



**HAL**  
open science

# Optimisation géométrique du contrôle actif dans les gaines de ventilation

Philippe Sergent

► **To cite this version:**

Philippe Sergent. Optimisation géométrique du contrôle actif dans les gaines de ventilation. Acoustique [physics.class-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1996. Français. NNT: . tel-00529385

**HAL Id: tel-00529385**

**<https://pastel.hal.science/tel-00529385>**

Submitted on 25 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NS 20282(4)

X

**DOCTORAT DE L'ECOLE NATIONALE  
DES PONTS ET CHAUSSEES**

**Spécialité: Structures et Matériaux**

Thèse présentée par

**Philippe SERGENT**

**OPTIMISATION GEOMETRIQUE  
du  
CONTRÔLE ACTIF  
dans  
LES GAINES DE VENTILATION**

soutenue le 29 Avril 1996

Jury:	P. LE TALLEC	Président
	J. KERGOMARD	Rapporteur
	A. ROURE	Rapporteur
	A. EHRLACHER	Examineur
	D. DUHAMEL	Examineur

32





*Ce travail a été réalisé au Centre d'Enseignement et de Recherche en Analyse des Matériaux de l'École Nationale des Ponts et Chaussées. Que tous ses membres trouvent ici l'expression de ma gratitude.*

*J'exprime tout particulièrement ma reconnaissance à A. EHRLACHER pour avoir bien voulu m'accueillir dans son laboratoire et pour avoir dirigé ma thèse.*

*Mes plus sincères remerciements s'adressent aussi à D. DUHAMEL pour l'intérêt attentif qu'il a toujours manifesté à cette étude et pour l'encadrement de ce travail. Je lui suis aussi reconnaissant d'avoir bien voulu me faire bénéficier de son expérience du calcul numérique pour l'utilisation du code SAMRAY.*

*P. MOUCHERONT et D. CINTRA m'ont particulièrement aidé en concevant les systèmes électroniques nécessaires à la réalisation du contrôle actif. Qu'ils soient assurés de ma sincère gratitude.*

*Qu'il me soit permis aussi de remercier très chaleureusement J. KERGOMARD qui a prêté une attention bienveillante à mon travail et m'a fait part de remarques constructives à plusieurs reprises, A. ROURE qui a porté un jugement sur ce texte et dont les publications m'ont fortement influencé et P. LE TALLEC qui m'a fait l'honneur de présider le Jury.*







# Table des matières

<b>I</b>	<b>Avantages d'un contrôle hybride dans les gaines de ventilation</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Modélisation de la propagation dans une gaine</b>	<b>13</b>
1.1	Rappel d'acoustique . . . . .	14
1.1.1	Effet d'un gradient de température . . . . .	17
1.1.2	Effet de la viscosité . . . . .	17
1.1.3	Effet d'une vitesse d'écoulement uniforme . . . . .	18
1.1.4	Cas des mouvements stationnaires . . . . .	19
1.1.5	Conditions aux limites . . . . .	19
1.2	Résultats d'existence et d'unicité . . . . .	21
1.3	Guide d'onde droit . . . . .	23
1.3.1	Matrice d'impédance . . . . .	24
1.3.2	Matrice de transfert . . . . .	26
1.3.3	Matrice de diffusion . . . . .	27
1.3.4	Effet de la viscosité . . . . .	29
1.3.5	Effet d'une impédance finie . . . . .	30
1.3.6	Effet d'une vitesse d'écoulement uniforme . . . . .	31
1.4	Guide d'onde avec discontinuité . . . . .	32
1.4.1	Matrice de diffusion . . . . .	32
1.4.2	Assemblage . . . . .	33
1.5	Terminaisons . . . . .	34
1.6	Calculs . . . . .	36
1.7	Conclusion . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Calcul numérique d'une matrice de diffusion</b>	<b>39</b>
2.1	Revue des méthodes de calcul . . . . .	39
2.1.1	Discontinuité de section . . . . .	40
2.1.2	Raccordement modal . . . . .	43
2.1.3	Méthode de Galerkin . . . . .	44
2.1.4	Méthode par éléments finis . . . . .	45
2.1.5	Méthode par équation intégrale . . . . .	45
2.1.6	Méthode des raccordements asymptotiques . . . . .	46
2.1.7	Equation des pavillons . . . . .	46
2.1.8	Inductance équivalente . . . . .	47

2.1.9	Encadrement des valeurs d'inductance . . . . .	47
2.2	Méthode de calcul par équation intégrale . . . . .	48
2.2.1	Equation intégrale . . . . .	48
2.2.2	Matrice d'impédance d'une discontinuité . . . . .	49
2.2.3	Matrice de diffusion d'une discontinuité . . . . .	52
2.3	Résultats numériques . . . . .	52
2.3.1	Matrice de diffusion d'une discontinuité de section . . . . .	52
2.3.2	Matrice de diffusion d'un coude . . . . .	56
2.3.3	Vecteur source . . . . .	57
2.4	Terminaison . . . . .	59
2.5	Conclusion . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Mesures du contrôle actif dans des discontinuités de guide d'onde</b>	<b>63</b>
3.1	Algorithme X-LMS . . . . .	64
3.2	Erreurs liées à l'algorithme de contrôle en propagation plane . . . . .	65
3.2.1	Démonstration de 3.6 . . . . .	66
3.3	Solution exacte . . . . .	67
3.4	Filtre de contrôle $W$ . . . . .	68
3.4.1	Définition du filtre de contrôle . . . . .	68
3.4.2	Identification du coefficient de perte $\alpha$ . . . . .	69
3.4.3	Mesure du champ primaire . . . . .	70
3.5	Longueur du filtre de contrôle . . . . .	71
3.5.1	Solution approchée . . . . .	72
3.5.2	Solution optimale . . . . .	73
3.6	Fréquence d'échantillonnage . . . . .	79
3.7	Problème discrétisé . . . . .	81
3.7.1	Application numérique et mesures . . . . .	82
3.8	Dispositif expérimental . . . . .	85
3.9	Contrôle passif . . . . .	86
3.9.1	Guide droit . . . . .	87
3.9.2	Discontinuités réactives . . . . .	87
3.9.3	Revêtements absorbants . . . . .	89
3.9.4	Erreurs expérimentales . . . . .	89
3.10	Avantages du contrôle hybride . . . . .	90
3.10.1	Guide droit . . . . .	92
3.10.2	Revêtements absorbants . . . . .	94
3.10.3	Résonateur transversal . . . . .	94
3.10.4	Coude . . . . .	96
3.10.5	Résultats . . . . .	98
3.11	Gaine de ventilation TGV . . . . .	99
3.11.1	Matrice de diffusion . . . . .	99
3.11.2	Contrôle Passif . . . . .	100
3.11.3	Contrôle actif . . . . .	103
3.12	Résumé et conclusion . . . . .	103

<b>A</b>	<b>Calcul de la matrice d'impédance dans un guide droit</b>	<b>105</b>
<b>B</b>	<b>Relations entre matrices de diffusion et d'impédance</b>	<b>107</b>
<b>C</b>	<b>Terminaison-Equation intégrale</b>	<b>109</b>
<b>D</b>	<b>Points de Gauss</b>	<b>111</b>
<b>E</b>	<b>Mesures de l'influence des paramètres de l'algorithme X-LMS</b>	<b>115</b>
 <b>II Placement optimal des microphones d'erreur et des sources secondaires</b>		 <b>119</b>
<b>1</b>	<b>Optimisation dans un espace continu</b>	<b>123</b>
1.1	Optimisation d'une densité de sources . . . . .	123
1.1.1	Présentation du problème . . . . .	124
1.1.2	Condition nécessaire . . . . .	125
1.1.3	Cas particulier: $\overline{\Omega}_i \subset \Omega_m$ . . . . .	127
1.1.4	Cas général . . . . .	129
1.2	Discrétisation d'une surface absorbante . . . . .	130
1.2.1	Convergence de la solution discrète vers la solution continue . . . . .	130
1.2.2	Exemple en champ libre: solutions analytiques . . . . .	133
1.2.3	Exemple en champ libre: résultats numériques . . . . .	137
1.3	Optimisation du placement d'un nombre fini de sources ponctuelles . . . . .	140
1.3.1	Optimisation des amplitudes des sources . . . . .	141
1.3.2	Optimisation des positions des sources . . . . .	142
1.3.3	Optimisation des positions des microphones . . . . .	142
1.3.4	Conclusion . . . . .	143
<b>2</b>	<b>Optimisation dans un espace discret</b>	<b>145</b>
2.1	Problème quadratique . . . . .	145
2.2	Problème linéaire: optimisation des positions des microphones . . . . .	147
2.3	Problème linéaire: optimisation des positions des sources . . . . .	152
2.4	Conclusion . . . . .	159
<b>3</b>	<b>Application au cas des guides d'onde</b>	<b>161</b>
3.1	Rappel du modèle du guide d'onde droit . . . . .	161
3.2	Temps de calcul . . . . .	163
3.3	Contrôle en-dessous de la $N^{ième}$ fréquence de coupure . . . . .	165
3.3.1	Modes évanescents d'ordre supérieur négligeables . . . . .	166
3.3.2	Modes évanescents d'ordre supérieur non-négligeables . . . . .	170
3.4	Contrôle au-dessus de la $N^{ième}$ fréquence de coupure . . . . .	174
3.5	Bornes sur l'amplitudes des sources . . . . .	176
3.6	Effet de la réflexion amont . . . . .	178
3.7	Effet de la réflexion aval . . . . .	180

3.7.1	Modes évanescents d'ordre supérieur négligés . . . . .	180
3.7.2	Modes évanescents d'ordre supérieur non-négligés . . . . .	182
3.8	Conclusion . . . . .	184
<b>A</b>	<b>Démonstration de la discrétisation d'une surface absorbante</b>	<b>189</b>
<b>B</b>	<b>Distribution de pression due à une distribution surfacique de monopôles sur une sphère</b>	<b>195</b>
<b>C</b>	<b>Maillage régulier d'une sphère</b>	<b>197</b>
<b>D</b>	<b>Intégration numérique</b>	<b>199</b>
<b>E</b>	<b>Unicité de la solution</b>	<b>201</b>
<b>F</b>	<b>Nombre suffisant de microphones d'erreur</b>	<b>205</b>

# Introduction générale

Cette étude est consacrée à l'optimisation géométrique du contrôle actif dans les gaines de ventilation. Le contrôle actif consiste à atténuer le bruit en superposant une onde en opposition de phase à l'onde incidente. On peut ainsi protéger une zone et la rendre silencieuse.

Si le principe du contrôle actif est ancien (Lueg 1936 [46]), ce n'est que grâce aux progrès de l'électronique et au développement des filtres adaptatifs que des applications industrielles ont pu voir le jour. Ce n'est donc que depuis une quinzaine d'années que des algorithmes adaptatifs ont été utilisés (Burgess 1981 [11]) dans le contexte du contrôle actif du bruit.

L'application du contrôle actif à la réduction du bruit dans les gaines de ventilation a ensuite pu être développée (Roure 1985 [67]) avec le contrôle d'un bruit large-bande.

Cette technique active peut parfois remplacer les anciennes techniques passives qui consistent à incorporer des "pièges à sons" avec des revêtements absorbants dans la ligne de ventilation. Elle a pour avantage, par rapport aux techniques passives, de présenter une perte de charge négligeable et d'être efficace aux basses fréquences.

Cette technique est plutôt venue en complément des anciennes techniques passives puisque les matériaux absorbants sont, quant à eux, efficaces aux hautes fréquences (Nouvel 1995 [59] et Yaich 1995 [83]).

La première partie de ce travail sera consacrée à l'étude du **contrôle hybride** (actif+passif) dans les gaines de ventilation. Nous montrerons des avantages non-classiques de l'association des contrôles actifs et passifs suivant la géométrie de la gaine et la présence ou non de revêtements absorbants.

Si la géométrie de la gaine de ventilation influe sur les résultats du contrôle, un autre paramètre important, en ce qui concerne le contrôle actif, est le **placement des microphones d'erreur et des sources secondaires**.

Ce problème fera l'objet de la seconde partie de ce mémoire. Les microphones d'erreur et les sources secondaires sont essentiels dans un système actif. Les microphones d'erreur donnent l'information sur le niveau de bruit qui est nécessaire aux calculs de l'algorithme adaptatif. Les sources secondaires sont les sources de contre-bruit, sans lesquelles, un contrôle actif est impossible. Disposant de ces microphones d'erreur et de ces sources secondaires, un système actif peut rapidement être mis en oeuvre. Un système actif n'implique pas cependant une réduction du bruit comme nous le verrons. Il est indispensable de placer convenablement à la fois les microphones d'erreur et les sources secondaires.

Nous verrons que la théorie donne une solution optimale de sources qui annule parfaitement le bruit dans une zone de silence donnée. Cette solution implique une distribution continue de sources et est difficilement applicable. L'optimisation du placement d'un nombre discret de sources et de microphones est un problème, lui aussi difficile. C'est pourquoi nous avons développé une technique de placement originale en modifiant la fonction de coût classique en contrôle actif. Le placement des microphones d'erreur, entre autre, devient alors quasi-immédiat. Ceux-ci sont alors situés aux maximums du module de la pression résiduelle.

Ce problème du placement existe dans toutes les installations de système actif. Nous avons choisi d'appliquer notre méthode de placement au cas des guides d'onde droits et de comparer nos résultats avec les placements généralement proposés (Stell 1994 [75]).



## **Première partie**

# **Avantages d'un contrôle hybride dans les gaines de ventilation**



# Introduction

Les systèmes de ventilation industriels génèrent souvent un bruit important. Il est donc nécessaire de réduire son niveau à la sortie des gaines de ventilation.

Deux techniques de contrôle peuvent être associées:

- Une technique **passive** utilisant des changements de section et des revêtements. La performance de cette technique dépend principalement de la géométrie de la gaine et des propriétés absorbantes des revêtements. Ces "silencieux" sont donc divisés en deux types: "réactifs" ou "dissipatifs" selon qu'ils réfléchissent les ondes vers la source à l'aide de chambres de grand diamètre ou qu'ils dissipent les ondes acoustiques le long de revêtements absorbants.
- Une technique **active** qui consiste à minimiser un bruit indésirable en générant un bruit opposé au moyen de sources secondaires, en pratique des haut-parleurs. Grâce à des sources secondaires, contrôlées par un système électronique, on peut attendre une réduction significative du bruit à la sortie de la gaine. A hautes fréquences, cette technique "active" demande un système électronique avec une fréquence d'échantillonnage élevée ainsi qu'un grand nombre de sources secondaires. C'est pourquoi le contrôle actif reste limité aux basses fréquences.

Comme l'absorption passive des revêtements des gaines est surtout efficace aux hautes fréquences, les techniques passives et actives s'avèrent complémentaires. Le contrôle hybride (passif + actif) a donc jusqu'à présent été appliqué principalement pour tirer avantage de l'efficacité de chacune des deux techniques dans des domaines de fréquences différents. Nous allons montrer sur quelques exemples que d'autres intérêts existent à associer les deux techniques et que le contrôle passif peut améliorer les résultats du contrôle actif même dans le domaine basses fréquences.

Nous allons développer une modélisation générale de la propagation dans des guides d'onde comportant des discontinuités. Pour cela, nous avons écrit un code par une méthode de calcul par équation intégrale pour déterminer la propagation des ondes dans les discontinuités. La propagation est multimodale car les dimensions du guide sont supposées suffisamment grandes pour que plusieurs modes se propagent dans le domaine fréquentiel de l'étude. Le développement d'un code a été rendu nécessaire pour le calcul de la propagation acoustique à travers des discontinuités de géométrie complexe. Les sources de contre-bruit sont alors placées à l'intérieur de la discontinuité pour des raisons d'encombrement. Grâce au calcul de la propagation, on peut ensuite évaluer l'efficacité du contrôle actif en fonction de la ou des positions des sources secondaires. Nous pourrons ainsi d'abord évaluer l'effet passif de la discontinuité et ensuite l'effet conjugué des contrôles passif et actif.

L'étude est divisée en trois chapitres. Le premier présente un modèle de propagation dans les guides d'onde de géométrie générale avec revêtements absorbants ou non.

Le second chapitre est consacré à une méthode numérique de calcul par équation intégrale des matrices de diffusion qui entrent en jeu dans la modélisation de la propagation à travers les discontinuités.

Le troisième chapitre présente enfin les mesures et les calculs du contrôle pour quatre géométries différentes à savoir un guide d'onde droit, un guide d'onde droit avec absorbant, un résonateur transversal et un coude. Une étude numérique des performances du contrôle dans la gaine de ventilation TGV sera aussi présentée. Nous montrerons sur l'exemple du guide droit les effets de la longueur du filtre de contrôle et de la fréquence d'échantillonnage qui limitent l'efficacité du contrôle actif lorsque l'algorithme X-LMS est utilisé. Plusieurs intérêts de l'association des contrôles passif et actif seront alors mis en évidence.

# Chapitre 1

## Modélisation de la propagation dans une gaine

Avant de présenter la théorie du contrôle, il est important de connaître la propagation dans les guides d'onde. Dans ce chapitre, nous présentons les équations fondamentales concernant la propagation dans les guides d'onde acoustiques comportant des discontinuités. Ce sujet a été abordé par de nombreux auteurs, en particulier pour l'étude des silencieux. Les premiers travaux ont concerné la propagation plane, c'est-à-dire à des fréquences suffisamment basses pour que seul le mode plan se propage dans le guide. Galaitsis (1992 [25]) donne une description des géométries de silencieux les plus communes.

C'est d'abord en électromagnétisme, dans les années quarante, que l'étude de la propagation guidée s'est développée. Des schémas électriques équivalents ont alors été introduits pour décrire la propagation à travers des discontinuités ou autour d'obstacles. Miles (1946 [49]) est le premier à avoir appliqué cette analogie aux discontinuités dans les guides d'onde acoustiques.

Lorsque la longueur d'onde est très supérieure aux dimensions caractéristiques du guide, on se contente de traiter un problème asymptotique. Des composants électriques comme des inductances et capacitances sont introduits pour modéliser les discontinuités tandis que les variables pression et débit représentent respectivement la tension et le courant électrique. Des auteurs ont calculé les discontinuités de pression et de débit dues à des singularités: une discontinuité de section (Karal 1953 [36]), un coude (Thompson 1984 [79] [80]), une jonction en T (Bruggeman 1987 [8]), des jonctions entre trois ou quatre guides (Khettabi 1994 [39]).

A plus hautes fréquences ou lorsqu'une précision supérieure est demandée, la propagation d'une onde plane est plus généralement modélisée par une matrice de transfert à deux entrées (pression et débit). Miles (1981 [48]) donne son expression analytique pour un guide d'onde droit avec un fluide au repos, avec une vitesse d'écoulement uniforme ainsi que pour une section de croissance exponentielle.

Lorsque les dimensions de la section dépasse la longueur d'onde, la propagation est multimodale. Le guide d'onde est alors divisé en segments et une matrice de diffusion relie les

ondes amont et aval dans chaque sous-domaine. Le calcul de la propagation dans le guide en entier se fait ensuite par un assemblage des matrices de diffusion des différents segments (Furnell 1989 [24] et Hudde 1989 [32]).

Lorsque des sources secondaires existent dans un guide d'onde, la propagation n'est plus simplement décrite par un système linéaire comme les matrices de diffusion mais par un système affine. Dans cette étude, nous allons déterminer l'expression de la propagation avec présence de sources dans un guide d'onde présentant des discontinuités.

## 1.1 Rappel d'acoustique

Rappelons les équations générales de l'acoustique. Le mouvement général d'un fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes.

-La conservation de la masse:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \text{div}(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{v}}) = \tilde{r}^m \quad (1.1)$$

-La conservation de la quantité de mouvement:

$$\tilde{\rho}\left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}\right) + \nabla \tilde{p} = \tilde{\mathbf{f}} + \text{div} \tilde{\Sigma}^v \quad (1.2)$$

-L'équation de la chaleur:

$$T\left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{s}\right) = \tilde{r}^q - T \text{div}\left(\frac{\tilde{\mathbf{g}}}{T}\right) + \phi^v \quad (1.3)$$

-L'équation d'état du fluide bivariant et le premier principe:

$$\tilde{T} = g(\tilde{p}, \tilde{\rho}) \quad (1.4)$$

$$\tilde{s} = h(\tilde{p}, \tilde{\rho}) \quad (1.5)$$

-La loi de comportement du fluide donnant les effets de viscosité.

$$\tilde{\Sigma}^v = 2\mu \mathbf{E} + \eta \text{div} \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{I} \quad (1.6)$$

avec  $E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{3} \text{div} \tilde{\mathbf{v}} \delta_{ij}$  et  $I_{ij} = \delta_{ij}$  tenseur unité.

-La loi de Fourier de diffusion de la chaleur dans le fluide:

$$\tilde{\mathbf{g}} = -K \nabla T \quad (1.7)$$

Les grandeurs  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}$ ,  $\tilde{T}$ ,  $\tilde{s}$  représentent respectivement la masse volumique, la pression, le champ de vitesse, la température et la densité volumique d'entropie du fluide.  $\tilde{\Sigma}^v$  est le champ de contrainte provenant de la viscosité du fluide. Il est donné par l'expression ci-dessus dans le cas d'un fluide Newtonien ( $\mu$  est la viscosité dynamique et  $\eta$  est la viscosité de dilatation qui sera négligée par la suite). Le champ de contrainte totale est  $\tilde{\Sigma} = -\tilde{p}\mathbf{I} + \tilde{\Sigma}^v$ .

$\tilde{r}^m$  et  $\tilde{r}^q$  décrivent une densité volumique du taux de matière, respectivement de chaleur, reçue par le fluide venant de l'extérieur.  $\tilde{g}$  est une densité surfacique de flux de chaleur donnée à l'extérieur par conduction.  $K$  est le coefficient de Fourier.  $\tilde{f}$  est le vecteur des efforts extérieurs.  $\phi^v = Tr[\tilde{\Sigma}^v : \mathbf{E}]$  est la dissipation visqueuse due au transport du fluide.

Les fluctuations du mouvement du fluide sont supposées petites de sorte que l'écoulement du fluide est considéré peu perturbé. L'écoulement sera décrit comme la somme d'un écoulement stationnaire non perturbé indicé 0 et d'une petite perturbation. Les coordonnées d'espace et de temps sont notées  $\underline{x}$  et  $t$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho} = \rho_0(\underline{x}) + \rho(t, \underline{x}) \\ \tilde{p} = p_0(\underline{x}) + p(t, \underline{x}) \\ \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_0(\underline{x}) + \mathbf{v}(t, \underline{x}) \\ \tilde{T} = T_0(\underline{x}) + T(t, \underline{x}) \\ \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_0(\underline{x}) + \mathbf{f}(t, \underline{x}) \\ \tilde{r}^m = r_0^m(\underline{x}) + r^m(t, \underline{x}) \\ \tilde{\Sigma}^v = \Sigma_0^v(\underline{x}) + \Sigma^v(t, \underline{x}) \\ \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0(\underline{x}) + \mathbf{E}(t, \underline{x}) \\ \tilde{s} = s_0(\underline{x}) + s(t, \underline{x}) \end{array} \right. \quad (1.8)$$

Nous ferons l'hypothèse qu'il n'y a pas d'apport volumique extérieur de chaleur (c'est-à-dire  $\tilde{r}^q = 0$ ). Comme la dissipation thermique est négligeable en-dehors de la couche limite, nous supposerons, pour simplifier, que le fluide est non conducteur loin des parois (c'est-à-dire  $K = 0$ ). Nous ne tiendrons compte de la dissipation thermique que le long des parois à l'intérieur de la couche limite. Le fluide est supposé un gaz parfait (en pratique l'air). L'équation d'état et le premier principe s'écrivent:

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{p}}{R\tilde{\rho}} \quad (1.9)$$

$$\tilde{s} - \tilde{s}_0 = C_V \ln\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^\gamma}\right) \quad (1.10)$$

où  $R$  est la constante des gaz et  $\tilde{s}_0$  une constante.  $C_V$  et  $C_p$  sont les chaleurs volumiques spécifiques à volume constant et pression constante respectivement.  $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$  est le rapport des chaleurs spécifiques. En substituant les équations (8) dans (1-3), on obtient le système d'équations au premier ordre:

$$\left\{ \begin{array}{l} div(\rho_0 \mathbf{v}_0) = r_0^m \\ \rho_0 \mathbf{v}_0 \nabla \mathbf{v}_0 + \nabla p_0 = \mathbf{f}_0 + div \Sigma_0^v \\ T_0 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla s_0 = Tr[\Sigma_0^v : \mathbf{E}_0] \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Dans la suite de l'étude, on prendra  $r_0^m = 0$  et  $\mathbf{f}_0 = 0$ , c'est-à-dire que l'on se situera en dehors des sources engendrant le mouvement du fluide.

En soustrayant (11) dans le système (1-3), on obtient le système d'équations au deuxième ordre:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 \mathbf{v}) + \text{div}(\rho \mathbf{v}_0) = r^m \\ \rho \mathbf{v}_0 \nabla \mathbf{v}_0 + \rho_0 (\mathbf{v} \nabla \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \nabla \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}) + \nabla p = \mathbf{f} + \text{div} \Sigma^v \\ T_0 \frac{\partial s}{\partial t} + T_0 \mathbf{v} \cdot \nabla s_0 + T_0 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla s + T \mathbf{v}_0 \cdot \nabla s_0 = \text{Tr}[\Sigma_0^v : \mathbf{E}] + \text{Tr}[\Sigma^v : \mathbf{E}_0] \end{array} \right. \quad (1.12)$$

Ces équations se simplifient dans deux cas:

- (1) le fluide est non visqueux ( $\mu = 0$ )
- (2) le mouvement de référence est supposé au repos ( $\mathbf{v}_0 = 0$ )

Dans tout ce qui va suivre, nous nous placerons dans un de ces deux cas: on vérifie alors que la dissipation visqueuse est nulle aux deux premiers ordres. On en déduit:

$$\frac{d\tilde{s}}{dt} = \frac{ds}{dt} = 0 \quad (1.13)$$

L'équation (13) permet d'affirmer (avec des conditions aux limites telles que  $\tilde{s} = 0$  sur la frontière) que l'écoulement est isentropique ( $\tilde{s} = 0$ ).

L'équation (10) donne alors:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\gamma p}{\rho_0} \quad (1.14)$$

C'est-à-dire:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\gamma p_0(\underline{x})}{\rho_0(\underline{x})} = C_0^2(\underline{x}) = \gamma R T_0(\underline{x}) \quad (1.15)$$

$C_0$  est appelé célérité du son isentropique du fluide au repos et est en général non uniforme, sauf pour un mouvement isotherme.

En remplaçant (15) dans les deux premières équations de (12), nous obtenons les équations générales de l'acoustique:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 \mathbf{v}) + \text{div}(\frac{p \mathbf{v}_0}{C_0^2}) = r^m \\ \frac{p}{C_0^2} \mathbf{v}_0 \nabla \mathbf{v}_0 + \rho_0 (\mathbf{v} \nabla \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \nabla \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}) + \nabla p = \mathbf{f} + \text{div} \Sigma^v \end{array} \right. \quad (1.16)$$

On peut toujours écrire le champ de vitesse  $\mathbf{v}$  sous la forme:

$$\mathbf{v} = \Phi + \Psi \quad (1.17)$$

avec  $\text{rot} \Phi = 0$  et  $\text{div} \Psi = 0$ . Il suffit par exemple de prendre  $\Phi = \nabla \phi$  avec  $\phi$  solution du problème:

$$\begin{array}{l} \text{div} \mathbf{v} = \Delta \phi \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ sur la frontière} \end{array} \quad (1.18)$$

On peut par conséquent choisir le vecteur  $\Psi$  pour que  $\Psi \cdot \mathbf{n} = 0$  sur la frontière. On écrira aussi  $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{div} + \mathbf{f}^{rot}$  avec  $\text{rot} \mathbf{f}^{div} = 0$  et  $\text{div} \mathbf{f}^{rot} = 0$ .

Nous allons maintenant établir l'équation des ondes pour trois cas:

- Milieu fluide non visqueux au repos.

- Milieu fluide visqueux isotherme au repos.
- Milieu fluide non visqueux isotherme avec une vitesse d'écoulement uniforme.

### 1.1.1 Effet d'un gradient de température

Nous étudions dans cette section un milieu fluide non visqueux au repos. Le système (16) avec  $\mathbf{v}_0 = 0$  et  $\mu = 0$  donne:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 \Phi + \rho_0 \Psi) = r^m \\ \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mathbf{f}^{div} - \nabla p \\ \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathbf{f}^{rot} \end{array} \right. \quad (1.19)$$

On constate que le potentiel  $\Psi$  vérifie une équation d'évolution indépendante des autres variables  $p$  et  $\Phi$ . Si  $\mathbf{f}^{rot} = 0$ ,  $\Psi$  est stationnaire. En particulier, si le mouvement est irrotationnel à  $t=0$ , il reste irrotationnel. En combinant les trois équations, on obtient l'équation des ondes pour un milieu fluide parfait au repos contenant des sources:

$$\frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \frac{\partial r^m}{\partial t} - \text{div} \mathbf{f}^{div} \quad (1.20)$$

La température intervient dans la célérité du son. Cette célérité  $C_0$  n'est uniforme que si le mouvement est isotherme, ce qu'on supposera dans tout le reste de l'étude.

### 1.1.2 Effet de la viscosité

Nous étudions dans cette section un milieu fluide visqueux isotherme et au repos. Comme le fluide est au repos, l'équation (11) entraîne  $p_0(\underline{x}) = p_0$ . Dans un milieu isotherme,  $C_0(\underline{x}) = C_0$ . On en déduit que la densité  $\rho_0$  est aussi uniforme  $\rho_0(\underline{x}) = \rho_0 = \frac{\gamma p_0}{C_0^2}$ .

Le système (16) avec  $\mathbf{v}_0 = 0$  donne:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \text{div}(\Phi) = r^m \\ \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mathbf{f}^{div} - \nabla p + \mu \Delta \Phi + \mu \nabla(\text{div} \Phi) \\ \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathbf{f}^{rot} + \mu \Delta \Psi \end{array} \right. \quad (1.21)$$

On constate encore que la partie rotationnelle  $\Psi$  vérifie une équation indépendante des autres variables  $p$  et  $\Phi$ . Un couplage peut cependant exister par les conditions aux limites.  $\Psi$  obéit à une équation de diffusion. En particulier elle est nulle si elle l'est à l'instant 0 et si  $\mathbf{f}^{rot} = 0$ . En combinant les trois équations, on obtient l'équation des ondes vérifiée par la pression  $p$ :

$$\frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \frac{\partial r^m}{\partial t} - \text{div} \mathbf{f}^{div} - \Sigma_{ij,ij}^v \quad (1.22)$$

Compte-tenu de la forme de  $\Sigma$ , le terme de viscosité s'exprime:

$$\begin{aligned}\Sigma_{ij,ij}^v &= \frac{4}{3}\mu\Delta(\text{div}\mathbf{v}) \\ \Sigma_{ij,ij}^v &= \frac{4}{3}\mu\Delta\left(\frac{r^m}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0 C_0^2}\frac{\partial p}{\partial t}\right)\end{aligned}\quad (1.23)$$

Nous obtenons finalement l'équation des ondes pour un milieu fluide visqueux isotherme au repos contenant des sources.

$$\frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p - \frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_0 C_0^2}\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = \frac{\partial r^m}{\partial t} - \frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_0}\Delta r^m - \text{div}\mathbf{f}^{\text{div}}\quad (1.24)$$

En considérant que le terme de viscosité est une légère correction de l'équation des ondes pour un fluide parfait, on peut remplacer  $\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_0 C_0^2}\frac{\partial \Delta p}{\partial t}$  par  $\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_0 C_0^4}\frac{\partial^3 p}{\partial t^3}$  pour retrouver l'équation de Pierce (1992 [61]).

### 1.1.3 Effet d'une vitesse d'écoulement uniforme

Nous étudions dans cette section un milieu fluide non visqueux isotherme avec une vitesse d'écoulement uniforme. Un fluide isotherme avec vitesse d'écoulement uniforme entraîne que  $p_0$ ,  $\rho_0$  et  $C_0$  sont aussi uniformes.

Le système (16) avec  $\mu = 0$  et  $\nabla\mathbf{v}_0 = 0$  donne :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{C_0^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0\text{div}(\Phi) + \frac{\mathbf{v}_0}{C_0^2}\cdot\nabla p = r^m \\ \rho_0\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mathbf{f}^{\text{div}} - \nabla p - \rho_0\mathbf{v}_0\cdot\nabla\Phi \\ \rho_0\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathbf{f}^{\text{rot}} - \rho_0\mathbf{v}_0\cdot\nabla\Psi \end{array}\right.\quad (1.25)$$

Nous transformons la deuxième équation en lui soustrayant la première multipliée par  $\mathbf{v}_0$ . Le nouveau système s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{C_0^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0\text{div}(\Phi) + \frac{\mathbf{v}_0}{C_0^2}\cdot\nabla p = r^m \\ \rho_0\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\mathbf{v}_0}{C_0^2}\frac{\partial p}{\partial t} - \rho_0\mathbf{v}_0\text{div}(\Phi) = \mathbf{f}^{\text{div}} - \nabla p + M_0^2\mathbf{n}_0\frac{\partial p}{\partial n_0} - \rho_0\mathbf{v}_0\cdot\nabla\Phi - r^m\mathbf{v}_0 \\ \rho_0\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathbf{f}^{\text{rot}} - \rho_0\mathbf{v}_0\cdot\nabla\Psi \end{array}\right.\quad (1.26)$$

où le nombre de Mach  $M_0$  est défini comme le rapport de la norme de la vitesse  $\mathbf{v}_0$  sur la célérité  $C_0$  du son.

$$M_0 = \frac{|\mathbf{v}_0|}{C_0}\quad (1.27)$$

où  $\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{v}_0}{|\mathbf{v}_0|}$  et  $\nabla p\cdot\mathbf{n}_0 = \frac{\partial p}{\partial n_0}$ . En combinant les deux premières équations, on obtient l'équation des ondes pour un milieu fluide parfait avec vitesse d'écoulement uniforme contenant des sources:

$$\left(\frac{1}{C_0}\frac{\partial}{\partial t} + M_0\frac{\partial}{\partial n_0}\right)^2 p - \Delta p = \frac{\partial r^m}{\partial t} - \text{div}\mathbf{f}^{\text{div}} + \nabla r^m\cdot\mathbf{v}_0\quad (1.28)$$

### 1.1.4 Cas des mouvements stationnaires

Dans le cas d'un mouvement harmonique avec la dépendance en temps  $e^{-j\omega t}$  pour toutes les grandeurs, l'équation des ondes se transforme en l'équation de Helmholtz. Nous notons  $\omega$  la pulsation et  $k$  le nombre d'onde où  $k = \frac{\omega}{C_0}$ . Nous posons  $q = \frac{r_m}{\rho_0}$  où  $q$  s'interprète comme un débit volumique par unité de volume. Les équations (20), (24) et (28) deviennent dans le cas stationnaire:

$$\Delta p + k^2 p = \rho_0 j \omega q + \text{div} \mathbf{f}^{div} \quad (1.29)$$

$$\Delta p + k^2 p - jk \frac{4\mu}{3\rho_0 C_0} \Delta p = \rho_0 j \omega q + \frac{4}{3} \mu \Delta q + \text{div} \mathbf{f}^{div} \quad (1.30)$$

$$\Delta p + k^2 p + 2jkM_0 \frac{\partial p}{\partial n_0} - M_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial^2 n_0} = \rho_0 j \omega q + \text{div} \mathbf{f}^{div} - \rho_0 \nabla q \cdot \mathbf{v}_0 \quad (1.31)$$

En notant  $\tilde{k}^2 = \frac{\rho_0 C_0 k^2}{\rho_0 C_0 - \frac{4jk\mu}{3}}$ , l'équation (30) pour un fluide visqueux peut être traitée

comme l'équation de Helmholtz pour un fluide parfait où on a remplacé  $k$  par  $\tilde{k}$ .

### 1.1.5 Conditions aux limites

1-Les conditions aux limites le long des parois pour un fluide parfait sont en général représentées par une condition d'impédance qui traduit plus ou moins parfaitement la réflexion d'une onde acoustique à l'interface fluide-solide. Cette modélisation est valable pour des matériaux à réaction localisée où le mouvement d'un point de la paroi n'influe pas sur les points voisins. L'impédance de la paroi sera notée  $Z(\underline{x})$ . En l'absence de sources, elle est définie à l'interface fluide-solide comme le rapport de la valeur de la pression sur la vitesse normale du fluide à la paroi. En présence d'un débit volumique par unité de surface  $q(\underline{x})$ , la définition de l'impédance est la suivante :

$$p(\underline{x}) - Z(\underline{x})(\mathbf{v}(\underline{x}) \cdot \mathbf{n}(\underline{x}) - q(\underline{x})) = 0 \quad (1.32)$$

où  $\mathbf{n}(\underline{x})$  est le vecteur normale extérieure à la frontière. Dans le cas d'un fluide au repos, les équations 1.16 et 1.32 donnent:

$$p(\underline{x}) - \frac{Z(\underline{x})}{\rho_0 j \omega} \left( \frac{\partial p}{\partial n}(\underline{x}) - \mathbf{f}(\underline{x}) \cdot \mathbf{n}(\underline{x}) \right) = -Z(\underline{x})q(\underline{x}) \quad (1.33)$$

En prenant  $\mathbf{f}(\underline{x}) = 0$  sur la paroi, ce que l'on supposera par la suite, on obtient alors:

$$\frac{\partial p}{\partial n}(\underline{x}) - \sigma(\underline{x})p(\underline{x}) = \rho_0 j \omega q(\underline{x}) \quad (1.34)$$

où on a posé

$$\sigma(\underline{x}) = \frac{\rho_0 j \omega}{Z(\underline{x})} \quad (1.35)$$

2-L'effet d'une vitesse uniforme  $\mathbf{v}_0$  parallèle à la paroi du guide modifie la condition d'interface. L'équation 1.16 pour un mouvement stationnaire devient:

$$\rho_0 |\mathbf{v}_0| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n_0} - \rho_0 j \omega \mathbf{v} + \nabla p = 0 \quad (1.36)$$

avec  $\frac{\partial g}{\partial n_0} = \nabla g \cdot \mathbf{n}_0$ . En multipliant l'équation 1.36 par  $\cdot \mathbf{n}$ , on obtient:

$$\rho_0 (|\mathbf{v}_0| \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\partial n_0} - j \omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (1.37)$$

avec  $\frac{\partial g}{\partial n} = \nabla g \cdot \mathbf{n}$ . En remplaçant  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  par  $\left[ q(\underline{x}) + \frac{p(\underline{x})}{Z} \right]$  et en considérant l'impédance uniforme, l'équation 1.37 devient:

$$\frac{\partial p}{\partial n}(\underline{x}) - \sigma p(\underline{x}) + \sigma \frac{|\mathbf{v}_0|}{j \omega} \frac{\partial p}{\partial n_0}(\underline{x}) = \rho_0 j \omega q(\underline{x}) - \rho_0 |\mathbf{v}_0| \frac{\partial q(\underline{x})}{\partial n_0} \quad (1.38)$$

Des conditions aux limites "normales" n'introduisent que des dérivées normales de la pression. Les conditions (1.34) sont des conditions aux limites normales. Les conditions (1.38) sont des conditions aux limites normales seulement si les parois sont parfaitement rigides (c'est-à-dire  $\sigma = 0$ ).

3-Pour un fluide visqueux, les conditions aux limites classiques imposent une vitesse nulle le long des parois pour une paroi parfaitement rigide. On introduit la notion de couche limite à l'intérieur de laquelle la partie rotationnelle  $\Psi$  n'est plus négligeable. Elle vérifie:

$$\Delta \Psi + \frac{\rho_0 j \omega}{\mu} \Psi = 0$$

Montrons que  $\Psi$  décroît de manière exponentielle lorsqu'on s'éloigne de la frontière. Notons  $\alpha = (1 + j) \sqrt{\frac{\rho_0 \omega}{2\mu}}$ . La relation intégrale pour l'équation de Helmholtz montre que:

$$\Psi(\underline{y}) = \int_{\delta S} \left[ \Psi(\underline{x}) \frac{\partial G^\alpha}{\partial \mathbf{n}_x}(\underline{y} - \underline{x}) - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}_x}(\underline{x}) G^\alpha(\underline{y} - \underline{x}) \right] d\underline{x} \quad (1.39)$$

$\delta S$  est la frontière d'une section de la gaine et  $\mathbf{n}_x$  sa normale extérieure. Avec  $G^\alpha(\underline{x}) = \frac{e^{j\alpha|\underline{x}|}}{4\pi|\underline{x}|}$ ,  $\Psi$  est exponentiellement décroissant quand on s'éloigne de la frontière et est donc concentré dans une couche limite. L'épaisseur caractéristique de la couche limite est  $\sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0 \omega}}$ .

Cremer (1948 [13]) introduit une condition d'impédance équivalente valable pour des guides suffisamment larges où la couche limite est considérée très mince par rapport à la section du guide. Cette impédance traduit les pertes dues à la viscosité mais aussi à la conductivité thermique à l'intérieur de la couche limite.

Soit  $\Omega$  un domaine ouvert borné de  $R^3$  de frontière  $\Gamma$ , une variété différentielle  $C^\infty$  de dimension 2 où  $\Omega$  est localement d'un côté de  $\Gamma$ .

Cherchons  $p(\underline{x})$ , solution du problème suivant:

$$\begin{cases} \Delta p(\underline{x}) + k^2 p(\underline{x}) = 0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial n}(\underline{x}) - \sigma(\underline{x})p(\underline{x}) = g(\underline{x}) & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (1.42)$$

avec  $\sigma(\underline{x}) \in C^\infty(\Gamma)$  et  $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

Il existe une solution  $\omega(\underline{x})$  (Lions 1972 [45], Théorème 7.4, page 189) dans  $H^1(\Omega)$  si et seulement si l'équation de compatibilité est vérifiée.

$$\langle g(\underline{x}) | v(\underline{x}) \rangle = 0 \quad \forall v \in N \quad (1.43)$$

au sens des distributions avec  $N = \{v \in H^1(\Omega) \mid \frac{\partial v}{\partial n} - \sigma v = 0 \quad \Delta v = -k^2 v\}$ . Si l'équation est vérifiée,  $\omega(\underline{x}) + v(\underline{x})$  est aussi solution  $\forall v \in N$ .

Si  $k^2$  n'est pas une valeur propre du problème,  $N = \{0\}$ . L'existence et l'unicité de la solution sont alors assurées. Si  $k^2$  est une valeur propre du problème, alors  $\dim N > 0$ . Si une solution existe, elle est alors définie à un élément du noyau  $N$  près.

En pratique, nous séparerons  $\Gamma$  en quatre parties disjointes  $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_s$  et  $\Gamma_\Sigma$ :  $\Gamma = \Gamma_A \cup \Gamma_B \cup \Gamma_s \cup \Gamma_\Sigma$  (voir figure 1.1).

$\Gamma_A$  est la frontière commune avec le domaine amont.

$\Gamma_B$  est la frontière commune avec le domaine aval.

$\Gamma_s$  est la partie de la frontière contenant la source secondaire.

$\Gamma_\Sigma$  est la partie de la frontière décrivant la paroi du guide d'onde.

Nous définissons  $\sigma(\underline{x})$  à partir de l'impédance de paroi  $Z_\Sigma(\underline{x})$  et de source  $Z_s$ .

$$\begin{cases} \sigma(\underline{x}) = 0 & \text{sur } \Gamma_A \cup \Gamma_B \\ \sigma(\underline{x}) = \frac{\rho_0 j \omega}{Z_s} & \text{sur } \Gamma_s \\ \sigma(\underline{x}) = \frac{\rho_0 j \omega}{Z_\Sigma(\underline{x})} & \text{sur } \Gamma_\Sigma \end{cases} \quad (1.44)$$

On régularise  $\sigma(\underline{x})$  pour obtenir  $\sigma(\underline{x})$  suffisamment régulier. Nous définissons  $g(\underline{x})$  à partir du débit volumique par unité de surface  $q^A(\underline{x})$ ,  $q^B(\underline{x})$  et  $q_s$ .

$$\begin{cases} g(\underline{x}) = \rho_0 j \omega q^A(\underline{x}) & \text{sur } \Gamma_A \\ g(\underline{x}) = \rho_0 j \omega q^B(\underline{x}) & \text{sur } \Gamma_B \\ g(\underline{x}) = \rho_0 j \omega q_s & \text{sur } \Gamma_s \\ g(\underline{x}) = 0 & \text{sur } \Gamma_\Sigma \end{cases} \quad (1.45)$$

Introduisons une fonction de Green  $G(\underline{x}/\underline{y})$  qui vérifie:

$$\Delta_x G(\underline{x}/\underline{y}) + k^2 G(\underline{x}/\underline{y}) = -\delta(\underline{x} - \underline{y}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (1.46)$$

où  $\delta$  est la fonction dirac 3D au point  $\underline{y}$ , position d'une source ponctuelle unitaire.

La pression  $p(\underline{x})$  vérifie l'équation intégrale suivante:

$$\forall \underline{x} \in \Gamma \quad \frac{1}{2} p(\underline{x}) = \int_\Gamma G(\underline{x}/\underline{y}) \frac{\partial p(\underline{y})}{\partial n} d\underline{y} - \int_\Gamma p(\underline{y}) \frac{\partial G(\underline{x}/\underline{y})}{\partial n} d\underline{y} \quad (1.47)$$

Pour une onde plane harmonique dont l'angle local d'incidence par rapport à la paroi est noté  $\theta$ , l'expression de cette impédance est la suivante:

$$Z_{perte} = \frac{\rho_0 C_0 e^{i\frac{\pi}{4}}}{\eta_{perte}(\omega) [\sin^2(\theta) + (\gamma - 1)Pr^{-\frac{1}{2}}]} \quad (1.40)$$

où  $\eta_{perte}(\omega) = \left(\frac{\omega\mu}{\rho_0 C_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}$  et  $Pr$  est le nombre de Prandtl égal à  $\frac{\mu C_p}{K}$ .

On peut aussi introduire  $\sigma_{perte}$  dû aux effets de la viscosité et de la dissipation thermique le long des parois d'un guide parfaitement rigide.

$$\sigma_{perte}(\underline{x}) = \frac{\rho_0 j\omega}{Z_{perte}(\underline{x})} \quad (1.41)$$

La solution exacte pour la propagation d'une onde plane dans un guide circulaire de section uniforme a été présentée par Kirchhoff (1868 [41]) à partir des équations de Navier-Stokes. Les équations obtenues par cette théorie sont cependant compliquées par rapport à nos applications. Une généralisation des équations de Kirchhoff a été développée pour les modes d'ordre supérieur (Bruneau 1989 [10]).

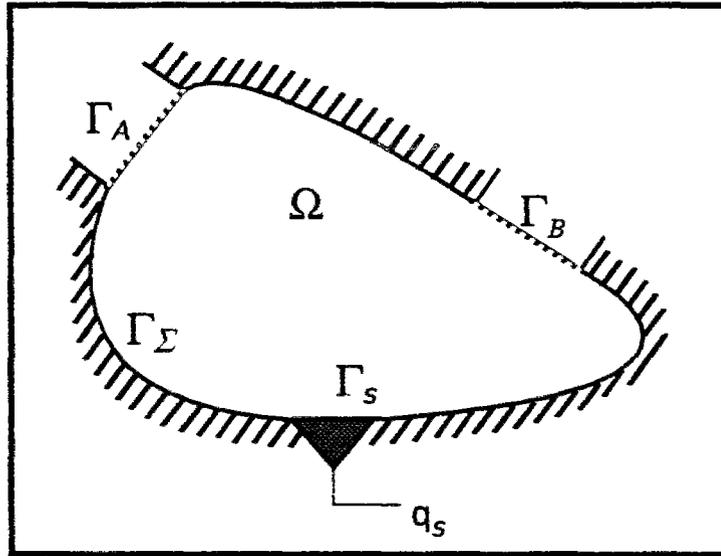


FIG. 1.1 - *Domaine de la discontinuité.*

## 1.2 Résultats d'existence et d'unicité

Nous allons traiter le problème de propagation acoustique dans un guide d'onde pour le cas harmonique. Nous ferons d'abord l'hypothèse que le fluide est parfait et au repos. Le guide d'onde est décomposé en une suite de domaines.

En introduisant la condition aux limites du problème 1.42 dans l'équation 1.47:

$$\forall \underline{x} \in \Gamma \quad \frac{1}{2}p(\underline{x}) = \int_{\Gamma} G(\underline{x}/\underline{y})g(\underline{y})d\underline{y} + \int_{\Gamma} p(\underline{y})\left\{\sigma(\underline{x})G(\underline{x}/\underline{y}) - \frac{\partial G(\underline{x}/\underline{y})}{\partial n}\right\}d\underline{y} \quad (1.48)$$

Il existe alors une fonction  $H(\underline{x}/\underline{y})$  telle que:

$$\forall \underline{x} \in \Gamma \quad p(\underline{x}) = \int_{\Gamma} H(\underline{x}/\underline{y})g(\underline{y})d\underline{y} \quad (1.49)$$

En notant  $p^A(\underline{x})$  et  $p^B(\underline{x})$  les traces de  $p$  sur  $\Gamma_A$  et  $\Gamma_B$ , on obtient la relation linéaire suivante où  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$  sont des points de  $\Gamma_A$  et  $\Gamma_B$ :

$$\begin{pmatrix} p^A(\underline{x}) \\ p^B(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{AA}(\underline{x}/\underline{y}) & Z_{AB}(\underline{x}/\underline{y}) \\ Z_{BA}(\underline{x}/\underline{y}) & Z_{BB}(\underline{x}/\underline{y}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q^A(\underline{y}) \\ q^B(\underline{y}) \end{pmatrix} + q^s \begin{pmatrix} Z_{sA}(\underline{x}) \\ Z_{sB}(\underline{x}) \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

avec  $Z_{AA}(\underline{x}/\underline{y}) \cdot q^A(\underline{y}) = \rho_0 j \omega \int_{\Gamma_A} H(\underline{x}/\underline{y})q^A(\underline{y})d\underline{y}$ . Les autres opérateurs s'écrivant de manière

analogue. Nous appellerons  $\mathbf{Z}(\underline{x}/\underline{y}) = \begin{bmatrix} Z_{AA}(\underline{x}/\underline{y}) & Z_{AB}(\underline{x}/\underline{y}) \\ Z_{BA}(\underline{x}/\underline{y}) & Z_{BB}(\underline{x}/\underline{y}) \end{bmatrix}$  opérateur impédance du

domaine  $\Omega$ . Nous appellerons  $\mathbf{Z}_s(\underline{y}) = \begin{bmatrix} Z_{sA}(\underline{y}) \\ Z_{sB}(\underline{y}) \end{bmatrix}$  vecteur impédance du domaine  $\Omega$ .

Dans le cas d'un fluide visqueux, les résultats d'existence et d'unicité restent valables car l'opérateur associé est toujours "proprement elliptique" (Lions 1972 [45], page 110).  $k^2$  est remplacé par  $\tilde{k}^2$  qui est un complexe de partie imaginaire non nulle. Si l'on prend  $\sigma = 0$ , c'est à dire des conditions d'interface parfaitement rigides, l'ensemble  $N = \{0\}$  car les valeurs propres du laplacien sont réelles. L'existence et l'unicité de la solution sont alors assurées.

Dans le cas d'un fluide avec vitesse d'écoulement uniforme, nous ne traiterons que le cas avec parois parfaitement rigides car (Lions 1972 [45], Théorème 7.4, page 189) ne considère que des conditions aux limites "normales" et le théorème n'est pas valable pour des conditions incluant des dérivées tangentielles. L'opérateur est toujours "proprement elliptique" et les résultats d'existence et d'unicité sont encore valables.

### 1.3 Guide d'onde droit

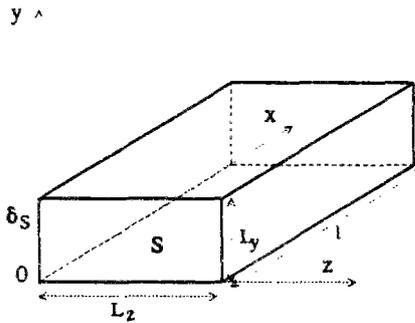


FIG. 1.2 - Segment de guide droit.

Nous nous plaçons d'abord dans le cas d'un guide d'onde avec impédances de paroi et de sources infinies pour un fluide parfait au repos. Nous appellerons guide d'onde droit un

domaine cylindrique de  $R^3$  de longueur  $l$  et de section  $S$  orthogonale à l'axe  $x$  du guide.  $S$  est un domaine ouvert de  $R^2$  de frontière  $\delta S$  (figure 1.2).

Nous écrivons la matrice d'impédance associée à la propagation par modes, caractéristique des guides droits. Nous présenterons ensuite deux écritures équivalentes en introduisant les matrices de transfert et de diffusion. Nous examinerons enfin les effets de la viscosité, d'une impédance de paroi finie et d'une vitesse d'écoulement uniforme.

### 1.3.1 Matrice d'impédance

Dans une section transversale, nous pouvons définir des modes propres  $\Psi_i(y, z)$  du Laplacien bidimensionnel  $\Delta_{yz}$  (où  $y, z$  sont les coordonnées dans la section) et leurs valeurs propres  $\lambda_i$  associées.

$$\Delta_{yz}\Psi_i(y, z) = \lambda_i\Psi_i(y, z) \quad (1.51)$$

Les modes propres vérifient aussi la condition de rigidité sur la frontière  $\delta S$ :

$$\nabla\Psi_i(y, z)\cdot\mathbf{n}(y, z) = 0$$

Les valeurs propres sont alors réelles et négatives car:

$$\lambda_i = -\frac{\int_S \left| \frac{\partial\Psi_i}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial\Psi_i}{\partial z} \right|^2 dydz}{\int_S |\Psi_i|^2 dydz} \quad (1.52)$$

On pose alors  $\lambda_i = -K_i^2$ . En prenant  $S, C^1$  par morceaux, les modes  $\Psi_i(y, z)$  forment une base hilbertienne de  $H^1(S)$  pour la norme de  $L^2(S)$  et leurs valeurs propres associées forment une suite décroissante tendant vers  $-\infty$  (Raviart 1983 [64]).

Nous allons développer  $p$  sur la base des modes propres transversaux.

$$p(x, y, z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)\Psi_i(y, z) \quad (1.53)$$

En utilisant l'équation de Helmholtz, on obtient alors que  $f_i(x)$  vérifie l'équation suivante:

$$\frac{d^2 f_i}{dx^2} + (k^2 - K_i^2)f_i = 0 \quad (1.54)$$

Nous introduisons  $k_i$  tel que  $k_i^2 = -k^2 + K_i^2$ .  $k_i$  est le nombre d'onde associé au mode de propagation  $\Psi_i(y, z)$ .

$$f_i(x) = a_i^+ e^{k_i x} + a_i^- e^{-k_i x} \quad (1.55)$$

On obtient donc l'expression finale de la pression  $p(x, y, z)$ :

$$p(x, y, z) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i^+ e^{k_i x} + a_i^- e^{-k_i x})\Psi_i(y, z) \quad (1.56)$$

La pression s'exprime donc sous la forme d'une somme de modes se propageant vers l'amont ou vers l'aval.

Le nombre d'onde  $k_i$  peut être réel ou imaginaire pur. Les  $K_i$  sont croissants et tendent vers l'infini avec  $i$ . Donc pour une fréquence donnée, on a un nombre fini de modes dont le  $k_i$  associé est imaginaire pur. Ce sont les modes **propagatifs**. Les autres modes sont dits **évanescents**. Ils sont amortis de façon exponentielle lorsque l'onde avance. Inversement, pour un mode donné, il existe une fréquence appelée **fréquence de coupure** à partir de laquelle le mode devient propagatif.

Quelle que soit la géométrie, le premier mode est plan et a une fréquence de coupure nulle. Cela veut dire qu'il est toujours propagatif. La présence d'ondes évanescentes est intéressante car elle permet de faire des troncatures sur les sommations modales. Pour une fréquence donnée, on peut se contenter de tenir compte des  $N$  premiers modes en considérant que les modes supérieurs sont fortement atténués sur la longueur  $l$  de la portion du guide.

Pour un guide d'onde de section rectangulaire de largeurs  $L_y$  et  $L_z$ , on peut déterminer les  $K_i$  qui s'expriment en fait par un double indice  $K_{mn}$ .

$$K_{mn}^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{L_y^2} + \frac{n^2}{L_z^2} \right) \quad (1.57)$$

$$k_{mn}^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{L_y^2} + \frac{n^2}{L_z^2} \right) - \frac{\omega^2}{C_0^2} \quad (1.58)$$

Les modes propres  $\Psi_{mn}(y, z)$  qui forment une base orthonormée se séparent en un produit de deux cosinus des variables  $y$  et  $z$ .

$$\Psi_{mn}(y, z) = \sqrt{\frac{(2 - \delta_{m0})(2 - \delta_{n0})}{L_y L_z}} \cos\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L_z} z\right) \quad (1.59)$$

Tenons maintenant compte des conditions sur  $\Gamma_A$  et  $\Gamma_B$  correspondants aux sections ( $x = 0$ ) et ( $x = l$ ). Introduisons  $q^A$ ,  $q^B$ ,  $p^A$  et  $p^B$  les vecteurs dont la  $i^{\text{ème}}$  composante est  $q_i^A$ ,  $q_i^B$ ,  $p_i^A$  et  $p_i^B$ . Ces dernières sont les projections modales de  $q^A(y, z)$ ,  $q^B(y, z)$ ,  $p^A(y, z)$  et  $p^B(y, z)$ .

$$\begin{cases} q_i^A &= \int_S \Psi_i(y, z) q^A(y, z) dy dz \\ q_i^B &= \int_S \Psi_i(y, z) q^B(y, z) dy dz \\ p_i^A &= \int_S \Psi_i(y, z) p^A(y, z) dy dz \\ p_i^B &= \int_S \Psi_i(y, z) p^B(y, z) dy dz \end{cases} \quad (1.60)$$

En l'absence de sources, on obtient alors (voir Annexe A):

$$\begin{cases} p_i^A &= \frac{\rho_0 j \omega}{k_i \text{sh}(k_i l)} (ch(k_i l) q_i^A + q_i^B) \\ p_i^B &= \frac{\rho_0 j \omega}{k_i \text{sh}(k_i l)} (ch(k_i l) q_i^B + q_i^A) \end{cases} \quad (1.61)$$

Retenons  $N$  et  $M$  modes respectivement de chaque côté du segment du guide droit.

Introduisons  $Z^{AA}$ ,  $Z^{AB}$ ,  $Z^{BA}$  et  $Z^{BB}$  des matrices de dimensions  $(N \times N)$ ,  $(N \times M)$ ,  $(M \times N)$  et  $(M \times M)$  respectivement. Introduisons aussi  $Z_{sA}$  et  $Z_{sB}$  des vecteurs de dimensions  $N$  et  $M$  respectivement. Notons  $\underline{x}_1 = (0, y_1, z_1)$  et  $\underline{x}_2 = (0, y_2, z_2)$ .

$$Z_{ij}^{AA} = \rho_0 j \omega \int_{\Gamma_A} \int_{\Gamma_A} \Psi_i(y_1, z_1) H(\underline{x}_1 / \underline{x}_2) \Psi_j(y_2, z_2) dy_1 dz_1 dy_2 dz_2 \quad (1.62)$$

Les autres blocs ou vecteurs s'écrivent de manière analogue.

On peut alors définir la matrice d'impédance  $\begin{bmatrix} Z^{AA} & Z^{AB} \\ Z^{BA} & Z^{BB} \end{bmatrix}$  que l'on notera  $\underline{Z}$  de dimension  $(N + M) \times (N + M)$  et le vecteur source impédance  $\begin{pmatrix} Z_{sA} \\ Z_{sB} \end{pmatrix}$  de dimension  $(N + M)$  que l'on notera  $\underline{Z}s$ :

$$\begin{pmatrix} p^A \\ p^B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Z^{AA} & Z^{AB} \\ Z^{BA} & Z^{BB} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q^A \\ q^B \end{pmatrix} + q_s \begin{pmatrix} Z_{sA} \\ Z_{sB} \end{pmatrix} \quad (1.63)$$

Le théorème de réciprocité indique que  $G(\underline{x}/\underline{y}) = G(\underline{y}/\underline{x})$ . On en déduit les propriétés de symétrie:

$$\begin{cases} Z_{mn}^{AA} = Z_{nm}^{AA} \\ Z_{mn}^{BB} = Z_{nm}^{BB} \\ Z_{mn}^{BA} = Z_{nm}^{AB} \end{cases} \quad (1.64)$$

Pour un guide d'onde droit à parois rigides, avec un fluide parfait au repos,  $\underline{Z}$  s'écrit:

$$\begin{cases} Z_{mn}^{AA} = \frac{\rho_0 j \omega}{k_m \operatorname{th}(k_m l)} \delta_{mn} \\ Z_{mn}^{BB} = \frac{\rho_0 j \omega}{k_m \operatorname{th}(k_m l)} \delta_{mn} \\ Z_{mn}^{AB} = \frac{\rho_0 j \omega}{k_m \operatorname{sh}(k_m l)} \delta_{mn} \\ Z_{mn}^{BA} = \frac{\rho_0 j \omega}{k_m \operatorname{sh}(k_m l)} \delta_{mn} \end{cases} \quad (1.65)$$

On vérifie que  $\underline{Z}$  n'est pas défini pour  $k_m l = in\pi$ , c'est-à-dire  $k^2 = -\lambda_{mn} = K_m^2 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ . Les  $\lambda_{mn}$  sont les valeurs propres du problème de Neumann pour le domaine cylindrique  $[0, l] \times S$  de la portion de guide droit. On retrouve ainsi les conclusions de la section 2 sur l'existence de la solution.

### 1.3.2 Matrice de transfert

Une matrice de transfert  $\begin{bmatrix} T^{pp} & T^{pq} \\ T^{qp} & T^{qq} \end{bmatrix}$  que l'on notera  $\underline{T}$  de dimension  $2N \times 2N$  et le vecteur source transfert  $\begin{pmatrix} T_{s_p} \\ T_{s_q} \end{pmatrix}$  que l'on notera  $\underline{T}s$  de dimension  $2N$  sont souvent introduits à la place de la matrice d'impédance.

### 1.3.5 Effet d'une impédance finie

L'équation 1.54 n'est plus valable. Nous allons projeter l'équation de Helmholtz sans source sur les modes propres rigides  $\Psi_i$  de la section  $S$ .

$$\int_S \Psi_i \frac{\partial^2 p}{\partial^2 x} dydz + \int_S \Psi_i \Delta_{yz} p dydz + k^2 \int_S \Psi_i p dydz = 0 \quad (1.82)$$

Après intégration par parties, on obtient:

$$\frac{d^2 f_i}{dx^2}(x) + (k^2 - K_i^2) f_i(x) + \int_{\delta S} \sigma \Psi_i p d\delta S = 0 \quad (1.83)$$

$$\frac{d^2 f_i}{dx^2}(x) + (k^2 - K_i^2) f_i(x) + \sum_{j=0}^{j=\infty} f_j(x) \int_{\delta S} \sigma \Psi_i \Psi_j d\delta S = 0 \quad (1.84)$$

En dessous de la première fréquence de coupure et pour des parois assez rigides, on peut approcher la pression  $p$  par une onde plane. On obtient alors (en considérant l'impédance uniforme):

$$\bar{k}_0^2 = -k^2 - \sigma \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{A}} \quad (1.85)$$

où  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{A}$  sont respectivement le périmètre et l'aire de la section  $S$ .

En considérant la propagation avec parois d'impédance finie comme une petite correction par rapport à la propagation avec parois parfaitement rigides:

$$\Re(k_0) = -\frac{\Im(\sigma) C_0 \mathcal{L}}{\omega 2\mathcal{A}} \quad (1.86)$$

Comme  $\sigma = \frac{\rho_0 j \omega}{Z}$ :

$$\Re(k_0) = -\frac{\Re(Z) \rho_0 C_0 \mathcal{L}}{|Z|^2 2\mathcal{A}} \quad (1.87)$$

$\Re(k_0)$  est l'atténuation par unité de longueur du mode plan due à l'absorption de parois. Dans le cas de parois parfaitement rigides, l'effet de la couche limite peut être traité en remplaçant  $Z$  par  $Z_{perte}$  dans l'équation 1.87:

$$\Re(k_0) = -\left(\frac{\omega \mu}{\rho_0 C_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathcal{L}}{2\sqrt{2}\mathcal{A}} \left[1 + (\gamma - 1) Pr^{-\frac{1}{2}}\right] \quad (1.88)$$

Pour l'onde plane, l'angle d'incidence  $\theta$  est pris rasant (c'est-à-dire  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ). Bruneau et *al.* (1987 [9]) fournissent une extension de l'impédance de paroi afin de calculer l'atténuation de parois pour des modes d'ordre supérieur.

Pour l'air dans des conditions standards:

$$\Re(k_0) = 2.98 \cdot 10^{-5} \sqrt{f} \frac{\mathcal{L}}{2\mathcal{A}} \quad (1.89)$$

où  $f$  est la fréquence.

La matrice de diffusion d'un guide d'onde droit, avec parois rigides et fluide parfait au repos s'écrit:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{bmatrix} e^{k_j l} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & e^{k_j l} \delta_{ij} \end{bmatrix} \quad (1.77)$$

On remarque que la matrice de diffusion est diagonale, ce qui veut dire qu'il n'y a ni réflexion, ni diffusion.

Nous verrons plus loin que la présentation par matrice de diffusion permet de joindre les matrices des sous-domaines pour écrire la matrice de diffusion globale. L'assemblage est légèrement plus long que pour des matrices de transfert. Par contre, le rapport entre les nombres de modes amont et aval (N et M) est libre et le calcul numérique est bien conditionné.

### 1.3.4 Effet de la viscosité

L'effet de la viscosité sur la propagation est double: modification des conditions aux limites et correction de l'équation de Helmholtz. Nous avons vu que les conditions aux limites pour un fluide visqueux dans un guide d'onde suffisamment large peuvent être modélisées par une condition d'impédance équivalente. Nous verrons dans la section suivante l'effet d'une impédance finie sur la propagation. Dans cette section, nous nous contentons d'examiner l'effet d'une correction de l'équation de Helmholtz sur la propagation d'un fluide visqueux.

Nous remplaçons  $k$  par  $\tilde{k}$ . Le nombre d'onde  $\tilde{k}_i$  associé au mode de propagation  $\Psi_i(y, z)$  vérifie:

$$\tilde{k}_i^2 = -\tilde{k}^2 + K_i^2 \quad (1.78)$$

$$\tilde{k}_i^2 = -\frac{\rho_0 \omega^2}{\rho_0 C_0^2 - \frac{4}{3} j \omega \mu} + K_i^2 \quad (1.79)$$

$\tilde{k}_i$  a donc une partie réelle non nulle. Par conséquent, tout mode propagatif est légèrement atténué. On peut ainsi calculer  $\Re(\tilde{k}_0)$ , l'atténuation par unité de longueur du mode plan pour un fluide peu visqueux:

$$\Re(\tilde{k}_0) = -\frac{2}{3} \frac{\mu \omega^2}{\rho_0 C_0^3} \quad (1.80)$$

Cette atténuation est une partie de l'atténuation appelée atténuation "classique" qui provient d'une part de la dissipation visqueuse d'autre part de la dissipation par conduction thermique. L'atténuation due à la conductivité thermique a pour expression:

$$\Re(\tilde{k}_0) = -\frac{\gamma - 1}{2Pr} \frac{\mu \omega^2}{\rho_0 C_0^3} \quad (1.81)$$

On observe que l'atténuation est en  $\omega^2$  et donc forte aux hautes fréquences.

Pour la gamme de fréquences employée dans nos applications, cette atténuation "classique" est cependant négligeable devant l'atténuation de couche limite (Pierce 1992 [61]).

dimension  $(N + M)$ :

$$\begin{pmatrix} a^- \\ b^+ \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{AA} & D_{AB} \\ D_{BA} & D_{BB} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a^+ \\ b^- \end{pmatrix} + q_s \begin{pmatrix} A^- \\ B^+ \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

où  $D_{AA}$ ,  $D_{AB}$ ,  $D_{BA}$  et  $D_{BB}$  sont des matrices de dimensions  $(N \times N)$ ,  $(N \times M)$ ,  $(M \times N)$  et  $(M \times M)$  respectivement.  $A^-$  et  $B^+$  sont des vecteurs de dimensions  $N$  et  $M$  respectivement.

Les composantes des vecteurs  $a^+$  et  $a^-$  de dimension  $N$  sont définies comme dans l'équation (1.56), c'est-à-dire:

$$\begin{cases} p_i^A & = & a_i^+ + a_i^- \\ \rho_0 j \omega q_i^A & = & k_i^A (-a_i^+ + a_i^-) \end{cases} \quad (1.70)$$

On définit de même les vecteurs  $b^+$  et  $b^-$  de dimension  $M$ :

$$\begin{cases} p_i^B & = & b_i^+ + b_i^- \\ \rho_0 j \omega q_i^B & = & k_i^B (b_i^+ - b_i^-) \end{cases} \quad (1.71)$$

On introduit aussi la matrice de diffusion  $\underline{\underline{D}}$  de dimension  $(N + M) \times (N + M)$  et le vecteur source diffusion  $\underline{\underline{D}}_s$  de dimension  $(N + M)$  où on inverse simplement  $a^-$  et  $b^+$  ainsi que  $A^-$  et  $B^+$ :

$$\begin{pmatrix} b^+ \\ a^- \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{BA} & D_{BB} \\ D_{AA} & D_{AB} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a^+ \\ b^- \end{pmatrix} + q_s \begin{pmatrix} B^+ \\ A^- \end{pmatrix}. \quad (1.72)$$

La première écriture est utile pour le calcul de la matrice de diffusion du sous-domaine. Les matrices de diffusion et d'impédance sont en effet reliées par (voir Annexe B):

$$\underline{\underline{D}} = (\underline{\underline{ZM}} - \underline{\underline{1}})^{-1} (\underline{\underline{ZM}} + \underline{\underline{1}}) \quad (1.73)$$

$$\begin{pmatrix} A^- \\ B^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{D}}) \begin{pmatrix} Z_{sA} \\ Z_{sB} \end{pmatrix} \quad (1.74)$$

où  $\underline{\underline{1}}$  est la matrice unité et  $\underline{\underline{M}}$  est une matrice diagonale avec

$$M_{ii} = \frac{k_i^A}{\rho_0 j \omega} \quad \text{si } 0 \leq i \leq N - 1 \quad (1.75)$$

$$M_{ii} = \frac{k_{i-N}^B}{\rho_0 j \omega} \quad \text{si } N \leq i \leq N + M - 1 \quad (1.76)$$

$k_i^A$  et  $k_i^B$  sont les nombres d'onde longitudinaux associés aux modes  $\Psi_i^A$  et  $\Psi_i^B$  respectivement.

La seconde écriture de la matrice de diffusion  $\underline{\underline{D}}$ , présente l'avantage, quant à elle, de donner les coefficients de transmission sur la diagonale formée par  $D_{BA}$  et  $D_{AB}$ . En considérant  $b^-$  nul, cette matrice donne la décomposition modale de l'onde réfléchie  $a^-$  et de l'onde transmise  $b^+$  en fonction de la décomposition modale de l'onde incidente  $a^+$ . On l'appelle matrice de diffusion car, pour un mode donné incident, les ondes réfléchies et transmises se décomposent, en général sur un grand nombre de modes.

$$\begin{pmatrix} p^B \\ q^B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T^{pp} & T^{pq} \\ T^{qp} & T^{qq} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p^A \\ q^A \end{pmatrix} + q_s \begin{pmatrix} T s_p \\ T s_q \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

où  $T^{pp}$ ,  $T^{pq}$ ,  $T^{qp}$  et  $T^{qq}$  sont des matrices de dimension  $N$ .  $T s_p$  et  $T s_q$  sont des vecteurs de dimensions  $N$ .

La présentation avec matrice de transfert a l'avantage de permettre la multiplication immédiate des matrices des sous-domaines pour calculer la matrice globale du domaine étudié. Par contre, si on désire calculer  $\underline{T}$  à partir de  $\underline{Z}$ , cette présentation oblige à prendre  $M=N$ . C'est-à-dire le même nombre de modes de part et d'autre du domaine alors que les sections peuvent être de dimensions très différentes à chaque extrémité, ce qui inciterait à prendre un nombre de modes  $M$  aval différent du nombre de modes  $N$  amont.

Les matrices de transfert et d'impédance sont reliées par les relations suivantes:

$$\begin{cases} T^{pp} = Z^{BB}(Z^{AB})^{-1} \\ T^{pq} = Z^{BA} - Z^{BB}(Z^{AB})^{-1}Z^{AA} \\ T^{qp} = (Z^{AB})^{-1} \\ T^{qq} = -(Z^{AB})^{-1}Z^{AA} \\ T s_p = Z s_B - Z^{BB}(Z^{AB})^{-1}Z s_A \\ T s_q = -(Z^{AB})^{-1}Z s_A \end{cases} \quad (1.67)$$

La matrice de transfert d'un guide d'onde droit, avec parois rigides et fluide parfait au repos s'écrit:

$$\begin{cases} T_{mn}^{pp} = ch(k_m l) \delta_{mn} \\ T_{mn}^{pq} = -\frac{\rho_0 j \omega}{k_m} sh(k_m l) \delta_{mn} \\ T_{mn}^{qp} = \frac{k_m sh(k_m l)}{\rho_0 j \omega} \delta_{mn} \\ T_{mn}^{qq} = -ch(k_m l) \delta_{mn} \end{cases} \quad (1.68)$$

### 1.3.3 Matrice de diffusion

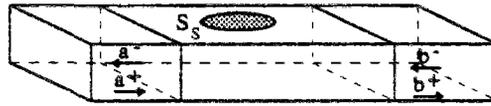


FIG. 1.3 - Segment de guide droit avec une source.

