



**HAL**  
open science

## Gap-labeling des pavages de type pinwheel

Haïja Moustafa

► **To cite this version:**

Haïja Moustafa. Gap-labeling des pavages de type pinwheel. Mathématiques [math]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2009. Français. NNT: . tel-00509886

**HAL Id: tel-00509886**

**<https://theses.hal.science/tel-00509886>**

Submitted on 17 Aug 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*N° d'ordre : D.U. 1987*

UNIVERSITÉ BLAISE-PASCAL  
(U.F.R. de Sciences et Technologies)

ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES  
N° : 625

**Thèse**

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

(SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES)

par

Haija MOUSTAFA

*Diplomé d'un Master Recherche*

**GAP-LABELING DES PAVAGES DE TYPE PINWHEEL.**

Soutenue publiquement le 07 décembre 2009, devant la commission d'examen :

M. Saad BAAJ	Examineur
M. Thierry FACK	Président du jury
M. François GAUTERO	Examineur
M. Johannes KELLENDONK	Examineur
M. Hervé OYONO-OYONO	Directeur de thèse
M. Jean RENAULT	Examineur

Rapporteurs : M. Jean Bellissard  
M. Thomas Schick





*À Lucie ...*



# Remerciements

J'aimerais commencer par remercier Hervé Oyono-Oyono, mon directeur de thèse. C'est un grand plaisir pour moi et l'occasion de lui manifester toute ma gratitude pour m'avoir proposé un sujet aussi passionnant. Il a su me guider avec patience et précision pendant ces trois années tout en me laissant toute la liberté dont j'avais besoin. J'ai eu la chance de bénéficier de son grand savoir et de ses idées ingénieuses. Il m'a aussi permis de rencontrer énormément de personnes qui travaillent dans ce domaine en m'envoyant vers des destinations variées. Cela m'a beaucoup enrichi tant sur le plan personnel que professionnel. Pour tout cela et pour m'avoir fait confiance, j'aimerais lui exprimer mes remerciements.

Je remercie également Jean Bellissard ainsi que Thomas Schick, qui ont bien voulu rapporter ma thèse.

Ce n'est pas la seule raison que j'ai de les remercier.

Jean Bellissard m'a beaucoup appris sur le gap-labeling. Il s'est toujours montré d'un grand enthousiasme quand je discutais avec lui de mes résultats partiels sur le gap-labeling des pavages de type pinwheel et il m'a toujours encouragé à aller plus loin.

J'aimerais exprimer ma reconnaissance à Thomas Schick pour m'avoir fait des remarques judicieuses concernant mes travaux.

J'aimerais aussi exprimer ma reconnaissance à Saad Baaj, Thierry Fack, François Gautero, Johannes Kellendonk et Jean Renault pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

C'est un grand honneur pour moi d'avoir Thierry Fack dans mon jury, avec qui j'ai pu discuter du théorème de l'indice lors de mon séjour à Nashville en 2007.

Comment ne pas remercier François Gautero avec qui j'ai pu parler de la dynamique des pavages dans son bureau et dans le couloir du laboratoire de Mathématiques de Clermont-Ferrand.

J'exprime également ma gratitude à Johannes Kellendonk, avec qui j'ai pu parler de pavages et de gap-labeling au cours de plusieurs séjours en commun et qui m'a toujours répondu avec patience et gentillesse.

C'est un plaisir pour moi d'avoir Jean Renault dans mon jury, lui qui m'a tant appris

sur les groupoïdes et leur  $C^*$ -algèbres. Il m'a également toujours encouragé et j'ai ressenti beaucoup de soutien de sa part.

Que dire du rôle que Saad Baaj a joué durant mes trois années de thèse. Je lui exprime ici mon plus grand respect pour m'avoir toujours accueilli les bras ouverts dans son bureau, pour m'avoir toujours bien guidé et conseillé que ce soit durant ma thèse ou durant mon mémoire de Maîtrise en tant que directeur, ainsi que durant ma préparation à l'agrégation.

J'ai eu la chance de faire ma thèse au sein de l'équipe de Géométrie, Algèbre et Algèbres d'Opérateurs de Clermont-Ferrand où l'ambiance a toujours été très stimulante. J'aimerais remercier particulièrement Jérôme Chabert, Jean-Marie Lescure, Claire Debord, Michael Heusener, Sylvie Paycha, Thierry Lambre, Julien Bichon, Dominique Manchon ainsi que Yves Stalder et François Dumas.

D'autres personnes m'ont beaucoup apporté au sein de ce laboratoire et j'aimerais exprimer ma gratitude à François Martin, à Jérôme Lemoine et à Emmanuel Royer.

Je pense que le GDR de Géométrie Non Commutative et toute l'équipe qui le forme mérite une place de choix dans cette page de remerciements. Je remercie en particulier Georges Skandalis, Michel Hilsun, Emmanuel Germain, Stéphane Vassout, Moulay-Tahar Benameur, Claire Anantharaman Delaroche, Pierre Julg, Jean-Louis Tu, Stéphane Vaes, Kroum Tzanev et Mikael Pichot. Ce GDR est en effet un lieu de partage et de convivialité qui permet autant d'apprendre que d'exposer ses propres travaux. Merci à tous.

Notre travail d'enseignant chercheur ne pourrait pas s'exercer dans d'aussi bonnes conditions si nous n'avions pas à nos côtés des personnes aussi compétentes et gentilles au niveau de l'administration. Je pense tout particulièrement à Noëlle Rouganne, Valérie Sourlier, Marie-Paule Bressoulaly et Annick Montori, sans oublier Séverine Miginiac et Karine Darot.

Du côté des thésards de Clermont-Ferrand, Nicolas James est un grand ami et un compagnon de route de cette aventure qu'est la thèse. On a partagé énormément de choses ensemble, tant à l'université qu'à l'extérieur et je lui suis profondément reconnaissant pour toute l'aide et le soutien qu'il m'a apporté.

Je pense également à Vivien Clauzon, Malcolm Djenno, Ingrid Violet, Mathieu Gourcy, Marie-Françoise Ouedraogo, Jacqueline Ojeda et Jérémy Ruiz.

Au cours de ma thèse, j'ai eu la chance de pouvoir rencontrer beaucoup d'autres doctorants de par le monde qui m'ont beaucoup apporté.

J'aimerais remercier en particulier Maria-Paula Gomez Aparicio, Paulo Carrillo Rouse, Pierre Clare, Ivan Lassagne, Frédéric Albert, Pierre Fima, Cyril Houdayer, Sébastien Falguières, Alexandre Rey Alcantara, Elkaïoum Moutuou ainsi que Florent

Juillard avec qui j'ai pu partager les rencontres conviviales et intéressantes organisées par le GDR de Géométrie Non Commutative.

J'ai une pensée pour Mike Whittaker et Robin Deeley avec qui j'ai pu discuter des pavages de type pinwheel pendant mon séjour à l'université de Victoria au Canada. J'aimerais remercier également Walther Paravicini, Siegfried Echterhoff et Wolfgang Lück pour avoir organisé le semestre spécial de  $KK$ -théorie à Münster qui m'a permis de beaucoup apprendre et de rencontrer d'autres étudiants de tous horizons. Je tiens à les remercier ici, tous autant qu'ils sont, pour l'ambiance qu'ils ont su instaurer pendant les trois mois du semestre.

Antoine Julien, Samuel Petite et Jean Savinien ont également toute ma reconnaissance pour les discussions que l'on a eues sur les pavages et le gap-labeling.

J'ai également beaucoup de reconnaissance envers mes amis avec qui j'ai partagé beaucoup de bons moments et qui m'ont toujours soutenu.

Je pense à Guilhem, Sandrine, Arthur et Jules Rouger avec qui il est toujours agréable de passer du temps, tant pour discuter de tout et de rien, de problèmes du quotidien que pour se retrouver autour d'une table pour jouer à un jeu de société. Merci de tout coeur Sandrine et Guilhem.

Il y a également Elise Vernet, Julien Bost, Sophie Bardet ainsi que Céline Le Barbey avec qui j'ai pu partager de très bons moments autour d'un verre en soirée ou au cours de randonnées aux quatre coins de la région et du pays.

Je remercie également mes parents Christine et Ahmad sans qui je n'en serai pas là aujourd'hui s'ils ne m'avaient pas toujours encouragé et soutenu.

J'aimerais exprimer ma gratitude envers ma soeur Nadia, mon frère Farès, sa compagne Delphine et leurs enfants Emile et Joséphine, que je vois trop rarement mais que j'aime de tout mon coeur même si je ne leur montre pas assez.

Comment finir ces remerciements en ne faisant pas apparaître Lucie, sans le soutien de qui je n'aurais sûrement jamais pu finir ma thèse. Elle a su supporter mes sautes d'humeur et me remonter le moral quand j'en avais besoin. Elle m'a toujours poussé et soutenu dans tous les choix que j'ai pu faire. Je te remercie pour tout cela Lucie.

J'aimerais aussi pouvoir dire à ses parents Joëlle et Jean-Luc combien ils ont pu m'apporter pendant toutes ces années et combien de choses j'ai pu apprendre à leur côté. Ne changez rien, merci pour tout.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappels</b>	<b>15</b>
1.1 Pavages de type pinwheel et enveloppe continue . . . . .	15
1.2 La transversale canonique . . . . .	18
1.3 $C^*$ -algèbre associée au pavage . . . . .	22
1.4 Gap-labeling . . . . .	24
1.4.1 Quasi-cristaux . . . . .	24
1.4.2 Densité d'états intégrée - IDS . . . . .	25
1.4.3 La formule de Shubin . . . . .	27
1.4.4 Gap-labeling . . . . .	29
<b>2 Théorème de l'indice pour le gap-labeling</b>	<b>31</b>
2.1 Etude de $K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$ . . . . .	31
2.2 Calcul de l'image par $\tau_*^\mu$ de la copie de $\mathbb{Z}$ . . . . .	39
2.3 Etude du sommant $\check{H}_c^2((\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z})$ dans le groupe $K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$ . . . . .	43
2.4 Théorème de l'indice pour le calcul de la trace . . . . .	47
2.4.1 Rappels sur les groupoïdes et les opérateurs longitudinaux . . . . .	50
2.4.2 Premier produit de Kasparov . . . . .	54
2.4.3 Second produit de Kasparov . . . . .	57
2.4.4 Produit de Kasparov par le Dirac le long des feuilles de $\Omega$ . . . . .	60
2.5 Calcul de l'image par $\tau_*^\mu$ des sommants $\mathbb{Z}.q_i$ . . . . .	64
<b>3 Cohomologie PV et groupe des coinvariants entiers</b>	<b>67</b>
3.1 Espace des proto-tuiles du pavage de type pinwheel . . . . .	68
3.2 $\Omega/S^1$ vu comme une limite projective d'espaces de supertuiles . . . . .	70
3.3 Cohomologie PV . . . . .	73
3.3.1 Complexes simpliciaux orientés et cohomologie PV . . . . .	74
3.3.2 Démonstration du théorème <b>3.10</b> . . . . .	78
3.4 Le groupe des coinvariants entiers . . . . .	82



<b>4</b>	<b>Gap-labeling pour les pavages de type pinwheel</b>	<b>89</b>
4.1	Démonstration de la conjecture . . . . .	89
4.2	Calcul explicite du gap-labeling . . . . .	93
	<b>Conclusion</b>	<b>103</b>
<b>A</b>	<b>Morita équivalence entre <math>(C_0(X \times \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2) \rtimes SO(2)</math> et <math>C_0(X) \rtimes SO(2)</math></b>	<b>105</b>
A.1	Isomorphisme entre $C_0(X \times G) \rtimes G$ et $C_0(X) \otimes C_0(G) \rtimes G$ . . . . .	106
A.2	Isomorphisme entre $C_0(G) \rtimes G$ et $\mathcal{K}(L^2(G))$ . . . . .	106
A.3	Morita équivalence $SO(2)$ -équivariante entre $C_0(X \times \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2$ et $C_0(X)$	107
<b>B</b>	<b>Démonstration pour le lemme 2.4</b>	<b>109</b>
<b>C</b>	<b><math>C^*</math>-modules hilbertiens gradués</b>	<b>115</b>
C.1	$C^*$ -modules hilbertiens . . . . .	115
C.2	$C^*$ -modules gradués et produits tensoriels . . . . .	117
<b>D</b>	<b>KK-théorie équivariante de Kasparov</b>	<b>121</b>
<b>E</b>	<b>Calculs pour la proposition 2.21 et le théorème 2.23</b>	<b>129</b>
E.1	Lemmes pour le produit $KK_1 \otimes KK_0$ ou inversement . . . . .	129
E.2	Calculs pour la proposition <b>2.21</b> . . . . .	136
E.3	Calculs pour le théorème <b>2.23</b> . . . . .	137
	<b>Bibliographie</b>	<b>141</b>





# Introduction

En 1982, Shechtman et ses collaborateurs découvrirent, dans un alliage d'aluminium manganèse rapidement solidifié, une phase ayant toutes les caractéristiques d'un cristal ([SBGC84]). Afin de connaître la répartition atomique d'un tel solide, ils réalisèrent son diagramme de diffraction que l'on peut observer sur la figure FIG. 1.



FIG. 1 – Diagramme de diffraction.

Ce diagramme est discret et ressemble à celui qu'on peut obtenir à partir d'un cristal. A partir de l'étude de ce diagramme, ils déduisirent que les atomes se répartissent dans l'espace de sorte que la distance entre deux atomes soit supérieure à une certaine constante et qu'il n'existe qu'un nombre fini de configurations locales aux translations près.

Cependant, le diagramme de diffraction du solide découvert par Shechtman présente une symétrie d'ordre 10 qui est interdite par la classification des cristaux.

La structure de ce solide est donc différente de celle des cristaux.

En particulier, la configuration atomique n'est stable par aucune translation. Cependant, chaque configuration d'atomes se répète uniformément.

Pour cette raison, une telle structure fut appelée *quasi-cristal*.

Cette découverte engendra un énorme intérêt en physique des solides ainsi qu'en

mathématiques.

Une façon naturelle de modéliser mathématiquement cette structure atomique est de construire un pavage aperiodique encodant les propriétés géométriques de la distribution atomique en des propriétés combinatoires.

Un *pavage* de  $\mathbb{R}^n$  est une famille dénombrable  $P = \{t_0, t_1, \dots\}$  d'ensembles non vides, compacts  $t_i$  appelés *pavés* ou *tuiles*, chaque pavé étant supposé homéomorphe à la boule unité, telle que les  $t_i$  recouvrent  $\mathbb{R}^n$ , muni d'une origine  $O$  fixée, les pavés ne se rencontrant que sur leur bord.

On considérera dans la suite le cas particulier de pavages pour lesquels il existe une famille finie  $\{p_0, \dots, p_n\}$  telle que tous les compacts  $t_i$  sont des  $G$ -copies d'un  $p_k$ , où  $G$  est un sous-groupe des isométries directes de  $\mathbb{R}^n$ . Les  $p_k$  sont alors appelées *proto-tuiles*.

Un *patch* est une collection finie de tuiles d'un pavage.

Un pavage est dit de **G-type fini** si, pour tout rayon  $R > 0$ , il n'existe qu'un nombre fini de patches de diamètre inférieur à  $R$  modulo l'action de  $G$ .

Un pavage  $\mathcal{T}'$  est **G-répétitif** si, pour tout patch  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{T}'$ , il existe un rayon  $R(\mathcal{A}) > 0$  tel que toute boule de  $\mathbb{R}^n$  de rayon  $R(\mathcal{A})$  rencontre  $\mathcal{T}'$  sur un patch contenant une  $G$ -copie du patch  $\mathcal{A}$ .

Un **pavage G-aperiodique** désignera ici un pavage de  $\mathbb{R}^n$  de  $G$ -type fini,  $G$ -répétitif et non périodique pour les translations de  $\mathbb{R}^n$ .

Les atomes d'un quasi-cristal sont alors situés à l'intérieur des tuiles du pavage aperiodique le modélisant.

Motivé par les propriétés électromagnétiques et macroscopiques de ces solides, J. Bellissard étudia le mouvement d'un électron dans un tel quasi-cristal (voir [Bel82], [Bel86] et [Bel92]).

Ce mouvement est étroitement lié aux sauts d'énergie dans le spectre de l'opérateur de Schrödinger associé au solide. Cet opérateur est de la forme :

$$H = -\frac{\hbar}{2m}\Delta + V(x)$$

où  $-\frac{\hbar}{2m}$  est une constante,  $\Delta$  est le laplacien sur  $\mathbb{R}^n$  et  $V$  est un potentiel dépendant de la structure du quasi-cristal étudié.

$V$  est de la forme  $V(x) = \sum_{y \in L} v(x - y)$  où  $L$  est l'ensemble des positions des atomes

dans le quasi-cristal et  $v$  est le potentiel effectif d'un électron de valence près d'un atome, c'est-à-dire que  $v$  est la fonction régissant l'interaction entre un électron et un atome (voir [BHZ00]).

J. Bellissard chercha donc un moyen d'étiqueter les trous de ce spectre en termes mathématiques, c'est le problème du gap-labeling.

Les pavages étaient étudiés d'un point de vue mathématique bien avant la découverte des quasi-cristaux mais l'intérêt engendré par ce nouveau matériau a permis de faire des progrès énormes dans cette étude en examinant les propriétés des pavages sous un nouvel angle, celui de la géométrie non commutative.

En 2000, dans [KP00], J. Kellendonk et I. Putnam ont associé une  $C^*$ -algèbre à un pavage  $G$ -apériodique pour en étudier les propriétés. Celle-ci est construite comme le produit croisé des fonctions continues sur un espace topologique  $\Omega$  par le groupe  $G$ , l'espace  $\Omega$  encodant les propriétés combinatoires du pavage en propriétés topologiques et dynamiques.

Pour obtenir cet espace, fixons une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  ainsi qu'un pavage  $G$ -apériodique  $P$ .

Si on laisse agir naturellement  $G$  à droite sur  $P$ , on obtient une famille de pavages  $P.G$  que l'on peut compléter par rapport à une certaine distance (adaptée à de tels pavages) pour obtenir l'**enveloppe continue**  $\Omega$  du pavage  $P$  munie d'une action naturelle de  $G$  et formée de pavages partageant les mêmes propriétés combinatoires que  $P$  (cette construction fut introduite par Kellendonk dans [Kel95]).

Grâce aux propriétés combinatoires imposées sur  $P$ , l'espace  $\Omega$  est compact et toutes les orbites sous l'action de  $G$  sont denses dans  $\Omega$ .

En regardant le sous-espace des pavages de  $\Omega$  vérifiant certaines conditions de rigidité, on obtient alors un sous-espace  $\Xi$  de  $\Omega$ , appelé **transversale canonique**. Cette transversale est un espace de Cantor et permet de voir  $\Omega$  comme un espace feuilleté, i.e  $\Omega$  est recouvert par des ouverts de la forme  $K \times U$ , où  $K$  est un clopen de  $\Xi$  et  $U$  est un ouvert de  $G$ , dont les applications de transition vérifient certaines conditions de régularité. L'espace  $\Xi$  en est alors une transversale et les feuilles de  $\Omega$  sont homéomorphes à  $G$  ou à un quotient de  $G$  par un sous-groupe discret.

On peut alors associer au système dynamique  $(\Omega, G)$  la  $C^*$ -algèbre produit croisé  $C(\Omega) \rtimes G$ .

Comme  $G$  est moyennable, l'espace  $\Omega$  est muni d'une mesure de probabilité  $G$ -invariante et ergodique  $\mu$ . Cette mesure induit alors une trace  $\tau^\mu$  densément définie sur  $C(\Omega) \rtimes G$  ainsi qu'une application linéaire  $\tau_*^\mu : K_0(C(\Omega) \rtimes G) \rightarrow \mathbb{R}$  sur la  $K$ -théorie de  $C(\Omega) \rtimes G$ .

Pour  $G = \mathbb{R}^n$ , J. Bellissard put alors faire le lien entre les trous du spectre de l'opérateur de Schrödinger  $H$  et cette  $K$ -théorie, remarquant que chaque trou dans ce spectre donne lieu à une classe de  $K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n)$  (voir [Bel92] et [BHZ00]). Il montre également que l'image sous  $\tau_*^\mu$  de  $K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n)$  est reliée à la fonction physique  $\mathcal{N} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , appelée *densité d'états intégrée*, abrégé en IDS (voir p.25). Pour  $E \in \mathbb{R}$ , la valeur  $\mathcal{N}(E)$  peut être vue comme la moyenne du nombre de valeurs

spectrales de  $H$  inférieures à  $E$  par unité de volume.

Ainsi, c'est une fonction positive et croissante sur  $\mathbb{R}$  et elle définit donc une mesure de Stieljes-Lebesgue  $d\mathcal{N}$  sur  $\mathbb{R}$  donnée par  $d\mathcal{N}([E; E']) := \mathcal{N}(E') - \mathcal{N}(E)$ .

$d\mathcal{N}$  est alors absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $dE$  (i.e  $\int_A dE = 0 \Rightarrow \int_A d\mathcal{N} = 0$ ) et, par le théorème de Radon-Nikodym, on peut définir la *densité d'états* comme la dérivation  $d\mathcal{N}/dE$ .

Cette densité d'états est une quantité bien connue en physique des solides et elle est accessible par expériences de diffusion (voir [Bel92]).

Cette quantité est importante en physique pour déduire des propriétés de conductivité du quasi-cristal et il est donc crucial de pouvoir prédire l'image de cette fonction. Pour cela, J. Bellissard a démontré qu'on pouvait relier cette fonction à un objet mathématique grâce à la **formule de Shubin**. La formule de Shubin exprime le fait que, si  $E$  est dans un trou du spectre, il existe une projection  $p_E$  de  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n$  telle que  $\mathcal{N}(E)$  soit égale à  $\tau^\mu(p_E)$  et que cela ne dépend pas du réel  $E$  choisi dans le trou du spectre.

Ainsi, l'image de l'IDS  $\mathcal{N}$  est incluse dans l'image, sous  $\tau_*^\mu$ , de  $K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n)$ .

Pour étudier les propriétés de conductivité du quasi-cristal, il est donc important de connaître cette dernière image.

La conjecture du gap-labeling formulée par J. Bellissard prédit alors l'image, sous  $\tau_*^\mu$ , du groupe de  $K$ -théorie :  $\mu$  induit une mesure  $\mu^t$  sur la transversale canonique  $\Xi$  (donnée localement comme le quotient de  $\mu(K \times U)$  par le volume de  $U$ ) et la conjecture exprime alors le lien entre l'image de  $K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n)$  sous  $\tau_*^\mu$  et l'image sous  $\mu^t$  des fonctions continues sur  $\Xi$  à valeurs entières  $C(\Xi, \mathbb{Z})$  :

**Conjecture :** ([Bel92], [BHZ00])

$$\tau_*^\mu \left( K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n) \right) = \mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z}))$$

Dans cette conjecture,  $\mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z}))$  désigne l'ensemble  $\left\{ \int_{\Xi} f d\mu^t; f \in C(\Xi, \mathbb{Z}) \right\}$ .

Depuis, plusieurs travaux furent effectués pour prouver cette conjecture.

La suite exacte de Pimsner-Voiculescu permet à Bellissard dans [Bel92] de démontrer la conjecture pour  $n = 1$  et A. van Elst put prouver le cas  $n = 2$  en itérant cette suite exacte dans [vE94].

J. Bellissard, J. Kellendonk et A. Legrand démontrèrent la conjecture pour  $n = 3$  dans [BKL01] en utilisant une suite spectrale due à Pimsner.

Enfin, c'est en 2002 que la conjecture fut démontrée dans le cas général d'un pavage  $\mathbb{R}^n$ -apériodique dans trois articles indépendants : par J. Bellissard, R. Benedetti et J.-M. Gambaudo dans [BBG06], par M.-T. Benameur et H. Oyono-Oyono dans

[**BOO02**] et par J. Kaminker et I. Putnam dans [**KP03**].

Il est alors naturel de se demander si cette conjecture reste vraie pour des pavages plus généraux.

Cette thèse étudie le cas particulier des pavages de type  $(1, 2)$ -*pinwheel* du plan introduit par Conway et Radin (voir [**Rad94**] et [**Rad95**]).

Ce sont des pavages construits à partir de deux triangles rectangles de côtés de longueur 1,2 et  $\sqrt{5}$ , images l'un de l'autre par réflexion.

On obtient un pavage de type pinwheel grâce à la méthode de *substitution*. On peut recouvrir les dilatés, par un facteur de  $\sqrt{5}$ , des deux triangles par l'union de copies par translations et rotations des deux triangles, les copies ne se rencontrant que sur leur bord (voir FIG. 2).

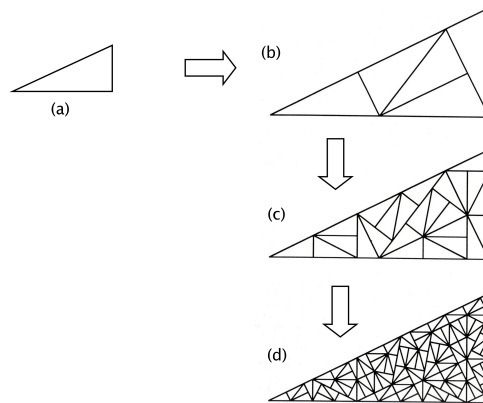


FIG. 2 – Substitution associée aux pavages de type pinwheel.

En itérant le processus, on construit alors une réunion de triangles qui recouvre des régions de plus en plus grandes du plan et qui, à la limite, recouvre le plan et, par conséquent, constitue un pavage du plan appelé pavage de type pinwheel et dont un patch est représenté sur la figure FIG. 3.

Ce pavage est alors non périodique pour les translations du plan, de  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ -type fini et  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ -répétitif, où  $\mathbb{R}^2 \times S^1$  représente le groupe des isométries directes du plan.

Il n'est pas de  $\mathbb{R}^2$ -type fini puisque dans tout pavage de type pinwheel, on retrouve les tuiles dans une infinité de directions différentes.

L'enveloppe continue  $\Omega$  de ce pavage contient alors six cercles laissés stables par une rotation d'angle  $\pi$  autour de l'origine. La réunion de ces 6 cercles est notée  $F$  et ce sont les seuls points fixes sous l'action des rotations.

On peut alors appliquer la construction expliquée ci-dessus pour obtenir un



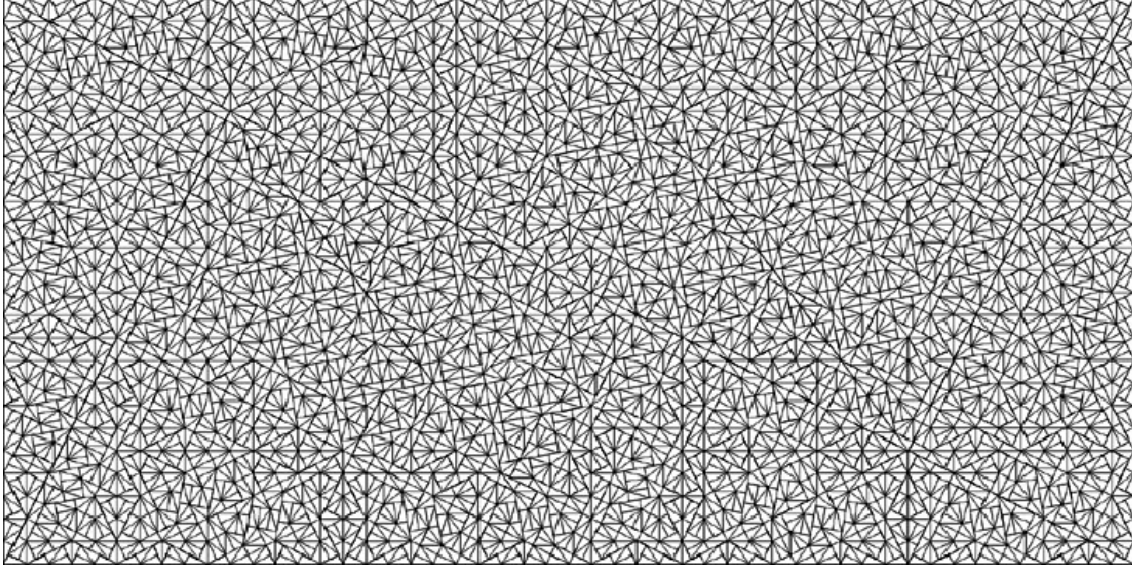


FIG. 3 – Patch d’un pavage de type pinwheel.

système dynamique  $(\Omega, \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$  où  $\Omega$  est un espace compact et dont toutes les orbites sous l’action de  $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$  sont denses.

On obtient également une transversale canonique  $\Xi$  et  $\Omega$  est alors un espace feuilleté dont les feuilles sont homéomorphes à  $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$  excepté six qui sont homéomorphes à  $(\mathbb{R}^2 \rtimes S^1)/(0 \times \langle \pi \rangle)$ .

Nous cherchons à démontrer le théorème suivant :

**Théorème 4.1 :**

$$\tau_*^\mu \left( K_0(C(\Omega \times \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)) \right) = \mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z})).$$

Nous voulons donc relier l’image de  $K_0(C(\Omega \times \mathbb{R}^2 \rtimes S^1))$  sous l’application linéaire  $\tau_*^\mu$  au  $\mathbb{Z}$ -module de fréquence des patches  $\mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z}))$ .

Pour cela, on s’inspire dans un premier temps des travaux effectués par M.-T. Benamèur et H. Oyono-Oyono dans [BOO02].

En effet, dans leur article, ils utilisent le théorème de l’indice pour les feuilletages démontré par A. Connes (voir [Con79] ou [MS06]) pour relier la partie analytique  $\tau_*^\mu \left( K_0(C(\Omega \times \mathbb{R}^n)) \right)$  à une partie topologique, plus calculable,  $Ch_\tau(K_n(C(\Omega)))$  qui vit dans  $H_\tau^*(\Omega)$ , le groupe de cohomologie longitudinale de  $\Omega$  et où  $Ch_\tau$  est le caractère de Chern longitudinal, cf [MS06].

Nous montrons que ce même théorème peut être appliqué pour les pavages de type

pinwheel.

Pour cela, nous cherchons à montrer que tout élément de  $K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$  peut être vu comme l'indice analytique d'un opérateur de Dirac "tordu par un unitaire" de  $K_1(C(\Omega))$ , i.e pour tout  $b \in K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$ , on cherche un  $[u] \in K_1(C(\Omega))$  tel que  $b = [u] \otimes_{C(\Omega)} [D_3]$ , où  $[D_3] \in KK_1(C(\Omega), C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$  est la classe de l'opérateur de Dirac longitudinal  $D_3$  le long des feuilles de  $\Omega$  et  $\otimes_{C(\Omega)}$  représente le produit de Kasparov.

Nous montrons en fait que  $K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$  est la somme de  $\mathbb{Z}^7$  et d'un sous-groupe  $H$  (voir ci-dessous pour plus de détails sur  $H$ ).

L'image sous  $\tau_*^\mu$  de  $\mathbb{Z}^7$  est calculable explicitement et pour tout  $b \in H$ , nous pouvons obtenir un  $[u] \in K_1(C(\Omega))$  tel que  $\tau_*^\mu(b) = \tau_*^\mu([u] \otimes_{C(\Omega)} [D_3])$ , ce qui sera suffisant pour appliquer le théorème de l'indice et obtenir :

**Théorème 2.12 :**  $\forall b \in H, \exists [u] \in K_1(C(\Omega))$  tel que :

$$\tau_*^\mu(b) = \tau_*^\mu([u] \otimes_{C(\Omega)} [D_3]) = \langle Ch_\tau([u]), [C_{\mu^t}] \rangle,$$

où  $[C_{\mu^t}] \in H_3^-(\Omega)$  est le courant de Ruelle-Sullivan associé à  $\mu^t$  (localement, cette classe est donnée par intégration sur  $\Xi \times \mathbb{R}^2 \times S^1$ , voir [MS06]) et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le pairing de la cohomologie et de l'homologie longitudinales.

Pour obtenir ce résultat, nous regardons  $\Omega$  comme un espace doublement feuilleté. Dans un premier temps, nous pouvons considérer  $\Omega$  comme feuilleté par l'action de  $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \rtimes S^1$  et construire l'application  $\psi_1 : K_1(C(\Omega)) \rightarrow K_0(C(\Omega) \rtimes S^1)$  donnée par le produit de Kasparov par la classe du triplet défini par l'opérateur de Dirac  $d_1$  le long des feuilles  $S^1$ .

Ensuite, en considérant  $\Omega$  feuilleté par  $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$ , nous pouvons utiliser le triplet de Kasparov du Dirac  $D_2$  transverse à l'inclusion du feuilletage par  $S^1$  dans le feuilletage par  $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$  de  $\Omega$ .

Ce triplet permet de construire  $\psi_2 : K_0(C(\Omega) \rtimes S^1) \rightarrow K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$  grâce au produit de Kasparov par la classe de ce triplet dans  $KK_0(C(\Omega) \rtimes S^1, C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$ . Grâce à la construction Dirac-dual Dirac (voir [Kas88], [Ska91]), on peut montrer que  $\psi_2$  est en fait un isomorphisme.

Nous prouvons alors que  $\psi_2 \circ \psi_1$  est donné par le produit de Kasparov par la classe du triplet associé au Dirac longitudinal de dimension 3 (voir [HS87] où, dans le cas des feuilletages, ils étudient le produit d'applications de Gysin correspondant à des doubles feuilletages).

Pour obtenir ces résultats, nous démontrons trois résultats intermédiaires.

Tout d'abord, en utilisant une suite exacte à six termes en K-théorie et en notant  $\check{H}^2(\cdot; \mathbb{Z})$  la cohomologie de Čech à coefficients entiers et  $\check{H}_c^2(\cdot; \mathbb{Z})$  celle à support compact, on montre :

**Proposition 2.5 :**

$$K_0(C(\Omega) \rtimes S^1) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^6 \oplus \check{H}_c^2((\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z})$$

Ensuite, nous montrons que  $\tau_*^\mu(\psi_2(\mathbb{Z})) = 0$  et  $\tau_*^\mu(\psi_2(\mathbb{Z}^6)) \subset \mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z}))$  par un calcul explicite utilisant le théorème de l'indice pour les feuilletages en regardant  $\Omega$  feuilleté par  $\mathbb{R}^2$ .

Ainsi, il nous reste à étudier l'image de  $H := \psi_2\left(\check{H}_c^2((\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z})\right)$  sous  $\tau_*^\mu$ .

Nous prouvons alors que  $\check{H}_c^2((\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z})$  est isomorphe à  $\check{H}^3(\Omega; \mathbb{Z})$  et que cet isomorphisme est donné, modulo le caractère de Chern, par  $\psi_1$ .

Ainsi,  $\psi_2 \circ \psi_1$  est surjective sur la partie  $H$  de  $K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$ .

Utilisant un résultat obtenu par Douglas, Hurder et Kaminker dans [DHK91] sur le théorème de l'indice impair pour les feuilletages, on obtient le théorème **2.12** :

**Théorème 2.12 :**  $\forall b \in H, \exists [u] \in K_1(C(\Omega))$  tel que :

$$\tau_*^\mu(b) = \tau_*^\mu([u] \otimes_{C(\Omega)} [D_3]) = \langle Ch_\tau([u]), [C_{\mu^t}] \rangle.$$

Nous étudions donc, dans la suite du manuscrit, la partie cohomologique du théorème. Le caractère de Chern longitudinal se factorise à travers le caractère de Chern usuel en cohomologie de Čech qui peut être défini à coefficients entiers (voir **2.2**). De plus, le courant de Ruelle-Sullivan ne prend en compte que la partie  $H_\tau^3(\Omega)$ . Ainsi, nous nous ramenons à l'étude de  $\check{H}^3(\Omega; \mathbb{Z})$ , le groupe de cohomologie de Čech à coefficients entiers de degré maximal de  $\Omega$ .

Ce groupe est isomorphe au groupe de cohomologie de degré maximal  $\check{H}^2(\Omega/S^1; \mathbb{Z})$  de  $\Omega/S^1$  et le problème se ramène donc à l'étude de ce groupe.

Dans un premier temps, nous montrons que  $\Omega/S^1$  peut être vu comme la limite projective de complexes simpliciaux homéomorphes les uns aux autres en utilisant une idée initiée par Anderson et Putnam dans leur article [AP98].

Comme les pavages de type pinwheel ne « forcent pas leur bord » (voir [Kel95]), on utilise plus spécifiquement la version couronnée de leur construction.

Cette limite peut être vue comme l'encodage des supertuiles couronnées entourant l'origine dans le pavage limite, une  $n$ -supertuile étant une proto-tuile agrandie par une dilatation de rapport  $\sqrt{5}^n$  puis décomposée  $n$  fois suivant le schéma de la figure FIG. 2.

Cette construction permet alors de calculer  $\check{H}^2(\Omega/S^1; \mathbb{Z})$  en utilisant des méthodes simpliciales.

Savinien et Bellissard ont utilisé cette méthode dans [SB09] pour calculer la cohomologie des pavages en termes de la cohomologie PV de l'enveloppe continue. Dans ce texte, nous construisons de façon analogue un espace des proto-tuiles  $\mathcal{B}_0^c$  formé par le quotient de la réunion disjointe des différentes proto-tuiles couronnées d'un pavage de type pinwheel par la relation qui identifie deux arêtes si on peut les rencontrer côte-à-côte l'une de l'autre dans un pavage de type pinwheel. Si l'on considère un pavage de  $\Omega$ , l'origine est contenue dans une tuile et on peut donc considérer l'application qui envoie le pavage sur la position de l'origine dans la proto-tuile correspondante. On obtient ainsi une surjection de  $\Omega/S^1$  sur  $\mathcal{B}_0^c$  qui encode le type de proto-tuile couronnée entourant l'origine dans un pavage de type pinwheel.

Nous choisissons alors une décomposition simpliciale particulière de chaque proto-tuile couronnée, compatible avec les intersections des différentes arêtes, ce qui munit  $\mathcal{B}_0^c$  d'une structure simpliciale de dimension 2.

En pointant chaque cellule de chaque proto-tuile couronnée et en relevant cette ponctuation au niveau de  $\Omega/S^1$ , on peut construire une nouvelle transversale  $\Xi_\Delta$  partitionnée par les transversales  $\Xi_\Delta^i$  obtenues en relevant la ponctuation des  $i$ -cellules ( $i = 0, 1, 2$ ).

La cohomologie PV des pavages de type pinwheel  $H_{PV}^*(\mathcal{B}_0^c; C(\Xi_\Delta, \mathbb{Z}))$  est obtenue en "relevant" la cohomologie simpliciale de  $\mathcal{B}_0^c$  à  $\Omega/S^1$ .

On montre alors l'isomorphisme suivant :

**Théorème 3.10 :**

$$\check{H}^*(\Omega/S^1; \mathbb{Z}) \simeq H_{PV}^*(\mathcal{B}_0^c; C(\Xi_\Delta, \mathbb{Z})).$$

Les cochaines de degré 2 de cette nouvelle cohomologie sont données par des fonctions continues sur la transversale  $\Xi_\Delta^2$  à coefficients entiers, ce qui est un premier pas important vers le module de fréquence des patches des pavages de type pinwheel qui est relié aux fonctions continues sur la transversale canonique  $\Xi$  à valeurs entières.

Le point crucial est alors la démonstration de l'isomorphisme entre la cohomologie PV de degré maximal des pavages de type pinwheel et le groupe des coinvariants entiers de la transversale  $\Xi_\Delta^2$ . Cette notion de groupe des coinvariants entiers est donnée en 3.4, il correspond au quotient des fonctions continues sur  $\Xi_\Delta^2$  par les coinvariants "locaux"  $H_{\Xi_\Delta^2}$ , d'une manière similaire à la définition donnée dans [Kel97].  $H_{\Xi_\Delta^2}$  est un sous-groupe de  $C(\Xi_\Delta^2, \mathbb{Z})$  tel que pour tout  $h \in H_{\Xi_\Delta^2}$ ,  $\int_{\Xi_\Delta^2} h d\mu_2^t = 0$ , pour la mesure  $\mu_2^t$  induite par  $\mu$  sur  $\Xi_\Delta^2$ .

**Théorème 3.16 :**

$$H_{PV}^2(\mathcal{B}_0^c; C(\Xi_\Delta, \mathbb{Z})) \cong C(\Xi_\Delta^2, \mathbb{Z})/H_{\Xi_\Delta^2}.$$

Cela permet d'obtenir le corollaire important :

**Corollaire 3.19 :** *La cohomologie de Čech de degré maximal de l'enveloppe continue est isomorphe au groupe des coinvariants entiers de la transversale canonique :*

$$\check{H}^3(\Omega; \mathbb{Z}) \simeq C(\Xi, \mathbb{Z})/H_{\Xi}.$$

Ce résultat associé à l'étude locale de  $\Omega$  et à l'étude de l'image sous le courant de Ruelle-Sullivan de la cohomologie de degré maximal de  $\Omega$  donne le gap-labeling des pavages de type pinwheel :

**Théorème 4.1 :** *Si  $\mathcal{T}$  est un pavage de type pinwheel,  $\Omega = \Omega(\mathcal{T})$  son enveloppe continue munie d'une mesure de probabilité ergodique et  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ -invariante  $\mu$  et  $\Xi$  sa transversale canonique munie de la mesure induite  $\mu^t$ , nous avons :*

$$\tau_*^{\mu} \left( K_0(C(\Omega) \times \mathbb{R}^2 \times S^1) \right) = \mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z})).$$

Le dernier résultat de cette thèse est le calcul explicite du module de fréquence des patches  $\mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z}))$  dans la lignée des calculs fait par Kellendonk dans [Kel95] et [Kel97].

Pour cela, nous explicitons les 108 proto-tuiles couronnées des pavages de type pinwheel dans les figures FIG. 7 et FIG. 8 p.101 et p.102.

En considérant alors un quotient de  $C(\Xi, \mathbb{Z})$ , par un sous-groupe de mesure nulle, comme le groupe de dimension d'un système simple stationnaire (voir définition 4.3) et en montrant que  $\mu^t$  est en fait une mesure de probabilité, on obtient

$$\tau_*^{\mu} \left( K_0(C(\Omega) \times \mathbb{R}^2 \times S^1) \right) = \mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z})) = \frac{1}{264} \mathbb{Z} \left[ \frac{1}{5} \right],$$

en utilisant un résultat obtenu par Effros (voir [Eff81]) sur les états des groupes de dimension de tels systèmes.

Ce résultat montre donc que le gap-labeling des pavages de type pinwheel est donné par le  $\mathbb{Z}$ -module de fréquence des patches.

Les calculs effectués dans cette dernière partie permettent également de retrouver un résultat déjà connu (voir [Fre08] ou [Rad95]) : le système dynamique  $(\Omega, \mathbb{R}^2 \times S^1)$  est uniquement ergodique.

Bien qu'ayant remarqué que tous les groupes de cohomologie pour les pavages de type pinwheel ont été calculés par Barge, Diamond, Hunton et Sadun dans [BDHS] mais nous n'avons pas trouvé de moyen d'utiliser ces calculs pour calculer le gap labeling explicitement. En effet, il est difficile de représenter les générateurs de la cohomologie de degré maximal et par conséquent de voir l'image de cette cohomologie sous  $r^*$  et sous le courant de Ruelle-Sullivan.

Bien que le pavage de type pinwheel soit intéressant d'un point de vue mathématique, aucun matériau réel ayant les propriétés du pavage de type pinwheel n'a été découvert dans la nature jusqu'à ce jour.

Une question naturelle est de savoir si les résultats obtenus dans ce manuscrit sont un fait plus général, à savoir, s'ils peuvent encore s'appliquer pour démontrer la conjecture pour les pavages de type  $(m, n)$ -pinwheel (voir p.104) ou pour des pavages généraux de  $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$ -type finis mais non de  $\mathbb{R}^2$ -type finis.

Le plan de ce manuscrit est le suivant.

Dans un premier chapitre, nous rappelons les différentes notions sur les pavages du plan et nous introduisons la conjecture du gap-labeling.

Plus précisément, nous construisons un pavage de type pinwheel puis nous introduisons l'enveloppe continue  $\Omega$  qui contient tous les pavages de type pinwheel. Nous énonçons alors les différentes propriétés bien connues de cet espace muni d'une action du groupe  $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$  des isométries directes du plan.

Nous étudions alors la transversale canonique  $\Xi$  qui est un espace de Cantor et, en étudiant les rotations laissant stable un pavage de type pinwheel, nous voyons l'enveloppe continue comme un espace feuilleté dont  $\Xi$  est une transversale.

Nous rappelons alors comment, à partir de tout système dynamique  $(\Omega, G)$ , on peut associer la  $C^*$ -algèbre produit croisé  $C(\Omega) \rtimes G$ .

Appliquant cette construction au cas des pavages de type pinwheel, on obtient une  $C^*$ -algèbre  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1$  associée aux pavages de type pinwheel.

Nous donnons ensuite un rapide aperçu de la conjecture du gap-labeling dans le cas d'un pavage  $\mathbb{R}^n$ -apériodique en introduisant la notion de pavage apériodique avant de définir la densité d'états intégrée (IDS) qui permet de faire le lien entre une fonction physique et la  $C^*$ -algèbre associée à ces quasi-cristaux. Ce lien est donné par la formule de Shubin.

Nous terminons ce chapitre en énonçant la conjecture du gap-labeling formulée par J. Bellissard et en rappelant brièvement les étapes de la démonstration donnée par M.-T. Benamèur et H. Oyono-Oyono dans [BOO02].

Dans le deuxième chapitre, nous commençons par étudier le groupe de K-théorie

de la  $C^*$ -algèbre  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1$  en montrant qu'elle se décompose en une somme  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^6 \oplus \check{H}_c^2((\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z})$ .

Nous calculons ensuite l'image de la copie de  $\mathbb{Z}$  dans cette somme sous l'action de l'application linéaire  $\tau_*^\mu$  et nous montrons qu'elle est nulle.

Nous étudions ensuite la partie cohomologique de cette somme dans la section suivante où l'on prouve que ce groupe de cohomologie est isomorphe au sommant  $\check{H}^3(\Omega; \mathbb{Z})$  de  $K_1(C(\Omega))$ .

Ce résultat permet alors de montrer que l'on obtient une application de  $K_1(C(\Omega))$  sur la  $K$ -théorie de la  $C^*$ -algèbre associée aux pavages de type pinwheel qui est surjective sur la partie cohomologique  $\check{H}_c^2((\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z})$ .

La section suivante de ce chapitre a alors pour but de démontrer que cette application est obtenue par le produit de Kasparov par la classe d'un Dirac le long des feuilles.

Pour cela, nous rappelons un théorème dû à Kucerovsky (voir [Kuc97]) qui permet de faire des calculs de produits de Kasparov dans le cas d'opérateurs non bornés.

Nous introduisons ensuite la notion de groupoïde avant de définir la notion d'opérateurs longitudinaux, finissant cette sous-section en donnant la forme explicite des opérateurs longitudinaux qui nous intéressent pour la suite.

Nous calculons alors trois produits de Kasparov pour obtenir le résultat escompté et pour pouvoir appliquer le théorème de l'indice pour les feuilletages démontré par A. Connes et étendu au cas des espaces feuilletés dans [MS06]. Nous utilisons plus particulièrement la version de l'article [DHK91] où le cas impair est étudié.

Nous terminons ce chapitre par le calcul explicite de  $\tau_*^\mu(\mathbb{Z}^6)$  grâce au théorème de l'indice pour les feuilletages mais en voyant cette fois  $\Omega$  comme espace feuilleté par  $\mathbb{R}^2$ . Nous montrons que cette image est incluse dans  $\mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z}))$ .

Dans le troisième chapitre, nous introduisons la notion d'espace des proto-tuiles et d'espace des supertuiles pour les pavages de type pinwheel. Ces espaces permettent alors de voir  $\Omega/S^1$  comme limite projective de complexes simpliciaux.

Nous construisons alors la cohomologie PV des pavages de type pinwheel. Nous montrons que cette cohomologie est isomorphe à la cohomologie de Čech à coefficients entiers de  $\Omega/S^1$ , l'enveloppe continue quotientée par les rotations.

Ce résultat permet de prouver que le groupe de cohomologie de Čech de degré maximal à coefficients entiers de  $\Omega/S^1$  est en fait le groupe des coinvariants entiers de la transversale canonique  $\Xi$  qui est un premier pas vers la démonstration de la conjecture du gap-labeling pour les pavages de type pinwheel.

Dans le dernier chapitre, nous prouvons la conjecture du gap-labeling et nous faisons un calcul explicite de ce gap-labeling.

Nous étudions l'image des générateurs du groupe des coinvariants entiers dans la

cohomologie de Čech de degré maximal pour obtenir un diagramme commutatif qui permet de calculer l'image par le courant de Ruelle-Sullivan de la cohomologie de Čech de degré maximal à coefficients entiers de  $\Omega$ .

Ce diagramme nous permet de montrer que l'image par la trace de la  $K$ -théorie de la  $C^*$ -algèbre associée aux pavages de type pinwheel est incluse dans l'image par  $\mu^t$  des fonctions continues sur  $\Xi$  à valeurs entières.

Il nous permet également d'obtenir facilement l'inclusion inverse et de démontrer ainsi la conjecture du gap-labeling pour les pavages de type pinwheel.

En regardant alors un quotient de  $C(\Xi, \mathbb{Z})$ , par un sous-groupe dont les éléments sont de mesure nulle, comme le groupe de dimension d'un système simple stationnaire et en montrant que  $\mu^t$  est en fait une mesure de probabilité, on obtient alors le calcul explicite du gap-labeling en le reliant au  $\mathbb{Z}$ -module de fréquence des patches apparaissant dans un pavage de type pinwheel, i.e  $\frac{1}{264}\mathbb{Z} \left[ \frac{1}{5} \right]$ .

L'Annexe A démontre la Morita équivalence entre  $(C_0(X \times \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2) \rtimes S^1$  et  $C_0(X) \rtimes S^1$  qui est utilisée dans le deuxième chapitre.

L'Annexe B démontre un résultat nécessaire pour le lemme **2.4** et pour le calcul de l'image de  $\mathbb{Z}^6$  sous  $\tau_*^\mu$ .

L'Annexe C introduit les notions de  $C^*$ -algèbres et de  $C^*$ -modules hilbertiens gradués qui sont utilisés dans l'Annexe D ainsi que dans la définition des triplets de Kasparov.

L'Annexe D définit les groupes de  $KK$ -théorie équivariante de Kasparov et rappelle les principales propriétés qui sont utilisées dans cette thèse.

L'Annexe E commence par la preuve de deux lemmes utiles pour le calcul de produits de Kasparov faisant intervenir des triplets de Kasparov non gradués et sont utilisés dans les calculs de produits de Kasparov effectués dans le troisième chapitre. Nous calculons ensuite les deux commutateurs qui interviennent dans les calculs de ces produits.





# Chapitre 1

## Rappels

### 1.1 Pavages de type pinwheel et enveloppe continue

Nous appellerons **pavage** du plan toute famille dénombrable  $P = \{t_0, t_1, \dots\}$  d'ensembles non vides, compacts  $t_i$  appelés **pavés** ou **tuiles** (chaque pavé étant supposé homéomorphe à la boule unité), vérifiant :

- $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} t_i = E_2$  où  $E_2$  désigne le plan euclidien muni d'une origine  $O$  fixée ;
- Les pavés ne se rencontrent que sur leur bord ;
- L'intérieur des pavés sont 2 à 2 disjoints.

Nous nous intéressons au cas particulier où il existe un nombre fini de tuiles  $\{p_0, \dots, p_n\}$  (chaque représentant étant fixé), appelées **proto-tuiles**, de sorte que chaque  $t_i$  soit l'image de l'une de ces proto-tuiles par une isométrie directe du plan. Nous allons nous intéresser plus particulièrement aux pavages de type pinwheel dont nous allons donner une construction dans ce qui suit.

Notre construction d'un pavage de type pinwheel est basée sur la construction faite par Charles Radin [Rad94]. C'est un pavage du plan obtenu par la méthode de substitution décrite dans la figure FIG. 4.

Ce pavage est constitué de deux types de proto-tuile, le triangle de la figure FIG. 4.(a) de côtés de longueur 1, 2 et  $\sqrt{5}$  et son symétrique par réflexion par rapport au côté de longueur 2.

Pour obtenir ce pavage, nous partons du triangle rectangle dont les coordonnées des sommets sont  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  et  $(2, 1)$ .

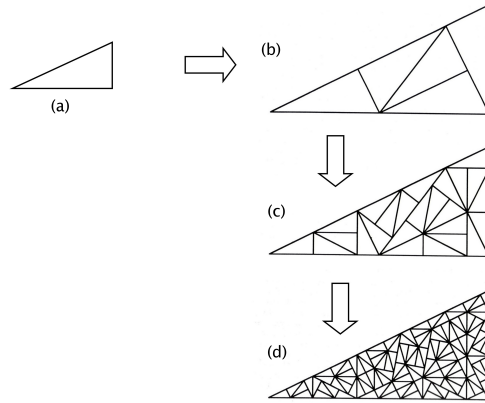


FIG. 4 – Substitution associée aux pavages de type pinwheel.

Cette tuile sera appelée **supertuile d'ordre 0** ou **0-supertuile**.

Nous définissons ensuite une **supertuile d'ordre 1** comme suit : nous prenons le triangle rectangle dont les sommets ont pour coordonnées  $(-2, 1)$ ,  $(2, -1)$  et  $(3, 1)$ , puis nous le décomposons comme indiqué sur FIG. 4.(b). La supertuile d'ordre 1 ainsi construite est alors décomposée en 5 supertuiles d'ordre 0, isométriques à la tuile de départ, avec la tuile de départ en son centre (voir figure FIG. 6.(b)).

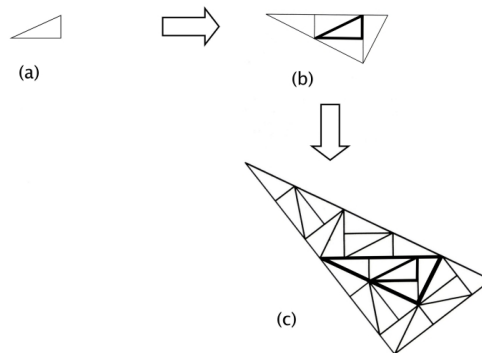


FIG. 5 – Construction d'un pavage de type pinwheel.

On plonge alors cette supertuile d'ordre 1 dans une **supertuile d'ordre 2** en répétant le processus. Les coordonnées de cette supertuile d'ordre 2 seront  $(-5, 5)$ ,  $(1, -3)$  et  $(5, 0)$  (voir FIG. 5.(c)).

On continue ainsi le processus, incluant cette supertuile d'ordre 2 dans une super-

tuile d'ordre 3 correctement orientée, et ainsi de suite, ce qui nous donne un pavage du plan  $\mathcal{T}$ , appelé **pavage de type pinwheel**.

Nous allons alors associer à ce pavage un espace topologique qui gardera un maximum d'informations géométriques sur le pavage.

