



**HAL**  
open science

# Modélisation microscopique et macroscopique du comportement d'un composite à matrice métallique

Nathalie El Mayas Theet

► **To cite this version:**

Nathalie El Mayas Theet. Modélisation microscopique et macroscopique du comportement d'un composite à matrice métallique. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1994. Français. NNT: . tel-00523623

**HAL Id: tel-00523623**

**<https://pastel.hal.science/tel-00523623>**

Submitted on 5 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

80750

NS 17523(4)

X

**THESE DE DOCTORAT  
DE L'ECOLE NATIONALE des PONTS et CHAUSSEES**

*Spécialité : STRUCTURES ET MATERIAUX*

Présentée par

**Nathalie EL MAYAS THEET**

Pour obtenir le titre de

Docteur de l' Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

**MODELISATION  
MICROSCOPIQUE ET MACROSCOPIQUE  
DU COMPORTEMENT D'UN COMPOSITE  
A MATRICE METALLIQUE**

Soutenue le 12 janvier 1994, devant le jury composé de :

M. D. MARQUIS	Président
M. D. BAPTISTE	Rapporteur
Mme. F. LENE	Rapporteur
M. J.L. CHABOCHE	Examineur
M. A. EHRLACHER	Examineur
M. J.P. HEBERT	Examineur
M. S. KRUCH	Examineur

15

ONERA  
29, avenue de la Division Leclerc  
92320 CHATILLON





*Je dédie cette thèse à mes parents*

*qui m'ont durant toutes ces années encouragée, soutenue et aidée*



## REMERCIEMENTS

Cette thèse ayant été préparée à L'ONERA, dans la direction scientifique de la Résistance des Structures, j'adresse mes remerciements à son directeur Monsieur **Roger Labourdette** d'avoir bien voulu m'accueillir à l'Office et aux membres de l'équipe OR/CE pour la gentillesse qu'ils m'ont témoignée pendant mon séjour parmi eux.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur **Jean-Louis Chaboche** qui a proposé le sujet de thèse et dirigé mes recherches. Il a su me faire profiter de son expérience et me conseiller tout au long de ces années.

Je remercie Monsieur le Professeur **Didier Marquis** pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail en acceptant de présider le jury.

J'exprime mes vifs remerciements à Madame et Monsieur les Professeurs **Françoise Léné** et **Didier Baptiste** qui ont accepté d'être rapporteurs malgré leur charge de travail.

Que soient également remerciés Messieurs **Alain Ehrlacher** et **Jean-Pierre Hebert** d'avoir accepté la charge d'examineur.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur **Serge Kruch** qui m'a tout au long de ma thèse conseillée et encouragée. Je tiens à le remercier pour son dévouement, sa gentillesse et d'avoir bien voulu participer au jury en tant qu'examineur.

Je remercie tout particulièrement Monsieur **Pascal Paulmier** pour la qualité de son travail en réalisant la partie expérimentale de cette étude.

Je tiens enfin à exprimer ma profonde gratitude à Mademoiselle **Madeleine Chaudonneret** pour l'aide sympathique et les conseils qu'elle m'a donnés.



## TABLE DES MATIERES

RESUME GENERAL	7
INTRODUCTION	9
I CADRE GENERAL DE L'ETUDE	15
I.1 Travaux sur le comportement macroscopique	17
I.2 Les Méthodes d'homogénéisation en élasticité	18
I.3 Etat des recherches sur les composites CMM	20
II MODELISATION DU COMPORTEMENT ELASTIQUE HOMOGENEISE	23
II.1 Présentation générale du composite	25
II.1.1 Les différents procédés de fabrication	25
II.1.2 Les constituants	26
II.1.2.1 La fibre	26
II.1.2.2 La matrice	29
II.1.3. Elaboration du composite	29
II.1.4 .Conclusion	30
II.2 Homogénéisation périodique appliquée au matériau	30
II.2.1 Philosophie générale	30
II.2.2. Formulation du problème	31
II.2.3. Formulation variationnelle du problème élémentaire $pk h$	33
II.2.4. Particularités des forces d'interface	34
II.2.5. Loi d'élasticité équivalente et tenseur de localisation	35
II.2.6. Résultats numériques de la méthode d'homogénéisation	37
II.2.7. Conclusion	38
II.3 Homogénéisation par une méthode "auto-cohérente"	39
II.3.1. Philosophie générale	39
II.3.2. Rappel de la méthode d'Eshelby	39
II.3.3. Cas d'une hétérogénéité soumise à une déformation macroscopique $E$	41
II.3.4. Méthode de Mori-Tanaka	41
II.3.5. Application à notre composite	42
III ETUDE NUMERIQUE	47
III.1 Approche générale	49
III.1.1. Conditions initiales posées par le problème de fabrication	49
III.1.2. Lois de comportement des constituants	49
III.2 Traitement thermique	53
III.2.1. Etude de convergence	53

III.2.2. Convergence temporelle	55
III.2.3. Résultats du calcul thermique	55
III.3 Etude des seuils macroscopiques initiaux	57
III.3.1. Méthode de détection n° 1	57
III.3.2. Méthode de détection n° 2	59
III.4 Simulation hors du domaine élastique	60
III.4.1. Présentation des calculs	60
III.4.2. Chargements thermomécaniques envisagés	60
III.4.3. Principaux résultats de l'analyse numérique	61
III.5 Conclusion	62
IV. MODELISATION MACROSCOPIQUE	95
IV.1 Introduction	97
IV.2 Etude expérimentale	98
IV.2.1 Présentation générale	98
IV.2.2 Résultats des caractéristiques de base	99
IV.2.2.1 Boucles d'hystérésis	99
IV.2.2.2 Quelques remarques sur le comportement à froid	100
IV.2.2.3 Comportement à chaud	100
IV.2.3 Etude des seuils en fonction de la température	101
IV.2.3.1 Introduction	101
IV.2.3.2 Méthodologie particulière à chaque essai	101
IV.2.3.3 Principaux résultats	102
IV.2.3.4 Influence du temps de maintien	103
IV.3 CONCLUSION	105
IV.4 PROPOSITION D'UN PASSAGE MICRO-MACRO	116
IV.4.1 Obtention d'une relation de localisation	116
IV.4.2 Application	120
IV.4.3 Détermination des fonctions Frs et Grs	121
IV.4.4 Conclusion	122
IV.5 CRITERE D'ECROUISSAGE ET LOI D'EVOLUTION MACROSCOPIQUE	124
IV.5.1 Présentation du critère	124
IV.5.2 Conclusion	126
IV.5.3 Loi d'évolution de X	127
IV.6 FORMULATION THERMODYNAMIQUE	136
IV.6.1 Choix du potentiel Energie libre de Helmholtz	136
IV.6.2 Etude de la dissipation	138
IV.7 PREVISION DU COMPORTEMENT GLOBAL	139
IV.7.1 Evaluation du comportement macroscopique	139

IV.7.2 Influence des paramètres de modélisation	140
IV.8 MODELISATION DES EVOLUTIONS ANISOTHERMES	141
IV.8.1 Phénomènes physiques déjà examinés	141
IV.8.2 Lacunes du modèle	141
IV.8.3 Rappels des faits	142
IV.8.4 Mécanisme de vieillissement de l'AU4G	142
IV.8.5 Etude expérimentale sur le vieillissement	143
IV.8.6 Proposition de modèle	144
IV.8.6.1 Rappel du modèle de vieillissement développé par Marquis	144
IV.8.6.2 Modèle de vieillissement proposé pour le composite	145
IV.8.7 Formulation thermodynamique	152
IV.9 Conclusion	153
CONCLUSION GENERALE	159
ANNEXES	167
BIBLIOGRAPHIE	177



## RESUME GENERAL

Les matériaux métalliques ont été jusqu'à présent modélisés avec beaucoup de précision par des lois viscoplastiques en se plaçant dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus. Des nouveaux matériaux apparus depuis les deux dernières décades (les composites à matrice métallique) présentent des caractéristiques mécaniques anisotropes (anisotropie structurelle, contraintes résiduelles de fabrication) rendant les lois isotropes insuffisantes. Par ailleurs la modélisation de ces composites est menée jusqu'à présent le plus souvent en élasticité.

La méthode appliquée dans cette thèse consiste à utiliser des techniques d'homogénéisation (théorie des milieux périodiques, méthode "auto-cohérente") sur une cellule de base pour en extraire un tenseur de localisation des déformations qui sert de lien entre les échelles microscopique et macroscopique. Parallèlement des simulations numériques sont effectuées sur cette cellule, qui permettent de calculer les conditions, de traitement thermique et déterminent, par le biais des surfaces seuil, l'anisotropie initiale du domaine élastique, puis son évolution sous divers chargements. La méthode utilisée met en évidence la nécessité du passage micro-macro pour rendre compte des résultats de l'étude expérimentale menée en parallèle.

Un développement analytique est ensuite engagé sur la base de la démarche précédente et au moyen d'hypothèses simplificatrices. Ceci aboutit à l'établissement d'une loi macroscopique en thermo-élasto-viscoplasticité, en restant dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus. L'avantage essentiel de ce modèle phénoménologique est que la forme des opérateurs d'anisotropie est déduite d'un passage micro-macro simplifié. Ceux-ci s'expriment analytiquement à partir des tenseurs de concentration des contraintes calculés en élasticité.

La mise en évidence de certains phénomènes thermiquement activés a ouvert la voie vers une approche plus métallurgique et on s'est aussi intéressé au vieillissement du matériau. Une loi de vieillissement est alors incorporée dans le modèle proposé.



## INTRODUCTION



L'utilisation des composites à matrice métallique est envisagée dans plusieurs types d'application, tant avec des fibres courtes (culasses de moteur diesel, coiffes de missiles) que pour des configurations fibres longues (alliages Ti/SiC envisagés pour des disques de turbomachines, par exemple). Jusqu'à présent la plupart des travaux de modélisation de la tenue mécanique de ce type d'alliage composite ont eu pour finalité, soit l'amélioration des procédés de fabrication (par une meilleure connaissance des phénomènes mécaniques locaux à l'échelle de la microstructure), soit la fiabilité, c'est-à-dire l'évaluation de la tenue et de la durée de vie de ces matériaux, là encore en tenant compte des phénomènes microstructuraux. La plupart des analyses des contraintes dans les applications aux pièces réelles sont menées en élasticité.

Dans ce travail, notre objectif est délibérément macroscopique. Il s'inscrit dans le cadre d'une finalité "analyse inélastique des structures", considérée comme passage nécessaire pour une analyse de durée de vie correcte, c'est-à-dire prenant en compte les redistributions de contraintes (macroscopiques) induites par les plastifications locales dans les zones de concentration de contraintes des pièces réelles. Nous cherchons donc à établir une loi de comportement thermo-élasto-viscoplastique de ces composites à matrice métallique susceptible d'être utilisée dans des analyses inélastiques de pièces menées par la méthode des éléments finis.

Les lois d'évolution à nombre de paramètres variable sont très efficaces pour modéliser le comportement des matériaux métalliques supposés homogènes isotropes initialement. Elles sont particulièrement adéquates pour le comportement cyclique, avec effet de rochet, de relaxation de la contrainte moyenne, de restauration et de viscosité en température. Mais les composites à matrice métallique (CMM) introduisent un comportement anisotrope en dehors du domaine élastique déjà bien modélisé pour les autres types de composites. Cette anisotropie revêt divers aspects: l'anisotropie de structure due à la présence des fibres; l'anisotropie induite par la répartition des contraintes résiduelles dues au mode de fabrication et finalement l'effet Bauschinger provoqué par la déformation plastique elle-même. Ces phénomènes sont déjà bien connus; en effet, beaucoup de travaux ont été faits concernant ces CMM, en étudiant systématiquement le comportement élasto-plastique du composite, prenant en compte les facteurs microscopiques (fraction volumique, rapport d'élanement, répartition des fibres, types de fibres (cylindriques, sphériques). Le comportement global est alors obtenu grâce à des méthodes d'homogénéisation diverses, plus ou moins

sophistiquées. Cependant l'hypothèse de simple plasticité dans la matrice engendre, lors de chargements thermomécaniques, une surestimation importante des contraintes au sein du composite.

Dans une première partie, on rappelle brièvement les principes des diverses méthodes d'évaluation du comportement élastique équivalent, essentiellement les techniques de l'homogénéisation périodique et les méthodes "auto-cohérentes". Ces méthodes sont appliquées au cas du composite considéré dans cette étude, constitué d'une matrice aluminium (2024 T6) renforcée par des fibres courtes de SiC. En particulier elles nous permettent de déterminer les tenseurs de concentration des contraintes qui sont utilisés par la suite.

Pour mieux appréhender les contraintes résiduelles et les phénomènes de redistribution au cours de la plastification, une étude numérique est menée dans la deuxième partie à l'échelle de la microstructure, dans le cadre de l'élasto-viscoplasticité anisotherme. L'hypothèse de base reste la périodicité du milieu qui nous permet d'utiliser une cellule de base élémentaire symétrique. Deux simulations successives sont entreprises: (i) la réalisation du traitement thermique qui conduit à la connaissance des contraintes résiduelles induites par les dilatations contrariées et l'écoulement viscoplastique au cours du refroidissement, (ii) les chargements mécaniques ultérieurs, par traction ou traction-compression (à plusieurs températures) dans les axes de symétrie du composite. Quand c'est possible, ces simulations sont comparées aux résultats expérimentaux obtenus en chargement monotone ou cyclique. Ces calculs nous permettent aussi de valider une méthode simple de détermination des surfaces de limite d'élasticité, tant dans l'état initial après traitement thermique qu'à la suite de chargements mécaniques provoquant une plasticification locale et globale. Cette méthode utilise les résultats des simulations numériques en élasto-viscoplasticité et le tenseur élastique de concentration des contraintes déterminé précédemment par homogénéisation périodique.

La troisième partie correspond à la construction proprement dite de la loi de comportement thermo-élasto-viscoplastique macroscopique. Elle débute par la présentation des résultats d'une étude expérimentale assez complète, à froid et en température, qui permet de caractériser le comportement macroscopique et de mettre en évidence un ensemble de phénomènes complexes induits par des incursions brèves ou prolongées à

haute température. En particulier on note très clairement des effets de vieillissement de la matrice, phénomène bien connu par ailleurs.

Le modèle macroscopique s'appuie principalement sur un passage micro-macro et un certain nombre d'hypothèses simplificatrices. Délibérément, notre objectif est d'aboutir à un modèle purement macroscopique, ne reliant que des quantités macroscopiques: contrainte, déformation, déformation plastique, variables d'écroutissage, en cherchant donc à éliminer toutes les quantités définies à l'échelle locale. Délibérément aussi nous négligeons dans ce travail tout effet d'endommagement, que celui-ci soit lié au " défrettage "des fibres ou à une microfissuration de la matrice. Dans ce but, afin de généraliser les relations de localisation de l'élasticité, nous nous servons d'un cadre théorique de localisation généralisé développé récemment par Dvorak et Benveniste (39). Moyennant certaines simplifications, nous aboutissons à notre objectif et démontrons que tous les opérateurs d'anisotropie qui interviennent dans notre loi macroscopique peuvent s'exprimer de façon littérale en fonction des moyennes par phase des tenseurs de concentration élastiques. Ce résultat remarquable est très utile pour l'application et l'extension du modèle à des configurations différentes de composites (longueur de fibres, orientation, fraction volumique ...). La loi de comportement macroscopique ainsi identifiée est confrontée systématiquement aux résultats des simulations numériques de la deuxième partie et aux résultats expérimentaux. De plus une formulation particulière est proposée pour décrire les phénomènes de vieillissement induits par les incursions en température. Celle-ci correspond à une généralisation du modèle proposé par Marquis (7) pour l'alliage d'aluminium 2024.



## I CADRE GENERAL DE L'ETUDE



L'intérêt des industriels pour les composites à matrice métallique s'explique par leurs bonnes caractéristiques mécaniques et leur haute tenue en température. Dans le cas particulier des matrices constituées d'alliage d'aluminium, s'ajoute un faible poids et une bonne résistance à la corrosion.

Matériaux complexes, ils se situent dans la classe des composés métalliques polycristallins présentant donc un comportement (visco)plastique, similaire à celui de la matrice, mais révélant aussi des propriétés anisotropes du fait de leur hétérogénéité constitutive, au contraire des matériaux métalliques polycristallins considérés habituellement comme isotropes.

### I. 1 TRAVAUX SUR LE COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE

Bien que l'industrie fasse de plus en plus souvent appel à des alliages multiphasés, ces derniers sont considérés comme homogènes et isotropes. Leurs lois de comportement s'inscrivent dans le cadre de la mécanique des milieux continus où, via la méthode de l'état local, l'état du système est décrit par un ensemble de variables d'état (observables et internes) et soumis aux principes de la thermodynamique des processus irréversibles à variables internes ( Germain, 1)

Les phénomènes de viscoplasticité utilisés dans cette thèse pour modéliser le comportement de la matrice d'aluminium, interviennent naturellement à chaud mais peuvent aussi exister à basse température. Au delà des métaux cette théorie s'applique aussi aux résines, aux polymères lorsqu'ils subissent de violents chargements et enfin à l'étude des roches sollicitées mécaniquement sur de très longues périodes.

La viscoplasticité est très voisine de la plasticité mais le temps est l'agent principal gouvernant la déformation plastique qui devient donc dépendante de la vitesse de chargement.

L'état actuel de ces lois, est le résultat d'une longue évolution débutant par la loi empirique d'Andrade qui modélisait au travers d'une fonction puissance du temps la déformation due au fluage primaire. Ensuite les travaux de Norton, sur le fluage secondaire établissaient une loi d'évolution de la déformation visqueuse ensuite généralisée par divers auteurs (Lemaitre, 2) dans le cadre de l'hypothèse d'écrouissage isotrope. Des modèles plus récents sont développés à L'ONERA (Chaboche, 3), et au LMT-Cachan (Marquis, 4) dans le cadre de la viscoplasticité unifiée, permettant de modéliser un certain

nombre de phénomènes complexes comme l'effet Bauschinger, la relaxation de la contrainte moyenne lors d'essais cycliques, ou encore l'effet de rochet mécanique et thermique. Citons deux autres types d'approche de la viscoplasticité: la théorie endochronique de Valanis (5), le modèle de viscoplasticité de Krempl (6) basé sur la surcontrainte (ou contrainte visqueuse) En plus de ces théories de modélisation du comportement viscoplastique dans les matériaux métalliques, des études plus orientées dans le domaine métallurgique comme le phénomène de vieillissement (très courant chez les alliages Duralumin dont la matrice du composite examiné dans cette thèse, fait partie) sont aussi incorporées dans le cadre thermodynamique. Ainsi Marquis (7) a formulé une loi de vieillissement et de l'effet mécanique associé, pour l'alliage d'aluminium AU4G.

Nous disposons donc comme point de départ de nos travaux d'une panoplie de lois de comportement (visco)plastique très efficaces avec lesquelles nous modéliserons la matrice.

L'exigence principale pour travailler avec des matériaux composites, est de pouvoir le considérer macroscopiquement comme un matériau homogène. A cet effet un large éventail de méthodes d'homogénéisation est disponible dans la littérature.

## I. 2 LES MÉTHODES D'HOMOGENÉISATION EN ÉLASTICITÉ.

Calculer une pièce complète en tenant compte de l'hétérogénéité de sa structure serait bien trop onéreux quant au temps de calcul nécessaire. C'est pourquoi on est amené à simplifier la modélisation de la pièce et à remplacer sa matière hétérogène par un matériau homogène ayant un comportement équivalent. Le but de toute homogénéisation est donc de gommer l'hétérogénéité au niveau local et de donner au niveau macroscopique un comportement homogène équivalent.

Deux échelles se juxtaposent donc, et le passage de l'une à l'autre se fait généralement en introduisant des grandeurs macroscopiques, moyennes de leurs homologues microscopiques. Différentes méthodes plus ou moins approchées ont ces même bases et diffèrent par le type de condition aux limites. Citons à titre d'exemple les méthodes les plus connues:

### a) Les méthodes de Voigt et Reuss:

Elles consistent à supposer que la déformation micro est uniforme et égale à la déformation macro (Voigt) ou bien que la contrainte locale comme uniforme et égale à la contrainte globale (Reuss). Les lois homogénéisées sont

alors les simples moyennes volumique des lois des constituants. Ces méthodes se révèlent être exacte uniquement en dimension 1

#### b) la méthode de Hill-Mandel

Cette autre méthode en déformation conduit à de bien meilleurs résultats, (encadrés par les solutions précédentes), à condition de choisir un grand volume représentatif, une concentration de fibre ne dépassant pas (5%) et un volume représentatif ne rencontrant pas d'inclusion sur son bord. Elle suppose un déplacement uniforme sur le bord de la cellule. Ici le choix du volume représentatif est crucial, car plus il est grand et contient d'hétérogénéités et plus l'approximation est valable.

On est confronté aux mêmes exigences lorsqu'on applique la méthode duale de celle-ci, toujours proposée par Hill et Mandel.

#### c) Homogénéisation des milieux périodiques

Pour obtenir une solution exacte il convient de faire l'hypothèse que le milieu étudié est périodique, et admet donc un schéma répétitif qui, par translation dans toutes les directions, restituera la structure complète. Ce schéma est la cellule de base pris comme élément de volume représentatif. Cette périodicité structurelle s'accompagne d'une hypothèse de périodicité sur les déformations, et sur les contraintes. Il est alors possible d'établir des champs de déplacement à déformation périodique (Duvaut, 8) qui tiennent compte de la périodicité du matériau. Cette théorie admet une justification mathématique par l'approche asymptotique avec petit paramètre de Sanchez Palencia (9). Très largement utilisée, cette méthode a permis d'homogénéiser de très nombreux composites, que ce soient des carbones epoxy simples (Kruch, 10), des stratifiés fissurés (Thionnet, 11), des taffetas (Paumelle, 12), ou des matériaux plus récents comme les composites à matrices céramiques tissés (Lebon, 13).

#### d) Méthodes "auto-cohérentes"

Eshelby (14), précurseur de la théorie de l'inclusion équivalente dans un milieu infini, de nombreux auteurs Hill (15), Mori-Tanaka (16), Christensen (17), ont étendu cette méthode par l'utilisation des champs moyens. Elles nécessitent la résolution d'équations intégrales et sont pour la plupart implicites.

#### e) Autres Méthodes

Nous terminons notre liste non exhaustive en citant les méthodes énergétiques d'Hashin et al. (18), et les méthodes de développements de formulations intégrales par des séries de Fourier données par Walker et al. (19).

Nous exploiterons ces méthodes au chapitre II pour obtenir dans un premier temps une loi de comportement élastique puis déterminer les tenseurs de localisation de déformations et de concentration des contraintes nécessaires au passage micro-macro qui permettront, avec d'autres opérateurs définis à partir des travaux de Dvorak (41), (43) d'étendre notre analyse au cas plus général de la thermo-viscoplasticité, sujet de nos travaux.

### I. 3 ETAT DES RECHERCHES SUR LES COMPOSITES CMM

L'intérêt suscité dans l'industrie par ces composites, a donné lieu à de nombreuses recherches, tant du point de vue métallurgique que mécanique. Pour rendre ces matériaux plus performants, une analyse métallurgique des différents paramètres comme la composition de l'alliage utilisé pour matrice, le type de traitement thermique, le processus de fabrication, l'interface fibre matrice est menée.

Les travaux sur le comportement mécanique des CMM se répartissent principalement en deux groupes suivant l'échelle à laquelle ils sont effectués. Dans un cadre général sur l'endommagement des matériaux composites, une étude plus particulièrement centrée sur un composite AL/SiCw a été menée par D. Baptiste (20, 21) et ses collaborateurs par une approche micro-macro, aboutissant à des critères macroscopiques d'endommagement qui, rendaient compte de l'influence des paramètres microstructuraux. Au niveau microscopique, des études sur le processus d'endommagement avec une formulation de critères microscopiques de croissance d'endommagement ont été menés par Breban (22). Dans le cadre de la mécanique de la rupture, Chambolle (23), a proposé des critères microscopiques de fissuration. Les contraintes résiduelles de fabrication et leurs évolutions sous chargement et leur influence lors de cycles thermiques sont aussi sujettes à de nombreux travaux, que ce soit par une analyse élasto-plastique par éléments finis (Chambolle, 23), ou en viscoplasticité (Jarry et al., 24). Au niveau macroscopique, Leflour et Locicero (25), Hamann et al., (26) les ont quantifiées par des méthodes d'inspiration "auto-cohérente" et ont étudié leur influence sur la résistance à la déformation plastique. Dans le cadre de la modélisation macroscopique de ces composites d'importants travaux d'homogénéisation et de localisation en thermo-élasticité ont été développés par Dvorak et Benveniste, (27) portant principalement sur des composites biphasés. Pour ces mêmes matériaux, Dvorak, (28) a proposé un modèle d'élasto-plasticité avec la caractérisation des surfaces seuils. Boyd Allen et al., (29) se sont intéressés à développer une loi de comportement

viscoplastique macroscopique incrémentale, formulée en terme de module tangent, en s'appuyant sur les travaux de Mori et Tanaka. (16).

La formulation d'une loi de comportement pour des matériaux composites anélastiques se heurte au problème des relations de localisation des déformations ou bien de concentration des contraintes. Dvorak (44) a récemment proposé la formulation de " fonctions d'influence généralisées," permettant de résoudre le problème précédent. Nous utiliserons ses résultats pour établir notre passage micro-macro nécessaire à l'élaboration de la loi de comportement macroscopique recherchée.

Enfin Voyiadjis (30, 31) s'est intéressé à la modélisation macroscopique de l'endommagement au travers d'une approche locale, formulant pour cela un tenseur global d'endommagement, puis, a proposé un critère macroscopique anisotrope de plasticité couplée à l'endommagement

Le comportement macroscopique sous sollicitation thermique a bien sûr été examiné. Ainsi le phénomène de rochet thermique induit par des cycles en température (inférieure à 200° C) a été étudié pour un alliage d'aluminium 6061 renforcé de fibres de SiC, par Toitot ( 32). Avec là encore une proposition de modèle macroscopique simplifié.

Comme on peut le constater , les CMM constituent un vaste sujet de recherche dans lequel nous allons nous plonger.



## II MODELISATION

### DU COMPORTEMENT ELASTIQUE EQUIVALENT



## II. 1 PRÉSENTATION GÉNÉRALE DU COMPOSITE

Les alliages d'aluminium sont très largement utilisés dans l'industrie aéronautique pour deux de leurs caractéristiques essentielles: leur faible densité et leur bonne résistance à la corrosion. Cependant la perspective de leur utilisation en température nécessite de les remplacer par des éléments à haute tenue en température. Ainsi de nouveaux matériaux composites sont élaborés, constitués de matrice (alliages d' aluminium) et de renforts (fibres courtes, longues, particulières).

La température maximale de fonctionnement envisagée ne dépasse pas 250°C. Pour une gamme plus haute, il faut envisager d'autres matrices comme le titane par exemple. Le type de renfort donne pour une même matrice des caractéristiques mécaniques et de tenue en température totalement différentes suivant la taille et la forme des fibres. La fabrication de ce genre de composite suit un processus très élaboré. Il existe plusieurs modes de fabrication qui dépendent de l'état physique de la matrice au moment de l'incorporation des renforts. Nous allons rapidement passer en revue ces différents procédés.

### II. 1.1 Les différents procédés de fabrication.

Il y a deux grandes familles de procédés: la métallurgie des poudres, et l'infiltration sous phase liquide:

#### - La métallurgie des poudres

Les renforts sont mélangés à la matrice, réduite à l'état de poudre très fine, puis soumis à une compression à froid puis une compression isostatique à chaud. Le produit obtenu se présente généralement sous forme de billettes qui sont ensuite transformées par filage , laminage etc....

#### -L'infiltration sous phase liquide

Une préforme fibreuse est infiltrée par le métal fondu. La taille du renfort est variable; l'ensemble est ensuite soumis à de fortes pressions. Dans cette famille deux procédés se distinguent:

-la technique Ospray où l'on injecte simultanément des particules et un jet d'alliage fondu, le tout sous gaz inerte.

-La technique du pré imprégné où la fibre métallisée est drapée et pressée.

Tous ces modes de fabrication induisent des contraintes résiduelles de fabrication dont il faut tenir compte. De plus le choix adéquat des constituants est déterminant pour le respect du cahier des charges souvent sévère pour ce type de composite. Enfin l'interface fibre-matrice doit être le plus parfait possible pour une bonne transmission des efforts dans la fibre.

## II.1.2 Les constituants

### II.1.2.1 La fibre

Pour assurer un renfort fibreux efficace, les fibres doivent présenter un haut module d'élasticité, et une contrainte à rupture élevée. C'est la cas des fibres de SiC présentes à hauteur de 22% dans la composition pondérale du composite fourni par l'Aérospatiale. Ces fibres sont obtenues à partir de la pyrolyse de la balle de riz (cela permet l'obtention de carbone très pur après mise à haute température et adjonctif de réaction sur des grains de riz alimentaires). Il y a ensuite réaction chimique entre le  $\text{SiO}_2$  et le carbone C en présence de catalyseur dans une gamme de température de 1300 à 1700°C . Ce procédé permet de produire des fibres courtes de SiC ou whiskers en quantité importante. Il existe différents fabricants dont les plus connus sont Arco, Taheko, Tokai Carbon, L'Université de Nagasaki, Nicalon. Comme on peut le constater dans le tableau (1) la nature des whiskers est assez variée.

Fabricants	Arco	Tokai	Los Alamos	Nagasaki
Type de cristal	$\alpha$	$\alpha+\beta$	$\beta$	$\beta$
Diamètre ( $\mu\text{m}$ )	0.6	0.05-0.2	5-6	<1
longueur ( $\mu\text{m}$ )	10-80	10-40	30-200	3000-5000

tableau 1 extrait de la référence 33

Le SiC présente deux formes allotropiques  $\alpha$  et  $\beta$ :  $\beta$  dont la structure d'empilement atomique est sans défauts contrairement à  $\alpha$ . Afin de connaître la nature exacte du SiC présent dans notre échantillon, on l'a soumis à la diffraction par rayon X. Il s'avère que les deux formes de SiC  $\alpha$  et  $\beta$  coexistent. Un résumé de la méthode de diffraction est présenté en annexe.

Les caractéristiques mécaniques prises pour nos fibres ont été relevées dans la littérature. Les valeurs du module d'Young  $y$  varient de 414 à 700 GPa et de 0.17 à 0.40 pour le coefficient de Poisson. On a retenu un module de 420 GPa et  $\nu$  égal à 0,17. Et on considère de plus que ces paramètres ne varient pas en fonction de la température dans l'intervalle (0-500°C). Enfin la valeur du coefficient de dilatation linéaire retenu est de  $\alpha=5.10^{-6} \text{ K}^{-1}$  (qui est la valeur calculée en fonction du coefficient de la dilatation volumique du SiC massif (Chambolle, 23).

Dans la suite de notre étude la fibre aura toujours un comportement élastique isotrope et on négligera la désorientation (malgré l'opération de filage) mise en évidence sur les clichés 2 et 3 obtenus au microscope optique, au profit d'un alignement parfait des fibres les unes par rapport aux autres. On supposera de plus une répartition fibreuse uniforme.

Après observation au microscope électronique à balayage (cliché 1) des fibres obtenues après dissolution chimique de notre composite, on prendra pour dimensionner les fibres un rapport d'élanement moyen de 10 pour un diamètre de 4  $\mu\text{m}$ .

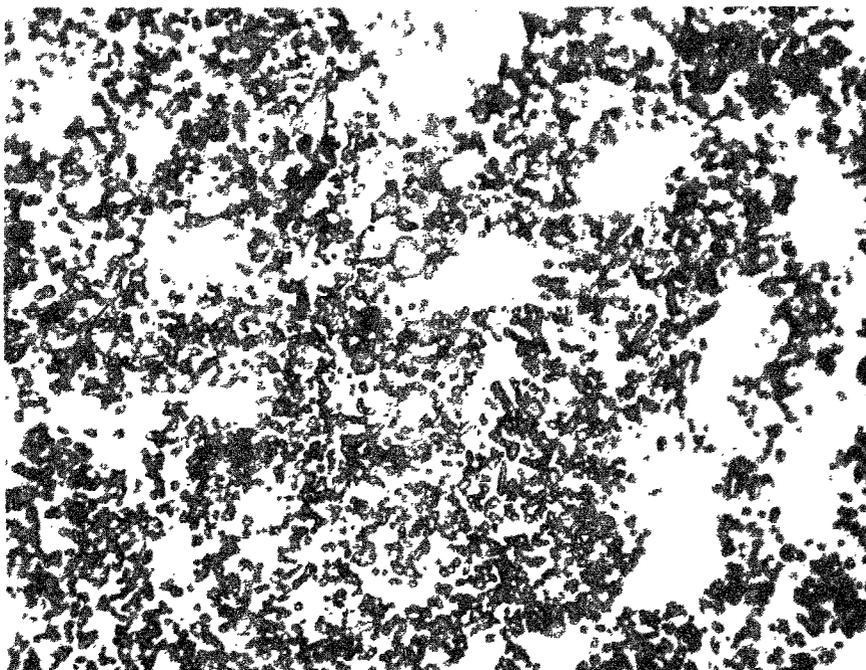
CLICHE 1 PRIS AU MICROSCOPE ELECTRONIQUE À BALAYAGE



CLICHES 2 ET 3 PRIS AU MICROSCOPE OPTIQUE



Sens longitudinal



Sens transversal

Agrandissement 1200 fois

### II.1.2.2 La matrice.

L'alliage utilisé comme matrice dans notre composite est un alliage d'aluminium dit 2024 à durcissement structural .

De façon générale le durcissement est assuré par la présence de précipités intermétallique qui bloquent le mouvement des dislocations. Ces précipités sont formés à partir des éléments d'alliage, soit par refroidissement direct, soit à partir d'une solution solide sursaturée obtenue par trempe après mise en solution de l'alliage. Il s'en suit une sorte d'homogénéisation (38). Dans l'alliage 2024 dont la composition chimique (autre que l'Aluminium) est donnée dans le tableau 2, le cuivre est l'élément susceptible de précipiter.

Bien que notre matériau ait été élaboré par la métallurgie des poudres, on considérera qu'après sa fabrication la matrice conserve les mêmes propriétés que l'alliage initial.

Cu	3,08%
Mg	1,09%
Si	quelques traces
Mn	quelques traces

tableau 2: Composition chimique de l'alliage

Le comportement de cet alliage est supposé isotrope, élasto-plastique, et viscoplastique en température. Le module d'Young et le coefficient de Poisson à température ambiante sont pris égaux à 75 GPa et 0.34 respectivement.

On notera les valeurs retenues pour le coefficient de dilatation linéaire  $\alpha = 25.10^{-6} K^{-1}$  soit un rapport 5 avec celui de la fibre. Cette importante différence entre les coefficients de dilatation est à l'origine des fortes contraintes résiduelles présentes dans le composite après fabrication.

### II.1.3 Elaboration du composite.

Le composite une fois la fabrication (par la métallurgie des poudres) terminée, est filé puis subit un traitement thermique T6. Ce traitement T6 consiste en une montée en température de mise en solution à 492°C pendant 12 h puis une trempe à l'eau. Une maturation à l'ambiante de 72 heures suivie d'un revenu à 190 °C pendant 9 heures complètent le traitement.

Le filage donne une orientation privilégiée aux fibres. On distingue alors un sens longitudinal (selon le filage) et un sens transversal. On remarque sur les clichés 2 et 3 qu'en dépit du filage, une mauvaise répartition des fibres fait apparaître des zones d'alliage pur.

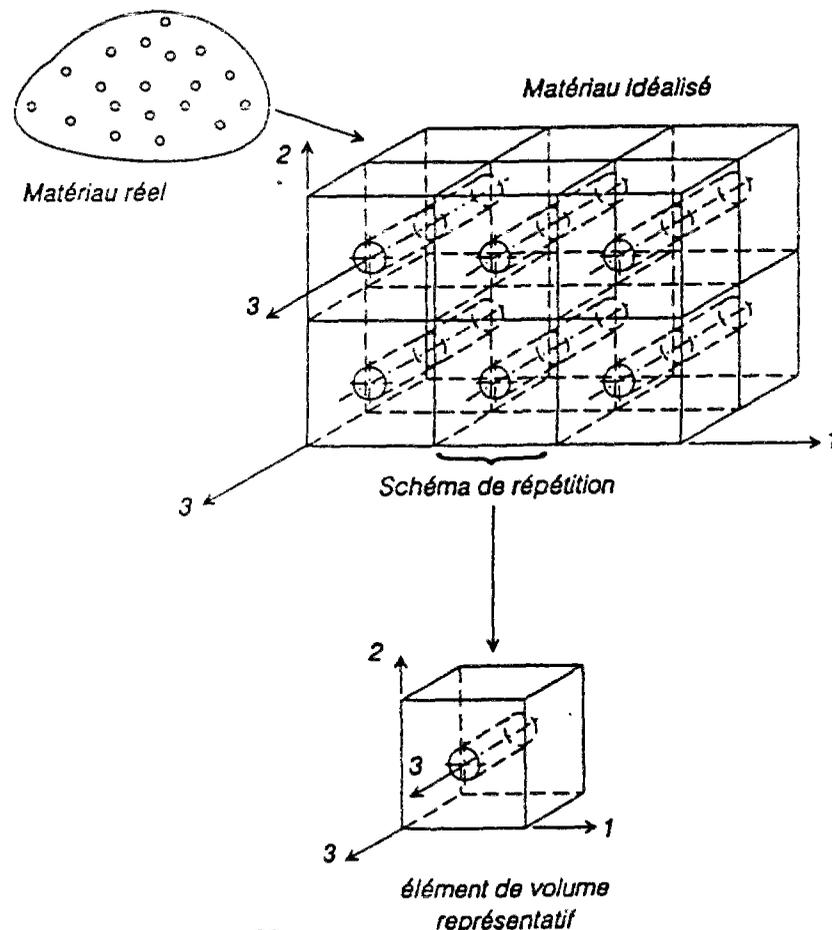
#### II.1.4 Conclusion

La composition du composite, et son mode de fabrication sont à la base de l'anisotropie de comportement et de ses propriétés particulières, que nous allons modéliser. Pour cela nous entreprendrons une étude numérique sur un élément de volume représentatif du matériau et déduirons une loi de comportement macroscopique tout d'abord élastique, par une méthode d'homogénéisation.

### II.2 HOMOGÉNÉISATION PÉRIODIQUE APPLIQUÉE AU MATÉRIAU

#### II.2.1 Philosophie générale

On passe donc outre à la mauvaise répartition des fibres pour supposer que le matériau présente une structure périodique



On choisit l'élément de répétition du volume élémentaire représentatif du matériau comme cellule de base  $\Omega$  sur laquelle on suppose des propriétés de périodicité.

On définit les grandeurs macroscopiques, la contrainte  $\Sigma$  et la déformation  $E$ , à partir de leurs homologues microscopiques  $\sigma$  et  $\varepsilon$ . En l'absence de défauts (cavités, fissures ou inclusions rigides) et en l'absence de force de masse, ces grandeurs sont définies de manière générale comme les moyennes volumiques sur la cellule élémentaire de leurs correspondants locaux.

$$(II.1) \quad \begin{aligned} \Sigma &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma(M) d\Omega \\ E &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varepsilon(M) d\Omega \end{aligned}$$

On se donne ensuite une déformation macroscopique  $E$  et on cherche par l'intermédiaire de la résolution d'un problème d'élasticité posé sur la cellule de base  $\Omega$ , le champ de déplacement microscopique  $u(M)$ , les champs de contraintes  $\sigma(M)$  locaux, en fonction de  $E$ .

La dernière étape consiste à exprimer la contrainte globale  $\Sigma$  qui en résulte, en fonction de  $E$ . On a alors une relation entre les déformations et les contraintes macroscopiques. Il s'agit de la loi de comportement macroscopique du matériau homogène équivalent. Cette relation met en évidence un tenseur du 4<sup>e</sup> ordre  $L$  tel que

$$(II.2) \quad \Sigma_{ij} = L_{ijkl} : E_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3$$

$L$  est le tenseur des rigidités du matériau homogène équivalent. On utilise la convention d'Einstein pour les indices. Les tenseurs de rigidité de la matrice et de la fibre seront notés respectivement  $L_1$  et  $L_2$  ou désignés génériquement par  $L_r$ , de même, les fractions volumiques seront notées  $c_1$  et  $c_2$ .

La formulation du problème est développée dans le paragraphe suivant.

### II. 2.2 Formulation du problème

Connaitre la réponse ( $u, \sigma$ ) au chargement macroscopique revient à résoudre le problème  $P$  suivant:

Cherchons  $u(M)$ , dérivable, continu, à déformation périodique, solution du problème:

$$(II.3) \quad \begin{cases} \sigma_{ij,j} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_{ij}(M) = L_{ijkl}(M) : \varepsilon_{kl}(M) & \text{dans } \Omega \\ \langle \varepsilon(u(M)) \rangle_{\Omega} = E & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon(u) \text{ et } \sigma \text{ périodiques sur } \partial\Omega \end{cases}$$

(II.3.2) représente la loi de comportement élastique du matériau hétérogène. Les tenseurs  $L_r$  possèdent les propriétés suivantes: on suppose que leurs coefficients sont bornés et satisfont les hypothèses de symétrie et coercivité: où  $C_0$  est une constante positive

$$(II.4) \quad \forall \xi_{ij} \quad \begin{cases} L_{ijkl} : \xi_{ij} : \xi_{kl} \geq C_0 \xi_{ij} : \xi_{kl} \\ L_{ijkl} = L_{klij} = L_{lkij} \\ L_{ijkl} \in L^{\infty}(\Omega) \end{cases}$$

Les deux constituants, matrice et fibre, sont pour l'instant supposés élastiques, isotropes et sont parfaitement collés l'un à l'autre. Le tenseur des déformations macroscopiques  $E$  que l'on se donne, peut s'exprimer en fonction d'un tenseur unitaire du 4<sup>e</sup> ordre  $I$  de la façon suivante:

$$(II.5) \quad E_{ij} = I_{ij}^{kh} : E_{kh}$$

avec : 
$$(II.6) \quad I_{kh}^{ij} = \frac{1}{2} [\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}]$$

D'autre part, tout champ  $u$  à déformation périodique (Duvaut, 8) s'écrit:

$$(II.7) \quad u = v + E : y + c$$

où  $v$  est un champ de déplacement périodique dans  $\Omega$ ,  $c$  une constante d'intégration,  $E$  la déformation macroscopique telle que  $E = \langle \varepsilon(u) \rangle_{\Omega}$  et enfin  $y$  désigne les coordonnées locale du point considéré

La linéarité du problème  $P$  vis à vis de  $E$  permet de décomposer le champ  $u$  solution, sous la forme  $u = E_{kh} : u^{kh}$  où  $u^{kh}$  est la solution du problème élastique  $P^{kh}$  dont la déformation macroscopique imposée est maintenant élémentaire.

Le problème  $P$  se scinde alors en six problèmes  $P^{kh}$  correspondant aux six déformations macroscopiques élémentaires possibles  $E_{kh}$ .

Le problème  $P^{kh}$  est le suivant (où  $n$  est la normale extérieure au domaine).

$$(II.8) \begin{cases} \sigma_{ij}^{kh}(u^{kh}) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \sigma_{ij}^{kh} = Lr_{ijlm} : \varepsilon_{lm}(u^{kh}) \text{ dans } \Omega \\ \left\langle \varepsilon_{ij}(u^{kh}) \right\rangle_{\Omega} = I_{ij}^{kh} \\ \varepsilon(u^{kh}) \text{ est p\u00e9riodique dans } \Omega \\ \sigma^{kh} : n \text{ est anti-p\u00e9riodique sur } \partial\Omega \end{cases}$$

### II. 2. 3 Formulation variationnelle du probl\u00e8me \u00e9l\u00e9mentaire p<sup>kh</sup>

La mise en oeuvre num\u00e9rique est plus facile avec des champs p\u00e9riodiques comme l'ont montr\u00e9 les travaux de F. L\u00e9n\u00e9 (34) qui a \u00e9tabli une m\u00e9thode num\u00e9rique pratique pour ce type de condition aux limites  $u^{kh}$  \u00e9tant lui aussi un champ \u00e0 d\u00e9formation p\u00e9riodique, il admet la d\u00e9composition (II.7) et peut s'exprimer sous la forme:

$$(II.9) \quad u^{kh} = v^{kh} + E_{kh} : y + c$$

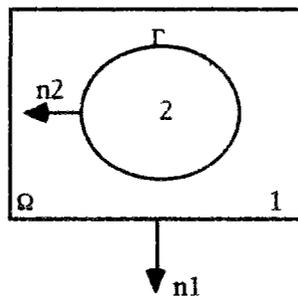
on d\u00e9finit l'ensemble des champs de d\u00e9placements cin\u00e9matiquement admissibles U<sub>ad</sub> par:

$$U_{ad} = \{ \delta v, \text{ continus, d\u00e9rivables, p\u00e9riodiques sur } \partial\Omega \}$$

Apr\u00e8s le changement de variable  $(u^{kh}, v^{kh})$  la formulation variationnelle de p<sup>kh</sup> est alors:

$$(II.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } v^{kh} \text{ p\u00e9riodique sur } \partial\Omega \text{ tel que:} \\ \int_{\Omega} Lr_{ijlm} : \varepsilon_{lm}(v^{kh}) : \varepsilon_{ij}(\delta v) d\Omega = - \int_{\Omega} Lr_{ijlm} : I_{lm}^{kh} : \varepsilon_{ij}(\delta v) d\Omega \quad \forall \delta v \in U_{ad} \end{array} \right.$$

L'uniformit\u00e9 des tenseurs de rigidit\u00e9s dans chaque phase et les conditions de p\u00e9riodicit\u00e9 permettent de r\u00e9duire le second membre en une int\u00e9grale de surface sur le pourtour  $\Gamma$  de l'interface fibre-matrice.



$n_j^2$  repr\u00e9sente la composante j de la normale ext\u00e9rieure au milieu 2 (fibre)

On d\u00e9signe par  $[a]$  la quantit\u00e9  $a(2) - a(1)$ , et on pose:

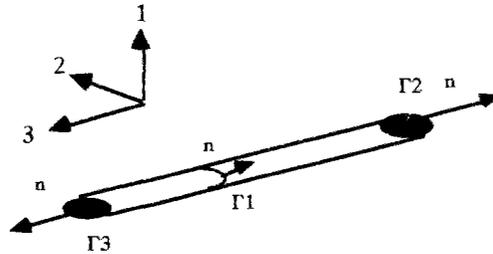
$$(II.11) \quad F_i^{kh} = \int_{\Gamma} [L_{ijkh}] n_j^2 ds$$

La formulation variationnelle cherchée pour le problème  $P^{kh}$  est donc:

$$(II.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } v^{kh} \text{ périodique tel que } \forall \delta v \in U_{ad}: \\ \int_{\Omega} L_{ijkl} \varepsilon_{lm}(v^{kh}) \varepsilon_{ij}(\delta v) d\Omega = - \int_{\Gamma} F_i^{kh} \delta v_i ds \end{array} \right.$$

#### II.2.4 Particularité des forces d'interface

Dans le cas de la fibre courte, l'interface  $\Gamma$  se décompose en  $\Gamma_1$  représentant la section circulaire de la fibre,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  désignant les disques terminaux (têtes de fibre). Dans les tableaux 3 et 4 nous avons résumé l'ensemble de ces forces et les valeurs encadrées représentent celles dues uniquement aux têtes de fibres (elles n'existent pas dans le cas de la fibre longue). On abandonne provisoirement l'indice  $r$  dans l'écriture du tableau.

