

Régularisation de problèmes inverses à l'aide de l'équation de diffusion, avec application à l'assimilation variationnelle de données océaniques

Soutenance de thèse de Isabelle Mirouze

CERFACS / CNRS-UMR 5219

17 septembre 2010



Introduction

L'assimilation
variotionnelle

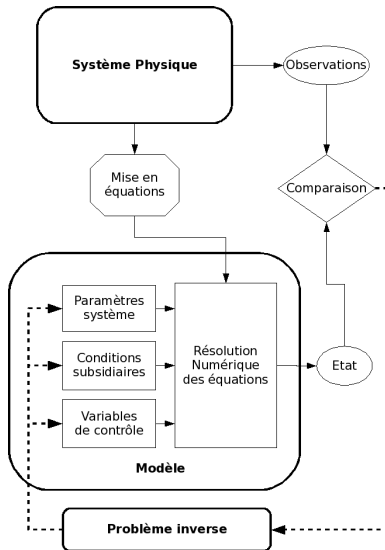
La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Un problème est **mal posé** au sens de Hadamard si :

- 1 il n'existe pas de solution
- 2 la solution n'est pas unique
- 3 la solution n'est pas stable

Il faut alors le **régulariser** :

- Information *a priori*
- Critères de sélection
- ...

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

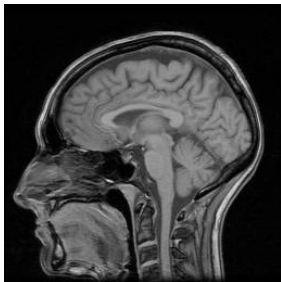
Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives



Imagerie médicale
<http://www.rdgn.ucl.ac.be/fr/>



Acoustique
<http://www.dossiers.latroupeduroy.fr/>



EFE

Sismologie
<http://planetevivante.wordpress.com/>



Météorologie
<http://france.meteofrance.com/>

Introduction

L'assimilation
variacionnelle

La matrice B

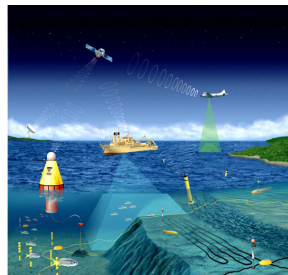
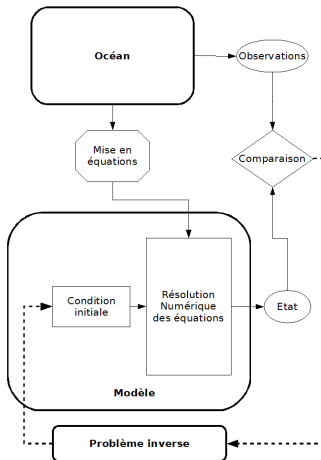
Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

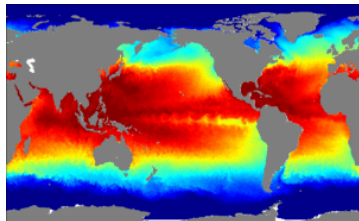
Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives



<http://www.oceanleadership.org/>



<http://www.mercator-ocean.fr/>

- Noyau
- Frontières
- Numérique

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Applications :

- Fournir des **conditions initiales pour les prévisions climatiques**
 - Mensuelles, saisonnières, pluriannuelles
 - Modèles globaux à plutôt basse résolution ($\approx 1^\circ$)
- Fournir des **conditions initiales pour les prévisions océaniques**
 - Quelques jours à quelques semaines
 - Modèles globaux, régionaux, côtiers à résolution moyenne ou haute ($\approx 1/4^\circ$, $\approx 1/12^\circ$, ...)
- Reconstruire l'histoire de l'océan (**réanalyses**)
 - Modèles globaux à plutôt basse ou moyenne résolution

Méthodes :

- **Séquentielles** : Interpolation optimale, Filtre de Kalman
- **Variationnelles** : 3D-Var et 4D-Var

- Noyau
- Frontières
- Numérique

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Applications :

- Fournir des conditions initiales pour les prévisions climatiques
 - Mensuelles, saisonnières, pluriannuelles
 - Modèles globaux à plutôt basse résolution ($\approx 1^\circ$)
- Fournir des conditions initiales pour les prévisions océaniques
 - Quelques jours à quelques semaines
 - Modèles globaux, régionaux, côtiers à résolution moyenne ou haute ($\approx 1/4^\circ$, $\approx 1/12^\circ$, ...)
- Reconstruire l'histoire de l'océan (réanalyses)
 - Modèles globaux à plutôt basse ou moyenne résolution

Méthodes :

- Séquentielles : Interpolation optimale, Filtre de Kalman
- Variationnelles : 3D-Var et 4D-Var

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

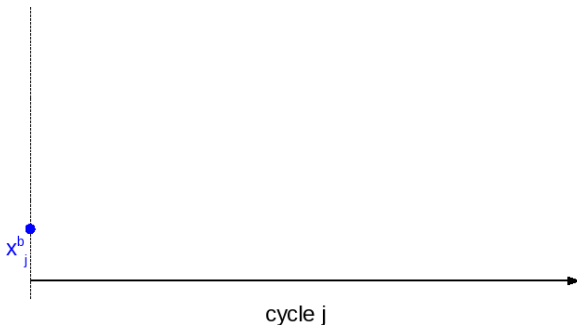
Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives



Cycle ou fenêtre d'assimilation : $[t_0, t_N]$

Vecteur d'ébauche x^b : état a priori du modèle à t_0

Introduction

L'assimilation variationnelle

La matrice B

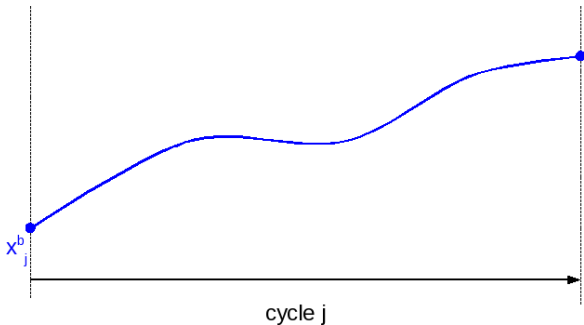
Diffusion implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en 2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions, perspectives



Cycle ou fenêtre d'assimilation : $[t_0, t_N]$

Vecteur d'ébauche x^b : état a priori du modèle à t_0

Introduction

L'assimilation
variationnelle

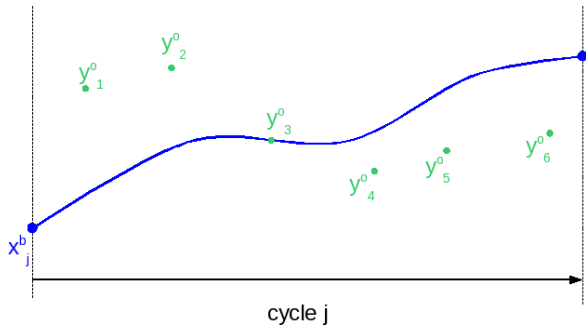
La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Cycle ou fenêtre d'assimilation : $[t_0, t_N]$

Vecteur d'ébauche x^b : état a priori du modèle à t_0

Vecteur d'observation y^o : y_i^o à l'instant t_i

Introduction

L'assimilation
variationnelle

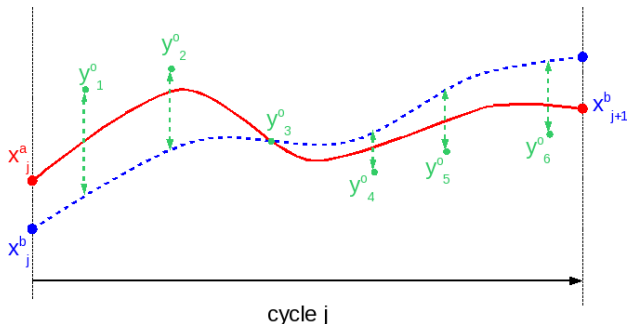
La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Cycle ou fenêtre d'assimilation : $[t_0, t_N]$

