $G_{ij}=0$ dans les peaux)</i>	729	729	621
<i>Maillage n°5 (T11+T56)</i>	729	729	621
<i>Maillage Multiparticulaire (TriS)</i>	721	721	616

Tableau 2.9: Exemple 2 - Nombres de degré de liberté

Les résultats des déflexions sont regroupés au tableau (2.10) et les temps de calculs au tableau (2.11).

<i>Maillages</i>	<i>Test 1</i>	<i>Test 2</i>	<i>Test 3</i>
<i>Maillage fin de référence</i>	2,53	1,97	3,69
<i>Maillage n°1 (T56 de degré 2)</i>	2,47	1,28	1,64
<i>Maillage n°2 (T11 de degré 2)</i>	2,50	1,34	1,70
<i>Maillage n°3 (T11 de degré 3)</i>	2,51	1,76	2,19
<i>Maillage n°4 (T11 + $G_{ij}=0$ dans les peaux)</i>	2,50	2,12	4,63
<i>Maillage n°5 (T11+T56)</i>	2,48	2,17	4,83
<i>Maillage Multiparticulaire (TriS)</i>	2,58	1,98	3,80

Tableau 2.10: Exemple 2 - Résultats de déflexions (en mm)

<i>Maillages</i>	<i>Test 1</i>	<i>Test 2</i>	<i>Test 3</i>
<i>Maillage fin de référence</i>	46,0s	48,0s	45,1s
<i>Maillage n°1 (T56 de degré 1)</i>	2,76s	3,89s	2,93s
<i>Maillage n°2 (T11 de degré 2)</i>	8,91s	5,03s	3,62s
<i>Maillage n°3 (T11 de degré 3)</i>	7,30s	7,29s	5,03s
<i>Maillage n°4 (T11 + $G_{ij}=0$ dans les peaux)</i>	6,27s	5,94s	3,93s
<i>Maillage n°5 (T11+T56)</i>	6,47s	6,36s	5,55s
<i>Maillage Multiparticulaire (TriS)</i>	15,0s	14,3s	13,8s

Tableau 2.11: Exemple 2 - Temps de calculs CPU

Ces résultats montrent que globalement la précision des modélisations numériques SAMCEF diminue lorsque l'influence du cisaillement transverse sur les déformations augmente. Pour une poutre très sensible à l'effort tranchant, on constate même qu'aucune modélisation éléments-finis classique n'est adaptée pour ce type de problème.

Le modèle multiparticulaire quant à lui donne des résultats très satisfaisants pour les trois tests puisque les écarts n'excèdent pas 4% avec les déflexions maximales de référence.

II.2.2.3 Synthèse des résultats

Les exemples de cette partie ont abordé plusieurs comportements de poutres sandwichs plus ou moins sensibles aux déformations dues au cisaillement transverse.

Ils ont permis ainsi, d'évaluer pour différents problèmes la précision de la maille multiparticulaire par rapport à d'autres modèles sandwichs classiquement utilisés en éléments finis, comme la superposition d'éléments T56/T11 de SAMCEF.

Nous avons regroupé dans un tableau récapitulatif, les erreurs de précision obtenues entre les résultats du maillage de référence et les autres mailles éléments-finis (cf. tableau 2.12). L'erreur est définie de la même manière que dans la partie II.2.2 (cf. relation 2.12). Nous avons également indiqué les valeurs de deux paramètres mesurant l'importance de l'effort

tranchant dans le comportement de la poutre sandwich: l'épaisseur relative des peaux $\frac{d}{e}$ et le critère ρ aussi bien pour le premier exemple que pour le second exemple.

	<i>Exemple 1</i>	<i>Exemple 2: Test n°1</i>	<i>Exemple 2 Test n°2</i>	<i>Exemple 2 Test n°3</i>
$\frac{d}{e}$	13,33	9,88	9,48	5,65
ρ	7,7	0,04	1,7	3,1
<i>Maillage n°1 (T56 de degré 2)</i>	58%	2%	35%	55%
<i>Maillage n°2 (T11 de degré 2)</i>	52%	1%	32%	54%
<i>Maillage n°3 (T11 de degré 3)</i>	2%	1%	11%	41%
<i>Maillage n°4 (T11 + $G_{ij}=0$ dans les peaux)</i>	19%	1%	8%	25%
<i>Maillage n°5 (T11+T56)</i>	18%	2%	10%	31%
<i>Maillage Multiparticulaire (TriS)</i>	<1%	2%	<1%	3%

Tableau 2.12: Erreurs par rapport aux modèles éléments-finis de référence

Ce tableau (2.12) montre que les modélisations SAMCEF donne des résultats très inégaux selon les types de problème considérés.

Pour l'exemple 1, seul le maillage 3 et dans une moindre mesure les maillages 4 et 5, décrivent correctement le comportement de la plaque. Les autres maillages de SAMCEF sont inadaptés. Il est vrai que l'influence du cisaillement transverse, qui est très importante dans la poutre sandwich, explique l'inefficacité des modèles en éléments T56 et T11 multicouches de degré 2 destinés plutôt à la description de sandwichs peu ou moyennement déformables à l'effort tranchant.

Pour le test 1 de l'exemple 2, l'influence du cisaillement transverse est très faible et la cinématique peut être décrite par des champs de Love-Kirchhoff. Toutes les modélisations de SAMCEF donnent dans ce cas des résultats extrêmement pertinents.

Pour le test 2 de l'exemple 2, l'influence du cisaillement augmente dans le sandwich. Les maillages 1 et 2 sont cette fois inadaptés à la modélisation des sandwichs. Les maillages 3, 4 et 5 quant à eux, sont satisfaisants. Ces résultats sont qualitativement comparables à ceux de l'exemple 1.

Enfin pour le dernier test de l'exemple 2, aucune des modélisations de SAMCEF n'est satisfaisante. Le paramètre ρ est pourtant moins élevé que dans le premier cas. Il semble que ce soit l'importance de l'épaisseur des peaux relativement à celle de l'âme (paramètre d/e) qui soit à l'origine des mauvais résultats de ces modèles. Même les modélisations 3, 4 et 5 de SAMCEF qui semblent les mieux adaptées pour la modélisation des sandwichs atteignent leur limite dans ce cas de figure.

Le modèle multiparticulaire semble au contraire s'adapter à tous les types de problème de panneaux sandwichs. Récapitulons les résultats. Il se situe à moins de 1% du résultat de référence pour l'exemple 1 et le test n°2 de l'exemple 2, à 2% pour le test n°1 et à 3% pour le test n°3.

Les résultats de la maille élément-fini multiparticulaire M4S sont donc dans tous les cas inférieurs à 4% des résultats de référence. Cette maille multiparticulaire se révèle ainsi être très performante pour le dimensionnement de panneaux sandwichs.

II.3 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons montré la pertinence des modèles multiparticulaires ainsi que celle de la théorie de Sab. Nous avons abordé deux types de problèmes de calcul. Le premier problème a permis de comparer les solutions analytiques des modélisations multiparticulaires et celles de Sab vis à vis de la solution exacte de Pagano. Nous y avons montré que ces théories permettaient de trouver des solutions analytiques aussi simples d'utilisation que celles de la théorie classique de sandwich, mais beaucoup plus précises.

Le second problème a permis de tester la maille élément-fini M4S (version du modèle triparticulaire simplifié) par rapport à d'autres modélisations sandwichs éléments-finis de SAMCEF et de montrer une fois encore la pertinence des modèles multiparticulaires par rapport à ceux d'un code de calcul existant sur le marché et ayant déjà fait ses preuves dans le domaine du dimensionnement des structures composites. Nous n'avons pu, hélas, vérifier la pertinence du modèle de Sab dans ce dernier exemple, puisque nous n'avions pas à notre disposition la version élément-fini du modèle.

Il ressort des résultats de ce chapitre, que les modèles multiparticulaires, et sans aucun doute également la théorie de Sab, semblent bien se prêter au dimensionnement de structures sandwichs. Il reste à optimiser les temps de calcul du modèle numérique multiparticulaire pour concurrencer cette fois-ci les modèles de SAMCEF du point de vue économique.

Dans cette première partie du mémoire nous avons donc mis au point des modélisations de plaques sandwichs classiques dont on connaît les propriétés équivalentes de l'âme.

Dans la seconde partie du mémoire, nous nous intéresserons au développement de modèles classiques d'une plaque sandwich dont on doit homogénéiser le cœur: la structure alvéolaire (en Δ) développée au CERAM de l'ENPC. Cette partie du mémoire sera ainsi entièrement dédiée aux structures fléchissantes alvéolaires. Nous y présenterons dans un premier temps la technologie alvéolaire puis dans le reste de la partie un outil de dimensionnement des structures alvéolaires, construit à partir d'un procédé d'homogénéisation que nous tenterons de valider en raideur, et que nous appliquerons au flambement de panneaux alvéolaires.

SECONDE PARTIE

MODELISATION DE PLAQUES SANDWICHES

ALVEOLAIRES EN COMPOSITE

CHAPITRE III

CONCEPTION ET ELABORATION DES STRUCTURES

ALVEOLAIRES DU CERAM

Le besoin constant de panneaux travaillants en composite de plus en plus légers et résistants pour une rigidité de flexion équivalente à celles des structures déjà présentes sur le marché, a conduit les chercheurs à développer au fil des années de nouveaux matériaux composites ou de nouveaux concepts de structures en composite.

La première voie de recherche permet d'améliorer les performances des structures sandwichs traditionnelles en jouant sur la nature et la composition des constituants les composant, et de les adapter aux exigences de plus en plus contraignantes des concepteurs.

La seconde voie est celle qu'à prise le Centre d'Enseignement et de Recherche en Analyse des Matériaux (CERAM) de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées en portant ses efforts sur le développement d'une technologie de structures alvéolaires en matériau composite permettant de concevoir et d'élaborer des structures sandwichs à âme creuse triangulaire (en Δ) d'une très grande légèreté et surtout très rigide en flexion. Le CERAM a eu pour objectif de proposer une solution de panneaux fléchissants qui intègre les avantages des panneaux sandwichs classiques en éliminant leurs inconvénients liés essentiellement à leur mode d'endommagement principal: la décohésion des interfaces âme/peaux.

L'objet de ce chapitre est de présenter la technologie des composites alvéolaires en Δ , depuis la phase de conception jusqu'à la validation de la technologie, en passant par les méthodes de fabrication.

La première partie constitue une synthèse sur les recherches qui ont conduit à la conception des structures alvéolaires du CERAM. Elle évoque les premières études de simulation du comportement mécanique de ces structures, réalisées avec le code de calcul SAMCEF, dont l'objectif a été d'évaluer leur potentiel. Ces études ont ensuite permis d'optimiser la géométrie du composite alvéolaire et de définir en conséquence les choix technologiques adaptés.

La deuxième partie présente succinctement la méthode de fabrication des premiers prototypes de panneaux alvéolaires en Δ réalisés au sein du CERAM.

Enfin, la dernière partie aura pour objectif de vérifier si les méthodes de fabrication permettent effectivement de fabriquer les structures alvéolaires que l'on aura dimensionnées, et ainsi de voir si les calculs numériques validant le concept de structure alvéolaire à âme triangulaire, n'étaient pas trop optimistes. Il s'agira de confronter le comportement réel et le comportement simulé des premiers prototypes en effectuant des essais de flexion et les calculs par éléments finis correspondants.

III.1 MOTIVATION ET ETUDES PRELIMINAIRES

Fort de son expérience acquise dans le domaine des matériaux composites, le CERAM a développé une technologie de composite alvéolaire pour élaborer des panneaux de type sandwich, à âme creuse constituée par un assemblage de tubes creux, et de deux peaux qui enserrment l'âme, fabriquées avec un matériau composite préimprégné (brevet n°9204083). Il s'agit d'une technique de moulage de pièces composites par pression d'air, où la mise sous pression s'effectue pendant le processus de polymérisation, à l'intérieur de la structure, pour que celle-ci soit creuse. La particularité de cette technologie est de pouvoir réaliser les différents constituants (peaux et âme) des pièces à partir d'un même matériau composite préimprégné.

Les premiers panneaux alvéolaires, élaborés au laboratoire du CERAM avec cette technologie, étaient des structures creuses à formes d'âme classique, soit à section rectangulaire (structure en O), soit en oméga (Ω) (figure 3.1), que l'on trouve à l'heure actuelle de plus en plus sur le marché des composites (GangaRao et al 1996), (Head 1992), (Smith 1990).

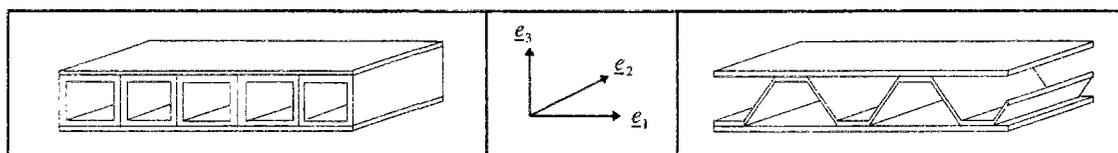


Figure 3.1: Premières structures alvéolaires du CERAM (en O et en Ω)

Pour élaborer les structures en O, il suffit de venir placer dans un moule métallique, des enroulements (ou chaussettes) crues, fabriquées à partir de bandes de préimprégné, entre deux peaux crues stratifiées constituées du même matériau, puis de mettre en pression les chaussettes en composite. Ce procédé d'élaboration permet ainsi d'obtenir la forme rectangulaire de la structure en O sans aucune difficultés techniques particulières.

Pour fabriquer les structures en Ω , la mise en place dans le moule était aussi simple. On utilise à la place des chaussettes en composite, des chaussettes en élastomère non drapées, autour desquelles, alternativement en dessus et en dessous, on fait passer une troisième peau. Ces méthodes de fabrication ne demandent qu'une seule opération de polymérisation.

Du point de vue du comportement mécanique, ces structures possèdent d'excellentes propriétés mécaniques dans l'axe des alvéoles (axe e_2 sur la figure 3.1). Par contre dans l'autre direction d'orthotropie (axe e_1), les propriétés mécaniques en flexion notamment s'effondrent, du fait de la forme de l'âme qui empêche de reprendre correctement les efforts dans cette direction (Philippe 1993), (Naciri, Philippe et al. 1994).

La volonté du CERAM d'obtenir une structure qui soit mécaniquement plus performante, dans la direction perpendiculaire aux cavités, l'a donc conduit à envisager une autre forme d'âme pour ses composites alvéolaires, en s'inspirant de ce qui existe dans des secteurs d'activités comme le génie civil ou le transport. L'objectif en définitive, étant de pouvoir rivaliser avec les meilleurs composites sandwichs sur le marché.

Le génie civil emploie couramment des structures supportées en forme de treillis (ponts, passerelles, etc.). On sait depuis longtemps que ces structures présentent des propriétés mécaniques intéressantes dans le plan des cellules, liées à la position des raidisseurs les uns par rapport aux autres dans la structure.

En outre des panneaux en métal de type sandwich, à cavités triangulaires, ont fait l'objet d'études dans les secteurs du transport maritime et ferroviaire, en vue d'applications pour des structures de véhicules (Sikora et Dinsbacher 1990), (Kujala et al 1995), (Gimenez C 1992).

Nous nous sommes donc intéressés à l'élaboration d'une structure en composite avec ce type d'âme en treillis à forme triangulaire (figure 3.2).

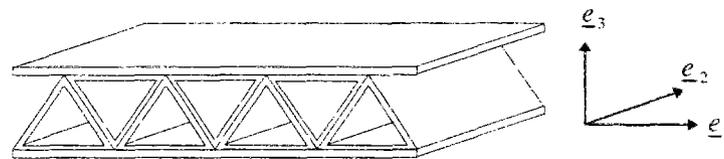


Figure 3.2: Structure alvéolaire en Δ

Le principe du fonctionnement mécanique de la structure alvéolaire en Δ , dans la direction perpendiculaire aux alvéoles, obéit à la théorie de la résistance des matériaux, et peut être schématisé de la façon suivante (figure 3.3).

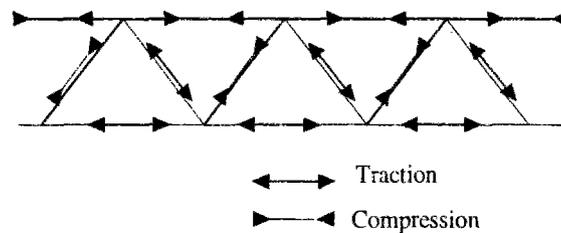


Figure 3.3: Représentation schématique du principe de fonctionnement de l'alvéolaire en Δ dans la direction perpendiculaire aux alvéoles (Exemple)

Les raidisseurs obliques travaillent de préférence en traction ou compression lorsqu'on les sollicite dans la direction e_1 . C'est ce comportement et la continuité de ces efforts dans les pointes de triangle qui procurent au panneau alvéolaire d'excellentes propriétés de rigidité dans le plan des alvéoles, du moins en théorie.

Une vérification numérique de la tenue en flexion s'imposait à ce stade des investigations, avant d'entamer des recherches sur les procédés de fabrication. Des simulations ont donc été effectuées avec le code de calcul par éléments finis SAMCEF pour juger de la pertinence de cette nouvelle structure alvéolaire (Philippe 1993), (Naciri Philippe et al. 1994). Nous avons comparé numériquement les rigidités en flexion des composites alvéolaires en O, en Ω , et en Δ , et celles des composites sandwichs traditionnels (notamment à âme en nid d'abeille aluminium). Cette étude a été réalisée en considérant des panneaux de mêmes dimensions, de même masse, à peaux identiques, et soumis aux mêmes chargements en flexion. Cette analyse englobait une optimisation de la géométrie de la structure et de l'orientation des fibres dans chacun des constituants.

Nous avons ainsi vérifié que la structure en Δ présentait bien une meilleure rigidité dans le plan que les autres structures alvéolaires. De plus, nous avons mis également en évidence que la tenue en flexion de l'alvéolaire en Δ était supérieure à celle de tous les composites sandwichs testés dans ce travail.

Cette étude, qui s'est avérée très encourageante, a été le point de départ de recherches visant à développer une technologie d'élaboration alvéolaire adaptée à cette nouvelle famille de structures. Des essais d'élaboration avec la technologie alvéolaire alors en usage, ont mis en évidence l'inadéquation de ces techniques. Il était clair qu'on ne pouvait pas fabriquer les panneaux en Δ comme on fabriquait les alvéolaires en O ou en Ω au risque d'obtenir des parois positionnées aléatoirement (figure 3.4).

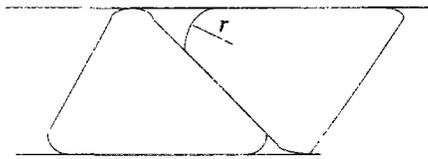


Figure 3.4: Défauts de fabrication

De plus, les tubes triangulaires, constituant l'âme des panneaux alvéolaires, présentaient des rayons de courbure fortement prononcés au niveau des points de triangles (r sur la figure 3.4). Une vérification numérique a permis d'établir que ces courbures avaient une incidence considérable sur la rigidité des panneaux (Le Conte 1994). Lorsque r augmentait, la déflexion maximale également et ceci de manière exponentielle.

La géométrie de la structure devait donc être impérativement respectée. Les points de triangles devaient être correctement positionnés pour permettre aux efforts de passer de l'âme aux peaux.

Pour éviter ces écueils, il était indispensable d'envisager l'élaboration de l'âme alvéolaire à partir de tubes préfabriqués qui permettent de respecter la géométrie du treillis définie par les simulations numériques précédentes, et de mettre en place plusieurs opérations de cuisson.

Les procédés de fabrication mis en oeuvre doivent par ailleurs tenir compte d'un ensemble de choix géométriques et d'orientations de fibres, défini à la suite des études numériques, visant à obtenir une raideur spécifique très élevée et à conférer à la structure une bonne rigidité transversale (suivant \underline{e}_1).

Les alvéoles doivent avoir une forme triangulaire équilatérale, des parois d'épaisseur faible (poids faible), et un angle d'enroulement de fibres très ouvert (cf. figure 3.5).

- Epaisseur des parois comprises entre 0,3 et 0,4mm
- Une seule orientation de fibres dans les raidisseurs: $\theta_2 = \pm 60^\circ$ par rapport à l'axe des tubes (axe \underline{e}_2) (ou $\pm 30^\circ$ par rapport à $\underline{b}_1^i - \underline{b}_1^i$ est un axe d'orthotropie local des raidisseurs et a pour projection le vecteur \underline{e}_1 dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$, cf. figure 3.5)
- Angle α : 60° (triangle équilatéral)

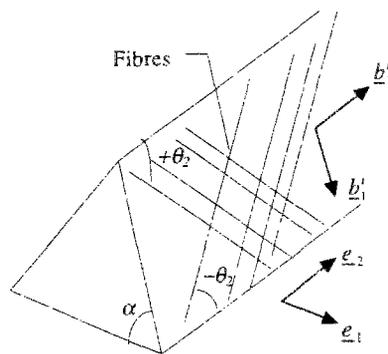


Figure 3.5: Choix de la géométrie des tubes triangulaires

Les peaux sont des empilements définis avec deux orientations de fibres,

- Une orientation de fibres $\theta_1 = 0^\circ$ par rapport à l'axe e_1 ,
- Une orientation de fibres $\theta_2 = \pm 30^\circ$ par rapport à l'axe e_1 , pour les plis qui proviennent des tubes triangulaires.

De plus, l'intérêt porté à la réalisation de panneaux de planchers, nous a conduits à nous intéresser à l'élaboration de panneaux d'environ 50mm d'épaisseur. Les techniques d'élaboration doivent donc permettre de fabriquer des panneaux dont la géométrie « idéale » pour les treillis est représentée figure (3.6).

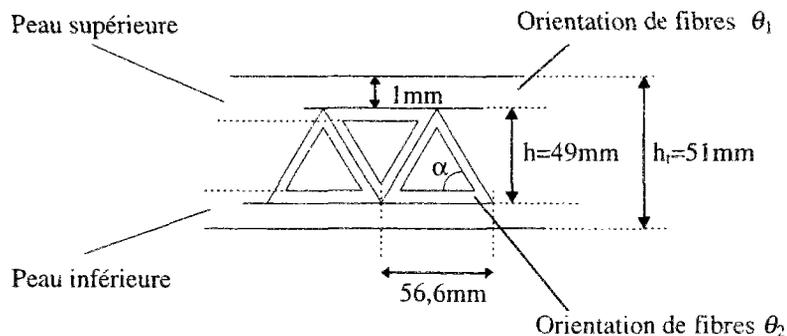


Figure 3.6: Choix de la géométrie de l'âme triangulaire

La technologie alvéolaire visant à donner jour à cette structure alvéolaire potentiellement très compétitive, a fait l'objet de recherches importantes dont nous proposons une synthèse dans la partie suivante.

III.2 ELABORATION

Le préimprégné utilisé dans la fabrication des panneaux alvéolaires en composite, est le matériau T300/174 constitué de renforts fibreux en carbone imprégnés dans une matrice thermodurcissable époxyde. Le taux de fibres est proche de 70% en volume. La polymérisation du matériau s'effectue pour des températures voisines de 120°C. Les caractéristiques physiques sont données ci après, les constantes élastiques sont rappelées tableau (3.1),

Épaisseur de plis : $175\mu\text{m}$ Masse volumique: $\approx 1500 \text{ kg} / \text{m}^3$
 Constantes élastiques (cf. tableau 3.1),

E_L	E_T	G_{LT}	ν_{LT}
119 GPA	9,5 GPA	5,1 GPA	0,32

Tableau 3.1: Caractéristiques mécaniques du préimprégné T300/174

L'élaboration se divise en deux étapes principales (cf annexe 3.1),

- La fabrication à l'unité des profilés creux à section triangulaire
- L'assemblage des profilés formant l'âme « triangulaire » du composite alvéolaire, et des empilements d'orientation $\pm\theta_1$.

Pour cette dernière étape, on utilise le principe de moulage au sac sous vide. Le matériau est polymérisé à une température de 130°C et sous une pression de 3 MPa.

Les panneaux ont été réalisés avec des profilés triangulaires constitués de deux plis de préimprégné d'orientation $[30, -30]$ par rapport à \underline{b}'_1 , une peau supérieure d'un empilement de 8 plis $[30, -30, (0)_6]$ et une peau inférieure d'un empilement de 8 plis $[(0)_6, -30, 30]$ par rapport à \underline{e}_1 , pour respecter les choix précédents.

Deux prototypes de panneau alvéolaire de 2m^2 et six prototypes de 1m^2 ont déjà été élaborés.

Les techniques de fabrication de planchers prototypes au sein du CERAM ont constamment progressé. Des travaux ont été réalisés pour obtenir une technique d'élaboration transposable au niveau industriel qui permettrait une production à grande échelle de panneaux alvéolaires (Antonelli 1995), (L'huillier 1996), (Philippe, Caron, L'huillier et Naciri 1996). L'annexe (3.2) propose de faire une revue de différentes technologies industrielles envisageables pour notre application, du point de vue de la fabrication des unités triangulaires, et de leur assemblage.

III.3 COMPARAISON ESSAIS/SIMULATION: VALIDATION DES MODELES ELEMENTS-FINIS

Cette dernière partie est consacrée à la vérification de la concordance du comportement des objets simulés avec celui des objets réels. Des essais de flexion ont été effectués sur les prototypes fabriqués au CERAM et simulés à l'aide des modélisations éléments-finis SAMCEF, évoquées dans la partie III.1.

Il s'agit des toutes premières vérifications. Le nombre limité d'éprouvettes ne permet pas de réaliser beaucoup d'essais et de disposer d'un grand nombre de résultats permettant un dépouillement statistique. Les résultats obtenus sont donc provisoires. Ils donnent tout de même une indication sur la pertinence du comportement simulé vis à vis du comportement réel.

Nous présenterons les hypothèses des modélisations numériques de ces structures avant d'aborder les essais de flexion réalisés et de donner les résultats issus des essais et de la simulation.

III.3.1 Modélisation éléments finis des structures alvéolaires

Dans cette partie nous précisons les hypothèses qui nous ont conduits à la modélisation éléments-finis des structures alvéolaires, utilisée dans ce travail de thèse.

On peut distinguer deux niveaux essentiels de choix de modélisation:

- Le choix des éléments: Une modélisation tridimensionnelle avec des éléments de coques minces.
- Le choix de la géométrie des treillis qui gouvernent la position des plans moyens des peaux et des raidisseurs dans la modélisation.

Justifions le premier choix de modélisation.

Pour modéliser les peaux et les raidisseurs, une modélisation tridimensionnelle s'impose, puisque pour l'instant, nous ne connaissons pas les caractéristiques équivalentes du milieu alvéolaire pour pouvoir le modéliser comme une plaque. La détermination de ces caractéristiques homogénéisées de plaque fera l'objet du chapitre suivant.

De plus, les parois de l'alvéolaire étant très minces, elles peuvent être représentées par des éléments de plaques sans cisaillement transverse. Notre choix s'est porté sur des éléments de type coque à cinématique de Marguerre référencés T56 dans la bibliothèque d'éléments de SAMCEF. Nous avons vérifié qu'une modélisation plus fine, avec des éléments de volume T11, était inutile, puisqu'elle donnait des résultats comparables aux maillages en T56, mais avec des temps de calculs plus importants.

Le deuxième choix de modélisation concerne la représentation de la géométrie des treillis dans le modèle éléments finis alvéolaire. Cette géométrie est définie par deux paramètres qui sont par exemple la hauteur h et l'angle α entre la base du tube et un raidisseur (cf. figure 3.7).

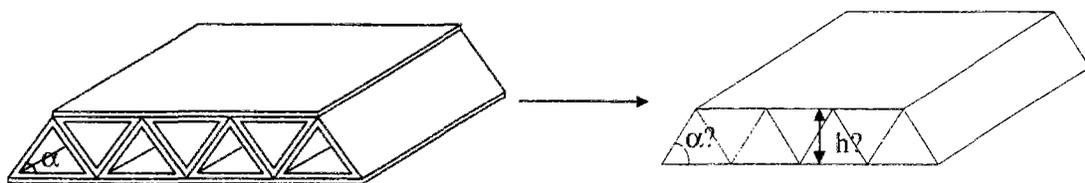


Figure 3.7: Paramètres géométriques du treillis

L'utilisation d'éléments-finis 2D pose le problème de la position des plans moyens des éléments dans le maillage. On distingue deux grandes familles de choix de modélisation de la géométrie des alvéoles.

La première façon est de modéliser les treillis en faisant correspondre les plans moyens des éléments avec ceux des peaux (cf. figure 3.8).

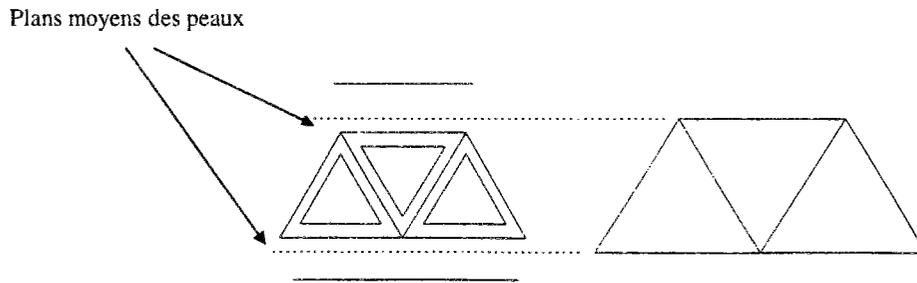


Figure 3.8: Modélisation respectant la position des plans moyens des peaux

En adoptant cette modélisation, on augmente la hauteur des tubes triangulaires et donc la taille des cellules. Les bases des alvéoles du modèle n'ont plus les mêmes dimensions que celles de l'objet réel. Les plans médians des raidisseurs sont plus écartés dans la modélisation. Une autre possibilité serait de garder rigoureusement les dimensions des bases des tubes mais cette fois les plans moyens des raidisseurs subiraient une rotation. On modifierait l'angle α .

La seconde manière est de modéliser les treillis en faisant abstraction de la position exacte des plans moyens des peaux et en respectant la géométrie des raidisseurs (cf. figure 3.9).

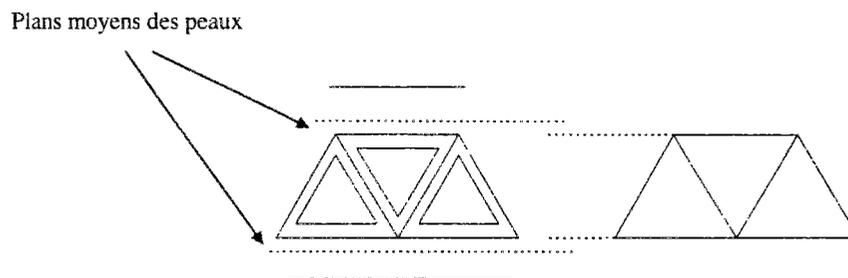


Figure 3.9: Modélisation respectant la position des plans moyens des raidisseurs

Pour cette modélisation les plans moyens des peaux sont plus bas et correspondent à la jonction entre les plis issus des tubes triangulaires et les plis à $\pm\theta_1$. La géométrie des cellules et la position des plans moyens des raidisseurs sont par contre rigoureusement respectées.

Vous noterez donc que la modélisation 3D de la structure alvéolaire, avec des éléments de coques, ne permet pas de représenter l'objet réel de façon rigoureuse, puisqu'on ne peut pas faire coïncider simultanément les plans moyens des peaux et des raidisseurs du modèle avec ceux de l'objet réel.

Le choix de modélisation que nous avons effectué est celui où l'on respecte la position des plans médians des raidisseurs et où l'on suppose que l'on peut modifier celles des peaux sans perdre trop de précision sur la description de l'objet. La hauteur correspond dans ce cas à la hauteur « extérieure » des tubes triangulaires h défini figure (3.6).

III.3.2 Essais de flexion

Dans cette partie nous présentons les trois premiers essais de flexion réalisés sur des prototypes de panneaux alvéolaires. Ils ont permis de simuler les panneaux en condition d'utilisation, soumis soit à des charges concentrées (ex. cloisons) soit à des chargements répartis. Nous avons effectué,

- Un essai de flexion trois points sur une poutre alvéolaire pour tester la raideur en flexion dans la direction perpendiculaire aux alvéoles (flexion transversale: direction e_1)
- Un essai de flexion trois points sur une poutre alvéolaire pour tester la raideur en flexion dans l'axe des alvéoles (flexion longitudinale: direction e_2)
- Un essai de pression uniforme sur un panneau alvéolaire de $2m^2$ (direction de sollicitation: e_1).

Remarque: dans le cas des flexions 3 points, les chargements concentrés ont été appliqués au droit d'une pointe de triangle et non entre deux pointes. Notre objectif était de simuler un essai de comportement en raideur et non un essai de poinçonnement.

III.3.2.1 Flexion transversale suivant e_1

III.3.2.1a Principe de l'essai

Nous avons effectué un essai de flexion 3 points (figure 3.10) avec une éprouvette alvéolaire dont les dimensions figurent au tableau (3.2).

Largeur (mm)	84
Hauteur (mm)	51
Longueur totale (mm)	1055
Longueur entre appuis (mm)	880
Nombres d'alvéoles entre appuis	31

Tableau 3.2: Caractéristiques de l'éprouvette

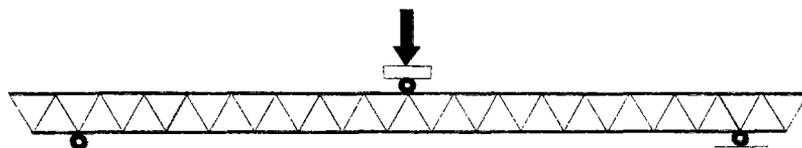


Figure 3.10: Dispositif d'essai de flexion 3 points.

L'essai a été effectué avec une machine d'essais ADAMEL LHOMARGY de capacité 20000N, pilotée en déplacement. Des plaques minces en composite de verre/époxyde ont été collées au niveau des appuis et du chargement pour éviter de créer des endommagements locaux (poinçonnement) à ces endroits pendant l'essai. Un bâti rigide constitué de poutres en acier a été mis en place. Les appuis sont constitués de cylindres creux en acier qui reposent dans des cavités en aluminium. La mise en charge est réalisée par déplacement de la traverse sur laquelle est fixé le capteur de force qui vient appuyer un cylindre en acier sur l'éprouvette. Des capteurs de déplacements et des jauges de déformations ont été placés en différents endroits de l'éprouvette pour suivre l'évolution des déplacements et des déformations de la structure. Deux comparateurs numériques installés sous l'éprouvette ont permis de mesurer la flèche au centre. Deux comparateurs à aiguilles ont été placés sur les appuis afin de détecter et de mesurer un enfoncement éventuel de ces appuis. Des jauges, destinées à connaître les déformations au sein de la structure, ont été positionnées sous la peau inférieure au centre, et près d'un appui simple, et dans les raidisseurs de l'alvéole placé sous la charge.

III.3.2.1b Simulation numérique de l'essai

Nous avons effectué une simulation de l'essai par éléments-finis avec SAMCEF. Le maillage contient 256 noeuds et 426 éléments. Il est représenté figure (3.11). Nous y avons également indiqué les conditions aux limites (chargement et fixations).

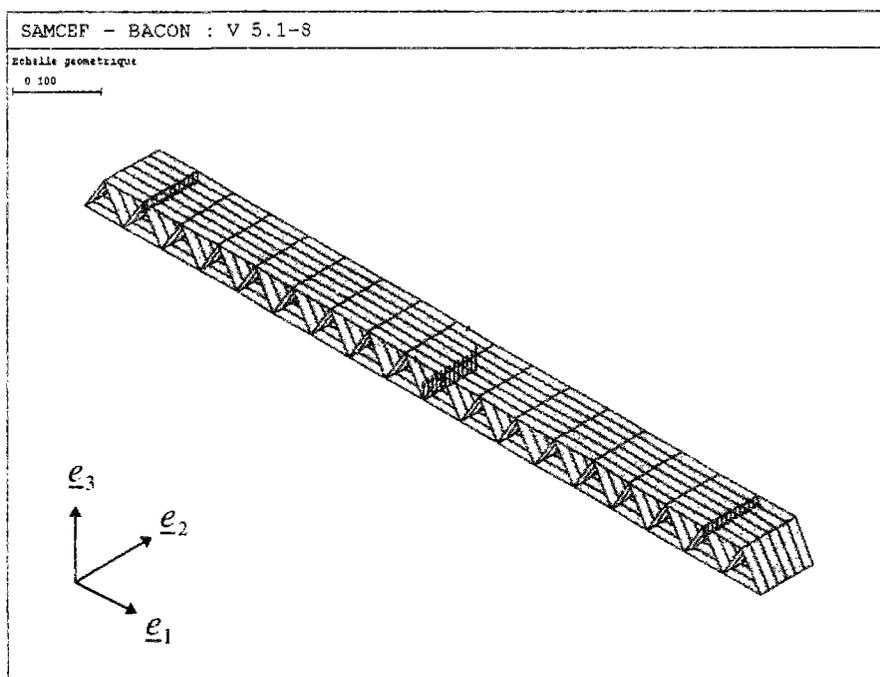


Figure 3.11: Maillage et conditions aux limites

III.3.2.1c Résultats

La figure (3.12) présente un exemple de déflexion obtenue avec SAMCEF. La figure (3.13) regroupe les résultats obtenus avec les capteurs de déplacements et les simulations numériques pour différents chargements.

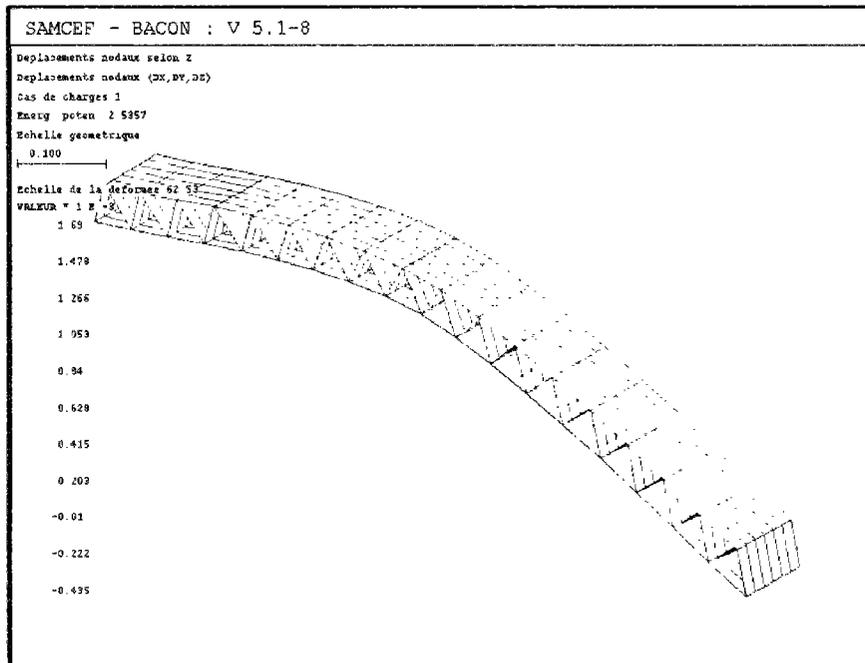


Figure 3.12: Déformée de la structure sous un chargement de 1500N

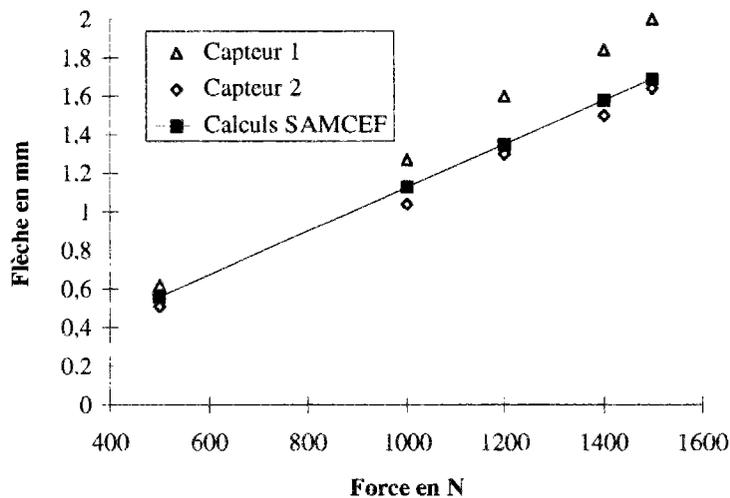


Figure 3.13: Courbe Force/Déplacement en flexion transversale dans le domaine élastique. Comparaison résultats expérimentaux/simulations numériques

Le tableau (3.3) présente l'erreur commise par la simulation SAMCEF par rapport aux essais. L'erreur est définie par le rapport suivant,

$$Erreur = \frac{w_e - w_s}{w_e}$$

Force (N)	Moyenne des capteurs w_e (mm)	Calculs SAMCEF w_s (mm)	Erreurs $\frac{w_s - w_e}{w_e}$
500	0,565	0,56	1%
1000	1,155	1,13	2%
1200	1,45	1,35	7%
1400	1,67	1,58	6%
1500	1,82	1,69	7%

Tableau 3.3: Ecart Simulation/Expérience

Les écarts entre les résultats de la simulation et des essais sont inférieurs à 7%. La corrélation essais/calculs est donc très bonne pour cet exemple d'essai de flexion.

III.3.2.2 Flexion longitudinale suivant e_2

III.3.2.2a Principe de l'essai

Le protocole d'essai en flexion longitudinale est identique à celui précédemment décrit pour la flexion transversale. Il s'agit également d'une flexion 3 points. L'éprouvette testée a les dimensions suivantes (tableau 3.4).

Largeur (mm)	177-119
Hauteur (mm)	51
Longueur totale (mm)	1060
Longueur entre appuis (mm)	1010
Nombres d'alvéoles	5

Tableau 3.4 : Caractéristiques de l'éprouvette

III.3.2.2b Simulation numérique de l'essai

Le maillage utilisé comporte 301 noeuds et 462 mailles. La figure (3.14) montre le maillage avec les conditions aux limites (fixations et chargements).

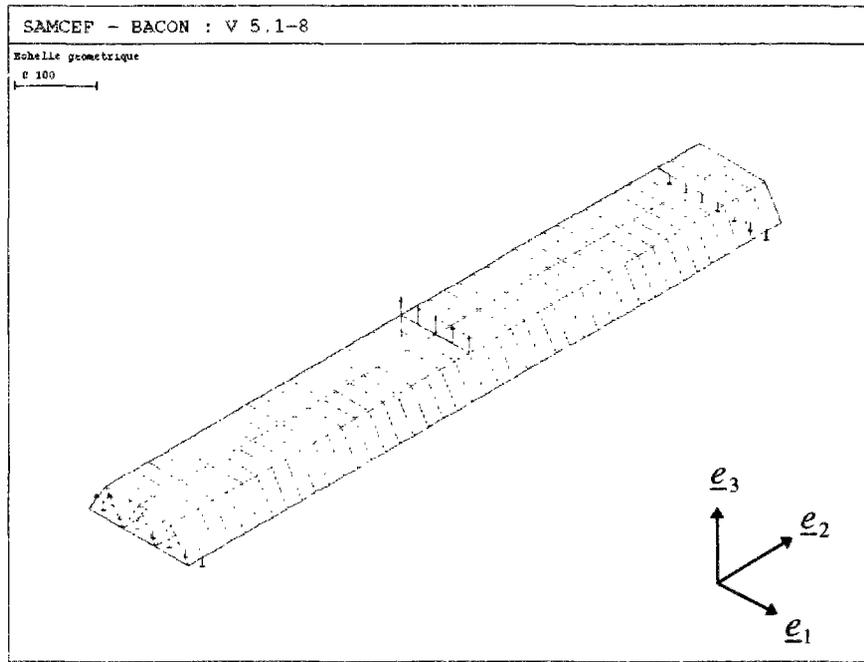


Figure 3.14: Maillage et conditions aux limites

III.3.2.2c Résultats

La figure (3.15) montre la déformée sous une charge de 3600 N.

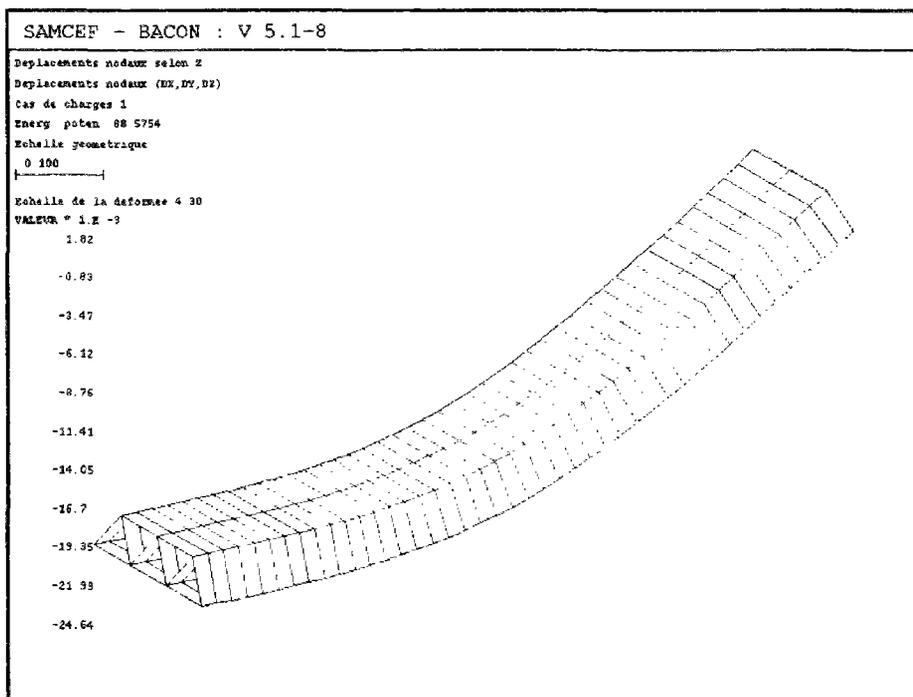


Figure 3.15: Déformée de la structure sous un chargement de 3600N

La figure (3.16) présente les résultats obtenus par les essais et la simulation correspondante.

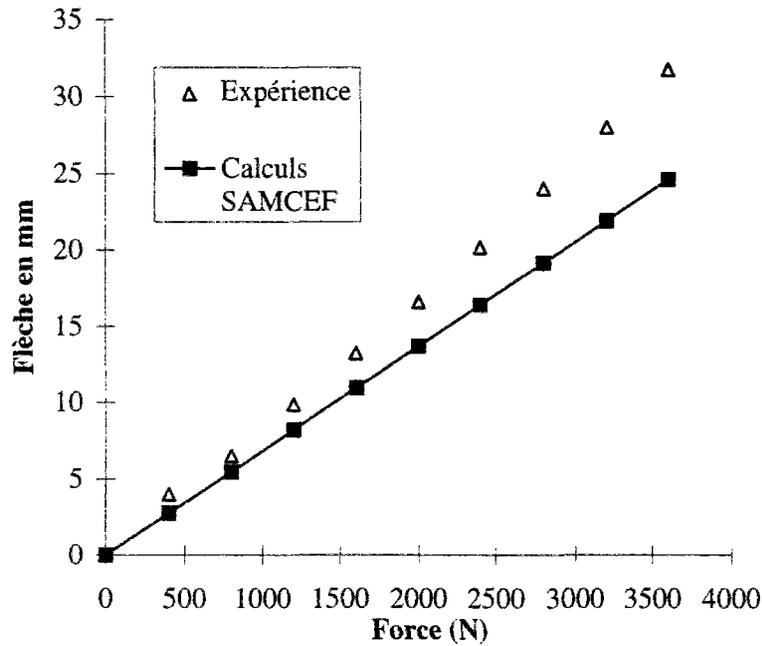


Figure 3.16: Courbe Force/Déplacement en flexion longitudinale dans le domaine élastique. Comparaison résultats expérimentaux/simulations numériques.

