



**HAL**  
open science

# Modélisation des milieux à microstructure : approches par la méthode des puissances virtuelles

Philippe Tamagny

► **To cite this version:**

Philippe Tamagny. Modélisation des milieux à microstructure : approches par la méthode des puissances virtuelles. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1996. Français. NNT : . tel-00523015

**HAL Id: tel-00523015**

**<https://pastel.hal.science/tel-00523015>**

Submitted on 4 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NS 22726(4)

X

**THÈSE**  
**présentée pour l'obtention du diplôme de**  
**DOCTEUR**  
**DE**  
**DE L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES**

**Spécialité : Structures et Matériaux**

**présentée par :**

**Philippe TAMAGNY**

**Sujet de la thèse :**

**MODÉLISATION DES MILIEUX À MICROSTRUCTURE :  
APPROCHES PAR LA MÉTHODE DES PUISSANCES  
VIRTUELLES**

**Soutenu , le 12 Décembre 1996  
devant le jury composé de :**

**Président : P. ROUGEE**

**Directeur de thèse : A. EHRLACHER**

**Rapporteurs : K. DANG VAN  
M. FREMONT**

**Examineurs : G. CAPRIZ  
J. SULEM**

08



## REMERCIEMENTS

Ce travail doit tout à Alain Ehrlacher, qui en a été tout à la fois l'initiateur, le directeur et le moteur tout au long de ces – quelques – dernières années.

Travailler avec Alain est une expérience unique; son incroyable puissance de travail est pour moi un constant sujet d'étonnement (et d'épuisement, parfois). Le foisonnement et la profondeur de ses idées, étayées par ses vastes connaissances en mécanique et une rigueur intellectuelle sans faille, lui permettent de diriger avec compétence un nombre toujours croissant de projets de recherche, dans des domaines extrêmement variés. Il a apporté à l'encadrement de ma thèse un enthousiasme et une confiance qui n'ont jamais faibli. Plus que tout, il m'a appris que la recherche doit être, avant toute chose, une aventure.

*Merci Alain. Puisse cette aventure continuer longtemps encore !*

Ma gratitude va également au professeur Rougée, qui fut un président de jury bienveillant et passionné, dont le “ il faut s'aérer la tête et vivre dans les étoiles ” restera à jamais gravé dans ma mémoire.

Les professeurs Frémond et Dang-van ont eu la patience – ou l'obstination – de disséquer ce manuscrit imparfait. Qu'ils soient tous deux remerciés pour la richesse de leurs commentaires et pour l'indulgence dont ils ont bien voulu faire part.

Jean Sulem m'a fait l'amitié de participer à ce jury. Je l'en remercie, ainsi que pour ses suggestions quant aux développements futurs de ces travaux.

Les travaux sur les milieux à microstructure du professeur Capriz, de l'université de Pise, ont été pour moi un guide précieux. Retenu à Pise au dernier moment, alors qu'il avait accepté de siéger dans ce jury, je lui sais gré d'avoir eu la gentillesse de transmettre par écrit ses remarques sur ce travail.

Le support financier de cette thèse a été en grande partie assuré par le ministère de la recherche, via le ministère de l'équipement et l'école des ponts. Je remercie tout particulièrement Hervé Mathieu, directeur de la recherche à l'école, pour son dynamisme et sa foi dans la recherche à l'école, qui ont rendu ce recrutement possible, et pour la confiance qu'il a bien voulu m'accorder.

Merci bien entendu à tous mes amis du CERAM. Merci à Taïeb, à Jo, à Amina, qui avez accepté de me décharger de la majeure partie de mon travail de directeur-adjoint du CERAM pendant ces deux dernières années. Merci à Armelle, Djaz, Gilles, Jean-François, Karam, Maurice et tous les autres ; vous avez su faire de ce labo une équipe chaleureuse et soudée. Je n'oublierai pas les longues nuits d'usinages de nos semaines “européennes”, pas plus que nos premiers prototypes de raquettes ...

Merci surtout à Valérie pour ta présence et ton soutien sans faille, qui m'ont si souvent réconforté dans les moments difficiles de la rédaction de ce mémoire.

Armand, Félix, Louis, je vous dédie ces longues années de thèse, qui vous ont vu naître et grandir. Votre présence à l'exposé final de ce mémoire a été une grande joie pour moi.



*Lorsqu'on a un marteau pour seul outil,  
tous les problèmes commencent  
à ressembler à des clous.*

**Stéphane Gourichon**



# Résumé

La première partie du mémoire est consacrée à une étude bibliographique. Après un rapide aperçu historique des travaux portant sur les milieux à microstructure, une étude de la théorie des matériaux simples de W. Noll est présentée, ainsi qu'un exposé des travaux de G. Capriz sur les matériaux à microstructure.

On introduit ensuite les notions d'univers d'observation "profond", de microplacement et de macroplacement dans cet univers d'un ensemble de particules. Les propriétés de ces placements conditionnent les définitions des milieux monoparticulaires, multiparticulaires, multiconstituants ou multiphasiques que l'on donne. On décrit les propriétés cinématiques et dynamiques de ces milieux. On propose l'introduction d'un champ de fonctions de phase pour traiter les problèmes de changements de phases.

Deux approches complémentaires pour obtenir les équations d'équilibre d'un milieu multiparticulaire à microstructure sont ensuite mises en œuvre, en s'intéressant plus particulièrement aux milieux de Cosserat multiparticulaires (distribution continue d'orientation de trièdres au même point de l'espace physique).

Le chapitre IV consiste en un exposé complet d'une méthode de changement d'échelle apparentée aux outils classiques de l'homogénéisation que nous nommons globalisation. Cette méthode permet, par défocalisation d'un milieu à microstructure "classique", de déduire les équations d'équilibre macro des équations d'équilibre du milieu initial. L'intérêt réside dans l'identification physique des grandeurs constitutives du milieu macro à partir des grandeurs constitutives du milieu micro. La démarche est menée à terme dans le cadre général des microstructures sur lesquelles l'action du groupe des rotations de  $\mathbb{R}^3$  est transitive.

La fin du mémoire apporte quelques indications sur l'ébauche d'une méthode de détermination du comportement d'un milieu multiparticulaire à partir de la globalisation des principales équations de bilan du milieu micro.



# Abstract

The first part (chapt. 1) of this Ph.D. thesis is dedicated to a bibliographic analysis. A rapid survey of the main works on the topic of continua with microstructure is used as an introduction to the simple materials theory of W. Noll and to a short exposition of the works of G. Capriz.

The next step (chapt. 2) consists in the explanation of the “deep” space notion and of the relevant microplacement and macroplacement of a set of particles in that deep space. The properties of these placements determine the definitions of each continuum: monoparticular, multiparticular, multiconstituents or multiphasic. We give the cinematic and dynamic properties of those continua, and propose the possibility for the use of a phase functions field to deal with the evolution of the phases.

Two different ways (chapt.3) are proposed to write the field and boundary equations of a multiparticular continuum with microstructure. The aim is to describe the equilibrium state of a Cosserat multiparticular continuum – i. e. a continuum in each point of which a continuum of triads is to be considered –.

Chapter four is the exposition of a new micro-macro transformation method which we named “globalization.” This one is derived from the classical homogenization methods. It consists in defocusing a classical continua with microstructure (monoparticular), in order to obtain either the equilibrium equations or the constitutive variables of the macro continua from those of the initial medium. The method is developed for the case of microstructures represented in a manifold on which the action of the group of the rotations of the three dimensional Euclidean space is transitive.

The end of the report (chapt. 5) deals with a few proposals to try to determine the behavior – in relation with the behavior of the micro-continuum. – of such multiparticular continua with microstructure.



# TABLE DES MATIERES

|  |           |
|--|-----------|
| <b>INTRODUCTION</b>                              | <b>1</b>  |
| <b>CHAPITRE I</b>                                |           |
| <b>BIBLIOGRAPHIE</b>                             | <b>5</b>  |
| <b>I.1 Motivation</b>                            | <b>7</b>  |
| <b>I.2 Aperçu historique</b>                     | <b>7</b>  |
| <b>I.3 La théorie des matériaux simples</b>      | <b>8</b>  |
| I.3.1 L'élément de corps                         | 9         |
| I.3.2 L'élément matériel                         | 12        |
| I.3.2.1 Les contraintes                          | 13        |
| I.3.2.2 L'état d'un élément de corps             | 13        |
| I.3.2.3 L'élément matériel                       | 14        |
| I.3.3 Les développements                         | 17        |
| <b>I.4 Les milieux continus à microstructure</b> | <b>18</b> |
| I.4.1 Le modèle de microstructure                | 18        |
| I.4.2 Le changement d'observateur                | 21        |
| I.4.3 Mouvement et vitesses                      | 22        |
| I.4.4 Energie cinétique et inerties              | 22        |
| I.4.5 Equations de bilan                         | 23        |
| I.4.6 Les milieux continus de Cosserat           | 25        |
| <b>I.5 Conclusion</b>                            | <b>26</b> |

## CHAPITRE II

|   |           |
|---|-----------|
| <b>LES MILIEUX A MICROSTRUCTURE</b>                         | <b>27</b> |
| <b>II.1 Les milieux monoparticulaires à microstructure</b>  | <b>29</b> |
| II.1.1 L'ensemble des particules                            | 29        |
| II.1.2 L'univers d'observation                              | 29        |
| II.1.2.1 Espace physique                                    | 30        |
| II.1.2.2 Ensemble des microstructures                       | 30        |
| II.1.3 Les placements                                       | 31        |
| II.1.4 La cinématique réelle                                | 33        |
| II.1.5 La cinématique virtuelle                             | 34        |
| II.1.6 La masse   | 37        |
| <b>II.2 Les milieux multiparticulaires à microstructure</b> | <b>38</b> |
| II.2.1 L'observation et les placements                      | 38        |
| II.2.2 Cinématique réelle et cinématique virtuelle          | 39        |
| II.2.3 La masse   | 41        |
| <b>II.3 Les milieux multiconstituants</b>                   | <b>42</b> |
| II.3.1 Univers d'observation                                | 42        |
| II.3.2 Placements   | 43        |
| II.3.3 Cinématique réelle et virtuelle                      | 44        |
| II.3.4 La masse   | 44        |
| <b>II.4 Les milieux multiphasiques</b>                      | <b>45</b> |
| II.4.1 L'univers d'observation et les placements            | 46        |
| II.4.2 La fonction d'état des particules                    | 47        |
| II.4.3 Cinématique réelle et virtuelle                      | 48        |
| II.4.4 La masse   | 48        |
| <b>II.5 Conclusion</b>                                      | <b>49</b> |

## CHAPITRE III

|   |           |
|---|-----------|
| <b>ECRITURE DES EQUATIONS D'EQUILIBRE</b>   | <b>51</b> |
| <b>III.1 Motivation</b>   | <b>53</b> |
| <b>III.2 Hypothèses physiques sous-jacentes à une théorie au premier gradient</b> | <b>55</b> |
| III.2.1 Les milieux de Cauchy   | 55        |
| III.2.1.1 Equations d'équilibre   | 61        |
| III.2.2 Les milieux de Cosserat   | 62        |
| III.2.2.1 Equations d'équilibre   | 64        |
| III.2.3 Les milieux de Cosserat multiparticulaires                                | 67        |
| III.2.3.1 Equations d'équilibre   | 71        |
| <b>III.3 Approche par les puissances virtuelles</b>                               | <b>77</b> |
| III.3.1 Formes des puissances virtuelles  | 77        |
| III.3.2 Changement d'observateur  | 79        |
| III.3.3 Objectivité de la puissance des efforts intérieurs                        | 80        |
| III.3.4 Equations d'équilibre   | 82        |
| III.3.5 Les milieux de Cosserat   | 83        |

## CHAPITRE IV

|   |           |
|---|-----------|
| <b>GLOBALISATION DES EQUATIONS D'EQUILIBRE</b>    | <b>87</b> |
| <b>IV.1 Principes du changement d'échelle</b>     | <b>89</b> |
| IV.1.1 Le concept d'observation                   | 89        |
| IV.1.2 Un exemple élémentaire: les milieux à spin | 93        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>IV.2 Fonctions d'observation</b>                    | <b>98</b>  |
| IV.2.1 Observation de l'espace euclidien               | 99         |
| IV.2.2 Observation de la microstructure                | 100        |
| IV.2.2.1 Décomposition de la microstructure            | 100        |
| IV.2.2.2 Décomposition de la fonction d'observation    | 102        |
| <b>IV.3 Les microstructures d'orientation</b>          | <b>103</b> |
| IV.3.1 Les milieux de Cosserat                         | 103        |
| IV.3.2 Les milieux de type cristaux liquides           | 106        |
| IV.3.3 Cas général des microstructures transitives     | 109        |
| IV.3.4 Dérivation temporelle                           | 112        |
| IV.3.5 Plongement de $\mathcal{M}$ dans $SO(3)$        | 113        |
| <b>IV.4 Les milieux de Cosserat multiparticulaires</b> | <b>116</b> |

## CHAPITRE V

|  |            |
|--|------------|
| <b>GLOBALISATION DES EQUATIONS DE BILAN<br/>D'UN MILIEU A MICROSTRUCTURE<br/>D'ORIENTATION</b> | <b>119</b> |
|--|------------|

|  |            |
|--|------------|
| <b>V.1 Globalisation d'une équation de bilan</b> | <b>121</b> |
| <b>V.2 Bilan de masse</b>                        | <b>123</b> |
| <b>V.3 Bilan de quantité de mouvement</b>        | <b>125</b> |
| <b>V.4 Conservation de l'énergie</b>             | <b>129</b> |

|                                    |            |
|------------------------------------|------------|
| <b>CONCLUSION</b>                  | <b>133</b> |
| <b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b> | <b>137</b> |
| <b>ANNEXE</b>                      | <b>143</b> |



# TABLE DES MATIERES

|  |           |
|--|-----------|
| <b>INTRODUCTION</b>                              | <b>1</b>  |
| CHAPITRE I                                       |           |
| <b>BIBLIOGRAPHIE</b>                             | <b>5</b>  |
| <b>I.1 Motivation</b>                            | <b>9</b>  |
| <b>I.2 Aperçu historique</b>                     | <b>9</b>  |
| <b>I.3 La théorie des matériaux simples</b>      | <b>10</b> |
| I.3.1 L'élément de corps                         | 11        |
| I.3.2 L'élément matériel                         | 14        |
| I.3.2.1 Les contraintes                          | 15        |
| I.3.2.2 L'état d'un élément de corps             | 15        |
| I.3.2.3 L'élément matériel                       | 16        |
| I.3.3 Les développements                         | 18        |
| <b>I.4 Les milieux continus à microstructure</b> | <b>20</b> |
| I.4.1 Le modèle de microstructure                | 20        |
| I.4.2 Le changement d'observateur                | 23        |
| I.4.3 Mouvement et vitesses                      | 24        |
| I.4.4 Energie cinétique et inerties              | 24        |
| I.4.5 Equations de bilan                         | 25        |
| I.4.6 Les milieux continus de Cosserat           | 27        |
| <b>I.5 Conclusion</b>                            | <b>28</b> |

## CHAPITRE II

|   |           |
|---|-----------|
| <b>LES MILIEUX A MICROSTRUCTURE</b>                         | <b>29</b> |
| <b>II.1 Les milieux monoparticulaires à microstructure</b>  | <b>33</b> |
| II.1.1 L'ensemble des particules                            | 33        |
| II.1.2 L'univers d'observation                              | 33        |
| II.1.2.1 Espace physique                                    | 34        |
| II.1.2.2 Ensemble des microstructures                       | 34        |
| II.1.3 Les placements                                       | 35        |
| II.1.4 La cinématique réelle                                | 37        |
| II.1.5 La cinématique virtuelle                             | 38        |
| II.1.6 La masse   | 41        |
| <b>II.2 Les milieux multiparticulaires à microstructure</b> | <b>42</b> |
| II.2.1 L'observation et les placements                      | 42        |
| II.2.2 Cinématique réelle et cinématique virtuelle          | 43        |
| II.2.3 La masse   | 45        |
| <b>II.3 Les milieux multiconstituants</b>                   | <b>46</b> |
| II.3.1 Univers d'observation                                | 46        |
| II.3.2 Placements   | 47        |
| II.3.3 Cinématique réelle et virtuelle                      | 48        |
| II.3.4 La masse   | 48        |
| <b>II.4 Les milieux multiphasiques</b>                      | <b>49</b> |
| II.4.1 L'univers d'observation et les placements            | 50        |
| II.4.2 La fonction d'état des particules                    | 51        |
| II.4.3 Cinématique réelle et virtuelle                      | 52        |
| II.4.4 La masse   | 52        |
| <b>II.5 Conclusion</b>                                      | <b>53</b> |

## CHAPITRE III

|   |           |
|---|-----------|
| <b>ECriture DES EQUATIONS D'EQUILIBRE</b>   | <b>55</b> |
| <b>III.1 Motivation</b>   | <b>59</b> |
| <b>III.2 Hypothèses physiques sous-jacentes à une théorie au premier gradient</b> | <b>61</b> |
| III.2.1 Les milieux de Cauchy   | 61        |
| III.2.1.1 Equations d'équilibre   | 67        |
| III.2.2 Les milieux de Cosserat   | 68        |
| III.2.2.1 Equations d'équilibre   | 70        |
| III.2.3 Les milieux de Cosserat multiparticulaires                                | 73        |
| III.2.3.1 Equations d'équilibre   | 77        |
| <b>III.3 Approche par les puissances virtuelles</b>                               | <b>83</b> |
| III.3.1 Formes des puissances virtuelles  | 83        |
| III.3.2 Changement d'observateur  | 85        |
| III.3.3 Objectivité de la puissance des efforts intérieurs                        | 86        |
| III.3.4 Equations d'équilibre   | 88        |
| III.3.5 Les milieux de Cosserat   | 89        |

## CHAPITRE IV

|   |           |
|---|-----------|
| <b>GLOBALISATION DES EQUATIONS D'EQUILIBRE</b>    | <b>93</b> |
| <b>IV.1 Principes du changement d'échelle</b>     | <b>97</b> |
| IV.1.1 Le concept d'observation                   | 97        |
| IV.1.2 Un exemple élémentaire: les milieux à spin | 101       |

|  |            |
|--|------------|
| <b>IV.2 Fonctions d'observation</b>                    | <b>106</b> |
| IV.2.1 Observation de l'espace euclidien               | 107        |
| IV.2.2 Observation de la microstructure                | 108        |
| IV.2.2.1 Décomposition de la microstructure            | 108        |
| IV.2.2.2 Décomposition de la fonction d'observation    | 110        |
| <b>IV.3 Les microstructures d'orientation</b>          | <b>111</b> |
| IV.3.1 Les milieux de Cosserat                         | 111        |
| IV.3.2 Les milieux de type cristaux liquides           | 114        |
| IV.3.3 Cas général des microstructures transitives     | 117        |
| IV.3.4 Dérivation temporelle                           | 120        |
| IV.3.5 Plongement de $\mathcal{M}$ dans $SO(3)$        | 121        |
| <b>IV.4 Les milieux de Cosserat multiparticulaires</b> | <b>124</b> |

## CHAPITRE V

# GLOBALISATION DES EQUATIONS DE BILAN D'UN MILIEU A MICROSTRUCTURE D'ORIENTATION

127

|  |            |
|--|------------|
| <b>V.1 Globalisation d'une équation de bilan</b> | <b>131</b> |
| <b>V.2 Bilan de masse</b>                        | <b>133</b> |
| <b>V.3 Bilan de quantité de mouvement</b>        | <b>135</b> |
| <b>V.4 Conservation de l'énergie</b>             | <b>139</b> |

|                                    |            |
|------------------------------------|------------|
| <b>CONCLUSION</b>                  | <b>143</b> |
| <b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b> | <b>147</b> |
| <b>ANNEXE</b>                      | <b>153</b> |



# INTRODUCTION

## Objectifs du travail

Le propos de ce travail de thèse est d'apporter une contribution à la modélisation mécanique des milieux dits "à microstructure". Il trouve son origine dans les travaux de M. Brocato et A. Ehrlacher sur un modèle thermo-mécanique de polycristal adapté à la prédiction de l'apparition et de la propagation de bandes de cisaillement dans les alliages d'aluminium et de magnésium, et plus précisément dans la nécessité où ils se sont trouvés de devoir décrire le comportement de ces agrégats polycristallins dans un univers d'observation plus "profond" que l'espace euclidien de dimension trois qui sert de trame aux développements de la mécanique des milieux continus.

De nombreux problèmes similaires sont au cœur de l'activité de recherche et de développement en mécanique. L'apparition ou l'utilisation de plus en plus fréquente de matériaux "nouveaux"; matériaux composites, bi-matériaux, fluides ou solides électro - ou magnéto-rhéologiques, cristaux liquides, matériaux à mémoire de forme entraînent un besoin de compréhension approfondie de leurs propriétés microstructurales, qui jouent souvent un rôle prépondérant dans leur comportement mécanique macroscopique.

Le principe général proposé par Brocato est de placer les objets matériels, lorsque les modèles classiques s'avèrent inopérants, dans le produit cartésien de l'espace euclidien et d'une variété différentielle de dimension finie représentant l'ensemble des valeurs possibles de la microstructure. La construction du modèle mécanique peut alors être faite de manière habituelle, que ce soit à l'aide des équations de bilan ou par une méthode basée sur le principe des puissances virtuelles.

Le caractère (relativement) abstrait de cette méthode ne doit pas en cacher les fondements physiques. Le monde des mécaniciens utilise très largement les concepts de la géométrie différentielle, comme nous le verrons au cours des divers développements de ce mémoire. Nous allons donc nous attacher à donner un cadre précis à ces méthodes, que ce soit au niveau de la définition des concepts de base - milieux mono ou multiparticulaires, univers d'observation, point matériel - qu'en ce qui concerne l'analyse physique des grandeurs constitutives introduites dans un modèle. Nous analyserons en particulier le concept de méthode au premier gradient, ce qui nous permettra de tirer quelques conclusions sur le domaine d'applicabilité de ces méthodes.

Nous exposerons également une méthode de passage micro-macro adaptée à ce type de milieux, que nous appelons globalisation.

La méthodologie d'ensemble est donc la suivante:

- ① descriptions géométriques et cinématiques des milieux à microstructure
- ② écriture des équations d'équilibre au premier gradient
- ③ passage micro-macro et identification des grandeurs constitutives introduites au niveau macroscopique.

Les milieux continus de Cosserat serviront d'illustration dans la plupart des cas. Nous construisons ainsi, au long des différents chapitres de la thèse, un modèle mécanique de milieux de Cosserat multiparticulaires, qui semble être, sous certaines réserves portant d'une part sur la continuité de l'orientation locale (chapitre I), et d'autre part sur la localisation de l'interaction entre grains proches sur les grains d'orientation voisine (chapitre II), un modèle prometteur pour l'étude, par exemple, de la texturation des polycristaux sous chargement mécanique ou thermique.

Signalons enfin que notre objectif est l'obtention des équations d'équilibre et que nous nous intéressons peu au comportement des matériaux que nous étudions. Nous donnons au chapitre V quelques indications sur la construction de la thermodynamique macroscopique à partir des énergies microscopiques, qui permettent d'identifier le comportement macroscopique si on suppose le comportement connu au niveau micro.

## plan du mémoire

La première partie du mémoire est consacrée à une étude bibliographique. Après un rapide aperçu historique des travaux portant sur les milieux à microstructure, une étude de la théorie des matériaux simples de W. Noll est présentée. Elle sert de guide aux développements du chapitre deux. On présente également un exposé des travaux de G. Capriz sur les matériaux à microstructure, qui servent de base aux chapitres III et IV.

Le deuxième chapitre introduit les notions d'univers d'observation "profond", de microplacement et de macroplacement dans cet univers d'un ensemble de particules. Les propriétés de ces placements conditionnent les définitions des milieux monoparticulaires, multiparticulaires, multiconstituants ou multiphasiques que l'on donne. On décrit les propriétés cinématiques et dynamiques de ces milieux, en introduisant les champs de macrovitesse et de microvitesse, réelles ou virtuelles, et les champs d'accélération et de masse hypervolumique. On propose l'introduction d'un champ de fonctions de phase pour traiter les problèmes de changements de phases.

Le troisième chapitre propose deux approches complémentaires pour obtenir les équations d'équilibre d'un milieu multiparticulaire à microstructure. Après un rappel des principaux travaux sur le principe des puissances virtuelles, on développe une méthode de construction des équations d'un milieu tridimensionnel classique (milieu de Cauchy), puis d'un milieu de

Cosserat “classique”, puis enfin d’un milieu de Cosserat multiparticulaire (distribution continue d’orientation de trièdres au même point de l’espace physique).

Cette deuxième partie du chapitre III s’inspire fortement des concepts de la *mécanique physique* du XIX<sup>ème</sup> siècle, et reprend dans un cadre continu les idées que Cauchy a développées dans le tome 3 de ces *Exercices de Mathématique* paru en 1828. Le point de départ est en effet le postulat de l’existence de forces interparticulaires, que nous définissons comme un champ sur l’univers et non pas comme une action entre particules discrètes. On y retrouve un lointain écho des querelles qui ont agité le monde scientifique tout au long de la première partie du XIX<sup>ème</sup> entre les partisans de la théorie moléculaire de l’élasticité développée par Navier, Cauchy et Poisson (parmi lesquels, d’ailleurs, A. Barré de Saint-Venant) et les partisans d’une vision continue du monde: Green (théorie du potentiel) ou Lagrange (deuxième édition de la *Mécanique Analytique*, 1811). Ce travail emprunte aux uns -les efforts entre particules- et aux autres -la notion de vitesse virtuelle-.

La dernière partie du chapitre est une application de la méthode des puissances virtuelles étendue au cas des milieux multiparticulaires à microstructure. Le concept de mouvement rigidifiant y est abandonné au profit de celui de changement d’observateur, qui permet de faire appel plus rigoureusement aux outils de la géométrie différentielle, et en particulier à la notion de générateur infinitésimal de l’action d’un groupe de transformation sur une variété différentielle. Nous verrons que cette vision modifie légèrement l’approche habituelle, même dans le cas des milieux continus classiques.

Le chapitre IV consiste en un exposé complet d’une méthode de changement d’échelle apparentée aux outils classiques de l’homogénéisation que nous nommons **globalisation**. Cette méthode permet, par défocalisation d’un milieu à microstructure “classique”, de déduire les équations d’équilibre macro des équations d’équilibre du milieu initial. L’intérêt réside dans l’identification physique des grandeurs constitutives du milieu macro à partir des grandeurs constitutives du milieu micro.

On explique le principe et les motivations de la méthode dans la première partie du chapitre, en donnant quelques exemples de transformation d’une équation d’équilibre dans des cas particuliers. On montre ainsi que le point délicat réside dans la globalisation des opérateurs de différentiation temporelle ou en espace (divergence).

On montre alors, dans la deuxième partie du chapitre, la forme générale de la transformation de ces opérateurs dans le cas de microstructures sur lesquelles l’action du groupe des rotations de  $\mathbb{R}^3$  est transitive (toute microstructure se déduit d’une microstructure de base par rotation), ce qui est le cas général des milieux micropolaires.

On conclut ce chapitre en appliquant les résultats précédents aux milieux de Cosserat multiparticulaires, et en comparant l’ensemble des résultats obtenus par les trois méthodes:

- approche “à la Cauchy”
- méthode des puissances virtuelles
- globalisation

Le dernier chapitre du mémoire apporte quelques indications sur l'ébauche d'une méthode de détermination du comportement d'un milieu multiparticulaire à partir de la globalisation des principales équations de bilan du milieu micro -bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie- et conduit à l'écriture des équations de bilan macro, ainsi qu'à la détermination de certaines grandeurs énergétiques macro.

La conclusion du mémoire reprend les principaux résultats obtenus et préconise un certain nombre de voies potentielles d'approfondissements de ces travaux. On propose en particulier le développement d'un logiciel de calcul d'un assemblage important de polycristaux plans, sur le modèle du polylamelle [Brocato, Tamagny & Ehrlacher, 1995], prenant en compte l'orientation locale des grains et permettant de prédire l'évolution de la texture sous chargement thermomécanique.

On trouvera en annexe un développement sur la méthode des puissances virtuelles basé sur la notion de puissance virtuelle d'une partie de l'univers dans un champ de vitesse de celui-ci. On peut ainsi introduire des champs d'effort globaux sur un corps  $\mathcal{C}$ , parmi lesquels on distingue les efforts intérieurs grâce au principe d'objectivité de la puissance des efforts intérieurs, les efforts extérieurs apparaissant comme orthogonaux des efforts intérieurs, en un sens que l'on précise.

## CHAPITRE I

# BIBLIOGRAPHIE

*L'objet de ce premier chapitre est de donner un bref aperçu des travaux et théories développés autour du thème général de la formulation des modèles de milieux continus à microstructure. Nous nous attacherons plus précisément aux travaux de W. NOLL et G. CAPRIZ, tout-au-moins de ceux qui rentrent dans le cadre de ce mémoire. Nous allons ainsi exposer la "Théorie des Matériaux Simples" de Walter Noll, en nous appuyant essentiellement sur l'exposé qu'il en a fait dans *Archive for Rational Mechanics and Analysis* en 1972 [Noll 1972]. Nous détaillerons également l'approche de Gianfranco Capriz des "Milieux Continus à Microstructure"[Capriz 1989]. Notre ambition est de mettre en évidence, autant que possible, les diverses questions que soulèvent ces théories, questions auxquelles nous essaierons dans la suite du mémoire d'apporter une réponse, tout en exhibant la structure de la construction de ces modèles, structure que nous utiliserons pour notre propre approche.*



|  |           |
|--|-----------|
| <b>I.1 Motivation</b>                            | <b>9</b>  |
| <b>I.2 Aperçu historique</b>                     | <b>9</b>  |
| <b>I.3 La théorie des matériaux simples</b>      | <b>10</b> |
| I.3.1 L'élément de corps                         | 11        |
| I.3.2 L'élément matériel                         | 14        |
| I.3.2.1 Les contraintes                          | 15        |
| I.3.2.2 L'état d'un élément de corps             | 15        |
| I.3.2.3 L'élément matériel                       | 16        |
| I.3.3 Les développements                         | 19        |
| <b>I.4 Les milieux continus à microstructure</b> | <b>20</b> |
| I.4.1 Le modèle de microstructure                | 20        |
| I.4.2 Le changement d'observateur                | 23        |
| I.4.3 Mouvement et vitesses                      | 24        |
| I.4.4 Energie cinétique et inerties              | 24        |
| I.4.5 Equations de bilan                         | 25        |
| I.4.6 Les milieux continus de Cosserat           | 27        |
| <b>I.5 Conclusion</b>                            | <b>28</b> |



## I.1 Motivation

L'ensemble de ce mémoire traite de la problématique générale de la construction de modèles mécaniques de milieux à microstructure, milieux plus complexes que le milieu continu tridimensionnel classique (milieu de Cauchy), d'autant plus que nous nous intéresserons essentiellement à des milieux **multiparticulaires**, c'est-à-dire des milieux tels qu'en chaque point de l'espace euclidien se trouvent plusieurs particules dans des états microstructuraux différents. Les matériaux polycristallins donnent un bon exemple de milieux de ce type, la vision macro d'un métal (volume de quelques millimètres cubes) cachant une grande complexité de la structure, avec la coexistence dans ce volume réduit de plusieurs centaines de grains, chacun possédant sa propre orientation.

L'objectif de cette première partie est donc double. Il s'agit d'une part d'exposer les travaux ayant trait à l'analyse des milieux à microstructure, le formalisme que nous développerons s'inspirant très fortement de certains de ceux-ci, et en particulier des travaux de G. Capriz. Nous aurons d'autre part besoin de nous appuyer sur un formalisme rigoureux pour introduire les notions nouvelles liées aux milieux multiparticulaires. Nous avons choisi de nous placer dans un cadre axiomatique similaire à celui de W. Noll, et nous présentons donc ceux de ces travaux qui nous seront nécessaires.

## I.2 Aperçu historique

On peut vraisemblablement attribuer aux frères Eugène et François Cosserat, au début du vingtième siècle, la première modélisation de "milieux à microstructures", au sens où nous l'entendons actuellement. Les milieux micropolaires auxquels ils se sont intéressés dans leur traité "Sur la Théorie des Corps Déformables" paru en 1909 [Cosserat, 1909] sont les assemblages continus de particules rigides. Chaque particule du corps possède donc une orientation, relativement à un repère fixe de l'espace euclidien. Les mouvements possibles des corps s'enrichissent donc d'un champ de rotation.

Le sujet semble disparaître de la scène scientifique pendant toute la première moitié du siècle. L'émergence des "nouveaux matériaux" à la fin des années 50, entraînant un besoin en modèles mécaniques plus complets, remet le sujet en selle. Sous l'impulsion, entre autres, de Ericksen [Ericksen,1966] sur les problèmes de cristaux liquides, Toupin [Toupin,1962] [Toupin,1964] et Eringen [Eringen, 1965] [Eringen, 1967] sur les milieux micropolaires, Green et Rivlin [Green & Rivlin, 1964] [Green, 1965] sur les milieux multipolaires ou encore Mindlin pour un développement des milieux micromorphiques [Mindlin, 1964], de nombreuses publications traitant de sujets très directement liés aux milieux à microstructures

paraissent entre 1960 et 1970. Un symposium organisé par l'IUTAM a lieu à Stuttgart et Freudenstadt en 1967, dont les actes, publiés l'année suivante, regroupent l'essentiel des contributions des années 60; les auteurs déjà cités [Eringen, 1968], [Green & Naghdi, 1968], [Rivlin, 1968], ainsi que Grioli [Grioli, 1968], Hermann et Achenbach, qui proposent une des premières approches microstructurales des matériaux composites [Hermann & Achenbach, 1968], Mindlin, pour une théorie du polycristal [Mindlin, 1968], ou encore Stojanovic, Teodosiu ou Toupin, sur les dislocations dans des milieux élastiques [Stojanovic, 1968] [Teodosiu, 1968][Toupin, 1968].

L'activité sur le sujet semble se ralentir pendant les années 1970, peut-être en partie à cause du développement rapide des méthodes d'homogénéisation, plus prometteuses quant aux applications; théorie systématique de Kröner [Kröner, 1980], méthodes auto-cohérentes de Zaoui et Berveiller [Berveiller & Zaoui, 1979], application de la méthode des moyennes aux milieux continus hétérogènes [Suquet, 1982], développements asymptotiques [Bensoussan, Lions & Papanicolau, 1978] entre autres. Elle reprend à partir du début des années 80, avec des champs d'applications plus variés: milieux granulaires, effets electro-magneto-mécaniques [Maugin & Eringen, 1977] [Maugin, 1980], problème de localisation en plasticité des métaux [Dietsche, Steinmann & Willam, 1993] ou dans les roches [Okui, Horii & Akiyama, 1993] et conduit d'une part à l'intégration de modèle de milieux micropolaires dans des codes de calculs [de Borst & Mühlhaus, 1992] et d'autre part à des tentatives de déterminations expérimentales de caractéristiques mécaniques propres à des milieux continus généralisés; constantes élastiques de Cosserat de mousses de polyuréthane [Lakes, 1986], effets d'échelles dans des plaques de composites carbone-époxy [Awerbuch & Madhukar, 1985].

Le formalisme que nous allons introduire s'inspire principalement de la théorie des matériaux simples de Noll pour ce qui concerne la description géométrique et cinématique du milieu, et de ceux de Capriz pour l'approche microstructurale. Nous allons donc exposer l'essentiel de ces deux théories dans la suite de ce chapitre.

### **I.3 La théorie des matériaux simples**

W. Noll a développé, dans une série d'articles parus entre 1958 et 1973 [Noll 1958, 1962, 1967][Coleman and Noll 1959], une théorie mathématique complète et rigoureuse des matériaux "simples". dont la version la plus aboutie est sans nul doute celle qu'il expose dans [Noll 1972]. Son but est de proposer une théorie unifiée des diverses théories du comportement mécanique des matériaux. Sa démarche est de nature essentiellement descriptive, au sens où il s'attache à donner une définition mathématique précise de la

“brique” de base de la construction d’un modèle de milieu continu, qu’il appelle élément matériel. Il introduit d’abord la notion d’**élément de corps**, notion cinématique, locale et intrinsèque, qu’il enrichit ensuite pour définir l’**élément matériel**. L’ajout de restrictions diverses sur les caractéristiques de l’élément matériel permet alors d’introduire les notions de liaison interne, d’uniformité et de symétries matérielles, d’état relâché, d’élasticité (et de semi-élasticité), d’histoire de déformation, de fonctionnelles constitutives, de matériaux “of the rate type”.

### I.3.1 L’élément de corps

On définit classiquement un *corps continu*  $\mathcal{e}$  comme un ensemble, dont nous appelons les éléments  $\alpha$  *particules du corps*<sup>\*</sup>, qui est muni d’une structure particulière par une famille  $\Phi$  de fonctions  $\kappa$ , à image dans un espace euclidien  $\mathcal{E}_\kappa$ .  $\mathcal{E}_\kappa$  est un référentiel. Les fonctions  $\kappa$  sont les *placements possibles* de  $\mathcal{e}$ . L’image  $X = \kappa(\alpha)$  de la particule  $\alpha$  par le placement  $\kappa$  est *la place* de  $\alpha$  dans le référentiel  $\mathcal{E}_\kappa$ .

Les placements sont soumis à un certain nombre de restrictions:

- ① chaque placement est injectif
- ② l’image de  $\mathcal{e}$  par un placement quelconque est un sous-ensemble compact, dont la frontière est de classe  $C^1$  par morceaux
- ③ pour deux placements  $\kappa$  et  $\zeta$  quelconques, il existe un prolongement de  $\zeta \circ \kappa^{-1}$  qui soit un homéomorphisme de  $\mathcal{E}_\kappa$  dans  $\mathcal{E}_\zeta$ .
- ④ si  $\kappa$  est un placement et  $h$  est un homéomorphisme de classe  $C^1$  de  $\mathcal{E}_\kappa$  dans un espace euclidien  $\mathcal{E}$ , alors  $h \circ \kappa$  est un placement dans  $\mathcal{E}$ .

Le point important est que ces placements déterminent sur  $\mathcal{e}$  une structure unique de variété différentielle, et que l’on peut donc considérer en chaque particule  $\alpha$  de  $\mathcal{e}$  l’espace tangent  $T_\alpha \mathcal{e}$ , qui va être l’espace représentatif du voisinage de la particule considérée. Noll choisit donc de décrire le corps à l’aide de l’espace tangent en chacun de ses points, c’est-à-dire d’en donner une description locale au premier ordre, sans prendre en compte, par exemple, la courbure de  $\mathcal{e}$ . C’est une des hypothèses que l’on fait classiquement dans le développement d’une théorie au premier gradient, par exemple.

---

\* W. Noll nomme ces particules “points matériels”. Nous préférons introduire la notion de particules de manière à réserver le terme “matériel” pour la seconde étape de la construction, où nous quittons la cinématique pour parler de matière.

La propriété essentielle de la structure de variété induite sur  $\mathcal{e}$  par les placements est son caractère totalement intrinsèque, au sens où elle est indépendante du référentiel dans lequel est écrit le placement. Plus précisément, Noll introduit pour chaque placement  $\kappa$  une fonction distance sur  $\mathcal{e}$  de la manière suivante:

$$\forall \kappa \in \Phi, \delta_\kappa: \mathcal{e} \times \mathcal{e} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(\mathcal{x}, \mathcal{y}) \mapsto \delta_\kappa(\mathcal{x}, \mathcal{y}) = d_\kappa(\kappa(\mathcal{x}), \kappa(\mathcal{y})) \quad \text{où } d_\kappa \text{ est la distance euclidienne de } \mathcal{E}_\kappa.$$

On note  $\Delta$  l'ensemble de ces distances.

Noll propose alors de prendre comme base de description des corps continus un ensemble  $\Delta$  de distances plutôt qu'un ensemble  $\Phi$  de placements, l'avantage principal de cette description étant que l'ensemble  $\Delta$  ne dépend d'aucun référentiel extérieur à  $\mathcal{e}$ , au contraire des placements de l'ensemble  $\Phi$ .

Les éléments de  $\Delta$  sont appelés **formes possibles** de  $\mathcal{e}$ .

Par localisation de  $\delta$ , on définit en chaque particule  $\mathcal{x}$  une forme bilinéaire symétrique définie positive  $\delta_\mathcal{x}$  sur  $T_\mathcal{x}\mathcal{e}$ , que l'on peut considérer comme un élément de  $\text{Sym}^+(T_\mathcal{x}\mathcal{e}, T_\mathcal{x}\mathcal{e}^*)$ , qui est l'ensemble des applications linéaires  $G$  de  $T_\mathcal{x}\mathcal{e}$  dans son dual  $T_\mathcal{x}\mathcal{e}^*$  telles que:

$$\forall (u, v) \in T_\mathcal{x}\mathcal{e}^2, \langle Gu, v \rangle = \langle Gv, u \rangle$$

$$\forall u \in T_\mathcal{x}\mathcal{e}, \langle Gu, u \rangle > 0 \text{ si } u \neq 0$$

Les formes  $G$  ainsi associées localement à chaque métrique autorisée de  $\mathcal{e}$  sont appelées **configurations de la particule du corps**. C'est à l'évolution de ces configurations que nous allons nous intéresser. On retrouve en effet dans la variation de ces tenseurs métriques la notion intuitive de déformation entre deux placements.

L'ensemble des configurations d'une particule est noté  $\mathcal{G}$ .

Nous avons dit que l'élément de corps que nous cherchons à définir était une notion cinématique. Il est donc maintenant nécessaire de définir la façon dont peuvent évoluer en fonction du temps les grandeurs introduites précédemment. Introduisons la notion de processus.

Soit donc  $\mathcal{G}$  un ensemble. Un **processus** à valeur dans  $\mathcal{G}$ , de durée  $d_g$  ( $d_g \in \mathbb{R}^+$ ), est une fonction  $g$  de l'intervalle de  $\mathbb{R}$   $[0, d_g]$  dans  $\mathcal{G}$ .  $g^i = g(0)$  est la valeur initiale du processus et  $g^f = g(d_g)$  en est la valeur finale.

Un processus constant ( $g_{(t)}(r) = G, \forall r \in [0, t]$ ) est un **gel** en  $G$  de durée  $t$ .

Soit  $g$  un processus de durée  $d_g$ , et soit  $t_1$  et  $t_2$  deux réels tels que  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq d_g$ .

Le processus  $g_{(t_1, t_2)}: \begin{cases} [0, t_2 - t_1] \rightarrow \mathcal{G} \\ t \mapsto g(t + t_1) \end{cases}$  est un segment de  $g$  de durée  $t_2 - t_1$

On définit l'opération de continuation  $\bullet$  de deux processus  $g_1$  et  $g_2$  tels que  $g_1^f = g_2^i$  :

$$(g_1 \bullet g_2)(t) = \begin{cases} g_1(t) & \text{si } t \in [0, d_{g_1}] \\ g_2(t - d_{g_1}) & \text{si } t \in [d_{g_1}, d_{g_1} + d_{g_2}] \end{cases}$$

Nous sommes maintenant à même de donner la définition d'un élément de corps, tel que le fait Noll dans [Noll 1972].

Un **élément de corps** est un triplet  $(T, \mathcal{G}, \Pi)$ ;

$T$  est un espace vectoriel réel de dimension finie (*espace des "vecteurs matériels"*)

$\mathcal{G}$  est un sous-ensemble fermé connexe de  $\text{Sym}^+(T, T^*)$  (*ensemble des configurations*)

$\Pi$  est un ensemble de processus à valeur dans  $\mathcal{G}$  (*ensemble des processus de déformation*) satisfaisant les quatre conditions suivantes;

- ① tout gel à une valeur quelconque  $G$  de  $\mathcal{G}$  appartient à  $\Pi$
- ② si  $g$  appartient à  $\Pi$ , alors tout segment de  $g$  appartient à  $\Pi$
- ③  $\Pi$  est stable par continuation
- ④ il existe au moins un processus reliant deux éléments quelconques de  $\mathcal{G}$

Cette définition est en accord avec le concept de déformation vue comme une mesure de la modification de la métrique locale [Germain 1986].

Une des questions soulevées par ce formalisme réside dans le choix des éléments de  $\mathcal{G}$  qui assurent l'existence d'un placement du corps (vérifiant donc les quatre axiomes caractéristiques des placements des milieux continus) tel que la forme de l'élément de corps considéré soit bien la localisation de ce placement. Autrement dit, peut-on associer à chaque distance  $\delta$  de  $\mathcal{G}$  un placement  $\kappa$  dans un espace euclidien  $\mathcal{E}_\kappa$  tel que la distance euclidienne de  $\mathcal{E}_\kappa$  transportée par  $\kappa^{-1}$  sur  $\mathcal{G}$  coïncide avec  $\delta$ , ou quelles sont les conditions à imposer à  $\delta$  pour que ce soit le cas ?

La compatibilité de ces définitions avec les définitions classiques des divers tenseurs de déformation s'obtient facilement en introduisant le **mouvement** de l'élément de corps. Pour

cela, on considère un espace vectoriel  $V$  muni d'un produit scalaire, de même dimension que  $T$ . Les applications linéaires inversibles de  $T$  dans  $V$ , notées  $k$ , telles que  $k^*k$  soit une configuration de  $T$  sont les placements de  $T$  dans le référentiel  $V$ . On note  $\mathcal{P}_V$  l'ensemble de ces placements, et on montre facilement que  $\mathcal{G} = \{k^*k, k \in \mathcal{P}_V\}$ .

Considérons un processus  $k$  à valeur dans  $\mathcal{P}_V$ . On note  $k^*k$  le processus à valeur dans  $\mathcal{G}$  qui fait correspondre à  $t$  la valeur  $(k^*k)(t) = (k(t))^*(k(t))$ . Si ce processus appartient à  $\Pi$ , alors on dit que c'est un mouvement de  $T$  dans le référentiel  $V$ , et  $k^*k$  est le processus de déformation de  $T$  associé à  $k$ .

On choisit alors un placement de référence  $k_r$ , et on peut introduire, par rapport à ce placement de référence, les tenseurs usuels pour un mouvement quelconque  $k$  de  $T$ . La configuration à l'instant  $t$  dans le mouvement  $k$  est  $C(t) = (k^*k)(t)$ .

- le gradient de la transformation  $\underline{\underline{F}}(t) = k(t)k_r^{-1}$
- le tenseur des dilatations de Cauchy  $\underline{\underline{C}}(t) = k_r^{*-1} k(t)^* k(t) k_r^{-1} = \underline{\underline{F}}(t)^T \underline{\underline{F}}(t)$
- le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\underline{\underline{L}}(t) = 1/2 (\underline{\underline{C}}(t) - \underline{\underline{I}})$
- le tenseur des déformations d'Euler-Almansi  $\underline{\underline{E}}(t) = 1/2 (\underline{\underline{I}} - k(t)^{-*1} k_r^* k_r k(t)^{-1})$

et aussi, sous réserve d'introduire la dérivée "particulaire" de la configuration  $\dot{C}(t)$ ;

- le tenseur des taux de déformations  $\underline{\underline{d}}(t) = k(t)^{-*1} \dot{\underline{\underline{C}}}(t) k(t)^{-1}$

### I.3.2 L'élément matériel

Cette description cinématique de variétés différentielles placées dans un espace euclidien est la base des développements ultérieurs. L'élément de corps doit cependant s'enrichir pour devenir un élément matériel à même de rendre compte de l'évolution d'un objet réel soumis à des sollicitations extérieures. Deux notions supplémentaires doivent alors être introduites: la notion de **contraintes** (ou plus précisément d'efforts intérieurs) et la notion d'**état**.

### 1.3.2.1 Les contraintes

Le concept de tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}^k$  dans un placement  $k$  d'un élément de corps  $T$  dans un référentiel  $V$  comme application linéaire symétrique du dual de  $V$  dans  $V$  (élément de  $(\text{Sym}(V^*,V))$ ) est introduit *a priori*, comme description classique des efforts internes au corps. Il est alors facile, par transport inverse, de définir un tenseur de **contraintes intrinsèque**  $\underline{\underline{s}}$  comme élément de l'espace des applications linéaires symétriques de  $T^*$  dans  $T$  ( $\text{Sym}(T^*,T)$ ) :

$$\underline{\underline{s}} = k^{-1} \underline{\underline{\sigma}}^k k^{*-1}$$

Un couple  $(G,S)$  où  $G$  est un **processus de déformation** (i.e. à valeurs dans  $\mathcal{G}$ ) et  $S$  un **processus de contrainte intrinsèque** (à valeur dans  $\text{Sym}(T^*,T)$ ) de même durée que  $G$ , est un **processus mécanique**.

Si  $G$  et  $S$  sont de classe  $C^1$ , le processus à valeur dans  $\mathbb{R}$ , de même durée que  $G$  et  $S$ , défini par:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{tr}(S\dot{G}) : [0, d_G] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{2} \text{tr} \left( S(t) \cdot \frac{dG}{dt}(t) \right) \end{aligned}$$

est la puissance volumique (par rapport à la configuration  $G(t)$ ) des efforts intérieurs.

Le travail des efforts intérieurs dans le processus mécanique  $(G,S)$  a pour valeur:

$$w = \frac{1}{2} \int_0^{d_G} \text{tr}(S\dot{G})(t) j(t) dt \quad \text{où } j(t) = \sqrt{\det \left( (G^i)^{-1} G(t) \right)}$$

$j(t)$  rend compte de la variation du volume entre la configuration actuelle et la configuration initiale.\*

### 1.3.2.2 L'état d'un élément de corps

Le concept d'état est nécessaire pour définir précisément l'élément matériel. Noll introduit dans un premier temps une notion intuitive de l'état comme représentation de la « situation

---

\* L'approche que nous développons dans la suite du texte repose pour l'essentiel, en ce qui concerne la détermination des efforts et l'écriture des équations d'équilibre, sur la méthode des puissances virtuelles. Notons de suite que l'introduction *a priori* du tenseur des contraintes de Cauchy n'est pas indispensable.

Si on choisit une représentation de la puissance des efforts intérieurs du type forme linéaire sur l'espace des taux de déformation de l'élément ( $\text{Sym}(T,T^*)$ ), on peut, par dualité (dans un espace de dimension finie) introduire directement les efforts intérieurs comme un tenseur du second ordre symétrique.

physique » de l'élément. L'état contient toutes les informations nécessaires sur l'élément. Connaître l'état d'un élément, c'est pouvoir déterminer sa configuration, son tenseur de contraintes et l'évolution de celui-ci si on soumet l'élément à un processus de déformation. Notons tout de suite que l'on peut inclure dans cet état toute information utile pour une prévision de l'évolution de la contrainte qui soit pertinente, c'est-à-dire qui soit conforme à d'éventuelles observations. On peut en particulier inclure dans l'état des données microstructurales si la connaissance de celles-ci s'avère nécessaire et sous réserve de s'assurer de leur caractère intrinsèque. La porosité d'un milieu poreux (variable scalaire indépendante du référentiel) peut faire partie de l'état, l'orientation des particules d'un milieu de Cosserat (variable tensorielle liée au référentiel) ne peut pas en faire partie. Notons également que rien n'interdit d'avoir dans l'état une partie non-locale.

### 1.3.2.3 L'élément matériel

Nous donnons d'abord la définition complète d'un élément matériel. L'écriture des diverses propriétés intervenant dans la définition nécessite l'introduction de notations particulières que nous explicitons par la suite. Nous reprenons ensuite les différents axiomes posés, en essayant d'en expliquer les origines "physiques".

Un élément matériel est un septuple  $(T, \mathcal{G}, \Pi, A, G, S, \rho)$  soumis à six axiomes (A1 à A6). Ces sept éléments sont tels que:

- ①  $(T, \mathcal{G}, \Pi)$  est un élément de corps; c'est l'élément de corps sous-jacent
- ②  $A$  est un ensemble; c'est l'espace des états possibles de  $T$
- ③  $G$  est une fonction de  $A$  dans  $\mathcal{G}$  ( $G$  associe une configuration  $G(\alpha)$  à un état  $\alpha$ )
- ④  $S$  est une fonction de  $A$  dans  $\mathcal{S} = \text{Sym}(T^*, T)$  ( $S$  associe une contrainte  $\sigma(\alpha)$  à un état  $\alpha$ )
- ⑤  $\rho$  est une fonction de  $(A \times \Pi)_G$  dans  $A$  ( $\rho$  associe un état final à un état initial et un processus de déformation)

A1

$$\forall (\alpha, G) \in (A \times \Pi)_G, G(\rho(\alpha, G)) = G^f$$

A2

$$\begin{aligned} & \forall (G_1, G_2) \in \Pi \times \Pi \text{ tels que } G_1^f = G_2^i, \\ & \forall \alpha \in A_{P_1^i}, \\ & \rho(\alpha, G_1 * G_2) = \rho(\rho(\alpha, G_1), G_2) \end{aligned}$$

|           |  |
|-----------|--|
| <b>A3</b> | $\forall G \in \mathcal{G},$ $\forall (\alpha_1, \alpha_2) \in A_G \times A_G,$ si $\forall G \in \Pi_G \mathbf{S}(\alpha_1, G) = \mathbf{S}(\alpha_2, G)$ alors $\alpha_1 = \alpha_2$ |
| <b>A4</b> | $\forall G \in \mathcal{G}, A_G$ est complet pour sa <i>topologie naturelle</i>  |
| <b>A5</b> | $\forall \alpha \in A, \lambda(\alpha) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(\alpha, \mathbf{G}(\alpha)_t)$ existe   |
| <b>A6</b> | $\exists \lambda_0 \in A_{\text{rel}}$ tel que $A_{\lambda_0} = A$   |

Notations:

- $\mathbf{G}(\alpha)$  est la configuration dans l'état  $\alpha$
- $\mathcal{S}$  est l'espace des contraintes
- $\mathbf{S}(\alpha)$  est la contrainte dans l'état  $\alpha$
- $(A \times \Pi)_G = \{(\alpha, G) \in A \times \Pi, G^i = \mathbf{G}(\alpha)\}$  est l'ensemble des couples états-processus de déformation tels que le processus de déformation  $G$  "commence" dans la configuration image de l'état  $\alpha$  par la fonction  $\mathbf{G}$
- $\rho$  est la fonction d'évolution de l'élément matériel  $T$
- $\rho(\alpha, G)$  est l'état atteint à partir de l'état  $\alpha$  après le processus de déformation  $G$ .
- si  $G \in \mathcal{G}, \Pi_G = \{G \in \Pi, G^i = G\}$  est l'ensemble des processus commençant en  $G$
- si  $G \in \mathcal{G}$ , l'image inverse de  $G$  par  $\mathbf{G}$ , notée  $A_G$ , est la section de  $A$  en  $G$ . C'est donc l'ensemble des états ayant la configuration  $G$ .
- la **fonctionnelle de réponse** de l'élément  $\mathbf{S} = \mathbf{S} \circ \rho$  définit la contrainte intrinsèque résultant de l'application d'un processus à un état donné, de même que  $\mathbf{G} = \mathbf{G} \circ \rho$  définit la configuration résultant de l'application d'un processus à un état donné.

Analyse des axiomes:

Axiome A1: Cet axiome n'est rien d'autre que la traduction du fait que la configuration de l'état atteint à la fin d'un processus de déformation doit correspondre à la configuration finale du processus.

Axiome A2: L'opération de continuation est compatible avec la définition de la fonction d'évolution, au sens où, partant d'un état donné, les deux opérations suivantes doivent aboutir au même état (sous réserve de la continuabilité des processus);

- partant de l'état  $\sigma$ , le processus  $P_1$ , puis, partant de l'état obtenu à la fin du processus  $P_1$ , le processus  $P_2$
- partant de l'état  $\sigma$ , la continuation des deux processus précédents.

Axiome A3: Les états sont identifiables. Deux états dotant l'élément matériel de la même configuration ne sont différents que si on peut trouver un processus donnant deux contraintes résultantes différentes. Les états peuvent donc être déterminés par la réponse de l'élément à l'ensemble des tests possibles (processus compatibles avec la configuration de l'état).

Axiome A4: L'axiome A4 introduit la notion de topologie naturelle de la section en  $G$  de l'ensemble des états. Cette topologie naturelle est la topologie induite sur  $\Sigma_G$  par ce que Noll appelle l'uniformité naturelle. Cette uniformité naturelle est la suivante: considérons l'application  $S_P$  de  $\Sigma_G$  dans  $\mathcal{E}$ , qui, pour un  $P$  de  $\Pi_G$  donné, fait correspondre à un état quelconque de  $\Sigma_G$  le résultat du test  $P_G$ . L'uniformité sur  $\Sigma_G$  la plus grossière pour laquelle  $S_P$  soit uniformément continue, quel que soit  $P$  dans  $\Pi_G$ , est appelée uniformité naturelle. Elle traduit donc le fait que la réponse de l'élément à un processus dépend continûment de l'état initial.

Axiome A5: Cet axiome est le postulat d'existence de l'état relâché; si on fige un élément dans une configuration donnée, son état va tendre vers un état donné, appelé état relâché. On note  $\Sigma_{rel}$  l'ensemble des états relâchés.

$$\Sigma_{rel} = \{\sigma \in \Sigma ; \exists \sigma' \in \Sigma, \sigma = \lambda(\sigma')\}$$

Axiome A6: "axiome d'accessibilité"; L'hypothèse physique sous-jacente est que n'importe quel état d'un élément matériel doit être accessible de n'importe quel autre. Si deux états ne sont pas connectables par un processus, ce ne sont pas deux états du même matériau.

### I.3.3 Les développements

Cette définition d'un élément matériel peut s'enrichir sans difficulté des hypothèses habituellement faites dans le cadre de l'étude des milieux continus. Les liaisons internes, par exemple, comme l'incompressibilité ou la rigidité, s'introduisent naturellement comme des restrictions sur l'ensemble des configurations possibles, qui n'est plus seulement un sous-ensemble fermé connexe de  $\text{Sym}^+(\mathbb{T}, \mathbb{T}^*)$  [cas des éléments sans liaisons internes], mais que l'on doit considérer comme sous-ensemble d'une sous-variété  $\mathcal{V}$  de  $\text{Sym}^+(\mathbb{T}, \mathbb{T}^*)$ . Si par exemple l'ensemble des configurations est un singleton, l'élément matériel est dit rigide (pas d'évolution possible de la configuration, donc pas de déformation).