Vecteur d'ébauche x^b : état a priori du modèle à t_0

Vecteur d'observation y^o : y_i^o à l'instant t_i

Vecteur d'analyse x^a : combinaison ébauche + observations

Formulation 4D-Var

Introduction

L'assimilation
variationnelle

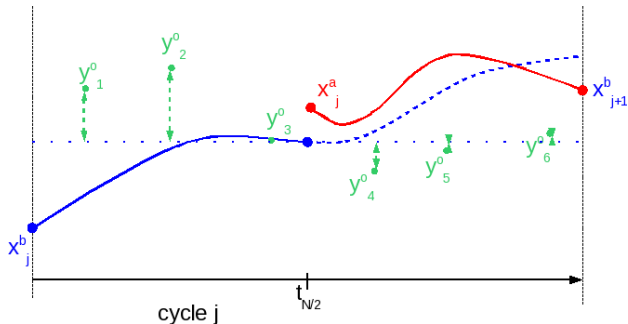
La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Cycle ou fenêtre d'assimilation : $[t_0, t_N]$

Vecteur d'ébauche x^b : état a priori du modèle à $t_{N/2}$

Vecteur d'observation y^o : y_i^o à l'instant t_i

Vecteur d'analyse x^a : combinaison ébauche + observations

Formulation 3D-Var

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Vecteur d'ébauche x^b de taille n ($\approx 10^7$)

- Variables : Température, salinité, courant zonal, courant méridien, hauteur d'eau en surface, ...
- Grille du modèle

Vecteur d'observation y^o de taille p

- Variables : fonction des instruments de mesure
- Grille des observations
- Mesures effectuées sur la fenêtre d'assimilation $[t_0, t_N]$

Opérateur d'observation (éventuellement non linéaire) \mathcal{H}

- Interpolation de la grille du modèle vers la grille des observations
- Correspondance des variables du modèle par rapport aux variables observées

- Noyau
- Frontières
- Numérique

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

\mathbf{x}^t : vecteur représentant l'état vrai de l'océan

Hypothèses :

Erreurs ε^b et ε^o gaussiennes

$$\mathbf{x}^b = \mathbf{x}^t + \varepsilon^b \quad \text{avec} \quad E[\varepsilon^b] = 0, \quad E[\varepsilon^b (\varepsilon^b)^T] = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{y}^o = \mathcal{H}[\mathbf{x}^t] + \varepsilon^o \quad \text{avec} \quad E[\varepsilon^o] = 0, \quad E[\varepsilon^o (\varepsilon^o)^T] = \mathbf{R}$$

$$E[\varepsilon^b (\varepsilon^o)^T] = \mathbf{0}$$

Fonction coût (maximum de vraisemblance) :

$$J(\mathbf{x}) = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b)^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b)}_{J_b} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathcal{H}[\mathbf{x}] - \mathbf{y}^o)^T \mathbf{R}^{-1}(\mathcal{H}[\mathbf{x}] - \mathbf{y}^o)}_{J_o}$$

Le 4D-Var prend en compte l'aspect temporel en transportant par le modèle le vecteur \mathbf{x} aux instants d'observation.

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

- 1 Introduction
- 2 L'assimilation variationnelle
- 3 La matrice des covariances d'erreur d'ébauche
- 4 L'opérateur de diffusion implicite 1D et sa normalisation
- 5 Extension à des fonctions de corrélation en 2D ou 3D, application au système NEMOVAR
- 6 Conclusions et perspectives

- Noyau
- Frontières
- Numérique

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b)^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) + \frac{1}{2}(\mathcal{H}[\mathbf{x}] - \mathbf{y}^o)^T \mathbf{R}^{-1}(\mathcal{H}[\mathbf{x}] - \mathbf{y}^o)$$

Difficultés de la minimisation de la fonction coût

- Problème de **grande taille**
- \mathcal{H} non linéaire \Rightarrow **minima locaux**

- Noyau
- Frontières
- Numérique

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b)^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) + \frac{1}{2}(\mathcal{H}[\mathbf{x}] - \mathbf{y}^o)^T \mathbf{R}^{-1}(\mathcal{H}[\mathbf{x}] - \mathbf{y}^o)$$

Difficultés de la minimisation de la fonction coût

- Problème de grande taille
- \mathcal{H} non linéaire \Rightarrow minima locaux

Formulation incrémentale (Courtier *et al.*, 1994)

basée sur la méthode de Gauss-Newton

- Linéarisation de \mathcal{H} au voisinage de \mathbf{x}^b : \mathbf{H}

Incrément : $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^b$

Linéarisation : $\mathcal{H}[\mathbf{x}] = \mathcal{H}[\mathbf{x}^b] + \mathbf{H}\delta \mathbf{x}$

Innovation : $\mathbf{d} = \mathbf{y}^o - \mathcal{H}[\mathbf{x}^b]$

$$J(\delta \mathbf{x}) = \frac{1}{2}\delta \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-1}\delta \mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{H}\delta \mathbf{x} - \mathbf{d})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{H}\delta \mathbf{x} - \mathbf{d})$$

Fonction quadratique \Rightarrow minimum unique $\delta \mathbf{x}^*$

- Noyau
- Frontières
- Numérique

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b)^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) + \frac{1}{2}(\mathcal{H}[\mathbf{x}] - \mathbf{y}^o)^T \mathbf{R}^{-1}(\mathcal{H}[\mathbf{x}] - \mathbf{y}^o)$$

Difficultés de la minimisation de la fonction coût

- Problème de grande taille
- \mathcal{H} non linéaire \Rightarrow minima locaux

Formulation incrémentale (Courtier *et al.*, 1994)

basée sur la méthode de Gauss-Newton

- Linéarisation de \mathcal{H} au voisinage de \mathbf{x}^b : \mathbf{H}

$$\text{Incrément : } \quad \delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^b$$

$$\text{Linéarisation : } \quad \mathcal{H}[\mathbf{x}] = \mathcal{H}[\mathbf{x}^b] + \mathbf{H}\delta \mathbf{x}$$

$$\text{Innovation : } \quad \mathbf{d} = \mathbf{y}^o - \mathcal{H}[\mathbf{x}^b]$$

$$J(\delta \mathbf{x}) = \frac{1}{2}\delta \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-1}\delta \mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{H}\delta \mathbf{x} - \mathbf{d})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{H}\delta \mathbf{x} - \mathbf{d})$$

Fonction quadratique \Rightarrow minimum unique $\delta \mathbf{x}^*$

- Linéarisation de \mathcal{H} au voisinage de $\mathbf{x}^b + \delta \mathbf{x}^*$
- ...

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

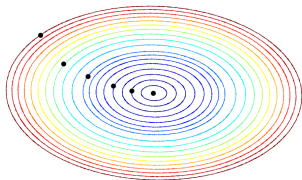
- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Problème à minimiser :

$$J(\delta \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} (\mathbf{H} \delta \mathbf{x} - \mathbf{d})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H} \delta \mathbf{x} - \mathbf{d})$$

Exemple :



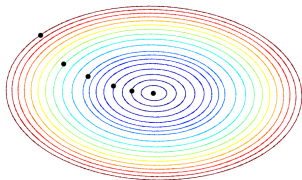
- Noyau
- Frontières
- Numérique

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

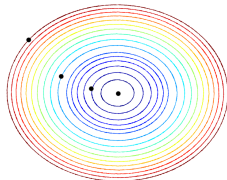
Problème à minimiser :

$$J(\delta \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} (\mathbf{H} \delta \mathbf{x} - \mathbf{d})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H} \delta \mathbf{x} - \mathbf{d})$$

Sans préconditionnement :



Avec préconditionnement :



Préconditionnement optimal : inverse de la Hessienne

$$\mathbf{P} = (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1}$$

- Noyau
- Frontières
- Numérique

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

$$\mathbf{v} = \mathbf{U}^{-1} \delta \mathbf{x} \quad \text{tel que} \quad \mathbf{B} = \mathbf{U} \mathbf{U}^T$$

Nouveau problème à minimiser :

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \frac{1}{2} (\mathbf{H} \mathbf{U} \mathbf{v} - \mathbf{d})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H} \mathbf{U} \mathbf{v} - \mathbf{d})$$

$$\nabla_{\mathbf{v}} J = \mathbf{v} + \mathbf{U}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H} \mathbf{U} \mathbf{v} - \mathbf{d})$$

Solution du problème :

$$(\mathbf{I} + \mathbf{U}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{U}) \mathbf{v}^* = \mathbf{U}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{v}^* = \mathbf{b}$$

$$\delta \mathbf{x}^* = \mathbf{U} \mathbf{v}^*$$

En pratique, $\delta \mathbf{x} = \mathbf{v} = 0$ pour le premier itéré.

⇒ Il n'y a donc aucun système à résoudre par rapport à \mathbf{U} .

