



**HAL**  
open science

# Analyse multi-échelle de structures hétérogènes par décomposition de domaine : application aux navires à passagers

Ahmad Mobasher Amini

► **To cite this version:**

Ahmad Mobasher Amini. Analyse multi-échelle de structures hétérogènes par décomposition de domaine : application aux navires à passagers. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2008. Français. NNT : . tel-00509707

**HAL Id: tel-00509707**

**<https://theses.hal.science/tel-00509707>**

Submitted on 14 Aug 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**École Centrale de Nantes**

**Université de Nantes**

ÉCOLE DOCTORALE

MÉCANIQUE, THERMIQUE ET GENIE CIVIL

Année 2008

N° B.U. :

**Thèse de DOCTORAT**

***Diplôme délivré conjointement par  
l'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes***

Spécialité : GÉNIE MÉCANIQUE

Présentée et soutenue publiquement par :

Ahmad MOBASHER AMINI

le 01 février 2008

à l'École Centrale de Nantes

**TITRE**

**ANALYSE MULTI-ÉCHELLE DE STRUCTURES HÉTÉROGÈNES PAR  
DÉCOMPOSITION DE DOMAINE : APPLICATION AUX NAVIRES À  
PASSAGERS**

**JURY**

Président :	Jean Yves COGNARD	Professeur, ENSIETA de Brest
Rapporteurs :	Laurent CHAMPANEY Anthony GRAVOUIL	Professeur, ENS de Cachan Maître de Conférences -HDR, INSA de Lyon
Examineurs :	Natacha BUANNIC Patrice CARTRAUD David DUREISSEIX Bernard PESEUX	Responsable Technique, PRINCIPIA Professeur, École Centrale de Nantes Professeur, Université de Montpellier 2 Professeur Émérite, École Centrale de Nantes

---

Directeur de thèse : Patrice CARTRAUD

Laboratoire : Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique, École Centrale de Nantes

Co-encadrant : David DUREISSEIX

Laboratoire : Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (LMGC), Université de Montpellier 2

N° ED 0367-335



**Juger vos succès d'après ce que vous avez dû sacrifier pour les obtenir.**  
**[Dalai Lama]**

**Ce que je sais, c'est que je ne sais rien.**  
**[Avicenna]**

**. . . à mon amour Raheleh**



# Remerciements

Les travaux de cette thèse sont le fruit d'une collaboration entre l'Institut de Recherche en Genie Civil et Recherche (GeM) de l'École Centrale de Nantes et le Laboratoire LMGC de l'université Montpellier 2.

Ces quelques lignes vont me permettre de remercier les personnes qui ont contribué de près et de loin à la réalisation de ce travail aussi bien du point de vue scientifique que personnel, et sans qui, mon travail n'aurait pu aboutir.

Je remercie Monsieur Bernard Peseux et Monsieur Nicolas Mões pour leur accueil au sein de l'équipe "Structure et Simulation" du laboratoire.

Je ne remercierai jamais assez Messieurs Patrice Cartraud et David Dureisseix, qui ont dirigé mes travaux pour leur exprimer toute ma grande reconnaissance pour la confiance, le grand soutien, la disponibilité permanente, la patience et la gentillesse qu'ils m'ont accordé pour terminer cette thèse.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur Jean-Yves Cognard, professeur des universités (ENSIETA de Brest) d'avoir accepté d'être le président du jury. Je remercie également Messieurs Laurent Champany, professeur des universités (ENS de Cachan) et Anthony Gravouil, Maître de Conférences HDR (INSA de Lyon) qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être les rapporteurs de cette thèse. Leur remarques intéressantes m'ont permis d'améliorer ce travail.

Je tiens remercier également à Madame Natacha Buannic, Responsable Technique (PRINCIPIA MARINE) et Monsieur Bernard Peseux, professeur émérite (École Centrale de Nantes) d'avoir été examinateurs de ces travaux de thèse.

Mes études en France avaient deux aspects : scientifique et personnel. J'ai eu l'occasion de travailler avec des gens très sympathiques dans un ambiance très agréable. J'ai découvert une langue et une culture très riches.

Comment remercier tous les membres du GeM pour leur soutien permanent et en tout particulièrement dans les moments les plus difficiles ?

On ne peut pas passer plusieurs années dans un laboratoire et parti sans vous exprimer toute ma reconnaissance. Je souhaite donc adresser mes remerciements à l'ensemble des membres du Laboratoire du GeM et du LMGC.

Merci donc, à tous les thésards et tous mes amis, notamment dans l'ordre alphabétique, Abdelghafour Ait Alaiwa, Alain Batailly, Benoit Magnain, Céline Dubois, Elie El Khoury, Eric Bechet, Frédéric Dufour, Frank Achard, Gilles Marckmann, Grégory Legrain, Hans Minnebo, Hassan Ijaz, Kristell Dréau, Laurent Gornet, Marc Maldonado, Matthias Legrand, Mathieu Cloirec, Nicolas Mões, Nicolas Chevaugéon, Nicolas Bonfils, Patrick Rozicky, Reza Ghoreishi, Romain Laniel, Sebastien Roques, Shéhérazade Nineb, Steven Marguet, Tanguy Messenger.

Sans oublier Brigitte Renaud, Dominique Lamarche, Jean Pierre Regoin, pour leur joie et leur bonne humeur tout au long de ces années de labeur.

Un grand merci à ma famille (mon père, ma mère, mes frères Mahmoud, Mohammad, Mahdi et ma sœur Maryam) pour leur soutien au cours de ces années de recherche.

**Finalement, un dernier et grand remerciement à mon épouse, Raheleh, qui sans doute, sans son soutien, je n'aurais jamais réussi dans mes études. Je ne trouve aucun mot suffisamment fort pour lui exprimer toute ma gratitude. Je lui dédie donc ce mémoire pour son soutien pendant toutes ces années.**



## **ANALYSE MULTI-ÉCHELLE DE STRUCTURES HÉTÉROGÈNES PAR DÉCOMPOSITION DE DOMAINE : APPLICATION AUX NAVIRES À PASSAGERS**

**Résumé :** La simulation de structures industrielles complexes comportant des détails structuraux conduit à des modèles éléments finis de très grande taille. Pour traiter ce type de problème, une méthode de décomposition de domaine FETI-DP est adoptée dans ce travail. L'étude concerne un navire à passagers, dont l'architecture présente un découpage naturel en sous-structures. Les performances de ces méthodes sont très dépendantes de celles de son solveur, basé sur une méthode itérative de type gradient conjugué. Il faut donc disposer de préconditionneurs efficaces, ce qui est délicat pour des structures hétérogènes constituées par des assemblages tridimensionnels de plaques et de raidisseurs. Une méthode est donc développée tenant compte de la raideur locale d'interface des sous domaines, pour accélérer la vitesse de convergence.

Dans une deuxième partie, l'objectif est d'optimiser le temps de calcul de la structure. La méthode précédente est alors améliorée avec une version multiéchelle, et deux niveaux de discrétisation des sous domaines. Les zones d'intérêt sont représentées par des sous domaines maillés finement, alors que toutes les autres sont décrites de façon macroscopique avec seulement les nœuds grossiers de l'approche FETI-DP. L'utilisation de sous domaines macroscopiques soulève le problème de la détermination de leur raideur (par homogénéisation numérique), et de leur raccord avec les sous domaines microscopiques. Deux approches différentes sont proposées, de type collocation et Mortar. Elles sont validées sur des cas simples et illustrés à travers différents exemples.

**Mots-clés :** Analyse Multi-échelle, Décomposition de Domaine, FETI-DP, Structures hétérogènes, Homogénéisation, Navire à passagers

## MULTISCALE ANALYSIS OF HETEROGENEOUS STRUCTURES USING DOMAIN DECOMPOSITION METHOD : APPLICATION TO PASSENGER SHIPS

**Abstract :** Numerical simulation of complex industrial structures, containing structural details, leads to very large finite element models. To solve this type of problem, in this work, a domain decomposition method (FETI-DP) is chosen. This study concerns a passenger ship, whose architecture presents a natural sub structuring. The efficiency of these methods depends on its solver; a conjugate gradient solver is used in this work, which has to be equipped with preconditioners. Defining the preconditioner is difficult for heterogeneous structures consisting of three-dimensional assemblies of plates and beams. A method is developed, taking into account the local interface stiffness of the sub-domain to speed up the convergence.

In a second part, the goal is to optimize the computational time. To improve the previous approach, a domain decomposition method with different levels of discretization in sub-domains is proposed. The sub-domains in the zones of interest are meshed finely (microscopic), while, the sub-domains in the reminder of the structure are described, by a coarse mesh only (macroscopic or homogenized). Using this strategy raises the problem of the determination of the stiffness of coarse sub-domains, and of incompatible finite element connection between coarse and fine sub-domain. Two different approaches are proposed, such as collocation and Mortar. They are validated on simple cases and applied on various heterogeneous examples.

**Key words :** Multi-scale analysis, Domain decomposition method, FETI-DP, Heterogeneous Structures, Homogenization, Passenger Ship

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Décomposition de domaine et structures navales</b>	<b>5</b>
2.1	Introduction . . . . .	5
2.2	Décomposition de domaine en calcul de structure . . . . .	6
2.2.1	Description du problème de référence . . . . .	7
2.2.2	Principe de la méthode de décomposition de domaine . . . . .	9
2.2.3	Aperçu bibliographique des méthodes de décomposition de domaine . . . . .	10
2.2.3.1	Une méthode primale . . . . .	10
2.2.3.2	Une méthode duale - FETI . . . . .	13
2.2.3.3	Une méthode mixte . . . . .	17
2.2.4	Remarques . . . . .	18
2.2.5	Choix d'une méthode pour les structures navales . . . . .	19
2.3	La méthode FETI-DP classique . . . . .	20
2.4	Développement d'une méthode FETI-DP adaptée aux structures raidies . . . . .	24
2.4.1	Hétérogénéité locale - redondance de multiplicateurs . . . . .	27
2.4.2	Résolution du problème d'interface . . . . .	28
2.4.2.1	Généralités . . . . .	28
2.4.2.2	Préconditionneurs . . . . .	29
2.5	Application de la méthode FETI-DP adaptée aux structures raidies . . . . .	32
2.5.1	Exemple de validation en $2D$ - cas d'une interface homogène . . . . .	35
2.5.2	Exemple en $2D$ - cas d'une interface hétérogène . . . . .	38
2.5.2.1	Exemple en $2D$ - cas d'une hétérogénéité matérielle . . . . .	38
2.5.2.2	Exemple en $2D$ - cas d'une hétérogénéité géométrique . . . . .	40
2.5.3	Exemple de panneaux raidis en flexion . . . . .	41
2.5.3.1	Problème de la raideur de <i>drilling</i> des plaques . . . . .	44
2.5.3.2	Condition de raccord de plaques en $3D$ . . . . .	47
2.5.4	Application à un exemple industriel . . . . .	51
2.6	Bilan . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Homogénéisation numérique et approche multi-échelle</b>	<b>55</b>
3.1	Introduction . . . . .	55
3.2	Description générale de la méthode . . . . .	58
3.3	Raccord entre les sous domaines fin et grossier . . . . .	59
3.3.1	Introduction . . . . .	59

3.3.2	Collage des maillages incompatibles : aperçu bibliographique . . . . .	60
3.3.3	Présentation de différentes méthodes . . . . .	63
3.3.3.1	Raccord en déplacement . . . . .	63
3.3.3.1.1	Méthode de collocation	63
3.3.3.1.2	Méthode des moindres carrés	64
3.3.3.2	La méthode <i>mortar</i> . . . . .	66
3.3.4	Bilan - choix de deux méthodes . . . . .	68
3.3.5	Application de deux méthodes de raccord . . . . .	68
3.3.5.1	Préliminaire – interpolation sur l’interface côté grossier . . .	68
3.3.5.2	Raccord en déplacement ou raccord cinématique . . . . .	69
3.3.5.3	Raccord de type <i>mortar</i> . . . . .	72
3.4	Homogénéisation des sous domaines grossiers (macro) . . . . .	74
3.5	Méthode FETI-DP avec sous domaines fins et grossiers . . . . .	77
3.5.1	Formulation matricielle . . . . .	77
3.5.2	Résolution numérique . . . . .	79
3.6	Validation de la méthode . . . . .	81
3.6.1	Validation de la raideur macroscopique . . . . .	81
3.6.1.1	Raideur homogénéisée en membrane . . . . .	81
3.6.1.2	Raideur homogénéisée en flexion . . . . .	83
3.6.2	Validation du raccord . . . . .	83
3.7	Applications numériques . . . . .	85
3.7.1	Introduction . . . . .	85
3.7.2	Structures homogènes . . . . .	86
3.7.2.1	Poutre en flexion : étude en contraintes planes . . . . .	86
3.7.2.2	Poutre en flexion : étude avec des éléments plaque . . . . .	89
3.7.3	Structures hétérogènes . . . . .	90
3.7.3.1	Plaque infinie trouée : étude en contraintes planes . . . . .	92
3.7.3.2	Plaque infini trouée : étude en flexion . . . . .	97
3.7.3.3	Plaque raidie trouée : étude en flexion . . . . .	98
3.7.3.4	Assemblage de plaques . . . . .	100
3.8	Bilan . . . . .	106
<b>4</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>107</b>
4.1	Bilan des travaux . . . . .	107
4.2	Perspectives . . . . .	108
<b>A</b>	<b>Préconditionneur - matrice pondération <i>superlumped</i></b>	<b>111</b>
<b>B</b>	<b>Condition de raccord de la plaque en 3D</b>	<b>113</b>
	<b>Références</b>	<b>117</b>

# Table des figures

1.1	La méthode local-global-local classique . . . . .	3
2.1	Schématisme du problème de référence . . . . .	7
2.2	Décomposition de domaine (sous domaine et interface globale) . . . . .	10
2.3	Liaison sur l'interface et définition la matrice booléenne $B^{(s)}$ . . . . .	14
2.4	Discrétisation fine d'un morceau de navire et maillage grossier correspondant . . . . .	19
2.5	Classification des nœuds et degrés de liberté associés de la méthode FETI-DP . . . . .	21
2.6	Séparation des nœuds en ddl coin (c) interne (i) et interface (b) . . . . .	22
2.7	Maillage des raidisseurs et des panneaux du navire . . . . .	25
2.8	Hétérogénéité géométrique . . . . .	26
2.9	Différentes configurations des raidisseurs entre les sous domaines (a) Raidisseur rattaché à un sous domaine (b) Raidisseur partagé entre les sous domaines (c) Raidisseur entre les sous domaines . . . . .	26
2.10	Redondance sur l'interface de plaque raidie . . . . .	27
2.11	La méthode FETI-DP . . . . .	33
2.12	Problème en contraintes planes (panneau simple) en traction et cisaillement . . . . .	35
2.13	Cas homogène : influence du préconditionneur sur le taux de convergence (3x2 sous domaines et 20x20 éléments par sous domaine) . . . . .	36
2.14	Cas homogène : influence de la taille d'élément ou de la taille du problème (3x2 sous domaines - nombre de sous domaines constant (H constant)) . . . . .	36
2.15	Cas homogène : influence du nombre de sous domaines (taille du problème constante (h constant)) . . . . .	37
2.16	Cas homogène : extensibilité numérique (taille de problème par sous domaine constant ( $\frac{H}{h}$ constant)) . . . . .	37
2.17	Panneau en traction - hétérogénéité matériau sur l'interface - $\frac{E1}{E2} = 100$ . . . . .	39
2.18	Cas hétérogène : influence de l'hétérogénéité matériau, $\frac{E1}{E2} = 100$ (3x2 sous domaines, 10x10 éléments par sous domaine) . . . . .	39
2.19	Cas hétérogène : influence de la pondération <i>scaling</i> dans le cas d'une hétéro- généité matériau (3x2 sous domaines, 10x10 éléments par sous domaine) . . . . .	40
2.20	Panneau raidi en traction - hétérogénéité locale (géométrie) . . . . .	41
2.21	Cas hétérogène : influence de l'hétérogénéité géométrique (panneau raidi) (3x2 sous domaines, 10x10 éléments par sous domaine) . . . . .	42
2.22	Cas hétérogène : influence du <i>scaling</i> et de la connectivité dans le cas d'hétéro- généité géométrique (3x2 sous domaines, 10x10 éléments par sous domaine) . . . . .	42
2.23	Schéma classique de la plaque et de la poutre . . . . .	43

2.24	Plaque en 3D . . . . .	44
2.25	Convergence du calcul en 3D - plaque sans raidisseur . . . . .	45
2.26	Convergence du calcul en 3D - plaque raidie . . . . .	45
2.27	Plaque pliée . . . . .	46
2.28	Exemple de la plaque pliée - convergence non monotone . . . . .	46
2.29	Interface de plaque dans les cas coplanaire et non coplanaire . . . . .	48
2.30	Exemple de plaque pliée : influence du raccord sur la ligne de jonction . . . . .	49
2.31	Exemple assemblage de plaque . . . . .	50
2.32	Exemple assemblage de plaque - sans et avec modification du raccord sur l'interface . . . . .	50
2.33	Taux de convergence du calcul sur un tronçon de navire . . . . .	52
2.34	Post-traitement - exemple un tronçon de navire . . . . .	53
3.1	a) Maillage fin de tous les sous domaines b) Maillage issu du maillage (a) avec deux discrétisations, fine et grossière. . . . .	57
3.2	Exemples d'interfaces sans compatibilité géométrique (à gauche) et avec compatibilité géométrique (à droite) . . . . .	61
3.3	Raccord avec multiplicateurs de Lagrange : a) Deux champs b) Trois champs c) Élément d'interface . . . . .	62
3.4	Interface incompatible et déplacement référence . . . . .	63
3.5	a) Interface incompatible b) Choix du maillage grossier comme maître c) Choix du maillage fin comme maître . . . . .	65
3.6	Définition des surfaces d'intégration sur l'interface . . . . .	67
3.7	Interpolation des quantités macro (M) sur le bord - 3D . . . . .	69
3.8	Interface incompatible (raccord par collocation) . . . . .	70
3.9	Description micro-macro d'un champ sur l'interface . . . . .	70
3.10	Schéma de plaque en 3D . . . . .	71
3.11	Côté fin et grossier sur l'interface . . . . .	72
3.12	Raideur macroscopique obtenue par homogénéisation cinématique ou statique . . . . .	75
3.13	Exemples de patch test en 2D . . . . .	82
3.14	Exemple de patch test en 3D . . . . .	82
3.15	Vérification de raccord dans le cas 2D et 3D . . . . .	84
3.16	Poutre en flexion en 2D . . . . .	87
3.17	Décomposition en sous domaines et maillage micro-macro de la poutre en flexion . . . . .	87
3.18	Poutre en flexion : déplacement du nœud A . . . . .	88
3.19	Erreur en énergie sur les sous domaines fins (moitié droite de la structure) . . . . .	89
3.20	Plaque en flexion . . . . .	90
3.21	Poutre en flexion : déplacement ( $u_z$ ) du nœud A . . . . .	91
3.22	Poutre en flexion : rotation ( $\theta_y$ ) du nœud A . . . . .	91
3.23	Plaque infinie trouée en contraintes planes . . . . .	92
3.24	Contrainte de Von Mises de la plaque trouée en 2D . . . . .	93
3.25	Erreur relative en énergie de déformation, les maillages $6 \times 6$ , $12 \times 12$ et $20 \times 20$ éléments par sous domaine . . . . .	94
3.26	Plaque infinie : contrainte au point A . . . . .	95
3.27	Plaque infinie : contrainte au point B . . . . .	96

3.28	Déformation du sous domaine comprenant le trou . . . . .	96
3.29	Distribution d'erreur dans le sous domaine avec trou, cas de la traction . . . . .	97
3.30	Plaque en flexion pure . . . . .	98
3.31	Contrainte de Von Mises de la plaque trouée en 3D . . . . .	98
3.32	Plaque en flexion : distribution d'erreur dans sous domaine avec le trou, (a) 6 × 6 éléments par sous domaine, (b) 12 × 12 éléments par sous domaine (c) 20 × 20 éléments par sous domaine . . . . .	99
3.33	Plaque raidie : contrainte de Von Mises pour les sous domaines contenant des trous . . . . .	100
3.34	Plaque raidie en flexion : distribution d'erreur dans sous domaine avec le trou, (a) 6 × 6 éléments par sous domaine, (b) 12 × 12 éléments par sous domaine (c) 20 × 20 éléments par sous domaine . . . . .	101
3.35	Exemple d'assemblage de plaques et chargement appliqué . . . . .	102
3.36	Distribution d'erreur dans le sous domaine avec trou . . . . .	103
3.37	Distribution d'erreur dans le sous domaine avec trou . . . . .	103
3.38	Amplitude du déplacement du nœud A . . . . .	103
3.39	Amplitude de la rotation du nœud A . . . . .	104
3.40	Contrainte de Von Mises dans les sous domaines contenant des trous . . . . .	104
3.41	Exemple avec plusieurs trous . . . . .	105
3.42	Distribution d'erreur dans le sous domaine avec trou . . . . .	105
A.1	ressort hétérogène . . . . .	111
B.1	Interface de plaque dans les cas coplanaire et non coplanaire . . . . .	114



# Liste des tableaux

2.1	Caractéristiques du tronçon de navire . . . . .	51
3.1	Patch test de raideur homogénéisée en membrane : caractéristiques matériau . . . . .	83
3.2	Patch test de raideur homogénéisée en flexion : caractéristiques matériau . . . . .	83
3.3	Bilan du patch test du raccord . . . . .	84
3.4	Données de l'exemple de poutre en flexion (2D) . . . . .	86
3.5	Caractéristique de l'exemple, plaque en flexion (3D) . . . . .	90
3.6	Caractéristiques de l'exemple de la plaque trouée (2D) . . . . .	92
3.7	Caractéristiques de l'exemple d'assemblage de plaques . . . . .	102



# 1

---

## Introduction

La construction et la conception d'un navire sont des activités industrielles très anciennes qui ont été beaucoup développées grâce à l'apparition des outils et méthodes modernes de calcul. Le déroulement de la conception de cette structure consiste en différentes étapes d'analyses (calculs hydrodynamiques, de stabilité, de structure, etc.) plus au moins liées. Parmi celles-ci, le calcul de structure est une étape importante dans le déroulement de la conception d'un navire, car sa qualité conditionne sa résistance, sa longévité, son confort et son acceptation par les sociétés de classification (autorisation pour la construction) ainsi que sa sécurité et son optimisation.

Puisqu'il n'y a souvent qu'un seul prototype produit, qui est le produit final, et aussi parce que l'essai à échelle réelle de telles structures est très coûteux et difficile, les concepteurs navals comptent maintenant beaucoup sur la simulation numérique par éléments finis. Celle-ci joue un rôle croissant dans la conception des navires, en particulier vis à vis des approches réglementaires édictées par les sociétés de classification. Or, pour un navire à passagers, on a affaire à une structure de grande taille, à architecture complexe. Le navire comprend en effet de nombreux détails géométriques (hublots, portes, etc.), qui sont de plus, de taille très petite par rapport aux dimensions d'ensemble du navire (300 m de long pour le navire et quelques centimètres pour les détails, par exemple).

La simulation numérique de cette structure est donc difficile en raison de la complexité et de la taille des modèles. En effet, pour obtenir en *une seule* étape la réponse d'ensemble de la structure et la détermination de la solution locale au voisinage des détails, il faudrait adopter une description à l'échelle fine de discrétisation, qui conduirait à un modèle global très volumineux, et donc à un temps de calcul ainsi qu'un encombrement mémoire prohibitifs.

Il est donc nécessaire de passer par un modèle d'ensemble simplifié du navire. En pratique, une méthodologie de calcul global-local (analyse descendante) est déjà utilisée en bureaux d'études.



Cette méthode se compose des étapes suivantes :

1. homogénéisation de détails structuraux d'un problème local ou microscopique ;
2. construction d'un modèle global (grossier ou macroscopique) avec un comportement constitutif homogénéisé équivalent issu des résultats de la première étape ;
3. calcul global associé au modèle grossier (simplifié par l'homogénéisation) ;
4. post-traitement, qui conduit à résoudre des problèmes de relocalisation sur les zones d'intérêt de la structure.

Le schéma général de cette méthode est présenté en figure (1.1).

Le processus précédent revient à homogénéiser les détails, et soulève plusieurs difficultés. La première est liée au fait que les détails considérés ont le plus souvent chacun leurs propres caractéristiques, et ne sauraient être considérés comme un élément d'un réseau spatial périodique. Il en résulte une indétermination sur les conditions aux limites du problème local d'homogénéisation, et donc la nécessité de formuler des hypothèses à ce niveau. La seconde difficulté, liée à la première, se situe dans l'étape de re-localisation pour utiliser des conditions aux limites issues de la résolution du problème global (modèle grossier) pour résoudre le problème local (modèle fin).

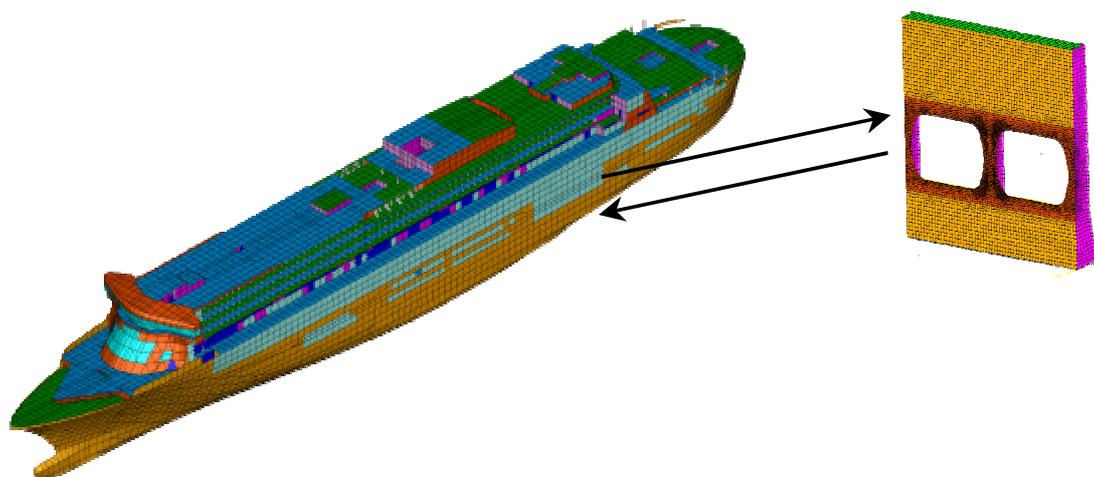
En général, l'approche en déplacement, pour laquelle la réanalyse locale est menée en imposant les déplacements du maillage grossier sur le bord du maillage fin, a tendance à sous-estimer les niveaux de déformations dans la zone raffinée. Par contre, l'approche en effort, qui consiste à imposer les efforts du maillage grossier sur le bord du maillage fin, a tendance à les surestimer. Dans tous les cas, avec cette méthode, on ne peut pas considérer l'effet du modèle fin sur la réponse du problème global. En effet les deux problèmes sont totalement séparés. La nécessité de re-coupler les deux problèmes, grossier et fin, est en général indispensable.

Cette démarche d'analyse descendante doit donc être améliorée avec une étape supplémentaire permettant de rendre compte de l'impact du modèle fin sur le modèle grossier.

Plusieurs travaux ont été effectués dans ce sens, cf. l'analyse bibliographique disponible dans [Nouy, 2003]. On peut se référer aux travaux de [Hirai *et al.*, 1984] qui utilisent de manière conjuguée des techniques de condensation statique et de ré-analyse locale, aux travaux de [Mao *et Sun*, 1991] qui proposent une démarche en trois temps (analyse globale, analyse locale, analyse globale raffinée) ainsi que ceux de [Whitcomb, 1991] qui proposent une démarche totalement itérative. Malgré la mise en place d'un certain dialogue entre modèle global et local dans une analyse descendante puis ascendante, ces méthodes ne sont pas adaptées pour l'analyse de grands systèmes structurels.

Pour remédier aux insuffisances de ces approches, il faut pouvoir intégrer de façon rigoureuse





**Figure 1.1** - *La méthode local-global-local classique*

les détails dans le modèle global, tout en permettant un calcul global rapide, et en conservant une bonne précision sur les contraintes locales.

Ces objectifs peuvent être atteints en utilisant une méthode de décomposition de domaine.

L'objectif de ce travail de thèse est ainsi de proposer une stratégie de calcul multi-échelle répondant à la problématique d'analyse globale-locale classique. Cette méthode de résolution doit être robuste, efficace et adaptée à la taille et à la nature des simulations d'un navire à passagers. La démarche suivie combine deux techniques. Une approche de décomposition de domaine (naturellement multi-échelle) pour réduire la taille du problème global, et une approche micro-macro, pour tenir compte de la petite taille des détails devant celle de la structure, bâtie sur une technique d'homogénéisation.

Ce travail de thèse est le fruit d'une collaboration entre le GeM de l'École Centrale de Nantes et le LMGC de l'Université Montpellier 2.

La rédaction de ce document est organisée de la façon suivante.

Dans le premier chapitre, après une analyse bibliographique, nous serons amenés à choisir une méthode de décomposition de domaine de type FETI-DP. Avec cette méthode, la structure est décomposée en sous domaines maillés finement, et son analyse globale se ramène à un problème mettant en jeu les degrés de liberté des nœuds sommets des sous domaines, et les multiplicateurs de Lagrange associés aux équations de liaison entre les sous domaines. Cette méthode sera ensuite adaptée au cas des structures rencontrées dans le domaine de la construction navale, qui se caractérisent par des assemblages de plaques et de raidisseurs. Il en résulte une approche pour le traitement des raidisseurs, et une attention particulière lors de la résolution du problème global. En effet, ce problème est résolu de façon itérative par une méthode de gradient conjugué. Il importe donc d'assurer un bon conditionnement numérique, ce qui est délicat pour



des structures hétérogènes. Le traitement du raccord de plaques en 3D doit être réalisé avec une attention particulière pour conserver un bon taux de convergence de l'algorithme. Plusieurs exemples sont considérés.

Dans une deuxième partie, l'objectif est d'optimiser le temps de calcul de la structure. La méthode précédente est alors développée avec une version multi-échelle, et deux niveaux de discrétisation des sous domaines. Les zones d'intérêt et celles qui sont le siège de phénomènes locaux sont représentées par des sous domaines maillés finement, alors que toutes les autres sont décrites de façon macroscopique avec seulement les nœuds sommets de l'approche FETI-DP. Il s'agit alors de calculer la raideur des sous domaines macroscopiques et de préciser la façon dont on les raccorde avec les sous domaines microscopiques. Deux approches différentes sont proposées, de type collocation et *mortar*. Différents exemples illustrent la méthode.



---

# Décomposition de domaine et structures navales

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2.2</b>	<b>Décomposition de domaine en calcul de structure</b>	<b>6</b>
2.2.1	Description du problème de référence	7
2.2.2	Principe de la méthode de décomposition de domaine	9
2.2.3	Aperçu bibliographique des méthodes de décomposition de domaine	10
2.2.4	Remarques	18
2.2.5	Choix d'une méthode pour les structures navales	19
<b>2.3</b>	<b>La méthode FETI-DP classique</b>	<b>20</b>
<b>2.4</b>	<b>Développement d'une méthode FETI-DP adaptée aux structures raidies</b>	<b>24</b>
2.4.1	Hétérogénéité locale - redondance de multiplicateurs	27
2.4.2	Résolution du problème d'interface	28
<b>2.5</b>	<b>Application de la méthode FETI-DP adaptée aux structures raidies</b>	<b>32</b>
2.5.1	Exemple de validation en $2D$ - cas d'une interface homogène	35
2.5.2	Exemple en $2D$ - cas d'une interface hétérogène	38
2.5.3	Exemple de panneaux raidis en flexion	41
2.5.4	Application à un exemple industriel	51
<b>2.6</b>	<b>Bilan</b>	<b>51</b>

---

## 2.1 Introduction

Lors d'une analyse numérique par éléments finis, les ingénieurs ont besoin de modéliser des structures jusqu'à une échelle fine pour avoir des résultats numériques précis. La simulation d'une super structure à géométrie complexe (comme les navires à passagers) conduit alors à résoudre un système algébrique de grande taille. Sa résolution par un solveur direct se heurte



alors à plusieurs problèmes : encombrement mémoire, temps de calcul, qui peuvent devenir prohibitifs et limiter l'utilisation d'un tel solveur.

L'idée fondamentale de la méthode de décomposition de domaine est d'éviter la résolution d'un grand problème sur un seul domaine, en se ramenant à plusieurs problèmes couplés sur des sous domaines formant une partition du domaine original. Des solveurs itératifs sont alors mis en place afin de résoudre les couplages, un solveur direct étant généralement utilisé pour résoudre les problèmes de structure limités à chaque sous domaine.

Cette idée a été proposée par *Hermann Schwarz* au *XIX<sup>eme</sup>* siècle. Deux grandes classes de méthode existent :

- les approches avec recouvrement des sous domaines (méthode de *Schwarz*),
- les approches sans recouvrement des sous domaines (méthode de *Schur*).

Ces dernières sont les plus utilisées en pratique et sont les seules considérées ici.

Ce type de méthode s'est avéré un outil efficace pour le calcul de structures de grandes tailles à géométrie complexe [[Toselli et Widlund, 2005](#)].

Le but de ce chapitre est l'application, l'adaptation et le développement d'une méthode de décomposition de domaine pour le calcul de structure d'un navire à passagers.

Dans la première section on présente le problème de référence du point de vue continu, ensuite les différentes méthodes de décomposition de domaine et le choix d'une méthode pour les structures navales sont détaillés.

## 2.2 Décomposition de domaine en calcul de structure

Dans ce chapitre, on présente une étude bibliographique concernant les méthodes de décomposition de domaine pour le calcul de structure. L'algorithme de résolution et le choix d'une méthode pertinente de décomposition de domaine sans recouvrement pour les structures des navires vont également être présentés.

Les points forts et les limites de chacune des approches seront discutés dans le cadre de notre étude, pour le cas de l'élasticité linéaire.

Il s'agit, après avoir réalisé une partition du domaine, de réécrire un problème mécanique sur l'interface entre les sous domaines. On présente d'abord le cas du problème continu dans la suite.



### 2.2.1 Description du problème de référence

On considère l'équilibre statique d'un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  (avec  $d = 2$  ou  $3$ ), sous les hypothèses des petites perturbations. Cette structure est soumise à des efforts volumiques  $f_b$ , des efforts surfaciques  $F_d$  sur une partie de sa frontière  $\partial_N\Omega$  et à des déplacements imposés  $u_d$  sur sa partie complémentaire  $\partial_D\Omega$ , cf. figure (2.1). On suppose également que la structure a un comportement élastique et linéaire.

