Réduction de modèle par identification en convection forcée pour des systèmes soumis à des conditions aux limites thermiques instationnaires :

Application à l'écoulement le long d'une marche avec contrôle thermique par retour d'état.

Yassine ROUIZI

Institut P' - Département Fluide, Thermique, Combustion

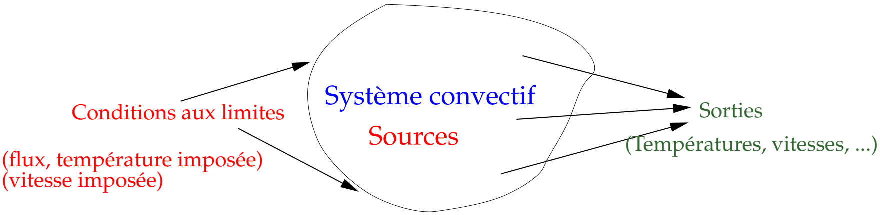
24 Juin 2010

Directeurs de Thèse : Daniel PETIT - Yann FAVENNEC

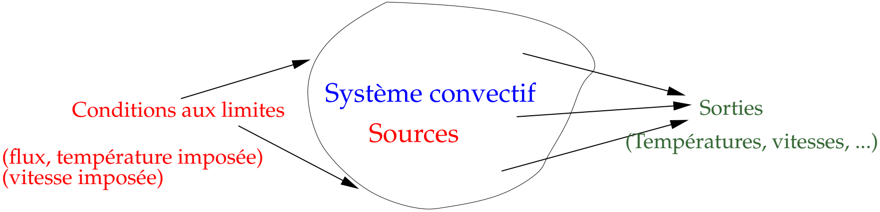
Plan de l'exposé

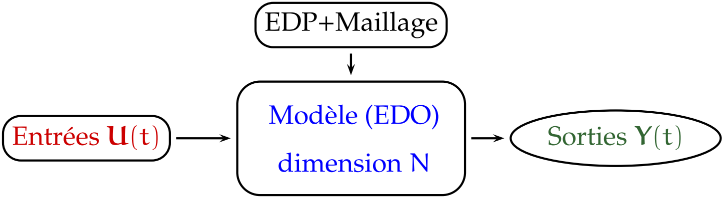
1. Contexte de l'étude : réduction de modèle en convection
2. Méthode d'Identification Modale (MIM) en convection-diffusion
3. Écoulements laminaires incompressibles stationnaires
4. Couplage faible vitesse-température
5. Commande optimale par Modèle Réduit MIM

Thermique et mécanique des fluides : système et simulation numérique

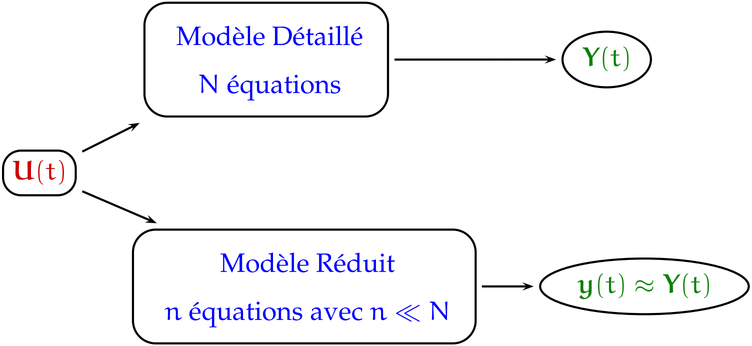


Thermique et mécanique des fluides : système et simulation numérique

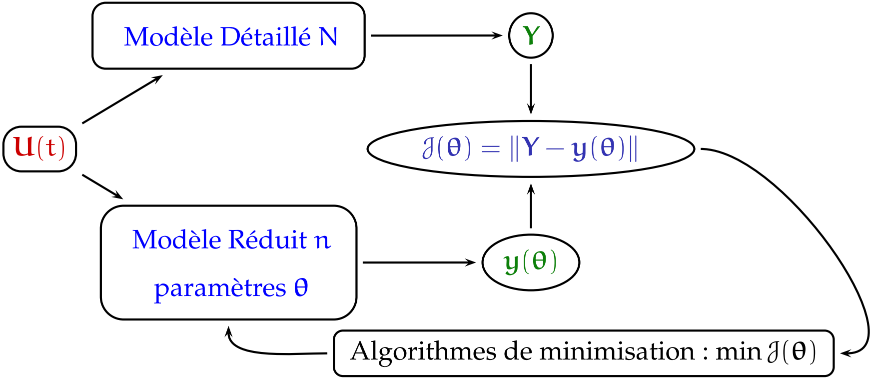




PRINCIPE DE LA RÉDUCTION DE MODÈLE



Méthode d'Identification de Modèle Réduit



Procédure itérative

$$\bar{\theta} = \arg\left[\min \mathcal{J}(\theta)\right]$$

Algorithmes d'optimisation utilisés

- Quasi-Newton
  - Méthode d'ordre 1 (calcul du gradient)
  - Approximation du Hessien
  - Méthode déterministe
  - Minimum local
  - Sensible à l'initialisation

- Optimisation par Essaims de Particules
  - Méthode d'ordre 0 (pas de calcul du gradient)
  - Basée sur l'interaction sociale
  - Méthode stochastique
  - Minimum global
  - Temps de calcul important

Problème de convection-diffusion

- Hypothèses
  - Écoulements 2D laminaires et incompressibles
  - Fluides Newtoniens
  - Champ de vitesse fixé
  - Convection forcée
- Équation de l'énergie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T - \dfrac{\lambda}{\rho C_p} \Delta T = 0 \\ + \text{ conditions aux limites} \\ + \text{ condition initiale} \end{cases}$$

- Représentation d'état après discrétisation spatiale

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{A_{dc}T} + \mathbf{BU} & \mathbf{T} = \mathbf{T}(t) \in \mathbb{R}^N \\ \mathbf{Y} = \mathbf{CT} & \mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t) \in \mathbb{R}^q \end{cases}$$

A_{dc} matrice de transition d'état de diffusion convection

Méthode d'Identification Modale

Étapes de la Méthode d'Identification Modale (MIM)

- Définir la structure (paramétrique) du Modèle Réduit (MR)
  - Similaire à la structure du Modèle Détaillé (MD) sous forme modale
- Identifier les paramètres
  - Minimisation d'un critère d'écart entre les réponses du MD et celles du MR
  - Méthodes d'optimisation

Méthode d'Identification Modale

- Représentation d'état

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = A_{dc}T + BU \\ Y = CT \end{cases}$$

- Changement de variable
  $T = MX$ avec $F = M^{-1}A_{dc}M$ et M la matrice des vecteurs propres
- Forme modale

$$\begin{cases} X = X(t) \in \mathbb{C}^N, Y = Y(t) \in \mathbb{R}^q \\ \dfrac{dX}{dt} = FX + GU \\ Y = HX \end{cases}$$