- Noyau
- Frontières
- Numérique

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

L'erreur d'ébauche ε^b est constituée de l'ensemble des erreurs en chaque point \mathbf{z} de la grille du modèle pour chaque variable. Les interactions entre ces erreurs sont quantifiées par les fonctions de covariance, et de corrélation :

$$b(\mathbf{z}, \mathbf{z}') = E [\varepsilon_{\mathbf{z}} \varepsilon_{\mathbf{z}'}] \quad c(\mathbf{z}, \mathbf{z}') = \frac{b(\mathbf{z}, \mathbf{z}')}{\sqrt{b(\mathbf{z}, \mathbf{z})b(\mathbf{z}', \mathbf{z}')}}}$$

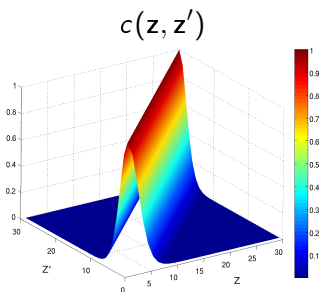
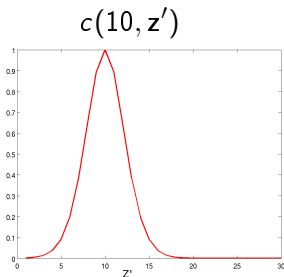
- Noyau
- Frontières
- Numérique

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

L'erreur d'ébauche ε^b est constituée de l'ensemble des erreurs en chaque point z de la grille du modèle pour chaque variable. Les interactions entre ces erreurs sont quantifiées par les fonctions de covariance, et de corrélation :

$$b(z, z') = E [\varepsilon_z \varepsilon_{z'}] \quad c(z, z') = \frac{b(z, z')}{\sqrt{b(z, z)b(z', z')}}}$$

Exemple 1D sur 30 points de grilles :



Ici, $c(z, z')$ est représentée par une matrice C 30×30

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

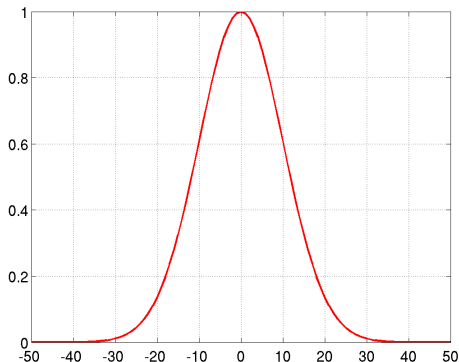
Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Fonction gaussienne homogène et isotrope ($r = |z - z'|$) :

$$f(r) = e^{-r^2/2L_g^2} \quad \text{avec } L_g \text{ l'échelle de corrélation}$$



Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

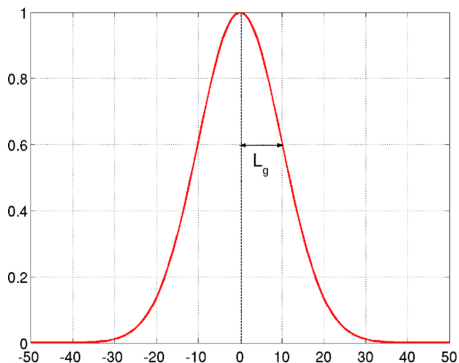
Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Fonction gaussienne homogène et isotrope ($r = |z - z'|$) :

$$f(r) = e^{-r^2/2L_g^2} \quad \text{avec } L_g \text{ l'échelle de corrélation}$$



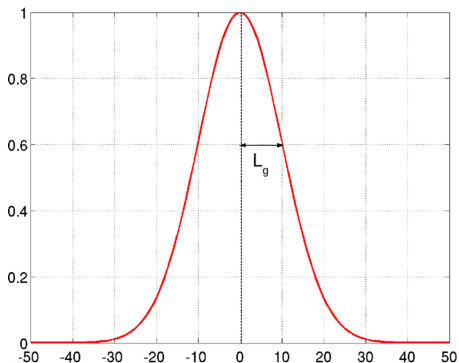
$$\text{Si } r = L_g \text{ alors } f(L_g) = e^{-1/2} \approx 0.6$$

- Noyau
- Frontières
- Numérique

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Fonction gaussienne homogène et isotrope ($r = |z - z'|$) :

$$f(r) = e^{-r^2/2L_g^2} \quad \text{avec } L_g \text{ l'échelle de corrélation}$$



$$\text{Daley (1991)} : L_g = \sqrt{-1 / \left. \frac{d^2 f}{dr^2} \right|_{r=0}}$$

La matrice des covariances d'erreur d'ébauche B

Principales difficultés en pratique :

- B ne peut pas être définie explicitement
 - Grande taille
 - Manque d'informations
-

Estimation à partir d'une méthode d'ensemble

- Hypothèse diagonale dans l'espace spectral ou ondelettes
 - Corrélations généralement homogènes et isotropes
- Matrice de rang réduit
- Filtrage, localisation

Modélisation par une suite d'opérateurs

- Gestion des frontières facilitée dans l'espace physique
- Matrice de rang plein
- Spécification des caractéristiques
 - Hypothèse de corrélations gaussiennes

Combinaison estimation / modélisation

Principales difficultés en pratique :

- B ne peut pas être définie explicitement
 - Grande taille
 - Manque d'informations

Modélisation par une suite d'opérateurs

- Problème multivarié : covariances entre les variables
 - Changement de variables : **Opérateur d'équilibre K**
→ nouvelles variables supposées décorréllées entre elles
 - Covariances spatiales des nouvelles variables
 - Variances spatiales : **Matrice diagonale D**
 - Corrélations spatiales : **Matrice bloc diagonale C**
-

Principales difficultés en pratique :

- Grande taille et manque d'informations
 - Modélisation par une suite d'opérateurs
 - Opérateur d'équilibre K
 - Variances spatiales D
 - Corrélations spatiales C
- B doit être **symétrique**, (semi-)définie positive

Une solution : $B = UU^T = KD^{1/2}C^{1/2} (C^{1/2})^T D^{1/2}K^T$

Principales difficultés en pratique :

- Grande taille et manque d'informations
 - Modélisation par une suite d'opérateurs
 - Opérateur d'équilibre **K**
 - Variances spatiales **D**
 - Corrélations spatiales **C**
- **B** doit être symétrique, (semi-)définie positive
 - $\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{K}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{C}^{1/2} (\mathbf{C}^{1/2})^T \mathbf{D}^{1/2}\mathbf{K}^T$
- Evolution à chaque cycle d'assimilation

Caractéristique souhaitable : Dépendance à l'écoulement

- Variances
 - Echelles de corrélation
 - ...
-

- Noyau
- Frontières
- Numérique

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Principales difficultés en pratique :

- Grande taille et manque d'informations
 - Modélisation par une suite d'opérateurs
 - Opérateur d'équilibre **K**
 - Variances spatiales **D**
 - Corrélations spatiales **C**
- **B** doit être symétrique, (semi-)définie positive
 - $\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{K}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{C}^{1/2}(\mathbf{C}^{1/2})^T\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{K}^T$
- Evolution à chaque cycle d'assimilation
 - Dépendance à l'écoulement via les échelles de corrélation

Besoin :

- Calcul d'un produit matrice vecteur $\Phi = \mathbf{C}\Psi$
-

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Le produit matrice vecteur $\Phi = \mathbf{C}\Psi$ peut être considéré comme la discrétisation du problème continu :

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} c(z, z') \psi(z') dz'$$

où $c(z, z')$ est une fonction de corrélation.

D'où :

$$\varphi(z) = \mathcal{C}[\psi]$$

avec \mathcal{C} l'opérateur de corrélation de noyau $c(z, z')$

Hypothèse :

Si $c(z, z')$ est une fonction de corrélation **homogène et isotrope**, alors $c(z, z') = f(z - z') = f(r)$, avec $r = |z - z'|$ et on a

$$\varphi(z) = \mathcal{C}[\psi] = (f * \psi)(z)$$

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Egbert *et al.* (1994), Weaver et Courtier (2001), ...