Avec ces notations, le problème de référence s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + f_b &= 0 && \text{dans } \Omega \\
 \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} && \text{dans } \Omega \\
 \boldsymbol{\varepsilon}(u) &= \frac{1}{2}(\operatorname{grad}(u) + \operatorname{grad}(u)^T) && \text{dans } \Omega \\
 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= F_d && \text{sur } \partial_N\Omega \\
 u &= u_d && \text{sur } \partial_D\Omega
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{n}$  sont respectivement les contraintes, les déformations, le tenseur de la loi de comportement et le vecteur normal de la surface vers l'extérieur.

Pour que le problème soit bien posé, il faut que  $\operatorname{mes}(\partial_D\Omega) > 0$  et que le tenseur  $\mathbf{E}$  soit symé-

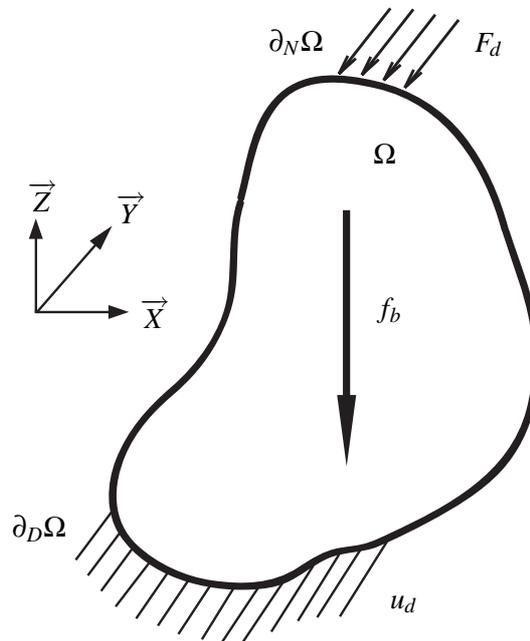


Figure 2.1 - Schématisation du problème de référence

trique. Dans ce cas, le problème (2.1) possède une solution unique [Duvaut, 1990].

On peut alors résoudre ce problème par une approche éléments finis classique [Batoz et Dhatt,



1995], [Bathe, 1996] ou [Zienkiewicz et Taylor, 2000], par exemple.

Dans ce cas, une discrétisation en espace de la forme  $u = \{N\}\{u\}$  est introduite, où  $\{N\}$  contient les fonctions d'interpolation des éléments finis utilisés et  $\{u\}$  est le vecteur des déplacements nodaux.

En utilisant cette discrétisation, le système linéaire à résoudre, issu de la formulation en déplacement, est alors du type :

$$[K]\{u\} = \{f\} \quad (2.2)$$

où  $[K]$  la matrice de rigidité globale du système,  $\{u\}$  le vecteur des déplacements nodaux inconnus et  $\{f\}$  le vecteur des forces nodales appliquées (ou la force généralisée).

Le système linéaire a comme taille le nombre des inconnues nodales (degrés de liberté). La résolution se fait par factorisation de la matrice de rigidité, par une méthode de type *Cholesky* ou *Crout*, par exemple.

Dans le cas de la modélisation d'une grande structure à géométrie complexe, la recherche d'une solution avec prise en compte des détails, conduit à utiliser une discrétisation à l'échelle fine (maillage fin) et donc introduit un grand nombre de degrés de liberté. Les systèmes linéaires engendrés deviennent très rapidement gigantesques (plusieurs centaines de milliers d'équations). Les problèmes posés sont alors multiples. La mise en place du modèle géométrique fin et du modèle de calcul contenant autant d'inconnues amène à manipuler de très grosses quantités d'informations. De plus, la matrice de rigidité, une fois assemblée, occupe un espace mémoire très important, souvent plus grand que celui disponible en mémoire vive sur les calculateurs courants. Son stockage et sa factorisation deviennent délicats. Des écritures sur disques sont donc nécessaires ce qui ralentit fortement le processus du calcul. Il faut alors, pour de telles modélisations, générer des outils facilitant l'entrée et la manipulation des données et conduisant à des encombrements mémoire réduits. La conception de telles structures demande en général l'utilisation d'une technique d'optimisation qui demande à résoudre une succession de tels problèmes, augmentant grandement le coût de l'étude.

Une façon classique d'éviter ce problème est l'emploi d'un maillage grossier, avec des propriétés globales affectées à des éléments homogénéisés (méthode globale locale cf. chapitre 1).

Une autre manière de résoudre ce problème est l'utilisation d'une méthode purement numérique comme la méthode de décomposition de domaine pour réduire la taille du problème global et en conséquence le temps de calcul.

Après une présentation générale des méthodes de décomposition de domaine, nous discuterons de leur adéquation à l'étude d'un navire à passagers. Ceci nous conduira à un choix d'une certaine famille de méthode. Cette méthode sera ensuite adaptée compte tenu des spécificités des structures considérées (présence d'un grand nombre de raidisseurs, hétérogénéité structurale).



### 2.2.2 Principe de la méthode de décomposition de domaine

L'idée des méthodes de décomposition de domaine est de partitionner le domaine  $\Omega$  en  $N_s$  sous domaines  $\{\Omega^{(s)}\}_{s=1}^{s=N_s}$ . Dans ce cas, chaque sous domaine est une entité mécanique à part entière avec ses propres variables et son propre comportement. Chaque sous domaine  $\Omega^{(s)}$  est soumis à l'action de son environnement constitué par ses interfaces avec les sous domaines voisins, cf. figure (2.2) et le milieu extérieur, si un côté du sous domaine coïncide avec le contour  $\partial\Omega$ . On définit alors les interfaces entre deux sous domaines voisins notés  $r$  et  $s$  :

$$\Gamma_{(r,s)} = \Gamma_{(s,r)} = \partial\Omega^{(r)} \cap \partial\Omega^{(s)} \quad (2.3)$$

On peut réécrire le problème de référence (2.1) après l'avoir décomposé, pour chaque sous domaine :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^{(s)}) + \mathbf{f}_b^{(s)} &= 0 && \text{dans } \Omega^{(s)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(s)} &= \mathbf{E}^{(s)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} && \text{dans } \Omega^{(s)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} &= \frac{1}{2}(\operatorname{grad}(\mathbf{u}^{(s)}) + \operatorname{grad}(\mathbf{u}^{(s)})^T) && \text{dans } \Omega^{(s)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(s)} \cdot \mathbf{n}^{(s)} &= \mathbf{F}_d^{(s)} && \text{sur } \partial_N\Omega \cap \partial\Omega^{(s)} \\ \mathbf{u}^{(s)} &= \mathbf{u}_d^{(s)} && \text{sur } \partial_D\Omega \cap \partial\Omega^{(s)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

avec les conditions de raccord sur l'interface  $\Gamma_{(r,s)}$  :

$$\begin{aligned} \forall (r,s) \leq N_s \\ \boldsymbol{\sigma}^{(r)} \cdot \mathbf{n}^{(r)} + \boldsymbol{\sigma}^{(s)} \cdot \mathbf{n}^{(s)} &= 0 \\ \mathbf{u}^{(r)} - \mathbf{u}^{(s)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}^{(s)} \cdot \mathbf{n}^{(s)}$  représente les efforts appliqués sur le sous domaine  $s$  par ses sous domaines voisins. Le comportement d'une interface  $\Gamma_{(r,s)}$  entre deux sous domaines  $\Omega^{(r)}$  et  $\Omega^{(s)}$  dépend de la nature de la liaison que l'interface doit modéliser. Plusieurs types de liaisons peuvent être envisagés. Par exemple, l'interface de type contact, liaison parfaite, liaison élastique, etc. On présente ici le cas d'une interface parfaite : les déplacements sont continus à travers de l'interface et les efforts sont en équilibre. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{(r)} \cdot \mathbf{n}^{(r)} + \boldsymbol{\sigma}^{(s)} \cdot \mathbf{n}^{(s)} &= 0 \\ \mathbf{u}^{(r)}|_{\Gamma} - \mathbf{u}^{(s)}|_{\Gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Pour obtenir le système matriciel correspondant à chaque sous domaine, on peut écrire la formulation variationnelle sur chaque sous domaine puis procéder à une discrétisation. Une autre approche, algébrique, consiste à obtenir le problème d'interface en décomposant le système linéaire global discrétisé (2.2), c'est celle que nous adopterons ici.



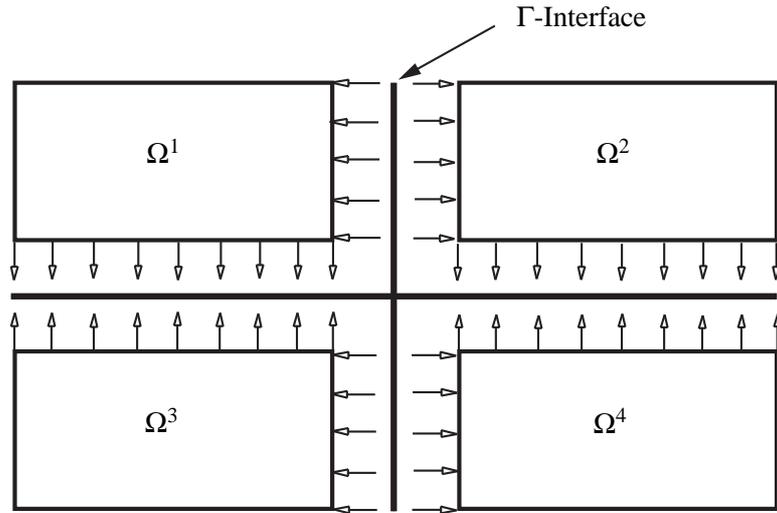


Figure 2.2 - Décomposition de domaine (sous domaine et interface globale)

### 2.2.3 Aperçu bibliographique des méthodes de décomposition de domaine

Le système (2.4) avec les conditions du raccord (2.5) peut être traité de plusieurs manières dans le cadre des méthodes de décomposition de domaine. Dans cette partie, on présente les bases de quelques méthodes qui se distinguent par la prise en compte de la condition de raccord sur l'interface. On peut les classer dans trois catégories différentes : les méthodes **primales**, les méthodes **duales** et les méthodes **mixtes**.

#### 2.2.3.1 Une méthode primale

La méthode primale présentée ici est une méthode de décomposition de domaine sans recouvrement qui choisit le champ de déplacement de l'interface comme inconnue principale [Le Tallec et Vidrascu, 1993], [Le Tallec, 1994] et [Le Tallec *et al.*, 1998].

On considère la décomposition d'un maillage en  $N_s$  sous domaines. Pour chaque sous domaine  $s$ , on note les degrés de liberté intérieurs avec un indice  $i$  et les degrés de liberté sur l'interface avec un indice  $b$ .

En introduisant une unique inconnue de déplacement à l'interface  $u_b$  (commune à tous les sous domaines auxquels cette interface appartient), on peut vérifier la continuité des déplacements de l'interface (2.5) de la manière suivante :

$$u_b^{(s)} = A^{(s)T} u_b \quad (2.7)$$

où  $A^{(s)}$  est une matrice booléenne associée à chaque sous domaine, qui repère uniquement les degrés de liberté du sous domaine qui sont situés sur l'interface (réunion de toutes les interfaces



entre les sous domaines).

Si les degrés de liberté internes  $i$  sont numérotés en premier et les degrés de liberté d'interface  $b$  sont numérotés en dernier, on peut alors réécrire le système global (2.2) comme suit :

$$\begin{bmatrix} K_{ii}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & K_{ib}^{(1)} A^{(1)T} \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & K_{ii}^{(N_s)} & K_{ib}^{(N_s)} A^{(N_s)T} \\ A^{(1)} K_{bi}^{(1)} & \dots & \dots & A^{(N_s)} K_{bi}^{(N_s)} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_i^{(N_s)} \\ u_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_i^{(N_s)} \\ f_b \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

où :

$$K_{bb} = \sum_{s=1}^{N_s} A^{(s)} K_{bb}^{(s)} A^{(s)T}$$

$$f_b = \sum_{s=1}^{N_s} A^{(s)} f_b^{(s)}$$

Pour condenser le problème sur l'interface, on élimine les inconnues internes  $u_i^{(s)}$  en utilisant :

$$u_i^{(s)} = K_{ii}^{(s)-1} (f_i^{(s)} - K_{ib}^{(s)} A^{(s)T} u_b) \quad s=1, \dots, N_s \quad (2.9)$$

Il faut noter que l'inverse de  $K_{ii}^{(s)}$  est bien définie, parce qu'elle correspond à l'inverse de la matrice de raideur du sous domaine encastré sur tout son contour (déplacement imposé  $A^{(s)T} u_b$  sur le bord).

Si on reporte l'expression (2.9) dans la dernière équation (2.8), on obtient :

$$\sum_{s=1}^{N_s} A^{(s)} (K_{bb}^{(s)} - K_{bi}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} K_{ib}^{(s)}) A^{(s)T} u_b = \sum_{s=1}^{N_s} A^{(s)} (f_b^{(s)} - K_{bi}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} f_i^{(s)}) \quad (2.10)$$

On peut écrire également la relation précédente sous la forme matricielle suivante :

$$[S_p] \{u_b\} = \{b_p\} \quad (2.11)$$

où

$$S_p = \sum_{s=1}^{N_s} A^{(s)} S_p^{(s)} A^{(s)T}$$

$$S_p^{(s)} = (K_{bb}^{(s)} - K_{bi}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} K_{ib}^{(s)})$$

$$b_p = \sum_{s=1}^{N_s} A^{(s)} b_p^{(s)}$$

$$b_p^{(s)} = (f_b^{(s)} - K_{bi}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} f_i^{(s)})$$



$S_p^{(s)}$  est l'opérateur de condensation statique local ou le **complément de Schur** du sous domaine  $s$  et  $b_p^{(s)}$  la force correspondante.

Le problème condensé étant de petite taille, il peut être résolu directement. Dans ce cas, l'approche est qualifiée de méthode de sous structuration (méthode de condensation statique, méthode de Guyan ou méthode des super-éléments) et est bien connue en mécanique. Néanmoins, la construction de la matrice du complément de *Schur* (2.12), nécessite l'obtention explicite des matrices  $[K_{ii}^{(s)-1} K_{ib}^{(s)}]$ . Cette opération n'est pas classique pour un code de calcul et peut être très coûteuse. De plus, la matrice  $[S_p]$  est très souvent "pleine", contrairement aux matrices utilisées par la méthode des éléments finis et son traitement est donc particulier. Une idée est donc d'utiliser des stratégies itératives qui ne nécessitent pas le calcul explicite de  $[S_p]$ , mais uniquement celui de son produit par des vecteurs. C'est le cas pour les méthodes itératives de type gradient conjugué pour lesquelles les calculs de ces produits sont même complètement parallélisables et dont l'efficacité peut être améliorée par un préconditionneur [Saad, 2000]. L'interprétation mécanique de la méthode primale est alors la suivante :

Si  $S_p^{(s)}$  est le complément de *Schur* de la matrice rigidité  $K^{(s)}$  de chaque sous domaine, le produit matrice vecteur  $S_p^{(s)} A^{(s)T} u_b$  peut s'écrire comme un problème posé sur le sous domaine, des conditions aux limites de *Dirichlet*, avec un déplacement imposé  $u_b^{(s)}$  sur l'interface, soit :

$$\begin{bmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{ib}^{(s)} \\ K_{bi}^{(s)} & K_{bb}^{(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{(s)} \\ \{u_b^{(s)}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T_b^{(s)} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

où  $T_b^{(s)}$  est l'effort sur l'interface qui correspond au déplacement imposé  $\{u_b^{(s)}\}$ . On a en effet alors :

$$T_b^{(s)} = (K_{bb}^{(s)} - K_{bi}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} K_{ib}^{(s)}) \{u_b^{(s)}\} = S_p^{(s)} \{u_b^{(s)}\} \quad (2.14)$$

Ce problème est ensuite résolu par une méthode de gradient conjugué. L'interprétation mécanique de cette méthode est la suivante :

À chaque itération  $k$  de l'algorithme du gradient conjugué, un champ de déplacement  $\{u_b^{(s)}\}^k$  est imposé sur l'interface des sous domaines et l'effort correspondant  $T_b^{(s)k}$  est calculé. On évalue l'équilibre global avec l'assemblage suivant :

$$\sum_{s=1}^{N_s} A^{(s)} S_p^{(s)} A^{(s)T} u_b = \sum_{s=1}^{N_s} A^{(s)} T_b^{(s)}$$

Dans le cas où l'équilibre est vérifié, on a obtenu la solution, sinon un nouveau vecteur de déplacement  $\{u_b^{(s)}\}^{k+1}$  est calculé pour chaque sous domaine et le processus est continué jusqu'à convergence, c'est-à-dire en pratique lorsque l'équilibre est vérifié à une erreur donnée près. La résolution de ce système permet d'obtenir  $u_b$  et ensuite  $u_i$  grâce à (2.9).



Le conditionnement du problème d'interface (2.11) est donné par la relation suivante [Le Tallec, 1994] :

$$\kappa(S) = O\left(\frac{1}{H^2}\left(1 + \frac{H}{h}\right)\right) \quad (2.15)$$

où  $h$  représente la taille caractéristique des éléments finis et  $H$  celle des sous domaines.

Cette relation nous montre que le conditionnement du problème condensé est meilleur que celui du problème global qui est en  $O\left(\frac{1}{h^2}\right)$ . Cependant elle décroît quand le nombre des sous domaines augmente.

Une méthode pratique pour diminuer le conditionnement du système à résoudre est l'utilisation d'un préconditionneur efficace. Celui de *Neumann* conduit pour la méthode primale à [Le Tallec, 1994] :

$$\kappa(\tilde{S}^{-1}S) = O\left(\frac{1}{H}\left(1 + \log^2\frac{H}{h}\right)\right) \quad (2.16)$$

Cette valeur montre que la méthode primale est alors presque optimale (faible dépendance en  $h$ ) mais non extensible (dépendance en  $H$ ).

Une amélioration de ce dernier résultat est obtenu dans la méthode BDD (*Balancing Domain Decomposition*) [Mandel, 1993], [Mandel et Brezina, 1996] et [Mandel et Dohrmann, 2003] qui permet d'obtenir l'extensibilité.

### 2.2.3.2 Une méthode duale - FETI

La méthode FETI (*Finite Element Tearing and Interconnecting*) est une méthode de décomposition de domaine sans recouvrement avec multiplicateurs de Lagrange [Farhat, 1991], [Farhat et Roux, 1991], [Farhat et Roux, 1994], [Farhat et al., 1998a] et [Farhat et Mandel, 1998]. Cette méthode utilise comme inconnues principales les inter efforts de l'interface entre des sous domaines, d'où son nom de méthode **duale**. Dans cette approche, la continuité en déplacement est imposée par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange.

Le problème global (2.2), une fois discrétisé par éléments finis en déplacement, peut s'écrire de la façon suivante :

Le domaine  $\Omega$  est divisé en  $N_s$  sous domaines. En considérant le multiplicateur de Lagrange sur l'interface de raccord, on peut remplacer le problème global (2.2) par le suivant [Farhat et Roux, 1994] :

$$\begin{aligned} K^{(s)}u^{(s)} &= f^{(s)} - B^{(s)T}\lambda & s=1,\dots,N_s \\ \sum_{s=1}^{N_s} B^{(s)}u^{(s)} &= 0 & \text{condition de raccord} \end{aligned} \quad (2.17)$$

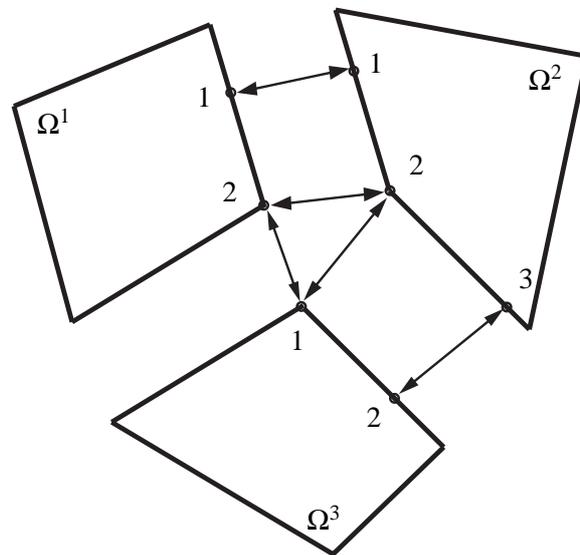
où  $K^{(s)}$  est la matrice de rigidité du sous domaine  $s$ ,  $\lambda$  correspond aux multiplicateurs de Lagrange sur l'interface et  $B^{(s)}$  est une matrice booléenne signée qui repère uniquement les degrés



de liberté du sous domaine qui sont situés sur l'interface globale  $\Gamma$  (réunion de toutes les interfaces entre les sous domaines). Elle assure la continuité des déplacements sur l'interface avec la condition de raccord (signe différent de part et d'autre d'une même interface).

Par exemple, avec le cas présenté figure (2.3), on a :

$$u^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{bmatrix}, \quad u^{(2)} = \begin{bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \end{bmatrix}, \quad u^{(3)} = \begin{bmatrix} u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$



**Figure 2.3** - Liaison sur l'interface et définition la matrice booléenne  $B^{(s)}$

Les équations de liaison s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} u_1^{(1)} - u_1^{(2)} \\ u_2^{(1)} - u_2^{(2)} \\ u_2^{(1)} - u_1^{(3)} \\ u_2^{(2)} - u_1^{(3)} \\ u_3^{(2)} - u_2^{(3)} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.19)$$

Elles peuvent donc se mettre sous la forme :

$$\sum_{s=1}^3 B^{(s)} u^{(s)} = 0 \quad (2.20)$$



avec :

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Pour ramener l'équation (2.17) à un problème global ne faisant intervenir que les variables d'interface  $\lambda$ , il s'agit d'éliminer l'inconnue  $u^{(s)}$ , ce qui nécessite l'inversion de la matrice  $K^{(s)}$ . Notons que si le sous domaine  $\Omega^{(s)}$  est flottant (c'est-à-dire avec trop peu de conditions de *Dirichlet* sur son bord), on doit utiliser la notion de matrice inverse généralisée  $K^{(s)+}$  (matrice Pseudo-inverse).

Un inverse généralisé de la matrice  $K$  est une matrice  $K^+$ , qui vérifie la propriété suivante :  
 $K^+ \in R^{n \times n}$  est telle que :

$$\forall x \in \text{Im}(K), KK^+x = x \quad (2.22)$$

où  $\text{Im}$  est l'image de la matrice  $K$ .

Il faut noter que cette définition conduit à plusieurs inverses généralisées ; toutefois tous les résultats présentés sont indépendants du choix de l'inverse généralisée.

La solution de (2.17) est alors définie à un mouvement de solide rigide près, sous la forme suivante :

$$u^{(s)} = K^{(s)+} [f^{(s)} - B^{(s)T} \lambda] + R^{(s)} \alpha^{(s)} \quad (2.23)$$

où  $R^{(s)}$  est l'ensemble des modes rigides du sous domaine s'il est flottant et  $\alpha^{(s)}$  les coefficients de la combinaison linéaire des modes de solide rigide.

L'expression (2.23) présente une séparation du déplacement du sous domaine en une partie déformée, dans  $\text{Im}(K^{(s)})$ , et une partie rigide à énergie nulle dans  $\text{Ker}(K^{(s)})$ . L'équation (2.17) a une solution si et seulement si la relation ci-dessous est vérifiée :

$$[f^{(s)} - B^{(s)T} \lambda] \perp \text{Ker}(K^{(s)}), \quad s=1, \dots, N_f \quad (2.24)$$

ou encore :

$$R^{(s)T} K^{(s)} u^{(s)} = R^{(s)T} [f^{(s)} - B^{(s)T} \lambda] = 0, \quad s=1, \dots, N_f \quad (2.25)$$

où  $N_f$  nombre de sous domaines flottants.

On obtient ainsi les équations supplémentaires, en même nombre que les inconnues  $\alpha^{(s)}$ . En considérant les relations précédentes, on peut condenser le problème du raccord sur les multiplicateurs  $\lambda$ , en substituant l'expression de  $u^{(s)}$  donnée par (2.23) dans la condition de raccord



(2.17) et dans la condition (2.25), ce qui conduit à un problème d'interface en  $\lambda$  et  $\alpha$  :

$$\begin{bmatrix} F_I & -G_I \\ -G_I^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ -e \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

où

$$\begin{aligned} F_I &= \sum_{s=1}^{N_s} B^{(s)} K^{(s)+} B^{(s)T} \\ d &= \sum_{s=1}^{N_s} B^{(s)} K^{(s)+} f^{(s)} \\ G_I &= [B^{(1)} R^{(1)} \dots B^{(N_f)} R^{(N_f)}] \quad , s=1, \dots, N_f \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\alpha = [\alpha^{(1)T} \dots \alpha^{(N_f)T}]^T \quad , s=1, \dots, N_f$$

$$e = [f^{(1)T} R^{(1)} \dots f^{(s)T} R^{(s)}] \quad , s=1, \dots, N_f$$

Ce problème est alors résolu par une méthode de gradient conjugué dont l'efficacité peut être améliorée par un préconditionneur. L'interprétation mécanique de cette méthode est la suivante :

À chaque itération  $k$  de l'algorithme du gradient conjugué, le produit matrice vecteur  $F_I \lambda^k$  peut s'écrire ainsi :

$$\overline{p}_b^k = F_I \lambda^k = \sum_{s=1}^{N_s} B^{(s)} K^{(s)+} B^{(s)T} \lambda^k \quad (2.28)$$

qui correspond à l'assemblage du déplacement suivant de chaque sous domaine :

$$\overline{p}^{(s)k} = K^{(s)+} B^{(s)T} \lambda^k \quad (2.29)$$

Le produit matrice vecteur local (2.29) peut donc être reformulé comme un problème avec conditions aux limites de *Neumann* sur chaque sous domaine :

$$\begin{bmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{ib}^{(s)} \\ K_{bi}^{(s)} & K_{bb}^{(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{p}_i^{(s)k} \\ \overline{p}_b^{(s)k} \end{bmatrix} = B^{(s)T} p^k = \begin{bmatrix} 0 \\ \{p_b^{(s)k}\} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Chaque itération  $k$  commence par une étape de projection pour l'évaluation du mouvement de solide rigide des sous domaines flottants. Ensuite un vecteur de traction  $\lambda^k$  est imposé sur l'interface des sous domaines pour calculer le déplacement correspondant. Le saut de déplacement sur l'interface est évalué par  $B^{(s)} u^{(s)k}$ . Si le saut du déplacement est nul, on a obtenu la solution, sinon une nouvelle traction à l'interface  $\lambda^{k+1}$  est calculée et le processus continue.



Pour des problèmes de plaque ou coque le conditionnement du problème d'interface de la méthode FETI, augmente rapidement avec le nombre de sous domaines [Farhat *et al.*, 1994]. La méthode FETI-2 permet de remédier à ce problème [Farhat et Mandel, 1998]. L'idée principale est d'imposer exactement la continuité du champ transversal de déplacement aux coins des sous domaines à chaque itération de gradient conjugué préconditionné.

### 2.2.3.3 Une méthode mixte

Cette méthode a été présentée initialement dans [Ladevèze, 1996]. Pour rompre la globalité du problème sur la structure  $\Omega$ , on introduit une partition du domaine en deux entités : les sous domaines et les interfaces. On considère ces entités comme des structures à part entière qui possèdent chacune leurs propres variables et leur propre comportement.

Dans le cas du comportement linéaire et en petites perturbations, pour chaque sous structure  $\Omega^{(s)}$ , on peut écrire :

Si on note  $u^{(s)}$ ,  $w^{(s)}$ ,  $\sigma^{(s)}$  et  $F^{(s)}$  le déplacement du sous domaine, le déplacement sur l'interface, la contrainte et la force sur l'interface, respectivement, il s'agit de trouver  $\{u^{(s)}, w^{(s)}; \sigma^{(s)}, F^{(s)}\}$ , vérifiant :

–  $(u^{(s)}, w^{(s)})$  est cinématiquement admissible au sens du sous domaine  $\Omega^{(s)}$

$$u^{(s)} \in \mathcal{U}^{(s)} \Rightarrow u^{(s)}|_{\partial_D \Omega^{(s)}} = u_d, u^{(s)}|_{\partial_I \Omega^{(s)}} = w^{(s)} \quad (2.31)$$

– les équations d'équilibre :  $(\sigma^{(s)}, F^{(s)})$  doit être statiquement admissible au sens du sous domaine  $\Omega^s$  :

$$\forall u^* \in \mathcal{U}_0^{(s)}, \int_{\Omega^s} Tr[\sigma^{(s)} \varepsilon(u^*)] d\Omega = \int_{\Omega^{(s)}} f_d \cdot u^* d\Omega + \int_{\partial \Omega^{(s)}} F^{(s)} \cdot u^* dS \quad (2.32)$$

où  $\mathcal{U}_0^{(s)}$  est l'espace des déplacements à énergie finie dans  $\Omega^{(s)}$ , nuls sur  $\partial_2 \Omega^{(s)}$

– la relation de comportement :  $\sigma^{(s)} = K\varepsilon(u^{(s)})$

Pour chaque interface  $\Gamma^{(s,r)}$ , les équations dépendent de la liaison que l'interface doit modéliser.

Dans le cas d'une liaison parfaite on peut écrire :

$$\begin{aligned} w^{(s)} &= w^{(r)} && \text{condition de raccord du déplacement} \\ F^{(s)} + F^{(r)} &= 0 && \text{équilibre de l'interface} \end{aligned} \quad (2.33)$$

La résolution itérative est assurée par un algorithme de type LATIN (LArge Time INcrement), qui dans le cas linéaire se confond avec un algorithme de type Lagrangien augmenté qui porte à la fois sur les déplacements et les inter-efforts à l'interface [Dureisseix, 2001]. Avec cette version de la méthode de décomposition, l'extensibilité n'est pas obtenue non plus.



## 2.2.4 Remarques

En résumé, on peut dire que les méthodes présentées précédemment se distinguent par le traitement de la condition de raccord sur l'interface. Pour la méthode Primale, le déplacement sur l'interface entre sous domaines est continu au cours des itérations et les efforts sont en équilibre à convergence. Dans la méthode Duale, les efforts sur l'interface entre sous domaines sont en équilibre au cours des itérations et la différence du déplacement est nulle à convergence. Enfin pour la méthode Mixte (LATIN), la continuité des déplacements et l'équilibre des efforts ne sont satisfaits qu'à convergence.

La deuxième différence entre ces méthodes réside dans le choix du solveur itératif. Pour les méthodes primale et duale, on utilise une méthode de type gradient conjugué (éventuellement préconditionné et projeté), alors que pour la méthode mixte, la résolution est basée sur l'approche LATIN (ayant de forts liens avec la méthode du Lagrangien augmenté).

Mis à part la méthode FETI qui possède un problème global qui porte sur les déplacements de solide rigide, les méthodes précédentes ne sont pas extensibles : le taux de convergence dépend assez fortement du nombre de sous domaines. Pour atteindre l'extensibilité, toutes les méthodes doivent posséder un problème grossier résolu à chaque itération dont l'effet est de propager globalement l'information parmi tous les sous domaines. Le type d'information propagée distingue aussi les différentes méthodes. Dans le cas de la méthode duale FETI, aucune énergie de déformation n'est utilisée de façon globale. Une autre version, dite FETI-DP [Farhat *et al.*, 2001] a été développée, qui possède cette dernière caractéristique. La méthode primale BDD, duale de la précédente, permet d'avoir une extensibilité similaire à celle de la méthode FETI par l'utilisation d'un préconditionneur particulier. Elle possède aussi une version extensible, avec utilisation d'énergie de déformation propagée globalement : la méthode BDDC [Mandel et Dohrmann, 2003]. Enfin, la méthode mixte LATIN possède une version dite micro-macro [Ladevèze et Dureisseix, 1999] qui propage globalement une énergie de déformation. La présence d'un problème grossier (*coarse*), peut conduire les méthodes de décomposition de domaine à présenter un caractère multi-échelle, qui sera précisé dans la suite.

L'efficacité de ces méthodes dépend fortement de l'algorithme itératif qui doit en général comporter les deux ingrédients suivants :

- un préconditionneur localement efficace,
- un problème dit grossier qui couple les sous domaines via quelques inconnues, afin d'assurer l'extensibilité numérique et parallèle.

Du point de vue mécanique le problème grossier crée un lien entre tous les sous domaines sans la nécessité de transférer des données très nombreuses entre sous domaines non voisins.

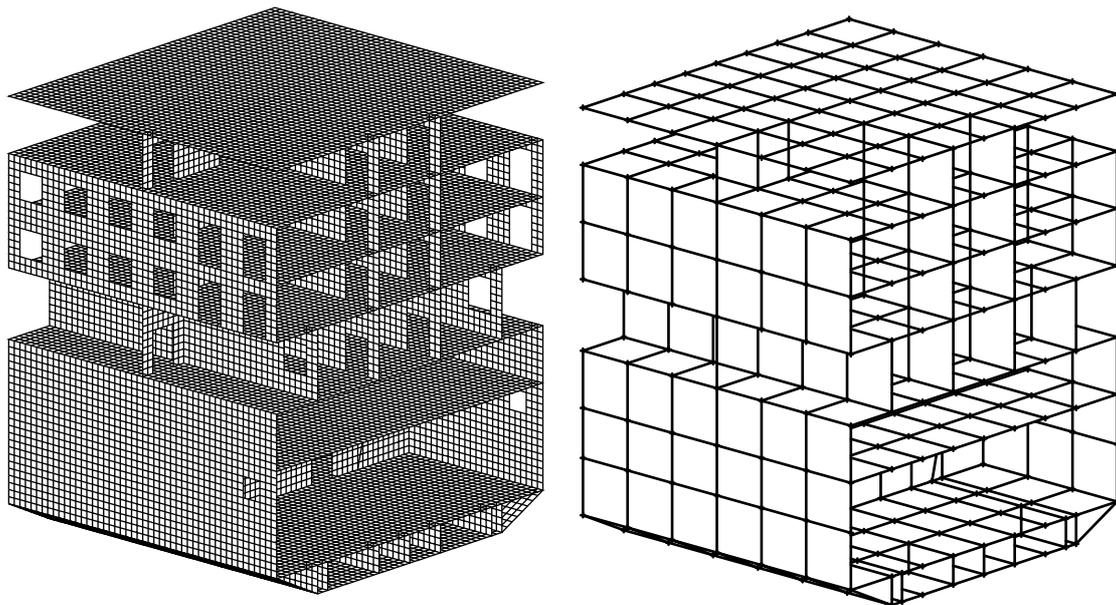


### 2.2.5 Choix d'une méthode pour les structures navales

Les navires à passagers sont des structures de grande taille et de géométrie complexe. Par ailleurs, ces structures présentent une architecture avec un découpage naturel en sous structures, délimitées par les intersections entre la coque, les ponts, les cloisons et les raidisseurs primaires. La méthode de calcul industriel (la méthode globale locale) est basée sur ce découpage pour construire le maillage global et grossier.