Méthode d'Identification Modale

- Forme modale

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \mathbf{X}(t) \in \mathbb{C}^N, \mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t) \in \mathbb{R}^q \\ \dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{G}\mathbf{U} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} \end{cases}$$

- Forme du Modèle Réduit avec $n \ll N$

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in \mathbb{C}^n, \mathbf{y} = \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q \\ \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}\mathbf{x} + \mathbf{g}\mathbf{U} \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}\mathbf{x} \end{cases}$$

- Vecteur des paramètres $\theta = [f_{ii}, g_i, h_{ik}]$ $(i = 1, \ldots, n)$ et $(k = 1, \ldots, q)$

Méthode d'Identification Modale

- Identification des paramètres θ. Formulation dans $\mathbb{C}$
  - Minimisation du critère
    $\mathcal{J}(\theta) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{y}(\theta)\|^2$
  - $\theta = [f_{ii}, g_i, h_{ik}] \in \mathbb{C}^{\dim(\theta)}$ paramètres du Modèle Réduit *complexe*

$$
\begin{cases}
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\bar{x}}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_{nc} \\ \dot{\bar{x}}_{nc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & & & & \\ & \bar{f}_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & f_{nc} & \\ & & & & \bar{f}_{nc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \bar{x}_1 \\ \vdots \\ x_{nc} \\ \bar{x}_{nc} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ \bar{g}_1 \\ \vdots \\ g_{nc} \\ \bar{g}_{nc} \end{pmatrix} U \\
\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & \bar{h}_{11} & \cdots & h_{1nc} & \bar{h}_{1nc} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{1q} & \bar{h}_{1q} & \cdots & h_{qnc} & \bar{h}_{qnc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \bar{x}_1 \\ \vdots \\ x_{nc} \\ \bar{x}_{nc} \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

Méthode d'Identification Modale

- Identification des paramètres θ. Formulations dans $\mathbb{R}$
  - Minimisation du critère
    $$\mathcal{J}(\theta) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{y}(\theta)\|^2$$
  - $\theta = [f_{ii}, g_i, h_{ik}] \in \mathbb{R}^{\dim(\theta)}$ paramètres du Modèle Réduit *réel*

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & & \\ & \ddots & \\ & & f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} u \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{1q} & h_{2q} & \cdots & h_{nq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Méthode d'Identification Modale

- Identification des paramètres θ.
  - Minimisation du critère
    $\mathcal{J}(\theta) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{y}(\theta)\|^2$
  - $\theta = [f_{ii}, g_i, h_{ik}] \in \mathbb{R}^{\dim(\theta)}$ paramètres du Modèle Réduit *réel*

$$
\left\{
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_1 & & \\ & \ddots & \\ & & f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} u \\
\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{1q} & h_{2q} & \cdots & h_{nq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
\right.
$$

- Erreur quadratique σ

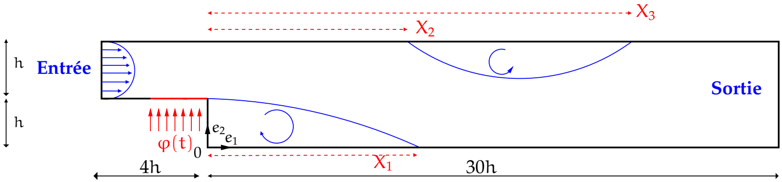
$$\sigma = \sqrt{\frac{\mathcal{J}(\theta)}{q\, n_t}}$$

- Erreur Maximale ε

$$\varepsilon = \sup_{\substack{j=1,\ldots,q \\ i=1,\ldots,n_t}} \left| \mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{y}_{ij}(\theta) \right|$$

Écoulement chauffé en amont d'une marche

- Fluide air
- Écoulement laminaire $\mathrm{Re} = 500$
- Densité de flux $\varphi(t)$
- Régime de convection forcée pour $\varphi = 300$ W m^{-2}



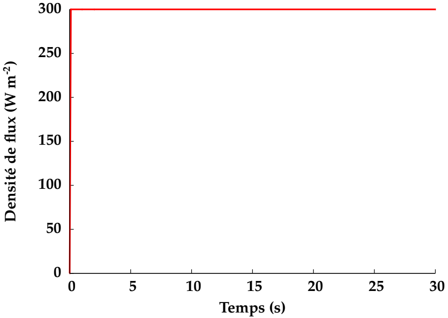
$$\mathrm{Ri} = \frac{\text{énergie gravitationnelle}}{\text{énergie cinétique}} = \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}$$

$\mathrm{Ri} = 0,11 \ll 1$ convection forcée

- Modèle de référence
  - MD (Fluent)
  - $N = 144247$ nœuds de calcul
- Données pour l'identification
  - $\varphi(0) = 0$ sinon $\varphi(t) = 300$ W m^{-2}
  - 300 pas de temps de 0,1 s
  - Observables = champ complet

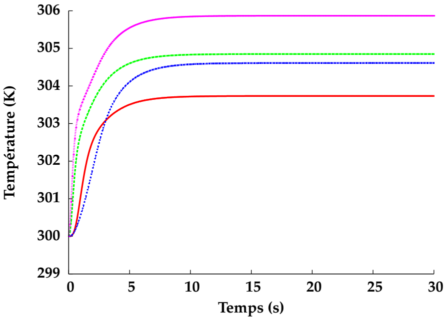
Écoulement chauffé en amont d'une marche

- Échelon de densité de flux $U = \varphi$



Entrée φ utilisée pour l'identification.

- Réponses à l'échelon φ



Thermogrammes obtenus.

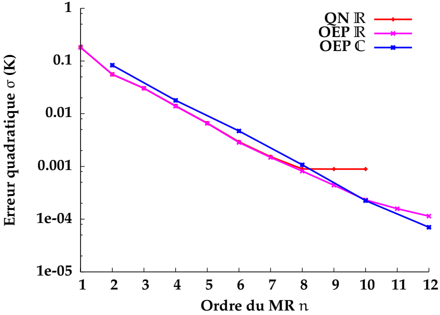
Identification

- Critère à minimiser

$$\mathcal{J}(\theta) = \sum_{i=1}^{300} \sum_{j=1}^{144247} \left(Y_{ij} - y_{ij}(\theta)\right)^2$$

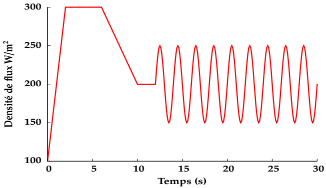
- 3 identifications différentes
  1. Par Quasi-Newton d'un Modèle Réduit réel
  2. Par OEP d'un Modèle Réduit réel
  3. Et par OEP d'un Modèle Réduit complexe

- Identification

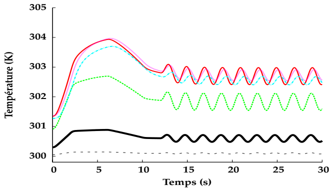


Erreur quadratique σ.