Le cas de l'incompressibilité se ramène à choisir la sous-variété  $\mathcal{V}$  de la manière suivante [Truesdell 1965]:

$$\mathcal{V} = \left\{ G \in \text{Sym}^+(\mathbb{T}, \mathbb{T}^*), \det(G_0^{-1}G) = 1 \right\} \text{ où } G_0 \text{ est un élément quelconque de } \mathcal{G}.$$

On peut de même introduire la notion de matériau, par le biais d'isomorphismes particuliers (les isomorphismes matériels) entre éléments matériels. Un matériau est défini comme une classe d'équivalence pour la relation entre éléments matériels "est matériellement isomorphe à". On arrive ainsi à définir un **corps matériel** comme une variété telle que l'espace tangent à la variété en chaque point puisse être muni d'une structure d'élément matériel. Si de plus ces éléments matériels sont du même matériau (*i.e.* matériellement isomorphes), le corps est dit **matériellement uniforme**. On peut montrer [Wang 1967] qu'un corps matériellement uniforme est canoniquement muni d'une G-structure par le biais de ses isomorphismes matériels.

Nous ne développerons pas la suite des travaux de Noll portant sur les différentes propriétés de symétrie (anisotropie), sur les propriétés des matériaux élastiques ou semi-élastiques, ou plus généralement sur les comportements des matériaux simples. Notons toutefois que cette description de nature purement mécanique des éléments matériels s'étend de manière très naturelle pour prendre en compte les phénomènes thermiques ou énergétiques. Les configurations intrinsèques de l'élément comprennent, outre la forme, la température (élément de  $\mathbb{R}^{+*}$ ) et le gradient de température (élément de  $\mathbb{T}^*$ ). L'espace  $\mathcal{S}$  n'est plus uniquement  $\text{Sym}(\mathbb{T}^*, \mathbb{T})$ , mais le produit cartésien de  $\text{Sym}(\mathbb{T}^*, \mathbb{T})$  par  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{T}$  et  $\text{vol}(\mathbb{T}^*)$  (espace des volumes possibles de l'élément -  $\text{vol}(\mathbb{T}^*) = \bigwedge^n \mathbb{T}^*$  - n-ième produit extérieur de  $\mathbb{T}^*$ , si n est la dimension de  $\mathbb{T}$ ).

Les éléments de  $\mathcal{S}$  sont donc des quadruplets: contrainte intrinsèque (dans  $\text{Sym}(\mathbb{T}^*, \mathbb{T})$ ), entropie volumique (dans  $\mathbb{R}$ ), flux de chaleur (dans  $\mathbb{T}$ ), énergie libre (dans  $\text{vol}(\mathbb{T}^*)$ ). On peut reprendre les différentes fonctions introduites lors de la définition des éléments matériels, en

ajoutant les axiomes nécessaires pour que les lois de la thermodynamique soient respectées [Noll 1973].

## I.4 Les milieux continus à microstructure

Capriz expose sa théorie des milieux continus à microstructure dans son livre "Continua with Microstructure" publié en 1989 chez Springer-Verlag dans la collection *Springer Tracts in Natural Philosophy* [Capriz, 1989]. Il y formalise les concepts introduits dans plusieurs articles, publiés dans les années 1980, seul ou en collaboration avec, entre autres, Podio-Guidugli et Virga [Capriz & Podio-Guidugli, 1981] [Capriz & Podio-Guidugli, 1983] [Capriz, 1984] [Capriz, 1985(a)] [Capriz, 1985(b)] [Capriz & Virga, 1990]. Nous adopterons la démarche de [Capriz, 1989] pour exposer cette théorie de milieux continus à microstructure, en nous concentrant essentiellement sur l'exposé théorique et en omettant les très nombreux développements propres à des exemples spécifiques. Nous ne garderons à titre d'exemple que les travaux concernant les milieux micropolaires.

### I.4.1 Le modèle de microstructure

Un milieu continu à microstructure est un ensemble  $\mathcal{C}$  (corps) de particules  $\mathbf{x}$ , possédant les deux propriétés suivantes:

Propriété 1: On peut introduire une variété différentielle  $\mathcal{M}$  de dimension finie dont les éléments  $\underline{m}$  représentent les valeurs possibles de la microstructure. Sur cette variété, on peut définir l'action d'un groupe de transformations globales, en l'occurrence le groupe de Lie des rotations de  $\mathbb{R}^3$ : pour une rotation quelconque  $\underline{Q}$  de  $SO(3)$  et un élément  $\underline{m}$  de  $\mathcal{M}$ , on définit un unique élément  $\underline{m}_{(\underline{Q})}$  dans  $\mathcal{M}$  qui est le résultat de l'application de la rotation  $\underline{Q}^*$  à l'élément  $\underline{m}$  [Olver, 1986], avec bien sûr toutes les propriétés des groupes de transformations sur une variété différentielle.

---

\*  $\underline{q}$  est le vecteur relié à  $\underline{Q}$  par le développement de  $\underline{Q}$  en  $\underline{I} - \underline{e}\underline{q} + \frac{1}{2}(\underline{e}\underline{q})(\underline{e}\underline{q}) - \dots$  ( $\underline{e}$  est le tenseur de permutation de Ricci - cf. note page 21), ce qui suggère d'ailleurs l'écriture  $\underline{Q} = \exp(-\underline{e}\underline{q})$ .  $\underline{q}$  est parallèle à l'axe de la rotation définie par  $\underline{Q}$  et son module est égal à l'angle de la rotation:  $\underline{q} = \theta \underline{c}$ , avec  $\|\underline{c}\| = 1$ .

Propriété 2: On introduit un ensemble  $\mathcal{A}$  de **placements complets**, à savoir des applications  $a$  de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{U} = \mathcal{E} \times \mathcal{M}$  telles que:

$$a(\mathbf{x}) = (\underline{x}(\mathbf{x}), \underline{m}(\mathbf{x})) \text{ avec } \underline{x}(\mathbf{x}) = \underline{x} \in \mathcal{E}, \underline{m}(\mathbf{x}) = \underline{m} \in \mathcal{M}$$

vérifiant les conditions suivantes:

- ① Le **placement apparent**  $\underline{x}(\mathbf{x})$  est une bijection\* sur l'image du corps  $\mathcal{C}$  dans l'espace  $\mathcal{E}$ , cette image  $\mathcal{D}$  étant classiquement la fermeture d'un domaine ouvert connexe dont la frontière  $\partial\mathcal{D}$  est suffisamment régulière.
- ② Chaque couple de placements complets  $(\underline{x}(\mathbf{x}), \underline{x}'(\mathbf{x}))$  est tel que la bijection induite de  $\mathcal{D} = \underline{x}(\mathcal{C})$  dans  $\mathcal{D}' = \underline{x}'(\mathcal{C})$  soit au moins de classe  $C_1$ .
- ③ L'application  $\begin{matrix} \underline{x}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{M} \\ \underline{x} \mapsto \underline{m}(\underline{x}^{-1}(\underline{x})) \end{matrix}$  est au moins de classe  $C_1$  quel que soit le placement complet considéré.
- ④  $\forall (\underline{x}, \underline{m}) \in \mathcal{A}, \forall \underline{Q} \in \text{SO}(3), \forall \underline{t} \in \mathbb{R}^3, (\underline{x}_{(\underline{t}, \underline{Q}, \mathbf{x}_0)}, \underline{m}_{(\underline{Q})}) \in \mathcal{A}$  où  $\underline{t}$  et  $\underline{Q}$  sont les éléments de réduction en  $\mathbf{x}_0$  d'un distributeur de vitesse :

$$\underline{x}_{(\underline{t}, \underline{Q}, \mathbf{x}_0)}(\mathbf{x}) = \underline{x}(\mathbf{x}) + \underline{t} + \underline{Q}(\underline{x}(\mathbf{x}) - \underline{x}(\mathbf{x}_0))$$

Cette dernière condition exprime deux hypothèses;

un placement du corps reste un placement du corps pour deux observateurs animés d'un mouvement relatif de translation ( $\underline{t}$ ) - rotation ( $\underline{Q}$ ),

la microstructure est invariante par translation.

On peut relâcher les conditions ② et ③ pour traiter par exemples des problèmes de discontinuité. Nous n'exposerons pas ici ces cas particuliers.

L'explication de cette définition générale d'un milieu à microstructure repose sur l'observation de certains exemples de milieux pour lesquels il apparaît, à un niveau d'observation inférieur au niveau d'observation des grandeurs du modèle, un ordonnancement au moins partiel. Capriz propose alors d'associer à chaque élément matériel un certain nombre ( $m$ ) de **paramètres d'ordre**  $(m^\alpha)_{\alpha \in \{1, \dots, m\}}$  caractérisant la microstructure\*\*. D'une manière

\* Cet axiome de bijectivité est liée au caractère monoparticulaire du milieu. Nous l'abandonnerons pour traiter des milieux multiparticulaires.

\*\* Maugin expose dans différents articles une méthode de construction de modèles thermodynamiques à des gradients d'ordre supérieur de milieux à microstructure en introduisant des paramètres cinématiques tensoriels  $(\dot{\lambda}_i)$  sans détailler la microstructure sous-jacente [Maugin, 1980]. Fremond et Nedjar proposent d'introduire une variable cinématique supplémentaire pour décrire l'évolution de l'endommagement [Frémond & Nedjar, 1996].

générale, il apparaît que l'on peut, dans la plupart des exemples connus, interpréter ces paramètres  $m^\alpha$  comme les coordonnées d'un élément  $m$  d'une variété différentielle  $\mathcal{M}$  dans une carte d'un atlas donné de cette variété. Plusieurs possibilités peuvent s'offrir quant au choix de cette variété; ainsi, dans le cas des milieux continus de Cosserat, on peut considérer l'ensemble des tenseurs orthogonaux de déterminant +1 de  $\mathbb{R}^3$  ( $SO(3)$ ), l'orientation d'un élément matériel étant définie par le tenseur orthogonal représentant les rotations envoyant un repère orthogonal fixe donné sur le trièdre orthonormé direct local. On peut également prendre pour  $\mathcal{M}$  la boule de  $\mathbb{R}^3$  de rayon  $\pi$  dans laquelle on identifie les points de la surface diamétralement opposés. Chaque point de cette boule est l'extrémité d'un vecteur dont la direction donne l'axe de la rotation et le sens de la rotation, et la norme l'angle de celle-ci (voir la note de la page précédente). L'identification des antipodes est nécessaire, car une rotation de  $\pi$  autour d'une direction est équivalente à une rotation de  $-\pi$  autour de la même direction.

La microstructure à l'instant  $\tau$  est donc caractérisée soit, dans la configuration actuelle, par un  $m$ -champ scalaire  $(m^\alpha(\underline{x}, \tau))_{\alpha \in \{1, \dots, m\}}$  sur l'image  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{E}$  du corps  $\mathcal{C}$  (fermeture d'un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^3$ , comme dans le cas classique), soit par un  $m$ -champs  $m_*^\alpha(\underline{x}_*, \tau)_{\alpha \in \{1, \dots, m\}}$  sur une configuration de référence  $\mathcal{B}_*$  (on convient d'utiliser l'indice \* pour la configuration de référence: le gradient de la transformation s'écrit, par exemple;  $\underline{F} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{x}_*}$ ). Si on se dote d'un atlas de  $\mathcal{M}$ , on peut utiliser une notation plus compacte en définissant des champs à valeur dans  $\mathcal{M}$   $m(\underline{x}, \tau)$  et  $m_*(\underline{x}_*, \tau)$  dont les coordonnées sont les  $m$ -champ scalaires précédemment définis. Cette définition permet de donner un sens physique plus évident à la variable de microstructure que de la définir directement comme un point d'une variété différentielle, puisqu'elle repose sur une mesure directe sur le matériau (les paramètres d'ordre). Elle peut par contre poser éventuellement certains problèmes de continuité, le choix d'un atlas fixe pour représenter la variété ne permettant pas une description continue de la microstructure. Elle permet toutefois de donner à la mesure des taux d'évolution  $(\frac{\partial m_*^\alpha(\underline{x}_*, \tau)}{\partial \tau})_{\alpha \in \{1, \dots, m\}}$  le sens précis de  $\dot{m}$ , vitesse d'évolution de la microstructure.

L'étape suivante consiste à étudier comment se transforment microstructure et vitesses lors d'un changement d'observateur.

### I.4.2 Le changement d'observateur

L'effet du changement d'observateur sur le placement apparent est classique et est donné par la condition ④. En ce qui concerne le placement en microstructure, que nous convenons d'appeler **micro-placement**, la même condition postule l'indifférence à la translation. Cette hypothèse semble tout-à-fait légitime au vu de la totalité des exemples connus de milieux à microstructure. C'est en particulier le cas, de manière évidente, des milieux de Cosserat.

Il n'en va pas de même pour ce qui concerne l'action des rotations. Si on considère deux observateurs tels qu'une rotation de vecteur  $\underline{q}$  transporte le second sur le premier, la microstructure  $m$  dans le premier référentiel se transforme en  $m_{(q)}$  dans le second.

Cette action est donc caractérisée, pour les petites rotations, en chaque point  $m$  de la variété de microstructure, par le **générateur infinitésimal** de l'action locale du groupe des rotations sur  $\mathcal{M}$  en  $m$ . Cet opérateur  $\mathcal{G}_m$  sur  $\mathbb{R}^3$ , à valeur sur l'espace tangent à  $\mathcal{M}$  en  $m$  (que nous notons  $T_m\mathcal{M}$ ) est défini comme la dérivé par rapport à  $\underline{q}$ , en  $\underline{q} = 0$ , de l'application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathcal{M}$  qui fait correspondre à  $\underline{q}$  l'élément  $m_{(q)}$  de  $\mathcal{M}$ ,

$$\mathcal{G}_m = \left. \frac{\partial m_{(q)}}{\partial \underline{q}} \right|_{\underline{q}=0}$$

Cet opérateur permet donc d'écrire un développement limité de  $m_{(q)}^\alpha$  (coordonnée  $\alpha$  de  $m_{(q)}$  dans une carte locale) autour de  $m^\alpha$ :

$$m_{(q)}^\alpha = m^\alpha + \underline{g}^\alpha \cdot \underline{q} + o(\underline{q})$$

où on a introduit les vecteurs  $\underline{g}^\alpha$  de  $\mathbb{R}^3$  définis par  $g_i^\alpha = \mathcal{G}_i^\alpha$ .

Ainsi, dans le cas des milieux de Cosserat, en identifiant tout à la fois le groupe des rotations et la variété de microstructure avec l'ensemble des tenseurs orthogonaux de déterminant 1, le générateur infinitésimal de l'action du groupe des rotations sur la variété de microstructure, au point  $\underline{O}$ , est le tenseur  ${}^T(\underline{e}, \underline{O})^*$ , qui transforme le vecteur  $\underline{q}$  en un tenseur produit du tenseur antisymétrique  $-\underline{e} \cdot \underline{q}$  et de  $\underline{O}$ ;

$$\underline{O}_{(q)} = \underline{O} - \underline{e} \cdot \underline{q} \cdot \underline{O} + o(\underline{q}) = \underline{O} + {}^T(\underline{e}, \underline{O}) \cdot \underline{q} + o(\underline{q})$$

---

\*  $\underline{e}$  est le tenseur de permutation de Ricci;  $e_{ijk}=0$  si deux indice sont égaux, 1 si  $\{i,j,k\}$  est une permutation paire de  $\{1,2,3\}$ , -1 si c'est une permutation impaire.  ${}^T$  désigne la permutation d'un tenseur d'ordre trois sur les deux derniers indices.

### I.4.3 Mouvement et vitesses

Un mouvement de durée  $t$  du corps  $\mathcal{C}$  est une application de  $\mathcal{C} \times [0, t]$  dans l'ensemble de placements complets  $\mathcal{A}$  :

$$\underline{x} = \underline{x}(\mathbf{x}, \tau), \quad \underline{m} = \underline{m}(\mathbf{x}, \tau)$$

La vitesse (**macro**vitesse) et la vitesse d'évolution de la microstructure (**micro**vitesse) sont données par :

$$\underline{v} = \dot{\underline{x}}(\mathbf{x}, \tau), \quad \underline{v} = \dot{\underline{m}}(\mathbf{x}, \tau)$$

Les vitesses peuvent également être vues comme des champs sur l'image du corps  $\mathcal{C}$  à l'instant  $\tau$ , et on introduit classiquement le concept de champs de micro- et macrovitesse virtuelles, en notant que la microvitesse virtuelle est un élément de l'espace tangent à la variété de microstructure au point image de  $\underline{x}$  par l'application composée  $\underline{m}(\underline{x}^{-1}(\underline{x}))$ . La connaissance de la valeur de la microstructure est donc nécessaire à une bonne définition de  $\underline{v}$ , l'espace tangent à  $\mathcal{M}$  dépendant du point considéré -ce qui n'est évidemment pas le cas de l'espace euclidien-.

Pour les milieux continus de Cosserat, la définition la plus générale possible d'un champ de microvitesse virtuelle est, au point  $\underline{x}$  :  $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{A}(\underline{x}) \cdot \underline{O}(\underline{x}^{-1}(\underline{x}))$ ,  $\underline{A}(\underline{x})$  étant un champ de tenseur antisymétrique d'ordre 2 quelconque, associé au taux de rotation locale de la microstructure  $\underline{v}(\underline{x}) \cdot \underline{O}(\underline{x}^{-1}(\underline{x}))$ .

On introduit également la distribution de vitesse d'un mouvement rigidifiant, où  $\underline{t}(\tau)$  est la vitesse de translation et  $\underline{\omega}(\tau)$  la vitesse de rotation :

$$\begin{aligned} \underline{v}_R(\mathbf{x}, \tau) &= \underline{t}(\tau) + \underline{\omega}(\tau) \wedge (\underline{x}(\mathbf{x}, \tau) - \underline{x}(\mathbf{x}', \tau)) \\ \underline{v}(\mathbf{x}, \tau) &= \underline{G}_m(\mathbf{x}, \tau)(\underline{\omega}(\tau)) \end{aligned}$$

### I.4.4 Energie cinétique et inerties

Capriz introduit une forme générale de la densité massique d'énergie cinétique, en ajoutant à l'expression classique  $e_c = \frac{1}{2} \dot{\underline{x}}^2$  un terme lié à la valeur de la microstructure et à la microvitesse :  $e_c = \frac{1}{2} \dot{\underline{x}}^2 + \kappa(\underline{m}, \dot{\underline{m}})$ , la fonction  $\kappa$  étant homogène de degré 2 en  $\dot{\underline{m}}$  et nulle si  $\dot{\underline{m}} = 0$ . Cette définition simple permet, outre des traitements mathématiques aisés, de retrouver la forme classique de l'inertie macroscopique  $-\rho \ddot{\underline{x}}$ .

On choisit très généralement une forme quadratique en  $\underline{m}$  pour  $\kappa$  :  $\kappa(\underline{m}, \underline{m}) = \frac{1}{2} \underline{m} \Omega(\underline{m}) \underline{m}$  qui est, dans le cas général, une notation compacte pour  $\kappa(\underline{m}, \underline{m}) = \frac{1}{2} \underline{m}^\alpha \Omega_{\alpha, \beta}(\underline{m}) \underline{m}^\beta$ .

Capriz montre que la nécessaire indifférence à l'orientation du repère fixe dans lequel on évalue l'énergie cinétique entraîne, avec les notations précédentes:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \underline{m}^\alpha} \underline{g}^\alpha + \frac{\partial \kappa}{\partial \underline{m}^\alpha} \frac{\partial \underline{g}^\alpha}{\partial \underline{m}^\beta} \underline{m}^\beta = 0$$

et donc, si  $\kappa$  est quadratique en  $\underline{m}$  ;

$$\left( \frac{\partial \Omega_{\alpha, \beta}}{\partial \underline{m}^\gamma} \right) \underline{g}^\gamma + \Omega_{\alpha, \gamma} \left( \frac{\partial \underline{g}^\gamma}{\partial \underline{m}^\beta} \right) + \Omega_{\beta, \gamma} \left( \frac{\partial \underline{g}^\gamma}{\partial \underline{m}^\alpha} \right) = 0$$

On a ainsi modifié le tenseur classique d'inertie  $J$ , que l'on peut écrire sous la forme  $J = \int_{\mathcal{D}} \rho (\underline{x}^2 \underline{I} - \underline{x} \otimes \underline{x})$  en lui ajoutant un terme dû à la microstructure

$$J = \int_{\mathcal{D}} \rho (\underline{x}^2 \underline{I} - \underline{x} \otimes \underline{x}) + \overbrace{\int_{\mathcal{D}} \rho \Omega_{\alpha, \beta} \underline{g}^\alpha \otimes \underline{g}^\beta}.$$

### I.4.5 Equations de bilan

Nous donnons les expressions des équations de bilan des milieux continus à microstructure à la Capriz. Nous utiliserons les opérateurs gradient et divergence d'un tenseur par rapport à la configuration locale: si  $G$  est un tenseur d'ordre  $n$  ( $G_{i, j, \dots, \alpha}$ ),  $\text{grad}(G)_{i, j, \dots, \alpha, \beta} = \frac{\partial G_{i, j, \dots, \alpha}}{\partial x_\beta}$  et  $\text{div}(G) = \text{grad}(G) : \underline{I}$ .

#### ⇨ bilan de masse

S'il n'y a ni apport ni création, en notant  $\rho = \frac{\rho^*}{J}$  où  $J$  est le jacobien de la transformation ( $J = \det F$ )

$$\boxed{\dot{\rho} + \rho \text{div}(\dot{\underline{x}}) = 0}$$

#### ⇨ bilan de la quantité de mouvement

Au niveau macro, on retrouve l'équation de Cauchy, en notant  $\underline{T}$  le tenseur de contrainte ( non nécessairement symétrique) et  $\underline{f}$  les forces de volume :

$$\boxed{\text{div}(\underline{T}) + \rho \underline{f} = \rho \ddot{\underline{x}}}$$

Au niveau de la microstructure, on introduit  $\beta$ , la densité massique d'actions extérieure sur la microstructure (tenseur des doubles-forces),  $-\zeta$  la densité volumique des actions microstructurales internes (le tenseur de microcontrainte) et  $\mathcal{S}$  un opérateur linéaire de  $\mathbb{R}^3$  sur l'espace cotangent à  $\mathcal{M}$  en  $m$  tel que  $\mathcal{S}\underline{n}$  représente les efforts exercés sur la microstructure d'un élément de surface orienté de normale unitaire  $\underline{n}$  (second tenseur de microcontraintes):

$$\left(\frac{\partial \kappa}{\partial \dot{m}}\right)' - \frac{\partial \kappa}{\partial m} = \rho\beta - \zeta + \text{div}\mathcal{S}$$

Tous les termes de cette équation sont bien des éléments de l'espace cotangent à  $\mathcal{M}$  en  $m$ .

Remarque: cette équation s'écrit  $\left(\frac{\partial \chi}{\partial \dot{m}}\right)' - \frac{\partial \chi}{\partial m} = \rho\beta - \zeta + \text{div}\mathcal{S}$  où  $\chi$  est la densité de coénergie cinétique, reliée à  $\kappa$  par la relation  $\kappa = \frac{\partial \chi}{\partial \dot{m}} \cdot \dot{m} - \chi$ .  $\kappa$  et  $\chi$  coïncident si  $\kappa$  est quadratique en  $\dot{m}$ .

#### ◇ bilan du moment cinétique

Cette condition d'objectivité de la puissance des efforts intérieurs permet d'identifier la partie antisymétrique du tenseur de contraintes :

$$\underline{\underline{e}}: \underline{\underline{T}} = {}^T \mathcal{G} \zeta + (\text{grad } {}^T \mathcal{G}) \mathcal{S}$$

#### ◇ conditions limites

Il n'y a pas de conditions à la frontière portant sur le tenseur de microcontrainte:

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\tau}} \quad \text{et} \quad \mathcal{S} \underline{n} = \underline{\underline{\sigma}} \quad \text{sur } \partial \mathcal{D}$$

#### ◇ bilan d'énergie

Sous l'hypothèse que, à chaque instant et pour tout élément matériel, on peut attribuer des densités massiques d'énergie interne  $e$ , d'entropie  $s$  et de taux de création de chaleur  $\lambda$ , un vecteur flux de chaleur  $q$  et une température absolue  $\theta$ , et en considérant que la prise en compte d'une microstructure ne modifie pas la

loi de conservation de l'énergie totale, on peut écrire celle-ci au niveau local sous la forme:

$$\rho \dot{e} = \underline{\underline{T}} : \text{grad}(\underline{\dot{x}}) + \zeta \cdot \dot{m} + \mathcal{S} : \text{grad}(\dot{m}) - \text{div}(\underline{q}) + \rho \lambda$$

Les termes supplémentaires intervenant dans cette équation de conservation de l'énergie sont donc les termes de travail des contraintes microstructurales sur la vitesse d'évolution de la microstructure et du second tenseur de microcontrainte sur le gradient de la vitesse d'évolution.

⇒ **inégalité de Clausius-Duhem**

L'inégalité de Clausius-Duhem se réécrit également, en introduisant l'énergie libre  $\psi = e - \theta s$ :

$$\underline{\underline{T}} : \text{grad}(\underline{\dot{x}}) - \rho(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) + \zeta \cdot \dot{m} + \mathcal{S} : \text{grad}(\dot{m}) - \frac{\underline{q} \cdot \text{grad}(\theta)}{\theta} \geq 0$$

**I.4.6 Les milieux continus de Cosserat**

Les résultats précédents, appliqués aux milieux de Cosserat, en choisissant comme variété de microstructure l'ensemble des tenseurs orthogonaux (SO(3)) et en écrivant la microvitesse sous la forme  $\underline{\underline{\dot{O}}} = {}^T(\underline{\underline{e}}, \underline{\underline{O}}) \cdot \underline{\underline{\omega}}$  où  $\underline{\underline{\omega}}$  est le taux de rotation de la microstructure, conduisent aux équations, dans le cas quasi-statique qui nous intéressera par la suite:

$$\left. \begin{aligned} \text{div}(\underline{\underline{T}}) + \rho \underline{f} &= 0 \\ \text{div}(\underline{\underline{S}}) - \underline{z} + \rho \underline{b} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{équations de champs}$$

$$\underline{z} = \frac{1}{2} \underline{\underline{e}} : {}^T \underline{\underline{T}} \quad \text{condition d'objectivité}$$

$\underline{\underline{S}}$  est le tenseur d'ordre deux associé au second tenseur de microcontrainte  $\mathcal{S}$  par la relation  $\underline{\underline{S}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{e}} : ({}^T \{i,j,k \rightarrow j,i,k\} \mathcal{S})$ .

$\underline{z}$  et  $\underline{b}$  sont les vecteurs associés au tenseur de microcontrainte  $\underline{\underline{\zeta}}$  et au tenseur des doubles forces massiques  $\underline{\underline{\beta}}$  par les relations:

$$\underline{z} = \frac{1}{2} \underline{\underline{e}} : ({}^T \underline{\underline{\zeta}} + \text{grad}(\underline{\underline{O}}) : {}^T \{i,j,k \rightarrow k,j,i\} \mathcal{S}) \qquad \underline{b} = \frac{1}{2} \underline{\underline{e}} : ({}^T \underline{\underline{\beta}} \cdot \underline{\underline{O}})$$

Cette formulation diffère d'un facteur 1/2 quant aux définitions de  $\underline{s}$ ,  $\underline{z}$  et  $\underline{b}$  de celle obtenue par Germain par la méthode des puissances virtuelles ([Germain, 1973b] pp 570 et 571). Nous utiliserons dans la suite, par souci de cohérence avec notre approche, les expressions de Germain;

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div}(\underline{\tau}) + \underline{f} = 0 \\ \operatorname{div}(\underline{v}) - \underline{\zeta} + \underline{\psi} = 0 \end{array} \right\} \text{équations de champs}$$

$$\underline{\zeta} = -\underline{e} : \underline{\tau} \quad \text{condition d'objectivité}$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\tau} \cdot \underline{n} = \underline{T} \\ \underline{v} \cdot \underline{n} = \underline{M} \end{array} \right\} \text{conditions aux limites}$$

$\underline{\tau}$  est le tenseur de Cauchy,  $\underline{f}$  le champ d'efforts volumiques,  $\underline{v}$  le second tenseur de microcontrainte,  $\underline{\zeta}$  le vecteur de microcontrainte,  $\underline{\psi}$  le champ de doubles-forces volumiques,  $\underline{T}$  les efforts surfaciques et  $\underline{M}$  les couples surfaciques.

## I.5 Conclusion

L'ensemble des travaux présentés dans ce chapitre demeure dans le cadre de la mécanique des milieux que nous appellerons "milieux monoparticulaires": en chaque point de l'espace euclidien dans lequel le corps est placé se trouve une seule particule de matière. Cette approche, lorsque les perturbations de la microstructure présentent de fortes variations spatiales, comme ce peut être le cas, par exemple, lors de la déformation plastique des métaux, nécessitent souvent l'introduction de gradients d'ordre supérieur des grandeurs cinématiques [Vardoulakis, Papamichos & Sulem, 1994].

*A contrario*, comme nous l'avons dit au début de ce chapitre, l'objet de ce mémoire est de développer une méthode qui permette d'une part de s'affranchir de cette nécessité en plaçant les particules du milieu dans un espace plus "profond" (en un sens que nous expliciterons dans le chapitre deux) que l'espace euclidien classique, en autorisant donc le placement de plusieurs particules au même point de l'espace, et d'autre part l'identification des grandeurs constitutives du modèle par un passage de type micro-macro. Une méthode similaire a été mise en œuvre par Brocato [Brocato, 1994] dans le cadre particulier des alliages d'AlMg et par Brocato, Tamagny et Ehrlacher dans un exemple bidimensionnel de déformation plastique d'un milieu orienté [Brocato, Tamagny & Ehrlacher, 1995] [Brocato, Tamagny & Ehrlacher, 1996].

Nous allons, au chapitre suivant, introduire plus précisément les notions de milieux à microstructure monoparticulaires, multiparticulaires, multiphasiques et multiconstituants, qui nous serviront dans les développements des chapitres III et IV.

## CHAPITRE II

# LES MILIEUX A MICROSTRUCTURE

*La première partie de ce chapitre concerne la description des milieux à microstructure. On y introduit dans un cadre simple les diverses notions de base de la cinématique et de la dynamique de ces milieux. Ces notions sont ensuite généralisées, par ordre de complexité croissante, aux milieux multiparticulaires à un seul constituant puis au cas des milieux à plusieurs constituants.*

*On termine ce chapitre en traitant brièvement des problèmes liés aux changements de phases, en introduisant des fonctions de phase par constituant.*



|   |           |
|---|-----------|
| <b>II.1 Les milieux monoparticulaires à microstructure</b>  | <b>33</b> |
| II.1.1 L'ensemble des particules                            | 33        |
| II.1.2 L'univers d'observation                              | 33        |
| II.1.2.1 Espace physique                                    | 34        |
| II.1.2.2 Ensemble des microstructures                       | 34        |
| II.1.3 Les placements                                       | 35        |
| II.1.4 La cinématique réelle                                | 37        |
| II.1.5 La cinématique virtuelle                             | 38        |
| II.1.6 La masse   | 41        |
| <b>II.2 Les milieux multiparticulaires à microstructure</b> | <b>42</b> |
| II.2.1 L'observation et les placements                      | 42        |
| II.2.2 Cinématique réelle et cinématique virtuelle          | 43        |
| II.2.3 La masse   | 45        |
| <b>II.3 Les milieux multiconstituants</b>                   | <b>46</b> |
| II.3.1 Univers d'observation                                | 46        |
| II.3.2 Placements   | 47        |
| II.3.3 Cinématique réelle et virtuelle                      | 48        |
| II.3.4 La masse   | 48        |
| <b>II.4 Les milieux multiphasiques</b>                      | <b>49</b> |
| II.4.1 L'univers d'observation et les placements            | 50        |
| II.4.2 La fonction d'état des particules                    | 51        |
| II.4.3 Cinématique réelle et virtuelle                      | 52        |
| II.4.4 La masse   | 52        |
| <b>II.5 Conclusion</b>                                      | <b>53</b> |



## II.1 Les milieux monoparticulaires à microstructure

Cette première partie sert de fondement à l'ensemble des développements ultérieurs -milieux multiconstituants, milieux multiparticulaires, milieux multiphasiques -. Nous nous proposons d'y exposer les notions de base sur les placements (la géométrie du milieu), les vitesses (la cinématique) et les masses (la dynamique). Ce n'est qu'à l'issue de cette première partie que nous pourrons expliciter la distinction que nous avons faite plus haut entre milieu multiparticulaire, multiconstituant et multiphasique. Disons simplement pour l'instant qu'un milieu est multiparticulaire si en chaque point de l'espace physique on trouve plusieurs particules d'un même constituant; multiconstituant si on a plusieurs particules de constituants différents en chaque point; multiphasique si un même constituant peut se présenter sous plusieurs phases.

Nous reprendrons dans cette partie certains des concepts évoqués dans le chapitre précédent au cours de la description des travaux de Capriz.

### II.1.1 L'ensemble des particules

Nous avons introduit plus haut la notion de particule de matière sans en donner de définition précise. Nous allons supposer l'existence d'un ensemble  $\mathcal{P}$  de particules  $p$  sur lequel nous ne donnons pour l'instant aucune information complémentaire. La structure de cet ensemble est induite par la structure de son image par un *placement* dans un *univers d'observation*, deux notions que nous détaillons dans la suite de cette première partie.

### II.1.2 L'univers d'observation

Toute description des milieux que nous étudions doit donc commencer par la définition de l'espace dans lequel va se placer une particule de matière. Nous adoptons une approche voisine de celle de W. Noll, adaptée aux milieux à microstructure, pour lesquels le placement ne se fait pas uniquement dans un espace euclidien de dimension 3.

L'univers d'observation est le produit cartésien d'un espace physique  $\mathcal{E}$  (espace euclidien de dimension 1, 2 ou 3) et de l'ensemble des valeurs possibles des microstructures des particules (ensemble  $\mathcal{M}$ ).

### II.1.2.1 Espace physique

Nous nous plaçons dans le cadre de la mécanique classique non-relativiste. Nous ne discutons en particulier pas de la notion de temps absolu. Nous supposons l'existence d'une référence temporelle absolue, indépendante du repère particulier que l'on peut prendre dans cet espace.

### II.1.2.2 Ensemble des microstructures

Le premier cas à considérer est celui des matériaux sans microstructure ou à microstructure "triviale", c'est-à-dire les matériaux pour lesquels  $\mathcal{M}$  est un singleton (pas de variation possible de la microstructure) et où l'on peut donc considérer que l'univers d'observation se réduit à l'espace euclidien  $\mathcal{E}$ , ce qui ne présente pas d'intérêt particulier dans le cadre de cette étude.

Nous pourrions également envisager le cas des matériaux à microstructure discrète, c'est-à-dire ceux pour lesquels les changements d'état de la microstructure ne peuvent se faire que de manière "discontinue". Ce peut être par exemple le cas de microstructure à deux états de type noir ou blanc; diode passante ou non, phénomènes de spin quantique, structure stéréographique de macroparticules (de type cis-trans, par exemple). Nous nous heurterons rapidement à des difficultés mathématiques liées à la non-continuité et à la non-dérivabilité de ces microstructures qui conduiraient à un traitement différent. De plus, il semble que la majorité des microstructures de ce type peuvent être approchées par des variations continues à fort gradient et donc se ramener à un cas de microstructure continue.

Nous nous limiterons dans la suite au cas de microstructures continues. L'idée la plus intuitive dans ce cas, développée, nous l'avons vu au chapitre précédent, par CAPRIZ, est d'imposer à  $\mathcal{M}$  d'être une variété différentielle de dimension finie, de manière à pouvoir disposer autour de chaque valeur possible de la microstructure des propriétés de continuité et de dérivabilité nécessaires dans le cadre de la mécanique des milieux continus.

Donnons quelques exemples d'ensembles de microstructures que l'on peut être amené à décrire. Les plus fréquemment rencontrés sont vraisemblablement les microstructures de type orientation. Nous avons déjà indiqué le cas de particules orientées dans l'espace, comme les milieux continus de Cosserat. Nous avons signalé que l'on pouvait adopter pour l'ensemble  $\mathcal{M}$  représentant les états possibles de la microstructure une représentation de type tensoriel (tenseurs orthogonaux de  $\mathbb{R}^3$ ). On peut également utiliser une représentation de type angle

d'Euler -produit cartésien  $[0, 2\pi[ \times [0, \pi[ \times [0, 2\pi[$ ,\* par exemple- ou encore choisir la boule de  $\mathbb{R}^3$  de rayon  $\pi$  en identifiant les antipodes. Les propriétés topologiques de chacune de ces variétés étant sensiblement différentes peuvent conduire à préférer telle ou telle représentation pour traiter un cas particulier.

Un milieu de Cosserat bidimensionnel peut de manière équivalente être décrit à l'aide du cercle unité ou d'un paramétrage de celui-ci, le plus naturel étant évidemment le segment  $[0, 2\pi[$ , muni de la métrique définie par la distance (non-euclidienne)  $d(x, y) = \inf(|y-x|, 2\pi-|y-x|)$ .

Le cas des cristaux liquides, même dans un cadre bidimensionnel, est très semblable, avec toutefois la différence que le cristal n'est pas orienté sur son axe et donc que la description se fait par exemple dans l'ensemble des tenseurs uniaxiaux ( $\underline{u} \otimes \underline{u}$  avec  $\underline{u}$  vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^3$ ). Il apparaît ainsi de manière immédiate que la distance entre deux états microstructuraux d'une particule n'est pas forcément triviale, et que le cas d'ensembles de microstructure non-euclidiens est un cas classique.

### II.1.3 Les placements

L'univers d'observation que nous allons utiliser est donc le produit cartésien d'un espace euclidien  $\mathcal{E}$ , de dimension 3 dans le cas général, par une variété différentielle  $\mathcal{M}$ , que nous notons  $\mathcal{U} = \mathcal{E} \times \mathcal{M}$ .

Ce que l'on appelle observation de l'ensemble des particules  $\mathcal{P}$  consiste en un ensemble  $\mathcal{A}$  d'applications  $a$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{U}$  appelées *placements* de  $\mathcal{P}$  ("placements complets" de Capriz).

Un placement de l'ensemble des particules  $\mathcal{P}$  est donc une application  $a$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{U}$  qui envoie chaque particule  $\mu$  de  $\mathcal{P}$  en un point de l'espace physique -macroplacement- ("placement apparent" de Capriz) et en un point de la variété de microstructure associée -microplacement-.

Soit  $\mu$  une particule de  $\mathcal{P}$ . On peut écrire  $a$  sous la forme:

$$a(\mu) = (\delta(\mu), m(\mu))$$

$\delta(\mu)$  est le macroplacement de  $\mu$ . C'est une application de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{E}$  qui donne la position des particules, au sens usuel.

---

\* Il faut toutefois prendre garde à munir ce parallélépipède de la "bonne" topologie qui n'est pas dans ce cas la topologie euclidienne induite par celle de  $\mathbb{R}^3$  [Dluzewski 1991].

$m(\mathcal{P})$  est le microplacement de  $\mathcal{P}$ . C'est une application de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{M}$  qui caractérise la microstructure de la particule.

Nous construisons donc des placements de manière à "remplir" l'univers; la notion de corps matériel est introduite plus loin, en s'appuyant sur une distribution de masse sur  $\mathcal{P}$  (donnée intrinsèque), l'image du support de cette distribution à un instant donné donnant la configuration du corps à ce même instant. L'intérêt de cette vision des placements est surtout de faciliter le traitement des changements de phase. Elle n'a que peu d'importance dans les autres cas, et conduit à des résultats tout-à-fait similaires à une vision plus habituelle où un corps occupe un domaine fini de l'espace.

Les macroplacements  $\mathcal{L}$  sont, dans le cas des milieux monoparticulaires à microstructure, des bijections de l'ensemble des particules sur l'espace  $\mathcal{E}$ . En chaque point de  $\mathcal{E}$  se trouve donc exactement une particule de matériau.

La continuité du milieu s'entend aussi au niveau de la microstructure. Dans la suite du texte, nous ne nous intéresserons qu'au milieux pour lesquels l'image par le microplacement de l'ensemble des particules ( $m(\mathcal{P})$ ) est une sous-variété différentielle  $\mathcal{M}$ .

Nous supposons en outre la continuité et la dérivabilité de l'application de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{M}$ , qui à un point  $x$  de  $\mathcal{E}$  fait correspondre la valeur de la microstructure de la particule située en  $\underline{x}$  :

$$m_{\mathcal{L}}(\underline{x}) = m(\mathcal{L}^{-1}(x)).$$

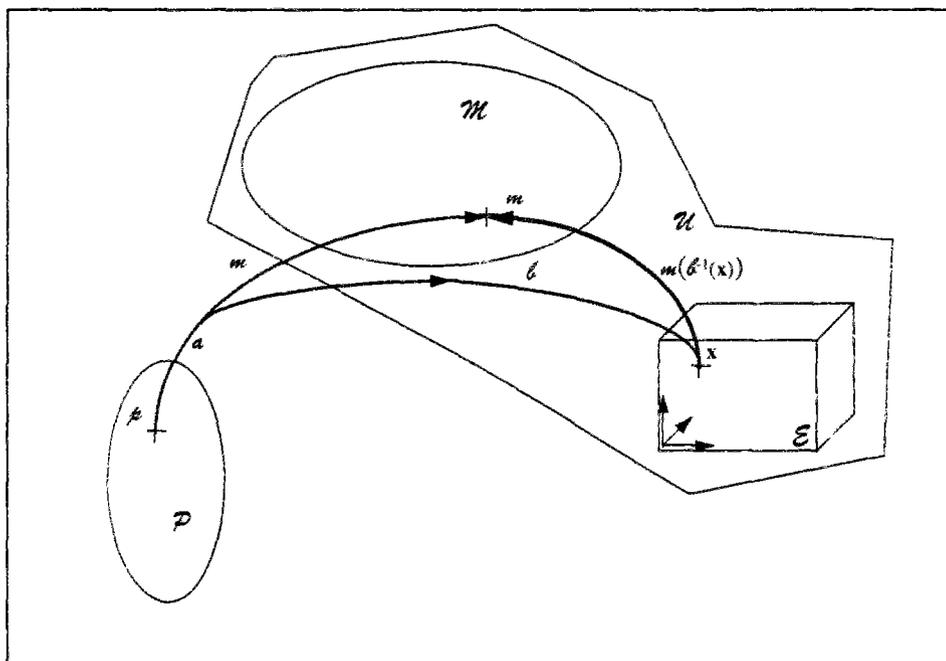


Figure 2-1: Les espaces et les placements

On peut définir, entre les différents référentiels de l'espace physique, une relation d'équivalence. Un référentiel  $\mathcal{R}$  est en relation avec le référentiel  $\mathcal{R}'$  si la transformation entre

un placement quelconque dans le référentiel  $\mathcal{R}$  et le même placement dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  est un mouvement de corps rigide. Nous convenons dans la suite d'appeler **observateurs** les éléments d'une classe d'équivalence de cette relation. Cette notion d'observateur est fondamentale dans la définition future des variables du modèle, les notions d'invariances matérielles et d'objectivité étant étroitement liées aux changements d'observateur.

#### II.1.4 La cinématique réelle

Les positions successives des particules au cours du temps sont données par une famille de placements  $(a_t)_{t \in \mathbb{R}} = (\ell_t, m_t)_{t \in \mathbb{R}}$  qui « placent » les particules à microstructure dans l'univers à chaque instant  $t$ .

Les propriétés des applications  $\ell_t$  qui sont les placements physiques des particules induisent une partie des propriétés générales des corps matériels sujets de l'étude, ou plus exactement les propriétés de ceux-ci se traduisent en termes de continuité, dérivabilité... de ces placements.

Considérons les applications suivantes, définies sur  $\mathbb{R}$ ;

$$\begin{aligned} \text{cp}_\# : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{E} & \text{et} & \quad \text{cm}_\# : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M} \\ t &\mapsto \text{cp}_\#(t) = \ell_t(\#) & & \quad t \mapsto \text{cm}_\#(t) = m_t(\#) \end{aligned}$$

Nous convenons d'appeler  $\text{cp}_\#$  la **macrotrajectoire** de la particule  $\#$  et  $\text{cm}_\#$  la **microtrajectoire** de la particule  $\#$ .

La continuité du milieu lors d'une évolution se traduit par la continuité des micro- et macrotrajectoires, ce qui ne pose pas de problème particulier. En effet, les ensembles dans lesquels se déplacent les particules sont dotés soit d'une métrique euclidienne (pour  $\mathcal{E}$ ), soit de la topologie induite par la structure de variété (pour  $\mathcal{M}$ ).

Nous supposerons dans la suite du mémoire cette continuité des trajectoires.

#### *Champs de macrovitesse et de microvitesse*

Les restrictions liées à la continuité physique des milieux au cours d'une évolution s'écrivent en terme de continuité et de dérivabilité en temps de la trajectoire de chaque particule. La dérivée temporelle à gauche à l'instant  $t$  de la macrotrajectoire est la **macrovitesse réelle**  $\mathbf{v}_t(\mathbf{p})$  à l'instant  $t$  de la particule  $\mathbf{p}$ . Nous faisons l'hypothèse que les milieux que nous considérons sont des milieux pour lesquels cette dérivée à gauche de la trajectoire est définie pour toute particule et à tout instant.

Nous imposons également des conditions de continuité temporelle de la microstructure des particules; la microstructure d'une particule évolue de manière continue et dérivable à gauche en fonction du temps, et la dérivée temporelle à gauche de la microtrajectoire d'une particule à l'instant  $t$  est sa **microvitesse réelle**.

Les vitesses de la particule  $\mu$  ainsi définies sont des éléments de l'espace tangent à  $\mathcal{E}$  en  $\mathcal{L}_t(\mu)$  (soit l'espace vectoriel  $T_{\mathcal{L}_t(\mu)}\mathcal{E}$ , identifié à  $\mathbb{R}^n$ ) pour ce qui concerne la macro-vitesse et de l'espace tangent à  $\mathcal{M}$  en  $m_t(\mu)$  ( $T_{m_t(\mu)}\mathcal{M}$ ) pour ce qui concerne la micro-vitesse.

Les dérivées temporelles à gauche des macro- et micro-vitesses, lorsqu'elles existent, sont les **macro- et micro-accélérations** de la particule. On convient en général de ne s'intéresser qu'aux mouvements de particules suffisamment réguliers pour admettre presque partout une dérivée seconde de la trajectoire. On se limite même aux cas de trajectoires de classe  $C^2$  par morceaux, où les accélérations sont définies et continues en presque tous les points.

Remarques: La continuité de la macrotrajectoire ne pose pas de problème particulier. La continuité de la microtrajectoire d'une particule est une hypothèse simplificatrice non rigoureusement indispensable. On pourrait imaginer des types de microstructures permettant des évolutions discontinues. L'écriture des efforts associés à ce type d'évolution, s'ils existent, serait un peu plus délicate.

Les micro- et macro-vitesses sont continues par morceaux (en espace), des discontinuités pouvant évidemment apparaître aux frontières des corps, et même à l'intérieur de ceux-ci (fissures, défauts divers). Nous ne traiterons par contre pas les cas "pathologiques" que l'on pourrait imaginer de milieux où les vitesses seraient discontinues presque partout.

### II.1.5 La cinématique virtuelle

Le but de la construction de la cinématique virtuelle d'un milieu monoparticulaire à microstructure est de définir les espaces de vitesses virtuelles sur lesquels nous appliquerons le principe des puissances virtuelles. Les efforts, c'est-à-dire les grandeurs (constitutives ou non) rendant compte des états d'équilibre du corps sous l'ensemble des actions auxquelles il est soumis, apparaîtront comme duaux des dérivées spatiales ou microstructurales de ces vitesses virtuelles. Les degrés de liberté possibles et la forme de ces vitesses virtuelles font donc la richesse du modèle, au sens où ils permettent d'introduire des concepts d'efforts et de contraintes non "classiques". Les régularités des vitesses virtuelles, tant en fonction des diverses coordonnées (spatiales ou microstructurales) qu'en fonction du temps, vont intervenir

directement sur la régularité des valeurs duales; plus nous imposerons aux champs de vitesses virtuelles d'être réguliers, plus les efforts associés pourront être irréguliers, et réciproquement. Les champs de vitesses virtuelles représentent, à un instant  $t$  donné, c'est-à-dire dans une configuration de l'ensemble des particules, l'ensemble des évolutions du milieu que l'on autorise dans le cadre du modèle. L'évolution réelle, c'est-à-dire les champs de vitesses faisant passer de la configuration actuelle  $a_t(\mathcal{P})$  à la configuration  $a_{t+dt}(\mathcal{P})$ , doit bien évidemment être autorisée dans le cadre du modèle. Il en résulte pour les espaces des champs de vitesses virtuelles à l'instant  $t$  la nécessité de contenir les champs de vitesses réelles possibles du milieu. Si par exemple le milieu étudié est déformable, il sera non pertinent de ne considérer que des champs de vitesses virtuelles du type distributeurs de vitesse, sous peine de ne pouvoir identifier les champs de contraintes.

Il n'en va pas de même de ce que nous allons appeler les **liaisons internes cinématiques**. Une liaison interne cinématique est une contrainte que l'on impose, au même titre que les conditions de continuité et de régularité, au champ de vitesse réelle du corps que l'on étudie\*. Il faut donc bien garder à l'esprit cette différence fondamentale entre vitesses réelles et vitesses virtuelles. Les restrictions sur les vitesses réelles font parties des hypothèses de base du modèle, se sont les champs réels autorisés, qui définissent le type des objets étudiés, alors que les vitesses virtuelles sont des choix de la modélisation, qui influent non pas sur le type des objets étudiés, mais sur la nature et la forme des efforts « autorisés » par le modèle.

### *Espaces des champs de vitesses virtuelles*

On convient de noter  $T_{\ell(\mathcal{P})}\mathcal{E}$  l'espace tangent à  $\mathcal{E}$  en  $\ell(\mathcal{P})$  ( $\mathbb{R}^n$ ) et  $T_{m(\mathcal{P})}\mathcal{M}$  l'espace tangent à  $\mathcal{M}$  en  $m(\mathcal{P})$ . On note  $T\mathcal{E}$  et  $T\mathcal{M}$  les fibrés tangents respectifs de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{M}$ .

On peut alors définir sur  $\mathcal{E}$  deux champs de vecteur  $\underline{u}(\ell(\mathcal{P}))$  et  $\omega(\ell(\mathcal{P}))$  à valeur respectivement dans  $T\mathcal{E}$  et  $T\mathcal{M}$ .

On appelle le champ  $\underline{u}$  **champ de macrovitesse virtuelle** et le champ  $\omega$  **champ de microvitesse virtuelle**.

### *Les hypothèses sur les vitesses virtuelles*

---

\* Ainsi l'incompressibilité du milieu continu tridimensionnel, monophasique et sans microstructure; si l'on impose aux vitesses virtuelles cette condition d'incompressibilité, il est impossible de mettre en évidence le champ de pression isostatique, qui apparaît comme dual de la divergence du champ de vitesse.

Un certain nombre de conditions sur les vitesses virtuelles ainsi définies doivent être imposées pour permettre le développement du modèle. Une certaine régularité des champs est nécessaire, au sens où deux particules voisines dans  $\mathcal{P}$  ne peuvent pas avoir, en général, des vitesses virtuelles très différentes. Les champs considérés seront donc, au moins par morceaux, de classe  $C^0$  ;

$$\begin{aligned}\underline{u} &\in C_{\text{mo}}^0(\mathcal{E}, T\mathcal{E}) \\ \omega &\in C_{\text{mo}}^0(\mathcal{E}, T\mathcal{M})\end{aligned}$$

où  $C_{\text{mo}}^0$  est l'espace des champs de vecteurs continus par morceaux.

Notre intention est de développer le modèle dans le cadre d'une théorie au premier gradient, c'est à dire en linéarisant localement les champs de vitesses (dans un sens que nous allons préciser). Cette limitation, dans le cadre que nous développons, n'est pas vraiment une restriction sur le modèle. Il peut en effet exister des types de milieux dont l'étude nécessite un développement des champs à un ordre supérieur. Une solution simple peut alors consister à introduire un espace de microstructure adéquat, du type  $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ , et à ajouter une liaison interne cinématique entre le champ de macrovitesse et le champ de microvitesse [Germain 1973], que l'on fait porter également sur les vitesses virtuelles, et du type (avec les notations précédentes):

$$f(\underline{x}, \underline{m}, \omega, \text{grad}_{\underline{x}}(\underline{u})) = 0$$

On retrouve le concept de microstructure latente introduit par Capriz [Capriz, 1985b].

L'hypothèse "physique" sous-jacente à cette limitation au premier gradient est que l'influence des particules les unes sur les autres est essentiellement locale. L'évolution d'une particule ne dépend que des particules du voisinage de celle-ci. Le fait de rester au premier gradient signifie simplement que ce voisinage est très "petit", plus petit que si l'on considérait également le second gradient des champs de vitesse. Nous explicitons cette hypothèse au chapitre 3, dans le cas des milieux continus de Cosserat.

Nous limiterons donc notre étude aux champs différentiables dont le gradient est continu par morceaux. Nous imposerons également aux discontinuités éventuelles d'être bornées, ce qui nous conduit à choisir comme ensemble des vitesses virtuelles l'ensemble des champs de vecteur définis plus haut, de classe  $C^1$  par morceaux et à variations bornées.

C'est-à-dire, si  $\underline{U}$  désigne cet ensemble des champs de vitesses virtuelles:

$$\underline{U} = \left\{ \begin{array}{l} (\underline{u}, \omega) ; \\ \underline{u} \in C_{\text{mo}}^1(\mathcal{E}, T\mathcal{E}), \omega \in C_{\text{mo}}^1(\mathcal{E}, T\mathcal{M}) ; \\ \omega(\underline{x}) \in T_{\underline{m}(\underline{e}^{-1}(\underline{x}))} \mathcal{M} \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{E} ; \\ \underline{u} \text{ et } \omega \text{ à variations bornées} \end{array} \right\}$$

Cet ensemble, muni des lois d'addition et de multiplication par un réel est de manière triviale un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , de dimension infinie.

Il peut toutefois s'avérer utile, dans certains cas, d'utiliser pour la mise en œuvre d'une méthode de construction de modèles mécanique, une autre définition des champs de microvitesse virtuelle, équivalente à celle que nous venons de donner, mais d'un maniement plus simple. C'est par exemple le cas de la microvitesse virtuelle d'un milieu de Cosserat, qui s'écrit de manière rigoureuse sous la forme du produit d'un tenseur d'ordre deux antisymétrique par le tenseur d'orientation au point considéré ( $\underline{Q}$ ):  $\underline{\omega} = \underline{a} \cdot \underline{Q}$ . On utilisera plutôt le vecteur taux de rotation  $\underline{\omega}$ , relié au tenseur  $\underline{\omega}$  par  $\underline{\omega} = \frac{1}{2} \underline{e} : (\underline{\omega} \cdot \underline{O})$ .

### II.1.6 La masse

Pour définir les *corps matériels* (ou objets) que l'on étudie dans le cadre du modèle, nous choisissons d'introduire des mesures bornées de  $\mathcal{P}$ , notées  $M$ , que l'on définit dans le cas des milieux continus par leur densité  $\mu(\varphi)$ . L'image d'une mesure  $M$  par un placement  $\varphi$  constitue une mesure  $M$  de densité  $\rho(\underline{x}) = \mu(\varphi^{-1}(\underline{x}))$  de  $\mathcal{E}$ .

$\rho(\underline{x})$  est la *masse volumique* du milieu au point  $\underline{x}$ .

Un corps matériel  $C$  est défini par la donnée d'une famille de mesures  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}}$  de  $\mathcal{P}$  bornées et à support connexe et d'une famille de placements  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  tels que définis plus haut.

$M_t(\mathcal{P}) = M_t(\mathcal{E})$  est la *masse* du corps matériel à l'instant  $t$ .

Le corps est infini si le support de sa mesure-masse n'est pas borné.

Un sous-corps matériel  $C'$  du corps  $C$  est déterminé par une famille de mesures  $(M'_t)_{t \in \mathbb{R}}$  de  $\mathcal{P}$  et la même famille de placements  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  que le corps  $C$ . Chaque mesure  $M'_t$  est à support inclus dans celui de  $M_t$  et coïncide avec  $M_t$  sur son support.

Un corps d'un milieu monoparticulaire à microstructure est défini par:

**un ensemble de particules  $\mathcal{P}$**

**un univers d'observation  $\mathcal{U} = \mathcal{E} \times \mathcal{M}$**

**une famille de placements de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{U}$   $(\varphi_t, \varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  tels que  $\varphi_t$  soit bijectif**

### une famille de mesures-masse sur $\mathcal{P}(M_t)_{t \in \mathbb{R}}$

La bijectivité de  $\mathcal{L}_1$  caractérise les milieux monoparticulaires: il n'y a qu'une particule en chaque point de  $\mathcal{E}$ . Nous allons dans la partie suivante relâcher cette condition pour introduire les milieux multiparticulaires.

## II.2 Les milieux multiparticulaires à microstructure

La notion de milieu monoparticulaire à microstructure peut très bien s'appliquer à des milieux pour lesquels la longueur d'onde caractéristique des variations de la microstructure est grande devant la longueur caractéristique des éléments de volumes que le modèle s'attache à décrire. Si par contre la microstructure est très fluctuante au sein d'un élément de volume représentatif du milieu, une description du type monoparticulaire telle que celle que nous venons d'exposer nécessiterait pour être mise en œuvre de manière efficace une très grande précision, sans rapport avec l'ordre de grandeur des objets étudiés (grain dans une pièce métallique ou fibre dans un béton de fibres).

Une description géométrique plus élaborée doit pouvoir permettre une analyse plus fine des champs de contrainte et de leurs équilibres, tout en respectant une vision "macro" du milieu, à l'image, par exemple, du travail de K. Dang van [Dang van, 1973]. Le critère de rupture des métaux qu'il a introduit prend en compte la désorientation locale des cristaux métalliques et l'influence de celle-ci sur l'accumulation des dislocations dans les cristaux orientés suivant certaines directions préférentielles.

