Série discrète unitaire, caractères, fusion de Connes et sous-facteurs pour l'algèbre Neveu-Schwarz

Sébastien Palcoux

Institut de Mathématiques de Luminy

Contexte

Dans les années 90, V. Jones and A. Wassermann ont commencé un programme dont le but est de comprendre la théorie conforme des champs du point de vue des algèbres d'opérateurs:

1. Déterminer la fusion de Connes des représentations d'énergie positive de groupes ou algèbres de Lie de dimension infini. (Exemple: le groupe de lacets $LG = C^\infty(\mathbb{S}^1, G)$ du groupe G).
2. Application à la théorie des sous-facteurs.

- le groupe de lacets $LSU(n)$, par A.Wassermann, 1994
- le groupe Diff($\mathbb{S}^1$) et l'algèbre Virasoro $\mathfrak{Vir}$, par T. Loke, 1994
- le groupe LSpin($2n$), par V. Toledano Laredo, 1997
- les groupes de lacets tordus, par R. Verrill, 2001 et A.W., 2009
- l'algèbre Neveu-Schwarz $\mathfrak{Vir}_{1/2}$, par S. Palcoux, 2009
- l'algèbre Ramond $\mathfrak{Vir}_0$, 2010

Définitions et résultats principaux

- Algèbre de Witt $\mathfrak{W}$: algèbre de Lie des champs de vecteurs polynomiaux sur $\mathbb{S}^1$, de base et relations:
$$d_n = ie^{in\theta}\frac{d}{d\theta} \ (n \in \mathbb{Z}) \text{ et } [d_m, d_n] = (m-n)d_{m+n}.$$
L'algèbre Virasoro $\mathfrak{Vir}$ est l'extension centrale de $\mathfrak{W}$ et les algèbres Ramond $\mathfrak{Vir}_0$ et Neveu-Schwarz $\mathfrak{Vir}_{1/2}$ sont les extensions supersymétriques de $\mathfrak{Vir}$.

- Algèbre Neveu-Schwarz $\mathfrak{Vir}_{1/2}$:
$$\begin{cases} [L_m, L_n] & = (m-n)L_{m+n} + \frac{C}{12}(m^3-m)\delta_{m+n} \\ [G_r, L_n] & = (r-\frac{n}{2})G_{r+n} \\ [G_r, G_s]_+ & = 2L_{r+s} + \frac{C}{3}(r^2-\frac{1}{4})\delta_{r+s} \end{cases}$$
$m, n \in \mathbb{Z}$, $r, s \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$, $L_n^\star = L_{-n}$, $G_r^\star = G_{-r}$, C central.

Définitions et résultats principaux

- Représentations irréductible d'énergie positive unitaire:
  - $H = \bigoplus_{n \in \frac{1}{2}\mathbb{N}} H_{n+h}$ pour L_0.
  - H_{n+h} est de dimension finie.
  - $H_0 = \mathbb{C}\Omega$ (i.e. $L_0\Omega = h\Omega$) et $C\Omega = c\Omega$.
  - On note $H = L(c,h)$ et c le charge centrale.
  - Unitaire : le produit scalaire naturel concorde avec la $\star$-structure de $\mathfrak{Vir}_{1/2}$.
  - But: trouver $c, h \in \mathbb{C}$ avec $L(c,h)$ unitaire.
- Le produit tensoriel classique $\otimes$ additionne les charges. Le produit tensoriel relatif $\boxtimes$, appelé fusion de Connes préserve la charge (voir plus loin).

Théorème 1 (Classification des représentations unitaires $L(c,h)$)

- *Série continue:* $c \geq 3/2$ *et* $h \geq 0$.
- *Série discrète:* $(c,h) = (c_m, h^m_{pq})$ *avec:*

$$c_m = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{8}{m(m+2)}\right) \quad et \quad h^m_{pq} = \frac{((m+2)p - mq)^2 - 4}{8m(m+2)}$$

et les entiers $m \geq 2$, $1 \leq p \leq m-1$, $1 \leq q \leq m+1$ *et* $p \equiv q[2]$.

$\longrightarrow$ *pour* c_m *fixé, il n'y a qu'un nombre fini de* h *possibles.*

$\longrightarrow$ cond. nec. et suff. par des constructions à la FQS et GKO.