Nous préférons introduire la matrice de diffusion  $\begin{bmatrix} D_{AA} & D_{AB} \\ D_{BA} & D_{BB} \end{bmatrix}$  que l'on notera  $\underline{D}$  de dimension  $(N+M) \times (N+M)$  et le vecteur source diffusion  $\begin{pmatrix} A^- \\ B^+ \end{pmatrix}$  que l'on notera  $\underline{D}_s$  de

L'équation 1.84 montre que, dans le cas général, il y a couplage entre les modes du problème à frontière parfaitement rigide  $\Psi_i$ . Ces modes ne sont plus les modes propres du problème. Il est commode de remplacer les modes  $\Psi_i$  par les modes propres du problème réel que l'on notera  $\phi_i$  associés aux valeurs propres  $\lambda_i$ .

$$\begin{cases} \Delta_{yz}\phi_i = \lambda_i\phi_i \text{ sur } S \\ \frac{\partial\phi_i}{\partial n} = \sigma\phi_i \text{ sur } \delta S \end{cases} \quad (1.90)$$

Les valeurs propres  $\lambda_i$  ne sont plus alors réelles car:

$$\lambda_i = -\frac{\int_S \left| \frac{\partial\phi_i}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial\phi_i}{\partial z} \right|^2 dydz - \int_{\delta S} \sigma |\phi_i|^2 d\delta S}{\int_S |\phi_i|^2 dydz} \quad (1.91)$$

et

$$\tilde{k}_i^2 = -k^2 - \lambda_i \quad (1.92)$$

On vérifie que les nombres d'onde  $\tilde{k}_i$  ont une partie réelle non nulle et que tous les modes de propagation sont donc évanescents. En conclusion, l'effet des parois modifie sensiblement les modes de propagation et produit une atténuation des modes acoustiques. Roure (1976 [65]) décrit une méthode pour déterminer numériquement ces modes propres et valeurs propres. Il traite aussi le cas de la jonction de deux guides avec des impédances de parois différentes et donne l'expression de la matrice de transfert associée à cette sorte de discontinuité.

**Coefficient de perte:** la propagation dans des guides d'onde à parois de forte impédance peut être modélisée avec une précision satisfaisante par des modes propres rigides et des nombres d'onde légèrement modifiés:

$$k_{mn} = j \sqrt{\frac{\omega^2}{C^2} - \frac{m^2\pi^2}{L_y^2} - \frac{n^2\pi^2}{L_z^2}} - \alpha_{mn}(\omega) \quad (1.93)$$

où  $\alpha_{mn}(\omega)$  est un coefficient dépendant de la fréquence et représentant les pertes du mode  $(m, n)$ .

### 1.3.6 Effet d'une vitesse d'écoulement uniforme

Considérons une vitesse d'écoulement subsonique uniforme à nombre de Mach  $M_0$  parallèle à l'axe du guide d'onde. Le nombre d'onde  $\tilde{k}_i$  associé au mode de propagation  $\Psi_i(y, z)$  vérifie:

$$(1 - M_0^2)\tilde{k}_i^2 + 2jkM_0\tilde{k}_i = -k^2 + K_i^2 \quad (1.94)$$

La fréquence de coupure est la fréquence à partir de laquelle un mode n'est plus atténué ( $\Re(\tilde{k}_i) = 0$ ). Ces fréquences de coupure sont modifiées:

$$f_c^i = \frac{C_0}{2\pi} K_i \sqrt{1 - M_0^2} \quad (1.95)$$

Pour un mode propagatif, le nombre d'onde  $\tilde{k}_i$  est imaginaire pur et sa partie imaginaire est donnée par:

$$\Im(\tilde{k}_i) = \frac{\sqrt{k^2 - K_i^2(1 - M_0^2) - kM_0}}{1 - M_0^2} \quad (1.96)$$

$$\Im(\tilde{k}_i) = \frac{-\sqrt{k^2 - K_i^2(1 - M_0^2) - kM_0}}{1 - M_0^2} \quad (1.97)$$

Un mode propagatif pour un fluide au repos, reste propagatif et non atténué pour un fluide avec vitesse d'écoulement uniforme. Les fréquences de coupure sont abaissées et les nombres d'onde modifiés. On constate que le problème n'est plus symétrique et que le nombre d'onde pour une onde se propageant dans le sens d'écoulement est plus faible que pour une onde se propageant dans le sens contraire.

Pour un mode évanescent, le nombre d'onde  $\tilde{k}_i$  a une partie imaginaire non nulle. Elle est donnée par:

$$\Im(\tilde{k}_i) = \frac{-kM_0}{1 - M_0^2} \quad (1.98)$$

La partie réelle est égale à:

$$\Re(\tilde{k}_i) = \frac{\mp\sqrt{-k^2 + K_i^2(1 - M_0^2)}}{1 - M_0^2} \quad (1.99)$$

Pour un nombre de Mach  $M_0$  petit, l'effet d'une vitesse d'écoulement uniforme est faible. Dans la suite de l'exposé, on considérera (sauf précision contraire) un fluide parfait au repos et des parois parfaitement rigides.

## 1.4 Guide d'onde avec discontinuité

### 1.4.1 Matrice de diffusion

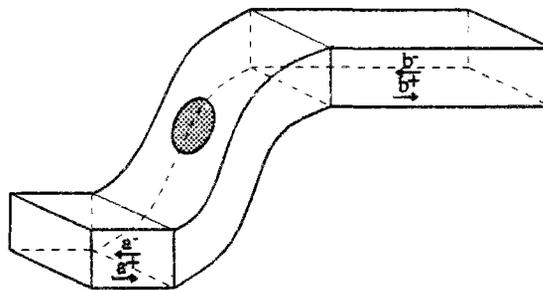


FIG. 1.4 - Discontinuité avec une source acoustique.

Dans notre étude, on considérera une gaine de ventilation comme un assemblage de guides d'onde droits (définis dans la section 1-3) séparés par des discontinuités voir figure (1.4). Dans chaque portion droite de longueur  $l$ , on ne retiendra qu'un nombre  $N$  de modes de

propagation. On considérera en effet que, pour une fréquence donnée, les modes évanescents d'ordre supérieur sont suffisamment atténués sur la portion de longueur  $l$ . Ce nombre  $N$  dépendra donc de la longueur  $l$ , de la section  $S$  et de la pulsation  $\omega$ . Prenons par exemple un guide avec parois rigides de section rectangulaire de côtés  $L_y$  et  $L_z$ . On décidera d'écartier tous les modes dont l'atténuation dépasse 40 dB sur la portion de gaine droite de longueur  $l$ . Un mode  $(m,n)$  évanescent sera donc écarté si:

$$20 \text{Log}(e^{k_{mn}l}) > 40 \text{ dB} \quad (1.100)$$

c'est-à-dire:

$$\sqrt{\pi^2 \left( \frac{m^2}{L_y^2} + \frac{n^2}{L_z^2} \right) - \frac{\omega^2}{C_0^2}} > \frac{2 \ln(10)}{l} \quad (1.101)$$

La propagation dans les discontinuités sera décrite par une matrice de diffusion  $\underline{\underline{D}}$  (son calcul fera l'objet du chapitre 2). On retiendra, comme précédemment, un nombre  $N$  et  $M$  de modes dans les portions droites amont et aval de la discontinuité. La matrice de diffusion aura donc une dimension  $(N + M) \times (N + M)$ .

La méthode par matrice de diffusion a été utilisée en électromagnétisme notamment par Mittra et Lee (1971 [51]) et en acoustique par Hudde (1989 [32]).

## 1.4.2 Assemblage

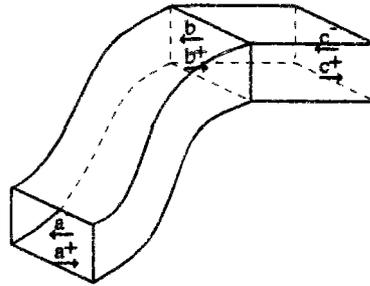


FIG. 1.5 - Assemblage de deux segments d'une gaine.

Considérons deux matrices de diffusion  $\underline{\underline{D}}^1$  et  $\underline{\underline{D}}^2$  associées aux domaines 1 et 2 (figure 1.5). Nous allons nous intéresser à calculer  $\underline{\underline{D}}$  résultat de l'assemblage des deux matrices.

$$\begin{pmatrix} b^+ \\ a^- \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{BA}^1 & D_{BB}^1 \\ D_{AA}^1 & D_{AB}^1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a^+ \\ b^- \end{pmatrix} + q_s^1 \begin{pmatrix} B^+ \\ A^- \end{pmatrix} \quad (1.102)$$

$$\begin{pmatrix} c^+ \\ b^- \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{CB}^2 & D_{CC}^2 \\ D_{BB}^2 & D_{BC}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b^+ \\ c^- \end{pmatrix} + q_s^2 \begin{pmatrix} C^+ \\ B^- \end{pmatrix} \quad (1.103)$$

$$\begin{pmatrix} c^+ \\ a^- \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{CA} & D_{CC} \\ D_{AA} & D_{AC} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a^+ \\ c^- \end{pmatrix} + q_s^1 \begin{pmatrix} C_1^+ \\ A_1^- \end{pmatrix} + q_s^2 \begin{pmatrix} C_2^+ \\ A_2^- \end{pmatrix} \quad (1.104)$$

Les blocs de matrices et vecteurs ont les expressions suivantes (où  $1^B$  est la matrice unité):

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{CA} = D_{CB}^2 (1^B - D_{BB}^1 D_{BB}^2)^{-1} D_{BA}^1 \\ D_{CC} = D_{CB}^2 (1^B - D_{BB}^1 D_{BB}^2)^{-1} D_{BB}^1 D_{BC}^2 + D_{CC}^2 \\ D_{AA} = D_{AB}^1 (1^B - D_{BB}^2 D_{BB}^1)^{-1} D_{BB}^2 D_{BA}^1 + D_{AA}^1 \\ D_{AC} = D_{AB}^1 (1^B - D_{BB}^2 D_{BB}^1)^{-1} D_{BC}^2 \\ C_1^+ = D_{CB}^2 (1^B - D_{BB}^1 D_{BB}^2)^{-1} B^+ \\ C_2^+ = D_{CB}^2 (1^B - D_{BB}^1 D_{BB}^2)^{-1} D_{BB}^1 B^- + C^+ \\ A_1^- = D_{AB}^1 (1^B - D_{BB}^2 D_{BB}^1)^{-1} D_{BB}^2 B^+ + A^- \\ A_2^- = D_{AB}^1 (1^B - D_{BB}^2 D_{BB}^1)^{-1} B^- \end{array} \right. \quad (1.105)$$

En éliminant les termes de sources, on retrouve les équations de Furnell (1989 [24]). Une fois deux matrices assemblées, l'assemblage continue ensuite de manière itérative en assemblant une troisième matrice de diffusion avec  $\underline{\mathbf{D}}$  et ainsi de suite ...

L'assemblage par matrice de diffusion n'est pas aussi efficace que celui par matrice de transfert en temps de calcul car elle demande 2 inversions et 12 multiplications (6 multiplications supplémentaires pour les termes de sources). Mais cette présentation a l'avantage de pouvoir faire intervenir localement un grand nombre de modes évanescents si le besoin se présente.

Un assemblage par matrice d'impédance a aussi été proposé par Roure (1977 [66]). Cette méthode est adaptée aux discontinuités de section pour lesquelles l'assemblage ne demande aucune inversion de matrice. Elle permet aussi de faire intervenir localement un grand nombre de modes évanescents.

Kergomard (1989 [38]) expose enfin deux autres méthodes concernant l'assemblage pour le calcul de la propagation à travers une chambre d'expansion. Ses deux méthodes apparaissent plus rapides que les précédentes car elles demandent soit une inversion matricielle en moins, soit autant d'inversions mais avec des tailles de matrices inférieures.

## 1.5 Terminaisons

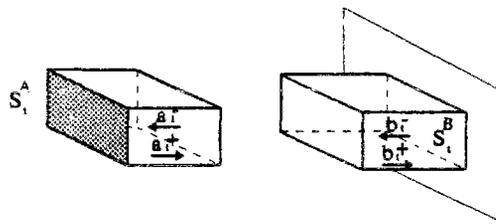


FIG. 1.6 - Terminaisons amont et aval.

La terminaison aval est modélisée par une matrice de réflexion  $R_B$ .

$$b_t^- = R_B b_t^+ \quad (1.106)$$

L'indice  $t$  dans le texte signifie que les ondes et les sections sont définies aux terminaisons.

Si la terminaison est considérée anéchoïque,  $R_B = 0$ . Dans notre étude, la terminaison aval est modélisée comme un guide débouchant dans un plan infini parfaitement réfléchissant. En appliquant l'équation intégrale de Kirchhoff-Helmholtz dans le domaine extérieur au guide, on peut démontrer (Annexe C) que l'équation intégrale a l'expression suivante:

$$p(\underline{s}) = - \int_{S_t^B} G(\underline{s}|\underline{s}_0) \frac{\partial p}{\partial z}(\underline{s}_0) d\underline{s}_0 \quad (1.107)$$

où  $\underline{s}_0 = (x_0, y_0, z_t^B)$ ,  $\underline{s} = (x, y, z_t^B)$  sont des points de la surface  $S_t^B$  et la fonction de Green a l'expression suivante:

$$G(\underline{s}|\underline{s}_0) = \frac{e^{jk|\underline{s}-\underline{s}_0|}}{2\pi|\underline{s}-\underline{s}_0|} \quad (1.108)$$

En remplaçant la pression et sa dérivée normale par les ondes  $b_t^+$  et  $b_t^-$ , l'équation intégrale (1.107) peut être écrite d'une autre façon:

$$(b_t^+ + b_t^-) = G^B M^B (b_t^- - b_t^+) \quad (1.109)$$

où  $G^B$  et  $M^B$  sont des matrices dont les composantes ont les expressions suivantes:

$$G_{mn}^B = \int_{S_t^B} \int_{S_t^B} \Psi_m(y, z) G(\underline{s}|\underline{s}_0) \Psi_n(y, z) dy dz dy_0 dz_0 \quad (1.110)$$

$$M_{mn}^B = k_m^B \delta_{mn} \quad (1.111)$$

Doak (1973 [18]) transforme cette intégrale quadruple en une somme d'intégrales simples pour le cas de sections rectangulaires. Norris et Sheng (1989 [58]) donnent une expression asymptotique en fréquence de  $R_B$  pour des sections circulaires.

Avec la définition de  $R_B$  dans l'équation (1.106):

$$R_B = (G^B M^B - 1^B)^{-1} (G^B M^B + 1^B) \quad (1.112)$$

Une matrice de réflexion  $R_A$  est introduite de manière similaire pour la terminaison amont. Comme la source primaire est située en amont, l'équation inclut un terme supplémentaire représentant la source primaire dont le débit volumique par unité de surface est noté  $q_p$ .

$$a_t^+ = R_A a_t^- + q_p a_p^+ \quad (1.113)$$

Dans notre étude, la terminaison amont est modélisée comme une frontière rigide ( $R_A = 1^A$ ) où  $1^A$  est la matrice unité. La source primaire est modélisée comme un piston rigide couvrant la surface entière  $S_t^A$  de la terminaison. La fonction de Green dans la gaine avec une terminaison rigide située dans la section ( $x = 0$ ) est:

$$G(\underline{x}, \underline{x}_0) = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2k_l} \psi_l(y, z) \psi_l(y_0, z_0) (e^{k_l|x-x_0|} + e^{k_l|x+x_0|}) \quad (1.114)$$

Le vecteur  $a_p^+$  représente la partie de l'onde se propageant vers l'aval venant de la source primaire avec un débit volumique par unité de surface unitaire. Calculons  $(a_p^+)_l$  la projection de  $a_p^+$  sur le  $l^{\text{ème}}$  mode  $\psi_l(y, z)$ :

$$(a_p^+)_I = -\rho_0 j \omega \int_{S_I^A} \int_{S_I^A} \psi_I(y, z) G(0, y, z, 0, y_0, z_0) dy_0 dz_0 dy dz \quad (1.115)$$

$$(a_p^+)_I = \frac{\rho_0 j \omega}{k_I} \int_{S_I^A} \psi_I(y_0, z_0) dy_0 dz_0 = \frac{\rho_0 j \omega}{k_0} \sqrt{L_y L_z} \delta_{I0} \quad (1.116)$$

L'onde primaire incidente est donc une onde plane.

## 1.6 Calculs

Une fois que la matrice  $\underline{D}$  du guide d'onde entier et les matrices de réflexion  $R_A$  et  $R_B$  sont connues, le vecteur  $b_t^+$  représentant l'onde se propageant vers l'aval à la terminaison aval peut être calculé. Le niveau de bruit rayonné vers l'extérieur est directement relié au vecteur  $b_t^+$ . L'atténuation du bruit de ventilation consiste généralement à réduire la norme  $\|b_t^+\|_2$ . Si  $\|b_t^+\|_2 = 0$ , le bruit est annulé à l'extérieur du guide.

Calculons le vecteur  $b_t^+$ .

Les vecteurs  $a_t^+$ ,  $a_t^-$ ,  $b_t^+$  et  $b_t^-$  vérifient le système de quatre équations dans une gaine contenant  $N_s$  sources secondaires:

$$\begin{cases} b_t^+ &= D_{BA} a_t^+ + D_{BB} b_t^- + \sum_{i=1}^{N_s} q_s^i B_i^+ \\ a_t^- &= D_{AA} a_t^+ + D_{AB} b_t^- + \sum_{i=1}^{N_s} q_s^i A_i^- \\ b_t^- &= R_B b_t^+ \\ a_t^+ &= R_A a_t^- + q_p a_p^+ \end{cases} \quad (1.117)$$

Introduisons les matrices  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $R_{BA}$  et  $R_{AB}$ :

$$\begin{cases} I_A &= 1^A - D_{AA} R_A \\ I_B &= 1^B - D_{BB} R_B \\ R_{BA} &= D_{BA} I_A^{-1} R_A \\ R_{AB} &= D_{AB} R_B \end{cases} \quad (1.118)$$

où  $1^A$ ,  $1^B$  sont des matrices unités.

$$b_t^+ = (I_B - R_{BA} R_{AB})^{-1} \left[ q_p D_{BA} I_A^{-1} a_p^+ + \sum_{i=1}^{N_s} q_s^i (B_i^+ + R_{BA} A_i^-) \right] \quad (1.119)$$

Afin de simplifier les notations, appelons  $b_p^+$  et  $b_t^+$  les expressions suivantes  $(I_B - R_{BA} R_{AB})^{-1} D_{BA} I_A^{-1} a_p^+$  et  $(I_B - R_{BA} R_{AB})^{-1} (B_i^+ + R_{BA} A_i^-)$  respectivement.

L'équation 1.119 s'écrit alors:

$$b_t^+ = q_p b_p^+ + \sum_{i=1}^{N_s} q_s^i b_i^+ \quad (1.120)$$

## 1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons d'abord rappelé les principes de la propagation modale acoustique à travers un guide d'onde droit. Nous avons ensuite présenté les matrices d'impédance, de transfert et de diffusion qui sont trois écritures équivalentes de la propagation à travers une discontinuité.

Pour le calcul de la propagation dans un guide d'onde complet, nous exposons les trois étapes du calcul: à savoir l'assemblage des matrices de diffusion des segments élémentaires, le calcul de la réflexion aux terminaisons et enfin la résolution du système à quatre inconnues:  $a_i^+$ ,  $a_i^-$ ,  $b_i^+$  et  $b_i^-$ .

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter les méthodes numériques disponibles pour le calcul des matrices de diffusion associées aux discontinuités.

Nous allons expliciter la méthode de calcul par équation intégrale que nous avons choisie pour le calcul de la propagation à travers des discontinuités de géométrie générale.



# Chapitre 2

## Calcul numérique d'une matrice de diffusion

### 2.1 Revue des méthodes de calcul

Il existe de nombreuses méthodes disponibles pour le calcul numérique de la propagation dans les discontinuités des guides d'onde.

La première famille de méthodes concerne le raccordement de domaines voisins dans lesquels la propagation est connue mais la décomposition modale différente. Parmi ces problèmes, il faut noter les élargissements et rétrécissements de section. De part et d'autre de la discontinuité, on a en effet à faire à un guide d'onde droit de décomposition modale connue mais différente de chaque côté car les sections sont différentes. La continuité de la pression et de la vitesse donnent les relations nécessaires au calcul des matrices de diffusion. D'autres exemples comme les discontinuités d'impédance et les courbures font appel à la technique de raccordement modal.

La méthode de Galerkin s'applique aux mêmes types de problèmes. On ne calcule plus la décomposition modale à l'intérieur de la discontinuité mais on approxime les champs de pression et de vitesse sur une base de fonctions qui coïncident à la frontière avec la décomposition modale des domaines voisins.

Les méthodes par éléments finis ou par équations intégrales sont des méthodes plus générales qui peuvent traiter des géométries et revêtements quelconques. Les dimensions du problème sont alors plus grandes et le temps de calcul plus long.

Il existe enfin des méthodes particulièrement adaptées à la propagation plane et aux basses fréquences. On citera les raccordements asymptotiques, l'équation des pavillons pour les gaines de section variable. Dans ces domaines de fréquences, des inductances équivalentes sont introduites dont les théorèmes de Kelvin ou Rayleigh permettent d'encadrer les valeurs.

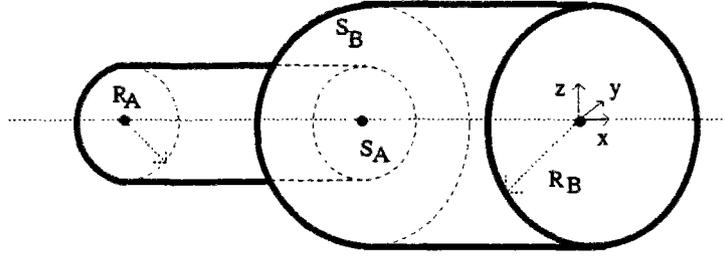


FIG. 2.1 - *Elargissement de section.*

### 2.1.1 Discontinuité de section

Alfredson (1972 [1]) propose d'approximer la forme d'un guide circulaire de section variant continûment en une série de domaines élémentaires de section constante séparés par des discontinuités. La méthode consiste essentiellement à calculer la propagation du son à travers une discontinuité de section. Nous allons présenter la méthode dans le cas d'un élargissement de section passant d'une section quelconque  $S_A$  à une section quelconque  $S_B$  où  $S_A \subset S_B$  (figure 2.1). Le calcul de la propagation le long de la discontinuité consiste à expliciter sous forme modale les deux équations de continuité des champs de pression et de vitesse sur  $S_A \cap S_B$  et la condition de rigidité parfaite de la paroi sur  $S_B \setminus S_A$ .

#### 1-Continuité de la pression sur $S_A$ :

Cette condition est équivalente à:

$$\forall i \quad \int_{S_A} p^A(y, z) \Psi_i^A(y, z) dy dz = \int_{S_A} p^B(y, z) \Psi_i^A(y, z) dy dz \quad (2.1)$$

En remplaçant  $p^A$  et  $p^B$  en fonction des  $a_i^+$ ,  $a_i^-$ ,  $b_i^+$  et  $b_i^-$ , on obtient:

$$\forall i \quad \sum_{j=0}^{\infty} (a_j^+ + a_j^-) \int_{S_A} \Psi_j^A(y, z) \Psi_i^A(y, z) dy dz = \sum_{m=0}^{\infty} (b_m^+ + b_m^-) \int_{S_A} \Psi_m^B(y, z) \Psi_i^A(y, z) dy dz \quad (2.2)$$

Les modes propres étant orthonormés, la continuité de la pression donne un premier ensemble infini d'équations:

$$\forall i \quad a_i^+ + a_i^- = \sum_{m=0}^{\infty} (b_m^+ + b_m^-) \int_{S_A} \Psi_m^B(y, z) \Psi_i^A(y, z) dy dz \quad (2.3)$$

#### 2-Vitesse normale nulle sur $S_B \setminus S_A$ :

Cette condition est équivalente à:

$$\forall i \quad \int_{S_B} \mathbf{v}^B(y, z) \cdot \mathbf{e}_r \Psi_i^B(y, z) dy dz = \int_{S_A} \mathbf{v}^B(y, z) \cdot \mathbf{e}_x \Psi_i^B(y, z) dy dz \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{e}_x$  est le vecteur unitaire porté par l'axe  $x$  et dirigé vers les  $x$  croissants.

### 3-Continuité de la vitesse normale sur $S_A$ :

L'équation (4) devient:

$$\forall i \quad \int_{S_B} \mathbf{v}^B(y, z) \cdot \mathbf{e}_x \Psi_i^B(y, z) dydz = \int_{S_A} \mathbf{v}^A(y, z) \cdot \mathbf{e}_x \Psi_i^B(y, z) dydz \quad (2.5)$$

En remplaçant  $\mathbf{v}^B$  et  $\mathbf{v}^A$  en fonction des  $a_i^+$ ,  $a_i^-$ ,  $b_i^+$  et  $b_i^-$ , on obtient:

$$\forall i \quad \sum_{j=0}^{\infty} k_j^B (b_j^+ - b_j^-) \int_{S_B} \Psi_j^B(y, z) \Psi_i^B(y, z) dydz = \sum_{m=0}^{\infty} k_m^A (a_m^+ - a_m^-) \int_{S_A} \Psi_m^A(y, z) \Psi_i^B(y, z) dydz \quad (2.6)$$

Les modes propres étant orthonormés un second ensemble infini d'équations est trouvé:

$$\forall i \quad k_i^B (b_i^+ - b_i^-) = \sum_{m=0}^{\infty} k_m^A (a_m^+ - a_m^-) \int_{S_A} \Psi_m^A(y, z) \Psi_i^B(y, z) dydz \quad (2.7)$$

Pour traiter numériquement la propagation à travers une discontinuité, Alfredson propose de tronquer les séries et de garder les  $N$  premiers modes de part et d'autre de la discontinuité. On retiendra également les  $N$  premières équations (3) et (7). Notons  $\underline{R}^1$  et  $\underline{S}^1$  les matrices dont les composantes sont les suivantes:

$$S_{ij}^1 = \int_{S_A} \Psi_i^A(y, z) \Psi_j^B(y, z) dydz \quad (2.8)$$

$$R_{ij}^1 = k_j^A S_{ji}^1 \quad (2.9)$$

La matrice de diffusion est obtenue à partir du système d'équations suivant et demande en tout deux inversions de matrices de taille  $N \times N$ :

$$\begin{cases} a_i^+ + a_i^- &= \sum_{j=0}^{j=N-1} S_{ij}^1 (b_j^+ + b_j^-) \\ a_i^+ - a_i^- &= \sum_{j=0}^{j=N-1} (\underline{R}^1)_{ij}^{-1} k_j^B (b_j^+ - b_j^-) \end{cases} \quad (2.10)$$

L'influence de la troncature a été examinée par Alfredson (1972 [1]). Pour une onde plane incidente, il constate que la convergence est plus rapide pour le module du coefficient de transmission que pour celui de la réflexion dans le cas d'un élargissement 1.:1.25. Dans le cas d'un élargissement 1.:100., les erreurs dues à la troncature sont amplifiées mais restent faibles en ce qui concerne le coefficient de transmission.

Hudde (1985 [33]) améliore les travaux d'Alfredson pour de larges discontinuités de section. Il considère le raccordement de deux guides droits de section circulaire de rayons  $R_A$  et  $R_B$  respectivement. Il propose une méthode pour déterminer l'ordre de la troncature: c'est-à-dire le nombre de modes conservés  $N_A$  et  $N_B$  de part et d'autre de la discontinuité. Exposons la méthode pour un raccordement bidimensionnel de deux guides de hauteur respective  $H_A$

et  $H_B$ . En considérant uniquement la continuité sur  $S_A$  des champs de pression et de vitesse, il obtient un nouveau système d'équations:

$$\begin{cases} a_i^+ + a_i^- = \sum_{j=0}^{N_B-1} S_{ij}^1 (b_j^+ + b_j^-) \\ a_i^+ - a_i^- = \frac{1}{k_i^A} \sum_{j=0}^{N_B-1} R_{ij}^2 (b_j^+ - b_j^-) \end{cases} \quad (2.11)$$

En notant

$$R_{ij}^2 = k_j^B S_{ij}^1 \quad (2.12)$$

En additionnant les deux équations, on obtient un nombre infini d'équations dont on retiendra les  $N_A$  premières:

$$\forall i \quad 2a_i^+ = \sum_{j=0}^{N_B-1} (S_{ij}^1 + \frac{R_{ij}^2}{k_i^A}) b_j^+ + \sum_{j=0}^{N_B-1} (S_{ij}^1 - \frac{R_{ij}^2}{k_i^A}) b_j^- \quad (2.13)$$

Hudde introduit ensuite séparément une impédance uniforme  $Z$  sur  $S_B \setminus S_A$  et la condition correspondante:

$$p^B = Z \mathbf{v}^B \cdot \mathbf{e}_x \quad (2.14)$$

En projetant sur les modes, on trouve un second ensemble d'équations dont on retiendra les  $N_C$  premières:

$$\forall i \quad \sum_{j=0}^{N_B-1} S_{ij}^2 \{ b_j^+ (1 + \frac{Z}{\rho_0 j \omega} k_j^B) + b_j^- (1 - \frac{Z}{\rho_0 j \omega} k_j^B) \} = 0 \quad (2.15)$$

avec  $S_{ij}^2 = \int_{S_B \setminus S_A} \Psi_j^B(y, z) \Psi_i^B(y, z) dy dz$ . Les inconnues du problème sont les ondes  $b^+$  qui doivent être calculées en fonction de  $a^+$  et  $b^-$ . Le bilan d'équations et d'inconnues donne:

$$N_A + N_C = N_B \quad (2.16)$$

En considérant que les termes omis dans les troncatures doivent correspondre à des modes évanescents dont l'atténuation par unité de longueur a le même ordre de grandeur, il faut que les valeurs propres des premiers modes omis de chaque côté de la discontinuité soient proches. Or  $K_{N_A}^A = \frac{\pi(N_A - 1)}{H_A}$  et  $K_{N_B}^B = \frac{\pi(N_B - 1)}{H_B}$ .

On en tire la seconde relation:

$$\frac{N_A - 1}{H_A} \approx \frac{N_B - 1}{H_B} \quad (2.17)$$

Cette relation est en fait une conséquence de la condition de coin (Mittra et Lee 1971 [51]). On peut maintenant déterminer  $N_A$  et  $N_C$  en fonction de  $N_B$  qui donne la précision du calcul.

$$N_A \approx 1 + (N_B - 1) \frac{H_A}{H_B} \quad (2.18)$$

$$N_C = N_B - N_A \quad (2.19)$$

A partir des deux systèmes d'équations 2.13 et 2.15, les ondes  $b^+$  sont calculées en fonction des ondes  $a^+$  et  $b^-$  après l'inversion d'une matrice de taille  $N_B \times N_B$ . On en déduit ensuite  $a^-$ .

Cette méthode est particulièrement adaptée pour de larges discontinuités de section que la méthode d'Alfredson calcule difficilement.

Différentes méthodes sont aussi utilisées pour le calcul des matrices de transfert d'une discontinuité de section. Kergomard (1989 [38]) rappelle que toutes ces méthodes utilisent le même système d'équations et que les différences viennent essentiellement du nombre d'équations et d'inconnues que l'on retient dans le calcul. Kergomard (1991 [37]) propose aussi une méthode originale, dite "des modes propagatifs" qui détermine la matrice d'impédance des modes propagatifs au travers de la discontinuité. Cette méthode a pour particularité de ne pas demander d'information sur la terminaison des modes propagatifs et d'éviter toute inversion matricielle grâce à une procédure itérative.

### 2.1.2 Raccordement modal

Le raccordement modal généralise la méthode précédente. Lorsque deux domaines voisins ont leur frontière entièrement commune, le calcul de la matrice de diffusion consiste à raccorder les modes. Il suffit d'égaliser la pression et la vitesse normale à la frontière des deux domaines. Le système d'équations (2-10) est alors valable et est utilisé pour déterminer la matrice de diffusion. La méthode consiste essentiellement à évaluer les produits scalaires inclus dans les composantes des matrices  $\underline{S}^1$  et  $\underline{R}^2$ . Les exemples d'applications concernent les discontinuités d'impédance de parois (Roure 1976 [65]) ou les courbures d'un guide d'onde circulaire (Firth 1984 [22]) ou rectangulaire.

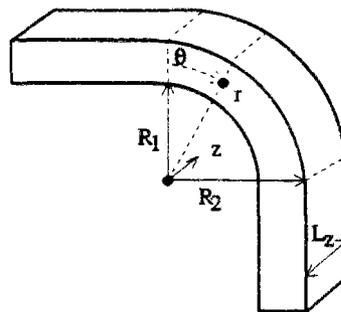


FIG. 2.2 - Courbure

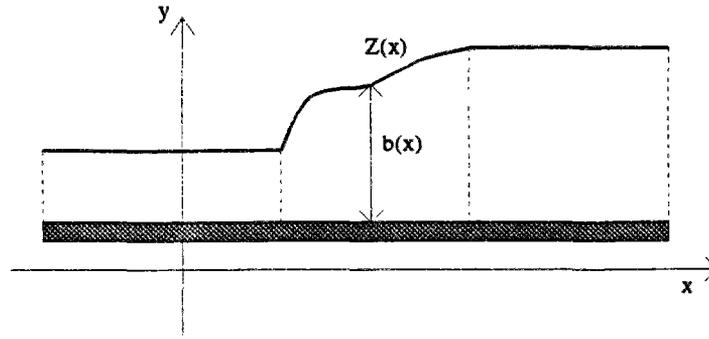


FIG. 2.3 - Hauteur continûment variable

### 2.1.3 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin consiste à approximer les champs de pression et de vitesse à l'intérieur d'une discontinuité par une série tronquée:

$$\begin{cases} p(r, z, \theta) = \sum_{n=0}^{n=N} p_n(\theta) \phi_n(r, z) \\ \mathbf{v}(r, z, \theta) = \sum_{n=0}^{n=N} \mathbf{v}_n(\theta) \phi_n(r, z) \end{cases} \quad (2.20)$$

pour le problème de la courbure (figure 2.2).

$$\begin{cases} p(x, y) = \sum_{n=0}^{n=N} p_n(x) \phi_n(x, y) \\ \mathbf{v}(x, y) = \sum_{n=0}^{n=N} \mathbf{v}_n(x) \phi_n(x, y) \end{cases} \quad (2.21)$$

pour le problème bidimensionnel avec hauteur continûment variable (figure 2.3).

Les  $\phi_n$  forment une base complète de fonctions définies sur une section. Tam (1976 [78]) introduit  $\phi_{nm}(r, z) = \cos(\pi n \frac{r - R_1}{R_2 - R_1}) \cos(\frac{\pi m z}{Lz})$  pour traiter le cas des courbures dans des guides de section rectangulaire. La méthode de Galerkin est aussi utilisable pour un problème de propagation bidimensionnelle dans un guide de section continument variable et d'impédance de paroi supérieure  $Z(x)$  tandis que la paroi inférieure est supposée parfaitement rigide. Eversman (1975 [21]) introduit  $\phi_n(x, y) = \cos(k_n(x)y)$  où  $k_n(x)$  est solution de  $k b \tan(kb) = \frac{i k b}{Z}$  et  $b(x)$  la hauteur variable du guide d'onde. Dans ces problèmes, les fonctions  $\phi_n$  sont choisies de telle sorte qu'elles coincident avec les modes propres des guides d'onde droit qui entourent la discontinuité.

La solution du problème doit vérifier: -les équations de propagation.  
-les conditions aux limites.

Les résidus sont forcés à s'annuler en leur demandant d'être orthogonaux à un ensemble complet de fonctions. Tam obtient un système d'équations différentielles à coefficients constants. La résolution demande l'utilisation de l'algorithme QR pour résoudre un problème aux valeurs propres. Eversman obtient aussi un système d'équations différentielles à coefficients variables qu'il appelle "équation du télégraphiste généralisée" et qu'il intègre par la méthode de Runge-Kutta.

#### 2.1.4 Méthode par éléments finis

Les méthodes par éléments finis sont utilisées pour le calcul de la propagation dans les discontinuités. Astley (1978 [3]) a développé un code où les degrés de liberté sont les projections modales  $\{a_i^+\}$ ,  $\{a_i^-\}$  et  $\{b_i^+\}$  ainsi que les valeurs du champ de pression  $\{p_n\}$  aux noeuds  $x_n$  du maillage. La méthode de Galerkin est plus rapide que la méthode par éléments finis car la dimension du problème est plus faible. Par contre, les méthodes par éléments finis ont pour avantage leur flexibilité: c'est-à-dire qu'elles peuvent traiter différentes géométries avec différentes conditions d'impédance. La méthode de Galerkin est au contraire limitée à quelques géométries particulières, le plus souvent 2D. La méthode par éléments finis a enfin l'avantage de fournir la valeur du champ de pression aux noeuds du maillage.

#### 2.1.5 Méthode par équation intégrale

La méthode par équation intégrale est, comme la méthode par éléments finis, adaptée pour calculer la propagation le long de guides de section non-uniforme avec ou sans revêtements absorbants. Elle a pour avantage, comparée à la méthode par éléments finis, que le problème est réduit d'une dimension puisque seule la frontière de la discontinuité est maillée. Les matrices sont par contre des matrices pleines. Cette méthode a été largement utilisée pour la propagation dans des guides d'onde 2D (Quinn 1977 [62]), dans des jonctions (El-Raheb 1983 [20]). La fonction de Green employée dans les équations intégrales est en général la fonction de Green en champ libre mais la fonction de Green du guide droit peut être avantageuse dans le cas de déformations compactes des parois d'un guide (Dawson 1990 [15]). Lorsque la frontière se retourne sur elle-même comme dans des obstacles fins, il faut diviser le domaine en sous-domaines de telle sorte que la frontière de chaque sous-domaine soit régulière. Pour calculer la matrice de transfert à deux entrées dans le cas d'une propagation par onde plane, Cheng (1991 [12]) propose donc une méthode par éléments de surface et multidomaines à utiliser lorsque la géométrie du guide comporte ce type d'obstacles fins.

Les équations intégrales sont souvent résolues par la méthode de collocation. Hamdi (1981 [30]) présente les avantages de la formulation variationnelle qui fournit entre autre une matrice globale symétrique.

Examinons maintenant des méthodes développées spécialement pour la propagation plane, dans le domaine des basses fréquences.

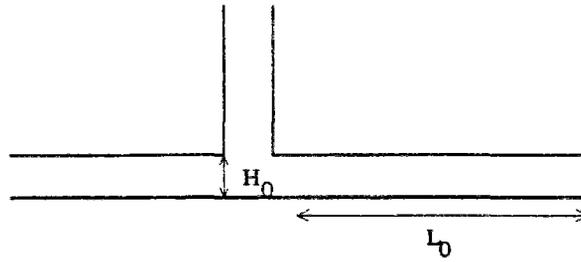


FIG. 2.4 - *Raccordement asymptotique*

### 2.1.6 Méthode des raccordements asymptotiques

Cette méthode est valable dans le cas de mouvements acoustiques lents et donc à très basses fréquences. Elle consiste à raccorder des développements asymptotiques valables dans des domaines voisins.

Les champs (comme la pression) sont exprimés sous forme de développements asymptotiques en fonction d'un petit paramètre  $\epsilon = \frac{H_0}{L_0}$  où  $H_0$  est la hauteur caractéristique de la discontinuité et  $L_0$  la période spatiale du guide qui est comparable à la longueur d'onde (figure 2.4).

$$H_0 \ll \frac{\lambda}{2\pi} \quad L_0 = O\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)$$

La méthode des raccordements asymptotiques est essentiellement utilisée pour des problèmes bidimensionnels car elle se ramène à la résolution de l'équation de Laplace dans le plan où les transformations conformes dans le plan complexe donnent des solutions analytiques grâce au théorème de Schwarz-Christoffel.

Thompson (1984 [79] [80]) constate que pour les discontinuités planes sans épaisseur, la continuité du débit et de la pression sont valables au premier ordre en  $\epsilon$ . Pour des pentes du guide différentes de part et d'autre de la discontinuité, il donne la valeur du saut de pression en  $\epsilon^2$  tandis que le débit est continu.

Lorsque l'épaisseur de la discontinuité est non nulle, le débit et la pression ne sont plus alors continus au premier ordre. Les valeurs des sauts de débit et de pression sont calculées pour un raccordement à angle droit de deux guides (Thompson (1984 [79] [80])) pour une jonction en T (Bruggeman 1987 [8]).

### 2.1.7 Equation des pavillons

Dans le domaine de la propagation plane, l'équation de Helmholtz se simplifie dans le cas d'un guide rectiligne de section continûment variable  $A(x)$ . On obtient alors l'équation,

dite de Webster (1919), en réalité due à Lagrange (1763):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k^2 p + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.22)$$

Dans le cas d'une terminaison exponentielle  $A(x) = e^{mx}$ , on peut obtenir une solution analytique. Miles (1981 [48]) propose d'approcher un guide de section continûment variable par une série de segments élémentaires de section variant de manière exponentielle. Il généralise l'équation de Webster en introduisant une vitesse d'écoulement.

### 2.1.8 Inductance équivalente

Toujours pour la propagation plane, Karal (1953 [36]) a calculé à basses fréquences les sauts de vitesse et de pression pour des élargissements et rétrécissements de section de guide circulaire ( $\alpha$  est le rapport des rayons). Il montre que le débit  $U$  est continu au travers de la discontinuité et calcule le saut de pression  $\Delta p$ .

$$\Delta p = U \rho_0 j \omega L(\alpha) \quad (2.23)$$

Karal donne la valeur de l'inductance  $L(\alpha)$  et l'interprète comme une augmentation de la longueur équivalente du guide droit par unité d'aire de section.

### 2.1.9 Encadrement des valeurs d'inductance

Garcia et Kergomard (1986 [26]) ont dressé une liste des méthodes analytiques et numériques traitant les discontinuités dans les guides acoustiques aux basses fréquences. Ils rappellent deux théorèmes: un théorème de Kelvin et un de Rayleigh qui donnent un encadrement des valeurs d'inductance. Le théorème de Kelvin dit que, pour un fluide incompressible, l'énergie cinétique est minimale lorsqu'il est irrotationnel. Une estimation de l'inductance est alors obtenue par les valeurs du débit  $U$  et de l'énergie cinétique  $E_c$  d'un champ incompressible.

$$L \leq \frac{2E_c}{\rho_0 U^2} \quad (2.24)$$

Le théorème de Rayleigh montre que la somme des inductances  $L_1$  et  $L_2$  de deux sous-domaines de la discontinuité est une borne inférieure de l'inductance  $L$  du domaine total.

$$L \geq L_1 + L_2 \quad (2.25)$$

Garcia et Kergomard montrent alors que l'inductance  $L$  d'une discontinuité de section peut être majorée par l'inductance obtenue en faisant l'hypothèse que l'ouverture vibre en piston plan. L'inductance  $L$  est aussi minorée par la demi valeur de l'inductance du guide avec diaphragme.

## 2.2 Méthode de calcul par équation intégrale

Nous avons choisi une méthode de calcul par équation intégrale car c'est une méthode souple (comme les méthodes par éléments finis) qui permet de traiter des géométries de formes variables et d'introduire des conditions générales d'impédance.

Nous allons exposer notre méthode de calcul par équation intégrale. Le calcul numérique se décompose principalement en deux étapes:

- calcul de la matrice d'impédance  $\underline{\underline{Z}}$  et du vecteur source impédance à l'aide d'une méthode par équation intégrale.
- calcul de la matrice de diffusion  $\underline{\underline{D}}$  et du vecteur source diffusion.

### 2.2.1 Equation intégrale

Le calcul est basé sur l'équation intégrale de Kirchoff-Helmholtz. En l'absence de sources intérieures, cette équation s'écrit:

$$\forall \underline{x} \in \Omega \quad p(\underline{x}) = \int_{\Gamma} G(\underline{x}/\underline{y}) \frac{\partial p(\underline{y})}{\partial n} d\underline{y} - \int_{\Gamma} p(\underline{y}) \frac{\partial G(\underline{x}/\underline{y})}{\partial n} d\underline{y} \quad (2.26)$$

où  $G(\underline{x}/\underline{y})$  vérifie l'équation d'Helmholtz avec source:

$$\Delta_{\underline{x}} G(\underline{x}/\underline{y}) + k^2 G(\underline{x}/\underline{y}) = -\delta(\underline{x} - \underline{y})$$

$\delta$  est la fonction dirac 3D au point  $\underline{y}$ , position de la source unitaire.  $G(\underline{x}/\underline{y})$  est appelée fonction de Green. Nous prendrons  $G(\underline{x}/\underline{y}) = \frac{e^{jk|\underline{x}-\underline{y}|}}{4\pi|\underline{x}-\underline{y}|}$ .

Nous choisirons comme volume  $\Omega$  le volume de la discontinuité. La frontière de  $\Omega$  se décompose en quatre parties  $\Gamma = \Gamma_A \cup \Gamma_B \cup \Gamma_s \cup \Gamma_{\Sigma}$ .

$\Gamma_A$  est la frontière commune avec le domaine amont.

$\Gamma_B$  est la frontière commune avec le domaine aval.

$\Gamma_s$  est la partie de la frontière contenant la source secondaire.

$\Gamma_{\Sigma}$  est la partie de la frontière décrivant la paroi du guide d'onde.

Sur la frontière  $\Gamma$ , l'équation (2.26) est modifiée.

$$\forall \underline{x} \in \Gamma \quad p(\underline{x})C(\underline{x}) = \int_{\Gamma} G(\underline{x}/\underline{y}) \frac{\partial p(\underline{y})}{\partial n} d\underline{y} - \int_{\Gamma} p(\underline{y}) \frac{\partial G(\underline{x}/\underline{y})}{\partial n} d\underline{y} \quad (2.27)$$

où  $C(\underline{x})$  représente l'angle solide intérieur évalué au point  $\underline{x}$  divisé par  $4\pi$ .

Les conditions aux limites du problème sont (voir (1-34)):

$$\frac{\partial p}{\partial n}(\underline{x}) = \rho_0 j \omega q(\underline{x}) + \sigma(\underline{x})p(\underline{x})$$

Nous définissons  $\sigma(\underline{x})$  à partir de l'impédance de paroi  $Z_{\Sigma}(\underline{x})$  et de source  $Z_s$ .

$$\begin{cases} \sigma(\underline{x}) = 0 & \text{sur } \Gamma_A \cup \Gamma_B \\ \sigma(\underline{x}) = \frac{\rho j \omega}{Z_s} & \text{sur } \Gamma_s \\ \sigma(\underline{x}) = \frac{\rho j \omega}{Z_\Sigma(\underline{x})} & \text{sur } \Gamma_\Sigma \end{cases} \quad (2.28)$$

$q(\underline{x})$  est une vitesse. En remplaçant  $\frac{\partial p}{\partial n}$  dans 2.27, on obtient:

$$\forall \underline{x} \in \Gamma \quad p(\underline{x})C(\underline{x}) = \rho_0 j \omega \int_\Gamma G(\underline{x}/\underline{y})q(\underline{y})d\underline{y} + \int_\Gamma p(\underline{y})\left\{\sigma(\underline{y})G(\underline{x}/\underline{y}) - \frac{\partial G(\underline{x}/\underline{y})}{\partial n}\right\}d\underline{y} \quad (2.29)$$

On utilise la méthode de collocation, c'est-à-dire qu'on évalue la pression  $p(\underline{x})$  sur la frontière aux noeuds du maillage.

La résolution numérique est effectuée à l'aide d'un maillage de la frontière  $\Gamma$  à partir d'éléments bidimensionnels du deuxième degré de Serendipity à 8 noeuds.

Notons  $\underline{X}$  le vecteur dont la  $i^{\text{ème}}$  composante  $X_i$  représente les coordonnées du  $i^{\text{ème}}$  noeud. On définit de même les vecteurs  $\underline{Q}$  et  $\underline{P}$  dont la  $i^{\text{ème}}$  composante représente respectivement  $q(X_i)$  et  $p(X_i)$ .

Le calcul numérique détermine une équation matricielle qui relie les valeurs des pressions aux noeuds sur la frontière  $\Gamma$  à leur débit par unité de surface sur la frontière aux mêmes points:

$$\underline{M}_1 \underline{P} = \underline{M}_2 \underline{Q} \quad (2.30)$$

En posant  $\underline{Z} = \underline{M}_1^{-1} \underline{M}_2$ , on obtient:

$$\underline{P} = \underline{Z} \underline{Q} \quad (2.31)$$

On peut décomposer  $\underline{Z}$  par bloc en groupant les noeuds situés sur  $S_A$ ,  $S_B$ ,  $S_s$  ou  $S_\Sigma$ .

$$\begin{pmatrix} P_A \\ P_B \\ P_\Sigma \\ P_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{AA} & Z_{AB} & Z_{A\Sigma} & Z_{As} \\ Z_{BA} & Z_{BB} & Z_{B\Sigma} & Z_{Bs} \\ Z_{\Sigma A} & Z_{\Sigma B} & Z_{\Sigma\Sigma} & Z_{\Sigma s} \\ Z_{sA} & Z_{sB} & Z_{s\Sigma} & Z_{ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_A \\ Q_B \\ Q_\Sigma \\ Q_s \end{pmatrix}$$

Pour chaque géométrie, pour chaque fréquence, un calcul par équations intégrales nous fournit donc les composantes de cette matrice  $\underline{Z}$ .

## 2.2.2 Matrice d'impédance d'une discontinuité

Nous faisons les hypothèses suivantes:

$$\begin{cases} q_A(\underline{x}) \approx \sum_{i=1}^{i=N} q_i^A \Psi_i^A \\ q_B(\underline{x}) \approx \sum_{i=1}^{i=M} q_i^B \Psi_i^B \\ q_\Sigma(\underline{x}) = 0 \\ q_s(\underline{x}) = q_s \end{cases} \quad (2.32)$$

## Définition

Rappelons la définition de la matrice d'impédance  $\underline{Z}$  et du vecteur source impédance  $\underline{Z}s$ :

$$\begin{pmatrix} p_i^A \\ p_j^B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{AA} & Z_{AB} \\ Z_{BA} & Z_{BB} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_i^A \\ q_j^B \end{pmatrix} + q_s \begin{pmatrix} Z_{sA} \\ Z_{sB} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

## Calcul de la matrice d'impédance

Nous allons expliciter le calcul de la matrice  $Z_{BA}$ . Le calcul des autres blocs de la matrice d'impédance  $\underline{Z}$  s'en déduira facilement. Nous allons évaluer numériquement une composante  $(Z_{BA})_{ij}$  sur la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $Z_{BA}$ .

Nous prenons  $q(\underline{x})$  tel que:

$$\begin{cases} q_A(\underline{x}) = \Psi_j^A(\underline{x}) \\ q_B(\underline{x}) = 0 \\ q_\Sigma(\underline{x}) = 0 \\ q_s(\underline{x}) = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

Les valeurs nodales du débit par unité de surface sont alors données par:

$$\begin{cases} Q_A(\underline{X}_n) = \Psi_j^A(\underline{X}_n) \\ Q_B(\underline{X}_n) = 0 \\ Q_\Sigma(\underline{X}_n) = 0 \\ Q_s(\underline{X}_n) = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

A partir de la matrice  $Z_{BA}$ , les valeurs nodales de la pression sur la section  $S_B$  sont connues:

$$P_B(\underline{X}_m) = \sum_n Z_{BA}(\underline{X}_m, \underline{X}_n) Q_A(\underline{X}_n) = \sum_n Z_{BA}(\underline{X}_m, \underline{X}_n) \Psi_j^A(\underline{X}_n) \quad (2.36)$$

Il reste à évaluer la projection modale de la pression sur le mode  $\Psi_i^B(y, z)$  de la section plane  $S_B$ .

$$(Z_{BA})_{ij} = \int_{S_B} \Psi_i^B(y, z) p_B(y, z) dy dz \quad (2.37)$$

Nous avons affaire à un problème d'intégration numérique semblable à celui rencontré dans le calcul par équation intégrale. Nous allons le développer explicitement. Soit  $N_{el}$  le nombre de mailles couvrant la section droite,  $N_{int}$  le nombre de points de Gauss et  $N_{en}$  le nombre de noeuds par maille. Nous utilisons des éléments de Serendipity à 8 noeuds et 4 points de Gauss. Nous prenons donc  $N_{int} = 4$  et  $N_{en} = 8$ .

La sommation sur la section droite  $S_B$  peut se décomposer sur les  $N_{el}$  mailles. Nous avons donc:

$$(Z_{BA})_{ij} = \sum_{l=1}^{l=N_{el}} \int_{S_l} \Psi_i^B(y, z) p_B(y, z) dy dz \quad (2.38)$$

où  $S_l$  représente la surface de la maille. Nous effectuons ensuite un changement de variables qui fait passer de la maille courante de coordonnées  $(y, z)$  à la maille carrée unitaire de coordonnées  $(u, v)$ .

$$(Z_{BA})_{ij} = \sum_{l=1}^{l=N_{el}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_i^B(y(u,v), z(u,v)) p_B(y(u,v), z(u,v)) |J(u,v)| du dv \quad (2.39)$$

où  $J(u,v) = y_{,u}(u,v)z_{,v}(u,v) - y_{,v}(u,v)z_{,u}(u,v)$

Nous évaluons l'intégrale à l'aide de  $N_{int}$  points de Gauss de coordonnées  $(u_m, v_m)$  et de poids  $W_m$ :

$$(Z_{BA})_{ij} = \sum_{l=1}^{l=N_{el}} \sum_{m=1}^{m=N_{int}} W_m \Psi_i^B(y(u_m, v_m), z(u_m, v_m)) p(y(u_m, v_m), z(u_m, v_m)) |J(u_m, v_m)| \quad (2.40)$$

$y(u,v), z(u,v), p(y(u,v), z(u,v))$  et  $J(u,v)$  s'écrivent à partir des  $N_{en}$  fonctions de forme  $N_n(u,v)$ , des positions  $(y_n, z_n)$  des noeuds et des  $N_{en}$  valeurs de la pression aux noeuds.

$$y(u,v) = \sum_{n=1}^{n=N_{en}} N_n(u,v) y_n \quad z(u,v) = \sum_{n=1}^{n=N_{en}} N_n(u,v) z_n \quad (2.41)$$

$$y_{,u}(u,v) = \sum_{n=1}^{n=N_{en}} N_{n,u}(u,v) y_n \quad z_{,u}(u,v) = \sum_{n=1}^{n=N_{en}} N_{n,u}(u,v) z_n \quad (2.42)$$

$$y_{,v}(u,v) = \sum_{n=1}^{n=N_{en}} N_{n,v}(u,v) y_n \quad z_{,v}(u,v) = \sum_{n=1}^{n=N_{en}} N_{n,v}(u,v) z_n \quad (2.43)$$

$$p(y(u,v), z(u,v)) = \sum_{n=1}^{n=N_{en}} N_n(u,v) p(y_n, z_n) \quad (2.44)$$

On obtient donc:

$$(Z_{BA})_{ij} = \sum_{l=1}^{l=N_{el}} \sum_{m=1}^{m=N_{int}} \sum_{n=1}^{n=N_{en}} W_m N_n(u_m, v_m) \Psi_i^B(y(u_m, v_m), z(u_m, v_m)) P_B(X_{l,n}) |J(u_m, v_m)| \quad (2.45)$$

où  $X_{l,n}$  est le  $n^{ième}$  noeud de la maille  $l$ .

### Calcul du vecteur source impédance

Le calcul du vecteur source impédance  $\underline{Z}_s$  est similaire au calcul de la matrice d'impédance  $\underline{Z}$ .

Le débit par unité de surface  $q(\underline{x})$  est cette-fois tel que:

$$\begin{cases} q_A(\underline{x}) = 0 \\ q_B(\underline{x}) = 0 \\ q_\Sigma(\underline{x}) = 0 \\ q_s(\underline{x}) = 1 \end{cases} \quad (2.46)$$

### 2.2.3 Matrice de diffusion d'une discontinuité

La matrice de diffusion  $\underline{\underline{D}}$  se déduit facilement de la matrice d'impédance  $\underline{\underline{Z}}$ .

$$\underline{\underline{D}} = (\underline{\underline{ZM}} - \underline{\underline{1}})^{-1}(\underline{\underline{ZM}} + \underline{\underline{1}}) \quad (2.47)$$

$$\begin{pmatrix} A^- \\ B^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{D}}) \begin{pmatrix} Z_{s_A} \\ Z_{s_B} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

où  $\underline{\underline{1}}$  est la matrice unité et  $\underline{\underline{M}}$  est une matrice diagonale avec

$$M_{ii} = \frac{k_i^A}{\rho_0 j \omega} \quad \text{si } 0 \leq i \leq N - 1 \quad (2.49)$$

$$M_{ii} = \frac{k_{i-N}^B}{\rho_0 j \omega} \quad \text{si } N \leq i \leq N + M - 1 \quad (2.50)$$

$k_i^A$  et  $k_i^B$  sont les nombres d'onde longitudinaux associés aux modes  $\Psi_i^A$  et  $\Psi_i^B$  respectivement. La démonstration se trouve en Annexe B.

## 2.3 Résultats numériques

Sergent et Duhamel (1994 [72]) ont comparé les mesures et les calculs numériques pour les matrices de diffusion de trois géométries de discontinuités: un segment de guide droit, un coude et un rétrécissement de section.

Nous allons nous contenter ici de vérifier les résultats numériques obtenus à l'aide de la méthode décrite précédemment (Samrayduct) avec des solutions analytiques connues.

Un premier problème concerne un élargissement de section dont la matrice de diffusion est déterminée à partir des conditions aux limites et de continuité à l'interface.

Un second problème concerne un coude pour lequel on connaît une expression analytique à basses fréquences.

Une troisième problème traite enfin le cas d'un guide d'onde rectiligne avec une distribution uniforme de sources monopôlaires (débit volumique constant) sur une partie de la paroi. La fonction de Green étant connue, on vérifiera nos calculs de vecteur source pour cette configuration.

### 2.3.1 Matrice de diffusion d'une discontinuité de section

Nous allons vérifier le calcul de la matrice de diffusion avec Samrayduct pour une géométrie de discontinuité particulière. Nous examinons le cas d'un élargissement de section entre deux guides d'onde de section rectangulaire  $S_A$  et  $S_B$  de dimensions 1.0 x 1.0 m et 1.0 x 1.2 m.

Nous allons comparer les résultats par Samrayduct avec la méthode d'Alfredson [1]. La méthode d'Alfredson est utilisée avec  $N=40$  modes, ce qui est suffisant pour assurer la convergence des premiers coefficients de la matrice de diffusion.

Pour Samrayduct, le volume  $\Omega$  de maillage a été choisi avec deux sections droites de longueur  $L$  égale à 0.2 m entourant la discontinuité de section.

Nous allons sur cet exemple examiner l'influence de deux paramètres sur la précision des résultats: la densité du maillage et l'ordre de la troncature. Notons  $T_{00}$  et  $T_{01}$  les amplitudes des modes plan et antisymétrique transmis à travers la discontinuité pour une onde plane incidente.  $R_{00}$  est le coefficient de réflexion du mode plan réfléchi pour une onde plane incidente.

Nous gardons un nombre de modes  $N = N_A = N_B$ . Nous prenons un maillage régulier avec une distance  $d$  entre les noeuds. La figure 2.5 montre que Samrayduct et la méthode d'Alfredson, dite "analytique" donnent des résultats comparables pour  $d = 0.1m$  et  $N = 20$ .

Lorsqu'on réduit la densité du maillage à  $d = 0.2m$  comme sur la figure 2.6, les calculs apparaissent suffisamment précis jusqu'à environ 300 Hz. Ce qui correspond à 5 noeuds par longueur d'onde. On remarque aussi que les valeurs du coefficient de transmission sont mieux calculées que celles du coefficient de réflexion.

Le nombre de modes à prendre en compte dans les calculs influe sur la précision. Sur la figure 2.8, le nombre de modes est pris égal à  $N = 4$ . On constate qu'il faut garder dans les calculs au moins autant de modes qu'il y a de modes propagatifs auxquels on rajoute les premiers modes évanescents qui ne sont pas atténués suffisamment sur les courtes portions droites.

Retrouvons maintenant les résultats classiques à basses et hautes fréquences sur la figure 2.5.

#### basses fréquences

A basses fréquences, l'onde est plane et le débit est conservé à travers une discontinuité de section. Lorsque la fréquence est suffisamment faible, la pression peut être considérée continue.

Les équations de continuité de la pression et du débit nous donnent l'expression à l'ordre zéro du développement asymptotique en  $\omega$  des coefficients de réflexion et transmission.

Notons  $\epsilon$  le rapport des sections  $\frac{S_B}{S_A}$ . L'équation de continuité de la pression donne:

$$\frac{a^+ + a^-}{\sqrt{S_A}} = \frac{b^+}{\sqrt{S_B}} \quad (2.51)$$

L'équation de continuité du débit donne:

$$(a^+ - a^-)\sqrt{S_A} = b^+\sqrt{S_B} \quad (2.52)$$

d'où

$$\begin{cases} T_{00} = \frac{b^+}{a^+} = \frac{2\sqrt{\epsilon}}{\epsilon + 1} \\ R_{00} = \frac{a^-}{a^+} = \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \end{cases} \quad (2.53)$$

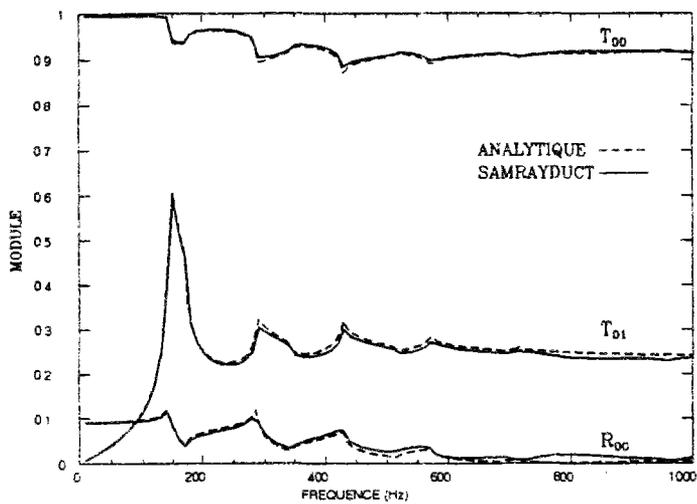


FIG. 2.5 - Modules des coefficients de transmission et réflexion pour un élargissement de section 1:1.2 m ( $N=20, d=0.1$  m).

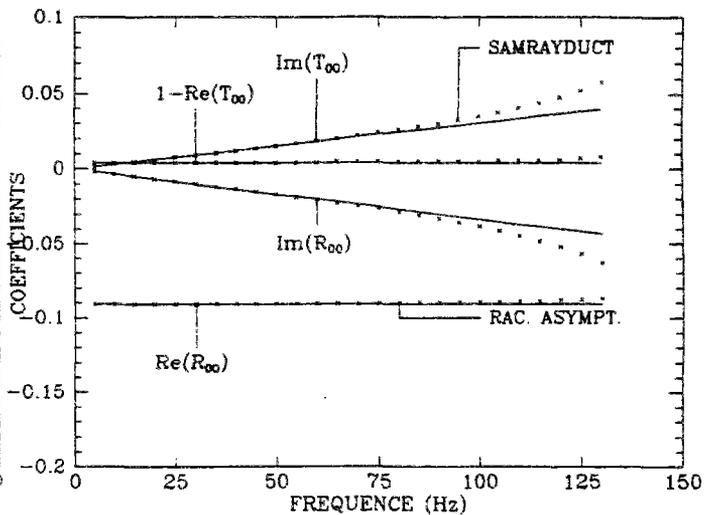


FIG. 2.7 - Parties réelle et imaginaire des coefficients de transmission et réflexion pour un élargissement de section 1:1.2 m.

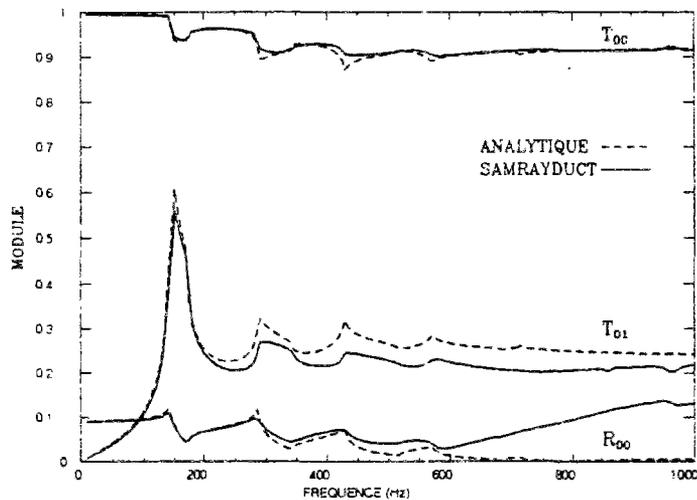


FIG. 2.6 - Modules des coefficients de transmission et réflexion pour un élargissement de section 1:1.2 m ( $N=20, d=0.2$  m).

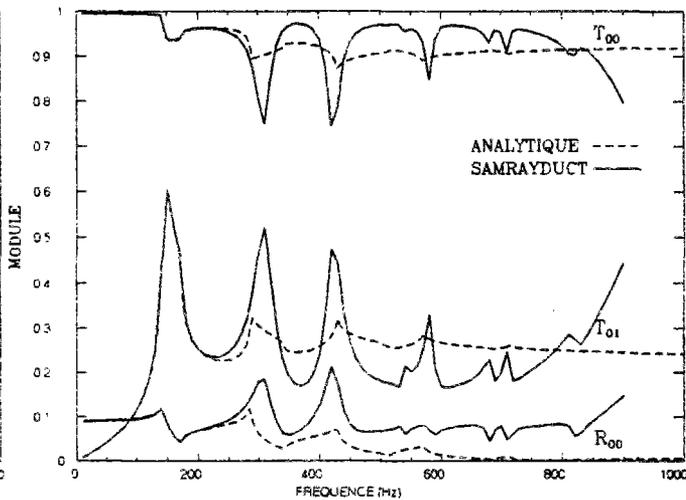


FIG. 2.8 - Modules des coefficients de transmission et réflexion pour un élargissement de section 1:1.2 m ( $N=4, d=0.1$  m).

On en tire:

$$|T_{00}| = 0.9959$$

$$|R_{00}| = 0.0909$$

Les calculs numériques à 10 Hz donnent:

$$|T_{00}| = 0.9960$$

$$|R_{00}| = 0.0908$$

L'inductance de la discontinuité de section est donnée par plusieurs auteurs, notamment Miles (1946 [50]) en électromagnétisme et Morse et Ingard (1968 [53]) en acoustique. Elle est obtenue par la méthode des raccordements asymptotiques.

A partir de l'expression de l'inductance et sachant que le débit est conservé à travers une discontinuité de volume nul, nous obtenons l'expression à l'ordre un du développement asymptotique en  $\omega$  des coefficients de réflexion et transmission.

$$\begin{cases} T_{00} = \frac{2\sqrt{\epsilon}}{\epsilon+1} + j\frac{\omega H_0}{C_0} F(\epsilon) \frac{2\epsilon^{\frac{3}{2}}}{(1+\epsilon)^2} \\ R_{00} = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} - j\frac{\omega H_0}{C_0} F(\epsilon) \frac{2\epsilon^2}{(1+\epsilon)^2} \end{cases} \quad (2.54)$$

avec  $H_0$  la hauteur du guide dans la partie amont et avec l'expression de la fonction  $F(\epsilon)$ :

$$F(\epsilon) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{(\epsilon-1)^2}{2\epsilon} \ln \left( \frac{\epsilon+1}{\epsilon-1} \right) + \ln \left( \frac{(\epsilon+1)^2}{4\epsilon} \right) \right] \quad (2.55)$$

La figure 2.7 présente les résultats obtenus à partir du code de calcul par équation intégrale (Samrayduct) ainsi que le développement à l'ordre 1 du développement asymptotique pour les parties réelle et imaginaire des coefficients de transmission et de réflexion de l'onde plane. Un bon accord est obtenu entre le calcul et le développement asymptotique. La gamme de validité du développement asymptotique est très grande pour cette géométrie (le développement est valable au-delà de la moitié de la première fréquence de coupure).

#### hautes fréquences

A hautes fréquences, l'approximation de l'acoustique géométrique s'applique. Pour une onde plane incidente, on peut dessiner une zone d'ombre (voir figure 2.9). On peut aussi en déduire que la réflexion est nulle.

C'est-à-dire:

$$\begin{aligned} p_B(\mathbf{y}) &= p_A \text{ sur } S_A \\ p_B(\mathbf{y}) &= 0 \text{ sur } S_B \setminus S_A \end{aligned}$$

En projetant sur les modes, on obtient:

$$\begin{cases} T_{00} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \\ T_{10} = \frac{\sqrt{2\epsilon}}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\epsilon}\right) \end{cases} \quad (2.56)$$

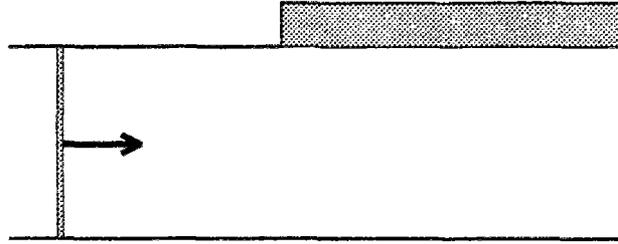


FIG. 2.9 - *Elargissement de section.*

On en tire:

$$|T_{00}| = 0.9129$$

$$|T_{10}| = 0.2466$$

$$|R_{00}| = 0.0000$$

Les calculs numériques à 1000 Hz donnent:

$$|T_{00}| = 0.9155$$

$$|T_{10}| = 0.2375$$

$$|R_{00}| = 0.0135$$

### 2.3.2 Matrice de diffusion d'un coude

Sur la figure 2.11 sont présentés les modules, obtenus par équation intégrale, des coefficients  $R_{00}$ ,  $T_{00}$  et  $T_{01}$  en fonction de la fréquence pour un coude de section carrée d'arête  $H_0 = 0.3$ .

Thompson (1984 [79]), à l'aide de la technique des raccordements asymptotiques, donne l'expression de ces coefficients au premier ordre en  $\omega$ :

$$R_{00} = j \frac{\omega H_0}{C_0} \left( \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{\pi} \right) \quad (2.57)$$

$$T_{00} = 1 + j \frac{\omega H_0}{C_0} \left( \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{\pi} \right) \quad (2.58)$$

Sur la figure 2.12, sont comparés les résultats par équation intégrale et avec raccordement asymptotique. On constate que la méthode par raccordement asymptotique fournit une assez bonne prévision jusqu'à  $\frac{\omega H_0}{C_0} = \frac{1}{10}$ , c'est-à-dire  $\omega = \frac{\omega_c}{10}$  où  $\omega_c$  est la première pulsation de coupure.

### 2.3.3 Vecteur source

Nous allons vérifier le calcul du vecteur source avec Samrayduct pour une géométrie particulière. Nous examinons le cas d'un guide d'onde droit de section carrée  $0.3 \times 0.3m$ . La longueur de la discontinuité est de  $0.3m$ . On peut donc dire que le volume  $\Omega$  de la discontinuité est un cube d'arête  $l=0.3m$ . La source secondaire occupe une face latérale  $\Gamma_s$  de ce cube et est uniforme.

En reprenant les notations précédentes:

$$\forall \underline{x} \in \Gamma_s, \quad q(\underline{x}) = 1 \quad (2.59)$$

$$\forall \underline{x} \in \Gamma_\Sigma, \quad q(\underline{x}) = 0 \quad (2.60)$$

Du fait de la symétrie du problème  $A^- = B^+$ . Nous nous contenterons donc d'examiner une seule terminaison de la discontinuité. Nous comparerons les calculs de Samrayduct avec l'expression analytique.

#### Méthode analytique

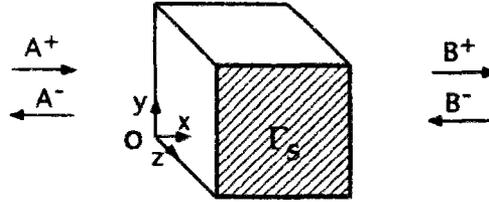


FIG. 2.10 - Distribution de sources dans une gaine droite.

Dans un guide d'onde droit, la fonction de Green est connue (voir Jones 1986 [35]).

$$G(\underline{x}, \underline{x}_o) = - \sum_{m,n}^{\infty} \frac{1}{2k_{mn}} \Psi_{mn}(y, z) \Psi_{mn}(y_o, z_o) e^{k_{mn}|x-x_o|} \quad (2.61)$$

Dans notre cas où les sections sont carrées de côté  $l$ , on a:

$$\Psi_{mn}(y, z) = \frac{1}{l} \cos\left(\frac{m\pi y}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{l}\right) \sqrt{2 - \delta_{m0}} \sqrt{2 - \delta_{n0}} \quad (2.62)$$

$$k_{mn}^2 = \frac{m^2 \pi^2}{l^2} + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.63)$$

La source est ici uniformément répartie sur la surface  $\Gamma_s$  portée par le plan  $z = l$ .