Avec ce découpage naturel en sous structures, une méthode de décomposition de domaine est donc particulièrement bien adaptée à l'analyse d'un navire à passagers.

D'autre part, les navires à passagers se caractérisent par des détails structuraux de petites dimensions, d'où l'intérêt de se tourner vers une méthode de décomposition de domaine multi-échelle [Le Tallec, 1994], [Farhat et Roux, 1994]. Parmi les méthodes existantes, c'est la méthode FETI-DP que nous retenons [Farhat *et al.*, 2000a] et [Farhat *et al.*, 2001]. On justifie ce choix par les arguments suivants :



**Figure 2.4** - *Discretisation fine d'un morceau de navire et maillage grossier correspondant*

1. Dans cette méthode, les sous domaines sont reliés les uns avec les autres d'une manière faible aux nœuds d'interfaces et d'une manière forte aux nœuds de coins. Ces nœuds, communs entre les sous domaines, s'appellent les nœuds grossiers (*coarse*). De cette manière, on obtient naturellement un maillage grossier, qui correspond au modèle utilisé dans l'industrie, cf. figure (2.4).



2. Du point de vue numérique, la méthode FETI-DP est la version améliorée de la méthode FETI. La taille du problème grossier de la méthode FETI-DP est plus petite que dans le cas de la méthode FETI. Ceci vient du fait qu'avec la méthode FETI-DP, il n'y a plus de sous domaines flottants, car les nœuds coins sont communs à plusieurs sous domaines. Par ailleurs, à chaque itération du solveur gradient conjugué (GC), la méthode FETI doit résoudre deux fois le problème grossier, au lieu d'une fois pour la méthode FETI-DP. Les mêmes conclusions sont obtenues si on compare FETI-DP à la méthode FETI-2 [Farhat *et al.*, 1998a], [Farhat et Mandel, 1998] et [Farhat *et al.*, 2000b].

La méthode FETI-DP est donc plus rapide, au niveau du temps de calcul CPU, que les versions FETI et FETI-2, particulièrement quand le nombre de sous domaines augmente (en tout cas pour les problèmes massifs 2D ou de type plaque ou coque ; pour les problèmes massifs 3D, une amélioration additionnelle peut être introduite par l'augmentation de l'algorithme avec une contrainte de raccord en moyenne supplémentaire).

Dans la suite, on présente de façon plus détaillée la méthode FETI-DP, de manière algébrique.

## 2.3 La méthode FETI-DP classique

Cette méthode fait partie de la famille des méthodes duales. Il y a donc une forte connection entre les méthode FETI et FETI-DP. En effet, le système de base est le même ; dans la méthode FETI-DP seule une partie des degrés de liberté primaux sont condensés. On cherche à supprimer le problème des sous domaines flottants tout en restant attaché à l'approche duale [Farhat *et al.*, 2000a] et [Farhat *et al.*, 2001].

Afin de mettre en œuvre la méthode de décomposition de domaine, on décompose le domaine  $\Omega$  en  $N_s$  sous domaines  $\{\Omega^{(s)}\}_{s=1}^{s=N_s}$  et la discrétisation par éléments finis est appliquée, cf. figure (2.5). Les nœuds sont classés dans trois groupes suivant la topologie. Comme dans la méthode FETI, on décompose déjà les nœuds en nœuds internes (appartenant à un seul sous domaine) et en nœuds d'interface. En revanche, à la différence de la méthode FETI, on distingue dans les nœuds d'interface les nœuds aux extrémités des interfaces et les autres nœuds d'interface. Les seconds ont des degrés de liberté propres à chaque sous domaine, alors que les premiers ont des degrés de liberté partagés par tous les sous domaines supports (comme dans une approche éléments finis classique). De cette façon, la solution aux nœuds coins est automatiquement continue.

Pour un sous domaine spécifique, la matrice globale  $K^{(s)}$ , le vecteur de la solution  $u^{(s)}$  et le vecteur chargement  $f^{(s)}$ , peuvent ainsi être réarrangés suivant la classification précédente des



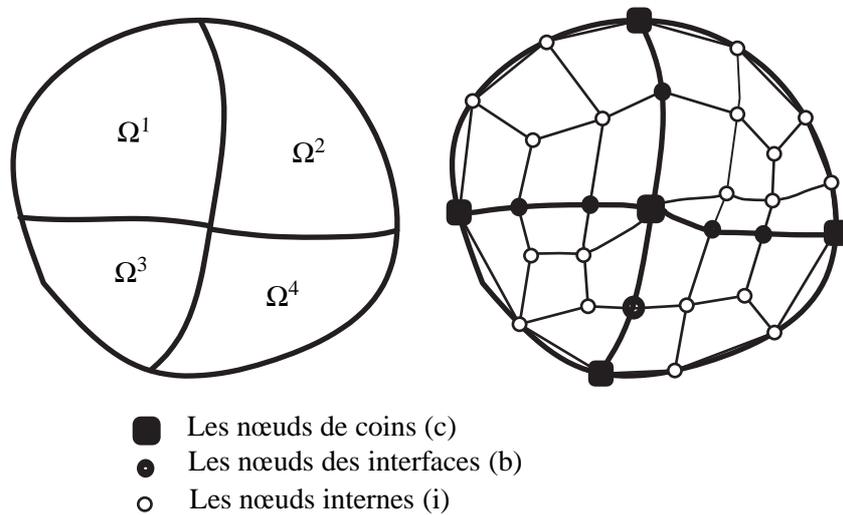
nœuds :

$$K^{(s)} = \begin{bmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{ib}^{(s)} & K_{ic}^{(s)} \\ K_{bi}^{(s)} & K_{bb}^{(s)} & K_{bc}^{(s)} \\ K_{ci}^{(s)} & K_{cb}^{(s)} & K_{cc}^{(s)} \end{bmatrix}, \quad u^{(s)} = \begin{bmatrix} u_i^{(s)} \\ u_b^{(s)} \\ u_c^{(s)} \end{bmatrix}, \quad f^{(s)} = \begin{bmatrix} f_i^{(s)} \\ f_b^{(s)} \\ f_c^{(s)} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

où  $s$  est l'indice du sous domaine,  $i$ ,  $c$  et  $b$  sont, respectivement, l'indice des degrés de liberté des nœuds internes, les coins et sur l'interface, cf. figure (2.6).

On peut également définir le vecteur global des degrés de liberté coins  $u_c$ , le vecteur des degrés de liberté non coins des sous domaines  $u_r^{(s)}$  et degrés de liberté interface des sous domaines  $u_b^{(s)}$  comme ci-après :

$$u_c = \begin{bmatrix} u_c^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_c^{(j)} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_c^{(N_c)} \end{bmatrix}, \quad u_r^{(s)} = \begin{bmatrix} u_i^{(s)} \\ u_b^{(s)} \end{bmatrix}, \quad u^{(s)} = \begin{bmatrix} u_r^{(s)} \\ u_c^{(s)} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$



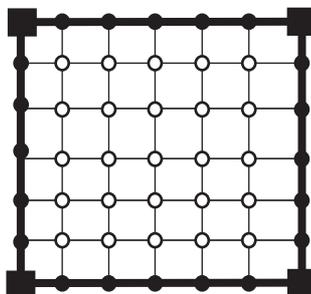
**Figure 2.5** - Classification des nœuds et degrés de liberté associés de la méthode FETI-DP

Deux matrices booléennes additionnelles sont introduites pour repérer les degrés de liberté précédents.

$$B_r^{(s)} u_r^{(s)} = \pm u_b^{(s)} \quad \text{et} \quad u_c^{(s)} = B_c^{(s)} u_c \quad (2.36)$$



où  $B_r^{(s)}$  une matrice booléenne signée,  $B_c^{(s)}$  une matrice booléenne qui repère uniquement les degrés de liberté des coins du sous domaine à partir du vecteur global des nœuds coins  $u_c$ .



- les nœuds et ddl grossiers locaux  $u_c^s$
- les nœuds et ddl intérieurs  $u_i^s$
- les nœuds et ddl sur l'interface  $u_b^s$

**Figure 2.6** - Séparation des nœuds en ddl coin (c) interne (i) et interface (b)

Avec le même partitionnement, on peut réécrire les relations (2.34) de la façon suivante :

$$K^{(s)} = \begin{bmatrix} K_{rr}^{(s)} & K_{rc}^{(s)} \\ K_{cr}^{(s)} & K_{cc}^{(s)} \end{bmatrix}, \quad u^{(s)} = \begin{bmatrix} u_r^{(s)} \\ u_c^{(s)} \end{bmatrix}, \quad f^{(s)} = \begin{bmatrix} f_r^{(s)} \\ f_c^{(s)} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

En utilisant les notations précédentes, on peut écrire l'équation d'équilibre ainsi :

$$\forall u_r^{(s)*}, u_c^{(s)*} = B_c^{(s)} u_c^*, \sum_{s=1}^{N_s} \begin{bmatrix} u_r^{(s)*} \\ u_c^{(s)*} \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} K_{rr}^{(s)} & K_{rc}^{(s)} \\ K_{cr}^{(s)} & K_{cc}^{(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r^{(s)} \\ u_c^{(s)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_r^{(s)} \\ f_c^{(s)} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (2.38)$$

Avec la condition de raccord suivante :

$$\sum_{s=1}^{N_s} B_r^{(s)} u_r^{(s)} = 0 \quad (2.39)$$

En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour imposer la condition de raccord (2.39) dans l'équation d'équilibre (2.38), on va avoir :

$$\begin{aligned} K_{rr}^{(s)} u_r^{(s)} + K_{rc}^{(s)} B_c^{(s)} u_c = f_r^{(s)} - B_r^{(s)T} \lambda & \quad \text{pour } s = 1, \dots, N_s \\ \sum_{s=1}^{N_s} B_c^{(s)T} K_{cr}^{(s)} u_r^{(s)} + \sum_{s=1}^{N_s} B_c^{(s)T} K_{cc}^{(s)} B_c^{(s)} u_c = \sum_{s=1}^{N_s} B_c^{(s)T} f_c^{(s)} & \quad (2.40) \end{aligned}$$

Avec la séparation des degrés de liberté en coins  $c$  et intérieurs  $r$  la matrice  $K_{rr}^{(s)}$  est régulière, car correspondant à la matrice raideur du sous domaine encastré en ses coins.



En utilisant (2.40) et (2.39), on condense les degrés de liberté intérieurs sur  $u_c$  et  $\lambda$ . Après quelques transformations algébriques, on obtient le problème dual-primal (en  $\lambda$  et  $u_c$ ) suivant :

$$\begin{bmatrix} F_{I_{rr}} & F_{I_{rc}} \\ F_{I_{rc}}^T & -K_{cc}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_r \\ -f_c^* \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

où

$$F_{I_{rr}} = \sum_{s=1}^{N_s} B_r^{(s)} K_{rr}^{(s)-1} B_r^{(s)T} \quad (2.42)$$

$$F_{I_{rc}} = \sum_{s=1}^{N_s} B_r^{(s)} K_{rr}^{(s)-1} K_{rc}^{(s)} B_c^{(s)} \quad (2.43)$$

$$K_{cc} = \sum_{s=1}^{N_s} B_c^{(s)} K_{cc}^{(s)} B_c^{(s)T} \quad (2.44)$$

$$K_{cc}^* = K_{cc} - \sum_{s=1}^{N_s} (K_{rc}^{(s)} B_c^{(s)})^T K_{rr}^{(s)-1} (K_{rc}^{(s)} B_c^{(s)}) \quad (2.45)$$

$$d_r = \sum_{s=1}^{N_s} B_r^{(s)} K_{rr}^{(s)-1} f_r^{(s)} \quad (2.46)$$

$$f_c = \sum_{s=1}^{N_s} B_c^{(s)T} f_c^{(s)} \quad (2.47)$$

$$f_c^* = f_c - \sum_{s=1}^{N_s} B_c^{(s)T} K_{cr}^{(s)} K_{rr}^{(s)-1} f_r^{(s)} \quad (2.48)$$

Par une deuxième condensation de  $u_c$  sur  $\lambda$ , on arrive au problème d'interface symétrique défini positif suivant :

$$F_I \lambda = D_r \quad (2.49)$$

où :

$$\begin{aligned} F_I &= (F_{I_{rr}} + F_{I_{rc}} K_{cc}^{*-1} F_{I_{rc}}^T) \\ D_r &= (d_r - F_{I_{rc}} K_{cc}^{*-1} f_c^*) \end{aligned} \quad (2.50)$$

On peut considérer la méthode FETI-DP comme une transformation du problème global de la forme (2.2) en le problème d'interface (2.49). Ce problème d'interface est résolu par une méthode itérative comme le gradient conjugué par exemple.

À chaque itération  $k$  de l'algorithme itératif, le résidu doit être calculé par le produit matrice-vecteur  $F_I \lambda$ . On peut l'évaluer selon les deux étapes suivantes :

étape 1 :

$$\delta^k = F_{I_{rr}} \lambda^k = \sum_{s=1}^{N_s} B_r^{(s)} K_{rr}^{(s)-1} B_r^{(s)T} \lambda^k$$



étape 2 :

$$\delta^k = \delta^k + F_{Irc} K_{cc}^{*-1} F_{Irc}^T \lambda^k$$

L'étape 1 est similaire à la méthode FETI (calcul local sur chaque sous domaine et assemblage).

L'étape 2 peut être décomposée en trois étapes :

étape 2-1 :

$$y^k = F_{Irc}^T \lambda^k = \sum_{s=1}^{N_s} B_c^{(s)T} K_{rc}^{(s)T} K_{rr}^{(s)-1} B_r^{(s)T} \lambda^k$$

étape 2-2 :

$$K_{cc}^* x^k = y^k$$

étape 2-3 :

$$z^k = F_{Irc} x^k = \sum_{s=1}^{N_s} B_r^{(s)} K_{rr}^{(s)-1} K_{rc}^{(s)} B_c^{(s)} x^k$$

Les étapes 2 – 1 et 2 – 3 correspondent à des assemblages de calculs locaux. On voit que le produit  $K_{rr}^{(s)-1} B_r^{(s)T} \lambda^k$  a déjà été évalué dans l'étape 1 et que le produit  $K_{rr}^{(s)-1} K_{rc}^{(s)}$  doit être calculé une fois. Dans l'étape 2 – 2, on résout le problème de type  $K_{cc}^* x^k = y^k$  appelé problème grossier. Ce problème fait un lien entre les différents sous domaines et permet donc de propager une information globale à chaque itération. La matrice  $K_{cc}^*$  est une matrice creuse (*sparse*) analogue à une matrice de rigidité obtenue en considérant seulement les *super-éléments* définis par les nœuds coins sur chaque sous domaine.

Contrairement aux versions FETI et FETI-2, le problème associé à chaque sous domaine est toujours régulier. Donc, pour cette raison, cette version peut être utilisée dans les cas statique et dynamique sans modification.

En général, le conditionnement du problème d'interface dual (2.49) est meilleur que celui du problème global (2.2).

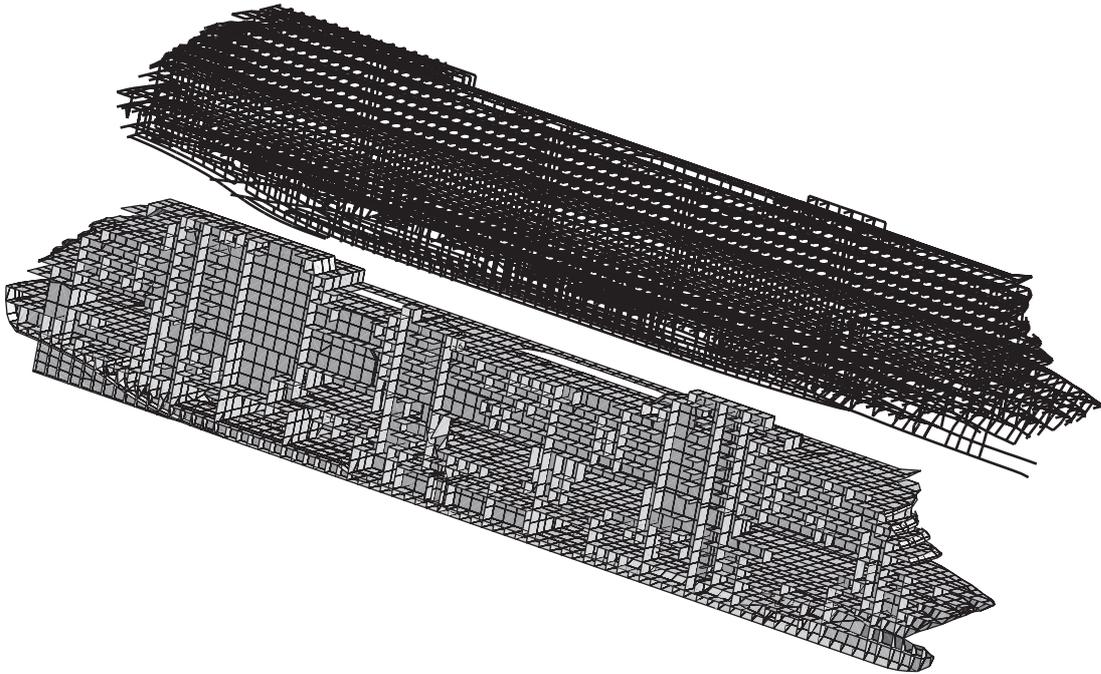
## 2.4 Développement d'une méthode FETI-DP adaptée aux structures raidies

La structure du navire est un assemblage de différents éléments structurels, des panneaux, des raidisseurs par exemple. Ces raidisseurs sont très nombreux, cf. figure (2.7). Ils peuvent être classés en deux catégories, primaires et secondaires, cf. figure (2.8). En pratique, compte tenu de leur contribution à la réponse structurelle du navire, les raidisseurs primaires sont discrétisés



dans le modèle d'ensemble du navire. Les raidisseurs secondaires sont en revanche lissés et représentés via un comportement homogénéisé équivalent pour le panneau raidi. Par conséquent, lors de la décomposition en sous domaines du navire, la question du traitement des raidisseurs primaires se pose.

Plusieurs solutions peuvent être envisagées, sachant qu'un raidisseur primaire se situe à l'in-



**Figure 2.7** - Maillage des raidisseurs et des panneaux du navire

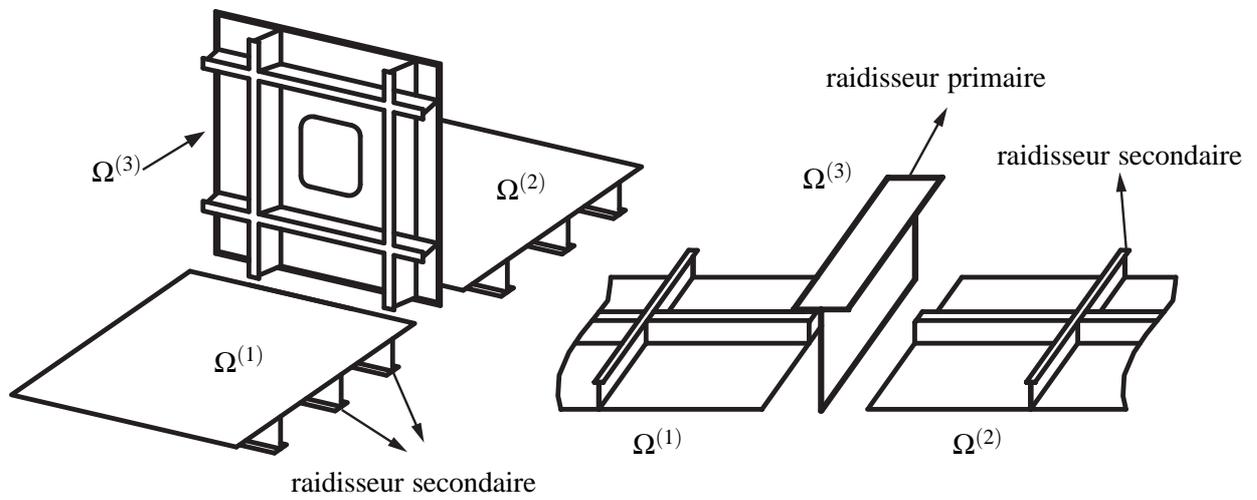
terface entre deux sous domaines, cf. figure (2.9) :

- a) - le raidisseur est rattaché à l'un des sous domaines adjacents,
- b) - le raidisseur est partagé entre les sous domaines adjacents,
- c) - le raidisseur est considéré comme un sous domaine à part entière.

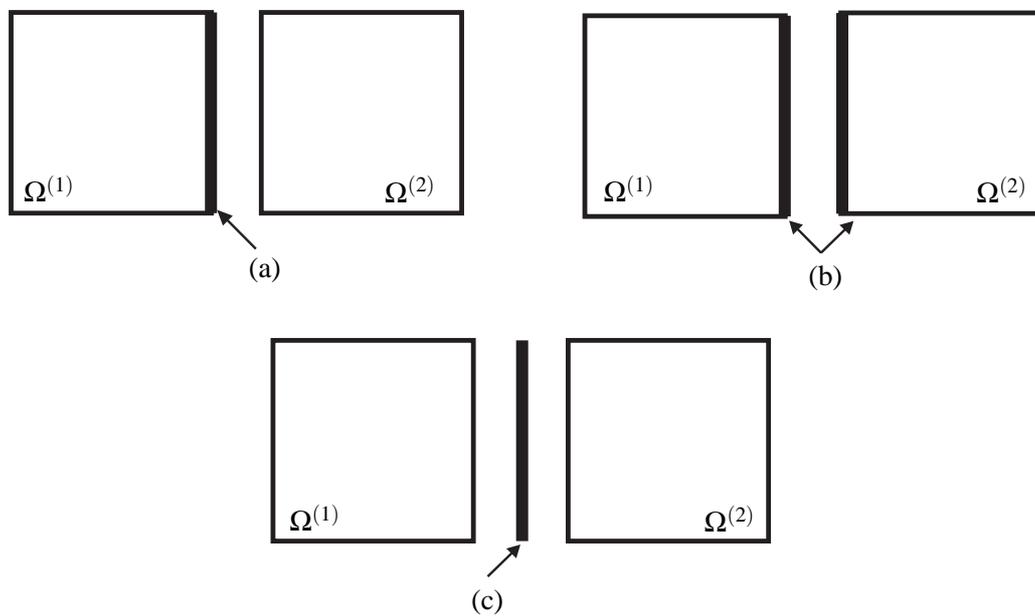
Si on se réfère à la figure (2.9), dans les cas *a* et *b*, on a seulement deux sous domaines voisins à une interface, alors que dans le cas *c* il y en a trois.

La solution *b* ne traduit pas un comportement physique intrinsèque des panneaux, et perd en modularité pour un assemblage quelconque de plaques et de raidisseurs ; elle ne sera pas retenue dans la suite. La solution *a* peut être envisagée si le raidisseur est modélisé en poutre, c'est-à-dire uniquement avec des nœuds sur l'interface communs aux deux autres sous domaines. Cependant, la taille des raidisseurs requiert parfois un modèle plaque, ce qui nécessite la définition d'un troisième sous domaine, ce qui est aussi le cas quand on considère les intersections bordé-pont ou bordé-cloison, etc. C'est donc la solution *c* qui est choisie, c'est-à-dire que l'association de tous les raidisseurs primaires est considérée en tant qu'un sous domaine spécifique,





**Figure 2.8 - Hétérogénéité géométrique**



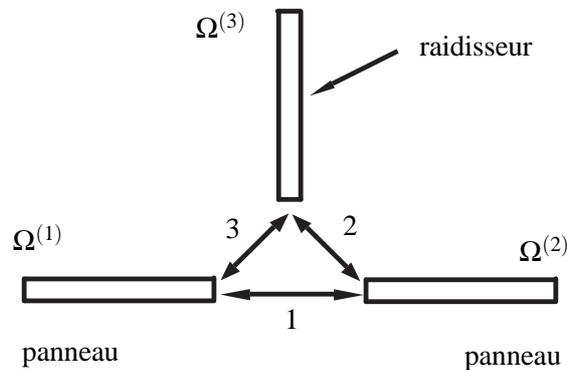
**Figure 2.9 - Différentes configurations des raidisseurs entre les sous domaines (a) Raidisseur rattaché à un sous domaine (b) Raidisseur partagé entre les sous domaines (c) Raidisseur entre les sous domaines**

ce qui rend mieux compte de leur rôle dans la réponse globale de la structure. Ce sous domaine possède un grand nombre de degrés de liberté mais a une connectivité faible, et n'est pas donc un point critique au niveau du calcul numérique.

### 2.4.1 Hétérogénéité locale - redondance de multiplicateurs

Comme présenté précédemment, l'architecture du navire présente un découpage naturel en sous domaines. Les assemblages décrits précédemment conduisent généralement à avoir plusieurs sous domaines sur une seule interface, l'un d'entre eux pouvant correspondre à un raidisseur primaire, cf. figure (2.8).

Lorsqu'on s'intéresse à la jonction de ces trois sous-domaines, cf. figure (2.10), la continuité



**Figure 2.10** - Redondance sur l'interface de plaque raidie

des déplacements s'écrit :

$$u_1 = u_2 = u_3 \quad (2.51)$$

En pratique, la continuité est imposée à partir d'équations de liaison exprimant l'égalité du déplacement de deux sous domaines. On peut donc réécrire l'équation précédente sous la forme :

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= 0 \\ u_2 - u_3 &= 0 \\ u_1 - u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Cependant, seulement deux de ces équations sont indépendantes. On peut donc s'interroger sur la nécessité de les prendre en compte toutes les trois. En effet, dans ce cas, il y a une redondance. Cet aspect sera examiné en section (2.5.2).



## 2.4.2 Résolution du problème d'interface

### 2.4.2.1 Généralités

Dans cette partie, on présente la méthode de résolution du problème d'interface de la méthode FETI-DP (2.49) portant sur les multiplicateur de Lagrange et les déplacements des nœuds coins. Du point de vue de la résolution numérique, ce problème d'interface est symétrique, défini (dans le cas où il n'y a pas de redondance de multiplicateurs) positif et donc une solution unique existe. Ce problème peut être résolu avec des méthodes directes ou itératives.

Les solveurs directs qui sont utilisés actuellement dans le plupart des logiciels d'éléments finis commerciaux, sont robustes et fiables, leur temps CPU est prévisible, et ils fonctionnent bien avec le stockage secondaire. Malgré ces avantages, ces méthodes deviennent coûteuses en temps et en encombrement mémoire lorsque la taille du système à résoudre devient très grand [Farhat et Roux, 1994]. Dans ce cas, les méthodes itératives sont plus efficaces en temps de calcul et en mémoire requise si le conditionnement du système à résoudre est peu élevé.

Le conditionnement d'un système représente le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur propre de la matrice en module.

$$\kappa = \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right| \quad (2.53)$$

avec  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|$  valeur propre de la matrice du système

De façon générale, la simulation numérique en calcul des structures, dans le cadre de la méthode des éléments finis, conduit à la résolution de systèmes linéaires similaires à (2.2), qui sont souvent mal conditionnés (conditionnement  $\kappa(K)$  élevé). Il y a trois facteurs principaux qui influencent le conditionnement de la matrice rigidité  $K$  : la densité du maillage, sa distortion et les grandes variations des coefficients de rigidité d'élémentaire. Dans notre cas, ce dernier est important et résulte de l'hétérogénéité géométrique (présence de trous, raidisseurs, etc).

La méthode de décomposition de domaine présente un conditionnement meilleur que celui du problème global et pour améliorer l'efficacité, on utilise un préconditionneur pour le problème d'interface. Le problème consiste alors à trouver une matrice  $\tilde{F}_I$  telle que  $\kappa(\tilde{F}_I^{-1}F_I) \ll \kappa(F_I)$ .

L'idée est de résoudre le système équivalent  $\tilde{F}_I^{-1}(F_I\lambda) = \tilde{F}_I^{-1}D_r$ , plutôt que résoudre le système d'équation  $F_I\lambda = D_r$ .

Le choix du préconditionneur dépend du problème à traiter. On va utiliser deux sortes de préconditionneurs, *Dirichlet* et *Lumped*, en tenant compte des particularités de notre problème (hétérogénéité structurale).

L'opérateur d'interface  $F_I$  (2.50) est un assemblage de contributions locales des sous domaines. L'inversion de cet opérateur est une opération coûteuse (calcul explicite des opérateurs locaux,



assemblage et inversion de l'opérateur assemblé). Puisqu'un solveur itératif ne requiert que des produits matrice vecteur, les opérateurs locaux ne nécessitent pas d'être calculés explicitement. Il suffit de faire les multiplications, et en fin de calcul de réassembler les contributions locales de la solution.

De plus, par rapport à la résolution itérative du système global (2.2), la résolution itérative du problème condensé (2.49) présente de nombreux avantages :

1. le problème est de plus petite dimension (la taille est égale au nombre de degré de liberté sur l'interface),
2. le conditionnement de problème d'interface (2.49) est meilleur que celui du problème global,
3. plusieurs préconditionneurs efficaces ont été développés.

Bien que les méthodes de décomposition de domaine soient différentes dans les détails (choix primal, dual et mixte), en général, elles utilisent une méthode de résolution itérative avec préconditionneur. Le succès de ces méthodes se situe dans l'utilisation d'un préconditionneur adapté au problème à résoudre.

Sur la base des préconditionneurs classiques de FETI (*Dirichlet* et *Lumped*) et développés pour le cas hétérogène [Rixen et Farhat, 1999], leurs adaptations à la méthode FETI-DP avec hétérogénéité locale sur l'interface va maintenant être détaillée.

### 2.4.2.2 Préconditionneurs

La convergence des algorithmes de gradient conjugué peut être améliorée par l'utilisation d'un préconditionneur en diminuant le conditionnement du système à résoudre. Il faut noter que l'algorithme de résolution est similaire mais avec une phase supplémentaire.

Le préconditionnement du problème d'interface dans la méthode de décomposition de domaine est assez différent des préconditionneurs classiques. Si on applique une méthode de résolution itérative sur le problème global, les préconditionneurs sont basés sur la technique d'approximation de l'inverse de l'opérateur global, tandis que pour la méthode de décomposition de domaine, le préconditionneur est basé sur les inverses des opérateurs locaux relatifs aux sous domaines (ce qui permet en outre de paralléliser la phase de préconditionnement).

En effet, pour résoudre le problème d'interface de la méthode FETI-DP (2.49), l'opérateur d'interface est une somme de contributions locales. Dans ce cas, pour être efficace d'un point de vue calcul, un préconditionneur doit autant que possible consister en un assemblage de contributions locales. La stratégie retenue consiste alors à approcher l'inverse de l'opérateur d'interface par



la somme des inverses des contributions locales. Ce qui conduit aux préconditionneurs suivants pour la méthode duale (FETI) [Farhat et Roux, 1994] :

$$\overline{F}_{Irr}^{D^{-1}} = \sum_{s=1}^{N_s} B_r^{(s)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{bb}^{(s)} \end{bmatrix} B_r^{(s)T} \quad \text{préconditionneur } \textit{Dirichlet} \quad (2.54)$$

$$\overline{F}_{Irr}^{L^{-1}} = \sum_{s=1}^{N_s} B_r^{(s)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{bb}^{(s)} \end{bmatrix} B_r^{(s)T} \quad \text{préconditionneur } \textit{Lumped} \quad (2.55)$$

Avec :

$$S_{bb}^{(s)} = K_{bb}^{(s)} - K_{bi}^{(s)} K_{ii}^{(s)^{-1}} K_{ib}^{(s)} \quad (2.56)$$

où  $i$ ,  $b$  et  $r$  sont respectivement l'indice des degrés de liberté internes, sur le bord et de l'ensemble des nœuds internes et sur le bord.

Il faut noter que la matrice  $K_{ii}^{(s)}$  n'est pas singulière puisque c'est la matrice rigidité du sous domaine  $\Omega^{(s)}$  avec tous les degrés de liberté bloqués sur l'interface.

Du point de vue mécanique, l'objectif du préconditionnement est l'évaluation du résidu ou saut du déplacement sur l'interface,  $w$ , pour construire la correction du multiplicateur de Lagrange  $z$  :

$$z = \overline{F}_{Irr}^{-1} w = \sum_{s=1}^{N_s} B_r^{(s)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{bb}^{(s)} \end{bmatrix} B_r^{(s)T} w \quad (2.57)$$

On peut interpréter mécaniquement la relation (2.57) selon les étapes successives :

– on impose sur l'interface de chaque sous domaine le saut du déplacement,

$$\Delta u_r^{(s)} = B_r^{(s)T} w$$

– on calcule l'effort  $\Delta f_r^{(s)}$  sur chaque sous domaine à partir du déplacement imposé précédent (résolution du problème *Dirichlet*),

$$\Delta f_r^{(s)} = S_{bb}^{(s)} \Delta u_r^{(s)}$$

– on calcule le saut d'effort sur l'interface (correction du multiplicateur de Lagrange) et on l'assemble,

$$z^{(s)} = B_r^{(s)} \Delta f_r^{(s)}$$

$$z = \sum_{s=1}^{N_s} z^{(s)}$$



Rixen [Rixen et Farhat, 1999] a montré que ce préconditionneur n'est pas mécaniquement conforme, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{N_s} B_r^{(s)}(u_r^{(s)} + \Delta u_r^{(s)}(r)) &\neq 0 \\ B_r^{(s)} z(\Delta f_r^{(s)}) &\neq \Delta f_r^{(s)} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Une méthode simple est l'utilisation de la matrice diagonale de pondération  $W$  dans le préconditionneur de la manière suivante :

$$\overline{F}_{Irr}^{D^{-1}} = \sum_{s=1}^{N_s} W^{(s)} B_r^{(s)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{bb}^{(s)} \end{bmatrix} B_r^{(s)T} W^{(s)} \quad \textit{Dirichlet} \quad (2.59)$$

$$\overline{F}_{Irr}^{L^{-1}} = \sum_{s=1}^{N_s} W^{(s)} B_r^{(s)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{bb}^{(s)} \end{bmatrix} B_r^{(s)T} W^{(s)} \quad \textit{Lumped} \quad (2.60)$$

Les matrices diagonales de pondération (*scaling*)  $W^{(s)}$  jouent un rôle fondamental dans les performances du préconditionneur. Elles permettent notamment de respecter des considérations mécaniques.

Dans le cas d'une structure homogène, elles sont généralement égales à l'inverse de la multiplicité ( $\frac{1}{m_i}$ ) de l'interface où  $m_i$  est le nombre de sous domaines connectés sur l'interface (pondération en moyenne).