Théorème 2 (Caractères de la série discrète)

$$ch(L(c_m, h^m_{pq}))(t) = tr(t^{L_0 - c/24}) = \chi_{NS}(t).\Gamma^m_{pq}(t).t^{-c_m/24} \quad avec$$

$$\chi_{NS}(t) = \prod_{n \in \mathbb{N}^\star} \frac{1 + t^{n-1/2}}{1 - t^n}, \quad \Gamma^m_{pq}(t) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ \varepsilon = \pm 1}} \left(\varepsilon t^{\frac{[2m(m+2)n - \varepsilon(m+2)p + mq]^2 - 4}{8m(m+2)}}\right)$$

$\longrightarrow$ *conj. 1985, preuve non-unitaire 1997 ($>$ 30 p). Ici, preuve unitaire en 1 p.*

Théorème 3 (Fusion de Connes)

$$H^{c_m}_{ij} \boxtimes H^{c_m}_{i'j'} = \bigoplus_{(i'',\, j'') \in \langle i,i' \rangle_\ell \times \langle j,j' \rangle_{\ell+2}} H^{c_m}_{i''j''}$$

avec $m = \ell + 2$ *et* $\langle a, b \rangle_n = \{k = |a-b|, |a-b|+1, \dots, a+b \ \textit{avec}\ a+b+k \leq n\}$.

Théorème 4 (Sous-facteurs de Jones-Wassermann)

On obtient le sous-facteur irréductible, de type III_1 *hyperfini:*

$$\pi_{H^\ell_{ij}}(\mathfrak{Vir}_{1/2}(I))'' \subset \pi_{H^\ell_{ij}}(\mathfrak{Vir}_{1/2}(I^c))^\natural,$$

isomorphe au facteur de type III_1 *hyperfini* $\mathcal{R}_\infty$ *tensorisé avec le sous-facteur de type* II_1*, irréductible, de profondeur finie :*

$$(\bigcup \mathbb{C} \otimes End_{\mathfrak{Vir}_{1/2}}(H^\ell_{ij})^{\boxtimes n})'' \subset (\bigcup End_{\mathfrak{Vir}_{1/2}}(H^\ell_{ij})^{\boxtimes n+1})''$$

et d'indice fini: $\frac{sin^2((2i+1)\pi/(\ell+2))}{sin^2(\pi/(\ell+2))} \cdot \frac{sin^2((2j+1)\pi/(\ell+4))}{sin^2(\pi/(\ell+4))}$ $(= 1$ *pour* $H_\Omega)$.

L'idée de quantification

- $\mathfrak{h}$ une superalgèbre de Lie.
- V une représentation irréductible unitaire de $\mathfrak{h}$.
- G un groupe d'automorphisme de $\mathfrak{h}$.
- $\mathfrak{d}$ une algèbre de superdérivation de $\mathfrak{h}$.

Quantification:

$\alpha \in G$ ou $\delta \in \mathfrak{d}$ est implémenté sur V si pour $X \in \mathfrak{h}$:

- $\alpha(X) = UXU^\star$ avec $U \in \mathcal{U}(V)$ (unique à phase prés).
- $\delta(X) = [D, X]$ avec $D \in End(V)$ (unique à cte additive près).

V devient une représentation projective des sous-groupe et sous-algèbre implémentables G_V et $\mathfrak{d}_V$ (i.e. avec un 2-cocycle).

Une table d'exemples

$\mathfrak{h}$	V	G ou $\mathfrak{d}$
Un fermion complexe	$\mathcal{F}(L^2(\mathbb{S}^1))$	$LU(1) \rtimes \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$
Trois fermions réels	$\mathcal{F}_{NS}^{\otimes 3}$	$LSU(2)_2 \rtimes \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$
Algèbre de lacets $L\mathfrak{s}l_2$ (un $\mathfrak{s}l_2$-boson)	$L(j, \ell)$	$\mathfrak{Vir}$
Superalgèbre de lacets $\widehat{\mathfrak{s}l_2}$ (un $\mathfrak{s}l_2$-boson $\ltimes$ 3 fermions)	$H_j^\ell = L(j, \ell) \otimes \mathcal{F}_{NS}^{\otimes 3}$	$\mathfrak{Vir}_{1/2}$