Pour cela, remarquons que les isométries directes du plan agissent sur le plan euclidien  $E_2$  muni d'une origine  $O$ . Les isométries directes  $\mathbb{E}^2 = \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$  agissent donc naturellement à droite sur notre pavage  $\mathcal{T}$ . Pour une rotation  $R_\theta$  et un vecteur  $s \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{T} \cdot (s, R_\theta) := R_{-\theta}(\mathcal{T} - s)$ . On notera également  $(s, \theta)$  pour désigner  $(s, R_\theta)$ .

**Définition 1.1** *Un **patch** est une collection finie de tuiles d'un pavage.*

*Un pavage est dit de  **$\mathbb{E}^2$ -type fini** si, pour tout rayon  $R > 0$ , il n'existe qu'un nombre fini de patches de diamètre inférieur à  $R$  aux isométries directes du plan près.*

*Un pavage  $\mathcal{T}'$  est  **$\mathbb{E}^2$ -répétitif** si, pour tout patch  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{T}'$ , il existe un rayon  $R(\mathcal{A}) > 0$  tel que toute boule du plan de rayon  $R(\mathcal{A})$  rencontre  $\mathcal{T}'$  sur un patch contenant une copie par isométrie directe du patch  $\mathcal{A}$ .*

On montre alors facilement que le pavage  $\mathcal{T}$  que nous avons construit est de  $\mathbb{E}^2$ -type fini, répétitif, non périodique pour les translation mais qu'il peut être périodique sous de l'action des rotations (voir [Pet05]).

Associons à ce pavage un espace topologique. Pour cela, nous munissons  $\mathcal{T} \cdot \mathbb{E}^2$  d'une topologie métrisable de la façon suivante : soit  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  deux pavages de  $\mathcal{T} \cdot \mathbb{E}^2$ , et soit

$$A = \left\{ \varepsilon \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] / \exists s_i \in B_\varepsilon^2(0), \theta_i \in B_\varepsilon^1(0) \text{ t.q. } \mathcal{T}_1 \cdot (s_1, \theta_1) \cap B_{\frac{1}{\varepsilon}}(O) = \mathcal{T}_2 \cdot (s_2, \theta_2) \cap B_{\frac{1}{\varepsilon}}(O) \right\}$$

où  $B_{\frac{1}{\varepsilon}}(O)$  désigne la boule de  $E_2$  centrée en  $O$  de rayon  $\frac{1}{\varepsilon}$  et  $B_\varepsilon^j(0)$  désigne la boule de  $\mathbb{R}^j$  centrée en  $0$  de rayon  $\varepsilon$  (i.e on considère les isométries directes proche de  $Id$ ). Posons alors :

$$d(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \begin{cases} \text{Inf } A & \text{si } A \neq \emptyset \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{sinon} \end{cases} .$$

$d$  définit ainsi une métrique sur  $\mathcal{T} \cdot \mathbb{E}^2$ . Pour cette topologie, une base de voisinages est définie comme suit : deux pavages  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  sont voisins ou proches si, par une isométrie directe proche de l'identité, ils coïncident sur une grande boule centrée en l'origine.

Il existe d'autres topologies (équivalentes) que l'on peut définir sur cet espace. La topologie obtenue est métrisable mais aucune des métriques donnant la topologie n'est canonique. Pour une méthode plus canonique de définir la topologie, le lecteur pourra se reporter à [BHZ00].

Le problème de non-unicité de la métrique a été étudiée dans [PB09].

**Définition 1.2** Nous appelons *enveloppe continue* de  $\mathcal{T}$  le complété métrique de  $(\mathcal{T}.\mathbb{E}^2, d)$  et nous notons  $\Omega(\mathcal{T})$  l'espace ainsi obtenu.

**Propriétés 1.3** ([BBG06], [BG03], [BHZ00], [KP00], [LP03] et [Rad94])

- $\Omega(\mathcal{T})$  est constitué de pavages de  $\mathbb{E}^2$ -type fini,  $\mathbb{E}^2$ -répétitifs et non périodiques (pour l'action des translations).  
Tous les pavages de  $\Omega(\mathcal{T})$  sont constitués des mêmes patches que ceux de  $\mathcal{T}$ .
- $\Omega(\mathcal{T})$  est un espace compact puisque  $\mathcal{T}$  est de  $\mathbb{E}^2$ -type fini.
- Tous les pavages de  $\Omega(\mathcal{T})$  sont pavés par des supertuiles d'ordre  $n$  de façon unique, et cela pour tout  $n \geq 0$ .
- De plus, la répétitivité de  $\mathcal{T}$  nous assure la minimalité du système dynamique  $(\Omega(\mathcal{T}), \mathbb{E}^2)$ , c'est-à-dire que toutes les orbites sont denses.

La dernière propriété de  $\Omega(\mathcal{T})$  nous permet de noter simplement  $\Omega$  pour désigner l'enveloppe continue (si  $\mathcal{T}' \in \Omega(\mathcal{T})$  alors  $\Omega(\mathcal{T}') = \Omega(\mathcal{T})$ ).

**Définition 1.4** Tout pavage  $\mathcal{T}_1 \in \Omega$  sera alors appelé *pavage de type pinwheel*.

**Remarque :** On peut facilement voir que notre enveloppe continue  $\Omega$  correspond à l'espace compact  $X_\phi$  construit par Radin et Sadun dans [RS98].

## 1.2 La transversale canonique

Nous allons construire, dans ce paragraphe, un espace de Cantor inclus dans  $\Omega$  qui va nous permettre de munir  $\Omega$  d'une structure de lamination.

Pour cela, fixons nous un point dans l'intérieur des deux proto-tuiles. Ainsi, à tout pavage de  $\Omega$  (i.e construit avec ces deux proto-tuiles), nous pouvons associer une collection de points du plan, appelée **ponctuation du pavage**.

Posons alors  $\Omega_0$  l'ensemble des  $\mathcal{T}' \in \Omega$  qui ont un point de leur ponctuation qui coïncide avec l'origine  $O$ .

Nous appellerons alors **transversale canonique** l'espace quotient  $\Omega_0/SO(2)$ .

Nous allons identifier cet espace avec un sous-espace de  $\Omega$  en construisant une section continue  $s : \Omega_0/SO(2) \rightarrow \Omega$ .

Pour obtenir cette section, il nous suffit de fixer une orientation des 2 proto-tuiles une fois pour toute, cette orientation sera appelée **bonne orientation** dans la suite. Ainsi, quand on prend un patch entourant l'origine dans un pavage de  $\Omega_0$ , il n'y a qu'une orientation de ce patch qui fera coïncider l'orientation de la tuile contenant l'origine avec celle des proto-tuiles choisie.

Soit alors  $[w] \in \Omega_0/SO(2)$ , il existe un unique  $\theta \in [0; 2\pi[$  tel que la tuile de  $R_\theta(w)$  contenant l'origine ait la bonne orientation.

On pose alors  $s([w]) := R_\theta(w)$ .

L'application  $s : \Omega_0/SO(2) \rightarrow s(\Omega_0/SO(2))$  est alors bijective. On vérifie facilement que  $s$  est continue. On a donc un homéomorphisme entre la transversale canonique et un sous-espace compact  $\Xi$  de  $\Omega_0$  donc de  $\Omega$ .

Ce sous-espace  $\Xi$  sera également appelé transversale canonique.

On peut voir  $\Xi$  comme l'ensemble des pavages de  $\Omega$  dont un point de la ponctuation coïncide avec  $O$  et dont la tuile contenant  $O$  a la bonne orientation.

On a alors :

**Proposition 1.5** (*[BG03]*)

*La transversale canonique est un espace métrique de Cantor.*

Avant d'exhiber la structure de lamination de  $\Omega$ , nous devons étudier les différents angles des rotations associées aux isométries directes laissant stable un pavage de  $\Omega$ .

On peut trouver des pavages de type pinwheel qui possèdent des régions qui sont pavées par des supertuiles de tout ordre. On introduit alors la définition suivante :

**Définition 1.6** *Une région d'un pavage pavée par des supertuiles d'ordre  $n$  pour tout  $n \geq 0$  est appelée **supertuile infinie** (ou **supertuile d'ordre infini**).*

Nous pouvons construire un pavage de type pinwheel contenant 2 demi-plans comme supertuiles infinies de la façon suivante : Considérons le rectangle formé par les 2 supertuiles d'ordre  $n - 1$  situées au milieu d'une supertuile d'ordre  $n$ . Pour tout  $n > 1$ , orientons un tel rectangle de façon à avoir son centre à l'origine et sa diagonale sur l'axe des abscisses, puis complétons le reste en un pavage  $\mathcal{T}_n$  périodique. Par compacité, cette suite admet une sous-suite convergente, qui sera un pavage de type pinwheel et qui sera formé de 2 supertuiles infinies (cette exemple est tiré de [RS98]).

Notons que la frontière d'une supertuile infinie doit être composée de lignes et ne doit avoir au plus qu'un sommet, puisqu'elle est pavée par des supertuiles de tous les ordres.

Nous appellerons de telles lignes des **failles**.

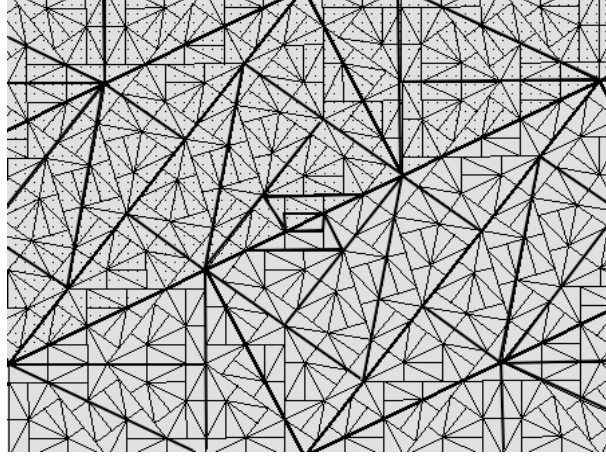


FIG. 6 – Pavage de type pinwheel symétrique.

**Lemme 1.7** *Si  $(s, R_\theta)$  laisse un pavage de type pinwheel  $\mathcal{T}'$  invariant, alors  $\theta$  est égal à 0 ou  $\pi$  modulo  $2\pi$ . De plus, si  $\theta = 0$  alors  $s = 0$  i.e aucune translation ne peut laisser stable un pavage de type pinwheel.*

**Démonstration :** il faut distinguer plusieurs cas :

1. Le cas où le pavage  $\mathcal{T}'$  laissé stable n'admet pas de faille (i.e n'admet pas de supertuile infinie).

Nous allons alors montrer que  $s = 0$  et  $\theta = 0 \pmod{2\pi}$ .

En effet, soit  $x \in E_2$  tel que  $\overrightarrow{Ox} = s$  alors  $O$  et  $x$  sont inclus dans l'intérieur d'une supertuile d'ordre  $m$  après un certain nombre  $m$  de compositions puisqu'il n'y a pas de supertuile infinie (voir remarque p.29 dans [RS98]).

Comme aucune isométrie non triviale ne laisse stable nos proto-tuiles,  $s$  et  $\theta$  doivent être nuls.

2. Le cas où le pavage  $\mathcal{T}'$  admet des supertuiles infinies.

D'après [RS98] p.30, le nombre de supertuiles infinies dans  $\mathcal{T}'$  est borné par une constante  $K$  (en fait, dans un pavage de type pinwheel, on peut prendre  $K = \frac{2\pi}{\alpha}$ , où  $\alpha$  est le plus petit angle des proto-tuiles). Ainsi,  $\mathcal{T}'$  n'admet pas plus de  $K$  sommets de supertuiles infinies et il n'admet alors qu'un nombre fini de failles. Ceci va nous permettre d'obtenir le résultat.

En effet, comme  $(s, R_\theta)$  laisse stable  $\mathcal{T}'$ , si on se fixe une faille  $F$ ,  $(s, R_\theta)$  envoie celle-ci sur une autre faille  $F_1$  de  $\mathcal{T}'$ . Ainsi  $R_\theta$  envoie  $F$  sur une ligne parallèle à  $F_1$ .

Comme il n'y a qu'un nombre fini de failles, il existe alors  $M \in \mathbb{N}^*$ ,  $m \in \mathbb{Z}^*$  tels que  $M\theta = 2\pi m$ .

Si nous faisons alors appel aux résultats de [RS98] p.32,  $\theta$  doit, de plus, appartenir au groupe des orientations relatives  $G_{RO}(Pin)$  du pavage de type pinwheel-(1,2) qui n'est autre que le sous-groupe de  $SO(2)$  engendré par  $\frac{\pi}{2}$  et  $2\alpha$ .

Ainsi, si  $\theta = 2k\alpha + l\frac{\pi}{2}$  avec  $k \in \mathbb{Z}^*$  et  $l \in \mathbb{Z}$ , ceci voudrait alors dire que  $\alpha$  est rationnellement lié à  $\pi$ , ce qui est absurde (voir [Rad94] p.664) donc  $k = 0$  et  $\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\} \bmod(2\pi)$ .

En étudiant alors les différentes couronnes d'ordre 1 (i.e les patchs minimaux autour d'un sommet ou autour du milieu de certaines arêtes), il apparaît alors qu'il n'existe que des patchs ayant une symétrie d'ordre 2 ([Sad] ou se reporter aux figures FIG. 7 et FIG. 8 p.101 et p.102, où l'on a représenté 54 proto-tuiles couronnées, les 54 autres étant obtenues par réflexion).

Ainsi  $\theta \in \{0, \pi\} \bmod(2\pi)$  et si  $\theta = 0$ ,  $s = 0$  puisque les pavages ne sont pas stables par translation.

□

Nous pouvons de plus ajouter au lemme qu'il n'existe, aux isométries directes près, que 6 pavages admettant une symétrie d'ordre 2 ([Sad]). Il n'y a donc que 6 orbites ayant des points fixes pour l'action de  $\mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$ .

De plus, il n'y a que 6 cercles  $F_1, \dots, F_6$  contenant des points fixés par l'action des rotations (bien sûr, par suite, les 6 orbites correspondant à ces 6 cercles contiennent tous les points fixes de l'action de  $\mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$ ).

Nous obtenons alors le résultat important suivant sur la dynamique de notre pavage (voir [Ghy99],[BG03]) :

**Théorème 1.8** ([BG03])

*L'enveloppe continue est munie d'une structure de lamination minimale.*

**Démonstration :**

La preuve est guidée par celle de [BG03] à l'exception que, localement,  $\Omega$  ressemble à un ouvert de  $\mathbb{R}^2 \times$  un ouvert de  $SO(2) \times$  un Cantor au lieu de ressembler à un ouvert de  $\mathbb{R}^2 \times SO(2) \times$  un Cantor.

$\Omega$  peut être recouvert par un nombre fini d'ensembles  $U_i = \phi_i(V_i \times T_i)$  où :

- $T_i$  est un clopen de  $\Xi$  ;
- $V_i$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$  qui se lit  $V_i = \Gamma_i \times W_i$  où  $W_i$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $\Gamma_i$  un ouvert de  $SO(2)$  de la forme  $]l\pi/2 - \pi/3; l\pi/2 + \pi/3[$ ,  $l \in \{0, 1, 2, 3\}$  ;



- $\phi_i : V_i \times T_i \longrightarrow \Omega$  est l'application définie par  $\phi_i(v, \omega_0) = \omega_0.v$ .

Comme il existe des partitions de  $\Xi$  par des clopens de diamètre arbitrairement petit, en choisissant ce diamètre assez petit et en considérant des sous-ensembles des ouverts  $U_i$ , il est possible d'obtenir les conditions suivantes :

- les  $\phi_i$  sont des homéomorphismes sur leur image ;
- si  $\mathcal{T}_1 \in U_i \cap U_j$ ,  $\mathcal{T}_1 = \phi_i(v, \omega_0) = \phi_j(v', \omega'_0)$ , l'élément  $v'.v^{-1}$  est indépendant du choix de  $\mathcal{T}_1$  dans  $U_i \cap U_j$ , on le note  $g_{ij}$ .

Les applications de transition se lisent alors :  $(v', \omega'_0) = (g_{ij}.v, \omega_0.g_{ij}^{-1})$ .

Il s'ensuit que les  $U_i$  et les cartes  $h_i = \phi_i^{-1} : U_i \longrightarrow V_i \times T_i$  définissent une structure de lamination sur  $\Omega$ .

Par construction, les feuilles de  $\Omega$  sont les orbites de  $\Omega$  sous l'action de  $\mathbb{E}^2$ .

□

On peut également dire que  $\Omega$  est un **espace feuilleté** à la place de lamination.

A ce stade de l'article, nous devons remarquer plusieurs choses concernant l'action de  $\mathbb{E}^2$ .

$\mathbb{E}^2$  n'agit pas librement sur  $\Omega$ , mais nous avons néanmoins pu adapter des résultats obtenus par Benedetti et Gambaudo dans leur article en étudiant les symétries possibles des pavages de type pinwheel.

L'action de  $\mathbb{E}^2$  n'est pas libre non plus sur  $\Omega_0$  (voir l'exemple ci-dessus du pavage de type pinwheel avec 2 supertuiles infinies).

Remarquons également que grâce au groupe  $G_{RO}(Pin)$ , on peut voir que les orbites de  $\Omega$  sous l'action de  $\mathbb{R}^2$  sont aussi toutes denses dans  $\Omega$ . (cf [HRS05])

Ceci étant dit, nous pouvons passer à l'étude dynamique du problème.

### 1.3 $C^*$ -algèbre associée au pavage

Nous allons procéder comme dans l'article de Kellendonk et Putnam [KP00] pour associer à un pavage  $\mathcal{T}$  de type pinwheel une  $C^*$ -algèbre des "observables".

La  $C^*$ -algèbre qui nous intéresse est celle obtenue naturellement à partir du système dynamique  $(\Omega, \mathbb{E}^2)$ , i.e le produit croisé  $\mathcal{A} = C(\Omega) \rtimes (\mathbb{R}^2 \rtimes SO(2))$ .

Pour les besoins de la prochaine section, considérons un espace topologique  $\Omega$  muni d'une action à droite d'un groupe localement compact  $G$  (dans le cas des pavages

de type pinwheel,  $G = \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$ ). Supposons pour simplifier les définitions que  $G$  est unimodulaire et fixons une mesure de Haar  $\lambda$  sur  $G$ .

Pour construire la  $C^*$ -algèbre produit croisée  $C(\Omega) \rtimes G$ , considérons dans un premier temps l'espace vectoriel  $C_c(\Omega \times G)$  des fonctions continues à support compact sur  $\Omega \times G$ . Nous munissons cet espace d'un produit de convolution et d'une involution par :

$$f * g(\omega, g) := \int_G f(\omega, h)g(\omega.h, h^{-1}g)d\lambda(h)$$

$$f^*(\omega, g) := \overline{f(\omega.g, g^{-1})}$$

où  $f, g \in C_c(\Omega \times G)$  et  $\omega \in \Omega, g \in G$ .

On définit alors une norme sur cet espace par :

$$\|f\|_{\infty,1} = \text{Max} \left\{ \sup_{\omega \in \Omega} \int_G |f(\omega, g)| d\lambda(g), \sup_{\omega \in \Omega} \int_G |f^*(\omega, g)| d\lambda(g) \right\}$$

Considérons alors l'algèbre involutive  $L^{\infty,1}(\Omega \times G)$ , complétion de  $C_c(\Omega \times G)$  pour cette norme.

Cette algèbre se représente sur  $L^2(G)$  par la famille de représentations  $\{\pi_\omega, \omega \in \Omega\}$  définie par :

$$\pi_\omega(f)\psi(g) := \int_G f(\omega.g, g^{-1}.h)\psi(h)d\lambda(h),$$

avec  $\psi \in L^2(G)$ .

On a :  $\pi_\omega$  est linéaire,  $\pi_\omega(fg) = \pi_\omega(f)\pi_\omega(g)$ ,  $\pi_\omega(f)^* = \pi_\omega(f^*)$  et  $\|\pi_\omega(f)\| \leq \|f\|_{\infty,1}$ . On définit alors la  $C^*$ -norme  $\|f\| = \sup_{\omega \in \Omega} \|\pi_\omega(f)\|$  sur  $L^{\infty,1}(\Omega \times G)$ . Cette norme permet alors de définir la  $C^*$ -algèbre  $C(\Omega) \rtimes G$  comme la complétion de  $C_c(\Omega \times G)$  ou de  $L^{\infty,1}(\Omega \times G)$ .

Dans le cas des pavages de type pinwheel,  $G = \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$  et cette  $C^*$ -algèbre  $C(\Omega) \rtimes (\mathbb{R}^2 \rtimes SO(2))$  est isomorphe à  $(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2) \rtimes SO(2)$  ([Cha99] page 15).

L'action de  $SO(2)$  sur  $C_c(\Omega \times \mathbb{R}^2)$  est la suivante :  $\theta.f(w, s) := f(R_{-\theta}(w), R_{-\theta}(s))$  pour tout  $f \in C_c(\Omega \times \mathbb{R}^2)$ . Cette action s'étend alors à tout  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2$ .

Nous nous intéressons à cette  $C^*$ -algèbre pour plusieurs raisons. La première est due au fait que cette  $C^*$ -algèbre contient des informations dynamiques liées à la géométrie du pavage de départ. La seconde est motivée par la conjecture du gap-labeling faite par J. Bellissard dans [Bel92] où l'auteur relie le mouvement d'un électron dans un quasi-cristal à la  $K$ -théorie de la  $C^*$ -algèbre des observables du pavage, ce que nous allons décrire dans le paragraphe suivant. Il était alors naturel de transposer la même conjecture dans le cas d'un pavage de type pinwheel et de relier la  $K$ -théorie de  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$  au  $\mathbb{Z}$ -module engendré par la fréquence des patches apparaissant dans un pavage de type pinwheel (voir la fin de la prochaine

section pour les motivations).

## 1.4 Gap-labeling

### 1.4.1 Quasi-cristaux

Avant de présenter les travaux de Bellissard sur la conjecture du gap-labeling, nous allons introduire la définition de pavage apériodique modélisant un quasi-cristal. C'est un pavage de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  ayant les mêmes propriétés combinatoires que les pavages de type pinwheel introduites dans la première section.

**Définition 1.9** *Un **pavage** de  $\mathbb{R}^n$  est une famille dénombrable  $P = \{t_0, t_1, \dots\}$  d'ensembles non vides, compacts  $t_i$  appelés **pavés** ou **tuiles** (chaque pavé étant supposé homéomorphe à la boule unité), vérifiant :*

- $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} t_i = E_n$  où  $E_n$  désigne l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  muni d'une origine  $O$  fixée ;
- Les pavés se rencontrent sur leur bord ;
- L'intérieur des pavés sont 2 à 2 disjoints.

Soit  $G$  un sous-groupe des isométries de  $E_n$ .

On considérera dans la suite le cas particulier de pavages pour lesquels il existe une famille finie  $\{p_0, \dots, p_n\}$  telle que tous les compacts  $t_i$  sont des  $G$ -copies d'un  $p_k$ . Les  $p_k$  sont alors appelées **proto-tuiles**.

Un pavage est dit de **G-type fini** si, pour tout rayon  $R > 0$ , il n'existe qu'un nombre fini de patchs de diamètre inférieur à  $R$  modulo l'action de  $G$ .

Un pavage  $\mathcal{T}'$  est **G-répétitif** si, pour tout patch  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{T}'$ , il existe un rayon  $R(\mathcal{A}) > 0$  tel que toute boule de  $\mathbb{R}^n$  de rayon  $R(\mathcal{A})$  rencontre  $\mathcal{T}'$  sur un patch contenant une  $G$ -copie du patch  $\mathcal{A}$ .

Un **pavage G-apériodique** est alors un pavage de  $\mathbb{R}^n$  de  $G$ -type fini,  $G$ -répétitif et non périodique pour les translations de  $\mathbb{R}^n$ .

Par exemple, les pavages de type pinwheel sont des pavages apériodiques avec  $n = 2$  et  $G = \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$  les isométries directes du plan.

Beaucoup d'exemples de pavages apériodiques sont connus, le pavage de Penrose étant sans doute le plus connu ( $n = 2$ ,  $G = \mathbb{R}^2$ ) (cf [Pet05]).

Pour la suite de cette section sur le gap-labeling, nous supposerons donné un pavage  $\mathbb{R}^n$ -apériodique  $P$ .

Nous pouvons alors associer à ce pavage un espace topologique  $\Omega$  comme nous l'avons fait pour le pavage de type pinwheel en considérant l'espace des translatés  $P.\mathbb{R}^n$  du pavage  $P$  et en complétant cet espace pour la distance  $d$  obtenue de la même manière que pour les pavages de type pinwheel :

$$A = \left\{ \varepsilon \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \mid \exists x_i \in B_\varepsilon^n(0) \text{ t.q. } (P_1 - x_1) \cap B_{\frac{1}{\varepsilon}}(O) = (P_2 - x_2) \cap B_{\frac{1}{\varepsilon}}(O) \right\}$$

où  $B_{\frac{1}{\varepsilon}}(O)$  désigne la boule de  $E_n$  centrée en  $O$  de rayon  $\frac{1}{\varepsilon}$  et  $B_\varepsilon^n(0)$  désigne la boule de  $\mathbb{R}^n$  centrée en  $0$  de rayon  $\varepsilon$  (i.e on considère les translations proche de  $Id$ ) .

On pose alors :

$$d(P_1, P_2) = \begin{cases} \text{Inf } A & \text{si } A \neq \emptyset \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{sinon} \end{cases} .$$

On définit  $\Omega(P) := \overline{P.\mathbb{R}^n}$  comme la complétion de  $P.\mathbb{R}^n$  pour cette distance  $d$ .

On peut montrer que  $\Omega(P)$  est un espace métrique compact, que toutes les  $\mathbb{R}^n$ -orbites sont denses dans cet espace, montrant que tous les pavages de  $\Omega(P)$  ont même enveloppe.

On peut alors définir de façon similaire à la première section, la transversale canonique en fixant un point dans chaque proto-tuile et en définissant la **transversale canonique**  $\Xi$  comme l'ensemble des  $P' \in \Omega$  qui ont un point de leur ponctuation qui coïncide avec l'origine  $O$ .

Cet espace est encore un espace de Cantor (voir [BG03]) et  $\Omega$  hérite encore d'une structure de lamination dont les feuilles sont des copies de  $\mathbb{R}^n$ .

## 1.4.2 Densité d'états intégrée - IDS

Cette section s'inspire des travaux réalisés par J. Bellissard [Bel92] (cf aussi [Ypm]). Le gap-labeling ("étiquetage des sauts d'énergie") consiste à décrire de façon qualitative le spectre d'un opérateur associé au mouvement d'un électron dans un quasi-cristal (qui est un solide avec une disposition atomique particulière, modélisée par des pavages apériodiques).

Ce mouvement est décrit par un opérateur de Schrödinger sur l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^n)$  de la forme :

$$H = -\frac{\hbar}{2m}\Delta + V(x)$$

où  $\hbar$  est la constante de Dirac, soit  $\frac{h}{2\pi}$  où  $h$  est la constante de Planck,  $m$  est la masse de l'électron,  $\Delta$  est le laplacien sur  $\mathbb{R}^n$  et  $V$  est une fonction potentiel dans  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  dépendant de la structure du quasi-cristal étudié.

Le domaine de définition de  $H$  est  $\mathcal{D}(H) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \Delta\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ .

On se fixe alors dans la suite un pavage  $\mathbb{R}^n$ -apériodique  $P$  modélisant le quasi-cristal, ce qui nous permet de considérer les deux espaces introduits dans la section précédente  $\Omega$  et  $\Xi$  ainsi que la  $C^*$ -algèbre associée au système dynamique  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n$  qui sera appelée  **$C^*$ -algèbre des observables** dans la suite.

**Définition 1.10** Une famille **covariante** d'opérateurs auto-adjoints (pouvant être non bornés)  $\{H_\omega; \omega \in \Omega\}$  est une famille d'opérateurs vérifiant  $U_a.H_\omega.U_a^* = H_{\omega-a}$  pour  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $U_a : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  définie par  $U_a(f)(x) := f(x+a)$ .

On dira alors qu'une famille covariante d'opérateurs auto-adjoints  $\{H_\omega; \omega \in \Omega\}$  est affiliée à la  $C^*$ -algèbre  $A = C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n$  si, pour toute fonction  $f \in C_0(\mathbb{R})$ , l'opérateur borné  $f(H_\omega)$  peut être représenté sous la forme  $\pi_\omega(h_f)$  pour un  $h_f \in A$  tel que l'application  $h : C_0(\mathbb{R}) \rightarrow A : f \mapsto h_f$  soit un  $*$ -homomorphisme borné.

Dans la suite de cet article, nous nous donnons une famille covariante d'opérateurs auto-adjoints  $\{H_\omega; \omega \in \Omega\}$  affiliée à  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n$  (voir l'article de Bellissard [Bel92] ainsi que l'article [BHZ00] pour l'existence de tels opérateurs).

Nous nous intéressons alors au spectre de  $H_\omega$ .

Pour cela, Bellissard a relié une fonction physique définie sur  $\mathbb{R}$  (l'IDS pour Integrated Density of States) à une fonction obtenue à partir de  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n$ .

Introduisons d'abord l'IDS  $\mathcal{N}(E)$  qui est une sorte de moyenne du nombre de valeurs spectrales inférieures à  $E$  par unité de volume.

**Définition 1.11** Soit  $G$  un groupe localement compact. Une **suite de Følner** est une suite  $(\Lambda_n)$  d'ouverts de  $G$ , chacun de mesure de Haar  $|\Lambda_n|$  finie, telle que  $G = \cup \Lambda_n$  et telle que pour tout  $x \in G$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Lambda_n \Delta x \cdot \Lambda_n|}{|\Lambda_n|} = 0$$

où  $V \Delta W = (V \cup W) \setminus (V \cap W)$ .

On peut montrer que l'existence d'une suite de Følner dans  $G$  est équivalente à la moyennabilité de  $G$  (voir [Gre69]).

On peut alors définir

$$\mathcal{N}_{\omega, \Lambda_n}(E) := \#\{E' \in Sp(H_{\omega, \Lambda_n}) \mid E' \leq E\},$$

où  $H_{\omega, \Lambda_n}$  est l'Hamiltonien  $H_\omega$  restreint à  $\Lambda_n$ , agissant sur l'espace de Hilbert  $L^2(\Lambda_n)$ , avec certaines conditions au bord (voir [Bel92] pour ces conditions).

L'IDS  $\mathcal{N}_\omega : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$  est alors définie par

$$\mathcal{N}_\omega(E) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \mathcal{N}_{\omega, \Lambda_n}(E).$$

Jean Bellissard a démontré que cette limite existe et qu'elle est indépendante des conditions aux bords ([Bel92]).

### 1.4.3 La formule de Shubin

Nous voulons maintenant relier l'IDS à notre  $C^*$ -algèbre  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n$ . Ce lien sera donné par une certaine trace sur l'algèbre.

Classiquement, sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  muni d'une base orthonormée  $\{e_i\}$ , on définit la trace d'un opérateur borné  $A$  par la formule :

$$Tr(A) := \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, Ae_i \rangle.$$

Cette trace est indépendante de la base orthonormée de  $\mathcal{H}$  choisie si  $A$  est *traçable* i.e si  $Tr(|A|) < \infty$  où  $|A| := \sqrt{A^*A}$ .

On a alors :

$$\mathcal{N}_\omega(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} Tr_{\Lambda_n} (\chi_{]-\infty; E]}(H_{\omega, \Lambda_n}))$$

où  $Tr_{\Lambda_n}$  est la restriction à  $L^2(\Lambda_n)$  de la trace sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  et  $\chi_{]-\infty; E]}$  est la fonction caractéristique de  $]-\infty; E]$ .

Pour relier cette formule à la  $C^*$ -algèbre des observables, nous allons avoir besoin d'une mesure sur  $\Omega$  particulière. Pour cela, nous avons la proposition suivante qui découle directement du fait que  $\mathbb{R}^n$  est moyennable et du théorème de Krein-Milman :

**Proposition 1.12** *Il existe une probabilité  $\mathbb{R}^n$ -invariante et ergodique  $\mu$  sur  $\Omega$ .*

Nous pouvons alors définir une trace sur  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n$  en posant pour toute fonction  $f \in C_c(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  :

$$\tau^\mu(f) := \int f(\omega, 0) d\mu(\omega).$$

On vérifie facilement, grâce à la  $\mathbb{R}^n$  invariance de  $\mu$ , que  $\tau^\mu$  a les propriétés d'une trace positive i.e  $\tau^\mu(f * f^*) \geq 0$  et  $\tau^\mu(f * g) = \tau^\mu(g * f)$ .

Cette fonction se prolonge alors en une trace fidèle (par ergodicité de  $\mu$  et minimalité de l'action de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\Omega$ ) et semi-finie (voir [MS06] p150 et suivantes) sur l'algèbre de Von Neumann de  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n$ . Cette trace est de plus finie sur les projections de

l'algèbre de Von Neumann (voir [MS06] p154 et [Ped79] 5.6.7).

Le lien entre l'IDS et cette trace est mis en évidence par l'application du théorème de Birkhoff suivant :

**Théorème 1.13** *Soit  $\Omega$  un espace compact muni d'une probabilité  $\mu$  ergodique et invariante sous l'action  $T$  d'un groupe moyennable  $G$  sur  $\Omega$ .*

*Alors la mesure de Haar à gauche  $\lambda$  sur  $G$  peut être normalisée de telle sorte que pour tout  $f \in C(\Omega)$ , pour  $\mu$  presque tout  $\omega \in \Omega$ , on ait :*

$$\int_{\Omega} f(\omega') d\mu(\omega') = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \int_{\Lambda_n} f(T_g \omega) d\lambda(g),$$

où  $(\Lambda_n)$  est une suite de Følner de  $G$ .

On a donc pour tout  $f \in C_c(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  et pour  $\mu$  presque tout  $\omega$  :

$$\tau^\mu(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \int_{\Lambda_n} f(\omega.g, 0) d\lambda(g).$$

Par définition de  $\pi_\omega$  et de  $Tr$ , nous pouvons réécrire cette équation sous la forme :

$$\tau^\mu(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} Tr_{\Lambda_n}(\pi_\omega(f)), \text{ pour } \mu \text{ presque tout } \omega. \quad (1.1)$$

Remarquons alors que si  $E \in \mathbb{R}$ , on a  $\chi_{]-\infty; E]}(H_\omega) = \chi_{H \leq E}$  pour un certain  $\chi_{H \leq E}$  dans l'algèbre de Von Neumann de la  $C^*$ -algèbre des observables.

De plus, si  $E \in \mathfrak{g}$  pour un trou  $\mathfrak{g}$  du spectre de  $H_\omega$  (i.e une composante connexe du complémentaire du spectre) alors  $\chi_{]-\infty; E]}$  est une fonction continue bornée sur  $Sp(H_\omega)$  et donc  $\chi_{]-\infty; E]}(H_\omega)$  peut être représenté sous la forme  $\pi_\omega(\chi_{H \leq E})$  pour un élément  $\chi_{H \leq E} \in C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n$ , puisque  $H_\omega$  est affiliée à cette  $C^*$ -algèbre.

On a alors le lien suivant entre une fonction mesurable physiquement et notre  $C^*$ -algèbre :

**Définition 1.14** *Une famille coinvariante  $(H_\omega)$  affiliée à  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n$  vérifie la **formule de Shubin** si pour  $\mu$  presque tout  $\omega \in \Omega$  on a :*

$$\mathcal{N}_\omega(E) = \tau^\mu(\chi_{H \leq E}).$$

La valeur commune est alors notée  $\mathcal{N}(E)$ .

### 1.4.4 Gap-labeling

Dans cette sous-section, nous nous donnons une famille covariante d'opérateurs  $(H_\omega)$  affiliée à  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n$  et vérifiant la formule de Shubin (voir [Bel92] pour l'existence d'une telle famille).

Comme nous l'avons remarqué ci-dessus, si  $E \notin Sp(H_\omega)$ ,  $\chi_{]-\infty; E]}(H_\omega)$  est une projection de la  $C^*$ -algèbre. De plus, si  $\mathfrak{g}$  est un trou dans  $Sp(H_\omega)$  alors pour deux valeurs  $E, E' \in \mathfrak{g}$ ,  $\chi_{]-\infty; E]}(H_\omega) = \chi_{]-\infty; E']}(H_\omega)$ . Ainsi, nous avons un étiquetage des trous  $\mathfrak{g}$  par des projections  $P(\mathfrak{g})$  de  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n$  :  $P(\mathfrak{g}) := \chi_{]-\infty; E]}(H_\omega)$  pour un  $E \in \mathfrak{g}$ . Maintenant, une propriété importante de la trace  $\tau^\mu$  est son invariance pour l'équivalence de projections qui découle directement du fait que  $\tau^\mu(ab) = \tau^\mu(ba)$ . Ainsi  $\tau^\mu$  induit une application linéaire  $\tau_*^\mu$  sur  $K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n)$ .

Nous pouvons alors reformuler la formule de Shubin pour les trous de  $Sp(H_\omega)$  sous la forme

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) = \tau_*^\mu[P(\mathfrak{g})].$$

Utilisant alors le fait que  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n$  est séparable, on a le résultat suivant :

**Proposition 1.15** *Sur les trous de  $Sp(H_\omega)$ ,  $\mathcal{N}$  prend ses valeurs dans  $\tau_*^\mu(K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n))$ , qui est un sous-ensemble dénombrable de  $\mathbb{R}$ .*

Le but est donc de calculer l'image par  $\tau_*^\mu$  de la  $K$ -théorie de  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n$ .

Pour des pavages obtenus par la méthode de coupée projection, cette image avait été conjecturée dans [BHZ00] en 2000 et fut démontrée indépendamment par Bellissard, Benedetti et Gambaudo [BBG06] d'une part, Benamèur et Oyono-Oyono [BOO02] d'autre part et enfin par Kaminker et Putnam [KP03] :

**Théorème 1.16** *Soit  $\Omega$  l'enveloppe continue d'un pavage  $\mathbb{R}^n$ -apériodique dont la transversale canonique  $\Xi$  est totalement discontinue. Soit  $\mu$  une mesure de probabilité ergodique et invariante par translation et  $\mu^t$  la mesure induite sur  $\Xi$ . On a alors :*

$$\tau_*^\mu(K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n)) = \mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z}))$$

où  $C(\Xi, \mathbb{Z})$  désignent les fonctions continues sur  $\Xi$  à valeurs entières et

$$\mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z})) := \left\{ \int_{\Xi} f d\mu^t, f \in C(\Xi, \mathbb{Z}) \right\}.$$

Il est alors normal de se demander si un tel résultat reste vrai dans le cas d'un pavage de type pinwheel i.e :



**Théorème 1.17** *Soit  $\Omega$  l'enveloppe continue d'un pavage de type pinwheel,  $\mu$  une mesure de probabilité ergodique et  $\mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$ -invariante et  $\mu^t$  la mesure induite sur  $\Xi$ . On a alors :*

$$\tau_*^\mu \left( K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)) \right) = \mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z})).$$

C'est-à-dire, a-t-on toujours ce lien entre l'image de la K-théorie de la  $C^*$ -algèbre des pavages de type pinwheel sous l'application linéaire induite par la trace et le module de fréquence des patches ?

Ce théorème est le but des deux prochains chapitres et on montrera dans le dernier chapitre que dans le cas du pavage de type pinwheel, on a un calcul explicite du module de fréquence des patches, montrant que

$$\tau_*^\mu \left( K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)) \right) = \mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z})) = \frac{1}{264} \mathbb{Z} \left[ \frac{1}{5} \right].$$

Le prochain chapitre est consacré à lier l'image de la K-théorie à la cohomologie longitudinale de l'enveloppe continue (voir [MS06]), pour cela nous allons suivre la démarche faite dans [BOO02].

Rappelons les grandes étapes de leur démonstration. Dans l'article en question, Benameur et Oyono-Oyono se sont efforcés d'utiliser le théorème de l'indice sur un feuilletage établis par Alain Connes dans [Con79] et plus particulièrement, la version pour les laminations établie dans [MS06].

Pour cela, ils ont procédé en plusieurs étapes.

Tout d'abord l'inclusion  $\mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z})) \subset \tau_*^{\mu^t}(K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}^n))$  est triviale donc il ne reste plus qu'à démontrer l'inclusion inverse. Pour démontrer celle-ci, les auteurs remarque qu'il suffit de la démontrer pour  $n$  pair.

Ensuite, ils prouvent que la K-théorie de  $C(\Omega)$  est isomorphe à celle de  $C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}^n$  et que l'isomorphisme est induit par l'application  $e \mapsto \text{Ind}_\Omega(\partial_{\Xi, \mathbb{R}^n}^e)$  où  $\partial_{\Xi, \mathbb{R}^n}^e$  est un Dirac à coefficient dans le fibré associé à  $e$  et  $\text{Ind}_\Omega(\partial_{\Xi, \mathbb{R}^n}^e)$  est l'indice analytique de ce Dirac. Le deuxième point crucial de la preuve est alors que le groupe de cohomologie longitudinale (à coefficients réels) de degré maximal est isomorphe, par  $\Psi_{\mathbb{Z}^n}$ , au groupe  $C(\Xi, \mathbb{R})_{\mathbb{Z}^n}$  des coinvariants de  $C(\Xi, \mathbb{R})$  par l'action de  $\mathbb{Z}^n$ . L'étape cruciale est alors de ramener le calcul de  $\tau_*^{\mu^t}(K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}^n))$  à cette cohomologie de degré maximal grâce au théorème de l'indice et au théorème suivant qu'ils démontrent :

**Théorème 1.18**

$$\tau_*^\mu(\text{Ind}_\Omega(\partial_\Xi^e)) = \langle \text{ch}_i^n([e]), [C_{\mathbb{Z}^n, \mu}] \rangle$$

où  $C_{\mathbb{Z}^n, \mu}$  est un certain courant sur  $\Omega$  et  $\text{ch}_i^n([e])$  est un élément de la cohomologie de degré maximal (c'est l'image de  $[e]$  par la composante de degré  $n$  d'un certain caractère de Chern).

La dernière étape consiste alors à montrer que l'image de  $\text{ch}_i^n([e])$  par  $\Psi_{\mathbb{Z}^n}$  est "à valeurs entières" i.e  $\Psi_{\mathbb{Z}^n}(\text{ch}_i^n([e])) \subset C(\Xi, \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}^n}$ .

# Chapitre 2

## Théorème de l'indice pour le gap-labeling

Dans un premier temps, nous allons étudier la  $K$ -théorie de la  $C^*$ -algèbre associée à notre système dynamique  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$  puis nous calculerons son image par l'application linéaire  $\tau_*^\mu$ .

Nous identifierons dans la suite les classes de triplets non bornés comme définis dans [BJ83] avec la classe que ces triplets définissent en  $KK$ -théorie.

Le lecteur pourra se référer à l'Annexe **D** pour un exposé des définitions et principales propriétés des groupes de  $KK$ -théorie équivariante de Kasparov qui seront utilisées ci-dessous.

### 2.1 Etude de $K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$

Pour calculer cette  $K$ -théorie, nous procéderons en deux étapes. La première consiste à utiliser la construction Dirac-Dual Dirac.

Pour cela, considérons le Dirac  $\partial_2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Alors,  $F = \partial_2(1 + \partial_2^2)^{-\frac{1}{2}}$  est un opérateur pseudodifférentiel elliptique d'ordre 0 sur  $H = L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$ .

En faisant agir  $C_0(\mathbb{R}^2)$  sur  $H$  par multiplication  $f \mapsto M(f)$ , on obtient un triplet de Kasparov  $(H, M, F)$ .

Comme de plus,  $G = \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$  agit à gauche sur  $C_0(\mathbb{R}^2)$  et sur  $H$  de façon naturelle et comme  $F$  est alors  $G$ -invariant, la classe de  $(H, M, F)$  définit un élément  $\alpha_G$  de  $KK_0^G(C_0(\mathbb{R}^2), \mathbb{C})$  appelé *élément fondamental*.

Il existe alors un élément  $\sigma_G \in KK_0^G(\mathbb{C}, C_0(\mathbb{R}^2))$  tel que le produit de Kasparov de  $\alpha_G$  et  $\sigma_G$  au dessus de  $\mathbb{C}$  soit  $\alpha_G \otimes_{\mathbb{C}} \sigma_G = 1_{C_0(\mathbb{R}^2)}$  i.e  $\sigma_G$  est un inverse à droite de  $\alpha_G$  (voir [Kas95], [Kas88], [Ska91]).

De plus, comme ici  $G = \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$  est moyennable (comme produit semi-direct de deux groupes moyennables),  $\sigma_G \otimes \alpha_G = 1_{\mathbb{C}}$ .

Nous avons donc un élément inversible de  $KK_0^G(C_0(\mathbb{R}^2), \mathbb{C})$  et nous pouvons alors montrer :

**Proposition 2.1**  $K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2))$  est isomorphe à  $K_0(C(\Omega) \rtimes SO(2))$ .

**Démonstration :**

Notons  $[\partial_2]$  la classe du triplet  $(H, M, F)$  ci-dessus.

Nous avons  $\tau_\Omega[\partial_2] \in KK_0^G(C_0(\Omega \times \mathbb{R}^2), C(\Omega))$  où  $\tau_\Omega[\partial_2] := 1_\Omega \otimes_{\mathbb{C}} [\partial_2]$ .

En poussant cet élément par le morphisme de descente

$$J_G : KK_0^G(C_0(\Omega \times \mathbb{R}^2), C(\Omega)) \longrightarrow KK_0(C_0(\Omega \times \mathbb{R}^2) \rtimes G, C(\Omega) \rtimes G),$$

nous obtenons l'élément

$$J_G(\tau_\Omega([\partial_2])) \in KK_0(C_0(\Omega \times \mathbb{R}^2) \rtimes G, C(\Omega) \rtimes G).$$

Comme les applications  $\tau_\Omega$  et  $J_G$  respectent le produit de Kasparov et les éléments unités,  $J_G(\tau_\Omega([\partial_2]))$  est un élément inversible et définit donc un isomorphisme  $\beta := \otimes_{C_0(\Omega \times \mathbb{R}^2) \rtimes G} J_G(\tau_\Omega([\partial_2]))$  :

$$\beta : KK_0(\mathbb{C}, C_0(\Omega \times \mathbb{R}^2) \rtimes G) \longrightarrow KK_0(\mathbb{C}, C(\Omega) \rtimes G).$$

De plus,  $C(\Omega) \rtimes SO(2)$  étant Morita équivalente à  $C_0(\Omega \times \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$  (cf Annexe **A.3**), on a un isomorphisme

$$\delta : KK_0(\mathbb{C}, C(\Omega) \rtimes SO(2)) \longrightarrow KK_0(\mathbb{C}, C_0(\Omega \times \mathbb{R}^2) \rtimes G).$$

L'isomorphisme de la proposition est alors obtenu en prenant la composée  $\beta \circ \delta$ .  $\square$

Ainsi, étudier  $K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2))$  revient à étudier  $K_0(C(\Omega) \rtimes SO(2))$ .

Pour étudier ce dernier groupe, nous allons utiliser les 6 cercles  $F_1, \dots, F_6$  stables par rotation d'angle  $\pi$  autour de l'origine et  $F := \bigcup F_i$ , pour obtenir la suite exacte longue à six termes suivante :

$$\begin{array}{ccccc} K_0^{S^1}(C_0(\Omega \setminus F)) & \longrightarrow & K_0^{S^1}(C(\Omega)) & \longrightarrow & K_0^{S^1}(C(F)) \\ & & & & \downarrow \partial \\ & \uparrow & & & \\ K_1^{S^1}(C(F)) & \longleftarrow & K_1^{S^1}(C(\Omega)) & \longleftarrow & K_1^{S^1}(C_0(\Omega \setminus F)) \end{array}$$

Or  $K_i^{S^1}(C(F)) \simeq K_i(C(F) \rtimes S^1) \simeq K_i((\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})^6)$ , le premier isomorphisme vient de [Jul81] et le second provient de l'isomorphisme  $C(F_i) \rtimes S^1 \simeq \text{Ind}_{\{-1,1\}}^{S^1}(\mathbb{C}) \rtimes S^1$  et du fait que cette  $C^*$ -algèbre est Morita équivalente à  $C^*(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ , voir [Seg68] (l'action de  $S^1$  sur  $F_i$  est obtenue par l'action de  $S^1$  sur  $S^1$  définie par  $e^{i\theta} \cdot z := e^{2i\theta} z$  et  $\text{Ind}_{\{-1,1\}}^{S^1}(\mathbb{C})$  est la  $C^*$ -algèbre induite donnée par les fonctions  $f$  continues sur  $S^1$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  telles que  $f(-z) = -f(z)$ ).

Ainsi,  $K_0^{S^1}(C(F)) \simeq \mathbb{Z}^{12}$  ( $= \mathbb{Z}^6 \oplus \mathbb{Z}^6$ ) et  $K_1^{S^1}(C(F)) \simeq 0$ .

Remarquons que  $K_0^{S^1}(C(F_i)) \simeq \mathbb{Z}^2$  est engendré par deux fibrés vectoriels  $S^1$ -équivariants. Le premier est le fibré trivial  $F_i \times \mathbb{C}$  muni de l'action diagonale de  $S^1$  où  $S^1$  agit trivialement sur  $\mathbb{C}$  et le second est le fibré  $F_i \times \mathbb{C}$  muni de l'action diagonale de  $S^1$  où  $S^1$  agit par multiplication sur  $\mathbb{C}$ .

De plus,  $S^1$  agit librement et proprement sur  $\Omega \setminus F$  puisque nous avons enlevé tous les points fixes de l'action de  $S^1$  sur  $\Omega$ . Ainsi,

$$K_i^{S^1}(C_0(\Omega \setminus F)) \simeq K_i(C_0(\Omega \setminus F) \rtimes S^1) \simeq K_i(C_0((\Omega \setminus F)/S^1)),$$

le dernier isomorphisme est obtenu par Morita équivalence (voir [Rie82]).

La suite exacte longue devient donc

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C_0(\Omega \setminus F)/S^1) & \longrightarrow & K_0^{S^1}(C(\Omega)) & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{12} \\ \uparrow & & & & \downarrow \partial \\ 0 & \longleftarrow & K_1^{S^1}(C(\Omega)) & \longleftarrow & K_1(C_0((\Omega \setminus F)/S^1)) \end{array}$$

Pour étudier le morphisme de bord  $\partial$ , nous avons besoin du lemme suivant.

Il relie la  $K$ -théorie d'un espace topologique de basse dimension à sa cohomologie et la preuve de ce lemme est donnée dans [Mat] à la section 3.4 :

**Lemme 2.2** *Soit  $X$  un CW-complexe fini, connexe et de dimension  $\leq 3$ . Il existe alors des isomorphismes canoniques*

$$ch_{ev}^{\mathbb{Z}} := ch_0^{\mathbb{Z}} \oplus ch_2^{\mathbb{Z}} : K_0(C(X)) \longrightarrow \check{H}^0(X; \mathbb{Z}) \oplus \check{H}^2(X; \mathbb{Z})$$

$$ch_{odd}^{\mathbb{Z}} := ch_1^{\mathbb{Z}} \oplus ch_3^{\mathbb{Z}} : K_1(C(X)) \longrightarrow \check{H}^1(X; \mathbb{Z}) \oplus \check{H}^3(X; \mathbb{Z})$$

naturels pour de tels CW-complexes et compatible avec le caractère de Chern i.e tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} K_j(C(X)) & & \\ \downarrow ch_n^{\mathbb{Z}} & \searrow ch_n & \\ \check{H}^n(X; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \check{H}^n(X; \mathbb{Q}) \end{array}$$

où  $j = n \bmod 2$ ,  $\check{H}^n(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \check{H}^n(X; \mathbb{Q})$  est le morphisme canonique induit par l'inclusion  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$  et  $ch_n$  la composante du caractère de Chern de degré  $n$ .

Comme  $\Omega$  est limite projective de  $CW$ -complexes finis, connexes et de dimension 3 (voir section **3.2**), on obtient le lemme suivant :

**Lemme 2.3** *La Cohomologie de Čech à support compact et à coefficients entiers  $H_c^k((\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z})$  est nulle pour  $k \geq 3$ .*

De plus,

$$K_0 \left( C_0 \left( (\Omega \setminus F)/S^1 \right) \right) \simeq \check{H}_c^2 \left( (\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z} \right)$$

et

$$K_1 \left( C_0 \left( (\Omega \setminus F)/S^1 \right) \right) \simeq \check{H}_c^1 \left( (\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z} \right).$$

**Démonstration :**

En effet, d'après **3.2** p. 70 ou [ORS02],  $\Omega/S^1$  est limite inverse d'une suite de  $CW$ -complexes de dimension 2. Ainsi,  $\check{H}^k(\Omega/S^1; \mathbb{Z}) = 0$  pour  $k \geq 3$ .

Maintenant, si nous considérons la suite exacte de la cohomologie de  $\Omega/S^1$  relative à  $F/S^1$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \check{H}^2(\Omega/S^1, F/S^1; \mathbb{Z}) &\longrightarrow \check{H}^2(\Omega/S^1; \mathbb{Z}) \longrightarrow \check{H}^2(F/S^1; \mathbb{Z}) \\ &\longrightarrow \check{H}^3(\Omega/S^1, F/S^1; \mathbb{Z}) \longrightarrow \check{H}^3(\Omega/S^1; \mathbb{Z}) \longrightarrow \check{H}^3(F/S^1; \mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Comme  $F/S^1$  est un ensemble de 6 points,  $\check{H}^k(F/S^1; \mathbb{Z}) = 0$  pour  $k \geq 1$  et ainsi,  $\check{H}^{k+1}(\Omega/S^1, F/S^1; \mathbb{Z}) \simeq \check{H}^{k+1}(\Omega/S^1; \mathbb{Z})$  pour  $k \geq 1$ .

Etant donné le résultat rappelé ci-dessus sur la cohomologie de  $\Omega/S^1$ , on a montré que la cohomologie de  $\Omega/S^1$  relative à  $F/S^1$  et à coefficients entiers est nulle à partir de l'ordre 3.

Pour conclure, nous utilisons le lemme 11 p.321 de [Spa66] pour dire que  $\check{H}^k(\Omega/S^1, F/S^1; \mathbb{Z}) \simeq \check{H}_c^k \left( (\Omega/S^1) \setminus (F/S^1); \mathbb{Z} \right)$  pour tout  $k$ , puisque  $\Omega/S^1$  est un compact et  $F/S^1$  est un fermé de ce compact.

Puisque  $F$  est stable par l'action de  $S^1$ , on a  $(\Omega/S^1 \setminus F/S^1) = (\Omega \setminus F)/S^1$ , ce qui achève la démonstration du premier point du lemme.

De plus, on a :

$$K_0 \left( C_0 \left( (\Omega \setminus F)/S^1 \right) \right) = \tilde{K}_0 \left( C \left( ((\Omega \setminus F)/S^1)^+ \right) \right)$$

et

$$K_1 \left( C_0 \left( (\Omega \setminus F)/S^1 \right) \right) = K_1 \left( C \left( ((\Omega \setminus F)/S^1)^+ \right) \right)$$

où  $((\Omega \setminus F)/S^1)^+$  est le compactifié d'Alexandroff de  $(\Omega \setminus F)/S^1$  et  $\tilde{K}_0$  représente la  $K$ -théorie réduite.