Le tableau (3.5) regroupe les résultats des simulations et des essais.

Force (N)	Moyenne des capteurs w_e (mm)	Calculs SAMCEF w_s (mm)	Erreurs $\frac{w_e - w_s}{w_e}$
400	3,99	2,74	31%
800	6,51	5,47	16%
1200	9,87	8,21	17%
1600	13,23	10,95	17%
2000	16,60	13,69	18%
2400	20,17	16,42	19%
2800	24,06	19,16	20%
3200	28,05	21,90	22%
3600	31,83	24,64	23%

Tableau 3.5: Ecart Simulation/Expérience

Les écarts sont plus importants dans cette direction de flexion. La moyenne se situe autour de 20%. Contrairement à la flexion transversale, la simulation numérique tend donc à surestimer la rigidité en flexion du matériau dans l'axe des alvéoles. Notez néanmoins que nous n'avons procédé qu'à un seul essai dans cette direction.

III.3.2.3 Pression uniforme

III.3.2.3a Principe de l'essai

Il s'agit d'appliquer une pression uniforme sur une partie de panneau en composite alvéolaire de 2m^2 et de déterminer la flèche sous cette sollicitation (figure 3.17).

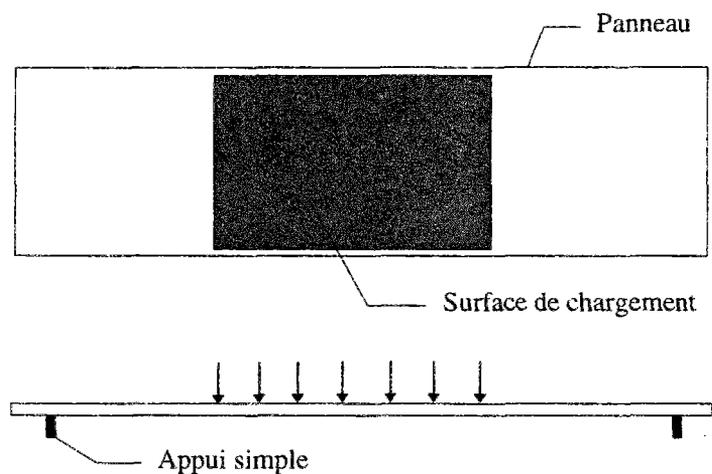


Figure 3.17: Dispositif d'essai de pression uniforme

Nous avons fabriqué un gabarit en bois d'une surface d'un mètre carré. En remplissant ce gabarit de sable, nous avons pu simuler une pression uniforme. Pour suivre les déformations du panneau, nous avons disposé des comparateurs à plusieurs endroits.

III.3.2.3b Simulation numérique de l'essai

Nous avons par ailleurs effectué un calcul par éléments finis de l'essai en question. Le maillage est constitué de 947 noeuds et 1668 éléments. Le chargement et les conditions aux limites sont présentés figures (3.18) et (3.19),

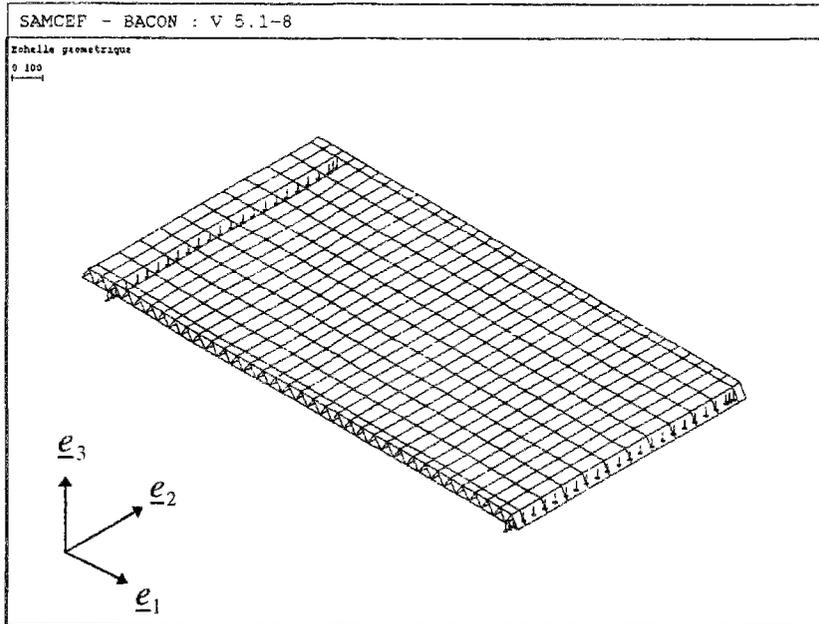


Figure 3.18: Maillage et conditions aux limites

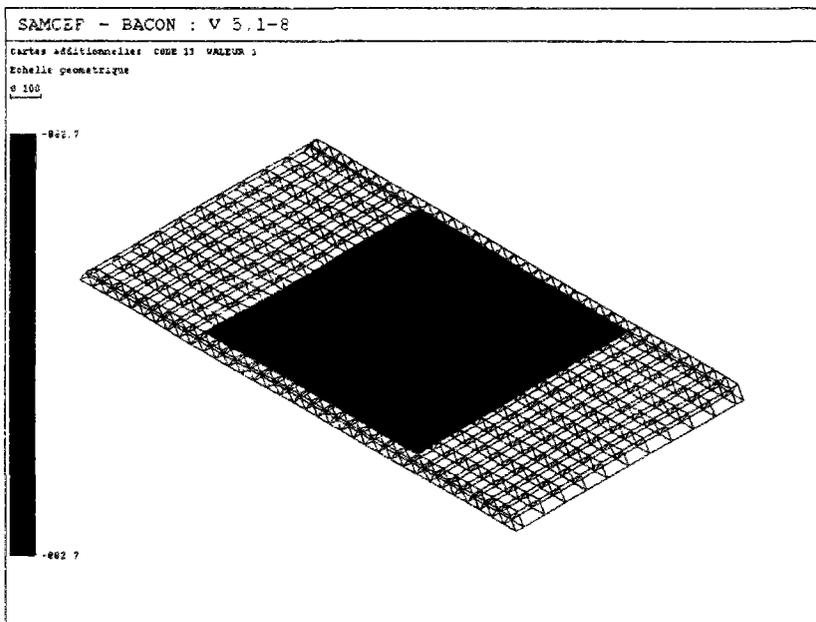


Figure 3.19: Maillage et chargement

Nous obtenons pour une charge totale de 90 kg la déformée qui suit (figure 3.20),

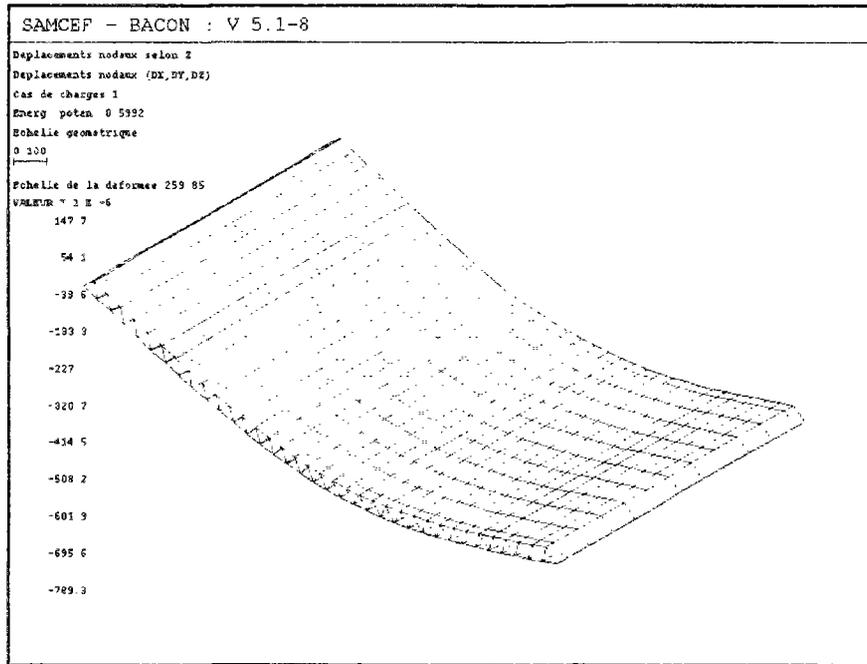


Figure 3.20: Déformée de la structure sous un chargement de 90 kg

III.3.2.3c Résultats de l'essai

La comparaison des résultats expérimentaux avec le calcul donne (figure 3.21),

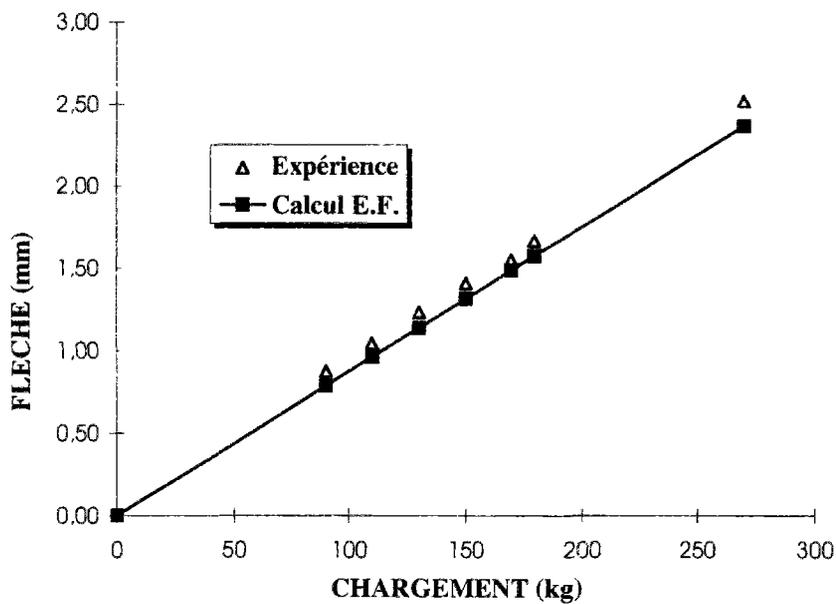


Figure 3.21: Courbe Charge/Déplacement en pression uniforme dans le domaine élastique. Comparaison résultats expérimentaux/simulations numériques

Le tableau (3.6) récapitule les écarts entre les essais et les simulations numériques.

Charge (kg)	Moyenne des capteurs w_c (mm)	Calculs SAMCEF w_s (mm)	Erreurs $\frac{w_c - w_s}{w_c}$
90	0,88	0,79	10%
110	1,05	0,96	9%
130	1,23	1,14	8%
150	1,41	1,32	6%
170	1,55	1,49	4%
180	1,67	1,58	5%
270	2,52	2,37	6%

Tableau 3.6: Ecart Simulation/Expérience

Le graphique (3.21) et le tableau (3.6) montre que la corrélation est excellente. Les écarts sont inférieurs à 10%. Notre modèle élément fini semble donc bien adapté à la modélisation du comportement statique de planchers alvéolaires de cette dimension.

III.3.3 Conclusion

Les résultats obtenus indiquent pour l'instant que la corrélation essais/calculs est satisfaisante dans la direction transverse aux alvéoles pour des poutres comme pour des panneaux. Par contre le premier résultat de l'essai réalisé dans la direction des alvéoles montre que le modèle numérique surestime d'environ 20% la rigidité longitudinale de la structure. Un résultat d'essai est cependant insuffisant pour conclure. D'autres essais sont envisagés dans cette direction et également dans la direction transverse pour confirmer ou infirmer les résultats obtenus par ces essais.

Il semble d'ores et déjà que le modèle éléments finis utilisé présente une bonne fiabilité pour la simulation de comportement de flexion dans la direction e_1 . Dans la direction e_2 , les résultats de calcul de simulation sont à prendre avec précautions.

La production de panneaux alvéolaires étant très faible à cause du peu de main d'oeuvre disponible, cette campagne d'essais que nous avons débuté devrait durer encore quelques années avant de fournir des résultats suffisants pour valider de façon définitive la technologie alvéolaire.

CHAPITRE IV

MISE AU POINT D'UN MODELE MECANIQUE ALVEOLAIRE

IV.1 INTRODUCTION

Les matériaux composites sont par nature des structures hétérogènes pour lesquelles il est nécessaire d'avoir recours à des techniques d'homogénéisation pour étudier leur comportement global. Ces techniques s'appuient sur le concept de changement d'échelle d'observation et stipulent l'existence d'une échelle macroscopique pour laquelle le matériau peut être considéré comme homogène. Pour les composites stratifiés on distingue classiquement les échelles des hétérogénéités suivantes,

- L'échelle du pli baptisée échelle microscopique. Les renforts et la matrice constituent les hétérogénéités du milieu,
- L'échelle du stratifié où les couches sont les hétérogénéités du milieu. Celles-ci peuvent avoir des propriétés mécaniques différentes dans le repère d'orthotropie local du stratifié, suivant les différentes orientations de fibres,

Pour les structures en matériaux composites alvéolaires on distingue une échelle des hétérogénéités supplémentaire,

- L'échelle de l'âme triangulaire où la géométrie en treillis du composite induit des comportements mécaniques différents dans l'âme. Nous appellerons l'échelle de l'âme triangulaire: *l'échelle mésoscopique*.

A l'échelle du pli ou du stratifié, il existe tout un éventail de techniques classiques d'homogénéisation. L'emploi de caractéristiques matérielles équivalentes en moyenne, de techniques d'encadrement de l'énergie potentielle (*Ehrlacher, Naciri 1995b*), du zoom unidirectionnel (*Destuynder 1980*) ou encore des théories des stratifiés (cf. chapitre I) sont quelques unes de ces techniques qui permettent d'aboutir à des milieux homogènes équivalents.

A l'échelle de l'âme triangulaire, il n'existe pas à notre connaissance d'homogénéisation de panneaux alvéolaires en plaque 2D. La recherche de milieux équivalents s'effectue dans une direction du plan (direction des cavités triangulaires) pour laquelle on détermine une inertie équivalente en moyenne (*Timoshenko 1968*), (*Inglebert 1989a*). Il existe également des analyses 1D de panneaux sandwichs à coeur creux ondulé à partir desquelles on peut facilement déduire le comportement d'une poutre en matériau composite alvéolaire (*Kujala et al 1995*), (*Tsai 1988*). Par ailleurs des structures à alvéoles orientées dans l'épaisseur ont fait l'objet de développement de modélisations 2D (*Chen et Tsai 1996*), (*Tsai et Manne 1996*).

Jusqu'à présent, nous avons effectué des calculs de structure du composite alvéolaire avec le code de calcul par éléments finis SAMCEF, en tenant compte dans les modélisations numériques, des hétérogénéités géométriques. Ceci implique que la résolution des problèmes de plaques alvéolaires avec SAMCEF a nécessité la modélisation de chaque paroi élémentaire de la structure sandwich alvéolaire pour effectuer les calculs (cf. chapitre III).

Pour ce type de structure composite, à hétérogénéité géométrique périodique, il serait intéressant de s'affranchir de la modélisation de l'âme triangulaire pour étudier son comportement global. Les calculs de structure seraient effectués sur des plaques homogènes équivalentes 2D, sans avoir à prendre en compte, à chaque fois, le comportement de chaque raidisseur et de chaque peau qui composent l'alvéolaire.

Dans ce chapitre, nous proposerons donc de développer un modèle mécanique 2D basé sur le procédé classique d'homogénéisation employé pour effectuer les calculs de structures des milieux hétérogènes à structure périodique (*Andrieux 1983*), (*Nemat-Nasser et Hori 1993*), (*Sab 1995b*). L'homogénéisation aura pour objectif de passer de l'échelle hétérogène mésoscopique à l'échelle homogène macroscopique. L'objectif à terme est de mettre à la disposition des ingénieurs de bureau d'études un outil numérique de type maille 2D élément-finie par exemple, leur permettant de concevoir des structures en matériau composite alvéolaire, de manière simple et efficace. Une validation de ce modèle sera proposée au chapitre suivant.

Notez qu'un modèle alvéolaire unidimensionnel a déjà été effectué, ainsi qu'une optimisation de panneaux alvéolaires dans la direction transverse, permettant de réaliser un gain de poids de plus de 50% par rapport à un sandwich à peaux en aluminium et à âme en nid d'abeille aluminium (*Caron, Naciri et Philippe 1995*). (*Philippe, Naciri et Ehrlacher 1996*).

Nous adopterons la démarche suivante pour déterminer la loi de comportement du modèle de plaque alvéolaire,

- Choix de la forme des champs mésoscopiques.
- Introduction de ces champs dans une cellule élémentaire représentative de la structure alvéolaire pour déterminer les résultantes des champs mésoscopiques au centre de la cellule.
- Identification de ces résultantes des champs mésoscopiques aux champs macroscopiques du milieu bidimensionnel (efforts de plaque équivalents).
- Ecriture des efforts mésoscopiques en fonction des efforts macroscopiques.
- Etude de la densité d'énergie élastique dans la cellule représentative, écrite d'abord en fonction des efforts mésoscopiques, c'est à dire du point de vue des hétérogénéités contenues dans le volume de la cellule, dont la somme de chacune des contributions énergétiques constitue l'énergie totale de la cellule. Puis, la même énergie élastique peut s'exprimer en fonction des efforts macroscopiques en utilisant les relations d'équilibres précédentes.

IV.2 HYPOTHESES DE TRAVAIL

Dans ce paragraphe, nous présentons les hypothèses de travail sur lesquelles s'appuie le développement du modèle de plaque alvéolaire équivalent que nous proposons dans ce chapitre. Il s'agit du choix de la cellule élémentaire et des champs du milieu alvéolaire mésoscopique.

IV.2.1 Choix de la cellule élémentaire

Nous choisissons la cellule représentative suivante que nous noterons D (figures 4.1a et 4.1b),

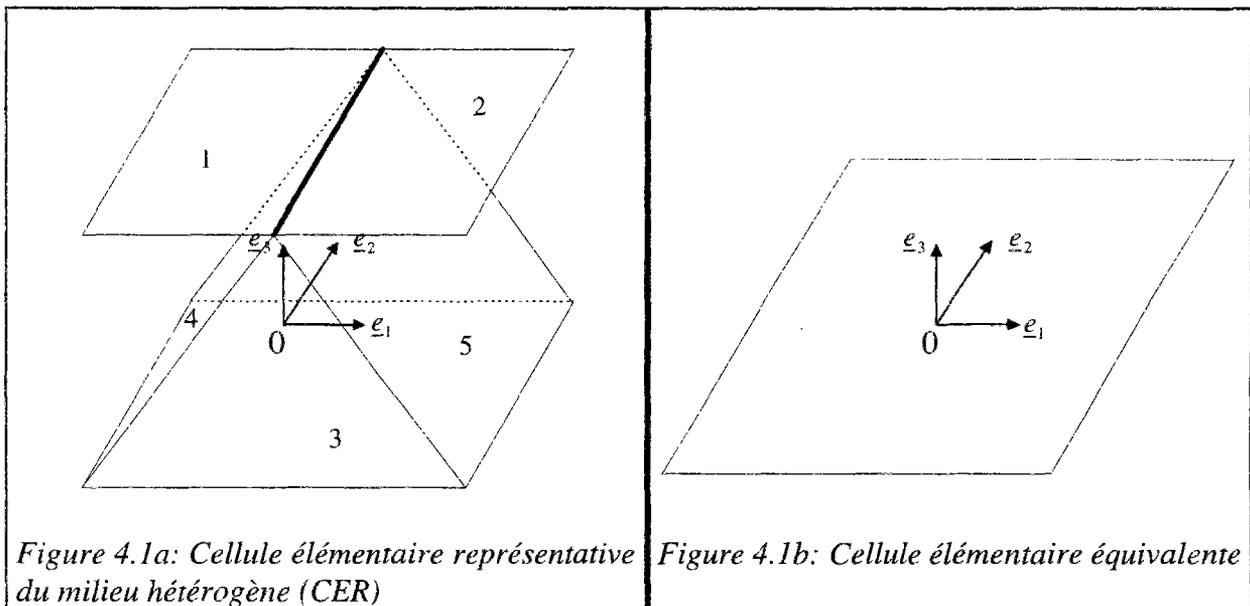


Figure 4.1a: Cellule élémentaire représentative du milieu hétérogène (CER) Figure 4.1b: Cellule élémentaire équivalente du milieu homogène (CER)

Figures 4.1a et 4.1b: Choix de la cellule élémentaire représentative (CER)

La peau supérieure sera repérée par les numéros 1 et 2, la peau inférieure par le numéro 3, et les parois raidissantes par les numéros 4 et 5.

La cellule élémentaire représentative de la structure alvéolaire, ainsi que le milieu « homogène » équivalent, ont une longueur a et une largeur b . La C.E.R. a une dimension en plus: la hauteur notée h . Les raidisseurs font un angle α par rapport à l'axe horizontal \underline{e}_1 (cf. figure 4.2).

Le repère d'orthotropie de la structure équivalente sera notée $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ et l'origine du repère coïncidera avec le point O défini au centre de la plaque homogénéisée ou de la cellule hétérogène (cf. figures 4.1a et 4.1b). Les repères d'orthotropie de chaque hétérogénéité i seront baptisés $(\underline{b}_1^i, \underline{b}_2^i, \underline{b}_3^i)$ où i prend les valeurs de 1 à 5, correspondant aux cinq « morceaux » de stratifiés définis précédemment (cf. figure 4.2). Notez que les repères locaux des peaux sont de façon évidente, confondus avec le repère global de la structure $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, ainsi que l'axe \underline{e}_2 avec les axes \underline{b}_2^i .

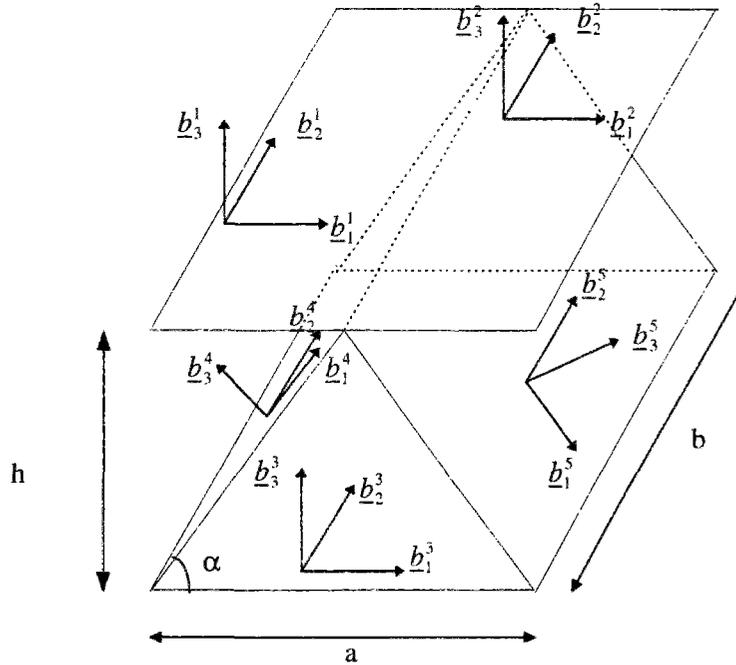


Figure 4.2: Géométrie et position des repères d'orthotropie locaux du C.E.R.

IV.2.2 Description des champs mésoscopiques

Afin de déterminer les champs mésoscopiques à prendre en compte dans le modèle de plaque alvéolaire équivalent, intéressons-nous au comportement des parois de la cellule élémentaire représentative D .

Les peaux et les raidisseurs du composite alvéolaire sont constitués de parois minces. Nous faisons l'hypothèse que nous pouvons négliger l'effet du cisaillement transverse dans leur comportement. Pour chaque paroi i , la loi de comportement se réduit à la loi de comportement généralisé issue de la théorie de plaques multicouches de Love-Kirchhoff (Berthelot 1992) que l'on peut écrire sous la forme matricielle condensée suivante,

$$(4.1) \quad \begin{pmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{pmatrix}^i = \begin{pmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} \{\underline{\varepsilon}_0\} \\ \{\underline{\varepsilon}_1\} \end{pmatrix}^i \quad i = [1,5]$$

où $\{N\}^i$ est le vecteur des efforts membranaires,
 $\{M\}^i$ le vecteur des moments de flexion,
 $\{\underline{\varepsilon}_0\}^i$ le vecteur des déformations membranaires,
 $\{\underline{\varepsilon}_1\}^i$ le vecteur des courbures.

Simplifions encore la loi de comportement du milieu mésoscopique. Nous avons vu au chapitre III, que nous pouvons considérer les peaux et les raidisseurs comme des membranes.

Les déplacements et les déformations s'effectuent donc dans le plan de la paroi et on peut supposer que les courbures $\{\underline{\varepsilon}_1\}^i$ dues aux rotations de section, sont nulles ($i = [1,5]$).

Pour des empilements i non symétriques par rapport à leur plan médian, on montre que cette hypothèse induit l'existence de moments de flexion/torsion $\{\underline{M}^i\}$ dus aux efforts normaux $\{\underline{N}^i\}$ qui ne sont plus appliqués dans le plan médian. Considérons ainsi l'exemple classique d'un stratifié non symétrique constitué de deux couches, l'une à 0° et l'autre à 90° (figure 4.3).

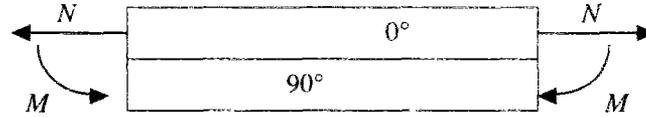


Figure 4.3: Exemple de paroi non symétrique (bicoche $0^\circ/90^\circ$)

Comme les efforts de tension ou de compression passent de préférence dans les plis où les fibres sont les mieux orientées par rapport à la direction de sollicitation, les points d'application des efforts résultants de la traction ou de la compression se trouvent désaxés par rapport au plan médian. La paroi ne peut donc se comporter comme une membrane que s'il existe des moments de flexion associés aux efforts membranaires, chargés de ramener le stratifié dans son plan et rendant nulle la courbure.

Les peaux qui peuvent être des empilements non symétriques (cf. chapitre III) ont donc un comportement généralisé qui fait intervenir les deux relations suivantes,

$$(4.2) \quad \{\underline{N}^i\} = [\underline{A}^i]\{\underline{\varepsilon}_0\}^i \quad i = 1,2,3$$

$$(4.3) \quad \{\underline{M}^i\} = [\underline{B}^i]\{\underline{\varepsilon}_0\}^i \quad i = 1,2,3$$

Pour les raidisseurs qui sont réalisés par des empilements symétriques, la loi de comportement se réduit à la seule relation (4.2), puisque dans le cas d'empilements symétriques, il n'y a pas de moments de flexion $\{\underline{M}^i\}$.

En résumé nous avons donc les lois de comportement suivantes pour les différentes parois de la cellule D ,

$$(4.4) \quad \{\underline{N}^i\} = [\underline{A}^i]\{\underline{\varepsilon}_0\}^i \quad \forall i = 1,2,3,4,5$$

$$(4.5) \quad \{\underline{M}^i\} = [\underline{B}^i]\{\underline{\varepsilon}_0\}^i \quad \forall i = 1,2,3$$

Par ailleurs les moments de flexion $\{\underline{M}^i\}$ se déterminent à partir des efforts membranaires $\{\underline{N}^i\}$ via les relations (4.4) et (4.5). Nous calculerons dans la partie suivante les résultantes des champs membranaires \underline{N}^i (dont les composantes sont les efforts normaux N_{11}^i, N_{22}^i , suivant \underline{b}_1^i et \underline{b}_2^i respectivement, et les efforts de cisaillement N_{12}^i dans le plan $(\underline{b}_1^i, \underline{b}_2^i)$, $i = 1,5$).

En outre, nous utilisons quelques hypothèses sur la répartition des champs de contraintes mésoscopiques sur les parois.

Puisque les peaux de la cellule ont de petites dimensions par rapport à la taille globale de la structure alvéolaire nous avons estimé que les champs variaient peu d'une membrane à l'autre. Nous postulons donc un champ de contraintes mésoscopiques constant par morceaux pour les peaux. Soit,

$$(4.6) \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (N_{11}^i, N_{22}^i, N_{12}^i) \in \mathbb{R}^3$$

Quant aux raidisseurs, nous supposons également des champs de contraintes constants, excepté pour les composantes des champs dans la direction \underline{e}_2 . Nous ferons ainsi l'hypothèse qu'ils ne participent pas à la flexion de la structure alvéolaire dans la direction transversale (direction \underline{e}_1). Par contre dans la direction longitudinale (direction \underline{e}_2), nous prendrons en compte leur participation à la flexion en définissant les efforts dans cette direction par des formes linéaires en z . Il est clair que les efforts suivant \underline{e}_2 ne peuvent être constants dans les raidisseurs puisque ceux-ci transmettent les efforts entre les peaux inférieure et supérieure qui dans le cas d'une flexion sont différents (si la peau supérieure est en compression la peau inférieure est en traction, et inversement). Ainsi,

$$(4.7) \quad \forall i = 4, 5 \quad (N_{11}^i, N_{12}^i) \in \mathbb{R}^2$$

$$(4.8) \quad \forall i = 4, 5 \quad N_{22}^i = \bar{N}_{22}^i + z\tilde{N}_{22}^i \quad \text{avec} \quad (\bar{N}_{22}^i, \tilde{N}_{22}^i) \in \mathbb{R}^2$$

Nous avons ainsi fait les hypothèses les plus simples pour les champs de la mésostructure qui permettent de ne pas trop compliquer le modèle de plaque équivalent. Nous verrons au chapitre suivant que ce choix est suffisant.

Au paragraphe suivant, nous introduisons ces champs mésoscopiques dans la cellule D pour identifier les champs macroscopiques de plaque.

IV.3 IDENTIFICATION DES EFFORTS MACROSCOPIQUES

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'identifier les efforts macroscopiques aux résultantes d'efforts mésoscopiques, que nous allons calculer au centre O de la cellule D . Ces calculs seront effectués sur deux faces au voisinage de $x = 0$, les faces $x = 0^+$, $x = 0^-$ pour lesquelles les champs mésoscopiques de la cellule sont discontinus (cf. figure 4.1a), et sur la face $y = 0$.

On montre facilement que les efforts macroscopiques sont dans le cadre de nos hypothèses soit homogènes, soit affines. Ainsi notre identification est équivalente à une identification à partir de la valeur moyenne des champs mésoscopiques dans la cellule.

Nous utiliserons les notations et les conventions suivantes pour les résultantes des efforts et des moments mésoscopiques (cf. figure 4.4 à 4.6).

Les résultantes membranaires des efforts mésoscopiques seront notées (dans le repère $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$),

$$\{\underline{\mathcal{N}}^{x+}\} = \begin{Bmatrix} \mathcal{N}_{11}^+ \\ \mathcal{N}_{12}^{x+} \\ Q_1^+ \end{Bmatrix} \quad \text{sur la face } x = 0^+$$

$$\{\underline{\mathcal{N}}^{x-}\} = \begin{Bmatrix} \mathcal{N}_{11}^- \\ \mathcal{N}_{12}^{x-} \\ Q_1^- \end{Bmatrix} \quad \text{sur la face } x = 0^-$$

$$\{\underline{\mathcal{N}}^y\} = \begin{Bmatrix} \mathcal{N}_{12}^y \\ \mathcal{N}_{22} \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad \text{sur la face } y = 0$$

Les résultantes des moments des efforts mésoscopiques seront notées,

$$\{\underline{\mathcal{M}}^{x+}\} = \begin{Bmatrix} -\mathcal{M}_{12}^{x+} \\ \mathcal{M}_{11}^+ \end{Bmatrix} \quad \text{sur la face } x = 0^+$$

$$\{\underline{\mathcal{M}}^{x-}\} = \begin{Bmatrix} -\mathcal{M}_{12}^{x-} \\ \mathcal{M}_{11}^- \end{Bmatrix} \quad \text{sur la face } x = 0^-$$

$$\{\underline{\mathcal{M}}^y\} = \begin{Bmatrix} \mathcal{M}_{22} \\ -\mathcal{M}_{12}^y \end{Bmatrix} \quad \text{sur la face } y = 0$$

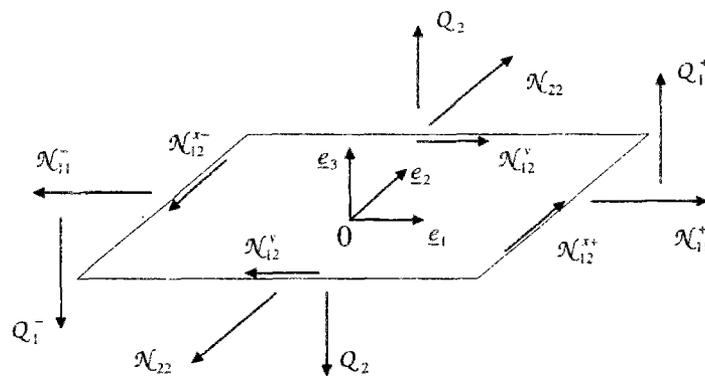


Figure 4.4: Résultantes des efforts mésoscopiques

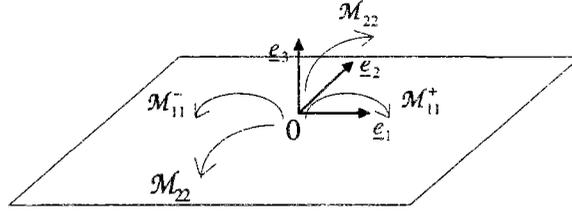


Figure 4.5: Résultantes des moments de flexion mésoscopiques

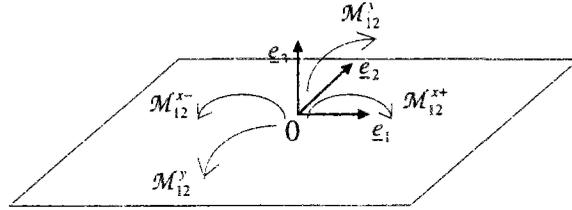


Figure 4.6: Résultantes des moments de torsion mésoscopiques

Effectuons le calcul des champs résultants, séparément sur chacune des faces $x = 0^+$, $x = 0^-$, $y = 0$ dans la cellule D .

IV.3.1 Champs résultants sur la face $x = 0^+$

Sur la face $x = 0^+$, on cherche les résultantes des champs mésoscopiques $\underline{\underline{N}}^2$, $\underline{\underline{N}}^3$ et $\underline{\underline{N}}^5$ (cf. bilan des efforts figure 4.7).

La résultante des efforts mésoscopiques sur cette face est la somme des résultantes des champs $\underline{\underline{N}}^i$ suivant les vecteurs \underline{b}_1^i (pour les peaux supérieures et inférieures $\underline{b}_1^i = \underline{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$)).

Notons $\underline{\underline{\mathcal{N}}}^{x+}$ la résultante des efforts mésoscopiques sur la face $x = 0^+$. Elle s'écrit,

$$(4.9) \quad \underline{\underline{\mathcal{N}}}^{x+} = \frac{1}{b} \int_{l_{y2}} \underline{\underline{N}}^2 \cdot \underline{e}_1 dl_{y2} + \frac{1}{b} \int_{l_{y3}} \underline{\underline{N}}^3 \cdot \underline{e}_1 dl_{y3} + \frac{1}{b} \int_{l_{y5}} \underline{\underline{N}}^5 \cdot \underline{b}_1^5 dl_{y5}$$

$$\text{avec} \quad l_{y2} = l_{y5} = \begin{cases} x = 0 \\ y = \left] -\frac{b}{2}, \frac{b}{2} \right[\\ z = \frac{h}{2} \end{cases} \quad l_{y3} = \begin{cases} x = 0 \\ y = \left] -\frac{b}{2}, \frac{b}{2} \right[\\ z = -\frac{h}{2} \end{cases}$$

$$\underline{b}_1^5 = \cos \alpha \cdot \underline{e}_1 - \sin \alpha \cdot \underline{e}_3$$

et par définition $\underline{\underline{N}}^i = N_{11}^i \underline{b}_1^i \otimes \underline{b}_1^i + N_{22}^i \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + N_{12}^i (\underline{b}_1^i \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{b}_1^i)$

La relation (4.9) devient, tous calculs faits,

$$(4.10) \quad \underline{\mathcal{N}}^{x^+} = \frac{1}{b} \int_{l_{y_2}} (N_{11}^2 \cdot \underline{e}_1 + N_{12}^2 \cdot \underline{e}_2) dl_{y_2} + \frac{1}{b} \int_{l_{y_3}} (N_{11}^3 \cdot \underline{e}_1 + N_{12}^3 \cdot \underline{e}_2) dl_{y_3} \\ + \frac{1}{b} \int_{l_{y_5}} (N_{11}^5 (\cos \alpha \cdot \underline{e}_1 - \sin \alpha \cdot \underline{e}_3) + N_{12}^5 \cdot \underline{e}_2) dl_{y_5}$$

En projetant $\underline{\mathcal{N}}^{x^+}$ sur l'axe \underline{e}_1 , on détermine la résultante membranaire \mathcal{N}_{11}^+ sur la face $x = 0^+$,

$$(4.11) \quad \mathcal{N}_{11}^+ = \underline{\mathcal{N}}^{x^+} \cdot \underline{e}_1$$

Soit,

$$\boxed{\mathcal{N}_{11}^+ = N_{11}^2 + N_{11}^3 + N_{11}^5 \cos \alpha}$$

En projetant $\underline{\mathcal{N}}^{x^+}$ sur l'axe \underline{e}_2 , on détermine la résultante en cisaillement dans le plan $\mathcal{N}_{12}^{x^+}$, sur la face $x = 0^+$,

$$(4.12) \quad \mathcal{N}_{12}^{x^+} = \underline{\mathcal{N}}^{x^+} \cdot \underline{e}_2$$

Soit,

$$\boxed{\mathcal{N}_{12}^{x^+} = N_{12}^2 + N_{12}^3 + N_{12}^5}$$

En projetant sur l'axe \underline{e}_3 , on détermine la résultante en cisaillement transverse Q_1^+ , sur la face $x = 0^+$,

$$(4.13) \quad Q_1^+ = \underline{\mathcal{N}}^{x^+} \cdot \underline{e}_3$$

Soit,

$$\boxed{Q_1^+ = -\sin \alpha N_{11}^5}$$

Calculons à présent la résultante des moments mésoscopiques $\underline{\mathcal{M}}^{x^+}$ qui représente l'ensemble des moments résultants des efforts mésoscopiques $\underline{N}^i \cdot \underline{b}_i$ ($i = 2, 3, 5$).

$$(4.14) \quad \underline{\mathcal{M}}^{x^+} = \frac{1}{b} \int_{l_{y_2}} \frac{h}{2} \underline{e}_3 \wedge \underline{N}^2 \cdot \underline{e}_1 dl_{y_2} + \frac{1}{b} \int_{l_{y_3}} \left(-\frac{h}{2} \right) \underline{e}_3 \wedge \underline{N}^3 \cdot \underline{e}_1 dl_{y_3} + \frac{1}{b} \int_{l_{y_5}} \frac{h}{2} \underline{e}_3 \wedge \underline{N}^5 \cdot \underline{b}_i dl_{y_5}$$

Soit,

$$(4.15) \quad \underline{\mathcal{M}}^{x^+} = \frac{1}{b} \int_{l_{y_2}} \left(\frac{h}{2} N_{11}^2 \underline{e}_2 - \frac{h}{2} N_{12}^2 \underline{e}_1 \right) dl_{y_2} + \frac{1}{b} \int_{l_{y_3}} \left(-\frac{h}{2} N_{11}^3 \underline{e}_2 + \frac{h}{2} N_{12}^3 \underline{e}_1 \right) dl_{y_3} \\ + \frac{1}{b} \int_{l_{y_5}} \left(\frac{h}{2} \cos \alpha \cdot N_{11}^5 \underline{e}_2 - \frac{h}{2} N_{12}^5 \underline{e}_1 \right) dl_{y_5}$$

La résultante des moments de flexion \mathcal{M}_{11}^+ , sur la face $x = 0^+$, est par définition la projection du tenseur $\underline{\mathcal{M}}^{x^+}$ sur l'axe \underline{e}_2 ,

$$(4.16) \quad \mathcal{M}_{11}^+ = \underline{\mathcal{M}}^{x^+} \cdot \underline{e}_2$$

Soit,

$$\boxed{\mathcal{M}_{11}^+ = \frac{h}{2} (N_{11}^2 - N_{11}^3 + N_{11}^5 \cos \alpha)}$$

La résultante des moments de torsion $\mathcal{M}_{12}^{x^+}$, sur la face $x = 0^+$, est par définition la projection du tenseur $\underline{\mathcal{M}}^{x^+}$ sur l'axe $(-\underline{e}_1)$ (cf. choix de convention de signe),

$$(4.17) \quad \mathcal{M}_{12}^{x^+} = \underline{\mathcal{M}}^{x^+} \cdot (-\underline{e}_1)$$

Soit,

$$\boxed{\mathcal{M}_{12}^{x^+} = \frac{h}{2} (N_{12}^2 - N_{12}^3 + N_{12}^5)}$$

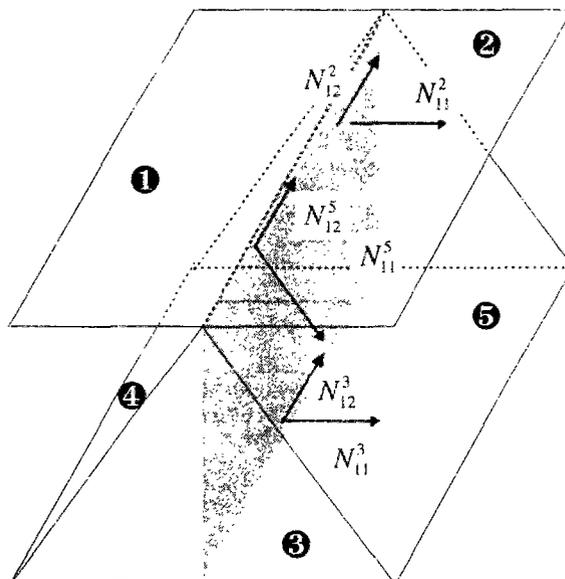


Figure 4.7: Bilan des efforts sur la face $x = 0^+$

IV.3.2 Champs résultants sur la face $x = 0^-$

Sur la face $x = 0^-$, on cherche les résultantes des champs mésoscopiques \underline{N}^1 , \underline{N}^3 et \underline{N}^4 .

La résultante des efforts sur cette face est comme pour la face $x = 0^+$ orientée suivant les vecteurs \underline{b}_i^1 (pour $i = 1, 3$, $\underline{b}_1^1 = \underline{e}_1$).

La résultante des efforts mésoscopiques sur la face $x = 0^-$, que l'on note $\underline{\mathcal{N}}^{x^-}$, s'écrit,

$$(4.18) \quad \underline{\mathcal{N}}^{x^-} = \frac{1}{b} \int_{l_{y_1}} \underline{N}^1 \cdot \underline{e}_1 dl_{y_1} + \frac{1}{b} \int_{l_{y_3}} \underline{N}^3 \cdot \underline{e}_1 dl_{y_3} + \frac{1}{b} \int_{l_{y_4}} \underline{N}^4 \cdot \underline{b}_1^4 dl_{y_4}$$

$$\text{avec } l_{y_1} = l_{y_4} = \begin{cases} x = 0 \\ y = \left] -\frac{b}{2}, \frac{b}{2} \right[\\ z = \frac{h}{2} \end{cases} \quad l_{y_3} = \begin{cases} x = 0 \\ y = \left] -\frac{b}{2}, \frac{b}{2} \right[\\ z = -\frac{h}{2} \end{cases}$$

$$\underline{b}_1^4 = \cos \alpha \cdot \underline{e}_1 + \sin \alpha \cdot \underline{e}_3$$

La relation (4.18) peut s'écrire,

$$(4.19) \quad \underline{\mathcal{N}}^{x^-} = \frac{1}{b} \int_{l_{y_2}} (N_{11}^1 \cdot \underline{e}_1 + N_{12}^1 \cdot \underline{e}_2) dl_{y_1} + \frac{1}{b} \int_{l_{y_3}} (N_{11}^3 \cdot \underline{e}_1 + N_{12}^3 \cdot \underline{e}_2) dl_{y_3} \\ + \frac{1}{b} \int_{l_{y_4}} (N_{11}^4 (\cos \alpha \cdot \underline{e}_1 + \sin \alpha \cdot \underline{e}_3) + N_{12}^4 \cdot \underline{e}_2) dl_{y_4}$$

On détermine la résultante membranaire $\mathcal{N}_{i1}^{x^-}$ sur la face $x = 0^-$, en projetant $\underline{\mathcal{N}}^{x^-}$ sur l'axe \underline{e}_1 ,

$$(4.20) \quad \mathcal{N}_{i1}^{x^-} = \underline{\mathcal{N}}^{x^-} \cdot \underline{e}_1$$

Soit,

$$\boxed{\mathcal{N}_{i1}^{x^-} = N_{11}^1 + N_{11}^3 + N_{11}^4 \cos \alpha}$$

La résultante en cisaillement dans le plan $\mathcal{N}_{i2}^{x^-}$, sur la face $x = 0^-$, est la projection de $\underline{\mathcal{N}}^{x^-}$ sur l'axe \underline{e}_2 ,

$$(4.21) \quad \mathcal{N}_{i2}^{x^-} = \underline{\mathcal{N}}^{x^-} \cdot \underline{e}_2$$

Soit,

$$\boxed{\mathcal{N}_{12}^x = N_{12}^1 + N_{12}^3 + N_{12}^4}$$

La résultante en cisaillement transverse Q_i^- , sur la face $x = 0^-$, est la projection de $\underline{\mathcal{N}}^x$ sur l'axe \underline{e}_3 ,

$$(4.22) \quad Q_i^- = \underline{\mathcal{N}}^x \cdot \underline{e}_3$$

Soit,

$$\boxed{Q_i^- = \sin \alpha N_{11}^4}$$

Calculons à présent la résultante des moments mésoscopiques $\underline{\mathcal{M}}^x$ qui représente l'ensemble des moments résultants des efforts mésoscopiques $\underline{N}^i \cdot \underline{b}_1^i$ ($i = 1,3,4$).

$$(4.23) \quad \underline{\mathcal{M}}^x = \frac{1}{b} \int_{l_{y_1}} \frac{h}{2} \underline{e}_3 \wedge \underline{N}^1 \cdot \underline{e}_1 dl_{y_1} + \frac{1}{b} \int_{l_{y_3}} \left(-\frac{h}{2} \right) \underline{e}_3 \wedge \underline{N}^3 \cdot \underline{e}_1 dl_{y_3} + \frac{1}{b} \int_{l_{y_4}} \frac{h}{2} \underline{e}_3 \wedge \underline{N}^4 \cdot \underline{b}_1^4 dl_{y_4}$$

Soit,

$$(4.24) \quad \begin{aligned} \underline{\mathcal{M}}^x = & \frac{1}{b} \int_{l_{y_1}} \left(\frac{h}{2} N_{11}^1 \underline{e}_2 - \frac{h}{2} N_{12}^1 \underline{e}_1 \right) dl_{y_1} + \frac{1}{b} \int_{l_{y_3}} \left(-\frac{h}{2} N_{11}^3 \underline{e}_2 + \frac{h}{2} N_{12}^3 \underline{e}_1 \right) dl_{y_3} \\ & + \frac{1}{b} \int_{l_{y_4}} \left(\frac{h}{2} \cos \alpha N_{11}^4 \underline{e}_2 - \frac{h}{2} N_{12}^4 \underline{e}_1 \right) dl_{y_4} \end{aligned}$$

La résultante des moments de flexion \mathcal{M}_{11}^- , sur la face $x = 0^-$, est par définition la projection du tenseur $\underline{\mathcal{M}}^x$ sur l'axe \underline{e}_2 ,

$$(4.25) \quad \mathcal{M}_{11}^- = \underline{\mathcal{M}}^x \cdot \underline{e}_2$$

Soit,

$$\boxed{\mathcal{M}_{11}^- = \frac{h}{2} (N_{11}^1 - N_{11}^3 + N_{11}^4 \cos \alpha)}$$

La résultante des moments de torsion \mathcal{M}_{12}^{x-} , sur la face $x = 0^-$, est la projection du tenseur $\underline{\mathcal{M}}^x$ sur l'axe $(-\underline{e}_1)$,

$$(4.26) \quad \mathcal{M}_{12}^{x-} = \underline{\mathcal{M}}^x \cdot (-\underline{e}_1)$$

Soit,

$$\mathcal{M}_{12}^{x^-} = \frac{h}{2} (N_{12}^1 - N_{12}^3 + N_{12}^4)$$

IV.3.3 Champs résultants sur la face $y = 0$

Effectuons à présent le calcul des résultantes des efforts mésoscopiques sur la face $y = 0$ (cf. figure 4.8). Tous les champs mésoscopiques \underline{N}^i interviennent dans le calcul ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

La résultante des efforts mésoscopiques sur la face $y = 0$ notée $\underline{\mathcal{N}}^y$, est orientée dans la direction \underline{e}_2 .

