



**HAL**  
open science

# Contribution à l'utilisation de la méthode des éléments finis en mécanique des sols dans le domaine de l'élasto-plasticité

Athanasios Barbas

► **To cite this version:**

Athanasios Barbas. Contribution à l'utilisation de la méthode des éléments finis en mécanique des sols dans le domaine de l'élasto-plasticité. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1981. Français. NNT: . tel-00529405

**HAL Id: tel-00529405**

**<https://pastel.hal.science/tel-00529405>**

Submitted on 25 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

70454

X 212 40255 13

S 10347 (2)

THESE

présentée

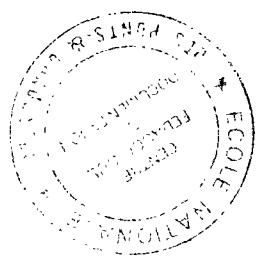
A L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

pour obtenir le diplôme de

DOCTEUR-INGÉNIEUR DE GÉNIE CIVIL  
OPTION INFRASTRUCTURES

par

Monsieur Athanasios BARBAS



SUJET DE LA THESE :

CONTRIBUTION A L'UTILISATION DE LA MÉTHODE  
DES ÉLÉMENTS FINIS EN MÉCANIQUE DES SOLS  
DANS LE DOMAINE DE L'ÉLASTO-PLASTICITÉ

soutenue le 16 mars 1981

devant le Jury composé de :

- |                |                     |
|----------------|---------------------|
| M. FRÉMOND     | <i>Président</i>    |
| F. SCHLOSSER   | <i>Rapporteur</i>   |
| F. BAGUELIN    | } <i>Examineurs</i> |
| M. BATISSE     |                     |
| R. SIESTRUNCK  |                     |
| R. FRANK       | } <i>Invités</i>    |
| J.-C. PARRIAUD |                     |
| D. VALALAS     |                     |

10





## REMERCIEMENTS

Que tous ceux qui m'ont apporté leur aide pour la réalisation de ce travail trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens notamment à remercier :

L'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées qui m'a accueilli comme élève-chercheur-boursier et le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées qui a mis à ma disposition tous les moyens nécessaires au bon déroulement de cette recherche.

Messieurs :

M. FREMOND, Professeur et Responsable de Formation à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, qui a bien voulu examiner ce travail et présider le jury.

F. SCHLOSSER, Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, qui a bien voulu examiner ce travail et a accepté la charge de rapporteur.

M. BATISSE, sous-Directeur Général Adjoint pour les Sciences à l'UNESCO,

J.-C. PARRIAUD, Directeur du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées,

P. SIESTRUNCK, Professeur à l'Université P. et M. Curie (Paris VI),

D. VALALAS, Professeur à l'Université Aristote de Thessalonique, qui ont bien voulu examiner ce travail et participer au jury.

Monsieur F. BAGUELIN, Chef du Département des Sols et Fondations du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Directeur de Recherche à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, qui m'a accueilli dans son département et a dirigé cette thèse.

Monsieur S. AMAR, Chef de la Section des Fondations, qui m'a reçu dans sa section, et dont le soutien chaleureux et amical m'a beaucoup aidé pour cette recherche.

Monsieur R. FRANK, mon conseiller d'étude, qui a montré tant d'attention, de patience, d'intérêt, et une inlassable disponibilité pour m'aider dans ce travail tant du point de vue scientifique que du point de vue pratique. Je le remercie également pour son amitié et pour son esprit de coopération fraternel et solidaire.

Monsieur P. HUMBERT, Chef de la Section de Modèles Numériques en Géomécanique, pour son aide et son aimable collaboration, notamment en ce qui concerne les problèmes de programmation de la méthode des éléments finis.

Messieurs O. FARZANEH, A. GUENOT, J.-N. THEILLOUT pour leur participation à l'élaboration de la troisième partie et les applications intéressantes qu'ils nous ont fournies.

Tous les membres des Sections des Fondations et des Modèles Numériques en Géomécanique, et particulièrement Messieurs A. DUBOUCHET et M. KUTNIAK qui m'ont beaucoup aidé pour la mise en oeuvre et l'exécution matérielle des calculs.

Je remercie enfin Mesdames et Mesdemoiselles F. BISMUTH, F. GARZI, C. GOUTTEBESSIS, D. GUILLEMIN et M. NAPOLITANO pour la frappe du manuscrit, travail particulièrement ingrat.



## S O M M A I R E

---

INTRODUCTION	1
PARTIE I. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DES SOLS	3
1.1. INTRODUCTION	4
1.2. GENERALITES SUR LE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE	5
1.2.1. Critères de plasticité	5
1.2.2. Calcul des déformations plastiques. Loi d'écoulement	12
1.3. MODELES DE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DES SOLS	15
1.3.1. Modèles Cam Clay	16
1.3.2. Modèle de Di Maggio-Sandler	23
1.3.3. Modèle de Lade-Duncan	27
1.3.4. Modèle de Frydman et al., Monnet-Gielly	31
1.3.5. Modèle de double écrouissage de Vermeer	35
1.3.6. Modèles de P. Wilde	41
1.3.7. Modèle de Nova et Wood	47
1.3.8. Loi incrémentale de Boulon-Chambon-Darve	54
1.3.9. Modèles anisotropes. Interprétation générale des modèles à écrouissage anisotrope	59
1.3.10. Modèle d'écrouissage anisotrope pour les sols (Mroz Z., Norris V.A., Zienkiewicz O.C.)	59
1.4. CONCLUSION	61
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	63
PARTIE II. ETUDE THEORIQUE DES PROBLEMES DE CONTACT EN GEOMECHANIQUE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS. COUPLAGE AVEC L'ELASTOPLASTICITE DANS LE MASSIF	69
2.1. INTRODUCTION	70
2.2. PRESENTATION DE LA STRUCTURE GENERALE DU PROGRAMME D'ELEMENTS FINIS ROSALIE	72
2.2.1. Introduction au programme ROSALIE	72
2.2.2. Structure du Groupe 5	72

2.3.	ALGORITHME UTILISE DANS LE PROGRAMME ROSALIE POUR LA SOLUTION DES PROBLEMES DE CONTACT EN GEOMECANIQUE (FROTTA)	
2.3.1.	Position du problème	75
2.3.2.	Lois de comportement de la discontinuité	75
2.3.3.	Modélisation par éléments finis	76
2.4.	ALGORITHME UTILISE DANS ROSALIE POUR LA MODELISATION DU COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DES SOLS (PLASTO)	81
2.4.1.	Méthode des contraintes initiales	81
2.4.2.	Mise en oeuvre dans GROUPS/PLASTO	83
2.5.	ALGORITHMES PERMETTANT LA SOLUTION DES PROBLEMES DE CONTACT COUPLES AVEC L'ELASTOPLASTICITE DANS LE MASSIF	86
2.5.1.	Introduction	86
2.5.2.	Position du problème	86
2.5.3.	Algorithme IFRØPL 1	86
2.5.4.	Algorithme IFRØPL 2	87
2.5.5.	Comparaison des algorithmes IFRØPL 1 et IFRØPL 2	90
2.6.	CONCLUSION	95
	REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	96
PARTIE III . APPLICATIONS		98
	INTRODUCTION	99
3.1.	ETUDE DE L'INTERACTION SOL-CYLINDRE DE COMPACTAGE	100
3.1.1.	Introduction	100
3.1.2.	Position du problème	100
3.1.3.	Modélisation du problème par la méthode des éléments finis	100
3.1.4.	Résultats obtenus	102
3.2.	ETUDE D'UN BOSSAGE D'ANCRAGE D'UN CABLE DE PRECONTRAINTE ADDITIONNELLE	107
3.2.1.	Introduction	107
3.2.2.	Position du problème	107
3.2.3.	Modélisation du problème	107
3.2.4.	Résultats obtenus	109

3.3. PIEU SOUS CHARGE VERTICALE	113
3.3.1. Introduction	113
3.3.2. Modélisation du problème	113
3.3.3. Comparaison des résultats obtenus	115
3.3.4. Conclusion	115
3.4. ETUDE DU COMPORTEMENT D'UN REMBLAI SUR VERSANT INSTABLE	131
3.4.1. Introduction	131
3.4.2. Position du problème	131
3.4.3. Modélisation du problème	132
3.4.4. Résultats des calculs	134
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	139
CONCLUSION GENERALE	140





## INTRODUCTION +++++

La mécanique des sols repose bien souvent sur des approximations en ce qui concerne le comportement du matériau et ceci pour les deux seuls aspects qu'elle examine, à savoir, schématiquement, la capacité portante et le tassement. Ainsi fait-on l'hypothèse d'un comportement rigide-plastique pour le premier, et l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire pour le second.

Cette manière unique de voir est de plus en plus remise en question pour plusieurs raisons :

- les sols ont un comportement plus complexe, qu'il apparait nécessaire, de plus, de suivre tout le long de la déformation. Ainsi fait-on appel de plus en plus à des modèles élasto-plastiques, plus ou moins élaborés, ou à des modèles visco-élastiques, voire visco-élasto-plastiques.
- l'apparition et le développement de méthodes numériques puissantes, telles que la méthode des éléments finis, qui permettent de modéliser tout le continuum
- l'augmentation formidable des moyens de calcul, avec la naissance et le développement continu des ordinateurs modernes, sans laquelle les modèles de comportement complexes des sols et la méthode des éléments finis n'auraient pas pu voir le jour.

L'utilisation de la méthode des éléments finis en mécanique des sols est, cependant, particulièrement compliquée. D'une part, il est nécessaire parfois de prendre en compte des comportements du massif de sol très élaborés, avec, éventuellement des grandes déformations. D'autre part, ayant la plupart du temps affaire à des problèmes d'interaction sol-structure ou sol-sol, on doit modéliser correctement les surfaces de contact.

Les recherches dans le domaine s'orientent donc dans deux directions :

- la recherche de modèles de comportement réalistes et généraux, du moins pour le type de sol que l'on étudie et le type du chargement.
- la mise au point d'algorithmes de résolution des divers aspects des problèmes de mécanique de sols par la méthode des éléments finis.

La recherche entreprise ici s'est concentrée, d'une part sur le comportement des sols pulvérulents et d'autre part sur la résolution par éléments finis, en petits déplacements des problèmes de contact couplés avec l'élasto-plasticité des massifs de sol.

Ainsi, la première partie est-elle une synthèse bibliographique qui fait le point des connaissances actuelles sur les modèles élasto-plastiques avec écrouissage utilisés pour représenter le comportement des sables. Cette partie est donc l'occasion de présenter un certain nombre de modèles développés récemment et de réfléchir à leur capacité à représenter d'une façon pratique certains aspects du comportement réel des sols pulvérulents.

La deuxième relate la mise au point d'algorithmes de résolution par la méthode des éléments finis du problème de frottement-décollement d'interfaces. On élabore des algorithmes qui non seulement résolvent le problème des contacts mais qui prennent aussi en compte les corrections dues à la plastification du massif pendant le calcul.

Enfin, la troisième partie présente un certain nombre d'applications et de mises en oeuvre du programme couplé. Ces applications et leurs interprétations permettent d'évaluer clairement l'utilité d'un tel programme. Les exemples choisis, au nombre de quatre, sont sensiblement différents et touchent à divers domaines du génie civil.

Les programmes mis au point ont été incorporés dans le système d'éléments finis ROSALIE du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.

## A V E R T I S S E M E N T

---

Conventions de signes : La première partie utilise la convention de signes de la mécanique des sols (contraintes et déformations positives en compression). Par contre, les deuxième et troisième parties, touchant directement à la méthode des éléments finis, utilisent la convention de la mécanique des milieux continus, en général (contraintes et déformations positives en traction).

PARTIE I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

COMPORTEMENT ÉLASTOPLASTIQUE DES SOLS

## 1.1 INTRODUCTION

Coulomb en 1773 fut le premier à proposer un critère de plasticité qui fut appliqué par Poncelet (1840) et Rankine (1853) aux calculs de travaux de soutènements. Tresca en 1864 publia les résultats de ses expériences sur les métaux et proposa un nouveau critère basé sur la constatation qu'un métal présente un comportement plastique quand la contrainte de cisaillement atteint un seuil critique. Saint-Venant appliqua le critère de Tresca en 1870 - 1872 pour étudier un tube sous torsion ou flexion et introduisit le concept du corps parfaitement plastique pour ce problème. En 1871 Lévy adoptant ce concept proposa des relations tri-dimensionnelles entre contraintes et déformations plastiques :

$$de_{ij} = S_{ij} d\lambda$$

où

$\epsilon_{ij}$  est le tenseur des déformations  
 $S_{ij}$  est le tenseur déviatorique des contraintes  
 $d\lambda$  est un scalaire

Les équations de Lévy ne trouvèrent pas une large diffusion en dehors de la France jusqu'en 1913 où Von Mises les formula indépendamment. L'inconvénient des équations de Lévy-Mises qui supposaient un matériau fictif à déformations élastiques nulles fut levé par Prandtl en 1924 pour le problème plan et par Reuss en 1930 pour le problème tri-dimensionnel. Reuss écrivit :

$$de^P_{ij} = S_{ij} d\lambda$$

où

$\epsilon^P_{ij}$  est le tenseur des déformations plastiques.

Hill en 1950 publia "The mathematical theory of plasticity" où il introduisit l'hypothèse du "travail maximal" et posa les bases d'une conception complète de la théorie de la plasticité. Ces dernières trente années une multitude de publications a paru sur ce sujet, de nombreux chercheurs ont élaborés des modèles mathématiques pour représenter le plus fidèlement possible le comportement de divers matériaux.

Le but de la première partie de ce travail est, d'une part de faire le point sur l'état des connaissances concernant les modèles de comportement des sols et, d'autre part de conclure sur l'aptitude de ces modèles à représenter certains phénomènes pratiques. Nous nous intéressons essentiellement aux sols pulvérulents pour deux raisons : la première est que pour les sols cohérents les modèles élasto-plastiques (avec écrouissage) du type Cam-Clay semblent avoir déjà rencontré un certain consensus parmi les mécaniciens des sols pour simuler des chargements statiques sur les argiles. La seconde est que les axes de la recherche actuelle en matière de comportement des sols, sont d'une part la modélisation des phénomènes visqueux (fluage, etc) pour les sols cohérents et d'autre part la modélisation du phénomène de la dilatance pour les sols pulvérulents. Or, seul ce dernier phénomène peut être approché par des lois de comportement élasto-plastiques, statiques par définition même. Les phénomènes visqueux, eux nécessitent des lois de comportement en fonction du temps que nous n'aborderons pas ici (visco-élasticité, visco-plasticité etc).

Cependant le modèle Cam-Clay en tant que premier modèle élasto-plastique avec écrouissage utilisé en mécanique des sols ayant influencé beaucoup les modèles de sols pulvérulents, sera également présenté (voir § 1.3.1.).

## 1.2. GENERALITES SUR LE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE

Un corps est dit avoir un comportement "élastoplastique" quand au-delà d'un certain niveau de chargement il présente des déformations réversibles (élastiques) mais aussi des déformations irréversibles (plastiques) et que ces déformations et les contraintes obéissent à des lois bien précises. Notons que la considération d'un corps élastoplastique se fait en excluant l'influence du paramètre temps.

On définit d'abord un critère de plasticité qui est une fonction des contraintes, éventuellement écrouissable avec les déformations. Ce critère ne peut être dépassé en aucun point. Lorsqu'il est atteint, débutent les déformations irréversibles ou plastiques. Ces déformations sont, elles, régies par une loi dite loi d'écoulement. Pour un comportement élastoplastique, on écrit :

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p$$

où

$d\epsilon$  sont les déformations totales  
 $d\epsilon^e$  sont les déformations élastiques  
 $d\epsilon^p$  sont les déformations plastiques.

En considérant le comportement élastique connu, décrit par la loi de Hooke ou loi de Hooke généralisée, on présente dans les paragraphes qui suivent les autres éléments qui sont nécessaires pour modéliser un comportement élastoplastique.

### 1.2.1. Critères de plasticité

#### 1.2.1.1. Introduction

Représentons sur un diagramme orthogonal les résultats d'un essai de traction ou de compression simple d'un sol ; nous obtiendrons la courbe de la figure 1.

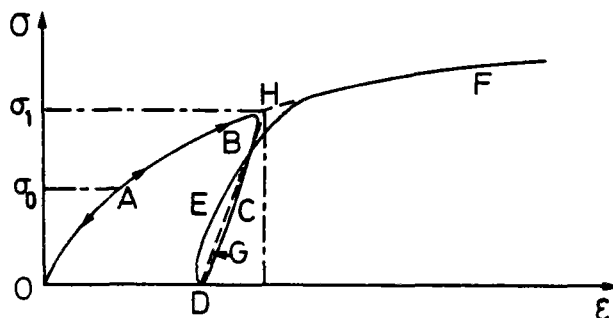


Fig. 1 - Essais de compression (traction) simple du sol.

Le long du chemin OA le comportement est élastique, c'est-à-dire quand on décharge on revient à 0. Le point A, point limite au-delà duquel on n'a plus le comportement élastique correspond à une contrainte caractéristique dite "seuil" de plasticité initial ou "limite élastique". Après l'avoir franchi, et si étant au point B, par exemple, on décharge, le chemin de déchargement ne sera pas BAO mais BCD. La déformation qui reste  $OD = \epsilon^p$  est une déformation irréversible, dite plastique. On est donc entré dans le domaine plastique. Si on recharge, le chemin sera DEF, F étant le prolongement du chemin OAB. Il rejoint alors le chemin du premier chargement.

On peut assimiler en général la courbe BCDEF à la droite DGH et admettre que les déformations sont réversibles le long de cette ligne. Le nouveau seuil de plasticité est alors le point H qui est plus élevé que le précédent. Cette élévation du seuil de plasticité s'appelle l'écrouissage.

D'une façon plus générale et pour les cas tridimensionnels, le seuil de plasticité est remplacé par une fonction  $f$  dite "fonction de charge" ou critère de plasticité telle que

si  $f < 0$  on est dans le domaine élastique  
 $f = 0$  on est dans le domaine plastique.

Cette fonction décrit dans l'espace des contraintes-déformations une surface dite communément en Mécanique des Sols "surface d'état limite" dont la projection dans le plan des contraintes est une courbe dite "courbe d'état limite".

Le critère de plasticité  $f$  est une fonction du tenseur des contraintes ( $\sigma_{ij}$ ) et des paramètres d'érouissage ( $k$ ). On écrit donc  $f(\sigma_{ij}, k)$  (Hill 1950). Notons ici que le paramètre d'érouissage le plus utilisé pour les sols a été la déformation volumique plastique  $\epsilon_v$ .

Divers modèles ont été proposés pour le phénomène d'érouissage.

Nous citons ici les deux tendances principales :

- i) Celle de la théorie de l'érouissage "isotrope" de Taylor et Quinney (1931) qui admet que dans le domaine élastique intérieur au critère de plasticité se transforme par homothétie de centre 0 pendant l'érouissage (fig. 2),
- ii) et celle de la théorie de l'érouissage cinématique de Prager (1955-1958) qui propose que le domaine élastique se translate dans l'espace des contraintes (fig. 3).

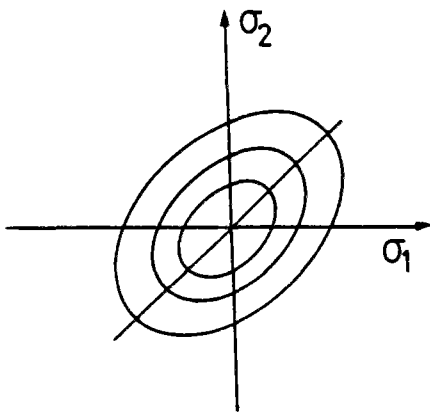


Fig. 2. - Modèle d'érouissage isotrope.

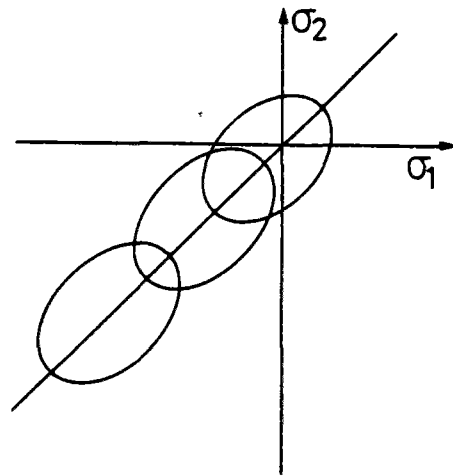


Fig. 3. - Modèle d'érouissage cinématique.

Notons enfin que la tendance aujourd'hui est une combinaison de deux théories pour créer un modèle "isotrope cinématique" ou encore "anisotrope cinématique" (voir plus bas § 1.3.9).

L'allure de la courbe  $(\sigma, \epsilon)$  donnée dans la figure 1 est valable pour un érouissage positif. Il y a des matériaux qui, sous un certain chemin de charge et au-delà d'un certain pic présentent du ramollissement, c'est-à-dire un érouissage négatif (fig. 4).

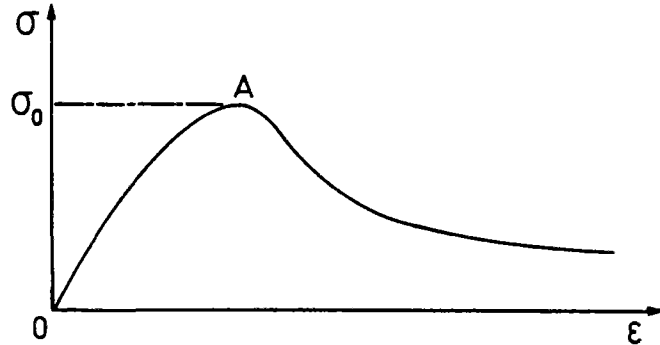


Fig. 4. - Courbe contraintes-déformations avec écrouissage négatif.

Le matériau pour lequel on ne peut jamais dépasser le premier seuil de plasticité (pas d'écrouissage), donc pour lequel avec une contrainte  $\sigma_0$ , on peut avoir l'allongement illimité est dit parfaitement plastique (fig. 5).

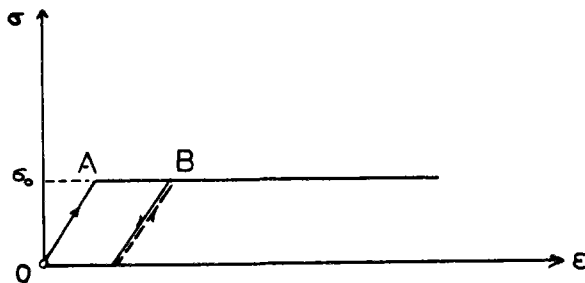


Fig. 5. - Matériau parfaitement plastique.

#### 1.2.1.2. Critères classiques de plasticité

Plusieurs critères de plasticité parfaite ont été initialement développés pour les métaux et puis ont été utilisés pour les sols, notamment en tant que critères de rupture.

##### a) Critère de Coulomb

Coulomb a proposé en 1773 le premier critère de plasticité en Mécanique des Sols, et ce critère est encore maintenant très couramment utilisé. Il se compose de deux droites dans le plan de Mohr ( $\tau, \sigma$ ) (fig. 6). L'équation de ces droites est :

$$f(\sigma) = \sigma_1 - \sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0 \quad (1)$$

où

$\sigma_1, \sigma_3$  sont les contraintes principales extrêmes,  
 $\phi$  est l'angle de frottement et  $C$  la cohésion.



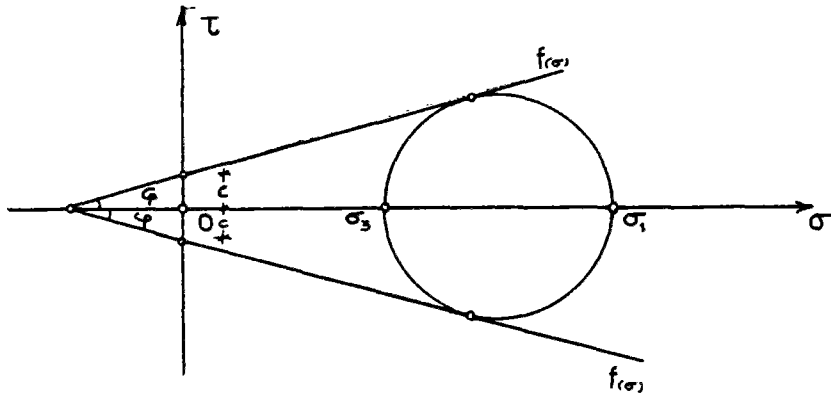


Fig. 6. - Critère de Coulomb.

Dans l'espace des contraintes  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ , la surface définie par la fonction de charge est une pyramide de base hexagonale et d'axe  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  (fig. 7a et 7b)

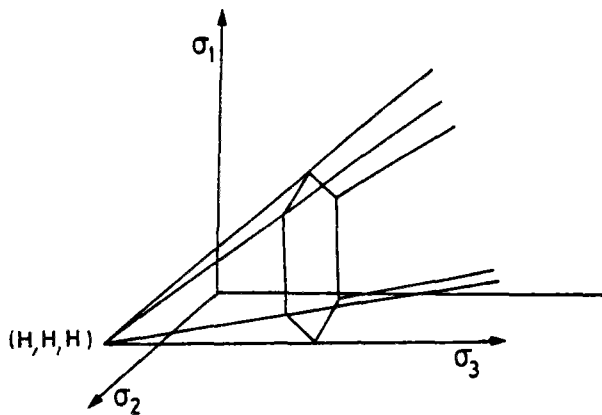


Fig. 7a. - Critère de Coulomb dans l'espace.

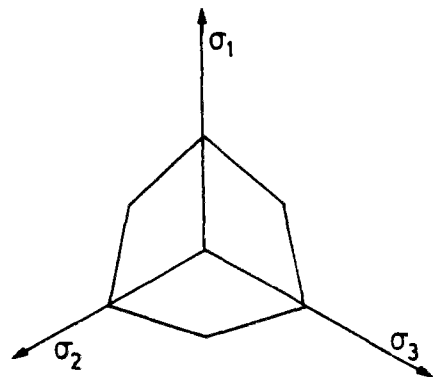


Fig. 7b. - Projection du critère de Coulomb dans le plan  $\pi$  (plan d'équation  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ ).

b) Critère de Tresca

Tresca (1864) après des essais sur du plomb a conclu que la plastification arrive quand la contrainte tangentielle maximale atteint une certaine limite. On peut écrire donc :

$$f = \sigma_1 - \sigma_3 - 2k \quad (2)$$

où

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad \text{et } k \text{ est une constante. (cohésion du sol)}$$

Remarquons que la contrainte principale intermédiaire ne joue aucun rôle comme dans le critère de Coulomb.

Dans l'espace  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ , la surface définie par la fonction de charge est un prisme parallèle à l'axe  $(1,1,1)$  à base hexagonale dans le plan perpendiculaire au plan  $\pi$  :  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$  (fig. 8a et 8b).

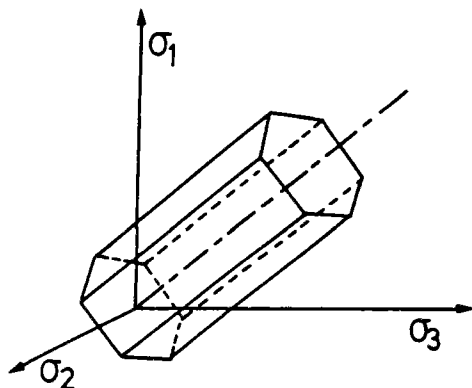


Fig. 8a. - Représentation du critère de Tresca dans l'espace  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ .

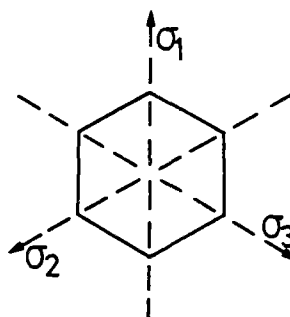


Fig. 8b. - Section du prisme sur le plan  $\pi$  :  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ .

Le critère de Tresca est parfois exprimé en termes des invariants du tenseur des contraintes sous la forme :

$$4 J_2^3 - 27 J_3^2 - 36 k^2 J_2^2 + 96 k^4 J_2 - 64 k^6 = 0$$

où  $J_2$  et  $J_3$  sont les deuxième et troisième invariants du tenseur des contraintes déviatoriques.

### c) Critère de Mohr

O. Mohr (1900), inspiré par les critères de Coulomb et de Tresca, a proposé une généralisation sous la forme :

$$f = \sigma_1 - \sigma_3 - g(\sigma_1 + \sigma_3) = 0 \quad (3)$$

où  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  et  $g$  est une fonction à déterminer expérimentalement.

L'équation (3) décrit dans le plan  $(\sigma, \tau)$  deux courbes dites courbes intrinsèques du matériau, symétriques par rapport à l'axe des  $\sigma$  (fig. 9) et qui sont tangentes aux cercles de Mohr.

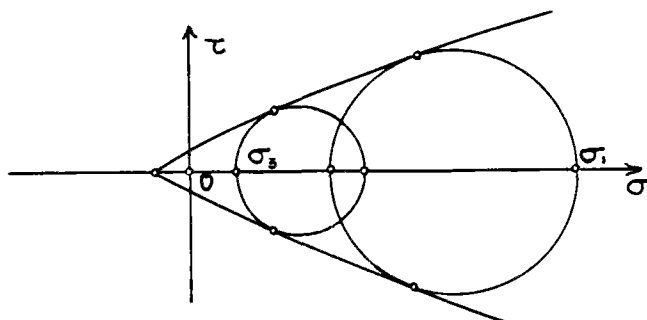


Fig. 9.- Courbes intrinsèques du matériau.

d) Critère de Von Mises

Le fait que les critères précédents ne prennent pas en compte la contrainte principale intermédiaire est une faiblesse et pour la surmonter, Von Mises (1913) a proposé que la plastification ne commence que quand le deuxième invariant du tenseur déviatorique ( $J'_2$ ) atteint une valeur limite, c'est-à-dire :

$$f = 2 J'_2 - 2 k^2 = 0 \quad (4) \quad \text{où } J'_2 = S_{ij} S_{ij} \quad \text{où } S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} (\sigma_{kk}) \delta_{ij}$$

$$\text{ou } f = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 6k^2 = 0 \quad (5)$$

$$\text{ou } f = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau^2_{xy} + \tau^2_{yz} + \tau^2_{zx}) - 6k^2 = 0 \quad (6)$$

où  $k$  est une constante. On peut remarquer facilement que pour un matériau sous une contrainte de cisaillement seule ( $\sigma_1 = -\sigma_2$ ,  $\sigma_3 = 0$ ), on a :

$$J'_2 = \sigma_1^2 - k^2$$

donc la constante  $k$  représente la contrainte maximale admissible en cisaillement pur.

Dans l'espace  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ , la surface définie par la fonction de charge est un cylindre de révolution parallèle à l'axe  $(1,1,1)$ . Sa projection sur le plan  $\pi(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0)$  donne un cercle dont le rayon est  $k\sqrt{2}$  (fig. 10a et 10b).

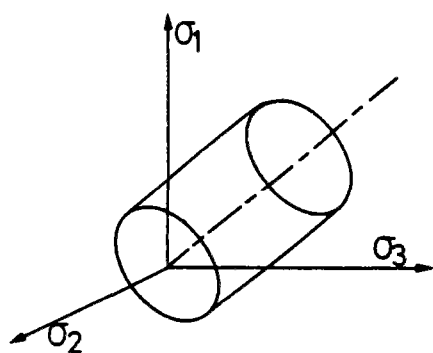


Fig. 10a. - Représentation du critère de Von Mises dans l'espace  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ .

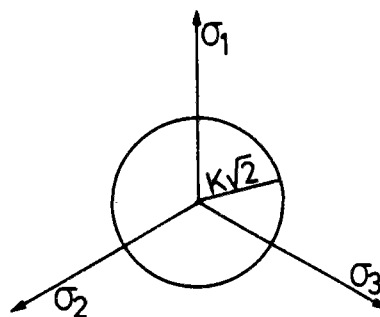


Fig. 10 b. - Projection du cylindre sur le plan  $\pi$ .

e) Critère de Drucker et Prager

Drucker et Prager (1952) ont présenté un critère qui prend en compte le premier invariant du tenseur des contraintes ( $J_1$ ) et le deuxième invariant du déviateur du tenseur des contraintes ( $J'_2$ ). Sa fonction de charge est donnée par l'expression :

$$f(\sigma) = J'^{\frac{1}{2}}_2 - k - \alpha J_1 = 0 \quad (7)$$

où

$\alpha, k$  sont des constantes.

La surface représentative du critère dans l'espace  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$  est un cône dont le sommet se trouve sur l'axe  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  (fig 11).

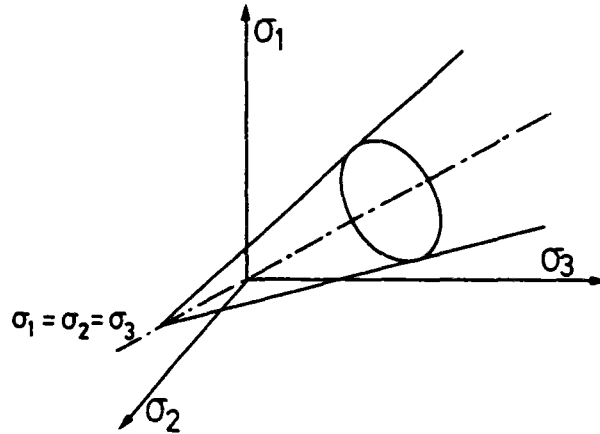


Fig. 11. - Critère de Drucker et Prager dans l'espace  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ .

Si  $\alpha = 0$ , le critère Drucker-Prager est le critère de Von Mises et le cône devient un cylindre.

Notons enfin que pour certaines valeurs de  $\alpha$  et  $k$ , le critère de Drucker-Prager devient tangent intérieurement ou extérieurement au critère de Coulomb.

Nelson et Baron (1968) ont proposé une modification du critère de Drucker-Prager pour le rendre indépendant de  $J_1$  aux grandes sollicitations, ce qui est parfois le cas pour les sols. Cette version modifiée du modèle s'exprime par les équations (fig. 12) :

$$\left. \begin{aligned} f = J_2'^{\frac{1}{2}} - k - \alpha J_1 \left(1 - \frac{J_1}{2C}\right) &= 0 && \text{quand } -J_1 + C \geq 0 \\ f = J_2'^{\frac{1}{2}} - k - \frac{\alpha C}{2} &= 0 && \text{quand } -J_1 + C < 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

où  $C$  correspond à une pression transitoire.

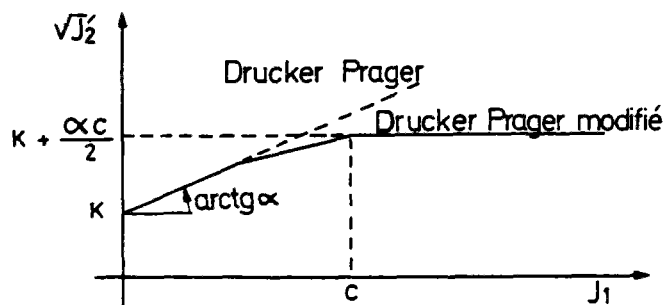


Fig. 12. - Critère de Drucker et Prager modifié.

f) Critère parabolique

Il est exprimé par l'équation :

$$f = J_2' + \frac{R_C - R_T}{3} J_1 - \frac{R_C \cdot R_T}{3} = 0 \quad (9)$$

où

$R_C$  et  $R_T$  sont les résistances en compression simple et traction simple.

On vérifie que si  $R_C = R_T$  on retrouve le critère de Von Mises.

Dans l'espace des contraintes, la surface limite est un paraboloïde d'axe  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  (fig. 13a et 13b).

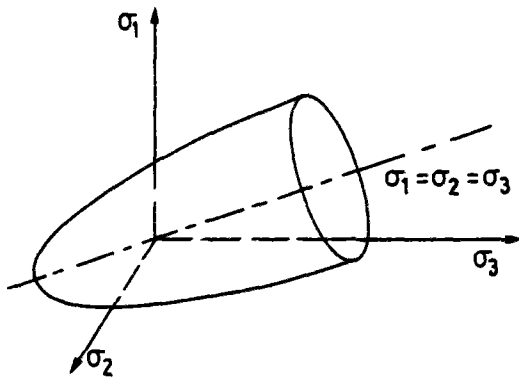


Fig. 13 a. - Critère parabolique dans l'espace  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ .

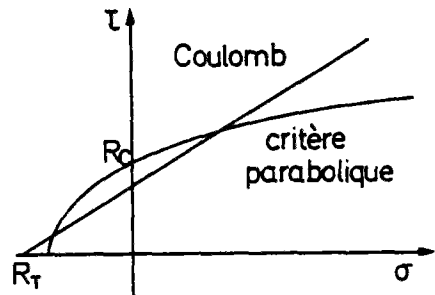


Fig. 13 b. - Critère parabolique dans le plan  $(\tau, \sigma)$ . Comparaison avec le critère de Coulomb.

g) Critères anisotropes

Un matériau est isotrope s'il n'y a pas une orientation définie de ses cristaux mais s'ils sont orientés au hasard. Son critère de plasticité dépend seulement des invariants des contraintes, des déformations et de son histoire de déformation, et on peut dire que les caractéristiques de plasticité du matériau sont isotropes (Fung 1965). C'est le cas des critères précédemment définis.

Pour les matériaux qu'on ne peut pas considérer comme isotropes, Hill (1950) a proposé un critère qui, l'hypothèse simplificatrice de l'orthotropie étant faite (3 plans de symétrie orthogonaux entre eux), admet l'expression suivante comme fonction de charge :

$$F(\sigma) = \frac{1}{2} [F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2] + L \tau^2_{yz} + M \tau^2_{zx} + N \tau^2_{xy} - 1 = 0 \quad (10)$$

où  $F, G, H, L, M, N$  sont des paramètres caractéristiques de l'état d'anisotropie du matériau. On peut facilement vérifier que pour  $L = M = N = 3G = 3H = 3F$ , on retrouve le critère Von Mises.

1.2.2. Calcul des déformations plastiques. Loi d'écoulement

Après avoir répondu à la question quand y-a-t-il des déformations plastiques?, on va examiner la question : comment peut-on les calculer ?

Une première hypothèse qu'on va introduire est celle de Hill (1950) dite du "travail

maximal".

Soit en un point un tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$ , tel que  $f(\sigma_{ij}, k) = 0$  ( $k$  paramètres d'écroutissage). Si  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  est le tenseur de vitesse des déformations plastiques correspondant et  $\sigma_{ij}^*$  est un tenseur des contraintes tel que  $f(\sigma_{ij}^*, k) < 0$  (fig. 14) et si  $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij}^p > 0$  le matériau obéit au principe du travail maximal.

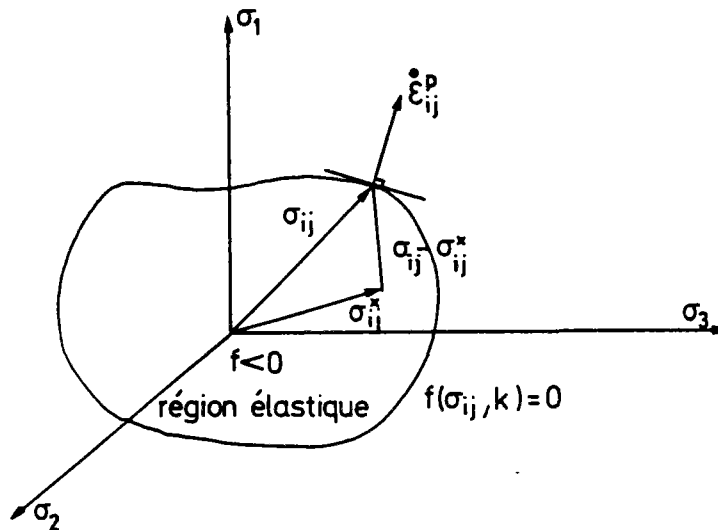


Fig. 14. - Illustration d'une surface d'état limite dans l'espace  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ .

Il en résulte que la surface  $f(\sigma_{ij}, k) = 0$  est convexe et que  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  est dirigé suivant une normale extérieure à la surface  $f(\sigma_{ij}, k) = 0$ .

On obtient donc :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (11)$$

L'équation (11) s'appelle équation de normalité en déformation plastique. La fonction de charge ( $f$ ) ou critère de plasticité apparaît ici comme un potentiel plastique.

Remarquons tout de suite que la "normalité" qui n'est qu'une hypothèse n'est pas toujours vérifiée pour les sols. Quand on ne l'admet pas, l'éventuel potentiel plastique ne coïncide pas avec la fonction de charge et on considère pour lui une fonction différente ( $g$ ). Dans ce cas-là, on écrit :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (12)$$

où  $g$  est le potentiel plastique. Dans ce cas, on parle d'une loi d'écoulement non associée.

On calcule la valeur  $\dot{\lambda}$  qui apparaît dans l'expression comme il suit :

Lorsqu'on part d'un état plastique et on effectue un chargement, on obtient un autre état plastique. On doit donc admettre que  $\dot{f} = 0$  et nous avons :

$$f(\sigma_{ij}, \kappa_i) = 0 \implies \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \kappa_i} \dot{\kappa}_i = 0 \quad (12a)$$

On fait l'hypothèse des petites déformations et l'on peut décomposer le tenseur des déformations totales  $\epsilon_{ij}$  en deux parties, l'une ( $\epsilon_{ij}^e$ ) qui représente les déformations élastiques, et l'autre ( $\epsilon_{ij}^p$ ) qui représente les déformations plastiques. On peut écrire :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (12b)$$

Pour le comportement élastique, nous avons :

$$\dot{\sigma}_{ij} = E \dot{\epsilon}_{ij}^e \quad (12c)$$

(12b) et (12c) donnent :

$$\dot{\sigma}_{ij} = E (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^p) \quad (12d)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = - \frac{\partial f}{\partial \kappa_i} \dot{\kappa}_i \quad (12e)$$

On pose

$$A \dot{\lambda} = - \frac{\partial f}{\partial \kappa_i} \dot{\kappa}_i \quad (12f)$$

et on obtient finalement :

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot E \dot{\epsilon}_{ij}}{A + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}} \quad (12g)$$

On peut faire le même calcul en utilisant la notation matricielle qui est plus facile à utiliser par la méthode des éléments finis et on arrive à l'expression suivante pour  $\dot{\lambda}$

$$\dot{\lambda} = \frac{F_{\sigma}^T \cdot E D}{A + F_{\sigma}^T E F_{\sigma}} \quad (12h)$$

où

$$A = - \frac{F_{\kappa}^T \cdot \dot{\kappa}}{\dot{\lambda}} \quad (12i)$$

où

D désigne la matrice des vitesses de déformations totales

$F_{\sigma}$  la matrice  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$  et

$F_{\kappa}$  la matrice  $\frac{\partial f}{\partial \kappa}$

Notons que si on n'admet pas la loi de normalité et en conséquence on utilise (12) à la place de (11), on trouve facilement :

$$\dot{\lambda} = F_{\sigma}^T E D / \left( A + F_{\sigma}^T E G_{\sigma} \right) \quad (12j)$$

où

$G_{\sigma}$  est la matrice  $\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$

Une autre formulation du principe du travail maximal est le Postulat de stabilité de Drucker (1951) d'après lequel les matériaux pour lesquels :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij}^P > 0$$

sont des matériaux avec écrouissage positif dits stables. Les matériaux pour lesquels

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij}^P = 0$$

sont des matériaux parfaitement plastiques, et enfin si

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij}^P < 0$$

les matériaux présentent un écrouissage négatif et sont dits instables.

### 1.3. MODELES DE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DES SOLS

Que ce soit tant l'élasticité linéaire isotrope utilisée pour le calcul des déformations que les critères classiques utilisés pour les calculs à la rupture (par exemple critère de Coulomb pour sols frottants et fins cohérents à long terme et Tresca pour sols fins cohérents à court terme), on a affaire à des comportements idéaux et simplistes. La Mécanique des Sols fait de plus en plus appel à des calculs qui suivent toute la déformation. Ceci est rendu possible grâce à l'évolution des méthodes numériques et aux ordinateurs.

On assiste alors à la mise au point de modèles de plus en plus compliqués qui tentent de modéliser de plus en plus fidèlement le comportement des sols.

Ainsi, Drucker Gibson et Henkel (1957) ont proposé un modèle, dont le domaine élastique était fermé. Cette modification a influencé presque tous les modèles élastoplastiques mis au point depuis, comme les modèles de Cambridge, de Di Maggio-Sandler, de Vermeer, etc...

Le fait que toute forme analytique ne peut être qu'approximative pour décrire un matériau aussi compliqué que le sol a poussé divers chercheurs à déterminer le critère de plasticité expérimentalement cas par cas.

Ici, on va présenter les principaux modèles existants qu'on peut classer comme suit :

1. Modèles de Cambridge (Cam-Clay) 1958-1969
2. Modèle de Di Maggio-Sandler 1971
3. Modèle de Lade-Duncan 1975



- |   |                        |           |
|---|------------------------|-----------|
| 4. Modèle de Frydman et al                | 1973, Monnet et Gielly | 1977-1979 |
| 5. Modèle de double écoulement de Vermeer |                        | 1978      |
| 6. Modèle de P. Wilde                     |                        | 1977-1979 |
| 7. Modèle de Nova et Wood                 |                        | 1979      |

Ces modèles sont basés sur les concepts classiques de l'élastoplasticité et ils admettent tous un écoulement isotrope.

- |                                   |  |           |
|-----------------------------------|--|-----------|
| 8. Modèle de Darve-Chambon-Boulon |  | 1974-1977 |
|-----------------------------------|--|-----------|

Ce modèle présente la particularité de ne pas fournir des équations constitutives générales mais de suivre le comportement du sol pas à pas dans les différentes directions de sollicitation. C'est un modèle incrémental.

- |   |  |           |
|---|--|-----------|
| 9. Modèle d'écoulement anisotrope par Mróz-Norris-Zienkiewicz |  | 1978-1979 |
|---|--|-----------|

Ce modèle cherche à approcher plus le comportement réel du sol en introduisant la notion d'écoulement anisotrope (Taylor et Quinney, 1934) et cinématique (Prager, 1955-1958). Les auteurs cherchent aussi à répondre au problème des chargements cycliques.

Citons d'autre part que Duncan et Chang (1970) ont proposé un modèle élastique non linéaire dit hyperbolique. Ce modèle prévoit une expression analytique pour approcher la loi de comportement. La représentation de cette expression dans l'espace contraintes-déformations est une hyperbole. Ce modèle a été très utilisé.

### 1.3.1. Modèles Cam-Clay

#### 1.3.1.1. Introduction

Les modèles Cam-Clay ont été créés par l'équipe de Mécanique des Sols de l'Université de Cambridge. Ainsi, Roscoe, Schofield, Pooreooshah, Wroth et Thurairajah (1958-1968) partis des idées de Rendulic (1936) ; Hvorslev (1936), ont mis au point la première version du modèle. Burland (1965) et Roscoe et Burland (1968) modifient cette version. Une nouvelle révision a été proposée par Burland en 1969. Ces travaux repris par Prévost et Høeg aboutissent à une autre version du modèle (1975a et b).

Les modèles de Cambridge sont des modèles élastoplastiques destinés essentiellement à décrire le comportement des argiles ; pourtant, ils ont été adaptés aussi quelquefois pour les matériaux pulvérulents.

#### 1.3.1.2. Description du Cam-Clay initial et du Cam-Clay modifié

##### a) Concepts de base. Définitions

Les modèles Cam-Clay reposent sur trois concepts de base :

i. Le concept d'état critique. Schofield et Wroth (1968) le définissent de la manière suivante : lorsqu'un sol est continuellement cisailé jusqu'à ce qu'il s'écoule comme un fluide, il atteindra un état critique déterminé par les équations :

$$q = Mp \quad (13)$$

$$\Gamma = e + \lambda \ln (p/p_1) \quad (14)$$

qui dans l'espace (p,q,e) définissent une courbe dite courbe d'état critique (C.E.C.) (fig.15 et fig.16).

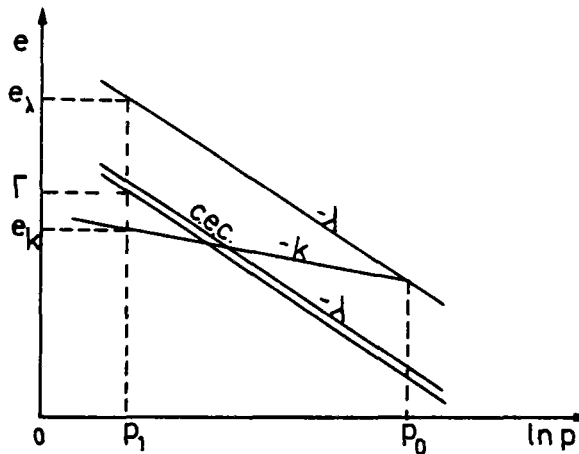


Fig. 15. - Projection dans le plan ( e, ln p) de la C.E.C.

p et q représentent les parties sphérique et déviatorique du tenseur de contraintes, et pour le cas des conditions de l'essai triaxial ( $\sigma'_2 = \sigma'_3$ ), cas pour lequel ont été formulés initialement les modèles Cam-Clay, on a :

$$p = (\sigma'_1 + 2\sigma'_3)/3 \quad (15)$$

$$q = \sigma'_1 - \sigma'_3 \quad (16)$$

en outre,

- $p_1$  représente une contrainte moyenne de référence
- e est l'indice des vides
- M,  $\lambda$ ,  $\Gamma$  sont des constantes du matériau

On appelle, dans le plan (ep), courbe ( $\lambda$ ) ou courbe de consolidation vierge (fig.15) la courbe qu'on obtient pendant un essai de première compression isotrope, et dans le même plan, courbes k ou courbes déchargement-rechargement (Fig. 16) les courbes qui schématisent un cycle de déchargement-rechargement. Les équations de ces courbes sont :

$$\text{- courbe } \lambda \quad e = e_\lambda - \lambda \ln(p/p_1) \quad (17)$$

$$\text{- courbe } k \quad e = e_k - k \ln(p/p_1) \quad (18)$$

où  $e_\lambda$  et  $e_k$  correspondent aux points des courbes obtenues pour une valeur de référence  $p_1$  et k est une constante du sol.

Dans les coordonnées (e, ln p) figure 15, ces courbes sont des droites.

ii. Le principe de normalité . Il a déjà été introduit au § 1.2.

iii. Une expression de dissipation d'énergie. L'expression mathématique de cette dissipation varie selon la version et pour le Cam-Clay original, elle est :

$$\dot{W}^P = M p \dot{\epsilon}_c^P$$

et pour le Cam-Clay modifié, elle est

$$\dot{W}^P = p \sqrt{(\dot{\epsilon}_V^P)^2 + M^2 (\dot{\epsilon}_c^P)^2} \quad (\text{Burland, 1965})$$

où

$\dot{W}^P$  est l'incrément d'énergie dissipée

et  $\dot{\epsilon}_v^P$ ,  $\dot{\epsilon}_c^P$  représentent les incréments de déformations plastiques volumiques et de cisaillement respectivement

$$\dot{\epsilon}_v^P = \dot{\epsilon}_1 + 2 \dot{\epsilon}_3$$

$$\dot{\epsilon}_c^P = 2 \frac{(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3)}{3}$$

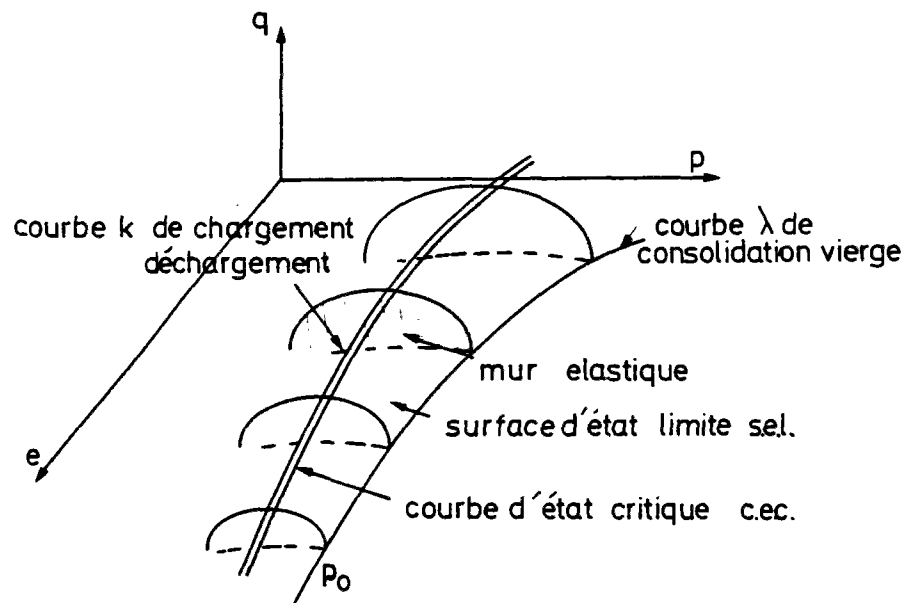


Fig. 16 - Surface d'état limite et courbe d'état critique du modèle Cam-Clay.

#### b) Critère de plasticité

Pour les modèles Cam-Clay le critère de plasticité est défini pour un certain indice de vides  $e_k$  correspondant à une contrainte de préconsolidation  $p_0$  sur la courbe  $\lambda$  de consolidation vierge, par une courbe dite d'état limite C.E.L. qui limite le domaine dans lequel les déformations sont élastiques (fig. 17a et 17b). Son équation est :

- Pour la version originale

$$\frac{q}{M_p} + \ln p = \ln p_0 \quad (19)$$

- Pour la version modifiée

$$p_0 = p \left\{ \frac{(q/p)^2 + M^2}{M^2} \right\} \quad (20)$$

Ces équations sont obtenues par intégration de la condition de normalité en utilisant les expressions de l'énergie dissipée. L'équation (19) représente des courbes en forme d'aman- de et l'équation (20) des courbes en forme d'ellipse (fig. 17a et 17b).