Validation

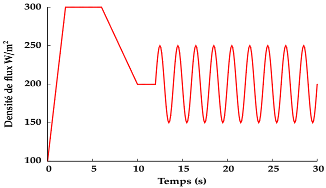


Flux de validation $\varphi(t)$

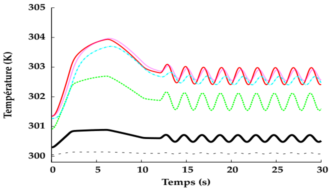


Thermogrammes obtenus par MR

Validation



Flux de validation $\varphi(t)$



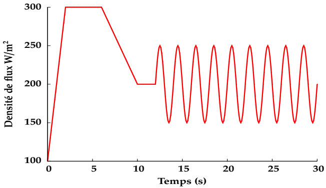
Thermogrammes obtenus par MR

- Modèle Réduit $n = 8$

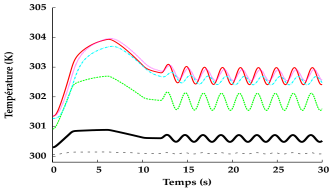
Modèle	ordre n	$\sigma(K)$	$\varepsilon(K)$
QN	8	$8{,}14 \times 10^{-4}$	$1{,}20 \times 10^{-2}$
OEP $\mathbb{R}$	8	$6{,}70 \times 10^{-4}$	$1{,}13 \times 10^{-2}$
OEP $\mathbb{C}$	8	$8{,}92 \times 10^{-4}$	$1{,}83 \times 10^{-2}$

Comparaison entre le MD et les différents MRs.

Validation



Flux de validation $\varphi(t)$



Thermogrammes obtenus par MR

- Modèle Réduit $n = 8$

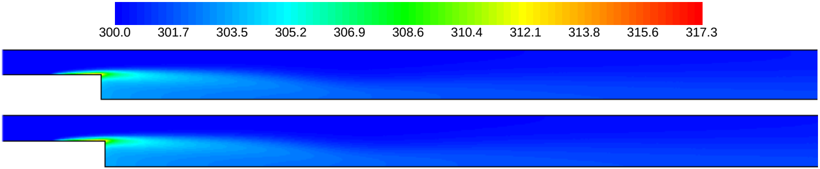
Modèle	**ordre n**	**σ(K)**	**ε(K)**
QN	**8**	**$8{,}14 \times 10^{-4}$**	**$1{,}20 \times 10^{-2}$**
OEP $\mathbb{R}$	**8**	**$6{,}70 \times 10^{-4}$**	**$1{,}13 \times 10^{-2}$**
OEP $\mathbb{C}$	**8**	**$8{,}92 \times 10^{-4}$**	**$1{,}83 \times 10^{-2}$**

Comparaison entre le MD et les différents MRs.

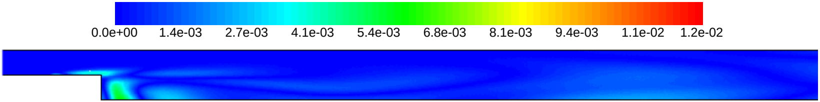
- Temps de simulation 21 s pour 144247 observables et pour 300 pas de temps
- Temps de construction du MR d'ordre 8 :
  - environ 1 heure pour QN
  - et 10 heures avec l'OEP

Validation

Validation du Modèle Réduit $n = 8$

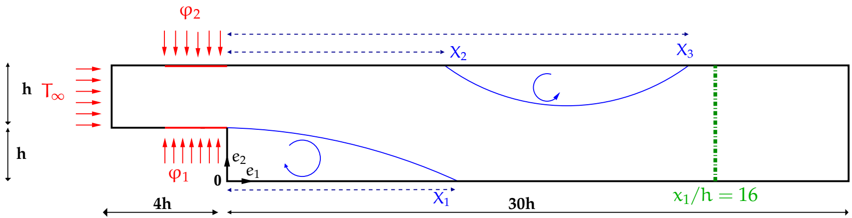


Champs de température obtenus par le Modèle Détaillé (haut) et par le Modèle Réduit (QN) d'ordre $n = 8$ (bas) à $t = 16,6$ s (temps où l'erreur est maximale).



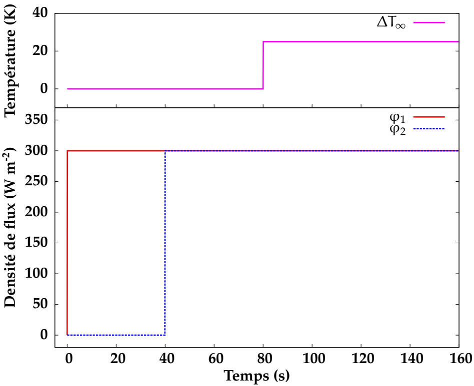
Écart absolu entre les sorties du MD et les sorties du MR d'ordre 8 à $t = 16,6$ s.

Modèle Réduit à 3 entrées



- Données pour l'identification
  - MD Fluent
  - Pas de temps 0.1 s
  - $q = 135$ observables sont situés à $x_1/h = 16$
  - Entrée $\mathbf{U}(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \Delta T_\infty(t)]^T$ où $\Delta T_\infty(t) = T_\infty(t) - T(t=0)$

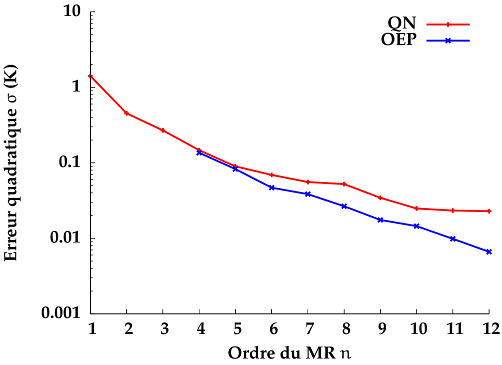
Modèle Réduit à 3 entrées



Entrées $\mathbf{U}(t)$ pour l'identification.

Modèle Réduit à 3 entrées

- Identification

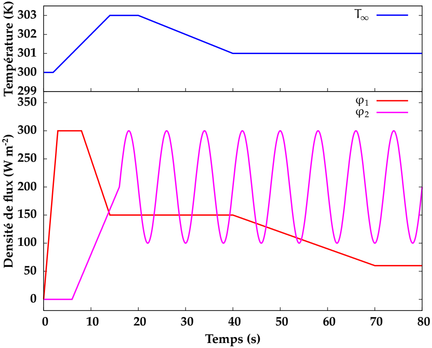


Écart quadratique en fonction de n.