Elle s'exprime par la relation,

$$(4.27) \quad \underline{\mathcal{N}}^y = \frac{1}{a} \int_{l_{x1}} \underline{N}^1 \cdot \underline{e}_2 dl_{x1} + \frac{1}{a} \int_{l_{x2}} \underline{N}^2 \cdot \underline{e}_2 dl_{x2} + \frac{1}{a} \int_{l_{x3}} \underline{N}^3 \cdot \underline{e}_2 dl_{x3} \\ + \frac{1}{a} \int_{l_{x4}} \underline{N}^4 \cdot \underline{e}_2 dl_{x4} + \frac{1}{a} \int_{l_{x5}} \underline{N}^5 \cdot \underline{e}_2 dl_{x5}$$

avec,

$$(4.28) \quad l_{x1} = \begin{cases} x =]-\frac{a}{2}, 0[\\ y = 0 \\ z = \frac{h}{2} \end{cases} \quad l_{x2} = \begin{cases} x =]0, \frac{a}{2}[\\ y = 0 \\ z = \frac{h}{2} \end{cases} \quad l_{x3} = \begin{cases} x =]-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}[\\ y = 0 \\ z = -\frac{h}{2} \end{cases}$$

$$(4.29) \quad l_{x4} = \left\{ x_4(z) = \frac{a}{2h} \left(z - \frac{h}{2} \right) \right. \quad l_{x5} = \left\{ x_5(z) = -\frac{a}{2h} \left(z - \frac{h}{2} \right) \right.$$

La relation (4.27) a pour expression,

$$(4.30) \quad \underline{\mathcal{N}}^y = \frac{1}{a} \int_{l_{x1}} (N_{22}^1 \cdot \underline{e}_2 + N_{12}^1 \cdot \underline{e}_1) dl_{x1} + \frac{1}{a} \int_{l_{x2}} (N_{22}^2 \cdot \underline{e}_2 + N_{12}^2 \cdot \underline{e}_1) dl_{x2} \\ + \frac{1}{a} \int_{l_{x3}} (N_{22}^3 \cdot \underline{e}_2 + N_{12}^3 \cdot \underline{e}_1) dl_{x3} \\ + \frac{1}{a} \int_{l_{x4}} (N_{22}^4 \cdot \underline{e}_2 + N_{12}^4 (\cos \alpha \cdot \underline{e}_1 + \sin \alpha \cdot \underline{e}_3)) dl_{x4} \\ + \frac{1}{a} \int_{l_{x5}} (N_{22}^5 \cdot \underline{e}_2 + N_{12}^5 (\cos \alpha \cdot \underline{e}_1 - \sin \alpha \cdot \underline{e}_3)) dl_{x5}$$

$$\text{avec} \quad N_{22}^i = \bar{N}_{22}^i + z \tilde{N}_{22}^i \quad (\bar{N}_{22}^i, \tilde{N}_{22}^i) \in \mathbb{R}^2 \quad (i = 4, 5)$$

La résultante membranaire \mathcal{N}_{22} sur la face $y = 0$, est la projection de $\underline{\mathcal{N}}^y$ sur l'axe \underline{e}_2 ,

$$(4.31) \quad \mathcal{N}_{22} = \underline{\mathcal{N}}^y \cdot \underline{e}_2$$

Soit,

$$\boxed{\mathcal{N}_{22} = \frac{N_{22}^1}{2} + \frac{N_{22}^2}{2} + N_{22}^3 + \frac{1}{2 \cos \alpha} (\bar{N}_{22}^4 + \bar{N}_{22}^5)}$$

La résultante en cisaillement dans le plan \mathcal{N}_{12}^y , sur la face $y = 0$, est la projection de $\underline{\mathcal{N}}^y$ sur l'axe \underline{e}_1 ,

$$(4.32) \quad \mathcal{N}_{12}^y = \underline{\mathcal{N}}^y \cdot \underline{e}_1$$

Soit,

$$\boxed{\mathcal{N}_{12}^y = \frac{N_{12}^1}{2} + \frac{N_{12}^2}{2} + N_{12}^3 + \frac{N_{12}^4}{2} + \frac{N_{12}^5}{2}}$$

La résultante en cisaillement transverse Q_2 , sur la face $y = 0$, est la projection de $\underline{\mathcal{N}}^y$ sur l'axe \underline{e}_3 ,

$$(4.33) \quad Q_2 = \underline{\mathcal{N}}^y \cdot \underline{e}_3$$

Soit,

$$\boxed{Q_2 = \frac{\tan \alpha}{2} (N_{12}^4 - N_{12}^5)}$$

La résultante des moments mésoscopiques $\underline{\mathcal{M}}^y$ représente l'ensemble des moments résultants des efforts mésoscopiques $\underline{N}^i \cdot \underline{e}_2$ ($i = 1, 3, 4$).

$$(4.34) \quad \underline{\mathcal{M}}^y = \frac{1}{a} \int_{l_{x1}} \frac{h}{2} \underline{e}_3 \wedge \underline{N}^1 \cdot \underline{e}_2 dl_{x1} + \frac{1}{a} \int_{l_{x2}} \frac{h}{2} \underline{e}_3 \wedge \underline{N}^2 \cdot \underline{e}_2 dl_{x2} + \frac{1}{a} \int_{l_{x3}} \left(-\frac{h}{2} \right) \underline{e}_3 \wedge \underline{N}^3 \cdot \underline{e}_2 dl_{x3} \\ + \frac{1}{a} \int_{l_{x4}} (x_4(z) \underline{e}_1 + z \underline{e}_3) \wedge \underline{N}^4 \cdot \underline{e}_2 dl_{x4} + \frac{1}{a} \int_{l_{x5}} (x_5(z) \underline{e}_1 + z \underline{e}_3) \wedge \underline{N}^5 \cdot \underline{e}_2 dl_{x5}$$

Soit,

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathcal{M}}^y &= \frac{1}{a} \int_{l_{x1}} \left(-\frac{h}{2} N_{22}^1 \underline{e}_1 + \frac{h}{2} N_{12}^1 \underline{e}_2 \right) dl_{x1} + \frac{1}{a} \int_{l_{x2}} \left(-\frac{h}{2} N_{22}^2 \underline{e}_1 + \frac{h}{2} N_{12}^2 \underline{e}_2 \right) dl_{x2} \\
 &+ \frac{1}{a} \int_{l_{x3}} \left(\frac{h}{2} N_{22}^3 \underline{e}_1 - \frac{h}{2} N_{12}^3 \underline{e}_2 \right) dl_{x3} \\
 (4.35) \quad &+ \frac{1}{a} \int_{l_{x4}} \left(x_4(z) N_{22}^4 \underline{e}_3 - x_4(z) N_{12}^4 \sin \alpha \cdot \underline{e}_2 - z N_{22}^4 \underline{e}_1 + z N_{12}^4 \cos \alpha \cdot \underline{e}_2 \right) dl_{x4} \\
 &+ \frac{1}{a} \int_{l_{x5}} \left(x_5(z) N_{22}^5 \underline{e}_3 + x_5(z) N_{12}^5 \sin \alpha \cdot \underline{e}_2 - z N_{22}^5 \underline{e}_1 + z N_{12}^5 \cos \alpha \cdot \underline{e}_2 \right) dl_{x5}
 \end{aligned}$$

où $x_4(z)$ et $x_5(z)$ sont donnés par les relations (4.29).

La résultante des moments de flexion \mathcal{M}_{22} , sur la face $y = 0$, est la projection du tenseur $\underline{\mathcal{M}}^y$ sur l'axe $(-\underline{e}_1)$,

$$(4.36) \quad \mathcal{M}_{22} = \underline{\mathcal{M}}^y \cdot (-\underline{e}_1)$$

Soit,

$$\boxed{\mathcal{M}_{22} = \frac{h}{2} \left(\frac{N_{22}^1}{2} + \frac{N_{22}^2}{2} - N_{22}^3 \right) + \frac{h^2}{24 \cos \alpha} (\tilde{N}_{22}^4 + \tilde{N}_{22}^5)}$$

La résultante des moments de torsion \mathcal{M}_{12}^y , sur la face $y = 0$, est la projection du tenseur $\underline{\mathcal{M}}^y$ sur l'axe \underline{e}_2 ,

$$(4.37) \quad \mathcal{M}_{12}^y = \underline{\mathcal{M}}^y \cdot \underline{e}_2$$

Soit,

$$\boxed{\mathcal{M}_{12}^y = \frac{h}{2} \left(\frac{N_{12}^1}{2} + \frac{N_{12}^2}{2} - N_{12}^3 + \frac{N_{12}^4}{2} + \frac{N_{12}^5}{2} \right)}$$

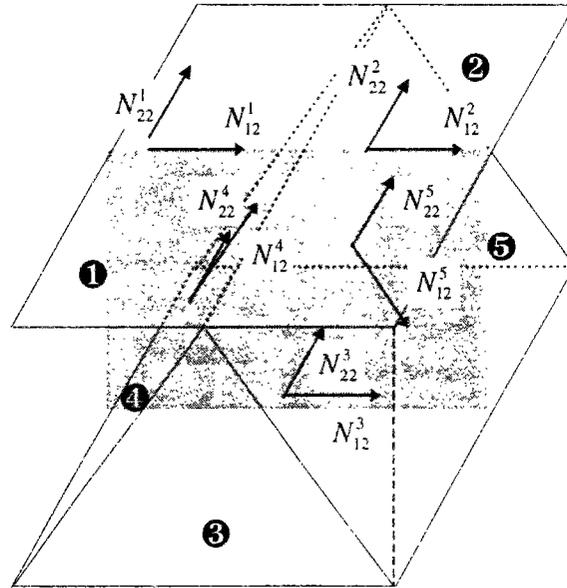


Figure 4.8: Bilan des efforts sur la face $y = 0$

Récapitulons toutes les résultantes des champs mésoscopiques que nous venons d'établir,

<p>Sur la face $x = 0^+$,</p> $\begin{aligned} \mathcal{N}_{11}^+ &= N_{11}^2 + N_{11}^3 + N_{11}^5 \cos \alpha \\ \mathcal{N}_{12}^{x+} &= N_{12}^2 + N_{12}^3 + N_{12}^5 \\ Q_1^+ &= -\sin \alpha N_{11}^5 \end{aligned} \quad (4.38)$ $\begin{aligned} \mathcal{M}_{11}^+ &= \frac{h}{2} (N_{11}^2 - N_{11}^3 + N_{11}^5 \cos \alpha) \\ \mathcal{M}_{12}^{x+} &= \frac{h}{2} (N_{12}^2 - N_{12}^3 + N_{12}^5) \end{aligned}$	<p>Sur la face $x = 0^-$,</p> $\begin{aligned} \mathcal{N}_{11}^- &= N_{11}^1 + N_{11}^3 + N_{11}^4 \cos \alpha \\ \mathcal{N}_{12}^{x-} &= N_{12}^1 + N_{12}^3 + N_{12}^4 \\ Q_1^- &= \sin \alpha N_{11}^4 \end{aligned} \quad (4.39)$ $\begin{aligned} \mathcal{M}_{11}^- &= \frac{h}{2} (N_{11}^1 - N_{11}^3 + N_{11}^4 \cos \alpha) \\ \mathcal{M}_{12}^{x-} &= \frac{h}{2} (N_{12}^1 - N_{12}^3 + N_{12}^4) \end{aligned}$
---	--

Sur la face $y = 0$,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_{22} &= \frac{N_{22}^1}{2} + \frac{N_{22}^2}{2} + N_{22}^3 + \frac{1}{2 \cos \alpha} (\bar{N}_{22}^4 + \bar{N}_{22}^5) \\
 \mathcal{N}_{12}^i &= \frac{N_{12}^1}{2} + \frac{N_{12}^2}{2} + N_{12}^3 + \frac{N_{12}^4}{2} + \frac{N_{12}^5}{2} \\
 Q_2 &= \frac{\tan \alpha}{2} (N_{12}^4 - N_{12}^5) \\
 \mathcal{M}_{22} &= \frac{h}{2} \left(\frac{N_{22}^1}{2} + \frac{N_{22}^2}{2} - N_{22}^3 \right) + \frac{h^2}{24 \cos \alpha} (\tilde{N}_{22}^4 + \tilde{N}_{22}^5) \\
 \mathcal{M}_{12}^i &= \frac{h}{2} \left(\frac{N_{12}^1}{2} + \frac{N_{12}^2}{2} - N_{12}^3 + \frac{N_{12}^4}{2} + \frac{N_{12}^5}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

IV.3.4 Mise en évidence des efforts macroscopiques

Montrons que les résultantes des efforts mésoscopiques peuvent être considérées comme des efforts macroscopiques de plaque. Pour ce faire, étudions l'équilibre de l'arête sommet située à la jonction des parois 1,2,4,5 (dessinée par un trait plein sur la figure 4.1a). Elle nous permet de déduire 3 équations entre les efforts mésoscopiques N_{11}^i et N_{12}^i ($i = 1,2,4,5$),

$$\begin{aligned}
 (4.41) \quad & N_{11}^4 = -N_{11}^5 \\
 (4.42) \quad & N_{11}^1 - N_{11}^2 + 2N_{11}^4 \cos \alpha = 0 \\
 (4.43) \quad & N_{12}^1 - N_{12}^2 + N_{12}^4 - N_{12}^5 = 0
 \end{aligned}$$

Examinons à présent les résultantes des efforts mésoscopiques déterminées sur les 4 faces au voisinage du centre O de la cellule du milieu alvéolaire, connaissant les relations (4.41) à (4.43). On obtient les relations d'égalités suivantes,

$$\begin{aligned}
 (4.44) \quad & \mathcal{N}_{11}^+ = \mathcal{N}_{11}^- \\
 (4.45) \quad & Q_1^+ = Q_1^- \\
 (4.46) \quad & \mathcal{M}_{11}^+ = \mathcal{M}_{11}^- \\
 (4.47) \quad & \mathcal{N}_{12}^{x+} = \mathcal{N}_{12}^{x-} = \mathcal{N}_{12}^y \\
 (4.48) \quad & \mathcal{M}_{12}^{x+} = \mathcal{M}_{12}^{x-} = \mathcal{M}_{12}^y
 \end{aligned}$$

Les formules (4.44) à (4.48) montrent donc que les résultantes des efforts mésoscopiques que nous avons calculés aux paragraphes (IV.3.1) à (IV.3.3), apparaissent comme des efforts macroscopiques de plaque. Nous chercherons dans la suite à exprimer les efforts mésoscopiques en fonction de ces efforts macroscopiques, à l'aide des relations (4.38) à (4.43).

Dans la suite, nous simplifierons les notations des efforts macroscopiques en les notant sans les exposants +, -, x+, x-, y. Ainsi, les résultantes en cisaillement dans le plan \mathcal{X}_{12}^{x+} , \mathcal{X}_{12}^{x-} , \mathcal{X}_{12}^y seront notées \mathcal{X}_{12} .

IV.4 ECRITURE DES EFFORTS MESOSCOPIQUES EN FONCTION DES EFFORTS MACROSCOPIQUES

Cherchons les relations qui relient les efforts mésoscopiques aux efforts macroscopiques. Pour cela, reprenons les relations (4.38) à (4.40) en tenant compte des relations d'égalités (4.44) à (4.48),

$$(4.49) \quad \mathcal{X}_{11} = N_{11}^1 + N_{11}^3 + N_{11}^4 \cos \alpha = N_{11}^2 + N_{11}^3 + N_{11}^5 \cos \alpha$$

$$(4.50) \quad \mathcal{X}_{22} = \frac{N_{22}^1}{2} + \frac{N_{22}^2}{2} + N_{22}^3 + \frac{1}{2 \cos \alpha} (\bar{N}_{22}^4 + \bar{N}_{22}^5)$$

$$(4.51) \quad \mathcal{X}_{12} = N_{12}^1 + N_{12}^3 + N_{12}^4 = N_{12}^2 + N_{12}^3 + N_{12}^5$$

$$(4.52) \quad Q_1 = \sin \alpha N_{11}^4 = -\sin \alpha N_{11}^5$$

$$(4.53) \quad Q_2 = \frac{\tan \alpha}{2} (N_{12}^4 - N_{12}^5)$$

$$(4.54) \quad \mathcal{M}_{11} = \frac{h}{2} (N_{11}^1 - N_{11}^3 + N_{11}^4 \cos \alpha) = \frac{h}{2} (N_{11}^2 - N_{11}^3 + N_{11}^5 \cos \alpha)$$

$$(4.55) \quad \mathcal{M}_{22} = \frac{h}{2} \left(\frac{N_{22}^1}{2} + \frac{N_{22}^2}{2} - N_{22}^3 \right) + \frac{h^2}{24 \cos \alpha} (\bar{N}_{22}^4 + \bar{N}_{22}^5)$$

$$(4.56) \quad \mathcal{M}_{12} = \frac{h}{2} (N_{12}^1 - N_{12}^3 + N_{12}^4) = \frac{h}{2} (N_{12}^2 - N_{12}^3 + N_{12}^5)$$

Nous devons résoudre un problème à 17 inconnues,

- 3 inconnues pour chaque stratifié représentant les peaux: N_{11}^i , N_{22}^i et N_{12}^i ,
- 4 inconnues pour chaque stratifié représentant les raidisseurs: N_{11}^i , N_{12}^i , \bar{N}_{22}^i et \bar{N}_{22}^i

Le nombre d'équations dont nous disposons pour résoudre ce problème est inférieur au nombre d'inconnues. Nous avons en effet 8 équations (4.49) à (4.56) auxquelles nous ajoutons les équations d'équilibre de l'arête sommet (4.41) à (4.43), soit 11 équations pour 17 inconnues. Le problème à résoudre est donc hyperstatique de degré 6.

Introduisons 6 notations simplificatrices X, Y, Z, T, U, V correspondant aux 6 inconnues à déterminer. Après résolution, nous obtenons les relations suivantes qui relient les efforts mésoscopiques aux efforts macroscopiques,

$$(4.57) \quad N_{11}^1 = \frac{\mathcal{N}_{11}}{2} + \frac{\mathcal{M}_{11}}{h} - Q_1 \cot \alpha$$

$$(4.58) \quad N_{11}^2 = \frac{\mathcal{N}_{11}}{2} + \frac{\mathcal{M}_{11}}{h} + Q_1 \cot \alpha$$

$$(4.59) \quad N_{11}^3 = \frac{\mathcal{N}_{11}}{2} - \frac{\mathcal{M}_{11}}{h}$$

$$(4.60) \quad N_{11}^4 = \frac{Q_1}{\sin \alpha}$$

$$(4.61) \quad N_{11}^5 = -\frac{Q_1}{\sin \alpha}$$

$$(4.62) \quad N_{12}^1 = \frac{\mathcal{N}_{12}}{2} + \frac{\mathcal{M}_{12}}{h} - X$$

$$(4.63) \quad N_{12}^2 = \frac{\mathcal{N}_{12}}{2} + \frac{\mathcal{M}_{12}}{h} - X + 2Q_2 \cot \alpha$$

$$(4.64) \quad N_{12}^3 = \frac{\mathcal{N}_{12}}{2} - \frac{\mathcal{M}_{12}}{h}$$

$$(4.65) \quad N_{12}^4 = X$$

$$(4.66) \quad N_{12}^5 = X - 2Q_2 \cot \alpha$$

$$(4.67) \quad N_{22}^1 = \mathcal{N}_{22} + 2\frac{\mathcal{M}_{22}}{h} - \frac{Y}{2 \cos \alpha} - Z - \frac{hU}{12 \cos \alpha}$$

$$(4.68) \quad N_{22}^2 = Z$$

$$(4.69) \quad N_{22}^3 = \frac{\mathcal{N}_{22}}{2} - \frac{\mathcal{M}_{22}}{h} - \frac{Y}{4 \cos \alpha} + \frac{hU}{24 \cos \alpha}$$

$$(4.70) \quad N_{22}^4 = \frac{Y+T}{2} + z \frac{U+V}{2}$$

$$(4.71) \quad N_{22}^5 = \frac{Y-T}{2} + z \frac{U-V}{2}$$

Ces inconnues X, Y, Z, T, U, V seront déterminées dans la partie suivante par application du théorème de minimum de l'énergie de déformation élastique écrite en contraintes.

IV.5 DETERMINATION DE LA LOI DE COMPORTEMENT EQUIVALENTE

Dans cette partie nous appliquons le lemme de Hill (*Sab 1995b*), pour déterminer l'énergie élastique de la cellule en fonction des efforts généralisés équivalents et dériver l'expression du tenseur des souplesses généralisées qui donne la loi de comportement de la plaque homogénéisée.

Auparavant nous déterminerons les inconnues X, Y, Z, T, U, V mises en évidence dans les équations d'équilibre, après avoir introduit quelques définitions et notations.

IV.5.1 Définitions et notations

L'énergie totale de déformation élastique U_d contenue dans la cellule élémentaire représentative D est la somme des énergies stockées dans chacune des peaux et chacun des raidisseurs qui composent la cellule. Nous avons baptisé u_{d_1} et u_{d_2} l'énergie de déformation élastique de la peau supérieure, u_{d_3} l'énergie de déformation de la peau inférieure, u_{d_4} et u_{d_5} l'énergie de déformation des raidisseurs. Nous utiliserons la notation V pour désigner le volume défini par la cellule D , Ω_i pour la surface de chaque paroi élémentaire ($i = 1,5$).

La conservation de l'énergie élastique nous permet d'écrire,

$$(4.72) \quad U_d = \sum_{i=1}^5 u_{d_i} = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \begin{pmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} [a] & [b] \\ [b] & [d] \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{pmatrix}^i d\Omega_i$$

où $\begin{pmatrix} [a] & [b] \\ [b] & [d] \end{pmatrix}^i$ la matrice des souplesses généralisées de chaque paroi i , tel que,

$$(4.73) \quad \begin{pmatrix} [a] & [b] \\ [b] & [d] \end{pmatrix}^i = \begin{pmatrix} [A^i] & [B^i] \\ [B^i] & [D^i] \end{pmatrix}^{-1}$$

Or, puisque nous avons considéré une cellule de longueur a et de largeur b , nous devons nous ramener à un problème adimensionnel en calculant la densité d'énergie contenue dans la cellule. Celle-ci que nous noterons W_d s'exprime simplement en fonction de l'énergie complémentaire U_d par la relation suivante,

$$(4.74) \quad W_d = \frac{U_d}{ab} = \frac{1}{ab} \sum_{i=1}^5 u_{d_i} = \frac{1}{ab} \sum_{i=1}^5 \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \begin{pmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} [a] & [b] \\ [b] & [d] \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{pmatrix}^i d\Omega_i$$

Montrons que seul l'inverse de la matrice des raideurs membranaires $[A^i]$, intervient dans le calcul de l'énergie.

Par définition, l'énergie élastique complémentaire u_{d_i} dans une paroi s'écrit,

$$(4.75) \quad u_{d_i} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \begin{pmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} [a] & [b] \\ [b] & [d] \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{pmatrix}^i d\Omega_i \quad (i = 1,5)$$

Soit, en développant,

$$(4.76) \quad u_{d_i} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left({}^t \{N\} [\underline{a}] \{N\} + 2 {}^t \{N\} [\underline{b}] \{M\} + {}^t \{M\} [\underline{d}] \{M\} \right)^i d\Omega, \quad (i = 1,5)$$

Or la relation (4.3) permet d'écrire,

$$(4.77) \quad u_{d_i} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} {}^t \{N^i\} \left([\underline{a}] + 2 [\underline{b}] [\underline{B}] [\underline{A}^{-1}] + {}^t [\underline{A}^{-1}] [\underline{B}] [\underline{d}] [\underline{B}] [\underline{A}^{-1}] \right) \{N^i\} d\Omega, \quad (i = 1,5)$$

De plus l'égalité (4.73) permet de déduire les relations suivantes entre les matrices de raideur et de souplesses de chaque paroi i ($i = 1,5$),

$$(4.78) \quad [\underline{a}^i] = \left([\underline{A}^{-1}] - [\underline{b}] [\underline{B}] [\underline{A}^{-1}] \right)^i$$

$$(4.79) \quad [\underline{b}^i] = - \left([\underline{b}] [\underline{B}] [\underline{A}^{-1}] \right)^i$$

En introduisant (4.78) et (4.79) dans la relation (4.77) on en déduit,

$$(4.80) \quad u_{d_i} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} {}^t \{N^i\} [\underline{A}^{-1}]^i \{N^i\} d\Omega, \quad (i = 1,5)$$

En notant par S_{ij}^i les coefficients de la matrice $[\underline{A}^{-1}]^i$, on peut donc écrire, sous forme développée,

$$(4.81) \quad u_{d_i} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(S_{11}^i (N_{11}^i)^2 + S_{22}^i (N_{22}^i)^2 + S_{66}^i (N_{12}^i)^2 + 2S_{12}^i N_{11}^i N_{22}^i + 2S_{16}^i N_{11}^i N_{12}^i + 2S_{26}^i N_{22}^i N_{12}^i \right) d\Omega,$$

La densité d'énergie de déformation élastique W_d s'écrit alors,

$$(1.82) \quad W_d = \frac{1}{2ab} \sum_{i=1}^5 \int_{\Omega} \left(S_{11}^i (N_{11}^i)^2 + S_{22}^i (N_{22}^i)^2 + S_{66}^i (N_{12}^i)^2 + 2S_{12}^i N_{11}^i N_{22}^i + 2S_{16}^i N_{11}^i N_{12}^i + 2S_{26}^i N_{22}^i N_{12}^i \right) d\Omega,$$

Dans la suite, nous supposons que la structure alvéolaire est au moins globalement symétrique, c'est à dire que les peaux sont au moins symétriques par rapport au plan médian du panneau. Dans ce cas, les peaux supérieure et inférieure ont les mêmes caractéristiques mécaniques en raideur et en souplesse. On considérera également que les raidisseurs sont toujours constitués d'un même empilement symétrique et équilibré dans leur repère

d'orthotropie. Nous noterons Sp_{ij} les constantes de souplesses des peaux, et Sr_{ij} celles des parois raidissantes ($i, j = 1, 2, 6$), avec $Sr_{16} = Sr_{26} = 0$.

Nous tiendrons compte de toutes ces hypothèses dans les calculs suivants.

IV.5.2 Détermination des inconnues hyperstatiques

Le théorème de l'énergie de déformation élastique stipule que parmi tous les champs de contraintes admissibles, le champ réel est celui qui minimise l'énergie de déformation.

Il permet d'obtenir les 6 inconnues hyperstatiques X, Y, Z, T, U, V en résolvant le système linéaire suivant,

$$(4.83) \quad \begin{cases} \frac{\partial W_d}{\partial X} = 0 \\ \frac{\partial W_d}{\partial Y} = 0 \\ \frac{\partial W_d}{\partial Z} = 0 \\ \frac{\partial W_d}{\partial T} = 0 \\ \frac{\partial W_d}{\partial U} = 0 \\ \frac{\partial W_d}{\partial V} = 0 \end{cases}$$

Nous avons résolu le système d'équations (4.83). Les expressions des inconnues X, Y, Z, T, U, V , ainsi obtenues sont données en annexe 4.1 (formules A4.1.1 à A4.1.6).

En introduisant ces relations (A4.1.1) à (A4.1.6) dans les relations (4.57) à (4.71) on obtient ainsi les expressions des efforts intérieurs généralisés de plaque alvéolaire, rassemblées en annexe 4.2 (formules A4.2.1 à A4.2.15).

IV.5.3 Détermination de la loi de comportement de la plaque alvéolaire

En remplaçant les efforts intérieurs par leurs expressions, on exprime la densité d'énergie de déformation élastique W_d en fonction des efforts de plaque classiques.

W_d devient donc une forme quadratique, fonction des efforts extérieurs, à partir de laquelle il est possible de dériver la matrice du tenseur des souplesses $[\underline{\underline{\Delta}}^{aiv}]$, qui relie les efforts généralisés de plaque classiques aux déformations généralisées associées.

La loi de comportement de la plaque alvéolaire s'écrit ainsi,

$$(4.84) \quad \{\underline{\mathbf{E}}\} = [\underline{\underline{\Delta}}^{alv}] \{\underline{\Sigma}\}$$

avec,

$$(4.85) \quad [\underline{\underline{\Delta}}^{alv}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & b_{11} & b_{12} & b_{16} & 0 & 0 \\ & a_{22} & a_{26} & b_{21} & b_{22} & b_{26} & 0 & 0 \\ & & a_{66} & b_{61} & b_{62} & b_{66} & 0 & 0 \\ \hline & & & d_{11} & d_{12} & d_{16} & 0 & 0 \\ & & & & d_{22} & d_{26} & 0 & 0 \\ & & sym. & & & d_{66} & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & f_{44} & f_{45} \\ & & & & & & & f_{55} \end{bmatrix}$$

$$\{\underline{\Sigma}\} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{11} \\ \mathcal{N}_{22} \\ \mathcal{N}_{12} \\ \dots \\ \mathcal{M}_{11} \\ \mathcal{M}_{22} \\ \mathcal{M}_{12} \\ \dots \\ \mathcal{Q}_2 \\ \mathcal{Q}_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\underline{\mathbf{E}}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_1 \end{bmatrix}$$

où u_1, u_2 et w sont les composantes du déplacement,
 ψ_1, ψ_2 les rotations de section

a_{ij} sont les constantes de souplesses en membranes,

d_{ij} les constantes de souplesses en flexion/torsion,

b_{ij} les constantes de souplesses de couplage membrane/flexion/torsion,

f_{ij} les constantes de souplesses en cisaillement transverse,

Les expressions des coefficients de la matrice $\left[\underline{\underline{\Lambda}}^{alv}\right]$ sont regroupées en annexe 4.3 (formules A4.3.1 à A4.3.24).

IV.6 CONCLUSION

La forme de la matrice des souplesses homogénéisées $\left[\underline{\underline{\Lambda}}^{alv}\right]$ (4.85) s'apparente à celle d'une plaque composite classique constituée par un empilement de couches coplanaires. On retrouve en effet les coefficients de souplesses classiques d'un comportement de plaque, a_{ij} , d_{ij} , b_{ij} , et f_{ij} qui traduisent respectivement la souplesse en membrane, la souplesse en flexion/torsion, la souplesse liée au couplage membrane/flexion/torsion, et la souplesse en cisaillement. Ceux-ci s'expriment en fonction des propriétés mécaniques et physiques des différents constituants du milieu alvéolaire: les constantes de souplesses des peaux et des raidisseurs, et les paramètres de la géométrie de l'âme triangulaire h et α . Notez cependant que la matrice de couplage B n'est a priori pas symétrique.

Les relations (A4.3.1) à (A4.3.24) en annexe (4.3) montrent la complexité et la diversité des expressions analytiques obtenues et mettent en évidence la difficulté à effectuer une validation pertinente de ce type de modélisation. Certains coefficients peuvent cependant se simplifier dans certaines configurations matérielles de la structure alvéolaire. Ainsi, si les peaux de la structure alvéolaire présentent une symétrie locale, le milieu alvéolaire homogénéisé se comporte comme un stratifié symétrique et équilibré dans ses axes d'orthotropie: les constantes a_{16} , a_{26} sont nulles, ainsi que les coefficients d_{16} , d_{26} et tous les coefficients b_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) sauf b_{66} . Cependant ce cas de figure n'est pas celui que nous avons adopté pour la fabrication des premiers panneaux alvéolaires. Il faudra ainsi dans ce cas tenir compte de tous les coefficients de souplesses dans la loi de comportement et la résolution d'un problème 2D peut s'avérer très délicate.

Au chapitre suivant, nous montrerons la pertinence du modèle de plaque alvéolaire équivalent sur des exemples simples de flexion de structures alvéolaires.

La première partie du chapitre V traitera le cas de plaques en matériau isotrope en flexion pure. Nous mettrons à jour le comportement des peaux et des raidisseurs à travers les équations d'équilibre du modèle équivalent. Nous montrerons que les peaux présentent un comportement particulier lorsqu'on les sollicite dans le sens transverse de la structure (direction \underline{e}_1). Nous verrons également que l'expression du coefficient de souplesse d_{22} dans la direction longitudinale (direction \underline{e}_2), pour un matériau isotrope, correspond à celle de l'inverse de l'inertie équivalente EI_y .

Dans la seconde partie du chapitre V, nous proposerons une étude de panneaux alvéolaires en composite de petites largeurs, en flexion sur deux côtés, en tenant compte cette fois du cisaillement transverse dans l'épaisseur de la plaque. Nous comparerons les déflexions maximales au centre des panneaux alvéolaires soumises à une pression uniforme obtenues avec le modèle analytique et SAMCEF. Nous verrons que les écarts obtenus entre les deux modélisations sont toujours inférieurs à 4%.

Il est également possible de réaliser des analyses de stabilité avec le modèle de plaque alvéolaire. Une étude de flambement transverse est présentée au chapitre VI.

CHAPITRE V

VALIDATION ANALYTIQUE DU MODELE DE PLAQUE ALVEOLAIRE EQUIVALENT

Ce chapitre est consacré à la validation analytique du modèle de plaque alvéolaire équivalent développé au chapitre IV. Il se compose de deux parties.

La première partie présente une étude de plaque en matériau isotrope dans laquelle nous proposons de décrire et de comprendre le comportement des structures alvéolaires. Nous vérifions la pertinence du modèle en flexion pure en comparant les constantes de souplesse en flexion obtenues par le modèle vis à vis des modélisations éléments-finis de SAMCEF, ou lorsque c'est possible vis à vis d'une solution exacte.

La validation du modèle de plaque alvéolaire pour une structure en composite fera l'objet de la seconde partie du chapitre. Elle consistera à comparer les déflexions maximales du modèle analytique et du modèle éléments-finis pour des panneaux alvéolaires de faibles largeurs, en flexion cylindrique uniforme.

V.I COHERENCE ET VALIDATION DU MODELE SUR UN CAS SIMPLE:

LA PLAQUE ALVEOLAIRE EN MATERIAU ISOTROPE

La motivation de cette étude trouve son origine dans l'examen des équations d'équilibre (A4.2.1) à (A4.2.15) qui révèlent l'existence de nombreux couplages entre les efforts mésoscopiques $N_{\alpha\beta}^i$ et les efforts macroscopiques $\mathcal{N}_{\alpha\beta}, \mathcal{M}_{\alpha\beta}, Q_\alpha$ ($\alpha, \beta = 1, 2$), et qui rend la compréhension du comportement alvéolaire du modèle de plaque homogénéisée difficile. Si les efforts N_{11}^i ne dépendent que des efforts de plaque dans la direction \underline{e}_1 , $\mathcal{N}_{11}, \mathcal{M}_{11}, Q_1$, il n'en est pas de même pour les efforts mésoscopiques N_{22}^i qui dépendent des efforts $\mathcal{N}_{22}, \mathcal{M}_{22}, Q_2$ mais également des efforts $\mathcal{N}_{11}, \mathcal{M}_{11}, Q_1$, et pour les efforts N_{12}^i qui sont en relation avec tous les efforts macroscopiques du milieu équivalent ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

Pour tenter de donner une explication pertinente du comportement, nous avons donc choisi de simplifier la structure alvéolaire du point de vue du matériau (isotrope) et du chargement (un seul effort macroscopique), pour ne garder que sa spécificité géométrique. Dans cette première partie, nous présentons ainsi une analyse de plaque alvéolaire constituée d'un matériau isotrope et soumise à un chargement de flexion pure dans la direction transversale (direction \underline{e}_1), puis dans la direction longitudinale (direction \underline{e}_2). Nous proposons de mettre en lumière et de décrire les mécanismes élémentaires de comportement de la structure alvéolaire, à l'échelle mésoscopique, à partir des équations d'équilibre du modèle de plaque alvéolaire équivalent, et d'en étudier l'influence sur le comportement global de la structure.

Notre objectif est bien sur de vérifier si le comportement de la structure qui ressort des équations du modèle est cohérent avec le comportement réel. Nous effectuerons une validation qualitative et quantitative du comportement de la structure alvéolaire en flexion

pure, en utilisant soit une solution exacte lorsqu'elle existe, soit, le cas échéant, le code de calcul par éléments-finis SAMCEF.

Avant d'aborder les exemples simples de chargement en flexion pure, regardons comment s'écrit la loi de comportement d'une plaque alvéolaire homogénéisée pour un matériau isotrope.

V.1.1 Comportement d'une plaque alvéolaire en matériau isotrope

La matrice des souplesses alvéolaire homogénéisée (4.85) s'écrit dans le cas d'un matériau isotrope,

$$(5.1) \quad [\underline{\underline{\Lambda}}^{alv}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{66} & 0 & 0 & b_{66} & 0 & 0 \\ \hline & & & d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & d_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & sym. & & & d_{66} & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & f_{44} & 0 \\ & & & & & & & f_{55} \end{bmatrix}$$

avec,

$$(5.2) \quad a_{11} = \frac{(1 - \nu^2 + 2 \cos \alpha)}{2eE(1 + 2 \cos \alpha)}$$

$$(5.3) \quad a_{12} = \frac{\nu \cos \alpha}{eE(1 + 2 \cos \alpha)}$$

$$(5.4) \quad a_{22} = \frac{\cos \alpha}{eE(1 + 2 \cos \alpha)}$$

$$(5.5) \quad a_{66} = \frac{(1 + \nu)(2 + \cos \alpha)}{2eE(1 + \cos \alpha)}$$

$$(5.6) \quad b_{66} = -\frac{(1 + \nu) \cos \alpha}{eEh(1 + \cos \alpha)}$$

$$(5.7) \quad d_{11} = \frac{2(1 - \nu^2 + 6 \cos \alpha)}{eEh^2(1 + 6 \cos \alpha)}$$

$$(5.8) \quad d_{12} = \frac{12\nu \cos \alpha}{eEh^2(1 + 6 \cos \alpha)}$$

$$(5.9) \quad d_{22} = \frac{12 \cos \alpha}{eEh^2(1 + 6 \cos \alpha)}$$

$$(5.10) \quad f_{44} = \frac{2(1 + \nu)}{eE} \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha} \right) \cot \alpha \sin^2 \alpha$$

$$(5.11) \quad f_{55} = \frac{1 - \nu^2}{eE} \left(1 + \frac{1}{\cos^3 \alpha} \right) \cot \alpha \sin^2 \alpha$$

La relation (5.1) montre que l'écriture de la matrice des souplesses $[\underline{\underline{\Lambda}}^{div}]$ se simplifie lorsque le matériau est isotrope. Certains coefficients de souplesses de couplage deviennent nuls,

$$a_{16} = a_{26} = 0 \quad d_{16} = d_{26} = 0 \quad f_{45} = 0$$

Les coefficients b_{ij} sont presque tous nuls. Il subsiste cependant un coefficient b_{66} qui témoigne d'un couplage entre les efforts de cisaillement dans le plan \mathcal{N}_{12} et les moments de torsion \mathcal{M}_{12} et lié à la structure particulière de l'alvéolaire. La présence de ce coefficient dans la matrice des souplesses rend la validation analytique du modèle de plaque délicate pour des problèmes de flexion 2D même lorsque le matériau est isotrope. *Dans ce qui suit nous nous sommes donc intéressés uniquement à la résolution de problèmes de flexion unidimensionnelle.*

V.1.2 Etude de la flexion pure suivant la direction \underline{e}_1

Examinons pour commencer une plaque alvéolaire isotrope sollicitée en flexion pure dans la direction \underline{e}_1 . Pour un panneau de type sandwich ou alvéolaire, une sollicitation de flexion pure de moment \mathcal{M} se traduit par l'application d'un couple d'efforts qui tend à mettre une des deux peaux en traction dans la direction de sollicitation et l'autre en compression.

Les conditions aux limites sont représentées sur la figure (5.1).

Le seul effort macroscopique qui intervient dans notre problème est le moment de flexion \mathcal{M}_{11} . Avec le choix de convention de signe utilisé dans le développement du modèle de plaque alvéolaire, ce moment \mathcal{M}_{11} est ici négatif.

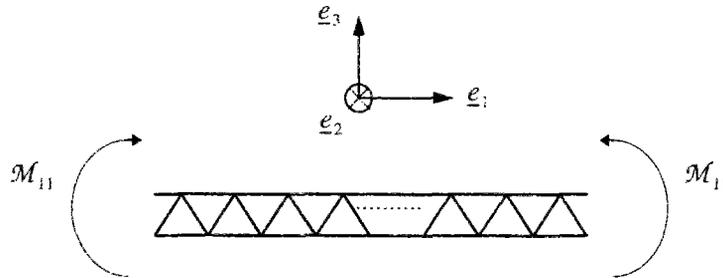


Figure 5.1: Flexion pure dans la direction \underline{e}_1

Les efforts mésoscopiques N_{11}^i N_{22}^i N_{12}^i (cf. relations A4.2.1 à A4.2.15 en annexe 4.2) s'écrivent,

$$(5.12) \quad N_{11}^1 = N_{11}^2 = \frac{\mathcal{M}_{11}}{h}$$

$$(5.13) \quad N_{11}^3 = -\frac{\mathcal{M}_{11}}{h}$$

$$(5.14) \quad N_{11}^4 = N_{11}^5 = 0$$

$$(5.15) \quad N_{22}^1 = \frac{3\nu}{\cos \alpha \left(6 + \frac{1}{\cos \alpha}\right)} \frac{\mathcal{M}_{11}}{h}$$

$$(5.16) \quad N_{22}^2 = -\frac{\nu}{\cos \alpha \left(6 + \frac{1}{\cos \alpha}\right)} \frac{\mathcal{M}_{11}}{h}$$

$$(5.17) \quad N_{22}^3 = -\frac{\nu}{\cos \alpha \left(6 + \frac{1}{\cos \alpha}\right)} \frac{\mathcal{M}_{11}}{h}$$

$$(5.18) \quad N_{22}^4 = N_{22}^5 = -z \frac{12\nu}{\cos \alpha \left(6 + \frac{1}{\cos \alpha}\right)} \frac{\mathcal{M}_{11}}{h^2}$$

$$(5.19) \quad N_{12}^i = 0 \quad \forall i = (1,2,3,4,5)$$

Les équations (5.12) à (5.19) appellent plusieurs remarques:

- ❶ Lorsqu'on applique un moment de flexion dans la direction \underline{e}_1 , on engendre classiquement dans les peaux des efforts dans cette direction (efforts N_{11}^i), mais aussi des efforts dans la direction \underline{e}_2 (efforts N_{22}^i),
- ❷ Il n'y a pas d'efforts dans les raidisseurs dans les directions \underline{b}_1^i , mais il y en a dans la direction \underline{e}_2 ,
- ❸ On vérifie bien les relations suivantes issues des relations (5.12), (5.13), (5.15) à (5.17), qui assurent l'équilibre global de la structure.

$$(5.20) \quad \frac{1}{2}(N_{11}^1 + N_{11}^2) = -N_{11}^3$$

$$(5.21) \quad \frac{1}{2}(N_{22}^1 + N_{22}^2) = -N_{22}^3$$

Ecrivons la loi de comportement pour les peaux. La remarque 1 nous conduit à prendre en compte les efforts N_{22}^i dans la loi de comportement même si le problème considéré est à l'origine un problème unidimensionnel où seuls les efforts N_{11}^i devraient intervenir,

$$(5.22) \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{eE} & -\frac{\nu}{eE} & 0 \\ -\frac{\nu}{eE} & \frac{1}{eE} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{eG} \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ 0 \end{pmatrix}^i \quad (i = 1,2,3)$$

où E, G, ν désignent respectivement le module d'Young, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du matériau isotrope, e l'épaisseur des membranes (choisie identique pour les peaux et les raidisseurs),

i désigne ici la peau supérieure ou la peau inférieure. On considérera des efforts et des déformations moyennes pour la peau supérieure, tels que,

$$(5.23) \quad N_{ij}^S = \frac{1}{2} (N_{ij}^1 + N_{ij}^2)$$

$$(5.24) \quad \varepsilon_{ij}^S = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^2)$$

Soit, en décomposant (5.22),

$$(5.25) \quad \varepsilon_{11}^i = \frac{1}{eE} N_{11}^i - \frac{\nu}{eE} N_{22}^i \quad \forall i = S, 3$$

$$(5.26) \quad \varepsilon_{22}^i = -\frac{\nu}{eE} N_{11}^i + \frac{1}{eE} N_{22}^i \quad \forall i = S, 3$$

En introduisant les relations (5.12) à (5.18) dans les relations (5.25) et (5.26), on peut déterminer le signe du rapport $\frac{\varepsilon_{jj}^i}{N_{jj}^i}$.

$$(5.27) \quad \frac{\varepsilon_{11}^i}{N_{11}^i} = \frac{1}{eE} - \frac{\nu}{eE} \frac{N_{22}^i}{N_{11}^i} = \frac{1}{eE} - \frac{\nu^2}{eE} \frac{1}{(1+6 \cos \alpha)} > 0 \quad \forall i = S, 3, \forall \alpha$$

$$(5.28) \quad \frac{\varepsilon_{22}^i}{N_{22}^i} = -\frac{\nu}{eE} \frac{N_{11}^i}{N_{22}^i} + \frac{1}{eE} = -\frac{1}{eE} \cos \alpha < 0 \quad \forall i = S, 3, \forall \alpha$$

Dans la direction \underline{e}_1 , N_{jj}^i et ε_{jj}^i sont de même signe. Par contre dans la direction \underline{e}_2 , N_{jj}^i et ε_{jj}^i sont de signe opposé. Le modèle alvéolaire indique donc que les efforts et les déformations suivant \underline{e}_1 évoluent dans le même sens, tandis que les efforts et les déformations suivant \underline{e}_2 évoluent dans le sens contraire. Si le premier type de comportement est classique, le second l'est beaucoup moins.

Avant de tenter d'expliquer ces spécificités du comportement dans la direction \underline{e}_2 , examinons à présent le comportement des raidisseurs.

La loi de comportement des raidisseurs s'écrit, compte tenu de la remarque 2,

$$(5.29) \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}^r = \begin{pmatrix} \frac{1}{eE} & -\frac{\nu}{eE} & 0 \\ -\frac{\nu}{eE} & \frac{1}{eE} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{eG} \end{pmatrix}^r \begin{pmatrix} 0 \\ N_{22} \\ 0 \end{pmatrix}^r \quad (r = 4,5)$$

D'où on en déduit,

$$(5.30) \quad \frac{\varepsilon_{22}^r}{N_{22}^r} = \frac{1}{eE} > 0$$

Le rapport entre les déformations et les efforts suivant \underline{e}_2 est donc positif pour les raidisseurs de la structure alvéolaire.