Ce choix de pondération n'est pas efficace dans le cas hétérogène. En général, l'hétérogénéité sur l'interface des sous domaines se situe à différents niveaux. On peut les classer dans les deux catégories suivantes :

1. raccord de sous domaines avec différentes caractéristiques matériau (modules d'Young par exemple),
2. raccord de sous domaines avec différentes orientations ou avec différents éléments finis sur l'interface (élément poutre ou plaque par exemple).

Dans la méthode FETI, pour le cas hétérogène, la matrice de pondération a été présentée comme ci-dessus en utilisant le coefficient diagonal de la matrice de rigidité [Rixen et Farhat, 1999] :

$$W_j^{(s)} = \frac{K_{jj}^{(t)}}{\sum_{r \in \delta(j)} K_{jj}^{(r)}} \quad \text{avec } j \in \Gamma^{(s,t)} \quad (2.61)$$

où  $K_{jj}$  est le coefficient diagonal de la matrice rigidité,  $\delta(j)$  est l'ensemble des sous domaines connectés sur l'interface.

Il faut noter que, ce résultat est en parfait accord avec la physique du problème. Un sous domaine plus raide, capte moins le saut de déplacement, ainsi que le sous domaine souple obtient



plus du saut de déplacement. La justification de cette relation est présentée en Annexe (A), dans le cas mono dimensionnel.

On voit que dans le cas homogène ( $K_{jj}^{(s)} = K_{jj}^{(r)}$ ) on arrive à retrouver la multiplicité du multiplicateur de Lagrange.

On utilise cette méthode dans notre cas avec l'hétérogénéité de géométrie locale (plaque raidie par exemple) et on l'adapte pour la méthode FETI-DP.

Un bon choix de préconditionneur doit permettre de conduire à un conditionnement de la forme suivante :

$$\kappa = O\left(1 + \log^m\left(\frac{H}{h}\right)\right) \quad m \leq 3 \quad (2.62)$$

où  $h$  représente, la taille caractéristique des éléments finis et  $H$  celle des sous domaines.

Enfin, l'interprétation mécanique de la méthode FETI-DP avec préconditionneur *Dirichlet* est la suivante (cf. figure 2.11) :

1. À chaque itération  $k$  un nouveau champ de multiplicateur  $\lambda^k$  est calculé et ensuite, pour chaque sous domaine  $\Omega^{(s)}$ , un vecteur d'effort équivalent  $B^{(s)T} \lambda^k$  est imposé sur l'interface du sous domaine. Sur chaque sous domaine, on calcule alors le champ de déplacement  $u_r^{(s)k}$  sous l'action de ces efforts,
2. Ce déplacement n'est pas compatible sur l'interface, sauf à convergence. Donc il y a un saut du déplacement sur toutes les interfaces qui correspond à :

$$r^k = F_I \lambda^k - D_r = \sum_{s=1}^{N_s} B_r^{(s)} u_r^{(s)k}$$

3. Avec le préconditionneur *Dirichlet*, le saut de déplacement est évalué entre les sous domaines connectés sur l'interface (et imposé comme condition aux limites *Dirichlet*),
4. un problème de *Dirichlet* est résolu sur chaque sous domaine pour l'évaluation du champ de traction associé au champ de déplacement imposé,
5. le saut des efforts est évalué entre les sous domaines connectés sur l'interface. Si le résidu est vérifié à une erreur donnée près ( $10^{-6}$  par exemple), on arrête les itérations, sinon il faut continuer à l'étape 1.

## 2.5 Application de la méthode FETI-DP adaptée aux structures raidies

Dans cette partie, on applique la méthode FETI-DP sur quelques exemples de validation, afin de montrer les différentes caractéristiques de cette méthode. En particulier, l'influence de différents



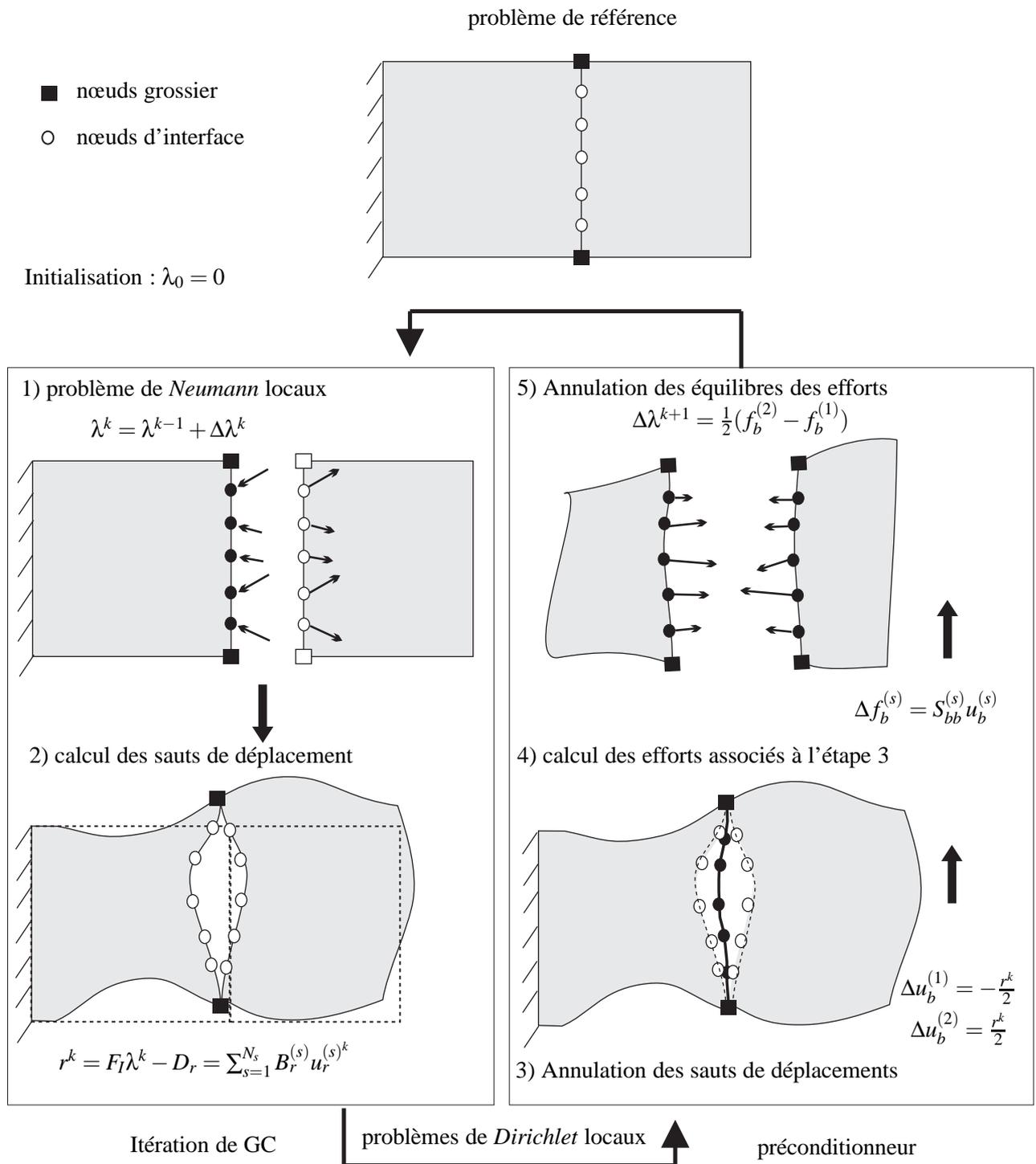


Figure 2.11 - La méthode FETI-DP

préconditionneurs, des caractéristiques matériau et de la géométrie, ainsi que différentes tailles caractéristiques (la taille des éléments finis, la taille du sous domaine et nombre d'éléments par sous domaine), sur le taux de convergence de l'algorithme itératif de la méthode FETI-DP est étudié.

En décomposant le domaine en sous domaines, on introduit en plus d'une longueur caractéristique des éléments finis  $h$  (la taille de maille de l'échelle fine), une longueur caractéristique des sous domaines  $H$  (la taille de maille de l'échelle globale - taille des sous domaines) et une longueur caractéristique de la structure  $L$ , cf. figure (2.12).

Travailler à  $h$  constant revient à conserver un problème de référence de taille constante. Travailler à  $H$  constant revient à garder le même nombre de sous domaines. Enfin, un dernier indicateur intéressant est  $\frac{H}{h}$  : travailler à  $\frac{H}{h}$  constant conserve des problèmes locaux par sous domaine, dans ce cas la taille du problème de référence augmente avec le nombre de sous domaines. Une méthode de décomposition de domaine est dite **numériquement extensible** si, en travaillant à  $\frac{H}{h}$  constant, le nombre d'itérations pour converger dépend faiblement du nombre de sous domaines (ou  $H$ ). On dit de plus qu'elle est **optimale** s'il y a peu de dépendance vis à vis de  $\frac{H}{h}$ .

Si on considère comme solution de référence  $U_{ref}$ , la solution obtenue par résolution directe du problème éléments finis, on peut définir le taux de convergence à partir de l'écart en énergie par rapport à cette solution

$$e^k = \sqrt{\frac{(U^k - U_{ref})^T K (U^k - U_{ref})}{U_{ref}^T K U_{ref}}} \quad (2.63)$$

où,  $k$  est le numéro de l'itération et  $U^k$  la solution obtenue à l'itération  $k$ .

Dans tous les cas, la convergence est contrôlée par l'écart en énergie  $e^k$  par la méthode FETI-DP et la convergence est considérée comme atteinte lorsque cet écart est égal ou inférieur à  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

On utilise un code d'éléments finis développé au LMGC (Université Montpellier 2) dans l'environnement *Matlab*. Dans tous les cas les résultats sont comparés avec la solution de référence  $U_{ref}$  calculée avec le code d'éléments finis *Cast3M* (CEA Saclay, France), dans lequel les calculs sont réalisés sans décomposition de domaine.

Dans cette section, on commence par valider l'outil numérique sur un exemple simple sur une structure homogène sollicitée en membrane (problème dit 2D). Sur cet exemple, on mettra en évidence les propriétés de la méthode FETI-DP qui viennent d'être mentionnées. On abordera ensuite le cas d'une structure hétérogène, ce qui nous amènera à un traitement particulier du problème de preconditionnement. Ce problème sera à nouveau présent lors de l'étude de panneaux raidis en flexion. Grâce aux outils développés au cours de cette section, on pourra alors

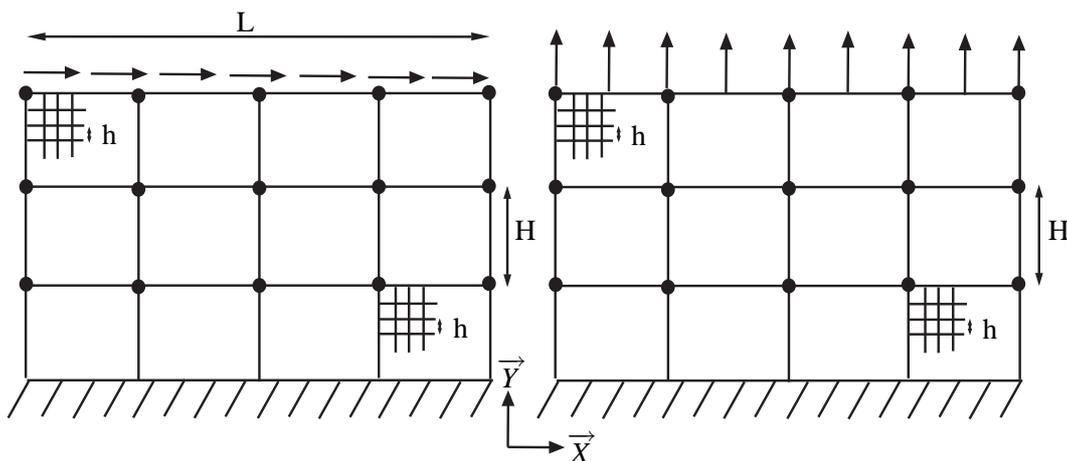


analyser de manière efficace un exemple industriel, sur un tronçon de navire.

### 2.5.1 Exemple de validation en 2D - cas d'une interface homogène

Comme premier exemple de validation, on présente le cas d'une géométrie avec un matériau homogène en 2D. Les caractéristiques des éléments finis utilisés dans ces exemples sont : élément de contrainte plane (*qua4* ou *tri3*) pour le panneau (avec deux degrés de liberté  $u$  et  $v$  à chaque nœud) et l'élément de poutre *Euler – Bernoulli* à deux nœuds pour les raidisseurs (avec trois degrés de liberté  $u$ ,  $v$  et  $\theta_z$  à chaque nœud). Il est à noter que la compatibilité cinématique n'est pas respectée lors du raccord de tels éléments entre eux, lorsque celui-ci est réalisé ponctuellement aux nœuds. Cependant, comme il s'agit de la pratique industrielle courante, cet aspect n'est pas modifié, et on cherchera ici aussi à respecter la continuité aux nœuds seulement.

Dans un premier temps, on considère l'exemple de la figure (2.12) encasté et soumis à un



**Figure 2.12** - Problème en contraintes planes (panneau simple) en traction et cisaillement

chargement de cisaillement ou de traction.

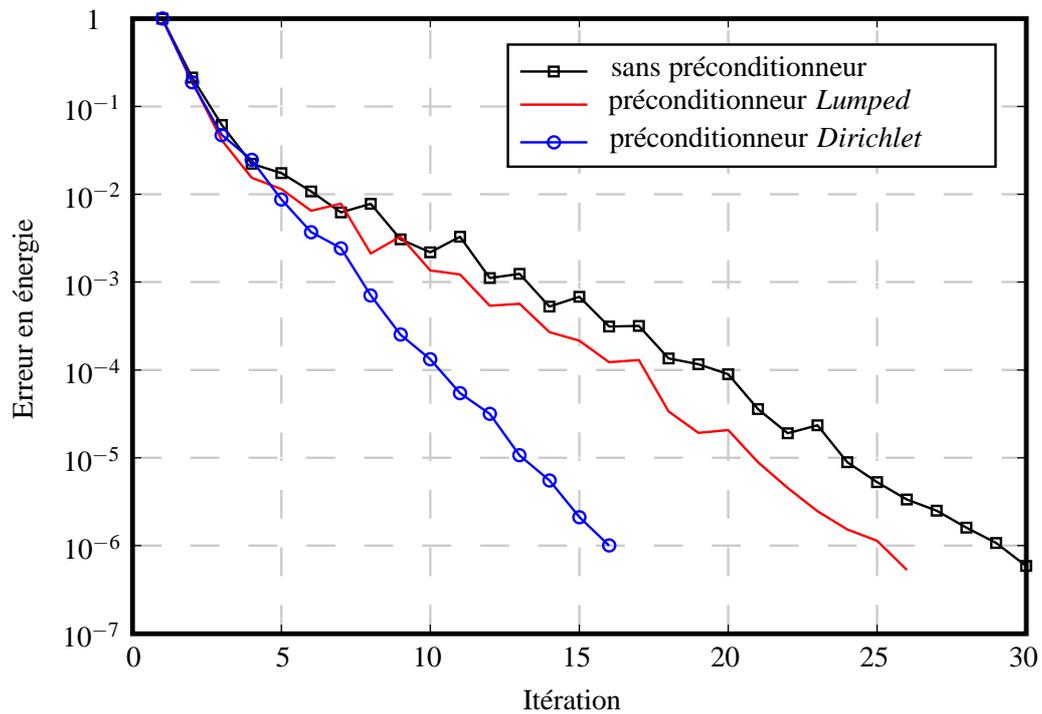
On présente le taux de convergence avec différents choix de préconditionneurs (sans préconditionneur, préconditionneur *Lumped* et *Dirichlet*) figure (2.13).

Il faut noter que dans ce cas, la matrice de pondération  $W$  est de type multiplicité.

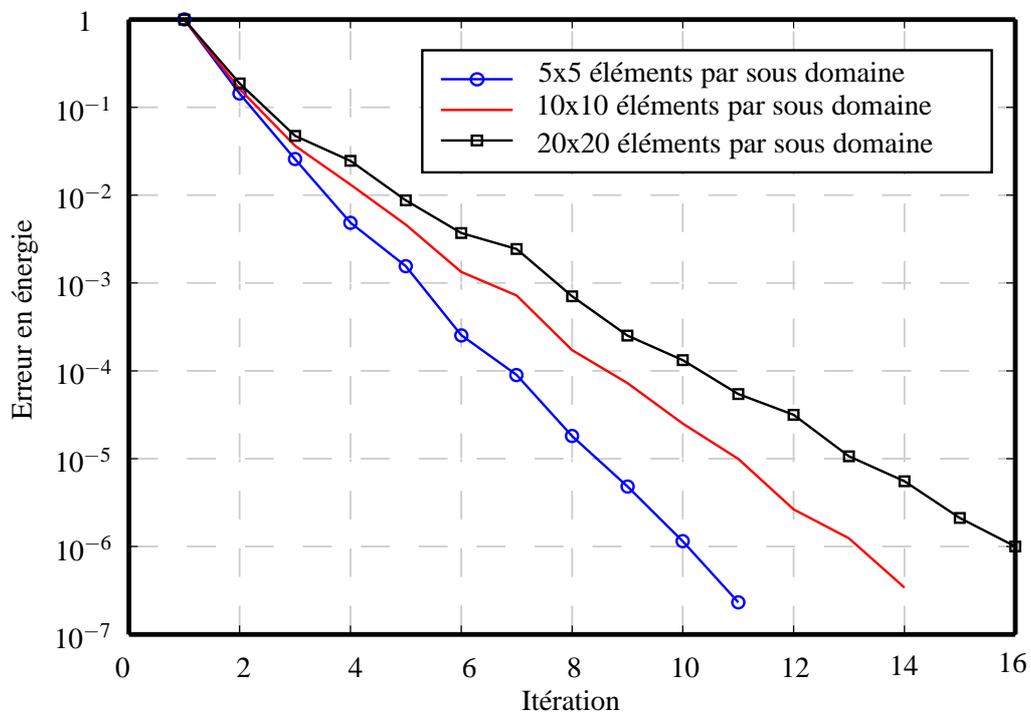
L'effet du préconditionneur de type *Lumped* est faible, alors que le préconditionneur de type *Dirichlet* apporte une amélioration significative du taux de convergence. En effet le préconditionneur *Lumped* n'est pas numériquement optimal mais, il peut être plus efficace au niveau de temps du calcul par rapport au préconditionneur *Dirichlet*.

Dans la suite, on considère l'effet les différents paramètres comme  $H$ ,  $h$  et  $\frac{H}{h}$  sur le taux de



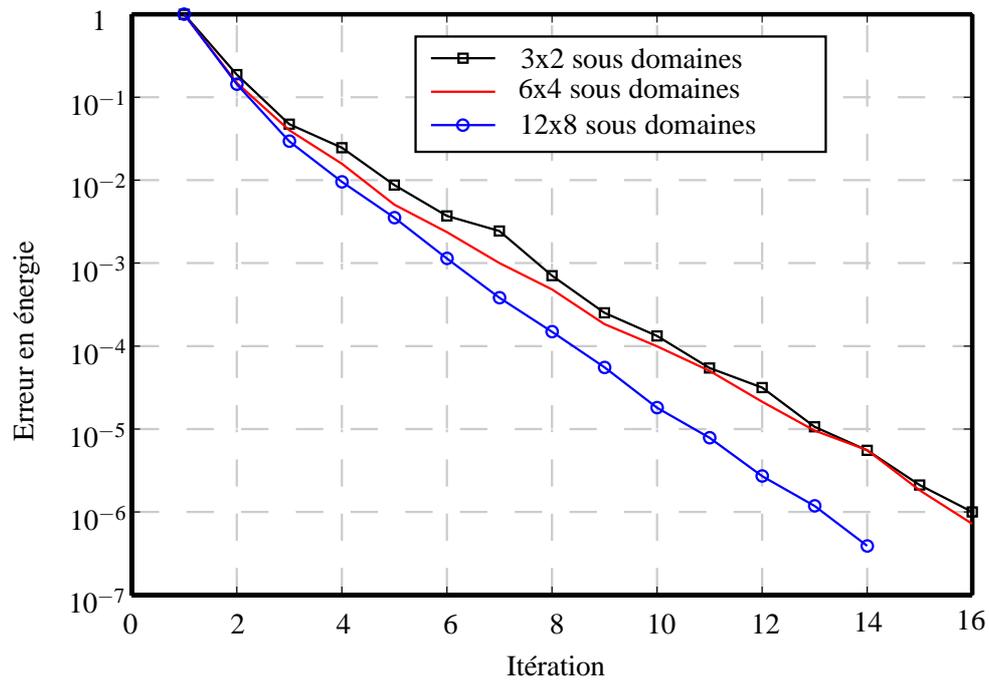


**Figure 2.13** - Cas homogène : influence du préconditionneur sur le taux de convergence (3x2 sous domaines et 20x20 éléments par sous domaine)

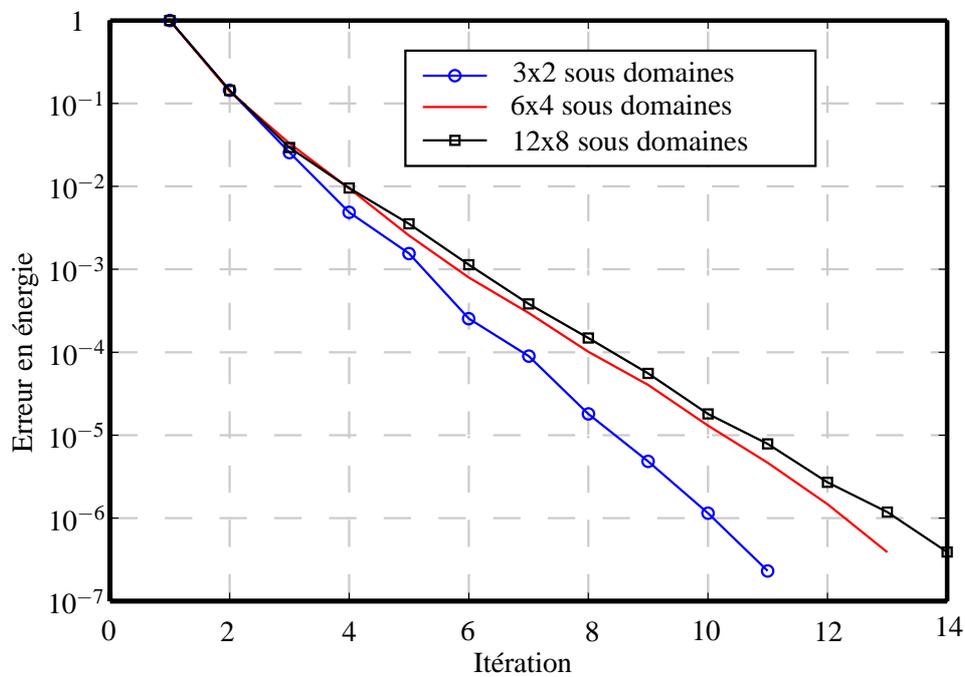


**Figure 2.14** - Cas homogène : influence de la taille d'élément ou de la taille du problème (3x2 sous domaines - nombre de sous domaines constant ( $H$  constant))





**Figure 2.15** - Cas homogène : influence du nombre de sous domaines (taille du problème constante ( $h$  constant))



**Figure 2.16** - Cas homogène : extensibilité numérique (taille de problème par sous domaine constant ( $\frac{H}{h}$  constant))



convergence du calcul itératif. (en considérant le préconditionneur *Dirichlet*)

- si pour un nombre de sous domaines constant ( $H$  constant), la taille du problème augmente par raffinement de maillage ( $h$  diminue) le taux de convergence augmente très lentement, cf. figure (2.14),
- si pour un problème de taille constante ( $h$  constant) le nombre de sous domaines augmente, le nombre d'itérations diminue, cf. figure (2.15),
- si la taille du problème de chaque sous domaine reste constant ( $\frac{H}{h}$  constant), mais si on augmente la taille du problème ( $H$  augmente), le taux de convergence reste quasiment constant (extensibilité numérique), cf. figure (2.16).

En effet, si la méthode FETI-DP est utilisée avec un préconditionneur *Dirichlet* (avec la matrice pondération  $W$  de type multiplicité) dans le cas d'une structure homogène, le conditionnement du problème varie selon la relation ci-dessous :

$$\kappa = O\left(1 + \log^m\left(\frac{H}{h}\right)\right) \quad m \leq 2 \quad (2.64)$$

ce qui établit l'extensibilité numérique de la méthode FETI-DP par rapport à la taille d'élément ( $h$ ) et à la taille de sous domaine ( $H$ ).

## 2.5.2 Exemple en 2D - cas d'une interface hétérogène

On s'intéresse ici, à l'étude d'un cas hétérogène. On considère deux types d'hétérogénéités : l'hétérogénéité matériau (variation de module d'Young) et l'hétérogénéité géométrique ou structurale (présence de raidisseur par exemple).

### 2.5.2.1 Exemple en 2D - cas d'une hétérogénéité matérielle

L'hétérogénéité matériau correspond au modèle simplifié ou équivalent d'un sous domaine avec défaut (avec un trou par exemple). On peut considérer un module d'Young équivalent faible pour le sous domaine avec le défaut, par rapport au sous domaine sans défaut.

Le problème considéré est décrit figure (2.17). C'est un problème en contraintes planes.

Un bord est encasté et un autre est soumis à un chargement de traction uniforme.

Bien que la méthode FETI-DP avec préconditionneur *Dirichlet* (en considérant la pondération de type multiplicité) soit optimale dans le cas homogène, ce n'est plus le cas pour les cas hétérogènes, cf. figure (2.18). On constate en effet que sur un problème de même taille, la vitesse de



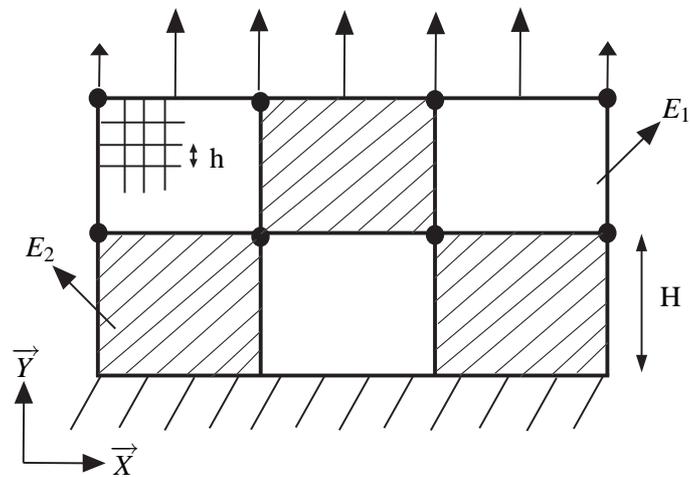


Figure 2.17 - Panneau en traction - hétérogénéité matériau sur l'interface -  $\frac{E_1}{E_2} = 100$

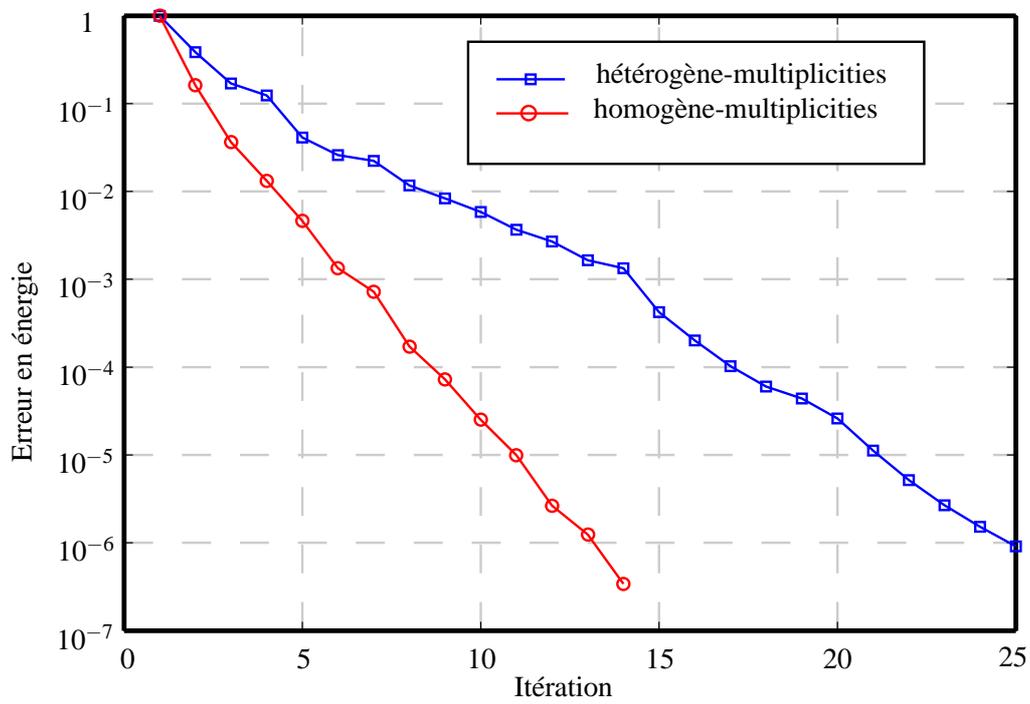
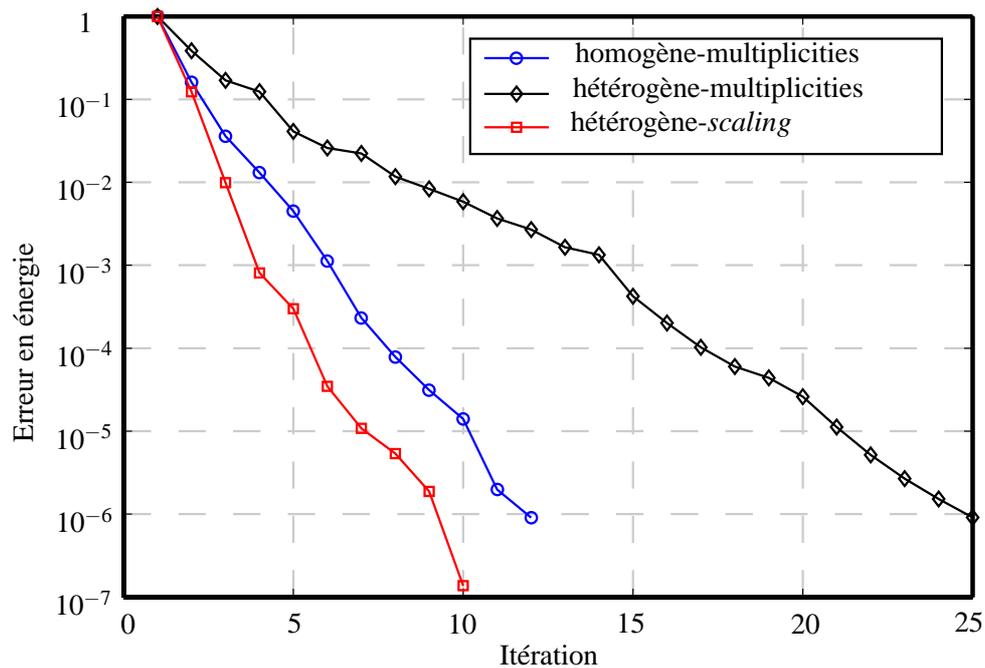


Figure 2.18 - Cas hétérogène : influence de l'hétérogénéité matériau,  $\frac{E_1}{E_2} = 100$  (3x2 sous domaines, 10x10 éléments par sous domaine)





**Figure 2.19** - Cas hétérogène : influence de la pondération *scaling* dans le cas d'une hétérogénéité matérielle (3x2 sous domaines, 10x10 éléments par sous domaine)

convergence du problème hétérogène est plus petite que celle du problème homogène.

Cependant, en considérant la pondération de type *scaling*, c'est-à-dire en partageant le résidu dans le rapport des raideurs des sous domaines connectés, le taux de convergence du calcul itératif est amélioré, cf. figure (2.19).

On voit que dans le cas de l'hétérogénéité matérielle, cf. figure (2.19), il est nécessaire d'avoir un *scaling* pour retrouver le taux de convergence optimal du cas homogène (on obtient même un peu mieux).

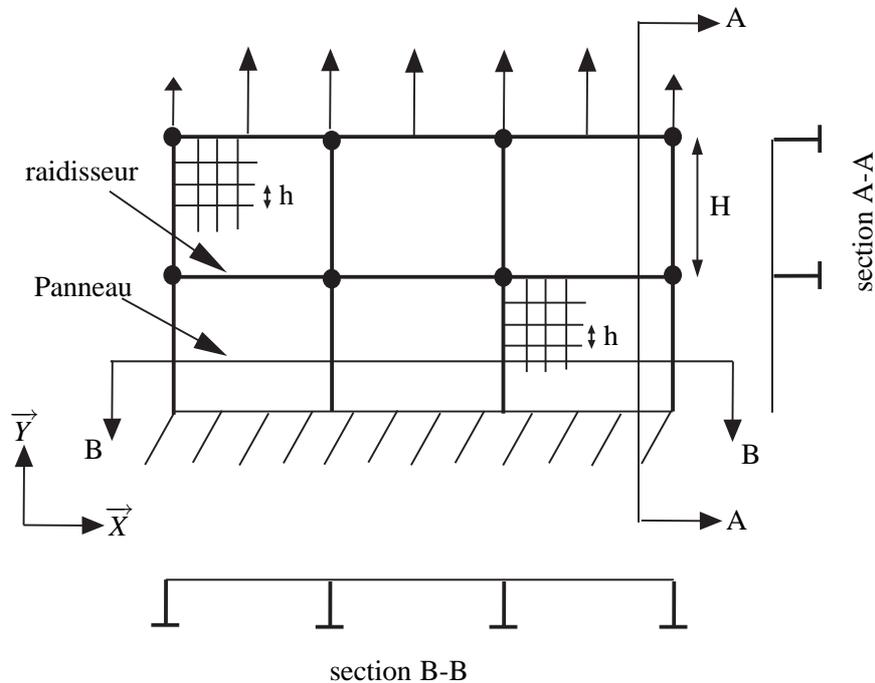
### 2.5.2.2 Exemple en 2D - cas d'une hétérogénéité géométrique

On s'intéresse maintenant à une hétérogénéité géométrique, en étudiant un problème de panneaux raidis (panneau homogène et raidisseur sur l'interface entre les sous domaines). Ce dernier type d'hétérogénéité est très fréquent dans les structures navales. On traite un problème plan, avec des éléments en contraintes planes pour les panneaux et des poutres pour les raidisseurs. Le problème est décrit figure (2.20).