### II.2.1 L'observation et les placements

Nous sommes donc amenés à introduire la notion de *milieu multiparticulaire* ; en chaque point de l'espace physique  $\mathcal{E}$ , on trouve une infinité de particules, la valeur de la microstructure de celles-ci décrivant l'ensemble de la variété de microstructure. En d'autres termes, la bijectivité ne se fait plus entre  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{E}$ , mais entre  $\mathcal{P}$  et l'univers d'observation  $\mathcal{U}$  tout entier.

Le milieu devient un milieu hypervolumique, au sens où la dimension des variétés différentielles qui sont les corps matériels que nous étudions n'est plus  $n$  (dimension de  $\mathcal{E}$ ) mais est  $n+d$  (où  $d$  est la dimension de  $\mathcal{M}$ ).

**Les placements  $a: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{U}$  sont bijectifs**, ce qui permet de doter  $\mathcal{P}$  d'une structure de variété différentielle par transport inverse de la structure de variété de  $\mathcal{U}$ .

Considérons l'ensemble des particules de  $\mathcal{P}$  qui ont le même placement physique, c'est-à-dire le sous ensemble de  $\mathcal{P}$  image réciproque d'un point quelconque  $x$  de l'espace  $\mathcal{E}$ . Nous notons cet ensemble  $\mathcal{P}(x)$ , et nous convenons de le nommer **point matériel**  $\mathcal{P}(x)$ .

La même construction nous permet de définir le **point microstructural**  $\mathcal{P}(m)$  comme ensemble des points de  $\mathcal{P}$  ayant la même image  $m$  dans  $\mathcal{M}$ .

Par construction, chaque point matériel  $\mathcal{P}(x)$  (microstructural  $\mathcal{P}(m)$ ) constitue une sous-variété de  $\mathcal{P}$ , en bijection homothétique avec  $\mathcal{M}$  (avec  $\mathcal{E}$ ). L'espace tangent  $T_{\mathcal{P}}\mathcal{P}$  à  $\mathcal{P}$  en  $\mathcal{P}$  est le produit cartésien de l'espace tangent  $T_{\mathcal{P}(x)}\mathcal{P}$  à  $\mathcal{P}(x)$  en  $\mathcal{P}$  et de l'espace tangent  $T_{\mathcal{P}(m)}\mathcal{P}$  à  $\mathcal{P}(m)$  en  $\mathcal{P}$ , si  $\mathcal{P}$  est l'image inverse du point de  $\mathcal{U}$   $(x, m)$  par le placement  $a$ :

$$\mathcal{P} = a^{-1}(x, m)$$

Les structures de variété différentielle ainsi transportées sont indépendantes du système de référence de  $\mathcal{U}$  (observateur) dans lequel est écrit le placement.

## II.2.2 Cinématique réelle et cinématique virtuelle

On peut ainsi définir de manière très simple (figure 2-2 ), à un instant  $t$  donné et en un point  $(x, m)$  de  $\mathcal{U}$ , la macro-vitesse virtuelle  $\underline{u}_{\mathcal{P}}$  comme un élément de l'espace tangent à  $\mathcal{P}(m)$  en  $a^{-1}(x, m)$  et la micro-vitesse virtuelle  $\omega_{\mathcal{P}}$  comme un élément de l'espace tangent à  $\mathcal{P}(x)$  en  $a^{-1}(x, m)$ .

Il est toutefois plus pertinent (figure 2-3 ), pour la suite du développement, de définir plus classiquement les champs de vitesses virtuelles directement dans l'univers  $\mathcal{U}$ , en fonction de la variable "eulérienne"  $(x, m)$  comme des éléments des espaces tangents à  $\mathcal{U}$  en  $(x, m)$ .

$(\underline{u}(x, m), \omega(x, m))$  est un élément de  $T_{(x, m)}\mathcal{U} (\mathbb{R}^n \times T_m\mathcal{M})$ .

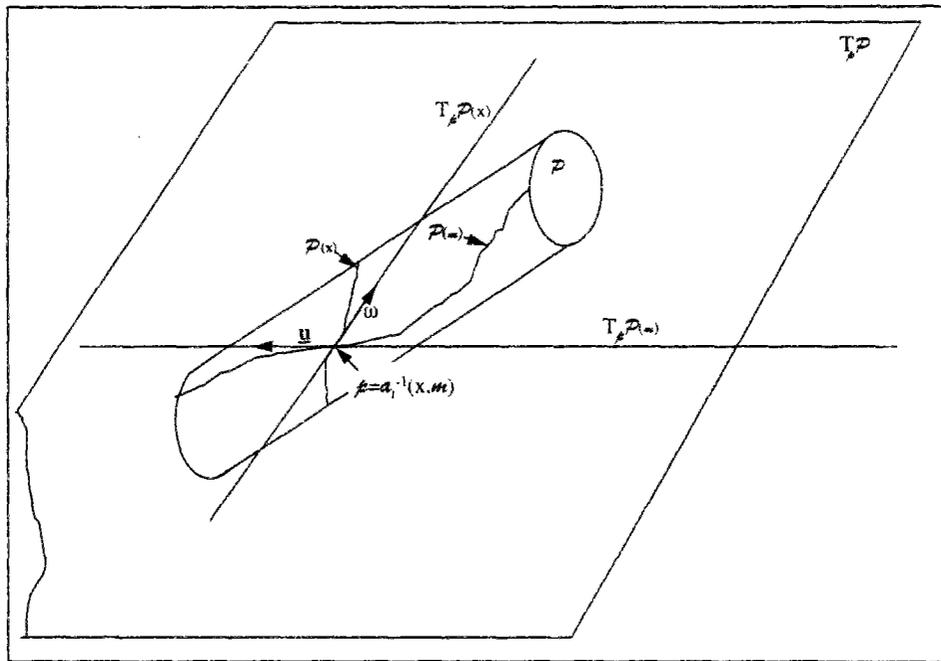


figure 2-2 représentation bidimensionnelle des vitesses virtuelles dans  $\mathcal{P}$

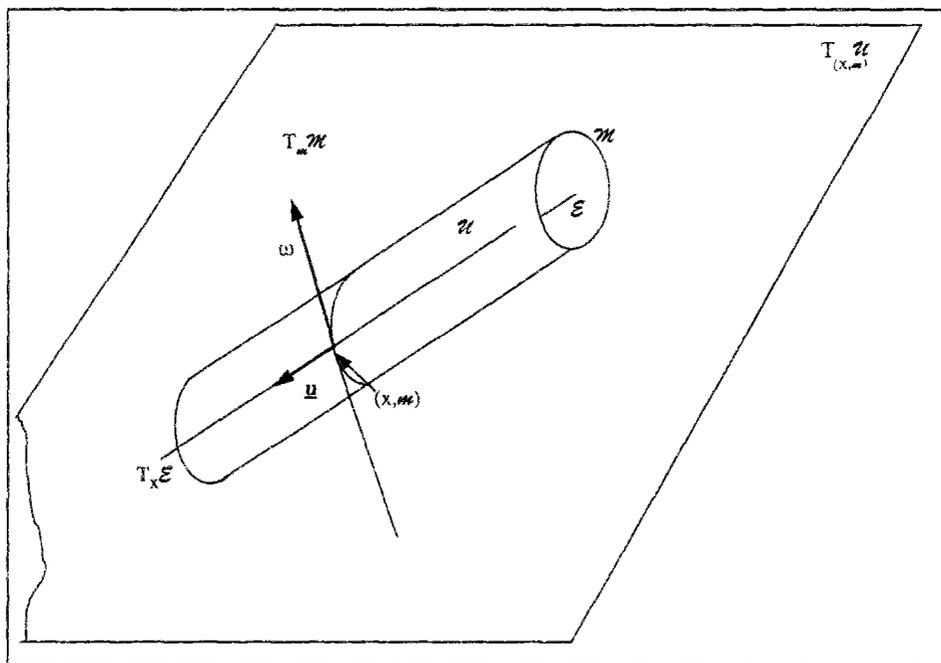


figure 2-3 représentation bidimensionnelle des vitesses virtuelles dans  $\mathcal{M}$

Les champs de vecteurs ainsi définis sur le fibré tangent  $T_x \mathcal{M}$  de  $\mathcal{M}$  constituent un espace vectoriel dans lequel on définit l'espace des vitesses virtuelles à l'instant  $t$  comme un sous-espace vectoriel  $\mathbf{U}$ , soumis à deux conditions (au moins);

Les champs de vitesses réels possibles appartiennent à  $\mathbf{U}$ .

Les éléments de  $\mathbf{U}$  sont à variations bornées.

Cette seconde condition assure que les discontinuités éventuelles de vitesses virtuelles demeurent finies, condition non strictement nécessaire pour l'application du principe des puissances virtuelles, même dans le cas des milieux continus, mais qui facilite les développements de la théorie.

On devra par la suite définir l'action d'un changement d'observateur sur ces vitesses virtuelles, de manière à pouvoir écrire le principe d'objectivité des efforts intérieurs. Si cette action est classique pour la macrovitesse (distributeur de vitesse), elle l'est moins en ce qui concerne la vitesse d'évolution microstructurale. Deux cas principaux peuvent se concevoir; la microstructure est objective, comme ce peut être le cas dans un modèle de milieux poreux où l'orientation des pores n'est pas prise en compte (pores sphériques, par exemple), et par conséquent la vitesse d'évolution de la microstructure est objective (croissance des pores).

Si par contre la microstructure n'est pas objective, et c'est le cas de toutes les microstructures orientées, il faut préciser l'influence du changement d'observateur sur la microvitesse.

En règle générale toutefois, il est difficile de concevoir une microstructure dont la représentation soit sensible à une translation de la matière. La partie translationnelle du changement d'observateur laisse donc invariante tout à la fois la microstructure et sa vitesse. [Capriz, 1989]

Nous reviendrons au chapitre quatre sur l'influence du taux de rotation de l'observateur sur la vitesse d'évolution d'une microstructure orientée.

Les micro- et macro-accélérations sont les dérivées secondes à gauche des micro- et macro-trajectoires.

### II.2.3 La masse

On introduit comme précédemment des mesures bornées de  $\mathcal{P}$ , notées  $M$ , que l'on définit dans le cas des milieux continus par leur densité  $\mu(\#)$ . L'image d'une mesure  $M$  par un placement  $a$  constitue une mesure  $M$  de densité  $\rho(x, m) = \mu(a^{-1}(x, m))$  de  $\mathcal{U}$ .

$\rho(x, m)$  est la *masse hypervolumique* du milieu au point  $(x, m)$ .

La *masse volumique* du milieu au point  $x$  est la masse du point matériel  $\mathcal{P}(x)$ :

$$\rho(x) = M(\mathcal{P}(x)) = M(\{(x, m), m \in \mathcal{M}\})$$

De même que dans le cas des milieux monoparticulaires, un corps matériel multiparticulaire est défini par:

**un ensemble de particules  $\mathcal{P}$**   
**un univers d'observation  $\mathcal{U} = \mathcal{E} \times \mathcal{M}$**   
**une famille de placements bijectifs de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{U} (a_t)_{t \in \mathbb{R}}$**   
**une famille de mesures-masse sur  $\mathcal{P} (M_t)_{t \in \mathbb{R}}$**

En outre, l'image par le placement  $a_t$  du support de  $M_t$  ( $\text{Supp}(M_t)$ ) est une sous-variété différentielle de  $\mathcal{U}$ .

Soulignons une nouvelle fois la différence entre les milieux multiparticulaire, pour lesquels le placement complet  $a_t$  est bijectif (saturation de la variété de microstructure en chaque point) et les milieux monoparticulaires où le macroplacement est bijectif (une seule particule par point de l'espace physique).

### II.3 Les milieux multiconstituants

On peut s'intéresser à des milieux hétérogènes au sens classique du terme, c'est-à-dire à des milieux composés de constituants distincts. Ceux-ci se présentent le plus souvent sous la forme d'une matrice d'un constituant donné dans laquelle sont dispersées de manière plus ou moins aléatoire des inclusions d'un autre constituant: agrégats dans une matrice cimentaire, fibres de verre dans une matrice organique, charges minérales dans une matrice élastomère.

On introduit donc une partition de  $\mathcal{P}$ , chaque sous-ensemble de cette partition étant un constituant du milieu.  $\mathcal{P}$  est donc la réunion de plusieurs constituants  $\mathcal{P}_i$ , en notant  $i$  l'indice de constituant et  $p_i$  une particule du constituant  $i$ .

$i$  est un élément d'un ensemble d'indice  $I \subset \mathcal{R}$ . Cet ensemble  $I$  peut être fini ou non, continu ou discret.

$$\mathcal{P} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{P}_i$$

#### II.3.1 Univers d'observation

Chaque constituant étant doté le cas échéant de sa propre microstructure, l'univers d'observation apparaît comme le produit cartésien de l'espace physique euclidien de dimension  $n$   $\mathcal{E}$  par un ensemble de microstructure  $\mathcal{M}$  qui est la réunion des diverses variétés de microstructures  $\mathcal{M}_i$ .

$$\mathcal{U} = \mathcal{E} \times \mathcal{M} = \mathcal{E} \times \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i$$

### II.3.2 Placements

Les placements de  $\mathcal{P}$  dans l'univers sont donc des applications  $a$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{U}$ , la restriction de  $a$  à chacun des constituants étant notée  $a_i$ . Chacune des applications  $a_i$  met en bijection  $\mathcal{P}_i$  avec  $\mathcal{E}$  dans le cas d'un constituant monoparticulaire - une et une seule particule de chaque constituant en chaque point de l'espace physique, comme par exemple dans le cas des milieux poreux saturés - , et avec  $\mathcal{E} \times \mathcal{M}_i$  dans le cas d'un constituant multiparticulaire - solution solide d'un métal dans un autre, par exemple.

Le macro-placement du constituant  $i$  est noté  $\ell_i$  et le micro-placement est noté  $m_i$ .

Nous nous placerons dans le cas d'un milieu dont tous les constituants sont multiparticulaires et à microstructure.

En chaque point de l'espace physique se trouve donc une infinité de particules de chaque constituant et pour chaque constituant, on "sature"  $\mathcal{M}_i$  en considérant que chaque élément de  $\mathcal{M}_i$  à une image réciproque dans  $\mathcal{P}_i$  par l'application  $m_i$ .

Un milieu multiconstituant est donc défini par la donnée d'un ensemble  $\mathcal{P}$  de particules, d'une partition de cet ensemble  $\mathcal{P}$  en constituants  $(\mathcal{P}_i)_{i \in I}$  et d'une famille de placements  $(a_{it})_{i \in I, t \in \mathbb{R}}$

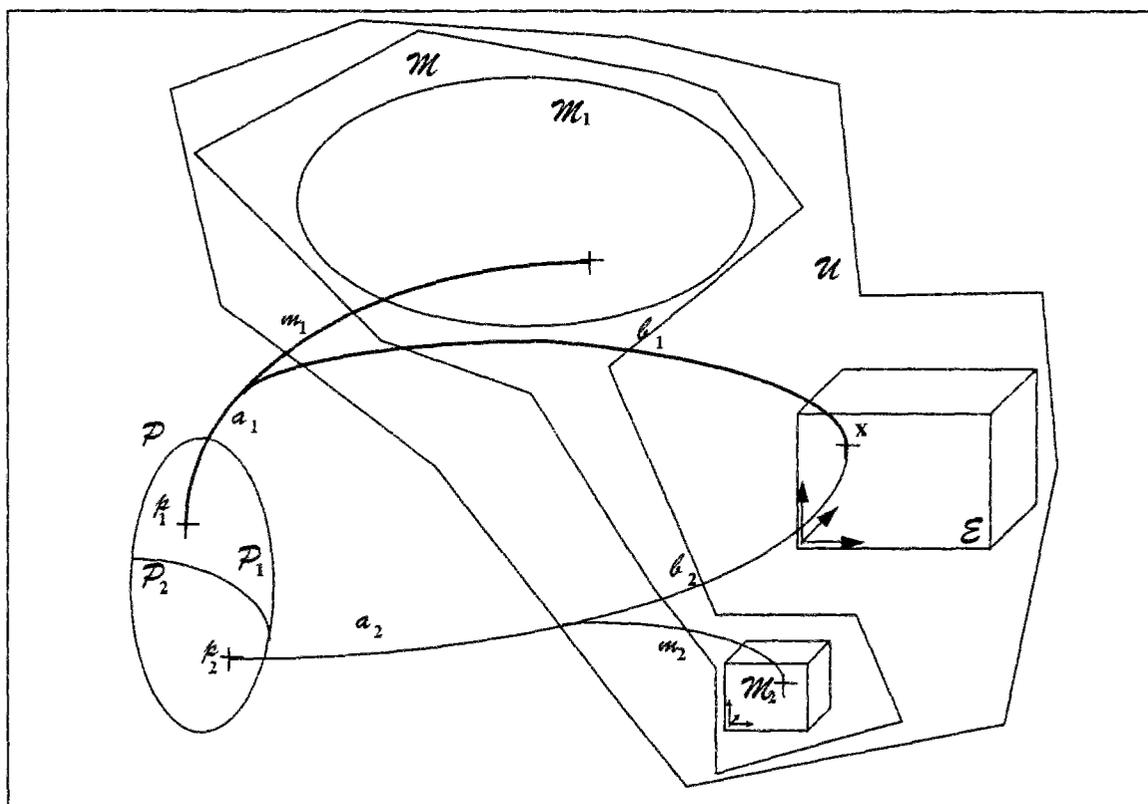


figure 2-4 L'univers d'observation et les placements d'un milieu multiconstituant

Nous pouvons également, comme précédemment, définir les micro- et macro-trajectoire d'une particule du constituant  $i$ ;

$$\begin{aligned} \text{cp}_{\#_i} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{E} & \text{et } \text{cm}_{\#_i} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{M}_i \\ t &\mapsto \text{cp}_{\#_i}(t) = \mathcal{C}_{it}(\#_i) & t &\mapsto \text{cm}_{\#_i}(t) = \mathcal{m}_{it}(\#_i) \end{aligned}$$

$\text{cp}_{\#_i}$  est la macrotrajectoire de la particule  $\#_i$  et  $\text{cm}_{\#_i}$  sa microtrajectoire.

### II.3.3 Cinématique réelle et virtuelle

Les micro- et macro-vitesse, ainsi que les micro- et macro-accélérations sont les dérivées première et seconde des trajectoires.

L'espace  $\underline{\mathbf{U}}$  des champs de vitesses virtuelles à l'instant  $t$  est un sous-espace de l'espace des multi-champs de vecteurs  $\underline{\mathbf{U}}$ .

$$\underline{\mathbf{U}} = \left\{ \left( \underline{u}_i, \omega_i \right)_{i \in I}, \forall (x, m_i) \in \mathcal{E} \times \mathcal{M}_i, \begin{array}{l} \underline{u}_i(x, m_i) \in T_x \mathcal{E} \\ \omega_i(x, m_i) \in T_{m_i} \mathcal{M}_i \end{array} \right\}$$

Cet espace  $\underline{\mathbf{U}}$  est soumis aux mêmes conditions que pour les milieux à un seul constituant, à savoir que les champs de vitesse réels doivent appartenir à  $\underline{\mathbf{U}}$ , et que nous n'autorisons que des discontinuités bornées.

On peut introduire pour les milieux multiconstituants la notion de point matériel du  $i^{\text{ème}}$  constituant (le sous ensemble de  $\mathcal{P}_i$  image réciproque d'un point quelconque  $x$  de l'espace  $\mathcal{E}$  par le placement  $\mathcal{C}_i$ , noté  $\mathcal{P}_i(x)$ ) et de point microstructural du  $i^{\text{ème}}$  constituant (le sous-ensemble de  $\mathcal{P}_i$  ayant la même image  $m_i$  dans  $\mathcal{M}_i$ , noté  $\mathcal{P}_i(m_i)$ ). L'union en  $i$  des  $\mathcal{P}_i(x)$  constitue le point matériel  $\mathcal{P}(x)$ .

### II.3.4 La masse

La masse d'un corps matériel est définie par constituant. On introduit une famille de mesures-masses  $(M_{it})_{i \in I, t \in \mathbb{R}}$  sur chaque constituant, définies dans le cas des milieux continus par leur densité  $\mu_{it}(\#)$ . Les images de ces mesures par les placements  $\mathcal{C}_i$  sont les masses hypervolumiques par constituant  $\rho_{it}(x, m_i)$  du constituant  $i$  au point  $(x, m_i)$ .

La masse totale d'un corps  $C$  ( $M_C(t)$ ) à l'instant  $t$  est donc la somme des masses de chacun de ses constituants à l'instant  $t$ :

$$M_C(t) = M_t(\mathcal{U}) = M_t(\mathcal{P}) = \sum_{i \in I} M_{it}(\mathcal{E} \times \mathcal{M}_i) = \sum_{i \in I} M_{it}(\mathcal{P}_i)$$

La masse volumique du constituant  $i$  au point  $x$  et à l'instant  $t$  vaut:

$$\rho_i(x, t) = M_{it}(\{(x, m_i), m_i \in \mathcal{M}_i\}) = M_{it}(\mathcal{P}_i(x))$$

et la masse volumique du milieu au point  $x$  et à l'instant  $t$  :

$$\rho(x, t) = \sum_{i \in I} \rho_i(x, t) = \sum_{i \in I} M_{it}(\mathcal{P}_i(x))$$

C'est la somme des masses de tous les points matériels situés en  $x$  à l'instant  $t$ .

Un corps matériel multiconstituant est défini par:

**un ensemble de particules  $\mathcal{P}$**

**une partition de  $\mathcal{P}$ :  $\mathcal{P} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{P}_i$**

**un univers d'observation  $\mathcal{U} = \mathcal{E} \times \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i$**

**une famille de placements de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{E} \times \mathcal{M}_i (a_{it})_{i \in I, t \in \mathbb{R}}$**

**une famille de mesures-masse sur  $\mathcal{P} (M_{it})_{i \in I, t \in \mathbb{R}}$**

Les placements  $a_{it}$  sont bijectifs si le constituant est multiparticulaire. Si le constituant est monoparticulaire, c'est le macroplacement  $\ell_{it}$  qui est bijectif.

## II.4 Les milieux multiphasiques

Une particule peut se trouver dans des « états » différents. L'exemple le plus immédiat est celui des différentes phases (au sens classique) dans lesquels peuvent se trouver des « particules d'eau » dans un milieu poreux. L'eau peut évidemment être à l'état solide, liquide ou gazeux. Si on s'intéresse à des problèmes de résistance au gel, ou plus généralement à des problèmes de migration d'eau par capillarité, on peut également être amené à considérer comme se trouvant dans des états différents les particules d'eau liée (adsorption, liaisons chimiques,...) ou d'eau libre.

Ce qui caractérise deux états différents d'une même particule, c'est essentiellement l'existence de « comportements » différents, qui font que la connaissance de l'état de la particule est essentielle à une bonne description du système dans lequel se trouve cette particule.

### II.4.1 L'univers d'observation et les placements

Chaque particule du milieu peut donc se trouver dans un état  $j$ .  $j$  est un entier d'un intervalle  $J$  qui est l'ensemble des indices des états possibles des particules du milieu. Nous nous limitons à des milieux à nombre fini d'états possibles ( $J \subset \mathbb{N}$ ). La description d'un milieu pouvant prendre un nombre infini d'états se fera de manière beaucoup plus naturelle par le biais d'une microstructure. A chaque état  $j$  sera donc éventuellement associé un ensemble de microstructure  $\mathcal{M}_j$ .

L'univers d'observation est donc le produit cartésien de l'espace physique  $\mathcal{E}$  par le produit des variétés de microstructure de chacun des états possibles des particules.

$$\mathcal{U} = \mathcal{E} \times \mathcal{M} = \mathcal{E} \times \prod_{j \in J} \mathcal{M}_j$$

Dans chaque placement  $a$  de  $\mathcal{P}$ , chaque particule a une image dans l'espace de microstructure associé à chacun de ces états possibles, et réciproquement. Chaque placement est une bijection de  $\mathcal{P}$  sur  $\mathcal{U}$ . Cette définition des placements permet un traitement formellement simple du changement d'état, tout au moins dans le cas où on ne prend pas en compte les filtrations des phases entre elles. Un exemple de changement d'état possible entre deux états à microstructure différents est celui du fer, qui peut présenter suivant la température des structures cristallographiques différentes; fer  $\alpha$  (cubique centré) en dessous de 910 degrés, fer  $\gamma$  (cubique face centrée) au-dessus. L'influence de cette transition de phase sur le formage des alliages de fer est bien connue.

Les notions de point matériel  $\mathcal{P}(x)$  et de point microstructural  $\mathcal{P}(m)$  subsistent en s'enrichissant de la notion de point microstructural par phase  $\mathcal{P}(m_j)$  qui est le sous-ensemble de  $\mathcal{P}$  des particules du milieu dont la phase  $j$  se trouve dans l'état  $m_j$ .

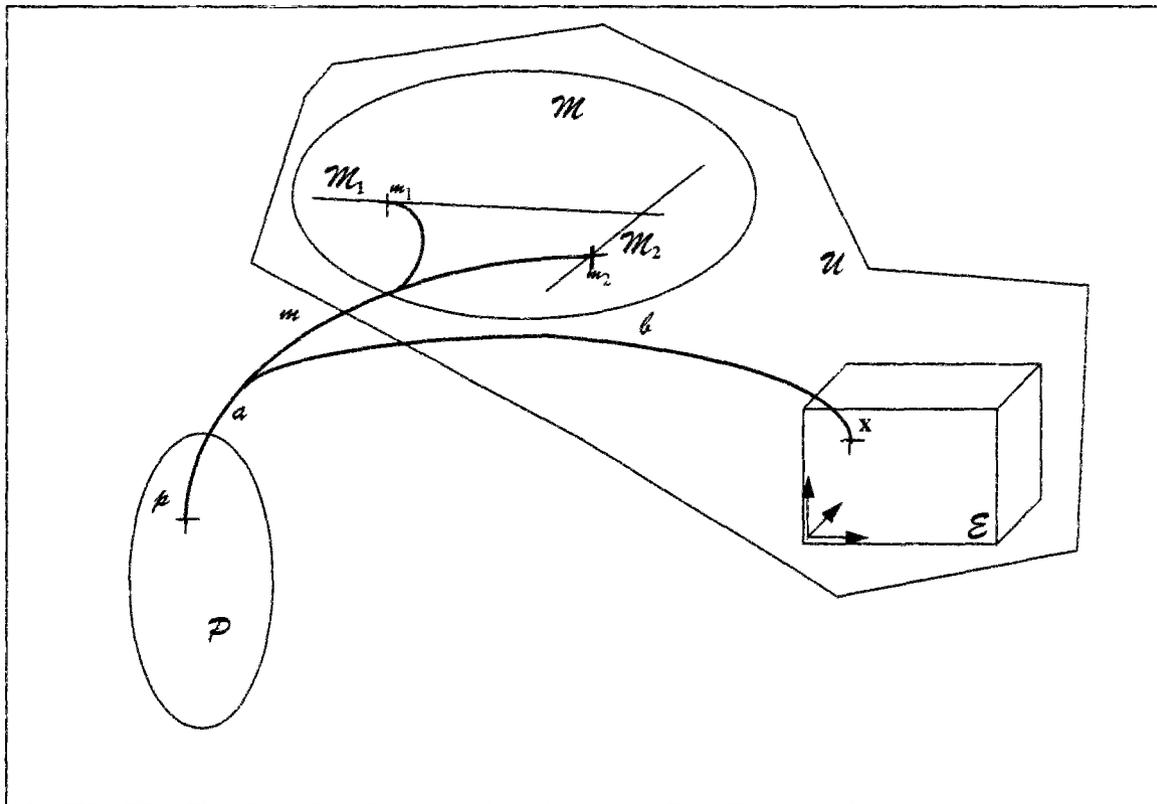


figure 2-5 Univers d'observation et placement d'un milieu multiphasique

#### II.4.2 La fonction d'état des particules

Nous avons donc fait le choix, dans le cadre de cette étude, de donner à chaque particule de  $\mathcal{P}$ , par les placements, une image dans chaque ensemble de microstructure associé à chaque état possible de la particule.

Reprenons l'exemple des phases austénitique et martensitique du fer, qui sont donc deux états possibles d'un grain (au sens cristallographique du terme) de fer, à chacun desquels nous associons donc un ensemble de microstructure de type orientation dans l'espace. L'ensemble des particules que nous considérons est un ensemble de "grains". L'univers d'observation  $\mathcal{U}$  à prendre en compte est le produit cartésien de  $\mathcal{E}$ , espace euclidien de dimension 3, par  $\mathcal{M}$ , ensemble de microstructure, qui est lui-même le produit cartésien de  $\mathcal{M}_a$ , ensemble des orientations possibles de l'austénite, par  $\mathcal{M}_m$ , ensemble des orientations possibles de la martensite. Les placements sont donc des bijections de  $\mathcal{P}$  sur  $\mathcal{U}$ , ce qui signifie que, à ce stade de la description, chaque particule a deux images microstructurales possibles;  $m_a$  si elle est dans une phase austénitique,  $m_m$  si elle est dans une phase martensitique. Nous proposons d'introduire une **fonction de phase** des particules  $\alpha$ , qui, dans le cas de l'exemple, ferait correspondre à chaque particule deux valeurs  $\alpha_a$  et  $\alpha_m$ , de l'intervalle  $[0,1]$ , telles que

$\alpha_a + \alpha_m = 1$  pour toutes les particules. Cette fonction correspondra à une répartition massique locale de chaque phase, et son évolution rendra compte des phénomènes de changement de phase.

De manière plus générale, nous proposons de définir sur  $\mathcal{P}$  une application  $\alpha$ , à valeurs dans le produit cartésien de l'intervalle  $[0,1]$  par lui-même  $\text{card}(J)$  fois, telle que la somme de toutes les valeurs ainsi définies soit égale à 1;

$$\alpha: \mathcal{P} \rightarrow \prod_{j \in J} [0,1] \\ \# \mapsto \alpha(\#) = \left( \alpha_j(\#) \right)_{j \in J} \quad \text{avec} \quad \sum_{j \in J} \alpha_j(\#) = 1, \quad \forall \# \in \mathcal{P}$$

Ainsi la masse d'une "particule" d'eau dans un bloc de glace peut-elle se trouver répartie entre eau liquide, eau solide et eau gazeuse, la valeur des différents paramètres  $\alpha_i$  étant très directement liée aux conditions de pression et de température.

### II.4.3 Cinématique réelle et virtuelle

Les notions de trajectoires, vitesses réelles et virtuelles ainsi que les accélérations, sont totalement semblables à celles introduites dans le cadre des milieux multiparticulaires sans changement de phases, la variété de microstructure  $\mathcal{M}$  étant la variété produit cartésien de chaque variété de microstructure  $\mathcal{M}_j$ .

Les micro-vitesses  $\omega$  sont des éléments de l'espace tangent à  $\mathcal{M}$  en  $(m_j)_{j \in J}$ . En considérant cet espace tangent comme le produit cartésien des espaces tangents à chaque  $\mathcal{M}_j$  en  $m_j$ , on peut les décomposer en micro-vitesse de phase  $\omega_j$ , chaque  $\omega_j$  appartenant à l'espace tangent à  $\mathcal{M}_j$  en  $m_j$ . Il en va de même pour les micro-accélérations.

### II.4.4 La masse

La notion de masse, et donc de corps matériel, est totalement identique à celle introduite pour les milieux multiparticulaires. Il s'agit d'une famille  $M_t$  de mesures sur  $\mathcal{P}$ , définies dans le cas continu par une densité  $\mu_t(\#)$ , que l'on transporte par les placements  $a_t$  dans l'univers  $\mathcal{U}$  sous la forme d'une masse hypervolumique  $\rho_t(x, (m_j)_{j \in J}) = \mu_t(a_t^{-1}(x, (m_j)_{j \in J}))$ .

Par contre, l'existence de la fonction de phase  $\alpha$  permet de définir sur chaque variété de microstructure  $\mathcal{M}_j$  une masse volumique par phase  $\rho_{jt}(x)$  en distribuant la masse hypervolumique au moyen des coefficients  $\alpha_j$ . Pour cela, on définit sur  $\mathcal{P}$   $\text{card}(J)$  famille de

mesure  $M_{jt}$  de densité  $\mu_{jt}(\#) = \alpha_j(\#,t) \times \mu_t(\#)$ . La mesure du point matériel  $\mathcal{P}(x)$  par cette mesure  $M_{jt}$  est la masse volumique de la phase  $j$  au point  $x$ :

$$\rho_{jt}(x) = M_{jt}(\mathcal{P}(x))$$

On retrouve bien que la masse volumique au point  $x$  à l'instant  $t$  est la somme des masses volumiques par phase au point  $x$  et à l'instant  $t$  :

$$\rho_t(x) = \sum_{j \in J} \rho_{jt}(x)$$

Un corps matériel multiphasique est défini par:

**un ensemble de particules  $\mathcal{P}$**

**un univers d'observation  $\mathcal{U} = \mathcal{E} \times \prod_{j \in J} \mathcal{M}_j$**

**une famille de placements bijectifs de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{U} (a_t)_{t \in \mathbb{R}}$**

**une famille de fonctions d'état de  $\mathcal{P}$  dans  $\prod_{j \in J} [0,1] (\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$**

**une famille de mesures-masse sur  $\mathcal{P} (M_t)_{t \in \mathbb{R}}$**

Les fonctions d'état sont telles que  $\sum_{j \in J} \alpha_{jt}(\#) = 1, \forall t$  et  $\forall \#$ . Soulignons la différence entre

l'univers d'observation d'un milieu multiconstituant (produit de  $\mathcal{E}$  par l'union des variétés de microstructure) et celui d'un milieu multiphasique (produit de  $\mathcal{E}$  par le produit des variétés de microstructure).

## II.5 Conclusion

Nous avons introduit dans ce second chapitre les notions qui nous seront nécessaires dans la suite du mémoire. Pour l'essentiel, la définition d'un corps matériel s'appuie sur quatre notions:

**Un ensemble de particules  $\mathcal{P}$**   
**Un univers d'observation  $\mathcal{U}$**   
**Une famille de placement  $(a_t)_{t \in \mathbb{R}} = (a_t, m_t)_{t \in \mathbb{R}}$**   
**Une famille de mesures-masse sur  $\mathcal{P}$  de densité  $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}}$**

Les propriétés de l'ensemble des particules, de l'univers d'observation et des placements qui les relie permettent de caractériser les différents milieux que nous étudions: monoparticulaire, multiparticulaire, multiconstituant, multiphasique.

|  |
|--|
| $\wp$ monoparticulaire: $\mathcal{U} = \mathcal{E} \times \mathcal{M}$ , $b_t$ est bijectif sur $\mathcal{E}$  |
| $\wp$ multiparticulaire: $\mathcal{U} = \mathcal{E} \times \mathcal{M}$ , $a_t$ est bijectif sur $\mathcal{U}$   |
| $\wp$ multiconstituant: $\mathcal{P} = \cup \mathcal{P}_i$ , $\mathcal{U} = \mathcal{E} \times \bigcup_i \mathcal{M}_i$ , $a_t = (a_{ti}: \mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{U} \times \mathcal{M}_i)_{i \in I}$ , |
| $b_{ti}$ est bijectif $\rightarrow$ le constituant $i$ est monoparticulaire  |
| $a_{ti}$ est bijectif $\rightarrow$ le constituant $i$ est multiparticulaire   |
| $\wp$ multiphasique: $\mathcal{U} = \mathcal{E} \times \prod_j \mathcal{M}_j$ , $a_t = (b_t, (a_{tj}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}_j)_{j \in J})$ ,   |
| $a_t$ est bijectif sur $\mathcal{U}$   |
| fonction de phase $\alpha_t = (\alpha_{tj}: \mathcal{P} \rightarrow [0,1])_{j \in J}$ , $\forall t, \forall \mathcal{P}, \sum_{j \in J} \alpha_{tj}(\mathcal{P}) = 1$  |

Dans la suite du mémoire, nous nous attacherons essentiellement à décrire le comportement mécanique des milieux multiparticulaires. Le chapitre suivant va ainsi être consacré, après une analyse de la notion de modèle au premier gradient dans le cas d'un milieu continu classique et dans le cas d'un milieu continu de Cosserat monoparticulaire puis multiparticulaire, à l'application du principe des puissances virtuelles au cas des milieux multiparticulaires à microstructure.

## CHAPITRE III

# ECRITURE DES EQUATIONS D'EQUILIBRE

*Nous nous intéresserons principalement, dans ce chapitre, à la construction des efforts intérieurs et à l'écriture des équations d'équilibre des milieux continus multiparticulaires à microstructure. L'approche générale que nous privilégions est la Méthode des Puissances Virtuelles, dont nous rappelons brièvement les grandes lignes dans la première partie du chapitre, en en soulignant les principaux obstacles.*

*La deuxième partie apporte un éclairage "physique" de la signification d'une approche au premier gradient dans le cas classique, puis dans le cas des milieux de Cosserat à microstructure monoparticulaires, puis multiparticulaires.*

*Nous détaillons ensuite la méthode des puissances virtuelles appliquée à un milieu à microstructure multiparticulaire, sur la base de l'étude précédente, en utilisant les milieux micropolaires comme exemples.*



|   |           |
|---|-----------|
| <b>III.1 Motivation</b>   | <b>59</b> |
| <b>III.2 Hypothèses physiques sous-jacentes à une théorie au premier gradient</b> | <b>61</b> |
| III.2.1 Les milieux de Cauchy   | 61        |
| III.2.1.1 Equations d'équilibre   | 67        |
| III.2.2 Les milieux de Cosserat   | 68        |
| III.2.2.1 Equations d'équilibre   | 70        |
| III.2.3 Les milieux de Cosserat multiparticulaires                                | 73        |
| III.2.3.1 Equations d'équilibre   | 77        |
| <b>III.3 Approche par les puissances virtuelles</b>                               | <b>83</b> |
| III.3.1 Formes des puissances virtuelles  | 83        |
| III.1.2 Changement d'observateur  | 85        |
| III.3.3 Objectivité de la puissance des efforts intérieurs                        | 86        |
| III.3.4 Equations d'équilibre   | 88        |
| III.3.5 Les milieux de Cosserat   | 89        |



### III.1 Motivation

L'ensemble de notre démarche de construction de modèles se place dans le cadre de la méthode des puissances virtuelles. Le postulat de base est le principe des puissances virtuelles;

- dans un mouvement virtuel d'un système de particules, il y a égalité entre d'une part la somme des puissances virtuelles des efforts intérieurs et extérieurs, et d'autre part la puissance virtuelle des quantités d'accélération;

- la puissance des efforts intérieurs est nulle pour tout mouvement virtuel rigidifiant un sous-système quelconque du système considéré.

La construction classique des efforts intérieurs et des équations d'équilibre d'un modèle mécanique par la méthode des puissances virtuelles se fait en trois étapes [Germain, 1984] ou [Salençon, 1992].

Choix de l'espace vectoriel des mouvements virtuels et définitions des mouvements virtuels rigidifiants.

Choix de l'expression des puissances virtuelles des efforts intérieurs, extérieurs et des quantités d'accélération.

Application du principe des puissances virtuelles et traitement mathématique des expressions pour l'obtention des équations de la dynamique.

L'application de cette méthode permet une mise au point rigoureuse de modèles mécaniques de milieux non classiques; milieux micromorphiques [Germain, 1973b] ou mécanique de l'endommagement [Frémond & Nedjar, 1993]. Mais la grande simplicité du concept et l'apparente facilité de mise en œuvre de la méthode cache en fait deux difficultés importantes.

La première réside au cœur même de la méthode dans la très grande liberté de choix de l'espace des mouvements virtuels.

« Ces mouvements virtuels n'ont évidemment rien à connaître des limitations ou contraintes imposées aux mouvements réels du système considéré dans son évolution mécanique particulière, mais ils doivent, pour que la construction faite ait une quelconque utilité pratique, inclure tous ces mouvements réels. »\*

---

\* **J. Salençon**, 1992, Mécanique des milieux continus  
*Ecole Polytechnique*, p144.

Cette seule limitation repose sur les mouvements virtuels. Les possibilités de choix dans la construction d'un modèle particulier sont donc nombreuses et la place laissée à l'intuition du modélisateur est (trop?) importante, d'autant plus qu'elle se conjugue au choix de la forme des puissances virtuelles des différents efforts, qui présuppose, pour être pertinente, une connaissance a priori du résultat (ou au moins une forte présomption). Dans le cas de modèles de milieux à microstructure, l'absence de règles ou de guides quant aux choix à effectuer risque de conduire à la construction de modèles qui ne reposent pas sur les grandeurs constitutives les plus pertinentes.

La seconde difficulté, qui concerne d'ailleurs plus directement l'aspect multiparticulaire de notre approche, provient de la notion de théorie au premier gradient. La construction par la méthode des puissances virtuelles, par nature très abstraite, ne permet pas de mettre facilement en évidence la signification d'une écriture des puissances au premier gradient. Si dans un milieu continu tridimensionnel classique, la notion de premier gradient se comprend aisément comme une prépondérance accordée à l'action du voisinage d'un point dans les actions s'exerçant sur une particule placée au point considéré, ce concept pose quelques problèmes dans le cas des milieux multiparticulaires: quelles peuvent bien être les interactions entre deux particules situées en un même point de l'espace ?

Les efforts intérieurs d'un milieu multiparticulaire, où à l'échelle macroscopique on a une infinité de particules au même point peuvent en effet être de nature assez complexe; si on suppose par exemple qu'il y a une interaction entre toutes les particules du même point matériel, on est conduit à introduire des champs d'efforts non-locaux (au sens de la topologie de  $\mathcal{M}$ ) sur la microstructure.

Pour mieux comprendre les hypothèses physiques sous-jacentes à la construction de modèles "au premier gradient" aussi bien en espace qu'en microstructure, nous proposons une démarche de construction des efforts inspirée des travaux de Cauchy pour les milieux discrets, consistant à prendre en compte dans un premier temps les interactions entre toutes les particules de l'univers avant d'introduire les simplifications apportées par le fait que les interactions sont généralement à courtes distances. Cette démarche permet de bien faire ressortir les hypothèses physiques sous-jacentes à une théorie au premier gradient des milieux multiparticulaires. Elle permet également de donner la "bonne" forme aux puissances virtuelles nécessaires à l'écriture des équations.

Nous utilisons dans cette construction le principe des puissances virtuelles, sous une forme légèrement différente de celle que nous avons donnée au début de ce chapitre. Nous énonçons le principe sous la forme suivante;

La puissance virtuelle des forces d'interaction des particules de l'univers dans un mouvement virtuel quelconque est égale à la puissance virtuelle des quantités d'accélération de ces particules dans le même mouvement virtuel.

Dans la suite, nous travaillerons dans un cadre quasistatique, et nous utiliserons l'expression suivante du principe.

la puissance virtuelle reçue par l'univers dans un mouvement virtuel  
quelconque de l'univers est nulle

L'objectivité de la puissance des efforts intérieurs résulte du principe de l'égalité de l'action et de la réaction entre deux particules, et nous verrons que les efforts introduits à l'aide de ce principe vérifient automatiquement l'équation correspondant à ce postulat d'objectivité (conservation du moment cinétique).

Pour mieux éclairer notre démarche, nous reconstruisons d'abord un modèle de milieu classique (monoparticulaire, sans microstructure). Nous introduisons dans un second temps la notion de microstructure pour bâtir, avec une méthode identique, une théorie des milieux micropolaires, que nous complétons dans une troisième partie en mettant en œuvre la méthode dans le cas de milieux de Cosserat multiparticulaires.

## III.2 Hypothèses physiques sous-jacentes à une théorie au premier gradient

### III.2.1 Les milieux de Cauchy

Le développement d'une théorie au premier gradient repose sur la notion intuitive que les efforts qu'exercent les particules les unes sur les autres sont des efforts à très courte distance, représentée par une **distance caractéristique**  $\varepsilon$  au-delà de laquelle ces efforts deviennent négligeables.

Considérons pour cela à l'instant  $t$  l'espace euclidien de dimension 3  $\mathcal{E}$ , dans lequel un corps  $\mathcal{C}$  occupe à l'instant  $t$  le domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ .

Nous faisons l'hypothèse, dans un premier temps, que chaque particule placée en  $\underline{y}$  exerce un effort représenté par un vecteur force  $\underline{a}(\underline{x}, \underline{y})$  sur la particule placée en  $\underline{x}$ .

Le principe de l'égalité de l'action et de la réaction se traduit par la nullité du torseur résultant des actions de  $\underline{x}$  sur  $\underline{y}$  et de  $\underline{y}$  sur  $\underline{x}$ , c'est-à-dire, en considérant la résultante et le moment de ces efforts en un point  $\underline{z}$  quelconque:

$$\forall \underline{z} \in \mathcal{E}, \begin{cases} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) + \underline{a}(\underline{y}, \underline{x}) = 0 \\ \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \wedge (\underline{y} - \underline{z}) + \underline{a}(\underline{y}, \underline{x}) \wedge (\underline{x} - \underline{z}) = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{aligned} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) &= -\underline{a}(\underline{y}, \underline{x}) \\ \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \wedge (\underline{y} - \underline{x}) &= 0 \end{aligned}$$

L'effort exercé par une particule placée en  $\underline{x}$  sur une particule placée en  $\underline{y}$  est donc colinéaire au vecteur  $\underline{y} - \underline{x}$  et opposé à l'effort exercé par la particule  $\underline{y}$  sur la particule  $\underline{x}$ . De plus, nous faisons l'hypothèse d'une décroissance rapide de cet effort avec la distance séparant les deux particules;

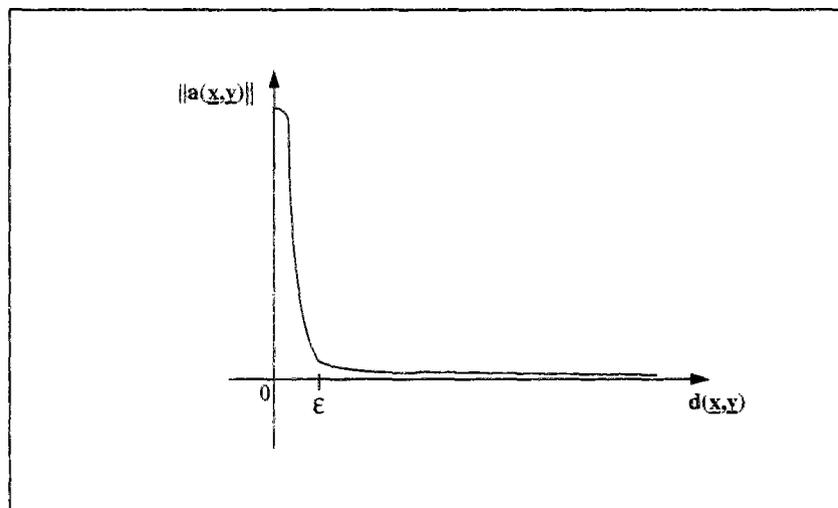


figure III-1: distribution de forces autour de  $\underline{x}$

On définit sur l'univers tout entier un espace vectoriel  $\underline{U}$  de champs de vecteurs à variation bornée (champs de vitesse virtuelle de l'univers). Les champs de  $\underline{U}$  uniformément nuls en dehors de  $\Omega$  constituent les champs de vitesse virtuelle du corps  $\mathcal{C}$ , sous-espace de  $\underline{U}$  que nous notons  $\underline{U}(\mathcal{C})$ .

La puissance totale des efforts exercés par l'univers sur lui-même dans un champ de vitesse virtuelle quelconque  $\underline{u}$  s'écrit sous la forme:

$$P = \int_{\mathcal{E}} \left( \int_{\mathcal{E}} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{u}(\underline{x}) dV(\underline{y}) \right) dV(\underline{x})$$

Nous décomposons la puissance P en une somme de deux intégrales, l'une sur le domaine  $\Omega$ , l'autre sur  $\mathcal{E} - \Omega$  :

$$P = \int_{\Omega} \left( \int_{\mathcal{E}} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{u}(\underline{x}) dV(\underline{y}) \right) dV(\underline{x}) + \int_{\mathcal{E}-\Omega} \left( \int_{\mathcal{E}} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{u}(\underline{x}) dV(\underline{y}) \right) dV(\underline{x})$$

Il est clair que si nous considérons un champ de vitesse virtuelle du corps  $\mathcal{C}$ , uniformément nul en dehors du domaine  $\Omega$  occupé par le corps  $\mathcal{C}$ , le second terme du membre de droite de l'égalité précédente est nul ;

$$P = \int_{\Omega} \left( \int_{\mathcal{E}} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{u}(\underline{x}) dV(\underline{y}) \right) dV(\underline{x}) .$$

La densité de puissance  $p(\underline{x})$  au point  $\underline{x}$  de  $\Omega$  dans le champ de vitesse virtuelle  $\underline{u}$  du corps  $\mathcal{C}$  est l'intégrale

$$p(\underline{x}) = \int_{\mathcal{E}} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{u}(\underline{x}) dV(\underline{y}) .$$

que l'on peut décomposer sur  $\Omega$  et  $\mathcal{E} - \Omega$ :

$$p(\underline{x}) = \int_{\Omega} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{u}(\underline{x}) dV(\underline{y}) + \int_{\mathcal{E}-\Omega} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{u}(\underline{x}) dV(\underline{y})$$

ce qui donne pour P ;

$$P = \underbrace{\int_{\Omega} \int_{\Omega} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{u}(\underline{x}) dV(\underline{y}) dV(\underline{x})}_{P_{int}} + \underbrace{\int_{\Omega} \int_{\mathcal{E}-\Omega} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{u}(\underline{x}) dV(\underline{y}) dV(\underline{x})}_{P_{ext}}$$

En utilisant la symétrie de l'expression de  $P_{int}$  en  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$ , et en introduisant le principe de l'égalité de l'action et de la réaction ( $\underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) = -\underline{a}(\underline{y}, \underline{x})$ ) ;

$$\begin{aligned}
 P_{int} &= \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{u}(\underline{x}) dV(\underline{x}) \right) dV(\underline{y}) \\
 &= \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \underline{a}(\underline{y}, \underline{x}) \cdot \underline{u}(\underline{y}) dV(\underline{y}) \right) dV(\underline{x}) \\
 &= \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} -\underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{u}(\underline{y}) dV(\underline{y}) \right) dV(\underline{x})
 \end{aligned}$$

On écrit  $P_{int}$  comme la demi-somme de l'expression de  $P_{int}$  en  $\underline{x}$  et de l'expression de  $P_{int}$  en  $\underline{y}$ :

$$P_{int} = \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot (\underline{u}(\underline{x}) - \underline{u}(\underline{y})) dV(\underline{y}) \right) dV(\underline{x})$$

Nous convenons de noter  $p_i(\underline{x}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot (\underline{u}(\underline{x}) - \underline{u}(\underline{y})) dV(\underline{y})$  la densité de puissance fournie par le corps  $\mathcal{C}$  à une particule se trouvant en  $\underline{x}$  dans le champ de vitesse virtuelle  $\underline{u}$ .

Il nous faut maintenant prendre en compte la forme rapidement décroissante des interactions entre particules, de manière à séparer les actions des particules "proches" de  $\underline{x}$  (action forte) des actions des particules du reste de l'univers (interaction faible, mais intégration sur un domaine infini).

On considère pour cela une boule  $\mathcal{B}(\underline{x})$  de rayon  $\epsilon$  centrée en  $\underline{x}$  et on note  $\mathcal{B}'(\underline{x})$  l'intersection de la boule  $\mathcal{B}(\underline{x})$  et du domaine  $\Omega$  occupé par le corps  $\mathcal{C}$ .

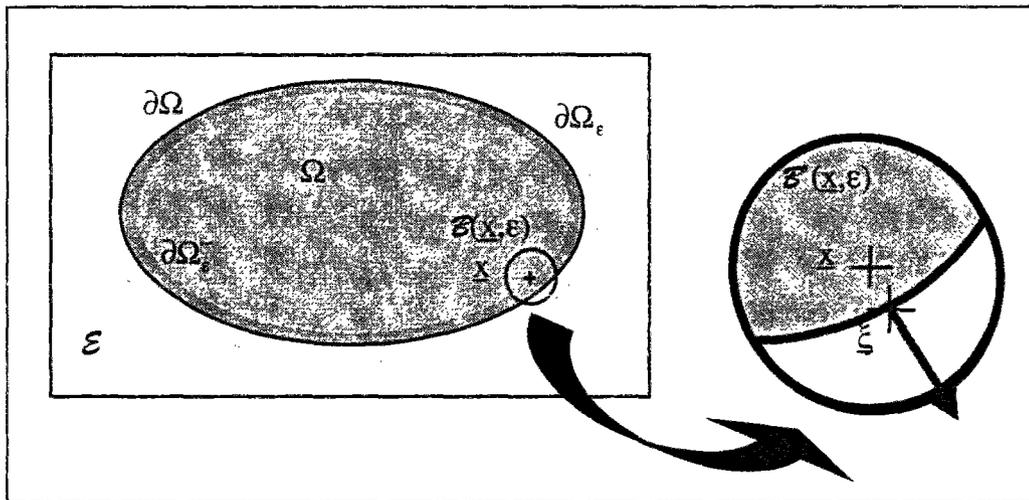


figure III-2: définition des différents domaines

On décompose ensuite l'intégrale  $p_i(\underline{x})$  en une intégrale sur  $\mathcal{B}'(\underline{x})$  et une intégrale sur le reste du corps  $\mathcal{C}$ ;  $\Omega - \mathcal{B}'(\underline{x})$ .

$$p_i(\underline{x}) = \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} \frac{1}{2} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot (\underline{u}(\underline{x}) - \underline{u}(\underline{y})) dV(\underline{y}) + \int_{(\Omega - \mathcal{B}'(\underline{x}))} \frac{1}{2} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot (\underline{u}(\underline{x}) - \underline{u}(\underline{y})) dV(\underline{y})$$

La participation à l'intégrale  $p(\underline{x})$  des particules du domaine  $\Omega - \mathcal{B}'(\underline{x})$  est négligeable d'une part devant la puissance fournie par les particules du voisinage de  $\underline{x}$ , et d'autre part devant celle fournie par le reste de l'univers, ce qui permet d'écrire  $p_i(\underline{x})$  sous la forme

$$p_i(\underline{x}) = \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} \frac{1}{2} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot (\underline{u}(\underline{x}) - \underline{u}(\underline{y})) dV(\underline{y})$$

Si on peut approcher  $(\underline{u}(\underline{x}) - \underline{u}(\underline{y}))$  par  $(\text{grad}_{\underline{x}}(\underline{u}(\underline{x})) \cdot (\underline{x} - \underline{y}))$ , on a

$$p_i(\underline{x}) = \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} \left[ \frac{1}{2} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \text{grad}_{\underline{x}} \underline{u}(\underline{x}) \cdot (\underline{x} - \underline{y}) \right] dV(\underline{y}) = \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} \left[ \left( \frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{y}) \otimes \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \right) : \text{grad}_{\underline{x}} \underline{u} \right] dV(\underline{y})$$

ce qui conduit à  $P_{int} = \int_{\Omega} \left( \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} \left( \frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{y}) \otimes \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \right) dV(\underline{y}) \right) : \text{grad}_{\underline{x}}(\underline{u}) dV(\underline{x})$

et en notant  $\underline{B}(\underline{x}) = \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} \left( \frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{y}) \otimes \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \right) dV(\underline{y})$

$$\underline{P}_{int} = \int_{\Omega} \underline{B}(\underline{x}) : \text{grad}_{\underline{x}}(\underline{u}) dV(\underline{x})$$

Pour ce qui concerne l'intégrale  $P_{ext}$ , on introduit la partition de  $\mathcal{E} - \Omega$  en  $\mathcal{E} - \Omega = (\partial\Omega_{\varepsilon}) \cup \mathcal{E}_{\Omega_{\varepsilon}}$  où  $\partial\Omega_{\varepsilon}$  est le volume d'épaisseur  $\varepsilon$  autour de  $\Omega$ :

$$\partial\Omega_{\varepsilon} = \{ \underline{\xi} + \eta \underline{n}(\underline{\xi}); \eta \in [0, \varepsilon], \underline{\xi} \in \partial\Omega \} \quad \underline{n}(\underline{\xi}) \text{ étant la normale sortante à } \partial\Omega \text{ en } \underline{\xi}.$$

$P_{ext}$  se décompose alors en

$$P_{ext} = \underbrace{\int_{\Omega} \int_{\mathcal{E}_{\Omega_{\varepsilon}}} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{u}(\underline{x}) dV(\underline{y}) dV(\underline{x})}_{P_{ev}(\underline{x})} + \underbrace{\int_{\Omega} \int_{\partial\Omega_{\varepsilon}} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{u}(\underline{x}) dV(\underline{y}) dV(\underline{x})}_{P_{es}(\underline{x})} = P_{ev} + P_{es}$$

En notant  $\underline{A}(\underline{x}) = \int_{\mathcal{E}_{\Omega_{\varepsilon}}} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) dV(\underline{y})$ , on écrit  $P_{ev}$  sous la forme:

$$\underline{P}_{ev} = \int_{\Omega} \underline{A}(\underline{x}) \cdot \underline{u}(\underline{x}) dV(\underline{x})$$

Deux cas sont à considérer pour  $p_{es}(\underline{x})$  ;

$\Rightarrow$  l'intersection du voisinage  $\mathcal{B}'(\underline{x})$  avec la couronne  $\partial\Omega_{\varepsilon}$  est vide. On peut très certainement négliger  $p_{es}$  devant  $p_{ev}$  et  $p_i$ , puisque  $p_{es}$  est l'intégrale sur un volume fini d'interactions faibles.