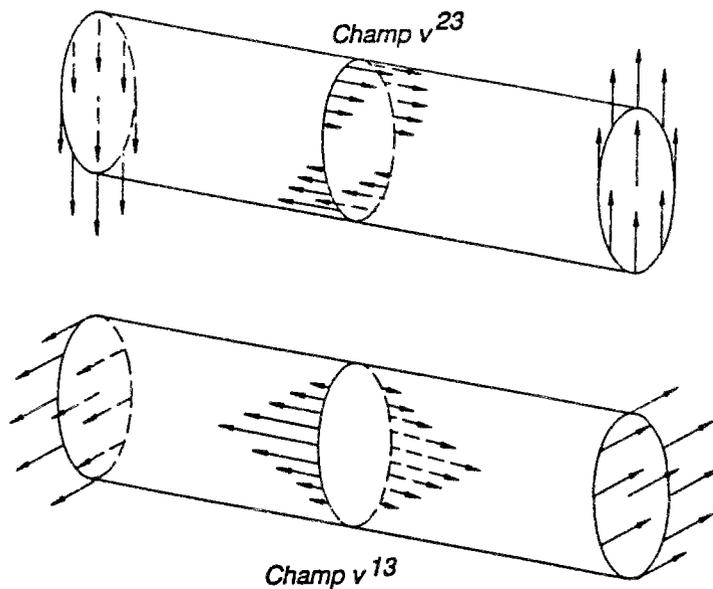


kh=11	kh= 22	kh = 33
$F_1^{11} = \int_{\Gamma} [L_{1111}] n_1 ds$	$F_1^{22} = \int_{\Gamma} [L_{2211}] n_1 ds$	$F_1^{33} = \int_{\Gamma} [L_{1133}] n_1 ds$
$F_2^{11} = \int_{\Gamma} [L_{2211}] n_2 ds$	$F_2^{22} = \int_{\Gamma} [L_{2222}] n_2 ds$	$F_2^{33} = \int_{\Gamma} [L_{2233}] n_2 ds$
$F_3^{11} = \int_{\Gamma} [L_{3311}] n_3 ds$	$F_3^{22} = \int_{\Gamma} [L_{3322}] n_3 ds$	$F_3^{33} = \int_{\Gamma} [L_{3333}] n_3 ds$

kh=12	kh= 13	kh = 23
$F_1^{12} = \int_{\Gamma} [L_{1212}] n_2 ds$	$F_1^{13} = \int_{\Gamma} [L_{1313}] n_3 ds$	$F_1^{23} = 0$
$F_2^{12} = \int_{\Gamma} [L_{1212}] n_1 ds$	$F_2^{13} = 0$	$F_2^{23} = \int_{\Gamma} [L_{2323}] n_3 ds$
$F_3^{12} = 0$	$F_3^{13} = \int_{\Gamma} [L_{1313}] n_1 ds$	$F_3^{23} = \int_{\Gamma} [L_{2323}] n_2 ds$

tableaux 3 et 4 : Récapitulation des forces d'interfaces

On a donc 6 problèmes variationnels correspondant à chaque type de force. L'antisymétrie des forces des champs de cisaillement  $kh=23,13$  (dessinées ci dessous) a nécessité le maillage de la cellule complète et non le huitième (habituellement considéré dans le cas des fibres longues).



*Forces d'interface pour les problèmes de cisaillement 13 et 23*

Le maillage a été réalisé pour deux types de cellules élémentaires: une cellule à fibre courte et une cellule à fibre longue. Ils sont identiques dans le plan perpendiculaire à la fibre ( planches 1 et 2)

### II.2.5 Loi d'élasticité équivalente et tenseur de localisation

La loi homogénéisée élastique permet de relier les déformations et les contraintes macroscopiques. Elle est directement obtenue à partir des définitions précédentes. En effet nous avons:  $\Sigma = \langle L_r(M) : \varepsilon(M) \rangle_\Omega$ ;

Et en se rappelant de la linéarité du problème vis-à-vis de la déformation macroscopique imposée, le tenseur des rigidités homogénéisé apparaît sous la forme:

$$(II.14) \quad L_{ijkl} = \left\langle L_{r_{ijpq}}(M) \varepsilon_{pq}(u^{kh}) \right\rangle_\Omega$$

$$(II.15) \quad \varepsilon_{ij}(u) = \varepsilon_{ij}(u^{kh})E_{kh} \text{ ou encore } \varepsilon_{ij}(u) = A_{ijkh}E_{kh}$$

Cet opérateur A d'ordre 4 non symétrique, peut s'écrire en fonction des champs de déplacement périodiques  $v^{kh}$ , solutions des problèmes P<sup>kh</sup>:

$$(II.16) \quad A_{ijkh} = \varepsilon_{ij}(v^{kh}) + I_{ij}^{kh}$$

On peut encore écrire le tenseur des rigidités équivalent en fonction de A:

$$(II.17) \quad L = \langle L_r : A \rangle_{\Omega}$$

Dans notre cas particulier, d'un composite biphasé ayant des caractéristiques mécaniques uniformes pour chaque constituant, l'égalité ci-dessus se ramène à:

$$(II.18) \quad L = c_1 L_1 : A_1 + c_2 L_2 : A_2 \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} A_1 &= \langle A \rangle_{\Omega_m} \\ A_2 &= \langle A \rangle_{\Omega_f} \end{aligned}$$

où  $\Omega_m$  et  $\Omega_f$  désignent respectivement les volumes occupés par la matrice et la fibre

Il est alors facile de déterminer le tenseur de concentration des contraintes B en fonction de A, qui vérifie: (II.19)  $\sigma(M) = B(M) : \Sigma$

Il suffit d'introduire cette relation dans la loi de comportement locale et nous avons:

$$(II.20) \quad B(M) = L : A(M) : L^{-1}$$

On rappelle qu'en utilisant la formulation en contraintes duale de la nôtre (Suquet, 36; Léné, 34) B est déterminé directement comme A l'est ici.

Ce tenseur de concentration des contraintes permet, en appliquant le lemme de Hill, de définir la déformation plastique macroscopique lorsque la déformation plastique locale  $\varepsilon_p(M)$  est donnée (Suquet, 32), en supposant au niveau global la partition de la déformation totale en déformation élastique et plastique. On démontre alors que :

$$(II.21) \quad E_p = \langle B^T(M) : \varepsilon_p(M) \rangle$$

L'obtention de A et la définition de la déformation plastique macroscopique sont essentielles pour la suite de nos travaux pour définir les relations de localisation généralisées au cas thermo-viscoplastique. Cela nécessite tout d'abord de résoudre les six problèmes P<sup>kh</sup> d'élasticité linéaire pour connaître les champs  $v^{kh}$ .

## II.2.6 Résultats numériques de la méthode d'homogénéisation

Le jeu de données pour l'exploitation numérique, de la formulation variationnelle (II.12), effectuée avec le code d'éléments finis SAMCEF, est constitué d'une part par le couple de paramètres (module d'Young, coefficient de Poisson) pour chacun des deux constituants et d'autre part, par le type de conditions aux limites (déplacements périodiques sur les bords, forces d'interfaces) imposées sur la cellule de base.

Les constituants sont élastiques et isotropes donc les seuls coefficients non nuls de leur tenseur de rigidité sont:

$$\begin{cases} L_{1111} = L_{2222} = L_{3333} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ L_{1122} = L_{1133} = L_{2233} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ L_{1212} = L_{1313} = L_{2323} = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases}$$

On prendra  $E=75000$  MPa,  $\nu = 0.34$  pour la matrice et  $E=420000$  MPa,  $\nu = 0.17$  pour la fibre.

La forme de la cellule de base représentant le schéma de répétition du milieu périodique induit une propriété d'orthotropie pour le composite. Une cellule hexagonale aurait entraîné une isotropie transverse ( Léné ,34).

Les résultats de calcul ont été validés en comparant les valeurs obtenues dans le cas de la fibre longue avec les valeurs de la littérature ( Kruch, 10).

Le maillage comprenant 1344 mailles, et 1575 noeuds et le tenseur A étant calculé en chaque maille (comme les champs  $v^{kh}$ ), nous nous contenterons de donner les tenseurs de rigidité  $L$  homogénéisés que nous avons calculés pour les deux cellules de base.

- pour le composite à fibre courte les coefficients d'élasticité sont:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{33} \\ \Sigma_{12} \\ \Sigma_{23} \\ \Sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 136801 & 64849 & 61635 & 0 & 0 & 0 \\ 64849 & 136801 & 61635 & 0 & 0 & 0 \\ 61635 & 61635 & 150350 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 33989 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 33560 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 33560 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{12} \\ 2E_{23} \\ 2E_{13} \end{bmatrix}$$

- pour le composite à fibre longue on a

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{33} \\ \Sigma_{12} \\ \Sigma_{23} \\ \Sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 151001 & 67167 & 63369 & 0 & 0 & 0 \\ 67167 & 151001 & 63369 & 0 & 0 & 0 \\ 63369 & 63369 & 200191 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 379799 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 40998 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40998 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{12} \\ 2E_{23} \\ 2E_{13} \end{bmatrix}$$

Les caractéristiques mécaniques du matériau homogène équivalent sont résumées dans le tableau ci-dessous:

Type de cellule	fibre courte	fibre longue	fibre seule	matrice
E1 = E2 (MPa)	97335	114001	420000	75000
E3	112132	163417	420000	75000
$\nu_{13} = \nu_{23}$	0.307	0.29	0.17	0.34
$\nu_{12}$	0.352	0.36	0.17	0.34

tableau 5 : caractéristiques mécaniques homogénéisées

En conservant le même maillage (dans le plan transversal) pour les deux catégories de fibre nous n'avons bien sûr pas respecté la même fraction volumique de renforts: elle est de 16,9% pour les whiskers et de 25,4% pour l'autre configuration, ce qui provoque la forte augmentation du module d'Young dans le sens longitudinal.

Par contre le faible pourcentage de renforts dans le composite servant de base à notre étude n'engendre qu'un léger raidissement du matériau. Cependant les comparaisons avec les données expérimentales sont satisfaisantes:

- E1 expérimental = 90000 MPa ( écart 7.2%)
- E3 expérimental = 110000 MPa ( écart 1.9%)

### II. 2.7 Conclusion

La méthode d'homogénéisation des milieux périodiques est exacte, mais assez lourde à mettre en oeuvre en particulier pour le cas de la fibre courte car on doit alors effectué un calcul 3D. Pourtant elle permet d'obtenir un tenseur de localisation des déformations (ou des contraintes) en tout point et

une définition de la déformation macroscopique plastique qui serviront de base aux travaux ultérieurs.

Cependant, pour étudier systématiquement le rapport d'élançement, différentes configurations volumiques, il serait nécessaire à chaque fois de remailler la cellule élémentaire et de calculer les champs de déplacement élémentaires  $v^{kh}$ . Nous allons donc nous intéresser maintenant à la méthode de l'inclusion équivalente, beaucoup plus flexible quant à sa mise en oeuvre que la méthode précédente. Il faut cependant noter qu'on abandonne complètement l'hypothèse de la structure périodique, ce qui peut être un avantage, puisque, dans la réalité le matériau ne présente pas un tel alignement, comme on l'a vu précédemment.

## II.3 HOMOGENEISATION DU MATERIAU PAR LA METHODE "AUTO-COHERENTE"

### II.3.1 Philosophie générale

Aux travaux originels d'Eshelby (14), concernant la situation élémentaire d'une inclusion déformée prise isolément puis placée dans un environnement infini de même composition, ont succédé des méthodes d'homogénéisation appliquées à des matériaux hétérogènes. La résolution du problème de l'hétérogénéité élastique, soumise à une déformation libre est l'étape intermédiaire de la résolution des problèmes de matériaux hétérogènes à base d'inclusions.

Les méthodes auto-cohérentes obéissent à la même démarche en considérant que chaque phase est tour à tour rassemblée dans un domaine ellipsoïdal (l'inclusion), en assimilant le milieu hétérogène qui l'entoure (la matrice) au milieu homogène équivalent, inconnu. Ce type de méthode est implicite, contrairement à celle de Mori-Tanaka (15) qui est rappelée ci-dessous.

Les schémas représentatifs du composite se sont compliqués en introduisant d'abord trois phases (travaux initialement développés par Christensen (17) puis généralisés à n phases (Molinari, 37).

### II.3.2 Rappel de la méthode d'Eshelby

Cette méthode, essentielle dans ces théories, consiste donc à relier une déformation libre imposée  $\varepsilon^L$  dans une inclusion isolée de son environnement, à la déformation  $\varepsilon^d$  qu'elle a lorsqu'on la replace dans le milieu infini. Cela revient à considérer la déformation libre initiale comme

une densité surfacique de force appliquée dans une petite région (l'inclusion) du milieu total. La résolution de ce problème, formulé maintenant en force, s'effectue grâce à la méthode de Green:

Soit  $\varepsilon^L$  une déformation libre imposée dans une inclusion sans contrainte. Replaçant ce renfort dans son milieu, on provoque alors un état de contrainte  $\sigma'$  dans l'inclusion, qui vérifie l'équation d'équilibre:

$$(II.22) \quad L_{ijkl} u_{k,lj} + L_{ijkl} \varepsilon_k^L n_j \delta(S) = 0$$

où  $\delta(S)$  est la fonction de Dirac sur la surface de l'inclusion et  $L$  le tenseur de rigidité du milieu considéré. On définit la densité superficielle de force  $f_j$  par

$$(II.23) \quad f_i = L_{ijkl} \varepsilon_k^L n_j \delta(S)$$

Soit  $G_{ij}$  le tenseur de Green du milieu environnant, qui permet de définir le déplacement produit en un point  $r$  par une force ponctuelle appliquée au point  $r'$  par la relation:

$$(II.24) \quad u_i(r) = G_{ij}(r-r') f_j(r')$$

$G$  est alors solution de l'équation:

$$(II.25) \quad L_{ijkl} G_{km,lj} + \delta_{im} \delta(r,r') = 0$$

Dans le cas d'une densité superficielle de force appliquée à une surface  $S$ , on a :

$$u_i(r) = \int_S G_{ij} f_j(S') dS$$

Dans le cas de l'inclusion on a :

$$(II.26) \quad u_i(r) = \int_S G_{ij} L_{jklm} \varepsilon_{lm}^L n_k dS$$

Et en passant aux déformation on obtient la relation bien connue:

$$(II.27) \quad \varepsilon_{in}^d = S_{inlm} \varepsilon_{lm}^L$$

avec:  $S_{inlm} = L_{jklm} \int_{v_i} G_{ij,k'n} (r-r') dv'$  définissant le tenseur d'Eshelby et  $v_i$  le volume de l'inclusion.

Le tenseur d'Eshelby n'est aisément calculable que dans le cas particulier de constituant isotrope ou isotrope transverse, avec une géométrie d'inclusion particulière. Eshelby avait considéré une inclusion ellipsoïdale ce qui rendait la déformation dans la fibre uniforme. Christensen (17) ont calculé le tenseur d'Eshelby pour d'autres formes de renforts, en particulier pour des inclusions sphériques ou cylindriques (annexe 2 et 3)

### II.3.3 Cas d'une hétérogénéité élastique soumise à une déformation macroscopique E.

Soit  $L_1$  et  $L_2$  les matrices de rigidité de la matrice et de l'inclusion. Si le renfort avait la même nature que le milieu environnant, au regard des résultats précédents la contrainte régnant dans le milieu serait alors:

$$(II.28) \quad \sigma_1 = L_1 : \varepsilon_1 = L_1 : (E + \varepsilon^d - \varepsilon^L)$$

Comme l'inclusion est de nature différente et ne possède pas de déformation libre initiale, la contrainte dans la fibre est alors:

$$(II.29) \quad \sigma_2 = L_2 : \varepsilon_2 = L_2 : (E + \varepsilon^d)$$

L'état de contrainte devant être le même pour une même géométrie d'inclusion on égalise les relations (II.28) et (II.29). Introduisant la relation d'Eshelby ( $\varepsilon^d = S : \varepsilon^L$ ) on obtient :  $\varepsilon^d = S_1 : (L_1^{-1} : (L_1 - L_2)) : \varepsilon_2$ . On peut alors en déduire la relation de localisation entre la déformation régnant dans la fibre et la déformation macroscopique imposée:

$$(II.30) \quad \begin{cases} \varepsilon_2 = A : E \\ A = [I + S_1 : L_1^{-1} : (L_2 - L_1)]^{-1} \end{cases}$$

On reconnaît dans l'opérateur A le tenseur de localisation de déformation. Le comportement homogène équivalent se détermine facilement en considérant là encore les contraintes et les déformations macroscopiques comme les moyennes volumiques de leurs homologues microscopiques

$$(II.31) \quad L = L_1 + c_1(L_2 - L_1)$$

### II.3.4 Méthode de Mori-Tanaka

Mori-Tanaka observent la même démarche mais ils introduisent un nouveau tenseur de localisation des déformations entre la fibre et la matrice afin de prendre en compte les interactions entre les fibres (qui avaient été négligées dans la méthode précédente). L'hypothèse supplémentaire est donc la relation :

$$(II.33) \quad \varepsilon_2 = F : \varepsilon_1$$

A la place du tenseur A précédent, un nouvel opérateur A' est introduit censé inclure les interactions entre les fibres tel que :  $\varepsilon_2 = A' : E$ .

Appliquant ensuite le même raisonnement que précédemment, la loi homogénéisée est alors:

$$(II.34) \quad L = L_1 + c_2(L_2 - L_1):A'$$

On détermine A' en écrivant la loi des mélanges vérifiée par la déformation macroscopique:

$$(II.35) \quad A' = F:(c_1I + c_2F)^{-1}$$

Puis Mori et Tanaka postulent que  $F=A$ , conduisant ainsi à la définition explicite du tenseur des rigidités homogénéisé:

$$(II.36) \quad L = L_1 + c_2(L_2 - L_1):A:(c_1I + c_2A)^{-1}$$

Il convient de remarquer que le postulat  $F=A$  revient à supposer que  $\varepsilon_1 = E$ . Là se situe la différence entre la méthode de Mori-Tanaka et la méthode auto-cohérente pour laquelle le milieu environnant possède les caractéristiques du matériau homogène équivalent et non celles de la matrice. Cela limite l'application de la méthode de Mori-Tanaka à de faibles concentrations de fibres.

### II.3.5 Application à notre composite

Dans le cadre d'une approche plus macroscopique ces méthodes analytiques ont l'avantage de considérer des champs moyens par phase, contrairement à la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques. L'application de la méthode de l'inclusion équivalente à notre composite n'a pas pour but de recalculer la loi élastique homogénéisée et le tenseur de localisation des déformations mais de pouvoir disposer d'une formulation analytique simple à mettre en oeuvre numériquement, permettant une variation aisée de certains paramètres de modélisation lors de la conception de la loi macroscopique de viscoplasticité anisotrope. La théorie des milieux périodiques donnant un tenseur de concentration des contraintes en chaque maille, nous servira dans notre étude sur les contraintes résiduelles issue du procédé d'élaboration du composite, calculées par éléments finis.

A titre de comparaison entre les deux méthodes d'homogénéisation utilisées dans nos travaux, nous résumons dans le tableau 6 les caractéristiques mécaniques obtenues:

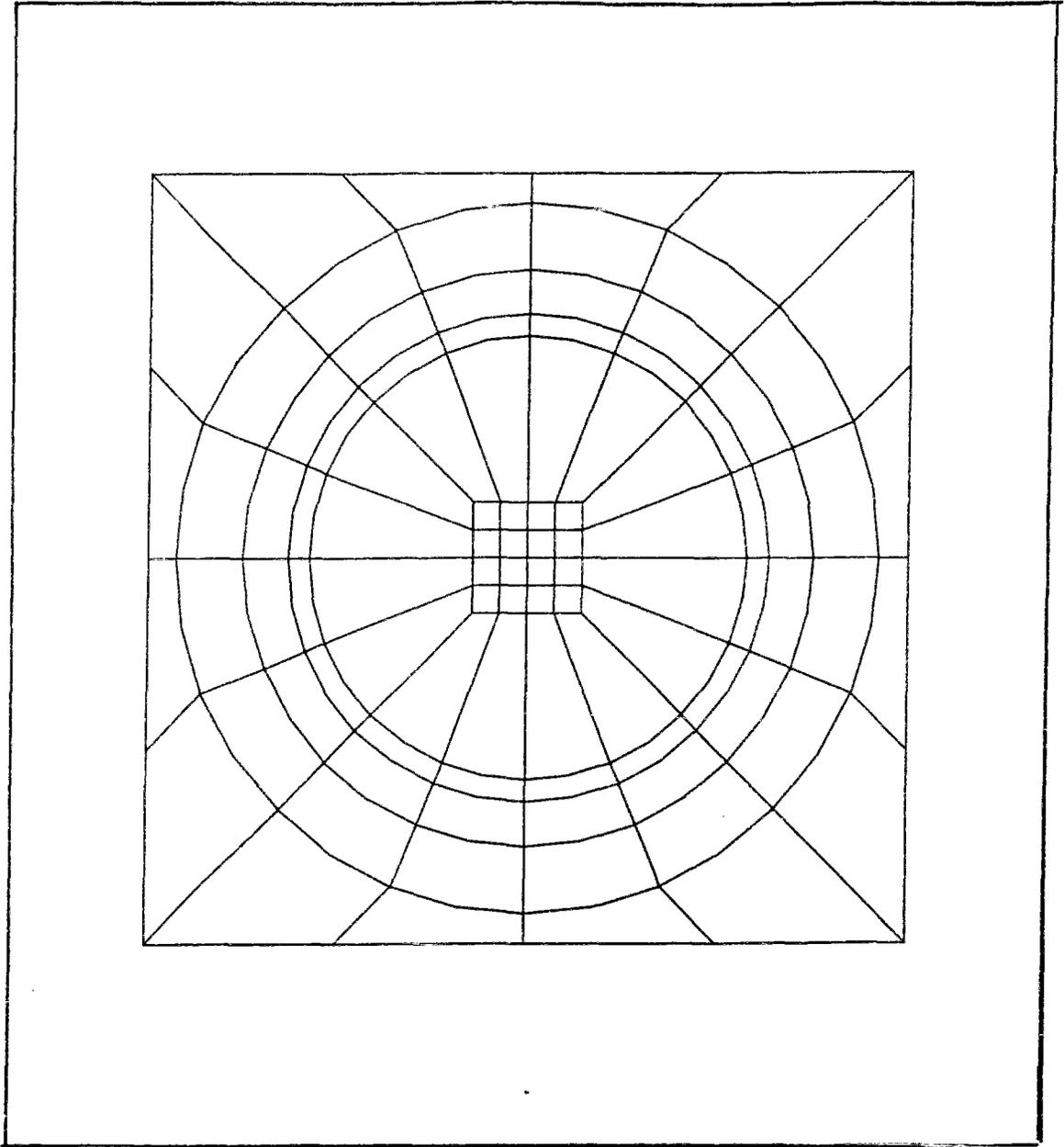
	Milieu périodique fibre courte	Inclusion équivalente
$L_{3333}$	150 350	182633
$L_{1111}$	136801	133580
$E_3$	112 132	146355
$E_1$	97336	95173

tableau 6: Résultats des méthodes d'homogénéisation

Pour ces calculs les données de modélisation sont :

- inclusion de forme ellipsoïdale pour la méthode "self consistente"
- rapport d'élanement de la fibre égal à 10
  
- $E_1 = 75000$  MPa       $E_2 = 420000$  MPa
- $\nu_1 = 0.34$                $\nu_2 = 0.17$
- $c_1 = 83,1$  %               $c_2 = 16,9$  %

Par rapport aux résultats expérimentaux la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques paraît meilleure. Cependant aucune de ces méthodes ne prend en compte les défauts inhérents au mode de fabrication (fissures initiales, mauvaise liaison fibre-matrice, mauvaise orientation des renforts...etc.).



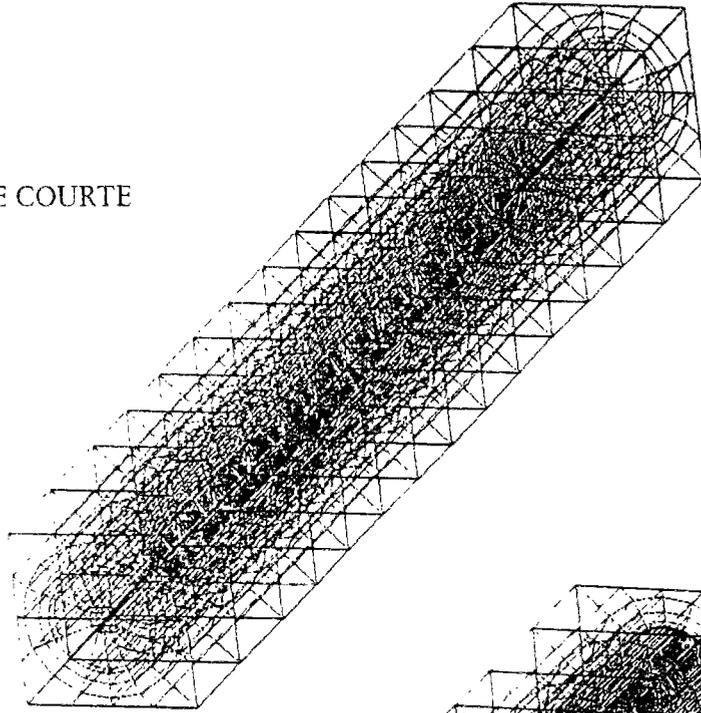
3  
2 1

MAILLAGE DES DEUX CELLULES (FIBRE COURTE ET LONGUE)  
DANS LE PLAN PERPENDICULAIRE A CELUI DE LA FIBRE

Planche 1

MAILLAGE DES CELLULES DE BASE DE L'HOMOGENISATION

FIBRE COURTE



FIBRE LONGUE

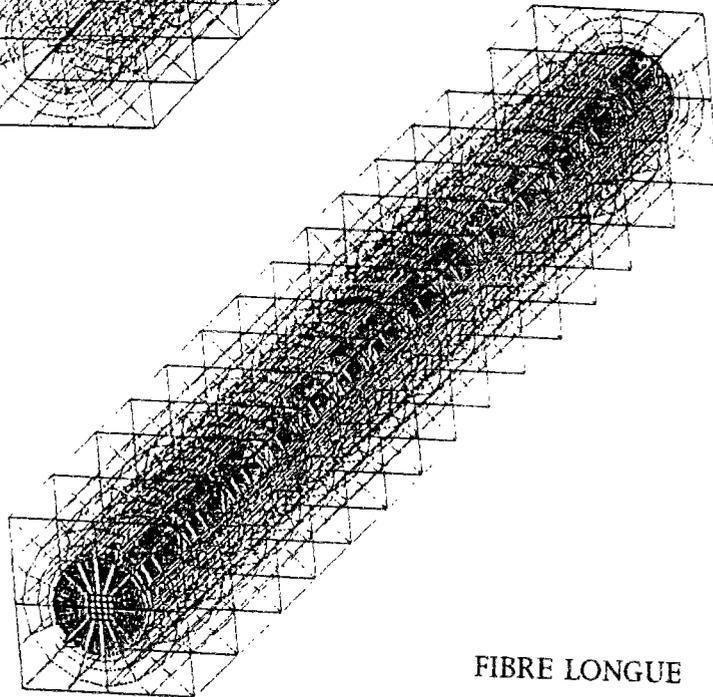


PLANCHE : 2



**III ETUDE NUMERIQUE**  
**EN THERMO-ELASTO-VISCOPLASTICITE**



### III.1 APPROCHE GENERALE

La connaissance des contraintes résiduelles est fondamentale pour apprécier correctement le comportement d'un composite à matrice métallique. En effet, lors de la fabrication du composite, elles engendrent une plasticité en raison de la dilatation contrariée. Cependant on ne peut les déceler macroscopiquement qu'au travers de la position du domaine d'élasticité. L'état de plasticité interne reste indécélable au niveau macroscopique. C'est pourquoi nous allons dans un premier temps simuler numériquement le traitement thermique auquel a été soumis le matériau afin de quantifier l'état de plasticité de la matrice. Puis nous essaierons de modéliser les surfaces seuil après le traitement thermique puis sous chargement mécanique.

#### III .1.1 Conditions initiales posées par le procédé de fabrication

Lors de son élaboration, le matériau subit un traitement thermique T6 qui l'amène à une température de mise en solution à 492°C puis, une trempe brutale à l'eau froide. Enfin un vieillissement naturel a lieu à froid, au cours duquel se produit le phénomène de précipitation (induit par la mise en solution). Durant ce vieillissement, la limite d'élasticité du matériau augmente peu à peu. Ce phénomène a été observé expérimentalement sur la matrice seule (Mondolfo,(38) Marquis ,(7))

La forte différence des coefficients de dilatation (rapport 5 entre celui de la matrice et celui de la fibre) provoque un fort état de contraintes et par là même engendre une plasticité dans la matrice. Les études numériques antérieures (Chambolle, Breban) avaient considéré que la matrice avait un comportement élasto-plastique, ce qui conduisait à surestimer la plasticité matricielle. C'est pourquoi nous allons envisager une étude en viscoplasticité anisotherme afin de mieux cerner les déformations plastiques dans la matrice en tenant compte des effets de viscosité et de relaxation des contraintes intervenant au cours du procédé de fabrication, même à faible température.

#### III .1.2 Lois de comportement des constituants

La fibre est supposée rester élastique et isotrope durant toute l'analyse anisotherme.

La matrice, considérée comme initialement isotrope, obéit à une loi de viscoplasticité. Il s'agit de la loi de viscoplasticité avec écrouissage cinématique non linéaire développée à l'ONERA, dans sa version la plus simple, c'est-à-dire en n'introduisant ni effet de restauration par le temps ni écrouissage isotrope. Elle peut être formulée en utilisant les formalismes classiques de la thermodynamique avec variables internes. On introduit via la méthode de l'état local des variables internes, ici  $\alpha_k$ , qui définissent avec les variables observables (T température,  $\epsilon$  déformation totale) l'état du système. On choisit un potentiel viscoplastique  $\Omega$  duquel dérivent les lois d'évolution des variables dissipatives et un potentiel thermodynamique, l'énergie libre par exemple, dont sont extraites les lois d'état (Chaboche, 39). Dans le cas présent, sans écrouissage isotrope et sans restauration par le temps, le potentiel thermodynamique  $\psi$  est choisi sous la forme:

$$\Psi = \Psi(\epsilon, T, \alpha_k)$$

On suppose ensuite la partition entre déformation élastique  $\epsilon^e$  et déformation plastique  $\epsilon^p$  et qu'il y a découplage d'état entre ces déformations pour l'énergie libre:

$$\Psi(\epsilon, T, \alpha_k) = \Psi(\epsilon^e, T, \alpha_k)$$

$$\Psi(\epsilon^e, T, \alpha_k) = \Psi_e(\epsilon^e, T) + \Psi_p(\alpha_k, T)$$

L'énergie libre est finalement choisie sous la forme :

$$\Psi = \frac{1}{2} \epsilon^e : L : \epsilon^e + \frac{1}{3} c^I(T) \alpha^I : \alpha^I + \frac{1}{3} c^II(T) \alpha^II : \alpha^II$$

où  $\alpha^I$  et  $\alpha^II$  sont les variables internes associées aux deux écrouissages cinématiques linéaire et non linéaire, identifiés dans la loi de comportement de la matrice.

Le potentiel de dissipation est pris sous la forme:

$$F = f + \frac{3}{4} \frac{\gamma^I}{c^I} x^I : x^I + \frac{3}{4} \frac{\gamma^II}{c^II} x^II : x^II$$

où le domaine élastique  $f$  s'exprime avec le critère de Von Mises:

$$f = J_2(\sigma^d - x) - k \leq 0 .$$

$J_2$  est le second invariant tel que  $J_2(\sigma) = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij}}$ ,  $\sigma^d$  le déviateur du tenseur des contraintes, et  $x = x^I + x^II$  le centre du domaine élastique.

Les lois d'état donnent :

$$\begin{cases} \sigma = L: \varepsilon^e \\ x^I = \frac{2}{3} c^I \alpha^I \\ x^{II} = \frac{2}{3} c^{II} \alpha^{II} \end{cases}$$

L'hypothèse de normalité généralisée s'écrit:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^P = \dot{p} \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \frac{\sigma^d - x}{J(\sigma^d - x)} \\ \dot{\alpha}^I = -\dot{p} \frac{\partial F}{\partial x^I} = \dot{\varepsilon}^P - \frac{3}{2} \frac{\gamma^I}{c^I} x^I \dot{p} \\ \dot{\alpha}^{II} = -\dot{p} \frac{\partial F}{\partial x^{II}} = \dot{\varepsilon}^P - \frac{3}{2} \frac{\gamma^{II}}{c^{II}} x^{II} \dot{p} \end{cases}$$

Pour  $\dot{p}$ , c'est à dire le module de la vitesse de déformation plastique (avec le critère de Von Mises), nous choisissons une fonction puissance de la contrainte visqueuse (qui est le dépassement de contrainte au delà du domaine élastique):

$$\dot{p} = \left\langle \frac{f}{K} \right\rangle^n$$

La première variable d'écrouissage cinématique est supposée linéaire, c'est-à-dire  $\gamma^I = 0$  et les coefficients du modèle sont donc :

- $n$  et  $K$  coefficient de viscosité
- $k$  limite d'élasticité
- $c^I$  coefficient d'écrouissage linéaire
- $\gamma^{II}$  et  $c^{II}$  coefficients d'écrouissage non linéaire

Ils dépendent de la température et ont été déterminés à partir des résultats expérimentaux de la littérature (35) en utilisant le programme d'identification AGICE développé à l'ONERA. Leurs valeurs sont résumées dans le tableau ci-dessous.

A 20°C on a considéré que la matrice avait un comportement élasto-plastique. Pour cela on a choisi une contrainte visqueuse  $(K\dot{\varepsilon}^P)^{\frac{1}{n}}$  faible et proche d'une valeur constante (100 MPa) avec  $n=50$ . Trois domaines de viscosité ont été introduits; jusqu'à 100°C, très peu de viscosité, entre 100 et 400°C viscosité

moyenne, à 500°C viscosité très forte. Les valeurs à 500°C on été obtenues par extrapolation.

Un problème se présente pour le choix des bonnes caractéristiques de la matrice. Comme nous l'avions dit au chapitre II, la matrice est initialement à l'état de poudre or les courbes de la littérature utilisées pour l'identification des coefficients sont celles d'un AU4G1 avec traitement T4 et non celles d'un matériau qui a d'abord été réduit en poudre et en cours de traitement thermique. Il faudra donc en tenir compte lorsqu'on comparera les résultats numériques et expérimentaux.

T	$\alpha \cdot 10^{-5}$ K <sup>-1</sup>	E MPa 10 <sup>3</sup>	$\nu$	n	K	k	$c^I$	$c^{II}$	$\gamma^{II}$
0	2.23	75	0.34	50	110	196	4097	44720	635
20	"	"	"	50	110	196	"	"	"
100	2.49	72	"	50	166	270	1641	16422	257
200	2.75	68	"	9.14	449	3	307		256
250	2.85	65	"	"	449			5895	
300	2.95	48	"		"				
400	3.	25	"		475				
500	3.1	15	"	2	500	0.1	150	2560	256

Tableau 7: Paramètres de la loi de comportement de la matrice

#### Définition de la cellule de base

On assimile le matériau à la structure périodique idéale. Etant donnée la nature symétrique du chargement (uniquement radial car ce n'est qu'une variation de température au cours du temps), on ne s'intéresse qu'au huitième de la cellule utilisée au chapitre II. En plus des conditions de périodicité (les bords opposés ont le même déplacement), on a de nouvelles conditions de symétrie à respecter.

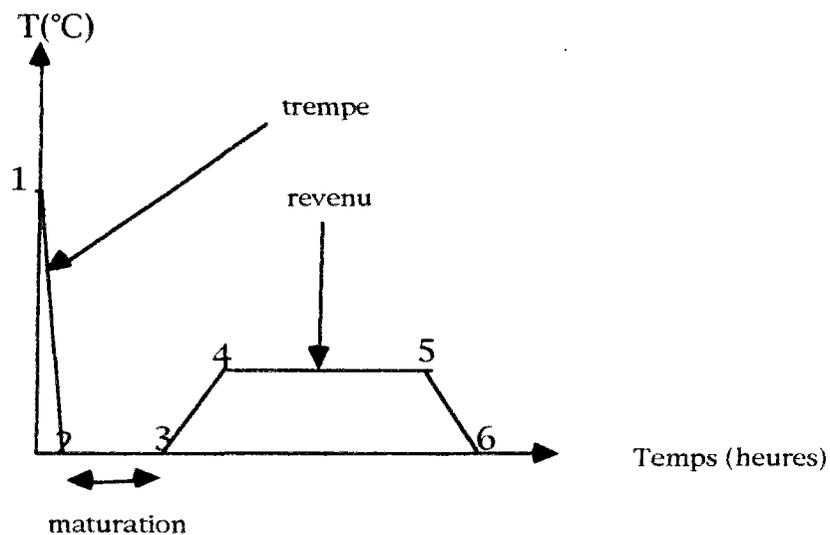
Le huitième de cellule réduit les conditions de périodicité. En fait elles disparaissent pour ne laisser que la condition de déplacement uniforme sur les bords qui ne sont pas des axes de symétrie. De plus tous les points sont à la même température. Lorsque le composite sera soumis à un chargement mécanique, nous limiterons l'analyse à des sollicitations dans les axes d'anisotropie, si bien que la cellule définie ici sera suffisante. Les conditions aux limites sont résumées sur la planche 3

## III.2 TRAITEMENT THERMIQUE

### III.2.1 Etude de convergence

Pour mener à bien cette étude deux autres maillages ont été construits, un pour connaître l'effet du raffinement dans le plan perpendiculaire à celui de la fibre, l'autre pour apprécier les résultats à l'interface fibre-matrice dans le sens longitudinal. La séparation entre les deux constituants est placée en  $y=1/100$  mm.

L'étude de convergence a porté sur le traitement T6 et les temps caractéristiques du traitement sont indiqués ci-dessous:



#### traitement thermique A

- 1 : T= 492° C t= 12 heures
- 2: T= 20°C t= 12 heures +1 seconde
- 3: T= 20°C t= 84 heures
- 4: T= 190°C t= 88 heures
- 5: T= 190°C t= 97 heures
- 6: T= 20°C t= 105,2 heures

La trempe (étape 1-2) consiste en un brusque refroidissement à l'eau froide ou à l'huile du matériau. Nous allons tout d'abord la considérer comme ne durant qu'une seconde (étant donné les dimensions de notre cellule élémentaire).

Les planches 4 et 5 présentent les coupes de ces maillages dans différentes directions et leurs caractéristiques sont résumées dans le tableau ci-contre:

	TYPE I	TYPE II	TYPE III
mailles	168	240	672
noeuds	966	1341	3405
points de Gauss par maille	20	8	8
noeuds par maille	20	20	20
Degré d'interpolation	2	2	2

Tableau 8: Caractéristiques des maillages utilisés

La résolution numérique du problème d'élasto-viscoplasticité est effectuée avec le code ZEBULON développé à l'Ecole des Mines de Paris. Au niveau global (équilibre/compatibilité), la résolution est faite avec la méthode BFGS alors que les intégrations locales (comportement inélastique en chaque point de Gauss) sont réalisées selon la  $\Theta$ -méthode.

Pour comparer les performances de ces maillages nous examinons quelques isovaleurs de déformations plastiques suivant des plans particuliers (planches 6, 7, 8):

en  $y_1 = 1.e-2$  mm (tête de fibre)

en  $y_2 = 3.e-2$  mm (milieu de fibre et plan de symétrie)

Dans chacun des cas la plasticité reste bien localisée autour de la fibre et est plus importante en tête qu'au milieu ( $y = y_2$ ). Ceci est en accord avec les résultats numériques des travaux de Chambolle qui montraient que la plasticité la plus importante était justement en tête de fibre. Les résultats dans le plan de symétrie ( $y = y_2$ ) sont les plus proches pour les trois types de maillage. Cependant le type II (multicouche) réduit la zone de plasticité autour de la matrice. Il est à noter la bonne convergence du maillage simple (type I) vis à vis du maillage raffiné (type III) en déformations plastiques. Donc, dans le plan perpendiculaire à la fibre, nous nous contenterons du maillage simple. Pour examiner l'influence du découpage en tête de fibre on s'intéresse aux résultats du maillage multicouche. Nous allons pour cela regarder l'évolution de la déformation plastique dans les différents plans se rapprochant de l'interface (planche 9). Elle apparaît très progressivement autour de la fibre et s'épaissit peu à peu. Les résultats n'étant pas

significativement différents de ceux du cas de type I, nous avons conservé le maillage simple pour la suite des calculs.

### III. 2.2 Convergence temporelle

La loi étant viscoplastique, la vitesse de chargement intervient. On s'est donc assuré de la validité de la solution en effectuant d'autres calculs (avec les mêmes données de maillage et conditions aux limites géométriques) et on a découpé les intervalles de temps de calcul. On est passé de 20 (type I) à 67 incréments de calcul (type IV). Les résultats ne sont pas meilleurs dans le second cas et le temps de calcul est plus conséquent (planche 10)

### III. 2.3 Résultats de calcul du traitement thermique

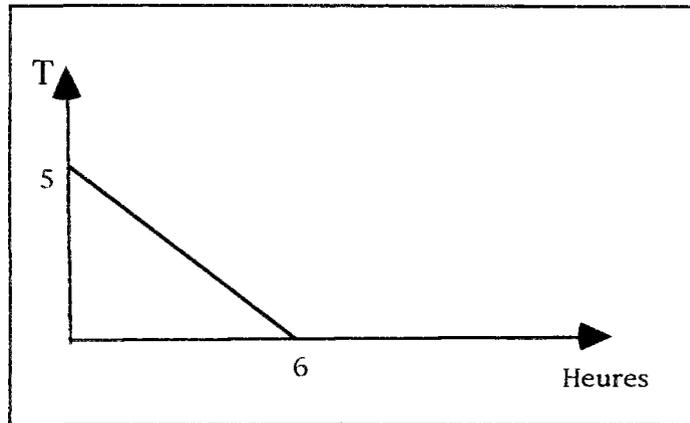
Au cours du traitement thermique aucune validation expérimentale de nos calculs ne peut être faite. Des sollicitations extérieures sont donc simulées ensuite, afin de permettre des comparaisons avec les expériences.

Après le traitement thermique T6, on a fait subir à notre cellule de base une traction longitudinale à  $\dot{\epsilon} = 10^{-3} s^{-1}$  et, partant toujours du résultat après fabrication par traitement thermique, une compression longitudinale à la même vitesse. On a comparé les courbes obtenues aux résultats expérimentaux. Pour cela on a dû reformuler un état initial. On le définit sur les quantités macroscopiques :

-La déformation macroscopique, définie comme la moyenne volumique sur la cellule entière, est remise à zéro.

-La contrainte macroscopique est nulle effectivement car il n'y a pas de chargement mécanique. (Ceci entraîne naturellement la nullité des déformations plastiques macroscopiques).

Sur les planches 11 et 12, on remarque que ce type de traitement (T6=A) provoque un trop fort écrouissage vis à vis du comportement cyclique expérimental. On peut aussi l'interpréter comme un durcissement réel de l'échantillon du laboratoire intervenu après le traitement de revenu. Mais la comparaison avec la courbe expérimentale de traction monotone indique plutôt un durcissement cyclique du matériau. Au lieu de changer la loi de comportement de la matrice pour laquelle on manque de données, on va modifier le traitement thermique. Il s'agira simplement de calculer la descente en température de 190° à 20°C, simulant ainsi la fin du revenu du traitement T6. Ceci permettra de recentrer la courbe numérique entre les expérimentales.



5:            T= 190° C            t= 0s  
 6:            T= 20°C            t= 8 heures

Nouveau traitement thermique B

L'état initial (libre de contraintes) est pris à 200°C. On a conservé par ailleurs la mise en données du traitement précédant. Ce traitement achevé, pris comme nouvel état initial, on a soumis la cellule élémentaire à une traction-compression. On constate qu'on s'est rapproché des courbes expérimentales cycliques mais sans les atteindre.

Conclusions sur les deux traitements A et B

Le traitement A montre un comportement moins résistant par rapport à l'expérience cyclique avec globalement une limite élastique trop faible. Par contre il est le seul à donner la différence de seuil entre traction et compression de -50 MPa. Il est plus acceptable en compression. Cette différence peut être interprétée de deux manières:

-1 Les conditions du processus de fabrication sont mal cernées en particulier lors de la mise en solution du composite.

-2 Le comportement choisi pour la matrice à 20°C n'est pas correct. En effet il ne tient pas compte des modifications métallurgiques comme le phénomène de vieillissement opérant sur la matrice et le durcissement de celle-ci provoqué par le revenu.

Le traitement B conduit à un comportement plus proche de la courbe expérimentale cyclique car les contraintes internes atteintes lors de la

chute de la température, sont plus faibles provoquant ainsi moins de plasticité localement. Cependant cela réduit la dissymétrie des seuils entre traction et compression.

Finalement le calcul correct correspondrait au traitement thermique complet mais avec des caractéristiques plus performantes tenant compte du phénomène de vieillissement induit par la mise en solution. Cela donnerait une résistance plus grande globalement en traction comme en compression, une dissymétrie des seuils plus significative et serait ainsi plus cohérent avec l'expérience.

Nous avons sorti quelques résultats de calcul thermique sur les planches 13, 14, 15 et 16 donnant ainsi un ordre de grandeur de l'état de déformation et de contrainte atteint en chaque point de la cellule.

### III. 3 ETUDE DES SEUILS MACROSCOPIQUES INITIAUX

Afin de mieux connaître l'état d'écrouissage du matériau et de quantifier les contraintes internes, nous nous intéressons maintenant à modéliser les surfaces seuil représentant le domaine d'élasticité au niveau macroscopique. Dans la suite de cette étude, seul le traitement thermique B sera pris en compte. Plusieurs méthodes de définition de seuil sont examinées ci-dessous.

#### III. 3.1.Méthode de détection numéro 1

On connaît l'état microscopique  $\sigma_0(M)$  de contraintes internes après le traitement B,  $x_0(M)$  l'écrouissage initial en tout point, et  $\varepsilon_0^p(M)$  la déformation plastique locale.

On s'impose ensuite un chargement extérieur  $\Sigma$  uniforme et on suppose rester localement en élasticité. De ce fait l'état de plasticité et d'écrouissage microscopique induit par le traitement thermique ne varie pas. Pour réaliser cette expérience nous n'allons pas recalculer la réponse du composite par éléments finis mais utiliser le tenseur de concentration des contraintes B, déterminé par la méthode d'homogénéisation périodique (voir chapitre II), qui permet de relier les états macroscopiques et microscopiques. Ainsi d'une contrainte uniforme macroscopique  $\Sigma$  nous obtenons par la relation de concentration des contraintes, la contrainte  $\sigma_1(M) = B(M) \cdot \Sigma$  en chaque point M du volume. La relation de concentration des contraintes est exacte tant qu'on reste en élasticité (ce qui est notre hypothèse).

L'état de contrainte microscopique est alors:

$$\sigma(M) = \sigma_0(M) + \sigma_1(M)$$

et nous voulons pour chaque point vérifier le critère de Von Mises pour un chargement  $\Sigma$  particulier. En fait pour plus de souplesse, on paramétrise le chargement extérieur  $\Sigma$  par  $\lambda \Sigma_0$  avec  $\lambda$  réel et  $\Sigma_0$  un tenseur d'ordre 2 unitaire. Les chargements macroscopiques imposés sont biaxiaux dans le plan (1,3) où 3 est la direction longitudinale

Le problème revient maintenant à chercher  $\lambda$  tel que :

$$\begin{cases} \sigma_1(M) = \lambda [B(M) : \Sigma_0] \\ \sigma(M) = \sigma_0(M) + \sigma_1(M) \\ J(\sigma^d(M) - \chi_0(M)) - k^* = 0 \end{cases}$$

Ceci est donc une équation du second degré en  $\lambda$  et les deux racines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  donneront les seuils macroscopiques en traction-compression par

$$\begin{cases} \Sigma_1 = \lambda_1 \Sigma_0 \\ \Sigma_2 = \lambda_2 \Sigma_0 \end{cases}$$

Comme le calcul du traitement thermique était fait en viscoplasticité et non en plasticité, le critère de plasticité utilisé maintenant pourrait être localement dépassé. C'est pourquoi nous devons augmenter la valeur du seuil pour faire une analyse élastique. Ainsi en chaque point on doit vérifier le critère avec  $k^* = k + C$ : où  $C$  représente la partie visqueuse de la contrainte. Or nous n'avons pas de vitesse de chargement donc nous ne pouvons pas accéder à la vitesse de la déformation plastique. Pour cette raison nous déterminons  $C$  en augmentant  $k^*$  jusqu'à ce que tous les points admettent deux solutions. Ensuite ce seuil est conservé pour toutes les mailles.

Cette méthode 1 donne des surfaces seuil maille par maille microscopiques et macroscopiques en déterminant la valeur exacte du chargement extérieur. On peut prendre comme surface seuil macroscopique la surface intersection de toutes les surfaces macro induites maille par maille, ainsi que le fait Dvorak (25).