On peut alors voir facilement grâce aux résultats du paragraphe **3.2** du prochain chapitre que :

$$((\Omega \setminus F)/S^1)^+ = \varprojlim (B_l \setminus \mathfrak{p}_l(F/S^1))^+.$$

Comme les espaces  $(B_l \setminus \mathfrak{p}_l(F/S^1))^+$  sont des  $CW$ -complexes de dimension 2, on peut appliquer le résultat du lemme **2.2** pour obtenir le résultat souhaité.

□

Nous pouvons alors calculer le noyau du bord  $\partial$  :

**Lemme 2.4**  $\text{Ker } \partial = \bigoplus_{i=1}^7 \mathbb{Z}.q_i$  où

$$q_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$q_2 = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$q_3 = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$q_4 = (1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

$$q_5 = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$q_6 = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$q_7 = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

**Démonstration :**

(I) L'inclusion  $\bigoplus_{i=1}^7 \mathbb{Z}.q_i \subset \text{Ker } \partial$  est démontrée à l'Annexe **B**.

(II) Soit alors  $(n_1, \dots, n_6, n'_1, \dots, n'_6) \in \mathbb{Z}^{12}$ .

On peut supposer que les  $n'_i$  sont tous nuls grâce au premier point puisque, par exemple, comme  $(1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0) \in \text{Ker } \partial$ ,

$$\partial(n_1, \dots, n_6, n'_1, \dots, n'_6) = \partial(n_1 + n'_1, n_2, \dots, n_6, 0, n'_2, \dots, n'_6).$$

On peut de plus supposer que les  $n_i + n'_i$  sont dans  $\mathbb{N}$  également grâce au premier point (I) puisque, si  $n$  désigne le plus petit des entiers  $n_i + n'_i$ , on a  $\partial(n_1 + n'_1, \dots, n_6 + n'_6, 0, \dots, 0) = \partial(n_1 + n'_1 - n, \dots, n_6 + n'_6 - n, 0, \dots, 0)$  avec  $n_i + n'_i - n \in \mathbb{N}$ .

On se fixe donc  $(n_1, \dots, n_6, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{12}$  avec  $n_i \in \mathbb{N}$ .  
 $(n_1, \dots, n_6, 0, \dots, 0)$  correspond alors à la projection  $S^1$ -invariante :

$$f(x) = \begin{cases} P_{n_1} & \text{si } x \in F_1 \\ \vdots & \\ P_{n_6} & \text{si } x \in F_6 \end{cases}$$

où

$$P_{n_i} := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C}).$$

Nous allons alors exhiber un relèvement  $S^1$ -invariant de cette projection dans

$\mathcal{M}_\infty(C(\Omega))$ .

Pour cela, considérons

$$\tilde{K}_i := \left\{ \omega \in \Omega ; d(\omega, F_i) \leq \frac{1}{n} \right\}$$

et

$$\tilde{V}_i := \left\{ \omega \in \Omega ; d(\omega, F_i) < \frac{1}{n-1} \right\}$$

avec  $n$  choisi assez grand pour que les 6  $\tilde{V}_i$  soient disjoints.

Définissons alors  $K_i := p(\tilde{K}_i)$  et  $V_i := p(\tilde{V}_i)$  où  $p : \Omega \rightarrow \Omega/S^1$ .

$K_i$  est alors un compact contenu dans l'ouvert  $V_i$  et contenant  $[x_i] := p(x_i)$  où  $x_i$  est un élément quelconque de  $F_i$ .

Il existe alors des fonctions  $\phi_i \in C(\Omega/S^1)$ ,  $i \in \{1, \dots, 6\}$ , telles que

- $\text{Supp}(\phi_i) \subset V_i$ ;
- $0 \leq \phi_i \leq 1$  et  $\phi_i(x) = 1$  si  $x \in K_i$ ;
- $\phi_1 + \dots + \phi_6 = 1$  sur  $\bigcup K_i$ .

Posons  $\Psi := \phi_1.P'_{n_1} + \dots + \phi_6.P'_{n_6}$  où

$$P'_{n_i} := \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\text{Max}(n_i)}(\mathbb{C}).$$

Donc  $\Psi \in \mathcal{M}_{\text{Max}(n_i)}(C(\Omega/S^1))$  et  $\Psi$  est auto-adjoint.

On voit alors  $\Psi$  comme une fonction de  $C(\Omega)$  constante sur les  $S^1$ -orbites et

$\Psi$  peut donc être vue comme une fonction  $S^1$ -invariante.  
On vérifie alors facilement que  $\pi_*(\Psi) = f$  dans  $\mathcal{M}_\infty(C(F))$ , donc

$$\partial([f]) = [\exp(-2i\pi\Psi)] \in K_1^{S^1}(C_0(\Omega \setminus F)).$$

D'après le lemme **2.3**, on a un isomorphisme entre  $K_1^{S^1}(C_0(\Omega \setminus F))$  et

$$\check{H}_c^1((\Omega \setminus F)/S^1, \mathbb{Z}) = \left\{ [h] ; h : ((\Omega \setminus F)/S^1)^+ \longrightarrow S^1 \text{ continue} \right\}$$

où  $[h]$  désigne la classe des fonctions continues  $((\Omega \setminus F)/S^1)^+ \longrightarrow S^1$  homotopiques à  $h$  et  $((\Omega \setminus F)/S^1)^+$  le compactifié d'Alexandrov de  $(\Omega \setminus F)/S^1$  (voir [Hat02] pour l'égalité entre la cohomologie et l'ensemble des classes de fonctions de  $((\Omega \setminus F)/S^1)^+$  dans  $S^1$ ).

Cet isomorphisme est l'application  $\det_*$ .

$$\text{Ainsi : } \partial([f]) = [\exp(-2i\pi(n_1.\phi_1 + \dots + n_6.\phi_6))] \in \check{H}_c^1((\Omega \setminus F)/S^1 ; \mathbb{Z}).$$

Remarquons qu'une fonction continue sur  $((\Omega \setminus F)/S^1)^+$  peut être vue comme une fonction continue sur  $\Omega/S^1$  et constante sur  $F/S^1$ .

Il nous reste alors à voir pour quelles valeurs de  $(n_1, \dots, n_6)$  il existe une homotopie continue  $H_t$  définie sur  $((\Omega \setminus F)/S^1)^+$  et à valeurs dans  $S^1$  entre  $\exp(-2i\pi(n_1.\phi_1 + \dots + n_6.\phi_6))$  et 1.

Cela revient à savoir s'il existe une homotopie continue  $H_t : \Omega/S^1 \rightarrow S^1$  entre  $\exp(-2i\pi(n_1.\phi_1 + \dots + n_6.\phi_6))$  et 1 et constante sur  $F/S^1$  pour tout  $t$ .

Ou encore, on cherche à savoir si l'on peut trouver une homotopie continue  $h_t : \Omega/S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$  entre  $h_0 := n_1.\phi_1 + \dots + n_6.\phi_6$  et une fonction continue  $h_1 := g$  définie sur  $\Omega/S^1$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  et telle que  $h_t([x_i]) - h_t([x_j]) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $t \in [0, 1], i, j \in \{1, \dots, 6\}$ .

Comme  $\Omega/S^1$  est connexe,  $h_t$  serait une homotopie entre  $n_1.\phi_1 + \dots + n_6.\phi_6$  et une fonction  $g$  constante sur  $\Omega/S^1$  égale à un entier et vérifiant

$$h_t([x_i]) - h_t([x_j]) \in \mathbb{Z} \text{ pour tout } t, i, j.$$

Nous allons voir que cela n'est possible que si  $n_i = n_j$  pour tout  $i, j$ .

Pour cela, posons  $ev_i(h) : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  l'application continue définie par  $ev_i(h)(t) := h_t([x_i])$ .

$ev_i(h) - ev_j(h)$  est alors une application continue à valeur dans  $\mathbb{Z}$ , c'est donc une application constante égale à  $n_i - n_j$ .



Ainsi,  $\forall t \in [0; 1], h_t([x_i]) - h_t([x_j]) = n_i - n_j$ .

Or pour  $t=0$ ,  $h_0 = g = k \in \mathbb{Z}$  et donc s'il existe une homotopie  $h_t$  alors  $n_i = n_j$  pour tout  $i, j$ .

Ainsi,

$$(n_1, \dots, n_6, 0, \dots, 0) \in \text{Ker} \partial \Rightarrow (n_1, \dots, n_6, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z} \cdot (1, \dots, 1, 0, \dots, 0).$$

Si maintenant on prend  $(n_1, \dots, n_6, n'_1, \dots, n'_6) \in \text{Ker} \partial$ ,

$$\begin{aligned} \partial(n_1, \dots, n_6, n'_1, \dots, n'_6) &= \partial(n_1 + n'_1, \dots, n_6 + n'_6, 0, \dots, 0) \\ &= \partial(n_1 + n'_1 - n, \dots, n_6 + n'_6 - n, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

où  $n = \text{Min}(n_i + n'_i)$ .

Par le résultat que l'on vient de voir, on sait que  $n_i + n'_i - n = n_j + n'_j - n$ , i.e  $n_i + n'_i = n_j + n'_j$  pour tout  $i, j$ .

En notant  $k$  cet entier commun, on obtient  $n_i = -n'_i + k$  donc

$$\begin{aligned} (n_1, \dots, n_6, n'_1, \dots, n'_6) &= (-n'_1 + k, \dots, -n'_6 + k, n'_1, \dots, n'_6) \\ &= k \cdot q_1 + n'_1(q_2 - q_1) + \dots + n'_6(q_7 - q_1) \in \bigoplus_{i=1}^7 \mathbb{Z} \cdot q_i. \end{aligned}$$

Ainsi, on vient de montrer que  $\text{Ker} \partial \subset \bigoplus_{i=1}^7 \mathbb{Z} \cdot q_i$ .

Comme de plus on avait l'inclusion réciproque, on a l'égalité recherchée.

□

Comme  $q_1$  se relève en la projection constante égale à 1 sur  $\Omega$ , nous avons démontré :

**Proposition 2.5** *On a*

$$K_0(C(\Omega) \rtimes S^1) \simeq K_0^{S^1}(C(\Omega)) \simeq \mathbb{Z} \oplus \left( \bigoplus_{i=2}^7 \mathbb{Z} \cdot q_i \right) \oplus \check{H}_c^2((\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z}),$$

où  $\mathbb{Z}$  est engendré par la projection constante égale à 1.

## 2.2 Calcul de l'image par $\tau_*^\mu$ de la copie de $\mathbb{Z}$

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de calculer l'image par  $\tau_*^\mu$  de la partie  $\beta \circ \delta(\mathbb{Z})$  de  $K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$  où  $\beta \circ \delta$  est l'isomorphisme de la preuve de la proposition **2.1**.

Pour calculer cette image, nous allons considérer les applications  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow C(\Omega)$  et  $\phi_A : A \rightarrow C(\Omega) \otimes A$  ( $A$  une  $C^*$ -algèbre munie d'une action de  $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$ ) données par  $\phi(z)(\omega) := z$  pour tout  $\omega \in \Omega$  et  $\phi_A := \phi \otimes Id$ . Nous considérons également l'application induite  $\phi_A^{\mathbb{R}^2} : A \rtimes \mathbb{R}^2 \rightarrow (C(\Omega) \otimes A) \rtimes \mathbb{R}^2$ . Les applications  $\phi$  et  $\phi_A$  sont  $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$ -équivariantes et définissent donc, par functorialité de la  $KK$ -théorie, des applications (voir Annexe **D**) :

$$\begin{aligned} \phi_* &: KK_0^{S^1}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \longrightarrow KK_0^{S^1}(\mathbb{C}, C(\Omega)), \\ (\phi_A)_* &: KK_0^{S^1}(\mathbb{C}, A) \longrightarrow KK_0^{S^1}(\mathbb{C}, C(\Omega) \otimes A), \\ (\phi_A^{\mathbb{R}^2})_* &: KK_0^{S^1}(\mathbb{C}, A \rtimes \mathbb{R}^2) \longrightarrow KK_0^{S^1}(\mathbb{C}, (C(\Omega) \otimes A) \rtimes \mathbb{R}^2), \\ \phi_A^* &: KK_0^{S^1}(C(\Omega) \otimes A, C(\Omega)) \longrightarrow KK_0^{S^1}(A, C(\Omega)). \end{aligned}$$

Nous désignerons par  $\phi_*$  et  $\phi^*$  ces morphismes lorsque le contexte ne prêtera pas à confusions ou si  $A = \mathbb{C}$ .

**Proposition 2.6** *Nous avons le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} K_0^{S^1}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\phi_*} & K_0^{S^1}(C(\Omega)) \\ \downarrow \eta_1 & & \downarrow \eta \\ K_0^{S^1}(\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2))) & \xrightarrow{(\phi_{\mathcal{K}})_*} & K_0^{S^1}(C(\Omega) \otimes \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2))) \\ \downarrow \Psi_* & & \downarrow \Psi_* \\ K_0^{S^1}(C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2) & \xrightarrow{(\phi_{C_0(\mathbb{R}^2)}^{\mathbb{R}^2})_*} & K_0^{S^1}(C_0(\Omega \times \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2) \\ \downarrow \beta_1 & & \downarrow \beta \\ K_0^{S^1}(C^*(\mathbb{R}^2)) & \xrightarrow{(\phi_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}^2})_*} & K_0^{S^1}(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2) \end{array}$$

où les isomorphismes  $\delta_1$  et  $\beta_1$  sont construits de façon analogue à ceux construits dans la preuve de la proposition **2.1** en prenant  $\mathbb{C}$  à la place de  $C(\Omega)$  et en utilisant le morphisme de descente partiel  $J_{\mathbb{R}^2}^{S^1}$  de [Cha99]. De plus,  $\Psi_*$  est l'isomorphisme induit par l'isomorphisme  $S^1$ -équivariant entre  $C(X) \otimes \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2))$  et  $C_0(X \times \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2$  de l'Annexe A.1 pour  $X = \Omega$  et  $X = \text{un point}$ .  $\eta$  et  $\eta_1$  sont les isomorphismes obtenus par Morita équivalence.

**Démonstration :**

La démonstration repose essentiellement sur les propriétés de naturalité du produit de Kasparov et du morphisme de descente.

- Le carré du milieu commute trivialement.
- L'isomorphisme  $\eta_1^{-1} : K_0^{S^1}(\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2))) \rightarrow K_0^{S^1}(\mathbb{C})$  est le produit de Kasparov par la classe du bimodule  $S^1$ -équivariant donnant la Morita équivalence entre les deux  $C^*$ -algèbres  $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2))$  et  $\mathbb{C}$  i.e

$$\eta_1^{-1} = \otimes_{\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2))} [(L^2(\mathbb{R}^2), i, 0)].$$

Nous noterons  $y_1$  la classe de  $(L^2(\mathbb{R}^2), i, 0)$  dans  $KK_0^{S^1}(\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2)), \mathbb{C})$ .

De même,  $\eta^{-1} : K_0^{S^1}(\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2)) \otimes C(\Omega)) \rightarrow K_0^{S^1}(C(\Omega))$  est donné par  $\otimes_{\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2)) \otimes C(\Omega)} y_2$  où

$$y_2 := [(L^2(\mathbb{R}^2) \otimes C(\Omega), \theta, 0)] \in KK_0^{S^1}(\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2)) \otimes C(\Omega), C(\Omega))$$

avec  $\theta$  l'action de  $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2)) \otimes C(\Omega)$  sur le bimodule d'équivalence  $S^1$ -équivariant  $L^2(\mathbb{R}^2) \otimes C(\Omega)$  (cette action est l'action naturelle des compacts sur  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et la multiplication dans  $C(\Omega)$ ).

On a alors 2 diagrammes triangulaires commutatifs ([Ska91] ou Annexe D) :

$$\begin{array}{ccc}
 K_0^{S^1}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\phi_*} & K_0^{S^1}(C(\Omega)) \\
 \uparrow \otimes_{\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2))} y_1 & \nearrow \otimes_{\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2))} \phi_*(y_1) & \\
 K_0^{S^1}(\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2))) & & \\
 \\
 K_0^{S^1}(\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2))) & \xrightarrow{(\phi_{\mathcal{K}})_*} & K_0^{S^1}(\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2)) \otimes C(\Omega)) \\
 \nearrow \otimes_{\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2))} \phi_{\mathcal{K}}^*(y_2) & & \uparrow \otimes_{\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2)) \otimes C(\Omega)} y_2 \\
 & & K_0^{S^1}(C(\Omega))
 \end{array}$$

Or,

$$\phi_{\mathcal{K}}^*(y_2) = [(L^2(\mathbb{R}^2) \otimes C(\Omega), \theta \circ \phi_{\mathcal{K}}, 0)]$$

et

$$\phi_*(y_1) = [(L^2(\mathbb{R}^2) \otimes C(\Omega), i \otimes 1, 0)].$$

Comme  $\theta \circ \phi_{\mathcal{K}}$  agit comme  $i \otimes 1$  sur  $L^2(\mathbb{R}^2) \otimes C(\Omega)$ , on a  $\phi_{\mathcal{K}}^*(y_2) = \phi_*(y_1)$  et ainsi, le premier carré du diagramme de la proposition est commutatif (les flèches verticales sont des isomorphismes).

– Comme ci-dessus, nous avons les diagrammes triangulaires commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} K_0^{S^1}(C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2) & \xrightarrow{(\phi_{C_0(\mathbb{R}^2)}^{\mathbb{R}^2})_*} & K_0^{S^1}(C_0(\Omega \times \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2) \\ & \searrow & \downarrow \otimes J_{\mathbb{R}^2}^{S^1}(\tau_\Omega([\partial_2])) \\ & \otimes (\phi_{C_0(\mathbb{R}^2)}^{\mathbb{R}^2})^* (J_{\mathbb{R}^2}^{S^1}(\tau_\Omega([\partial_2]))) & K_0^{S^1}(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2) \\ \\ K_0^{S^1}(C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2) & & \\ \downarrow \otimes J_{\mathbb{R}^2}^{S^1}([\partial_2]) & \searrow \otimes (\phi_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}^2})_* (J_{\mathbb{R}^2}^{S^1}([\partial_2])) & \\ K_0^{S^1}(C^*(\mathbb{R}^2)) & \xrightarrow{(\phi_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}^2})_*} & K_0^{S^1}(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2) \end{array}$$

Or,  $(\phi_{C_0(\mathbb{R}^2)}^{\mathbb{R}^2})^* (J_{\mathbb{R}^2}^{S^1}(\tau_\Omega([\partial_2]))) = J_{\mathbb{R}^2}^{S^1}(\phi'^*(\tau_\Omega([\partial_2])))$  où  $\phi' = \phi_{C_0(\mathbb{R}^2)}$  qui est  $\mathbb{R}^2$ -équivariante.

De même,  $(\phi_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}^2})_* (J_{\mathbb{R}^2}^{S^1}([\partial_2])) = J_{\mathbb{R}^2}^{S^1}(\phi_*([\partial_2]))$ .

On a

$$\phi_*([\partial_2]) = [(H \otimes C(\Omega), M \otimes 1, F \otimes 1)] \in KK_0^{\mathbb{R}^2 \times S^1}(C_0(\mathbb{R}^2), C(\Omega))$$

avec les notations de la classe  $[\partial_2]$  et

$$\phi'^*(\tau_\Omega([\partial_2])) = [(H \otimes C(\Omega), (M \otimes i_{C(\Omega)}) \circ \phi', F \otimes 1)] \in KK_0^G(C_0(\mathbb{R}^2), C(\Omega))$$

avec  $i_{C(\Omega)} : C(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}(C(\Omega))$  la multiplication dans  $C(\Omega)$ .

Puisque  $(M \otimes i_{C(\Omega)}) \circ \phi'$  est la représentation de  $C_0(\mathbb{R}^2)$  sur  $H \otimes C(\Omega)$  par multiplication de  $C_0(\mathbb{R}^2)$  sur  $H$  et que  $M \otimes 1$  est la même représentation, on a égalité de ces deux classes et ainsi égalité des deux morphismes diagonaux dans les diagrammes triangulaires.

On vient donc de voir que le carré du bas du diagramme est aussi commutatif.  $\square$

Considérons le morphisme d'oubli  $r^* : KK^{S^1}(A, B) \longrightarrow KK(A, B)$  pour des  $C^*$ -algèbres  $A$  et  $B$  munies d'action de  $S^1$ .

Ce morphisme commute trivialement avec le morphisme  $\eta_1$  obtenu par Morita équivalence (équivariante ou pas, selon les cas) :

$$\begin{array}{ccc} K_0(\mathbb{C}) & \xleftarrow{r^*} & K_0^{S^1}(\mathbb{C}) \\ \eta_1 \downarrow & & \downarrow \eta_1 \\ K_0(\mathcal{K}) & \xleftarrow{r^*} & K_0^{S^1}(\mathcal{K}) \end{array}$$

Le morphisme commute aussi trivialement avec le morphisme  $\Psi_*$  de la proposition **2.6**.

Enfin, en reprenant la définition du morphisme de descente partielle dans [Cha99] et celle du morphisme de descente usuel, on remarque que  $r^* \circ J_{\mathbb{R}^2}^{S^1} = J_{\mathbb{R}^2} \circ r'^*$  où  $r'^* : KK^{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1}(A, B) \longrightarrow KK^{\mathbb{R}^2}(A, B)$  est le morphisme restriction de  $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  (voir [Ska91] ou l'Annexe D).

En conclusion, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & K_0^{S^1}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\phi_*} & K_0^{S^1}(C(\Omega)) \\ & \swarrow r^* & \downarrow \simeq \beta_1 \circ \delta_1 & & \downarrow \simeq \beta \circ \delta \\ K_0(\mathbb{C}) & & & & K_0^{S^1}(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2) \\ \downarrow \beta' \circ \delta' \simeq & & K_0^{S^1}(C^*(\mathbb{R}^2)) & \xrightarrow{\phi_*^{\mathbb{R}^2}} & K_0^{S^1}(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2) \\ & \swarrow r^* & & & \downarrow r^* \\ K_0(C^*(\mathbb{R}^2)) & \xrightarrow{\phi_*^{\mathbb{R}^2}} & & & K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2) \\ \uparrow F_* \simeq & & & & \\ K_0(C_0(\mathbb{R}^2)) & & & & \end{array}$$

où  $\beta'$  et  $\delta'$  sont obtenues de façon similaire à  $\beta_1$  et  $\delta_1$  mais sans la  $S^1$ -équivariance. Ainsi, nous obtenons que la projection engendrant la copie de  $\mathbb{Z}$  dans  $K_0^{S^1}(C(\Omega))$  provient de la projection constante égale à 1 dans  $K_0^{S^1}(\mathbb{C})$  qui, elle même, s'envoie sur la projection 1 de  $K_0(\mathbb{C})$ .

Donc,  $r^* \circ \beta \circ \delta \circ \phi_*([1]) = \phi_*^{\mathbb{R}^2} \circ \beta' \circ \delta' \circ r^*([1]) = \phi_*^{\mathbb{R}^2} \circ F_*(\pm \text{Bott})$  où  $\text{Bott}$  est l'élément  $[\text{Bott}] - 1$  de  $K_0(C_0(\mathbb{R}^2))$  obtenu grâce au projecteur de Bott et  $F$  est la transformée de Fourier donnant l'isomorphisme  $C^*(\mathbb{R}^2) \simeq C_0(\mathbb{R}^2)$  ( $r^*([1]) = [1]$  engendre  $K_0(\mathbb{C})$  et comme  $\beta' \circ \delta'$  est un isomorphisme, l'image de  $[1]$  par ce morphisme est

nécessairement  $\pm$  un générateur de  $K_0(C_0(\mathbb{R}^2))$ .

Il suffit alors de suivre les transformations que subit l'application linéaire  $\tau_*^\mu$  à travers tous ces morphismes.

Pour commencer, l'application linéaire  $\tau_*^\mu$  sur  $K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$  devient  $\tau_*'^\mu$  sur  $K_0^{S^1}(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2)$  et sur  $K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2)$  où  $\tau'^\mu$  est donnée sur la sous-algèbre dense  $C_c(\Omega \times \mathbb{R}^2)$  par (voir [Jul81])

$$\tau'^\mu(f) = \int_{\Omega} f(\omega, 0) d\mu(\omega).$$

On a de plus :  $\tau_*'^\mu \circ r^* = \tau_*'^\mu$ .

$\tau_*'^\mu$  se lit alors sur  $K_0(C^*(\mathbb{R}^2))$  comme  $\tau_*$  où  $\tau$  est la trace sur  $C^*(\mathbb{R}^2)$  définie par  $\tau(f) := f(0)$  pour  $f \in C_c(\mathbb{R}^2)$ .

On a alors  $\tau \circ F(f) := F(f)(0) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx$  et donc,

$$\tau_* \circ F_*(\beta ott) = \int_{\mathbb{R}^2} (Tr(Bott(x)) - 1) dx = 0.$$

Ainsi,

$$\tau'^\mu(\beta \circ \delta \circ \phi_*([1])) = \tau'^\mu(r^* \circ \beta \circ \delta \circ \phi_*([1]))$$

et donc

$$\tau'^\mu(\beta \circ \delta \circ \phi_*([1])) = \tau'^\mu(\phi_*^{\mathbb{R}^2} \circ F_*(\pm \beta ott)) = \tau_* \circ F_*(\pm \beta ott) = 0.$$

On vient ainsi de montrer :

**Théorème 2.7** *La copie de  $\mathbb{Z}.q_1$  dans  $K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$  est de trace nulle.*

## 2.3 Etude du sommant $\check{H}_c^2((\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z})$ dans le groupe $K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$

Etudions à présent l'image du sommant  $\check{H}_c^2((\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z})$  par  $\tau_*^\mu$ .

Pour cela, nous allons construire une application  $K_1(C(\Omega)) \longrightarrow K_0(C(\Omega) \rtimes S^1)$  qui sera surjective sur la partie  $\check{H}_c^2((\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z})$ . Cette application  $\beta_{S^1} \circ \delta_{S^1}$  est construite de façon analogue à celle de la proposition 2.1.

Nous considérons l'opérateur de Dirac  $\partial_1$   $S^1$ -équivariant sur le cercle  $S^1$ . Il nous

donne alors une classe  $[\partial_1] \in KK_1^{S^1}(C(S^1), \mathbb{C})$ .

L'application recherchée est alors donnée par la composée de l'isomorphisme  $\delta_{S^1}$  dû à la Morita équivalence de  $C(\Omega)$  avec  $C(\Omega \times S^1) \rtimes S^1$  par le produit de Kasparov  $\beta_{S^1} := \bigotimes J_{S^1}(\tau_\Omega[\partial_1])$ .

Grâce au même raisonnement que celui utilisé au début du lemme **2.3**, nous déduisons immédiatement :

**Lemme 2.8**  $H^k(\Omega) = 0$  pour tout  $k \geq 4$ .

Donc  $K_0(C(\Omega)) \simeq \check{H}^0(\Omega; \mathbb{Z}) \oplus \check{H}^2(\Omega; \mathbb{Z})$  et  $K_1(C(\Omega)) \simeq \check{H}^1(\Omega; \mathbb{Z}) \oplus \check{H}^3(\Omega; \mathbb{Z})$ .

Nous allons alors voir que la partie  $\check{H}^3(\Omega; \mathbb{Z})$  de  $K_1(C(\Omega))$  est isomorphe à la partie  $\check{H}_c^2((\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z})$  de  $K_0(C(\Omega) \rtimes S^1)$  puis nous montrerons que cet isomorphisme se lit en  $K$ -théorie comme l'application que l'on vient de construire.

Remarquons tout d'abord que l'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 K_1(C_0(\Omega \setminus F)) & \xrightarrow{i_*} & K_1(C(\Omega)) \\
 \swarrow \Psi & & \downarrow \beta_{S^1} \circ \delta_{S^1} \\
 & & K_0(C(\Omega) \rtimes S^1) \\
 & & \downarrow \beta'_{S^1} \circ \delta'_{S^1} \\
 K_0(C_0((\Omega \setminus F)/S^1)) & \xleftarrow{\text{Morita eq.}} & K_0(C_0(\Omega \setminus F) \rtimes S^1) \xrightarrow{i_*} K_0(C(\Omega) \rtimes S^1)
 \end{array}$$

où  $\psi$  est par définition la composée de  $\beta'_{S^1} \circ \delta'_{S^1}$  et de l'isomorphisme induit par la Morita équivalence de  $C_0(\Omega \setminus F) \rtimes S^1$  avec  $C_0((\Omega \setminus F)/S^1)$ .

En écrivant la suite exacte pour la cohomologie de  $\Omega$  relative à  $F$ , nous voyons que  $i_* : \check{H}^3(\Omega; \mathbb{Z}) \rightarrow \check{H}_c^3(\Omega \setminus F; \mathbb{Z})$  puisque  $\check{H}^2(F; \mathbb{Z}) = \check{H}^3(F; \mathbb{Z}) = 0$ .

Il suffit donc de montrer que la partie  $\check{H}_c^3(\Omega \setminus F; \mathbb{Z})$  de  $K_1(C_0(\Omega \setminus F))$  s'envoie isomorphiquement sur  $\check{H}_c^2((\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z})$  puis de comparer cet isomorphisme à  $\beta'_{S^1} \circ \delta'_{S^1}$ .

Pour cela, on a la proposition suivante :

**Proposition 2.9** ([Bre72]) *La projection  $\Omega \setminus F \longrightarrow (\Omega \setminus F)/S^1$  est un  $S^1$ -fibré principal.*

Grâce à cette proposition, à la suite spectrale de Leray-Serre et à la suite de Gysin qui en découle, nous avons alors :

**Corollaire 2.10**

$$\begin{aligned}
 \check{H}_c^3(\Omega \setminus F; \mathbb{Z}) &= \check{H}_c^2((\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z}) \otimes \check{H}^1(S^1; \mathbb{Z}) \\
 &\simeq \check{H}_c^2((\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

L'isomorphisme de ce corollaire est donné par "l'intégration le long des fibres". Il reste donc à voir que cet isomorphisme est bien la même application, via le caractère de Chern, que  $\Psi$ .

On veut donc montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \check{H}_c^3(\Omega \setminus F; \mathbb{Z}) & \hookrightarrow & \check{H}_c^2((\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z}) \\ \uparrow \text{ch}_3^{\mathbb{Z}} & & \uparrow \text{ch}^{\mathbb{Z}} \\ K_1(C_0(\Omega \setminus F)) & \xrightarrow{\psi} & K_0(C_0((\Omega \setminus F)/S^1)) \end{array}$$

Mais  $\check{H}_c^3(\Omega \setminus F; \mathbb{Z})$  resp.  $\check{H}_c^2((\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z})$  est engendré par  $\check{H}_c^3(C \times D^2 \times S^1; \mathbb{Z})$  resp.  $\check{H}_c^2(C \times D^2; \mathbb{Z})$  i.e par  $\check{H}_c^3(D^2 \times S^1; \mathbb{Z})$  resp.  $\check{H}_c^2(D^2; \mathbb{Z})$  ( où  $C$  est un Cantor et  $D^2$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ) puisque  $\Omega \setminus F$  resp.  $(\Omega \setminus F)/S^1$  est recouvert par l'adhérence d'ouverts disjoints de la forme  $C \times D^2 \times S^1$  resp.  $C \times D^2$  dont les intersections sont de dimensions 2 resp. 1 .

On a alors le diagramme suivant (les cohomologies étant à valeurs entières) :

$$\begin{array}{ccc} \check{H}_c^3(\Omega \setminus F) & \xrightarrow{\cong} & \check{H}_c^2((\Omega \setminus F)/S^1) \\ \uparrow & \swarrow & \uparrow \cong \\ \check{H}_c^3(D^2 \times S^1) & \xrightarrow{\cong} & \check{H}_c^2(D^2) \\ \uparrow & \searrow & \downarrow \\ K_1(C_0(D^2 \times S^1)) & \xrightarrow{\psi'} & K_0(C_0(D^2)) \\ \uparrow & \swarrow & \downarrow \\ K_1(C_0(\Omega \setminus F)) & \xrightarrow{\psi} & K_0(C_0((\Omega \setminus F)/S^1)) \end{array}$$

où  $\psi' : K_1(C_0(D^2 \times S^1)) \rightarrow K_0(C_0(D^2 \times S^1) \rtimes S^1) \rightarrow K_0(C_0(D^2))$  est la composée de  $\beta''_{S^1} \circ \delta''_{S^1}$  (obtenue comme ci-dessus avec  $D^2 \times S^1$  à la place de  $\Omega$ ) et de l'isomorphisme induit par Morita équivalence.

Il suffit alors de montrer que le diagramme du milieu est commutatif pour montrer que l'intégration le long des fibres au niveau des groupes de cohomologie se traduit en  $\Psi$  au niveau des  $K$ -groupes.

L'intégration le long des fibres envoie générateur de  $\check{H}_c^3(D^2 \times S^1; \mathbb{Z})$  sur générateur de  $\check{H}_c^2(D^2; \mathbb{Z})$ .



Il s'agit donc de démontrer que l'application  $\psi'$  envoie le générateur de Bott de  $K_1(C_0(D^2 \times S^1))$  sur celui de  $K_0(C_0(D^2))$ .

On peut encore réduire le problème en considérant le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} K_1(C(S^1)) & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{C}} \betaott} & K_1(C_0(D^2 \times S^1)) \\ \beta'' \circ \delta'' = \otimes_{C(S^1)} y'_1 \downarrow & & \downarrow \beta' \circ \delta' = \otimes_{C_0(D^2 \times S^1)} y'_2 \\ K_0(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{C}} \text{Bott}} & K_0(C_0(D^2)) \end{array} \quad (2.1)$$

l'application  $\otimes_{\mathbb{C}} \betaott$  ( $\betaott \in KK_0(\mathbb{C}, C_0(D^2))$ ) étant l'application de périodicité de Bott en  $KK$ -théorie ([Ska91] p.214 ou l'Annexe D).

On notera  $\alpha \in KK_0(C_0(D^2), \mathbb{C})$  son inverse.

Notons  $\varepsilon$  la classe dans  $KK_0(C(S^1), C(S^1 \times S^1) \rtimes S^1)$  du bimodule d'équivalence de  $C(S^1)$  et  $C(S^1 \times S^1) \rtimes S^1$ . On a alors

$$y'_1 = \varepsilon \otimes_{C(S^1 \times S^1) \rtimes S^1} J_{S^1}(\tau_{C(S^1)}[\partial_1])$$

et

$$y'_2 = \tau_{C_0(D^2)}(\varepsilon) \otimes_{C_0(D^2) \otimes C(S^1 \times S^1) \rtimes S^1} J_{S^1}(\tau_{C_0(D^2) \otimes C(S^1)}[\partial_1]).$$

Comme  $S^1$  n'agit pas sur  $D^2$  (l'action de  $S^1$  sur  $\Omega \setminus F$  se lit sur la composante  $S^1$  de  $C \times D^2 \times S^1$ ), on a

$$J_{S^1}(\tau_{C_0(D^2 \times S^1)}[\partial_1]) = \tau_{C_0(D^2)}\left(J_{S^1}(\tau_{C(S^1)}[\partial_1])\right).$$

D'où (voir [Ska91] ou l'Annexe D) :

$$y'_2 = \tau_{C_0(D^2)}\left(\varepsilon \otimes_{C(S^1 \times S^1) \rtimes S^1} J_{S^1}(\tau_{C(S^1)}[\partial_1])\right) = \tau_{C_0(D^2)}(y'_1)$$

Le diagramme ci-dessus est alors commutatif puisque, si  $X \in K_1(C_0(D^2 \times S^1))$ , on a (par commutativité du produit de Kasparov au dessus de  $\mathbb{C}$ ) :

$$\begin{aligned} ((X \otimes_{C_0(D^2)} \alpha) \otimes_{C(S^1)} y'_1) \otimes_{\mathbb{C}} \betaott &= \betaott \otimes_{\mathbb{C}} ((X \otimes_{C_0(D^2)} \alpha) \otimes_{C(S^1)} y'_1) \\ &= ((\betaott \otimes_{\mathbb{C}} X) \otimes_{C_0(D^2)} \alpha) \otimes_{C(S^1)} y'_1 \\ &= ((X \otimes_{\mathbb{C}} \betaott) \otimes_{C_0(D^2)} \alpha) \otimes_{C(S^1)} y'_1 \\ &= (X \otimes_{\mathbb{C}} (\betaott \otimes_{C_0(D^2)} \alpha)) \otimes_{C(S^1)} y'_1 \\ &= (X \otimes_{\mathbb{C}} 1_{\mathbb{C}}) \otimes_{C(S^1)} y'_1 \\ &= X \otimes_{C(S^1)} y'_1 \\ &= X \otimes_{C_0(D^2 \times S^1)} y'_2 \end{aligned}$$

Il s'agit donc de montrer que le générateur  $[u]$  de  $K_1(C(S^1))$  s'envoie sur le générateur  $[1]$  de  $K_0(\mathbb{C})$ .

Mais l'application  $\beta'' \circ \delta'' : K_1(C(S^1)) \longrightarrow K_0(\mathbb{C})$ , du diagramme **(2.1)**, est en fait simplement  $\otimes_{C(S^1)}[\partial_1]$  i.e le produit de Kasparov par la classe du Dirac sur le cercle  $[\partial_1] \in KK_1(C(S^1), \mathbb{C})$  ou encore, l'indice impair du Dirac tordu par un unitaire de  $K_1(C(S^1))$ .

Cette application envoie donc bien  $[u]$  sur  $[1]$ .

On vient de démontrer :

### Théorème 2.11

*L'application  $K_1(C(\Omega)) \longrightarrow K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$  est surjective sur les parties  $\check{H}^3(\Omega; \mathbb{Z})$  et  $\check{H}^2((\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z})$ .*

## 2.4 Théorème de l'indice pour le calcul de la trace

Nous voulons à présent identifier l'application  $\beta \circ \delta \circ \beta_{S^1} \circ \delta_{S^1}$  construite de  $K_1(C(\Omega))$  dans  $K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$  avec le produit par la classe du triplet de Kasparov non borné (voir [BJ83] pour la définition)

$$\tilde{D}_3 := (C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1 \oplus C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1, M_{C(\Omega)}, D_3)$$

où  $D_3$  désigne l'opérateur de Dirac le long des feuilles de  $\Omega$  et  $M_{C(\Omega)}$  la représentation naturelle de  $C(\Omega)$  sur  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1 \oplus C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1$ .

En utilisant alors le théorème de l'indice mesuré sur les feuilletages d'Alain Connes [Con79] étendu à des espaces feuilletés dans [MS06], on aura (voir plus précisément [DHK91]) :

### Théorème 2.12

$\forall b \in \text{Im}(\beta \circ \delta \circ \beta_{S^1} \circ \delta_{S^1}), \tau_*^\mu(b) = \langle Ch_\tau([u]), [C_{\mu^t}] \rangle$  où  $C_{\mu^t}$  est le courant de Ruelle-Sullivan associé à  $\mu^t$ ,  $Ch_\tau$  est le caractère de Chern longitudinal (voir [MS06]) et  $[u] \in K_1(C(\Omega))$  est un antécédent de  $b$  par  $\beta \circ \delta \circ \beta_{S^1} \circ \delta_{S^1}$ .

$C_{\mu^t}$  définit une classe dans l'homologie longitudinale  $H_3^\tau(\Omega)$  et  $Ch_\tau([u])$  est un élément de la cohomologie longitudinale  $H_\tau^3(\Omega)$  (voir [MS06]).

Les représentants des classes de  $H_\tau^3(\Omega)$  s'écrivent localement

$$\sigma = a(x_1, x_2, \theta, \omega) dx_1 \wedge dx_2 \wedge d\theta.$$

Le courant de Ruelle-Sullivan se lit alors localement comme l'intégrale :

$$[C_{\mu^t}]([\sigma]) = \int_{\Xi} \int_{\mathbb{R}^2 \times S^1} a(x_1, x_2, \theta, \omega) dx_1 dx_2 d\theta d\mu^t(\omega).$$

Pour obtenir le théorème 2.12, nous allons procéder en plusieurs étapes.

Premièrement, nous allons identifier  $\beta_{S^1} \circ \delta_{S^1}$  avec le produit de Kasparov par la classe de l'élément de  $KK_1(C(\Omega), C(\Omega) \rtimes S^1)$  induit par l'opérateur de Dirac  $d_1$  de dimension 1 le long des feuilles de  $\Omega$  feuilleté par  $S^1$ .

Ensuite, nous identifierons  $\beta \circ \delta$  avec le produit de Kasparov par la classe de l'élément de  $KK_0(C(\Omega) \rtimes S^1, C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$  induit par l'opérateur de Dirac  $D_2$  de dimension 2 transverse à l'inclusion du feuilletage par  $S^1$  dans le feuilletage par  $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$  de  $\Omega$  (voir [HS87]).

Enfin, nous montrerons que la composée de ces deux morphismes est donnée par  $\otimes_{C(\Omega)} [\tilde{D}_3]$ .

Pour cela, nous utiliserons la caractérisation du produit de triplets non bornés faite par Kucerovsky dans [Kuc97] (voir aussi [BJ83] pour les définitions).

**Définition 2.13** Soient  $A$  et  $B$  deux  $C^*$ -algèbres graduées (voir Annexe C). On appelle **module de Kasparov non borné** tout triplet  $(\mathcal{H}, \phi, D)$  où  $\mathcal{H}$  est un  $B$ -module hilbertien gradué,  $\phi : A \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est un  $*$ -morphisme, et  $D$  est un opérateur non borné régulier densément défini de degré un et auto-adjoint, tel que :

1.  $\phi(a)(1 + D^2)^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ ,
2. l'ensemble des  $a \in A$ , tels que  $[D, \phi(a)] = D\phi(a) - (-1)^{\partial a} \phi(a)D$  soit défini sur  $\mathfrak{Dom} D$  et se prolonge en un élément de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , est dense dans  $A$ .

On notera  $\Psi(A, B)$  l'ensemble des modules de Kasparov non bornés.

Dans le cas où  $\mathcal{H}$  n'est pas gradué, on parlera de **modules de Kasparov non bornés non gradués** et on notera l'ensemble de tels modules  $\psi^1(A, B)$ .

On a alors le résultat suivant (voir [BJ83] et [Kuc97]) :

**Proposition 2.14** Si  $(\mathcal{H}, \phi, D) \in \Psi(A, B)$  alors  $(\mathcal{H}, \phi, D(1 + D^2)^{-1/2})$  définit un triplet de Kasparov dans  $KK_0(A, B)$ .

De même, si  $(\mathcal{H}, \phi, D) \in \Psi^1(A, B)$  alors  $(\mathcal{H}, \phi, D(1 + D^2)^{-1/2})$  définit un triplet de Kasparov dans  $KK_1(A, B)$ .

On obtient une application  $\beta^{BJ} : \Psi(A, B) \rightarrow KK_0(A, B)$  (resp.  $\Psi^1(A, B) \rightarrow KK_1(A, B)$ ) en posant  $\beta^{BJ}(\mathcal{H}, \phi, D) = [(\mathcal{H}, \phi, D(1 + D^2)^{-1/2})]$ .

Kucerovsky a alors pu démontrer un critère utile pour calculer le produit de Kasparov de deux modules non bornés :

**Théorème 2.15** *Soit  $(E_1 \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2, \phi_1 \hat{\otimes} 1, D) \in \Psi(A, C)$ ,  $(E_1, \phi_1, D_1) \in \Psi(A, B)$  et  $(E_2, \phi_2, D_2) \in \Psi(B, C)$  tels que :*

(i) *pour tout  $x$  dans un sous-ensemble dense de  $\phi_1(A)E_1$ , l'opérateur*

$$\left[ \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & T_x \\ T_x^* & 0 \end{pmatrix} \right]$$

*est borné sur  $\mathfrak{Dom}(D \oplus D_2)$  (où  $\mathfrak{Dom} F$  est le domaine de l'opérateur non borné  $F$ );*

(ii)  *$\mathfrak{Dom} D \subset \mathfrak{Dom}(D_1 \hat{\otimes} 1)$  (ou vice versa);*

(iii) *et  $\langle (D_1 \hat{\otimes} 1)x, Dx \rangle + \langle Dx, (D_1 \hat{\otimes} 1)x \rangle \geq \kappa \langle x, x \rangle$  pour tout  $x$  dans le domaine;*

*où  $x \in E_1$  est homogène et  $T_x : E_2 \rightarrow E$  envoie  $e \mapsto x \hat{\otimes} e$ .*

*Alors  $(E_1 \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2, \phi_1 \hat{\otimes} 1, D)$  représente le produit de Kasparov des triplets  $(E_1, \phi_1, D_1)$  et  $(E_2, \phi_2, D_2)$ .*

Ce théorème s'applique pour des modules de Kasparov non bornés de  $\Psi(A, B)$ .

Dans la suite, nous aurons des modules non bornés non gradués de  $\Psi^1(A, B)$  et pour pouvoir appliquer le théorème précédent, il est nécessaire d'utiliser l'isomorphisme  $KK_1(A, B) \simeq KK_0(A, B \otimes \mathbb{C}_1)$  (où  $\mathbb{C}_1$  est l'algèbre de Clifford complexe de dimension 2 engendrée par un élément  $\alpha$  de degré 1 vérifiant  $\alpha^* = \alpha$  et  $\alpha^2 = 1$ ) qui est donné par :

$$\begin{aligned} KK_1(A, B) &\longrightarrow KK_0(A, B \otimes \mathbb{C}_1) \\ [(\mathcal{H}, \phi, F)] &\longmapsto [(\mathcal{H} \hat{\otimes} \mathbb{C}_1, \phi \hat{\otimes} Id, F \hat{\otimes} \alpha)] \end{aligned}$$

On a également : si  $(\mathcal{H}, \phi, D) \in \Psi^1(A, B)$  alors  $(\mathcal{H} \hat{\otimes} \mathbb{C}_1, \phi \hat{\otimes} Id, D \hat{\otimes} \alpha) \in \Psi(A, B \otimes \mathbb{C}_1)$ .

Pour calculer le produit de Kasparov d'un élément de  $KK_1$  par un élément de  $KK_0$  ou inversement, on utilisera les deux lemmes de l'Annexe E.

### 2.4.1 Rappels sur les groupoïdes et les opérateurs longitudinaux

Dans cette section, nous allons rappeler certaines définitions sur les groupoïdes et les opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux dont nous aurons besoin pour la suite de ce paragraphe.

Le lecteur voulant avoir plus d'informations peut se reporter à [Ren80] pour un développement sur les groupoïdes et à [Con79] ou [Vas01] ou [MS06] pour un développement sur les opérateurs longitudinaux (nous avons choisi la convention apparaissant dans la thèse de Stéphane Vassout [Vas01] en prenant des opérateurs invariants par holonomie à droite).

**Définition 2.16** *Un groupoïde  $\mathcal{G}$  d'espace des unités  $\mathcal{G}^{(0)} = X$  est formé par les deux ensembles  $\mathcal{G}$  et  $X$  munis de plusieurs applications :*

1.  $\Delta : X \rightarrow \mathcal{G}$  (l'application unité);
2. une involution  $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ , appelée inversion et notée  $i(u) = u^{-1}$ ;
3. les applications source et but  $s : \mathcal{G} \rightarrow X$  et  $r : \mathcal{G} \rightarrow X$ ;
4. une multiplication associative  $m$  définie sur l'ensemble  $\mathcal{G}^{(2)}$  des paires  $(u, v)$  de  $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$  telles que  $r(v) = s(u)$ , on notera  $m(u, v) = u.v$  ou simplement  $uv$ .

Ces applications doivent vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} r(\Delta(x)) &= x = s(\Delta(x)), \\ u.\Delta(s(u)) &= u = \Delta(r(u)).u, \\ r(u^{-1}) &= s(u), \quad m(u, u^{-1}) = \Delta(r(u)). \end{aligned}$$

Cette notion généralise celle de groupe et aussi celle d'espace.

En effet, si  $X$  est réduit à un point,  $\mathcal{G}$  est un groupe.

Si  $X$  est un espace et  $\mathcal{G} = X$  avec  $\Delta = r = s = id_X$  alors le groupoïde  $\mathcal{G}$  est l'espace  $X$ .

Un exemple qui sort de ces deux cadres est le groupoïde de transformation obtenu lorsqu'un groupe  $H$  agit sur un espace  $X$  à droite. Si  $x \in X$  et  $h \in H$ , on notera  $x.h$  l'image de  $x$  sous l'action de  $h$ .

Dans ce cas, on pose  $\mathcal{G} = X \times H$ ,  $\Delta(x) = (x, e)$  où  $e$  est le neutre de  $H$ ,  $r(x, h) = x$ ,  $s(x, h) = x.h$  et  $i(x, h) = (x.h, h^{-1})$ .

Deux éléments,  $(x, h)$  et  $(y, g)$  se composent si, et seulement si  $y = x.h$  et alors  $(x, h).(y, g) = (x, hg)$ .

Ceci définit une structure de groupoïde sur  $\mathcal{G}$  que l'on note  $X \rtimes H$ .

Dans le cas d'un pavage de type pinwheel, le groupoïde associé est  $\Omega \rtimes (\mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$ .

**Définition 2.17** Pour  $x, y \in \mathcal{G}^{(0)}$ , on pose

$$\mathcal{G}^x = r^{-1}(x), \quad \mathcal{G}_y = s^{-1}(y) \text{ et } \mathcal{G}_y^x = \mathcal{G}^x \cap \mathcal{G}_y.$$

$\mathcal{G}_x^x$  est un groupe appelé groupe d'isotropie de  $x$ .

Pour  $Y \subset \mathcal{G}^{(0)}$ , on pose

$$\mathcal{G}^Y = \{u \in \mathcal{G} \mid r(u) \in Y\} = \bigcup_{y \in Y} \mathcal{G}^y, \quad \mathcal{G}_Y = \{u \in \mathcal{G} \mid s(u) \in Y\} = \bigcup_{y \in Y} \mathcal{G}_y$$

et enfin

$$\mathcal{G}_Y^Y = \mathcal{G}^Y \cap \mathcal{G}_Y.$$

**Définition 2.18** Un groupoïde  $\mathcal{G}$  d'espace des unités  $X$  est un **groupoïde topologique** si  $\mathcal{G}$  et  $X$  sont des espaces topologiques et si les conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $\mathcal{G}^{(2)}$  est fermé dans  $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$  et la multiplication est continue ;
2. les applications source et but sont continues ;
3. l'application inversion est un homéomorphisme.

Si  $\mathcal{G}$  et  $X$  sont localement compacts, on dira que  $\mathcal{G}$  est un groupoïde localement compact.

Le groupoïde de transformation qui nous intéresse  $\mathcal{G} = \Omega \rtimes (\mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$  est localement compact.

De plus, nous pouvons identifier, pour  $\omega \in \Omega$ , l'espace  $\mathcal{G}_\omega$  avec le groupe  $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$  de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_\omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \rtimes S^1 \\ \gamma = (\omega.(x, \theta), (x, \theta)^{-1}) & \longmapsto & (x, \theta) \end{array} .$$

Nous allons maintenant définir la notion d'opérateur pseudo-différentiel longitudinal dans le cas d'un espace feuilleté admettant  $X \rtimes H$  comme groupoïde d'holonomie (voir par exemple [MS06] pour cette notion).

On notera  $C_c^{0,\infty}(X \times H)$  l'ensemble des fonctions continues  $f$  à support compact dans  $X \times H$  telles que pour tout  $x \in X$ , la fonction  $\phi : H \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $\phi(h) := f(x.h, h^{-1})$  soit de classe  $C^\infty$ .

**Définition 2.19** Soit  $H$  un groupe de Lie agissant sur  $X$  un espace topologique.  $X$  peut alors être vu comme un espace feuilleté par l'action de  $H$  de groupoïde d'holonomie  $\mathcal{G} = X \rtimes H$ .

Un  $\mathcal{G}$ -opérateur ou opérateur longitudinal sur  $X$  est un opérateur

$$P : C_c^{0,\infty}(X \rtimes H) \longrightarrow C_c^{0,\infty}(X \rtimes H),$$

tel qu'il existe une famille d'applications linéaires  $(P_x)_{x \in X}$ , de  $C_c^\infty(\mathcal{G}_x)$  dans lui-même, vérifiant :

$$\forall f \in C_c^{0,\infty}(X \rtimes H), \forall (x, h), (x_1, h_1) \in X \rtimes H,$$

$$\begin{aligned} (Pf)(x, h) &= (P_{x.h}f|_{\mathcal{G}_{x.h}})(x, h) \\ \left( P_{x_1}f(\cdot(x_1, h_1)) \right)(x_1.g, g^{-1}h_1) &= (P_{x_1.h_1}f)(x_1.g, g^{-1}h_1) \\ &\quad (\text{Invariance par holonomie à droite}) \end{aligned}$$

En terme de groupoïde, les deux conditions ci-dessus se lisent :

si  $f \in C_c^{0,\infty}(X \rtimes H)$  et  $\gamma, \gamma_1 \in \mathcal{G}$  :

$$\begin{aligned} (Pf)(\gamma) &= (P_{s(\gamma)}f|_{\mathcal{G}_{s(\gamma)}})(\gamma) \\ \left( P_{r(\gamma_1)}f(\cdot(\gamma_1)) \right)(\gamma) &= (P_{s(\gamma_1)}f)(\gamma\gamma_1) \text{ si } (\gamma, \gamma_1) \in \mathcal{G}^{(2)}. \end{aligned}$$

### Définition 2.20

1. On dit que  $P$  est un opérateur à support compact si le support de  $P$  est contenu dans un compact  $K$  de  $X \rtimes H$ , i.e si pour tout  $f \in C_c^{0,\infty}(X \rtimes H)$ , on a  $\text{Supp}(Pf) \subset K.\text{Supp}(f)$ .
2. On dit que  $P$  est un  $\mathcal{G}$ -opérateur pseudo-différentiel à support compact d'ordre  $m$  si  $P$  est un opérateur à support compact et si la famille  $(P_\omega)_{\omega \in \Omega}$  est une famille d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre  $m$ .

### Exemples :

1. Si on considère le groupoïde  $\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}^d$  ( $d \leq n$ ) correspondant au feuilletage de  $\mathbb{R}^n$  par l'action de  $\mathbb{R}^d$  et si  $\partial_d$  est l'opérateur de Dirac sur  $\mathbb{R}^d$ , alors la famille  $(P_x)_{x \in \mathbb{R}^n}$ , définie par  $P_x = \partial_d$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , est un opérateur pseudo-différentiel à support compact d'ordre 1.
2. Dans notre cas, si on considère  $\Omega$  feuilleté par l'action des rotations  $S^1$ , on obtient le groupoïde  $\Omega \rtimes S^1$ . Si l'on considère la famille  $(P_\omega)_{\omega \in \Omega}$  définie par  $P_\omega = \partial_1$  (l'opérateur de Dirac sur  $S^1$ ) pour tout  $\omega$ , on obtient l'opérateur de Dirac  $d_1$  le long des feuilles de  $\Omega$  feuilleté par  $S^1$  que l'on utilisera dans la prochaine section.