Détails: quantification fermionique complexe

- L'algèbre de Clifford complexe Cliff(H) avec H un Hilbert:
  $$[a(f), a(g)]_+ = 0 \ , \ [a(f), a(g)^\star]_+ = (f, g) \text{ avec } f, g \in H$$
- Rep. irr. : espace de Fock $\mathcal{F}(H) = \Lambda H$: $\pi(a(f))\omega = f \wedge \omega$.
- Avec un projecteur P sur H, on définit une nouvelle représentation π_P (en changeant la structure complexe).
- $u \in U(H)$ est implémenté dans π_P (noté $u \in U_P(H)$) si:
  $$\pi_P(a(u.f)) = U\pi_P(a(f))U^\star$$
  avec U unitaire, unique à une phase près ($\rightarrow$ rep. projective).
- Critère de quantification de Segal:
  $$u \in U_P(H) \text{ ssi } [P, u] \in \ell^2(H).$$
- Exemple: $H = L^2(\mathbb{S}^1)$, $P.H = H^2(\mathbb{S}^1)$ l'espace de Hardy (Fourier positif). Le groupe $LU(1) \rtimes$ Diff($\mathbb{S}^1$) $\subset U(H)$ est implémenté. On obtient une représentation projective. En passant à l'algèbre de Lie, on a une représentation d'énergie positive de $L\mathbb{C} \rtimes \mathfrak{Vir}$.

Algèbre à Vertex

Slogan: La structure vertex est sous-jacente à toute la théorie.

Niveau 1: La représentation vide H_0: on peut y mettre une structure généralisant les anneaux commutatifs.

- Supercommutativité $\rightarrow$ localité: $\phi(z)\psi(w) = \pm\psi(w)\phi(z)$
- Associativité $\rightarrow$ OPE : machine à produire des quantifications.

Niveau 2: Les autres reps. d'e.p.u.i.: des modules vertex sur H_0.

Niveau 3: Trois reps. : axiome d'entrelacement, champs primaires.

Niveau 4: Fusion (pour les physiciens): OPE de champs primaires.

Remarque: La définition 'vertex' des champs primaires est équivalente à celle par les modules de densités (voir aprés).

Construction GKO $\rightsquigarrow$ condition suffisante

- $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une super sous-algèbre de Lie.
- V une représentation irréductible unitaire de $\mathfrak{g}$:

$$V = \bigoplus M_i \otimes U_i \quad \text{comme } \mathfrak{h}\text{-module.}$$

- $\mathfrak{d}$ une algèbre de superdérivation implémenté sur V et U_i en accord avec l'action de $\mathfrak{h}$.

Alors $\mathfrak{d}$ agit naturellement sur l'espace de multiplicité M_i avec pour cocycle, la différence des cocycles sur V et U_i .

Exemple:

- $(\widehat{\mathfrak{sl}_2})_{\ell+2} \subset (\widehat{\mathfrak{sl}_2})_2 \oplus (\widehat{\mathfrak{sl}_2})_\ell$ inclusion diagonale.
- $H_0^0 \otimes H_j^\ell = \bigoplus M_{jk}^\ell \otimes H_k^{\ell+2}$ (par formule de ch. de Kac-Weyl)
- $\mathfrak{Vir}_{1/2}$ agit sur M_{jk}^ℓ avec charge c_m $(m = \ell + 2)$.
- $L(c_m, h_{pq}^m)$ est un sous-module de M_{jk}^ℓ avec $\left\{ \begin{smallmatrix} p = 2j+1 \\ q = 2k+1 \end{smallmatrix} \right.$

$\rightsquigarrow$ condition suffisante pour la série discrète.

Le critère FQS $\rightsquigarrow$ condition nécessaire

- Le critère FQS fut annoncé en 1984 pour $\mathfrak{Vir}$, par Friedan-Qiu-Shenker, avec une esquisse de démonstration.
- Plus tard, ils ont donné une preuve complète.
- En même temps, lors d'un séminaire à Montréal, Langlands a donné une autre preuve.
- On a adapté l'approche de FQS pour $\mathfrak{Vir}_{1/2}$ car:
    - la première partie de la preuve (courte et trés élémentaire) suffit pour l'application au calcul des caractères (voir après).
    - on a trouvé une lacune dans l'approche de Langlands (reproduite par Sauvageot pour $\mathfrak{Vir}_{1/2}$).