Le domaine d'élasticité obtenu est beaucoup plus petit qu'il ne l'est réellement (planche 18). Ceci est dû à la présence d'un fort gradient de plasticité allant de l'interface vers le bord extérieur de la cellule. Les planches 17a et 17b résument les résultats correspondants à la plastification

locale de ces mêmes mailles. On y a représenté les seuils détectés au niveau local. L'orientation des surfaces seuil locales est due à la position de la maille considérée vis à vis de la direction longitudinale et aussi vis à vis de la position de la maille dans un même plan perpendiculaire à la fibre. La différence de taille est surtout liée aux contraintes de cisaillement qui sont de plus en plus fortes au fur et à mesure que l'on se rapproche de la fibre. On atteint rapidement le critère (dont la valeur tient compte de toutes les composantes du tenseur des contraintes) à cause de la valeur de cisaillement locale et non à cause des contraintes locales obtenues dans les direction de chargement  $\Sigma_0$ . D'une façon générale les surfaces macroscopiques sont décalées vers la compression en raison de l'effet des contraintes internes de fabrication.

Afin de remédier à la trop forte variabilité des surfaces obtenues, on a cherché à "lisser" la dispersion microscopique en moyennant les grandeurs locales sur le volume de la matrice, ce qui donne lieu à une seconde méthode de détection du seuil macroscopique.

### III. 3.2 Méthode de détection numéro 2

On définit alors les grandeurs moyennes sur lesquelles on va appliquer le critère par:

$$\begin{cases} \sigma_{0m} = \langle \sigma_0(M) \rangle_{\Omega_m} \\ x_{0m} = \langle x_0(M) \rangle_{\Omega_m} \\ \sigma_{1m} = \lambda \langle B(M); \Sigma_0 \rangle \\ \sigma_m = \sigma_{0m} + \sigma_{1m} \end{cases}$$

Le critère moyen de plasticité sera alors:

$$J_2(\sigma_m - x_{0m}) - k^* = 0$$

On conserve malgré tout le même seuil d'élasticité microscopique que dans la méthode précédente. En réalité il devrait être un peu plus faible en raison de l'affaiblissement des contraintes internes obtenu par la moyennisation. Nous avons tracé (planche 18) les résultats de ces deux méthodes. On peut observer que, contrairement à la méthode précédente, nous obtenons une certaine dissymétrie traction-compression, au bénéfice de cette dernière comme celle constatée dans les résultats expérimentaux, d'environ 50 MPa. De plus ce procédé permet d'obtenir une unique surface macro contrairement au cas précédent. La surface ainsi obtenue est assez proche des points

expérimentaux dans le sens longitudinal et surtout en compression. Par contre il a tendance à élargir le domaine dans le sens transversal. On a en plus reporté sur la planche 19 les seuils mesurés par offset de  $10^{-4}$  après un calcul de traction-compression réalisé par éléments finis. Là encore, le sens transversal est moins bien approché que le longitudinal. Cette méthode met en évidence l'obligation de modéliser les contraintes internes macroscopiques afin d'envisager un critère basé uniquement sur des quantités macroscopiques. Cependant, si on sait parfaitement quelles sont les grandeurs macroscopiques contrainte et déformation totale par rapport à leurs homologues micro, on ne sait pas quelle forme choisir pour la variable d'érouissage macroscopique définissant le centre du domaine d'élasticité. Pour lever cette incertitude, nous allons au chapitre IV, poser quelques hypothèses qui auront pour fondement les résultats de la méthode 2.

### III.4 SIMULATION HORS DU DOMAINE ÉLASTIQUE

Le barreau qui a servi pour l'étude expérimentale possède un état de déformation plastique et de contraintes internes issu du traitement thermique auquel il a été soumis et qui conditionne son comportement. Cependant nous l'avons considéré comme macroscopiquement vierge. Nous adoptons la même démarche avec les simulations numériques.

#### III.4.1 Présentation des calculs

La simulation du traitement thermique B a permis de quantifier l'état d'érouissage et des contraintes internes microscopiques dans la cellule élémentaire. Pour les prendre en compte dans les calculs de comportement sous chargements mécanique ou thermique sur l'élément de volume, il est nécessaire de faire une reprise de calcul après la simulation de B. Le code ZEBULON prend alors en compte les valeurs de toutes les quantités mécaniques (déformation plastiques, contraintes internes, et érouissages) présentes dans chaque maille à la fin du calcul thermique.

#### III.4.2 Chargements thermo-mécaniques envisagés

Différents chargements ont été appliqués; tout d'abord de traction et compression monotones à  $\dot{\epsilon} = 10^{-3} s^{-1}$ , à température ambiante, dans les sens longitudinaux et transversaux puis un essai cyclique à déformation imposée

dans le sens longitudinal à température ambiante. Les chargements thermo-mécaniques sont faits à 100° et à 200°C.

### III. 4.3 Principaux résultats de l'analyse thermo-viscoplastique

La simulation du calcul numérique nous a permis d'introduire une anisotropie initiale dans le domaine élastique que l'on observe à travers les surfaces seuils que nous venons d'étudier. On la retrouve sur les courbes de traction et compression monotone (planche 20). La réponse en compression est décalée à cause de la position du centre du domaine élastique lui-même placé en compression. Par contre il n'y a pas de dissymétrie flagrante dans le sens transversal à 20°C.

L'anisotropie de structure est elle aussi bien reproduite: la présence des fibres raidit fortement le matériau dans le sens du filage, différenciant ainsi le comportement du composite dans les axes longitudinaux et transversaux. De plus l'écroutissage cinématique linéaire est prépondérant dans le sens longitudinal alors que la non-linéarité s'exprime plus fortement dans le sens transversal. La présence des fibres influence donc aussi la nature de l'écroutissage suivant les axes de sollicitation. Ce qu'on retrouve d'ailleurs sur les planches 21a et 21b où on compare les résultats numériques et expérimentaux. Le fort module d'Young de la fibre raidit le comportement dans le domaine anélastique de la cellule de base vis à vis des expériences. Notons enfin la bonne adéquation dans la valeurs des modules apparaissant sur ces courbes.

Les mêmes chargements effectués à 200°C (planche 22) conduisent à la symétrisation des courbes de traction-compression, indiquant par là même l'annulation des contraintes résiduelles. Ce résultat était attendu du fait de la température de référence prise dans le traitement thermique B ( $T_0=200^\circ\text{C}$ ). On retrouvera la même chose lors de l'étude expérimentale des seuils en température et pour la même température de 200° C. Cela justifie à posteriori le choix de notre traitement thermique. La chute des modules par rapport à 20°C n'est pas significative mais il y a simplement la diminution du domaine élastique à travers la chute du seuil de la matrice. En effet sur la planche 22 on ne mesure pas de différence de pente significative pour les différentes températures. Pour conclure les simulations numériques, purement mécaniques, un essai cyclique à déformation imposée a été réalisé à la même vitesse que les essais monotones, dans le sens longitudinal. On est monté jusqu'à 0.6% de déformation totale étant donné la longueur des calculs. On remarque une bonne adéquation des résultats avec l'expérience cyclique

(planche 23) bien que la cellule atteigne une contrainte maximale plus importante en compression que dans l'expérience.

On conclut notre étude par une recherche de l'évolution des surfaces seuils lors de chargements mécaniques où thermo-mécaniques. Pour cela on détermine les seuils macroscopiques par la méthode 2 précédemment présentée .

Les chargements: longitudinaux, transversaux et biaxiaux sont effectués par simulation numérique sur notre cellule de base (planche 24). Seule une translation du domaine est observée dans chaque cas, sans distorsion ni agrandissement homothétique de la surface (ce qui d'ailleurs était prévisible puisque la loi de comportement de la matrice n'incluait pas d'écrouissage isotrope).

### III.5 CONCLUSION

La modélisation de notre composite par une cellule de base, périodique schéma de répétition de la structure complète, permet après calcul thermique de rendre compte de l'anisotropie de structure, ainsi que de l'anisotropie initiale induite par les dilatations contrariées. Le modèle est globalement trop raide, aux fortes déformations, surtout en compression avec un fort écrouissage linéaire se manifestant sur les courbes de comportement. Il faut alors se rappeler des zones d'ombre dans la connaissance exacte de notre matériau de base. Ainsi la loi de comportement identifiée pour la matrice n'est pas celle du matériau réel, les phénomènes métallurgiques présents dans l'éprouvette n'ont pas été pris en compte, l'interface a été modélisé comme parfait, et ceci peut être sujet à discussion , il permet un fort transfert de charge raidissant ainsi le matériau, enfin, la schématisation du composite comme un milieu périodique est beaucoup trop sévère (on ne tient pas compte en particulier des désorientations de fibres ou des hétérogénéités de répartition)

Globalement, malgré les lacunes évoquées, on peut cependant considérer les résultats obtenus comme très satisfaisants en comparaison aux résultats expérimentaux, tant du point de vue élasticité, limite d'élasticité (avec anisotropie), que contraintes résiduelles de fabrication et écrouissage (pour faibles déformations).

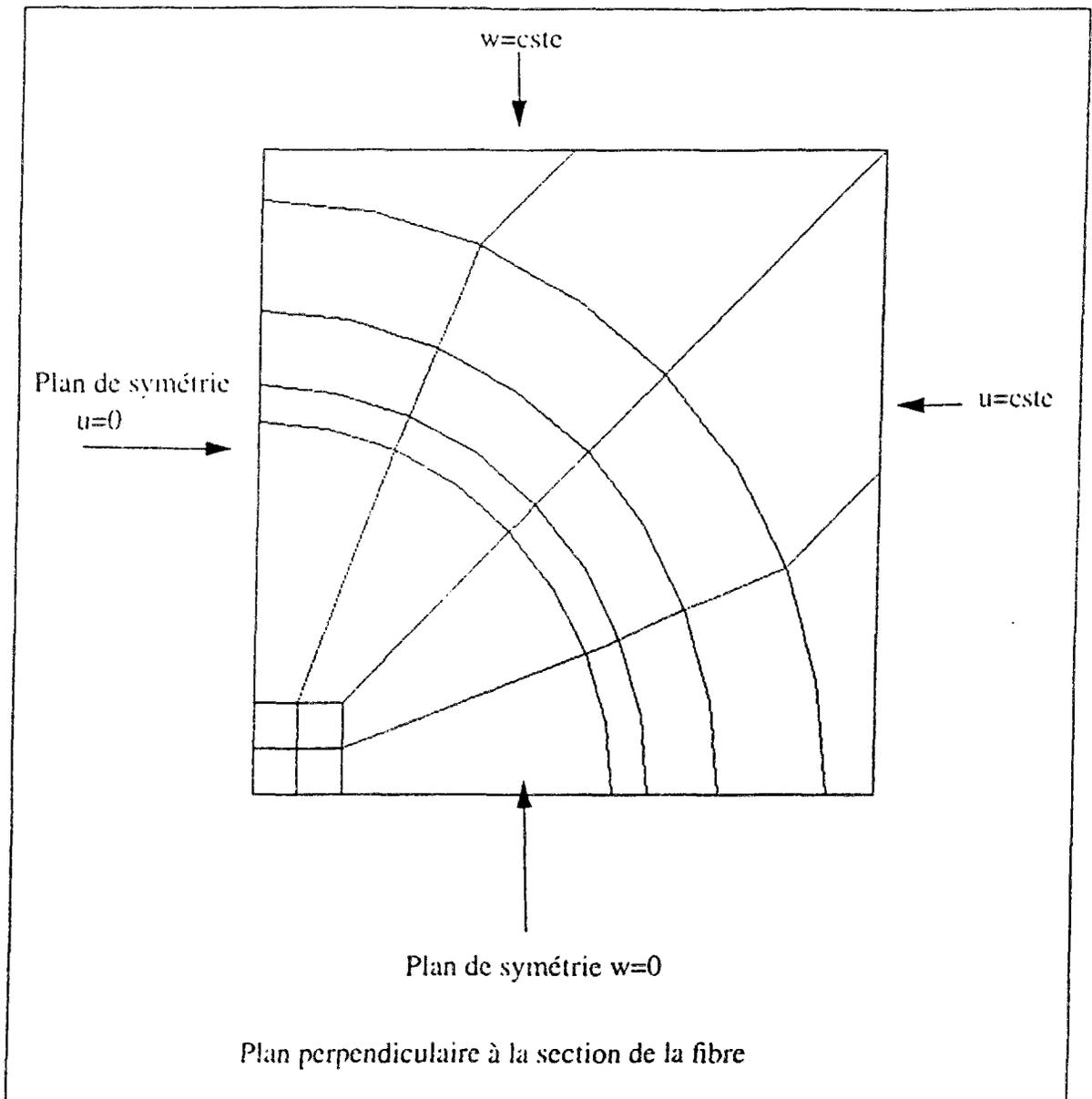


planche 3: Conditions aux limites du problème thermique

PLAN PERPENDICULAIRE à l'AXE DE LA FIBRE

TYPES I & II

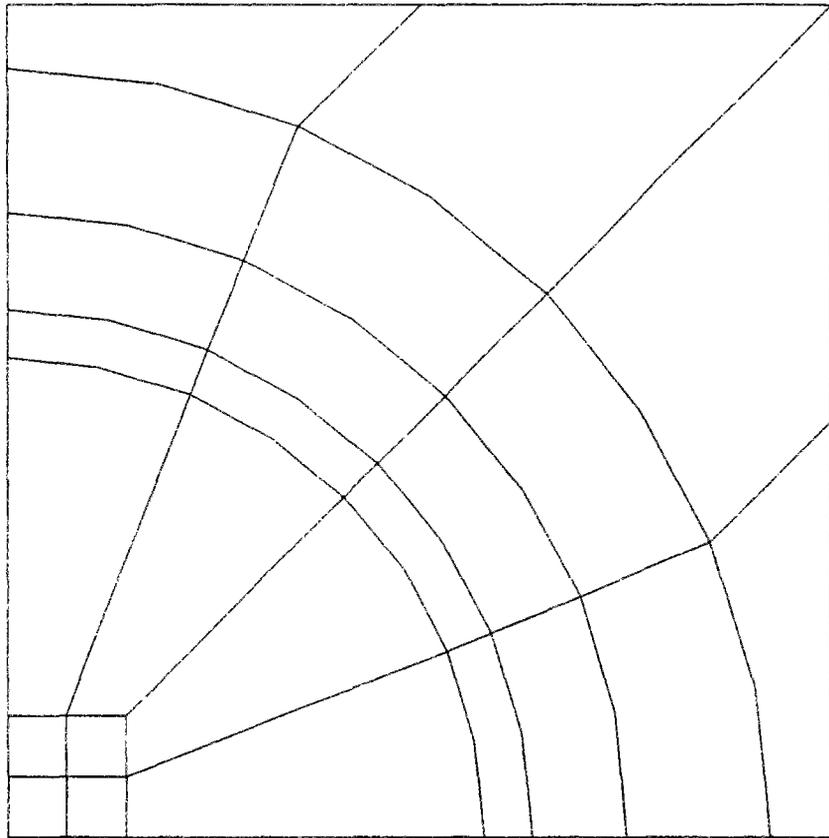
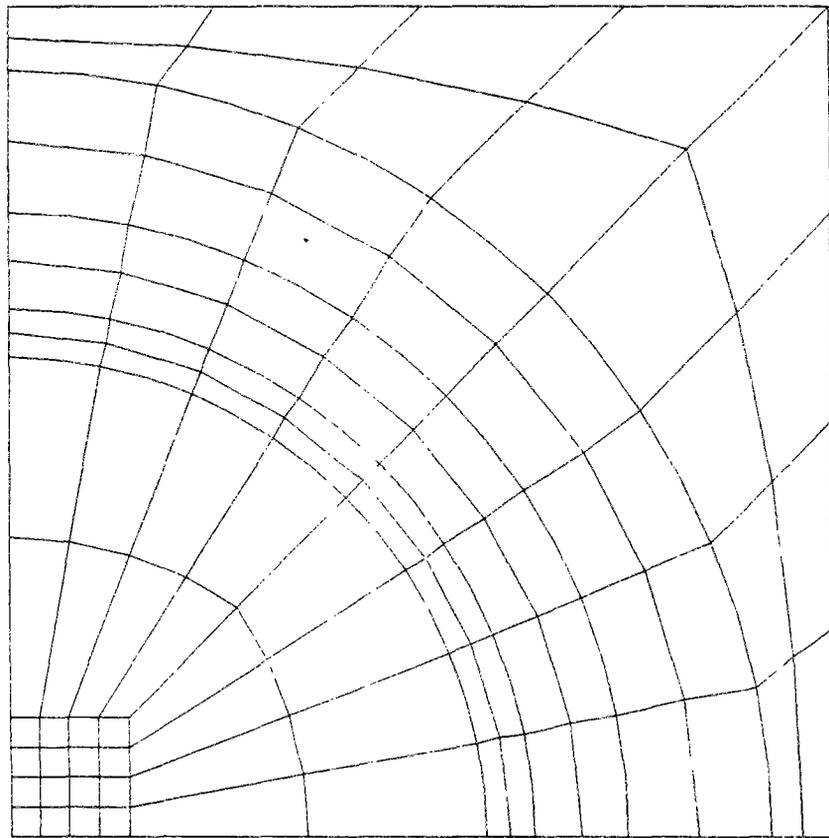


PLANCHE 4

TYPE III



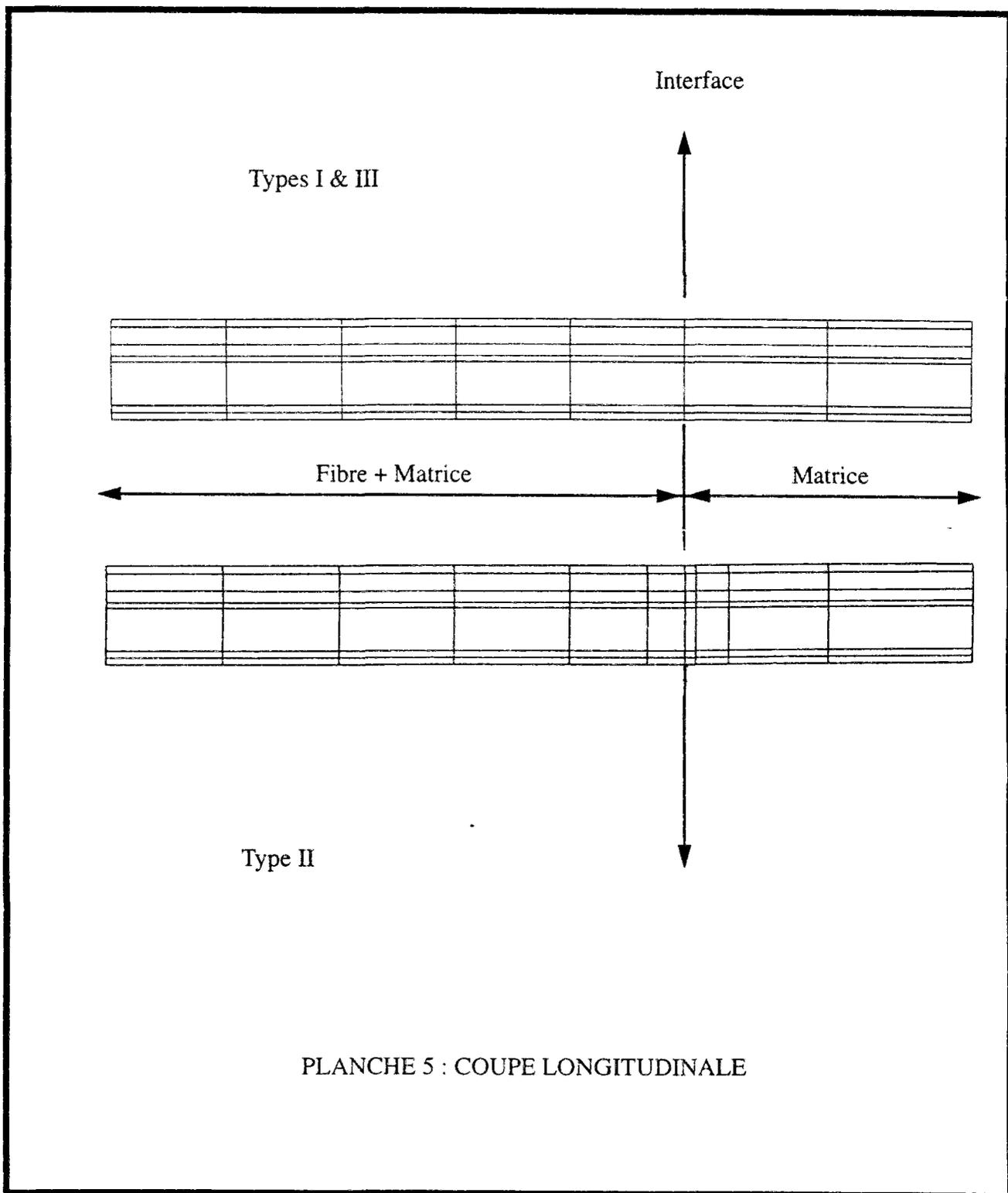
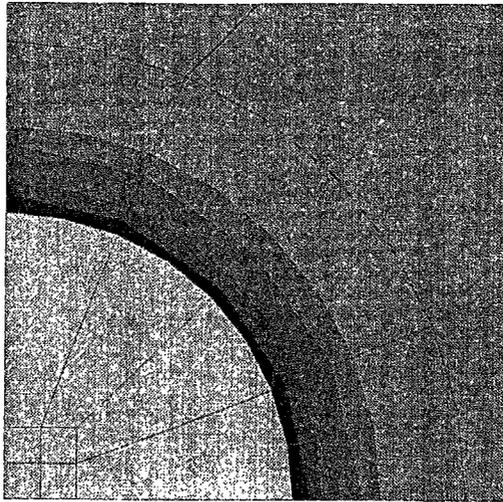


PLANCHE 5 : COUPE LONGITUDINALE



MAILLAGE DE TYPE I



y=y1

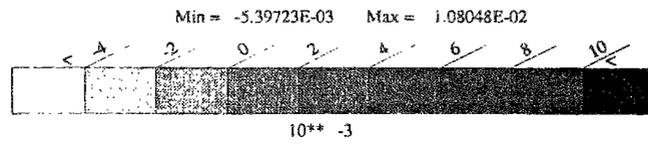
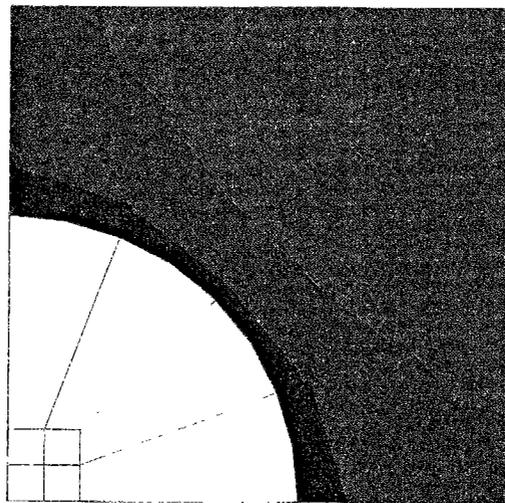
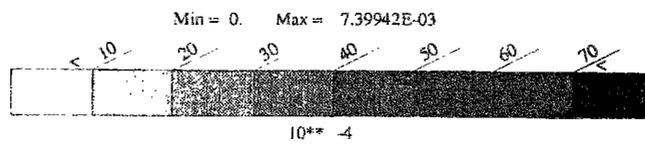


Planche 6

Etat des Isovaleurs de la déformation plastique  $\epsilon_{p33}$

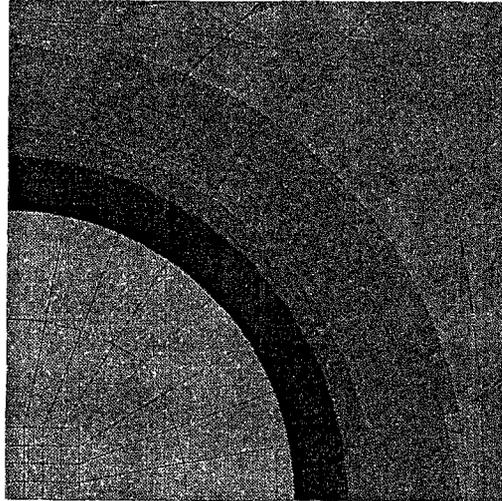


y=y2





MAILLAGE DE TYPE III



y=y1

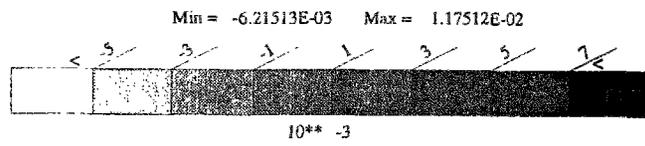
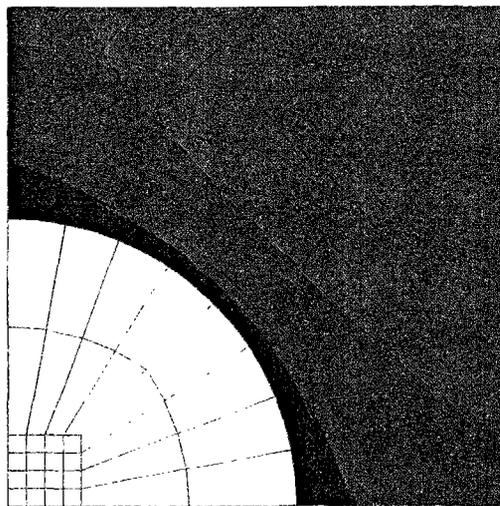
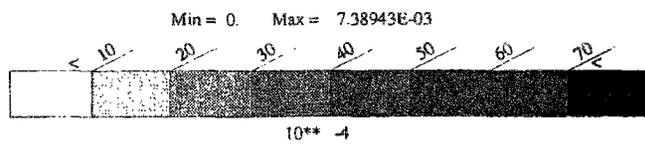


Planche 7

Etat des Isovaleurs de la déformation plastique  $\epsilon_{p33}$

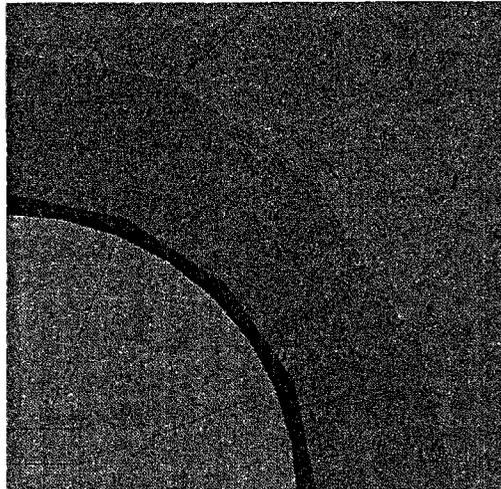


y=y2





MAILLAGE DE TYPE II



y=y1

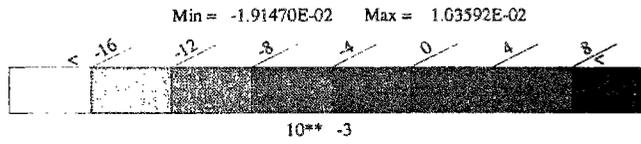
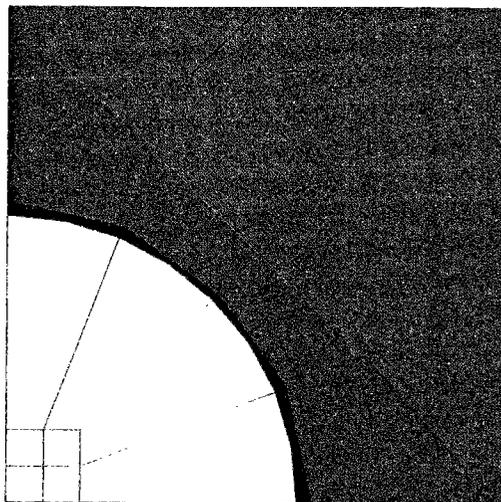
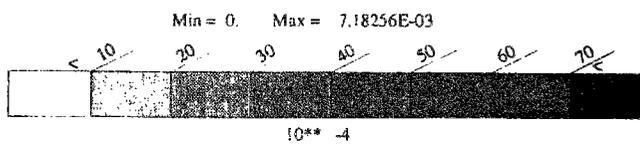


Planche 8

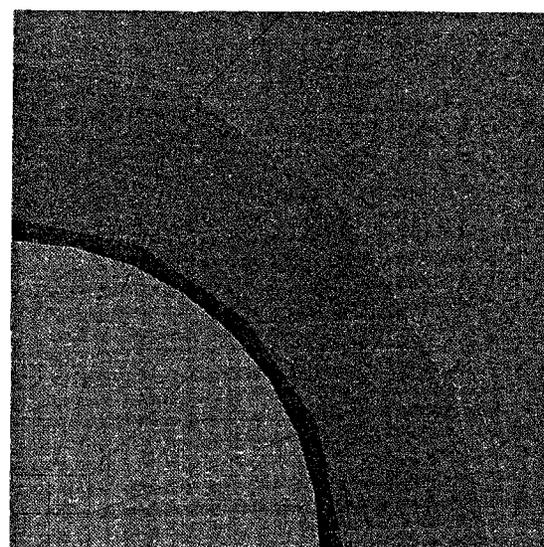
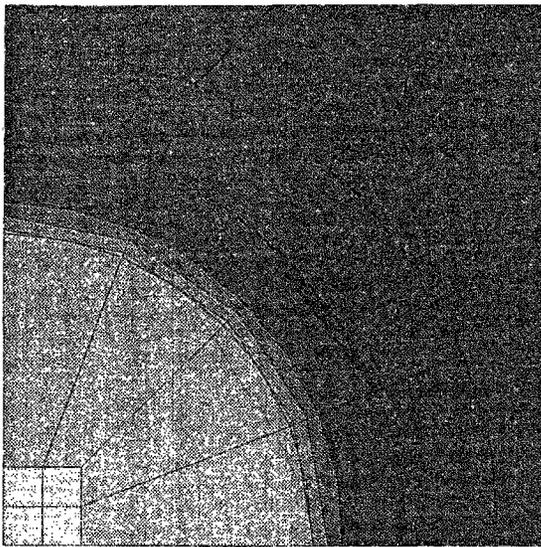
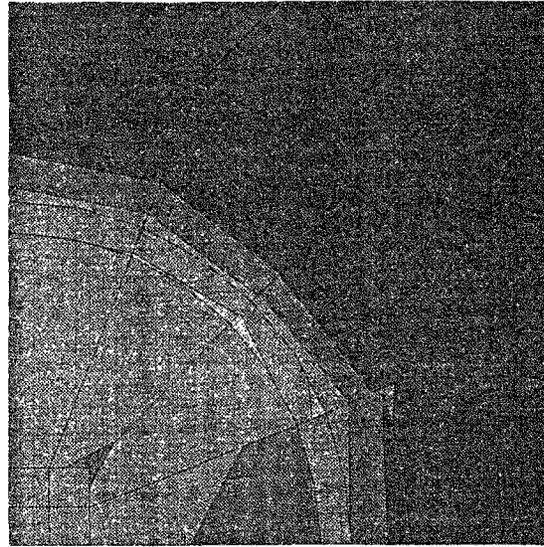
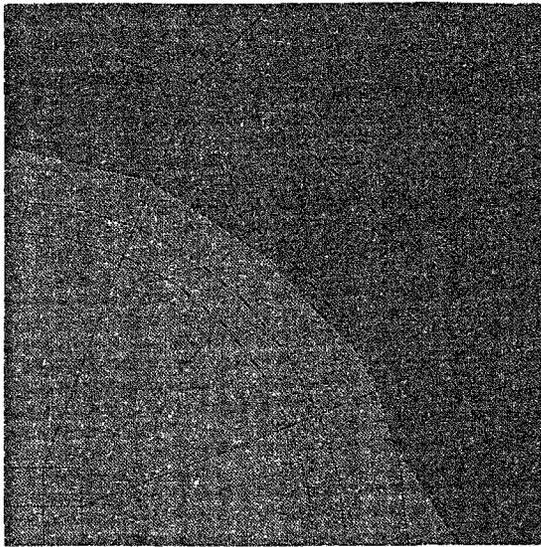
Etat des Isovaleurs de la déformation plastique  $\epsilon_{p33}$



y=y2







Maillage de type II

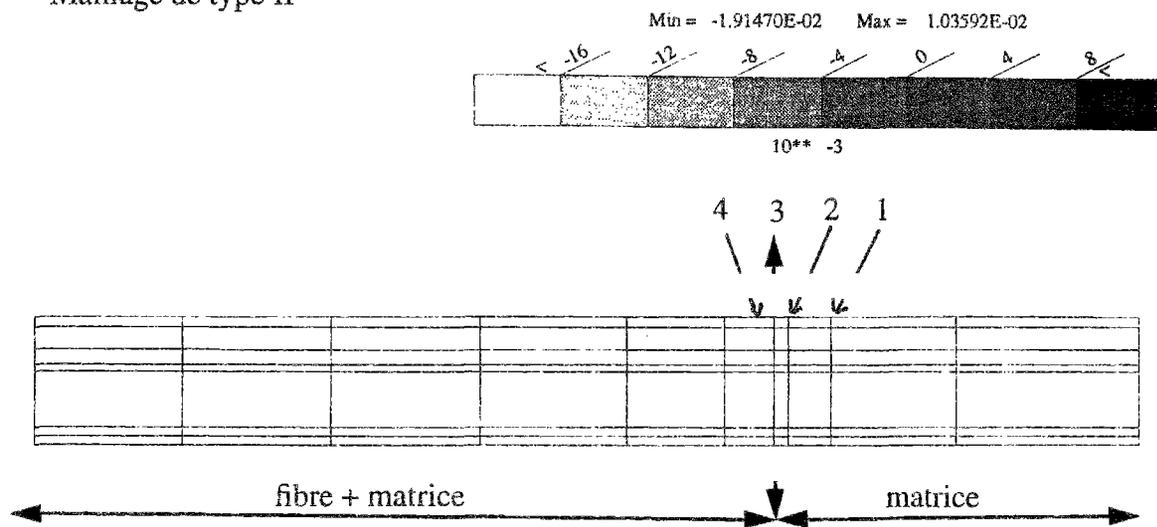
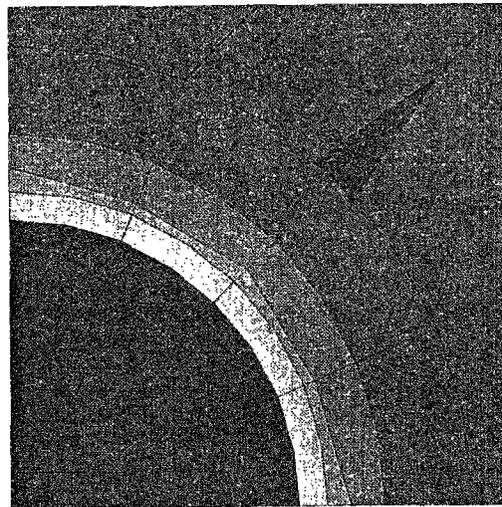


Planche 9 Isovaleurs des déformations plastiques  $\epsilon_{p33}$  autour de l'interface fibre- matrice (plans perpendiculaires à la fibre)



Etude de convergence temporelle



y=y1

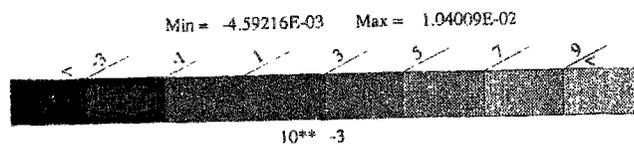
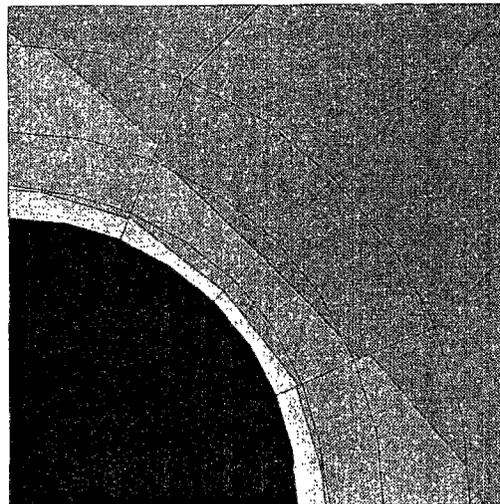
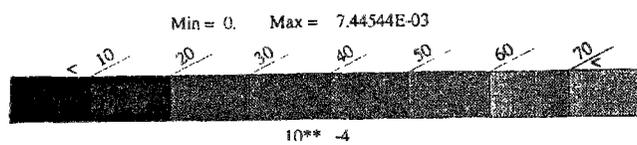


Planche 10

Isovaleurs des déformations plastiques  $\epsilon_{p33}$



y=y2





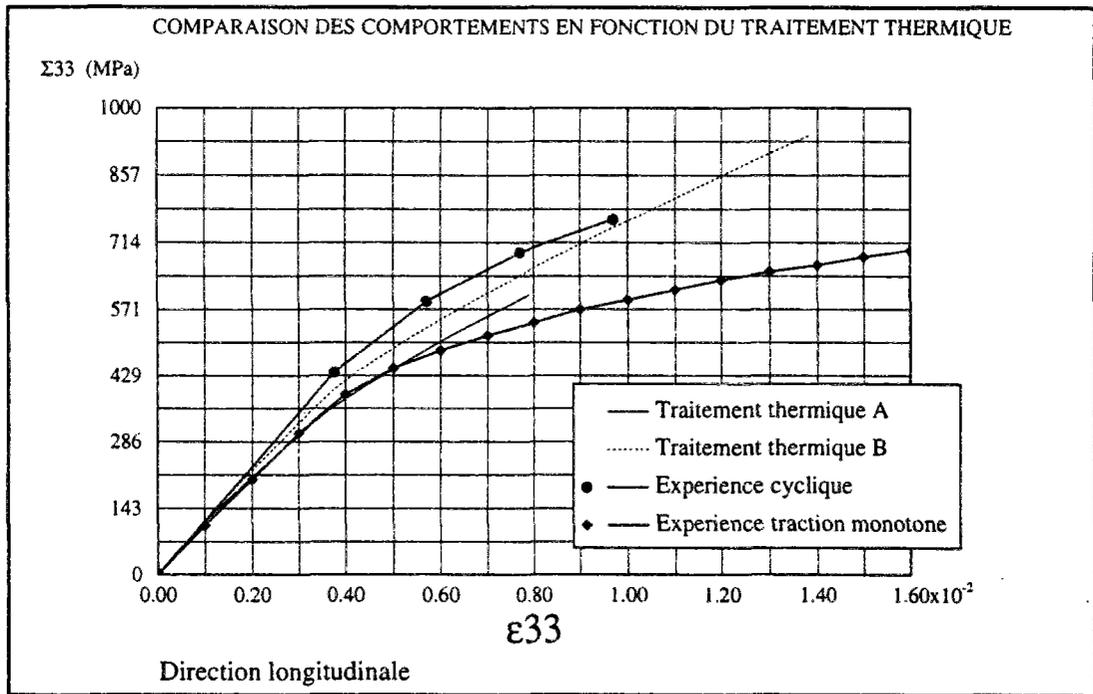


Planche 11

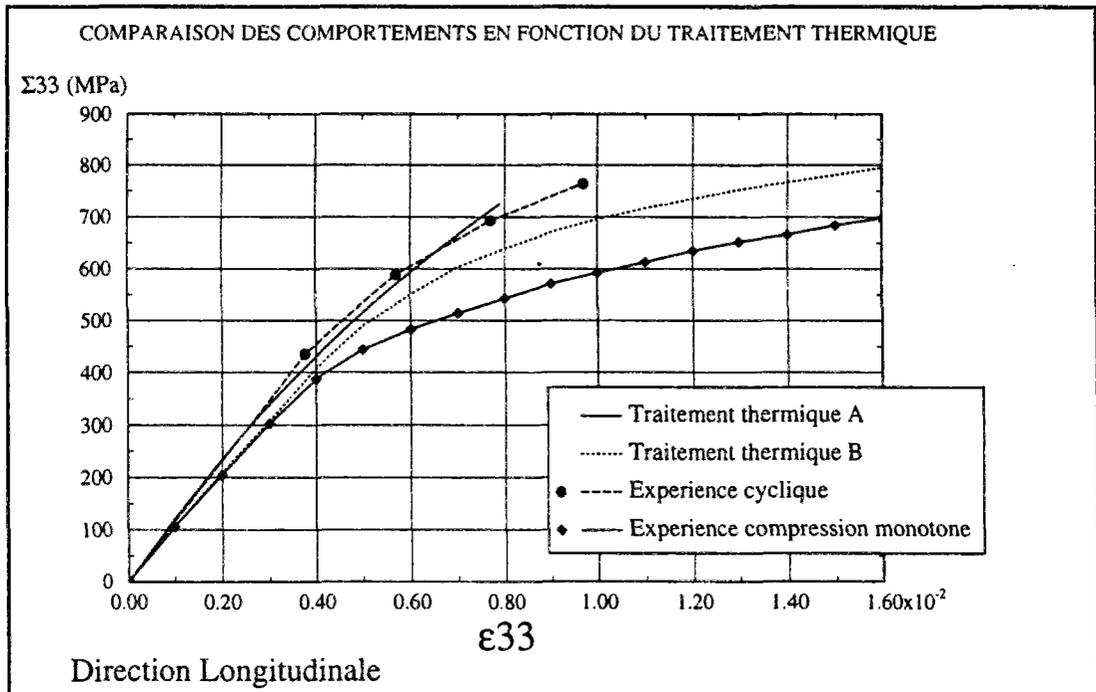


Planche 12



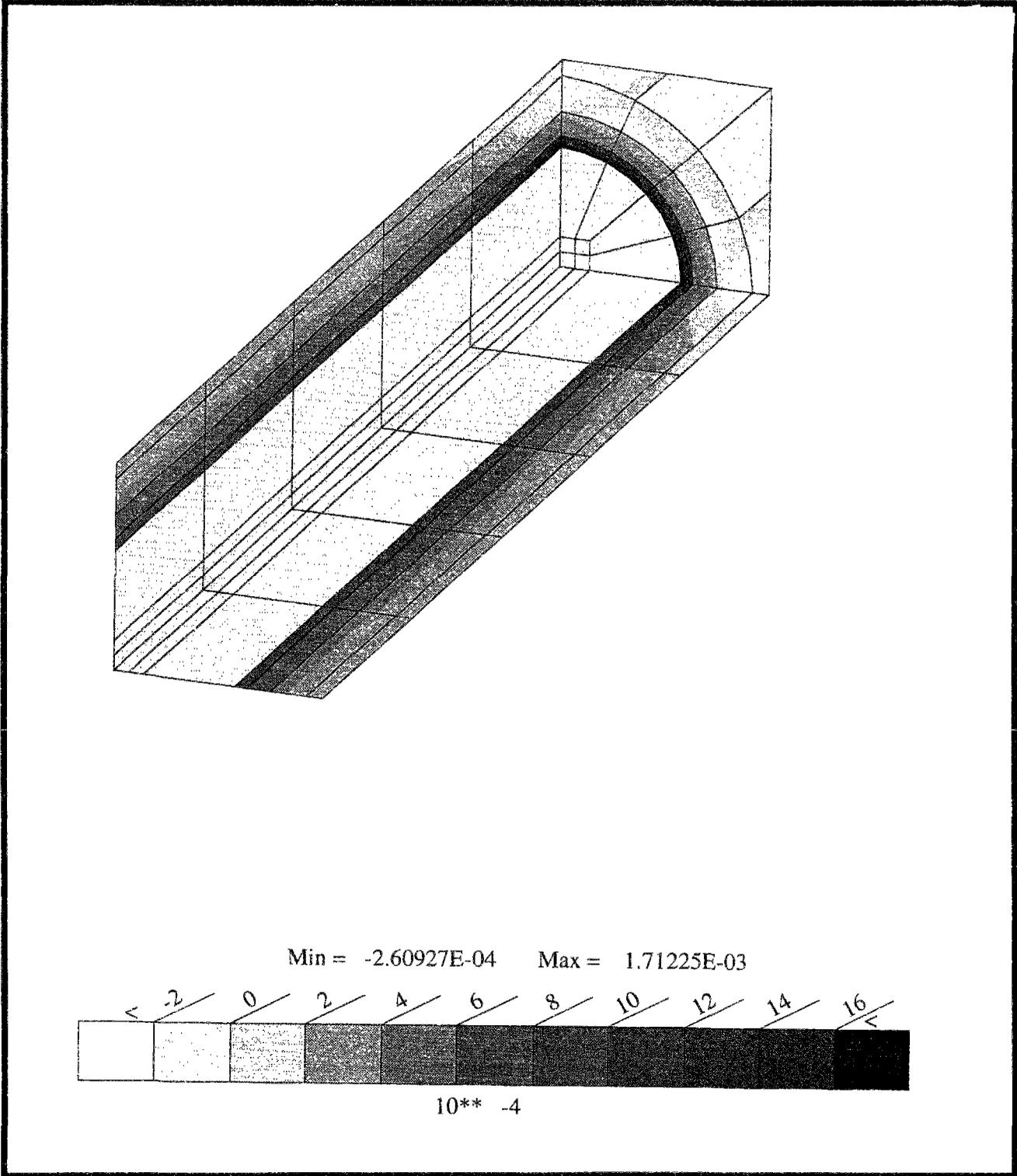


Planche 13: Isovaleurs de la déformation plastique  $\epsilon_p$  en tête de fibre



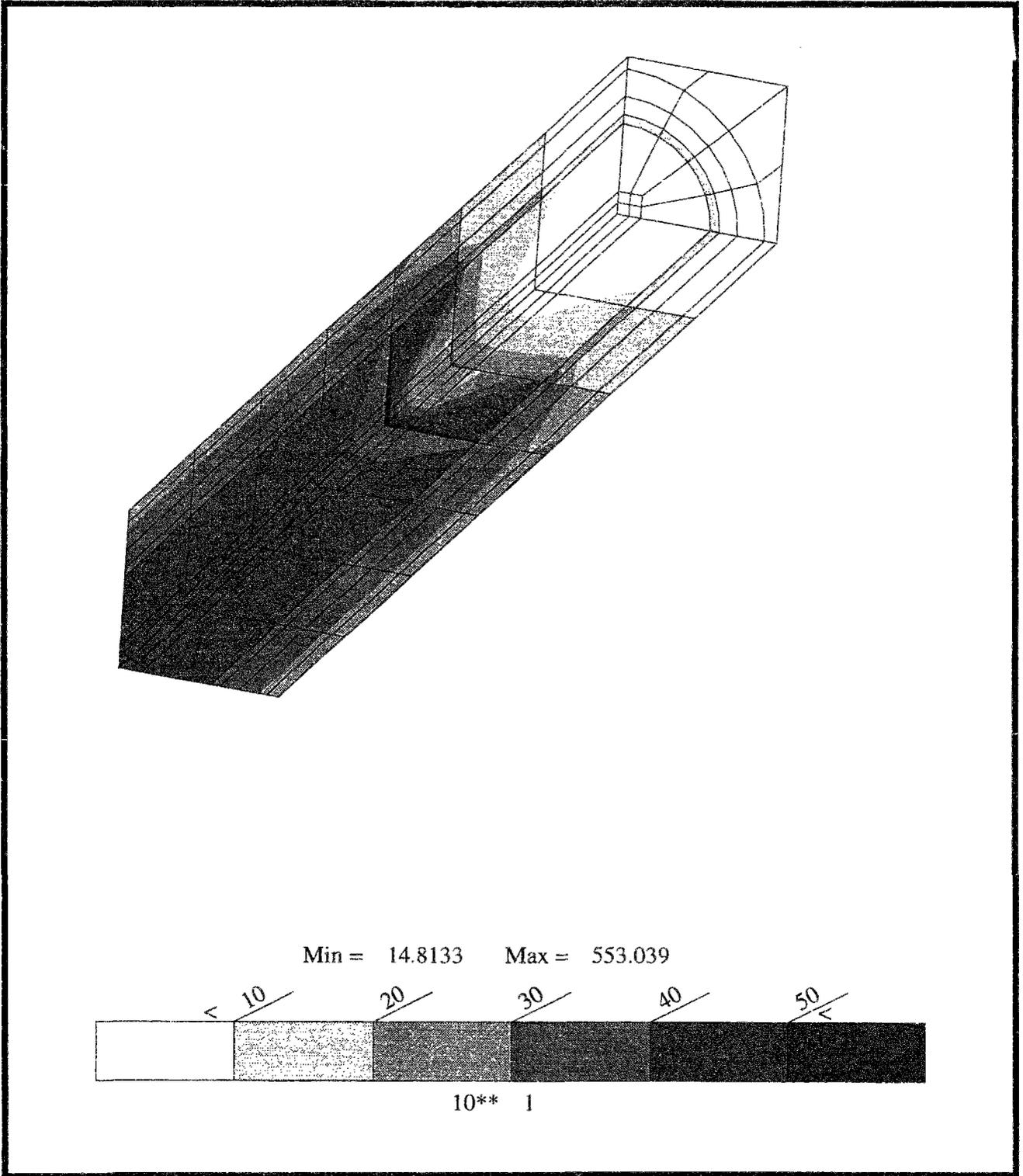
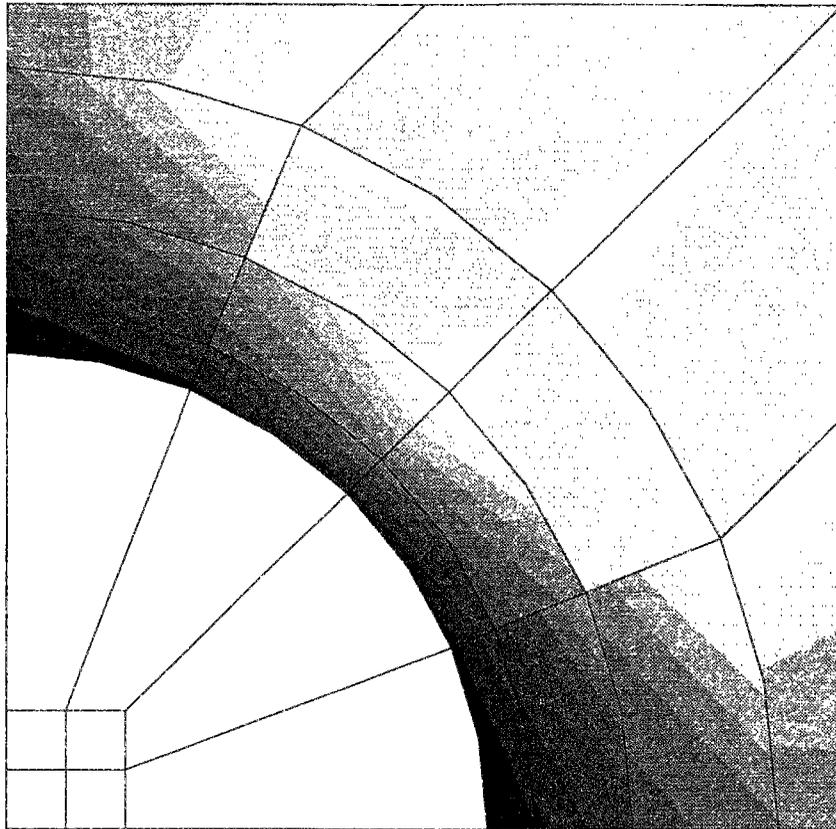