3. Si on considère maintenant  $\Omega$  feuilleté par  $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$ , on peut définir deux opérateurs supplémentaires.

Chaque feuille de cet espace feuilleté est un groupe de Lie admettant la même algèbre de Lie (celle de  $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$ ).

On considère le cas où  $G_\omega$  agit non trivialement sur  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$  dans  $L^2(G_\omega, \mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$  (par rotation sur la deuxième copie de  $\mathbb{C}$  et identité sur la première),  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = \mathcal{H}$  étant l'espace des spineurs de  $\mathbb{R}^3$ .

La graduation de  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$  est donnée par  $(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})^0 = \mathbb{C}$  la première copie de  $\mathbb{C}$  et  $(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})^1 = \mathbb{C}$  la deuxième copie de  $\mathbb{C}$ . L'opérateur de Dirac invariant à gauche sur  $G_\omega$  est :

$$d_3 = id_1'' + j \frac{\partial}{\partial x_1} + k \frac{\partial}{\partial x_2}$$

et, en laissant agir l'algèbre des quaternions  $\mathcal{H}$  par multiplication à gauche sur  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ , on obtient la forme matricielle suivante :

$$d_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{\partial}{\partial x_1} & -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & & d_1'' \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_1} & & \end{pmatrix}$$

où, si  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \rtimes S^1, \mathbb{C})$  et si  $R_\theta$  désigne la rotation d'angle  $\theta$  sur  $\mathbb{C}$ ,

$$d_1''(f)(x_1, x_2, \theta) = iR_\theta \frac{\partial g}{\partial \theta}(x_1, x_2, \theta)$$

où  $g(x_1, x_2, \theta) = R_{-\theta}(f(x_1, x_2, \theta))$ .

Sous forme matricielle, on a :

$$d_1'' = \begin{pmatrix} Id & -\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} & Id \end{pmatrix}$$

d'où

$$d_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{\partial}{\partial x_1} & -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & Id & -\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial \theta} & Id \end{pmatrix}.$$

Posons, pour tout  $\theta \in S^1$ ,  $U_\theta : \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$  l'action de l'identité sur la première copie de  $\mathbb{C}$  et de la rotation d'angle  $-\theta$  sur la deuxième copie.

On peut ainsi écrire

$$d_3 = \partial_1' + \partial_2 \otimes 1$$

où  $\partial_2 \otimes 1$  désigne le Dirac sur  $\mathbb{R}^2$  tensorisé par l'identité et si on considère  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \rtimes S^1, \mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$ ,

$$\partial_1'(f)(x_1, x_2, \theta) = iU_\theta^* \frac{\partial g}{\partial \theta}(x_1, x_2, \theta)$$



où  $g(x_1, x_2, \theta) = U_\theta(f(x_1, x_2, \theta))$ .

Cet opérateur est celui que l'on utilisera pour les calculs dans la suite. Il diffère du Dirac classique par un opérateur borné et ces deux opérateurs ont donc le même symbole principal, ce qui est l'essentiel pour faire les calculs dans la formule d'indice.

Si on considère maintenant la famille d'opérateurs  $(d_3)_{\omega \in \Omega}$  et qu'on l'étend en un opérateur non borné sur  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1 \oplus C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1$  de domaine  $C_c^\infty(\Omega \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1, \mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$  (voir [MS06]), on obtient l'opérateur de Dirac  $D_3$  le long des feuilles de  $\Omega$  feuilleté par  $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$ .

On voit également apparaître l'opérateur de Dirac  $D_2$  transverse à l'inclusion du feuilletage par  $S^1$  dans le feuilletage par  $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$  de  $\Omega$  qui est donné sur les feuilles par l'opérateur  $\partial_2 \otimes 1$ .

Ces opérateurs étant définis, on peut maintenant montrer le résultat souhaité à travers le calcul de trois produits de Kasparov.

## 2.4.2 Premier produit de Kasparov

Nous commençons par montrer que le morphisme

$$K_1(C(\Omega)) \rightarrow K_0(C(\Omega) \rtimes S^1)$$

est le produit de Kasparov par la classe du Dirac de dimension 1 le long des feuilles de  $\Omega$  feuilleté par  $S^1$ .

Rappelons la décomposition de cette application :

$$\begin{array}{c} K_1(C(\Omega)) \\ \downarrow \otimes_{[(L^2(S^1)^{op} \otimes C(\Omega), M_{C(\Omega)}, 0)]} \\ K_1(C(\Omega) \otimes C(S^1) \rtimes S^1) \\ \downarrow \otimes[\Psi] \\ K_1(C(\Omega \times S^1) \rtimes S^1) \\ \downarrow \otimes_{J_{S^1}(\tau_\Omega[\partial_1])} \\ K_0(C(\Omega) \rtimes S^1) \end{array}$$

où  $\Psi : C(\Omega) \otimes C(S^1) \rtimes S^1 \rightarrow C(\Omega \times S^1) \rtimes S^1$  est l'application de l'Annexe A.1,  $M_{C(\Omega)}$  est la multiplication par un élément de  $C(\Omega)$  et  $L^2(S^1)^{op}$  est l'espace  $L^2(S^1)$

muni de la multiplication complexe :  $\lambda.\xi := \bar{\lambda}\xi$  pour  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $\xi \in L^2(S^1)$ .  
On peut alors simplifier cette application :

**Proposition 2.21**

$$[\mathcal{E}] \otimes [\Psi] \otimes J_{S^1}(\tau_\Omega[\partial_1]) = [(C(\Omega) \rtimes S^1, M_{C(\Omega)}, d_1)],$$

où  $\mathcal{E} = (L^2(S^1)^{op} \otimes C(\Omega), M_{C(\Omega)}, 0)$ .

**Démonstration :**

(a) On a, dans  $KK_1(C(\Omega) \otimes C(S^1) \rtimes S^1, C(\Omega) \rtimes S^1)$ ,

$$[\Psi] \otimes J_{S^1}(\tau_\Omega[\partial_1]) = \Psi^*(J_{S^1}(\tau_\Omega[\partial_1]))$$

et donc :

$$[\Psi] \otimes J_{S^1}(\tau_\Omega[\partial_1]) = [(L^2(S^1) \otimes C(\Omega) \rtimes S^1, \pi_\alpha \circ \Psi, \partial_1 \otimes 1)],$$

avec  $J_{S^1}(\tau_\Omega[\partial_1]) = [(L^2(S^1) \otimes C(\Omega) \rtimes S^1, \pi_\alpha, \partial_1 \otimes 1)]$  (voir [Ska91] ou l'Annexe **D**) où, pour  $\zeta \in C(S^1, C(\Omega))$ ,  $a \in C(S^1, C(S^1))$ ,  $\xi \in L^2(S^1)$  et  $f \in C(S^1 \times \Omega)$ , on a :

$$\pi_\alpha(\zeta \otimes a)(\xi \otimes f)(k, h, \omega) := \int_{S^1} a(g)(k)\xi(g^{-1}k)\zeta(g)(\omega)f(g^{-1}h, \omega.g)dg.$$

Considérons l'application

$$U : L^2(S^1) \otimes C(S^1 \times \Omega) \rightarrow L^2(S^1) \otimes C(S^1 \times \Omega)$$

définie par :  $\forall f \in C(S^1 \times \Omega)$ ,  $\zeta \in L^2(S^1)$

$$U(\zeta \otimes f)(g, h, \omega) := \zeta(g)f(gh, \omega.g^{-1}).$$

Cette application se prolonge en un unitaire de  $L^2(S^1) \otimes C(\Omega) \rtimes S^1$ .

En effet, si  $f, h \in C(S^1 \times \Omega)$  et  $\zeta, \xi \in L^2(S^1)$ , on a

$$\langle U(\zeta \otimes f), U(\xi \otimes h) \rangle_{L^2(S^1, C(\Omega) \rtimes S^1)}(\theta, \omega) = \int_{S^1} \langle U(\zeta \otimes f)(\gamma), U(\xi \otimes h)(\gamma) \rangle_{C(\Omega) \rtimes S^1}(\theta, \omega) d\gamma$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{S^1} (U(\zeta \odot f)(\gamma)^* * U(\xi \odot h)(\gamma))(\theta, \omega) d\gamma \\
&= \int_{S^1} \int_{S^1} \overline{U(\zeta \odot f)(\gamma)(\alpha^{-1}, \omega, \alpha)} U(\xi \odot h)(\gamma)(\alpha^{-1}\theta, \omega, \alpha) d\alpha d\gamma \\
&= \int_{S^1} \int_{S^1} \overline{\zeta(\gamma) f(\gamma\alpha^{-1}, \omega, \alpha\gamma^{-1})} \xi(\gamma) h(\gamma\alpha^{-1}\theta, \omega, \alpha\gamma^{-1}) d\alpha d\gamma \\
&= \int_{S^1} \int_{S^1} \overline{\zeta(\gamma) f(\alpha^{-1}, \omega, \alpha)} \xi(\gamma) h(\alpha^{-1}\theta, \omega, \alpha) d\alpha d\gamma \\
&= \int_{S^1} \overline{\zeta(\gamma)} \xi(\gamma) d\gamma \int_{S^1} \overline{f(\alpha^{-1}, \omega, \alpha)} h(\alpha^{-1}\theta, \omega, \alpha) d\alpha \\
&= \langle \zeta, \xi \rangle_{L^2(S^1)} \langle f, h \rangle_{C(\Omega) \rtimes S^1}(\theta, \omega) \\
&= \langle \zeta \odot f, \xi \odot h \rangle_{L^2(S^1) \otimes C(\Omega) \rtimes S^1}(\theta, \omega).
\end{aligned}$$

De plus, la représentation de  $C(\Omega) \otimes C(S^1) \rtimes S^1$  sur ce module dans le nouveau triplet définissant  $[\Psi] \otimes J_{S^1}(\tau_\Omega[\partial_1])$  devient, par conjugaison, la représentation naturelle obtenue par action de  $C(\Omega)$  sur  $C(\Omega) \rtimes S^1$  et de  $C(S^1) \rtimes S^1$  par opérateurs compacts sur  $L^2(S^1)$  (grâce à l'isomorphisme de l'Annexe A.2). L'opérateur  $\partial_1 \otimes 1$  devient, quant à lui, l'opérateur  $\partial_1 \otimes 1 + 1 \otimes d_1$ .

En effet, si  $h \in S^1$  et  $\omega \in \Omega$  sont fixés et si  $\Psi(g) := f(g^{-1}h, \omega, g)$ , on a

$$\partial_1 \Psi(g) = d_1 f(g^{-1}h, \omega, g).$$

Donc,  $\partial_1 U^*(\zeta \otimes f) = U^*(\partial_1 \zeta \otimes f) + U^*(\zeta \otimes d_1 f)$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&[\Psi] \otimes J_{S^1}(\tau_\Omega[\partial_1]) \\
&\quad \parallel \\
&[(L^2(S^1) \otimes C(\Omega) \rtimes S^1, \pi_{C(S^1) \rtimes S^1} \otimes M_{C(\Omega)}, \partial_1 \otimes 1 + 1 \otimes d_1)] .
\end{aligned}$$

(b) Comme  $L^2(S^1)^{op} \otimes_{C(S^1) \rtimes S^1} L^2(S^1) \simeq \mathbb{C}$ , il reste à démontrer que

$$(C(\Omega) \rtimes S^1, M_{C(\Omega)}, d_1), \mathcal{E}$$

et

$$(L^2(S^1) \otimes C(\Omega) \rtimes S^1, \pi_{C(S^1) \rtimes S^1} \otimes M_{C(\Omega)}, \partial_1 \otimes 1 + 1 \otimes d_1)$$

vérifient les conditions du lemme **E.1** de l'Annexe E pour obtenir l'égalité de la proposition.

Il s'agit donc de vérifier que :

$$\left[ \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & \partial_1 \otimes 1 + 1 \otimes d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & T_{x \otimes f} \\ T_{x \otimes f}^* & 0 \end{pmatrix} \right]$$

est borné sur  $\mathfrak{Dom}(d_1 \oplus (\partial_1 \otimes 1 + 1 \otimes d_1))$  pour tout  $x \otimes f$  dans un sous-ensemble dense de  $L^2(S^1) \otimes C(\Omega)$  (voir [BJ83] ou [Vas01] pour la définition du domaine du produit tensoriel d'un opérateur non borné par l'identité).

Grâce à l'identification  $L^2(S^1)^{op} \otimes_{C(S^1) \rtimes S^1} L^2(S^1) \simeq \mathbb{C}$ , on a, pour tout élément  $x \otimes f \in \mathfrak{Dom} \partial_1 \otimes C_\tau^\infty(\Omega)$  ( $C_\tau^\infty(\Omega)$  étant l'algèbre des fonctions longitudinalement lisses sur  $\Omega$ , cf [MS06]),

$$\begin{aligned} T_{x \otimes f} : L^2(S^1) \otimes C(\Omega) \rtimes S^1 &\longrightarrow C(\Omega) \rtimes S^1 \\ \zeta \otimes b &\longmapsto \langle x, \zeta \rangle_{L^2} M_{C(\Omega)}(f)b \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_{x \otimes f}^* : C(\Omega) \rtimes S^1 &\longrightarrow L^2(S^1) \otimes C(\Omega) \rtimes S^1 \\ b &\longmapsto (\langle x, \zeta \rangle_{C(S^1) \rtimes S^1} \cdot \zeta) \otimes M_{C(\Omega)}(\bar{f})b \\ &\quad \parallel \\ &\quad \bar{x} \otimes M_{C(\Omega)}(\bar{f})b \end{aligned}$$

où  $\zeta \in L^2(S^1)$  est choisie telle que  $\langle \zeta, \zeta \rangle_{L^2} = 1$  (par exemple la fonction constante égale à 1).

Un rapide calcul montre que

$$\begin{aligned} &\left[ \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & \partial_1 \otimes 1 + 1 \otimes d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & T_{x \otimes f} \\ T_{x \otimes f}^* & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} T_{x \otimes \text{Grad}_1(f)} - T_{\partial_1 x \otimes f} & 0 \\ 0 & T_{\partial_1 x \otimes f}^* + T_{x \otimes \text{Grad}_1(f)}^* \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc cet opérateur est borné pour chaque  $x \otimes f$  dans  $\mathfrak{Dom} \partial_1 \otimes C_\tau^\infty(\Omega)$  qui est dense dans  $L^2(S^1) \otimes C(\Omega)$  et ceci achève la démonstration de la proposition.

Le lecteur pourra se reporter à l'Annexe E.2 pour les notations et les calculs. □

### 2.4.3 Second produit de Kasparov

Nous allons maintenant simplifier la deuxième application

$$K_0(C(\Omega) \rtimes S^1) \rightarrow K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$$

en montrant qu'elle est le produit de Kasparov par la classe du Dirac  $D_2$  de dimension 2 transverse à l'inclusion du feuilletage par  $S^1$  dans le feuilletage par  $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$  de  $\Omega$ .

Rappelons la décomposition de cette application :

$$\begin{array}{c}
K_0(C(\Omega) \rtimes S^1) \\
\downarrow \otimes_{J_{S^1}} [(L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C} \oplus \mathbb{C})^{op} \otimes C(\Omega), M_{C(\Omega)}, 0)] \\
K_0\left((C(\Omega) \otimes C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2) \rtimes S^1\right) \\
\downarrow \otimes_{J_{S^1}} [\Psi^{\mathbb{R}^2}] \\
K_0\left((C_0(\Omega \times \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2) \rtimes S^1\right) \\
\downarrow \otimes_{J_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1}} (\tau_\Omega[\partial_2]) \\
K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)
\end{array}$$

où  $\Psi^{\mathbb{R}^2} : C(\Omega) \otimes C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2 \rightarrow C_0(\Omega \times \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2$  est l'application de l'Annexe A.1.

Nous noterons dans la suite  $\mathcal{E}(\Omega, G; \mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$  (où  $G$  sera égal à  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$ ) le  $C^*$ -module hilbertien sur  $C(\Omega) \rtimes G$ , complété de  $C_c(\Omega \times G; \mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$  par rapport au produit scalaire à valeurs dans  $C_c(\Omega \times G)$

$$\langle f, f' \rangle(\omega, g) := \int_G \langle f(\omega \cdot h, h^{-1}), f'(\omega \cdot h, h^{-1}g) \rangle_{\mathbb{H}} dg$$

où  $\langle, \rangle_{\mathbb{H}}$  désigne le produit scalaire dans les quaternions.

Ce module hilbertien admet une action de  $S^1$  par rotation sur la deuxième composante de  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ .

De manière similaire au premier point, on peut alors montrer, en faisant attention à l'équivariance par rapport à  $S^1$ , que :

**Proposition 2.22**

$$J_{S^1}[\mathcal{E}_2] \otimes J_{S^1}[\Psi^{\mathbb{R}^2}] \otimes J_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1}(\tau_\Omega[\partial_2]) = [\mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R}^2 \rtimes S^1; \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}), \pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}, D_2],$$

où  $\mathcal{E}_2 = (L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C} \oplus \mathbb{C})^{op} \otimes C(\Omega), M_{C(\Omega)}, 0)$  et

$$\pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(f)(g)(\omega, x, \theta) = \int_{S^1} f(\omega, \alpha) \alpha \cdot g((\omega, 0, \alpha)^{-1}(\omega, x, \theta)) d\alpha$$

pour  $f \in C(\Omega \times S^1)$ ,  $g \in C_c(\Omega \times \mathbb{R}^2 \times S^1, \mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$  et où  $\alpha \cdot$  représente l'action de  $S^1$  sur  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$  qui est donnée par la représentation naturelle de  $SO(2)$  sur  $Cl(\mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{H} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$  (i.e  $\alpha \cdot (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$  représente l'action triviale sur la première copie de  $\mathbb{C}$  et la rotation d'angle  $\alpha$  sur la deuxième).

**Démonstration :**

(a) On a

$$J_{S^1}[\mathcal{E}_2] \otimes J_{S^1}[\Psi^{\mathbb{R}^2}] \otimes J_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1}(\tau_\Omega[\partial_2]) = J_{S^1}\left([\mathcal{E}_2] \otimes [\Psi^{\mathbb{R}^2}] \otimes J_{\mathbb{R}^2}^{S^1}(\tau_\Omega[\partial_2])\right)$$

où  $J_{\mathbb{R}^2}^{S^1}$  est le morphisme de descente partielle construit dans [Cha99].

(b) En utilisant la même démonstration que celle de la proposition 2.21, on montre que le morphisme :

$$\begin{array}{c} K_0^{S^1}(C(\Omega)) \\ \downarrow \otimes [\mathcal{E}_2] \\ K_0^{S^1}\left(C(\Omega) \otimes C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2\right) \\ \downarrow \otimes [\Psi^{\mathbb{R}^2}] \\ K_0^{S^1}\left(C_0(\Omega \times \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2\right) \\ \downarrow \otimes J_{\mathbb{R}^2}^{S^1}(\tau_\Omega[\partial_2]) \\ K_0^{S^1}(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2) \end{array}$$

est le produit de Kasparov par  $\left[\left(\mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R}^2; \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}), M_{C(\Omega)}, d_2\right)\right]$  où  $d_2$  est l'opérateur de Dirac le long des feuilles de  $\Omega$  feuilleté par  $\mathbb{R}^2$  qui est  $S^1$ -invariant.(c) A présent, si l'on applique le morphisme de descente  $J_{S^1}$ , on obtient la classe  $[(H', \pi', F')]$  donnée par :–  $H' = \mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R}^2; \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \otimes_{C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2} C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1$  où l'action à gauche de  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2$  sur  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1$  est donnée par :

$$b \cdot \int_{S^1} a_h u_h dh := \int_{S^1} b *_{C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2} a_h u_h dh$$

pour  $b \in C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2$  et  $\int_{S^1} a_h u_h dh \in C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1$ .– Si on identifie  $\mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R}^2; \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \otimes_{C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2} C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1$  avec  $\mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R}^2 \rtimes S^1; \mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$ , l'opérateur  $F'$  est l'opérateur de Dirac transverse à l'inclusion du feuilletage par  $S^1$  dans le feuilletage par  $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$  car  $D_2(b * a_h) = (d_2 b) * a_h$  pour tout  $h \in S^1$  et tout  $b \in C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \oplus C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2$ .–  $\pi'$  est l'action de  $C(\Omega) \rtimes S^1$  sur  $\mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R}^2 \rtimes S^1; \mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$  décrite dans l'énoncé de la proposition (voir [Ska91] ou l'Annexe D).

□

### 2.4.4 Produit de Kasparov par le Dirac le long des feuilles de $\Omega$

Pour finir ce paragraphe, il reste à montrer que le produit de Kasparov de la classe

$$\left[ (C(\Omega) \rtimes S^1, M_{C(\Omega)}, d_1) \right]$$

avec la classe

$$\left[ (C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1 \oplus C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1, \pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}, D_2) \right]$$

au dessus de  $C(\Omega) \rtimes S^1$  donne la classe du triplet non borné

$$(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1 \oplus C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1, M_{C(\Omega)}, D_3)$$

où  $D_3$  est l'opérateur de Dirac de dimension 3 le long des feuilles de  $\Omega$  feuilleté par  $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$ .

Pour cela, nous allons vérifier les conditions du lemme **E.2** :

#### Théorème 2.23

$$\begin{aligned} & \left[ (C(\Omega) \rtimes S^1, M_{C(\Omega)}, d_1) \right] \otimes_{C(\Omega) \rtimes S^1} \left[ (\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1}, \pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}, D_2) \right] \\ &= \left[ (\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1}, M_{C(\Omega)}, D_3) \right] \end{aligned}$$

où  $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1} = \mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R}^2 \rtimes S^1; \mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$ .

#### Démonstration :

On va montrer que les trois triplets de Kasparov non bornés

$$\left[ (C(\Omega) \rtimes S^1, M_{C(\Omega)}, d_1 - \frac{1}{2}Id) \right], \left[ (\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1}, \pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}, D_2) \right]$$

et

$$\left[ (\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1}, M_{C(\Omega)}, D_3 - \frac{1}{2}Id) \right]$$

vérifient les conditions du lemme **E.2** avec  $\mathcal{B} = C(S^1, C_r^\infty(\Omega))$ .

Comme

$$\left[ (\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1}, M_{C(\Omega)}, D_3 - \frac{1}{2}Id) \right] = \left[ (\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1}, M_{C(\Omega)}, D_3) \right]$$

et

$$\left[ (C(\Omega) \rtimes S^1, M_{C(\Omega)}, d_1 - \frac{1}{2}Id) \right] = \left[ (C(\Omega) \rtimes S^1, M_{C(\Omega)}, d_1) \right],$$

cela montrera le théorème.

(a) L'opérateur  $D_3$  est donné, sur le champ Hilbertien

$$\left( L^2(\{\omega\} \times \mathbb{R}^2 \times S^1, \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \right)_{\omega \in \Omega}$$

associé au module Hilbertien  $\mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R}^2 \times S^1; \mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$  (voir [Con82] pour cette notion) comme la somme de l'opérateur de Dirac  $\partial'_1$  sur  $L^2(\mathbb{R}^2 \times S^1, \mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$  et de l'opérateur de Dirac  $\partial_2 \otimes 1$  sur  $L^2(\mathbb{R}^2 \times S^1, \mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$ .

Donc  $D_3 = D'_1 + D_2$  où  $D'_1$  (resp.  $D_2$ ) est l'opérateur sur  $\mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R}^2 \times S^1; \mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$  associé à  $\partial'_1$  (resp.  $1 \otimes \partial_2$ ) sur le champ Hilbertien.

En identifiant  $C(\Omega) \rtimes S^1 \otimes_{C(\Omega) \rtimes S^1} \mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1}$  avec

$$\pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(C(\Omega) \rtimes S^1) \cdot \mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1} \simeq \mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1},$$

remarquons que l'on a alors pour  $f \hat{\otimes} g \in \mathfrak{Dom}(d_1 \otimes 1) \cap \mathfrak{Dom} D_2$ ,

$$\begin{aligned} (D_3 - \tfrac{1}{2}Id)(f \hat{\otimes} g) &= (D_3 - \tfrac{1}{2}Id)(\pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(f)g) \\ &= (D'_1 - \tfrac{1}{2}Id)(\pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(f)g) + D_2(\pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(f)g) \\ &= (-1)^{\partial g} \pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(d_1 f)g - \tfrac{1}{2}(f \hat{\otimes} g) + D_2(\pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(f)g) \\ &= (-1)^{\partial g}(d_1 f) \hat{\otimes} g - \tfrac{1}{2}(f \hat{\otimes} g) + D_2(\pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(f)g), \end{aligned}$$

le signe venant du fait que  $\mathbb{C}$  agit sur  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$  par multiplication sur la première copie de  $\mathbb{C}$  et par conjugaison sur la deuxième copie.

Nous allons donc vérifier les conditions du lemme pour

$$P_1(f \hat{\otimes} g) = (-1)^{\partial f} d_1(f) \hat{\otimes} g - \tfrac{1}{2} f \hat{\otimes} g \text{ et } P_2 = D_2.$$

(b) Si  $x \in \mathcal{B}$ , on a :

$$\left[ \left( \begin{array}{cc} D_2 & 0 \\ 0 & D_2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 0 & T_x \\ T_x^* & 0 \end{array} \right) \right] = \left( \begin{array}{cc} T'_{Grad_2(x)} & 0 \\ 0 & T'_{Grad_2(x^*)} \end{array} \right)$$

avec

(1)

$$D_2(\pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(f)g) = \pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(f)D_2g + \pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(Grad_2(f)) \cdot g$$

puisque  $d_2$  commute avec l'action de  $S^1$  sur  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \oplus C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2$  (se reporter à l'Annexe E.3 pour les notations).

On a noté  $\pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(Grad_2(f)) \cdot g$  pour désigner le produit :

$$\left( \begin{array}{cc} 0 & \pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(-f_1 + if_2) \\ \pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(f_1 + if_2) & 0 \end{array} \right) \cdot g$$

si  $Grad_2(f) = f_1 e_1 + f_2 e_2$ .



(2) pour tout  $x \in \mathcal{B}$ ,

$$\begin{array}{ccc} T_x : \mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1} & \longrightarrow & C(\Omega) \rtimes S^1 \otimes_{C(\Omega) \rtimes S^1} \mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1} \simeq \mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1} \\ b & \longmapsto & x \otimes b \simeq \pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(x)b \end{array}$$

(3) pour tout  $x \in \mathcal{B}$ ,

$$\begin{array}{ccc} T_x^* : C(\Omega) \rtimes S^1 \otimes_{C(\Omega) \rtimes S^1} \mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1} & \longrightarrow & \mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1} \\ f \otimes b & \longmapsto & \langle x, f \rangle . b \end{array}$$

où  $\langle x, f \rangle . b := \pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(\langle x, f \rangle)b$ .

(4) pour tout  $x \in \mathcal{B}$ ,  $T'_{Grad_2(x)} : \mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1}$  est donné par multiplication par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(-G_1 + iG_2) \\ \pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(G_1 + iG_2) & 0 \end{pmatrix},$$

si  $Grad_2(x) = G_1e_1 + G_2e_2$ .

Pour les calculs de ce commutateur, le lecteur pourra se référer à l'Annexe E.3.

(c) Pour tout  $b \in \mathcal{B}$  et  $e_2 \in \mathfrak{Dom} D_2$ ,  $P_1(b \hat{\otimes} e_2) = (-1)^{\partial e_2} d_1(b) \hat{\otimes} e_2 - \frac{1}{2} b \hat{\otimes} e_2$  est borné en  $e_2$  donc

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Dom} D_2 & \longrightarrow & B \hat{\otimes} E_2 \\ e_2 & \longmapsto & P_1(b \hat{\otimes} e_2) \end{array}$$

est borné.

De plus, pour tout  $b \in \mathcal{B}$  et  $b' \hat{\otimes} e_2 \in \mathfrak{Dom} P_1 \cap \mathfrak{Dom} P_2$ ,

$$T_b^* P_1(b' \hat{\otimes} e_2) = (-1)^{\partial e_2} \langle b, d_1(b') \rangle . e_2 - \frac{1}{2} \langle b, b' \rangle . e_2.$$

Ainsi, puisque  $d_1$  est auto-adjoint,

$$T_b^* P_1(b' \hat{\otimes} e_2) = [T_{d_1(b)}^* - \frac{1}{2} T_b^*](b' \hat{\otimes} e_2)$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Dom} P_1 \cap \mathfrak{Dom} P_2 & \longrightarrow & E_2 \\ b' \hat{\otimes} e_2 & \longmapsto & T_b^* P_1(b' \hat{\otimes} e_2) \end{array}$$

s'étend en un opérateur borné sur  $\mathfrak{Dom} D_3$ .

(d) On a (par exemple en utilisant le fait que  $D_3$  est un opérateur elliptique) :

$$\mathfrak{Dom} D_3 \subset \mathfrak{Dom} (d_1 \hat{\otimes} 1).$$

où, par définition,  $\mathfrak{Dom} (d_1 \hat{\otimes} 1) := \text{Im}(1 + d_1^2)^{-\frac{1}{2}} \hat{\otimes} 1$ .  
Ainsi,  $\mathfrak{Dom} (D_3 - \frac{1}{2}Id) \subset \mathfrak{Dom} ((d_1 - \frac{1}{2}Id) \hat{\otimes} 1)$ .

(e) Comme  $d_1 \hat{\otimes} 1 - \frac{1}{2}Id$  et  $D_2$  sont auto-adjoints et

$$(d_1 \hat{\otimes} 1 - \frac{1}{2}Id)D_2 + D_2(d_1 \hat{\otimes} 1 - \frac{1}{2}Id) = 0,$$

on a, pour tout  $x$  dans le domaine :

$$\langle (d_1 \hat{\otimes} 1 - \frac{1}{2}Id)x, D_2x \rangle + \langle D_2x, (d_1 \hat{\otimes} 1 - \frac{1}{2}Id)x \rangle = 0.$$

(f) On a facilement :

– pour tout  $x$  dans le domaine tel que  $\partial x = 0$ ,

$$\langle ((d_1 - \frac{1}{2}Id) \hat{\otimes} 1)x, P_1x \rangle = \langle ((d_1 - \frac{1}{2}Id) \hat{\otimes} 1)x, ((d_1 - \frac{1}{2}Id) \hat{\otimes} 1)x \rangle \geq 0,$$

– pour tout  $x$  dans le domaine tel que  $\partial x = 1$ ,

$$-\langle ((d_1 - \frac{1}{2}Id) \hat{\otimes} 1)x, P_1x \rangle = \langle (d_1 \hat{\otimes} 1)x, (d_1 \hat{\otimes} 1)x \rangle - \frac{1}{4}\langle x, x \rangle \geq -\frac{1}{4}\langle x, x \rangle,$$

Ainsi,

$$(-1)^{\partial x} \left[ \langle ((d_1 - \frac{1}{2}Id) \hat{\otimes} 1)x, P_1x \rangle + \langle P_1x, ((d_1 - \frac{1}{2}Id) \hat{\otimes} 1)x \rangle \right] \geq -\frac{1}{2}\langle x, x \rangle,$$

pour tout  $x$  dans le domaine.

La dernière condition du lemme **E.2** est donc vérifiée, ce qui démontre le théorème.

□

## 2.5 Calcul de l'image par $\tau_*^\mu$ des sommants $\mathbb{Z}.q_i$

Nous allons montrer par un calcul explicite que  $\tau_*^\mu(\tilde{q}_i) \in \mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z}))$  où  $\tilde{q}_i$  est le relevé de  $q_i$  dans  $K_0^{S^1}(C(\Omega))$  construit dans l'Annexe B.

Il suffit d'effectuer ce calcul pour l'un des  $\tilde{q}_i$ , par exemple  $\tilde{q}_2$ .

Pour calculer cette image, nous allons utiliser le théorème de l'indice en regardant  $\Omega$  feuilleté par  $\mathbb{R}^2$ .

En effet, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 K_0(C(\Omega)) & \xleftarrow{r^*} & K_0^{S^1}(C(\Omega)) \\
 \simeq \downarrow \beta_2 \circ \delta_2 & & \simeq \downarrow \beta \circ \delta \\
 K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2) & \xleftarrow{r^*} & K_0^{S^1}(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2) \\
 & \searrow \tau_*^{\prime\mu} & \swarrow \tau_*^\mu \\
 & \mathbb{R} & 
 \end{array}$$

où  $\beta_2$  et  $\delta_2$  sont obtenues de façon similaire à  $\beta$  et  $\delta$  mais sans la  $S^1$ -équivariance et  $\tau_*^{\prime\mu}$  a été définie dans le paragraphe 2.2.

Ainsi pour calculer  $\tau_*^\mu(\beta \circ \delta(\tilde{q}_2))$ , il suffit de calculer  $\tau_*^{\prime\mu}(\beta_2 \circ \delta_2 \circ r^*(\tilde{q}_2))$ .

Une version non équivariante de la proposition **2.22** permet de dire que  $\beta_2 \circ \delta_2$  est donnée par le produit de Kasparov par la classe du triplet non borné défini par l'opérateur de Dirac le long des feuilles du feuilletage  $\Omega$  feuilleté par  $\mathbb{R}^2$  et le théorème de l'indice pour les espaces feuilletés nous donne :

$$\tau_*^{\prime\mu}(\beta_2 \circ \delta_2 \circ r^*(\tilde{q}_2)) = \langle Ch_\tau^2(r^*(\tilde{q}_2)) \mid [C_{\nu_Z}] \rangle$$

où  $Z$  est une transversale du feuilletage,  $\nu_Z$  une mesure transverse invariante,  $[C_{\nu_Z}]$  son courant de Ruelle-Sullivan associé et  $Ch_\tau^2(\tilde{q}_2)$  est la composante du caractère de Chern longitudinal qui est dans  $H_\tau^2(\Omega)$ , la cohomologie longitudinal de  $\Omega$  feuilleté par  $\mathbb{R}^2$ .

Reprenons alors les notations de l'Annexe B.

Soit  $\omega_0$  le pavage de  $F_1$  fixé par la rotation  $R_\pi$  d'angle  $\pi$  autour de l'origine utilisé pour construire  $\tilde{q}_2$ .

Notons  $\Xi_{00}$  l'ensemble des pavages ayant même 1-couronne que  $\omega_0$ .

Soit  $r_0 < r < r_1$  avec  $r = (r_0 + r_1)/2$  suffisamment petit et  $r_0, r_1$  suffisamment proche de  $r$ .

On note  $\Omega_{r_0, r_1} := \{e^{i\theta}w + v; w \in \Xi_{00}, \theta \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^2, r_0 \leq \|v\| \leq r_1\}$ .

Comme en dehors de  $\Omega_{r_0, r_1}$ , le fibré définissant  $\tilde{q}_2$  est trivial (voir Annexe B), il suffit

de calculer le caractère de Chern sur cette "couronne".

Rappelons que  $X$  est formé par des pavages ayant même 1-couronne que  $\omega_0$  mais qui ne sont pas fixés par  $R_\pi$ .

On note  $X^0 := X \cup \{\omega_0\}$ .

La transversale que l'on considère dans la suite est alors  $Z = X \times S^1$ , muni de la mesure transverse invariant  $\mu_X^t \otimes d_{S^1}$  où  $\mu_X^t$  est la mesure induite sur  $X$  par la mesure  $\mu$  de  $\Omega$  et  $d_{S^1}$  est la mesure usuelle sur  $S^1$ .

Dans la suite, nous noterons  $l_k$  ( $k = 1, \dots, 4$ ) les quatre quadrants d'amplitude  $\frac{\pi}{2}$  du cercle de rayon  $r$  de  $\mathbb{C}$  i.e  $l_k = \{re^{ki\theta}, \theta \in [0; \frac{\pi}{2}]\}$ .

On pose également

$$\begin{aligned} V_k &:= \{e^{i\theta}(w+v); w \in X^0, v \in l_k, \theta \in \mathbb{R}\}, \\ Y_k &:= \{w+v; w \in X^0, v \in l_k\} \\ \text{et } \tilde{Y}_k &:= Y_k/S^1. \end{aligned}$$

Pour la suite, on se fixe une application lisse  $\varepsilon : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $|\varepsilon(z)| = 1$ ,  $\varepsilon(1) = 1$ ,  $\varepsilon(i) = -1$ ,  $\varepsilon'(1) = 0 = \varepsilon'(i)$  et  $\varepsilon(e^{i(\theta+\pi)}) = \varepsilon(e^{i\theta})$ .

On définit alors les applications suivantes :

$f_1 : \tilde{Y}_1 \rightarrow \mathbb{C}$  est définie par  $f_1(y) = \varepsilon(e^{i\theta})$ , si  $y \simeq (w, re^{i\theta})$  sous les identifications  $\tilde{Y}_1 \simeq Y_1 \simeq X^0 \times l_1$ .

$f_2 : \tilde{Y}_2 \rightarrow \mathbb{C}$  est définie par  $f_2(y) = -1$ .

$f_3 : \tilde{Y}_3 \rightarrow \mathbb{C}$  est définie par  $f_3(y) = -\varepsilon(e^{i\theta})$ , si  $y \simeq (w, re^{i\theta})$  sous les identifications  $\tilde{Y}_3 \simeq Y_3 \simeq X^0 \times l_3$ .

$f_4 : \tilde{Y}_4 \rightarrow \mathbb{C}$  est définie par  $f_4(y) = 1$ .

Dans l'annexe, nous n'avons pas besoin du caractère lisse de la fonction et avons pris  $\varepsilon(z) = z^2$  mais la construction de  $\tilde{q}_2$  obtenue dans l'annexe est encore valide avec une application  $\varepsilon$  quelconque vérifiant les conditions ci-dessus.

Comme  $\{e^{i\theta}w_0 + v; \theta \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^2, r_0 \leq \|v\| \leq r_1\}$  est de  $\mu$ -mesure nulle ([**RS98**]), on cherche à étudier  $Ch_\tau^2(\tilde{q}_2)$  sur  $\Omega_{r_0, r_1} \setminus \{e^{i\theta}w_0 + v; \theta \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^2, r_0 \leq \|v\| \leq r_1\}$ .

Or cet ensemble admet une trivialisations :

$$s : X \times ([0; \pi] \times S^1) \times S^1 \simeq \Omega_{r_0, r_1} \setminus \{e^{i\theta}w_0 + v; \theta \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^2, r_0 \leq \|v\| \leq r_1\}$$

donnée par  $(w, x, e^{i\theta}, e^{i\alpha}) \mapsto e^{i\alpha}(w + (\frac{r_1-r_0}{\pi}x + r_0)e^{i\theta})$ .

Sur  $X \times ([0; \pi] \times S^1) \times S^1$  (qui est une carte de  $\Omega$  feuilleté par  $\mathbb{R}^2$ ), le projecteur associé à  $\tilde{q}_2$  est donné, modulo  $s$ , sur  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$  (avec action de  $S^1$  par rotation sur la première copie de  $\mathbb{C}$  et par action triviale sur la deuxième) par la matrice :

$$e(w, x, e^{i\theta}, e^{i\alpha}) := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos(x) & \sin(x)e^{-i\alpha}\bar{f}([w + re^{i\theta}]) \\ \sin(x)e^{i\alpha}f([w + re^{i\theta}]) & 1 - \cos(x) \end{pmatrix}$$

où  $f : \bigcup_{k=1}^4 \tilde{Y}'_k \longrightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$  est la fonction continue définie par  $f(y) = f_k(y)$  si  $y \in \tilde{Y}'_k \subset \tilde{Y}'_k$  avec  $Y'_k := \{w + v; w \in X, v \in l_k\}$  et  $\tilde{Y}'_k := Y'_k/S^1$ .  
 $f([w + re^{i\theta}])$  ne dépend en fait que de  $e^{i\theta}$  et non du  $w$  choisi dans  $X$ .

Ainsi,  $Ch_\tau^2(\tilde{q}_2) = \frac{1}{2i\pi} Tr(edede)$  est la forme longitudinale donnée par

$$(w, x, z, e^{i\alpha}) \mapsto \frac{1}{4i\pi} \sin(x) \bar{f} \frac{\partial f}{\partial z} dx dz.$$

D'où

$$\langle Ch_\tau^2(\tilde{q}_2) | [C_{\nu z}] \rangle = \int_X \int_{S^1} \int_{[0;\pi] \times S^1} \frac{1}{4i\pi} \sin(x) \bar{f} \frac{\partial f}{\partial z} dx dz d_{S^1}(e^{i\alpha}) d\mu_X^t.$$

De plus, on a

$$\frac{1}{4i\pi} \int_{[0;\pi] \times S^1} \sin(x) \bar{f} \frac{\partial f}{\partial z} dx dz = \frac{1}{4i\pi} \int_{[0;\pi]} \sin(x) dx \int_{S^1} \bar{f} \frac{\partial f}{\partial z} dz = Ind_0(f)$$

où  $Ind_0(f)$  est l'indice de 0 relativement à  $f$  (on rappelle que  $f\bar{f} = 1$ ).

Comme  $Ind_0(f) \in \mathbb{Z}$ , on obtient :

$$\langle Ch_\tau^2(\tilde{q}_2) | [C_{\nu z}] \rangle = l\mu_X^t(X), \text{ avec } l \in \mathbb{Z}.$$

Comme  $X_3 := X \cup \Xi$  est une transversale de  $\Omega$  feuilleté par  $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$ ,  $\mu$  induit une mesure transverse invariante  $\mu_3^t$  sur  $X_3$ .

On a alors  $\mu_X^t(X) = \mu_3^t(X) = \mu_3^t(X - v) = \mu_3^t(U \setminus \{\omega_0 - v\})$ , où  $v$  est un vecteur tel que  $\omega_0 - v \in \Xi$  et  $U$  est l'ensemble des pavages de  $\Omega$  coïncidant sur la 1-couronne de  $\omega_0$  mais translatée par  $-v$ .

Or  $\mu_3^t(\{\omega_0 - v\}) = 0$  donc  $\mu_X^t(X) = \mu_3^t(U) = \mu^t(U)$ .

Comme  $U$  est un clopen de  $\Xi$ , on en déduit

$$\langle Ch_\tau^2(\tilde{q}_2) | [C_{\nu z}] \rangle = l\mu^t(U) \in \mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z})).$$

## Chapitre 3

# Cohomologie PV et groupe des coinvariants entiers

Nous avons donc obtenu le théorème **2.12** et ainsi

$$\tau_\mu^*(\text{Im}(\beta \circ \delta \circ \beta_{S^1} \circ \delta_{S^1})) \subset [C_{\mu^t}] \left( Ch_\tau(K_1(C(\Omega))) \right).$$

Or, il existe une application naturelle ([**MS06**])  $r_* : \check{H}^3(\Omega; \mathbb{R}) \longrightarrow H_\tau^3(\Omega)$  obtenue par inclusion du faisceau  $\mathcal{R}$  des germes des fonctions localement constantes à valeurs réelles dans le faisceau  $\mathcal{R}_\tau$  des germes des fonctions continues localement constantes le long des feuilles à valeurs réelles et comme  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ , nous avons aussi une application naturelle, encore dénotée  $r_*$ ,  $r_* : \check{H}^3(\Omega; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_\tau^3(\Omega)$ .

On a alors une factorisation :  $Ch_\tau = r_* \circ ch^\mathbb{Z}$  où  $ch^\mathbb{Z}$  est le caractère de Chern à valeurs entières  $ch^\mathbb{Z} : K_1(C(\Omega)) \longrightarrow \check{H}^{\text{odd}}(\Omega; \mathbb{Z})$  (ce caractère est à valeur dans la cohomologie de Čech à coefficients entiers car on est en dimension 3, voir **2.2**).

Comme le courant de Ruelle-Sullivan  $[C_{\mu^t}]$  dans la formule du théorème **2.12** ne prend en compte que la partie  $H_\tau^3(\Omega)$ , on s'intéresse dans la suite à la cohomologie  $\check{H}^3(\Omega; \mathbb{Z})$ .

Nous étudierons plus particulièrement  $\check{H}^2(\Omega/S^1; \mathbb{Z})$  puisque

$$\check{H}^3(\Omega; \mathbb{Z}) \simeq \check{H}_c^3(\Omega \setminus F; \mathbb{Z}) \simeq \check{H}_c^2((\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z}) \simeq \check{H}^2(\Omega/S^1; \mathbb{Z})$$

où ces isomorphismes ont été vus dans la section précédente (voir la démonstration de **2.3**, le corollaire **2.10** et ce qui suit le lemme **2.8**).

Pour étudier cette cohomologie, nous allons appliquer des techniques élaborées dans [**SB09**] pour montrer que la cohomologie de Čech de degré maximal à coefficients entiers de  $\Omega/S^1$  est isomorphe au groupe des coinvariants entiers associé à la transversale canonique.

Pour cela, nous utiliserons une idée introduite par Anderson et Putnam dans [AP98] puis utilisée par Savinien et Bellissard dans [SB09].

Nous présenterons alors la cohomologie PV des pavages de type pinwheel, notée  $H_{PV}^*(\mathcal{B}_0^c; C(\Xi_\Delta, \mathbb{Z}))$ , qui relie la cohomologie de Čech de degré maximal de  $\Omega/S^1$  et le groupe des coinvariants entiers de  $\Xi$ .

### 3.1 Espace des proto-tuiles du pavage de type pinwheel

Soit  $\mathcal{T}$  le pavage de type pinwheel construit à la section 1.1.

**Définition 3.1** 1. Une proto-tuile d'un pavage est une classe d'équivalence de pavés aux isométries directes près.

2. La première couronne d'un pavé dans un pavage  $\mathcal{T}$  est la réunion des pavés de  $\mathcal{T}$  l'intersectant.

3. Une proto-tuile couronnée de  $\mathcal{T}$  est la sous-classe d'une proto-tuile dont les représentants ont la même première couronne aux isométries directes près.

Dans les pavages de type pinwheel, il y a 108 proto-tuiles couronnées (voir FIG. 7 et FIG. 8 p.101 et p.102).

Nous pointerons chaque proto-tuile au point d'intersection de la médiatrice du côté le plus court avec la médiane issue du sommet formé par l'hypothénuse et le plus court côté :



Si  $\hat{t}$  est une proto-tuile alors  $t$  dénotera sa représentation qui a sa ponctuation en l'origine  $O$ .

On choisit alors la décomposition simpliciale définie dans la figure suivante pour les proto-pavés des pavages de type pinwheel :



On peut alors construire un  $CW$ -complexe fini  $\mathcal{B}_0^c(\mathcal{T})$ , appelé espace des proto-tuiles, à partir des proto-tuiles couronnées en les collant le long de leur bord selon toutes les configurations locales de leurs représentants dans  $\mathcal{T}$  :

**Définition 3.2** Soit  $\hat{t}_j^c$ ,  $j = 1, \dots, N$ , les proto-tuiles couronnées de  $\mathcal{T}$  et soit  $t_j^c$  la représentation de  $\hat{t}_j^c$  ayant sa ponctuation en l'origine et l'orientation choisie pour les proto-tuiles lors de la construction de la transversale canonique.

L'espace des proto-tuiles couronnées de  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{B}_0^c(\mathcal{T})$ , est le  $CW$ -complexe quotient

$$\mathcal{B}_0^c(\mathcal{T}) = \coprod_{j=1}^N t_j^c / \sim,$$

où deux  $n$ -cellules  $e_i^n \in t_i^c$  et  $e_j^n \in t_j^c$  sont identifiées si il existe deux isométries  $(x_i, \theta_i), (x_j, \theta_j) \in \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$  pour lesquels  $t_i^c \cdot (x_i, \theta_i)$  et  $t_j^c \cdot (x_j, \theta_j)$  sont des pavés de  $\mathcal{T}$  tels que  $e_i^n \cdot (x_i, \theta_i)$  et  $e_j^n \cdot (x_j, \theta_j)$  coïncident.

Les images des pavés  $t_j^c$  dans  $\mathcal{B}_0^c(\mathcal{T})$  seront notées  $\tau_j$  et seront encore appelés des pavés.

On a alors une projection de  $\Omega/S^1$  sur  $\mathcal{B}_0^c(\mathcal{T})$  :

**Proposition 3.3 [SB09]** Il existe une application continue  $\mathfrak{p}_{0,\mathcal{T}}^c : \Omega/S^1 \rightarrow \mathcal{B}_0^c(\mathcal{T})$  de l'enveloppe continue modulo les rotations sur l'espace des proto-tuiles couronnées.

**Démonstration :**

Soit  $\lambda_0^c : \coprod_{j=1}^N t_j^c \rightarrow \mathcal{B}_0^c(\mathcal{T})$  l'application quotient et  $\rho_0^c : \Omega/S^1 \rightarrow \coprod_{j=1}^N t_j^c$  l'application

définie de la façon suivante : soit  $[\omega] \in \Omega/S^1$ , considérons un représentant  $\omega_1$  de la classe  $[\omega]$ . Si l'origine  $O$  appartient à l'intersection de  $k$  pavés  $t^{\alpha_1}, \dots, t^{\alpha_k}$ , dans  $\omega_1$ , avec  $t^{\alpha_l} = t_{j_l}^c \cdot (x_{\alpha_l}(\omega_1), \theta_{\alpha_l}(\omega_1))$ ,  $l = 1, \dots, k$ , alors on pose

$$\rho_0^c([\omega]) = x_{\alpha_s}(\omega_1)$$

qui appartient à  $t_{j_s}^c$  où  $s = \text{Min}\{j_l : l = 1, \dots, k\}$ .

Rappelons que l'action de  $\mathbb{E}^2$  est donnée par :  $\omega \cdot (x, \theta) := R_{-\theta}(\omega - x)$  où  $R_{-\theta}$



est la rotation de  $\mathbb{R}^2$  d'angle  $-\theta$ . Ainsi, la définition de  $\rho_0^c$  ne dépend pas du représentant  $\omega_1$  de  $[\omega]$  choisi.

L'application  $\rho_0^c$  envoie donc l'origine de  $\mathbb{R}^2$ , qui appartient à des pavés d'un représentant de  $[\omega]$ , sur la position correspondante dans les pavés  $t_j^c$  correspondants.

La projection  $\mathfrak{p}_{0,\mathcal{T}}^c$  est alors définie par :

$$\mathfrak{p}_{0,\mathcal{T}}^c : \begin{array}{ccc} \Omega/S^1 & \longrightarrow & \mathcal{B}_0^c(\mathcal{T}) \\ [\omega] & \longmapsto & \lambda_0^c \circ \rho_0^c([\omega]) \end{array} .$$

On peut alors montrer que, comme dans [SB09],  $\mathfrak{p}_{0,\mathcal{T}}^c$  est bien définie et continue en notant qu'une classe  $[\omega']$  est dans un voisinage de  $[\omega]$  dans  $\Omega/S^1$ , si les représentants de  $[\omega']$  et de  $[\omega]$  coïncident sur une grande boule à une petite translation près et aux rotations près.

□

Pour alléger les notations, nous noterons l'espace des proto-tuiles  $\mathcal{B}_0^c$  et la projection  $\mathfrak{p}_{0,\mathcal{T}}^c$  sera notée  $\mathfrak{p}_0$ .

Notons  $\Xi(\tau_j)$  le relevé de la ponctuation de  $\tau_j$ . Alors  $\Xi(\tau_j)$  est un sous-ensemble de la transversale canonique appelé *zone d'acceptance* de la proto-tuile  $\hat{t}_j^c$ . Cet ensemble contient tous les pavages ayant la ponctuation d'un représentant de  $\hat{t}_j^c$  à l'origine.

On obtient ainsi une partition en clopens  $\Xi(\tau_j)$ , pour  $j = 1, \dots, N$ , de la transversale canonique et ce sont des espaces de Cantor, comme  $\Xi$ .

## 3.2 $\Omega/S^1$ vu comme une limite projective d'espaces de supertuiles

On procède de manière analogue à [SB09] (on peut aussi se référer à [ORS02] pour voir notre espace comme une limite projective).

Notons toujours  $\mathcal{T}$  le pavage de type pinwheel de la première section et prenons la décomposition en CW-complexes des proto-tuiles des pages 69 et 75.

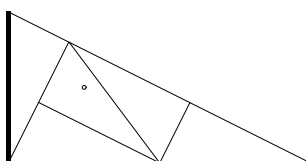
Nous allons alors construire un CW-complexe fini  $\mathcal{B}_k^c$ , appelé *espace des supertuiles d'ordre  $k$* , associé aux supertuiles d'ordre  $k$  de  $\mathcal{T}$ .

Cette construction sera réalisée à partir des proto-tuiles (qui sont les supertuiles d'ordre  $k$ ) du pavage, noté  $\mathcal{T}_k$  dans la suite, obtenu à partir de  $\mathcal{T}$  en regroupant les pavés de  $\mathcal{T}$  en supertuiles d'ordre  $k$ , de la même manière que  $\mathcal{B}_0^c$  a été construit à partir des proto-tuiles de  $\mathcal{T}$  dans la définition 3.2.

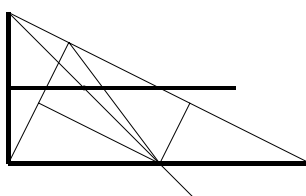
La construction s'opère comme suit.

$\mathcal{T}$  peut être décomposé de façon unique en supertuiles d'ordre  $k$ . On obtient ainsi un pavage  $\mathcal{T}_k$  qui est répétitif, de  $\mathbb{E}^2$ -type fini et dont les pavés sont les supertuiles d'ordre  $k$ .

Chaque supertuile d'ordre  $k$  est ponctuée par la ponctuation du pavé en son centre comme montré sur la figure suivante :



Ce point est encore l'intersection de la médiatrice du côté le plus court du triangle avec la médiane issue du sommet formé par le plus court côté et l'hypothénuse. Il est stable par substitution puisqu'il coïncide avec le point de ponctuation du pavé au centre de la substitution.



Ces supertuiles d'ordre  $k$  sont alors des  $CW$ -complexes puisqu'elles sont formées par des  $CW$ -complexes.

**Définition 3.4** L'espace  $\mathcal{B}_k^c$  des supertuiles d'ordre  $k$  est l'espace des proto-tuiles couronnées de  $\mathcal{T}_k$  :

$$\mathcal{B}_k^c = \mathcal{B}_0^c(\mathcal{T}_k).$$

Comme tous les pavages  $\mathcal{T}_k$  ont les mêmes proto-tuiles couronnées, à une dilatation près, tous les espaces  $\mathcal{B}_k^c$  sont homéomorphes. Ces espaces vont quand même nous permettre d'avoir des informations importantes sur la cohomologie de notre espace  $\Omega/S^1$ .

Les images dans  $\mathcal{B}_k^c$  des supertuiles  $p_j$  (les pavés de  $\mathcal{T}_k$ ) seront notées  $\pi_j$  et seront encore appelées supertuiles.

La projection  $\mathfrak{p}_{0,\mathcal{T}_k} : \Omega/S^1 \rightarrow \mathcal{B}_k^c$ , construite en **3.3**, sera notée  $\mathfrak{p}_k$ .