Equation de diffusion 1D

avec $\eta = \eta(z, t)$ et la condition initiale $\eta(z, t_0) = \eta_0(z)$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = 0 \quad \kappa > 0$$

Solution :

Sur un domaine infini ($z \in \mathbb{R}$) pour une intégration de t_0 à t_M

$$\begin{aligned} \eta(z, t_M) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t_M}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-z')^2}{4\kappa t_M}} \eta_0(z') dz' \\ &= \frac{1}{\lambda} (g * \eta_0)(z) \end{aligned}$$

avec $g(z)$ la fonction de corrélation gaussienne

$$g(z) = e^{-\frac{z^2}{4\kappa t_M}}$$

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Opérateur de corrélation \mathcal{C} de noyau $f(r)$:

$$\varphi(z) = (f * \psi)(z)$$

Solution de l'équation de diffusion :

$$\eta(z, t_M) = \frac{1}{\lambda_M} (g * \eta_0)(z)$$

Equivalence :

Intégrer numériquement l'équation de diffusion 1D sur le pseudo-temps $[t_0, t_M]$ et normaliser le résultat (maximum à 1)

$$\varphi(z) = \lambda_M \mathcal{H}[\eta_0(z)] = \mathcal{G}[\eta_0(z)]$$

est équivalent à appliquer à la condition initiale, un opérateur de corrélation de noyau gaussien

$$g(r) = e^{-r^2/2L_g^2}, \text{ avec } L_g = \sqrt{2\kappa t_M} \text{ et } \lambda_M = \sqrt{2\pi}L_g$$

où L_g est l'échelle de corrélation.

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

$$\eta(z, t)$$

$$\lambda_M = \sqrt{2\pi} L_g$$

$$\lambda_M \eta(z, t)$$

$$L_g = \sqrt{2\kappa t}$$

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

$\eta(z, t)$

$$\lambda_M = \sqrt{2\pi} L_g$$

$\lambda_M \eta(z, t)$

$$L_g = \sqrt{2\kappa t}$$

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

L'équation de diffusion inhomogène permet de prendre en compte des échelles de corrélation variant spatialement :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(z, t) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa(z) \frac{\partial \eta}{\partial z}(z, t) \right) = 0$$

L'opérateur de corrélation devient :

$$\mathcal{G}[\eta_0(z)] = \sqrt{\lambda_M(z)} \mathcal{L}^M \left[\sqrt{\lambda_M(z)} \eta_0(z) \right]$$

La normalisation doit être définie en chaque point de grille.

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Normalisation $\lambda_M = \sqrt{2\pi}L_g$:

- Domaine infini
- Echelles de corrélation constantes

Normalisation $\lambda_M(z)$ à définir en chaque point de grille :

- Domaine borné (conditions aux frontières)
- Variations d'échelle de corrélation

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Normalisation $\lambda_M = \sqrt{2\pi}L_g$:

- Domaine infini
- Echelles de corrélation constantes

Normalisation $\lambda_M(z)$ à définir en chaque point de grille :

- Domaine borné (conditions aux frontières)
- Variations d'échelle de corrélation

Méthodes de normalisation :

- **Méthode exacte** :
applique l'éq. de diffusion n fois ($n=nb$ points de grille)
- **Méthode par vecteurs aléatoires** :
applique l'éq. de diffusion P fois, $P=f(\text{précision})$

Méthodes **coûteuses**.

Souvent utilisées "offline" \Rightarrow les **paramètres** restent **figés**

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Discrétisation temporelle : $t_M = M\Delta t$

Pour chaque pas de temps $0 < t_m \leq t_M$

$$\begin{aligned}\eta(z, t_m) &= \left(1 + \kappa \Delta t \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \eta(z, t_{m-1}) \\ &\equiv \mathcal{L}_e [\eta(z, t_{m-1})]\end{aligned}$$

On a donc :

$$\varphi(z) = \lambda_M \mathcal{L}_e^M [\eta_0(z)]$$



Codage simple



Critère de stabilité : $M > (L_g / \Delta z)^2$

⇒ le schéma est d'autant plus coûteux que la résolution est fine

⇒ le schéma est d'autant plus coûteux que l'échelle est grande

- Noyau
- Frontières
- Numérique

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Discrétisation temporelle : $t_M = M\Delta t$

Pour chaque pas de temps $t_M \geq t_m > 0$

$$\begin{aligned}\eta(z, t_m) &= \left(1 - \kappa\Delta t \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \eta(z, t_{m+1}) \\ &\equiv \mathcal{L}_i^{-1} [\eta(z, t_{m+1})]\end{aligned}$$

On a donc :

$$\varphi(z) = \lambda_M \mathcal{L}_i^M [\eta_0(z)]$$



Inconditionnellement stable



Nécessite la résolution d'un système linéaire

⇒ le nombre d'itérations ne dépend pas de la résolution

⇒ le nombre d'itérations ne dépend pas de l'échelle

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

- 1 Introduction
- 2 L'assimilation variationnelle
- 3 La matrice des covariances d'erreur d'ébauche
- 4 L'opérateur de diffusion implicite 1D et sa normalisation**
 - Le noyau de l'opérateur
 - Les conditions aux frontières
 - Les aspects numériques
- 5 Extension à des fonctions de corrélation en 2D ou 3D, application au système NEMOVAR
- 6 Conclusions et perspectives

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

• Noyau

- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

	Explicite	Implicite
Oper.	$\mathcal{L} \equiv 1 + \kappa \Delta t \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$\mathcal{L}^{-1} \equiv 1 - \kappa \Delta t \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
Nb iter.	$M > (L/\Delta z)^2$	Libre
Noyau	$e^{-\frac{r^2}{2L^2}}$	$\sum_{j=0}^{M-1} \beta_j \left(\frac{r}{L}\right)^j e^{-\frac{r^2}{2L^2}}$
Prm. éch.	$L = \sqrt{2\kappa M \Delta t}$	$L = \sqrt{\kappa \Delta t}$
Ech. cor.	$L_g = L$	$L_{AR} = \sqrt{2M-3} L$
Norm.	$\lambda_M = \sqrt{4\pi\kappa M \Delta t}$	$\lambda_M = v_M L$

$$v_M = 2^{2M-1} [(M-1)!]^2 / (2M-2)!$$

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

● Noyau

- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

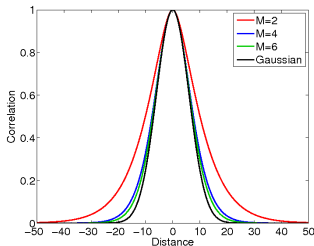
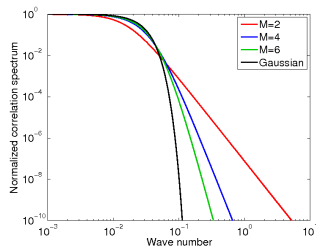
- Const. ruc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Une classe largement utilisée en géostatistiques pour spécifier des corrélations est donnée par la **famille de Matérn** (Stein, 1999; Guttorp et Gneiting, 2006) : $\zeta_\nu(r) = \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{r}{L}\right)^\nu K_\nu\left(\frac{r}{L}\right)$

Le cas particulier $\nu = M - 1/2$ conduit aux fonctions AR, issues des processus de Markov ou autorégressifs (e.g. Gelb, 1992)

$$f_M(r) = \sum_{j=0}^{M-1} \beta_j \left(\frac{r}{L}\right)^j e^{-\frac{r}{L}}$$

 $f_M(r)$  $\hat{f}_M(\hat{r})/\hat{f}_M(0)$ Exemple à L_{AR} fixé pour différents M

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

• Noyau

- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

L'équation de diffusion inhomogène permet de prendre en compte des échelles de corrélation variant spatialement :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(z, t) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa(z) \frac{\partial \eta}{\partial z}(z, t) \right) = 0$$

L'opérateur de corrélation devient :

$$\mathcal{F}_M[\eta_0(z)] = \sqrt{\lambda_M(z)} \mathcal{L}^M \left[\sqrt{\lambda_M(z)} \eta_0(z) \right]$$

La normalisation doit être définie en chaque point de grille.
Une approximation raisonnable est donnée par

$$\lambda_M(z) \approx v_M L(z)$$

avec $L(z) = \sqrt{\kappa(z) \Delta t}$.



Calcul simple et peu cher

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

• Noyau

• Frontières

• Numérique

Extension en
2D et 3D

• Const. ruc.

• NEMOVAR

• Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

L'océan est borné par des frontières solides : côtes, bathymétrie, interface océan-atmosphère ou océan-glace de mer.