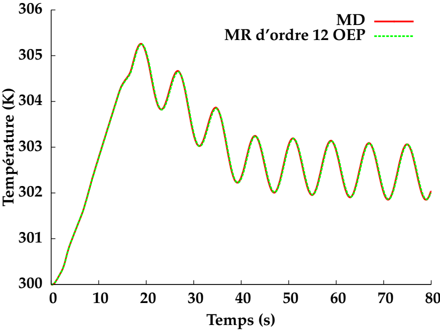
- 2 méthodes d'optimisation
  1. Méthode d'ordre 1 : Quasi-newton
  2. Méthode d'ordre 0 : Optimisation par Essaims de Particules

Modèle Réduit à 3 entrées

- Validation



Entrée de validation $\mathbf{U}(t)$.



Thermogrammes au point $(16h; 1,25h)$.

Modèle Réduit à 3 entrées

- Validation

Modèle	σ(K)	ε(K)	CPU(s)
MD	$---$	$---$	≈ 900
MR 12 OEP	$2,47 \times 10^{-2}$	$5,50 \times 10^{-2}$	$< 0,1$
MR 12 QN	$2{,}68 \times 10^{-2}$	$5{,}54 \times 10^{-2}$	$< 0,1$

Erreurs MD/MR et temps de simulation.

Modèle Réduit à 3 entrées

- Validation

Modèle	$\sigma(K)$	$\varepsilon(K)$	CPU(s)
MD	$---$	$---$	≈ 900
MR 12 OEP	$2,47 \times 10^{-2}$	$5,50 \times 10^{-2}$	$< 0,1$
MR 12 QN	$2{,}68 \times 10^{-2}$	$5{,}54 \times 10^{-2}$	$< 0,1$

Erreurs MD/MR et temps de simulation.

- Identification longue mais utilisation à volonté avec des temps de simulation très courts

Ordre n	10	11	12
Quasi-Newton	872	939	952
OEP	13635	14554	15415

Temps d'identification des Modèles Réduits (en s).

Synthèse

- Formulation Modèle Réduit thermique linéaire
  - Problème de diffusion-convection forcée
  - Écoulement fluide stationnaire
  - Identification dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$
  - Optimisation par Quasi-Newton et par Essaim de Particules

- Application : Marche descendante
  - Modèle Réduit à une entrée thermique et 144247 observables
  - Modèle Réduit à 3 entrées thermiques et les d'une ligne comme sortie
  - Bonne concordance MD/MR
  - Temps de simulation très court
  - Temps d'identification des Modèles Réduits

Écoulements incompressibles stationnaires

- Hypothèses
  - Écoulement 2D laminaire et incompressible d'un fluide Newtonien
- Équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{V} = 0 \\ \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right) \vec{V} = -\dfrac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{V} \\ + \text{ conditions aux limites} \\ + \text{ condition initiale} \end{cases}$$

- Représentation d'état après discrétisation spatiale

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{V} + \mathbf{Q}\boldsymbol{\Psi}\left(\mathbf{V}\right) + \mathbf{B}\mathbf{U} & \mathbf{V} = \mathbf{V}\left(t\right) \in \mathbb{R}^{2 \times N} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{V} & \mathbf{Y} = \mathbf{Y}\left(t\right) \in \mathbb{R}^{q} \end{cases}$$

où $\boldsymbol{\Psi}\left(\mathbf{V}\right) = \mathbf{V}_i \mathbf{V}_j \quad i = j = 1, \ldots, 2 \times N$

Méthode d'Identification Modale

- Changement de variable

$$\mathbf{V} = \mathbf{\Sigma X} \text{ avec } \mathbf{F} = \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{A\Sigma}$$

- Forme modale

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{FX} + \mathbf{\Omega \Psi}(\mathbf{X}) + \mathbf{G}U & \mathbf{X} = \mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^{2\times N} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{HX} & \mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t) \in \mathbb{R}^{q} \end{cases}$$

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{X}) = (\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j) \quad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2 \times N$$

- Forme modale du Modèle Réduit $(n \ll 2 \times N)$

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{fx} + \mathbf{\omega \Psi}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}U & \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n} \\ \mathbf{y} = \mathbf{hx} & \mathbf{y} = \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{q} \end{cases}$$

- Vecteur des paramètres à identifier $\theta = [\mathbf{f}, \mathbf{\omega}, \mathbf{g}, \mathbf{h}]$

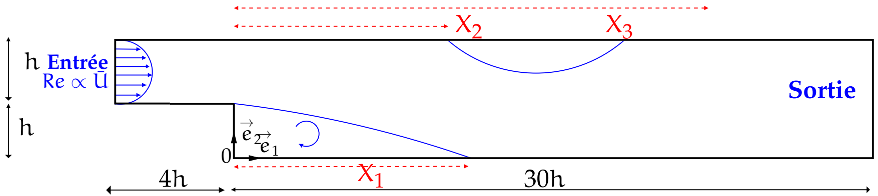
Écoulement stationnaire

- Écoulement stationnaire $\frac{dx}{dt} = \mathbf{0}$

$$\begin{cases} x = x(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} = \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q \\ \mathbf{0} = x + \boldsymbol{\omega}' Z(x) + \mathbf{g}' U \\ \mathbf{y} = \mathbf{h} x \end{cases}$$

- Vecteur des paramètres à identifier $\theta = [\boldsymbol{\omega}', \mathbf{g}', \mathbf{h}]$
- Échantillonnage de données pour l'identification, pour plusieurs valeurs de U

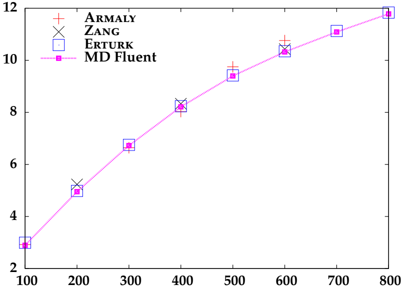
Cas test : Marche descendante



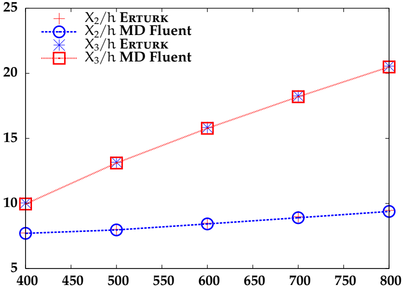
- Modèle de référence
  - Gamme de Re $\in [100 : 800]$
  - $Re = 2h\bar{U}/\nu$
  - Profil parabolique à l'entrée du canal
- Modèle Détaillé (FLUENT)
- Ordre $N = 144247$
- Zones de recirculation
  - $1^{\text{ère}}$ zone de longueur X_1
  - $2^{\text{ème}}$ zone à partir $Re = 400$ entre X_2 et X_3

Cas test : Marche descendante

Validation bibliographique du modèle FLUENT sur les zones de recirculation.



X_1/h en fonction de Re.



X_2/h et X_3/h en fonction de Re.

Identification

- Données pour l'identification
  - 8 champs stationnaires $Re = [100:800;100]$
  - $q = 2 * 139677$ observables
  - Nombre de données $\approx 2.23 \times 10^6$

- Direction privilégiée

Vitesse (m/s)	moyenne	maximale
$\lvert u_1 \rvert$	$\mathbf{1,73 \times 10^{-1}}$	$8{,}76 \times 10^{-1}$
$\lvert u_2 \rvert$	$\mathbf{4,95 \times 10^{-3}}$	$1{,}04 \times 10^{-1}$

Valeurs moyennes et maximales de u_1 et u_2.