Comme nous l'avons mentionné auparavant, pour ce cas d'hétérogénéité locale, il y a deux façons de connecter les sous domaines : avec ou sans redondance, selon que l'on utilisera deux ou trois multiplicateurs de Lagrange, car on n'a que deux équations de liaison indépendantes



parmi  $u_1 - u_2 = 0$ ,  $u_2 - u_3 = 0$  et  $u_1 - u_3 = 0$ .



**Figure 2.20** - Panneau raidi en traction - hétérogénéité locale (géométrie)

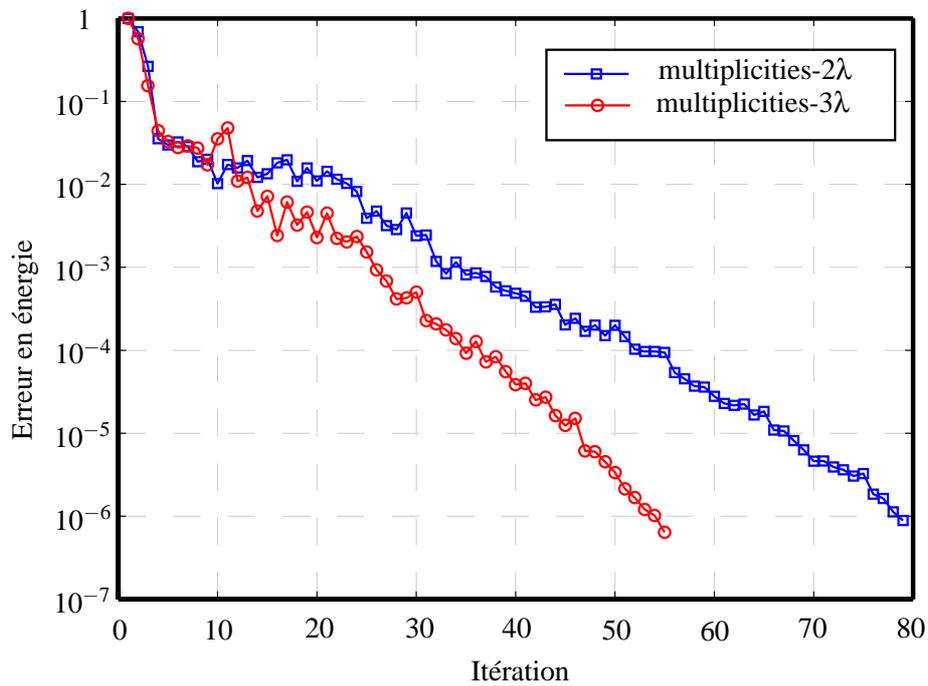
Si on compare les résultats obtenus avec deux ou trois multiplicateurs sur l'interface, à préconditionneur identique, on constate que l'approche avec redondance des multiplicateurs converge plus vite, cf figure (2.21). Si on utilise un préconditionneur *Dirichlet* avec la pondération *scaling*, la même tendance est observée. En outre, si on compare les résultats à ceux du panneau non raidi, on a une vitesse de convergence très proche, cf. figure (2.22) (le nombre de degrés de liberté sur le panneau raidi étant plus important à cause des raidisseurs).

Il apparaît donc que quel que soit le type d'hétérogénéité (matérielle ou géométrique), dans le cas 2D, le préconditionneur *Dirichlet* avec une pondération *scaling* et la connectivité avec trois multiplicateurs de Lagrange (pour les jonctions à 3 sous domaines) nous donne le meilleur taux de convergence.

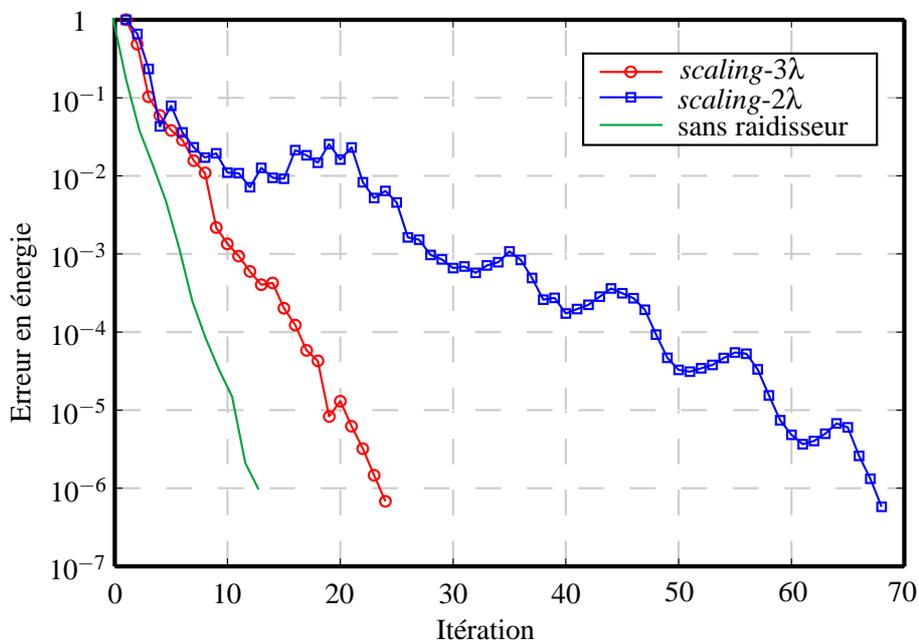
### 2.5.3 Exemple de panneaux raidis en flexion

Après la présentation de la méthode FETI-DP dans son application à un problème de membrane, on aborde dans la suite le cas d'une plaque raidie sollicitée en flexion.





**Figure 2.21** - Cas hétérogène : influence de l'hétérogénéité géométrique (panneau raidi) ( $3 \times 2$  sous domaines,  $10 \times 10$  éléments par sous domaine)



**Figure 2.22** - Cas hétérogène : influence du scaling et de la connectivité dans le cas d'hétérogénéité géométrique ( $3 \times 2$  sous domaines,  $10 \times 10$  éléments par sous domaine)



Une structure mince ou élancée (plaque ou poutre par exemple) est un cas particulier de solide tridimensionnel, dont une dimension n'est pas du même ordre de grandeur que les deux autres dimensions géométriques, cf. figure (2.23).

On peut présenter la définition suivante :

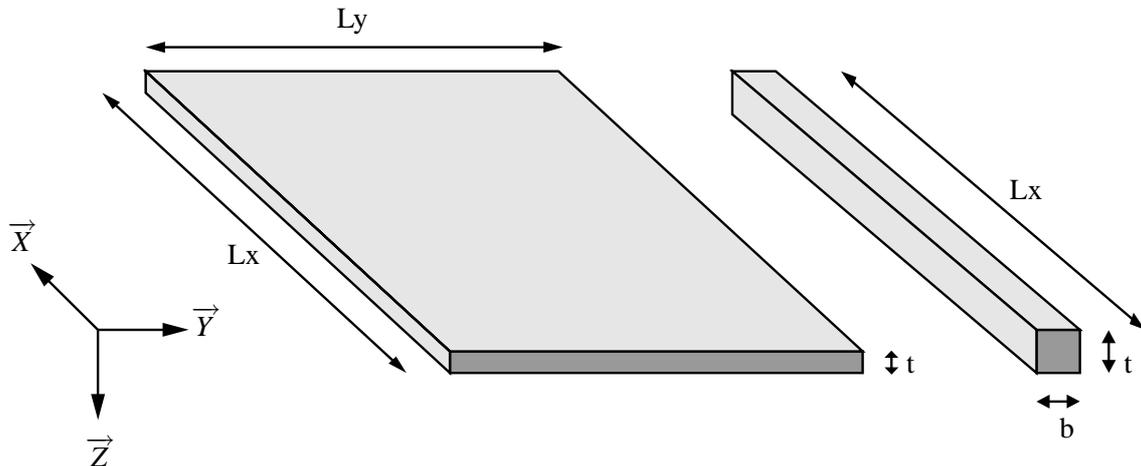


Figure 2.23 - Schéma classique de la plaque et de la poutre

- plaque : solide défini par une surface moyenne plane et d'épaisseur  $t$ , petite par rapport aux dimensions de la surface moyenne,
- poutre droite : solide défini par une ligne moyenne droite dont la longueur est grande devant les dimensions de la section ( $b$  et  $t$ ).

Comme on l'a présenté précédemment, la structure du navire est constituée par l'assemblage de différents éléments structuraux tels que des plaques et des poutres, cf. figure (2.7).

Les éléments constitutifs d'un navire sont en acier avec des élancements qui vérifient les conditions suivantes :

$$\frac{L_x}{t} > 50 \quad , \quad \frac{L_y}{t} > 50 \quad \text{pour la plaque}$$

$$\frac{L}{t} > 30 \quad \text{pour la poutre}$$

Ceci justifie l'utilisation de la théorie des plaques de *Kirchhoff* et la théorie d'*Euler-Bernoulli* des poutres.

Du point de vue éléments finis, on utilise les éléments DKT (*Discrete Kirchhoff Triangle*) ou DKQ (*Discrete Kirchhoff Quadrilateral*) pour les plaques et des éléments à deux nœuds de type *Hermite* pour les poutres [Batoz et Dhett, 1993].

Pour un premier calcul, on utilise la même stratégie que pour le cas en membrane, c'est-à-dire avec un préconditionneur de *Dirichlet*, une pondération *scaling* et la connectivité avec les trois multiplicateurs de Lagrange dans le cas de plaque en flexion (plaque simple et raidie). On considère un exemple de plaque plane dans deux cas : plaque homogène et plaque raidie (raidisseur



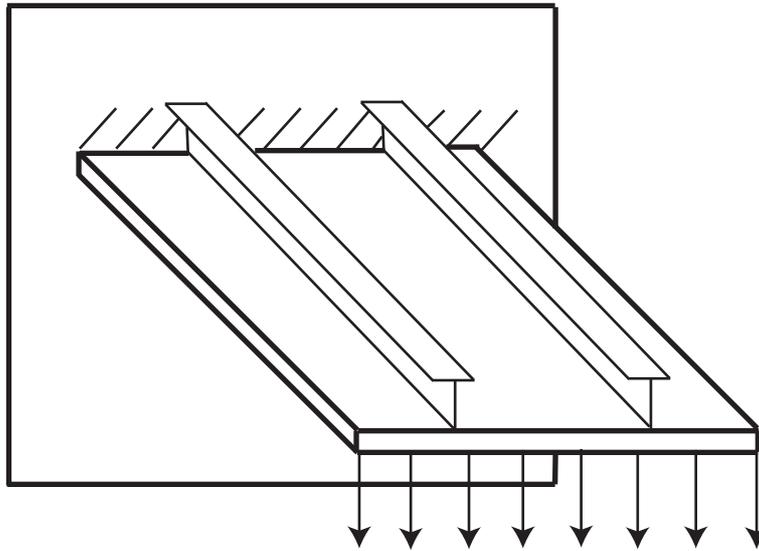


Figure 2.24 - Plaque en 3D

sur l'interface des sous domaines). Le chargement est donné par une force perpendiculaire distribuée de manière uniforme sur le bord libre de la plaque, cf. figure (2.24).

Les résultats présentés dans les figures (2.25) et (2.26) qui comparent le taux de convergence du calcul, nous montrent que le taux de convergence en considérant le préconditionneur *Dirichlet* et la pondération *scaling* est bien adapté à l'élément de plaque et de poutre en 3D.

Cependant, sur certains exemples simples, un moins bon comportement de l'approche est observé. C'est le cas pour l'exemple présenté en figure (2.27), correspondant à la jonction de deux plaques non coplanaires (ce type de cas se rencontre sur un navire, où on a des jonctions cloison-bordé, pont-bordé, cloison-pont, etc.). En effet, le taux de convergence n'est pas toujours monotone, cf. figure (2.28). Une étude détaillée de ce cas nous a permis de mettre en relation les mauvaises performances de la méthode avec les conditions de raccord utilisées à l'interface entre les sous domaines. Nous proposons donc dans la section qui suit un type de raccord, par ailleurs plus physique, qui conduit à un meilleur comportement numérique.

### 2.5.3.1 Problème de la raideur de *drilling* des plaques

En général, les degrés de liberté d'une formulation de plaque sont exprimés dans un repère local  $(x - y)$  défini sur la surface moyenne de la plaque. Les degrés de liberté sont notés  $\{u, v, w, \theta_x, \theta_y\}$ .

où  $u$  et  $v$  représente les déplacements de membrane dans le plan de la plaque et  $w$  le déplace-



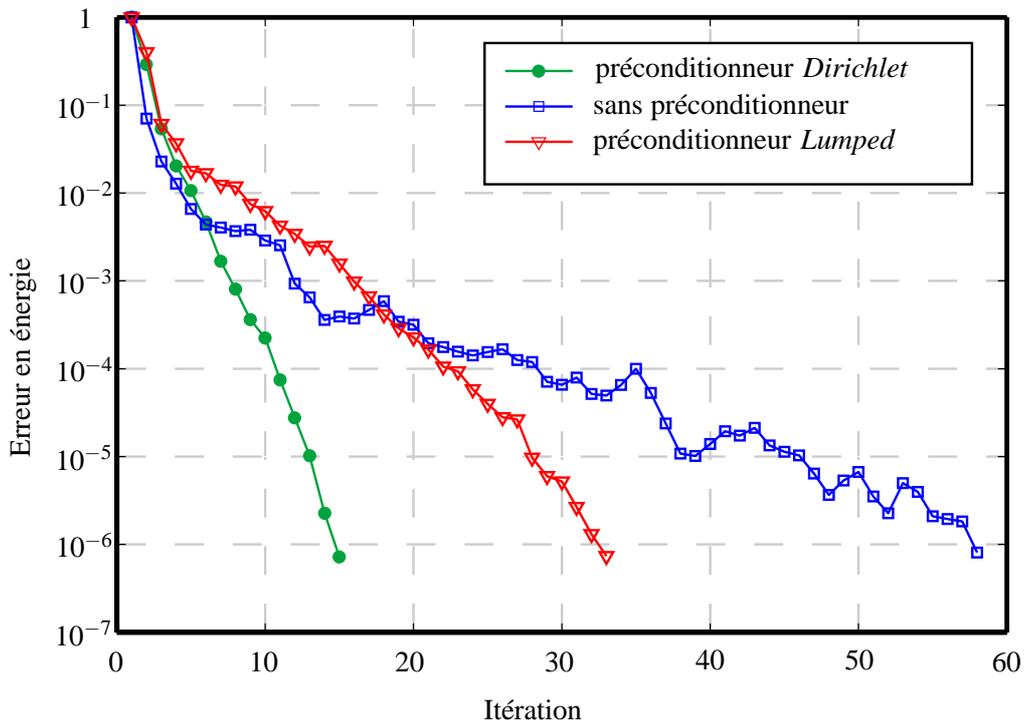


Figure 2.25 - Convergence du calcul en 3D - plaque sans raidisseur

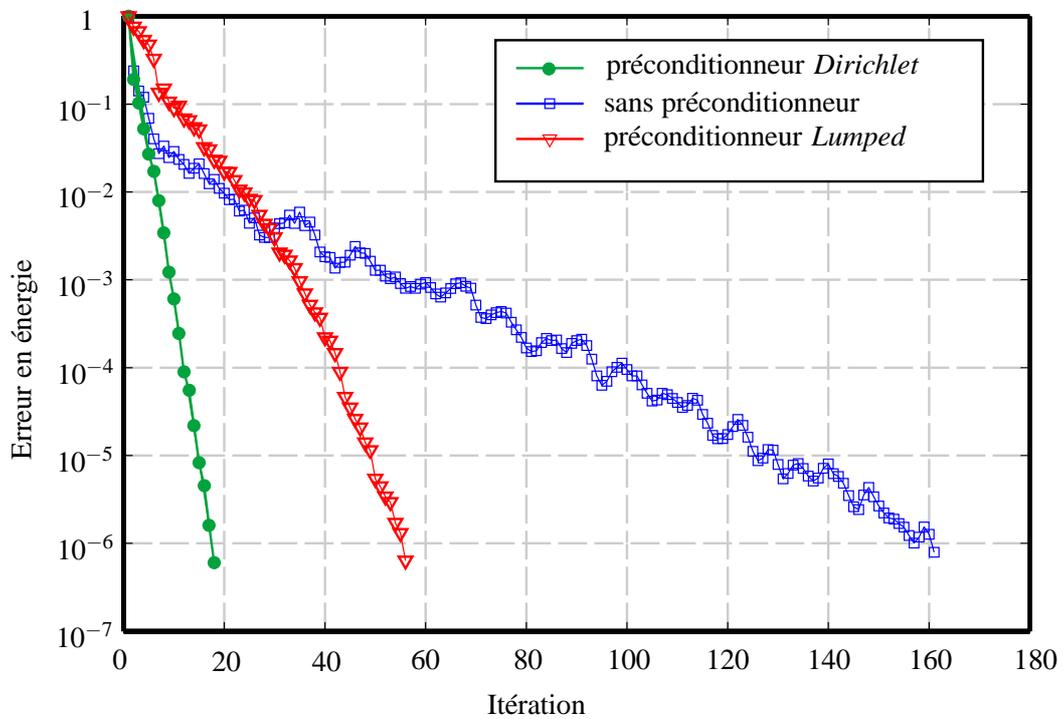


Figure 2.26 - Convergence du calcul en 3D - plaque raidie



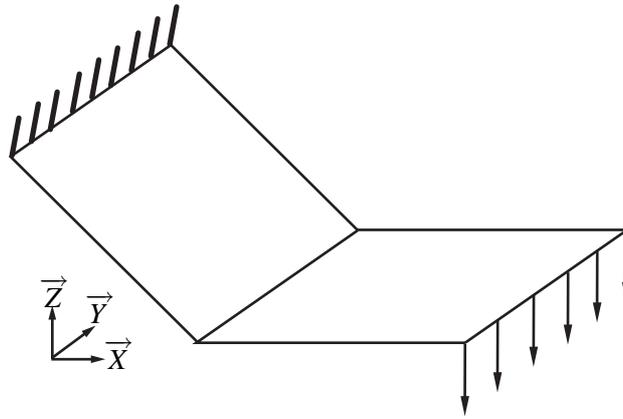


Figure 2.27 - Plaque pliée

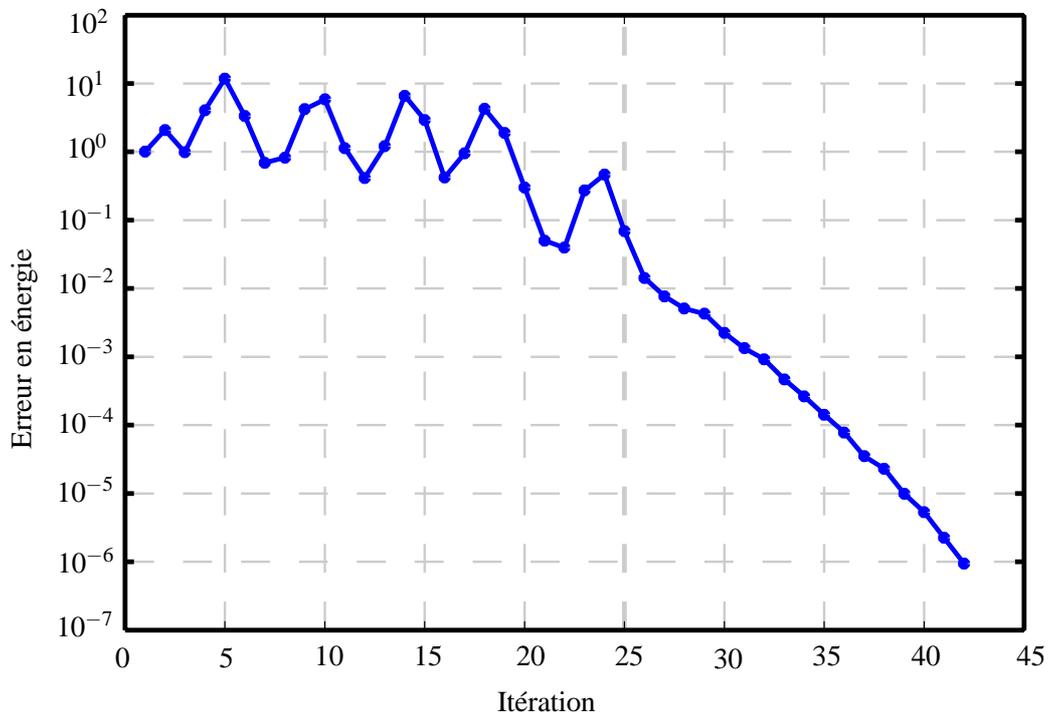


Figure 2.28 - Exemple de la plaque pliée - convergence non monotone



ment transversal (la fleche),  $\theta_x$  et  $\theta_y$  sont les rotations autour de  $x$  et  $y$ , respectivement.

Le degré de liberté local  $\theta_z$ , n'est pas utilisé car il ne joue aucun rôle dans la cinématique de la plaque. Il n'y a pas rigidité correspondant à ce degré de liberté.

Si maintenant on considère un assemblage de plaques non coplanaires, cf. figure (2.29), on va travailler avec des degrés de liberté définis dans un repère global. Ceci entraîne l'utilisation d'une rotation à 3 composantes indépendantes. Si on revient dans le repère local de la plaque, cela signifie qu'il est nécessaire de prendre en compte la rotation perpendiculaire à son plan. Afin d'éviter la singularité de la matrice raideur liée à ce degré de liberté, on lui ajoute habituellement une raideur numérique fictive (dite le *Drilling*). Cette raideur doit être suffisamment petite pour ne pas modifier le problème, mais pas trop petite pour ne pas avoir un mauvais conditionnement [Bathe, 1996].

On a défini ici la raideur *Drilling* pour chaque élément comme la somme des raideur associées à  $\theta_x$  et  $\theta_y$  multipliée par un coefficient de *Drilling* égal à  $10^{-5}$ .

### 2.5.3.2 Condition de raccord de plaques en 3D

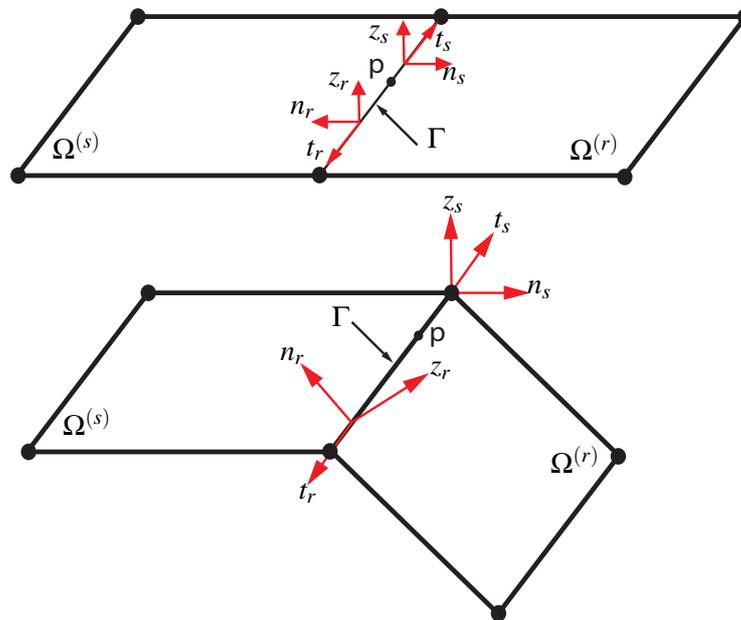
Pour présenter la condition de raccord de plaque en 3D, on considère deux sous domaines (ici deux plaques non coplanaires)  $\Omega^{(r)}$  et  $\Omega^{(s)}$  qui sont connectés sur la ligne de jonction  $\Gamma$ , cf. figure (2.29). Sur cette ligne, on définit deux repères orthonormaux locaux  $(n_r, t_r, z_r)$  et  $(n_s, t_s, z_s)$ , chacun d'entre eux étant associé à un sous domaine.

Avec une modélisation tridimensionnelle, le raccord s'écrit ponctuellement comme pour une interface parfaite : il y a continuité des déplacements et équilibre des efforts en chaque point du raccord. Une modélisation de plaque mince peut être obtenue en faisant tendre l'épaisseur vers zéro [Bernadou *et al.*, 1988] ; elle donnera alors les conditions de raccord adéquates. La principale difficulté vient du fait que (i) dans chaque repère local de plaque, le moment suivant la normale à la plaque est nul, ou de façon duale, la rotation autour de la normale n'existe pas, (ii) la cinématique de plaque impose des relations entre le déplacement normal et les rotations dans le plan de la plaque. Dans le cas où une discrétisation par éléments finis *DKT* ou *DKQ* est réalisée, l'écriture du raccord cinématique complet (en déplacement et en rotation), nœud à nœud, ne pose pas de problème particulier pour les plaques coplanaires. Dans l'application qui nous intéresse, deux cas différents de plaques non coplanaires se présentent :

- la "facettisation" de surfaces courbes, comme la coque du navire, est un artefact qui vient du choix d'approximer ces surfaces par des morceaux de plaques (une alternative consisterait à utiliser des éléments finis de coques, prenant en compte la courbure, mais leur utilisation et leur implantation numérique sont plus délicates). Ceci conduit à une légère surestimation de la raideur de la structure quand l'ensemble des degrés de liberté sont raccordés ;



- des jonctions de plaques avec des angles de brisure importants sont présentes lors des raccords coques / ponts par exemple.



**Figure 2.29** - Interface de plaque dans les cas coplanaire et non coplanaire

L'utilisation d'un raccord cinématique (discrétisé) complet pose alors quelques difficultés, en particulier dans le deuxième cas : outre une rigidité excessive, il contient des conditions redondantes (lien entre déplacement normal et rotations dans le plan). De plus, avec l'utilisation de la rigidité de *drilling*, cf. section (2.5.3.1), et lorsque une interface de la décomposition en sous domaine passe par le raccord (ce qui est fréquent au vu de la stratégie de décomposition utilisée ici), ce raccord conduit à une forte hétérogénéité de raideur en rotation. Le conditionnement du problème est alors artificiellement élevé, et le comportement numérique n'est pas optimal, cf. par exemple un test de simulation sur une plaque pliée, avec 2 sous domaines, figure (2.30).

Nous proposons alors d'utiliser les conditions de raccord plus correctes, obtenues par analyse asymptotique, lorsque la jonction est forte entre deux plaques [Bernadou *et al.*, 1988], [Geymonat et Krasucki, 1997] :

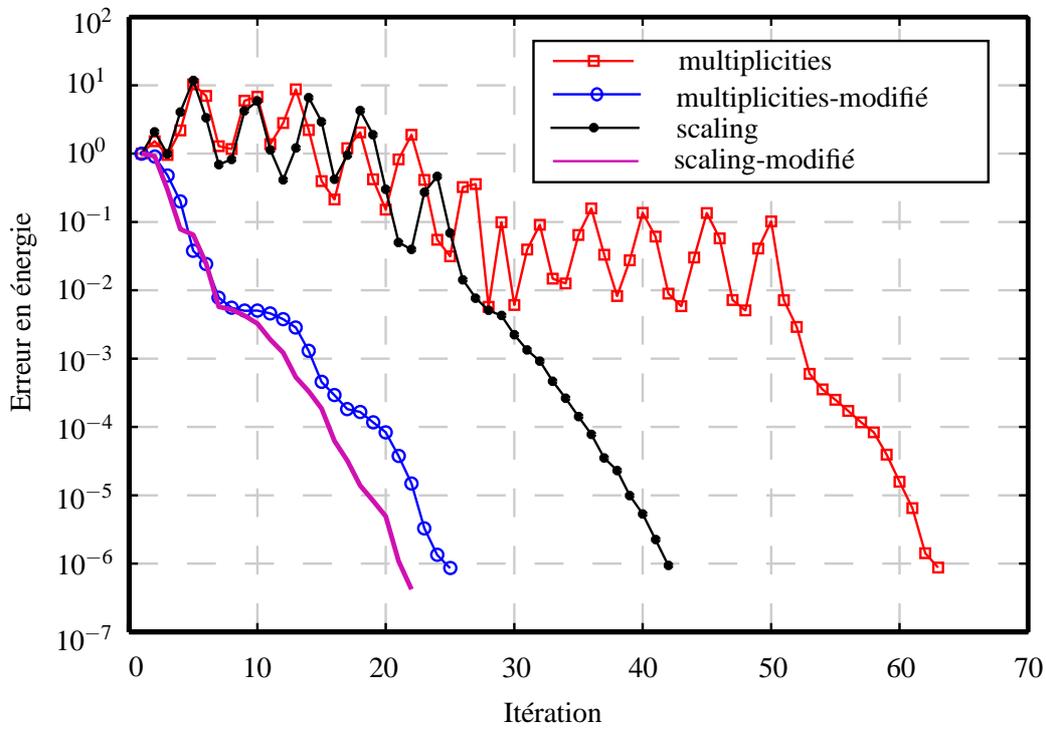
- la continuité de toutes les composantes des déplacements est imposée ;
- seule la continuité de la composante des rotations dont la direction est commune aux deux plans, c'est-à-dire la direction  $\vec{t}$ , est imposée (voir Annexe B).

Ceci est réalisé de façon simple en modifiant la matrice de raccord  $B_r^{(s)}$ , initialement booléenne signée, qui va contenir alors les composantes du vecteur  $\vec{t}$  pour les degrés de liberté en rotation (une telle adaptation avait déjà été réalisée pour les problèmes de contact, où le vecteur normal au contact était utilisé, [Dureisseix et Farhat, 2001]).

On a alors moins d'équations de liaison et donc moins de multiplicateurs de Lagrange sur l'in-



terface, ce qui diminue la taille du système à résoudre.



**Figure 2.30** - Exemple de plaque pliée : influence du raccord sur la ligne de jonction

Pour illustrer l'effet de ce raccord modifié sur le taux de convergence, on considère deux exemples dans la suite, en commençant par celui de la figure (2.27). On voit que le taux de convergence avec le nouveau raccord est amélioré, cf. figure (2.30), quelque soit la pondération utilisé.

Dans un deuxième exemple, on considère un cas plus général que le précédent, cf. figure (2.31). Le taux de convergence, cf. figure (2.32), en considérant la modification de la condition de raccord sur la ligne de jonction entre sous domaines est monotone et plus élevé.



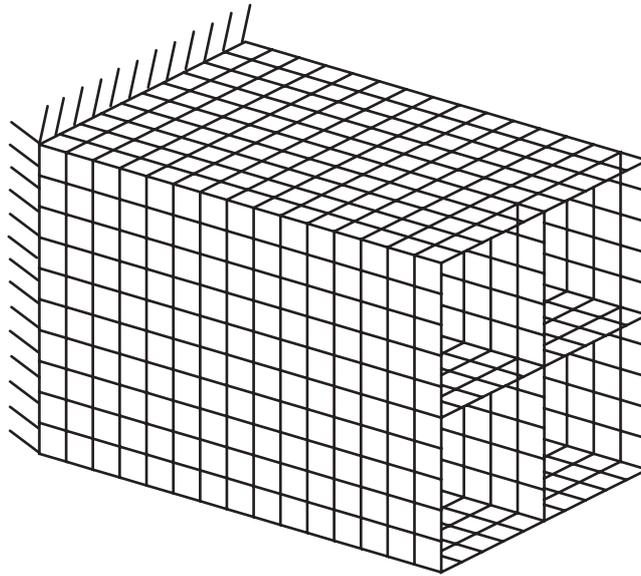


Figure 2.31 - Exemple assemblage de plaque

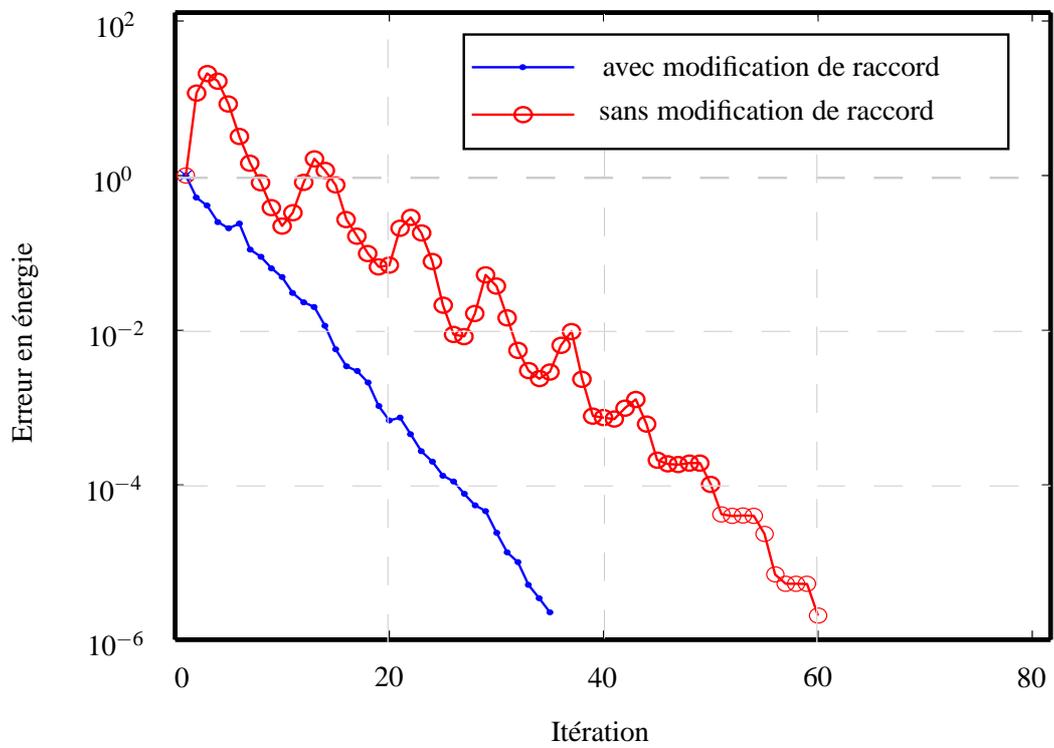


Figure 2.32 - Exemple assemblage de plaque - sans et avec modification du raccord sur l'interface

### 2.5.4 Application à un exemple industriel

Dans cette partie, on applique la méthode FETI-DP sur un exemple de plus grande taille. Cet exemple correspond au tronçon d'un navire à passagers, cf. figure (2.4). Les caractéristiques du maillage sont présentées dans le tableau (2.1), on note qu'avec ce problème, on a environ 190000 degrés de liberté. Les résultats correspondant à cet exemple ont déjà été présentés dans [Mobasher Amini *et al.*, 2006].

On envisage ici les conditions aux limites qui représentent un cas de chargement réglementaire

Longueur, Largeur, Profondeur	17.4 m, 9.43 m, 22.1 m
Nombre de nœuds du maillage fin	31230
Nombre d'élément de maillage fin	31810
Nombre de ddl	187380
Nombre de sous domaines	678
Type d'élément plaque	DKT et DKQ (6 ddl/nœud)
Type d'élément raidisseur	poutre (6 ddl/nœud)

**Tableau 2.1** - *Caractéristiques du tronçon de navire*

de flexion globale [Hughes, 1983].