① Conditions aux frontières de Neumann ou Dirichlet (Egbert *et al.*, 1994 ; Weaver et Courtier, 2001)



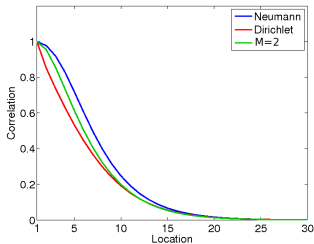
simple à implémenter via des masques terre-océan



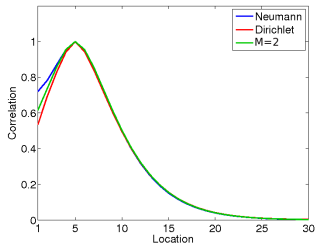
normalisation → méthode exacte ou vecteurs aléatoires



altération du noyau de corrélation près des frontières :



Réponse à δz_1



Réponse à δz_5

Normalisation par méthode exacte

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau

- Frontières

- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

L'océan est borné par des frontières solides : côtes, bathymétrie, interface océan-atmosphère ou océan-glace de mer.

1 Conditions aux frontières de Neumann ou Dirichlet (Egbert *et al.*, 1994 ; Weaver et Courtier, 2001)



simple à implémenter via des masques terre-océan



normalisation → méthode exacte ou vecteurs aléatoires



altération du noyau de corrélation près des frontières

2 Points fictifs d'océan près des frontières

(Dobricic et Pinardi, 2008 ; Liu *et al.*, 2009 ; filtre récursif)



simule des frontières transparentes si la zone d'extension est suffisamment grande



normalisation → approximation du facteur



nécessite des changements non triviaux sur la grille



nécessite des calculs supplémentaires sur les points fictifs

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

• Noyau

• Frontières

• Numérique

Extension en
2D et 3D• Const. ruc.
• NEMOVAR
• Exp./Imp.Conclusions,
perspectivesSolution de l'équation de diffusion pour $\eta_0(z) = \delta(z - z_0)$:

- Domaine infini :

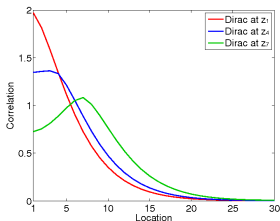
$$\eta_g(z, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-(z-z_0)^2/4\kappa t} = h(z - z_0, t)$$

- Domaine borné avec conditions de Neumann :

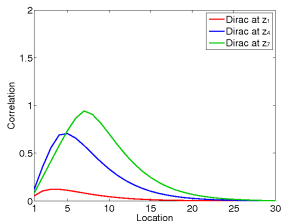
$$\eta_N(z, t) = h(z - z_0, t) + h(z + z_0, t)$$

- Domaine borné avec conditions de Dirichlet :

$$\eta_D(z, t) = h(z - z_0, t) - h(z + z_0, t)$$



Neumann



Dirichlet

Normalisation par $\lambda_M = v_M \sqrt{\kappa \Delta t}$

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

• Noyau

• Frontières

• Numérique

Extension en
2D et 3D

• Const. ruc.

• NEMOVAR

• Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

③ Définir l'opérateur de diffusion comme $\frac{1}{2}\lambda_M(\eta_N + \eta_D)$



simule des frontières transparentes de façon générale



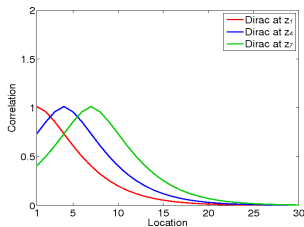
normalisation \rightarrow approximation du facteur



moins précis si l'échelle de corrélation est $\approx O(\text{taille du domaine})$ ou $\approx O(\text{taille de la maille})$ ou varie rapidement



nécessite l'application d'une diffusion supplémentaire



$\frac{1}{2}$ (Neumann + Dirichlet)

Normalisation par $\lambda_M = v_M \sqrt{\kappa \Delta t}$

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{K}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{C}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{K}^T$$

Discrétisation sur une grille curvilinéaire :

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{L}^M\mathbf{W}^{-1}\mathbf{\Lambda}^{1/2}$$

$\mathbf{\Lambda}$: matrice diagonale des facteurs de normalisation

\mathbf{L} : forme matricielle de l'opérateur de diffusion

\mathbf{W} : matrice diagonale des éléments de la grille curvilinéaire

L'opérateur de diffusion est autoadjoint par rapport à \mathbf{W} :

$$\mathbf{L} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{L}^T\mathbf{W}$$

$$\text{De plus : } \mathbf{L}^M = \mathbf{L}^{M/2}\mathbf{L}^{M/2} = \mathbf{L}^{M/2}\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{L}^{M/2})^T\mathbf{W}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \mathbf{C} &= \mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{L}^{M/2}\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{L}^{M/2})^T\mathbf{\Lambda}^{1/2} \\ &= \mathbf{C}^{1/2}(\mathbf{C}^{1/2})^T \end{aligned}$$

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières

• Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

- Application de la moyenne de deux diffusions

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \frac{1}{2} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \left(\mathbf{L}_N^{M/2} \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{L}_N^{M/2})^T + \mathbf{L}_D^{M/2} \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{L}_D^{M/2})^T \right) \mathbf{\Lambda}^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \begin{pmatrix} \mathbf{L}_N^{M/2} & \mathbf{L}_D^{M/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}^{-1} & \\ & \mathbf{W}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{L}_N^{M/2})^T \\ (\mathbf{L}_D^{M/2})^T \end{pmatrix} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \end{aligned}$$



Matrices rectangulaires \Rightarrow la **taille** du vecteur de contrôle est **doublée** dans l'algorithme de minimisation

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières

• Numérique

Extension en
2D et 3D

- Const. ruc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

- Application de la moyenne de deux diffusions

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \frac{1}{2} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \left(\mathbf{L}_N^{M/2} \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{L}_N^{M/2})^T + \mathbf{L}_D^{M/2} \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{L}_D^{M/2})^T \right) \mathbf{\Lambda}^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \begin{pmatrix} \mathbf{L}_N^{M/2} & \mathbf{L}_D^{M/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}^{-1} & \\ & \mathbf{W}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{L}_N^{M/2})^T \\ (\mathbf{L}_D^{M/2})^T \end{pmatrix} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \end{aligned}$$



Matrices rectangulaires \Rightarrow la **taille** du vecteur de contrôle est **doublée** dans l'algorithme de minimisation

- Résolution du système linéaire à chaque itération



décomposition de Cholesky

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

- 1 Introduction
- 2 L'assimilation variationnelle
- 3 La matrice des covariances d'erreur d'ébauche
- 4 L'opérateur de diffusion implicite 1D et sa normalisation
- 5 Extension à des fonctions de corrélation en 2D ou 3D, application au système NEMOVAR
 - Construction des opérateurs $2 \times 1D$ ou $3 \times 1D$
 - Application au système NEMOVAR
 - Explicite vs. Implicite
- 6 Conclusions et perspectives

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

• Construc.

- NEMOVAR
- Exp./Imp.

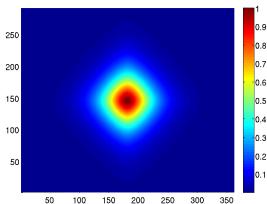
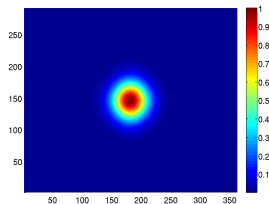
Conclusions,
perspectives

Hypothèse :

Fonctions de corrélation séparables : $c = c_x c_y c_z$ Discrétisation : $\mathbf{C} = \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{L}^M \mathbf{W}^{-1} \mathbf{\Lambda}^{1/2}$

avec $\mathbf{L}^M = \mathbf{L}_x^M \mathbf{L}_y^M$ pour l'opérateur $2 \times 1D$ horizontal
 ou $\mathbf{L}^M = \mathbf{L}_x^M \mathbf{L}_y^M \mathbf{L}_z^M$ pour l'opérateur $3 \times 1D$

Sensibilité au nombre d'itérations :

 $M = 2$  $M = 10$ ⇒ Modélisation de **fonctions gaussiennes uniquement**

- Noyau
- Frontières
- Numérique

- NEMOVAR
- Exp./Imp.

L'opérateur \mathbf{L}^M est-il autoadjoint ?

Les opérateurs 1D sont autoadjoints.

Hypothèse de séparabilité \Rightarrow les opérateurs 1D commutent.

S'ils commutent, alors l'opérateur \mathbf{L}^M est autoadjoint.