- Identification

$$\mathcal{J}(\theta) = \sum_{i=1}^{8} \sum_{k=1}^{q} (\mathbf{Y}_{ik} - \mathbf{y}_{ik}(\theta))^2 = \mathcal{J}_{u_1}(\theta) + \mathcal{J}_{u_2}(\theta)$$

- Erreur quadratique σ_{u_i}

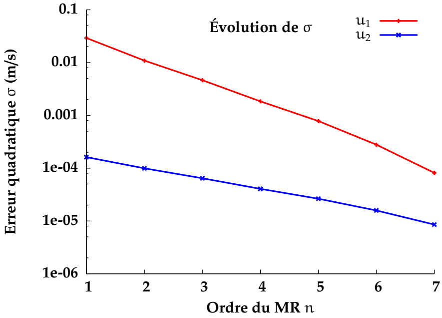
$$\sigma_{u_i} = \sqrt{\frac{\mathcal{J}_{u_i}(\theta)}{8 \times q/2}}$$

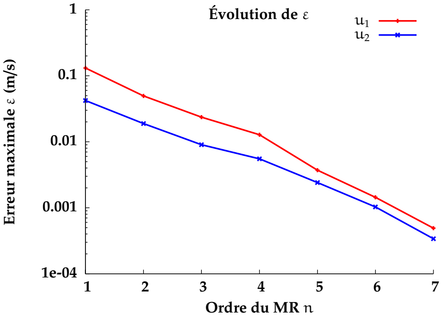
- Erreur maximale ε

$$(\varepsilon_{u_i})_{max} = \sup_{\substack{j=1,\dots,8 \\ k=1,\dots,q/2}} \left| \mathbf{Y}_{jk} - \mathbf{y}_{jk} \right|_{u_i}$$

Identification

Variations des écarts en fonction de l'ordre n du Modèle Réduit



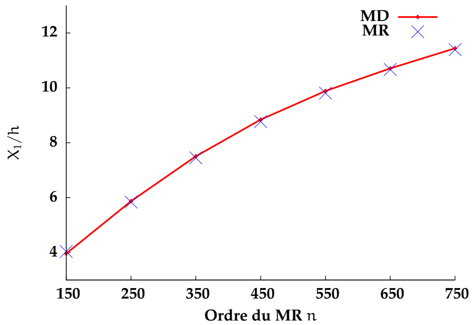


Ordre n	1	2	3	4	5	6	7
Temps d'identification (s)	5	6	151	219	57	414	195

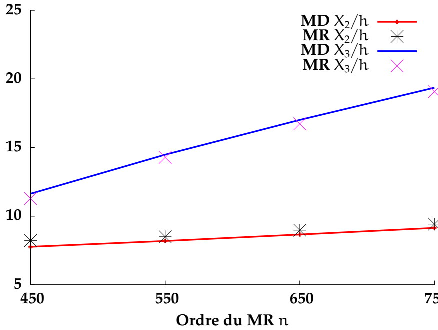
Temps d'identification pour chaque ordre n.

Validation MR $n = 7$

Validation pour $Re = [150 : 750; 100]$, on s'intéresse à X_1, X_2 et X_3



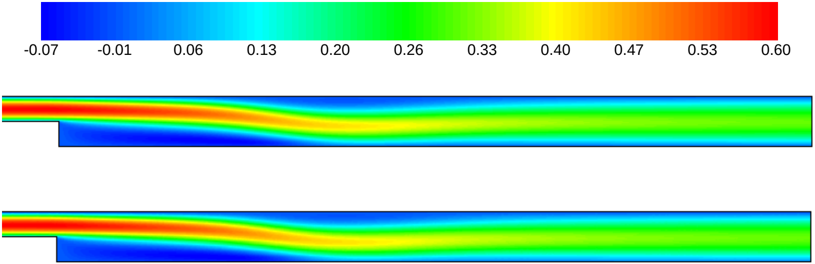
Évolution de X_1/h.



Évolution de X_2/h et X_3/h.

Validation MR $n = 7$

Validation pour $Re = 550$



Champs de vitesse horizontale u_1 (m/s) donnés par le Modèle Détaillé (haut) et par le Modèle Réduit d'ordre 7 (bas) pour $Re = 550$.

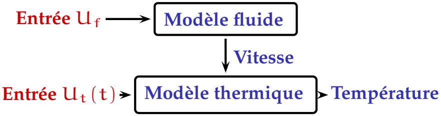
- Temps de simulation avec le MR $< 0,1s$ et avec le MD ≈ 30 min

SYNTHÈSE

- Formulation Modèle Réduit fluide non-linéaire
  - Problème d'écoulement 2D laminaire et stationnaire
- Application : Marche descendante
  - Modèle Réduit d'ordre 7
  - Quasi-Newton
  - Résultats du MR en accord avec ceux du MD
  - Temps de simulation $< 0,1$ s
  - Temps d'identification : quelques minutes.

Écoulements de convection forcée

- Objectif



- Hypothèses
  - Écoulement 2D laminaire et incompressible
  - + Couplage faible

Écoulements de convection forcée

- Objectif

$$\text{Entrée } u_f \longrightarrow \boxed{\textbf{Modèle fluide}}$$
$$\downarrow \textbf{Vitesse}$$
$$\text{Entrée } u_t(t) \longrightarrow \boxed{\textbf{Modèle thermique}} \longrightarrow \textbf{Température}$$

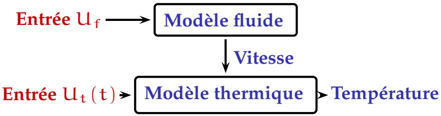
- Équations locales

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{V} = 0 \\ \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right) \vec{V} = -\dfrac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{V} \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T - \dfrac{\lambda}{\rho C_p} \Delta T = 0 \\ + \text{ conditions aux limites} \\ + \text{ condition initiale} \end{cases}$$

- Hypothèses
  - Écoulement 2D laminaire et incompressible
  - \+ Couplage faible

Écoulements de convection forcée

- Objectif



- Hypothèses
  - Écoulement 2D laminaire et incompressible
  - \+ Couplage faible

- Équations locales

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{V} = 0 \\ \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right) \vec{V} = -\dfrac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{V} \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T - \dfrac{\lambda}{\rho C_p} \Delta T = 0 \\ + \text{ conditions aux limites} \\ + \text{ condition initiale} \end{cases}$$