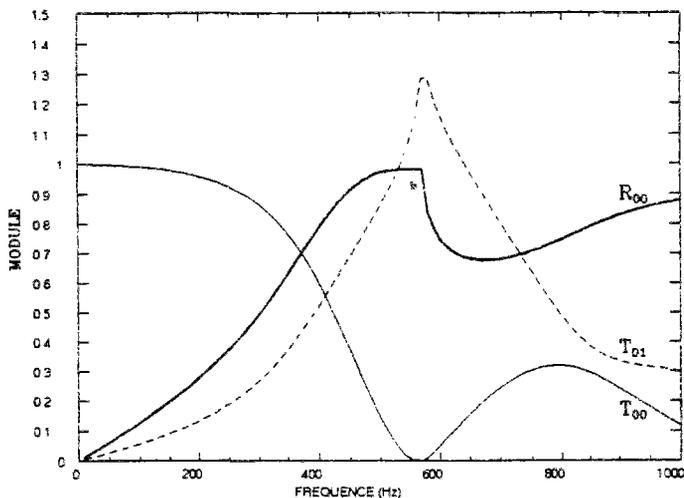


FIG. 2.11 - Modules des coefficients de transmission et réflexion pour un coude de section 0.3 m ( $N=20, d=0.1$  m).

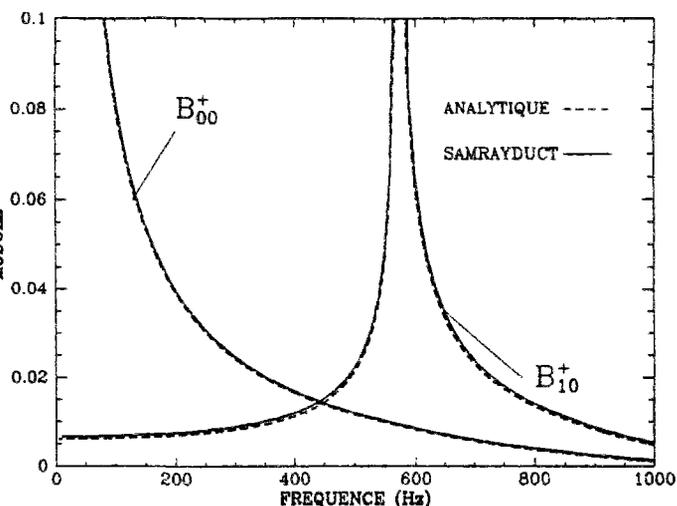


FIG. 2.13 - Modules des coefficients  $|B_{00}^+|$  et  $|B_{10}^+|$  pour une distribution uniforme de monopôles sur un côté d'une portion de gaine droite de section 0.3m x 0.3m.

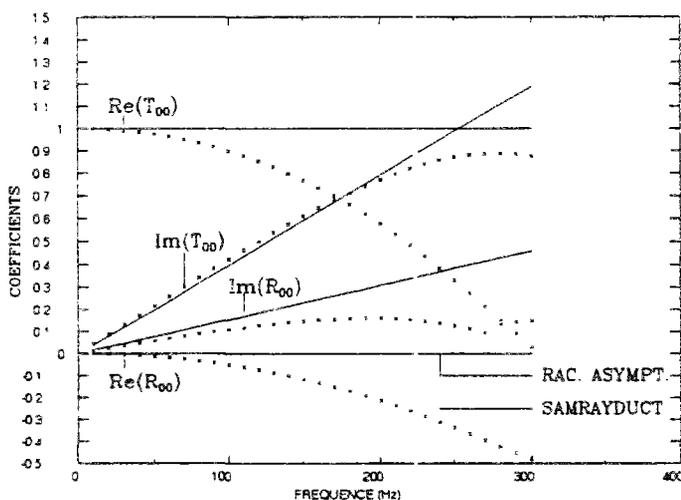


FIG. 2.12 - Parties réelle et imaginaire des coefficients de transmission et réflexion pour un coude de section 0.3m x 0.3m.

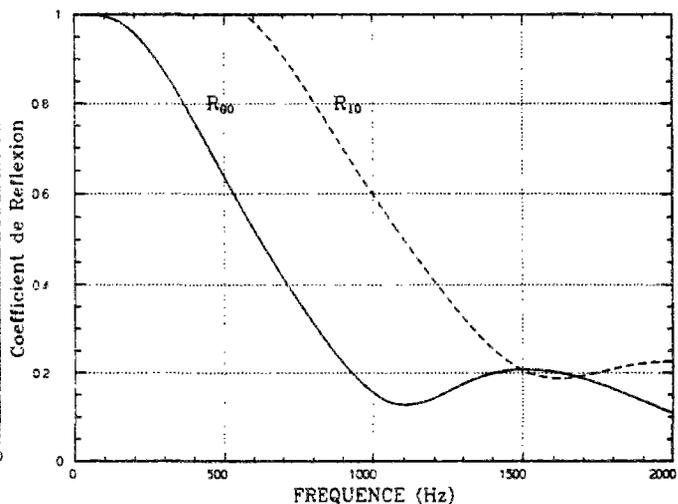


FIG. 2.14 - Modules des coefficients de réflexion pour un élargissement infini de section à une terminaison.

Nous choisissons l'extrémité amont comme origine en  $x$ .

$$\forall x \geq x_0 \quad p(\underline{x}) = \sum_{m,n}^{\infty} \frac{\rho_0 j \omega}{2k_{mn}} \Psi_{mn}(y, z) e^{k_{mn} x} \int_{\Gamma_s} \Psi_{mn}(y_0, z_0) e^{-k_{mn} x_0} dx_0 dy_0$$

En reprenant nos notations:

$$B_{mn}^+ = \frac{\rho_0 j \omega}{2k_{mn}} \int_{\Gamma_s} \Psi_{mn}(y_0, z_0) e^{-k_{mn} x_0} dx_0 dy_0$$

c'est-à-dire

$$B_{mn}^+ = \rho_0 j \omega \frac{(-1)^n \delta_{m0} \sqrt{2 - \delta_{n0}}}{2k_{mn}^2} (e^{k_{mn} l} - 1)$$

## Comparaison

Nous comparons les solutions numériques Samrayduct et analytique. Le nombre de modes pour le calcul Samrayduct est fixé à 10. Les modules des amplitudes des deux premiers modes  $|\frac{B_{00}^+}{\rho_0 \omega}|$  et  $|\frac{B_{10}^+}{\rho_0 \omega}|$  sont représentés sur les figures 2.13 pour une densité de maillage de 36 mailles par côté (c'est-à-dire une densité minimale de 7 noeuds par longueur d'onde à 1000 Hz).

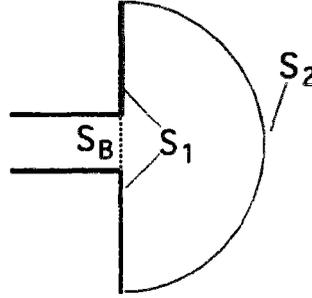


FIG. 2.15 - *Elargissement infini de section à une terminaison.*

## 2.4 Terminaison

Considérons un élargissement infini de section à la section terminale du guide. Nous considérons une frontière  $\Gamma$  d'intégration formée d'une demi-sphère  $S_2$  de rayon très grand et d'un disque  $S_1 \cup S_B$  porté par le plan de la section terminale  $S_B$ . La figure 2.15 représente la frontière d'intégration. L'équation intégrale correspondante s'écrit alors:

$$\forall x \in \Gamma \quad C(\underline{x})p(\underline{x}) = \int_{\Gamma} G(\underline{x}/\underline{x}_0) \frac{\partial p(\underline{x}_0)}{\partial n} d\underline{x}_0 - \int_{\Gamma} p(\underline{x}_0) \frac{\partial G(\underline{x}/\underline{x}_0)}{\partial n} d\underline{x}_0 \quad (2.64)$$

On choisit la fonction de Green tel que:

$$G(\underline{x}/\underline{x}_0) = \frac{e^{ik|\underline{x}-\underline{x}_0|}}{4\pi|\underline{x}-\underline{x}_0|} + \frac{e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'_0|}}{4\pi|\underline{x}-\underline{x}'_0|} \quad (2.65)$$

Avec  $\underline{x}'_0$  la source image de  $\underline{x}_0$  par rapport au plan porté par  $S_B$ . Lorsque le rayon de  $S_2$  tend vers l'infini, l'équation (2.64) se simplifie:

$$\forall x \in \Gamma \quad C(\underline{x})p(\underline{x}) = \int_{S_B} G(\underline{x}/\underline{x}_0) \frac{\partial p(\underline{x}_0)}{\partial n} d\underline{x}_0 \quad (2.66)$$

Cette équation intégrale est justifiée en Annexe C.

ici  $C(\underline{x}) = 1$  sur  $S_1 \cup S_B$ .

On obtient donc plus précisément:

$$\forall x \in \Gamma \quad p(\underline{x}) = \int_{S_B} G(\underline{x}/\underline{x}_0) \frac{\partial p(\underline{x}_0)}{\partial n} d\underline{x}_0 \quad (2.67)$$

En projetant sur les modes, on obtient:

$$b_i^+ + b_i^- = \sum_{j=0}^{N_B-1} G_{ij} k_j^B (b_j^- - b_j^+) \quad (2.68)$$

Avec

$$G_{ij} = \int_{S_B} \int_{S_B} \Psi_i^B(\underline{x}) G(\underline{x}/\underline{x}_0) \Psi_j^B(\underline{x}_0) d\underline{x} d\underline{x}_0 \quad (2.69)$$

Dans le cas d'une section  $S_B$  rectangulaire, explicitons le calcul des composantes  $G_{mnl}$  où les modes sont décrits par un double indice:

$$G_{mnl} = \int_0^{L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} \int_0^{L_z} \cos\left(m \frac{\pi y_1}{L_y}\right) \cos\left(k \frac{\pi y_2}{L_y}\right) \cos\left(n \frac{\pi z_1}{L_z}\right) \cos\left(l \frac{\pi z_2}{L_z}\right) \frac{e^{ikr}}{2\pi r} \epsilon_m \epsilon_n \epsilon_i \epsilon_j dy_1 dy_2 dz_1 dz_2 \quad (2.70)$$

Avec  $\epsilon_i = \sqrt{1 - \delta_{0i}}$  et  $r = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ .

Doak (1973 [18]) transforme cette intégrale quadruple en une somme d'intégrales simples.

La figure 2.14 montre les coefficients de réflexion diagonaux pour les deux premiers modes plan et anti-symétrique avec une section carrée  $0.3m \times 0.3m$ . On vérifie qu'à basses fréquences, la terminaison se comporte comme une surface libre (c'est-à-dire  $R_{00} = -1$ ). Le coefficient de réflexion diminue ensuite avec la fréquence. La transmission est prépondérante à partir de 1000 Hz.

## 2.5 Conclusion

Après avoir passé en revue l'ensemble des méthodes disponibles pour le calcul des matrices de diffusion, nous avons donc choisi une méthode de calcul par équation intégrale car elle permet le calcul des matrices de diffusion pour des discontinuités de géométrie générale avec propagation multimodale.

Nous avons développé un code de calcul par équation intégrale et comparé nos résultats avec quelques solutions analytiques.

Les résultats montrent qu'une bonne précision peut être obtenue lorsque le nombre de noeuds du maillage et le nombre de modes évanescents intervenant dans les calculs matriciels sont suffisants.

Cette méthode de calcul par équation intégrale est coûteuse en temps de calcul. C'est pourquoi elle ne doit être utilisée que dans des problèmes difficiles où l'application des autres méthodes est impossible.

Le cas de la gaine TGV dont la géométrie est compliquée fait partie de ces cas difficiles. Nous montrerons dans le chapitre suivant les résultats du calcul des matrices de diffusion pour cette géométrie.

Nous calculons ces matrices de diffusion dans le but d'évaluer l'efficacité des contrôles passif et actif dans des gaines de ventilation de géométrie particulière.

Le chapitre suivant est consacré à la comparaison des résultats numériques et expérimentaux de contrôle actif pour quelques géométries simples de gaine. Nous montrerons alors les avantages de l'association des contrôles actif et passif.

Une étude numérique du contrôle dans la gaine TGV est ensuite présentée.



## Chapitre 3

# Mesures du contrôle actif dans des discontinuités de guide d'onde

Bien que le principe du contrôle actif du bruit ait été inventé par Lueg [46] [28] en 1932, ce n'est que dans les années soixante-dix que la théorie de l'absorption active dans les guides d'onde a été développée par Jessel (1972 [34]) et Swinbanks (1973 [76]). L'utilisation de filtres adaptatifs a ensuite rendu possible des applications pratiques du contrôle actif du bruit. L'algorithme adaptatif le plus courant aujourd'hui est le X-LMS. Il a été présenté par Widrow (1981 [81]) et appliqué en premier par Burgess (1981 [11]) dans le contexte du contrôle actif du bruit.

Le contrôle actif du bruit est spécialement adapté à la réduction du bruit dans des gaines de ventilation de petite section. Quand la section est petite, le contrôle actif du bruit consiste à atténuer une onde plane. Les premiers systèmes actifs concernèrent donc naturellement le contrôle d'une onde plane dans un guide d'onde droit (Nelson 1992 [56]).

Quand la fréquence de l'excitation primaire dépasse la première fréquence de coupure, le contrôle est multimodal. Morishita (1994 [52]) utilise 4 sources secondaires et 4 microphones d'erreur dans un guide d'onde droit rectangulaire. Une atténuation d'environ 8 dB est obtenue dans le domaine fréquentiel où seulement 4 modes se propagent. Dans un travail plus récent, Laugesen (1995 [44]) présente des résultats de contrôle actif en régime harmonique avec 30 sources et 32 microphones. Des études théoriques ont aussi concerné le contrôle actif de la propagation multimodale dans des guides d'onde droit. Stell (1994 [74]) discute les effets des ondes évanescentes et des terminaisons réfléchissantes sur la performance du contrôle actif dans les guides d'onde rectangulaires. La taille et la position des sources ont été aussi examinées par Zander (1992 [86]). Les performances de différentes stratégies de contrôle sont aussi comparées (Zander 1994 [87], Stell 1994 [75]).

La réduction du bruit à la sortie d'une gaine de ventilation de géométrie complexe reste peu étudiée. La géométrie compliquée des gaines de ventilation est souvent due à l'architecture propre du système de ventilation mais elle peut aussi venir des acousticiens eux-mêmes qui introduisent des "silencieux" à l'intérieur de la ligne de ventilation. Ces gaines comportent des discontinuités qui ont en général un effet passif qui permet de réduire une partie du bruit rayonné à la sortie de la gaine de ventilation.

L'idée est donc d'associer les deux techniques de contrôle: une technique **passive** et une

technique active.

Comme l'absorption passive des revêtements des gaines est surtout efficace à hautes fréquences et comme le contrôle actif est efficace aux basses fréquences, les techniques passives et actives s'avèrent complémentaires. Un autre intérêt d'un contrôle "hybride" est que certaines machines comme les compresseurs génèrent un bruit de haut niveau que les sources secondaires, dont la puissance est limitée, peuvent difficilement contrôler. Pour réduire le niveau du bruit, il est intéressant d'intercaler un silencieux (Munjal 1989 [54]) ou de placer une source secondaire à l'extrémité d'un résonateur transversal quart-d'onde (Okamoto 1994 [60]).

Dans cette étude, nous allons évaluer l'efficacité d'un contrôle hybride ou, de manière plus générale, l'efficacité d'un contrôle actif dans des gaines de géométries complexes. Nous verrons que l'on peut tirer d'autres avantages que ceux cités précédemment de l'association du contrôle passif et actif. Nous allons comparer numériquement et expérimentalement l'efficacité d'un contrôle actif, obtenue pour trois configurations particulières (guide droit avec absorbant, résonateur et coude) avec celle obtenue pour un guide droit.

Nous allons ainsi pouvoir mettre en évidence l'intérêt d'un contrôle hybride. Nous montrerons sur les exemples l'intérêt des effets réactifs, dissipatifs ou diffusifs du contrôle passif lorsqu'il est combiné avec un contrôle actif.

Nous allons d'abord présenter l'algorithme X-LMS que nous utilisons pour le contrôle. Nous montrerons alors l'influence de la longueur du filtre et de la fréquence d'échantillonnage sur l'efficacité du contrôle. Ces deux facteurs limitent l'atténuation obtenue aux microphones d'erreur. Nous mettrons ensuite en évidence des avantages du contrôle hybride, d'abord en propagation plane, puis en propagation multimodale.

Nous traiterons enfin numériquement le cas d'une géométrie complexe: la gaine de ventilation TGV. Nous utiliserons encore le code de calcul par équation intégrale pour évaluer la matrice de diffusion associée à la discontinuité ainsi que l'efficacité du contrôle actif pour deux positions de sources différentes.

### 3.1 Algorithme X-LMS

Nous présentons brièvement le principe d'un des algorithmes adaptatifs les plus utilisés en contrôle actif: l'algorithme X-LMS. Pour plus de détails, voir (Elliott 1992 [19]).

Considérons  $M$  microphones d'erreur,  $N$  sources secondaires et 1 capteur de référence.

Le signal à l'instant  $n$  mesuré au  $i^{\text{ème}}$  microphone d'erreur est noté  $e_i(n)$  avec  $i$  variant de 1 à  $M$ .

Le signal à l'instant  $n$  envoyé à la  $j^{\text{ème}}$  source secondaire est noté  $y_j(n)$  avec  $j$  variant de 1 à  $N$ . Le signal à l'instant  $n$  mesuré au capteur de référence est noté  $x(n)$ .

La fonction de coût  $J$  que l'on cherche à minimiser représente l'espérance de la somme des carrés des signaux aux microphones d'erreur.

$$J = \sum_{i=1}^M E [e_i^2] \quad (3.1)$$

On appellera filtre du chemin acoustique entre la  $j^{\text{ème}}$  source secondaire et le  $i^{\text{ème}}$  microphone d'erreur, le filtre  $C_{ij}$  tel que:

$$e_i(n) = d_i(n) + \sum_{m=0}^{N_c-1} C_{ij}[m] y_j(n-m) \quad (3.2)$$

où  $d_i(n)$  est la mesure du signal primaire au  $i^{\text{ème}}$  microphone d'erreur.

On appellera filtre de contrôle, le filtre  $W_j$  tel que:

$$y_j(n) = \sum_{m=0}^{N_w-1} W_j[m] x(n-m) \quad (3.3)$$

$N_c$  et  $N_w$  sont les longueurs des filtres. Dans le système que l'on utilisera, les filtres  $C_{ij}$  sont identifiés dans une étape antérieure au contrôle. Le problème consiste à trouver de manière adaptative les filtres de contrôle  $W_j$  qui minimisent  $J$ .

L'algorithme X-LMS consiste à chaque instant à adapter les filtres de contrôle  $W_j$  initialement nuls et à filtrer  $x$  pour obtenir les signaux  $y_j$  des sources secondaires.

$$\begin{cases} y_j(n) = \sum_{m=0}^{N_w-1} W_j[m] x(n-m) \\ W_j[m](n+1) = W_j[m](n) - \alpha \sum_{i=1}^M e_i(n) r_{ij}(n-m) \end{cases} \quad (3.4)$$

avec  $r_{ij}(n) = \sum_{m=0}^{N_c-1} C_{ij}[m] x(n-m)$  et  $\alpha$  le pas de l'algorithme.

### 3.2 Erreurs liées à l'algorithme de contrôle en propagation plane

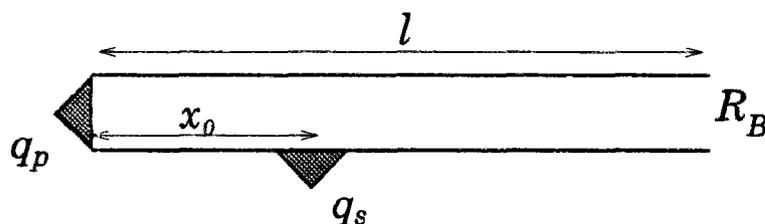


FIG. 3.1 - Guide d'onde unidimensionnel avec terminaisons réfléchissantes.

Considérons un guide d'onde de longueur  $l$  et de section carrée d'arête de dimension  $a$  (voir figure 3.1). Une source primaire ponctuelle de débit volumique  $q_p$  est située en  $x = 0$ . Une source secondaire ponctuelle de débit volumique  $q_s$  est située en  $x = x_0$ . Soit  $S$  l'aire de la section. La terminaison amont est considérée parfaitement réfléchissante et terminaison aval est partiellement réfléchissante. Les coefficients de réflexion aux terminaisons sont  $R_A(\omega)$  pris égal à 1 en amont et  $R_B(\omega)$  en aval.

On notera  $\tilde{k} = \frac{\omega}{C_0} + j\alpha$  où  $\alpha$  est le coefficient de perte qui est aussi pris indépendant de la fréquence avec  $\alpha > 0$ .

En fréquence le système d'équations vérifié par la pression complexe  $p$  s'écrit alors:

$$\begin{cases} \frac{d^2 p}{dx^2} + \tilde{k}^2 p = \rho_0 j \omega \frac{q_s}{S} \delta_{x_0} \\ \frac{dp}{dx}(0) = \rho_0 j \omega \frac{q_p}{S} \\ \frac{dp}{dx}(l) = \frac{1 - R_B}{1 + R_B} j \tilde{k} p(l) \end{cases} \quad (3.5)$$

La résolution du système donne (voir la démonstration ci-dessous):

$$\begin{cases} p(x, \omega) = \frac{q_p(\omega)}{S} Z_p(x, \omega) + \frac{q_s(\omega)}{S} Z_s(x, \omega) \\ Z_p(x, \omega) = \frac{\rho_0 C_0}{1 + j \frac{C_0 \alpha}{\omega}} \frac{e^{j\tilde{k}(x-l)} + R_B e^{-j\tilde{k}(x-l)}}{e^{-j\tilde{k}l} - R_B e^{j\tilde{k}l}} \quad \forall x \\ Z_s(x, \omega) = Z_p(x, \omega) \cos(\tilde{k}x_0) \quad \forall x \geq x_0 \\ Z_s(x, \omega) = Z_p(x_0, \omega) \cos(\tilde{k}x) \quad \forall x \leq x_0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Si les mesures de pression sont effectuées avec un microphone unidirectionnel, un indice  $+$  sera utilisé pour indiquer que l'on ne garde que la contribution des ondes se propageant vers l'aval. Le système 3.6 devient:

$$\begin{cases} p^+(x, \omega) = \frac{q_p(\omega)}{S} Z_p^+(x, \omega) + \frac{q_s(\omega)}{S} Z_s^+(x, \omega) \\ Z_p^+(x, \omega) = \frac{\rho_0 C_0}{1 + j \frac{C_0 \alpha}{\omega}} \frac{e^{j\tilde{k}(x-l)}}{e^{-j\tilde{k}l} - R_B e^{j\tilde{k}l}} \quad \forall x \\ Z_s^+(x, \omega) = Z_p^+(x, \omega) \cos(\tilde{k}x_0) \quad \forall x \geq x_0 \\ Z_s^+(x, \omega) = Z_p(x_0, \omega) \frac{e^{j\tilde{k}x}}{2} \quad \forall x \leq x_0 \end{cases} \quad (3.7)$$

### 3.2.1 Démonstration de 3.6

La pression  $p(x, \omega)$  a pour expression:

$$\begin{cases} p(x, \omega) = B^+ e^{j\tilde{k}(x-l)} + B^- e^{-j\tilde{k}(x-l)} \quad \forall x \geq x_0 \\ p(x, \omega) = A^+ e^{j\tilde{k}x} + A^- e^{-j\tilde{k}x} \quad \forall x \leq x_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

où  $A^+$ ,  $A^-$ ,  $B^+$  et  $B^-$  sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites.

La condition en  $x = 0$  donne:

$$A^+ - A^- = \frac{\rho_0 C_0}{1 + j \frac{C_0 \alpha}{\omega}} \frac{q_p(\omega)}{S} \quad (3.9)$$

La condition en  $x = l$  donne:

$$B^- = R_B B^+ \quad (3.10)$$

La condition de continuité de la pression en  $x = x_0$  donne:

$$B^+ e^{j\bar{k}(x_0-l)} + B^- e^{-j\bar{k}(x_0-l)} = A^+ e^{j\bar{k}x_0} + A^- e^{-j\bar{k}x_0} \quad (3.11)$$

Le saut de la dérivée première de la pression en  $x = x_0$  donne:

$$B^+ e^{j\bar{k}(x_0-l)} - B^- e^{-j\bar{k}(x_0-l)} - A^+ e^{j\bar{k}x_0} + A^- e^{-j\bar{k}x_0} = \frac{\rho_0 C_0}{1 + j \frac{C_0 \alpha}{\omega}} \frac{q_s(\omega)}{S} \quad (3.12)$$

La résolution du système donne pour  $q_s$  égal à zéro:

$$\begin{cases} B^+ = \frac{\rho_0 C_0}{1 + j \frac{C_0 \alpha}{\omega}} \frac{q_p(\omega)}{S} \frac{1}{e^{-j\bar{k}l} - R_B e^{j\bar{k}l}} \\ B^- = R_B B^+ \\ A^+ = e^{-j\bar{k}l} B^+ \\ A^- = R_B e^{j\bar{k}l} B^+ \end{cases} \quad (3.13)$$

La résolution du système donne pour  $q_p$  égal à zéro:

$$\begin{cases} B^+ = \frac{\rho_0 C_0}{1 + j \frac{C_0 \alpha}{\omega}} \frac{q_s(\omega)}{S} \frac{\cos(\bar{k}x_0)}{e^{-j\bar{k}l} - R_B e^{j\bar{k}l}} \\ B^- = R_B B^+ \\ A^+ = \frac{e^{j\bar{k}(x_0-l)} + R_B e^{-j\bar{k}(x_0-l)}}{2\cos(\bar{k}x_0)} B^+ \\ A^- = \frac{e^{j\bar{k}(x_0-l)} + R_B e^{-j\bar{k}(x_0-l)}}{2\cos(\bar{k}x_0)} B^+ \end{cases} \quad (3.14)$$

On en déduit les formules 3.6.

### 3.3 Solution exacte

Cherchons  $q_s(\omega)$  tel que  $p(x) = 0$  (ou  $p^+(x) = 0$ ) pour  $x \geq x_s$  et pour tout  $\omega$ . On en déduit que:

$$\boxed{q_s(\omega) = -\frac{q_p(\omega)}{\cos(\bar{k}x_0)}} \quad (3.15)$$

Cherchons  $q_s(t)$  tel que  $p(x) = 0$  pour  $x \geq x_s$  et pour tout  $t$ .  
Commençons par écrire différemment l'expression de  $q_s(\omega)$ .

L'équation 3.15 s'écrit aussi:

$$q_s(\omega) = -2q_p(\omega) \frac{e^{j\bar{k}x_0}}{1 + e^{2j\bar{k}x_0}} \quad (3.16)$$

Or on peut développer une expression de la forme  $\frac{1}{1+z}$  en série entière. La série entière est  $\sum_{m=0}^{\infty} z^m (-1)^m$  et son rayon de convergence est égal à 1.

Nous allons appliquer ce développement pour  $z$  égal à  $e^{2j\bar{k}x_0}$ , On vérifie alors que  $|z| < 1$  car  $\alpha > 0$ .

$$\frac{1}{1 + e^{2j\bar{k}x_0}} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{2mj\bar{k}x_0} (-1)^m \quad (3.17)$$

Les équations 3.16 et 3.17 donnent ensemble:

$$q_s(\omega) = -2q_p(\omega) \sum_{m=0}^{\infty} e^{(2m+1)j\bar{k}x_0} (-1)^m \quad (3.18)$$

La transformée de Fourier de l'équation 3.18 donne:

$$\boxed{q_s(t) = -2 \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(2m+1)\alpha x_0} (-1)^m q_p\left(t - \frac{(2m+1)x_0}{C_0}\right)} \quad (3.19)$$

On vérifie que le contrôle est causal. Le calcul de  $q_s$  ne dépend que des valeurs passées de  $q_p$ .

## 3.4 Filtre de contrôle $W$

### 3.4.1 Définition du filtre de contrôle

On définit comme filtre de contrôle  $W(\omega)$  le rapport  $\frac{q_s(\omega)}{q_p(\omega)}$ . On suppose ici que l'on prend de façon idéale le signal primaire comme signal de référence. La définition en fréquence de  $W(\omega)$  est donc:

$$q_s(\omega) = W(\omega)q_p(\omega) \quad (3.20)$$

La définition en temps de  $W(t)$  est aussi:

$$q_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\tau)q_p(t - \tau)d\tau \quad (3.21)$$

Comme  $W(t)$  est un filtre causal ( $W(t) = 0$  pour  $t \leq 0$ ), l'équation 3.21 se réécrit:

$$q_s(t) = \int_0^{\infty} W(\tau)q_p(t - \tau)d\tau \quad (3.22)$$

Le filtre exact  $W(t)$  obtenu dans l'équation 3.19 s'écrit:

$$W(t) = -2 \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(2m+1)\alpha x_0} (-1)^m \delta\left(t - \frac{(2m+1)x_0}{C_0}\right) \quad (3.23)$$

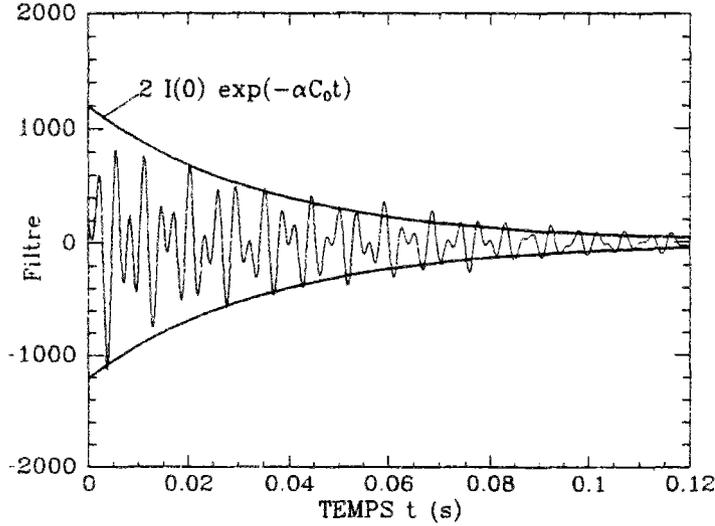


FIG. 3.2 - Filtre de contrôle  $\tilde{W}(t)$ ,  $\alpha$  égal à  $0.08 \text{ m}^{-1}$ .

### 3.4.2 Identification du coefficient de perte $\alpha$

Il est possible de déterminer expérimentalement le filtre de contrôle  $W$ .  
D'après les équations 3.15 et 3.20, nous savons que:

$$W(\omega) = -\frac{1}{\cos(kx_0)} = -\frac{Z_p^+(x, \omega)}{Z_s^+(x, \omega)} = -\frac{Z_p^+(x, \omega)}{Z_s^+(x, \omega)} \quad (3.24)$$

Nous utilisons un microphone unidirectionnel (notation  $+$ ). Après transformée de Fourier, on obtient:

$$W(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z_p^+(x, \omega)}{Z_s^+(x, \omega)} e^{-j\omega t} d\omega \quad (3.25)$$

En pratique, le coefficient de perte  $\alpha$  n'est pas indépendant de la fréquence. C'est pourquoi nous allons limiter notre étude à une bande de pulsation  $[\omega_1, \omega_2]$  à l'intérieur de laquelle nous considérons que le coefficient de perte est constant. Nous filtrons donc la fonction  $\frac{Z_p^+(x, \omega)}{Z_s^+(x, \omega)}$  par un filtre passe-bande égal à  $1_{[-\omega_2, -\omega_1] \cup [\omega_1, \omega_2]}$ . L'équation 3.25 devient alors:

$$W(t) = -\frac{1}{\pi} \text{Re} \left[ \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{Z_p^+(x, \omega)}{Z_s^+(x, \omega)} e^{-j\omega t} d\omega \right] \quad (3.26)$$

Après filtrage, l'équation 3.23 devient aussi

$$W(t) = -2 \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(2m+1)\alpha x_0} (-1)^m I\left(t - \frac{(2m+1)x_0}{C_0}\right) \quad (3.27)$$

où  $I(t) = \frac{\sin(\omega_2 t) - \sin(\omega_1 t)}{\pi t}$ . Notons  $\tau_m = \frac{(2m+1)x_0}{C_0}$ .

En considérant que  $\frac{I(t)}{I(0)} \approx 0$  pour  $|t| \geq \frac{2x_0}{C_0}$ , on peut faire l'approximation que:

$$W(\tau_m) \approx -2I(0)e^{-(2m+1)\alpha x_0}(-1)^m \quad (3.28)$$

d'où

$$|W(\tau_m)| \approx 2I(0)e^{-\alpha C_0 \tau_m} \quad (3.29)$$

avec  $I(0) = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\pi}$

Introduisons maintenant les mesures expérimentales  $\tilde{Z}_p^+(x, \omega)$  et  $\tilde{Z}_s^+(x, \omega)$  des chemins acoustiques. Le filtre de contrôle  $\tilde{W}(t)$  est défini comme suit:

$$\tilde{W}(t) = -\frac{1}{\pi} \text{Re} \left[ \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\tilde{Z}_p^+(x, \omega)}{\tilde{Z}_s^+(x, \omega)} e^{-j\omega t} d\omega \right] \quad (3.30)$$

La mesure de  $\tilde{W}(t)$  (voir figure 3.2) et la relation 3.29 nous permettent d'identifier le coefficient de perte  $\alpha$ . Nous avons pris pour filtre passe-bande en fréquence la fenêtre [100-400] Hz. Le coefficient de perte est trouvé égal à  $0.08 \text{ m}^{-1}$ .

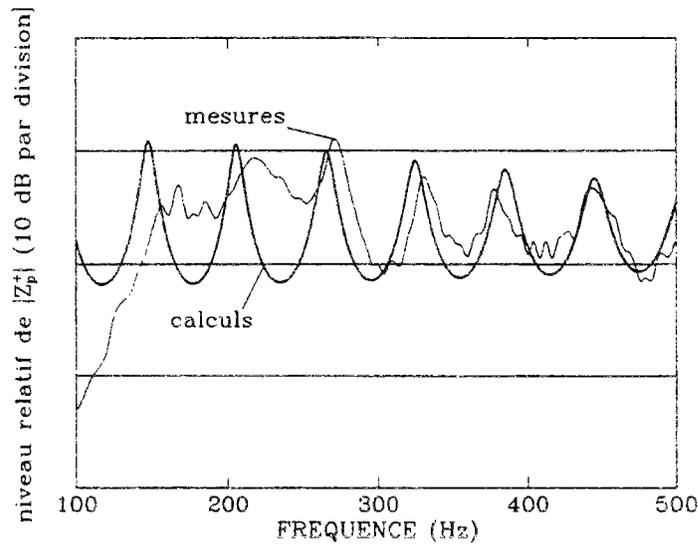


FIG. 3.3 - Mesures avec un capteur unidirectionnel et calculs de  $|Z_p^+|$ .

### 3.4.3 Mesure du champ primaire

Les expressions des champs primaires  $Z_p(x, \omega)$  et  $Z_p^+(x, \omega)$  sont données par les formules 3.6 et 3.7 pour un capteur bidirectionnel et unidirectionnel respectivement.

Les dimensions et coefficient de perte du guide sont donnés dans le tableau 3.1.

Le coefficient de réflexion  $R_B(\omega)$  est calculé pour un guide d'onde de section carrée d'arête de dimension  $a$  et débouchant par un plan infini parfaitement rigide. Nous donnons

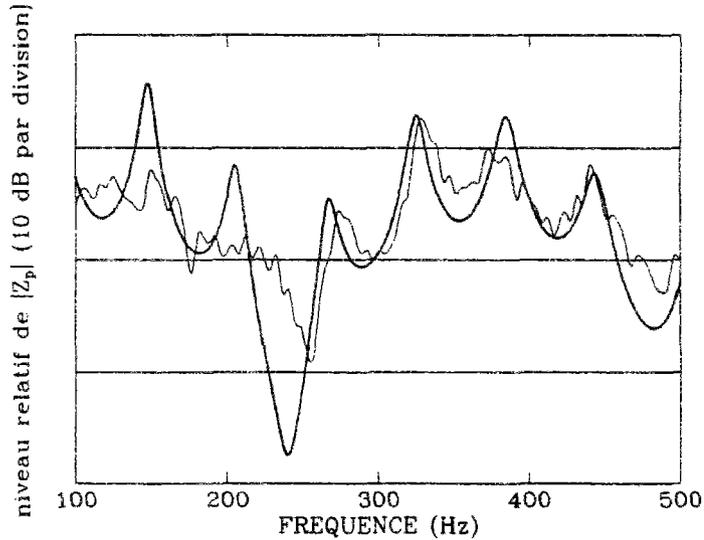


FIG. 3.4 - Mesures avec un capteur bidirectionnel et calculs de  $|Z_p|$ .

$x_0$	$x$	$l$	$a$	$\alpha$
1.3 m	2.3 m	2.8 m	0.3 m	0.08 m <sup>-1</sup>

TAB. 3.1 - Données.

l'expression de l'interpolation par un polynôme de degré 3 sur  $\omega$  du coefficient complexe  $R_B(\omega)$ .

$$\text{Re}[R_B(\omega)] = -1.0 + 4.16 \cdot 10^{-1}(ka)^2 - 8.40 \cdot 10^{-2}(ka)^4 + 9.56 \cdot 10^{-3}(ka)^6 - 4.42 \cdot 10^{-4}(ka)^8 \quad (3.31)$$

$$\text{Im}[R_B(\omega)] = -9.37 \cdot 10^{-1}(ka) + 2.62 \cdot 10^{-1}(ka)^3 - 4.86 \cdot 10^{-2}(ka)^5 + 5.17 \cdot 10^{-3}(ka)^7 - 2.26 \cdot 10^{-4}(ka)^9 \quad (3.32)$$

Les mesures et calculs pour des capteurs unidirectionnels et bidirectionnels sont donnés sur les figures 3.3 et 3.4 avec un coefficient de perte  $\alpha$  pris égal à 0.08 m<sup>-1</sup>.

### 3.5 Longueur du filtre de contrôle

En pratique les limitations du traitement numérique font que le contrôle n'a pas une efficacité totale. Les principales limitations sont:

- La longueur finie du filtre caractérisée par un temps  $T_f$ .
- La discrétisation caractérisée par la fréquence d'échantillonnage  $\frac{1}{T_g}$ .

Nous nous intéressons d'abord à l'effet d'une longueur finie d'un filtre  $W_f$ . Considérons donc un filtre numérique  $W_f$  avec une longueur finie  $T_f$ , c'est-à-dire:

$$\begin{cases} W_f(t) = 0 & t < 0 \\ W_f(t) = 0 & t > T_f \end{cases} \quad (3.33)$$

### 3.5.1 Solution approchée

Nous cherchons une solution approchée  $W_{f1}$  sous la forme suivante:

$$\begin{cases} W_{f1}(t) = W(t) & 0 \leq t \leq T_f \\ W_{f1}(t) = 0 & t > T_f \end{cases} \quad (3.34)$$

$W_{f1}$  correspond donc à la solution exacte  $W$  tronquée pour  $t > T_f$ . On en déduit l'expression de  $W_{f1}(t)$ :

$$W_{f1}(t) = -2 \sum_{m=0}^{M_f} e^{-(2m+1)\alpha x_0} (-1)^m \delta\left(t - \frac{(2m+1)x_0}{C_0}\right) \quad (3.35)$$

avec  $M_f = E\left[\frac{1}{2} \frac{C_0 T_f}{x_0} - \frac{1}{2}\right]$  où  $E[X]$  est la partie entière de  $X$ .

On en déduit l'expression de  $W_{f1}(\omega)$  et de  $q_s(\omega)$ :

$$W_{f1}(\omega) = -2 \sum_{m=0}^{M_f} e^{(2m+1)j\tilde{k}x_0} (-1)^m \quad (3.36)$$

$$W_{f1}(\omega) = -2e^{j\tilde{k}x_0} \frac{1 - e^{2(M_f+1)j\tilde{k}x_0} (-1)^{M_f+1}}{1 + e^{2j\tilde{k}x_0}} \quad (3.37)$$

$$W_{f1}(\omega) = -\frac{1 - e^{2(M_f+1)j\tilde{k}x_0} (-1)^{M_f+1}}{\cos(\tilde{k}x_0)} \quad (3.38)$$

$$q_s(\omega) = -q_p(\omega) \frac{1 - e^{2(M_f+1)j\tilde{k}x_0} (-1)^{M_f+1}}{\cos(\tilde{k}x_0)} \quad (3.39)$$

Le module de la pression complexe résiduelle s'écrit alors pour  $x \geq x_0$  et un capteur unidirectionnel:

$$|p(x, \omega)| = \frac{|q_p|}{S} |Z_p^+(x, \omega)| e^{-2(M_f+1)\alpha x_0} \quad (3.40)$$

En faisant l'approximation  $M_f \approx \frac{1}{2} \frac{C_0 T_f}{x_0}$  et  $M_f \gg 1$ , l'équation 3.40 devient:

$$|p(x, \omega)| = \frac{|q_p|}{S} |Z_p^+(x, \omega)| e^{-C_0 T_f \alpha} \quad (3.41)$$

L'atténuation acoustique est définie par:

$$\gamma(x, \omega) = -20 \log_{10} \left[ \frac{S |p(x, \omega)|}{|q_p| |Z_p^+(x, \omega)|} \right] \quad (3.42)$$

$$\gamma(x, \omega) = 8.7 \times C_0 T_f \alpha \quad (dB) \quad (3.43)$$

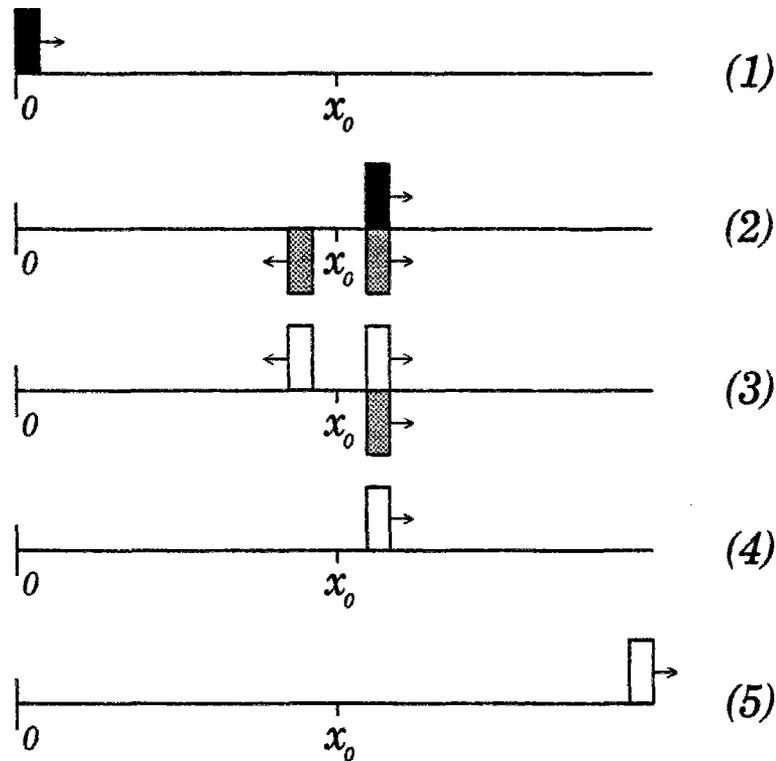


FIG. 3.5 - Principe du contrôle avec la solution approchée ( $M_f = 1$ ).

L'expression de l'atténuation acoustique montre qu'elle est indépendante de la pulsation  $\omega$  et de la position  $x$ . Elle est de plus indépendante de la position de la source secondaire  $x_0$ . L'équation 3.43 montre qu'il y a deux façons d'améliorer l'atténuation acoustique: augmenter le coefficient de perte  $\alpha$  ou la longueur du filtre  $T_f$ .

Le principe du contrôle par la solution  $W_{f1}$  est présenté sur la figure 3.5 où nous avons pris l'exemple  $M_f$  égal à 1.  $W_{f1}$  n'est pas la solution optimale. Nous l'appellerons "solution approchée". Comme le montre la figure 3.5, lorsqu'une excitation primaire (en noir) atteint (2), la source secondaire envoie une onde de même amplitude et de signe opposé de façon à annuler cette excitation. A ce moment là, une onde est aussi émise vers la terminaison amont réfléchissante. Lorsqu'elle revient au niveau de la source secondaire (3), elle est annulée et une nouvelle onde est envoyée vers la terminaison amont. Lorsqu'elle retourne vers l'aval (4), cette onde ne peut pas être contrôlée du fait de la longueur limitée du filtre.

Sur la figure 3.5, le coefficient de perte est pris égal à zéro et le bilan du contrôle est alors nul. Le niveau de l'onde sortante est en effet égal au niveau de l'onde primaire (voir (1) et (5)). En pratique l'atténuation est positive grâce au coefficient de perte car la longueur du chemin parcouru par l'onde a été augmentée.

### 3.5.2 Solution optimale

Nous allons maintenant déterminer la solution optimale du problème  $W_{f2}$  qui minimise l'espérance du carré de la pression. Nous noterons  $J$  cette fonctionnelle.

Ecrivons d'abord l'expression de la pression  $p(x, t)$ :

$$p(x, t) = \frac{1}{S} \int_0^\infty q_p(t - \tau) Z_p(x, \tau) d\tau + \frac{1}{S} \int_0^\infty q_s(t - \tau) Z_s(x, \tau) d\tau \quad (3.44)$$

et

$$q_s(t) = \int_0^{T_f} q_p(t - \tau) W(\tau) d\tau \quad (3.45)$$

On en déduit que:

$$p(x, t) = \frac{1}{S} \int_0^\infty q_p(t - \tau) Z_p(x, \tau) d\tau + \int_0^{T_f} \left[ \frac{1}{S} \int_0^\infty q_p(t - \tau_1 - \tau_2) Z_s(x, \tau_1) d\tau_1 \right] W(\tau_2) d\tau_2 \quad (3.46)$$

Définissons les fonctions  $d(t)$  et  $k(t)$ :

$$\begin{cases} d(t) = \frac{1}{S} \int_0^\infty q_p(t - \tau) Z_p(x, \tau) d\tau \\ k(t) = \frac{1}{S} \int_0^\infty q_p(t - \tau) Z_s(x, \tau) d\tau \end{cases} \quad (3.47)$$

L'équation 3.46 se réécrit alors:

$$p(x, t) = d(t) + \int_0^{T_f} k(t - \tau) W(\tau) d\tau \quad (3.48)$$

Ecrivons maintenant le problème de minimisation:

$$\min_W J = \mathbf{E}[p^2(x, t)] = \mathbf{E} \left[ \left( d(t) + \int_0^{T_f} k(t - \tau) W(\tau) d\tau \right)^2 \right] \quad (3.49)$$

avec

$$\begin{cases} W(t) = 0 & t < 0 \\ W(t) = 0 & t > T_f \end{cases} \quad (3.50)$$

L'excitation primaire  $q_p(t)$  est une excitation aléatoire stationnaire de densité spectrale  $S_q(\omega)$ .

Réécrivons la fonctionnelle  $J$ :

$$J = c + 2 \int_0^{T_f} W(\tau) b(\tau) d\tau + \int_0^{T_f} \int_0^{T_f} W(\tau_2) a(\tau_2 - \tau_1) W(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.51)$$

où

$$\begin{cases} c = \mathbf{E}[d^2(t)] \\ = \frac{1}{S^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |Z_p(x, \omega)|^2 S_q(\omega) d\omega \\ b(\tau) = \mathbf{E}[k(t - \tau) d(t)] \\ = \frac{1}{S^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty Z_p(x, \omega) \bar{Z}_s(x, \omega) S_q(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega \\ a(\tau) = \mathbf{E}[k(t) k(t + \tau)] \\ = \frac{1}{S^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |Z_s(x, \omega)|^2 S_q(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega \end{cases} \quad (3.52)$$

La fonction  $W_{f_2}(t)$  qui rend  $J$  minimum vérifie l'équation de Wiener-Hopf:

$$b(\tau) + \int_0^{T_f} a(\tau - \tau_1) W_{f_2}(\tau_1) d\tau_1 = 0 \quad \forall \tau \in [0, T_f] \quad (3.53)$$

Si l'excitation aléatoire est un bruit blanc, alors nous pouvons écrire  $S_q(\omega) = A_p$ .

Nous allons examiner dans la partie qui suit le cas où  $R_B$  est égal à zéro. C'est le cas d'une terminaison anéchoïque. Nous allons aussi supposer que la longueur d'onde  $\lambda$  est très inférieure à  $\frac{1}{\alpha}$ . Dans ce cas (avec  $x \geq x_0$ ):

$$\begin{cases} Z_p(x, \omega) = \rho_0 C_0 e^{j\bar{k}x} \\ Z_s(x, \omega) = \rho_0 C_0 e^{j\bar{k}x} \cos(\bar{k}x_0) \end{cases} \quad (3.54)$$

Il est alors possible d'expliciter  $b(\tau)$  et  $a(\tau)$ .

$$\begin{cases} b(\tau) = A_p \left( \frac{\rho_0 C_0}{S} \right)^2 \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\bar{k}x_0) e^{-j\omega\tau} d\omega \right] e^{-2\alpha x} \\ \quad = A_p \left( \frac{\rho_0 C_0}{S} \right)^2 \left[ \frac{e^{\alpha x_0}}{2} \delta\left(\tau - \frac{x_0}{C_0}\right) + \frac{e^{-\alpha x_0}}{2} \delta\left(\tau + \frac{x_0}{C_0}\right) \right] e^{-2\alpha x} \\ a(\tau) = A_p \left( \frac{\rho_0 C_0}{S} \right)^2 \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\cos(\bar{k}x_0)|^2 e^{-j\omega\tau} d\omega \right] e^{-2\alpha x} \\ \quad = A_p \left( \frac{\rho_0 C_0}{S} \right)^2 \left[ \frac{ch(2\alpha x_0)}{2} \delta(\tau) + \frac{1}{4} \delta\left(\tau - \frac{2x_0}{C_0}\right) + \frac{1}{4} \delta\left(\tau + \frac{2x_0}{C_0}\right) \right] e^{-2\alpha x} \end{cases} \quad (3.55)$$

Notons  $\tau_0 = \frac{x_0}{C_0}$ . Les équations 3.53 et 3.55 donnent:

$$\begin{aligned} \frac{e^{\alpha x_0}}{2} \delta(\tau - \tau_0) + \frac{ch(2\alpha x_0)}{2} W_{f_2}(\tau) \mathbf{1}_{[0, T_f]}(\tau) \\ + \frac{1}{4} W_{f_2}(\tau - 2\tau_0) \mathbf{1}_{[2\tau_0, T_f]}(\tau) \\ + \frac{1}{4} W_{f_2}(\tau + 2\tau_0) \mathbf{1}_{[0, T_f - 2\tau_0]}(\tau) = 0 \quad \forall \tau \in [0, T_f] \end{aligned} \quad (3.56)$$

On en déduit l'expression de  $W_{f_2}(t)$ :

$$W_{f_2}(t) = \sum_{i=0}^{M_f} a_i \delta(t - (2i + 1)\tau_0) \quad (3.57)$$

Les coefficients  $a_i$  vérifient le système d'équations suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{e^{\alpha x_0}}{2} = \frac{ch(2\alpha x_0)}{2} a_0 + \frac{1}{4} a_1 \\ 0 = \frac{1}{4} a_0 + \frac{ch(2\alpha x_0)}{2} a_1 + \frac{1}{4} a_2 \\ \dots = \dots \\ 0 = \frac{1}{4} a_i + \frac{ch(2\alpha x_0)}{2} a_{i+1} + \frac{1}{4} a_{i+2} \\ \dots = \dots \\ 0 = \frac{1}{4} a_{M_f-2} + \frac{ch(2\alpha x_0)}{2} a_{M_f-1} + \frac{1}{4} a_{M_f} \\ 0 = \frac{1}{4} a_{M_f-1} + \frac{ch(2\alpha x_0)}{2} a_{M_f} \end{array} \right. \quad (3.58)$$

Les coefficients  $a_i$  vérifient une suite récurrente:

$$a_i = -2ch(2\alpha x_0)a_{i+1} - a_{i+2} \quad (3.59)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{M_f-1} = -2ch(2\alpha x_0)a_{M_f} \\ a_{M_f} = a_{M_f} \end{array} \right. \quad (3.60)$$

Le coefficient général  $a_{M_f-i}$  a alors la forme:

$$a_{M_f-i} = (-1)^i [Ae^{2i\alpha x_0} + Be^{-2i\alpha x_0}] \quad (3.61)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} A = a_{M_f} \frac{e^{2\alpha x_0}}{2sh(2\alpha x_0)} \\ B = -a_{M_f} \frac{e^{-2\alpha x_0}}{2sh(2\alpha x_0)} \end{array} \right. \quad (3.62)$$

Cette suite a pour expression:

$$a_{M_f-i} = (-1)^i \frac{sh[2(i+1)\alpha x_0]}{sh[2\alpha x_0]} a_{M_f} \quad (3.63)$$

La première égalité du système 3.58 donne aussi:

$$-\frac{e^{\alpha x_0}}{2} = (-1)^{M_f} \frac{sh[2(M_f+2)\alpha x_0]}{4sh[2\alpha x_0]} a_{M_f} \quad (3.64)$$

Les deux équations 3.63 et 3.64 donnent:

$$a_{M_f-i} = 2(-1)^{M_f-i+1} \frac{sh[2(i+1)\alpha x_0]}{sh[2(M_f+2)\alpha x_0]} e^{\alpha x_0} \quad (3.65)$$

On en déduit la formule suivante:

$$\boxed{a_i = 2(-1)^{i+1} \frac{sh[2(M_f-i+1)\alpha x_0]}{sh[2(M_f+2)\alpha x_0]} e^{\alpha x_0}} \quad (3.66)$$

Examinons maintenant deux cas limites:

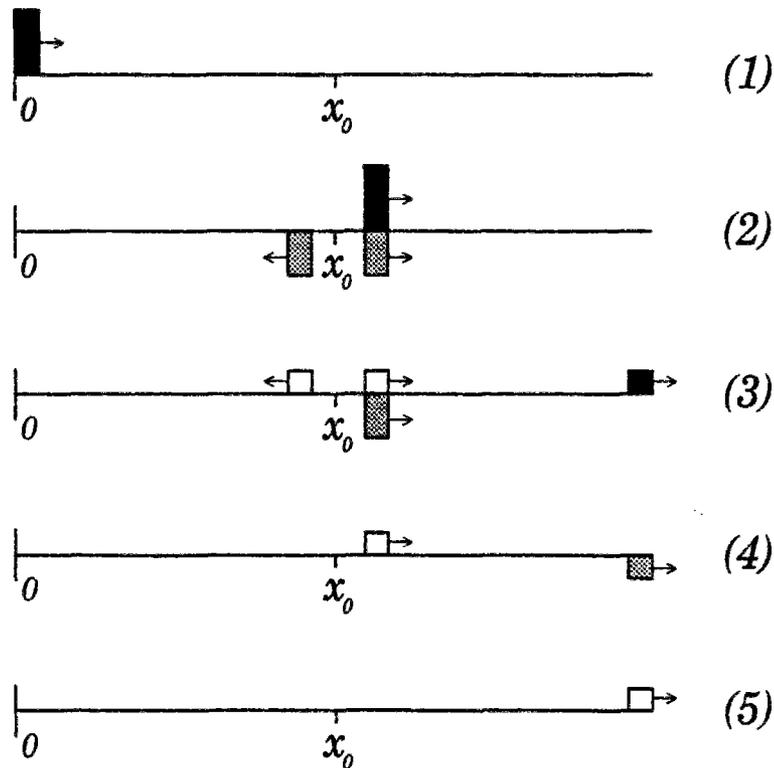


FIG. 3.6 - Principe du contrôle avec la solution optimale ( $M_f = 1$ ).

Cas limite:  $M_f \rightarrow \infty$

Nous devons retrouver la formule pour  $W(t)$  puisqu'il n'y a plus de contrainte sur la longueur du filtre. On retrouve en effet l'expression pour  $a_i$ :

$$a_i = 2(-1)^{i+1} e^{-2(i+1)\alpha x_0} e^{\alpha x_0} \quad (3.67)$$

$$a_i = 2(-1)^{i+1} e^{-(2i+1)\alpha x_0} \quad (3.68)$$

Cas limite:  $\alpha \rightarrow 0$

Cela correspond à un guide d'onde à parois parfaitement rigides et sans atténuation de couche limite. Nous allons comparer les résultats pour  $W_{f1}(t)$  et  $W_{f2}(t)$ .

Pour  $W_{f1}(t)$ :

$$a_i = 2(-1)^{i+1} \quad (3.69)$$

Pour  $W_{f2}(t)$ :

$$a_i = 2(-1)^{i+1} \frac{M_f - i + 1}{M_f + 2} \quad (3.70)$$

Le principe du contrôle avec la solution optimale est présentée sur la figure 3.6 avec  $M_f = 1$  et  $\alpha = 0$ . On considère une onde primaire d'amplitude égale à 1. Une onde secondaire d'amplitude  $-\frac{2}{3}$  est alors émise (2) pour contrôler partiellement l'onde primaire. Une onde

d'amplitude  $-\frac{2}{3}$  est aussi émise vers la terminaison amont réfléchissante. Lorsqu'elle revient au niveau de la source secondaire, une onde d'amplitude  $\frac{1}{3}$  la contrôle alors partiellement. Le bilan pour  $J$  avec la solution optimale s'écrit:

$$J = \left[\frac{1}{3}\right]^2 + \left[\frac{1}{3}\right]^2 + \left[\frac{1}{3}\right]^2 = \frac{1}{3} \quad (3.71)$$

Il faut comparer ce résultat avec le bilan de la solution approchée:

$$J = 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1 \quad (3.72)$$

### Calcul de $W_{f2}(\omega)$

Nous connaissons donc l'expression de  $W_{f2}(t)$ :

$$W_{f2}(t) = -2e^{\alpha x_0} \sum_{i=0}^{M_f} (-1)^i \frac{\text{sh}[2(M_f - i + 1)\alpha x_0]}{\text{sh}[2(M_f + 2)\alpha x_0]} \delta(t - (2i + 1)\tau_0) \quad (3.73)$$

Calculons maintenant sa transformée de Fourier  $W_{f2}(\omega)$ :

$$W_{f2}(\omega) = -2 \frac{e^{j\bar{k}x_0}}{\text{sh}[2(M_f + 2)\alpha x_0]} \sum_{m=0}^{M_f} (-1)^m \text{sh}[2(M_f - m + 1)\alpha x_0] e^{2mj\bar{k}x_0} \quad (3.74)$$

$$W_{f2}(\omega) = -\frac{e^{j\bar{k}x_0}}{\text{sh}[2(M_f + 2)\alpha x_0]} \sum_{m=0}^{M_f} (-1)^m \left[ e^{2(M_f+1)\alpha x_0} e^{2jm\bar{k}x_0} - e^{-2(M_f+1)\alpha x_0} e^{2jm\bar{k}x_0} \right] \quad (3.75)$$

$$W_{f2}(\omega) = -\frac{e^{-j\bar{k}x_0}}{2\cos(\bar{k}x_0)\cos(\bar{k}x_0)} \left\{ \frac{\text{sh}[2(M_f + 1)\alpha x_0]}{\text{sh}[2(M_f + 2)\alpha x_0]} + e^{2j\bar{k}x_0} + e^{2(M_f+2)j\bar{k}x_0} \frac{(-1)^{M_f} \text{sh}[2\alpha x_0]}{\text{sh}[2(M_f + 2)\alpha x_0]} \right\} \quad (3.76)$$

La densité spectrale du signal de pression  $p(x, t)$  avec  $x \geq x_0$  est notée  $S_p(x, \omega)$ :

$$S_p(x, \omega) = \frac{S_a(\omega)}{S^2} |Z_p(x, \omega) + W_{f2}(\omega)Z_s(x, \omega)|^2 \quad (3.77)$$

$$S_p(x, \omega) = \frac{A_p}{S^2} |Z_p(x, \omega)|^2 |1 + \cos(\bar{k}x_0)W_{f2}(\omega)|^2$$

On en déduit alors l'expression de l'atténuation acoustique:

$$\gamma(x, \omega) = -20\log_{10} \left[ \left| 1 - \frac{e^{-j\bar{k}x_0}}{2\cos(\bar{k}x_0)} \left\{ \frac{\text{sh}[2(M_f + 1)\alpha x_0]}{\text{sh}[2(M_f + 2)\alpha x_0]} + e^{2j\bar{k}x_0} + e^{2(M_f+2)j\bar{k}x_0} \frac{(-1)^{M_f} \text{sh}[2\alpha x_0]}{\text{sh}[2(M_f + 2)\alpha x_0]} \right\} \right| \right] \quad (3.78)$$

si  $\alpha \rightarrow 0$ :

$$\gamma(x, \omega) = 20\log_{10} \left[ \frac{2(M_f + 2)|\cos(\bar{k}x_0)|}{|1 - (-1)^{M_f} e^{2(M_f+2)j\bar{k}x_0}|} \right] \quad (3.79)$$

On remarque alors que si  $\alpha$  est nul (c'est-à-dire si les parois du guide sont parfaitement rigides), il existe des fréquences singulières pour lesquelles il y a augmentation de l'énergie acoustique pour toute longueur du filtre de contrôle. Ces fréquences  $f_m$  ont pour expression:

$$f_m = \frac{2m + 1}{4} \frac{C_0}{x_0} \quad (3.80)$$

Si le coefficient de perte  $\alpha$  est strictement positif, l'atténuation tend vers l'infini à toutes les fréquences lorsque  $M_f$  tend vers l'infini, y compris aux fréquences singulières.

### 3.6 Fréquence d'échantillonnage

Nous allons présenter ici de manière simplifiée l'effet de la fréquence d'échantillonnage (égale à  $\frac{1}{T_g}$ ).

Nous allons considérer ici que l'effet de la fréquence d'échantillonnage consiste à remplacer la distribution de Dirac  $\delta(t)$  par la fonction  $I_g(t) = \frac{1}{T_g} \left[ H(t + \frac{T_g}{2}) - H(t - \frac{T_g}{2}) \right]$  dans l'expression de  $W_{f2}(t)$  où  $H(t)$  est la fonction de Heaviside.

Le nouveau filtre de contrôle  $W_{f3}(t)$  devient alors:

$$W_{f3}(t) = -2e^{\alpha x_0} \sum_{i=0}^{M_f} (-1)^i \frac{\text{sh} [2(M_f - i + 1)\alpha x_0]}{\text{sh} [2(M_f + 2)\alpha x_0]} I_g(t - (2i + 1)\tau_0) \quad (3.81)$$

Nous allons définir  $I_g$  le scalaire:

$$I_g = \frac{1}{T_g} \int_{-\frac{T_g}{2}}^{\frac{T_g}{2}} e^{-j\omega t} dt = \frac{\text{sin} \left[ \frac{\omega T_g}{2} \right]}{\frac{\omega T_g}{2}} \quad (3.82)$$

On peut maintenant écrire la transformée de Fourier  $W_{f3}(\omega)$ :

$$W_{f3}(\omega) = I_g W_{f2}(\omega) \quad (3.83)$$

Les atténuations acoustiques du problème continu et discrétisé seront notées  $\gamma_2(\omega)$  et  $\gamma_3(\omega)$  respectivement:

$$\gamma_2(x, \omega) = -20 \log_{10} (|1 + \cos(\tilde{k}x_0) W_{f2}(\omega)|) \quad (3.84)$$

$$\gamma_3(x, \omega) = -20 \log_{10} (|1 + I_g \cos(\tilde{k}x_0) W_{f2}(\omega)|) \quad (3.85)$$

Sur les figures 3.7 et 3.8 sont présentées les atténuations  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$  en fonction de la fréquence. La fréquence d'échantillonnage pour  $\gamma_3$  est de 3000 Hz.

On obtient ici les influences respectives de la longueur du filtre et de la fréquence d'échantillonnage.

Lorsque la longueur du filtre de contrôle est faible (25 ms), le facteur limitant est la longueur du filtre. Les atténuations  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$  sont alors identiques.

Lorsque la longueur du filtre est grande (200 ms), le facteur limitant est la discrétisation et  $\gamma_3 \approx -20 \log_{10} (1 - I_g)$ .

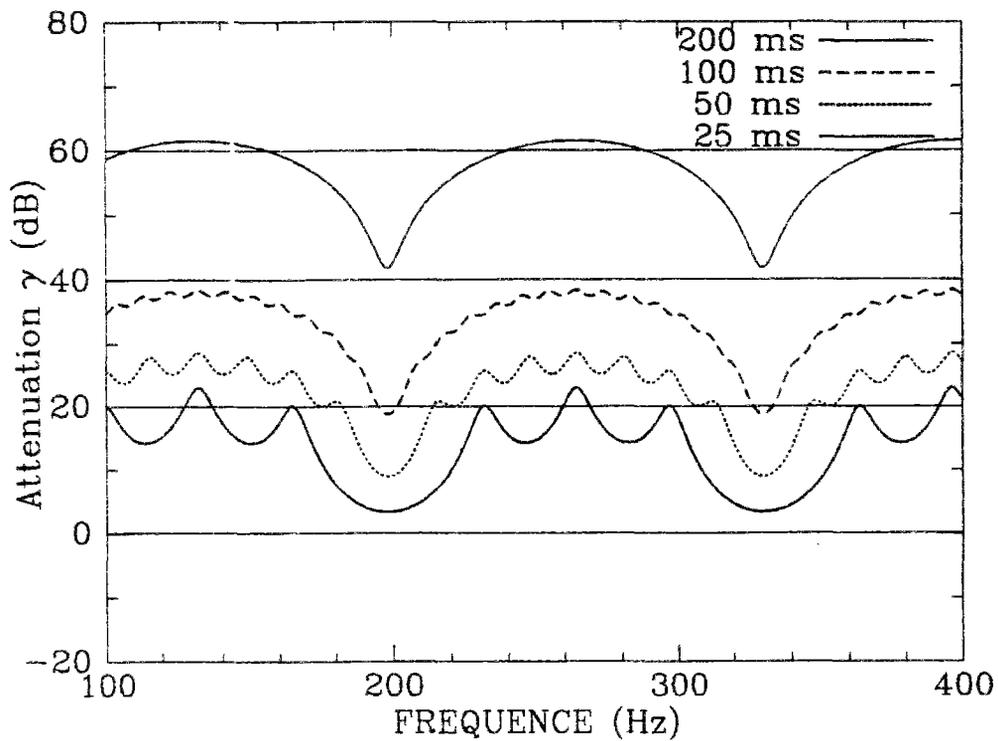


FIG. 3.7 - Atténuation acoustique  $\gamma_2(x, \omega)$  avec une longueur de filtre  $T_f$  variant de 25 ms à 200 ms avec la solution du problème continu.

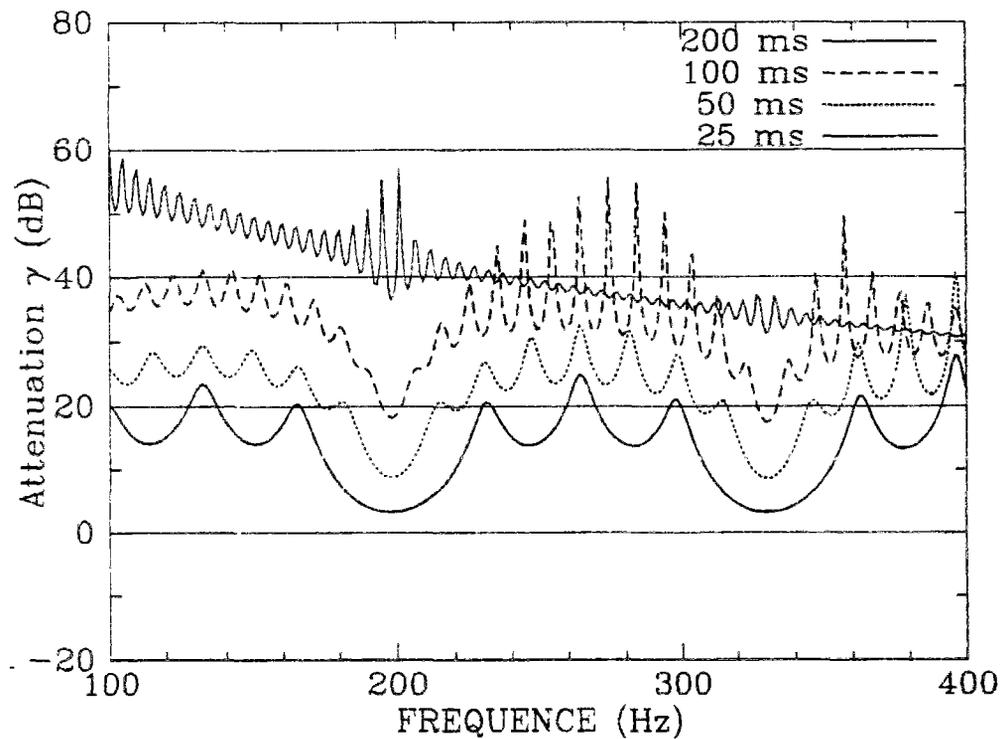


FIG. 3.8 - Atténuation acoustique  $\gamma_3(x, \omega)$  avec une longueur de filtre  $T_f$  variant de 25 ms à 200 ms avec une fréquence d'échantillonnage de 3000 Hz.

### 3.7 Problème discrétisé

Dans les cas pratiques, le domaine fréquentiel d'étude est compris dans une fenêtre de pulsations  $[\omega_1, \omega_2]$ . Un filtre passe-bande permet de filtrer les mesures au microphone d'erreur. Pour simuler ce filtrage numériquement, on choisit de multiplier  $Z_p(\omega)$  et  $Z_s(\omega)$  par le filtre passe-bande  $F(\omega) = \mathbf{1}_{[\omega_1, \omega_2]} + \mathbf{1}_{[-\omega_2, -\omega_1]}$ .

Réécrivons la fonctionnelle  $J$ :

$$J = c + 2 \int_0^{T_f} W(\tau) b(\tau) d\tau + \int_0^{T_f} \int_0^{T_f} W(\tau_2) a(\tau_2 - \tau_1) W(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.86)$$

avec

$$\begin{cases} b(\tau) = A_p \left( \frac{\rho_0 C_0}{S} \right)^2 \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos(\bar{k}x_0) e^{-j\omega\tau} d\omega \right] e^{-2\alpha x} \\ = A_p \left( \frac{\rho_0 C_0}{S} \right)^2 \left[ \frac{e^{\alpha x_0}}{2} I\left(\tau - \frac{x_0}{C_0}\right) + \frac{e^{-\alpha x_0}}{2} I\left(\tau + \frac{x_0}{C_0}\right) \right] e^{-2\alpha x} \\ a(\tau) = A_p \left( \frac{\rho_0 C_0}{S} \right)^2 \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_2} |\cos(\tilde{k}x_0)|^2 e^{-j\omega\tau} d\omega \right] e^{-2\alpha x} \\ = A_p \left( \frac{\rho_0 C_0}{S} \right)^2 \left[ \frac{ch(2\alpha x_0)}{2} I(\tau) + \frac{1}{4} I\left(\tau - \frac{2x_0}{C_0}\right) + \frac{1}{4} I\left(\tau + \frac{2x_0}{C_0}\right) \right] e^{-2\alpha x} \end{cases} \quad (3.87)$$

Nous considérons toujours une longueur de filtre  $T_f$  et une fréquence d'échantillonnage  $\frac{1}{T_g}$ . Le filtre de contrôle  $W$  discrétisé s'écrit alors:

$$W(t) = \sum_{i=0}^{M_g} W_i [H(t - iT_g) - H(t - (i+1)T_g)] \quad (3.88)$$

où  $M_g = E \left[ \frac{T_f}{T_g} \right] - 1$ .

On peut alors réécrire la fonctionnelle  $J$ :

$$J = c + 2 \sum_{i=0}^{M_g} W_i B_i + \sum_{i=0}^{M_g} \sum_{j=0}^{M_g} W_i A_{ij} W_j \quad (3.89)$$

avec

$$\begin{aligned} B_i &= \int_{iT_g}^{(i+1)T_g} b(\tau) d\tau \approx T_g b\left(iT_g + \frac{T_g}{2}\right) \\ A_{ij} &= \int_{iT_g}^{(i+1)T_g} \int_{jT_g}^{(j+1)T_g} a(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \approx T_g^2 a((j-i)T_g) \end{aligned} \quad (3.90)$$

Notons  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{A}$  les vecteurs et matrice de composantes  $W_i$ ,  $B_i$  et  $A_{ij}$  respectivement.  $\mathbf{A}$  a la forme d'une matrice de Toeplitz et le nombre d'opérations pour l'inversion est en  $M_g^2$  opérations.