On propose alors d'écrire (exemple 2D)

$$\mathbf{L}^M = \mathbf{L}^{M/2} \mathbf{L}^{M/2} = \mathbf{L}_x^{M/2} \mathbf{L}_y^{M/2} \mathbf{W}^{-1} \left(\mathbf{L}_y^{M/2} \right)^T \left(\mathbf{L}_x^{M/2} \right)^T \mathbf{W}$$

Et on a

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{L}_x^{M/2} \mathbf{L}_y^{M/2} \mathbf{W}^{-1} \left(\mathbf{L}_y^{M/2} \right)^T \left(\mathbf{L}_x^{M/2} \right)^T \mathbf{\Lambda}^{1/2} \\ &= \mathbf{C}^{1/2} \left(\mathbf{C}^{1/2} \right)^T \end{aligned}$$

- Noyau
- Frontières
- Numérique

- NEMOVAR
- Exp./Imp.

L'opérateur \mathbf{L}^M est-il autoadjoint ?

Les opérateurs 1D sont autoadjoints.

Hypothèse de séparabilité \Rightarrow les opérateurs 1D commutent.

S'ils commutent, alors l'opérateur \mathbf{L}^M est autoadjoint.

On propose alors d'écrire (exemple 2D)

$$\mathbf{L}^M = \mathbf{L}^{M/2} \mathbf{L}^{M/2} = \mathbf{L}_x^{M/2} \mathbf{L}_y^{M/2} \mathbf{W}^{-1} \left(\mathbf{L}_y^{M/2} \right)^T \left(\mathbf{L}_x^{M/2} \right)^T \mathbf{W}$$

Et on a

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{L}_x^{M/2} \mathbf{L}_y^{M/2} \mathbf{W}^{-1} \left(\mathbf{L}_y^{M/2} \right)^T \left(\mathbf{L}_x^{M/2} \right)^T \mathbf{\Lambda}^{1/2} \\ &= \mathbf{C}^{1/2} \left(\mathbf{C}^{1/2} \right)^T \end{aligned}$$

L'hypothèse de séparabilité **n'est pas vérifiée**

- près des frontières
- lorsque les échelles varient

\Rightarrow le résultat est différent suivant l'ordre d'application des opérateurs 1D.

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

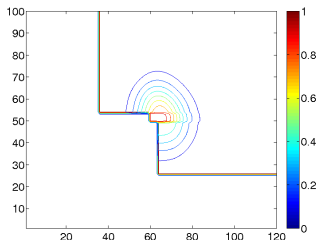
- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

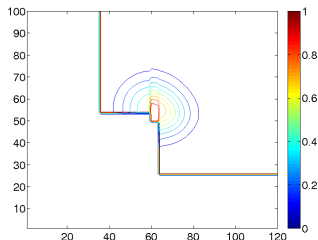
• Construc.

- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives



C pour $L^M = L_x^M L_y^M$



\tilde{C} pour $\tilde{L}^M = L_y^M L_x^M$

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

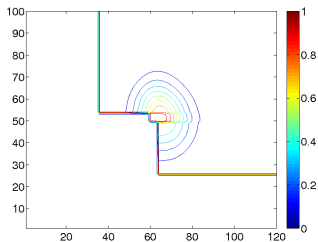
- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

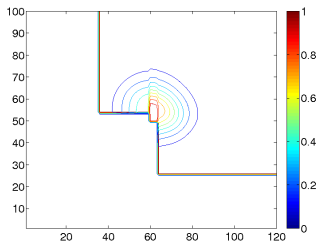
• Construc.

- NEMOVAR
- Exp./Imp.

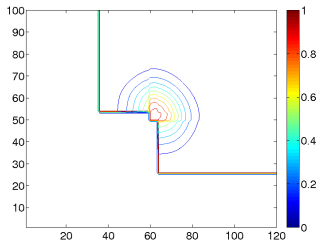
Conclusions,
perspectives



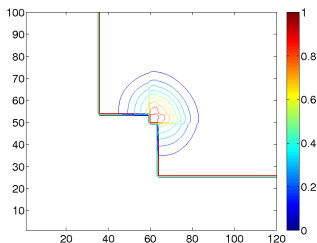
\mathbf{C} pour $\mathbf{L}^M = \mathbf{L}_x^M \mathbf{L}_y^M$



$\tilde{\mathbf{C}}$ pour $\tilde{\mathbf{L}}^M = \mathbf{L}_y^M \mathbf{L}_x^M$



\mathbf{C} pour $\frac{1}{2} (\mathbf{L}^{M/2} + \tilde{\mathbf{L}}^{M/2})$
(Dobricic et Pinardi, 2008)



\mathbf{C} pour $\frac{1}{2} (\mathbf{C} + \tilde{\mathbf{C}})$

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

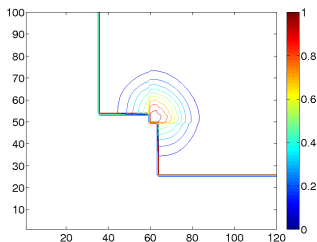
- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

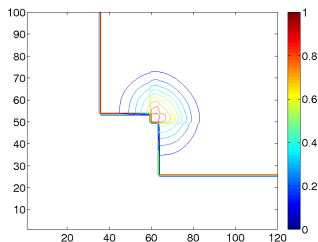
• Construc.

- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives



\mathbf{C} pour $\frac{1}{2} \left(\mathbf{L}^{M/2} + \tilde{\mathbf{L}}^{M/2} \right)$



\mathbf{C} pour $\frac{1}{2} \left(\mathbf{C} + \tilde{\mathbf{C}} \right)$

- Moyenne $\frac{1}{2} \left(\mathbf{L}^{M/2} + \tilde{\mathbf{L}}^{M/2} \right)$ (Dobricic et Pinardi, 2008)
 - coût de l'opérateur $\times 2$ en 2D ($\times 6$ en 3D)
- Moyenne $\frac{1}{2} \left(\mathbf{C} + \tilde{\mathbf{C}} \right)$
 - coût de l'opérateur $\times 2$ en 2D ($\times 6$ en 3D)

Pour nos configurations, l'hypothèse de séparabilité reste satisfaisante.

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

• Construc.

- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Application de 2 diffusions sur chaque axe :

$$\mathbf{C} = \frac{1}{8} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \left\{ \mathbf{L}_{N_x}^{M/2} \mathbf{L}_{N_y}^{M/2} \mathbf{L}_{N_z}^{M/2} \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{L}_{N_z}^{M/2})^T (\mathbf{L}_{N_y}^{M/2})^T (\mathbf{L}_{N_x}^{M/2})^T \right. \\ + \mathbf{L}_{N_x}^{M/2} \mathbf{L}_{N_y}^{M/2} \mathbf{L}_{D_z}^{M/2} \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{L}_{D_z}^{M/2})^T (\mathbf{L}_{N_y}^{M/2})^T (\mathbf{L}_{N_x}^{M/2})^T \\ + \dots \\ \left. + \mathbf{L}_{D_x}^{M/2} \mathbf{L}_{D_y}^{M/2} \mathbf{L}_{D_z}^{M/2} \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{L}_{D_z}^{M/2})^T (\mathbf{L}_{D_y}^{M/2})^T (\mathbf{L}_{D_x}^{M/2})^T \right\} \mathbf{\Lambda}^{1/2}$$



Taille du vecteur de contrôle $\times 8$

Application de 2 diffusions sur la verticale :

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \left\{ \mathbf{L}_{N_x}^{M/2} \mathbf{L}_{N_y}^{M/2} \mathbf{L}_{N_z}^{M/2} \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{L}_{N_z}^{M/2})^T (\mathbf{L}_{N_y}^{M/2})^T (\mathbf{L}_{N_x}^{M/2})^T \right. \\ \left. + \mathbf{L}_{N_x}^{M/2} \mathbf{L}_{N_y}^{M/2} \mathbf{L}_{D_z}^{M/2} \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{L}_{D_z}^{M/2})^T (\mathbf{L}_{N_y}^{M/2})^T (\mathbf{L}_{N_x}^{M/2})^T \right\} \mathbf{\Lambda}^{1/2}$$



Taille du vecteur de contrôle $\times 2$

Application au système NEMOVAR (CERFACS, ECMWF, UK MetOffice, INRIA/LJK)

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.