Planche 14: Isovaleurs de la contrainte de Von Mises





Min = -1.73001E-04    Max = 9.42070E-04

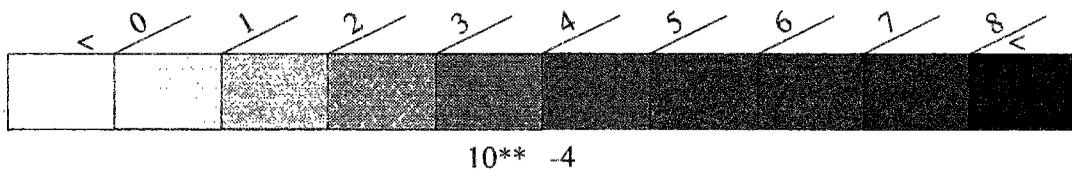


Planche 15: Isovaleurs de la déformation plastique  $\epsilon_{p33}$  dans le plan de symétrie  
( $y=0.03\text{mm}$ )



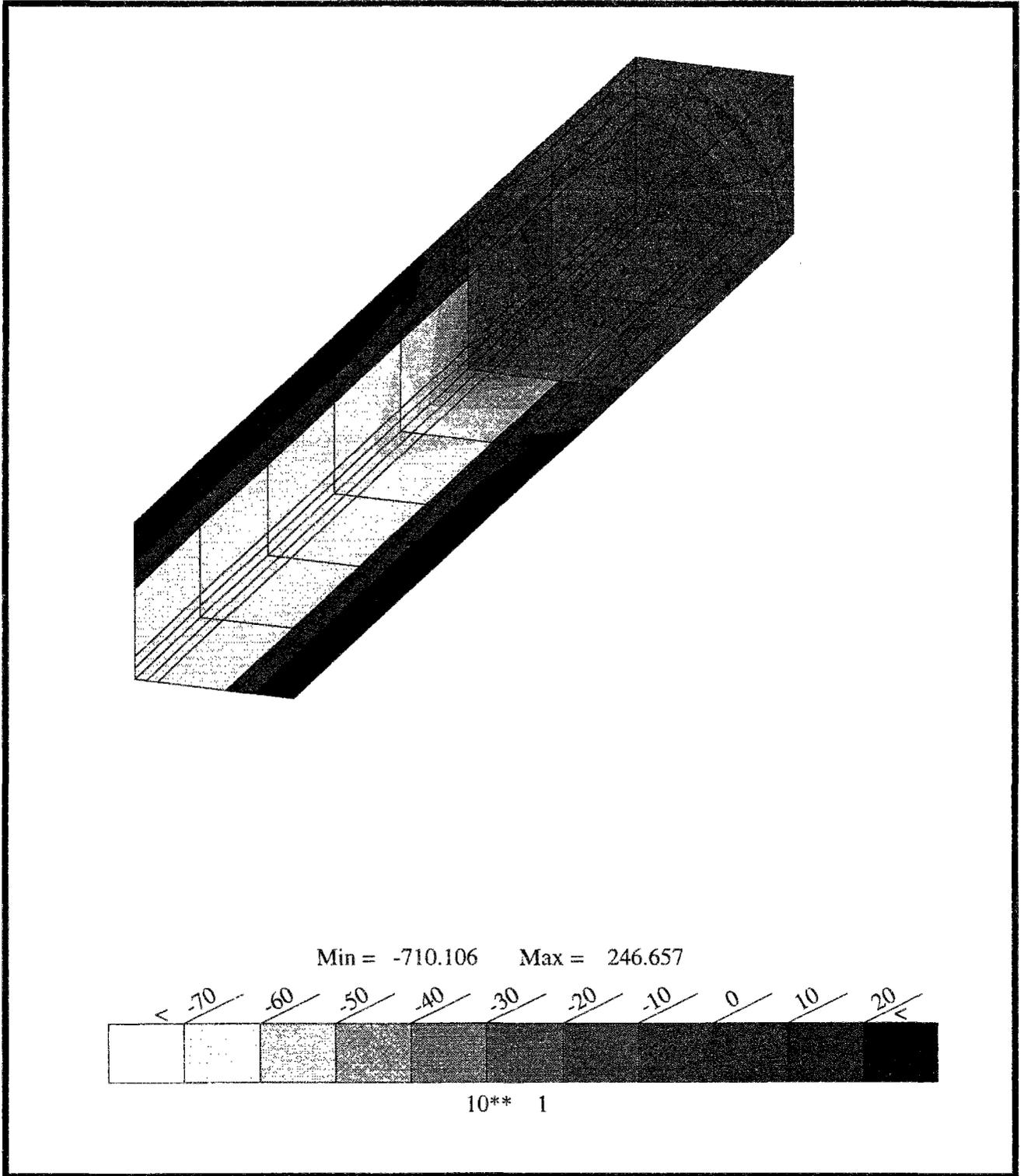


Planche 16: Isovaleurs des contraintes  $\sigma_{33}$   
(direction longitudinale)



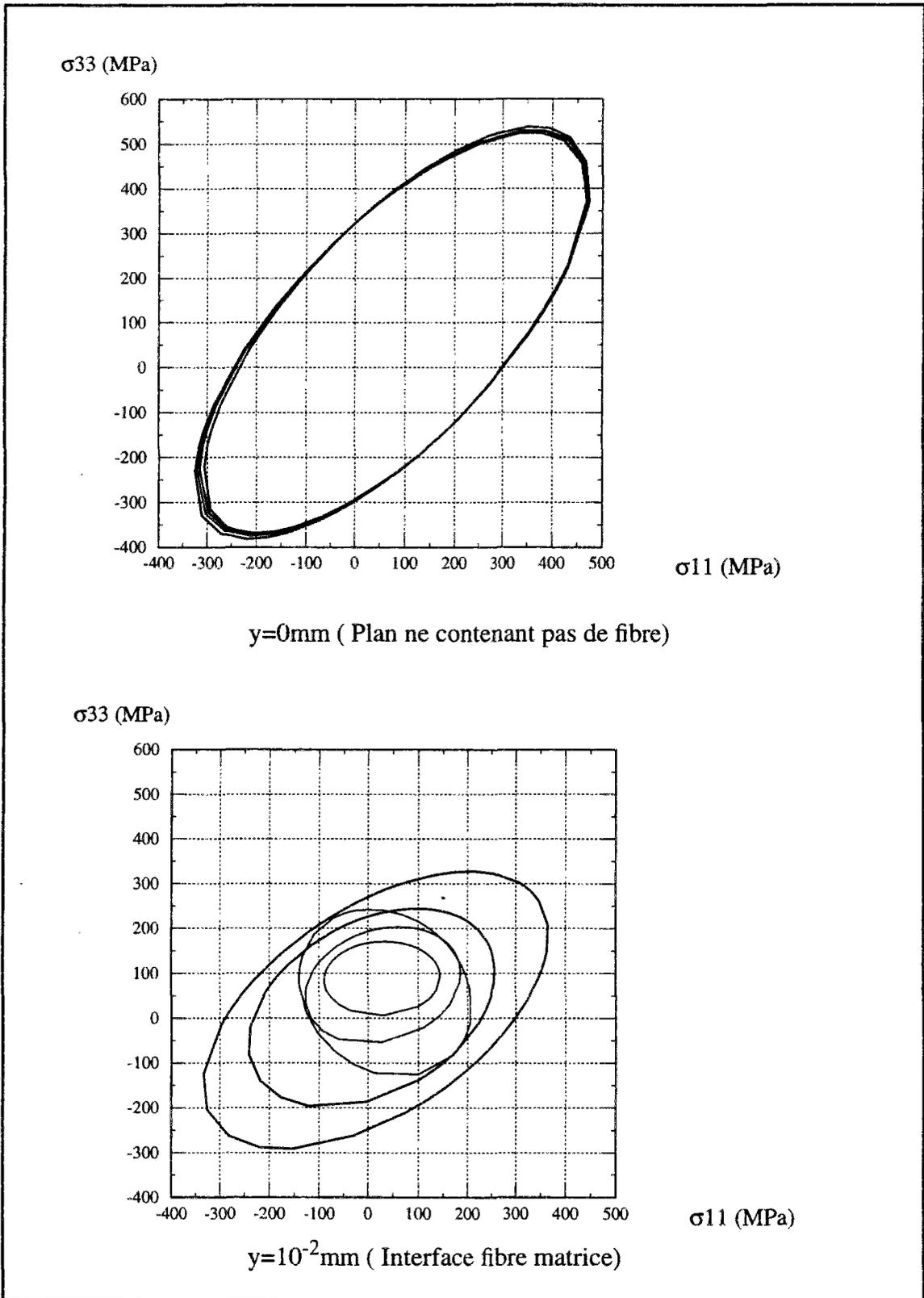
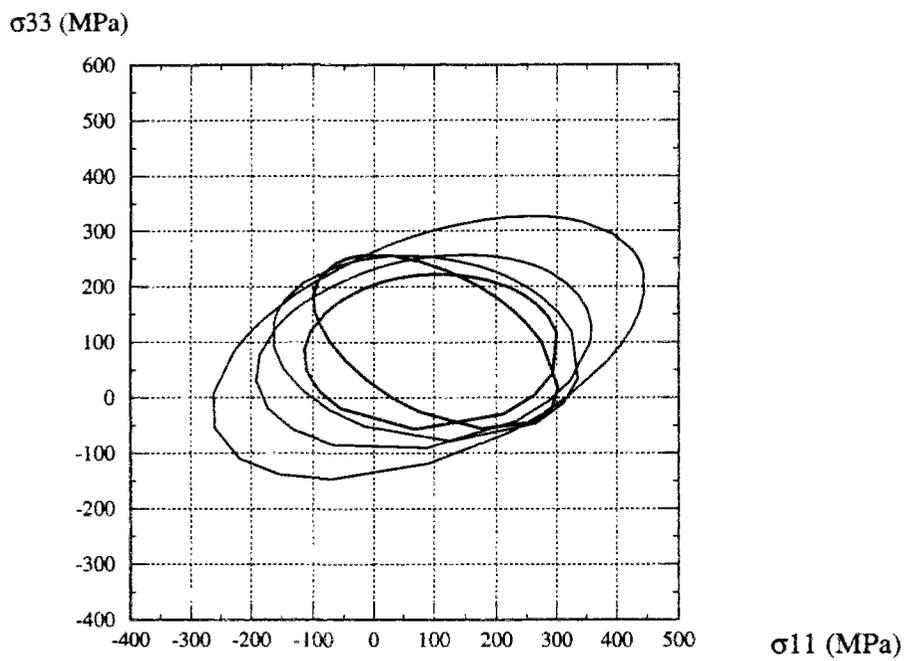
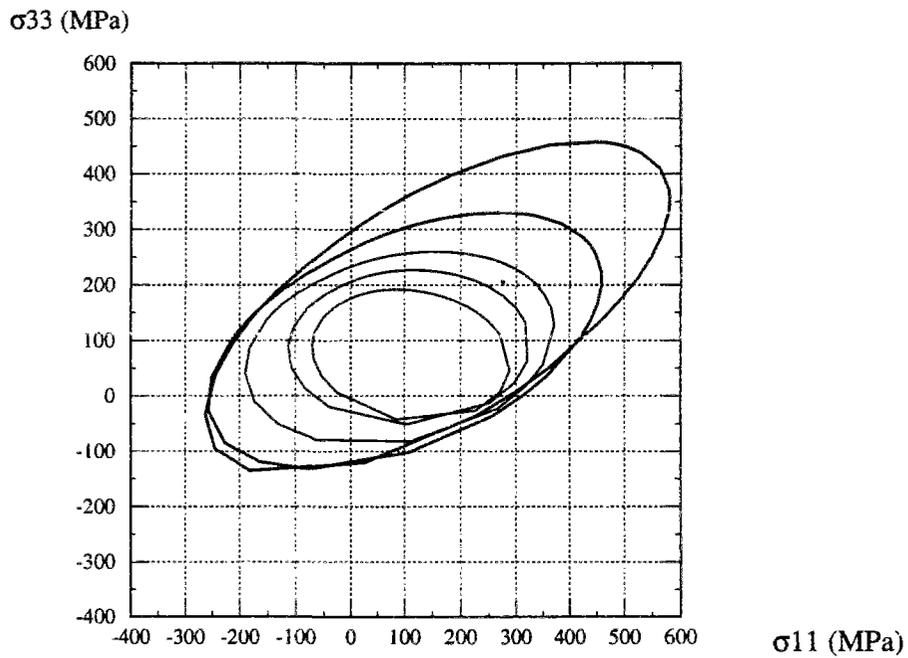


Planche 17 a : Surfaces seuils microscopiques ( pour quelques mailles)



$y = 0.02$  mm ( Plan contenant fibre et matrice)



$y = 0.03$  mm ( Plan de symétrie)

Planche 17 b: Surfaces seuils microscopiques (pour quelques mailles)

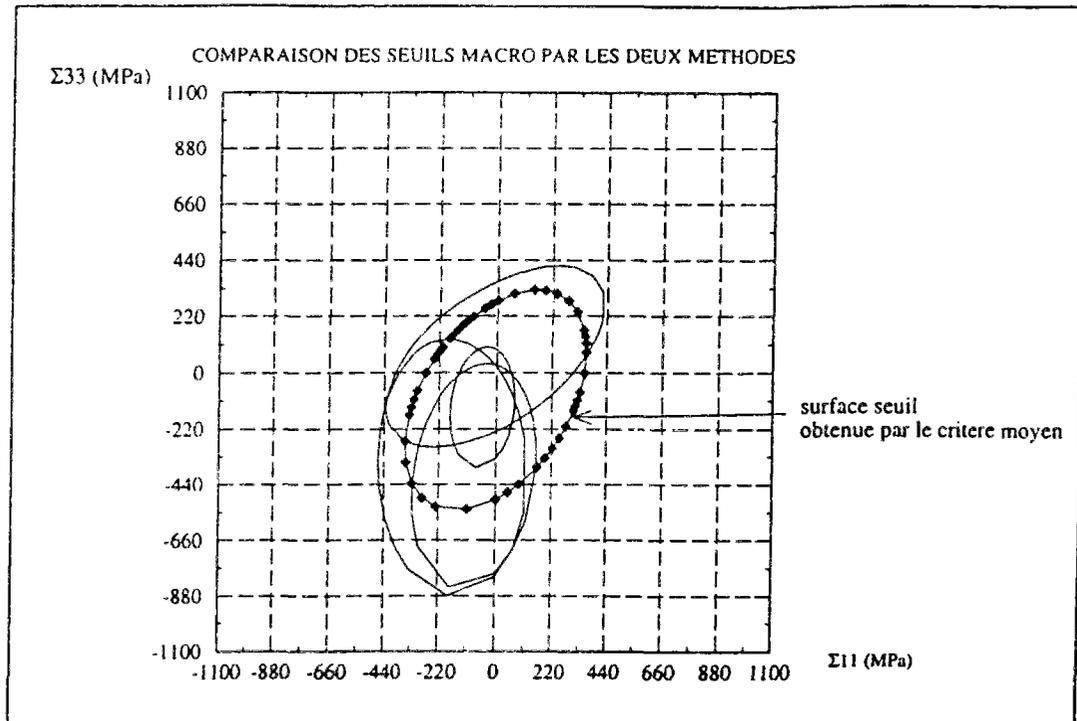


Planche 18: Comparaison des méthodes 1 et 2 de detection de seuils

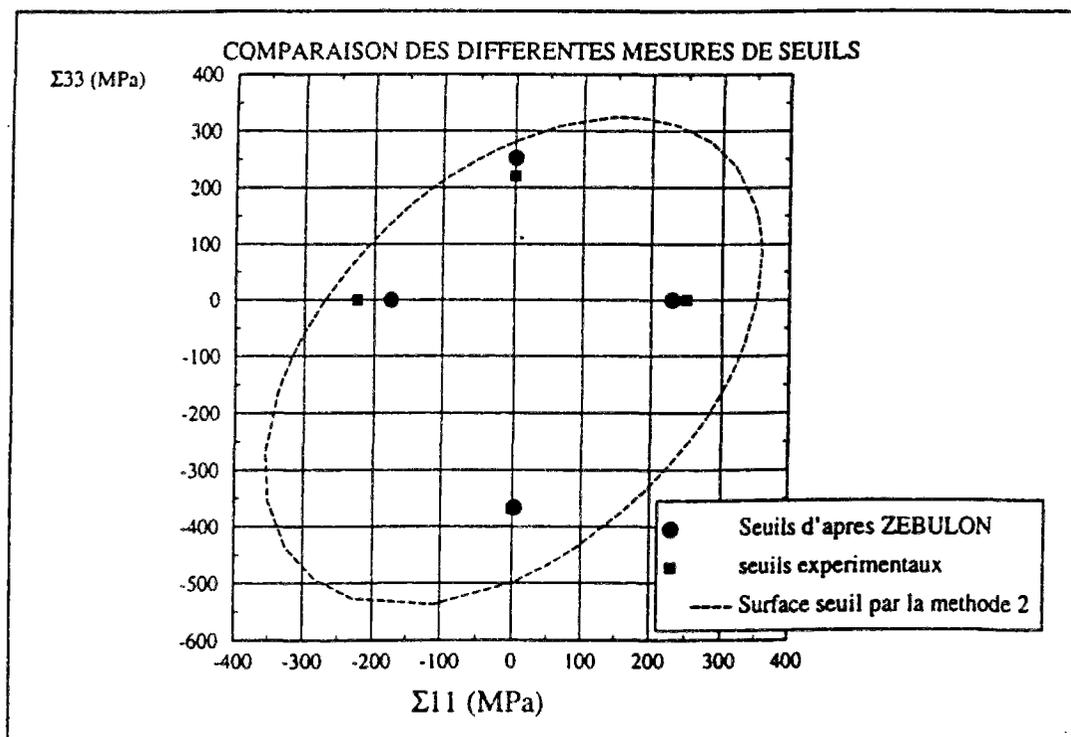


Planche 19 : Comparaison des seuils



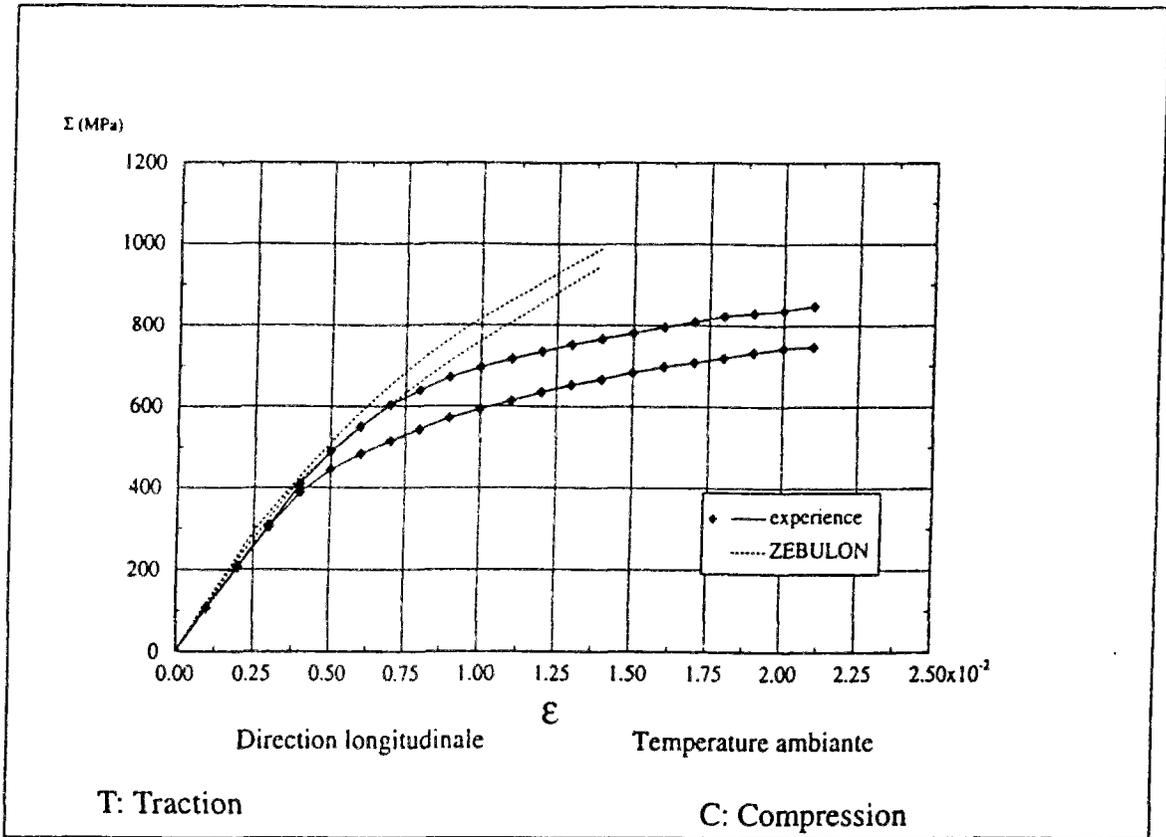


Planche 21.a Comportements longitudinaux simulés et expérimentaux

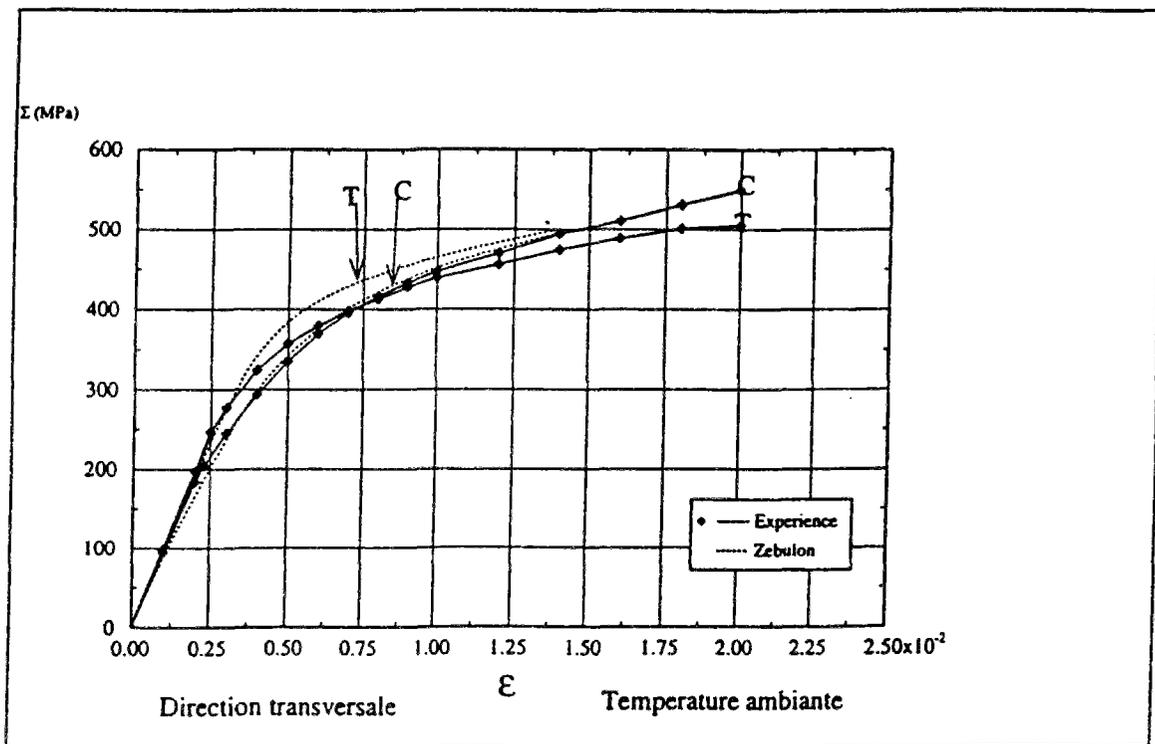


Planche 21.b Comportement transversaux simulés et expérimentaux

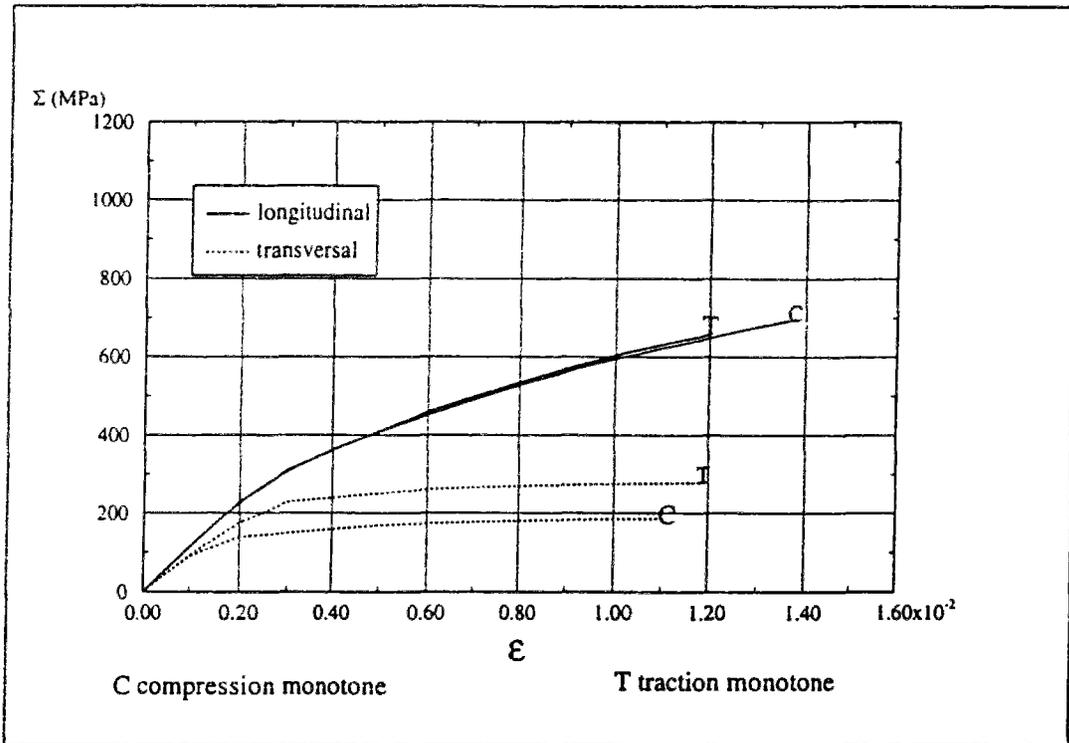


Planche 22: Comportement calculé à 200 C par éléments finis

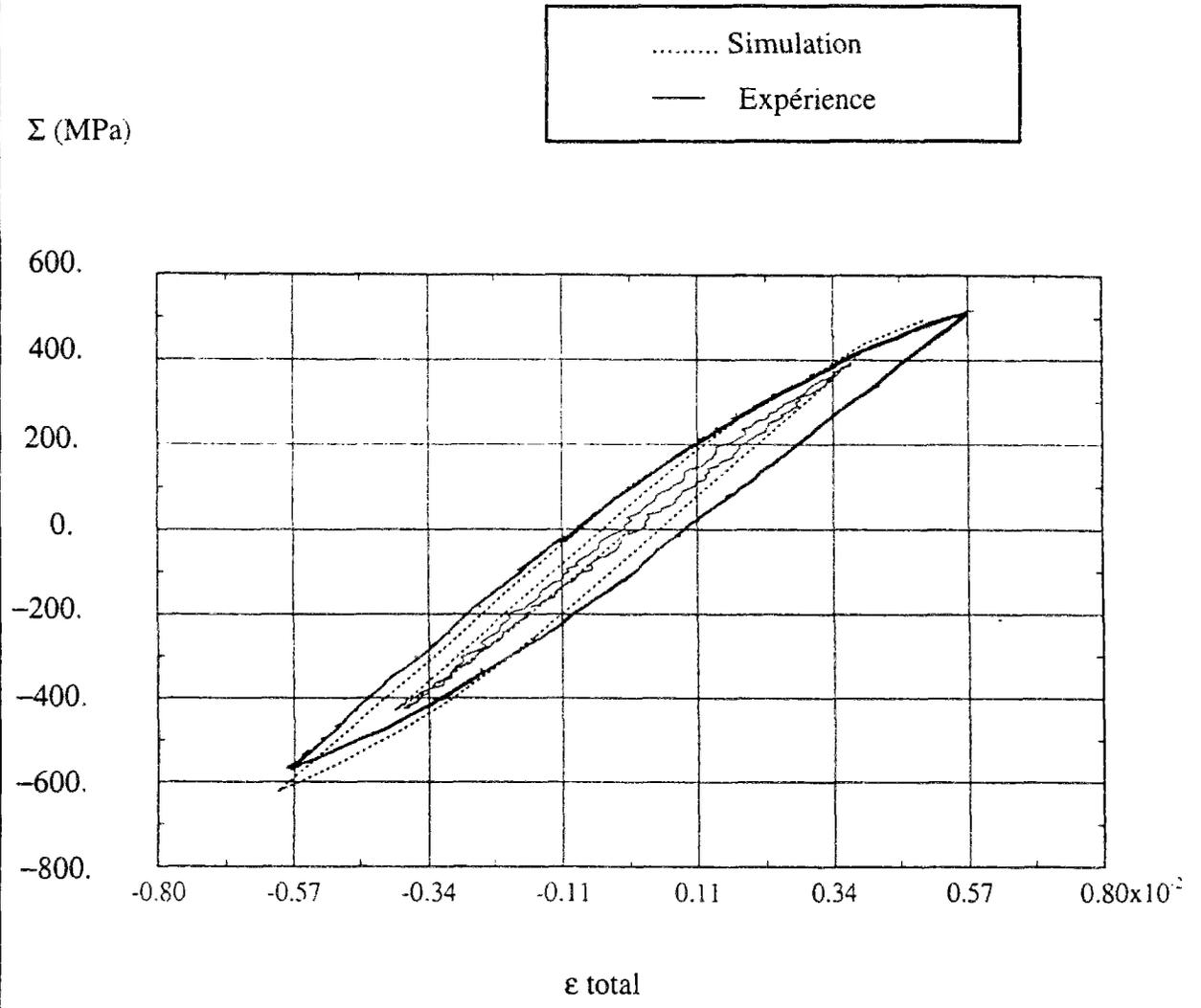


Planche 23

Comparaison Essais cycliques expérimentaux et simulation de chargement cyclique à déformation imposée, réalisée par éléments finis

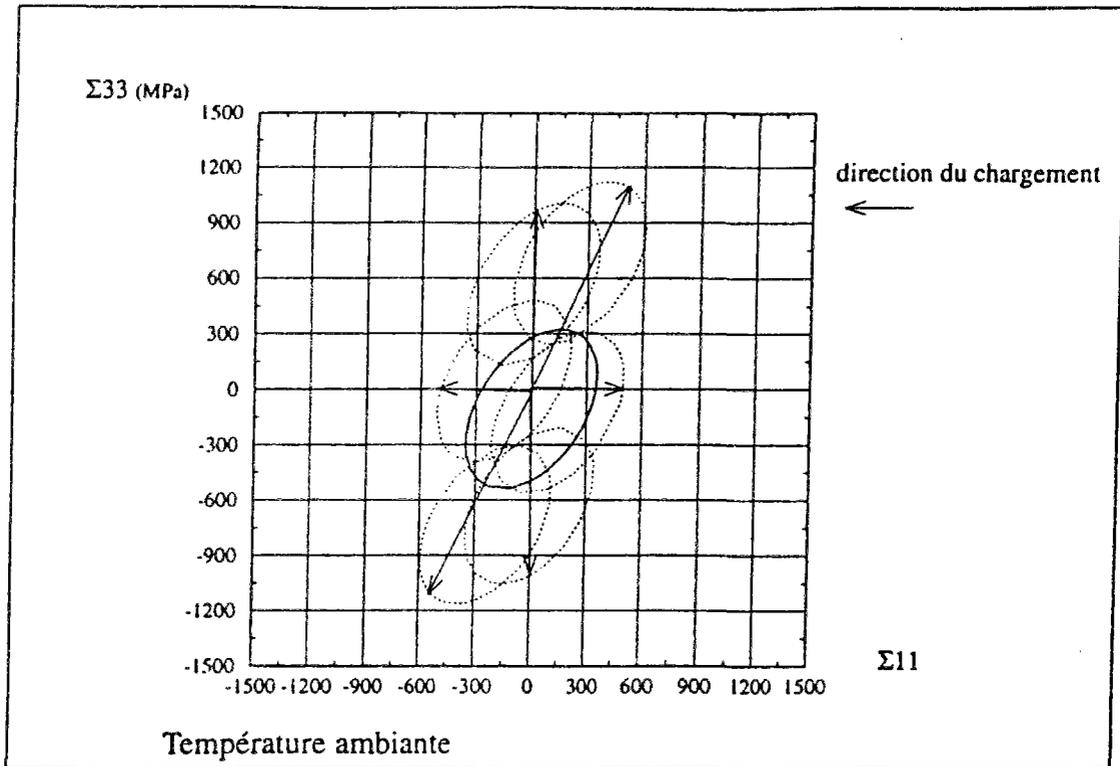


Planche 24: Evolution des surfaces obtenues par le critère moyen après des simulations numériques de traction-compression axiales et biaxiales

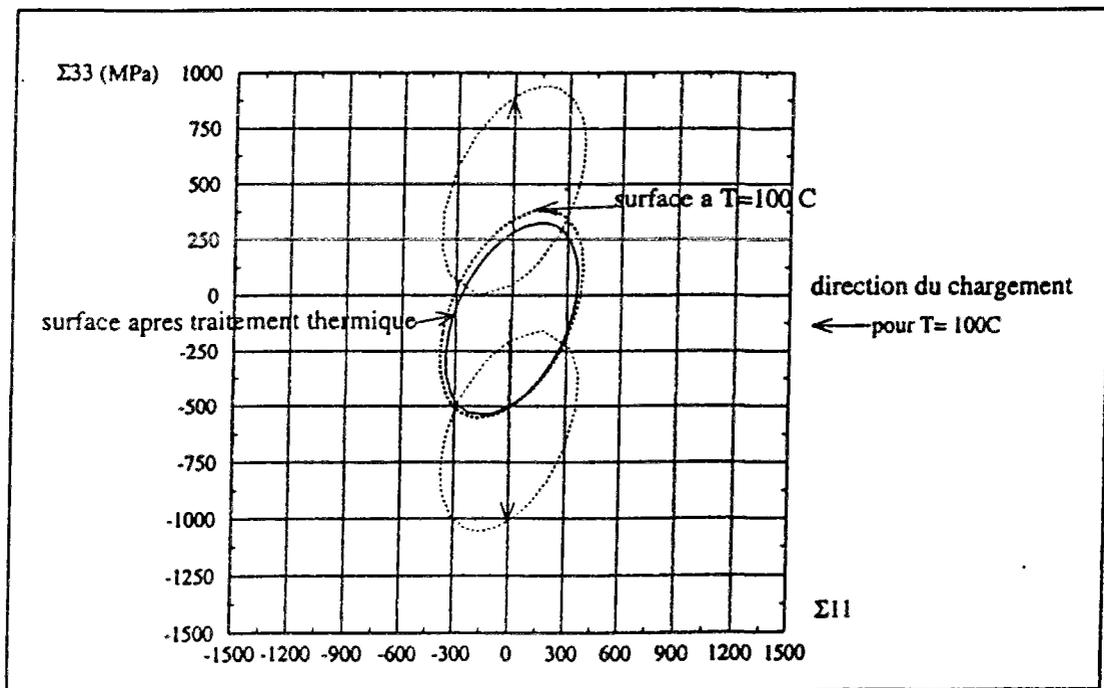


Planche 25: Surfaces seuil après une mise en température à T=100C et sous chargement

**IV MODELISATION MACROSCOPIQUE**



## IV.1 INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est de formuler une loi de comportement macroscopique qui ne relie que des grandeurs macroscopiques, définies pour la plupart d'entre elles, comme la moyenne sur l'élément de volume représentatif des quantités microscopiques. Cette loi devra tenir compte de l'anisotropie due à la structure (axes privilégiés du matériau). Nous devons aussi élaborer une loi d'évolution des contraintes résiduelles dues à la fabrication qui, dans les lois d'écrouissage, distingue les directions longitudinales et transversales.

Le point de départ de ce modèle est la loi de viscoplasticité développée à l'ONERA et appliquée pour de nombreux matériaux métalliques, déjà présenté au paragraphe III.1.2. Cette loi rend compte des effets Bauschinger par l'introduction d'un écrouissage cinématique linéaire et non linéaire. Cependant elle s'inscrit dans le contexte d'isotropie initiale et ne cherche pas à distinguer le comportement en traction et en compression. Or les données expérimentales que nous avons obtenues, montrent des différences sensibles entre traction et compression et entre essais menés sur des éprouvettes taillées dans les directions longitudinales et transversales.

La campagne d'essais de traction-compression réalisée sur notre composite SiC/Al a ainsi mis en évidence un certain nombre de phénomènes complexes. Nous allons donc dans un premier temps décrire les différents essais réalisés (isothermes et non-isothermes) et dégager les tendances principales que devra rendre compte notre future loi de comportement.. Dans un deuxième temps, à l'aide d'un passage micro-macro sous-tendu par quelques hypothèses et une reformulation des relation de localisation dans le cadre de la thermo-élasto-plasticité, nous proposerons une loi de comportement viscoplastique anisotrope acceptable dans le cadre thermodynamique habituel. Ce modèle sera ensuite exploité sous divers chargements (mécaniques et thermiques) Ses réponses seront comparées avec celles obtenues par le code ZEBULON sur la cellule périodique et celles de l'expérience.

## IV. 2 ETUDE EXPERIMENTALE

L'étude expérimentale réalisée sur le 2024Al+20%SiC, tend à mettre en évidence les différents facteurs phénoménologiques que la loi de comportement macroscopique doit intégrer. Ces essais sont donc réalisés en vue d'une description qualitative et quantitative des phénomènes (anisotropie structurale, présence des contraintes résiduelles); l'étude se complète d'une campagne d'essais en température afin d'observer les évolutions des principales caractéristiques du matériau.

### IV.2.1 Présentation générale

Une machine de traction-compression agit sur l'éprouvette (figure 1) par l'intermédiaire d'un vérin hydraulique asservi, à paliers hydrostatiques Schenck de quatre tonnes. La majeure partie de ces essais a été effectuée avec des chargements à déformation imposée. Pendant l'étude en température, on chauffe l'éprouvette à l'aide d'un système par induction moyenne fréquence. Cet inducteur permet le chauffage isotherme dans la partie utile de l'éprouvette. La bonne répartition de température est vérifiée lors d'un essai préalable. La température est mesurée par thermocouples. Les déformations sont mesurées par un extensomètre.

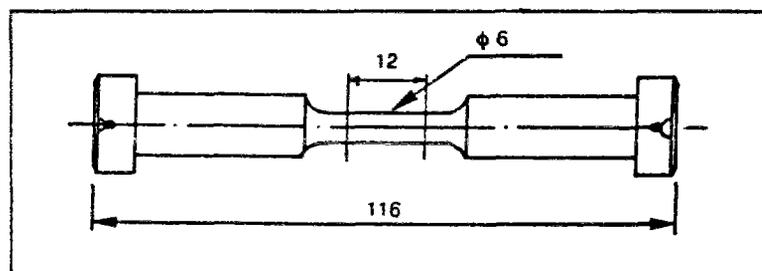


figure 1

Dans un premier temps notre étude doit cerner les caractéristiques mécaniques de notre matériau. Comme il est censé présenter un comportement différent suivant les axes transversaux et longitudinaux, nous nous intéressons tout d'abord à des cyclages mécaniques et ce, pour plusieurs températures. Ainsi des chargements cycliques à déformation imposée sont réalisés. A froid le comportement du matériau est supposé élasto-plastique et

une seule vitesse de déformation  $\dot{\epsilon} = 10^{-3} s^{-1}$  a été imposée, alors qu'en température les essais ont eu lieu à  $\dot{\epsilon} = 10^{-3} s^{-1}$  et  $\dot{\epsilon} = 0.5.10^{-4} s^{-1}$ . Pour détecter un éventuel effet de mémoire, les chargements sont allés à déformation croissante, augmentant par palier de 0.2% jusqu'à 1% de déformation totale puis redescendant par la même procédure. Tous les essais isothermes réalisés sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Type d'essai		LONGITUDINAL			TRANSVERSAL		
		20°	100°	200°	350°	20°	350°
température		20°	100°	200°	350°	20°	350°
traction compression monotones	X					X	
cyclage $\dot{\epsilon} = 10^{-3} s^{-1}$	X	X	X	X	X	X	X
cyclage $\dot{\epsilon} = 0.5.10^{-4} s^{-1}$		x	X	X			

Tableau 9: Récapitulatif des principaux essais réalisés.

En plus de ces essais communément appliqués aux matériaux métalliques (composites ou non), d'autres sont entrepris afin d'étudier l'évolution du domaine d'élasticité lors de sollicitations purement thermiques. En effet l'utilisation du composite est prévue pour une gamme de température allant de 20° à 250° C et, étant donnée la forte dépendance du seuil d'élasticité de la matrice vis à vis de la température, ces essais sont indispensables pour déterminer si le composite présente les mêmes tendances. Pour cela différentes montées en température avec temps de maintien plus ou moins long sont effectuées. Et durant ces sollicitations on détermine les seuils d'élasticité. Enfin l'influence du temps de maintien est examiné.

#### IV.2.2 Résultats des essais caractéristiques de base

##### IV.2.2 1 Boucles d'hystérésis

A 20° et 100° C (planches 25 et 26) le matériau révèle un comportement très raide dans le sens longitudinal avec des boucles étroites et des contraintes maximales importantes (par rapport au cas de la matrice seule), -800 à 700 MPa pour 1% de déformation totale (T=20°C) et -650 à 600 MPa (T=100°C). Cependant, dans les deux cas le comportement d'hystérésis dû à la

plasticité de la matrice est évident, et il n'y a pas d'endommagement décelable, tout du moins en terme de diminution des modules d'élasticité. A 100°C, aucune viscosité n'est encore décelée. Au contraire, à 200°C la courbe s'infléchit avec la baisse de la vitesse de sollicitation ( planches 28 et 29). A 350°C le matériau est très visqueux et n'offre plus guère de résistance (planches 30 et 31). Devant ce comportement , on peut s'interroger quant à l'éventuelle utilisation de ce composite au dessus de 200°C.

#### IV.2.2 2 Quelques remarques sur le comportement à froid

Un axe privilégié apparaît clairement: celui du filage du composite qui oriente les fibres, lorsque l'on compare les comportements dans les sens longitudinaux et transversaux. On a reporté sur les courbes de la planche 32 les points sommets ( $\Delta\sigma/2, \Delta\varepsilon_p/2$ ) des boucles d'hystérésis .

La raideur apportée par la présence des fibres est évidente. De plus la planche 33 représentant le comportement en traction-compression monotone pour les directions longitudinale et transversale fait apparaître une dissymétrie des seuils d'élasticité dans les deux sens de sollicitation au bénéfice de la compression ,d'environ 70 MPa pour le sens longitudinal, alors que dans le sens transversal aucune dissymétrie initiale n'est sensible. Les contraintes résiduelles d'origine de fabrication (dues aux dilatations contrariées) sont la cause de cette dissymétrie. Mais la quantité de fibres (17% en volume) est trop faible pour engendrer un plus fort décalage. De même les valeurs des modules d'Young dans les deux axes ne sont pas complètement disproportionnées: le module moyen pour le sens longitudinal est d'environ 110000 MPa et de 88600 MPa pour le transversal. Il y a bien sûr une amélioration dans les deux sens par rapport à celui de la matrice (75000 MPa) mais le gain en raideur n'est pas très élevé. La dissymétrie du domaine élastique persiste pendant le cyclage mécanique et seule l'augmentation de température la fera disparaître. Enfin, le matériau se stabilise rapidement lors du cyclage à 20°C et 100°C, avec un durcissement cyclique certain et il n'y a pas d'effet de mémoire.

#### IV.2.2 3 Comportement à chaud

La dissymétrie constatée à l'ambiante entre la traction et la compression s'efface avec la température; A 200° C le centre du domaine élastique se situe à 0 MPa et les contraintes maximales observées sur les boucles d'hystérésis sont

identiques dans les deux sens de sollicitation . Elles sont bien sûr plus faibles qu'à 20° C puisque le matériau est viscoplastique (planche 34) et cela engendre une redistribution des contraintes. A 350° C le composite n'a plus guère de résistance ( plateau atteint dès 0.3% de déformation totale). Son domaine élastique est difficilement mesurable du fait de l'arrondi des boucles. Sa viscosité très forte se traduit par sa grande sensibilité à la vitesse de chargement. La planche 35 permet d'apprécier quantitativement toutes ces remarques.

#### IV.2.3 Etude des seuils en fonction de la température

##### IV.2.3.1 Introduction

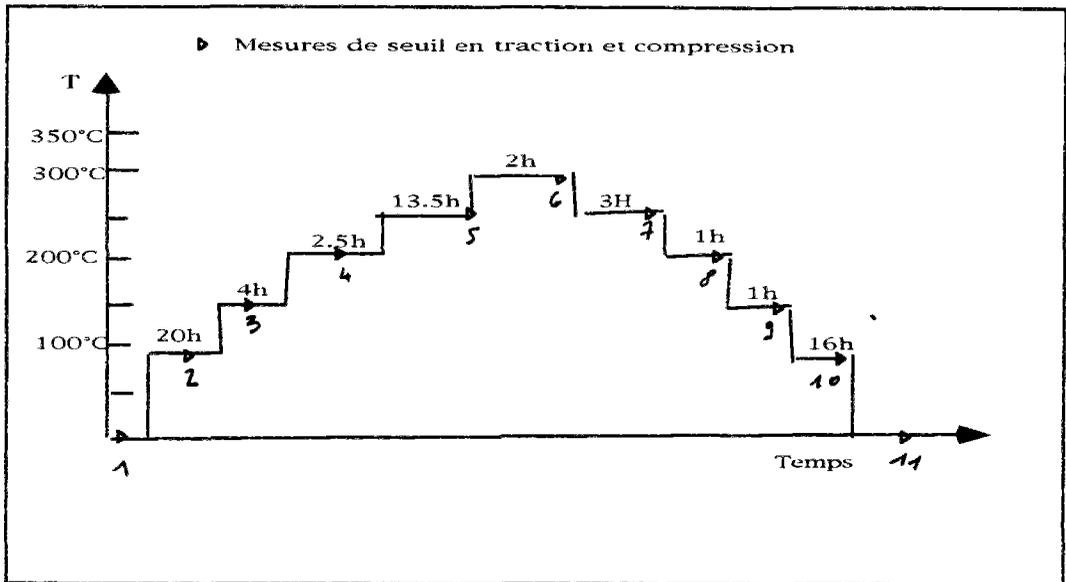
Les informations recueillies sont dues à trois types d'essais, qui obéissent à une méthodologie commune; elle consiste en la mesure des seuils de traction-compression à froid, suivie de montées en température avec détection des seuils à chaque palier thermique et retour à froid avec une dernière évaluation du domaine élastique.