⇒ l'intersection du voisinage  $\mathfrak{E}(\underline{x})$  avec la couronne  $\partial\Omega_\varepsilon$  est non-vide. En introduisant la couronne intérieure à  $\Omega$  d'épaisseur  $\varepsilon$ , on peut écrire  $P_{es}$  sous la forme:

$$P_{es} = \int_{\partial\Omega_\varepsilon^-} \int_{\partial\Omega_\varepsilon^+} a(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{u}(\underline{x}) \, dV(\underline{y}) \, dV(\underline{x})$$

Sous réserve d'une régularité suffisante de la frontière de  $\Omega$  et du champs  $*$ , on peut transformer l'intégrale de volume  $\int_{\partial\Omega_\varepsilon^-} *(\underline{x}) \, dV(\underline{x})$  par le changement de variable  $\underline{x} = \underline{\xi} - \eta \underline{n}$  :

$$\int_{\partial\Omega} \left( \int_0^\varepsilon *(\underline{\xi} - \eta \underline{n}(\underline{\xi})) \, d\eta \right) dS(\underline{\xi})$$

L'utilisation de cette formule dans  $P_{es}$  conduit à :

$$P_{es} = \int_{\partial\Omega} \left( \int_0^\varepsilon \left( \int_{\partial\Omega_\varepsilon^+} a(\underline{\xi} - \eta \underline{n}(\underline{\xi}), \underline{y}) \, dV(\underline{y}) \right) \cdot \underline{u}(\underline{\xi} - \eta \underline{n}(\underline{\xi})) \, d\eta \right) dS(\underline{\xi})$$

On choisit d'approcher  $\underline{u}(\underline{\xi} - \eta \underline{n}(\underline{\xi}))$  au premier ordre par  $\underline{u}(\underline{\xi})$ , soit

$$P_{es} = \int_{\partial\Omega} \left( \int_0^\varepsilon \left( \int_{\partial\Omega_\varepsilon^+} a(\underline{\xi} - \eta \underline{n}(\underline{\xi}), \underline{y}) \, dV(\underline{y}) \right) d\eta \right) \cdot \underline{u}(\underline{\xi}) \, dS(\underline{\xi}) = \int_{\partial\Omega} \underline{T}(\underline{\xi}) \cdot \underline{u}(\underline{\xi}) \, dS(\underline{\xi})$$

et en notant

$$\underline{T}(\underline{\xi}) = \int_0^\varepsilon \left( \int_{\partial\Omega_\varepsilon^+} a(\underline{\xi} - \eta \underline{n}(\underline{\xi}), \underline{y}) \, dV(\underline{y}) \right) d\eta$$

on obtient

$$P_{es} = \int_{\partial\Omega} \underline{T}(\underline{x}) \cdot \underline{u}(\underline{x}) \, dS(\underline{x})$$

La puissance virtuelle des efforts reçue par l'univers dans un mouvement virtuel du corps  $\mathcal{C}$  est la forme linéaire sur l'espace des champs de vitesses virtuelles suivante:

$$P_{\mathcal{C}}(\underline{u}) = \int_{\Omega} \underline{\underline{B}}(\underline{x}) : \text{grad}_{\underline{x}} \underline{u}(\underline{x}) \, dV(\underline{x}) + \int_{\Omega} \underline{A}(\underline{x}) \cdot \underline{u}(\underline{x}) \, dV(\underline{x}) + \int_{\partial\Omega} \underline{T}(\underline{x}) \cdot \underline{u}(\underline{x}) \, dS(\underline{x})$$

### III.2.1.1 Equations d'équilibre

Nous avons vu que la puissance totale des efforts de l'ensemble de l'univers sur le corps  $\mathcal{C}$  dans le champ de vitesse virtuelle  $\underline{u}$  se décomposait naturellement en:

$$\begin{aligned} \text{puissance des efforts intérieurs} & P_{int}(\underline{u}) = \int_{\Omega} \underline{\underline{B}}(\underline{x}) : (\text{grad}_{\underline{x}} \underline{u})(\underline{x}) dV(\underline{x}) \\ \text{puissance des efforts extérieurs volumiques} & P_{ev}(\underline{u}) = \int_{\Omega} \underline{A}(\underline{x}) \underline{u}(\underline{x}) dV(\underline{x}) \\ \text{puissance des efforts extérieurs surfaciques} & P_{es}(\underline{u}) = \int_{\partial\Omega} \underline{T}(\underline{x}) \underline{u}(\underline{x}) dS(\underline{x}) \end{aligned}$$

On retrouve une expression très classique des formes linéaires puissances des efforts intérieurs et extérieurs dans une théorie au premier gradient.

Les efforts surfaciques ont bien une nature d'efforts extérieurs, puisqu'il s'agit des efforts exercés par les particules de  $\partial\Omega_e$  sur des particules de  $\Omega$ .

Les équations d'équilibre quasi-statique s'obtiennent en appliquant le principe des puissances virtuelles à l'univers tout entier. La puissance fournie à lui-même par l'univers dans un mouvement virtuel quelconque est nulle :

$$\forall \underline{u} \in \underline{U}(\mathcal{C}), P_{\mathcal{C}}(\underline{u}) = 0$$

Les développements habituels donnent les équations d'équilibre et les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} -\text{div}(\text{}^T \underline{\underline{B}}) + \underline{A} &= 0 \\ \text{}^T \underline{\underline{B}} \cdot \underline{n} + \underline{T} &= 0 \end{aligned}$$

soit encore, avec les notations habituelles, en introduisant  $\underline{\underline{\sigma}} = -\text{}^T \underline{\underline{B}}, \underline{f} = \underline{A}, \underline{t} = \underline{T}$ ;

$$\begin{aligned} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f} &= 0 \text{ équation de champ} \\ \underline{\underline{\sigma}} - \text{}^T \underline{\underline{\sigma}} &= 0 \text{ condition d'objectivité} \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} &= \underline{t} \text{ condition limite} \end{aligned}$$

Tenseur de contrainte de Cauchy:  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \int_{\mathcal{E}'(\underline{x})} \left( \frac{1}{2} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \otimes (\underline{y} - \underline{x}) \right) dV(\underline{y})$

Densité volumique d'efforts extérieurs:  $\underline{f}(\underline{x}) = \int_{\mathcal{E}_{\Omega_e}} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) dV(\underline{y})$

Densité surfacique d'efforts extérieurs:  $\underline{t}(\underline{x}) = - \int_0^e \left( \int_{\partial\Omega_e} \underline{a}(\underline{x} + \eta \underline{n}(\underline{x}), \underline{y}) dV(\underline{y}) \right) d\eta$

Notons que cette approche nous conduit directement à un tenseur de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  symétrique, condition nécessaire d'objectivité de la puissance des efforts intérieurs. Il s'écrit en effet comme l'intégrale sur  $\mathcal{B}'(\underline{x})$  du produit tensoriel de  $\underline{a}(\underline{x}, \underline{y})$  et de  $\underline{d}(\underline{y} - \underline{x})$ , qui sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  colinéaires, comme nous l'avons montré au début de ce chapitre.

Une théorie au premier gradient repose donc essentiellement sur les valeurs respectives de la "distance caractéristique d'observation" - pour laquelle les variations des champs de vitesse sont faibles - et la "distance caractéristique d'interaction" - au-delà de laquelle les efforts interparticulaires deviennent négligeables -.

En d'autres termes, on ne pourra développer une théorie au premier gradient pour un type de milieu que dans la mesure où on pourra choisir des champs de vitesse virtuelle de longueur d'onde très supérieure à la distance caractéristique, qui est une **donnée physique** du milieu.

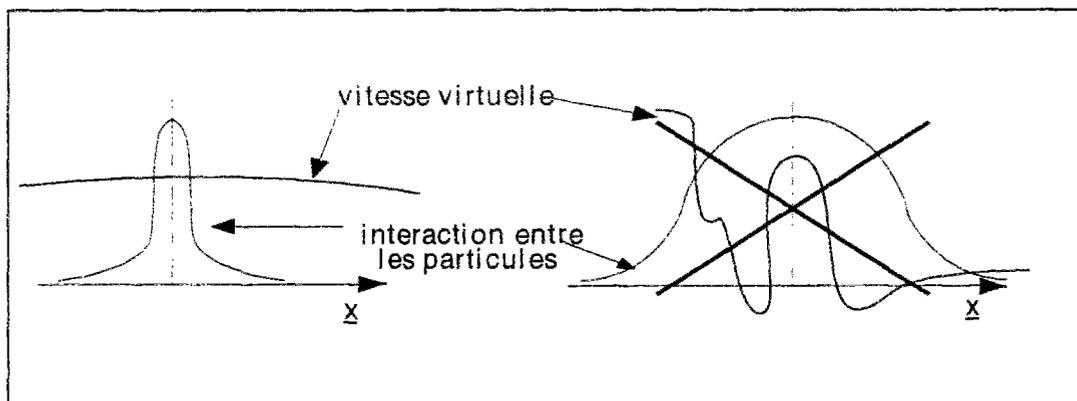


figure III-2: variations comparées de  $a(x_1, x_2)$  et de  $u(x)$   
dans un cas unidimensionnel

### III.2.2 Les milieux de Cosserat

Nous reprenons la construction précédente en supposant que les particules ne sont pas réduites à des points sans dimension mais possèdent un "volume" orienté dont l'orientation est susceptible d'évoluer. Cette orientation peut être décrite par un tenseur  $\underline{\underline{\omega}}(\underline{x})$ , élément du groupe spécial orthogonal de  $\mathbb{R}^3$  ( $SO(3)$ ), représentant la rotation nécessaire pour amener un repère orthonormé fixe par rapport à l'observateur sur le trièdre directeur local. Nous avons vu plus haut -§ I.4.6- que pour retrouver les équations "classiques" du milieu de Cosserat, il était

préférable d'introduire le vecteur  $\underline{\omega}(\underline{x})$ , taux de rotation de la microstructure au point  $\underline{x}$ , plutôt que d'utiliser directement le concept de microvitesse virtuelle  $\underline{\omega}$  au sens que nous lui avons donné au chapitre précédent, c'est-à-dire comme un élément de l'espace tangent à la variété de microstructure au point  $\underline{\omega}(\underline{x})$ .

Rappelons les relations entre taux de rotation et microvitesse:

$$\underline{\omega} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{e}} : (\underline{\omega} \cdot \underline{\omega}) \text{ ou } \underline{\omega} = -\underline{\mathbf{e}} \cdot \underline{\omega} \cdot \underline{\omega}$$

L'action d'une particule de l'univers sur une autre particule de l'univers est complète, au sens où une particule peut exercer un moment sur une autre. Nous notons  $(\underline{a}(\underline{x}, \underline{y}), \underline{c}(\underline{x}, \underline{y}))$  les éléments de réduction en  $\underline{x}$  du torseur des efforts exercés par la particule placée en  $\underline{y}$  sur la particule placée en  $\underline{x}$ .

Les éléments de réduction en  $\underline{y}$  du torseur des efforts exercés par la particule placée en  $\underline{y}$  sur la particule placée en  $\underline{x}$  s'écrit:  $(\underline{a}(\underline{x}, \underline{y}), \underline{c}(\underline{x}, \underline{y}) + (\underline{x} - \underline{y}) \wedge \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}))$

Le principe de l'égalité de l'action et de la réaction se traduit par la nullité du torseur somme des efforts de  $\underline{x}$  sur  $\underline{y}$  et des efforts de  $\underline{y}$  sur  $\underline{x}$ , soit en écrivant cette égalité au point  $\underline{y}$ :

$$\begin{aligned} \underline{a}(\underline{y}, \underline{x}) + \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) &= 0 \\ \underline{c}(\underline{y}, \underline{x}) + \underline{c}(\underline{x}, \underline{y}) + (\underline{x} - \underline{y}) \wedge \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) &= 0 \end{aligned}$$

La puissance totale des actions de l'univers sur lui-même dans un champ de vitesse virtuelle  $(\underline{u}, \underline{\omega})$  s'écrit ;

$$P = \int_{\mathcal{E}} \left( \int_{\mathcal{E}} [\underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{u}(\underline{x}) + \underline{c}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\omega}(\underline{x})] dV(\underline{y}) \right) dV(\underline{x})$$

Si on fait les mêmes hypothèses de continuité et de dérivabilité du champ  $\underline{\omega}$  que celles que nous avons faites sur  $\underline{u}$  dans la partie précédente, et en considérant des champs de vitesses virtuelles  $\underline{u}$  et  $\underline{\omega}$  dont les supports soient inclus dans  $\Omega$ , on décompose la puissance totale reçue par l'univers dans un champ de vitesses virtuelles du corps  $\mathcal{C}$  en  $P_{\mathcal{C}} = P_{\text{int}} + P_{\text{ext}}$ , avec :

$$\begin{aligned} P_{\text{int}}(\underline{u}, \underline{\omega}) &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot (\underline{u}(\underline{x}) - \underline{u}(\underline{y})) dV(\underline{y}) dV(\underline{x}) \\ &\quad + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\underline{c}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot (\underline{\omega}(\underline{x}) - \underline{\omega}(\underline{y}))) dV(\underline{y}) dV(\underline{x}) + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{1}{2} ((\underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \wedge (\underline{x} - \underline{y})) \cdot \underline{\omega}(\underline{x})) dV(\underline{y}) dV(\underline{x}) \\ P_{\text{ext}}(\underline{u}, \underline{\omega}) &= \int_{\Omega} \int_{\mathcal{E}-\Omega} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{u}(\underline{x}) dV(\underline{y}) dV(\underline{x}) \\ &\quad + \int_{\Omega} \int_{\mathcal{E}-\Omega} \underline{c}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\omega}(\underline{x}) dV(\underline{y}) dV(\underline{x}) + \int_{\Omega} \int_{\mathcal{E}-\Omega} (\underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \wedge (\underline{x} - \underline{y})) \cdot \underline{\omega}(\underline{x}) dV(\underline{y}) dV(\underline{x}) \end{aligned}$$

### III.2.2.1 Equations d'équilibre

Si on peut approcher  $\underline{u}(\underline{x}) - \underline{u}(\underline{y})$  par  $\text{grad}_{\underline{x}}(\underline{u}(\underline{x})) \cdot (\underline{x} - \underline{y})$  et  $\underline{\omega}(\underline{x}) - \underline{\omega}(\underline{y})$  par  $\text{grad}_{\underline{x}}(\underline{\omega}(\underline{x})) \cdot (\underline{x} - \underline{y})$  et en procédant comme précédemment, on obtient;

$$\begin{aligned} p_i(\underline{x}) = & \left( \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} \left( \frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{y}) \otimes \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \right) dV(\underline{y}) \right) : \text{grad}_{\underline{x}} \underline{u} \\ & + \left( \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} \left( \frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{y}) \otimes \underline{c}(\underline{x}, \underline{y}) \right) dV(\underline{y}) \right) : \text{grad}_{\underline{x}} \underline{\omega} \\ & + \left( \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} \left( -\frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{y}) \wedge \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \right) dV(\underline{y}) \right) \cdot \underline{\omega} \end{aligned}$$

soit, en notant :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}}(\underline{x}) &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} ((\underline{x} - \underline{y}) \otimes \underline{a}(\underline{x}, \underline{y})) dV(\underline{y}) \\ \underline{\underline{B}}'(\underline{x}) &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} ((\underline{x} - \underline{y}) \otimes \underline{c}(\underline{x}, \underline{y})) dV(\underline{y}) \\ \underline{\alpha}(\underline{x}) &= -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} ((\underline{x} - \underline{y}) \wedge \underline{a}(\underline{x}, \underline{y})) dV(\underline{y}) \end{aligned}$$

$$\underline{P}_{\text{int}} = \int_{\Omega} \underline{\underline{B}}(\underline{x}) : \text{grad}_{\underline{x}} \underline{u}(\underline{x}) + \underline{\underline{B}}'(\underline{x}) : \text{grad}_{\underline{x}} \underline{\omega}(\underline{x}) + \underline{\alpha}(\underline{x}) \cdot \underline{\omega}(\underline{x}) dV(\underline{x})$$

De même, en introduisant

$$\underline{A}(\underline{x}) = \int_{\mathcal{E}_{\Omega_e}} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) dV(\underline{y}) \text{ et } \underline{A}'(\underline{x}) = \int_{\mathcal{E}_{\Omega_e}} (\underline{c}(\underline{x}, \underline{y}) - (\underline{x} - \underline{y}) \wedge \underline{a}(\underline{x}, \underline{y})) dV(\underline{y})$$

$$\underline{P}_{\text{ev}} = \int_{\Omega} \underline{A}(\underline{x}) \cdot \underline{u}(\underline{x}) + \underline{A}'(\underline{x}) \cdot \underline{\omega}(\underline{x}) dV(\underline{x})$$

Pour les efforts extérieurs de surface, on se ramène à

$$\underline{P}_{\text{es}} = \int_{\partial\Omega} \left( \int_0^e \left( \int_{\partial\Omega_e} (\underline{a}(\underline{\xi} - \eta \underline{n}(\underline{\xi}), \underline{y}) \cdot \underline{u}(\underline{y}) + \underline{c}(\underline{\xi} - \eta \underline{n}(\underline{\xi}), \underline{y}) \cdot \underline{\omega}(\underline{y})) dV(\underline{y}) \right) d\eta \right) dS(\underline{\xi})$$

et  $\underline{y}$  étant dans un voisinage de  $\underline{\xi}$ , on peut choisir d'approcher  $\underline{u}(\underline{y})$  et  $\underline{\omega}(\underline{y})$  au premier ordre

par  $\underline{u}(\underline{\xi})$  et  $\underline{\omega}(\underline{\xi})$ ;

$$\underline{P}_{\text{es}} = \int_{\partial\Omega} \left( \underline{t}(\underline{\xi}) \underline{u}(\underline{\xi}) + \underline{t}'(\underline{\xi}) \underline{\omega}(\underline{\xi}) \right) dS(\underline{\xi})$$

avec  $\underline{t}(\underline{\xi}) = \int_0^e \left( \int_{\partial\Omega_e} \underline{a}(\underline{\xi} - \eta \underline{n}(\underline{\xi}), \underline{y}) dV(\underline{y}) \right) d\eta$  et  $\underline{t}'(\underline{\xi}) = \int_0^e \left( \int_{\partial\Omega_e} \underline{c}(\underline{\xi} - \eta \underline{n}(\underline{\xi}), \underline{y}) dV(\underline{y}) \right) d\eta$

Les puissances virtuelles dans un champs de vitesse virtuelle  $(\underline{u}, \underline{\omega})$  ont donc les formes suivantes;

puissance des efforts intérieurs

$$P_{int}(\underline{u}, \underline{\omega}) = \int_{\Omega} (\underline{B}(\underline{x}) : (\text{grad}_{\underline{x}} \underline{u})(\underline{x}) + \underline{B}'(\underline{x}) : (\text{grad}_{\underline{x}} \underline{\omega})(\underline{x}) + \underline{\alpha}(\underline{x}) \underline{\omega}(\underline{x})) dV(\underline{x})$$

puissance des efforts extérieurs volumiques

$$P_{ev}(\underline{u}, \underline{\omega}) = \int_{\Omega} (\underline{A}(\underline{x}) \underline{u}(\underline{x}) + \underline{A}'(\underline{x}) \underline{\omega}(\underline{x})) dV(\underline{x})$$

puissance des efforts extérieurs surfaciques

$$P_{es}(\underline{u}, \underline{\omega}) = \int_{\partial\Omega} (\underline{t}(\underline{x}) \underline{u}(\underline{x}) + \underline{t}'(\underline{x}) \underline{\omega}(\underline{x})) dS(\underline{x})$$

Reprenons les notations de Germain [Germain, 1973b] que nous avons rappelées au paragraphe I.4.6:

$$\underline{\tau}(\underline{x}) = -{}^T \underline{B}(\underline{x}), \underline{f}(\underline{x}) = \underline{A}(\underline{x}), \underline{T}(\underline{x}) = \underline{t}(\underline{x})$$

$$\underline{\nu}(\underline{x}) = -{}^T \underline{B}'(\underline{x}), \underline{\zeta}(\underline{x}) = -\underline{\alpha}(\underline{x}), \underline{\psi}(\underline{x}) = \underline{A}'(\underline{x}), \underline{M}(\underline{x}) = \underline{t}'(\underline{x})$$

Nous pouvons donner les expressions suivantes de ces champs:

- $\underline{\tau}$  est le tenseur de contraintes de Cauchy, non symétrique

$$\underline{\tau}(\underline{x}) = \int_{\mathcal{E}(\underline{x})} \frac{1}{2} (\underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \otimes (\underline{y} - \underline{x})) dV(\underline{y})$$

- $\underline{\zeta}$  est le vecteur de microcontraintes

$$\underline{\zeta}(\underline{x}) = \int_{\mathcal{E}(\underline{x})} \frac{1}{2} ((\underline{x} - \underline{y}) \wedge \underline{a}(\underline{x}, \underline{y})) dV(\underline{y})$$

- $\underline{\nu}$  est le second tenseur de microcontraintes

$$\underline{\nu}(\underline{x}) = \int_{\mathcal{E}(\underline{x})} \frac{1}{2} (\underline{c}(\underline{x}, \underline{y}) \otimes (\underline{y} - \underline{x})) dV(\underline{y})$$

- $\underline{f}$  est le champ de forces extérieures volumiques et  $\underline{\psi}$  le champ de double forces volumiques

$$\underline{f}(\underline{x}) = \int_{\mathcal{E}_{\alpha_e}} \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) dV(\underline{y}) \text{ et } \underline{\psi}(\underline{x}) = \int_{\mathcal{E}_{\alpha_e}} (\underline{c}(\underline{x}, \underline{y}) - (\underline{x} - \underline{y}) \wedge \underline{a}(\underline{x}, \underline{y})) dV(\underline{y})$$

- $\underline{T}$  est le champ de forces surfaciques

$$\underline{T}(\underline{x}) = \int_0^e \left( \int_{\partial\Omega_e} \underline{a}(\underline{x} - \eta \underline{n}(\underline{x}), \underline{y}) dV(\underline{y}) \right) d\eta$$

- $\underline{M}$  est le champ de couples surfaciques

$$\underline{M}(\underline{x}) = \int_0^e \left( \int_{\partial\Omega_e} \underline{c}(\underline{x} - \eta \underline{n}(\underline{x}), \underline{y}) dV(\underline{y}) \right) d\eta$$

On vérifie tout d'abord la condition d'objectivité des efforts intérieurs. On considère pour cela un mouvement rigidifiant, du type (avec  $\underline{u}_0$  et  $\underline{\omega}_0$  quelconques)

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}_0 + \underline{\omega}_0 \wedge \underline{x}$$

$$\underline{\omega}(\underline{x}) = \underline{\omega}_0$$

Le gradient de  $\underline{u}$  en  $\underline{x}$  a pour valeur:

$$\text{grad}_{\underline{x}} \underline{u} = -\underline{\underline{e}} \cdot \underline{\omega}_0$$

et le gradient de  $\underline{\omega}$  est identiquement nul.

La densité de puissance des efforts intérieurs dans ce champ de vitesses rigidifiant vaut  $({}^T \underline{\underline{\tau}}(\underline{x}) : \underline{\underline{e}} - \underline{\zeta}(\underline{x})) \cdot \underline{\omega}_0$  et doit s'annuler pour  $\underline{\omega}_0$  quelconque.

On doit donc avoir  ${}^T \underline{\underline{\tau}}(\underline{x}) : \underline{\underline{e}} = \underline{\zeta}(\underline{x})$  pour  $\underline{x}$  quelconque dans  $\Omega$ , ce que l'on vérifie aisément:

$$\begin{aligned} {}^T \underline{\underline{\tau}}(\underline{x}) : \underline{\underline{e}} &= T_{\{i,j,k \rightarrow k,j,i\}} \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\tau}}(\underline{x}) = -\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\tau}}(\underline{x}) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} \underline{\underline{e}} : (\underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) \otimes (\underline{y} - \underline{x})) dV(\underline{y}) = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} (\underline{\underline{e}} \cdot (\underline{a}(\underline{x}, \underline{y}))) \cdot (\underline{y} - \underline{x}) dV(\underline{y}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} (\underline{a}(\underline{x}, \underline{y})) \wedge (\underline{y} - \underline{x}) dV(\underline{y}) = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} (\underline{y} - \underline{x}) \wedge (\underline{a}(\underline{x}, \underline{y})) : dV(\underline{y}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} (\underline{x} - \underline{y}) \wedge (\underline{a}(\underline{x}, \underline{y})) : dV(\underline{y}) = \underline{\zeta}(\underline{x}) \end{aligned}$$

Cette équation d'objectivité s'énonce également sous la forme:  $\frac{\underline{\zeta}}{2}$  est le vecteur associé à la partie antisymétrique de l'opposé (ou le transposé) du tenseur de contrainte.

$$\underline{\underline{e}} : \frac{\underline{\zeta}(\underline{x})}{2} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\tau}}(\underline{x}) - {}^T \underline{\underline{\tau}}(\underline{x})), \text{ c'est - à - dire } \underline{\zeta}(\underline{x}) = -\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\tau}}(\underline{x})$$

On retrouve ensuite, en intégrant par partie et en utilisant la nullité de  $P_{\mathcal{C}}(\underline{u}, \underline{\omega})$  pour tous les champs de vitesses virtuelles de  $\mathcal{C}$  les champs d'efforts et les équations d'équilibre quasi-statique d'un milieu de Cosserat:

|  |
|--|
| $\left. \begin{aligned} \text{div } \underline{\underline{\tau}}(\underline{x}) + \underline{f}(\underline{x}) &= 0 \\ \text{div } \underline{v}(\underline{x}) - \underline{\zeta}(\underline{x}) + \underline{\psi}(\underline{x}) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ équations de champ}$                                       |
| $\underline{\zeta}(\underline{x}) = -\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\tau}}(\underline{x}) \quad \text{condition d'objectivité}$   |
| $\left. \begin{aligned} \underline{\underline{\tau}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_{\partial\Omega}(\underline{x}) &= \underline{T}(\underline{x}) \\ \underline{v}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_{\partial\Omega}(\underline{x}) &= \underline{M}(\underline{x}) \end{aligned} \right\} \text{ conditions aux limites}$ |

Là encore, ce développement au premier gradient repose sur une distance caractéristique des interactions interparticulaires faible devant les distances caractéristiques respectives des variations des champs de vitesses virtuelles  $\underline{u}$  et  $\underline{\omega}$ .

### III.2.3 Les milieux de Cosserat multiparticulaires

Une approche semblable aux précédentes peut être faite pour un milieu multiparticulaire, les particules étant placées dans  $\mathcal{U} = \mathcal{E}XSO(3)$ .

Le champ de vitesses virtuelles de  $\mathcal{U}$  est le bi-champ vectoriel  $(\underline{u}(\underline{x}, \underline{r}), \underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r}))$ ,  $\underline{u}(\underline{x}, \underline{r})$  est la macrovitesse de la particule placée en  $(\underline{x}, \underline{r})$  et  $\underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r})$  sa microvitesse (taux de rotation de la microstructure). Rappelons que le vecteur  $\underline{\omega}$  est le vecteur associé au tenseur antisymétrique  $\underline{a} = -\underline{e}\underline{\omega}$ , le tenseur  $\underline{a}_{\underline{r}}$  –élément de l'espace tangent à  $SO(3)$  en  $\underline{r}$  – étant la microvitesse virtuelle  $\underline{\omega}$  de  $\underline{r}$  telle que nous l'avons définie dans le cas général au chapitre précédent.

L'action d'une particule placée en  $(\underline{y}, \underline{o})$  sur une particule placée en  $(\underline{x}, \underline{r})$  s'écrit sous la forme du torseur d'effort dont les éléments de réduction en  $(\underline{x}, \underline{r})$  sont  $(\underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})), \underline{c}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})))$ . Le principe d'égalité de l'action et de la réaction implique:

$$\begin{aligned} \underline{a}((\underline{y}, \underline{o}), (\underline{x}, \underline{r})) + \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) &= 0 \\ \underline{c}((\underline{y}, \underline{o}), (\underline{x}, \underline{r})) + \underline{c}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) + (\underline{x} - \underline{y}) \wedge \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) &= 0 \end{aligned}$$

La puissance totale reçue par l'univers dans un mouvement virtuel  $(\underline{u}, \underline{\omega})$  du corps  $\mathcal{C}$

$$P = \int_{\mathcal{E}} \int_{SO(3)} \left( \int_{\mathcal{E}} \int_{SO(3)} \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \cdot \underline{u}(\underline{x}, \underline{r}) + \underline{c}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \cdot \underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r}) \right) d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y}) d\mu(\underline{r}) dV(\underline{x})$$

se transforme comme précédemment, en partitionnant l'espace euclidien, en puissance des efforts intérieurs  $P_{\text{int}}$

$$\begin{aligned} P_{\text{int}} &= \int_{\Omega} \int_{SO(3)} \left( \int_{\Omega} \int_{SO(3)} \frac{1}{2} \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \cdot (\underline{u}(\underline{x}, \underline{r}) - \underline{u}(\underline{y}, \underline{o})) d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y}) \right) d\mu(\underline{r}) dV(\underline{x}) \\ &+ \int_{\Omega} \int_{SO(3)} \left( \int_{\Omega} \int_{SO(3)} \frac{1}{2} (\underline{c}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \cdot (\underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r}) - \underline{\omega}(\underline{y}, \underline{o}))) d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y}) \right) d\mu(\underline{r}) dV(\underline{x}) \\ &+ \int_{\Omega} \int_{SO(3)} \left( \int_{\Omega} \int_{SO(3)} \frac{1}{2} ((\underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \wedge (\underline{x} - \underline{y})) \cdot \underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r})) d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y}) \right) d\mu(\underline{r}) dV(\underline{x}) \end{aligned}$$

et puissance des efforts extérieurs  $P_{\text{ext}}$ ;

$$P_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \int_{SO(3)} \left( \int_{\mathcal{E}-\Omega} \int_{SO(3)} (\underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \cdot \underline{u}(\underline{x}, \underline{r}) + \underline{c}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \cdot \underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r})) d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y}) \right) d\mu(\underline{r}) dV(\underline{x})$$

Puissance des efforts intérieurs

Nous considérons un voisinage  $\mathcal{N}(\underline{r})$  de  $\underline{r}$  dans  $SO(3)$  et nous découpons  $p_i$ , la densité de puissance des efforts intérieurs, en une intégrale sur  $SO(3)-\mathcal{N}(\underline{r})$  et une intégrale sur  $\mathcal{N}(\underline{r})$ .

$$p_i(\underline{x}, \underline{r}) = \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} \int_{SO(3)-\mathcal{N}(\underline{r})} \left( \begin{array}{l} \frac{1}{2} \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})).(\underline{u}(\underline{x}, \underline{r}) - \underline{u}(\underline{y}, \underline{o})) \\ + \frac{1}{2} \underline{c}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})).(\underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r}) - \underline{\omega}(\underline{y}, \underline{o})) \\ + \frac{1}{2} (\underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \wedge (\underline{x} - \underline{y})).\underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r}) \end{array} \right) d\mu(\underline{o})dV(\underline{y})$$

$$+ \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} \int_{\mathcal{N}(\underline{r})} \left( \begin{array}{l} \frac{1}{2} \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})).(\underline{u}(\underline{x}, \underline{r}) - \underline{u}(\underline{y}, \underline{o})) \\ + \frac{1}{2} \underline{c}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})).(\underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r}) - \underline{\omega}(\underline{y}, \underline{o})) \\ + \frac{1}{2} (\underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \wedge (\underline{x} - \underline{y})).\underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r}) \end{array} \right) d\mu(\underline{o})dV(\underline{y})$$

Nous allons introduire dans le second terme du membre de droite de l'égalité ci-dessus (intégrale sur  $\mathcal{B}'(\underline{x}) \times \mathcal{N}(\underline{r})$ , que nous notons  $p_{i2}$ , l'autre intégrale étant notée  $p_{i1}$ ) un développement limité de  $\underline{u}$  et de  $\underline{\omega}$  au voisinage de  $(\underline{x}, \underline{r})$ . L'écriture de ces développements limités fait intervenir pour la partie microstructurale les applications linéaires tangentes de  $\underline{u}$  et de  $\underline{\omega}$ , ce qui complique les équations et l'interprétation physique des efforts ainsi construits. Pour faciliter l'écriture de ces développements, nous allons donc les écrire dans le produit cartésien de l'espace euclidien par l'espace des tenseurs du second ordre, dont l'ensemble des tenseurs orthogonaux constitue une sous-variété. On peut dans ce cas prolonger  $\underline{u}$  et  $\underline{\omega}$  sur l'espace des tenseurs du second ordre<sup>\*</sup>. On a alors;

$$\underline{u}(\underline{y}, \underline{o}) = \underline{u}(\underline{x}, \underline{r}) + \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, \underline{r})(\underline{y} - \underline{x}) + \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{r}}(\underline{x}, \underline{r}) : (\underline{o} - \underline{r}) + \mathcal{O}(\|\underline{y} - \underline{x}\|) + \mathcal{O}(\|\underline{o} - \underline{r}\|)$$

$$\underline{\omega}(\underline{y}, \underline{o}) = \underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r}) + \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, \underline{r})(\underline{y} - \underline{x}) + \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \underline{r}}(\underline{x}, \underline{r}) : (\underline{o} - \underline{r}) + \mathcal{O}(\|\underline{y} - \underline{x}\|) + \mathcal{O}(\|\underline{o} - \underline{r}\|)$$

<sup>\*</sup>  $SO(3)$  est une sous-variété fermée de l'espace des tenseurs orthogonaux ([Leborgne, 1982], exemple 3 p52), on peut donc prolonger les applications  $C_\infty$  ([Leborgne, 1982], proposition 2 p60).

On introduit les termes du premier ordre de ces développements limités dans  $p_{i2}$  en se limitant donc à une taille de voisinage sur laquelle on puisse négliger les  $\theta$  devant les termes en gradient:

$$\begin{aligned}
 p_{i2}(\underline{x}, \underline{r}) &= \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} \int_{\mathcal{N}(\underline{r})} \left( \begin{aligned} &\frac{1}{2} \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \cdot \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot (\underline{x} - \underline{y}) + \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{r}}(\underline{x}, \underline{r}) : (\underline{r} - \underline{o}) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \underline{c}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \cdot \left( \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot (\underline{x} - \underline{y}) + \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \underline{r}}(\underline{x}, \underline{r}) : (\underline{r} - \underline{o}) \right) \\ &+ \frac{1}{2} (\underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \wedge (\underline{x} - \underline{y})) \cdot \underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r}) \end{aligned} \right) d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y}) \\
 &= \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} \int_{\mathcal{N}(\underline{r})} \left( \begin{aligned} &\left[ \frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{y}) \otimes \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \right] : \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, \underline{r}) + \left[ \frac{1}{2} (\underline{r} - \underline{o}) \otimes \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \right] : \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{r}}(\underline{x}, \underline{r}) \\ &+ \left[ \frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{y}) \otimes \underline{c}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \right] : \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, \underline{r}) + \left[ \frac{1}{2} (\underline{r} - \underline{o}) \otimes \underline{c}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \right] : \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \underline{r}}(\underline{x}, \underline{r}) \\ &+ \frac{1}{2} (\underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \wedge (\underline{x} - \underline{y})) \cdot \underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r}) \end{aligned} \right) d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y})
 \end{aligned}$$

soit encore:

$$\begin{aligned}
 p_{i2}(\underline{x}, \underline{r}) &= \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} \int_{\mathcal{N}(\underline{r})} \left[ \frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{y}) \otimes \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \right] d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y}) : \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, \underline{r}) \\
 &+ \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} \int_{\mathcal{N}(\underline{r})} \left[ \frac{1}{2} (\underline{r} - \underline{o}) \otimes \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \right] d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y}) : \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{r}}(\underline{x}, \underline{r}) \\
 &+ \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} \int_{\mathcal{N}(\underline{r})} \left[ \frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{y}) \otimes \underline{c}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \right] d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y}) : \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, \underline{r}) \\
 &+ \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} \int_{\mathcal{N}(\underline{r})} \left[ \frac{1}{2} (\underline{r} - \underline{o}) \otimes \underline{c}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \right] d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y}) : \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \underline{r}}(\underline{x}, \underline{r}) \\
 &+ \int_{\mathcal{B}'(\underline{x})} \int_{\mathcal{N}(\underline{r})} \left[ \frac{1}{2} (\underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \wedge (\underline{x} - \underline{y})) \right] d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y}) \cdot \underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r})
 \end{aligned}$$

que nous écrivons de manière condensée:

$$\begin{aligned}
 p_{i2}(\underline{x}, \underline{r}) &= -{}^T \underline{\tau}(\underline{x}, \underline{r}) : \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, \underline{r}) - {}^T \underline{\nu}(\underline{x}, \underline{r}) : \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, \underline{r}) - \underline{\zeta}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot \underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r}) \\
 &\quad - \overset{\text{ijk}}{\underset{\text{klj}}{\underline{\Gamma}}}(\underline{x}, \underline{r}) : \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{r}}(\underline{x}, \underline{r}) - \overset{\text{ijk}}{\underset{\text{klj}}{\underline{D}}}(\underline{x}, \underline{r}) : \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \underline{r}}(\underline{x}, \underline{r})
 \end{aligned}$$

Il reste à traiter  $p_{i1}$ , qui est l'intégrale sur  $\mathcal{B}'(\underline{x}) \times (\text{SO}(3) - \mathcal{N}(\underline{r}))$ , et qui représente donc la contribution à la densité de puissance fournie au point  $(\underline{x}, \underline{r})$  par les particules  $(\underline{y}, \underline{o})$  proches de  $(\underline{x}, \underline{r})$  en espace (dans  $\mathcal{B}'(\underline{x})$ ) mais lointaines en orientation (en dehors de  $\mathcal{N}(\underline{r})$ ).

La poursuite d'un développement au premier gradient nécessite donc de négliger cette contribution en considérant que  $p_{i1}$  est nulle pour tout mouvement virtuel de  $\mathcal{C}$ .

$$P_{int} = \int_{\Omega} \int_{SO(3)} [-{}^T \underline{\tau}(\underline{x}, \underline{r}) : \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, \underline{r}) - {}^T \underline{v}(\underline{x}, \underline{r}) : \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, \underline{r}) - \underline{\zeta}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot \underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r})] d\mu(\underline{r}) dV(\underline{x})$$

$$+ \int_{\Omega} \int_{SO(3)} [-{}^{ijk} \underline{F}(\underline{x}, \underline{r}) : \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{r}}(\underline{x}, \underline{r}) - {}^{ijk} \underline{D}(\underline{x}, \underline{r}) : \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \underline{r}}(\underline{x}, \underline{r})] d\mu(\underline{r}) dV(\underline{x})$$

L'hypothèse physique sous-jacente à la construction de ce modèle multiparticulaire au premier gradient est donc double :

⇒ les efforts entre particules deviennent très rapidement négligeables avec l'augmentation de la désorientation entre les particules

⇒ les "longueurs d'onde" (dans SO(3)) des macro- et microvitesse sont très supérieures à la distance caractéristique (dans SO(3)) de la portée des efforts interparticulaires.

On peut reprendre un schéma semblable à celui de la figure III-2, dans le cas simplifié du milieu de Cosserat bidimensionnel, où la microstructure est décrite par un angle dans l'intervalle  $[0, 2\pi[$ .

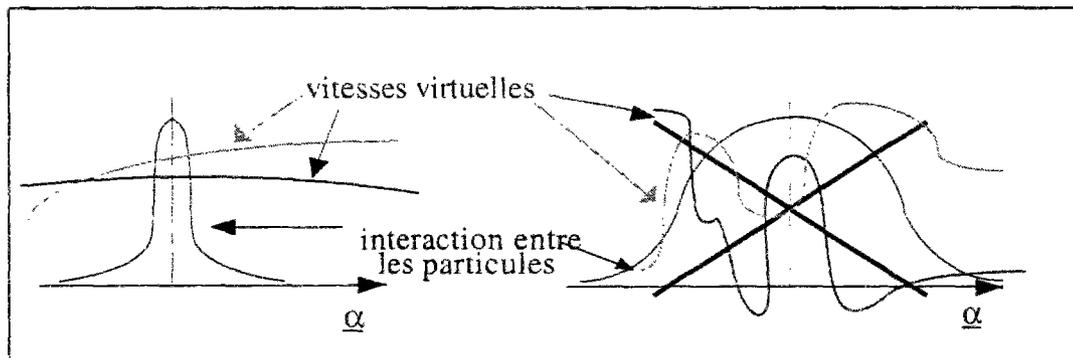


figure III-3 variations comparées des interactions et des vitesses virtuelles en fonction de l'orientation

Cette propriété de localisation se traduit, dans le cas d'un matériau polycristallin, par exemple, par une influence mutuelle prépondérante des grains équiorientés. Certains phénomènes physiques, tels que la propagation de bandes de cisaillement, semblent effectivement relever d'une telle hypothèse.

Dans les cas où cette hypothèse n'aurait pas de justification physique, il conviendrait de développer un modèle non-local, ce qui n'est pas l'objet de ce travail.

## Puissance des efforts extérieurs

Cette puissance des efforts extérieurs s'écrit de manière immédiate, avec des définitions d'efforts semblables à celles données au chapitre III.2.2, à savoir:

$$\underline{f}(\underline{x}, \underline{r}) = \int_{\mathcal{E}_{\Omega_e}} \int_{SO(3)} \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y})$$

$$\underline{\Psi}(\underline{x}, \underline{r}) = \int_{\mathcal{E}_{\Omega_e}} \int_{SO(3)} (\underline{c}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) + \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \wedge (\underline{x} - \underline{y})) d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y})$$

$$\underline{T}(\underline{x}, \underline{r}) = \int_0^e \left( \int_{\partial\Omega_e} \int_{\mathcal{N}(\underline{r})} \underline{a}((\underline{x} - \eta \underline{n}(\underline{x}), \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y}) \right) d\eta$$

$$\underline{M}(\underline{x}, \underline{r}) = \int_0^e \left( \int_{\partial\Omega_e} \int_{\mathcal{N}(\underline{r})} \underline{c}((\underline{x} - \eta \underline{n}(\underline{x}), \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y}) \right) d\eta$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_{\text{ext}} &= \int_{\Omega} \int_{SO(3)} [\underline{f}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot \underline{u}(\underline{x}, \underline{r}) + \underline{\Psi}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot \underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r})] d\mu(\underline{r}) dV(\underline{x}) \\ &+ \int_{\partial\Omega} \int_{SO(3)} [\underline{T}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot \underline{u}(\underline{x}, \underline{r}) + \underline{M}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot \underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r})] d\mu(\underline{r}) dS(\underline{x}) \end{aligned}}$$

## III.2.3.1 Equations d'équilibre

On peut décomposer la puissance totale des efforts en;

puissance des efforts intérieurs

$$\begin{aligned} p_i(\underline{u}, \underline{\omega}) &= \int_{\Omega} \int_{SO(3)} \left( -{}^T \underline{\tau}(\underline{x}, \underline{r}) : \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, \underline{r}) - {}^T \underline{v}(\underline{x}, \underline{r}) : \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, \underline{r}) - \underline{\zeta}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot \underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r}) \right. \\ &\quad \left. - {}^{ijk} \underline{F}(\underline{x}, \underline{r}) : \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{r}}(\underline{x}, \underline{r}) - {}^{ijk} \underline{D}(\underline{x}, \underline{r}) : \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \underline{r}}(\underline{x}, \underline{r}) \right) d\mu(\underline{r}) dV(\underline{x}) \end{aligned}$$

puissance des efforts extérieurs volumiques

$$p_{\text{ext}}(\underline{u}, \underline{\omega}) = \int_{\Omega} \int_{SO(3)} \underline{f}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot \underline{u}(\underline{x}, \underline{r}) + \underline{\Psi}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot \underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r}) d\mu(\underline{r}) dV(\underline{x})$$

puissance des efforts extérieurs surfaciques

$$p_{\text{es}}(\underline{u}, \underline{\omega}) = \int_{\partial\Omega} \int_{SO(3)} [\underline{T}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot \underline{u}(\underline{x}, \underline{r}) + \underline{M}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot \underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r})] d\mu(\underline{r}) dS(\underline{x})$$

Notons que nous ne nous sommes intéressés qu'à des corps ne possédant pas de frontières dans  $SO(3)$ . La signification physique d'un effort sur une surface dans  $SO(3)$  n'est en effet pas évidente, de même que la manière d'imposer cet effort.

### Efforts

Regroupons les définitions des différents tenseurs introduits.

#### Efforts intérieurs:

- $\underline{\underline{\tau}}$  est le tenseur de contrainte de Cauchy, non symétrique;  $\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{z}}$  ( $\underline{\underline{\sigma}}$  symétrique est le tenseur de contrainte intrinsèque,  $\underline{\underline{z}}$  est antisymétrique). C'est le tenseur d'effort qui assure la cohésion de la matière.

$$-{}^T \underline{\underline{\tau}}(\underline{x}, \underline{r}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}(\underline{x})} \int_{\mathcal{N}(\underline{r})} ((\underline{x} - \underline{y}) \otimes \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o}))) d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y})$$

$$\underline{\underline{\tau}}(\underline{x}, \underline{r}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}(\underline{x})} \int_{\mathcal{N}(\underline{r})} (\underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \otimes (\underline{y} - \underline{x})) d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y})$$

- $\underline{\underline{\zeta}}$  est le vecteur de microcontrainte en espace profond. Il s'oppose à l'hétérogénéisation en orientation de la matière. C'est le terme dual du taux de rotation de la microstructure.

$$\underline{\underline{\zeta}}(\underline{x}, \underline{r}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}(\underline{x})} \int_{\mathcal{N}(\underline{r})} ((\underline{x} - \underline{y}) \wedge \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o}))) d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y})$$

- $\underline{\underline{v}}$  est le second tenseur de microcontrainte en espace profond, qui agit sur le taux de rotation de la microstructure. C'est le terme dual du gradient en espace du taux de rotation de la microstructure.

$$-{}^T \underline{\underline{v}}(\underline{x}, \underline{r}) = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}(\underline{x})} \int_{\mathcal{N}(\underline{r})} ((\underline{y} - \underline{x}) \otimes \underline{c}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o}))) d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y})$$

$$\underline{\underline{v}}(\underline{x}, \underline{r}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}(\underline{x})} \int_{\mathcal{N}(\underline{r})} (\underline{c}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \otimes (\underline{y} - \underline{x})) d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y})$$

On a introduit deux nouveaux tenseurs.

●  $\underline{\underline{F}}$  est le terme dual du gradient de la macrovitesse par rapport à la microstructure.  $\underline{\underline{F}}$  ne travaille pas dans un champ de vitesses virtuelles tel que ce gradient soit nul, c'est à dire dans un champ de vitesses virtuelles dans lequel il n'y a pas de filtration en espace de certaines orientations par rapport aux autres (uniformité de la macrovitesse en un point de l'espace physique). Nous appelons ce tenseur  $\underline{\underline{F}}$  le **tenseur de contrainte de filtration**. C'est l'effort intérieur qui s'oppose à la filtration en espace de certaines orientations.

$$- \begin{matrix} ijk \\ kji \end{matrix} \underline{\underline{F}}(\underline{x}, \underline{r}) = \int_{\mathcal{E}'(\underline{x})} \int_{\mathcal{N}(\underline{r})} \left[ \frac{1}{2} (\underline{r} - \underline{o}) \otimes \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \right] d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y})$$

$$\underline{\underline{F}}(\underline{x}, \underline{r}) = \int_{\mathcal{E}'(\underline{x})} \int_{\mathcal{N}(\underline{r})} \left[ \frac{1}{2} \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \otimes (\underline{r} - \underline{o}) \right] d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y})$$

●  $\underline{\underline{D}}$  est le terme dual du gradient de la microvitesse par rapport à la microstructure. C'est un effort qui ne travaille que pour des champs de vitesses virtuelles tels que ce gradient soit non nul, c'est-à-dire des champs de vitesses virtuelles qui modifie la distribution des orientations de la microstructure en un point de l'espace physique. Nous l'appelons le **tenseur de contrainte de désorientation en espace profond**.

$$- \begin{matrix} ijk \\ kji \end{matrix} \underline{\underline{D}}(\underline{x}, \underline{r}) = \int_{\mathcal{E}'(\underline{x})} \int_{\mathcal{N}(\underline{r})} \left[ \frac{1}{2} (\underline{r} - \underline{o}) \otimes \underline{c}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \right] d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y})$$

$$\underline{\underline{D}}(\underline{x}, \underline{r}) = \int_{\mathcal{E}'(\underline{x})} \int_{\mathcal{N}(\underline{r})} \left[ \frac{1}{2} \underline{c}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \otimes (\underline{r} - \underline{o}) \right] d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y})$$

Efforts extérieurs:

●  $\underline{f}$  est le champ de forces extérieures volumiques en espace profond et  $\underline{\psi}$  le champ de double forces extérieures volumiques en espace profond.

$$\underline{f}(\underline{x}, \underline{r}) = \int_{\mathcal{E}_{\alpha t}} \int_{SO(3)} \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y})$$

$$\underline{\psi}(\underline{x}, \underline{r}) = \int_{\mathcal{E}_{\alpha t}} \int_{SO(3)} (\underline{c}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) + \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) \wedge (\underline{x} - \underline{y})) d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y})$$

●  $\underline{T}$  est le champ de forces extérieures surfaciques en espace profond.

$$\underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{r}}) = \int_0^e \left( \int_{\partial\Omega_e} \int_{\mathcal{N}(\underline{\mathbf{r}})} \underline{\mathbf{a}}((\underline{\mathbf{x}} - \eta \underline{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{r}}), (\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{o}})) d\mu(\underline{\mathbf{o}}) dV(\underline{\mathbf{y}})) d\eta \right)$$

- $\underline{\mathbf{M}}$  est le champ de couples extérieurs surfaciques en espace profond.

$$\underline{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{r}}) = \int_0^e \left( \int_{\partial\Omega_e} \int_{\mathcal{N}(\underline{\mathbf{r}})} \underline{\mathbf{c}}((\underline{\mathbf{x}} - \eta \underline{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{r}}), (\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{o}})) d\mu(\underline{\mathbf{o}}) dV(\underline{\mathbf{y}})) d\eta \right)$$

Equations d'équilibre:

On vérifie tout d'abord l'objectivité de la puissance des efforts intérieurs en considérant un mouvement rigidifiant un sous-corps  $\mathcal{C}'$  de  $\mathcal{C}$ , en nous limitant aux sous-corps dont l'image dans l'univers est de la forme  $\Omega' \times \mathcal{S}$ , où  $\mathcal{S}$  est une sous-variété de  $SO(3)$  de bord  $\partial\mathcal{S}$ . Cette possibilité de ne rigidifier qu'une partie des orientations est indispensable pour pouvoir écrire l'objectivité des efforts intérieurs au niveau local, comme nous le verrons plus loin.

On considère donc un mouvement virtuel rigidifiant  $\mathcal{C}'$ , de la forme:

$$\forall (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{r}}) \in \Omega' \times \mathcal{S}, \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{u}}_0 + \underline{\omega}_0 \wedge \underline{\mathbf{x}}$$

$$\underline{\omega}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{r}}) = \underline{\omega}_0$$

On a alors  $\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = -\underline{\mathbf{e}} \underline{\omega}_0$ ,  $\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial \underline{\mathbf{r}}} = 0$ ,  $\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = 0$  et  $\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \underline{\mathbf{r}}} = 0$ , ce qui conduit à devoir montrer que:

$$\int_{\Omega'} \int_{\mathcal{S}} (\underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{r}}) : \underline{\mathbf{e}} - \underline{\zeta}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{r}})) \cdot \underline{\omega}_0 dv dV = 0 \quad \forall \underline{\omega}_0$$

Cette égalité devant être vérifiée pour  $\underline{\omega}_0$ ,  $\Omega'$  et  $\mathcal{S}$  quelconque, on peut écrire:

$$\forall (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{r}}) \in \Omega \times SO(3), \underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{r}}) : \underline{\mathbf{e}} - \underline{\zeta}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{r}}) = 0$$

soit

$$-\underline{\mathbf{e}} : \underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{r}}) = \underline{\zeta}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{r}})$$

ce qui est immédiat:

$$\begin{aligned}
 \underline{\zeta}(\underline{x}, \underline{r}) &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}(\underline{x})} \int_{\mathcal{M}(\underline{r})} (\underline{x} - \underline{y}) \wedge \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y}) \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}(\underline{x})} \int_{\mathcal{M}(\underline{r})} \underline{e}(\underline{x} - \underline{y}) \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y}) \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}(\underline{x})} \int_{\mathcal{M}(\underline{r})} \underline{e} : (\underline{x} - \underline{y}) \otimes \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{o})) d\mu(\underline{o}) dV(\underline{y}) \\
 &= -\underline{e} : \underline{\tau}(\underline{x}, \underline{r})
 \end{aligned}$$

La puissance intérieure d'un mouvement virtuel du corps  $\mathcal{C}$  ainsi construite est **objective**, ce qui se traduit par la relation:

$$\underline{e} \frac{\underline{\zeta}(\underline{x}, \underline{r})}{2} = \frac{1}{2} (\underline{\tau}(\underline{x}, \underline{r}) - {}^T \underline{\tau}(\underline{x}, \underline{r})), \text{ ou bien } \underline{\zeta}(\underline{x}, \underline{r}) = -\underline{e} : \underline{\tau}(\underline{x}, \underline{r})$$

Le vecteur de microcontrainte en espace profond est associé au tenseur antisymétrique égal au double de la partie antisymétrique de l'opposé du tenseur de contrainte.

Si l'on n'autorise pas un "découpage" du corps suivant les orientations, on n'obtient, par application du principe des puissances virtuelles, qu'une forme intégrale de cette équation:

$$\forall \underline{x} \in \Omega, \int_{SO(3)} \underline{\zeta}(\underline{x}, \underline{r}) + \underline{e} : \underline{\tau}(\underline{x}, \underline{r}) dv = 0.$$

Notons toutefois que le procédé de construction des efforts choisi conduit directement à la forme locale -en orientation- de cette relation.

L'obtention des équations d'équilibre se fait de manière très classique en intégrant par partie les diverses composantes des puissances virtuelles. Nous développons tout d'abord la puissance virtuelle reçue par l'univers dans un mouvement virtuel du corps  $\mathcal{C}$  pour lequel la microvitesse soit uniformément nulle:

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{\Omega} \int_{SO(3)} (-{}^T \underline{\tau}(\underline{x}, \underline{r}) : \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, \underline{r}) - \overset{ijk}{\underset{klj}{\underline{F}}}(\underline{x}, \underline{r}) : \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{r}}(\underline{x}, \underline{r}) + \underline{f}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot \underline{u}(\underline{x}, \underline{r})) d\mu(\underline{r}) dV(\underline{x}) \\
 &\quad + \int_{\partial\Omega} \int_{SO(3)} (\underline{T}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot \underline{u}(\underline{x}, \underline{r})) d\mu(\underline{r}) dS(\underline{x})
 \end{aligned}$$

On décompose  $-{}^T \underline{\tau}(\underline{x}, \underline{r}) : \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, \underline{r})$  en  $-\text{div}(\underline{u} \cdot \underline{\tau}(\underline{x}, \underline{r})) + \underline{u} \cdot \text{div}(\underline{\tau}(\underline{x}, \underline{r}))$  et  $-\overset{ijk}{\underset{klj}{\underline{F}}}(\underline{x}, \underline{r}) : \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{r}}(\underline{x}, \underline{r})$

en  $-\text{div}_r(\underline{u} \cdot \underline{F}(\underline{x}, \underline{r})) + \underline{u} \cdot \text{div}_r(\underline{F}(\underline{x}, \underline{r}))^*$ , ce qui permet d'écrire, en utilisant le théorème de la

---

\* On note, pour un tenseur H quelconque:  $\text{div}_r(H)_{i...a} = \frac{\partial H_{i...a, \beta, \gamma}}{\partial r_{\beta, \gamma}}$  (voir note p69)

divergence pour  $\int_{SO(3)} \int_{\Omega} -\operatorname{div}(\underline{u}, \underline{\tau}) d\mu dV = \int_{SO(3)} \int_{\partial\Omega} -\underline{u}, \underline{\tau}, \underline{n} d\mu dV = \int_{\partial\Omega} \int_{SO(3)} -\underline{u}, \underline{\tau}, \underline{n} d\mu dV$  et en remarquant que  $\int_{SO(3)} \operatorname{div}_{\underline{r}}(\underline{u}, \underline{F}) d\mu = 0$  (pas de frontière du corps dans  $SO(3)$ ):

$$P = \int_{\Omega} \int_{SO(3)} \underline{u}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot (\operatorname{div}_{\underline{x}}(\underline{\tau}(\underline{x}, \underline{r})) + \operatorname{div}_{\underline{r}}(\underline{F}(\underline{x}, \underline{r})) + \underline{f}(\underline{x}, \underline{r})) d\mu(\underline{r}) dV(\underline{x}) \\ + \int_{\partial\Omega} \int_{SO(3)} (-\underline{\tau}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) + \underline{T}(\underline{x}, \underline{r})) \cdot \underline{u}(\underline{x}, \underline{r}) d\mu(\underline{r}) dS(\underline{x})$$

La nullité de  $P$  pour tout champ de vitesse virtuelle  $\underline{u}$  permet d'écrire, en tout point de l'image de  $\mathcal{C}$ , l'équation de champ

$$\operatorname{div}_{\underline{x}}(\underline{\tau}(\underline{x}, \underline{r})) + \operatorname{div}_{\underline{r}}(\underline{F}(\underline{x}, \underline{r})) + \underline{f}(\underline{x}, \underline{r}) = 0$$

et en tout point de la frontière de l'image de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{E}$  la condition aux limites

$$\underline{\tau}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{x}, \underline{r}).$$

Si on choisit un champ de vitesse à macrovitesse nulle et à microvitesse quelconque, on a:

$$P = \int_{\Omega} \int_{SO(3)} (-{}^T \underline{v}(\underline{x}, \underline{r}) : \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, \underline{r}) - \underline{\zeta}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot \underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r}) - \sum_{\substack{ijk \\ kji}} \underline{D}(\underline{x}, \underline{r}) : \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \underline{r}}(\underline{x}, \underline{r}) + \underline{\psi}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot \underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r})) d\mu(\underline{r}) dV(\underline{x}) \\ + \int_{\partial\Omega} \int_{SO(3)} (\underline{M}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot \underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r})) d\mu(\underline{r}) dV(\underline{x})$$

On transforme en:

$$P = \int_{\Omega} \int_{SO(3)} \underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot (\operatorname{div}_{\underline{x}}(\underline{v}(\underline{x}, \underline{r})) - \underline{\zeta}(\underline{x}, \underline{r}) + \operatorname{div}_{\underline{r}}(\underline{D}(\underline{x}, \underline{r})) + \underline{\psi}(\underline{x}, \underline{r})) d\mu(\underline{r}) dV(\underline{x}) \\ + \int_{\partial\Omega} \int_{SO(3)} \underline{\omega}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot (-\underline{v}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) + \underline{M}(\underline{x}, \underline{r})) d\mu(\underline{r}) dV(\underline{x})$$

ce qui donne l'équation de champ

$$\operatorname{div}_{\underline{x}}(\underline{v}(\underline{x}, \underline{r})) - \underline{\zeta}(\underline{x}, \underline{r}) + \operatorname{div}_{\underline{r}}(\underline{D}(\underline{x}, \underline{r})) + \underline{\psi}(\underline{x}, \underline{r}) = 0$$

et la condition aux limites

$$\underline{v}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{M}(\underline{x}, \underline{r})$$

Les équations du milieu de Cosserat multiparticulaire sont donc, avec les définitions données plus haut:

|  |                          |
|--|--------------------------|
| $\text{div}_{\underline{x}}(\underline{\tau}(\underline{x}, \underline{r})) + \text{div}_{\underline{r}}(\underline{\underline{F}}(\underline{x}, \underline{r})) + \underline{f}(\underline{x}, \underline{r}) = 0$   | } équations de champs    |
| $\text{div}_{\underline{x}}(\underline{v}(\underline{x}, \underline{r})) - \underline{\zeta}(\underline{x}, \underline{r}) + \text{div}_{\underline{r}}(\underline{\underline{D}}(\underline{x}, \underline{r})) + \underline{\psi}(\underline{x}, \underline{r}) = 0$ |                          |
| $\underline{\zeta}(\underline{x}, \underline{r}) = -\underline{\underline{e}} : \underline{\tau}(\underline{x}, \underline{r})$  | condition d'objectivité  |
| $\underline{\tau}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{x}, \underline{r})$  | } conditions aux limites |
| $\underline{v}(\underline{x}, \underline{r}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{M}(\underline{x}, \underline{r})$   |                          |

Si on suppose l'indépendance des différents tenseurs par rapport à la microstructure, on retrouve les définitions des efforts donnés pour les milieux monoparticulaires, ainsi que les équations d'équilibre, les divergences en microstructure disparaissant.