Examinons à présent la déformée globale de la structure alvéolaire.

A partir des relations (5.27) et (5.28) on peut déduire le signe des efforts mésoscopiques N_{22}^i dans les peaux ($i = S,3$) et prévoir l'orientation des courbures de flexion des peaux dans la direction de sollicitation (ici la direction \underline{e}_1) et dans la direction perpendiculaire (ici la direction \underline{e}_2). Notez que la courbure de flexion dans la direction perpendiculaire à la direction de sollicitation sera baptisée dans la suite *contre-courbure* de flexion.

Dans l'exemple considéré, la peau supérieure est en compression dans la direction \underline{e}_1 mais aussi dans la direction \underline{e}_2 . La peau inférieure est en traction dans la direction \underline{e}_1 et dans la direction \underline{e}_2 . La contre-courbure de flexion suivant \underline{e}_2 est donc orientée dans le même sens que la courbure de flexion suivant \underline{e}_1 .

Nous avons résumé sur un schéma (figure 5.2) les efforts et les déformations au sein de la structure alvéolaire.

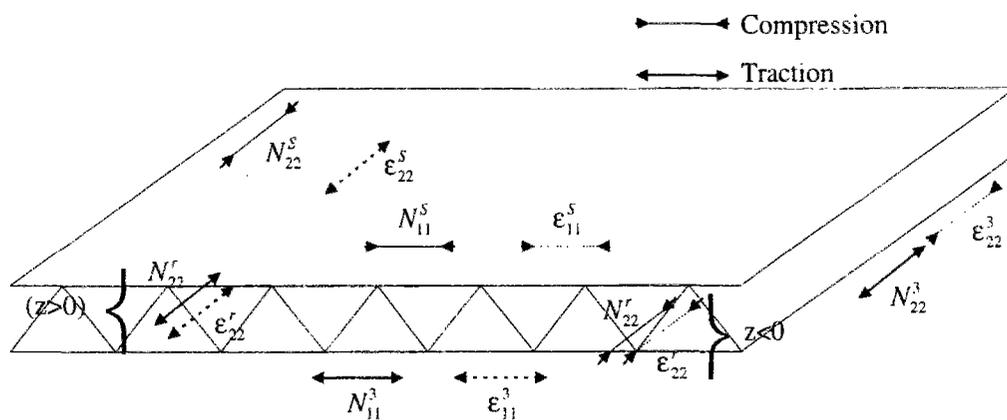


Figure 5.2: Déformations et efforts normaux dans une plaque alvéolaire en flexion pure suivant \underline{e}_1

Une vérification avec SAMCEF a permis de retrouver ces mêmes résultats. La figure (5.3) présente le maillage et les conditions aux limites.

SAMCEF - BACON : V 5.1-8

Echelle géométrique

0.100

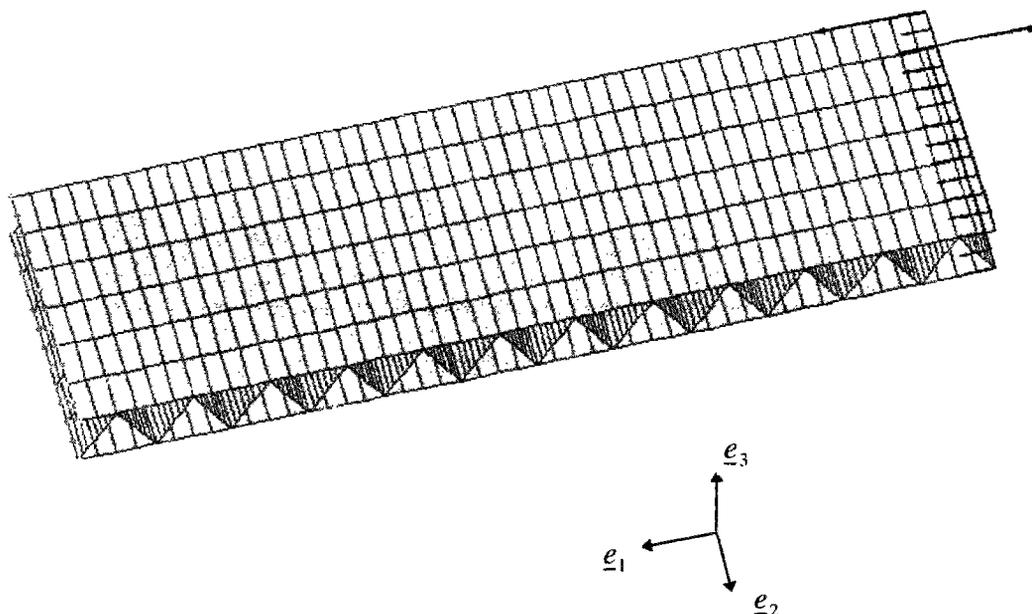


Figure 5.3: Maillages et conditions aux limites

Pour appliquer le chargement sur le modèle éléments-finis, nous avons choisi de définir un couple d'efforts en deux noeuds situés respectivement sur le bord de la peau supérieure, puis nous avons lié les degrés de liberté suivant e_1 de ces noeuds à tous les autres noeuds de ces bords.

Les figures (5.4), (5.5) et (5.6) montrent respectivement la répartition des efforts normaux N_{22}^i , celle des déformations axiales ε_{22}^i et celle du rapport entre ces deux grandeurs $\frac{N_{22}^i}{\varepsilon_{22}^i}$, déterminées avec le code de calcul SAMCEF ($i = 1,2,3,4,5$).

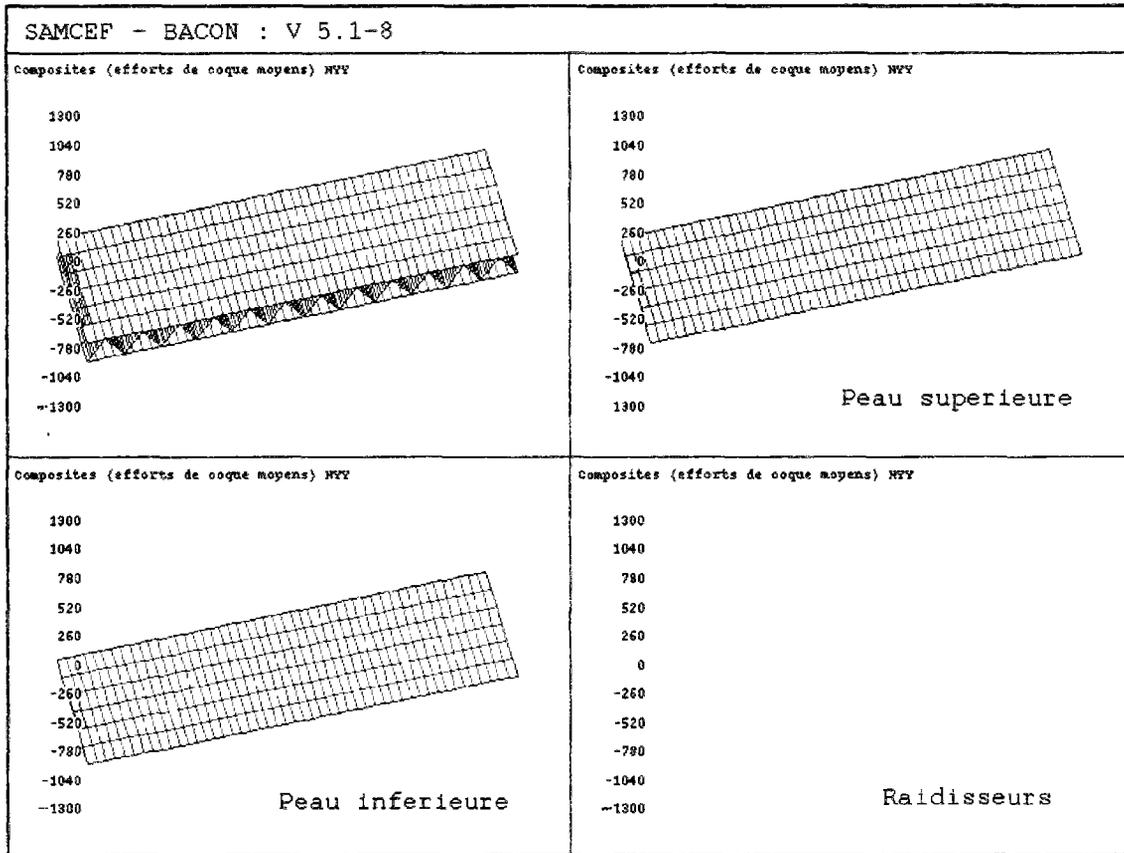


Figure 5.4: Répartition des efforts normaux N_{22}^i

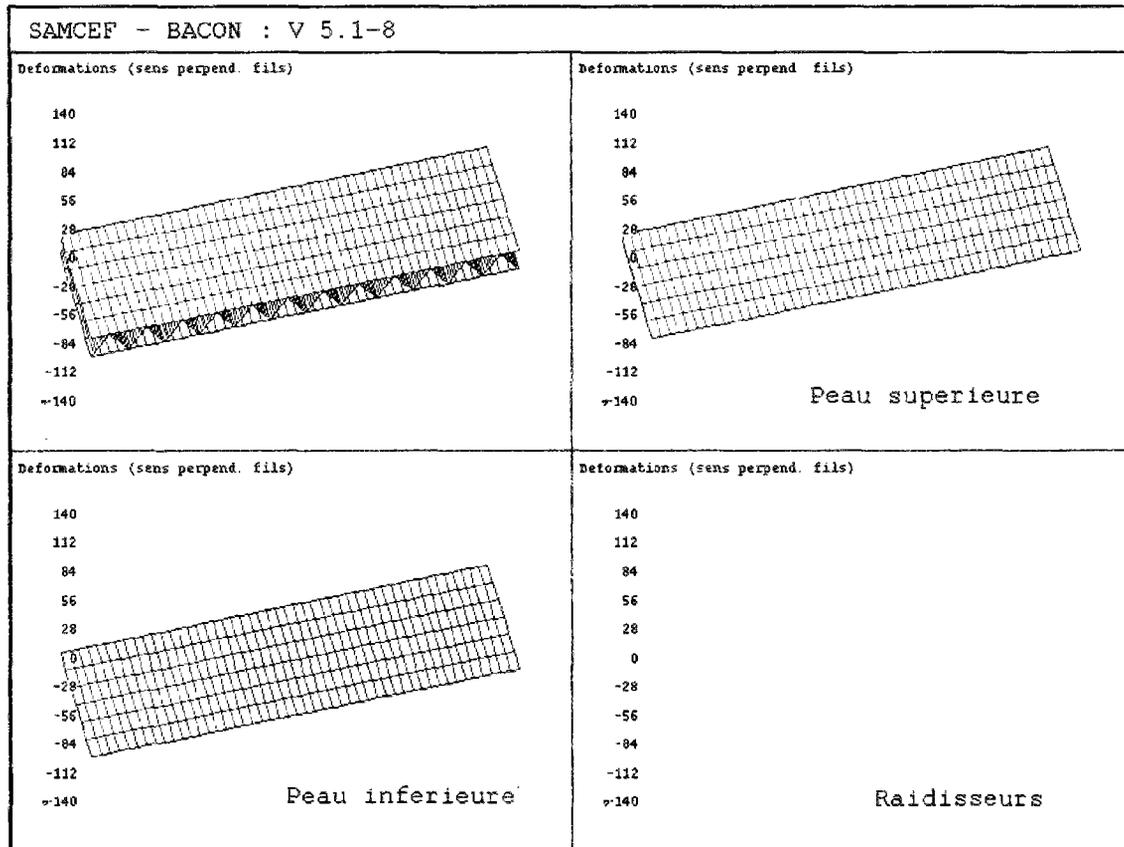


Figure 5.5: Répartition des déformations axiales ϵ_{22}^i

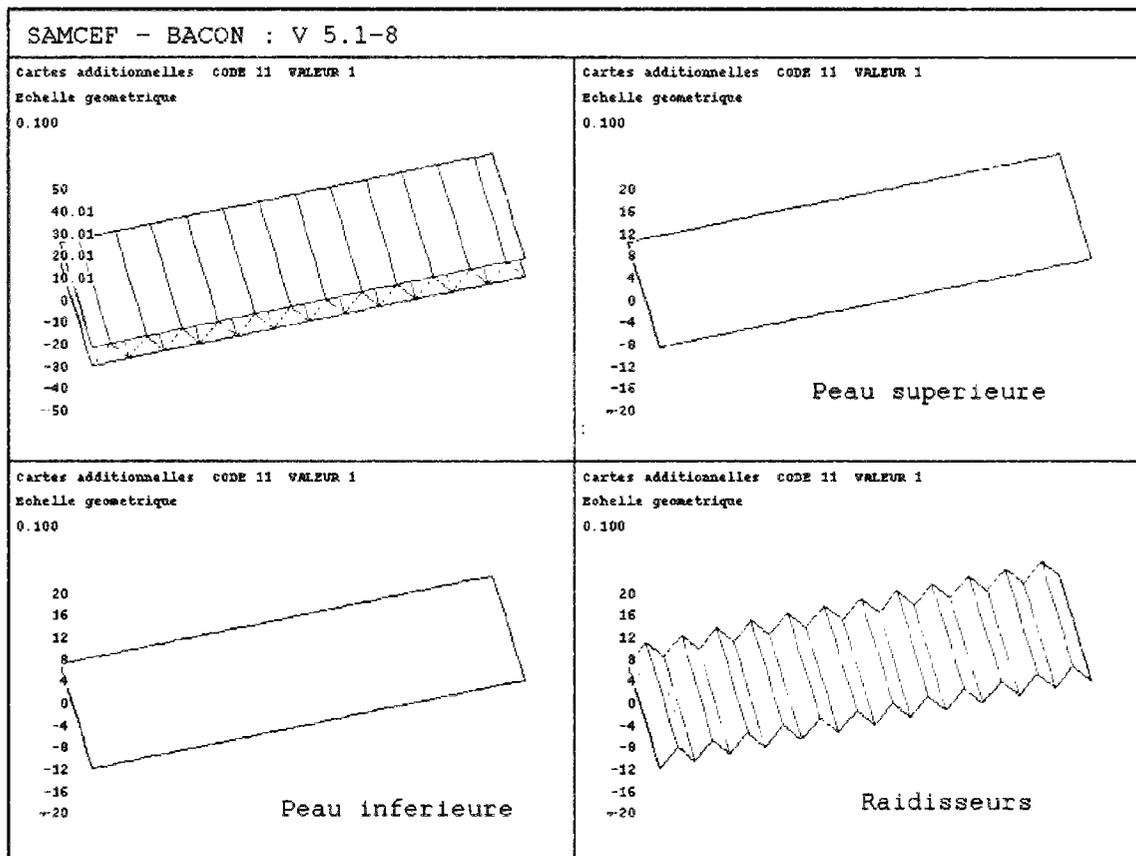


Figure 5.6: Répartition $\frac{N_{22}^i}{\epsilon_{22}^i}$

Il y a donc une cohérence entre la description du comportement que propose le modèle de plaque équivalent et celle du code de calcul SAMCEF.

Tentons à présent de donner une explication physique du comportement mésoscopique de la structure alvéolaire tel qu'il a été révélé par les équations du modèle de plaque équivalent.

Intéressons-nous par exemple à la peau supérieure de la plaque alvéolaire. L'application du moment \mathcal{M}_{11} induit classiquement dans la structure un effort N_{11}^S de compression, et donc une déformation ϵ_{11}^S négative. L'effet Poisson engendré par N_{11}^S tend à mettre en traction la peau supérieure dans la direction e_2 , et donne par conséquent, naissance à une déformation ϵ_{22}^S positive. Cette déformation de la peau supérieure va mettre en traction les raidisseurs en contact avec la peau ($z > 0$), qui va se traduire par l'apparition d'un effort de traction N_{22}^r et d'une déformation positive ϵ_{22}^r . Or puisque la peau supérieure entraîne en traction la partie supérieure des raidisseurs, ceux-ci vont engendrer en retour dans la peau supérieure des efforts de compression N_{22}^S , en vertu du respect de l'équilibre des efforts au niveau des arêtes.

Pour la peau inférieure, il est possible de tenir le même type de raisonnement. Dans ce cas, la peau inférieure tend à se comprimer dans la direction e_2 , et à comprimer en même temps les raidisseurs en contact avec elle ($z < 0$), ce qui engendre alors dans la peau des efforts N_{22}^S de traction.

Par conséquent, la contre-courbure dans la direction \underline{e}_2 se trouve donc bien orientée dans la même direction que la courbure de la direction \underline{e}_1 pour les deux peaux de l'alvéolaire. Ceci est dû à la présence d'efforts normaux dans la direction \underline{e}_2 qui sont de même signe que les efforts normaux dans la direction sollicitée \underline{e}_1 .

En outre, on doit tenir compte de la présence de ces efforts N_{11}^i et N_{22}^i ($i = S,3$) dans le calcul de la densité d'énergie élastique complémentaire W_d , ce qui fait apparaître dans son expression le coefficient des souplesses des peaux Sp_{12} . La souplesse homogénéisée d_{11} de la structure alvéolaire, obtenue en dérivant l'énergie W_d , dépend donc du coefficient de Poisson ν du matériau isotrope.

Evaluons la constante de souplesse d_{11} en flexion dans la direction \underline{e}_1 avec le modèle analytique de plaque alvéolaire équivalent pour différents coefficients de Poisson, et comparons sa valeur avec celle obtenue par le logiciel SAMCEF.

Le coefficient d_{11} , est donné par la relation (5.7),

$$d_{11} = \frac{2(1 - \nu^2 + 6 \cos \alpha)}{eEh^2(1 + 6 \cos \alpha)}$$

Pour le modèle éléments-finis, la valeur de d_{11} se déduit de la relation suivante,

$$(5.31) \quad d_{11} = \frac{b(u^+ - u^-)}{h^2 LF}$$

avec F l'effort appliqué sur la structure,
 u^+ le déplacement de la peau supérieure où F est imposé,
 u^- le déplacement de la peau inférieure où F est imposé,
 L, b, h respectivement la longueur, la largeur et la hauteur de la plaque alvéolaire,

On obtient les résultats suivants pour un matériau isotrope de module d'Young $E = 10000 Pa$, et en faisant varier le coefficient de Poisson (Tableau 5.1),

Coefficient de Poisson	0,1	0,3	0,5
d_{11} numérique	83,05	81,43	78,12
d_{11} analytique	83,09	81,42	78,09
Ecart (%)	<1%	<1%	<1%

Tableau 5.1: Comparaison des valeurs de d_{11} obtenues avec SAMCEF et le modèle alvéolaire équivalent

Les écarts ont été calculés en prenant la valeur numérique de SAMCEF comme référence. Ils sont dans tous les cas inférieurs à 1%. Il y a donc une excellente corrélation entre les résultats du modèle analytique et numérique pour l'estimation de la souplesse de flexion d_{11} dans la direction \underline{e}_1 .

V.1.3 Etude de la flexion pure suivant la direction \underline{e}_2

Considérons à présent une flexion pure de la structure alvéolaire dans la direction \underline{e}_2 (figure 5.7).

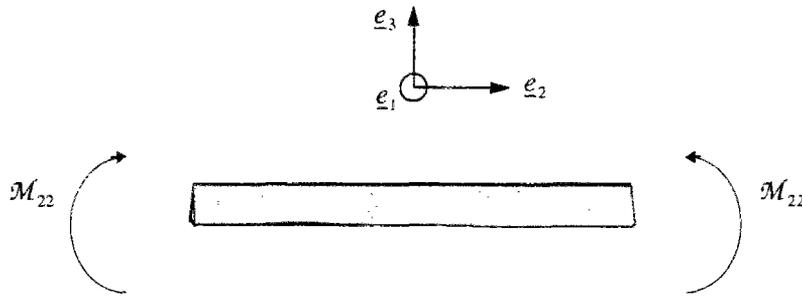


Figure 5.7: Flexion pure dans la direction \underline{e}_2

Le moment de flexion \mathcal{M}_{22} est le seul effort intervenant dans les équations (4.39) à (4.53). Celles-ci s'écrivent,

$$(5.32) \quad N_{22}^1 = -\frac{6}{6 + \frac{1}{\cos \alpha}} \frac{\mathcal{M}_{22}}{h} + \frac{2}{\cos \alpha \left(6 + \frac{1}{\cos \alpha}\right)} \frac{\mathcal{M}_{22}}{h}$$

$$(5.33) \quad N_{22}^2 = \frac{6}{6 + \frac{1}{\cos \alpha}} \frac{\mathcal{M}_{22}}{h}$$

$$(5.34) \quad N_{22}^3 = -\frac{1}{\cos \alpha \left(6 + \frac{1}{\cos \alpha}\right)} \frac{\mathcal{M}_{22}}{h}$$

$$(5.35) \quad N_{22}^4 = N_{22}^5 = -z \frac{12}{\cos \alpha \left(6 + \frac{1}{\cos \alpha}\right)} \frac{\mathcal{M}_{11}}{h^2}$$

$$(5.36) \quad N_{11}^i = 0 \quad \forall i = (1,2,3,4,5)$$

$$(5.37) \quad N_{12}^i = 0 \quad \forall i = (1,2,3,4,5)$$

Le comportement des peaux et des raidisseurs obéit donc à la loi constitutive (5.29), mais cette fois c'est la direction \underline{e}_2 qui est sollicitée. On retrouve ainsi un comportement classique de plaque homogène pour laquelle un état de compression dans la direction de sollicitation entraîne un état de traction dans la direction orthogonale, dû au seul effet Poisson.

Pour la plaque alvéolaire, la contre-courbure dans la direction \underline{e}_1 est alors inversée par rapport à la courbure de la direction \underline{e}_2 .

Dans le calcul de la densité d'énergie élastique complémentaire, seuls les efforts N_{22}^i interviennent. Le coefficient de souplesse d_{22} en flexion dans la direction \underline{e}_2 est donc indépendant du coefficient de Poisson. Nous pouvons dans ce cas vérifier son expression vis à vis d'une solution exacte en calculant l'expression analytique de l'inertie de flexion équivalente EI_y dans la direction \underline{e}_2 d'une cellule élémentaire D . L'inertie EI_y n'est autre que l'inverse du coefficient des souplesses d_{22} . Elle s'exprime par la relation classique suivante,

$$(5.38) \quad EI_y = E \iint_{S_D} x^2 dx dz$$

où S_D représente l'aire de la cellule D dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_3)$

Soit, pour la cellule D rapportée à sa longueur a ,

$$(5.39) \quad EI_y = \frac{eEh^2}{2} \left(1 + \frac{1}{6 \cos \alpha} \right)$$

D'où,

$$(5.40) \quad \frac{1}{EI_y} = \frac{12}{eEh^2 \left(6 + \frac{1}{\cos \alpha} \right)}$$

La formule (5.40) est rigoureusement la même expression que celle de la relation (5.9) de d_{22} pour une plaque en matériau isotrope. On obtient en effet,

$$d_{22} = \frac{12}{eEh^2 \left(6 + \frac{1}{\cos \alpha} \right)}$$

D'où,

$$(5.41) \quad d_{22} = \frac{1}{EI_y}$$

La relation (5.41) montre donc l'exactitude des équations du modèle dans le cas d'une flexion pure dans la direction \underline{e}_2 .

Remarque: On peut également estimer la constante de souplesse d_{22} avec le code de calcul SAMCEF, ce qui permet ainsi d'évaluer la pertinence des modèles éléments-finis 3D du chapitre III dans la direction \underline{e}_2 . Pour un matériau de module d'Young $E=10000$ Pa, la valeur du coefficient d_{22} obtenue par SAMCEF et le modèle analytique sont indiqués tableau (5.2),

d_{22} numérique	62,53
d_{22} analytique	62,47
Ecart (%)	<1%

Tableau 5.2: Comparaison des valeurs de d_{22} obtenues avec SAMCEF et le modèle alvéolaire équivalent

La valeur de d_{22} numérique a été obtenue en prenant la moyenne de trois valeurs de d_{22} calculées pour différentes valeurs du coefficient de Poisson: 0,1 0,3 et 0,5.

On constate que l'écart est inférieur à 1%. SAMCEF fournit donc des résultats de constantes de souplesse homogénéisée, comparables à ceux donnés par le modèle analytique et la solution exacte. Il semble donc que l'on peut se fier aux résultats de calculs obtenus par SAMCEF. De ce fait, les résultats obtenus dans la direction \underline{e}_1 permettent de valider le comportement en flexion pure prédite par le modèle analytique.

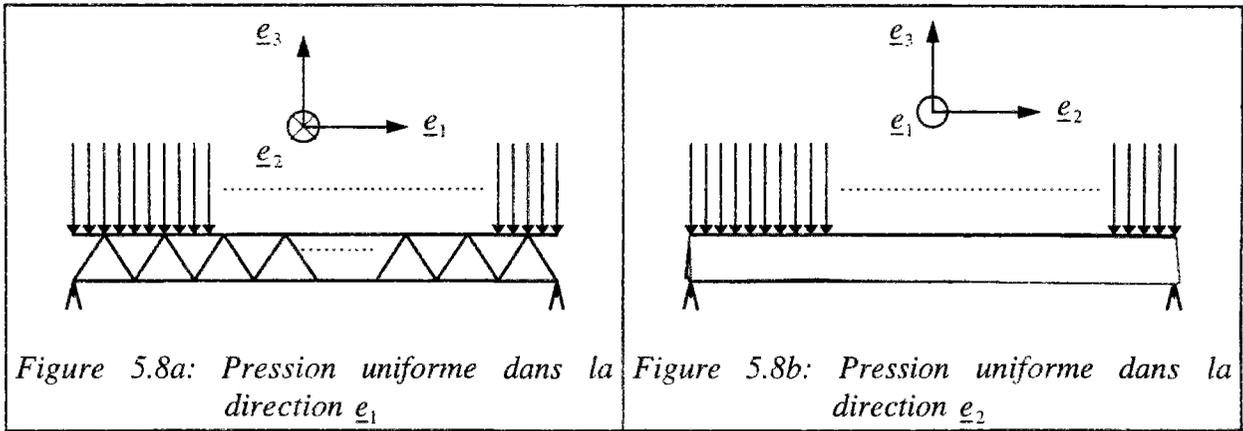
V.1.4 Conclusion

Nous venons de mettre en évidence dans cette partie la complexité du comportement mésoscopique de la structure alvéolaire, dans le cas simple du matériau isotrope, et son influence sur la déformée globale de la structure. Dans la partie suivante nous nous intéresserons à une structure en matériau composite pour laquelle nous supprimerons toute influence de la direction orthogonale à la direction sollicitée sur les grandeurs à valider. Nous considérerons des exemples de panneaux alvéolaires en composite de petites largeurs et soumis à une pression uniforme. Nous utiliserons en outre, le code de calcul SAMCEF pour valider le modèle équivalent.

V.2 VALIDATION DU MODELE DE PLAQUE ALVEOLAIRE EQUIVALENT EN FLEXION CYLINDRIQUE

Cette seconde partie du chapitre V est consacrée à la validation en raideur du modèle de plaque alvéolaire équivalent, pour un matériau composite, sur des exemples de flexion en pression uniforme. Nous comparerons les résultats de déflexions obtenus par le modèle analytique avec ceux du code de calcul par éléments-finis SAMCEF dont nous avons mis en évidence la pertinence par rapport à des essais au chapitre III dans la direction \underline{e}_1 , et vis à vis d'un calcul exacte d'inertie équivalente dans la direction \underline{e}_2 pour un matériau isotrope.

Nous avons choisi d'effectuer la validation du modèle alvéolaire équivalent dans le cas d'une plaque en appuis simples sur deux cotés, soumise à un chargement cylindrique en pression uniforme dans chacune des deux directions principales du panneau (figures 5.8a et 5.8b). Nous supposerons un comportement en contraintes planes du panneau alvéolaire, ce qui nous conduira à nous intéresser à des structures de petites largeurs. Nous ferons varier les orientations de fibres dans les peaux et dans les raidisseurs afin d'en étudier l'influence sur les résultats des calculs.



Figures 5.8a et 5.8b: Description schématique du chargement cylindrique uniforme (vues en coupe)

Nous étudierons ainsi deux exemples de panneaux alvéolaires:

Exemple 1: Une plaque constituée de peaux identiques localement symétriques et de raidisseurs symétriques et équilibrés (symétrie complète),

$$\begin{aligned} Sp_{16} &= Sp_{26} = 0 \\ Sr_{16} &= Sr_{26} = 0 \end{aligned}$$

Les peaux seront constituées d'un empilement de 12 plis $[\theta_2, -\theta_2, (\theta_1, -\theta_1)_2]_S$, les raidisseurs de 4 plis $[\theta_2, -\theta_2]_S$ (par rapport à \underline{b}_1^i).

Exemple 2: Une plaque à peaux symétriques par rapport au plan médian du sandwich, mais localement non symétriques, et à raidisseurs symétriques et équilibrés (symétrie partielle),

$$\begin{aligned} Sp_{16} &\neq 0 & Sp_{26} &\neq 0 \\ Sr_{16} &= Sr_{26} = 0 \end{aligned}$$

Les peaux seront constituées d'un empilement de 8 plis $[\theta_2, -\theta_2, (\theta_1, -\theta_1, \theta_1)_2]$ pour la peau supérieure et de 8 plis $[(\theta_1, -\theta_1, \theta_1)_2, -\theta_2, \theta_2]$ pour la peau inférieure, les raidisseurs de 4 plis $[\theta_2, -\theta_2]_S$ (par rapport à \underline{b}_1^i).

Les caractéristiques du préimprégné utilisées sont identiques à celles du matériau préimprégné du chapitre III (cf. tableau 3.1). Il s'agit du matériau T300/174 à fibres en carbone et à matrice époxyde.

Précisons à présent les dimensions des panneaux alvéolaires.

Pour la direction sollicitée \underline{e}_1 (correspondant à la direction orthogonale à celle des alvéoles triangulaires), le panneau est constitué de 21 cellules élémentaires de 56,6mm de long. La

hauteur a été choisie pour avoir des alvéoles triangulaires équilatérales. La largeur a été fixée arbitrairement.

$$L_x = 21 \times 56,6\text{mm} \approx 1,19\text{m}$$

$$b_x = 0,1\text{m}$$

$$h = 49\text{mm}$$

Pour la direction sollicitée e_2 (parallèle à la direction des alvéoles), la largeur du panneau correspond à une succession de 6 cellules élémentaires. Elle a été fixée arbitrairement ainsi que la longueur. La taille des cellules étant la même que précédemment la hauteur est également inchangée.

$$L_y = 5\text{m}$$

$$b_y = 6 \times 56,6\text{mm} \approx 0,34\text{m}$$

$$h = 49\text{mm}$$

Notez que les données concernant la largeur n'ont été utilisées que pour définir les maillages éléments-finis.

V.2.1 Détermination de la déflexion avec la modélisation éléments-finis

Les calculs éléments-finis ont été effectués avec les deux maillages représentés figure (5.9) pour la direction de sollicitation e_1 et figure (5.10) pour la direction de sollicitation e_2 , avec les conditions aux limites modélisant des conditions d'appuis simples aux bords.

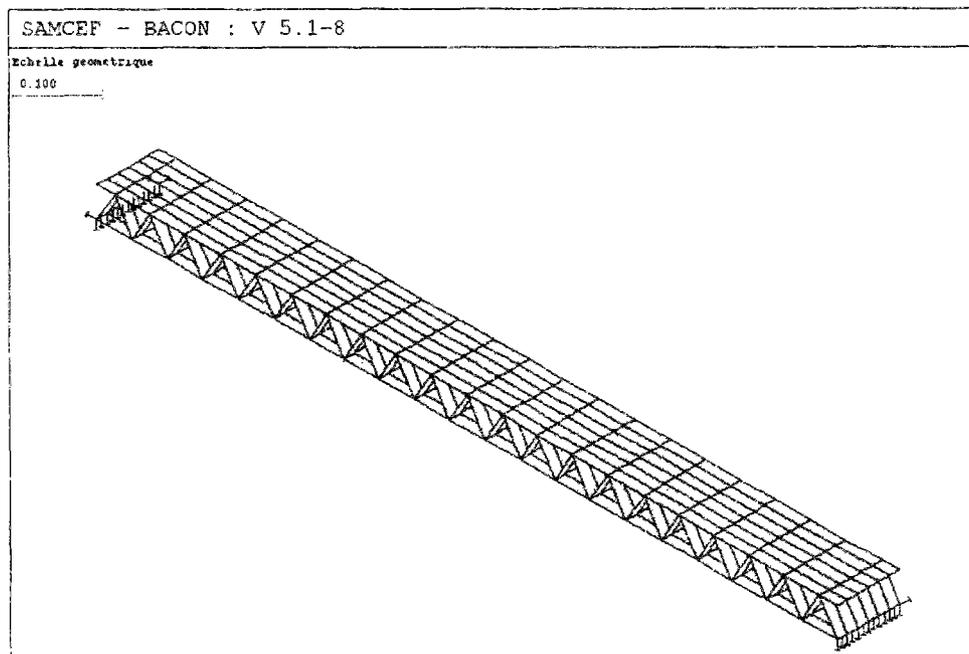


Figure 5.9: Maillage et conditions aux limites (direction e_1)

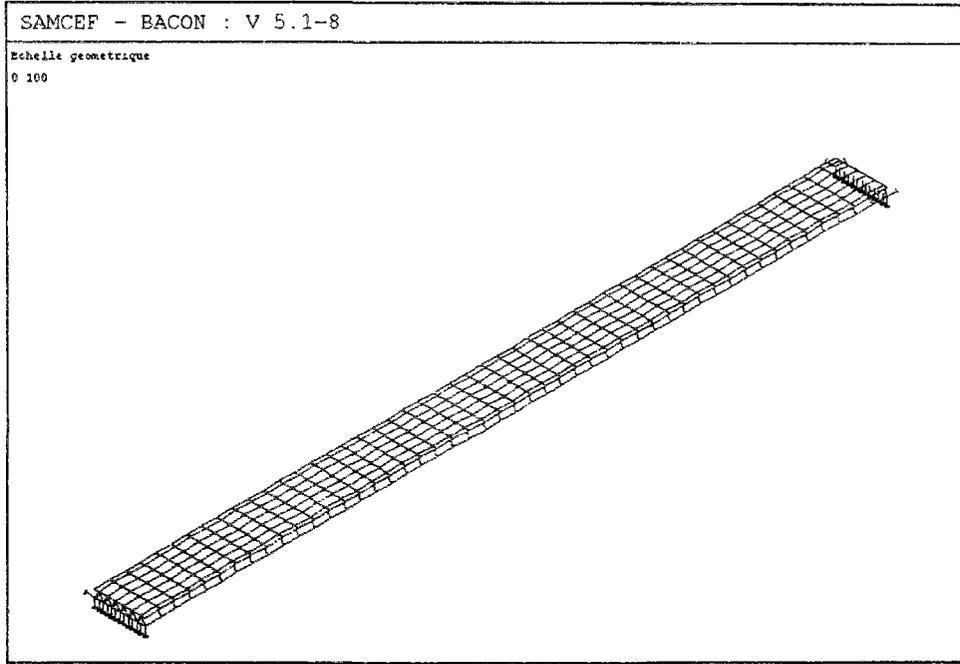


Figure 5.10: Maillage et conditions aux limites (direction e_2)

Les déflexions maximales sont déterminées avec le module de calcul ASEF de SAMCEF. Elles se situent bien au centre de la structure. Les résultats sont donnés au paragraphe (V.2.3).

V.2.2 Détermination de la déflexion avec le modèle alvéolaire homogénéisé

Nous présentons le calcul de la déflexion du modèle de plaque équivalent, pour un problème de flexion de structure alvéolaire unidimensionnel en appuis simples, en approximation de contraintes planes.

Choisissons pour ce faire, la direction e_1 comme direction de sollicitation (cf. figure 5.11a). Pour déterminer la déflexion maximale au centre, ramenons-nous à un problème homogénéisé équivalent (cf. figure 5.11b).

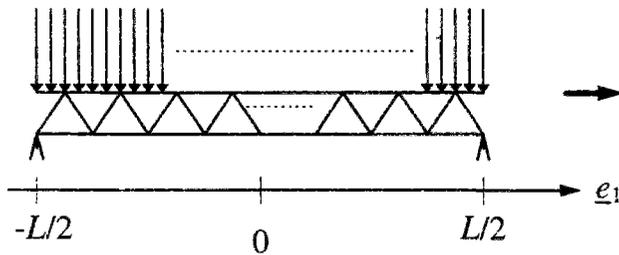


Figure 5.11a: Problème initial

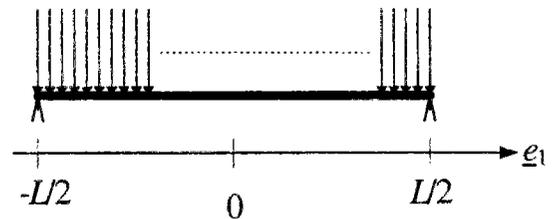


Figure 5.11b: Problème équivalent

Figures 5.11a et 5.11b: Problème à résoudre

En hypothèses de contraintes planes, les efforts généralisés de plaque $\{\underline{\Sigma}\}$ se réduisent classiquement à:

$$(5.42) \quad \{\underline{\Sigma}\} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{11}(x) \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{M}_{11}(x) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_1(x) \end{pmatrix},$$

qui ne dépendent que de la variable x .

La loi de comportement pour un problème 1D suivant l'axe \underline{e}_1 , se présente ainsi comme la restriction de la matrice des souplesses $[\underline{\Lambda}]$ et s'exprime par la relation,

$$(5.43) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{11} & 0 \\ b_{11} & d_{11} & 0 \\ 0 & 0 & f_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{11}(x) \\ \mathcal{M}_{11}(x) \\ Q_1(x) \end{bmatrix}$$

où les coefficients de souplesses homogénéisées a_{11} , b_{11} , d_{11} et f_{55} sont donnés par les relations (A4.3.1), (A4.3.7), (A4.3.16) et (A4.3.23).

Si la direction \underline{e}_2 est la direction de sollicitation, on obtient de façon équivalente la loi de comportement suivante,

$$(5.44) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & b_{22} & 0 \\ b_{22} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{22}(y) \\ \mathcal{M}_{22}(y) \\ Q_2(y) \end{bmatrix}$$

où les coefficients a_{22} , b_{22} , d_{22} et f_{44} sont donnés par les relations (A4.3.2), (A4.3.8), (A4.3.17), et (A4.3.22).

Déterminons à présent l'expression de la déflexion maximale au centre $w(0)$ pour une poutre en flexion dans la direction \underline{e}_1 , et en appuis simples aux extrémités.

Les conditions aux limites s'écrivent dans ce cas,

$$(5.45) \quad \psi_1(x=0) = 0$$

$$(5.46) \quad w\left(x = -\frac{L}{2}\right) = w\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0$$

En intégrant la deuxième équation différentielle de (5.43), on obtient en tenant compte de la condition limite (5.45),

$$(5.47) \quad \psi_1(x) = \int_0^x (b_{11}\mathcal{N}_{11}(u) + d_{11}\mathcal{M}_{11}(u)) du$$

La dernière équation différentielle de (5.43) s'écrit quant à elle,

$$(5.48) \quad \frac{dw}{dx} = f_{55}Q_1(x) - \psi_1(x)$$

Soit, en intégrant (5.48) et en utilisant la condition limite (5.46),

$$(5.49) \quad w(x) = \int_{L/2}^x f_{55}Q_1(u) du - \int_0^x (x-u)(b_{11}\mathcal{N}_{11}(u) + d_{11}\mathcal{M}_{11}(u)) du \\ + \int_0^{L/2} \left(\frac{L}{2} - u\right) (b_{11}\mathcal{N}_{11}(u) + d_{11}\mathcal{M}_{11}(u)) du$$

La déflexion maximale au centre $w(0)$ a donc pour expression générale,

$$(5.50) \quad w(0) = \int_0^{L/2} \left[\left(\frac{L}{2} - x\right) b_{11}\mathcal{N}_{11}(x) + \left(\frac{L}{2} - x\right) d_{11}\mathcal{M}_{11}(x) - f_{55}Q_1(x) \right] dx$$

Pour une pression uniforme, les efforts généralisés de plaque s'écrivent,

$$(5.51) \quad \mathcal{N}_{11}(x) = 0$$

$$(5.52) \quad Q_1(x) = px$$

$$(5.53) \quad \mathcal{M}_{11}(x) = \frac{p}{2}x^2 - \frac{pL^2}{8}$$

avec p la charge par unité de largeur (p s'exprime en N.m^{-1})

En introduisant les relations (5.51) à (5.53) dans la formule (5.50), on peut écrire,

$$(5.54) \quad w_x(0) = -\frac{5}{384} pd_{11} L^4 - \frac{1}{8} pf_{55} L^2$$

Nous obtenons de façon équivalente, l'expression suivante pour la déflexion maximale, lorsque la direction \underline{e}_2 est la direction de sollicitation,

$$(5.55) \quad w_y(0) = -\frac{5}{384} pd_{22} L^4 - \frac{1}{8} pf_{44} L^2$$

Les résultats obtenus pour ce modèle sont regroupés au paragraphe suivant, avec les résultats éléments-finis de SAMCEF.

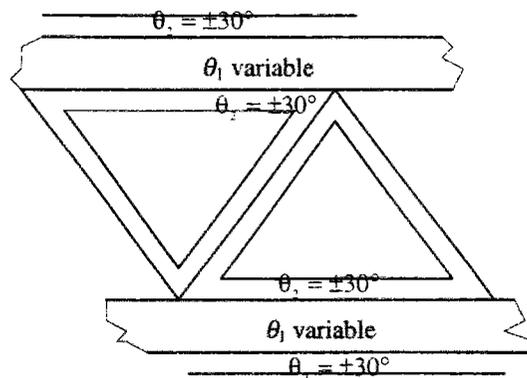
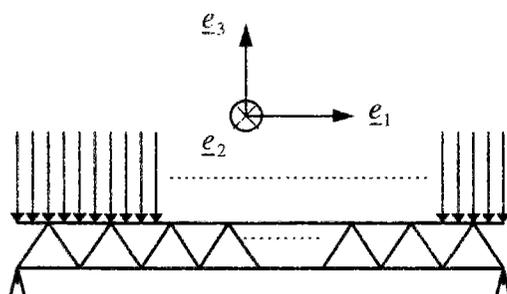
V.2.3 Résultats

Les résultats pour les deux modélisations sont données tableaux (5.3) à (5.10) pour les deux exemples de structures définis dans la partie introductive de cette partie: la structure à symétrie complète (exemple 1) et la structure à symétrie partielle (exemple 2). Les orientations de fibres sont rapportées aux axes \underline{b}_i^j définis figure (4.3).

Dans un premier temps, nous faisons varier les orientations de fibres dans les peaux θ_1 et fixons les orientations de fibres θ_2 à $\pm 30^\circ$ par rapport aux \underline{b}_i^j (tableaux 5.3, 5.5, 5.7, 5.9), pour étudier le comportement des structures alvéolaires avec le choix des orientations des fibres dans les raidisseurs défini au chapitre III. Puis nous fixons les orientations θ_1 à $\pm 30^\circ$ et faisons varier les orientations θ_2 (tableaux 5.4, 5.6, 5.8, 5.10).

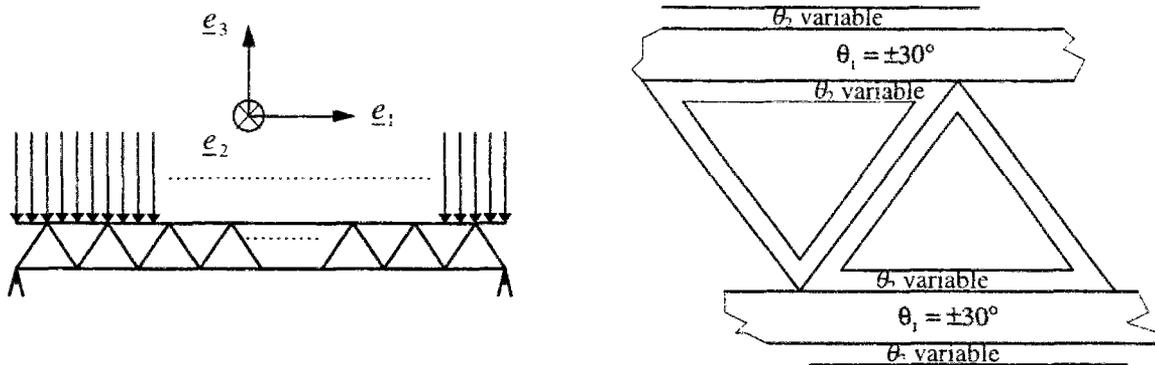
V.2.3.1 Résultats de l'exemple 1

Intéressons nous d'abord à la structure alvéolaire à symétrie complète ($Sp_{16} = Sp_{26} = 0$ $Sr_{16} = Sr_{26} = 0$). Les résultats obtenus dans la direction \underline{e}_1 sont présentés aux tableaux (5.3) et (5.4) et les résultats obtenus dans la direction \underline{e}_2 aux tableaux (5.5) et (5.6).



$\theta_1(^{\circ})$	Modèle 2D	SAMCEF	Ecart (%)
0	1,15	1,16	<1,0
10	1,23	1,25	1,6
20	1,56	1,58	1,3
30	2,30	2,32	<1,0
40	3,29	3,32	<1,0
50	3,86	3,88	<1,0
60	3,88	3,89	<1,0
70	3,73	3,74	<1,0
80	3,61	3,62	<1,0
90	3,57	3,58	<1,0

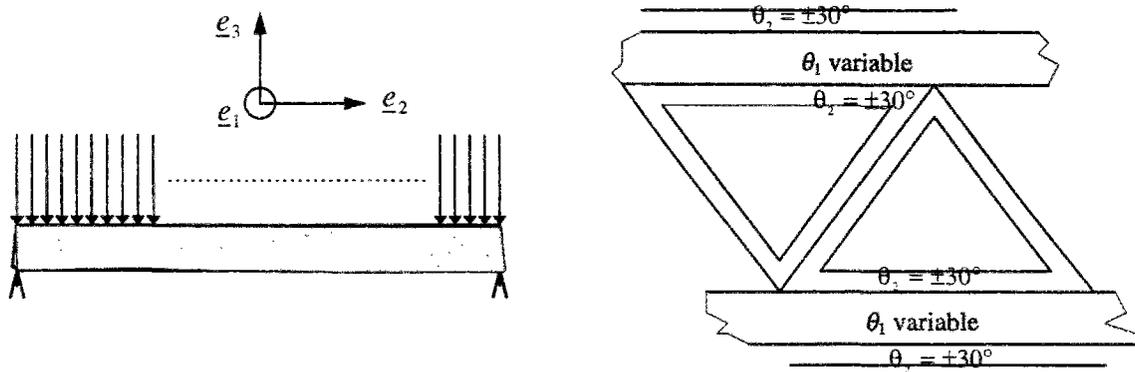
Tableau 5.3: Comparaison des déflexions dans la direction e_1 (en $10^{-4} m$)
Exemple 1 - Paramètre variable $\theta_1 - \theta_2 = \pm 30^{\circ}$



$\theta_2(^{\circ})$	Modèle 2D	SAMCEF	Ecart (%)
0	1,47	1,48	<1,0
10	1,56	1,56	<1,0
20	1,83	1,85	1,0
30	2,30	2,32	<1,0
40	2,70	2,76	2,2
50	2,82	2,90	2,8
60	2,81	2,92	3,8
70	2,84	2,92	2,7
80	2,86	2,89	1,0
90	2,86	2,87	<1,0

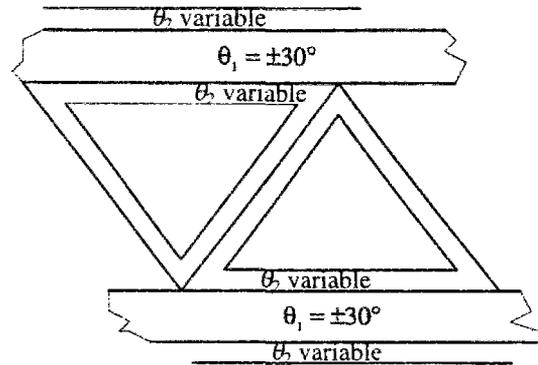
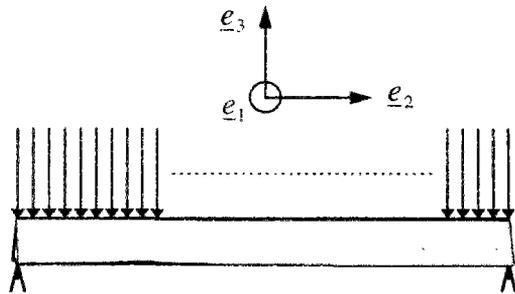
Tableau 5.4: Comparaison des déflexions dans la direction e_1 (en $10^{-4}m$)
Exemple 1 - Paramètre variable $\theta_2 - \theta_1 = \pm 30^{\circ}$

Les résultats du milieu équivalent, obtenus pour ce premier exemple dans la direction e_1 , sont excellents par rapport à une modélisation éléments-finis T56 de SAMCEF. Les écarts sont en effet inférieurs à 4% quelque soit les orientations de fibres dans les peaux et dans les raidisseurs, et très souvent inférieurs à 1%. Lorsque l'on fait varier θ_1 dans les peaux, et que l'on fixe θ_2 les écarts avec SAMCEF varient de 1,6% à moins de 1% (cf. tableau 5.3). Dans le second cas, lorsque l'on fait varier θ_2 et que l'on fixe θ_1 , les écarts sont globalement plus importants puisqu'ils dépassent 2% pour $40^{\circ} \leq \theta_2 \leq 70^{\circ}$ sans toutefois ne jamais atteindre 4%.