- Discrétisation et changement de base

$$\begin{cases} \mathbf{Z}(t) \in \mathbb{R}^{2 \times N}, \mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^{N} \\ \dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}_f \mathbf{Z} + \mathbf{\Gamma}_f \mathbf{\Psi}(\mathbf{Z}) + \mathbf{G}_f U_f \\ \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_d \mathbf{X} + \mathbf{\Gamma}_t \mathbf{\Pi}(\mathbf{Z}, \mathbf{X}) + \mathbf{G}_t U_t(t) \\ \mathbf{Y}^f = \mathbf{H}_f \mathbf{Z} \\ \mathbf{Y}^t = \mathbf{H}_t \mathbf{X} \end{cases}$$

Modèle Réduit couplé

- Champ de vitesse stationnaire
- Structure modale du Modèle Réduit

$$\begin{cases} 0 = z + \gamma_f \Psi(z) + g_f U_f \\ y^f = H_f z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = f_d x + \gamma_t \Pi(z, x) + g_t U_t(t) \\ y^t = h_t x \end{cases}$$

- Vecteur de couplage

$$\Pi(z, x) = [z_1 x_1, z_2 x_1, \ldots, z_{n_f} x_1, z_1 x_2, \ldots, z_{n_f} x_2, \ldots, \ldots, z_{n_f} x_{n_t}]^T$$

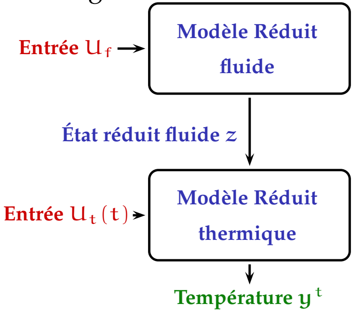
Modèle Réduit couplé

- Champ de vitesse stationnaire
- Structure modale du Modèle Réduit

$$\begin{cases} 0 = z + \gamma_f \Psi(z) + g_f U_f \\ y^f = H_f z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = f_d x + \gamma_t \Pi(z,x) + g_t U_t(t) \\ y^t = h_t x \end{cases}$$

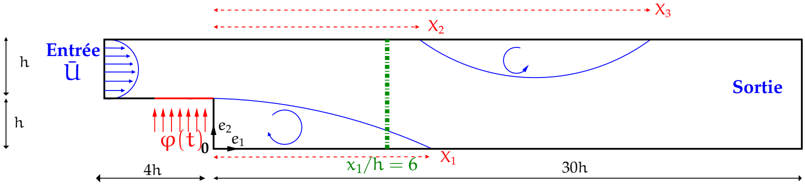
- Stratégie



- Vecteur de couplage

$$\Pi(z,x) = [z_1x_1, z_2x_1, \ldots, z_{n_f}x_1, z_1x_2, \ldots, z_{n_f}x_2, \ldots, \ldots, z_{n_f}x_{n_t}]^T$$

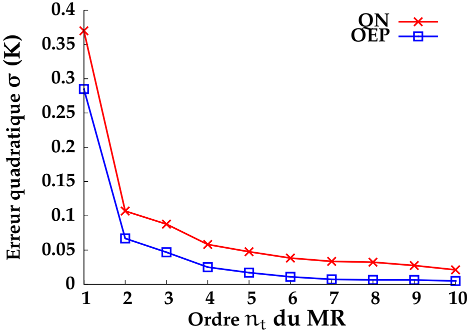
Exemple d'application : marche descendante

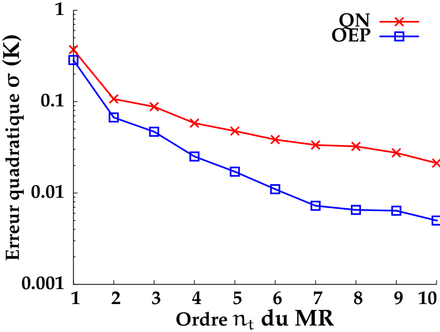


- Données pour l'identification $\theta_t = [f_d, \gamma_t, g_t, h_t]$
  - 6 Champs de vitesse $Re = [300 : 800, 100]$
  - $\varphi(t)$ pour chaque champ de vitesse
    - $\varphi(0) = 0$ sinon $\varphi = 300$ W/m^2
    - 300 pas de temps de 0,1 s
  - 135 observables sur ligne $x_1/h = 6$
- Minimisation

$$\mathcal{J}(\theta_t) = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{300} \sum_{k=1}^{135} \left(y^t{}_{ijk}(\theta_t) - Y^t{}_{ijk}\right)^2$$

Identification avec état réduit fluide d'ordre $n_f = 7$



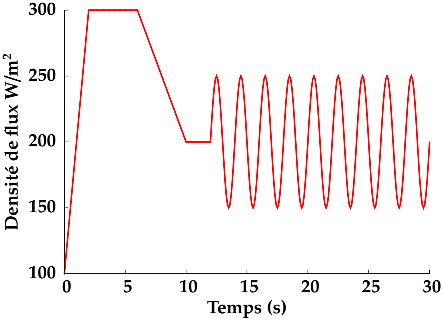


Nombre de paramètres à identifier augmente avec l'odre n_t

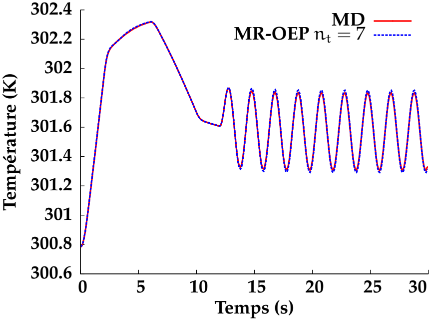
Ordre n_t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nb_{param}	9	32	68	120	185	264	357	464	585	720

Exemple d'application

- Validation
  - $Re = 550$
  - Entrée de validation $\varphi(t)$
- Erreurs de validation
  - $\sigma = 6,16 \times 10^{-3}$ K
  - $\varepsilon = 1,83 \times 10^{-2}$ K



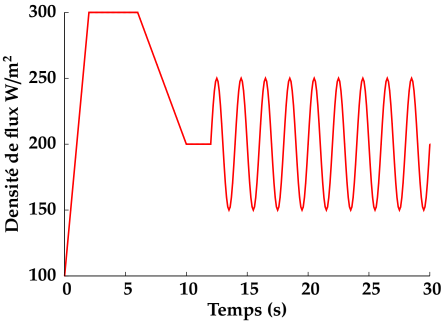
Entrée de validation $\varphi(t)$



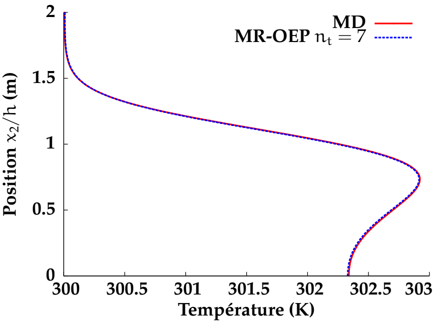
Thermogrammes MD et MR

Exemple d'application

- Validation
  - $Re = 550$
  - Entrée de validation $\varphi(t)$
- Erreurs de validation
  - $\sigma = 6,16 \times 10^{-3}$ K
  - $\varepsilon = 1,83 \times 10^{-2}$ K



Entrée de validation $\varphi(t)$

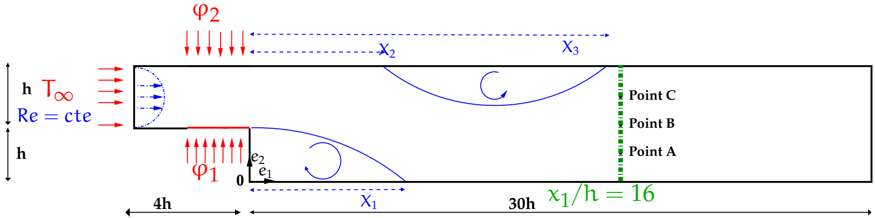


Profil de température à $t = 16,9$ s.