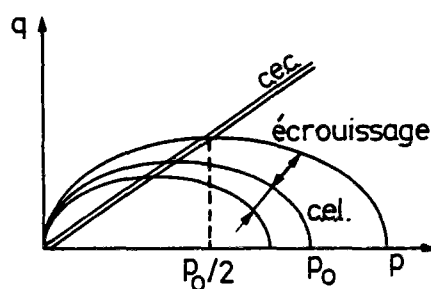
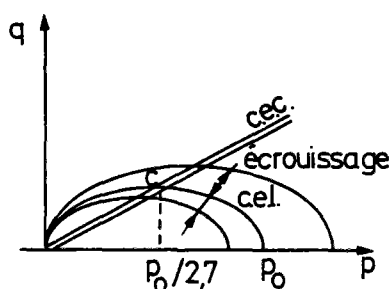


Fig. 17a - Courbe d'état limite pour la version originale

Fig. 17b - Courbe d'état limite pour la version modifiée

Ces courbes sont valables pour un  $p_0$  donné ou pour un  $e_k$  donné. En faisant varier  $p_0$ , on obtient une surface dite surface d'état limite (fig.16). Elle représente un critère de plasticité avec écrouissage, le paramètre d'écrouissage pouvant être n'importe quelle grandeur fonction des déformations plastiques.

Si on choisit  $e_k$  comme Zienkiewicz et Naylor (1972), il suffit d'écrire  $p_0$  en fonction de  $e_k$  pour obtenir la fonction de charge cherchée  $f(p, q, e_k) = 0$ .

De (17) et (18) 
$$p_0 = p_1 \exp\left(\frac{e_\lambda - e_k}{\lambda - k}\right)$$

et

$$(\lambda - k) \left( \frac{\eta}{M} + \ln \frac{p}{p_1} \right) + e_k - e_\lambda = 0 \quad (21) \quad \text{où } \eta = \frac{q}{p}$$

pour la version originale

et

$$(\lambda - k) \ln \left[ \frac{p}{p_1} \left( 1 + \frac{\eta^2}{M^2} \right) \right] + e_k - e_\lambda = 0 \quad (22)$$

pour la version modifiée.

L'équation de la surface d'état limite dans l'espace  $(p, q, e)$  figure (16) est obtenue en remplaçant  $e_k$  par  $e + k \ln \frac{p}{p_1}$  (23), soit :

$$f = (\lambda - k) \left[ \ln \left( \frac{p}{p_1} \right) + \frac{\eta}{M} \right] + e + k \ln \frac{p}{p_1} - e_\lambda = 0 \quad (24)$$

et

$$f = (\lambda - k) \ln \frac{p}{p_1} \left( 1 + \frac{\eta^2}{M^2} \right) + e + k \ln \frac{p}{p_1} - e_\lambda = 0 \quad (25)$$

c) Calcul des déformations plastiques

Le calcul des déformations plastiques se fait en admettant la loi de normalité et en dérivant les déformations de la fonction de charge. Ainsi, K.H. Roscoe, A.N. Scofield et A. Thuraiajah (1963) sont arrivés aux formules suivantes pour la version originale du modèle et pour des argiles "humides" (écrouissage positif ou stable).

- déformations plastiques volumiques  $\dot{\epsilon}_V^P$ , concernant le paramètre p des contraintes (où  $\sigma'_2 = \sigma'_3$ )

$$\dot{\epsilon}_V^P = \frac{1}{1+e} \left[ \frac{\lambda-k}{Mp} (\dot{q} - \eta \dot{p}) + \frac{\lambda}{p} \dot{p} \right] \quad (26)$$

- déformations plastiques de cisaillement  $\dot{\epsilon}_C^P$ , concernant le paramètre q des contraintes

$$\dot{\epsilon}_C^P = \frac{\lambda-k}{Mp} (\dot{q} - \eta \dot{p}) + \frac{\lambda}{p} \dot{p} \quad (27)$$

Pour la version modifiée du modèle, on arrive aux expressions analogues :

$$\dot{\epsilon}_V^P = \frac{\lambda}{1+e} \left[ \left( 1 - \frac{k}{\lambda} \right) \left( \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \right) \left\{ \dot{q} - \eta \dot{p} \right\} + \dot{p} \right] \frac{1}{p} \quad (28)$$

La déformation correspondante de cisaillement est la somme des deux composantes,  $\dot{\epsilon}_{C1}^P$ , donné par l'équation 29 et  $\dot{\epsilon}_C^P$  qui dépend seulement du rapport q/p et qui est indépendant de la variation volumique plastique. On l'obtient avec une bonne approximation par une relation entre q/p et  $\dot{\epsilon}_{C2}^P$  donnée par un essai triaxial non drainé.

$$\dot{\epsilon}_{C1}^P = \frac{2 \eta}{M^2 - \eta^2} \left( \dot{\epsilon}_V^P - \frac{k}{1+e} \cdot \frac{\dot{p}}{p} \right) \quad \text{Burland (1969)} \quad (29)$$

1.3.1.3. Description de la version modifiée révisée

Burland (1967, 1969), en plus de la modification qu'il avait apportée (1965) au modèle Cam-Clay en proposant une autre équation pour l'énergie dissipée, a constaté que la surface d'état limite qu'il avait proposée était correcte pour calculer les déformations volumiques, mais elle ne permettait pas de calculer toutes les déformations de cisaillement.

Prévoist et Høeg (1975a) ont repris cette constatation pour proposer un modèle baptisé "Effective Stress-strain Strength model for Soils". Leur modèle prévoit comme les autres Cam-Clay une C.E.C. définie par l'équation  $q = M_{CS} p$  et deux surfaces d'état limite, une pour les déformations volumiques et de cisaillement et une autre pour les déformations de cisaillement uniquement (fig. 18). Ce modèle suppose que le matériau qu'ils vont décrire est isotrope et non dilatant.

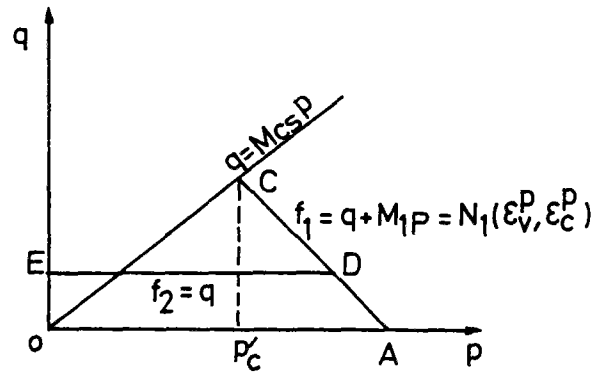
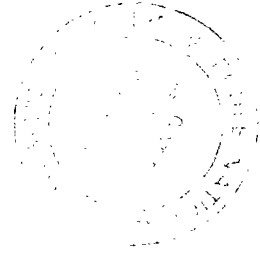


Fig. 18 - Surfaces d'état limite volumique et de cisaillement. (Prévost et Höeg, 1975a)

Surface d'état limite volumique

A la fois pour raisons de simplicité mathématique et d'après des résultats expérimentaux, les auteurs proposent que cette S.E.L. soit représentée dans un plan  $(p, q)$  par une ligne droite :

$$f_1 = q + M_1 p = N(\epsilon_V^P, \epsilon_C^P) \quad (30)$$

où  $M_1$  est une constante positive.

Surface d'état limite de cisaillement

Elle est définie par l'équation :

$$f_2 = q = H(\epsilon_V^P, \epsilon_C^P) \quad (31)$$

On peut maintenant, en dérivant les équations des surfaces d'état limite (loi de la normalité) aboutir aux relations contraintes-déformations plastiques :

$$d\epsilon_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} + d\gamma \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}} \quad (32)$$

où  $d\lambda$  et  $d\gamma$  sont deux fonctions qui dépendent des contraintes, des déformations et de l'histoire des déformations.

Les auteurs (Prévost, Höeg, 1975b) ont étendu leur modèle du côté instable (écrouissage négatif au-dessus de la C.E.C. dans le diagramme  $p, q$ ). Ils y ont en effet rajouté une "branche" de critère définie par (fig. 19)

$$q - Mp = N \quad (33)$$

où  $M$  et  $N$  sont fonctions de l'histoire du matériau.

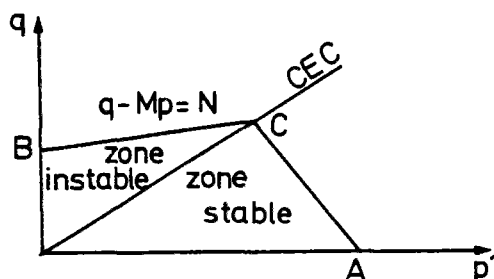


Fig. 19 - Version Prévost-Hoëg généralisée. (d'après Prévost et Hoëg, 1975b)

#### 1.3.1.4. Autres développements des modèles Cam-Clay

Après Wroth et Bassett (1965) qui ont proposé des équations constitutives pour un modèle de sables, Simpson (1973) se basant sur le travail expérimental de Stroud (1971), a proposé deux modèles pour décrire le comportement des sables de Leighton Buzzard, les LBS 1 et LBS 2.

Adachi-Okano (1974) ont formulé des équations générales qui décrivent le comportement de l'argile normalement consolidée comme un matériau écouissable, sensible à la vitesse d'application des charges et doué de dilatance. Les auteurs considèrent que l'argile saturée se comporte comme un milieu élasto-viscoplastique dont la viscosité est une fonction de la quantité d'eau qui se trouve dans le sol.

Pender (1973, 1977) a proposé un modèle pour les argiles normalement consolidées et surconsolidées. Ce modèle, comme le Cam-Clay, admet le principe d'état critique et il est écouissable (écrouissage positif). Pour l'auteur, le Cam-Clay modifié sous-estime les déformations de cisaillement et ainsi il introduit une correction en ajoutant la déformation de cisaillement observée pendant un essai de compression non drainé sur un sol normalement consolidé sur la déformation calculée par le Cam-Clay modifié. En outre, il observe que la surface d'état limite du Cam-Clay modifié pour les argiles légèrement surconsolidées n'est pas satisfaisante.

Tavenas F. et Leroueil S. (1977), d'après de nombreux essais sur des argiles de St. Alban (Québec) ont défini expérimentalement ses courbes d'état limite. Ils ont alors observé que leur forme et leur position ne coïncidaient pas avec celles théoriquement prévues par les modèles Cam-Clay. Ainsi, la courbe d'état limite expérimentale a une forme elliptique avec pour axe la ligne  $k_0$  et non la ligne de compression isotrope ( $q = 0$ ) (fig. 20). Les auteurs expliquent cette divergence par le fait que le Cam-Clay fait l'hypothèse d'isotropie des argiles.

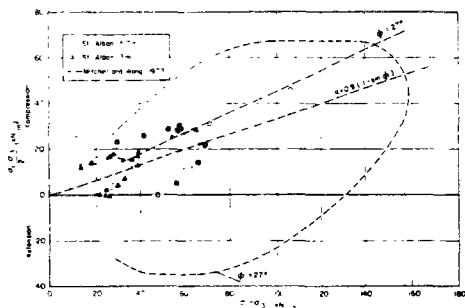


Fig. 20 - Courbes d'état limite expérimentales des argiles de Saint-Alban (Tavenas et Leroueil, 1977).

### 1.3.1.5. Vérifications et applicaticns des modèles Cam-Clay

Les modèles Cam-Clay ont été utilisés à l'aide de la méthode des éléments finis (Simpson, 1973, Dang, 1977). Ils ont donné des résultats satisfaisants tant pour des modèles réduits (Simpson et Wroth, 1972) que pour des constructions réelles comme le cas du remblai Kings Lynn (Wroth et Simpson, 1972) pour lequel on a utilisé le modèle Cam-Clay, le remblai M.I.T. où on a appliqué le modèle Cam-Clay modifié (Wroth, 1975) ou encore comme le remblai expérimental B de Cubzac-les-Ponts (Dang Minh Truong, 1977).

Citons en outre les travaux expérimentaux (appareil triaxial) sur les argiles molles de Bangkok, de Balasubramanian-Chaudhry (1978) qui ont trouvé que le modèle Cam-Clay (initial) présente une surestimation des déformations, tandis que le Cam-Clay modifié présente une meilleure concordance.

D'après Simpson (1973), les conclusions sur les domaines d'application des diverses versions que nous avons décrites sont les suivantes :

- Le modèle Cam-Clay (initial) est utile pour prédire le comportement des argiles normalement consolidées, sauf pour le cas des petites contraintes.

- Le Cam-Clay modifié donne de meilleurs résultats en comparaison avec le Cam-Clay original pour les petites contraintes mais il n'est pas meilleur pour les argiles surconsolidées.

- Le Cam-Clay modifié révisé est un peu meilleur pour les argiles surconsolidées et encore meilleur pour les argiles normalement consolidées mais il n'y a pas à notre connaissance, des applications de la méthode des éléments finis à ce modèle.

### 1.3.2. Modèle de Di Maggio -Sandler

(Di Maggio et Sandler, 1971)

#### 1.3.2.1. Introduction

Ce modèle proposé par Di Maggio et Sandler est un modèle élastoplastique avec écrouissage. Son domaine élastique est fermé (Cap model) et les auteurs admettent la loi de normalité. Il est appliqué essentiellement pour prédire le comportement des sols pulvérulents.

#### 1.3.2.2. Description du modèle

##### a) Critère de plasticité

Pour ce modèle on utilise comme critère de plasticité un critère type Drucker-Prager modifié, dans le même sens que Nelson-Baron (voir plus haut), qui est défini par l'équation :

$$f_1 (J_1, \sqrt{J_2}) = 0 \quad (34)$$

Le critère est combiné avec une fonction supplémentaire ( $f_2$ ) qui achève de délimiter le domaine élastique (fig. 21) et qui est définie par l'expression :

$$f_2 (J_1, \sqrt{J_2}, \epsilon^P) = 0 \quad (35)$$

Dans les équations (34) et (35),  $J_1$  et  $J_2$  représentent respectivement le premier invariant du tenseur des contraintes et le deuxième invariant de son déviateur.  $\epsilon^P$  représente les déformations volumiques plastiques positives en compression et est choisi comme paramètre d'écrouissage.

Le modèle prévoit que la branche ( $f_2$ ) du critère de plasticité soit mobile pour pouvoir décrire le phénomène d'écrouissage. Sa position alors est liée à l'histoire des déformations plastiques et elle est définie d'après une loi d'écrouissage pour laquelle Sandler et Baron (1979) proposent l'expression suivante, vérifiée expérimentalement pour un certain nombre de sols :

$$\epsilon^P = W [1 - \exp(-3 D p_b)] \quad (36)$$



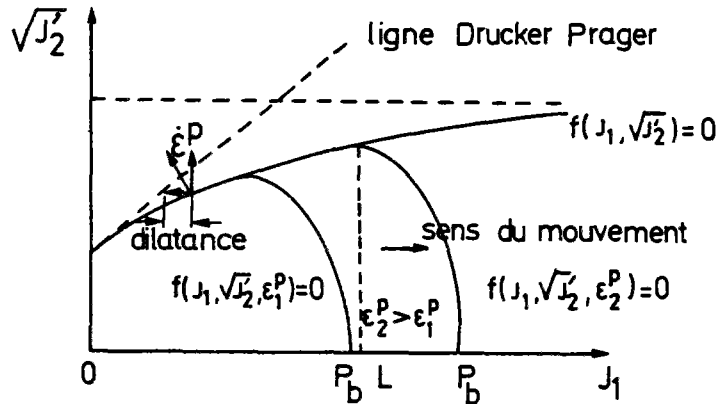


Fig. 21 - Critère de plasticité.  
(d'après Di Maggio et Sandler, 1971)

où  $W$  et  $D$  sont des constantes du matériau.

L'application de la loi de normalité exige que le vecteur des déformations plastiques soit perpendiculaire au critère et qu'il soit dirigé vers l'extérieur.

Si donc le vecteur des déformations se trouve sur la branche  $f_1$ , l'application de la loi de normalité implique une expansion volumique plastique et un mouvement de  $f_2$  vers la gauche. Ce mouvement sera limité sur sa gauche lorsque  $f_2$  atteigne le point représentatif sur  $f_1$  (fig. 22).

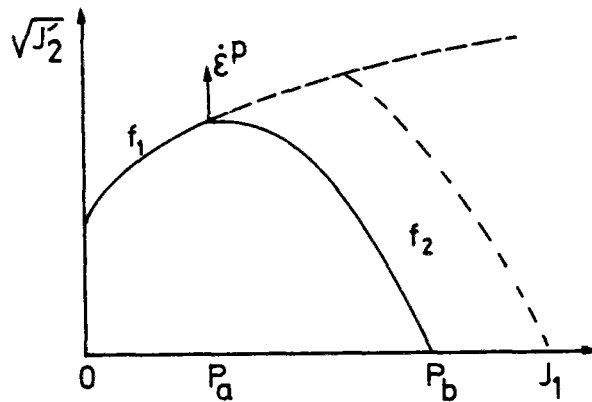


Fig. 22 - Comportement suivant  $f_1$  avec mouvement de  $f_2$  vers la gauche.  
(d'après Di Maggio et Sandler, 1971)

Si par contre, le vecteur des déformations plastiques se trouve sur  $f_2$ , le processus inverse se produit et  $f_2$  se dirige vers la droite et on parle de dilatance négative.

Notons enfin que, si le chemin de chargement se trouve dans le domaine élastique, aucun mouvement de  $f_2$  ne se produit.

Les auteurs ne proposent pas une méthode pour la définition analytique de deux branches  $f_1$  et  $f_2$  du critère de plasticité, mais ils les laissent être définies par les utilisateurs selon leur cas ; ainsi, pour le cas de Mc Cormick-Ranch-Sand (Di Maggio-Sandler, 1971), les auteurs définissent le critère en faisant une approximation sur  $f_1$  d'après les données expérimentales (essais triaxiaux) sous la forme :

$$f_1(J_1, \sqrt{J_2}) = \sqrt{J_2} - [A - C \exp(BJ_1)] = 0 \quad (37)$$

où  $A, B, C$  sont des constantes du sol et pour ce cas :

$A = 0,25$     $B = 0,67$     $C = 0,18$    quand  $J_1, J_2$  sont exprimés en  $\text{kip/in}^2$  (1 kip = 1000 pounds).

$f_2$  a été définie avec quelques hypothèses simplificatrices, comme par exemple que  $f_2$  soit une ellipse dont l'axe  $OJ_1$  soit le grand axe, etc..., et des données expérimentales sous la forme

$$f_2 (J_1, \sqrt{J_2'}, \epsilon^P) = \left[ \frac{L(\epsilon^P) - J_1}{L(\epsilon^P) - X(\epsilon^P)} \right]^2 + \left[ \frac{\sqrt{J_2'}}{A - C \exp[B L(\epsilon^P)]} \right]^2 = 1 \quad (38)$$

où les fonctions  $L(\epsilon^P)$  et  $X(\epsilon^P)$  sont définies d'après des essais oedométriques.

#### b) Calcul des déformations

Les auteurs (Di Maggio, Sandler, Baladi, 1976) proposent les relations incrémentales entre contraintes et déformations suivantes :

- déformations élastiques (Loi de Hooke)

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{9k} \delta_{ij} \dot{\sigma}_{kk} + \frac{1}{2G} \left( \dot{\sigma}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \dot{\sigma}_{kk} \right) \quad (39)$$

où  $k$  et  $G$  sont les modules élastique volumique et élastique de cisaillement respectivement

- déformations plastiques (d'après la loi de normalité)

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^p &= d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} & \text{si } F &= 0 \\ \dot{\epsilon}_{ij}^p &= 0 & \text{si } F < 0 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

où  $d\lambda$  est un facteur positif et

$$\left. \begin{aligned} F &\equiv f_1(J_1, \sqrt{J_2'}) & \text{si } J_1 < L \\ F &\equiv f_2(J_1, \sqrt{J_2'}, \epsilon^P) & \text{si } J_2 > L \end{aligned} \right\} \text{ où } J_1 = L \text{ et est le point d'intersection de } f_1 \text{ et } f_2 \text{ (fig. 21)}$$

Nota : Une autre formulation, très proche du modèle a été donnée par S.E. Yamada et A.S. Abou-Sayed (1979).

#### 1.3.2.3. Vérifications du modèle

Le modèle a été vérifié sur les sables de Mc Cormick Ranch (Di Maggio, Sandler, 1971) et il a donné des résultats en général assez bons (fig. 23a et 23b).

Les figures 23a et 23b comparent les résultats expérimentaux (appareil triaxial) et les prévisions du modèle. Nous constatons une assez bonne concordance surtout pour les petites contraintes radiales  $\sigma_r = 0,1$  ksi.

Trois séries d'essais triaxiaux faits sur les sables d'Ottawa (V.K. Khosla, I.H. Wu, 1976) montrent aussi une bonne concordance entre modèle et expérience (fig. 24).

Notons enfin que récemment, des algorithmes ont été développés pour l'application du modèle sur ordinateur (Sandler I.S., Rubin D, 1979), et aussi que l'on a introduit l'effet du

temps pour le rendre visqueux (Sandler, Baron, 1979).

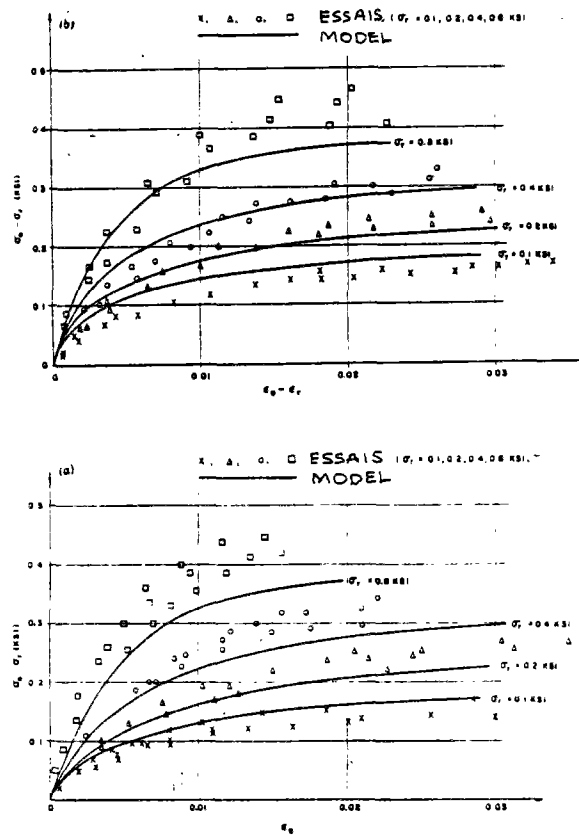


Fig. 23a et 23b - Comparaison des résultats expérimentaux avec prévisions du modèle. (Di Maggio et Sandler, 1971)

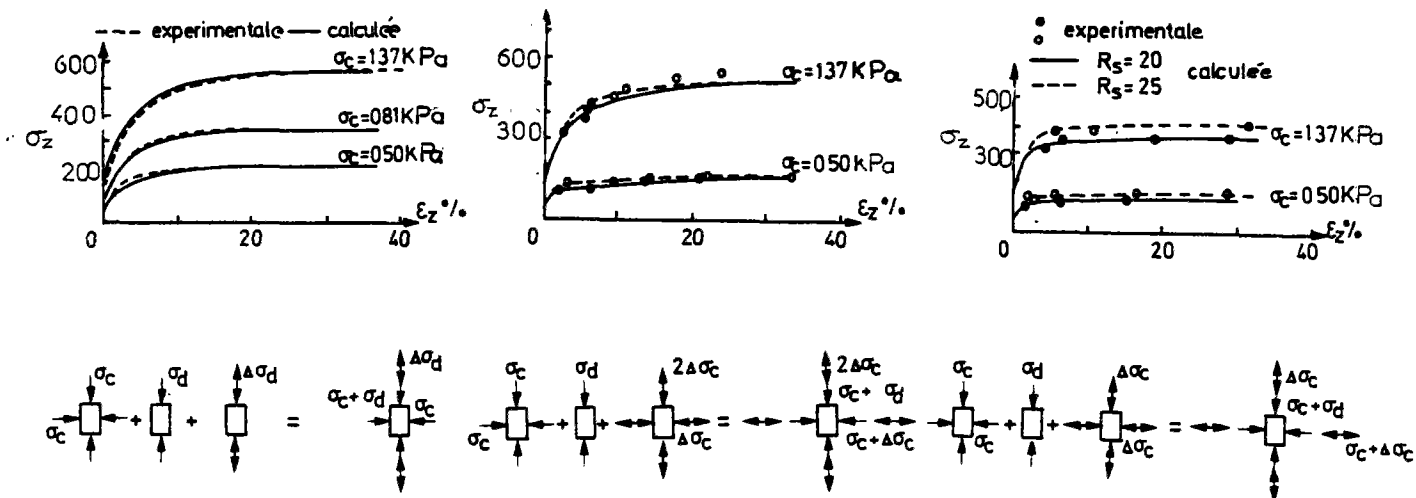


Fig. 24 - Comparaison des résultats expérimentaux avec prévisions du modèle. (Khosla et Wu, 1976)

### 1.3.3. Modèle Lade-Duncan

#### 1.3.3.1. Introduction

Il s'agit d'un modèle basé aussi sur les principes d'élastoplasticité qui a été mis au point en 1975 par Lade et Duncan et qui a été révisé en 1977 par Duncan, Ozawa, Lade et Booker.

Ce modèle prévoit un potentiel plastique différent du critère de plasticité et son domaine élastique est ouvert et est essentiellement prévu pour les matériaux pulvérulents.

#### 1.3.3.2. Description du modèle

##### a) Critère de plasticité

La fonction qui définit le critère de plasticité est la suivante :

$$f(\{\sigma\}, \{e^P\}) = k - k_t - \frac{w}{m + bh} = 0 \quad (41)$$

où

$$k = J_1^3 / J_3 \quad (J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \text{ et } J_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)$$

$k_t$  est la valeur initiale de  $k$

$m, b$  sont des constantes du matériau

$$h \text{ est un paramètre d'écrouisseage défini par } h = \frac{w}{p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^l} \quad (42)$$

où

$W^P$  est le travail plastique total qui a "produit" les déformations plastiques. On écrit  $W^P = F(k)$

où  $F$  est une fonction positive monotone déterminée empiriquement en calculant le travail plastique en fonction de  $k$

$p_a$  est la pression atmosphérique

$l$  est un paramètre empirique.

Dans l'espace  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ , la surface définie par le critère de plasticité est un cône (fig. 25). Cette surface est écrouisseable et se dilate isotropiquement jusqu'à atteindre la surface de rupture.

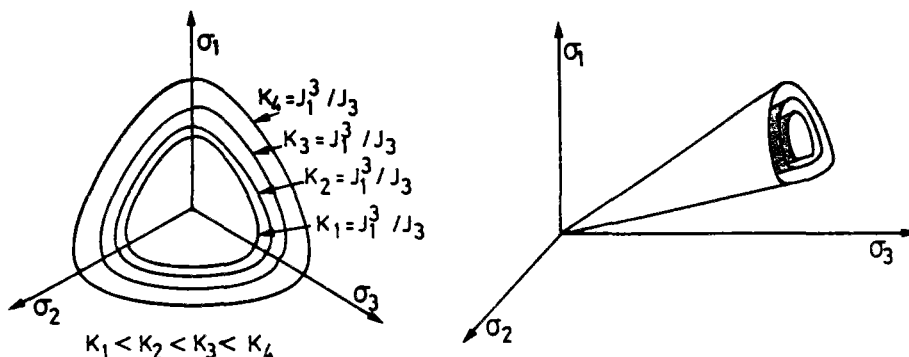


Fig. 25 - Représentation du critère dans l'espace  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . (Lade et Duncan, 1975).

b) Loi d'écoulement

Comme les auteurs n'admettent pas la loi de normalité, ils proposent un potentiel plastique déterminé par l'équation :

$$g = J_3 (k - 27)^\alpha \quad (43)$$

où  $\alpha$  est une constante du matériau.

En dérivant  $g$  par rapport aux contraintes principales, on obtient les déformations plastiques

$$\left\{ d\epsilon^p \right\} = \frac{d\lambda}{\alpha(k-27)^{\alpha-1}} \left\{ \frac{\partial g}{\partial \{\sigma\}} \right\} \quad (44)$$

En ce qui concerne les déformations élastiques, on les calcule d'après la loi de Hooke:

$$\left\{ d\epsilon^e \right\} = \left\{ d\sigma \right\} [C^e]^{-1} \quad (45)$$

où

$[C^e]$  est la matrice d'élasticité.

Lade et al. (1977) ont donné à la loi de comportement une forme incrémentale générale qui permet à leur modèle d'être programmé sur ordinateur. Ils ont donc écrit :

$$\left\{ d\sigma \right\} = [C^{ep}] \left\{ d\epsilon \right\} \quad (46)$$

où

$[C^{ep}]$  est la matrice élastoplastique de contraintes-déformations égale à :

$$[C^{ep}] = \begin{bmatrix} E - \frac{Q_1 P_1}{N} & -\frac{Q_1 P_2}{N} & -\frac{Q_1 P_3}{N} & -\frac{Q_1 P_4}{N} & -\frac{Q_1 P_5}{N} & -\frac{Q_1 P_6}{N} \\ -\frac{Q_2 P_1}{N} & E - \frac{Q_2 P_2}{N} & -\frac{Q_2 P_3}{N} & -\frac{Q_2 P_4}{N} & -\frac{Q_2 P_5}{N} & -\frac{Q_2 P_6}{N} \\ -\frac{Q_3 P_1}{N} & -\frac{Q_3 P_2}{N} & E - \frac{Q_3 P_3}{N} & -\frac{Q_3 P_4}{N} & -\frac{Q_3 P_5}{N} & -\frac{Q_3 P_6}{N} \\ -\frac{Q_4 P_1}{N} & -\frac{Q_4 P_2}{N} & -\frac{Q_4 P_3}{N} & \frac{E}{2} - \frac{Q_4 P_4}{N} & -\frac{Q_4 P_5}{N} & -\frac{Q_4 P_6}{N} \\ -\frac{Q_5 P_1}{N} & -\frac{Q_5 P_2}{N} & -\frac{Q_5 P_3}{N} & -\frac{Q_5 P_4}{N} & \frac{E}{2} - \frac{Q_5 P_5}{N} & -\frac{Q_5 P_6}{N} \\ -\frac{Q_6 P_1}{N} & -\frac{Q_6 P_2}{N} & -\frac{Q_6 P_3}{N} & -\frac{Q_6 P_4}{N} & -\frac{Q_6 P_5}{N} & \frac{E}{2} - \frac{Q_6 P_6}{N} \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\text{et } \begin{cases} \{P\} \\ \{Q\} \end{cases} = E \left( F_1, F_2, F_3, \frac{1}{2} F_4, \frac{1}{2} F_5, \frac{1}{2} F_6 \right)^T \quad (48)$$

$$\begin{cases} \{Q\} \\ \{F\} \end{cases} = E \left( G_1, G_2, G_3, \frac{1}{2} G_4, \frac{1}{2} G_5, \frac{1}{2} G_6 \right)^T$$

$$\begin{cases} \{F\} \end{cases} = \frac{1}{J_3} \cdot \begin{bmatrix} 3 J_1^2 - k (\sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2) + \frac{J_3 m}{(m+bh)^2} \cdot \frac{h l}{\sigma_3} \cdot \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_x} \\ 3 J_1^2 - k (\sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2) + \frac{J_3 m}{(m+bh)^2} \cdot \frac{h l}{\sigma_3} \cdot \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_y} \\ 3 J_1^2 - k (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) + \frac{J_3 m}{(m+bh)^2} \cdot \frac{h l}{\sigma_3} \cdot \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_z} \\ -2 k (\tau_{yz} \tau_{zx} - \tau_{xy} \sigma_z) + \frac{J_3 m}{(m+bh)^2} \cdot \frac{h l}{\sigma_3} \cdot \frac{\partial \sigma_3}{\partial \tau_{xy}} \\ -2 k (\tau_{xz} \tau_{xy} - \tau_{yz} \sigma_x) + \frac{J_3 m}{(m+bh)^2} \cdot \frac{h l}{\sigma_3} \cdot \frac{\partial \sigma_3}{\partial \tau_{yz}} \\ -2 k (\tau_{xy} \tau_{yz} - \tau_{zx} \sigma_y) + \frac{J_3 m}{(m+bh)^2} \cdot \frac{h l}{\sigma_3} \cdot \frac{\partial \sigma_3}{\partial \tau_{zx}} \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\begin{cases} \{G\} \end{cases} = \begin{bmatrix} 3 J_1^2 - k_2 (\sigma_y \sigma_z - \tau_{yz}^2) \\ 3 J_1^2 - k_2 (\sigma_z \sigma_x - \tau_{zx}^2) \\ 3 J_1^2 - k_2 (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) \\ -2 k_2 (\tau_{yz} \tau_{zx} - \tau_{xy} \sigma_z) \\ -2 k_2 (\tau_{zx} \tau_{xy} - \tau_{yz} \sigma_x) \\ -2 k_2 (\tau_{xy} \tau_{yz} - \tau_{zx} \sigma_y) \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$N = \begin{cases} \{G\} \end{cases}^T \left( \begin{cases} \{p\} \end{cases} + \frac{m}{(m+bh)^2} \frac{h}{W^p} \begin{cases} \{\sigma\} \end{cases} \right) \quad (51)$$

où

E est le module d'Young

$$k_2 = A_1 + A_2$$

$$A_1 = 1 - \frac{1}{\alpha}$$

$$A_2 = \frac{27}{\alpha}$$

$$b = (\sigma_2 - \sigma_3) / (\sigma_2 - \sigma_1)$$

1.3.3.3. Vérifications expérimentales du modèle

a) Par essais triaxiaux

Lade et Duncan (1975) ont testé leur modèle sur le sable Monterey n° 0 et ils ont trouvé une concordance très intéressante entre modèle et essais (fig. 26).

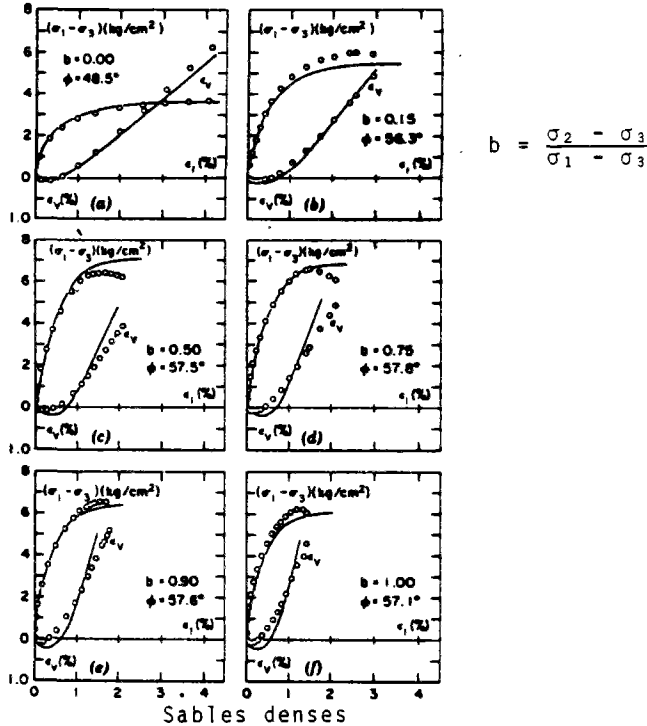


Fig. 26 - Comparaison des résultats du modèle avec les résultats expérimentaux. (Lade et Duncan, 1975).

b) Par des essais de torsion-cisaillement

La figure 27 donne les principaux résultats de ces essais. On constate donc une certaine concordance entre résultats expérimentaux et prévisions théoriques. Les différences existantes peuvent être expliquées (Lade, Duncan, 1975) par le fait que les contraintes ne sont pas uniformes.

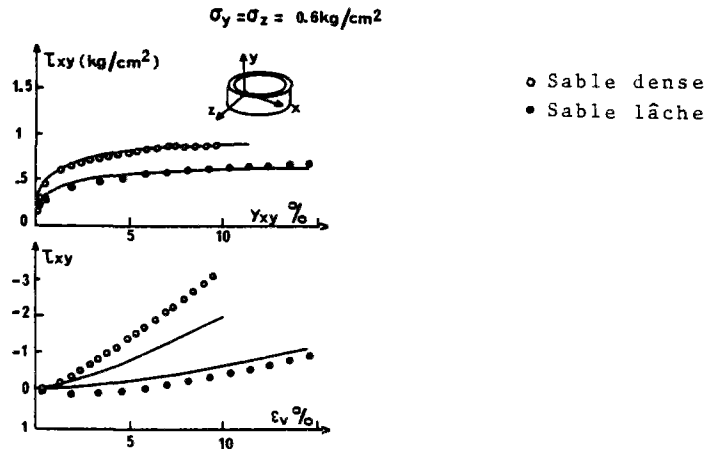


Fig. 27 - Comparaison des résultats du modèle avec les résultats expérimentaux. (Lade et Duncan, 1975).

#### 1.3.3.4. Applications du modèle

Le modèle a été introduit dans des programmes sur ordinateur pour l'étude des problèmes bi ou tridimensionnels. Ces programmes d'éléments finis peuvent être utilisés pour analyser le comportement d'un sol (relations contraintes-déformations, déplacements) sous une charge déterminée et pour des conditions aux limites arbitraires.

Ainsi, Ozawa et Duncan (1976) ont présenté un programme, EPLP2C, avec lequel ils ont étudié un mur de soutènement. Leurs résultats comparés avec ceux obtenus en utilisant le modèle hyperbolique ont montré que le modèle de Lade et Duncan approche mieux la réalité pour les sables.

Une autre publication récente est celle de Aubry et Ph. Des Croix (1979) qui prend en compte les révisions que Lade (1977) a apporté en introduisant une surface d'état limite complémentaire. Ils proposent un autre algorithme pour appliquer le modèle de Lade Duncan à la méthode des éléments finis.

#### 1.3.4. Modèle de Frydman et al, Monnet et Gielly

##### 1.3.4.1. Introduction

Le modèle est basé sur les travaux et un modèle original de Frydman, Zeitlen, Alpan (1973) et Frydman (1974). Ces auteurs expriment l'énergie de déformation du sol en faisant intervenir le frottement intergranulaire. Ils aboutissent à une loi d'écoulement non associée, la déviation par rapport à la normalité étant égale à l'angle de frottement intergranulaire.

##### 1.3.4.2. Description du modèle

###### a. Lois de comportement par Frydman et al (1973)

Frydman et al (1973) ont montré après de nombreux essais triaxiaux réalisés sur sols pulvérulents qu'après la première étape de faibles sollicitations qui produisent des déformations élastiques, si on augmente les contraintes de cisaillement, apparaissent des déformations irréversibles, lorsque le rapport  $\frac{\tau_{oct}}{\sigma_{oct}}$  dépasse la valeur limite  $tg \phi_u$ , où  $\phi_u$  est l'angle de frottement grain sur grain du matériau.

Ils ont montré encore qu'en admettant que l'énergie de déformation plastique est due uniquement à un frottement intergranulaire de valeur  $\phi_u$ , on arrive à

$$\frac{\tau_{oct}}{\sigma_{oct}} = + tg \phi_u - \frac{d\epsilon_{oct}^p}{d\epsilon_{oct}^p} \quad (52)$$

où

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$d\epsilon_{oct}^p = \frac{1}{3} (d\epsilon_1^p + d\epsilon_2^p + d\epsilon_3^p)$$

$$d\epsilon_{oct}^p = \frac{1}{3} \sqrt{(d\epsilon_1^p - d\epsilon_2^p)^2 + (d\epsilon_2^p - d\epsilon_3^p)^2 + (d\epsilon_3^p - d\epsilon_1^p)^2}$$



b. Critère de plasticité

Monnet (1977) et Monnet et Gielly (1979) ont posé :

$$d\epsilon'_{oct} / d\epsilon^P_{oct} = -\text{tg } \delta = -\frac{1}{k} \quad (53)$$

et les équations (52) et (53) donnent :

$$f(\sigma, k) = \tau_{oct} - \sigma_{oct} (\text{tg } \phi_u + k) = 0 \quad (54)$$

L'expression (53) peut être considérée comme un critère de plasticité puisqu'elle s'annule quand il y a écoulement plastique. Elle indique un écrouissage, sa valeur variant suivant l'état de contrainte du sol,  $k$  étant le paramètre d'écrourissage.

Remarquons que le critère de plasticité a la forme d'un critère de Drucker avec écrourissage.

c. Loi d'écoulement

Les auteurs admettent, d'après Nadai (1963) que la déformation de cisaillement  $d\epsilon'_{oct}$  est colinéaire à la contrainte de cisaillement.

$$d\epsilon'_{oct} = d\lambda \tau_{oct} \quad (55)$$

(52) et (55) donnent :

$$d\epsilon^P_{oct} = -d\lambda \tau_{oct} \left( \frac{\tau_{oct}}{\sigma_{oct}} - \text{tg } \phi_u \right) \quad (56)$$

On peut donc définir la déformation plastique  $\{d\epsilon^P\}$  dans le système local (plan octaédrique) par les coordonnées :

$$\{x, y, z\}^T = \{d\epsilon'_{oct}, d\epsilon^P_{oct}, 0\} = \{d\lambda \tau_{oct}, -d\lambda \tau_{oct} \left( \frac{\tau_{oct}}{\sigma_{oct}} - \text{tg } \phi_u \right), 0\}$$

Dans le système des axes principaux, les coordonnées de  $\{d\epsilon^P\}$  deviennent :

$$\{d\epsilon^P\} = d\mu \{V\} = d\mu \{a, b, c\}^T \quad (57)$$

avec (fig. 28)

$$a = \frac{\cos \beta \cdot \cos \gamma}{\frac{\tau_{oct}}{\sigma_{oct}} - \text{tg } \phi_u} + \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (58a)$$

$$b = \frac{\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma}{\frac{\tau_{oct}}{\sigma_{oct}} - \text{tg } \phi_u} + \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (58b)$$

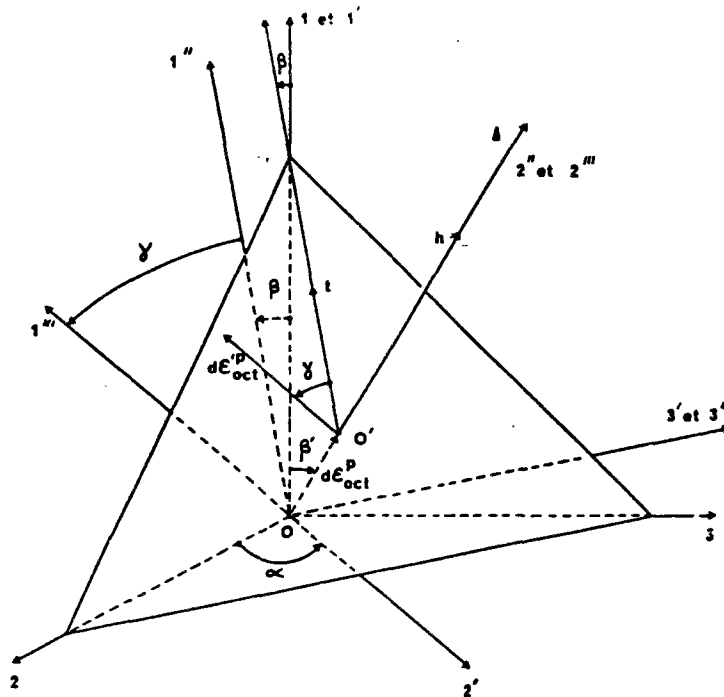


Fig. 28 - Définition du changement de repère par les trois angles :  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .  
(Monnet et Gielly, 1979)

$$c = \frac{\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma}{\frac{\tau_{oct}}{\sigma_{oct}} - \text{tg } \phi_u} + \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (58c)$$

$$d\mu = \frac{d\lambda}{\tau_{oct} \left( \frac{\tau_{oct}}{\sigma_{oct}} - \text{tg } \phi_u \right)} \quad (58d)$$

où

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} + \beta \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{tg } \gamma = \frac{\sqrt{3}(\sigma_2 - \sigma_3)}{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}$$

$d\lambda$  est un scalaire à déterminer qui permet d'évaluer la longueur du vecteur des déformations.

Le processus maintenant classique (voir Zienkiewicz (1971)) consiste à calculer la valeur de la fonction  $f$  pour tous les points du modèle d'éléments finis. Quand  $f > 0$ , pour un état des contraintes  $\sigma$  et un rapport des déformations plastiques correspondantes  $k$ , on effectue le rééquilibrage en calculant les variations des contraintes  $\{\delta\sigma\}$  telles que :

$$\{\delta\sigma\} = -d\lambda \{V\}^T [E] \quad (59)$$

(méthode des contraintes initiales).

Monnet et Gielly ont trouvé pour le scalaire  $d\lambda''$  la valeur

$$d\lambda'' = \frac{f(\sigma_Y, k)}{\{V\}^T [E] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} - \{V\}^T \left\{ \frac{\partial k}{\partial (\epsilon P)} \right\} \frac{\partial f}{\partial k}} \quad (60)$$

d. Etat ultime.

Le comportement que nous venons de décrire est valable tant que le matériau n'a pas atteint un état ultime défini par le critère de Mohr-Coulomb avec angle de frottement  $\varphi$ . Pour cet état les auteurs (Monnet et Gielly, 1979) appliquent les lois de la plasticité parfaite mais avec loi d'écoulement non associée. En effet, après analyse d'essais triaxiaux, les auteurs, proposent de prendre le vecteur incrément de déformations plastiques perpendiculaire à la droite de pente  $\varphi''$  dans le repère  $(\tau, \sigma)$ , avec :

$$\varphi'' = \varphi - \varphi_u$$

#### 1.3.4.3. Vérifications du modèle

Des vérifications du modèle ont été faites par comparaison des résultats expérimentaux sur appareil triaxial et des résultats calculés par éléments finis. Monnet et Gielly se sont servis des essais de Darmar et Plessiet réalisés sur sables (1964) et des essais de Newland et Allely (1957) sur des billes de plomb (essais de cisaillement à l'appareil triaxial).

La figure 29a compare pour les essais de Darmar et Plessiet les courbes déviateur-déformation calculées par la méthode des éléments finis en utilisant le modèle (en traits continus) et les résultats expérimentaux (en pointillés). Nous constatons une bonne coïncidence pour les trois courbes.

La figure 29b compare pour les mêmes essais les courbes de variation de volume-tassement.

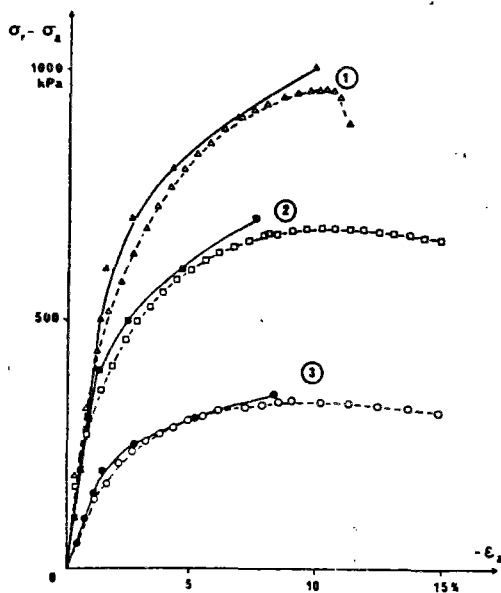


Fig. 29a - Courbes contraintes-tassement. (Monnet et Gielly, 1979)

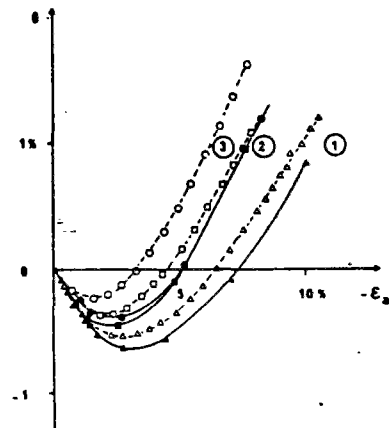


Fig. 29b - Courbes variation du volume-tassement. (Monnet et Gielly, 1979)

Notons que les essais sont faits sous trois étreintes latérales : 98 kPa, 196 kPa et 294 kPa.

La figure 29 c compare les courbes contraintes-tassement pour les essais de Newland et Allely. Ici, la coïncidence est en générale assez bonne sauf pour le cas 4 où il y a une certaine divergence expliquée par les auteurs comme étant due à l'expérience, l'échantillon ayant cédé plus tôt que ne le prévoit le critère de Mohr Coulomb.

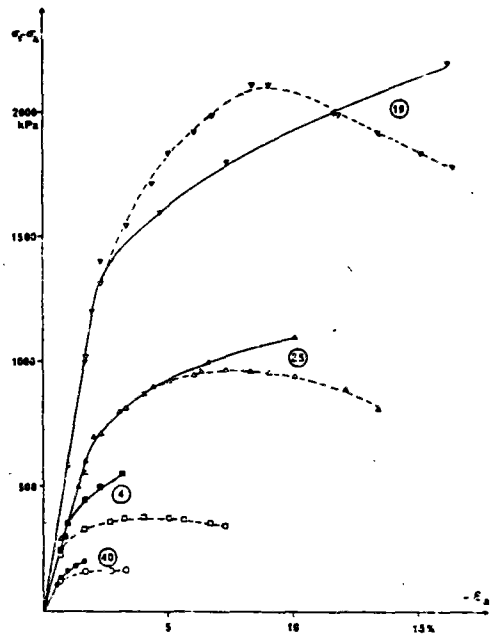


Fig. 29c - Courbes contraintes-tassement. Essai Newland-Allely. (Monnet et Gielly, 1979)

### 1.3.5. Modèle de double écouissage de Vermeer

#### 1.3.5.1. Introduction

P.A. Vermeer a mis au point en 1978, un modèle de double écouissage. Son modèle est surtout destiné à décrire le comportement des sols pulvérulents sous chargement initial, sous déchargement et rechargement. Ce modèle élastoplastique divise les déformations plastiques en deux parties : l'une, la plus importante, décrite à l'aide de la surface limite de cisaillement et de l'équation de contrainte-dilatance de Rowe (1962) pour les variations de volume et l'autre qui est purement volumique.

#### 1.3.5.2. Description du modèle

##### a. Critère de plasticité

Le modèle prévoit deux surfaces d'état limite, l'une de cisaillement et l'autre seulement volumique.

##### i. Surface d'état limite de cisaillement

Vermeer conclut d'après le travail expérimental à l'appareil triaxial de Tatsuoka et Ishihara (1974,1975) et Stroud (1971), qu'il existe une surface d'état limite de cisaillement écouissable (fig. 30). Les courbes de la figure 30 ont été obtenues en augmentant, en diminuant et en réaugmentant  $q$  pour diverses valeurs de  $p$ .

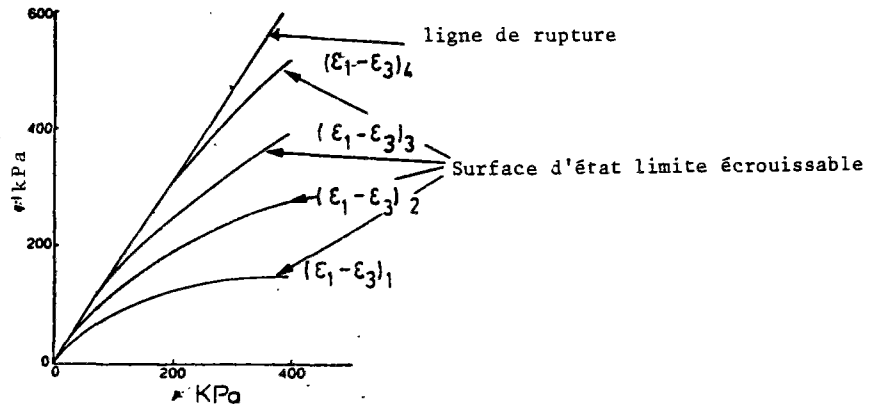


Fig. 30 - Données expérimentales (Tatsuoka-Ishihara) sur sables lâches. (Vermeer, 1978)

$$p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3 \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2}$$

L'expression mathématique qui approche les surfaces d'état limite est la suivante :

$$\epsilon_1^P - \epsilon_3^P = \frac{p}{p_0} \frac{\beta}{\beta} H(q/p) \quad (63)$$

où

$\epsilon_1^P, \epsilon_2^P, \epsilon_3^P$  sont les déformations plastiques principales

$p_0$  est une constante et la fonction constante H est adimensionnelle.

La constante  $\beta$  et la fonction H sont obtenues expérimentalement pour une certaine densité de sable. Ainsi  $\beta$  est obtenu en comparant les résultats d'essais triaxiaux avec différentes contraintes latérales. On obtient en général des valeurs entre 1/3 et 1/2. La fonction H est obtenue en traçant (fig. 31) le rapport  $q/p$  en fonction de  $(\epsilon_1^P - \epsilon_3^P) p_0^\beta / p^\beta$ .

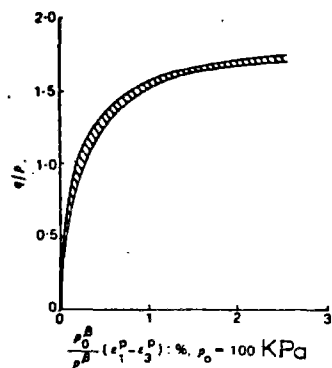


Fig. 31 - Données des essais triaxiaux pour détermination expérimentale de  $\beta$  et H. (Vermeer, 1978).

Kondner et Zelasko (1963) approchent la fonction  $H(q/p)$  par l'expression :

$$H(q/p) = H_0 \frac{q/p}{\alpha_f - q/p} \quad (64)$$

où

$H_0$  et  $\alpha_f$  sont constantes.

L'expression (63) est écrite sous la forme inverse pour représenter d'une façon plus générale le comportement du sol (et notamment le cas de l'écroissage négatif qui entraîne deux valeurs possibles de déformation pour une valeur de contrainte)

$$f_1 = q/p - H^{-1}(k_1 \cdot p_0^\beta / p^\beta) = 0 \quad (65)$$

où

$H^{-1}$  est l'inverse de  $H$  et  $k_1 = \epsilon_1^P - \epsilon_3^P$  (66) pour les conditions de compression triaxiale  $\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3$

L'équation (65) définit pour les diverses valeurs de  $k_1$  des surfaces d'état limite  $f_1 = 0$  (fig. 32). Ainsi,  $f_1 = 0$  peut être considérée comme un critère de plasticité avec écroissage.

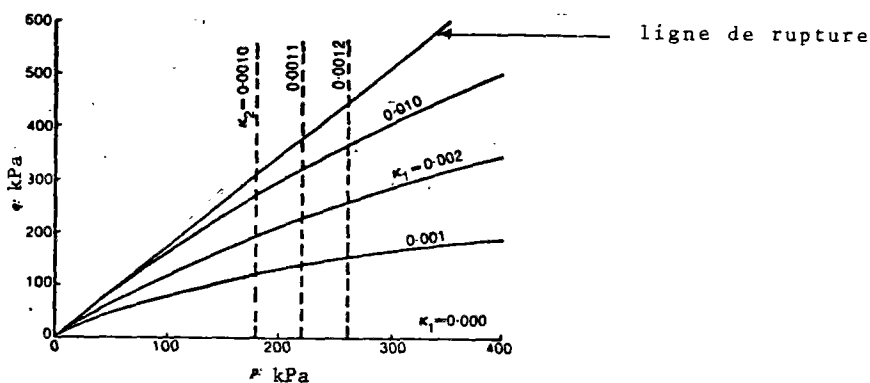


Fig. 32 - Surface d'état limite de cisaillement (Vermeer, 1978).