• NEMOVAR

- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

NEMOVAR (Mogensen *et al.*, 2009) :

système d'assimilation variationnelle de données pour le modèle océanique NEMO (Madec, 2008)

Applications :

- Conditions initiales pour les prévisions climatiques
- Réanalyses océaniques

Code parallèle (interface MPI)

- Décomposition par domaines horizontaux

Configurations globales :

- ORCA2 : $\approx 2^\circ \rightarrow 182 \times 149 \times 31$ avec 4×2 processeurs
- ORCA1 : $\approx 1^\circ \rightarrow 362 \times 292 \times 42$ avec 4×4 processeurs
 - Conf. pré-op. pour la prévision saisonnière de l'ECMWF

Introduction

L'assimilation
variationalnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Const ruc.

• NEMOVAR

- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Méthode d'assimilation :

- 3D-Var (FGAT)

Minimisation des fonctions quadratiques :

- CONGRAD : préconditionnement par **U**
- CGMOD : préconditionnement par **B**



matrices rectangulaires

Modélisation des corrélations spatiales :

- Explicite 2D+1D



$M_h = 200$ et $M_z = 10$



Echelles fixées numériquement

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Const. ruc.

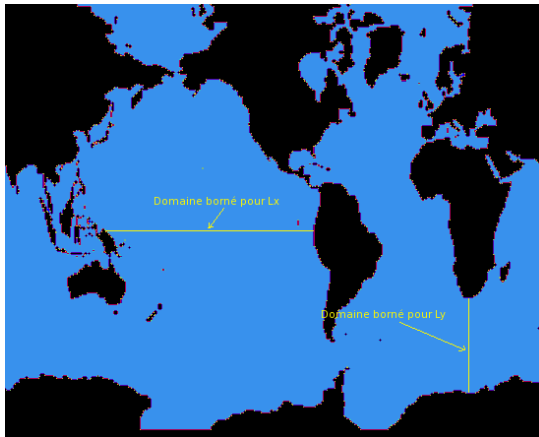
• NEMOVAR

- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Principe :

Toute partie de "ligne" d'océan entre deux frontières constitue un domaine borné sur lequel appliquer l'éq. de diffusion 1D.



Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Const ruc.

• NEMOVAR

- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Principe :

Toute partie de "ligne" d'océan entre deux frontières constitue un domaine borné sur lequel appliquer l'éq. de diffusion 1D.



Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Const ruc.

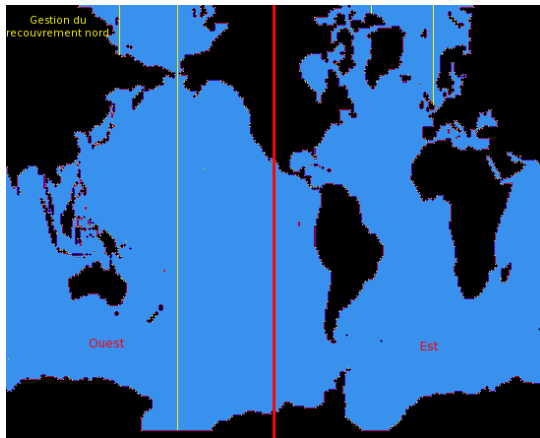
• NEMOVAR

- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Principe :

Toute partie de "ligne" d'océan entre deux frontières constitue un domaine borné sur lequel appliquer l'éq. de diffusion 1D.



Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.

• NEMOVAR

- Exp./Imp.

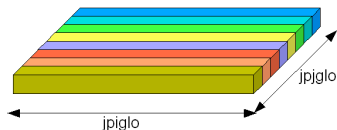
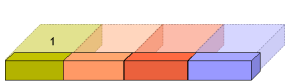
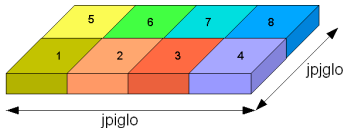
Conclusions,
perspectives



Décomposition de Cholesky



Nécessite la réorganisation horizontale des processeurs



Réorganisation suivant x

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Construc.

• NEMOVAR

- Exp./Imp.

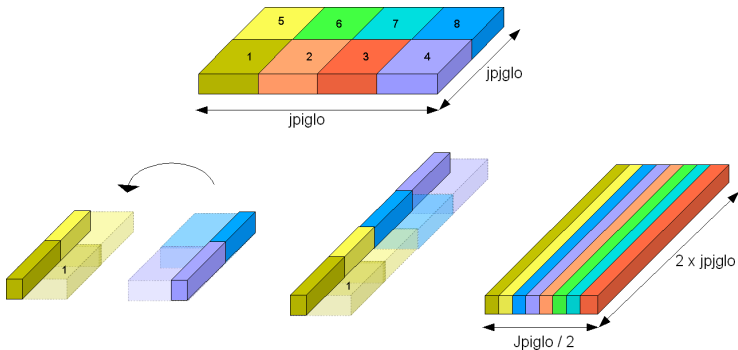
Conclusions,
perspectives



Décomposition de Cholesky



Nécessite la réorganisation horizontale des processeurs



Réorganisation suivant y

Introduction

L'assimilation
variational

La matrice B

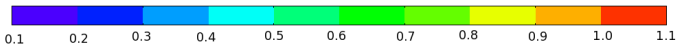
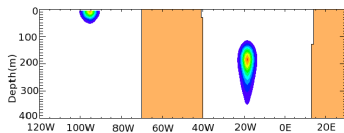
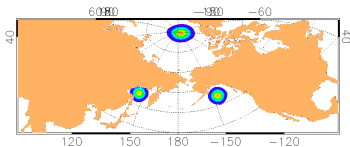
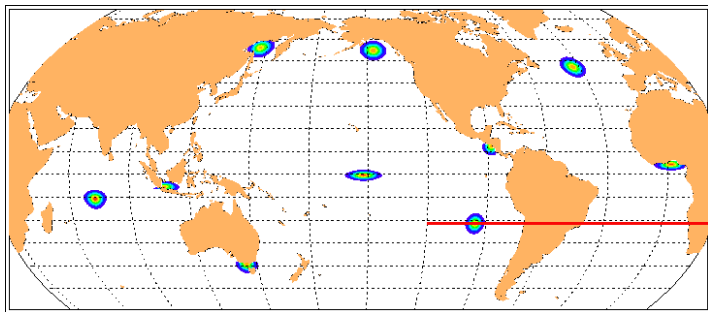
Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Const. ruc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives



L'opérateur $3 \times 1D$ est satisfaisant y compris près des frontières

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

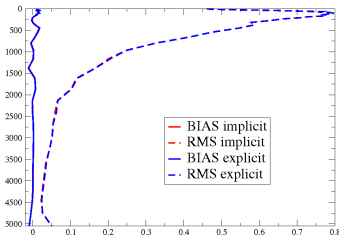
- Const ruc.
- NEMOVAR

• Exp./Imp.

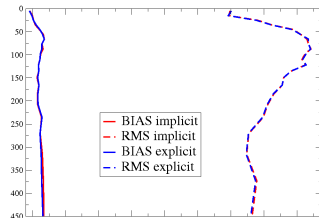
Conclusions,
perspectives

Observations assimilées : profils de température et salinité

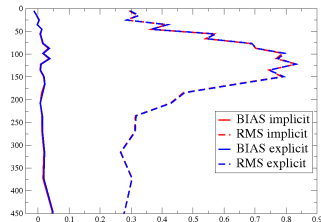
Pas d'observation près des côtes ou en eau peu profonde



Global



Atlantique NW zoom 450 m



Niño 3.4 zoom 450 m

Diagnostics de performance pour la température : analyse - observations (T. Pangaud, A. Weaver)

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D



- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Const ruc.
- NEMOVAR

• Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Implicite :  meilleures perf.  moins bonnes perf.

Min. quadratique	Temps CPU s		Mémoire Mo	
	Explicite	Implicite	Explicite	Implicite
Normalisation				
“online” (P=1000)	711 s	-45 %	13 Go	+0.7 Go
“offline”	170 s	-25 %	13 Go	+0.5 Go

Configuration ORCA1 en 4×4 sur IBM Power 6

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D



- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Const. ruc.
- NEMOVAR

• Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Implicite :  meilleures perf.  moins bonnes perf.