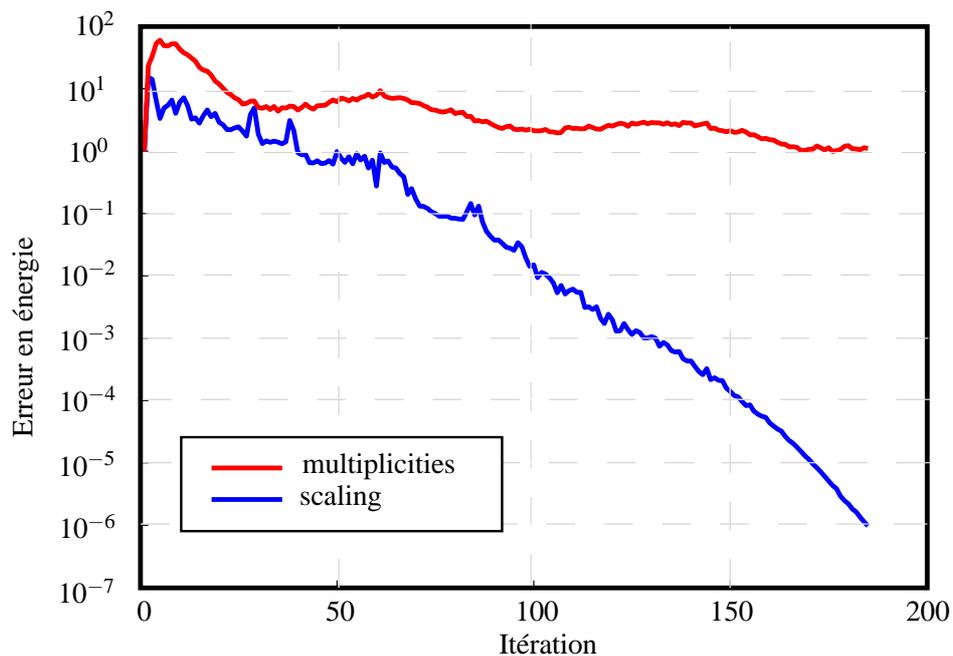
Ce chargement est appliqué par une distribution linéaire d'efforts axiaux sur les deux sections extrêmes du navire. Sur cet exemple, toutes les difficultés recensées précédemment : raidisseurs, hétérogénéité de raideur des sous domaines (présence de trous) sont présentes. La méthode développée précédemment avec le *scaling* et le raccord approprié pour les plaques est donc appliquée. On note en particulier qu'il y a jusqu'à 4 sous domaines qui ont une interface commune. La convergence est présentée dans la figure (2.33). Il apparaît que la méthode de *scaling* permet d'améliorer de façon très importante la vitesse de convergence. On peut ajouter que sans précaution particulière à ce niveau, la convergence est très lente et incertaine. Le post-traitement a été réalisé dans le code éléments finis Cast3M (CEA Saclay, France) et est présenté figure (2.34).

## 2.6 Bilan

L'utilisation d'une stratégie de décomposition de domaine de type FETI-DP pour résoudre un système d'équations de grande taille a été réalisée dans ce chapitre.

Cette méthode est en effet bien adaptée pour la prise en compte des détails structuraux, via un maillage fin des sous domaines. Elle permet en outre d'éviter les difficultés liées aux pro-





**Figure 2.33** - Taux de convergence du calcul sur un tronçon de navire

blèmes de grand taille, grâce à la transformation du problème global en un problème d'interface et une résolution itérative. En outre, cette méthode intègre bien la nature multi-échelle du calcul sur un navire à passagers, car les problèmes locaux sur chaque sous domaine sont résolus indépendamment du problème global. Enfin, notons que la méthode choisie présente une certaine compatibilité avec les méthodes utilisées en bureaux d'études. En effet, on obtient avec les nœuds grossiers un maillage macroscopique qui coïncide exactement avec celui des bureaux d'études.

Cependant, les performances de toute méthode de type FETI-DP sont étroitement liées à celles du solveur utilisé. Pour une résolution de type gradient conjugué, il est primordial de développer un préconditionneur efficace. Ce point est délicat pour un navire à passagers qui présente une forte hétérogénéité structurale. Ceci nous a amené à reprendre à ce niveau le principe d'une matrice de pondération. Nous avons d'autre part mis en relief les difficultés propres au raccord de plaques et avons utilisé un raccord adapté.

Grâce aux outils développés, nous avons pu démontrer l'efficacité de la méthode, ce qui se manifeste principalement par une vitesse de convergence élevée. Un exemple typique a été validé, sur un tronçon de navire à passager.



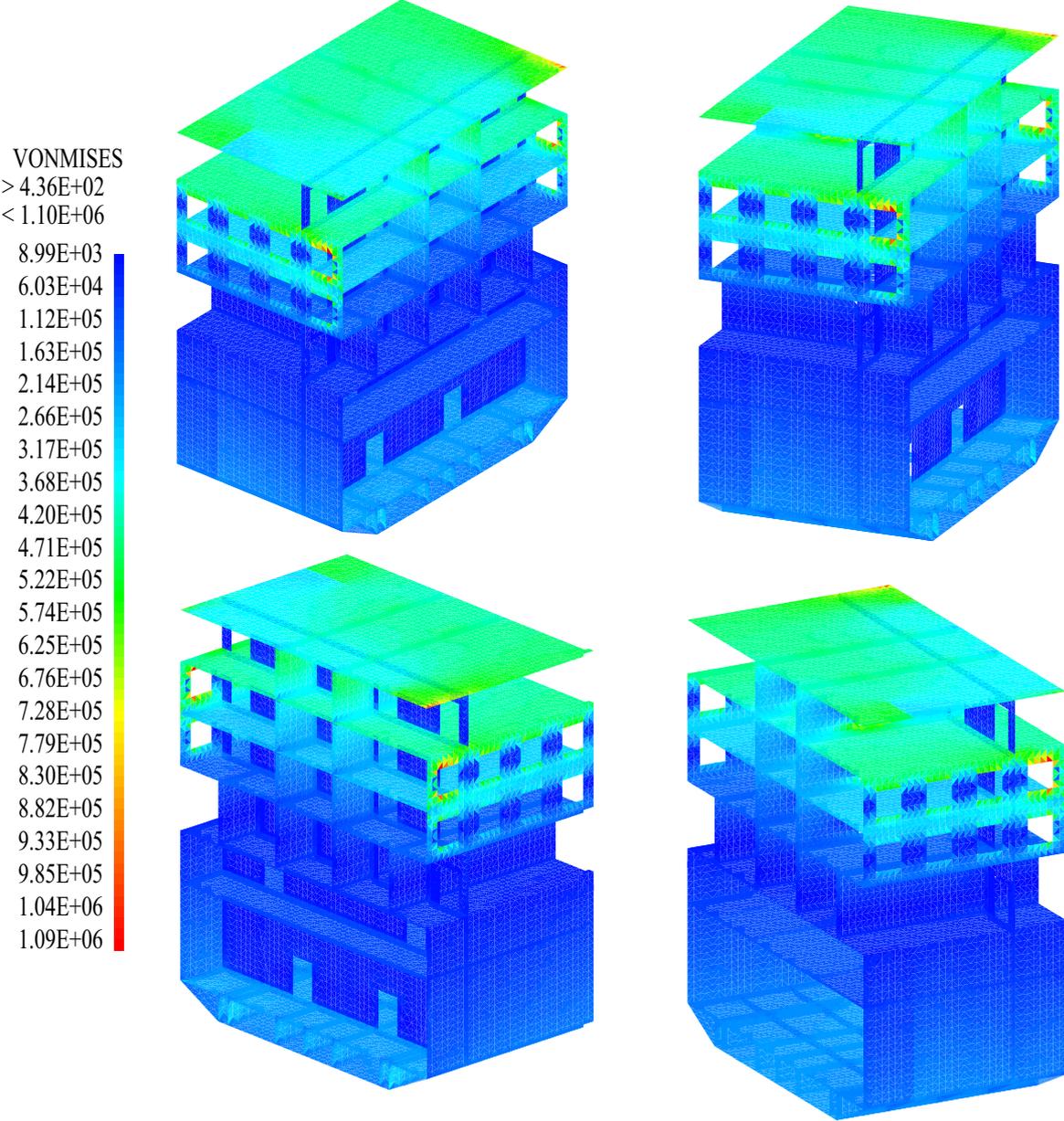


Figure 2.34 - Post-traitement - exemple un tronçon de navire





# 3

---

## Homogénéisation numérique et approche multi-échelle

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>55</b>
<b>3.2</b>	<b>Description générale de la méthode</b>	<b>58</b>
<b>3.3</b>	<b>Raccord entre les sous domaines fin et grossier</b>	<b>59</b>
3.3.1	Introduction	59
3.3.2	Collage des maillages incompatibles : aperçu bibliographique	60
3.3.3	Présentation de différentes méthodes	63
3.3.4	Bilan - choix de deux méthodes	68
3.3.5	Application de deux méthodes de raccord	68
<b>3.4</b>	<b>Homogénéisation des sous domaines grossiers (macro)</b>	<b>74</b>
<b>3.5</b>	<b>Méthode FETI-DP avec sous domaines fins et grossiers</b>	<b>77</b>
3.5.1	Formulation matricielle	77
3.5.2	Résolution numérique	79
<b>3.6</b>	<b>Validation de la méthode</b>	<b>81</b>
3.6.1	Validation de la raideur macroscopique	81
3.6.2	Validation du raccord	83
<b>3.7</b>	<b>Applications numériques</b>	<b>85</b>
3.7.1	Introduction	85
3.7.2	Structures homogènes	86
3.7.3	Structures hétérogènes	90
<b>3.8</b>	<b>Bilan</b>	<b>106</b>

---

### 3.1 Introduction

Dans la première partie de ce document, on a présenté la méthode de décomposition de domaine (FETI-DP) qui est la troisième version des méthodes de la famille FETI et dont le but est de



résoudre les problèmes mécaniques de grande taille. En général, cette méthode est appliquée de la façon suivante.

Le maillage de l'ensemble de la structure est réalisé, puis sa décomposition en sous domaines est effectuée. Cette dernière est le plus souvent faite de façon automatique, par un logiciel de partition de maillage ou de graphes (citons METIS par exemple). Pour une application de type navire à passagers, c'est l'architecture du navire qui conditionne cette décomposition. En effet, comme nous l'avons montré au chapitre précédent, les frontières des sous domaines peuvent être données par les intersections avec les ponts, cloisons, ou les raidisseurs primaires. Dans ce cas, les maillages sur l'interface de décomposition sont **compatibles**.

Si l'analyse d'ensemble de la structure est réalisée, il est classique que les zones d'intérêt, critiques du point de vue du dimensionnement et sièges des phénomènes locaux, soient peu nombreuses. Il est donc opportun, en vue d'optimiser le temps de calcul, d'utiliser un maillage pour lequel le niveau de discrétisation des sous domaines n'est pas uniforme.

Or, si on analyse le coût de calcul pour une méthode de type FETI-DP, il apparaît qu'essentiellement deux paramètres sont influents. Le premier est lié à la taille du problème et provient du nombre de multiplicateurs associés à la continuité des déplacements à l'interface. Le deuxième résulte des analyses locales effectuées pour le calcul sur chaque sous domaine dont on a besoin pour le pré-conditionneur.

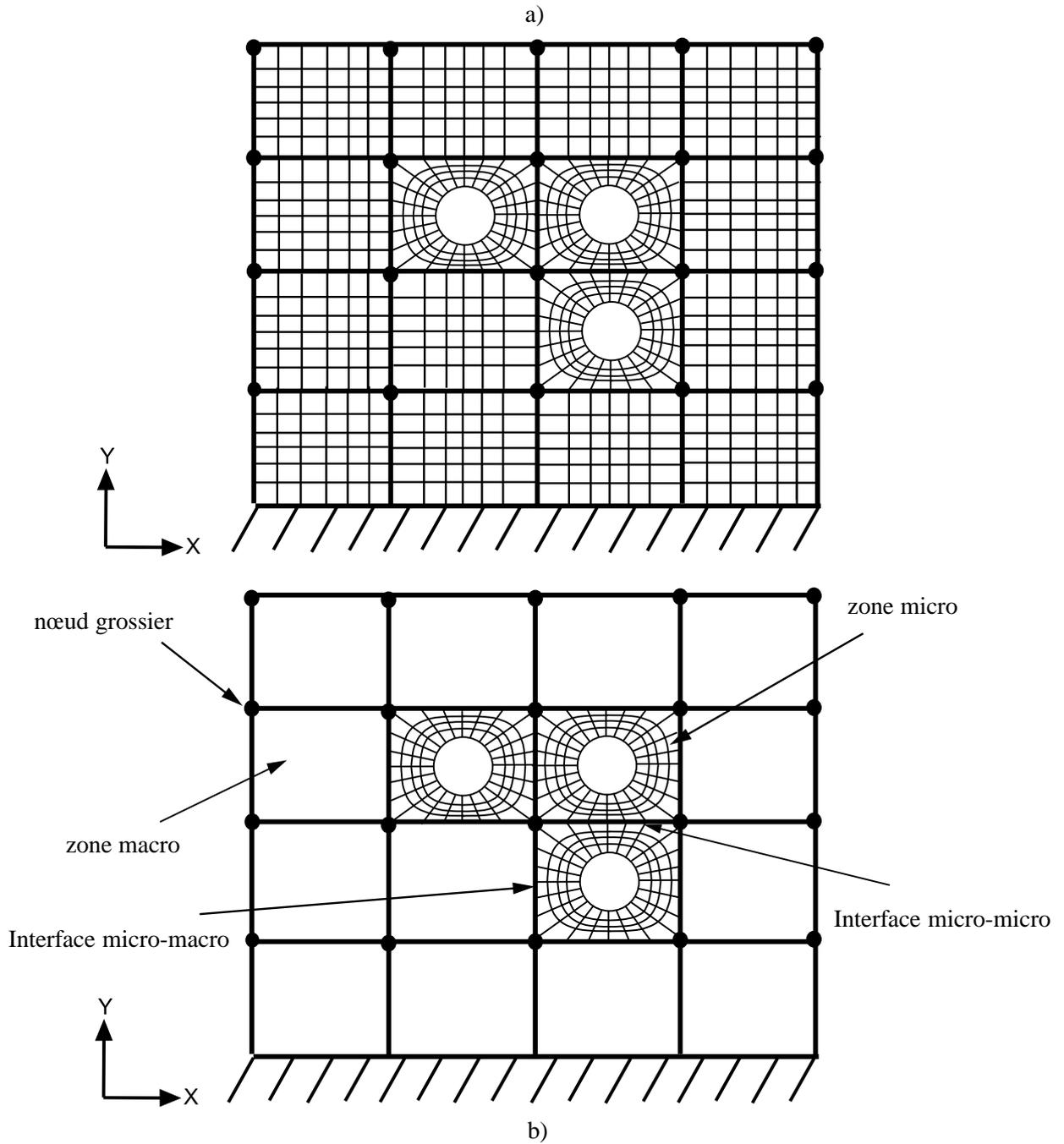
Il est donc évident que l'utilisation de maillages plus grossiers sur des sous domaines permettra sur ces deux points une diminution du temps de calcul.

Par ailleurs, si on étudie les pratiques en vigueur dans les bureaux d'études de la construction navale (cf. introduction du chapitre (2)), à l'heure actuelle, les calculs d'ensemble sont menés avec un seul élément fini par sous domaine. Ce sous domaine a en effet été préalablement homogénéisé à partir d'une analyse réalisée sur un maillage fin de ce même sous domaine. Le calcul d'ensemble du navire est ensuite post-traité, pour en déduire les zones critiques, sur lesquelles sont effectués des reprises de calcul. Ces derniers calculs consistent à appliquer sur le contour de la zone des conditions aux limites issues du calcul global. L'inconvénient majeur de cette méthode est que le problème local et global ne sont pas couplés.

Contrairement à cette analyse descendante, la méthode FETI-DP présente l'avantage de coupler les phénomènes locaux et globaux. Telle que nous l'avons appliquée au chapitre précédent, un maillage de densité uniforme est utilisé sur tout le navire. Or, il faut d'une part tenir compte du fait que les phénomènes locaux se réduisent à certaines zones, et d'autre part qu'en dehors de ces zones, une description du sous domaine avec un maillage grossier constitué d'un seul élément fini est suffisante, conformément aux pratiques des bureaux d'études.

Nous proposons donc une évolution de la méthode FETI-DP exposée précédemment, avec l'utilisation de discrétisations différentes selon les sous domaines. Un maillage dit **fin** (**microscop-**





**Figure 3.1** - a) Maillage fin de tous les sous domaines b) Maillage issu du maillage (a) avec deux discrétisations, fine et grossière.

**pique)** pour les sous domaines dans les zones d'intérêt, et un maillage **grossier (macroscopique)** ailleurs, obtenu en condensant par homogénéisation numérique le maillage fin initial pour se ramener à un élément constitué des seuls nœuds grossiers, cf. figure (3.1).

## 3.2 Description générale de la méthode

Il s'agit donc de définir une méthode de type décomposition de domaine avec des sous domaines fins et grossiers, et pour point de départ une discrétisation des sous domaines fins uniquement. Ceci soulève principalement trois questions :

- la première est le choix de l'échelle de discrétisation par zone : c'est-à-dire la définition des zones où le maillage fin est conservé, et celles où il est remplacé par un élément homogénéisé de support des nœuds grossiers,
- la deuxième concerne le raccord entre les sous domaines fins et grossiers, puisque l'on a maintenant des sous domaines incompatibles sur l'interface,
- la troisième est relative à la détermination de la raideur équivalente pour les sous domaines macroscopiques.

Dans ce chapitre, nous n'aborderons pas la première question, et nous définirons *a priori* les zones fines et grossières. Nous traiterons les deux autres points, et présenterons une extension de la méthode FETI-DP permettant l'analyse d'une structure avec une décomposition de domaine à deux échelles de discrétisation pour les sous domaines. Les étapes principales de cette méthode sont :

- maillage fin de la structure et décomposition de domaine (tous les sous domaines ayant un maillage fin et les interfaces entre les sous domaines étant compatibles) ;
- choix de l'échelle de discrétisation du problème global (*zooming*) selon les zones : fin (zones avec phénomènes locaux) ou grossier ;
- pour les sous domaines grossiers : homogénéisation numérique du maillage fin (détermination d'une raideur équivalente) ;
- raccord entre les sous domaines avec maillages fin et grossier sur l'interface incompatible ;
- calcul itératif d'ensemble micro-macro.

Grâce à cette approche, la taille du problème de référence sera inférieure à celle obtenue en appliquant la méthode développée au chapitre précédent (sous domaines fins partout). Quant à la qualité de la solution obtenue par la méthode développée dans ce chapitre, on peut déjà faire ressortir quelques paramètres influents, en prenant comme référence la solution obtenue avec des sous domaines fins partout.

En effet, la précision de la solution avec la nouvelle méthode sera affectée par les approxi-



mations induites par l'homogénéisation des sous domaines grossiers et les perturbations que pourraient engendrer aux interfaces des raccords entre les sous domaines fins et grossiers (analyse micro-macro). Tout l'enjeu est de proposer une méthode qui fournit une bonne précision de la solution dans les zones d'intérêt, c'est-à-dire une solution très proche de la solution de référence définie plus haut.

En effet, on attend deux propriétés importantes d'une analyse avec maillages fin et grossier (analyse micro-macro). Celle-ci doit permettre d'accéder à une bonne approximation de la solution dans les zones d'intérêt (autour des détails) et aussi la prise en compte de l'influence de ces détails sur la réponse globale de la structure.

Dans la suite de ce chapitre, nous abordons successivement les questions du raccord entre sous domaines fin et grossier, et de l'homogénéisation des sous domaines grossiers.

La démarche utilisée ici est utilisable lorsque l'on dispose *a priori* de la description fine de l'ensemble de la structure. On propose alors de déraffiner toutes les zones qui ne sont pas des zones d'intérêt. Un autre cas de figure concerne celui où le point de départ est une discrétisation grossière de toute la structure et où un raffinement adaptatif est employé uniquement dans les zones d'intérêt. Dans ce cas, les raideurs macro des sous-domaines grossiers ne proviendraient pas de l'homogénéisation d'une échelle fine sous-tendante, mais, par exemple, des caractéristiques matériau moyennes sur chaque sous domaine macro.

## 3.3 Raccord entre les sous domaines fin et grossier

### 3.3.1 Introduction

Nous cherchons ici à raccorder deux sous domaines fin et grossier ayant une interface commune. Comme il apparaît en figure (3.1), sur cette interface, on a pour le sous domaine fin plusieurs nœuds, alors que sur le sous domaine grossier, on a seulement deux nœuds extrémité (nœuds grossiers), qui sont communs avec le sous domaine fin. On rappelle également que l'idée est de construire le sous domaine grossier par homogénéisation numérique du maillage fin sous jacent. Cela signifie donc qu'on déterminera directement sa matrice raideur grossière (macroscopique). Dans ce sens, le sous domaine grossier n'est pas un élément fini à quatre nœuds avec une interpolation classique.

Néanmoins, pour mettre au point un raccord entre ces deux sous domaines, il sera nécessaire de définir un champ de déplacement continu sur l'interface du sous domaine grossier. Ceci étant fait (ce sera explicité ultérieurement), le problème de raccord est du même type qu'un raccord entre maillages incompatibles.



Dans le contexte de la méthode des éléments finis, les différentes façons d'avoir une interface incompatible sont les suivantes :

- les nœuds des éléments sur les deux côtés de l'interface ne coïncident pas,
- les nœuds coïncident, mais les fonctions de forme de chaque côté de l'interface sont différentes,
- le raccord est réalisé entre différents éléments (e.g. élément poutre, plaque etc.),

Il faut noter que, dans ce travail, on aborde le premier aspect. Nous allons, donc dans la suite examiner les méthodes proposées dans la littérature pour traiter le raccord entre maillages incompatibles. Nous étudierons ensuite leur adéquation à notre problème pour sélectionner deux d'entre elles.

### 3.3.2 Collage des maillages incompatibles : aperçu bibliographique

Dans le contexte de la méthode de décomposition de domaine, l'intérêt de la méthode FETI-DP, précédemment étudiée, est qu'elle s'applique aussi bien au collage de maillages compatibles qu'au collage de maillages incompatibles. On rappelle tout d'abord l'équation de liaison dans le cas du maillage compatible :

$$\sum_{s=1}^{N_s} B^{(s)} u^{(s)} = 0 \quad (3.1)$$

où  $B^{(s)}$  est une matrice booléenne signée qui repère uniquement les degrés de liberté du sous domaine qui sont situés sur l'interface globale  $\Gamma$  (réunion de toutes les interfaces entre les sous domaines).

En effet, dans le cas l'interface incompatible, les matrices  $B$  ne seront pas booléennes mais plus complexes. On se propose alors de décrire les matrices  $B$  dans le cas général afin de raccorder des maillages incompatibles.

Nous envisageons ici des situations où la compatibilité géométrique entre les sous domaines est toujours assurée, cf. figure (3.2-b). Il n'y a donc pas de nœuds grossiers au milieu de l'interface entre deux sous domaines.

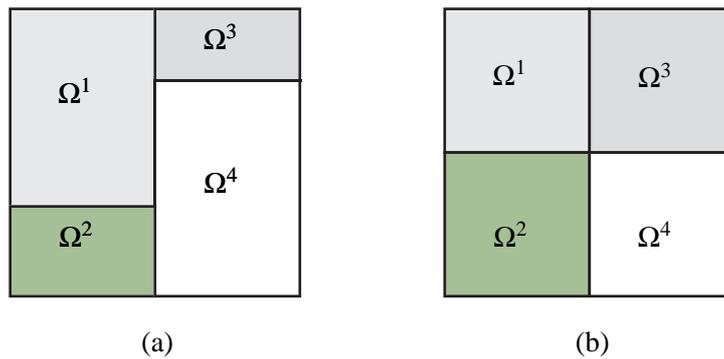
En général, le problème de raccord sur l'interface  $\Gamma_{ij}$ , entre des sous domaines  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$ , consiste à écrire l'équation de continuité suivante :

$$u_b^{(i)} = u_b^{(j)} \quad \forall x \in \Gamma = \Omega_i \cap \Omega_j \quad (3.2)$$

où  $u_b^{(i)}$  et  $u_b^{(j)}$  sont les déplacements vectoriels sur les deux côtés de l'interface  $\Gamma_{ij}$ .

La satisfaction exacte de la relation (3.2), au sens continu, sur les interfaces incompatibles, sauf





**Figure 3.2** - Exemples d'interfaces sans compatibilité géométrique (à gauche) et avec compatibilité géométrique (à droite)

cas particulier, est impossible.

Il y a alors deux catégories générales de méthodes pour traiter ce problème :

1. on affaiblit l'équation de continuité ;
2. on fait en sorte qu'elle soit respectée. On intervient alors sur les fonctions d'interpolation des éléments qui ont une frontière commune avec l'interface, de façon à rendre les interpolations de part et d'autre compatibles.

Dans la **première catégorie de méthodes**, il n'y a aucune intervention, ni sur le maillage ni sur les fonctions d'interpolation. On cherche alors à vérifier la continuité du déplacement sur l'interface au sens faible, de la façon suivante :

$$\int_{\Gamma_{ij}} w \cdot (u_b^{(i)} - u_b^{(j)}) d\Gamma = 0 \quad (3.3)$$

où  $w$  est une fonction de pondération, qui peut être choisie de différentes façons. L'approche de collocation rentre dans cette catégorie. Elle consiste simplement à prendre pour  $w$  un ensemble de fonctions de Dirac ( $\delta$ ) sur les nœuds du maillage le plus fin, cf. par exemple [Quiroz et Beckers, 1995] et [Rixen, 1997] et les références contenues.

Avec une méthode de collocation, on annule localement l'erreur commise sur l'équation de continuité. D'autres méthodes ont été développées, associées à une mesure globale de l'erreur : méthodes des moindres carrés, discrets ou continus [Rixen, 1997]. Ces différentes méthodes seront exposées plus en détails dans la section (3.3.3.1).

Dans les méthodes précédentes, on se donne la fonction de pondération. Il existe également d'autres méthodes, dans lesquelles on utilise le fait que sa signification physique est un **multiplicateur de Lagrange** correspondant à l'effort d'interface. On introduit ensuite une discrétisation de ces multiplicateurs, selon différentes techniques : méthode à trois champs [Aminpour et al., 1995], et [Park et Felippa, 2000] ou méthode *mortar* [Bernardi et al., 1994], [Belgacem et Maday, 1997] et [Wohlmuth, 2000]. Dans cette dernière méthode, les variables associées

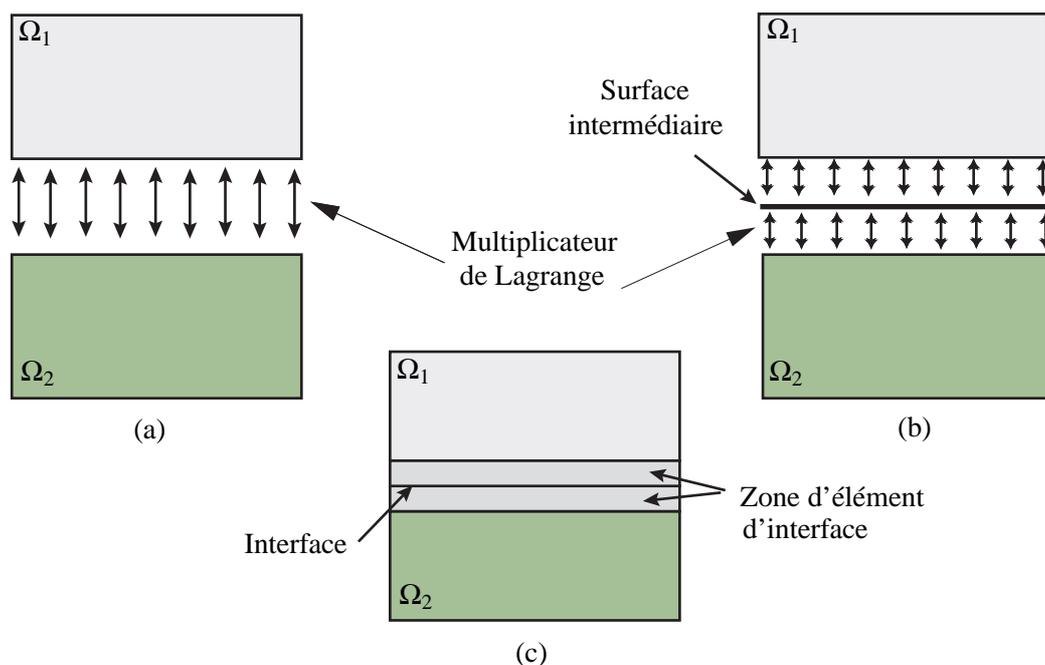


à la discrétisation des multiplicateurs de Lagrange ne constituent pas des inconnues supplémentaires. La méthode *mortar* est donc une méthode à deux champs (les déplacements des deux côtés de l'interface). Cette dernière méthode sera reprise plus longuement dans la section (3.3.3.2).

Signalons enfin que toutes ces méthodes dites de première catégorie, conduisent au final à des équations de liaison entre les degrés de liberté de part et d'autre de l'interface.

Dans la **deuxième catégorie de méthodes**, on intervient sur les fonctions d'interpolation. On peut le faire d'un côté seulement de l'interface : le plus grossier. Pour chaque élément de ce côté, on augmente le degré du polynôme de l'interpolation jusqu'à ce que celui-ci soit cohérent avec le nombre de nœuds du maillage côté fin. On a alors encore deux maillages incompatibles, et on impose de façon faible la continuité entre les deux côtés avec une des méthodes de la première catégorie.

Une autre approche consiste à vérifier la continuité à l'interface. Il s'agit de la méthode d'élé-



**Figure 3.3** - Raccord avec multiplicateurs de Lagrange : a) Deux champs b) Trois champs c) Élément d'interface

ment d'interface, cf. par exemple [Kim, 2002] et [Kim, 2003]. Elle permet le raccord de maillages initialement incompatibles sur l'interface. Des éléments d'interface sont construits à partir des éléments de part et d'autre de l'interface. Une approximation de type "sans maillage" comme MLS (*moving least square*) ou PUM (*partition unity method*) est ensuite utilisée pour construire la fonction de forme correspondant à ces éléments d'interface. De cette manière, la compatibilité de déplacement est toujours assurée, si bien qu'on n'a pas d'équations de liaison à l'interface.



La comparaison de la méthode basée sur les multiplicateurs de Lagrange (deux champs et trois champs) et de l'élément d'interface est illustrée en figure (3.3).

Avec la méthode d'élément d'interface, la construction d'une nouvelle interpolation est complexe et difficile à programmer. Elle engendre de plus des problèmes d'intégration numérique. Elle ne sera donc pas retenue dans ce travail.

### 3.3.3 Présentation de différentes méthodes

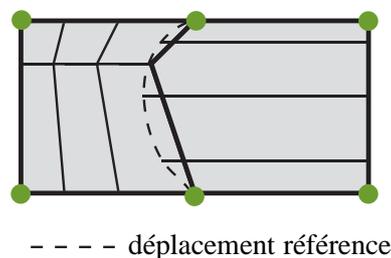
#### 3.3.3.1 Raccord en déplacement

Une méthode générale de raccord consiste à écrire les équations de liaisons entre les degrés de liberté de deux côtés de l'interface en faisant intervenir un champ de déplacement de référence, cf. figure (3.4). Ce champ est défini de la manière suivante :

$$u_{\Gamma} = N_{\Gamma}(\eta)\hat{u}_{\Gamma} \quad (3.4)$$

où  $\hat{u}_{\Gamma}$  est un vecteur de déplacement nodal de taille  $(n_{\Gamma} \times 1)$ ,  $N_{\Gamma}$  est la matrice de fonction de forme de l'interface de taille  $(n_d \times n_{\Gamma})$ ,  $n_d$  est le nombre de degrés de liberté de chaque nœud et  $\eta$  est la coordonnée associée à l'interface.

Deux choix sont proposés dans la littérature pour le champ de déplacement référence. Soit on



**Figure 3.4** - Interface incompatible et déplacement référence

le prend égal à l'un des deux champs de deux côtés de l'interface [Farhat et Géraadin, 1992], [Quiroz et Beckers, 1995] et [Rixen *et al.*, 1998], soit on le considère comme un troisième champ [Aminpour *et al.*, 1995], [Aminpour et Krishnamurthy, 1997] et [Park et Felippa, 2000].

##### 3.3.3.1.1 Méthode de collocation

En considérant le champ de déplacement référence ( $u_{\Gamma}$ ), il s'agit donc d'écrire sur les nœuds de chaque côté de l'interface, l'égalité entre le déplacement et celui de référence. On a donc :

$$u_b^{(s)} = C\hat{u}_{\Gamma} \quad s = i, j \quad (3.5)$$



où  $C$  contient les valeurs des fonctions d'interpolation aux nœuds, de taille  $(n_b^{(s)} \times n_\Gamma)$  et  $u_b^{(s)}$  est le vecteur de déplacement sur l'interface du sous domaine  $\Omega^{(s)}$ .

Il existe des méthodes dans lesquelles les maillages de part et d'autre de l'interface incompatible ne jouent pas le même rôle. On définit alors un côté **maître** et un côté **esclave**, selon des critères qui seront précisés plus tard.

Un choix classique est de prendre le déplacement de l'un de deux côtés de l'interface comme déplacement référence. Le côté choisi est alors appelé **maître**, l'autre étant **esclave**.

Si on choisit le côté grossier, comme le côté maître, il apparaît que la compatibilité cinématique est globalement bien respectée (compatibilité point par point), même s'il y a toujours le risque d'avoir discontinuité locale sur l'interface, cf. figure (3.5-b). En revanche, le choix du côté fin comme le côté maître pour le déplacement référence, paraît moins bon de ce point de vue, comme illustré figure (3.5-c).

Ceci est à mettre en relation avec l'inégalité à respecter d'après [Rixen, 1997] :

$$n_\Gamma \leq \min(n_b^{(i)}, n_b^{(j)}) \quad (3.6)$$

Finalement, en prenant comme maître le côté grossier, on a donc les équations de liaison suivantes sur l'interface :

$$u_b^{(fin)} = C u_b^{(grossier)} \quad (3.7)$$

Cette méthode est une méthode de collocation (cf. section 3.3.2) dans le sens où on respecte la continuité du déplacement à l'interface (3.2) aux nœuds du maillage fin.