$\theta_1(^{\circ})$	Modèle 2D	SAMCEF	Ecart (%)
0	25,45	25,44	<1,0
10	25,95	25,94	<1,0
20	26,99	26,99	<1,0
30	26,43	26,42	<1,0
40	21,02	21,01	<1,0
50	13,07	13,07	<1,0
60	7,69	7,69	<1,0
70	5,14	5,15	<1,0
80	4,12	4,12	<1,0
90	3,85	3,85	<1,0

Tableau 5.5: Comparaison des déflexions dans la direction e_2 (en $10^{-2} m$)
Exemple 1 - Paramètre variable $\theta_1 - \theta_2 = \pm 30^{\circ}$



$\theta_2(^{\circ})$	Modèle 2D	SAMCEF	Ecart (%)
0	24,36	24,36	<1,0
10	24,97	24,97	<1,0
20	26,36	26,36	<1,0
30	26,43	26,42	<1,0
40	22,24	22,23	<1,0
50	15,43	15,42	<1,0
60	10,07	10,07	<1,0
70	7,07	7,07	<1,0
80	5,75	5,76	<1,0
90	5,42	5,42	<1,0

Tableau 5.6: Comparaison des déflexions dans la direction e_2 (en $10^{-2} m$)
Exemple 1 - Paramètre variable $\theta_2 - \theta_1 = \pm 30^{\circ}$

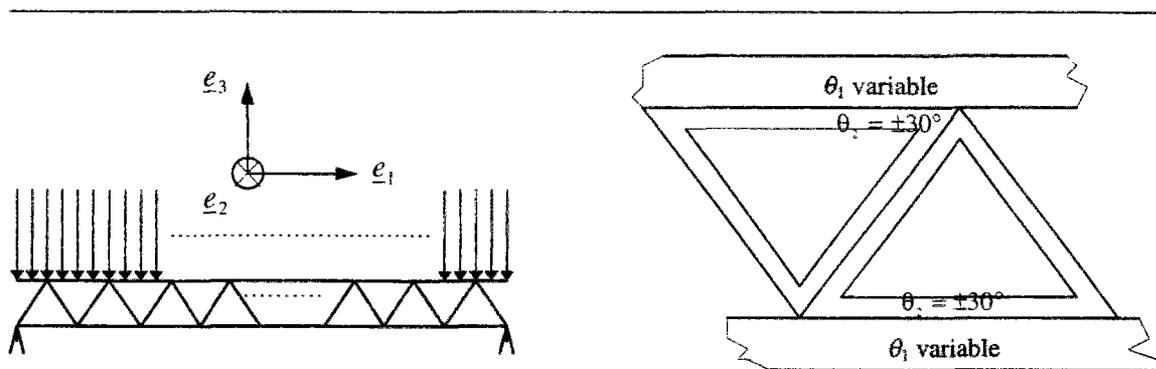
Dans la direction e_2 , les résultats du modèle homogénéisé sont également excellents par rapport à la modélisation numérique pour toutes les orientations des fibres θ_2 , puisqu'ils ne dépassent pas 1% d'écart avec SAMCEF. On peut dans ce cas, considérer que les prévisions des modélisations théorique et éléments-finis sont équivalentes.

V.2.3.2 Résultats de l'exemple 2

Considérons à présent le panneau sandwich à symétrie partielle, ($Sp_{16} \neq 0$, $Sp_{26} \neq 0$, $Sr_{16} = Sr_{26} = 0$).

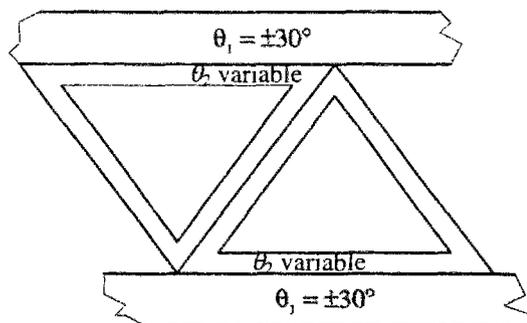
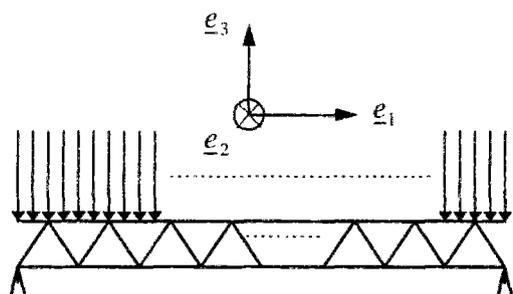
Les tableaux (5.7) et (5.8) montrent que les résultats obtenus par le milieu homogénéisé sont également excellents vis à vis d'une simulation éléments-finis. On trouve des écarts avec SAMCEF comparables à ceux de l'exemple 1, inférieurs à 3,5%.

Pour ce qui concerne les résultats dans la direction e_2 , ceux-ci sont un peu moins satisfaisants que ceux du panneau à symétrie complète, puisqu'ils présentent parfois plus de 2% d'écart avec la simulation SAMCEF. Le tableau (5.9) présente des valeurs de déflexions du milieu équivalent se situant entre moins de 1% et 1,8% d'écart de la modélisation éléments-finis, et le tableau (5.10) des résultats compris entre moins de 1% et 2,2% d'écart.



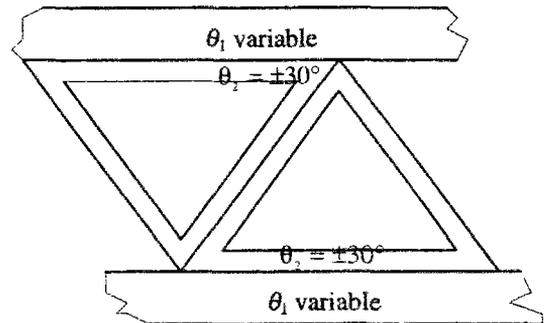
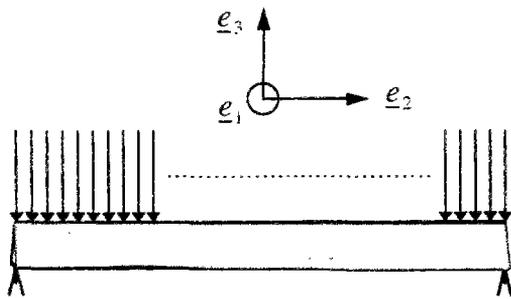
$\theta_1(^{\circ})$	Modèle 2D	SAMCEF	Ecart (%)
0	1,59	1,59	<1,0
10	1,72	1,73	<1,0
20	2,24	2,25	<1,0
30	3,41	3,44	<1,0
40	5,15	5,24	1,7
50	6,40	6,56	2,4
60	6,70	6,89	2,7
70	6,57	6,77	2,9
80	6,41	6,61	3,0
90	6,34	6,55	3,2

Tableau 5.7: Comparaison des déflexions dans la direction e_1 (en $10^{-4} m$)
Exemple 2 - Paramètre variable $\theta_1 - \theta_2 = \pm 30^{\circ}$



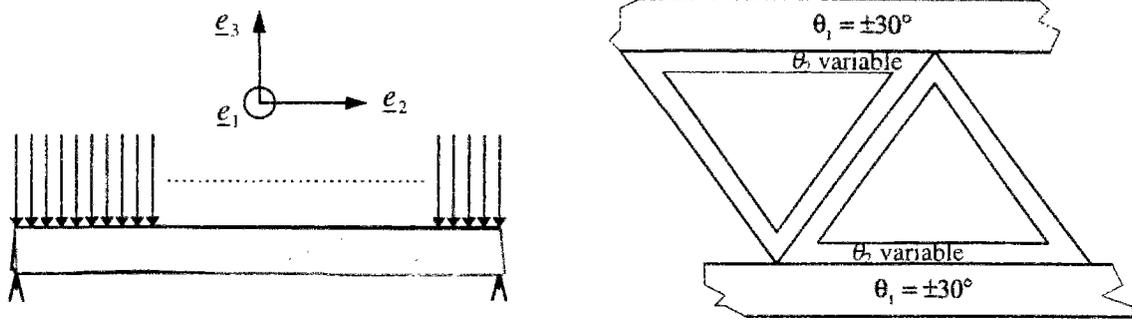
$\theta_2(^{\circ})$	Modèle 2D	SAMCEF	Ecart (%)
0	2,42	2,45	1,2
10	2,53	2,56	1,2
20	2,88	2,91	1,0
30	3,41	3,44	<1,0
40	3,84	3,89	1,3
50	3,92	4,01	2,2
60	3,85	3,97	3,1
70	3,84	3,94	2,5
80	3,86	3,90	1,0
90	3,85	3,89	1,0

Tableau 5.8: Comparaison des déflexions dans la direction e_1 (en $10^{-4} m$)
Exemple 2 - Paramètre variable $\theta_2 - \theta_1 = \pm 30^{\circ}$



$\theta_1(^{\circ})$	Modèle 2D	SAMCEF	Ecart (%)
0	37,54	37,96	1,1
10	38,08	38,44	<1,0
20	39,06	39,24	<1,0
30	37,78	37,75	<1,0
40	30,26	30,27	<1,0
50	19,05	19,10	<1,0
60	11,09	11,03	<1,0
70	7,24	7,11	1,8
80	5,63	5,53	1,8
90	5,18	5,12	1,2

Tableau 5.9: Comparaison des déflexions dans la direction e_2 (en $10^{-2} m$)
Exemple 2 - Paramètre variable $\theta_1 - \theta_2 = \pm 30^{\circ}$



$\theta_2(^{\circ})$	Modèle 2D	SAMCEF	Ecart (%)
0	35,56	35,94	1,1
10	36,30	36,59	<1,0
20	37,89	37,98	<1,0
30	37,78	37,75	<1,0
40	32,53	32,77	<1,0
50	23,58	24,02	1,8
60	15,78	16,14	2,2
70	11,06	11,30	2,1
80	8,86	9,15	2,1
90	8,43	8,62	2,2

Tableau 5.10: Comparaison des déflexions dans la direction e_2 (en $10^{-2} m$)
Exemple 2 - Paramètre variable $\theta_2 - \theta_1 = \pm 30^{\circ}$

V.2.4 Conclusion

Nous avons effectué une comparaison du comportement global de panneaux alvéolaires en flexion cylindrique, obtenu d'une part par des simulations numériques SAMCEF, et d'autre part par le modèle de plaque équivalent. Les résultats ont mis en évidence l'excellente corrélation entre ces deux modélisations dans les deux directions e_1 et e_2 pour les deux exemples considérés et pour toutes les orientations de fibres étudiées.

Nous justifions de cette façon, a posteriori, les hypothèses de comportement effectué au niveau de la mésostructure de l'alvéolaire et présenté au chapitre IV. Rappelons que nous avons considéré des champs de contraintes constants dans les peaux et dans les raidisseurs, excepté les efforts normaux dans les raidisseurs N_{22}^i ($i = 4,5$) dans la direction e_2 qui permettaient de prendre en compte la participation à la flexion des raidisseurs dans cette direction. Il semble donc que ces hypothèses soient largement suffisantes en regard des résultats présentés dans cette partie de validation.

CHAPITRE VI

APPLICATION AU FLAMBEMENT TRANSVERSE

DE PANNEAUX ALVEOLAIRES

VI.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous développons un outil de dimensionnement des structures alvéolaires vis à vis du flambement. Nous nous intéresserons uniquement à la direction transverse, qui est la direction sensible du composite alvéolaire pour les phénomènes de flambement. Nous présenterons des modèles théoriques de flambement transverse de panneaux en composite alvéolaire à partir du modèle de plaque alvéolaire équivalent du chapitre IV et s'appuyant sur la théorie de la stabilité.

La géométrie particulière du composite alvéolaire nous a conduit à supposer l'existence de différents modes de flambement dans la direction transverse de la structure.

Un premier mode de flambement peut s'apparenter à celui des structures homogènes classiques. Pour un élancement suffisamment grand de la structure, les composites alvéolaires peuvent être le siège de phénomènes de flambement qui provoquent une rotation de l'ensemble de la structure. Ce mode de flambement affecte a priori uniquement la macrostructure de l'alvéolaire. Nous l'avons baptisé flambement global (figure 6.1).

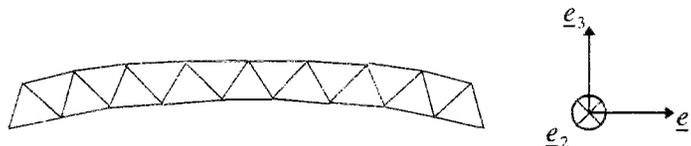


Figure 6.1 Exemple de flambement global

En outre, la structure alvéolaire est constituée de parois qui travaillent essentiellement en traction-compression. Ceci laisse supposer qu'un second mode de flambement est également susceptible de se produire à l'échelle des cellules triangulaires (échelle mésoscopique). Les parois peuvent être affectées par du flambement de même type que pour une structure homogène. Ce mode de flambement a été baptisé flambement local (figure 6.2).

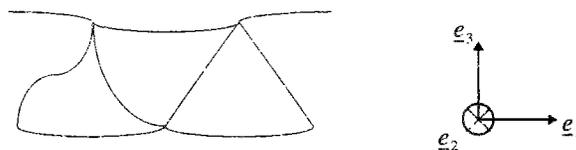


Figure 6.2 Exemple de flambement local

L'existence de ces deux modes de flambement du composite alvéolaire suppose que l'apparition de l'un ou l'autre de ces modes dépend de conditions géométriques particulières de la structure. Le mode de flambement local apparaît pour des poutres de longueurs a priori plus petites que pour le mode global.

Nous avons supposé que les deux modes d'instabilité existaient indépendamment l'un de l'autre et qu'il était possible de définir une longueur caractéristique L_0 pour lequel on passe d'un mode de flambement à l'autre. Ainsi pour $L < L_0$ le flambement serait local et pour $L \geq L_0$, le flambement serait global.

Nous analyserons les deux modes de flambement et donnerons les conditions d'existence de chaque mode pour différentes conditions aux limites. Nous nous servirons dans notre travail de l'étude du flambement d'une poutre droite homogène résolu classiquement comme un problème de stabilité élastique.

Dans une première partie, nous étudierons le flambement global des poutres alvéolaires. Nous traiterons l'exemple élémentaire de la stabilité d'une poutre alvéolaire équivalente en appuis simples aux extrémités (ou rotulée). Nous donnerons les résultats pour d'autres conditions aux limites.

Dans une deuxième partie, nous analyserons le flambement local des poutres alvéolaires. Nous étudierons le flambement de chaque barre qui constitue l'âme triangulaire de l'alvéolaire.

Puis dans une troisième partie nous déterminerons l'expression de la longueur caractéristique L_0 .

Dans la quatrième et dernière partie, nous validerons à l'aide du code de calcul SAMCEF et des premiers résultats d'essais réalisés à l'Institut de Recherches de la Construction Navale (IRCN), la théorie de flambement transverse alvéolaire pour un panneau alvéolaire en carbone/époxyde. Nous examinerons un tronçon de ce plancher sur appuis simples, ainsi que d'autres conditions de liaison.

VI.2 ETUDE DU FLAMBEMENT GLOBAL

Avant de développer les équations du flambement global des poutres alvéolaires, faisons quelques rappels généraux concernant l'analyse de flambement de structures (*Brush et Almroth 1975*), (*Inglebert 1989b*), (*Timoshenko et Gere 1961*).

Le flambement de structures mécaniques est un problème de mécanique non linéaire puisque le comportement des structures affectées par le flambement cesse d'être linéaire. Cependant la difficulté de résolution d'un problème non linéaire et le dimensionnement fréquent des structures vis à vis du flambement, a conduit les mécaniciens à rechercher des solutions linéaires approchées. Le flambement est alors résolu comme un problème de stabilité élastique moyennant une perte de précision pour les solutions.

Pour décrire les phénomènes de flambement, considérons un système élastique au voisinage d'un état naturel. Cet état d'équilibre dénué de contraintes est stable. Faisons croître progressivement le chargement P appliqué au système. Le système étant élastique, la position d'équilibre stable évolue de façon continue. Le flambement apparaît lorsque la charge P

dépasse une valeur critique de chargement pour laquelle d'une part, la position d'équilibre du système cesse d'être stable, et d'autre part, il existe d'autres positions d'équilibre.

Ainsi la charge critique est celle où pour la première fois, il y a perte d'unicité de la solution, en chargement croissant à partir du chargement nul.

Le but des études de flambement (ou de stabilité élastique) sera donc de rechercher la charge critique de flambement (ou d'instabilité) d'un système mécanique, à partir duquel il existe plusieurs positions d'équilibre non stables.

Les instabilités élastiques sont des non-linéarités du comportement purement géométriques. Elles sont prises en compte en introduisant dans les expressions l'influence des rotations de la structure sur le comportement.

Les déformations appartiennent ainsi à une classe de déformations intermédiaire se situant entre les déformations linéaires et les déformations non linéaires. Ainsi dans la direction transverse du composite alvéolaire (direction \underline{e}_1),

$$(6.1) \quad \varepsilon_{11} = \frac{du_1}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2$$

où $\frac{du_1}{dx}$ est la composante de déplacement dans la direction \underline{e}_1 ,
 $\frac{dw}{dx}$ la composante verticale du déplacement.

Pour résoudre ce problème, on peut utiliser les deux approches classiques de mécanique qui consistent à écrire les équations d'équilibre soit à partir de la méthode des puissances virtuelles, soit à partir de l'écriture de l'équilibre des efforts sur un domaine élémentaire déformé. La seconde approche est la plus utilisée dans la littérature (*Timoshenko et Gere 1961*), (*Brush et Almroth 1975*).

C'est cette méthode de résolution que nous utiliserons dans notre travail pour analyser les différents modes de flambement et déterminer les charges critiques.

Explicitons la charge critique de flambement global d'une poutre droite homogène biarticulée, soumise à des efforts de compression axiale (figure 6.3). Nous supposons que nous sommes dans le cas où $L > L_0$, c'est à dire que la charge critique d'instabilité globale est inférieure à la charge critique d'instabilité locale.



Figure 6.3 Poutre alvéolaire biarticulée en compression

Le modèle de plaque alvéolaire équivalente permet de voir la structure alvéolaire comme un milieu homogène unidimensionnel dans la direction \underline{e}_1 . Nous sommes donc amenés à traiter le problème classique d'une poutre droite et homogène biarticulée (figure 6.4).

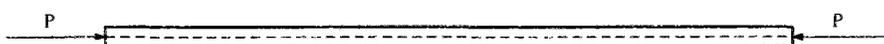


Figure 6.4 Poutre homogène biarticulée

On suppose que la poutre est soumise à un effort extérieur P identique à chaque extrémité, constant en grandeur et en direction, et qu'il est appliqué sur l'axe médian de la poutre.

Les efforts et moments intérieurs sont classiquement les efforts normal N et tranchant Q , et le moment fléchissant M .

Ecrivons l'équilibre des efforts intérieurs pour un élément de poutre dans l'état déformé (figure 6.5). Nous prenons ainsi en compte l'influence des rotations sur la structure qui peuvent induire du flambement.

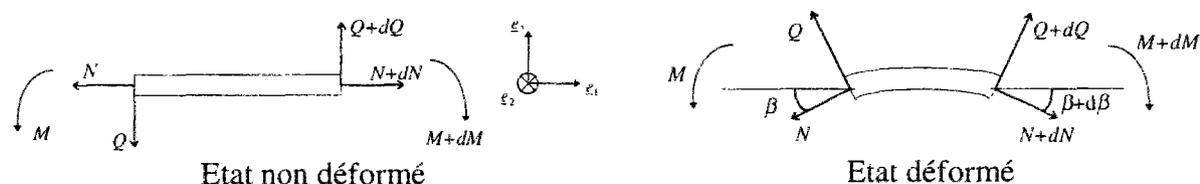


Figure 6.5 Equilibre d'un élément de poutre

On suppose que les déformations du type (6.1) restent petites. u' et w' sont donc petits et la rotation $\beta = -w'$ est considérée comme petite. On peut ainsi approcher $\sin \beta$ et $\cos \beta$ par β et 1 respectivement.

On peut donc écrire :

$$(6.2) \quad -N + (N + dN) - Q\beta + (Q + dQ)(\beta + d\beta) = 0$$

$$(6.3) \quad -Q + (Q + dQ) + N\beta - (N + dN)(\beta + d\beta) = 0$$

soit encore,

$$(6.4) \quad dN + Qd\beta + \beta dQ = 0$$

$$(6.5) \quad -Nd\beta - \beta dN + dQ = 0$$

A partir de l'équilibre des moments de l'élément de poutre (état non déformé) écrit au centre, on en déduit,

$$(6.6) \quad M - (M + dM) + Qdx = 0$$

Soit,

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

En négligeant les termes quadratiques représentant les interactions non linéaires entre le cisaillement transverse et les rotations dans (6.4) et (6.5), on obtient les trois équations d'équilibre suivantes,

$$(6.7) \quad \frac{dN}{dx} = 0$$

$$(6.8) \quad \frac{dQ}{dx} = N \frac{d\beta}{dx}$$

$$(6.9) \quad Q = \frac{dM}{dx}$$

D'où en éliminant l'effort tranchant entre les équations (6.8) et (6.9), on obtient une nouvelle équation,

$$(6.10) \quad \frac{d^2 M}{dx^2} - N \frac{d\beta}{dx} = 0$$

Or $\beta = -w'$ et le moment fléchissant M est relié à la dérivée seconde de w via le produit de rigidité en flexion $E_x I_x$. (E_x est le module d'Young de la poutre, I_x est le moment quadratique d'une section de la poutre),

$$(6.11) \quad M = -E_x I_x \frac{d^2 w}{dx^2}$$

En introduisant la relation (6.10) dans la relation (6.11), on en déduit donc,

$$(6.12) \quad \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{N}{E_x I_x} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

Aux extrémités de la poutre $N(0) = N(L) = -P$, donc il est clair que $\forall x \in [0, L]$ $N(x) = -P$. d'où, en supposant $E_x I_x$,

$$(6.13) \quad \frac{d^4 w}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

$$(6.14) \quad \text{avec } k^2 = \frac{P}{E_x I_x} \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{R}$$

La charge critique de flambement se déduit de cette équation différentielle (6.13). Elle s'exprime par la relation suivante,

$$(6.15) \quad P = \frac{n^2 \pi^2 E_x I_x}{L^2} \quad n \in \mathbb{N}^+$$

P est la charge critique d'instabilité du $n^{\text{ème}}$ mode de flambement de la structure.

La charge critique d'instabilité utile au dimensionnement est la plus petite valeur de P non nulle. Elle correspond au premier mode de flambement, soit $n = 1$.

$$(6.16) \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 E_x I_x}{L^2}$$

On peut déterminer de la même manière la charge critique de flambement P_{cr} pour d'autres conditions aux limites. On peut montrer que les différentes charges critiques obtenues peuvent se mettre sous la forme,

$$(6.17) \quad P_{cr} = m \frac{\pi^2 E_x I_x}{L^2} \quad m \in \mathbb{R}_+^*$$

où m est un coefficient qui dépend des conditions de liaison.

Le tableau (6.1) récapitule les charges critiques pour différentes conditions aux limites.

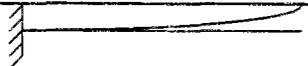
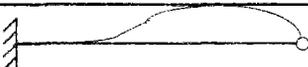
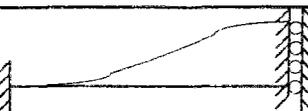
Poutre biarticulée		$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_x I_x}{L^2}$
Poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre		$P_{cr} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 E_x I_x}{L^2}$
Poutre encastrée à une extrémité et rotulée à l'autre		$P_{cr} = 2,04 \frac{\pi^2 E_x I_x}{L^2}$
Poutre bi-encastrée		$P_{cr} = 4 \frac{\pi^2 E_x I_x}{L^2}$
Poutre bi-encastrée avec une liberté latérale d'un côté		$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_x I_x}{L^2}$

Tableau 6.1 Charges critiques P_{cr} pour différentes conditions aux limites

Il reste maintenant à déterminer le produit $E_x I_x$ de la poutre alvéolaire équivalente pour connaître entièrement l'expression des charges critiques d'instabilité globale en fonction des paramètres physiques de la structure.

Supposons dans un premier temps que l'influence du cisaillement transverse soit négligeable dans le comportement de la poutre alvéolaire. La loi de comportement équivalente pour une poutre alvéolaire dans la direction transverse a pour expression, d'après la relation (5.43), compte tenu de la convention de signe du chapitre,

$$(6.18) \quad \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ -w''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & d_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{11}(x) \\ \mathcal{M}_{11}(x) \end{pmatrix}$$

où, les coefficients a_{11} et d_{11} sont donnés par les relations (A4.3.1) et (A4.3.16) en annexe 4.3
(ici $\mathcal{N}_{11}(x) = bN(x)$ $\mathcal{M}_{11}(x) = bM(x)$)

Le moment fléchissant \mathcal{M}_{11} est dans ce cas relié à la dérivée seconde de w par la relation,

$$(6.19) \quad \mathcal{M}_{11}(x) = -\frac{1}{d_{11}} w''(x)$$

donc,

$$(6.20) \quad E_x I_x = \frac{1}{d_{11}}$$

La charge critique de flambement global pour une poutre alvéolaire a donc pour expression,

$$(6.21) \quad (P_{cr})_{glob} = \frac{\pi^2 b}{L^2 d_{11}} \quad L \geq L_0$$

Pour d'autres conditions aux limites, l'expression de la charge critique prend la forme suivante (cf. relation 6.22),

$$(6.22) \quad (P_{cr})_{glob} = m \frac{\pi^2 b}{L^2 d_{11}} \quad m \in \mathbb{R}^*$$

A présent, prenons en compte l'influence de cisaillement transverse de la poutre dans un problème de flambement global. Un terme supplémentaire intervient dans la matrice des souplesses reliant la dérivée première de w et la rotation de section φ à l'effort tranchant équivalent $Q(x)$. La loi de comportement s'écrit dans ce cas (cf. relation 5.43),

$$(6.23) \quad \begin{pmatrix} u'(x) \\ \varphi'(x) \\ -(w'(x) + \varphi(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{11} & 0 \\ 0 & 0 & f_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{11}(x) \\ \mathcal{M}_{11}(x) \\ Q_1(x) \end{pmatrix}$$

où, les coefficients a_{11} , d_{11} et f_{55} sont donnés par les relations (A4.3.1) et (A4.3.16) et (A4.3.23) en annexe (4.3).

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{11}(x) &= bN(x) \\ \mathcal{M}_{11}(x) &= bM(x) \\ Q_1(x) &= bQ(x) \end{aligned}$$

Les équations d'équilibre (6.8) et (6.9) restent valables,

$$(6.24) \quad \frac{dQ}{dx} = P \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (6.25) \quad Q = \frac{dM}{dx}$$

En remplaçant dans les équations (6.29) et (6.30) les efforts généralisés par les déformations généralisées, via les relations de la loi de comportement, on obtient,

$$(6.26) \quad \frac{b}{f_{55}} \left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

$$(6.27) \quad \frac{1}{d_{11}} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{1}{f_{55}} \left(\varphi + \frac{dw}{dx} \right) = 0$$

La solution de ce système d'équation vérifiant les conditions aux limites (6.16) de la poutre en appuis simples peut s'écrire,

$$(6.28) \quad \varphi(x) = A_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

$$(6.29) \quad w(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

En reportant dans (6.31) et (6.32), on obtient pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(6.30) \quad \frac{bL}{f_{55}n\pi} A_n + \left(\frac{b}{f_{55}} - P \right) B_n = 0$$

$$(6.31) \quad \left(\frac{1}{d_{11}} + \frac{L^2}{f_{55}n^2\pi^2} \right) A_n + \frac{L}{f_{55}n\pi} B_n = 0$$

Ce système d'équation a une solution non nulle si le déterminant de la matrice des coefficients A_n et B_n est nul. On en déduit une condition sur la charge P ,

$$(6.32) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad P = \frac{\frac{b}{f_{55}d_{11}}}{\left(\frac{1}{d_{11}} + \frac{L^2}{f_{55}n^2\pi^2} \right)}$$

La charge critique d'instabilité globale correspondant à la plus petite valeur non nulle de n dans (6.37), s'écrit,

$$(6.33) \quad (P'_{cr})_{glob} = \frac{\frac{b}{d_{11}} \frac{\pi^2}{L^2 f_{55}}}{\left(\frac{1}{d_{11}} \frac{\pi^2}{L^2} + \frac{1}{f_{55}} \right)}$$

soit encore,

$$(6.34) \quad (P'_{cr})_{glob} = (P_{cr})_{glob} \frac{1}{\left(1 + \frac{\pi^2 f_{55}}{L^2 d_{11}} \right)}$$

où $(P_{cr})_{glob} = \frac{\pi^2 b}{L^2 d_{11}}$ est la charge critique sans cisaillement transverse,

Lorsqu'on prend en compte les effets du cisaillement transverse dans le problème de flambement, la charge critique diminue dans le rapport $\frac{1}{\left(1 + \frac{\pi^2 f_{55}}{L^2 d_{11}} \right)}$.

L'évaluation du terme $f_c = \frac{\pi^2 f_{55}}{L^2 d_{11}}$ permet d'estimer l'influence du cisaillement transverse sur le comportement de la poutre en flambement global.

VI.3 ETUDE DU FLAMBEMENT LOCAL

Le flambement local affecte les peaux et les raidisseurs du panneau alvéolaire. Il apparaît si la charge critique d'instabilité locale est inférieure à la charge critique d'instabilité globale. Dans cette partie, nous explicitons la charge critique de flambement local d'une poutre biarticulée.

Pour résoudre le problème d'instabilité locale, appliquons de ce qui a été développé au chapitre IV à chacune des parois du treillis. Nous gardons les mêmes notations d'indices pour désigner les différents éléments constituant le treillis (figure 6.6).

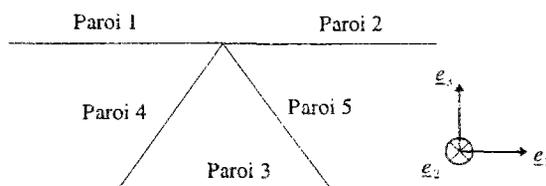


Figure 6.6: Modélisation de la mésostructure (vue en coupe)

Nous avons considéré dans le modèle de plaque équivalente que l'alvéolaire présentait au moins une symétrie globale et que les raidisseurs étaient des stratifiés symétriques et équilibrés. Le problème de flambement des barres 1, 2, et 3 est donc équivalent. Celui des barres 4 et 5 également.

Traisons d'abord le cas des barres 1, 2 et 3. Pour cela considérons la barre 1. Il s'agit du problème de flambement élémentaire que nous avons développé au chapitre précédent. Ecrivons le problème pour la barre 1 (cf. figure 6.7).

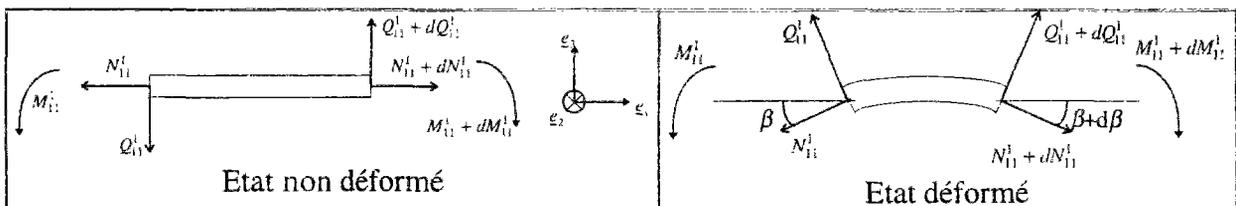


Figure 6.7: Équilibre de la barre 1

Les équations d'équilibre (6.7) et (6.10) s'écrivent ici,

$$(6.35) \quad \frac{dN_{11}^1}{dx} = 0$$

$$(6.36) \quad \frac{d^4 w_1}{dx^4} - \frac{N_{11}^1}{E_{1x} I_{1x}} \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0$$

Pour trouver une relation entre les efforts normaux N_{11}^1 de la structure mésoscopique et les efforts intérieurs de la poutre alvéolaire, plaçons-nous d'abord à l'échelle macroscopique de la structure et faisons le bilan des efforts intérieurs généralisés engendrés par les efforts externes de compression axiale \mathcal{N}_{11} , \mathcal{M}_{11} , Q_1 , ($\mathcal{N}_{11} = bN$, $\mathcal{M}_{11} = bM$, $Q_1 = bQ$) (figure 6.8).

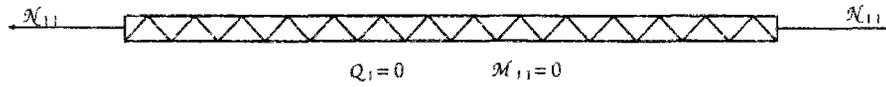


Figure 6.8: Équilibre de la macrostructure

La poutre en compression axiale ne subit pas d'instabilité globale. On peut donc négliger l'effet des rotations sur les déplacements de la macrostructure. Il n'y a donc pas lieu de prendre en compte l'influence du moment fléchissant \mathcal{M}_{11} et de l'effort tranchant Q_1 sur les déformations généralisées du panneau alvéolaire.

Plaçons nous maintenant à l'échelle mésoscopique de la structure alvéolaire. Des équations d'équilibre écrites dans le cadre de l'homogénéisation de la plaque alvéolaire, sur une cellule élémentaire représentative de la structure, ont permis de relier les efforts intérieurs $N_{11}^1, N_{11}^2, N_{11}^3, N_{11}^4$ et N_{11}^5 aux efforts globaux \mathcal{N}_{11} , \mathcal{M}_{11} , Q_1 (cf. relations A4.2.1 à A4.2.5 en annexe 4.2).

$$\begin{aligned} N_{11}^1 &= \frac{\mathcal{N}_{11}}{2} + \frac{\mathcal{M}_{11}}{h} + Q_1 \cdot \cotan \alpha & N_{11}^2 &= \frac{\mathcal{N}_{11}}{2} + \frac{\mathcal{M}_{11}}{h} - Q_1 \cdot \cotan \alpha \\ N_{11}^3 &= \frac{\mathcal{N}_{11}}{2} - \frac{\mathcal{M}_{11}}{h} & N_{11}^4 &= \frac{Q_1}{\sin \alpha} & N_{11}^5 &= -\frac{Q_1}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{M}_{11} = Q_1 = 0$, ces équations se simplifient et deviennent ici,

$$(6.37) \quad N_{11}^1(x) = N_{11}^2(x) = N_{11}^3(x) = \frac{\mathcal{N}_{11}(x)}{2}$$

$$(6.38) \quad N_{11}^4(x) = N_{11}^5(x) = 0$$

Or N_{11}^1, N_{11}^2 et N_{11}^3 sont constants (relation 6.40), et en $x = 0$ et $x = L$ $\mathcal{N}_{11}(x) = -P$.

On en déduit,

$$(6.39) \quad N_{11}^1 = N_{11}^2 = N_{11}^3 = -\frac{P}{2}$$

En remplaçant N_{11}^1 dans l'équation (6.41), on obtient donc,

$$(6.40) \quad \frac{d^4 w_1}{dx^4} + \frac{P}{2E_{1x}I_{1x}} \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0$$

D'où la charge critique suivante,

$$(6.41) \quad P_{cr} = \frac{2\pi^2 E_{1x} I_{1x}}{l^2}$$

avec E_{1x} le module d'Young équivalent de la peau supérieure dans la direction e_1 ,

$$I_{1x} = \frac{be_p^3}{12} \text{ où } b \text{ est la largeur de la paroi rectangulaire et } e_p \text{ l'épaisseur de la peau.}$$

Pour la barre 2 et la barre 3, l'expression de la charge critique est identique à celle de la barre 1 ($E_{1x}I_{1x} = E_{2x}I_{2x} = E_{3x}I_{3x}$).

Considérons maintenant les barres 4 et 5 qui modélisent les raidisseurs. Puisque nous avons supposé que $\mathcal{M}_{11} = Q_1 = 0$, les efforts normaux N_{11}^4 et N_{11}^5 sont donc nuls (cf. relations A4.2.4 et A4.2.5). On suppose ainsi implicitement qu'il n'y a pas de flambement dans les raidisseurs.

Le flambement local n'affecte donc que les peaux supérieure et inférieure de la poutre alvéolaire. Il se produit si les efforts de compression atteignent la valeur critique de

$$\text{flambement } (P_{cr})_{loc} = \frac{2\pi^2 E_{1x} I_{1x}}{l^2}, \quad \text{avec } I_{1x} = \frac{be_p^3}{12}.$$

Si on suppose que la géométrie des treillis est fixe, c'est à dire que la longueur des barres qui les constituent est constante, la charge critique de flambement de chaque barre est constante. Il est alors clair que la charge critique de flambement local est indépendante de la longueur de la poutre alvéolaire.

Pour d'autres conditions de liaisons, l'expression de la charge critique de flambement local est inchangée puisque la poutre alvéolaire ne subit pas de rotation d'ensemble de la structure. La charge critique ne dépend que des efforts de compression axiale N et est indépendante des conditions aux limites imposées aux extrémités.

VI.4 LONGUEUR CARACTERISTIQUE DE FLAMBEMENT

Nous venons d'établir l'expression de la charge d'instabilité locale de la poutre alvéolaire. Auparavant, nous avons déterminé les expressions des charges critiques d'instabilité globale de la poutre alvéolaire en prenant ou non en compte l'influence du cisaillement transverse. Nous nous proposons à présent de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur L pour qu'il y ait soit flambement local soit flambement global. Nous en déduisons ainsi la longueur caractéristique L_0 .

Le flambement global apparaît si la force critique de flambement global est inférieure à la force critique de flambement local.

Si on néglige le cisaillement transverse,

$$(6.42) \quad (P_{cr})_{glob} \leq (P_{cr})_{loc}$$

On obtient donc,

$$(6.43) \quad L \geq \sqrt{\frac{6l^2}{d_{11}e_p^3E_{1x}}}$$

$L_0 = \sqrt{\frac{6l^2}{d_{11}e_p^3E_{1x}}}$ est donc la longueur caractéristique de flambement global en l'absence de cisaillement transverse.

Si l'influence du cisaillement transverse est importante,

$$(6.44) \quad (P'_{cr})_{glob} \leq (P_{cr})_{loc}$$

Soit,

$$(6.45) \quad L \geq \sqrt{\frac{1}{d_{11}} \left(\frac{6l^2}{e_p^3E_{1x}} - \pi^2 f_{55} \right)}$$

$L'_0 = \sqrt{\frac{1}{d_{11}} \left(\frac{6l^2}{e_p^3E_{1x}} - \pi^2 f_{55} \right)}$ est donc la longueur caractéristique de flambement global qui tient compte de l'influence du cisaillement transverse.

Il est préférable d'utiliser cette expression pour déterminer la longueur caractéristique de flambement si l'on ne peut pas négliger le cisaillement transverse.

VI.5 APPLICATION

L'objectif de cette dernière partie est de mettre en oeuvre l'analyse du flambement alvéolaire effectuée aux parties (VI.2), (VI.3) et (VI.4).

Au premier paragraphe, nous étudierons le premier mode de flambement de la structure, d'un point de vue théorique, à l'aide de l'analyse précédente. Au deuxième paragraphe nous comparerons les résultats de la théorie avec ceux obtenus avec le logiciel d'éléments finis SAMCEF. Au troisième paragraphe, nous étendrons la comparaison des résultats des deux modélisations théorique et numérique à d'autres conditions de liaison. Enfin au quatrième et dernier paragraphe, nous comparerons les résultats théoriques et numériques avec les premiers résultats de tests effectués à l'IRCN.

On considère une poutre alvéolaire symétrique correspondant à la géométrie et à la constitution des panneaux élaborés au CERAM avec le matériau T300/174, en appuis simples aux extrémités, d'épaisseur totale 51mm et de largeur $b=250\text{mm}$ (figure 6.9).

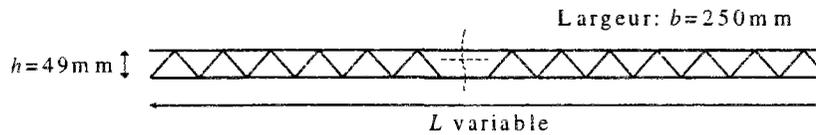


Figure 6.9: Dimensions de la poutre alvéolaire

Les alvéoles du panneau sont supposées être des tubes creux triangulaires équilatéraux de côté 56,5mm et de hauteur 49mm.

Rappelons que les peaux sont constituées de 6 plis d'épaisseur 0,175mm orientés à 0° par rapport à \underline{e}_1 , et de 2 plis $(+30^\circ, -30^\circ)$ provenant des bases des tubes triangulaires. Les raidisseurs qui forment l'âme sont composés de 4 plis de même épaisseur orientés à $(+30^\circ, -30^\circ)_s$ par rapport à \underline{b}'_1 (cf. figure 4.3).

Les caractéristiques mécaniques du préimprégné T300/174 sont données tableau (3.1),

L'étude théorique de l'instabilité de poutres alvéolaires nécessite le calcul de plusieurs caractéristiques mécaniques équivalentes.

- le calcul des constantes de souplesses (Sp_{ij}) et (Sr_{ij}) via celui des constantes de raideurs membranaires A_{ij}^1 et A_{ij}^4 ,
- Le calcul du module d'Young des peaux équivalent E_{1x} via celui des constantes de raideurs équivalentes $(Q'_{ij})_{eq}$ déterminées en posant $(Q'_{ij})_{eq} \times \sum_{k=1}^{k=n} e_k = A_{ij}^1$ (n est le nombre de couches dans les peaux, e_k l'épaisseur de la couche k). On trouve un module d'Young équivalent des peaux égale à 102GPA.

VI.5.1 Analyse théorique du flambement

L'analyse théorique du flambement transverse des panneaux alvéolaires développée aux paragraphes précédents nous permet de calculer la longueur caractéristique d'instabilité. de connaître l'influence du cisaillement transverse sur le flambement et de déterminer les différentes charges critiques d'instabilité.

Evaluons en premier la charge critique de flambement local (6.48) qui n'affecte que les peaux du panneau alvéolaire (valable pour $L < L_0$). Elle ne dépend que de la géométrie et des propriétés mécaniques des parois 1, 2 et 3 du treillis.

$$(P_{cr})_{loc} = \frac{2\pi^2 E_{1x} I_{1x}}{l^2} = \frac{2\pi^2 b e_p^3}{l^2 12}$$

soit,

$$(P_{cr})_{loc} = 36056 \text{ N}$$

Intéressons nous maintenant au flambement global pour lequel on peut déterminer les charges critiques en négligeant ou non le cisaillement transverse. Nous déterminons d'abord les

longueurs caractéristiques L_0 et L'_0 d'instabilité globale, puis nous évaluons le cisaillement transverse pour la plus petite longueur caractéristique trouvée. Enfin nous calculons les charges critiques en fonction de L .

☞ Longueur caractéristique

- Sans cisaillement,

$$L_0 = \sqrt{\frac{6l^2}{d_{11}e_p^3 E_{1x}}}$$

soit $L_0 = 3,45 \text{ m}$

- Avec cisaillement,

$$L'_0 = \sqrt{\frac{1}{d_{11}} \left(\frac{6l^2}{e_p^3 E_{1x}} - \pi^2 f_{55} \right)}$$

A.N.

$$L'_0 = 3,51 \text{ m}$$

Les longueurs caractéristiques L_0 et L'_0 sont pratiquement identiques (à 0,3% près). Il semble que l'influence du cisaillement transverse soit extrêmement faible sur le comportement de la poutre au flambement. Voyons si l'on peut le négliger.

☞ Influence du cisaillement transverse

On détermine l'influence du cisaillement transverse en calculant le facteur de cisaillement f_c pour la longueur $L = \min(L_0, L'_0)$.

$$f_c = \frac{\pi^2 f_{55}}{L^2 d_{11}}$$

soit,

$$f_c = 7,9 \cdot 10^{-3}$$

Lorsque l'on tient compte du cisaillement de la poutre alvéolaire, la charge critique $(P'_{cr})_{\text{glob}}$ diminue la charge critique $(P_{cr})_{\text{glob}}$ dans le rapport 7,8 pour mille. Elle vaut 99,2% de la valeur de la charge critique P_{cr} .

Pour une longueur $L > L_0$, la charge critique $(P'_{cr})_{\text{glob}}$ tend davantage vers la charge critique $(P_{cr})_{\text{glob}}$, puisque le facteur de cisaillement qui est inversement proportionnel au carré de la longueur L , diminue.

L'influence du cisaillement transverse est donc négligeable. Nous justifions ainsi l'utilisation dans ce qui suit, de la formule de la charge critique globale (6.21) donnant $(P_{cr})_{\text{glob}}$ plutôt que celle donnant $(P'_{cr})_{\text{glob}}$.

☞ Charge critique globale

$$(P_{cr})_{glob} = \frac{\pi^2 b}{L^2 d_{11}}$$

Cette formule est valable pour $L \geq L_0$.

VI.5.2 Comparaison avec une modélisation numérique SAMCEF

Nous présentons dans un premier temps la modélisation éléments finis utilisée avec SAMCEF, puis nous donnons les résultats obtenus avec les calculs théoriques issus des formules analytiques précédentes et les calculs numériques effectués avec le code de calcul.

Le modèle éléments finis est identique à celui utilisé dans les chapitres III et V. C'est un modèle 3D constitué d'éléments de coques minces T56 de degré 2. La structure alvéolaire modélisée est composée d'un nombre entier de cellules élémentaires.

La charge est appliquée à l'une des extrémités de la poutre, l'autre extrémité est fixée dans l'espace (figure 6.12).