##### IV.2.3.2 Méthodologie particulière à chaque essai

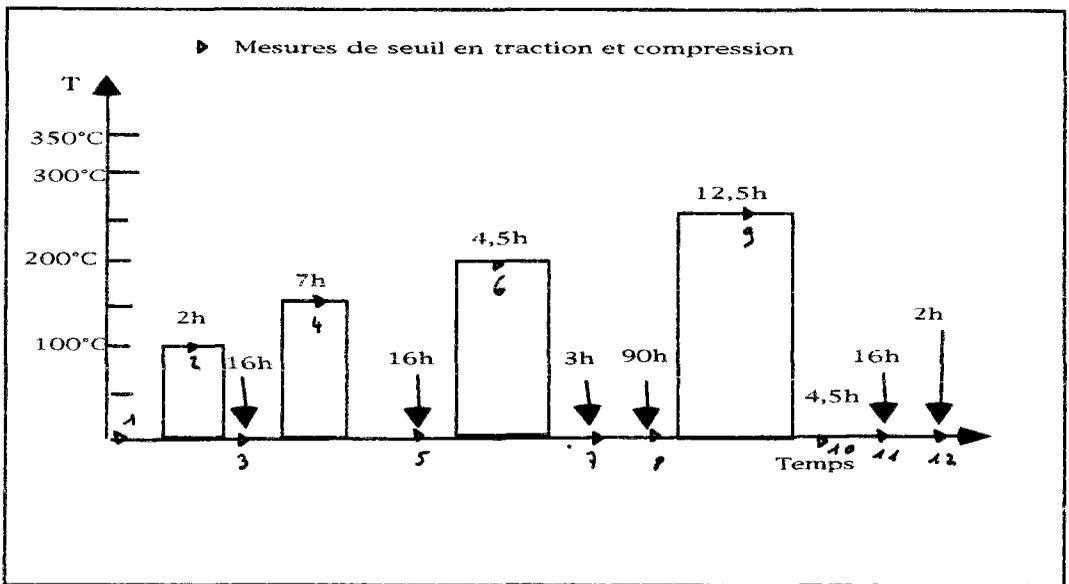
TYPE 1: le retour à froid se fait avec les mêmes températures intermédiaires qu'à l'aller.

TYPE 2: chaque incursion en température avec mesure du seuil d'élasticité est suivie d'un retour à l'ambiante où on évalue le domaine élastique en traction et compression.

Dans ces deux essais , la vitesse de chauffe est programmée à 50°C/mn et le retour à l'ambiante n'est pas contrôlé. La valeur des seuils prise en compte correspond à un offset de  $10^{-4}$  par rapport à la pente élastique et chaque type d'essais a été réalisé sur une seule éprouvette.



Chargement thermique de l'essai 1



Chargement thermique de l'essai 2

#### IV.2.3.3 Principaux résultats

Comme on l'avait observé dans les essais mécaniques, on note tout de suite une dissymétrie des seuils initiaux à l'ambiante, d'environ 100 MPa, au profit de la compression pour une éprouvette taillée dans le sens longitudinal. Les valeurs moyennes de la limite élastique sont de 270 MPa en traction et de -360

MPa en compression pour l'axe longitudinal. Il y a très peu de dispersion dans ces mesures. L'axe transversal, soumis lui aussi au type 1, ne présente pas de décalage entre les deux seuils qui se situent à 275 et -270 MPa . De 20° à 100° C , le matériau reste insensible à la montée en température et ce pour ces deux directions, mais au dessus de 100°C , une chute progressive des seuils apparaît. La baisse s'accélère entre 150 et 250° C puis se ralentit fortement jusqu'à 300°C, température finale de notre essai. On observe que la température symétrise la courbe (planche 36); en effet à 200°C le centre du domaine est à 0 MPa. Les contraintes internes sont donc annulées et ceci peut induire un défrettage partiel des fibres. Cependant il est difficile de discerner la part du défrettage et celle due à la chute du module de la matrice dans la baisse du module d'Young global qui est d'environ 90000 MPa à 200° C et de 88000 MPa à 300° C. Le retour à l'ambiante, trajet pendant lequel on détermine à nouveau les seuils, met en évidence l'effet irréversible de la température sur le matériau. On ne retrouve jamais les valeurs initiales des seuils: les chutes observées sont d'environ 60% dans le sens longitudinal et 40% dans le sens transversal. Ces comparaisons ont été effectuées 5mn après le retour à l'ambiante mais ces pourcentages diminuent lors de mesures plus tardives. Enfin les contraintes internes réapparaissent dès que l'on redescend en dessous de 200° C.

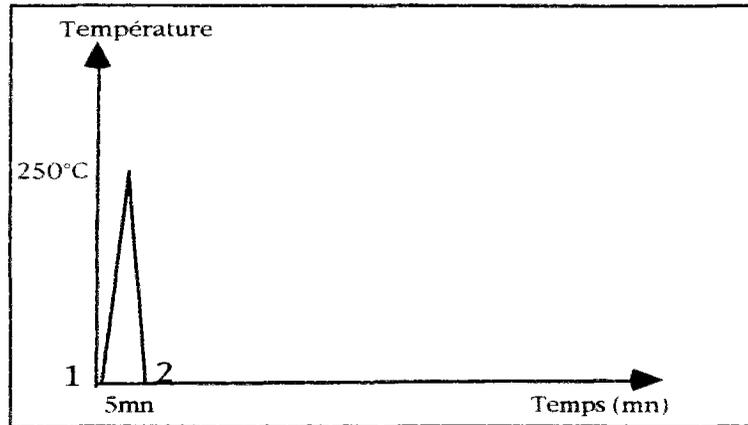
L'essai de type 2 met en évidence une température critique au dessus de laquelle on crée une action irréversible se manifestant sur le seuil final à froid. Elle se situe aux alentours de 200° C . La chute des seuils à froid, puis en réaugmentation progressive, suggère qu'un phénomène métallurgique engendré par la température et de nature irréversible se produit dans la matrice. C'est probablement une recristallisation à chaud qui change la nature de la matrice, expliquant par là même la différence de seuils observée (planche 37).

#### IV.2.3.4. Influence du temps de maintien

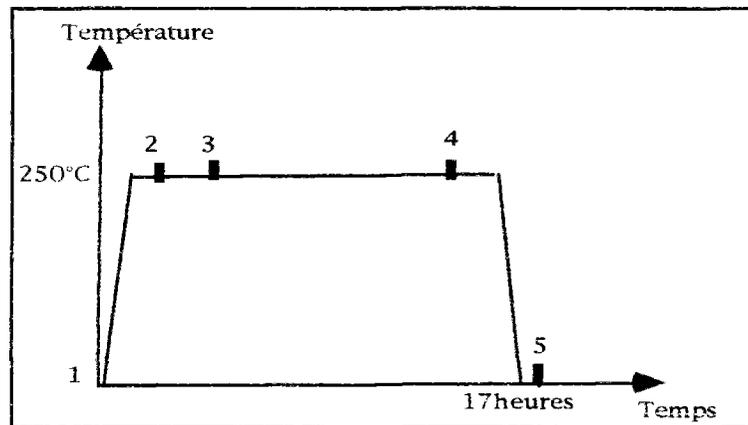
L'influence du temps de maintien est examinée dans les deux essais suivants.

TYPE 3: Les seuils sont mesurés à l'ambiante, on élève la température jusqu'à 250°C, on redescend aussitôt sans aucun temps de maintien et une nouvelle mesure des seuils est effectuée 35mn après le retour à l'ambiante.

TYPE 4: cet essai observe la même méthodologie que le précédent mais le temps de maintien à chaud est de 17 heures.



Chargement thermique de l'essai 3



Chargement thermique de l'essai 4

### Résultats

Dans l'essai de type 3, planche 38, on observe une chute du seuil de 60 MPa dans chaque sens alors que l'essai de type 4, planche 39, montre une perte de 180 MPa (en moyenne sur la traction et la compression). Donc le temps de maintien à chaud accentue le phénomène métallurgique, qui est donc thermiquement activé. Cependant les mesures de seuil effectuées durant le palier en température ne révèlent aucune baisse dans le temps: les seuils ont chuté par rapport à leur valeur à 20°C mais ils restent à peu près stables. Donc cet effet métallurgique visible au retour à froid, ne s'observe pas en température. On peut supposer ici un effet dû à la nature composite du matériau car le même essai (type 4) réalisé sur la matrice seule voit, lui, le seuil varier pendant le pallier thermique. La présence des fibres soutiendrait donc les seuils.

On notera aussi que le seuil de la matrice étant nettement plus faible à chaud, sa variation doit elle aussi être plus faible, donc difficilement mesurable. L'influence irréversible de la température sur les seuils par le changement de nature de la matrice est confirmé par la différence de comportement observé lors d'essais cycliques à déformation imposée, à froid,, réalisés sur les éprouvettes ayant subi les essais de type 3 et 4. Sur la planche 40 on a superposé les courbes d'hystéresis obtenues sur le matériau vierge et celles des deux éprouvettes déjà sollicitées thermiquement. L'incursion en température provoque donc l'affaiblissement du matériau d'autant plus important que le temps de maintien à chaud a été long.

### IV.3 Conclusion

Le matériau montre, lors des essais mécaniques habituels, un comportement classique de matériau métallique à ceci près qu'il présente une anisotropie entre axes longitudinal et transversal, et une dissymétrie entre traction et compression due aux contraintes internes. Son comportement lors des essais purement thermiques met en évidence son instabilité en température à partir d'une valeur critique de 150°C, sa tendance au vieillissement par la remontée des valeurs des seuils après le retour à l'ambiante, et enfin l'influence de la température sur les contraintes internes, qui disparaissent au dessus de 200°C, symétrisant ainsi le domaine élastique.

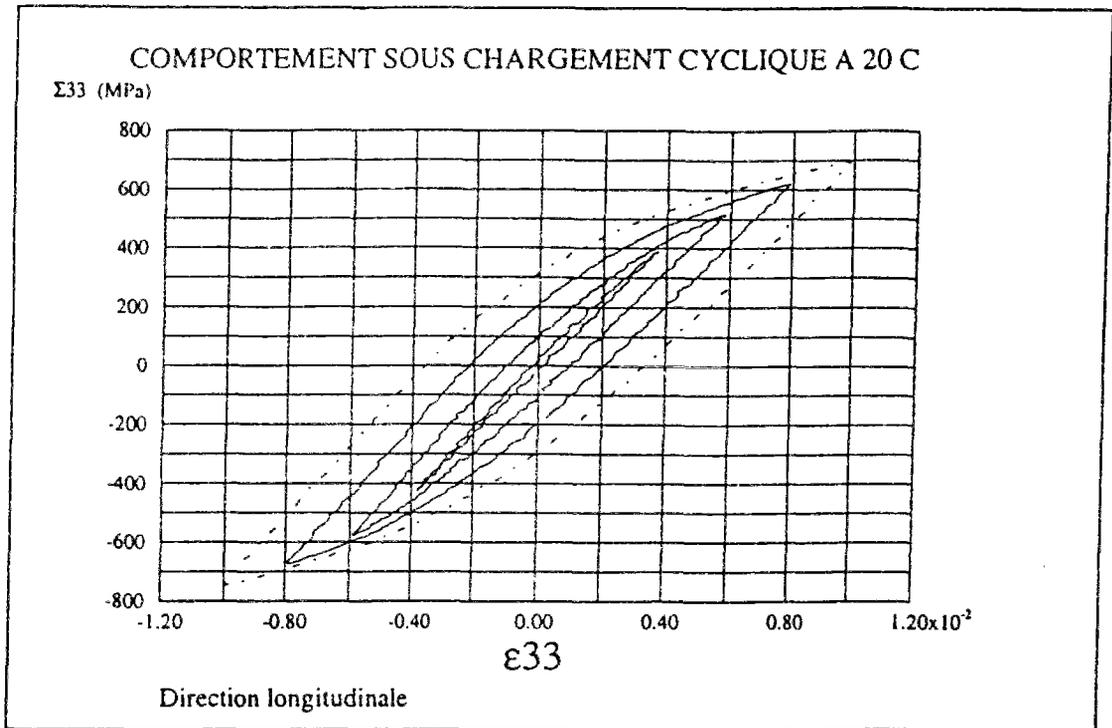


Planche 26 : Comportement cyclique expérimental

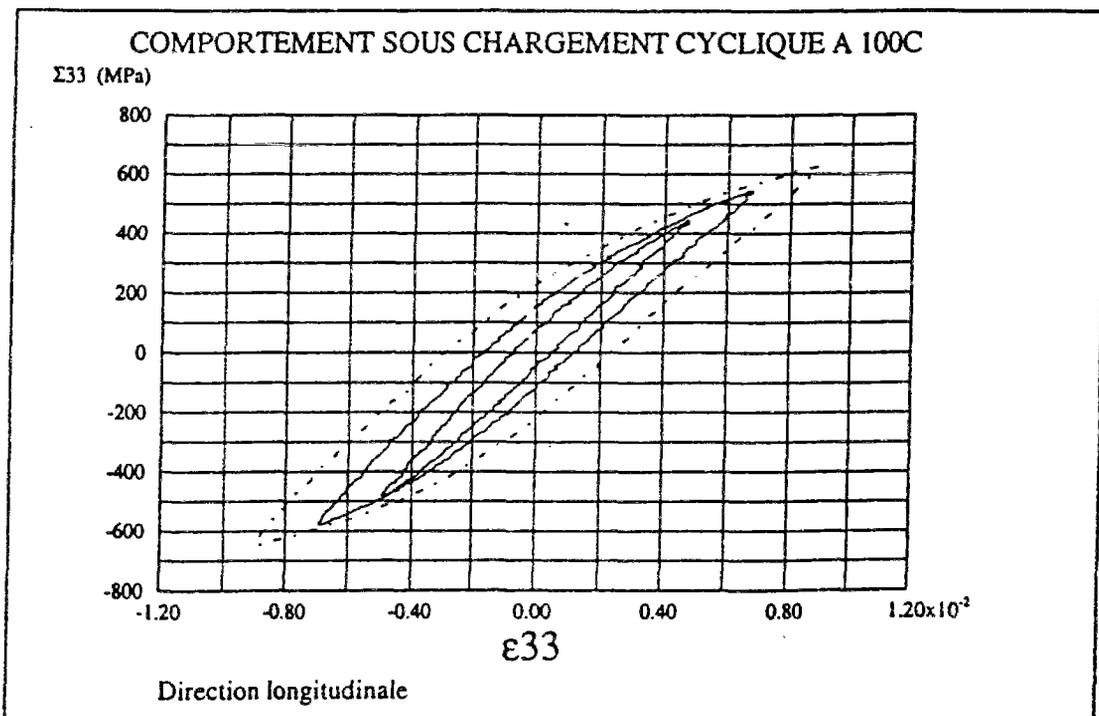


Planche 27 : Comportement cyclique expérimental

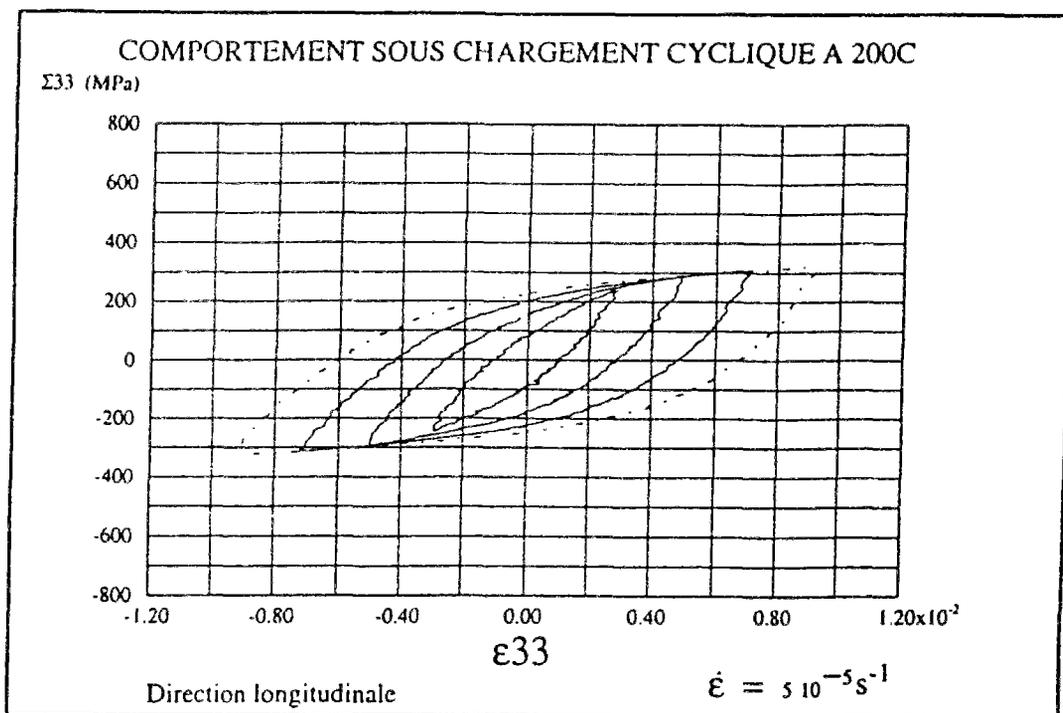


Planche 28

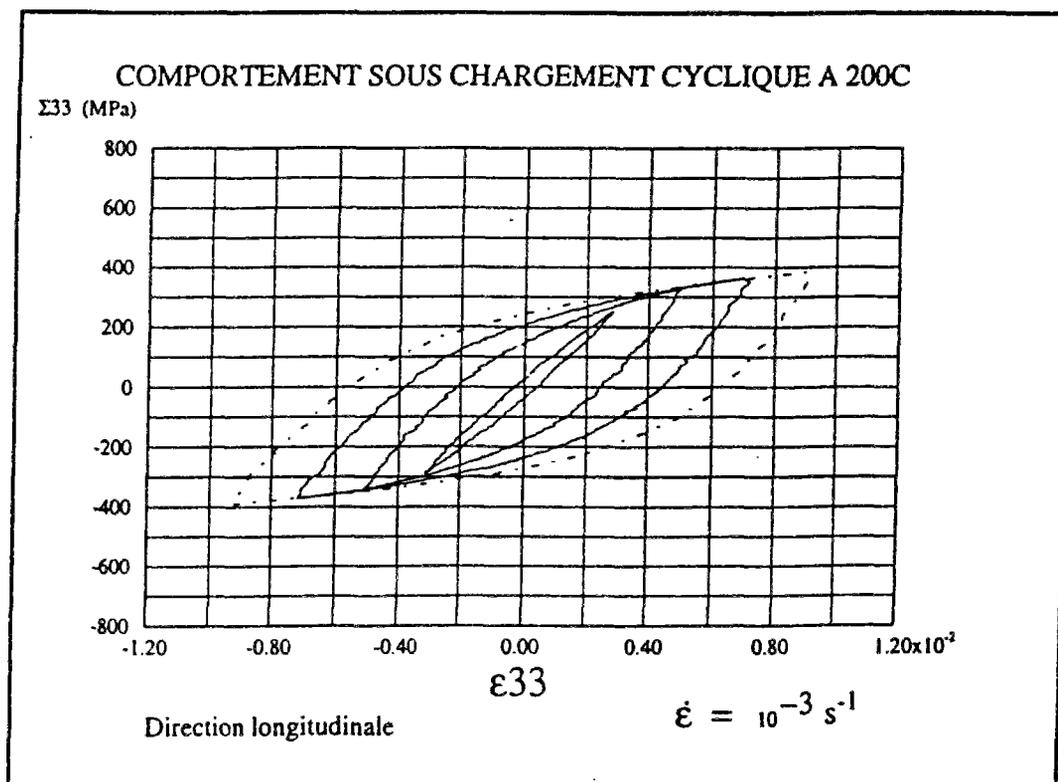


Planche 29

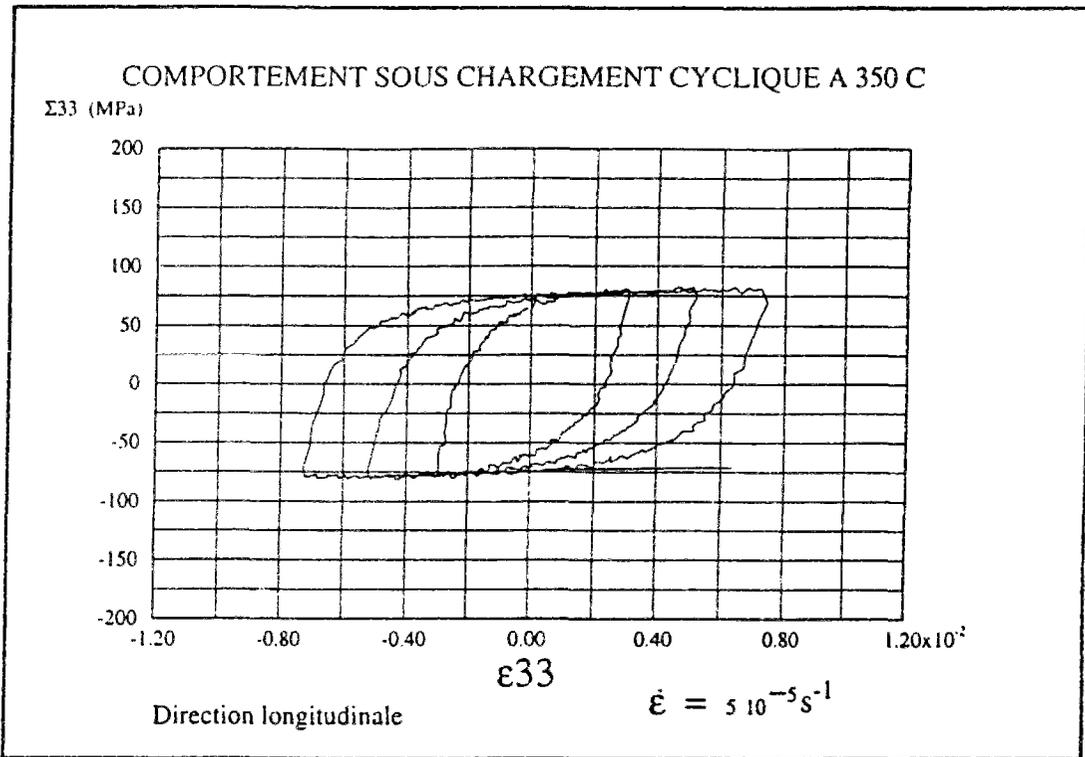
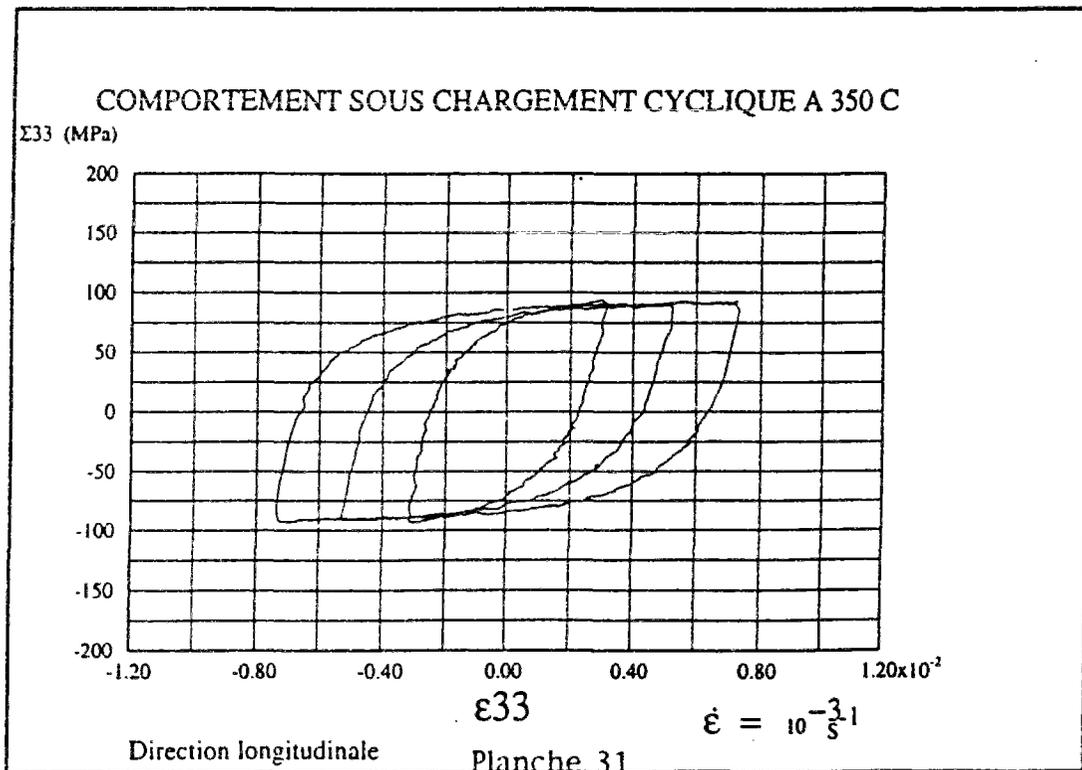


Planche 30



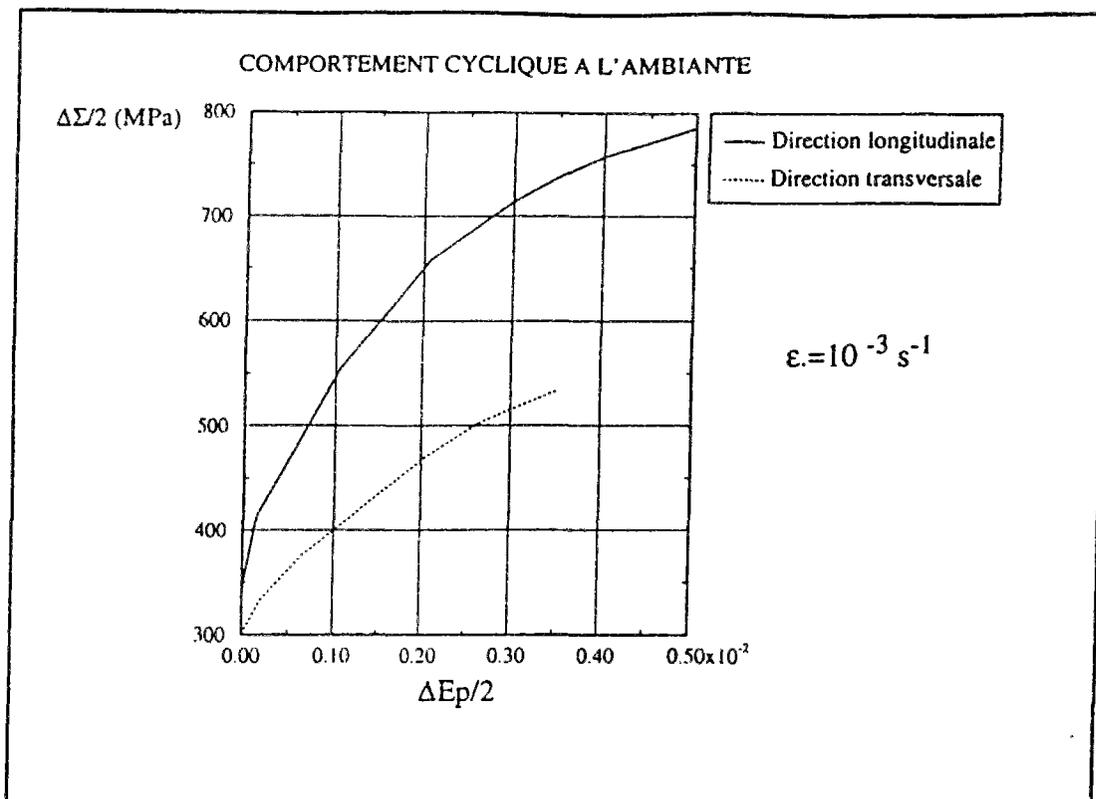


Planche 32

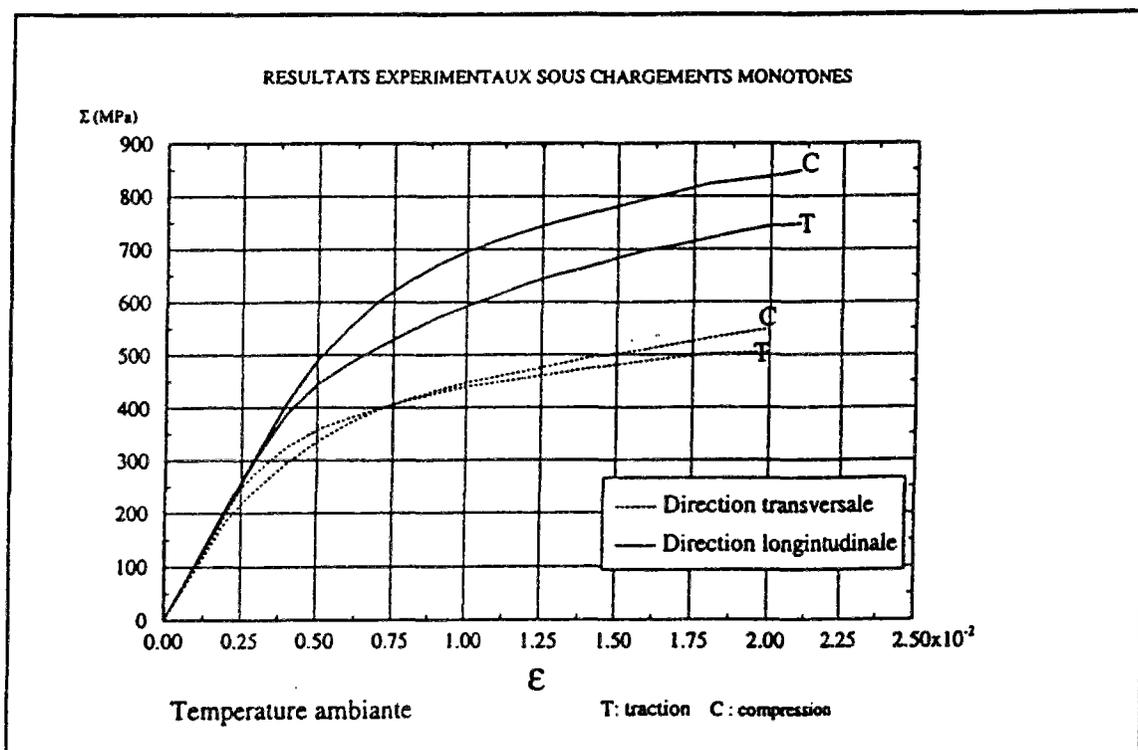


Planche: 33  
109

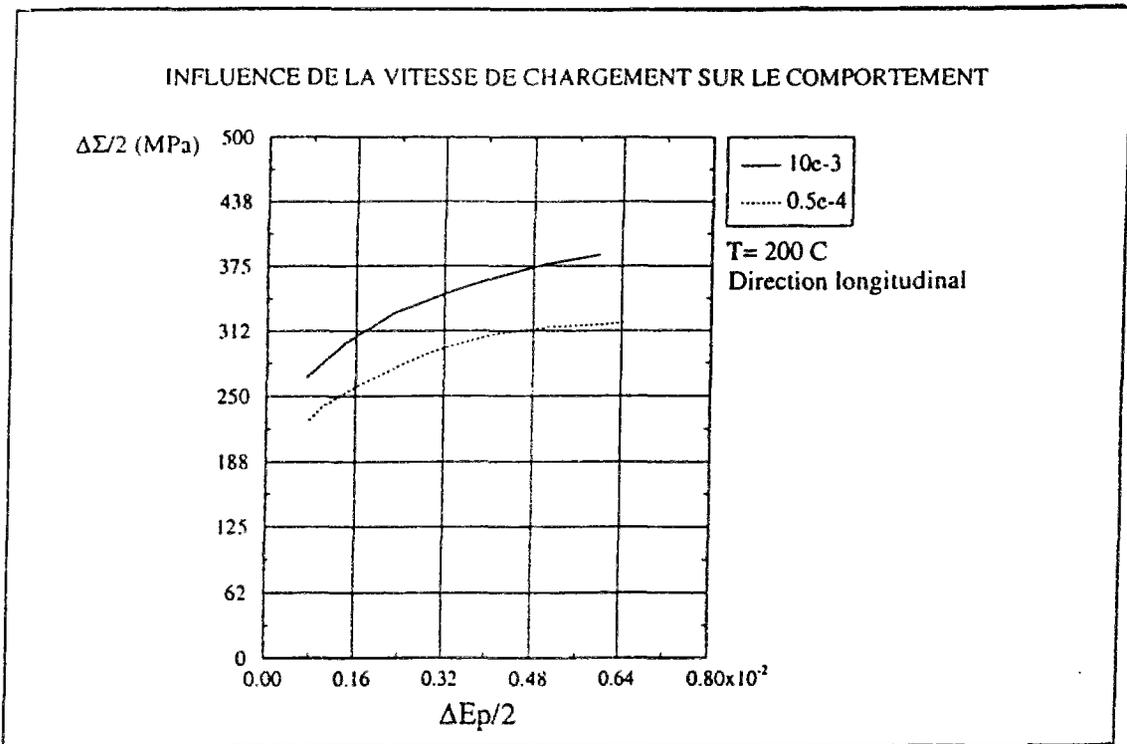


Planche 34

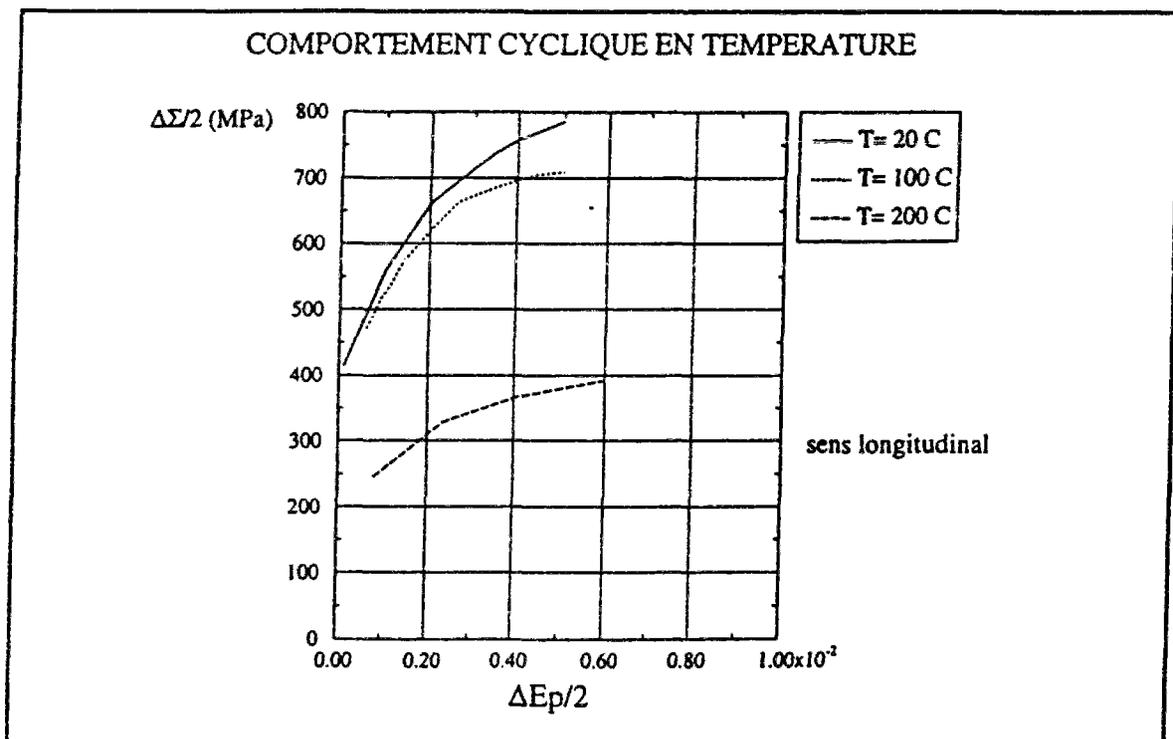


Planche 35: Comportement cyclique pour différentes températures

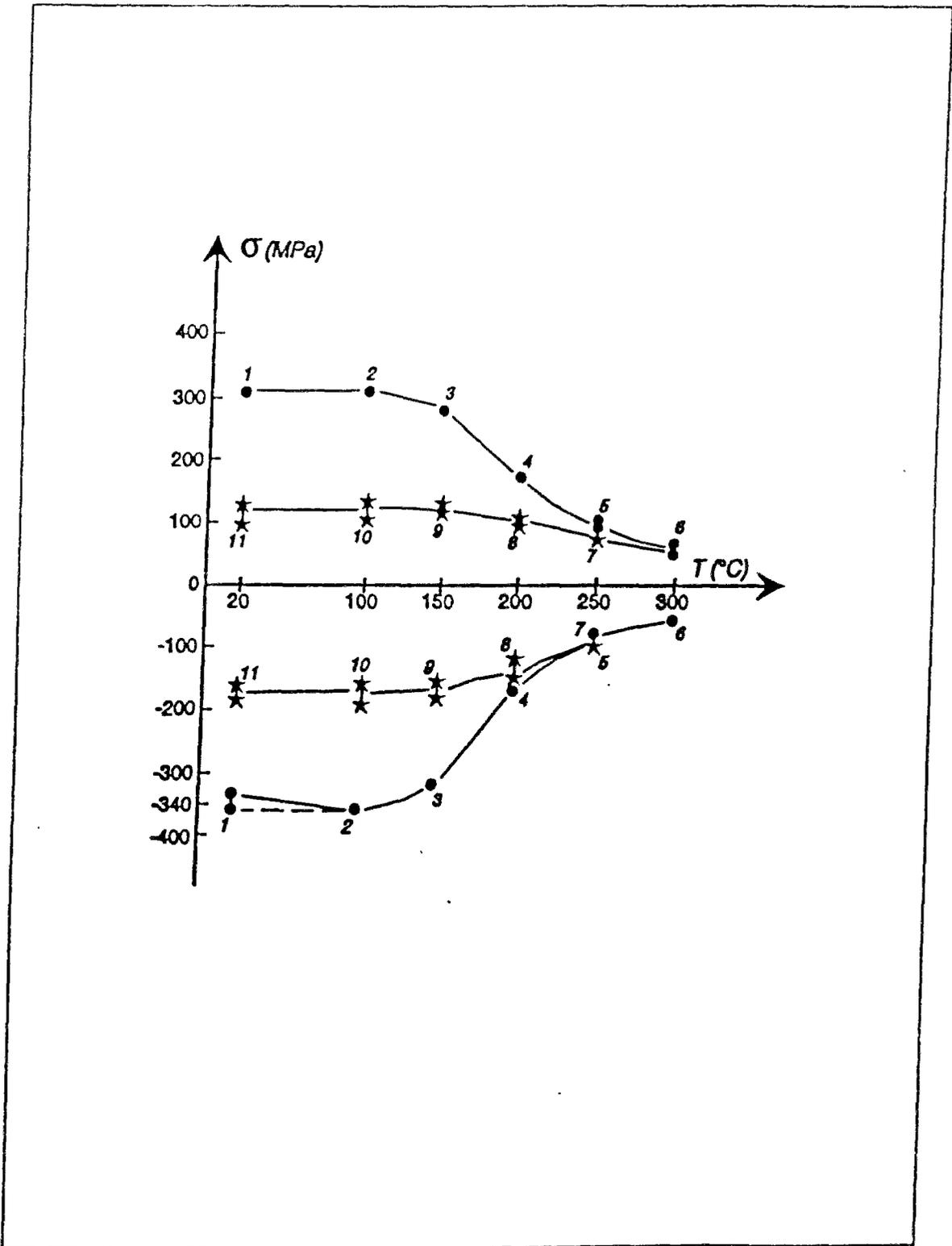


Planche 36 ESSAI DE TYPE 1

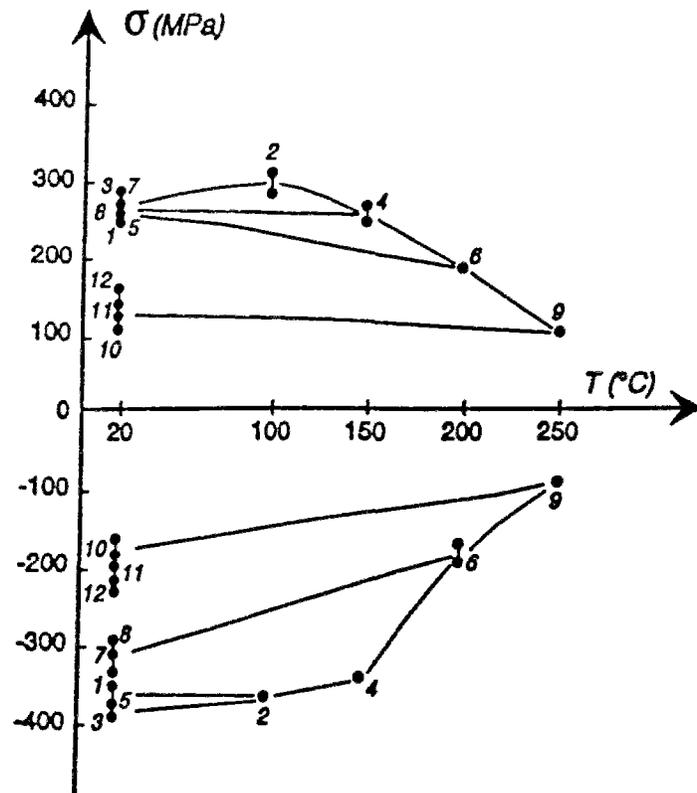


PLANCHE : 37

ESSAI DE TYPE 2

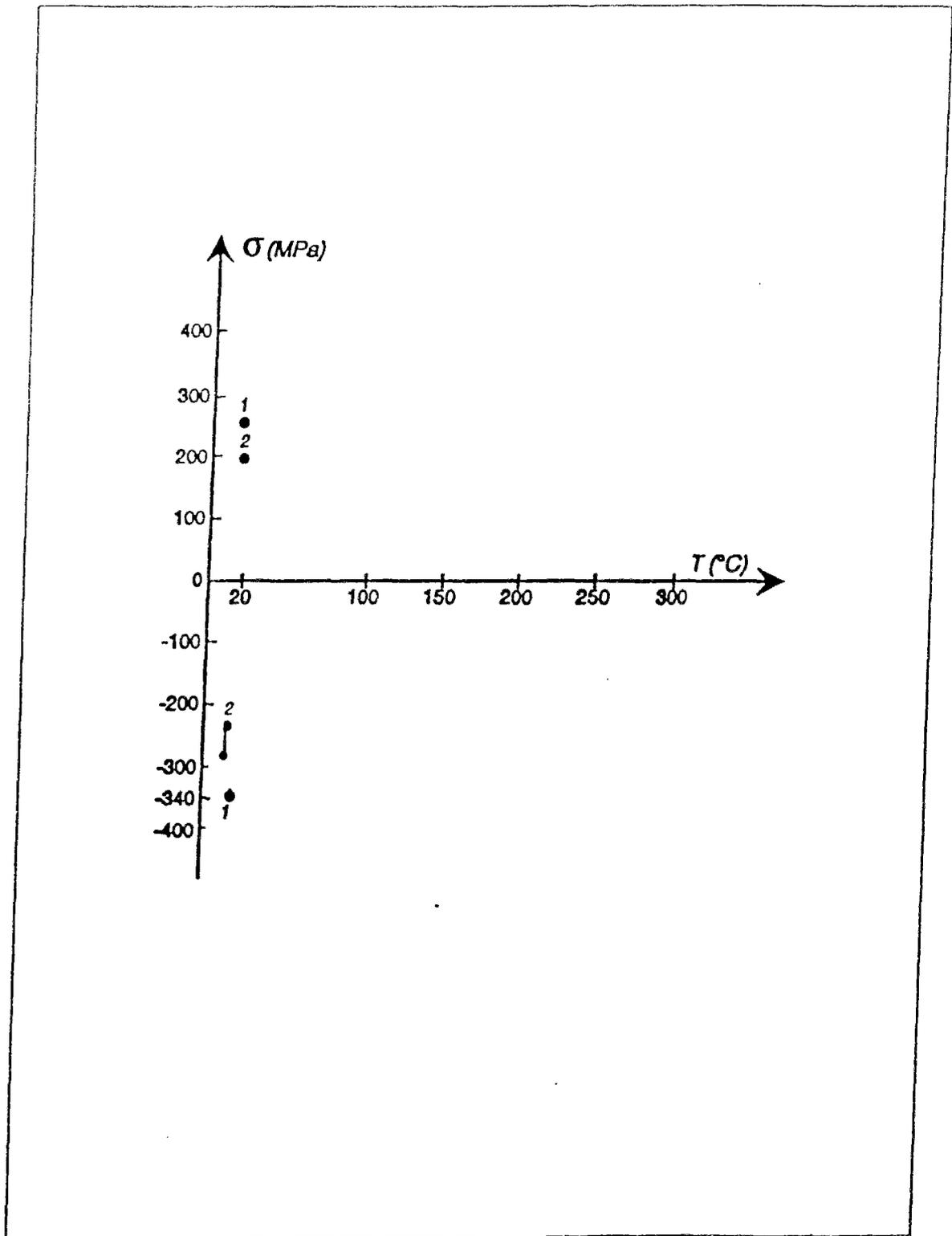


Planche 38 ESSAI DE TYPE 3

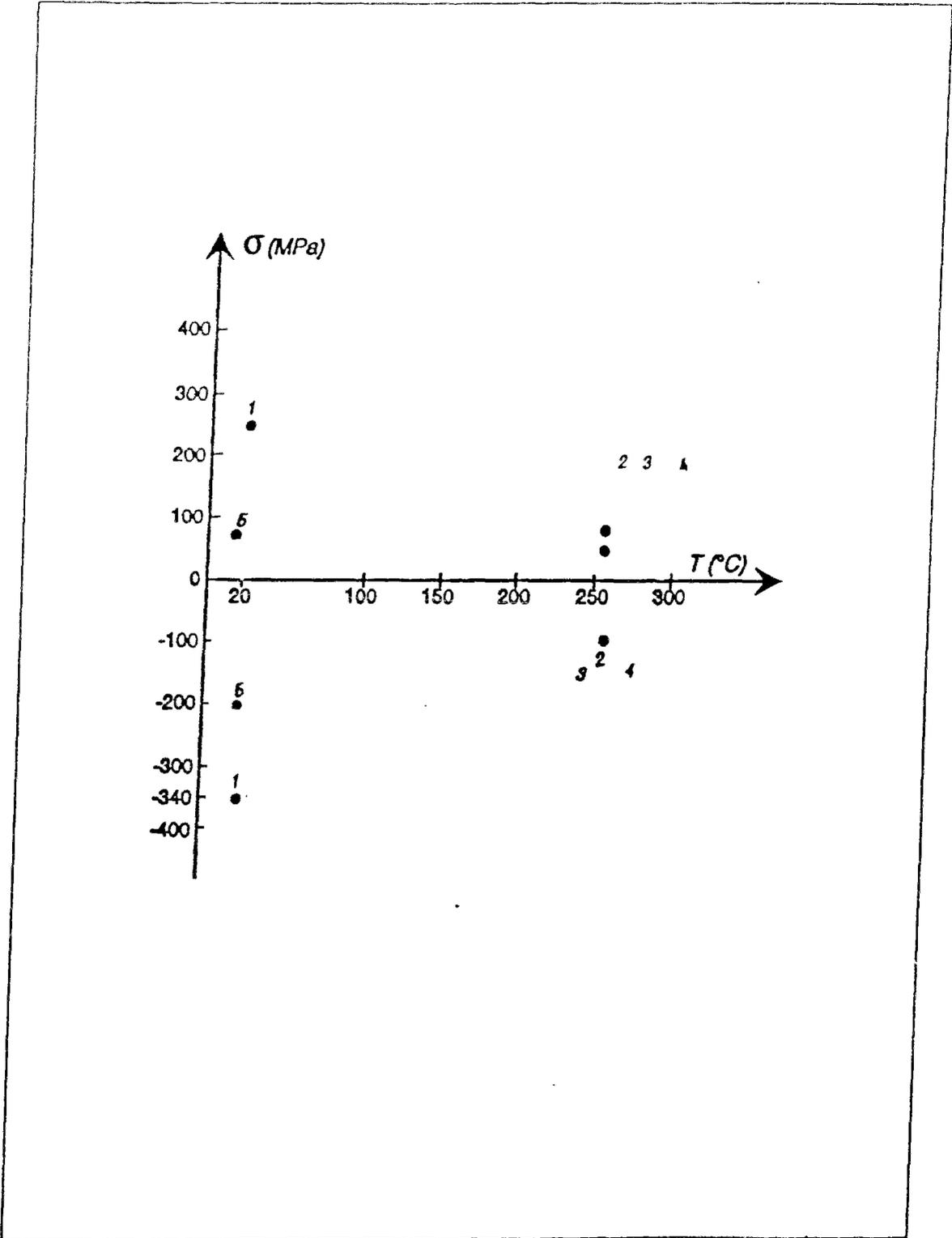


Planche 39 ESSAI DE TYPE 4

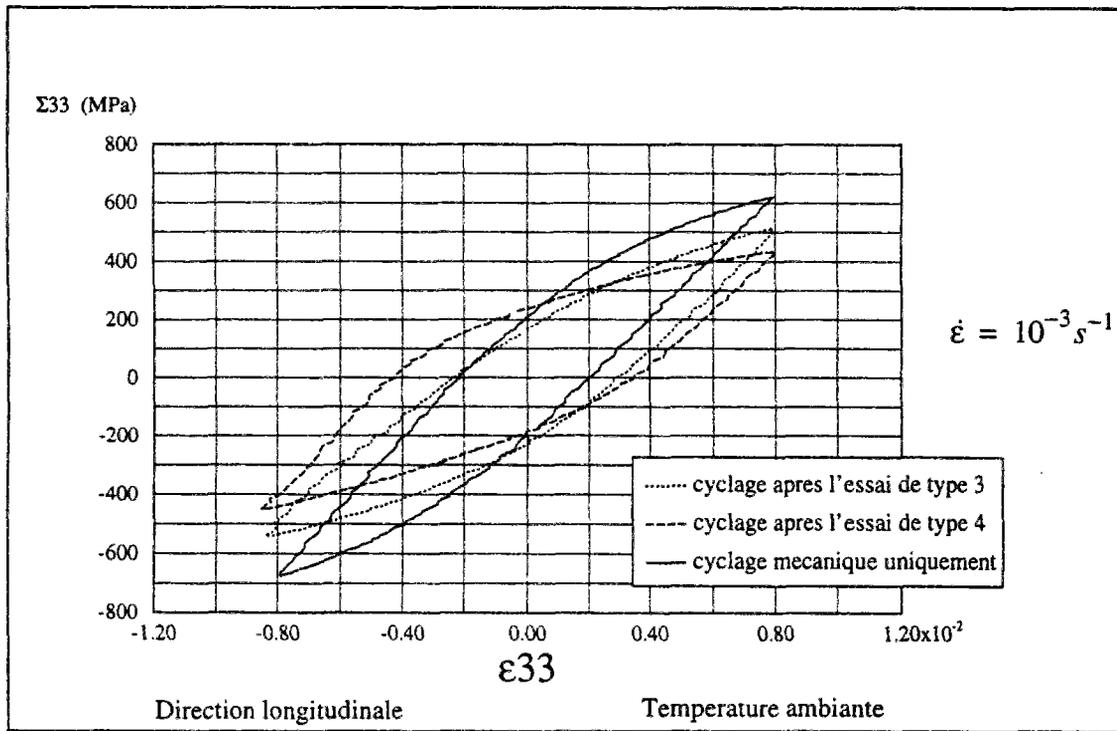


Planche 40 : Effet du vieillissement et des incursions en température sur le comportement cyclique à 20 ° C

## IV.4 PROPOSITION D'UN PASSAGE MICRO-MACRO

### IV.4.1 Obtention d'une relation de localisation

La modélisation macroscopique nécessite l'emploi d'opérateurs permettant de passer de l'échelle macro à l'échelle microscopique, par exemple le tenseur de localisation des déformations. Tant qu'on reste en élasticité, la correspondance micro-macro est démontrée. En thermo-élasticité, DVORAK (28) a établi l'existence d'un tenseur de localisation des déformations thermiques dont la formulation dépend uniquement de la connaissance du tenseur de localisation des déformations mécaniques (TLD). Nous nous proposons tout d'abord de rappeler les équations de base en thermo-élasticité, puis, passant au cas de la plasticité, d'exposer le problème de localisation que nous devons résoudre.