Min. quadratique	Temps CPU s		Mémoire Mo	
	Explicite	Implicite	Explicite	Implicite
Normalisation				
“online” (P=1000)	711 s	-45 %	13 Go	+0.7 Go
“offline”	170 s	-25 %	13 Go	+0.5 Go

Configuration ORCA1 en 4×4 sur IBM Power 6

Min. quadratique	Implicite $3 \times 1D$		Explicite $2D+1D$	
	Nb appels	Coût s	Nb appels	Coût s
$L_h^{M/2}$	127 (1280)	4,0	127 (12800)	19,5
Réorganisation	768	3,5	-	0,00
Inter-proc. total	2152	2,5	27888	22,0

Configuration ORCA2 en 4×2 sur DELL Precision T5500

Introduction

L'assimilation
variacionnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Const. ruc.
- NEMOVAR

• Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Configuration ORCA1 en 4×4 sur IBM Power 6
Fenêtre d'assimilation : 10 jours

Coût des minimisations quadratiques :

- Normalisation "offline"
 - Explicite → 17h
 - Implicite → 13h

- Normalisation "online" avec $P=1000$
 - Explicite → 3 jours
 - Implicite → 1 jour 2/3

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Const. ruc.
- NEMOVAR

• Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Configuration ORCA1 en 4×4 sur IBM Power 6
Fenêtre d'assimilation : 10 jours

Coût des minimisations quadratiques :

- Normalisation “offline”
 - Explicite → 17h
 - Implicite → 13h

- Normalisation “online” avec $P=1000$
 - Explicite → 3 jours
 - Implicite → 1 jour 2/3

Remarque : coût très dépendant de la normalisation utilisée.
Dépendance à l'écoulement \Rightarrow calcul de la norm. à chaque cycle.

Introduction

L'assimilation
variational

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

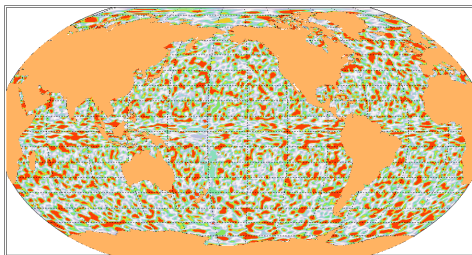
- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

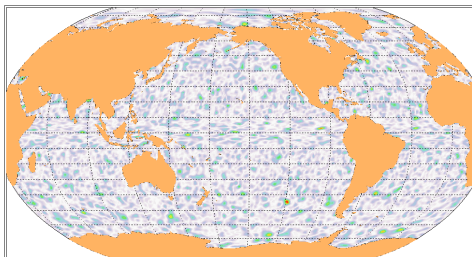
- Const ruc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

P=100



P=1000



Pourcentage d'erreur / valeur maximale de la corrélation (ORCA1)

Introduction

L'assimilation
variotionnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

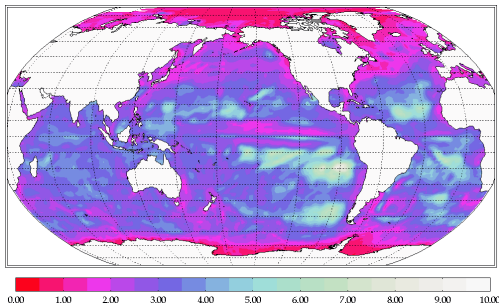
Extension en
2D et 3D

- Const ruc.
- NEMOVAR

• Exp./Imp.

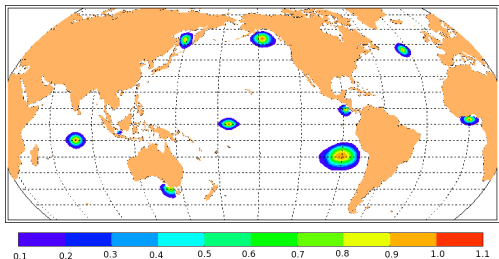
Conclusions,
perspectives

Echelles zonales (°)
estimées localement
à partir d'une
méthode d'ensemble
(Daget, 2008)



Corrélations de
température

Implicite :

$$M_x = M_y = M_z = 10$$


Introduction

L'assimilation
variotionnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

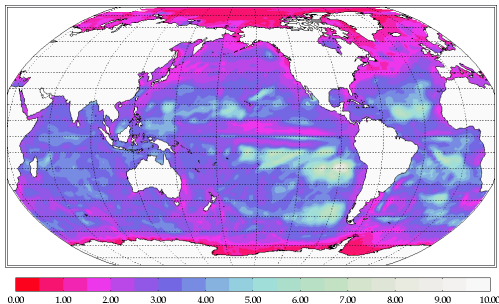
Extension en
2D et 3D

- Const ruc.
- NEMOVAR

• Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

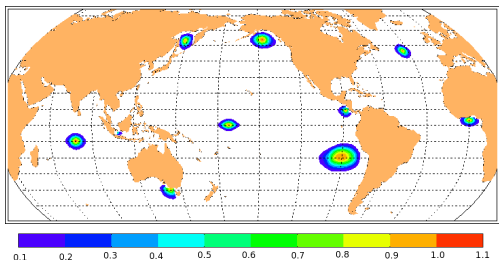
Echelles zonales (°)
estimées localement
à partir d'une
méthode d'ensemble
(Daget, 2008)



Corrélations de
température

Implicite : 🤔
 $M_x = M_y = M_z = 10$

Explicite : 🤔
 $M_h \approx 900, M_z \approx 1900$



Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Const ruc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

- 1 Introduction
- 2 L'assimilation variationnelle
- 3 La matrice des covariances d'erreur d'ébauche
- 4 L'opérateur de diffusion implicite 1D et sa normalisation
- 5 Extension à des fonctions de corrélation en 2D ou 3D, application au système NEMOVAR
- 6 Conclusions et perspectives

- Noyau
- Frontières
- Numérique

- Const ruc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

• Travaux réalisés :



Etude théorique du cas 1D

- Mirouze et Weaver (2010). Representation of correlation functions in variational assimilation using an implicit diffusion operator. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **136**, 1421–1443.



Mise en oeuvre dans NEMOVAR

• Opérateur de corrélation implicite :

- Pas de critère de stabilité



Coût réduit par rapport à l'explicite



Prise en compte de grandes échelles



Permet d'élargir le choix du noyau (1D)

• Conditions aux frontières :



Meilleure prise en compte

• Normalisation :



Approximation du facteur satisfaisante dans certaines conditions

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Const. ruc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives



- **Mise en œuvre :**
 - Mise en œuvre du 4D-Var
 - Utilisation de plus hautes résolutions
 - Prise en compte de la dépendance de **B** à l'écoulement

- **Extension à la modélisation des corrélations spatiales et/ou temporelles d'autres erreurs :**
 - Observations sur une grille (SSH, SST)
 - Corrélations spatiales et temporelles de l'erreur modèle

- **Localisation des corrélations issues d'un ensemble**
 - Filtre récursif : Wang *et al.* (2008)

Introduction

L'assimilation
variotionnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Const ruc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives



- **Equation de diffusion 2D et 3D :**

- Etude analytique et lien avec la famille de Matérn
- Etude d'un algorithme efficace pour la résolution des systèmes linéaires
 - Gradient conjugué préconditionné, multi-grille, ...
- Prise en compte de l'anisotropie ("multi-axes")

- **Normalisation :**

- Nb de membres de la méthode par vecteurs aléatoires
 - Filtrage spatial (Raynaud *et al.*, 2009)
- Amélioration de l'approximation du facteur
 - Evaluation de l'erreur numérique de discrétisation
 - Evaluation de l'impact des variations d'échelle
- Combinaison des méthodes?

Introduction

L'assimilation
variationnelle

La matrice B

Diffusion
implicite 1D

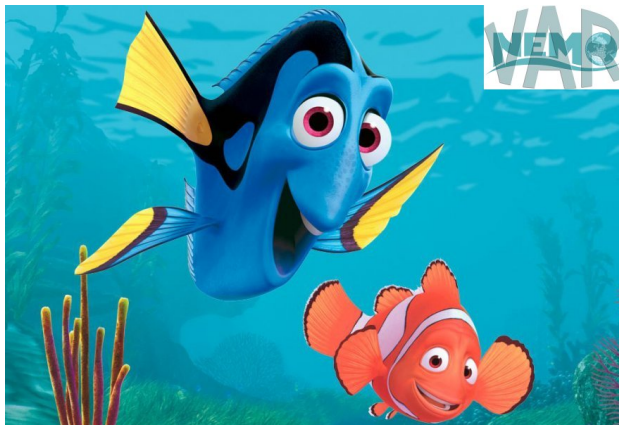
- Noyau
- Frontières
- Numérique

Extension en
2D et 3D

- Const ruc.
- NEMOVAR
- Exp./Imp.

Conclusions,
perspectives

Merci de votre attention.



Disney - Pixar : Le monde de Nemo