Synthèse

- Formulation de Modèle Réduit incluant le couplage faible vitesse-température
- Couplage à travers l'état réduit fluide
- Exemple d'application sur l'écoulement chauffé en amont de la marche
    - Identification avec QN et OEP
    - Validation satisfaisante
    - Temps de simulation $< 0{,}1$ s

Objectif



En entrée, on a :

- Profil de vitesse parabolique
- Champ de vitesse stationnaire
- Température d'entrée $T_\infty(t)$ inconnue autour de 300 K

En sortie, on veut :

- Profil de température constant en $x_1/h = 16$

Moyens matériels :

- Points de mesure A, B et C
- Actionneurs φ_1 et φ_2

Système dynamique et commande optimale

- Système dynamique

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{U}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- Consigne $\mathbf{y} = \mathbf{y_c}$
- Commande en boucle fermée par retour d'état LQ (Linéaire Quadratique)
  - Minimisation d'un critère $\mathcal{J}$

$$\mathcal{J} = \int_{\mathcal{I}} \left[(\mathbf{y} - \mathbf{y_c})^T \mathbf{Q} (\mathbf{y} - \mathbf{y_c}) + \mathbf{U}^T \mathbf{R} \mathbf{U} \right] dt$$

Système dynamique et commande optimale

- Système dynamique

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{U}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- Consigne $\mathbf{y} = \mathbf{y_c}$
- Commande en boucle fermée par retour d'état LQ (Linéaire Quadratique)
  - Minimisation d'un critère $\mathcal{J}$

$$\mathcal{J} = \int_{\mathcal{I}} \left[\delta\mathbf{x}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \delta\mathbf{x} + \delta\mathbf{U}^T \mathbf{R} \delta\mathbf{U}\right] dt$$

  - $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ et $\delta\mathbf{U} = \mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}$ où $\bar{\mathbf{x}}$ et $\bar{\mathbf{U}}$ sont associées à $\mathbf{y_c}$
  - $\mathbf{R}$ coût et pondération de la commande

Système dynamique et commande optimale

- La fonction Lagrangienne $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}\left(\mathbf{x},\mathbf{U},\boldsymbol{\lambda}\right)=\mathcal{J}\left(\mathbf{x}\right)-\left\langle\mathbf{E}\left(\mathbf{x},\mathbf{U}\right),\boldsymbol{\lambda}\right\rangle$$

avec $\mathbf{E}\left(\mathbf{x},\mathbf{U}\right)=\frac{d\mathbf{x}}{dt}-\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{B}\mathbf{U}=\mathbf{0}$

- Système d'optimalité

$$\begin{cases} -\dfrac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt}=\mathbf{H}^{T}\mathbf{H}\mathbf{x}+\mathbf{F}^{T}\boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{R}\delta\mathbf{U}+\mathbf{G}^{T}\boldsymbol{\lambda}=0 \end{cases}$$

- Loi de rétro-action

$$\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{P}\mathbf{x}$$

Commande optimale

- Loi de commande LQ

$$\delta \mathbf{U}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^{T}\mathbf{P}(t)\,\delta \mathbf{x}(t)$$

$\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ solution de l'équation matricielle non linéaire dite de Riccati

$$\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{F} + \mathbf{F}^{T}\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^{T}\mathbf{P}(t) + \mathbf{H}^{T}\mathbf{H} = \mathbf{0}$$

- Algorithme de la commande LQ
  1. hors ligne

     Connaissant les matrices du système dynamique $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ ainsi que le coût de la commande $\mathbf{R}$, on détermine $\mathbf{P}$ par la résolution de l'équation de Riccati.
     Puis on calcule la matrice de gain $\mathbf{K} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^{T}\mathbf{P}(t)$
  2. en ligne

     Connaissant la déviation $\delta \mathbf{x}$ du système à l'instant t, on détermine la commande optimale par la relation $\delta \mathbf{U} = \mathbf{K}\delta \mathbf{x}$

Estimation de l'état

- Système bruité

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G_1}\mathbf{U}(t) + \mathbf{G_2}\boldsymbol{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{v}(t) \end{array} \right.$$

  - $\boldsymbol{w}(t)$ est le bruit d'état, caractérisé par sa covariance $\boldsymbol{W}$
  - $\boldsymbol{v}(t)$ est le bruit de mesure, caractérisé par sa covariance $\mathbf{V}$

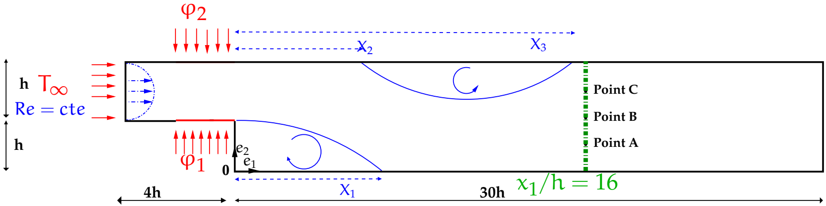
- Difficulté : État $\boldsymbol{w}$ soit non mesurable ou soit pas en totalité

- Estimateur d'état : filtre de Kalman
  - Hypothèses
    - Bruits blancs, gaussiens et centrés
    - Bruits d'état et de mesure indépendants
  - Estimation de $\hat{\mathbf{x}}$ à partir des mesures $\mathbf{y_m}(t)$:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}_1\mathbf{U}(t)] + \mathbf{K_f}[\mathbf{y_m}(t) - \mathbf{H_m}\hat{\mathbf{x}}(t)]$$

avec $\mathbf{K_f}$ le gain de Kalman $\mathbf{K_f}(t) = \mathbf{\Sigma}\mathbf{H}^T\mathbf{V}^{-1}$ où
$\dot{\mathbf{\Sigma}} = \mathbf{\Sigma}\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\mathbf{\Sigma} - \mathbf{\Sigma}\mathbf{H}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{\Sigma} + \mathbf{G}\mathbf{W}\mathbf{G}^T$