Pour les conditions qui ne sont pas les conditions d'essai triaxial, l'auteur du modèle propose pour critère de plasticité la fonction :

$$f_1 = a - H^{-1}(k_1/b) \quad (66)$$

où

$$a = \frac{3}{4} - \frac{9}{4} \left( \frac{J_3}{pJ_2} \right) + \frac{3}{4} \left[ 9 \left( \frac{J_3}{pJ_2} \right)^2 - 30 \left( \frac{J_3}{pJ_2} \right) + 9 \right]^{1/2} \quad (67a)$$

$$b = \frac{1}{a} \frac{q}{p} \frac{p_0^\beta}{p_0^\beta} \quad (67b)$$

$$\text{et } k_1 = \int \dot{k}_1 dt \quad \text{avec } \dot{k}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\dot{\epsilon}_1^P - \dot{\epsilon}_3^P)^2 + (\dot{\epsilon}_2^P - \dot{\epsilon}_3^P)^2 + (\dot{\epsilon}_3^P - \dot{\epsilon}_1^P)^2 \right]^{1/2} \quad (68)$$

On définit le tenseur :

$$\phi_{k1} = - \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{k1}} / \frac{\partial f_1}{\partial k_1} \quad (69)$$

Si  $f_1 < 0$  on se trouve dans le domaine élastique et  $\dot{\kappa}_1 = 0$

$f_1 = 0$  et en plus  $\phi_{k1} \dot{\sigma}_{k1} \geq 0$  alors  $\dot{\kappa}_1$  est déterminé par  $\dot{f}_1 = 0$

On a donc :

$$\dot{\kappa}_1 = \alpha_1 \phi_{k1} \dot{\sigma}_{k1} \quad (70)$$

où

$\alpha_1 = 0$  ou  $1$  ;  $\alpha_1$  n'est égal à  $1$  que si  $f_1 = 0$  et  $\phi_{k1} \dot{\sigma}_{k1} \geq 0$ .

### ii. Surface d'état limite de compression

La surface d'état limite décrite par des essais de cisaillement (augmentation de  $q$ ) est complétée par une autre surface d'état limite dans le plan  $(p, q)$  pour les sollicitations de compression isotrope (augmentation de  $p$ ). Celle-ci est représentée par une droite perpendiculaire à l'axe des  $p$  (fig. 33).

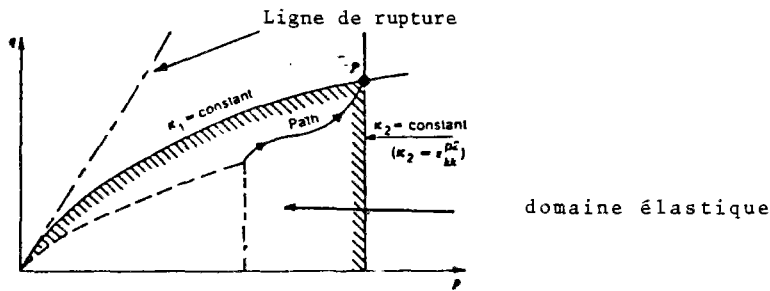


Fig. 33 - Surfaces d'état limite (Vermeer, 1978).

La fonction de charge correspondant à cette surface d'état limite est :

$$f_2 = a \frac{p^\beta}{p_0^\beta} - \frac{\epsilon_{kk}^p}{k_k}$$

où

$a$  est une constante expérimentale

et  $\frac{\epsilon_{kk}^p}{k_k}$  sont les déformations plastiques volumiques associées à cette surface d'état limite.

### b. Calcul de déformations

Ce modèle définit trois tenseurs de déformation. Le tenseur de déformations élastiques  $\epsilon_{ij}^e$ , un premier tenseur de déformations plastiques  $\epsilon_{ij}^{p1}$  correspondant à  $f_1$  et un deuxième tenseur de déformations plastiques  $\epsilon_{ij}^{p2}$  correspondant à  $f_2$ . On écrit donc :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^{p1} + \dot{\epsilon}_{ij}^{p2} \quad (71)$$

#### i. Calcul du $\epsilon_{ij}^e$

Comme le matériau est supposé isotrope, on applique la loi de Hooke :

$$\epsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} (\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} \delta_{ij} p) \quad (72)$$

où

G est le module de cisaillement  
 ν est le coefficient de Poisson.

L'équation (72) introduit un comportement élastique linéaire lorsque σ et ν sont supposés constants. Si on veut viser un comportement élastique non linéaire on peut, d'après l'auteur, utiliser l'expression :

$$G = G_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1-\beta} \quad (73)$$

où

p<sub>0</sub>, β sont des constantes déjà définies.

Une forme incrémentale pour le calcul des déformations élastiques est :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2G} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{1}{2G} \left( \frac{1-\beta}{3p} \sigma_{ij} + \frac{\beta\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \right) \delta_{kl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (74)$$

ii. Calcul de  $\dot{\epsilon}_{ij}^{P1}$

La loi d'écoulement pour les déformations  $\dot{\epsilon}_{ij}^{P1}$  est de la forme :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{P1} = k_1 \dot{\Psi}_{ij} \quad (75)$$

où

$\dot{\Psi}_{ij}$  est un tenseur fonction des contraintes.

(70) et (75) donnent :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{P1} = \alpha_1 \dot{\Psi}_{ij} \phi_{kl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (76)$$

Le tenseur  $\dot{\Psi}_{ij}$  peut être décomposé en sa partie déviatorique  $W_{ij}$  et sa partie sphérique

$$\dot{\Psi}_{ij} = W_{ij} + \frac{1}{3} \dot{\Psi}_{11} \delta_{ij} \quad (77)$$

La loi de normalité est appliquée pour le tenseur déviatorique des déformations. On écrit donc que  $W_{ij}$  est proportionnel à :

$$W_{ij}^* = \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{3} \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{kk}} \delta_{ij} \quad (78)$$



et on trouve finalement :

$$W_{ij}^* = W_{ij}^* / \left( \frac{3}{2} W_{k1}^* W_{k1}^* \right)^{1/2} \quad (79)$$

La loi d'écoulement volumique  $\dot{\epsilon}^p = k_1 \Psi$  se réfère à la partie des déformations volumiques qui se développent sous contraintes déviatoriques (cisaillement) ; c'est le phénomène de dilatance. La théorie sur la dilatance que l'auteur a incorporé dans son modèle est celle de Rowe (1962,1971). On considère des conditions triaxiales donc :

$$\dot{\epsilon}_{kk}^p = \dot{\epsilon}_1^p + 2 \dot{\epsilon}_3^p \quad (80)$$

et

$$k_1 = \dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_3^p \quad (81)$$

(81) et (75) donnent :

$$\dot{\epsilon}_1^p + 2 \dot{\epsilon}_3^p = (\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_3^p) \Psi_{11} \quad (82)$$

Si  $p$  est constant ou décroissant, nous avons :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\epsilon}_1^p = \dot{\epsilon}_1^p \quad (\text{déformations plastiques totales})$$

et (82) devient :

$$\frac{1 + 2 \dot{\epsilon}_3^p / \dot{\epsilon}_1^p}{1 - \dot{\epsilon}_3^p / \dot{\epsilon}_1^p} = \Psi_{11} \quad (83)$$

Pour  $p$  ou  $\sigma_3$  constants, Rowe propose l'équation :

$$- 2 \dot{\epsilon}_3^p / \dot{\epsilon}_1^p = R/k$$

où

$$R = \sigma_1 / \sigma_3$$

et  $k$  une constante

(83) alors devient :

$$\Psi_{11} = \frac{k - R}{k + \frac{1}{2} R} \quad (84)$$

Dans la théorie de contrainte-dilatance de Rowe, on a :

$$k = \text{tg}^2 (45 + \phi_\mu / 2)$$

où  $\phi_\mu$  est l'angle de frottement grain sur grain pour les sables denses. Pour les autres, on

doit remplacer  $\phi_\mu$  par  $\phi_f$ , angle qui dépend de la densité du sable.

L'auteur remarque que l'utilisation de la loi de normalité pour les déformations volumiques serait en fait une idéalisation pas très réaliste et elle conduirait à une surestimation de la dilatance.

iii. Calcul de  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$

Le tenseur  $\epsilon_{ij}^p$ , qui ne comprend que des déformations volumiques, se met sous la forme :

$$\epsilon_{ij}^p = \frac{1}{3} \epsilon_{kk}^p \delta_{ij} \quad (85)$$

où

$\epsilon_{kk}^p$  est mesuré pendant des essais de compression isotrope où la dilatance  $\epsilon_{kk}^1$  est égale à 0.

Si  $f_2 = 0$  et en plus  $\dot{p} \geq 0$ ,  $\dot{\epsilon}_{kk}^p$  résulte de l'équation  $\dot{f}_2 = 0$ , sinon  $\dot{\epsilon}_{kk}^p = 0$

$$\dot{\epsilon}_{kk}^p = \alpha_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \quad (86)$$

où

$\alpha_2 = 1$  lorsque  $f_2 = 0$  et  $\dot{p} \geq 0$ , sinon  $\alpha_2 = 0$

L'équation finale qui donne  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  est :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \alpha_2 \frac{a\beta}{9p} \frac{p\beta}{p_0} \delta_{ij} \delta_{kl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (87)$$

### 1.3.5.3. Applications

Le modèle a été incorporé dans un programme d'ordinateur pour résoudre des problèmes de conditions aux limites en déformation plané. L'auteur l'a testé sur deux problèmes : l'un, très simple, était un essai oedométrique et l'autre, était une fondation sur caisson.

### 1.3.6. Modèles de P. Wilde

#### 1.3.6.1. Introduction

P. Wilde a proposé (1977, 1979) des expressions générales pour décrire le comportement des sols pulvérulents. De ces expressions, il a formé deux modèles plus simples. Tous les deux sont des modèles élastoplastiques écrouissables et avec un domaine élastique fermé.

1.3.6.2. Description du modèle.

1. Formulation générale

a. Critère de plasticité

La fonction qui représente le critère de plasticité est :

$$f = f (J_1, J_2^{1/2}, \epsilon_{ii}^{pl}, N) = 0 \quad (88)$$

où

$J_1, J_2'$  sont respectivement le premier et le deuxième invariant du tenseur des contraintes et de son déviateur, et

$\epsilon_{ii}^{pl}, N^2$  sont respectivement le premier et le deuxième invariant du tenseur des déformations et de son déviateur.

L'équation (88) fait l'hypothèse d'un écrouissage isotrope, hypothèse dont l'auteur admet le caractère approximatif, mais qu'il fait pour des raisons de simplicité.

Dans l'espace  $(J_1, J_2^{1/2})$  (88) le critère de plasticité est représenté comme le montre la figure 34.

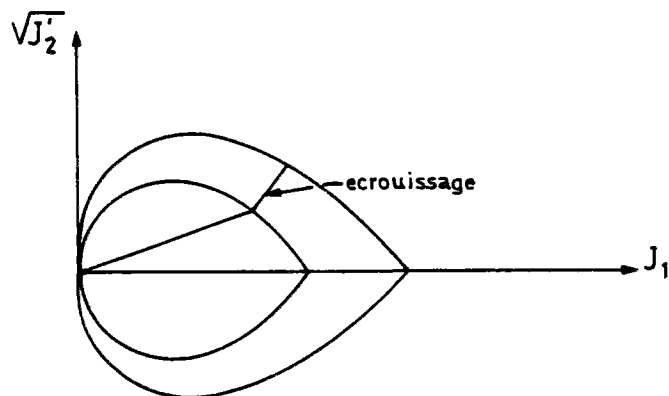


Fig. 34 - Surfaces d'état limite. (d'après Wilde, 1979).

b. Lois d'écoulement

P. Wilde divise le tenseur des déformations en un tenseur de déformations élastiques  $\epsilon_{ij}^e$  qu'il calcule d'après la loi de Hooke :

$$\epsilon_{ij}^e = D_{ijrs}^{-1} \sigma_{rs} \quad (89)$$

où

$D_{ijrs}$  est la matrice d'élasticité et, un tenseur de déformations plastiques  $\epsilon_{ij}^p$  qu'il calcule d'après l'équation :

$$\epsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (90)$$

où

$g$  est le potentiel plastique et  $\dot{\lambda}$  est une fonction scalaire qu'on peut calculer d'après l'équation (12j)

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} D \dot{\epsilon}}{A + \frac{\partial f}{\partial \sigma} D \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \quad (91)$$

où

$$\dot{\epsilon} = D^{-1} \dot{\sigma} + \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (92)$$

On a donc ici :

$$A = - \frac{1}{\dot{\lambda}} \left( \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{kk} + \frac{\partial f}{\partial N} \dot{N} \right) \quad (93)$$

L'auteur remarque enfin, que si l'on fait l'hypothèse simplificatrice de la symétrie de l'incrément des contraintes en fonction de l'incrément des déformations, on arrive à la conclusion :  $f \equiv g$ , c'est-à-dire à la loi de la normalité et en conséquence on écrit :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (94)$$

### c. Simplification du critère de plasticité

L'équation (88) étant une fonction de charge très générale, P. Wilde fait l'hypothèse d'une forme plus simple :

$$f = \sqrt{J_2'} + \varphi(J_1, \epsilon_{ii}^p, N) = 0 \quad (95)$$

Pour cette forme du critère de plasticité, on obtient :

$$A = - \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_{ij}^p} \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial J_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cos x \quad (96)$$

$$\text{avec } \cos x = \frac{1}{2N \sqrt{J_2'}} (S_{ij})^T \epsilon_{ij}^{pd} \quad (97)$$

où

$S_{ij} \epsilon_{ij}^{pd}$  sont respectivement les tenseurs déviatoriques des contraintes et des déformations plastiques.

La conséquence de cette simplification est que l'on peut calculer facilement l'expression  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$  :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \varphi}{\partial J_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{J_2'}} \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ 2\sigma_{xy} \\ 2\sigma_{yz} \\ 2\sigma_{zx} \end{bmatrix} \quad (97a)$$

(97a) et (94) donnent :

$$\dot{\epsilon}_{ii}^p = 3 \lambda \frac{\partial f}{\partial J_1} \quad (97b)$$

## 2. Modèle d'écoulement avec la densité

### a. Concepts de base

Ce modèle ne considère pas pour le critère de plasticité l'influence du deuxième invariant du déviateur du tenseur des déformations et les équations (95) et (96) s'écrivent :

$$f = \sqrt{J_2'} + \varphi(J_1, \epsilon_{ii}^p) \quad (98)$$

$$A = -\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_{ii}^p} \quad 3 \frac{\partial \varphi}{\partial J_1} \quad (99)$$

Lorsque  $A = 0$ , le matériau atteint un écoulement plastique parfait qui correspond à un état qualifié "critique" que l'auteur suppose déterminé par :

$$MJ_1 - \sqrt{J_2'} = 0 \quad (100)$$

où  $M$  est une constante (fig. 35).

Cette équation de la courbe d'état critique est analogue à celle des modèles Cam-Clay.

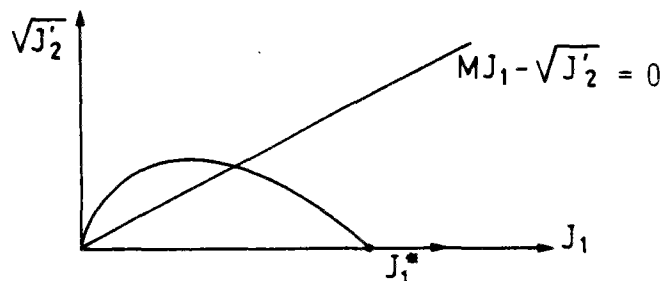


Fig. 35 - Ligne d'état critique (Wilde, 1979).

b. Critère de plasticité

L'équation (98) devient finalement :

$$f = \sqrt{J_2} + MJ_1 \left[ \ln \frac{J_1}{J_1^*} - \frac{k}{M} \epsilon_{ii}^P \right] \quad (101)$$

où

$J_1^*$  est une constante qui a les dimensions d'une contrainte et qui est la valeur de  $J_1$  pour la surface initiale d'état limite (fig. 35)

$k$  est une constante qui contrôle l'érouissage (sans dimension).

c. Loi d'écoulement. Calcul des déformations plastiques

Pour un critère de plasticité déterminé par l'équation (101), on arrive finalement (loi de normalité, d'après l'équation 97b) à l'expression suivante pour les variations de volume plastiques :

$$\dot{\epsilon}_{ii}^P = \dot{\lambda} \frac{MJ_1 - \sqrt{J_2}}{J_1} \quad (102)$$

où

$\dot{\lambda}$  est toujours positif (ou nul pour le cas du déchargement) .

D'après l'équation (102), on peut conclure :

Quand les points de contrainte se trouvent au-dessous de la courbe d'état critique, le matériau se comprime à cause des déformations plastiques. S'il est sur la courbe d'état critique, le volume est constant et s'il se trouve au-dessus, il se dilate.

3. Modèle d'érouissage contrôlé par deux invariants du tenseur des déformations

a. Critère de plasticité

Le modèle de simple érouissage qu'on a déjà décrit a le défaut d'admettre qu'il n'y a pas de déformations volumiques pendant l'écoulement plastique parfait; pour l'améliorer, P. Wilde propose de prendre en compte le deuxième invariant du déviateur du tenseur des déformations.

Ainsi, le critère de plasticité s'exprime par l'équation :

$$f = \sqrt{J_2'} + MJ_1 \left[ \ln \frac{J_1}{J_1^*} - \frac{k}{M} \epsilon_{ii}^P - g(N) \right] \quad (103a)$$

où

$g(N)$  est une fonction à déterminer expérimentalement. Du fait qu'il n'y a pas assez de données expérimentales, l'auteur admet pour  $g(N)$  une forme linéaire et arrive finalement à l'expression suivante pour la fonction de charge :

$$f = \sqrt{J_2'} + MJ_1 \left[ \ln \frac{J_1}{J_1^*} - \frac{k}{M} \epsilon_{ii}^P - \frac{\delta k}{M} (M^* - M) N \right] \quad (103b)$$

où

$M^*$  est une constante.

Le scalaire A s'exprime en conséquence (94),(103b) par l'équation :

$$A = 3 k \{ [ M + (M^* - M) \cos x ] J_1 - \sqrt{J_2'} \} \quad (104)$$

L'introduction du deuxième invariant du déviateur du tenseur des déformations dans la fonction de charge n'influence pas le calcul des déformations plastiques fait par (102) donc la ligne  $MJ_1 - \sqrt{J_2'} = 0$  exprime toujours un lieu où les déformations volumiques sont nulles mais sans être maintenant une courbe d'état critique (écoulement plastique parfait).

### b. Loi d'écoulement

Dans cette version, pour calculer les incréments des déformations plastiques, P. Wilde utilise l'expression :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{MJ_1 - \sqrt{J_2'}}{J_1} \delta_{ij} + \dot{\lambda} \frac{1}{2\sqrt{J_2'}} S_{ij} \quad (105)$$

où

$S_{ij}$  est la partie déviatorique du tenseur des contraintes.

### 3. Vérification du modèle

Le modèle a été vérifié grâce à la méthode des éléments finis (Walter, 1979) sur un modèle de mur de soutènement dont les contraintes ont été mesurées. La figure 36 présente la comparaison des résultats qui montre une bonne concordance.

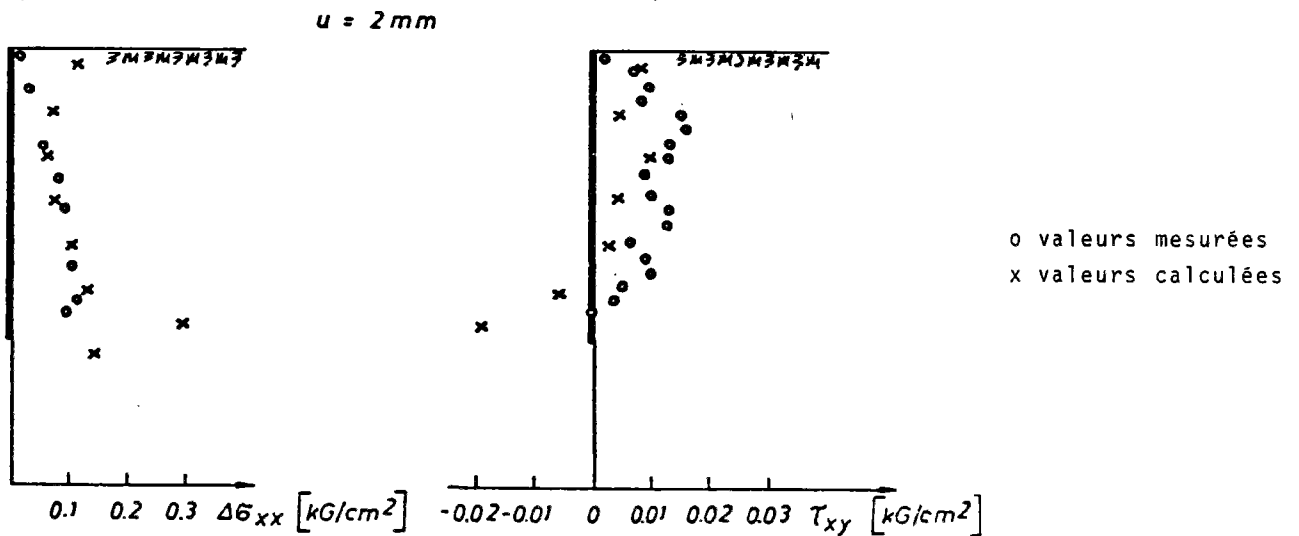


Fig. 36 - Vérification expérimentale du modèle (Walter, 1979).

### 1.3.7. Modèle de R. Nova et D.M. Wood

#### 1.3.7.1. Introduction

Inspirés par le modèle Cam-Clay ou plus généralement par la conception d'un domaine élastique fermé, Nova et Wood (1979) proposent un modèle élastoplastique, écouissable avec une loi non associée. Le modèle est destiné à représenter le comportement des sables.

#### 1.3.7.2 Description du modèle

##### a. Considérations générales

Les auteurs font les hypothèses suivantes :

- Le sable est isotrope et uniforme
- L'étude est restreinte aux conditions de l'essai triaxial

$$\sigma_2 = \sigma_3 \quad \text{et} \quad p = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{2}, \quad q = \sigma_1 - \sigma_3, \quad \dot{\epsilon}_v^p = \dot{\epsilon}_1 + 2\dot{\epsilon}_3, \quad \dot{\epsilon}_c^p = \frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3) \quad (106)$$

(positifs en compression)

$$\eta = q/p \quad (107)$$

- Les déformations totales sont la somme des déformations élastiques et des déformations plastiques :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p$$

Comme les auteurs n'admettent pas la loi de normalité, ils proposent deux fonctions différentes pour le critère de plasticité et le potentiel plastique. Ainsi :

$$f = f(p, q, \psi_i) \quad \text{est le critère de plasticité} \quad (108)$$

$$g = g(p, q, x_i) \quad \text{est le potentiel plastique} \quad (109)$$

où

$\psi_i = \psi_i(\epsilon_v^p, \epsilon_c^p)$  et  $x_i = x_i(\epsilon_v^p, \epsilon_c^p)$  sont fonction des déformations plastiques volumiques  $\epsilon_v^p$  et de cisaillement  $\epsilon_c^p$ .

Les déformations plastiques apparaissent quand  $f = 0$  et simultanément  $\dot{f} = 0$

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \sum_i^m \frac{\partial f}{\partial \psi_i} \dot{\psi}_i = 0 \quad (110)$$

Nous avons aussi :

$$\dot{\psi}_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial \epsilon_v^p} \dot{\epsilon}_v^p + \frac{\partial \psi_i}{\partial \epsilon_c^p} \dot{\epsilon}_c^p \quad (111)$$

et comme

$$\dot{\epsilon}_v^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial p} \quad \text{et} \quad \dot{\epsilon}_c^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial q} \quad (112)$$

$$\dot{\psi}_i = \lambda \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial \epsilon_v^p} \frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \epsilon_c^p} \frac{\partial g}{\partial q} \right) \quad (113)$$



donc :

$$\dot{\lambda} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q}}{\sum_i^m \frac{\partial f}{\partial \psi_i} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial \epsilon_V^P} \frac{\partial q}{\partial p} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \epsilon_C^P} \frac{\partial q}{\partial q} \right)} \quad (114)$$

et ici  $\lambda$  est exprimé en fonction des incréments des contraintes (par opposition à la forme classique écrite en fonction des incréments de déformation voir (1.2.2.)).

On écrit aussi :

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{A} \left( \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} \right) \quad (115)$$

où

$$A = - \sum_i^m \frac{\partial f}{\partial \psi_i} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial \epsilon_V^P} \frac{\partial q}{\partial p} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \epsilon_C^P} \frac{\partial q}{\partial q} \right) \quad (116)$$

A constitue un "module d'écoulement" et si  $A > 0$  le matériau présente un écoulement positif, si  $A < 0$  un écoulement négatif et si  $A = 0$  on est dans le cas de la plasticité parfaite.

Nous pouvons alors écrire pour la loi d'écoulement l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_V^P \\ \dot{\epsilon}_C^P \end{pmatrix} = \frac{1}{A} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial q}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p} \\ \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial q}{\partial q} & \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} \quad (117)$$

Il ne reste alors qu'à définir les fonctions  $g$ ,  $f$  et  $A$  ainsi que les paramètres qui caractérisent le comportement élastique.

#### b. Définition du potentiel plastique

Nova et Wood définissent la dilatance comme :

$$d = \frac{\dot{\epsilon}_V^P}{\dot{\epsilon}_C^P} \quad (118)$$

et ils supposent que la relation contraintes-dilatance issue des essais de Stroud (1971) et Smith (1972) sur sables en déformation plane reste valable pour les conditions de l'essai triaxial ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) Ils écrivent donc :

$$\eta = M - \mu d \quad (119)$$

$\mu$  et  $M$  sont des constantes.

La projection du potentiel plastique dans le plan (p,q) est une courbe (q = q<sub>g</sub>(p, x<sub>i</sub>) telle que pour chacun de ses points :

$$\frac{\partial q}{\partial p} = - \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_c^p} \quad (120)$$

En combinant (118), (119), (120), on obtient :

$$\frac{\partial q}{\partial p} = \frac{q}{\mu p} - \frac{M}{\mu} \quad (121)$$

et encore après intégration :

$$q = \frac{Mp}{1-\mu} \left[ 1 - \mu \left( \frac{p}{p_{ug}} \right)^{(1-\mu)/\mu} \right] \quad (121a)$$

où

p<sub>ug</sub> est la valeur de la pression isotrope quand η = M (fig. 37)

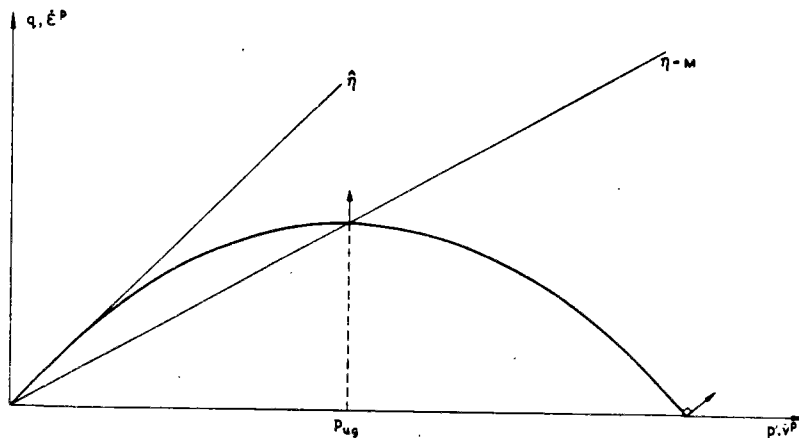


Fig. 37 - Potentiel plastique. (Nova et Wood, 1979)

Notons que la forme de l'équation (121a) est très proche de celle du modèle Cam-Clay.

Le fait que quand q = 0 et p = p<sub>c</sub> (consolidation isotrope), d'après le potentiel déjà défini, il y ait des déformations de cisaillement montre une faiblesse du potentiel plastique proposé. Cette faiblesse est due à l'impossibilité d'évaluer correctement les résultats expérimentaux quand η est très petit. Pour ce domaine, les auteurs proposent à la place de la relation linéaire (117) qu'on a utilisée, une hyperbole. Leur choix se justifie d'une part par des essais de Namy (1970) qui a tracé η et d dans le plan (η, 1/d) et a obtenu une droite qui passait par l'origine des axes, donc hyperbole ηd = c dans le plan (η, d) et d'autre part, par le fait qu'une hyperbole est la fonction la plus simple pour représenter le fait que la dilataance tend à l'infini (ε<sub>c</sub><sup>p</sup> → 0) quand η tend vers zéro.

Donc, pour ces raisons on admet l'équation :

$$\eta d = c \quad (122)$$

pour les basses valeurs de  $\eta$  et on détermine  $c$  par continuité entre (119) et (122) (fig. 38).

On trouve que :

$$c = M^2/4\mu \quad (123)$$

et la valeur de transition de  $\eta$  est  $\eta_{tr} = M/2$ . Pour  $\eta < \eta_{tr}$  le potentiel plastique se met sous la forme :

$$q^2 + \frac{M^2 p^2}{4\mu} = \frac{M^2}{4\mu} p_c^2 \quad (124)$$

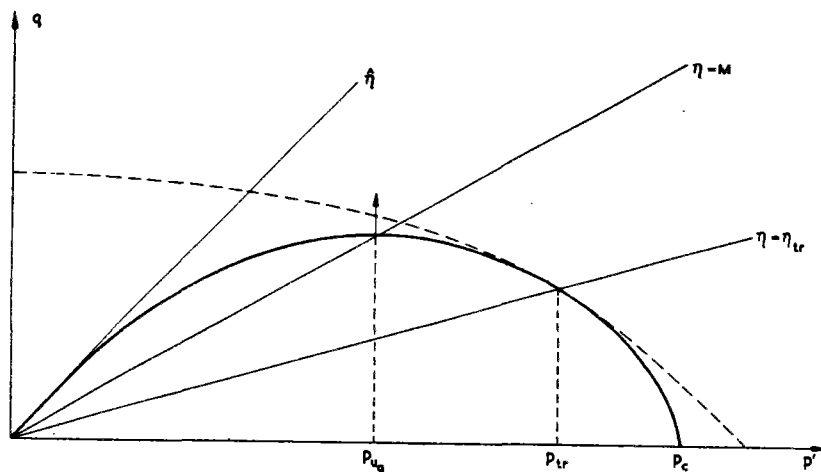


Fig. 38 - Potentiel plastique corrigé. (Nova et Wood, 1979)

### c. Définition des surfaces d'état limite

Les auteurs font l'hypothèse que dès que l'on applique un chargement sur un sable, il y a des déformations plastiques et des déformations élastiques. Cette hypothèse leur permet de considérer la première surface d'état limite comme l'origine des axes du plan  $(p, q)$ . Les surfaces d'état limite postérieures sont définies par l'expression suivante proposée par Pouroushasb(1971) et confirmée par Tatsuoka et Ishihara (1974)

$$\eta + m \cdot \ln p = \text{const.} \quad (125)$$

où

$m$  est une constante pour une certaine densité du sable. Si  $p_u$  est le point d'intersection entre la droite  $\eta = M$  et la fonction de charge  $f$ , on obtient :

$$\eta + m \ln p = M + m \ln p_u$$

ou

$$\eta = M - m \ln(p/p_u) \quad (126)$$

expression très proche des expressions du modèle Cam-Clay original (où  $m = M$ ).

En comparant (108) et (126), nous constatons que le seul paramètre  $\Psi_1$  que l'on utilise est  $p_u$ . On peut alors écrire (114) comme suit :

$$\dot{\lambda} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q}}{\frac{\partial f}{\partial p_u} \left( \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial p_u}{\partial \epsilon_v^p} + \frac{\partial q}{\partial q} \frac{\partial p_u}{\partial \epsilon_c^p} \right)} \quad (127)$$

Les auteurs remarquent que l'équation (125) proposée par Poorooshasb ne peut pas être confirmée avec précision pour les basses valeurs de  $\eta$ . D'autre part, l'expression proposée pour le potentiel plastique a été basée sur le fait que le comportement plastique du sable pour le domaine des basses valeurs de  $\eta$  est dû plus à une rupture des contacts entre grains qu'à un glissement macroscopique. Cette considération concerne les métaux et les sables et en conséquence on peut les traiter d'une façon analogue. On suppose donc que pour  $\eta < \eta_{tr}$  on peut appliquer la loi de normalité et que  $f \cong g$ . Cette hypothèse a été en outre vérifiée expérimentalement par Holubec (1966).

La figure 39 montre la forme finale d'une surface d'état limite pour une certaine pression de préconsolidation  $p_c$ .

On obtient facilement :

$$p_u = \frac{p_c}{\sqrt{1 + \mu}} e^{-M/2 m} \quad (128)$$

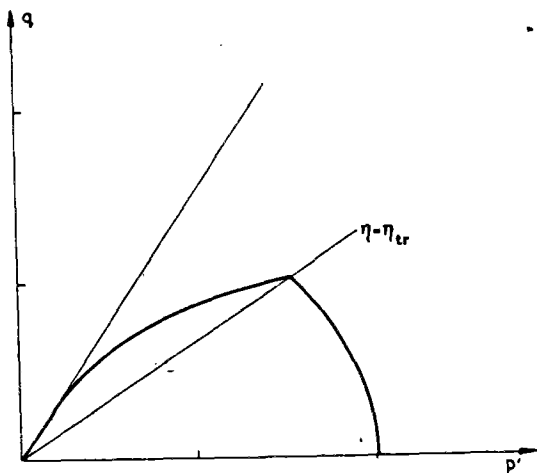


Fig. 39 - Critère de plasticité. (Nova et Wood, 1979)

d. Calcul de A

Pour calculer A, il nous faut calculer les expressions  $\partial p_u / \partial \epsilon_v^p$  et  $\partial p_u / \partial \epsilon_c^p$ .

Pour calculer  $\partial p_u / \partial \epsilon_v^p$ , nous devons évaluer la variation de  $p_u$  avec  $\epsilon_v^p$  quand  $\epsilon_c^p$  est constant (consolidation isotrope). Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{\partial p_u}{\partial \epsilon_v^p} = \frac{\partial p_u}{\partial p_c} \frac{\partial p_c}{\partial \epsilon_v^p} \quad (129)$$

Expérimentalement, on observe qu'il y a une relation unique entre  $\dot{\epsilon}_v / \eta=0$  et  $\dot{p}_c$  qu'on peut exprimer comme

$$\dot{\epsilon}_v \Big|_{\eta=0} = \ell \frac{\dot{p}_c}{p_c} \quad (130)$$

où  $\ell$  est une constante.

Si nous déchargeons, nous récupérons la partie élastique des déformations.

$$\dot{\epsilon}_v^e \Big|_{\eta=0} = k \frac{\dot{p}_c}{p_c} \quad (131)$$

donc

$$\dot{\epsilon}_v^p \Big|_{\eta=0} = (\ell - k) \frac{\dot{p}_c}{p_c} \quad (132)$$

et comme  $\dot{\epsilon}_c^p = 0$

$$\frac{\partial p_c}{\partial \epsilon_v^p} = \frac{p_c}{\ell - k} \quad (133)$$

et

$$\frac{\partial p_u}{\partial \epsilon_v^p} = \frac{e^{-\frac{M}{2m}}}{\sqrt{1+\mu}} \frac{p_c}{\ell - k} = \frac{p_u}{\ell - k} \quad (134)$$

Un processus identique permet aux auteurs de calculer  $\partial p_u / \partial \epsilon_c^p$  et ils trouvent :

$$\frac{\partial p_u}{\partial \epsilon_c^p} = \frac{D}{\ell - k} p_u \quad (135)$$

où

$D$  est une constante positive pendant un écoulement positif et nulle pendant un écoulement négatif.

Nous pouvons maintenant calculer aisément la valeur de  $\lambda$  pour les divers cas :

$\eta < \eta_{tr} = M/2$  écoulement positif

$$\lambda = \frac{d\dot{p} + \dot{q}}{(\eta+d)(d+D)} \frac{\ell - k}{p} \quad \text{et } d = \frac{M^2}{4\eta} \quad (136)$$

$\eta_{tr} = M/2 \leq \eta < M$  écoulement positif

$$\lambda = \frac{(m-n) \dot{p} + \dot{q}}{(D+d)m} \frac{\ell - k}{p} \quad \text{et } d = \frac{M-\eta}{\mu} \quad (137)$$

$M \ll \eta$       écoulement négatif

$$\lambda = \frac{(m-n) \dot{p} + \dot{q}}{dm} \frac{l-k}{p} \quad \text{et } d = \frac{M-\eta}{\mu} \quad (138)$$

### 1.3.7.3. Vérifications du modèle

La comparaison des résultats expérimentaux dus à Tatsuoka (1972) et des prévisions du modèle ont montré une coïncidence satisfaisante (fig. 40) pour des essais triaxiaux.

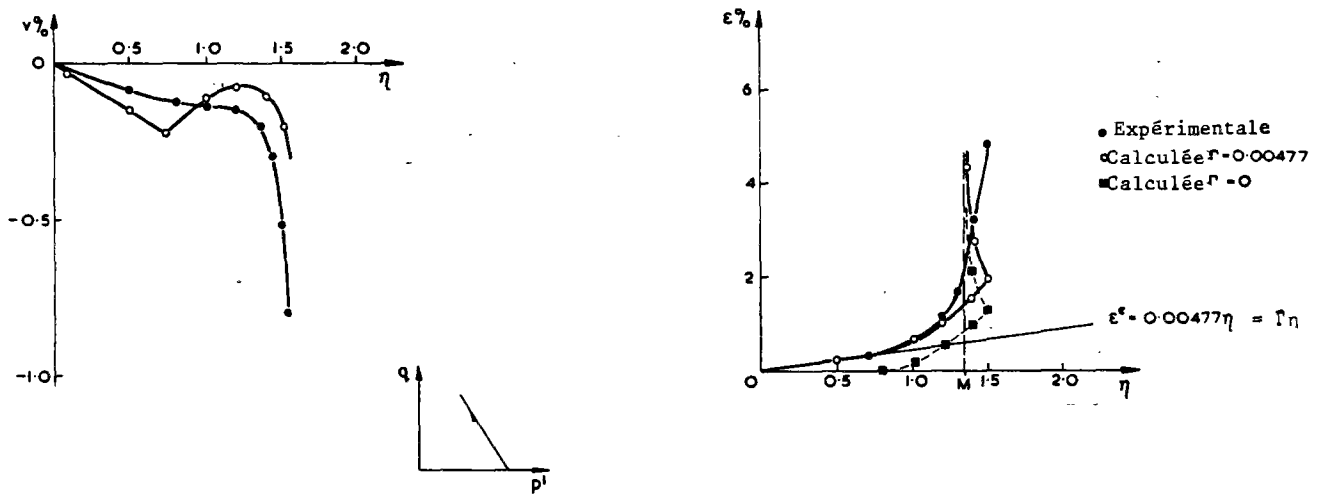


Fig. 40 a - Essais sur sables lâches avec  $\sigma'_a$  constante (Nova et Wood, 1979)

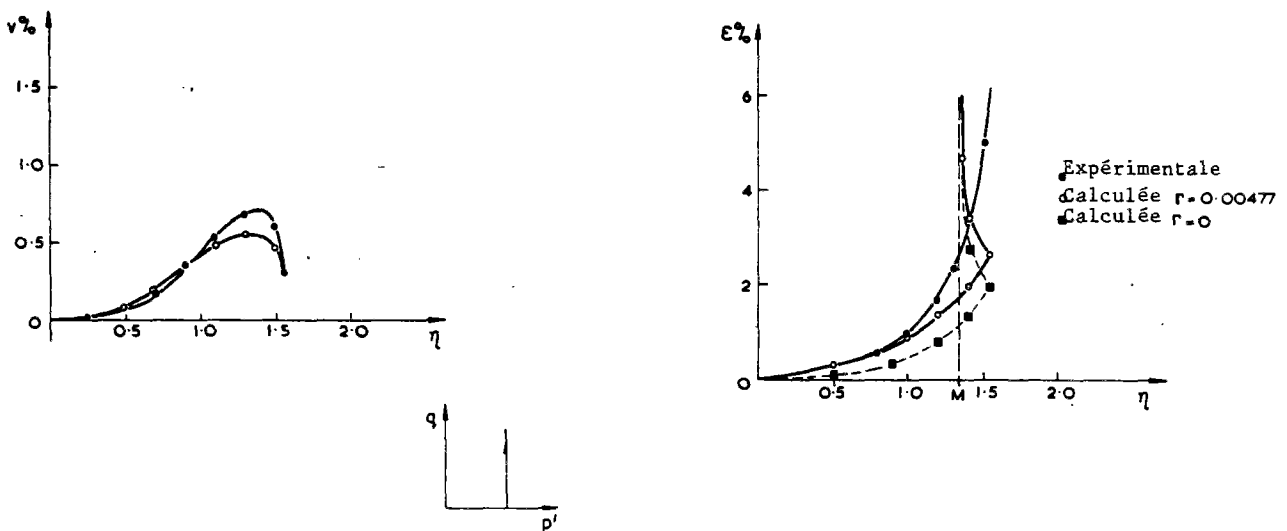


Fig. 40 b - Essais sur sables lâches avec  $p'$  constante (Nova et Wood, 1979)

### 1.3.8. Loi incrémentale de Boulon-Chambon-Darve

(Darve, 1974, Boulon, Chambon et Darve, 1977)

#### 1.3.8.1. Introduction

Il s'agit d'un modèle basé sur la loi rhéologique incrémentale valable pour les milieux pulvérulents. Les paramètres utilisés résultent d'essais triaxiaux de traction ou de compression conventionnels. Le modèle englobe beaucoup de phénomènes comme la dilataance, la variation du module d'Young ou du coefficient de Poisson. Il est valable en "charge" ou en "décharge", il rend compte du caractère irréversible des déformations d'un matériau pulvérulent, etc...

#### 1.3.8.2. Description du modèle

La loi incrémentale sur laquelle le modèle est basé est :

$$d\epsilon = [M] d\sigma \quad (139)$$

où

[M] est une matrice carrée 6x6.

- Hypothèses fondamentales

Un matériau même si on peut le considérer comme isotrope initialement ne reste pas isotrope après avoir subi des déformations plastiques. Les auteurs ont donc fait l'hypothèse de l'isotropie de la loi incrémentale, mais ont pris en compte une certaine forme d'anisotropie, l'orthotropie (symétrie par rapport à trois plans triorthogonaux).

L'hypothèse d'orthotropie limite les éléments non nuls de la matrice [M] à 12 et la forme générale de la loi (139) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\epsilon_{22} \\ d\epsilon_{33} \\ d\epsilon_{23} \\ d\epsilon_{31} \\ d\epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & F & E & 0 & 0 & 0 \\ F' & B & D & 0 & 0 & 0 \\ E' & D' & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ d\sigma_{23} \\ d\sigma_{31} \\ d\sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (140)$$

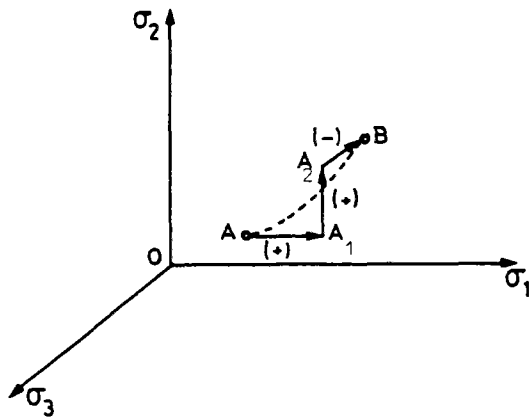
où

A, B, C, D, D', E, E', F, F', G, H, J, sont des fonctions à déterminer.

La deuxième hypothèse que les auteurs ont faite est d'admettre l'existence de huit "zones tensorielles". On appelle "zone tensorielle" l'aire de l'espace des sollicitations incrémentales où [M] a la même valeur pour une certaine histoire des sollicitations.

Cette hypothèse permet la décomposition du chemin élémentaire  $d\sigma$  donné en quatre chemins élémentaires particuliers. Dans l'espace des contraintes principales on a trois chemins élémentaires (fig. 41).

$$\begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d\sigma_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d\sigma_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d\sigma_{13} \\ d\sigma_{31} \\ d\sigma_{12} \end{bmatrix}$$



$$\overline{AB} = \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2B}.$$

Fig. 41 - Décomposition du chemin  $d\sigma$ . (Boulon, Chambon et Darve, 1977).

Cette décomposition est correcte à condition que le principe de superposition des sollicitations incrémentales soit vérifié.

- Calcul des fonctions inconnues de  $[M]$

Si donc on applique la sollicitation suivante :

$$[d\sigma^1] = \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

on obtient la déformation suivante :

$$[d\epsilon^1] = \begin{bmatrix} d\epsilon_{11}^1 \\ d\epsilon_{22}^1 \\ d\epsilon_{33}^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (141)$$

où l'on peut poser

$$\begin{aligned} d\epsilon_{11}^1 &= \frac{1}{u_1} d\sigma_{11} \\ d\epsilon_{22}^1 &= -V_1^2 d\epsilon_{11}^1 = -\frac{V_1^2}{u_1} d\sigma_{11} \\ d\epsilon_{33}^1 &= -V_1^3 d\epsilon_{11}^1 = -\frac{V_1^3}{u_1} d\sigma_{11} \end{aligned}$$

De la même manière, les vecteurs  $[d\sigma^2]$  et  $[d\sigma^3]$  produisent respectivement  $[d\epsilon^2]$  et  $[d\epsilon^3]$ .



Par superposition, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/u_1 & -V_2/u_2 & -V_3/u_3 \\ -V_1^2/u_1 & 1/u_2 & -V_3^2/u_3 \\ -V_1^3/u_1 & -V_2^3/u_2 & 1/u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (142)$$

où

$$u_k = \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_k} \right) \sigma_j \sigma_L \quad v_k^L = - \left( \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_k} \right) \sigma_j \sigma_L$$

$$v_k^j = \left( - \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_k} \right) \sigma_j \sigma_L \quad \sigma_j \sigma_L \text{ constants} \\ k, j, L = 1, 2, 3 \quad k \neq j \neq L$$

$$\sigma_k = f(\varepsilon_k)_{\sigma_j, \sigma_L} \quad \varepsilon_j = g(\varepsilon_k)_{\sigma_j, \sigma_L} \quad \varepsilon_L = h(\varepsilon_k)_{\sigma_j, \sigma_L}$$

Neuf des douze éléments non nuls de  $[M]$  ont été calculés d'après une série de chemins particuliers de sollicitation (chemins pour lesquels une seule contrainte principale varie et les autres restent constantes) (fig. 42).

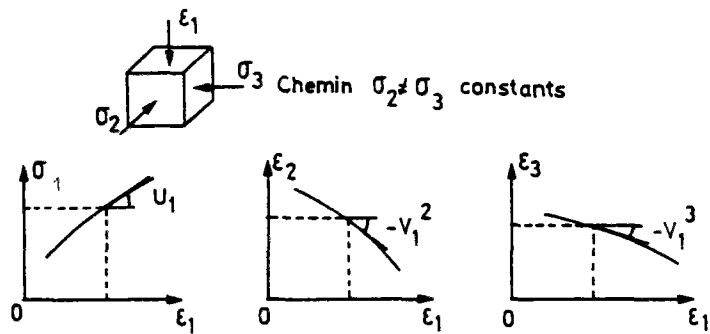


Fig. 42 - Représentation schémique des éléments de la matrice de la loi incrémentale. (Boulon, Chambon et Darve, 1977).

Les trois autres paramètres à déterminer  $G$ ,  $H$ ,  $J$  sont très difficiles à mesurer expérimentalement car il faut réaliser une distorsion sur un échantillon qui doit rester homogène.

Utilisant le fait expérimental mis en évidence par Boehler (1968) que le module d'Young d'un corps orthotrope élastique varie suivant une loi ellipsoïdale suivant la direction sur laquelle on le mesure, les auteurs ont obtenu finalement les expressions suivantes pour  $G$ ,  $H$ ,  $J$  :

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{\sqrt{(u_2)^2 + (u_3)^2}}{u_2 u_3 \sqrt{2}} + \frac{u_2 (V_3^2 - 1) + u_3 (V_2^3 - 1)}{4 u_2 u_3} \\
 H &= \frac{\sqrt{(u_3)^2 + (u_1)^2}}{u_3 u_2 \sqrt{2}} + \frac{u_3 (V_1^3 - 1) + u_1 (V_3 - 1)}{4 u_3 u_1} \\
 J &= \frac{\sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2}}{u_1 u_2 \sqrt{2}} + \frac{u_1 (V_2 - 1) + u_2 (V_1^2 - 1)}{4 u_1 u_2}
 \end{aligned}
 \tag{143}$$

### 1.3.8.3. Vérification du modèle

Pour vérifier le modèle, des courbes contraintes-déformations calculées ont été comparées à des courbes expérimentales obtenues par des essais triaxiaux.

Les figures 42 montrent quelques résultats qui sont en général très bons.

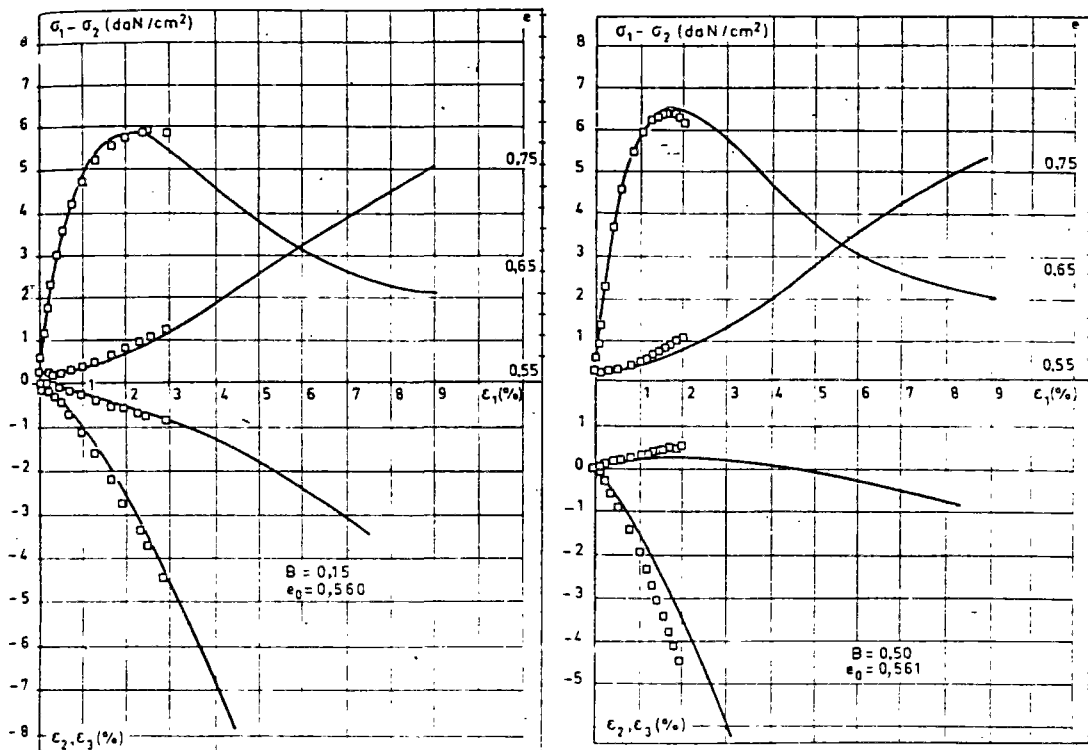


Fig. 42a - Comparaison des résultats expérimentaux avec des résultats calculés par le modèle (sables denses). (Boulon, Chambon et Darve, 1977).

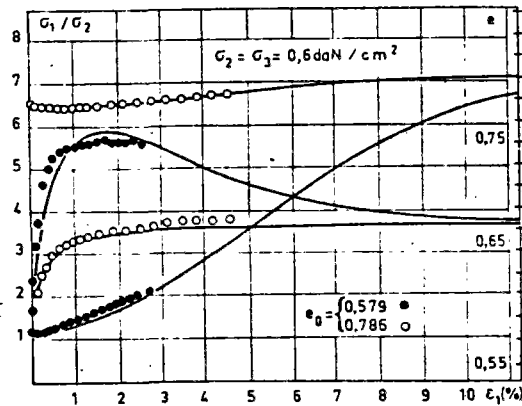


Fig. 42b - Comparaison des résultats expérimentaux avec des résultats calculés par le modèle (sables lâches et denses). (Boulon, Chambon et Darve, 1977)

#### 1.3.8.4. Applications du modèle

Le modèle utilisé dans un programme de calcul basé sur la méthode des éléments finis, a été utilisé pour traiter des problèmes tels que :

- la simulation d'un triaxial fretté : mise en évidence du développement de la plasticité à partir du centre de l'échantillon (Boulon, Chambon, Darve, 1977)
- l'enfoncement d'une plaque superficielle rigide et rugueuse : comparaison avec l'expérience de la courbe effort-enfoncement calculée (Boulon, Chambon, Darve, 1977).
- la translation ou la rotation d'un écran : comparaison avec les résultats d'un modèle analogique de Schneebeili (Boulon, Chambon et Darve, 1977, Boulon, Chambon, Darve, Desrues, Flavigny et Foray, 1977).
- le tassement d'un pieu : comparaison avec les résultats d'essais en cuve (Boulon, Chambon, Darve, Desrues, Flavigny et Foray, 1977)
- la prévision des pressions interstitielles (Boulon, Darve, Flavigny et Foray, 1979)

#### 1.3.9. Modèles anisotropes

##### Interprétation générale des modèles à écrouissage anisotrope

Le fait que quand les déformations plastiques apparaissent les cristaux du matériau s'orientent dans des directions "privilégiées" ne permet pas d'admettre que l'écoulement plastique soit isotrope (Hill, 1950). Ainsi, d'après les travaux de Mróz (1967) sur l'écrouissage des métaux, Mróz et al (1978, 1979), Prévost (1977-1979) et Ghaboussi J, Momen H. (1979) ont proposé des modèles qui tentent de représenter le caractère anisotrope du comportement des sols.