Un vecteur  $\mathbf{W}$  qui minimise  $J$  vérifie alors l'équation matricielle:

$$\mathbf{AW} = -\mathbf{B} \quad (3.91)$$

Il s'avère que le problème admet une infinité de solutions et que la matrice  $\mathbf{A}$  n'est pas inversible. Montrons donc que le problème admet une infinité de solutions. Pour cela il nous faut réécrire la fonction de coût  $J$ :

$$\begin{aligned}
J &= \mathbf{E}[p^2(x, t)] \\
&= \frac{1}{2\pi} \mathbf{E} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |p(x, \omega)|^2 d\omega \right] \\
&= \frac{1}{S^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) |Z_p(\omega) + W(\omega)Z_s(\omega)|^2 S_q(\omega) d\omega \\
&= \frac{1}{S^2} \frac{A_p}{2\pi} \left[ \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} |Z_p(\omega) + W(\omega)Z_s(\omega)|^2 d\omega + \int_{\omega_1}^{\omega_2} |Z_p(\omega) + W(\omega)Z_s(\omega)|^2 d\omega \right]
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Notons  $W_*(t)$  une solution du problème de minimisation. Soit  $\tilde{W}(t)$  tel que:

$$\begin{cases} \tilde{W}(t) = 0 & t < 0 \\ \tilde{W}(t) = 0 & t > T_f \\ \tilde{W}(\omega) = 0 & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \text{ et } -\omega_2 \leq \omega \leq -\omega_1 \end{cases} \tag{3.93}$$

On voit alors que  $W_*(t) + \tilde{W}(t)$  est aussi solution.

Pour avoir unicité de la solution, nous rajoutons à  $J(W)$  le terme

$J_\epsilon = \epsilon \mathbf{E} \left[ \left( \int_0^{T_f} h(t - \tau) W(\tau) d\tau \right)^2 \right]$  où  $\epsilon$  est une petite constante positive et  $h(t)$  est le signal primaire filtré par  $g(t) = \delta(t) - I(t)$  dont la transformée de Fourier est  $G(\omega) = \mathbf{1}_{[-\infty, -\omega_2] \cup [-\omega_1, \omega_1] \cup [\omega_2, \infty]}$ . On montre de même que précédemment que:

$$J_\epsilon = \epsilon \frac{1}{S^2} \frac{A_p}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{-\omega_2} |W(\omega)|^2 d\omega + \int_{-\omega_1}^{\omega_1} |W(\omega)|^2 d\omega + \int_{\omega_2}^{\infty} |W(\omega)|^2 d\omega \right] \tag{3.94}$$

La minimisation doit donner une solution  $W_*$  telle que:

$$W_*(\omega) = 0 \quad \omega \in [-\infty, -\omega_2] \cup [-\omega_1, \omega_1] \cup [\omega_2, \infty] \tag{3.95}$$

### 3.7.1 Application numérique et mesures

Pour l'application numérique, nous avons choisi pour l'étude la bande passante [100, 400] Hz et une fréquence d'échantillonnage à 3000 Hz. Les longueurs de filtre  $T_f$  testées sont encore 25, 50, 100 et 200 ms. Après inversion de la matrice  $\mathbf{A}$ , nous obtenons  $\mathbf{W}$  et déterminons le filtre  $W_{f4}(t)$ :

$$W_{f4}(t) = \sum_{i=0}^{M_g} W_i [H(t - iT_g) - H(t - (i+1)T_g)] \tag{3.96}$$

Le calcul de  $W_{f4}(\omega)$  se fait grâce à une Transformée de Fourier Rapide où  $\Delta f$  et  $\Delta t$  sont égaux à 0.11 Hz et  $1.7 \cdot 10^{-2}$  ms respectivement (soient 524 288 points).

On peut alors calculer l'atténuation  $\gamma_4(\omega)$ :

$$\gamma_4(x, \omega) = -20 \log_{10}(|1 + \cos(\tilde{k}x_0)W_{f4}(\omega)|) \tag{3.97}$$

Les résultats des calculs et des mesures pour l'atténuation  $\gamma_4$  sont présentés sur les figures 3.9 et 3.10 respectivement. On constate une bonne prédiction par les calculs même si la terminaison aval est modélisée ici comme anéchoïque alors qu'elle est plutôt réfléchissante à ces fréquences. Les mauvais résultats entre 100 et 150 Hz sont dus aux limites basses fréquences du microphone unidirectionnel utilisé.

On constate aussi que les résultats sont proches de ceux du problème précédent donné par la formule analytique de  $\gamma_3$ . Cette formule analytique peut donc décrire de façon suffisamment précise les limites d'un contrôle actif avec une terminaison amont réfléchissante.

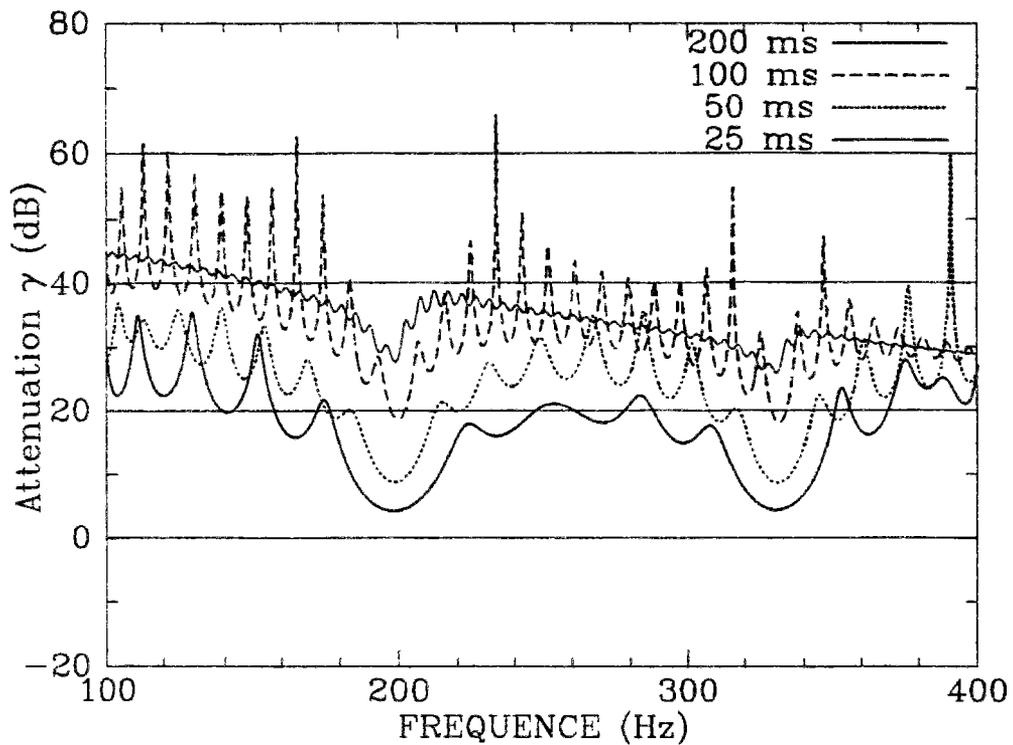


FIG. 3.9 - Calculs de l'atténuation acoustique  $\gamma_4(x, \omega)$  avec une longueur de filtre  $T_f$  variant de 25 ms à 200 ms avec une fréquence d'échantillonnage de 3000 Hz.

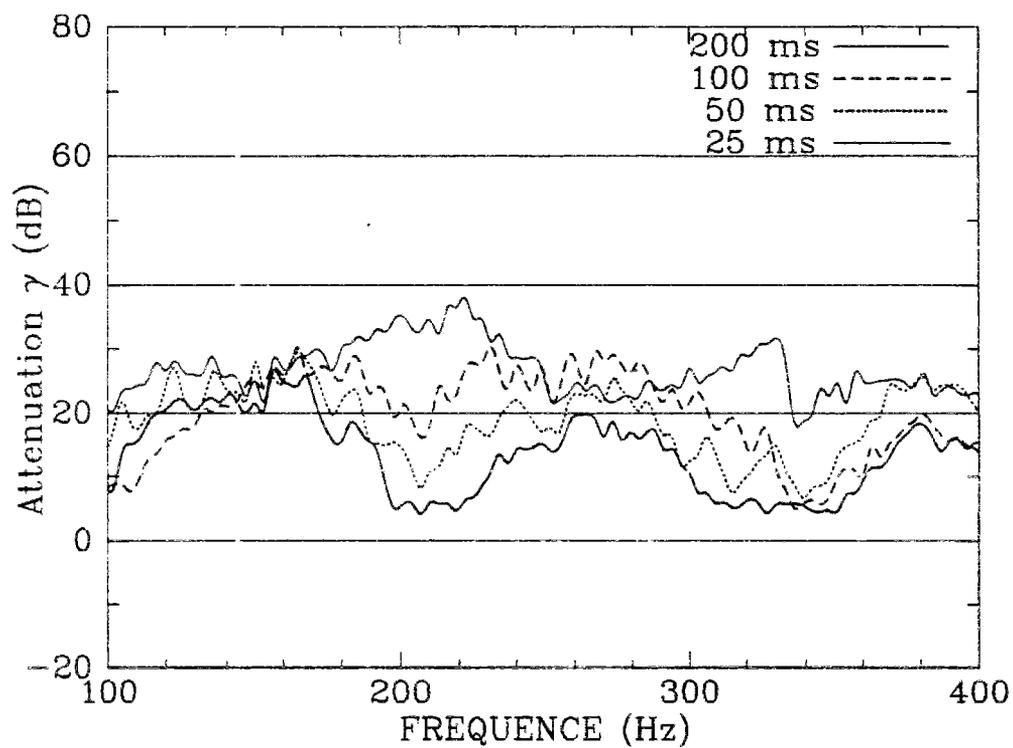


FIG. 3.10 - Mesures de l'atténuation acoustique  $\gamma_4(x, \omega)$  avec une longueur de filtre  $T_f$  variant de 25 ms à 200 ms avec une fréquence d'échantillonnage de 3000 Hz.

## 3.8 Dispositif expérimental

Nous avons vu les limites du contrôle actif en terme d'atténuation dans un guide d'onde droit. Nous avons seulement mis en évidence les limites dues à l'algorithme de contrôle (longueur du filtre de contrôle et fréquence d'échantillonnage).

Dans les sections qui suivent, nous allons modéliser la propagation et le contrôle actif sans tenir compte de ces facteurs mais en ajoutant les effets des modes d'ordre supérieur.

Nous verrons que les ondes évanescentes peuvent alors aussi limiter l'efficacité du contrôle en-dessous de la première fréquence de coupure. Nous verrons ensuite l'intérêt d'associer contrôle passif et contrôle actif.

Nous allons nous intéresser maintenant aux contrôles passif et actif dans quatre configurations: un guide d'onde droit, un guide d'onde droit avec absorbant, un guide d'onde avec un résonateur quart-d'onde transversal et enfin un coude.

Pour nos systèmes de gaine (voir figure 3.11), les guides droits ont tous la même section ( $L_y = 0.3m$  et  $L_z = 0.3m$ ). Le matériau absorbant est de la laine de roche de 3 cm d'épaisseur. Les parois du guide sont fabriquées en matériau sandwich fibre de verre-epoxy et renforcées par des raidisseurs en 0. La bande de fréquence de l'étude est [100, 800] Hz. A ces fréquences, il y a au plus trois modes propagatifs et les trois premières fréquences de coupure sont  $f_{01} = 573$  Hz,  $f_{10} = 573$  Hz et  $f_{11} = 810$  Hz.

Trois microphones d'erreur sont placés sur la section  $S_0$  située à la distance  $L_0 = 0.5m$  en amont de la terminaison.

Trois haut-parleurs sont placés le long de la gaine. Ils sont alimentés par un amplificateur de 20 W piloté par un signal filtré par un filtre passe-bas du quatrième ordre avec une fréquence de coupure à 1000 Hz. La forme des haut-parleurs est circulaire de diamètre 30 cm. Par simplicité, ils sont modélisés comme des sources de forme carrée.

Un haut-parleur est placé à la terminaison amont et représente la source primaire. Il est piloté par un signal aléatoire stationnaire dont la densité spectrale est fixée de telle sorte que le débit  $q_p(\omega)$  soit indépendant de la fréquence.

Le système de contrôle est bâti autour d'un Macintosh Quadra avec une carte DSP dont le processeur est le TMS320C30. Le DSP est relié à une carte d'entrée et de sortie. L'algorithme de contrôle est l'algorithme classique X-LMS. Une ou deux voies de sortie sont reliées aux haut-parleurs. Quatre voies d'entrée sont utilisées. Trois d'entre elles sont utilisées par des microphones d'erreur. La dernière est le signal de référence de l'algorithme X-LMS qui est pris directement du signal primaire.

La fréquence d'échantillonnage est 4000 Hz. Le filtre du chemin acoustique et le filtre de contrôle ont chacun 100 coefficients. Leur longueur temporelle est donc de 25 ms. Cette longueur est la longueur limite pour que le système de contrôle puisse fonctionner en temps réel.

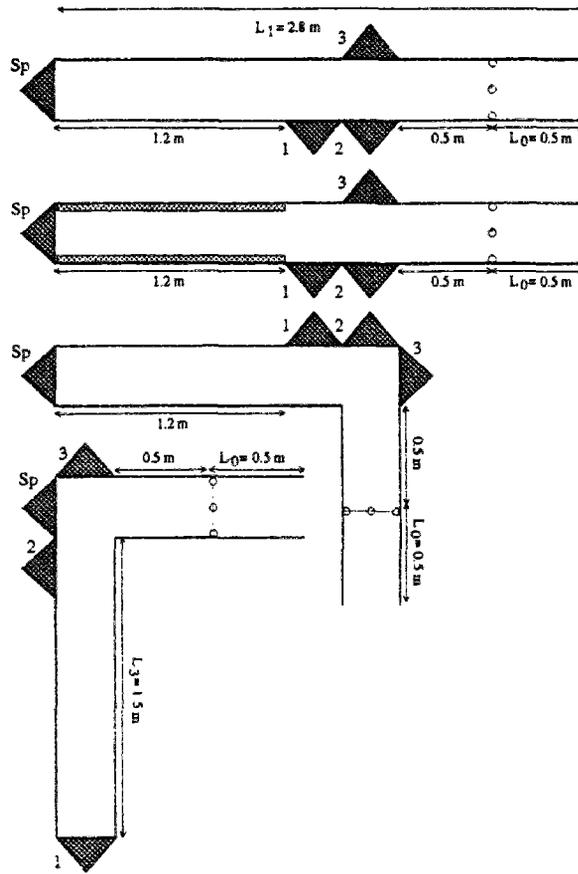


FIG. 3.11 - Quatre géométries: guide d'onde droit, guide d'onde droit avec absorbant, coude et résonateur transversal quart-d'onde.

### 3.9 Contrôle passif

Nous introduisons à nouveau une fonction de coût  $J$  représentant la somme des carrés des modules des ondes acoustiques se propageant vers l'aval en régime harmonique.

$$J = \sum_{I=0}^{\infty} |(b_I^+)_I e^{-k_I L_0}|^2 = \int_{S_0} |p^+(x_*, y, z)|^2 dy dz \quad (3.98)$$

où  $p^+$  est la partie de la pression provenant d'ondes se propageant vers l'aval. La section de référence est située à la distance  $L_0$  ( $x = x_*$ ) de la terminaison. Dans les applications pratiques,  $M$  microphones d'erreur unidirectionnels sont situés dans la section de référence du segment droit précédant la terminaison amont. Gardant les  $M$  premiers modes et négligeant les modes d'ordre supérieur, des poids  $\beta_I$  et des positions  $(y_I, z_I)$  des microphones d'erreur peuvent être trouvés dans certains cas (Annexe D) pour remplacer l'intégration sur la surface  $S_0$  par une sommation en des points discrets:

$$J = \sum_{I=0}^{M-1} \beta_I |p^+(x_*, y_I, z_I)|^2 \quad (3.99)$$

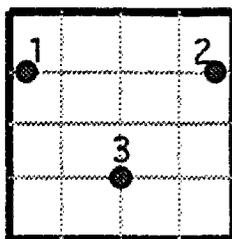


FIG. 3.12 - Positions des microphones d'erreur dans la section  $S_0$ .

Dans nos applications  $M$  est égal à 3. Les positions des microphones dans le plan ( $x = x_*$ ) est visualisée sur la figure 3.12. Les coefficients  $\beta_I$  pour le calcul de  $J$  sont  $\frac{L_y L_z}{4}$ ,  $\frac{L_y L_z}{4}$  et  $\frac{L_y L_z}{2}$  respectivement (voir Annexe D).

La fonction de coût quadratique  $J$  est mesurée d'abord sans contrôle, cela veut dire avec la contribution du champ primaire seul. Le coefficient de perte  $\alpha$  prend la valeur  $0.08 \text{ m}^{-1}$  pour le calcul. Par simplicité ce coefficient est encore pris indépendant de la fréquence et du mode. Dans cette section, la gaine standard (guide droit) est comparée avec d'autres géométries. L'indice de performance  $J$  permet de comparer la capacité des discontinuités réactives et des revêtements absorbants à réduire le niveau de bruit rayonné en-dehors de la gaine.

### 3.9.1 Guide droit

La figure 3.13 représente l'indice de performance  $J$  en fonction de la fréquence pour un guide d'onde droit. La ligne en trait gras représente les calculs et la ligne en trait fin les mesures. Si la terminaison était anéchoïque, le niveau de bruit et l'indice de performance  $J$  auraient dû être constants en fonction de la fréquence. Puisque la terminaison est partiellement réfléchissante (spécialement à basses fréquences), des pics de résonance apparaissent. Les fréquences de résonance peuvent être déterminées à basses fréquences. Quand la fréquence est assez basse, la terminaison aval peut être modélisée par une condition aux limites de type surface libre. Les fréquences de résonance ont alors les valeurs suivantes  $f_1 = \frac{(2n_1-1)c_0}{4L_1}$  avec  $n_1$  entier et  $L_1$  la longueur de la gaine. Dans notre exemple, l'écart entre les pics de fréquence est  $\Delta f_1 = 61 \text{ Hz}$ . Le coefficient de perte a été modélisé indépendant de la fréquence. Le coefficient de perte est supposé être valable pour toutes les configurations.

### 3.9.2 Discontinuités réactives

Un coude peut être considéré comme un silencieux réactif. C'est-à-dire que l'onde incidente est réfléchiée partiellement à la discontinuité. Dans notre expérience (figure 3.14), un pic apparaît à la fréquence de coupure  $f_{01}$ . Le niveau de  $J$  y est supérieur à celui du guide droit. Ce phénomène est expliqué par Hudde (1985 [33]). Un coefficient de transmission dans la matrice de diffusion  $\underline{D}$  peut dépasser l'unité. Il n'y a pas de contradiction avec les lois de

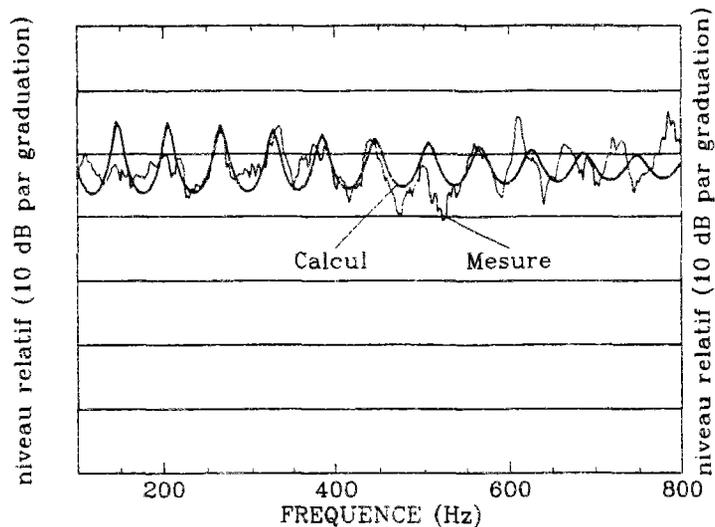


FIG. 3.13 - *Calculs et mesures du niveau de performance J pour le guide droit.*

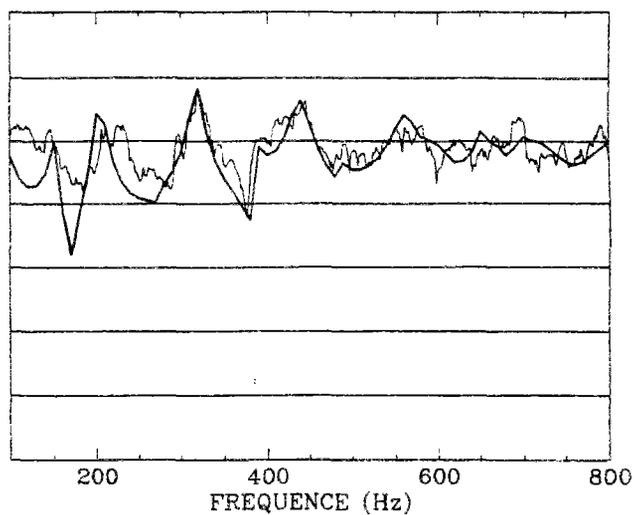


FIG. 3.15 - *Calculs et mesures du niveau de performance J pour le résonateur transversal.*

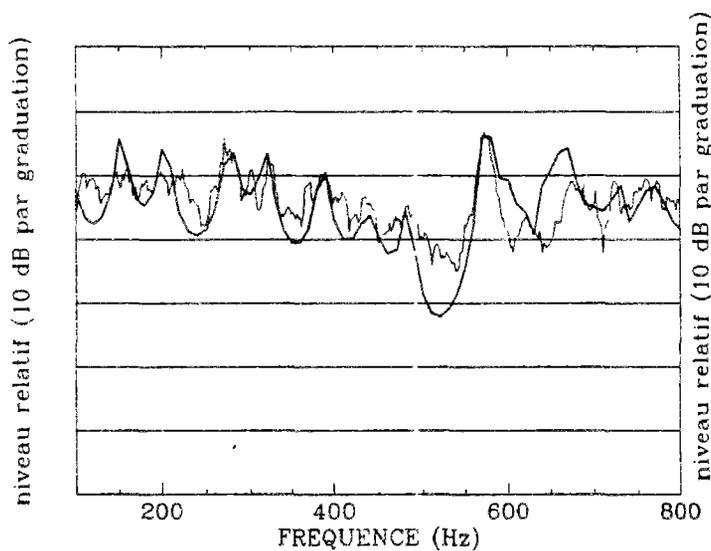


FIG. 3.14 - *Calculs et mesures du niveau de performance J pour le coude.*

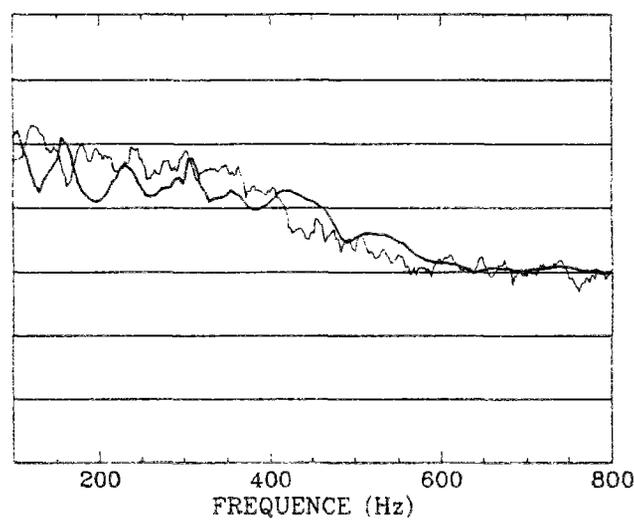


FIG. 3.16 - *Calculs et mesures du niveau de performance J pour le guide droit avec absorbant.*

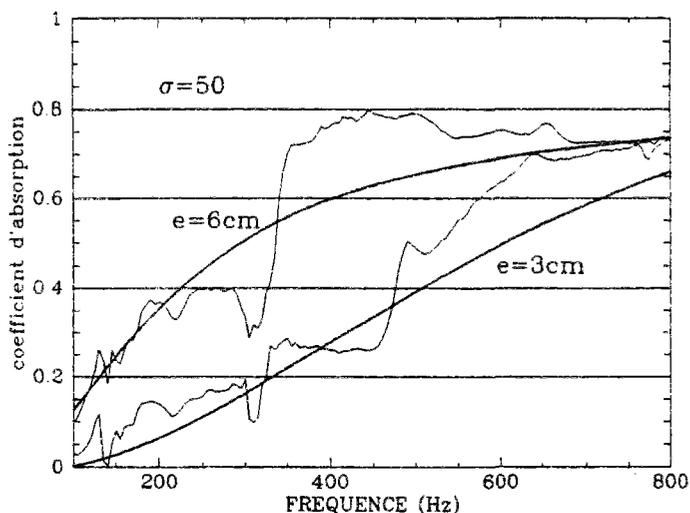


FIG. 3.17 - Mesures du coefficient d'absorption de la laine de roche en fonction de la fréquence.

conservation de l'énergie puisque cet effet apparait avant la fréquence de coupure et les modes évanescent ne transportent pas d'énergie. Nos résultats (figure 3.15) confirment aussi que le résonateur transversal peut atténuer le bruit dans des bandes étroites de fréquence. Ces fréquences sont données par la formule suivante:  $f_3 = \frac{(2n_3-1)c_0}{4L_3}$  avec  $n_3$  entier et  $L_3$  est la longueur du résonateur (1994 Okamoto[60]). Dans notre exemple les premières fréquences sont 172, 286, 400 et 515 Hz. Dans le résonateur comme dans le coude, l'atténuation globale ne dépasse pas cependant 1.5 dB.

### 3.9.3 Revêtements absorbants

Avec des revêtements absorbants, une atténuation par absorption passive se produit spécialement à hautes fréquences. Cette atténuation atteint 15 dB à 20 dB au-delà de 500 Hz (voir figure 3.16) tandis qu'aucune atténuation significative n'est observée en-dessous de 400 Hz. L'atténuation globale est alors de 2.7 dB. Le coefficient d'absorption et la valeur de l'impédance utilisés dans le modèle numérique sont déterminés expérimentalement dans un tube de Kundt avec un échantillon de laine de roche. Il s'avère qu'un coefficient de résistance à l'écoulement  $\sigma = 50$  peut bien caractériser ce matériau (Delany et Bazley 1970 [16]). Sur la figure 3.17 sont représentées les mesures du coefficient d'absorption pour deux épaisseurs de laine de roche (3 et 6 cm) ainsi que les courbes tirées du modèle de Delany-Bazley (en gras).

### 3.9.4 Erreurs expérimentales

Les erreurs entre les résultats des simulations et des mesures ont deux origines principales:

- La modélisation de la propagation avec un coefficient de perte le long des parois est une approximation. Un modèle complet de propagation tenant compte de l'impédance de paroi a été utilisé seulement pour le calcul de la propagation avec absorbant.

- La terminaison aval du guide a été modélisée comme un guide débouchant sur un plan infini réfléchissant. Le modèle considère que l'espace extérieur au guide est un espace en champ libre. Comme ce n'est pas le cas, une partie du bruit rayonné est susceptible d'être réfléchi par les murs de la salle de mesure et retrouvée aux microphones.

### 3.10 Avantages du contrôle hybride

Nous allons comparer les mesures et simulations du contrôle actif pour les quatre géométries. Dans les simulations, nous ne tenons pas compte des contraintes de causalité, de la longueur des filtres ni de la discrétisation. Les calculs se feront alors en régime harmonique même si les mesures ont été effectuées avec un signal large-bande. Nous pourrions ainsi mettre en évidence d'autres facteurs pouvant limiter l'efficacité du contrôle actif (en particulier les ondes évanescentes).

Nous n'examinerons numériquement que le contrôle avec une unique source secondaire de débit  $q_s$ . Le débit de la source primaire est toujours noté  $q_p$ . La fonction de coût s'écrit :

$$J(q_s) = \sum_{I=0}^{M-1} |(b_t^+)_I e^{-k_I L_0}|^2 \quad (3.100)$$

Nous écrirons aussi (d'après l'équation 1.120) :

$$(b_t^+)_I = q_p (b_p^+)_I + q_s (b_0^+)_I \quad (3.101)$$

Le débit  $\tilde{q}_s$  qui minimise  $J(q_s)$  a alors pour expression :

$$\tilde{q}_s = -q_p \frac{\sum_{I=0}^{M-1} |e^{-k_I L_0}|^2 (b_p^+)_I \overline{(b_0^+)_I}}{\sum_{I=0}^{M-1} |e^{-k_I L_0}|^2 |(b_0^+)_I|^2} \quad (3.102)$$

Dans les applications numériques, nous calculerons  $J(\tilde{q}_s)$ .

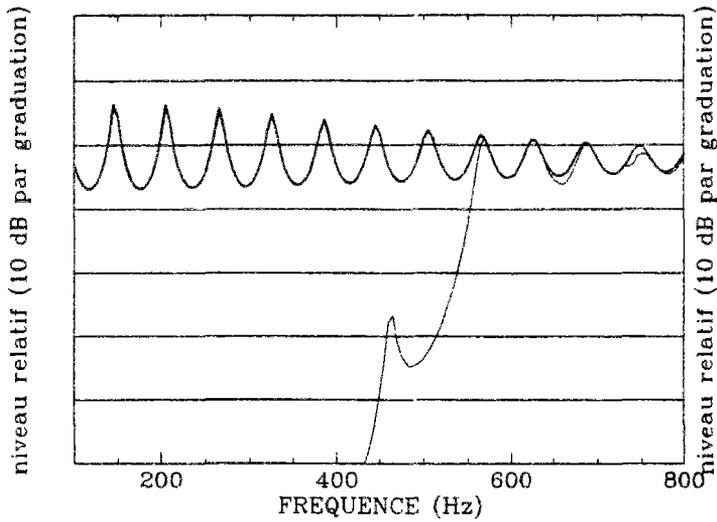


FIG. 3.18 - *Calculs avec et sans contrôle par la source 1 dans le guide droit.*

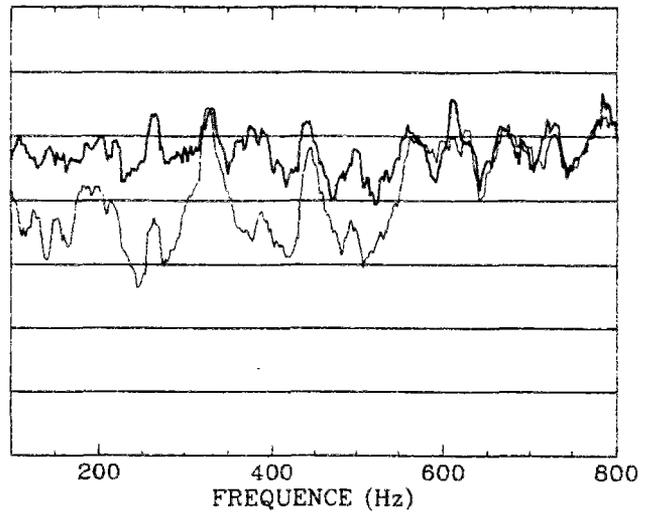


FIG. 3.20 - *Mesures avec et sans contrôle par la source 1 dans le guide droit.*

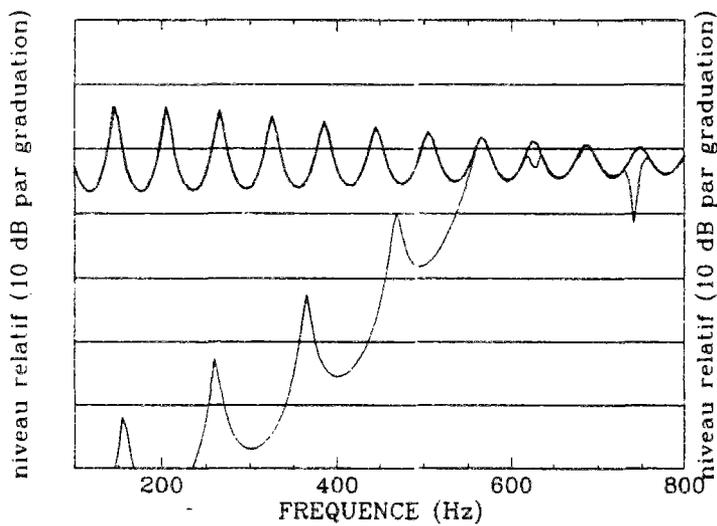


FIG. 3.19 - *Calculs avec et sans contrôle par la source 2 dans le guide droit.*

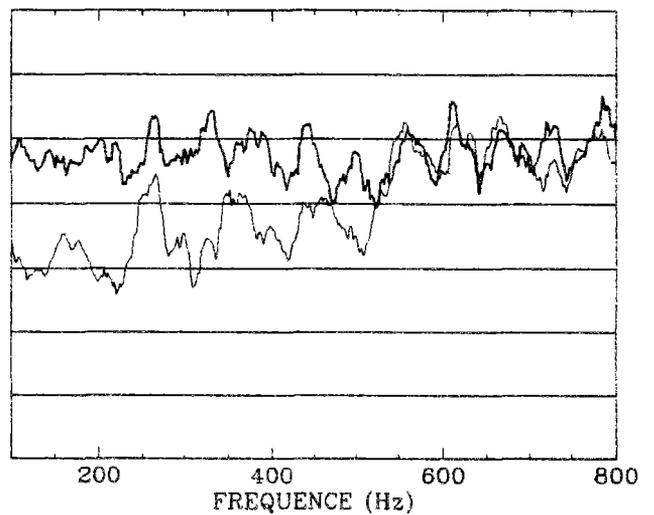


FIG. 3.21 - *Mesures avec et sans contrôle par la source 2 dans le guide droit.*

### 3.10.1 Guide droit

Les figures 3.18 et 3.19 (figures 3.20 et 3.21) présentent les résultats de simulations (mesures) de contrôle actif avec une source secondaire pour le guide d'onde droit.

Aucune atténuation significative n'est trouvée au-delà de la première fréquence de coupure (573 Hz) car les sources secondaires qui sont placées le long des parois excitent, à ces fréquences, principalement un mode antisymétrique et ne peuvent donc pas contrôler l'onde plane.

En-dessous de la fréquence de coupure, un bon contrôle est attendu. A des fréquences singulières, l'effet du contrôle est cependant réduit. L'existence de ces fréquences singulières est expliquée dans des travaux précédents (Stell 1994 [74], Laugesen 1995 [44]). Les pics sont dus aux réflexions à la terminaison amont. Les microphones d'erreur mesurent en effet les contributions de deux ondes venant de la source secondaire: d'une part d'une onde directe, d'autre part d'une onde se propageant initialement vers l'amont et réfléchi à la terminaison. La somme des deux contributions peut avoir une composante modale faible à ces fréquences singulières. Une grande amplitude de la source est alors nécessaire pour le contrôle de ce mode et des ondes évanescentes sont fortement excitées.

Ces pics émergent aux fréquences:  $f_2 = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{2n-1}{2L_2}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2}$  où  $L_2$  est la distance de la source secondaire à la terminaison et  $n$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  sont des entiers. Pour la source 1, trois pics principaux apparaissent aux fréquences 191, 318 et 445 Hz. Pour les sources 2 et 3, quatre pics principaux apparaissent aux fréquences 156, 260, 364, 468 Hz. Stell and Bernard proposent que les sources secondaires soient situées près de la terminaison afin de réduire le nombre de ces pics. Les simulations montrent que le facteur négatif des ondes évanescentes est particulièrement important lorsque la source est proche des microphones d'erreur. Le contrôle avec la source 1 est en effet meilleure qu'avec la source 2.

La présence d'ondes évanescentes ne peut cependant expliquer à elle seule l'amplitude des pics observés sur les mesures. L'effet prépondérant est en fait ici la longueur du filtre de contrôle qui limite l'atténuation active aux mêmes fréquences. Nous voyons ici que deux facteurs totalement indépendants (la longueur des filtres et les ondes évanescentes) limitent l'efficacité du contrôle actif aux mêmes fréquences critiques.

Alors que les ondes évanescentes limitent le contrôle principalement aux fréquences proches de la fréquence de coupure, l'effet négatif de la longueur du filtre  $W$  est aussi marqué à basses fréquences qu'aux fréquences proches de la fréquences de coupure.

Les figures 3.22 et 3.23 présentent les mesures pour le guide droit avec deux sources. Laugesen (1995 [44]) prétend qu'il est favorable d'étaler les sources secondaires le long de la gaine au lieu de les placer dans la même section transversale. Cette hypothèse est confirmée par nos mesures et simulations en-dessous de la fréquence de coupure. L'intérêt d'étaler les deux sources le long du guide est que l'on constitue ainsi une source directive et on élimine ainsi l'effet négatif de la réflexion amont.

Au-dessus de la fréquence de coupure, les performances du contrôle actif restent faibles car les sources secondaires excitent principalement l'onde antisymétrique alors que l'onde primaire est plane.

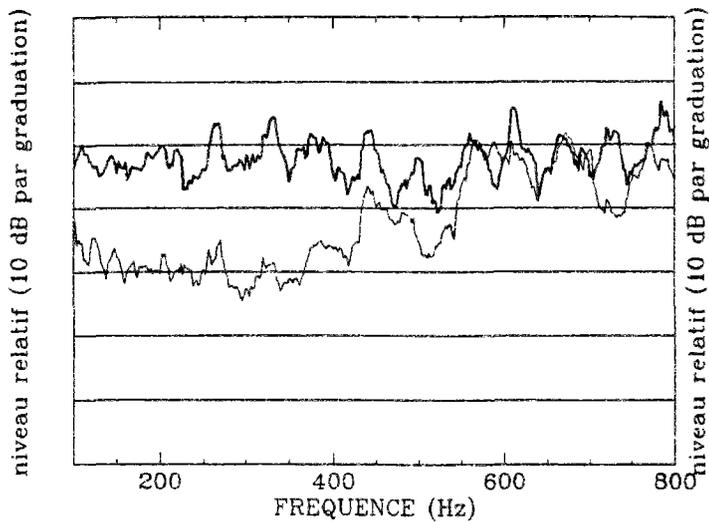


FIG. 3.22 - Mesures avec et sans contrôle par les source 1-3 dans le guide droit.

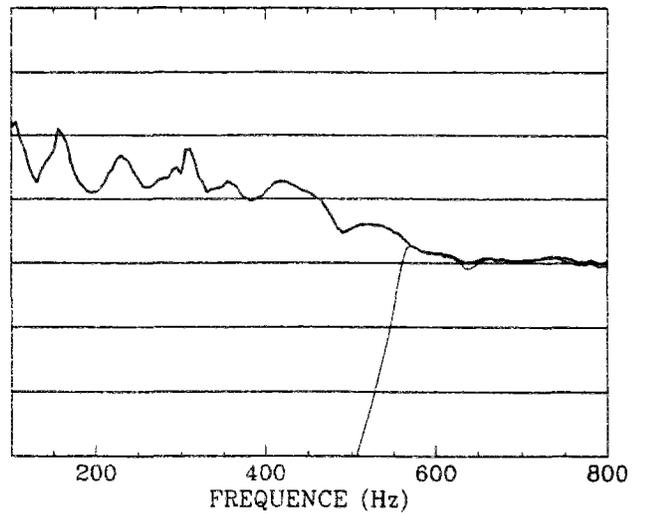


FIG. 3.24 - Calculs avec et sans contrôle par la source 3 dans le guide droit avec absorbant.

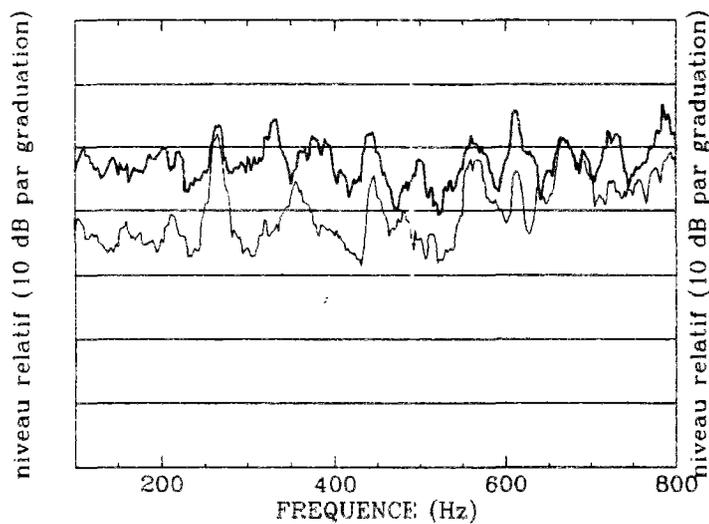


FIG. 3.23 - Mesures avec et sans contrôle par les sources 2-3 dans le guide droit.

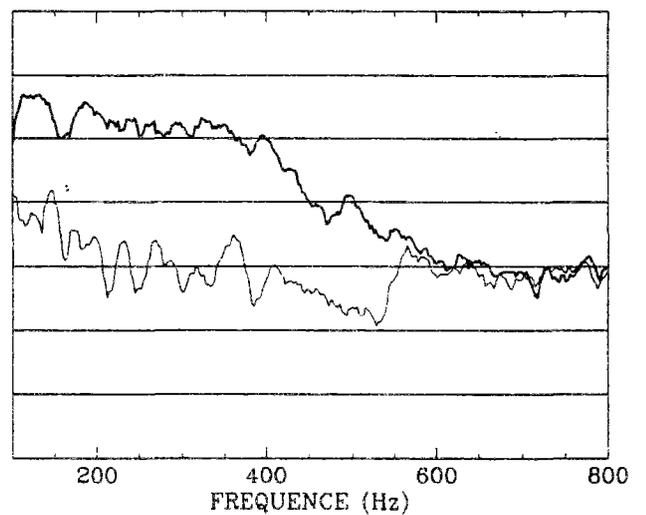


FIG. 3.25 - Mesures avec et sans contrôle par la source 3 dans guide droit avec absorbant.

### 3.10.2 Revêtements absorbants

Les figures 3.24 et 3.25 représentent les résultats des simulations et des mesures pour le guide droit avec un revêtement absorbant et un contrôle actif avec la source 3. Les pics de résonance ont disparu. Il s'avère que les revêtements absorbants ont ici deux avantages.

D'abord un effet passif à hautes fréquences au-dessus de 500 Hz car l'onde transmise est réduite.

Ensuite une amélioration des performances du contrôle actif à basses fréquences où l'effet négatif de la réflexion amont est largement atténué du fait de l'augmentation du coefficient de perte. En augmentant le coefficient de perte, les effets de la longueur du filtre de contrôle et des ondes évanescentes ont ainsi été limités.

Tous ces effets cumulés permettent d'obtenir une atténuation globale proche de 20 dB par rapport à un guide droit sans revêtement ni contrôle actif. Ces mesures mettent en évidence la complémentarité des contrôles passifs et actifs.

Le contrôle est ici principalement limité par la discrétisation en-dessous de la fréquence de coupure.

### 3.10.3 Résonateur transversal

Examinons d'abord le travail de Okamoto (1994 [60]) pour une onde plane. Pour une terminaison rigide, il détermine l'amplitude de la source secondaire pour obtenir une pression nulle à la sortie du guide  $q_s(\omega) = -\cos(kL_3)q_p(\omega)$  où  $L_3$  est la longueur du résonateur. Le résonateur est supposé proche de la terminaison. Il trouve que l'amplitude de la source secondaire  $q_s$  s'annule à certaines fréquences correspondant aux fréquences de résonances du résonateur pour lesquelles l'onde primaire est annulée sans contrôle actif, c'est-à-dire par l'effet passif du résonateur seul. Plus généralement, si la longueur entre le résonateur et la terminaison est notée  $L_2$ , l'équation précédente devient  $q_s(\omega) = -\frac{\cos(kL_3)}{\cos(kL_2)}q_p(\omega)$ .

L'amplitude minimale de la source est toujours trouvée près des fréquences de résonance  $f_3$  du résonateur. En revanche, de fortes amplitudes de source peuvent être obtenues aux fréquences critiques  $f_2$ . A ces fréquences, les ondes évanescentes peuvent être largement excitées et le contrôle actif est limité.

Nous allons examiner deux cas où l'effet négatif des fréquences critiques peut être supprimé.

Examinons d'abord notre exemple avec la source 1 située à l'extrémité du résonateur. La configuration est optimale car ( $L_2 = 0$ ) et aucun pic ne doit apparaître dans le domaine de l'onde plane.

Lorsque la longueur de réflexion  $L_2$  est non nulle, on peut aussi tirer avantage d'un résonateur en choisissant sa longueur de telle sorte que les fréquences de résonance  $f_3$  correspondent aux fréquences critiques  $f_2$ . Le cas idéal est un système avec une longueur de réflexion égale à la longueur du résonateur ( $L_2 = L_3$ ). Dans ce cas,  $q_s(\omega) = -q_p(\omega)$  et il n'y a pas de fréquences critiques.

Dans les deux cas ( $L_2 = 0$ ) et ( $L_2 = L_3$ ), il faut remarquer la contradiction entre l'emplacement optimal de la source secondaire et les contraintes de causalité qui ne sont pas introduites ici. Dans nos mesures, nous avons ajouté un délai pour s'affranchir de la contrainte de causalité.

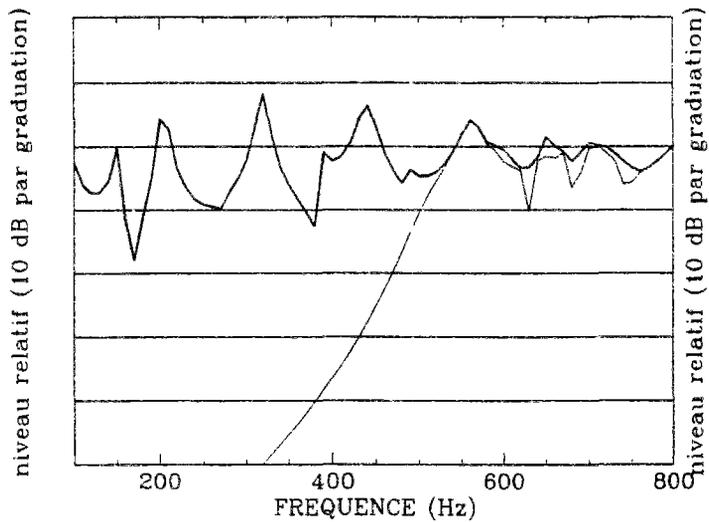


FIG. 3.26 - *Calculs avec et sans contrôle par la source 1 dans le résonateur.*

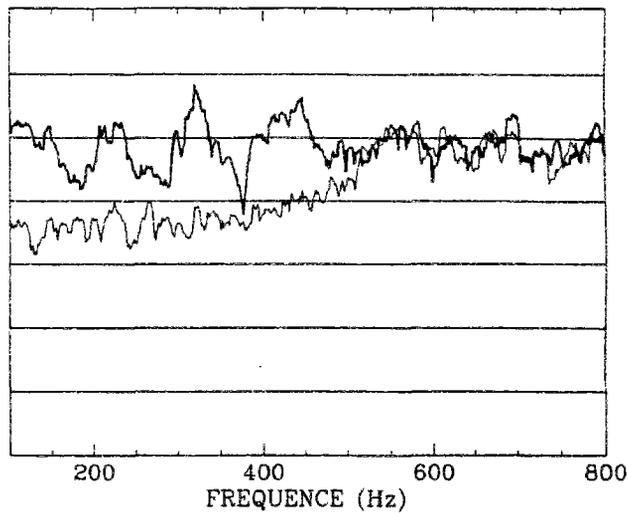


FIG. 3.28 - *Mesures avec et sans contrôle par la source 1 dans le résonateur.*

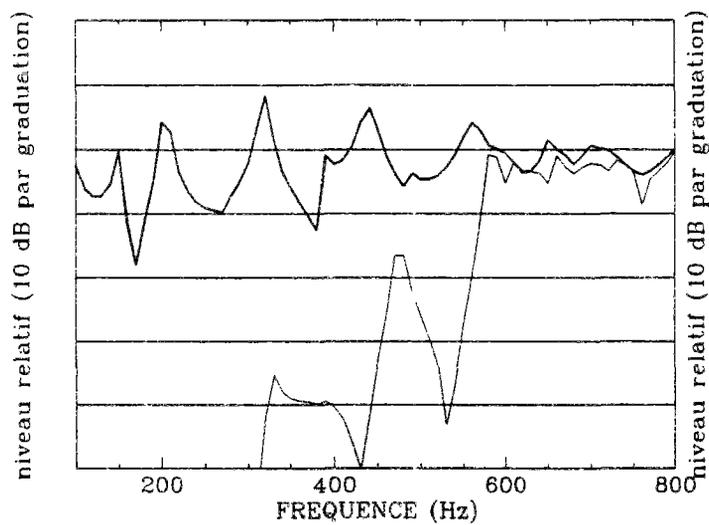


FIG. 3.27 - *Calculs avec et sans contrôle par la source 2 dans le résonateur.*

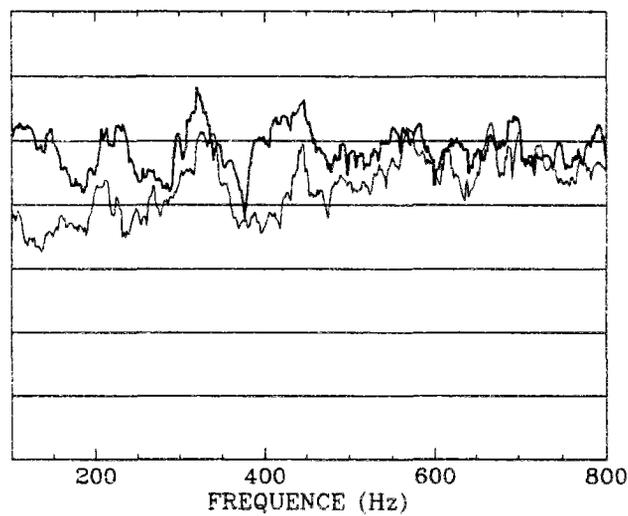


FIG. 3.29 - *Mesures avec et sans contrôle par la source 2 dans le résonateur.*

Examinons maintenant l'effet de la longueur du filtre pour les deux cas précédents. Dans le premier cas ( $L_2 = 0$ )  $W(t) = -\frac{1}{2} \left[ \delta(t - \frac{L_3}{C_0}) + \delta(t + \frac{L_3}{C_0}) \right]$  et le deuxième ( $L_2 = L_3$ )  $W(t) = -\delta(t)$ . On remarque ici que  $W(t) = 0$  pour  $t > \frac{L_3}{C_0}$  et  $t > 0$  pour le premier et deuxième cas respectivement. La longueur du filtre n'est donc pas limitante dans les deux cas.

Dans les figures 3.26 et 3.28, la source 1 est utilisée. Aucune fréquence critique  $f_2$  n'apparaît et un bon contrôle est obtenu dans le domaine de l'onde plane.

Dans les figures 3.27 et 3.29, la source 2 est utilisée. Il est vérifié qu'une position performante pour une source secondaire dans le résonateur est seulement proche de son extrémité comme la position 1. Pour les autres positions, des ondes stationnaires peuvent exister. Pour la position 2, des fréquences critiques apparaissent à 191, 318 et 445 Hz. Pour la position 3, des fréquences critiques apparaissent à 143, 239, 334 et 429 Hz.

### 3.10.4 Coude

En-dessous de la fréquence de coupure, le résultat du contrôle actif est indépendant de la source primaire (c'est-à-dire du vecteur  $a_p^+$ ). Dès que l'onde primaire devient multimodale, la distribution spatiale de la source primaire influence le résultat du contrôle actif.

Dans notre exemple, l'onde primaire est plane. Les conclusions de notre étude auraient été différentes pour toute autre excitation primaire. Notre étude peut donner cependant des indications sur l'importance de certains paramètres comme la position de la source ou la géométrie de la discontinuité dans le contrôle actif du bruit.

Avec une source secondaire, au-dessus de la fréquence de coupure, aucun contrôle n'est mesuré pour le guide d'onde droit avec ou sans revêtement, avec ou sans résonateur. Ce résultat était attendu car trois modes sont propagatifs à ces fréquences (en pratique seuls deux sont excités du fait de la symétrie des distributions surfaciques de sources). De plus des sources secondaires placées sur les parois du guide ne peuvent contrôler l'onde plane pour une fréquence autour de la fréquence de coupure car ces sources excitent principalement le mode antisymétrique.

Avec le coude (figures 3.30 à 3.33), un résultat remarquable est obtenu autour de la fréquence de coupure. A ces fréquences, le niveau de performance du contrôle  $J$ , sans contrôle, présente un pic. L'onde se propageant vers l'aval est principalement antisymétrique après le coude. Parmi les trois positions de sources candidates, seule la position 3 excite une onde purement antisymétrique et un bon contrôle est obtenu. La position 1 fournit une atténuation moyenne alors que la source 2 est incapable de contrôler l'onde primaire car elle excite une onde plane après le coude. Cet exemple montre la possibilité de contrôler l'onde primaire avec une seule source secondaire au-dessus de la fréquence de coupure si la géométrie et la position de la source secondaire sont adaptées à la distribution spatiale de l'onde primaire. Nous mettons en évidence la possibilité d'utiliser l'effet de diffusion des discontinuités. L'onde plane est ici diffusée en une onde antisymétrique, plus facile à contrôler.

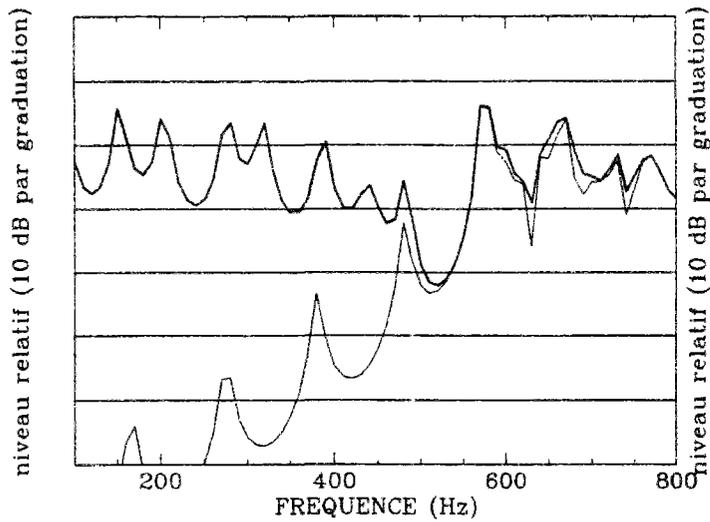


FIG. 3.30 - *Calculs avec et sans contrôle par la source 2 dans le coude.*

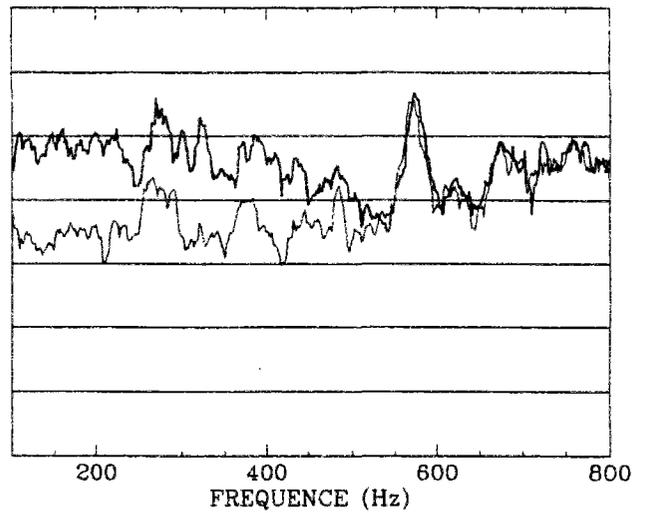


FIG. 3.32 - *Mesures avec et sans contrôle par la source 2 dans le coude.*

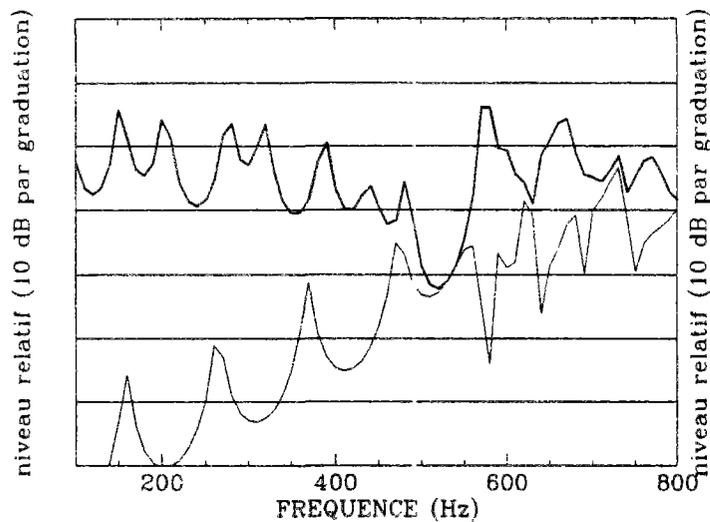


FIG. 3.31 - *Calculs avec et sans contrôle par la source 3 dans le coude.*

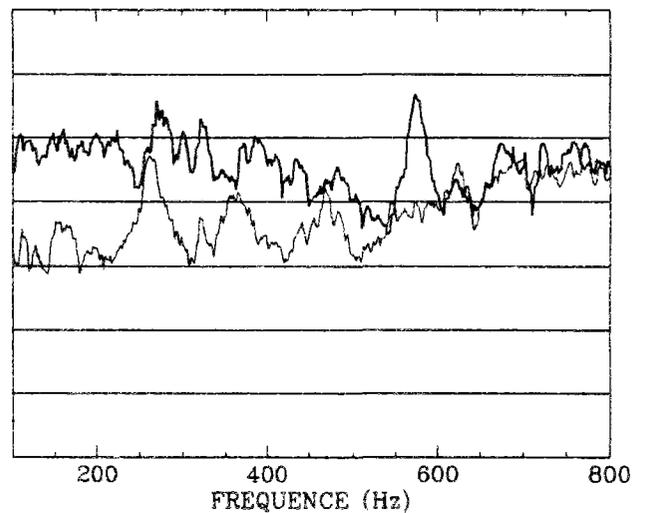


FIG. 3.33 - *Mesures avec et sans contrôle par la source 3 dans le coude.*

contrôle	Passif	1	2	3	1-2	1-3	2-3
guide droit	0.0	5.9	7.3	6.6	9.1	10.1	7.4
résonateur	-1.0	6.6	5.5	7.5	12.0	10.5	12.9
coude	0.3	9.8	7.0	10.9	15.7	16.4	15.0
absorbant	0.3	15.7	15.0	18.4	13.7	18.7	17.3

TAB. 3.2 - Atténuation (dB) 100-573 Hz.

contrôle	Passif	1	2	3	1-2	1-3	2-3
guide droit	0.0	1.1	1.5	1.7	4.7	2.9	4.7
résonateur	0.7	1.6	3.0	3.0	3.0	4.7	6.7
coude	3.2	7.1	4.5	6.4	8.7	9.7	6.3
absorbant	19.9	20.6	18.6	19.9	24.0	23.3	24.3

TAB. 3.3 - Atténuation (dB) 573-800 Hz.

### 3.10.5 Résultats

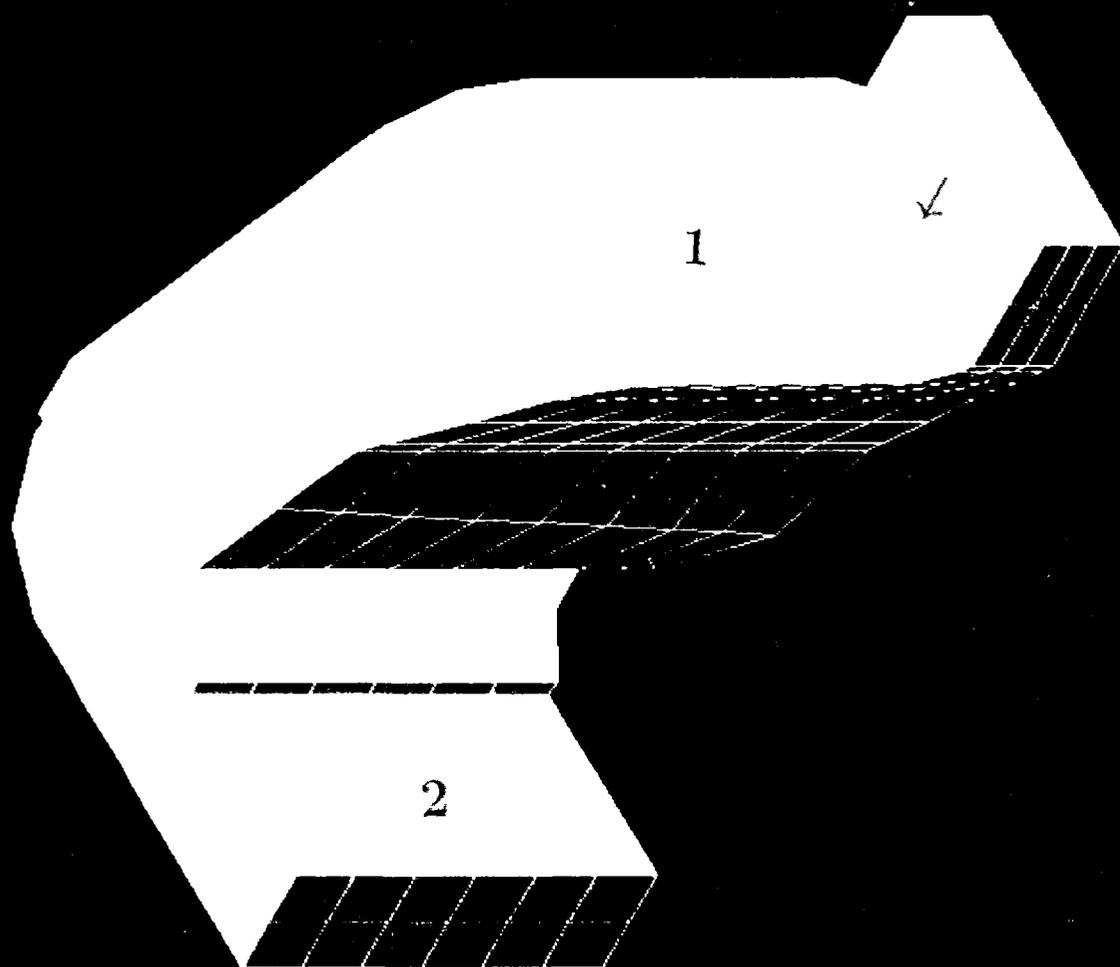
Les tableaux 3.2 à 3.4 présentent un résumé de l'atténuation passive et globale (passive + active) avec différentes combinaisons de sources. La configuration "standard" est le guide droit sans contrôle. Dans les tableaux 3.2 et 3.3 les atténuations en-dessous et au-dessus la fréquence de coupure sont séparées.

contrôle	Passif	1	2	3	1-2	1-3	2-3
guide droit	0.0	3.2	3.9	3.8	6.7	5.6	6.1
résonateur	-0.1	4.4	4.7	5.6	6.9	7.8	9.9
coude	1.3	8.4	5.6	8.4	11.4	12.3	9.3
absorbant	2.7	17.2	16.2	19.0	15.7	19.7	18.8

TAB. 3.4 - Atténuation (dB) 100-800 Hz.

Echelle géométrique

0 2:0





## 3.11 Gaine de ventilation TGV

Nous allons étudier numériquement l'efficacité du contrôle actif dans la gaine TGV. Deux sources secondaires seront modélisées comme des densités de source monopôlaires surfaciques réparties sur les surfaces 1 et 2 (en orange sur la figure ci-contre). Nous allons procéder en trois étapes:

- Calcul de la matrice de diffusion de la discontinuité.
- Calcul de l'atténuation passive en fonction du coefficient de réflexion amont.
- Calcul de l'atténuation active en fonction du coefficient de réflexion amont et de la position de source.

### 3.11.1 Matrice de diffusion

Les sections rectangulaires des sections  $S_A$  et  $S_B$  amont et aval de la discontinuité ont pour dimensions respectives:

- Section  $S_A$ :  $L_y=0.10$  m et  $L_z = 0.34$  m.
- Section  $S_B$ :  $L_y=0.14$  m et  $L_z = 0.46$  m.

Les fréquences de coupure respectives sont:

- Section  $S_A$ :  $f_{01}=505$  Hz,  $f_{02}=1010$  Hz et  $f_{03}=1515$  Hz.
- Section  $S_B$ :  $f_{01}=373$  Hz,  $f_{02}=747$  Hz et  $f_{03}=1120$  Hz.

Le calcul de la matrice de diffusion a été effectué sur une bande de fréquence [0-600]Hz à l'aide d'un maillage comportant environ 600 Noeuds et en retenant les  $N$  (pris égal à 4) premiers modes de part et d'autre de la discontinuité. Nous avons tracé (figure 3.35) les modules des deux premiers coefficients  $T_{00}$  et  $T_{01}$  en fonction de la fréquence. Ces coefficients donnent le module de l'onde plane (respectivement antisymétrique) transmise pour une onde plane incidente unitaire. Nous allons définir l'erreur numérique  $R_\epsilon$ . La conservation du flux de l'énergie acoustique dit que:

$$-\frac{1}{2} \int_{S_A} \text{Re}(p(y, z) \mathbf{v}^*(y, z) \cdot \mathbf{n}) dy dz = \frac{1}{2} \int_{S_B} \text{Re}(p(y, z) \mathbf{v}^*(y, z) \cdot \mathbf{n}) dy dz \quad (3.103)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal extérieur pour la frontière de la discontinuité. L'équation 3.103 donne:

$$\sum_{i=0}^{i=N-1} \text{Im}(k_i^A) |a_i^+|^2 = \sum_{i=0}^{i=N-1} \text{Im}(k_i^A) |a_i^-|^2 + \sum_{i=0}^{i=N-1} \text{Im}(k_i^B) |b_i^+|^2 \quad (3.104)$$

En considérant que l'onde incidente est composée exclusivement d'une onde plane, on obtient:

$$T_\epsilon = \sqrt{\sum_{i=0}^{i=N-1} \frac{\text{Im}(k_i^A)}{k} |R_{0i}|^2 + \sum_{i=0}^{i=N-1} \frac{\text{Im}(k_i^B)}{k} |T_{0i}|^2} = 1 \quad (3.105)$$

Or le manque de précision du calcul numérique fait que l'égalité n'est pas obtenue numériquement. Nous pouvons donc qualifier la précision du calcul en introduisant  $R_\epsilon = 1 - T_\epsilon$ . La figure 3.35 présente  $R_\epsilon$  en fonction de la fréquence. On s'aperçoit que l'erreur peut atteindre 10% au-delà de 500 Hz. Nous avons alors multiplié par 4 la densité du maillage (environ 2400 noeuds) et calculé l'erreur pour la fréquence 550 Hz. Les résultats montrent que nous avons diminué l'erreur d'un facteur 3 en augmentant la densité du maillage. Cet exemple montre qu'il est parfois nécessaire d'utiliser une densité de maillage bien supérieure à 5 noeuds par longueur d'onde pour obtenir une précision satisfaisante. Nous nous contenterons néanmoins des résultats obtenus avec 600 Noeuds en sachant que les résultats au-delà de 300 Hz doivent être considérés avec prudence. Nous n'avons pas pu utiliser une densité de maillage supérieure sur toute la gamme fréquentielle de l'étude du fait du manque de puissance de calcul disponible et du manque de capacité de stockage des résultats.

### 3.11.2 Contrôle Passif

Pour simplifier les calculs, nous allons considérer que la section  $S_B$  est munie d'une terminaison anéchoïque (la matrice  $R_B$  est prise égale à 0). Nous allons ensuite considérer la section  $S_A$  comme une terminaison amont du chapitre 1.

$$a^+ = R_A a^- + q_p a_p^+ \quad (3.106)$$

Nous choisirons  $a_p^+$  une onde plane et  $R_A$  une matrice unitaire multipliée par une constante.  $R_A$  représentera maintenant cette constante et prendra successivement les valeurs 0, 1 et 0.9 (on considérera une terminaison anéchoïque, réfléchissante ou partiellement réfléchissante). Le critère  $J$  du chapitre 1 sera évalué en effectuant une sommation sur les  $N$  premiers modes dans la section  $S_B$ . Nous ne tiendrons pas compte du couplage éventuel vibro-acoustique.

Nous allons d'abord nous placer dans le domaine de l'onde plane et examiner l'effet passif de la discontinuité. Nous allons donc comparer l'énergie rayonnée vers l'aval  $E_R$  avec une discontinuité et  $E_0$  avec un guide droit.

$$E_R = -\frac{1}{2} \int_{S_A} \text{Re}(p(y, z) \mathbf{v}^*(y, z) \cdot \mathbf{n}) dy dz = \frac{1}{2} \int_{S_B} \text{Re}(p(y, z) \mathbf{v}^*(y, z) \cdot \mathbf{n}) dy dz \quad (3.107)$$

On trouve que:

$$E_R = \frac{1}{2\rho_0 C_0} (|a_0^+|^2 - |a_0^-|^2) \quad (3.108)$$

Nous savons aussi que:

$$\begin{cases} a_0^+ &= R_A a_0^- + q_p a_p^+ \\ a_0^- &= D_{AA} a_0^+ \end{cases} \quad (3.109)$$

$D_{AA}$  est ici un scalaire définissant la réflexion d'une onde plane au travers de la discontinuité. On trouve alors:

$$E_R = \frac{1}{2\rho_0 C_0} \frac{1 - |D_{AA}|^2}{|1 - R_A D_{AA}|^2} |q_p a_p^+|^2 \quad (3.110)$$

D'où:

$$T_R = \frac{E_R}{E_0} = \frac{1 - |D_{AA}|^2}{|1 - R_A D_{AA}|^2} \quad (3.111)$$

**Terminaison amont anéchoïque:**  $R_A = 0$ .

L'équation 3.111 donne alors:

$$T_R = \frac{E_R}{E_0} = 1 - |D_{AA}|^2 = |D_{BA}|^2 \leq 1 \quad (3.112)$$

On vérifie que la discontinuité fournit toujours une atténuation passive dans ce cas. C'est ce que l'on trouve sur la figure 3.36 en-dessous de la première fréquence de coupure, c'est-à-dire dans le domaine où le mode plan est le seul mode propagatif. La fonction de coût  $J$  a toujours un niveau inférieur au niveau de référence du guide d'onde droit (niveau 0 dB).

Au-delà de la première fréquence de coupure, nous savons qu'il existe des coefficients de transmissions supérieur à 1 sans que le principe de conservation de l'énergie soit violé. Des niveaux de pression supérieurs au cas du guide droit peuvent alors être relevés.

**Terminaison amont réfléchissante:**  $R_A = 1$ .

L'équation 3.111 donne alors:

$$T_R = \frac{E_R}{E_0} = \frac{1 - |D_{AA}|^2}{|1 - D_{AA}|^2} = \frac{1 - \operatorname{Re}^2(D_{AA}) - \operatorname{Im}^2(D_{AA})}{1 + \operatorname{Re}^2(D_{AA}) + \operatorname{Im}^2(D_{AA}) - 2\operatorname{Re}(D_{AA})} \quad (3.113)$$

Nous allons examiner dans le plan complexe  $(\operatorname{Re}(D_{AA}), \operatorname{Im}(D_{AA}))$  quelle est la courbe  $T_R(D_{AA}) = 1$ . C'est le cercle d'équation cartésienne dessiné sur la figure 3.34:

$$\left[ \operatorname{Re}(D_{AA}) - \frac{1}{2} \right]^2 + \operatorname{Im}^2(D_{AA}) = \left( \frac{1}{2} \right)^2 \quad (3.114)$$

On constate donc qu'il existe un domaine dans le plan complexe  $(\operatorname{Re}(D_{AA}), \operatorname{Im}(D_{AA}))$  où

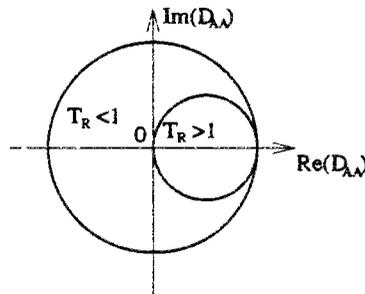


FIG. 3.34 - Domaines d'augmentation et d'atténuation passive du bruit.

$T_R > 1$ . Cela signifie que la discontinuité est susceptible de fournir une augmentation passive lorsque  $R_A = 1$ . C'est ce que l'on constate sur la figure 3.38 où on voit une fonction de coût supérieure au niveau de référence du guide d'onde droit.

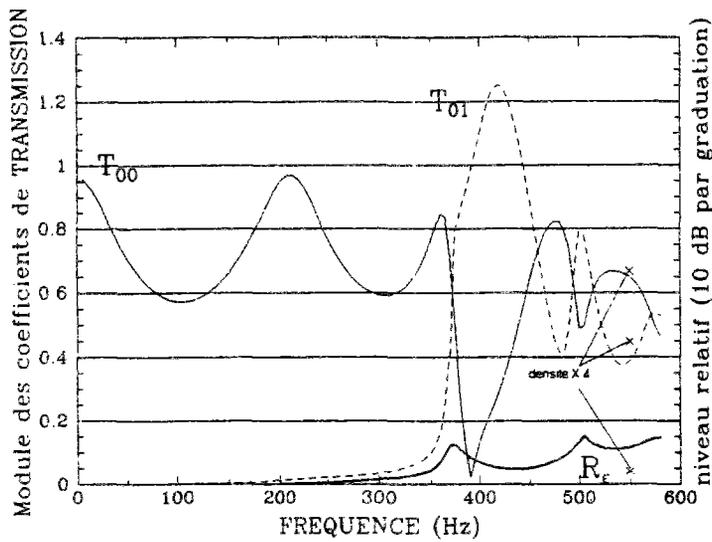


FIG. 3.35 - Module des coefficients de transmission et erreur numérique  $R_e$  dans la discontinuité de gain TGV.