Commande optimale par Modèle Réduit MIM



- Modèle Réduit à 3 entrées thermiques

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}_1\mathbf{U}(t) + \mathbf{G}_2\Delta T_\infty(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- 2 commandes

$$\mathbf{U}(t) = [\varphi_1(t)\ \varphi_2(t)]^T$$

- Une perturbation $\Delta T_\infty(t) = T_\infty(t) - 300$

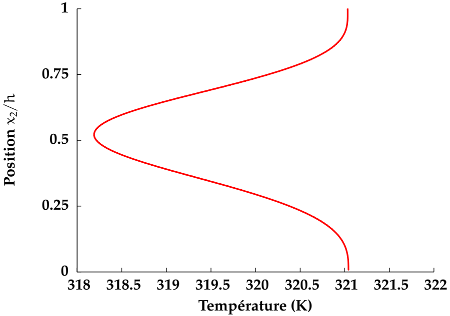
Commande optimale par Modèle Réduit MIM

- Commande de référence $\bar{\mathbf{U}}$
  - Système stationnaire
  - Pas de perturbation $\Delta T_\infty = 0$ et $T_\infty = 300$ K
  - Consigne $\mathbf{y_c} \approx \mathbf{320}$ K
  - commande $\bar{U}$:

$$\bar{\mathbf{U}} = \left(\mathbf{S}^T \mathbf{S}\right)^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{y_c}$$

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2182,8 \\ 2174,7 \end{bmatrix}$$

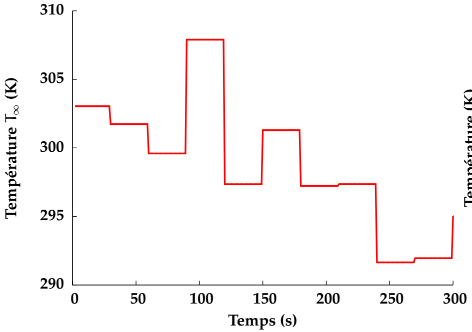
  - S matrice des sensibilités statiques $\mathbf{S} = -\mathbf{H}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}_1$
  - État de référence $\bar{\mathbf{x}} = -\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}_1\bar{\mathbf{U}}$



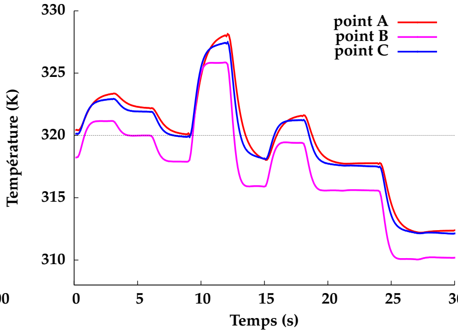
Profil optimal obtenu avec $\Delta T_\infty = 0$ K et $\bar{\mathbf{U}}$.

Commande optimale par Modèle Réduit MIM

- Système perturbé $T_\infty \neq 300$ K



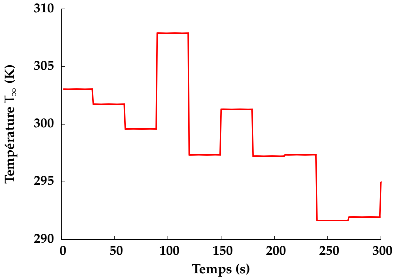
Évolution de $T_\infty(t)$.



Thermogrammes aux points A, B et C.

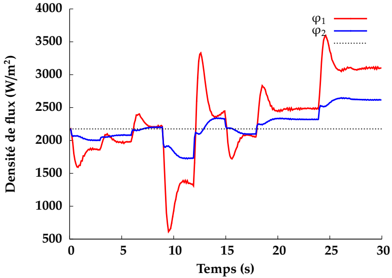
Commande optimale par Modèle Réduit MIM

- Système perturbé $T_\infty \neq 300$ K



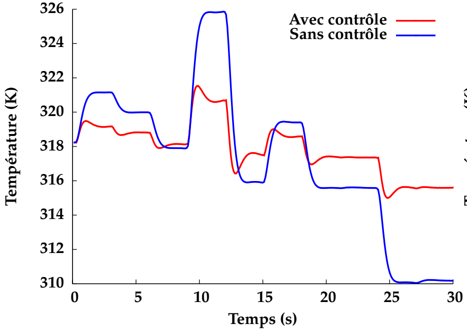
Évolution de $T_\infty(t)$.

- Lois de commande obtenues

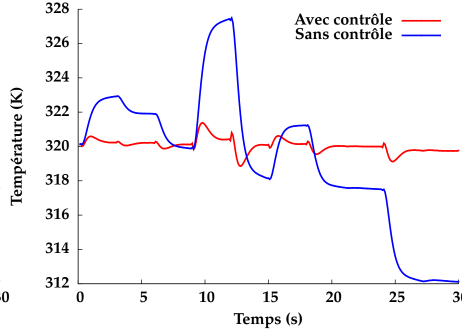


Évolution de $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$.

Commande optimale par Modèle Réduit MIM

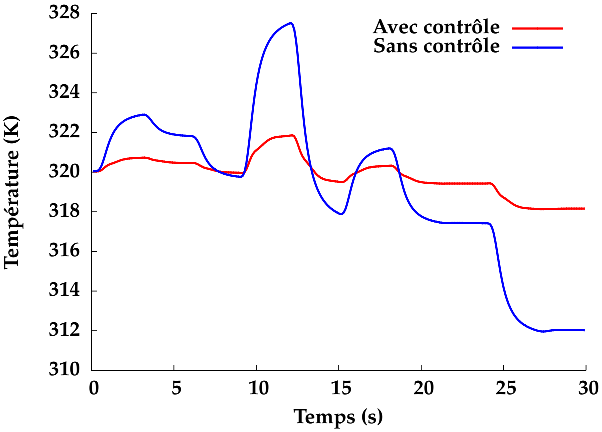


Thermogrammes au point B.



Thermogrammes au point C.

Commande optimale par Modèle Réduit MIM



Évolution de la température moyenne obtenue par le **Modèle Détaillé**.

Synthèse

- Aspect de la commande optimale par retour d'état LQ
- Commande d'un Modèle Réduit MIM
- Exemple d'application sur l'écoulement chauffé en amont de la marche
  - Commande en temps réel
  - Résultats prometteurs

Conclusions

1. Réduction de modèle en convection-diffusion
   - Modèle Réduit thermique linéaire dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$
2. Réduction de modèle en mécanique des fluides
   - Régime laminaire et stationnaire
3. Construction de Modèle Réduit thermique couplé (vitesse-température)
   - Couplage à travers l'état réduit fluide
4. Application au problème de commande optimale
   - Commande Linéaire Quadratique
   - Filtre de Kalman

Perspectives

1. Identification de Modèle Réduit fluide relatif à plusieurs entrées
2. Identification de Modèle Réduit fluide instationnaire
3. Couplage fort entre les champs de vitesse et de température
4. Étude paramétrique de commande optimale
5. Contrôle en utilisant des Modèles Réduits couplés