Les principes d'écrouissage isotrope (Taylor et Quinney, 1931) et cinématique (Prager, 1956, 1958) (cf. §. 1.2.1.) n'étant pas satisfaisants, surtout quand on veut modéliser des chargements et déchargements répétitifs (cycles) où l'hysteresis est importante, Mróz et al et Prévost ont proposé pour leurs modèles des critères de plasticité avec écrouissage anisotrope, c'est-à-dire une combinaison d'un écrouissage isotrope et d'un écrouissage cinématique.

Les auteurs admettent l'existence d'une surface d'état limite initiale,  $f_0 = 0$  et d'une surface extrême,  $f = 0$  dont la position, la grandeur et le mouvement sont fonction de la densité du matériau  $\rho$  et de l'histoire des déformations plastiques volumiques. Entre ces deux surfaces, il y a une famille de surfaces d'état limite qui s'élargissent et se translatent au cours des chargements et déchargements (fig. 43).

Les positions et les grandeurs initiales de ces surfaces reflètent l'histoire des relations contraintes-déformations du matériau et plus particulièrement leurs translations initiales sont une expression directe de la "mémoire" du matériau (Prévost, 1979).

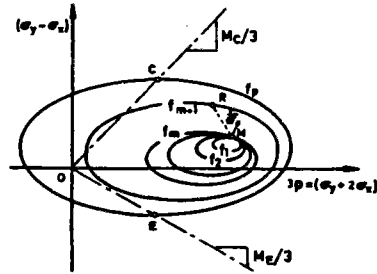


Fig. 43 - Surfaces d'état limite d'un modèle d'écroûissage anisotrope (Prévost, 1979).

Notons que les droites OC et OE jouent le rôle des courbes d'état critique du modèle Cam-Clay et elles ne changent pas pendant la plastification du matériau.

Chaque surface d'état limite  $f_{(m)}$  est associée à un module d'écroûissage  $H_m$  qui est une expression qui comprend les lois qui guident l'élargissement et la translation<sup>m</sup> des surfaces d'état limite. Ce module d'écroûissage est supposé constant entre  $f_m$  et  $f_{m+1}$ , mais une fois que  $f_m$  est devenu  $f_{m+1}$  il devient  $H_{m+1}$ .

### 1.3.10 Modèle d'écroûissage anisotrope pour sols (Mróz Z, Norris V.A., Zienkiewicz O.C., 1978)

#### 1.3.10.1 Introduction

Pour surmonter les problèmes d'hystérésis qui apparaissent quand un sol se trouve sous charges cycliques, les auteurs proposent un modèle qui prend en compte l'écroûissage anisotrope des sols. Ils formulent leur modèle en admettant les concepts généraux donnés au § 1.3.8.

#### 1.3.10.2 Description du modèle

##### 1. Critère de plasticité

La forme du critère de plasticité que les auteurs proposent est la suivante :

$$f_{(m)}(\sigma_{ij} - a^{(m)}, \eta^P) = 0 \quad (144)$$

où

$m$  dénote l'ordre de la surface d'état limite ( $f$ )

$\sigma_{ij}$  est le tenseur des contraintes

$\eta^P$  est la densité relative plastique

$a^{(m)}$  est la loi de translation

$$a^{(m)} = \beta^{(m)} c(\epsilon_{ij}^P, \sigma_{ij}, \lambda) \dot{\lambda}$$

où  $\beta^{(m)}$  détermine la direction de la translation

$c$  est une fonction scalaire qui prend en compte l'histoire des déformations.

$$\dot{\lambda} = \left( \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^P \dot{\epsilon}_{ij}^P \right)^{1/2} \quad \text{où } \epsilon_{ij}^P \text{ est le tenseur des déformations plastiques.}$$

## 2. Loi d'écoulement

Les auteurs admettent la loi de normalité et en conséquence, ils écrivent :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{H} \frac{\partial f(m)}{\partial \sigma_{ij}} \left( \frac{\partial f(m)}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \right) \quad (145)$$

Ils trouvent pour le module d'écrouissage H l'expression suivante :

$$H = -c \frac{\partial f_m}{\partial a} \beta^m \left( \frac{2}{3} \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{1/2} + \frac{\partial f_m}{\partial \eta^p} n_{tr} \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}} \quad (146)$$

H est le paramètre A introduit en 1.2.2.

## 3. Evolution du modèle

En 1979, les auteurs prolongent leurs travaux et donnent les relations incrémentales dérivées et appliquées à l'étude du comportement de matériaux drainés et non drainés après consolidation isotrope et anisotrope des argiles. Ils examinent aussi les problèmes de chargement cyclique et ils indiquent des améliorations du modèle. J.H. Prévost (1978, 1979) a contribué à l'évolution des modèles avec écrouissage anisotrope en lançant deux formulations (1978, 1979) plus appliquées que les formulations de Mróz et al. Il a également programmé son modèle par la méthode des éléments finis.

## 1.4 CONCLUSION

Un des problèmes des plus fondamentaux de la modélisation de comportement des sols est la définition du domaine élastique et son évolution en fonction du processus de chargement ou de déchargement.

La plupart des modèles (Cam-Clay, Di Maggio-Sandler, Vermeer, Wilde, Nova-Wood, Mróz et al. et Prévost) prévoient un domaine élastique fermé, délimité par une ou plusieurs fonctions de charge (fig. 44a), tandis que d'autres (Lade-Duncan et Frydman et al. et Monnet et Gielly considèrent une région élastique non fermée en compression (fig. 44b).

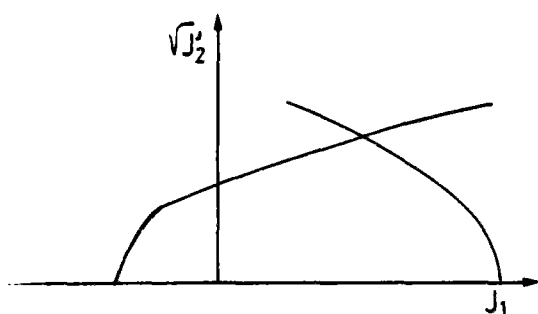


Fig. 44a - Domaine élastique fermé

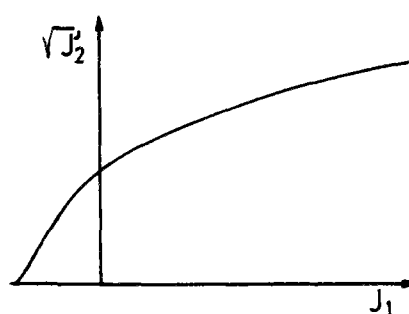


Fig. 44b - Domaine élastique ouvert

Il est peu probable qu'on puisse augmenter la pression isotrope infiniment sans sortir du domaine élastique donc le premier groupe de modèles semble être plus réaliste pour les problèmes les plus généraux d'ouvrages de mécanique des sols. Tous les modèles déjà mentionnés admettent que le domaine élastique est écrouissable mais seul Mróz et al. et Pévost le considèrent anisotrope. L'hypothèse d'isotropie d'écrouissage que les autres auteurs font ne peut être justifiée qu'approximativement. Elle est encore plus contestable quand il s'agit des chargements cycliques (tremblements de terre, constructions off-shore etc).

Or, en l'état actuel du développement des modèles d'écrouissage anisotrope, il semble prématuré de vouloir les appliquer, d'une part à cause d'un certain manque de vérifications expérimentales et d'autre part à cause de leur grande complexité qui rend leur utilisation courante encore plus difficile que pour les autres.

Pour prendre en compte l'histoire du matériau, élément nécessaire pour calculer l'écrouissage, la plupart des modèles utilisent comme paramètre une fonction de la déformation plastique déjà provoquée par les chargements précédents. Ainsi Wilde propose le premier invariant du tenseur des déformations plastiques en le complétant dans une version plus élaborée de son modèle avec la racine carré du deuxième invariant du tenseur déviatorique des déformations plastiques. Vermeer considère que les déformations plastiques volumiques et celles de cisaillement sont respectivement les paramètres d'écrouissage volumique et de cisaillement pour son modèle. Quant aux modèles de Cam-Clay le paramètre d'écrouissage est simplement la variation de volume plastique alors que Nova et Wood font intervenir, eux, en plus la déformation plastique à l'essai triaxial. Par contre Lade et Duncan utilisent une certaine fonction du travail plastique total. Quoiqu'il en soit toutes les lois d'écrouissage, qui définissent la manière dont le paramètre d'écrouissage intervient dans la détermination des surfaces d'état limite successives, nécessitent soit des hypothèses soit des caractéristiques des sol supplémentaires par rapport à la fonction de charge initiale et aux lois d'écoulement utilisées.

Les sables denses après le pic ou les argiles très sur consolidées du modèle Cam-Clay ou d'autres sols peuvent présenter un écrouissage négatif et, il est important de pouvoir modéliser ce comportement délicat. Le modèle qui nous semble le mieux répondre à ce problème est celui de Nova et Wood car non seulement il définit le domaine où l'écrouissage négatif apparaît mais il propose aussi une formulation claire pour sa description.

Une des propriétés fondamentales des sables denses consiste dans le fait que leur volume varie fortement quand ils sont cisailés : les sables denses croissent de volume (c'est la dilatance), les sables lâches se contractent (Reynolds 1885 cité par Rowe 1969). Il est alors très important pour les modèles élasto-plastiques destinés à modéliser les sables de décrire le plus réellement possible ce phénomène. La plupart des modèles comme ceux de Di Maggio Sandler, de Lade et Duncan et Frydman et al. et Monnet Gielly et de Nova Wood introduisent des variations de volume plastiques dues aux contraintes de cisaillement et représentent ainsi le phénomène. Mais seul le modèle de Vermeer incorpore directement l'équation de contrainte-dilatance de Rowe (1962) comme loi d'écoulement, équation vérifiée expérimentalement et reconnue par beaucoup comme une contribution importante à la modélisation de la dilatance.

En ce qui concerne justement le calcul des déformations plastiques on distingue trois catégories de modèles. Ceux qui comme de Cam-Clay, le modèle de Di Maggio et Sandler et de Wilde qui admettent la loi de normalité; ceux qui ne l'admettent pas comme celui de Lade et Duncan (prenant un potentiel plastique différent de la fonction de charge) de Frydman et al. et Monnet et Gielly et enfin ceux comme les modèles de Vermeer et de Nova et Wood, qui l'admettent partiellement. Il semble, mais ceci dépend évidemment de la fonction de charge retenue, que la loi de normalité conduise en général à une dilatance excessive.

Si la rigueur et la cohérence de la conception théorique d'un modèle sont des éléments très importants pour sa valorisation, le nombre des constantes du matériau qu'il nécessite ainsi que leur méthode de détermination sont aussi des facteurs très importants, étant données les difficultés que pose ce problème pour un matériau comme le sol. Or, le fait de rechercher un modèle bien fondé théoriquement nécessite l'utilisation de plusieurs paramètres du sol qui sont parfois difficiles à déterminer. Ainsi donc le modèle de Nova et Wood dont la conception théorique est très satisfaisante pour la représentation du comportement des sols pulvérulents, présente l'inconvénient d'avoir besoin de certains paramètres difficiles à déterminer. Par contre le modèle de Frydman et al. et Monnet, Gielly et de Wilde grâce à la simplicité de leur conception n'ont besoin que de quelques constantes relativement faciles à déterminer.

Le cas du modèle de Vermeer est très intéressant du fait qu'il est relativement complet du point de vue théorique et, quoique moins pratique à utiliser que les précédents, qu'il ne dépend pas de trop de paramètres.

Du point de vue de l'utilisation pratique de ces modèles et leur application à des ouvrages réels grâce à un programme d'éléments finis plusieurs problèmes se posent. En effet soit le modèle a été mis au point à partir d'essais en laboratoire classique de mécanique des sols (essais triaxial etc) et il présente alors des difficultés de généralisation aux problèmes tridimensionnels et même aux problèmes de déformation plane ou à symétrie de révolution. Soit le modèle est présenté en fonction d'invariants des tenseurs dans l'espace à trois dimensions, mais alors se pose le problème des paramètres de sol qui sont la plupart du temps déterminés dans des conditions moins générales. On notera d'autre part que les applications pratiques à des ouvrages réels, lorsqu'elles ont été possibles, sont en général très peu nombreuses et en tout état de cause, ne permettent pas de se faire une idée précise à l'heure actuelle de la validité de ces modèles ou de leurs domaines d'applications. Mentionnons enfin, que pour beaucoup de ces modèles, il est très difficile, voire impossible, de dégager, uniquement au vu de leurs formulations, le comportement du sol soumis à une sollicitation classique simple (essai de compression triaxiale, cisaillement direct etc).

Notons à la fin de cette discussion que le modèle de Boulon-Chambon-Darve présente la particularité de ne pas être formé par des équations constitutives générales comme les autres modèles mais d'être basé sur une loi incrémentale qui suit le comportement du sol pas à pas, ce qui évite certaines simplifications que les autres modèles sont obligés de faire.

La conclusion que l'on peut tirer de cette analyse des modèles existants est qu'il n'y a pas actuellement pour les sols pulvérulents un modèle de comportement suffisamment mis au point ou avancé pour trouver un consensus du moins pour une certaine gamme de problèmes. Les modèles de Vermeer et de Nova et Wood nous ont paru cependant les plus intéressants, du fait qu'ils couvrent à peu près, toutes les phases du comportement des sols pulvérulents.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

### (PARTIE I)

- ADACHI OKANO., (1974), "A constitutive equation for normally consolidated clay", Soils and Foundations Japanese Society of Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol. 14,4, pp. 55-73.
- AUBRY D., DES CROIX Ph., (1979), "Numerical algorithm for an elastoplastic constitutive equation with two yield surfaces", Third International Conference on Numerical Methods in Geomechanics/Aachen.
- BALADI G.Y., ROHARI B., (1979), "Elastic-plastic model for saturated sand", ASCE, GT4.
- BALASUBRAMANIAN S., CHAUDHRY A.R., (1978), "Deformation and strength characteristics of soft Bangkok clay", ASCE, GT9.
- BOEHLER J.P., (1968), "Contribution à l'étude de l'équilibre limite des sols anisotropes", Thèse de doctorat de spécialité, Grenoble.
- BOULON M., CHAMBON R., DARVE F., (1977), "Loi incrémentale pour les sols et application par la méthode des éléments finis", Revue Française de Géotechnique, n° 2.
- BOULON M., CHAMBON R., DARVE F., DESRUES J., FLAVIGNY E., FORAY P., (1977), "Comportement d'un écran et d'un pieu : essais, calculs", Comptes rendus du 9e Congrès International de Mécanique des Sols, Tokyo.
- BOULON M., DARVE F., FLAVIGNY E., FORGUE M., (1979), "Méthode de prévision des pressions interstitielles", Revue Française de Géotechnique, n° 9.
- BURLAND J.B., (1965), Correspondance à Géotechnique, Vol. XV, n° 2, pp. 211-214.
- BURLAND J.B., (1967), "Deformation of soft clay", Phd Thesis Cambridge University.
- BURLAND J.B., (1969), "Deformation of clay beneath loaded area", Proc. of 7<sup>th</sup> International Conference of Soil Mechanics, Mexico.
- COULOMB C.A., (1773), "Sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture", Acad. R. Sci. Mem. Math. et Phys. 7, pp. 343-382.
- DARMAR, PLESSIET, (1964), "Etude de l'essai triaxial", Rapport interne à l'INSA de Lyon.
- DANG M.T., (1977), "Etude du comportement d'un remblai expérimental sur sols mous (site de Cubzac-les-Ponts) : application des modèles élastoplastiques de l'Université de Cambridge", Thèse de docteur-ingénieur à Paris VI.



- DARVE F., (1974), "Contribution à la détermination de la loi incrémentale des sols", Thèse de docteur-ingénieur, Université de Grenoble.
- DARVE F., LABANIEH S., CHAMBON R., (1976), "Incremental stress-strain relationship for cohesionless soil", Proc. 2nd Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics, ASCE, Blacksburg.
- DARVE F., (1978), "Une formulation incrémentale des lois rhéologiques, application aux sols", Journée de la Rhéologie, ENTPE.
- DI MAGGIO F.L., SANDLER I.S., (1971), "Material model for granular soil", ASCE, Vol. 97 EM3.
- DI MAGGIO F.L., SANDLER I.S., BALADI O.Y., (1976), "Generalized cap model for geological materials", ASCE, GT7.
- DRUCKER D.C., PRAGER W., (1952), "Soil mechanics and plastic analysis or limit design, Quarterly of applied Mathematics", Vol. 10, pp. 157-175.
- DRUCKER D.C., GIBSON R.E., HENKEL D.J., (1957), "Soil mechanics and work-hardening theories of plasticity", ASCE, Vol. 122, pp. 338-346.
- DUNCAN J.M., CHANG C.Y., (1970), "Non linear analysis of stress and strain in soils", ASCE, SM5.
- DUNCAN J.M., OZAWA Y., LADE P.Y., BOOKER J.R., (1977), "An elastoplastic stress-strain relationship for cohesionless soil", Sp. Session 9 Int. Conf. on Soil Mec. and Found. Eng., Tokyo.
- FRYDMAN S., ZEITLEN J.O., ALPAN I., (1973), "The yielding behaviour of particulate media", Canadian Geotechnique Journal, Vol. 10.
- FRYDMAN S., (1974), "Yielding of sand in place strain", ASCE, GT5.
- FUNG Y.C., (1965), "Foundations of solid Mechanics", Prentice Hall international Series in Dynamics, London.
- GHABOUSSEI J., MOMEN H., (1979), "Plasticity model for cyclic behaviour of sands", 3<sup>rd</sup> Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Aachen.
- HILL R., (1950), The mathematical theory of plasticity, Oxford University, Press London.
- HOËG K., (1972), "Finite elements analysis of strain softening clay", ASCE, SM1.
- HOLUBEC I., (1966), "The yielding of cohesionless soils", PhD Thesis University of Waterloo.
- HVORSLEV, (1936), "Conditions of failure for remoulded cohesive soils", Proc. Int. Conf. Soil Mech. and Found. Eng. Harvard Univ. Cambridge, Mass., USA, III, 51.
- KHOSLA V.K., WU T.H., (1976), "Stress-strain behaviour of sand", ASCE, GT4.
- KONDNER R.L., ZELASKO J.S., (1963), "A hyperbolic stress-strain formulation for sands", Proc. Second Pan-Am Conf. Soil Mech. Brazil, 1, pp. 289-394.

- LADE P.V., (1977), "Elastoplastique stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces", Int. J. Solids Structures, Vol. 13, pp. 1019-1035.
- LADE P.V., DUNCAN J.M., (1975), "Elastoplastic stress strain theory for cohesionless soil", ASCE, GT 10.
- LEVY M., Journ. Math. pures et app., 16 (1871) 369 - cité par R. Hill, 1950.
- MOHR O., (1900), Zeits. Ver. deutsch. Ing. 44 - cité par R. Hill, 1950.
- MONNET J., (1977), "Détermination d'une loi d'écrouissage des sols et utilisation par la méthode des éléments finis", Thèse de docteur-ingénieur, INSA, Lyon.
- MONNET J., GIELLY J., (1979), "Détermination d'une loi de comportement pour le cisaillement des sols pulvérulents - Application au calcul d'essais triaxiaux", Revue française de Géotechnique, n° 7.
- MROZ Z., (1967), "On the description of anisotropic work hardening", J. Mech. Phys. Solids 15.
- MROZ Z., NORRIS V.A., ZIENKIEWICZ O.C., (1978), "An anisotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading", Int. J. for Numerical and analytical meth. in Geomechanics, Vol. 2.
- MROZ Z., NORRIS V.A., ZIENKIEWICZ O.C., (1979), "Application of an anisotropic hardening model in the analysis of elastoplastic deformation of soils", Géotechnique 29, n° 1, pp. 1-34.
- NADAI, (1963), Theory of flow and fracture of solid, Vol. 2, Mac Graw Hill.
- NAMY D., (1970), "An investigation of certain aspects of stress strain relationships for clay soils", PhD Thesis Cornell University.
- NELSON I., BARON M., (1968), Development of mathematical material models, Report 5-68-1, Contract DASA 39-67-C-0048, Paul Weildinger, Consulting Engr., March 1968.
- NEWLAND, ALLELY, (1957), "Volumes changes in drained triaxial tests on granular materials", Geotechnique, Vol. 2-74, pp. 628-632.
- NOVA, WOOD D.M., (1979), "A constitutive model for sand in triaxial compression", Int. Journal for num. and anal. Methods in Geomechanics, Vol. 3.
- OZAWA Y., DUNCAN J.M., (1976), "Elastoplastic finite element analysis of sand formation", Proc. of 2<sup>th</sup> Int. Conf. on Num. Methods in Geomechanics, Blacksbourg.
- PENDER M.Z., (1973), Written discussion to Session II Sym. Plast. and Soil Mechs Cambridge U.K.
- PENDER M.Z., (1977), "A unified model for soil stress-strain behaviour", ICSMFE, Tokyo.
- POORROOASHAB H.B., (1971), "Deformation of sand in triaxial compression", 4<sup>th</sup> Asian Reg. Conf. on Soil Mech., Bangkok 1.

- PRAGER W., (1955), "The theory of plasticity : a survey of recent achievements", Proc. Inst. Mech. Engrs. London, Vol. 169.
- PRAGER W., (1958), Problèmes de plasticité théorique, Dunod, Paris.
- PRANDTL L., (1924), Proc. 1st Int. Cong. App. Mech., Delft - cité par R. Hill, 1950.
- PREVOST J.H., HOËG K., (1975 a), "Effective stress-strain strength model for soils", ASCE, GT3.
- PREVOST J.H., HOËG K., (1975 b), "Analysis of pressuremeter in strain softening soil", ASCE, GT8.
- PREVOST J.H., HOËG K., (1975 c), "Soil mech. and plasticity of strain softening", Géotechnique n° 2.
- PREVOST J.H., (1977), "Mathematical modeling of monotonic and cyclic undrained clay behaviour", Int. Jnl. Num. Anal. Meth. in Geomechs, Vol. I, n° 2, pp. 195-216.
- PREVOST J.H., (1978), "Anisotropic undrained stress-strain behaviour of clays", ASCE, GT8.
- PREVOST J.H. (1979), "Mathematical modeling of soil stress-strain strength behaviour", 3rd Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Aachen.
- RENDULIC I.L., (1936), "Relation between void ratio and effective principal stresses for a remoulded silty clay", Proc. Int. Conf. Soil Mech. and Found. Eng., Harvard Univ. 1, 2.
- REUSS A., (1930), Zeits. ang. Math. Mech. 10,266 - cité par R. Hill, 1950.
- ROSCOE K.H., SCHOFIELD A.N., WROTH C.P., (1958), "On the yielding of soils", Géotechnique, Vol. VIII n° 1.
- ROSCOE K.H., POOROOSHASB H.B., (1963), "A theoretical and experimental study of strains in triaxial compression tests on normally consolidated clays", Géotechnique, Vol. XIII n° 1.
- ROSCOE K.H., SCHOFIELD A.N., THURAIRAJAH, (1963), "Yielding of clays in states wetter than critical", Géotechnique, Vol. XIII n° 3, pp. 211-240.
- ROSCOE K.H., BURLAND J.B., (1968), On the generalized stress-strain behaviour of wet clay, Engineering plasticity, Cambridge University Press, pp. 535-609.
- ROWE P.W., (1962), "The stress dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact", Proc. of the Royal Society, A. 269.
- ROWE P.W., (1969), "Osborne Reynolds and dilatancy", Géotechnique XIX, n° 1 pp. 1-5.
- ROWE P.W., (1971), "Theoretical meaning and observed values of deformation parameters for soil", Proc. Roscoe Meml. Symp. Cambridge, pp. 143-194.
- SAINT-VENANT, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 70 (1870), 473 ; Journ. Math. pures et app. 16 (1871), 308 ; Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 74 (1872), 1009 et 1083 - cité par R. Hill, 1950.

SALENCON J., (1974), Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols, Eyrolles, Paris.

SANDLER I.S., BARON M.L., (1979), "Recent developments in the constitutive modeling of geological materials", 3<sup>rd</sup> Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Aachen.

SANDLER I.S., RUBIN D., (1979), "An algorithm and a modular subroutine for the cap model", Int. Jnl. for Numerical and Analytical Meth. in Geomechanics, Vol. 3.

SCHOFIELD A.N., WROTH C.P., (1968), Critical state soil mechanics, Mc Graw Hill.

SIMPSON B., (1973), "Finite elements applied to problems of plane strain deformation in soils", PhD thesis at Cambridge University, U.K.

SIMPSON B., WROTH C.P., (1972), "Finite element computation for a model retaining wall in sand", Proc. 5<sup>th</sup> European Conf. on Soil Mech., Vol I, pp. 85-93, Madrid.

SMITH I.A.A., (1972), "Stress and strain in a sand mass adjacent to a model wall", PhD thesis University of Cambridge, U.K.

STROUD M.A., (1971), "The behaviour of sand at low stress levels in the simple shear apparatus", PhD thesis at Cambridge University, U.K.

TATSUOKA F. (1978), "Shear tests in a triaxial apparatus. A fundamental research on the deformation of sand", PhD thesis University of Tokyo - cité par Vermeer, 1978.

TATSUOKA F., ISHIHARA K., (1974), "Yielding of sand in triaxial compression", Soils and Foundations 14, n° 2.

TATSUOKA F., ISHIHARA K., (1975), "Undrained deformation and liquefaction of sand under cyclic stresses", Soils and Foundations 15, n° 1.

TAVENAS F., DES ROSIERS J.P., LEROUEIL S., LA ROCHELLE P., ROY M., (1979), "The use of strain energy as a yield and creep criterion for lightly over consolidated clays", Géotechnique 29, n° 3, pp. 285-303.

TAVENAS F., LEROUEIL S., (1977), "Effects of stresses and time on yielding of clays", ICSMFE, Tokyo.

TAYLOR G.I., QUINNEY H., (1931), Phil. Trans. Roy. Soc. A., Vol. 230, p. 323 - cité par R. Hill, 1950.

TRESCA H., Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 59 (1864), 754 et 64 ; (1867) 809 - cité par R. Hill, 1950.

VERMEER P.A., (1978), "A double hardening model for sand", Géotechnique 28, n° 4.

VERMEER P.A., (1979), "A modified initial strain method for plasticity problems", 3<sup>rd</sup> Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Aachen.

VON MISES R., (1913), Göttinger Nachrichten, Math. Phys. Klasse - cité par Hill, 1950.

WALTER A., (1979), "Numerical and experimental verification of the elastoplastic model of granular media", Colloque franco-polonais, Paris 25-30 mars 1979 (Traduction française : Colloque de Paris, Labo. Central P. et Ch., 1980).

WILDE P., (1977 a), "Simple model of granular material in finite element solutions", Arch. Hydrot. tom XXIV, Zeszyt, Poland.

WILDE P., (1977 b), "Two invariants dependent model of granular media", Arch. of Mechanics 29, 6, pp. 799-809, Warszawa, Poland.

WILDE P., (1979), "Mathematical and physical foundations of elastoplastic models for granular media", Colloque franco-polonais, Paris 25-30 mars 1979 (Traduction française : Colloque de Paris, Labo. Central P. et Ch., 1980).

WILDE P., ZAWISZA W., (1979), "Experimental determination of parameters for the elastoplastic model of granular soils", Colloque franco-polonais, Paris 25-30 mars 1979 (Traduction française : Colloque de Paris, Labo. Central P. et Ch., 1980).

WROTH C.P., BASSETT R.H., (1965), "A stress-strain relationship for the shearing behaviour of sand", Géotechnique, XV, n° 1.

WROTH C.P., SIMPSON B., (1972), "An induced failure of a trial embankment, Part. II, Finite element computations", Proc. ASCE, Sp. Conf. on performance of earth and earth supported structures, Purdue University, Lafayette Indiana, USA, Vol. 1.

WROTH C.P., (1975), The predicted performance of soft clay under a trial embankment loading based on the Cam-Clay model. Finite element in geomechanics, John Wiley & sons, 1977. (Int. Symposium on Num. Method. for Soil and Rock Mech., Karlsruhe, 1975).

YAMADA S.E., ABOU SAYED A.S., (1979), "Cap model guided by energy concept", ASCE, GT2.

ZIENKIEWICZ O.C. (1971), The finite element method in engineering science, Mac Graw Hill.

ZIENKIEWICZ O.C. NAYLOR, (1972), "The adaptation of critical state soil mechanics for use in finite elements". Stress-strain behaviour of soils, RHG Parry ed., G.T. Foulis and Co, Henley-on-Thames, England, pp. 537-547.

PARTIE II

ÉTUDE THÉORIQUE DES PROBLÈMES  
DE CONTACT EN GÉOMÉCANIQUE PAR  
LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

COUPLAGE AVEC L'ÉLASTO-PLASTICITÉ DANS LE MASSIF

## 2.1. INTRODUCTION

La simulation des conditions de contact est un problème très intéressant de la mécanique des sols et de la mécanique des roches. Qu'il s'agisse d'un problème de contact entre deux ou plusieurs couches différentes de sol (interface d'un remblai et du sol de fondation, par exemple), de fissures dans les masses rocheuses ou de contacts sol-structure (interface sol-pieu, sol-mur de soutènement ou sol-tirant, par exemple) on ne peut se permettre de négliger le décollement et le frottement sur l'interface du contact.

Ainsi -surtout après le récent développement des grands calculateurs et des méthodes numériques- nombreux sont les chercheurs qui, ces dernières années, ont mis au point des algorithmes de résolution par la méthode des éléments finis qui permettraient la solution du problème des contacts. Citons les travaux de

- R.E. GOODMAN, R.L. TAYLOR et T.L. BREKKE (1968) qui ont proposé, pour simuler le contact, un élément de massif spécial d'une longueur  $L$  et d'une épaisseur nulle (Fig. 1).

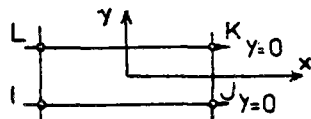


Fig. 1 - Elément de contact de GOODMAN et al. (1968).

Cet élément, muni d'une rigidité normale ( $K_{nn}$ ) et d'une rigidité de cisaillement ( $K_{ss}$ ), a été montré comme généralement efficace pour la simulation des fissures des roches. Il a été complété, en outre, par R.E. GOODMAN et J. DUBOIS en 1972 par une loi de dilatance pour mieux représenter certains types de fractures fermées de roches. Notons enfin que R.E. GOODMAN et C. ST-JOHN (1977) ont présenté une dernière version du modèle qui comprend, en plus, la notion de rigidité rotationnelle qu'on peut évaluer en considérant le moment de rotation quand les noeuds I et J sont fixés et que l'on applique une force sur le noeud K ou L.

- O. HUNGR et D.F. COATES (1978) qui, en se servant du modèle de R.E. GOODMAN et al. (1968-1977), ont étudié la déformabilité des joints et leur relation avec les tassements des fondations sur du rocher fracturé.

- O.C. ZIENKIEWICZ, B. BEST, C. DULLAGE et K.G. STAGG (1970) ont proposé, pour les milieux stratifiés, l'utilisation d'éléments semblables à ceux de GOODMAN et al. qu'ils étendent au cas des massifs discrétisés en éléments courbes isoparamétriques.

- J. GHABOUSSI, E.L. WILSON et J. ISENBERG (1973) ont utilisé un élément de massif pour lequel les déplacements relatifs servent comme degré de liberté pour la formulation de sa matrice de rigidité. Ainsi, ils ont donné la formulation explicite de la matrice de rigidité de l'élément de continuité pour les problèmes plans et à symétrie axiale. Leur élément permet la dilatance.

- G.N. PANDE et K.G. SHARMA (1979), s'inspirant des travaux de ZIENKIEWICZ et al. (1970) et de GHABOUSSI et al. (1973) ont développé et programmé un élément isoparamétrique parabolique de contact à huit noeuds (Fig. 2).

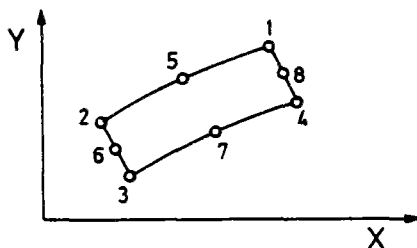


Fig. 2 - Elément isoparamétrique parabolique de contact à huit noeuds.

- J.M. DUPEYRAT (1975), puis R. FRANK, P. GUELLEC et P. HUMBERT (1977), ont mis au point un algorithme qui procède par itérations de rigidité et de forces sur des éléments de contact à deux noeuds pour régler le problème. On raisonne alors et l'on agit directement sur les forces de contact (qui sont continues dans un modèle d'éléments finis de type "déplacement") et non sur les contraintes (qui ne sont pas continues et qui peuvent manquer de précision pour certains problèmes délicats d'interfaces). Une description détaillée de cette méthode, qui a été implantée sur le programme ROSALIE du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, sera faite dans les paragraphes qui suivent.

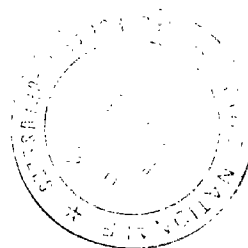
- L.R. HERRMANN (1976), comme ces derniers, n'a pas utilisé un élément de massif entre les deux milieux en contact, mais a dédoublé les points de contact et a muni chaque paire d'éléments doubles de deux ressorts, un tangentiel et un normal à la direction du contact, qui contrôlent le glissement et le décollement entre les deux milieux.

- J.M. REYNOUARD, R. DUHAU et M. LEMAIRE (1979) ont mis au point une méthode par sous-structures de calcul qui concerne l'interaction entre une structure élastique linéaire et un sol dont une partie est élastoplastique. Cette méthode est mise en oeuvre par un processus incrémental et itératif.

- Notons enfin les travaux de R. FRANK, A. GUENOT et P. HUMBERT (1980), qui ont essayé une approche spéciale du problème dans le cas où la géométrie et la densité des discontinuités sont telles que toute méthode de schématisation directe se révèle laborieuse et coûteuse. Ils ont proposé alors une modélisation du massif par un milieu continu élastoplastique à critère de plasticité et déformations orientés. (Voir également ZIENKIEWICZ et PANDE (1977) et CRAMER et al. (1979).

Même si les auteurs n'y font pas tous directement allusion, il est évident que les problèmes de frottement et de décollement sur des interfaces sont très souvent liés à la modélisation de milieux dont la matrice est élasto-plastique (c'est presque toujours le cas en mécanique des sols). L'utilisation d'éléments de contact tels que ceux décrits ci-dessus n'a pas alors un grand intérêt si les massifs situés de part et d'autre de ces contacts ne peuvent être modélisés en élasto-plasticité. Dans le programme ROSALIE du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées l'élasto-plasticité est traitée par la méthode bien connue dite des "contraintes initiales" qui est une méthode incrémentale à chaque itération.

L'objet de cette partie du travail est alors, d'une part, une adaptation de l'algorithme utilisé par le système ROSALIE qui permet le calcul du décollement et du frottement à partir des travaux de J.P. DUPEYRAT (1975) et R. FRANK et al. (1977) de manière à le rendre incrémental à chaque itération et, d'autre part, dans le même cadre, le couplage avec la plasticité du massif, c'est-à-dire la prise en compte des corrections plastiques dans le massif pendant le calcul du frottement-décollement.





## 2.2. PRESENTATION DE LA STRUCTURE GENERALE DU PROGRAMME D'ELEMENTS FINIS DE ROSALIE

### 2.2.1. Introduction au programme ROSALIE

Le programme, ou mieux, le système ROSALIE est un ensemble de programmes de calcul par la méthode des éléments finis. Réalisé au sein du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées par une équipe d'ingénieurs spécialisés (P. GUELLEC, P. HUMBERT et A. RICARD, 1976), il comprend aujourd'hui 16 sous-ensembles appelés "Groupes" (dont chacun couvre un certain domaine de problèmes, de massifs, poutres ou coques), trois modules de maillage, un système de vérification du maillage appelé TEST composé de 16 modules correspondant aux 16 groupes et finalement d'un programme de sorties des résultats sous forme graphique, TRACE, composé également de 16 modules pour les 16 groupes.

Le schéma suivant (P. GUELLEC, 1976) (Fig. 3) représente la structure d'ensemble des différentes parties du programme ROSALIE :

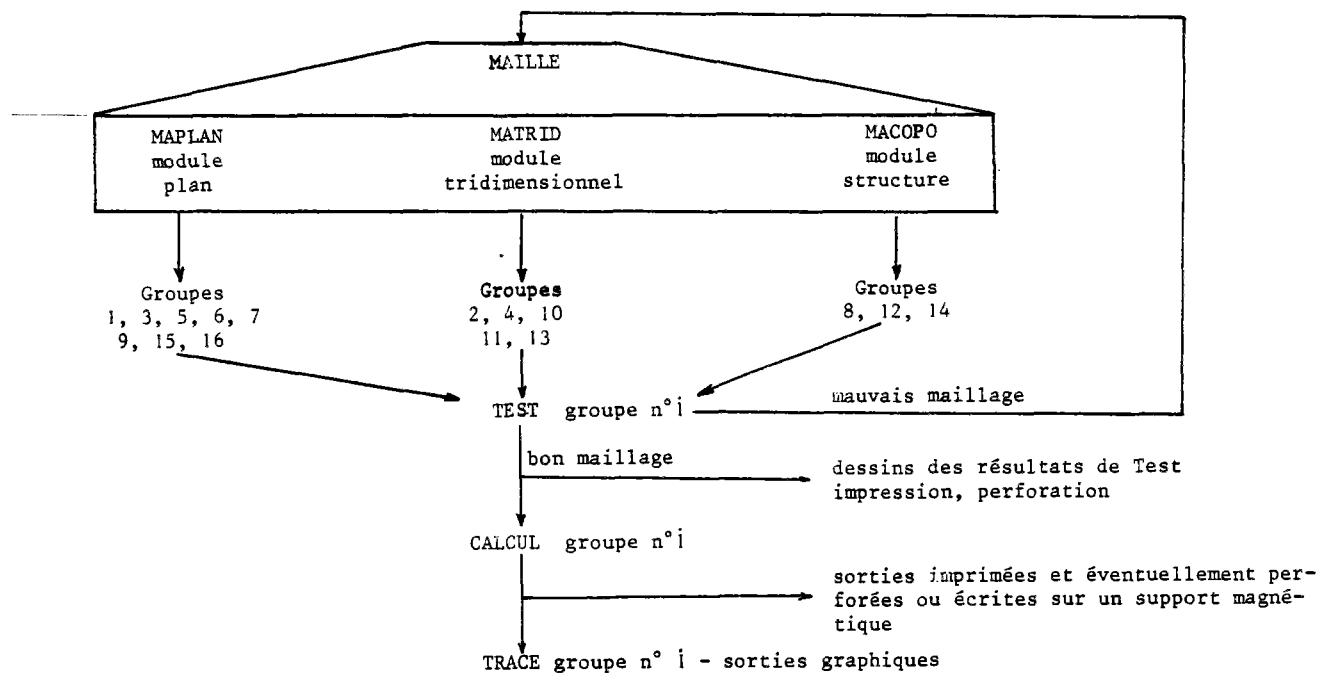


Fig. 3 - Structure du programme ROSALIE. (Guelllec, 1976)

### 2.2.2. Structure du Groupe 5

Le sous-ensemble "Groupe 5" du programme ROSALIE traite des problèmes d'élastoplasticité, de viscoélasticité, de contact (décollement-frottement), de dilatance et des problèmes dynamiques, pour les massifs.

Il est composé par les modules suivants :

- MAPLAN qui est destiné à préparer le maillage ;
- TEST5 qui vérifie le maillage et les données en général ;
- GROUP5 qui comprend les sous-programmes qui concernent la gestion du calcul comme l'organisation des données, calcul et stockage de la matrice de rigidité globale, ainsi que certains sous-programmes secondaires ;
- PLAN5 ou AXIS5 qui regroupent les sous-programmes qui sont influencés par le fait que le problème traité est plan ou à symétrie de révolution ;

- CALCUL5 qui regroupe le reste des sous-programmes nécessaires à la résolution numérique ;
- TRACE5 qui exécute les sorties graphiques.

L'organigramme de la figure 4 schématise le déroulement du calcul quand on traite un problème d'élastoplasticité ou de contacts.

Notons que ROSALIE utilise le modèle déplacement de la mécanique ou minimisation de l'énergie potentielle. On résout le système :

$$\{F\} = \{R_G\} \cdot \{U_G\}$$

où  $\{F\}$  est la matrice des forces généralisées

$\{R_G\}$  est la matrice de rigidité généralisée

$\{U_G\}$  est la matrice des déplacements généralisés.

Les éléments utilisés par GROUP5 pour le massif sont des triangles à 6 noeuds T6 ou des quadrilatères à 8 noeuds Q8. Ce sont des éléments isoparamétriques avec interpolation quadratique pour les déplacements. GROUP5 utilise aussi des éléments de continuité à deux noeuds CT1 et des éléments raidisseurs à 3 noeuds.

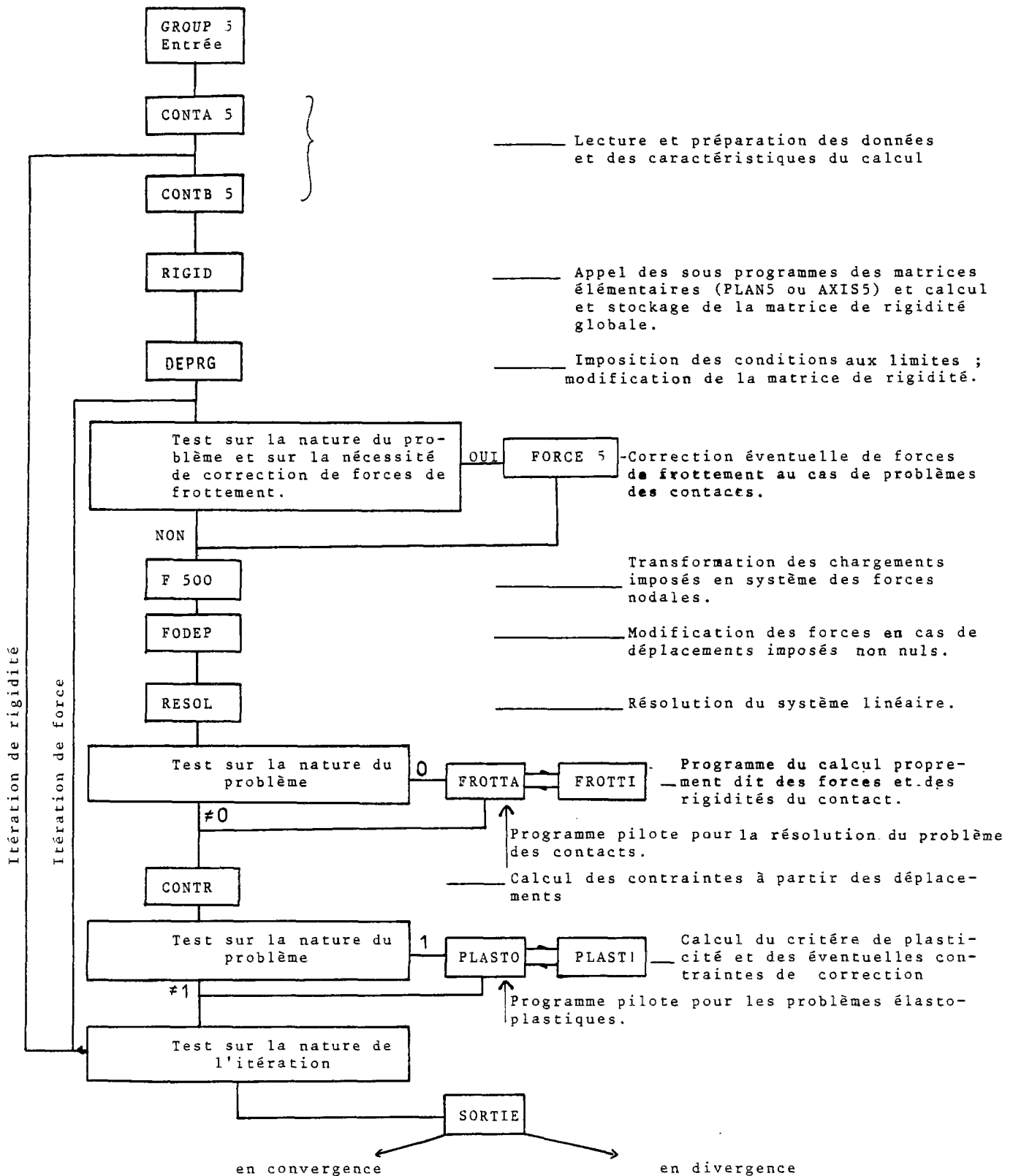


Fig. 4 - Organigramme sommaire du GROUP 5 pour les problèmes d'élastoplasticité et de frottement décollement.

### 2.3. ALGORITHME UTILISE DANS LE PROGRAMME ROSALIE POUR LA SOLUTION DES PROBLEMES DE CONTACT EN GEOMECHANIQUE (FRØTTA)

Un nouvel algorithme a été mis au point, basé sur l'algorithme qui a été créé en 1977 par R. FRANK, P. GUELLEC, P. HUMBERT. Disons tout d'abord que, comme dans tout problème non linéaire, le chargement total est appliqué pas à pas par un certain nombre d'incrément de chargement. A l'intérieur de chaque incrément est effectué jusqu'à convergence un certain nombre d'itérations pour satisfaire aux différents critères. Dans cette méthode initiale, on revenait en début d'incrément à chaque itération, c'est-à-dire que les déplacements calculés à l'itération sont relatifs à l'incrément considéré et on essaye de nouvelles valeurs de rigidités et forces à chaque itération jusqu'à satisfaction des critères de contact désirés. Cette méthode interdisait, une fois la rigidité réglée, sa remise en question à cause des corrections de forces. Le couplage avec l'élasto-plasticité dans le massif a nécessité que l'algorithme utilisé soit rendu incrémental à chaque itération, c'est-à-dire que les déplacements calculés tant lors d'une itération de rigidité que lors d'une itération de force puissent être ajoutés aux déplacements des itérations précédentes de l'incrément considéré.

#### 2.3.1. Position du problème

Le long d'une discontinuité entre deux domaines, différents états sont possibles. Tout d'abord les deux domaines peuvent être en contact dans les deux directions (normale et tangentielle au plan de la discontinuité) : on parle alors d'état collé pour lequel les déplacements sont continus dans les deux directions. Les deux domaines peuvent également être en certains points en état dit de "glissement" l'un par rapport à l'autre. Seuls les déplacements normaux y sont alors continus. Enfin les deux domaines peuvent être "déchollés" l'un par rapport à l'autre ; les déplacements sont alors discontinus dans les deux directions.

Le problème consiste à déterminer l'état final en tout point à partir d'un état initial donné et des conditions de chargement des deux domaines, en tenant compte bien évidemment de critères de contact, c'est-à-dire de critères de glissement et de déchollissement.

#### 2.3.2. Lois de comportement de la discontinuité

Ces lois de comportement sont définies dans le cadre de la plasticité, d'une part par les critères de contact, d'autre part par les lois d'écoulement.

L'état de glissement est donné par le critère de frottement de Coulomb :

$$|\tau| - c + \sigma \operatorname{tg} \varphi = 0$$

où  $c$  est la cohésion,  $\varphi$  l'angle de frottement

avec  $|\tau|$  la contrainte tangentielle à la discontinuité

et  $\sigma$  la contrainte normale à la discontinuité (positive en traction).

Pour des points en état collé ou de glissement on doit vérifier :

$$\sigma - r_t \leq 0,$$

où  $r_t$  est la résistance à la traction.

L'état de déchollissement est donné dès que :

$$\sigma = r_t$$

et l'on doit vérifier alors  $\sigma = \tau = 0$ .

Si le critère de Coulomb est atteint, on n'autorise que des déplacements relatifs tangentiels  $\Delta u$  et les déplacements relatifs normaux  $\Delta v$  sont nuls. Si le critère de résistance à la traction est atteint il y a déchollissement et le déplacement relatif  $\Delta u$  est quelconque alors que le déplacement relatif  $\Delta v$  a un signe imposé, indiquant que les domaines s'"éloignent" l'un par rapport à l'autre. L'interpénétration est en effet interdite. Le contact est dit "unilatéral" (voir Frémond, 1980). Les lois d'écoulement sont donc non associées par rapport aux critères de plasticité. Le potentiel plastique est celui de l'interface lisse avec déchollissement (voir Salençon, 1978). La figure 5 représente ces deux critères ainsi que les directions de déplacements  $\Delta u$  et  $\Delta v$ .

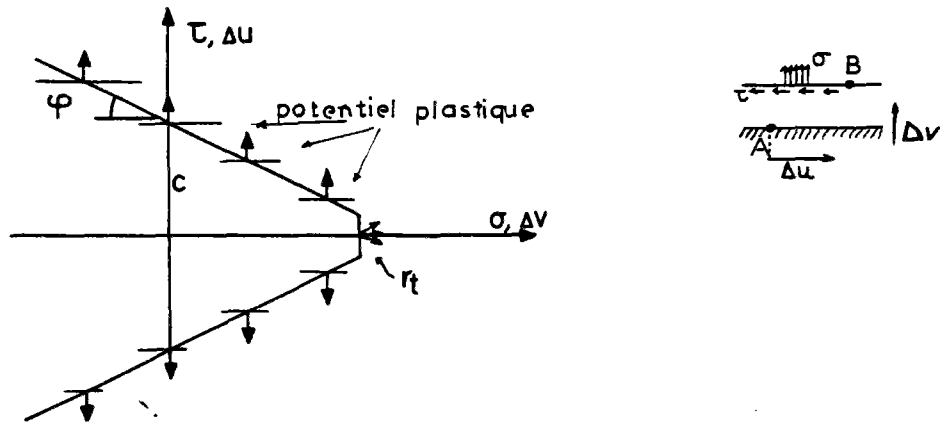


Fig. 5 - Critère de frottement de Coulomb avec résistance à la traction le long d'une discontinuité.

### 2.3.3. Modélisation par éléments finis

Après avoir présenté la méthode de modélisation de la discontinuité par éléments finis (§ 2.3.3.a) et les critères et lois de contact correspondants (§ 2.3.3.b) (FRANK et al., 1977), nous présenterons (§ 2.3.3.c) le nouvel algorithme, incrémental à chaque itération, mis au point à l'occasion de ce travail.

#### a. Eléments de contact et ressorts

Pour modéliser une discontinuité dans un massif par la méthode des éléments finis R. FRANK et al. (1977) proposent le dédoublement des noeuds du massif le long de la discontinuité et l'association de chaque noeud du milieu  $M_1$  avec "son double" du milieu  $M_2$  pour former un élément de contact (figure 6). Ainsi, on schématise la surface de discontinuité par l'ensemble des couples de noeuds dédoublés.

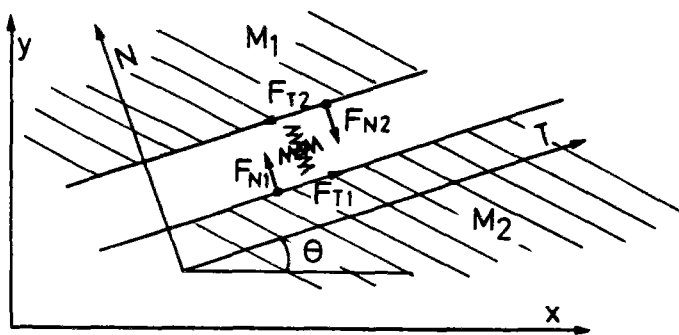


Fig. 6 - Elément de contact et forces de contact.

Suivant l'état de contact de l'élément considéré, on impose deux, une ou aucune continuité de déplacements. Ainsi, pour les éléments de contact qu'on considère comme liés, on impose la continuité des déplacements suivant les axes locaux T et N ; pour les éléments considérés en état de décollement, on n'impose aucune continuité de déplacements et, enfin, pour les éléments qui glissent, on impose seulement la continuité des déplacements suivant l'axe N.

Pour imposer la continuité de déplacements souhaitée dans une direction, on introduit entre les deux points qui forment l'élément un ressort de grande rigidité  $k$ . La direction d'action du (des) ressort (s) coïncide avec la (les) direction (s) suivant laquelle (lesquelles) on veut imposer une continuité des déplacements.

Il s'agit, en fait, d'une méthode de pénalisation pour imposer des déplacements égaux dans une direction. Les forces sur le ressort sont données par

$$\begin{bmatrix} -F_{T1} \\ -F_{N1} \\ -F_{T2} \\ -F_{N2} \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} M & 0 & -M & 0 \\ 0 & N & 0 & -N \\ -M & 0 & M & 0 \\ 0 & -N & 0 & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

où U et V sont les déplacements dans le repère local (T, N) et

M = 1 ou 0 suivant que le ressort tangentiel existe ou non

N = 1 ou 0 " " " normal " "

Les déplacements (U, V) et les forces (F<sub>T</sub>, F<sub>N</sub>) dans le repère local (T, N) sont liés respectivement aux déplacements (u, v) et aux forces (f<sub>t</sub>, f<sub>n</sub>) dans le repère global (x, y) par les relations :

$$U = u \cos \theta + v \sin \theta$$

$$V = -u \sin \theta + v \cos \theta$$

$$F_T = f_T \cos \theta + f_N \sin \theta$$

$$F_N = -f_T \sin \theta + f_N \cos \theta$$

La matrice de rigidité de l'élément de contact devient dans le repère global :

$$k \begin{bmatrix} M \cos^2 \theta + N \sin^2 \theta & M \cos \theta \sin \theta - N \sin \theta \cos \theta & -M \cos^2 \theta - N \sin^2 \theta & -M \cos \theta \sin \theta + N \sin \theta \cos \theta \\ & M \sin^2 \theta + N \cos^2 \theta & -M \sin \theta \cos \theta + N \sin \theta \cos \theta & -M \sin^2 \theta - N \cos^2 \theta \\ & & M \cos^2 \theta + N \sin^2 \theta & M \cos \theta \sin \theta - N \cos \theta \sin \theta \\ & \text{symétrie} & & M \sin^2 \theta + N \cos^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

Où k, la rigidité de la pénalisation, est prise dans ROSALIE, égal à

$$k = 10^5 E_{ryg} \cdot R_{max}$$

où E<sub>ryg</sub> est, en principe, le rapport des modules d'Young des deux milieux M<sub>1</sub> et M<sub>2</sub> (≤ 1)

R<sub>max</sub> la valeur du terme maximal de la matrice de rigidité des éléments de massif

## b. Critères et lois de contact

Les différents critères qui permettent, en fonction des caractéristiques des éléments de contact et du chargement, de déterminer l'état final sont écrits en fonction des forces (ou de déplacements) et non des contraintes. Ce choix est justifié par le fait que dans un modèle d'éléments finis "déplacement" comme c'est le cas pour ROSALIE, les contraintes sont dérivées à partir des déplacements et en conséquence la continuité des contraintes normale et tangentielle au contact n'est pas assez précise pour le traitement du problème délicat que l'on se pose. Les forces de contact sont, elles par contre évidemment continues.