$\longrightarrow$ Représentations $L(c,h)$ de $\mathfrak{Vir}_{1/2}$.

$\longrightarrow$ Unitaire $\Rightarrow$ $c, h \geq 0$

$\longrightarrow$ $c \geq 3/2, h \geq 0 \Rightarrow$ unitaire.

$\longrightarrow$ Pour explorer la zone $0 \leq c < 3/2, \ \ h \geq 0$:
on démontre et utilise le déterminant de Kac.

$\longrightarrow$ Miracle: Seul la série discrète n'est pas exclue.

$\rightsquigarrow$ condition nécessaire pour la série discrète.

L'espace de multiplicité est irréductible

- On sait déjà que $L(c_m, h^m_{pq})$ est un $\mathfrak{Vir}_{1/2}$ sous-module de l'espace de multiplicité M^m_{pq}.
- Le caractère de M^m_{pq} est donné par la construction coset.
- La preuve du critère FQS fournit deux vecteurs singuliers qui permettent d'évaluer le caractère de $L(c_m, h^m_{pq})$.
- Si M^m_{pq} admet un autre sous-module irréductible, il doit être de la forme $L(c_m, h^m_{rs})$ par la 1er partie de la preuve de FQS.

$\longrightarrow$ contradiction avec les caractères.

$\longrightarrow$ $M^m_{pq} = L(c(m), h^m_{p,q})$ et $ch(L(c_m, h^m_{pq})) = ch(M^m_{pq})$

$\leadsto$ Le théorème 2 s'ensuit.

Notons que ce cadre unitaire permet de produire cette preuve originale de 1 page, alors que le cadre non-unitaire nécessite 30 pages (Astashkevich).

Soit H un espace de Hilbert.
Soit $B(H)$ l'algèbre des opérateurs bornés sur H.
Une $\star$-algèbre $\mathcal{M} \subset B(H)$ est une algèbre de von Neumann si elle est égale à son bicommutant: $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$
C'est un facteur si son centre est trivial: $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = \mathbb{C}$.
Théorie de Tomita-Takesaki:

- Vecteur vide Ω: $\mathcal{M}\Omega$ et $\mathcal{M}'\Omega$ dense dans H (cyclique pour $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$).
- $S : x\Omega \to x^\star\Omega$, $S = J\triangle^{\frac{1}{2}}$ (décomposition polaire), $J\mathcal{M}J = \mathcal{M}'$, $\triangle^{it}\mathcal{M}\triangle^{-it} = \mathcal{M}$.
- Action modulaire: $\sigma_t^\Omega(x) = \triangle^{it}x\triangle^{-it}$, $t \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{M} \neq \mathbb{C}$ est un facteur de type III_1 ssi $\exists\Omega$ avec action modulaire est ergodique (ie fixe uniquement les constantes).

Dévissage de Takesaki

Soit $\mathcal{M} \subset B(H)$ une algèbre de von Neumann , $\Omega \in H$ cyclique pour $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$, $\triangle^{it}$, J les opérateurs modulaires. Si $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ est une sous-algèbre de von Neumann telle que $\triangle^{it}\mathcal{N}\triangle^{-it} = \mathcal{N}$:

(a) $\triangle^{it}$ et J se restreignent aux opérateurs modulaires $\triangle_1^{it}$ et J_1 de $\mathcal{N}$ pour Ω sur la clôture H_1 de $\mathcal{N}\Omega$.

(b) Si p est la projection sur H_1, alors $p\mathcal{M}p = \mathcal{N}p$ et $\mathcal{N} = \{x \in \mathcal{M} \mid xp = px\}$ (les relations de Jones)

(c) $H_1 = H \iff \mathcal{M} = \mathcal{N}$

On doit faire de l'analyse, guidée par:

Slogan: L_0 est comme un Laplacien, et $D = G_{-1/2}$ est comme un opérateur de Dirac, car $DD^\star + D^\star D = 2L_0$.