### 3.3.3.1.2 Méthode des moindres carrés

Pour améliorer la méthode précédente, dans laquelle l'erreur de discrétisation est annulée localement, on introduit une mesure *globale* de cette erreur, de type moindres carrés.

Cette mesure peut être définie de façon *discrète*, auquel cas le vecteur du déplacement référence  $u_\Gamma$ , satisfait la condition suivante :

$$\frac{\partial}{\partial u_{\Gamma,k}} \{ (u_b^{(s)} - C \hat{u}_\Gamma)^T (u_b^{(s)} - C \hat{u}_\Gamma) \} = 0 \quad (3.8)$$

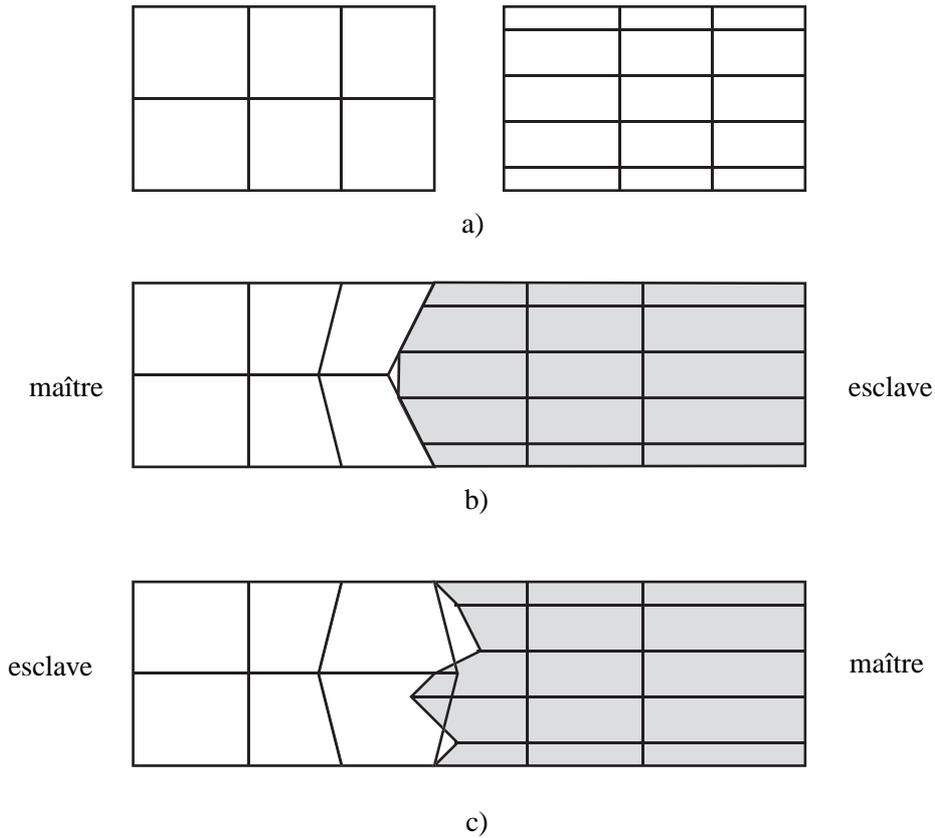
où  $s$  est l'indice du sous domaine et  $k$  est l'indice des nœuds sur l'interface. La forme matricielle de cette expression est la suivante :

$$C^T u_b^{(s)} = C^T C \hat{u}_\Gamma \quad (3.9)$$

De la même manière que la méthode de collocation, on peut choisir le côté grossier pour le déplacement référence ; on a alors la relation suivante [Quiroz et Beckers, 1995] :

$$C^T u^{(fin)} = C^T C u^{(grossier)} \quad (3.10)$$





**Figure 3.5** - a) Interface incompatible b) Choix du maillage grossier comme maître c) Choix du maillage fin comme maître

Cette méthode conduit à une erreur inférieure à celle obtenue par la méthode de collocation [Rixen, 1997]. Cependant, les contraintes portent encore sur la compatibilité nodale, ce qui signifie que les sous domaines sont reliés seulement point par point.

Pour remédier à ce problème, on utilise une mesure continue de la discontinuité en déplacement sur l'interface (3.8). L'application de la méthode des moindres carrés fournit alors :

$$\frac{\partial}{\partial u_{\Gamma,k}} \int_{\Gamma} (u_b^{(s)} - u_{\Gamma})^T (u_b^{(s)} - u_{\Gamma}) d\Gamma = 0 \quad s=i,j \quad k=1,\dots,n_{\Gamma} \quad (3.11)$$

Compte tenu de la discrétisation éléments finis de l'interface, on a donc :

$$\begin{aligned} u_b^{(s)} &= N_b^{(s)}(\eta) \hat{u}_b^{(s)} \\ u_{\Gamma} &= N_{\Gamma}(\eta) \hat{u}_{\Gamma} \end{aligned} \quad (3.12)$$

D'où en reportant dans (3.11), on obtient :

$$b^{(s)} \hat{u}_b^{(s)} = D \hat{u}_{\Gamma} \quad (3.13)$$



où  $b^{(s)}$  et  $D$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} b^{(s)} &= \int_{\Gamma} N_{\Gamma}^T N_b^{(s)} d\Gamma \\ D &= \int_{\Gamma} N_{\Gamma}^T N_{\Gamma} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.14)$$

En choisissant comme déplacement référence, le déplacement associé au maillage d'un des deux côtés de l'interface, on a finalement une relation de la forme :

$$b^{(i)} u_b^{(i)} = b^{(j)} u_b^{(j)} \quad (3.15)$$

Ces méthodes des moindres carrés peuvent être assimilées à une méthode de pondération de la discontinuité du déplacement à l'interface. L'erreur à minimiser est définie par :

$$\int_{\Gamma_{ij}} w \cdot (u_b^{(i)} - u_b^{(j)}) d\Gamma = 0 \quad (3.16)$$

avec  $w = u_b^{(i)} - u_b^{(j)}$  pour les moindres carrés continus. Pour les moindres carrés discrets, on multiplie par des Dirac ( $\delta$ ).

### 3.3.3.2 La méthode *mortar*

Dans la méthode précédente (3.3.3.1), on cherche à minimiser l'erreur en discontinuité des déplacements à l'interface via une fonction de pondération que l'on se donne. Un autre point de vue consiste à considérer cette fonction comme le multiplicateur de Lagrange associé à l'équation  $u_b^{(g)} = u_b^{(d)}$ . On écrit donc :

$$\forall \lambda \in \Phi_{\lambda} \quad , \quad \int_{\Gamma} \lambda \cdot (u_b^{(g)} - u_b^{(d)}) d\Gamma = 0 \quad (3.17)$$

où  $u_b^{(g)}$  et  $u_b^{(d)}$  sont respectivement la trace du champ de déplacement défini dans  $\Omega^{(g)}$  et  $\Omega^{(d)}$  sur  $\Gamma_g$  et  $\Gamma_d$ . Le multiplicateur de Lagrange ( $\lambda$ ) appartient à l'espace des multiplicateurs  $\Phi_{\lambda}$ .

On discrétise alors sur l'interface ce champ de multiplicateur, pour obtenir autant d'équations de liaison que de variables nodales associées à cette discrétisation. On note l'interpolation du multiplicateur de Lagrange par :

$$\lambda = \sum_{k=1}^{n_{\lambda}} N_{\Lambda k} \cdot \lambda_k \quad (3.18)$$

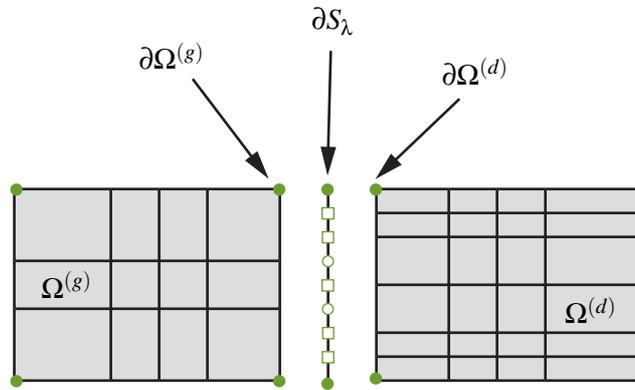


De plus, pour le champ de déplacement, on s'appuie sur les discrétisations de part et d'autre de l'interface :

$$\begin{aligned} u_b^{(g)} &= \sum_{i=1}^{n_g} N_{gi} \cdot u_{bi}^{(g)} \\ u_b^{(d)} &= \sum_{j=1}^{n_d} N_{dj} \cdot u_{bj}^{(d)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

où  $n_g$ ,  $n_d$  et  $n_\lambda$  sont respectivement, les nombres de degrés de liberté frontières entre des sous domaines  $\Omega_g$ ,  $\Omega_d$  et des multiplicateurs de Lagrange avec  $N_g$ ,  $N_d$  et  $N_\lambda$  fonctions de forme associées.

En reportant les relations (3.18) et (3.19) dans l'équation (3.17), on peut donc écrire :



**Figure 3.6** - Définition des surfaces d'intégration sur l'interface

$$\forall \lambda_k, \int_{\Gamma} \left( \sum_{k=1}^{n_\lambda} N_{\Lambda k} \right) \cdot \lambda_k \cdot \left( \sum_{i=1}^{n_g} N_{gi} \cdot u_{bi}^{(g)} - \sum_{j=1}^{n_d} N_{dj} \cdot u_{bj}^{(d)} \right) d\Gamma = 0 \quad (3.20)$$

D'où l'obtention de  $\lambda_k$  équations de liaison, qu'on peut mettre sous la forme :

$$Au^{(g)} - Du^{(d)} = 0 \quad (3.21)$$

où les matrices de liaison  $A$  et  $D$  sont des matrices rectangulaires de  $n_\lambda$  lignes et de  $n_g$  (respectivement  $n_d$ ) colonnes avec les composantes suivantes :

$$\begin{aligned} A_{ki} &= \int_{\Gamma} N_{\Lambda k} \cdot N_{gi} d\Gamma \\ D_{kj} &= \int_{\Gamma} N_{\Lambda k} \cdot N_{dj} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.22)$$

Le choix de l'espace d'approximation des multiplicateurs de Lagrange est important nous y reviendrons ultérieurement.



Notons dès maintenant que si on prend pour cet espace la discrétisation du déplacement de l'un des côtés de l'interface, on constate que les équations de liaison issues de la méthode *mortar* coïncident avec celles obtenues par les moindres carrés continus (3.14).

### 3.3.4 Bilan - choix de deux méthodes

Dans la section précédente, nous avons présenté la méthode *mortar* et des méthodes de raccord en déplacement. Parmi ces dernières, la plus simple est la méthode de collocation et la plus précise est celle des moindres carrés continus, qui présente des similitudes avec la méthode *mortar*. Par la suite, nous appliquerons donc la méthode de collocation et la méthode *mortar*.

### 3.3.5 Application de deux méthodes de raccord

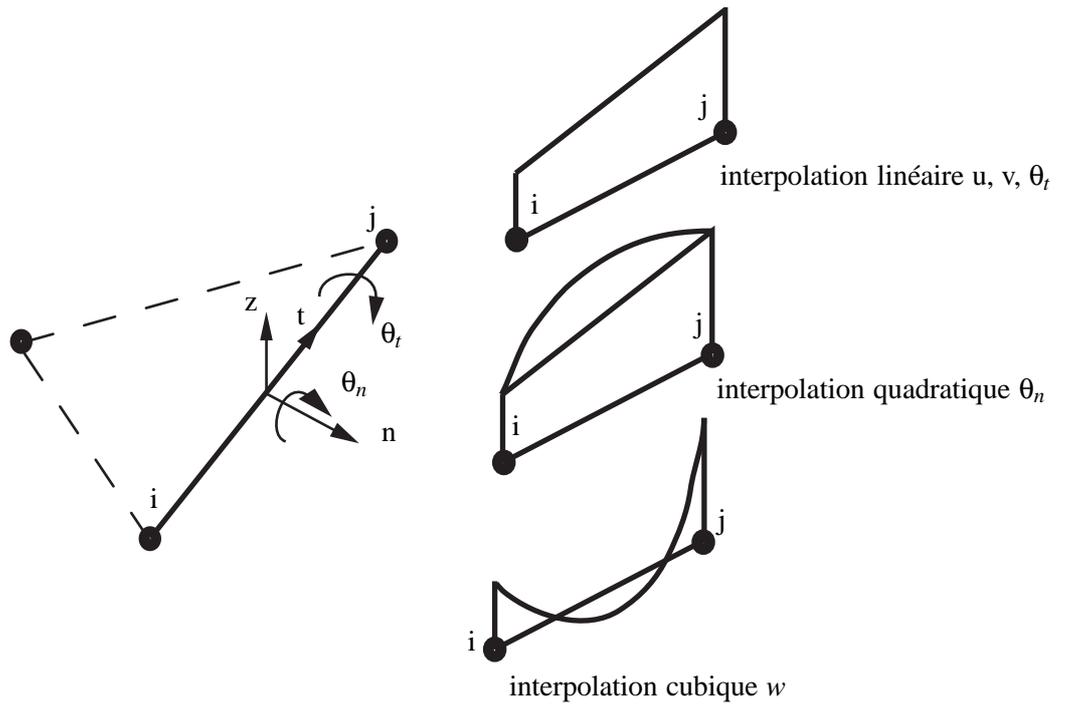
Dans cette partie, on cherche à appliquer deux méthodes de raccord (collocation et *mortar*) présentées auparavant pour une structure décomposée en sous domaines. On rappelle que le raccord concerne l'interface entre deux sous domaines fin et grossier cf. figure (3.1).

#### 3.3.5.1 Préliminaire – interpolation sur l'interface côté grossier

On a déjà mentionné que le problème de raccord s'apparente à celui du raccord de deux maillages incompatibles. Cependant, on rappelle que le sous domaine grossier est obtenu par homogénéisation numérique à partir d'une discrétisation plus fine. On obtient donc directement la matrice raideur du sous domaine grossier, qui porte uniquement sur les nœuds grossiers. Pour pouvoir exprimer la jonction entre les sous domaines fin et grossier, il est nécessaire de définir une interpolation sur le sous domaine grossier. Cette interpolation doit utiliser, comme seuls nœuds supports, les nœuds grossiers. Il est donc naturel de choisir les fonctions de forme d'un élément fini classique dont les nœuds sont les nœuds grossiers. En général, il s'agira de quadrangles (plus rarement des triangles, dans l'application qui nous concerne), avec des nœuds uniquement aux sommets. La partie membrane de l'élément correspond à une interpolation linéaire. Pour la partie flexion, les fonctions de forme sont rappelées figure (3.7), sachant que seule la trace sur l'interface nous intéresse.

Pour l'élément de plaque de type *DKT* (*Discrete Kirchhoff Triangle*) et *DKQ* (*Discrete Kirchhoff Quadrilateral*), les interpolations sont cubique pour la flèche  $w$  et respectivement quadratique et linéaire pour les rotations  $\theta_n$  et  $\theta_t$  [Batoz et Dhatt, 1993].





**Figure 3.7** - Interpolation des quantités macro ( $M$ ) sur le bord - 3D

### 3.3.5.2 Raccord en déplacement ou raccord cinématique

En appliquant la méthode de collocation présentée en section (3.3.3.1), le raccord entre les sous domaines fin et grossier s'écrit (cf. la relation (3.7)) de la façon suivante :

$$u_b^f = C^g u_c^g \quad (3.23)$$

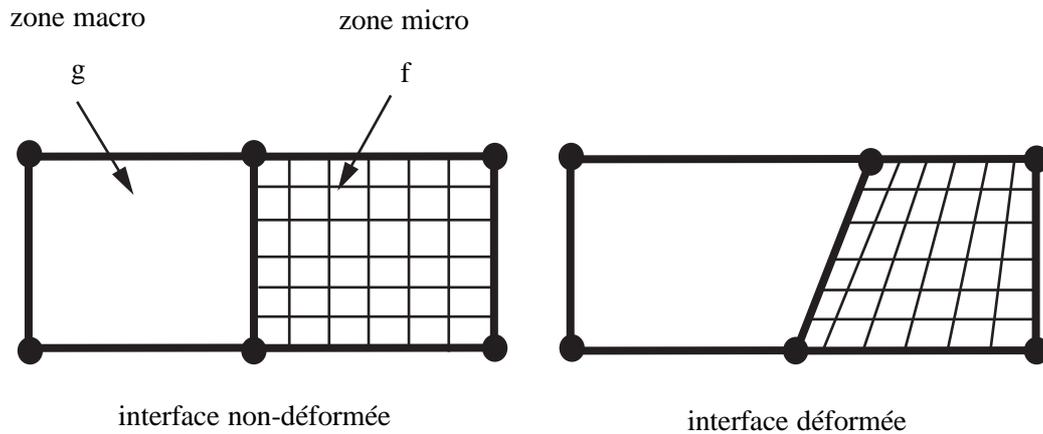
l'exposant  $f$  correspondant au côté fin, le côté grossier ayant été choisi pour le déplacement de référence. La matrice  $C^g$  contient les valeurs des fonctions d'interpolation de l'interface côté grossier, aux nœuds du maillage fin. Cette relation n'est écrite que pour les nœuds internes de l'interface côté fin, puisque les nœuds extrêmes sont les nœuds grossiers, communs aux deux sous domaines. Pour la partie membrane, l'illustration graphique de cette relation est donnée en figure (3.8).

On peut interpréter ce raccord en adoptant un point de vue de type micro-macro. En effet, sur l'interface du côté sous domaine fin, on peut décomposer de façon générale le déplacement sous la forme d'un déplacement macroscopique et d'une partie complémentaire, microscopique :

$$u_b^f = u_b^M + u_b^m \quad (3.24)$$

Plusieurs choix peuvent être faits pour la définition de déplacement macroscopique  $u_b^M$ . On adopte ici pour ce champ, l'interpolation définie sur le côté grossier de l'interface, cf. figure





**Figure 3.8** - Interface incompatible (raccord par collocation)

(3.9) pour la partie membrane.

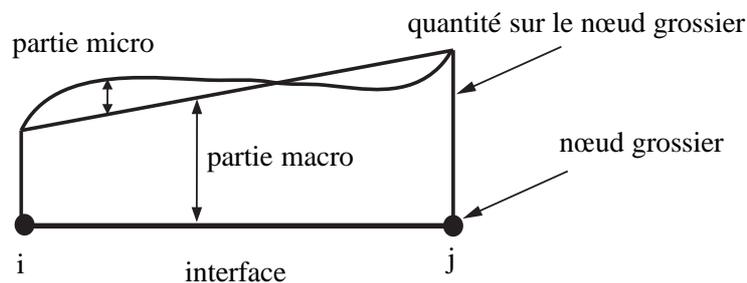
Il apparaît alors que la condition de raccord proposée auparavant est équivalente à :

$$u_b^m = 0 \quad (3.25)$$

Ceci revient à dire que le sous domaine grossier impose sa cinématique macroscopique sur l'interface du maillage fin.

En ce qui concerne les équations correspondant à la méthode de collocation pour les degrés de liberté de flexion, on obtient des relations différentes, d'une part parce que les fonctions d'interpolation ne sont pas linéaires comme pour la partie membrane, et d'autre part parce qu'en théorie de *Kirchhoff*, tous les degrés de liberté ne sont pas concernés par le raccord. Ainsi, l'interpolation sur la flèche  $w$  est cubique et sur les rotations  $\theta_n$  et  $\theta_t$ , elles sont respectivement quadratique et linéaire sur chaque côté de l'élément.

Étant donné que les degrés de liberté  $w$  et  $\theta_n$  sont dépendants [Batoz et Dhett, 1993], on



**Figure 3.9** - Description micro-macro d'un champ sur l'interface

raccorde les degrés de liberté sur l'interface entre deux sous domaines de la manière suivante :

- pour les déplacements, on raccorde  $u$ ,  $v$  et  $w$  dont les fonctions d'interpolation sont respectivement, linéaire, linéaire et cubique,



- pour les rotations, on ne recolle que la rotation dans la direction de l'interface  $\theta_t$  (fonction d'interpolation linéaire). Aucune condition supplémentaire n'est ajoutée sur  $\theta_n$  [Bernadou *et al.*, 1988].

On détaille maintenant la forme des équations de liaisons obtenues par la méthode de collocation.

Sur l'interface du côté grossier, le déplacement est interpolé par :

$$\begin{aligned} u_r^g &= C^g u_c^g \\ u_b^g &= B_{r1}^g u_r^g = B_{r1}^g C^g u_c^g \end{aligned} \quad (3.26)$$

où  $C^g$  est une matrice d'interpolation, de type fonction de forme d'élément fini, des quantités grossières sur le maillage fin et  $B_{r1}^g$  est une matrice booléenne signée qui repère uniquement les degrés de liberté des sous domaines qui sont situés sur l'interface globale micro-macro de chaque sous domaine.

Sur l'interface côté fin, on a  $u_b^f = B_r^f u_r^f$ , et l'équation de liaison fin-grossier est obtenue en écrivant l'égalité  $u_b^f = u_b^g$ .

De manière générale, on peut écrire cette relation sous la forme :

$$A^f u_r^f = D^g u_c^g \quad (3.27)$$

avec :

$$\begin{aligned} A^f &= B_r^f \\ D^g &= B_{r1}^g C^g \end{aligned} \quad (3.28)$$

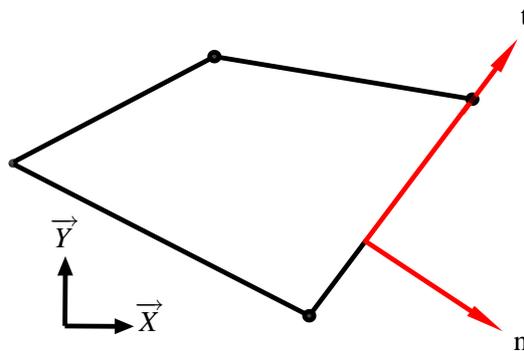


Figure 3.10 - Schéma de plaque en 3D



### 3.3.5.3 Raccord de type *mortar*

Comme présenté précédemment (cf. section (3.3.3.2)), la méthode *mortar* consiste à imposer que le travail sur l'interface des sous domaines est nul, cf. équation (3.17) :

$$\forall \lambda \in \varphi_\lambda \quad , \quad \int_\Gamma \lambda \cdot (u_b^f - u_b^g) d\Gamma = 0 \quad (3.29)$$

où  $u_b^f$  et  $u_b^g$  sont les déplacements du côté fin et grossier, et  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange. Les interpolations du déplacement des deux côtés de l'interface sont associées au maillage fin ou à l'interpolation entre les deux nœuds grossiers, cf. section (3.3.5.1). Il reste à définir l'espace des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$ , ce qui est un point délicat de la méthode *mortar*.

On trouve dans la littérature différentes manières de discrétiser les espaces des multiplicateurs de Lagrange. Dans tous les cas, l'espace de discrétisation choisi doit vérifier la condition *inf-sup* pour assurer une solution unique [Hauret et Ortiz, 2006]. Cette condition implique de ne pas prendre un espace de multiplicateur trop riche. On se limite donc à un nombre de relations  $n_\lambda$  inférieur au nombre total de degrés de liberté sur l'interface. A ce niveau, il importe de préciser que l'ensemble de ces degrés de liberté est obtenu en prenant tous les degrés de liberté d'interface et enlevant ceux associés aux nœuds communs aux deux sous domaines [Herry et al., 2002].

En pratique, la méthode *mortar* consiste à retenir, pour la discrétisation du multiplicateur, la discrétisation en déplacement d'un des deux côtés de l'interface. On distingue alors la méthode *mortar* grossière et fine suivant que l'espace des multiplicateurs de Lagrange choisi est celui du sous domaine maillé grossièrement ou finement [Bernardi et al., 1994] et [Lacour et Maday, 1997]. En général, c'est le côté grossier qui est choisi [Herry et al., 2002].

D'autre part, les côtés grossier et fin ont le plus souvent en commun leurs nœuds d'extrémité,

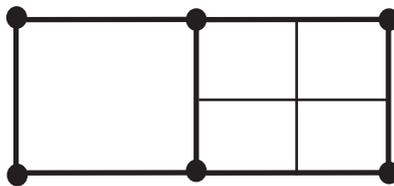


Figure 3.11 - Côté fin et grossier sur l'interface

ce qui conduit à modifier l'espace des multiplicateurs. On ne prend pas alors exactement celui du maillage grossier, car on modifie les fonctions de forme pour les éléments sur les bords de l'interface, c'est-à-dire dont un nœud est une extrémité de l'interface [Lacour et Maday, 1997] et [Kim et Lee, 2005]. Pour des éléments linéaires, avec cette méthode, l'espace des multiplicateurs doit être constant sur les éléments aux extrémités de l'interface. Dans notre cas seulement



deux nœuds sont présents du côté grossier, l'espace des multiplicateurs de Lagrange est donc constant sur l'intégralité de l'interface.

Ce résultat découle du fait que l'espace choisi permet ainsi d'obtenir un problème avec solution unique quel que soit le maillage côté fin. Or, en considérant le cas particulier d'un côté fin avec seulement deux éléments, cf. figure (3.11), on a alors, côté fin, un seul nœud non raccordé au maillage grossier. Dans ce cas, on ne peut écrire, sur chaque degré de liberté de l'interface, qu'au plus une équation, d'où le choix de n'avoir qu'une seule variable pour le multiplicateur, qui sera donc constant sur l'interface.

**Remarque :** pour les degrés de liberté de flexion, on adoptera également un espace de multiplicateur constant. En effet, cf. section (2.5.3.2), entre deux plaques, on ne raccorde que la flèche  $w$  et la rotation  $\theta_r$ . Or, l'interpolation sur  $\theta_r$  est linéaire. Et sur la flèche  $w$ , comme on ne raccorde pas sa dérivée le long de l'interface, on n'a qu'un seul degré de liberté parmi  $w$  et  $\theta_n$  à raccorder, donc le multiplicateur est constant.

Ce choix classique nous conduit à l'égalité en moyenne des déplacements de part et d'autre de l'interface. Si on interprète cette relation du point de vue micro-macro, compte tenu des définitions données en section précédente, cela revient à imposer que la moyenne des déplacements microscopiques est nulle. On détaille maintenant la forme des équations de liaison obtenues par la méthode *mortar*.

En considérant l'espace des multiplicateurs de Lagrange constants sur l'interface, on a donc :

$$\int_{\Gamma} (u_b^f - u_b^g) d\Gamma = 0 \quad (3.30)$$

ça signifie que la moyenne de déplacement micro ( $u^m$ ) doit être nulle sur chaque interface. On considère alors le déplacement de côté grossier ( $u_b^g$ ) comme l'interpolation des quantités des nœuds grossiers sur le maillage fin de l'interface. On peut donc discrétiser cette relation comme la relation suivante :

$$\begin{aligned} u_b^f &= N^f B_{r1}^f u_r^f \\ u_r^g &= C^g u_c^g \\ u_b^g &= N^g B_{r1}^g u_r^g = N^g B_{r1}^g C^g u_c^g \end{aligned} \quad (3.31)$$

où  $N$  est la fonction de forme linéaire par morceaux et  $B_{r1}$  est une matrice booléenne. En reportant (3.31) dans (3.30), on obtient :

$$\int_{\Gamma} [N^f B_{r1}^f u_r^f - N^g B_{r1}^g C^g u_c^g] d\Gamma = 0 \quad (3.32)$$

La forme matricielle de cette relation est :

$$A^f u_r^f = D^g u_c^g \quad (3.33)$$



avec :

$$\begin{aligned} A^f &= HB_{r1}^f \\ D^g &= HB_{r1}^g C^g \end{aligned} \quad (3.34)$$

où  $H$  est l'intégral de fonction de forme de côté fin sur l'interface.

$$H = \int_{\Gamma} N d\Gamma$$

Il faut noter que les fonctions de forme des deux côtés fin et grossier sont identiques. C'est pourquoi le côté grossier est déjà interpolé par la matrice l'interpolation  $C$  sur le maillage fin de l'interface.

### 3.4 Homogénéisation des sous domaines grossiers (macro)

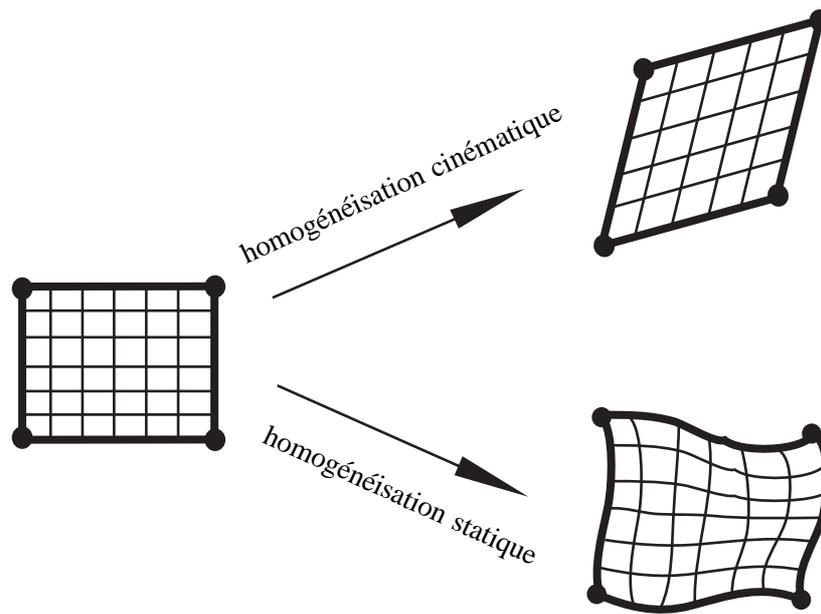
Après avoir précisé la façon dont on raccorde les champs entre les interfaces incompatibles, on aborde maintenant le problème associé à la détermination d'une raideur homogénéisée pour les sous domaines grossiers.

On rappelle qu'il s'agit ici de remplacer des sous domaines maillés initialement de façon fine, par des sous domaines grossiers avec une raideur homogénéisée (macroscopique). On présente donc une méthode d'homogénéisation numérique.

Le point critique de toute méthode d'homogénéisation se situe dans l'étape de localisation, dans laquelle on indique comment une sollicitation de type macroscopique s'applique à l'échelle microscopique. Une difficulté essentielle à ce niveau consiste en la définition des conditions aux limites à appliquer au domaine microscopique. Dans un souci de cohérence de l'ensemble de la méthode FETI-DP avec différentes discrétisations des sous domaines (fins et grossiers), les hypothèses sur ces conditions aux limites vont être déduites de celles précédemment utilisées pour raccorder les sous domaines.

Ainsi, si on reprend les hypothèses du raccord de collocation, le déplacement sur l'interface est imposé égal à l'interpolation définie entre les nœuds grossiers. Pour l'homogénéisation du sous domaine fin, ces mêmes conditions sont reprises, sachant que cette fois-ci l'interface correspond au contour du sous domaine, d'où l'obtention de conditions aux limites. De la même façon, si on se réfère au raccord de type *mortar*, on écrit que le déplacement sur le bord du sous domaine est égal en moyenne à l'interpolation construite à partir des nœuds grossiers. Ces deux situations sont illustrées figure (3.12). On remarque que faire intervenir les conditions de raccord définies auparavant revient à prendre en compte l'action des sous domaines entourant le sous domaine à homogénéiser. Il s'agit là d'une démarche classique en homogénéisation.





**Figure 3.12** - Raideur macroscopique obtenue par homogénéisation cinématique ou statique

D'autre part, d'après l'interprétation micro-macro des conditions de raccord donnée auparavant, on peut qualifier les deux méthodes d'homogénéisation précédentes de **cinématique** et **statique** respectivement. En effet, les conditions aux limites issues du raccord de collocation reviennent à considérer un déplacement microscopique nul, ce qui correspond à l'approche en déformations de la méthode des modules effectifs [Suquet, 1990], qui est nommée par certains auteurs **homogénéisation cinématique**. Quant au raccord de type *mortar*, il correspond à un multiplicateur constant sur l'interface. Or, ce multiplicateur représente les efforts sur le bord du sous domaine. Le fait de les supposer constants est donc équivalent à l'approche en contraintes de la méthode des modules effectifs [Suquet, 1990], encore appelée **homogénéisation statique**. Nous allons maintenant expliciter l'expression de la matrice raideur homogénéisée.

La forme générale des déplacements sur le bord du sous domaine (homogénéisation statique ou cinématique), après discrétisation éléments finis, est la suivante (3.33) et (3.27) :

$$Au_b = Du_c \quad (3.35)$$

avec évidemment des expressions différentes des matrices  $A$  et  $D$  selon le type d'homogénéisation.

Afin de calculer la raideur macroscopique à partir du maillage fin, on considère les indices  $i$ ,  $b$  et  $c$  respectivement, pour les degrés de liberté intérieur, sur l'interface et aux coins. De cette



façon, l'équation d'équilibre d'un sous domaine est la suivante :

$$\forall u_i^*, u_b^*, u_c^*, \begin{bmatrix} u_i^* \\ u_b^* \\ u_c^* \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ib} & K_{ic} \\ K_{bi} & K_{bb} & K_{bc} \\ K_{ci} & K_{cb} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_i \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (3.36)$$

avec la condition (3.35) sur le contour du sous domaine :

$$Au_b = Du_c \quad (3.37)$$

En traitant cette dernière équation avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange [Bathe, 1996] et [Zienkiewicz et Taylor, 2000], on obtient :

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ib} & K_{ic} & 0 \\ K_{bi} & K_{bb} & K_{bc} & A^T \\ K_{ci} & K_{cb} & K_{cc} & -D^T \\ 0 & A & -D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_b \\ u_c \\ \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_i \\ f_b \\ f_c \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.38)$$

Pour obtenir la raideur macroscopique exprimée sur les degrés de liberté  $u_c$ , on condense d'abord les degrés de liberté  $u_i$ , puis, dans une deuxième étape,  $u_b$  et  $\mu$ . On obtient alors les relations suivantes pour la raideur macroscopique  $K_g$  et la force généralisée  $F_g$  correspondante :

$$(\bar{K}_{cc}^* + \bar{K}_{cb}^* \bar{K}_{bb}^{*-1} \bar{K}_{bc}^*) u_c = \bar{f}_c^* + \bar{K}_{cb}^* \bar{K}_{bb}^{*-1} \bar{f}_b^* \quad (3.39)$$

où :

$$\begin{aligned} K_g &= (\bar{K}_{cc}^* + \bar{K}_{cb}^* \bar{K}_{bb}^{*-1} \bar{K}_{bc}^*) \\ F_g &= \bar{f}_c^* + \bar{K}_{cb}^* \bar{K}_{bb}^{*-1} \bar{f}_b^* \end{aligned} \quad (3.40)$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{K}_{cc}^* &= K_{cc}^* - K_{cb}^* K_{bb}^{*-1} K_{bc}^* & \bar{K}_{cb}^* &= D^T + K_{cb}^* K_{bb}^{*-1} A^T \\ \bar{K}_{bb}^* &= AK_{bb}^{*-1} A^T & \bar{f}_c^* &= f_c^* - K_{cb}^* K_{bb}^{*-1} f_b^* \\ \bar{f}_b^* &= AK_{bb}^{*-1} f_b^* \end{aligned}$$

dont les termes sont issus de la première condensation de  $u_i$  :

$$\begin{aligned} K_{cc}^* &= K_{cc} - K_{ci} K_{ii}^{-1} K_{ic} & K_{cb}^* &= K_{cb} - K_{ci} K_{ii}^{-1} K_{ib} \\ K_{bb}^* &= K_{bb} - K_{bi} K_{ii}^{-1} K_{ib} & f_c^* &= f_c - K_{ci} K_{ii}^{-1} f_i \\ f_b^* &= f_b - K_{bi} K_{ii}^{-1} f_i \end{aligned}$$

Par la suite, on sera amené à comparer les matrices raideur et les forces généralisées pour les deux types d'homogénéisation.