L'application  $F_k : \mathcal{B}_k^c \rightarrow \mathcal{B}_0^c$  définie par  $F_k := \mathbf{p}_0 \circ \mathbf{p}_k^{-1}$  est surjective et continue (voir [SB09]). Elle projète  $\mathcal{B}_k^c$  sur  $\mathcal{B}_0^c$  de façon évidente : un point  $x$  de  $\mathcal{B}_k^c$  appartient à une supertuile  $\pi_j$ , donc à une certaine proto-tuile, et  $F_k$  envoie  $x$  sur le point correspondant du pavé  $\tau_{j'}$  correspondant.

Donnons nous deux entiers  $p$  et  $q$  tels que  $q \leq p$ . L'application  $f_{q,p} : \mathcal{B}_p^c \rightarrow \mathcal{B}_q^c$  définie par  $f_{q,p} = f_q^{-1} \circ f_p = \mathbf{p}_q \circ \mathbf{p}_p^{-1}$  est surjective et continue.

Comme expliqué dans [SB09], la famille  $(\mathcal{B}_p^c, f_{q,p})$  est un système projectif.

Pour montrer que  $\Omega/S^1$  est la limite projective  $\varprojlim (\mathcal{B}_p^c, f_{q,p})$ , le point important est le fait que nos supertuiles sont prises de façon à forcer leur bord et la condition ci-dessus est remplacée par le fait que nos supertuiles admettent les mêmes premières couronnes, à une dilatation par  $\sqrt{5}$  près, que les supertuiles d'ordre inférieur.

Ainsi, si  $d_l$  représente la distance d'une supertuile  $p_l$  d'ordre  $l$  au complémentaire de sa première couronne, la distance  $d_{l+1}$  de la supertuile d'ordre  $l+1$  ayant la même première couronne que  $p_l$  mais dilatée d'un facteur  $\sqrt{5}$ , vérifie alors  $d_{l+1} = \sqrt{5}d_l$  et ainsi ces distances tendent vers l'infini. Ceci permettra de démontrer le théorème suivant, en prenant une suite adaptée d'espaces de supertuiles.

Cette suite est obtenue en prenant la suite  $\{\mathcal{B}_l^c, f_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  où, pour tout  $l \geq 1$ ,  $\mathcal{B}_l^c$  est l'espace des supertuiles d'ordre  $l$  et  $f_l = f_{(l-1),l}$ , avec la convention  $f_0 = f_1$  et  $\mathcal{B}_0^c$  est l'espace des proto-tuiles.

On démontre alors de la même manière que dans l'article [SB09] :

**Théorème 3.5** *La limite projective de la suite  $\{\mathcal{B}_l^c, f_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ , construite ci-dessus, est homéomorphe à l'enveloppe continue de  $\mathcal{T}$  quotientée par les rotations :*

$$\Omega/S^1 \cong \varprojlim (\mathcal{B}_l^c, f_l).$$

### Démonstration :

L'homéomorphisme est donné par l'application  $\mathbf{p} : \Omega/S^1 \rightarrow \varprojlim (\mathcal{B}_l^c, f_l)$ , définie par  $\mathbf{p}([\omega]) = (\mathbf{p}_0([\omega]), \mathbf{p}_1([\omega]), \dots)$  et nous allons voir que son inverse est donné par

$$\mathbf{p}^{-1}(x_0, x_1, \dots) = \bigcap \{\mathbf{p}_l^{-1}(x_l), l \in \mathbb{N}\}.$$

L'application  $\mathbf{p}$  est surjective puisque chaque  $\mathbf{p}_l$  l'est.

En effet, on a :

$$p_0^{-1}(x_0) \supset p_1^{-1}(x_1) \supset p_2^{-1}(x_2) \supset \dots$$

où chaque  $p_i^{-1}(x_i)$  est un compact non vide de  $\Omega/S^1$  et donc tout pavage dans l'intersection ci-dessus définit un relevé de  $(x_0, x_1, \dots)$ .

Pour l'injectivité, considérons  $\omega, \omega' \in \Omega$  tels que  $\mathbf{p}([\omega]) = \mathbf{p}([\omega'])$ .

Pour tout  $l \in \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{p}_l([\omega]) = \mathfrak{p}_l([\omega'])$  dans une supertuille  $\pi_{l,j}$  de  $\mathcal{B}_l^c$ . Cela veut dire que les deux pavages coïncident, à une rotation près, sur un translaté de la supertuille  $p_{l,j}$  contenant l'origine.

Posons alors  $r_l = \inf_{p \in \mathcal{P}_l^c} \inf_{x \in p} d_{\mathbb{R}^2}(x, \partial C^1(p))$  où  $\mathcal{P}_l^c$  est l'ensemble des supertuiles couronnées de  $\mathcal{T}$  d'ordre  $l$  et  $\partial C^1(p)$  est le bord de la première couronne de  $p$ . Comme notre pavage est de type fini,  $r_l > 0$  pour tout  $l$ .

De plus, les deux pavages coïncident, aux rotations près, sur la boule  $B(0_{\mathbb{R}^2}, r_l)$  puisque  $\mathcal{B}_l^c$  a été construit à partir de supertuiles couronnées.

Comme on l'a vu plus haut, on a  $r_{l+1} = \sqrt{5}r_l$  donc  $r_{l+1} = \sqrt{5}^{l+1}r_0$  et en prenant  $l$  suffisamment grand, les deux pavages coïncident sur des boules arbitrairement grandes et on obtient donc l'injectivité de l'application  $\mathfrak{p}$  et la formule pour  $\mathfrak{p}^{-1}$ .

$\mathfrak{p}$  est alors une bijection (trivialement) continue et comme  $\varprojlim (\mathcal{B}_l^c, f_l)$  est un espace séparé,  $\mathfrak{p}$  est un homéomorphisme.

□

### 3.3 Cohomologie PV

Notre objectif initial était de calculer la cohomologie de Čech de degré maximal à coefficients entiers de  $\Omega/S^1$  et de montrer qu'il s'agit en fait du groupe des coinvariants  $C(\Xi, \mathbb{Z})/\sim$  de la transversale canonique sous l'action du groupoïde  $\Omega \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1$  restreint à cette transversale.

Pour ce faire, nous allons montrer que cette cohomologie est en fait isomorphe à la cohomologie PV qui fut introduite dans [SB09] en la modifiant de façon à prendre en compte les rotations qui interviennent dans notre cas.

On suit ainsi la même démarche que Savinien et Bellissard en introduisant d'abord la structure de complexe simplicial orienté puis en définissant la cohomologie PV associée à notre pavage et enfin en montrant, grâce à la limite projective obtenue dans le paragraphe précédent, que cette cohomologie est en fait la cohomologie de Čech à coefficients entiers de  $\Omega/S^1$ .

Le point intéressant pour nous dans cette nouvelle cohomologie est que les cocycles de cette cohomologie sont directement définis comme des fonctions continues (à valeurs entières) sur  $\Xi_{\Delta}^2$ . Nous montrerons alors que le quotient de ces cocycles par l'image du bord de la cohomologie coïncide exactement avec le groupe des coinvariants de cette transversale  $\Xi_{\Delta}^2$ .

### 3.3.1 Complexes simpliciaux orientés et cohomologie PV

Nous suivrons la présentation faite dans [SB09] en adaptant les notions et les démonstrations à notre complexe simplicial orienté (voir [HY61]).

Etant donnés  $n + 1$  points  $v_0, \dots, v_n$  non colinéaires de  $\mathbb{R}^m$ ,  $m > n$ , soit  $[v_0, \dots, v_n]$  le  $n$ -simplexe de sommets  $v_0, \dots, v_n$ .

Posons  $\Delta^n$  le  $n$ -simplexe standard :

$$\Delta^n = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n x_i = 1 \text{ et } x_i \geq 0 \text{ pour tout } i \right\},$$

dont les sommets sont les vecteurs unités le long des axes.

Si un des  $n + 1$  sommets d'un  $n$ -simplexe  $[v_0, \dots, v_n]$  est supprimé, les  $n$  sommets restants engendrent un  $(n - 1)$ -simplexe, appelé *face* de  $[v_0, \dots, v_n]$ .

On appelle alors **bord** de  $\Delta^n$  la réunion de toutes les faces de  $\Delta^n$ , il est noté  $\partial\Delta^n$ .

L'**intérieur** de  $\Delta^n$  est alors  $\overset{\circ}{\Delta}^n = \Delta^n \setminus \partial\Delta^n$ .

Une structure de **complexe simplicial** sur un espace  $X$  est la donnée d'une collection d'applications  $\sigma_\alpha : \Delta^k \rightarrow X$ , où  $k$  dépend de  $\alpha$ , telle que :

- (i) La restriction  $\sigma_\alpha|_{\Delta^n}$  est injective.
  - (ii) La restriction de toute application  $\sigma_\alpha$  à une face de  $\Delta^n$  est l'une des applications  $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \rightarrow X$ .
  - (iii) Pour tout  $\alpha, \beta$ ,  $F_{\alpha,\beta} := \sigma_\alpha(\Delta^n) \cap \sigma_\beta(\Delta^p)$  est une face des deux simplexes  $\sigma_\alpha(\Delta^n)$  et  $\sigma_\beta(\Delta^p)$  et il existe une application affine  $l$ , de  $s_1 := \sigma_\alpha^{-1}(F_{\alpha,\beta})$  vers  $s_2 := \sigma_\beta^{-1}(F_{\alpha,\beta})$  telle que  $\sigma_\alpha|_{s_1} = \sigma_\beta|_{s_2} \circ l$ .
  - (iv) Un ensemble  $A \subset X$  est ouvert ssi  $\sigma_\alpha^{-1}(A)$  est ouvert dans  $\Delta^n$  pour chaque  $\sigma_\alpha$ .
- $\sigma_\alpha(\overset{\circ}{\Delta}^n)$  est appelée **n-cellule** du complexe.

On obtient alors un **simplexe orienté** à partir d'un  $n$ -simplexe  $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$  comme suit : on choisit un ordre arbitraire fixe pour les sommets  $v_0, \dots, v_n$ . La classe d'équivalence des permutations paires de cet ordre fixe est le **simplexe orienté positivement**, que l'on note  $+\sigma$ . La classe d'équivalence des permutations impaires de cet ordre est alors le **simplexe orienté négativement**,  $-\sigma$ .

Un **complexe simplicial orienté** est alors un complexe simplicial dans lequel on a choisi une orientation arbitraire fixe pour chaque simplexe du complexe (on fait ce choix sans tenir compte de la disposition des simplexes entre eux ou du fait que tel simplexe est la face de tel autre simplexe).

Pour obtenir une structure de complexe simplicial orienté sur  $\mathcal{B}_0^c$ , on décompose chaque pavé du pavage de type pinwheel comme suit :



en prenant l'orientation de  $\mathbb{R}^2$  pour les cellules de dimension 2 et n'importe quelle orientation pour les arêtes à l'intérieur des pavés.

Puisque  $\mathcal{B}_0^c$  est de dimension 2, on ne considère que les simplexes de dimension 0, 1 ou 2.

On peut alors voir  $\mathcal{T}$  comme une décomposition de  $\mathbb{R}^2$  en complexe simplicial orienté. On ponctue également chaque cellules par l'image du barycentre de  $\Delta^n$  sous  $\sigma_\alpha$  :



$\mathcal{B}_0^c$  est alors un complexe simplicial orienté fini et les applications  $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow \mathcal{B}_0^c$  seront appelées les **applications caractéristiques** des  $n$ -simplexes de  $\mathcal{B}_0^c$ .

On introduit alors comme dans [SB09] une nouvelle transversale (n'étant pas reliée immédiatement à la transversale canonique, voir 3.18) qui permettra d'obtenir la cohomologie PV :

**Définition 3.6** La  $\Delta$ -transversale  $\Xi_\Delta$  est le sous-ensemble de  $\Omega/S^1$  constitué des classes des pavages ayant la ponctuation d'une de leurs cellules en l'origine.

La  $\Delta$ -transversale est le relevé des ponctuations des cellules de  $\mathcal{B}_0^c$ .

Elle est partitionnée par le relevé des ponctuations des  $n$ -cellules, noté  $\Xi_\Delta^n$ , qui est le sous ensemble de  $\Omega/S^1$  constitué des classes des pavages ayant la ponctuation d'une de leurs  $n$ -cellules en l'origine.

On montre que la  $\Delta$ -transversale est un Cantor (comme pour la transversale canonique), et les  $\Xi_\Delta^n$  en donnent une partition en clopens.

Etant donnée l'application caractéristique  $\sigma$  d'un  $n$ -simplexe  $e$  de  $\mathcal{B}_0^c$ , notons  $\Xi_\Delta(\sigma)$

le relevé de la ponctuation de  $e$ , et  $\chi_\sigma$  son indicatrice dans  $\Xi_\Delta$  (i.e  $\chi_\sigma([\omega]) = 1$  si et seulement si  $\mathfrak{p}_0([\omega]) = \text{punct}(e)$ ).

Le sous-ensemble  $\Xi_\Delta(\sigma)$  est appelé **zone d'acceptance** de  $\sigma$ .

Comme  $\Xi_\Delta(\sigma)$  est un clopen, on a  $\chi_\sigma \in C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z}) \subset C(\Xi_\Delta, \mathbb{Z})$ .

Donnons nous l'application caractéristique  $\sigma : \Delta^n \rightarrow \mathcal{B}_0^c$  d'un  $n$ -simplexe  $e$  de  $\mathcal{B}_0^c$ , et soit  $\tau$  une face de  $\sigma$  dont on note  $f$  son simplexe associé dans  $\mathcal{B}_0^c$  (une face de  $e$ ).

Les simplexes  $e$  et  $f$  dans  $\mathcal{B}_0^c$  sont contenus dans un pavé  $\tau_j$ . Si on regarde les simplexes  $e$  et  $f$  comme des sous-ensembles du pavé  $t_j$  de  $\mathbb{R}^2$ , on peut définir le vecteur  $x_{\sigma\tau}$  qui joint la ponctuation de  $f$  à celle de  $e$ .

Le problème de cette construction est que, dans le cas du pavage de type pinwheel, le vecteur  $x_{\sigma\tau}$  dépend du pavé  $\tau_j$  choisi, si  $e$  est un 1-simplexe (le vecteur est unique aux rotations près). Dans le cas des 2-simplexes, ce vecteur est unique puisque le quotient définissant  $\mathcal{B}_0^c$  ne concerne que les arêtes et les sommets des cellules.

Il faut donc trouver une façon de choisir ce vecteur dans le cas de 1-simplexes. Il y a plusieurs manières de faire ce choix.

En voici une : si  $e$  est un 1-simplexe, le vecteur sera obtenu en orientant l'arête horizontalement et de gauche à droite dans n'importe quel pavage de  $\Xi_\Delta(\sigma)$  :



Ainsi construits, les vecteurs  $x_{\sigma\tau}$  sont associés à  $\sigma$  et  $\tau$  de façon unique, comme dans le cas d'un pavage où l'on considère uniquement les translations (comme dans l'article [SB09]).

On définit l'action de  $x_{\sigma\tau}$  sur une fonction de  $C(\Xi_\Delta, \mathbb{Z})$  de la façon suivante :

- si  $\sigma$  est l'application caractéristique d'un 2-simplexe  $e$ , si  $\tau$  est une face de  $\sigma$  et si  $f \in C(\Xi_\Delta(\tau), \mathbb{Z})$  alors, pour  $[\omega] \in \Xi_\Delta(\sigma)$ , on définit

$$T^{x_{\sigma\tau}} f([\omega]) = f([\omega_0 + x_{\sigma\tau}]),$$

où  $\omega_0 \in [\omega]$  est orienté correctement, i.e l'origine de  $E_2$  appartient à la ponctuation d'une cellule  $e$  (un triangle) de  $\omega$  qui est incluse dans un unique pavé (image par une isométrie directe du pavé  $t_j$  utilisé pour construire  $x_{\sigma\tau}$ );  $\omega_0$  est alors le pavage obtenu en tournant  $\omega$  pour que ce pavé soit orienté de cette façon (i.e soit l'image par une translation de  $t_j$ ) :



- Si  $\sigma$  est l'application caractéristique d'un 1-simplexe, si  $\tau$  est une face de  $\sigma$  et si  $f \in C(\Xi_\Delta(\tau), \mathbb{Z})$  alors, pour  $[\omega] \in \Xi_\Delta(\sigma)$ , on définit

$$T^{x_{\sigma\tau}} f([\omega]) = f([\omega_0 + x_{\sigma\tau}]),$$

où  $\omega_0 \in [\omega]$  est orienté correctement, i.e l'origine de  $E_2$  appartient à la ponctuation d'une arête de  $\omega$ ;  $\omega_0$  est alors obtenu en tournant  $\omega$  pour amener cette arête horizontalement et l'orientation de celle-ci dans le sens positif (de gauche à droite).

On peut alors définir des opérateurs qui seront utiles dans la définition du bord de notre cohomologie :

**Définition 3.7** Soit  $\sigma$  l'application caractéristique d'un  $n$ -simplexe de  $\mathcal{B}_0^c$  et  $\tau$  celle d'un  $k$ -simplexe.

On définit l'opérateur  $\theta_{\sigma\tau}$  sur  $C(\Xi_\Delta, \mathbb{Z})$  par :

$$\theta_{\sigma\tau} = \begin{cases} \chi_\sigma T^{x_{\sigma\tau}} \chi_\tau & \text{si } \tau \subset \partial\sigma \text{ et } n = 1 \text{ ou } 2 \\ 0 & \text{sinon, i.e si } \tau \not\subset \partial\sigma \text{ ou } n = 0 \end{cases}$$

où  $\tau \subset \partial\sigma$  signifie que  $\tau$  est une face de  $\sigma$  de codimension 1.

Cet opérateur est assez simple à décrire : si on se donne une fonction  $f \in C(\Xi_\Delta(\tau), \mathbb{Z})$  et une classe  $[\omega] \in \Xi_\Delta$  alors  $\theta_{\sigma\tau}(f)([\omega])$  vaut 0 si  $\omega$  n'est pas dans  $\Xi_\Delta(\sigma)$  ou si  $\tau$  n'est pas une face de  $\sigma$  de codimension 1 ou si  $n \neq 1$  ou  $n \neq 2$ , et sinon,  $\theta_{\sigma\tau}(f)([\omega])$  est égal à la valeur que prend l'application  $f$  sur la classe du pavage obtenu à partir de  $\omega$  par une isométrie directe amenant l'origine sur la ponctuation de la face  $\tau$  de  $\sigma$ .

On peut à présent définir la cohomologie PV du pavage de type pinwheel.

Soit  $\mathcal{S}_0^n$  l'ensemble des applications caractéristiques  $\sigma : \Delta^n \rightarrow \mathcal{B}_0^c$  des  $n$ -simplexes de la décomposition de  $\mathcal{B}_0^c$  en complexe simplicial orienté, et  $\mathcal{S}_0$  la réunion des  $\mathcal{S}_0^n$ .

Le groupe des  $n$ -chaines simpliciales de  $\mathcal{B}_0^c$ ,  $C_{0,n}$ , est le groupe abélien libre de base  $\mathcal{S}_0^n$ .

Pour finir, il nous reste à définir le nombre incident qui permettra de définir la différentielle de la cohomologie PV :

**Définition 3.8** (voir [Eil44]) Soit  $\sigma$  et  $\tau$  deux simplexes de dimension  $n$  et  $n-1$ , le **nombre incident**  $[\sigma, \tau]$  est alors défini par :

$$\begin{aligned} [\sigma, \tau] &= \pm 1 & \text{si } \tau \subset \sigma \\ [\sigma, \tau] &= 0 & \text{sinon} \end{aligned}$$

Dans le cas où  $\tau$  est une face de  $\sigma$ ,  $[\sigma, \tau]$  vaut 1 si  $\tau$  a même orientation que celle induite par  $\sigma$  sur sa face  $\tau$  et ce nombre vaut  $-1$  si l'orientation est opposée.



**Définition 3.9**

La cohomologie PV de  $\Omega/S^1$  est la cohomologie du complexe  $\{C_{PV}^n, d_{PV}^n\}$ , où :

1. les groupes des cochaines sont les groupes des fonctions continues à valeurs entières sur  $\Xi_\Delta^n$  :  $C_{PV}^n = C(\Xi_\Delta^n, \mathbb{Z})$  pour  $n = 0, 1, 2$ , et  $C_{PV}^n = 0$  sinon,
2. la différentielle, notée  $d_{PV}$ , est donnée par la somme sur  $n = 1, 2$ , des opérateurs :

$$d_{PV}^n : \left\{ \begin{array}{l} C_{PV}^{n-1} \longrightarrow C_{PV}^n \\ d_{PV}^n = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_0^n} \sum_{i=0}^n [\sigma, \partial_i \sigma] \theta_{\sigma \partial_i \sigma} \end{array} \right. .$$

La "forme simpliciale" de  $d_{PV}^n$  permet d'obtenir facilement que  $d_{PV}^2 \circ d_{PV}^1 = 0$ . Cela vient du fait que l'on a, pour tout simplexe  $\sigma$  (voir [HY61]) :

$$\sum_{i,j} [\sigma, \partial_i \sigma] [\partial_i \sigma, \partial_j \partial_i \sigma] = 0.$$

Nous appellerons également cette cohomologie, de façon plus concise, la **cohomologie PV de  $\mathcal{T}$** .

Elle sera notée  $H_{PV}^*(\mathcal{B}_0^c; C(\Xi_\Delta, \mathbb{Z}))$ .

Le prochain paragraphe aura alors pour but de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 3.10** *La cohomologie de Čech à coefficients entiers de  $\Omega/S^1$  est isomorphe à la cohomologie PV de  $\mathcal{T}$  :*

$$\check{H}^*(\Omega/S^1; \mathbb{Z}) \cong H_{PV}^*(\mathcal{B}_0^c; C(\Xi_\Delta, \mathbb{Z})).$$

**3.3.2 Démonstration du théorème 3.10**

Encore une fois, nous suivons la ligne directrice de [SB09].

Nous commençons par définir une cohomologie PV de  $\mathcal{B}_p^c$ , notée  $H_{PV}^*(\mathcal{B}_p^c; C(\Sigma_p, \mathbb{Z}))$ . Nous montrerons que cette cohomologie n'est rien d'autre que la cohomologie simpliciale de  $\mathcal{B}_p^c$  dans la proposition 3.13 et ensuite nous montrerons que la cohomologie PV de  $\mathcal{T}$  est isomorphe à la limite inductive des cohomologies PV de la suite d'espaces de supertuiles utilisée dans le théorème 3.5.

Notons  $\mathcal{S}_p^n$  l'ensemble des applications caractéristiques  $\sigma_p : \Delta^n \rightarrow \mathcal{B}_p^c$  des  $n$ -simplexes de la décomposition en complexe simplicial orienté de  $\mathcal{B}_p^c$ , et  $\mathcal{S}_p$  la réunion (disjointe) des  $\mathcal{S}_p^n$ .

Le groupe des  $n$ -chaines simpliciales de  $\mathcal{B}_p^c$ ,  $C_{p,n}$ , est le groupe abélien libre de base  $\mathcal{S}_p^n$ .

Comme ci-dessus, si  $\sigma_p$  est un simplexe de  $\mathcal{B}_p^c$ , notons  $\Xi_{p,\Delta}(\sigma_p)$  le relevé de la ponctuation de son image dans  $\mathcal{B}_p^c$  et  $\chi_{\sigma_p}$  son indicatrice.  $\Xi_{p,\Delta}(\sigma_p)$  est appelée la *zone d'acceptance* de  $\sigma_p$ . C'est un clopen de la  $\Delta$ -transversale.

**Lemme 3.11** *Etant donné un simplexe  $\sigma$  de  $\mathcal{B}_0^c$ , sa zone d'acceptance est partitionnée par la zone d'acceptance de ses antécédents dans  $\mathcal{B}_p^c$  par  $F_p$  :*

$$\Xi_{\Delta}(\sigma) = \bigsqcup_{\sigma_p \in F_{p\#}^{-1}(\sigma)} \Xi_{p,\Delta}(\sigma_p),$$

où  $F_{p\#} : \mathcal{S}_p^n \rightarrow \mathcal{S}_0^n$  désigne l'application induite par  $F_p$  sur les simplexes.

La démonstration de ce lemme est analogue à celle de [SB09].

Remarquons que la réunion pour  $\sigma \in \mathcal{S}_0^n$  des  $F_{p\#}^{-1}(\sigma)$  est  $\mathcal{S}_p^n$ .

On note alors  $C_p^n$  le groupe des  $n$ -cochaines simpliciales  $Hom(C_{p,n}, \mathbb{Z})$ , qui est le dual du groupe des  $n$ -chaines  $C_{p,n}$ .

On peut représenter ce groupe de façon fidèle sur le groupe des fonctions continues à valeurs entières sur la  $\Delta$ -transversale  $C(\Xi_{\Delta}, \mathbb{Z})$  par :

$$\rho_{p,n} : \begin{cases} C_p^n & \longrightarrow & C(\Xi_{\Delta}^n, \mathbb{Z}) \\ \psi & \longmapsto & \sum_{\sigma_p \in \mathcal{S}_p^n} \psi(\sigma_p) \chi_{\sigma_p} \end{cases} .$$

On notera  $C(\Sigma_p^n, \mathbb{Z})$  l'image de  $\rho_{p,n}$ .

$\Sigma_p^n$  est l'ensemble des ponctuations des  $n$ -simplexes de  $\mathcal{B}_p^c$  et on notera  $\Sigma_p$  la réunion

$$\Sigma_p := \bigcup_{n=0}^2 \Sigma_p^n.$$

La représentation  $\rho_{p,n}$  est un isomorphisme sur son image  $C(\Sigma_p^n, \mathbb{Z})$ , son inverse étant défini comme suit : étant donné  $\phi = \sum_{\sigma_p \in \mathcal{S}_p^n} \phi_{\sigma_p} \chi_{\sigma_p}$ , où  $\phi_{\sigma_p}$  est un entier,  $\rho_{p,n}^{-1}(\phi)$  est le morphisme de groupe de  $C_{p,n}$  dans  $\mathbb{Z}$  qui prend la valeur  $\phi_{\sigma_p}$  sur l'application de base  $\sigma_p$ .

Considérons l'application caractéristique  $\sigma_p$  d'un  $n$ -simplexe  $e_p$  de  $\mathcal{B}_p^c$ . Ce simplexe est contenu dans une certaine supertuile  $\pi_j$ . En regardant  $e_p$  comme un sous-ensemble de la supertuile  $p_j$  de  $\mathbb{R}^2$ , on peut encore définir, de manière analogue à la méthode utilisée pour la cohomologie PV, le vecteur  $x_{\sigma_p \partial_i \sigma_p}$ , pour  $i = 0, \dots, n$ , qui relie la ponctuation de la  $i$ -ème face  $\partial_i e_p$  à la ponctuation de  $e_p$ .

Comme  $F_p$  préserve l'orientation des simplexes, ces vecteurs  $x_{\sigma_p \partial_i \sigma_p}$  sont identiques, pour tout  $\sigma_p$  dans la préimage d'une application caractéristique  $\sigma$  d'un simplexe  $e$  de  $\mathcal{B}_0^c$ , et ces vecteurs sont égaux au vecteur  $x_{\sigma \partial_i \sigma}$  définissant l'opérateur  $\theta_{\sigma \partial_i \sigma}$  dans la définition 3.7. De la même manière, on définit les opérateurs  $\theta_{\sigma_p \partial_i \sigma_p}$  par  $\chi_{\sigma_p} T^{x_{\sigma_p \partial_i \sigma_p}} \chi_{\partial_i \sigma_p}$ .

En utilisant la relation  $T^{x_{\sigma \partial_i \sigma}} \chi_{\partial_i \sigma} = \chi_{\sigma} T^{x_{\sigma \partial_i \sigma}}$  et le lemme 3.11, on a :

$$\theta_{\sigma \partial_i \sigma} = \sum_{\sigma_p \in F_{p\#}^{-1}(\sigma)} \theta_{\sigma_p \partial_i \sigma_p}.$$

Ainsi, la différentielle PV peut s'écrire :

$$d_{PV}^n = \sum_{\sigma_p \in \mathcal{S}_p^n} \sum_{i=0}^n [\sigma_p, \partial_i \sigma_p] \theta_{\sigma_p \partial_i \sigma_p},$$

et cela induit bien une différentielle de  $C(\Sigma_p^{n-1}, \mathbb{Z})$  sur  $C(\Sigma_p^n, \mathbb{Z})$  (comme  $F_p$  préserve l'orientation des simplexes, pour tout  $\sigma_p \in F_{p\#}^{-1}(\sigma)$ ,  $[\sigma_p, \partial_i \sigma_p] = [\sigma, \partial_i \sigma]$ , ce qui justifie l'écriture de la différentielle).

**Définition 3.12** Posons  $C_{PV}^n(p) = C(\Sigma_p^n, \mathbb{Z})$ , pour  $n = 0, 1, 2$  et  $C_{PV}^n(p) = 0$  sinon. La cohomologie PV de l'espace des supertuiles  $\mathcal{B}_p^c$ , notée  $H_{PV}^*(\mathcal{B}_0^c; C(\Sigma_p, \mathbb{Z}))$ , est la cohomologie du complexe  $\{C_{PV}^n(p), d_{PV}^n\}$ .

Comme dans [SB09], on obtient l'une des deux propositions cruciales dans la démonstration de 3.10 :

**Proposition 3.13** La cohomologie PV de l'espace des supertuiles  $\mathcal{B}_p^c$  est isomorphe à sa cohomologie simpliciale à coefficients entiers :

$$H_{PV}^*(\mathcal{B}_0^c; C(\Sigma_p, \mathbb{Z})) \cong H^*(\mathcal{B}_p^c; \mathbb{Z}).$$

**Démonstration :**

$\rho_{p,n}$  est un isomorphisme entre le groupe des cochaines simpliciales  $C_p^n$  et le groupe des cochaines  $C_{PV}^n(p)$ .

Si  $\psi \in C_p^{n-1}$ , et  $[\omega] \in \Xi_{\Delta}^n$  est tel que le  $n$ -simplexe entourant  $\mathbf{p}_p([\omega])$  soit  $\sigma_p \in \mathcal{S}_p^n$ , la différentielle de  $\rho_{p,n-1}(\psi)$  est donnée par :

$$d_{PV}^n \circ \rho_{p,n-1}(\psi)([\omega]) = \sum_{i=0}^n [\sigma_p, \partial_i \sigma_p] \psi(\partial_i \sigma_p).$$

De l'autre côté, la différentielle simpliciale de  $\psi$  est donnée par :

$$\delta^n \psi(\sigma_p) = \sum_{i=1}^n [\sigma_p, \partial_i \sigma_p] \psi(\partial_i \sigma_p),$$

donc

$$\rho_{p,n}(\delta^n \psi)([\omega]) = \sum_{i=1}^n [\sigma_p, \partial_i \sigma_p] \psi(\partial_i \sigma_p),$$

Ainsi, on obtient  $d_{PV}^n \circ \rho_{p,n-1} = \rho_{p,n} \circ \delta^n$  pour  $n = 1, 2$ .

La famille des isomorphismes  $\rho_{p,n}$  est donc un morphisme de chaines et induit donc des isomorphismes  $\rho_{p,n}^*$  entre les groupes de cohomologie de degré  $n$ .

□

Le lemme qui suit est trivial en utilisant le théorème **3.5** et permet d'obtenir la deuxième proposition cruciale dans la démonstration qui nous intéresse :

**Lemme 3.14** *Soit  $\{\mathcal{B}_l^c, f_l\}$  la suite d'espaces de supertuiles utilisée dans le théorème **3.5**. On a alors :*

$$\Xi_\Delta \cong \varprojlim (\Sigma_l, f_l)$$

et

$$C(\Xi_\Delta, \mathbb{Z}) \cong \varinjlim (C(\Sigma_l, \mathbb{Z}), f^l),$$

où  $f^l$  est l'application duale à  $f_l$ .

**Proposition 3.15** *Soit  $\{\mathcal{B}_l^c, f_l\}$  la suite du lemme précédent. Il existe alors un isomorphisme :*

$$H_{PV}^*(\mathcal{B}_0^c; C(\Xi_\Delta, \mathbb{Z})) \cong \varinjlim (H_{PV}^*(\mathcal{B}_0^c; C(\Sigma_l, \mathbb{Z})), f_l^*).$$

**Démonstration :**

Par le lemme **3.14** précédent, les groupes des cochaines  $C_{PV}^n$  sont les limites inductives des groupes des cochaines  $C_{PV}^n(l)$  des espaces de supertuiles  $\mathcal{B}_l^c$ .

Soit  $f_l^\# : C_{PV}^n(l) \rightarrow C_{PV}^n(l+1)$  l'application induite par  $f_l$  sur les groupes des cochaines de la cohomologie PV.

Comme la différentielle  $d_{PV}$  est la même pour les complexes de chaque espace des supertuiles  $\mathcal{B}_l^c$ , il suffit de vérifier que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{PV}^{n-1}(l) & \xrightarrow{d_{PV}^{n-1}} & C_{PV}^n(l) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_l^\# & & \downarrow f_l^\# & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_{PV}^{n-1}(l+1) & \xrightarrow{d_{PV}^{n-1}} & C_{PV}^n(l+1) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

et ce résultat est trivial en utilisant les relations  $(f_l^\# \phi)(\partial_i \sigma_l) = \phi(f_{l\#}(\partial_i \sigma_l))$  et  $f_{l\#}(\partial_i \sigma_l) = \partial_i(f_{l\#}(\sigma_l))$ .

□

On obtient ainsi le théorème **3.10** en utilisant le fait que la cohomologie de Čech envoie une limite projective sur une limite inductive, que la cohomologie de Čech est identique à la cohomologie simpliciale pour un  $CW$ -complexe (les  $\mathcal{B}_i^c$ ) et que celle-ci, pour  $\mathcal{B}_i^c$ , est la cohomologie PV de  $\mathcal{B}_i^c$  par la proposition **3.13**.

On conclut alors en disant que la limite de ces groupes est la cohomologie PV de  $\mathcal{T}$  grâce à la proposition **3.15**.

### 3.4 Le groupe des coinvariants entiers

Dans cette section, nous allons montrer que la cohomologie PV de degré maximal  $H_{PV}^2(\mathcal{B}_0^c; C(\Xi_\Delta, \mathbb{Z}))$  est isomorphe au groupe des coinvariants  $C(\Xi_\Delta^2, \mathbb{Z})/\sim$  de la transversale  $\Xi_\Delta^2$  et ainsi, la cohomologie de Čech à coefficients entiers de degré maximal de l'enveloppe continue l'est également, par le théorème **3.10**.

On peut identifier  $\Xi_\Delta^2$  et  $\Xi_\Delta^1$  à des sous-ensembles de  $\Omega$  de la même manière que nous avons identifié la transversale canonique  $\Omega_0/S^1$  au sous-ensemble  $\Xi$ .

En effet, il suffit dans chaque classe  $[\omega] \in \Xi_\Delta^n$  ( $n = 1, 2$ ) de choisir un représentant ayant la bonne orientation (celle qui a été utilisée p.76 pour définir le vecteur  $x_{\sigma\tau}$ ).

On obtient aussi une représentation des clopens  $\Xi_{p,\Delta}$  dans  $\Omega$  de cette manière.

On utilisera la même notation pour les sous-ensembles de  $\Omega/S^1$  et les sous-ensembles correspondant dans  $\Omega$ . Quand on prendra une classe dans  $\Xi_\Delta^n$  ou  $\Xi_{p,\Delta}$ , on se placera implicitement dans  $\Omega/S^1$  et si on prend un pavage de  $\Xi_\Delta^n$  ou  $\Xi_{p,\Delta}$ , on considèrera implicitement le sous-ensemble de  $\Omega$ .

Commençons par définir les coinvariants de la transversale canonique  $\Xi$  et de la  $\Delta$ -transversale  $\Xi_\Delta^n$  de degré  $n$  ( $n = 1, 2$ ).

Pour ce qui suit,  $\Xi_0$  désignera indifféremment  $\Xi$  ou  $\Xi_\Delta^n$  ( $n = 1, 2$ ) (sous-ensembles de  $\Omega$ ).

Soit  $\omega_0 \in \Xi_0$  et  $\mathcal{A}_{\omega_0}$  un patch de  $\omega_0$  autour de l'origine, on pose

$$U(\omega_0, \mathcal{A}_{\omega_0}) := \{\omega' \in \Xi_0 \mid \omega_0 \text{ et } \omega' \text{ coïncident sur } \mathcal{A}_{\omega_0}\},$$

qui est un clopen de  $\Xi_0$ .

Vu dans  $\Omega/S^1$ , ce clopen est

$$V([\omega_0], \mathcal{A}_{\omega_0}) := \{[\omega_1] \in \Xi_0 \mid \omega_0 \text{ et } \omega_1 \text{ coïncident sur } \mathcal{A}_{\omega_0} \text{ aux rotations près}\}.$$

Par hypothèse, notre pavage  $\mathcal{T}$  est de  $\mathbb{R}^2 \times SO(2)$ -type fini donc la famille

$$\{U(\omega_0, \mathcal{A}_{\omega_0}), \omega_0 \in \Xi_0, \mathcal{A}_{\omega_0} \text{ patch de taille } k \text{ de } \omega_0 \text{ autour de } O, k \in \mathbb{N}\}$$

est dénombrable.

Si  $\mathcal{G} = \Omega \rtimes (\mathbb{R}^2 \rtimes SO(2))$  représente le groupoïde associé à nos pavages,  $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_{\Xi_0}^{\Xi_0}$  désignera le groupoïde restreint à la transversale (voir [Ren80] ou la définition 2.17).

Ce groupoïde est formé par les éléments du groupoïde  $\mathcal{G}$  qui ont leur but et leur source dans  $\Xi_0$ .

On pose alors pour  $\omega_0 \in \Xi_0$  :

$$\mathcal{G}\left(U(\omega_0, \mathcal{A}_{\omega_0})\right) = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2) \mid (\omega_0, x, \theta) \in \mathcal{G}_0 \text{ et } x \in \mathcal{A}_{\omega_0}\},$$

où  $x \in \mathcal{A}_{\omega_0}$  signifie que  $x$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^2$  inclus dans le patch  $\mathcal{A}_{\omega_0}$ .

L'ensemble  $\mathcal{G}\left(U(\omega_0, \mathcal{A}_{\omega_0})\right)$  est défini de cette façon car, si on prend un pavage  $\omega'$  du clopen  $U(\omega_0, \mathcal{A}_{\omega_0})$ , on ne connaît ce pavage que sur le patch  $\mathcal{A}_{\omega_0}$  et donc on a :

$$\forall (x, \theta) \in \mathcal{G}\left(U(\omega_0, \mathcal{A}_{\omega_0})\right), \forall \omega' \in U(\omega_0, \mathcal{A}_{\omega_0}), \omega' \cdot (x, \theta) \in \Xi_0.$$

Le groupe des coinvariants de  $\Xi_0$  est alors le quotient de  $C(\Xi_0, \mathbb{Z})$  par le sous-groupe  $H_{\Xi_0}$  engendré par la famille

$$\{\chi_{U(\omega_0, \mathcal{A}_{\omega_0})} - \chi_{U(\omega_0, \mathcal{A}_{\omega_0}) \cdot (x, \theta)} \mid (x, \theta) \in \mathcal{G}(U(\omega_0, \mathcal{A}_{\omega_0})), \omega_0 \in \Xi_0\}.$$

**Théorème 3.16**

$$H_{PV}^2(\mathcal{B}_0^c; C(\Xi_\Delta, \mathbb{Z})) \cong C(\Xi_\Delta^2, \mathbb{Z})/H_{\Xi_\Delta^2}$$

**Démonstration :**

Par définition, cette cohomologie est donnée par  $C(\Xi_\Delta^2, \mathbb{Z})/\text{Im}(d_{PV}^2)$ .

Nous allons montrer que  $\text{Im}(d_{PV}^2) = H_{\Xi_\Delta^2}$ .

1. Si  $f \in \text{Im}(d_{PV}^2)$ , il existe  $g \in C(\Xi_\Delta^1, \mathbb{Z})$  telle que  $f = d_{PV}^2(g)$ .

Comme  $C(\Xi_\Delta^1, \mathbb{Z})$  est engendré par les indicatrices de la forme  $\chi_{U(\omega, \mathcal{A}_\tau^\omega)}$  avec  $\tau \in \mathcal{S}_p^1$  pour  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\omega \in \Xi_{p, \Delta}(\tau)$  et  $\mathcal{A}_\tau^\omega$  un patch de  $\omega$  autour de l'origine (en fait autour de l'arête se projetant sur  $\tau$ ) assez grand pour recouvrir la (les) première(s) couronne(s) de la (des deux) supertuile(s) entourant  $\tau$  dans  $\omega$ , il suffit de montrer le résultat pour  $f = d_{PV}^2(\chi_{U(\omega, \mathcal{A}_\tau^\omega)})$  pour  $\tau$  dans  $\mathcal{S}^1 := \bigcup \mathcal{S}_p^1$ . Fixons nous un  $\tau$  dans  $\mathcal{S}_p^1$ ,  $\omega$  dans  $\Xi_{p, \Delta}(\tau)$  et  $\mathcal{A}_\tau^\omega$  un patch autour de l'origine (et donc autour de "l'arête"  $\tau$ ) assez grand, alors  $\chi_{U(\omega, \mathcal{A}_\tau^\omega)}$  correspond à l'indicatrice de l'ensemble des pavages de  $\Omega$  ayant l'origine sur la ponctuation de  $\tau$  et qui coïncident sur le patch  $\mathcal{A}_\tau^\omega$  avec  $\omega$ .

Remarquons que si  $\tau'$  est la fonction caractéristique d'un autre 1-simplexe, alors

$$\chi_{\tau'} \chi_{U(\omega, \mathcal{A}_\tau^\omega)} = \delta_{\tau\tau'} \chi_{U(\omega, \mathcal{A}_\tau^\omega)}.$$

Comme de plus,  $\mathcal{A}_\tau^\omega$  a été choisi assez grand, celui-ci caractérise la (les deux) supertuille(s) couronnée(s) entourant le simplexe correspondant à  $\tau$  dans les pavages de  $U(\omega, \mathcal{A}_\tau^\omega)$ . Ainsi, en notant  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$  les deux applications caractéristiques des 2-simplexes ayant  $\tau$  comme arête dans  $\omega$  et la (les) supertuille(s) couronnée(s) ci-dessus (respectives) pour supertuille(s) dans  $\mathcal{B}_p^c$ , on a : pour  $\sigma \in \mathcal{S}_p^2$

$$\chi_\sigma \chi_{U(\omega^0, \mathcal{A}_\tau^0)} = \delta_{\sigma\sigma_0} \chi_{U(\omega^0, \mathcal{A}_\tau^0)}$$

et

$$\chi_\sigma \chi_{U(\omega^1, \mathcal{A}_\tau^1)} = \delta_{\sigma\sigma_1} \chi_{U(\omega^1, \mathcal{A}_\tau^1)}$$

où  $\omega^i = R_{\theta_i}(\omega) - x_{\sigma_i\tau}$  ( $i = 0, 1$ ),  $\omega^i \in \Xi_{p,\Delta}(\sigma_i)$  et  $\mathcal{A}_\tau^i = R_{\theta_i}(\mathcal{A}_\tau^\omega) - x_{\sigma_i\tau}$  ( $\omega^i$  sont les pavages de  $\Xi_{p,\Delta}(\sigma_i)$  obtenus à partir de  $\omega$  par une isométrie directe qui place l'origine sur la ponctuation de  $\sigma_i$  et tournant  $\omega^i$  pour obtenir la bonne orientation).

Grâce à ces trois remarques, on trouve facilement :

$$d_{PV}^2(\chi_{U(\omega, \mathcal{A}_\tau^\omega)}) = \pm(\chi_{U(\omega^0, \mathcal{A}_\tau^0)} - \chi_{U(\omega^1, \mathcal{A}_\tau^1)}),$$

avec  $\omega^1 = \omega^0 \cdot (R_{\theta_0 - \theta_1}(x_{\sigma_1\tau}) - x_{\sigma_0\tau}, \theta_0 - \theta_1)$  et  $\mathcal{A}_\tau^1$  de la même forme.

Donc

$$d_{PV}^2(\chi_{U(\omega, \mathcal{A}_\tau^\omega)}) = \pm(\chi_{U(\omega^0, \mathcal{A}_\tau^0)} - \chi_{U(\omega^0, \mathcal{A}_\tau^0) \cdot (y_{\sigma_0\sigma_1}, \theta_{\sigma_0\sigma_1})}),$$

où  $y_{\sigma_0\sigma_1} = R_{\theta_0 - \theta_1}(x_{\sigma_1\tau}) - x_{\sigma_0\tau}$ ,  $\theta_{\sigma_0\sigma_1} = \theta_0 - \theta_1$  et donc

$$(y_{\sigma_0\sigma_1}, \theta_{\sigma_0\sigma_1}) \in \mathcal{G}(U(\omega_0, \mathcal{A}_{\omega_0})).$$

On a ainsi montré que  $d_{PV}^2(\chi_{U(\omega, \mathcal{A}_\tau^\omega)}) \in H_{\Xi_\Delta^2}$  et ainsi  $\text{Im}(d_{PV}^2) \subset H_{\Xi_\Delta^2}$ .

2. L'inclusion inverse est assez simple à obtenir en raisonnant encore sur les générateurs.

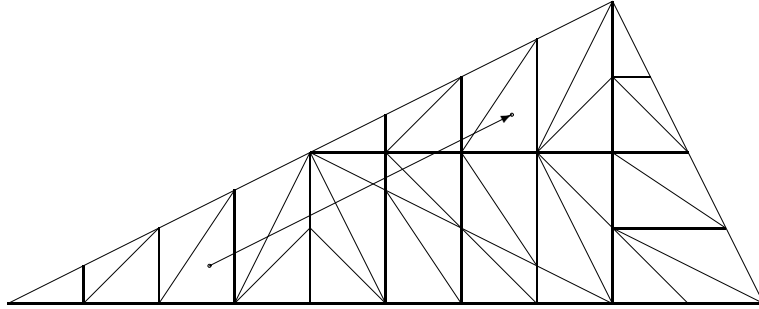
Soit  $\chi_{U(\omega, \mathcal{A}_\omega)} - \chi_{U(\omega, \mathcal{A}_\omega) \cdot (x, \theta)}$  un générateur de  $H_{\Xi_\Delta^2}$ .

En recouvrant  $\mathcal{A}_\omega$  par des supertuiles d'ordre assez grand, on peut supposer que  $\mathcal{A}_\omega$  est une supertuille couronnée ou réunion de deux supertuiles couronnées de même ordre ou une étoile de supertuiles couronnées de même ordre (une étoile de supertuiles est l'ensemble des supertuiles autour d'un sommet fixé).

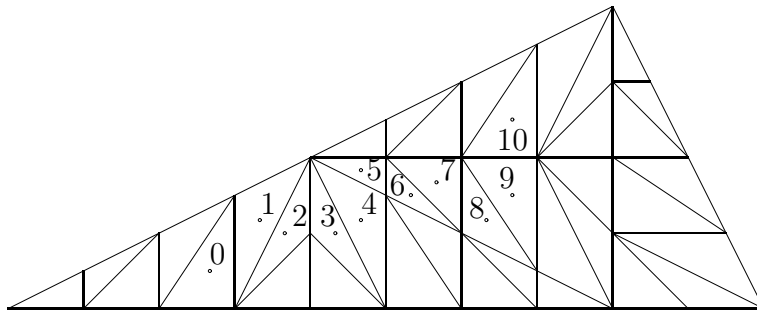
Prenons donc un  $\omega \in \Xi_\Delta^2$  et  $\mathcal{A}_\omega$  un patch constitué de supertuiles d'ordre  $p$  autour de l'origine de la forme ci-dessus que l'on appellera *patch couronné*.

Vu la forme du patch couronné, on peut alors trouver une suite de pavages  $\omega_0, \dots, \omega_n$  telle que  $\omega_0 = \omega$ ,  $\omega_n = \omega \cdot (x, \theta)$ ,  $\omega_i = \omega \cdot (x_i, \theta_i)$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , avec  $(x_i, \theta_i) \in \mathcal{G}(U(\omega, \mathcal{A}_\omega))$  et tel que le 2-simplexe de  $\omega_i$  contenant l'origine ait une arête en commun avec le 2-simplexe de  $\omega_{i-1}$  qui contenait l'origine (voir figure ci-dessous).

Si par exemple, on a le patch ci-dessous, avec les deux ponctuations représentant les pavages  $\omega$  et  $\omega.(x, \theta)$  (sur la figure on a en fait représenté  $\omega$  et  $\omega - x$ , il faut donc imaginer que l'on représente les pavages par des points puis qu'il faut tourner le pavage pour amener le pavé contenant l'origine dans le bon sens) :



On peut alors représenter la suite des pavages reliant  $\omega$  à  $\omega.(x, \theta)$  par la suite de ponctuations suivante (il n'y a pas qu'un seul trajet possible) :



On peut décomposer  $\chi_{U(\omega, \mathcal{A}_\omega)} - \chi_{U(\omega, \mathcal{A}_\omega).(x, \theta)}$  en la somme des différences

$$\chi_{U(\omega_i, \mathcal{A}_\omega.(x_i, \theta_i))} - \chi_{U(\omega_{i+1}, \mathcal{A}_\omega.(x_{i+1}, \theta_{i+1}))}$$

où  $\omega_i, \omega_{i+1}$  sont deux pavages de  $\Xi_\Delta^2$  image par une isométrie directe  $(x_i, \theta_i)$ , resp.  $(x_{i+1}, \theta_{i+1})$  de  $\omega$  et ayant l'origine sur la ponctuation de deux simplexes ayant une arête en commun.

On considère donc dans la suite la différence

$$\chi_{U(\omega_1, \mathcal{A}_\omega.(x_1, \theta_1))} - \chi_{U(\omega_2, \mathcal{A}_\omega.(x_2, \theta_2))}$$

avec  $\omega_1 = \omega.(x_1, \theta_1)$ ,  $\omega_2 = \omega.(x_2, \theta_2)$  et  $(x_k, \theta_k) \in \mathcal{G}(U(\omega, \mathcal{A}_\omega))$ .



On a alors  $\omega_2 = \omega_1 \cdot (x_{12}, \theta_{12})$  avec  $(x_{12}, \theta_{12}) = (x_1, \theta_1)^{-1}(x_2, \theta_2)$ .

Ainsi :  $\chi_U(\omega_1, \mathcal{A}_\omega \cdot (x_1, \theta_1)) - \chi_U(\omega_2, \mathcal{A}_\omega \cdot (x_2, \theta_2))$  est égal à

$$\chi_U(\omega_1, \mathcal{A}_\omega \cdot (x_1, \theta_1)) - \chi_U(\omega_1, \mathcal{A}_\omega \cdot (x_1, \theta_1)) \cdot (x_{12}, \theta_{12})$$

et est donc la différentielle de l'indicatrice de  $U(\omega_3, \mathcal{A}'_\omega)$  où  $\omega_3$  est le pavage de  $\Xi_\Delta^1$  qui a l'origine sur la ponctuation de l'arête commune aux deux simplexes ci-dessus et  $\mathcal{A}'_\omega$  est le patch obtenu à partir de  $\mathcal{A}_\omega$  par isométrie directe en amenant l'origine sur cette ponctuation et en prenant l'orientation adéquate. Ainsi, les générateurs de  $H_{\Xi_\Delta^2}$  sont images par  $d_{PV}^2$  d'éléments de  $C(\Xi_\Delta^1, \mathbb{Z})$  et l'inclusion réciproque est donc démontrée. □

Par le théorème 3.10 et le fait que  $\check{H}^3(\Omega; \mathbb{Z}) \simeq \check{H}^2(\Omega/S^1; \mathbb{Z})$ , on obtient donc :

**Corollaire 3.17** *La cohomologie de Čech de degré maximal à coefficients entiers de l'enveloppe continue est isomorphe au groupe des coinvariants de  $\Xi_\Delta^2$  :*

$$\check{H}^3(\Omega; \mathbb{Z}) \simeq C(\Xi_\Delta^2, \mathbb{Z})/H_{\Xi_\Delta^2}.$$

A présent, la mesure ergodique invariante  $\mu$  sur  $\Omega$  induit une mesure  $\mu_0^t$  sur toute transversale  $\Xi_0$  du feuilletage qui est donnée, localement, par : si  $(V_i \times S_i \times C_i, h_i^{-1})_i$  est un atlas maximal de l'espace feuilleté, alors, si  $B$  est un borélien inclus dans  $C_i$ , on a

$$\mu_0^t(B) = \frac{\mu(h_i^{-1}(V_i \times S_i \times B))}{\lambda(V_i \times S_i)}$$

où  $\lambda$  est une mesure de Haar invariante à gauche et à droite sur  $\mathbb{R}^2 \times S^1$  (avec  $\lambda([0; 1]^2 \times S^1) = 1$ ),  $h_i^{-1} : V_i \times S_i \times C_i \rightarrow U_i$ ,  $V_i$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $S_i$  un ouvert de  $S^1$  et  $C_i$  un clopen de  $\Xi_0$ .

On a alors un lien entre la  $\Delta$ -transversale et la transversale canonique :

**Lemme 3.18**  *$C(\Xi_\Delta^2, \mathbb{Z})/H_{\Xi_\Delta^2}$  est isomorphe à  $C(\Xi, \mathbb{Z})/H_\Xi$ .*

*Notons  $\mu_3^t$  la mesure induite par  $\mu$  sur  $\Xi \cup \Xi_\Delta^2$  qui est une transversale de  $\Omega$ . En considérant  $\mu^t$  (resp.  $\mu_2^t$ ) la restriction de  $\mu_3^t$  à  $\Xi$  (resp.  $\Xi_\Delta^2$ ), on a alors :*

$$\mu_2^t(C(\Xi_\Delta^2, \mathbb{Z})) = \mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z})).$$

**Démonstration :**

Dans chaque proto-tuile, il y a 8 ponctuations de 2-simplexes qu'on peut numéroter de 1 à 16 une fois pour toute (on considère les 2 proto-tuiles non couronnées du pavage de type pinwheel et on numérote les ponctuations de la première proto-tuile de 1 à 8 et celles de la deuxième de 9 à 16). Ainsi, on peut définir les vecteurs  $x_{0,i}$  reliant la ponctuation de la proto-tuile dans la définition de  $\Xi$  (voir **3.1**) à la ponctuation du  $i^{\text{ème}}$ -simplexe de cette proto-tuile.

Définissons l'application  $\Psi : C(\Xi_{\Delta}^2, \mathbb{Z}) \longrightarrow C(\Xi, \mathbb{Z})$  par :

$$\Psi(f)(\omega_0) = \begin{cases} \sum_{i=1}^8 f(\omega_0 - x_{0,i}) \\ \sum_{i=9}^{16} f(\omega_0 - x_{0,i}) \end{cases}$$

suivant le type de pavé contenant l'origine dans  $\omega_0$ .

Cette application envoie une fonction  $f$  définie sur  $\Xi_{\Delta}^2$  sur la fonction de  $\Xi$  définie en un pavage  $\omega_0$  ayant l'origine sur la ponctuation d'un pavé, comme la somme des valeurs de  $f$  aux pavages ayant l'origine sur la ponctuation des cellules constituant ce pavé.