De même, l'intégration de ces équations sur la variété des tenseurs orthogonaux redonne les efforts et les équations du milieu monoparticulaire puisque l'intégrale sur SO(3) de la divergence par rapport à  $\underline{r}$  d'un tenseur est identiquement nulle.

### III.3 Approche par les puissances virtuelles

On applique dans cette partie le principe des puissances virtuelles à un milieu multiparticulaire à microstructure quelconque, dans un cadre quasi-statique, et en utilisant les définitions des espaces de vitesses virtuelles du deuxième chapitre. Nous considérons une formulation classique, en substituant toutefois la notion de changement d'observateur à celle de mouvement rigidifiant, qui nous semble plus facilement utilisable dans le cadre d'une microstructure quelconque.

#### III.3.1 Formes des puissances virtuelles

Les formes linéaires que nous allons utiliser pour la puissance virtuelle des efforts intérieurs ( $P_{\text{int}}^{\ell}(\underline{u}, \underline{\omega})$ ) et la puissance virtuelle des efforts extérieurs (volumiques ( $P_{\text{ext}}^{\ell}(\underline{u}, \underline{\omega})$ ) et surfaciques ( $P_{\text{surf}}^{\ell}(\underline{u}, \underline{\omega})$ )) sont directement inspirées des développements de la partie précédente. Elles font donc intervenir d'une part des termes linéaires des micro et macro-vitesses virtuelles (dans  $P_{\text{int}}^{\ell}, P_{\text{ext}}^{\ell}$  et  $P_{\text{surf}}^{\ell}$ ), et d'autre part des termes linéaires des gradients en espace et en microstructure de ces vitesses virtuelles (dans  $P_{\text{int}}^{\ell}$ ).

$$P_{\text{int}}^{\mathcal{C}} = \int_{\Omega} \int_{\mathcal{M}} \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{u}} - \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\omega}} - {}^T \underline{\underline{\Gamma}} : \text{grad}_{\underline{\underline{x}}}(\underline{\underline{u}}) - {}^T \underline{\underline{\Delta}} : \text{grad}_{\underline{\underline{x}}}(\underline{\underline{\omega}}) - {}^T \underline{\underline{E}} : \text{grad}_{\underline{\underline{m}}}(\underline{\underline{u}}) - {}^T \underline{\underline{\Phi}} : \text{grad}_{\underline{\underline{m}}}(\underline{\underline{\omega}}) \, dv \, dV$$

$$P_{\text{ext}}^{\mathcal{C}} = \int_{\Omega} \int_{\mathcal{M}} \underline{\underline{f}} : \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{b}} : \underline{\underline{\omega}} \, dv \, dV$$

$$P_{\text{surf}}^{\mathcal{C}} = \int_{\partial\Omega} \int_{\mathcal{M}} \underline{\underline{t}} : \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{\omega}} \, dv \, dS$$

Les  $\underline{\underline{:}}$ ,  $\underline{\underline{:}}$ ,  $\underline{\underline{:}}$  et  $\underline{\underline{:}}$  sont les produits de dualité qui conviennent dans chaque cas;

$$\underline{\underline{:}} : T_{\mathcal{M}}^*(\underline{\underline{m}}) \times T_{\mathcal{M}}(\underline{\underline{m}}) \rightarrow \text{IR}$$

$$\underline{\underline{:}} : \text{Lin}^*(T_{\mathcal{E}}(\underline{\underline{x}}), T_{\mathcal{M}}(\underline{\underline{m}})) \times \text{Lin}(T_{\mathcal{E}}(\underline{\underline{x}}), T_{\mathcal{M}}(\underline{\underline{m}})) \rightarrow \text{IR}$$

$$\underline{\underline{:}} : \text{Lin}^*(T_{\mathcal{M}}(\underline{\underline{m}}), T_{\mathcal{E}}(\underline{\underline{x}})) \times \text{Lin}(T_{\mathcal{M}}(\underline{\underline{m}}), T_{\mathcal{E}}(\underline{\underline{x}})) \rightarrow \text{IR}$$

$$\underline{\underline{:}} : \text{Lin}^*(T_{\mathcal{M}}(\underline{\underline{m}})) \times \text{Lin}(T_{\mathcal{M}}(\underline{\underline{m}})) \rightarrow \text{IR}$$

$\underline{\underline{:}}$ , par exemple, est le produit deux fois contracté entre deux tenseurs du second ordre

(contravariant et covariant) sur l'espace vectoriel  $T_{\mathcal{M}}(\underline{\underline{m}})$ .

Il n'apparaît pas de termes d'efforts "surfaiques" dans la variété de microstructure. L'hypothèse sous-jacente est que chaque point matériel est en bijection avec la variété de microstructure, et que nous choisissons des champs de vitesses virtuelles du corps continu par rapport à la microstructure. La surface d'un corps  $\mathcal{C}$  (ou d'un sous-corps  $\mathcal{C}'$ ) est en effet une surface de discontinuité de certains des champs de vitesses virtuelles de  $\mathcal{C}$  ( $\mathcal{C}'$ ).

Nous introduisons les expressions des puissances dans l'énoncé du principe des puissances virtuelles. Nous nous intéressons en premier lieu à l'objectivité de la puissance des efforts intérieurs, avant de déduire du principe les équations de champ et les conditions limites du modèle.

Cette objectivité se traduit par l'invariance de la puissance des efforts intérieurs, pour un champ de vitesses virtuelles quelconque, lors d'un changement quelconque d'observateur en translation et rotation par rapport au référentiel initial. Il nous faut donc au préalable déterminer la variation de ces champs de vitesses lors d'un changement d'observateur.

### III.3.2 Changement d'observateur

Un changement d'observateur - vitesse de translation  $\underline{u}_0$ , taux de rotation  $\underline{\omega}_0$  - transforme les vitesses virtuelles  $(\underline{u}(\underline{x}, \underline{m}), \underline{\omega}(\underline{x}, \underline{m}))$  en  $(\underline{u}^{(\underline{u}_0, \underline{\omega}_0)}(\underline{x}, \underline{m}), \underline{\omega}^{(\underline{u}_0, \underline{\omega}_0)}(\underline{x}, \underline{m}))$ . On écrit ces vitesses transformées à l'aide des différents générateurs infinitésimaux de l'action des groupes de transformations (groupe des translations, groupe des rotations) sur l'espace euclidien et sur la variété de microstructure.

#### action des translations sur $\mathcal{E}$

Une translation finie transforme un point  $\underline{x}$  en  $\underline{x}^{(t)} = \underline{x} + \underline{t}$ . Le générateur infinitésimal au point  $\underline{x}$  est donc l'opérateur  $\frac{\partial \underline{x}^{(t)}}{\partial t} \Big|_{t=0}(\underline{x})$ , de  $\mathbb{R}^3$  (espace des vitesses de translation) dans  $\mathbb{R}^3$  (espace tangent à  $\mathcal{E}$  en  $\underline{x}$ ). Un changement d'observateur (en translation uniquement) transforme donc la macro-vitesse  $\underline{u}(\underline{x}, \underline{m})$  en  $\underline{u}^{(\underline{u}_0)}(\underline{x}, \underline{m}) = \underline{u}(\underline{x}, \underline{m}) + \underline{u}_0$ .

#### action des rotations sur $\mathcal{E}$

Une rotation finie autour de  $\underline{0}$ , de vecteur rotation  $\underline{q}$ , transforme un point  $\underline{x}$  en  $\underline{x}^{(q)} = \underline{R}(\underline{q}) \cdot \underline{x}$ , où  $\underline{R}(\underline{q})$  est le tenseur orthogonal associé à  $\underline{q}$ .

$$\underline{R}(\underline{q}) = \frac{1}{q^2}(\underline{q} \otimes \underline{q}) + \cos(q) \cdot (\underline{I} - \frac{1}{q^2}(\underline{q} \otimes \underline{q})) - \frac{\sin(q)}{q} \varepsilon_{ijk} (\underline{q} \cdot \underline{e}_i) \cdot (\underline{e}_j \otimes \underline{e}_k)$$

On peut écrire la composante  $i$  de  $\underline{x}^{(q)}$  dans un repère fixe de l'espace:

$$\left( \underline{R}(\underline{q}) \cdot \underline{x} \right)_i = x_i^{(q)} = \left[ \left( \frac{1 - \cos(q)}{q^2} \right) q_i q_k + \delta_{ik} \cos(q) - \varepsilon_{ijk} \frac{\sin(q)}{q} q_j \right] x_k$$

et donc  $\left( \frac{\partial x_i^{(q)}}{\partial q_j} \right)_{q=0} = \varepsilon_{ijk} x_k$  comme par exemple pour  $i=1$  et  $j=2$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \underline{x}_1^q}{\partial q_2} \right)_{q=0} &= \frac{x_1}{q^4} (q_2 q_1^2 q \sin(q) - 2(1 - \cos(q)) q_2 q_1^2 + q^3 q_2 \sin(q)) \\ &+ \frac{x_2}{q^4} (q_1 q_2^2 q \sin(q) - 2(1 - \cos(q)) q_1 q_2^2 + (1 - \cos(q)) q_1 q^2 - q^2 q_2 q_3 \cos(q) + q q_2 q_3 \sin(q)) \\ &+ \frac{x_3}{q^4} (q_1 q q_3 \sin(q) - 2(1 - \cos(q)) q_1 q_2 q_3 + q^2 q_2^2 \cos(q) - q q_2^2 \sin(q)) \\ &+ x_3 \frac{\sin(q)}{q} \end{aligned}$$

Le seul terme non nul par passage à la limite en  $q = 0$  est le dernier terme qui vaut  $x_3$ .

Le générateur infinitésimal de l'action du groupe des rotations sur l'espace euclidien au point  $\underline{x}$  est donc le tenseur  $\underline{\underline{e}} \cdot \underline{x}$ , qui n'est autre que le produit vectoriel à droite par  $\underline{x}$ . On retrouve

donc la forme classique d'un distributeur de vitesse: 
$$\underline{u}^{(\underline{u}_0, \underline{\omega}_0)}(\underline{x}, \mathcal{M}) = \underline{u}(\underline{x}, \mathcal{M}) + \underline{u}_0 + \underline{\omega}_0 \wedge \underline{x}$$

action des translations sur  $\mathcal{M}$

On a fait une hypothèse d'invariance par translation de la microstructure. La micro-vitesse est donc invariante par translation de l'observateur:  $\underline{\omega}^{(\underline{u}_0)}(\underline{x}, \mathcal{M}) = \underline{\omega}(\underline{x}, \mathcal{M})$ .

action des rotations sur  $\mathcal{M}$

L'action des rotations sur la microstructure est à préciser pour chaque microstructure particulière. On conserve pour l'instant la forme générale, à savoir:

$$\underline{\omega}^{(\underline{u}_0, \underline{\omega}_0)}(\underline{x}, \mathcal{M}) = \underline{\omega}(\underline{x}, \mathcal{M}) + \left( \frac{\partial \mathcal{M}^{(q)}}{\partial \underline{q}} \right)_{q=0}(\underline{x}, \mathcal{M}) \cdot \underline{\omega}_0$$

### III.3.3 Objectivité de la puissance des efforts intérieurs

En utilisant la linéarité de la puissance des efforts intérieurs et les expressions de  $\underline{u}^{(\underline{u}_0, \underline{\omega}_0)}(\underline{x}, \mathcal{M})$  et  $\underline{\omega}^{(\underline{u}_0, \underline{\omega}_0)}(\underline{x}, \mathcal{M})$  définies plus haut nous pouvons décomposer la puissance des efforts intérieurs d'un sous-corps  $\mathcal{C}'$  (occupant le sous-domaine  $D' = \Omega \times \mathcal{M}'$  de  $\mathcal{U}$ ) de  $\mathcal{C}$  dans le champ de vitesse virtuelle  $P_{int}^{\mathcal{C}'}(\underline{u}^{(\underline{u}_0, \underline{\omega}_0)}, \underline{\omega}^{(\underline{u}_0, \underline{\omega}_0)})$ :

$$P_{\text{int}}^{\mathcal{C}'}(\underline{u}(\underline{u}_0, \underline{\omega}_0), \underline{\omega}(\underline{u}_0, \underline{\omega}_0)) = P_{\text{int}}^{\mathcal{C}'}(\underline{u}, \underline{\omega}) + P_{\text{int}}^{\mathcal{C}'}(\underline{u}_0 + \underline{\omega}_0 \wedge \underline{x}, \left(\frac{\partial \underline{m}^{(q)}}{\partial \underline{q}}\right)_{\underline{q}=0} \cdot \underline{\omega}_0)$$

L'objectivité de cette puissance se traduit donc par la nullité, pour un sous-corps  $\mathcal{C}'$  du type défini plus haut et des taux de translation et de rotation quelconques, de l'expression:

$$P_{\text{int}}^{\mathcal{C}'}(\underline{u}_0 + \underline{\omega}_0 \wedge \underline{x}, \left(\frac{\partial \underline{m}^{(q)}}{\partial \underline{q}}\right)_{\underline{q}=0} \cdot \underline{\omega}_0)$$

Soit;

$$\begin{aligned} P_{\text{int}}^{\mathcal{C}'}(\underline{u}_0 + \underline{\omega}_0 \wedge \underline{x}, \left(\frac{\partial \underline{m}^{(q)}}{\partial \underline{q}}\right)_{\underline{q}=0} \cdot \underline{\omega}_0) = \\ \int_{\Omega} \int_{\mathcal{M}} \underline{A}(\underline{u}_0 + \underline{\omega}_0 \wedge \underline{x})^{-T} \underline{\Gamma} : \text{grad}_{\underline{x}}(\underline{u}_0 + \underline{\omega}_0 \wedge \underline{x}) - {}^T \underline{E} \underline{\underline{z}} : \text{grad}_{\underline{m}}(\underline{u}_0 + \underline{\omega}_0 \wedge \underline{x}) \\ - \underline{B} \underline{\underline{z}} \left(\left(\frac{\partial \underline{m}^{(q)}}{\partial \underline{q}}\right)_{\underline{q}=0} \cdot \underline{\omega}_0\right)^{-T} \underline{\Delta} \underline{\underline{z}} : \text{grad}_{\underline{x}} \left(\left(\frac{\partial \underline{m}^{(q)}}{\partial \underline{q}}\right)_{\underline{q}=0} \cdot \underline{\omega}_0\right) - {}^T \underline{\Phi} \underline{\underline{z}} : \text{grad}_{\underline{m}} \left(\left(\frac{\partial \underline{m}^{(q)}}{\partial \underline{q}}\right)_{\underline{q}=0} \cdot \underline{\omega}_0\right) d\mu dV \end{aligned}$$

Les termes  ${}^T \underline{E} \underline{\underline{z}} : \text{grad}_{\underline{m}}(\underline{u}_0 + \underline{\omega}_0 \wedge \underline{x})$  et  ${}^T \underline{\Delta} \underline{\underline{z}} : \text{grad}_{\underline{x}} \left(\left(\frac{\partial \underline{m}^{(q)}}{\partial \underline{q}}\right)_{\underline{q}=0} \cdot \underline{\omega}_0\right)$  sont identiquement nuls, quel que soit le changement d'observateur, puisque  $\underline{u}_0$ ,  $\underline{\omega}_0$  et  $\underline{x}$  ne dépendent pas de  $\underline{m}$ , et que  $\underline{\omega}_0$  et  $\left(\frac{\partial \underline{m}^{(q)}}{\partial \underline{q}}\right)_{\underline{q}=0}$  ne dépendent pas de  $\underline{x}$ .

Le choix d'un observateur uniquement en translation ( $\underline{\omega}_0=0$ ) conduit classiquement à  $\underline{A}=0$ .

Le gradient en  $\underline{x}$  de  $\underline{\omega}_0 \wedge \underline{x}$  s'écrit:  $\text{grad}_{\underline{x}}(\underline{\omega}_0 \wedge \underline{x}) = -\underline{e} \underline{\omega}_0$ .

Si on note  $\varphi(\underline{m})$  le générateur infinitésimal de l'action du groupe des rotations sur  $\mathcal{M}$  au point

$\underline{m}$  ( $\varphi(\underline{m}) = \left. \frac{\partial \underline{m}^{(q)}}{\partial \underline{q}} \right|_{\underline{q}=0}$ ), la variation de la puissance des efforts intérieurs du sous-corps  $\mathcal{C}'$  dans

le changement d'observateur considéré s'écrit:

$$\begin{aligned} P_{\text{int}}^{\mathcal{C}'}(\underline{u}_0 + \underline{\omega}_0 \wedge \underline{x}, \varphi(\underline{m}) \cdot \underline{\omega}_0) \\ = \int_{\Omega} \int_{\mathcal{M}} -{}^T \underline{\Gamma} : \underline{e} \underline{\omega}_0 - \underline{B} \underline{\underline{z}}(\varphi(\underline{m}) \cdot \underline{\omega}_0)^{-T} \underline{\Phi} \underline{\underline{z}} : (\text{grad}_{\underline{m}}({}^T \varphi(\underline{m})) : \underline{\omega}_0) d\mu dV \\ = \int_{\Omega} \int_{\mathcal{M}} -{}^T \underline{\Gamma} : \underline{e} \underline{\omega}_0 + (-\underline{B} \underline{\underline{z}} \varphi(\underline{m})) \cdot \underline{\omega}_0 - {}^T \underline{\Phi} \underline{\underline{z}} : \underline{\omega}_0 \cdot \text{grad}_{\underline{m}}({}^T \varphi(\underline{m})) d\mu dV \\ = \left[ \int_{\Omega} \int_{\mathcal{M}} \underline{e} : \underline{\Gamma}^{-T} \varphi(\underline{m}) \underline{\underline{z}} - \underline{B} - \text{grad}_{\underline{m}}({}^T \varphi(\underline{m})) \underline{\underline{z}} : d\mu dV \right] \underline{\omega}_0 \end{aligned}$$

La nullité de cette puissance pour  $\mathcal{C}$  et  $\underline{\omega}_0$  quelconques entraîne la nullité de l'opérateur tensoriel  $\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\Gamma}}^{-T} \varphi(\mathcal{M}) \cdot \underline{\underline{B}} - \text{grad}_{\mathcal{M}} (\text{}^T \varphi(\mathcal{M})) \cdot \underline{\underline{\Phi}}$  en tout point  $(\underline{x}, \mathcal{M})$  du corps  $\mathcal{C}$ . On retrouve une expression très semblable à celle obtenue par Capriz dans le cas des milieux monoparticulaires que nous avons rappelée au chapitre I.

L'objectivité de la puissance des efforts intérieurs se traduit donc par les deux relations suivantes, l'une exprimant, comme dans le cas classique, la nullité du tenseur d'effort intérieur dual de la macro-vitesse et la seconde relation exprimant la partie antisymétrique du tenseur de contrainte en fonction des efforts intérieurs sur la microstructure.

$$\forall (\underline{x}, \mathcal{M}) \in \Omega \times \mathcal{M}$$

- $\underline{\underline{A}}(\underline{x}, \mathcal{M}) = 0$
- $\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\Gamma}}(\underline{x}, \mathcal{M}) = \text{}^T \varphi(\mathcal{M}) \cdot \underline{\underline{B}}(\underline{x}, \mathcal{M}) + \text{grad}_{\mathcal{M}} (\text{}^T \varphi(\mathcal{M})) \cdot \underline{\underline{\Phi}}$

### III.3.4 Equations d'équilibre

Les équations d'équilibres se déduisent très simplement du principe des puissances virtuelles. On a en effet, pour un champ de vitesses virtuelles quelconques  $(\underline{u}, \underline{\omega})$  :

$$P_{\text{int}}^{\mathcal{C}}(\underline{u}, \underline{\omega}) + P_{\text{ext}}^{\mathcal{C}}(\underline{u}, \underline{\omega}) + P_{\text{surf}}^{\mathcal{C}}(\underline{u}, \underline{\omega}) = 0$$

soit

$$\int_{\Omega} \int_{\mathcal{M}} -\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\omega} - \text{}^T \underline{\underline{\Gamma}} : \text{grad}_{\underline{x}}(\underline{u}) - \underline{\underline{\Delta}} \cdot \text{grad}_{\underline{x}}(\underline{\omega}) - \text{}^T \underline{\underline{E}} \cdot \text{grad}_{\mathcal{M}}(\underline{u}) - \underline{\underline{\Phi}} \cdot \text{grad}_{\mathcal{M}}(\underline{\omega}) \, dv \, dV$$

$$+ \int_{\Omega} \int_{\mathcal{M}} \underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{b} \cdot \underline{\omega} \, dv \, dV + \int_{\partial\Omega} \int_{\mathcal{M}} \underline{t} \cdot \underline{u} + \underline{s} \cdot \underline{\omega} \, dv \, dS = 0$$

On utilise le théorème de Stokes et l'on obtient:

$$\forall (\underline{u}, \underline{\omega}),$$

$$\int_{\Omega} \int_{\mathcal{M}} -\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\omega} + \underline{u} \cdot \text{div}_{\underline{x}}(\underline{\underline{\Gamma}}) + \underline{\omega} \cdot \text{div}_{\underline{x}}(\underline{\underline{\Delta}}) + \underline{u} \cdot \text{div}_{\mathcal{M}}(\underline{\underline{E}}) + \underline{\omega} \cdot \text{div}_{\mathcal{M}}(\underline{\underline{\Phi}}) + \underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{b} \cdot \underline{\omega} \, dv \, dV$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \int_{\mathcal{M}} -\underline{u} \cdot \underline{\underline{\Gamma}} \cdot \underline{n}_{\partial\Omega} - \underline{\omega} \cdot \underline{\underline{\Delta}} \cdot \underline{n}_{\partial\Omega} + \underline{t} \cdot \underline{u} + \underline{s} \cdot \underline{\omega} \, dv \, dS = 0$$

On reprend, pour les champs "macro", des notations semblables à celles introduites plus haut;

$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\Gamma}}$  est le tenseur de contrainte de Cauchy

$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{t}}$  est le champ de forces extérieures surfaciques.

Nous conservons par ailleurs les autres notations, sans reprendre, par analogie, les notations des tenseurs du milieu de Cosserat multiparticulaire, pour ne pas oblitérer le fait que ces derniers sont des grandeurs duales de grandeurs cinématiques liées au taux de rotation, alors que nous avons utilisé un champ de microvitesse dans le fibré tangent de la microstructure.

On définit donc, de manière générale:

$\underline{\underline{E}} (\underline{\underline{\Phi}})$  est le premier (second) tenseur de contrainte microstructurale

$\underline{\underline{B}}$  est le vecteur de microcontrainte

$\underline{\underline{\Delta}}$  est le second tenseur de microcontrainte

$\underline{\underline{b}} (\underline{\underline{s}})$  est le vecteur des doubles forces extérieures volumiques (surfaiques)

Les équations d'équilibre d'un milieu multiparticulaire s'écrivent, avec les notations introduites plus haut, sous la forme:

|  |
|--|
| $\left. \begin{aligned} \text{div}_{\underline{x}} (\underline{\underline{\tau}}) + \text{div}_{\underline{m}} (\underline{\underline{E}}) + \underline{\underline{f}} &= 0 \\ \text{div}_{\underline{x}} (\underline{\underline{\Delta}}) - \underline{\underline{B}} + \text{div}_{\underline{m}} (\underline{\underline{\Phi}}) + \underline{\underline{b}} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{équations de champs}$ |
| $\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\tau}}(\underline{x}, \underline{m}) = {}^T \underline{\underline{\varphi}}(\underline{m}) \cdot \underline{\underline{B}}(\underline{x}, \underline{m}) + \text{grad}_{\underline{m}} ({}^T \underline{\underline{\varphi}}(\underline{m})) \cdot \underline{\underline{\Phi}} \text{ condition d'objectivité}$  |
| $\left. \begin{aligned} \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{n}}_{\partial\Omega} &= \underline{\underline{T}} \\ \underline{\underline{\Delta}} \cdot \underline{\underline{n}}_{\partial\Omega} &= \underline{\underline{s}} \end{aligned} \right\} \text{conditions limites}$   |

### III.3.5 Les milieux de Cosserat

Le point de vue décrit ci-dessus, appliqué aux milieux de Cosserat multiparticulaires, donne des équations manifestement différentes de celles obtenues dans la partie III.2. En effet, dans l'application de la méthode que nous venons d'exposer, la microvitesse virtuelle est un élément  $\underline{\underline{\omega}}(\underline{x}, \underline{r})$  de l'espace tangent à la variété différentielle SO(3) au point  $\underline{r}$ , alors que dans III.2, nous avons utilisé le taux de rotation de la microstructure  $\underline{\underline{\omega}}$ .

Rappelons les relations entre ces deux grandeurs:

$$\underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{e}} : (\underline{\underline{\omega}} \cdot {}^T \underline{r}) \text{ ou } \underline{\underline{\omega}} = -\underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{\omega}} \cdot \underline{r}$$

Il est intéressant et utile de comparer ces deux approches.

Commençons par appliquer ce qui précède en écrivant les équations d'équilibre et les formes linéaires puissances virtuelles dans le cas où  $\mathcal{M}$  est  $SO(3)$ , en plongeant  $SO(3)$  dans l'espace des tenseurs du second ordre et en prolongeant les champs introduits à l'espace tout entier, de manière à pouvoir utiliser les notations tensorielles usuelles.

La première chose à faire est d'analyser la signification des divers opérateurs de transposition que l'on introduit dans les expressions des formes linéaires puissances virtuelles. Cette identification peut se faire aisément sous forme indicielle, compte tenu de la forme des opérateurs gradient et divergence.

Ainsi, avec des notations proches de celles du III.3.1, en prenant en compte l'ordre tensoriel de chacun des termes, on peut écrire le terme en  $\text{grad}_{\underline{r}}(\underline{\omega})$  sous la forme:

$$\overset{\text{T}}{\underline{\underline{\Phi}}} :: \text{grad}_{\underline{r}}(\underline{\omega}) = (\overset{\text{T}}{\underline{\Phi}})_{\text{ikji}} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial r_{kl}} = \frac{\partial (\overset{\text{T}}{\underline{\Phi}})_{\text{ikji}} \omega_{ij}}{\partial r_{kl}} - \frac{\partial (\overset{\text{T}}{\underline{\Phi}})_{\text{ikji}}}{\partial r_{kl}} \omega_{ij}$$

On doit pouvoir écrire le deuxième terme du membre de droite de l'équation précédente sous la forme  $-\underline{\omega} : \text{div}_{\underline{r}}(\overset{\text{T}}{\underline{\underline{\Phi}}})$ , ce qui conduit directement à l'égalité:  $(\overset{\text{T}}{\underline{\Phi}})_{\text{ijkl}} = \Phi_{\text{kjli}}$

En procédant de manière similaire pour les autres transpositions, on obtient:

$$\begin{aligned} P_{\text{int}}^{\ell} &= \int_{\Omega} \int_{\mathcal{M}} -\underline{\underline{B}} : \underline{\omega} - \overset{\text{T}}{\underline{\Gamma}} : \text{grad}_{\underline{x}}(\underline{u}) - \overset{\text{T}\{\text{ijk} \rightarrow \text{jki}\}}{\underline{\underline{\Delta}}} : \text{grad}_{\underline{x}}(\underline{\omega}) \\ &\quad - \overset{\text{T}\{\text{ijk} \rightarrow \text{kji}\}}{\underline{\underline{E}}} : \text{grad}_{\underline{r}}(\underline{u}) - \overset{\text{T}\{\text{ijkl} \rightarrow \text{kjli}\}}{\underline{\underline{\Phi}}} :: \text{grad}_{\underline{r}}(\underline{\omega}) \, dv \, dV \\ P_{\text{ext}}^{\ell} &= \int_{\Omega} \int_{\mathcal{M}} \underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{b} : \underline{\omega} \, dv \, dV \\ P_{\text{surf}}^{\ell} &= \int_{\partial\Omega} \int_{\mathcal{M}} \underline{t} \cdot \underline{u} + \underline{s} : \underline{\omega} \, dv \, dS \end{aligned}$$

Notons que les tenseurs du second ordre;  $\underline{\underline{B}}$ ,  $\underline{b}$  et  $\underline{s}$ , de même que  $\text{div}_{\underline{x}}(\underline{\underline{\Delta}})$  et  $\text{div}_{\underline{r}}(\overset{\text{T}}{\underline{\underline{\Phi}}})$ , sont des tenseurs duaux de  $\underline{\omega}$ , élément de l'espace tangent à  $SO(3)$  en  $\underline{r}$ . Par identification de cet espace tangent avec son dual, on en déduit qu'ils peuvent s'écrire sous la forme du produit d'un tenseur antisymétrique et de  $\underline{r}$ .

Le générateur infinitésimal de l'action du groupe des rotations au point  $\underline{r}$ ,  $\mathcal{G}(\underline{r})$ , est le produit  $\overset{\text{T}}{\underline{\underline{e}}}$  où T désigne la transposition sur les deux derniers indices (voir p 21).

La condition d'objectivité se transforme en:

$$\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\Gamma}} = \overset{\text{T}}{\underline{\underline{B}}} : (\overset{\text{T}}{\underline{r}} \underline{\underline{e}}) - \overset{\text{T}\{\text{ijklm} \rightarrow \text{ilkjlm}\}}{\underline{\underline{\Phi}}} : (\underline{\underline{\Gamma}} \otimes \underline{\underline{e}})$$

ce qui, compte tenu de la remarque précédente sur l'antisymétrie du produit  $\underline{r} \cdot \underline{\underline{B}}$  devient:

$$-\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\Gamma}} = \underline{\underline{e}} : (\underline{r} \cdot \underline{\underline{B}}) + \underline{\underline{e}} : (\overset{\text{T}\{\text{ijkl} \rightarrow \text{jkli}\}}{\underline{\underline{\Phi}}} : \underline{\underline{\Gamma}})$$

On peut donc donner les équations d'équilibre d'un milieu de Cosserat multiparticulaire avec microvitesse virtuelle dans le fibré tangent de SO(3):

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{div}_x(\underline{\Gamma}) + \text{div}_r(\underline{\underline{E}}) + \underline{f} = 0 \\
 & \text{div}_x(\underline{\underline{\Delta}}) - \underline{\underline{B}} + \text{div}_r(\underline{\underline{\Phi}}) + \underline{b} = 0
 \end{aligned} \right\} \text{équations de champs}$$

$$-\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\Gamma}} = \underline{\underline{e}} : (\underline{r} \cdot \underline{\underline{B}}) + \underline{\underline{e}} : ({}^T\{ijkl \rightarrow jkil\} \underline{\underline{\Phi}} : \underline{\underline{I}}) \text{ condition d'objectivité}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \underline{\underline{\Gamma}} \cdot \underline{n}_{\partial\Omega} = \underline{\underline{T}} \\
 & \underline{\underline{\Delta}} \cdot \underline{n}_{\partial\Omega} = \underline{\underline{S}}
 \end{aligned} \right\} \text{conditions limites}$$

Ces expressions diffèrent nettement de celles obtenues précédemment. Si toutefois nous introduisons l'expression de la vitesse virtuelle  $\underline{\underline{\omega}}$  en fonction du taux de rotation  $\underline{\underline{\omega}}$  dans les puissances virtuelles, on se ramène à:

$$\begin{aligned}
 P_{int}^{\ell} &= \int_{\Omega} \int_{\mathcal{M}} + \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{\omega}} \cdot \underline{r} - {}^T \underline{\underline{\Gamma}} : \text{grad}_x(\underline{u}) + {}^T\{ijk \rightarrow jki\} \underline{\underline{\Delta}} : \text{grad}_x(\underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{\omega}} \cdot \underline{r}) \\
 &\quad - {}^T\{ijk \rightarrow kji\} \underline{\underline{E}} : \text{grad}_r(\underline{u}) + {}^T\{ijk \rightarrow kjji\} \underline{\underline{\Phi}} :: \text{grad}_r(\underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{\omega}} \cdot \underline{r}) \, dv \, dV \\
 P_{ext}^{\ell} &= \int_{\Omega} \int_{\mathcal{M}} \underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{b} : \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{\omega}} \cdot \underline{r} \, dv \, dV \\
 P_{surf}^{\ell} &= \int_{\partial\Omega} \int_{\mathcal{M}} \underline{t} \cdot \underline{u} + \underline{s} : \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{\omega}} \cdot \underline{r} \, dv \, dS
 \end{aligned}$$

Soit donc:

$$\begin{aligned}
 P_{int}^{\ell} &= \int_{\Omega} \int_{\mathcal{M}} [\underline{\underline{e}} : (\underline{r} \cdot \underline{\underline{B}}) + \underline{\underline{e}} : ({}^T\{ijkl \rightarrow jkil\} \underline{\underline{\Phi}} : \underline{\underline{I}})] \cdot \underline{\underline{\omega}} - {}^T \underline{\underline{\Gamma}} : \text{grad}_x(\underline{u}) - {}^T\{ijk \rightarrow kji\} \underline{\underline{E}} : \text{grad}_r(\underline{u}) \\
 &\quad - {}^T[(\underline{\underline{e}} \cdot \underline{r}) : \underline{\underline{\Delta}}] : \text{grad}_x(\underline{\underline{\omega}}) + {}^T\{ijk \rightarrow kjji\} [(\underline{\underline{e}} \cdot \underline{r}) : \underline{\underline{\Phi}}] : \text{grad}_r(\underline{\underline{\omega}}) \, dv \, dV \\
 P_{ext}^{\ell} &= \int_{\Omega} \int_{\mathcal{M}} \underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{\underline{e}} : (\underline{r} \cdot \underline{b}) \cdot \underline{\underline{\omega}} \, dv \, dV \\
 P_{surf}^{\ell} &= \int_{\partial\Omega} \int_{\mathcal{M}} \underline{t} \cdot \underline{u} + \underline{\underline{e}} : (\underline{r} \cdot \underline{s}) \cdot \underline{\underline{\omega}} \, dv \, dS
 \end{aligned}$$

On peut alors donner, avec les notations du III.2.3.1, les relations reliant les différents tenseurs dans les deux approches:

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\tau}} &= \underline{\underline{\Gamma}} & \underline{\underline{F}} &= \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{\psi}} &= \underline{\underline{e}} : (\underline{r} \cdot \underline{b}) \\
 \underline{\underline{v}} &= \underline{\underline{e}} : (\underline{r} \cdot \underline{\underline{\Delta}}) & \underline{\underline{D}} &= \underline{\underline{e}} : (\underline{r} \cdot \underline{\underline{\Phi}}) & \underline{\underline{M}} &= \underline{\underline{e}} : (\underline{r} \cdot \underline{s}) \\
 \underline{\underline{\zeta}} &= \underline{\underline{e}} : (\underline{r} \cdot \underline{\underline{B}} + {}^T\{ijk \rightarrow jkil\} \underline{\underline{\Phi}} : \underline{\underline{I}})
 \end{aligned}$$

Regroupons les équations d'équilibre obtenues:

| Approche générale  | Approche directe  |
|--|---|
| $\text{div}_x(\underline{\Gamma}) + \text{div}_r(\underline{\underline{E}}) + \underline{f} = 0$ (a)   | $\text{div}_x \underline{\tau} + \text{div}_r \underline{\underline{F}} + \underline{f} = 0$ (a')                     |
| $\text{div}_x(\underline{\underline{\Delta}}) - \underline{\underline{B}} + \text{div}_r(\underline{\underline{\Phi}}) + \underline{b} = 0$ (b)  | $\text{div}_x \underline{v} - \underline{\zeta} + \text{div}_r \underline{\underline{D}} + \underline{\psi} = 0$ (b') |
| $\underline{\underline{e}} : (\underline{r} \underline{\underline{B}} + {}^{T\{ijkl \rightarrow jkii\}} \underline{\underline{\Phi}} : \underline{\underline{I}}) = -\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\Gamma}}$ (c) | $\underline{\zeta} = -\underline{\underline{e}} : \underline{\tau}$ (c')  |
| $\underline{\underline{\Gamma}} \cdot \underline{n}_{\partial\Omega} = \underline{\underline{T}}$ (d)  | $\underline{\tau} \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{\underline{T}}$ (d')                                |
| $\underline{\underline{\Delta}} \cdot \underline{n}_{\partial\Omega} = \underline{\underline{s}}$ (e)  | $\underline{v} \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{\underline{M}}$ (e')                                   |

On utilise les relations entre les tenseurs écrites plus haut.

- \* (a), (c), (d) et (e) se transforment immédiatement en (a'), (c'), (d') et (e')
- \* on multiplie à gauche les deux termes de (b) par le vecteur  $\underline{\underline{e}} : \underline{r}$  :

$$\underline{\underline{e}} : \underline{r} \cdot (\text{div}_x(\underline{\underline{\Delta}}) - \underline{\underline{B}} + \text{div}_r(\underline{\underline{\Phi}}) + \underline{b}) = 0$$

en notant que  $\underline{\underline{e}} : \underline{r} \cdot \text{div}_r(\underline{\underline{\Phi}}) = \text{div}_r(\underline{\underline{e}} : \underline{r} : \underline{\underline{\Phi}}) + \underline{\underline{e}} : ({}^{T\{ijkl \rightarrow jkii\}} \underline{\underline{\Phi}} : \underline{\underline{I}})$

on obtient  $\text{div}_x(\underline{\underline{e}} : \underline{r} : \underline{\underline{\Delta}}) - \underline{\underline{e}} : (\underline{r} \underline{\underline{B}} + {}^{T\{ijkl \rightarrow jkii\}} \underline{\underline{\Phi}} : \underline{\underline{I}}) + \text{div}_r(\underline{\underline{e}} : \underline{r} : \underline{\underline{\Phi}}) + \underline{\underline{e}} : \underline{r} \cdot \underline{b} = 0$

c'est à dire  $\text{div}_x \underline{v} - \underline{\zeta} + \text{div}_r \underline{\underline{D}} + \underline{\psi} = 0$ .

On retrouve l'équation (b').

Les résultats concordent donc bien pour les milieux de Cosserat. Ils semblent également indiquer qu'il est préférable, dans les cas de microstructures orientées et chaque fois que ce sera possible, d'utiliser le taux de rotation virtuelle de la microstructure, qui est une grandeur vectorielle liée à la microvitesse virtuelle par le générateur infinitésimal du groupe des rotations, plutôt que la microvitesse virtuelle elle-même.

Le chapitre suivant traite précisément, pour l'essentiel, de microstructure orientées, et de la méthode d'obtention des équations d'équilibre du milieu multiparticulaire à partir de celles du milieu monoparticulaire.

## CHAPITRE IV

# GLOBALISATION DES EQUATIONS D'EQUILIBRE

*Cette quatrième partie est consacrée à l'exposé d'une méthode de changement d'échelle adaptée aux milieux multiparticulaires à microstructure. Nous détaillons les raisons de mettre en œuvre une démarche de passage de type micro-macro, puis nous donnons plusieurs exemples de passage micro-macro sur des milieux à microstructure.*

*Nous proposons ensuite une technique de transformation des équations de bilan d'un milieu monoparticulaire à microstructure en milieu multiparticulaire à microstructure, que nous appelons globalisation.*

*Nous explicitons en particulier, dans le cas de microstructures transitives, l'action de la globalisation sur les opérateurs différentiels de temps et d'espace, puis nous mettons en parallèle les équations obtenues par cette méthode et celles du chapitre précédent.*



|  |            |
|--|------------|
| <b>IV.1 Principes du changement d'échelle</b>          | <b>97</b>  |
| IV.1.1 Le concept d'observation                        | 97         |
| IV.1.2 Un exemple élémentaire: les milieux à spin      | 101        |
| <b>IV.2 Fonctions d'observation</b>                    | <b>106</b> |
| IV.2.1 Observation de l'espace euclidien               | 107        |
| IV.2.2 Observation de la microstructure                | 108        |
| IV.2.2.1 Décomposition de la microstructure            | 108        |
| IV.2.2.2 Décomposition de la fonction d'observation    | 110        |
| <b>IV.3 Les microstructures d'orientation</b>          | <b>111</b> |
| IV.3.1 Les milieux de Cosserat                         | 111        |
| IV.3.2 Les milieux de type cristaux liquides           | 114        |
| IV.3.3 Cas général des microstructures transitives     | 117        |
| IV.3.4 Dérivation temporelle                           | 120        |
| IV.3.5 Plongement de $\mathcal{M}$ dans $SO(3)$        | 121        |
| <b>IV.4 Les milieux de Cosserat multiparticulaires</b> | <b>124</b> |



## IV.1 Principes du changement d'échelle

L'approche développée dans les chapitres précédents présente une démarche systématique de construction de modèles mécaniques de milieux continus multiparticulaires à microstructure. Il est nécessaire de proposer une approche complémentaire consistant en un passage de type micro-macro, permettant de donner des éléments d'interprétation quant à la nature physique des grandeurs introduites et des équations qui les relient.

Cette méthode, que nous appelons **globalisation**, consiste à "défocaliser" les outils de mesure d'un milieu pour ne conserver qu'une information en un certain sens moyenne. Elle permet pour l'essentiel de passer de la modélisation d'un milieu à microstructure de type monoparticulaire à un modèle multiparticulaire.

### IV.1.1 Le concept d'observation

Le principe de la méthode est un principe de moyennes glissantes pondérées des grandeurs ou des équations de bilan des variables microscopiques. Cette méthode est proche de celle décrite par F. Gilbert dans sa thèse de docteur d'état, à ceci près que notre procédé de globalisation transforme des grandeurs fortement variables (au niveau micro), définies dans le cadre classique comme des champs sur un espace euclidien, (comme variables de placement dans le cas des milieux monoparticulaires à microstructure que nous avons décrit dans les chapitres précédents), en variables macroscopiques plus lisses (par convolution), mais décrites éventuellement dans un espace plus complexe (produit cartésien d'un espace euclidien par une variété différentielle).

L'opération de globalisation transforme l'image du milieu dans l'univers d'observation, en lui conférant une "profondeur" supplémentaire. La description géométrique du milieu est plus détaillée, mais la cinématique des particules et les efforts s'exerçant sur ces particules sont beaucoup plus réguliers. En particulier, et c'est là l'objectif de la globalisation, les distances caractéristiques des variations sont compatibles avec l'échelle du modèle. Les gradients des grandeurs du modèle de départ (modèle micro) n'apparaissent pas explicitement dans le modèle macro, ce qui est d'ailleurs une nécessité pour la cohérence du modèle.

Précisons que cette méthode de passage micro-macro n'a pas vraiment pour objet de formuler directement et de manière systématique un modèle de milieu continu multiparticulaire. Nous verrons en effet que les équations globalisées nécessitent souvent, pour une interprétation correcte, d'être traitées et analysées par comparaison avec une approche directement de type macro, comme celle décrite précédemment.

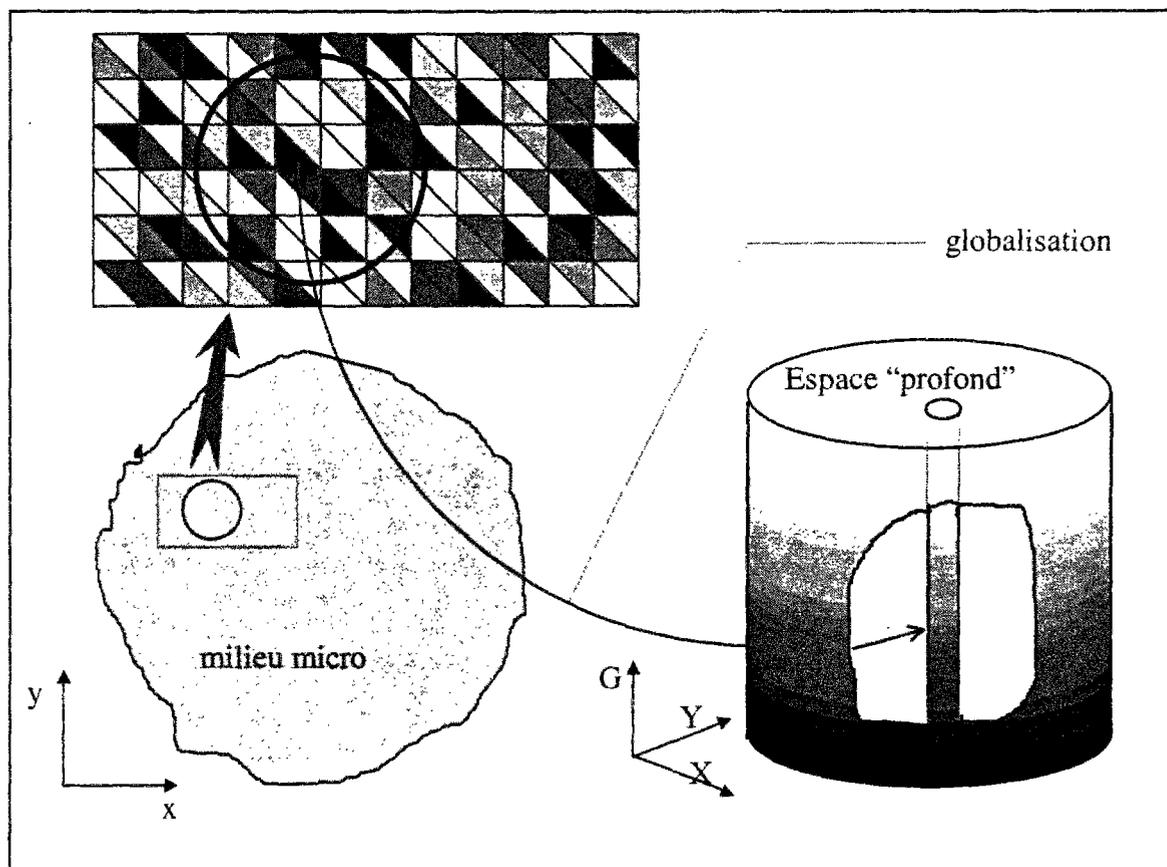


fig IV. 1: principe de globalisation

La figure précédente présente le principe de la globalisation sur un milieu bidimensionnel à microstructure de type « niveau de gris ». La variété différentielle  $\mathcal{M}$  est le segment  $[0,1]$  muni de la topologie induite par  $\mathbb{R}$ . La position d'une particule dans le milieu initial est donnée par un couple de coordonnées  $(x,y)$ , sa microstructure à l'instant  $t$  est un réel de l'intervalle  $[0,1]$ , représentant une nuance de gris, du noir (1) au blanc (0).

Dans le milieu globalisé, en chaque point  $(X,Y)$  et à chaque instant  $t$  se trouvent une infinité de particules, chacune à un niveau de gris différent, et couvrant de manière continue la gamme de gris du blanc au noir.

Cette nécessité de procéder à une globalisation apparaît très clairement dans le cas des matériaux polycristallins; une description de ces milieux comme des milieux de Cosserat, ou même comme des milieux micromorphiques, ne conduit pas à des modèles utilisables, au sens où les trop fortes variations locales des champs interdisent toute application pratique pour des volumes supérieurs à quelques millimètres cubes.

Le milieu que nous globalisons est un milieu continu à microstructure, au sens par exemple de Capriz, c'est à dire que la variable de microstructure est définie comme un champ (scalaire, vectoriel, tensoriel) sur un domaine de l'espace.

L'opérateur de globalisation, que nous conviendrons de noter  $\sim$  (la globalisation de la grandeur  $G$  s'écrit  $\tilde{G}$ , ou  $G^\sim$ ), est une convolution par une fonction d'observation  $\mathcal{O}$ , définie sur  $(\mathcal{E} \times \mathcal{M}) \times (\mathcal{E} \times \mathcal{M})$  et à valeur réelle. Soit donc une variable micro  $G(\underline{y}, t)$  à globaliser et  $u(\underline{y}, t)$  la valeur de la microstructure au point  $\underline{y}$  à l'instant  $t$ .  $\tilde{G}$  est une grandeur macro, fonction de  $(x, m, t)$  définie par:

$$\text{Equation IV. 1} \quad \forall (\underline{x}, m, t) \in \mathcal{E} \times \mathcal{M} \times \mathbb{R}, \tilde{G}(\underline{x}, m, t) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\underline{y}, t) \mathcal{O}(\underline{x}, m, (\underline{y}, u(\underline{y}, t))) dV$$

Nous choisirons dans la suite du développement d'observer séparément les variables d'espace et les variables de microstructure, c'est-à-dire de décomposer  $\mathcal{O}$  en un produit de deux fonctions d'observation; une fonction d'espace  $\mathcal{O}_x$  et une fonction de microstructure  $\mathcal{O}_m$ .

$$\forall ((\underline{x}, m), \underline{y}, t) \in (\mathcal{E} \times \mathcal{M}) \times \mathcal{E} \times \mathbb{R}, \mathcal{O}((\underline{x}, m), (\underline{y}, u(\underline{y}, t))) = \mathcal{O}_x(\underline{x}, \underline{y}) \mathcal{O}_m(m, u(\underline{y}, t))$$

Un exemple simple de ce que peut être une fonction d'observation uniquement en espace (qui conduit donc d'un milieu monoparticulaire sans microstructure à un autre milieu monoparticulaire sans microstructure) est donné par F. Gilbert dans sa thèse [Gilbert,1983]. La fonction  $\mathcal{O}_x$  est une fonction de la distance entre les points  $x$  et  $y$ . C'est une fonction "cloche",  $C^\infty$  à support compact, normée (pour que la globalisation d'une grandeur constante conserve cette grandeur).

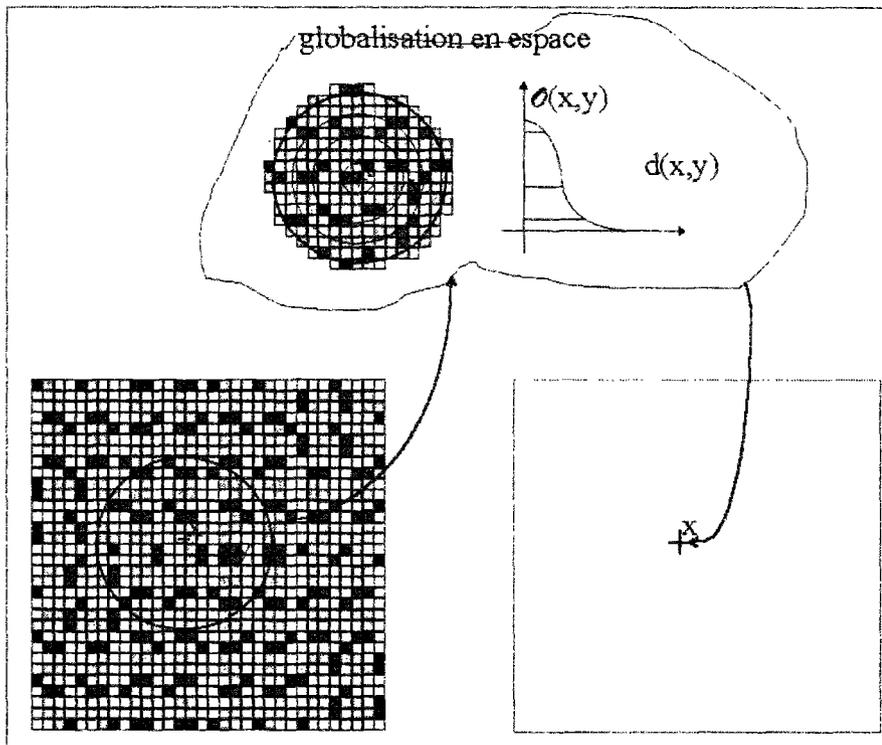


fig IV. 2: globalisation spatiale de la couleur dans un milieu "à couleur" (milieu macro uni)

Notre approche permet d'ajouter à cette globalisation spatiale une globalisation microstructurale, de telle sorte qu'en chaque point de l'espace d'origine (où il n'y a qu'une particule) se trouve une infinité de particules dans le milieu globalisé. Toutes ces particules occupent le même placement dans l'espace physique, mais chacune a un placement différent dans l'espace microstructural.

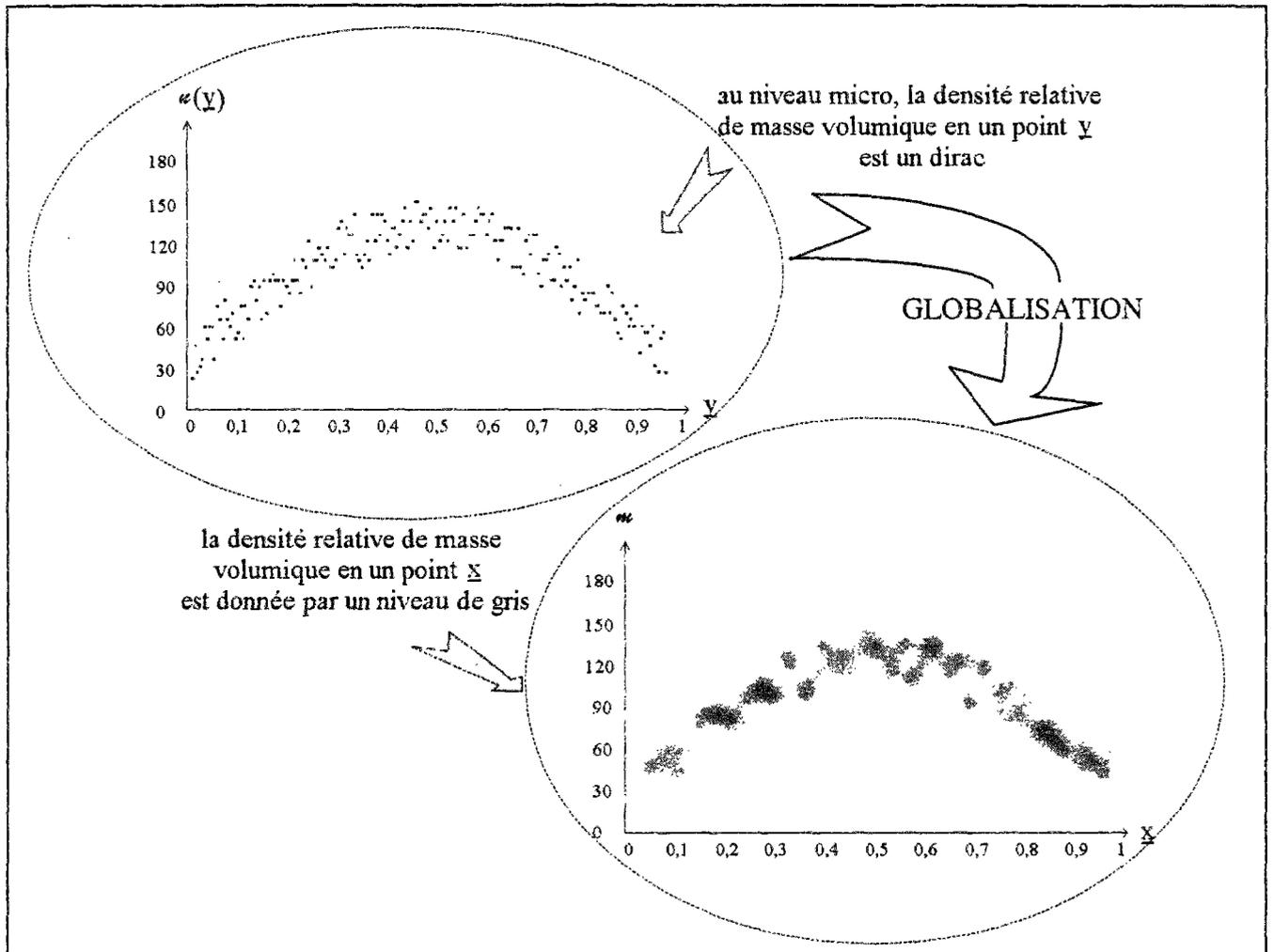


fig IV. 3: globalisation de la masse volumique dans un milieu unidimensionnel orienté

La figure IV. 3 représente la transformation d'un milieu unidimensionnel orienté. Dans les deux graphes, chaque particule est placée dans l'univers  $[0,1] \times [0,180[$ .  $[0,180[$  est la variété de microstructure, celle-ci étant représentée par un angle avec une direction de référence fixe. Chaque particule a un niveau de gris  $NG$  correspondant à la densité relative de masse volumique au point  $(x, \theta)$  par rapport à la masse volumique en  $x$ , supposée uniforme et égale à  $\rho_0$ :  $NG(x, \theta) = \rho(x, \theta) / \rho_0$ . Le blanc vaut 0 et le noir 1.