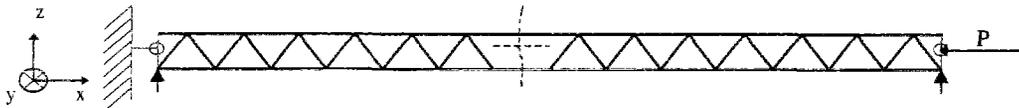


Figure 6.10 Modélisation éléments finis (coupe dans le plan xOz)

SAMCEF fournit les résultats des charges critiques sous la forme d'un facteur de charge λ par lequel les charges P doivent être multipliées pour que la structure devienne instable.

Nous avons modélisé une charge de 1000N. Les charges critiques d'instabilité numériques correspondent donc à $1000 \times \lambda$ N.

Les tableaux (6.2) (6.3) et (6.4) donnent les résultats obtenus avec le calcul théorique et numérique pour la longueur caractéristique L_0 et les charges critiques de flambement.

Longueur caractéristique de flambement:

L_0 théorique (m)	L_0 numérique (m)	Ecart (%)
3,45	3,33	3,6

Tableau 6.2 Longueurs caractéristiques de flambement.

La longueur caractéristique numérique L_0 a été déterminée en effectuant plusieurs calculs éléments finis. A chaque calcul numérique, la longueur de la poutre a été modifiée en ajoutant ou en enlevant une ou plusieurs alvéoles.

Remarquons que la longueur L_0 déterminée avec SAMCEF est un multiple de 56,5 mm, tandis que celle calculée avec l'analyse théorique est indépendante du nombre d'alvéoles de la poutre.

L'écart entre les deux valeurs théorique et numérique de L_0 est inférieur à 6%.

Charge critique d'instabilité locale:

Charge critique théorique (10^4 N)	Charge critique numérique (10^4 N)	Ecart (%)
3,60	3,95	10,3

Tableau 6.3 Charge critique d'instabilité locale.

La valeur de la charge critique calculée par SAMCEF oscille entre $3.93.10^4$ N et $3.97.10^4$ N. Elle vaut en moyenne $3.95.10^4$ N. La charge critique d'instabilité locale varie donc très peu. On peut effectivement la considérer comme une grandeur constante.

La différence entre la charge théorique et numérique est égale à 10,3%.

Charges critiques d'instabilité globale:

Nombre de cellules t_0 (de la peau inférieure)	Longueur L (m) ($L=t_0 \times 0.0565$)	Charge critique théorique (10^4 N)	Charge critique numérique (10^4 N)	Ecart (%)
70	3,95	2,75	2,75	<1
88	4,97	1,74	1,74	<1
106	5,99	1,19	1,20	<1

Tableau 6.4 Charges critiques d'instabilité globale

L'écart entre les différents résultats obtenus pour les charges critiques de flambement global est inférieur à 1%.

L'erreur commise entre le calcul théorique et la modélisation éléments finis est inférieure à 10,5% pour toutes les grandeurs calculées. Elle est même inférieure à 6% pour la longueur caractéristique L_0 et les charges critiques d'instabilités globales.

La validation des résultats du calcul théorique par ceux de la modélisation éléments finis sont donc excellents.

VI.5.3 Autres conditions aux limites

On considère dans ce paragraphe, la même poutre soumise aux conditions aux limites définies au tableau (6.1).

Nous avons vu que seules les charges critiques d'instabilité globale dépendaient des conditions aux limites de la poutre. Par contre la charge critique d'instabilité locale est indépendante des conditions de liaison de la poutre. Elle ne dépend que des caractéristiques du matériau alvéolaire. Nous l'avons calculée au paragraphe VI.2 (cf. tableau 6.3).

L'expression de la charge critique de flambement d'une poutre alvéolaire équivalente se déduit facilement de celle d'une poutre en appuis simples (cf. relation 6.22).

$$(P_{cr})_{glob} = m \frac{\pi^2 b}{L^2 d_{11}}$$

L'influence du cisaillement de la poutre étant négligeable sur son comportement, on peut calculer la longueur caractéristique L_0 de flambement global à l'aide de l'inégalité (6.42) qui ne tient pas compte du cisaillement transverse.

$$(P_{cr})_{glob} \leq (P_{cr})_{loc}$$

La longueur caractéristique L_0 de flambement peut donc s'écrire,

$$L_0 = \sqrt{m \frac{6l^2}{d_{11} e_p^3 E_{1x}}}$$

Pour les différentes conditions aux limites, on obtient les résultats suivants.

Longueurs caractéristiques L_0 :

Conditions aux limites	m	Longueur théorique L_0 (m)	Longueur numérique L_0 (m)	Écarts (%)
Poutre encastree à une extrémité et libre à l'autre	0,25	1,73	1,70	1,8
Poutre encastree à une extrémité et rotulée à l'autre	2,04	4,93	4,80	2,7
Poutre bi-encastree	4	6,91	7,06	2,1
Poutre bi-encastree avec une liberté latérale d'un côté	1	3,45	3,50	1,4

Tableau 6.5 Longueurs caractéristiques L_0 pour différentes conditions aux limites

L'écart entre les deux théories est inférieure à 3% quelque soit les conditions de liaison.

Charges critiques d'instabilité globale:

Conditions aux limites	Longueur L en m ($L > L_0$)	P_{cr} théorique (10^4 N)	P_{cr} numérique (10^4 N)	Ecart (%)
Poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre	2,03	2,60	2,61	<1
Poutre encastrée à une extrémité et rotulée à l'autre	5,20	3,23	3,25	<1
Poutre bi-encastrée	8,02	2,67	2,68	<1
Poutre bi-encastrée avec une liberté latérale d'un côté	3,95	2,75	2,75	<1

Tableau 6.6 Comparaison des charges critiques d'instabilité globale pour d'autres conditions aux limites

La différence entre les deux modélisations est inférieure à 1% quelque soit les conditions de liaison.

Les résultats obtenus pour ces conditions de liaison sont donc aussi bons que ceux d'une poutre biarticulée.

VI.5.4 Comparaison avec les premiers résultats expérimentaux

Des premiers essais de flambement ont été effectués par l'IRCN à Nantes sur 4 éprouvettes alvéolaires fabriquées au CERAM, de 1,05m de long ($t_0=18$ alvéoles) et 25cm de large et rotulées aux extrémités.

L'IRCN a appliqué des efforts de compression sur les éprouvettes avec un déport croissant de 0 à 33mm par rapport à l'axe médian pour obtenir une flexion de plus en plus déviée.

Nous ne disposons donc que d'un seul résultat d'essai correspondant à notre modélisation du flambement: celui obtenu avec le panneau *D* dont la charge a été appliquée dans l'axe (cf. rapport de mesures de l'IRCN (Paradis, Quesnel 1995)).

La longueur *L* de la poutre étant inférieure à la longueur caractéristique, nous sommes donc dans le cas d'un flambement local.

P_{cr} théorique (10^4 N)	P_{cr} numérique (10^4 N)	P_{cr} expérimentale (10^4 N)
3,60	3,95	4,7

Tableau 6.7 Comparaison des charges critiques d'instabilité

Le tableau (6.7) montre qu'il y a des écarts assez importants entre d'une part les valeurs théorique et numérique, et d'autre part la valeur expérimentale. La différence entre la charge critique d'instabilité théorique et expérimentale atteint 30%, la différence entre la charge critique d'instabilité numérique et expérimentale est voisine de 20%. Cependant les résultats restent du même ordre de grandeur.

De plus il est clair qu'un seul résultat d'essai est insuffisant pour valider l'approche théorique et numérique. Nous attendons donc avec impatience les prochains résultats d'essais qui devrait être effectués sur un plancher de 2m de long.

VI.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons développé un modèle théorique de flambement de panneaux en composite alvéolaire dans la direction transverse. Nous nous sommes intéressés aux deux modes de flambement transverse susceptibles de se produire: un flambement dit global qui affecte la macrostructure de l'alvéolaire et un flambement dit local qui affecte la mésostructure (échelle du treillis). Pour ces deux types de flambement, nous avons déterminé les expressions analytiques des charges critiques de flambement qui correspondent à la première charge d'instabilité. Puis nous avons validé le modèle théorique d'abord numériquement avec le logiciel de calculs de structure SAMCEF et ensuite numériquement et expérimentalement avec des panneaux alvéolaires de 1m de long environ. La validation expérimentale concernait donc uniquement le cas du flambement local puisque la longueur du panneau testé était inférieure à la longueur caractéristique de flambement (déterminée analytiquement et numériquement).

La validation de l'approche théorique avec une approche numérique de type éléments finis a montré que notre modèle de flambement était satisfaisant. Par contre lorsque nous avons comparé ces deux approches théorique et numérique avec le résultat d'essai fournit par l'IRCN, nous avons constaté un écart beaucoup plus important (30% et 20% respectivement). Pour traiter le flambement local, nous avons utilisé un certain nombre d'hypothèses concernant le comportement des peaux et des raidisseurs en négligeant notamment les moments de flexion propres. Il est possible que nous ayons sous-estimé leur importance dans le comportement des parois de la structure. Cependant il nous faut attendre les prochains résultats d'essai pour mieux juger de la pertinence du modèle analytique pour ce qui concerne le flambement local.

Il serait également intéressant de valider un cas de flambement global. Il faudrait pour réaliser les essais utiliser des panneaux alvéolaires de plus grandes dimensions (au moins 3,5m), ou bien des panneaux de largeurs beaucoup plus petites, mais on risque de faire apparaître des phénomènes d'effets de bord. Ces tests de flambement sont donc plus difficiles à réaliser car il faudrait prévoir la fabrication de panneaux alvéolaires de plus grande taille au CERAM.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Dans ce mémoire de thèse, nous avons abordé l'étude des structures fléchissantes en matériaux composites à rigidité spécifique élevée: les structures traditionnelles en matériaux sandwichs et les structures alvéolaires mises au point au CERAM de l'ENPC. Notre objectif était de proposer des modèles mécaniques pertinents pour décrire et prédire le comportement en raideur de ces deux familles de structures en composite, et de disposer ainsi d'outils adaptés à leur dimensionnement.

Dans la première partie, nous avons présenté des théories de plaques sandwichs appartenant à la famille des modèles classiques et à la famille des modélisations multicouches. Nous avons validé dans un premier temps, toutes ces théories en flexion cylindrique, vis à vis de la solution exacte de Pagano, et dans un deuxième temps les modélisations multiparticulaires vis à vis de modélisations éléments-finis, réalisées avec le code de calcul de structures SAMCEF.

Nous avons d'abord développé une nouvelle version de la théorie sandwich classique, à partir de la théorie des plaques stratifiées de Sab dont la différence essentielle avec une théorie classique de stratifiés fondée sur les hypothèses de Reissner-Mindlin réside dans l'évaluation des coefficients de raideur (ou de souplesse) en cisaillement transverse.

Nous avons également proposé des modélisations multiparticulaires appartenant à la famille des théories multicouches. La définition de champs cinématiques par couche permet d'affiner la description du comportement des panneaux stratifiés ou sandwichs, en introduisant des grandeurs cinématiques supplémentaires. Deux modélisations multiparticulaires ont été développées,

- le modèle triparticulaire complet (cinématique à 9 champs scalaires)
- le modèle triparticulaire simplifié (liaison cinématique: cinématique à 7 champs scalaires)

Nous avons montré d'une part, que la théorie classique de Sab était mieux adaptée au dimensionnement en raideur des plaques sandwichs que la théorie classique de Reissner-Mindlin. Nous avons montré d'autre part, que les théories multiparticulaires étaient beaucoup plus précises que les théories classiques de Reissner-Mindlin et de Sab.

Le modèle de Sab améliore ainsi l'approche classique de modélisation des structures sandwichs et devrait faire l'objet du développement d'une maille élément-fini de plaque stratifiée et sandwich. Les modèles multiparticulaires se prêtent quant à eux parfaitement à la description des processus d'endommagement tel que le délaminage et pourraient être étendus à l'analyse du comportement en résistance des structures sandwichs. La maille élément-fini M4 serait alors également adaptée au dimensionnement en résistance des structures sandwichs.

Dans la seconde partie du mémoire, nous avons présenté une modélisation de plaque alvéolaire « classique » basée sur un procédé d'homogénéisation des milieux périodiques.

Pour construire ce modèle de plaque alvéolaire équivalent, nous avons utilisé un certain nombre d'hypothèses sur la forme des champs de contraintes à l'échelle mésoscopique, c'est à dire au niveau des parois constitutives de la structure (peaux et raidisseurs). Ces hypothèses bien que simples, se sont avérées largement suffisantes pour résoudre des problèmes de flexion.

Le développement du modèle équivalent a permis de mettre en évidence un comportement de plaque alvéolaire de type « plaque stratifiée classique » avec la présence des coefficients de souplesses a_{ij}, d_{ij}, b_{ij} et f_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) qui traduisent le comportement en membrane, le comportement en flexion-torsion, le couplage membrane-flexion-torsion, et enfin le comportement en cisaillement transverse.

Ce modèle a été validé sur deux exemples de flexion simple. Dans un premier temps, nous avons considéré une plaque alvéolaire en matériau isotrope, soumise à un chargement en flexion pure. Puis, nous avons étudié le cas d'une poutre alvéolaire en composite soumise à un champ de pression uniforme.

La comparaison des résultats du modèle de plaque alvéolaire équivalent par rapport à ceux du code SAMCEF s'est montrée très encourageante, puisque les écarts sont restés en dessous de 4%. Il est à noter que l'on obtient l'expression exacte de la rigidité équivalente dans la direction des alvéoles dans le cas d'une structure en matériau isotrope et que le modèle de SAMCEF se situe à moins de 1%.

Le modèle de plaque alvéolaire que nous avons proposé dans ce mémoire, semble donc en mesure de fournir un bon outil de dimensionnement en raideur. Une maille élément-fini alvéolaire basée sur les équations du modèle de plaque équivalent dont le développement devrait faire suite à ce travail pourrait permettre d'achever la validation du modèle en traitant des problèmes de flexion de plaque plus sophistiqués que l'on ne peut résoudre analytiquement.

Les outils mécaniques que nous avons également présentés dans ce mémoire pour le dimensionnement des structures alvéolaires vis à vis du flambement, semblent également bien adaptés aux études d'instabilité de ces structures. Le modèle de flambement transverse global fournit des résultats inférieurs à 1% d'écart par rapport aux simulations SAMCEF. Le modèle de flambement local, quant à lui, donne des résultats d'environ 10% d'erreur avec SAMCEF. Il est possible que les hypothèses du modèle de plaque équivalent qui consistent à négliger les moments de flexion locaux par rapport aux efforts membranaires soient à l'origine de ces moins bons résultats. Une variante du modèle de plaque alvéolaire présenté dans ce mémoire, consisterait donc à développer un modèle plus sophistiqué en prenant en compte ces moments locaux de flexion, afin de mieux décrire le flambement local.

D'autres types de modélisation de plaque alvéolaire pourraient faire l'objet de travaux ultérieurs. Il s'agirait de bâtir des modèles de plaque équivalents plus particulièrement destinés au dimensionnement en résistance des structures alvéolaires, en considérant par exemple une approche de type multiparticulaire.

Enfin, il est prévu d'intégrer dans un code de calcul industriel, la maille multiparticulaire pour les plaques sandwichs classiques et la maille élément-fini du modèle de plaque équivalent du chapitre IV pour les structures en composite alvéolaire. Ceci permettrait de mettre à la disposition des bureaux d'études, des outils éléments-finis 2D d'analyse et de dimensionnement des matériaux à haute rigidité en flexion d'une grande simplicité d'utilisation.

REFERENCES

- Allen H.G., 1969**, « *Analysis and design of structural sandwich panels* », Pergamon Press.
- Ambarsumyan S.A., 1958**, « *K teorii izgiba anisotropnykh plasinok* » Izv. Akad. Nauk, SSR. Vol.5, pp.69-77.
- Andrieux S., 1983**, « *Un modèle de matériau microfissuré-Applications aux roches et aux bétons* », Thèse de Docteur-Ingénieur, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Antonelli S., 1995**, « *Industrialisation d'un plancher alvéolaire carbone/époxy* », Mémoire de PFE, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Saint-Etienne.
- Azar J., 1968**, « *Bending theory for multilayer orthotropic sandwich plates* », AIAA J., Vol.6, n°11, pp. 2155-2169.
- Berthelot, J.M., 1992**, « *Matériaux Composites - Comportement mécanique et analyse des structures* », Masson.
- Brush D.O., Almroth B.O., 1975**, « *Buckling of Bars, Plates, and Shells* », McGraw-Hill.
- Caron J.F., 1993**, « *Fissuration transverse des matériaux composites* », Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Caron J.F., Naciri T. et Philippe M.H., 1995**, « *Mise au point d'un modèle de plancher intermédiaire* », Rapport interne n°95-3, ENPC/CERAM.
- Carreira R.P., 1998**, « *Fissuration transverse et initiation du délaminage dans les stratifiés sous sollicitations de plaque* », Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (en cours).
- Chabot A., 1997**, « *Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de Modèles Multiparticulaires de Matériaux Multicouches (M4)* », Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Cheng S., 1962**, « *On the theory of bending of plates* », Proceedings of the 4th U.S. National Congress of A.M., pp.511-518.
- Chen H.J. et Tsai S.W., 1996**, « *Analysis and optimum design of composite grid structures* », Journal of composite materials, Vol.30, n°4.
- Cléon L.M., 1994**, « *Allégement des structures de caisse: faisabilité de structures en matériaux composites* », Comptes-rendus du Congrès Mondial de la Recherche Ferroviaire '94 (WCRR94), Vol.2, pp.673-680.
- Craveur J.C., 1996**, « *Modélisation des structures - Calcul par éléments-finis* », Masson.

- Destuynder P., 1980**, « *Sur une justification des modèles de plaques et des coques par les méthodes asymptotiques* », Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie.
- Di Sciuva M. et Icardi U., 1993**, « *Discrete-layer models for multilayered anisotropic shells accounting for the interlayers continuity conditions* », *Meccanica*, Vol. 28, pp.281-291.
- Dong S.B., Pister K.S. et Taylor R.L., 1962**, « *On the theory of laminated anisotropic shells and plates* », *J. Aero. Sci.*, Vol.28, n°8, pp.969-975.
- Ehrlacher A., Chabot A. et Naciri T., 1994**, « *Prévision de l'initiation du délaminage* », Rapport de fin de contrat SNECMA n°486, ENPC/CERAM.
- Ehrlacher A. Naciri T., Chabot A., Caron J.F., 1994**, « *Analyse des efforts d'interface à l'aide de la Modélisation Multiphasique des Matériaux Multicouches (M4)* », Comptes-rendus des 9^{èmes} Journées Nationales sur les Composites (J.N.C. 9), pp. 203-212.
- Ehrlacher A., Naciri T., 1995a**, « *Modélisation multiparticulaire des matériaux multicouches* », Cours de D.E.A., Solides Structures et Systèmes Mécaniques, Option V, Rupture des matériaux composites et céramiques, Paris VI/Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Ehrlacher A., Naciri T., 1995b**, « *Raideur d'une couche* », Cours de D.E.A., Solides Structures et Systèmes Mécaniques, Option V, Rupture des matériaux composites et céramiques, Paris VI/Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Epstein, M. et Glockner, P.G., 1977**, « *Nonlinear Analysis of Multilayered Shells* », *Int. J. Solids Struc.*, Vol.13, pp.1081-1089.
- Erguez R., 1992**, « *Mutation de produit: Conception et modélisation de caisse de TGV à 2 niveaux en matériaux composites* », Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers.
- Ericksen W.S. et March H.W., 1950**, « *Compressive buckling of sandwich panels having dissimilar faces of unequal thickness* », rapport FPL n°1583-B (révisé en 1958).
- Eveno E., Perella A., Kopf S., Jaeger M., 1996**, « *Fabrication de pièces de structures de grande taille par moulage infusion DuPont* », *Composites*, n°14, pp.74-80.
- Foret G., 1995**, « *Effets d'échelle dans la rupture des composites unidirectionnels* », Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- GangaRao H.V.S., Lopez-Anido R., Williams D.L., Winegardner T., 1996**, « *Construction of multicellular fiber reinforced plastic building* », Proceedings of the Composite Institute's 51st Annual Conference and EXPO '96, Session 20-D, Cincinnati (OH), U.S.A.
- Garett K.W. et Bailey J.E., 1977**, « *Multiple transverse fracture in 90° cross-ply laminates of a glass fibre reinforced polyester* », *J. Mat. Sci.*, Vol.12. pp.157-168.

- Gay D., 1989**, « *Matériaux composites* », Hermès.
- Gimenez C F., 1992**, « Tendance future dans la conception des structures soudées pour les véhicules ferroviaires de grande vitesse », Conception et calcul pour les construction soudées, Institut internationale de la soudure, Pergamon Press.
- Goodier J.N. et Neou I.M., 1951**, « *The evaluation of theoretical critical compression in sandwich plates* », J. Aero. Sci. Vol.18, n°10, pp.649-657.
- Hamelin P., 1994**, « *Le dimensionnement des structures sandwichs - Méthodologie et études de cas* » Workshop Comett, Nevers.
- Head P.R., 1992**, « *Design methods and bridge forms for the cost effective use of advanced composites in bridges* », 1^{ère} conférence internationale sur les Matériaux composites d'avant-garde pour ponts et charpentes, pp.15-30, Sherbrooke, Québec, Canada.
- Heath W.G., 1960**, « *Sandwich construction. Correlation and extension of existing theory of flat panels subjected to lengthwise compression* », Aircraft eng., Vol.32, n°377 et 378, pp.186-191 et 230-235.
- Inglebert G., 1989a**, « *Résistance des matériaux classique - Théorie des poutres* », Cours de résistance des matériaux, chapitre IX, ISMCM-CESTI.
- Inglebert G., 1989b**, « *Instabilité élastique - Flambement de structures* », Cours de résistance des matériaux, chapitre XI, ISMCM-CESTI.
- Kirchhoff G., 1876**, « *Vorlesungen über Mathematische Physik, Mechanik* », Leipzig.
- Ko F.K., 1990**, « *Textile structural composites for building constructions* », Proceedings of the International Symposium, Textile composites in building construction, Part.3, pp.43-60, Lyon.
- Krishna Murty A.V., 1988**, « *Theoretical modelling of laminated composites plates* », Comp. Mat. Struc., K.A.V. Pandalai (Ed.), Tata McGraw-Hill, New Delhi, India, pp.85-93.
- Kujala P., Metsä A., Nallikari M., 1995**, « All metal sandwich panels for ship applications: shipyard 2000, spin-off project », Helsinki University of Technology, Espoo (finland), US department of commerce - National technical information service.
- Le Conte C., 1994**, « *Dimensionnement d'un plancher en matériaux composite alvéolaire en vue d'une application pour véhicules ferroviaires* », Rapport de PFE, Ecole Polytechnique Féminine.
- Lekhnitskii S.G., 1968**, « *Anisotropic plates* », Gordon and Breach Science Publishers.
- Levinson M., 1980**, « *An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates* », Mech. Res. comm., Vol.7, n°6, pp.343-350.

- L'Huillier P., 1996**, « *Développement et industrialisation d'un plancher intermédiaire en matériaux composites pour TGV 2N* », Mémoire de PFE, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Liaw B.C. et Little R.W., 1969**, « *Theory of bending multilayer sandwich plates* », AIAA J., Vol.5, n°2, pp.301-304.
- Libove C. et Batdorf S.B., 1948**, « *A general small-deflection theory for flat sandwich plates* », rapport NACA n°899.
- Librescu L., 1975**, « *Elastostatics and Kinetics of Anisotropic and Heterogeneous Shell-Type Structures* », Noordhoff, Leyden, Netherlands.
- Librescu L. et Reddy J.N., 1989**, « *A few remarks concerning several refined theories of anisotropic composite laminated plates* », Int. J. Engrg. Sci., Vol.27, n°5, pp.515-527.
- Lo K.H., Christensen R.M. et Wu E.M., 1977**, « *A high-order theory of plate deformation* », Part 1: Homogeneous Plate; Part 2: Laminated Plates », J. Appl. Mech., Trans ASME, Vol.44, n°4, pp.663-676.
- Love A.E.H., 1934**, « *The Mathematical Theory of Elasticity* », Cambridge University Press.
- Macquire B., Petitpas E., Valentin D., 1977**, « *Experimental and theoretical damage accumulation in glass-epoxy tubes under torsion loading* », Composites Polymers, Vol.5, n°3.
- Maréchal E., 1989**, « *Modélisation des structures sandwichs par éléments-finis* », rapport SAMTECH n°14.
- Maréchal E., 1990**, « *Modélisation de poutres sandwich soumises à flexion quatre points. Etude comparée de différentes techniques de modélisation* », Compte-rendus des 5^{ème} journées de l'INERN, Lorient.
- Mindlin R.D., 1951**, « *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates* », J. Apl. Mech., Vol.18, pp.31-38.
- Mukhopadhyay A.K. et Sierakowski R.L., 1990**, « *On sandwich beams with laminate facings and honeycomb cores subjected to hygrothermal loads: Part I et II - Analysis et Application* », J. Comp. Mat., Vol.24, pp.382-418.
- Mukhopadhyay A.K., Sierakowski R.L. et Yu Y.Y., 1994**, « *On sandwich beams with laminate facings and honeycomb cores subjected to hygrothermal loads: Part III - Timoshenko beam theory* », J. Comp. Mat., Vol.28, n°11, pp.1057-1075.
- Murakami, H., 1986**, « *Laminated Composite Plate with Improved In-Plane Responses* », J. Appl. Mech., Trans. ASME, Vol.53, n°3, pp.661-666.
- Murthy M.V.V., 1981**, « *An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates* », NASA Tech. Paper, n° 1903, pp.1-37.

- Naciri T., Philippe M.H. et al, 1994.** « *Comparison of the alveolar composite technology for the production of intermediate floors of TGV cars* ». Congrès mondial de la Recherche ferroviaire '94 (WCRR94), Paris.
- Nelson, R.B., Lorch, D.R., 1974.** « *A Refined Theory for Laminated Orthotropic Plates* », J. Appl. Mech., Trans. ASME. Vol.41, n°1, pp.177-183.
- Nemat-Nasser S., Hori M., 1993.** « *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials* », North Holland, series in Applied Mathematics and Mechanics, Vol.37.
- Ossadzow C., Muller P., Touratier M., 1995.** « *Une théorie générale des coques composites multicouches* », Comptes-rendus du 2^{ème} Colloque national en calcul des structures, pp.263-268, Giens.
- Owen, D.R.J. et Li, Z.H., 1987.** « *A Refined Analysis of Laminated Plates by Finite Element Displacement Methods - I. Fundamentals of Static Analysis, II. Vibration and Stability* », Computers Struc., Vol.26, n°6, pp.907-923.
- Pagano N.J., 1969.** « *Exact solution for composites laminates in cylindrical bending* », J. Comp. Mat., Vol.3, pp.398-411.
- Pagano N.J., 1970.** « *Exact solution for rectangular bidirectional composites and sandwich plates and shells* », J. Comp. Mat., Vol.4, pp.20-34.
- Pagano N.J. et Soni S.R., 1983.** « *Global-local variational model* », Int. J. Solids Struc., Vol.19, n°3, pp.207-228.
- Paradis A., Quesnel T., 1995.** « *Analyse modale de panneaux en matériaux composites* », rapport SME 95032, Institut de Recherches de la Construction Navale.
- Philippe M.H., 1993.** « *Comparaison numérique des raideurs en flexion des plaques composites alvéolaires et sandwichs* », Mémoire de DEA, Institut Supérieur des Matériaux et de la Construction Mécanique.
- Philippe M.H., Naciri T., Ehrlacher A., 1996.** « *Design of composite hollow-core panels* », Proceedings of the Composite Institute's 51st Annual Conference and EXPO '96, Session 6-E. Cincinnati (OH), U.S.A.
- Philippe M.H., Caron J.F., L'huillier P., Naciri T., 1996.** « *Conception d'un plancher intermédiaire en composite alvéolaire pour TGV 2 niveaux* », Comptes rendus du 3^{ème} Séminaire inter-établissements sur l'Innovation et la Conception de Produits, Université de Poitiers.
- Raville M.E., 1955.** « *Deflection and stresses in a uniformly loaded, simply-supported, rectangular sandwich plate* », rapport FPL n°1847-C.
- Reddy J.N., 1984.** « *A simple higher-order theory for laminated composite plates* », J. Appl. Mech., Trans ASME, Vol.51, pp.745-752.

- Reddy J.N., 1987**, « *A generalization of Two-Dimensional Theories of laminated composites Plates* », Comm. Appl. Numer. Methods, Vol.16, pp.173-180.
- Reissner E., 1945**, « *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates* », J. Appl. Mech., Vol.12, pp.69-77.
- Reissner E., 1948**, « *Finite deflections of sandwich plates* », J. Aero. Sci. Vol.15, n°7, pp.435-440.
- Reissner E., 1950**, « *Small bending and stretching of sandwich type shells* », NACA report 975.
- Reissner E., 1972**, « *A consistent treatment of transverse shear deformation in laminated anisotropic plates* », A.I.A.A., Vol.10, n°5, pp.716-718.
- Reissner E., Stavsky Y., 1961**, « *Bending and stretching of certain types of heterogeneous anisotropic elastic plates* », J. Appl. Mech., Trans., ASME, Vol.28, pp.402-408.
- Rio G., 1990**, « *Modèle de calcul pour un matériau composite multiplis* », Comptes-rendus des 7^{èmes} Journées Nationales sur les Composites (J.N.C. 9), pp.685-694, Lyon.
- Robbins D.H. et Reddy N.J., 1993**, « *Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory* », Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.36, PP.655-677.
- Robinson J.R., 1955**, « *The buckling and bending of orthotropic sandwich panels with all edges simply supported* », Aero. Quart., Vol.6, n°2, pp.125-148.
- Sab K., 1995a**, « *Raideur d'une plaque multicouche* », Cours de DEA, Solides Structures et Systèmes Mécaniques, Tronc Commun, Module E, Approches multi-échelles des structures composites, Paris VI.
- Sab K., 1995b**, « *Homogénéisation des milieux hétérogènes* », Cours de DEA, Solides Structures et Systèmes Mécaniques, Tronc Commun, Module E, Approches multi-échelles des structures composites, Paris VI.
- SAMCEF, Manuels utilisateurs**, Version 4.1, 5.1 et 6.1 (1993, 1994, 1995).
- Seide P., 1980**, « *An improved approximate theory for the bending of laminated plates* », Mech. Today, Vol.5, pp.451-466.
- Seide P. et Stowell E.Z., 1949**, « *Elastic and plastic buckling of simply supported metalite type sandwich plates in compression* », Rapport NACA n° 967.
- Sikora J.P., Dinsbacher A.L., 1990**, « *SWATH structure: Navy Research and development applications* », Marine technology, Vol.27, n°4, pp.211-220.
- Smaoui M., 1996**, « *Nouvelle modélisation multiparticulaire pour l'analyse des efforts dans les plaques composites multicouches impactées* », Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

- Smith C.S., 1990**, « *Design of marine structures in composite materials* », Elsevier Applied Science.
- Srinivas S., Rao A.K., 1970**, « *Bending, Vibration and Buckling of Simply Supported Thick Orthotropic Rectangular Plates and Laminates* », Int., J. Solids Struc., Vol.6, pp.1463-1481.
- Srinivas S., 1973**, « *A Refined Analysis of Composites Plates* », J. Sound Vib., Vol.30, n°4, pp.495-507.
- Sun C.T., et Whitney J.M., 1973**, « *On Theories for the Dynamic Response of laminated plates* », AIAA J., Vol.11, n°2, pp.178-183.
- Timoshenko S.P., et Gere J.M., 1961**, « *Theory of elastic stability* », McGraw-Hill Book Company.
- Timoshenko S.P., 1968**, « *Résistance des matériaux, Tome I: Théorie élémentaire et problèmes* », Dunod.
- Touratier M., 1989**, « *A refined theory for thick composite plates* », CRAS, t.309, Série II, pp.933-938.
- Tsai S.W., 1988**, « *Composites design* », Think Composites, 4^{ème} édition.
- Tsai S.W., Manne P.M., 1996**, « *Composite grid structures* », SAMCEF User Conference, 5th edition, Liege, Belgique.
- Van Voorhees E.J. et Green D.J., 1992**, « *Mechanical behavior of a ceramic sandwich composite system* », J. Comp. Mat., Vol.26, n°11, pp.1664-1677.
- Whitney J.M., 1972**, « *Stress analysis of thick laminated composite and sandwich plates* », J. Comp. Mat., Vol.6, pp.426-440.
- Whitney J.M. et Pagano N.J., 1970**, « *Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates* », J. Appl. Mech., Trans. ASME, Vol.37, n°4, pp.1031-1036.
- Yang, P.C., Norris C.H., et Stavsky Y. 1966**, « *Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Plates* », Int. J. Solids Struc., Vol.2, pp.665-684.

ANNEXES

ANNEXE 2.1

SOLUTION EXACTE D'UN PROBLEME DE FLEXION CYLINDRIQUE EN HYPOTHESES DE DEFORMATIONS PLANES

Dans cette annexe, nous présentons la solution exacte de Pagano (*Pagano 1969*), (*Berthelot 1992*).

On considère une plaque stratifiée en composite de longueur L et de largeur « infinie » b , constituée d'un empilement de n couches orthotropes dont les axes d'orthotropie sont confondus avec le repère de la structure $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.

La plaque est soumise à une charge transverse $q(x)$ sur la face supérieure et en appuis simples sur ses côtés $x = 0$ et $x = L$.

Le champ de déformation d'une couche k s'écrit, en notation ingénieur,

$$(A2.1.1) \quad \{\underline{\varepsilon}^k\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ 0 \\ \varepsilon_{zz} \\ 0 \\ \gamma_{xz} \\ 0 \end{bmatrix}^k$$

Le comportement d'une couche s'exprime par la relation suivante,

$$(A2.1.2) \quad \{\underline{\varepsilon}^k\} = [\underline{S}]^k \{\underline{\sigma}^k\}$$

avec,

$$\{\underline{\sigma}^k\} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}^k$$

$$[\underline{S}]^k = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}^k$$

La relation (A2.1.2) permet de déduire les relations suivantes sur les composantes des contraintes,

$$(A2.1.3) \quad \sigma_{yz} = 0$$

$$(A2.1.4) \quad \sigma_{xy} = 0$$

$$(A2.1.5) \quad \sigma_{yy} = -\frac{1}{S_{22}}(S_{12}\sigma_{xx} + S_{13}\sigma_{zz})$$

En introduisant les formules (A2.1.3) à (A2.1.5) dans la relation (A2.1.2), on peut écrire la loi de comportement de chaque couche k sous la forme réduite suivante,

$$(A2.1.6) \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{13} & 0 \\ R_{13} & R_{33} & 0 \\ 0 & 0 & R_{55} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}^k$$

avec R_{ij}^k les constantes de souplesses réduites telles que,

$$\begin{aligned} R_{11}^k &= S_{11}^k - \frac{(S_{12}^k)^2}{S_{22}^k} & R_{13}^k &= S_{13}^k - \frac{S_{12}^k S_{23}^k}{S_{22}^k} \\ R_{33}^k &= S_{33}^k - \frac{(S_{23}^k)^2}{S_{22}^k} & R_{55}^k &= S_{55}^k \end{aligned}$$

Les équations d'équilibre et les relations de compatibilité du milieu tridimensionnel s'écrivent ici en tenant compte des formules (A2.1.3) à (A2.1.5),

$$(A2.1.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

$$(A2.1.8) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$$

Les conditions aux limites du problème considéré sont données par les relations suivantes,

$$(A2.1.9) \quad \sigma_{zz} \left(x, z = \frac{h}{2} \right) = q(x)$$

$$(A2.1.10) \quad \sigma_{xz} \left(x, z = \frac{h}{2} \right) = 0$$

$$(A2.1.11) \quad \sigma_{zz} \left(x, z = -\frac{h}{2} \right) = \sigma_{xz} \left(x, z = -\frac{h}{2} \right) = 0$$

$$(A2.1.12) \quad \sigma_{xx}(0, z) = \sigma_{xx}(L, z) = 0$$

$$(A2.1.13) \quad w(0, z) = w(L, z) = 0$$

De plus la continuité des contraintes et des déplacements doit être vérifiée entre chaque couche,

$$(A2.1.14) \quad \sigma_{zz}^k(x, h_k) = \sigma_{zz}^{k+1}(x, h_k) = 0$$

$$(A2.1.15) \quad \sigma_{xz}^k(x, h_k) = \sigma_{xz}^{k+1}(x, h_k) = 0$$

$$(A2.1.16) \quad u^k(x, h_k) = u^{k+1}(x, h_k) = 0$$

$$(A2.1.17) \quad w^k(x, h_k) = w^{k+1}(x, h_k) = 0$$

La charge $q(x)$ peut se décomposer sous la forme d'une série de Fourier, telle que,

$$(A2.1.18) \quad q(x) = q_0 \sin \frac{m\pi x}{L}$$

Les contraintes σ_{ij}^k solutions du problème doivent vérifier les équations d'équilibre (A2.1.7). Elles s'écrivent ainsi pour chaque couche k , sous la forme suivante,

$$(A2.1.19) \quad \sigma_{xx}^k = \frac{d^2 f_k}{dz^2}(z) \sin \frac{m\pi x}{L}$$

$$(A2.1.20) \quad \sigma_{zz}^k = -\frac{m^2 \pi^2}{L^2} f_k(z) \sin \frac{m\pi x}{L}$$

$$(A2.1.21) \quad \sigma_{xz}^k = -\frac{m\pi}{L} \frac{df_k}{dz}(z) \cos \frac{m\pi x}{L}$$

où $f_k(z)$ est une fonction à déterminer (le plan $z = 0$ correspond au plan médian du stratifié).

A l'aide de la relation (A2.1.6), on en déduit la forme du champ de déformations dans chaque couche k ,

$$(A2.1.22) \quad \varepsilon_{xx}^k = \left[R_{11}^k \frac{d^2 f_z}{dz^2}(z) - R_{13}^k \frac{m^2 \pi^2}{L^2} f_z(z) \right] \sin \frac{m\pi x}{L}$$

$$(A2.1.23) \quad \varepsilon_{zz}^k = \left[R_{13}^k \frac{d^2 f_z}{dz^2}(z) - R_{33}^k \frac{m^2 \pi^2}{L^2} f_z(z) \right] \sin \frac{m\pi x}{L}$$

$$(A2.1.24) \quad \gamma_{xz}^k = -R_{55}^k \frac{m\pi}{L} \frac{df_k}{dz}(z) \cos \frac{m\pi x}{L}$$

En reportant les relations précédentes (A2.1.22) à (A2.1.24) dans l'équation de compatibilité (A2.1.8), on obtient une équation différentielle d'ordre 4 en $f_k(z)$,

$$(A2.1.25) \quad R_{11}^k \frac{d^4 f_z}{dz^4}(z) - (2R_{13}^k + R_{55}^k) \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \frac{d^2 f_z}{dz^2}(z) + R_{33}^k \frac{m^4 \pi^4}{L^4} f_z(z) = 0$$

dont la solution est de la forme,

$$(A2.1.26) \quad f_k(z) = \sum_{i=1}^4 A_{ik} \exp(r_{ik} z)$$

$$h_{k-1} \leq z \leq h_k \quad k = 1, 2, \dots, n$$

où les coefficients r_{ik} s'expriment par les relations suivantes ($i = 1, 2, 3, 4$),

$$(A2.1.27) \quad r_{1k} = \frac{m\pi}{L} \left(\frac{a_k + b_k}{c_k} \right)^{1/2}$$

$$(A2.1.28) \quad r_{2k} = -\frac{m\pi}{L} \left(\frac{a_k + b_k}{c_k} \right)^{1/2}$$

$$(A2.1.29) \quad r_{3k} = \frac{m\pi}{L} \left(\frac{a_k - b_k}{c_k} \right)^{1/2}$$

$$(A2.1.30) \quad r_{4k} = -\frac{m\pi}{L} \left(\frac{a_k - b_k}{c_k} \right)^{1/2}$$

en posant,

$$(A2.1.31) \quad a_k = R_{55}^k + 2R_{13}^k$$

$$(A2.1.32) \quad b_k = \left(a_k^2 - 4R_{11}^k R_{33}^k \right)^{1/2}$$

$$(A2.1.33) \quad c_k = 2R_{11}^k$$

Les relations (A2.1.29), (A2.1.30) et (A2.1.32) supposent,

$$a_k > b_k \quad \text{et} \quad a_k > 4R_{11}^k R_{33}^k$$

Dans ce cas, les coefficients r_{ik} sont tous réels et distincts, et les coefficients A_{ik} sont réels. Les contraintes et les déplacements dans la couche k s'écrivent alors,

$$(A2.1.34) \quad \sigma_{xx}^k = \sin \frac{m\pi x}{L} \sum_{i=1}^4 A_{ik} r_{ik}^2 \exp(r_{ik} z)$$

$$(A2.1.35) \quad \sigma_{zz}^k = -\frac{m^2 \pi^2}{L^2} \sin \frac{m\pi x}{L} \sum_{i=1}^4 A_{ik} r_{ik}^2 \exp(r_{ik} z)$$

$$(A2.1.36) \quad \sigma_{xz}^k = -\frac{m\pi}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \sum_{i=1}^4 A_{ik} r_{ik} \exp(r_{ik} z)$$

$$(A2.1.37) \quad u^k = \frac{L}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{L} \sum_{i=1}^4 A_{ik} \left[R_{13}^k \frac{m^2 \pi^2}{L^2} - R_{11}^k r_{ik}^2 \right] \exp(r_{ik} z)$$

$$(A2.1.38) \quad w^k = \sin \frac{m\pi x}{L} \sum_{i=1}^4 A_{ik} \left[R_{13}^k r_{ik} - \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \frac{R_{33}^k}{r_{ik}} \right] \exp(r_{ik} z)$$

où les $4n$ coefficients A_{ik} sont des constantes que l'on détermine en résolvant le système à $4n$ équations (A2.1.9) à (A2.1.11) et (A2.1.14) à (A2.1.17) qui expriment les conditions aux limites sur les faces inférieure et supérieure, et les conditions de continuité aux interfaces entre les couches.

Dans le cas où le matériau de l'âme est isotrope ou isotrope transverse dans le plan ($\underline{e}_1, \underline{e}_3$) les coefficients b_k sont nuls. L'expression (A2.1.26) de $f_k(z)$ devient,

$$(A2.1.39) \quad f_k(z) = (A_{1k} + A_{2k} z) \exp(r_{ik} z) + (A_{3k} + A_{4k} z) \exp(-r_{ik} z)$$

où les coefficients r_{ik} sont donnés par les relations (A2.1.27) à (A2.1.30) avec $b_k = 0$.

Les contraintes dans la couche k sont définies à partir des relations (A2.1.19) à (A2.1.21). Quant aux déplacements, ils deviennent,

$$(A2.1.40) \quad u^k = \frac{L}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{L} \left[-R_{11}^k \frac{d^2 f_k(z)}{dz^2} + R_{13}^k \frac{m^2 \pi^2}{L^2} f_k(z) \right]$$

$$(A2.1.41) \quad w^k = \sin \frac{m\pi x}{L} \left[R_{13}^k \frac{df_k(z)}{dz} - R_{33}^k \int f_k(z) dz \right]$$

ANNEXE 2.2

DETERMINATION DES DEPLACEMENTS ET DES CONTRAINTES POUR LE MODELE TRIPARTICULAIRE COMPLET

On considère une plaque sandwich, constituée de deux peaux identiques d'épaisseur e et d'une âme d'épaisseur d , soumise à un chargement en flexion cylindrique $p(x) = q_0 \sin \frac{\pi x}{L}$ (hypothèses de déformations planes).