Ceci définit un morphisme de groupes trivialement surjectif.

En effet, fixons nous un simplexe de chaque proto-tuile (par exemple le 1 pour la première proto-tuile et le 9 pour la deuxième), alors on peut définir une section de  $\Psi$  en prenant  $s : C(\Xi, \mathbb{Z}) \longrightarrow C(\Xi_{\Delta}^2, \mathbb{Z})$  comme suit :

$$s(f)(\omega_{\Delta}) = \begin{cases} f(\omega_{\Delta} + x_{0,1}) & \text{si } \omega_{\Delta} \text{ a l'origine dans un pavé congruent} \\ & \text{a la première proto-tuile et dans un "1" simplexe} \\ f(\omega_{\Delta} + x_{0,9}) & \text{si } \omega_{\Delta} \text{ a l'origine dans un pavé congruent} \\ & \text{a la deuxième proto-tuile et dans un "9" simplexe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors  $\Psi$  induit un morphisme surjectif

$$\bar{\Psi} : C(\Xi_{\Delta}^2, \mathbb{Z})/H_{\Xi_{\Delta}^2} \longrightarrow C(\Xi, \mathbb{Z})/H_{\Xi}$$

puisque  $\Psi$  envoie les générateurs de  $H_{\Xi_{\Delta}^2}$  dans  $H_{\Xi}$ .

$s$  induit également un morphisme  $\bar{s} : C(\Xi, \mathbb{Z})/H_{\Xi} \longrightarrow C(\Xi_{\Delta}^2, \mathbb{Z})/H_{\Xi_{\Delta}^2}$  puisque  $s(H_{\Xi}) \subset H_{\Xi_{\Delta}^2}$ .

Montrons que  $\bar{\Psi}$  est un isomorphisme et que  $\bar{\Psi}^{-1} = \bar{s}$ .

Comme  $\Psi \circ s = id$ , on a  $\bar{\Psi} \circ \bar{s} = id$ .

On doit alors montrer que  $\bar{s} \circ \bar{\Psi} = id$  pour montrer le premier point.

Soit  $\omega_\Delta \in \Xi_\Delta^2$  (ayant un simplexe "i" autour de l'origine et le pavé entourant l'origine étant du premier type pour simplifier) et  $\mathcal{A}_{\omega_\Delta}$  un patch de  $\omega_\Delta$  autour de l'origine, on a alors :

$$\begin{aligned} \bar{s} \circ \bar{\Psi}([\chi_{U(\omega_\Delta, \mathcal{A}_\Delta)})] &= [s \circ \Psi(\chi_{U(\omega_\Delta, \mathcal{A}_\Delta)})] \\ &= [s(\chi_{U(\omega_\Delta, \mathcal{A}_\Delta) + x_{0,i}})] \\ &= [\chi_{U(\omega_\Delta, \mathcal{A}_\Delta) + x_{0,i} - x_{0,1}}] \\ &= [\chi_{U(\omega_\Delta, \mathcal{A}_\Delta)}] \end{aligned}$$

la dernière égalité venant de la définition de  $H_{\Xi_\Delta^2}$  et du fait que  $-x_{0,i} + x_{0,1}$  est un élément de  $\mathcal{G}(U(\omega_\Delta, \mathcal{A}_\Delta))$  puisque  $\mathcal{A}_{\omega_\Delta}$  contient la tuile entourant l'origine dans  $\omega_\Delta$ .

Ainsi  $\bar{s} \circ \bar{\Psi} = id$  et  $\bar{\Psi}$  est un isomorphisme de  $C(\Xi_\Delta^2, \mathbb{Z})/H_{\Xi_\Delta^2}$  sur  $C(\Xi, \mathbb{Z})/H_\Xi$ .

On va montrer que ce morphisme préserve les mesures.

Soit  $\omega \in \Xi_\Delta^2$  (on supposera que l'origine est sur la ponctuation du  $k^{\text{ème}}$  simplexe) et  $f = \chi_{U(\omega, \mathcal{A}_\omega)}$  un générateur de  $C(\Xi_\Delta^2, \mathbb{Z})$ .

On a alors  $\Psi(f) = \chi_{U(\omega, \mathcal{A}_\omega) + x_{0,k}}$  et donc

$$\mu^t(\Psi(f)) = \mu^t(U(\omega, \mathcal{A}_\omega) + x_{0,k}) = \mu_3^t(U(\omega, \mathcal{A}_\omega) + x_{0,k})$$

car  $\mu^t$  est la restriction de  $\mu_3^t$  à  $\Xi$ .

Donc  $\mu^t(U(\omega, \mathcal{A}_\omega) + x_{0,k}) = \mu_3^t(U(\omega, \mathcal{A}_\omega))$  par invariance de  $\mu_3^t$ .

Finalement, on obtient  $\mu^t(U(\omega, \mathcal{A}_\omega) + x_{0,k}) = \mu_2^t(U(\omega, \mathcal{A}_\omega))$ .

Ainsi,  $\Psi$  préserve les mesures et  $\mu_2^t(C(\Xi_\Delta^2, \mathbb{Z})) \subset \mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z}))$ .

L'inclusion réciproque est obtenue facilement grâce à la section  $s$  :

si  $\mu^t(f) \in \mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z}))$  alors

$$\mu^t(f) = \mu^t(\Psi \circ s(f)) = \mu_2^t(s(f)) \in \mu_2^t(C(\Xi_\Delta^2, \mathbb{Z})),$$

donc l'inclusion réciproque est démontrée ainsi que le lemme. □

**Corollaire 3.19** *La cohomologie de Čech de degré maximal de l'enveloppe continue est isomorphe au groupe des coinvariants entiers de la transversale canonique :*

$$\check{H}^3(\Omega; \mathbb{Z}) \simeq C(\Xi, \mathbb{Z})/H_\Xi.$$

# Chapitre 4

## Gap-labeling pour les pavages de type pinwheel

### 4.1 Démonstration de la conjecture

Pour prouver le gap-labeling pour les pavages de type pinwheel, c'est-à-dire

$$[C_{\mu^t}](Ch_{\tau}(K_1(\Omega))) \subset \mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z})),$$

on doit à présent montrer que l'inclusion de  $C(\Xi_{\Delta}^2, \mathbb{Z})$  dans  $C(\Xi_{\Delta}^2, \mathbb{R})$  se traduit au niveau des groupes de cohomologies en l'application

$$r_* : \check{H}^3(\Omega; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{\tau}^3(\Omega)$$

induite par l'inclusion de faisceaux décrite dans [MS06] (voir le diagramme p.91).

Nous allons dans un premier temps regarder comment les générateurs des coinvariants  $C(\Xi_{\Delta}^2, \mathbb{Z})/H_{\Xi_{\Delta}^2}$  se relèvent dans  $\check{H}^2(\Omega/S^1; \mathbb{Z})$ .

On considère dans ce qui suit la suite  $\{\mathcal{B}_l^c, f_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  du théorème 3.5.

La famille  $(\Xi_{l, \Delta}(\sigma_l))_{\sigma_l \in \mathcal{S}_l^2, l \in \mathbb{N}}$  est alors une base de voisinage de  $\Xi_{\Delta}^2$  et les indicatrices  $\chi_{\sigma_l}$  engendrent donc  $C(\Xi_{\Delta}^2, \mathbb{Z})$ .

Fixons nous l'une de ces indicatrices  $\chi_{\sigma_l}$ . Cette fonction appartient en fait, par définition, à  $C(\Sigma_l^2, \mathbb{Z})$  et définit donc une classe dans le groupe de cohomologie  $H_P^2(\mathcal{B}_0^c; C(\Sigma_l, \mathbb{Z}))$  qui est isomorphe au groupe de cohomologie simpliciale  $H^2(\mathcal{B}_l^c; \mathbb{Z})$  de  $\mathcal{B}_l^c$ . C'est la classe de la cochaîne qui associe à toute application caractéristique  $\sigma$  de  $\mathcal{B}_l^c$  l'entier 1 si  $\sigma = \sigma_l$  et 0 sinon.

On aimerait connaître quelle est l'image de cette classe sous l'isomorphisme reliant la cohomologie simpliciale à la cohomologie de Čech.

Pour cela, si on se réfère à [HY61] 5-5 et 8-2, cet isomorphisme est obtenu en considérant les recouvrements de  $\mathcal{B}_l^c$  formés par les ouverts étoilés associés aux décompositions barycentriques successives de  $\mathcal{B}_l^c$ .

On note  $\mathcal{U}_n$  le recouvrement de  $\mathcal{B}_l^c$  par les ouverts étoilés associés à la  $n^{\text{ème}}$  décomposition barycentrique de  $\mathcal{B}_l^c$  sachant que les ouverts étoilés sont obtenus en prenant l'intérieur de la réunion des 2-simplexes entourant les sommets de la structure de complexe simplicial orienté de la  $n^{\text{ème}}$  décomposition barycentrique de  $\mathcal{B}_l^c$ .

La cohomologie de Čech de dimension 2 de  $\mathcal{B}_l^c$  à coefficients entiers est alors la limite inductive sur la famille  $\mathcal{U}_n$  des cohomologies  $\check{H}^2(\mathcal{U}_n; \mathbb{Z})$ .

Nous aurons besoin de rétrécir ces ouverts pour la suite de la preuve. Nous ne prendrons pas les recouvrements par des ouverts étoilés complets, nous considérerons des ouverts assez grands (pour pouvoir recouvrir tout l'espace) inclus dans les ouverts étoilés. Il suffit pour cela de prendre, par exemple, les ouverts obtenus à partir des ouverts étoilés par homothétie de rapport  $\frac{5}{6}$  centré au sommet utilisé pour formé l'ouvert étoilé en question. On appellera ces ouverts des ouverts pseudo-étoilés.

De cette façon, on s'assure que le centre de gravité d'un 2-simplexe appartient à l'intersection des 3 ouverts pseudo-étoilés formés par les 3 sommets du simplexe et donc la famille  $\mathcal{U}'_n$  des ouverts pseudo-étoilés, obtenue à partir de la  $n^{\text{ème}}$  décomposition barycentrique, est bien un recouvrement ouvert de  $\mathcal{B}_l^c$ .

De plus, la famille des recouvrements  $\mathcal{U}'_n$  est encore une famille "cofinale" de recouvrements de  $\mathcal{B}_l^c$  et donc

$$\check{H}^2(\mathcal{B}_l^c; \mathbb{Z}) = \varinjlim \check{H}(\mathcal{U}'_n; \mathbb{Z}).$$

La classe de  $\chi_{\sigma_l}$  dans les coinvariants s'envoie alors sur la classe, dans  $\check{H}^2(\mathcal{B}_l^c; \mathbb{Z})$ , de la cochaîne  $g_{\sigma_l}$  de  $\check{H}^2(\mathcal{U}'_0; \mathbb{Z})$  définie en prenant la section nulle pour les 2-simplexes  $(U'_1, U'_2, U'_3)$  dont l'intersection n'est pas incluse dans le simplexe  $\sigma_l$  et en prenant la section constante égale à 1 pour le simplexe constitué par les ouverts pseudo-étoilés "entourant" le simplexe  $\sigma_l$  en respectant l'orientation de  $\sigma_l$ .

Si on note à présent  $U_1, U_2$  et  $U_3$  les 3 ouverts étoilés entourant  $\sigma_l$ , on voit que la classe qu'on vient de définir précédemment dans  $\check{H}^2(\mathcal{B}_l^c; \mathbb{Z})$  se relève dans la cohomologie à support compact  $\check{H}_c^2(U; \mathbb{Z}) := \check{H}^2(U, \partial U; \mathbb{Z})$  (où  $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$ ) en la cochaîne  $h_{\sigma_l}$  à support compact "valant 1 sur l'intersection des 3 ouverts pseudo-étoilés entourant  $\sigma_l$ ".

Maintenant, si on revient à la cohomologie de  $\Omega/S^1$ , on voit que l'isomorphisme du théorème 3.10 envoie la classe de  $\sigma_l$  sur la classe de  $\mathbf{p}_l^*([g_{\sigma_l}])$  de  $\check{H}^2(\Omega/S^1; \mathbb{Z})$  qui se relève en  $\mathbf{p}_l^*([h_{\sigma_l}])$  dans  $\check{H}_c^2(U \times \Xi_{l,\Delta}(\sigma_l); \mathbb{Z})$ .

En effet, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \check{H}_c^2(U; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \check{H}^2(\mathcal{B}_l^c; \mathbb{Z}) \\ \mathbf{p}_l^* \downarrow & & \downarrow \mathbf{p}_l^* \\ \check{H}_c^2(U \times \Xi_{l,\Delta}(\sigma_l); \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \check{H}^2(\Omega/S^1; \mathbb{Z}) \end{array}$$

où les applications horizontales sont induites par l'inclusion des ouverts  $U$  et  $U \times \Xi_{l,\Delta}(\sigma_l) = \mathfrak{p}_l^{-1}(U)$  dans  $\mathcal{B}_l^c$  et  $\Omega/S^1$  respectivement.

On se fixe alors un tel ouvert  $U \times K$  où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $K$  est un clopen de  $\Xi_\Delta^2$ .

On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
C(K, \mathbb{Z}) \hookrightarrow & & C(K, \mathbb{R}) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\check{H}_c^2(\mathbb{R}^2 \times K; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{r_*} & H_{\tau_c}^2(\mathbb{R}^2 \times K) & \xrightarrow{\mu_2^t} & \mathbb{R} \\
\downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \uparrow \\
\check{H}_c^3(\mathbb{R}^2 \times S^1 \times K; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{r_*} & H_{\tau_c}^3(\mathbb{R}^2 \times S^1 \times K) & \xrightarrow{[C_{\mu_2^t}]} & \mathbb{R} \\
\downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \uparrow \\
\check{H}_c^3(\Omega \setminus F; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{r_*} & H_\tau^3(\Omega) & \xrightarrow{[C_{\mu_2^t}]} & \mathbb{R} \\
\downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
\check{H}^2(\Omega/S^1; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & \check{H}_c^2((\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{r_*} & H_\tau^3(\Omega)
\end{array}$$

Les flèches horizontales faisant intervenir des cohomologies représentent toutes l'application restriction  $r_*$  décrite dans [MS06].

$C(K, \mathbb{Z}) \hookrightarrow C(K, \mathbb{R})$  est l'inclusion.

$\check{H}_c^2(\mathbb{R}^2 \times K) \simeq C(K, \mathbb{Z})$  et  $H_{\tau_c}^2(\mathbb{R}^2 \times K) \simeq C(K, \mathbb{R})$  sont des isomorphismes de Thom et donc sont naturels pour les applications entre faisceaux.

Les flèches verticales sont les applications induites en cohomologie à support compact par l'inclusion d'un ouvert dans un espace et sont donc des morphismes naturels.

Nous remarquons ensuite que le diagramme suivant est composé par des diagrammes commutatifs :

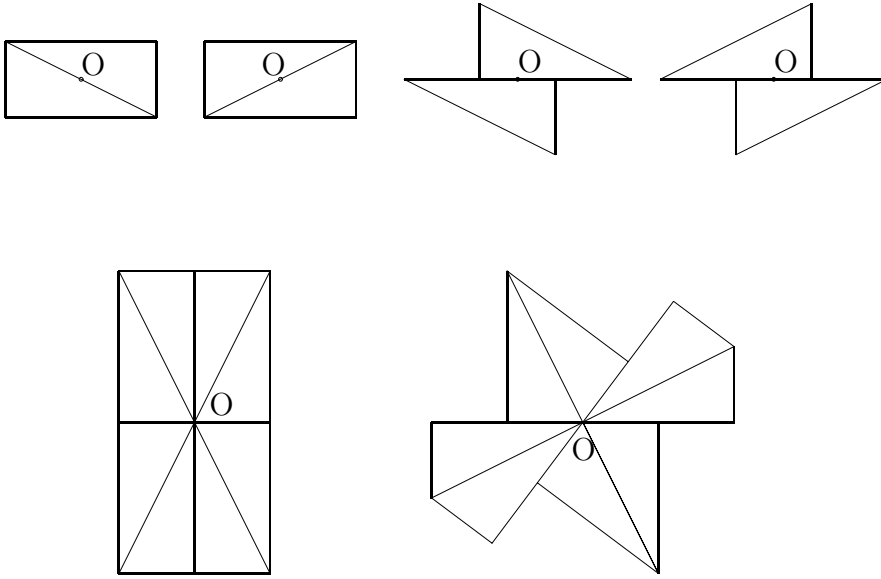
$$\begin{array}{ccccc}
\check{H}_c^2(\mathbb{R}^2 \times K; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\otimes \mathbb{R}} & \check{H}_c^2(\mathbb{R}^2 \times K; \mathbb{R}) & \xrightarrow{r_*} & H_{\tau_c}^2(\mathbb{R}^2 \times K) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\check{H}_c^3(\mathbb{R}^2 \times S^1 \times K; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\otimes \mathbb{R}} & \check{H}_c^3(\mathbb{R}^2 \times S^1 \times K; \mathbb{R}) & \xrightarrow{r_*} & H_{\tau_c}^3(\mathbb{R}^2 \times S^1 \times K)
\end{array}$$

L'isomorphisme de gauche est l'isomorphisme de Gysin qui est envoyé sur l'intégration le long des fibres  $S^1$  dans la cohomologie à coefficients réels, elle-même transformée en l'intégration le long des fibres "longitudinales"  $S^1$  en cohomologie longitudinale.

Les deux diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
\check{H}_c^2(\mathbb{R}^2 \times K; \mathbb{Z}) & \text{et} & \check{H}_c^3(\mathbb{R}^2 \times S^1 \times K; \mathbb{Z}) \\
\swarrow \quad \downarrow & & \downarrow \quad \searrow \\
\check{H}^2(\Omega/S^1; \mathbb{Z}) \simeq \check{H}^2((\Omega \setminus F)/S^1; \mathbb{Z}) & & \check{H}^3(\Omega \setminus F; \mathbb{Z}) \simeq \check{H}^3(\Omega; \mathbb{Z})
\end{array}$$

sont commutatifs car l'ouvert  $\mathbb{R}^2 \times K \simeq U \times K$  (resp.  $U \times S^1 \times K$ ) est un ouvert de  $\Omega/S^1$  (resp.  $\Omega$ ) inclus dans  $(\Omega \setminus F)/S^1$  (resp.  $\Omega \setminus F$ ), puisqu'un pavage de  $F$  a forcément l'origine sur une arête (voir les voisinages de l'origine dans les pavages de  $F$  sur les figures suivantes).



Ainsi l'image dans  $H_\tau^3(\Omega)$  d'un générateur  $[\chi_{\sigma_l}]$  des coinvariants s'envoie par le courant de Ruelle-Sullivan dans  $\mu_2^t(C(K, \mathbb{Z})) \subset \mu_2^t(C(\Xi_\Delta^2, \mathbb{Z})) = \mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z}))$ .

Ainsi,

$$\tau_*^\mu(\text{Im}(\beta \circ \delta \circ \beta_{S^1} \circ \delta_{S^1})) \subset \mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z})).$$

Comme de plus, nous avons vu dans le chapitre 2 que, dans  $K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$ , les 7 copies de  $\mathbb{Z}$  provenant des pavages laissés stables par rotation d'angle  $\pi$  autour de l'origine s'envoient dans  $\mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z}))$  sous  $\tau_*^\mu$ , on en déduit que

$$\tau_*^\mu(K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)) \subset \mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z})).$$

L'inclusion réciproque est obtenue en utilisant le diagramme p.91.

En effet, si on prend un générateur  $\chi_{\sigma_l}$  de  $C(\Xi_\Delta^2, \mathbb{Z})$ , il appartient à un  $C(K, \mathbb{Z})$  ( $K$  est en fait  $\Xi_{l,\Delta}(\sigma_l)$ ) qui peut être relevé en utilisant les isomorphismes de Gysin et de Thom sur une classe dans  $\check{H}^3(\Omega; \mathbb{Z})$  et comme le caractère de Chern est surjectif,

on obtient un relevé  $[u]$  de cette classe dans  $K_1(C(\Omega))$ .

On a alors

$$\tau_*^\mu(\beta \circ \delta \circ \beta_{S^1} \circ \delta_{S^1}([u])) = [C_{\mu_2^t}](r_* ch^{\mathbb{Z}}([u])) = \mu_2^t(\chi_{\sigma_l}).$$

Ainsi,  $\mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z})) = \mu_2^t(C(\Xi_\Delta^2, \mathbb{Z})) \subset \tau_*^\mu(K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1))$ .

La conjecture du gap-labeling est donc prouvée pour les pavages de type pinwheel :

**Théorème 4.1** *Si  $\mathcal{T}$  est un pavage de type pinwheel,  $\Omega = \Omega(\mathcal{T})$  son enveloppe continue munie d'une mesure de probabilité  $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$ -invariante et ergodique  $\mu$  et  $\Xi$  la transversale canonique munie de la mesure induite  $\mu^t$ , on a :*

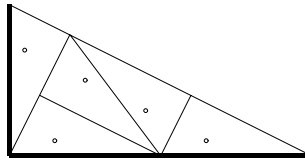
$$\tau_*^\mu(K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)) = \mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z})).$$

## 4.2 Calcul explicite du gap-labeling

A présent que l'on a vu que  $\tau_*^\mu(K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)) = \mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z}))$ , il nous reste à calculer  $\mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z}))$ .

Pour cela, nous écrivons  $C(\Xi, \mathbb{Z})$  comme limite inductive d'un système  $(C(\Lambda_l, \mathbb{Z}), f^l)$  comme nous l'avons fait pour  $C(\Xi_\Delta^2, \mathbb{Z})$  dans **3.14**.

Pour définir le groupe  $C(\Lambda_l, \mathbb{Z})$ , nous allons ponctuer dans  $\mathcal{B}_l^c$  les pavés de chaque supertuile d'ordre  $l$  (dans ce paragraphe, le terme "pavé" signifie prototuile ou 0-supertuile).



Maintenant, de façon analogue à la construction faite pour la  $\Delta$ -transversale grâce aux fonctions caractéristiques, si on se fixe un pavé  $p$  d'une supertuile  $\pi_j$  de  $\mathcal{B}_l^c$ , on notera  $\Xi(p)$  le relevé de la ponctuation de  $p$  par  $\mathfrak{p}_l$ , et  $\chi_p$  son indicatrice dans  $\Xi$  (i.e  $\chi_p([\omega]) = 1$  si et seulement si  $\mathfrak{p}_l([\omega]) = punct(p)$ ). Ainsi,  $\Xi(p)$  est constitué par les



classes des pavages de  $\Omega/S^1$  qui ont l'origine sur la ponctuation d'un pavé de type  $p$  qui est lui-même inclus dans une supertuile de type  $\pi_j$ .

On définit alors  $C(\Lambda_l, \mathbb{Z})$  comme le sous-groupe de  $C(\Xi, \mathbb{Z})$  engendré par les indicatrices  $\chi_p$  où  $p$  est le pavé d'une supertuile d'ordre  $l$  de  $\mathcal{B}_l^c$ .

On définit  $f^l : C(\Lambda_{l-1}, \mathbb{Z}) \longrightarrow C(\Lambda_l, \mathbb{Z})$  sur les générateurs : soit  $p$  un pavé d'une supertuile  $\pi_i$  d'ordre  $l-1$ . On peut décomposer de façon unique  $\Xi(p)$  comme réunion disjointe de  $\Xi(p_j)$  où  $p_j$  est un pavé d'une supertuile d'ordre  $l$  s'envoyant par  $f_l$  sur  $p$ .  $f^l(\chi_p)$  est alors la somme des  $\chi_{p_j}$ .

On voit alors que  $C(\Xi, \mathbb{Z}) = \varinjlim (C(\Lambda_l, \mathbb{Z}), f^l)$ .

En effet,  $\Lambda_l$  est l'ensemble des ponctuations dans  $\mathcal{B}_l^c$  et par le théorème 3.5, on obtient  $\Xi = \varprojlim (\Lambda_l, f_l)$ .

Pour tout  $l \in \mathbb{N}$ , on peut considérer le sous-groupe  $R_l$  de  $C(\Lambda_l, \mathbb{Z})$  engendré par les différences du type  $\chi_p - \chi_{p'}$  où  $p, p'$  sont deux pavés d'une même supertuile de  $\mathcal{B}_l^c$ .

On a alors, pour tout  $l$ ,  $C(\Lambda_l, \mathbb{Z})/R_l \simeq \mathbb{Z}^{108}$  car il y a exactement 108 supertuiles couronnées différentes dans un pavage de type pinwheel (voir figures 7 et 8 où apparaissent 54 proto-tuiles couronnées, les 54 autres sont obtenues par réflexion).

Notons  $q_l : C(\Lambda_l, \mathbb{Z}) \longrightarrow C(\Lambda_l, \mathbb{Z})/R_l$  l'application quotient.

$f^l$  passe alors au quotient puisque, si  $p$  et  $p'$  sont deux pavés d'une même supertuile d'ordre  $l-1$ ,  $f^l(\chi_p - \chi_{p'}) = \sum \chi_{p_i} - \chi_{p'_i}$  où  $p_i$  et  $p'_i$  sont deux pavés inclus dans une même supertuile de  $\mathcal{B}_l^c$  et donc  $f^l(\chi_p - \chi_{p'}) \in R_l$ .

On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C(\Lambda_{l-1}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f^l} & C(\Lambda_l, \mathbb{Z}) \\ q_{l-1} \downarrow & & \downarrow q_l \\ C(\Lambda_{l-1}, \mathbb{Z})/R_{l-1} & \xrightarrow{\tilde{f}^l} & C(\Lambda_l, \mathbb{Z})/R_l \\ \Big\| & & \Big\| \\ \mathbb{Z}^{108} & \xrightarrow{A'} & \mathbb{Z}^{108} \end{array}$$

où  $A'$  représente la transposée de la matrice de substitution pour les proto-tuiles couronnées (i.e la matrice dont le coefficient en position  $(i, j)$  est le nombre de représentants de la proto-tuile couronnée de type  $i$  dans la substitution de la proto-tuile couronnée de type  $j$ ).

Le système  $(C(\Lambda_l, \mathbb{Z})/R_l, \tilde{f}^l)$  est inductif et on peut donc considérer la limite inductive  $CR := \varinjlim (C(\Lambda_l, \mathbb{Z})/R_l, \tilde{f}^l)$ .

Posons également  $\mathcal{C} := C(\Xi, \mathbb{Z})/\mathcal{R}$  où  $\mathcal{R}$  est le sous-groupe de  $C(\Xi, \mathbb{Z})$  engendré par tous les  $R_l$  et  $q : C(\Xi, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{C}$  l'application quotient.

**Lemme 4.2** *Le groupe  $CR$  est isomorphe à  $\mathcal{C}$ .*

**Démonstration :**

Soit  $l \in \mathbb{N}$ , on a alors un morphisme  $\psi_l : C(\Lambda_l, \mathbb{Z})/R_l \rightarrow \mathcal{C}$  donnée par  $\psi_l(q_l(f)) := q(f)$  ( $R_l \subset \mathcal{R}$ ).

On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C(\Lambda_{l-1}, \mathbb{Z})/R_{l-1} & \xrightarrow{\tilde{f}^l} & C(\Lambda_l, \mathbb{Z})/R_l \\ & \searrow \psi_{l-1} & \swarrow \psi_l \\ & \mathcal{C} & \end{array}$$

puisque le diagramme suivant est composé de diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ C(\Lambda_{l-1}, \mathbb{Z})/R_{l-1} & \xrightarrow{\tilde{f}^l} & C(\Lambda_l, \mathbb{Z})/R_l & & \\ & \swarrow q_{l-1} & \searrow q_l & & \\ & C(\Lambda_{l-1}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f^l} & C(\Lambda_l, \mathbb{Z}) & \\ & \searrow id & & \swarrow id & \\ & & C(\Xi, \mathbb{Z}) & & \\ & & \downarrow q & & \\ & & \mathcal{C} & & \end{array}$$

En notant  $j_l : C(\Lambda_l, \mathbb{Z})/R_l \rightarrow CR$  les morphismes canoniques envoyant un élément de  $C(\Lambda_l, \mathbb{Z})/R_l$  sur sa classe dans la limite  $CR$ , il existe un unique morphisme  $j : CR \rightarrow \mathcal{C}$  tel que  $j \circ j_l = \psi_l$  (par définition d'une limite inductive).

On va montrer que  $j$  est un isomorphisme.

Commençons par la *surjectivité* : si  $q(f) \in \mathcal{C}$ , alors, comme  $C(\Xi, \mathbb{Z})$  est limite inductive des  $C(\Lambda_l, \mathbb{Z})$ ,  $q(f) = q(f_i)$  avec  $f_i \in C(\Lambda_i)$ .

On a donc  $q(f) = q(f_i) = \psi_{l_i}(q_{l_i}(f_i)) = j \circ j_{l_i} \circ q_{l_i}(f_i)$  et donc  $j$  est surjective.

A présent, montrons que  $j$  est *injective*.

Supposons  $j(f) = 0$  ( $f \in CR$ ), alors,  $f$  peut s'écrire  $j_n(q_n(g))$  pour  $g$  dans

$C(\Lambda_n, \mathbb{Z})$  (par définition d'une limite inductive) et donc  $j \circ j_n \circ q_n(g) = 0$  c'est-à-dire  $\psi_n \circ q_n(g) = 0$ .

Ainsi,  $g \in \mathcal{R}$  et on peut donc trouver  $k_1 \leq \dots \leq k_r$ ,  $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{Z}$  et  $f_1, \dots, f_r$  avec  $f_i \in R_{k_i}$  telles que  $g = c_1 f_1 + \dots + c_r f_r$ .

Par définition, si  $h \in C(\Lambda_j, \mathbb{Z})$ ,  $f^{j+1}(h) = h$  dans  $C(\Xi, \mathbb{Z})$  ( $h$  s'écrit comme combinaison linéaire d'indicatrices de patches formés par des supertuiles d'ordre  $j$  et  $f^j(h)$  est juste la réécriture de cette somme obtenue en décomposant ces patches en patches les contenant et formés par des supertuiles d'ordre  $j+1$ ).

Ainsi,  $f_i = f_{k_r k_i}(f_i)$  pour  $i = 1, \dots, r-1$  et donc, dans  $C(\Xi, \mathbb{Z})$ , on a

$$f_{k_r n}(g) = g = c_1 f_{k_r k_1}(f_1) + \dots + c_{r-1} f_{k_r k_{r-1}}(f_{r-1}) + c_r f_r$$

et  $f_{k_r n}(g) = g$  est un élément de  $R_{k_r}$  (où l'on a noté  $f_{km} := f^k \circ \dots \circ f^{m+1}$ ). Donc  $\tilde{f}_{k_r n}(q_n(g)) = q_{k_r}(f_{k_r n}(g)) = 0$  où  $\tilde{f}_{k_r n} = \tilde{f}^{k_r} \circ \dots \circ \tilde{f}^{n+1}$ .

On conclut donc que  $j_{k_r} \circ \tilde{f}_{k_r n} \circ q_n(g) = 0$  et par définition d'une limite inductive,  $0 = j_{k_r} \circ \tilde{f}_{k_r n} \circ q_n(g) = j_n \circ q_n(g) = f$  et  $j$  est donc injective.

□

Le lemme précédent n'est pas étonnant puisqu'en fait, on remarque que  $\mathcal{R} = \cup R_l$  et  $C(\Xi, \mathbb{Z}) = \cup C(\Lambda_l, \mathbb{Z})$ .

Remarquons de plus que  $\mu^t(\chi_p - \chi_{p'}) = 0$  si  $p, p'$  sont deux pavés d'une même supertuile puisque, si  $\chi_p = \chi_{U(\omega, ST_\omega)}$  où  $[\omega] \in \Xi(p)$ ,  $ST_\omega$  est la supertuile entourant  $p$  et tel que le pavé  $p$  contenant l'origine dans  $\omega$  ait le bon sens, alors  $\chi_{p'} = \chi_{U(\omega, ST_\omega).(x, \theta)}$  où  $(x, \theta)$  est l'élément envoyant  $\omega$  sur le pavage de  $\Xi(p')$  qui a le pavé  $p'$  contenant l'origine dans le bon sens.

Ainsi, la mesure passe au quotient et  $\mu^t(\mathcal{C}) = \mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z}))$ .

Il nous reste donc à calculer  $\mu^t(\mathcal{C})$  pour achever le calcul du gap-labeling.

Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C(\Lambda_{l-1}, \mathbb{Z})/R_{l-1} & \xrightarrow{\tilde{f}^l} & C(\Lambda_l, \mathbb{Z})/R_l & \longrightarrow & \dots \\ & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{108} & \xrightarrow{A'} & \mathbb{Z}^{108} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

est commutatif, on a  $\mathcal{C} \simeq \varinjlim (\mathbb{Z}^{108}, A')$ .

On utilise alors les résultats de [Eff81] puisqu'on a un système stationnaire :

**Définition 4.3** (voir [Eff81]) *Un système inductif*

$$\mathbb{Z}^r \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^r \xrightarrow{\phi} \dots$$

où les espaces sont identiques à  $\mathbb{Z}^r$  et où l'application entre les groupes est toujours la même est dit **stationnaire**.

Un système stationnaire est dit **simple** si, pour un  $n$ ,  $\phi^n$  est strictement positive (i.e a tous ses coefficients positifs).

Un **groupe ordonné**  $G$  est un groupe abélien  $G$  muni d'un sous-ensemble  $P$ , appelé le **cône positif** et noté  $G^+$  dans la suite, tel que :

1.  $P + P \subset P$ ,
2.  $P - P = G$ ,
3.  $P \cap (-P) = \{0\}$ ,
4. si  $a \in G$  et  $na \in P$  pour un  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $a \in P$ .

On notera  $a \leq b$  (resp.  $a < b$ ) si  $b - a \in G^+$  (resp.  $G^+ \setminus \{0\}$ ).

On dira que  $u \in G^+$  est une **unité pour l'ordre** sur  $G$  si

$$\{a \in G : 0 \leq a \leq n.u \text{ pour un } n \in \mathbb{N}\} = G^+.$$

Un **état** sur  $G$  est un morphisme  $p : G \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $p(G^+) \geq 0$  et  $p(u) = 1$ .

On notera  $S_u(G)$  l'ensemble de tels états.

Par exemple, si  $G$  est la limite du système  $\mathbb{Z}^r \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^r \xrightarrow{\phi} \dots$  (avec  $\phi$  une matrice à coefficients positifs),  $G$  peut être muni d'un ordre en prenant, pour  $G^+$ , la réunion des images dans  $G$  des  $(\mathbb{Z}^+)^r$ .

Avec ces définitions, on a le théorème suivant :

**Théorème 4.4** ([Eff81])

Soit  $u_1 = (1, \dots, 1)$  dans le premier  $\mathbb{Z}^r$  du système stationnaire simple de la définition alors  $u = \phi_\infty(u_1)$ , son image dans la limite  $G$ , est une unité pour l'ordre de  $G$  et  $S_u(G)$  est réduit à un point.

Or, le système inductif  $(\mathbb{Z}^{108}, A')$  est un système stationnaire simple (car la matrice  $A$  est la matrice de substitution de notre pavage qui est une substitution primitive ( $A^6$  est en fait formé de termes tous strictement positifs)) et donc il existe un unique état  $p$  sur la limite inductive  $G = \varinjlim (\mathbb{Z}^{108}, A')$ .

Cet état a une formulation assez simple, si  $\lambda$  représente la valeur propre de Perron-Frobenius de  $A'$  et  $\alpha$  l'unique vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$  vérifiant  $\sum \alpha_i = 1$ , alors

$$p([(a_1, \dots, a_{108}), n]) = \frac{1}{\lambda^{n-1}} \sum \alpha_i a_i.$$

Ici, on a  $\lambda = 5$ ,  $u_1 = (1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^{108}$  et il existe donc un unique état sur  $G$  défini par :

$$p\left([(k_1, \dots, k_{108}); n]\right) = \frac{1}{33000} \frac{1}{5^{n-1}} \sum_{i=1}^{108} k_i \alpha'_i,$$

avec  $\alpha = \frac{1}{33000} \alpha'$  et

$$\begin{aligned} \alpha' = & (765, 1185, 360, 255, 735, 1185, 360, 255, 765, 90, 90, 255, 250, 80, \\ & 735, 255, 80, 400, 360, 660, 600, 660, 300, 360, 360, 255, 400, 360, \\ & 90, 255, 90, 350, 90, 255, 250, 255, 80, 80, 163, 18, 237, 72, 90, 360, \\ & 237, 72, 204, 204, 163, 300, 51, 18, 50, 51, 765, 1185, 360, 255, 735, \\ & 1185, 360, 255, 765, 90, 90, 255, 250, 80, 735, 255, 80, 400, 360, 660, \\ & 600, 660, 300, 360, 360, 255, 400, 360, 90, 255, 90, 350, 90, 255, 250, \\ & 255, 80, 80, 163, 18, 237, 72, 90, 360, 237, 72, 204, 204, 163, 300, 51, \\ & 18, 50, 51) \end{aligned}$$

Ce vecteur propre a été obtenu grâce à un calcul en Matlab et Maple.

Comme de plus, chaque  $C(\Lambda_i, \mathbb{Z})/R_i$  est naturellement ordonné par l'ordre sur  $\mathbb{Z}^{108}$ ,  $\mathcal{C}$  est muni d'un ordre compatible avec son isomorphisme avec  $G$  et une unité pour cet ordre est la classe de 1, la fonction constante égale à 1.

Il existe donc un unique état sur  $\mathcal{C}$  tel que, si  $p_i$  sont des pavés inclus dans 108 supertuiles d'ordre  $n$  différentes dans  $\mathcal{B}_n^c$ , on ait :

$$p\left(\sum k_i q_i(\chi_{p_i})\right) = \frac{1}{33000} \frac{1}{5^n} \sum_{i=1}^{108} k_i \alpha'_i. \quad (4.1)$$

Or, en prenant  $\frac{\mu^t}{\mu^t(\Xi)}$ , on obtient un état sur  $\mathcal{C}$  donc  $\mu^t = \mu^t(\Xi)p$  et comme de plus  $33000 = 264 \times 5^3$ , on a

$$\mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z})) = \frac{\mu^t(\Xi)}{264} \mathbb{Z} \left[ \frac{1}{5} \right].$$

Nous allons terminer ce chapitre en montrant deux résultats supplémentaires.

Le premier est que  $\mu^t$  est en fait une mesure de probabilité sur  $\Xi$  :

**Lemme 4.5**  $\mu^t(\Xi) = 1$ .

**Démonstration :**

Ce résultat est obtenu en utilisant la formule de [MS06] p.90 : si  $f : \Omega \rightarrow \Xi$  est une fonction borélienne telle que  $f(x)$  appartienne à la même feuille que

$x$ , alors pour tout  $\omega \in \Xi$ , on peut définir  $\rho_\omega$  sur  $f^{-1}(\omega)$  comme la restriction de la mesure de Haar sur la feuille  $l(\omega)$  de  $\omega$  à  $f^{-1}(\omega) \subset l(\omega)$ . On a alors :

$$\mu(E) = \int_{\Xi} \left( \int_{f^{-1}(\omega)} \chi_E(x) d\rho_\omega(x) \right) d\mu^t(\omega),$$

pour tout borélien  $E$  de  $\Omega$ .

Il nous suffit donc d'exhiber une telle fonction borélienne.

Pour cela, considérons  $\hat{p}_i^c$  ( $i = 1, \dots, 108$ ) les 108 proto-tuiles couronnées des pavages de type pinwheel et  $V_i^k$  l'ouvert de  $\Omega$  homéomorphe à  $\Xi(p_i^c) \times \hat{p}_i^c \times S_k$  où  $\hat{p}_i^c$  est l'intérieur du représentant de  $p_i^c$  ayant l'origine sur sa ponctuation (et ayant la "bonne" orientation) et  $S_k = ]\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{3}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}[$  pour  $k = 0, 1, 2$ .

Posons  $U_i = \bigcup_{k=0}^2 V_i^k$  pour  $i = 1, \dots, 108$ .

La réunion des adhérences de ces ouverts est un recouvrement de  $\Omega$  :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{108} \overline{U}_i = \bigcup_{i=1}^{108} \bigcup_{k=0}^2 \overline{V}_i^k.$$

En posant

$$F_1^0 = \overline{V}_1^0, F_1^1 = \overline{V}_1^1 \setminus \overline{V}_1^0, F_1^2 = \overline{V}_1^2 \setminus (\overline{V}_1^0 \cup \overline{V}_1^1), F_2^0 = \overline{V}_2^0 \setminus \overline{U}_1,$$

$$F_2^1 = \overline{V}_2^1 \setminus (\overline{V}_2^0 \cup \overline{U}_1), \dots, F_{108}^2 = \overline{V}_{108}^2 \setminus \left( \bigcup_{l=1}^{107} \overline{U}_l \cup \overline{V}_{108}^0 \cup \overline{V}_{108}^1 \right),$$

on obtient un recouvrement de  $\Omega$  par des boréliens disjoints  $F_i$ .

On définit alors  $f : \Omega \rightarrow \Xi$  par  $f(\omega) = \omega_i$  si  $\omega \in F_i^k$ ,  $\omega = \omega_i.(x_i, \theta_i)$  avec  $\omega_i \in \Xi(p_i^c)$  et  $(x_i, \theta_i) \in \hat{p}_i^c \times \overline{S}_k$ .

C'est une fonction borélienne de  $\Omega$  vers la transversale  $\Xi$  et  $f(\omega)$  est sur la même feuille que  $\omega$ .

On vient de montrer que  $\mu$  peut être reconstruite à partir de  $f$  et  $\mu^t$  :

$$\mu(E) = \int_{\Xi} \left( \sum_{k=0}^2 \int_{\hat{p}_\omega^c \times S_k} \chi_E(\omega.(x, \theta)) d\lambda(x, \theta) \right) d\mu^t(\omega), \quad (4.2)$$

où  $\hat{p}_\omega^c$  est le type de proto-tuile du pavé de  $\omega$  entourant l'origine.

Comme  $V_i^k$  et  $V_j^l$  sont disjoints si  $i \neq j$  ou  $k \neq l$  et comme la frontière de  $V_i^k$  est un ensemble de mesure nulle, on a :

$$1 = \mu(\Omega) = \sum_{i=1}^{108} \sum_{k=0}^2 \mu(F_i^k) = \sum_{i=1}^{108} \mu(U_i) = \sum_{i=1}^{108} \mu^t(\Xi(p_i^c)) = \sum_{i=1}^{108} \mu^t(\chi_{p_i^c}) = \mu^t(\Xi)$$

□

On a donc obtenu le résultat suivant :

**Proposition 4.6** *Pour les pavages de type pinwheel, le gap-labeling (ou module de fréquence des patches) est donné par :*

$$\tau_*^\mu \left( K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \rtimes S^1) \right) = \frac{1}{264} \mathbb{Z} \left[ \frac{1}{5} \right].$$

Le deuxième point est le fait que l'on peut retrouver, à partir de la formule explicite (4.1) pour  $\mu^t$ , que l'enveloppe continue des pavages de type pinwheel est uniquement ergodique sous l'action des isométries directes (comparer avec [Fre08], [LMS02], [Rad95] and [Sol97]) :

**Lemme 4.7**  $(\Omega, \mathbb{R}^2 \rtimes S^1)$  est *uniquement ergodique*.

**Démonstration :**

Comme  $\Xi$  est un espace de Cantor, toute mesure borélienne sur  $\Xi$  est entièrement déterminée par ses valeurs sur les partitions de  $\Xi$  par des clopens.

Si  $\mu$  et  $\nu$  sont deux mesures de probabilité invariantes sur  $\Omega$  alors elles induisent deux probabilités invariantes  $\mu^t$  et  $\nu^t$  sur la transversale  $\Xi$  et donc deux états sur  $C(\Xi, \mathbb{Z})$ .

Par l'égalité (4.1), ces mesures coïncident sur les clopens définis par les super-tuiles couronnées successives qui forment une base de voisinages pour  $\Xi$  donc  $\mu^t = \nu^t$ .

Finalement, par la formule (4.2), on voit que  $\mu = \nu$ .

□

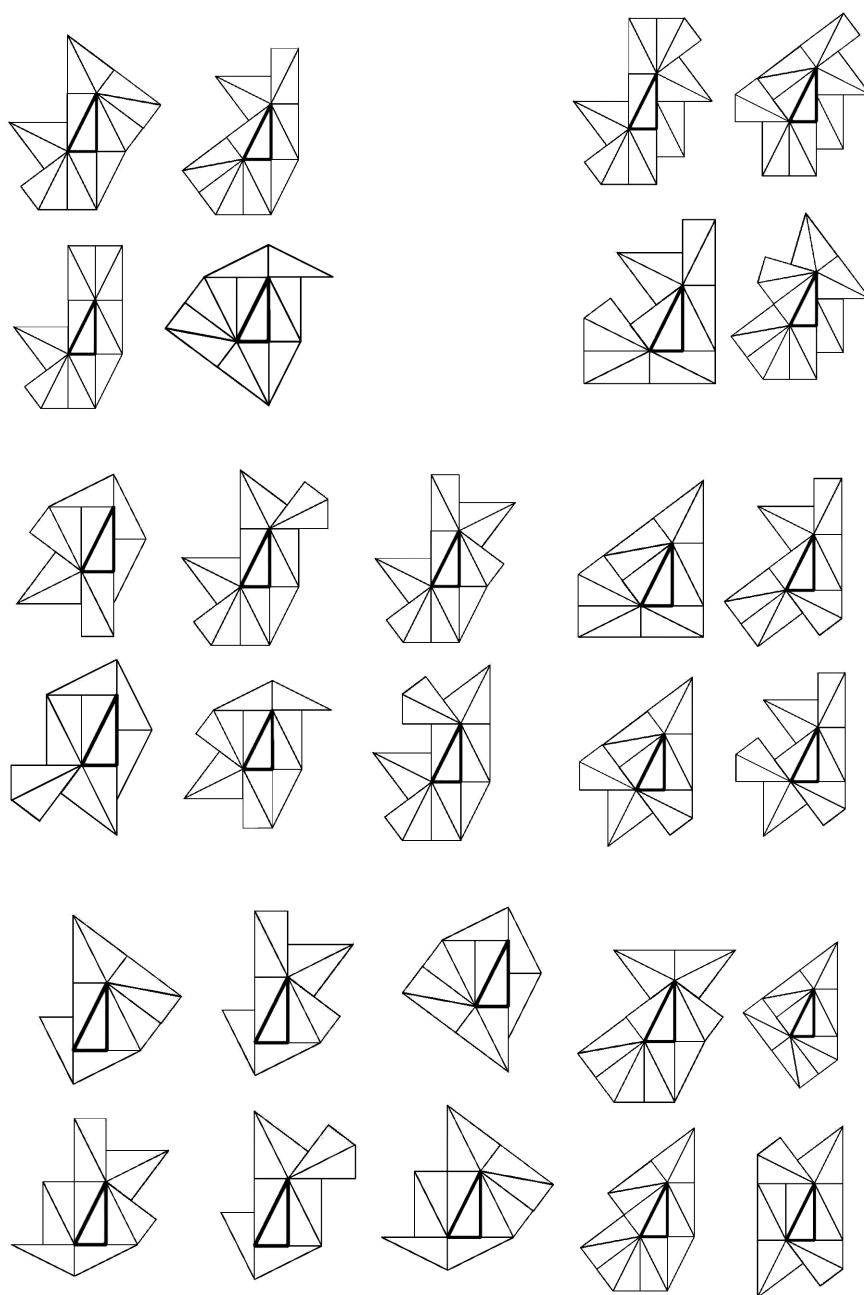


FIG. 7 – 28 proto-tuiles couronnées.



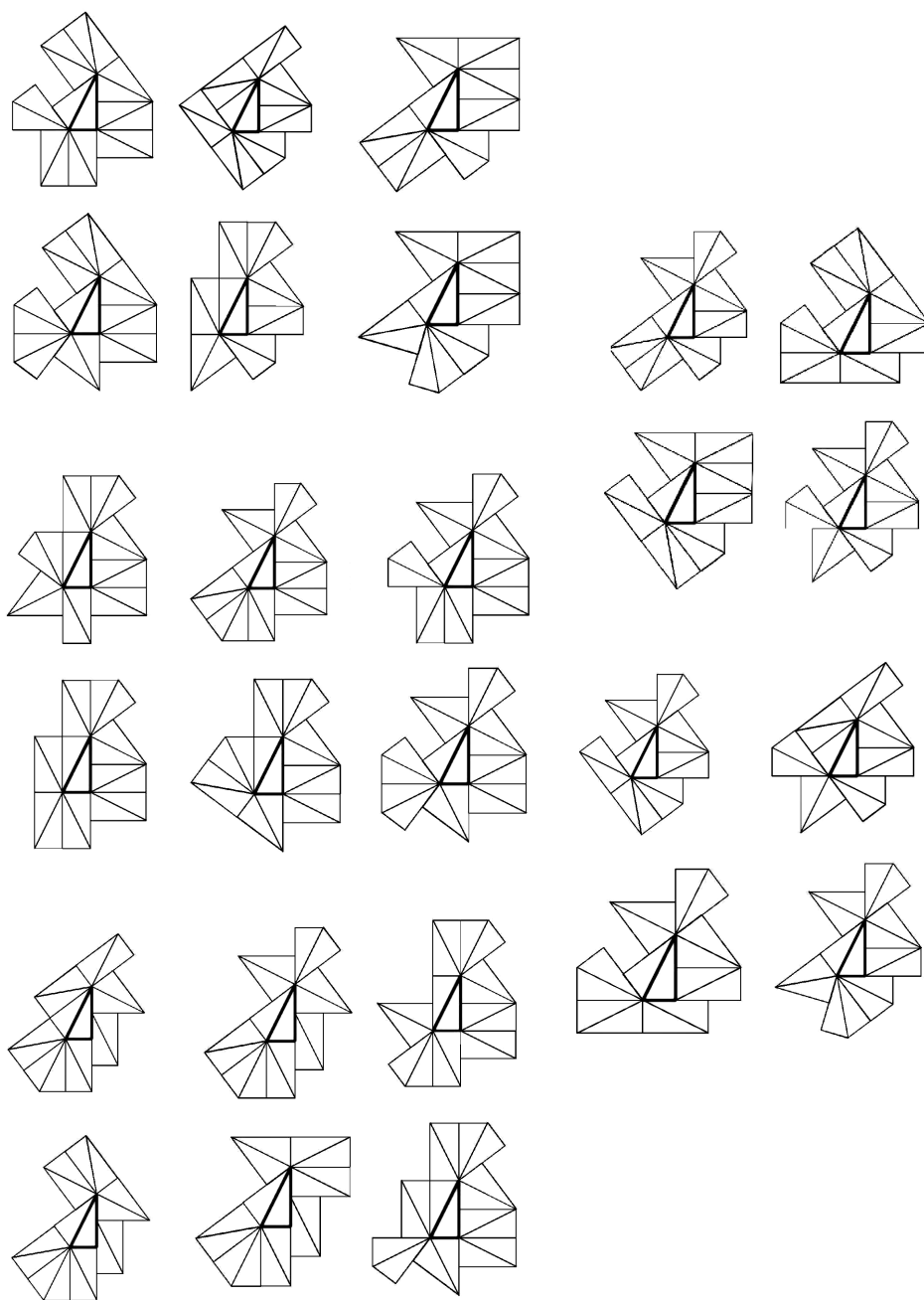


FIG. 8 – 26 autres proto-tuiles couronnées.

# Conclusion

En utilisant des techniques développées dans [BOO02] et [SB09], j'ai donc prouvé la conjecture du gap-labeling pour les pavages de type pinwheel (de type  $(1, 2)$ ).

Je pense que les méthodes développées dans cette thèse sont plus générales.

Je pense qu'en utilisant la construction de Savinien et Bellissard [SB09], on peut montrer que la cohomologie de Čech de degré maximale de pavages plus généraux est encore le groupe des coinvariants entiers de la  $\Delta$ -transversale.

Ce résultat et le diagramme p. 2.6 montre le fait déjà connu (voir [BBG06]) que l'image sous le courant de Ruelle-Sullivan de la copie de la cohomologie de Čech de degré maximal à coefficients entiers de l'enveloppe dans la cohomologie longitudinale de  $\Omega$  est  $\mu^t(C(\Xi, \mathbb{Z}))$ .

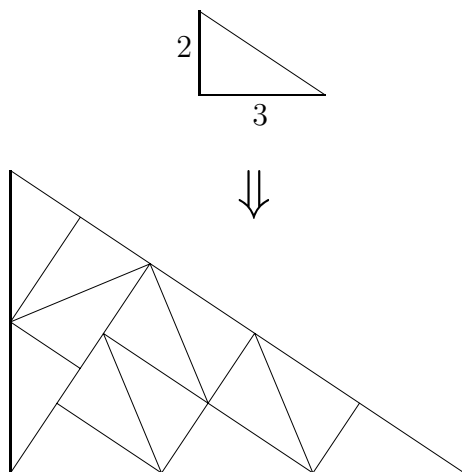
A mon avis, d'autres généralisations des travaux contenus dans ce manuscrit sont possibles.

En effet, pour tout  $m$  et  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , le nombre de pavages de type  $(m, n)$ -pinwheel (voir [ORS02] et [HRS05]) fixés par une rotation semble être encore fini, puisque ces pavages sont encore de  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ -type fini, permettant d'appliquer les résultats du chapitre 2.

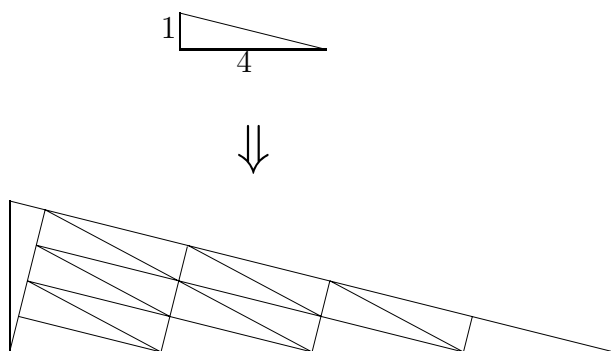
Les résultats obtenus dans le dernier chapitre doivent s'appliquer pour de tels pavages, montrant que le gap-labeling des pavages de type  $(m, n)$ -pinwheel est donné par le  $\mathbb{Z}$ -module de fréquence des patches  $c \cdot \mathbb{Z} \left[ \frac{1}{m^2+n^2} \right]$ , où  $c$  est un scalaire renormalisant le vecteur de Perron-Frobenius de la matrice de substitution des proto-tuiles couronnées.

Les pavages de type  $(m, n)$ -pinwheel sont obtenus par substitution de deux triangles rectangles de côtés de longueur  $m$ ,  $n$  et  $\sqrt{m^2 + n^2}$ , l'un étant l'image de l'autre par réflexion par rapport au plus long côté.

Voici l'exemple de la substitution pour les pavages de type (2, 3)-pinwheel :



Voici l'exemple de la substitution pour les pavages de type (1, 4)-pinwheel :



# Annexe A

## Morita équivalence entre $(C_0(X \times \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2) \rtimes SO(2)$ et $C_0(X) \rtimes SO(2)$

Dans cette section, on considère un espace topologique localement compact  $X$  muni d'une action d'un groupe localement compact  $G$  unimodulaire (pour simplifier les formules) par automorphismes  $\alpha$ .