Remarque: Pour $L\mathfrak{g}$ ou $\mathfrak{Vir}$ il y a les groupes LG ou $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$.
Pas de groupe associés aux supergénérateurs G_r.
$\rightarrow$ On doit travailler avec les opérateurs non-bornés (analyse).

Soit I un intervalle propre de $\mathbb{S}^1$ et $H = H^\ell_{ij}$ (série discrète).

- $\mathfrak{Vir}_{1/2}(I) = \mathfrak{Vir}_{1/2}$ couplée avec $C_c^\infty(I)$.
- Contrôle des opérateurs par les espaces de Sobolev de L_0.
- Formel. autoadjoint $\rightarrow$ autoadjoint (Glimm-Jaffe-Nelson)
- Supercommutation formelle $\rightarrow$ superco. spectrale (Nelson)

Les fonctions bornés des opérateurs autoadjoints de $\mathfrak{Vir}_{1/2}(I)$ engendrent l'algèbre de von Neumann $\pi_H(\mathfrak{Vir}_{1/2}(I))''$, naturellement $\mathbb{Z}_2$-graduée.

Propriétés des algèbres locales

- Groupe modulaire géométrique.
  (transformation de Möbius fixant les extrémités de I).
- Facteur hyperfini de type III_1.
- Dualité de Haag-Araki dans le vide:

$$\pi_{H_{00}^{\ell}}(\mathfrak{Vir}_{1/2}(I))'' = \pi_{H_{00}^{\ell}}(\mathfrak{Vir}_{1/2}(I^c))^{\natural}$$

- Sous-facteurs de J-W: mesure défaut de dualité hors du vide:

$$\pi_{H_{ij}^{\ell}}(\mathfrak{Vir}_{1/2}(I))'' \subset \pi_{H_{ij}^{\ell}}(\mathfrak{Vir}_{1/2}(I^c))^{\natural}$$

- Equivalence locale: la restriction de 2 reps. d'e. p. (même c) à $\mathfrak{Vir}_{1/2}(I)$ sont unitairement équivalentes.

$\longrightarrow$ prouvées par dévissage de Takesaki depuis les fermions.

Remarque: $\pi_{H_{ij}^{\ell}}(\mathfrak{Vir}_{1/2}(I^c))^{\natural}$ est engendrés par des chaines de fermions couplés sur I et compressés.

Ces fermions compressés $p^{\ell}_{ii'}\psi(f)p^{\ell}_{jj'}$ sont des opérateurs bornés superentrelaçant l'action de $\mathfrak{Vir}_{1/2}(I^c)$ entre $H^{\ell}_{ii'}$ et $H^{\ell}_{jj'}$. On veut interpréter ces compressions comme des champs primaires.

On définit un champ primaire par un opérateur linéaire:

$$\phi^{kk'\ell}_{ii'jj'} : H^{\ell}_{jj'} \otimes \mathcal{F}^{\sigma}_{\lambda,\mu} \to H^{\ell}_{ii'} \quad \text{(de charge } (k,k')\text{)}$$

qui superentrelace l'action de $\mathfrak{Vir}_{1/2}$; avec $H^{\ell}_{ii'}$, $H^{\ell}_{jj'}$ dans la série discrète de $\mathfrak{Vir}_{1/2}$, et $\mathcal{F}^{\sigma}_{\lambda,\mu}$ une représentation ordinaire ($c=0$) de $\mathfrak{Vir}_{1/2}$ (module de superdensités).

Tressage

Les relations simples de localité entre deux fermions couplés sur des intervalle disjoints :

$$\psi(f)\psi(g) = -\psi(g)\psi(f),$$

admettent un équivalent aprés compression: le tressage.
Sans avoir à résoudre une équation différentielle, on déduit les relations de tressages pour $\mathfrak{Vir}_{1/2}$ à partir de celle de $LSU(2)$, en utilisant subtilement la construction coset et un argument de convolution:

$$\phi^{\gamma\ell}_{ii'jj'}(f)\phi^{\gamma\ell}_{jj'kk'}(g) = \sum \mu_{rr'}\phi^{\gamma\ell}_{ii'rr'}(e_\lambda g)\phi^{\gamma\ell}_{rr'kk'}(\bar{e_\lambda} f)$$

avec $\mu_{rr'} \neq 0$ et e_λ une correction de phase, $\gamma = \alpha$ ou β.
Remarque: les champs primaires de charge $\alpha = (1/2, 1/2)$ et $\beta = (0, 1)$ sont des compressions des fermions complexes et réels.