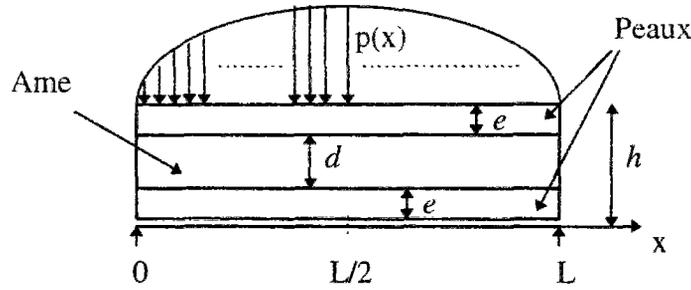


Figure A2.1: Problème de flexion cylindrique étudié

La symétrie du problème de flexion cylindrique par rapport à $x = \frac{L}{2}$ permet d'obtenir des conditions sur les déplacements u_1^1, u_1^2, u_1^3 et w au centre et au bord de la plaque,

$$(A2.2.1) \quad w^1(0) = w^2(0) = w^3(0) = w^1(L) = w^2(L) = w^3(L) = 0$$

$$(A2.2.2) \quad u_1^1\left(\frac{L}{2}\right) = u_1^3\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{dw^1}{dx}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{dw^2}{dx}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{dw^3}{dx}\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

Les relations d'équilibre du modèle triparticulaire complet (1.86) et (1.87) ainsi que les conditions aux limites (1.88) et (1.89) s'écrivent dans la direction de sollicitation \underline{e}_1 ,

$$(A2.2.3) \quad \begin{cases} N_{11,x}^1 + \tau_1^{1,2} = 0 \\ N_{11,x}^2 + \tau_1^{2,3} - \tau_1^{1,2} = 0 \\ N_{11,x}^3 - \tau_1^{2,3} = 0 \\ \frac{e}{2} \frac{d\tau_1^{1,2}}{dx} + v^{1,2} = 0 \\ \frac{d}{2} \left(\frac{d\tau_1^{1,2}}{dx} + \frac{d\tau_1^{2,3}}{dx} \right) + v^{2,3} - v^{1,2} = 0 \\ \frac{e}{2} \frac{d\tau_1^{2,3}}{dx} - v^{2,3} = q_0 \sin \frac{\pi x}{L} \end{cases}$$

$$(A2.2.4) \quad \begin{cases} N_{11}^1(0) = N_{11}^2(0) = N_{11}^3(0) = 0 \\ \tau_1^{1,2}(0) = \tau_1^{2,3}(0) = 0 \end{cases}$$

Le champ de contraintes σ_{xz} s'écrit,

$$(A2.2.5) \quad \sigma_{xz}(x, y, z) = \frac{\tau_1^{j,j+1} + \tau_1^{j-1,j}}{2} + \frac{z - \bar{h}_j}{e^j} (\tau_1^{j,j+1} - \tau_1^{j-1,j}) \quad \forall z \in [h_j^-, h_j^+]$$

La loi de comportement s'écrit,

$$\Leftrightarrow (A2.2.6) \quad \varepsilon_{11}^j = \frac{1}{e^j} S_{1111}^j N_{11}^j \quad \Leftrightarrow \quad N_{11}^j = e^j Q_{11}^j \varepsilon_{11}^j = A_{11}^j \varepsilon_{11}^j \quad (j=1,2,3)$$

$$\Leftrightarrow (A2.2.7) \quad \begin{cases} \tau_1^{1,2} = \eta_1 D_1^{1,2} + \xi_1 D_1^{2,3} \\ \tau_1^{2,3} = \xi_1 D_1^{1,2} + \eta_1 D_1^{2,3} \end{cases}$$

avec,

$$D_1^{1,2} = u_1^2 - u_1^1 + \frac{e}{2} \frac{dw^1}{dx} + \frac{d}{2} \frac{dw^2}{dx}$$

$$D_1^{2,3} = u_1^3 - u_1^2 + \frac{d}{2} \frac{dw^2}{dx} + \frac{e}{2} \frac{dw^3}{dx}$$

$$\eta_1 = \frac{12}{4 \left(\frac{e}{G_{13}^1} + \frac{d}{G_{13}^2} \right)^2 - \frac{d^2}{(G_{13}^2)^2}} \left(\frac{e}{G_{13}^1} + \frac{d}{G_{13}^2} \right)$$

$$\xi_1 = -\frac{6}{4 \left(\frac{e}{G_{13}^1} + \frac{d}{G_{13}^2} \right)^2 - \frac{d^2}{(G_{13}^2)^2}} \frac{d}{G_{13}^2}$$

$$\textcircled{A} \quad (A2.2.8) \quad \begin{cases} v^{1,2} = \chi D_3^{1,2} + \zeta D_3^{2,3} \\ v^{2,3} = \zeta D_3^{1,2} + \chi D_3^{2,3} \end{cases}$$

avec,

$$\begin{cases} D_3^{1,2} = w^2 - w^1 \\ D_3^{2,3} = w^3 - w^2 \end{cases}$$

$$\chi = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{e}{E_3^1} + \frac{d}{E_3^2} \right)}{\frac{1}{9} \left(\frac{e}{E_3^1} + \frac{d}{E_3^2} \right)^2 - \left(\frac{d}{6E_3^2} \right)^2}$$

$$\zeta = -\frac{\frac{d}{6E_3^2}}{\frac{1}{9} \left(\frac{e}{E_3^1} + \frac{d}{E_3^2} \right)^2 - \left(\frac{d}{6E_3^2} \right)^2}$$

Déterminons les déplacements $u_1^1, u_1^2, u_1^3, w^1, w^2$ et w^3 en introduisant les relations (A2.2.6) à (A2.2.8) dans les relations d'équilibre (A2.2.3),

$$(A2.2.9) \quad A_{11}^1 \frac{d^2 u_1^1}{dx^2} + \eta_1 \left(u_1^2 - u_1^1 + \frac{e}{2} \frac{dw^1}{dx} + \frac{d}{2} \frac{dw^2}{dx} \right) + \xi_1 \left(u_1^3 - u_1^2 + \frac{d}{2} \frac{dw^2}{dx} + \frac{e}{2} \frac{dw^3}{dx} \right) = 0$$

$$(A2.2.10) \quad A_{11}^2 \frac{d^2 u_1^2}{dx^2} + (\xi_1 - \eta_1) \left(u_1^2 - u_1^1 + \frac{e}{2} \frac{dw^1}{dx} + \frac{d}{2} \frac{dw^2}{dx} \right) - (\xi_1 - \eta_1) \left(u_1^3 - u_1^2 + \frac{d}{2} \frac{dw^2}{dx} + \frac{e}{2} \frac{dw^3}{dx} \right) = 0$$

$$(A2.2.11) \quad A_{11}^3 \frac{d^2 u_1^3}{dx^2} - \xi_1 \left(u_1^2 - u_1^1 + \frac{e}{2} \frac{dw^1}{dx} + \frac{d}{2} \frac{dw^2}{dx} \right) - \eta_1 \left(u_1^3 - u_1^2 + \frac{d}{2} \frac{dw^2}{dx} + \frac{e}{2} \frac{dw^3}{dx} \right) = 0$$

$$(A2.2.12) \quad \frac{e}{2} \eta_1 \frac{d}{dx} \left(u_1^2 - u_1^1 + \frac{e}{2} \frac{dw^1}{dx} + \frac{d}{2} \frac{dw^2}{dx} \right) + \frac{e}{2} \xi_1 \frac{d}{dx} \left(u_1^3 - u_1^2 + \frac{d}{2} \frac{dw^2}{dx} + \frac{e}{2} \frac{dw^3}{dx} \right) + \chi(w^2 - w^1) + \zeta(w^3 - w^2) = 0$$

$$(A2.2.13) \quad \frac{d}{2} (\eta_1 + \xi_1) \frac{d}{dx} \left(u_1^3 - u_1^1 + \frac{e}{2} \left(\frac{dw^1}{dx} + \frac{dw^3}{dx} \right) + d \frac{dw^2}{dx} \right) - (\chi - \zeta)(w^2 - w^1) + (\chi - \zeta)(w^3 - w^2) = 0$$

$$(A2.2.14) \quad \frac{e}{2} \xi_1 \frac{d}{dx} \left(u_1^2 - u_1^1 + \frac{e}{2} \frac{dw^1}{dx} + \frac{d}{2} \frac{dw^2}{dx} \right) + \frac{e}{2} \eta_1 \frac{d}{dx} \left(u_1^3 - u_1^2 + \frac{d}{2} \frac{dw^2}{dx} + \frac{e}{2} \frac{dw^3}{dx} \right) - \zeta(w^2 - w^1) - \chi(w^3 - w^2) = q_0 \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$\text{où} \quad \eta_1 + \xi_1 = 6 \left[2 \frac{e}{G_{13}'} + 3 \frac{d}{G_{13}''} \right]^{-1}$$

En additionnant les relations (A2.2.12) à (A2.2.14) et en intégrant par rapport à x , on obtient,

$$(A2.2.15) \quad u_1^3 - u_1^1 + \frac{e}{2} \left(\frac{dw^1}{dx} + \frac{dw^3}{dx} \right) + d \frac{dw^2}{dx} = - \frac{2q_0 L}{\pi(e+d)(\eta_1 + \xi_1)} \cos \frac{\pi x}{L}$$

En retranchant la relation (A2.2.11) à la relation (A2.2.9), on obtient,

$$(A2.2.16) \quad A_{11}^1 \frac{d^2}{dx^2} (u_1^3 - u_1^1) - (\eta_1 + \xi_1) \left(u_1^3 - u_1^1 + \frac{e}{2} \left(\frac{dw^1}{dx} + \frac{dw^3}{dx} \right) + d \frac{dw^2}{dx} \right) = 0$$

En introduisant (A2.2.15) dans (A2.2.16) et en intégrant en tenant compte des conditions (A2.2.2), on en déduit,

$$(A2.2.17) \quad u_1^3 - u_1^1 = \frac{2q_0 L^3}{\pi^3(e+d)A_{11}^1} \cos \frac{\pi x}{L}$$

On en déduit alors une expression sur les déplacements $w^j(x)$ à partir des relations (A2.2.15) et (A2.2.17), avec les conditions aux limites (A2.2.1) ($j = 1, 2, 3$),

$$(A2.2.18) \quad \frac{e}{2} (w^1 + w^3) + dw^2 = - \frac{2q_0 L^2}{\pi^2(e+d)(\eta_1 + \xi_1)} \sin \frac{\pi x}{L} - \frac{2q_0 L^4}{A_{11}^1 \pi^4(e+d)} \sin \frac{\pi x}{L}$$

De plus, en additionnant les relations (A2.2.9) à (A2.2.11), on obtient,

$$u_1^2 = - \frac{A_{11}^1}{A_{11}^2} (u_1^1 + u_1^3)$$

qui permet avec la relation (A2.2.17) de trouver des relations qui lient u_1^2 et u_1^3 à u_1^1 .

$$(A2.2.19) \quad u_1^2 = -2 \frac{A_{11}^1}{A_{11}^2} u_1^1 - \frac{2q_0 L^3}{\pi^3(e+d)A_{11}^2} \cos \frac{\pi x}{L}$$

$$(A2.2.20) \quad u_1^3 = u_1^1 + \frac{2q_0 L^3}{\pi^3(e+d)A_{11}^1} \cos \frac{\pi x}{L}$$

En introduisant les relations (A2.2.17) et (A2.2.18) dans l'équation (A2.2.13), on en déduit une seconde relation sur les déplacements $w^j(x)$ ($j = 1, 2, 3$),

$$(A2.2.21) \quad -w^1 + 2w^2 - w^3 = \frac{q_0 d}{(\chi - \zeta)(e + d)} \sin \frac{\pi x}{L}$$

En combinant la relation (A2.2.18) avec la relation (A2.2.21), on détermine l'expression de $w^2(x)$,

$$(A2.2.22) \quad w^2(x) = -\frac{2q_0 L^2}{\pi^2 (e + d)^2 (\eta_1 + \xi_1)} \sin \frac{\pi x}{L} - \frac{2q_0 L^4}{A_{11}^1 \pi^4 (e + d)^2} \sin \frac{\pi x}{L} \\ + \frac{ed}{2(e + d)^2 (\chi - \zeta)} q_0 \sin \frac{\pi x}{L}$$

La flèche au centre (en $z = 0$) s'écrit donc,

$$(A2.2.23) \quad w^2\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{2q_0 L^4}{\pi^4 e (e + d)^2 Q_{11}^1} \left(1 + \frac{\pi^2}{L^2} e Q_{11}^1 \left(\frac{e}{3G_{13}^1} + \frac{d}{2G_{13}^2} \right) \right) \\ + \frac{q_0 ed}{2(e + d)^2} \left(\frac{e}{3E_3^1} + \frac{d}{2E_3^2} \right)$$

En supposant que les déplacements transversaux w^1 et w^3 sont identiques, on en déduit,

$$(A2.2.24) \quad w^1\left(\frac{L}{2}\right) = w^3\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{2q_0 L^4}{\pi^4 e (e + d)^2 Q_{11}^1} \left(1 + \frac{\pi^2}{L^2} e Q_{11}^1 \left(\frac{e}{3G_{13}^1} + \frac{d}{2G_{13}^2} \right) \right) \\ - \frac{q_0 d^2}{2(e + d)^2} \left(\frac{e}{3E_3^1} + \frac{d}{2E_3^2} \right)$$

ainsi que les déplacements u_1^1, u_1^2, u_1^3 ,

$$(A2.2.25) \quad u_1^1 = -\frac{q_0 L^3}{\pi^3 (e + d) A_{11}^1} \cos \frac{\pi x}{L}$$

$$(A2.2.26) \quad u_1^2 = 0$$

$$(A2.2.27) \quad u_1^3 = \frac{q_0 L^3}{\pi^3 (e + d) A_{11}^1} \cos \frac{\pi x}{L}$$

A partir des relations (A2.2.7) on peut alors déterminer les expressions de $D_1^{1,2}$ et $D_1^{2,3}$ et celles de $\tau_1^{1,2}$ et $\tau_1^{2,3}$,

$$D_1^{1,2} = D_1^{2,3} = -\frac{q_0 L}{\pi(e+d)(\eta_1 + \xi_1)} \cos \frac{\pi x}{L}$$

$$\tau_1^{1,2} = \tau_1^{2,3} = -\frac{q_0 L}{\pi(e+d)} \cos \frac{\pi x}{L}$$

La contrainte au bord $\sigma_{xz}(0, y, z)$ s'exprime alors par la relation suivante,

$$(A2.2.28) \quad \sigma_{xz}(0, y, z) = \begin{cases} \frac{z + \frac{h}{2}}{e} \frac{q_0 L}{\pi(e+d)} & \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq -\frac{d}{2} \\ \frac{q_0 L}{\pi(e+d)} & \text{pour } -\frac{d}{2} \leq z \leq \frac{d}{2} \\ \frac{-z + \frac{h}{2}}{e} \frac{q_0 L}{\pi(e+d)} & \text{pour } \frac{d}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases}$$

ANNEXE 2.3

RESULTATS DES DEFLEXIONS MAXIMALES POUR LE PROBLEME DE FLEXION CYLINDRIQUE DU CHAPITRE II

Cette annexe présente les résultats de déflexions maximales au centre du panneau sandwich $\left((x, y, z) = \left(\frac{L}{2}, y, 0 \right) \right)$, obtenus pour la solution exacte de Pagano (prise comme la référence des résultats), le modèle de sandwich classique de Reissner-Mindlin, le modèle sandwich de Sab et les modèles sandwichs multiparticulaires.

Légende des tableaux (A2.1), (A2.2) et (A2.3):

d, e : représentent respectivement l'épaisseur de l'âme et l'épaisseur des peaux

$\frac{L}{h}$: rapport de la longueur sur la hauteur du panneau

Pagano: Solution exacte de Pagano

TC: Théorie sandwich classique issue des hypothèses de Reissner-Mindlin

Tri: Modèle triparticulaire complet

TriS: Modèle triparticulaire simplifié

TS: Théorie sandwich issue de la théorie de Sab

A2.3.1 Exemple 1: $d = 20e$

L/h	Pagano	TC	TriS	Tri	TS
2	177,729	225,904	205,036	204,470	186,981
3	85,838	100,957	91,683	91,571	83,658
4	50,051	57,226	52,009	51,974	47,495
5	32,797	36,985	33,646	33,632	30,757
6	23,236	25,989	23,671	23,664	21,665
7	17,405	19,360	17,657	17,653	16,182
8	13,594	15,057	13,753	13,751	12,624
9	10,969	12,106	11,077	11,075	10,184
10	9,085	9,996	9,162	9,161	8,439
11	7,688	8,435	7,746	7,745	7,148
12	6,624	7,247	6,668	6,668	6,166
13	5,794	6,323	5,830	5,830	5,402
14	5,135	5,590	5,165	5,164	4,796
15	4,603	4,998	4,628	4,628	4,306
16	4,167	4,514	4,189	4,189	3,906
17	3,806	4,113	3,825	3,825	3,574
18	3,503	3,777	3,520	3,520	3,296
19	3,247	3,492	3,262	3,261	3,061
20	3,028	3,249	3,041	3,041	2,860
21	2,839	3,040	2,851	2,851	2,687
22	2,676	2,859	2,687	2,687	2,537
23	2,533	2,701	2,544	2,544	2,406
24	2,408	2,562	2,418	2,418	2,292
25	2,297	2,439	2,307	2,307	2,190
26	2,199	2,331	2,208	2,208	2,100
27	2,112	2,234	2,120	2,120	2,020
28	2,034	2,147	2,042	2,042	1,949
29	1,963	2,070	1,971	1,971	1,885
30	1,900	2,000	1,908	1,908	1,827
31	1,843	1,936	1,850	1,850	1,774
32	1,791	1,879	1,798	1,798	1,726
33	1,743	1,826	1,750	1,750	1,683
34	1,700	1,778	1,707	1,707	1,644
35	1,661	1,734	1,667	1,667	1,607
36	1,624	1,694	1,630	1,630	1,574
37	1,591	1,657	1,597	1,597	1,543
38	1,560	1,623	1,566	1,566	1,515
39	1,531	1,591	1,537	1,537	1,489
40	1,505	1,562	1,511	1,511	1,465
41	1,481	1,535	1,486	1,486	1,443
42	1,458	1,510	1,463	1,463	1,422
43	1,437	1,487	1,442	1,442	1,402
44	1,417	1,465	1,422	1,422	1,384
45	1,398	1,444	1,404	1,404	1,367
46	1,381	1,425	1,386	1,386	1,352
47	1,365	1,407	1,370	1,370	1,337
48	1,350	1,390	1,355	1,355	1,323
49	1,336	1,375	1,341	1,341	1,310
50	1,322	1,360	1,327	1,327	1,298

Tableau A2.1

A2.3.2 Exemple 2: $d = 10e$

L/h	Pagano	TS	TriS	Tri	Sab
2	170,741	416,646	344,647	343,044	289,983
3	106,585	185,732	153,733	153,417	129,437
4	69,629	104,912	86,914	86,814	73,246
5	48,277	67,503	55,986	55,945	47,237
6	35,242	47,183	39,185	39,166	33,109
7	26,824	34,930	29,055	29,045	24,590
8	21,116	26,978	22,481	22,474	19,061
9	17,086	21,526	17,973	17,969	15,271
10	14,143	17,626	14,749	14,746	12,559
11	11,932	14,740	12,363	12,361	10,553
12	10,231	12,546	10,548	10,547	9,027
13	8,896	10,838	9,136	9,135	7,840
14	7,829	9,483	8,016	8,015	6,898
15	6,964	8,389	7,112	7,111	6,137
16	6,252	7,494	6,372	6,372	5,515
17	5,660	6,753	5,759	5,759	5,000
18	5,162	6,131	5,245	5,245	4,568
19	4,740	5,605	4,810	4,810	4,202
20	4,379	5,156	4,439	4,439	3,890
21	4,067	4,770	4,120	4,120	3,621
22	3,797	4,435	3,843	3,843	3,368
23	3,561	4,143	3,601	3,601	3,185
24	3,353	3,886	3,389	3,389	3,007
25	3,170	3,660	3,202	3,202	2,849
26	3,007	3,459	3,036	3,036	2,710
27	2,861	3,281	2,888	2,888	2,586
28	2,731	3,121	2,756	2,756	2,474
29	2,615	2,977	2,637	2,637	2,374
30	2,509	2,847	2,530	2,530	2,284
31	2,414	2,730	2,433	2,433	2,203
32	2,327	2,624	2,345	2,345	2,129
33	2,248	2,527	2,265	2,265	2,061
34	2,176	2,438	2,192	2,192	2,000
35	2,110	2,357	2,125	2,125	1,944
36	2,049	2,283	2,063	2,063	1,892
37	1,993	2,214	2,007	2,007	1,844
38	1,942	2,151	1,955	1,955	1,801
39	1,894	2,093	1,906	1,906	1,760
40	1,850	2,039	1,862	1,862	1,722
41	1,809	1,989	1,820	1,820	1,688
42	1,771	1,943	1,782	1,782	1,655
43	1,736	1,899	1,746	1,746	1,625
44	1,703	1,859	1,713	1,713	1,597
45	1,672	1,821	1,682	1,682	1,571
46	1,643	1,786	1,652	1,652	1,546
47	1,616	1,753	1,625	1,625	1,523
48	1,590	1,722	1,599	1,599	1,502
49	1,566	1,692	1,575	1,575	1,481
50	1,544	1,665	1,553	1,553	1,462

Tableau A2.2

A2.3.3 Exemple 3: $d = 5e$

L/h	Pagano	TS	TriS	Tri	Sab
2	89,108	732,552	509,430	505,940	375,119
3	73,396	326,134	226,974	226,285	167,275
4	58,769	183,888	128,114	127,896	94,530
5	46,833	118,048	82,357	82,267	60,859
6	37,586	82,284	57,500	57,457	42,569
7	30,540	60,719	42,513	42,490	31,540
8	25,169	46,722	32,786	32,772	24,382
9	21,039	37,126	26,116	26,108	19,475
10	17,826	30,262	21,346	21,341	15,965
11	15,292	25,184	17,817	17,813	13,368
12	13,269	21,321	15,132	15,129	11,392
13	11,633	18,315	13,043	13,041	9,855
14	10,294	15,930	11,385	11,384	8,635
15	9,187	14,005	10,048	10,047	7,651
16	8,263	12,431	8,953	8,952	6,846
17	7,483	11,125	8,046	8,046	6,178
18	6,821	10,032	7,286	7,286	5,619
19	6,253	9,106	6,643	6,642	5,145
20	5,763	8,316	6,093	6,093	4,741
21	5,338	7,635	5,621	5,620	4,393
22	4,967	7,046	5,211	5,211	4,092
23	4,641	6,532	4,854	4,853	3,829
24	4,353	6,080	4,540	4,540	3,598
25	4,098	5,682	4,263	4,263	3,394
26	3,870	5,329	4,018	4,018	3,214
27	3,667	5,014	3,799	3,799	3,053
28	3,484	4,732	3,603	3,603	2,909
29	3,319	4,479	3,427	3,427	2,779
30	3,170	4,251	3,269	3,269	2,663
31	3,035	4,045	3,125	3,125	2,557
32	2,912	3,858	2,995	2,995	2,461
33	2,800	3,687	2,877	2,877	2,374
34	2,697	3,531	2,769	2,768	2,295
35	2,603	3,389	2,669	2,669	2,222
36	2,516	3,258	2,578	2,578	2,155
37	2,436	3,137	2,495	2,495	2,093
38	2,363	3,026	2,418	2,418	2,036
39	2,294	2,924	2,346	2,346	1,984
40	2,231	2,829	2,280	2,280	1,935
41	2,173	2,741	2,219	2,219	1,890
42	2,118	2,659	2,162	2,162	1,848
43	2,067	2,583	2,109	2,109	1,809
44	2,020	2,511	2,060	2,060	1,773
45	1,975	2,445	2,014	2,014	1,739
46	1,933	2,383	1,970	1,970	1,707
47	1,894	2,325	1,930	1,930	1,677
48	1,858	2,270	1,892	1,892	1,650
49	1,823	2,219	1,856	1,856	1,623
50	1,791	2,170	1,823	1,823	1,599

Tableau A2.3

ANNEXE 3.1

METHODES DE FABRICATION DES PANNEAUX EN COMPOSITE ALVEOLAIRE

L'élaboration de prototypes de panneaux alvéolaires au CERAM s'effectue par moulage sous pression d'air. Elle comprend deux étapes principales de fabrication,

- La fabrication à l'unité de profilés creux à section triangulaire
- L'assemblage de l'âme triangulaire et des empilements d'orientation $\pm\theta_1$

Fabrication des profilés triangulaires

Cette étape de fabrication comprend une étape de mise en forme et une étape de cuisson par moulage. Les profilés triangulaires constituant l'âme sont d'abord des enroulements crus (ou chaussettes) obtenus à partir de bandes de préimprégné enroulées sur un mandrin à section circulaire. Puis ils sont cuits un par un dans un moule sous pression d'air.

◆ Enroulement des bandes:

Les bandes sont enroulées sur un mandrin orientable dont l'angle par rapport à la verticale détermine l'angle d'enroulement des plis autour du mandrin (figure A3.1.1). Chaque bande de préimprégné est ainsi successivement drapée sur le tube de façon à obtenir un empilement de couches (procédé breveté). Dans notre étude les chaussettes sont constituées de 2 couches de préimprégné orientées à 60° et -60° par rapport à l'axe du mandrin.

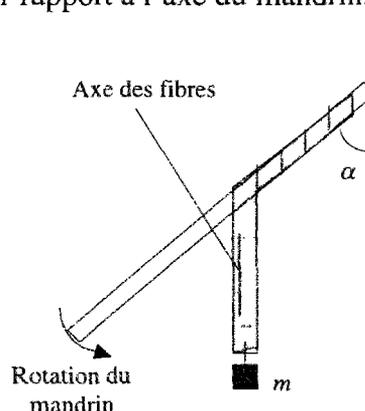


Figure A3.1.1: Principe de l'enroulement

Les dimensions des bandes à découper sont obtenues par les formules élémentaires suivantes,

$$\text{longueur de la bande} = \text{longueur de l'enroulement} / \cos \alpha$$

où α désigne l'angle d'enroulement des chaussettes.

La largeur des bandes b dépend du type d'enroulement choisi,

- Pour obtenir un enroulement jointif, la largeur b est donnée par $b = \pi\phi \cos \alpha$ avec ϕ diamètre du support d'enroulement
- Pour obtenir un enroulement non jointif, c'est à dire pour que la bande drap le tube en laissant des espaces vides, la largeur b est alors telle que, $b = \pi\phi \cos \alpha + 0,75$

Pour les panneaux alvéolaires, nous avons effectué des enroulements jointifs avec des bandes de 7,8 cm de large.

◆ Mise en place et cuisson:

Une fois l'enroulement constitué, on le place dans un moule femelle dont la partie creuse à la forme d'un tube triangulaire (figure A3.1.2).

Un système de mise en pression est placé à l'intérieur des chaussettes pour leur permettre d'épouser parfaitement les parois du moule. Il est constitué d'une chambre à air qui est introduite dans la chaussette en composite, d'un embout permettant l'arrivée de la pression qui est fixé à l'une des extrémités de l'enroulement, et d'un embout hermétique qui ferme l'autre côté. Une pression de sept bars est ainsi appliquée à l'intérieur du moule.

Un mortier de résine léger est déposé avant la cuisson pour combler les vides et former des angles vifs pour une masse rajoutée négligeable (le rayon de courbure des angles est, rappelons le, un paramètre important dans la tenue mécanique générale - cf. chapitre III).

La cuisson à l'étuve dure 5 heures: 3 heures de montée en température et 2 heures de refroidissement. La capacité de l'étuve permet la cuisson de trois profilés triangulaires.

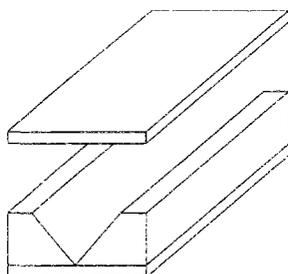


Figure A3.1.2 : Moule unitaire

La fabrication des profilés est une tâche longue et fastidieuse qui demande beaucoup de main-d'oeuvre.

Une autre méthode de fabrication (utilisée par la société Nautix) consiste en un procédé de moulage sur mandrin expansible dans lequel la pression est obtenue par dilatation d'un noyau en élastomère de silicone sous l'effet de la chaleur. La fabrication se divise en trois étapes.

- Fabrication des mandrins expansibles en silicone, de forme triangulaire, par moulage au contact.
- Fabrication de multicouches suivant les orientations $\pm 60^\circ$ que l'on vient ensuite enrouler autour d'un mandrin expansible avec une certaine longueur de chevauchement. (La règle impose que la longueur de chevauchement soit égale à vingt fois l'épaisseur du stratifié)
- Cuisson de l'ensemble multicouche et mandrin expansible, à l'intérieur des moules métalliques schématisés sur la figure (A3.1.2)

La pression est directement proportionnelle à la température mais aussi à la section du profilé. Notez que les pressions obtenues sont difficilement contrôlables et sont sensiblement plus élevées que celles sous pression d'air (≈ 20 bars). L'utilisation de cette méthode est cependant possible pour des arêtes de 56mm.

La figure (A3.1.3) montre le schéma de principe de cette méthode. La mise en température s'effectue par convection de deux circuits d'alimentation d'huile chaude percés dans la partie inférieure du moule. L'efficacité de ce système réduit la durée de cuisson à une heure.

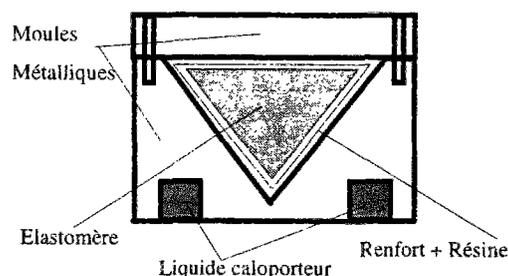


Figure A3.1.3: Schéma de principe du moulage par mandrin expansible.

Cette méthode de fabrication de profilés creux triangulaires est proche de celle utilisée par le CERAM. Néanmoins d'un point de vue technique, elle semble plus fiable et surtout plus rapide. Elle présente en plus l'avantage d'être déjà mise en oeuvre de façon industrielle.

Assemblage de l'âme triangulaire et des peaux

Pour assembler les panneaux on utilise le principe de moulage au sac sous vide dans une enceinte de circonstance. La polymérisation du préimprégné est assurée par cuisson et mise en pression du matériau. Les cycles de température et de pression sont représentés figure (A3.1.4).

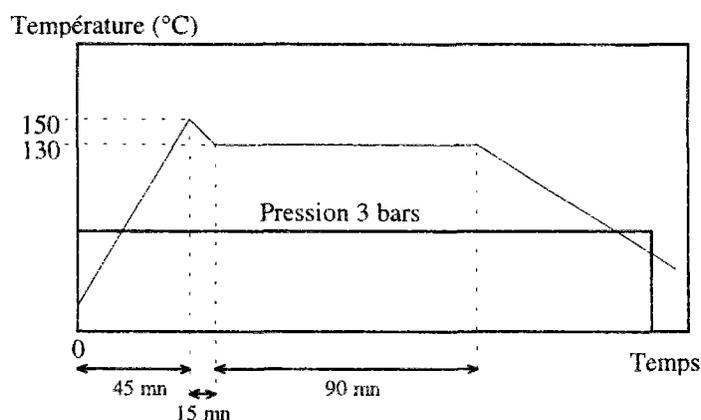


Figure A3.1.4: Cycle de polymérisation de la résine thermodurcissable

Cette étape de fabrication nécessite la réalisation d'un certain nombre de tâches,

- Réception des profilés triangulaires élaborés chez Nautix et contrôle de leur état de surface,
- Application d'un film adhésif sur les profilés,
- Mise en forme de l'âme par collage des profilés triangulaires (figure A3.1.5)
- Drapages des empilements $\pm\theta_1$
- Ajout des plis $\pm\theta_1$ sur l'âme constituée (figure A3.1.6)
- Compactage par mise sous vide de l'âme (figure A3.1.7)
- Polymérisation du matériau préimprégné

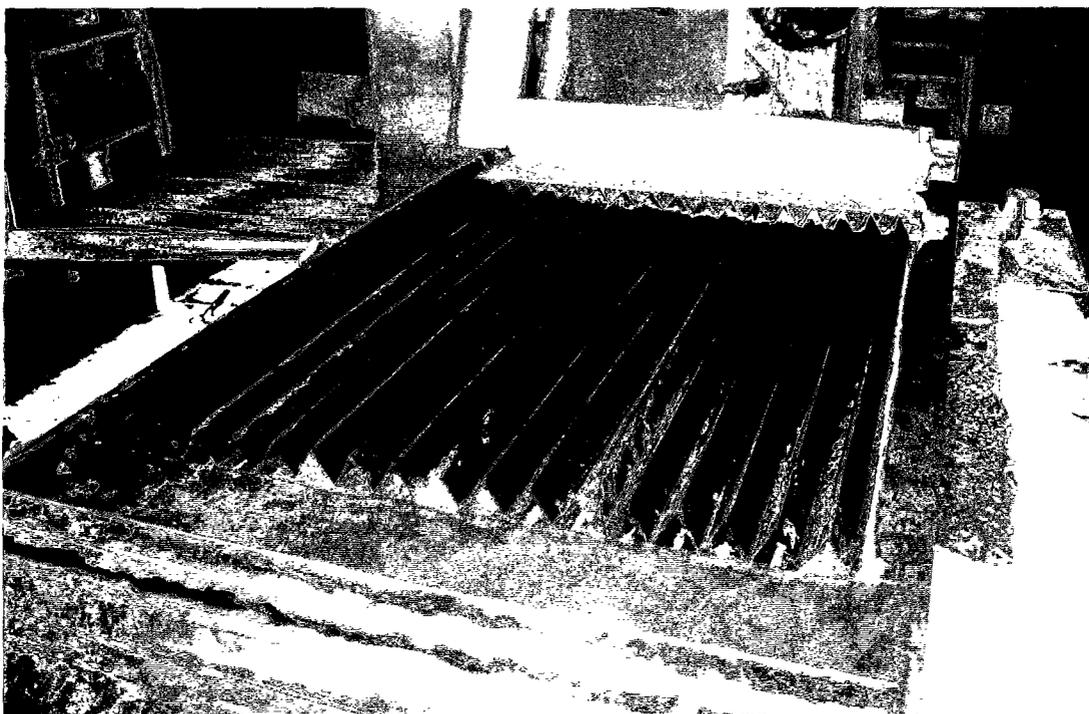


Figure A3.1.5: Assemblage des profilés par collage



Figure A3.1.6: Collage des empilements $\pm\theta_1$ dans les peaux

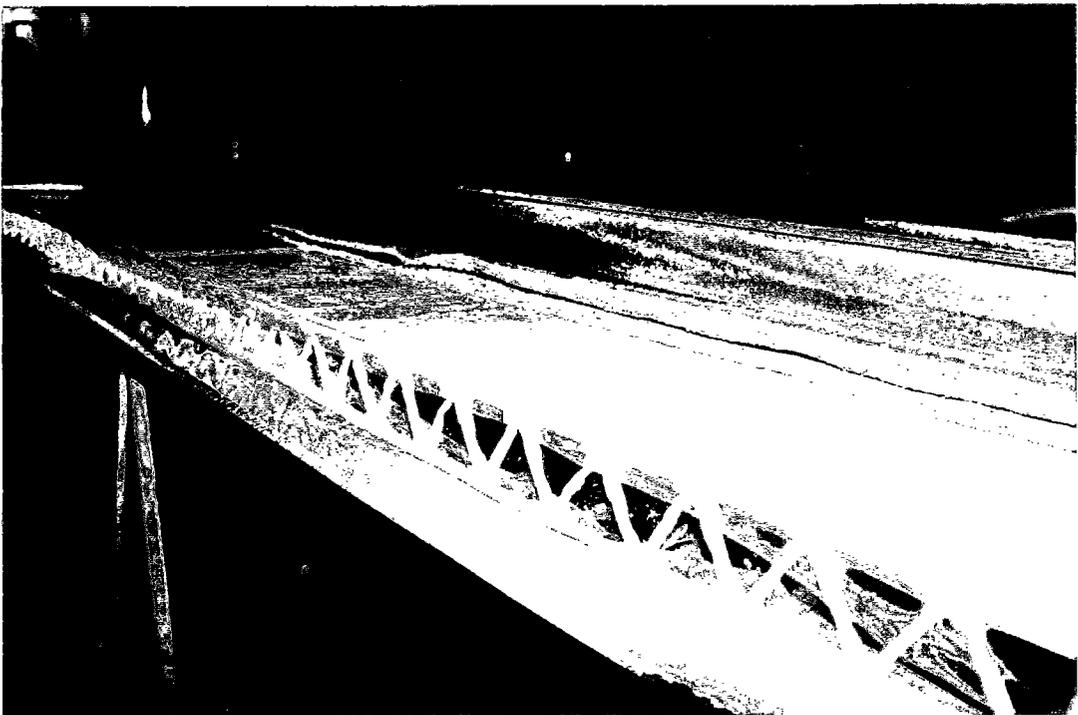


Figure A3.1.7: Compactage par mise sous vide

On utilise pour cette dernière étape des tissus d'environnement indiqués figure (A3.1.8),

- Deux tissus de délaminage dont le rôle est d'absorber la résine en excédent,
- Deux films séparateurs téflonés perforés et un tissu de drainage qui servent à répartir le vide d'air de façon uniforme dans le plan du panneau,
- Un film séparateur téfloné non perforé qui est chargé de protéger le plateau métallique de l'enceinte contre les dépôts de résine.
- Une bâche à vide munie de prises à vide qui permet d'effectuer la mise sous vide de la structure.

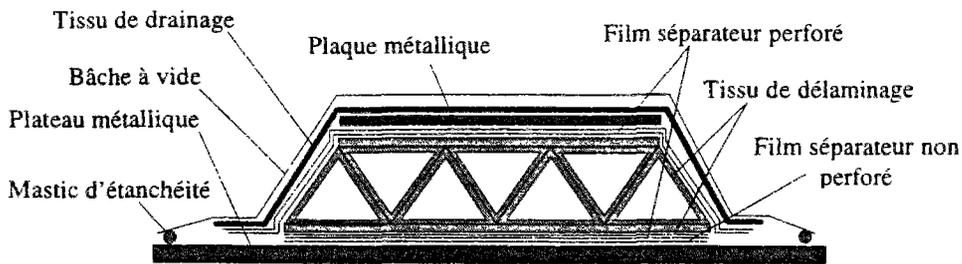


Figure A3.1.8: Principe de l'assemblage sous vide

En résumé, la méthode actuelle de fabrication des panneaux alvéolaires comprend deux étapes de mise en forme des constituants et deux étapes de polymérisation:

- Constitution des empilements crus $\pm\theta_1$,
- Constitution des chaussettes crues $\pm\theta_2$,
- Cuisson des chaussettes à l'unité dans un moule à forme triangulaire sous pression d'air
- Assemblage par cuisson dans une enceinte, des empilements crus et des profilés cuits, au sac sous vide et sous pression d'air.

ANNEXE 3.2

PERSPECTIVES INDUSTRIELLES:

QUELLES METHODES DE FABRICATION POUR DEMAIN?

Dans cette annexe, nous proposons de faire une revue des techniques envisageables dans l'avenir pour l'élaboration de petites et moyennes séries de panneaux alvéolaires (*L'huillier 1996*), (*Philippe, Caron, L'huillier et Naciri 1996*).

Fabrication par moulage

Profitant de son expérience acquise dans la mise au point de méthodes de fabrication par moulage, le CERAM a défini sa propre méthode de production destinée à la fabrication en continu, par moulage successif de profils triangulaires. Cependant ce système de production, qui n'existe pas à notre connaissance de façon industrielle, réclame un investissement important en développement et en mise au point.

Le système comporterait les éléments suivants:

- Un moule métallique femelle en deux parties dont la partie supérieure est actionnée par une presse,
- Un mandrin silicone (mâle) monté sur un profilé longitudinal métallique mobile pouvant servir de système de chauffage et de refroidissement,
- Un système de bobinage de préimprégné.

Le principe de fabrication serait le suivant: des bandes de préimprégné de largeur définie pour que l'enroulement soit jointif sont enroulées suivant l'orientation $\pm 60^\circ$ sur un mandrin expansible en silicone à l'aide d'un dispositif satellite de dépose. Lorsqu'une portion significative du mandrin est enroulée, l'ensemble est introduit à l'intérieur du moule métallique en position ouverte. La polymérisation est effectuée par un système de chauffage du moule métallique et du mandrin silicone par bain d'huile. Ce système sert aussi pour effectuer un refroidissement rapide. Après polymérisation du profilé et ouverture du moule métallique, un système de traction extrait le profilé triangulaire à l'extérieur tandis que le moule silicone est tiré en arrière pour être à nouveau enrubanné. La figure (A.3.1) explicite le fonctionnement de ce système.

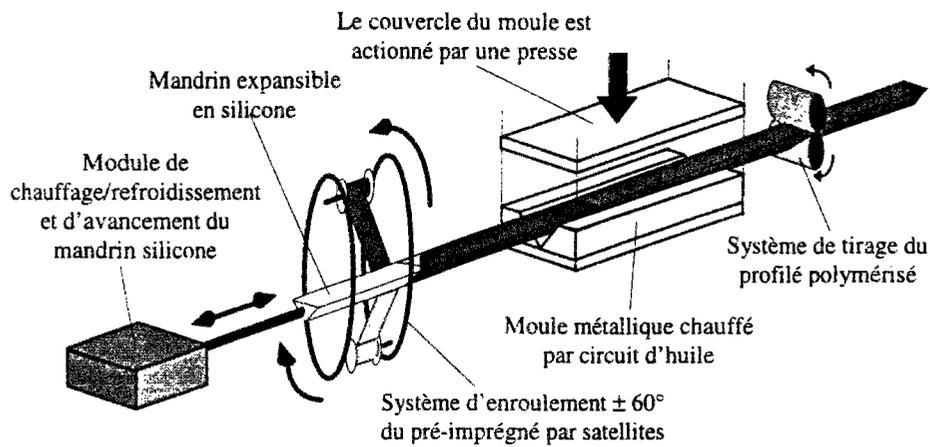


Figure A3.2.1: Système de production en continu par moulage

Fabrication en continu par pultrusion

La pultrusion est utilisée principalement pour fabriquer en continu des profilés assez simples à sections en U ou I par exemple. Le principe est le suivant: un renfort continu est imprégné de résine, puis formé par traction au travers d'un moule filière chauffé qui polymérise la structure profilée ainsi réalisée. Cette opération se déroule en continu (figure A3.2.2).

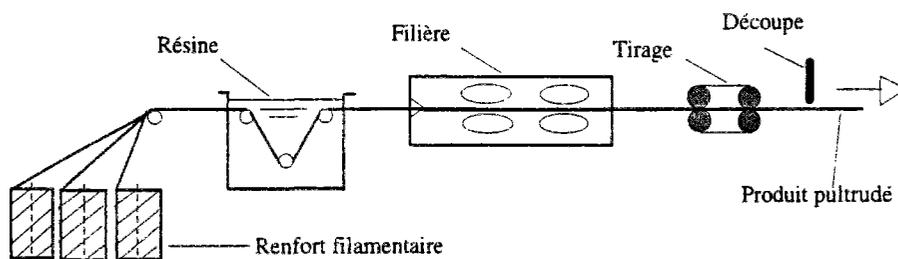


Figure A3.2.2: Schéma de principe de la pultrusion.

Le système comporte les éléments suivants:

- Un cantre support de renforts,
- Une zone d'imprégnation qui peut s'effectuer soit par passage du renfort dans un bain de résine, soit par injection sous pression de la résine dans la filière,
- Une filière en acier chauffée de 120 à 220°C, d'une longueur d'environ 1m,
- Un dispositif de tirage (chenille ou patin) caractérisé par sa force de traction (4 à 10t),
- Un outil de découpe.

Les cadences de production varient de 0,5 m/mn à 5 m/mn selon les sections.

Notre application comporte toutefois quelques incompatibilités avec la méthode de production,

- Pas de fibre dans l'axe de la filière: un minimum de 30% est requis.
- Angle d'orientation des fibres trop important: 60° (45° dans l'état actuel).
- Faible épaisseur des parois: un minimum de 1 à 2 mm est requis.
- Angles vifs du profilé.

De plus, les professionnels de la pultrusion contactés ont souligné les difficultés qu'entraîne le taux élevé de fibres (70%) induisant des pressions élevées à l'intérieur de la filière. Ceci augmente les risques d'endommagement des fibres surtout lorsqu'elles sont orientées à $\pm 60^\circ$, et rend aléatoire l'état de surface et la finition. D'autre part, l'utilisation de la résine époxyde est difficile à mettre en oeuvre avec la pultrusion car il y a des risques d'obturation de la filière.

Cependant, la firme Pultrex Ltd a proposé d'utiliser un tissu (a none crimped stitch bonded fabric) avec les orientations 0° , $+60^\circ$, -60° . Cette orientation qui n'existe d'ailleurs pas actuellement réclamera une production spécifique. L'épaisseur d'un pli est d'environ 0,55 mm et sa masse surfacique de 564g/m^2 . Au regard des problèmes mentionnés ci-dessus, la pultrusion d'un seul pli semble impossible. Deux solutions sont alors possibles:

- Pultruder deux plis de ce tissu avec pour conséquence le triplement de la masse linéique des triangles (sachant qu'actuellement ceux-ci représentent 45% du poids d'un plancher).
- Pultruder un seul pli en utilisant un film de polyester très léger qui ne participera pas aux performances mécaniques des raidisseurs. La figure (A3.2.3) schématise ce procédé (A3.2.3a) et explicite la surépaisseur sur une face du profilé: pour pultruder un profilé, les extrémités du profilé doivent se superposer au début pour glisser au cours du procédé et arriver joint en sortie de filière (phénomène de retrait: A3.2.3b & A3.2.3c).

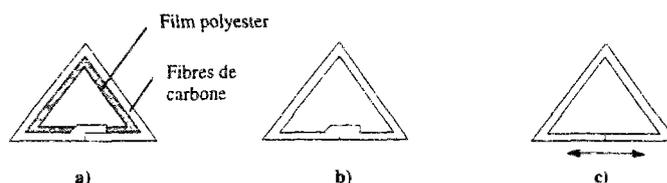


Figure A3.2.3: Particularités de la pultrusion d'un pli simple.

Ce procédé réclame un effort certain de développement et de mise au point pour atteindre une fiabilité industrielle. Il est clair qu'il faudrait modifier notre produit pour y insérer le taux minimal de fibres à 0° et calculer les répercussions de cette altération d'un point de vue mécanique. Les principaux avantages de cette méthode concernent les cadences de production envisageables (entre 100 m et 200 m de profilés par heure) et les répercussions qu'elle entraîne sur le coût de fabrication. Un essai de mise en forme du tissu est en cours chez Pultrex Ltd pour définir plus précisément les conditions de production avec un tel système.

Fabrication par enroulement filamentaire

L'enroulement filamentaire est principalement utilisé dans la fabrication de structures de révolution. Cette technique consiste à enrouler sous tension constante un renfort filamentaire imprégné de résine sur un mandrin tournant de forme appropriée, suivi d'une polymérisation in situ à température ambiante ou accélérée par chauffage léger (figure A3.2.4). On obtient alors après démandrinage un corps de révolution creux.

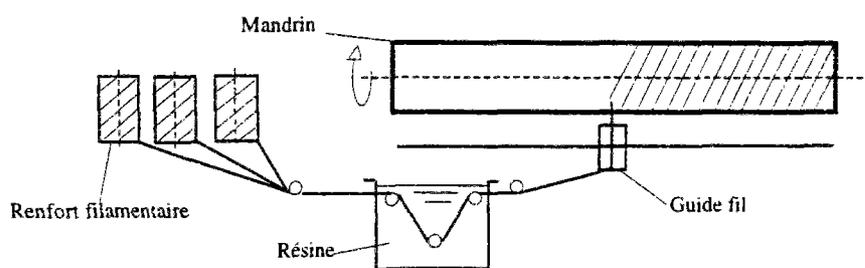


Figure A3.2.4: Schéma de principe de l'enroulement filamentaire.

L'équipement comporte les éléments suivants:

- Un cantre de dévidage à tension constante.
- Un bac d'imprégnation et d'essorage de résine, par bain ou pressage sur rouleau.
- Un chariot de guidage et de dépose de la nappe animée d'un mouvement de va-et-vient de translation. Dans notre cas, il s'agit d'un enroulement hélicoïdal: les nappes sont croisées avec un angle variant de 15° à 85° .
- Un mandrin de forme en rotation autour de son axe (100 à 1000 t/min)

Le procédé se décompose en trois étapes:

- Enroulement par dépose de fils couche par couche jusqu'à assurer l'épaisseur voulue. Pour notre application, la complexité du chariot est réduite car l'enroulement hélicoïdal est un procédé standard.
- Polymérisation à température ambiante mais qui peut s'effectuer aussi par chauffage infrarouge ou par passage en étuve à air chaud (le mandrin poursuivant sa rotation pendant la polymérisation).
- Mandrin et démoulage: en fonction de la forme, on dispose de plusieurs types de mandrins. Deux possibilités s'offrent à nous pour une structure à section complexe comme la nôtre: métallique démontable ou en matière soluble à l'eau.

Il faut noter que l'utilisation de fibres préimprégnées permet un certain nombre d'améliorations: cadence accrue, risque de glissement réduit, faibles chutes de matières, propreté et qualité.

Nous avons contacté la firme Bretagne Composite pour faire directement un prototype de profilé avec cette méthode, mais il reste des progrès à réaliser là encore sur l'épaisseur des profilés fabriqués. La mise en tension uniforme du fil pose aussi un problème sur un profilé à arête vive, le démandrinage également.

Le procédé classique d'enroulement filamentaire permettrait de fabriquer des longueurs d'environ 3 mètres. Des fabrications de longueurs plus importantes pourraient être envisagées en mettant sous tension le mandrin qui risquerait de fléchir sous son poids.

De plus la firme Bretagne Composite évalue la possibilité d'utiliser des moules démontables qui résoudraient le problème du démoulage.

Méthode textile

L'industrie aéronautique s'est récemment intéressée au développement de nouvelles structures textiles sandwichs 3D dont l'élaboration possède l'avantage sur les procédés de fabrication

traditionnels de sandwich d'être entièrement automatisable réduisant ainsi de façon significative les coûts de production. Cette nouvelle méthode de fabrication textile permet également d'envisager le développement de structures à géométrie complexe. L'une de ces structures sandwichs les plus prometteuses consiste en une préforme entièrement tissée en fibres. La figure (A3.2.5) montre quelques unes de ces applications.

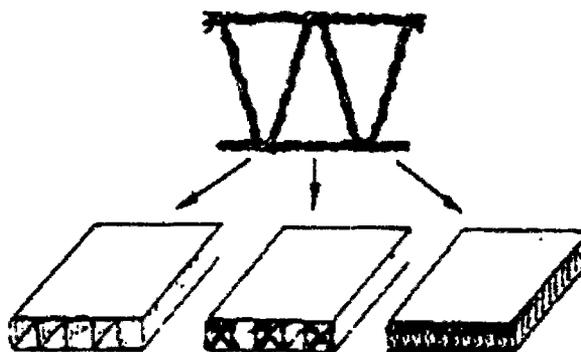


Figure A3.2.5: Exemples de préformes tissés 3D (D'après Ko 1990)

La largeur et l'arrangement des fibres peuvent être très variés et l'épaisseur du sandwich peut atteindre 20cm. Des fibres de verre et de carbone ont été utilisées pour cette application de préformes sandwichs 3D.

Une autre structure textile envisageable pour notre application consiste en profilés tressés utilisés comme âme de structure et produits suivant un procédé continu dans lequel les tresses tubulaires sont mises en forme et imprégnées dans la forme et la taille requise. Ces profilés gardent la forme donnée après durcissement ce qui permet une fabrication automatisée de l'âme des panneaux. Les sections standards sont de forme triangulaire, carrée et circulaire (figure A3.2.6).