Au niveau micro, la masse volumique est uniforme en espace mais très discontinue en orientation. La globalisation transforme l'image du milieu en distribuant la masse au point  $\underline{x}$  sur l'ensemble des orientations, donnant ainsi une description continue de la masse volumique.

La globalisation s'accompagne d'un changement de dimension de l'image du corps dans l'univers d'observation, en associant à chaque point de la partie "physique" de l'univers d'observation une sous-variété de dimension non nulle de la partie microstructurale de l'univers d'observation (passage d'un milieu unidimensionnel à un milieu bidimensionnel dans l'exemple ci-dessus).

Pour pouvoir s'appliquer dans un cadre général, et en particulier pour préserver l'objectivité lors du passage du micro au macro, l'opérateur de globalisation doit être un opérateur objectif. C'est à dire, l'intégration se faisant sur  $\mathcal{E}$  tout entier, que la fonction d'observation elle-même doit être objective, et donc également chacune des fonctions d'observation. Cette condition d'objectivité se traduit par une invariance des fonctions d'observation par rapport aux translations et aux rotations de l'espace.

Nous commençons par donner un exemple complet de la méthode dans un cas de milieu à microstructure simple.

#### IV.1.2 Un exemple élémentaire: les milieux à spin

Le milieu initial que nous considérons ici est un milieu de type milieu continu tridimensionnel. Nous supposons de plus que chaque particule de ce milieu (dont le placement est  $\underline{y}$  dans un référentiel donné de  $\mathcal{E}$ ) est dotée d'une orientation, sous la forme d'un vecteur unitaire  $\underline{u}$ , appartenant donc à  $\mathcal{M}$ , la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . Les équations d'équilibre quasi-statique de ce type de milieu sont celles données par Capriz [Capriz, 1989];

$$\text{div}(\underline{\underline{\tau}}) + \underline{f} = 0 \quad (\text{a})$$

$$\text{div}(\underline{\underline{v}}) + \underline{b} - \underline{\zeta} = 0 \quad (\text{b})$$

$$\underline{\underline{e}} : (\underline{\underline{\tau}} + \underline{u} \otimes \underline{\zeta} + \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{u}) \cdot \underline{\underline{v}}) = 0 \quad (\text{c})$$

où  $\underline{\underline{\tau}}$  est le tenseur de contrainte de Cauchy, non symétrique

$\underline{f}$  est la densité volumique des efforts extérieurs

$\underline{\underline{v}}$  est le tenseur du second ordre des contraintes microstructurales

$\underline{b}$  est la densité volumique des efforts extérieurs sur la microstructure

$-\underline{\zeta}$  est la densité volumique des efforts intérieurs d'origine microstructurale

Nous allons nous attacher à globaliser la deuxième équation d'équilibre. Nous allons donc passer d'un milieu où le placement se fait dans un espace euclidien de dimension 3 à un milieu où le placement se fait dans le produit cartésien de ce même espace de dimension trois par la variété différentielle de dimension 2 ensemble des vecteurs unitaires de  $\mathbb{R}^3$ .

Nous omettons pour l'instant d'écrire la dépendance en temps des divers termes des équations.

Nous globalisons l'équation d'équilibre (b). Nous multiplions les deux membres de l'égalité par la fonction d'observation et nous intégrons sur  $\mathbb{R}^3$  :

$$\forall \underline{x} \in \mathcal{E}, \forall m \in \mathcal{M}, \int_{\mathbb{R}^3} (\text{div}_{\underline{y}}(\underline{v})|_{\underline{y}} - \underline{\zeta}(\underline{y}) + \underline{b}(\underline{y})) \mathcal{O}((\underline{x}, m), (\underline{y}, \underline{u}(\underline{y}))) \, dv = 0$$

c'est-à-dire, en décomposant la fonction d'observation  $\mathcal{O}$  en une fonction d'observation sur la variable d'espace et une fonction d'observation sur la variable microstructurale:

$$\forall \underline{x} \in \mathcal{E}, \forall m \in \mathcal{M}, \int_{\mathbb{R}^3} (\text{div}_{\underline{y}}(\underline{v})|_{\underline{y}} - \underline{\zeta}(\underline{y}) + \underline{b}(\underline{y})) \mathcal{O}_{\underline{x}}(\underline{x}, \underline{y}) \mathcal{O}_m(m, \underline{u}(\underline{y})) \, dv = 0$$

et en intégrant par partie:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \text{div}_{\underline{y}}[\underline{v} \mathcal{O}_{\underline{x}}(\underline{x}, \underline{y}) \mathcal{O}_m(m, \underline{u}(\underline{y}))] \, dv - \int_{\mathbb{R}^3} \underline{v}(\underline{y}) \text{grad}_{\underline{y}}[\mathcal{O}_{\underline{x}}(\underline{x}, \underline{y}) \mathcal{O}_m(m, \underline{u}(\underline{y}))] \, dv \\ + \int_{\mathbb{R}^3} (\underline{b}(\underline{y}) - \underline{\zeta}(\underline{y})) \mathcal{O}_{\underline{x}}(\underline{x}, \underline{y}) \mathcal{O}_m(m, \underline{u}(\underline{y})) \, dv = 0 \end{aligned}$$

Le premier terme est un terme de flux sur  $\mathbb{R}^3$  qui est donc identiquement nul pour tout couple  $(\underline{x}, m)$  de  $\mathcal{E} \times \mathcal{M}$ .

Le second terme se décompose en deux intégrales:

$$-\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \underline{v}(\underline{y}) \mathcal{O}_m(m, \underline{u}(\underline{y})) \text{grad}_{\underline{y}}[\mathcal{O}_{\underline{x}}(\underline{x}, \underline{y})] \, dv}_{\mathcal{I}_{\underline{x}}} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \underline{v}(\underline{y}) \mathcal{O}_{\underline{x}}(\underline{x}, \underline{y}) \text{grad}_{\underline{y}}[\mathcal{O}_m(m, \underline{u}(\underline{y}))] \, dv}_{\mathcal{I}_m} = 0$$

que nous traitons séparément, en introduisant des fonctions d'observation sous forme d'applications composées d'une fonction "distance" entre les variables considérées et d'une fonction cloche normée à 1  $\mathcal{o}(\delta)$  à valeurs réelles, définie sur  $\mathbb{R}^3$ , du type  $1 + \cos(\pi\delta)$  sur l'intervalle  $[0,1]$  et 0 ailleurs, à savoir (par exemple):

$$\mathcal{O}_{\underline{x}}(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{3\pi}{4(\pi^2 - 6)\varepsilon^3} \left( 1 + \cos\left(\frac{\pi}{\varepsilon} \min(\|\underline{y} - \underline{x}\|, \varepsilon)\right) \right)$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{O}_m(m, \underline{u}) = \frac{\pi^2 - \alpha^2}{2\pi^3(1 - \cos\alpha) - 4\pi\alpha^2} \left( 1 + \cos\left(\frac{\pi}{\alpha} \min(\arccos(m, \underline{u}), \alpha)\right) \right)$$

où  $\cdot$  est le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^3$

La fonction  $\arccos(m \cdot n)$ , qui donne l'angle entre les deux vecteurs unitaires  $m$  et  $n$  est une mesure de la désorientation relative de ceux-ci.

Les paramètres  $\varepsilon$  et  $\alpha$  sont les paramètres d'échelle de la globalisation, au sens où ils permettent de choisir la taille du voisinage des variables micro pris en compte lors de la globalisation.

Notons également que la fonction d'observation  $\mathcal{O}_m$  ainsi définie pour les vecteurs unitaires est en fait définie sur  $\mathbb{R}^3$ . Cette propriété permet de construire un prolongement naturel sur  $\mathbb{R}^3$  des champs macroscopiques que nous allons obtenir par globalisation, et donc d'utiliser les opérateurs classiques de  $\mathbb{R}^3$  (divergence, gradient).

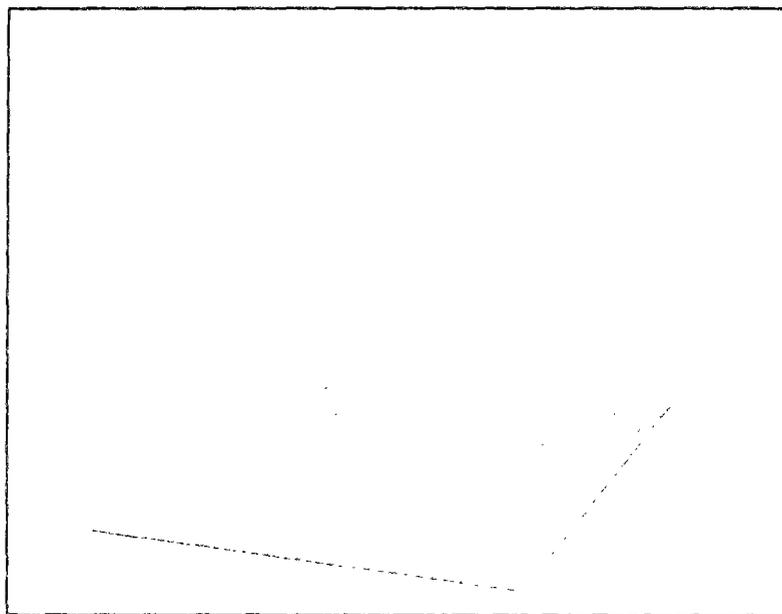


fig IV. 4: schématisation bidimensionnelle d'une fonction d'observation en espace  $\mathcal{O}(\underline{x}, \underline{y})$

① Ecrivons le gradient en  $\underline{y}$  de la fonction d'observation d'espace:

$$(\text{grad}_{\underline{y}}(\mathcal{O}_{\underline{x}}))_{|(\underline{x}, \underline{y})} = -\frac{3\pi^2}{4(\pi^2 - 6)\varepsilon^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi\|\underline{x} - \underline{y}\|}{\varepsilon}\right) \cdot \text{grad}_{\underline{y}}(\|\underline{x} - \underline{y}\|)$$

En utilisant le fait que  $\text{grad}_{\underline{x}}(\|\underline{x} - \underline{y}\|) = -\text{grad}_{\underline{y}}(\|\underline{y} - \underline{x}\|)$

on peut écrire  $\mathcal{T}_{\underline{x}}$  sous la forme suivante;

équation IV. 2

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\underline{x}} &= -\int_{\mathbb{R}^3} \underline{v}(\underline{y}) \mathcal{O}_m(m, n(\underline{y})) \text{grad}_{\underline{y}}[\mathcal{O}_{\underline{x}}(\underline{x}, \underline{y})] dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \underline{v}(\underline{y}) \mathcal{O}_m(m, n(\underline{y})) \text{grad}_{\underline{x}}[\mathcal{O}_{\underline{x}}(\underline{x}, \underline{y})] dv \\ &= \text{div}_{\underline{x}} \left( \int_{\mathbb{R}^3} \underline{v}(\underline{y}) \mathcal{O}_m(m, n(\underline{y})) \mathcal{O}_{\underline{x}}(\underline{x}, \underline{y}) dv \right) \end{aligned}$$

$\varphi_{\underline{x}}$  apparaît donc comme la divergence en  $\underline{x}$  de la globalisation du tenseur des contraintes microstructurales.

② En ce qui concerne la fonction d'observation de la microstructure, le gradient en  $\underline{y}$  s'écrit:

$$\begin{aligned} & (\text{grad}_{\underline{y}}(\mathcal{O}_{\underline{m}}))|_{(\underline{m}, \underline{u}(\underline{y}))} \\ &= \frac{\pi(\pi^2 - \alpha^2)}{(2\pi^3\alpha(1 - \cos\alpha) - 4\pi\alpha^3)\sqrt{1 - (\underline{m}, \underline{u}(\underline{y}))^2}} \sin\left(\frac{\pi \text{Arccos}(\underline{m}, \underline{u}(\underline{y}))}{\alpha}\right) \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{m}, \underline{u}(\underline{y})) \\ &= \frac{d\mathcal{O}}{d\delta} \cdot \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{m}, \underline{u}(\underline{y})) \end{aligned}$$

$$\text{où } \mathcal{O}(\delta) = \frac{\pi^2 - \alpha^2}{2\pi^3(1 - \cos\alpha) - 4\pi\alpha^2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi \text{Arccos}(\delta)}{\alpha}\right)\right)$$

$$\text{soit encore: } (\text{grad}_{\underline{y}}(\mathcal{O}_{\underline{m}}))|_{(\underline{m}, \underline{u}(\underline{y}))} = \frac{d\mathcal{O}}{d\delta} (\underline{m}, \underline{u}(\underline{y})) \cdot {}^T \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{u}(\underline{y})) \cdot \underline{m}$$

$\underline{u}(\underline{y})$  est un vecteur unitaire. On peut par conséquent\* écrire  ${}^T \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{u})$  sous la forme

$$({}^T \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{u}) \otimes \underline{u} - {}^T ({}^T \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{u}) \otimes \underline{u})). \underline{u} .$$

où  ${}^T$  désigne, comme au chapitre précédent, la transposition sur les deux derniers indices.

Introduisons cette écriture de  ${}^T \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{u})$  dans  $\varphi_{\underline{m}}$ :

$$\varphi_{\underline{m}} = \int_{\mathbb{R}^3} \underline{v}(\underline{y}) \mathcal{O}_{\underline{x}}(\underline{x}, \underline{y}) \frac{d\mathcal{O}}{d\delta} [({}^T \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{u}(\underline{y})) \otimes \underline{u}(\underline{y}) - {}^T ({}^T \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{u}(\underline{y})) \otimes \underline{u}(\underline{y}))). \underline{u}(\underline{y})] \cdot \underline{m} \, dv$$

Nous allons utiliser l'égalité ci-dessous:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial \underline{m}}\right)|_{(\underline{m}, \underline{u})} = \frac{d\mathcal{O}}{d\delta} \left(\frac{\partial \delta}{\partial \underline{m}}\right)|_{(\underline{m}, \underline{u})} = \frac{d\mathcal{O}}{d\delta} \mathcal{N}$$

dans laquelle le terme  $\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial \underline{m}}$  a le sens d'une application linéaire tangente à la variété des vecteurs unitaires au point  $\underline{m}$ . On peut également, et c'est ce que nous faisons, la considérer comme le gradient dans  $\mathbb{R}^3$ , au point  $\underline{m}$ , de l'application  $\mathcal{O}_{\underline{m}}(\cdot, \underline{u})$  en prolongeant celle-ci à  $\mathbb{R}^3$ .

---

\* Plus généralement,  ${}^T \text{grad}_{\underline{y}}(\mathcal{N})$  s'écrit  $({}^T \text{grad}_{\underline{y}}(\mathcal{N}) \otimes \mathcal{N} + B) \cdot \mathcal{N}$ , B étant un tenseur d'ordre 3 quelconque tel que  $B \cdot \mathcal{N}$  soit un tenseur identiquement nul. Par exemple,  $B = \alpha {}^T ({}^T \text{grad}_{\underline{y}}(\mathcal{N}) \otimes \mathcal{N})$  ( $\alpha$  réel quelconque). Nous choisissons  $\alpha = -1$ . Nous verrons que le tenseur antisymétrique ainsi introduit correspond à un tenseur de désorientation, concept important que nous définissons plus loin.

On obtient alors, en sortant  $m$  de l'intégrale:

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \left[ -\int_{\mathbb{R}^3} \underline{v}(\underline{y}) \underline{\underline{a}}(\underline{x}, \underline{y}) \left( ({}^T \text{grad}_{\underline{y}}(u(\underline{y})) \otimes u(\underline{y})) - {}^T ({}^T \text{grad}_{\underline{y}}(u(\underline{y})) \otimes u(\underline{y})) \right) \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial m} \right] dv \cdot m \\ &= \left( -\int_{\mathbb{R}^3} \underline{v}(\underline{y}) \underline{\underline{a}}(\underline{x}, \underline{y}) \left( ({}^T \text{grad}_{\underline{y}}(u(\underline{y})) \otimes u(\underline{y})) - {}^T ({}^T \text{grad}_{\underline{y}}(u(\underline{y})) \otimes u(\underline{y})) \right) \right] \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial m} dv \cdot m \end{aligned}$$

La partie entre crochets de l'intégrale ne dépend pas de  $m$ . On peut par conséquent sortir l'opérateur différentiel de l'intégrale (le gradient devenant une divergence) et écrire  $\varphi_m$  sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \text{div}_m \left( -\int_{\mathbb{R}^3} \underline{v}(\underline{y}) \cdot \underline{\underline{a}}(\underline{y}) \underline{\underline{a}}(\underline{x}, \underline{y}) \underline{\underline{a}}(m, u(\underline{y})) \right) dv \cdot m \\ &= -\text{div}_m \left( (\underline{v} \cdot \underline{\underline{a}})^{\sim} \right) \cdot m \end{aligned}$$

où on a introduit la notation

$$\underline{\underline{a}}(\underline{y}) = {}^T \text{grad}_{\underline{y}}(u(\underline{y})) \otimes u(\underline{y}) - {}^T ({}^T \text{grad}_{\underline{y}}(u(\underline{y})) \otimes u(\underline{y}))$$

Introduisons une notation indicielle et en utilisons l'antisymétrie de  $\underline{\underline{a}}$  :

équation IV. 3

$$\begin{aligned} \varphi_m &= -\frac{\partial (v_{ij} a_{jkl})^{\sim} m_k}{\partial m_1} = -\frac{\partial [(v_{ij} a_{jkl})^{\sim} m_k]}{\partial m_1} + (v_{ij} a_{jkl})^{\sim} \frac{\partial m_k}{\partial m_1} \\ &= \frac{\partial [(v_{ij} a_{jlk})^{\sim} m_k]}{\partial m_1} + (v_{ij} a_{jkk})^{\sim} \frac{\partial m_k}{\partial m_k} = \text{div}_m \left( (\underline{v} \underline{\underline{a}})^{\sim} \cdot m \right) \end{aligned}$$

La partie microstructurale de la globalisation de la divergence de  $\underline{v}$  est donc la divergence par rapport à la variable microstructurale de la globalisée du produit de  $\underline{v}$  par la partie antisymétrique de  ${}^T \text{grad}_{\underline{y}}(u) \otimes u$ , multipliée par  $m$ .

L'équation d'équilibre de la microstructure du milieu macro, obtenue par globalisation de l'équation d'équilibre des contraintes microstructurales du milieu initial, est donc la suivante, vérifiée en tout point  $(\underline{x}, m)$  de  $\mathcal{EXM}$  :

équation IV. 4

$$\begin{aligned} &\text{div}_{\underline{x}} \left( \underline{\underline{v}}(\underline{x}, m) \right) - \underline{\underline{\zeta}}(\underline{x}, m) + \underline{\underline{b}}(\underline{x}, m) \\ &+ \text{div}_m \left( \left[ \underline{v}(\underline{y}) ({}^T \text{grad}_{\underline{y}}(u) \otimes u - {}^T ({}^T \text{grad}_{\underline{y}}(u) \otimes u)) \right]^{\sim}(\underline{x}, m) \cdot m \right) = \underline{0} \end{aligned}$$

On peut constater, sur ce premier exemple, que l'on retrouve pour cette équation macro une forme très semblable à celle que nous avons obtenue par la méthode directe du chapitre III, en précisant par ce passage micro-macro le sens des tenseurs de microcontrainte  $(\underline{\underline{\Delta}} \approx \underline{\underline{v}}, \underline{\underline{B}} \approx \underline{\underline{\zeta}})$ ,

du vecteur des doubles forces extérieures volumiques ( $\underline{\tilde{b}} = \underline{\tilde{b}}$ ) et du second tenseur de contrainte microstructurale ( $\underline{\tilde{\Phi}} = [\underline{\underline{v}}(\underline{y})({}^T \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{a}) \otimes \underline{a} - {}^T \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{a}) \otimes \underline{a})] \underline{\underline{m}}$ ) qui apparaît comme le globalisé du produit du second tenseur de microcontrainte par un tenseur de désorientation.

Il est clair que dans le passage que nous venons de faire, les propriétés des fonctions d'observation jouent un rôle essentiel, particulièrement la propriété d'objectivité de la fonction d'observation en microstructure. Nous allons donc nous appuyer sur ces propriétés pour poursuivre les développements.

## IV.2 Fonctions d'observation

Nous allons essayer de donner un cadre plus général à l'opération de globalisation, sans donner de forme précise aussi bien à la microstructure considérée qu'aux fonctions d'observation. La seule propriété des fonctions d'observation -outre leurs caractéristiques de continuité et de dérivabilité- que nous pouvons utiliser réside dans leur caractère objectif. Tout changement de référentiel doit laisser les fonctions d'observation invariantes.

Nous allons regarder sur chacune des fonctions d'observation ce qu'entraîne cette condition d'objectivité, essentiellement en ce qui concerne la globalisation de l'opérateur de divergence, qui est le seul opérateur différentiel en espace indispensable à l'écriture des équations de bilan, et de l'opérateur de dérivation partielle par rapport au temps.

Nous nous intéressons tout d'abord à l'opérateur de divergence. Nous avons vu sur l'exemple précédent que la partie délicate de cette opération consiste à trouver l'opérateur reliant la dérivée partielle de la fonction d'observation par rapport à une variable à la dérivée partielle par rapport à l'autre variable, afin de pouvoir inverser l'ordre des opérateurs d'intégration sur  $\mathcal{E}$  et de dérivation (spatiale ou par rapport à la microstructure).

En effet, quel que soit le type de microstructure considéré, et pour un tenseur  $G$  quelconque, on peut écrire;

$$\begin{aligned} (\text{div}_{\underline{y}}(G))^{\sim} &= \int_{\mathcal{E}} \text{div}_{\underline{y}}(G) \underline{o}_{\underline{x}}(\underline{x}, \underline{y}) \underline{o}_{\underline{m}}(\underline{m}, \underline{a}(\underline{y})) dV = \\ & \int_{\mathcal{E}} \text{div}_{\underline{y}}(G \underline{o}_{\underline{x}} \underline{o}_{\underline{m}}) dV - \int_{\mathcal{E}} G \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{o}_{\underline{x}}) \underline{o}_{\underline{m}} dV - \int_{\mathcal{E}} G \underline{o}_{\underline{x}} \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{o}_{\underline{m}}) dV \end{aligned}$$

Le terme de flux  $\int_{\mathcal{E}} \text{div}_{\underline{y}}(G \underline{o}_x \underline{o}_m) dV$  est identiquement nul sur  $\mathcal{E} \times \mathcal{M}$ , ce qui conduit à :

$$\int_{\mathcal{E}} \text{div}_{\underline{y}}(G) \underline{o}_x(\underline{x}, \underline{y}) \underline{o}_m(m, \underline{u}(\underline{y})) dV = - \int_{\mathcal{E}} G \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{o}_x) \underline{o}_m dV - \int_{\mathcal{E}} G \underline{o}_x \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{o}_m) dV$$

et en introduisant la dérivée partielle de  $\underline{o}_m$  par rapport à la variable de microstructure  $\underline{u}(\underline{y})$  :

équation IV. 5

$$\int_{\mathcal{E}} \text{div}_{\underline{y}}(G) \underline{o}_x(\underline{x}, \underline{y}) \underline{o}_m(m, \underline{u}(\underline{y})) dV = \underbrace{- \int_{\mathcal{E}} G \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{o}_x) \underline{o}_m dV}_{\varphi_x} - \int_{\mathcal{E}} G \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial \underline{o}_m}{\partial \underline{u}} \right) \Big|_{m, \underline{u}(\underline{y})} \bullet \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{u}(\underline{y})) \right]}_{\varphi_m} \underline{o}_x dV$$

Le “•” utilisé dans l’expression de  $\varphi_m$  a le sens d’une composition entre une application linéaire de l’espace tangent à  $\mathcal{E}$  en  $\underline{y}$  ( $T\mathcal{E}_{\underline{y}} = \mathbb{R}^n$ ) dans l’espace tangent à  $\mathcal{M}$  en  $\underline{u}(\underline{y})$  ( $T\mathcal{M}_{\underline{u}(\underline{y})}$ ), d’une part, et d’autre part une forme linéaire sur  $T\mathcal{M}_{\underline{u}(\underline{y})}$ .

Le “.” est le produit simplement contracté d’une grandeur tensorielle d’ordre quelconque ( $G$ ) avec le tenseur d’ordre 1  $\text{grad}_{\underline{y}}(\underline{o})$ .

Nous traitons séparément les cas de  $\varphi_x$  (observation de l’espace euclidien) et de  $\varphi_m$  (observation de la microstructure).

### IV.2.1 Observation de l’espace euclidien

Si  $R$  est un élément quelconque de l’ensemble des rotations et des translations de  $\mathcal{E}$ , faisant correspondre à un point  $x$  quelconque de  $\mathcal{E}$  le point  $R(x)$ , la condition d’objectivité s’écrit :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2, \underline{o}_x(x, y) = \underline{o}_x(R(x), R(y))$$

On conviendra de prendre  $\underline{o}_x(\underline{x}, \underline{y})$  fonction de la distance euclidienne entre  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$ , c’est-à-dire

$$\forall (\underline{x}, \underline{y}) \in \mathcal{E}^2, \underline{o}_x(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{o}_x(\delta(\underline{x}, \underline{y})) = \underline{o}_x(\|\underline{x} - \underline{y}\|)$$

ce qui résout le problème de l’objectivité, les translations et les rotations étant des isométries de l’espace euclidien.

Notons la propriété d’antisymétrie de l’opérateur de dérivation spatiale qui découle de ce choix, que nous utilisons pour intervertir l’opérateur d’intégration et l’opérateur de dérivation. En effet,

$$\forall (\underline{x}, \underline{y}) \in \mathcal{E}^2, \frac{\partial \underline{o}_x(\underline{x}, \underline{y})}{\partial \underline{y}} = \frac{d \underline{o}_x(\|\underline{x} - \underline{y}\|)}{d\delta} \cdot \frac{\partial \|\underline{x} - \underline{y}\|}{\partial \underline{y}}$$

Or  $\frac{\partial \|\underline{x} - \underline{y}\|}{\partial \underline{x}} = -\frac{\partial \|\underline{x} - \underline{y}\|}{\partial \underline{y}}$  pour  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$  quelconques dans  $\mathcal{E}$  ce qui conduit à:

$$\forall (\underline{x}, \underline{y}) \in \mathcal{E}^2, \frac{\partial \mathcal{O}_{\underline{x}}(\underline{x}, \underline{y})}{\partial \underline{x}} = -\frac{\partial \mathcal{O}_{\underline{x}}(\underline{x}, \underline{y})}{\partial \underline{y}} \quad (\text{grad}_{\underline{x}} \mathcal{O}_{\underline{x}} = -\text{grad}_{\underline{y}} \mathcal{O}_{\underline{x}})$$

Cette propriété permet d'invertir l'intégrale et la divergence dans l'expression de  $\mathcal{I}_{\underline{x}}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\underline{x}} &= -\int_{\mathcal{E}} G \cdot \text{grad}_{\underline{y}}(\mathcal{O}_{\underline{x}}) \mathcal{O}_{\underline{m}} dV = \int_{\mathcal{E}} G \cdot \text{grad}_{\underline{x}}(\mathcal{O}_{\underline{x}}) \mathcal{O}_{\underline{m}} dV \\ \text{équation IV. 6} \quad &= \text{div}_{\underline{x}} \left( \int_{\mathcal{E}} G \mathcal{O}_{\underline{x}} \mathcal{O}_{\underline{m}} dV \right) \\ &= \text{div}_{\underline{x}}(G \sim) \end{aligned}$$

En effet,  $G$  et  $\mathcal{O}_{\underline{m}}$  sont des variables ne dépendant pas de  $\underline{x}$ , ce qui permet de sortir les dérivations par rapport à  $\underline{x}$  de l'intégrale. le gradient de  $\mathcal{O}_{\underline{m}}$  contracté avec  $G$  devenant la divergence du produit  $G \mathcal{O}_{\underline{m}}$ .

$\mathcal{I}_{\underline{x}}$  apparaît donc comme la divergence macroscopique de la globalisation de  $G$ .

## IV.2.2 Observation de la microstructure

Nous avons déjà convenu de ne considérer que des microstructures invariantes par translation, ce qui traite le problème de l'invariance de  $\mathcal{O}_{\underline{m}}$  par rapport aux translations. Il n'en va toutefois pas de même en ce qui concerne les rotations.

En effet, beaucoup des microstructures habituelles présentent une composante liée à la rotation de l'espace: cristaux liquides, milieux micromorphiques en général. Nous proposons de traiter ce problème d'objectivité en deux étapes, en séparant d'abord la microstructure en une partie objective et une partie représentative de l'orientation de cette microstructure, puis en séparant la fonction d'observation elle-même sur ces deux composantes de la microstructure.

### IV.2.2.1 Décomposition de la microstructure

Cette première étape consiste à séparer la microstructure en deux parties, que nous appellerons "forme" et "orientation". La forme est la partie objective de la microstructure, ne dépendant pas du référentiel d'espace, au contraire évidemment de l'orientation de la microstructure.

Cette décomposition peut se faire dans le cas général de manière canonique, par le biais des rotations de l'espace euclidien. En effet, l'ensemble des rotations de l'espace forme un groupe de Lie, dont l'action sur la variété différentielle de microstructure permet de partitionner celle-

ci en orbites.

Soit donc  $R$  un élément de  $\mathcal{R}_E$  (groupe des rotations de l'espace euclidien) et  $m$  un élément de  $\mathcal{M}$ . Une transformation du référentiel d'espace, représentée par la rotation  $R^*$ , transporte  $m$  en  $m'$ , que l'on note  $R.m$ . On fait l'hypothèse nécessaire que le groupe des rotations est un groupe de transformations *global* sur la microstructure, c'est à dire que pour toute rotation  $R$  et toute valeur de microstructure  $m$ ,  $R.m$  est défini, l'existence d'une microstructure étant indépendante de l'orientation de l'espace.

Rappelons également la définition d'une orbite.

Une orbite du groupe de transformation est un sous-ensemble de  $\mathcal{M}$  minimal (au sens de l'inclusion ensembliste) invariant par l'action du groupe  $\mathcal{R}_E$ .

Autrement dit, une orbite est un sous-ensemble  $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$  tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \forall m \in \mathcal{O}, \forall R \in \mathcal{R}_E, R.m \in \mathcal{O} \\ (b) \forall \mathcal{O}' \subset \mathcal{O} \text{ tel que (a), alors } \mathcal{O}' = \mathcal{O} \text{ ou } \mathcal{O}' = \emptyset \end{array} \right.$$

Notons que les orbites sont des sous-variétés différentielles de  $\mathcal{M}$ . Si les orbites ont toutes la même dimension, l'action de  $\mathcal{R}_E$  est dite *semi-régulière*. Si de plus il existe autour de chaque point de  $\mathcal{M}$  un voisinage  $U$  tel que son intersection avec une orbite quelconque forme un sous-ensemble connecté, alors le groupe agit *régulièrement*.

S'il n'y a qu'une seule orbite, l'action du groupe est dite *transitive*.

La relation "appartient à la même orbite que" est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}$ . On note  $\pi$  la projection de  $\mathcal{M}$  sur l'ensemble quotient  $\mathcal{M}/\mathcal{R}_E$ , que nous convenons de noter  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ . La projection d'un point quelconque de  $\mathcal{M}$  sur cet espace quotient est de manière évidente une grandeur objective.

Si nous choisissons de manière arbitraire un représentant dans chaque classe d'équivalence, chaque élément  $m$  de  $\mathcal{M}$ , appartenant à une orbite  $\mathcal{O}$ , est défini par la donnée de sa projection  $\pi(m) = m_{\mathcal{R}}$  sur  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$  et par la donnée d'une rotation  $R(m)$  telle que  $m = R(m).m_{\mathcal{R}}$ . Chaque application  $R_{\mathcal{O}}$ , restriction de  $R$  à une orbite  $\mathcal{O}$ , est choisie de classe  $C^1$  sur  $\mathcal{O}$ .

---

\* Rappelons que la rotation  $R$  est la rotation qui transporte le second observateur sur le premier, de telle sorte que  $m' = R.m$ , et non pas  ${}^T R.m$ .

#### IV.2.2.2 Décomposition de la fonction d'observation

Muni de cette décomposition de la microstructure, nous convenons dans la suite d'écrire la fonction d'observation de la microstructure sous la forme du produit de deux fonctions,  $\mathcal{O}_{mf}$  et  $\mathcal{O}_{mr}$ .

$$\forall (m, u) \in \mathcal{M}^2, \mathcal{O}_m(m, u) = \mathcal{O}_{mf}(\pi(m), \pi(u)), \mathcal{O}_{mr}(R(u), R(u))$$

Remarquons que cette décomposition ne présente aucun caractère canonique, mais nécessite des choix de modélisation au niveau d'une part des représentants des classes d'équivalences, et d'autre part de la rotation reliant chaque point de la variété différentielle à sa projection sur l'espace quotient.

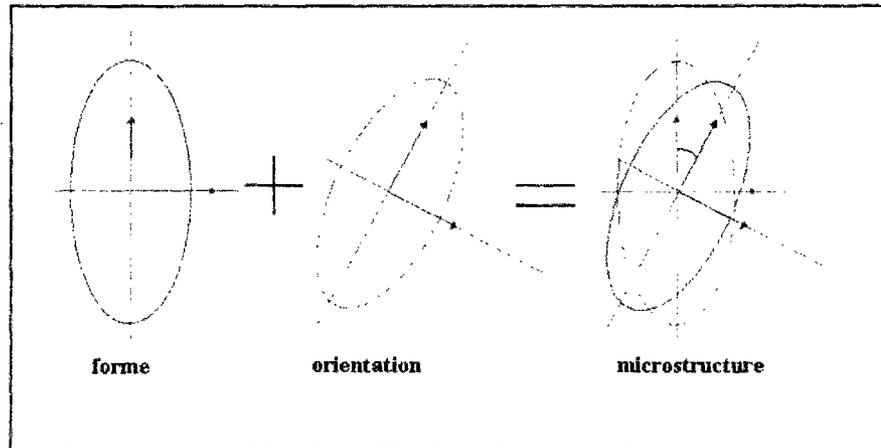
Le cas particulier d'une microstructure purement d'orientation, c'est-à-dire sur laquelle l'action du groupe des rotations est transitive, se traduit par l'existence d'une seule orbite. La fonction d'observation se simplifie.  $\mathcal{O}_{mf}$  est une fonction constante de valeur 1, et la fonction d'observation ne dépend plus que des rotations amenant chacun des points de la microstructure sur le représentant choisi.

S'il existe une part objective dans la microstructure, deux cas peuvent se présenter.

Si l'action du groupe des rotations est régulière, l'espace quotient est une variété différentielle (de dimension  $n-s$ , si  $n$  est la dimension de  $\mathcal{M}$  et  $s$  la dimension des orbites) et la projection  $\pi$  est une application  $C^\infty$  de  $\mathcal{M}$  sur  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ . On peut donc définir une distance  $d_{\mathcal{R}}$  sur cette variété et définir la fonction  $\mathcal{O}_{mf}$  comme une fonction de cette distance.

Si l'action du groupe des rotations est régulière "presque partout", on ne peut pas décomposer de manière identique  $\mathcal{O}_m$  sur tous les couples  $(m, u)$ . Si  $m$  et  $u$  appartiennent à des orbites régulières, on décompose  $\mathcal{O}_m$  comme précédemment, sinon on doit pouvoir prolonger par continuité la fonction  $\mathcal{O}_{mr}$ , la fonction  $\mathcal{O}_{mf}$  étant de toute manière à définir. Un exemple de microstructure sur laquelle l'action du groupe des rotations n'est pas régulière est celui des microstructures de type milieux micromorphiques (ellipsoïdes); à chaque particule du milieu est associé un tenseur d'ordre 2 symétrique positif, dont les trois directions principales définissent l'orientation de  $\mathcal{M}$  et les valeurs propres sur ces directions la forme de l'ellipsoïde.

Le dessin ci-dessous donne une idée de ce type de microstructure en deux dimensions. Il est clair que la variété de microstructure (dans le cas bidimensionnel) est une sous-variété de dimension 3 de  $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \times [0, \pi[$ , la dimension d'une orbite « normale » étant 1 (un seul paramètre), sauf dans le cas des cercles, pour lesquels la dimension de l'orbite est 0, un changement d'orientation des axes d'un cercle ne le modifiant pas.



Nous ne nous intéresserons, dans la suite du texte, qu'à des microstructures transitives.

### IV.3 Les microstructures d'orientation

Les deux exemples que nous allons donner sont des exemples pour lesquels l'action du groupe des rotations sur la variété de microstructure est transitive, c'est à dire des microstructures qui sont telles que chaque point est "accessible" par une rotation de n'importe quel autre point de la microstructure. C'est le cas de la majorité des microstructures de type orientation, telles que les cristaux liquides, les milieux à spin ou les milieux de Cosserat, qui peuvent servir de base, par exemple, à la description des polycristaux métalliques.

#### IV.3.1 Les milieux de Cosserat

Une représentation de type tenseurs du second ordre orthogonaux conduit assez naturellement à prendre pour  $\mathcal{O}_\mu$  une fonction composée de la distance dans  $L_{\text{orth}}(\delta(\underline{q}, \underline{q}'))$  et d'une fonction cloche d'une variable réelle  $\delta$ ,  $\mathcal{O}$ ,  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et nulle pour  $\delta \geq \alpha$  ( $\alpha$  donne la taille du domaine d'observation). On peut prendre pour  $\delta(\underline{q}, \underline{q}')$  une fonction de l'angle intrinsèque  $\varphi$  du produit d'un des tenseurs par le transposé de l'autre [Brocato, 1994] dont Dluzewski [Dluzewski 1991] donne une expression explicite objective.

La forme la plus naturelle nous semble être  $\delta(\underline{q}, \underline{q}') = \frac{1}{4}(3 - \text{Tr} \underline{q} \underline{q}') = \frac{1}{2}(1 - \cos \varphi)$ , et on peut noter que cette expression est définie pour tous les tenseurs d'ordre 2, ce qui permet de définir un prolongement naturel des champs macro obtenus par globalisation à l'ensemble des tenseurs d'ordre 2, et donc d'utiliser sur ces champs les opérateurs définis sur les tenseurs d'ordre deux.

L'action d'une rotation  $\underline{Q}$  sur un trièdre transforme le tenseur orthogonal  $\underline{o}$  (élément de  $\mathcal{M}$  sous-variété de  $SO_3$ ) en un tenseur orthogonal  $\underline{o}_{(q)} = \underline{Q} \cdot \underline{o}$ . La différentielle de  $\underline{o}_{(q)}$  est donc  $d\underline{o}_{(q)} = d\underline{Q} \cdot \underline{o} = (-\underline{e} \cdot d\underline{q}) \cdot \underline{Q} \cdot \underline{o}$ , soit en  $\underline{q} = 0$ :  $d\underline{o}_{(q=0)} = -\underline{e} \cdot d\underline{q} \cdot \underline{o} = -d\underline{q} \cdot \underline{e} \cdot \underline{o}$ .

La fonction d'observation étant objective par définition, on a la propriété;

$$\forall \underline{q} \in \mathbb{R}^3, \forall (\underline{o}, \underline{o}') \in SO(3)^2, \theta_m(\underline{o}_{(q)}, \underline{o}'_{(q)}) = \theta_m(\underline{o}, \underline{o}')$$

qui se traduit sous forme différentielle par;

$$\forall (\underline{o}, \underline{o}') \in SO(3)^2, \frac{d\theta_m}{d\underline{q}}(\underline{o}_{(q)}, \underline{o}'_{(q)}) = 0$$

En  $\underline{q} = 0$ , et en développant la différentielle de  $\theta_m$ :

$$\forall (\underline{o}, \underline{o}') \in SO(3)^2, \forall d\underline{q} \in \mathbb{R}^3, d\theta_m(d\underline{q}) = d\underline{o}(d\underline{q}) : \frac{\partial \theta_m}{\partial \underline{o}} + d\underline{o}'(d\underline{q}) : \frac{\partial \theta_m}{\partial \underline{o}'} = 0$$

ce qui donne, compte tenu de l'expression de  $d\underline{o}(d\underline{q})$

$$\forall (\underline{o}, \underline{o}') \in SO(3)^2 \quad -(\underline{e} \cdot \underline{o}) : \frac{\partial \theta_m}{\partial \underline{o}} - (\underline{e} \cdot \underline{o}') : \frac{\partial \theta_m}{\partial \underline{o}'} = 0$$

soit encore:

Equation IV. 7  $\forall (\underline{o}, \underline{o}') \in SO(3)^2 \quad \underline{e} : \left( \underline{o} \cdot \frac{\partial \theta_m}{\partial \underline{o}} + \underline{o}' \cdot \frac{\partial \theta_m}{\partial \underline{o}'} \right) = 0$

que l'on vérifie pour la fonction  $\delta(\underline{o}, \underline{o}') = \frac{1}{4}(3 - \underline{o} : \underline{o}')$ ;

$$\left. \begin{aligned} \forall (\underline{o}, \underline{o}') \in \mathcal{M}^2, \quad \left( \frac{\partial \delta}{\partial \underline{o}} \right)_{(\underline{o}, \underline{o}')} &= -\frac{\underline{o}'}{4} \\ \left( \frac{\partial \delta}{\partial \underline{o}'} \right)_{(\underline{o}, \underline{o}')} &= -\frac{\underline{o}}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{e} : \left[ \underline{o} \cdot \frac{\partial \theta_m}{\partial \underline{o}} + \underline{o}' \cdot \frac{\partial \theta_m}{\partial \underline{o}'} \right] =$$

$$\frac{d\theta_m}{d\delta} \underline{e} : \left[ \underline{o} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \underline{o}} + \underline{o}' \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \underline{o}'} \right] =$$

$$-\frac{d\theta_m}{d\delta} \underline{e} : \left[ \frac{\underline{o} \cdot \underline{o}' + \underline{o}' \cdot \underline{o}}{4} \right] = 0$$

Reprenons le développement de l'intégrale  $\eta_m$  introduite au paragraphe précédent, dans ce cas particulier des milieux de Cosserat.

$$\eta_m = - \int_{\mathcal{E}} G \frac{\partial \theta_m}{\partial \underline{y}} \cdot \underline{o}_{\underline{x}} dV = - \int_{\mathcal{E}} G_{\alpha, \dots, k} \frac{\partial \theta_m}{\partial y_k} \cdot \underline{o}_{\underline{x}} dV = - \int_{\mathcal{E}} G_{\alpha, \dots, k} \cdot \underline{o}_{\underline{x}} \frac{\partial \underline{o}'}{\partial y_k} : \frac{\partial \theta_m}{\partial \underline{o}'} dV$$

La dérivée partielle de  $\underline{\underline{o}}'$  par rapport à  $y_k$  est un élément de l'espace tangent à  $SO(3)$  en  $\underline{\underline{o}}'$ , et peut donc s'écrire sous la forme  $\frac{\partial \underline{\underline{o}}'}{\partial y_k} = -\underline{q}_k \cdot \underline{\underline{e}}_{\underline{\underline{o}}'}$ . Nous introduisons ainsi le **vecteur de désorientation** de la microstructure dans la direction  $k$ , qui sera à la base de l'ensemble des développements ultérieurs de la méthode:

$$\underline{q}_k = \frac{1}{2} \underline{\underline{e}}_{\underline{\underline{o}}'} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{o}}'}{\partial y_k} \cdot \tau_{\underline{\underline{o}}'}$$

On introduit dans  $\mathcal{I}_m$  l'expression de  $\frac{\partial \underline{\underline{o}}'}{\partial y_k}$  en fonction de  $\underline{q}_k$  et on utilise l'équation IV. 1;

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_m &= \int_{\mathcal{E}} G_{\alpha, \dots, k} \underline{o}_{\underline{x}}(\underline{q}_k \cdot \underline{\underline{e}}_{\underline{\underline{o}}'}) : \frac{\partial \underline{\underline{o}}_m}{\partial \underline{\underline{o}}'} dV = \int_{\mathcal{E}} G_{\alpha, \dots, k} \underline{o}_{\underline{x}} \underline{q}_k \cdot \underline{\underline{e}}_{\underline{\underline{o}}'}(\underline{\underline{o}}') \cdot \frac{\partial \underline{\underline{o}}_m}{\partial \underline{\underline{o}}'} dV \\ \text{Equation IV. 8} \quad &= - \int_{\mathcal{E}} G_{\alpha, \dots, k} \underline{o}_{\underline{x}} \underline{q}_k \cdot \underline{\underline{e}}_{\underline{\underline{o}}'}(\underline{\underline{o}}') \cdot \frac{\partial \underline{\underline{o}}_m}{\partial \underline{\underline{o}}'} dV \end{aligned}$$

En notation indicielle, l'équation IV. 2 devient

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_m &= - \int_{\mathcal{E}} G_{\alpha, \dots, k} \underline{o}_{\underline{x}} \underline{q}_{ki} \underline{e}_{ijl} o_{lm} \frac{\partial o_m}{\partial o_{jm}} dV \\ &= - \int_{\mathcal{E}} \frac{\partial [G_{\alpha, \dots, k} \underline{q}_{ki} \underline{e}_{ijl} o_{lm} \underline{o}_{\underline{x}}]}{\partial o_{jm}} dV + \int_{\mathcal{E}} [G_{\alpha, \dots, k} \underline{q}_{ki} \underline{e}_{ijl} \underline{o}_{\underline{x}}] \frac{\partial o_{lm}}{\partial o_{jm}} dV \\ &= - \frac{\partial [(\int_{\mathcal{E}} G_{\alpha, \dots, k} \underline{q}_{ki} \underline{e}_{ijl} \underline{o}_{\underline{x}} dV) o_{lm}]}{\partial o_{jm}} + \int_{\mathcal{E}} [G_{\alpha, \dots, k} \underline{q}_{ki} \underline{e}_{ijl} \underline{o}_{\underline{x}}] \delta_{jl} dV \\ &= \text{div}_{\underline{\underline{o}}'} [(G_{\alpha, \dots, k} \cdot (-\underline{q}_k \cdot \underline{\underline{e}})) \cdot \underline{\underline{o}}] \end{aligned}$$

Nous pouvons définir le tenseur de désorientation d'ordre 3  $\underline{\underline{A}}$ ;  $A_{ijk} = -q_{il} \underline{e}_{ijk}$ , qui est un tenseur antisymétrique sur les deux derniers indices.

Utilisons  $\underline{\underline{A}}$  dans l'expression précédente de  $\mathcal{I}_m$ :

$$\mathcal{I}_m = \text{div}_{\underline{\underline{o}}'} [(G \cdot \underline{\underline{A}}) \cdot \underline{\underline{o}}]$$

La globalisée de la divergence d'une grandeur tensorielle  $G$  est donc la somme d'une part de la divergence en espace de la globalisée de  $G$ , et d'autre part de la divergence par rapport à la microstructure de la globalisée du produit de  $G$  par le tenseur de désorientation d'ordre 3  $\underline{\underline{A}}$ , cette grandeur globalisée étant elle-même rapportée au point de la microstructure considéré ( $\underline{\underline{o}}$ ).

$$(\text{div}_{\underline{y}} G)_{|(\underline{x}, \underline{\underline{o}})} \sim = \text{div}_{\underline{x}} (G)_{|(\underline{x}, \underline{\underline{o}})} \sim + \text{div}_{\underline{\underline{o}}'} [(G \cdot \underline{\underline{A}})_{|(\underline{x}, \underline{\underline{o}})} \cdot \underline{\underline{o}}]$$

### IV.3.2 Les milieux de type cristaux liquides

Le cas des cristaux liquides, où la microstructure peut être décrite par la sous-variété des tenseurs du type  $\underline{\underline{U}} = \underline{u} \otimes \underline{u}$  où  $\underline{u}$  est un vecteur unitaire, se déduit aisément des milieux à spin que nous avons vu plus haut, en considérant l'angle des vecteurs représentatifs modulo  $\pi/2$  (et non plus modulo  $\pi$ ), puisque l'orientation seule compte, et non la direction du vecteur.

On peut alors choisir, par exemple, la fonction  $\delta$  sous la forme  $\delta(\underline{\underline{U}}, \underline{\underline{V}}) = 1 - \underline{\underline{U}} : \underline{\underline{V}} = 1 - (\underline{u} \cdot \underline{v})^2$ .

$\mathcal{M}$  est l'ensemble des tenseurs uniaxiaux du deuxième ordre, considéré comme sous-variété de l'espace des tenseurs du second ordre, et l'expression de  $\delta$ , définie pour des tenseurs du second ordre quelconques, permet de prolonger les champs à l'espace tout entier.

Une rotation  $\underline{\underline{Q}}$  transforme un tenseur uniaxial, du type  $\underline{\underline{U}} = \underline{u} \otimes \underline{u}$ , en un tenseur uniaxial

$$\underline{\underline{U}}_{(q)} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{u} \otimes \underline{Q} \cdot \underline{u}.$$

La différentielle de  $\underline{\underline{U}}_{(q)}$  s'écrit donc simplement:

$$d\underline{\underline{U}}_{(q)} = d\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{u} \otimes \underline{Q} \cdot \underline{u} + \underline{Q} \cdot \underline{u} \otimes d\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{u} = -(\underline{\underline{e}} \cdot d\underline{q}) \cdot \underline{Q} \cdot \underline{u} \otimes \underline{Q} \cdot \underline{u} - \underline{Q} \cdot \underline{u} \otimes (\underline{\underline{e}} \cdot d\underline{q}) \cdot \underline{Q} \cdot \underline{u}$$

En  $q=0$ , c'est-à-dire  $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}}$ , cette expression se simplifie en:

$$d\underline{\underline{U}}_{(q=0)} = -\underline{\underline{e}} \cdot d\underline{q} \cdot \underline{u} \otimes \underline{u} - \underline{u} \otimes \underline{\underline{e}} \cdot d\underline{q} \cdot \underline{u}$$

soit, en utilisant les identités  $(\underline{\underline{e}} \cdot d\underline{q}) \cdot \underline{u} = \underline{u} \wedge d\underline{q} = -d\underline{q} \wedge \underline{u} = -\underline{u}(\underline{\underline{e}} \cdot d\underline{q})$ ,

$$d\underline{\underline{U}}_{(q=0)} = -d\underline{q} \cdot (\underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{U}}) + (\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{e}}) \cdot d\underline{q}$$

Et en utilisant la symétrie de  $\underline{\underline{U}}$ :

$$d\underline{\underline{U}}_{(q=0)} = -d\underline{q} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{U}} + {}^T(-d\underline{q} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{U}})$$

La fonction d'observation est objective. On a par conséquent, pour  $\underline{\underline{U}}$  et  $\underline{\underline{U}}'$  quelconques dans

$$\mathcal{M}, \quad d\underline{\underline{U}}_{(q=0)} : {}^T \left( \frac{\partial \theta}{\partial \underline{\underline{U}}} \right)_{(\underline{u}, \underline{v})} + d\underline{\underline{U}}'_{(q=0)} : {}^T \left( \frac{\partial \theta}{\partial \underline{\underline{U}}'} \right)_{(\underline{u}, \underline{v})} = 0$$

C'est-à-dire

$$\forall (\underline{\underline{U}}, \underline{\underline{U}}') \in \mathcal{M}^2, \forall d\underline{q} \in \mathbb{R},$$

$$-d\underline{q} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{U}} : {}^T \left( \frac{\partial \theta}{\partial \underline{\underline{U}}} \right) - d\underline{q} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{U}}' : {}^T \left( \frac{\partial \theta}{\partial \underline{\underline{U}}'} \right) + {}^T(-d\underline{q} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{U}}) : {}^T \left( \frac{\partial \theta}{\partial \underline{\underline{U}}} \right) + {}^T(-d\underline{q} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{U}}') : {}^T \left( \frac{\partial \theta}{\partial \underline{\underline{U}}'} \right) = 0$$

et donc, en choisissant  $\theta_m$  de telle manière que  $(\frac{\partial \theta_m}{\partial \underline{U}})$  et  $(\frac{\partial \theta_m}{\partial \underline{U}'})$  soit symétrique\* et comme

$\underline{a} \cdot \underline{b} = {}^T \underline{a} : {}^T \underline{b}$  pour deux tenseurs du second ordre  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$  quelconques:

$$\forall (\underline{U}, \underline{U}') \in \mathcal{M}^2, \forall d\underline{q} \in \mathbb{R}, -2 d\underline{q} \cdot \underline{e} : (\underline{U} \cdot {}^T (\frac{\partial \theta_m}{\partial \underline{U}}) + \underline{U}' \cdot {}^T (\frac{\partial \theta_m}{\partial \underline{U}'})) = 0$$

On obtient:

Equation IV. 9  $\forall (\underline{U}, \underline{U}') \in \mathcal{M}^2, \underline{e} : (\underline{U} \cdot {}^T (\frac{\partial \theta_m}{\partial \underline{U}}) + \underline{U}' \cdot {}^T (\frac{\partial \theta_m}{\partial \underline{U}'})) = 0$

Nous allons transformer  $\theta_m$  en introduisant les gradients par rapport à la variable d'espace  $\underline{y}$ .  
Considérons la dérivée partielle par rapport à la composante  $k$  de  $\underline{y}$  de la fonction d'observation en microstructure  $\frac{\partial \theta_m}{\partial y_k}$ . On la décompose en introduisant la variable de microstructure  $\underline{U}'(\underline{y})$ ;

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial y_k} = \frac{\partial \underline{U}' \cdot {}^T}{\partial y_k} : \frac{\partial \theta_m}{\partial \underline{U}'}$$

On peut là encore introduire  $\underline{q}_k = \underline{u}' \wedge \frac{\partial \underline{u}'}{\partial y_k}$  le **vecteur de désorientation** dans la direction  $k$

tel que  $\frac{\partial \underline{U}'}{\partial y_k} = -\underline{q}_k \cdot \underline{e} : \underline{U}' + \underline{U}' \cdot \underline{e} \cdot \underline{q}_k = 2 \text{sym}(-\underline{q}_k \cdot \underline{e} : \underline{U}')$ , ce qui permet d'écrire, compte tenu de

la symétrie de  $\frac{\partial \theta_m}{\partial \underline{U}'}$ :

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial y_k} = 2 \text{sym}(-\underline{q}_k \cdot \underline{e} : \underline{U}') : \frac{\partial \theta_m}{\partial \underline{U}'} = -2 (\underline{q}_k \cdot \underline{e} : \underline{U}') : \frac{\partial \theta_m}{\partial \underline{U}'}$$

et on obtient immédiatement, en utilisant l'équation IV. 3:

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial y_k} = -2 \underline{q}_k \cdot \underline{e} : (\underline{U}' \cdot {}^T (\frac{\partial \theta_m}{\partial \underline{U}'})) = 2 \underline{q}_k \cdot \underline{e} : (\underline{U} \cdot {}^T (\frac{\partial \theta_m}{\partial \underline{U}}))$$

\* On peut par exemple considérer la fonction  $\theta_m(\underline{U}, \underline{U}') = \theta_m(1/2(\underline{U} + {}^T \underline{U}), 1/2(\underline{U}' + {}^T \underline{U}'))$ , qui possède cette propriété de symétrie, et qui coïncide avec  $\theta_m$  sur  $\mathcal{M}$ .

Reprenons le calcul de  $\varphi_m$ .

$$\begin{aligned} \varphi_m &= - \int_{\mathcal{E}} G \frac{\partial \sigma_m}{\partial \underline{y}} \sigma_x dV = - \int_{\mathcal{E}} G_{\alpha, \dots, k} \frac{\partial \sigma_m}{\partial y_k} \sigma_x dV \\ &= 2 \int_{\mathcal{E}} G_{\alpha, \dots, k} \underline{q}_k \cdot \underline{\underline{e}} : (\underline{U} \cdot \underline{\underline{T}} \left( \frac{\partial \sigma_m}{\partial \underline{U}} \right)) \sigma_x dV \\ &= -2 \int_{\mathcal{E}} G_{\alpha, \dots, k} \underline{q}_k \cdot \underline{\underline{e}} : (\underline{U} \cdot \underline{\underline{T}} \left( \frac{\partial \sigma_m}{\partial \underline{U}} \right)) \sigma_x dV \end{aligned}$$

Comme dans l'exemple précédent, le passage en notation indicielle permet de transformer  $\varphi_m$ .

$$\begin{aligned} \varphi_m &= -2 \int_{\mathcal{E}} G_{\alpha, \dots, k} \sigma_x q_{ki} e_{ijl} U_{lm} \frac{\partial \sigma_m}{\partial U_{jm}} dV \\ &= -2 \frac{\partial [(\int_{\mathcal{E}} G_{\alpha, \dots, k} q_{ki} e_{ijl} \sigma_x \sigma_m dV) U_{lm}]}{\partial U_{jm}} + 2 \int_{\mathcal{E}} [G_{\alpha, \dots, k} q_{ki} e_{ijl} \sigma_x \sigma_m] \delta_{jl} dV \\ &= 2 \operatorname{div}_{\underline{\underline{o}}} [(G_{\alpha, \dots, k} \cdot (-\underline{q}_k \cdot \underline{\underline{e}})) \sim \underline{U}] \end{aligned}$$

Nous pouvons là encore introduire le tenseur de désorientation d'ordre 3  $\underline{\underline{\underline{A}}}$  ( $A_{ijk} = -q_{il} e_{ijk}$ ),

qui est un tenseur antisymétrique sur les deux derniers indices.

Utilisons  $\underline{\underline{\underline{A}}}$  dans l'expression précédente de  $\varphi_m$  :

$$\boxed{\varphi_m = \operatorname{div}_{\underline{\underline{o}}} [(G \cdot \underline{\underline{\underline{A}}}) \sim \underline{U}]}$$

Comme pour les milieux de Cosserat, la globalisée de la divergence d'une grandeur tensorielle  $G$  est donc la somme d'une part de la divergence en espace de la globalisée de  $G$ , et d'autre part de la divergence par rapport à la microstructure de la globalisée du produit de  $G$  par le tenseur de désorientation d'ordre 3  $\underline{\underline{\underline{A}}}$ , cette grandeur globalisée étant elle-même rapportée à deux fois le point de la microstructure considéré ( $\underline{U}$ ).