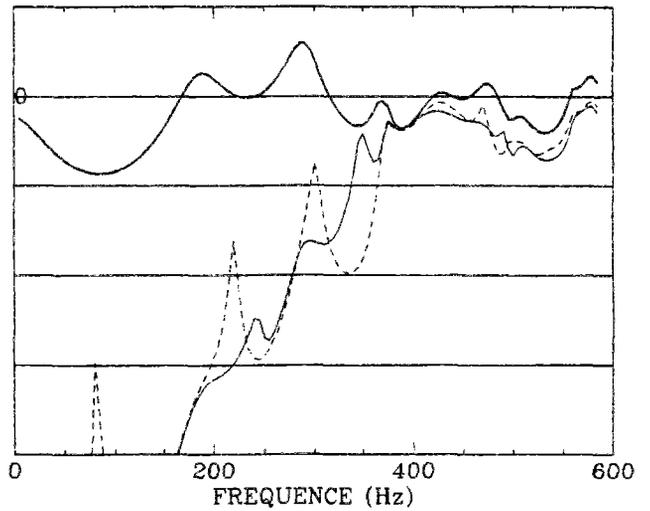


FIG. 3.37 - Calculs avec et sans contrôle du niveau de performance  $J$  dans la discontinuité de gain TGV avec un coefficient de réflexion amont  $R_A = 0.9$ .

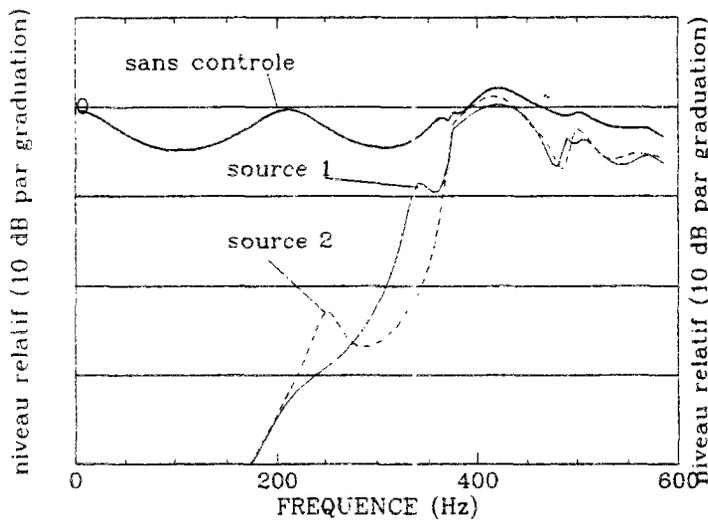


FIG. 3.36 - Calculs avec et sans contrôle du niveau de performance  $J$  dans la discontinuité de gain TGV avec un coefficient de réflexion amont  $R_A = 0$ .

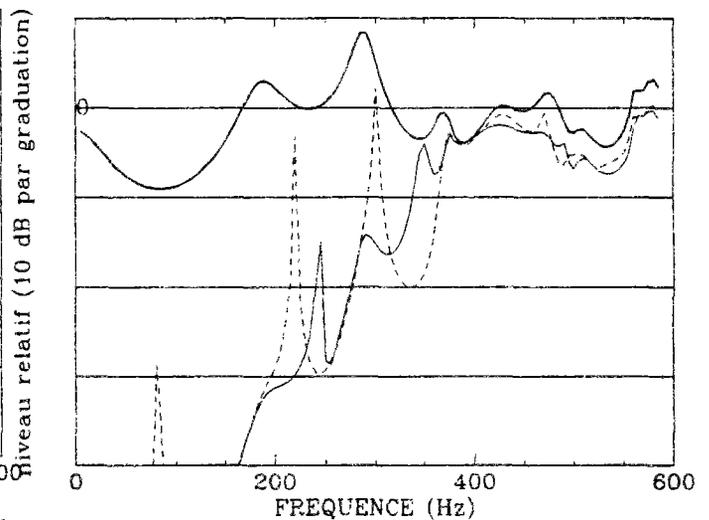


FIG. 3.38 - Calculs avec et sans contrôle du niveau de performance  $J$  dans la discontinuité de gain TGV avec un coefficient de réflexion amont  $R_A = 1$ .

### 3.11.3 Contrôle actif

Nous avons choisi les sources 1 et 2 comme source secondaire. Nous comparons leur efficacité avec la fonction de coût  $J$  en fonction du coefficient de réflexion amont  $R_A$  pris égal à 0, 0.9 et 1 respectivement sur les figures 3.36, 3.37 et 3.38.

**Terminaison amont anéchoïque:**  $R_A = 0$ .

On vérifie que le contrôle actif a peu d'effet au-delà de 373 Hz, la première fréquence de coupure, avec une source secondaire 1 ou 2. L'effet du premier mode évanescent est fort car le guide d'onde droit terminal à une longueur faible: 0.27 m. Une atténuation de 40 dB n'est donc obtenue qu'en-dessous de 200 Hz.

Pour chaque position de source, on constate un pic (vers 250 Hz pour la source 2 et 350 Hz pour la source 1). Même avec une terminaison amont anéchoïque, nous retrouvons des phénomènes d'onde stationnaire alors que ce phénomène ne se produirait pas pour un guide d'onde droit avec terminaison anéchoïque. Ces phénomènes d'onde stationnaire sont dus au fait que la discontinuité est partiellement réfléchissante en amont.

**Terminaison réfléchissante:**  $R_A = 1$ .

Lorsque la terminaison est elle-même réfléchissante, ces phénomènes d'onde stationnaire apparaissent de manière plus importante. Nous retrouvons aussi la conclusion classique recommandant de rapprocher les sources secondaires de la terminaison amont. La densité de fréquences critiques est en effet plus faible dans ce cas. La position 1 est donc préférable à la position 2.

## 3.12 Résumé et conclusion

Cette étude a montré que l'on peut obtenir une bonne simulation de l'efficacité du contrôle actif dans des systèmes complexes incluant des discontinuités, où plusieurs modes se propagent.

Nous avons mis en évidence trois facteurs pouvant réduire les performances d'un système actif:

- la fréquence d'échantillonnage de l'algorithme X-LMS.
- la longueur du filtre de contrôle  $W$  de l'algorithme X-LMS et la contrainte de causalité.
- une terminaison amont réfléchissante. De grandes amplitudes de sources sont nécessaires pour assurer le contrôle aux fréquences critiques. Les ondes évanescents sont alors largement excités.

Nous avons aussi montré que le contrôle actif peut largement bénéficier de l'association avec un contrôle passif:

- l'effet le plus classique est que l'onde primaire transmise peut être réduite (effet dissipatif ou réactif).
- le coefficient de réflexion à la terminaison amont peut être diminué par des revêtements absorbants (effet dissipatif) ce qui permet de réduire partiellement les effets des facteurs négatifs cités précédemment.

- l'amplitude nécessaire des sources pour le contrôle actif est réduite aux fréquences de résonance d'un résonateur (effet réactif). La longueur du résonateur peut être réglée de façon à atténuer l'onde primaire aux fréquences critiques. L'effet de la longueur du filtre de contrôle  $W$  peut être supprimé.
- l'effet diffusif des discontinuités est montré avec le coude qui transforme un mode plan en un mode antisymétrique à la fréquence de coupure. Contrairement à un mode plan, ce mode antisymétrique peut être contrôlé par une source située le long des parois.

Il faut aussi souligner qu'un bon placement d'une ou de plusieurs sources secondaires peut largement améliorer l'efficacité du contrôle actif, ce qui montre l'intérêt de la simulation avant d'installer un système actif.

Après avoir constaté que le calcul pouvait simuler de manière suffisamment précise les mesures expérimentales, nous avons enfin calculé le cas d'une géométrie complexe (la gaine TGV) pour laquelle l'utilisation d'un code de calcul est indispensable. Nous pouvons ainsi évaluer l'efficacité d'une source de contre-bruit en fonction des positions de source proposées par le constructeur.

## Annexe A

# Calcul de la matrice d'impédance dans un guide droit

L'expression de la pression dans un guide d'onde droit a la forme suivante:

$$p(x, y, z) = \sum_{i=0}^{i=\infty} (a_i^+ e^{k_i x} + a_i^- e^{-k_i x}) \Psi_i(y, z) \quad (\text{A.1})$$

Déterminons la matrice d'impédance pour une section d'un guide droit de longueur  $l$ .

$\Gamma_A$  et  $\Gamma_B$  correspondent aux sections ( $x = 0$ ) et ( $x = l$ ). Ecrivons les relations que vérifient  $q_i^A$ ,  $q_i^B$ ,  $p_i^A$  et  $p_i^B$ .

$$\begin{cases} p_i^A &= a_i^+ + a_i^- \\ p_i^B &= a_i^+ e^{k_i l} + a_i^- e^{-k_i l} \\ \rho_0 j \omega q_i^A &= k_i [-a_i^+ + a_i^-] \\ \rho_0 j \omega q_i^B &= k_i [a_i^+ e^{k_i l} - a_i^- e^{-k_i l}] \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Les deux dernières équations donnent:

$$\begin{cases} a_i^+ &= \frac{\rho_0 j \omega q_i^A e^{-k_i l} + q_i^B}{k_i (e^{k_i l} - e^{-k_i l})} \\ a_i^- &= \frac{\rho_0 j \omega q_i^A e^{k_i l} + q_i^B}{k_i (e^{k_i l} - e^{-k_i l})} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

En remplaçant  $a_i^+$  et  $a_i^-$  dans les deux premières équations de A.2, on obtient bien l'équation (1.61):

$$\begin{cases} p_i^A &= \frac{\rho_0 j \omega}{k_i sh(k_i l)} (ch(k_i l) q_i^A + q_i^B) \\ p_i^B &= \frac{\rho_0 j \omega}{k_i sh(k_i l)} (ch(k_i l) q_i^B + q_i^A) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

On en déduit ensuite la matrice d'impédance.



## Annexe B

# Relations entre matrices de diffusion et d'impédance

Par définition des matrices et vecteurs impédance et diffusion:

$$\begin{pmatrix} p^A \\ p^B \end{pmatrix} = \underline{\underline{Z}} \begin{pmatrix} q^A \\ q^B \end{pmatrix} + q_s \begin{pmatrix} Z_{sA} \\ Z_{sB} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{pmatrix} a^- \\ b^+ \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}} \begin{pmatrix} a^+ \\ b^- \end{pmatrix} + q_s \begin{pmatrix} A^- \\ B^+ \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Prenons d'abord  $q_s = 0$  dans les équations B.1 et B.2.

En remplaçant  $\begin{pmatrix} p^A \\ p^B \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} q^A \\ q^B \end{pmatrix}$  par  $\begin{pmatrix} a^+ \\ b^- \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} a^- \\ b^+ \end{pmatrix}$  dans l'équation B.1, on obtient:

$$\begin{pmatrix} a^+ \\ b^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^- \\ b^+ \end{pmatrix} = \underline{\underline{ZM}} \begin{pmatrix} a^- - a^+ \\ b^+ - b^- \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

d'où

$$\begin{pmatrix} a^- \\ b^+ \end{pmatrix} = (\underline{\underline{ZM}} - \underline{\underline{1}})^{-1} (\underline{\underline{ZM}} + \underline{\underline{1}}) \begin{pmatrix} a^+ \\ b^- \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

En identifiant les relations B.2 et B.4, on en déduit la relation:

$$\boxed{\underline{\underline{D}} = (\underline{\underline{ZM}} - \underline{\underline{1}})^{-1} (\underline{\underline{ZM}} + \underline{\underline{1}})} \quad (\text{B.5})$$

Pour le terme de source, on choisit ensuite de prendre  $\begin{pmatrix} q^A \\ q^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  dans les relations B.1 et B.2. C'est-à-dire  $\begin{pmatrix} a^+ \\ b^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^- \\ b^+ \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} p^A \\ p^B \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a^+ \\ b^- \end{pmatrix}$

L'équation B.1 devient alors:

$$\begin{pmatrix} a^+ \\ b^- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} q_s \begin{pmatrix} Z_{s_A} \\ Z_{s_B} \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

L'équation B.2 devient alors:

$$\begin{pmatrix} a^+ \\ b^- \end{pmatrix} = (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{D}})^{-1} q_s \begin{pmatrix} A^- \\ B^+ \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

En identifiant les relations B.6 et B.7, on en déduit la relation:

$$\boxed{\begin{pmatrix} A^- \\ B^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{D}}) \begin{pmatrix} Z_{s_A} \\ Z_{s_B} \end{pmatrix}} \quad (\text{B.8})$$

# Annexe C

## Terminaison-Equation intégrale

L'équation intégrale s'écrit:

$$\forall \underline{x} \in \Gamma \quad C(\underline{x})p(\underline{x}) = \int_{\Gamma} G(\underline{x}/\underline{x}_0) \frac{\partial p(\underline{x}_0)}{\partial n} d\underline{x}_0 - \int_{\Gamma} p(\underline{x}_0) \frac{\partial G(\underline{x}/\underline{x}_0)}{\partial n} d\underline{x}_0 \quad (\text{C.1})$$

On choisit la fonction de Green tel que:

$$G(\underline{x}/\underline{x}_0) = \frac{e^{jk|\underline{x}-\underline{x}_0|}}{4\pi|\underline{x}-\underline{x}_0|} + \frac{e^{jk|\underline{x}-\underline{x}'_0|}}{4\pi|\underline{x}-\underline{x}'_0|}$$

Avec  $\underline{x}'_0$  la source image de  $\underline{x}_0$  par rapport au plan porté par  $S_B$ .

**Montrons que:**

$$\forall x \in \Gamma \quad C(\underline{x})p(\underline{x}) = \int_{S_B} G(\underline{x}/\underline{x}_0) \frac{\partial p(\underline{x}_0)}{\partial n} d\underline{x}_0 \quad (\text{C.2})$$

- Condition de rigidité sur  $S_1$ :

$$\int_{S_1} \left[ G(\underline{x}/\underline{x}_0) \frac{\partial p(\underline{x}_0)}{\partial n} - p(\underline{x}_0) \frac{\partial G(\underline{x}/\underline{x}_0)}{\partial n} \right] d\underline{x}_0 = 0 \quad (\text{C.3})$$

- Condition de rigidité sur  $S_B$ :

$$\int_{S_B} p(\underline{x}_0) \frac{\partial G(\underline{x}/\underline{x}_0)}{\partial n} d\underline{x}_0 = 0 \quad (\text{C.4})$$

- Condition de radiation sur  $S_2$ :

Examinons maintenant l'intégrale sur  $S_2$  une demi-sphère de rayon  $r$ .

$$\int_{S_2} \left[ G(\underline{x}/\underline{x}_0) \frac{\partial p(\underline{x}_0)}{\partial n} - p(\underline{x}_0) \frac{\partial G(\underline{x}/\underline{x}_0)}{\partial n} \right] d\underline{x}_0 = \int_{S_2} G(\underline{x}/\underline{x}_0) \left[ \frac{\partial p(\underline{x}_0)}{\partial n} - jkp(\underline{x}_0) + \frac{p(\underline{x}_0)}{r} \right] d\underline{x}_0 \quad (\text{C.5})$$

Les conditions de radiation de Sommerfeld disent que lorsque  $r \rightarrow \infty$ :

$$\begin{cases} r\left(\frac{\partial p}{\partial r} - jkp\right) \rightarrow 0 \\ |rp| \leq K \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

Wilcox (1956 [82]) montre que la deuxième condition est une conséquence de la première.

Les conditions de radiation donnent lorsque  $r \rightarrow \infty$ :

$$\left| \int_{S_2} \left[ G(\underline{x}/\underline{x}_0) \frac{\partial p(\underline{x}_0)}{\partial n} - p(\underline{x}_0) \frac{\partial G(\underline{x}/\underline{x}_0)}{\partial n} \right] d\underline{x}_0 \right| \leq |G(\underline{x}/r)| \left[ o\left(\frac{1}{r}\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] 2\pi r^2 \quad (\text{C.7})$$

d'où

$$\left| \int_{S_2} \left[ G(\underline{x}/\underline{x}_0) \frac{\partial p(\underline{x}_0)}{\partial n} - p(\underline{x}_0) \frac{\partial G(\underline{x}/\underline{x}_0)}{\partial n} \right] d\underline{x}_0 \right| \leq \left[ o(1) + O\left(\frac{1}{r}\right) \right] \quad (\text{C.8})$$

On en déduit:

$$\left| \int_{S_2} \left[ G(\underline{x}/\underline{x}_0) \frac{\partial p(\underline{x}_0)}{\partial n} - p(\underline{x}_0) \frac{\partial G(\underline{x}/\underline{x}_0)}{\partial n} \right] d\underline{x}_0 \right| \rightarrow 0 \quad (\text{C.9})$$

# Annexe D

## Points de Gauss

Dans trois cas, montrons qu'il existe  $N$  poids  $\beta_I$  et  $N$  points  $(y_I, z_I)$  tels que la relation suivante soit valable quand  $N$  modes seulement sont présents:

$$\int_{S_0} |P^+(x_0, y, z, \omega)|^2 dy dz = \sum_{I=0}^{N-1} \beta_I |P^+(x_0, y_I, z_I)|^2 \quad (D.1)$$

**CAS 1:** La dimension  $L_z$  est bien plus grande que la dimension  $L_y$ . Les premiers  $N$  modes sont représentés par le couple d'indices  $(0, n)$  où  $n$  est un entier variant de 0 à  $N-1$ . Négligeant les modes d'ordre supérieur  $P^+(x_0, y, z, \omega)$  a la forme suivante:

$$P^+(x_0, y, z, \omega) = \sum_{n=0}^{n=N-1} \alpha_n \Psi_{0n}(y, z) \quad (D.2)$$

où  $\alpha_n$  est un coefficient complexe.

$$|P^+(x_0, y, z, \omega)|^2 = \sum_{n=0}^{n=N-1} \sum_{m=0}^{m=N-1} \alpha_n \alpha_m^* \Psi_{0n}(y, z) \Psi_{0m}(y, z) \quad (D.3)$$

$$|P^+(x_0, y, z, \omega)|^2 = \frac{1}{L_y} \sum_{n=0}^{n=N-1} \sum_{m=0}^{m=N-1} \alpha_n \alpha_m^* \epsilon_n \epsilon_m \cos\left(\frac{n\pi z}{L_z}\right) \cos\left(\frac{m\pi z}{L_z}\right) \quad (D.4)$$

$$|P^+(x_0, y, z, \omega)|^2 = \frac{1}{2L_y} \sum_{n=0}^{n=N-1} \sum_{m=0}^{m=N-1} \alpha_n \alpha_m^* \epsilon_n \epsilon_m \left[ \cos\left(\frac{(m+n)\pi z}{L_z}\right) \cos\left(\frac{(m-n)\pi z}{L_z}\right) \right] \quad (D.5)$$

On en déduit que:

$$|P^+(x_0, y, z, \omega)|^2 = \sum_{n=0}^{n=2N-2} \gamma_n \cos\left(\frac{n\pi z}{L_z}\right) \quad (D.6)$$

où  $\gamma_n$  se calcule à partir des  $\alpha_n \alpha_m^*$ .

Si pour tout  $n$  variant de 0 à  $2N-2$

$$\sum_{I=0}^{N-1} \beta_I \cos\left(\frac{n\pi z_I}{L_z}\right) = L_y L_z \delta_{n0} \quad (D.7)$$

alors l'équation (D.1) est démontrée.

Prenons  $z_I = \frac{L_z(2I+1)}{2N}$  et  $\beta_I = \frac{L_y L_z}{N}$ . Pour ( $n = 0$ ) l'équation (D.7) est vérifiée immédiatement. Montrons maintenant que:

$$B^n = \sum_{I=0}^{N-1} \cos\left(\frac{n\pi(2I+1)}{2N}\right) = 0 \quad (\text{D.8})$$

pour tout  $n$  variant de 1 à  $2N - 2$ .

$$B^n = \operatorname{Re}\left(\sum_{I=0}^{I=N-1} e^{jn\pi\left(\frac{2I+1}{2N}\right)}\right) \quad (\text{D.9})$$

$$B^n = \operatorname{Re}\left(e^{j\frac{n\pi}{2N}} \sum_{I=0}^{I=N-1} e^{jn\pi\left(\frac{I}{N}\right)}\right) \quad (\text{D.10})$$

$$B^n = \operatorname{Re}\left(e^{j\frac{n\pi}{2N}} \sum_{I=0}^{I=N-1} \left(e^{j\frac{n\pi}{N}}\right)^I\right) \quad (\text{D.11})$$

$$B^n = \operatorname{Re}\left(e^{j\frac{n\pi}{2N}} \frac{1 - (-1)^n}{1 - e^{j\frac{n\pi}{N}}}\right) \quad (\text{D.12})$$

$$B^n = \operatorname{Re}\left(j \frac{1 - (-1)^n}{2\sin\left(\frac{n\pi}{2N}\right)}\right) = 0 \quad (\text{D.13})$$

Les équations (D.8) et (D.7) sont donc vérifiées.  $N$  microphones d'erreur peuvent donc suffire pour évaluer la fonction de coût  $J$ .

**CAS 2:** Si  $N \times M$  modes sont retenus de la forme  $(n, m)$  avec  $n$  et  $m$  variant de 0 à respectivement  $N - 1$  et  $M - 1$ . Il existe encore  $N \times M$  poids  $\beta_{IJ}$  et points  $(y_{IJ}, z_{IJ})$  tel que l'équation D.1 soit vérifiée. Les poids et points sont de la forme:

$$\begin{cases} y_{IJ} = L_y \frac{2I+1}{2N} \\ z_{IJ} = L_z \frac{2J+1}{2M} \\ \beta_{IJ} = \frac{L_y L_z}{NM} \end{cases} \quad (\text{D.14})$$

**CAS 3:** Retenons trois modes de la forme (0,0), (1,0) et (0,1). Montrons une nouvelle fois que l'équation D.1 est vérifiée si l'on choisit les poids et points suivant:

$$\begin{cases} (y_1, z_1, \beta_1) = (0, \frac{3L_z}{4}, \frac{L_y L_z}{4}) \\ (y_2, z_2, \beta_2) = (L_y, \frac{3L_z}{4}, \frac{L_y L_z}{4}) \\ (y_3, z_3, \beta_3) = (\frac{L_y}{2}, \frac{L_z}{4}, \frac{L_y L_z}{2}) \end{cases} \quad (D.15)$$

$$\int_{S_0} |P^+(x_0, y, z, \omega)|^2 dydz = |\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{01}|^2 \quad (D.16)$$

$$\begin{cases} |P^+(x_0, y_1, z_1, \omega)|^2 = \frac{1}{L_y L_z} |\alpha_{00} - \alpha_{01} + \sqrt{2}\alpha_{10}|^2 \\ |P^+(x_0, y_2, z_2, \omega)|^2 = \frac{1}{L_y L_z} |\alpha_{00} - \alpha_{01} - \sqrt{2}\alpha_{10}|^2 \\ |P^+(x_0, y_3, z_3, \omega)|^2 = \frac{1}{L_y L_z} |\alpha_{00} + \alpha_{01}|^2 \end{cases} \quad (D.17)$$

On trouve alors que:

$$\frac{L_y L_z}{4} \left[ |P^+(x_0, y_1, z_1, \omega)|^2 + |P^+(x_0, y_2, z_2, \omega)|^2 + 2|P^+(x_0, y_3, z_3, \omega)|^2 \right] = |\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{01}|^2 \quad (D.18)$$



## Annexe E

# Mesures de l'influence des paramètres de l'algorithme X-LMS

Nous avons étudié l'influence des paramètres de l'algorithme de contrôle X-LMS en fonction du signal primaire. Les mesures sont effectuées dans un guide droit avec des revêtements absorbants.

**Longueur des filtres:**(tableau E.1) Deux filtres sont utilisés dans l'algorithme de contrôle.  $C$  représente le chemin acoustique entre la source secondaire et le microphone d'erreur.  $W$  représente le filtre de contrôle entre le capteur et le signal de la source secondaire. On attend que, pour un signal large bande, plus ces filtres sont longs, meilleur est le contrôle. Ce n'est pas le cas en régime harmonique, où seuls deux paramètres sont à caler (l'amplitude et la phase). C'est pourquoi un filtre de longueur 10 est alors suffisant.

**Fréquence d'échantillonnage:**(tableau E.2) Pour une longueur de filtre constante (en temps et donc à nombre de coefficients variable), il est intéressant de régler la fréquence d'échantillonnage qui représente le niveau de discrétisation du signal. On constate que, dans notre cas, une fréquence d'échantillonnage de 5000 Hz est optimale.

**Nombre de sources secondaires:** (tableau E.3) Dans le domaine de l'onde plane, on vérifie qu'une source supplémentaire n'améliore pas le contrôle alors que, au-delà de la première fréquence de coupure (ex: 600 Hz), la source supplémentaire s'avère utile.

**Signal de référence:** (tableau E.4) On a comparé le résultat du contrôle avec un signal de référence sur le signal électrique de la source primaire et mesuré directement par un microphone (capteur). Le capteur donne de meilleurs résultats car il est mieux corrélé au signal primaire dans la gaine. Le problème du feedback (qui peut entraîner des instabilités) est réglé en identifiant la fonction de transfert source secondaire-capteur et en la déduisant de la mesure au capteur. La position du capteur s'avère importante. Le contrôle est d'autant meilleur que le capteur est éloigné de la source secondaire. En harmonique, ce phénomène n'intervient pas car il n'y a alors plus de contrainte de causalité.

LONGUEUR DES FILTRES	10	20	50	100	200
Harmonique 200 Hz	23.4	22.6	25.0	23.7	24.5
Harmonique 400 Hz	22.3	22.3	23.0	22.2	22.6
Harmonique 600 Hz	0.1	0.0	0.0	0.1	0.0
Large bande 100-400Hz	-0.1	7.8	9.5	9.9	13.3
Large bande 100-800Hz	0.0	6.2	9.2	8.3	9.6

TAB. E.1 - Atténuation active en dB

FREQUENCE D'ECHANTILLON.	1000 Hz	2000 Hz	5000 Hz	8000 Hz
Harmonique 200 Hz	6.9	22.8	25.0	17.0
Harmonique 400 Hz	-	23.2	23.0	16.0
Harmonique 600 Hz	-	0.0	0.0	0.0
Large bande 100-400Hz	-	3.7	9.5	10.4
Large bande 100-800Hz	-	3.4	9.2	8.4

TAB. E.2 - Atténuation active en dB

Nbr. de SOURCES	1	2
Harmonique 200 Hz	25.0	22.7
Harmonique 400 Hz	23.0	24.7
Harmonique 600 Hz	0.0	18.7
Large bande 100-400Hz	9.5	9.9
Large bande 100-800Hz	9.2	11.3

TAB. E.3 - Atténuation active en dB

REFERENCE	Sig. prim.	Cap.-1.4m	Cap.-0.7m	Cap.-0.m
Harmonique 200 Hz	25.0	24.7	29.8	33.1
Harmonique 400 Hz	23.0	30.0	26.8	25.5
Large bande 100-400Hz	9.5	12.9	10.6	2.4
Large bande 100-800Hz	9.2	11.9	8.2	2.5

TAB. E.4 - Atténuation active en dB





## Deuxième partie

### Placement optimal des microphones d'erreur et des sources secondaires



# Introduction

Cette étude est consacrée au placement optimal des microphones d'erreur et des sources secondaires dans un problème de contrôle actif.

Un système actif est essentiellement composé de trois blocs:

- Un bloc de capteurs qui donnent des informations sur la distribution de pression dans une zone que l'on veut rendre silencieuse.
- Un bloc de sources secondaires qui génèrent un contre-bruit nécessaire à la réduction du signal de pression.
- Un bloc de contrôle piloté par un DSP qui, à partir des informations des microphones d'erreur et éventuellement d'un capteur de référence, calcule les signaux à envoyer aux sources secondaires.

Il s'avère que l'efficacité d'un système actif est très dépendante du placement des microphones d'erreur et des sources secondaires si bien qu'un "mauvais" placement est susceptible d'aboutir à une augmentation du bruit au lieu d'une atténuation.

Il existe, en théorie, une distribution continue de sources secondaires, appelée surface absorbante qui est la solution optimale du problème de placement (Jessel 1972 [34] et Nelson 1992 [57]). Dans les applications pratiques, cette surface absorbante peut être discrétisée (Zavadaskaya [85] et Nelson 1992 [57]). Comme une grande densité de sources est alors nécessaire pour approcher convenablement une distribution continue, la discrétisation d'une surface absorbante est rarement possible.

C'est pourquoi le problème de placement consiste généralement à positionner de manière optimale un nombre réduit (quelques unités à quelques dizaines) de sources secondaires et de microphones d'erreur. Même en se limitant à un nombre réduit de sources et de microphones, ce problème est difficile car il n'est pas convexe et un grand nombre de minimums locaux peuvent exister. Les techniques de placement peuvent se diviser en deux grandes familles:

- Les techniques de gradient qui ont pour grand défaut de fournir seulement un minimum local (Gaudefroy 1988 [27], Nayroles 1994 [55] et Yang 1994 [84]).
- Les techniques de sélection où un nombre discret de positions candidates est introduit à la fois pour les sources ou les microphones (Benzaria 1994 [5] 1995 [6], Asano 1995 [2], Kim 1995 [40] et Baek 1995 [4]).

Parmi les techniques de sélection, l'énumération exhaustive de toutes les combinaisons possibles est la seule qui fournisse la solution exacte. Les autres techniques sont des "heuristiques" qui ont pour principal intérêt leur rapidité mais qui n'assurent pas la qualité des solutions approchées qui sont ainsi déterminées.

Nous avons donc voulu développer une technique de sélection qui associe à la fois rapidité de calcul et qualité de la solution. En nous inspirant d'un travail de Kirsch (1991 [42]) sur le placement de sources de contrôle statique des structures, nous avons décidé d'utiliser les particularités de la programmation linéaire. C'est la raison pour laquelle nous avons modifié

la fonction de coût classique en contrôle actif qui est la somme des carrés des modules de la pression aux points de mesure. Nous avons ainsi choisi comme nouvelle fonction de coût le maximum des modules de la pression.

On peut alors montrer que la résolution d'un unique problème de programmation linéaire fournit simultanément un nombre "suffisant" de microphones d'erreur et leur placement. Les positions des microphones d'erreur se trouvent aux maximums du module de la pression complexe résiduelle. Cette technique s'adapte aussi au placement des sources secondaires qui s'écrit sous forme d'un problème de programmation entière connu, en recherche opérationnelle, sous le nom du problème de la charge fixe (Hirsch 1968 [31]).

Notre travail sera divisé en trois chapitres.

Le premier concernera le placement optimal dans un espace continu. On distinguera ainsi la distribution continue optimale, la discrétisation d'une surface absorbante et l'optimisation par gradient d'un nombre discret de sources.

Le second chapitre sera consacré au placement optimal dans un espace discret: c'est-à-dire à la sélection. Nous exposerons les techniques de sélection qui ont été développées pour le placement des sources. Nous présenterons ensuite le principe de notre méthode de placement pour les microphones d'erreur et les sources secondaires. Nous montrerons entre autre qu'il existe des bornes inférieures et supérieures sur le nombre "suffisant" de microphones d'erreur.

Dans le troisième chapitre, notre méthode par programmation linéaire ou entière est appliquée au cas du guide d'onde droit. Nos résultats sont comparés à des placements qui ont été proposés dans la littérature (Stell 1994 [75]).

# Chapitre 1

## Optimisation dans un espace continu

Dans un problème de contrôle actif deux espaces sont généralement introduits: d'une part une zone de silence dans laquelle l'énergie potentielle acoustique est minimisée, d'autre part une zone de contrôle dans laquelle des sources acoustiques secondaires sont placées.

Dans ce chapitre, la zone de contrôle est un espace continu et le problème de minimisation consiste à trouver, dans cet espace, la densité de sources qui assure une énergie potentielle acoustique minimale. Lorsque la zone de contrôle est incluse dans la zone de silence, nous verrons qu'il existe alors une solution et une seule. Cette solution est composée en particulier de densités de sources monopôlaires et dipôlaires disposées à la frontière de la zone de contrôle. Cette frontière sera alors appelée surface absorbante. Nous montrerons ensuite que cette surface absorbante peut être discrétisée et le minimum approché par une distribution de sources ponctuelles monopôlaires. Lorsque le nombre de sources est limité, une discrétisation de la solution optimale est impossible. Nous avons alors affaire à un problème de placement optimal de sources dans la zone de contrôle. Nous présenterons les techniques disponibles pour résoudre ce problème de placement qui s'avère difficile.

### 1.1 Optimisation d'une densité de sources

Nous allons considérer de façon idéale une distribution continue de sources. La solution continue doit être la solution vers laquelle converge la solution du problème de placement optimum lorsque le nombre  $N$  de sources ponctuelles monopôlaires tend vers l'infini. Nous nous placerons dans un milieu fermé décrit par l'ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^3$  de frontière  $\Gamma$  munie d'une impédance infinie. Le principe reste valable pour un milieu ouvert.

Les positions des sources primaires sont supposées appartenir à la réunion de deux ensembles ouverts  $\Omega_e$  et  $\Omega_i$  d'adhérences disjointes et de frontières respectives  $\Gamma_e$  et  $\Gamma_i$  (voir figure 1.1).

Les positions des sources secondaires appartiennent à  $\Omega_i$ .

$\Omega_m$  est l'espace ouvert sur lequel l'énergie potentielle acoustique est minimisée. On notera  $\Gamma_m$  sa frontière.

### 1.1.1 Présentation du problème

La distribution volumique de sources primaires  $Q_p$  appartient à  $H^{-2}(\Omega)$ . Nous définissons les sous-espaces  $V_i$  et  $V_e$  :

$$\begin{cases} V_i = \{q \in H^{-2}(\Omega) / \text{supp}(q) \subset \overline{\Omega_i}\} \\ V_e = \{q \in H^{-2}(\Omega) / \text{supp}(q) \subset \overline{\Omega_e}\} \end{cases} \quad (1.1)$$

$Q_p$  s'écrit de manière unique sous la forme:

$$Q_p = Q_p^i + Q_p^e \quad (1.2)$$

où  $Q_p^i \in V_i$  et  $Q_p^e \in V_e$ .

La distribution de sources secondaires  $Q_s$  appartient à  $V_i$ .

$$Q_s = Q_s^i \quad (1.3)$$

La distribution de sources totale s'écrit  $Q = Q_p + Q_s$ .

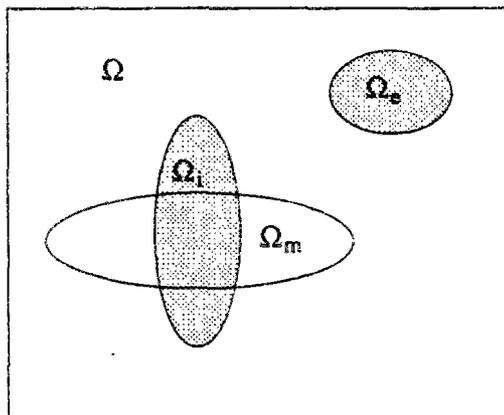


FIG. 1.1 - Espaces  $\Omega$ ,  $\Omega_e$ ,  $\Omega_i$  et  $\Omega_m$ .

Nous n'avons pas choisi  $L^2(\Omega)$  mais  $H^{-2}(\Omega)$  comme espace de travail. Nous verrons que  $L^2(\Omega)$  est un espace trop petit et qu'il faut au moins choisir  $H^{-2}(\Omega)$  pour que le problème de minimisation admette une solution.

La pression totale  $p$  appartient à  $L^2(\Omega)$ . Elle est la somme des contributions des sources primaires et secondaires. On écrira:

$$p[Q] = p[Q_p] + p[Q_s] \quad (1.4)$$

La pression  $p$  et les sources  $Q$  vérifient l'équation de Helmholtz:

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = Q & \text{sur } \Omega \\ \underline{\nabla} p \cdot \underline{n} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $\underline{n}$  est le vecteur normal extérieur de  $\Gamma$ ,  $k = \frac{\omega}{C_0}$ .  $\omega$  est la pulsation et  $C_0$  la célérité du son.

Sanchez (1989 [68]) et Lions (1972 [45]) présentent des résultats généraux d'existence et d'unicité des solutions d'équations elliptiques.

Comme  $Q$  s'annule au voisinage de  $\Gamma$ , les résultats sont vrais pour  $Q \in H^{-2}(\Omega)$ . En prenant  $\Gamma$  de classe  $C^\infty$ , nous nous trouvons dans le cadre d'un problème "proprement régulier" d'ordre 2. Sanchez (1989 [68]) précise que si  $k \neq k_i$  où les  $k_i$  sont les valeurs propres du laplacien associé, alors le problème admet une solution et elle est unique.

Toujours en dehors des valeurs propres, la solution vérifie des propriétés de continuité, c'est-à-dire:

$$\|p[Q]\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|Q\|_{H^{-2}(\Omega)} \quad (1.6)$$

L'optimisation revient à trouver le minimum de l'énergie potentielle acoustique (à un coefficient près)  $J_0(Q_s)$  pour  $Q_s \in V_i$ :

$$J_0(Q_s) = \int_{\Omega_m} |p[Q_p] + p[Q_s]|^2 d\Omega \quad (1.7)$$

$J_0(Q_s)$  existe car  $p \in L^2(\Omega)$ .

On peut réécrire  $J_0$ :

$$J_0(Q_s) = \int_{\Omega_m} |p[Q_s]|^2 d\Omega + \int_{\Omega_m} p^*[Q_s]p[Q_p]d\Omega + \int_{\Omega_m} p^*[Q_p]p[Q_s]d\Omega + \int_{\Omega_m} |p[Q_p]|^2 d\Omega \quad (1.8)$$

$$\boxed{J_0(Q_s) = J_p + A(Q_s, Q_s) + L(Q_s) = A(Q_p + Q_s, Q_p + Q_s)} \quad (1.9)$$

où  $A(Q_1, Q_2)$  est une forme bilinéaire symétrique et  $L(Q)$  une forme linéaire sur  $V_i$ :

$$\begin{cases} A(Q_1, Q_2) = \text{Re} \left\{ \int_{\Omega_m} p^*[Q_1]p[Q_2]d\Omega \right\} \\ L(Q) = 2\text{Re} \left\{ \int_{\Omega_m} p^*[Q_p]p[Q]d\Omega \right\} \\ J_p = \int_{\Omega_m} |p[Q_p]|^2 d\Omega \end{cases} \quad (1.10)$$

### 1.1.2 Condition nécessaire

Cherchons une équation que vérifie le minimum  $Q_0$  s'il existe. Une condition nécessaire d'extrémum est que la dérivée directionnelle dans la direction  $h$ ,  $dJ_0(Q_0, h)$ , s'annule pour tout  $h$  appartenant à  $V_i$ . Montrons que:

$$\forall h \in V_i \quad dJ_0(Q_0, h) = 2 \text{Re} \left\{ \int_{\Omega_m} (p^*[Q_p + Q_0])p[h]d\Omega \right\} \quad (1.11)$$

$$\forall h \in V_i \quad \forall \epsilon \in R^+$$

$$J_0(Q_0 + \epsilon h) - J_0(Q_0) = 2\epsilon \operatorname{Re} \left\{ \int_{\Omega_m} (p^*[Q_p + Q_0])p[h]d\Omega \right\} + \epsilon^2 \int_{\Omega_m} |p[h]|^2 d\Omega \quad (1.12)$$

$$\frac{1}{\epsilon} [J_0(Q_0 + \epsilon h) - J_0(Q_0)] - 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{\Omega_m} (p^*[Q_p + Q_0])p[h]d\Omega \right\} = \epsilon \int_{\Omega_m} |p[h]|^2 d\Omega \quad (1.13)$$

On obtient alors:

$$dJ_0(Q_0, h) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (J_0(Q_0 + \epsilon h) - J_0(Q_0)) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{\Omega_m} (p^*[Q_p + Q_0])p[h]d\Omega \right\} \quad (1.14)$$

On en déduit que:

$$\forall h \in V_i \quad \langle (p[Q_p + Q_0]) \mathbf{1}_{\Omega_m} \mid p[h] \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (1.15)$$

Prenons  $h$  tel que:

$$\begin{cases} p[h] = p[Q_p + Q_0] & \text{sur } \Omega_i \\ p[h] = 0 & \text{sur } \Omega \setminus \Omega_i \end{cases} \quad (1.16)$$

Comme  $h = \Delta p[h] + k^2 p[h]$ , la distribution  $h$  s'écrit:

$$h = [Q_p + Q_0]/\Omega_i - p_i[Q_p + Q_0] \frac{d\delta_{\Gamma_i}}{dn} - \frac{dp_i}{dn}[Q_p + Q_0] \delta_{\Gamma_i} \quad (1.17)$$

où  $\delta_{\Gamma_i}$  est la mesure de la surface de  $\Gamma_i$  et  $\underline{n}$  est le vecteur normal extérieur de  $\Gamma_i$ .  $p_i$  (respectivement  $\frac{dp_i}{dn}$ ) est la valeur de la pression (respectivement de la dérivée normale de la pression) du coté intérieur à  $\Omega_i$ , le long de la frontière  $\Gamma_i$ .

On vérifie que  $h \in V_i$ .  $h$  appartient en effet à  $H^{-2}(\Omega)$  car c'est la dérivée d'ordre 2 d'une fonction de  $L^2(\Omega)$ . Son support est de plus inclus dans  $\overline{\Omega_i}$ . En remplaçant  $h$  dans 1.15, on obtient alors:

$$\forall h \in V_i \quad \langle (p[Q_p + Q_0]) \mathbf{1}_{\Omega_m} \mid (p[Q_p + Q_0]) \mathbf{1}_{\Omega_i} \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (1.18)$$

$$\| (p[Q_p + Q_0]) \mathbf{1}_{\Omega_m \cap \Omega_i} \|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (1.19)$$

d'où

$$\boxed{p[Q_p + Q_0]/\Omega_m \cap \Omega_i = 0} \quad (1.20)$$

### 1.1.3 Cas particulier : $\overline{\Omega}_i \subset \Omega_m$

Le cas particulier  $\overline{\Omega}_i \subset \Omega_m$  est important dans la mesure où il y a unicité de la solution sous cette hypothèse. Nous allons d'abord montrer la forme que prend cette solution.

On a alors:

$$p[Q_p + Q_0]/\Omega_i = 0 \quad (1.21)$$

et

$$Q_p + Q_0/\Omega_i = 0 \quad (1.22)$$

On a donc  $\text{supp}(Q_p^i + Q_0) \subset \Gamma_i$ .

Schwartz [69] démontre qu'une distribution d'ordre 2 sur  $\Omega$  dont le support est réduit à la variété  $\Gamma_i$ , infiniment différentiable, admet une décomposition unique en combinaison linéaire de dérivées normales d'ordre  $\leq 2$  de distributions de  $\Gamma_i$ . Ces distributions sont appelées couches multiples d'ordre  $\leq 3$ .

Or les couches multiples d'ordre 3 n'appartiennent pas à  $H^{-2}(\Omega)$ .  $Q_p^i + Q_0$  s'exprime donc comme la somme d'un **potentiel simple couche** et d'un **potentiel double couche** et cette décomposition est unique.

$$Q_p^i + Q_0 = f\delta_{\Gamma_i} + g\frac{d\delta_{\Gamma_i}}{dn} \quad (1.23)$$

où  $f$  et  $g$  sont des distributions de  $\Gamma_i$ .

Une fois les sources intérieures annulées, on peut considérer que les sources primaires sont distribuées uniquement sur  $\Omega_e$ . Les distributions simples et doubles couches munissent la frontière  $\Gamma_i$  d'un coefficient de réflexion, d'un coefficient de transmission desquels on déduit un coefficient d'absorption. La frontière  $\Gamma_i$  sera donc appelée **surface absorbante**. Le coefficient de transmission est réglée de façon à annuler la pression à l'intérieur de  $\Omega_i$ . Le coefficient de réflexion, quant à lui, est déterminé pour minimiser l'énergie potentielle acoustique à l'extérieur de  $\Omega_i$  sans pouvoir totalement l'annuler. L'absorption, quant à elle, correspond à l'énergie absorbée par les sources secondaires, c'est-à-dire à une énergie rayonnée négative.

#### Résultats d'existence et d'unicité:

Nous allons démontrer l'existence et l'unicité dans le cas où  $\overline{\Omega}_i \subset \Omega_m$ . Nous allons montrer que nous nous trouvons dans le cadre du théorème de Lax-Milgram. Nous avons affaire à la minimisation d'une fonctionnelle de la forme  $A(Q, Q) + L(Q)$  sur  $V_i$ .

1-  $V_i$  est un espace de Hilbert comme sous-espace fermé d'un Hilbert.

2-  $A(Q_1, Q_2) = \text{Re} \left\{ \int_{\Omega_m} p^*[Q_1]p[Q_2]d\Omega \right\}$  est une forme bilinéaire continue.

D'après l'inégalité de Schwarz:

$$A(Q_1, Q_2) \leq \|p[Q_1]\|_{L^2(\Omega_m)} \|p[Q_2]\|_{L^2(\Omega_m)} \leq \|p[Q_1]\|_{L^2(\Omega)} \|p[Q_2]\|_{L^2(\Omega)} \quad (1.24)$$

Sanchez [68] dit que:

$$\|p[Q]\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|Q\|_{H^{-2}(\Omega)} \quad (1.25)$$

On en déduit que:

$$A(Q_1, Q_2) \leq C^2\|Q_1\|_{H^{-2}(\Omega)}\|Q_2\|_{H^{-2}(\Omega)} \quad (1.26)$$

$A$  est donc une forme bilinéaire continue sur  $H^{-2}(\Omega)$ , elle l'est aussi sur  $V_i$ .

$3-L(Q) = 2Re \left\{ \int_{\Omega_m} p^*[Q_p]p[Q]d\Omega \right\}$  est linéaire continue.

On démontre de même que:

$$L(Q) \leq 2C^2\|Q_p\|_{H^{-2}(\Omega)}\|Q\|_{H^{-2}(\Omega)} \quad (1.27)$$

$L$  est donc une forme linéaire continue sur  $H^{-2}(\Omega)$ , elle l'est aussi sur  $V_i$ .

4-Montrons que  $A$  est une forme bilinéaire  $V_i$ -coercive (généralisation de la défini-positivité en dimension infinie).

Soit  $Q \in V_i$  et  $p \in L^2(\Omega)$  associé. Nous allons introduire  $\tilde{Q} \in H^{-2}(\mathbf{R}^3)$  et  $\tilde{p} \in L^2(\mathbf{R}^3)$  définis de la façon suivante:

$$\begin{cases} \tilde{p} = p & \text{sur } \Omega_m \\ \tilde{p} = 0 & \text{sur } \mathbf{R}^3 \setminus \Omega_m \end{cases} \quad (1.28)$$

et

$$\tilde{Q} = \Delta\tilde{p} + k^2\tilde{p} \quad \text{sur } \mathbf{R}^3 \quad (1.29)$$

$\tilde{Q} \in H^{-2}(\mathbf{R}^3)$  car  $\tilde{p} \in L^2(\mathbf{R}^3)$ . Comme  $\text{supp}(Q) = \bar{\Omega}_i \subset \Omega_m$  et  $Q = \tilde{Q}$  sur  $\Omega_m$ :

$$\|Q\|_{H^{-2}(\Omega)} \leq \|\tilde{Q}\|_{H^{-2}(\mathbf{R}^3)} \quad (1.30)$$

On a par définition:

$$\|\tilde{Q}\|_{H^{-2}(\mathbf{R}^3)} = \left\| \frac{\hat{\tilde{Q}}(\xi)}{1 + |\xi|^2} \right\|_{L^2(\mathbf{R}^3)}$$

où  $\hat{\tilde{Q}}$  est la transformée de fourier de  $\tilde{Q}$ . On en déduit que:

$$\|\tilde{Q}\|_{H^{-2}(\mathbf{R}^3)} = \left\| \frac{k^2 - |\xi|^2}{1 + |\xi|^2} \hat{\tilde{p}}(\xi) \right\|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \leq \max(1, k^2) \|\hat{\tilde{p}}(\xi)\|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \quad (1.31)$$

On sait de plus:

$$\|\hat{\tilde{p}}(\xi)\|_{L^2(\mathbf{R}^3)}^2 = \|\tilde{p}\|_{L^2(\mathbf{R}^3)}^2 = \int_{\Omega_m} |p|^2 d\Omega = A(Q, Q) \quad (1.32)$$

On en déduit que:

$$\boxed{\forall Q \in V_i \quad \|Q\|_{H^{-2}(\Omega)}^2 \leq \max(1, k^2) A(Q, Q)} \quad (1.33)$$

$A$  est donc  $V_i$ -coercive et le théorème de Lax-Milgram assure alors l'existence et l'unicité de la solution. La condition nécessaire devient aussi une condition suffisante et  $Q_o$ , qui la vérifie, est l'unique solution.

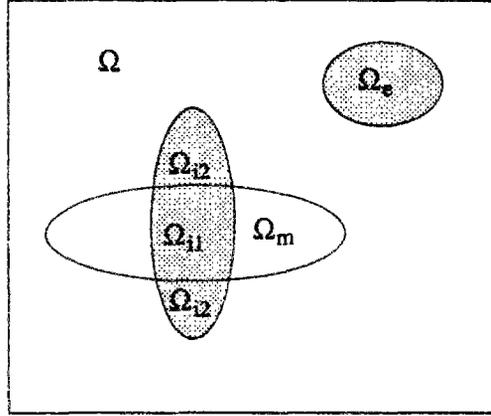


FIG. 1.2 - Espaces  $\Omega_{i_1}$  et  $\Omega_{i_2}$ .

### 1.1.4 Cas général

Dans le cas où une partie de  $\Omega_i$  est à l'extérieur de  $\Omega_m$ , l'unicité n'est plus assurée. Nous notons  $\Omega_{i_1}$ ,  $\Omega_{i_2}$  et  $\Omega_{m_2}$  les espaces  $\Omega_i \cap \Omega_m$ ,  $\overbrace{\Omega_i \setminus \Omega_{i_1}}^o$  et  $\overbrace{\Omega_m \setminus \Omega_{i_1}}^o$  respectivement (voir figure 1.2).

Nous savons que si  $Q_0$  est une solution:

$$p[Q_p + Q_0]/\Omega_{i_1} = 0 \quad (1.34)$$

Nous avons par contre une liberté sur le choix de  $p[Q_p + Q_0]/\Omega_{i_2}$ .

On remarque que, lorsque  $\overline{\Omega_i} \subset \Omega_m$ ,  $\Omega_{i_2} = \emptyset$  et ce degré de liberté disparaît. Il y a alors unicité de la solution.

Choisissons  $\Omega_{i_2} \neq \emptyset$  et notons  $Q_*$  une solution du problème de minimisation. Pour toute autre solution  $Q_0$ , nous avons:

$$J_0(Q_0) = J_0(Q_*) \quad (1.35)$$

En utilisant 1.34, la relation 1.35 devient:

$$\int_{\Omega_{m_2}} |p[Q_p] + p[Q_0]|^2 d\Omega = \int_{\Omega_{m_2}} |p[Q_p] + p[Q_*]|^2 d\Omega \quad (1.36)$$

Examinons deux cas particuliers avec  $Q_p^i = 0$  (les sources primaires sont toutes extérieures):

**Cas 1:**  $\Omega_m \subset \Omega_i$  alors seule l'équation (1.34) est à vérifier. L'énergie potentielle acoustique sur  $\Omega_m$  est alors annulée. Une liberté existe sur la valeur de la pression  $p$  sur  $\Omega_{i_2}$ . On peut par exemple choisir la pression continue au travers de la frontière  $\Gamma_m$ . Une distribution de monopôles sur  $\Gamma_m$  suffit alors pour que la relation (1.34) soit vérifiée (voir Nelson 1992 [57]).

**Cas 2:**  $\Omega_{i_1} = \emptyset$  alors seule l'équation (1.36) est à vérifier. Une liberté existe encore sur la valeur de la pression  $p$  sur  $\Omega_{i_2}$ . On peut ainsi choisir la pression continue au travers de la frontière  $\Gamma_i$ . Une distribution de monopôles sur  $\Gamma_i$  peut suffire pour que la relation (1.36) soit vérifiée.

## 1.2 Discrétisation d'une surface absorbante

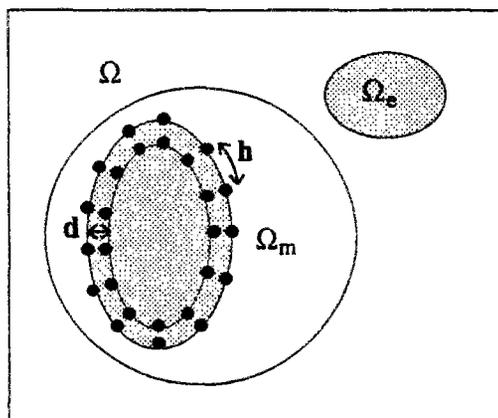


FIG. 1.3 - Surface absorbante discrétisée.

Il est intéressant d'examiner la discrétisation d'une surface absorbante à l'aide de sources ponctuelles monopôlaires et dipôlaires.

Nelson (1992 [57]) présente une approximation discrète de ces distributions continues. Il montre qu'un monopôle et un dipôle superposés en un point ont, vis à vis d'une onde plane incidente, une surface absorbante équivalente de  $\frac{\lambda^2}{\pi}$ . Il suggère alors qu'une grille de sources espacées d'un intervalle de  $\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}$  devrait pouvoir absorber une partie importante d'une onde d'incidence normale.

Zavadaskaya (1974 [85]) étudie aussi l'approximation discrète d'une distribution de monopôles dipôles placés de façon régulière sur un cercle dans un problème 2D. Pour une onde incidente plane, il montre qu'une distribution discrète de sources approche la solution continue avec une erreur relative de la pression sur la surface absorbante de  $10^{-3}$  lorsque l'intervalle entre les sources est inférieur à  $\frac{\lambda}{2}$ .

Nous allons examiner (voir figure 1.3) un problème discret avec des sources ponctuelles monopôlaires groupées par paires, orientées suivant la normale de  $\Gamma_i$  et séparées par une distance  $d$ . Nous allons montrer que la solution du problème discret peut tendre vers la solution continue dans  $V_i$  lorsque le nombre de paires  $N$  et la distance  $d$  tendent vers l'infini et zéro respectivement.

Nous allons ensuite traiter un exemple en champ libre et examiner la vitesse de convergence en fonction du nombre de paires  $N$  et la distance  $d$ .

### 1.2.1 Convergence de la solution discrète vers la solution continue

#### A. Solution du problème continu: $Q_0$

Nous nous plaçons dans le cadre d'un problème de la section précédente avec  $\overline{\Omega}_i \subset \Omega_m$ , c'est-à-dire dans le cas où il y a unicité de la solution. Nous supposons que  $Q_p^i = 0$ . C'est-à-dire que les sources primaires sont toutes extérieures.

Nous minimisons toujours  $J_0(Q_s)$  avec  $Q_s \in V_i$ :

$$J_0(Q_s) = \int_{\Omega_m} |p[Q_p] + p[Q_s]|^2 d\Omega \quad (1.37)$$

$$V_i = \{Q \in H^{-2}(\Omega) / \text{supp}(Q) \subset \overline{\Omega}_i\} \quad (1.38)$$

Nous avons vu que la solution continue  $Q_0$  est formée par la somme d'une distribution continue de monopôles et de dipôles.

$$Q_0 = f\delta_{\Gamma_i} + g \frac{d\delta_{\Gamma_i}}{dn} \quad (1.39)$$

Nous ferons ici l'hypothèse que  $f$  et  $g$  sont des fonctions continûment différentiables de  $\Gamma_i$ .  $\Omega_i$  est un ouvert borné et convexe de frontière  $\Gamma_i$  continûment différentiable. Soit  $d \in \mathbf{R}$  avec  $0 \leq d \leq d_0$ . Soit  $h \in \mathbf{R}$  avec  $0 \leq h \leq h_0$ .

### B. Solution du problème discret: $Q^h$

Nous allons maintenant nous intéresser à un problème discret:

Prenons un maillage de  $N$  noeuds de  $\Gamma_i$  paramétré par  $h$  ( $h^2 N = \text{aire}\{\Gamma_i\}$ ). Les noeuds sont notés  $\underline{x}_m^h$  avec  $m$  variant de 0 à  $N-1$ . Soit  $\underline{n}(\underline{x}_m^h)$  le vecteur normal extérieur de  $\Gamma_i$  en  $\underline{x}_m^h$ . Des paires de monopôles sont situées en  $\underline{x}_m^{h-} = \underline{x}_m^h$  et  $\underline{x}_m^{h+} = \underline{x}_m^h + d\underline{n}(\underline{x}_m^h)$ .

Notons  $V_h$  le sous-espace vectoriel de  $V_i$  de dimension  $2N$  tel que:

$$V_h = \{Q \in V_i | Q = \sum_{m=0}^{m=N-1} Q_m^+ \delta_{\underline{x}_m^{h+}} + \sum_{m=0}^{m=N-1} Q_m^- \delta_{\underline{x}_m^{h-}} \text{ et } (Q^+, Q^-) \in \mathbf{C}^N \times \mathbf{C}^N\} \quad (1.40)$$

Nous minimisons  $J_0(Q)$  avec  $Q \in V_h$ :

$$J_0(Q) = \int_{\Omega_m} |p[Q_p] + p[Q]|^2 d\Omega \quad (1.41)$$

La solution du problème discret sera notée  $Q^h$ .  $Q^{h+}$  et  $Q^{h-}$  sont les vecteurs correspondants de  $\mathbf{C}^N$ . Nous allons montrer que  $Q^h \rightarrow Q_0$  dans  $V_i$  lorsque le pas du maillage  $h$  tend vers 0 et lorsque  $d$  la distance entre deux points d'une même paire, tend aussi vers 0.

Soit  $\psi \in H^2(\Omega)$ .

$$\langle Q_0 | \psi \rangle = \int_{\Gamma_i} f\psi^* d\Gamma + \int_{\Gamma_i} g \frac{d\psi^*}{dn} d\Gamma \quad (1.42)$$

On montre (voir annexe A) que l'on peut écrire:

$$\begin{aligned} \langle Q_0 | \psi \rangle &= \sum_{m=0}^{m=N-1} \frac{h^2}{2} [f(\underline{x}_m^h)\psi^*(\underline{x}_m^{h+}) + f(\underline{x}_m^h)\psi^*(\underline{x}_m^{h-})] \\ &+ \sum_{m=0}^{m=N-1} \frac{h^2}{d} [g(\underline{x}_m^h)\psi^*(\underline{x}_m^{h+}) - g(\underline{x}_m^h)\psi^*(\underline{x}_m^{h-})] \\ &+ r_h(\psi) + r_d(\psi) \end{aligned} \quad (1.43)$$

avec

$$|r_h(\psi)| \leq C^h(d)h^{\frac{1}{2}}\|\psi\|_{H^2(\Omega)} \quad (1.44)$$

et

$$|r_d(\psi)| \leq C^d d \|\psi\|_{H^2(\Omega)} \quad (1.45)$$

### C. Approximation de la solution continue : $\tilde{Q}^h$

Soit  $\tilde{Q}^h \in V_h$  tel que les vecteurs  $\tilde{Q}^{h+}$  et  $\tilde{Q}^{h-}$  s'écrivent:

$$\tilde{Q}_m^{h+} = \frac{h^2 f(\underline{x}_m^h)}{2} + \frac{h^2 g(\underline{x}_m^h)}{d} \quad (1.46)$$

$$\tilde{Q}_m^{h-} = \frac{h^2 f(\underline{x}_m^h)}{2} - \frac{h^2 g(\underline{x}_m^h)}{d} \quad (1.47)$$

L'équation 1.43 donne:

$$\langle Q_0 - \tilde{Q}^h | \psi \rangle = r_h(\psi) + r_d(\psi) \quad (1.48)$$

D'où

$$|\langle Q_0 - \tilde{Q}^h | \psi \rangle| \leq (C^h(d)h^{\frac{1}{2}} + C^d d) \|\psi\|_{H^2(\Omega)} \quad (1.49)$$

$$\|Q_0 - \tilde{Q}^h\|_{H^{-2}(\Omega)} \leq C^h(d)h^{\frac{1}{2}} + C^d d \quad (1.50)$$

Faisons tendre le couple  $(h, d)$  vers  $(0,0)$  tel que  $[C^h(d)h^{\frac{1}{2}} + C^d d]$  tend aussi vers zéro. On obtient alors que  $\|\tilde{Q}^h - Q_0\|_{H^{-2}(\Omega)} \rightarrow 0$ .

Comme  $J$  est continue dans  $V_i$ ,  $J(Q_0) - J(\tilde{Q}^h) \rightarrow 0$ . Introduisons maintenant  $Q^h$ , la solution du problème discret. On sait que:

$$J(Q_0) \leq J(Q^h) \leq J(\tilde{Q}^h) \quad (1.51)$$

Comme  $J(Q_0) - J(\tilde{Q}^h) \rightarrow 0$ ,  $J(Q^h) - J(Q_0) \rightarrow 0$ . Ecrivons  $[J(Q^h) - J(Q_0)]$ :

$$J(Q^h) - J(Q_0) = A(Q^h, Q^h) - A(Q_0, Q_0) + L(Q^h) - L(Q_0) \quad (1.52)$$

Comme  $Q_0$  est la solution optimale, on sait que  $\forall Q_* \in V_i$ :

$$2A(Q_0, Q_*) + L(Q_*) = 0 \quad (1.53)$$

En particulier:

$$\begin{cases} L(Q_0) = -2A(Q_0, Q_0) \\ L(Q^h) = -2A(Q_0, Q^h) \end{cases} \quad (1.54)$$

En utilisant les relations 1.54 dans l'équation 1.52, on obtient:

$$J(Q^h) - J(Q_0) = A(Q^h, Q^h) + A(Q_0, Q_0) - 2A(Q_0, Q^h) = A(Q^h - Q_0, Q^h - Q_0) \quad (1.55)$$

D'après la coercivité de  $A(Q, Q)$  (équation 1.33), on obtient finalement:

$$\max(1, k^2) [J(Q^h) - J(Q_0)] \geq \|Q^h - Q_0\|_{H^{-2}(\Omega)}^2 \quad (1.56)$$

On en déduit donc que  $Q^h \rightarrow Q_0$  dans  $V_i$ . La solution du problème discret converge donc bien vers la solution continue dans  $V_i$ .

On a donc montré que l'on peut approximer une surface activement absorbante par une distribution de sources ponctuelles monopôlaires.

Nous allons maintenant traiter un exemple pour examiner la vitesse de convergence.

### 1.2.2 Exemple en champ libre: solutions analytiques

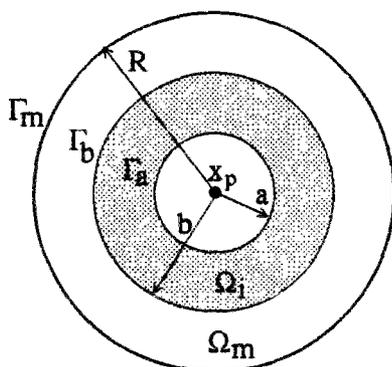


FIG. 1.4 - Espaces  $\Omega_m$  et  $\Omega_i$ .

Nous considérons une boule de rayon  $R$  comme volume  $\Omega_m$  de minimisation de l'énergie potentielle acoustique de la section précédente. Nous considérons deux sphères de même centre et de rayon  $a$  et  $b$  respectivement ( $a < b < R$ ) notées  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$  (voir figure 1.4). Le domaine compris entre les deux sphères  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$  est l'espace  $\Omega_i$  occupé par les sources secondaires. La source primaire est une source ponctuelle monopolaire située au centre  $\underline{x}_p = (0, 0, 0)$  de la boule  $\Omega_m$ . L'amplitude de la source primaire est notée  $Q_p$ .

La distribution de pression due à la source primaire s'écrit:

$$p_p(r) = Q_p \frac{e^{jkr}}{4\pi r} \quad (1.57)$$

$r = |\underline{x} - \underline{x}_p|$  la distance par rapport au point  $\underline{x}_p$ .

D'après les conclusions de la section 1, la distribution optimale de sources est une distribution de sources monopôlaires et dipôlaires sur les surfaces  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$ . Comme la source primaire est située seulement à l'intérieur de la sphère  $\Omega_a$ , la distribution optimale de sources est uniquement composée de sources sur  $\Gamma_a$  et la pression  $p$  est nulle pour  $r > a$ . Le problème est donc indépendant du rayon  $b$ . Dans les calculs, le rayon  $R$  sera pris égal à 3 m tandis que le rayon  $a$  sera variable.

Nous présentons maintenant les détails du calcul de l'efficacité du contrôle actif avec quatre distributions de source différentes:

- une distribution continue de monopôles sur la sphère  $\Gamma_a$ .
- une distribution continue de monopôles-dipôles sur la sphère  $\Gamma_a$ .
- une distribution discrète de sources ponctuelles monopôlares sur la sphère  $\Gamma_a$ .
- une distribution discrète de paires de sources ponctuelles monopôlares sur les sphères  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_{a+d}$

Nous comparerons ensuite dans la section suivante les résultats du contrôle avec les quatre distributions que l'on notera A, B, C et D.

### A. Distribution continue de monopôles sur la sphère $\Gamma_a$

Examinons d'abord le contrôle dû à une distribution continue de monopôles sur la sphère  $\Gamma_a$ .

La distribution de pression due à une distribution uniforme de monopôles sur la sphère  $\Gamma_a$  s'écrit:

$$p_s(r) = Q_s \int_{\Gamma_a} \frac{e^{jk|\underline{x}-\underline{x}'|}}{4\pi|\underline{x}-\underline{x}'|} dx' \quad (1.58)$$

où  $Q_s$  est la densité surfacique de la source secondaire. L'amplitude totale des sources est  $Q^s = 4\pi a^2 Q_s$ .

$$p_s(r) = Q^s \frac{e^{jk(r+a)} - e^{jk|r-a|}}{8\pi jkar} \quad (1.59)$$

(voir l'annexe B).

L'énergie potentielle acoustique (multipliée par  $2\rho_0 C_0^2$ ) s'écrit:

$$J(Q^s) = \int_{\Omega_m} |p_p(r) + p_s(r)|^2 dr \quad (1.60)$$

On cherche  $Q_0^s$  qui minimise  $J(Q^s)$

$$Q_0^s = -2jka \frac{a \cos(ka) - \frac{\sin(ka)}{k} - j(2R-a)\sin(ka)}{4\sin^2(ka)(R-a) + 2a - \frac{\sin(2ka)}{k}} Q_p \quad (1.61)$$

$$J(Q_0^s) = \left[ \frac{R}{4\pi} - \frac{1}{4\pi} \frac{(a \cos(ka) - \frac{\sin(ka)}{k})^2 + (2R-a)^2 \sin^2(ka)}{4\sin^2(ka)(R-a) + 2a - \frac{\sin(2ka)}{k}} \right] |Q_p|^2 \quad (1.62)$$

### B. Distribution continue de monopôles-dipôles sur la sphère $\Gamma_a$

La distribution de pression due à une distribution de monopôles sur la sphère  $\Gamma_a$  avec une amplitude totale de source égale à  $Q^s$  s'écrit:

$$p_s(Q^s, a, r) = Q^s \frac{e^{jk(r+a)} - e^{jk|r-a|}}{8\pi jka r} \quad (1.63)$$

Une distribution continue de dipôles radiaux sur la sphère  $\Gamma_a$  peut se représenter comme la limite de deux distributions de monopôles sur les sphères  $\Gamma_{a+d}$  et  $\Gamma_a$  d'amplitude totale de sources  $Q_d$  et  $-Q_d$  respectivement lorsque  $d \rightarrow 0$  et  $dQ_d = D^s$ .

$$p_d(D^s, a, r) = \lim_{d \rightarrow 0} \{p_s(Q_d, a+d, r) + p_s(-Q_d, a, r)\} \quad (1.64)$$

$$p_d(D^s, a, r) = \lim_{d \rightarrow 0} d \frac{\partial p_s}{\partial a}(Q_d, a, r) \quad (1.65)$$

$$p_d(D^s, a, r) = -\frac{D^s}{8\pi jka^2 r} \left\{ e^{jk(r+a)} - e^{jk|r-a|} - jka e^{jk(r+a)} - jk \frac{r^2 - a^2 - |r-a|^2}{2|r-a|} e^{jk|r-a|} \right\} \quad (1.66)$$

Pour un rayon  $a$  fixé, l'énergie potentielle acoustique s'écrit:

$$J(Q^s, D^s) = \int_0^R |p_p(r) + p_s(r, Q^s) + p_d(r, D^s)|^2 4\pi r^2 dr \quad (1.67)$$

On cherche le couple  $(Q_*^s, D_*^s)$  qui minimise  $J(Q^s, D^s)$ :

D'après le chapitre précédent, ce couple  $(Q_*^s, D_*^s)$  assure une distribution de pression nulle pour  $r \geq a$ .

Si  $r \geq a$ ,

$$p(r) = p_p(r) + p_s(r, Q_*^s) + p_d(r, D_*^s) = 0 \quad (1.68)$$

$$p(r) = \frac{e^{jkr}}{4\pi r} \left\{ Q_p + \frac{Q_*^s}{ka} \sin(ka) - \frac{D_*^s}{ka^2} \sin(ka) + \frac{D_*^s}{a} \cos(ka) \right\} = 0 \quad (1.69)$$

d'où

$$\boxed{\frac{(Q_*^s a - D_*^s)}{ka^2} \sin(ka) + \frac{D_*^s}{a} \cos(ka) = -Q_p} \quad (1.70)$$

Le couple  $(Q_*^s, D_*^s)$  vérifie aussi une relation intérieure pour  $r \leq a$ .

Si  $r \leq a$ ,

$$p(r) = p_p(r) + p_s(r, Q_*^s) + p_d(r, D_*^s) \quad (1.71)$$

$$p(r) = \frac{e^{jkr}}{4\pi r} \left\{ Q_p + \frac{Q_*^s a e^{jka}}{2jka^2} - \frac{D_*^s e^{jka}}{2jka^2} + \frac{D_*^s e^{jka}}{2a} \right\} + \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left\{ -\frac{Q_*^s a e^{jka}}{2jka^2} + \frac{D_*^s e^{jka}}{2jka^2} - \frac{D_*^s e^{jka}}{2a} \right\} \quad (1.72)$$

posons:

$$\boxed{\frac{(Q_*^s a - D_*^s) e^{jka}}{2jka^2} + \frac{D_*^s e^{jka}}{2a} = -Q^T} \quad (1.73)$$

$$p(r) = \frac{e^{jkr}}{4\pi r} \{Q_p - Q^T\} + Q^T \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \quad (1.74)$$

$Q_*^T$  est la solution de la minimisation de  $J(Q^T)$  par rapport à  $Q^T$ .

$$J(Q_*^T) = \min_{Q^T} J(Q^T) = \int_0^a |p(r)|^2 4\pi r^2 dr \quad (1.75)$$

$$Q_*^T = Q_p \left\{ \frac{1}{2} - j \frac{1 - \cos(2ka)}{4ka - 2\sin(2ka)} \right\} = Q_p \left\{ \frac{1}{2} - jy \right\} \quad (1.76)$$

$$J(Q_*^T) = |Q_p|^2 \left\{ a \left( \frac{1}{2} + 2y^2 \right) + \frac{\sin(2ka)}{k} \left( \frac{1}{4} - y^2 \right) - \frac{y}{k} (1 - \cos(2ka)) \right\} \quad (1.77)$$

En posant  $\alpha = \frac{1}{ka^2} (Q_*^s a - D_*^s)$  et  $\beta = \frac{1}{a} D_*^s$ ,

$$\begin{cases} \sin(ka)\alpha + \cos(ka)\beta = -Q_p \\ \alpha + j\beta = -2jQ_*^T e^{-jka} \end{cases} \quad (1.78)$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} \alpha = j e^{jka} Q_p - 2j Q_*^T \cos(ka) = -Q_p [\sin(ka) + 2y \cos(ka)] \\ \beta = -e^{jka} Q_p + 2j Q_*^T \sin(ka) = -Q_p [\cos(ka) - 2y \sin(ka)] \end{cases} \quad (1.79)$$

On remarque que si  $Q_p$  est réel,  $\alpha$  et  $\beta$  sont aussi réels ainsi que  $Q_*^s$  et  $D_*^s$ . Les sources secondaires sont donc en phase avec la source primaire.

### C. Distribution discrète de sources ponctuelles monopôlaires sur la sphère $\Gamma_a$

Examinons maintenant le contrôle dû à une distribution discrète de  $N$  monopôles sur la sphère  $\Gamma_a$ .

La distribution de pression due à une distribution de monopôles s'écrit:

$$p_h(r) = \sum_{m=0}^{m=N(h)-1} Q_m \frac{e^{jk|\underline{x} - \underline{x}_m^h|}}{4\pi |\underline{x} - \underline{x}_m^h|} \quad (1.80)$$

où  $Q_m$  est l'amplitude de la  $m^{\text{ième}}$  source secondaire monopolaire ponctuelle et  $\underline{x}_m^h$  sa position.