Ainsi on peut écrire :

- i. Critère de résistance à la traction  $F_N = F_{N2} \geq -r_t S$   
où  $S$  est l'aire de la surface d'influence de l'élément dépendant du type d'éléments de massif utilisé.  
 $r_t$  est la résistance unitaire à la traction.
- ii. Critère de frottement de Coulomb  $|F_{T2}| \leq |C S + F_N \operatorname{tg} \varphi|$   
où  $\varphi$  est l'angle de frottement,  $c$  est la cohésion.
- iii. Le caractère unilatéral du contact impose que pour les joints décollés l'on ait :  $v_1 - v_2 < e$   
où  $e$  est l'ouverture initiale du contact. ( $e = 0$  pour des joints initialement en contact et qui se sont décollés).

Ces critères en termes de forces et de déplacement sont représentés aux fig. 7 et 8.

Notons que les critères mentionnés sont des critères de rigidité et leur vérification impose la continuité des déplacements ou non. Ainsi si i est violé, les points sont alors décollés et on fait  $M = N = 0$ , si ii est violé, les points sont alors en glissement, et on fait  $M = 0$  (et  $N$  reste à 1), et si iii est violé on établit ou rétablit les continuités  $M = N = 1$ .

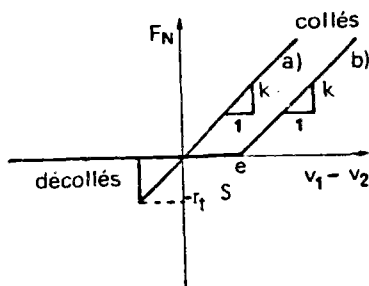


Fig. 7 - Comportement dans la direction normale (résistance en traction  $r_t$ ).  
a) Joint à ouverture initiale nulle.  
b) Joint à ouverture initiale  $e$ .  
(déplacements relatifs verticaux en fonction des forces normales).

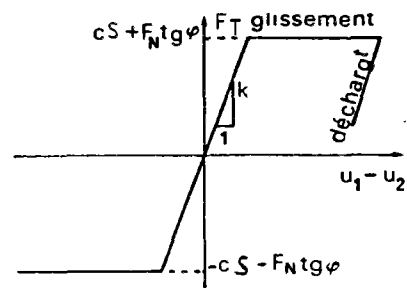


Fig. 8 - Comportement dans la direction tangente.  
(déplacements relatifs horizontaux en fonction des forces tangentielles).

iiii. A part ces critères il faut définir la loi de glissement (avec frottement) qui s'applique uniquement aux points qui glissent l'un par rapport à l'autre. Elle impose la force de contact tangentielle égale à la force de frottement limite de Coulomb.

$$F_T = F_{T2} = (S-C + F_N \operatorname{tg}\varphi)$$

Le frottement empêche les points de glisser parfaitement, il tend à ramener un point vers l'autre. Les forces de frottement sont donc des forces de rappels et  $F_{T2}$  est de même signe que  $U_1 - U_2 - \Delta u_p$ ,  $\Delta u_p$  étant égal à  $(U_1 - U_2)p$ , glissement relatif plastique à la fin de l'incrément précédent. On peut noter ici que contrairement aux critères énoncés plus haut, la loi de glissement ne provoque pas un changement de rigidité. Son application n'apporte que des corrections de forces dans un état donné (de glissement). Notons de plus que si  $U_1 - U_2 - \Delta u_p$  change de signe par rapport à  $F_{T2}$  il y a alors arrêt de glissement, (cas de déchargement par exemple) et l'on rétablit  $M = 1$ .

### c. Algorithme incrémental à chaque itération

#### 1. Première itération d'un incrément de chargement

Selon l'état initial des éléments de contact - liés (type 1), en glissement (type 2), décollés (type 3) - on met deux, un, ou on ne met aucun des ressorts. On détermine ensuite la rigidité initiale du système  $\{R^0\}$  et les variations du champ de déplacements  $\{\Delta u^1\}$  dues aux chargements de l'incrément en question. Si le champ de déplacements initiaux est  $\{u^0\}$  on a :

$$\{u\} = \{u^0\} + \{\Delta u^1\}$$

De même si les forces initiales de contact sont  $F_{T1}^0 = -F_{T2}^0$  et  $F_{N1}^0 = -F_{N2}^0$  et si leurs variations correspondantes à cette itération sont  $\Delta F_{T1}^1 = -\Delta F_{T2}^1$  et  $\Delta F_{N1}^1 = -\Delta F_{N2}^1$  on obtient dans la rigidité initiale  $\{R^0\}$  :

$$\begin{aligned} v_2 - v_1 &= (v_2^0 - v_1^0) + (\Delta v_2^1 - \Delta v_1^1) \\ F_{T1} - F_{T2} &= F_{T1}^0 + \Delta F_{T1}^1 \\ F_{N1} - F_{N2} &= F_{N1}^0 + \Delta F_{N1}^1 \end{aligned}$$

On peut maintenant à partir des forces et les déplacements calculés tester les éléments de contact pour voir si l'état initial est toujours vérifié et si non quel est l'état actuel.

On test alors si :

- pour les points liés (type 1) les critères i et ii sont vérifiés
- pour les points en glissement (type 2) le critère i est vérifié
- pour les points décollés (type 3) le critère iii est vérifié

On a les possibilités suivantes :

- les points liés (type 1) violent le critère i et en conséquence se décollent (type 3). Dans ce cas on enlève les deux ressorts et on appelle cet état provisoire de type 4. S'ils violent seulement le critère ii on enlève le ressort tangentiel et on parle des points du type provisoire 5.
- Les points glissant (type 2) qui violent le critère i se décollent et en conséquence on enlève le ressort normal qui existait (type provisoire 6). Si au contraire on constate que les points commencent à glisser dans un sens inverse (voir iii) on considère qu'il y a eu arrêt de glissement et on ajoute le ressort tangentiel (type provisoire 8).
- Les points décollés (type 3) violent le critère iii et se recollent (type provisoire 7). Dans ce cas on ajoute les deux ressorts .



Pour toutes les possibilités énoncées un changement de rigidité est nécessaire dû à l'enlèvement ou à l'addition d'un ou deux ressorts. En conséquence la rigidité du système change et l'itération qu'on fait dans ce cas s'appelle "itération de rigidité". Le schéma (fig. 9) résume les possibilités des itérations de rigidité.

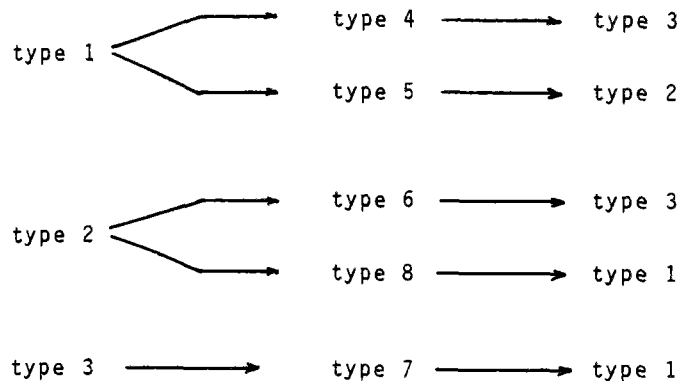


Fig. 9 - Processus des itérations de rigidité

Pour les éléments du type 2 et 5 (éléments en glissement ou qui vont glisser) il faut examiner l'influence de la loi de glissement (iiii). Pour satisfaire à la loi de glissement la méthode proposée consiste, le ressort tangentiel étant enlevé, à imposer des forces de contact tangentielles égales aux forces de frottement. La correction de force normale  $\Delta F_{T1}$  est :

$$-\Delta F_{T1}^2 = +\Delta F_{T2}^2 = \pm \Delta F_{N1}^2 \operatorname{tg} \varphi$$

S'il n'y a que des corrections dues à la loi de glissement on peut parler d'une "itération de forces" qui se passe dans la même rigidité  $\{R\}$  que l'itération précédente.

### 2. Itérations suivantes d'un incrément de chargement.

Les itérations suivantes d'un incrément seront également, selon les résultats des tests décrits plus haut pour la première itération, soit des itérations de rigidité soit des itérations de forces. Dans les deux cas on incrémente les déplacements et après, s'il s'agit d'une itération de rigidité d'une part on remonte pour calculer la nouvelle matrice de rigidité et d'autre part on introduit les forces nécessaires pour annuler les effets non voulus de l'itération précédente; tandis que s'il s'agit d'une itération de forces on n'apporte que des corrections de forces.

Ainsi selon le cas on impose les forces suivantes :

- Pour les points qu'on décolle ; il faut satisfaire  $F_T = F_N = 0$  on imposera alors des forces opposées à toutes celles imposées précédemment, par les ressorts ou non.
- Pour les points qu'on colle ou qu'on recolle ; il faut satisfaire  $v_1 - v_2 = e$  on imposera donc des forces normales appliquées sur le ressort de rigidité normale et qui ramèneront les points décollés à une distance  $e$ .
- Pour les points qui glissent avec frottement on impose une force tangentielle égale à la différence entre la force de frottement limite de Coulomb et les forces tangentielles imposées précédemment par les ressorts ou non.

### 3. Convergence et passage à l'incrément suivant.

On admet qu'il y a convergence et on passe à l'incrément suivant quand :

1. les critères i, ii, iii, sont vérifiés
2. la loi de glissement iii est satisfaite à une précision fixée à l'avance près.

2.4. ALGORITHME UTILISE DANS ROSALIE POUR LA MODELISATION DU COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE  
DES SOLS (PLASTØ)

2.4.1. Méthode des contraintes initiales

La méthode qui a été choisie dans ROSALIE pour résoudre les problèmes des milieux élastoplastiques est la méthode des contraintes initiales (o.c. Zienkiewicz, 1971. ; A. Ricard, 1975).

Soit le solide  $\Omega$  (fig. 10) de frontière  $S = S_u \cup S_\sigma$

Les équations d'équilibre et les conditions aux frontières  $S_u$  et  $S_\sigma$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma^{ij}_{,j} + F^i &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u_i &= \bar{u}_i \quad \text{sur } S_u \\ \sigma^{ij}_{,j} n_j &= T^i \quad \text{sur } S_\sigma \end{aligned} \quad (I)_a$$

où  $F_i$  sont les forces de volume  
 $T_i$  sont les forces de surface appliquées sur  $S_\sigma$   
 $\bar{u}_i$  sont les déplacements imposés sur  $S_u$

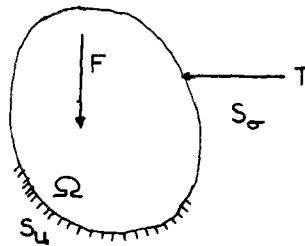


Fig. 10 - Solide  $\Omega$  de frontière  $S = S_u \cup S_\sigma$

Les équations du comportement élasto-plastique, dans le cas du potentiel plastique associé, permettent d'écrire dans  $\Omega$  :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{\epsilon}_{ij}^e \\ \dot{\sigma}_{ij} &= E \dot{\epsilon}_{ij}^e \\ \text{Si } f(\sigma, k_1) &= 0 \\ \text{et } \dot{f}(\sigma, k_1) &= 0 \end{aligned} \quad (I)_b$$

alors  $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \dot{\lambda} \geq 0$

Dans les autres cas  $\dot{\epsilon}_{ij}^p = 0$  (ou  $\dot{\lambda} = 0$ ).

d'où  $\dot{\lambda}$  est donné par l'équation :

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E \dot{\epsilon}_{ij}}{A + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}} \quad \text{avec } A = - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial f}{\partial k_j} \dot{k}_j$$

ou en notation matricielle :

$$\dot{\lambda} = F_{\sigma}^T E D / A + F_{\sigma}^T E F_{\sigma} \quad \text{avec } A = - \frac{1}{\lambda} F_K^T \dot{K}$$

L'utilisation du principe des travaux virtuels conduit à résoudre le système suivant (Guellec, 1977) :

$$\left. \begin{aligned} \delta u_p(u, d\lambda) &= 0 \\ \delta u_p &= \int_{\Omega} d\epsilon^T E \delta \epsilon d\Omega - \int_{\Omega} d\lambda F_{\sigma}^T E \delta \epsilon d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_i^T \delta \epsilon d\Omega - \int_{\Omega} F^T \delta u d\Omega - \int_{S_{\sigma}} T^T \delta u dS \\ f(\sigma_i + E d\epsilon - d\lambda E F_{\sigma}, K) &\leq 0 \end{aligned} \right\} \text{(II)}$$

où  $u_p$  est l'énergie potentielle du système étudié,  $u$  est la matrice des déplacements  $\left\{ \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\}$

$F$  et  $T$  sont les matrices de forces de volume et de forces de surface.

Le système d'équation II est un système différentiel, non linéaire, car  $d\lambda$  est fonction de  $d\epsilon$  et on le résout par une méthode itérative de type Newton, appelée méthode de "Newton-Raphson" modifiée. Le processus qu'on utilise est le suivant :

- On remplace  $d\lambda$  par un incrément fini  $\Delta\lambda$  et on obtient le système suivant :

$$\left. \begin{aligned} \delta u_p(u, \Delta\lambda) &= 0 & (1) \\ \delta u_p(u, \Delta\lambda) &= \int_{\Omega} \Delta\epsilon^T E \delta \epsilon d\Omega - \int_{\Omega} \Delta\lambda F_{\sigma}^T E \delta \epsilon d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_i^T \delta \epsilon d\Omega - \int_{\Omega} F^T \delta u d\Omega - \int_{S_{\sigma}} T^T \delta u dS & (2) \\ f(\sigma_i + E \Delta\epsilon - \Delta\lambda E F_{\sigma}, K) &\leq 0 & (3) \end{aligned} \right\} \text{III}$$

- Pour le système III on commence par une valeur initiale  $\Delta\lambda^0 = 0$ . De (1)<sub>III</sub> et (2)<sub>III</sub> on trouve  $\Delta\epsilon^1$  d'où :

$$\sigma^1 = \sigma_i + E \Delta\epsilon^1$$

Aux points du massif où  $f(\sigma^1, K) > 0$  (plastification), on cherche alors  $\Delta\lambda^1 > 0$  tel que

$$f(\sigma^1 - \Delta\lambda^1 E F_{\sigma}^1, K) = 0 \quad (3)^1_{III}$$

que l'on résout par linéarisations successives (méthode de Newton).

En répétant suffisamment de fois le processus (Fig. 11), 5 fois étant en général le maximum, on trouve  $\Delta\lambda^1$  qui annule  $f$  et résout (3)<sub>III</sub>. Ces itérations de Newton sont appelées itérations internes.

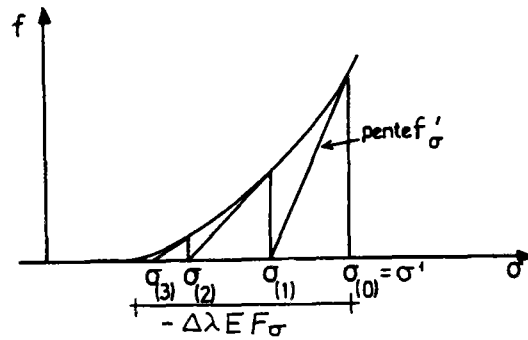


Fig. 11 - Itérations de Newton internes.

- Avec le  $\Delta\lambda$  déterminé on résout à nouveau (1) III pour en déduire  $\Delta\epsilon^2$  qui donnera un nouveau  $\sigma^2$  tel que cela :

$$\sigma^2 = \sigma_1 + E\Delta\epsilon^2 - \Delta\lambda^1 E F_\sigma^1$$

( $\Delta\epsilon^2$  est la déformation totale depuis le début de l'incrément).

D'où l'on déterminera un  $\Delta\lambda^2$  autant de fois qu'il faut pour que  $f(\sigma, k)$  devienne suffisamment petit.

Cette méthode est une méthode de "contraintes initiales" car le terme  $-\Delta\lambda F_\sigma^T E$  dans les équations III intervient comme une contrainte initiale  $\sigma_0$ .

#### 2.4.2. Mise en oeuvre dans GROUP5/PLASTO

##### a) Première itération d'un incrément de chargement

Après avoir calculé la matrice de rigidité globale (sous-programme RIGID), voir Fig. 4, imposé les conditions aux limites, transformé les chargements en forces nodales, résolu le système linéaire et calculé les contraintes à partir des déplacements, on entre dans le sous-programme PLASTO (organigramme sommaire, fig. 12) qui calcule par l'intermédiaire de PLAST1 (organigramme sommaire, fig. 13) le critère, le compare à zéro et, dans le cas où il le trouve violé, repasse par PLAST1 pour calculer les contraintes initiales de l'itération que l'on doit apporter pour se rapprocher du critère ( $F=0$ ). C'est à ce niveau que s'effectuent les itérations internes décrites plus haut.

Avant de retourner dans GROUP5 on fait un test sur la convergence qui indique si l'on doit continuer les itérations (indicateur ICHIN = 2), si l'on a convergé, et il ne faut pas plus d'itérations (ICHIN = 1), ou si le calcul diverge (ICHIN = 3), et on doit l'arrêter.

##### b) Itérations suivantes et convergence d'un incrément de chargement

Dans le cas où l'itération précédente s'est terminée avec ICHIN = 2, une nouvelle itération est faite. Elle se déroule avec la même rigidité  $\{R\}$ , calculée pendant la première itération avec les caractéristiques élastiques, et elle consiste à calculer par l'intermédiaire du sous-programme F500 (Fig. 4) les forces nodales  $\{F_p\}$  de rééquilibrage qui correspondent aux corrections des contraintes initiales  $\{\sigma_0\}$  calculées lors du passage dans PLAST1 pendant l'itération précédente, et à résoudre ensuite le système

$$\{F\} = \{R_G\} \{\Delta u_G\}$$

pour calculer les déplacements  $\{\Delta u_G\}$  dus aux corrections plastiques. Dans l'étape suivante on transforme par le sous-programme CONTR les déplacements  $\{\Delta u_G\}$  en contraintes correspondantes  $\{\Delta\sigma\}$  qui vont être ajoutées aux contraintes totales précédentes :

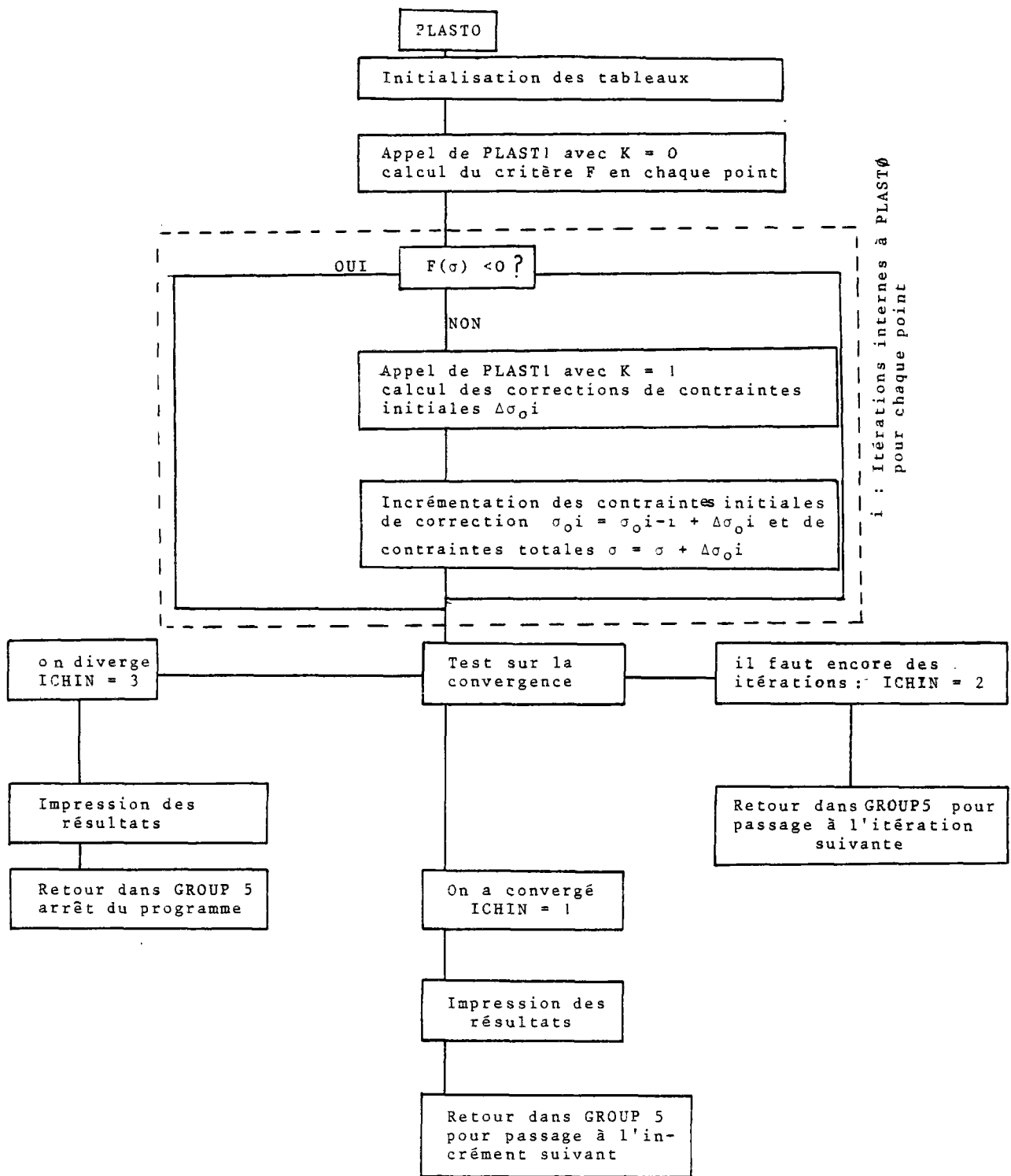


Fig. 12 - Organigramme de PLASIO.

$$\sigma = \sigma + \sigma^0 + \Delta\sigma$$

pour nouveaux tests dans PLASTO.

Le calcul de l'incrément a convergé (ICHIN = 1) et on passe à l'incrément suivant si, le nombre d'itérations prescrites par l'utilisateur n'ayant pas été épuisé, on a réussi à ramener tous les points plastifiés sur le critère à une tolérance  $\epsilon > 0$  (choisie aussi par l'utilisateur) près ( $F(I) < \epsilon \forall I$ ).

Si, par contre, on a épuisé toutes les itérations prescrites, et il existe encore des points où  $F(I) > \epsilon$  le programme admet quand même la convergence, si les dernières forces de rééquilibrage ne sont pas trop fortes par rapport à celles des itérations précédentes.

Le calcul s'arrête et on est en divergence si on ne peut se ramener à une des conditions de convergence.

### c) Critères implantés dans ROSALIE

Les critères de plasticité qu'on peut utiliser avec ROSALIE sont :

- le critère de Tresca-Coulomb, essentiellement appliqué aux sols,
- le critère de Drucker appliqué aux problèmes de la mécanique des roches et des sols,
- le critère parabolique utilisé pour les bétons,
- le critère de Von Mises pour les métaux et pour les sols,
- le critère de résistance en traction selon une direction et le critère de résistance au cisaillement selon une direction donnée utilisés pour certains cas spéciaux.

Tous ces critères, sauf les deux derniers, sont programmés avec l'hypothèse de la normalité des déformations plastiques.

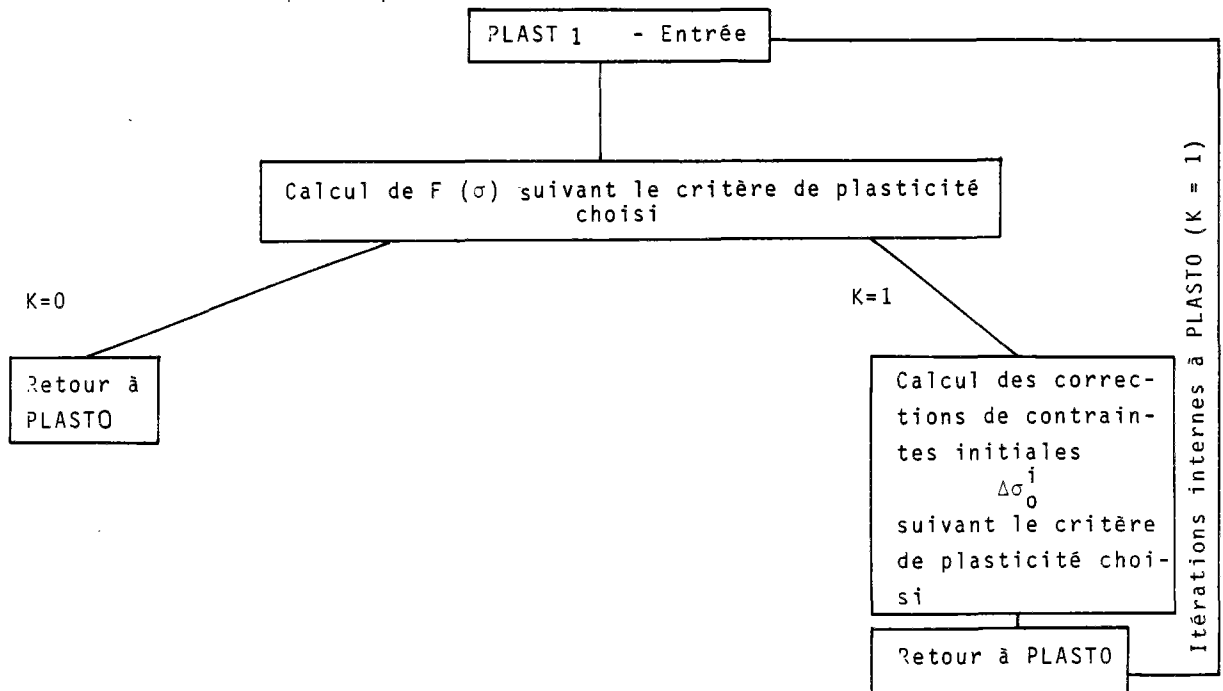


Fig. 13 - Organigramme de PLAST1.

## 2.5. ALGORITHMES PERMETTANT LA SOLUTION DES PROBLEMES DE CONTACT COUPLES AVEC L'ELASTOPLASTICITE DANS LE MASSIF

### 2.5.1. Introduction

Les algorithmes qui vont être présentés ont été développés dans le cadre du système d'éléments finis ROSALIE. Ils consistent à permettre le calcul des contacts par l'algorithme FROTTA tout en autorisant les corrections plastiques dans le massif par l'algorithme PLASTO (voir § 2.3 et 2.4).

Deux algorithmes, appelés IFRØPL1 et IFRØPL2, ont été élaborés. La différence de base entre ces deux algorithmes réside dans le moment choisi pour calculer et appliquer les corrections plastiques. Ils ont été appliqués tous les deux aux problèmes plans et aux problèmes à symétrie axiale.

### 2.5.2. Position du problème

Soit les solides  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  des frontières  $S_1$  et  $S_2$  qui peuvent être en contact le long d'une surface  $\Sigma$  (fig. 14):

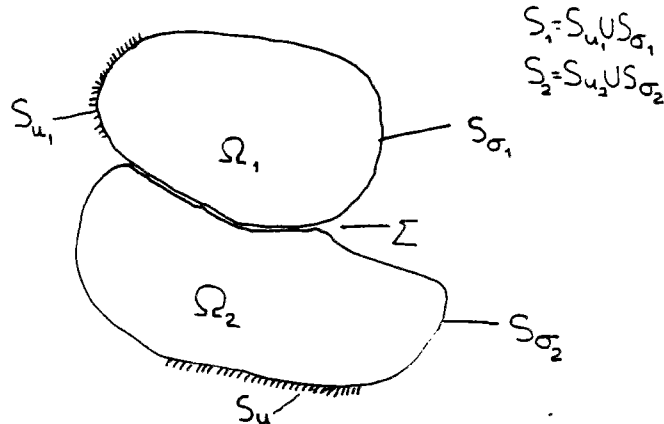


Fig. 14 - Solides  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  de frontières  $S_1$  et  $S_2$ .

Sur  $\Sigma$  l'on veut vérifier les critères et lois de contact (frottement-décollement) i, ii, iii et iiii définis précédemment (§ 2.3). Les solides  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont supposés, eux, avoir un comportement élasto-plastique et doivent donc vérifier les conditions mécaniques  $I_a$  ainsi que les équations de comportement  $I_b$  (§ 2.4.1).

Le problème que l'on se pose est de déterminer dans le cadre des conditions mécaniques et des hypothèses faites sur le comportement de  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  et  $\Sigma$  les champs de contraintes et de déformations dans  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  et sur  $\Sigma$ .

### 2.5.3. Algorithme IFRØPL1

Le processus d'un calcul couplé par l'algorithme IFRØPL1 est le suivant :

#### Préparation du calcul en général

-----

- 1 - lecture des diverses données générales pour tous les incréments,
- 2 - initialisation des tableaux.

#### Premier incrément - Première itération

-----

- 3 - lecture ou calcul du reste des données qui dépend de l'incrément ou de l'itération (CONTB5),
- 4 - calcul de la matrice de rigidité globale  $\{R_G\}$  dans (RIGID) et des conditions aux limites (DEPRG),

- 5 - calcul des forces nodales {F} dues au chargement de l'incrément ou de l'itération (F500),
- 6 - résolution du système linéaire  $\{F\} = \{R_G\} \{U_G\}$ ,
- 7 - entrée dans le sous-programme FROTTA, vérification de l'état initial avec les trois possibilités: L'état actuel vérifie tous les critères et aucune correction n'est nécessaire (indicateur ITRI = 0, convergence en frottement-décollement); l'état actuel vérifie tous les critères sauf le critère de glissement avec frottement; il faut apporter des corrections des forces de glissement (ITRI = 2); et enfin l'état actuel ne vérifie pas un des critères (i, ii, iii), il faut faire des corrections de rigidité et de force (ITRI = 1),
- 8 - calcul des contraintes correspondant aux déplacements actuels,
- 9 - si on n'a pas de modification de rigidité à faire (ITRI≠1), on entre dans PLASTO pour déterminer s'il y a plastification dans le massif. On a les possibilités suivantes :
  - soit le critère choisi est violé suffisamment pour nécessiter des contraintes de correction que l'on calcule tout de suite (indicateur ICHIN = 2),
  - soit il ne faut aucune correction et l'indicateur ICHIN est égal à 1.
 L'itération se termine soit en convergence quand les deux indicateurs (ITRI et ICHIN) indiquent qu'il n'y a pas de corrections à faire (ITRI = 0 et ICHIN = 1), soit en remontant à l'étape 5 du calcul pour l'itération suivante si ITRI = 2 et/ou ICHIN = 2.

Si par contre une modification de rigidité était nécessaire (ITRI = 1) on n'entre pas dans PLASTO mais on considère que la lère itération de décollement-frottement et élastoplasticité est terminée et on remonte à l'étape 3 du calcul pour l'itération suivante.

#### Itérations suivantes

Les itérations suivantes débutent soit avec l'exécution de l'étape 3 s'il s'agit d'une itération de rigidité soit de l'étape 5 s'il s'agit d'une itération de forces. Dans le premier cas les étapes 3 et 4 sont exécutés de la même manière que pendant la première itération.

La 5ème étape est exécutée seulement si ICHIN = 2 c'est à dire s'il y a eu dans l'itération précédente des points plastifiés pour lesquels on a calculé des contraintes de correction. Dans ce cas l'étape 5 consiste à calculer les forces nodales {Fp} dues à ces contraintes.

Ensuite on incrémente le tableau des forces {Fp} (éventuellement nulles) des forces de frottement-décollement {Ff}, nulles si ITRI = 0 et ainsi on obtient le tableau final des forces :

$$\{F\} = \{Fp\} + \{Ff\} \quad (\text{étape 5 bis})$$

Pour la continuation du calcul. Les étapes 5,7,8,9, cette dernière seulement si ITRI≠1, se déroulent comme pendant la première itération. Ce processus est répété autant des fois qu'il faut pour converger, c'est à dire obtenir ITRI = 0 et ICHIN = 1. Il y a alors deux cas de divergence : quand on diverge en frottement-décollement (ITRI = 4) et quand on diverge en plasticité (ICHIN = 3) (voir les détails dans les §§ 2.3 et 2.4). Dans ces deux cas le calcul s'arrête.

L'organigramme suivant (fig.15a) résume le processus décrit.

#### 2.5.4 Algorithme IFRØPL2

Le processus d'un calcul couplé par l'algorithme IFRØPL2 ressemble du point de vue construction à l'algorithme IFRØPL1, mais en diffère du point de vue de l'agencement des différentes corrections. Ainsi les étapes 1, 2 de la préparation du calcul et les étapes 3, 4, 5, 6, 7 et 8 de la première itération du premier incrément sont les mêmes.

La différence des deux algorithmes consiste dans le fait que l'algorithme 2 permet l'exécution de l'étape 9 (entrée dans PLASTO, calcul des éventuelles corrections plastiques) même si on n'a pas convergé sur la rigidité du système (ITRI = 1).



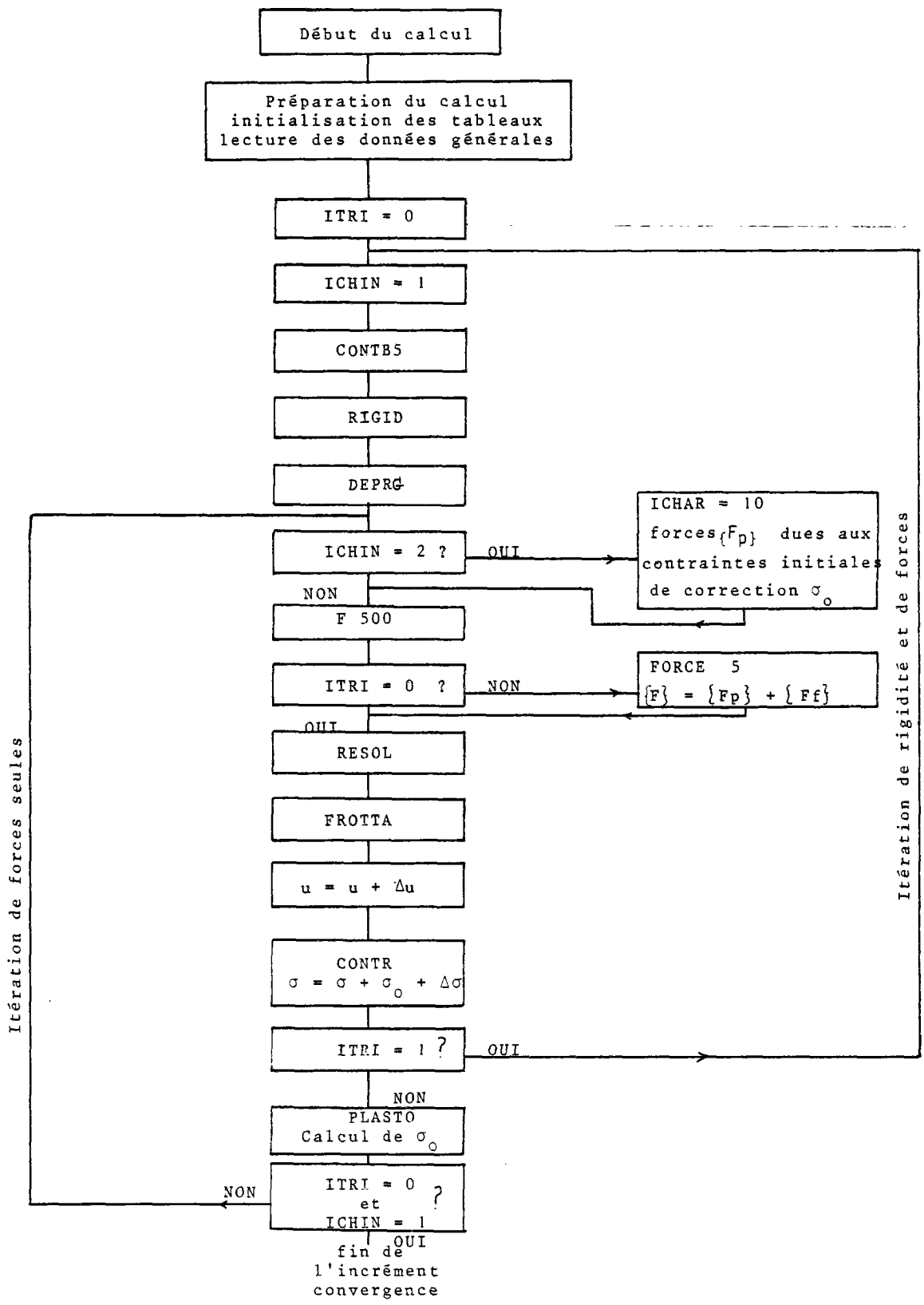


Fig. 15a- Organigramme de l'algorithme

IFRØPL1.

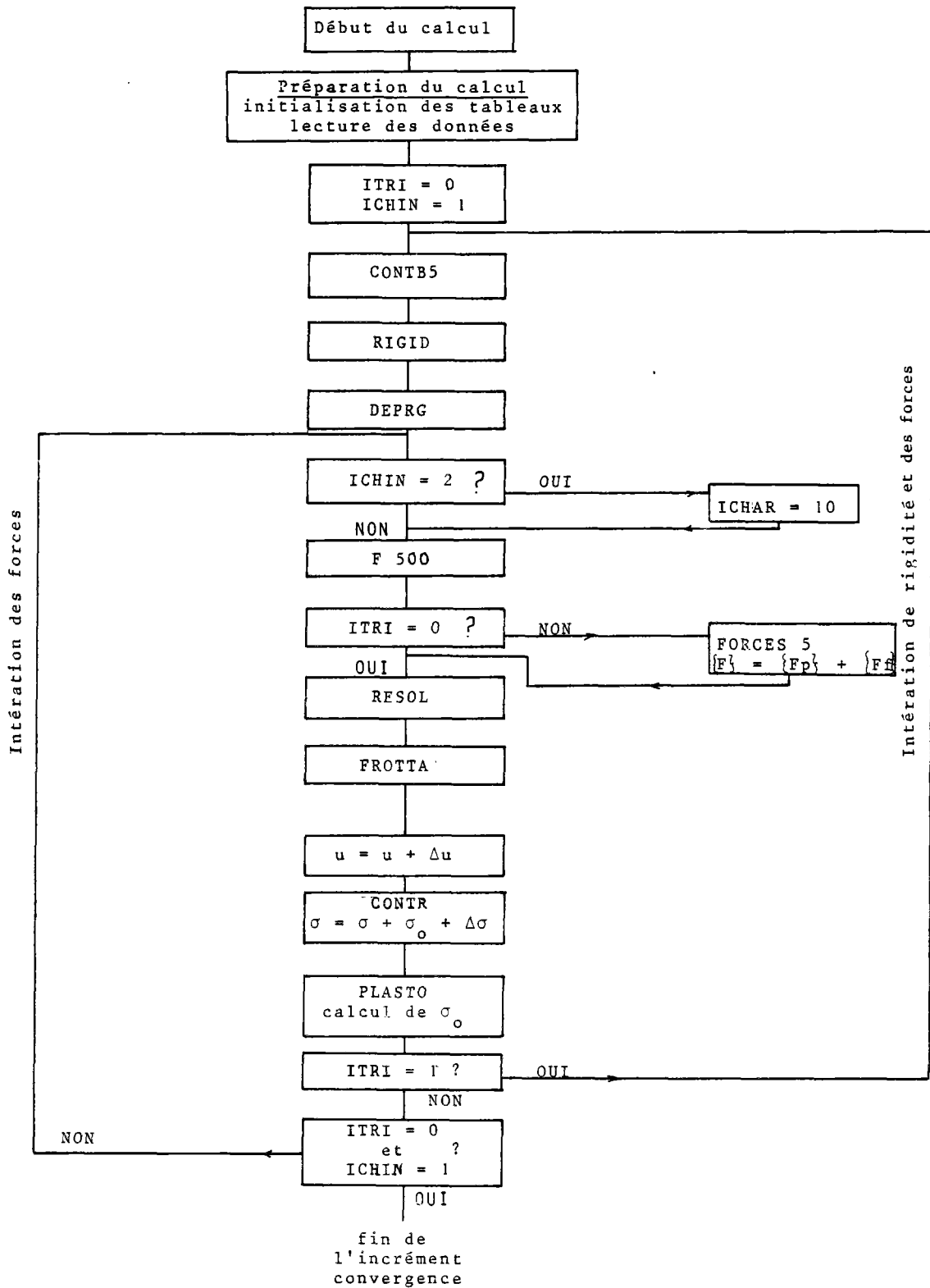


Fig. 15b - Organigramme de l'algorithme

IFRØPL 2

Ensuite la continuation du calcul se fait, soit comme par IFRØPL1, si ITRI  $\neq$  1, soit par l'adjonction des forces de rééquilibrage plastiques calculées aux forces de correction de frottement-décollement après changement de rigidité de système (ITRI = 1).

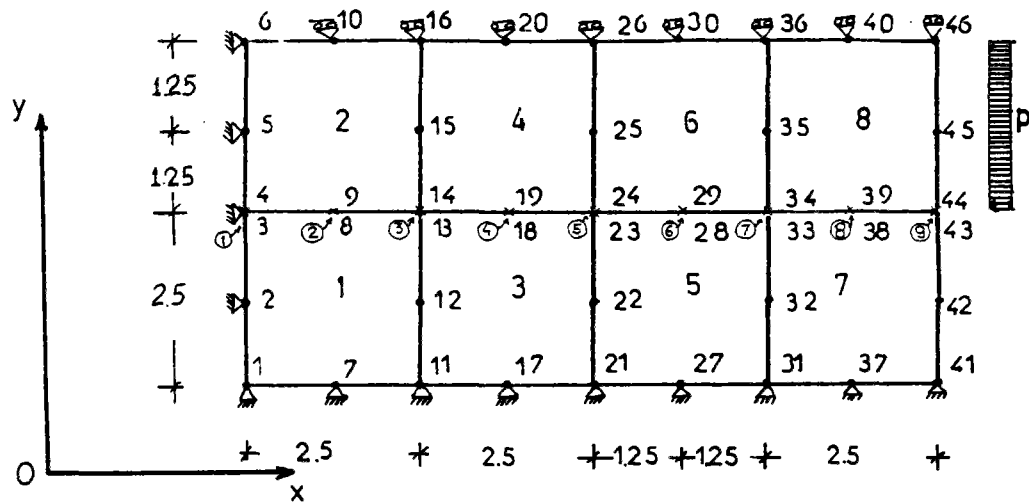
L'organigramme suivant (fig.15b) présente le processus suivi avec l'algorithme IFROPL2.

### 2.5.5 Comparaison des algorithmes IFRØPL1 et IFRØPL2

Les deux algorithmes (IFRØPL. 1 et 2) ont été vérifiés et comparés sur plusieurs jeux des données testés tant pour le cas des problèmes de déformations plane que pour le cas des problèmes à symétrie de révolution. Nous ne rapporterons ici, pour alléger la rédaction, que la comparaison qui a été faite sur le jeu le plus simple PLAFRØ, en déformation plane.

#### Jeu de données PLAFRØ

Il s'agit d'un simple maillage (fig.16) à 46 points, de 8 éléments de massif et de 9 éléments de contact (3-4, 8-9..., 43-44).



(longueurs en unités  $u_1$  (L)).

Fig. 16-Maillage de PLAFRØ,

Les éléments qui constituent le maillage sont de type Q8 (quadrilatères à 8 noeuds) pour le massif et de type CT1 pour les éléments de contact.

Les conditions aux limites interdisent les déplacements suivant les axes X et Y pour les points 1,2,3,4,5,6,7,11,17,21,27,31,37 et 41 et les déplacements suivants l'axe Y des points 10,16,20,26,30,36,40,46. Les limites latérale gauche et inférieure sont donc encastées, et la limite supérieure peut glisser parfaitement.

- module d'Young  $E = 250 u_2$
- coefficient de poisson  $\nu = 0,30$
- critère de plasticité de Coulomb dans le massif :  
cohésion  $C = 20 u_2$   
angle de frottement  $\varphi = 35^\circ$
- cohésion dans le joint  $C_j = 20 u_2$
- angle de frottement du joint  $\varphi_j = 30^\circ$
- résistance à la traction au joint  $r_t = 0$
- au début du calcul tous les points du contact entre les deux zones sont liés.
- $u_2$  : unité de contrainte ( $ML^{-1} T^{-2}$ )

Pour chaque chargement ont été faits trois calculs : Un, qui ne prenait pas en compte la plasticité dans le massif (désigné pour des raisons de simplicité IFRØPLO) et Deux autres avec les algorithmes IFRØPL1 et IFRØPL2.

Le chargement appliqué était une pression uniforme de  $240 u_2$  en six incréments sur le côté 44-45-46 du maillage et dirigé vers la gauche (fig 16).

La situation au bout du sixième incrément était la suivante :

- Etat des éléments de frottement-décollement.  
Les trois calculs (avec IFRØPL 0, 1,2) ont mené à l'enlèvement de la continuité tangentielle des éléments de contact 4,5,6,7,8 et 9 (fig16).
- Zones de plasticité :  
Les zones plastifiées de massif pour les algorithmes IFRØPL1 et IFRØPL2 sont présentées sur les figures 17 a et 17 b pour la fin du 6ème incrément.

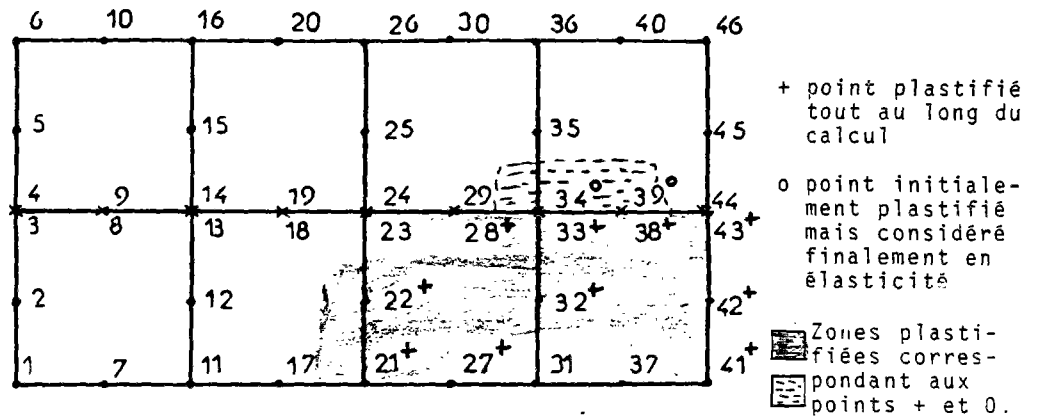


Fig.17 a - Zones plastifiées avec IFRØPL1.  
Chargement de  $240 u_2$  en six incréments.

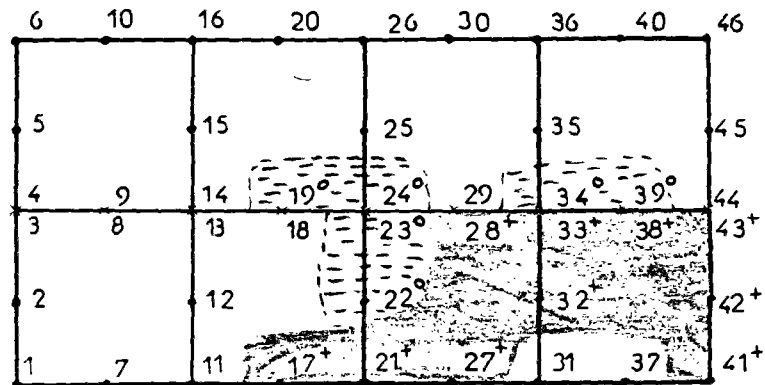


Fig.17 b - Zones plastifiées avec IFRØPL2.  
Chargement de  $240 u_2$  en six incréments.

On distingue le cas de points qui ont été considérés comme plastiques à une certaine étape seulement de l'incrément et qui ont été trouvés en élasticité à la fin et des points qui ont été trouvés plastifiés jusqu'à la fin. Du fait que la méthode des "contraintes initiales" utilisée pour traiter la plastification de massif ne permet pas de revenir en arrière pour les points finalement en élasticité pour l'incrément (en enlevant par exemple les corrections plastiques indûment appliquées comme c'est le cas dans l'algorithme du frottement-décollement), la solution obtenue est d'autant plus mauvaise qu'elle a plus de points ainsi temporairement plastiques.

Ainsi il semble assez clair que la solution due à l'algorithme IFRØPL1 est plus exacte que celle due à l'algorithme IFRØPL2. D'autant plus que, en appliquant le même chargement total en un seul incrément, la zone des points temporairement plastifiés augmente considérablement pour la solution avec IFRØPL2 (fig 18a et 18b),

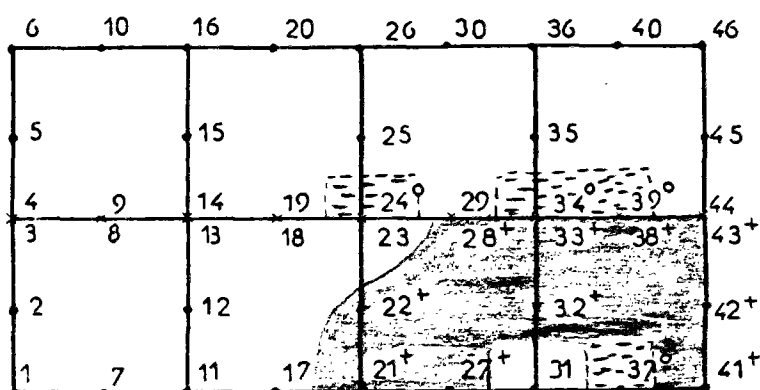


Fig. 18a - Zones plastifiées sous chargement de  $240 u_2$  en un incrément; solution avec IFRØPL1.

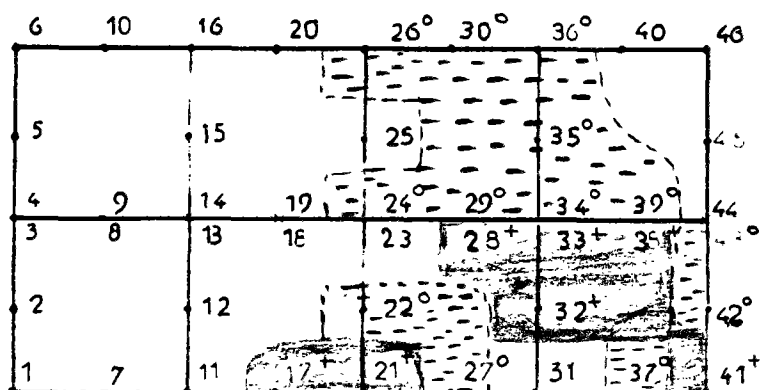


Fig. 18b - Zones plastifiées sous chargement de  $240 u_2$  en un incrément; solution avec IFRØPL2.

La solution obtenue par IFRØPL1 par contre est pratiquement la même en ce qui concerne les zones plastiques quel que soit le "découpage" du chargement. L'explication du meilleur comportement de l'algorithme IFRØPL1 est que, comme il impose d'abord le réglage d'une bonne partie du problème de la rigidité, on n'apporte des corrections plastiques que sur un système de rigidité presque définitive et non pas sur un système dont la rigidité risque de changer encore beaucoup. Il faut noter que l'application des corrections plastiques risque de provoquer elle même des changements de rigidité mais ils sont toujours d'une importance beaucoup plus petite que ceux provoqués pour l'incrément de chargement lui même, et de toutes façons la méthode utilisée pour régler le problème de frottement-décollement permet, elle, un retour en arrière si des éléments de contact ont été indûment corrigés et modifiés. Si maintenant on applique un chargement suffisamment découpé en petits incréments (par exemple une pression de 80 découpé en 6 incréments), on obtient pour les deux algorithmes des résultats identiques, ce qui se comprend aisément (Fig. 19a et 19b)

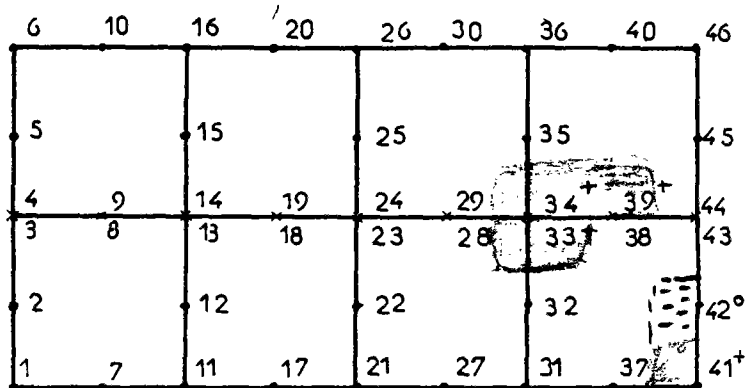


Fig. 19a - Zones plastifiées pour un chargement de  $80u_2$  (Solution avec IFRØPL1) en 6 incréments.

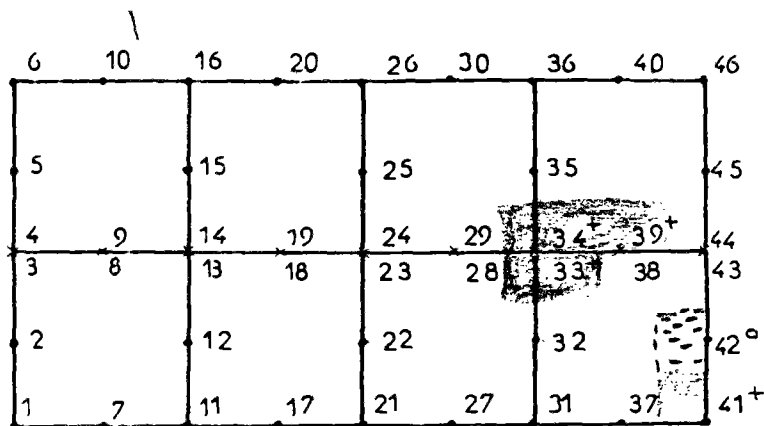


Fig. 19b - Zones plastifiées pour un chargement de  $80u_2$  en 6 incréments; solution avec IFRØPL2.