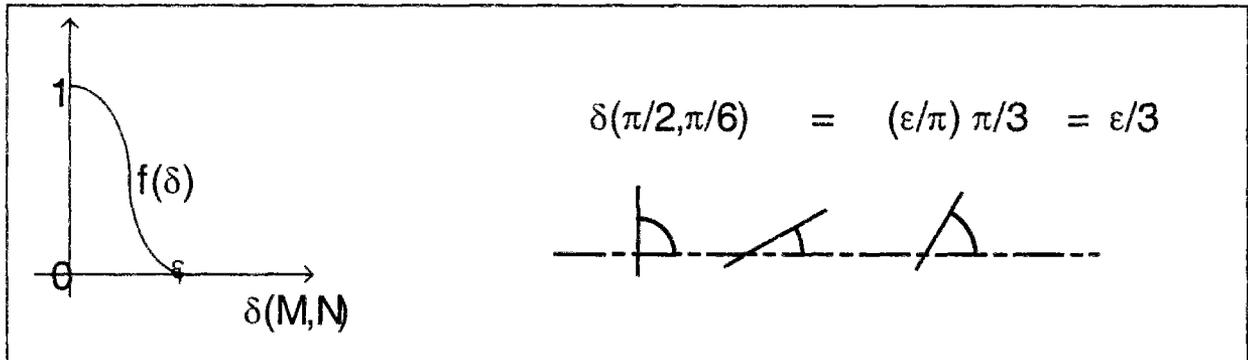
$$\boxed{(\operatorname{div}_{\underline{y}} G) \sim_{(\underline{x}, \underline{U})} = \operatorname{div}_{\underline{x}} (G \sim_{(\underline{x}, \underline{U})}) + \operatorname{div}_{\underline{\underline{o}}} [(G \cdot \underline{\underline{\underline{A}}}) \sim_{(\underline{x}, \underline{U})}] \cdot 2 \underline{U}]}$$

Le facteur 2 introduit dans l'expression ci-dessus trouve son explication dans le lien que nous allons mettre en évidence entre l'opérateur de divergence que nous avons utilisé, et le générateur infinitésimal de l'action du groupe des rotations sur la microstructure. En particulier, si celui-ci, dans le cas des tenseurs orthogonaux, vaut  $-\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{e}}, \underline{r})$  au point  $\underline{r}$ , il a pour valeur  $\underline{\underline{T}}_{\{ik \rightarrow jk\}}(\underline{\underline{U}}, \underline{\underline{e}}) + \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{e}}$  au point  $\underline{U}$  dans le cas des tenseurs uniaxiaux.

### IV.3.3 Cas général des microstructures transitives

Le cas général des milieux à microstructure tels que l'action du groupe des rotations est transitive pourrait se traiter de manière équivalente aux cas particuliers présentés ci-dessus, en remarquant qu'écrire la transitivité de l'action du groupe revient à plonger la variété de microstructure dans  $SO(3)$ . On pourrait donc choisir de décrire la microstructure par une sous-variété différentielle de  $SO(3)$ , tout au moins en ce qui concerne l'observation de cette microstructure lors du passage micro-macro. Le traitement des cas particuliers doit de toute façon se faire en choisissant une forme utilisable de la microstructure.

La transitivité de l'action des rotations se traduit par l'absence de partie objective de la microstructure; la seule grandeur à prendre en compte est l'orientation locale. Nous proposons de prendre comme fonction d'observation de la microstructure une fonction composée d'une fonction d'une variable réelle (de type fonction cloche centrée à l'origine) et d'une fonction de  $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$  dans  $\mathbb{R}$  qui soit une mesure de la désorientation de deux points de la microstructure, du type:  $o_m(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = o_{mn}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = f(\delta(\mathcal{M}, \mathcal{N}))$  où  $f$  est une fonction cloche normée et  $\delta$  une "distance" angulaire;



L'existence d'une fonction  $\delta$  ne fait aucun doute,  $\mathcal{M}$  étant doté d'une structure de variété différentielle de dimension  $n$  pouvant être muni d'une structure d'espace métrique (par plongement dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$ ), et donc d'une distance, qui peut très bien convenir comme fonction  $\delta$ .

La transitivité permet d'affirmer qu'il existe un champ vectoriel continu  $\underline{q}_k$  tel que le gradient de la microstructure au voisinage du point  $\underline{y}$  et dans la direction  $\underline{e}_k$  peut s'écrire sous la forme:

Equation IV. 10 
$$\frac{\partial u}{\partial y_k} = \mathcal{G}_u \cdot \underline{q}_k$$

Le champ de vecteur ainsi défini est le champ de **vecteur de désorientation dans la direction  $k$** .

$\mathcal{G}_u$  est le générateur infinitésimal de l'action du groupe des rotations sur la variété de microstructure au point  $u$  [Capriz,1989] :

$$\mathcal{G}_u = \left( \frac{\partial u_R}{\partial R} \right)_{(R=0)}$$

$u_R$  est l'application du groupe des rotations  $\mathcal{R}$  dans  $\mathcal{M}$ , qui fait correspondre à une rotation  $R$  l'élément  $u_R = R u$  de  $\mathcal{M}$ . Le générateur infinitésimal est l'application linéaire tangente de  $u_R$  au groupe des rotations à l'origine  $0$ . Il s'applique donc sur des éléments de l'espace tangent à  $\mathcal{R}$  en  $0$ .

$\underline{q}_k$  est le taux de rotation infinitésimal (en espace) dans la direction  $\underline{e}_k$ .  $\underline{q}_k dy_k$  est la rotation infinitésimale qui transforme la microstructure en  $\underline{y}$  en la microstructure en  $\underline{y} + dy_k \underline{e}_k$ . L'existence de  $\underline{q}_k$  est assurée par la transitivité de l'action du groupe des rotations. Il existe toujours au moins une rotation qui transforme  $u$  au point  $\underline{y}$  en  $u+du$  au point  $\underline{y} + dy_k \underline{e}_k$  (le + dans l'expression  $u+du$  est à prendre au sens de l'opération de groupe dans  $\mathcal{R}$ ).

L'objectivité de la fonction d'observation se traduit par une invariance de  $\mathcal{O}_m$  (application de la variété différentielle  $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$  dans  $\mathbb{R}$ ) sous l'action du groupe des rotations de l'espace. Cette invariance s'écrit sous forme différentielle, avec les notations déjà introduites [Capriz, 1989]:

Equation IV. 11

$$\left( \frac{\partial \mathcal{O}_m}{\partial m} \right)_{|m} \mathcal{G}_m + \left( \frac{\partial \mathcal{O}_m}{\partial u} \right)_{|u} \mathcal{G}_u = 0$$

Prenons comme représentation du groupe des rotations de  $\mathbb{R}^3$  la boule de centre  $0$  et de rayon  $\pi$   $\mathcal{R} = B_\pi(\mathbb{R}^3)$ .  $\underline{q}_k$  est un élément de l'espace tangent en  $u$  à  $B_\pi(\mathbb{R}^3)$ , c'est-à-dire  $\mathbb{R}^3$ .  $\frac{\partial \mathcal{O}_m}{\partial u} \mathcal{G}_u$  peut également être considéré comme un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ :  $\frac{\partial \mathcal{O}_m}{\partial u} \mathcal{G}_u = \left( \frac{\partial \mathcal{O}_m}{\partial u} \mathcal{G}_u \right) \cdot \underline{q}_k$  où le  $(\cdot)$  a bien le sens du produit scalaire dans  $\mathbb{R}^3$ .

Nous nous placerons dans ce cadre pour la suite des développements. Notons de suite que l'introduction de l'Equation IV. 11 dans cette expression conduit à;

Equation IV. 12

$$\forall \underline{q}_k \in \mathbb{R}^3, \left( \frac{\partial \mathcal{O}_m}{\partial m} \frac{\partial u_q}{\partial \underline{q}} \right)_{|q=0} \cdot \underline{q}_k = - \left( \frac{\partial \mathcal{O}_m}{\partial m} \frac{\partial m_q}{\partial \underline{q}} \right)_{|q=0} \cdot \underline{q}_k$$

Cette relation, introduite dans  $\mathcal{G}_m$ , permet d'effectuer une opération semblable à celle que nous

avons faite pour la partie spatiale de la divergence.

$$\begin{aligned} \varphi_m &= -\int_{\mathcal{E}} G_{\alpha,\dots,k} \frac{\partial \theta_m}{\partial y_k} \theta_x dV \\ &= -\int_{\mathcal{E}} G_{\alpha,\dots,k} \left( \frac{\partial \theta_m}{\partial m} \frac{\partial m_q}{\partial \underline{q}} \right)_{\underline{q}=0} \cdot \underline{q}_k \theta_x dV \\ &= \int_{\mathcal{E}} G \cdot \underline{q} \cdot \left( \frac{\partial \theta_m}{\partial m} \frac{\partial m_q}{\partial \underline{q}} \right)_{\underline{q}=0} \theta_x dV \end{aligned}$$

où  $\underline{q}$  est le **tenseur de désorientation du second ordre**  $(q)_{k,j} = (q_k)_j$ .

Cette relation se transforme simplement en  $\varphi_m = \left( \frac{\partial(G \cdot \underline{q})}{\partial \underline{q}} \right)_{\underline{q}=0} \Big|_{(\underline{x}, m_q)} \cdot \underline{l}$ .

En effet, considérons l'application sur le groupe des rotations qui fait correspondre à un vecteur rotation  $\underline{q}$  la globalisée  $(G \cdot \underline{q})^\sim$  au point  $(\underline{x}, m_q)$ . La composante  $\alpha,\dots,k,j,i$  de la dérivation en  $\underline{q} = 0$  de cette application vaut;

$$\left( \left( \frac{\partial(G \cdot \underline{q})}{\partial \underline{q}} \right)_{\underline{q}=0} \Big|_{(\underline{x}, m_q)} \right)_{\alpha,\dots,k,j,i} = \int_{\mathcal{E}} G_{\alpha,\dots,k} q_{kj} \left( \frac{\partial \theta_m}{\partial m} \frac{\partial m_q}{\partial \underline{q}} \right)_{\underline{q}=0} \theta_x dV$$

La contraction par le tenseur identité d'ordre 2 permet de retrouver l'expression de  $\varphi_m$ .

Notons que dans l'expression ci-dessus le vecteur  $\underline{q}$  et le tenseur  $\underline{q}$ , malgré des notations proches, recouvrent des notions très différentes, puisque  $\underline{q}$  est un vecteur rotation quelconque représentant l'action des rotations sur la microstructure, alors que  $\underline{q}(\underline{y})$  est le tenseur de désorientation au point  $\underline{y}$ .

Cette contraction exprime en fait la contraction du tenseur  $\left( \frac{\partial(G \cdot \underline{q})}{\partial \underline{q}} \right)_{\underline{q}=0} \Big|_{(\underline{x}, m_q)}^\sim$  sur les derniers

indices suivant la forme bilinéaire sur l'espace des taux de rotation -en l'occurrence, le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^3$  -\*.

On peut donc, dans le cas d'une microstructure transitive et continue, globaliser la divergence

---

\* Ce résultat reste vrai dans le cas d'autre description des rotations de l'espace, ce qui permettrait d'écrire dans un cadre relativement général, en appelant  $b$  la contraction d'un tenseur suivant cette forme bilinéaire, ce qui définit un opérateur macro sur la grandeur globalisée  $(G \cdot \underline{q})^\sim$  :

$$\varphi_m = b \left( \left( \frac{\partial(G \cdot \underline{q})}{\partial \underline{q}} \right)_{\underline{q}=0} \Big|_{(\underline{x}, m_q)}^\sim \right)$$

spatiale d'une grandeur tensorielle  $G$ . Cette globalisation fait intervenir, outre la divergence spatiale de la globalisée de  $G$ , la dérivation par rapport aux rotations de la globalisée du produit de  $G$  par le tenseur de désorientation, prise en 0 et contractée deux fois avec le tenseur d'ordre 2 identité.

Equation IV. 13

$$(\text{div}_{\underline{y}} G)^{\sim} = \text{div}_{\underline{x}}(\tilde{G}) + \frac{\partial(G, \underline{q})^{\sim}}{\partial \underline{q}} \Big|_{\underline{q}=0} : \underline{I}$$

Remarque: La même constatation peut se faire pour la divergence en  $\underline{x}$  de  $\tilde{G}$  que l'on peut voir comme la dérivée de  $\tilde{G}$  par rapport aux translations, en 0, contractée deux fois avec  $\underline{I}$ .

$$\text{div}_{\underline{x}}(\tilde{G}) = \frac{\partial(\tilde{G}(\underline{x} + \underline{\tau}, \underline{m}))}{\partial \underline{\tau}} \Big|_{\underline{\tau}=0} : \underline{I}$$

#### IV.3.4 Dérivation temporelle

Le problème de la globalisation de la dérivée partielle par rapport au temps d'une grandeur micro se pose de manière tout-à-fait analogue au problème précédent.

En effet, sous les hypothèses précédentes, considérons la dérivée partielle par rapport au temps de la globalisée d'une grandeur tensorielle micro  $G(\underline{y}, t)$ , soit :

$$\frac{\partial(G^{\sim})}{\partial t} = \int_{\mathcal{E}} \frac{\partial(G(\underline{y}, t) \underline{\theta}_{\underline{x}}(\underline{x}, \underline{m}) \underline{\theta}_{\underline{m}}(\underline{y}, \underline{u}(\underline{y}, t)))}{\partial t} dv.$$

Cette dernière peut s'écrire sous la forme de la somme d'un terme correspondant à la globalisation de la dérivée partielle de  $G$ , à savoir :

$$\gamma_1 = \int_{\mathcal{E}} \frac{\partial G}{\partial t} \underline{\theta}_{\underline{x}}(\underline{x}, \underline{m}) \underline{\theta}_{\underline{m}}(\underline{y}, \underline{u}(\underline{y}, t)) dv = \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^{\sim}$$

et d'un terme prenant en compte la dérivation de la fonction d'observation de la microstructure par rapport au temps:

$$\gamma_2 = \int_{\mathcal{E}} G \underline{\theta}_{\underline{x}} \frac{\partial \underline{\theta}_{\underline{m}}}{\partial t} dv$$

On définit alors le **vecteur taux d'évolution par unité de temps de la microstructure  $\underline{q}$** , qui est le vecteur rotation infinitésimale transformant la microstructure en  $\underline{y}$  à l'instant  $t$  en la microstructure en  $\underline{y}$  à l'instant  $t+dt$ .

$\gamma_2$  se transforme comme précédemment en

$$\gamma_2 = \left( \frac{\partial(G \otimes \underline{q})}{\partial \underline{q}} \right)_{\underline{q}=0} : \underline{I}$$

ce qui conduit à:

Equation IV. 14

$$\forall (\underline{x}, m) \in \mathcal{E} \times \mathcal{M}, \left( \frac{\partial G}{\partial t} \right)^\sim = \frac{\partial(G^\sim)}{\partial t} + \left( \frac{\partial(G \otimes \underline{q})}{\partial \underline{q}} \right)_{\underline{q}=0} : \underline{I}$$

Il apparaît donc de nouveau un terme de divergence par rapport à la microstructure, d'une grandeur liée non plus au gradient spatial de la microstructure (importance des zones "frontières" entre zones uniformes, comme dans les polycristaux métalliques) mais à l'évolution temporelle de la microstructure (les zones où la microstructure évolue rapidement sont prépondérantes dans ce terme).

### IV.3.5 Plongement de $\mathcal{M}$ dans $SO(3)$

Nous nous servirons dans la suite du texte d'une forme simplifiée de ces résultats. Nous choisissons de décrire le groupe des rotations de  $\mathbb{R}^3$  par les tenseurs orthogonaux, ainsi que de plonger la microstructure dans  $SO(3)$ , ce qui semble correspondre assez bien, par exemple, avec la description d'un matériau polycristallin.

Nous allons montrer que l'on peut donner une expression simple de l'équation IV. 7, qui est celle que nous avons trouvée pour les milieux de Cosserat, en notant  $\underline{q}'$  la variable de microstructure micro et  $\underline{q}$  la variable macro.

équation IV. 15

$$\left( \text{div}_{\underline{y}} G \right)^\sim = \text{div}_{\underline{x}} (G^\sim) + \text{div}_{\underline{q}} \left[ (G \cdot \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{q}'))^T \cdot \underline{q}' \right]$$

La première étape consiste à construire un plongement particulier de  $\mathcal{M}$  dans  $SO(3)$ .

On choisit tout d'abord une origine  $\mu_0$  dans  $\mathcal{M}$ , au sens de l'action des rotations sur  $\mathcal{M}$ . Par transitivité, chaque point  $\mu$  peut se déduire de  $\mu_0$  via une rotation (non unique en général)  $\underline{q}'(\mu)$ . L'application qui à  $\mu$  fait correspondre  $\underline{q}'(\mu)$  peut être choisie de classe  $C_1$  au moins, puisque l'action du groupe des rotations sur  $\mathcal{M}$  l'est également. Cette application définit alors un plongement de  $\mathcal{M}$  dans  $SO(3)$ .

La fonction d'observation que nous considérons sur la variété image de  $\mathcal{M}$  dans  $SO(3)$  est une fonction  $\underline{o}_r$  du type de celle que nous avons introduite pour les milieux de Cosserat, prolongeable à l'espace des tenseurs d'ordre 2 et telle que la fonction sur  $\mathcal{M}^2$  définie par  $\underline{o}_m(m, \underline{u}) = \underline{o}_r(\underline{o}, \underline{o}')$  (où  $\underline{o}$  ( $\underline{o}'$ ) est l'image de  $m$  ( $\underline{u}$ )) soit la fonction d'observation sur  $\mathcal{M}$  que nous utiliserons.

On a ainsi défini un champ différentiable d'orientation  $\underline{o}'(\underline{y})$  sur  $\mathcal{E}$ .

On exprime ensuite le gradient de  $\underline{u}(\underline{y})$  dans la direction  $k$  en fonction du gradient de  $\underline{o}'(\underline{y})$  dans la direction  $k$ .

Au voisinage d'un point  $\underline{y}_0$ , la rotation  $\underline{o}'(\underline{y}).^T \underline{o}'(\underline{y}_0)$  relie  $\underline{u}(\underline{y})$  à  $\underline{u}(\underline{y}_0)$ ;

équation IV. 16 
$$\underline{u}(\underline{y}) = [\underline{o}'(\underline{y}).^T \underline{o}'(\underline{y}_0)]. \underline{u}(\underline{y}_0)$$

Notons  $\underline{q}_0(\underline{y})$  le vecteur associé à  $\underline{o}'(\underline{y}).^T \underline{o}'(\underline{y}_0)$ . On a en particulier  $\underline{q}_0(\underline{y}_0) = 0$ .

Avec les notations déjà introduites, l'équation IV. 9 s'écrit :  $\underline{u}(\underline{y}) = \underline{u}(\underline{y}_0)_{(\underline{q}_0(\underline{y}))}$

On peut alors développer le gradient de  $\underline{u}$  en  $\underline{y}$  dans la direction  $k$ ;

équation IV. 17 
$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial y_k}(\underline{y}) = \frac{\partial \underline{u}(\underline{y}_0)_{(\underline{q})}}{\partial \underline{q}}(\underline{q}_0(\underline{y})). \frac{\partial \underline{q}_0}{\partial y_k}(\underline{y})$$

L'équation IV. donne, au point  $\underline{y} = \underline{y}_0$  :

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial y_k}(\underline{y}_0) = \frac{\partial \underline{u}(\underline{y}_0)_{(\underline{q})}}{\partial \underline{q}}(\underline{q} = 0). \frac{\partial \underline{q}_0}{\partial y_k}(\underline{y}_0) = \underline{g}_{\underline{u}(\underline{y}_0)}. \frac{\partial \underline{q}_0}{\partial y_k}(\underline{y}_0)$$

$\underline{q}_0(\underline{y})$  est le vecteur associé à la rotation  $\underline{o}'(\underline{y}).^T \underline{o}'(\underline{y}_0)$ . Sa dérivée par rapport à  $y_k$  au point  $\underline{y}_0$ , qui n'est autre qu'un des vecteurs de désorientation  $\underline{q}_k$  vaut donc :

$$\underline{q}_k = \frac{\partial \underline{q}_0}{\partial y_k}(\underline{y}_0) = \frac{1}{2} \underline{e}_k : \left( \frac{\partial \underline{o}'}{\partial y_k}(\underline{y}_0).^T \underline{o}'(\underline{y}_0) \right)$$

La partie microstructurale de la globalisation de la divergence d'un champ tensoriel  $G$

quelconque a pour expression (équation IV. 7)  $\left( \frac{\partial (G.q)}{\partial \underline{q}} \right)_{|\underline{q}=0}$ , avec

$$(G.q)_{\alpha, \dots, k, j}^{\sim} = \int_{\mathcal{E}} G_{\alpha, \dots, k} q_{kj} \underline{o}_m \underline{o}_k dV$$

que l'on transforme en

$$\begin{aligned}
 (G.\underline{q})_{\dots,\alpha,i}^{\sim} &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}} G_{\dots,\alpha,k}(\underline{\underline{e}}; (\frac{\partial \underline{o}'}{\partial y_k}, \underline{\underline{T}} \underline{o}'))_i \underline{o}_{\underline{r}}(\underline{o}, \underline{o}') \underline{o}_{\underline{x}} dV \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}} G_{\dots,\alpha,k} \mathbf{e}_{ilm} (\frac{\partial \underline{o}'_{mn}}{\partial y_k} \cdot \underline{o}'_{ln}) \underline{o}_{\underline{r}}(\underline{o}, \underline{o}') \underline{o}_{\underline{x}} dV \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}} G_{\dots,\alpha,k} \mathbf{e}_{lmi} (\frac{\partial \underline{o}'_{mn}}{\partial y_k} \cdot \underline{o}'_{ln}) \underline{o}_{\underline{r}}(\underline{o}, \underline{o}') \underline{o}_{\underline{x}} dV \\
 &= \frac{1}{2} [G.\text{grad}_{\underline{y}}(\underline{o}') \underline{\underline{T}} \underline{o}']_{\dots,\alpha,m,l}^{\sim} \mathbf{e}_{lmi}
 \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{(G.\underline{q})^{\sim} = \frac{1}{2} [G.\text{grad}_{\underline{y}}(\underline{o}') \underline{\underline{T}} \underline{o}']^{\sim} : \underline{\underline{e}}}$$

Il reste à montrer que  $(\frac{\partial(G.\underline{q})^{\sim}}{\partial \underline{q}})_{|q=0} : \underline{\underline{I}} = \text{div}_{\underline{o}} ([G.\text{grad}_{\underline{y}}(\underline{o}') \underline{\underline{T}} \underline{o}']^{\sim} \cdot \underline{o})$

On écrit pour cela que

$$\begin{aligned}
 (\frac{\partial(G.\underline{q})^{\sim}}{\partial \underline{q}})_{|q=0} : \underline{\underline{I}} &= \frac{\partial(G.\underline{q})^{\sim}}{\partial \underline{\underline{T}} \underline{o}} : (\frac{\partial \underline{o}}{\partial \underline{q}})_{|q=0} : \underline{\underline{I}} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial([G.\text{grad}_{\underline{y}}(\underline{o}') \underline{\underline{T}} \underline{o}']^{\sim} : \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{T}} \underline{o}} : (\frac{\partial \underline{o}}{\partial \underline{q}})_{|q=0} : \underline{\underline{I}}
 \end{aligned}$$

ce qui, en notation indicielle et compte tenu du fait que  $(\frac{\partial \underline{o}}{\partial \underline{q}})_{|q=0} = \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{e}} \cdot \underline{o})$ , devient;

$$\begin{aligned}
 [(\frac{\partial(G.\underline{q})^{\sim}}{\partial \underline{q}})_{|q=0} : \underline{\underline{I}}]_{\dots,\alpha} &= \frac{1}{2} \frac{\partial([G.\text{grad}_{\underline{y}}(\underline{o}') \underline{\underline{T}} \underline{o}']^{\sim}_{\dots,\alpha,\beta,j} \mathbf{e}_{j\beta k})}{\partial o_{ml}} \mathbf{e}_{mnp} o_{pl} \delta_{nk} \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{e}_{j\beta n} \mathbf{e}_{mnp} \frac{\partial([G.\text{grad}_{\underline{y}}(\underline{o}') \underline{\underline{T}} \underline{o}']^{\sim}_{\dots,\alpha,\beta,j} o_{pl})}{\partial o_{ml}} - \frac{1}{2} [G.\text{grad}_{\underline{y}}(\underline{o}') \underline{\underline{T}} \underline{o}']^{\sim}_{\dots,\alpha,\beta,j} \mathbf{e}_{j\beta n} \mathbf{e}_{mnp} \frac{\partial o_{pl}}{\partial o_{ml}}
 \end{aligned}$$

⇒ Le deuxième terme du membre de droite vaut 0, puisque  $\mathbf{e}_{mnp} \frac{\partial o_{pl}}{\partial o_{ml}} = \mathbf{e}_{mnp} \delta_{pm} = \mathbf{e}_{mnm} = 0$

⇒ Le premier terme vaut 0 si  $\{m, p\} \neq \{j, \beta\}$  puisque, j et β étant différent de n, si m (p) est différent de j ou β, il vaut n (j,m,n,p,β sont des entiers de {1,2,3}), et donc  $\mathbf{e}_{mnp}=0$ .

Si p=m, le terme vaut également 0. On a donc deux cas à considérer: m=j (et p=β), qui donne  $\frac{1}{2} \mathbf{e}_{j\beta n} \mathbf{e}_{mnp} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_{mpn} \mathbf{e}_{mnp} = -\frac{1}{2}$  et le cas m=β (p=j) qui donne  $\frac{1}{2} \mathbf{e}_{pnn} \mathbf{e}_{mnp} = \frac{1}{2}$ .

On introduit ces égalités dans l'expression de  $(\frac{\partial(G.\underline{q})^{\sim}}{\partial \underline{q}})_{|q=0} : \underline{\underline{I}}]_{\dots,\alpha}$ , et il vient:

$$\left[ \left( \frac{\partial(G.q)^\sim}{\partial \underline{q}} \right) \Big|_{\underline{q}=0} : \underline{I} \right]_{\dots, \alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial([G. \text{grad}_y(\underline{o})^\sim \cdot \underline{o}']_{\dots, \alpha, m, p} \cdot \underline{o}_{pl})}{\partial \sigma_{ml}} - \frac{1}{2} \frac{\partial([G. \text{grad}_y(\underline{o})^\sim \cdot \underline{o}']_{\dots, \alpha, p, m} \cdot \underline{o}_{pl})}{\partial \sigma_{ml}}$$

Le tenseur  $G. \text{grad}_y(\underline{o})^\sim \cdot \underline{o}'$  est antisymétrique sur les deux derniers indices, donc:

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{\partial(G.q)^\sim}{\partial \underline{q}} \right) \Big|_{\underline{q}=0} : \underline{I} \right]_{\dots, \alpha} &= \frac{\partial([G. \text{grad}_y(\underline{o})^\sim \cdot \underline{o}']_{\dots, \alpha, m, p} \cdot \underline{o}_{pl})}{\partial \sigma_{ml}} \\ &= [\text{div}_o([G. \text{grad}_y(\underline{o})^\sim \cdot \underline{o}'] \cdot \underline{o})]_{\dots, \alpha} \end{aligned}$$

ce qui montre la propriété cherchée.

équation IV. 18

$$\boxed{\left( \frac{\partial(G.q)^\sim}{\partial \underline{q}} \right) \Big|_{\underline{q}=0} : \underline{I} = \text{div}_o([G. \text{grad}_y(\underline{o})^\sim \cdot \underline{o}'] \cdot \underline{o})}$$

On procède de même pour la dérivation temporelle

équation IV. 19

$$\boxed{\left( \frac{\partial G}{\partial t} \right)^\sim = \frac{\partial(G^\sim)}{\partial t} + \text{div}_o((G \otimes \frac{\partial(\underline{o}')}{\partial t} \cdot \underline{o}')^\sim \cdot \underline{o})}$$

Dans la suite, nous considérerons des microstructures décrites par une sous-variété de SO(3), et nous utiliserons les expressions de la globalisation de la divergence spatiale et de la dérivation temporelle données par l'équation IV. 15 et l'équation IV.19

#### IV.4 Les milieux de Cosserat multiparticulaires

Nous appliquons les résultats obtenus aux équations d'équilibre d'un milieu de Cosserat, la variété de microstructure étant SO(3). Nous faisons une hypothèse de continuité et de dérivabilité de l'orientation locale, aussi bien en espace qu'en temps.

Nous utilisons les équations d'équilibre d'un milieu micropolaire, dans le cas quasi-statique, sous la forme donnée par Germain [Germain, 1973b, p570];

$$\left. \begin{aligned} \text{div}(\underline{\tau}) + \underline{f} &= 0 \\ \text{div}(\underline{v}) + \underline{s} + \underline{\Psi} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{équations de champ}$$

$$\underline{e} : (\underline{\tau} - \underline{s}) = 0 \quad \text{condition d'objectivité}$$

où  $\underline{\tau}$  est le tenseur de contrainte de Cauchy (dual de  $\text{grad}_x(\underline{u})$ )

- ⊖  $\underline{\underline{s}}$  est le tenseur de microcontrainte (dual de  $\underline{\underline{\omega}}$ )
- ⊖  $\underline{\underline{v}}$  est le second tenseur de microcontrainte
- ⊖  $\underline{f}$  est le vecteur des forces extérieures volumiques
- ⊖  $\underline{\underline{\Psi}}$  est le tenseur des doubles forces extérieures volumiques

La globalisation conduit directement, en utilisant l'équation IV. 15, aux équations d'équilibre du milieu micropolaire multiparticulaire:

|   |
|---|
| $\left. \begin{aligned} \operatorname{div}_x(\underline{\underline{\tau}}) + \operatorname{div}_r((\underline{\underline{\tau}} \cdot \operatorname{grad}_y(\underline{\underline{o}})^T \underline{\underline{o}})^{\sim} \cdot \underline{r}) + \underline{\underline{f}} &= 0 \\ \operatorname{div}_x(\underline{\underline{v}}) + \operatorname{div}_r((\underline{\underline{v}} \cdot \operatorname{grad}_y(\underline{\underline{o}})^T \underline{\underline{o}})^{\sim} \cdot \underline{r}) + \underline{\underline{s}} + \underline{\underline{\Psi}} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{équations de champ}$ |
| $\underline{\underline{e}}: (\underline{\underline{\tau}} - \underline{\underline{s}}) = 0 \quad \text{condition d'objectivité}$  |

Ces équations sont formellement les mêmes que celles obtenues par application directe de la méthode des puissances virtuelles en espace profond développée au chapitre III. Elles fournissent donc une autre interprétation des tenseurs d'efforts introduits a priori, comme duaux de la microvitesse et des gradients spatiaux et en orientation de la micro- et de la macro-vitesse.

Regroupons les équations d'équilibre obtenues:

| Approche macro directe  | Approche par globalisation  |
|---|---|
| $\operatorname{div}_x(\underline{\underline{\Gamma}}) + \operatorname{div}_r(\underline{\underline{E}}) + \underline{f} = 0 \quad (a)$  | $\operatorname{div}_x(\underline{\underline{\tau}}) + \operatorname{div}_r((\underline{\underline{\tau}} \cdot \operatorname{grad}_y(\underline{\underline{o}})^T \underline{\underline{o}})^{\sim} \cdot \underline{r}) + \underline{\underline{f}} = 0 \quad (a')$                          |
| $\operatorname{div}_x(\underline{\underline{\Delta}}) - \underline{\underline{B}} + \operatorname{div}_r(\underline{\underline{\Phi}}) + \underline{b} = 0 \quad (b)$   | $\operatorname{div}_x(\underline{\underline{v}}) + \operatorname{div}_r((\underline{\underline{v}} \cdot \operatorname{grad}_y(\underline{\underline{o}})^T \underline{\underline{o}})^{\sim} \cdot \underline{r}) + \underline{\underline{s}} + \underline{\underline{\Psi}} = 0 \quad (b')$ |
| $\underline{\underline{e}}: (\underline{r} \cdot \underline{\underline{B}} + {}^{T\{ijkl \rightarrow kjil\}} \underline{\underline{\Phi}}: \underline{I}) = -\underline{\underline{e}}: \underline{\underline{\Gamma}} \quad (c)$ | $\underline{\underline{e}}: (\underline{\underline{\tau}} - \underline{\underline{s}}) = 0 \quad (c')$  |

La comparaison de (a) et (a') fournit directement l'identification du tenseur de contrainte de Cauchy en espace profond  $\underline{\underline{\Gamma}}$ , du premier tenseur de microcontrainte en espace profond  $\underline{\underline{E}}$  et des forces extérieures volumiques en espace profond  $\underline{f}$ :

- ⊖  $\underline{\underline{\Gamma}} = \underline{\underline{\tau}}$ : le tenseur de contrainte de Cauchy en espace profond est le globalisé du tenseur de contrainte de Cauchy micro.
- ⊖  $\underline{\underline{E}} = (\underline{\underline{\tau}} \cdot \operatorname{grad}_y(\underline{\underline{o}})^T \underline{\underline{o}})^{\sim} \cdot \underline{r}$ : le premier tenseur de microcontrainte en espace profond est le globalisé du produit simplement contracté du tenseur de contrainte de Cauchy micro par le tenseur de désorientation, rapporté au point de la microstructure considéré.
- ⊖  $\underline{f} = \underline{\underline{f}}$ : le vecteur des forces extérieures volumiques en espace profond est le

globalisé du vecteur des forces extérieures volumiques micro.

On multiplie les deux membres de (b) par  $\underline{r}$  :  $\underline{r} \cdot \text{div}_{\underline{x}}(\underline{\Delta}) - \underline{r} \cdot \underline{B} + \underline{r} \cdot \text{div}_{\underline{r}}(\underline{\Phi}) + \underline{r} \cdot \underline{b} = 0$

soit  $\text{div}_{\underline{x}}(\underline{r} \cdot \underline{\Delta}) - \underline{r} \cdot \underline{B} - \text{grad}_{\underline{r}}(\underline{r}) : \underline{\Phi} + \text{div}_{\underline{r}}(\underline{r} \cdot \underline{\Phi}) + \underline{r} \cdot \underline{b} = 0$

soit encore  $\text{div}_{\underline{x}}(\underline{r} \cdot \underline{\Delta}) + (-\underline{r} \cdot \underline{B} - {}^T\{\text{ijkl} \rightarrow \text{kjil}\} \underline{\Phi} : \underline{I}) + \text{div}_{\underline{r}}(\underline{r} \cdot \underline{\Phi}) + \underline{r} \cdot \underline{b} = 0$

ce qui permet d'identifier les différents tenseurs et de vérifier que (c) et (c') coïncident;

- $\Leftrightarrow \underline{\Delta} = {}^T \underline{r} \cdot \underline{v}$  : le second tenseur de microcontrainte en espace profond est le produit du transposé du point de la microstructure considéré par le globalisé du second tenseur de microcontrainte micro.
- $\Leftrightarrow \underline{\Phi} = {}^T \underline{r} \cdot (\underline{v} \cdot \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{\rho}) \cdot {}^T \underline{\rho}) \cdot \underline{r}$  : le second tenseur de contrainte microstructurale est relié au globalisé du produit du second tenseur de microcontrainte par le tenseur de désorientation via la composition à droite par  $\underline{r}$  et à gauche par  ${}^T \underline{r}$ .
- $\Leftrightarrow \underline{b} = {}^T \underline{r} \cdot \underline{\tilde{\Psi}}$  : le tenseur des doubles forces extérieures volumiques est le composé à gauche par  ${}^T \underline{r}$  du globalisé du tenseur des doubles forces extérieures volumiques micro.
- $\Leftrightarrow \underline{B} = -{}^T \underline{r} \cdot (\underline{\tilde{\sigma}} + {}^T\{\text{ijkl} \rightarrow \text{kjil}\} \underline{\Phi} : \underline{I})$  : le tenseur de microcontrainte en espace profond s'exprime en fonction du globalisé du tenseur de microcontrainte et du second tenseur de microcontrainte en espace profond.

La méthode proposée nous a donc permis d'écrire les équations d'équilibres macro à partir des équations d'équilibre micro. Une démarche similaire devrait permettre l'identification du comportement macro à partir du comportement micro.

Une des voies possibles pourrait être la globalisation des diverses équations de bilan et nous proposons dans le chapitre suivant quelques indications sur l'application de la méthode de globalisation aux équations de bilan.

## CHAPITRE V

# **GLOBALISATION DES EQUATIONS DE BILAN D'UN MILIEU A MICROSTRUCTURE D'ORIENTATION**

*Nous nous consacrons dans la suite du texte à l'étude de la globalisation des diverses équations de bilan, dans le cas simplifié des microstructures sur lesquelles l'action du groupe des rotations est transitive, en choisissant  $SO(3)$  comme représentant des rotations et une description de la microstructure plongée dans  $SO(3)$ .*

*Après avoir écrit la forme générale d'une équation de bilan globalisée, nous traitons séparément le bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie.*



|  |            |
|--|------------|
| <b>V.1 Globalisation d'une équation de bilan</b> | <b>131</b> |
| <b>V.2 Bilan de masse</b>                        | <b>133</b> |
| <b>V.3 Bilan de quantité de mouvement</b>        | <b>135</b> |
| <b>V.4 Conservation de l'énergie</b>             | <b>139</b> |



## V.1 Globalisation d'une équation de bilan

Les développements précédents nous permettent de mettre en évidence la possibilité d'écrire la globalisation de la divergence d'un champ tensoriel "micro" en fonction d'opérateurs différentiels "macro". Ces opérateurs macro portent sur des grandeurs micro globalisées, ce qui était bien le but de cette étude.

Nous avons ainsi montré que dans le cas général d'une microstructure de type transitif (pas de forme), la divergence d'un champ tensoriel micro pouvait se globaliser de la manière suivante, au point  $(\underline{x}, \underline{Q})$ , et sous réserve de choisir une description de la microstructure sous la forme de tenseurs orthogonaux (dans une sous-variété de  $SO(3)$ ), ce qui est toujours possible dans le cas d'une microstructure transitive;

$$\boxed{(\operatorname{div}_{\underline{y}}(G(\underline{y})))^{\sim} = \operatorname{div}_{\underline{x}}(\tilde{G}) + \operatorname{div}_{\underline{O}}((G \cdot \operatorname{grad}_{\underline{y}}(\underline{O}'(\underline{y})).^T \underline{O}'(\underline{y}))^{\sim} \cdot \underline{O})}$$

Notons là encore que la prolongation naturelle des champs macro à l'ensemble des tenseurs d'ordre deux permet de donner un sens sans ambiguïté à  $\operatorname{div}_{\underline{O}}$ .

Le changement d'échelle se traduit donc d'une part par le changement de la variable de divergence en espace, et d'autre part par l'apparition d'un terme de divergence en microstructure introduisant la désorientation locale (le gradient micro de la microstructure).

Notons que si la grandeur tensorielle  $G$  considérée est constante en  $\underline{y}$  -  $\operatorname{div}_{\underline{y}}(G(\underline{y})) = 0$  - et donc  $(\operatorname{div}_{\underline{y}}(G(\underline{y})))^{\sim} = 0$ , sa globalisée  $\tilde{G}$  n'est pas nécessairement constante en  $(\underline{x}, \underline{Q})$ , ce qui se traduit au niveau macroscopique par une relation entre la divergence d'espace et la divergence microstructurale:

$$\operatorname{div}_{\underline{O}}((G \cdot \operatorname{grad}_{\underline{y}}(\underline{O}'(\underline{y})).^T \underline{O}'(\underline{y}))^{\sim} \cdot \underline{O}) = - \operatorname{div}_{\underline{x}}(\tilde{G}).$$

Notons également que la démarche proposée permet de mettre en évidence l'existence d'une relation entre divergence micro et divergences macro dans un cas général. L'application à des cas pratiques de microstructures de type orientation se fait plus directement, sans nécessairement passer par une description dans  $SO(3)$ , comme nous l'avons vu plus haut.

D'autre part la dérivation temporelle se transforme en:

$$\boxed{\forall (\underline{x}, \underline{Q}) \in \mathcal{E} \times \mathcal{M}, \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^{\sim} = \frac{\partial(\tilde{G})}{\partial t} + \operatorname{div}_{\underline{O}}\left(\left(G \otimes \frac{\partial \underline{O}'}{\partial t}\right)^T \underline{O}'\right)^{\sim} \cdot \underline{O})}$$

Là encore apparaît un terme de divergence macro par rapport à la microstructure d'une grandeur prenant en compte les points à changement rapide de microstructure.

Si la microstructure est constante par rapport au temps ( $\frac{\partial O'}{\partial t} = 0$ ) en tout point  $\underline{y}$ , alors la dérivée partielle par rapport au temps de la globalisée de  $G$  est égale à la globalisée de la dérivée partielle par rapport au temps de  $G$ .

Si  $G$  est constant en chaque point  $\underline{y}$  -  $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$  -, sa globalisée peut être variable en temps en un point  $(\underline{x}, Q)$ , si la microstructure varie au niveau micro.

Les équations ci-dessus permettent de donner l'expression générale d'une équation de bilan de grandeurs macroscopiques, connaissant l'équation de bilan correspondante au niveau microscopique.

Celle-ci, sous sa forme la plus générale, traduit la compensation de la variation temporelle de l'intégrale sur un ensemble  $\omega$  de particules d'une grandeur volumique par d'une part un terme de production-apport volumique et d'autre part un terme de flux à travers la frontière  $\partial\omega$  du domaine.

$$\frac{d \int_{\omega} G \, dv}{dt} = \int_{\omega} (a + p) \, dv - \int_{\partial\omega} \phi \, ds$$

$a$  est le terme d'apport volumique

$p$  est le terme de production

$\phi$  est le taux surfacique de perte à travers la frontière

La forme locale de cette équation de bilan se ramène classiquement à :

$$\boxed{\frac{\partial G}{\partial t} + \text{div}_{\underline{y}}(G \otimes \underline{u}) + \text{div}_{\underline{y}}(f) = a + p}$$

$\underline{u}$  est la vitesse

$f$  est le tenseur densité de flux (i.e.  $\phi = f \cdot \underline{n}$ )

La globalisation de cette équation de bilan, en prenant en compte les expressions établies plus haut, nous conduit à:

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} + \text{div}_{\underline{x}}((G \otimes \underline{u})^{\sim}) + \text{div}_{\underline{O}}(\underline{\mathcal{G}} \cdot \underline{O}) + \text{div}_{\underline{x}}(\tilde{f}) + \text{div}_{\underline{O}}(\underline{\mathcal{H}} \cdot \underline{O}) - \tilde{a} - \tilde{p} = 0$$

avec  $\underline{\mathcal{G}}(\underline{x}, \underline{O}) = (G \otimes [\frac{\partial(\underline{O}')}{\partial t} + \underline{u} \cdot \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{O}')]^T \underline{O}')^{\sim}$  et  $\underline{\mathcal{H}}(\underline{x}, \underline{O}) = (f \cdot \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{O}') \cdot \underline{O}')^{\sim}$

Avant d'aller plus loin dans l'exploitation de cette expression, nous allons traiter l'équation de bilan de masse, dans le cas simplifié où il n'y a ni production ni apport extérieur (volumique ou surfacique) de masse.

## V.2 Bilan de masse

L'équation de départ est donc l'équation classique, où  $\rho_{mi}$  est la masse volumique micro:

$$\frac{\partial \rho_{mi}}{\partial t} + \text{div}_{\underline{y}}(\rho_{mi} \underline{u}) = 0$$

Par globalisation, on se ramène à

$$\frac{\partial(\rho_{mi})^{\sim}}{\partial t} + \text{div}_{\underline{x}}((\rho_{mi} \underline{u})^{\sim}) + \text{div}_{\underline{O}}((\rho_{mi} [\frac{\partial \underline{O}'}{\partial t} + \underline{u} \cdot \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{O}')] \cdot \underline{O}')^{\sim} \cdot \underline{O}) = 0$$

Le terme entre [ ] dans l'équation ci-dessus n'est autre que la dérivée particulière\* du champ micro  $\underline{O}'(\underline{y}, t)$ . On a en effet :

$$\dot{\underline{O}}' = \frac{d\underline{O}'}{dt} = \frac{\partial \underline{O}'}{\partial t} + \frac{d\underline{y}}{dt} \cdot \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{O}') = \frac{\partial \underline{O}'}{\partial t} + \underline{u} \cdot \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{O}')$$

On retrouve donc un terme lié à la vitesse de la microstructure dans l'équation de bilan macro de la masse, à savoir:

$$\frac{\partial(\rho_{mi})^{\sim}}{\partial t} + \text{div}_{\underline{x}}((\rho_{mi} \underline{u})^{\sim}) + \text{div}_{\underline{O}}((\rho_{mi} (\dot{\underline{O}}') \cdot \underline{O}')^{\sim} \cdot \underline{O}) = 0$$

On est ainsi conduit à identifier les variables macro de masse, de micro- et de macro-vitesses, que l'on note comme au chapitre 3  $\rho$ ,  $\underline{v}$  et  $\underline{\zeta}$ .

---

\*La définition classique de la dérivation particulière d'un champ tensoriel  $\underline{Q}$  fait intervenir le terme  $\text{grad}_{\underline{y}}(\underline{Q}) \cdot \underline{u}$  et non pas le terme  $\underline{u} \cdot \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{Q})$ . Ceci provient du fait que nous écrivons le gradient de  $\underline{Q}$  en

utilisant le premier indice comme indice de dérivation, c'est-à-dire :  $(\text{grad}_{\underline{y}}(\underline{Q}))_{i,j,k} = \frac{\partial Q_{j,k}}{\partial y_i}$

$$\begin{aligned} \rho &= (\rho_{mi})^\sim \\ \rho \underline{v} &= (\rho_{mi} \underline{u})^\sim \\ \rho \underline{\zeta} \cdot^T \underline{O} &= (\rho_{mi} \underline{\dot{O}}' \cdot^T \underline{O}')^\sim \end{aligned}$$

L'équation de conservation de la masse, moyennant ces définitions et dans le cas où il n'y a ni création ni apport de masse au niveau micro, devient:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}_{\underline{x}}(\rho \underline{v}) + \text{div}_{\underline{O}}(\rho \underline{\zeta}) = 0$$

Décomposons les divergences dans cette équation avec les formules:

$$\text{div}_{\underline{x}}(\rho \underline{v}) = \text{grad}_{\underline{x}}(\rho) \cdot \underline{v} + \rho \cdot \text{div}_{\underline{x}}(\underline{v})$$

$$\text{div}_{\underline{O}}(\rho \underline{\zeta}) = \frac{\partial \rho}{\partial \underline{O}} : \underline{\zeta} + \rho \cdot \text{div}_{\underline{O}}(\underline{\zeta})$$

et regroupons les termes de convection avec la dérivée partielle de  $\rho$  par rapport au temps :

$$\left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{grad}_{\underline{x}}(\rho) \cdot \underline{v} + \frac{\partial \rho}{\partial \underline{O}} : \underline{\zeta} \right] + \rho \cdot \text{div}_{\underline{x}}(\underline{v}) + \rho \cdot \text{div}_{\underline{O}}(\underline{\zeta}) = 0$$

La partie entre les [ ] de cette équation constitue la dérivée particulière macro de la masse volumique :

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{grad}_{\underline{x}}(\rho) \cdot \underline{v} + \frac{\partial \rho}{\partial \underline{O}} : \underline{\zeta}$$

Si on prend en compte des termes de création ou d'apport extérieur au niveau micro  $f_{mi}$ ,  $a_{mi}$ ,  $p_{mi}$  non nuls- dans l'équation de bilan de masse, on peut identifier aisément leur équivalent macro  $f, a, p$ .

\* terme de création :  $p = \tilde{p}_{mi}$

\* terme d'apport volumique :  $a = \tilde{a}_{mi}$

\* terme de flux surfacique "en espace":  $f = \tilde{f}_{mi}$

Il apparaît également un terme supplémentaire  $\underline{\phi}$ , qui est un terme de flux "surfaccique" sur la

microstructure, définit par

$$\underline{\underline{\varphi}} \cdot \underline{\underline{T}} \underline{\underline{O}} = (\underline{\underline{f}}_{mi} \cdot \text{grad}_{\underline{\underline{y}}}(\underline{\underline{O}}'), \underline{\underline{T}} \underline{\underline{O}}')^{\sim}$$

L'équation complète de bilan de masse s'écrit avec ces définitions:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}_{\underline{\underline{x}}}(\rho \underline{\underline{v}}) + \text{div}_{\underline{\underline{O}}}(\rho \underline{\underline{\zeta}}) + \text{div}_{\underline{\underline{x}}}(\underline{\underline{f}}) + \text{div}_{\underline{\underline{O}}}(\underline{\underline{\varphi}}) = a + p}$$

### V.3 Bilan de quantité de mouvement

Reprenons la forme générale d'une équation de bilan telle que nous l'avons écrite au paragraphe V.1.

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} + \text{div}_{\underline{\underline{x}}}((G \otimes \underline{\underline{u}})^{\sim}) + \text{div}_{\underline{\underline{O}}}(\underline{\underline{\mathcal{G}}} \cdot \underline{\underline{O}}) + \text{div}_{\underline{\underline{x}}}(\tilde{f}) + \text{div}_{\underline{\underline{O}}}(\underline{\underline{\mathcal{H}}} \cdot \underline{\underline{O}}) - \tilde{a} - \tilde{p} = 0$$

$$\text{avec } \underline{\underline{\mathcal{G}}}(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{O}}) = (G \otimes [\frac{\partial(\underline{\underline{O}}')}{\partial t} + \underline{\underline{u}} \cdot \text{grad}_{\underline{\underline{y}}}(\underline{\underline{O}}')])^{\sim} \cdot \underline{\underline{O}} \text{ et } \underline{\underline{\mathcal{H}}}(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{O}}) = (f \cdot \text{grad}_{\underline{\underline{y}}}(\underline{\underline{O}}'))^{\sim} \cdot \underline{\underline{O}}$$

Cette équation doit être traitée de manière à faire apparaître d'une part des termes dépendant directement de la grandeur globalisée  $\tilde{G}$  (masse, quantité de mouvement, énergie ...) et d'autre part des termes "irréductibles" faisant intervenir d'autres grandeurs globalisées.

Notons que, en utilisant la définition de la dérivée particulière micro de la variable de microstructure;

$$\text{div}_{\underline{\underline{O}}}(\underline{\underline{\mathcal{G}}} \cdot \underline{\underline{O}}) = \text{div}_{\underline{\underline{O}}}((G \otimes [\frac{\partial(\underline{\underline{O}}')}{\partial t} + \underline{\underline{u}} \cdot \text{grad}_{\underline{\underline{y}}}(\underline{\underline{O}}')])^{\sim} \cdot \underline{\underline{O}}) = \text{div}_{\underline{\underline{O}}}((G \otimes \underline{\underline{\dot{O}}}')^{\sim} \cdot \underline{\underline{O}})$$

L'équation de bilan se met sous une forme plus condensée:

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} + \text{div}_{\underline{\underline{x}}}((G \otimes \underline{\underline{u}})^{\sim}) + \text{div}_{\underline{\underline{O}}}((G \otimes \underline{\underline{\dot{O}}}')^{\sim} \cdot \underline{\underline{O}}) + \text{div}_{\underline{\underline{x}}}(\tilde{f}) + \text{div}_{\underline{\underline{O}}}((f \cdot \text{grad}_{\underline{\underline{y}}}(\underline{\underline{O}}'))^{\sim} \cdot \underline{\underline{O}}) = \tilde{a} + \tilde{p}$$

Nous proposons ensuite de développer les vitesses micro  $\underline{\underline{u}}$  et  $\underline{\underline{\dot{O}}}'$  autour des valeurs macro au point considéré,  $\underline{\underline{y}}$  et  $\underline{\underline{\zeta}}$ , en introduisant des termes de fluctuation locale  $\underline{\underline{u}}_p$  et  $\underline{\underline{\zeta}}_p$ .

On définit à tout instant  $t$  et pour  $(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{O}})$  quelconque dans  $\mathcal{E} \times \text{SO}(3)$ , et pour  $(\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{O}}'(\underline{\underline{y}}))$  dans un voisinage de  $(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{O}})$ .

$$\underline{u}(\underline{y}) = \underline{v}(\underline{x}, \underline{O}) + \underline{u}_p(\underline{y}, \underline{x}, \underline{O})$$

$$\underline{\dot{O}}'(\underline{y}) \cdot \underline{\underline{O}}'(\underline{y}) = \underline{\zeta}(\underline{x}, \underline{O}) \cdot \underline{\underline{O}} + \underline{\zeta}_p(\underline{y}, \underline{x}, \underline{O}) \cdot \underline{\underline{O}}'(\underline{y})$$

On reporte dans l'équation précédente, en développant les divergences spatiales et microstructurales dans le cas simple où il n'y a ni création ni apport:

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} + \text{grad}_{\underline{x}}(\tilde{G}) \cdot \underline{v} + \text{grad}_{\underline{O}}(\tilde{G}) : \underline{\zeta}$$

$$+ \tilde{G} \cdot (\text{div}_{\underline{x}}(\underline{v}) + \text{div}_{\underline{O}}(\underline{\zeta})) + \text{div}_{\underline{x}}((G \otimes \underline{u}_p) \sim) + \text{div}_{\underline{O}}((G \otimes \underline{\zeta}_p \cdot \underline{\underline{O}}') \sim \cdot \underline{\underline{O}}) = 0$$

La partie en gras de l'équation ci-dessus définit la dérivée particulière de la grandeur macro  $\underline{G} = \tilde{G}$ , c'est-à-dire :

$$\dot{\underline{G}} = \frac{\partial \underline{G}}{\partial t} + \text{grad}_{\underline{x}}(\underline{G}) \cdot \underline{v} + \text{grad}_{\underline{O}}(\underline{G}) : \underline{\zeta}$$

Cette définition est parfaitement en cohérence avec la définition classique de la dérivée particulière dans un milieu continu classique sans microstructure  $\dot{\underline{G}} = \frac{\partial \underline{G}}{\partial t} + \text{grad}_{\underline{x}}(\underline{G}) \cdot \underline{v}$ .

Elle recouvre également la définition que nous avons déjà donnée de la dérivée particulière de la masse volumique macroscopique.

Introduisons de nouveau les termes d'apport et de création:

$$\dot{\underline{G}} + \underline{G} \cdot (\text{div}_{\underline{x}}(\underline{v}) + \text{div}_{\underline{O}}(\underline{\zeta})) + \text{div}_{\underline{x}}((G \otimes \underline{u}_p) \sim + \tilde{f})$$

$$+ \text{div}_{\underline{O}}(((G \otimes \underline{\zeta}_p + f \cdot \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{\underline{O}}')) \cdot \underline{\underline{O}}') \sim \cdot \underline{\underline{O}}) = \tilde{a} + \tilde{p}$$

Le tenseur densité de flux macro est donc plus complexe que la simple globalisation du tenseur micro. Il se compose en effet, comme attendu, d'une partie liée aux flux spatiaux et d'une partie liée aux flux microstructuraux.

Intéressons nous en premier lieu à la partie spatiale. Elle se décompose en la somme de la globalisation du tenseur densité microstructural  $f = \tilde{f}$  et d'un terme provenant de "l'agitation locale" de la matière  $f_c = (G \otimes \underline{u}_p) \sim$ .

Ce dernier est tout-à-fait analogue aux termes qui apparaissent dans les équations de conservation semi-locale de F. GILBERT [Gilbert, 1987]:

$$\underline{\sigma}^a = \langle \underline{\sigma}_{(a)} \rangle^a - \langle \rho_{(a)} \underline{u}'_{(a)} \otimes \underline{u}'_{(a)} \rangle^a$$

avec les notations de F. GILBERT. (le tenseur de contrainte partielle de Cauchy  $\underline{\sigma}^a$  est égal à

la moyenne apparente du tenseur de Cauchy local  $\underline{\underline{\sigma}}_{(a)}$  minorée d'une partie cinématique  $\langle \rho_{(a)} \bar{\underline{\underline{u}}}'_{(a)} \otimes \bar{\underline{\underline{u}}}'_{(a)} \rangle^a$  analogue à des effets de diffusion interne au constituant a.  $\underline{\underline{\sigma}}_{(a)}$  est conventionnellement égal à  $-f$ ).

La partie microstructurale est plus originale. Elle se décompose en une partie directement liée au tenseur de flux micro  $\underline{\underline{f}} = (f \cdot \text{grad}_{\underline{\underline{y}}}(\underline{\underline{O}}')^T \underline{\underline{O}}')^{\sim} \underline{\underline{O}}$ , qui s'annule si la microstructure est uniforme, et une partie cinématique  $\underline{\underline{f}}_c = (G \otimes \underline{\underline{\zeta}}_p^T \underline{\underline{O}}')^{\sim} \underline{\underline{O}}$  dépendant de la fluctuation locale de la microvitesse.

Nous prenons la conservation de mouvement sous sa forme la plus générale au niveau micro, sans utiliser l'équation de conservation de la masse pour la transformer. La grandeur  $G$  est la quantité de mouvement  $\rho_{mi} \underline{\underline{u}}$ , sa globalisée  $\underline{\underline{G}}$  est la quantité de mouvement macro  $\rho \underline{\underline{v}}$ .

Le tenseur de flux est l'opposé du tenseur de contrainte de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}_{mi}$ , les apports extérieurs sont les forces de volume  $f_{mi}$ , les termes de production sont nuls.

Le milieu de départ est un milieu continu tridimensionnel classique, sur lequel est défini un champ de microstructure (continu et différentiable). Dans cette première approche, la microstructure n'est pas "active", au sens où nous n'introduisons pas d'efforts intérieurs liés à cette microstructure. En particulier, la conservation du moment du torseur des quantités de mouvement traduit simplement la nullité de la partie anti-symétrique de  $\underline{\underline{\sigma}}_{mi}$ .