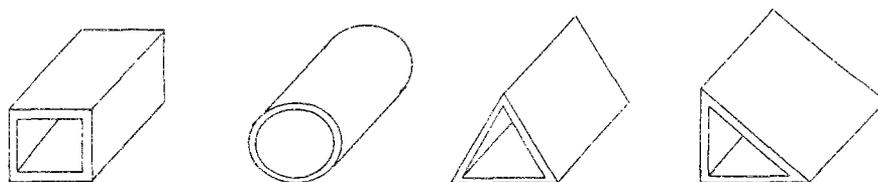


Figure A3.2.6: Formes standards des profilés tressés pour âme de structures sandwichs.

A l'instar des préformés tissés, ces structures tubulaires tressées acceptent les types de fibres et de résine les plus courantes.

Le point commun de ces différentes structures est d'être plus rapide, plus simple et moins cher à produire. Le tissé est imprégné avec une résine à faible viscosité et le contrôle du taux de résine se fait par un procédé de laminage entre deux rouleaux (cf. figure A3.2.7). Les liens fibreux entre les différentes couches sont assez rigides pour que le tissé 3D se remette en

forme après cette opération de pressage. Après cuisson, on obtient une structure alvéolaire composée de deux peaux polymérisées et de fils de liaisons également polymérisés.

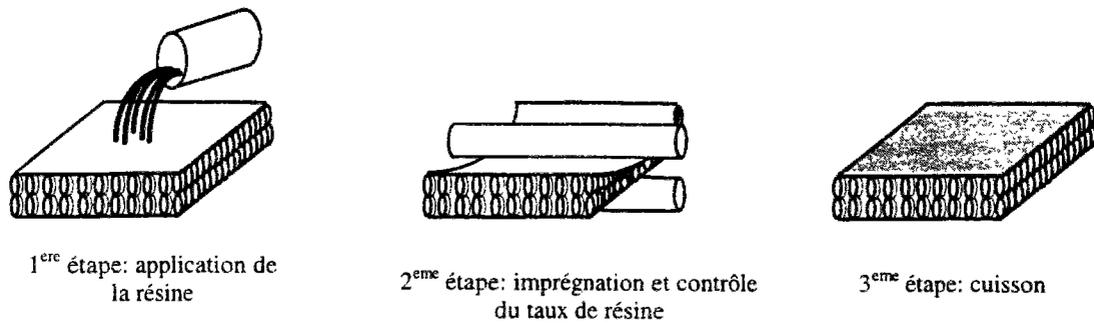


Figure A3.2.7: Imprégnation et cuisson de structures sandwichs 3D tissées

L'un des gros avantages de ces sandwichs est la possibilité de leur donner une forme courbe aussi bien dans le sens longitudinal que dans le sens transversal.

Des contacts sont en cours avec l'Institut Textile de France (ITF) pour définir exactement les possibilités de ce moyen de production qui n'est pas encore disponible de façon industrielle, mais qui présente de fortes potentialités. Les recherches les plus importantes sont mises en oeuvre par les grandes firmes aérospatiales.

Procédé RTM (Resin Transfer Molding)

Ce procédé nécessite deux étapes successives:

- Fabrication de préformes sèches par des procédés de tissage ou tressage.
- Mise en place des tissus sur des pièces de moule et injection de résine à pression élevée.

Un investissement en machine textile est donc nécessaire. Le RTM utilise des moules coûteux car en deux parties, très rigides (pressions d'injection élevées) et chauffés. Ce qui limite les dimensions des pièces réalisables.

Procédé de moulage par infusion

Il s'agit d'un procédé développé par DuPont (*Eveno et al. 1996*). Des tissus secs (des chaussettes tissées par exemple) sont d'abord mis en place, dans notre cas par exemple, sur des mandrins triangulaires. Les peaux sèches sont déposées. Des tuyaux en plastique sont reliés au milieu de distribution qui permettra de faire infuser la résine sous la seule dépression provoquée par une pompe à vide. La pièce entière est placée dans un sac à vide, et on applique le vide en plusieurs endroits. Après évacuation de la totalité de l'air emprisonné, on fait couler la résine dans le milieu de distribution. De ce milieu, la résine pénètre de la surface jusqu'au coeur des tissus secs. En l'état actuel des choses la polymérisation se fait à l'ambiante, et on atteint des taux de résine de 60%. Les performances mécaniques des époxydes polymérisant à la température ambiante sont cependant moindres que les performances des époxydes à chaud. C'est cependant un procédé nouveau très prometteur.

ANNEXE 4.1

EXPRESSION DES INCONNUES HYPERSTATIQUES X, Y, Z, T, U, V DU PROBLEME D'HOMOGENEISATION

$$\begin{aligned}
 (A4.1.1) \quad X = & -\left(\frac{1}{2K}\left(-Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L\cos\alpha}\right) + \frac{Sp_{26}J}{2K}R_1\right)\mathcal{N}_{11} - \left(\frac{1}{2K}\left(-Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L\cos\alpha}\right) + \frac{Sp_{26}J}{2K}R_2\right)\mathcal{N}_{22} \\
 & - \left(\frac{1}{2K}\left(-Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L\cos\alpha}\right) + \frac{Sp_{26}J}{2K}R_3\right)\mathcal{N}_{12} + \left(\frac{1}{K}\left(Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L\cos\alpha}\right) - \frac{Sp_{26}J}{2K}R_4\right)\frac{\mathcal{M}_{11}}{h} \\
 & + \left(\frac{1}{K}\left(Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L\cos\alpha}\right) - \frac{Sp_{26}J}{2K}R_5\right)\frac{\mathcal{M}_{22}}{h} + \left(\frac{1}{K}\left(Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L\cos\alpha}\right) - \frac{Sp_{26}J}{2K}R_6\right)\frac{\mathcal{M}_{12}}{h} \\
 & + \cot\alpha Q_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (A4.1.2) \quad Y = & \left(\frac{Sp_{12}}{L} + \frac{M}{L}R_1\right)\mathcal{N}_{11} + \left(\frac{Sp_{22}}{L} + \frac{M}{L}R_2\right)\mathcal{N}_{22} + \left(\frac{Sp_{26}}{L} + \frac{M}{L}R_3\right)\mathcal{N}_{12} \\
 & + \left(-2\frac{Sp_{12}}{2L} + \frac{M}{L}R_4\right)\frac{\mathcal{M}_{11}}{h} + \left(-2\frac{Sp_{22}}{2L} + \frac{M}{L}R_5\right)\frac{\mathcal{M}_{22}}{h} + \left(-2\frac{Sp_{26}}{2L} + \frac{M}{L}R_6\right)\frac{\mathcal{M}_{12}}{h}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (A4.1.3) \quad Z = & -\left(\frac{Sp_{12}}{4L\cos\alpha} + \frac{J}{2}R_1\right)\mathcal{N}_{11} + \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L\cos\alpha} - \frac{J}{2}R_2\right)\mathcal{N}_{22} - \left(\frac{Sp_{26}}{4L\cos\alpha} + \frac{J}{2}R_3\right)\mathcal{N}_{12} \\
 & + \left(\frac{Sp_{12}}{2L\cos\alpha} - \frac{J}{2}R_4\right)\frac{\mathcal{M}_{11}}{h} + \left(1 + \frac{Sp_{22}}{2L\cos\alpha} - \frac{J}{2}R_5\right)\frac{\mathcal{M}_{22}}{h} - \left(\frac{Sp_{26}}{2L\cos\alpha} - \frac{J}{2}R_6\right)\frac{\mathcal{M}_{12}}{h} \\
 & + \frac{Sp_{12}}{Sp_{22}}\cot\alpha Q_1 - \frac{Sp_{26}}{Sp_{22}}\cot\alpha Q_2
 \end{aligned}$$

$$(A4.1.4) \quad T = 2 \frac{Sr_{12}}{Sr_{22}} \frac{Q_1}{\sin\alpha}$$

$$(A4.1.5) \quad hU = R_1\mathcal{N}_{11} + R_2\mathcal{N}_{22} + R_3\mathcal{N}_{12} + R_4\frac{\mathcal{M}_{11}}{h} + R_5\frac{\mathcal{M}_{22}}{h} + R_6\frac{\mathcal{M}_{12}}{h}$$

$$(A4.1.6) \quad V = 0$$

$$\text{avec } (A4.1.7) \quad K = Sp_{66} + \frac{Sr_{66}}{\cos\alpha} \quad (A4.1.8) \quad I = \frac{3}{4\cos\alpha}Sp_{22} + Sr_{22}$$

$$(A4.1.9) \quad L = \frac{Sp_{22}}{2\cos\alpha} + Sr_{22} \quad (A4.1.10) \quad M = \frac{Sp_{22}}{12\cos\alpha} + \frac{Sr_{22}}{2}$$

$$(A4.1.11) \quad J = \frac{1}{12\cos\alpha} + \frac{M}{2L\cos\alpha}$$

$$(A4.1.12) \quad R_1 = \frac{Sp_{12} + \frac{Sp_{26}}{2K} \left(-Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} \right) + \frac{Sp_{12}Sp_{22}}{4L \cos \alpha} - \frac{ISp_{12}}{L}}{-\frac{(Sp_{26})^2 J}{2K} - \frac{Sp_{22}J}{2} + \frac{Sp_{22}}{24 \cos \alpha} + \frac{IM}{L}}$$

$$(A4.1.13) \quad R_2 = \frac{Sp_{22} + \frac{Sp_{26}}{2K} \left(-Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} \right) + \frac{(Sp_{22})^2}{4L \cos \alpha} - \frac{ISp_{22}}{L}}{-\frac{(Sp_{26})^2 J}{2K} - \frac{Sp_{22}J}{2} + \frac{Sp_{22}}{24 \cos \alpha} + \frac{IM}{L}}$$

$$(A4.1.14) \quad R_3 = \frac{Sp_{26} + \frac{Sp_{26}}{2K} \left(-Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L \cos \alpha} \right) + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{4L \cos \alpha} - \frac{ISp_{26}}{L}}{-\frac{(Sp_{26})^2 J}{2K} - \frac{Sp_{22}J}{2} + \frac{Sp_{22}}{24 \cos \alpha} + \frac{IM}{L}}$$

$$(A4.1.15) \quad R_4 = \frac{-\frac{Sp_{26}}{K} \left(Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} \right) - \frac{Sp_{12}Sp_{22}}{2L \cos \alpha} + 2 \frac{ISp_{12}}{L}}{-\frac{(Sp_{26})^2 J}{2K} - \frac{Sp_{22}J}{2} + \frac{Sp_{22}}{24 \cos \alpha} + \frac{IM}{L}}$$

$$(A4.1.16) \quad R_5 = \frac{-\frac{Sp_{26}}{K} \left(Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} \right) - \frac{(Sp_{22})^2}{2L \cos \alpha} + 2 \frac{ISp_{22}}{L}}{-\frac{(Sp_{26})^2 J}{2K} - \frac{Sp_{22}J}{2} + \frac{Sp_{22}}{24 \cos \alpha} + \frac{IM}{L}}$$

$$(A4.1.17) \quad R_6 = \frac{-\frac{Sp_{26}}{K} \left(Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L \cos \alpha} \right) - \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + 2 \frac{ISp_{26}}{L}}{-\frac{(Sp_{26})^2 J}{2K} - \frac{Sp_{22}J}{2} + \frac{Sp_{22}}{24 \cos \alpha} + \frac{IM}{L}}$$

ANNEXE 4.2

EXPRESSION DES EFFORTS MESOSCOPIQUES EN FONCTION DES EFFORTS MACROSCOPIQUES

$$(A4.2.1) \quad N_{11}^1 = \frac{\mathcal{N}_{11}}{2} + \frac{\mathcal{M}_{11}}{h} - Q_1 \cot \alpha$$

$$(A4.2.2) \quad N_{11}^2 = \frac{\mathcal{N}_{11}}{2} + \frac{\mathcal{M}_{11}}{h} + Q_1 \cot \alpha$$

$$(A4.2.3) \quad N_{11}^3 = \frac{\mathcal{N}_{11}}{2} - \frac{\mathcal{M}_{11}}{h}$$

$$(A4.2.4) \quad N_{11}^4 = \frac{Q_1}{\sin \alpha}$$

$$(A4.2.5) \quad N_{11}^5 = -\frac{Q_1}{\sin \alpha}$$

$$(A4.2.6) \quad \begin{aligned} N_{12}^1 = & \left(\frac{1}{2K} \left(-Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} \right) + \frac{Sp_{26}J}{2K} R_1 \right) \mathcal{N}_{11} + \left(\frac{1}{2K} \left(-Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} \right) + \frac{Sp_{26}J}{2K} R_2 \right) \mathcal{N}_{22} \\ & + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2K} \left(-Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L \cos \alpha} \right) + \frac{Sp_{26}J}{2K} R_3 \right) \mathcal{N}_{12} - \left(\frac{1}{K} \left(Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} \right) - \frac{Sp_{26}J}{2K} R_4 \right) \frac{\mathcal{M}_{11}}{h} \\ & - \left(\frac{1}{K} \left(Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} \right) - \frac{Sp_{26}J}{2K} R_5 \right) \frac{\mathcal{M}_{22}}{h} + \left(1 - \frac{1}{K} \left(Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L \cos \alpha} \right) + \frac{Sp_{26}J}{2K} R_6 \right) \frac{\mathcal{M}_{12}}{h} \\ & - \cot \alpha Q_2 \end{aligned}$$

$$(A4.2.7) \quad \begin{aligned} N_{12}^2 = & \left(\frac{1}{2K} \left(-Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} \right) + \frac{Sp_{26}J}{2K} R_1 \right) \mathcal{N}_{11} + \left(\frac{1}{2K} \left(-Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} \right) + \frac{Sp_{26}J}{2K} R_2 \right) \mathcal{N}_{22} \\ & + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2K} \left(-Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L \cos \alpha} \right) + \frac{Sp_{26}J}{2K} R_3 \right) \mathcal{N}_{12} - \left(\frac{1}{K} \left(Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} \right) - \frac{Sp_{26}J}{2K} R_4 \right) \frac{\mathcal{M}_{11}}{h} \\ & - \left(\frac{1}{K} \left(Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} \right) - \frac{Sp_{26}J}{2K} R_5 \right) \frac{\mathcal{M}_{22}}{h} + \left(1 - \frac{1}{K} \left(Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L \cos \alpha} \right) + \frac{Sp_{26}J}{2K} R_6 \right) \frac{\mathcal{M}_{12}}{h} \\ & + \cot \alpha Q_2 \end{aligned}$$

$$(A4.2.8) \quad N_{12}^3 = \frac{\mathcal{N}_{12}}{2} - \frac{\mathcal{M}_{12}}{h}$$

$$(A4.2.9) \quad N_{12}^4 = -\left(\frac{1}{2K}\left(-Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L\cos\alpha}\right) + \frac{Sp_{26}J}{2K}R_1\right)\mathcal{N}_{11} - \left(\frac{1}{2K}\left(-Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L\cos\alpha}\right) + \frac{Sp_{26}J}{2K}R_2\right)\mathcal{N}_{22} \\ - \left(\frac{1}{2K}\left(-Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L\cos\alpha}\right) + \frac{Sp_{26}J}{2K}R_3\right)\mathcal{N}_{12} + \left(\frac{1}{K}\left(Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L\cos\alpha}\right) - \frac{Sp_{26}J}{2K}R_4\right)\frac{\mathcal{M}_{11}}{h} \\ + \left(\frac{1}{K}\left(Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L\cos\alpha}\right) - \frac{Sp_{26}J}{2K}R_5\right)\frac{\mathcal{M}_{22}}{h} + \left(\frac{1}{K}\left(Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L\cos\alpha}\right) - \frac{Sp_{26}J}{2K}R_6\right)\frac{\mathcal{M}_{12}}{h} \\ + \cot\alpha Q_2$$

$$(A4.2.10) \quad N_{12}^5 = -\left(\frac{1}{2K}\left(-Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L\cos\alpha}\right) + \frac{Sp_{26}J}{2K}R_1\right)\mathcal{N}_{11} - \left(\frac{1}{2K}\left(-Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L\cos\alpha}\right) + \frac{Sp_{26}J}{2K}R_2\right)\mathcal{N}_{22} \\ - \left(\frac{1}{2K}\left(-Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L\cos\alpha}\right) + \frac{Sp_{26}J}{2K}R_3\right)\mathcal{N}_{12} + \left(\frac{1}{K}\left(Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L\cos\alpha}\right) - \frac{Sp_{26}J}{2K}R_4\right)\frac{\mathcal{M}_{11}}{h} \\ + \left(\frac{1}{K}\left(Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L\cos\alpha}\right) - \frac{Sp_{26}J}{2K}R_5\right)\frac{\mathcal{M}_{22}}{h} + \left(\frac{1}{K}\left(Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L\cos\alpha}\right) - \frac{Sp_{26}J}{2K}R_6\right)\frac{\mathcal{M}_{12}}{h} \\ - \cot\alpha Q_2$$

$$(A4.2.11) \quad N_{22}^1 = -\left(\frac{Sp_{12}}{4L\cos\alpha} + \frac{J}{2}R_1\right)\mathcal{N}_{11} + \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L\cos\alpha} - \frac{J}{2}R_2\right)\mathcal{N}_{22} - \left(\frac{Sp_{26}}{4L\cos\alpha} + \frac{J}{2}R_3\right)\mathcal{N}_{12} \\ + \left(\frac{Sp_{12}}{2L\cos\alpha} - \frac{J}{2}R_4\right)\frac{\mathcal{M}_{11}}{h} + \left(1 + \frac{Sp_{22}}{2L\cos\alpha} - \frac{J}{2}R_5\right)\frac{\mathcal{M}_{22}}{h} + \left(\frac{Sp_{26}}{2L\cos\alpha} - \frac{J}{2}R_6\right)\frac{\mathcal{M}_{12}}{h} \\ - \frac{Sp_{12}}{Sp_{22}}\cot\alpha Q_1 + \frac{Sp_{26}}{Sp_{22}}\cot\alpha Q_2$$

$$(A4.2.12) \quad N_{22}^2 = -\left(\frac{Sp_{12}}{4L\cos\alpha} + \frac{J}{2}R_1\right)\mathcal{N}_{11} + \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L\cos\alpha} - \frac{J}{2}R_2\right)\mathcal{N}_{22} - \left(\frac{Sp_{26}}{4L\cos\alpha} + \frac{J}{2}R_3\right)\mathcal{N}_{12} \\ + \left(\frac{Sp_{12}}{2L\cos\alpha} - \frac{J}{2}R_4\right)\frac{\mathcal{M}_{11}}{h} + \left(1 + \frac{Sp_{22}}{2L\cos\alpha} - \frac{J}{2}R_5\right)\frac{\mathcal{M}_{22}}{h} - \left(\frac{Sp_{26}}{2L\cos\alpha} - \frac{J}{2}R_6\right)\frac{\mathcal{M}_{12}}{h} \\ + \frac{Sp_{12}}{Sp_{22}}\cot\alpha Q_1 - \frac{Sp_{26}}{Sp_{22}}\cot\alpha Q_2$$

$$(A4.2.13) \quad N_{22}^3 = \left(-\frac{Sp_{12}}{4L\cos\alpha} + \frac{P}{2}R_1\right)\mathcal{N}_{11} + \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L\cos\alpha} + \frac{P}{2}R_2\right)\mathcal{N}_{22} + \left(-\frac{Sp_{26}}{4L\cos\alpha} + \frac{P}{2}R_3\right)\mathcal{N}_{12} \\ + \left(\frac{Sp_{12}}{2L\cos\alpha} + \frac{P}{2}R_4\right)\frac{\mathcal{M}_{11}}{h} + \left(-1 + \frac{Sp_{22}}{2L\cos\alpha} + \frac{P}{2}R_5\right)\frac{\mathcal{M}_{22}}{h} + \left(\frac{Sp_{26}}{2L\cos\alpha} + \frac{P}{2}R_6\right)\frac{\mathcal{M}_{12}}{h}$$

$$\begin{aligned}
(A4.2.14) \quad N_{22}^4 &= \left(\frac{Sp_{12}}{L} + \frac{M}{L} R_1 + \frac{z}{h} R_1 \right) \frac{\mathcal{N}_{11}}{2} + \left(\frac{Sp_{22}}{L} + \frac{M}{L} R_2 + \frac{z}{h} R_2 \right) \frac{\mathcal{N}_{22}}{2} + \left(\frac{Sp_{26}}{L} + \frac{M}{L} R_3 + \frac{z}{h} R_3 \right) \frac{\mathcal{N}_{12}}{2} \\
&+ \left(-2 \frac{Sp_{12}}{L} + \frac{M}{L} R_4 + \frac{z}{h} R_4 \right) \frac{\mathcal{M}_{11}}{2h} + \left(-2 \frac{Sp_{22}}{L} + \frac{M}{L} R_5 + \frac{z}{h} R_5 \right) \frac{\mathcal{M}_{22}}{2h} \\
&+ \left(-2 \frac{Sp_{26}}{L} + \frac{M}{L} R_6 + \frac{z}{h} R_6 \right) \frac{\mathcal{M}_{12}}{2h} + \frac{Sr_{12}}{Sr_{22}} \frac{Q_1}{\sin \alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A4.2.15) \quad N_{22}^5 &= \left(\frac{Sp_{12}}{L} + \frac{M}{L} R_1 + \frac{z}{h} R_1 \right) \frac{\mathcal{N}_{11}}{2} + \left(\frac{Sp_{22}}{L} + \frac{M}{L} R_2 + \frac{z}{h} R_2 \right) \frac{\mathcal{N}_{22}}{2} + \left(\frac{Sp_{26}}{L} + \frac{M}{L} R_3 + \frac{z}{h} R_3 \right) \frac{\mathcal{N}_{12}}{2} \\
&+ \left(-2 \frac{Sp_{12}}{L} + \frac{M}{L} R_4 + \frac{z}{h} R_4 \right) \frac{\mathcal{M}_{11}}{2h} + \left(-2 \frac{Sp_{22}}{L} + \frac{M}{L} R_5 + \frac{z}{h} R_5 \right) \frac{\mathcal{M}_{22}}{2h} \\
&+ \left(-2 \frac{Sp_{26}}{L} + \frac{M}{L} R_6 + \frac{z}{h} R_6 \right) \frac{\mathcal{M}_{12}}{2h} - \frac{Sr_{12}}{Sr_{22}} \frac{Q_1}{\sin \alpha}
\end{aligned}$$

où les constantes I, J, K, L, M sont données par les relations (A4.1.7) à (A4.1.11),
les constantes $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ par les relations (A4.1.12) à (A4.1.17),

la constante P par la relation suivante,

$$(A4.2.16) \quad P = \frac{1}{12 \cos \alpha} - \frac{M}{2L \cos \alpha}$$

ANNEXE 4.3

EXPRESSION DES COEFFICIENTS DE SOUPLESSES HOMOGENEISEES

$$\begin{aligned}
 (A4.3.1) \quad a_{11} = & \frac{Sp_{11}}{2} + Sp_{22} \left(-\frac{Sp_{12}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_1 \right)^2 + Sp_{22} \left(\frac{Sp_{12}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_1 \right)^2 \\
 & + Sp_{12} \left(-\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} + \frac{P-J}{4} R_1 \right) + \frac{Sp_{16}}{2K} \left(-Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_1 \right) \\
 & - \frac{Sp_{26}}{K} \left(-Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_1 \right) \left(\frac{Sp_{12}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_1 \right) \\
 & + \frac{Sr_{22}}{4 \cos \alpha} \left(\left(\frac{Sp_{12}}{L} + \frac{M}{L} R_1 \right)^2 + \frac{(R_1)^2}{12} \right) + \frac{1}{4K} \left(-Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_1 \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (A4.3.2) \quad a_{22} = & Sp_{22} \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_2 \right)^2 + Sp_{22} \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_2 \right)^2 \\
 & + 2 \frac{Sp_{26}}{2K} \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_2 \right) \left(-Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_2 \right) \\
 & + \frac{Sr_{22}}{4 \cos \alpha} \left(\left(\frac{Sp_{22}}{2L} + \frac{M}{L} R_2 \right)^2 + \frac{(R_2)^2}{12} \right) + \frac{1}{4K} \left(-Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_2 \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (A4.3.3) \quad a_{66} = & Sp_{22} \left(-\frac{Sp_{26}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_3 \right)^2 + Sp_{22} \left(\frac{Sp_{26}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_3 \right)^2 \\
 & - Sp_{26} \left(\frac{Sp_{26}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_3 \right) \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} + \frac{(Sp_{26})^2}{KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{K} R_3 \right) \\
 & + Sp_{26} \left(-\frac{Sp_{26}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_3 \right) + \frac{Sr_{22}}{4 \cos \alpha} \left(\left(\frac{Sp_{26}}{L} + \frac{M}{L} R_3 \right)^2 + \frac{(R_3)^2}{12} \right) \\
 & + \frac{Sp_{66}}{4} \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} + \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{K} R_3 \right)^2 + \frac{Sp_{66}}{4} \\
 & + \frac{Sr_{66}}{4K^2 \cos \alpha} \left(-Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_3 \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{12} = & Sp_{22} \left(-\frac{Sp_{12}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_1 \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_2 \right) \\
& - Sp_{22} \left(\frac{Sp_{12}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_1 \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_2 \right) \\
& + Sp_{12} \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{8L \cos \alpha} + \frac{P-J}{4} R_2 \right) + \frac{Sp_{16}}{2K} \left(-Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_2 \right) \\
(A4.3.4) \quad & + \frac{Sp_{26}}{2K} \left(-Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_1 \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_2 \right) \\
& - \frac{Sp_{26}}{2K} \left(-Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_2 \right) \left(\frac{Sp_{12}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_1 \right) \\
& + \frac{Sr_{22}}{4 \cos \alpha} \left(\left(\frac{Sp_{12}}{L} + \frac{M}{L} R_1 \right) \left(\frac{Sp_{22}}{L} + \frac{M}{L} R_2 \right) + \frac{R_1R_2}{12} \right) \\
& + \frac{1}{4K} \left(-Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_1 \right) \left(-Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_2 \right)
\end{aligned}$$

(A4.3.5)

$$\begin{aligned}
a_{16} = & Sp_{22} \left(-\frac{Sp_{12}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_1 \right) \left(-\frac{Sp_{26}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_3 \right) \\
& + Sp_{22} \left(\frac{Sp_{12}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_1 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_3 \right) \\
& + Sp_{12} \left(-\frac{Sp_{26}}{4L \cos \alpha} + \frac{P-J}{4} R_3 \right) + \frac{Sp_{16}}{4} \left(2 - \frac{Sp_{66}}{K} + \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{K} R_3 \right) \\
& - \frac{Sp_{26}}{2K} \left(-Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_1 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_3 \right) \\
& - \frac{Sp_{26}}{2} \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} + \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{K} R_3 \right) \left(\frac{Sp_{12}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_1 \right) \\
& + \frac{Sp_{26}}{2} \left(-\frac{Sp_{12}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_1 \right) + \frac{Sr_{22}}{4 \cos \alpha} \left(\left(\frac{Sp_{12}}{L} + \frac{M}{L} R_1 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{L} + \frac{M}{L} R_3 \right) + \frac{R_1R_3}{12} \right) \\
& + \frac{Sp_{66}}{4K} \left(-Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_1 \right) \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} + \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{K} R_3 \right) \\
& + \frac{Sr_{66}}{4K^2 \cos \alpha} \left(-Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_1 \right) \left(-Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_3 \right)
\end{aligned}$$

(A4.3.6)

$$\begin{aligned}
a_{26} = & Sp_{22} \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_2 \right) \left(-\frac{Sp_{26}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_3 \right) \\
& - Sp_{22} \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_2 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_3 \right) \\
& - \frac{Sp_{26}}{2K} \left(-Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_2 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_3 \right) \\
& + \frac{Sp_{26}}{2} \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} + \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{K} R_3 \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_2 \right) \\
& + \frac{Sp_{26}}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_2 \right) + \frac{Sr_{22}}{4} \left(\left(\frac{Sp_{22}}{L} + \frac{M}{L} R_2 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{L} + \frac{M}{L} R_3 \right) + \frac{R_2 R_3}{12} \right) \\
& + \frac{Sp_{66}}{4K} \left(-Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_2 \right) \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} + \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{K} R_3 \right) \\
& + \frac{Sr_{66}}{4K^2 \cos \alpha} \left(-Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_2 \right) \left(-Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_3 \right)
\end{aligned}$$

(A4.3.7)

$$\begin{aligned}
b_{11} = & -\frac{Sp_{22}}{h} \left(\frac{Sp_{12}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_1 \right) \left(\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_4 \right) \\
& + \frac{Sp_{22}}{h} \left(-\frac{Sp_{12}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_1 \right) \left(-\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_4 \right) \\
& + \frac{Sp_{12}}{h} \left(\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} - \frac{P+J}{2} R_1 + \frac{P-J}{4} R_4 \right) \\
& - \frac{Sp_{16}}{2hK} \left(Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_4 \right) \\
& + \frac{Sp_{16}}{2hK} \left(-Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_1 \right) \\
& + \frac{Sp_{26}}{hK} \left(Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_4 \right) \left(\frac{Sp_{12}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_1 \right) \\
& + \frac{Sp_{26}}{2hK} \left(-Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_1 \right) \left(\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_4 \right) \\
& + \frac{Sr_{22}}{4h \cos \alpha} \left(\left(\frac{Sp_{12}}{L} + \frac{M}{L} R_1 \right) \left(-2 \frac{Sp_{12}}{L} + \frac{M}{L} R_4 \right) + \frac{R_1 R_4}{12} \right) \\
& - \frac{1}{4hK} \left(-Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_1 \right) \left(Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_4 \right)
\end{aligned}$$

(A4.3.8)

$$\begin{aligned}
b_{22} = & \frac{Sp_{22}}{h} \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_2 \right) \left(1 + \frac{Sp_{22}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_5 \right) \\
& + \frac{Sp_{22}}{h} \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_2 \right) \left(-1 + \frac{Sp_{22}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_5 \right) \\
& - \frac{Sp_{26}}{hK} \left(Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_5 \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_2 \right) \\
& + \frac{Sp_{26}}{2hK} \left(-Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_2 \right) \left(1 + \frac{Sp_{22}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_5 \right) \\
& + \frac{Sr_{22}}{4h \cos \alpha} \left(\left(\frac{Sp_{22}}{L} + \frac{M}{L} R_2 \right) \left(-2 \frac{Sp_{22}}{L} + \frac{M}{L} R_5 \right) + \frac{R_2 R_5}{12} \right) \\
& - \frac{1}{2hK} \left(-Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_2 \right) \left(Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_5 \right)
\end{aligned}$$

(A4.3.9)

$$\begin{aligned}
b_{66} = & \frac{Sp_{22}}{h} \left(\frac{Sp_{26}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_3 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_6 \right) \\
& + \frac{Sp_{22}}{h} \left(-\frac{Sp_{26}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_3 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_6 \right) \\
& - \frac{Sp_{26}}{h} \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} - \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{2K} R_6 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_3 \right) \\
& + \frac{Sp_{26}}{2h} \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} + \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{K} R_3 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_6 \right) \\
& + \frac{Sp_{26}}{h} \left(\frac{Sp_{26}}{4L \cos \alpha} - \frac{P}{2} R_3 \right) + \frac{Sp_{26}}{2h} \left(\frac{Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_6 \right) - \frac{Sp_{66}}{2h} \\
& + \frac{Sr_{22}}{4h \cos \alpha} \left(\left(\frac{Sp_{26}}{L} + \frac{M}{L} R_3 \right) \left(-2 \frac{Sp_{26}}{L} + \frac{M}{L} R_6 \right) + \frac{R_3 R_6}{12} \right) \\
& - \frac{Sp_{66}}{2hK} \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} - \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{2K} R_6 \right) \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} + \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{K} R_3 \right) \\
& - \frac{Sr_{66}}{2hK^2 \cos \alpha} \left(Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_6 \right) \left(-Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_3 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{12} = & -\frac{Sp_{22}}{h} \left(\frac{Sp_{12}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_1 \right) \left(1 + \frac{Sp_{22}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_5 \right) \\
& + \frac{Sp_{22}}{h} \left(-\frac{Sp_{12}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_1 \right) \left(-1 + \frac{Sp_{22}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_5 \right) \\
& + \frac{Sp_{12}}{h} \left(\frac{Sp_{22}}{2L \cos \alpha} + \frac{P-J}{4} R_5 \right) - \frac{Sp_{16}}{2hK} \left(Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_5 \right) \\
(A4.3.10) \quad & + \frac{Sp_{26}}{hK} \left(Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_5 \right) \left(\frac{Sp_{12}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_1 \right) \\
& + \frac{Sp_{26}}{2hK} \left(-Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_1 \right) \left(1 + \frac{Sp_{22}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_5 \right) \\
& + \frac{Sr_{22}}{4h \cos \alpha} \left(\left(\frac{Sp_{12}}{L} + \frac{M}{L} R_1 \right) \left(-2 \frac{Sp_{22}}{L} + \frac{M}{L} R_5 \right) + \frac{R_1 R_5}{12} \right) \\
& - \frac{1}{2K} \left(-Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_1 \right) \left(Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_5 \right)
\end{aligned}$$

(A4.3.11)

$$\begin{aligned}
b_{16} = & -\frac{Sp_{22}}{h} \left(\frac{Sp_{12}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_1 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_6 \right) \\
& + \frac{Sp_{22}}{h} \left(-\frac{Sp_{12}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_1 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_6 \right) \\
& + \frac{Sp_{12}}{h} \left(\frac{Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + \frac{P-J}{4} R_6 \right) - \frac{Sp_{26}}{h} \left(-\frac{Sp_{12}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_1 \right) \\
& + \frac{Sp_{16}}{2hK} \left(-Sp_{66} - \frac{(Sp_{26})^2}{2L \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{2} R_6 \right) \\
& - \frac{Sp_{26}}{h} \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} - \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{2K} R_6 \right) \left(\frac{Sp_{12}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_1 \right) \\
& + \frac{Sp_{26}}{2hK} \left(-Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_1 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_6 \right) \\
& + \frac{Sr_{22}}{4h \cos \alpha} \left(\left(\frac{Sp_{12}}{L} + \frac{M}{L} R_1 \right) \left(-2 \frac{Sp_{26}}{L} + \frac{M}{L} R_6 \right) + \frac{R_1 R_6}{12} \right) \\
& + \frac{Sp_{66}}{2hK} \left(-Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_1 \right) \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} - \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{2K} R_6 \right) \\
& - \frac{Sr_{66}}{2hK^2 \cos \alpha} \left(-Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_1 \right) \left(Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_6 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{21} = & \frac{Sp_{22}}{h} \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_2 \right) \left(\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_4 \right) \\
& + \frac{Sp_{22}}{h} \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_2 \right) \left(\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_4 \right) \\
& - \frac{Sp_{12}}{h} R_2 \frac{P+J}{2} + \frac{Sp_{16}}{2hK} \left(-Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_2 \right) \\
(A4.3.12) \quad & - \frac{Sp_{26}}{hK} \left(Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_4 \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_2 \right) \\
& + \frac{Sp_{26}}{2hK} \left(-Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_2 \right) \left(\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_4 \right) \\
& + \frac{Sr_{22}}{4h \cos \alpha} \left(\left(\frac{Sp_{22}}{L} + \frac{M}{L} R_2 \right) \left(-2 \frac{Sp_{12}}{L} + \frac{M}{L} R_4 \right) + \frac{R_2 R_4}{12} \right) \\
& - \frac{1}{2hK} \left(-Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_2 \right) \left(Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_4 \right)
\end{aligned}$$

(A4.3.13)

$$\begin{aligned}
b_{26} = & \frac{Sp_{22}}{h} \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_2 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_6 \right) \\
& + \frac{Sp_{22}}{h} \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_2 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_6 \right) \\
& + \frac{Sp_{26}}{h} \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} - \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{2K} R_6 \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_2 \right) \\
& + \frac{Sp_{26}}{2hK} \left(-Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_2 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_6 \right) \\
& - \frac{Sp_{26}}{h} \left(\frac{1}{2} - \frac{Sp_{22}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_2 \right) \\
& + \frac{Sr_{22}}{4h \cos \alpha} \left(\left(\frac{Sp_{22}}{L} + \frac{M}{L} R_2 \right) \left(-2 \frac{Sp_{26}}{L} + \frac{M}{L} R_6 \right) + \frac{R_2 R_6}{12} \right) \\
& + \frac{Sp_{66}}{2hK} \left(-Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_2 \right) \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} - \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{2K} R_6 \right) \\
& - \frac{Sr_{66}}{2hK^2 \cos \alpha} \left(-Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_2 \right) \left(Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_6 \right)
\end{aligned}$$

(A4.3.14)

$$\begin{aligned}
b_{61} = & -\frac{Sp_{22}}{h} \left(\frac{Sp_{26}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_3 \right) \left(\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_4 \right) \\
& + \frac{Sp_{22}}{h} \left(-\frac{Sp_{26}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_3 \right) \left(\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_4 \right) \\
& - \frac{Sp_{12}}{h} \frac{P+J}{2} R_3 + \frac{Sp_{16}}{2hK} \left(-Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{2} R_3 \right) \\
& + \frac{Sp_{26}}{hK} \left(Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_4 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_3 \right) \\
& + \frac{Sp_{26}}{2h} \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} + \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{K} R_3 \right) \left(\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_4 \right) + \frac{Sp_{26}}{2h} \\
& + \frac{Sr_{22}}{4h \cos \alpha} \left(\left(\frac{Sp_{26}}{L} + \frac{M}{L} R_3 \right) \left(-2 \frac{Sp_{12}}{L} + \frac{M}{L} R_4 \right) + \frac{R_3 R_4}{12} \right) \\
& - \frac{Sp_{66}}{2hK} \left(Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_4 \right) \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} + \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{K} R_3 \right) \\
& - \frac{Sr_{66}}{2hK^2 \cos \alpha} \left(Sp_{16} + \frac{Sp_{12}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_4 \right) \left(-Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_3 \right)
\end{aligned}$$

(A4.3.15)

$$\begin{aligned}
b_{62} = & -\frac{Sp_{22}}{h} \left(\frac{Sp_{26}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_3 \right) \left(1 + \frac{Sp_{22}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_5 \right) \\
& + \frac{Sp_{22}}{h} \left(-\frac{Sp_{26}}{4L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_3 \right) \left(-1 + \frac{Sp_{22}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_5 \right) \\
& + \frac{Sp_{26}}{hK} \left(Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_5 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{4L \cos \alpha} + \frac{J}{2} R_3 \right) \\
& + \frac{Sp_{26}}{2h} \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} + \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{K} R_3 \right) \left(1 + \frac{Sp_{22}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_5 \right) \\
& + \frac{Sp_{26}}{2h} \left(-1 + \frac{Sp_{22}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_5 \right) \\
& + \frac{Sr_{22}}{4h \cos \alpha} \left(\left(\frac{Sp_{26}}{L} + \frac{M}{L} R_3 \right) \left(-2 \frac{Sp_{22}}{L} + \frac{M}{L} R_5 \right) + \frac{R_3 R_5}{12} \right) \\
& - \frac{Sp_{66}}{2hK} \left(Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_5 \right) \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} + \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{K} R_3 \right) \\
& - \frac{Sr_{66}}{2hK^2 \cos \alpha} \left(Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_5 \right) \left(-Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L \cos \alpha} + Sp_{26}JR_3 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{11} = & 2 \frac{Sp_{11}}{h^2} + \frac{Sp_{22}}{h^2} \left(\left(\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_4 \right)^2 + \left(\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_4 \right)^2 \right) \\
& + 2 \frac{Sp_{12}}{h^2} \left(\left(\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_4 \right) - \left(\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_4 \right) \right) \\
& - 2 \frac{Sp_{16}}{h^2 K} \left(Sp_{16} + \frac{Sp_{12} Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26} J}{2} R_4 \right) \\
& - 2 \frac{Sp_{26}}{h^2 K} \left(Sp_{16} + \frac{Sp_{12} Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26} J}{2} R_4 \right) \left(\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_4 \right) \\
& + \frac{Sr_{22}}{4h^2 \cos \alpha} \left(\left(-2 \frac{Sp_{12}}{L} + \frac{M}{L} R_4 \right)^2 + \frac{R_4^2}{12h^2} \right) \\
& + \frac{1}{h^2 K} \left(Sp_{16} + \frac{Sp_{12} Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26} J}{2} R_4 \right)^2
\end{aligned}
\tag{A4.3.16}$$

$$\begin{aligned}
d_{22} = & \frac{Sp_{22}}{h^2} \left(\left(1 + \frac{Sp_{22}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_5 \right)^2 + \left(-1 + \frac{Sp_{22}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_5 \right)^2 \right) \\
& - 2 \frac{Sp_{26}}{h^2 K} \left(Sp_{26} + \frac{Sp_{22} Sp_{26}}{4L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26} J}{2K} R_5 \right) \left(1 + \frac{Sp_{22}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_5 \right) \\
& + \frac{Sr_{22}}{4h^2} \left(\left(-2 \frac{Sp_{22}}{L} + \frac{M}{L} R_5 \right)^2 + \frac{R_5^2}{12h^2} \right) + \frac{1}{h^2 K} \left(Sp_{26} + \frac{Sp_{22} Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26} J}{2K} R_5 \right)^2
\end{aligned}
\tag{A4.3.17}$$

$$\begin{aligned}
d_{66} = & \frac{Sp_{22}}{h^2} \left(\frac{Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_6 \right)^2 + \frac{Sp_{22}}{h^2} \left(\frac{Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_6 \right)^2 \\
& + 2 \frac{Sp_{26}}{h^2} \left(\frac{Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_6 \right) \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} - \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26} J}{2K} R_6 \right) \\
& - \frac{Sp_{26}}{h^2} \left(\frac{Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_6 \right) + \frac{Sr_{22}}{4h^2 \cos \alpha} \left(\left(-2 \frac{Sp_{26}}{L} + \frac{M}{L} R_6 \right)^2 + \frac{(R_6)^2}{12} \right) \\
& + \frac{Sp_{66}}{h^2} \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} - \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26} J}{K} R_6 \right)^2 + \frac{Sp_{66}}{h^2} \\
& + \frac{Sr_{66}}{h^2 K^2 \cos \alpha} \left(Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26} J}{2} R_6 \right)^2
\end{aligned}
\tag{A4.3.18}$$

$$\begin{aligned}
d_{12} = & \frac{Sp_{22}}{h^2} \left(\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_4 \right) \left(-1 + \frac{Sp_{22}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_5 \right) \\
& + \frac{Sp_{22}}{h^2} \left(\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_4 \right) \left(1 + \frac{Sp_{22}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_5 \right) \\
& + \frac{Sp_{12}}{h^2} \left(2 - \frac{P+J}{2} R_5 \right) - \frac{Sp_{16}}{h^2 K} \left(Sp_{26} + \frac{Sp_{22} Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26} J}{2} R_5 \right) \\
(A4.3.19) \quad & - \frac{Sp_{26}}{2h^2 K} \left(Sp_{16} + \frac{Sp_{12} Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26} J}{2} R_4 \right) \left(1 + \frac{Sp_{22}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_5 \right) \\
& - \frac{Sp_{26}}{2h^2 K} \left(Sp_{26} + \frac{Sp_{22} Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26} J}{2} R_5 \right) \left(\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_4 \right) \\
& + \frac{Sr_{22}}{4h^2 \cos \alpha} \left(\left(-2 \frac{Sp_{12}}{L} + \frac{M}{L} R_4 \right) \left(-2 \frac{Sp_{22}}{L} + \frac{M}{L} R_5 \right) + \frac{R_4 R_5}{12} \right) \\
& + \frac{1}{h^2 K} \left(Sp_{16} + \frac{Sp_{12} Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26} J}{2} R_4 \right) \left(Sp_{26} + \frac{Sp_{22} Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26} J}{2} R_5 \right)
\end{aligned}$$

(A4.3.20)

$$\begin{aligned}
d_{16} = & \frac{Sp_{22}}{h^2} \left(\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_4 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_6 \right) \\
& + \frac{Sp_{22}}{h^2} \left(\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_4 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_6 \right) \\
& - \frac{Sp_{12}}{h^2} \frac{P+J}{2} R_6 + \frac{Sp_{16}}{h^2} \left(2 - \frac{Sp_{66}}{K} - \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26} J}{2K} R_6 \right) \\
& + \frac{Sp_{26}}{h^2} \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} - \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26} J}{2K} R_6 \right) \left(\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_4 \right) \\
& - \frac{Sp_{26}}{h^2 K} \left(Sp_{16} + \frac{Sp_{12} Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26} J}{2} R_4 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_6 \right) \\
& - \frac{Sp_{26}}{h^2} \left(\frac{Sp_{12}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_4 \right) \\
& + \frac{Sr_{22}}{4h^2 \cos \alpha} \left(\left(-2 \frac{Sp_{12}}{L} + \frac{M}{L} R_4 \right) \left(-2 \frac{Sp_{26}}{L} + \frac{M}{L} R_6 \right) + \frac{R_4 R_6}{12} \right) \\
& - \frac{Sp_{66}}{h^2 K} \left(Sp_{16} + \frac{Sp_{12} Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26} J}{2} R_4 \right) \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} - \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26} J}{2K} R_6 \right) \\
& + \frac{Sr_{66}}{h^2 K^2 \cos \alpha} \left(Sp_{16} + \frac{Sp_{12} Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26} J}{2} R_4 \right) \left(Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26} J}{2} R_6 \right)
\end{aligned}$$

(A4.3.21)

$$\begin{aligned}
d_{26} = & \frac{Sp_{22}}{h^2} \left(-1 + \frac{Sp_{22}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_5 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_6 \right) \\
& + \frac{Sp_{22}}{h^2} \left(1 + \frac{Sp_{22}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_5 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_6 \right) \\
& + \frac{Sp_{26}}{h^2} \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} - \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{2K} R_6 \right) \left(1 + \frac{Sp_{22}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_5 \right) \\
& - \frac{Sp_{26}}{h^2 K} \left(Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_5 \right) \left(\frac{Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{J}{2} R_6 \right) \\
& - \frac{Sp_{26}}{h^2} \left(-1 + \frac{Sp_{22}}{2L \cos \alpha} + \frac{P}{2} R_5 \right) \\
& + \frac{Sr_{22}}{4h^2 \cos \alpha} \left(\left(-2 \frac{Sp_{22}}{L} + \frac{M}{L} R_5 \right) \left(-2 \frac{Sp_{26}}{L} + \frac{M}{L} R_6 \right) + \frac{R_5 R_6}{12} \right) \\
& - \frac{Sp_{66}}{h^2 K} \left(Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_5 \right) \left(1 - \frac{Sp_{66}}{K} - \frac{(Sp_{26})^2}{2KL \cos \alpha} + \frac{Sp_{26}J}{2K} R_6 \right) \\
& + \frac{Sr_{66}}{h^2 K^2 \cos \alpha} \left(Sp_{26} + \frac{Sp_{22}Sp_{26}}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_5 \right) \left(Sp_{66} + \frac{(Sp_{26})^2}{2L \cos \alpha} - \frac{Sp_{26}J}{2} R_6 \right)
\end{aligned}$$

$$(A4.3.22) \quad f_{44} = \left(Sp_{66} - \frac{Sp_{26}^2}{Sp_{22}} \right) \cot an^2 \alpha + Sr_{66} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$(A4.3.23) \quad f_{55} = \left(Sp_{11} - \frac{Sp_{12}^2}{Sp_{22}} \right) \cot an^2 \alpha + \left(Sr_{11} - \frac{Sr_{12}^2}{Sr_{22}} \right) \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}$$

$$(A4.3.24) \quad f_{45} = \left(\frac{Sp_{12}Sp_{26}}{Sp_{22}} - Sp_{16} \right) \cot an^2 \alpha$$

où les constantes I, J, K, L, M sont données par les relations (A4.1.7) à (A4.1.11), la constante P par la relation (A4.2.16), les constantes $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ par les relations (A4.1.12) à (A4.1.17).