- Déplacements horizontaux (U) et verticaux (V)

Les déplacements horizontaux (U) obtenus pour les trois calculs (IFRØPL 0,1,2) et pour la pression 240 en six incréments, ont été comparés. Les zones où les différences sont les plus accentuées sont les zones plastiques les plus proches du point d'application du chargement. Les fig. 20a et 20b représentent pour ces zones les déplacements obtenus par les trois algorithmes. La différence entre IFRØPL1 et IFRØPL2 ne dépasse jamais 2 à 3 % quand la différence entre IFRØPL0 et IFRØPL 1 et 2 est de l'ordre de 10 à 25 % dans les zones plastiques. Pour le même chargement mais en un seul incrément les différences sur les déplacements entre les solutions IFRØPL1 et IFRØPL2 augmentent légèrement mais pour un chargement de 80 en six incréments elles deviennent presque nulles. L'explication de ce comportement se trouve dans le fait que l'algorithme IFRØPL2 n'est pas adapté au traitement d'incrémentes relativement grands car, comme on l'a vu, il provoque des corrections plastiques là où finalement il n'aurait pas dû en faire (voir fig. 17b, 18b et 19b).

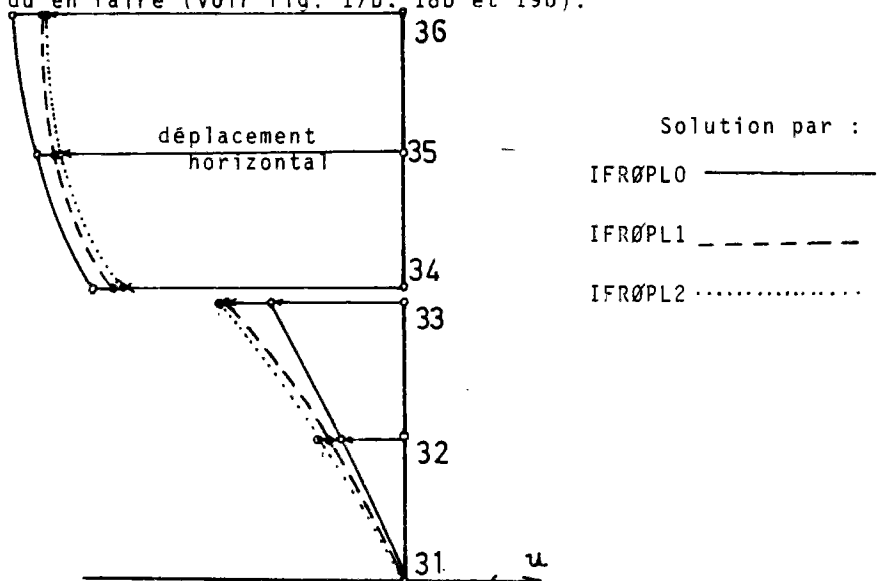


Fig. 20a - Déplacements horizontaux sur la ligne verticale 31-36 de 240 en six incréments.

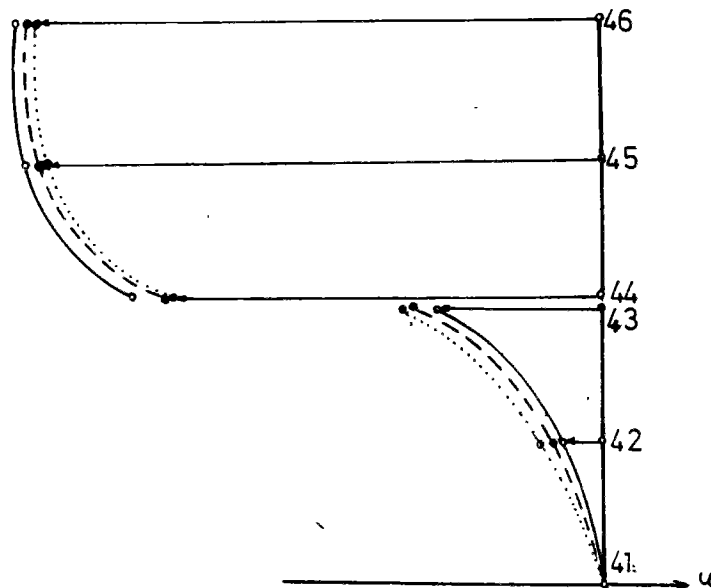


Fig. 20b - Déplacements horizontaux sur la ligne verticale 41-46 de 240 en six incréments.

Le mêmes commentaires peuvent être faits pour les déplacements verticaux (V) (fig. 21a et 21b) où de plus les solutions IFRØPL1 et IFRØPL2 sont en pratique confondues pour le chargement de 240 en 6 incréments. Les seuls points où une différence de l'ordre de 3-4 % a été remarquée sont les points 45 et 43/44.

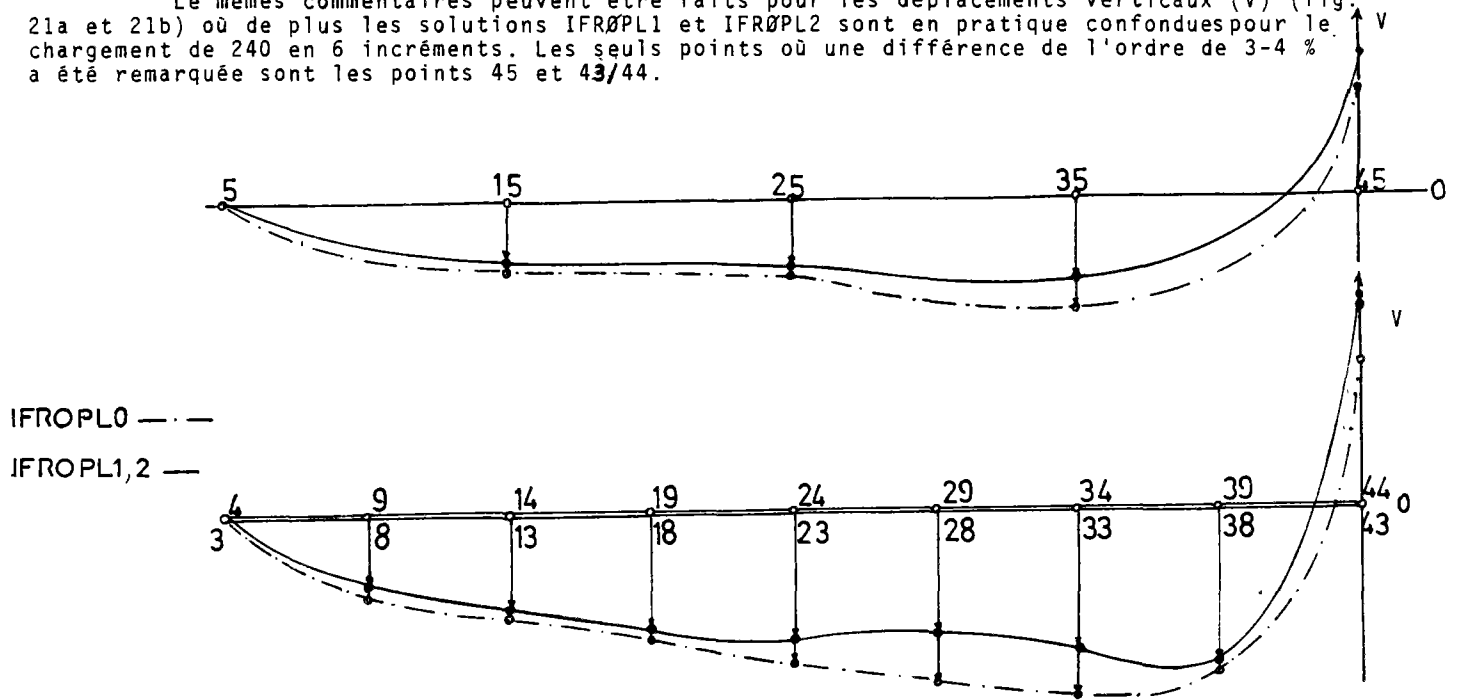


Fig. 21a et 21b - Déplacements verticaux sous un chargement de 240 en six incréments.

## 2.6 CONCLUSION

Deux algorithmes (IFRØPL1 et IFRØPL2) ont été élaborés pour introduire la plasticité dans le massif pendant le calcul du frottement-décollement d'un joint. Le premier (IFRØPL1) prévoit d'abord un réglage au moins partiel des problèmes de rigidité du joint avant d'introduire des corrections plastiques tandis que l'autre (IFRØPL2) introduit des corrections plastiques dès le départ.

Les deux algorithmes donnent des résultats pratiquement identiques lorsque les incréments sont petits. Le fait que IFRØPL2 permette des corrections de plasticité sur une structure pas encore suffisamment définie du point de vue rigidité peut amener à des imprécisions et ceci d'autant plus que l'incrément est grand. Pour cela on conseille l'utilisation de IFRØPL1 dans les cas généraux et l'application de IFRØPL2 soit lorsque l'on sait à l'avance que les incréments de chargement sont petits vis-à-vis du développement des zones plastiques dans le problème que l'on veut traiter, soit lorsque le problème est tel que les zones plastiques sont éloignées des zones de contact avec frottement-décollement.

Dans le cas où l'on peut utiliser IFRØPL2 on obtient une convergence plus rapide du fait que les deux problèmes sont traités simultanément dès le début de chaque incrément de chargement.



## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

(PARTIE II)

- CRAMER H., WUNDEREICH W., KUTTER H.K., RAHN W. (1979). "Finite element analysis of stress distribution, included fracture and post-failure behaviour along a shear zone in rock". Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Conf. Num. Meth. in Geomechs, Aachen, A.A. Balkema, Rotterdam.
- DUPEYRAT J.M. (1975). "Méthode de calcul des massifs discontinus à comportement non linéaire". Thèse de Doct. Ing. Université P. et M. Curie, Paris.
- DUVAUT G., LIONS J.L. (1972). "Les inéquations en mécanique et en physique". Dunod, Paris.
- EKELAND I. TEMAM R. (1974). "Analyse convexe et problèmes variationnels". Dunod, Paris.
- FRANK R., GUELLEC P. et HUMBERT P. (1977). "Une méthode d'analyse des problèmes de contact en géomécanique". Note interne L.C.P.C.
- FRANK R., GUENOT A. et HUMBERT P. (1980). "Etude par éléments finis de quelques critères de plasticité orientés". Congrès G.A.M.N.I., Paris.
- FREMOND M. (1980). "Méthodes variationnelles en calcul des structures", Chap. VII : "Quelques problèmes non linéaires en élasticité : Problèmes de décollement", pp. 97-135. Cours de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- GHABOUSSI J., WILSON E.L., ISENBERG J. (1973). "Finite Element for Rock Joints and Interfaces". A.S.C.E. SM10, October 1973.
- GOODMAN R.E., TAYLOR R.L. et BREKKE T.L. (1968). "A Model for the Mechanics of Jointed Rock". A.S.C.E. Vol. 94 N° SM3 May 1968.
- GOODMAN R.E. et DUBOIS J. (1972). "Duplication of Dilatancy in Analysis of Jointed Rocks". A.S.C.E. Vol. 98 N° SM4 April 1972.
- GOODMAN R.E. et ST. JOHN C. (1977). "Finite Element Analysis for Discontinuous Rocks". Numerical Methods in Geotechnical Engineering, Mc GRAW HILL 1977.
- GUELLEC P. et RICARD A. (1974). "Calcul de massifs en élastoplasticité. Applications à la mécanique des roches et des sols" Bull. Liaison Labo. P. et Ch. 69, Réf. 1397.
- GUELLEC P. (1976). "ROSALIE - Système de calcul des massifs et des structures". Rapport du Département de Géotechnique. F.A.E.R. 1.09.14.6. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.
- GUELLEC P., HUMBERT P., RICARD A. (1976). "La méthode des éléments finis et le système ROSALIE". Bull. Liaison Labo. P. et Ch. n° 81 Réf. 1801.

- GUELLEC P. (1977). "Etude de la plastification autour de cavités souterraines sous l'effet d'accroissement de température". Section des Modèles Numériques n° 337001. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.
- HARR M.E., LEONARDS G.A. (1959). "Warping stresses and deflections in concrete pavements". Proceedings of Highway Research Board.
- HERMANN L.R. (1978). "Finite Element Analysis of Contact Problems". A.S.C.E. E.M.5, Oct. 1978.
- HUNGR. O. , COATES D.F. (1978). "Deformability of joints and its relation to rock foundation settlements". Canadian Geotechnical Journal n° 15, pp. 239-249.
- LEWIS K.H. (1967). "Analysis of concrete slabs on ground and subject to warping and moving loads". Joint Highway Research Project N° 16, Purdue University, La Fayette, Indiana.
- PANDE G.N., SHARMA K.G. (1979). "On joint interface elements and associated problems of numerical Ill - Conditioning". Int. Journ. Num. Anal. Methods in Geomechanics Vol. 3, pp. 293-300.
- REYNOUARD J.M., DUHAU R., LEMAIRE M. (1979). "Méthode numérique de simulation du contact entre une structure et un sol élastoplastique". Rapport I.N.S.A. Lyon.
- RICARD A. (1975). "Etude des massifs continus à comportement non linéaire". Rapport de recherche n° 44 Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.
- SALENÇON J. (1978). "Calcul à la rupture et analyse limite". Cours de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- ZIENKIEWICZ O.C., BEST B., DULLAGE C., STAGG K.G. (1970). "Analysis of non linear problems in rock systems". Proceedings of the 2 nd Congress of the International Society for Rock Mechanics, Belgrade, Yugoslavia 1970.
- ZIENKIEWICZ O.C. (1971). "The finite element method in engineering science", Mc GRAW HILL.
- ZIENKIEWICZ O.C., PANDE G.N. (1977). "Time dependent multilaminate model of rocks. A numerical study of deformation and failure of rock masses". Int. Journ. for Num. and Anal. Meth. in Geomechs, Vol. 1, pp. 219-247.



PARTIE III  
APPLICATIONS



## INTRODUCTION

Après la programmation sur le système des éléments finis ROSALIE des algorithmes décrits dans la partie II, permettant le couplage du frottement et décollement de contact avec l'élasto-plasticité du massif, le programme a été utilisé pour traiter plusieurs cas réels touchant au domaine du Génie Civil.

Quatre applications sont ainsi présentées dans cette partie. La première concerne la géotechnique routière. Il s'agit du problème de l'interaction entre un cylindre de compactage et le sol.

La seconde répond à un problème d'ouvrage d'art, à savoir le problème de l'ancrage de câble de précontrainte additionnelle par bossage rapporté.

Ces deux premières applications ont été réalisées, en utilisant notre programme, par O. Farzaneh et J.N. Theillout, respectivement.

Les deux dernières applications touchent plus directement la mécanique des sols. L'une est une étude théorique de pieu sous charge verticale ; l'autre est l'étude de la construction d'un remblai sur un versant instable.

Ces deux dernières applications ont été réalisées par nous-mêmes, et grâce à une première étude de A. Guénot en ce qui concerne le cas du remblai.

### 3.1. ETUDE DE L'INTERACTION SOL-CYLINDRE DE COMPACTAGE

#### 3.1.1. Introduction

Le programme couplé de frottement-décollement avec l'élasto-plasticité dans le massif que nous avons élaboré a été utilisé (Farzaneh, 1981) pour une étude de l'interaction entre un rouleau de compactage ("bille") et le sol sous-jacent. Cette recherche comprend, en ce qui concerne ce problème particulier, une série d'essais en vraie grandeur (réalisés au centre d'expérimentations routières de Rouen) sur des sols limoneux et une partie théorique réalisée au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.

#### 3.1.2. Position du problème

Les études relatives à l'efficacité des rouleaux compacteurs tentent de plus en plus de prendre en compte l'interaction sol-compacteur. De telles études présentent l'intérêt particulier de permettre de suivre l'évolution des caractéristiques mécaniques du matériau à compacter pendant le processus du compactage. Un des paramètres les plus importants du problème d'interaction sol-compacteur est la surface de contact, dite empreinte, dont l'évolution influence considérablement les contraintes au sein du massif de sol.

On cherche donc à connaître l'évolution de l'empreinte en fonction, d'une part de la charge totale appliquée sur le cylindre et, d'autre part des caractéristiques mécaniques du matériau. On étudie également les déflexions et les contraintes dans le massif à compacter.

La bonne connaissance de l'empreinte est un problème complexe du fait que les mesures expérimentales sont très délicates, (pour plus de détails, voir O. Farzaneh, 1981). En ce qui concerne les calculs théoriques la solution analytique (H. Herz (1881) cité par S. Timoshenko (1948)) existe seulement pour un massif semi-infini élastique, ce qui n'est qu'une approximation grossière pour le sol et la géométrie du problème réel. D'où la nécessité et l'intérêt de calculs en élasto-plasticité qui permettraient d'obtenir l'empreinte et les déflexions avec une précision acceptable.

#### 3.1.3. Modélisation du problème par la méthode des éléments finis

Le maillage proposé (Fig. 2) a 291 points ; 77 éléments de type de quadrilatère à 8 noeuds (type Q8 de ROSALIE) qui modélisent le massif à compacter et la bille de compactage, et 45 éléments à deux noeuds (type CT1 de ROSALIE). Une partie de ces éléments est utilisée comme éléments de contact de frottement-décollement pour modéliser la surface entre bille et sol et, une autre pour assurer l'égalité des déplacements des points supérieurs et des points inférieurs des éléments de la bille afin de la rendre indéformable. Les éléments de frottement-décollement sont décollés au départ et ne fonctionnent, en fait, dans ces calculs qu'en recollement. Les caractéristiques de frottement de l'interface ( $c, \phi$ ) sont nulles. Il y aura donc glissement parfait lorsque des points viendront en contact. On joue sur l'ouverture ou épaisseur initiale  $e$  de chaque élément pour modéliser le fait que la surface supérieure est cylindrique (Fig. 1). Le rayon de la bille est  $r_0 = 75$  cm.

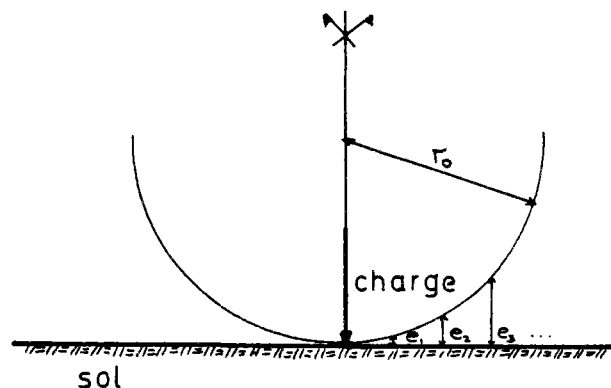


Fig. 1 - Contact bille-sol

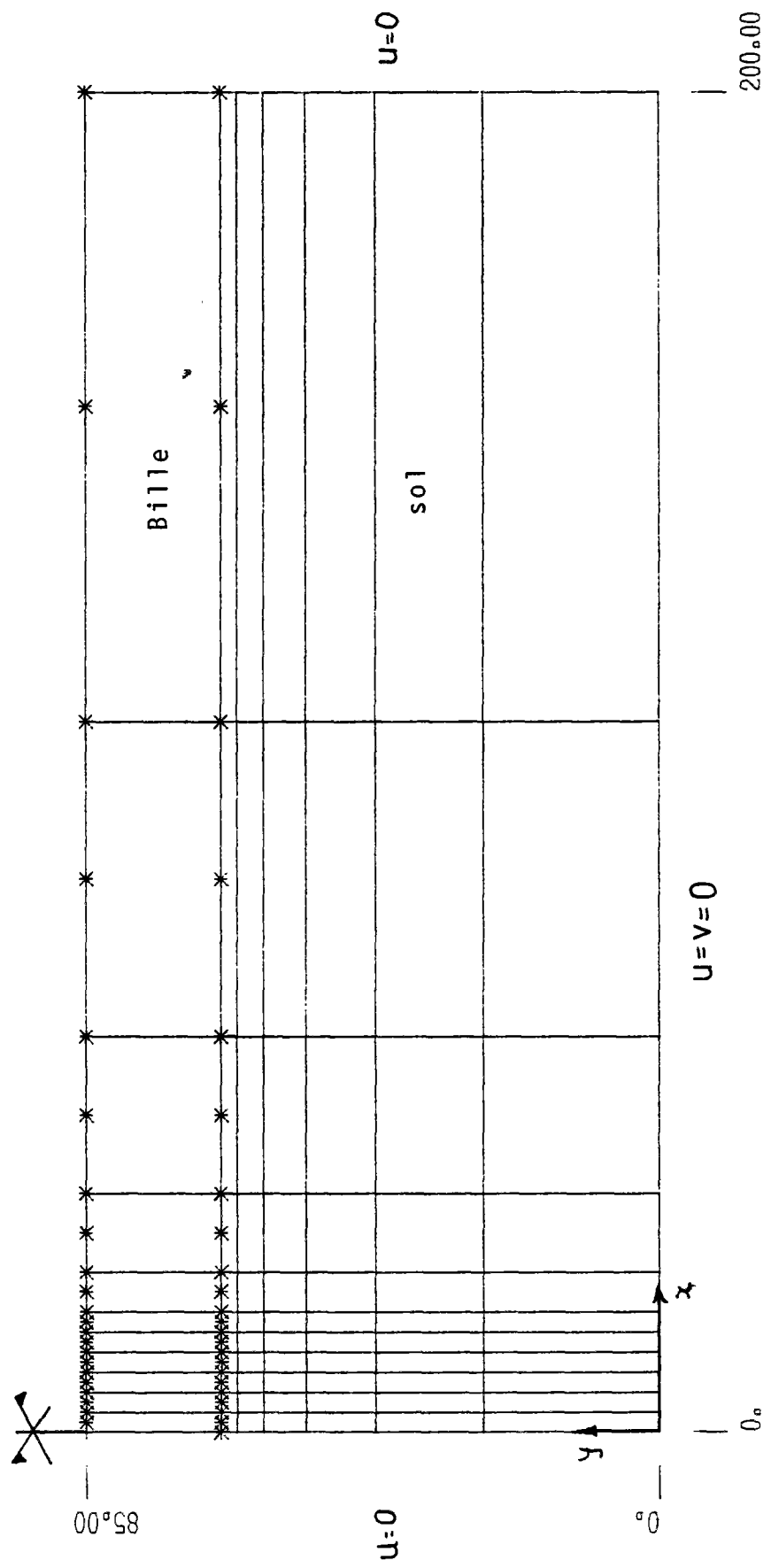


Fig. 2 - Maillage utilisé (O. Farzaneh 1981).



De plus le calcul est mené en déformation plane et l'on ne s'intéresse qu'à la moitié du modèle, le problème étant symétrique par rapport au plan vertical de symétrie du cylindre.

La profondeur choisie est de 65 cm et on a supposé un substratum rigide et frottant ( $u = v = 0$ ). Des calculs avec un modèle sur appuis élastiques correspondant à la rigidité réelle du substratum n'ont pas donné de différences significatives pour les empreintes et les déplacements verticaux.

Les caractéristiques des matériaux ont été les suivantes :

- pour la bille de compactage et pour tous les calculs on a imposé un comportement élastique très rigide :

Module d'Young  $E = 2.10^5$  MPa

Coefficient de Poisson  $\nu = 0.25$

pour le massif de sol on a choisi :

Module d'Young :  $E = 20$  MPa, mesuré par essais DYNAPLAQUE

Coefficient de Poisson  $\nu = 0.35$ , choisi approximativement

Trois calculs ont été faits avec respectivement les données de plasticité suivantes avec loi de normalité :

1. Critère de Coulomb avec  $\varphi' = 30^\circ$ ,  $c' = 45$  kPa

2. Critère de Von Mises avec  $c_u = 45$  kPa avec  $k = \frac{2 c_u}{\sqrt{3}}$

3. Critère de Von Mises avec  $c_u = 35$  kPa

$c_u$  étant la cohésion non drainée du sol.

Le matériau en place, un limon naturel, n'étant pas saturé ( $S_r = 80\%$ ) on n'a pas pu déterminer avec beaucoup de précision les caractéristiques nécessaires, ce qui explique que plusieurs données aient été essayées.

L'algorithme IFRØPL1 a été choisi.

#### 3.1.4. Résultats obtenus

Les résultats obtenus par les calculs ont été comparés avec les résultats expérimentaux et les résultats obtenus par des calculs en élasticité par la méthode des éléments finis. Notons que ces derniers concordent bien avec la solution analytique pour un milieu semi-infini élastique.

Nous présentons aux figures 3 et 4 les maillages déformés dans le cas du calcul élastique et du calcul élasto-plastique 2 (sur ces figures les déplacements sont multipliés par 20). Il apparaît nettement que l'empreinte et les déplacements sont plus grands dans le cas du massif élasto-plastique. La figure 5 donne l'extension des zones plastiques en fonction de la charge. Ces résultats et l'apparition des importantes zones plastifiées montrent l'intérêt du calcul élastoplastique.

La Figure 6 compare, en ce qui concerne la largeur de l'empreinte, les résultats obtenus par les quatre calculs aux résultats expérimentaux. La dispersion remarquée pour les résultats expérimentaux est due à une certaine imprécision des mesures de l'empreinte qui sont très délicates.

Parmi les solutions obtenues par le calcul il est clair que la plus éloignée des mesures est la solution élastique tandis que les calculs élastoplastiques sont plus réalistes. On peut remarquer que les empreintes obtenues par certaines solutions élastoplastiques, au delà d'un certain seuil de chargement, deviennent nettement plus importantes que les empreintes obtenues expérimentalement.

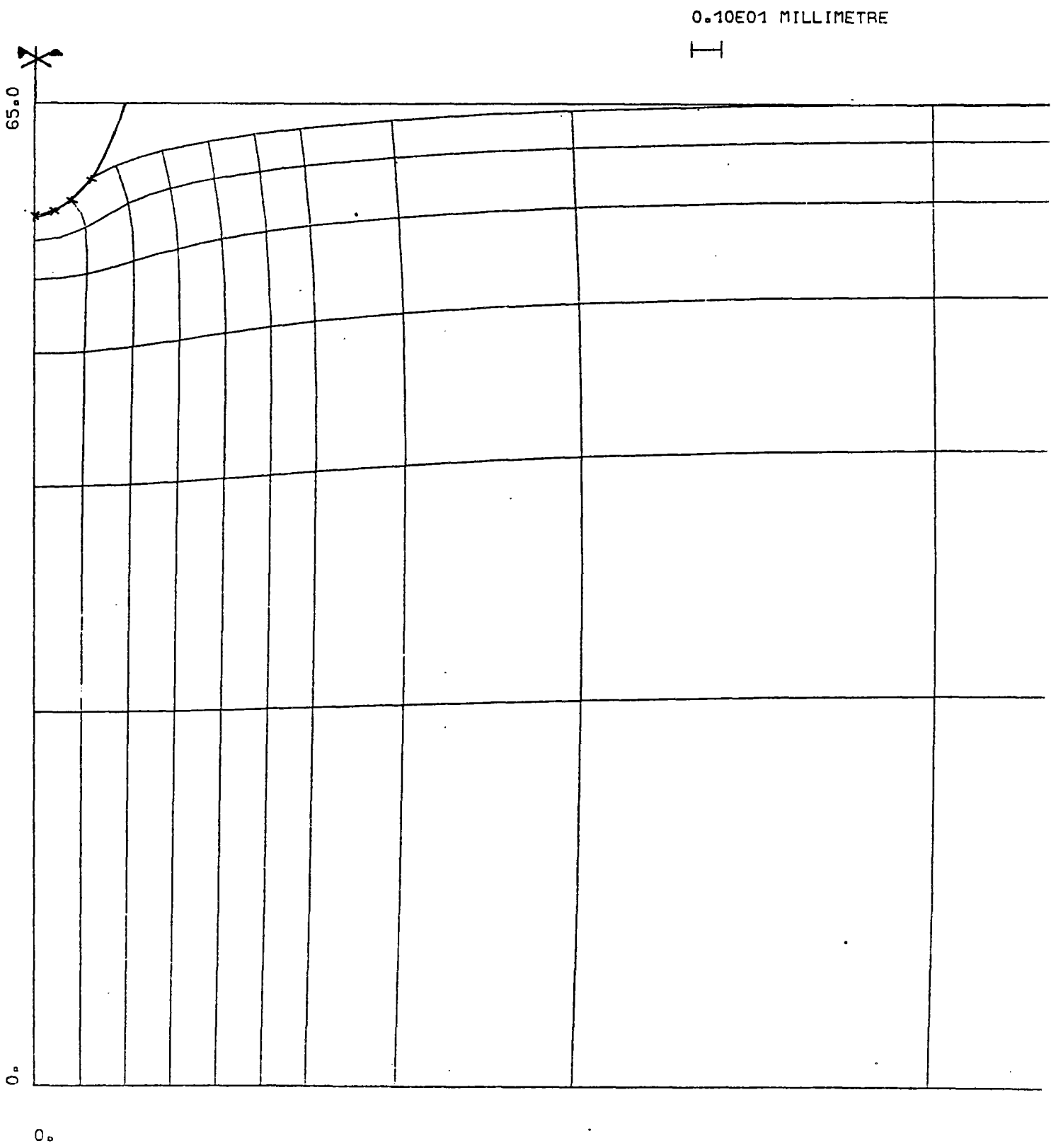


Fig. 3 - Maillage déformé du sol sous la charge de 400 N/cm  $\ell$  pour le calcul élastique (O. Farzaneh 1981).

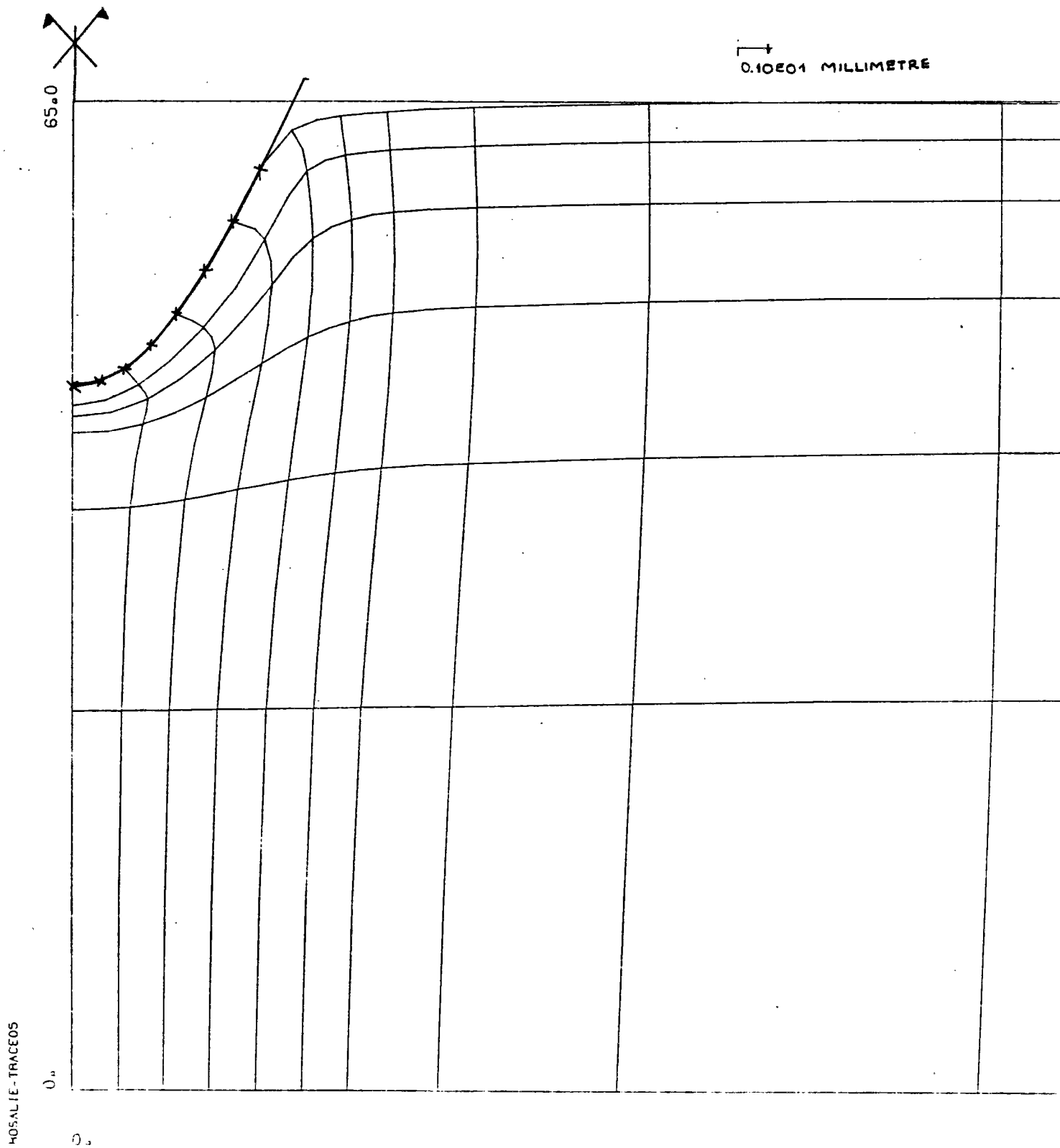


Fig. 4 - Maillage déformé du sol sous la charge de 400 N/cm<sup>2</sup> pour le calcul élastoplastique<sup>2</sup>(O. Farzaneh 1981).

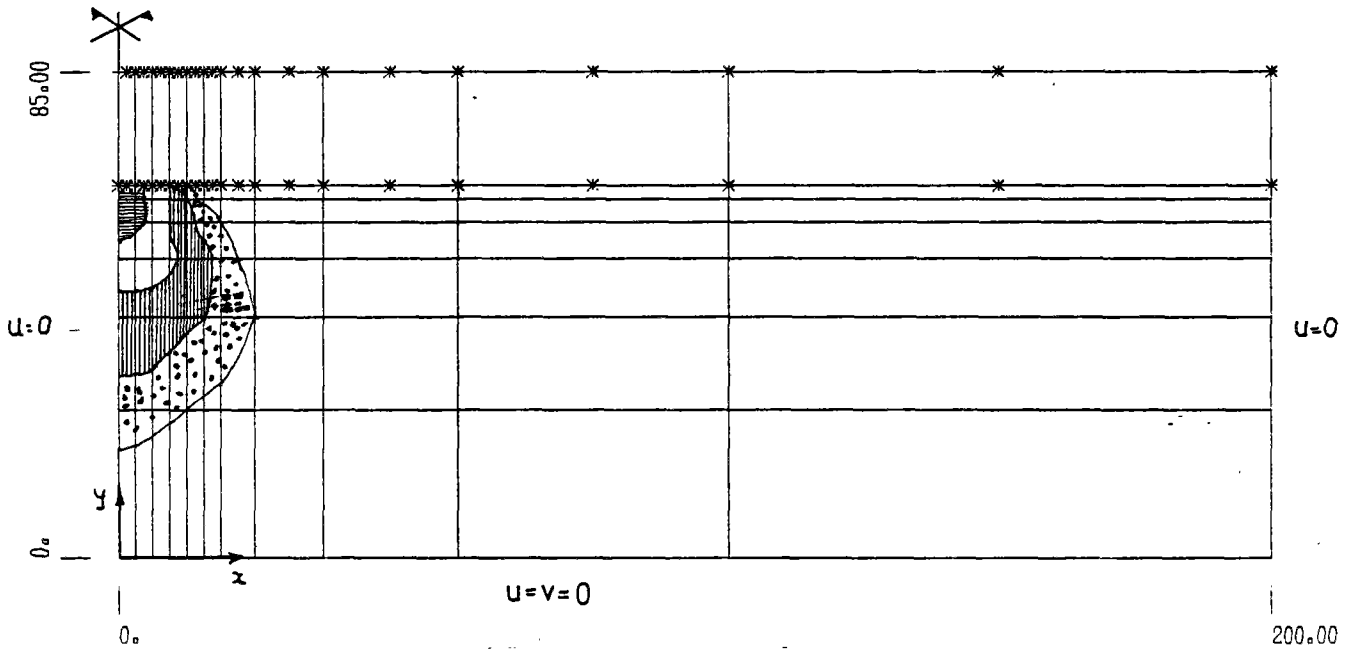


Fig. 5 - Zones plastifiées lors de différentes étapes de chargement

(O. Farzaneh 1981)

(Critère Von Misès  $c_u = 45 \text{ kPa}$   $E = 20 \text{ MPa}$   $\nu = 0.35$ )

- ▨ 10 (daN/cm)
- 20 "
- ▩ 30 "
- ▧ 40 "

Sur la Figure 7 on peut remarquer que, malgré un certain écart observé entre les résultats expérimentaux et calculés en ce qui concerne l'empreinte, il existe un très bon accord en ce qui concerne les déflexions  $V$ . Ceci s'explique par le fait que la largeur de l'empreinte dépend considérablement de paramètres "secondaires" tels que le frottement entre la bille et le sol et la dilatance éventuelle au voisinage de la bille qui ne sont pas du tout pris en compte par le critère de contact ou le critère de Von Mises tandis que les déflexions dans le massif en sont relativement indépendantes.

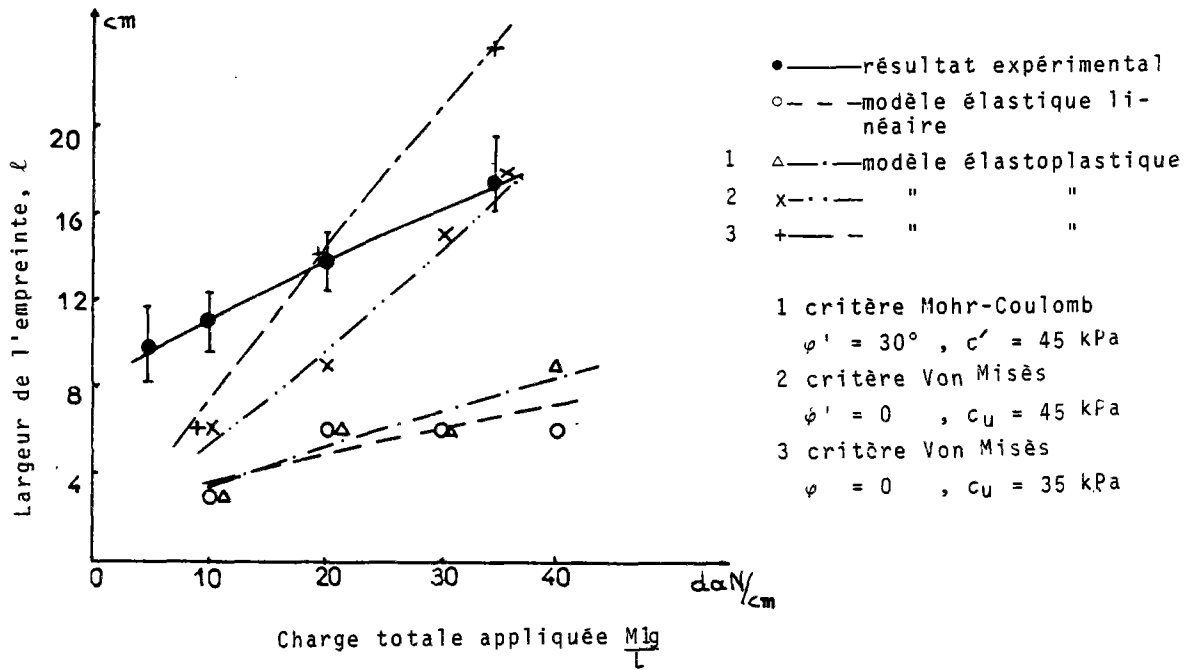


Fig. 6 - Largeur d'empreinte en fonction de la charge totale appliquée ; comparaison des résultats théoriques avec la courbe expérimentale (O. Farzaneh 1981).

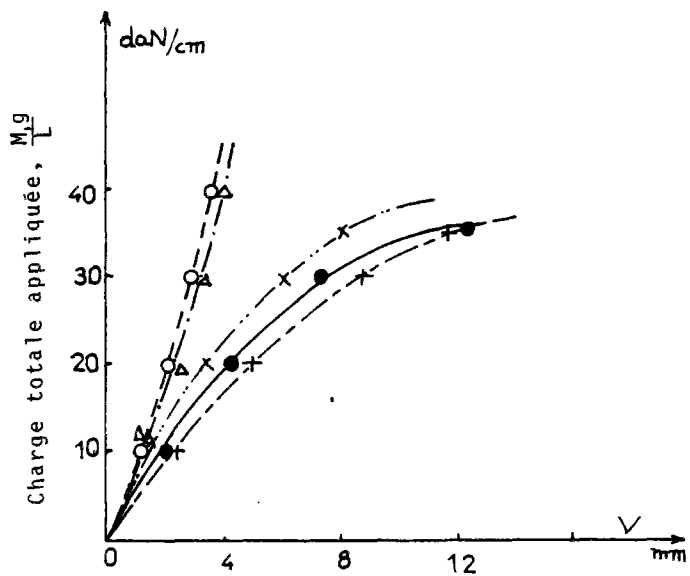


Fig. 7 - Déplacement vertical du cylindre (O. Farzaneh 1981).

## 3.2. ETUDE D'UN BOSSAGE D'ANCRAGE D'UN CABLE DE PRECONTRAINTE ADDITIONNELLE

### 3.2.1. Introduction

Cette étude fait partie de la recherche effectuée pour la réparation du pont de Lestelle (bipoutre biais à trois travées continues) (J.N. Theillout, 1981 a). Elle comprend une partie de calculs par éléments finis (J.N. Theillout, 1981 b) qui cherche à définir la tenue du contact entre un bossage destiné à l'ancrage d'un câble de précontrainte additionnelle et l'âme de la poutre sur laquelle il est cloué.

### 3.2.2. Position du problème

L'apparition des fissures liées aux problèmes de conception du tracé des câbles de précontrainte du pont de Lestelle a nécessité son renforcement. Comme moyen de renforcement, une précontrainte additionnelle a été choisie. Du fait du biais de l'ancrage cette précontrainte a été ancrée à l'aide des bossages cloués sur des âmes des poutres.

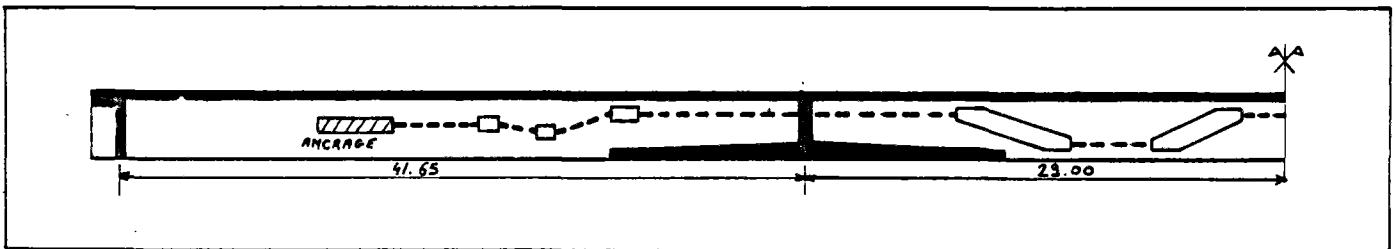


Fig. 8 - Profil en long des câbles sur l'âme (J.N. Theillout, 1981 a)

Ces bossages d'ancrage sont constitués de blocs en béton armé de forme parallélépipédiques de 4 m de longueur et de 0,8 x 0,785 m de section (Fig.9).

Ces blocs de béton ont été cloués sur l'âme de la poutre à l'aide de 14 barres Diwidag  $\varnothing$  36. Une telle opération de clouage pose, d'une part le problème du comportement du contact entre le bossage et l'âme de la poutre pour pouvoir déterminer la force de précontrainte maximale que l'on peut appliquer aux câbles fonction de la force de clouage et, d'autre part le problème de la diffusion de l'effort dans la structure.

C'est le premier problème qui peut simplement se traiter avec une modélisation bidimensionnelle qui a été traité par le programme que nous avons mis au point (partie II) tandis que le second, qui n'est pas examiné ici, a été traité avec un programme tridimensionnel.

### 3.2.3. Modélisation du problème

Le modèle représente, le problème étant symétrique, la moitié de l'âme de la poutre et un des blocs de béton qui constitue le bossage (Fig. 10).

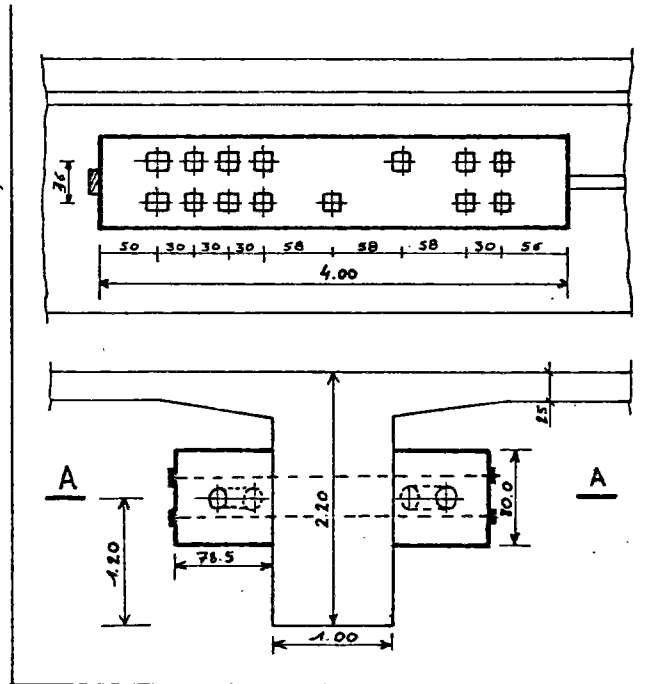


Fig. 9 - Profil en long et profil en travers du bossage. Clouage et position des câbles (J.N. Theillout 1981 a).

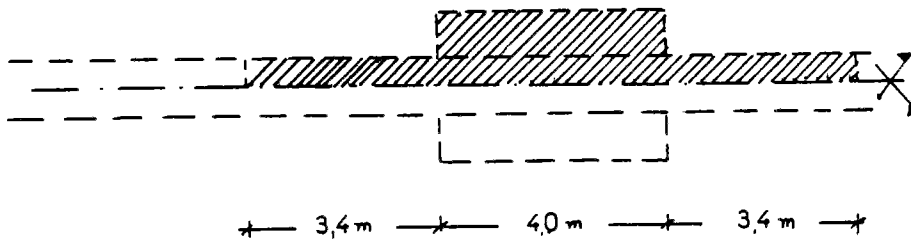


Fig. 10 - Coupe horizontale d'une âme et d'un bossage. (J.N. Theillout 1981 b).



Partie modélisée par le calcul

Le maillage (Fig. 11) a 625 points, 175 éléments de massif de type Q8 de ROSALIE (quadrilatères à 8 noeuds) et 31 éléments de contact de type CTI de ROSALIE (linéaires à 2 noeuds).

Les caractéristiques mécaniques sont les suivantes :

- pour le béton du bossage : Module d'Young  $E = 39.000 \text{ MPa}$   
Coefficient de Poisson  $\nu = 0.22$
- pour le béton de la poutre : Module d'Young  $E = 156.000 \text{ MPa}$   
Coefficient de Poisson  $\nu = 0.22$

La différence des Modules d'Young s'explique par la prise en compte d'une différence de souplesse des structures elle-même due à la différence des épaisseurs.

Le critère de plasticité utilisé pour les deux massifs a été le critère parabolique avec loi de normalité (résistance en traction  $R_t = 3 \text{ MPa}$  et résistance en compression  $R_c = 30 \text{ MPa}$ ).

Les éléments de contact ont été supposés liés au début du calcul et les caractéristiques du contact choisies ont été : cohésion  $c = 0$ , angle de frottement  $\varphi = 45^\circ$  et résistance en traction  $r_t = 0$ .

Le calcul a été fait en cinq étapes. La première est la mise en place du clouage qui équivaut à l'application de pressions sur la partie extérieure du bossage (Fig. 11). La deuxième étape et les trois suivantes correspondent à la mise en place progressive de la pré-contrainte : force horizontale de 1,661 MN, 3,391 MN, 5,222 MN, 6,001 MN respectivement appliquée sous forme de pression latérale au bossage (voir Fig. 11). Ces paliers de chargement correspondent aux paliers des expérimentations qui ont été faites sur le pont pour le suivi du comportement in situ du bossage. L'algorithme IFRØPL 1 a été choisi.

#### 3.2.4. Résultats obtenus

Les résultats obtenus par le calcul présentent la même allure que les résultats obtenus par mesures faites sur l'ouvrage, particulièrement en ce qui concerne les contraintes de cisaillement le long du plan de jonction. Pour un dépouillement plus fin des résultats théorique et la comparaison avec l'expérience, voir J.N. Theillout (1981 b).

Nous présentons ici, Fig. 12, sur le maillage déformé sous la charge totale de pré-contrainte (6 MN) de la cinquième étape, la distribution des points plastifiés du massif. Il est également possible de distinguer sur cette figure les éléments de contact qui se sont décollés et ceux qui ont glissé. Cet état de décollement ou de glissement avec frottement correspond bien aux observations expérimentales.

La Figure 13 présente pour cinq incréments la distribution des contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  dans le bossage, le long du contact avec l'âme. On peut remarquer le déplacement  $x$ ,  $y$  du "pic" des contraintes tangentielles  $\tau_{xy}$  suivant l'évolution du décollement et du glissement au contact du bossage avec la poutre. Le déplacement du pic est en accord avec les mesures expérimentales.



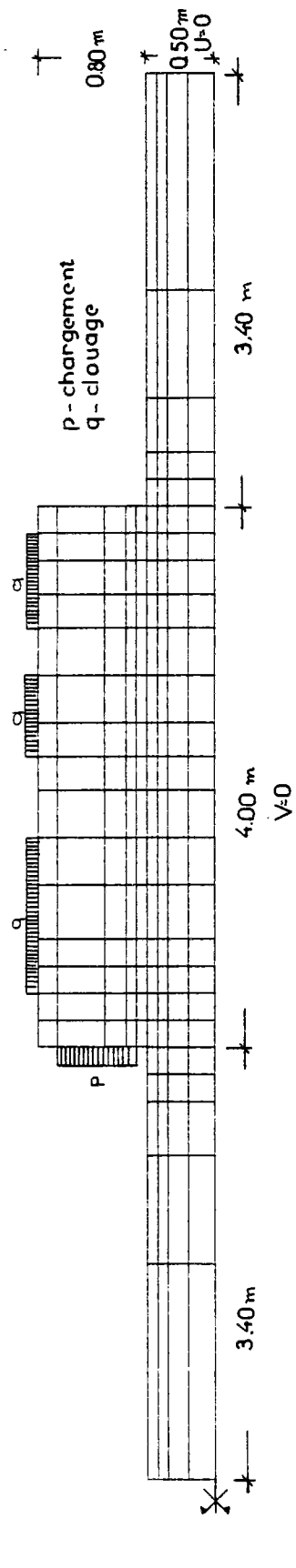


Fig. 11 - Maillage initial (Theillout 1981b).

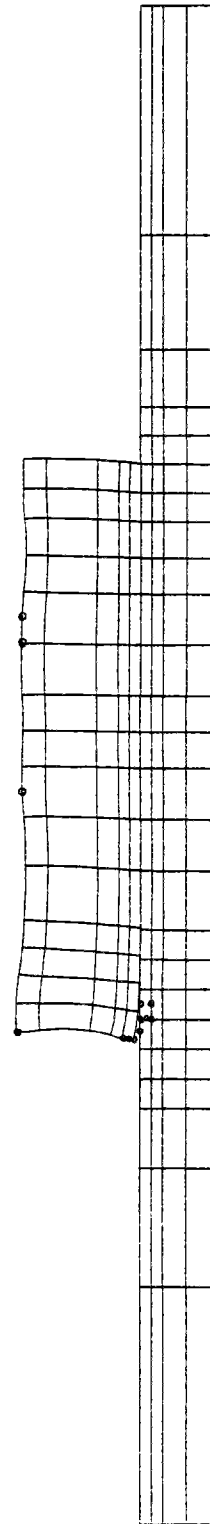
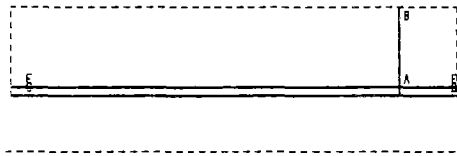
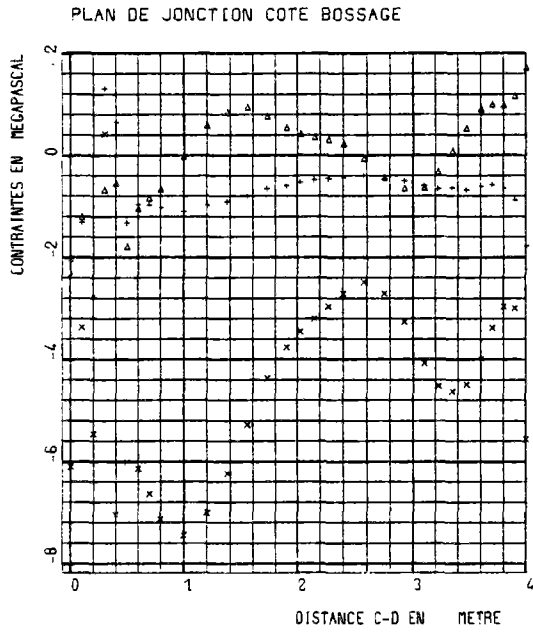


Fig. 12 - Maillage déformé. (o) points plastifiés. (Theillout, 1981b).