On note  $Q$  la distribution de  $V_i$  et  $\tilde{Q}$  le vecteur de  $\mathbf{C}^N$  dont la  $m^{\text{ième}}$  composante est  $Q_m$ . L'énergie potentielle acoustique s'écrit:

$$J(Q) = \int_{\Omega_m} |p_p(r) + p_h(r)|^2 dr \quad (1.81)$$

On cherche  $Q_0^N$  qui minimise  $J(Q)$ :

$$\tilde{Q}_0^N = -Q_p \underline{M}^{-1} \underline{V} \quad (1.82)$$

où  $M_{mn} = p(\underline{x}_m^h, \underline{x}_n^h)$  et  $V_m = p(\underline{x}_p, \underline{x}_m^h)$ .  
avec

$$p(\underline{y}, \underline{z}) = \int_{\Omega_m} \frac{e^{jk(|\underline{x}-\underline{y}|-|\underline{x}-\underline{z}|)}}{16\pi^2|\underline{x}-\underline{y}||\underline{x}-\underline{z}|} dx \quad (1.83)$$

Les points  $\underline{x}_m^h$  sont disposés suivant la procédure décrite dans l'annexe C de façon à obtenir un maillage régulier d'une sphère. Du fait de la symétrie, on pourra vérifier que le vecteur  $\tilde{Q}_0^N$  a toutes ses composantes égales. Le calcul des composantes  $M_{mn}$  est décrit en annexe D.

#### D. Distribution discrète de paires de sources ponctuelles monopôlaires sur les sphères $\Gamma_a$ et $\Gamma_{a+d}$

Examinons maintenant le contrôle dû à une distribution discrète de  $N$  paires de sources. Cette distribution est constituée de  $2N$  monopôles,  $N$  sur la sphère  $\Gamma_a$  et  $N$  sur la sphère  $\Gamma_{a+d}$ . A chaque monopôle de la sphère  $\Gamma_a$  est associé un monopôle de la sphère  $\Gamma_{a+d}$ . Ces deux monopôles sont situés sur le même rayon.

La distribution de pression due à une distribution de doublets s'écrit:

$$p_h(r) = \sum_{m=0}^{m=N-1} Q_m^+ \frac{e^{jk|\underline{x}-\underline{x}_m^{h+}|}}{4\pi|\underline{x}-\underline{x}_m^{h+}|} + \sum_{m=N}^{m=2N-1} Q_m^- \frac{e^{jk|\underline{x}-\underline{x}_m^{h-}|}}{4\pi|\underline{x}-\underline{x}_m^{h-}|} \quad (1.84)$$

où  $Q_m^+$  est l'amplitude de la  $m^{\text{ième}}$  source secondaire et  $\underline{x}_m^{h+}$  sa position ( $Q_m^-$  est l'amplitude de la  $(N+m)^{\text{ième}}$  source secondaire et  $\underline{x}_m^{h-}$  sa position). Comme les deux sources d'une même paire sont situées sur le même rayon et à une distance  $d$ , on aura  $|\underline{x}_m^{h-}| = a$  et  $\underline{x}_m^{h+} = \frac{a+d}{a}\underline{x}_m^{h-}$ .

On note  $Q$  la distribution de  $V_i$  et  $Q^+$  le vecteur de  $\mathbf{C}^N$  dont la  $m^{\text{ième}}$  composante est  $Q_m^+$  ( $Q^-$  le vecteur de  $\mathbf{C}^N$  dont la  $m^{\text{ième}}$  composante est  $Q_m^-$ ).

L'énergie potentielle acoustique s'écrit:

$$J(Q) = \int_{\Omega_m} |p_p(r) + P_h(r)|^2 dr$$

On cherche  $Q_*^N$  qui minimise  $J(Q)$ :

$$\begin{pmatrix} Q_*^{N+} \\ Q_*^{N-} \end{pmatrix} = -\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{V}$$

où  $M_{mn} = p(\underline{x}_m, \underline{x}_m)$  et  $V_m = p(\underline{x}_m, \underline{x}_p)$ .

### 1.2.3 Exemple en champ libre: résultats numériques

Dans cette section, nous allons examiner la convergence de distributions de paires de sources (type D) vers la solution optimale (type B) en terme d'atténuation acoustique. Nous allons ensuite comparer l'atténuation acoustique pour les quatre types de distributions (A, B, C et D).

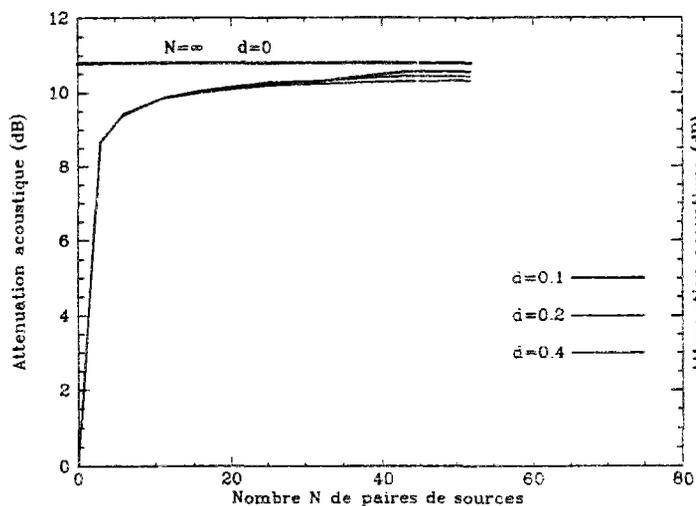


FIG. 1.5 - Atténuation acoustique en fonction du nombre  $N$  de paires de sources et de la distance  $d$  (rayon  $a$  égal à 1 m et fréquence de 1 Hz).

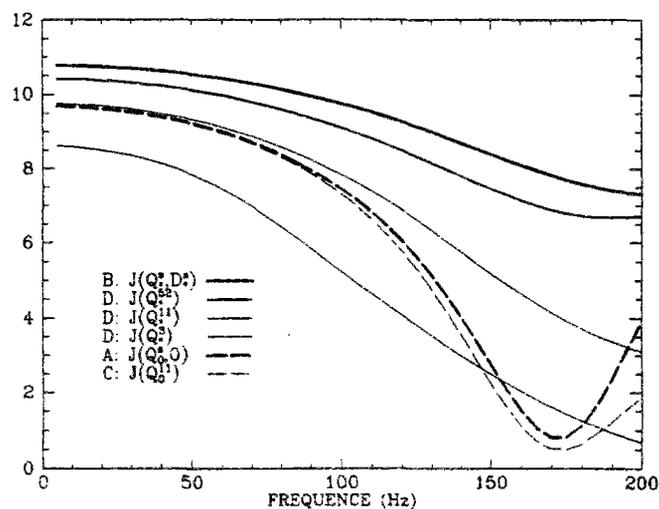


FIG. 1.7 - Atténuation acoustique en fonction de la fréquence (rayon  $a$  égal à 1 m et  $d$  pris égal à 0.1 m) pour des distributions du type A, B, C et D.

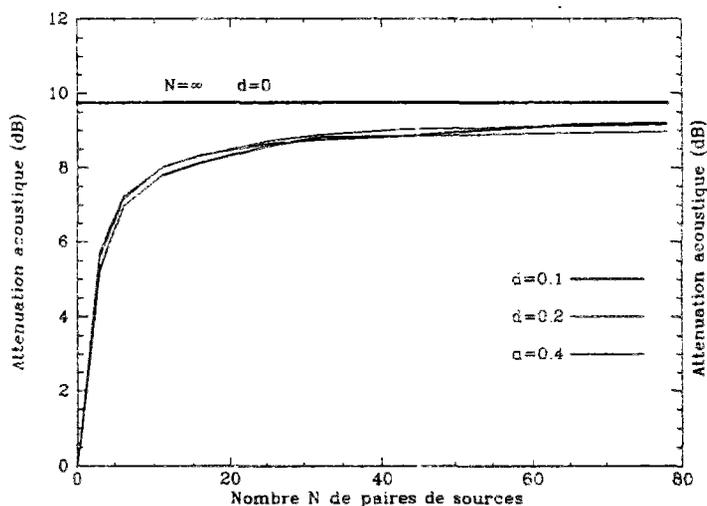


FIG. 1.6 - Atténuation acoustique en fonction du nombre  $N$  de paires de sources et de la distance  $d$  (rayon  $a$  égal à 1 m et fréquence de 100 Hz).

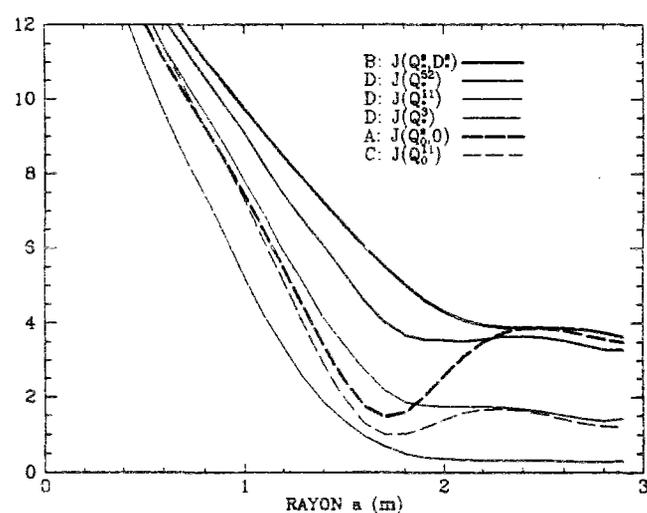


FIG. 1.8 - Atténuation acoustique en fonction du rayon  $a$  (fréquence de 100 Hz et  $d$  pris égal à 0.1 m) pour des distributions du type A, B, C et D.

Sur la figure 1.5 (resp. 1.6) est présentée l'atténuation acoustique  $\gamma$  en décibels pour une fréquence de 1 Hz (resp. 100 Hz). Cette atténuation est définie pour une distribution  $Q$  de sources secondaires:

$$\gamma(Q) = 10 \log_{10} \left[ \frac{J(0)}{J(Q)} \right] \quad (1.85)$$

Nous avons vu que lorsque  $d \rightarrow 0$  et  $N \rightarrow \infty$  (sous certaines conditions)  $J(Q^N) \rightarrow J(Q_*^s, D_*^s)$ . Les figures 1.5 et 1.6 montrent la convergence en fonction de  $N$  et  $d$ . On remarque tout d'abord que la vitesse de convergence dépend plus du nombre  $N$  que de la distance  $d$ . On remarque en effet que l'atténuation dépend peu de la distance  $d$  entre sources d'une même paire. Le nombre  $N$ , c'est-à-dire la distance entre les paires de sources semble, quant à lui, déterminant.

L'atténuation dépend aussi de la longueur d'onde. A la fréquence de 100 Hz, nous avons déterminé que l'on obtient une atténuation à 5 % en décibels (resp. 10 %) de l'atténuation optimale pour une distance caractéristique entre sources de  $\frac{\lambda}{8}$  (resp.  $\frac{\lambda}{5}$ ).

Nous allons maintenant comparer l'atténuation acoustique pour les quatre types de distributions (A, B, C et D).

Sur la figure 1.7 est présentée l'atténuation acoustique en fonction de la fréquence pour un rayon  $a$  égal à 1 m.

Examinons tout d'abord le cas d'une distribution surfacique monopolaire en trait gras pointillé (type A). Lorsque  $k \rightarrow 0$ ,  $Q_0^s \rightarrow -\frac{R-\frac{a}{2}}{R-\frac{2a}{3}}Q_p$  et  $J(Q_0^s) \rightarrow \frac{1}{4\pi} \left( R - \frac{(R-\frac{a}{2})^2}{R-\frac{2a}{3}} \right) |Q_p|^2$  c'est-à-dire une atténuation de 9.6 dB pour  $a$  égal à 1 m. Cette atténuation serait de 6 dB pour  $a$  égal à 3 m.

L'approximation par 11 sources monopolaires ponctuelles en trait fin pointillé (type C) donne des résultats proches de la distribution surfacique malgré les imprécisions du calcul. Ces imprécisions sont dues en partie aux limites de l'intégration numérique. Une autre source d'erreur vient du maillage de la sphère qui ne respecte qu'imparfaitement la symétrie du problème.

Pour une distribution continue de type monopolaire-dipolaire en trait gras plein (type B), on remarquera d'abord que la solution ne dépend pas du rayon  $R$  de la zone de silence  $\Omega_m$  car la pression est annulée pour  $r \geq a$  quel que soit le rayon  $R$ . En particulier quand  $k \rightarrow 0$ ,  $Q_*^s \rightarrow -Q_p$ ,  $D_*^s \rightarrow \frac{aQ_p}{2}$  et  $J(Q_*^s, D_*^s) \rightarrow \frac{a}{4} |Q_p|^2$ , c'est-à-dire une atténuation de 10.8 dB pour  $a$  égal à 1 m. Cette atténuation serait de 6.0 dB pour  $a$  égal à 3 m.

On constate qu'une approximation avec 52 paires de sources en trait fin plein (type D) donne une atténuation acoustique proche de la solution optimale. La précision est inférieure à 1 dB sur tout le domaine [0 – 200] Hz du calcul. Une approximation avec 11 paires est, elle aussi, meilleure que la distribution surfacique de sources monopolaires sur presque tout le domaine fréquentiel du calcul. Une approximation avec seulement 3 paires de sources est même meilleure que la distribution surfacique de sources monopolaires sur la bande [155–180] Hz. Cette constatation est importante car elle montre qu'un faible nombre de sources bien placées peut fournir une meilleure atténuation acoustique qu'un nombre infini de sources.

Sur la figure 1.8 est présentée l'atténuation acoustique en décibels en fonction du rayon  $a$  à la fréquence de 100 Hz.

Pour une distribution surfacique monopolaire (type A), on calcule que lorsque  $a \rightarrow 0$ ,  $Q_0^s \rightarrow -Q_p$  et  $J(Q_0^s) \rightarrow \infty$ . Pour une distribution surfacique monopolaire-dipolaire (type B), on calcule que lorsque  $a \rightarrow 0$ ,  $Q_*^s \rightarrow -Q_p$ ,  $D_*^s \rightarrow 0$  et  $J(Q_0^s) \rightarrow \infty$ . On vérifie que les deux approches sont équivalentes dans ce cas car elle donne la même solution. Une source secondaire située au même point que la source primaire, de même module et en opposition de phase annule l'énergie potentielle acoustique.

Lorsque  $a \rightarrow R$ , avec  $R = 3m$ , les deux types de distributions (A et B) donnent encore une atténuation acoustique identique. Par contre, les solutions  $(Q_0^s, 0)$  et  $(Q_*^s, D_*^s)$  sont différentes. Il n'y a alors plus unicité de la solution. Une distribution de type A assure la continuité de la pression au travers de la surface  $\Gamma_m$  alors qu'une distribution de type B assure une pression nulle pour ( $r > R$ ). Le cas  $a = R$  correspond en fait au cas particulier 2 de la section précédente où  $\Omega_m \cap \Omega_i = \emptyset$ .

Pour une distribution surfacique monopolaire-dipolaire (type B), on vérifie aussi que  $\gamma$  décroît lorsque le rayon  $a$  croît. La solution de type B est en effet la solution optimale du problème. Lorsque  $a$  augmente, l'espace de contrôle  $\Omega_i$  décroît et l'atténuation acoustique doit donc diminuer. Pour une distribution surfacique monopolaire (type A), la solution est non-optimale. Lorsque le rayon  $a$  augmente, l'atténuation acoustique n'est pas obligatoirement décroissante. C'est ce que l'on constate sur la figure 1.8. L'atténuation acoustique est en effet croissante pour  $a$  compris entre 1.7 et 2.4 m.

Pour les solutions approchées (type C, D), on retrouve que la convergence est plus rapide pour les distributions de type C que D. Les distributions de type D avec  $N = 11$  et à fortiori  $N = 52$  fournissent une plus grande atténuation qu'une distribution continue monopolaire pour  $a$  inférieur à 2 m environ. On remarque enfin le même phénomène pour  $N = 11$  que pour  $N = \infty$ . C'est-à-dire que des distributions de types dipolaires sont inutiles pour  $a$  égal à 3 m. On obtient en effet dans ce cas une même fonction de coût  $J(Q_*^{11})$  et  $J(Q_0^{11})$ .

En conclusion de cette étude, on a montré l'importance du positionnement des sources (un nombre réduit de sources bien placées peut se montrer plus efficace qu'une infinité mal placées).

Malgré l'intérêt des solutions continues, celles-ci ne peuvent que donner des bornes sur les réductions d'énergie acoustique. Une discrétisation des solutions continues est possible mais elle demande aussi souvent l'utilisation d'un grand nombre de sources.

C'est pourquoi, dans la section suivante, nous allons nous intéresser au cas plus pratique où le nombre de sources est égal, au plus, à quelques dizaines.

### 1.3 Optimisation du placement d'un nombre fini de sources ponctuelles

Nous allons noter  $N$  le nombre de sources ponctuelles monopolaires. Soient  $\underline{x}_m$  la position de la  $(m + 1)^{ième}$  source ( $\underline{x}_m \in \Omega_i$ ). Nous noterons  $\underline{X} = (\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_{N-1})$  le vecteur position de  $\Omega_i^N$ . Soit  $Q_m$  l'amplitude de la  $(m + 1)^{ième}$  source. Nous noterons  $\underline{Q} = (Q_0, \dots, Q_{N-1})$  le vecteur

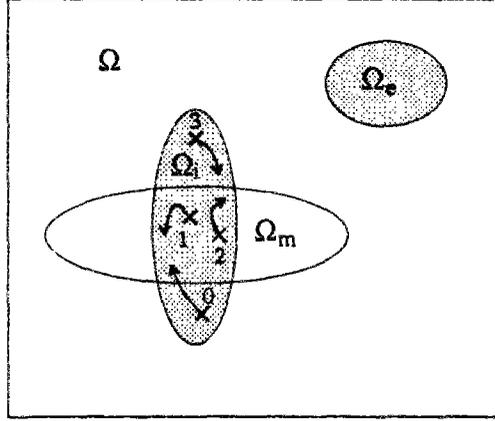


FIG. 1.9 - Optimisation du placement de sources ponctuelles.

amplitude de  $\mathbf{C}^N$ . Nous allons introduire un nouvel espace de minimisation.

$$V_N = \{Q \in V_i | Q = \sum_{m=0}^{m=N-1} Q_m \delta_{\underline{x}_m} \text{ et } (\underline{Q}, \underline{X}) \in \mathbf{C}^N \times \Omega_i^N\} \quad (1.86)$$

Nous minimisons  $J_0(Q)$  avec  $Q \in V_N$ :

$$J_0(Q) = \int_{\Omega_m} |p[Q + Q_p]|^2 d\Omega \quad (1.87)$$

Pour simplifier les notations et expliciter les inconnues du problème, nous remplaçons désormais  $p[Q + Q_p]$  par  $p[\underline{Q}, \underline{X}]$ . La fonction de coût s'écrit alors:

$$J_0(\underline{Q}, \underline{X}) = \int_{\Omega_m} |p[\underline{Q}, \underline{X}]|^2 d\Omega \quad (1.88)$$

Le problème de minimisation est maintenant double. Il s'agit en effet d'optimiser les amplitudes et les positions des sources secondaires. Il est possible d'optimiser simultanément les amplitudes et les positions des sources secondaires à l'aide de méthodes de gradients (Yang 1994 [84]). Cette méthode converge cependant vers un minimum local et non pas global. Une optimisation partielle est généralement préférée. Le vecteur  $\underline{X}$  est d'abord considéré fixe de telle sorte que le vecteur  $\underline{Q}_0(\underline{X})$ , solution du problème de minimisation, est calculé. Le vecteur  $\underline{X}$  est ensuite optimisé.

Nous noterons  $G(\underline{x}|\underline{y})$  la fonction de transfert entre la source située au point  $\underline{x}$  et le point de mesure  $\underline{y}$ .

### 1.3.1 Optimisation des amplitudes des sources

$J_0(\underline{Q}, \underline{X})$  est une forme quadratique.

$$J_0(\underline{Q}, \underline{X}) = \underline{Q}^* R_{\underline{X}} \underline{Q} + b_{\underline{X}}^* \underline{Q} + \underline{Q}^* b_{\underline{X}} + d \quad (1.89)$$

où

$$\begin{cases} d = \int_{\Omega_m} |Q_p G(\underline{x}_p | \underline{y})|^2 d\underline{y} \\ (R_{\underline{X}})_{ij} = \int_{\Omega_m} G(\underline{x}_j | \underline{y}) G^*(\underline{x}_i | \underline{y}) d\underline{y} \\ (b_{\underline{X}})_i = \int_{\Omega_m} Q_p G(\underline{x}_p | \underline{y}) G^*(\underline{x}_i | \underline{y}) d\underline{y} \end{cases} \quad (1.90)$$

Comme la matrice  $R_{\underline{X}}$  est définie positive (Curtis 1988 [14]),  $R_{\underline{X}}$  n'est pas singulière et l'existence et l'unicité d'un minimum sont assurées.

La solution du problème de minimisation  $Q_0(\underline{X})$  est donnée par l'équation suivante:

$$Q_0(\underline{X}) = -R_{\underline{X}}^{-1} b_{\underline{X}} \quad (1.91)$$

### 1.3.2 Optimisation des positions des sources

La fonction  $J_0(Q_0(\underline{X}), \underline{X})$  est ensuite minimisée en fonction du vecteur position  $\underline{X}$ . Cette étape est la plus difficile car on a ici affaire à un problème de minimisation non convexe.

**Remarque:** l'existence et l'unicité d'une solution dans  $V_N$  ne sont pas assurées. On peut par exemple avoir plusieurs solutions pour des raisons de symétrie. La solution peut aussi avoir des composantes multipôlaires qui n'appartiennent pas à  $V_N$ . Benzaria (1995 [6]) souligne en effet que les solutions ont tendance à donner des arrangements multipôlaires (dipôlaires ou quadripôlaires) de sources.

Gaufrey (1988 [27]) donnent une condition nécessaire pour que  $\underline{X}_0$ , en dehors de  $\Gamma_i$ , soient un minimum:

$$\nabla_{\underline{X}} J_0(Q_0(\underline{X}_0), \underline{X}_0) = 0 \quad (1.92)$$

Si  $\underline{X}_0$  vérifie l'équation 1.92,  $\underline{X}_0$  est susceptible d'être un minimum local.

En pratique, un minimum local peut être déterminé à l'aide d'une méthode de gradient en partant d'un placement initial arbitraire. Comme les données de calculs ou de mesures ne fournissent généralement qu'un échantillon limité de valeurs de fonctions de transfert  $G(\underline{x}_i | \underline{y})$ , une méthode d'interpolation comme celle présentée par Nayroles (1994 [55]) peut permettre de calculer cette fonction de transfert et ses premières dérivées partielles en tous points à partir des données connues.

### 1.3.3 Optimisation des positions des microphones

Dans les applications pratiques de contrôle actif, l'étape 1.3.1 est modifiée. Il est en effet impossible de mesurer l'énergie potentielle acoustique qui nécessite de connaître la valeur de la pression acoustique en tous points de  $\Omega_m$ . En pratique la pression est mesurée seulement en  $M$  points à l'aide de  $M$  microphones d'erreur placés dans  $\Omega_m$ . Soient  $\underline{y}_m$  la position du  $(m + 1)^{ième}$  microphone ( $\underline{y}_m \in \Omega_m$ ). Nous noterons  $\underline{Y} = (\underline{y}_0, \dots, \underline{y}_{N-1})$  le vecteur position de  $\Omega_m^M$ . L'amplitude des sources secondaires est alors déterminée par la minimisation d'une

nouvelle fonction de coût  $J_M$  qui représente la somme des carrés des modules de la pression aux microphones d'erreur.

$$J_M(\underline{Q}, \underline{X}, \underline{Y}) = \sum_{m=0}^{m=M-1} |p[\underline{Q}, \underline{X}]|^2(\underline{y}_m) \quad (1.93)$$

$J_M$  est aussi une forme quadratique:

$$J_M(\underline{Q}, \underline{X}, \underline{Y}) = \underline{Q}^* R_{\underline{X}, \underline{Y}} \underline{Q} + b_{\underline{X}, \underline{Y}}^* \underline{Q} + \underline{Q}^* b_{\underline{X}, \underline{Y}} + d_{\underline{Y}} \quad (1.94)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{\underline{Y}} = \sum_{m=0}^{m=M-1} |Q_p G(\underline{x}_p | \underline{y}_m)|^2 \\ (R_{\underline{X}, \underline{Y}})_{ij} = \sum_{m=0}^{m=M-1} G(\underline{x}_j | \underline{y}_m) G^*(\underline{x}_i | \underline{y}_m) \\ (b_{\underline{X}, \underline{Y}})_i = \sum_{m=0}^{m=M-1} Q_p G(\underline{x}_p | \underline{y}_m) G^*(\underline{x}_i | \underline{y}_m) \end{array} \right. \quad (1.95)$$

La solution du problème de minimisation  $\underline{Q}_M(\underline{X}, \underline{Y})$  est donnée par l'équation suivante:

$$\underline{Q}_M(\underline{X}, \underline{Y}) = -R_{\underline{X}, \underline{Y}}^{-1} b_{\underline{X}, \underline{Y}} \quad (1.96)$$

L'étape 1.3.2 d'optimisation du placement des sources est identique sauf que  $\underline{Q}_0(\underline{X})$  est remplacé par  $\underline{Q}_M(\underline{X}, \underline{Y})$ . Le critère pour le placement des sources mais aussi des microphones est maintenant  $J_0(\underline{Q}_M(\underline{X}, \underline{Y}), \underline{X})$ . Le critère dépend donc à la fois de  $\underline{X}$  et de  $\underline{Y}$ . Les étapes 1.3.2 et 1.3.3 peuvent en fait être combinées. Une méthode d'optimisation par gradient peut être en effet appliquée simultanément pour  $\underline{X}$  et  $\underline{Y}$ , c'est-à-dire pour le placement des sources secondaires et microphones d'erreur.

### 1.3.4 Conclusion

Ce chapitre présente d'abord la distribution optimale de sources dans un problème de contrôle actif. Cette distribution optimale est unique dans le cas où la zone de contrôle est strictement incluse dans la zone de silence. Cette distribution optimale consiste alors en une distribution simple couche et une distribution double couche sur la frontière de la zone de contrôle. Elle est appelée surface activement absorbante.

Nous avons montré que l'approximation par des paires de sources monopôlaires ponctuelles converge vers la solution continue dans un espace de fonctions noté  $V_i$ .

Sur un exemple (celui de la sphère), nous avons noté que l'approximation par des paires de sources monopôlaires ponctuelles nécessite cependant l'utilisation d'un grand nombre de sources.

C'est pourquoi la discrétisation d'une surface activement absorbante n'est pas applicable dans les cas pratiques où le nombre de sources est limité. Le problème d'optimisation consiste alors à déterminer la position optimale des sources secondaires (ou microphones d'erreur) dans un espace continu que nous appelons zone de contrôle (ou zone de silence).

Nous avons exposé les méthodes qui existent pour résoudre ce problème difficile. Il s'agit essentiellement de méthodes par gradient.

Les méthodes d'**optimisation** par gradient gardent le handicap de fournir un minimum local qui dépend largement de la configuration de départ. Elles ne fournissent pas non plus d'information sur la qualité de la solution. Elles demandent aussi une base de données des fonctions de transfert importante provenant d'un maillage assez dense de la zone de contrôle  $\Omega_i$ . Tous ces inconvénients font que les méthodes par **sélection** sont souvent préférées. Il s'agit alors de sélectionner  $N$  positions de sources parmi  $N_0$  candidates dans  $\Omega_i$ . De la même façon, le problème du placement des microphones d'erreur peut être traité par une méthode de sélection. Il s'agit de même de sélectionner  $M$  positions de microphones parmi  $M_0$  candidates dans  $\Omega_m$ .

Dans le cadre de l'optimisation des positions des sources secondaires, Benzaria (1994 [5]) propose d'associer les deux familles de méthodes: sélection et optimisation. Une stratégie de sélection est d'abord appliquée afin de déterminer la configuration de départ pour une méthode de gradient. L'optimisation par gradient permet ensuite d'améliorer l'atténuation obtenue par sélection.

Dans le chapitre suivant, nous allons décrire une méthode qui permet d'améliorer la stratégie de sélection à la fois pour le placement des sources secondaires et des microphones d'erreur. Nous n'allons pas combiner les techniques de sélection et d'optimisation. Mais il est certain que les résultats par sélection peuvent toujours être améliorés par une technique d'optimisation par gradient.

# Chapitre 2

## Optimisation dans un espace discret

Ce chapitre est consacré au placement des sources secondaires et microphones d'erreur dans un espace discret.

Nous exposons d'abord l'approche classique où la fonction de coût est quadratique. Nous présentons une revue des différentes méthodes développées pour résoudre ce problème.

En remplaçant la fonction de coût par le maximum du module de la pression aux points de mesure, nous écrivons ensuite le problème sous la forme de programmation linéaire. Cette écriture s'avère en fait adaptée au placement des microphones d'erreur.

Nous montrerons enfin comment le calcul du placement optimal des sources secondaires peut être accéléré en écrivant le problème sous forme de programmation entière.

### 2.1 Problème quadratique

Nous avons vu au chapitre précédent que le problème de placement par optimisation revient à trouver les vecteurs positions  $\underline{X}$  et  $\underline{Y}$  des sources secondaires et des microphones d'erreur qui minimisent  $J_0(\underline{Q}_M(\underline{X}, \underline{Y}), \underline{X})$  avec:

$$J_0(\underline{Q}, \underline{X}) = \int_{\Omega_m} |p[\underline{Q}, \underline{X}]|^2 d\Omega \quad (2.1)$$

avec  $\underline{Q}_M(\underline{X}, \underline{Y})$  donné par l'équation 1.96. On peut aussi choisir pour  $J_0$  une somme au lieu d'une intégrale:

$$J_0(\underline{Q}, \underline{X}) = \sum_{m=0}^{m=M_0-1} |p[\underline{Q}, \underline{X}]|^2(z_m) \quad (2.2)$$

où  $\underline{Z} = (z_0, \dots, z_{M_0-1})$  est un vecteur de  $\Omega_m^{M_0}$ .  $M_0$  est pris suffisamment grand pour que les points  $z_m$  définissent un maillage dense de  $\Omega_m$ .

Dans ce chapitre, les positions des microphones et des sources sont à chercher dans des espaces discrets. On choisit alors un ensemble de positions candidates pour les sources secondaires et les microphones d'erreur. On définit donc les vecteurs des positions candidates  $\underline{X}^c = (x_0^c, \dots, x_{N_0-1}^c)$  et  $\underline{Y}^c = (y_0^c, \dots, y_{M_0-1}^c)$  dans  $\Omega_i^{N_0}$  et  $\Omega_m^{M_0}$ .

Les vecteurs  $\underline{X}$  et  $\underline{Y}$  appartiennent maintenant à  $\sigma_N^{N_0}$  et  $\sigma_M^{M_0}$ .

$$\begin{cases} \sigma_N^{N_0} = \{\underline{X} \in \Omega_i^N | \{\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_{N_0-1}\} \in P_N^{N_0}\} \\ \sigma_M^{M_0} = \{\underline{Y} \in \Omega_m^M | \{\underline{y}_0, \dots, \underline{y}_{M_0-1}\} \in P_M^{M_0}\} \end{cases} \quad (2.3)$$

$P_N^{N_0}$  est l'ensemble des parties de cardinal  $N$  de  $\{\underline{x}_0^c, \dots, \underline{x}_{N_0-1}^c\}$ .

$P_M^{M_0}$  est l'ensemble des parties de cardinal  $M$  de  $\{\underline{y}_0^c, \dots, \underline{y}_{M_0-1}^c\}$ . Il s'agit de trouver les meilleures combinaisons de  $N$  sources et  $M$  microphones parmi les  $N_0$  et  $M_0$  positions candidates. Dans la suite de l'étude, nous prendrons  $\underline{Y}^c = \underline{Z}$ .

Le nombre de combinaisons possibles de positions pour les sources (resp. microphones) s'élève à  $C_{N_0}^N$  (resp.  $C_{M_0}^M$ ). Le temps de calcul par énumération de toutes ces combinaisons peut devenir prohibitif lorsque le nombre de sources ou de microphones devient grand.

C'est pourquoi il est intéressant d'utiliser des méthodes qui permettent d'obtenir en un temps de calcul plus court, non plus la solution optimale, mais une solution approchée. Il existe ainsi des méthodes sophistiquées comme les algorithmes génétiques et la méthode du recuit simulé. Ces méthodes sont appelées des algorithmes naturels car elles imitent d'une part la sélection génétique naturelle, d'autre part le refroidissement d'un cristal. Baek et Elliott (1995 [4]) ont appliqué ces deux techniques au placement des sources secondaires dans un problème de contrôle actif du bruit. Ils obtiennent un arrangement de source 0.5 dB en-dessous de l'atténuation optimale en testant moins de 0.1 % des combinaisons possibles. Il semble néanmoins que l'efficacité des deux méthodes et en particulier du recuit simulé soit sensible aux valeurs de certains paramètres des algorithmes. Rao (1991 [63]) a aussi utilisé un algorithme génétique pour obtenir le positionnement optimal des actionneurs pour une structure à treillis. En évaluant environ la moitié de l'ensemble des combinaisons, il obtient la solution optimale pour le placement dans 12 cas sur 15. Ces méthodes ont l'inconvénient de rester longues et de ne pas donner d'indication sur la qualité de la solution approchée. La solution est en effet souvent très bonne mais peut parfois être assez éloignée de la solution optimale.

C'est pourquoi plusieurs heuristiques spécialisés ont été développés pour le problème de placement optimal de sources secondaires dans un système de contrôle actif. Curieusement aucune heuristique, à notre connaissance, n'a été présentée pour le placement optimal des microphones. Ces heuristiques ont l'avantage d'être rapide mais gardent le handicap de ne pas fournir d'information sur la qualité de la solution approchée. Ces méthodes ont néanmoins été testées sur des exemples et ont prouvé leur efficacité dans le cas des exemples traités.

Benzaria (1995 [6]) propose ainsi deux stratégies itératives: une par retrait, une autre par addition. La première débute avec  $N_0$  sources. La source recevant le signal le plus faible est retirée. La procédure est répétée jusqu'à obtenir la solution avec  $N$  sources. La seconde stratégie débute avec une source, celle qui minimise le critère  $J_0$ . Une nouvelle source lui est ajoutée, celle qui, associée à la première, fournit le critère le plus faible. Des deux stratégies, la première semble fournir de meilleurs résultats.

Asano (1995 [2]) présente aussi une méthode itérative de sélection par addition. Il fait apparaître une matrice de fonctions de transfert entre les sources et les microphones d'erreur. Si les colonnes de cette matrice sont linéairement dépendantes, alors le rôle d'une source peut être remplacé par une combinaison des autres. C'est pourquoi le principe de choix à chaque

itération consiste à maximiser l'indépendance des vecteurs colonnes. La sélection de la source est donc basée sur la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Kim (1995 [40]) choisit d'autres stratégies de sélection. Il propose deux critères  $R_k^1$  et  $R_k^2$  pour évaluer la qualité de la  $k^{\text{ième}}$  position parmi les  $N_0$  candidates. Soient  $\underline{Q} \in \mathbb{C}^{N_0}$ . Kim choisit comme premier critère  $R_k^1$  la sensibilité: c'est-à-dire l'influence d'une source d'amplitude unitaire sur la fonction de coût. Elle est définie comme suit:

$$R_k^1 = \frac{\partial J_0}{\partial Q_k}(0, \underline{X}^c) \quad (2.4)$$

Une haute sensibilité garantit une convergence rapide au début du contrôle. Le second critère est le module de l'amplitude de la  $k^{\text{ième}}$  source dans la configuration optimale où toutes les sources sont allumées.  $R_k^2$  est défini comme suit:

$$R_k^2 = |Q_k| \text{ tel que } \nabla_{\underline{Q}} J_0(\underline{Q}, \underline{X}^c) = 0 \quad (2.5)$$

Les bonnes positions doivent assurer un bon compromis entre les deux critères car le premier assure l'efficacité et le second le niveau de réduction.

## 2.2 Problème linéaire: optimisation des positions des microphones

Le défaut principal des techniques précédentes est qu'elles ne donnent pas d'information sur la qualité de la solution, c'est-à-dire sur la distance qui la sépare, en terme de réduction acoustique, de la solution optimale. De plus ces méthodes ne s'appliquent pas au placement des microphones.

C'est pourquoi, nous allons développer une méthode consacrée au placement des microphones d'erreur mais qui peut aussi s'adapter au placement des sources secondaires. Notre souci sera aussi de toujours pouvoir donner un estimateur de la qualité de la solution.

Pour cela, il nous faut changer de norme. On n'utilisera donc plus la norme  $\| \cdot \|_2$  de  $\mathbb{C}^{M_0}$  mais la norme  $\| \cdot \|_\infty$ . Ainsi la fonction de coût (2.2) devient:

$$J_0(\underline{Q}, \underline{X}) = \max_{m \in \{0, \dots, M_0-1\}} |p[\underline{Q}, \underline{X}](z_m)| \quad (2.6)$$

Dans cette section, nous ne nous intéresserons pas au placement des sources. Nous n'écrivons donc plus la dépendance en  $\underline{X}$ . Nous écrivons le problème de minimisation que nous appellerons (0):

$$(0) \quad \min_{\underline{Q}} J_0(\underline{Q}) = \max_{m \in \{0, \dots, M_0-1\}} |p[\underline{Q}](z_m)| \quad (2.7)$$

$J_0(\underline{Q})$  est une fonction convexe (voir annexe E). Le problème de minimisation (0) a donc une solution  $\underline{Q}^0$ . Sous certaines conditions (voir annexe E), elle est unique. Notons  $J^0$  le minimum. Nous pouvons maintenant calculer  $p[\underline{Q}^0](z_m)$  la pression complexe pour un vecteur  $\underline{Q}^0$  à la position  $z_m$ .

Nous allons maintenant séparer les positions des microphones d'erreur en deux groupes suivant que le module de la pression complexe en ces points atteint  $J^0$  ou non.

Appelons  $G_1$  l'ensemble des indices  $m$  tels que:

$$|p[\underline{Q}^0](z_m)| = J^0 \quad (2.8)$$

Appelons  $G_2$  l'ensemble des indices  $m$  tels que:

$$|p[\underline{Q}^0](z_m)| < J^0 \quad (2.9)$$

On note  $M$  le nombre cardinal de l'ensemble  $G_1$ . Gardons maintenant seulement les  $M$  microphones de  $G_1$  et examinons le nouveau problème de minimisation où le nombre de microphones d'erreur est maintenant réduit:

$$(1) \quad \min_{\underline{Q}} J_1(\underline{Q}) = \max_{m \in G_1} |p[\underline{Q}](z_m)| \quad (2.10)$$

Soit  $\underline{Q}^1$  la solution (toujours sous de bonnes conditions d'unicité) et  $J^1$  le minimum. Il est montré en annexe F que:

$$\boxed{\underline{Q}^1 = \underline{Q}^0} \quad (2.11)$$

On montre donc que  $\underline{Q}^1$  est aussi solution du problème (0). En d'autres termes, cela veut dire que les  $M$  microphones sont suffisants pour assurer le même contrôle que  $M_0$  microphones. On appellera  $M$  le nombre **suffisant** de microphones. L'avantage de cette méthode est que le nombre et la position des microphones d'erreur sont trouvés simultanément en un seul calcul. Les positions optimales des microphones d'erreur sont donc trouvées aux maximums des modules de la pression résiduelle.

### Méthode numérique

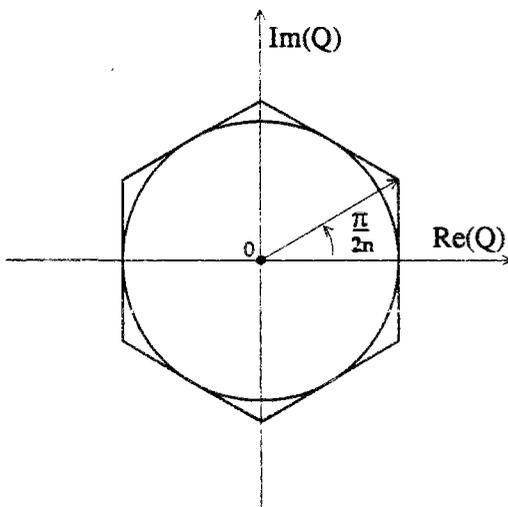


FIG. 2.1 - Approximation du module complexe  $n = 3$ .

Le problème consiste à trouver la solution du problème (0):  $\underline{Q}^0$ . On écrit le problème de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \min_{E, \underline{Q}} J_0(\underline{Q}) &= E \\ |p[\underline{Q}](z_m)| &\leq E \quad 0 \leq m \leq M_0 - 1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ce problème ressemble à un problème de programmation linéaire. C'est pourquoi le module est approximé dans le plan complexe par d'autres normes  $\| \cdot \|_n$  où les courbes d'isovaleurs dans le plan complexe sont des polygones au lieu de cercles. On écrit ainsi:

$$\|p[Q](z_m)\|_n = \max_{\alpha \in \{0, \dots, 2n-1\}} \operatorname{Re} \left[ p[Q](z_m) e^{\frac{j\alpha\pi}{n}} \right] \quad (2.13)$$

La figure 2.1 représente une approximation  $n = 3$ . Si le module complexe est remplacé par ces normes, le problème (0) peut être considéré comme un problème de programmation linéaire et une méthode performante comme le simplexe trouve la solution. Le problème s'écrit ainsi:

$$\begin{aligned} \min_{E, Q} \quad & J_0(Q) = E \\ & \operatorname{Re} \left[ p[Q](z_m) e^{\frac{j\alpha\pi}{n}} \right] \leq E \quad \begin{cases} 0 \leq m \leq M_0 - 1 \\ 0 \leq \alpha \leq 2n - 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.14)$$

avec

$$p[Q](z_m) = Q_p G(z_m | \underline{x}_p) + \sum_{i=0}^{i=N-1} Q_i G(z_m | \underline{x}_i) \quad (2.15)$$

Le nombre d'inconnues réelles s'élève à  $2N + 1$  ( $E, \operatorname{Re}[Q_i], \operatorname{Im}[Q_i]$ ).

Le nombre de contraintes s'élève à  $2n \times M_0$ .

L'erreur de calcul en décibels due au changement de norme est bornée par le nombre *Err* (voir figure 2.1).

$$\operatorname{Err} = -20 \operatorname{Log}_{10} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right] \quad (2.16)$$

Dans nos exemples, on prendra  $n = 4$ , c'est-à-dire une erreur  $\operatorname{Err} = 0.69$  dB. Si la précision est montée à  $n = 8$ ,  $\operatorname{Err} = 0.17$  dB.

### Bornes sur le nombre suffisant de microphones d'erreur

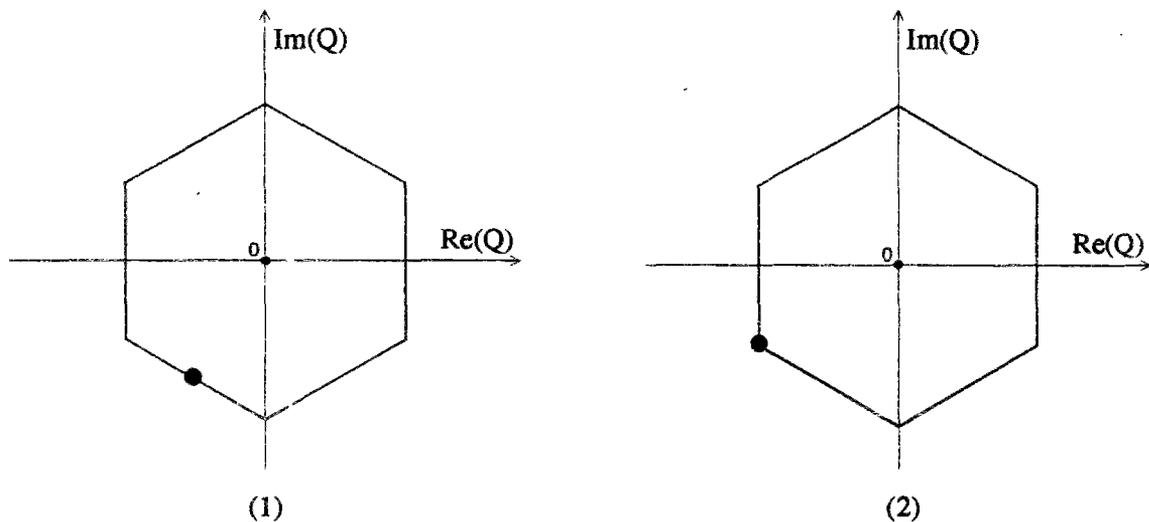


FIG. 2.2 - Points du type (1) et (2) pour l'approximation ( $n=3$ ).

Notons à nouveau  $\underline{Q}$  la solution du problème de programmation linéaire. On sait de plus que la solution d'un simplexe se trouve à l'intersection d'au moins  $\tilde{N}$  hyperplans de  $\mathbf{R}^{\tilde{N}}$  où  $\tilde{N}$  est le nombre de variables. Lorsqu'il n'y a pas de dégénérescences, ce nombre est exactement égal à  $\tilde{N}$ . Ici le nombre de variables est égal à  $2N + 1$ . On fera l'hypothèse que la solution n'est pas dégénérée, ce qui est en général le cas lorsque les coefficients du problème ne sont pas simples. On fera aussi l'hypothèse que pour tout  $i$  variant de 0 à  $N - 1$ ,  $Re(Q_i^0) \neq 0$  et  $Im(Q_i^0) \neq 0$ . Cette hypothèse a une probabilité égale à 1 d'être réalisée. On fera aussi l'hypothèse que  $E > 0$ ; ce qui veut dire que le contrôle n'est pas total.

Les hyperplans correspondent donc alors uniquement à des contraintes réalisées du type:

$$Re \left[ p[\underline{Q}^0](z_m) e^{\frac{ia\pi}{n}} \right] = E \quad (2.17)$$

On sait déjà que seuls les microphones de  $G_1$  au nombre de  $M$  peuvent vérifier l'équation (2.17). Il va falloir encore diviser les points membres de  $G_1$  en deux groupes du type (1) et (2) en fonction du fait que le point  $p[\underline{Q}^0](z_m)$  se trouve sur un sommet du polygone ou non. Si le point est du type (1), une seule équation (2.17) est réalisée. Le nombre de points de ce type est noté  $M_1$ .

Si le point est du type (2), deux équations (2.17) sont réalisées. Le nombre de points de ce type est noté  $M_2$ . On sait que:

$$M_1 + M_2 = M \quad (2.18)$$

Le bilan du nombre de contraintes réalisées donne:

$$M_1 + 2M_2 = 2N + 1 \quad (2.19)$$

En soustrayant les équations (2.18) et (2.19), on obtient:

$$M = 2N + 1 - M_2 \quad (2.20)$$

avec  $M_2 \in [0, M - 1]$ .  $M_2 = M$  est impossible car  $2M = 2N + 1$  est impossible (un entier impair ne peut pas être égal à un entier pair). Cela entraîne que  $0 \leq 2N + 1 - M \leq M - 1$ . On trouve ainsi les bornes finales.

$$\boxed{N + 1 \leq M \leq 2N + 1} \quad (2.21)$$

Il apparaît donc que le nombre suffisant de microphones d'erreur excède le nombre de sources secondaires. Ceci se comprend aisément car on a démontré que les positions optimales des microphones d'erreur se trouvaient aux maximums des modules de la pression résiduelle. Si  $M \leq N$ , la pression serait alors nulle aux points de contrôle et les microphones d'erreur ne seraient plus aux maximums mais aux noeuds de la pression résiduelle.

La borne supérieure pour le nombre de microphones d'erreur est aussi intéressante. En fait deux facteurs influent sur le nombre suffisant de microphones d'erreur: le nombre de sources et la longueur d'onde. Pour une grande longueur d'onde, le nombre de microphones d'erreur sera fixé par le nombre de sources ( $N + 1$ ). Pour une longueur d'onde moyenne, le nombre de microphones d'erreur dépendra de la longueur d'onde. Pour une petite longueur d'onde, le nombre de microphone d'erreur sera fixé par le nombre de sources ( $2N + 1$ ).

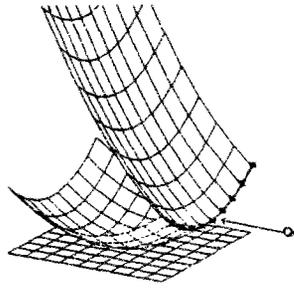


FIG. 2.3 - Recherche du minimum dans  $C$  de  $J_0(Q)$ : exemple  $M = 2$ .

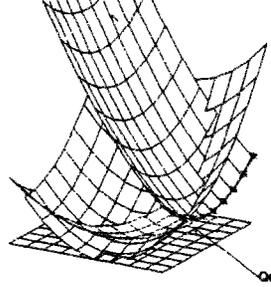


FIG. 2.4 - Recherche du minimum dans  $C$  de  $J_0(Q)$ : exemple  $M = 3$ .

En examinant le cas  $N = 1$ , on tire avantage du fait que l'on peut visualiser dans un dessin 3D les deux cas possibles pour le nombre suffisant de microphones, c'est-à-dire les cas  $M = 2$  et  $M = 3$ .

Sur la figure 2.3 est présenté le cas  $M = 2$ . Dans le plan complexe des  $Q$ , on sait que la solution appartient à l'intersection de deux paraboloides. Cette intersection est une parabole. La solution  $Q_0$  se trouve alors au minimum de cette parabole.

Sur la figure 2.4 est présenté le cas  $M = 3$ . Dans le plan complexe des  $Q$ , on sait que la solution  $Q_0$  appartient à l'intersection de trois paraboloides qui est réduite à un point.

**Remarque 1:** Si un contrôle total est possible, on a alors  $E = 0$ .  $E = 0$  est une équation supplémentaire qui est réalisée et l'équation (2.19) devient:

$$M_1 + 2M_2 + 1 = 2N + 1 \quad (2.22)$$

C'est-à-dire:

$$M = 2N - M_2 \quad (2.23)$$

avec  $M_2 \in [0, M]$ . La borne inférieure devient alors  $N$  au lieu de  $N + 1$ . Lorsqu'un contrôle total est possible,  $N$  microphones peuvent être suffisants. Si ce cas est intéressant du point de vue théorique, il n'est jamais retrouvé dans les cas pratiques.

**Remarque 2:** Cette méthode permet aussi d'introduire des bornes sur l'amplitude des sources. Ces bornes peuvent exister dans les applications pratiques à cause de la puissance limitée des haut-parleurs.

$$|Q_i| \leq A \quad 0 \leq i \leq N - 1 \quad (2.24)$$

Pour garder une forme linéaire au problème, nous approximations à nouveau le module dans le plan complexe par une norme  $\| \cdot \|_{\bar{n}}$ .

$$\|Q_i\|_{\bar{n}} \leq A \quad 0 \leq i \leq N - 1 \quad (2.25)$$

L'algorithme du simplexe est utilisé pour résoudre le nouveau problème incluant des bornes sur l'amplitude des sources. Si les bornes sur la norme de l'amplitude de source sont atteintes,  $M_3$  équations supplémentaires sont réalisées (au plus  $2N$ ). On peut faire le bilan des équations réalisées:

$$M_1 + 2M_2 + M_3 = 2N + 1 \quad (2.26)$$

En soustrayant les équations (2.18) et (2.26), on obtient:

$$M = 2N + 1 - M_2 - M_3 \quad (2.27)$$

avec  $M_2 \in [0, M]$  et  $M_3 \in [0, 2N]$ .

Les bornes (2.21) pour des sources d'amplitudes non bornées sont remplacées pour des sources bornées par les bornes suivantes:

$$\boxed{1 \leq M \leq 2N + 1} \quad (2.28)$$

Quand les amplitudes des sources secondaires sont bornées, le nombre de microphones d'erreur peut souvent être réduit comparé au cas où elles sont non bornées. Mais l'efficacité du contrôle actif est aussi réduite par l'introduction de ces nouvelles contraintes.

## 2.3 Problème linéaire: optimisation des positions des sources

La méthode précédente détermine le nombre suffisant et les positions des microphones d'erreur pour un ensemble donné de  $N$  sources. Si les positions des sources doivent être aussi optimisées,  $N_0$  positions candidates de sources sont d'abord introduites. Le problème consiste alors à trouver le meilleur placement pour les sources parmi les  $C_{N_0}^N$  combinaisons possibles.

Nous avons choisi une méthode développant un calcul implicite de l'ensemble des combinaisons. Le mot "implicite" signifie que, dans certains cas, il est possible de trouver la solution "exacte" sans tester l'ensemble complet des combinaisons.

Ecrivons donc le problème  $(0_N)$  avec  $N$  sources secondaires.

$$(0_N) \quad \min_{\underline{Q}} J_0(\underline{Q}) = \max_{m \in \{0..M_0-1\}} |p[\underline{Q}](z_m)| \quad (2.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |Q_i| \leq A \quad 0 \leq i \leq N_0 - 1 \\ \sum_{i=0}^{N_0-1} \chi(Q_i) \leq N \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Le vecteur  $\underline{Q}$  est maintenant un élément de  $C^{N_0}$ . La fonction  $\chi(Q)$  est la fonction égale à 0 si  $Q = 0$  et égale à 1 sinon. Le module de l'amplitude de source est majoré par  $A$ .

Ecrivons le problème sous une autre forme:

$$(0_N) \quad \min_{E, \underline{Q}} J_0(\underline{Q}) = E \quad (2.31)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} |p[\underline{Q}](z_m)| \leq E & 0 \leq m \leq M_0 - 1 \\ |Q_i| \leq A & 0 \leq i \leq N_0 - 1 \\ U_i = \chi(Q_i) & 0 \leq i \leq N_0 - 1 \\ \sum_{i=0}^{i=N_0-1} U_i \leq N & \end{array} \right. \quad (2.32)$$

En remplaçant le module par  $\| \cdot \|_n$ , le problème  $(0_N)$  est semblable à un problème de recherche opérationnelle appelé problème de la charge fixe. Hirsch et Dantzig (1968 [31]) formulèrent le problème les premiers dès 1954. Hadley (1964 [29]) démontre que la solution optimale du problème de la charge fixe se trouve aux points extrêmes de l'espace convexe des solutions. Il est possible de calculer la valeur de la fonction de coût à ces points extrêmes et de garder le point réalisant le minimum. Comme le nombre de points extrêmes peut devenir grand, il est avantageux d'utiliser des méthodes où une partie limitée d'entre eux est examinée. Taha (1975 [77]) présente des algorithmes spécialement développés pour le problème de la charge fixe. Hadley, quant à lui, formule le problème de la charge fixe comme un problème de programmation mixte. La programmation mixte s'attache, comme la programmation linéaire, à résoudre un problème où la fonction coût et les contraintes sont linéaires. Une partie des variables est par contre entière. Si toutes les variables sont entières, on parle de programmation entière. La programmation mixte est en fait considérée comme un cas particulier de la programmation entière. La formulation de Hadley permet donc d'utiliser tous les algorithmes généraux de programmation entière. Ecrivons notre problème  $0_N$  avec la formulation de Hadley:

$$(0_N^*) \quad \min_{E, \underline{Q}, U} J_0(\underline{Q}) = E + \epsilon \sum_{i=0}^{i=N_0-1} U_i \quad (2.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} |p[\underline{Q}](z_m)| \leq E & 0 \leq m \leq M_0 - 1 \\ |Q_i| \leq AU_i & 0 \leq i \leq N_0 - 1 \\ 0 \leq U_i \leq 1 & 0 \leq i \leq N_0 - 1 \\ U_i \text{ entier} & 0 \leq i \leq N_0 - 1 \\ \sum_{i=0}^{i=N_0-1} U_i \leq N & \end{array} \right. \quad (2.34)$$

En remplaçant le module par  $\| \cdot \|_n$ , on vérifie que le problème est bien écrit sous la forme d'une programmation mixte. C'est-à-dire qu'à la fois la fonction de coût et les contraintes sont linéaires. Les variables  $Re(Q_i)$ ,  $Im(Q_i)$  et  $E$  sont réelles alors que les variables  $U_i$  sont entières. On choisit la constante  $\epsilon$  petite et strictement positive de façon à ce que les variables  $U_i$  soient minimisées. On vérifie que les problèmes  $0_N$  et  $0_N^*$  sont équivalents:

- Si  $Q_i = 0$  alors  $U_i = 0$  grâce au terme de minimisation en  $\epsilon$ .
- Si  $Q_i \neq 0$ , les contraintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < |Q_i| \leq AU_i \\ 0 \leq U_i \leq 1 \\ U_i \text{ entier} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 0 < |Q_i| \leq A \\ U_i = 1 \end{array} \right. \quad (2.35)$$

## Remarque

Sergent (1995 [71]) a traité le problème dual de façon similaire. Dans le problème dual, les inconnues sont les amplitudes des sources secondaires et leur nombre pour un niveau maximal donné  $E$  du module de la pression complexe résiduelle. Cette démarche duale est utile dans un souci normatif: lorsqu'un placement et un nombre des sources secondaires sont à déterminer de manière à respecter certaines contraintes de pression acoustique en différents points d'un domaine. Le problème s'écrira alors:

$$\min_{\underline{Q}, \underline{U}} J_0(\underline{Q}) = \sum_{i=0}^{i=N_0-1} [|Q_i| + RU_i] \quad (2.36)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} |p[\underline{Q}](z_m)| \leq E & 0 \leq m \leq M_0 - 1 \\ |Q_i| \leq AU_i & 0 \leq i \leq N_0 - 1 \\ 0 \leq U_i \leq 1 & 0 \leq i \leq N_0 - 1 \\ U_i \text{ entier} & 0 \leq i \leq N_0 - 1 \end{array} \right. \quad (2.37)$$

$R$  est une constante que l'on choisit en fonction de l'objectif que l'on veut privilégier: minimiser les amplitudes des sources ou leur nombre. Lorsque  $R$  est faible, c'est-à-dire si l'on choisit de surtout minimiser l'amplitude des sources, le calcul est rapide. En particulier si  $R$  est pris égal à zéro, un unique problème de programmation linéaire est à résoudre. Une propriété remarquable (déjà utilisé par Kirsch (1991 [42]) pour un problème de contrôle statique de structures) est que la solution contient en général un faible nombre de variables non nulles.

## Programmation mixte ou entière

Un problème en programmation mixte ou entière a une écriture proche de la programmation linéaire. Le fait de manipuler des variables entières rend cependant le problème plus complexe. On appellera solution **continue** d'un problème de programmation entière, la solution du problème initial où la contrainte imposant aux variables d'être entières est écartée. Cette solution continue est alors trouvée en résolvant un problème de programmation linéaire. Taha (1975 [77]) divise toutes les méthodes de programmation entière en deux groupes: les méthodes des coupures et les méthodes par branches et bornes.

Dans les méthodes des coupures, des contraintes secondaires sont ajoutées aux contraintes du problème initial. Ces contraintes sont violées par la solution continue mais vérifiées par toutes les solutions entières appartenant à l'ensemble des solutions. Cette méthode ne fournit pas cependant de solutions approchées avant la fin de l'algorithme.

Dans les méthodes par branches et bornes, une petite partie des solutions entières seulement est énumérée en écartant toutes les solutions non prometteuses. Cette énumération par branches a l'inconvénient de remplir un grand espace de la mémoire de l'ordinateur quand la taille de l'arbre devient grande. Par contre, cette méthode peut fournir une solution approchée dès les premières itérations du calcul. Comme c'est aussi une méthode par bornes, un encadrement du minimum est donné à chaque itération. Lorsque les bornes extrêmes de l'encadrement deviennent confondues, la solution exacte est déterminée. Cet encadrement donne aussi une information sur la qualité des solutions approchées que l'on obtient tout au long du calcul.

## Description de l'algorithme

Nous avons choisi une méthode par branches et bornes et plus précisément une adaptation de la méthode de Land et Doig (1960 [43]).

**Itération 0:** Cherchons la solution du problème relaxé de  $(0_N^*)$  où les variables  $U_i$  ne sont plus contraintes d'être entières. Ce problème de programmation linéaire est résolu à l'aide de la méthode du simplexe.

Distinguons trois cas:

- **A:** Les variables  $U_i$  de la solution sont toutes entières (cela veut dire égal à 0 ou 1). La solution du problème relaxé  $(\underline{Q}, \underline{U}, E)$  est aussi solution du problème  $(0_N)$  et l'algorithme est **terminé**.
- **B:** Au moins une des variables  $U_i$  de la solution n'est pas entière. Introduisons une borne inférieure  $B_-$  pour la valeur minimum du problème.

$$B_- = E \quad (2.38)$$

Introduisons une borne supérieure  $B_+$ .

$$B_+ = E + R[-N + \sum_{i=0}^{i=N_0-1} \chi(U_i)] \quad (2.39)$$

avec  $R$  très grand.

Si les bornes supérieures et inférieures sont égales ( $B_+ = B_-$ ), l'algorithme est **terminé**. La solution du problème continu  $(\underline{Q}, \underline{U}, E)$  est aussi solution du problème  $(0_N^*)$ .

- **C:** Si  $B_- < B_+$  préparons l'étape suivante. Un indice pour le premier noeud doit être choisi. Choisissons  $i_0$  tel que:

$$U_{i_0} = \max_{i \in \{0, \dots, N_0-1\}} \{U_i | U_i \neq 1\} \quad (2.40)$$

$i_0$  sera appelé **indice de branchement** du noeud. Chaque noeud est aussi caractérisé par un vecteur  $\underline{S}$  de dimension  $N_0$  dont les composantes sont égales à 0, 1 ou 2. Nous verrons plus loin la signification de  $\underline{S}$ . Pour le premier noeud  $S_i$  est égal à 2 pour tout  $i$ . Le vecteur  $\underline{S}$  sera appelé **vecteur racine** du noeud. A chaque noeud est enfin associée une **mesure**  $J$ .  $J$  est une borne inférieure pour toutes les solutions originaires de ce noeud. Pour le premier noeud  $J$  est égal à  $B_-$ .

**Itération n:** Allons au noeud dont la mesure est minimale (A l'étape 1, il y a seulement un noeud). Ce noeud a donc l'indice de branchement  $i_0$ , le vecteur racine  $\underline{S}$  et la mesure  $J = B_-$ . Nous allons créer deux noeuds enfants. Fixons  $S_{i_0} = 0$  pour le noeud fille et  $S_{i_0} = 1$  pour le noeud fils. Calculons les solutions des problèmes continus pour les noeuds fille et fils avec:

$$U_i(S_i - 2) = S_i(S_i - 2) \quad (2.41)$$

La signification de l'équation (2.41) est la suivante: quand  $S_i$  est égal à 2, la variable  $U_i$  est une variable réelle. Elle est sinon fixée à 0 ou 1 suivant la valeur de  $S_i$ .

- **A:** Chaque noeud enfant aura a son tour un indice de branchement  $i_0$  trouvé par l'équation suivante:

$$U_{i_0} = \max_{i \in \{0..N_0-1\}} \{U_i | U_i \neq 1 \text{ et } S_i = 2\} \quad (2.42)$$

- **B:** Les deux noeuds enfants ont chacun une mesure  $J$  donnée par le  $E$  minimum du problème de programmation linéaire associé. Parmi tous les noeuds enfants de l'arbre, on détermine celui dont la mesure est minimum. Ce sera le noeud actif pour la prochaine itération de branchement. La mesure de ce noeud sera la nouvelle borne inférieure  $B_-$  du problème. On peut vérifier que la borne inférieure  $B_-$  augmente à chaque itération.
- **C:** Appelons  $E$  le minimum pour le problème de programmation linéaire associé au noeud fils (idem pour le noeud fille). On définit  $E_+$  par:

$$E_+ = E + R[-N + \sum_{i=0}^{i=N_0-1} \chi(U_i)] \quad (2.43)$$

Si  $E_+ < B_+$  où  $B_+$  est l'ancienne borne supérieure,  $B_+$  est réactualisée et remplacée par  $E_+$ . A chaque nouvelle borne supérieure est associée une solution **approchée**. On peut vérifier que la borne supérieure  $B_+$  diminue au cours du calcul.

- **D:** Si  $B_- = B_+$ , le calcul est **terminé**. La solution **exacte** est alors la solution associée à  $B_+$ . Si  $B_- < B_+$ , aller à l'étape  $n + 1$ .

### Exemple

Nous allons montrer l'algorithme sur un exemple. Pour simplifier, nous choisissons  $Q_i$  et  $p[Q](z_m)$  dans **R** au lieu de **C**. Cet exemple n'a pas alors de sens physique mais il a l'avantage de présenter plus simplement la méthode que si on travaillait dans **C**.

Nous choisissons  $N_0 = 6$ ,  $M_0 = 6$  et  $N = 3$ . Nous prenons  $Q_p = 1$  et  $|Q_i| \leq 0.5$ . Nous choisissons les fonctions de transfert suivantes:

$$\begin{cases} p[Q](z_0) = 0.9 & Q_p + Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + 0.5 & Q_5 \\ p[Q](z_1) = 0.8 & Q_p + Q_0 - Q_1 - Q_2 - Q_3 - Q_4 + 0.9 & Q_5 \\ p[Q](z_2) = -0.2 & Q_p - Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 \\ p[Q](z_3) = 1.0 & Q_p - Q_1 + Q_2 - Q_3 \\ p[Q](z_4) = 0.5 & Q_p + Q_2 + Q_3 + 1.0 & Q_5 \\ p[Q](z_5) = 0.1 & Q_p + Q_0 \end{cases} \quad (2.44)$$

Les résultats de l'algorithme sont donnés sur la figure 2.5.

E=0.26						
S	2	2	2	2	2	2
Q	-0.36	-0.03	-0.43	0.34	0	-0.34
U	0.71	0.06	0.86	0.69	0	0.68
	0	1	2	3	4	5
						$\Sigma U_i$
						3



E=0.51						
2	2	0	2	2	2	
-0.5	0.26	0	0.23	-0.28	-0.23	
1	0.52	0	0.47	0.55	0.46	3

E=0.27						
2	2	1	2	2	2	
-0.37	-0.02	-0.42	0.33	0	-0.29	
0.75	0.03	1	0.65	0	0.57	3



E=0.50						
0	2	1	2	2	2	
0	0	-0.32	0.18	0	-0.5	
0	0	1	0.35	0	1	2.35

E=0.31						
1	2	1	2	2	2	
-0.41	0.01	-0.39	0.29	0	-0.20	
1	0.02	1	0.58	0	0.40	3



E=0.40						
1	2	1	0	2	2	
-0.5	0.1	-0.5	0	0.4	0	
1	0.2	1	0	0.8	0	3

E=0.40						
1	2	1	1	2	2	
-0.5	0	-0.35	0.25	0	0	
1	0	1	1	0	0	3

FIG. 2.5 - Exemple.

itération	0	1	2	3
$B_-$	0.26	0.27	0.31	0.40
$B_+$	$2 \times R$	$2 \times R$	0.50	0.40

TAB. 2.1 - Encadrement du minimum.

$i$	0	1	2	3	4	5
$Q_i$	-0.5	0	-0.35	0.25	0	0
$U_i$	1	0	1	1	0	0
$ p[Q](z_i) $	0.3	0.4	0.3	0.4	0.4	0.4
$z_i \in G_1$	0	1	0	1	1	1

TAB. 2.2 - Résultat du placement optimal des sources et microphones.

**Itération 0:** La solution continue donne  $E = 0.26$ . La solution en  $\underline{U}$  n'est pas entière et il faut alors chercher un indice de branchement sur le premier noeud. Ce sera  $i_0 = 2$  qui correspond au maximum des  $u_i$ .

**Itération 1:** Deux branches sont ensuite testées avec  $u_2 = 0$  et  $u_2 = 1$  respectivement qui donnent  $E = 0.51$  et  $E = 0.27$  respectivement. La mesure du noeud fils étant la plus faible, le noeud fils est choisi pour le branchement. L'indice de branchement sera  $i_0 = 0$ .

**Itération 2:** Deux branches sont à nouveau testées avec  $u_0 = 0$  et  $u_0 = 1$  respectivement qui donnent  $E = 0.50$  et  $E = 0.31$  respectivement. La mesure du noeud fils étant la plus faible, le noeud fils est choisi pour le futur branchement. L'indice de branchement sera  $i_0 = 3$ . La mesure associée à ce noeud est la borne inférieure  $B_- = 0.31$ . Le noeud fille a aussi un intérêt. Il donne la première borne supérieure  $B_+ = E_+ = 0.50$ . On obtient ainsi un premier encadrement pour le minimum ainsi qu'une première solution approchée donnée par le triplet (2,3,5).

**Itération 3:** Deux branches sont à nouveau testées avec  $u_3 = 0$  et  $u_3 = 1$  respectivement qui donnent  $E = 0.40$  et  $E = 0.40$  respectivement. Les noeuds fils et fille donnent tous les deux une nouvelle borne inférieure  $B_- = 0.40$ . Le noeud fils donne aussi une nouvelle borne supérieure  $B_+ = 0.40$ . Comme les deux bornes sont identiques, la dernière solution approchée est aussi la solution exacte. La solution du placement est donnée par le triplet (0,2,3). Les amplitudes respectives des sources sont (-0.5,-0.35,0.25) et les valeurs absolues des pressions (0.3,0.4,0.3,0.4,0.4,0.4). Le nombre suffisant de microphones est alors égal à  $M = 4$ . Leurs positions sont (1,3,4,5).

**Remarque 1:** On remarquera que l'on a 5 équations réalisées pour 4 variables. On a affaire ici à une dégénérescence. Cela est dû au fait que les coefficients du problème sont simples et une dégénérescence a lieu. On peut donc en fait supprimer un microphone supplémentaire (1 ou 4).

**Remarque 2:** Sur le tableau 2.1 sont indiquées les bornes inférieures et supérieures à chaque itération. On remarquera que la solution est trouvée après la résolution de 7 problèmes de programmation linéaires. On comparera ce résultat avec l'approche classique consistant à tester les  $C_6^3 \times C_6^4 = 20 \times 15 = 300$  combinaisons de sources et de microphones. Les résultats

sont résumés dans le tableau 2.2.

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé une nouvelle méthode de placement des microphones d'erreur et des sources secondaires.

En choisissant comme fonction de coût le maximum du module complexe de la pression acoustique, nous avons montré qu'il existe un nombre suffisant de microphones d'erreur. Cela signifie qu'un nombre limité de microphones d'erreur donne la même atténuation acoustique que l'ensemble initial de microphones d'erreur. Ce nombre suffisant est borné inférieurement et supérieurement par  $N + 1$  et  $2N + 1$  où  $N$  est le nombre de sources secondaires. Lorsque l'amplitude des sources secondaires est bornée, la borne inférieure devient 1. Le nombre suffisant et le placement des microphones d'erreur sont déterminés simultanément par la résolution d'un problème de programmation linéaire.

Cette méthode s'adapte aussi au placement des sources secondaires. Le problème s'écrit alors comme un problème de programmation entière. Un algorithme de résolution appartenant à la famille des méthodes par branches et bornes est alors proposé. Cet algorithme est un algorithme itératif. Chaque itération demande la résolution de deux problèmes de programmation linéaire. Cet algorithme devient intéressant en temps de calcul lorsque le nombre d'itérations est faible devant le nombre de combinaisons candidates. On parle d'**énumération implicite** car cette méthode permet de trouver la meilleure combinaison parmi toutes les combinaisons candidates de positions de sources sans avoir à tester l'efficacité de chaque combinaison. Cet algorithme tire en fait parti des contraintes sur les amplitudes des sources qui sont généralement introduites. Grâce à ces contraintes, il est possible d'obtenir des informations sur l'intérêt des solutions. Certaines solutions non prometteuses peuvent alors être écartées après quelques itérations. Cet algorithme possède aussi l'avantage de fournir rapidement une solution approchée et une borne supérieure de la distance qui la sépare de la solution optimale en terme d'atténuation.

Au chapitre suivant, nous verrons l'application de cette méthode au cas des guides d'onde.



# Chapitre 3

## Application au cas des guides d'onde

Sergent (1995 [70]) a appliqué la méthode décrite dans le chapitre précédent pour un problème en champ libre. Dans ce chapitre, nous allons l'appliquer au cas du guide d'onde droit.