#### 1 Cas élastique

les lois de comportement pour la fibre et la matrice s'écrivent:

$$(IV.1) \quad \begin{cases} \sigma_r(x) - L_r : \varepsilon_r(x) + l_r \cdot \Theta \\ \varepsilon_r(x) - M_r : \sigma_r(x) + m_r \cdot \Theta \end{cases}$$

$r=1,N$  désigne chaque phase et  $\Theta=T-T_0$  (où  $T_0$  est la température de fabrication du matériau) la température que l'on suppose uniforme dans tout le matériau. Comme on l'a vu au chapitre II, il existe des tenseurs d'ordre 4  $A_r(x)$  et  $B_r(x)$  et des tenseurs d'ordre 2,  $a_r(x)$  et  $b_r(x)$ , tels que l'on puisse écrire les relations de localisation suivantes :

$$(IV.2) \quad \begin{cases} \varepsilon_r(x) - A_r(x) : E + a_r(x) \cdot \Theta \\ \sigma_r(x) - B_r(x) : \Sigma + b_r(x) \cdot \Theta \end{cases}$$

$c_r$  étant la fraction volumique de la phase  $r$ .

On définit de même les moyennes volumiques des quantités microscopiques par les relations suivantes:

$$(IV.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= \langle \varepsilon(x) \rangle_{\Omega_r} & \left\{ \begin{aligned} A_r &= \langle A_r(x) \rangle_{\Omega_r} \\ B_r &= \langle B_r(x) \rangle_{\Omega_r} \end{aligned} \right. \\ \sigma_r &= \langle \sigma(x) \rangle_{\Omega_r} \\ E &= \langle \varepsilon(x) \rangle_{\Omega} = \sum_{r=1}^N c_r \varepsilon_r \\ \Sigma &= \langle \sigma(x) \rangle_{\Omega} = \sum_{r=1}^N c_r \sigma_r \end{aligned}$$

Les lois de comportement thermo-élastiques macroscopiques sont alors par définition

$$(IV.4) \quad \begin{cases} \Sigma = L : E + l \cdot \Theta \\ E = M : \Sigma + m \cdot \Theta \end{cases}$$

avec

$$(IV.5) \quad \begin{cases} L = \sum_{r=1}^N c_r L_r : A_r \\ M = \sum_{r=1}^N c_r M_r : B_r \end{cases} \quad (IV.6) \quad \begin{cases} m = \sum_{r=1}^N c_r (M_r : b_r + m_r) \\ l = \sum_{r=1}^N c_r L_r : (a_r - m_r) \end{cases}$$

et dans le cas plus particulier d'un matériau biphasé les travaux de Dvorak-Benveniste (24) ont permis de déterminer les quantités  $a_r(x)$  et  $b_r(x)$

$$(IV.7) \quad \begin{cases} a_r(x) = (A_r(x) - I) : (L_1 - L_2)^{-1} : (l_2 - l_1) \\ b_r(x) = (B_r(x) - I) : (M_1 - M_2)^{-1} : (m_2 - m_1) \end{cases}$$

Dans toutes ces relations, on respecte évidemment les égalités suivantes:

$$(IV.8) \quad \begin{cases} \sum_{r=1}^N c_r B_r = 1 \\ \sum_{r=1}^N c_r A_r = 1 \end{cases} \quad (IV.9) \quad \begin{cases} \sum_{r=1}^N c_r a_r = 0 \\ \sum_{r=1}^N c_r b_r = 0 \end{cases}$$

## 2 Cas élasto-plastique

Nous cherchons maintenant un tenseur de localisation des déformations ou bien un tenseur de concentration des contraintes tels que nous puissions étendre au cas plastique les relations obtenues en élasticité. Ici nous

négligeons les dilatations ( $T-T_0=0$ ) Nous avons pour cela formulé différentes hypothèses qui seront récusées en raison de leurs implications sur la déformation plastique macroscopique.

### Hypothèse 1

On étend le tenseur  $A$  défini dans le cas élastique et on suppose que la relation de localisation reste la même qu'en élasticité, en posant en tout point  $x$ .

$$(IV.10) \quad \varepsilon_r(x) = A_r(x):E$$

Nous supposons alors qu'au niveau macroscopique existe la partition des déformations élastiques et plastiques. La loi d'élasticité globale s'écrit maintenant:

$$(IV.11) \quad \Sigma = L:(E - E_p) \quad \text{où } L \text{ est donné par (IV.5)}$$

Tandis qu'au niveau de chaque phase, elle s'écrit  $\sigma_r(x) = L_r(\varepsilon_r(x) - \varepsilon_r^p(x))$ :

Ceci conduit à la définition de la déformation plastique macroscopique suivante:  $E_p = \sum_r c_r L^{-1}:L_r:\varepsilon_r^p$  écrite sur les valeurs moyennes par phase. Cette égalité n'est pas acceptable en regard des travaux de Levin (40) ou bien, vis-à-vis du résultat obtenu par la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques que nous avons examinés au chapitre II.2.5 (équation II.21) et que l'on peut mettre sous la forme:

$$(IV.12) \quad E_p = \sum_r c_r B_r^T:\varepsilon_r^p$$

Nous abandonnons cette première formulation, mais il faut noter que des travaux récents (Boyd et al.,38) acceptent de l'utiliser dans un contexte analogue.

### Hypothèse 2

Nous supposons maintenant que la loi de concentration des contraintes obtenue dans le cadre élastique reste valable en plasticité. Nous avons alors en tout point  $x$  la relation:

$$(IV.13) \quad \sigma_r(x) = B_r(x):\Sigma \quad \text{où } B_r(x) = L_r:A_r(x):M$$

La loi globale d'élasticité est encore donnée par (IV.11), mais si nous écrivons la loi locale en déformation et que nous en prenons la moyenne, nous obtenons alors:  $\langle \varepsilon_r(x) \rangle_\Omega = \langle M_r : \sigma_r(x) \rangle_\Omega + \langle \varepsilon_r^p(x) \rangle_\Omega$ . Ce qui nous amène encore (via (IV.13)) à  $E_p = \langle \varepsilon_r^p(x) \rangle_\Omega$ . relation de simple moyenne qui n'est pas acceptable. Ce résultat nous conduit à formuler une nouvelle relation:

### Hypothèse 3

De l'étude des deux hypothèses précédentes, on conclut qu'il faut introduire des termes supplémentaires aux relations de localisation élastiques, qui prennent en compte de façon spécifique les déformations microscopiques inélastiques. En fait la réalité doit être intermédiaire entre les deux.

Pour permettre le passage micro-macro, nous supposons l'existence de fonctions d'influence généralisées introduisant des couplages entre les différentes phases, en nous inspirant des travaux de Dvorak(42, 43, 44). Celui-ci a tout d'abord établi son raisonnement en thermo-élasticité, puis il l'a étendu récemment au cas de la plasticité en considérant les déformations plastiques et thermiques sur un même plan: elles sont des déformations auxiliaires superposées à un chargement induisant des déformations élastiques. Dans un premier temps nous exposons les grandes lignes de sa démarche.

Le volume représentatif du matériau composite est tout d'abord divisé en N petits éléments tels que:  $\Omega = \sum_{r=1}^N \Omega_r$ . Les lois de comportement dans chacun des petits volumes r sont:

$$(IV.14) \quad \begin{cases} \sigma_r(x) = L_r : \varepsilon_r(x) + \lambda_r(x) \\ \varepsilon_r(x) = M_r : \sigma_r(x) + \mu_r(x) \end{cases}$$

$\lambda_r(x)$  et  $\mu_r(x)$  désignent sous le nom générique de contraintes et de déformations auxiliaires, les contraintes et les déformations d'origine thermiques et /ou plastiques. Elles sont reliées par la relation:

$$(IV.15) \quad \lambda_r(x) = -L_r : \mu_r(x)$$

Sous l'hypothèse de champs auxiliaires uniformes dans chaque volume élémentaire, les travaux de Benveniste (45) ( voir annexe au chapitre IV) ont

permis de simplifier la formulation intégrale de Levin (46) et d'obtenir un système à N équations linéaires de localisation (une par champ résiduel  $\mu_p$ ) que l'on peut écrire sous la forme:

$$(IV. 16) \quad \begin{cases} \sigma_s(x) = B_s : \Sigma + \sum_{r=1}^N H_{rs} : \lambda_r \\ \varepsilon_s(x) = A_s : E + \sum_{r=1}^N D_{rs} : \mu_r \end{cases} \quad s=1,N$$

$D_{rs}$  et  $H_{rs}$  étant les fonctions d'influence généralisées des champs auxiliaires, décrivent la contribution du champ  $\mu_r$  ( $\lambda_r$ ) sur la déformation locale (contrainte locale) y compris sur le volume r. C'est le cadre théorique que nous retenons pour formuler notre passage micro-macro et construire une loi macroscopique.

#### IV.4 .2 Application

Pour pouvoir appliquer une telle formulation, nous devons considérer que la température est uniforme dans tout le composite et nous effectuons une approximation des valeurs locales des déformations totales et résiduelles par leurs moyennes volumiques par phase. La démarche est identique pour les contraintes.

Nous limitons notre étude à un biphasé (fibre-matrice), et, au lieu de le subdiviser en N petits volumes comme le préconise Dvorak, nous ne considérons que les valeurs moyennes par phase; les deux phases étant la matrice et la fibre . Bien sûr il s'agit ici d'une approximation forte, mais c'est le seul moyen d'aboutir ainsi à des expressions analytiques qui puissent servir de loi de comportement macroscopique. Ainsi les relations de localisations s'écrivent maintenant:

$$(IV.17) \quad \begin{cases} \sigma_r = B_r : \Sigma + \sum_{s=1}^2 G_{rs} (\varepsilon_s^p + m_s \Theta) \\ \varepsilon_r = A_r : E + \sum_{s=1}^2 F_{rs} (\varepsilon_s^p + m_s \Theta) \end{cases} \quad r=1,2$$

Ces tenseurs d'ordre 4,  $G_{rs}$  et  $F_{rs}$ , possèdent quelques propriétés particulières; ainsi grâce à la définition (IV.3) nous obtenons:

$$(IV.18) \quad \forall \varepsilon_s^p \quad \begin{cases} \sum_{r=1}^2 c_r \sum_{s=1}^2 F_{rs} \varepsilon_s^p = 0 \\ \sum_{r=1}^2 c_r \sum_{s=1}^2 G_{rs} \varepsilon_s^p = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{r,s=1}^2 c_r F_{rs} = 0 \\ \sum_{r,s=1}^2 c_r G_{rs} = 0 \end{cases}$$

La loi macroscopique est donnée par:

$$(IV.19) \quad \begin{cases} \Sigma = L:(E - E_p) + l\Theta \\ E = M:\Sigma + E_p + m\Theta \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} L = \sum_{r=1}^2 c_r L_r; A_r \\ M = \sum_{r=1}^2 c_r M_r; B_r \end{cases}$$

Ceci nous amène à deux autres égalités pour définir  $E_p$  en fonction de ces relations de localisation généralisées.

$$(IV.20) \quad \begin{cases} E_p = \sum_{r=1}^2 c_r M_r L_r : \varepsilon_r^p - \sum_{r=1}^2 M_r L_r : \left[ \sum_{s=1}^2 F_{rs} \varepsilon_s^p \right] \\ E_p = \sum_{r=1}^2 c_r \varepsilon_r^p + \sum_{r=1}^2 c_r M_r : \left[ \sum_{s=1}^2 G_{rs} \varepsilon_s^p \right] \end{cases}$$

#### IV.4.3 Détermination des fonctions $F_{rs}$ et $G_{rs}$

Par la comparaison des relations (IV.12) et (IV.20) nous avons un moyen original d'établir les expressions des opérateurs de couplage.

$$(IV.21) \quad \begin{cases} F_{11} = (L_2 - L_1)^{-1} : (L_1 B_1^T - L_1) \\ F_{22} = (L_2 - L_1)^{-1} : (L_1 B_2^T - L_2) \\ F_{21} = -\frac{c_1}{c_2} F_{11} \\ F_{12} = -\frac{c_2}{c_1} F_{22} \end{cases}$$

$$(IV.22) \quad \begin{cases} G_{11} = (M_1 - M_2)^{-1} : (B_1^T - I) \\ G_{22} = (M_2 - M_1)^{-1} : (B_2^T - I) \\ G_{21} = -\frac{c_1}{c_2} G_{11} \\ G_{12} = -\frac{c_2}{c_1} G_{22} \end{cases}$$

Toutes ces relations permettent de définir les lois de localisation (plastiques et thermiques) uniquement en fonction de la connaissance des tenseurs de concentration élastiques ou tout au moins de leurs moyennes par phase, calculés par une analyse purement élastique. Pour déterminer  $a_r$  et  $b_r$ , il suffit de considérer  $\varepsilon_s^p = 0$  dans l'équation (IV.17). On obtient alors:

$$(IV.23) \quad \varepsilon_r = A_r : E + \sum_{s=1}^2 F_{rs} m_s \Theta$$

Et, en comparant avec (IV.2) on peut identifier  $a_r$  et  $b_r$  en fonction de  $F_{rs}$  et  $G_{rs}$ .

$$(IV.24) \quad \begin{cases} a_r = \sum_{s=1}^2 F_{rs} m_s \\ b_r = \sum_{s=1}^2 G_{rs} m_s \end{cases}$$

On vérifie facilement que l'on retrouve alors les définitions de (IV.7)

Les lois de comportement thermiques sont:

$$(IV.25) \quad \begin{cases} l = \sum_{r=1}^2 c_r (L_r : a_r + l_r) \\ m = \sum_{r=1}^2 c_r M_r : (b_r - l_r) \end{cases}$$

#### IV.4.4 Conclusion

A partir de la connaissance par une théorie purement élastique (homogénéisation périodique ou méthode "Auto-cohérente"), du tenseur de

localisation des déformations  $A_r$ , cette approche nous permet de calculer les fonctions d'influence généralisées. On a alors une relation de localisation généralisée pour un matériau sollicité en élasto-thermo-plasticité, relation dont nous allons déduire les conséquences macroscopiques dans le paragraphe suivant.

## IV.5 CRITERE D'ECROUISSAGE ET LOI D'EVOLUTION MACROSCOPIQUES

### IV.5.1 Présentation du critère macroscopique

Il est évident que la plasticité du composite est gouvernée par celle de la matrice. Les relations obtenues  $E_p = \int_{\Omega} B^T : \varepsilon^p dx$  indiquent qu'une plasticité au niveau matricielle engendre une déformation anélastique même si localement le phénomène est très faible. Ceci nous amène à penser qu'un critère portant sur les valeurs locales sera le point de départ de notre analyse. Les calculs par éléments finis effectués sur la cellule de base modélisant le composite, ont mis en évidence un assez fort gradient de plasticité entre l'interface et le bord de la cellule. Afin d'adoucir cette dispersion, un critère portant sur les valeurs moyennes dans la matrice est retenu. Ce même critère a déjà été utilisé au chapitre III pour définir les surfaces seuil macroscopiques et s'est révélé très acceptable.

Nous supposons que la matrice obéit ponctuellement au critère de Von Mises qui s'écrit en tout point P de  $\Omega$ :

$$(IV.26) \quad f = J_2(\sigma^d(P)) - x(P)$$

où  $\sigma_{ij}^d = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$  est le déviateur des contraintes, avec  $\delta$  le symbole de Kronecker et  $x(P)$  la variable d'écrouissage en tout point P.

Nous désirons une loi simplifiée et moyennée, donc nous émettons une première approximation en transposant ce critère local en tout point de la matrice en un critère moyen, en posant :

$$(IV.27) \quad \begin{cases} x_1 = \langle x(P) \rangle_{\Omega_m} \\ \sigma_1 = \langle \sigma(P) \rangle_{\Omega_m} \end{cases}$$

Bien sûr, dans la réalité le critère est atteint en certains points, plus chargés que d'autres.

Le critère moyenné s'écrit donc :

$$(IV.28) \quad J_2(\sigma_1^d - x_1) - k \leq 0$$

où  $J_2(\sigma^d) = \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma^d : \sigma^d)}$  est le second invariant du tenseur des contraintes.

La valeur de  $k$  (seuil d'élasticité de la matrice) sera à revoir car il est probable qu'il faille utiliser une valeur de seuil plus faible qu'avec un critère purement local.

$$\text{Soit :} \quad (IV.29) \quad J(\Sigma - X) - k \leq 0$$

le critère macroscopique que l'on cherche. Comme on l'a déjà dit, la plasticité macroscopique étant gouvernée par celle de la matrice, le critère global de plasticité ou de viscoplasticité sera obtenu à partir celui de la matrice. Ainsi nous posons:

$$(IV.30) \quad J(\Sigma - X) = J_2(\sigma_1^d - x_1)$$

Les grandeurs  $J$  et  $X$  (désignant l'écroûissage macroscopique) sont à définir et l'égalité ci-dessus le permet. Considérons l'opérateur  $D$  d'ordre 4 tel que  $D_{ijkl} = 1/2(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - 1/3(\delta_{ij}\delta_{kl})$ . On a alors pour tout tenseur symétrique du second ordre :  $D:\sigma = \sigma^d$

La formulation de localisation nous donne dans notre cas, puisque la fibre reste élastique  $\varepsilon_2^p = 0$ :

$$(IV.31) \quad \sigma_1 = B_1:\Sigma + G_1:\varepsilon_1^p + b_1\Theta$$

De plus, on relie directement déformation plastique macroscopique et déformation plastique de la matrice par l'équation (IV.12).

L'indice 1 correspond à la matrice. Le passage au déviateur se fait en multipliant (IV.31) par l'opérateur  $D$  et en remplaçant  $\sigma_1^d$  par sa valeur dans (IV.28) on voit alors qu'il faut définir l'opérateur  $J$  par

$$(IV.32) \quad J(\Sigma) = J_2(D:B_1:\Sigma)$$

En remarquant que  $x_1$  est déviateur donc  $D:x_1=x_1$ , on a

$$(IV.33) \quad J2(\sigma_1^d - x_1) = J \left( \Sigma - \left( -\frac{1}{c_1} B_1^{-1} : G_{11} : B_1^{T-1} : E_p - B_1^{-1} : b_1 \Theta + B_1^{-1} : x_1 \right) \right)$$

(IV.33) permet en identifiant termes à termes avec (IV.30) de définir l'écroutissement macroscopique X:

En posant

$$(IV.34) \quad C = -\frac{1}{c_1} B_1 : G_{11} : B_1^{T-1}$$

la définition de X apparaît sous la forme :

$$(IV.35) \quad X = C : E_p - B_1^{-1} : b_1 \Theta + B_1^{-1} : x_1$$

Nous placerons notre étude dans le cadre de la plasticité associée et pour cela nous identifions la fonction de charge macroscopique f avec le critère d'écoulement plastique macroscopique, soit

$$(IV.36) \quad f = J(\Sigma - X) - k = \left[ \frac{3}{2} (\Sigma - X) : M^* : (\Sigma - X) \right]^{\frac{1}{2}} - k$$

avec  $M^* = (D : B_1)^T : (D : B_1)$

La règle de normalité s'écrit:

$$(IV.37) \quad \dot{E}_p = \dot{P} \frac{\partial f}{\partial \Sigma}$$

où  $\dot{P}$  est la vitesse de la déformation plastique cumulée macroscopique. Le choix du critère macroscopique impose :

$$(IV.38) \quad \dot{P} = \left( \frac{2}{3} \dot{E}_p : M^{*-1} : \dot{E}_p \right)^{\frac{1}{2}}$$

#### IV.5.2 Conclusion

Ainsi la formulation de localisation généralisée et le choix du critère moyenné sur la matrice nous permettent de définir un écroutissement macroscopique X et un critère anisotrope par l'intermédiaire du tenseur  $B_1$ . X est constitué de trois entités de nature différentes:

- Le terme  $B_1^{-1}:G_{11};B_1^{-1}:E_p$  est le terme d'écrouissage linéaire en  $E_p$  combinant la nature composite du matériau à la déformation plastique macroscopique
- Le terme  $B_1^{-1}:x_1$  est le terme le plus classique qui provient de l'écrouissage microscopique.
- Le terme  $B_1^{-1}:b_1\Theta$  donne l'influence de la température sur les contraintes internes microscopiques d'origine thermique (effet des dilatations contrariées) et permet ainsi de définir au niveau macroscopique comment évoluent les contraintes internes correspondantes

On peut noter que le terme  $G_{11}$  est symétrique (relation 49 de la référence 43, avec  $G_{11}$  équivalent à  $F_{11}:L_1$  dans les notations de Dvorak) et que  $C$ , le facteur de la déformation plastique macroscopique est donc lui aussi symétrique. Ayant défini le critère et l'écrouissage macroscopique, nous allons maintenant nous attacher à formuler une loi d'évolution de cet écrouissage dans le cadre thermodynamique classique.

#### IV.5.3 Loi d'évolution de X

Afin d'aboutir à une loi macroscopique indépendante des quantités micro, nous devons supposer que l'écrouissage en tout point  $Q$  de la matrice ne se décompose qu'en deux variables élémentaires  $x^I(Q)$  et  $x^{II}(Q)$  telles que  $x^I(Q)$  soit un écrouissage linéaire et  $x^{II}(Q)$  un écrouissage non linéaire. Les lois d'évolution sur les variables d'état associées sont, en chaque point:

$$(IV.39) \quad \begin{cases} \dot{\alpha}^I(Q) = \dot{\epsilon}_p(Q) \\ \dot{\alpha}^{II}(Q) = \dot{\epsilon}_p(Q) - \gamma^{II} \alpha^{II}(Q) \dot{p}(Q) \end{cases}$$

avec  $\dot{p}(Q) = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_p(Q) : \dot{\epsilon}_p(Q)}$  où  $p$  est la déformation plastique cumulée. Nous définissons  $x(Q)$  comme la somme des deux écrouissages cinématiques tels que:

$$(IV.40) \quad x(Q) = x'(Q) + x''(Q) = \frac{2}{3}(c' \alpha'(Q) + c'' \alpha''(Q))$$

De même que nous avons pris le critère local moyenné, nous allons considérer ces lois locales sous leur forme moyennée. Pour cela nous posons:

$$(IV.41) \quad \begin{cases} x_1' = \langle x'(Q) \rangle_{\Omega_m} \\ x_1'' = \langle x''(Q) \rangle_{\Omega_m} \end{cases}$$

L'écroissance total moyenné est: (IV.42)  $x_1 = x_1' + x_1''$

La température est supposée uniforme dans tout le composite et seuls les coefficients d'écroissance dépendent d'elle. Cela signifie en particulier que le tenseur de concentration ne dépend pas de la température. Nous avons alors la relation suivante:

$$(IV.43) \quad \dot{\varepsilon}_1^p = \frac{1}{c_1} B_1^{T^{-1}} : \dot{E}_p$$

La loi d'évolution de l'écroissance moyen  $\dot{x}_1''$  est alors :

$$(IV.44) \quad \dot{x}_1'' = \frac{2}{3} \frac{\partial c''}{\partial T} B_1^{T^{-1}} : E_p - \gamma'' \langle x''(Q) \dot{p}(Q) \rangle_{\Omega_m} + \frac{2}{3} \frac{\partial c''}{\partial T} \alpha_1'' \dot{T}$$

En définissant  $\dot{p}_1 = \langle \dot{p}(Q) \rangle_{\Omega_m}$  et en faisant les deux approximations suivantes:

$$\langle x''(Q) \dot{p}(Q) \rangle_{\Omega_m} = \langle x''(Q) \rangle_{\Omega_m} \langle \dot{p}(Q) \rangle_{\Omega_m} \quad \text{nous obtenons} \quad \langle x''(Q) \dot{p}(Q) \rangle_{\Omega_m} = x_1'' \dot{p}_1$$

$$\langle \dot{\varepsilon}_p(Q) : \dot{\varepsilon}_p(Q) \rangle = \dot{\varepsilon}_1^p : \dot{\varepsilon}_1^p$$

Finalement la loi d'évolution de l'écroissance moyen non linéaire est:

$$(IV.45) \quad \dot{x}_1'' = \frac{2}{3} \frac{c''}{c_1} B_1^{T^{-1}} : \dot{E}_p - \gamma'' x_1'' \dot{p}_1 + \frac{1}{c''} \frac{\partial c''}{\partial T} x_1'' \dot{T}$$

L'équation d'évolution de l'écroissance moyen linéaire est:

$$(IV.46) \quad \dot{x}_1' = \frac{2}{3} \frac{1}{c_1} B_1^{T^{-1}} : \dot{E}_p + \frac{1}{c'} \frac{\partial c'}{\partial T} \dot{T}$$

Ainsi la loi d'évolution de l'écouissage moyen total  $x_1$  :  $\dot{x}_1 = \dot{x}_1^I + \dot{x}_1^II$  est donc:

$$(IV.47) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{2}{3} \left( \frac{c^I + c^{II}}{c_1} \right) B_1^{T^{-1}} : \dot{E}_p \\ &- \gamma^{II} \left[ B_1 : (X - C : E_p) + b_1 \Theta - \left( \frac{2}{3} \frac{c^I}{c_1} B_1^{T^{-1}} : E_p \right) \right] \dot{p}_1 \\ &+ \left[ \frac{1}{c^I} \frac{\partial c^I}{\partial T} x_1^I + \frac{1}{c^{II}} \frac{\partial c^{II}}{\partial T} x_1^{II} \right] \dot{T} \end{aligned}$$

La loi d'évolution de X obtenue en dérivant (IV.35) par rapport au temps vaut:

$$(IV.48) \quad \dot{X} = C : \dot{E}_p - B_1^{-1} : b_1 \dot{\Theta} + B_1^{-1} : \dot{x}_1$$

il convient d'exprimer cette égalité uniquement en termes macroscopiques donc, en utilisant (IV.38) et (IV.43) on peut relier les vitesses des déformation plastiques cumulées macroscopiques et microscopiques par

$$(IV.49) \quad \dot{P} = c_1 \dot{p}_1$$

on obtient: (IV.50)

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \left[ C + \frac{2}{3} \frac{c^I + c^{II}}{c_1} (B_1^T : B_1)^{-1} \right] : \dot{E}_p - B_1^{-1} : b_1 \dot{\Theta} \\ &- \frac{\gamma^{II}}{c_1} \left[ X - \left( C + \frac{2}{3} \frac{c^I}{c_1} (B_1^T : B_1)^{-1} \right) : E_p + B_1^{-1} : b_1 \Theta \right] \dot{P} \\ &+ \left[ \frac{1}{c_1} \frac{2}{3} \frac{\partial c^I}{\partial T} (B_1^T : B_1)^{-1} : E_p + \frac{1}{c^{II}} \frac{\partial c^{II}}{\partial T} \left[ X - \left( C + \frac{2}{3} \frac{c^I}{c_1} (B_1^T : B_1)^{-1} \right) : E_p + B_1^{-1} : b_1 \Theta \right] \right] \dot{T} \end{aligned}$$

Cette loi d'évolution est bien purement macroscopique, relation entre X et  $E_p$  et leurs vitesses. Elle peut être simplifiée en mettant en évidence la décomposition de X en trois termes,  $X^I$  variable cinématique linéaire,  $X^{II}$  écouissage cinématique non linéaire,  $X^\Theta$  associée aux changements de température:

$$(IV.51) \quad \begin{cases} \dot{X}^I = \left[ C + \frac{2}{3} c^I (B_1^T : B_1)^{-1} \right] : \dot{E}_p + \frac{2}{3} \frac{1}{c^I} \frac{\partial c^I}{\partial T} (B_1^T : B_1)^{-1} : E_p \dot{T} \\ \dot{X}^\Theta = -B_1^{-1} : b_1 \dot{\Theta} \\ \dot{X}^{II} = \frac{2}{3} \frac{c^{II}}{c^I} (B_1^T : B_1)^{-1} : \dot{E}_p - \frac{\gamma^{II}}{c^I} X^{II} \dot{P} + \frac{1}{c^{II}} \frac{\partial c^{II}}{\partial T} X^{II} \dot{T} \end{cases}$$

avec

$$(IV.52) \quad X = X^I + X^{II} + X^\Theta$$

Il est facile de vérifier que de ces expressions, on retrouve facilement l'équation (IV.50). La correspondance avec les variables d'état dans le contexte d'une formulation thermodynamique sera explicitée au paragraphe IV.7. On note aussi que les deux premières équations, linéaires, s'intègrent facilement pour donner:

$$(IV.53) \quad \begin{cases} X^I = \left[ C + \frac{2}{3} c^I (B_1^T : B_1)^{-1} \right] : E_p \\ X^\Theta = -B_1^{-1} : b_1 \Theta \end{cases}$$

### Remarques

Toutes ces lois ont un caractère anisotrope dû à la présence du tenseur de concentration des contraintes élastique, mais elles respectent le cadre général des lois d'évolution standard en ce sens qu'elles ont la même structure. Seul le terme  $X^\Theta$  est complètement nouveau mais il permet d'incorporer au modèle les contraintes résiduelles de fabrication du composite que le matériau considéré macroscopiquement homogène ne peut reproduire.  $X^\Theta$  met de plus bien en évidence que seule la température gère ce phénomène. La décomposition des écrouissages macroscopiques n'aurait pas été possible si la matrice avait eu plusieurs écrouissages cinématiques non linéaires. Leur nombre est donc une limitation à cette méthode. Enfin, lors de l'écriture anisotherme des lois, nous avons considéré que seuls les coefficients d'écrouissage dépendaient de la température; cela sous-entend que  $B_1$  est indépendant de la température et donc le tenseur des rigidité de la matrice  $L_1$  et celui du composite le sont aussi. Cette simplification donnera un comportement plus raide en température que celui obtenu par éléments finis

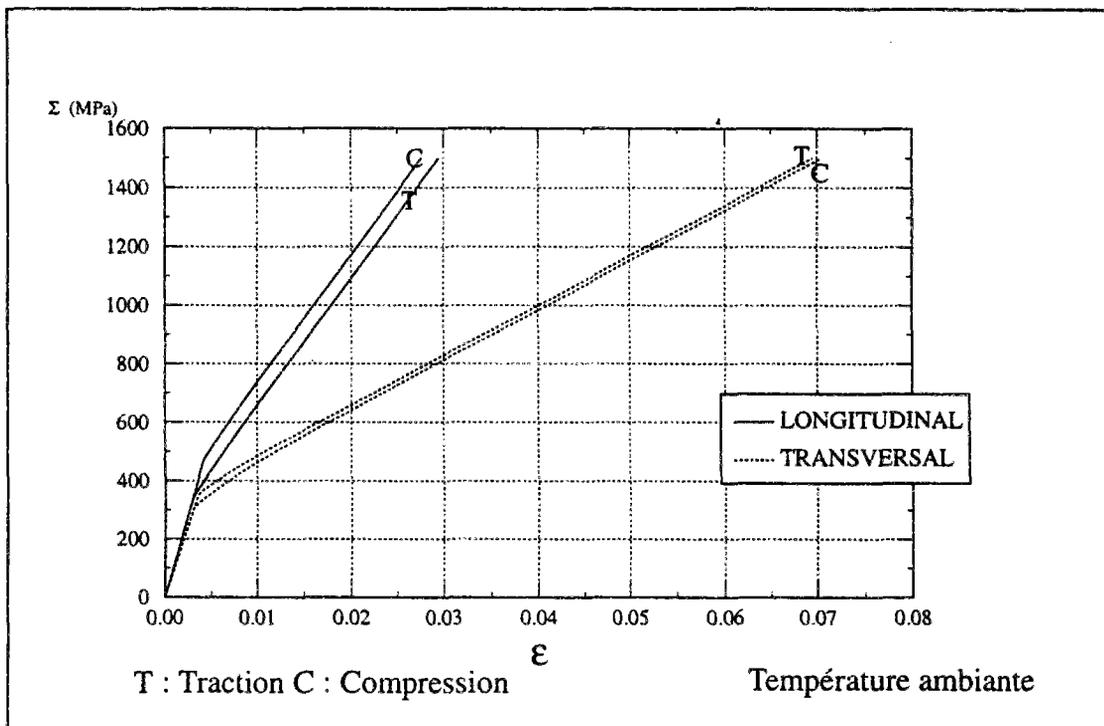


Planche 41 : Comportement à l'ambiante sous chargement monotone  
obtenu par le modèle macroscopique

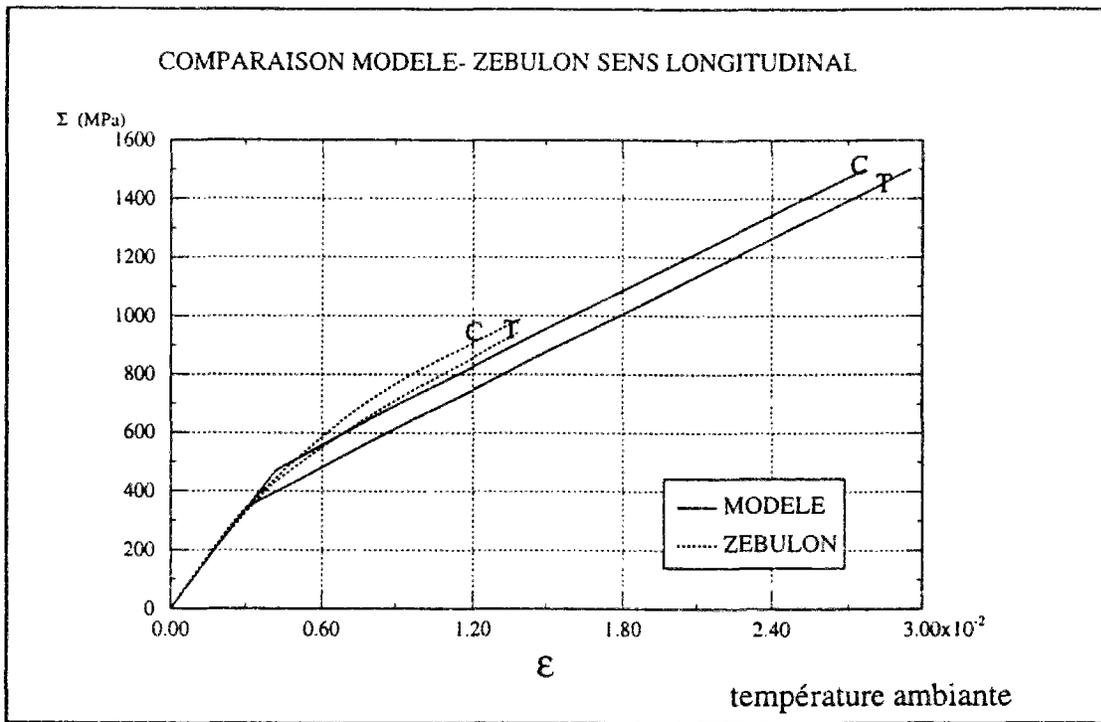


Planche 42

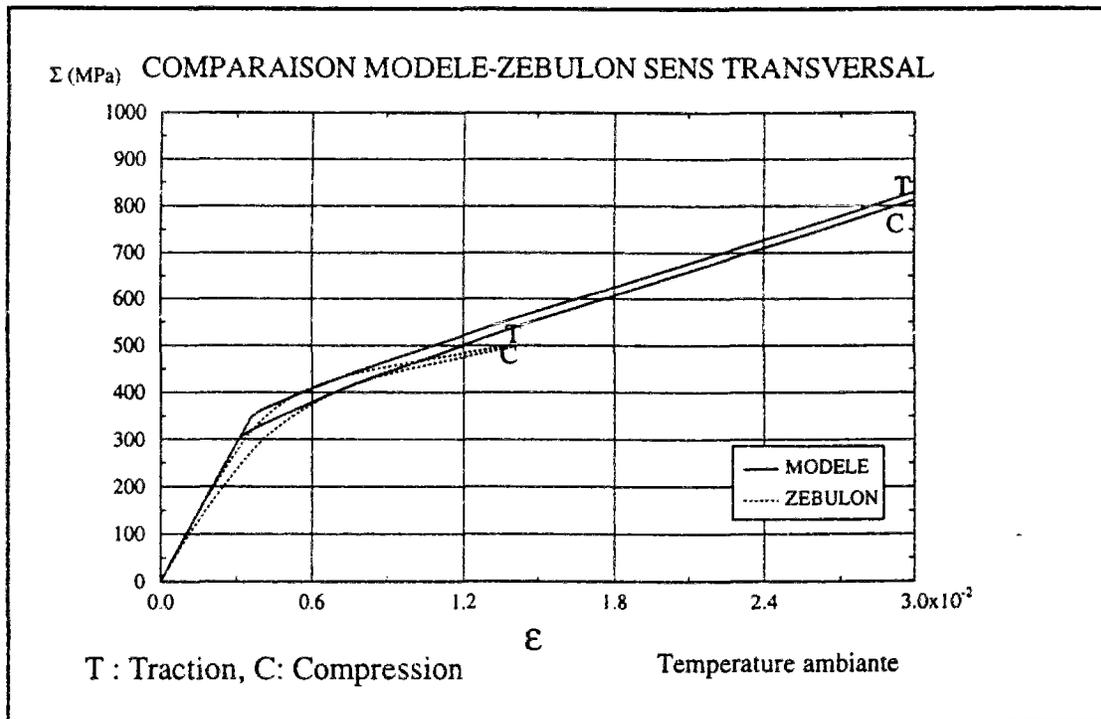


Planche 43

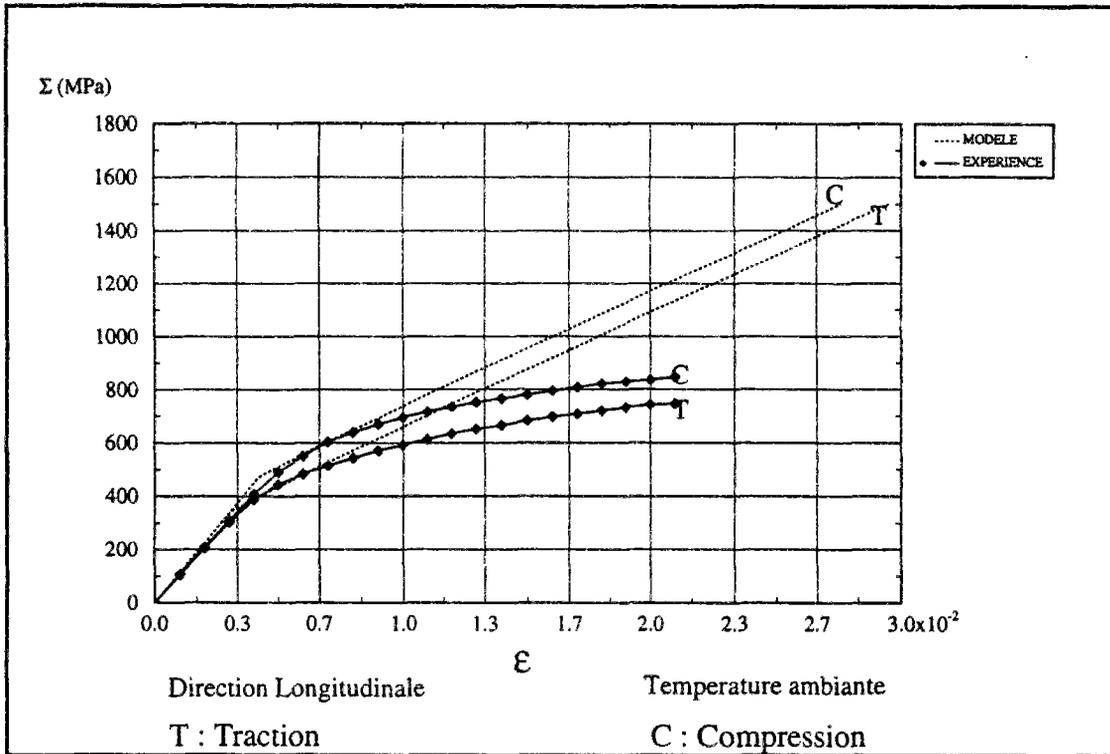


Planche 44 : Comparaison des comportements expérimentaux et ceux obtenus par le modèle macroscopique

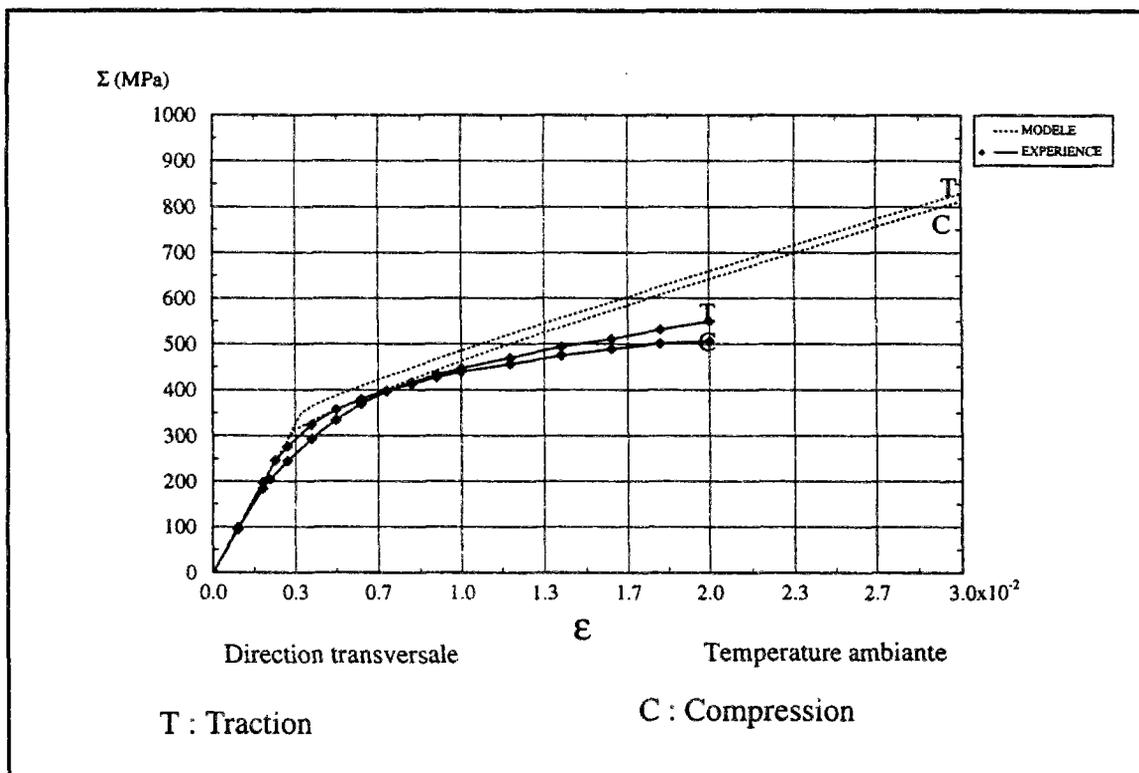


Planche:45 : Comparaison des comportements expérimentaux et ceux obtenus par le modèle macroscopique



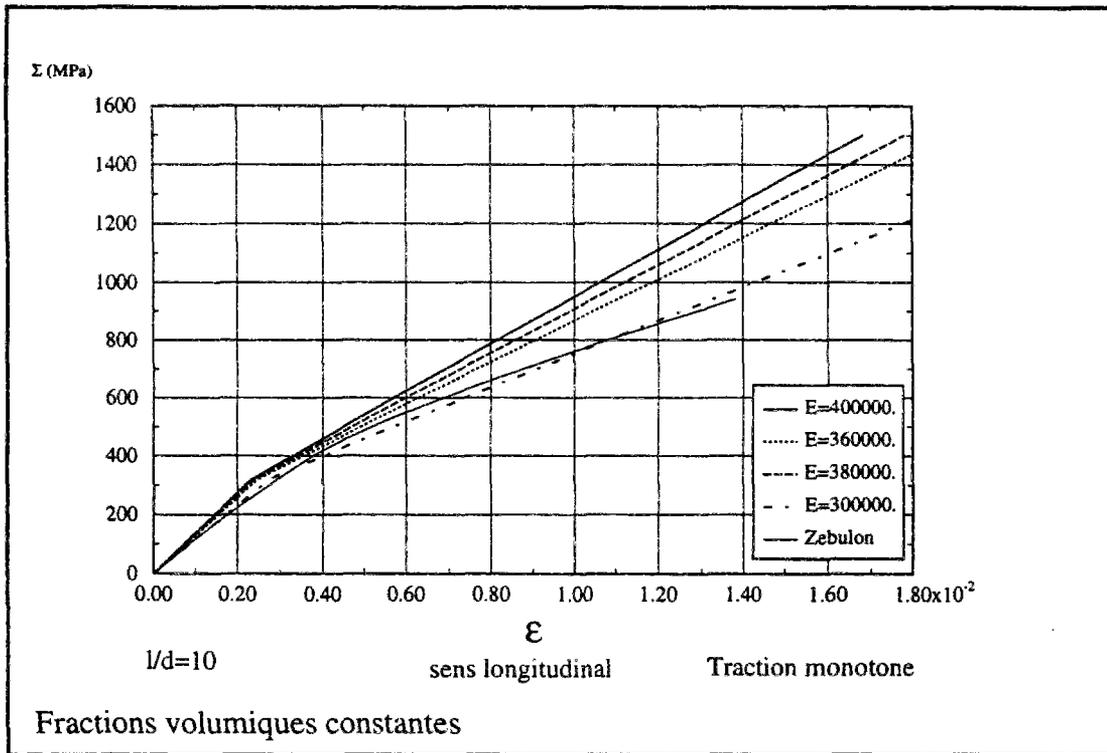


Planche 47 : Influence du module de la fibre sur le comportement

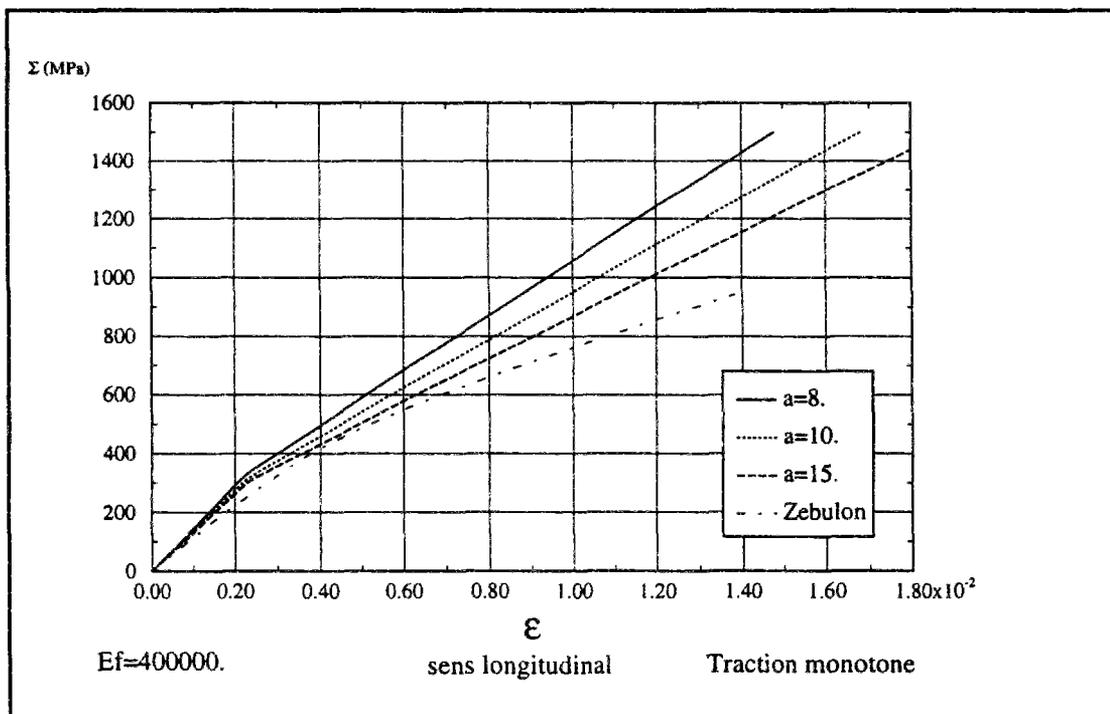


Planche 48 : Influence du rapport d'élanement de la fibre sur le comportement

## IV.6 FORMULATION THERMODYNAMIQUE

Le but de ce paragraphe est de formuler le cadre thermodynamique dans lequel notre loi de comportement peut s'inscrire. De façon classique, le cadre thermodynamique utilise deux potentiels, le potentiel d'état, l'énergie libre et le potentiel des dissipations. De la connaissance de ces deux potentiels et de l'expression du domaine d'élasticité (dans l'espace des contraintes), on peut déduire toutes les équations du modèle de comportement au travers de la règle de normalité généralisée. De plus, on respecte à priori le second principe, avec une dissipation intrinsèque qui peut être démontrée comme toujours positive.