Nous considérons alors le système dynamique induit  $(C_0(X), \alpha)$ .

Nous allons alors montrer que les  $C^*$ -algèbres  $C_0(X)$  et  $C_0(X \times G) \rtimes G$  sont Morita équivalentes.

Pour cela, nous allons procéder en plusieurs étapes. Nous allons dans un premier temps montrer que l'action  $\alpha \otimes \lambda$  se simplifie en une action sur  $C_0(G)$  (où  $\lambda$  est la représentation régulière gauche de  $G$ ).

Nous montrerons ensuite que  $C_0(G) \rtimes G$  est isomorphe aux opérateurs compacts sur  $L^2(G)$  (les produits croisés considérés dans cette annexe sont tous des *produits croisés réduits*).

Pour finir, nous appliquerons les résultats ainsi obtenus pour  $G = \mathbb{R}^2$ ,  $X$  un espace topologique muni d'une action à droite des isométries directes du plan, et  $\alpha$  l'action obtenue par restriction aux translations. Il restera alors à montrer que les systèmes dynamiques  $C_0(X)$ , muni de l'action de  $SO(2)$ , et  $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2)) \otimes C_0(X)$ , muni de l'action usuelle des rotations sur les opérateurs compacts de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , sont Morita équivalents.

## A.1 Isomorphisme entre $C_0(X \times G) \rtimes G$ et $C_0(X) \otimes C_0(G) \rtimes G$

Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre munie d'une action de  $G$  par automorphisme  $\alpha$  et soit la représentation régulière gauche  $\lambda : G \longrightarrow \text{Aut}(C_0(G))$ , alors :

**Proposition A.1** *Le système dynamique  $(A \otimes C_0(G), \alpha \otimes \lambda)$  est isomorphe au système  $(A \otimes C_0(G), 1 \otimes \lambda)$  (i.e cette isomorphisme est  $G$ -équivariant).*

**Démonstration :**

Considérons l'application  $\Psi : A \otimes C_0(G) \simeq C_0(G, A) \longrightarrow C_0(G, A)$  définie par :

$$\Psi(f)(g) := \alpha_{g^{-1}}(f(g)).$$

On vérifie facilement que cette application est un isomorphisme de  $C^*$ -algèbres d'application réciproque  $\psi(f)(g) := \alpha_g(f(g))$ .

De plus, si  $h, g \in G$ ,  $((\alpha \otimes \lambda)_h f)(g) = \alpha_h(f(h^{-1}g))$  et

$$((1 \otimes \lambda)_h \Psi(f))(g) = \Psi(f)(h^{-1}g) = \alpha_{g^{-1}h}(f(h^{-1}g)) = \alpha_{g^{-1}}(\alpha_h(f(h^{-1}g)))$$

c'est-à-dire :

$$((1 \otimes \lambda)_h \Psi(f))(g) = \alpha_{g^{-1}}\left(\left((\alpha \otimes \lambda)_h f\right)(g)\right) = \Psi\left(\left(\alpha \otimes \lambda\right)_h f\right)(g).$$

Donc  $\phi$  est un isomorphisme  $G$ -équivariant. □

En appliquant la proposition précédente à la  $C^*$ -algèbre  $C_0(X)$ , on obtient alors :

**Corollaire A.2**  $C_0(X \times G) \rtimes G$  est isomorphe à  $C_0(X) \otimes (C_0(G) \rtimes G)$ .

## A.2 Isomorphisme entre $C_0(G) \rtimes G$ et $\mathcal{K}(L^2(G))$

On considère ici l'espace  $C_c(G \times G)$  des fonctions continues à support compact sur  $G \times G$  où l'on regarde la première copie de  $G$  comme agissant par  $\lambda$  sur la deuxième. Pour montrer l'isomorphisme, il suffit de considérer  $K : C_c(G \times G) \longrightarrow \mathcal{K}(L^2(G))$ , l'application définie par :  $K(f) := K_{\tilde{f}}$  où  $\tilde{f}(t, s) = f(st^{-1}, s)$  et

$$K_{\tilde{f}}(\zeta)(s) = \int_G \tilde{f}(t, s)\zeta(t)d\eta(t)$$

où  $\eta$  est la mesure de Haar sur  $G$ .

$K$  est alors la représentation covariante associée à  $(\tilde{\pi}, \lambda, L^2(G))$  où  $\lambda$  est la représentation régulière gauche et  $\tilde{\pi} : C_0(G) \rightarrow \mathcal{B}(L^2(G))$  la représentation de  $C_0(G)$  définie par  $(\tilde{\pi}(f)\zeta)(g) := f(g)\zeta(g)$ .

On peut vérifier que  $K$  s'étend à  $C(G) \rtimes G$  et que cette extension est un isomorphisme.

**Proposition A.3** *On a donc obtenu un isomorphisme  $C_0(G) \rtimes G \simeq \mathcal{K}(L^2(G))$  et donc*

$$C_0(X \times G) \rtimes G \simeq C_0(X) \otimes \mathcal{K}(L^2(G)).$$

Le deuxième point découle du corollaire **A.2**.

### A.3 Morita équivalence $SO(2)$ -équivariante entre $C_0(X \times \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2$ et $C_0(X)$

Nous considérons dans cette sous-section un espace topologique  $X$  localement compact, muni d'une action à droite des isométries directes  $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$  du plan et  $G = \mathbb{R}^2$ . Par la proposition précédente, pour montrer la Morita équivalence voulue, il suffit de montrer que  $C_0(X) \otimes \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2))$  et  $C_0(X)$  sont Morita équivalentes de façon  $SO(2)$ -équivariante avec l'action de  $SO(2)$  sur  $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2)) \otimes C_0(X)$  induite par l'action naturelle des rotations sur  $C_0(X \times \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2$  suivante : si  $f \in C_c(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times X)$  et  $\theta \in SO(2)$ , alors

$$\theta.f(t, s, x) := f(R_{-\theta}(t), R_{-\theta}(s), x.(0, \theta)).$$

Comme la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2$  est invariante par les rotations du plan, cette action se prolonge en une action continue sur  $C_0(X \times \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2$ .

Il faut alors suivre les transformations de cette action suite aux deux isomorphismes des paragraphes précédents.

L'isomorphisme  $\Psi : C_0(X \times \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2 \rightarrow C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2 \otimes C_0(X)$  du premier paragraphe ne change pas l'action des rotations. En effet,

$$\begin{aligned} \Psi(\theta.f)(t, s, x) &= \alpha_{-t}(\theta.f(t, s, \cdot))(x) = \theta.f(t, s, x.(-t, 0)) \\ &= f\left(R_{-\theta}(t), R_{-\theta}(s), x.(-t, 0)(0, \theta)\right) \\ &= f\left(R_{-\theta}(t), R_{-\theta}(s), x.(0, \theta)(R_{-\theta}(-t), 0)\right) \\ &= \alpha_{R_{-\theta}(-t)}\left(f\left(R_{-\theta}(t), R_{-\theta}(s), \cdot\right)\right)(x.(0, \theta)) \\ &= \Psi(f)\left(R_{-\theta}(t), R_{-\theta}(s), x.(0, \theta)\right) \\ &= \theta.(\Psi(f))(t, s, x) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient l'action de  $SO(2)$  sur  $C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2$  suivante :

$$\theta.f(t, s) := f\left(R_{-\theta}(t), R_{-\theta}(s)\right) \text{ pour } f \in C_c(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2).$$

Prenons alors l'action sur les opérateurs compacts données sur les opérateurs à noyaux par :

$$\theta.K_h := K_{\theta.h} \text{ où } h \in C_c(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2).$$

On a alors, pour  $h \in C_c(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$  et  $\zeta \in L^2(\mathbb{R}^2)$  :

$$\begin{aligned} (\theta.K_h)\zeta(s) &= \int_{\mathbb{R}^2} \theta.h(t, s)\zeta(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h\left(R_{-\theta}(t), R_{-\theta}(s)\right)\zeta(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h\left(t, R_{-\theta}(s)\right)\zeta\left(R_{\theta}(t)\right)dt, \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h\left(t, R_{-\theta}(s)\right)U_{-\theta}\zeta(t)dt \\ &= K_h(U_{-\theta}\zeta)(R_{-\theta}(s)) \\ &= (U_{\theta}K_hU_{-\theta}\zeta)(s) \end{aligned}$$

où  $U : SO(2) \longrightarrow \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^2))$  est définie par  $U_{\theta}(\psi)(s) := \psi(R_{-\theta}(s))$ .

On vient donc de voir que l'action que l'on a définie sur  $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2))$  est en fait l'action par conjugaison de l'action naturelle de  $SO(2)$  sur  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

Nous obtenons alors facilement :

**Proposition A.4** *Les deux  $C^*$ -algèbres  $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2)) \otimes C_0(X)$  et  $C_0(X)$  sont  $SO(2)$ -Morita équivalents.*

*Les  $C^*$ -algèbres  $C_0(X) \rtimes SO(2)$  et  $(\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^2)) \otimes C_0(X)) \rtimes SO(2)$  sont donc Morita équivalentes.*

## Annexe B

### Démonstration pour le lemme 2.4

Nous avons vu que  $K_0^{S^1}(C(F)) \simeq \mathbb{Z}^{12}$  dans le chapitre 2 et nous voulons montrer dans cette annexe que  $\bigoplus_{i=1}^7 \mathbb{Z}.q_i \subset \text{Ker } \partial$  où

$$q_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$q_2 = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$q_3 = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$q_4 = (1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

$$q_5 = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$q_6 = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$q_7 = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

Pour cela, montrons dans un premier temps que  $\mathbb{Z}.q_1 \subset \text{Ker } \partial$ .  
Il suffit de montrer que  $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \in \text{Ker } \partial$ .

Or  $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  est la projection de  $K_0^{S^1}(C(F))$  associée à la projection de  $C(F)$   $S^1$ -invariante  $f(x) := 1$  pour tout  $x \in F$ .

La fonction constante  $\Psi := 1$  de  $C(\Omega)$  est une application  $S^1$ -invariante et auto-adjointe qui relève  $f$  (i.e  $\pi(\Psi) = f$  où  $\pi : C(\Omega) \rightarrow C(F)$ ).

Ainsi, par définition de  $\partial$ , on a :

$$\partial([f]) = [\exp(-2i\pi\Psi)] = [1].$$

D'où  $q_1 \in \text{Ker } \partial$ .

Montrons alors que  $\mathbb{Z}.q_2 = \mathbb{Z}.(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \subset \text{Ker } \partial$ .



Les autres inclusions se montrent de la même manière.

Soit  $\omega_0 \in F_1$  un pavage fixé par la rotation  $R_\pi$  d'angle  $\pi$  autour de l'origine et soit  $\Xi_{00}$  l'ensemble des pavages ayant même 1-couronne que  $\omega_0$ . Soit :

$$\Omega_r := \{e^{i\theta}\omega + v; \theta \in \mathbb{R}, w \in \Xi_{00}, v \in \mathbb{R}^2, \|v\| = r\}$$

avec  $r$  suffisamment petit.

L'action de  $S^1$  sur  $\Omega_r$  étant libre, on obtient un  $S^1$ -fibré principal  $\Omega_r \rightarrow \Omega_r/S^1$ .

Il est clair, d'après l'étude de  $\Omega/S^1$  effectuée dans le chapitre 3, que  $\Omega_r/S^1$  n'a pas de cohomologie en degré 2 et donc le fibré  $\Omega_r \rightarrow \Omega_r/S^1$  est trivialisable. On cherche alors à trouver une trivialisations de ce fibré.

Nous allons chercher un domaine fondamental de  $\Omega_r$  pour l'action de  $S^1$ .

Si l'on considère les 2-couronnes non symétriques de la 1-couronne entourant l'origine dans  $\omega_0$ , on peut les partitionner en deux ensembles tels que  $R_\pi$  envoie un des deux ensembles sur l'autre.

Soit  $X_2$  la réunion des clopens de  $\Xi_{00}$  correspondant à l'un de ces deux ensembles.

Ensuite, on considère les 3-couronnes non symétriques de la 1-couronne entourant l'origine dans  $\omega_0$  tels que la 2-couronne soit symétrique.

On partitionne comme précédemment et on obtient un clopen  $X_3$ .

Puis on prend les 4-couronnes non symétriques de la 1-couronne entourant l'origine dans  $\omega_0$  tels que la 3-couronne soit symétrique et ainsi de suite. On obtient  $X_2, X_3, X_4, \dots$  des clopens disjoints de  $\Xi_{00}$  et si  $X = \bigcup_{n \geq 2} X_n$ , alors  $X$  est un ouvert

de  $\Xi_{00}$  et  $X, \{\omega_0\}, -X$  est une partition de  $\Xi_{00}$ .

On notera  $X^0 := X \cup \{\omega_0\}$ .

Dans la suite, nous noterons  $l_k$  ( $k = 1, \dots, 4$ ) les quatre quadrants d'amplitude  $\frac{\pi}{2}$  du cercle de rayon  $r$  de  $\mathbb{C}$  i.e  $l_k = \{re^{ki\theta}, \theta \in [0; \frac{\pi}{2}]\}$ .

On pose également

$$V_k := \{e^{i\theta}(w + v); w \in X^0, v \in l_k, \theta \in \mathbb{R}\}$$

et  $Y_k := \{w + v; w \in X^0, v \in l_k\}$ .

On va montrer dans un premier temps que  $V_k \rightarrow V_k/S^1$  est un fibré principal trivial homéomorphe à  $Y_k \times S^1$ .

Soit  $\Psi_k : Y_k \times S^1 \rightarrow V_k$  définie par  $\psi_k(w + v, e^{i\theta}) := e^{i\theta}(w + v)$ . Nous allons voir que cette application est un homéomorphisme.

$\psi_k$  est évidemment surjective par définition de  $Y_k$  et de  $V_k$ .

Si  $\psi_k(w + v, e^{i\theta}) = \psi_k(w' + v', e^{i\theta'})$  alors

$$e^{i(\theta-\theta')}(w + v) - v' = w'.$$

Si  $r$  est suffisamment petit,  $e^{i(\theta-\theta')}(v) - v'$  ne permet d'envoyer  $e^{i(\theta-\theta')}w$  sur un autre pavage de  $X^0$  que s'il est nul.

Ainsi,  $e^{i(\theta-\theta')}(v) = v'$  et  $e^{i(\theta-\theta')}(w) = w'$ .

La seule possibilité est  $\theta' = \theta$  modulo  $\pi$ .

Or, si  $\theta' = \theta + \pi + 2l\pi$  ( $l \in \mathbb{Z}$ ), alors  $v' = -v$ , ce qui est impossible puisque  $v', v \in l_k$ .

Ainsi,  $\theta' = \theta + 2l\pi$  et  $(w + v, e^{i\theta}) = (w' + v', e^{i\theta'})$ .

Donc  $\psi_k$  est injective.

$\psi_k$  est une bijection continue du compact  $Y_k \times S^1$  sur le compact  $V_k$ , c'est donc un homéomorphisme.

Ainsi,  $Y_k \simeq V_k/S^1$  et en notant  $\tilde{Y}_k := Y_k/S^1$ ,  $\tilde{Y}_k$  est homéomorphe à  $Y_k$ . On notera cet homéomorphisme  $s_k$ .

Comme  $Y_k \simeq X^0 \times l_k$ , nous remarquons aussi que l'on peut identifier  $\tilde{Y}_k$  avec  $X^0 \times l_k$ .

Étudions l'intersection  $\tilde{Y}_k \cap \tilde{Y}_{k'}$  ( $k \neq k'$ ) dans  $\Omega_r/S^1$ .

Si  $[w + v] = [w' + v']$  avec  $[w + v] \in \tilde{Y}_k$  et  $[w' + v'] \in \tilde{Y}_{k'}$ , il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que

$$e^{i\theta}(w + v) = w' + v'.$$

Comme ci-dessus,  $v'$  doit être égal à  $e^{i\theta}v$  et donc  $w' = e^{i\theta}w$ .

Deux cas sont alors possibles :

- si  $w \neq w_0$ , alors  $\theta = 2l\pi$  ( $l \in \mathbb{Z}$ ) et  $v' = v$ ,  $w' = w$ .
- si  $w = w_0$ , alors  $\theta = l\pi$  ( $l \in \mathbb{Z}$ ) et alors  $w' = w_0$ ,  $v' = (-1)^l v$ .

Ainsi,

$$\tilde{Y}_k \cap \tilde{Y}_{k'} \simeq X^0 \times (l_k \cap l_{k'}) \bigcup \{w_0\} \times (-l_k \cap l_{k'}).$$

Nous allons maintenant définir 4 fonctions qui permettront de recoller les différents  $\tilde{Y}_k \times S^1$  pour identifier la réunion de ces ensembles avec  $\Omega_r$ .

Nous pouvons identifier chaque  $Y_k$  avec  $X^0 \times l_k$  ce qui permet de parler de la projection  $p_k$  sur la deuxième coordonnée.

Dans la suite, nous regarderons les  $l_k$  plongés dans  $\mathbb{C}$  ce qui permet de parler du carré d'un élément de  $l_k$ .

$f_1 : \tilde{Y}_1 \rightarrow \mathbb{C}$  est alors définie par  $f_1(y) = \frac{p_1(s_1(y))^2}{r^2}$ . Sous les identifications  $\tilde{Y}_1 \simeq Y_1$  et  $Y_1 \simeq X^0 \times l_1$ ,  $f_1$  est obtenue de la façon suivante : si  $y \simeq (w, re^{i\theta})$ ,  $f_1(y) = e^{2i\theta}$ .  
 $f_2 : \tilde{Y}_2 \rightarrow \mathbb{C}$  est définie par  $f_2(y) = -1$ .  
 $f_3 : \tilde{Y}_3 \rightarrow \mathbb{C}$  est définie par  $f_3(y) = -\frac{p_3(s_3(y))^2}{r^2}$ .  $f_3$  est obtenue, sous les identifications  $\tilde{Y}_3 \simeq Y_3 \simeq X^0 \times l_3$ , de la façon suivante : si  $y \simeq (w, re^{i\theta})$ ,  $f_3(y) = -e^{2i\theta}$ .  
 $f_4 : \tilde{Y}_4 \rightarrow \mathbb{C}$  est définie par  $f_4(y) = 1$ .

Nous introduisons ces applications car les applications de transitions sur l'intersection d'un  $\tilde{Y}_k$  et d'un  $\tilde{Y}_{k'}$  sont données par  $f_k \overline{f_{k'}}$ .

Montrons qu'on peut alors définir une application  $\phi : \left( \bigcup_{k=1}^4 \tilde{Y}_k \right) \times S^1 \longrightarrow \Omega_r$  par  $\phi(y, e^{i\theta}) := f_k(y)e^{i\theta} s_k(y)$  et que c'est alors un homéomorphisme.

Si  $y = [w + v] \in \tilde{Y}_k \cap \tilde{Y}_{k'}$ , alors on a deux possibilités :

- si  $w \neq w_0$ , alors  $k = k' \pm 1 \pmod{4}$ .

On peut supposer, quitte à interchanger les rôles, que  $k = k' + 1 \pmod{4}$ , on obtient  $s_k([w + v]) = w + ri^{k-1}$  et  $s_{k'}([w + v]) = w + ri^{k-1}$ . On vérifie alors facilement que  $f_k(y) = f_{k'}(y)$  et donc  $f_k(y)e^{i\theta} s_k(y) = f_{k'}(y)e^{i\theta} s_{k'}(y)$ .

- si  $w = w_0$ , alors

- soit  $k = k' \pm 1 \pmod{4}$  et on peut supposer  $k = k' + 1 \pmod{4}$ .

Alors  $s_k([w + v]) = w_0 + ri^{k-1}$  ou  $s_k([w + v]) = w_0 + ri^k$ . Dans le premier cas, on obtient  $s_{k'}([w + v]) = w_0 + ri^{k-1}$  et dans le deuxième cas, on obtient  $s_{k'}([w + v]) = w_0 + ri^{k-2}$ .

Dans le premier cas, on vérifie facilement que  $f_k(y) = f_{k'}(y)$  et comme  $s_{k'}([w + v]) = s_k([w + v])$ , on obtient bien  $f_k(y)e^{i\theta} s_k(y) = f_{k'}(y)e^{i\theta} s_{k'}(y)$ .

Dans le second cas,  $f_k(y) = -f_{k'}(y)$  et comme  $s_{k'}([w + v]) = -s_k([w + v])$ , on obtient également  $f_k(y)e^{i\theta} s_k(y) = f_{k'}(y)e^{i\theta} s_{k'}(y)$ .

- soit  $k = k' \pm 2 \pmod{4}$  et si  $s_k([w + v]) = w_0 + v$ , alors  $s_{k'}([w + v]) = w_0 - v$ .

Ici encore, on vérifie que  $f_k(y)e^{i\theta} s_k(y) = f_{k'}(y)e^{i\theta} s_{k'}(y)$  puisque, si

$$k = k' \pm 2 \pmod{4}, f_k = -f_{k'}.$$

Ainsi,  $\phi$  est bien définie.

Maintenant supposons que  $y \in \tilde{Y}_k$  et  $y' \in \tilde{Y}_{k'}$  vérifient  $\phi(y, e^{i\theta}) = \phi(y', e^{i\theta'})$ .

Notons  $s_k(y) = w + v$  et  $s_{k'}(y') = w' + v'$ .

On a donc  $f_k(y)e^{i\theta}(w + v) = f_{k'}(y')e^{i\theta'}(w' + v')$ .

Ainsi en projetant dans  $\Omega_r/S^1$ ,  $y = y'$  est un élément de l'intersection  $\tilde{Y}_k \cap \tilde{Y}_{k'}$ .

Il s'agit donc de montrer que  $\theta = \theta' + 2l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ .

Comme ci-dessus, on doit avoir  $v' = f_{k'}(y)^{-1} f_k(y) e^{i(\theta - \theta')}(v)$  et donc

$$w' = f_{k'}(y)^{-1} f_k(y) e^{i(\theta - \theta')}(w).$$

Il faut alors distinguer plusieurs cas :

- soit  $f_{k'}(y)^{-1}f_k(y)e^{i(\theta-\theta')} = 1$  et  $w' = w$ ,  $v' = v$ . Donc  $k = k', k' + 1$  ou  $k' - 1 \pmod 4$ .

Dans les trois cas,  $f_k(y) = f_{k'}(y)$  donc  $e^{i(\theta-\theta')} = 1$ . D'où  $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ .

- soit  $f_{k'}(y)^{-1}f_k(y)e^{i(\theta-\theta')} = -1$  alors  $w = w_0 = -w'$  et  $v' = -v$ . Comme pour deux points opposés on a  $f_k(y) = -f_{k'}(y')$ , on obtient également que  $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ .

On vient de voir que dans tous les cas,  $(y, e^{i\theta}) = (y', e^{i\theta'})$  donc  $\phi$  est injective.

On voit alors facilement que  $\phi$  est surjective et continue donc  $\phi$  définit un homéomorphisme entre  $\left(\bigcup_{k=1}^4 \tilde{Y}_k\right) \times S^1$  et  $\Omega_r$ .

Ainsi, on a construit une trivialisaton de la projection  $\Omega_r \longrightarrow \Omega_r/S^1$ .

On peut ainsi construire le fibré vectoriel sur  $\Omega$  relevant

$$(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \in K_0^{S^1}(C(F)).$$

Pour cela, on prend un  $w_0 \in F_1$  stable par  $R_\pi$  et un  $r$  assez petit.

On fait alors la construction ci-dessus pour obtenir  $\Omega_r$ ,  $\Omega_{\leq r}$  et  $H = {}^c(\Omega_{< r})$  où

$$\Omega_{\leq r} := \{e^{i\theta}\omega + v; \theta \in \mathbb{R}, w \in \Xi_{00}, v \in \mathbb{R}^2, \|v\| \leq r\}$$

et

$$\Omega_{< r} := \{e^{i\theta}\omega + v; \theta \in \mathbb{R}, w \in \Xi_{00}, v \in \mathbb{R}^2, \|v\| < r\}.$$

Sur  $\Omega_{\leq r}$ , on prend le fibré en droites  $\Omega_{s \leq r} \times \mathbb{C}$  avec l'action diagonale de  $S^1$  où l'action de  $S^1$  sur  $\mathbb{C}$  est donnée par rotation.

Sur  $H$ , on prend le fibré en droites trivial  $H \times \mathbb{C}$  avec action diagonale de  $S^1$  mais cette fois on regarde l'action triviale de  $S^1$  sur  $\mathbb{C}$ .

L'application de recollement de ces deux fibrés est alors donnée sur l'intersection  $\Omega_{\leq r} \cap H = \Omega_r \simeq \Omega_r/S^1 \times S^1$  par

$$f(w, e^{i\theta}, z) = (w, e^{i\theta}, e^{i\theta}z).$$

Ainsi, comme  $(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \in K_0^{S^1}(C(F))$  se relève en un élément de  $K_0^{S^1}(C(\Omega))$ , il est dans le noyau  $\text{Ker } \partial$  de  $\partial$ .

D'où  $\bigoplus_{i=1}^7 \mathbb{Z}.q_i \subset \text{Ker } \partial$ .



# Annexe C

## $C^*$ -modules hilbertiens gradués

Dans cette annexe, nous allons rappeler la définition de  $C^*$ -module hilbertien sur une  $C^*$ -algèbre puis nous donnerons la définition de  $C^*$ -module hilbertien gradué sur une  $C^*$ -algèbre graduée.

Nous terminerons par quelques résultats qui sont utiles pour nos calculs en  $KK$ -théorie.

Le lecteur pourra se référer aux articles [Kas81], [Ska91] pour approfondir le sujet.

### C.1 $C^*$ -modules hilbertiens

Pour construire les groupes de  $KK$ -théorie, on a besoin d'une notion qui généralise les espaces de Hilbert usuels. Cette généralisation est exactement la notion de  $C^*$ -module hilbertien :

**Définition C.1** *Un  $C^*$ -module préhilbertien sur une  $C^*$ -algèbre  $B$  est un  $B$ -module à droite  $\mathcal{H}$  muni d'un produit scalaire à valeurs dans  $B$  (appelé  $B$ -produit scalaire dans la suite)  $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$  tel que :*

1.  $\mathcal{H}$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel,
2.  $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ ,  $\langle x, \lambda y \rangle_B = \lambda \langle x, y \rangle_B$ ,  $\langle x, y \cdot b \rangle_B = \langle x, y \rangle_B b$  pour tout  $x, y, z \in \mathcal{H}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $b \in B$ ,
3.  $\langle y, x \rangle_B = \langle x, y \rangle_B^*$  pour tout  $x, y \in \mathcal{H}$ ,
4.  $\langle x, x \rangle_B \geq 0$  pour  $x \in \mathcal{H}$ .

On obtient alors une semi-norme sur  $\mathcal{H}$  en posant  $\|x\| := \|\langle x, x \rangle_B\|$ .

Si  $\mathcal{H}$  est séparé et complet, alors on dit que  $\mathcal{H}$  est un  $C^*$ -module hilbertien sur  $B$  ou un  $B$ -module hilbertien.

Pour alléger la lecture du texte, nous noterons souvent  $\langle, \rangle$  pour désigner  $\langle, \rangle_B$  lorsque le contexte ne prêter pas à confusions.

*Exemples :*

- Les espaces de Hilbert sont des  $\mathbb{C}$ -modules hilbertiens et inversement.
- Une  $C^*$ -algèbre  $B$  est un  $B$ -module hilbertien sur elle-même muni du produit scalaire  $\langle x, y \rangle := x^*y$ .
- Si  $n$  est un entier,  $B^n$  est aussi un  $B$ -module hilbertien muni du produit scalaire  $\langle (x_i), (y_i) \rangle := \sum_{i=1}^n x_i^*y_i$ .
- Plus généralement,  $\mathcal{H}_B := \{(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum b_n^*b_n \text{ converge}\}$  est un  $B$ -module hilbertien muni du produit scalaire  $\langle (a_n), (b_n) \rangle := \sum_n a_n^*b_n$ .

A présent que l'on a généralisé la notion d'espace de Hilbert, on peut généraliser la notion d'opérateur :

**Définition C.2** Soient  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  des  $B$ -modules hilbertiens. On notera  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  l'ensemble des applications  $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  admettant un adjoint  $T^* : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$  tel que  $\langle Tx_1, x_2 \rangle = \langle x_1, T^*x_2 \rangle$  pour tout  $x_1 \in \mathcal{H}_1$  et  $x_2 \in \mathcal{H}_2$ . On notera  $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ .

Tout opérateur de  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  est alors linéaire,  $B$ -linéaire et borné. Muni de la norme d'opérateurs,  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  est une  $C^*$ -algèbre.

On peut alors définir des opérateurs particuliers de "rang 1"  $\theta_{x,y} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  en posant  $\theta_{y,x}(z) := y \cdot \langle x, z \rangle_B$  pour  $x, z \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2$ .

On obtient alors facilement que  $\theta_{y,x}^* = \theta_{x,y}$  et pour tout  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$  et  $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ ,  $T\theta_{y,x} = \theta_{Ty,x}$ ,  $\theta_{y,x}S = \theta_{y,S^*x}$ .

Le sous-espace engendré par les  $\theta_{y,x}$  pour  $x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2$  est l'ensemble des opérateurs de "rang fini".

**Définition C.3** L'ensemble des opérateurs compacts  $\mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  est le complété de ce sous-espace.

On pose  $\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \mathcal{K}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ , c'est un idéal de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

*Exemples :*

- Si  $H$  est un espace de Hilbert séparable, on retrouve l'espace  $\mathcal{K}$  des opérateurs compacts.
- $\mathcal{L}(B) \simeq \mathcal{M}(B)$  l'algèbre des multiplicateurs de  $B$ . En particulier, si  $B$  est unitale, alors  $\mathcal{L}(B) \simeq B$ .
- $\mathcal{K}(B) \simeq B$  pour  $B$  unitale ou non.

- $\mathcal{L}(B^n) = M_n(\mathcal{M}(B))$ .
- $\mathcal{K}(B^n) \simeq M_n(B)$ .
- Plus généralement,  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_B) \simeq \mathcal{M}(B \otimes \mathcal{K})$  et  $\mathcal{K}(\mathcal{H}_B) \simeq B \otimes \mathcal{K}$ .

## C.2 $C^*$ -modules gradués et produits tensoriels

Une  $C^*$ -algèbre  $B$  est dite **graduée** si on dispose d'une décomposition  $B = B^0 \oplus B^1$  où  $B^0, B^1$  sont des sous-espaces vectoriels fermés auto-adjoints tels que  $B^i B^j \subset B^{i+j}$  ( $i, j \in \mathbb{Z}_2$ ).

On dit que la graduation de  $B$  est **triviale** si  $B^1 = 0$ .

Les éléments  $x$  de  $B^i$  sont dits **homogènes** de degré  $i$  et on écrit  $\partial x = i$ .

Les commutateurs considérés seront gradués i.e si  $x$  et  $y$  sont deux éléments homogènes, on écrit  $[x, y] = xy - (-1)^{\partial x \partial y} yx$ .

Soit  $A$  et  $B$  deux  $C^*$ -algèbres graduées.

Un morphisme  $f : A \rightarrow B$  est dit gradué de degré 0 si  $f(A^i) \subset B^i$ .

On notera  $A \otimes B$  le produit tensoriel des  $C^*$ -algèbres  $A$  et  $B$  muni de la  $C^*$ -norme minimale.  $A \otimes B$  est alors une  $C^*$ -algèbre graduée par  $\partial(a \otimes b) := \partial a + \partial b$ , si  $a$  et  $b$  sont homogènes.

On définit également le produit tensoriel gradué  $A \hat{\otimes} B$  de la façon suivante :  $A \hat{\otimes} B$  désigne le produit tensoriel algébrique des espaces vectoriels  $A$  et  $B$ . On munit alors  $A \hat{\otimes} B$  du produit :

$$(a \hat{\otimes} b)(a_1 \hat{\otimes} b_1) := (-1)^{\partial b \partial a_1} a a_1 \hat{\otimes} b b_1$$

et de l'involution :

$$(a \hat{\otimes} b)^* := (-1)^{\partial a \partial b} a^* \hat{\otimes} b^*.$$

$A \hat{\otimes} B$  est la  $C^*$ -algèbre complétée de  $A \hat{\otimes} B$  pour la  $C^*$ -norme analogue à la  $C^*$ -norme minimale mais où l'on ne considère que les états gradués.

$A \hat{\otimes} B$  est une  $C^*$ -algèbres graduées par  $\partial(a \hat{\otimes} b) = \partial a + \partial b$ .

Soit alors  $B$  une  $C^*$ -algèbre graduée. Un  $C^*$ -module hilbertien  $\mathcal{H}$  sur  $B$  est dit **gradué** s'il admet une décomposition  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^0 \oplus \mathcal{H}^1$  en somme directe de deux sous-espaces vectoriels fermés tels que  $\mathcal{H}^i \cdot B^j \subset \mathcal{H}^{i+j}$  et  $\langle \mathcal{H}^i, \mathcal{H}^j \rangle \subset B^{i+j}$ .

La graduation de  $\mathcal{H}$  définit alors une graduation sur les  $C^*$ -algèbres  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  et  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  : un élément  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est de degré  $i$  si  $T\mathcal{H}^j \subset \mathcal{H}^{i+j}$ .

Si  $B$  est graduée trivialement, les sous-modules  $\mathcal{H}^0$  et  $\mathcal{H}^1$  sont orthogonaux.

Si à présent on se donne deux  $C^*$ -modules hilbertiens gradués  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sur les



$C^*$ -algèbres  $B_1$  et  $B_2$  respectivement, le produit tensoriel algébrique  $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$  est un  $B_1 \hat{\otimes} B_2$ -module :

$$(h_1 \hat{\otimes} h_2).(b_1 \hat{\otimes} b_2) := (-1)^{\partial h_2 \partial b_1} h_1.b_1 \hat{\otimes} h_2.b_2.$$

On le munit du produit scalaire

$$\langle h_1 \hat{\otimes} h_2, k_1 \hat{\otimes} k_2 \rangle := (-1)^{\partial h_2 (\partial h_1 + \partial k_1)} \langle h_1, k_1 \rangle \hat{\otimes} \langle h_2, k_2 \rangle.$$

Le complété de  $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$  pour la norme définie par ce produit scalaire est un  $C^*$ -module hilbertien gradué sur  $B_1 \hat{\otimes} B_2$ , noté  $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$ .

La graduation est définie par  $\partial(h_1 \hat{\otimes} h_2) := \partial h_1 + \partial h_2$ .

On a alors un morphisme injectif naturel :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{H}_1) \hat{\otimes} \mathcal{L}(\mathcal{H}_2) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2) \\ (F_1 \hat{\otimes} F_2)(h_1 \hat{\otimes} h_2) &= (-1)^{\partial F_2 \partial h_1} (F_1(h_1) \hat{\otimes} F_2(h_2)). \end{aligned}$$

Sa restriction  $\mathcal{K}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}_2) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2)$  est un isomorphisme.

A partir de deux  $C^*$ -modules hilbertiens, on peut définir un deuxième produit tensoriel : soit  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  comme ci-dessus.

Soit  $\phi$  un morphisme gradué de  $B_1$  dans  $\mathcal{L}_{B_2}(\mathcal{H}_2)$ . Le produit tensoriel algébrique  $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$  est un  $B_2$ -module.

On le munit du produit scalaire à valeurs dans  $B_2$  :

$$\langle h_1 \odot h_2, k_1 \odot k_2 \rangle := \langle h_2, \phi(\langle h_1, k_1 \rangle).k_2 \rangle.$$

On note  $\mathcal{H}_1 \otimes_{B_1} \mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_{B_1} \mathcal{H}_2$  le  $C^*$ -module sur  $B_2$  séparé complété de  $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$  pour ce produit scalaire.

C'est un  $C^*$ -module hilbertien gradué pour la graduation

$$\partial(h_1 \otimes h_2) := \partial h_1 + \partial h_2.$$

On a alors deux lemmes utiles (voir [Kas81]) :

**Lemme C.4** Soient  $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_4$  des  $B_i$ -modules hilbertiens,  $\phi : B_1 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_3)$  et  $\psi : B_2 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_4)$  alors on a un isomorphisme gradué :

$$(\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2) \hat{\otimes}_{\phi \hat{\otimes} \psi} (\mathcal{H}_3 \hat{\otimes} \mathcal{H}_4) \simeq (\mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_{\phi} \mathcal{H}_3) \hat{\otimes} (\mathcal{H}_2 \hat{\otimes}_{\psi} \mathcal{H}_4)$$

défini par :

$$(h_1 \hat{\otimes} h_2) \hat{\otimes} (h_3 \hat{\otimes} h_4) \longmapsto (-1)^{\partial h_2 \partial h_3} (h_1 \hat{\otimes} h_3) \hat{\otimes} (h_2 \hat{\otimes} h_4).$$

On notera dans la suite  $\mathbb{C}_1$  pour désigner l'algèbre de Clifford de  $\mathbb{C}$  engendrée par un élément  $\alpha$  vérifiant  $\alpha^2 = 1$  et  $\alpha^* = \alpha$ .

$\mathbb{C}_1$  est graduée naturellement par  $\partial 1 = 1$  et  $\partial \alpha = 1$ .

On a alors :

**Lemme C.5** *Soit  $C$  une  $C^*$ -algèbre trivialement graduée et  $\mathcal{H}_1$  un  $C$ -module hilbertien gradué.*

*On notera  $\mathcal{H}_1^{wg}$  le  $C$ -module hilbertien  $\mathcal{H}_1$  sans graduation.*

*On a alors un isomorphisme gradué :*

$$\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathbb{C}_1 \simeq \mathcal{H}_1^{wg} \hat{\otimes} \mathbb{C}_1$$

donné par

$$h_1 \hat{\otimes} c_1 \longmapsto h_1 \hat{\otimes} \alpha^{\partial h_1} c_1.$$



# Annexe D

## KK-théorie équivariante de Kasparov

Nous allons rappeler ici les définitions ainsi que les principales propriétés de la  $KK$ -théorie équivariante de G. Kasparov.

On renvoie le lecteur vers [Kas95], [Kas88] et [Ska91] pour un exposé plus détaillé de cette théorie.

On suppose dans cette annexe que  $G$  est un groupe localement compact et  $A, B$  des  $C^*$ -algèbres séparables.

Dans la suite de cette annexe, nous supposons connues les notions de produit croisé maximal  $A \rtimes G$  et réduit  $A \rtimes_r G$ .

**Définition D.1** Une *action  $\alpha$  de  $G$  sur  $A$*  est un morphisme de groupe continu  $g \mapsto \alpha_g$  de  $G$  dans le groupe des  $*$ -automorphismes de  $A$ .

La continuité de  $\alpha$  signifie que pour tout  $a \in A$ , l'application  $g \mapsto \alpha_g(a)$  est continue.

Une  $C^*$ -algèbre munie d'une action de  $G$  est appelée  **$G$ - $C^*$ -algèbre**.

Supposons pour la suite que  $A$  et  $B$  sont deux  $G$ - $C^*$ -algèbres. On dénote les deux actions de  $G$  par la même lettre  $\alpha$ .

**Définition D.2** Un  **$A, B$ -bimodule  $G$ -équivariant** est un couple  $(\mathcal{H}, \pi)$  vérifiant :

1.  $\mathcal{H}$  est un  $B$ -module hilbertien gradué muni d'une action continue de  $G$  telle que :

pour tout  $a \in A, b \in B, h, h' \in \mathcal{H}$  et  $g \in G$ , on ait :

- $\partial(\alpha_g(h)) = \partial(h)$ ,
- $\alpha_g(h.b) = \alpha_g(h).\alpha_g(b)$
- $\alpha_g(\langle h, h' \rangle) = \langle \alpha_g(h), \alpha_g(h') \rangle$ .

2.  $\pi : A \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est un  $*$ -morphisme tel que
- $\pi(A) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})^{(0)}$ ,
  - $\alpha_g(\pi(a)h) = \pi(\alpha_g(a))\alpha_g(h)$ .

La continuité de l'action signifie que pour tout  $h \in \mathcal{H}$ , l'application  $g \mapsto \alpha_g(h)$  est continue.

$G$  agit alors sur  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  et  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  de la façon suivante :

pour tout  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  et  $h \in \mathcal{H}$ ,  $\alpha_g(T)(h) := \alpha_g(T(\alpha_{g^{-1}}(h)))$ .

L'action de  $G$  sur  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  est continue pour la topologie forte mais pas pour la norme.

Par contre, l'action de  $G$  sur  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  est toujours continue.

Cela conduit à la définition suivante :

**Définition D.3** L'élément  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est **G-continu** si l'application  $g \mapsto \alpha_g(T)$  est continue pour la norme.

En particulier, si  $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ , ou  $T \in \pi(A)$ , alors  $T$  est  $G$ -continu.

On peut alors définir les cycles définissant la  $KK$ -théorie :

**Définition D.4** Soit  $E_G(A, B)$  l'ensemble des triplets  $(\mathcal{H}, \pi, F)$  où  $(\mathcal{H}, \pi)$  est un  $(A, B)$ -bimodule  $G$ -équivariant et  $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^{(1)}$  tels que :

1. pour tout  $a \in A$ ,  $\pi(a)(F^2 - 1)$ ,  $[\pi(a), F] \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ ,
2.  $F$  est  $G$ -continu et  $\forall g \in G$ ,  $\alpha_g(F) - F \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ .

Un triplet  $(\mathcal{H}, \pi, F)$  vérifiant ces conditions sera appelé **cycle équivariant sur  $(A, B)$** .

**Définition D.5** Soit  $C$  une autre  $G$ - $C^*$ -algèbre séparable et un  $*$ -morphisme  $G$ -équivariant  $\phi : B \longrightarrow C$ .

Soit  $\xi = (\mathcal{H}, \pi, F)$  un cycle équivariant sur  $(A, B)$ . On pose

$$\phi_*(\mathcal{H}) := \mathcal{H} \hat{\otimes}_B C,$$

le  $C$ -module hilbertien obtenu par produit tensoriel interne et

$$\phi_*(\xi) := (\phi_*(\mathcal{H}), \pi \hat{\otimes} 1, \phi_*(F)),$$

où  $\phi_*(F) := F \hat{\otimes} 1$ , avec  $1 \in \mathcal{L}(C)$  l'opérateur identité.

Ceci définit une application :

$$\phi_* : E_G(A, B) \longrightarrow E_G(A, C).$$

Pour tout  $C^*$ -algèbre  $B$ , on note  $B[0, 1]$  l'algèbre des fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $B$  munie de la norme du supremum.

Pour tout  $t \in [0, 1]$ , on note  $ev_t : B[0, 1] \rightarrow B$  l'évaluation en  $t$ .

**Définition D.6** Deux cycles  $\xi$  et  $\zeta$  dans  $E_G(A, B)$  sont **homotopes** s'il existe un cycle  $\delta$  dans  $E_G(A, B[0, 1])$  tel que  $ev_{0,*}(\delta) = \xi$  et  $ev_{1,*}(\delta) = \zeta$ .

Une homotopie est alors un élément de  $E_G(A, B[0, 1])$ .

**Définition D.7** On note  $\mathbf{KK}^G(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  l'ensemble des classes d'homotopie d'éléments de  $E_G(A, B)$ .

C'est un groupe abélien pour la somme directe de cycles, i.e

$$(\mathcal{H}, \pi, F) \oplus (\mathcal{H}', \pi', F') := (\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}', \pi \oplus \pi', F \oplus F').$$

Le neutre est le cycle  $(0, 0, 0)$ .

Dans le cas où le groupe  $G$  est trivial, on note ce groupe  $\mathbf{KK}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ .

### Exemples :

1.  $1_A \in \mathbf{KK}^G(A, A)$  est la classe du cycle  $(A, i_A, 0)$  où  $A$  est trivialement gradué et  $i_A : A \rightarrow \mathcal{K}(A)$  est donnée par  $i_A(a)b := ab$  pour tout  $a, b \in A$ .
2. Tout  $*$ -morphisme  $G$ -équivariant  $f : A \rightarrow B$  définit un élément de  $\mathbf{KK}^G(A, B)$  par  $[f] := [(B, f, 0)]$ .
3. Soit  $M$  une variété lisse compacte et  $E^{(i)}$  ( $i = 0, 1$ ) un fibré vectoriel lisse au dessus de  $M$ .

Notons  $C^\infty(M, E^{(i)})$  l'espace des sections lisses de  $E^{(i)}$ .

Si  $P : C^\infty(M, E^{(0)}) \rightarrow C^\infty(M, E^{(1)})$  est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre zéro, il s'étend en un opérateur borné  $P : L^2(M, E^{(0)}) \rightarrow L^2(M, E^{(1)})$  des sections  $L^2$  des fibrés  $E^{(i)}$ .

Si  $P$  est de plus elliptique, il possède un quasi-inverse  $Q$ , i.e un opérateur pseudo-différentiel  $Q : L^2(M, E^{(1)}) \rightarrow L^2(M, E^{(0)})$  tel que  $PQ - 1$  et  $QP - 1$  soient des opérateurs compacts.

Posons

$$\mathcal{H} := L^2(M, E^{(0)}) \oplus L^2(M, E^{(1)}),$$

$\pi : C(M) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  la représentation naturelle de  $C(M)$  par multiplication  $\pi^{(i)}$  sur  $L^2(M, E^{(i)})$  i.e

$$\pi := \begin{pmatrix} \pi^{(0)} & 0 \\ 0 & \pi^{(1)} \end{pmatrix}$$

et

$$F := \begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & 0 \end{pmatrix}.$$

$[(\mathcal{H}, \pi, F)]$  définit alors une classe de  $KK(C(M), \mathbb{C})$ .

4. Dans le cas où  $A = \mathbb{C}$  et  $G$  est trivial, on retrouve la  $K$ -théorie usuelle :

$$KK(\mathbb{C}, B) \simeq K_0(B).$$

5. Dans le cas où  $B = \mathbb{C}$  et  $G$  est trivial, on retrouve la  $K$ -homology usuelle :

$$KK(A, \mathbb{C}) \simeq K^0(A).$$

6. Si  $G$  est un groupe compact, on a l'isomorphisme (voir [Jul81]) :

$$KK^G(\mathbb{C}, B) \simeq K_0(B \rtimes_\alpha G).$$

7. Nous allons définir l'élément de Bott  $\beta_{ott} \in KK(\mathbb{C}, C_0(\mathbb{R}^2))$  qui nous servira dans la suite.

Posons  $\mathcal{H} := C_0(\mathbb{R}^2) \oplus C_0(\mathbb{R}^2)$ ,  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  le morphisme unital involutif et  $F$  l'opérateur défini par

$$F := \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \begin{pmatrix} 0 & c_- \\ c_+ & 0 \end{pmatrix},$$

où  $c_+, c_-$  sont les opérateurs de multiplication par  $x - iy$  et  $x + iy$  respectivement et  $c := \begin{pmatrix} 0 & c_- \\ c_+ & 0 \end{pmatrix}$ .

On définit alors l'élément de Bott comme la classe  $\beta_{ott} := [(\mathcal{H}, \pi, F)]$ .

8. L'élément qui sera l'inverse du précédent pour le produit de Kasparov est  $\alpha = [(\mathcal{H}, \pi, F)] \in KK(C_0(\mathbb{R}^2), \mathbb{C})$  donné par :

$$\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^2) \oplus L^2(\mathbb{R}^2),$$

$\pi : C_0(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^2) \oplus L^2(\mathbb{R}^2))$  est l'action par multiplication de fonctions et

$$F := \frac{1}{\sqrt{1+D^2}} \begin{pmatrix} 0 & D_- \\ D_+ & 0 \end{pmatrix}$$

où les opérateurs  $D_-$  et  $D_+$  sont donnés par

$$D_+ = \partial_x + i\partial_y$$

$$D_- = -\partial_x + i\partial_y$$

et  $D := \begin{pmatrix} 0 & D_- \\ D_+ & 0 \end{pmatrix}$ .

**Propriétés D.8**  $KK^G(A, B)$  définit un bifoncteur de la catégorie des  $G$ - $C^*$ -algèbres dans la catégorie des groupes abéliens. Ce foncteur est contravariant en  $A$  et covariant en  $B$  :

– si  $\phi : C \rightarrow A$  est un  $*$ -morphisme  $G$ -équivariant alors on a un morphisme :

$$\begin{aligned} \phi^* : KK^G(A, B) &\longrightarrow KK^G(C, B) \\ [(\mathcal{H}, \pi, F)] &\longmapsto [(\mathcal{H}, \pi \circ \phi, F)] \end{aligned}$$

– si  $\psi : B \rightarrow C$  est un  $*$ -morphisme  $G$ -équivariant alors on a un morphisme :

$$\begin{aligned} \psi_* : KK^G(A, B) &\longrightarrow KK^G(A, C) \\ [(\mathcal{H}, \pi, F)] &\longmapsto [(\psi_*(\mathcal{H}), \pi \hat{\otimes} 1, F \hat{\otimes} 1)] \end{aligned}$$

Soit  $r : G \rightarrow H$  un morphisme de groupe continu. Par composition, toute  $H$ - $C^*$ -algèbre (resp. cycle  $H$ -équivariant) est une  $G$ - $C^*$ -algèbre (resp. un cycle  $G$ -équivariant).

Ainsi, on obtient un morphisme  $r^* : KK^H(A, B) \rightarrow KK^G(A, B)$  pour toute paire  $A, B$  de  $H$ -algèbres.

Ce morphisme est appelé **morphisme de restriction** si  $r$  est une inclusion.

Cela permet également d'obtenir un **morphisme d'oubli**  $KK^H(A, B) \rightarrow KK(A, B)$ .

**Définition D.9** On peut alors définir un deuxième groupe de  $KK$ -théorie par :

$$KK_1^G(A, B) := KK^G(A, B \hat{\otimes} \mathbb{C}_1),$$

où  $\mathbb{C}_1$  est l'algèbre de Clifford engendrée par un élément  $\alpha$  tel que  $\alpha^* = \alpha$  et  $\alpha^2 = 1$ . Une définition équivalente est la suivante : on considère  $E_{G,1}(A, B)$  l'ensemble des cycles  $G$ -équivariants gradués trivialement et  $KK_1^G(A, B)$  l'ensemble des classes d'homotopie d'éléments dans  $E_{G,1}(A, B)$ .

On peut définir de manière plus générale des groupes de  $KK$ -théorie d'ordre supérieur en posant :

$$KK_n^G(A, B) := KK^G(A, B(\mathbb{R}^n)),$$

où  $B(\mathbb{R}^n)$  désigne l'espace des fonctions continues sur  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $B$  qui tendent vers 0 à l'infini.

En particulier, cela donne une définition équivalente de  $KK_1^G(A, B)$  et :

$$KK_0^G(A, B) = KK^G(A, B).$$

Kasparov a alors démontré le théorème de périodicité suivant :



**Théorème D.10** (*Périodicité de Bott*)

Soient  $A, B$  deux  $G$ - $C^*$ -algèbres et  $n, m \geq 0$  :

- si  $m + n$  est pair,  $KK^G(A(\mathbb{R}^m), B(\mathbb{R}^n)) \simeq KK^G(A, B)$ ,
- si  $m + n$  est impair,

$$KK^G(A(\mathbb{R}^m), B(\mathbb{R}^n)) \simeq KK^G(A, B(\mathbb{R})) \simeq KK^G(A(\mathbb{R}), B) \simeq KK_1^G(A, B).$$

Le théorème suivant définit un produit sur les groupes de  $KK$ -théorie :

**Théorème D.11** (*G. Kasparov*)

Soit  $G$  un groupe localement compact et soient  $A, B, C$  des  $G$ - $C^*$ -algèbres.

Il existe une application bilinéaire appelée **produit de Kasparov** : pour  $i, j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,

$$\begin{array}{ccc} KK_i^G(A, B) \times KK_j^G(B, C) & \longrightarrow & KK_{i+j}^G(A, C) \\ (x, y) & \longmapsto & x \otimes_B y \end{array}$$

qui est associative et naturelle.

On a les propriétés importantes suivantes :

**Propriétés D.12** Soient  $G$  un groupe localement compact et  $A, B, C, D, E$  des  $G$ - $C^*$ -algèbres.

1. Le produit de Kasparov induit une action de la  $KK$ -théorie sur la  $K$ -théorie, i.e un morphisme :

$$\begin{array}{ccc} KK_j(A, B) & \longrightarrow & \text{Hom}(K_i(A), K_{i+j}(B)) \\ x & \longmapsto & (p \mapsto p \otimes_A x) \end{array}.$$

2. Pour tout  $x \in KK^G(A, B)$ ,  $x \otimes_B 1_B = x$  et  $1_A \otimes_A x = x$ .

3. Si  $\phi : A \rightarrow B$  est un morphisme de  $G$ - $C^*$ -algèbres et  $y$  un élément de  $KK_i^G(B, C)$ , alors

$$\phi^*(y) = [\phi] \otimes_B y \in KK_i^G(A, C).$$

4. Si  $\psi : B \rightarrow C$  est un morphisme de  $G$ - $C^*$ -algèbres et  $x$  un élément de  $KK_i^G(A, B)$ , alors

$$\psi_*(x) = x \otimes_B [\psi] \in KK_i^G(A, C).$$

5. Soient  $f : D \rightarrow E$  un morphisme de  $G$ - $C^*$ -algèbres,  $x \in KK^G(A, D)$  et  $y \in KK^G(E, B)$ , alors

$$f_*(x) \otimes_E y = x \otimes_D f^*(y).$$

6. Il existe un **morphisme d'extension des scalaires** donné par :

$$\begin{aligned} \tau_D : KK_i^G(A, B) &\longrightarrow KK_i^G(A \hat{\otimes} D, B \hat{\otimes} D) \\ [(\mathcal{H}, \pi, F)] &\longmapsto [(\mathcal{H} \hat{\otimes} D, \pi \hat{\otimes} 1, F \hat{\otimes} 1)]. \end{aligned}$$

On a alors  $\tau_B(1_A) = 1_{A \hat{\otimes} B}$ .

De plus, pour tout  $x \in KK^G(A, B)$  et  $y \in KK^G(B, C)$

$$\tau_D(x \otimes_B y) = \tau_D(x) \otimes_{B \hat{\otimes} D} \tau_D(y) \in KK^G(A \hat{\otimes} D, B \hat{\otimes} D).$$

7. Le produit de Kasparov induit un **produit extérieur** : pour toute  $G$ - $C^*$ -algèbres  $A_1, A_2, B_1, B_2$  et  $D$ ,

$$\begin{aligned} KK^G(A_1, B_1 \hat{\otimes} D) \times KK^G(D \hat{\otimes} A_2, B_2) &\longrightarrow KK^G(A_1 \hat{\otimes} A_2, B_1 \hat{\otimes} B_2) \\ (x, y) &\longmapsto \tau_{A_2}(x) \otimes_{B_1 \hat{\otimes} D \hat{\otimes} A_2} \tau_{B_1}(y). \end{aligned}$$

De plus, pour tout  $x \in KK^G(A_1, B_1)$  et  $y \in KK^G(A_2, B_2)$ , on a

$$x \otimes_{\mathbb{C}} y = y \otimes_{\mathbb{C}} x,$$

aux isomorphismes  $A_1 \hat{\otimes} A_2 \simeq A_2 \hat{\otimes} A_1$  et  $B_1 \hat{\otimes} B_2 \simeq B_1 \hat{\otimes} B_2$  près.