### 3.1 Rappel du modèle du guide d'onde droit

Le modèle utilisé dans l'analyse suivante sera celui d'un guide d'onde droit de longueur finie et à parois rigides. La section du guide est rectangulaire de dimensions  $L_y$  et  $L_z$  dans les directions  $y$  et  $z$ . Trois différentes combinaisons de terminaisons seront traitées: (C1) les deux anéchoïques, (C2) amont rigide et aval anéchoïque, enfin (C3) amont anéchoïque et aval rigide. Ecrivons les fonctions de transfert correspondantes:

$$G^1(\underline{x}|\underline{x}_0) = \sum_{I=0}^{I=\infty} \frac{1}{2k_I} \psi_I(y, z) \psi_I(y_0, z_0) e^{k_I|x-x_0|} \quad (3.1)$$

$$G^2(\underline{x}|\underline{x}_0) = G^1(\underline{x}|\underline{x}_0) + G^1(\underline{x}|\underline{x}_0 - 2x_0\underline{e}_x) \quad (3.2)$$

$$G^3(\underline{x}|\underline{x}_0) = G^1(\underline{x}|\underline{x}_0) + G^1(\underline{x}|\underline{x}_0 + (2L_x - x_0)\underline{e}_x) \quad (3.3)$$

où l'indice  $I$  est en fait défini par un double indice  $(m_I, n_I)$  et les fonctions propres  $\psi_I(y, z)$  sont normalisées:

$$\psi_I(y, z) = \sqrt{\frac{2 - \delta_{0m_I}}{L_y}} \sqrt{\frac{2 - \delta_{0n_I}}{L_z}} \cos\left(\frac{m_I \pi y}{L_y}\right) \cos\left(\frac{n_I \pi z}{L_z}\right) \quad (3.4)$$

Le nombre d'onde longitudinal  $k_I$  est donné par:

$$k_I^2 = \frac{m_I^2 \pi^2}{L_y^2} + \frac{n_I^2 \pi^2}{L_z^2} - k^2 \quad (3.5)$$

$\underline{e}_x$  est le vecteur unité dans la direction  $x$ . Dans notre exemple comparable à celui de Stell et Bernhard (1994 [75]),  $L_y = 1.0$ ,  $L_z = 0.1$ ,  $L_x = 10.$ . Définissons la zone de silence  $\Omega_m$  (voir figure 3.1), limitée par les sections  $x_c$  et  $x_d$  égaux à 5.0 et 7.0. Cette zone de silence est occupée

par 25 microphones. Leur positions sont définies par les coordonnées  $(x_{I+5J}, y_{I+5J}, z_{I+5J})$  avec  $I$  et  $J$  appartenant à  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ :

$$\begin{cases} x_{I+5J} = 5.0 + 0.5(J - 1) \\ y_{I+5J} = 0.25(I - 1) \\ z_{I+5J} = 0.05 \end{cases} \quad (3.6)$$

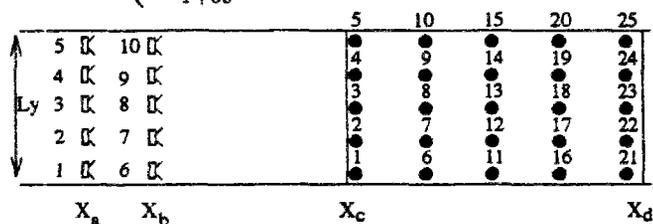


FIG. 3.1 - Positions candidates des microphones d'erreur et des sources secondaires.

La source primaire est située au point  $(0,0,0)$  de telle sorte que tous les modes soient excités. Le nombre de sources secondaires  $N_0$  est égal à 10. Elles sont situées sur les deux sections  $x_a$  et  $x_b$ . Leur positions sont définies par les coordonnées  $(x_{i+5j}, y_{i+5j}, z_{i+5j})$  avec  $i$  et  $j$  appartenant à  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  et  $\{0, 1\}$  respectivement :

$$\begin{cases} x_i = x_a \\ x_{i+5} = x_b \\ y_{i+5j} = 0.25(i - 1) \\ z_{i+5j} = 0.05 \end{cases} \quad (3.7)$$

$x_a$  et  $x_b$  ont pour valeurs respectives 3 et 3.5. Le nombre de modes pour la sommation est 10. Nous prendrons comme amplitude de la source primaire  $Q_p = \frac{2\omega\sqrt{L_y L_z}}{C}$  pour avoir  $J_0 = 1$  sans dimension à basses fréquences.

Le contrôle actif consistera à minimiser la fonction de coût en fonction des amplitudes et des positions des sources secondaires  $\underline{Q}$  et  $\underline{X}$  et des positions des microphones d'erreur  $\underline{Y}$ .

$$J_0(\underline{Q}, \underline{X}, \underline{Y}) = \max_{m \in \{0, \dots, M_0 - 1\}} |p[\underline{Q}(\underline{X}, \underline{Y}), \underline{X}]|(z_m) \quad (3.8)$$

Le maillage avec  $M_0 = 25$  microphones sera supposé suffisamment dense pour simuler un contrôle dans un espace continu  $\Omega_m$ . Notre critère est voisin de l'énergie potentielle acoustique dans la mesure où la norme quadratique de l'énergie potentielle est remplacée par une norme infinie.

Beaucoup d'auteurs utilisent le flux comme critère dans un guide d'onde. Stell et Bernhard (1994 [75]) justifient alors l'utilisation de l'énergie potentielle acoustique dans un guide d'onde au lieu du flux. Ils expliquent que minimiser l'énergie potentielle acoustique réduit l'effet négatif du couplage vibro-acoustique. Quand les parois non-parfaitement rigides du guide se mettent à vibrer suffisamment, les parois rayonnent de l'énergie acoustique d'une part vers l'intérieur, ce qui peut réduire l'efficacité théorique du contrôle, d'autre part vers l'extérieur et le rayonnement le long du guide peut alors excéder le rayonnement à son extrémité.

Notre méthode déterminera, pour un nombre donné  $N$  de sources et à une fréquence donnée, la position optimale des sources secondaires, leur amplitude, le nombre suffisant de microphones d'erreur et leur position.

N	C				$C_{10}^N$	$r_2$			
	A=0.3	A=0.5	A=1	A=5		A=0.3	A=0.5	A=1	A=5
1	1.06	1.71	3.23	7.47	10	0.32	0.23	0.13	0.06
2	3.21	4.08	12.95	28.32	45	1.21	0.98	0.33	0.16
3	4.15	8.69	24.35	62.02	120	3.87	1.95	0.72	0.29
4	5.72	17.74	39.56	102.33	210	6.75	2.30	1.05	0.41
5	10.01	13.56	56.76	128.9	252	5.99	4.48	1.10	0.49

TAB. 3.1 - Résultats pour le temps de calcul avec la configuration (C1).

N	C				$C_{10}^N$	$r_2$			
	A=0.3	A=0.5	A=1	A=5		A=0.3	A=0.5	A=1	A=5
1	0.61	0.78	1.33	5.95	10	0.45	0.39	0.27	0.08
2	0.82	1.74	7.38	20.29	45	3.41	2.01	0.57	0.22
3	1.67	5.91	10.40	45.65	120	8.29	2.81	1.65	0.39
4	3.34	8.00	16.68	69.20	210	10.93	4.94	2.44	0.60
5	5.86	9.99	17.95	75.64	252	9.91	6.00	3.42	0.83

TAB. 3.2 - Résultats pour le temps de calcul avec la configuration (C2).

### 3.2 Temps de calcul

**Microphones d'erreur:** Le temps de calcul nécessaire à la détermination des positions optimales des microphones d'erreur est très court car il demande seulement de résoudre un problème de programmation linéaire avec  $2N+1$  variables ( $E, Re(q_1), Im(q_1), \dots, Re(q_N), Im(q_N)$ ) et  $2n \times M_0$  contraintes. Une première estimation donne que le temps de calcul d'un simplex dépend linéairement du nombre de contraintes. On peut alors conclure que le temps de calcul dépend linéairement du niveau de précision  $n$  et du nombre de microphones candidats  $M_0$ . Plus généralement, le temps de calcul s'écrit comme une petite puissance du nombre de contraintes (inférieur à 1.5 dans nos exemples).

On définit alors un premier rapport  $r_1$  déterminant la rapidité de la méthode comparée à l'évaluation des  $C_{M_0}^M$  combinaisons possibles pour les microphones. Plus ce coefficient est grand, plus la programmation linéaire est rapide comparée à l'énumération.

- Pour l'énumération,  $C_{M_0}^M$  simplexes sont résolus avec la taille  $M$ .
- Pour la programmation linéaire, 1 simplexe est résolu avec la taille  $M_0$ .

$$r_1 = C_{M_0}^M \frac{M}{M_0} \quad (3.9)$$

Ce rapport devient rapidement très grand lorsque  $M$  croit.

**Sources secondaires:** Le temps de calcul avec la technique de programmation entière est comparée avec le calcul classique des  $C_{N_0}^N$  combinaisons possibles pour les positions de sources.

La fréquence  $f$  sera écrite sans dimension.  $f = \frac{kLy}{\pi}$  de telle sorte que  $f = 1$  est la première fréquence de coupure. Pour un nombre  $N$  de sources secondaires variant de 1 à 5, des calculs avec 100 fréquences différentes  $f$  sont testées dans les bandes de fréquences respectives  $N - 1 \leq f \leq N + 4$  et des bornes  $A$  variables pour l'amplitude de source. Les bornes  $A$  pour l'amplitude de la source sont aussi écrites sans dimension. Ce sont des bornes relatives à une amplitude de source primaire unitaire.

Le nombre moyen de pas pour la méthode par branches et bornes est noté  $\bar{C}$ . La vitesse relative de la méthode est évaluée par le coefficient  $r_2$ . Ce coefficient représente le rapport du temps de calcul par énumération sur le temps de calcul par programmation entière. Plus ce coefficient est grand, plus la programmation entière est performante.

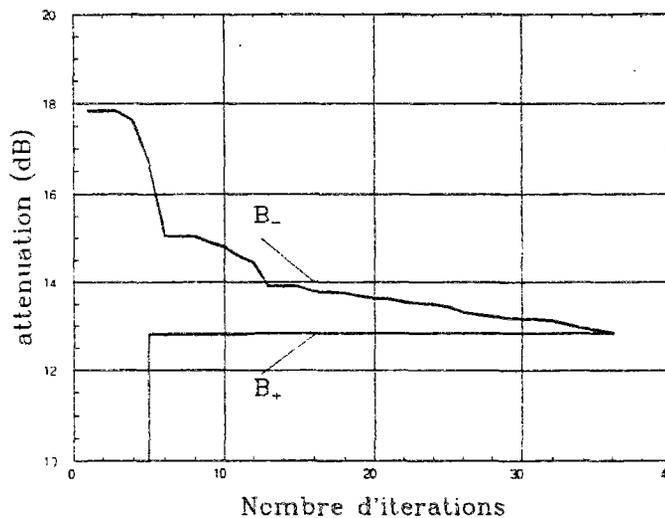


FIG. 3.2 - Encadrement de l'atténuation de la solution exacte avec les bornes  $B_-$  et  $B_+$  en fonction du nombre d'itérations pour  $A = 1.$ ,  $N = 5$  et  $f = 6.5$ .

- Pour l'énumération,  $C_{N_0}^N$  simplex de taille  $N$  sont résolus.
- Pour la programmation entière  $2\bar{C} + 1$  simplex de taille  $N_0$  sont résolus.

Le temps de calcul d'un simplex varie aussi comme une petite puissance du nombre de variables (inférieur à 1.5 dans nos exemples). Nous supposons que le temps de calcul d'un simplex peut être considéré comme variant linéairement en fonction du nombre de variables, le rapport  $r_2$  est alors donné approximativement par:

$$r_2 = \frac{C_{N_0}^N}{2\bar{C} + 1} \frac{N}{N_0} \quad (3.10)$$

Les tableaux 3.1 et 3.2 montrent que les bornes  $A$  sur l'amplitude des sources influent largement sur le temps de calcul. Un facteur voisin de 10 est noté entre le temps de calcul avec de grandes bornes  $A = 5$  et de petites bornes  $A = 0.3$ . Cela prouve que le point clé de la méthode est l'équation de couplage entre les variables continues et réelles  $|Q_i| \leq AU_i$ . Avec des bornes faibles, un grand ensemble de combinaisons peut être écarté dès le début

du calcul alors que l'équation de couplage devient moins importante lorsque la borne  $A$  est grande. On remarque aussi que le temps de calcul est plus court dans la configuration (C2) que (C1). La raison est que, dans la configuration (C1), les amplitudes de la solution sans bornes sont proches de 1 alors que, dans la configuration (C2), elles peuvent être beaucoup plus grandes (voir section 3.6). L'équation de couplage est donc plus contraignante dans la configuration (C2) et le nombre d'itérations est donc plus faible.

On remarque aussi que le rapport  $r_2$  croît avec le nombre  $N$  de sources. La méthode par programmation entière est donc efficace dans les problèmes difficiles où le nombre de sources à placer est grand. Typiquement pour une borne sur les sources  $A = 1$ , c'est-à-dire des amplitudes de sources secondaires du même ordre de grandeur que la source primaire, la méthode par programmation entière devient plus rapide que l'énumération pour  $N \geq 4$ .

Il faut aussi noter une particularité de la méthode par programmation entière. Elle fournit tout au long du calcul à la fois un encadrement sur le minimum de la solution exacte et une solution approchée. On peut donc arrêter le calcul à tout instant en connaissant un majorant de l'écart entre la solution approchée et la solution exacte. L'exemple présenté sur la figure 3.2 est pour cela représentatif. Il montre que ce majorant passe de 2.0 dB pour 10 itérations, à 0.8 dB pour 20 itérations et 0.3 dB pour 30 itérations. Si la solution approchée associée à  $B_+$  était en fait exacte à partir de 12 itérations, ce n'est qu'après 36 itérations, c'est-à-dire à la fin du calcul qu'on peut en être assuré.

### 3.3 Contrôle en-dessous de la $N^{\text{ième}}$ fréquence de coupure

Fréquences	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
sources	3	3	3	3	3 <sup>+</sup>
capteurs	1-3-5	1-4	1-5	1-5	1-5
$M$	3	2	2	2	2

TAB. 3.3 - Positions optimales des sources secondaires et des microphones d'erreur pour  $N=1$  et sans contraintes d'amplitudes.

Fréquences	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
sources	2-4	2-4	2-4	2-4	2 <sup>+</sup> - 4 <sup>+</sup>
capteurs	1-2-4-5	1-2-4	1-2-4	1-3-5	1-3-5
$M$	4	3	3	3	3

TAB. 3.4 - Positions optimales des sources secondaires et des microphones d'erreur pour  $N=2$  et sans contraintes d'amplitudes.

Nous allons comparer les conclusions de Stell et Bernhard (1994 [75]) avec nos résultats. Stell et Bernhard trouvent qu'un bon placement des sources secondaires et des microphones d'erreur est sur les lignes nodales du mode évanescent prépondérant. Pour réduire l'effet des

modes évanescents, la distance entre les sources et les microphones d'erreur doit être choisie aussi grande que possible.

Nos résultats pour des nombres de sources  $N$  pris égaux à 1 et 2 et sans contraintes d'amplitudes sont indiqués sur les tableaux 3.3 et 3.4. Nous appellerons  $i^+$  la source d'indice supérieur à 5 et égal à  $i + 5$ .

En ce qui concerne le placement des **sources secondaires**, nous retrouvons les mêmes conclusions que Stell et Bernhard. Nous trouvons en effet que le placement optimal est obtenu sur les lignes nodales du premier mode évanescent. Un placement longitudinal des sources éloigné de la zone de silence semble aussi être généralement bon.

En ce qui concerne le placement des **microphones d'erreur**, la méthode par programmation linéaire détermine la position des microphones d'erreur aux maximums du module de la pression complexe résiduelle. Comme, en dessous de la  $N^{\text{ième}}$  fréquence de coupure, il y a autant de modes propagatifs que de sources, un contrôle de tous les modes propagatifs est possible et on peut s'attendre à ce que la pression complexe résiduelle soit composée essentiellement de modes évanescents. Les maximums des modes évanescents se trouvent sur la section amont de la zone de silence. C'est-à-dire sur la section ( $x = x_c$ ). Les microphones d'erreur seront donc placés sur cette section. Cette méthode fournit une première conclusion contraire à celle de Stell et Bernhard qui placent les microphones sur la section ( $x = x_d$ ).

Nous allons séparer le problème du placement des microphones d'erreur en deux cas distincts:

- Dans le premier cas, on supposera que les modes évanescents d'ordre supérieur sont négligeables devant le premier mode évanescent. Sous cette hypothèse, on montrera que les deux placements (maximums et noeuds du premier mode évanescent) donnent la même solution et que ce sont deux placements optimaux.
- Dans le cas où il n'y a pas de modes évanescents prépondérants, nous montrerons que la méthode par maximums du module de la pression complexe reste la seule méthode à donner la solution optimale.

### 3.3.1 Modes évanescents d'ordre supérieur négligeables

#### A. Programmation linéaire

La méthode par programmation linéaire détermine la position des microphones d'erreur aux maximums du module de la pression complexe résiduelle. Nous allons montrer que pour  $N = 1$  et  $N = 2$ , la pression résiduelle est formée uniquement du premier mode évanescent. Les positions optimales des microphones d'erreur se trouvent donc sur la section ( $x = x_c$ ) et aux maximums de ce mode: c'est-à dire aux points (1-5) pour  $N = 1$  et aux points (1-3-5) pour  $N = 2$  (voir figures 3.8 et 3.14).

#### Démonstration A:

Ecrivons l'expression de la pression complexe dans la section ( $x = x_c$ ) en considérant que les sources secondaires sont situées aux noeuds du  $N^{\text{ième}}$  mode:

$$p[Q](x_c, y, z) = \sum_{J=0}^{J=N-1} (Q_p a_J^p + \sum_{i=0}^{i=N-1} Q_i a_J^i) \psi_J(y, z) + Q_p a_N^p \psi_N(y, z) \quad (3.11)$$

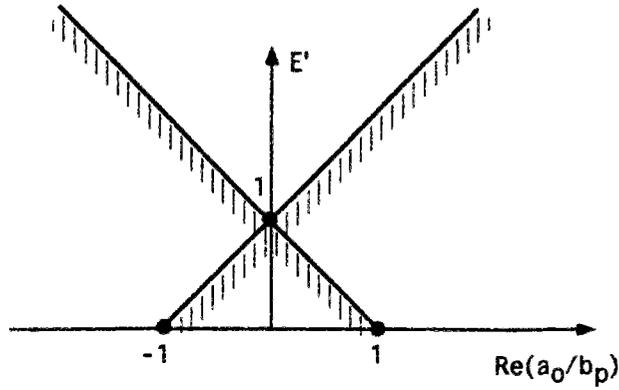


FIG. 3.3 - Programmation linéaire pour  $N = 1$ .

Plaçons  $N + 1$  microphones d'erreur aux  $N + 1$  maximums du mode  $N$  aux positions  $\underline{x}_I$ . Ces positions sont données par  $y_I = \frac{IL_y}{N}$  et  $0 \leq I \leq N$ . L'équation 3.11 devient:

$$p[\underline{Q}](x_c, y_I, z_I) = \sum_{J=0}^{J=N-1} (Q_p a_J^p + \sum_{i=0}^{i=N-1} Q_i a_i^J) \psi_J(y_I, z_I) + b_p \epsilon_I \quad (3.12)$$

avec  $b_p = Q_p a_N^p \psi_N(y_0, z_0)$  et  $\epsilon_I = \frac{\psi_N(y_I, z_I)}{\psi_N(y_0, z_0)}$ .  $\epsilon_I$  est égal à 1 ou -1 parce-que les microphones d'erreur sont situés aux maximums du mode  $N$ .

Trouvons la solution du problème pour  $N = 1$  avec 2 microphones d'erreur aux 2 maximums du mode 1 ( $y_0 = 0$  et  $y_1 = L_y$ ). Le problème s'écrit:

$$\begin{aligned} & \min_{a_0} E \\ & \begin{cases} |b_p + a_0| \leq E \\ |b_p - a_0| \leq E \end{cases} \end{aligned} \quad (3.13)$$

avec  $a_0 = \frac{1}{\sqrt{L_y L_z}} [Q_p a_0^p + Q_0 a_0^0]$ . D'une autre façon:

$$\begin{aligned} & \min_{\frac{a_0}{b_p}} E' = \frac{E}{|b_p|} \\ & \begin{cases} |1 + \frac{a_0}{b_p}| \leq E' \\ |1 - \frac{a_0}{b_p}| \leq E' \end{cases} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Réécrivons 3.14 encore une fois:

$$\begin{aligned} & \min_{\frac{a_0}{b_p}} E' = \frac{E}{|b_p|} \\ & \begin{cases} |1 + \operatorname{Re}(\frac{a_0}{b_p})|^2 + \operatorname{Im}^2(\frac{a_0}{b_p}) \leq E'^2 \\ |1 - \operatorname{Re}(\frac{a_0}{b_p})|^2 + \operatorname{Im}^2(\frac{a_0}{b_p}) \leq E'^2 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Si  $a_0^*$  est solution du problème, on trouve d'abord que  $\operatorname{Im}(\frac{a_0^*}{b_p}) = 0$ . Le problème consiste ensuite à résoudre le problème linéaire suivant dont la solution est trouvée sur la figure 3.3:

$$\min_{Re(\frac{a_0}{b_p})} E'$$

$$\begin{cases} |1 + Re(\frac{a_0}{b_p})| \leq E' \\ |1 - Re(\frac{a_0}{b_p})| \leq E' \end{cases} \quad (3.16)$$

La solution est  $Re(\frac{a_0}{b_p}) = 0$  et  $E'_* = 1$ . On trouve que  $a_0^* = 0$ . L'onde plane est alors contrôlée. La pression complexe résiduelle comprend alors seulement le premier mode évanescent:

$$p[\underline{Q}^*](x_c, y, z) = Q_p a_1^p \psi_1(y, z)$$

(3.17)

Notant  $a_0 = \frac{1}{\sqrt{L_y L_z}} [Q_p a_1^p + Q_0 a_0^0 + Q_1 a_0^1]$  et  $a_1 = \sqrt{\frac{2}{L_y L_z}} [Q_p a_1^p + Q_0 a_1^0 + Q_1 a_1^1]$ , trouvons la solution du problème avec  $N = 2$  et 3 microphones d'erreur aux 3 maximums du mode 2 ( $y_0 = 0, y_1 = \frac{L_y}{2}, y_2 = L_y$ ).

$$\min_{\frac{a_0}{b_p}, \frac{a_1}{b_p}} E'$$

$$\begin{cases} |1 + \frac{a_0}{b_p} + \frac{a_1}{b_p}| \leq E' \\ |1 - \frac{a_0}{b_p}| \leq E' \\ |1 + \frac{a_0}{b_p} - \frac{a_1}{b_p}| \leq E' \end{cases} \quad (3.18)$$

On voit d'abord que  $Im(\frac{a_0}{b_p}) = 0$  et  $Im(\frac{a_1}{b_p}) = 0$ . Le problème devient alors:

$$\min_{Re(\frac{a_0}{b_p}), Re(\frac{a_1}{b_p})} E'$$

$$\begin{cases} |1 + Re(\frac{a_0}{b_p}) + Re(\frac{a_1}{b_p})| \leq E' \\ |1 - Re(\frac{a_0}{b_p})| \leq E' \\ |1 + Re(\frac{a_0}{b_p}) - Re(\frac{a_1}{b_p})| \leq E' \end{cases} \quad (3.19)$$

C'est-à-dire:

$$\min_{Re(\frac{a_0}{b_p}), Re(\frac{a_1}{b_p})} E'' = \frac{E'}{|1 + Re(\frac{a_0}{b_p})|}$$

$$\begin{cases} \left| 1 + \frac{Re(\frac{a_1}{b_p})}{1 + Re(\frac{a_0}{b_p})} \right| \leq E'' \\ \frac{|1 - Re(\frac{a_0}{b_p})|}{|1 + Re(\frac{a_0}{b_p})|} \leq E'' \\ \left| 1 - \frac{Re(\frac{a_1}{b_p})}{1 + Re(\frac{a_0}{b_p})} \right| \leq E'' \end{cases} \quad (3.20)$$

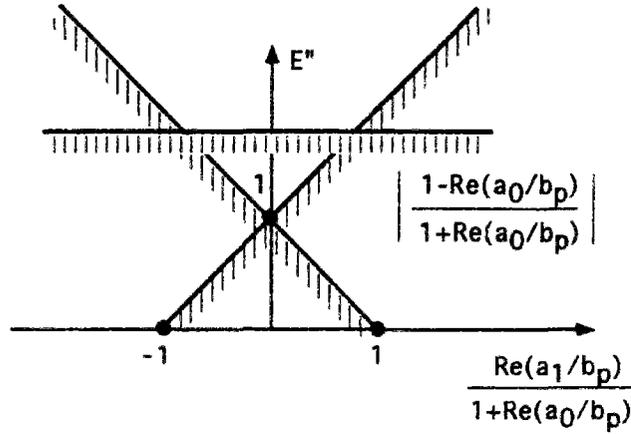


FIG. 3.4 - Programmation linéaire pour  $N = 2$ .

Choisissons d'abord  $a_0$  fixe et cherchons  $Re(\frac{a_1^*}{b_p})$  qui minimise alors  $E''(a_0)$ . On trouve (voir figure 3.4) que  $Re(\frac{a_1^*}{b_p}) = 0$  est solution et que  $E''(a_0) = \max(1, \frac{|1 - Re(\frac{a_0}{b_p})|}{|1 + Re(\frac{a_0}{b_p})|})$ . C'est -à-dire  $E'(a_0) = \max(|1 - Re(\frac{a_0}{b_p})|, |1 + Re(\frac{a_0}{b_p})|)$ .

La minimisation par rapport à  $a_0$  est alors identique au cas  $N = 1$  et  $Re(\frac{a_0^*}{b_p}) = 0$ . Cela entraîne que  $a_0^* = 0$  et  $a_1^* = 0$ . Les deux modes propagatifs sont contrôlés et la pression résiduelle complexe a l'expression finale:

$$p[Q^*](x_c, y, z) = Q_p a_2^p \psi_2(x, y)$$

(3.21)

**Optimalité:** Comme au chapitre précédent, introduisons le problème (0) avec un nombre  $M_0$  égal à 25 de capteurs dans l'espace  $\Omega_m$ .

Introduisons le problème (1) avec  $N + 1$  microphones aux maximums du premier mode évanescent (ici  $N$  est égal à 1 ou 2). On a trouvé que  $J_1(Q^1) = |b_p|$  avec  $Q^1 = Q^*$  la solution du problème (1). Comme la pression résiduelle est composée seulement d'un mode évanescent (voir figure 3.8 et 3.14),  $J_0(Q^1) = \max_{m \in \{0, \dots, M_0-1\}} |p[Q^1](z_m)| = |b_p|$  aussi. Or nous avons l'inégalité suivante:

$$J_0(Q^1) \geq J^0 \geq J_1(Q^1)$$

(3.22)

c'est-à-dire:

$$|b_p| \geq J^0 \geq |b_p|$$

(3.23)

La conclusion est donc que  $J^0 = |b_p|$ , que  $Q^1$  est optimal et que les microphones d'erreur placés aux maximums du premier mode évanescent sur la section ( $x = x_c$ ) donnent la solution optimale.

## B. Microphones d'erreur sur les lignes nodales du premier mode évanescent

Plaçons les microphones d'erreur sur les lignes nodales du premier mode évanescent et loin des sources. C'est à dire aux positions 23 et 22 - 24 sur la section ( $x = x_d$ ) pour

$N = 1$  et  $N = 2$  respectivement. La proposition "loin des sources" est en fait inutile dans ce cas car nous avons fait l'hypothèse que nous négligeons les modes évanescents d'ordre supérieur. Nous allons montrer que la solution  $\underline{Q}^1$  est alors identique à la solution obtenue par l'approche précédente. Elle consiste aussi à contrôler les modes propagatifs. Nous voyons ici que le nombre  $M$  de microphones déterminé par programmation linéaire est seulement **suffisant**. Stell et Bernhard obtiennent la même solution avec 1 microphone de moins.

L'approche par programmation linéaire a tout de même des atouts non négligeables.

Elle est d'abord générale. C'est-à-dire qu'elle donne la solution optimale dans tous les cas, même le cas où les modes évanescents d'ordre supérieur ne sont pas nuls, ce qui est en fait toujours le cas.

Elle donne aussi un moyen de tester l'optimalité de la solution obtenue, grâce à l'inégalité 3.22. Des placements du type 23 ( $N = 1$ ) par exemple ne permettent pas d'assurer l'optimalité de la solution. L'encadrement obtenu est le suivant:

$$|b_p| \geq J^0 \geq 0 \quad (3.24)$$

car  $|p[\underline{Q}^1](z_{23})| = 0$ . Cet encadrement ne permet pas de prouver l'optimalité de la solution.

#### Démonstration B:

Ecrivons l'expression de la pression complexe dans la section ( $x = x_d$ ) en considérant que les sources secondaires sont situées aux noeuds du  $N^{i\text{ème}}$  mode:

$$p[\underline{Q}](x_d, y, z) = \sum_{J=0}^{J=N-1} (Q_p c_J^p + \sum_{i=0}^{i=N-1} Q_i c_J^i) \psi_J(y, z) + Q_p c_N^p \psi_N(y, z) \quad (3.25)$$

Plaçons  $N$  microphones d'erreur sur les  $N$  lignes nodales du mode  $N$ : positions  $\underline{x}_I$  telles que  $y_I = \frac{(2I-1)L_y}{2N}$  avec  $1 \leq I \leq N$ . L'équation 3.25 devient:

$$p[\underline{Q}](x_d, y_I, z_I) = \sum_{J=0}^{J=N-1} (Q_p c_J^p + \sum_{i=0}^{i=N-1} Q_i c_J^i) \psi_J(y_I, z_I) \quad (3.26)$$

Avec  $N$  sources et  $N$  microphones, une annulation de la pression complexe aux  $N$  microphones est obtenue:

$$p[\underline{Q}^*](x_d, y_I, z_I) = 0 \quad (3.27)$$

Comme les  $N$  microphones mesurent seulement les  $N$  modes propagatifs, la solution  $\underline{Q}^*$  est un contrôle des modes propagatifs. La pression résiduelle a alors la forme suivante:

$$\boxed{p[\underline{Q}^*](x_d, y, z) = Q_p c_N^p \psi_N(y, z)} \quad (3.28)$$

### 3.3.2 Modes évanescents d'ordre supérieur non-négligeables

Dans les cas pratiques, on ne peut jamais dire que les modes évanescents d'ordre supérieur sont nuls même si le premier mode évanescent (le mode  $N$ ) reste prépondérant lorsque la fréquence  $f$  s'approche de  $N$ . Lorsque les amplitudes des modes évanescents d'ordre supérieur sont faibles mais non nulles, la solution optimale reste les microphones aux maximums

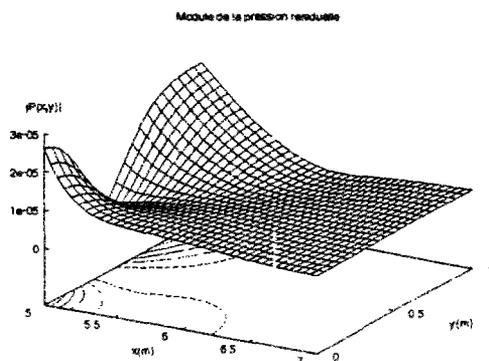


FIG. 3.5 - Distribution pour  $f=0.7$  du module de la pression résiduelle pour des positions de microphones 1-5.

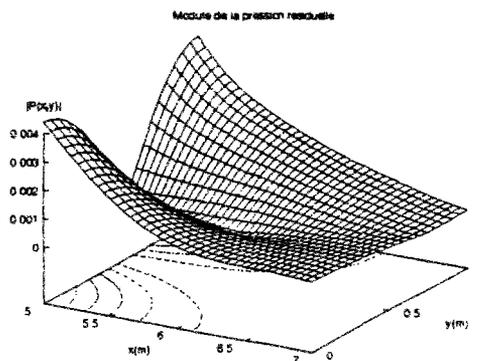


FIG. 3.8 - Distribution pour  $f=0.9$  du module de la pression résiduelle pour des positions de microphones 1-5.

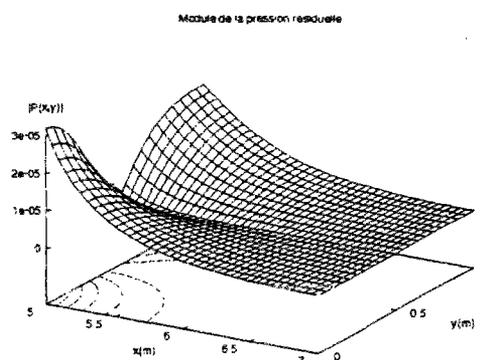


FIG. 3.6 - Distribution pour  $f=0.7$  du module de la pression résiduelle pour une position de microphone 23.

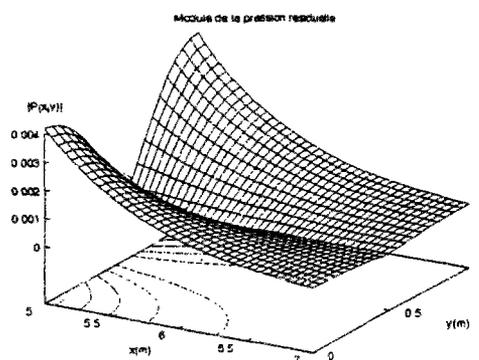


FIG. 3.9 - Distribution pour  $f=0.9$  du module de la pression résiduelle pour une position de microphone 23.

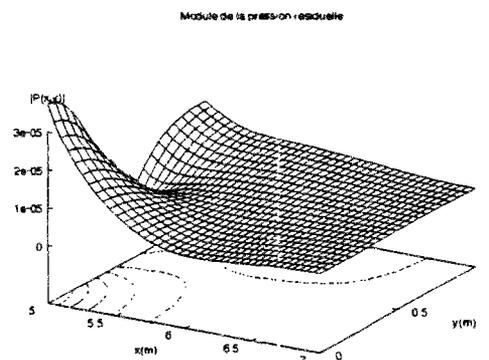


FIG. 3.7 - Distribution pour  $f=0.7$  du module de la pression résiduelle pour une position de microphone 3.

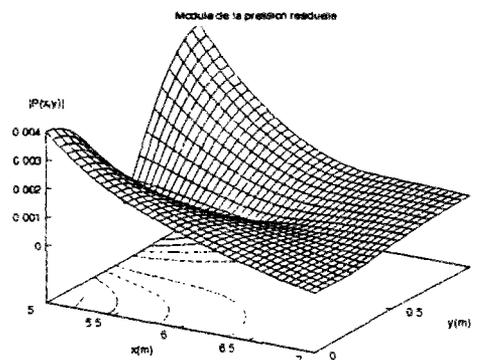


FIG. 3.10 - Distribution pour  $f=0.9$  du module de la pression résiduelle pour une position de microphone 3.

du premier mode évanescent et sur la section ( $x = x_c$ ). Les tableaux 3.3 et 3.4 montrent que cette solution reste valable au-dessus de  $f = 0.7$  pour  $N = 1$  et  $f = 1.8$  pour  $N = 2$ . Dans cette gamme de fréquence, si la solution 1-5 pour  $N = 1$  (respectivement 1-3-5 pour  $N = 2$ ) pour le placement des microphones est optimale, ce n'est pas le cas pour le placement aux noeuds du premier mode évanescent.

Les tableaux 3.5 et 3.6 donnent l'écart en dB entre la valeur du critère  $J_0$  pour le placement optimal et des placements sur les lignes nodales du premier mode évanescent. On distingue deux placements sur les lignes nodales: le premier est proche des sources et le second loin des sources. Les résultats confirment d'abord les conclusions de Stell et Bernhard. Pour un placement sur les lignes nodales, il est préférable de placer les microphones loin des sources. Pour  $N = 1$  le placement 23 est meilleur que le placement 3. Pour  $N = 2$  le placement 22-24 est meilleur que le placement 2-4. La raison est que le placement sur les lignes nodales est d'autant meilleur que l'influence des modes évanescents d'ordre supérieur est faible. On vérifie ensuite que les trois placements (maximums, noeuds et proches, noeuds et éloignés) deviennent quasi-équivalents lorsque  $f$  s'approche de  $N$ . Pour  $f = 0.9$  et  $f = 1.9$  l'écart est inférieur à 1 dB.

Fréquences	0.7	0.9
microphone 3	3.1	0.8
microphone 23	1.7	0.4

TAB. 3.5 - *Ecart en dB sur le critère  $J_0$  entre le contrôle obtenu avec le placement optimal et les placements sur les lignes nodales du premier mode évanescent pour  $N = 1$ .*

Fréquences	1.7	1.9
microphones 2-4	5.2	0.8
microphones 22-24	1.3	0.4

TAB. 3.6 - *Ecart en dB sur le critère  $J_0$  entre le contrôle obtenu avec le placement optimal et les placements sur les lignes nodales du premier mode évanescent pour  $N = 2$ .*

Les figures 3.8 à 3.10 (resp. 3.14 à 3.16) présentent la distribution du module de la pression résiduelle complexe à  $f = 0.9$  (resp.  $f = 1.9$ ) pour les trois placements de microphones et  $N = 1$  (resp.  $N = 2$ ) source secondaire. On vérifie que les trois placements donnent des résultats similaires.

Les figures 3.5 à 3.7 (resp. 3.11 à 3.13) présentent la distribution du module de la pression résiduelle complexe à  $f = 0.7$  (resp.  $f = 1.7$ ) pour les trois placements de microphones et  $N = 1$  (resp.  $N = 2$ ) source secondaire. Une différence non négligeable est alors obtenue entre les trois placements. Le placement des microphones aux maximums du module de la pression résiduelle permet d'éviter les dissymétries et les pics de bruit.

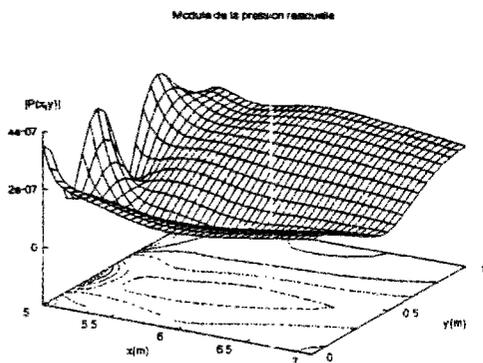


FIG. 3.11 - Distribution pour  $f=1.7$  du module de la pression résiduelle pour des positions de microphones 1-2-4.

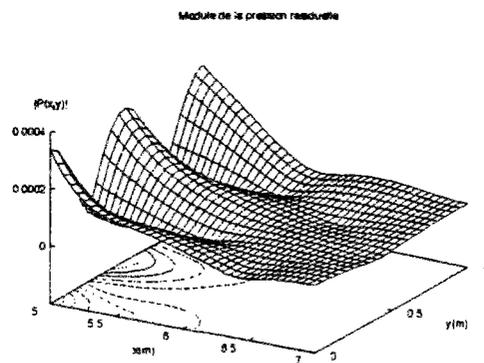


FIG. 3.14 - Distribution pour  $f=1.9$  du module de la pression résiduelle pour des positions de microphones 1-3-5.

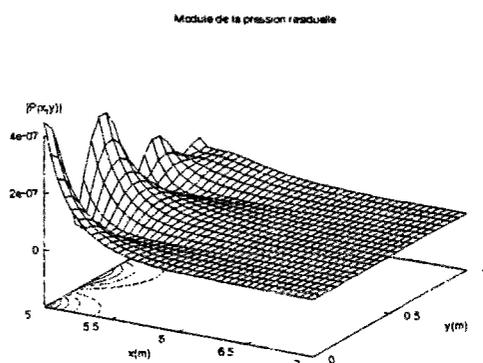


FIG. 3.12 - Distribution pour  $f=1.7$  du module de la pression résiduelle pour des positions de microphones 22-24.

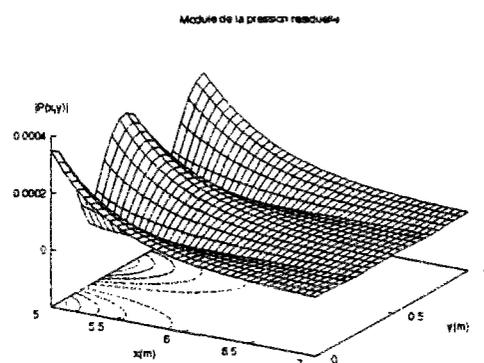


FIG. 3.15 - Distribution pour  $f=1.9$  du module de la pression résiduelle pour des positions de microphones 22-24.

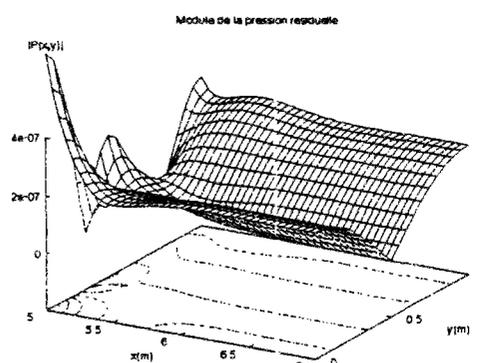


FIG. 3.13 - Distribution pour  $f=1.7$  du module de la pression résiduelle pour des positions de microphones 2-4.

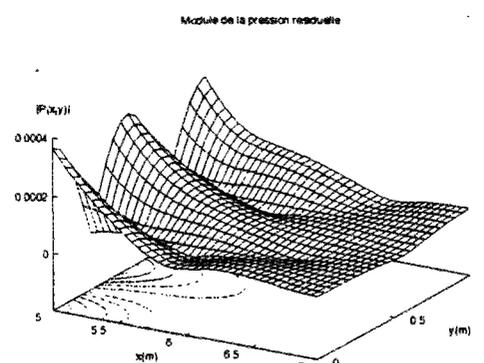


FIG. 3.16 - Distribution pour  $f=1.9$  du module de la pression résiduelle pour des positions de microphones 2-4.

On a vu que pour les fréquences  $f = 0.9$  et  $f = 1.9$  les trois placements donnaient des résultats proches. On peut se demander si la recherche du placement optimal des microphones est utile pour des fréquences inférieures puisque, pour tous les placements, l'atténuation dépasse 40 dB à ces fréquences. L'optimisation du placement sera utile en fait dans le cas où les sources secondaires sont encore plus proches de la zone de silence. Dans ce cas les ondes évanescentes d'ordre supérieur ont des amplitudes plus grandes, l'atténuation est plus faible et le placement sur les lignes nodales devient moins bon.

### 3.4 Contrôle au-dessus de la $N^{i\grave{e}me}$ fréquence de coupure

Le problème du placement optimal de  $N$  sources secondaires et de  $M$  microphones d'erreur au-dessus de la  $N^{i\grave{e}me}$  fréquence de coupure change de nature. Il y a en effet au moins  $N + 1$  modes propagatifs pour  $N$  sources secondaires. Le contrôle des modes propagatifs ne peut donc être que partiel. On est donc assuré que la distribution de pression résiduelle contient des modes propagatifs. Des modes évanescents sont aussi présents dans la distribution de pression résiduelle mais leur contribution peut être négligée devant les contributions des modes propagatifs. Les distributions du module de la pression complexe pour un placement optimal d'une source ( $N = 1$ ) à  $f = 2.2$  et  $f = 3.2$  sont présentées sur les figures 3.17 et 3.20. Les distributions sont maintenant quelconques et les maximaux ne sont plus situés obligatoirement sur la même section mais plutôt étalés le long du guide. C'est pourquoi, on peut affirmer que les positions optimales des microphones d'erreur sont généralement étalées le long du guide lorsque la fréquence est supérieure à la  $N^{i\grave{e}me}$  fréquence de coupure.

Fréquences	2.2	3.2
microphones	1-25	1-6
sources	5	1

TAB. 3.7 - Résultats du placement optimal pour  $N = 1$ .

Il est intéressant d'examiner quel serait le résultat du contrôle si le placement des sources et des microphones était quelconque. Le tableau 3.7 présente les résultats du placement optimal pour  $f = 2.2$  et  $f = 3.2$ . On trouve dans les deux cas un nombre suffisant  $M$  de microphones égal à 2. C'est pourquoi nous avons examiné l'atténuation obtenue avec une combinaison quelconque de 1 source et de 2 microphones à ces deux fréquences. Le nombre total de combinaisons est de  $3000 = C_{25}^2 \times C_{10}^1$ . Les histogrammes (en blanc) des figures 3.18 et 3.21 donnent l'écart en dB par rapport à l'atténuation optimale. On constate que près de la moitié des combinaisons, au lieu de fournir une atténuation, contribue à augmenter le critère  $J_0$ . L'écart entre un "bon" placement et un "mauvais" placement peut excéder 20 dB. Le placement optimal des sources et le placement optimal des microphones améliorent tous les deux l'efficacité du contrôle actif. On peut cependant noter une différence importante entre les deux optimisations. Pour un placement de sources secondaires donné et un nombre

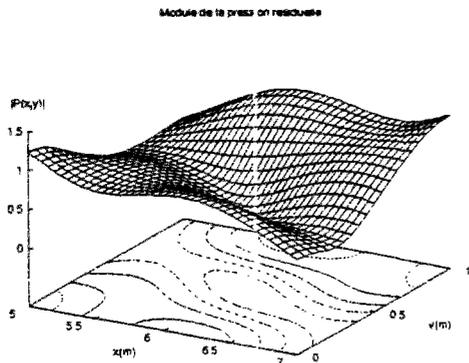


FIG. 3.17 - Distribution pour  $f=2.2$  du module de la pression résiduelle pour des positions de microphones 1-25 et la position de source 5.

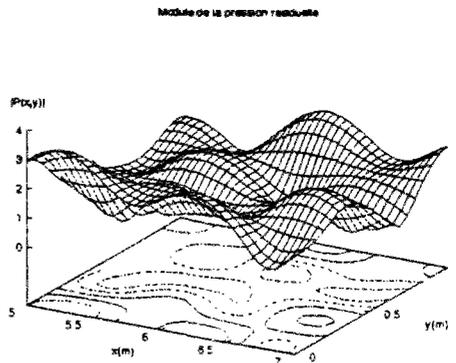


FIG. 3.20 - Distribution pour  $f=3.2$  du module de la pression résiduelle pour des positions de microphones 1-6 et la position de source 1.

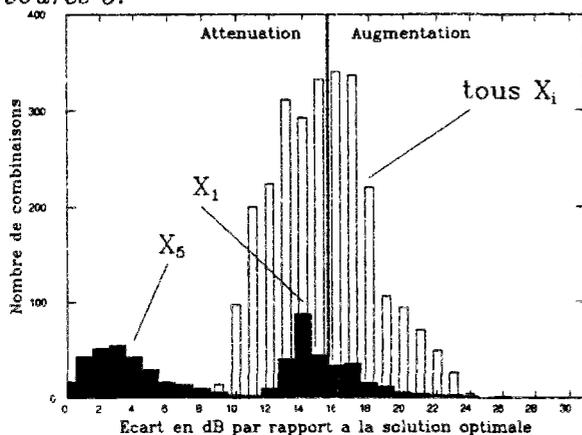


FIG. 3.18 - Histogramme pour  $f=2.2$  du nombre de combinaisons (2 microphones-1 source) en fonction de l'atténuation en dB.

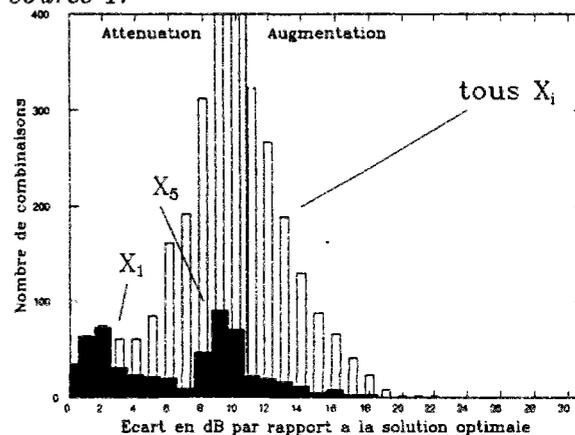


FIG. 3.21 - Histogramme pour  $f=3.2$  du nombre de combinaisons (2 microphones-1 source) en fonction de l'atténuation en dB.

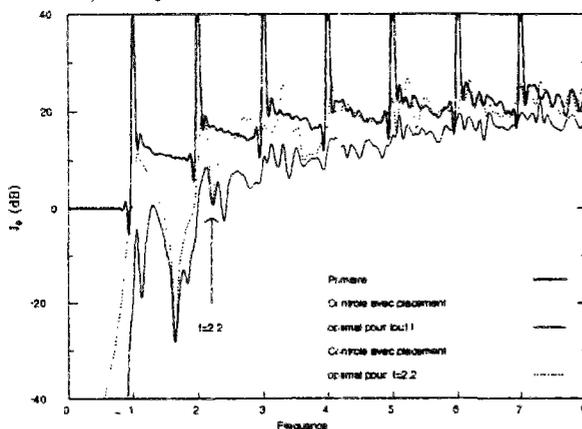


FIG. 3.19 - Critère  $J_0$  sans contrôle et avec contrôle pour un placement optimal à toutes fréquences ou placement optimal pour  $f = 2.2$ .

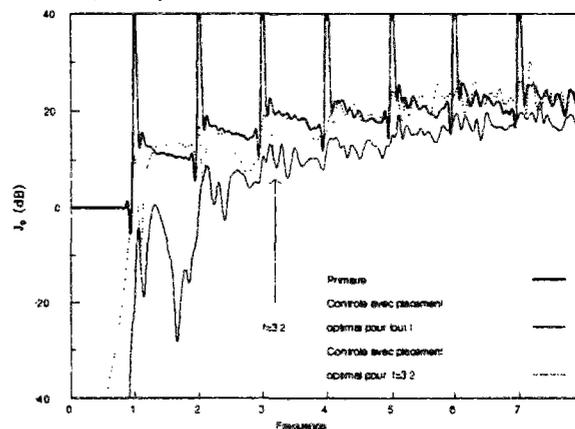


FIG. 3.22 - Critère  $J_0$  sans contrôle et avec contrôle pour un placement optimal à toutes fréquences ou placement optimal pour  $f = 3.2$ .

suffisant  $M$  de microphones (au maximum  $2N + 1$ ), l'optimisation du placement des microphones garantit au moins une atténuation positive. En revanche, pour une position de microphones donnée, l'optimisation du placement de sources n'assure pas la positivité de l'atténuation. Sur les figures 3.18 et 3.21 sont présentés, en noir, les histogrammes pour une position de sources donnée ( $x_1$  ou  $x_5$ ). Le nombre de combinaisons pour le placement des microphones est de  $300 = C_{25}^2$ . En utilisant  $M_0$  microphones, une atténuation maximale est d'abord obtenue. Comme on sait qu'une combinaison avec  $M$  microphones la réalise aussi, le problème consiste, ensuite, à bien choisir cette combinaison. Si cette combinaison est mal choisie, les résultats montrent qu'un mauvais placement peut réduire l'atténuation de plus de 10 dB.

Les figures 3.19 et 3.22 donnent les valeurs du critère  $J_0$  sans contrôle, avec contrôle ( $N = 1$ ) et optimisation du placement à chaque fréquence ainsi que avec contrôle mais placement optimal réalisé pour  $f = 2.2$  et  $f = 3.2$  respectivement. On constate que le placement optimal des sources et des microphones n'est valable que sur une bande de fréquence très étroite. En dehors de la fréquence d'optimisation, le contrôle ne fournit en général ni atténuation ni augmentation significative du critère  $J_0$ . Ce comportement est plutôt contraire aux résultats en-dessous de la fréquence de coupure où le placement optimal des microphones et surtout des sources est valable sur une large bande de fréquence. Un critère sur plusieurs fréquences pourrait être intéressant pour obtenir une atténuation sur une bande suffisamment large.

### 3.5 Bornes sur l'amplitudes des sources

L'introduction de bornes sur les amplitudes des sources secondaires a pour premier effet de réduire l'efficacité du contrôle lorsque ces bornes  $A$  deviennent effectivement limitantes. Pour évaluer la valeur de  $A$  à partir de laquelle ces bornes deviennent contraignantes, nous avons tracé sur les figures 3.23, 3.24, 3.26 et 3.27 les valeurs du critère  $J_0$  en fonction de  $f$  et  $A$  pour un nombre de sources  $N$  variant de 1 à 4 et un placement optimal à chaque fréquence. La valeur critique pour  $A$  est  $A = 1$ . Lorsque les sources secondaires sont contraintes à des amplitudes inférieures à celles de la source primaire, l'efficacité du contrôle est largement réduite.

Le second effet des bornes est de changer radicalement le placement optimal des sources secondaires et des microphones. Deux exemples pour  $N = 2$  et  $f = 1.9$  sont présentés sur les figures 3.25 et 3.28 avec  $A = 0.3$  et  $A = 0.5$  respectivement. A cette fréquence, pour des sources non-bornées, la distribution de pression complexe est formée principalement du premier mode évanescent. Le placement optimal des microphones d'erreur est alors sur les sections ( $x = x_c$ ) et aux maximums du premier mode évanescent. Du fait de la présence des bornes sur les amplitudes des sources, les modes propagatifs ne peuvent être que partiellement contrôlés. La distribution de pression complexe contient alors ces modes propagatifs et les maximaux du module sont à priori quelconques. On peut alors trouver des positions optimales de microphones ailleurs que sur la section ( $x = x_c$ ).

Un dernier effet des bornes est de réduire le nombre suffisant  $M$  de microphones d'erreur. Notre exemple donne  $M = 2$  alors que, si les sources ne sont pas bornées,  $3 \leq M \leq 5$  (voir chapitre précédent).

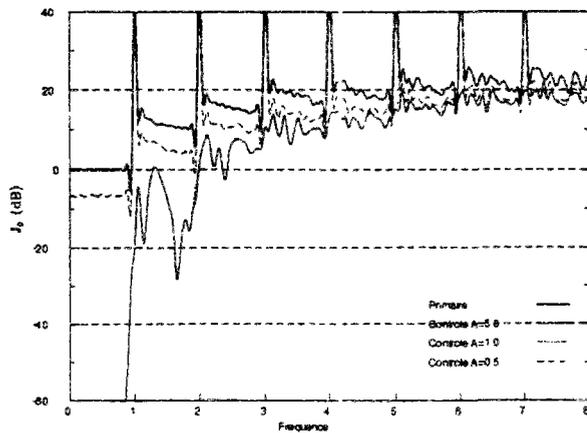


FIG. 3.23 - Critère  $J_0$  sans contrôle et avec contrôle par 1 source pour un placement optimal à toutes fréquences.

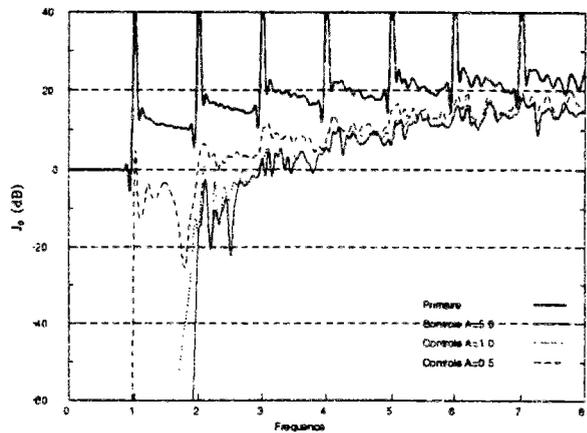


FIG. 3.26 - Critère  $J_0$  sans contrôle et avec contrôle par 2 sources pour un placement optimal à toutes fréquences.

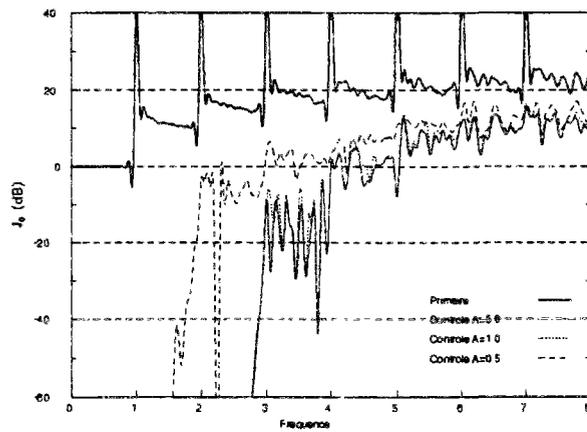


FIG. 3.24 - Critère  $J_0$  sans contrôle et avec contrôle par 3 sources pour un placement optimal à toutes fréquences.

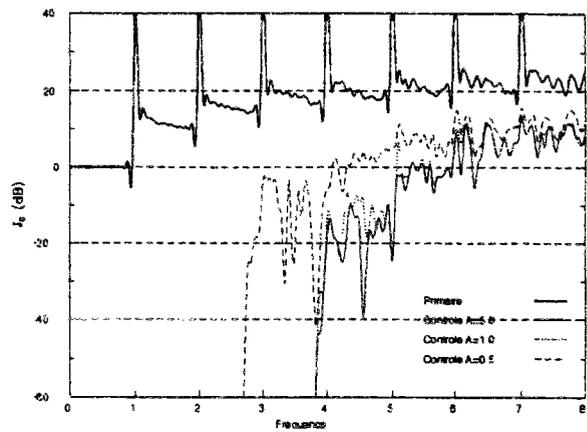


FIG. 3.27 - Critère  $J_0$  sans contrôle et avec contrôle par 4 sources pour un placement optimal à toutes fréquences.

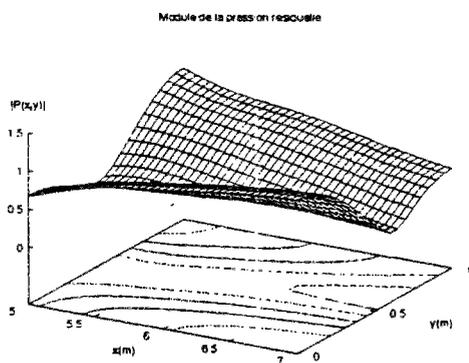


FIG. 3.25 - Distribution pour  $f=1.9$  du module de la pression résiduelle pour des positions de microphones 5-21 et les positions de source 5-5<sup>+</sup> ( $A = 0.3$ ).

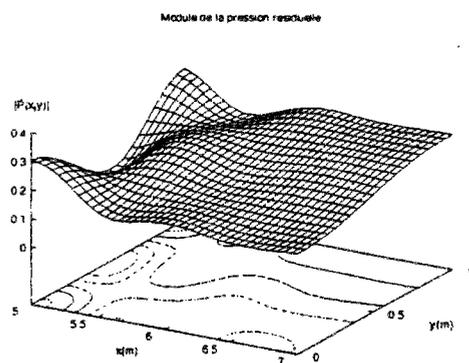


FIG. 3.28 - Distribution pour  $f=1.9$  du module de la pression résiduelle pour des positions de microphones 1-5 et les positions de source 5-5<sup>+</sup> ( $A = 0.5$ ).

### 3.6 Effet de la réflexion amont

Plaçons-nous maintenant dans la configuration (C2) avec une réflexion amont.

En ce qui concerne le placement optimal des sources et des microphones **en-dessous de la  $N^{\text{ième}}$  fréquence de coupure**, les résultats restent similaires à la configuration (C1) excepté qu'il est préférable d'étaler les sources secondaires le long du guide que de les placer sur la même section.

La réflexion amont fait en effet interférer les ondes directe et réfléchie issues de la source secondaire. A certaines fréquences critiques, toujours écrites sans dimension,  $f_{n,n_y,n_z} = L_y \sqrt{(\frac{2n-1}{2x_a})^2 + (\frac{n_y}{L_y})^2 + (\frac{n_z}{L_z})^2}$ , pour une source secondaire située en ( $x = x_a$ ), l'onde totale (directe+réfléchie) a une composante modale nulle. A ces fréquences critiques, aucune source secondaire située sur cette section ne peut contrôler ce mode. Autour de ces fréquences critiques, les amplitudes des sources demandées pour assurer le contrôle sont très grandes.

La figure 3.29 donne les valeurs du critère  $J_0$  en fonction de  $f$  et  $A$  pour les deux sources secondaires 2-4 situées sur la même section ( $x = x_a$ ). Pour la configuration (C1) sans réflexion amont, les deux sources 2-4 assurent un très bon contrôle aussi bien pour  $A = 5$  que pour  $A = 1$  jusqu'à la fréquence  $f = 2$ . Pour la configuration (C2) avec réflexion amont et  $A = 5$ , l'effet négatif de la réflexion amont reste limité aux raies des fréquences critiques. Pour la configuration (C2) avec réflexion amont et  $A = 1$ , les effets conjugués de la réflexion amont et des bornes élargissent d'abord les raies pour  $f < 1$  et limitent ensuite largement l'efficacité du contrôle pour  $f > 1$ . La figure 3.32 donne les valeurs du critère  $J_0$  en fonction de  $f$  et  $A$  pour les deux sources secondaires 2<sup>+</sup> - 4 situées sur deux sections différentes ( $x = x_b$ ) et ( $x = x_a$ ). Il est avantageux d'associer deux sources qui ne sont pas situées sur la même section car ces deux sources ont alors des fréquences critiques différentes. Si les domaines critiques ne se recouvrent pas, un bon contrôle peut être espéré. Les résultats montrent bien une nette amélioration du contrôle par rapport au cas précédent pour  $f < 1$ .

**Au-dessus de la  $N^{\text{ième}}$  fréquence de coupure**, les conclusions pour (C1) et (C2) sont aussi similaires. L'effet des fréquences critiques reste important. La conséquence la plus importante est que les amplitudes des sources solutions pour (C2) sont plus importantes que dans (C1). L'effet des bornes sur les sources est alors plus contraignant pour (C2) que pour (C1). Les figures 3.30, 3.31, 3.33 et 3.34 représentent pour la configuration (C2) les valeurs du critère  $J_0$  en fonction de  $f$  et  $A$  pour un nombre de sources  $N$  variant de 1 à 4 et un placement optimal à chaque fréquence.

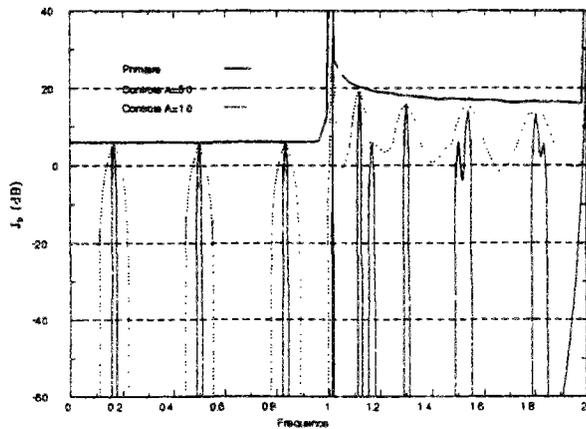


FIG. 3.29 - Critère  $J_0$  sans contrôle et avec contrôle par les sources 2-4 (C2).

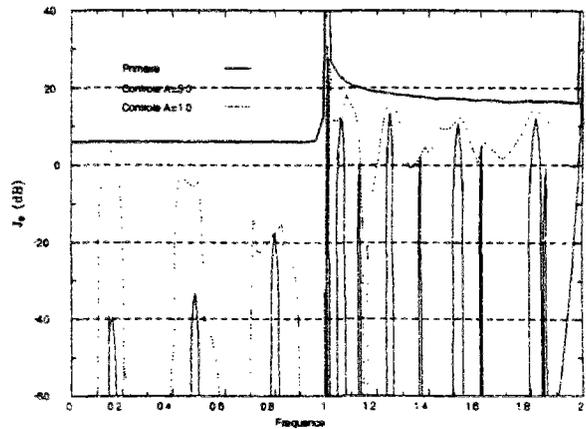


FIG. 3.32 - Critère  $J_0$  sans contrôle et avec contrôle par les sources  $2^+ - 4$  (C2).

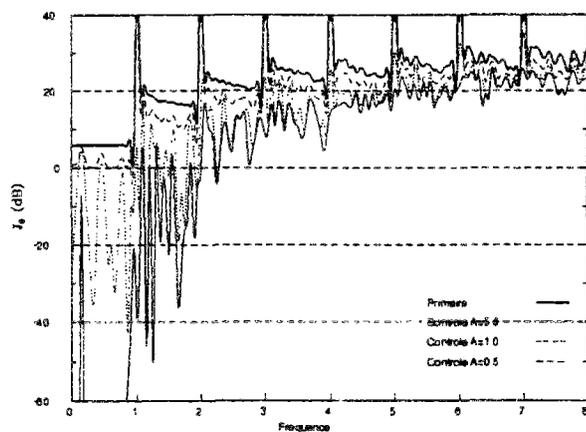


FIG. 3.30 - Critère  $J_0$  sans contrôle et avec contrôle par 1 source pour un placement optimal à toutes fréquences (C2).

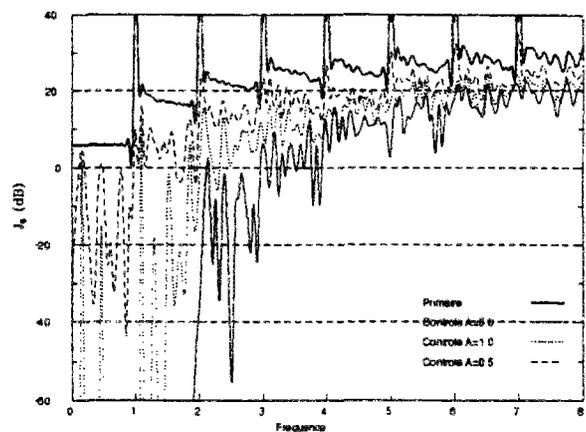


FIG. 3.33 - Critère  $J_0$  sans contrôle et avec contrôle par 2 sources pour un placement optimal à toutes fréquences (C2).

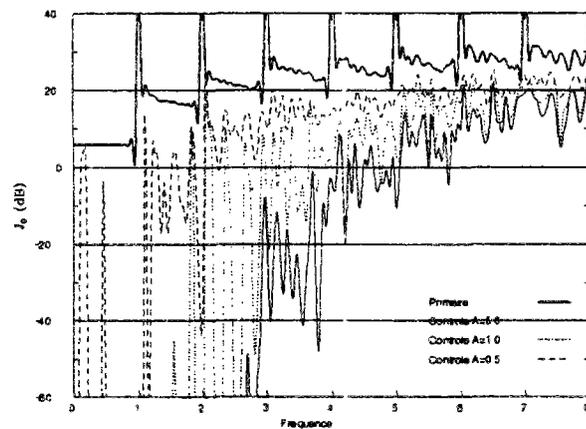


FIG. 3.31 - Critère  $J_0$  sans contrôle et avec contrôle par 3 sources pour un placement optimal à toutes fréquences (C2).

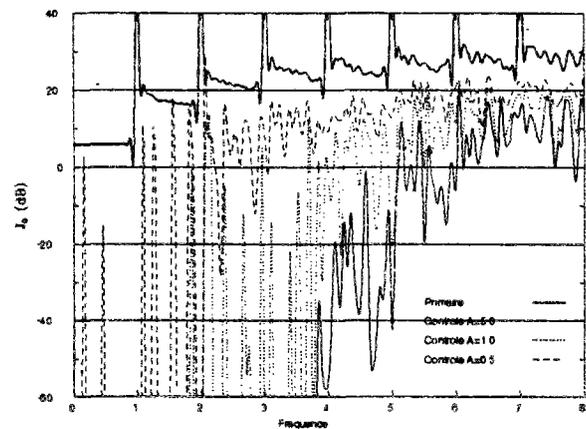


FIG. 3.34 - Critère  $J_0$  sans contrôle et avec contrôle par 4 sources pour un placement optimal à toutes fréquences (C2).

### 3.7 Effet de la réflexion aval

Plaçons-nous maintenant dans la configuration (C3) avec une réflexion aval.

Nous allons examiner le placement optimal des microphones d'erreur en-dessous de la  $N^{\text{ième}}$  fréquence de coupure. En ce qui concerne les sources secondaires, leur placement optimal se trouve toujours sur les lignes nodales du premier mode évanescent et loin de la zone de silence.

Dans cette configuration (C3), il existe aussi des fréquences critiques  $f_{n,n_y,n_z} = L_y \sqrt{\left(\frac{2n-1}{2(L_x-x_c)}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2}$ . A ces fréquences, un microphone situé sur la section ( $x = x_c$ ) n'observe pas un mode et le contrôle de ce mode est alors impossible.

Plaçons-nous dans la suite à une fréquence critique et examinons le problème mixte d'optimisation sur les amplitudes des sources et le placement des microphones ( $\underline{Q}, \underline{Y}$ ).

#### 3.7.1 Modes évanescents d'ordre supérieur négligés

Lorsque les modes évanescents d'ordre supérieur sont négligés, le placement optimal des microphones d'erreur  $\underline{Y}$ , dans la configuration (C1), a plusieurs solutions mais la solution en amplitudes de sources  $\underline{Q}$  est, quant à elle, unique. Dans la configuration (C3), nous allons montrer sur un exemple avec une source secondaire  $N = 1$  que la solution en  $\underline{Q}$  n'est en revanche plus unique.

En considérant que le premier mode évanescent est complètement amorti à la terminaison aval réfléchissante, la distribution de pression dans la zone de silence peut s'écrire:

$$p[\underline{Q}](x, y, z) = (Q_p a_0^p + Q a_0^0) \psi_0(y, z) (e^{jk(x-x_c)} + e^{jk(2L_x-x_c-x)}) + Q_p a_1^p \psi_1(y, z) e^{-k_1(x-x_c)} \quad (3.29)$$

$$\text{avec } k_1 = \sqrt{\frac{\pi^2}{L_y^2} - k^2}.$$

A la fréquence critique  $f_{n,0,0}$ , où  $k = \frac{\pi}{2} \frac{2n-1}{L_x-x_c}$ , l'équation 3.29 devient:

$$p[\underline{Q}](x, y, z) = 2j(Q_p a_0^p + Q a_0^0) \psi_0(y, z) \sin\left[\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \frac{x-x_c}{L_x-x_c}\right] + Q_p a_1^p \psi_1(y, z) e^{-k_1(x-x_c)} \quad (3.30)$$

**A:** Le contrôle de l'onde plane donne une amplitude de source  $Q_0^A = -Q_p \frac{a_0^p}{a_0^0}$  et  $J_0(Q_0^A) = |b_p|$  où  $b_p = Q_p a_1^p \psi_1(0, 0)$ . La solution est optimale car  $J_0(Q) \geq |b_p|$  comme  $|p[\underline{Q}](x_c, 0, 0)| = |b_p|$  pour tout  $\underline{Q}$ . Pour contrôler l'onde plane, il suffit de placer des microphones sur la ligne nodale  $y = \frac{L_y}{2}$  en évitant les noeuds axiaux.

**B:** Montrons par l'absurde que  $Q_0^A$  n'est pas l'unique solution du problème d'optimisation. Supposons donc que c'est l'unique solution du problème et examinons la distribution de pression complexe qui en résulte. Nous savons déjà que la recherche des maximaux du module de la distribution de la pression complexe résiduelle donne à la fois un nombre suffisant de microphones et leur position  $\underline{Y}$ . Or ces maximaux se trouvent tous sur la section  $x = x_c$  où l'onde plane n'est précisément pas observée. Le contrôle de l'onde plane n'est pas alors possible avec cette combinaison de microphones d'erreur. Cela signifie qu'il existe une autre solution  $Q_0^B$  solution du problème d'optimisation.

Cherchons donc une autre solution  $Q_0^B$ . Introduisons  $\alpha(Q_0^B)$  tel que:

$$\sqrt{L_y L_z} \alpha(Q_0^B) = 2j(Q_p a_0^p + Q_0^B a_0^0) \quad (3.31)$$

Prenons par exemple  $Q_0^B$  tel que:

$$\text{Re}\left(\frac{\alpha(Q_0^B)}{Q_p a_1^p}\right) = 0 \quad (3.32)$$

On peut alors écrire que:

$$|p[Q_0^B](x, y, z)|^2 = |\alpha(Q_0^B)|^2 \sin^2\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \frac{x - x_c}{L_x - x_c}\right] + |b_p|^2 \cos^2\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) e^{-2k_1(x-x_c)} \quad (3.33)$$

Notons  $x_0, y_0, z_0$  les coordonnées des maxima du module de la pression complexe résiduelle. On voit immédiatement que  $y_0 = 0$  ou  $y_0 = L_y$ . On alors:

$$J_0(Q_0^B) = |b_p| \max_{x \in [x_c, x_d]} \sqrt{\left|\frac{\alpha(Q_0^B)}{b_p}\right|^2 \sin^2\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \frac{x - x_c}{L_x - x_c}\right] + e^{-2k_1(x-x_c)}} \quad (3.34)$$

En étudiant les variations de la fonction  $g(x)$  sous la racine et en notant  $\alpha = |\alpha(Q_0^B)|$ , on peut voir qu'il existe  $\alpha_*$  tel que:

$$J_0(Q_0^B) = |b_p| \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_*] \quad (3.35)$$

Sur la figure 3.35 est présenté un exemple pour  $n = 4$ . On constate donc qu'il existe une

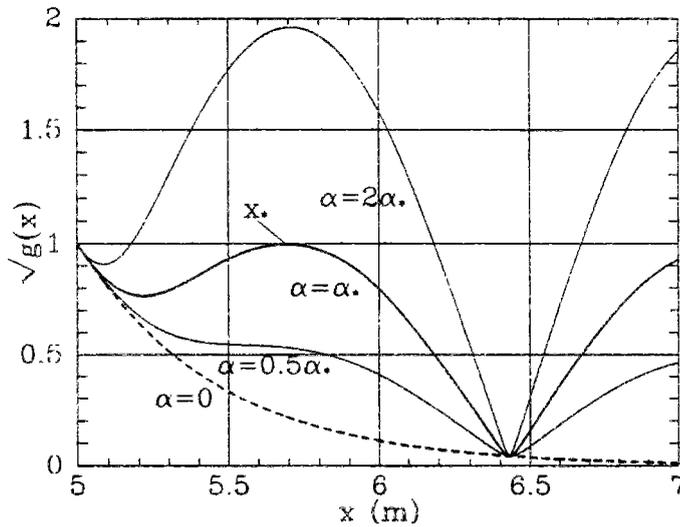


FIG. 3.35 - Distribution de  $g(x)$  en fonction de  $\alpha$ .

infinité de solutions  $Q_0^B$ .

Le cas  $\alpha = 0$  correspond au cas A: c'est-à-dire au contrôle de l'onde plane.

Le cas  $\alpha = \alpha_*$  correspond à la solution que l'on trouvera par programmation linéaire. On déterminera ainsi deux sections  $x_0 = x_c$  et  $x_0 = x_*$  sur lesquelles se trouvent les maximums du module de la pression complexe résiduelle. On déterminera alors la position optimale de deux microphones: un sur chacune des deux sections avec  $y = 0$  ou  $y = l$ .