### IV.6 .1 Choix du potentiel énergie libre de Helmholtz

La difficulté engendrée dans le choix de la variable interne associée à l'écroutissage "thermique" pour assurer la positivité de la dissipation, a conduit à redéfinir l'écroutissage linéaire  $X^l$ . En fait, contrairement à ce que laisse penser l'analyse mécanique du paragraphe IV.5.3, qui mettait en évidence la décomposition  $X = X^l + X^p + X^\theta$ , nous sommes amenés à ne considérer que deux variables d'état indépendantes  $\alpha^l$  et  $\alpha^p$ , sachant que  $X^\theta$ , pour un matériau donné, sera directement dépendant de la variable température.

Nous postulons bien entendu le découplage d'état entre la déformation élastique et les variables associées à la plasticité et à l'écroutissage:

$$(IV.54) \quad \Psi(E, T, \alpha^k) = \Psi_e(E_e, T) + \Psi_p(\alpha^k, T)$$

De plus, nous choisissons la partie plastique  $\Psi_p$  comme une forme quadratique découplée des variables  $\alpha^l$  et  $\alpha^p$ , particularisée sous la forme:

$$(IV.55) \quad \Psi_p = \frac{1}{2} (\alpha^l + Q^{l-1} : X^\theta) : Q^l : (\alpha^l + Q^{l-1} : X^\theta) + \frac{1}{2} \alpha^p : Q^p : \alpha^p$$

Dans cette expression les opérateurs d'ordre 4,  $Q^l$ ,  $Q^p$ , et la contrainte interne  $X^\theta$  correspondant aux effets des dilatations contrariées, découlent directement des résultats du paragraphe IV.5.3,

$$(IV.56) \quad \begin{cases} Q^l = C + \frac{2}{3} \frac{c^l}{c_1} (B_1^T : B_1)^{-1} \\ Q^p = \frac{2}{3} \frac{c^p}{c_1} (B_1^T : B_1)^{-1} \\ X^\theta = -B_1^{-1} : b_1 \Theta \end{cases}$$

Ceci nous permet d'obtenir les lois d'état :

$$(IV.57) \quad \begin{cases} X^I = \frac{\partial \Psi_p}{\partial \alpha^I} = Q^I : \alpha^I + X^e \\ X^II = \frac{\partial \Psi_p}{\partial \alpha^II} = Q^II : \alpha^II \end{cases}$$

$Q^I$  et  $Q^II$  sont des tenseurs d'ordre 4 et symétriques. On notera que la présentation  $X^I = Q^I : \alpha^I + X^e$  ne nécessite pas l'introduction d'une nouvelle variable interne associée à  $X^e$ .

Pour obtenir les lois d'évolution des variables internes  $E_p$ ,  $\alpha^I$  et  $\alpha^II$ , on choisit comme pseudo-potentiel de dissipation la fonction d'écoulement généralisée  $F$  définie par:

$$(IV.58) \quad \begin{cases} F = f + \frac{1}{2} \frac{\gamma^II}{c_1} X^II : Q^{II-1} : X^II \\ f = J(\Sigma - X) - k \\ J(\Sigma - X) = J_2(D : B_1 : (\Sigma - X)) \\ X = X^I + X^II \end{cases}$$

L'hypothèse de normalité généralisée nous donne alors les lois d'évolution des variables dissipatives, à savoir:

$$(IV.59) \quad \begin{cases} \dot{E}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \Sigma} \\ \dot{\alpha}^I = -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial X^I} \\ \dot{\alpha}^II = -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial X^II} \end{cases}$$

Mais  $\dot{\lambda}$  est parfaitement déterminé, soit par la relation de consistance si on se place en plasticité indépendante du temps, soit par le choix d'une fonction puissance du critère si on entre dans le cadre de la viscoplasticité et alors :

$\dot{\lambda} = \left\langle \frac{f}{K} \right\rangle^n$ . Dans ce cas, on garde la même forme de loi d'écoulement que pour la matrice.

Avec le choix de la fonction de charge  $F$ , on obtient obligatoirement:

$$(IV.60) \quad \dot{E}_p = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{M^* : (\Sigma - X)}{J(\Sigma - X)}$$

Les lois d'évolution peuvent alors se formuler de la façon suivante:

$$(IV.61) \quad \begin{cases} \dot{\alpha}^I = \dot{E}_p \\ \dot{\alpha}^II = \dot{E}_p - \dot{\lambda} \frac{\gamma^II}{c_1} Q^{II-1} : X^II \end{cases}$$

Il nous est alors facile de retrouver les lois d'évolution des variables d'érouissage établies lors du passage micro-macro.

Nous avons défini pour le module de la vitesse de la déformation plastique cumulée la fonction:

$$\dot{P} = \left( \frac{2}{3} \dot{E}_p : M^{*-1} : \dot{E}_p \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ce qui conduit M étant symétrique, à l'égalité  $\dot{\lambda} = \dot{P}$  et il est remarquable de constater que le modèle micro-macro aboutisse à une définition identique du module  $\dot{P}$ .

#### IV.6.2 Etude de la dissipation

Le cadre thermodynamique étant posé, il ne nous reste plus qu'à vérifier que la dissipation reste positive. Dans notre cas, elle s'écrit:

$$(IV.62) \quad \Phi = \Sigma : \dot{E}_p - X^I : \dot{\alpha}^I - X^II : \dot{\alpha}^II$$

ou encore:

$$(IV.63) \quad \Phi = (\Sigma - X) : \dot{E}_p + \dot{p} \frac{\gamma^II}{c_1} X^II : Q^{II-1} : X^II$$

L'écriture de  $Q^{II}$  comme facteur de la transposée du tenseur B par lui-même, et la positivité des coefficients  $\gamma^II$ ,  $c_1$  nous permet d'affirmer que le terme  $X^II : Q^{II-1} : X^II$  est positif quel que soit  $X^II$ . Le terme  $(\Sigma - X) : \dot{E}_p$  peut aussi se mettre sous la forme:  $(\Sigma - X) : \dot{E}_p = \dot{P} J(\Sigma - X)$ .

La dissipation devient alors:

$$(IV.64) \quad \Phi = \dot{P} \left[ J(\Sigma - X) + \frac{\gamma^II}{c_1} X^II : Q^{II-1} : X^II \right]$$

Comme  $\dot{p}$  est positif ou nul et l'opérateur  $J(\Sigma - X)$  étant positif car définissant une norme,  $\Phi$  est donc positive ou nulle dans tous les cas.

Ce résultat du cadre classique des matériaux isotropes est donc transposé ici, tout à fait naturellement pour le composite à matrice métallique. Notons que le choix particulier du potentiel d'état est bien lié aux contraintes internes d'origine thermique. Notons aussi que le matériau ainsi modélisé obéit bien au cadre de la "plasticité associée", avec identité entre potentiel d'écoulement plastique (dans l'espace des contraintes) et l'expression du domaine d'élasticité. De plus, il s'agit bien d'un matériau standard généralisé (dans l'espace des contraintes généralisées), mais non associé au sens de l'espace généralisé.

## IV.7 PRÉVISION DU COMPORTEMENT GLOBAL

Afin de valider l'approche micro-macro développée dans les paragraphes précédents, diverses sollicitations thermo-mécaniques ont été simulées. Pour cela, la loi de comportement anisotrope macroscopique viscoplastique est appliquée à notre composite par l'introduction d'un jeu de données constitué des modules d'Young, des fractions volumiques des constituants, de la géométrie représentative du composite (incluse dans les fonctions d'influence généralisées par l'intermédiaire des tenseurs de concentration et localisation des contraintes et des déformations), des coefficients de viscoplasticité et d'érouissage de la matrice. Puis elle a été incorporée dans un petit programme pour calculer numériquement la réponse (bien sûr macroscopique) du matériau soumis à un chargement extérieur. Nous exposons les principaux résultats obtenus.

### IV.7.1 Evaluation du comportement macroscopique

Tout d'abord, nous nous sommes attachés à reproduire la chute de température (200°-20°C) simulant le revenu du traitement thermique T6, pour initier les contraintes internes. Ensuite des tractions-compressions monotones dans différentes directions ont été programmées. Rappelons que le jeu de données introduit, est identique à celui utilisé par le code d'éléments finis

Le modèle reproduit effectivement une dissymétrie initiale (due au terme  $X^{\theta}$  modélisant l'effet des dilatations contrariées) se manifestant par un décalage de 50 MPa vers la compression dans le sens longitudinal et 25 MPa vers la traction dans le sens transversal. L'anisotropie structurelle est elle aussi bien reproduite (planche 41) avec une nette différence de comportement entre les axes longitudinaux et transversaux. Les courbes révèlent un comportement relativement raide avec une forte prédominance de l'érouissage cinématique linéaire sur le terme de restauration dynamique (ce dernier ne bénéficiant pas d'un facteur d'anisotropie augmentant par là même sa portée, contrairement au cinématique linéaire). Mais ce comportement se révèle tout à fait acceptable au regard des résultats obtenus par éléments finis (planches 42 et 43). Ces deux modes de calcul sont comparables car ils contiennent les mêmes lacunes dans la modélisation du composite. On note en plus leur bonne concordance sur les modules d'élasticité (pour les deux axes). Les résultats expérimentaux (planches 44 et

45) indiquent là encore la surestimation produite par le modèle sur l'érouissage cinématique linéaire, mais la comparaison est satisfaisante jusqu'à 1,2% de déformation totale, où l'écart entre les contraintes est de 10%. Cette raideur peut s'expliquer tout d'abord, par un effet composite directement lié au module d'Young de la fibre, valeur très certainement surestimée par rapport à sa valeur réelle dans le matériau. Ensuite les résultats expérimentaux, comme ceux obtenus par le code de calcul, tiennent compte des déformations plastiques initiales induites par les contraintes résiduelles. Ceci a pour effet d'adoucir le comportement. Or les valeurs atteintes par les contraintes internes, calculées par le modèle macroscopique sont trop faibles pour susciter des déformations plastiques. Cela explique donc la raideur observée.

Pour adoucir ce comportement, il faut ajuster la valeur du seuil d'élasticité (considéré jusqu'à présent égal à celui de la matrice). En effet le critère macroscopique a été défini par rapport au critère moyenné de la matrice mais aucune opération de moyennisation n'a été entreprise pour la limite d'élasticité. Il conviendrait donc dans un premier temps de la baisser.

De plus, l'hypothèse d'indépendance du tenseur d'élasticité de la matrice (et donc des fonctions de localisation généralisées) vis-à-vis de la température, induisent un comportement plus raide et donc non plastifiant lors de sollicitations thermiques, que celui manifesté dans le calcul par éléments finis, où la loi de la matrice varie en fonction de la température.

Une dernière application de notre modèle a consisté en la détection des surfaces seuils initiales après la simulation de la fabrication (planche 46).

#### IV.7.2 Influence des paramètres de modélisation.

Pour cerner avec plus de précision l'influence du module d'élasticité de la fibre sur le comportement global, nous avons utilisé la méthode de l'inclusion équivalente, mise en oeuvre au chapitre II, pour estimer les facteurs d'anisotropie dans différentes configurations de fibre. (Le comportement global calculé précédemment utilisait les résultats de la théorie des milieux périodiques.)

Ainsi pour un rapport d'élanement de 10 et une fraction volumique de renforts de 16%, un ajustement des courbes de comportement du modèle sur celles du code de calcul est aisément réalisable ainsi que le montre la planche 48. On constate alors qu'avec un module d'Young de 300000 MPa (au lieu de 420000) les deux courbes se rapprochent sensiblement. Nous avons bien sûr en contrepartie un affaiblissement des modules d'élasticité globaux

(  $E_3= 115937$  MPa,  $E_1= 90998$  MPa), alors comparables à ceux obtenus par la théorie des milieux périodiques. Ceci confirme donc notre explication avancée auparavant sur la raideur du matériau .

De même, plus le rapport d'élanement de la fibre augmente et plus l'écroutissement cinématique linéaire diminue (planche 47).

Cependant, tous ces ajustements ne permettent pas de reproduire l'écroutissement cinématique non linéaire car il n'est pas affecté par la variation des facteurs d'anisotropie et l'effet rigidifiant du composite reste prépondérant.

L'ajustement du seuil d'élasticité n'a pas été effectué ici, mais la prise en compte des phénomènes métallurgiques induisant de fortes variations de seuil (comme l'ont montré les essais en température réalisés lors de la campagne expérimentale), est discutée au paragraphe suivant.

## IV.8 MODELISATION DES ÉVOLUTIONS ANISOTHERMES

### IV.8.1 Phénomènes physiques déjà examinés

La formulation de la loi de comportement macroscopique anélastique présentée, permet de prendre en compte un certain nombre de phénomènes physiques comme l'anisotropie structurelle du composite, les contraintes internes causées par les dilatations contrariées lors du traitement thermique de fabrication, l'influence de la température sur la loi d'évolution de l'écroutissement macroscopique par l'intermédiaire des coefficients d'écroutissement de la matrice, thermiquement dépendants. Enfin, le seuil d'élasticité de la matrice, donc celui du composite, est variable en température.

### IV.8.2 Lacunes du modèle

L'une des composantes principales de la variable d'écroutissement macroscopique est la loi de comportement de la matrice. Or celle-ci ne permet pas jusqu'à présent de traduire des phénomènes métallurgiques particuliers comme le vieillissement au sein de la matrice, induits par une élévation de la température, phénomène rencontré durant la campagne expérimentale.

### IV.8.3 Rappels des faits

Lors des essais (type 1, 2, 3 et 4) déjà évoqués au paragraphe IV.2.3, on a constaté une diminution du domaine élastique dans toutes ces expériences, après les incursions en température et le temps de maintien à chaud accentuait le phénomène. Cependant pendant le palier thermique le seuil ne variait pratiquement pas et la chute n'était sensible qu'à froid.

Puis, nous avons remarqué une "restauration" du domaine élastique par une mesure des seuils en traction compression 35 heures après le retour à l'ambiante. L'essai de type 2 avait mis en évidence l'existence d'une température critique  $T_c$  en dessous de laquelle l'incursion en température ne produit aucune chute des seuils détectable lors du retour à froid. Par contre, si l'incursion avait lieu au dessus de  $T_c$ , le domaine élastique diminuait. Cette valeur critique se situait aux alentours de 150°C.

De plus nous avons mesuré une chute significative du module d'Young en température mais discerner la part du défretage de la chute du module de la matrice nous était impossible car nous ne disposions pas d'échantillon de matrice pure ayant subi le même processus de fabrication qui aurait alors servi de référence. De même il est très difficile de se prononcer quant à un éventuel endommagement se développant au sein du composite lors de ces essais car les variations constatées sur les caractéristiques mécaniques, correspondaient aux marges d'erreur et de dispersion relatives à ces expériences.

Nous nous intéresserons donc seulement au phénomène de vieillissement rencontré pendant l'étude expérimentale en température car son effet était très significatif sur les valeurs des seuils élastiques du composite.

Par souci de simplification, nous présentons de façon sommaire les différents mécanismes régissant le vieillissement..

### IV.8.4 Mécanisme du vieillissement dans l'alliage 2024Al

La matrice appartient à la famille des duralumins à base de cuivre. C'est donc un matériau à durcissement structural, c'est-à-dire qu'une amélioration des caractéristiques mécaniques est obtenue par une mise en solution suivie d'une précipitation par revenu ou maturation. Ce phénomène de durcissement varie au cours du temps et est d'autant plus rapide que la température est élevée. Il existe dans ce domaine une terminologie bien précise: on parlera de maturation ou de mûrissement si le processus a lieu à

température ambiante et de revenu pour des températures comprises entre 100 et 200°C.

Le durcissement est dû à la précipitation d'une nouvelle phase dans un alliage sursaturé. Cette dernière correspond à un changement de phase dans une solution solide et fait intervenir plusieurs phénomènes comme la diffusion atomique gouvernée par les loi de Fick, le mécanisme de germination croissante gouverné par la loi d'Avrami. La précipitation au sein d'une solution solide est causée par la différence de solubilité d'un élément dissout dans l'alliage, en fonction de la température. L'alliage 2024, homogène à 548°C, peut dissoudre 5,7% de cuivre mais cette solubilité descend à 0,2% à 200°C. Ainsi notre nuance d'alliage contenant presque 4% de cuivre forme à 540°C une solution solide homogène . Si on refroidit lentement ce matériau, le diagramme de transformation de phase de ce composé binaire indique la formation d'un composé intermétallique  $Al_2Cu$  par précipitation du cuivre excédentaire. Le fait de tremper cet alliage permet d'obtenir à température ambiante une solution solide homogène sursaturée contenant 4% de cuivre. Cet état est hors équilibre et la précipitation va le ramener progressivement vers un état plus stable.

Nous allons dans un premier temps examiner les résultats de la campagne expérimentale orientée pour détecter et quantifier le vieillissement.

#### IV.8. 5 Etude expérimentale sur le vieillissement

Pour confirmer ce phénomène, nous avons sur une éprouvette vierge, examiné l'évolution des seuils au cours du temps, après une mise en solution à 475°C pendant 16 heures suivie d'une trempe à l'eau froide. La planche 49 représente les évolutions du vieillissement obtenu par Marquis(7) sur L'AU4G et celle de notre composite après le même traitement thermique. Le matériau hétérogène obéit au même type de phénomène que l'alliage non renforcé, mais la présence des fibres augmente la valeur des seuils. Cependant les cinétiques sont du même ordre. Signalons que nous avons dû reporter sur cette courbe une valeur moyenne de seuil à partir des mesures en traction et en compression. Etant donné que seule la taille du domaine est affectée par ce mécanisme et que le centre n'évolue pas, nous en concluons que le vieillissement se manifeste par un écrouissage isotrope. En considérant ces comparaisons, notre composite aura une loi de vieillissement basée sur celle élaborée par Marquis (7).

Pour compléter le modèle macroscopique développé dans les paragraphes précédents, nous allons inclure une loi de vieillissement et quantifier la dépendance du seuil vis-à-vis de la température

#### IV.8.6 Proposition de modèle

Le complément au modèle existant doit rendre compte à la fois du vieillissement qui intervient à froid (augmentation des seuils à partir d'une valeur plancher obtenue par l'incursion thermique) et de la diminution de domaine élastique au fur et à mesure que la température augmente

##### IV.8.6.1 Rappel du modèle de vieillissement développé par Marquis.

La formulation du vieillissement que nous proposons, s'inspire de celle proposée par Marquis pour l'alliage d'aluminium AU4G. Il introduit une variable de vieillissement  $a^*$  proportionnelle à la fraction volumique et aux rayons des précipités. Il suppose que la variable  $R$  associée à la variable interne  $r$  de l'écroutissage isotrope est directement proportionnelle au vieillissement. Postulant ensuite le couplage d'état entre vieillissement et écroutissage isotrope, il introduit dans le potentiel thermodynamique énergie libre un terme de vieillissement pur  $\Psi_v(a^*)$  et un terme de couplage écroutissage isotrope-vieillissement  $\Psi_{E-v}(r, a^*)$ . Le terme du potentiel concernant l'écroutissage isotrope pur est noté :  $\Psi_E(r)$ .

La formulation de l'énergie libre est alors:

$$(IV.65) \quad \Psi = \Psi_e + \Psi_p + \Psi_{E-v}(r, a^*) + \Psi_v(a^*)$$

La variable  $a^*$  évolue entre 0 lorsque le vieillissement n'a pas encore débuté et 1 lorsqu'il est terminé. Soit  $Z$  la variable associée à la variable interne de vieillissement  $a^*$  Les lois d'état du vieillissement et d'écroutissage sont alors:

$$(IV.66) \quad \begin{cases} Z = \frac{\partial(\Psi_{E-v}(r, a^*))}{\partial a^*} + \frac{\partial\Psi_v(a^*)}{\partial a^*} \\ R = \frac{\partial(\Psi_{E-v}(r, a^*))}{\partial r} + \frac{\partial\Psi_E(r)}{\partial r} \end{cases} :$$

Par la mesure du domaine élastique au cours du temps pour un état de déformation plastique nulle ou fixée, on quantifie le vieillissement par la relation :

$$(IV.67) \quad R = Ca^* + \frac{\partial \Psi_{El}}{\partial r}$$

C est une constante du matériau.

Des considérations sur la stabilité du matériau pendant le vieillissement permettent de formuler le potentiel de vieillissement:

$$(IV.68) \quad \Psi_v(a^*) = L(1 - a^*)$$

L est une constante positive du matériau représentant la perte d'énergie libre au cours de vieillissement.

Sans sollicitation mécanique la variable Z s'écrit:  $Z = -La^*$  et la dissipation due au vieillissement est alors:  $D_v = La^* \dot{a}^*$ . La positivité est alors assurée car L et  $a^*$  sont positifs et  $\dot{a}^*$  est une fonction croissante

#### IV.8.6.2 Modèle de vieillissement proposé pour le composite

##### a) Interprétation du mécanisme métallurgique.

En ne considérant aucun phénomène de cristallisation et en ne tenant pas compte de la germination des précipités, on introduit la variable interne  $a$  reliée à la fraction volumique des précipités et représentant globalement "l'écart à l'équilibre". Elle dépend directement de deux phénomènes contraires, suivant la température à laquelle on se place : augmentation de la taille des précipités à froid et diminution à chaud.

La température critique  $T_c$  (observée sur les essais) constitue une barrière thermique, qui, lorsqu'elle est franchie, voit apparaître le phénomène de dissolution et donc de vieillissement (après le retour à froid), consécutif au mécanisme précédent.

Lors du vieillissement,  $\dot{a}$  sera donc positive (augmentation de la fraction volumique), par contre, lors de la dissolution (existant uniquement pendant le temps de maintien à chaud)  $\dot{a}$  sera négative.

Pour un temps de maintien infini très supérieur à la température critique  $T_c$ , l'effet de dissolution des précipités est réalisé et la taille des précipités ne diminue plus. La condition aux limites sera alors:

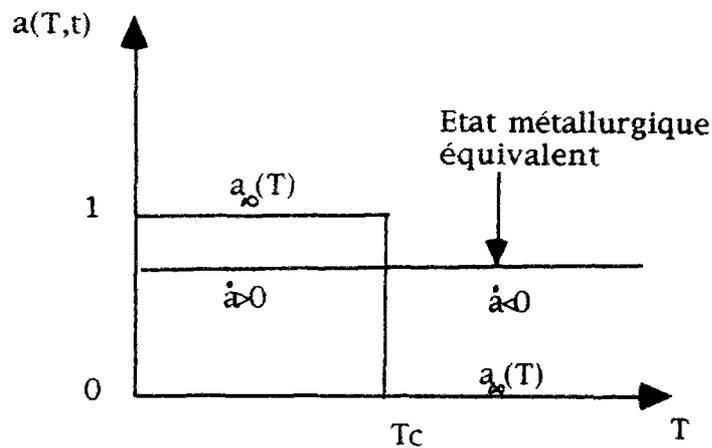
$$(IV.69) \quad a_\infty(T, t_\infty) = 0$$

Au contraire, pour la température ambiante, inférieure à  $T_c$ , conformément au modèle de Marquis, nous supposons que l'état de stabilité du matériau s'exprime par :

$$(IV.70) \quad a_\infty(T, t_\infty) = 1$$

En effet, le vieillissement est alors terminé et les précipités ont atteint leur taille stable.

Schématiquement, nous présentons l'évolution des valeurs asymptotiques de la variable  $a$  en fonction de la température pour un temps de maintien infini par le dessin ci-dessous:

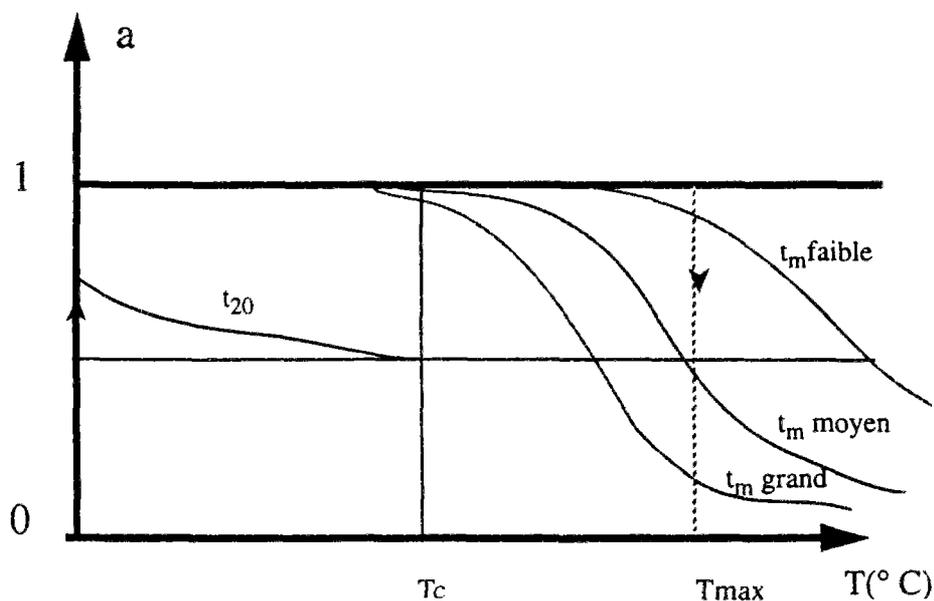


Pour des incursions en température, supérieures à  $T_c$ , la dissolution commence dès que l'on observe un temps de maintien. Deux facteurs favorisant ce phénomène ont été constatés:

- La durée du temps de maintien (plus il est long et plus le seuil  $a$  chute à froid.
- Une valeur élevée de la température de maintien.

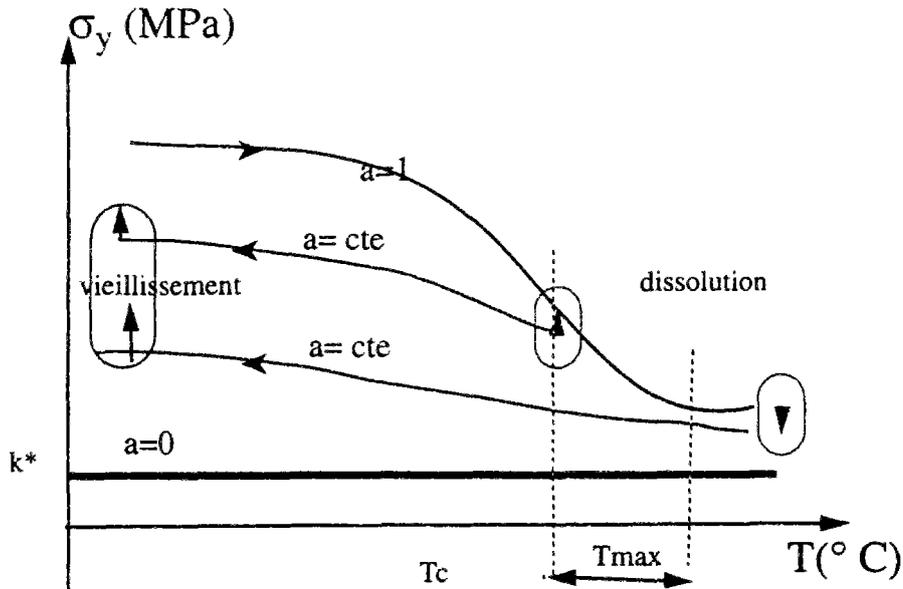
Cette diminution partielle des précipités à chaud provoquera, après le retour à l'ambiante (considéré à chaque fois comme instantané), un vieillissement d'autant plus important que la dissolution aura été significative.

Nous devons en tenir compte pour modéliser ces mécanismes en introduisant un effet thermiquement activé.



Pour transcrire ces phénomènes au niveau macroscopique, nous décrivons la contrainte seuil, mesurée durant ces essais,  $\sigma_y$ , par la somme de deux termes: (IV.71)  $\sigma_y(T) = k^* + R$ .

Le critère de plasticité s'écrit alors:  $f = J(\Sigma - X) - \sigma_y(T)$



$k^*$  représente la limite d'élasticité purement "mécanique", c'est à dire non affectée par les phénomènes métallurgiques car on considère qu'elle est atteinte lorsque la dissolution totale des précipités a eu lieu. Elle gardera la même valeur après le retour instantané à froid. (Ce n'est bien sûr qu'une approximation).

La courbe expérimentale  $(T, \sigma_y(T))$  est considérée comme la courbe idéale "instantanée, pour laquelle aucun temps de maintien n'a été appliqué. Ainsi aucun phénomène métallurgique n'existe même à chaud. Ainsi  $a(T)=1$  quel que soit le temps observé.

$R$  sera donc la partie de la contrainte limite affectée par les mécanismes métallurgiques. Nous la supposons directement proportionnelle à  $a$ :

$$(IV.72) \quad R(T) = C(T)a$$

$C(T)$  est le facteur d'amplification qui déterminera à quel niveau de contrainte, le vieillissement sera mesurable à froid. Il est facilement déterminé à partir des courbes  $(T, \sigma_y(T))$ , en se rappelant que  $a=1$  sur la courbe expérimentale instantanée:

$$(IV.73) \quad C(T) = \sigma_y(T) - k^*$$

Notons alors que dans ce modèle simple,  $C(T)$  sert à donner les contraintes (au sens du seuil), associées à des états métallurgiques équivalents entre eux (même valeur de  $a$ ). Il permet de décrire le fait qu'une baisse très faible du

seuil à chaud se traduit par une forte diminution de la limite élastique à froid.

Nous choisissons la loi d'évolution de la variable interne  $a$  sous la forme:

$$(IV.74) \quad \dot{a} = m(T)[a_{\infty}(T) - a]$$

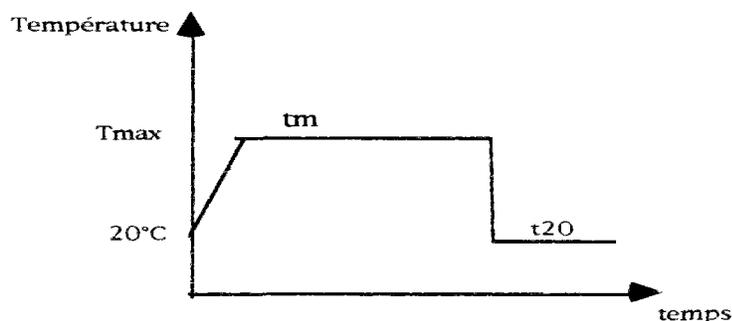
Cette loi généralise donc celle employée par Marquis.

Dans le cadre de la présente étude, nous supposons que  $a_{\infty}(T)$  prend les valeurs 0 ou 1 suivant l'expression :  $a_{\infty}(T) = H(T_c - T)$  où  $H$  est la fonction de Heaviside. Une fonction de décroissance plus continue autour de  $T_c$  pourrait facilement être utilisée.

On verra ultérieurement comment ce modèle peut s'inscrire dans un cadre thermodynamique. Voyons déjà son fonctionnement pour un trajet type de température.

b) Application du modèle à un trajet fictif en température:

Nous considérons une évolution thermique de la forme suivante:



On considère le trajet tel que la température  $T$  varie de 20°C à  $T_{max}$ , observant alors un temps de maintien de  $t_m$ , puis revenant à 20°C (trajet supposé instantané) où la durée du phénomène de vieillissement est de  $t_{20}$ .

- A 20°C, initialement, le matériau est supposé dans un état stabilisé (complètement vieilli), avec  $a = a_{\infty}(T) = 1$  et un seuil égal à  $k^* + C(20)$ .

- Au cours de la montée à  $T_{max}$ , supposée rapide, le phénomène d'évolution est négligé. A  $T_{max}$ , pendant le temps de maintien  $t_m$ , on doit distinguer deux cas de figure.

--1 Si  $T_{max}$  est supérieur à  $T_c$  (par exemple 160°C pour notre composite), l'effet de "dissolution", peut se produire ( $\dot{a} < 0$ ), mais très lentement, car la valeur  $m(T)$ , inverse d'une constante de temps est très faible.

--2 Si  $T_{max}$  dépasse très fortement  $T_c$ , par exemple  $T = 350^\circ\text{C}$ , on a alors  $\dot{a} < 0$  et l'effet de "dissolution" peut maintenant être significatif. Comme

il s'agit d'un phénomène thermiquement activé,  $m(T)$  est maintenant nettement plus élevé.

L'intégration de (IV.74), donne  $a(t) = a_0 e^{-m(T_{\max})t}$ . La valeur initiale  $a_0$  vaut alors 1. Le seuil obtenu est alors :  $\sigma_y(T_{\max}, t) = k^* + C(T_{\max})a(t)$ .

Mais  $C(T_{\max})$  étant assez faible, l'évolution correspondante du seuil en température, peut être non perceptible mécaniquement.

- Le trajet de retour de  $T_{\max}$ , à 20°C est supposé instantané donc la variable d'état  $a$  ne change pas, elle garde la valeur donnée par l'étape précédente, soit  $a_1$ :

$$(IV.75) \quad a_1 = e^{-m(T_{\max})t_m}$$

Au cours du maintien à froid, le vieillissement,  $a > 0$ , peut se produire car  $m(20)$  est supposé avoir une valeur de nouveau importante. A partir de  $a_1$ ,

on trouve:  $(IV.76) \quad a = a_{\infty}(20) + (a_1 - a_{\infty}(20))e^{-m(20)(t-t_0)}$

$t-t_0$  représente la durée du vieillissement.

### c) détermination des coefficients

On voit que ce modèle très simple fournit en principe les évolutions souhaitées. Le sens de l'évolution est déterminé par la fonction  $a_{\infty}(T)$  et la température  $T_c$  qui sépare les régimes de "dissolution" et de "précipitation"; la rapidité de la cinétique d'évolution est donnée par la constante de temps  $1/m(T)$ ; l'effet mécanique correspondant à l'état hors "équilibre instantané" est donné par le choix de la fonction  $C(T)$ .

Pour identifier les différents paramètres, on commence par défalquer la fonction  $k^*$  de la fonction de départ ("instantanée")  $\sigma_y(T)$ . Les valeurs sont supposées choisies pour que:

- L'effet mécanique associé au passage de  $a$  entre 0 et 1 (dissolution complète) soit faible à 250 ou 300°C. Alors  $k^*$  sera proche de  $\sigma_y(T)$ .
- A 20° C,  $k^*$  soit inférieur de façon significative au minimum des valeurs observées après les plus fortes incursions en température.

Ensuite, par différence entre  $\sigma_y(T)$  et  $k^*$  on obtient facilement  $C(T)$ .

Enfin la constante de temps  $1/m(T)$  est déterminée d'après les mesures faites à froid après toute incursion définie par  $(T_{\max}, t_m)$ . Avec  $a_{\infty}(20)$  et en utilisant les équations (IV.74) et (IV.76) ci dessus, on peut exprimer  $\sigma_y(T)$  après le temps  $t_{20}$  appliqué à froid depuis la fin du refroidissement:

$$\sigma_y = k^* + C(20) \left\{ 1 + \left( e^{-m(T_{\max})t_m} - 1 \right) e^{-m(20)t_{20}} \right\}$$

Avec les plus fortes incursions (la température  $T_{\max}$  est élevée et le temps de maintien à chaud  $t_m$  est long), on sensibilise la détermination de la constante  $m(20)$ . Toutes les autres quantités sont déterminées, et le terme  $e^{-m(T_{\max})t_m}$  est très inférieur à 1. Ensuite on obtient  $m(T_{\max})$  en utilisant l'ensemble des points expérimentaux, c'est-à-dire la valeur du seuil  $\sigma_y(T)$  mesurée après le trajet ( $T_{\max}, t_m, t_2$ ).

d) Exemple (simulation d'une incursion à 300°C)

Les valeurs du vieillissement (à l'ambiante) après une incursion en température vont nous permettre retrospectivement, de calculer exactement la valeur du seuil à 300°C, et de connaître la limite élastique pendant le chemin de retour.

Il convient tout d'abord de déterminer le coefficient  $m(20)$  grâce aux mesures de seuil effectuées après la mise en solution, suivie d'une trempe à l'eau (planche 49). En effet, lors de cet essai de vieillissement pur, la variable  $a$  obéit à la loi suivante :  $a = 1 - e^{-m(20)t}$ .

Les mesures des seuils aux différents instants donnent les valeurs de  $a(t)$

correspondantes:  $a(t) = \frac{\sigma_y(20,t) - k^*}{\sigma_y(20,t_\infty) - k^*}$ . (planche 51)

La mesure de  $m(20)$  vaut alors : 0.00012.

L'essai 1 permet de déterminer le paramètre  $C(T)$ :

C(20)	272
C(100)	270
C(150)	255
C(200)	125
C(250)	100

Les mesures de l'essai 1 sont les points de référence vis à vis de notre simulation, or, celui-ci combine deux paliers thermiques: 13h30' à 250°C puis 2h à 300°C. Donc pour reproduire correctement l'incursion thermique, il faut tenir compte du premier palier qui provoque une forte dissolution (chute de  $a$ ) et sert donc de condition initiale au second palier à 300°C. Pour cela nous calculons le paramètre  $m(250)$  par les résultats de l'essai 1 ( points 7 et 11), où la mesure du point 11 a lieu 5mm après le retour à l'ambiante.

On obtient:

$$m(250) = 0.24 \cdot 10^{-4}$$

Et d'autre part nous ne pouvons pas utiliser directement les valeurs du seuil lors du retour à 20°C pour déterminer le coefficient  $m(300)$ , et n'ayant pas d'essai simple à 300°C, nous faisons l'hypothèse que :

$$m(300)=2m(250)$$

Soit  $t_0$  l'instant initial du palier thermique à 300°C

Les conditions aux limites pour le palier à 300°C sont maintenant :

$$a(300^\circ\text{C}, t_0) = a(250, 13h30)$$

$$a(300^\circ\text{C}, t_\infty) = a_\infty = 0$$

La dissolution au bout du deuxième palier vaut alors :

$$a(300, 2h) = 0.219$$

Lors du retour à l'ambiante  $a$  est supposé constant, on peut alors déterminer les seuils aux températures intermédiaires ( planche 50):

T(°C)	$\sigma_y$ (MPa)
20	110
100	109
150	105
200	77
250	72

Le phénomène de vieillissement (à froid) commence ensuite à l'instant  $t_1$  et les conditions aux limites sont alors

$$a(20, t_1) = a(300, 2h) = 0.219$$

$$a(20, t_\infty) = 1$$

Les valeurs du vieillissement pour plusieurs instants et les seuils élastiques correspondants sont reportés dans le tableau ci-dessous

temps	a	$\sigma_y$ (MPa)
$t_1$	0.219	110
$t_1 + 5\text{mm}$	0.246	117
$t_1 + 10\text{mm}$	0.273	124
$t_1 + 30\text{mm}$	0.37	151
$t_1 + 1h$	0.49	184

Les planches 50 et 51 reprennent les résultats ci-dessus et mettent en évidence le bon fonctionnement du modèle proposé.

#### IV.8.7 Formulation thermodynamique

Nous supposons qu'il n'existe aucun couplage d'état entre le vieillissement et les écrouissages, (les seuls présents dans notre modèle de viscoplasticité étant des écrouissages cinématiques linéaires et non linéaires). Ainsi nous pouvons définir un nouveau terme dans le potentiel énergie libre de Helmholtz dû au seul vieillissement par:

$$(IV.77) \quad \Psi_v(a) = L(a_\infty(T) - a)H(a_\infty(T) - a) + L(a - a_\infty(T))H(a - a_\infty(T))$$

où H est la fonction de Heavyside, et nous définissons la force associée Z à la variable interne de vieillissement a par:

$$(IV.78) \quad Z = \frac{\partial \Psi_v(a)}{\partial a}$$

ainsi : -dans le cas du vieillissement ( $a < a_\infty$ ) nous avons :  $Z = -L(T)$  où  $L(T)$  représente la chaleur latente de précipitation .  
-dans le cas de la dissolution ( $a > a_\infty$ ) nous avons :  $Z = +L(T)$ .

Mais nous ne nous plaçons pas cette fois-ci dans le cadre de la plasticité associée en conservant pour la fonction d'écoulement plastique, le critère précédent, c'est-à-dire la fonction :  $J(\Sigma - X) - R - k^*(T)$  où  $R = C(T)a$ . Nous n'incluons donc pas dans le critère la force thermodynamique Z associé à a . Notons qu'un tel procédé a déjà été proposé dans d'autres circonstances, par Chrysochoos par exemple.

La dissipation intrinsèque comprend maintenant un terme dû au vieillissement à savoir  $\Phi_v = -Z\dot{a}$  où  $\dot{a} = m(T)[a_\infty(T) - a]$ .

Dans le cas du vieillissement, la variable a est toujours inférieure à  $a_\infty$  qui est alors égale à 1, donc  $\dot{a}$  est positive, et comme Z est alors négative le produit  $-Z\dot{a}$  est positif. Dans le cas de la dissolution a est toujours supérieure à  $a_\infty$  qui est précisément nulle, donc  $\dot{a}$  est négative mais Z est alors positive , donc le produit  $-Z\dot{a}$  est encore positif. Donc quel que soit le cas de figure considéré la dissipation due au vieillissement reste positive. Le second principe de la thermodynamique est toujours respecté.

## IV.9 CONCLUSION

Le modèle macroscopique ainsi développé est basé au départ sur une analyse micromécanique qui fournit un ensemble d'informations sur l'anisotropie initiale et l'érouissage, utile pour réduire le nombre de degrés de liberté d'une approche purement phénoménologique. Plus précisément, on constate que l'analyse micromécanique simplifiée nous a permis, au travers d'hypothèses simplificatrices et d'approximations, d'éliminer complètement les variables d'état de l'échelle microscopique (déformations plastiques et variables d'érouissage micro-structurales) pour les remplacer par les quantités macroscopiques.

Au passage cela a permis de fournir la forme des divers paramètres d'anisotropie intervenant dans la loi macroscopique de thermo-élasto-viscoplasticité du matériau, à savoir:

- L'expression du module d'élasticité global, à partir de celui des constituants, de leur fraction volumique et de la géométrie (orientation) des constituants. Ceci est évidemment classique. Il en est de même pour les paramètres de dilatation thermique macroscopique.

- L'expression du critère d'élasticité macroscopique. Celui-ci obéit à un critère de Hill particulier dans lequel l'opérateur d'ordre quatre s'écrit directement à partir du tenseur de concentration des contraintes (calculé en élasticité, et moyenné sur la matrice)

- La règle de normalité de l'écoulement (visco)plastique s'applique facilement à cette frontière d'élasticité ou aux équipotentielles qui lui sont homothétiques. Cela aussi est classique.

- L'anisotropie induite est décrite par un tenseur d'ordre deux, centre actuel du domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes. Les autres paramètres d'anisotropie initiale ne sont pas modifiés.

- La loi d'évolution de l'érouissage cinématique est elle aussi directionnelle (anisotrope). L'anisotropie du terme d'érouissage est directement liée au tenseur élastique de concentration des contraintes et aux modules d'élasticité des constituants.

- L'érouissage cinématique se décompose en trois variables indépendantes: l'une cinématique linéaire (effet composite et effet de l'érouissage cinématique linéaire de la matrice), la seconde, cinématique non linéaire (celui de la matrice, mais rendu anisotrope par la présence des fibres), la dernière tenant compte de la température et de l'effet des dilatations contrariées qui induisent des contraintes résiduelles initiales (à froid) au sein du composite.

- Le terme de restauration dynamique de l'écroutissement cinématique non linéaire (terme de rappel) reste de type non directionnel (car la matrice elle-même est considérée comme initialement isotrope).