On introduit les notations précédentes dans la forme globalisée de l'équation de conservation de la résultante du torseur des quantités de mouvement, ce qui donne:

$$\begin{aligned} & \overbrace{\frac{\partial(\rho \underline{\underline{v}})}{\partial t} + \text{div}_{\underline{\underline{x}}}(\rho \underline{\underline{v}} \otimes \underline{\underline{v}}) + \text{div}_{\underline{\underline{O}}}(\rho \underline{\underline{v}} \otimes \underline{\underline{\zeta}})}^{\text{I}} - \overbrace{\text{div}_{\underline{\underline{x}}}((\underline{\underline{\sigma}}_{mi} - \rho_{mi} \underline{\underline{u}} \otimes \underline{\underline{u}}_p)^{\sim})}^{\text{II}} \\ & - \underbrace{\text{div}_{\underline{\underline{O}}}(((\underline{\underline{\sigma}}_{mi} \cdot \text{grad}_{\underline{\underline{y}}}(\underline{\underline{O}}') - \rho_{mi} \underline{\underline{u}} \otimes \underline{\underline{\zeta}}_p)^T \underline{\underline{O}}')^{\sim} \underline{\underline{O}})}_{\text{III}} = \tilde{\underline{\underline{f}}}_{mi} = \underline{\underline{f}} \end{aligned}$$

Le terme I du membre de gauche se développe en

$$\left( \frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \text{div}_{\underline{\underline{x}}}(\rho \underline{\underline{v}}) + \text{div}_{\underline{\underline{O}}}(\rho \underline{\underline{\zeta}}) \right) \underline{\underline{v}} + \rho \left( \frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial t} + \text{grad}_{\underline{\underline{x}}}(\underline{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{v}} + \text{grad}_{\underline{\underline{O}}}(\underline{\underline{v}}) : \underline{\underline{\zeta}} \right) = \rho \dot{\underline{\underline{v}}} = \rho \underline{\underline{y}}$$

en utilisant l'équation de conservation de la masse (sans apport, ni création, ni flux macro) et

la définition de la dérivée particulaire.

$\underline{\gamma}(\underline{x}, \underline{Q})$  est la dérivée particulaire de la vitesse macro. Il s'agit donc de l'accélération spatiale de la particule située au point  $(\underline{x}, \underline{Q})$ .

L'égalité  $\rho \underline{\gamma} = (\rho_{mi} \underline{\gamma}_{mi})^{\sim} \quad (\rho \underline{\dot{v}} = (\rho_{mi} \underline{\dot{u}})^{\sim})$  n'est pas vérifiée, une partie de l'accélération micro venant contribuer à la contrainte macro.

Le terme II fournit une interprétation physique du tenseur de contrainte de Cauchy macro  $\underline{\underline{\sigma}}$ . On remarque que ;

$$(\rho_{mi} \underline{u} \otimes \underline{u}_p)^{\sim} = (\rho_{mi} (\underline{v} + \underline{u}_p) \otimes \underline{u}_p)^{\sim} = \underline{v} \otimes (\rho_{mi} \underline{u}_p)^{\sim} + (\rho_{mi} \underline{u}_p \otimes \underline{u}_p)^{\sim} = (\rho_{mi} \underline{u}_p \otimes \underline{u}_p)^{\sim} ,$$

puisque  $(\rho_{mi} \underline{u}_p)^{\sim} = 0$  par définition.

Le tenseur de contrainte de Cauchy macro provient donc du tenseur de contrainte de Cauchy au niveau micro auquel s'ajoute un terme de turbulence.

$$\underline{\underline{\sigma}} = (\underline{\underline{\sigma}}_{mi})^{\sim} - (\rho_{mi} \underline{u}_p \otimes \underline{u}_p)^{\sim}$$

Le tenseur de contrainte de Cauchy ainsi défini coïncide dans le cas quasi-statique avec le tenseur de contrainte de Cauchy tel que nous l'avons défini au chapitre précédent:

$$\underline{u}_p = 0, \quad \underline{\underline{\sigma}} = (\underline{\underline{\sigma}}_{mi})^{\sim}$$

Si  $\underline{\underline{\sigma}}_{mi}$  est symétrique, le tenseur de contrainte de Cauchy macro est également symétrique.

Le terme III introduit un nouveau tenseur de contrainte  $\underline{\underline{\xi}}$  propre aux milieux à microstructure:

$$\underline{\underline{\xi}}^T \underline{O} = ((\underline{\underline{\sigma}}_{mi} \cdot \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{O}') - \rho_{mi} \underline{u} \otimes \underline{\zeta}_{\underline{p}})^T \underline{O}')^{\sim}$$

Il est à noter que ce tenseur existe indépendamment de l'existence d'efforts intérieurs liés à la microstructure au niveau micro. Le produit  $\underline{\underline{\xi}}^T \underline{O}$  est anti-symétrique sur les composantes 2 et 3, puisque aussi bien  $\text{grad}_{\underline{y}}(\underline{O}')^T \underline{O}'$  que  $\underline{\zeta}_{\underline{p}}^T \underline{O}'$  sont anti-symétriques.

L'équation d'équilibre du milieu macro prend donc la forme :

$$\boxed{\rho \underline{\gamma} - \text{div}_{\underline{x}}(\underline{\underline{\sigma}}) - \text{div}_{\underline{Q}}(\underline{\underline{\xi}}) = \underline{f}}$$

On retrouve une équation identique, au terme d'accélération près, à celles que nous avons obtenues, aussi bien au chapitre III qu'au chapitre IV. Le tenseur  $\underline{\underline{\xi}}$  est l'analogue du premier tenseur de contrainte microstructurale que nous avons défini dans le cas des milieux de Cosserat multiparticulaires.

## V.4 Conservation de l'énergie

Nous nous intéressons à la conservation de l'énergie totale  $E$  du système (énergie cinétique et énergie interne), et nous utilisons la forme complète de l'équation de conservation, sans transformer celle-ci à l'aide des bilans de masse et de quantité de mouvement, ce qui ferait apparaître la dérivée particulaire de l'énergie interne micro, ainsi que le gradient de la vitesse micro, deux opérateurs différentiels que nous ne savons pas globaliser.

$$\frac{\partial(\rho_{mi}E)}{\partial t} + \text{div}_{\underline{y}}(\rho_{mi}E\underline{u}) = r - \text{div}_{\underline{y}}(\underline{q}) + \underline{f} \cdot \underline{u} + \text{div}_{\underline{y}}(\underline{\sigma}_{mi} \cdot \underline{u})$$

Notations:

- $E=e+c$  où  $e$  est la densité massique d'énergie interne micro et  $c$  la densité massique d'énergie cinétique micro

$$c = \frac{1}{2} \underline{u}^2$$

- $r$  est le terme d'apport extérieur volumique de chaleur
- $\underline{q}$  est le vecteur courant de chaleur

La globalisation de cette équation conduit naturellement, en utilisant le bilan de masse macro et la définition de la dérivée particulaire macro, à:

$$\begin{aligned} \text{équation V. 1} \quad \rho \dot{E} + \text{div}_{\underline{x}}((\rho_{mi} E \underline{u}_p)^{\sim}) + \text{div}_{\underline{O}}((\rho_{mi} E \underline{\zeta}_p^T \underline{O}')^{\sim} \cdot \underline{O}) &= (r + \underline{f} \cdot \underline{u}_p)^{\sim} + \underline{f} \cdot \underline{v} \\ - \text{div}_{\underline{x}}(\underline{\tilde{q}}) - \text{div}_{\underline{O}}((\underline{\tilde{q}} \cdot \underline{A})^{\sim} \cdot \underline{O}) + \text{div}_{\underline{x}}((\underline{\sigma}_{mi} \cdot \underline{u})^{\sim}) + \text{div}_{\underline{O}}((\underline{\sigma}_{mi} \cdot \underline{u} \cdot \underline{A})^{\sim} \cdot \underline{O}) \end{aligned}$$

avec  $\rho E = (\rho_{mi} E)^{\sim}$ ,  $\underline{f} = \underline{\tilde{f}}$  et  $\underline{A} = \text{grad}_{\underline{y}}(\underline{O}')^T \underline{O}'$ .

Décomposons  $\underline{u}$  dans le membre de droite

$$\begin{aligned} \text{div}_{\underline{x}}((\underline{\sigma}_{mi} \cdot \underline{u})^{\sim}) &= \text{div}_{\underline{x}}(\underline{\tilde{\sigma}}_{mi} \cdot \underline{v}) + \text{div}_{\underline{x}}((\underline{\sigma}_{mi} \cdot \underline{u}_p)^{\sim}) \\ \text{div}_{\underline{O}}((\underline{\sigma}_{mi} \cdot \underline{u} \cdot \underline{A})^{\sim} \cdot \underline{O}) &= \text{div}_{\underline{O}}((\underline{\sigma}_{mi} \cdot \underline{v} \cdot \underline{A})^{\sim} \cdot \underline{O}) + \text{div}_{\underline{O}}((\underline{\sigma}_{mi} \cdot \underline{u}_p \cdot \underline{A})^{\sim} \cdot \underline{O}) \end{aligned}$$

On introduit ensuite la définition de  $\underline{\sigma}$  et on utilise la symétrie de  $\underline{\sigma}$ .

$$\begin{aligned} \text{div}_{\underline{x}}((\underline{\sigma}_{mi} \cdot \underline{u})^{\sim}) &= \text{div}_{\underline{x}}(\underline{\sigma} \cdot \underline{v}) + \text{div}_{\underline{x}}((\rho_{mi} \underline{u}_p \otimes \underline{u}_p)^{\sim} \cdot \underline{v}) + \text{div}_{\underline{x}}((\underline{\sigma}_{mi} \cdot \underline{u}_p)^{\sim}) \\ \text{div}_{\underline{O}}((\underline{\sigma}_{mi} \cdot \underline{u} \cdot \underline{A})^{\sim} \cdot \underline{O}) &= \text{div}_{\underline{O}}(\underline{v} \cdot (\underline{\sigma}_{mi} \cdot \underline{A})^{\sim} \cdot \underline{O}) + \text{div}_{\underline{O}}((\underline{\sigma}_{mi} \cdot \underline{u}_p \cdot \underline{A})^{\sim} \cdot \underline{O}) \end{aligned}$$

On introduit ensuite la définition de  $\underline{\underline{\xi}}$  dans les termes de divergence par rapport à la microstructure, ce qui permet de faire apparaître le travail des efforts intérieurs sur la microstructure:

$$\begin{aligned} & \text{div}_{\underline{O}}(\underline{v} \cdot (\underline{\underline{\sigma}}_{mi} \cdot \underline{\underline{A}})^{\sim} \cdot \underline{\underline{O}}) + \text{div}_{\underline{O}}((\underline{\underline{\sigma}}_{mi} \cdot \underline{u}_p \cdot \underline{\underline{A}})^{\sim} \cdot \underline{\underline{O}}) = \\ & \text{div}_{\underline{O}}(\underline{v} \cdot \underline{\underline{\xi}}) + \text{div}_{\underline{O}}(\underline{v} \cdot (\rho_{mi} \underline{u} \otimes \underline{\underline{\zeta}}_{\underline{p}} \cdot {}^T \underline{\underline{O}}')^{\sim} \cdot \underline{\underline{O}}) + \text{div}_{\underline{O}}((\underline{\underline{\sigma}}_{mi} \cdot \underline{u}_p \cdot \underline{\underline{A}})^{\sim} \cdot \underline{\underline{O}}) \end{aligned}$$

En retirant des expressions ci-dessus les termes de divergence du membre de gauche de l'équation V. **Erreur! Argument de commutateur inconnu.**, on fait apparaître d'une part la divergence en espace de la globalisée de  $\rho_{mi}(\underline{v} \cdot \underline{u}_p - E) \underline{u}_p$  et d'autre part la divergence en microstructure de la globalisée de  $\rho_{mi}(\underline{v} \cdot \underline{u}_p - E) \underline{\underline{\zeta}}_{\underline{p}} \cdot {}^T \underline{\underline{O}}'$  simplement contractée avec  $\underline{\underline{O}}$ .

$$\begin{aligned} & \text{div}_{\underline{x}}((\underline{\underline{\sigma}}_{mi} \cdot \underline{u})^{\sim}) - \text{div}_{\underline{x}}((\rho_{mi} E \underline{u}_p)^{\sim}) = \\ & \text{div}_{\underline{x}}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) + \text{div}_{\underline{x}}((\rho_{mi} \underline{u}_p \otimes \underline{u}_p)^{\sim} \cdot \underline{v}) + \text{div}_{\underline{x}}((\underline{\underline{\sigma}}_{mi} \cdot \underline{u}_p)) - \text{div}_{\underline{x}}((\rho_{mi} E \underline{u}_p)^{\sim}) = \\ & \text{div}_{\underline{x}}(\rho_{mi}(\underline{u}_p \cdot \underline{v} - E) \underline{u}_p) + \text{div}_{\underline{x}}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) + \text{div}_{\underline{x}}((\underline{\underline{\sigma}}_{mi} \cdot \underline{u}_p)) \\ & \text{div}_{\underline{O}}((\underline{\underline{\sigma}}_{mi} \cdot \underline{u} \cdot \underline{\underline{A}})^{\sim} \cdot \underline{\underline{O}}) - \text{div}_{\underline{O}}((\rho_{mi} E \underline{\underline{\zeta}}_{\underline{p}} \cdot {}^T \underline{\underline{O}}')^{\sim} \cdot \underline{\underline{O}}) = \\ & \text{div}_{\underline{O}}(\rho_{mi}(\underline{v} \cdot \underline{u}_p - E) \underline{\underline{\zeta}}_{\underline{p}} \cdot {}^T \underline{\underline{O}}')^{\sim} \cdot \underline{\underline{O}}) + \text{div}_{\underline{O}}(\underline{v} \cdot \underline{\underline{\xi}}) + \text{div}_{\underline{O}}((\underline{\underline{\sigma}}_{mi} \cdot \underline{u}_p \cdot \underline{\underline{A}})^{\sim} \cdot \underline{\underline{O}}) \end{aligned}$$

Reprenons l'expression de  $E$  en fonction de l'énergie interne  $e$  et de l'énergie cinétique  $1/2 \underline{u}_p^2$ ;

$$\begin{aligned} \rho_{mi}(\underline{v} \cdot \underline{u}_p - E) \underline{u}_p &= \rho_{mi}(\underline{v} \cdot \underline{u}_p - \frac{1}{2} \underline{u}^2 - e) \underline{u}_p = -\rho_{mi}(e + \frac{1}{2} \underline{u}_p^2) \underline{u}_p + (\frac{1}{2} \rho_{mi} \underline{u}_p) \underline{v}^2 \\ \rho_{mi}(\underline{v} \cdot \underline{u}_p - E) \underline{\underline{\zeta}}_{\underline{p}} \cdot {}^T \underline{\underline{O}}' &= -\rho_{mi}(e + \frac{1}{2} \underline{u}_p^2) \underline{\underline{\zeta}}_{\underline{p}} \cdot {}^T \underline{\underline{O}}' + (\frac{1}{2} \rho_{mi} \underline{\underline{\zeta}}_{\underline{p}} \cdot {}^T \underline{\underline{O}}') \underline{v}^2 \end{aligned}$$

Les termes en  $\underline{v}^2$  s'annulent par globalisation. On convient de noter  $E_p$  l'énergie micro "réduite" ne prenant en compte que la part de l'énergie cinétique due à la perturbation du champ macro:  $E_p = e + \frac{1}{2} \underline{u}_p^2$ .

Reprenons l'expression de la conservation de l'énergie macro, en utilisant les développements précédents.

$$\begin{aligned} \rho \dot{E} &= (r + \underline{f} \cdot \underline{u}_p)^{\sim} + \underline{f} \cdot \underline{v} + \text{div}_{\underline{x}}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) + \text{div}_{\underline{O}}(\underline{v} \cdot \underline{\underline{\xi}}) \\ & - \text{div}_{\underline{x}}(\underline{\underline{q}} + (\rho_{mi} E_p \underline{u}_p)^{\sim} - (\underline{\underline{\sigma}}_{mi} \cdot \underline{u}_p)^{\sim}) - \text{div}_{\underline{O}}(((\underline{q} \cdot \underline{\underline{A}})^{\sim} + (\rho_{mi} E_p \underline{\underline{\zeta}}_{\underline{p}} \cdot {}^T \underline{\underline{O}}')^{\sim} - (\underline{\underline{\sigma}}_{mi} \cdot \underline{u}_p \cdot \underline{\underline{A}})^{\sim}) \cdot \underline{\underline{O}}) \end{aligned}$$

Cette expression suggère fortement de poser les définitions suivantes.

- Les apports de chaleur volumiques macro  $\mathbf{r}$  proviennent d'une part des apports micro  $r$ , et d'autre part du travail des forces de volume  $f$  dans les perturbations locales  $\underline{u}_p$ .

$$\mathbf{r} = (r + \underline{f} \cdot \underline{u}_p)^\sim$$

- Le vecteur courant de chaleur se transforme au niveau micro en un couple  $\mathbf{q} = (\underline{q}_x, \underline{q}_Q)$ .

$$\underline{q}_x = \underline{\tilde{q}} + (\rho_{mi} E_p \underline{u}_p)^\sim - (\underline{\sigma}_{mi} \cdot \underline{u}_p)^\sim \text{ est le vecteur courant de chaleur macro.}$$

C'est un élément de l'espace tangent à  $\mathcal{E}$  en  $\underline{x}$  ( $\mathbb{R}^3$ ) dont les diverses parties ont une interprétation physique claire.

$\underline{\tilde{q}}$  est le transport spatial au niveau macro du vecteur courant de chaleur.

$(\rho_{mi} E_p \underline{u}_p)^\sim$  est le flux d'énergie (interne + cinétique) liée uniquement aux perturbations de la vitesse macro.

$-(\underline{\sigma}_{mi} \cdot \underline{u}_p)^\sim$  est le flux de contrainte créé par le mouvement local des particules.

$$\underline{q}_Q = (\underline{q} \cdot \underline{A})^\sim \cdot \underline{Q} + (\rho_{mi} E_p \underline{\zeta}_{=p}^T \underline{Q}')^\sim \cdot \underline{Q} - ((\underline{\sigma}_{mi} \cdot \underline{u}_p) \cdot \underline{A})^\sim \cdot \underline{Q} \text{ est le tenseur courant de}$$

**chaleur** macroscopique. Vérifions qu'il s'agit bien d'un élément de l'espace tangent à  $SO(3)$  en  $\underline{Q}$ , c'est-à-dire qu'il s'écrit comme le produit simple d'un tenseur antisymétrique par  $\underline{Q}$ ;

$\underline{A}$  est antisymétrique sur les variables 2 et 3, donc  $\underline{q} \cdot \underline{A}$  et  $-(\underline{\sigma}_{mi} \cdot \underline{u}_p) \cdot \underline{A}$  sont des tenseurs d'ordre 2 antisymétriques.

$\underline{\zeta}_{=p}^T \cdot \underline{Q}'$  est antisymétrique par construction.

Les différentes parties de ce tenseur courant de chaleur sont tout-à-fait équivalentes aux composantes du vecteur courant de chaleur décrites plus haut, les grandeurs micro étant transportées dans la partie microstructurale de l'espace "profond" d'arrivée.

- les termes restant dans l'équation sont les termes de flux de contraintes:

- un terme classique -  $\underline{\sigma} \cdot \underline{v}$  -

- un terme de transport spatial de la contrainte microstructurale -  $\underline{v} \cdot \underline{\xi}_{=}$  - . Le sens

du produit  $(\underline{v} \cdot \underline{\xi}_{=})$  au lieu de  $\underline{\xi}_{=} \cdot \underline{v}$  provient de la définition du gradient micro d'un tenseur

d'ordre deux que nous avons choisie, à savoir  $(\text{grad}_{\underline{y}}(\underline{A}))_{i,j,k} = \frac{\partial A_{j,k}}{\partial y_i}$ .

On retrouve avec ces définitions une expression dont la forme est proche de celle de l'équation de conservation de l'énergie "classique":

$$\underline{\rho \dot{E}} = \underline{\mathbf{r}} + \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}} + \text{div}_{\underline{\mathbf{x}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \underline{\mathbf{v}}) + \text{div}_{\underline{\underline{O}}}(\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}}) - \text{div}_{\underline{\mathbf{x}}}(\underline{\mathbf{q}}_{\underline{\mathbf{x}}}) - \text{div}_{\underline{\underline{O}}}(\underline{\mathbf{q}}_{\underline{\underline{O}}})$$

On définit la densité massique d'énergie cinétique macro par  $\mathbf{c} = 1/2 \underline{\mathbf{v}}^2$  et la densité d'énergie interne  $\mathbf{e} = \mathbf{E} - \mathbf{c}$ .

La dérivée particulière de l'énergie cinétique est  $\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{v}}$ , et en utilisant l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on fait apparaître la dérivée particulière de l'énergie interne macro.

$$\underline{\rho \dot{e}} = \underline{\mathbf{r}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \text{grad}_{\underline{\mathbf{x}}}(\underline{\mathbf{v}}) + \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}}{\partial \underline{\underline{O}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}} - \text{div}_{\underline{\mathbf{x}}}(\underline{\mathbf{q}}_{\underline{\mathbf{x}}}) - \text{div}_{\underline{\underline{O}}}(\underline{\mathbf{q}}_{\underline{\underline{O}}})$$

Terminons l'étude de cette équation de conservation de l'énergie par l'identification de l'énergie interne macro. Reprenons en effet la définition de l'énergie totale macro:

$$\begin{aligned} \underline{\rho \mathbf{E}} &= \underline{\rho}(\mathbf{e} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{v}}^2) = (\underline{\rho}_{\text{mi}}(\mathbf{e} + \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{u}}_p)^2))^{\sim} \\ &= (\underline{\rho}_{\text{mi}}(\mathbf{e} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_p^2 + \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{u}}_p))^{\sim} + \frac{1}{2} \underline{\rho} \underline{\mathbf{v}}^2 \\ &= (\underline{\rho}_{\text{mi}} E_p)^{\sim} + \frac{1}{2} \underline{\rho} \underline{\mathbf{v}}^2 \end{aligned}$$

Soit

$$\underline{\rho \mathbf{e}} = (\underline{\rho}_{\text{mi}} E_p)^{\sim}$$

La densité volumique d'énergie interne macro est donc la globalisée de la densité volumique de l'énergie interne micro augmentée des termes d'énergie cinétique de perturbation.

Nous n'avons pas dans les développements précédents fait apparaître d'énergie liée à l'évolution macro de la microstructure. Ceci provient du fait que les équations du milieu de départ sont des équations de milieu continu tridimensionnel classique sur lequel on a défini un champ de microstructure "libre", qui n'intervient pas dans les bilans au niveau micro.

Notons enfin que ces développements ne sont que les préliminaires à une étude plus approfondie du comportement macro. La poursuite de l'étude devra s'appuyer sur la globalisation de l'équation de bilan d'entropie, de manière à pouvoir écrire au niveau macro l'inégalité de Clausius-Duhem.

La liaison entre directement les énergies et les grandeurs macro est également à faire, et on se ramène là à une problématique proche de celle du passage micro-macro dans les milieux hétérogènes classiques.

# CONCLUSIONS

## Apports

L'ensemble du travail a été consacré à une réflexion sur les problèmes liés à la méthodologie de construction des modèles de milieux continus à microstructure. Une terminologie précise a été proposée, qui permet de différencier les divers types de matériaux que l'on appelle classiquement matériaux multiphasiques. Nous avons développé la notion d'espace profond, qui permet d'enrichir la cinématique des corps au prix d'une description géométrique plus complète.

Trois méthodes ont été mises en œuvre pour construire les équations d'équilibre de ces milieux, deux d'entre elles s'appuyant sur le principe des puissances virtuelles, la troisième consistant en un passage micro-macro.

La première partie du chapitre 3 propose une construction basée sur l'existence d'une distribution sur l'univers d'observation d'un tenseur d'efforts interparticulaires. On donne ainsi la forme naturelle des efforts extérieurs et intérieurs d'un milieu continu, en retrouvant en particulier de manière automatique la propriété d'objectivité de la puissance virtuelle des efforts intérieurs. La méthode permet également de préciser les hypothèses physiques sous-tendues par les développements au premier gradient en microstructure. On obtient ainsi, par exemple, avec les notations du chapitre 3, une définition du tenseur de contrainte de Cauchy à partir des efforts interparticulaires

$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \int_{\mathcal{E}'(\underline{x})} \frac{1}{2} (\underline{y} - \underline{x}) \otimes \underline{a}(\underline{x}, \underline{y}) dV(\underline{y})$ , ou du tenseur de contrainte de filtration d'un milieu de Cosserat multiparticulaire:

$$\underline{\underline{C}}(\underline{x}, \underline{r}) = \int_{\mathcal{E}'(\underline{x})} \int_{\mathcal{N}(\underline{r})} \frac{1}{2} \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{s})) \otimes \underline{a}((\underline{x}, \underline{r}), (\underline{y}, \underline{s})) d\mu(\underline{s}) dV(\underline{y})$$

La deuxième partie de ce chapitre nous conduit à l'obtention d'équations similaires aux précédentes par l'application de la méthode des puissances virtuelles, étendue au cas de l'espace profond, et où on a préféré la notion de changement d'observateur galiléen à celle de mouvement virtuel rigidifiant. La comparaison des résultats de ces deux parties permet de donner quelques conclusions quant à la signification physique des tenseurs duaux des variables cinématiques introduites. Le tenseur de contraintes de désorientation, dual du gradient en espace de la vitesse de rotation de la microstructure, est l'intégrale du produit tensoriel d'un tenseur de désorientation rendant compte du désordre local de la texture par le moment résultant du tenseur d'actions interparticulaires.

Le résultat principal du chapitre quatre est l'écriture dans le cadre général des microstructures d'orientation transitives des équations de bilan d'un milieu multiparticulaire à partir de celles du milieu monoparticulaire. L'outil ainsi développé est appliqué au cas particulier des milieux micropolaires multiparticulaires, fournissant un éclairage complémentaire sur les grandeurs

constitutives du modèle. En particulier, la notion de tenseur de désorientation locale réapparaît naturellement dans la définition des grandeurs macroscopiques.

Le chapitre cinq est un chapitre d'ouverture sur le problème plus complexe de la détermination du comportement macroscopique à partir du comportement micro. On y donne quelques indications sur la marche à suivre, en particulier sur la globalisation des équations de conservation de l'énergie.

### **perspectives**

Les potentialités d'utilisation de modèles construits par globalisation de milieux monoparticulaires dont le comportement est relativement bien défini sont nombreuses. Notre attention s'est surtout tournée vers les milieux à orientation spatiale et plus précisément vers les problèmes liés à la non-objectivité des représentations de la microstructure. On pense assez naturellement aux matériaux polycristallins comme premier champ d'application, d'autant plus qu'ils sont indirectement à l'origine du travail.

Une approche expérimentale de l'évolution de la texture d'un polycristal est en cours et fait l'objet de la thèse de Corinne Lineau, sous la direction de C. Rey. Elle consiste à suivre l'évolution de la déformation plastique et de la rotation cristalline locale d'un polycristal de fer lors d'un essai de déformation plane dans un microscope électronique. Un logiciel de simulation de l'évolution de la texture d'un polycristal plan utilisant les résultats présentés dans cette étude est en cours de réalisation. Les résultats de l'analyse de plusieurs centaines de points à cinq niveaux de déformation serviront de première validation à ce logiciel et permettront des comparaisons avec les modèles classiques.

Les développements théoriques s'orientent vers l'étude de la recristallisation, avec en particulier l'écriture d'un critère de progression d'un front de changement de phase. Il reste en outre à analyser avec beaucoup plus de précision la validité des hypothèses de localisation de l'interaction des grains sur les grains équiorientés, ainsi que relâcher l'hypothèse stricte de continuité de l'orientation et de traiter le cas des discontinuités.

Les concepts introduits dans cette étude sur les milieux multiconstituant ou multiphasique devraient trouver leur domaine d'applicabilité du côté des matériaux hétérogènes. On pense bien sûr aux bétons, matériaux multiconstituants par excellence, et où les changements de phases peuvent également revêtir une importance cruciale, comme c'est le cas dans les problèmes de tenue au feu des bétons à hautes performances.

Il est clair également que l'applicabilité de la méthode sera grandement renforcée par la mise au point d'un procédé de détermination du comportement macro par globalisation. Nous avons déjà signalé les problèmes théoriques soulevés par cette détermination, qui reposent essentiellement dans l'écriture des liaisons, au niveau macro, entre grandeurs énergétiques et variables cinématiques.





# REFERENCES

## BIBLIOGRAPHIQUES

- Awerbuch J. and Madhukar S.** (1985) Notched strength of composite laminates: predictions and experiments: a review,  
*J. Reinforced Plastics and Composites*, **10**, pp. 293-300
- Bensoussan A., Lions J.L. and Papanicolau G.** (1978) Asymptotic analysis for periodic structures,  
*North Holland, Amsterdam*
- Berveiller M. and Zaoui A.** (1979) An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals,  
*J. Mech. Phys. Solids*, **26**, pp. 325-344
- de Borst R. and Mühlhaus H.B.** (1992) Gradient dependant plasticity: formulation and algorithmic aspects,  
*Int. J. Num. Math. Eng.*, **35**, pp. 521-539
- Brocato M.** (1994) Un modèle thermomécanique de polycristal pour l'étude des bandes de cisaillement  
*thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées*
- Brocato M., Tamagny P. and Ehrlacher A.** (1995) A two-dimensional polycrystal model in a deep space representation  
*Meccanica*, **30**, pp.641-663
- Brocato M., Tamagny P. and Ehrlacher A.** (1996) On the relationship between continuum with microstructure and a deep space model for polycrystals  
*ZAMM*
- Capriz G. and Podio-Guidugli P.** (1981) Materials with finite-dimensionnal structure  
in *Mechanics of Structured Media*, (Selvadurai ed.) Elsevier, pp. 255-268
- Capriz G. and Podio-Guidugli P.** (1983) Structure Continua from a Lagrangian point of view  
*Ann. Mat. Pura Appl.*, **135**, pp. 1-25
- Capriz G.** (1984) Continui con microstruttura  
*Boll. Un. Mat. Ital.*, **3A**, pp. 181-195

- Capriz G.** (1985(a)) Introductory remarks to the dynamics of continua with Microstructure in *Mathematical Methods and Models in Mechanics*, Banach Center Publ., **15**, 85-109
- Capriz G.** (1985(b)) Continua with Latent Microstructure *Arch. Rational Mech. Anal.*, **90**, pp. 43-56
- Capriz G.** (1989) Continua with Microstructure Springer Verlag, New-York-Berlin-Heidelberg
- Capriz G. and Virga E.G.** (1990) Interactions in general continua with microstructure *Arch. Rational Mech. Anal.*, **109**, pp. 323-342
- Coleman B. and Noll W.** (1959) On the ThermoStatics of Continuous Media *Arch. Rational Mech. Anal.*, **4**, pp. 97-128
- Cosserat E. et F.** (1909) Théorie des Corps Déformables Hermann, Paris
- Dang Van K.** (1973) Sur la résistance à la fatigue des métaux *Mémorial de l'Artillerie Française, Sciences et Techniques de l'Armement*, fascicule 3.
- Dluzewski P.H.** (1991) Finite deformations of polar media in angular coordinates *Arch. Mech.*, **43** (N° 6), pp. 783-793
- Eriksen J.L.** (1966) Some magnetohydrodynamics effects in liquid crystals *Arch. Rational Mech. Anal.*, **23**, pp. 265-283
- Eringen A.C.** (1965) Mechanics of micropolar materials *Proc. of the Xith Intern. Congr. of Applied Mechanics*, München, p. 131
- Eringen A.C.** (1967) Linear theory of micropolar viscoelasticity *Int. J. Engng. Sci.*, **5**, p. 191
- Eringen A.C.** (1968) Mechanics of micromorphic continua *Mechanics of Generalized Continua, IUTAM Symposium*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 18-35
- Frémond M. and Nedjar B.** (1996) Damage, gradient of damage and principle of virtual power *Int. J. Solids Structures*, **33**, N° 8, pp 1083-1103
- Frémond M. and Nedjar B.** (1993) Endommagement et principe des puissances virtuelles *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **317**, Série II, pp 857-864
- Germain P.** (1973) La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus - 1<sup>ère</sup> Partie, Théorie du second gradient, *J. Mécanique*, **12**, pp. 235-274
- Germain P.** (1973) The method of virtual power in continuum - Part 2: microstructure *SIAM, J. Appl. Math.*, **25**, N°3, pp. 556-575

- Germain P.** (1986) Cours de Mécanique  
*Ecole polytechnique*, vol. 1
- Gilbert F.** (1987) Descriptions Thermo-Mécaniques de Milieux à plusieurs Constituants et  
Application aux Milieux Poreux Saturés  
*Thèse de doctorat d'état*, Université Pierre et Marie Curie
- Green A.E.** (1965) Micro-materials and multipolar continuum mechanics  
*Int. J. Engng. Sci.*, vol 3, pp. 533-537
- Green A.E. and Rivlin R.S.** (1964) Multipolar continuum mechanics,  
*Arch. Rational Mech. Anal.*, vol.16, pp. 113-147
- Green A.E. and Naghdi P.M.** (1968) The Cosserat surface,  
*Mechanics of Generalized Continua, IUTAM Symposium*,  
Springer-Verlag, Berlin, pp. 36-48
- Grioli G.** (1968) On the thermodynamics potential of Cosserat Continua,  
*Mechanics of Generalized Continua, IUTAM Symposium*,  
Springer-Verlag, Berlin, pp. 63-68
- Hermann G. and Achenbach J.D.** (1968) Applications of theories of generalized Cosserat  
continua to the dynamics of composite materials,  
*Mechanics of Generalized Continua, IUTAM Symposium*,  
Springer-Verlag, Berlin, pp. 69-79
- Kröner E.** (1980) Linear properties of random media - the systematic theory  
*Comportements rhéologiques et structure des matériaux*,  
*CR 15<sup>ème</sup> coll. G.F.R.*, Paris, pp. 15-40
- Lakes R.S.** (1986) Experimental microelasticity of two porous solids  
*Int. J. Solids Structures*, **22**, pp. 55-63
- Leborgne D.** (1982) Calcul différentiel et géométrie  
Presses Universitaires de France, Paris
- Lelong-Ferrand J.** (1963) Géométrie différentielle  
Masson, Paris
- Maugin G.A. and Eringen A.C.** (1977) On the equations of the electrostatics of  
deformable bodies of finite extent  
*J. de Mécanique*, **16**, pp. 101-147
- Maugin G.A.** (1980) The method of virtual power in continuum mechanics: application to  
coupled fields  
*Acta Mech.*, **35**, pp. 1-70
- Mindlin R.D.** (1964) Microstructure in linear elasticity  
*Arch. Rational Mech. Anal.*, **4**, pp. 50-78

- Mindlin R.D.** (1968) Theories of elastic continuum and crystal lattice theories  
*Mechanics of Generalized Continua, IUTAM Symposium,*  
Springer-Verlag, Berlin, pp. 312-320
- Noll W.** (1958) A Mathematical Theory of the Mechanical Behavior of Continuous Media  
*Arch. Rational Mech. Anal.*, **2**, pp. 197-226
- Noll W.** (1962) Motion with Constant Stretch History  
*Arch. Rational Mech. Anal.*, **11**, pp. 97-105
- Noll W.** (1967) Materially Uniform Simple Bodies with Inhomogeneities  
*Arch. Rational Mech. Anal.*, **27**, pp. 1-32
- Noll W.** (1972) A New Mathematical Theory of Simple Materials  
*Arch. Rational Mech. Anal.*, **48**, pp. 1-50
- Noll W.** (1973) Lectures on the Foundations of Continuum Mechanics and Thermodynamics  
*Arch. Rational Mech. Anal.*, **52**, pp. 62-92
- Okui Y., Horii H. and Akiyama N.** (1993) A continuum theory for solids containing microdefects  
*Int. J. Engng. Sci.*, **31**, pp. 735-749
- Olver P.J.** (1986) Applications of Lie groups to differential equations  
Springer-Verlag, New-York-Berlin-Heidelberg-Tokyo
- Rivlin R.S.** (1968) Generalized mechanics of continuous media  
*Mechanics of Generalized Continua, IUTAM Symposium,*  
Springer-Verlag, Berlin, pp. 1-17
- Stojanovic R.** (1968) Dislocations in the generalized elastic Cosserat continuum  
*Mechanics of Generalized Continua, IUTAM Symposium,*  
Springer-Verlag, Berlin, pp. 152-155
- Suquet P.M.** (1982) Plasticité et homogénéisation  
*Thèse de doctorat, Univ. Paris VI, Paris*
- Teodosiu C.** (1968) Continuous distribution of dislocations in hyperelastic material of grade 2  
*Mechanics of Generalized Continua, IUTAM Symposium,*  
Springer-Verlag, Berlin, pp. 279-285
- Toupin R.A.** (1962) Elastic materials with couple-stresses  
*Arch. Rational Mech. Anal.*, **11**, pp. 385-414
- Toupin R.A.** (1964) Theory of elasticity with couple-stresses  
*Arch. Rational Mech. Anal.*, **17**, pp. 85-112
- Toupin R.A.** (1968) Dislocated and oriented media  
*Mechanics of Generalized Continua, IUTAM Symposium,*  
Springer-Verlag, Berlin, pp. 126-140

- Truesdell C. and Noll W.** (1965) The Non-linear Field Theories of Mechanics  
*Encyclopedia of Physics*, vol. III/3, Berlin-Heidelberg-New-York, Springer
- Vardoulakis I., Papamichos E. and Sulem J.** -(1994) A second-gradient plasticity model for granular rocks  
*Proc. U.S.-Europe Workshop on Fracture and Damage in Quasibrittle Structures: Experiment, modelling and computer analysis*  
Z.P. Bazant *et al.* (eds.) Prague, pp. 99-111
- Wang C.C.** (1967) On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations  
*Arch. Rational Mech. Anal.*, **27**, pp. 33-94



## ANNEXE

# LA METHODE DES PUISSANCES VIRTUELLES

Nous nous proposons d'établir les équations d'équilibre d'un milieu tridimensionnel classique dans le cadre d'une théorie au premier gradient, en nous appuyant sur une description des efforts par le biais des puissances virtuelles, sans introduire "à priori" de distinction entre efforts intérieurs et extérieurs, la différence se faisant par le principe d'objectivité des efforts intérieurs.

### **Les systèmes d'efforts globaux**

L'objectif de la méthode des puissances virtuelles est de décrire les efforts s'exerçant sur un ensemble de particules  $S$ , en établissant en outre les relations reliant ces efforts entre eux ("équations d'équilibre"). La méthode classiquement utilisée s'appuie sur un raisonnement en quatre étapes:

- ① définitions des espaces de mouvements "intéressants" de  $S$  et des sous-systèmes  $S$  de  $S$ 
  - ♣ mouvements virtuels sur  $S$  (resp.  $S$ )  $\hat{U}(S)$  (resp.  $\hat{U}(S)$ )
  - ♣ mouvements virtuels rigidifiants  $S$  (resp.  $S$ )  $\hat{U}_R(S)$  (resp.  $\hat{U}_R(S)$ )
- ② postulat d'existence et choix de la forme de trois formes linéaires sur  $\hat{U}(S)$ :
  - $\mathcal{P}_e$ , la puissance virtuelle des efforts extérieurs
  - $\mathcal{P}_i$ , la puissance virtuelle des efforts intérieurs
  - $\mathcal{A}$ , la puissance virtuelle des quantités d'accélération

③ écriture du Principe des Puissances Virtuelles et traitement des équations

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall S \subseteq \mathbf{S} \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \hat{U}(S) & \rho_i(\hat{\mathbf{u}}) + \rho_e(\hat{\mathbf{u}}) = \mathcal{A}(\hat{\mathbf{u}}) \\ \forall \hat{\mathbf{u}} \in \hat{U}_R(S) & \rho_i(\hat{\mathbf{u}}) = 0 \end{array} \right.$$

④ déduction des équations d'équilibre et des conditions aux limites

Cette méthode systématique permet de construire simplement beaucoup de modèles mécaniques. Elle suppose toutefois un certain nombre d'hypothèses sous-jacentes au principe des puissances virtuelles qu'il est nécessaire de mettre en évidence. Donnons simplement comme exemple, dans la construction d'un modèle mécanique de milieu continu tridimensionnel classique, l'hypothèse de "restrictivité" de la puissance des efforts extérieurs. La forme linéaire habituellement choisie pour cette puissance sur un sous-système  $S$  de  $\mathbf{S}$  est composée d'un terme de surface sur  $\partial S$  faisant intervenir en un point  $\underline{x}$  de cette surface des efforts propres à  $S$ , et d'un terme de volume en un point  $\underline{x}$  intérieur à  $S$  indépendant de ce sous-système. On peut se poser la question de savoir si ces efforts extérieurs surfaciques sur un sous-système ont bien la nature d'efforts extérieurs au sens où on l'entend habituellement, dans la mesure où on peut donner une définition précise des efforts extérieurs sur un (sous-) système.

De plus, cette méthode nécessite de faire un grand nombre de choix pour être mise en oeuvre de manière efficace. Cette liberté est à l'origine de la grande diversité des modèles que l'on peut bâtir à l'aide de cette méthode, mais elle demande à l'utilisateur une intuition importante quant aux résultats qu'il attend de sa modélisation. Pour donner un exemple simple sur un modèle classique de milieu continu tridimensionnel dans une théorie au premier gradient, on a coutume de choisir la puissance virtuelle des efforts extérieurs sous la forme suivante

$$\rho_e(\hat{\mathbf{u}}) = \int_S \underline{f} \cdot \hat{\mathbf{u}} dV + \int_{\partial S} \underline{F} \cdot \hat{\mathbf{u}} dS$$

c'est-à-dire sans faire intervenir de termes en  $\underline{\underline{B}} : \underline{\underline{grad}}(\hat{\mathbf{u}})$ , par exemple, comme on le fait pour la puissance virtuelle des efforts intérieurs. S'il est évident en effet, à *posteriori*, qu'il ne faut pas introduire ce type d'efforts extérieurs, la partie symétrique de  $\underline{\underline{B}}$  ne pouvant pas être un effort extérieur au sens classique, rien dans la méthode, qui ne guide pas de manière précise le choix de la forme des puissances virtuelles, n'interdirait de le faire.

L'exemple des milieux de type milieux de Cosserat est à cet égard très caractéristique. Une écriture juste des puissances virtuelles nécessite l'introduction d'un terme linéaire fonction de la vitesse de rotation de la microstructure tout à la fois dans la puissance des efforts extérieurs et dans la puissance des efforts intérieurs (chapitre III, p88):

$$P_i = \int_{\Omega} \int_{\mathcal{M}} [\underline{\zeta} \cdot \underline{\omega} - \underline{\tau} : \underline{\underline{grad}}_{\underline{x}}(\underline{u}) - \underline{\underline{v}} : \underline{\underline{grad}}_{\underline{x}}(\underline{\omega})] dv dV$$

$$P_{ext} = \int_{\Omega} \int_{\mathcal{M}} \underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{\psi} \cdot \underline{\omega} dv dV + \int_{\partial\Omega} \int_{\mathcal{M}} \underline{t} \cdot \underline{u} + \underline{M} \cdot \underline{\omega} dv dS$$

Le "modélisateur" est donc apparemment libre de son choix pour la forme de la puissance virtuelle des efforts extérieurs et de la puissance virtuelle des efforts intérieurs. Il semble en fait que le choix de la forme de l'une de ces deux puissances entraîne des restrictions sur l'autre. Autrement dit, l'espace vectoriel des puissances virtuelles des efforts intérieurs dans  $\mathcal{C}$  et l'espace vectoriel des puissances des efforts extérieurs sur  $\mathcal{C}$ , qui sont deux sous-espaces de l'espace des formes linéaires sur  $\hat{U}(\mathcal{C})$ , ne sont pas indépendants.

C'est la nécessité de mettre cette dépendance en évidence qui nous conduit à proposer l'approche suivante.

On s'intéresse donc à un ensemble de particules  $\mathcal{C}$  appelé corps, défini à l'instant  $t$  par une distribution de masse  $\rho$  dans  $\mathcal{E}$ , dont le support  $\Omega$  constitue le domaine occupé par le corps  $\mathcal{C}$  à l'instant  $t$ . On introduit également  $\hat{U}(\mathcal{E})$ , espace vectoriel des mouvements virtuels de  $\mathcal{E}$ . Le choix de  $\hat{U}(\mathcal{E})$ , comme le souligne Germain [Germain, 1973a] permet une description plus ou moins fine du comportement des objets de l'étude. En règle générale, les éléments de  $\hat{U}(\mathcal{E})$  sont des champs de vecteurs sur  $\mathcal{E}$  vérifiant un certain nombre de contraintes de continuité et de dérivabilité. La seule restriction que nous imposons a priori au choix de  $\hat{U}(\mathcal{E})$  est qu'il constitue un espace vectoriel normé.

[Ainsi, dans la théorie classique du milieu continu tridimensionnel développée au premier gradient, on peut prendre pour  $\hat{U}(\mathcal{E})$  l'espace des champs de vecteurs sur  $\mathcal{E}$  à variations bornées.]

$\hat{U}(\mathcal{C})$  est le sous-espace de  $\hat{U}(\mathcal{E})$  constitué des mouvements virtuels à support inclus dans  $\Omega$  et  $\hat{U}_R(\mathcal{C})$  est le sous-espace de  $\hat{U}(\mathcal{C})$  des mouvements virtuels rigidifiant  $\mathcal{C}$ .

On note  $A$  la tribu borélienne de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{P}$  l'espace des applications  $P$  de  $\hat{U}(\mathcal{E}) \times A$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $P(\hat{u}, \omega)$  soit linéaire et continue en  $\hat{u}$ , additive d'espace et finie en  $\omega$ , et uniformément bornée :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (\hat{u}, \hat{v}) \in \hat{U}(\mathcal{E}), \forall \omega \in A & P(\lambda \hat{u} + \mu \hat{v}, \omega) = \lambda P(\hat{u}, \omega) + \mu P(\hat{v}, \omega) \\ \forall \hat{u} \in \hat{U}(\mathcal{E}), \forall (\omega, \omega') \in A^2 & P(\hat{u}, \omega \cup \omega') = P(\hat{u}, \omega) + P(\hat{u}, \omega') \\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \hat{u} \in \hat{U}(\mathcal{E}), \forall \omega \in A & |P(\hat{u}, \omega)| \leq \varepsilon \|\hat{u}\| \end{array} \right.$$

On définit les sous-espaces de  $\mathcal{P}$  suivant;

♣ à  $\omega$  donné,  $\mathcal{P}_{eg}^\omega$  est l'espace des applications telles que la valeur de  $P(\hat{u}, \mathcal{E})$  pour tout  $\hat{u}$  de  $\hat{U}(\omega)$  soit nulle.

$$\mathcal{P}_{eg}^\omega = \{P \in \mathcal{P}; \forall \hat{u} \in \hat{U}(\omega), P(\hat{u}, \mathcal{E}) = 0\}$$

♣  $\mathcal{P}_i$  est l'espace des applications telles que, pour un  $\omega$  quelconque, la valeur de  $P(\hat{u}, \omega)$  soit nulle pour tout  $\hat{u}$  de  $\hat{U}_R(\omega)$ .

$$\mathcal{P}_i = \{P \in \mathcal{P}; \forall \omega \in A, \forall \hat{u} \in \hat{U}_R(\omega), P(\hat{u}, \omega) = 0\}$$

Considérons l'application  $\|\cdot\|$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbb{R}^+$  suivante:

$$\|\cdot\|: \mathcal{P} \mapsto \|\mathcal{P}\| = \sup_{\hat{u} \in B_1, \omega \in A} |\mathcal{P}(\hat{u}, \omega)|$$

où  $B_1$  est la boule unité de  $\hat{U}(\mathcal{E})$ . Cette application est bien définie pour tout  $\mathcal{P}$ , puisque les applications  $p$  que l'on a choisies sont uniformément bornées (c'est-à-dire bornées indépendamment de  $\omega$ ). Les trois propriétés suivantes sont par ailleurs immédiates:

- ◆  $\|\mathcal{P}\| = 0 \Leftrightarrow \mathcal{P} \equiv 0_{\mathcal{P}}$
- ◆  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathcal{P} \in \mathcal{P}, \|\lambda \mathcal{P}\| = |\lambda| \cdot \|\mathcal{P}\|$
- ◆  $\forall (\mathcal{P}, \mathcal{P}') \in \mathcal{P}^2, \|\mathcal{P} + \mathcal{P}'\| \leq \|\mathcal{P}\| + \|\mathcal{P}'\|$

Cette application définit donc une norme dans  $\mathcal{P}$ . Nous allons montrer que le sous-espace  $\mathcal{P}_i$  est fermé au sens de la topologie induite dans  $\mathcal{P}$  par cette norme.

Pour cela, considérons une suite  $\mathcal{P}_n$  d'applications de  $\mathcal{P}_i$  convergeant dans  $\mathcal{P}$  vers  $\mathcal{P}$ . cette convergence s'écrit;

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq: } \forall n \geq N, \|\mathcal{P}_n - \mathcal{P}\| \leq \varepsilon$$

soit encore

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq: } \forall n \geq N, \forall \hat{u} \in \hat{U}(\mathcal{E}), \forall \omega \in A, |\mathcal{P}_n(\hat{u}, \omega) - \mathcal{P}(\hat{u}, \omega)| \leq \varepsilon$$

donc en particulier, comme les  $\mathcal{P}_n$  sont dans  $\mathcal{P}_i$ ;

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \forall \omega \in A, \forall \hat{u} \in \hat{U}_R(\omega), |\mathcal{P}(\hat{u}, \omega)| \leq \varepsilon$$

et par suite  $\forall \omega \in A, \forall \hat{u} \in \hat{U}_R(\omega), \mathcal{P}(\hat{u}, \omega) = 0$ , donc  $\mathcal{P} \in \mathcal{P}_i$ .

Toute suite convergente de  $\mathcal{P}_i$  converge dans  $\mathcal{P}_i$ .

$\mathcal{P}_i$  est un sous-espace fermé de  $\mathcal{P}$ .

$\mathcal{P}_i$  étant fermé, on peut définir la projection de tout élément de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}_i$ .

$$\forall \mathcal{P} \in \mathcal{P}, \exists ! \mathcal{P}_i \in \mathcal{P}_i \text{ tq } \inf_{\mathcal{P}' \in \mathcal{P}_i} \|\mathcal{P} - \mathcal{P}'\| = \|\mathcal{P} - \mathcal{P}_i\|$$

On convient de noter  $\mathcal{P}_{ext}$  la différence  $\mathcal{P} - \mathcal{P}_i$  pour un  $\mathcal{P}$  quelconque dans  $\mathcal{P}$  où  $\mathcal{P}_i$  est la projection de  $\mathcal{P}$  sur  $\mathcal{P}_i$  au sens défini plus haut.

Définitions:

- ♣ Les éléments de  $\mathcal{P}_{eg}^\omega$ , notés  $P_{eg}^\omega$ , sont les **systèmes d'efforts globaux généralisés sur  $\omega$** .
- ♣ A chaque système d'efforts globaux généralisés sur  $\mathcal{E}$  correspond un (et un seul) élément de  $\mathcal{P}_i$  (projection sur  $\mathcal{P}_i$ ): cet élément  $P_i^\omega$  s'appelle les **efforts intérieurs dans  $\omega$** . L'élément de  $\mathcal{P}_{exg}^\omega (= P_{eg}^\omega - P_i^\omega)$  constitue les **efforts extérieurs généralisés sur  $S$** .

- ♣ A  $\omega$  donné, les formes linéaires continues sur  $\hat{U}(\omega)$  suivantes:

$$\begin{aligned} \forall \hat{u} \in \hat{U}(\omega) \quad P_{eg,\omega}(\hat{u}) &= P_{eg}^\omega(\hat{u}, \omega) \\ P_{i,\omega}(\hat{u}) &= P_i^\omega(\hat{u}, \omega) \\ P_{exg,\omega}(\hat{u}) &= P_{exg}^\omega(\hat{u}, \omega) \end{aligned}$$

sont appelées respectivement **Puissance virtuelle des efforts globaux généralisés sur  $\omega$** , **Puissance virtuelle des efforts intérieurs dans  $\omega$**  et **Puissance virtuelle des efforts extérieurs généralisés sur  $\omega$** .

On peut alors donner la forme suivante au principe des puissances virtuelles, qui forme la base de la méthode des puissances virtuelles;

La somme de la puissance virtuelle des efforts intérieurs et de la puissance virtuelle des efforts extérieurs généralisés sur un corps  $\mathcal{C}$  est nulle pour tout mouvement virtuel de  $\mathcal{C}$ .  
La puissance virtuelle des efforts intérieurs dans  $\mathcal{C}$  est nulle pour tout  $\mathcal{C}$  et pour tout mouvement virtuel rigidifiant  $S'$ .

A ce stade, et pour retrouver un énoncé plus "classique" de ce principe, nous allons devoir introduire la notion de puissance virtuelle des quantités d'accélération.

La séparation des efforts extérieurs généralisés en efforts extérieurs et quantités d'accélération peut se faire de la manière suivante;

on introduit, lors de la description cinématique du système, l'espace  $U(S)$  des mouvements "réels possibles" du système  $S$ . Cet espace est un sous-espace de l'espace des mouvements virtuels de  $S$ , en ce sens que l'on doit pouvoir prendre comme fonction d'évaluation des puissances virtuelles les mouvements réels du système. Par contre, l'espace  $\hat{U}(S)$  est en général "plus grand" que  $U(S)$ : si vous voulez évaluer le champ de pression dans un matériau incompressible, il est préférable d'autoriser des mouvements virtuels à divergence non nulle.

On introduit également la notion de dérivé particulaire d'une grandeur. Soit  $A_p$  une grandeur (scalaire, vectorielle, tensorielle, fonctionnelle ...) liée à une particule  $p$  du système prenant à l'instant  $t$  la valeur  $A_p(t)$ . La dérivé particulaire est la dérivé par rapport au temps;

$$\dot{A}_p(t) = \frac{dA_p}{dt}(t)$$

Cette notion de dérivé particulière permet de définir l'espace  $\Gamma(S)$  des accélérations de  $S$

$$\Gamma(S) = \{\gamma = \dot{u}/u \in U(S)\}$$

Les inerties du système sont données par le choix d'une application linéaire  $I$  de  $\Gamma(S)$  dans le sous-espace  $P_i^\perp$  (orthogonal de  $P_i$ ), qui à  $\gamma$  fait correspondre une application  $p_\gamma$ .

Choisir un observateur du système revient à faire le choix d'une origine dans l'espace des mouvements virtuels, cette origine étant un mouvement virtuel rigidifiant  $S$ . Deux observateurs différents diffèrent d'un mouvement virtuel rigidifiant. La puissance virtuelle des efforts intérieurs est donc objective (pour une grandeur scalaire, l'objectivité se traduit par une indépendance en fonction de l'observateur).

Considérons un observateur du système, pour lequel le système  $S$  est soumis, outre les efforts intérieurs  $p_i$  (comportement du matériau, indépendant de l'observateur) à un système d'efforts extérieurs  $p_{\text{ext}}$  qui est un élément de  $P_{\text{ext}}$ , sous-espace de  $P_i^\perp$  des systèmes d'efforts extérieurs admissibles. Il existe alors un élément  $\gamma$  de  $\Gamma(S)$  qui "équilibre"  $p_{\text{ext}}$  et  $p_i$  sur les mouvements virtuels de  $S$ , au sens suivant:

$$\forall p_{\text{ext}} \in P_{\text{ext}}, \exists \gamma \in \Gamma(S), \forall \hat{u} \in \hat{U}(S), p_\gamma(\hat{u}, S) = p_{\text{ext}}(\hat{u}, S) + p_i(\hat{u}, S)$$


---



## Résumé

La première partie du mémoire est consacrée à une étude bibliographique. Après un rapide aperçu historique des travaux portant sur les milieux à microstructure, une étude de la théorie des matériaux simples de W. Noll est présentée, ainsi qu'un exposé des travaux de G. Capriz sur les matériaux à microstructure.

On introduit ensuite les notions d'univers d'observation "profond", de microplacement et de macroplacement dans cet univers d'un ensemble de particules. Les propriétés de ces placements conditionnent les définitions des milieux monoparticulaires, multiparticulaires, multiconstituants ou multiphasiques que l'on donne. On décrit les propriétés cinématiques et dynamiques de ces milieux. On propose l'introduction d'un champ de fonctions de phase pour traiter les problèmes de changements de phases.

Deux approches complémentaires pour obtenir les équations d'équilibre d'un milieu multiparticulaire à microstructure sont ensuite mises en œuvre, en s'intéressant plus particulièrement aux milieux de Cosserat multiparticulaires (distribution continue d'orientation de trièdres au même point de l'espace physique).

Le chapitre IV consiste en un exposé complet d'une méthode de changement d'échelle apparentée aux outils classiques de l'homogénéisation que nous nommons globalisation. Cette méthode permet, par défocalisation d'un milieu à microstructure "classique", de déduire les équations d'équilibre macro des équations d'équilibre du milieu initial. L'intérêt réside dans l'identification physique des grandeurs constitutives du milieu macro à partir des grandeurs constitutives du milieu micro. La démarche est menée à terme dans le cadre général des microstructures sur lesquelles l'action du groupe des rotations de  $\mathbb{R}^3$  est transitive.

La fin du mémoire apporte quelques indications sur l'ébauche d'une méthode de détermination du comportement d'un milieu multiparticulaire à partir de la globalisation des principales équations de bilan du milieu micro.

## Abstract

The first part (chapt. 1) of this Ph.D. thesis is dedicated to a bibliographic analysis. A rapid survey of the main works on the topic of continua with microstructure is used as an introduction to the simple materials theory of W. Noll and to a short exposition of the works of G. Capriz.

The next step (chapt. 2) consists in the explanation of the "deep" space notion and of the relevant microplacement and macroplacement of a set of particles in that deep space. The properties of these placements determine the definitions of each continuum: monoparticuliar, multiparticuliar, multiconstituents or multiphasic. We give the cinematic and dynamic properties of those continua, and propose the possibility for the use of a phase functions field to deal with the evolution of the phases.

Two different ways (chapt.3) are proposed to write the field and boundary equations of a multiparticuliar continuum with microstructure. The aim is to describe the equilibrium state of a Cosserat multiparticuliar continuum – i. e. a continuum in each point of which a continuum of triads is to be considered –.

Chapter four is the exposition of a new micro-macro transformation method which we named "globalization." This one is derived from the classical homogenization methods. It consists in defocusing a classical continua with microstructure (monoparticuliar), in order to obtain either the equilibrium equations or the constitutive variables of the macro continua from those of the initial medium. The method is developed for the case of microstructures represented in a manifold on which the action of the group of the rotations of the three dimensional Euclidean space is transitive.

The end of the report (chapt. 5) deals with a few proposals to try to determine the behavior – in relation with the behavior of the micro-continuum. – of such multiparticuliar continua with microstructure.