$\rightsquigarrow$ opérateurs bornés.

Irréductibilité

Soit $\mathcal{N}(I) = \pi_{H_{00}^{\ell}}(\mathfrak{Vir}_{1/2}(I))''$.
On peut démontrer la densité de von Neumann:

$$\mathcal{N}(I_1) \vee \mathcal{N}(I_2) = \mathcal{N}(I)$$

Clés de la preuve:

- $\mathcal{N}(I)$ est engendré par des chaines de champs primaires
- Version analytique de l'OPE : $\phi(f_n)\phi(g_n) \to_w cte$
- Décroissance à l'infini des coefficients matriciels pour la série discrète des extensions centrales de $SU(1,1)$.

Idem H_{ij}^{ℓ} par équivalence locale.
L'irréductibilité des sous-facteurs de J-W s'ensuit:

$$\pi_{H_{ij}^{\ell}}(\mathfrak{Vir}_{1/2}(I))^{\natural} \cap \pi_{H_{ij}^{\ell}}(\mathfrak{Vir}_{1/2}(I^c))^{\natural} = \mathbb{C},$$

Fusion de Connes et sous-facteurs

Slogan: C'est comme une théorie des groupes finis, qui aurait des représentations de dimension (quantique) non-entière !

On se place à charge centrale c_m fixé. On note génériquement H_k les représentations de la série discrète et H_0 pour le vide.

- Espace d'opérateurs d'entrelacement: $Hom_{\mathfrak{Vir}_{1/2}(I)}(H_0, H_k)$
- Fusion de Connes $H_i \boxtimes H_j$: la complétion L^2 de l'espace $Hom_{\mathfrak{Vir}_{1/2}(I)}(H_0, H_i) \otimes Hom_{\mathfrak{Vir}_{1/2}(I^c)}(H_0, H_j)$ pour :
$$(x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2) = (-1)^{(\partial x_1 + \partial x_2)\partial y_2}(x_2^\star x_1 y_2^\star y_1 \Omega, \Omega)$$
(fonction 4 points)

Les relations de tressage de charge α prouvent
la formule de transport suivante:

$$\pi_j(a_{\alpha 0}^\star . a_{\alpha 0}) = \sum \lambda_k a_{kj}^\star . a_{kj} \quad \text{avec } \lambda_k > 0.$$

avec a_{kj} un champ primaire de $\mathfrak{Vir}_{1/2}$, entre H_j et H_k, couplé en I, de charge α.

Maintenant, $a_{\alpha 0} \in Hom_{\mathfrak{Vir}_{1/2}(I)}(H_0, H_\alpha)$:

$$\|a_{\alpha 0} \otimes y\|^2 = (a^\star_{\alpha 0} a_{\alpha 0} y^\star y \Omega, \Omega) = (y^\star \pi_j(a^\star_{\alpha 0} a_{\alpha 0}) y\Omega, \Omega) = \sum \lambda_k \|a_{kj} y \Omega\|^2.$$

Ainsi: $a_{\alpha 0} \otimes y \mapsto \bigoplus \sqrt{\lambda_k} a_{kj} y \Omega$ donne une application unitaire.

$\rightsquigarrow$ on obtient les règles de fusion avec α:

$$H_\alpha \boxtimes H_j = \bigoplus_{k \in \langle \alpha, j \rangle} H_k.$$

Ces règles donnent (par Perron-Frobenius) un caractère d'anneau de fusion: la dimension quantique, calculé avec celui de $LSU(2)$:

$$d(H^\ell_{ij}) = d(H^\ell_i) d(H^{\ell+2}_j).$$

Idem pour β: $\quad H_\beta \boxtimes H_j \leq \bigoplus_{k \in \langle \beta, j \rangle} H_k.$

Les dimensions quantiques montrent que ces règles partielles sont en fait exactes. Ensuite, on voit que les règles de fusion pour α et β permettent de calculer toutes les autres. Les indices des sous-facteurs sont donnés par le carré des dimensions quantiques.