### Remarques

Le modèle phénoménologique macroscopique ainsi obtenu à partir de l'analyse micromécanique offre l'avantage d'être identifié facilement, avec pratiquement les mêmes degrés de liberté que ceux admis habituellement pour le matériau métallique polycristallin initialement isotrope.

Il s'inscrit facilement dans un cadre thermodynamique général et classique. Seule la variable d'état macroscopique associée aux microcontraintes résiduelles et aux dilatations contrariées nécessite un traitement particulier.

La loi macroscopique ainsi obtenue représente un cas particulier d'une loi plus générale dans laquelle chaque tenseur d'ordre quatre (décrivant les propriétés élastiques, le critère de limite d'élasticité, la direction de l'évolution de l'écroutissement cinématique et celle du terme de restauration dynamique) serait défini indépendamment d'une analyse microstructurale (avec seulement les symétries matérielles supposées connues). Un tel modèle a par exemple été développé avec succès sur les alliages monocristallins (Nouailhas,47).

Ainsi l'avantage de l'approche est de limiter fortement le nombre d'expériences nécessaires pour déterminer la loi de comportement. De plus une fois ajustées les quelques constantes supplémentaires d'après les expériences disponibles, il est possible de prévoir l'effet de modifications dans la composition du matériau hétérogène de base: fraction volumique de fibre, orientation, rapport d'élanement, modules d'élasticité des phases). Cependant on peut quand même ajuster certains paramètres de façon phénoménologique, comme par exemple le seuil d'élasticité

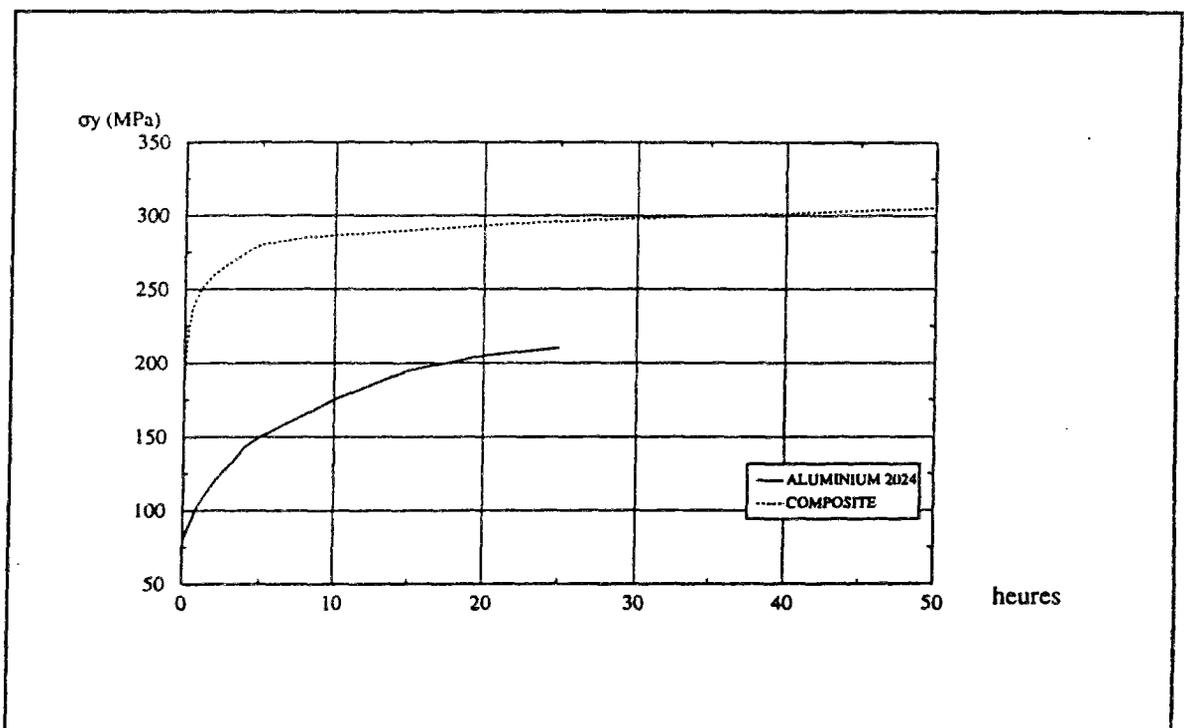


Planche : 49 Vieillissement du composite et de l'AU4G1 après un traitement de mise en solution

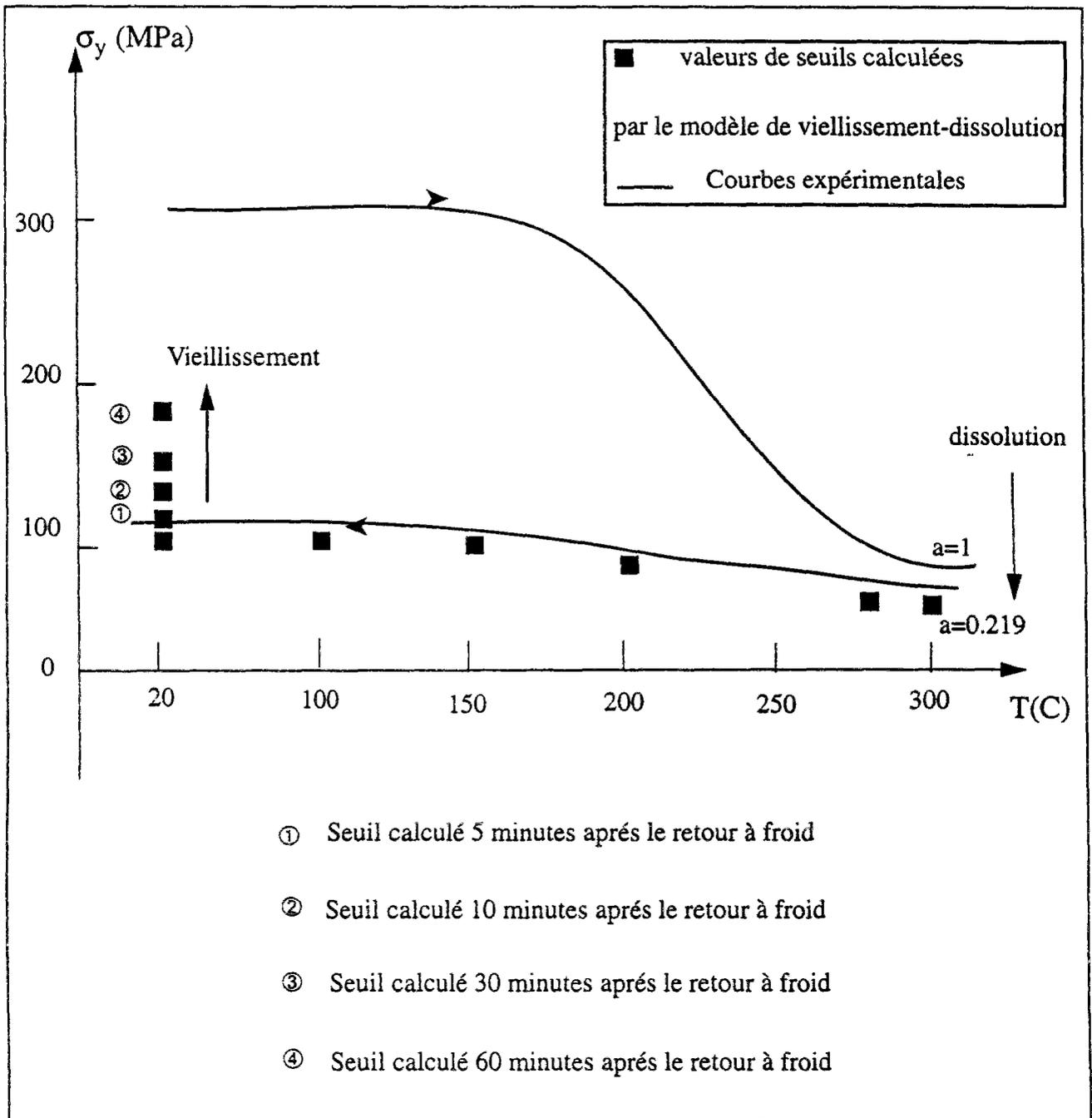


Planche 50 : Simulation numérique de l'évolution du seuil élastique en fonction de la température

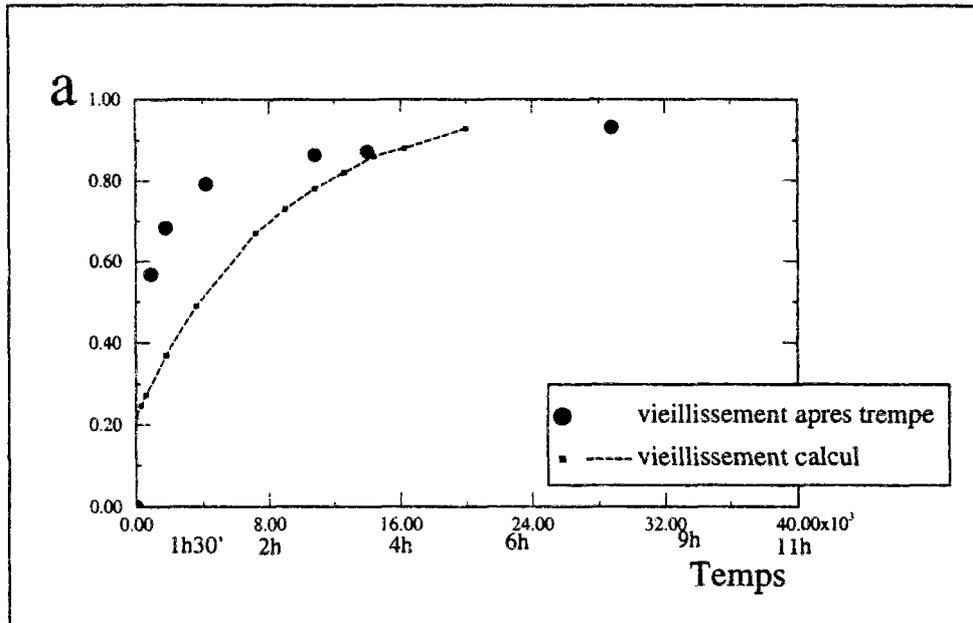


Planche 51 : Evolution de la variable de vieillissement après la mise en solution, suivie d'une trempe (valeurs expérimentales) et après une incursion à 300°C (valeurs calculées par le modèle de vieillissement)



**CONCLUSION GENERALE.**



## I Rappel des objectifs

La particularité des composites à matrice métallique réside principalement dans la présence de fortes contraintes internes et de déformations plastiques initiales issues du traitement thermique qui leur est infligé. De plus, au travers de la matrice, ils présentent une certaine ductilité mais la présence de renforts leur confère de forts modules d'élasticité.

Le calcul par des méthodes éléments finis, de pièces complexes constituées par de tels matériaux, nécessite de disposer de lois de comportement facilement incorporables dans les codes et tenant compte des singularités présentées par ce type de composite.

L'objectif ultime de ce travail de thèse consiste donc en la proposition d'une loi de comportement thermo-élastoviscoplastique anisotrope pouvant modéliser de tels matériaux et en la modélisation des effets de vieillissement apparus lors de sollicitations thermiques. Le cadre formel sur lequel s'appuie notre démarche est la Mécanique des Processus irréversibles à variables internes mais la construction de la loi recherchée s'appuie aussi sur des analyses micromécaniques, menées analytiquement et numériquement

## II Résumé du travail effectué

La quantification et la prise en compte des particularités du composite servant de base à notre étude, nécessite des apports numériques et expérimentaux.

L'apport numérique permet d'établir dans un premier temps, le comportement élastique homogène équivalent du composite, au moyen de différentes techniques d'homogénéisation, comme la théorie des milieux périodiques donnant accès aux rigidités globales et aux tenseurs de localisation et de concentration des déformations et des contraintes. La théorie de l'inclusion équivalente, plus aisée à mettre en oeuvre, permet d'obtenir la réponse élastique globale pour diverses configurations de composite.

Des calculs par éléments finis sur une cellule de base, menés en élastoviscoplasticité anisotherme, ont permis dans un premier temps de quantifier les contraintes internes et l'état de déformation plastique initiales (dûes aux dilatations contrariées, apparues lors de la fabrication du composite). Ensuite ils ont permis d'avoir un aperçu sur le comportement global obtenu à travers les différentes hypothèses de modélisation, (la structure périodique du

matériau, l'alignement des fibres, l'interface fibre-matrice supposé parfait, les valeurs des caractéristiques mécaniques, et le traitement thermique considéré).

Ces simulations ont ensuite abouti à un critère macroscopique de plasticité reflétant l'existence des contraintes internes. Ce critère global sera à la base de la construction de la loi de viscoplasticité anisotrope macroscopique.

Cependant les résultats numériques dépendent essentiellement de la modélisation du composite. Celle-ci ne permet pas de tenir compte de facteurs déterminants pour le comportement global, comme la mauvaise distribution des fibres, leur variation de taille (mis en évidence sur les clichés). De même l'interface supposé parfait occulte les phénomènes physico-chimiques et de microfissuration autour de la fibre ainsi que son défretage partiel. De plus, la loi de comportement introduite dans le code n'est qu'une approximation de la loi gouvernant réellement la matrice.

Toutes ces restrictions doivent être présentes à l'esprit lorsque l'on compare les résultats numériques et ceux obtenus par la campagne d'essais sur le composite 2024AL/SiC. Au niveau global, cette comparaison aboutit aux conclusions provisoires suivantes: une bonne description des modules d'élasticité, de la position, de la forme et de la taille du domaine limite d'élasticité, en fonction de la température et de la déformation plastique macroscopique si celle-ci ne dépasse pas 0.5%. Le principal défaut observé, dans le cadre de la modélisation choisie, est le module tangent (d'écrouissage) trop raide, observé dans le domaine des déformations plus importantes.

L'apport expérimental consiste dans un premier temps à valider la modélisation de l'étape numérique. Il est réalisé à partir d'essais mécaniques simples de traction et compression, monotones et cycliques dans les principaux axes d'anisotropie du matériau (directions longitudinales et transversales), et ce, pour des sollicitations isothermes et non-isothermes. Il a enfin mis en évidence l'existence de phénomènes complexes comme le vieillissement, phénomènes imputables à la matrice.

Pour construire notre loi de thermo-élasto-viscoplasticité macroscopique nous avons développé une approche proposée récemment dans la littérature. Celle-ci nous a permis de développer un passage micro-macro à la faveur de "champs moyens par phase" et de "fonction d'influence généralisées", pour obtenir, moyennant quelques approximations (sur le calcul de la vitesse de la déformation plastique moyenne dans la matrice, sur

l'existence d'un critère moyen dans la matrice), et hypothèses (le tenseur de concentration des contraintes est indépendant de la température) une loi de comportement macroscopique anisotrope thermo-élastoviscoplastique.

Cette loi, développée au chapitre IV, a un caractère macroscopique évident puisqu'elle ne relie que des quantités macroscopiques définies globalement sur le volume élémentaire représentatif, telles la déformation totale, la déformation plastique, la contrainte, les variables d'écroutissage cinématique constituant le centre du domaine d'élasticité.

Elle a cependant aussi un caractère microscopique puisqu'elle est directement issue d'une analyse micromécanique, construite à l'échelle des constituants élémentaires, au travers d'une approche "auto-cohérente" assez générale dans laquelle on a inscrit les hypothèses simplificatrices et approximations juste nécessaires pour arriver à éliminer les variables de l'échelle micromécanique.

Ainsi la loi offre un double avantage:

-Son utilisation dans des codes de calcul de structures, en vues des analyses inélastiques des pièces complètes, est aisée. La forme générale de la loi de comportement diffère peu de celle de la viscoplasticité des matériaux anisotropes (telle celle développée récemment par D. Nouailhas (47) pour les alliages monocristalins). De plus elle s'inscrit dans le cadre formel des matériaux standards généralisés, issu de la thermodynamique des processus irréversibles à variables internes.

-Le second avantage, à l'opposé du précédent, réside dans son origine microstructurale: peu de coefficients dépendant du matériau sont à identifier au delà de ce que l'on admet généralement pour les matériaux initialement isotropes. Toute l'anisotropie, initiale et induite, est entièrement contenue, au travers du cadre proposé, dans la connaissance des tenseurs de concentration des contraintes (moyennés par phase), déterminés en élasticité. Il est ainsi facile de passer d'une nuance à une autre, par des variations de fraction volumique, de forme de fibre, d'élançement, de modules élémentaires, à l'aide d'une analyse simplifiée (telle la méthode de l'inclusion équivalente, ou la méthode de Mori-Tanaka par exemple). Ainsi la loi est capable d'intégrer facilement des variations de composition du matériau.

Un autre aspect est remarquable: c'est celui des phénomènes complexes constatés à la suite des changements de température, avec ou sans déformation macroscopique. La loi de comportement proposée, grâce à son caractère macroscopique et son cadre formel issu de la thermodynamique est capable d'introduire ces phénomènes complexes de vieillissement par une

variable interne adéquate décrivant indirectement l'évolution du comportement de la matrice.

### III Améliorations possibles de la loi de comportement macroscopique.

Bien sûr cette loi de comportement thermo-élastoviscoplastique peut encore être améliorée, tant du point de vue de sa capacité à décrire les expériences réelles, que pour y incorporer des phénomènes et mécanismes supplémentaires. On notera plus particulièrement les développements suivants qui peuvent être réalisés rapidement:

1 - La possibilité de jouer sur certains paramètres (soit de façon macroscopique, soit à l'échelle des constituants) pour introduire une plus grande souplesse dans la région plastique. On a noté par exemple que le module tangent restait trop élevé par rapport à l'expérience, ceci étant manifestement dû au terme d'écrouissage cinématique linéaire induit par l'effet composite. Pour améliorer cet état, il faudrait soit jouer sur le module de la fibre, soit sur le rapport d'élancement (effet de la répartition statistique des directions de fibres). On peut aussi procéder de façon plus phénoménologique par un facteur correctif multiaxial déterminé par l'expérience.

2 - Valider plus complètement la formulation proposée pour les effets de vieillissement. En effet celle-ci a été établie dans son principe, des premiers ajustements des constituants ont montré que le modèle pouvait convenir dans ses grandes lignes. Il reste à la qualifier complètement avec la série d'expériences disponibles, et surtout hors du domaine élastique lui-même, avec des chargements thermomécaniques complexes, en phase, hors phase ou très diversifiés, pour établir des réponses sur l'ensemble de son domaine de fonctionnement.

3 - Ajouter une description plus précise des phénomènes de restauration statique (par le temps) ou de recristallisation, indépendamment de ceux qui sont directement associés (par le modèle proposé) aux phénomènes de vieillissement décelables à température ambiante. Ceci devrait pouvoir se faire soit directement à l'échelle macroscopique (dans le cadre thermodynamique), soit en suivant une démarche analogue à celle suivie dans ce travail, en partant d'une écriture microscopique.

4 - Faire fonctionner le modèle sous des sollicitations de cyclage thermique pour valider en particulier la description des effets de rochet thermique. En principe l'existence d'un fort effet "composite", avec un

écrouissage cinématique linéaire important, doit éliminer très vite la déformation progressive. Ceci devrait être étudié plus en détail et confronté à des résultats expérimentaux.

5 - Il conviendrait d'incorporer une variable d'écrouissage isotrope tant dans la loi de comportement de la matrice, qu'au niveau macroscopique pour prendre en compte le durcissement cyclique (très faible dans notre cas, mais décelable malgré tout). Ceci permettrait de mieux simuler les premiers stades de plasticité et d'arrondir la courbe de comportement macroscopique. Un traitement similaire à celui réalisé ici définirait cet écrouissage isotrope macroscopique et permettrait de décrire sa loi d'évolution.

6 - Superposer les effets d'endommagement, négligés dans ce travail, qui peuvent être de deux natures physiques différentes: - soit un défrettage des fibres au sein de la matrice, qui n'est pas à proprement parler un phénomène d'endommagement (puisque'il n'y a pas vraiment de rupture des liaisons chimiques et qu'il peut être éventuellement réversible),- soit un endommagement de la matrice ou des interfaces, par microfissuration. L'introduction de l'endommagement peut être facilement réalisé dans le cadre formel de la Mécanique de l'Endommagement, au travers du concept de contraintes effectives (plusieurs choix et plusieurs niveaux de théorie sont envisageables). On pourra par exemple commencer par un dommage isotrope (scalaire) conservant les anisotropies initiales du matériau. Une formulation plus évoluée, avec des tenseurs d'ordre 2 ou d'ordre 4 comme variable de dommage pourrait ensuite être développée. Des travaux en ce sens, sont déjà menés, par exemple par Voyiadjis et ses collaborateurs. Il est à noter cependant que, dans le cas du matériau de cette étude, l'endommagement ne joue qu'un rôle mineur, tout au moins pour les faibles déformations de service, comme l'ont montré les résultats expérimentaux. Même dans le cas des effets très importants observés à la suite des incursions à température élevée, le défrettage des fibres reste assez faible et difficile à mesurer par la chute du module global d'élasticité.

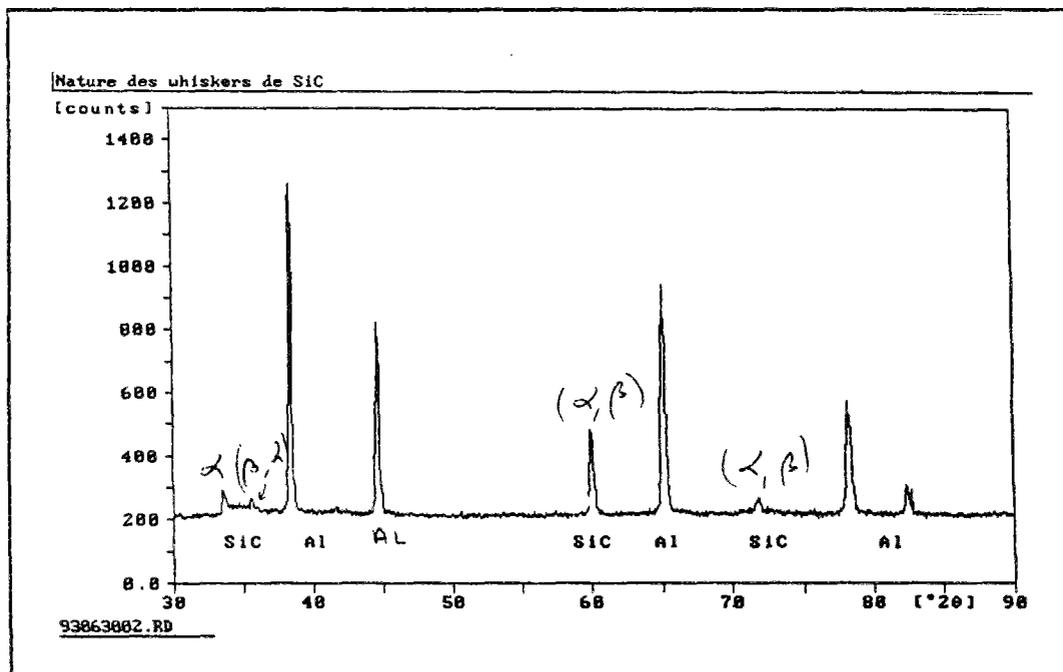
7 - Il reste enfin à appliquer la même démarche à d'autres types de composites: autres types de matrice, autres configurations de fibres, en particulier le cas des fibres longues pour lequel le même formalisme devrait s'appliquer mais nécessiterait peut-être beaucoup plus tôt (en déformation) l'introduction de variables d'endommagement.



## Annexe 1 au chapitre I I

Afin de connaître la nature exacte du SiC présent dans le composite étudié, on a soumis celui-ci à la diffraction par rayons X.

Cette méthode repose sur la loi de Bragg,  $2d\sin\Theta = \lambda$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde monochromatique qui balaie l'échantillon suivant un axe d'incidence  $\Theta$  et  $d$  la distance inter-réticulaire que l'on veut mesurer. On place donc la matière dans un goniomètre puis on l'éclaire par un faisceau provenant du rayonnement  $k\alpha$  du cuivre (l'anode utilisée est en cuivre). A chaque que la loi de Bragg est vérifiée, il y a interférence et émission d'électrons de la part de l'échantillon. Ceux-ci sont compatibilisés et on obtient un pic sur le diagramme (nombre d'électrons, angle d'incidence). De cet angle on déduit la distance  $d$  qui est répertoriée sur des abaques.  $d$  correspond à un plan d'atomes bien précis dans la maille cristalline. Ces plans sont repérés par le réseau  $hkl$ . On a ainsi la correspondance un plan du réseau et la distance inter-réticulaire. Chaque forme allotropique contient plusieurs plans du réseau  $hkl$ , donc plusieurs distances caractéristiques d'où plusieurs pics correspondants à des angles particuliers. Les deux formes allotropiques du Carbure de Sicilium  $\alpha$  et  $\beta$  ont des distances inter-réticulaires communes mais certaines, comme  $d = 2.6693 \text{ \AA}$  pour  $\Theta = 33.615^\circ$  est spécifique à la forme  $\alpha$ . La détection de cette distance permet d'affirmer que les deux formes de SiC sont présentes dans l'échantillon





Annexe 2 au chapitre II.

Les fibres sont supposées orientées selon l'axe 3

Tenseur d'Eshelby pour matériau isotrope transverse avec fibres cylindriques longues

L'ordre des composantes est le celui du chapitre I I

$$S_m = \begin{bmatrix} \frac{5-4\nu_m}{8(1-\nu_m)} & \frac{4\nu_m-1}{8(1-\nu_m)} & \frac{\nu_m}{2(1-\nu_m)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4\nu_m-1}{8(1-\nu_m)} & \frac{5-4\nu_m}{8(1-\nu_m)} & \frac{\nu_m}{2(1-\nu_m)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3-4\nu_m}{4(1-\nu_m)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Tenseur d'Eshelby pour des inclusions ellipsoïdales:

on pose:  $\alpha = l/d$   $g = \frac{\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{3/2}} \left\{ \sqrt{\alpha(\alpha^2 - 1)} - ch^{-1}\alpha \right\}$

$$S_{1111} = S_{2222} = \frac{3}{8(1-\nu_m)} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} + \frac{1}{4(1-\nu_m)} \left\{ 1 - 2\nu_m - \frac{9}{4(\alpha^2 - 1)} \right\} g$$

$$S_{3333} = \frac{1}{2(1-\nu_m)} \left[ 1 - 2\nu_m + \frac{3\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - 1} - \left\{ 1 - 2\nu_m + \frac{3\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \right\} g \right]$$

$$S_{1122} = S_{2211} = \frac{1}{4(1-\nu_m)} \left[ \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2 - 1)} - (1 - 2\nu_m) - \frac{3}{4(\alpha^2 - 1)} g \right]$$

$$S_{1133} = S_{2233} = -\frac{1}{2(1-\nu_m)} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} + \frac{1}{4(1-\nu_m)} \left[ \frac{3\alpha^2}{\alpha^2 - 1} - 1 + 2\nu_m \right] g$$

$$S_{3311} = S_{3322} = -\frac{1}{2(1-\nu_m)} \left[ 1 - 2\nu_m + \frac{1}{\alpha^2 - 1} \right] + \frac{1}{2(1-\nu_m)} \left[ 1 - 2\nu_m + \frac{3}{2(\alpha^2 - 1)} \right] g$$

$$S_{1313} = S_{2323} = \left[ \frac{2\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1} + 2(1 - 2\nu_m) + g \left[ \frac{3\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1} - (1 - 2\nu_m) \right] \right]$$

$$S_{1212} = \frac{1}{8(1-\nu_m)} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} + \frac{1}{4(1-\nu_m)} \left[ 1 - 2\nu_m + \frac{3}{4(\alpha^2 - 1)} \right] g$$

### Tenseur d'Eshelby pour des fibres sphériques

Tous les termes sont nuls sauf:

$$S_{iii} = \frac{7 - 5\nu_m}{15(1 - \nu_m)}$$

$$S_{ijj} = \frac{5\nu_m - 1}{15(1 - \nu_m)} \quad i, j = 1, 3$$

$$S_{ijj} = \frac{4 - 5\nu_m}{15(1 - \nu_m)}$$

## Annexe 1 au chapitre IV

---

Pour établir la relation entre les champs globaux et leurs homologues locaux, DVORAK fait appel au théorème de réciprocité des travaux, valable en élasticité linéaire (Sokolnikoff,48);

### *Théorème*

*On considère un matériau obéissant à la loi d'élasticité linéaire, soumis à deux systèmes de forces de volume  $F$  et  $F'$  et de surface  $t$  et  $t'$ . Soient  $u$  et  $u'$  les déplacements provoqués par chacun des deux chargements. On a alors l'égalité suivante:*

$$\int_S t'_i u_i ds + \int_V F'_i u_i dv = \int_S t_i u'_i ds + \int_V F_i u'_i dv$$

Considérant alors un premier système où le chargement est donné par l'introduction d'une déformation auxiliaire micro  $\mu_p(x)$  dans l'élément  $p$  produisant localement une contrainte auxiliaire  $\lambda'_p = -L_p \mu_p$  et cause macroscopiquement la déformation résiduelle  $\mu$ . Soit  $u$  le déplacement de surface résultant de ce chargement. La contrainte macroscopique  $\Sigma$  est nulle. Le deuxième système lui, va provoquer une contrainte macroscopique  $\Sigma'$  en appliquant à la surface du solide une traction uniforme  $t'$ . Ce champ macro provoque à l'échelle micro un champ de contraintes tel que :  $\sigma'_p = B_p \Sigma'$  pour lequel  $\lambda'_p$  est nul. En appliquant le théorème à ces deux systèmes, on obtient les égalités suivantes:

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} B_p^T(x) : \mu_p(x) dx \\ \lambda = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} A_p^T(x) : \lambda_p(x) dx \end{cases}$$

### Remarque

En remplaçant  $\mu_p(x)$  par  $\varepsilon_p(x)$  et  $\mu$  par  $E_p$  on retrouve la définition de la déformation plastique macroscopique obtenue par la théorie des milieux périodiques.

Les champs  $\mu$  et  $\lambda$  peuvent être considérés comme des champs de déformation et de contrainte appliqués à un corps élastique soumis à une déformation  $E$  et une contrainte  $\Sigma$  uniformes.

Levin (45) établit les champs de déformation locaux  $\varepsilon(x)$  résultants d'un chargement additionnel  $\mu(x)$  sous une formulation intégrale :

$$\varepsilon(x) = \varepsilon^0(x) - \int_{\Omega} \Gamma(x, x') \left[ (L(x') - L^0)\varepsilon(x') - L(x')\mu(x') \right] dx'$$

où  $\varepsilon^0(x)$  serait la déformation résultant d'un tel chargement si le matériau était homogène,  $\Gamma_{ijkl} = \frac{1}{2}(G_{ij,kl} + G_{jk,il})$  et G la fonction de Green solution de :

$$L_{ijkl}^0 G_{kp,ij}(x, x') + \delta_{ip} \delta(x - x') = 0 \quad (\text{voir (II.25)}).$$

En considérant un champ additionnel  $\mu_p$  uniforme dans chaque petit volume p, Benveniste (45) a transformé ces systèmes de N équations intégrales un système linéaire de N équations de la forme:  $\varepsilon_s = A_s : E + \sum_{r=1}^N D_{rs} : \mu_r$ .

Ces travaux sont à la base des fonctions d'influence généralisées de Dvorak (43).

Justificatif du choix de la variable d'écouissage macroscopique  $X^1$ .

Dans le cas où on conserve les trois variables d'écouissage macroscopiques  $X^I$ ,  $X^II$  et  $X^{\Theta}$ , il faut alors introduire une nouvelle variable interne  $\alpha^{\Theta}$ , associée à  $X^{\Theta}$ , et le potentiel Energie Libre de Helmholtz devient:

$$\Psi = \Psi_e(E_e, T) + \Psi_p(\alpha^I, \alpha^{II}, \alpha^{\Theta}, T)$$

$$\Psi = \Psi_e + \frac{1}{2} \alpha^I : Q^I : \alpha^I + \frac{1}{2} \alpha^{II} : Q^{II} : \alpha^{II} + \frac{1}{2} \alpha^{\Theta} : Q^{\Theta} : \alpha^{\Theta}$$

La loi d'état de  $X^{\Theta}$ , est alors  $X^{\Theta} = Q^{\Theta} : \alpha^{\Theta}$  et par identification avec l'équation (IV.53) nous avons:  $\alpha^{\Theta} = T : I$ . Dans ce cas la dissipation devient:

$$\Phi = \Sigma : \dot{E}_p - X^I : \dot{\alpha}^I - X^{II} : \dot{\alpha}^{II} - X^{\Theta} : \dot{T} : I$$

$$\Phi = \dot{P} \left( J(\Sigma - X) + \frac{\gamma^{II}}{c_I} X^{II} : Q^{II^{-1}} : X^{II} \right) + X^{\Theta} : (\dot{E}_p - \dot{T} : I)$$

Nous avons assuré précédemment la positivité des deux premiers termes mais on ne peut rien affirmer pour le terme  $X^{\Theta} : (\dot{E}_p - \dot{T} : I)$ .

Donc, conserver la variable  $X^{\Theta}$  indépendante de  $X^I$ , demande l'identification de la variable interne associée, délicate si on ne choisit pas la température et si c'est le cas, on se trouve devant une incertitude sur la positivité de la dissipation. C'est pourquoi nous avons choisi de grouper ces deux variables pour ne définir qu'une seule variable interne  $\alpha^I$ .



Introduction de la restauration par le temps dans la loi  
macroscopique d'érouissage.

Sans passer par le formalisme des fonctions d'influence généralisées, on peut introduire directement au niveau macroscopique d'autres phénomènes couramment observés dans les matériaux métalliques comme la restauration par le temps. On suppose ici qu'elle n'agit que sur le terme d'érouissage cinématique (n'ayant pas introduit dans le modèle d'érouissage isotrope).

Il suffit de choisir comme pseudo-potential de dissipation, la fonction G telle que  $G = F(\Sigma, X, T) + F_r(X)$  où F est la fonction de charge définie au chapitre IV et  $F_r$  le potentiel de restauration défini comme une fonction puissance de chaque variable d'érouissage macroscopique  $X^I$  et  $X^{II}$

$$\begin{cases} G = J(\Sigma - X) + \frac{1}{2} \frac{\gamma^{II}}{c_1} X^{II} : Q^{II-1} : X^{II} + F_r \\ F_r = v_r^I \frac{1}{m_I + 1} (X^I : X^I)^{\frac{m_I + 1}{2}} + v_r^{II} \frac{1}{m_{II} + 1} (X^{II} : X^{II})^{\frac{m_{II} + 1}{2}} \end{cases}$$

où  $v_r^I$ ,  $v_r^{II}$ ,  $m_I$  et  $m_{II}$  sont les coefficients de restauration du matériau.

L'hypothèse de la normalité généralisée donne les lois d'évolution des variables dissipatives sous la forme:

$$\begin{aligned} \dot{E}_p &= \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \Sigma} + \frac{\partial F_r}{\partial \Sigma} \\ \dot{\alpha}^I &= - \left[ \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial X^I} + \frac{\partial F_r}{\partial X^I} \right] \\ \dot{\alpha}^{II} &= - \left[ \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial X^{II}} + \frac{\partial F_r}{\partial X^{II}} \right] \end{aligned}$$

Ceci peut encore s'écrire sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{E}_p = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{M^*(\Sigma - X)}{J(\Sigma - X)} \\ \dot{\alpha}^I = \dot{E}_p - v_r^I \sqrt{(X^I : X^I)^{m_I}} X^I \\ \dot{\alpha}^{II} = \dot{E}_p - \dot{\lambda} \frac{\gamma^{II}}{c_1} Q^{II-1} : X^{II} - v_r^{II} \sqrt{(X^{II} : X^{II})^{m_{II}}} X^{II} \end{cases}$$

avec  $\dot{\lambda} = \frac{K}{n+1} \left( \frac{J(\Sigma - X) - k}{K} \right)^{n+1}$  dans le cas de la viscoplasticité ou bien donné

par la relation de consistance dans le cas de la plasticité.



## BIBLIOGRAPHIE

GERMAIN P.

- (1) Cours de Mécanique des milieux continus, Masson, 1973

LEMAITRE J.

- (2) Sur la Détermination des Lois de Comportement des Matériaux Elasto-Visco-Plastiques. Thèse d'Etat, Faculté des Sciences d'Orsay, 1971.

CHABOCHE JL.

- (3) Viscoplastic Constitutive Equations for the Description of Cyclic and Anisotropic Behavior of metals, 17th Polish Conf. on Mechanics of Solids, Szczyrk. Bul., de l'Acad. Polonaise des Sciences, Serie Sc. and Techn,25,p33,1977

MARQUIS D.

- (4) Etude Théorique et Vérification Expérimentale d'un Modèle de Plasticité Cyclique. Thèse de L'Université Pierre et Marie Curie, Paris,1979

VALANIS K. C.

- (5) Fundamental Consequences of a New Intrinsic Time Measure Plasticity as a Limit of the Endochronic Theory, Arch. Mech. , 32, 1980

KREMPL F., MC MAHON J. J., & YAO D.

- (6) Viscoplasticity Based on Overstress with a Differential Growth Law for the Equilibrium Stress. 2nd Symp. on Non-Linear Constitutive Relations for High Temperature Applications, Nasa, Cleveland, 1984.

MARQUIS D

- (7) Phénoménologie et Thermodynamique : couplages entre thermoélasticité, plasticité, vieillissement et endommagement. Thèse d'Etat de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris,1989.

DUVAUT G.

- (8) Analyse Fonctionnelle et Mécanique des Milieux Continus, Application à l'Etude des Matériaux Elastiques à Structure Périodique. Theoretical and Applied Mechanics, W. T. Koiter Editor, p 119-132, North Holland Publishing Company, 1976.

SANCHEZ PALENCIA E.

- (9) Introduction aux Méthodes Asymptotiques et à l'Homogénéisation. Masson, 1992.

KRUCH S.

- (10) Comportement Global des Matériaux Composites Viscoélastiques. Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1988

THIONNET A.

- (11) Prévion d'Endommagement sous Chargements Quasi-Statiques et Cycliques des Structures Composites Stratifiées. Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1991.

PAUMELLE P.

- (12) Calcul et Analyse du Comportement des Structures Composites Tissées. Méthodes Intégrales et Homogénéisation. Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1991.

LEBON E.

- (13) Etude et Modélisation de l'Endommagement dans les Composites Tissés SiC/SiC. Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1993.

ESHELBY J. D.

- (14) The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoïdal Inclusion and Related Problems. Proc. Roy. Soc. London, A 241, p376-396, 1957.

HILL R.

- (15) Theory of Mechanical Properties of Fiber-Strenthened Material: III Self-Consistent Model. J. Mech. Phys. Solids, 13, 1965.

TANAKA K.

- (16) Average Stress in Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions. *Acta Metallurgica*, 21, p 571-574, 1973.

CHRISTENSEN R. M. et LO K. H.

- (17) Solutions for Effective Shear Properties in Three Phase Sphere and Cylinder Models. *J. Mech. Phys. Solids*, 27, p315

HASHIN Z.

- (18) Theory of Composite Material. *Mechanics of Composite Materials. Proc. of the fifth Symp. of Naval Structural Mechanics*, Pergamon Press, Philadelphia, 1967.

WALKER K., JORDAN E. H. & FREED A. D.

- (19) Non Linear Mesomechanics of Composites with Periodic Microstructures. First report, Nasa Grant, NAG 3-882.

BAPTISTE D.

- (20) Lois de Comportement et d'Endommagement des Matériaux Composites Etablies à Partir d'une Approche Micromécanique. Mémoire d'Habilitation, Ecole Centrale de Paris.

CHAMBOLLE D., BAPTISTE D. & BOMPARD P

- (21) Damage Micromechanisms and Micromechanic Modelization of AL-SiCw Composites. *Proc. of Mecamat, International Seminar on Mechanics and Mechanisms of Damage in Composites and multimaterials*, Saint-Etienne, 1989

BREBAN P.

- (22) Composites Aluminium-Fibres de Carbone Obtenus par Filage. Thèse de Doctorat de l'Ecole Centrale de Paris, Paris, 1990.

CHAMBOLLE D.

- (23) Etude sur la Rupture des Composites à Matrice Métallique et à Renforts Discontinus: Aluminium/Carbure de Silicium. Thèse de Doctorat de l'Ecole Centrale de Paris, Paris, 1990.

JARRY P., TOITOT D. & JANIN B.

- (24) Homogenized Finite Element Modelling of Thermal Residual Micro-stresses in Discontinuously Reinforced Metal Matrix Composites. I.C.R.S.II Elsevier applied science, p 436-441, Nancy, 1988.

LEFLOUR J. C. & LOCICERO R.

- (25) Influence of Internal Stresses Induced by Thermal Cycling of the Plastic Deformation Resistance of Al/SiC Composite Materials. Scripta Metallurgica , 21,p 1071-1076, 1987.

HAMANN R., GOBIN P. F. & FOUGERES R.

- (26) A Study of the Microplasticity of some Discontinuously Reinforced Metal Matrix Composites. Scripta Metallurgica et Materialia, 24,p 1789-1794, 1990.

DVORAK G. J. & BENVENISTE Y.

- (27) On a Correspondence Between Mechanical and Thermal Effects in Two-phase Composites. Micromechanics and Inhomogeneity. G. Weng, M.Taya & H. Abe Eds, Springer-Verlag, p 65-81, Berlin, 1990.

DVORAK G. J.& BAHEI-EL-DIN Y. A.

- (28) A Bimodal Plasticity Theory of Fibrous Composite Materials. Acta Metallurgica, 69, p 219-241, 1987.

BOYD J. G., ALLEN D. H. & HIGHSMITH A. L.

- (29) A Self-Consistent Thermoviscoplastic Constitutive Model for Short-Fiber Composites. G. J. Dvorak & D. C. Lagoudas Eds, American Soc. of Mechanical Engineers, AMD, 111, p 141-150, 1990.

VOYIADJIS G. Z. & KATTAN P. I.

- (30) Local Approach to Damage in Elasto-Plastic Matrix Composites. International Journal of Damage Mechanics, 2, N° 1, p 92-114, 1993.

VOYIADJIS G. Z. , KATTAN P. I. & VENSON A. R.

- (31) Evolution of a Damage Tensor for Metal Matrix Composites. International Seminar on Micromechanics of Material, p 406-415, Moret sur Loing, France, 1993.

TOITOT D.

(32) Vieillissement sous Chargement Thermomécanique d'un Matériau Composite à Matrice Métallique. Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Paris, 1991.

(33) Fibre Reinforcement for Composite Materials. Composite Materials, Series, Bunsell A. R. Ed., Series Editor Pipes R. B., Elsevier.

LENE F.

(34) Contribution à l'Etude des Matériaux Composites et de leur Endommagement. Thèse d'Etat de L'Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1984.

LENE .F. & PAUMELLE P.

(35) Boundary Techniques for Composite Materials. Proc. of the 13th world Congress of IMACS, 4, p 1878-1879, 1991, Dublin

SUQUET P.

(36) Plasticité et Homogénéisation. Thèse de L'Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1982.

MOLINARI

(37) Méthodes Auto-cohérentes à n Sites. 3<sup>e</sup> Colloque Annuel Mécamat, 1990.

MONDOLFOL F.

(38) Aluminium Alloys. Structures and Properties. Ed Butterworths.

LEMAITRE J. & CHABOCHE J.L.

(39) Mécanique des Matériaux Solides. Dunod, 1985.

LEVIN V. M.

(40) Thermal Expansion coefficients of Heterogenous Materials. Mekhanika Tverdogo Tela, 2, p 88-94, English Translation Mech. of Solids, 11, p 58-61, 1967.

BOYD J. G. , COSTENZO F. & ALLEN D. H.

- (41) A Micromechanics Approach for Constructing Locally Averaged Damage Dependent Constitutive Equations in Inelastic Composites. International Journal of Damage Mechanics, 2, p 209-229, 1993.

DVORAK J. G.

- (42) On uniform fields in Heterogeneous Media. Proc. Roy. Soc. London, A 431, p 89-110, 1990.

DVORAK J. G. & BENVENISTE Y.

- (43) On Transformation Strains and Uniforme Fields in Multiphase Elastic Media. Proc. Roy. Soc. London, A 437, p 291-310, 1992.

DVORAK J. G.

- (44) Transformation Field Analysis of Inelastic Composite Materials. Proc. Roy. Soc. London, A 437, p 311-327, 1992.

BENVENISTE Y.

- (45) J. Appl. Mechanics 57, p 474-476, 1990.

LEVIN V. M.

- (46) ANSSSR. Mekhanika Tverdogo Tela, 11, p 137-145, 1976.

NOUAILHAS D. & CULIE D.

- (47) Development and Application of a Model for Single-Crystal Superalloys. ASME Winter Annual Meeting, Atlanta, GA (USA), 1991

SOKOLNIKOFF I. S.

- (48) Mathematical Theory of elasticity, 2nd Ed, Mc Graw-Hill, New-York, 1956.

CHRYSOCHOOSA.

- (49) Dissipation et Blocage d'Energie lors d'un Ecrouissage en Traction Simple. Thèse de Doctorat d'Etat de l'Université de Montpellier, 1987.



# MODELISATION MICROSCOPIQUE ET MACROSCOPIQUE DU COMPORTEMENT D'UN COMPOSITE A MATRICE METALLIQUE

par **Nathalie EL MAYAS THEET**

**RESUME :** Le but de cette étude est d'établir une loi de comportement macroscopique viscoplastique d'un composite à matrice métallique renforcé par des fibres courtes. La construction du modèle s'appuie sur des résultats expérimentaux et numériques, ainsi qu'une approche analytique sur la localisation.

Une étude expérimentale a été nécessaire afin d'observer, en particulier, l'évolution du domaine élastique en fonction de la température, des déformations plastiques et du temps. Des essais en traction-compression et des chargements cycliques pour plusieurs températures et dans les directions d'anisotropie du matériau ont été réalisés.

Des calculs numériques par éléments finis en viscoplasticité réalisés sur une cellule élémentaire représentative du composite, ont permis de quantifier les contraintes résiduelles et les déformations plastiques résultant du traitement thermique de fabrication. La réponse macroscopique du composite est ensuite étudiée pour différents chargements.

Le modèle théorique est construit sur la base de techniques d'homogénéisation, en particulier, l'homogénéisation des milieux périodiques, qui fait appel à des calculs par éléments finis, et la méthode de l'inclusion équivalente purement analytique. Une relation de localisation généralisée est obtenue à partir des travaux de Dvorak, permettant de relier entre elles les variables mécaniques globales et locales. Moyennant certaines hypothèses simplificatrices, il est possible d'établir une loi de comportement purement macroscopique.

Cette loi de comportement thermo-élasto-viscoplastique peut prendre en compte, les effets et l'évolution des contraintes résiduelles de fabrication ainsi que l'anisotropie initiale du matériau et son évolution au cours d'un écoulement viscoplastique.

**Mots clés** (lexique CEDOCAR) : Composites - Métalliques - Comportement - Macroscopique - Viscoplasticité - Homogénéisation - Localisation.

## MICROSCOPIC AND MACROSCOPIC BEHAVIOR OF A METAL MATRIX COMPOSITE

**ABSTRACT :** A thermoviscoplastic model is presented to characterize the macroscopic behavior of a Metal Matrix Composite (MMC) reinforced with short fibers. This analysis is based on experimental data and numerical results in order to build up the theoretical model.

The experimental analysis is performed with cycling loadings and with tension-compression tests at several temperatures and for different material directions. It allows to observe the evolution of the elastic domain with temperature, time and plastic strain.

The numerical analysis performed in viscoplasticity on a unit cell using the Finite Element Method (FEM), gives informations about the residual stresses and plasticity in the material after the manufacturing thermal process. The macroscopic response is then studied for different loading paths.

The theoretical model is based on homogenization techniques like the homogenization of a periodic media, the self-consistent method and the transformation concentration factor tensors developed by Dvorak. These methods allow to correlate the overall and local mechanical variables together. A simplified version degenerates into a purely macroscopic constitutive model.

The macroscopic constitutive equations in thermo-elasto-viscoplasticity are based on a non-linear kinematic hardening and takes into account, on one hand, the effects and the evolution of the initial back stress and, on the second hand, the initial anisotropy of the material and its evolution during a viscoplastic flow.

**Keywords** (NASA-thesaurus) : Composites - Metallic - Behavior - Macroscopic - Viscoplasticity - Homogenization - Localization.

**ONERA**

RELATIONS EXTÉRIEURES ET DOCUMENTATION  
BP72 F-92322 CHATILLON CEDEX