**C:** La raison de la non-unicité de la solution en  $Q$  vient du fait que les fonctions de transfert  $G(\underline{x}|\underline{y})$  sont nulles pour une position de source  $\underline{x}$  située au noeud du premier mode antisymétrique et une position de microphone  $\underline{y}$  située sur une ligne nodale axiale de l'onde plane. La démonstration de l'unicité de la solution suppose (voir annexe E) que toutes les matrices de transfert soient non nulles pour  $N = 1$ . Sinon la fonction  $J_0(Q)$  est susceptible d'être non-strictement convexe comme c'est le cas ici.

### 3.7.2 Modes évanescents d'ordre supérieur non-négligés

Lorsque les modes évanescents d'ordre supérieur ne sont pas négligés, les problèmes d'unicité de la solution disparaissent. Le contrôle de l'onde plane (pour  $N = 1$ ) ou des modes propagatifs (pour  $N > 1$ ) ne constitue plus une solution optimale.

Examinons quelques exemples pour  $N = 1$ .  $f = 0.7$  et  $f = 0.9$  sont des fréquences critiques du mode plan. Elles correspondent aux entiers  $n = 4$  et  $n = 5$ . Nous allons trouver le nombre suffisant de microphones et leur placement pour  $M_0$  d'abord égal à 25. Comme cette densité de positions candidates peut s'avérer insuffisante, nous avons décidé de doubler la densité du maillage dans les deux directions et de tester aussi  $M_0$  égal à 100.

Les figures 3.37 et 3.40 présentent la distribution du module de pression complexe résiduelle pour  $f = 0.8$ . Comme cette fréquence se trouve en-dehors des fréquences critiques, on constate un résultat similaire à la configuration (C1), c'est-à-dire que le placement des microphones se trouve sur la section ( $x = x_c$ ) et aux maximums du premier mode antisymétrique.

Les figures 3.36 et 3.39 (resp. 3.38 et 3.41) présentent la distribution du module de pression complexe résiduelle pour  $f = 0.7$  (resp.  $f = 0.9$ ). Ces deux fréquences correspondent à des fréquences critiques. Il est préférable de commenter les résultats pour  $M_0 = 100$  car le maillage des positions candidates est plus fin. On constate que la distribution de pression complexe résiduelle a bien la forme de l'équation 3.30: c'est la superposition d'une onde évanescente antisymétrique et d'une onde plane stationnaire. La solution du placement des microphones est dans les deux cas formée d'un couple de microphones. Le premier est sur la section  $x = x_c$  à un des deux maximums du premier mode antisymétrique. Le second est aussi à un des deux maximums du premier mode antisymétrique mais sur la section  $x = x_*$ .

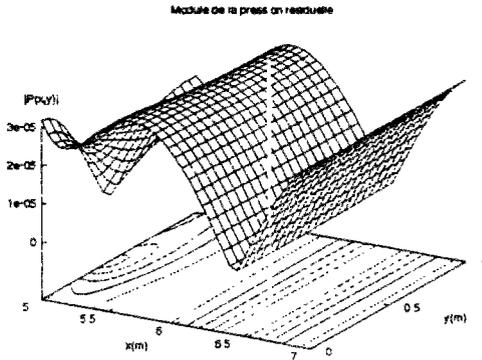


FIG. 3.36 - Distribution pour  $f=0.7$  du module de la pression résiduelle pour des positions de microphones 6-25 ( $M_0 = 25$ ) et la position de source 3.

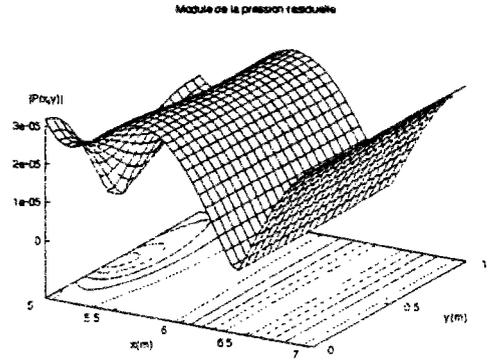


FIG. 3.39 - Distribution pour  $f=0.7$  du module de la pression résiduelle pour des positions de microphones 1-40 ( $M_0 = 100$ ) et la position de source 3.

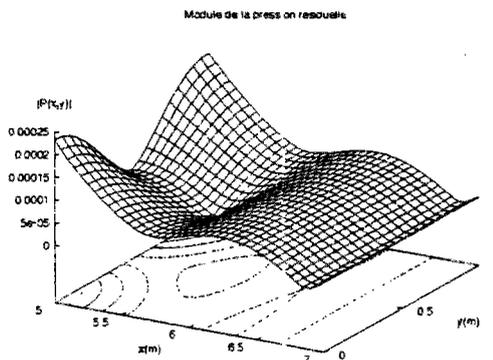


FIG. 3.37 - Distribution pour  $f=0.8$  du module de la pression résiduelle pour des positions de microphones 1-5 ( $M_0 = 25$ ) et la position de source 3.

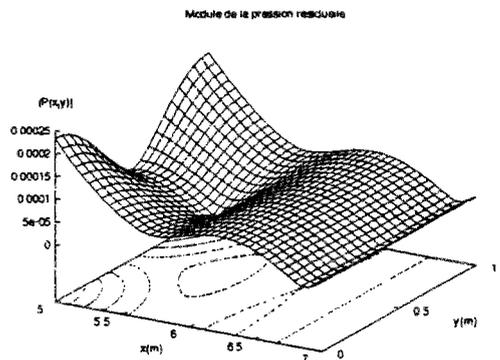


FIG. 3.40 - Distribution pour  $f=0.8$  du module de la pression résiduelle pour des positions de microphones 1-10 ( $M_0 = 100$ ) et la position de source 3.

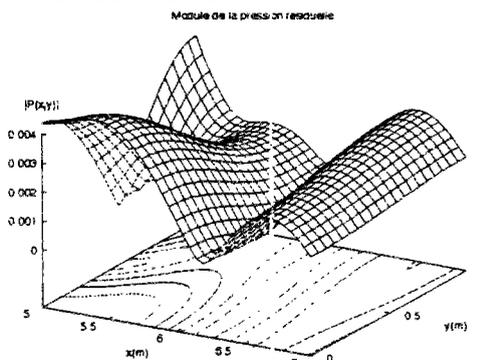


FIG. 3.38 - Distribution pour  $f=0.9$  du module de la pression résiduelle pour des positions de microphones 5-6 ( $M_0 = 25$ ) et la position de source 3.

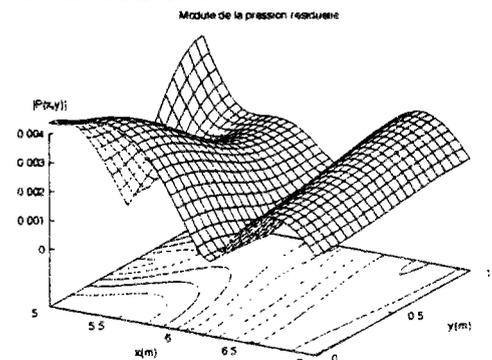


FIG. 3.41 - Distribution pour  $f=0.9$  du module de la pression résiduelle pour des positions de microphones 10-21 ( $M_0 = 100$ ) et la position de source 3.

## 3.8 Conclusion

Le placement optimal des sources secondaires et des microphones d'erreur dans un système de contrôle actif est un problème difficile.

Le placement optimal des sources secondaires est connu. Il s'agit de disposer une distribution continue de sources monopôlaires et dipôlaires de façon à obtenir une surface activement absorbante.

Nous avons montré que la discrétisation de cette surface absorbante demande un nombre de sources important si l'on veut garder une efficacité voisine de la distribution continue.

Si on se limite au placement d'un nombre discret de sources et de microphones, des méthodes spécialisées doivent être développées. En choisissant le maximum du module de la pression complexe comme fonction de coût, nous avons introduit une nouvelle méthode de placement pour un problème harmonique.

Cette méthode détermine d'abord un nombre suffisant de microphones d'erreur. Cela signifie qu'un nombre réduit de microphones, bien placés, assure la même atténuation du bruit que l'ensemble des microphones. Nous montrons aussi que ce nombre suffisant de microphones est lui-même borné par  $N + 1$  et  $2N + 1$  où  $N$  est le nombre de sources secondaires. La détermination du nombre et du placement des microphones est très rapide car il demande seulement la résolution d'un problème de programmation linéaire. Les microphones d'erreur sont alors placés aux maximums du module de la pression complexe résiduelle.

Le placement optimal des sources secondaires demande, quant à lui, la résolution d'un problème de programmation entière. Des bornes sur les amplitudes peuvent être introduites. Nous montrons que le temps de calcul est d'autant plus court que ces bornes sont faibles. Cette méthode a aussi l'avantage de fournir rapidement des solutions approchées ainsi qu'un estimateur de leur qualité.

Nous avons appliqué cette méthode de placement pour un problème de contrôle actif dans un guide d'onde droit bidimensionnel que l'on choisit d'abord infini. En-dessous de la  $N^{\text{ième}}$  fréquence de coupure, nous retrouvons que le placement optimal des sources secondaires se trouve sur les lignes nodales du premier mode évanescent et loin de la zone de silence. En ce qui concerne les microphones d'erreur, leur placement optimal se trouve dans la section amont de la zone de silence et aux maximums de la pression complexe résiduelle formée essentiellement de modes évanescents. Le placement des microphones sur les lignes nodales du premier mode évanescent n'apparaît optimal que lorsque les modes évanescents d'ordre supérieur sont négligés.

Au-dessus de la  $N^{\text{ième}}$  fréquence de coupure, nous montrons que les microphones doivent être généralement étalés le long de l'axe du guide.

Lorsque la terminaison aval est réfléchissante, il existe des fréquences critiques où les microphones ne peuvent pas observer un mode. À ces fréquences critiques, on peut montrer que, si on néglige les modes évanescents d'ordre supérieur, on se trouve dans le cas particulier où la solution pour l'amplitude des sources n'est plus unique. Si les modes évanescents d'ordre supérieur ne sont plus négligés, les microphones doivent être étalés le long de l'axe du guide.

Lorsque la terminaison amont est réfléchissante, il existe encore des fréquences critiques où les sources ne peuvent pas contrôler un mode. Les sources secondaires doivent aussi être étalés le long du guide à ces fréquences.

Il faut noter enfin que cette méthode de placement peut être appliquée à n'importe quel problème de contrôle actif. Elle demande en effet pour seule information les fonctions de transfert entre les sources et les microphones.

# Conclusion générale

Cette étude a mis en évidence quelques facteurs géométriques et mécaniques qui peuvent influencer l'efficacité d'un contrôle actif du bruit dans une gaine de ventilation.

La première partie de ce travail a permis d'évaluer l'efficacité d'un contrôle actif lorsque la gaine de ventilation comporte des discontinuités. Plus généralement nous avons voulu examiner les effets d'un contrôle hybride.

L'étude a mis en évidence l'importance des paramètres de l'**algorithme X-LMS**. La longueur des filtres ainsi que la fréquence d'échantillonnage influent largement sur l'efficacité du contrôle. Or la fréquence d'échantillonnage et la longueur des filtres sont limitées par la puissance de calcul du DSP. Il sera possible d'utiliser les résultats de l'étude pour déterminer le réglage optimum de ces paramètres en fonction de la rapidité du DSP et du coefficient de perte à l'intérieur de la gaine par exemple.

Une voie de recherche intéressante consiste aussi à évaluer l'importance du **couplage vibro-acoustique**. Une modélisation de la propagation couplée avec la détermination des modes guidés du guide d'onde vibro-acoustique est possible (Fuller 1983 [23] et Sinha 1992 [73]). Cette modélisation permettrait sans doute de prédire de quelle manière le guide se différencie d'un guide avec parois rigides. Cette modélisation permettrait d'évaluer le niveau de bruit rayonné à l'extérieur du guide ainsi que la forme des modes à l'intérieur du guide. Un contrôle mixte des vibrations de paroi et du bruit peut aussi être envisagé. Le contrôle doit alors faire intervenir des actionneurs comme les pots vibrants ou les matériaux piézo-électriques (Destuynder 1992 [17]).

Nous avons présenté numériquement et expérimentalement les résultats d'un contrôle actif dans un guide droit. L'effet des **terminaisons** a alors été mis en évidence. Une terminaison amont réfléchissante a pour conséquence que le contrôle d'un mode propagatif demande une amplitude de source très grande à certaines fréquences critiques. Les modes évanescents sont alors fortement excités. L'efficacité du contrôle y est donc réduite. Une terminaison réfléchissante a aussi pour conséquence que le filtre de contrôle optimal est long à moins que la source secondaire soit directive.

Sur trois exemples (revêtements absorbants, résonateur transversal et coude), nous avons mis en évidence l'intérêt d'un contrôle hybride. Les effets **dissipatifs, réactifs et diffusifs** améliorent les résultats du contrôle actif.

Nous avons aussi écrit un code de calcul afin de prédire l'efficacité du contrôle dans une gaine de géométrie complexe où, pour des raisons d'encombrement, les sources de contre-bruit doivent être placées à l'intérieur de la discontinuité. Dans cette étude, nous n'avons pas tenu compte de l'effet de l'**écoulement**. Les équations restent valables si le nombre de Mach et le nombre de Reynolds restent faibles. Sinon l'écoulement modifie les fonctions de transfert. S'il est turbulent, il constitue de plus une source de bruit spécialement dans les discontinuités. Dans ce cas, l'effet passif apporté par ces discontinuités peut être annulé par les sources de bruit d'origine turbulente. Si les sources de contre-bruit sont situées à l'intérieur de la discontinuité, le contrôle actif est incapable de contrôler ce bruit généré dans la discontinuité pour des raisons de causalité.

Le **positionnement** des sources de contre-bruit et des microphones d'erreur est im-

portant dans la mesure où il peut changer radicalement les résultats du contrôle actif. Ce problème est le sujet de la seconde partie de l'étude.

Pour une excitation harmonique, nous avons trouvé un nombre suffisant et la position des **microphones** d'erreur. Ils sont alors situés aux maximums du module de la pression complexe résiduelle. Le calcul se réduit à la résolution d'un unique problème de programmation linéaire. Nous montrons ainsi que la détermination de la position optimale des microphones d'erreur est un problème relativement simple.

Il n'en est pas de même pour le positionnement des **sources** secondaires. Notre méthode a cependant été adaptée de façon à accélérer l'énumération des positions candidates. Il est possible d'obtenir une énumération "implicite". Cette technique peut sans doute être améliorée grâce à des techniques de préprocessing telles que les présente Mac Keown (1990 [47]). Ces techniques cherchent à diminuer l'écart initial entre le problème relaxé à variables réelles, écrit sous forme de programmation linéaire, et la solution optimale entière. Certaines heuristiques présentées dans la littérature peuvent aussi s'avérer intéressantes.

En conclusion, les progrès de l'électronique permettent maintenant l'installation d'algorithmes de contrôle efficaces sur une gamme de fréquence de plus en plus large, avec un nombre de voies d'entrée et de sortie de plus en plus grand. Un système actif peut cependant aboutir à des performances très variables en fonction de paramètres physiques tels que la géométrie de la gaine, les conditions aux limites, la vitesse d'écoulement et enfin la position des microphones ou des sources.

Cela montre que, parallèlement aux progrès des algorithmes et de l'électronique, la modélisation et l'optimisation restent des outils indispensables.



# Annexe A

## Démonstration de la discrétisation d'une surface absorbante

Soit  $\Omega_i$  un ouvert borné et convexe de frontière  $\Gamma_i$  continûment différentiable. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continûment différentiables de  $\Gamma_i$ .

Soit  $\psi \in H^2(\Omega)$ .

$$\langle Q_0 | \psi \rangle = \int_{\Gamma_i} f \psi^* d\Gamma + \int_{\Gamma_i} g \frac{d\psi^*}{dn} d\Gamma \quad (\text{A.1})$$

Soit  $d \in \mathbf{R}$  avec  $0 \leq d \leq d_0$ . Soit  $h \in \mathbf{R}$  avec  $0 \leq h \leq h_0$ .

Prenons un maillage de  $N$  noeuds de  $\Gamma_i$  paramétré par  $h$  ( $h^2 N = \text{aire}\{\Gamma_i\}$ ). Les noeuds sont notés  $\underline{x}_m^h$  avec  $m$  variant de 0 à  $N-1$ . Soit  $\underline{n}(\underline{x}_m^h)$  la normale extérieure de  $\Gamma_i$  en  $\underline{x}_m^h$ .

Montrons que l'on peut écrire:

$$\begin{aligned} \langle Q_0 | \psi \rangle &= \sum_{m=0}^{m=N-1} \frac{h^2}{2} [f(\underline{x}_m^h) \psi^*(\underline{x}_m^{h+}) + f(\underline{x}_m^h) \psi^*(\underline{x}_m^{h-})] \\ &+ \sum_{m=0}^{m=N-1} \frac{h^2}{d} [g(\underline{x}_m^h) \psi^*(\underline{x}_m^{h+}) - g(\underline{x}_m^h) \psi^*(\underline{x}_m^{h-})] \\ &+ r_h(\psi) + r_d(\psi) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

avec

$$|r_h(\psi)| \leq C^h(d) h^{\frac{1}{2}} \|\psi\|_{H^2(\Omega)} \quad (\text{A.3})$$

et

$$|r_d(\psi)| \leq C^d d \|\psi\|_{H^2(\Omega)} \quad (\text{A.4})$$

**Lemme 1:** Montrons que :

$$\int_{\Gamma_i} |\psi(\underline{x}) - \psi(\underline{x} + d\underline{n}(\underline{x}))|^2 d\underline{x} \leq d^2 \|\psi\|_{H^1(\Omega)}^2$$

(A.5)

**Démonstration:** Supposons d'abord que  $\psi$  est une fonction infiniment différentiable et à support compact dans  $\Omega$ . Posons:

$$v(t) = \psi(\underline{x} + t d \underline{n}(\underline{x})) \quad t \in \mathbf{R} \quad (\text{A.6})$$

$$\psi(\underline{x}) - \psi(\underline{x} + d\underline{n}(\underline{x})) = v(0) - v(1) = - \int_0^1 v'(t) dt = -d \int_0^1 \nabla \psi(\underline{x} + t d\underline{n}(\underline{x})) \cdot \underline{n}(\underline{x}) dt \quad (\text{A.7})$$

Par suite

$$|\psi(\underline{x}) - \psi(\underline{x} + d\underline{n}(\underline{x}))|^2 \leq d^2 \int_0^1 |\nabla \psi(\underline{x} + t d\underline{n}(\underline{x})) \cdot \underline{n}(\underline{x})|^2 dt \quad (\text{A.8})$$

et

$$\int_{\Gamma_i} |\psi(\underline{x}) - \psi(\underline{x} + d\underline{n}(\underline{x}))|^2 d\underline{x} \leq d^2 \int_{\Gamma_i} d\underline{x} \int_0^1 |\nabla \psi(\underline{x} + t d\underline{n}(\underline{x})) \cdot \underline{n}(\underline{x})|^2 dt \quad (\text{A.9})$$

Or

$$d^2 \int_{\Gamma_i} d\underline{x} \int_0^1 |\nabla \psi(\underline{x} + t d\underline{n}(\underline{x})) \cdot \underline{n}(\underline{x})|^2 dt = d^2 \int_0^1 dt \int_{\Gamma_i} |\nabla \psi(\underline{x} + t d\underline{n}(\underline{x})) \cdot \underline{n}(\underline{x})|^2 d\underline{x} \quad (\text{A.10})$$

C'est-à-dire:

$$\int_{\Gamma_i} |\psi(\underline{x}) - \psi(\underline{x} + d\underline{n}(\underline{x}))|^2 d\underline{x} \leq d^2 \int_0^1 dt \int_{\Gamma_i} |\nabla \psi(\underline{x} + t d\underline{n}(\underline{x})) \cdot \underline{n}(\underline{x})|^2 d\underline{x} \quad (\text{A.11})$$

Introduisons maintenant la transformation bijective (car  $\Omega_i$  est convexe)  $G_t$ :

$$\begin{aligned} G_t : \Gamma_i &\rightarrow \Gamma_i^t \\ \underline{x} &\rightarrow \underline{x}' = \underline{x} + t d\underline{n}(\underline{x}) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

La transformation réciproque  $G_t^{-1}$  s'écrit:

$$\begin{aligned} G_t^{-1} : \Gamma_i^t &\rightarrow \Gamma_i \\ \underline{x}' &\rightarrow \underline{x} = Pr(\underline{x}') \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

où  $Pr(\underline{x}')$  est la projection de  $\underline{x}'$  sur  $\Gamma_i$  suivant la normale.

Ce changement de variables donne:

$$d^2 \int_0^1 dt \int_{\Gamma_i} |\nabla \psi(\underline{x} + t d\underline{n}(\underline{x})) \cdot \underline{n}(\underline{x})|^2 d\underline{x} = d^2 \int_0^1 dt \int_{\Gamma_i^t} |\nabla \psi(\underline{x}') \cdot \underline{n}(Pr(\underline{x}'))|^2 |J(td, \underline{x}')| d\underline{x}' \quad (\text{A.14})$$

$J(td, \underline{x}')$  est le jacobien de la transformation.  $|J(td, \underline{x}')| \leq 1$  car l'aire de  $\Gamma_i$  est inférieure à l'aire de  $\Gamma_i^t$ .

On en déduit que:

$$\int_{\Gamma_i} |\psi(\underline{x}) - \psi(\underline{x} + d\underline{n}(\underline{x}))|^2 d\underline{x} \leq d^2 \int_0^1 dt \int_{\Gamma_i^t} |\nabla \psi(\underline{x}')|^2 d\underline{x}' \quad (\text{A.15})$$

Si on note  $\omega$  l'ouvert compris entre  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_i^1$ , l'inégalité A.15 devient:

$$\int_{\Gamma_i} |\psi(\underline{x}) - \psi(\underline{x} + d\underline{n}(\underline{x}))|^2 d\underline{x} \leq d^2 \int_{\omega} |\nabla \psi(\underline{x})|^2 d\underline{x} \leq d^2 \int_{\Omega} |\nabla \psi(\underline{x})|^2 d\underline{x} \quad (\text{A.16})$$

Maintenant, pour  $\psi \in H^1(\Omega)$ , il existe une suite  $\psi_n$  de fonctions infiniment dérivables et à support compact telle que  $\psi_n \rightarrow \psi$  dans  $L_2(\Omega)$  et  $\nabla \psi_n \rightarrow \nabla \psi$  dans  $L_2(\omega)$ . On applique l'inégalité A.16 à  $\psi_n$  et à la limite on obtient l'inégalité A.5.

**Lemme 2:** Montrons que:

$$\int_{\Gamma_i} |\psi(\underline{x}) - \psi(\underline{x} + d\underline{n}(\underline{x})) + d\underline{\nabla}\psi(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})|^2 d\underline{x} \leq d^4 \|\psi\|_{H^2(\Omega)}^2$$

(A.17)

**Démonstration:** Supposons d'abord que  $\psi$  est une fonction infiniment différentiable et à support compact dans  $\Omega$ . Posons:

$$\begin{cases} v(t) = \psi(\underline{x} + t d\underline{n}(\underline{x})) - t d\underline{\nabla}\psi(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) & t \in \mathbf{R} \\ w(s, t) = \underline{\nabla}\psi(\underline{x} + s t d\underline{n}(\underline{x})) \cdot \underline{n}(\underline{x}) & s \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

$$\psi(\underline{x}) - \psi(\underline{x} + d\underline{n}(\underline{x})) + d\underline{\nabla}\psi(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = v(0) - v(1) = - \int_0^1 v'(t) dt \quad (\text{A.19})$$

$$\int_0^1 v'(t) dt = d \int_0^1 [\underline{\nabla}\psi(\underline{x} + t d\underline{n}(\underline{x})) \cdot \underline{n}(\underline{x}) - \underline{\nabla}\psi(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})] dt \quad (\text{A.20})$$

$$\int_0^1 v'(t) dt = d \int_0^1 [w(1, t) - w(0, t)] dt = d \int_0^1 dt \int_0^1 \frac{\partial w}{\partial s}(s, t) ds \quad (\text{A.21})$$

$$\int_0^1 v'(t) dt = d^2 \int_0^1 t dt \int_0^1 \frac{d^2 \psi}{d^2 \underline{n}}(\underline{x} + s t d\underline{n}(\underline{x})) ds \quad (\text{A.22})$$

Par suite

$$|\psi(\underline{x}) - \psi(\underline{x} + d\underline{n}(\underline{x})) + d\underline{\nabla}\psi(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})|^2 \leq d^4 \int_0^1 t^2 dt \int_0^1 \left| \frac{d^2 \psi}{d^2 \underline{n}}(\underline{x} + s t d\underline{n}(\underline{x})) \right|^2 ds \quad (\text{A.23})$$

et

$$\int_{\Gamma_i} |\psi(\underline{x}) - \psi(\underline{x} + d\underline{n}(\underline{x})) + d\underline{\nabla}\psi(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})|^2 d\underline{x} \leq d^4 \int_{\Gamma_i} d\underline{x} \int_0^1 t^2 dt \int_0^1 \left| \frac{d^2 \psi}{d^2 \underline{n}}(\underline{x} + s t d\underline{n}(\underline{x})) \right|^2 ds \quad (\text{A.24})$$

Or

$$d^4 \int_{\Gamma_i} d\underline{x} \int_0^1 t dt \int_0^1 \left| \frac{d^2 \psi}{d^2 \underline{n}}(\underline{x} + s t d\underline{n}(\underline{x})) \right|^2 ds = d^4 \int_0^1 t^2 dt \int_0^1 ds \int_{\Gamma_i} \left| \frac{d^2 \psi}{d^2 \underline{n}}(\underline{x} + s t d\underline{n}(\underline{x})) \right|^2 d\underline{x} \quad (\text{A.25})$$

Après un changement de variables  $u = st$ :

$$d^4 \int_{\Gamma_i} d\underline{x} \int_0^1 t dt \int_0^1 \left| \frac{d^2 \psi}{d^2 \underline{n}}(\underline{x} + s t d\underline{n}(\underline{x})) \right|^2 ds = d^4 \int_0^1 t dt \int_0^t du \int_{\Gamma_i} \left| \frac{d^2 \psi}{d^2 \underline{n}}(\underline{x} + u d\underline{n}(\underline{x})) \right|^2 d\underline{x} \quad (\text{A.26})$$

et

$$d^4 \int_0^1 t dt \int_0^t du \int_{\Gamma_i} \left| \frac{d^2 \psi}{d^2 \underline{n}}(\underline{x} + u d\underline{n}(\underline{x})) \right|^2 d\underline{x} \leq d^4 \int_0^1 du \int_{\Gamma_i} \left| \frac{d^2 \psi}{d^2 \underline{n}}(\underline{x} + u d\underline{n}(\underline{x})) \right|^2 d\underline{x} \quad (\text{A.27})$$

C'est-à-dire

$$\int_{\Gamma_i} |\psi(\underline{x}) - \psi(\underline{x} + \underline{n}(\underline{x})) + d\underline{\nabla}\psi(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})|^2 d\underline{x} \leq d^4 \int_0^1 du \int_{\Gamma_i} \left| \frac{d^2 \psi}{d^2 \underline{n}}(\underline{x} + u d\underline{n}(\underline{x})) \right|^2 d\underline{x} \quad (\text{A.28})$$

Par analogie des inégalités A.11 et A.28, la fin de la démonstration du lemme 2 est similaire au lemme 1.

**Lemme 3:** Soit  $\Gamma_m^h$  la  $m^{\text{ième}}$  maille d'un maillage de  $\Gamma$ ; paramétré par  $h$  et d'aire  $h^2$ . Soit  $\underline{x}_m^h$  un point de  $\Gamma_m^h$ . Tout point  $\underline{x}$  de  $\Gamma_m^h$  s'écrira:

$$\underline{x} = \underline{x}_m^h + \underline{h}(\underline{x}) \quad (\text{A.29})$$

avec  $|\underline{h}(\underline{x})| \leq C_1 h \forall \underline{x}$ . Montrons qu'il existe une constante  $K$  telle que:

$$\int_{\Gamma_m^h} |\psi(\underline{x}) - \psi(\underline{x}_m^h)|^2 d\underline{x} \leq K h^3 \|\psi\|_{H^2(\Omega)}^2$$

(A.30)

**Démonstration:**

Brezis (1987 [7]) montre que:

$$|\psi(\underline{x}) - \psi(\underline{y})| \leq C_2 |\underline{x} - \underline{y}|^{\frac{1}{2}} \|\psi\|_{H^2(\Omega)} \quad (\text{A.31})$$

D'où

$$|\psi(\underline{x}) - \psi(\underline{x}_m^h)| \leq C_2 C_1^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} \|\psi\|_{H^2(\Omega)} \quad (\text{A.32})$$

En intégrant sur  $\Gamma_m^h$  et en posant  $K = C_2^2 C_1$ , on obtient l'inégalité A.30.

**Lemme 4:** Montrons que:

$$\begin{aligned} \langle Q_0 | \psi \rangle &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Gamma_i} f(\underline{x}) \psi^*(\underline{x}) d\underline{x} + \int_{\Gamma_i} f(\underline{x}) \psi^*(\underline{x} + d\underline{n}(\underline{x})) d\underline{x} \right\} \\ &+ \frac{1}{d} \left\{ \int_{\Gamma_i} g(\underline{x}) \psi^*(\underline{x} + d\underline{n}(\underline{x})) d\underline{x} - \int_{\Gamma_i} g(\underline{x}) \psi^*(\underline{x}) d\underline{x} \right\} \\ &+ r_d(\psi) \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

avec

$$|r_d(\psi)| \leq C^d d \|\psi\|_{H^2(\Omega)} \quad (\text{A.34})$$

**Démonstration:**

$$r_d(\psi) = r_d^1(\psi) + r_d^2(\psi) \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{cases} r_d^1(\psi) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} f(\underline{x}) [\psi^*(\underline{x}) d\underline{x} - \psi^*(\underline{x} + d\underline{n}(\underline{x}))] d\underline{x} \\ r_d^2(\psi) = \int_{\Gamma_i} g(\underline{x}) [d\underline{\nabla} \psi^*(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) + \psi^*(\underline{x}) - \psi^*(\underline{x} + d\underline{n}(\underline{x}))] d\underline{x} \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

et

$$\begin{cases} |r_d^1(\psi)| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\int_{\Gamma_i} |f(\underline{x})|^2 d\underline{x}} \sqrt{\int_{\Gamma_i} |\psi^*(\underline{x}) d\underline{x} - \psi^*(\underline{x} + d\underline{n}(\underline{x}))|^2 d\underline{x}} \\ |r_d^2(\psi)| \leq \frac{1}{d} \sqrt{\int_{\Gamma_i} |g(\underline{x})|^2 d\underline{x}} \sqrt{\int_{\Gamma_i} |d\underline{\nabla} \psi^*(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) + \psi^*(\underline{x}) - \psi^*(\underline{x} + d\underline{n}(\underline{x}))|^2 d\underline{x}} \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

En appliquant les lemmes 1 et 2 aux inégalités A.37, on obtient:

$$\begin{cases} |r_d^1(\psi)| \leq \frac{d}{2} \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \sqrt{\int_{\Gamma_i} |f(\underline{x})|^2 d\underline{x}} \\ |r_d^2(\psi)| \leq d \|\psi\|_{H^2(\Omega)} \sqrt{\int_{\Gamma_i} |g(\underline{x})|^2 d\underline{x}} \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

En posant  $C^d = \sqrt{\max \left[ \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} |f(\underline{x})|^2 d\underline{x}, \int_{\Gamma_i} |g(\underline{x})|^2 d\underline{x} \right]}$ , on obtient l'inégalité A.34.

**Lemme 5:** *Montrons que:*

$$\int_{\Gamma_i} f(\underline{x}) \psi^*(\underline{x}) d\underline{x} = \sum_{m=0}^{m=N-1} h^2 f(\underline{x}_m^h) \psi^*(\underline{x}_m^h) + r_h(\psi) \quad (\text{A.39})$$

avec

$$|r_h(\psi)| \leq C^f h^{\frac{1}{2}} \|\psi\|_{H_2(\Gamma_i)} \quad (\text{A.40})$$

**Démonstration:**

$$r_h(\psi) = \sum_{m=0}^{m=N-1} \int_{\Gamma_m^h} f(\underline{x}) [\psi^*(\underline{x}) - \psi^*(\underline{x}_m^h)] d\underline{x} + \sum_{m=0}^{m=N-1} \int_{\Gamma_m^h} \psi^*(\underline{x}_m^h) [f(\underline{x}) - f(\underline{x}_m^h)] d\underline{x} \quad (\text{A.41})$$

$$|r_h(\psi)| \leq \sum_{m=0}^{m=N-1} \int_{\Gamma_m^h} |f(\underline{x})| |\psi(\underline{x}) - \psi(\underline{x}_m^h)| d\underline{x} + \sum_{m=0}^{m=N-1} \int_{\Gamma_m^h} |\psi(\underline{x}_m^h)| |f(\underline{x}) - f(\underline{x}_m^h)| d\underline{x} \quad (\text{A.42})$$

En notant  $C_3 = \max_{\underline{x} \in \Gamma_i} |f(\underline{x})|$  et  $C_4 = \max_{\underline{x} \in \Gamma_i} |\nabla f(\underline{x})|$  car  $\nabla f$  et  $f$  sont continues, l'inégalité A.42 devient:

$$|r_h(\psi)| \leq C_3 \sum_{m=0}^{m=N-1} \int_{\Gamma_m^h} |\psi(\underline{x}) - \psi(\underline{x}_m^h)| d\underline{x} + h C_1 C_4 \sum_{m=0}^{m=N-1} \int_{\Gamma_m^h} |\psi(\underline{x}_m^h)| d\underline{x} \quad (\text{A.43})$$

En remplaçant  $\psi(\underline{x}_m^h)$  par  $[\psi(\underline{x}_m^h) - \psi(\underline{x})] + \psi(\underline{x})$ :

$$|r_h(\psi)| \leq (C_3 + h C_1 C_4) \sum_{m=0}^{m=N-1} \int_{\Gamma_m^h} |\psi(\underline{x}) - \psi(\underline{x}_m^h)| d\underline{x} + h C_1 C_4 \int_{\Gamma_i} |\psi(\underline{x})| d\underline{x} \quad (\text{A.44})$$

Or en appelant  $A(\Gamma_i)$  l'aire de  $\Gamma_i$ :

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_i} |\psi(\underline{x})| d\underline{x} \leq \sqrt{A(\Gamma_i)} \|\psi\|_{H_2(\Gamma_i)} \leq \sqrt{A(\Gamma_i)} \|\psi\|_{H_2(\Omega)} \\ \int_{\Gamma_m^h} |\psi(\underline{x}) - \psi(\underline{x}_m^h)| d\underline{x} \leq h \sqrt{\int_{\Gamma_m^h} |\psi(\underline{x}) - \psi(\underline{x}_m^h)|^2 d\underline{x}} \end{cases} \quad (\text{A.45})$$

En utilisant le lemme 3 et les inégalités A.44 et A.45, on obtient:

$$|r_h(\psi)| \leq (C_3 + h C_1 C_4) \sqrt{K} h^{\frac{5}{2}} N \|\psi\|_{H_2(\Omega)} + h C_1 C_4 \sqrt{A(\Gamma_i)} \|\psi\|_{H_2(\Omega)} \quad (\text{A.46})$$

Sachant que  $N h^2 = A(\Gamma_i)$  (la surface  $\Gamma_i$  est divisée en  $N$  maille d'aire  $h^2$ ):

$$|r_h(\psi)| \leq (C_3 + h C_1 C_4) \sqrt{K} h^{\frac{1}{2}} A(\Gamma_i) \|\psi\|_{H_2(\Omega)} + h C_1 C_4 \sqrt{A(\Gamma_i)} \|\psi\|_{H_2(\Omega)} \quad (\text{A.47})$$

On trouve l'inégalité A.46 en prenant  $C^f = \sqrt{A(\Gamma_i)} \max \left[ (C_3 + h_0 C_1 C_4) \sqrt{A(\Gamma_i)} K, h_0^{\frac{1}{2}} C_1 C_4 \right]$ .

**Lemme 6:** *Montrons que:*

$$\begin{aligned}
\langle Q_0 | \psi \rangle &= \sum_{m=0}^{m=N-1} \frac{h^2}{2} [f(\underline{x}_m^h) \psi^*(\underline{x}_m^{h+}) + f(\underline{x}_m^h) \psi^*(\underline{x}_m^{h-})] \\
&+ \sum_{m=0}^{m=N-1} \frac{h^2}{d} [g(\underline{x}_m^h) \psi^*(\underline{x}_m^{h+}) - g(\underline{x}_m^h) \psi^*(\underline{x}_m^{h-})] \\
&+ r_h(d)(\psi) + r_d(\psi)
\end{aligned} \tag{A.48}$$

$$|r_d(\psi)| \leq C^d d \|\psi\|_{H^2(\Omega)} \tag{A.49}$$

avec

$$|r_h(d)(\psi)| \leq C^h(d) h^{\frac{1}{2}} \|\psi\|_{H^2(\Omega)} \tag{A.50}$$

**Démonstration:** On introduira  $C^g$  de manière analogue à  $C^f$ .

En utilisant les lemmes 4 et 5, on trouve immédiatement l'inégalité A.49. L'inégalité A.50 s'en déduit aussi en prenant  $C^h(d) = \left[ C^f + \frac{2C^g}{d} \right]$ .

## Annexe B

# Distribution de pression due à une distribution surfacique de monopôles sur une sphère

Soit  $\Gamma_a$  une sphère de centre  $\underline{x}_p = (0, 0, 0)$  et de rayon  $a$ . La distribution de pression due à une distribution de monopôles sur la sphère  $\Gamma_a$  s'écrit:

$$p_s(r) = Q_s \int_{\Gamma_a} \frac{e^{jk|\underline{x}-\underline{x}'|}}{4\pi|\underline{x}-\underline{x}'|} dx' \quad (\text{B.1})$$

On note  $Q^s = 4\pi a^2 Q_s$ , l'amplitude de la source totale.

En coordonnées sphériques, l'intégration donne:

$$p_s(r) = Q_s \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{jkr'(\theta)}}{4\pi r'(\theta)} a^2 \sin(\theta) d\phi d\theta \quad (\text{B.2})$$

avec  $r'^2(\theta) = (r - a\cos(\theta))^2 + a^2 \sin^2(\theta)$ . En intégrant sur la variable  $\phi$ , on obtient:

$$p_s(r) = Q_s \int_0^{\pi} \frac{e^{jkr'(\theta)}}{2r'(\theta)} a^2 \sin(\theta) d\theta \quad (\text{B.3})$$

Nous effectuons un premier changement de variables  $u = -\cos(\theta)$ :

$$p_s(r) = Q_s \int_{-1}^1 \frac{e^{jkr'(u)}}{2r'(u)} a^2 du \quad (\text{B.4})$$

avec

$$r'^2(u) = (r + au)^2 + a^2(1 - u^2) = r^2 + a^2 + 2rau.$$

Nous effectuons un second changement de variable  $t = r'(u)$ :

$$p_s(r) = Q_s \int_{|r-a|}^{r+a} \frac{e^{jkt}}{2r} a dt \quad (\text{B.5})$$

Nous pouvons maintenant directement intégrer:

$$p_s(r) = Q_s \frac{a}{2jkr} [e^{jk(r+a)} - e^{jk|r-a|}] \quad (\text{B.6})$$

ou

$$p_s(r) = Q^s \frac{e^{jk(r+a)} - e^{jk|r-a|}}{8\pi jkar} \quad (\text{B.7})$$

# Annexe C

## Maillage régulier d'une sphère

Nous avons choisi les positions  $\underline{x}_i$  de façon à obtenir un maillage assez régulier de la sphère. C'est-à-dire en coordonnées sphériques:

$$(\theta_i, \phi_j) = \left( \frac{i-1}{M-1}\pi, \frac{j-1}{M_i-1}2\pi \right) \quad (\text{C.1})$$

avec  $1 \leq i \leq M$  et  $1 \leq j \leq M_i$ .

Pour conserver la symétrie des points, nous avons choisi  $M_i$  tel que :

$$\begin{cases} M_i = E[M \sin(\theta_i)] & \text{si } E[M \sin(\theta_i)] \geq 2 \\ M_i = 0 & \text{si } E[M \sin(\theta_i)] < 2 \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

avec  $E[x]$  la partie entière de  $x$ .

Si nous avons  $M$  points sur un grand cercle de rayon  $R$ , nous avons pris  $M_i$  points sur un cercle de rayon  $R \sin \theta_i$ . Le nombre total  $N$  de noeuds est alors donné par:

$$N = \sum_{i=1}^M M_i \quad (\text{C.3})$$



# Annexe D

## Intégration numérique

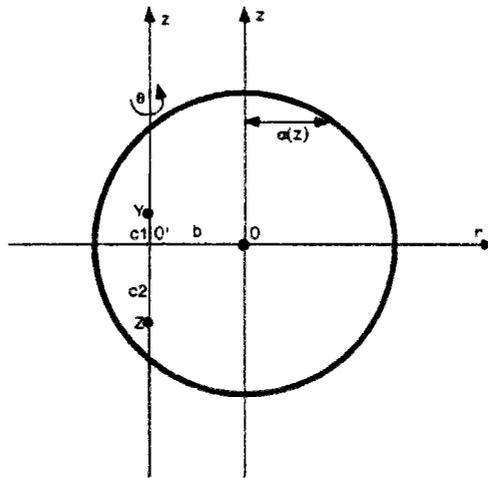


FIG. D.1 - Coupe de la sphère dans le plan  $(O, \underline{y}, \underline{z})$ .

Il est intéressant de diminuer la dimension de l'intégration numérique. Intégrer une fonction sur un maillage 3D est en effet très lourd en temps de calcul. Pour cela, nous avons tiré parti de la symétrie de révolution de la fonction intégrée par rapport à l'axe  $\underline{y} - \underline{z}$ .

Dans le plan  $(O, \underline{y}, \underline{z})$ , on peut définir la distance  $b$  et les ordonnées  $c_1$  et  $c_2$  qui sont des valeurs algébriques.

On peut alors réécrire  $p(\underline{y}, \underline{z})$  en coordonnées cylindriques dans le repère  $(O', r, z)$ .

$$p(\underline{y}, \underline{z}) = \int_{\Omega_m} \frac{e^{jk(\sqrt{(z-c_1)^2+r^2}-\sqrt{(z-c_2)^2+r^2})}}{16\pi^2\sqrt{(z-c_1)^2+r^2}\sqrt{(z-c_2)^2+r^2}} r dr dz d\theta \quad (D.1)$$

La fonction intégrée est indépendante de  $\theta$ . On définit le domaine angulaire d'intégration  $\theta(r, z)$  qui dépend de  $r$  et  $z$ . Le domaine d'intégration en  $r$  dépend aussi de  $z$ . On peut alors écrire:

$$p(\underline{y}, \underline{z}) = \int_{-R}^R \int_0^{b+a(z)} \theta(r, z) \frac{e^{jk(\sqrt{(z-c_1)^2+r^2}-\sqrt{(z-c_2)^2+r^2})}}{16\pi^2\sqrt{(z-c_1)^2+r^2}\sqrt{(z-c_2)^2+r^2}} r dz dr \quad (D.2)$$

avec

$$\alpha(z) = \sqrt{R^2 - z^2} \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{cases} \theta(r, z) = (1 + \text{signe}[\alpha(z) - b])\pi & \text{si } 0 \leq r \leq |\alpha - b| \\ \theta(r, z) = 2\cos^{-1}\left(\frac{r^2 + b^2 - \alpha^2}{2br}\right) & \text{si } |\alpha - b| \leq r \leq \alpha + b \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

Nous avons ensuite maillé la surface  $(z, r)$  avec  $-R \leq z \leq R$  et  $0 \leq r \leq \alpha(z) + b$ . Malgré la réduction de dimension de l'intégration numérique, le calcul reste long d'autant plus que l'intégration numérique est répétée  $N \times N$  fois pour évaluer tous les coefficients de la matrice  $M$ .

# Annexe E

## Unicité de la solution

Nous savons que:

$$p[\underline{Q}](z_m) = Q_p G(x_p | z_m) + \sum_{i=0}^{i=N-1} Q_i G(x_i | z_m) \quad (\text{E.1})$$

On définit la fonction  $J_0(\underline{Q})$  avec  $\underline{Q} \in \mathbb{C}^N$  et  $M_0 \geq N$ :

$$(0) \quad \min_{\underline{Q}} J_0(\underline{Q}) = \max_{m \in \{0, \dots, M_0-1\}} |p[\underline{Q}](z_m)| \quad (\text{E.2})$$

On introduit la matrice  $\underline{B}$  et le vecteur  $\underline{R}$  avec  $B_{kl} = G(x_l | z_k)$  et  $R_k = G(x_p | z_k)$ . On supposera que toute sous-matrice de  $\underline{B}$  formée de  $N$  lignes est inversible. Montrons alors que la solution du problème (0) est unique.

**Lemme 1:** Montrons que  $J_0(\underline{Q})$  est une fonction **convexe** de  $\mathbb{C}^N$ .

Soit  $\underline{Q}^0 \in \mathbb{C}^N$ . Il existe  $m_0$  tel que  $J_0(\underline{Q}^0) = |p[\underline{Q}^0](z_{m_0})|$ . Notons  $f(\underline{Q}) = |p[\underline{Q}](z_{m_0})|$ .  $f(\underline{Q})$  est une fonction convexe.  $\forall (\underline{Q}^1, \underline{Q}^2)$  tel que  $\underline{Q}_0 = (1-t)\underline{Q}^1 + t\underline{Q}^2$  avec  $t \in [0, 1]$ , la relation de convexité s'écrit:

$$f(\underline{Q}^0) \leq (1-t)f(\underline{Q}^1) + tf(\underline{Q}^2) \quad (\text{E.3})$$

Or  $f(\underline{Q}) \leq J_0(\underline{Q})$ . D'où

$$\boxed{J_0(\underline{Q}^0) \leq (1-t)J_0(\underline{Q}^1) + tJ_0(\underline{Q}^2)} \quad (\text{E.4})$$

$J_0(\underline{Q})$  est donc une fonction convexe de  $\mathbb{C}^N$ .

**Lemme 2:** Soit  $\underline{Q}^0$  une solution du problème (0) et  $E > 0$  le minimum. Montrons qu'il existe au moins  $N + 1$  entiers  $\alpha(m)$  tel que

$$|p[\underline{Q}^0](z_{\alpha(m)})| = E \quad (\text{E.5})$$

Montrons le lemme par l'absurde. En supposant qu'il y a seulement un nombre  $n$  égal à  $N$  d'égalités du type (E.5) (même raisonnement pour  $n < N$ ). Ces  $N$  indices  $\alpha(m)$  appartiennent

à l'ensemble  $F_1$ , les autres à l'ensemble  $F_2$ . Alors il existe  $\tilde{Q}(\epsilon)$  tel que pour tout  $0 \leq \epsilon \leq 1$  et pour tout  $m$  avec  $0 \leq m \leq N - 1$ :

$$|p[\underline{Q}^0 + \tilde{Q}](z_{\alpha(m)})| = E(1 - \epsilon) \quad (\text{E.6})$$

Il suffit par exemple que les  $N$  relations suivantes soient vérifiées:

$$\sum_{i=0}^{i=N-1} \tilde{Q}_i G(\underline{x}_i | z_{\alpha(m)}) = -\epsilon p[\underline{Q}^0](z_{\alpha(m)}) \quad (\text{E.7})$$

Notant  $B'_{kl} = G(\underline{x}_l | z_{\alpha(k)})$  et  $R'_k = p[\underline{Q}_0](z_{\alpha(k)})$ ,  $\tilde{Q}$  est donné par:

$$\tilde{Q} = -\epsilon \underline{B}'^{-1} \underline{R}' \quad (\text{E.8})$$

On note  $E' < E$  tel que:

$$E' = \max_{m \in F_2} |p[\underline{Q}^0](z_m)| \quad (\text{E.9})$$

On sait que:

$$J_0(\underline{Q}^0 + \tilde{Q}) = \max(\max_{m \in F_1} |p[\underline{Q}^0 + \tilde{Q}](z_m)|, \max_{m \in F_2} |p[\underline{Q}^0 + \tilde{Q}](z_m)|) \quad (\text{E.10})$$

$$J_0(\underline{Q}^0 + \tilde{Q}) = \max(E - \epsilon E, E' + g(\epsilon)) \quad (\text{E.11})$$

avec  $g(\epsilon)$  une fonction continue tel que  $g(0) = 0$ . Il existe donc  $\epsilon > 0$  tel que  $\max(E - \epsilon E, E' + g(\epsilon)) < E$  et  $E$  n'est donc pas minimum.

### Démonstration de l'unicité:

Soient  $\underline{Q}^1$  et  $\underline{Q}^2$  deux solutions du problème (0). Le minimum est noté  $E$ . Comme  $J_0(\underline{Q})$  est convexe,  $J_0(\underline{Q})$  est constante sur  $[\underline{Q}^1, \underline{Q}^2]$ .

Soit  $\underline{Q}(t) = (1 - t)\underline{Q}^1 + t\underline{Q}^2$  et  $f_m(t) = |p[\underline{Q}(t)](z_m)|$ . On sait alors que  $\forall m, \forall t \in [0, 1]$ :

$$f_m(t) \leq E \quad (\text{E.12})$$

On sait aussi que:

$$f_m(t) = |p[\underline{Q}^1](z_m) + t \sum_{i=0}^{i=N-1} (Q_i^2 - Q_i^1) G(\underline{x}_i | z_m)| \quad (\text{E.13})$$

On a vu au lemme 2 que pour une solution  $\underline{Q}(t)$ , il y a au moins  $N + 1$  inégalités effectivement réalisées comme égalités si  $E > 0$  ( $M_0 \geq N$  égalités si  $E = 0$ ). Dans tous les cas, on peut dire qu'il y a au moins  $N$  égalités réalisées.

Soit  $t_0 \in ]0, 1[$ . Soient  $\alpha(m)$  des points où il y a égalité pour  $t_0$  avec  $m$  variant de 0 à  $N - 1$ . C'est-à-dire:

$$f_{\alpha(m)}(t_0) = E \quad (\text{E.14})$$

Les relations (E.12) et (E.14) indiquent que le point  $t_0$  est un maximum des fonctions  $f_{\alpha(m)}(t)$ .

Notons  $b_m = \sum_{i=0}^{i=N-1} (Q_i^2 - Q_i^1)G(\underline{x}_i | \underline{z}_{\alpha(m)})$  et  $a_m = p[\underline{Q}^1](\underline{z}_{\alpha(m)}) + t_0 b_m$ .

Les relations (E.12) et (E.14) s'écrivent alors:

$$|a_m + (t - t_0)b_m| \leq |a_m| \quad \forall t \in [0, 1] \quad (\text{E.15})$$

C'est-à-dire:

$$(t - t_0)^2 |b_m|^2 \leq 2(t_0 - t)[\text{Re}(a_m)\text{Re}(b_m) + \text{Im}(a_m)\text{Im}(b_m)] \quad \forall t \in [0, 1] \quad (\text{E.16})$$

En en déduit que  $b_m = 0$ .

$$\boxed{\sum_{i=0}^{i=N-1} (Q_i^2 - Q_i^1)G(\underline{x}_i | \underline{z}_{\alpha(m)}) = 0} \quad (\text{E.17})$$

Avec l'hypothèse initiale d'indépendance, on en déduit que  $\underline{Q}^1 = \underline{Q}^2$ . D'où l'unicité de la solution.



# Annexe F

## Nombre suffisant de microphones d'erreur

Nous écrivons le problème de minimisation que nous appellerons (0):

$$(0) \quad \min_{\underline{Q}} J_0(\underline{Q}) = \max_{m \in \{0, \dots, M_0-1\}} |p[\underline{Q}](z_m)| \quad (\text{F.1})$$

$J_0(\underline{Q})$  est une fonction convexe (voir annexe E). Le problème de minimisation (0) a donc une solution  $\underline{Q}^0$ . Sous certaines conditions (voir annexe E), elle est unique. Notons  $J^0$  le minimum. Nous pouvons maintenant calculer  $p[\underline{Q}^0](z_m)$  la pression complexe pour un vecteur  $\underline{Q}^0$  à la position  $z_m$ .

Nous allons maintenant séparer les positions des microphones d'erreur en deux groupes suivant que le module de la pression complexe en ces points atteint  $J^0$  ou non.

Appelons  $G_1$  l'ensemble des indices  $m$  tels que:

$$|p[\underline{Q}^0](z_m)| = J^0 \quad (\text{F.2})$$

Appelons  $G_2$  l'ensemble des indices  $m$  tels que:

$$|p[\underline{Q}^0](z_m)| < J^0 \quad (\text{F.3})$$

On note  $M$  le nombre cardinal de l'ensemble  $G_1$ . Gardons maintenant seulement les  $M$  microphones de  $G_1$  et examinons le nouveau problème de minimisation où le nombre de microphones d'erreur est maintenant réduit:

$$(1) \quad \min_{\underline{Q}} J_1(\underline{Q}) = \max_{m \in G_1} |p[\underline{Q}](z_m)| \quad (\text{F.4})$$

Soit  $\underline{Q}^1$  la solution (toujours sous de bonnes conditions d'unicité) et  $J^1$  le minimum. Montrons que:

$$\boxed{\underline{Q}^1 = \underline{Q}^0} \quad (\text{F.5})$$

**Démonstration de l'égalité (F.5):**

Définissons la fonction scalaire  $f(\underline{Q}) = \max_{m \in G_1} |p[\underline{Q}](z_m)| - \max_{m \in G_2} |p[\underline{Q}](z_m)|$ . Cette fonction  $f(\underline{Q})$  est continue. Le signe de  $f(\underline{Q})$  détermine si le maximum du module de la pression complexe est situé pour un microphone de l'ensemble  $G^1$  ou  $G^2$ .

Notons:

$$\begin{cases} C_1 = \{\underline{Q} \in \mathbf{C}^N / f(\underline{Q}) \geq 0\} \\ C_2 = \{\underline{Q} \in \mathbf{C}^N / f(\underline{Q}) \leq 0\} \\ \Gamma = \{\underline{Q} \in \mathbf{C}^N / f(\underline{Q}) = 0\} \end{cases} \quad (\text{F.6})$$

$C_1 \neq \emptyset$  est assuré car  $f(\underline{Q}^0) > 0$ .

$C_1$  ( $C_2$ ) est l'ensemble des  $\underline{Q}$ , où un microphone mesurant le maximum du module de la pression complexe appartient à  $G_1$  (respectivement  $G_2$ ).

$$J^1 = \min_{\underline{Q}} \max_{m \in G_1} |P[\underline{Q}](z_m)| = \min(\min_{\underline{Q} \in C_1} \max_{m \in G_1} |p[\underline{Q}](z_m)|, \min_{\underline{Q} \in C_2} \max_{m \in G_1} |p[\underline{Q}](z_m)|) \quad (\text{F.7})$$

où  $\mathbf{C}^N$  is divisé en deux sous-ensembles  $C_1$  et  $C_2$ . Montrons que:

$$\boxed{\min_{\underline{Q} \in C_2} \max_{m \in G_1} |p[\underline{Q}](z_m)| \geq \min_{\underline{Q} \in C_1} \max_{m \in G_1} |p[\underline{Q}](z_m)|}$$

(F.8)

Ecrivons  $g(\underline{Q}) = \max_{m \in G_1} |p[\underline{Q}](z_m)|$ . L'équation (F.8) revient à démontrer que:

$$\min_{\underline{Q} \in C_2} g(\underline{Q}) \geq \min_{\underline{Q} \in C_1} g(\underline{Q}) \quad (\text{F.9})$$

**Lemme 1: Démonstration de l'inégalité (F.9):**

Cette inégalité vient de la convexité de la fonction  $g(\underline{Q})$  (voir annexe E).

Pour chaque  $\underline{Q}^2 \in C_2$ ,  $f(\underline{Q}^2) \leq 0$  et il existe un réel  $t \in ]0, 1]$  ( $f(\underline{Q}^0) > 0$ ) tel que  $\underline{Q} = (1-t)\underline{Q}^0 + t\underline{Q}^2 \in \Gamma$  à cause de la continuité de  $f(\underline{Q})$ .

Comme  $g(\underline{Q})$  est convexe:

$$g(\underline{Q}) \leq (1-t)g(\underline{Q}^0) + tg(\underline{Q}^2) \quad (\text{F.10})$$

$$g(\underline{Q}) - g(\underline{Q}^0) \leq t(g(\underline{Q}^2) - g(\underline{Q}^0)) \quad (\text{F.11})$$

Or pour tout  $\underline{Q} \in C_1$ ,  $\max_{m \in G_2} |p[\underline{Q}](z_m)| \leq \max_{m \in G_1} |p[\underline{Q}](z_m)|$ .

Cela entraîne que:

$$\forall \underline{Q} \in C_1 \quad g(\underline{Q}) = \max_{m \in G_1 \cup G_2} |p[\underline{Q}](z_m)| = J_0(\underline{Q}) \quad (\text{F.12})$$

$\underline{Q}^0$ , la solution du problème (0), appartient à  $C_1$ . C'est donc le minimum de  $g(\underline{Q})$  avec  $\underline{Q} \in C_1$ . Cela entraîne que:  $\forall \underline{Q} \in C_1 \quad g(\underline{Q}) \geq g(\underline{Q}^0)$ . En particulier  $\forall \underline{Q} \in \Gamma \quad g(\underline{Q}) \geq g(\underline{Q}^0)$ . On conclut donc avec F.11 que:

$$g(\underline{Q}^2) \geq g(\underline{Q}^0) \quad (\text{F.13})$$

On montre donc l'inégalité (F.9).

Avec le lemme 1, on a alors:

$$J^1 = \min_{\underline{Q} \in C_1} \max_{m \in G_1} |p[\underline{Q}](z_m)| \quad (\text{F.14})$$

D'après l'équation (F.12), cela devient:

$$J^1 = \min_{\underline{Q} \in C_1} \max_{m \in G_1 \cup G_2} |p[\underline{Q}](z_m)| = \min_{\underline{Q} \in C_1} J_0(\underline{Q}) = J_0(\underline{Q}_0) = J^0 \quad (\text{F.15})$$

Comme on a fait des hypothèses garantissant l'unicité de la solution, on en déduit que:

$$\boxed{\underline{Q}^1 = \underline{Q}^0} \quad (\text{F.16})$$



# Bibliographie

- [1] **Alfredson R.J.** *The propagation of sound in a circular duct of continuously varying cross-sectional area.* *J. Sound. Vib.*, 23(4):433–442, 1972.
- [2] **Asano F., Suzuki Y., Sone T. et Swanson D.** *Optimization of control source location in active control systems.* pages 489–498, Newport Beach, July 1995. Active 95.
- [3] **Astley R.J. et Eversman W.** *A finite element method for transmission in non-uniform ducts without flow: comparison with the method of weighted residuals.* *J. Sound. Vib.*, 57(3):367–388, 1978.
- [4] **Baek K.H. et Elliott S.J.** *Natural algorithms for choosing source locations in active control systems.* *J. Sound. Vib.*, 186(2):245–267, 1995.
- [5] **Benzaria E. et Martin V.** *Secondary source locations in active noise control: selection or optimization?* *J. Sound. Vib.*, 173(1):137–144, 1994.
- [6] **Benzaria E. et Martin V.** *Constrained optimization of secondary source locations: multipolar arrangements.* pages 499–510, Newport Beach, July 1995. Active 95.
- [7] **Brezis H.** Analyse fonctionnelle: Théorie et applications. Masson, 1987.
- [8] **Bruggeman J.C.** *The propagation of low-frequency sound in a two-dimensional duct system with  $T$  joints et right angle bends: theory and experiment.* *J. Acoust. Soc. Am.*, 82(3):1045–1051, 1987.
- [9] **Bruneau A.M., Bruneau M., Herzog Ph. et Kergomard J.** *Boundary layer attenuation of higher order modes in waveguides.* *J. Sound. Vib.*, 119(1):15–27, 1987.
- [10] **Bruneau M., Herzog Ph., Kergomard J. et Polack J.D.** *General formulation of the dispersion equation in bounded visco-thermal fluid and application to some simple geometries.* pages 441–451, North-Holland, 1989. Wave motion 11.
- [11] **Burgess J.C.** *Active adaptive sound control in a duct: A computer simulation.* *J. Acoust. Soc. Am.*, 70(3):715–726, 1981.
- [12] **Cheng C.Y.R., Seybert A.F. et Wu T.W.** *A multidomain boundary element solution for silencer and muffler performance prediction.* *J. Sound. Vib.*, 151(1):119–129, 1991.

- [13] **Cremer L.** *On the acoustic boundary layer outside a rigid wall.* *Arch. Elektr. Uebertr.* 2, 235, 1948.
- [14] **Curtis A.R.** The theory and application of quadratic minimization in the active reduction of sound and vibration. PhD thesis, The university of Southampton, 1988.
- [15] **Dawson T.W. et Fawcett J.A.** *A boundary integral equation method for acoustic scattering matrix in a wave guide with nonplanar surface.* *J. Acoust. Soc. Am.*, 87:1110–1125, 1990.
- [16] **Delany M.E. et Bazley E.N.** *Acoustical properties of fibrous absorbent materials.* *Applied Acoustics*, 3:105–116, 1970.
- [17] **Destuynder P. et Legrain I.** *Contrôle actif de vibrations par éléments piézo-électriques.* *La Recherche Aéronautique*, 5:1–14, Septembre-Octobre 1992.
- [18] **Doak M.E.** *Excitation, transmission and radiation of sound from sources distributions in hard-walled ducts of finite length (II).* *J. Sound. Vib.*, 31(2):137–174, 1973.
- [19] **Elliott S.J., Stothers J.M. et Nelson P.A.** *A multiple error L.M.S. algorithm et its application to the active control of sound and vibration.* *IEEE Transaction*, ASSP 35(10), 1987.
- [20] **El Raheb M. et Wagner P.** *Acoustic loading in planar networks.* *J. Sound. Vib.*, 88(2):151–162, 1983.
- [21] **Eversman W., Cook E.L. et Beckermeier R.J.** *A method of weighted residuals for the investigation of sound transmission in non-uniform ducts without flow.* *J. Sound. Vib.*, 38(1):105–123, 1975.
- [22] **Firth D. et Fahy F.J.** *Acoustics characteristics of circular bends in pipes.* *J. Sound. Vib.*, 97(2):287–303, 1984.
- [23] **Fuller C.R.** *The input mobility of an infinite circular cylindrical elastic shell filled with fluid.* *J. Sound. Vib.*, 87(3):409–427, 1983.
- [24] **Furnell G.D. et Bies D.A.** *Matrix analysis of acoustic wave propagation within curved ducting systems.* *J. Sound. Vib.*, 132(2):245–263, 1989.
- [25] **Galaitis A.G. et Vér I.L.** *Passive silencers and lined ducts.* In Noise and vibration control engineering, chapter 10, pages 367–427. John Wiley and sons, Inc., 1992.
- [26] **Garcia A. et Kergomard J.** *Discontinuités dans les guides acoustiques aux basses fréquences: une revue des méthodes analytiques et numériques.* *Revue d'acoustique*, 79:38–50, 1986.
- [27] **Gaufrey A. et Burt J.** *Solving the anti-noise problem by secondary point sources.* *Acoustic letters*, 11(9):161–165, 1988.

- [28] **Guicking D.** *On the invention of active noise control by Paul Lueg.* *J. Acoust. Soc. Am.*, 87(5):2251–2254, 1990.
- [29] **Hadley G.** Non linear and dynamic programming. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, 1964.
- [30] **Hamdi M.A.** *Une formulation variationnelle par équations intégrales pour la résolution de l'équation de Helmholtz avec des conditions aux limites mixtes.* *C. R. Acad. Sc.*, (II):17–21, 1981.
- [31] **Hirsch W.M. et Dantzig G.B.** *The fixed charge problem.* *Naval. Res. Log. Quart.*, 15:413–424, 1968.
- [32] **Hudde H.** *Acoustical higher-order mode scattering matrix of circular non-uniform lossy tubes without flow.* *J. Acoust. Soc. Am.*, 85(6):2316–2330, 1989.
- [33] **Hudde H. et Letens U.** *Scattering matrix of a discontinuity with a nonrigid wall in a lossless circular duct.* *J. Acoust. Soc. Am.*, 78(5):1826–1837, 1985.
- [34] **Jessel M.J.M. et Mangiante G.A.** *Active sound absorber in an air duct.* *J. Sound. Vib.*, 23(3):383–390, 1972.
- [35] **Jones D.S.** Acoustic and electromagnetic waves, pages 229–230. Oxford Science publication, 1986.
- [36] **Karal F.C.** *The analogous acoustical impedance for discontinuities and constrictions of circular cross section.* *J. Acoust. Soc. Am.*, 25(2):327–334, 1953.
- [37] **Kergomard J.** *Calculation of discontinuities in waveguides using mode-matching method: an alternative to the scattering matrix approach.* *J. Acoustique*, 4:111–138, 1991.
- [38] **Kergomard J., Garcia A., Tagui G. et Dalmont J.P.** *Analysis of higher order mode effects in an expansion chamber using modal theory and equivalent electrical circuits.* *J. Sound. Vib.*, 129(3):457–475, 1989.
- [39] **Khetabbi A.** Etudes de discontinuités dans les guides d'ondes acoustiques bidimensionnels par décomposition modale et transformation conforme. PhD thesis, Université du Maine, 1994.
- [40] **Kim J.K. et Ih J.G.** *On the positioning of control sources for active noise control in 3-dimensional enclosed space.* pages 510–518, Newport Beach, July 1995. Active 95.
- [41] **Kirchhoff G.** *Ueber den Einfluss der Waermeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung.* *Ann. Phys. Chem.*, 134:177–193, 1868.
- [42] **Kirsch U.** *Optimal design of structural control systems.* *Eng. optimization*, 17:141–155, 1991.
- [43] **Land A.H. et Doig A.G.** *An automatic method for solving discrete programming problems.* *Econometrica*, 28:497–520, 1960.

- [44] **Laugesen S. et Johannesen P.T.** Experimental study of an active control system for multimodal sound propagation in ducts. In *Active*, pages 441–450, 1995.
- [45] **Lions J.L. et Magenes E.** Non homogeneous boundary value problems and applications, volume 1. Springer-Verlag, 1972.
- [46] **Lueg P.** *Process of silencing sound oscillations. U.S. Patent*, 2,043,416, 1936.
- [47] **Mc Keown P.G. et Ragsdale C.T.** *A computational study of using preprocessing and stronger formulations to solve large general fixed charge problems. Computers Opns. Research*, 17(1):9–16, 1990.
- [48] **Miles J.H.** *Acoustic transmission matrix of a variable area duct or nozzle carrying a compressible subsonic flow. J. Acoust. Soc. Am.*, 69(6):1577–1586, 1981.
- [49] **Miles J.W.** *The analysis of plane discontinuities in cylindrical tubes. Part I. J. Acoust. Soc. Am.*, 17:259–272, 1946.
- [50] **Miles J.W.** *The analysis of plane discontinuities in cylindrical tubes. Part II. J. Acoust. Soc. Am.*, 17:272–285, 1946.
- [51] **Mittra R. et Lee J.K.** *Analytical technique in the theory of guided waves. The Macmillan Company N.Y.*, 1971.
- [52] **Morishita T., Yamagushi C., Tanaka T., Taki M. et Mori T.** Active control of noise including higher-order acoustic modes propagating in a duct. In *Internoise*, pages 1373–1376, 1994.
- [53] **Morse P. et Ingard U.** Theoretical Acoustics. Mc Graw Hill, 1968.
- [54] **Munjal M.L et Eriksson L.J.** *Analysis of a hybrid noise control system for a duct. J. Acoust. Soc. Am.*, 86(2):832–834, 1989.
- [55] **Nayroles B., Touzot G. et Villon P.** *Using the diffuse approximation for optimizing the location of anti-sound sources. J. Sound. Vib.*, 171(1):1–21, 1994.
- [56] **Nelson P.A. et Elliott S.J.** Active control of sound, chapter 5. Academic Press, 1992.
- [57] **Nelson P.A. et Elliott S.J.** Active control of sound, chapter 9. Academic Press, 1992.
- [58] **Norris A.N. et Sheng I.C.** *Acoustic radiation from a circular pipe with infinite flange. J. Sound. Vib.*, 135(1):85–93, 1989.
- [59] **Nouvel J.F., Delemotte V. et Carme C.** *Aeraulique et silencieux actifs. In Application du contrôle actif à la réduction des bruits et vibrations*, pages 153–160. CETIM, 1995.

- [60] **Okamoto Y., Boden H. et Abom M.** *Active noise control in ducts via side-branch resonators.* *J. Acoust. Soc. Am.*, 96(3):1533–1538, 1994.
- [61] **Pierce A.D.** Effects of viscosity and other dissipative processes. In *Acoustics: an introduction to its physical principles and applications*, chapter 10, pages 367–427. McGraw-Hill Book Company, 1992.
- [62] **Quinn D.W.** *Integral equation methods in duct acoustics for nonuniform ducts with variable impedance.* *AIAA journal-Technical notes*, 15(2):278–281, 1977.
- [63] **Rao S.S., Pan T.S. et Venkayya V.B.** *Optimal placement of actuators in actively controlled structures using genetic algorithms.* *AIAA journal*, 29(6):942–943, 1991.
- [64] **Raviart P.A. et Thomas J.M.** *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, chapter 6. Masson, 1983.
- [65] **Roure A.** *Propagation guidée. Etude des discontinuités.* PhD thesis, Université d'Aix-Marseille, 1976.
- [66] **Roure A.** *Propagation du son dans des conduits à section continûment variable.* Marseille, septembre 1977. Euromech 94.
- [67] **Roure A.** *Self adaptative broadband active sound control systems.* *J. Sound. Vib.*, 101(3):429–441, 1985.
- [68] **Sanchez J.H. et Sanchez E.P.** *Vibration et coupling of continuous systems.* Springer, 1989.
- [69] **Schwartz L.** *Théorie des distributions.* Hermann Paris, 1966.
- [70] **Sergent P.** *Optimal placement of secondary sources and error microphones for active noise control.* pages 661–671, Newport Beach, July 1995. Active 95.
- [71] **Sergent P.** *Optimal placement of sources for active noise control.* *Acta Acustica*, 3:47–57, 1995.
- [72] **Sergent P. et Duhamel D.** *Propagation acoustique dans une discontinuité d'un guide d'onde: application au contrôle actif.* *Méc. Indust. et Mat.*, 47(2):296–299, 1994.
- [73] **Sinha B.K., Plona T.J., Kostek S. et Chang S.K.** *Axisymmetric wave propagation in fluid-loaded cylindrical shells.* *J. Acoust. Soc. Am.*, 92(2):1132–1143, 1992.
- [74] **Stell J.D. et Bernhard R.J.** *Active control of sound in acoustic waveguides, part I: considerations for implementation in ducts.* *J. Sound. Vib.*, 173(2):179–196, 1994.
- [75] **Stell J.D. et Bernhard R.J.** *Active control of sound in acoustic waveguides, part II: considerations for implementation in ducts.* *J. Sound. Vib.*, 173(2):197–215, 1994.
- [76] **Swinbanks M.A.** *The active control of sound propagation in long ducts.* *J. Sound. Vib.*, 27(3):411–436, 1973.

- [77] **Taha H.A.** Integer programming. Academic Press, 1975.
- [78] **Tam C.K.W.** *A study of sound transmission in curved duct bends by the galerkin method*. *J. Sound. Vib.*, 45(1):91-104, 1976.
- [79] **Thompson C.** *Linear inviscid wave propagation in a waveguide having a single boundary discontinuity: part I: theory*. *J. Acoust. Soc. Am.*, 75(2):346-355, 1984.
- [80] **Thompson C.** *Linear inviscid wave propagation in a waveguide having a single boundary discontinuity: part II: application*. *J. Acoust. Soc. Am.*, 75(2):356-362, 1984.
- [81] **Widrow B., Shur D. et Shaffer S.** On adaptative inverse control. In *15th Asilomar Conference on circuits, systems and computers*, pages 185-189, 1981.
- [82] **Wilcox C.H.** *A generalization of theorems of Rellich and Atkinson*. *Proc. Am. Math. Soc.*, 7:271-276, 1956.
- [83] **Yaich A.** Cas pratique d'utilisation du contrôle actif pour l'atténuation du niveau sonore dans les installations de climatisation, ventilation et chauffage. In *Application du contrôle actif à la réduction des bruits et vibrations*, pages 117-123. CETIM, 1995.
- [84] **Yang T.C., Tseng C.H. et Ling S.F.** *Constrained optimization of active noise control systems in enclosures*. *J. Acoust. Soc. Am.*, 95(6):3390-3399, 1994.
- [85] **Zavadaskaya M.P., Popov. A.V. et Egelskii B.L.** *Approximation of wave potentials in the active suppression of sound fields by the malyuzhinets method*. *Sov. Phys. Acoust.*, 21(5):451-454, 1974.
- [86] **Zeter A.C. et Hansen C.H.** *Active control of higher-order acoustic modes in ducts*. *J. Acoust. Soc. Am.*, 92(1):244-257, 1992.
- [87] **Zeter A.C. et Hansen C.H.** *A comparison of error sensor strategies for the active control of duct noise*. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(2):841-848, 1994.