MISE EN PLACE DU CLOUAGE

+  $\sigma_x$   
 x  $\sigma_y$   
 Δ  $\tau_{xy}$



FORCE DE PRECONTRAINTE DE 1.667 MN

FORCE DE PRECONTRAINTE DE 3.391 MN

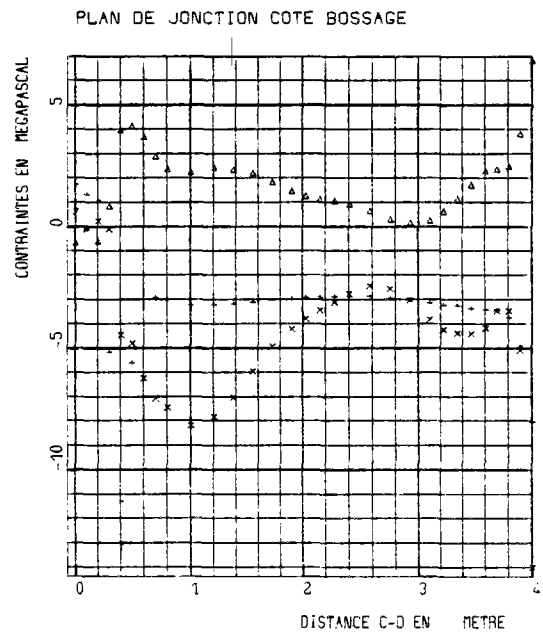
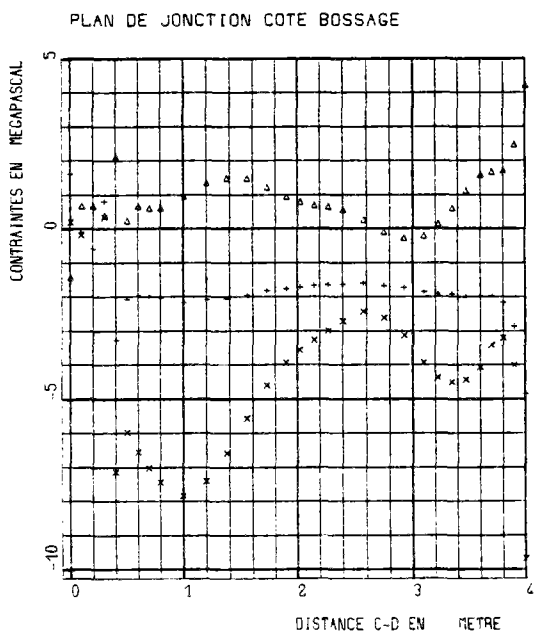


Fig. 13 a  
 111

FORCE DE PRECONTRAINTE DE 5.222MN

FORCE DE PRECONTRAINTE TOTALE

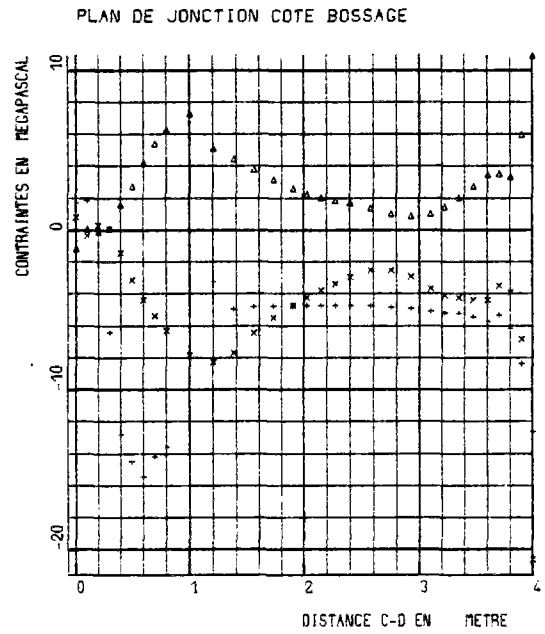
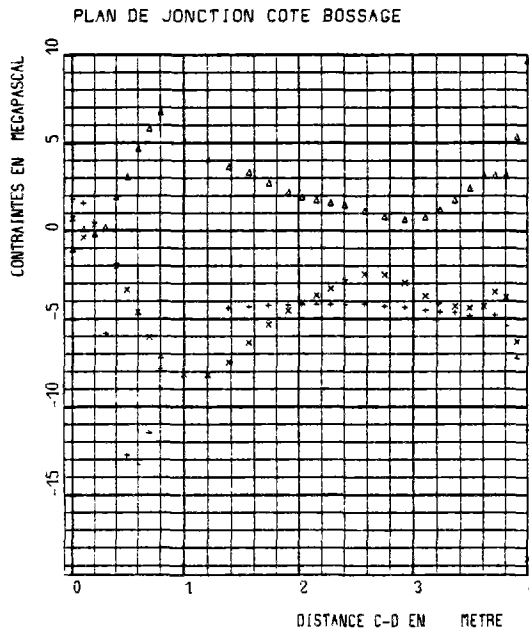


Fig.13.b - Distribution des contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  dans le bossage le long du contact avec l'âme de la poutre.

### 3.3. PIEU SOUS CHARGE VERTICALE

#### 3.3.1. Introduction

Il s'agit de la continuation de l'étude théorique de R. Frank (1974) qui examinait le mécanisme du frottement latéral des pieux sous charge verticale dans sa phase initiale de mobilisation. Ici on examine la "saturation" du frottement le long du pieu et le début de la plastification sous la pointe. Le problème complet du poinçonnement de la pointe ne peut, lui, être traité d'une manière réaliste que par un modèle prenant en compte les grands déplacements.

#### 3.3.2. Modélisation du problème

La figure 14 montre le maillage choisi pour la modélisation de ce problème à symétrie de révolution ainsi que les données géométriques. Il représente une coupe radiale du modèle (sol et pieu) et il est très resserré dans les zones de contact sol-pieu. Il comprend 1 109 points, 336 éléments de massifs dont : 12 type C6 de ROSALIE (triangles à 6 noeuds), 324 de type Q8 (quadrilatères à 8 noeuds) et enfin 38 éléments de contact de type CT1 (linéaires à 2 noeuds).

Les caractéristiques mécaniques choisies sont les suivantes :

- pour le matériau du pieu : module d'Young  $E = 30\,000$  MPa, coefficient de Poisson  $\nu = 0,30$
- pour le sol : module d'Young  $E = 30$  MPa, coefficient de Poisson  $\nu = 0,30$

Pour tous les calculs on a considéré un état de contraintes initiales  $\sigma_z^0 = \gamma z$  et  $\sigma_r^0 = \sigma_\theta^0 = -0,43 \gamma z$  avec  $\gamma = 20$  KN/m<sup>3</sup>.

Trois séries de calculs ont été effectuées :

- la première consiste en un calcul élastoplastique (1) dans le massif de sol, sans possibilité de prendre en compte le décollement ou le glissement le long de la surface de contact. Les points en contact restent donc constamment liés lors du calcul. Pour le sol le critère choisi est le critère de Coulomb avec  $c' \approx 0$   $\phi' = 35^\circ$ . Le matériau du pieu a un comportement toujours élastique, ainsi que dans les autres séries de calcul.

On applique des incréments successifs de pression verticale en tête du pieu. La pression totale atteint en fin de calcul  $q = 1.131,2$  kPa correspondant à une charge  $Q = 320$  KN (rayon du pieu  $r = 0,3$ m).

- La deuxième série de calculs comprend deux calculs avec sol élastique, mais qui permettent le décollement et le glissement le long de la surface de contact.

Ainsi le premier de ces calculs (2) est fait en choisissant comme caractéristiques de la surface de contact : cohésion  $c' \approx 0$ , angle de frottement  $\phi'_c = 25^\circ$  représentant environ 2/3 de  $35^\circ$ , et résistance à la traction  $r_t \approx 0$  en imposant une pression totale  $q = 777,7$  kPa ( $Q = 220$  KN) permettant d'obtenir la saturation complète du frottement latéral et le début du poinçonnement de la pointe. Dans le second de ces calculs (3) l'angle de frottement vaut  $\phi'_c = 35^\circ$  et le chargement total atteint  $q = 1.131,2$  kPa ( $Q = 320$  KN) (valeur choisie de la même manière que précédemment).

Les autres données sont inchangées.

- La dernière série de calculs comprend deux calculs (4) et (5) de couplage entre l'élastoplasticité du massif de sol et de frottement-décollement à l'interface sol-pieu. L'algorithme IFRØPL1 est choisi.

Les caractéristiques de frottement-décollement et les chargements sont respectivement les mêmes que pour les calculs (2) et (3) (calcul (4) :  $\phi'_c = 25^\circ$   $q = 777,7$  kPa, calcul (5) :  $\phi'_c = 35^\circ$ ,  $q = 1.131,2$  kPa).

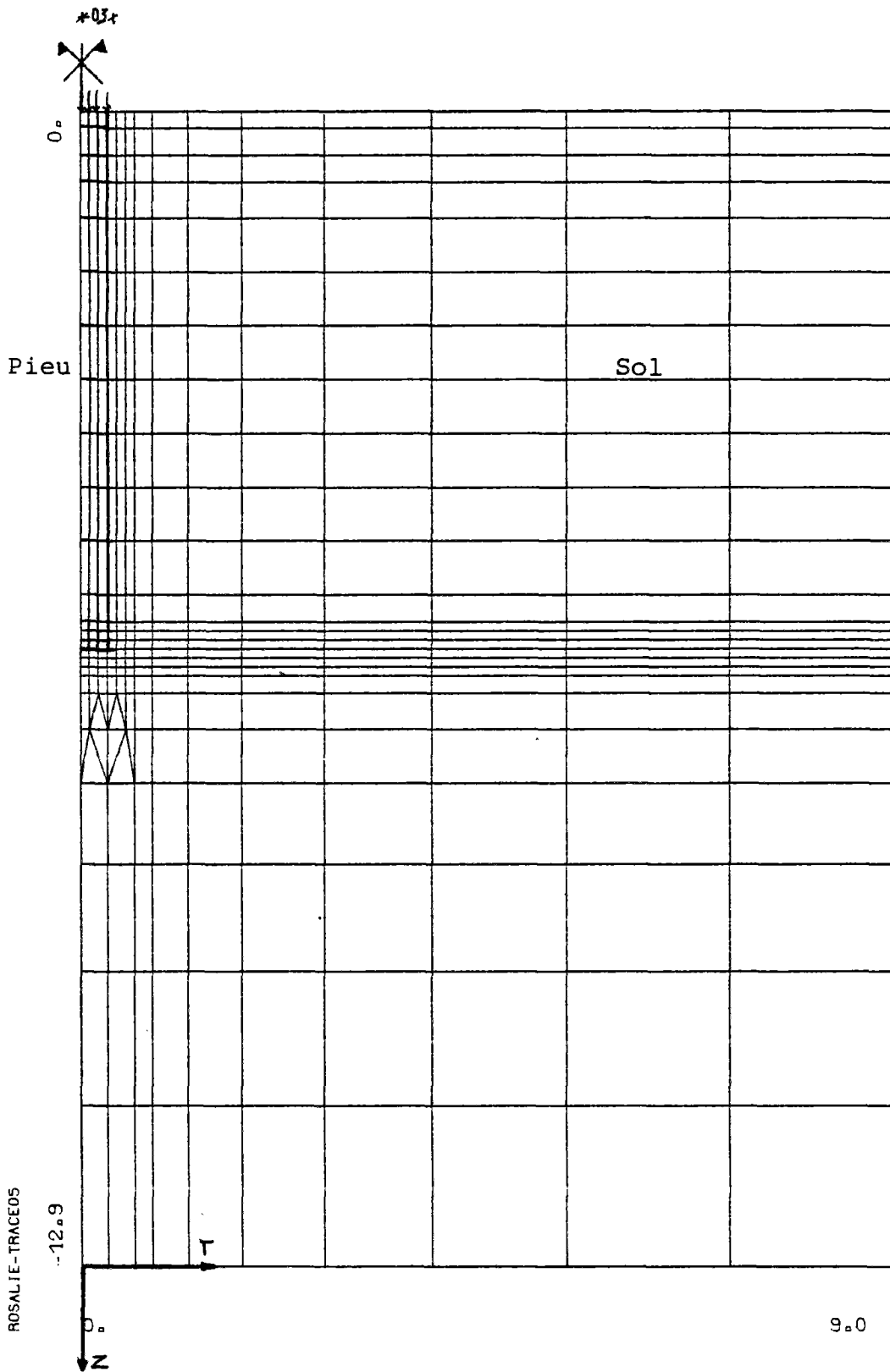


Fig. 14 - Maillage de pieu sous charge verticale

### 3.3.3. Comparaison des résultats obtenus

La comparaison des calculs (2) et (3), calculs de frottement-décollement uniquement avec les résultats des calculs (4) et (5) calculs couplés correspondant, montre pour la charge totale que les résultats sont très voisins. Ainsi les déplacements horizontaux et verticaux des calculs (2) et (4) sont quasiment identiques (fig. 15a et 15b, 16a et 16b) ainsi que ceux des calculs (3) et (5) (fig. 17a et 17b, 18a et 18b). Tout au plus note-t-on une légère différence en pointe, les déplacements dans les cas des calculs couplés étant plus grands du fait de la plastification du sol sans la pointe.

Les zones de sol plastifiées des calculs (4) et (5) sont présentées aux figures 19 et 20 toujours pour les chargements totaux pour lesquels le pieu a glissé, avec frottement limité, sur toute sa surface de contact latérale. On remarque que la plastification latérale est relativement plus grande dans le cas du calcul (5) ( $\varphi_c = 35^\circ$ ), du fait que la transmission des efforts dans le sol  $y$  est plus grande que pour  $\varphi_c = 25^\circ$ .

Le même accord, relativement très bon est remarqué entre les courbes de chargement en tête de frottement latéral total ou de charge en pointe en fonction des déplacements de la tête obtenues pour les calculs (2) et (4) d'un part et (3) et (5) d'autre part (fig. 21a et 21b, 22a et 22b). Ces figures montrent clairement, pour tous les calculs, la saturation du frottement latéral total et le début de l'accroissement important correspondant de la charge de pointe après une phase initiale linéaire. Elles permettent également de voir que les répartitions de la charge en tête en frottement latéral et en charge de pointe sont sensiblement les mêmes que l'on ait pris en compte la plastification du sol ou non. Ainsi l'écart sur le frottement latéral n'atteint que 5 % pour  $\varphi_c = 35^\circ$  et  $Q = 320$  KN.

Par contre la comparaison des résultats du calcul (1), calcul avec sol élastoplastique mais sans décollement ou glissement avec ceux des calculs (3) et (5) montre des différences plus importantes (fig. 23, 24 pour les déplacements, 25 pour les zones plastiques et courbe  $Q_p$  (1) de la fig. 22). Le calcul (1) ne prenant pas en compte le glissement du pieu par rapport au sol provoque une plastification du sol tout le long du pieu qu'on ne remarque pas dans le cas des autres calculs. Le résultat est que les déplacements horizontaux et verticaux du sol calculés par (1) sont nettement plus grands pour la moitié supérieure du pieu et plus petits pour la partie inférieure que dans le cas du calcul (5) par exemple (comparer les fig. 23 et 17b ainsi que 24 et 18b).

### 3.3.4. Conclusion

Les quelques résultats présentés ici, concernant cette étude théorique de pieu sous charge verticale, permettent de montrer que pour ce problème, la prise en compte du glissement et du décollement de contact est plus déterminante que la prise en compte de la plastification du massif. On est dans un cas d'interaction sol-structure où il est indispensable de bien modéliser le comportement de la surface de contact, notamment pour ne pas provoquer de plastification abusive du sol environnant.

DEPLACEMENT HORIZONTAL (U)

EN 0.05E00 MILLIMETRE

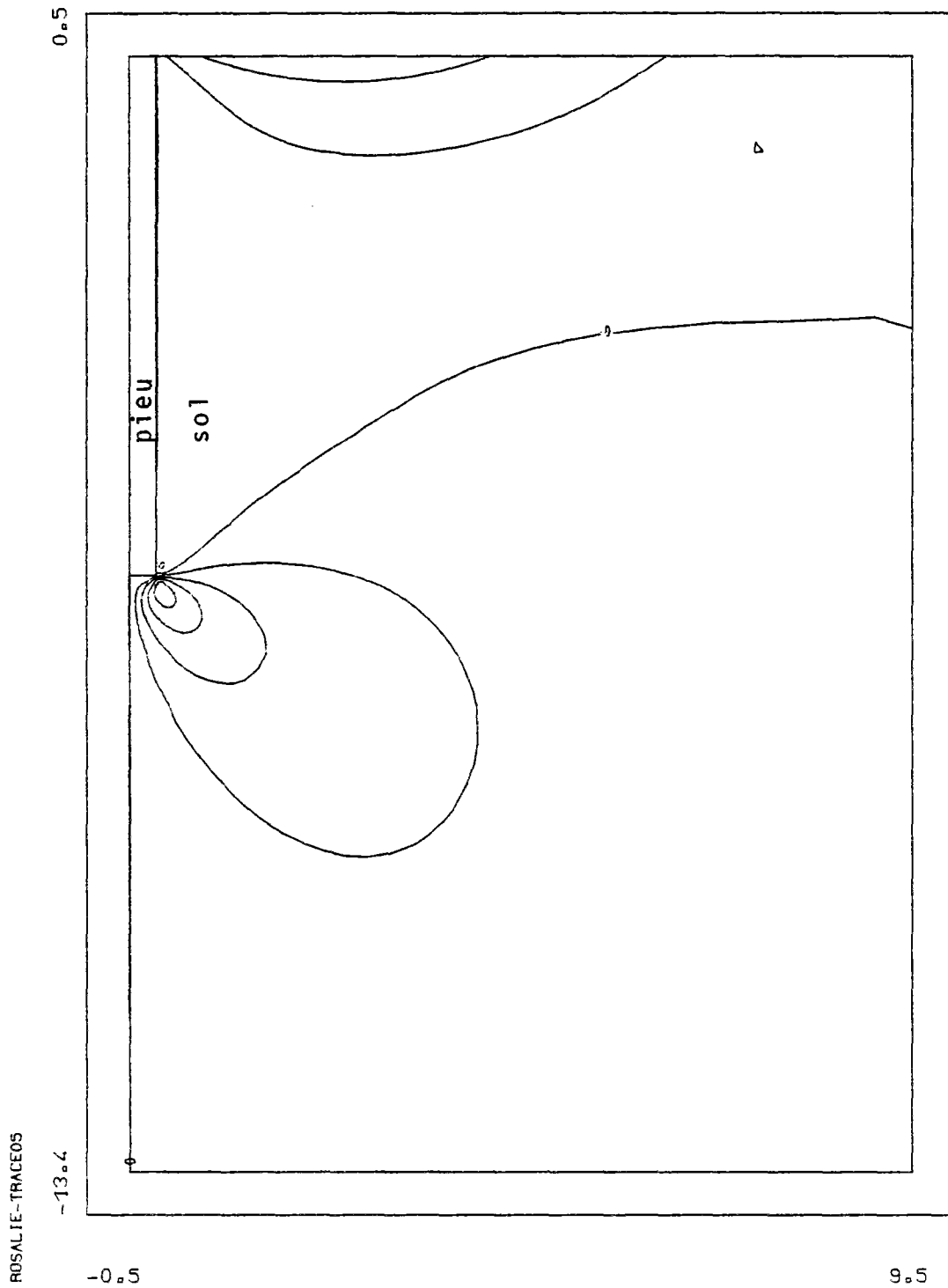


Fig. 15a - Isodéplacements horizontaux du calcul (2)  
( $\psi_c = 25^\circ$ , massif élastique,  $Q = 220$  kN).

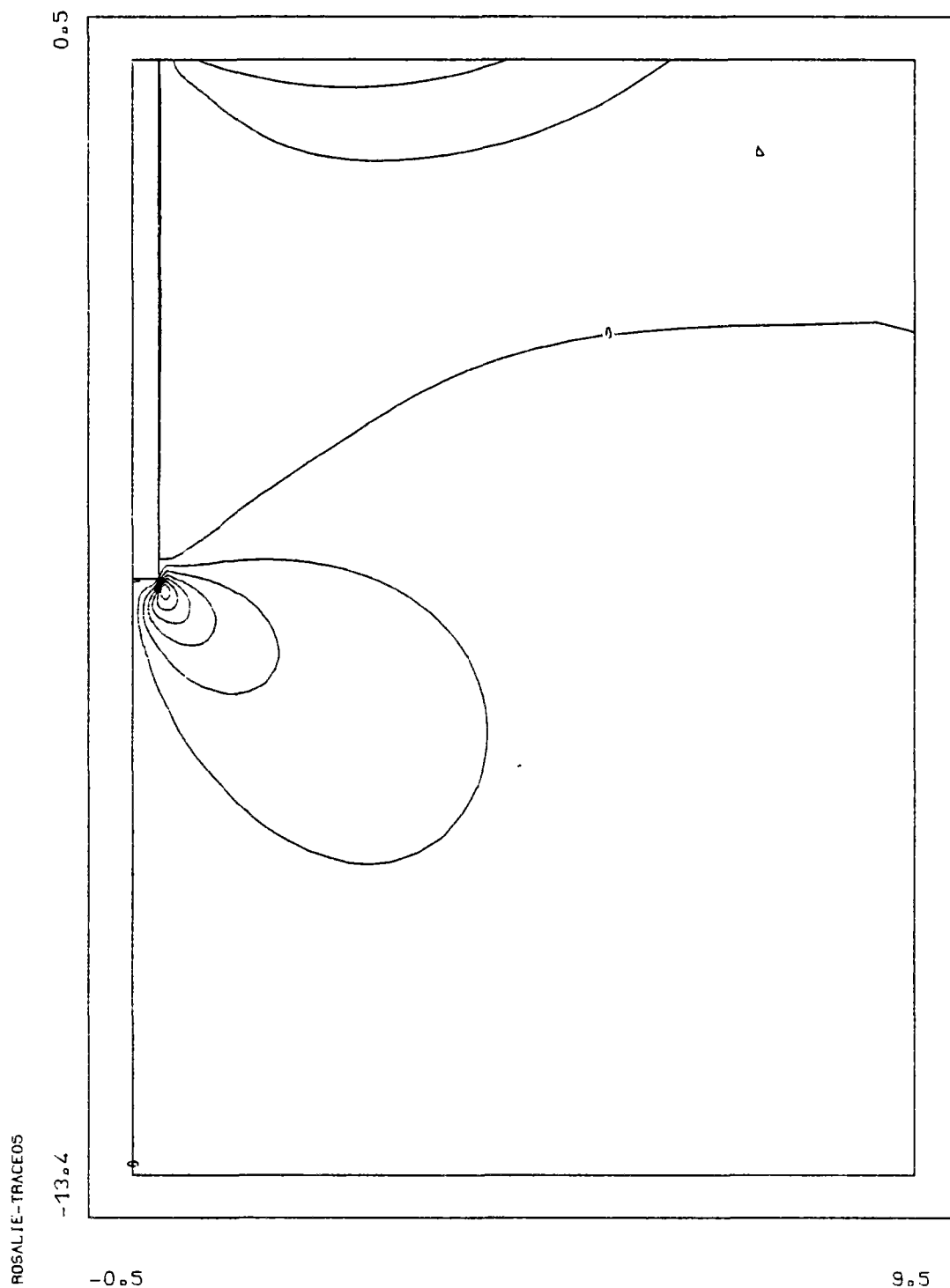


Fig. 15b - Isodéplacements horizontaux du calcul (4)  
 ( $\varphi'_c = 25^\circ$ ,  $\varphi' = 35^\circ$ ,  $Q = 220$  kN).



DEPLACEMENT VERTICAL (U)

EN 0.20E00 MILLIMETRE

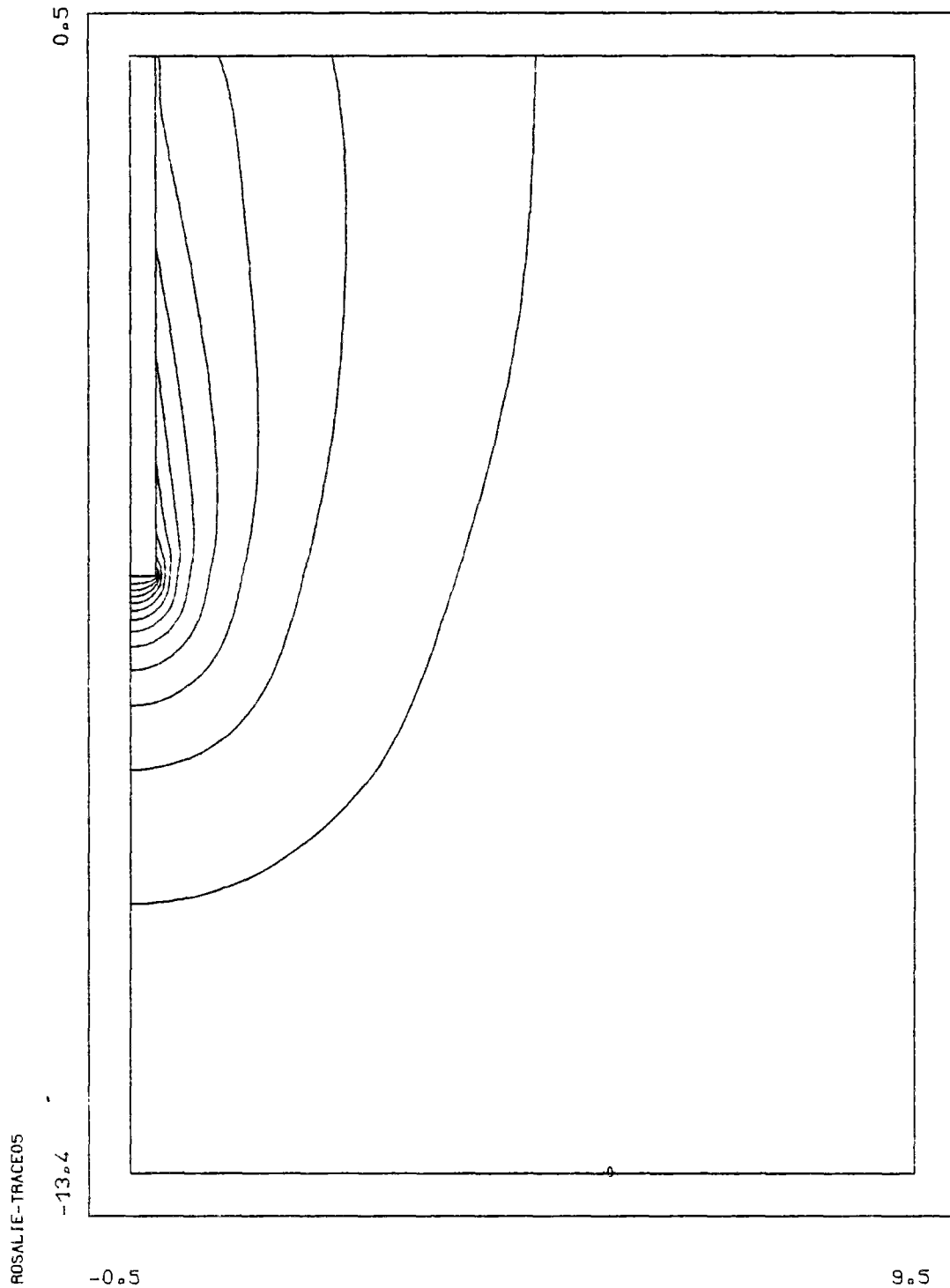


Fig. 16a - Isodéplacements verticaux du calcul (2)  
( $\varphi'_c = 25^\circ$ , massif élastique,  $Q = 220$  kN).

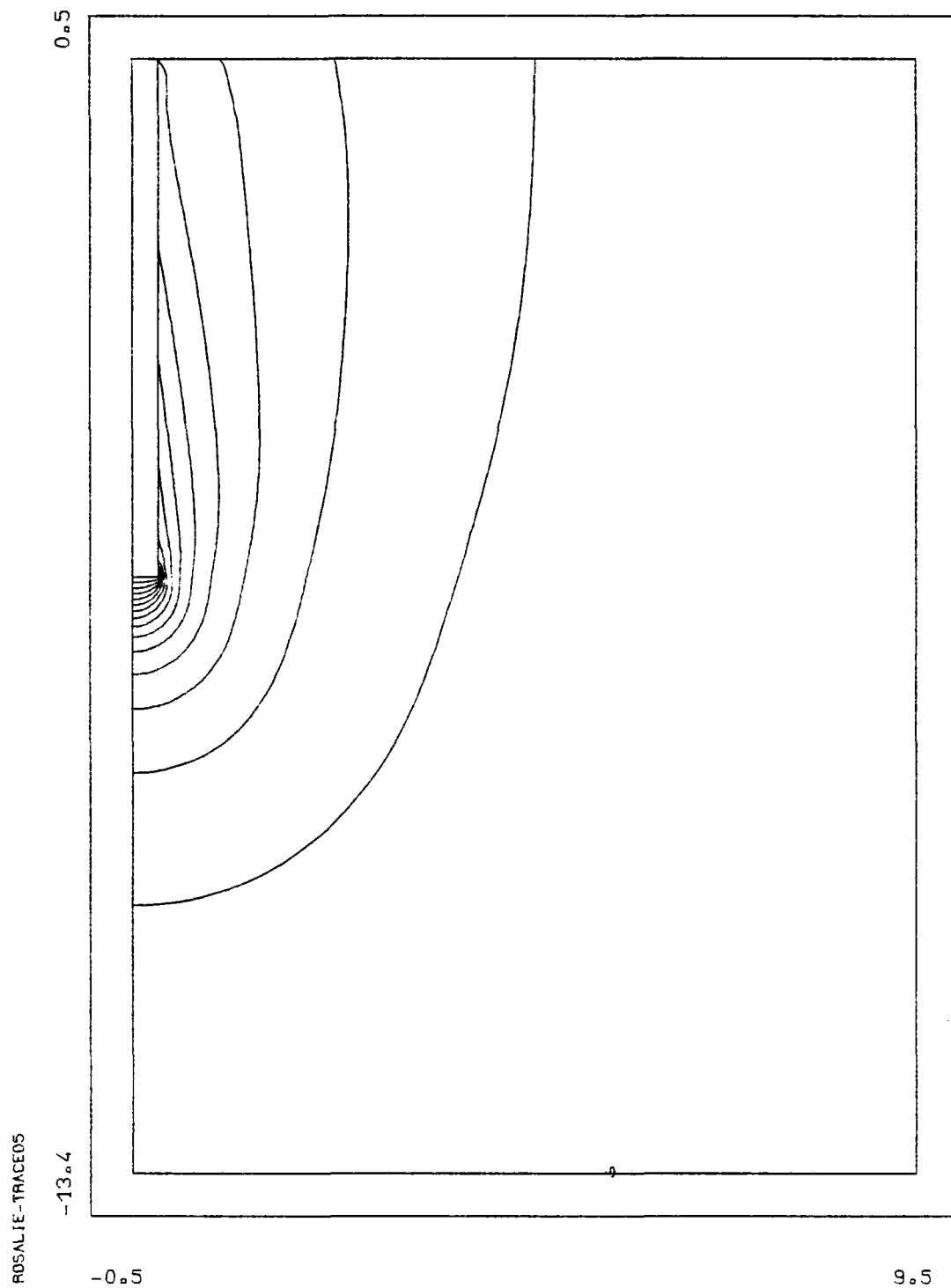


Fig. 16b - Isodéplacements verticaux du calcul (4)  
 ( $\varphi'_c = 25^\circ$ ,  $\varphi'_i = 35^\circ$ ,  $Q = 220$  kN).

DEPLACEMENT HORIZONTAL (U)

EN 0.05E00 MILLIMETRE

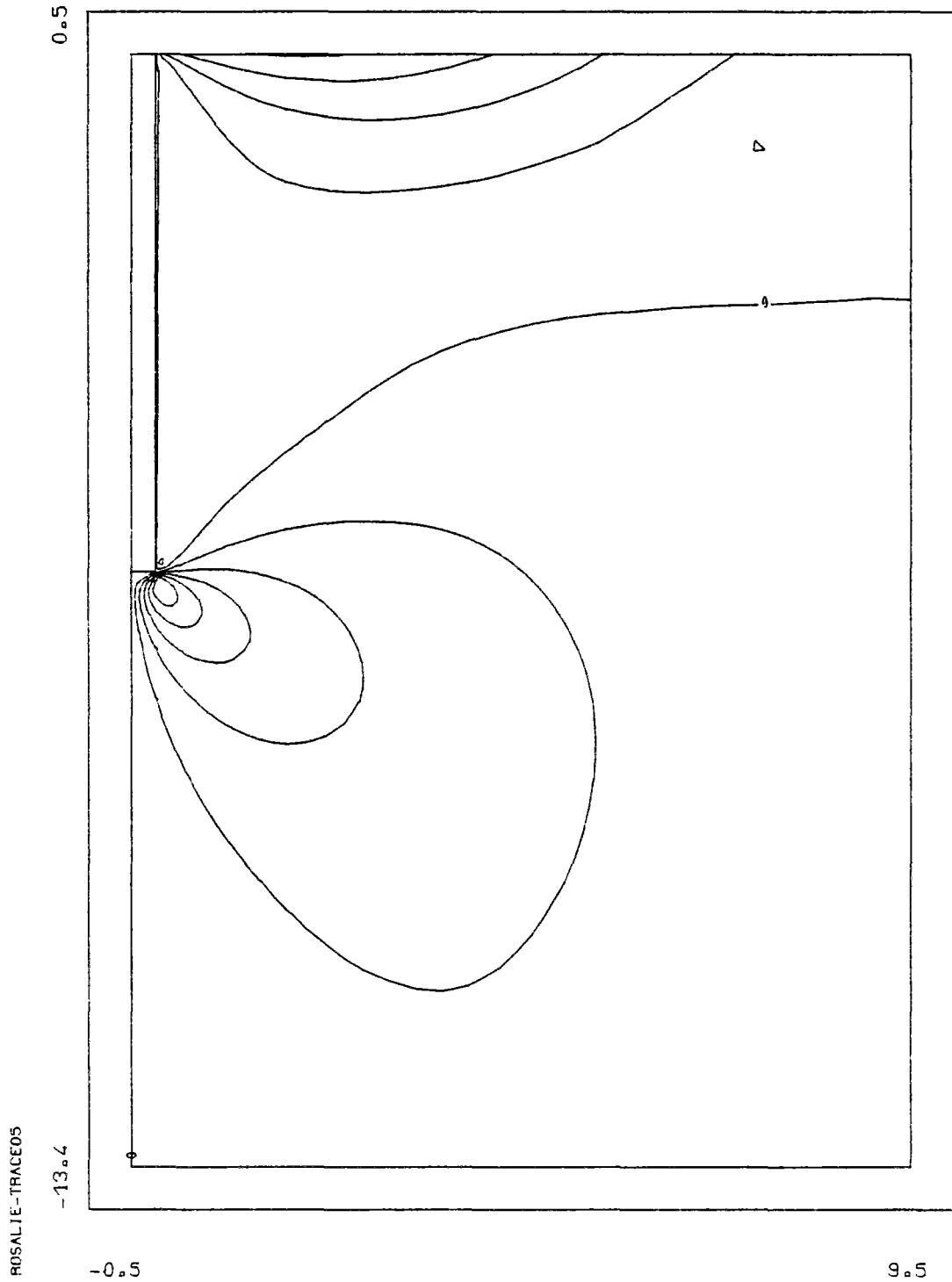


Fig. 17a - Isodéplacements horizontaux du calcul (3)  
( $\psi'_c = 35^\circ$ , massif élastique,  $Q = 320$  kN).

DEPLACEMENT HORIZONTAL (U)

EN 0.05E00 MILLIMETRE

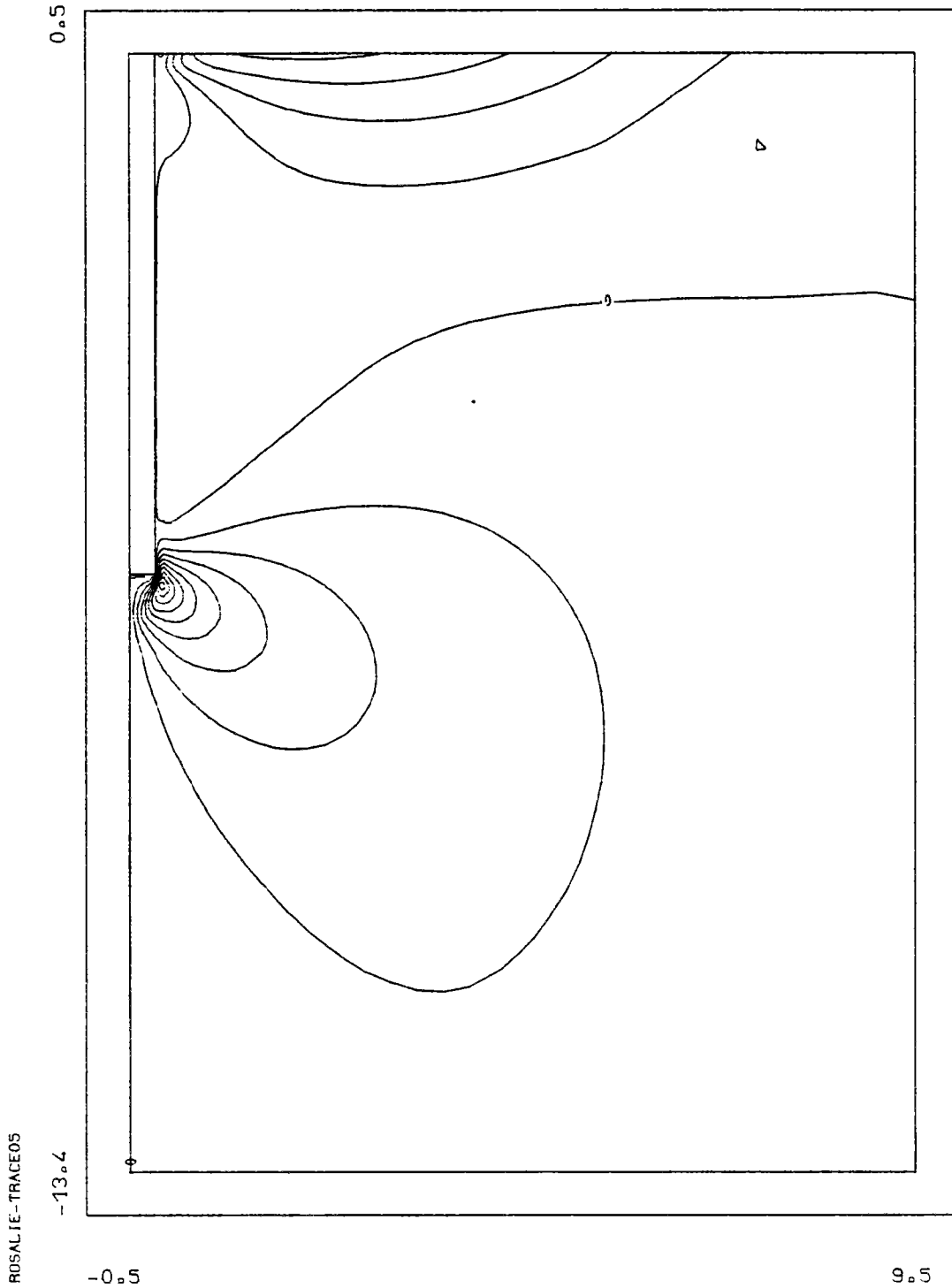
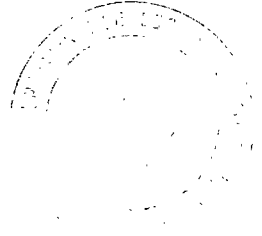


Fig. 17b - Isodéplacements horizontaux du calcul (5)  
( $\psi'_c = 35^\circ$ ,  $\psi' = 35^\circ$ ,  $Q = 320$  kN).

DEPLACEMENT VERTICAL (U)

EN 0.20E00 MILLIMETRE

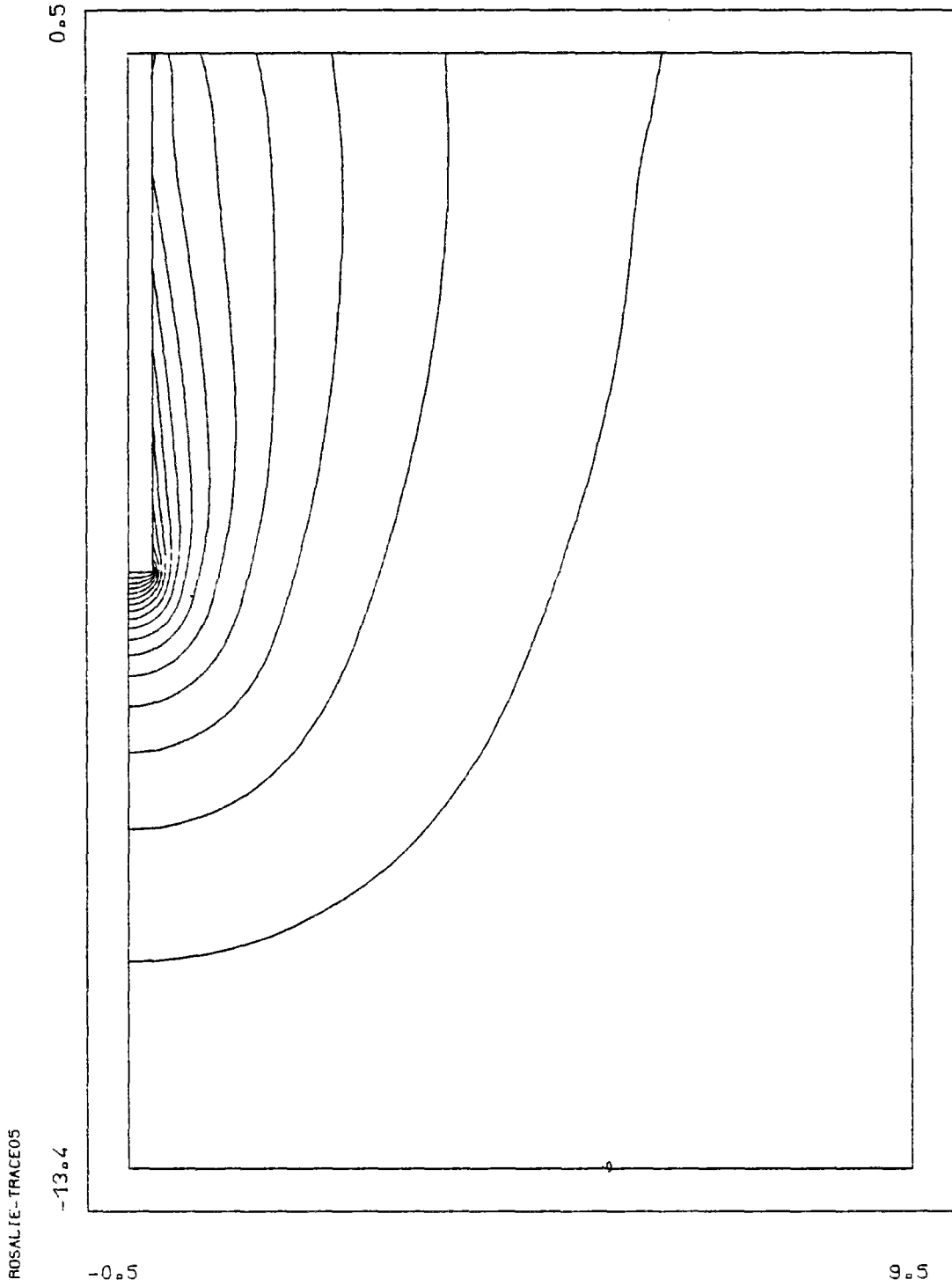


Fig. 18a - Isodéplacements verticaux du calcul (3)  
( $\varphi_c = 35^\circ$ , massif élastique,  $Q = 320$  kN).

DEPLACEMENT VERTICAL (V) TOUS LES 0.20E00 MILLIMETRE

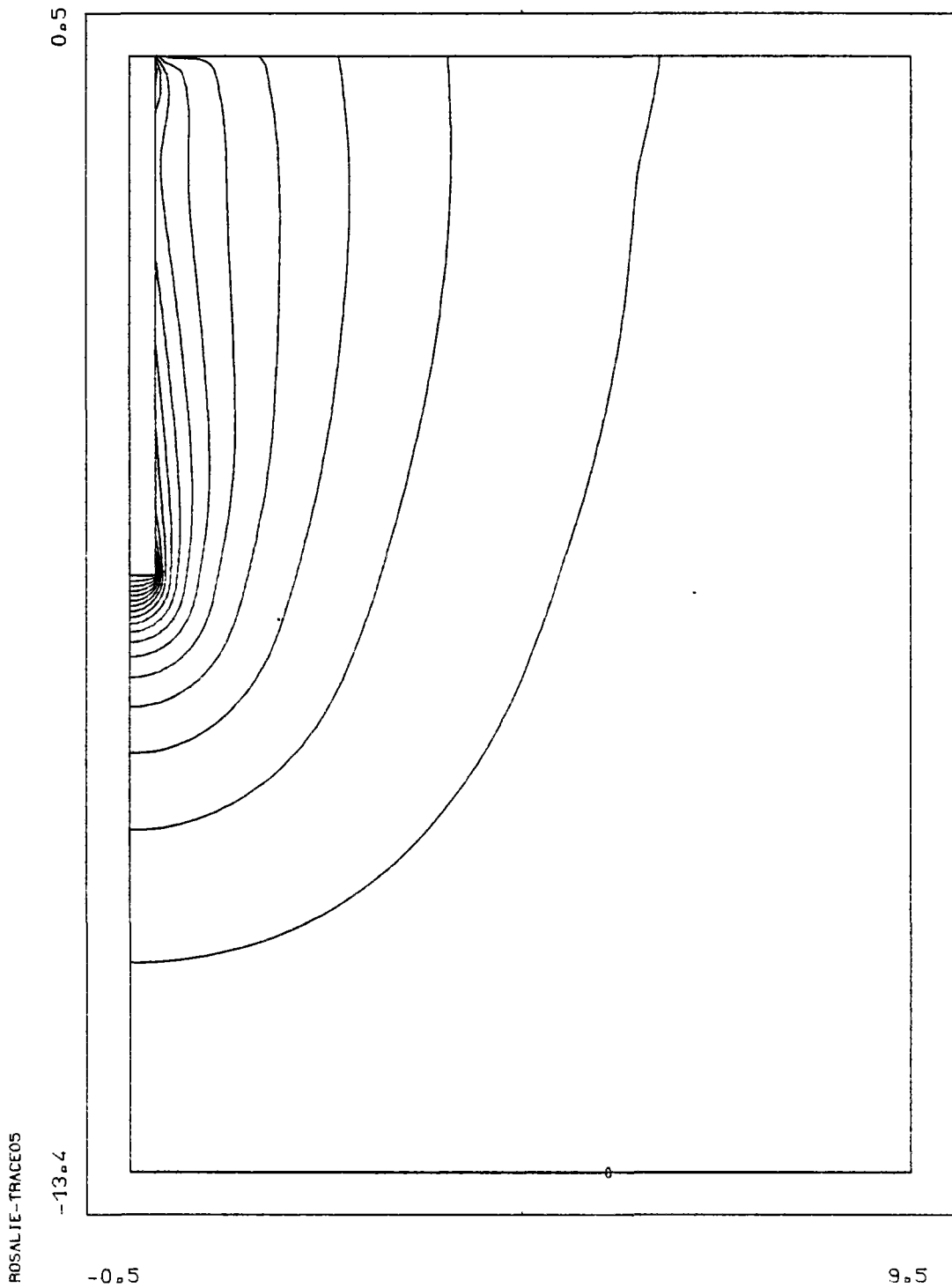


Fig. 18b - Isodéplacements verticaux du calcul (5)  
( $\psi'_c = 35^\circ$ ,  $\psi' = 35^\circ$ ,  $Q = 320$  kN).

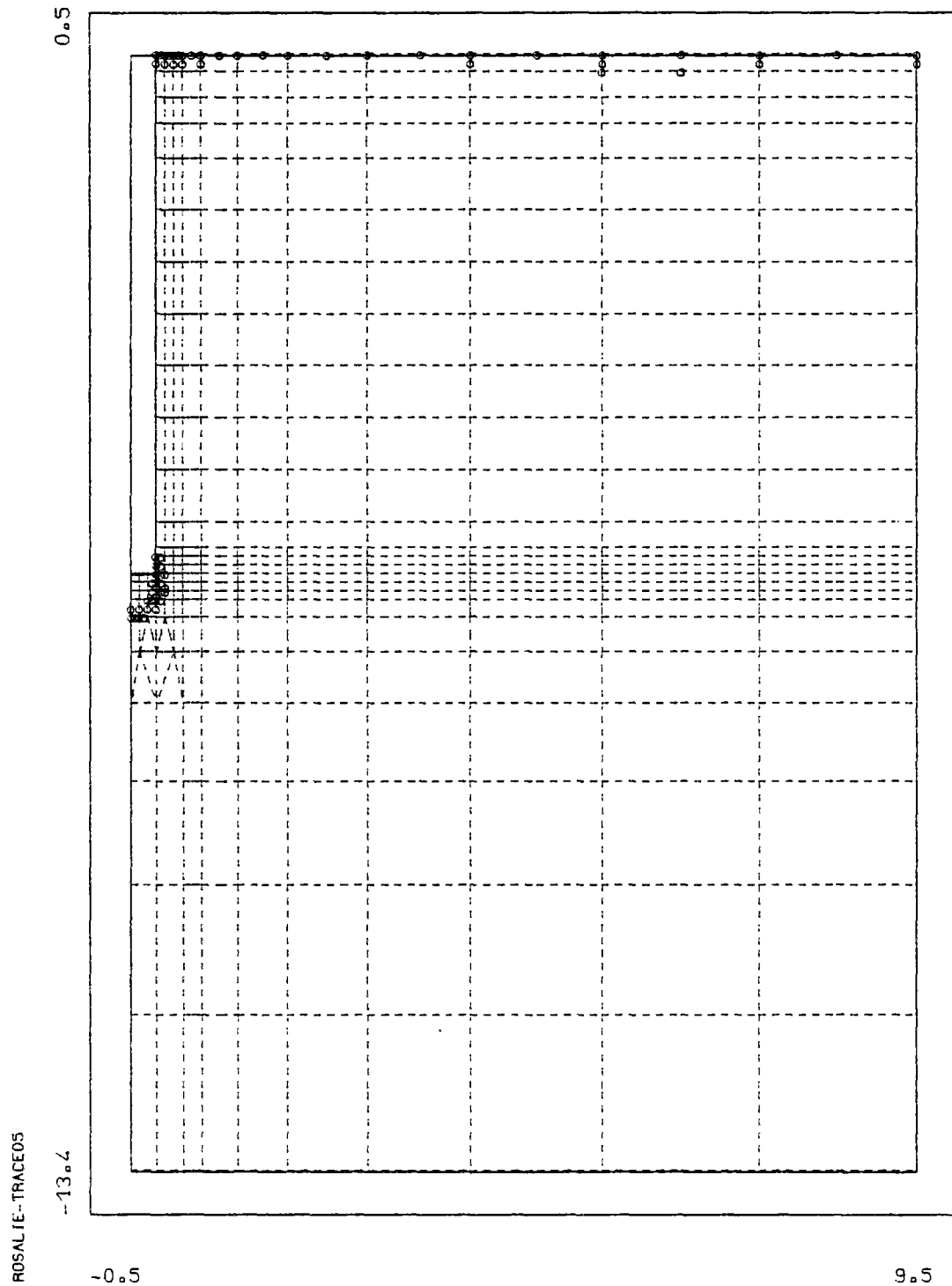


Fig. 19 - Zones plastiques du calcul (4)  
 $(\varphi'_c = 25^\circ, \varphi' = 35^\circ, Q = 220 \text{ kN})$ .

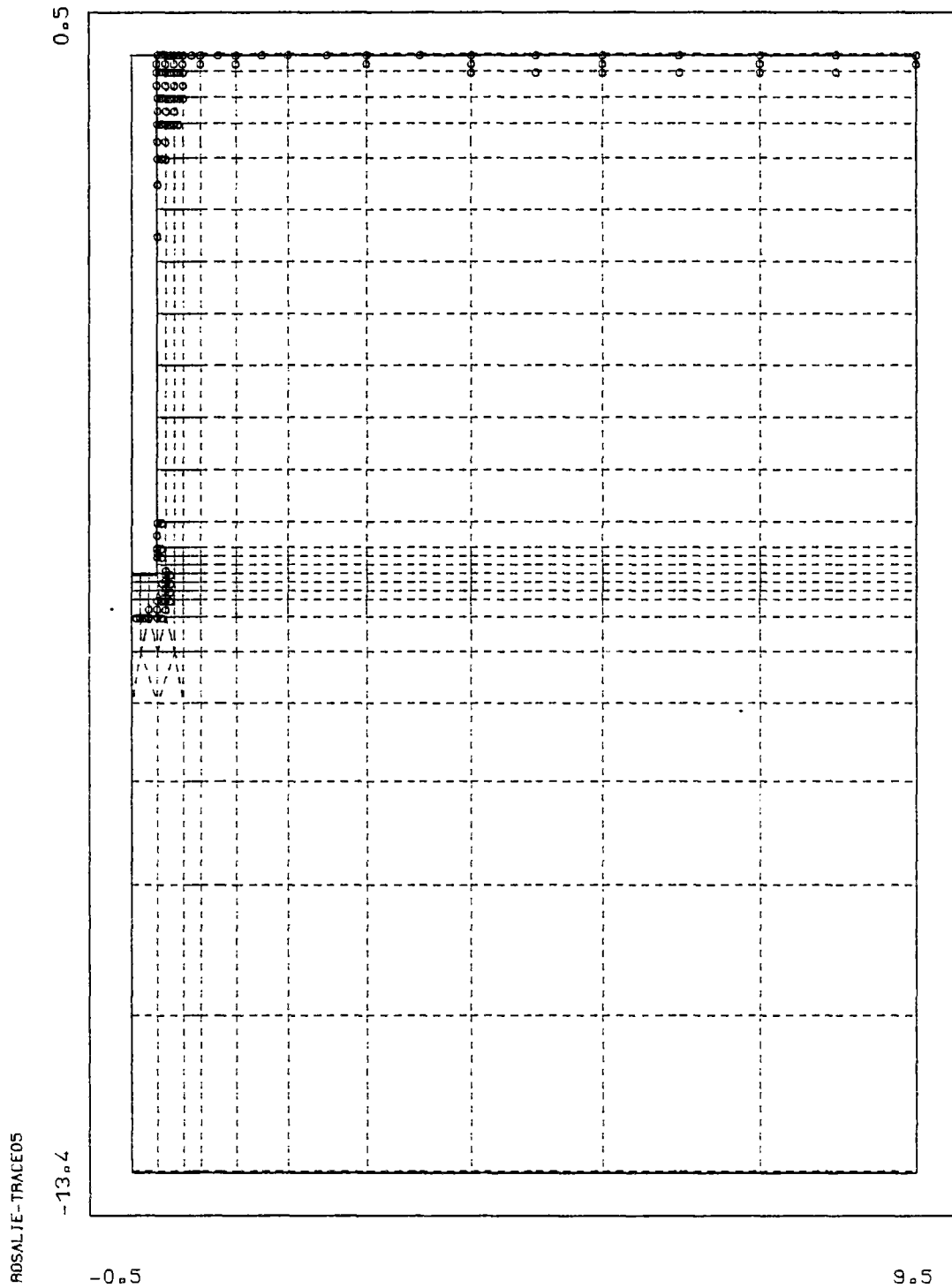


Fig. 20 - Zones plastiques du calcul (5)  
 $(\varphi'_c = 35^\circ, \varphi' = 35^\circ, Q = 320 \text{ kN})$ .