8. On peut définir un **morphisme de descente**

$$\begin{aligned} J_G : KK^G(A, B) &\longrightarrow KK(A \rtimes G, B \rtimes G) \\ [(\mathcal{H}, \pi, F)] &\longmapsto [(\mathcal{H} \rtimes G, \pi_\alpha, F \hat{\otimes}_{B1})] \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \rtimes G &:= \mathcal{H} \hat{\otimes}_B (B \rtimes G) \\ \pi_\alpha : A &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H} \rtimes G) \\ \int a_g u_g dg &\longmapsto \int_G (\pi(a(g)) \otimes_B 1) U_g dg \end{aligned}$$

avec

$$U_g(h \otimes (\int b_h u_h dh)) := \alpha_g(h) \otimes u_g \int b_h u_h dh = \alpha_g(h) \otimes \int \alpha_g(b_{g^{-1}h}) u_h dh.$$

Ce morphisme est compatible avec le produit de Kasparov, i.e :

$$J_G(x \otimes_B y) = J_G(x) \otimes_{B \rtimes G} J_G(y) \quad \text{et} \quad J_G(1_A) = 1_{A \rtimes G}.$$

9. L'élément de Bott  $\betaott$  et l'élément  $\alpha$  construits précédemment permettent d'avoir une forme explicite de la périodicité de Bott dans le cas où  $G$  est trivial et  $(n, m) = (2, 0)$  ou  $(0, 2)$  : on a

$$\betaott \otimes_{C_0(\mathbb{R}^2)} \alpha = 1_{\mathbb{C}} \quad \text{et} \quad \alpha \otimes_{\mathbb{C}} \betaott = 1_{C_0(\mathbb{R}^2)}.$$

Ainsi on a deux isomorphismes :

$$\cdot \otimes_{C_0(\mathbb{R}^2)} \alpha : KK(A, B(\mathbb{R}^2)) \simeq KK(A, B)$$

et

$$\betaott \otimes_{C_0(\mathbb{R}^2)} \cdot : KK(A(\mathbb{R}^2), B) \simeq KK(A, B)$$

# Annexe E

## Calculs pour la proposition 2.21 et le théorème 2.23

### E.1 Lemmes pour le produit $KK_1 \otimes KK_0$ ou inversement

Nous avons déjà remarqué lors de la présentation des modules de Kasparov non bornés que si on est confronté au produit d'un module non borné  $(\mathcal{H}_1, \phi_1, F_1)$  par un module non borné  $(\mathcal{H}_2, \phi_2, F_2)$ , on peut utiliser le théorème de Kucerovsky ou celui de Baaj et Julg mais uniquement quand ces modules sont dans  $\Psi(A, B)$  et  $\Psi(B, C)$ .

Lorsque l'un de ces modules est dans un  $\Psi_1$ , on doit passer par l'isomorphisme  $KK_1(A, B) \simeq KK_0(A, B \hat{\otimes} \mathbb{C}_1)$  défini par  $[(\mathcal{H}, \phi, F)] \mapsto [(\mathcal{H} \hat{\otimes} \mathbb{C}_1, \phi \hat{\otimes} Id, F \hat{\otimes} \alpha)]$  et nous proposons de démontrer deux lemmes qui seront utiles dans les deux cas particuliers qui nous intéressent.

On rappelle que  $\mathbb{C}_1$  est l'algèbre de Clifford de  $\mathbb{C}$  qui est engendré par un élément  $\alpha$  vérifiant  $\alpha^* = 1$  et  $\alpha^2 = \alpha$ .

Nous noterons  $\beta^{BJ} : \Psi(A, B) \rightarrow KK_0(A, B)$  (resp.  $\Psi^1(A, B) \rightarrow KK_1(A, B)$ ) l'application définie par  $\beta^{BJ}(\mathcal{H}, \phi, D) = [(\mathcal{H}, \phi, D(1 + D^2)^{-1/2})]$

Commençons par le lemme qui permet de simplifier le calcul dans la proposition 2.21 :

**Lemme E.1** *Soient  $A, B, C$  trois  $C^*$ -algèbres non graduées.*

*Soient  $(E_1 \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2, \phi_1 \hat{\otimes} 1, F) \in \Psi^1(A, C)$ ,  $(E_1, \phi_1, 0) \in \Psi(A, B)$  et  $(E_2, \phi_2, F_2) \in \Psi^1(B, C)$  tels que :*

(a)  $E_1$  est trivialement gradué,

(b) pour tout  $x$  dans un sous-ensemble  $\mathcal{D}$  dense de  $\phi_1(A)E_1$ , l'opérateur

$$\left[ \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & T_x \\ T_x^* & 0 \end{pmatrix} \right]$$

est borné sur  $\mathfrak{Dom}(F \oplus F_2)$  ( $\mathfrak{Dom} G$  est le domaine de l'opérateur non borné  $G$ ), où  $T_x : E_2 \rightarrow E_1 \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2$  envoie  $e_2 \mapsto x \hat{\otimes} e_2$ .

Alors  $(E_1 \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2, \phi_1 \hat{\otimes} 1, F)$  représente le produit de Kasparov de  $(E_1, \phi_1, 0)$  et  $(E_2, \phi_2, F_2)$ , i.e

$$\beta^{BJ}(E_1 \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2, \phi_1 \hat{\otimes} 1, F) = \beta^{BJ}(E_1, \phi_1, 0) \otimes_B \beta^{BJ}(E_2, \phi_2, F_2).$$

### Démonstration :

Nous prouvons que  $((E_1 \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2) \hat{\otimes} \mathbb{C}_1, \phi_1 \hat{\otimes} 1, F \hat{\otimes} \alpha) \in \Psi(A, C \hat{\otimes} \mathbb{C}_1)$ ,  $(E_1, \phi_1, 0) \in \Psi(A, B)$  et  $(E_2 \hat{\otimes} \mathbb{C}_1, \phi_2, F_2 \hat{\otimes} \alpha) \in \Psi(B, C \hat{\otimes} \mathbb{C}_1)$  vérifient les trois conditions du théorème **2.15**.

Les conditions (ii) et (iii) sont trivialement vérifiées puisque  $F_1 = 0$ .

Il reste à voir que, sous les conditions du lemme, la condition (i) est bien vérifiée.

Grâce au lemme **C.4** et au fait que  $E_1$  est trivialement gradué, on a un isomorphisme

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 : (E_1 \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2) \hat{\otimes} \mathbb{C}_1 &\longrightarrow E_1 \hat{\otimes}_{\phi_2} \hat{\otimes} Id(E_2 \hat{\otimes} \mathbb{C}_1) \\ (e_1 \hat{\otimes} e_2) \hat{\otimes} c &\longmapsto e_1 \hat{\otimes} (e_2 \hat{\otimes} c) \end{aligned}$$

Il s'agit de vérifier que  $(E_1 \hat{\otimes}_{\phi_2} \hat{\otimes} Id(E_2 \hat{\otimes} \mathbb{C}_1), \phi_1 \hat{\otimes} 1, \Upsilon_1 F \hat{\otimes} \alpha \Upsilon_1^{-1}) \in \Psi(A, C \hat{\otimes} \mathbb{C}_1)$ ,  $(E_1, \phi_1, 0) \in \Psi(A, B)$  et  $(E_2 \hat{\otimes} \mathbb{C}_1, \phi_2, F_2 \hat{\otimes} \alpha) \in \Psi(B, C \hat{\otimes} \mathbb{C}_1)$  vérifient les trois conditions du théorème **2.15**.

Les conditions (ii) et (iii) sont trivialement vérifiées puisque  $F_1 = 0$ .

Il reste à voir que, sous les conditions du lemme, la condition (i) est bien vérifiée.

On a alors pour tout  $x \in E_1$ ,  $T_x^* \Upsilon_1 = T_x^* \hat{\otimes} 1 : (E_1 \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2) \hat{\otimes} \mathbb{C}_1 \rightarrow E_2 \hat{\otimes} \mathbb{C}_1$ .

Soit  $x \in \mathcal{D}$ ,  $f \in \mathfrak{Dom} F$ ,  $e'_2 \in \mathfrak{Dom} F_2$  et  $c, c' \in \mathbb{C}_1$ , on a alors

$$\begin{aligned} &\left[ \begin{pmatrix} \Upsilon_1 F \hat{\otimes} \alpha \Upsilon_1^{-1} & 0 \\ 0 & F_2 \hat{\otimes} \alpha \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & T_x \\ T_x^* & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \Upsilon_1(f \hat{\otimes} c) \\ e'_2 \hat{\otimes} c' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \left( [F(x \hat{\otimes} e'_2) - x \hat{\otimes} F_2(e'_2)] \hat{\otimes} \alpha c' \right) \\ [F_2(T_x^*(f)) - T_x^* F(f)] \hat{\otimes} \alpha c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme par hypothèse,

$$\left[ \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & T_x \\ T_x^* & 0 \end{pmatrix} \right]$$

est borné sur  $\mathfrak{Dom}(F \oplus F_2)$ , on obtient la condition (iii) du théorème **2.15**.  $\square$

Le deuxième lemme concerne le cas particulier qui sera appliqué au théorème **2.23** :

**Lemme E.2** Soient  $A, B, C$  trois  $C^*$ -algèbres non graduées.

Soient  $(B \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2, \phi_1 \hat{\otimes} 1, F) \in \Psi^1(A, C)$ ,  $(B, \phi_1, F_1) \in \Psi^1(A, B)$  et  $(E_2, \phi_2, F_2) \in \Psi(B, C)$  tels que  $\phi_2$  est non dégénérée et :

- (a)  $F$  est la fermeture de la somme  $P_1 + P_2$  où  $P_1$  est un opérateur non borné auto-adjoint de degré 0 sur  $B \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2$  et  $P_2$  un opérateur non borné auto-adjoint de degré 1 sur  $B \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2$  et  $\mathfrak{Dom} F = \mathfrak{Dom} P_1 \cap \mathfrak{Dom} P_2$ ,
- (b) pour tout  $x$  dans un sous-ensemble dense  $\mathcal{B}$  de  $\phi_1(A)B$  (tel que pour tout  $b \in \mathcal{B}$  et  $e_2 \in \mathfrak{Dom} F_2$ ,  $b \hat{\otimes} e_2 \in \mathfrak{Dom} P_1 \cap \mathfrak{Dom} P_2$ ), l'opérateur

$$\left[ \left( \begin{array}{cc} P_2 & 0 \\ 0 & F_2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 0 & T_x \\ T_x^* & 0 \end{array} \right) \right]$$

est borné sur  $\mathfrak{Dom}(F \oplus F_2)$ , où  $T_x : E_2 \rightarrow B \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2$  envoie  $e_2 \mapsto x \hat{\otimes} e_2$  ;

- (c) Pour tout  $b \in \mathcal{B}$ ,

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Dom} F_2 & \longrightarrow & B \hat{\otimes} E_2 \\ e_2 & \longmapsto & P_1(b \hat{\otimes} e_2) \end{array}$$

est borné, et

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Dom} P_1 \cap \mathfrak{Dom} P_2 & \longrightarrow & E_2 \\ b' \hat{\otimes} e_2 & \longmapsto & T_b^* P_1(b' \hat{\otimes} e_2) \end{array}$$

s'étend en un opérateur borné sur  $\mathfrak{Dom} F$ .

- (d)  $\mathfrak{Dom} F \subset \mathfrak{Dom}(F_1 \hat{\otimes} 1)$  (ou vice versa) ;

- (e)  $\langle (F_1 \hat{\otimes} 1)x, P_2 y \rangle + \langle P_2 x, (F_1 \hat{\otimes} 1)y \rangle = 0$  pour tout  $x, y$  dans le domaine  $\mathfrak{Dom} F$ .

- (f)  $(-1)^{\partial x} [\langle (F_1 \hat{\otimes} 1)x, P_1 x \rangle + \langle (P_1 \hat{\otimes} 1)x, (F_1 \hat{\otimes} 1)x \rangle] \geq \kappa \langle x, x \rangle$  pour tout  $x$  homogène dans le domaine  $\mathfrak{Dom} F$ .

Alors  $(B \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2, \phi_1 \hat{\otimes} 1, F)$  représente le produit de Kasparov de  $(B, \phi_1, F_1)$  et  $(E_2, \phi_2, F_2)$ , i.e

$$\beta^{BJ}(B \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2, \phi_1 \hat{\otimes} 1, F) = \beta^{BJ}(B, \phi_1, F_1) \otimes \beta^{BJ}(E_2, \phi_2, F_2).$$

**Démonstration :**

Comme  $\phi_2$  est non dégénérée, on a  $B \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2 \simeq E_2$ . On utilisera cette identification tout au long de la démonstration.

Grâce aux lemmes **C.4** et **C.5**, on a un isomorphisme unitaire  $\Upsilon$  composé des deux isomorphismes :

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 : (B \hat{\otimes} \mathbb{C}_1) \hat{\otimes}_{\phi_2 \hat{\otimes} 1} (E_2 \hat{\otimes} \mathbb{C}_1) &\longrightarrow (B \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2) \hat{\otimes} \mathbb{C}_1 \\ (b \hat{\otimes} c_1) \hat{\otimes} (e_2 \hat{\otimes} c_2) &\longmapsto (-1)^{\partial c_1 \partial e_2} (b \hat{\otimes} e_2) \hat{\otimes} c_1 c_2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Upsilon_2 : (B \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2) \hat{\otimes} \mathbb{C}_1 &\longrightarrow (B \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2)^{wg} \hat{\otimes} \mathbb{C}_1 \\ (b \hat{\otimes} e_2) \hat{\otimes} c_1 &\longmapsto (b \hat{\otimes} e_2) \hat{\otimes} \alpha^{\partial e_2} c_1, \end{aligned}$$

Ainsi,  $\Upsilon((b \hat{\otimes} c_1) \hat{\otimes} (e_2 \hat{\otimes} c_2)) = (-1)^{\partial c_1 \partial e_2} (b \hat{\otimes} e_2) \hat{\otimes} \alpha^{\partial e_2} c_1 c_2$ .

Il s'agit de vérifier que les triplets  $((B \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2)^{wg} \hat{\otimes} \mathbb{C}_1, \phi_1 \hat{\otimes} 1, F \hat{\otimes} \alpha) \in \Psi(A, C \hat{\otimes} \mathbb{C}_1)$ ,  $(B \hat{\otimes} \mathbb{C}_1, \phi_1, F_1 \hat{\otimes} \alpha) \in \Psi(A, B \hat{\otimes} \mathbb{C}_1)$  et  $(E_2 \hat{\otimes} \mathbb{C}_1, \phi_2 \hat{\otimes} 1, F_2 \hat{\otimes} 1) \in \Psi(B \hat{\otimes} \mathbb{C}_1, C \hat{\otimes} \mathbb{C}_1)$  vérifient les trois conditions du théorème **2.15** ( $(B \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2)^{wg}$  représente le module  $B \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2$  avec graduation triviale).

On doit donc vérifier qu'on peut appliquer le théorème de Kucerovsky avec

$$((B \hat{\otimes} \mathbb{C}_1) \hat{\otimes}_{\phi_2 \hat{\otimes} 1} (E_2 \hat{\otimes} \mathbb{C}_1), \phi_1 \hat{\otimes} 1, \Upsilon^{-1}(F \hat{\otimes} \alpha) \Upsilon) \in \Psi(A, C \hat{\otimes} \mathbb{C}_1),$$

$$(B \hat{\otimes} \mathbb{C}_1, \phi_1, F_1 \hat{\otimes} \alpha) \in \Psi(A, B \hat{\otimes} \mathbb{C}_1) \text{ et } (E_2 \hat{\otimes} \mathbb{C}_1, \phi_2 \hat{\otimes} 1, F_2 \hat{\otimes} 1) \in \Psi(B \hat{\otimes} \mathbb{C}_1, C \hat{\otimes} \mathbb{C}_1).$$

Comme  $\mathcal{D}\text{om } F \subset \mathcal{D}\text{om}(F_1 \hat{\otimes} 1)$ , on a  $\mathcal{D}\text{om}(\Upsilon_2^{-1} F \hat{\otimes} \alpha \Upsilon_2) \subset \mathcal{D}\text{om}(F_1 \hat{\otimes} 1 \hat{\otimes} \alpha)$ . De plus, d'après la remarque précédent le lemme **C.4**, on a, pour  $b \in E_1$ ,  $e_2 \in E_2$  et  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}_1$  :

$$\begin{aligned} \Upsilon_1[(F_1 \hat{\otimes} \alpha) \hat{\otimes} (1 \hat{\otimes} 1)((b \hat{\otimes} c_1) \hat{\otimes} (e_2 \hat{\otimes} c_2))] &= \Upsilon_1[(F_1(b) \hat{\otimes} \alpha c_1) \hat{\otimes} (e_2 \hat{\otimes} c_2)] \\ &= (-1)^{(\partial c_1 + 1) \partial e_2} (F_1(b) \hat{\otimes} e_2) \hat{\otimes} \alpha c_1 c_2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (F_1 \hat{\otimes} 1 \hat{\otimes} \alpha) \left( \Upsilon_1((b \hat{\otimes} c_1) \hat{\otimes} (e_2 \hat{\otimes} c_2)) \right) &= (F_1 \hat{\otimes} 1 \hat{\otimes} \alpha) \left( (-1)^{\partial c_1 \partial e_2} (b \hat{\otimes} e_2) \hat{\otimes} c_1 c_2 \right) \\ &= (-1)^{(\partial c_1 + 1) \partial e_2} (F_1(b) \hat{\otimes} e_2) \hat{\otimes} \alpha c_1 c_2. \end{aligned}$$

Ainsi, modulo l'isomorphisme  $\Upsilon_1$ , l'opérateur non borné  $F_1 \hat{\otimes} \alpha \hat{\otimes} 1 \hat{\otimes} 1$  défini sur  $(B \hat{\otimes} \mathbb{C}_1) \hat{\otimes}_{\phi_2 \hat{\otimes} 1} (E_2 \hat{\otimes} \mathbb{C}_1)$  est égal à l'opérateur non borné  $F_1 \hat{\otimes} 1 \hat{\otimes} \alpha$  défini sur  $(B \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2) \hat{\otimes} \mathbb{C}_1$ .

Donc  $\mathcal{D}\text{om}(F_1 \hat{\otimes} 1 \hat{\otimes} \alpha) = \Upsilon_1 \mathcal{D}\text{om}(F_1 \hat{\otimes} \alpha \hat{\otimes} 1 \hat{\otimes} 1)$  et donc :

$$\mathcal{D}\text{om} \left( \Upsilon^{-1}(F \hat{\otimes} \alpha) \Upsilon \right) \subset \mathcal{D}\text{om}(F_1 \hat{\otimes} \alpha \hat{\otimes} 1 \hat{\otimes} 1).$$

D'où la condition (ii) du théorème **2.15**.

Comme  $F_1 \hat{\otimes} \alpha \hat{\otimes} 1 \hat{\otimes} 1 = \Upsilon_1^{-1}(F_1 \hat{\otimes} 1 \hat{\otimes} \alpha) \Upsilon_1$  et que  $\Upsilon_1$  est unitaire, la condition (iii) du théorème de Kucerovsky devient :

pour tout  $X \in \mathfrak{Dom} F \otimes \mathbb{C}_1$ ,

$$\begin{aligned} & \langle (F_1 \hat{\otimes} 1 \hat{\otimes} \alpha)(X), \Upsilon_2^{-1}(F \hat{\otimes} \alpha) \Upsilon_2 X \rangle \\ & + \langle \Upsilon_2^{-1}(F \hat{\otimes} \alpha) \Upsilon_2(X), (F_1 \hat{\otimes} 1 \hat{\otimes} \alpha)(X) \rangle \end{aligned}$$

doit être supérieur à  $\kappa \langle X, X \rangle$ .

Or, si  $X \in \mathfrak{Dom} F \otimes \mathbb{C}_1$ , il existe  $x_1, x_2 \in \mathfrak{Dom} F$  tels que

$$X = x_1 \otimes (1 + \alpha) + x_2 \otimes (1 - \alpha).$$

Posons  $x_i^0$  et  $x_i^1$  les parties homogènes de degré 0, resp. 1 de  $x_i$  pour  $i = 1, 2$ . Ainsi  $x_i = x_i^0 + x_i^1$ .

Comme  $1 - \alpha$  et  $1 + \alpha$  sont orthogonaux pour le produit scalaire sur  $\mathbb{C}_1$  et que  $F_1 \hat{\otimes} 1$  et  $P_1$  sont de degré 0 (donc  $\langle (F_1 \hat{\otimes} 1)x, P_1 y \rangle = 0$  si  $x$  et  $y$  sont homogènes de degré différent), on a :

$$\begin{aligned} & \langle (F_1 \hat{\otimes} 1 \hat{\otimes} \alpha)(X), \Upsilon_2^{-1}(F \hat{\otimes} \alpha) \Upsilon_2(X) \rangle \\ & + \langle \Upsilon_2^{-1}(F \hat{\otimes} \alpha) \Upsilon_2(X), (F_1 \hat{\otimes} 1 \hat{\otimes} \alpha)(X) \rangle \\ & = \left[ (-1)^{\partial x_1^0} \langle (F_1 \hat{\otimes} 1)x_1^0, P_1 x_1^0 \rangle + (-1)^{\partial x_1^1} \langle (F_1 \hat{\otimes} 1)x_1^1, P_1 x_1^1 \rangle \right] \hat{\otimes} \|\alpha(1 + \alpha)\|^2 \\ & + \left[ (-1)^{\partial x_2^0} \langle (F_1 \hat{\otimes} 1)x_2^0, P_1 x_2^0 \rangle + (-1)^{\partial x_2^1} \langle (F_1 \hat{\otimes} 1)x_2^1, P_1 x_2^1 \rangle \right] \hat{\otimes} \|\alpha(1 - \alpha)\|^2 \\ & + \left[ (-1)^{\partial x_1^0} \langle (F_1 \hat{\otimes} 1)x_1^0, P_2 x_1^1 \rangle + (-1)^{\partial x_1^1} \langle (F_1 \hat{\otimes} 1)x_1^1, P_2 x_1^0 \rangle \right] \hat{\otimes} \|\alpha(1 + \alpha)\|^2 \\ & + \left[ (-1)^{\partial x_2^0} \langle (F_1 \hat{\otimes} 1)x_2^0, P_2 x_2^1 \rangle + (-1)^{\partial x_2^1} \langle (F_1 \hat{\otimes} 1)x_2^1, P_2 x_2^0 \rangle \right] \hat{\otimes} \|\alpha(1 - \alpha)\|^2 \\ & + \left[ (-1)^{\partial x_1^0} \langle P_1 x_1^0, (F_1 \hat{\otimes} 1)x_1^0 \rangle + (-1)^{\partial x_1^1} \langle P_1 x_1^1, (F_1 \hat{\otimes} 1)x_1^1 \rangle \right] \hat{\otimes} \|\alpha(1 + \alpha)\|^2 \\ & + \left[ (-1)^{\partial x_2^0} \langle P_1 x_2^0, (F_1 \hat{\otimes} 1)x_2^0 \rangle + (-1)^{\partial x_2^1} \langle P_1 x_2^1, (F_1 \hat{\otimes} 1)x_2^1 \rangle \right] \hat{\otimes} \|\alpha(1 - \alpha)\|^2 \\ & + \left[ (-1)^{\partial x_1^0} \langle P_2 x_1^1, (F_1 \hat{\otimes} 1)x_1^0 \rangle + (-1)^{\partial x_1^1} \langle P_2 x_1^0, (F_1 \hat{\otimes} 1)x_1^1 \rangle \right] \hat{\otimes} \|\alpha(1 + \alpha)\|^2 \\ & + \left[ (-1)^{\partial x_2^0} \langle P_2 x_2^1, (F_1 \hat{\otimes} 1)x_2^0 \rangle + (-1)^{\partial x_2^1} \langle P_2 x_2^0, (F_1 \hat{\otimes} 1)x_2^1 \rangle \right] \hat{\otimes} \|\alpha(1 - \alpha)\|^2 \\ & \geq \kappa \left[ (\langle x_1^0, x_1^0 \rangle_C + \langle x_1^1, x_1^1 \rangle_C) \hat{\otimes} \|1 + \alpha\|_{\mathbb{C}_1}^2 + (\langle x_2^0, x_2^0 \rangle_C + \langle x_2^1, x_2^1 \rangle_C) \hat{\otimes} \|1 - \alpha\|_{\mathbb{C}_1}^2 \right] \\ & = \kappa \langle x_1 \hat{\otimes} (1 + \alpha) + x_2 \hat{\otimes} (1 - \alpha), x_1 \hat{\otimes} (1 + \alpha) + x_2 \hat{\otimes} (1 - \alpha) \rangle_{C \hat{\otimes} \mathbb{C}_1} \\ & = \kappa \langle X, X \rangle_{C \hat{\otimes} \mathbb{C}_1} \end{aligned}$$

en utilisant les conditions (e) et (f) du lemme, en se rappelant que  $\alpha^* = \alpha$  et  $\alpha^2 = 1$ , en utilisant l'égalité :

$$\Upsilon_2^{-1}(F \hat{\otimes} \alpha) \Upsilon_2(x) = (-1)^{\partial x} (P_1 \hat{\otimes} \alpha)(x) + (P_2 \hat{\otimes} 1)(x),$$



et

$$\langle x, x \rangle_{C \hat{\otimes} \langle c, c \rangle_{\mathbb{C}_1}} = \langle x \hat{\otimes} c, x \hat{\otimes} c \rangle_{C \hat{\otimes} \mathbb{C}_1}.$$

La condition (iii) est donc vérifiée.

Il reste à vérifier la condition (i) : pour  $x$  dans un sous ensemble dense de  $\phi_1(A)(B \hat{\otimes} \mathbb{C}_1)$ ,

$$\left[ \left( \begin{array}{cc} \Upsilon^{-1} F \hat{\otimes} \alpha \Upsilon & 0 \\ 0 & F_2 \hat{\otimes} 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 0 & T_x \\ T_x^* & 0 \end{array} \right) \right]$$

est borné sur  $\mathfrak{Dom}(\Upsilon^{-1} F \hat{\otimes} \alpha \Upsilon \oplus F_2)$ .

Soit  $y_1 = \Upsilon^{-1}(f \hat{\otimes} c_2)$  avec  $f \in (\mathfrak{Dom} P_1 \cap \mathfrak{Dom} P_2)$  homogène,  $c_2 \in \mathbb{C}_1$ ,  $x = b \hat{\otimes} c_1$  avec  $b \in \mathcal{B}$ ,  $c_1 \in \mathbb{C}_1$  homogène,  $e'_2 \in \mathfrak{Dom} F_2$  et  $c'_2 \in \mathbb{C}_1$  homogènes alors :

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \begin{array}{cc} \Upsilon^{-1} F \hat{\otimes} \alpha \Upsilon & 0 \\ 0 & F_2 \hat{\otimes} 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 0 & T_{b \hat{\otimes} c_1} \\ T_{b \hat{\otimes} c_1}^* & 0 \end{array} \right) \right] \left( \begin{array}{c} \Upsilon^{-1}(f \hat{\otimes} c_2) \\ e'_2 \hat{\otimes} c'_2 \end{array} \right) \quad (E.1) \\ &= \left( \begin{array}{c} \Upsilon_1^{-1} \left[ \Upsilon_2^{-1} (F \hat{\otimes} \alpha) \Upsilon (b \hat{\otimes} c_1 \hat{\otimes} e'_2 \hat{\otimes} c'_2) - (-1)^{\partial c_1} \Upsilon_1 (b \hat{\otimes} c_1 \hat{\otimes} F_2(e'_2) \hat{\otimes} c'_2) \right] \\ (F_2 \hat{\otimes} 1) T_x^*(y_1) - (-1)^{\partial c_1} T_x^* \Upsilon^{-1} (F \hat{\otimes} \alpha) (f \hat{\otimes} c_2) \end{array} \right) \end{aligned}$$

Calculons maintenant  $T_{b \hat{\otimes} c_1}^* \Upsilon^{-1}$  et montrons que cet opérateur est égal à :

$$\begin{aligned} T_{b \hat{\otimes} c_1}^* & : (B \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2) \hat{\otimes} \mathbb{C}_1 \longrightarrow E_2 \hat{\otimes} \mathbb{C}_1 \\ & (f \hat{\otimes} f_2) \hat{\otimes} c \longmapsto (-1)^{\partial c_1 \partial f_2} T_b^*(f \hat{\otimes} f_2) \hat{\otimes} \alpha^{\partial f_2} c_1^* c \end{aligned}$$

où  $T_b^* : B \hat{\otimes} E_2 \rightarrow E_2$  est défini par  $T_b^*(b' \hat{\otimes} e_2) = b^* b' \hat{\otimes} e_2 = \langle b, b' \rangle_B \cdot e_2$ .

On a :

$$\begin{aligned} T_{b \hat{\otimes} c_1}^* ((b' \hat{\otimes} c'_1) \hat{\otimes} (e_2 \hat{\otimes} c_2)) &= \langle b \hat{\otimes} c_1, b' \hat{\otimes} c'_1 \rangle \cdot (e_2 \hat{\otimes} c_2) \\ &= (-1)^{\partial \langle c_1, c'_1 \rangle \partial e_2} \langle b, b' \rangle e_2 \hat{\otimes} \langle c_1, c'_1 \rangle c_2 \\ &= (-1)^{(\partial c_1 + \partial c'_1) \partial e_2} \langle b, b' \rangle \cdot e_2 \hat{\otimes} c_1^* c'_1 c_2 \\ &= (-1)^{(\partial c_1 + \partial c'_1) \partial e_2} T_b^*(b' \hat{\otimes} e_2) \hat{\otimes} c_1^* c'_1 c_2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_{b \hat{\otimes} c_1}^* \Upsilon((b' \hat{\otimes} c'_1) \hat{\otimes} (e_2 \hat{\otimes} c_2)) &= T_{b \hat{\otimes} c_1}^* ((-1)^{\partial c'_1 \partial e_2} (b' \hat{\otimes} e_2) \hat{\otimes} \alpha^{\partial e_2} c'_1 c_2) \\ &= (-1)^{(\partial c_1 + \partial c'_1) \partial e_2} T_b^*(b' \hat{\otimes} e_2) \hat{\otimes} c_1^* c'_1 c_2 \\ &= T_{b \hat{\otimes} c_1}^* ((b' \hat{\otimes} c'_1) \hat{\otimes} (e_2 \hat{\otimes} c_2)) \end{aligned}$$

On obtient ainsi, en posant  $y_2 = b \hat{\otimes} c_1 \hat{\otimes} e'_2 \hat{\otimes} c'_2$  :

$$\begin{aligned} & \Upsilon_2^{-1}(F \hat{\otimes} \alpha) \Upsilon(y_2) - (-1)^{\partial c_1} \Upsilon_1(b \hat{\otimes} c_1 \hat{\otimes} F_2(e'_2) \hat{\otimes} c'_2) \\ &= (-1)^{\partial c_1 \partial e'_2} \left( P_1(b \hat{\otimes} e'_2) \hat{\otimes} \alpha c_1 c'_2 + \left[ P_2(b \hat{\otimes} e'_2) - b \hat{\otimes} F_2(e'_2) \right] \hat{\otimes} c_1 c'_2 \right) \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

qui est borné en  $e_2$  et  $c'_2$  pour  $b, c_1$  fixés, par les hypothèses (c) et (d) et

$$\begin{aligned} & (F_2 \hat{\otimes} 1) T_x^*(y_1) - (-1)^{\partial c_1} T_x^* \Upsilon^{-1}(F \hat{\otimes} \alpha)(f \hat{\otimes} c_2) \\ &= (-1)^{\partial c_1 \partial f} F_2(T_b^*(f)) \hat{\otimes} \alpha^{\partial f} i_{c_1^* c_2} \\ & \quad - (-1)^{\partial c_1} T_x^*(F(f) \hat{\otimes} \alpha c_2), \end{aligned}$$

$$F \hat{\otimes} \alpha(f \hat{\otimes} c_2) = F(f) \hat{\otimes} \alpha c_2 \text{ car } f \hat{\otimes} c_2 \in (B \hat{\otimes}_{\phi_2} E_2)^{wg} \hat{\otimes} \mathbb{C}_1.$$

Or

$$\begin{aligned} T_x^* \Upsilon^{-1}(F(f) \hat{\otimes} \alpha c_2) &= (-1)^{\partial c_1 (\partial f + 1)} T_b^* P_2(f) \hat{\otimes} \alpha^{\partial f + 1 + 1} c_1^* c_2 \\ & \quad + (-1)^{\partial c_1 \partial f} T_b^* P_1(f) \hat{\otimes} \alpha^{\partial f + 1} c_1^* c_2 \end{aligned}$$

car  $P_2$  est de degré 1 donc  $\partial P_2(f) = \partial f + 1$ .

Par l'hypothèse (c), la deuxième partie du second membre est bornée en  $f \hat{\otimes} c_2$ .

On obtient donc

$$\begin{aligned} & (F_2 \hat{\otimes} 1) T_x^*(y_1) - (-1)^{\partial c_1} T_x^* \Upsilon^{-1}(F \hat{\otimes} \alpha)(f \hat{\otimes} c_2) \\ &= (-1)^{\partial c_1 \partial f} \left( F_2(T_b^*(f)) - T_b^* P_2(f) \right) \hat{\otimes} \alpha^{\partial f} c_1^* c_2 \\ & \quad - (-1)^{\partial c_1 + \partial c_1 \partial f} T_b^* P_1(f) \hat{\otimes} \alpha c_1^* c_2 \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

et ainsi  $(F_2 \hat{\otimes} 1) T_{b \hat{\otimes} c_1}^* - (-1)^{\partial c_1} T_{b \hat{\otimes} c_1}^* \Upsilon^{-1}(F \hat{\otimes} \alpha) \Upsilon$  est un opérateur borné sur  $\Upsilon^{-1}(\mathfrak{Dom} P_1 \cap \mathfrak{Dom} P_2)$  comme somme de deux opérateurs bornés et s'étend donc en un opérateur borné sur  $\mathfrak{Dom}(\Upsilon^{-1} F \hat{\otimes} \alpha \Upsilon)$  par densité.

Grâce aux équations (E.1), (E.2) et (E.3), la condition (i) du théorème **2.15** est vérifiée, ce qui achève la preuve.  $\square$

## E.2 Calculs pour la proposition 2.21

Commençons ce paragraphe en introduisant la notion de gradient sur  $C_\tau^\infty(\Omega)$  par rapport à  $S^1$ .

Soit  $f \in C_\tau^\infty(\Omega)$  alors le gradient de  $f$  par rapport à  $S^1$  est donné par :

$$\text{Grad}_1(f)(\omega) := \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(\omega.\theta) - f(\omega)}{\theta}.$$

Si  $d_1$  désigne l'opérateur de Dirac sur  $C(\Omega) \rtimes S^1$  agissant le long des feuilles de  $\Omega$  feuilleté par  $S^1$ , on a : pour tout  $f \in C_\tau^\infty(\Omega)$  et  $\zeta \in \mathfrak{Dom} d_1$  :

$$d_1(M_{C(\Omega)}(f)\zeta) = M_{C(\Omega)}(f)d_1\zeta + M_{C(\Omega)}(\text{Grad}_1(f))\zeta. \quad (\text{E.4})$$

On peut alors faire le calcul du commutateur :

pour tout  $x \in \mathfrak{Dom} \partial_1$ ,  $f \in C_\tau^\infty(\Omega)$ ,  $c, c' \in \mathfrak{Dom} d_1$  et  $\phi \in \mathfrak{Dom} \partial_1$ ,

$$\left[ \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & \partial_1 \otimes 1 + 1 \otimes d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & T_{x \otimes f} \\ T_{x \otimes f}^* & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} c' \\ \phi \otimes c \end{pmatrix}$$

est égal à

$$\begin{pmatrix} d_1(\langle x, \phi \rangle M_{C(\Omega)}(f)c) - \langle x, \partial_1 \phi \rangle M_{C(\Omega)}(f)c - \langle x, \phi \rangle M_{C(\Omega)}(f)d_1(c) \\ \partial_1(x) \otimes M_{C(\Omega)}(f)c' + x \otimes d_1(M_{C(\Omega)}(f)c') - x \otimes M_{C(\Omega)}(f)d_1(c') \end{pmatrix}$$

où les produits scalaires représentent le produit scalaire sur  $L^2(S^1)$ .

En utilisant la formule (E.4) et le fait que  $\partial_1$  est auto-adjoint, on a :

$$\begin{aligned} & d_1(\langle x, \phi \rangle M_{C(\Omega)}(f)c) - \langle x, \partial_1 \phi \rangle M_{C(\Omega)}(f)c - \langle x, \phi \rangle M_{C(\Omega)}(f)d_1(c) \\ & \quad \parallel \\ & \langle x, \phi \rangle d_1(M_{C(\Omega)}(f)c) - \langle \partial_1 x, \phi \rangle M_{C(\Omega)}(f)c - \langle x, \phi \rangle M_{C(\Omega)}(f)d_1(c) \\ & \quad \parallel \\ & \langle x, \phi \rangle M_{C(\Omega)}(f)d_1(c) + \langle x, \phi \rangle M_{C(\Omega)}(\text{Grad}_1(f))c \\ & \quad - \langle \partial_1 x, \phi \rangle M_{C(\Omega)}(f)c - \langle x, \phi \rangle M_{C(\Omega)}(f)d_1(c) \\ & \quad \parallel \\ & \langle x, \phi \rangle M_{C(\Omega)}(\text{Grad}_1(f))c - \langle \partial_1 x, \phi \rangle M_{C(\Omega)}(f)c \\ & \quad \parallel \\ & (T_{x \otimes \text{Grad}_1(f)} - T_{\partial_1 x \otimes f})(\phi \otimes c) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \partial_1 x \otimes M_{C(\Omega)}(f)c' + x \otimes d_1(M_{C(\Omega)}(f)c') - x \otimes M_{C(\Omega)}(f)d_1(c') \\
& \quad \parallel \\
& \quad \partial_1 x \otimes M_{C(\Omega)}(f)c' + x \otimes M_{C(\Omega)}(f)d_1(c') \\
& \quad + x \otimes M_{C(\Omega)}(\text{Grad}_1(f))c' - x \otimes M_{C(\Omega)}(f)d_1(c') \\
& \quad \parallel \\
& \quad \partial_1 x \otimes M_{C(\Omega)}(f)c' + x \otimes M_{C(\Omega)}(\text{Grad}_1(f))c' \\
& \quad \parallel \\
& \quad (T_{\partial_1 x \otimes f}^* + T_{x \otimes \text{Grad}_1(f)}^*)(c')
\end{aligned}$$

Ce calcul montre que

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & \partial_1 \otimes 1 + 1 \otimes d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & T_{x \otimes f} \\ T_{x \otimes f}^* & 0 \end{pmatrix} \right] \\
& = \begin{pmatrix} T_{x \otimes \text{Grad}_1(f)} - T_{\partial_1 x \otimes f} & 0 \\ 0 & T_{\partial_1 x \otimes f}^* + T_{x \otimes \text{Grad}_1(f)}^* \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

### E.3 Calculs pour le théorème 2.23

Nous utiliserons tout au long de cette section l'identification :

$$C(\Omega) \rtimes S^1 \otimes_{C(\Omega) \rtimes S^1} \mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1} \simeq \mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1}.$$

Nous commençons ce paragraphe en introduisant la notion de gradient sur  $C(S^1, C_\tau^\infty(\Omega))$  par rapport à  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $f \in C_\tau^\infty(\Omega)$  et  $e_1, e_2$  les deux vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , alors, si

$$\begin{aligned}
\partial^1 f(\omega) & := \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(\omega + ye_1) - f(\omega)}{y}, \\
\partial^2 f(\omega) & := \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(\omega + ye_2) - f(\omega)}{y},
\end{aligned}$$

le gradient par rapport à  $\mathbb{R}^2$  est donné par :

$$\begin{aligned}
\text{Grad}_2(f)(\omega) & := \partial^1 f(\omega)e_1 + \partial^2 f(\omega)e_2 \\
& = \begin{pmatrix} 0 & -\partial^1 f(\omega) + i\partial^2 f(\omega) \\ \partial^1 f(\omega) + i\partial^2 f(\omega) & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Comme dans le cas d'une variété, on montre que, si  $d_2$  désigne l'opérateur de Dirac sur  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2$  agissant le long des feuilles de  $\Omega$  feuilleté par  $\mathbb{R}^2$ , on a :  
pour tout  $f \in C_r^\infty(\Omega)$  et  $\zeta \in C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \oplus C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2$  :

$$d_2(M_{C(\Omega)}(f)\zeta) = M_{C(\Omega)}(f)d_2\zeta + \text{Grad}_2(f).\zeta \quad (\text{E.5})$$

où  $\text{Grad}_2(f).\zeta$  est défini comme l'élément  $(M_{C(\Omega)}(-G_1 + iG_2)\zeta_2, M_{C(\Omega)}(G_1 + iG_2)\zeta_1)$  de  $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2 \oplus C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^2$  si  $\text{Grad}_2(f) = G_1e_1 + G_2e_2$  et  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ .

Pour toute fonction  $x$  de  $C(S^1, C_r^\infty(\Omega))$ , nous noterons encore  $\text{Grad}_2(x)$  pour désigner l'application de  $C(S^1, C_r^\infty(\Omega) \oplus C_r^\infty(\Omega)) : \theta \longmapsto \text{Grad}_2(x(\theta, \cdot))$ .

Comme  $d_2$  commute avec l'action de  $S^1$ , nous obtenons le résultat annoncé dans la preuve du théorème **2.23** :

$$D_2(\pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(f)g) = \pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(f)D_2g + \pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(\text{Grad}_2(f)) \cdot g \quad (\text{E.6})$$

i.e "  $D_2(f \otimes g) = f \otimes D_2g + \text{Grad}_2(f) \otimes g$  " en faisant un abus de notation.

Nous allons alors calculer le commutateur

$$\left[ \begin{pmatrix} D_2 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & T_x \\ T_x^* & 0 \end{pmatrix} \right]$$

qui apparait dans la preuve du théorème **2.23** et nous allons montrer qu'il est égal à

$$\begin{pmatrix} T'_{\text{Grad}(x)} & 0 \\ 0 & T'_{\text{Grad}(x^*)} \end{pmatrix}.$$

En notant  $f \hat{\otimes} g = \pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(f)g = f.g$  et en se rappelant de l'identification

$$C(\Omega) \rtimes S^1 \otimes_{C(\Omega) \rtimes S^1} \mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1} \simeq \mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1},$$

on a :

$$\begin{aligned} T_x^* : \mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1} &\longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{R}^2 \rtimes S^1} \\ \xi &\longmapsto x^*.\xi = x^* \hat{\otimes} \xi \end{aligned}$$

Si  $x \in C^{0,\infty}(\Omega \rtimes S^1)$ ,  $\xi \in \mathfrak{Dom} D_3$  et  $\xi' \in \mathfrak{Dom} D_2$ , on a alors :

$$\left[ \begin{pmatrix} D_2 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & T_x \\ T_x^* & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \xi \\ \xi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_2(x \otimes \xi') - x \otimes D_2(\xi') \\ D_2(x^*.\xi) - x^*.D_2(\xi) \end{pmatrix}$$

où  $\langle x, f \rangle$  représente le produit scalaire de  $x$  avec  $f$  dans  $C(\Omega) \rtimes S^1$ .

En utilisant la formule **(E.6)**, on a :

$$\begin{aligned} &D_2(x \otimes \xi') - x \otimes D_2\xi' \\ &\quad \parallel \\ &x \otimes D_2\xi' + \pi_{C(\Omega) \rtimes S^1}(\text{Grad}_2(x)).\xi' - x \otimes D_2\xi' \cdot \\ &\quad \parallel \\ &T'_{\text{Grad}_2(x)}(\xi') \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
 & D_2(x^*.\xi) - x^*.D_2(\xi) \\
 & \quad \parallel \\
 & x^*.D_2(\xi) + \pi_{C(\Omega) \times S^1}(Grad_2(x^*)).\xi - x^*.D_2(\xi) \cdot \\
 & \quad \parallel \\
 & T'_{Grad_2(x^*)}(\xi)
 \end{aligned}$$



# Bibliographie

- [AP98] J.E. ANDERSON et I.F. PUTNAM : *Topological invariants for substitution tilings and their associated  $C^*$ -algebras*. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **18**: 509–537, 1998.
- [BBG06] J. BELLISSARD, R. BENEDETTI et J.-M. GAMBAUDO : *Spaces of tilings, finite telescopic approximation and gap labelings*. *Comm. Math. Phys.*, **261**:1–41, 2006.
- [BDHS] M. BARGE, B. DIAMOND, J. HUNTON et L. SADUN : *Cohomology of Substitution Tiling Spaces*. *To appear in Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, *arXiv :0811.2507*.
- [Bel82] J. BELLISSARD : *Schrödinger’s operator with an almost periodic potential : an overview*. *Lecture Notes in Physics*, **153**, 1982.
- [Bel86] J. BELLISSARD : *K-theory of  $C^*$ -algebras in Solid State Physics*. *Lecture Notes in Physics*, **257**:99–156, 1986.
- [Bel92] J. BELLISSARD : *Gap labelling theorems for Schrödinger operators*. In *From number theory to physics (Les Houches, 1989)*, pages 538–630, 1992. Springer, Berlin.
- [BG03] R. BENEDETTI et J-M GAMBAUDO : *On the dynamics of  $\mathbb{G}$ -Solenoids. Applications to Delone sets*. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **29**:673–691, 2003.
- [BHZ00] J. BELLISSARD, D.J.L. HERRMANN et M. ZARROUATI : *Hulls of aperiodic solids and gap labeling theorems*. *CRM Monogr. Ser.*, **13**:207–258, 2000. A.M.S., Providence.
- [BJ83] S. BAAJ et P. JULG : *Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les  $C^*$ -modules hilbertiens*. *C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math.*, **296 no. 21**:875–878, 1983.
- [BKL01] J. BELLISSARD, J. KELLENDONK et A. LEGRAND : *Gap-labelling for three-dimensional aperiodic solids*. *C.R.A.S, serie I*, **332**:521–525, 2001.
- [BOO02] M.-T. BENAMEUR et H. OYONO-OYONO : *Index theory for quasi-crystals. I. Computation of the gap-label group*. **252**:137–170, 2002. *J. Funct. Anal.*



- [Bre72] G.E. BREDON : *Introduction to compact transformation groups*. Pure and applied mathematics **46**, 1972. Academic Press.
- [Cha99] J. CHABERT : *Stabilité de la conjecture de Baum-Connes pour certains produits semi-directs de groupes*. Thèse de doctorat, Univ. de la Méditerranée Aix-Marseille II, 1999.
- [Con79] A. CONNES : *Sur la théorie non commutative de l'intégration*. *Lecture Notes in Math.*, **725**:19–143, 1979. Springer, New York.
- [Con82] A. CONNES : *A survey of foliations and operator algebras*. *Proc. Sympos. Pure Math.*, **38** part. **1**, 1982. A.M.S. , Providence.
- [DHK91] R.G. DOUGLAS, S. HURDER et J. KAMINKER : *The Longitudinal Cocycle and the Index of Toeplitz Operators*. *J. Funct. Anal.*, **101**:120–144, 1991.
- [Eff81] E.G. EFFROS : *Dimensions and  $C^*$ -algebras*. *Conference Board of the Mathematical Sciences*, 1981. Washington, D.C.
- [Eil44] S. EILENBERG : *Singular Homology Theory*. *Ann. Math.*, **45**:407–447, 1944.
- [Fre08] D. FRETTLÖH : *About substitution tilings with statistical circular symmetry*. *Phil. Mag.*, **88**:2033–2039, 2008.
- [Ghy99] E. GHYS : *Laminations par surfaces de Riemann*. *Dynamique et géométrie complexes, Panoramas & Synthèses*, **8**:49–95, 1999.
- [Gre69] F. P. GREENLEAF : *Invariant means on topological groups and their applications*. *Van Nostrand mathematical studies*, **16**, 1969.
- [Gre78] P. GREEN : *The local structure of twisted covariance algebras*. *Acta. Math.*, **140**:191–250, 1978.
- [Hat02] A. HATCHER : *Algebraic topology*. 1st ed., Cambridge University Press, 2002.
- [HRS05] C. HOLTON, C. RADIN et L. SADUN : *Conjugacies for Tiling Dynamical Systems*. *Comm. Math. Phys.*, **254**:343–359, 2005.
- [HS87] M. HILSUM et G. SKANDALIS : *Morphismes  $K$ -orientés d'espaces de feuilles et functorialité en théorie de Kasparov (d'après une conjecture d'A. Connes)*. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **20** no. **3**:325–390, 1987.
- [HY61] J.G. HOCKING et G.S. YOUNG : *Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, 1961.
- [Jul81] P. JULG :  *$K$ -théorie équivariante et produits croisés*. *Note C.R.A.S. Paris*, **292**:629–632, 1981.
- [Kas81] G.G. KASPAROV : *The operator  $K$ -functor and extensions of  $C^*$ -algebras*. *Math. USSR Izvestija*, **16**:513–572, 1981.

- [Kas88] G.G. KASPAROV : *Equivariant KK-theory and the novikov conjecture*. *Inv. Math.*, **91**:147–201, 1988.
- [Kas95] G.G. KASPAROV : *K-theory, group C\*-algebras and higher signatures*. *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, **226**:101–146, 1995.
- [Kel95] J. KELLENDONK : *Noncommutative geometry of tilings and gap labeling*. *Rev. Math. Phys.*, **7**:1133–1180, 1995.
- [Kel97] J. KELLENDONK : *The local structure of tilings and their integer group of coinvariants*. *Comm. Math. Phys.*, **187**:115–157, 1997.
- [KP00] J. KELLENDONK et I.F. PUTNAM : *Tilings, C\*-algebras and K-theory*. CRM monograph Series **13**, 177-206, 2000. M.P. Baake and R.V. Moody Eds., A.M.S., Providence.
- [KP03] J. KAMINKER et I. PUTNAM : *A proof of the gap labeling conjecture*. *Michigan Math. J.*, **51**:537–546, 2003.
- [Kuc97] D. KUCEROVSKY : *The KK-product of unbounded modules*. *K-theory*, **11 no. 1**:17–34, 1997.
- [LMS02] J.-Y. LEE, R.V. MOODY et B. SOLOMYAK : *Pure point dynamical and diffraction spectra*. *Ann. Henri Poincaré*, **3**:1003–1018, 2002.
- [LP03] J.C. LAGARIAS et P.A.B. PLEASANT : *Repetitive Delone sets and quasicrystals*. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **23**:831–867, 2003.
- [Mat] M. MATTHEY : *K-theories, C\*-algebras and assembly maps*. Thèse de doctorat, Université de Neuchâtel.
- [Mou] H. MOUSTAFA : *PV cohomology of pinwheel tilings, their integer group of coinvariants and gap-labelling*.  
<http://arxiv.org/abs/0906.2107>, to appear in *Comm. Math. Phys.*
- [Mou09] H. MOUSTAFA : *Gap-labeling des pavages de type pinwheel*. Thèse de doctorat, Univ. Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 2009.  
<http://math.univ-bpclermont.fr/~moustafa/These/these-Moustafa.pdf>.
- [MRW87] P.S. MUHLY, J.N. RENAULT et D.P. WILLIAMS : *Equivalence and isomorphism for groupoid C\*-algebras*. *J. Operator Theory*, **17**:3–22, 1987.
- [MS06] C. C. MOORE et C. SCHOCHET : *Global analysis on foliated spaces*. *MSRI Publications*, **9**, 2006.
- [ORS02] N. ORMES, C. RADIN et L. SADUN : *A homeomorphism invariant for substitution tiling spaces*. *Geometriae Dedicata*, **90**:153–182, 2002.
- [PB09] J. PEARSON et J. BELLISSARD : *Noncommutative Riemannian Geometry and Diffusion on Ultrametric Cantor Sets*. *Journal of Noncommutative Geometry*, **3**:847–865, 2009.
- [Ped79] G. K. PEDERSON : *C\*-algebras and their automorphism groups*. *London Math. Society Monographs*, **14**, 1979. Academic Press, London.

- [Pet05] S. PETITE : *Pavages du demi-plan hyperbolique et laminations*. Thèse de doctorat, Univ. de Bourgogne I, 2005.
- [Rad94] C. RADIN : *The pinwheel tilings of the plane*. *Ann. of Math.*, **139**:661–702, 1994.
- [Rad95] C. RADIN : *Space tilings and substitutions*. *Geom. Dedicata*, **55**:257–264, 1995.
- [Ren80] J. RENAULT : *A groupoid approach to  $C^*$ -algebras*. *Lecture Notes in Mathematics*, **793**, 1980. Springer-Verlag.
- [Rie82] M.A. RIEFFEL : *Morita equivalence for operator algebras*. *Proc. of Symposia in Pure Math.*, **38**:285–298, 1982.
- [RS98] C. RADIN et L. SADUN : *An algebraic invariant for substitution tiling systems*. *Geom. Dedicata*, **73**:21–37, 1998.
- [RW98] I. RAEBURN et D.P. WILLIAMS : *Morita equivalence and continuous-trace  $C^*$ -algebras*, volume **60**. *Mathematical Surveys and Monographs*, 1998. AMS Providence.
- [Sad] L. SADUN : *Private conversation in september 2007*.
- [SB09] J. SAVINIEN et J. BELLISSARD : *A spectral sequence for the  $K$ -theory of tiling spaces*. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **29**:997–1031, 2009.
- [SBGC84] D. SHECHTMAN, I. BLECH, D. GRATIAS et J.V. CAHN : *Metallic phase with long range orientational order and no translational symmetry*. *Phys. Rev. Lett.*, **53**:1951–1953, 1984.
- [Seg68] G. SEGAL : *Equivariant  $K$ -theory*. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **34**:129–151, 1968.
- [Ska91] G. SKANDALIS : *Kasparov's bivariant  $K$ -theory and applications*. *Exposition. Math.*, **9**:193–250, 1991.
- [Sol97] B. SOLOMYAK : *Dynamics of self-similar tilings*. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **17**:695–738, 1997. B. Solomyak : *Corrections to Dynamics of self-similar tilings*, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **19** (1999), 1685.
- [Spa66] E.H. SPANIER : *Algebraic topology*. McGraw-Hill series in higher mathematics, 1966.
- [Vas01] S. VASSOUT : *Feuilletages et résidu non commutatif longitudinal*. Thèse de doctorat, Univ. Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2001.
- [vE94] A. van ELST : *Gap labelling theorems for Schrodinger operators on the square and cubic lattices*. *Rev. Math. Phys.*, **6**:319–342, 1994.
- [Ypm] F. YPMA : *Quasicrystals,  $C^*$ -algebras and  $K$ -theory*. <http://remote.science.uva.nl/npl/fonger.pdf> (2004).