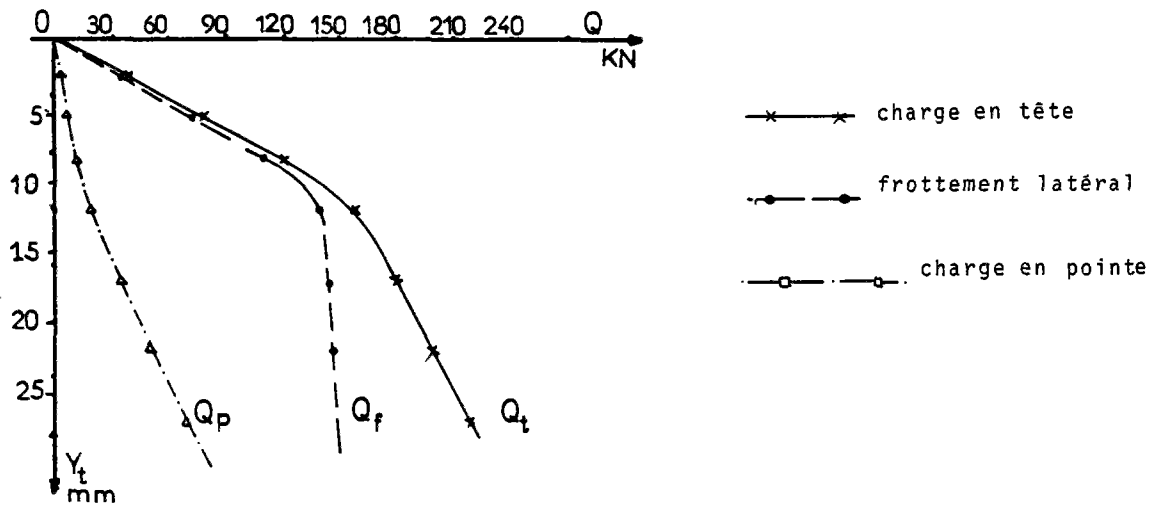


Fig. 21a - Courbes de charge en tête, de frottement latéral et de charge en pointe en fonction des déplacements en tête pour le calcul (2) ( $\varphi'_c = 25^\circ$ , massif élastique,  $Q = 220$  kN).

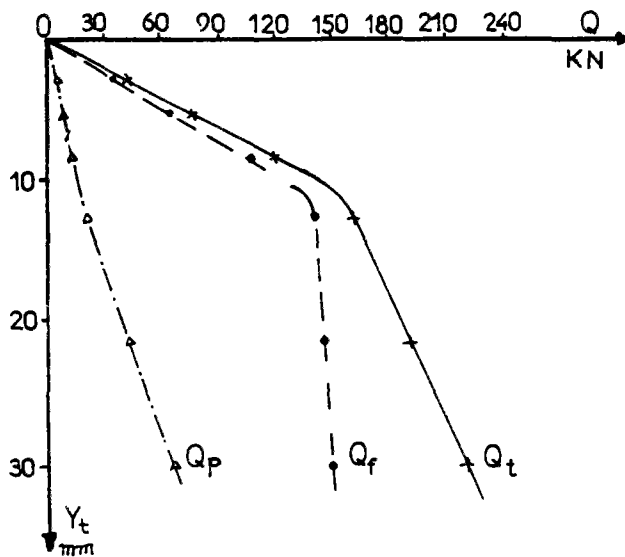


Fig. 21b - Courbes de charge en tête, de frottement latéral et de charge en pointe en fonction des déplacements en tête pour le calcul (4) ( $\varphi'_c = 25^\circ$ ,  $\psi' = 35^\circ$ ,  $Q = 220$  kN).

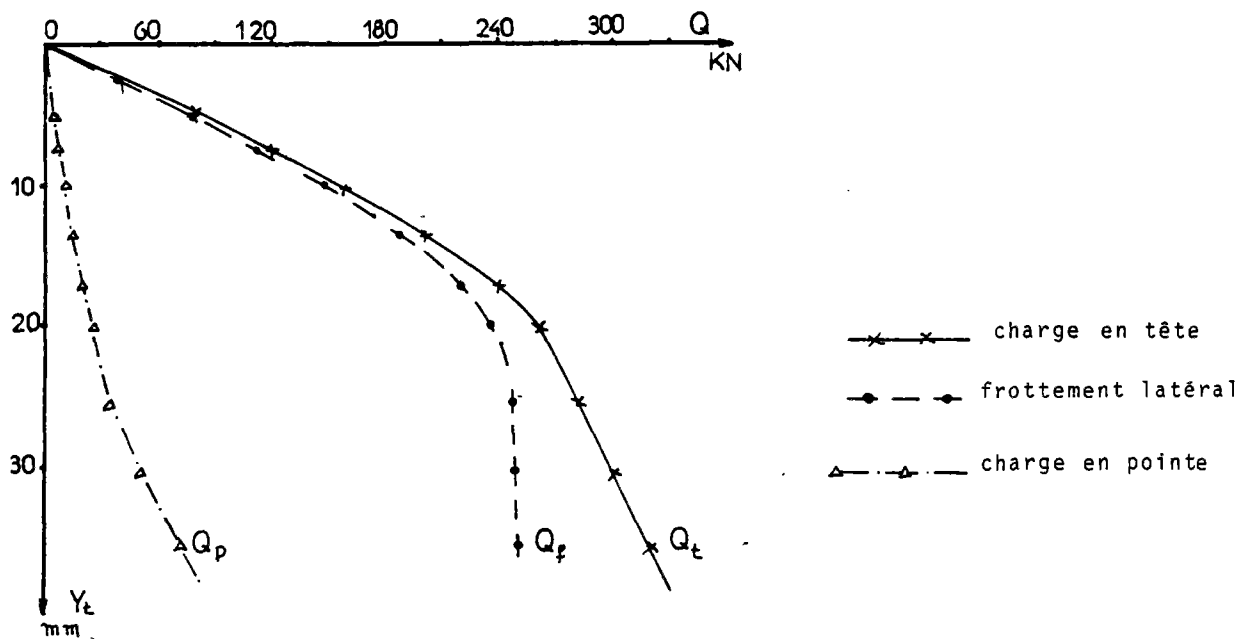


Fig. 22a - Courbes de charge en tête, de frottement latéral et de charge en pointe en fonction des déplacements en tête pour le calcul (3) ( $\varphi_c = 35^\circ$ , massif élastique,  $Q = 320$  kN).

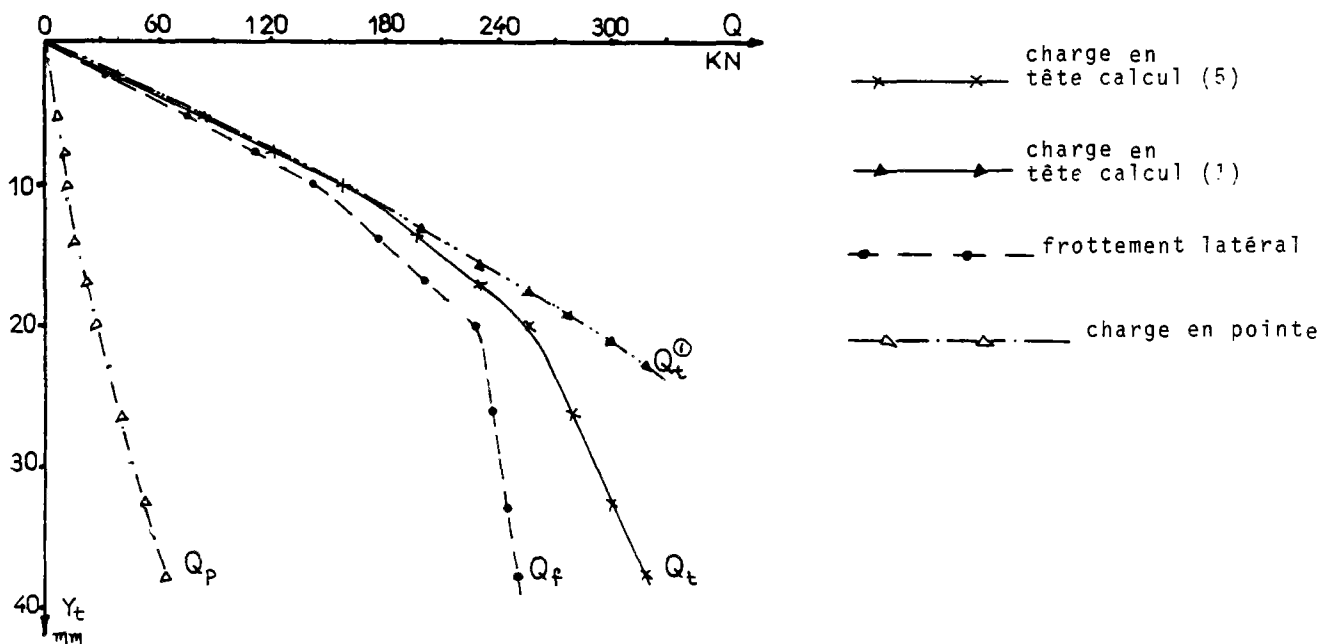


Fig. 22b - Courbes de charge en tête, de frottement latéral et de charge en pointe en fonction des déplacements en tête pour le calcul (5) ( $\varphi_c = 35^\circ$ ,  $\varphi' = 35^\circ$ ,  $Q = 320$  kN).  
 Courbe de charge en tête en fonction des déplacements en tête pour le calcul (1) ( $\varphi' = 35^\circ$ ,  $Q = 320$  kN).

DEPLACEMENT HORIZONTAL (U)

EN 0.05E00 MILLIMETRE

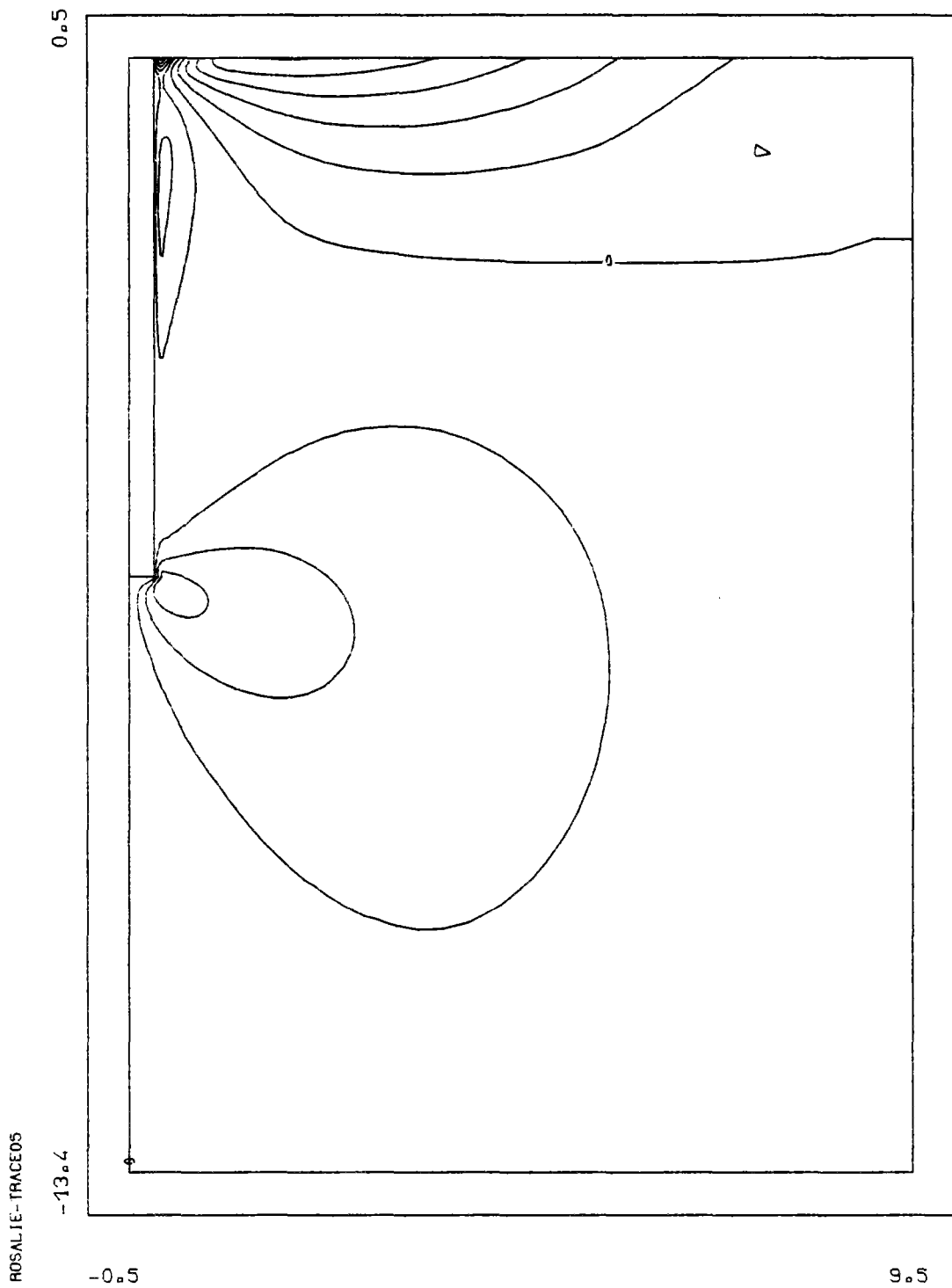


Fig. 23 - Isodéplacements horizontaux du calcul (1)  
( $\varphi' = 35^\circ$ ,  $Q = 320$  kN).

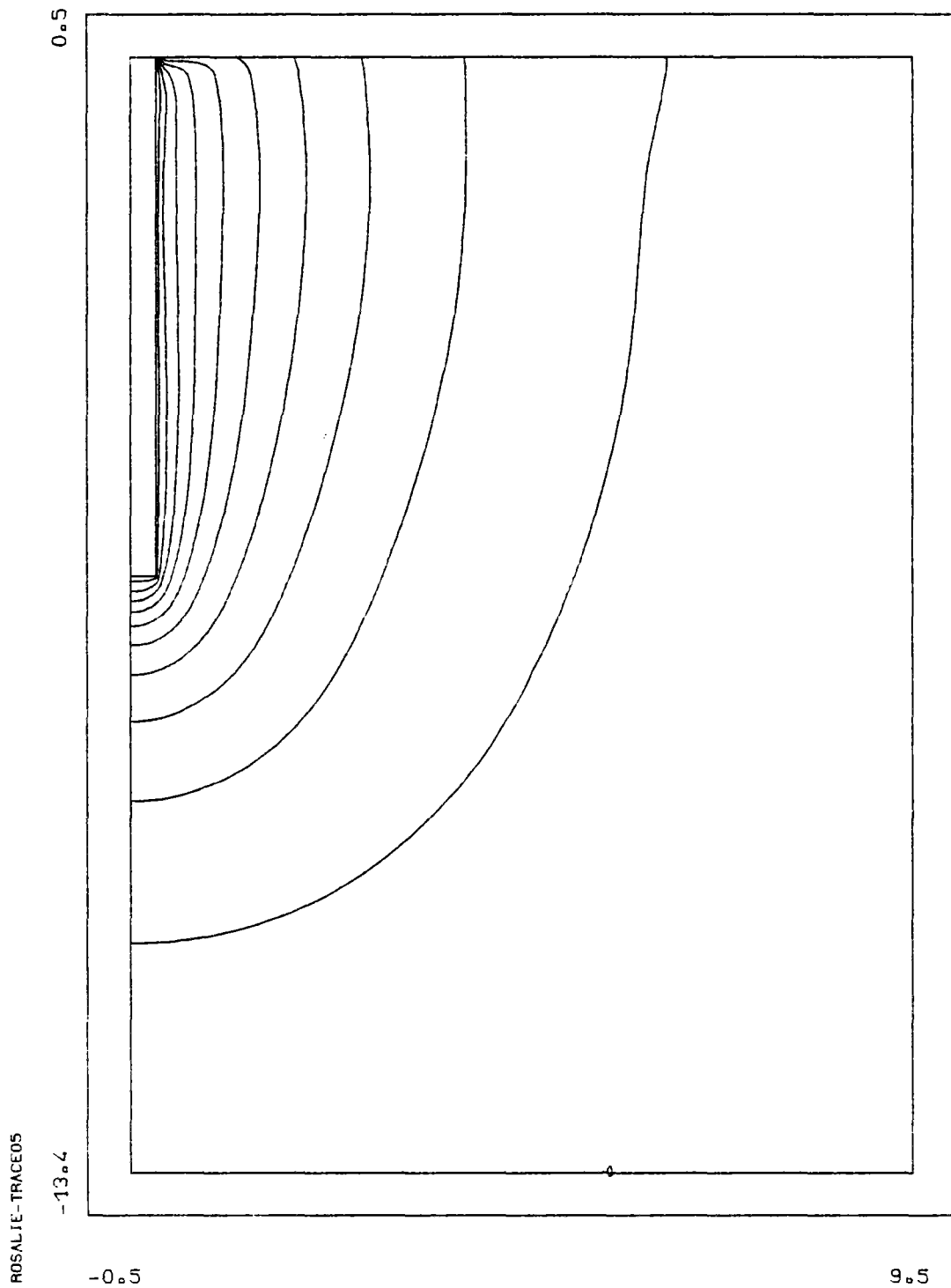


Fig. 24 - Isodéplacements verticaux du calcul (1)  
( $\varphi' = 35^\circ$ ,  $Q = 320$  kN).

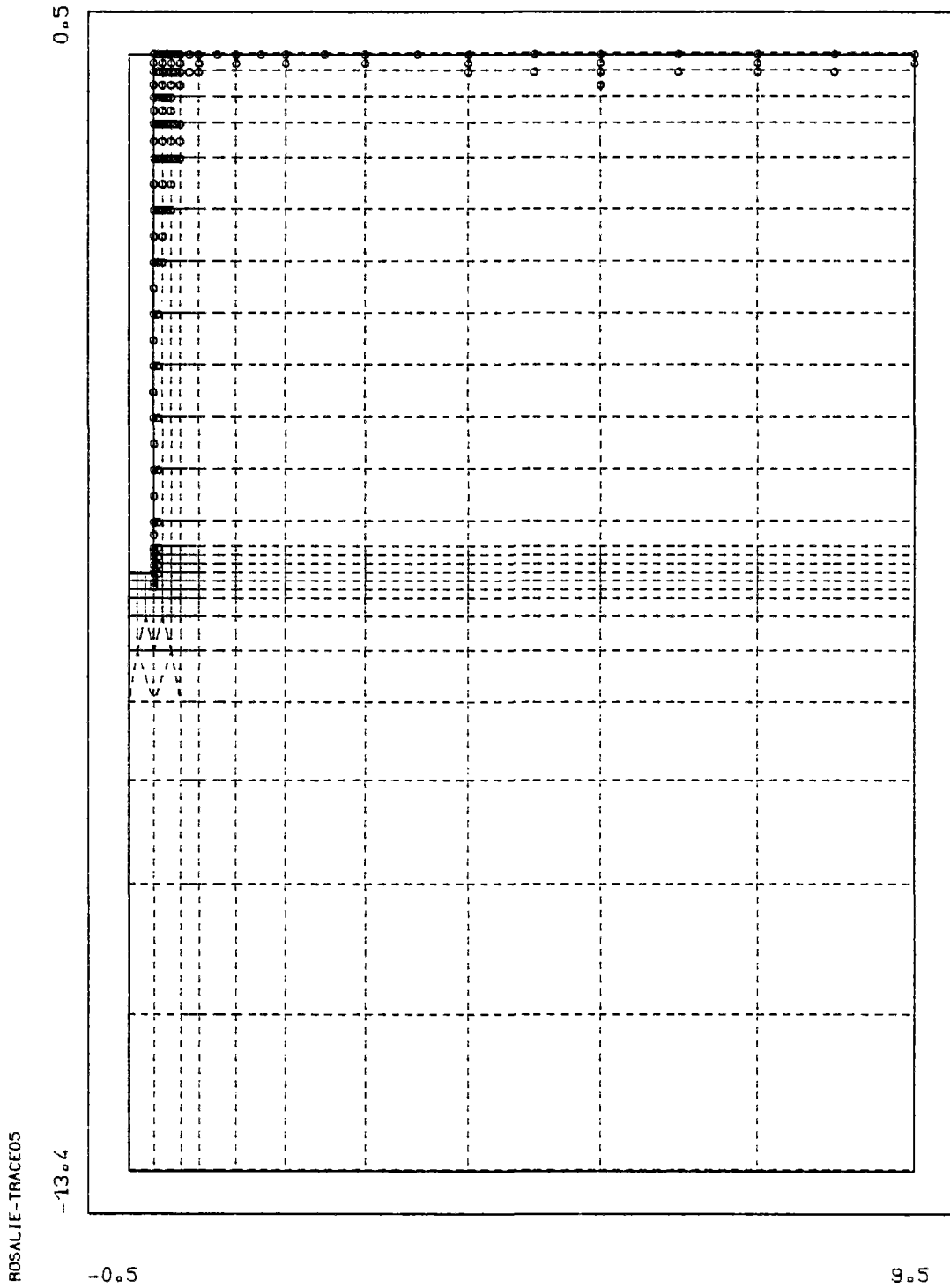


Fig. 25 - Zones plastiques du calcul (1)  
 $(\psi' = 35^\circ, Q = 320 \text{ kN})$ .

### 3.4. ETUDE DU COMPORTEMENT D'UN REMBLAI SUR VERSANT INSTABLE

#### 3.4.1. Introduction

Pour répondre aux problèmes de construction d'ouvrages en terre sur des versants instables les Laboratoires des Ponts et Chaussées ont lancé en 1974 (P. POUGET, 1975<sup>(1)</sup>-1976<sup>(1)</sup>) une expérimentation en vraie grandeur. Après la construction d'un premier remblai expérimental (remblai 1) sur versant naturellement instable à Sallèdes (Puy-de-Dôme) et sa rupture, un deuxième remblai (remblai 2) a été construit à côté du remblai 1 pour préciser et concrétiser les observations et les conclusions tirées du remblai 1 (P. POUGET <sup>(1)</sup> 1978, P. MORIN 1979, F. FLONDEAU ET P. MORIN 1980). Notons qu'à l'heure actuelle le remblai 2 n'a pas été encore monté jusqu'à la rupture.

Le but de l'étude présente est essentiellement la comparaison de deux méthodes de modélisation des discontinuités, à savoir : la méthode de frottement-décollement couplé avec l'élastoplasticité dans le massif décrite plus haut et la méthode élastoplastique classique mais avec critère de plasticité de massif orienté (A. GUENOT 1980<sup>(1)</sup>, R. FRANK-A.GUENOT-P. HUMBERT 1980) (Voir § 2.1.).

#### 3.4.2. Position du problème

La figure 25 présente une coupe sommaire du versant de Sallèdes où les remblais 1 et 2 ont été édifiés.

### COUPE GEOLOGIQUE dédiuite des sondages à la carrière

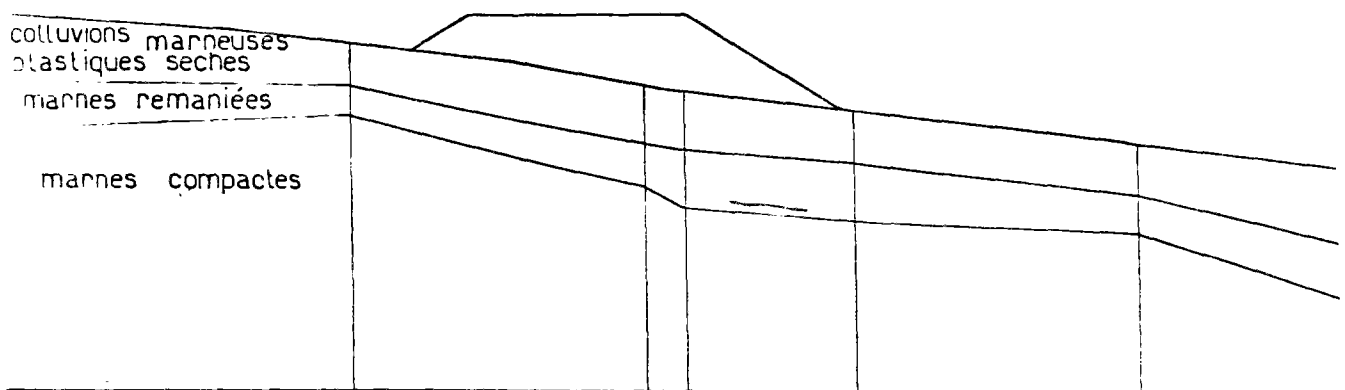


Fig. 25 - Coupe géologique du versant de Sallèdes

5m

(1) Travaux en communication privée.

Des mesures par inclinomètres ont montré l'existence d'une surface de glissement préexistante et, ont permis une estimation de sa localisation. Elle est située au contact entre les marnes remaniées et les marnes compactes.

Le problème qui se pose donc est de modéliser cette discontinuité préexistante et de calculer l'effet de la construction d'un remblai sur le versant par la méthode des éléments finis.

### 3.4.3. Modélisation du problème

Plusieurs séries de calcul ont été effectuées par A. GUENOT (1980)<sup>(1)</sup>. A l'occasion de l'étude présente, seules certaines caractéristiques de sol sont nouvelles, suite à des données géotechniques plus récentes (G. CARTIER, 1980<sup>(1)</sup>).

Le massif du versant est modélisé par le maillage de la Fig. 26. Il s'agit d'un maillage de 1 182 points, 322 éléments de type Q8 de ROSALIE modélisant le massif et de 141 éléments de continuité de type CT1. Le problème est considéré à déformation plane.

Pour des raisons de simplicité du maillage les surfaces de séparation des différentes couches du versant, modélisées par des éléments de continuité, ont été prises planes.

Le maillage comporte quatre zones :

- la première A, qui modélise la couche de marnes compactes est constituée de 92 éléments Q8 et ses caractéristiques mécaniques sont : module d'Young  $E = 15$  MPa, coefficient de Poisson  $\nu = 0.33$ .
- la deuxième B, très mince, d'épaisseur 50 cm, modélise la zone de glissement et elle comprend 46 éléments de massif. Le module d'Young  $E$  est pris égal à 1,8 MPa et le coefficient de Poisson  $\nu$  à 0.33.
- la troisième C, représentant la couche de marnes remaniés, comprend 92 éléments de massif. Son module d'Young  $E$  est égal à 3 MPa et son coefficient de Poisson  $\nu$  à 0.33.
- la quatrième zone D, représente les colluvions marneuses de la surface. Elle comprend 92 éléments et ces caractéristiques mécaniques élastiques sont : module d'Young  $E = 10,5$  MPa et coefficient de Poisson  $\nu = 0.33$ .

Deux calculs ont été effectués :

Le premier est un calcul élastoplastique (1) qui modélise le comportement de la zone de glissement B par un critère de plasticité de massif orienté. Ce critère s'écrit :

$$\tau_{\theta} = c' - \sigma'_{\theta} \operatorname{tg} \varphi'$$

avec :  $c' = 0$   
 $\varphi' = 10^{\circ}$   
 et  $\theta = -7,3333$

$\tau_{\theta}$  et  $\sigma'_{\theta}$  contrainte tangentielle et normale sur le plan incliné à  $\theta$  par rapport à l'horizontale

où  $\theta$  est l'angle qui définit la direction du cisaillement  $\tau$  ainsi que la direction imposée des déformations plastiques de cisaillement,  $\theta$  coïncide ici avec l'angle de la pente de la zone B.

Lors de ce calcul, tous les points des éléments de continuité sont constamment liés.

Le deuxième est un calcul de frottement-décollement couplé avec l'élastoplasticité du massif (2). Pour ce calcul les éléments de continuité qui séparent la zone B de la zone C ont servi comme éléments de contact pour représenter la zone de glissement. Ainsi, les points de ces éléments, liés au début du calcul, peuvent par la suite glisser avec frottement l'un par rapport à l'autre. Les points des éléments de contact qui séparent les autres zones ont été comme pour le calcul (1), liés constamment lors du calcul. Les caractéristiques de la zone d'éléments de contact sont :

$$c' = 0, \varphi'_c = 10^{\circ}, r_t = 0$$

(1) Travaux en communication privée

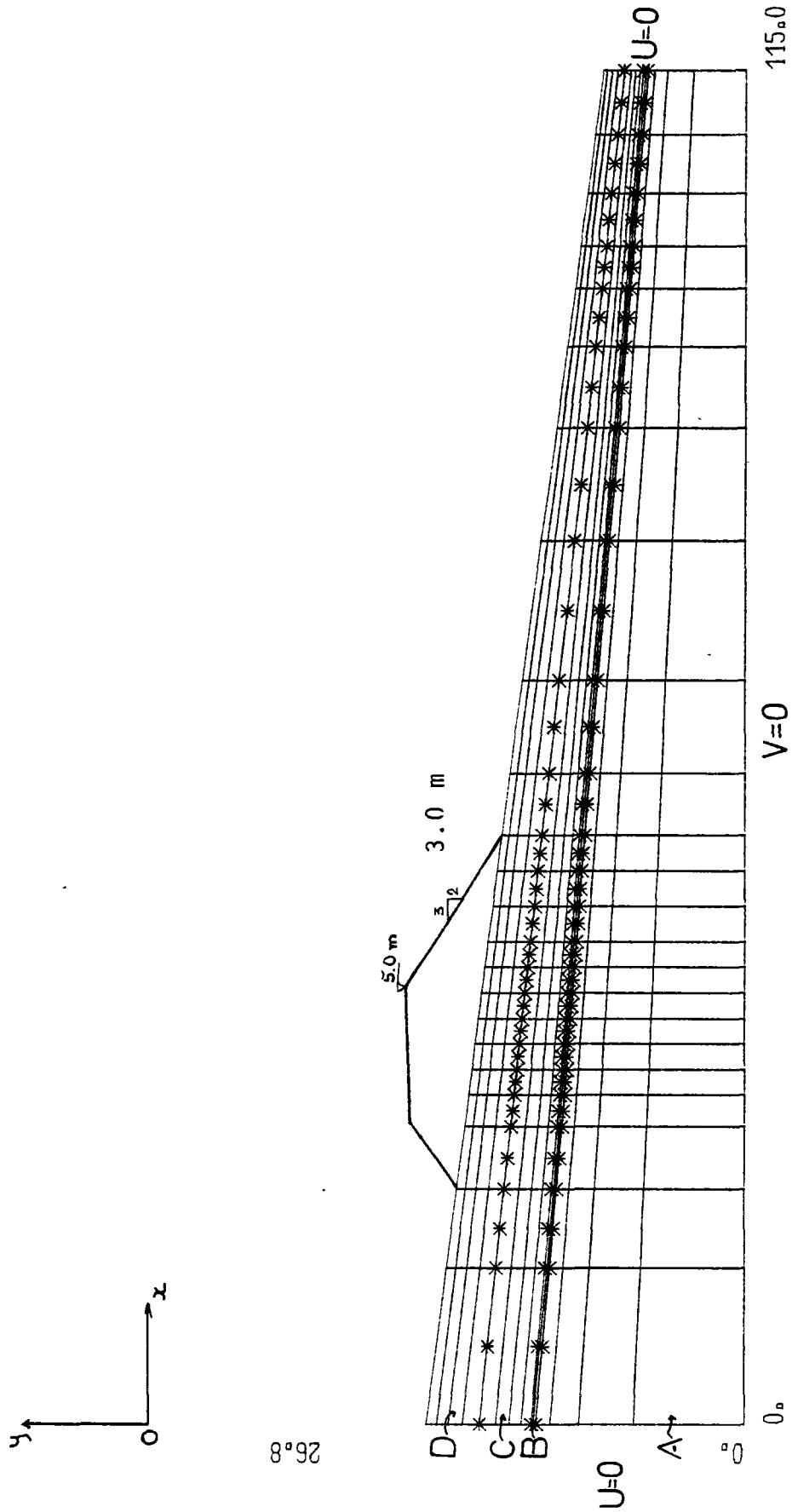


Fig. 26 - Maillage du versant.



L'algorithme IFRØPL2 a été choisi pour ce calcul, pour comparaison plus stricte avec la calcul (1). Certains essais ont d'ailleurs été faits avec IFRØPL1 et n'ont pas montré ici, de différences significatives.

Le critère de COULOMB (avec loi de normalité) a été choisi pour les deux calculs et pour les zones A, C, D avec respectivement  $c' = 25$  kPa et  $\varphi' = 35^\circ$ ,  $c' = 0$  et  $\varphi' = 25^\circ$ ,  $c' = 25$  kPa et  $\varphi' = 21^\circ$ . Pour la zone B et le calcul (2) les caractéristiques de plasticité sont les mêmes que pour la zone A.

Pour les deux calculs les conditions aux limites ont été  $v = 0$  pour le bord inférieur du maillage et  $u = 0$  pour les deux bords verticaux.

La présence d'une nappe d'eau statique dans le versant, à une profondeur d'un mètre du terrain naturel, a été prise en compte.

Les contraintes initiales communes pour les deux calculs ont été calculées sous un poids volumique total  $\gamma = 17$  kN/m<sup>3</sup>, avec le même maillage et les mêmes caractéristiques élasto-plastiques, mais avec  $\nu = 0,49$  partout, afin d'obtenir à peu près  $K_0 = 0,5$  en contraintes effectives.

Enfin la mise en place du remblai, qui n'est pas maillé, est prise en compte par l'application d'un chargement de forces de surface. Deux incréments de calculs ont été faits dans tous les cas. Le premier correspond à une hauteur de remblai de 3 m sous crête, le second à une hauteur de 5 m. Les pentes sont de 2/3 (voir Fig. 26).

#### 3.4.4. Résultats des calculs

Les fig. 27 et 28 représentent les points plastiques (o) obtenus par les calculs (1) et (2) à la fin du second incrément.

Les points notés par "x" dans la fig. 28 représentent les éléments de contact trouvés en état de glissement avec frottement à la fin du calcul (2).

On peut remarquer que la zone en état de glissement du calcul (2) concorde bien avec la zone plastifiée, dans la couche B, obtenue par le calcul (1).

D'autre part, l'allure générale de la plastification dans le massif des deux calculs est sensiblement la même et elle est proche de l'idée que l'on peut s'en faire par les mesures expérimentales.

La comparaison des Fig. 29 et 30 qui représentent pour le calcul (1) et pour le calcul (2) le maillage déformé à la fin du deuxième incrément montre un très bon accord en ce qui concerne les déplacements verticaux et un accord raisonnablement bon en ce qui concerne les déplacements horizontaux. Ainsi le déplacement horizontal du point situé en pied aval du remblai est respectivement de 7,6 cm pour le calcul (1) et 9 cm pour le calcul (2). Les mesures sur le remblai 1 ont donné 20 cm environ mais ceci pour une hauteur de 5,8 m, la rupture s'étant produite autour de 5,4 m. Tenant compte de plus de l'incertitude sur les modules d'Young pris en compte et les conditions aux limites l'accord entre expériences et calculs peut être jugé comme satisfaisant. On notera de plus que l'on obtenait à la fin du premier incrément respectivement 2,4 cm pour le calcul (1) et 1,8 cm pour le calcul (2), les mesures ayant donné, elles, 3,3 cm environ pour une hauteur de 3,3 m.

On peut donc conclure que la méthode avec critère orienté montre une aptitude comparable à celle de la méthode de frottement-décollement couplé à modéliser un problème comme celui-ci où l'on ne s'intéresse pas au comportement précis de la surface de glissement en tant que telle (déplacements relatifs, contraintes ou forces à l'interface). Il faut noter, de plus, que le calcul en frottement-décollement, dans le cas présent, a coûté environ 50% de plus que le calcul avec critère de plasticité de massif orienté, du fait des itérations de rigidité. La méthode de frottement-décollement présente cependant, dans sa phase d'itérations de forces, l'avantage de converger, en général, plus rapidement que la méthode élasto-plastique classique, ce qui peut dans cette phase la rendre, par contre, moins chère lorsque l'on cherche une précision de convergence particulièrement grande.

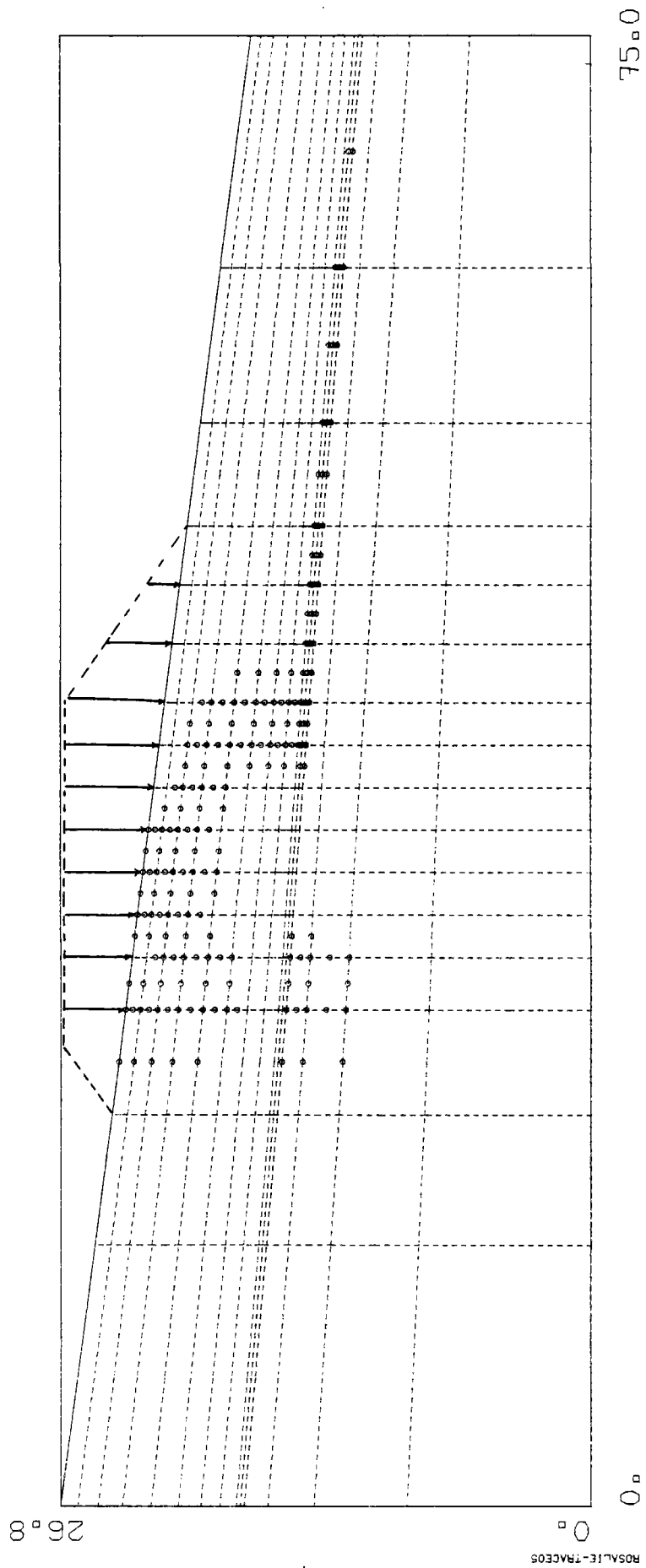


Fig. 27 - Zones plastiques (o) obtenues par le calcul (1).

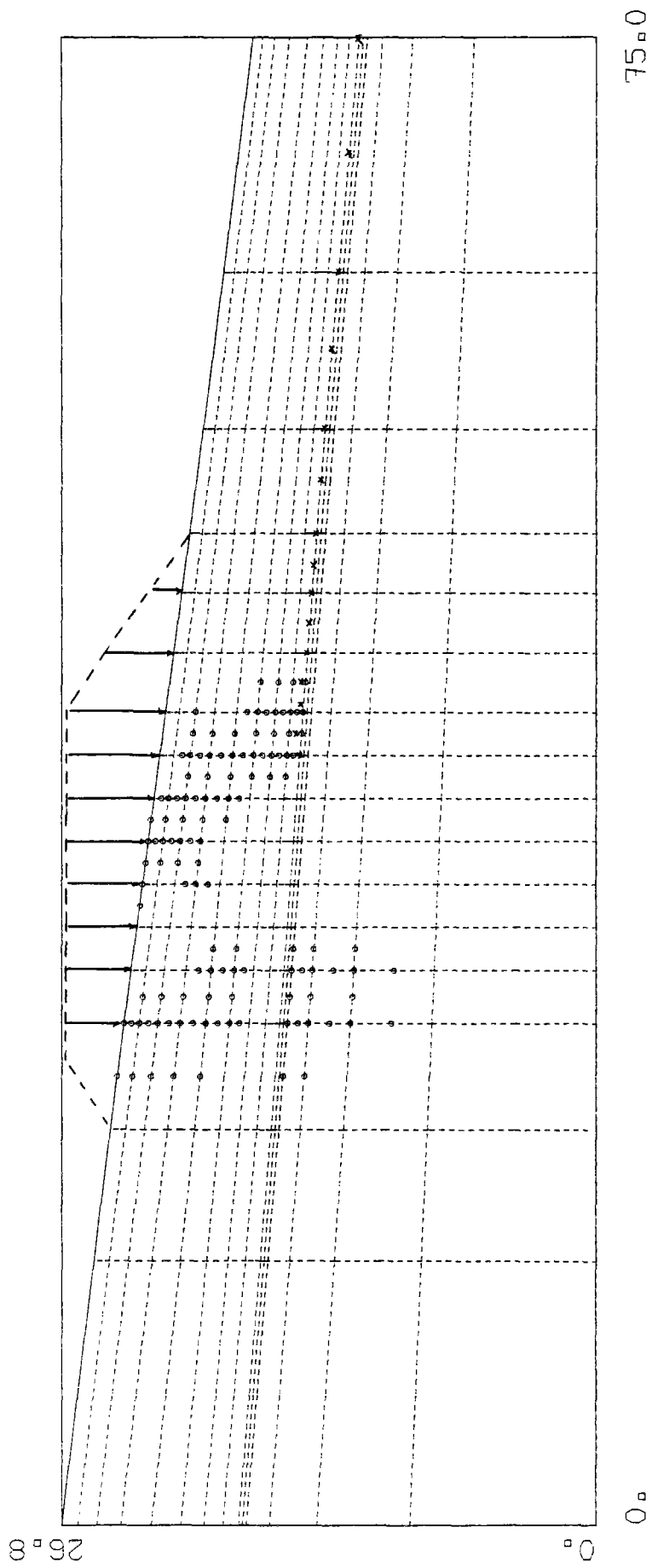


Fig. 28 - Zones plastiques (o) et éléments de contact en glissement (x) obtenus par le calcul (2).

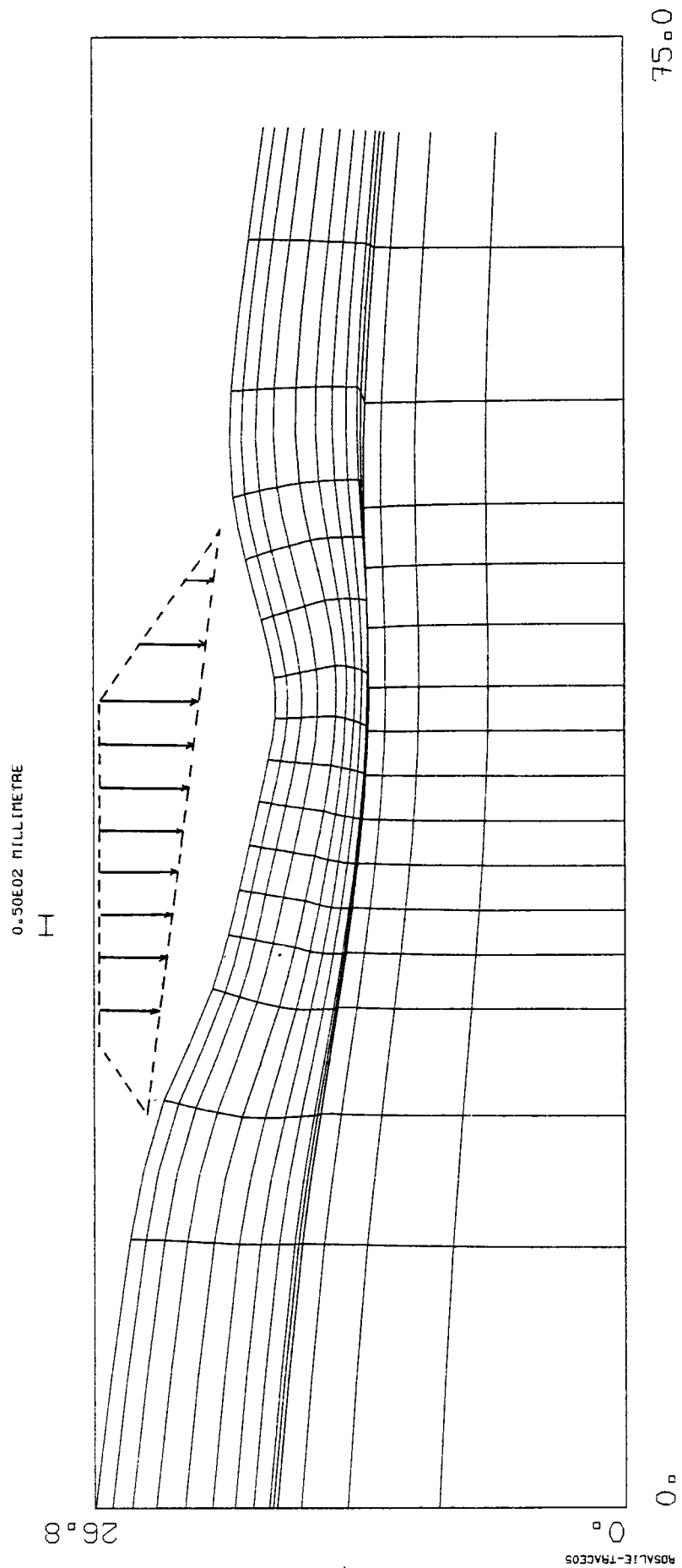


Fig. 29 - Maillage déformé obtenu par le calcul (1).

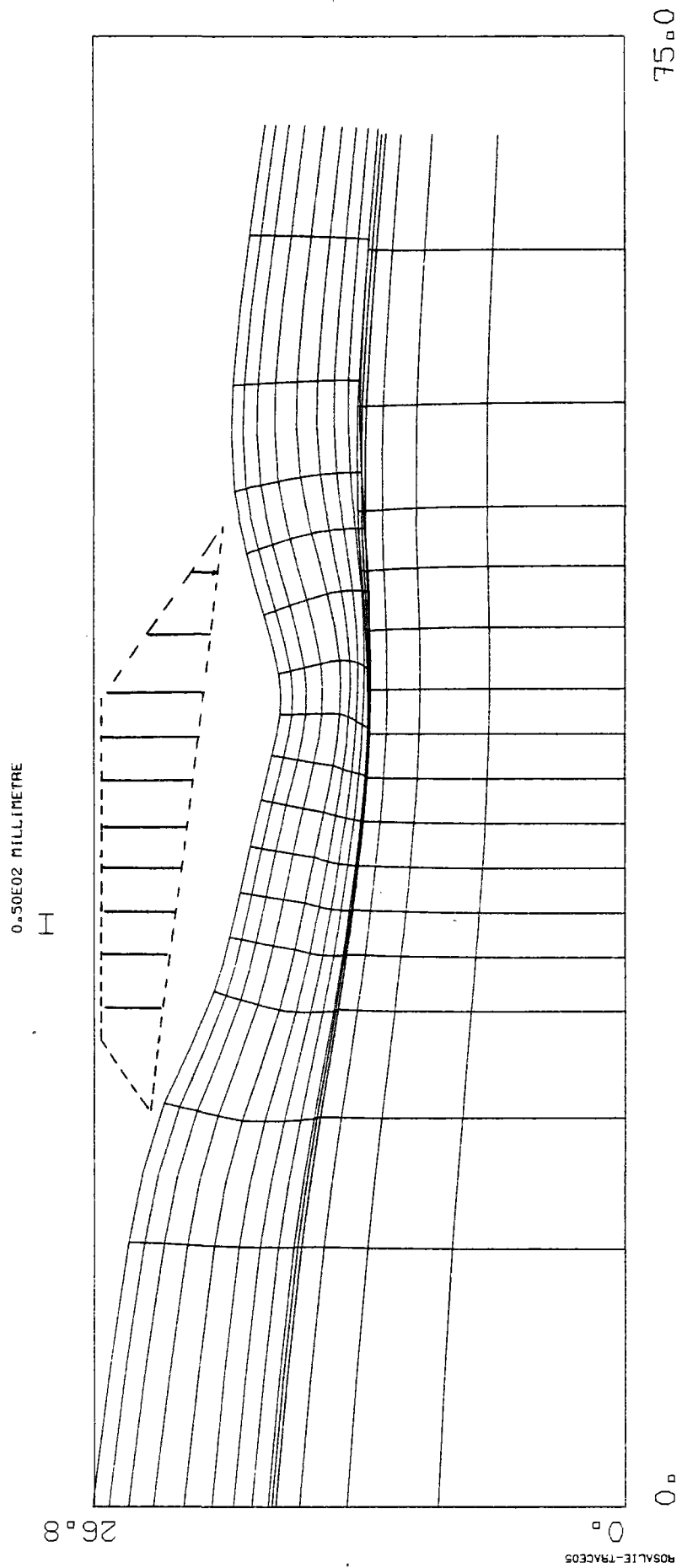


Fig. 30 - Maillage déformé obtenu par le calcul (2).

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

### (PARTIE III)

- BLONDEAU F. MORIN P. (1980) "Rupture d'un remblai expérimental sur versant dans le Puy-de-Dôme" Bull. liaison Labo. P. et Ch. 106 Inf. 2444 Mars-Avril 1980.
- FARZANEH O. (1981) "Compactage par vibration des couches de chaussées" Thèse de Docteur-Ingénieur à l'École Nationale des Ponts et Chaussées. A paraître.
- FRANK R. (1974) "Etude théorique du comportement des pieux sous charge verticale. Introduction de la dilatance" Thèse de docteur Ingénieur à l'Université Paris VI.
- FRANK R. GUENOT A. HUMBERT P. (1980) "Etude par éléments finis de quelques critères de plasticité orientés". Congr. G.A.M.N.I., Paris.
- HERZ H. (1881) Journ. Math. (Journal de Grelle) vol. 92 cité par S. TIMOSHENKO "Théorie de l'élasticité" Librairie Ch. Beranger Paris-Liège 1948.
- MORIN P. (1979) "Etude du comportement avant rupture d'un remblai expérimental sur versant à Sallèdes (Puy-de-Dôme)" Thèse de Docteur-Ingénieur Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- THEILLOUT J.N. (1981a) "Etude du fonctionnement d'un bossage d'ancrage d'un câble de précontrainte additionnelle" Comptes-rendus du Congrès de Gestion des Ouvrages d'Art, Paris-Bruxelles Avril 1981. A paraître.
- THEILLOUT J.N. (1981b) "Ancrages de câbles de précontrainte additionnelle" Rapport de recherche du Dept. des Structures et Ouvrages d'Art, F.A.E.R. 1.62.12.9. Labo. Central des Ponts et Chaussées. A paraître.
- VILLEFAILLEAU D. (1980) "Suivi du remblai B de Sallèdes sur versant instable" Travail de fin d'études, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

## CONCLUSION GENERALE

---

Les conclusions que l'on peut tirer de cette recherche sont les suivantes :

En ce qui concerne la modélisation du comportement des sols pulvérulents, on a assisté à un développement important des recherches ces dernières années mais plusieurs problèmes se posent encore.

Ainsi, même si des phénomènes comme l'écroûissage isotrope ou anisotrope, la dilatance et le calcul des déformations plastiques à partir d'une loi d'écoulement non associée semblent avoir trouvé ou être en voie de trouver des modélisations satisfaisantes, il n'existe pas encore un modèle relativement simple qui recueillerait un certain consensus pour une gamme acceptable de problèmes.

Il ne faut pas cependant oublier que tous ces modèles sont d'une façon générale beaucoup moins grossiers que les modélisations utilisées auparavant pour représenter le comportement des sols.

Ainsi, en l'état actuel des choses, les modèles de Vermeer et de Nova et Wood paraissent les plus intéressants de par leur formulation théorique relativement satisfaisante.

Pourtant, seulement leur programmation en éléments finis et la comparaison de leurs prédictions avec des résultats obtenus d'une part par des essais classiques simples et, d'autre part par des mesures sur ouvrages réels peuvent donner une idée claire de leur efficacité et guider la suite de la recherche dans ce domaine.

En ce qui concerne le deuxième axe de cette recherche, elle aboutit d'une part à la mise au point d'un algorithme de frottement-décollement d'interfaces, procédant par itérations de rigidité et de forces mais incrémental à chaque itération et, d'autre part, à deux algorithmes qui permettent le couplage de ce problème de contact avec l'élasto-plasticité dans le massif. La comparaison de ces deux algorithmes, qui permet de définir les conditions d'utilisation de l'un ou de l'autre, a été l'occasion de mettre en lumière certains aspects du traitement des comportements non linéaires par la méthode des éléments finis. Le programme issu de ces algorithmes devrait s'avérer extrêmement utile pour les calculs de mécanique des sols par la méthode des éléments finis, ou même pour d'autres domaines comme en témoignent les applications qui ont déjà été réalisées et qui sont décrites dans la dernière partie.

Ces applications touchant à divers problèmes de génie civil permettent, en effet, de juger de l'efficacité du programme mais permettent également de dégager les domaines privilégiés d'utilisation d'un programme de frottement-décollement d'interface avec élasto-plasticité dans le massif. Ainsi, certains problèmes où l'on étudie spécialement le comportement d'une surface de contact (exemple de la bille de compactage ou du bossage de précontrainte additionnelle) nécessitent le recours à une modélisation correcte de ces deux aspects, s'il s'avère en plus que le niveau de chargement plastifie le matériau. Dans des problèmes tels que celui du pieu sous charge verticale où l'on s'intéresse à la saturation du frottement latéral, la prise en compte de l'élasto-plasticité du sol apparaît comme secondaire par rapport à la modélisation de l'interface sol-structure. Enfin dans certains autres problèmes (voir l'exemple du remblai sur versant instable) la modélisation précise des interfaces ne paraît pas nécessaire même dans des zones de glissement préférentiel et l'on peut se contenter uniquement de l'élasto-plasticité de massif avec, éventuellement, un critère de plasticité orienté.