## 3.5 Méthode FETI-DP avec sous domaines fins et grossiers

Dans cette section, nous présentons la mise en œuvre pratique de la méthode FETI-DP avec sous domaines fins et grossiers. Avec ce type de décomposition, les raccords entre sous domaines sont de trois types :

- raccord entre deux sous domaines grossiers,
- raccord entre deux sous domaines fins,
- raccord entre un sous domaine fin et un sous domaine grossier ;

Le premier type de raccord est automatique car les nœuds grossiers sont communs à deux sous domaines grossiers voisins. Le deuxième type de raccord est classique dans une méthode FETI-DP. La nouveauté vient donc du troisième type de raccord. On rappelle ici que, quelle que soit la méthode de raccord choisie, le raccord se traduit par une relation linéaire entre degrés de liberté sur l'interface comme (3.27) et (3.33).

La prise en compte de ce type de relation dans une approche éléments finis peut s'effectuer de différentes façons (élimination directe de certains degrés de liberté, la méthode de pénalisation, utilisation de multiplicateur de Lagrange, etc.) [Gérardin et Rixen, 1997], [Bavestrello *et al.*, 2007]. Il est cependant naturel, dans le cadre de la méthode FETI-DP, d'utiliser des multiplicateurs de Lagrange, comme c'est déjà le cas pour le raccord entre deux sous domaines fins.

Dans ce cas, on peut écrire les conditions du raccord sur l'interface micro-micro et micro-macro de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{N_s} B_r^{(s)} U_r^{(s)} &= 0 && \text{raccord micro-micro} \\ \sum_{s=1}^{N_s} (A^{(s)} U_r^{(s)} - D^{(s)} U_c^{(s)}) &= 0 && \text{raccord micro-macro} \end{aligned} \tag{3.41}$$

### 3.5.1 Formulation matricielle

En présence des relations du raccord sur l'interface des sous domaines avec différentes échelles de discrétisation pour les sous domaines (3.41) et l'expression de la raideur macro (3.40) des sous domaines homogénéisés, on est capable d'obtenir la formulation de la méthode FETI-DP avec interface non-compatible.

Comme auparavant, on décompose le domaine  $\Omega$  en  $N_s$  sous domaines  $\{\Omega^{(s)}\}_{s=1}^{N_s}$ . On considère les sous domaines sièges de phénomènes locaux, avec un maillage fin et les autres avec un maillage grossier (homogénéisé). On trouve donc simultanément des interfaces compatibles et incompatibles dans l'ensemble de la structure, cf. figure (3.1).



On leur associe un multiplicateur de Lagrange  $\mu$  pour l'interface micro-macro en plus des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$  pour l'interface micro-micro.

On considère  $N_{sf}$  sous domaines avec un maillage fin (microscopique) et  $N_{sg}$  (qui est égal à  $N_s - N_{sf}$ ) sous domaines avec un maillage grossier (macroscopique).

On écrit l'équation d'équilibre pour l'ensemble des sous domaines sous forme globale. On rappelle que  $u_r$  correspond à tous les degrés de liberté d'un sous domaine en excluant ceux des coins. Donc pour les sous domaines grossiers, les seuls degrés de liberté sont  $u_c$  :

$$\begin{aligned} \forall u_r^{(s)*}, u_c^{(s)*}, \sum_{s=1}^{N_{sf}} \begin{bmatrix} u_r^{(s)*} \\ B_c^{(s)} u_c^* \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} K_{rr}^{(s)} & K_{rc}^{(s)} \\ K_{cr}^{(s)} & K_{cc}^{(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r^{(s)} \\ B_c^{(s)} u_c \end{bmatrix} \right. \\ \left. - \begin{bmatrix} f_r^{(s)} \\ f_c^{(s)} \end{bmatrix} \right) + \sum_{s=1}^{N_{sg}} (B_c^{(s)} u_c^*)^T (K_{ccg}^{(s)} B_c^{(s)} u_c - f_{cg}^{(s)}) = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ces équations sont complétées par les conditions de raccord sur l'interface entre les sous domaines, qui peuvent être compatibles ou incompatibles. On déduit de (3.42) les équations d'équilibre pour les sous domaines fins et grossiers respectivement, d'où le système à résoudre :

$$\begin{aligned} K_{rr}^{(s)} u_r^{(s)} + K_{rc}^{(s)} B_c^{(s)} u_c &= f_r^{(s)} - B_r^{(s)T} \lambda - A^{(s)T} \mu && \text{pour } s=1 \text{ à } N_{sf} \\ \sum_{s=1}^{N_{sf}} B_c^{(s)T} K_{cr}^{(s)} u_r^{(s)} + \left( \sum_{s=1}^{N_{sf}} B_c^{(s)T} K_{cc}^{(s)} B_c^{(s)} + \sum_{s=1}^{N_{sg}} B_c^{(s)T} K_{ccg}^{(s)} B_c^{(s)} \right) u_c &= \\ \left( \sum_{s=1}^{N_{sf}} B_c^{(s)T} f_c^{(s)} + \sum_{s=1}^{N_{sg}} B_c^{(s)T} f_{cg}^{(s)} \right) + \sum_{s=1}^{N_{sf}} B_c^{(s)T} D^{(s)T} \mu &&& (3.43) \\ \sum_{s=1}^{N_{sf}} B_r^{(s)} u_r^{(s)} &= 0 && \text{interface compatible} \\ \sum_{s=1}^{N_{sf}} (A^{(s)} u_r^{(s)} - D^{(s)} u_c) &= 0 && \text{interface incompatible} \end{aligned}$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont respectivement les multiplicateurs de Lagrange sur les interfaces compatibles et incompatibles,  $B_c^{(s)}$  est une matrice booléenne qui extrait les degrés de liberté locaux des coins de chaque sous domaine des degrés de liberté globaux ( $u_c^{(s)} = B_c^{(s)} u_c$ ) et  $B_r^{(s)}$  est la matrice booléenne signée de chaque sous domaine.

Avec les relations ci-dessus et après quelques opérations algébriques, on obtient le nouveau problème d'interface dual-primal avec trois inconnues (deux multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$  et  $\mu$  et un déplacement primal  $u_c$ ) :

$$\begin{bmatrix} -K_{cc}^* & F_{cl} & F_{cm} \\ F_{lc} & F_{ll} & F_{lm} \\ F_{mc} & F_{ml} & F_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_c^* \\ d_l \\ d_m \end{bmatrix} \quad (3.44)$$



où :

$$K_{cc}^* = \sum_{s=1}^{N_{sf}} B_c^{(s)T} K_{cc}^{(s)} B_c^{(s)} + \sum_{s=1}^{N_{sg}} B_c^{(s)T} K_{ccg}^{(s)} B_c^{(s)} - \sum_{s=1}^{N_{sf}} B_c^{(s)T} K_{cr}^{(s)} K_{rr}^{(s)-1} K_{rc}^{(s)} B_c^{(s)}$$

$$F_{cl} = \sum_{s=1}^{N_{sf}} B_c^{(s)T} K_{cr}^{(s)} K_{rr}^{(s)-1} B_r^{(s)T}$$

$$F_{cm} = \sum_{s=1}^{N_{sf}} B_c^{(s)T} (K_{cr}^{(s)} K_{rr}^{(s)-1} A^{(s)T} + D^{(s)T})$$

$$F_{ll} = \sum_{s=1}^{N_{sf}} B_r^{(s)} K_{rr}^{(s)-1} B_r^{(s)T}$$

$$F_{lm} = \sum_{s=1}^{N_{sf}} B_r^{(s)} K_{rr}^{(s)-1} A^{(s)T}$$

$$F_{mm} = \sum_{s=1}^{N_{sf}} A^{(s)} K_{rr}^{(s)-1} A^{(s)T}$$

$$f_c^* = \sum_{s=1}^{N_{sf}} B_c^{(s)T} f_c^{(s)} + \sum_{s=1}^{N_{sg}} B_c^{(s)T} f_{cg}^{(s)} - \sum_{s=1}^{N_{sf}} B_c^{(s)T} K_{cr}^{(s)} K_{rr}^{(s)-1} f_r^{(s)}$$

$$d_l = \sum_{s=1}^{N_{sf}} B_r^{(s)} K_{rr}^{(s)-1} f_r^{(s)}$$

$$d_m = \sum_{s=1}^{N_{sf}} A^{(s)} K_{rr}^{(s)-1} f_r^{(s)}$$

On peut trouver ce type de présentation du problème d'interface dans [Farhat *et al.*, 1998b], [Dokeva, 2006], [Bavestrello *et al.*, 2007], [Kim, 2007], par exemple.

### 3.5.2 Résolution numérique

Trois approches différentes [Farhat *et al.*, 1998b], [Rixen, 2002] et [Bavestrello *et al.*, 2007], peuvent être considérées pour résoudre le système (3.44) . On peut les présenter comme suit :



- itération simultanée sur  $\lambda$  et  $\mu$  : dans ce cas, on considère  $\lambda$  et  $\mu$  comme un vecteur de multiplicateurs de Lagrange. Le problème (3.44) est résolu par itération sur ce vecteur étendu de multiplicateurs de Lagrange,
- itération externe sur  $\lambda$  : dans cette approche, le problème (3.44) est résolu par deux boucles d'itérations. Une boucle externe sur  $\lambda$  et ensuite une boucle interne sur  $\mu$ . À chaque itération interne sur  $(u_c, \mu)$ , le multiplicateur de Lagrange  $\mu$  est calculé de manière à ce que, la compatibilité de l'interface micro-macro soit satisfaite,
- itération externe sur  $\mu$  : même principe que l'approche précédente en permutant  $\lambda$  et  $\mu$ .

On utilise ici la méthode d'itération simultanée sur  $\lambda$  et  $\mu$ , car c'est une extension directe de la méthode FETI-DP. On considère donc le vecteur suivant :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Dans ce cas, on a les notations suivantes :

$$\begin{aligned} F^T &= \begin{bmatrix} F_{cl} & F_{cm} \end{bmatrix} \\ E &= \begin{bmatrix} F_{ll} & F_{lm} \\ F_{ml} & F_{mm} \end{bmatrix} \\ D_r &= \begin{bmatrix} d_l \\ d_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.46)$$

On condense  $u_c$  sur  $\lambda$  et  $\mu$ , on obtient donc le nouveau problème symétrique défini positif sur l'interface donné par :

$$(F^T K_{cc}^{*-1} F + E)\Lambda = D_r - F^T K_{cc}^{*-1} f_c^* \quad (3.47)$$

Ce problème est de même nature que le problème d'interface de la méthode FETI-DP classique (2.49), mais avec deux multiplicateurs de Lagrange différents suivant le cas de raccord micro-micro (classique) ou micro-macro. On résout alors ce problème d'interface par une méthode itérative, gradient conjugué par exemple.

Contrairement au chapitre 1, nous n'utilisons pas de préconditionneur pour résoudre le système. Il existe cependant des travaux [Farhat et Gérardin, 1998], [Bavestrello *et al.*, 2007] dans lesquels sont proposées des méthodes de préconditionnement efficaces lorsqu'on traite un problème avec une méthode FETI-DP et des équations de liaison supplémentaires.

Dans la suite de ce document, on présente quelques résultats de la validation et d'application de la méthode.

Ce chapitre concernait plus particulièrement l'utilisation de la méthode de décomposition de domaine FETI-DP de façon modulaire, pour tenir compte de différentes échelles de discrétisation des sous domaines (représentation micro-macro). Le meilleur taux de convergence a été



obtenu pour la méthode micro-macro avec le raccord *mortar*. Le nombre de multiplicateurs de Lagrange correspondant à ce raccord est aussi le moins élevé.

## 3.6 Validation de la méthode

Afin de réaliser un premier calcul de décomposition de domaine (de type FETI-DP) avec les différentes discrétisations des sous domaines (FETI-DP micro-macro), il faut valider d'abord la détermination de la raideur macroscopique (homogénéisée) et ensuite le raccord entre les sous domaines fin et grossier (raccord de type maillage incompatible). On s'intéresse ici au passage de *patch tests* qui présentent un état de déformation constant de façon exacte (analytique).

Il faut noter que la solution analytique correspond à  $u^m = 0$  (déplacement micro nul). Ceci coïncide avec la condition utilisée pour l'homogénéisation cinématique et le raccord par collocation. Cette condition est de plus compatible avec l'expression  $\int u^m d\Gamma = 0$ , utilisée par l'homogénéisation statique et le raccord *mortar* (hypothèse du multiplicateur de Lagrange constante).

On va donc contrôler sur ces exemples que les méthodes avec raideur macroscopique et raccord redonnent la solution analytique.

Nous terminerons ce chapitre en illustrant la méthode proposée sur différents exemples d'application. Les résultats ont été obtenus avec le code éléments finis développé avec *Matlab*, le post-traitement et la visualisation étant effectués par le code éléments finis *Cast3M*.

### 3.6.1 Validation de la raideur macroscopique

#### 3.6.1.1 Raideur homogénéisée en membrane

Pour valider la raideur macro en membrane, on considère les deux exemples présentés en figure (3.13). Les deux exemples ont été traités en contraintes planes avec des éléments de type *qua4* ou *tri3*, et un maillage régulier. Les caractéristiques matériau et les résultats du *patch test* figurent dans le tableau (3.1).

Le *patch test* est considéré validé, lorsque le calcul réalisé sur un seul sous domaine avec la raideur homogénéisée permet de retrouver la solution exacte (analytique) du problème pour lequel l'état de contrainte est uniforme et monodimensionnel. Il apparaît que c'est toujours le cas, pour les deux types d'homogénéisation (homogénéisation cinématique et statique).



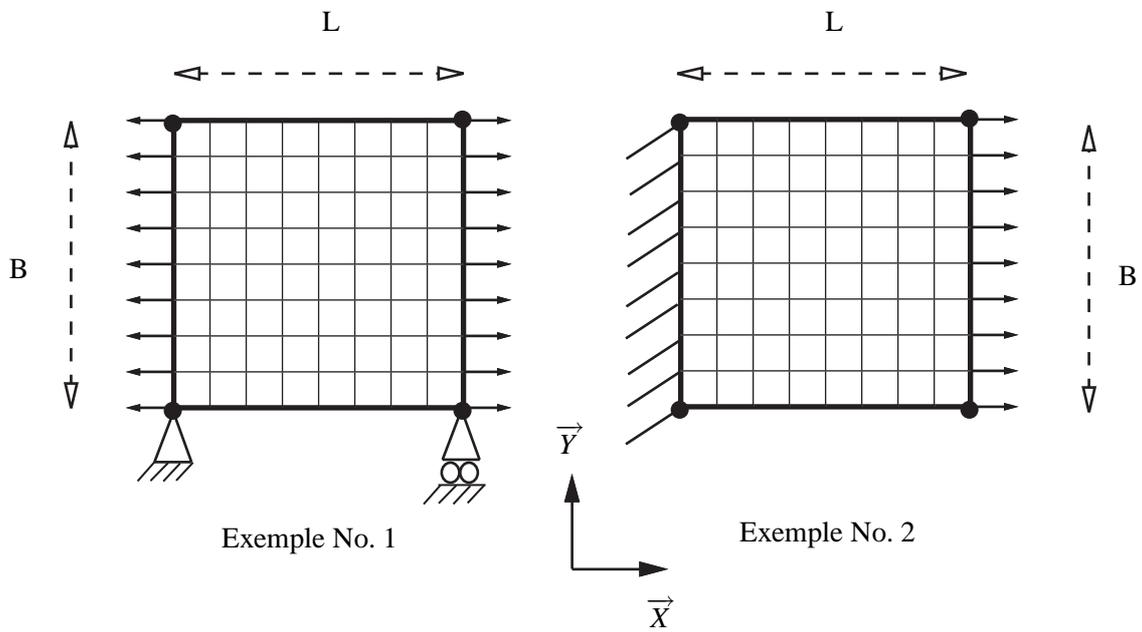


Figure 3.13 - Exemples de patch test en 2D

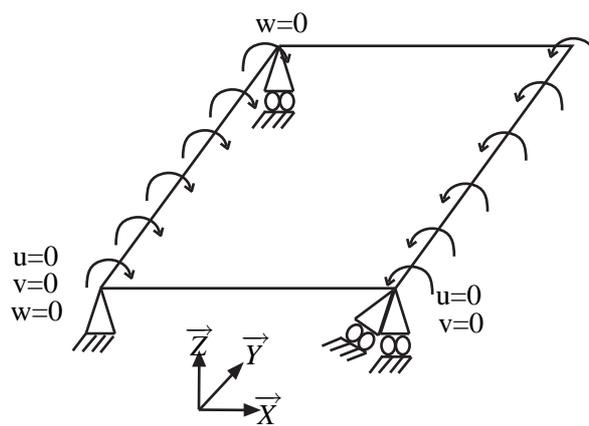


Figure 3.14 - Exemple de patch test en 3D

	$E(N/m^2)$	$\nu(-)$	$L(m)$	$B(m)$	Homogénéisation	Patch test
Exemple 1	$2e^{+11}$	0.0 et 0.3	1.0	1.0	cinématique	ok
Exemple 1	$2e^{+11}$	0.0 et 0.3	1.0	1.0	statique	ok
Exemple 2	$2e^{+11}$	0.0	1.0	1.0	cinématique	ok
Exemple 2	$2e^{+11}$	0.0	1.0	1.0	statique	ok

**Tableau 3.1** - Patch test de raideur homogénéisée en membrane : caractéristiques matériau

### 3.6.1.2 Raideur homogénéisée en flexion

Comme pour le cas en membrane, il s'agit de valider ici la raideur macroscopique en flexion. On considère un chargement de flexion pure, cf. figure (3.14). Les conditions aux limites en déplacement permettent d'éliminer les mouvements de solide rigide. Le problème possède une solution analytique, l'effet Poisson conduisant à une déformée de type selle de cheval. La détermination de la raideur macro a été validée en considérant un seul sous domaine. On utilise des éléments finis plaque de type *DKT* et *DKQ*. Les caractéristiques et les résultats du *patch test* sont présentés dans le tableau (3.2).

**Remarque :** Bien que la structure soit en flexion avec un moment appliqué dans la direction

	$E(N/m^2)$	$\nu(-)$	$t(m)$	$L(m)$	$B(m)$	Homogénéisation	Patch test
Exemple 1	$2e^{+11}$	0.0 et 0.3	0.01	3.0	3.0	cinématique	ok
Exemple 1	$2e^{+11}$	0.0 et 0.3	0.01	3.0	3.0	statique	ok

**Tableau 3.2** - Patch test de raideur homogénéisée en flexion : caractéristiques matériau

y cf. figure (3.14), dans le cas de l'homogénéisation statique la force généralisée possède deux composantes de moment de flexion dans la direction  $x$  et  $y$  et une composante d'effort dans la direction  $z$ . Ce n'est pas le cas pour l'homogénéisation cinématique, ou encore quand un seul élément fini est utilisé pour discrétiser le domaine. Par ailleurs, la matrice raideur homogénéisée statique ou cinématique est différente de celle qui correspond à une matrice pour une structure maillée avec un seul élément. *La procédure d'homogénéisation joue donc sur la raideur et éventuellement sur la force généralisée.*

## 3.6.2 Validation du raccord

Après validation de la raideur macro cinématique et statique (en membrane et en flexion), nous abordons dans la suite la validation du raccord. Afin de vérifier le raccord entre les sous domaines micro et macro, les tests présentés en figure (3.15) ont été effectués. Il s'agit des mêmes



cas de chargement que ceux considérés dans la section précédente. Dans ces exemples, on considère un maillage fin uniquement dans le sous domaine situé au centre, les autres sous domaines étant modélisés de façon grossière, avec une raideur macro obtenue par homogénéisation d'un maillage fin. Les résultats sont présentés en figure (3.15), sur laquelle on vérifie qu'ils correspondent bien à un état homogène de contrainte.

Dans le processus de calcul avec les sous domaines fins et grossiers, il y a deux sources d'approximations : celle due à l'homogénéisation de sous domaine et celle provenant du raccord. On vérifie que, dans des situations simples telles que celles envisagées dans les *patch tests*, ce processus permet de retrouver la solution exacte dans les deux cas cinématique et statique cf. tableau (3.3).

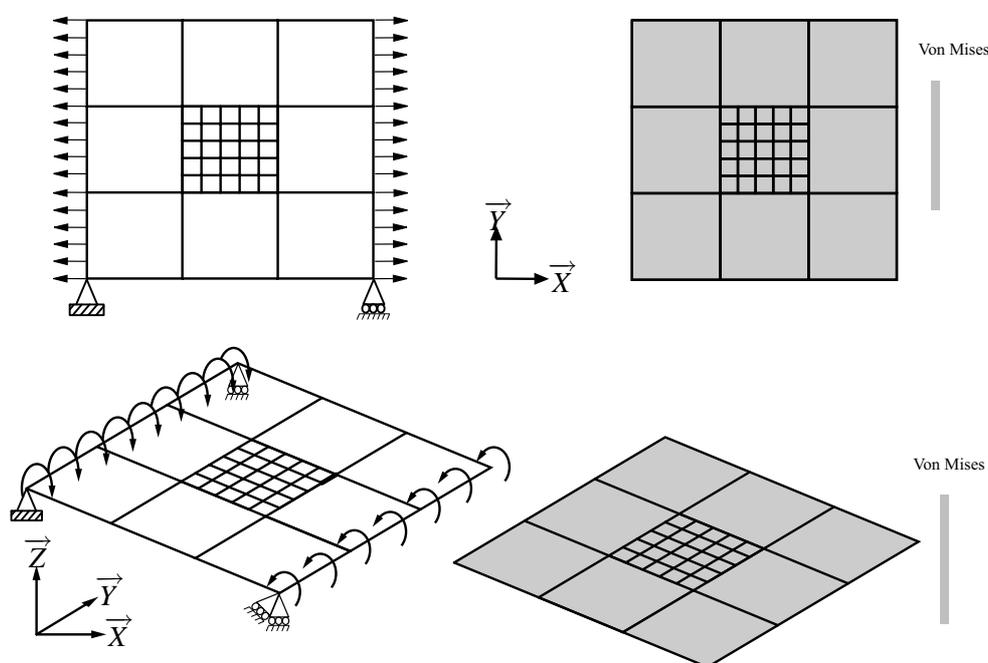


Figure 3.15 - Vérification de raccord dans le cas 2D et 3D

	$E(N/m^2)$	$\nu(-)$	$t(m)$	Homogénéisation	Patch test
Exemple en 2D	$2e^{+11}$	0.0 et 0.3	0.01	cinématique	ok
	$2e^{+11}$	0.0 et 0.3	0.01	statique	ok
Exemple en 3D	$2e^{+11}$	0.0 et 0.3	0.01	cinématique	ok
	$2e^{+11}$	0.0 et 0.3	0.01	statique	ok

Tableau 3.3 - Bilan du patch test du raccord



## 3.7 Applications numériques

### 3.7.1 Introduction

Le passage des *patch tests* précédents, constitue une première étape de validation de la méthode FETI-DP micro-macro. Il s'agit maintenant d'envisager des exemples plus complexes.

On remarque en effet que lors des *patch tests*, l'état de contrainte est uniforme et les sous domaines homogènes, ce qui dans les deux cas est favorable pour l'homogénéisation. On peut envisager des cas tests plus sévères pour le raccord, en considérant une zone de raccord qui coupe la structure en deux, de part en part. Enfin, on rappelle que l'objectif principal de la méthode FETI-DP micro-macro est une optimisation du temps de calcul, en limitant les zones de description micro aux régions dans lesquelles on observe une localisation des contraintes.

Les exemples étudiés par la suite ont pour but d'évaluer la méthode FETI-DP micro-macro sur ces différents aspects.

On rappelle ici que deux versions de cette méthode sont proposées : statique et cinématique, étant entendu que des hypothèses de même nature sont faites pour le raccord micro-macro et le calcul de la raideur macro.

Pour évaluer cette méthode, on utilisera éventuellement une solution analytique, mais le plus souvent une solution numérique de référence. Celle-ci correspond à la méthode FETI-DP classique dans laquelle tous les sous domaines sont décrits à l'échelle microscopique. Afin de quantifier l'écart entre la solution de la méthode FETI-DP micro-macro et cette solution de référence, on calcule l'erreur relative en énergie. On définit alors la différence du déplacement obtenu par la méthode FETI-DP micro-macro et celui de référence :

$$u_h = u_{num} - u_{ref} \quad (3.48)$$

Ensuite, on calcule l'énergie des différences de déplacement  $u_h$  et le déplacement référence comme la suivante :

$$\begin{aligned} E_h &= \int_{\Omega} \varepsilon(u_h) : \sigma(u_h) d\Omega \\ E_{ref} &= \int_{\Omega} \varepsilon(u_{ref}) : \sigma(u_{ref}) d\Omega \end{aligned} \quad (3.49)$$

De cette façon, l'erreur relative en énergie est :

$$r_E = \frac{E_h}{E_{ref}} \quad (3.50)$$

Cette erreur est calculée au niveau de chaque élément fini : l'intégrale porte donc sur le domaine élémentaire.



Utilisée de façon courante, cette mesure de l'erreur se distingue de la norme de l'écart en déplacement notamment par le fait qu'elle ne prend pas en compte d'éventuels écarts par un mode de solide rigide. Les critères de dimensionnement classiquement utilisés portant sur les contraintes, cette mesure de l'erreur, dans le cas linéaire, peut aussi s'interpréter comme une norme de l'écart en contraintes.

### 3.7.2 Structures homogènes

L'objectif de ces exemples est d'évaluer le transfert des informations au niveau du raccord.

#### 3.7.2.1 Poutre en flexion : étude en contraintes planes

On étudie le cas d'une poutre en flexion analysée en 2D et en contraintes planes sur laquelle on dispose d'une solution analytique. Les données du problème sont présentées dans le tableau (3.4).

Longueur	$L = 8.$ (m)
Largeur	$H = 4.$ (m)
Épaisseur	$t = 5.e^{-3}$ (m)
Module d'Young	$E = 200$ (GPa)
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Force	$P = 7.5e^{+5}$ (N)
Moment	$M = 6.e^{+6}$ (N.m)

**Tableau 3.4** - Données de l'exemple de poutre en flexion (2D)

Le chargement se caractérise par :

- en  $x = 0$  et  $x = L$ , une densité parabolique d'efforts suivant  $y$  de résultante ( $-P$ ) et ( $+P$ ), respectivement,
- en  $x = L$ , une densité linéaire d'efforts suivant  $x$  de moment résultant ( $-M$ ) suivant  $z$ .

La solution analytique de ce problème est la suivante [A. Ugural, 1995] :

Les contraintes sont données par :



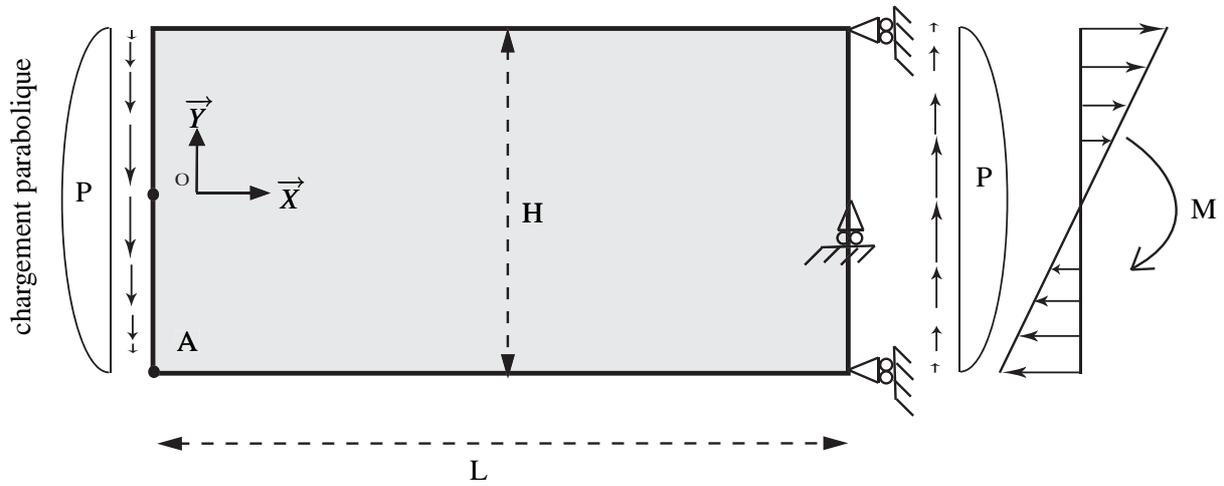


Figure 3.16 - Poutre en flexion en 2D

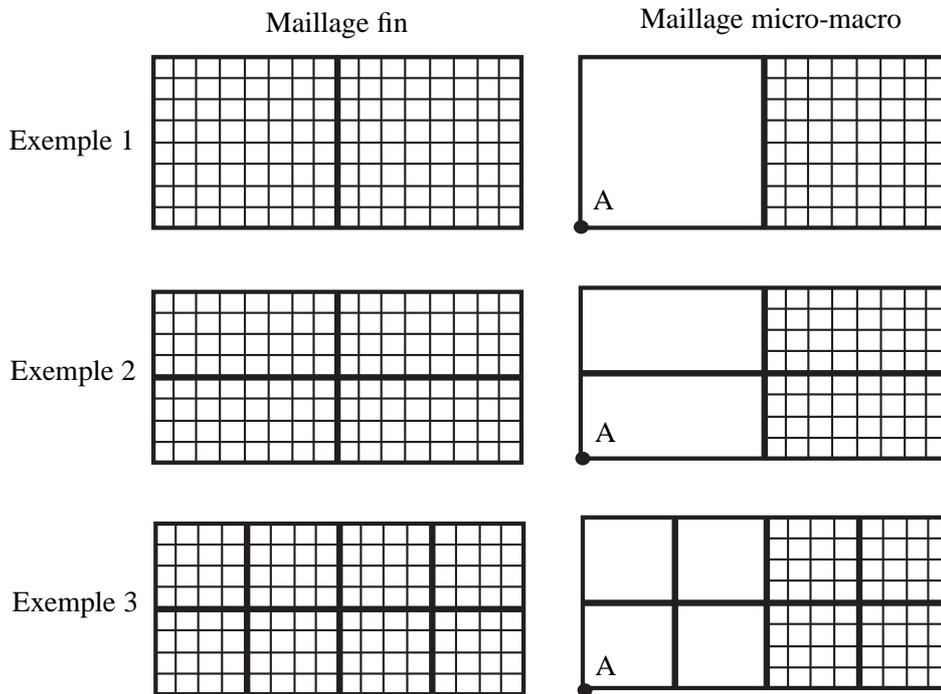


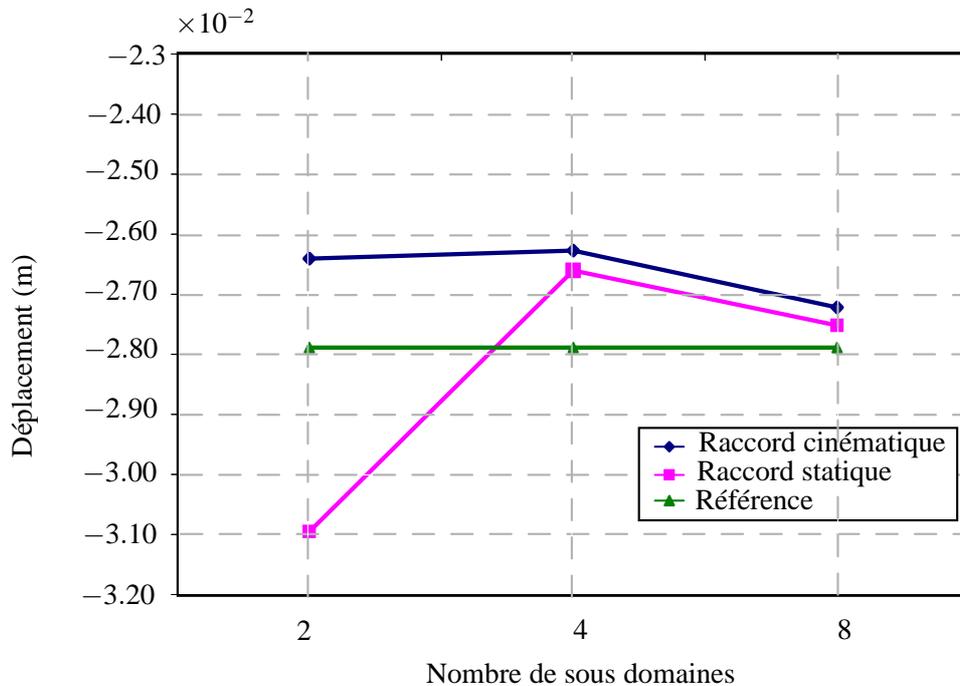
Figure 3.17 - Décomposition en sous domaines et maillage micro-macro de la poutre en flexion



$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}(x,y) &= \frac{P}{I}xy \\
 \sigma_{yy}(x,y) &= 0 \\
 \sigma_{xy}(x,y) &= \frac{P}{I}\left(\frac{H^2}{8} - \frac{y^2}{2}\right)
 \end{aligned}
 \tag{3.51}$$

Les déplacements sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 u(x,y) &= -\frac{Py}{EI}\left[\frac{1}{2}(L^2 - x^2) + \frac{2+\nu}{6}\left(y^2 - \frac{H^2}{4}\right)\right] \\
 v(x,y) &= -\frac{P}{EI}\left[\frac{L^3}{3} - \frac{L^2x}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{4+5\nu}{24}H^2(L-x) + \frac{\nu}{2}xy^2\right]
 \end{aligned}
 \tag{3.52}$$

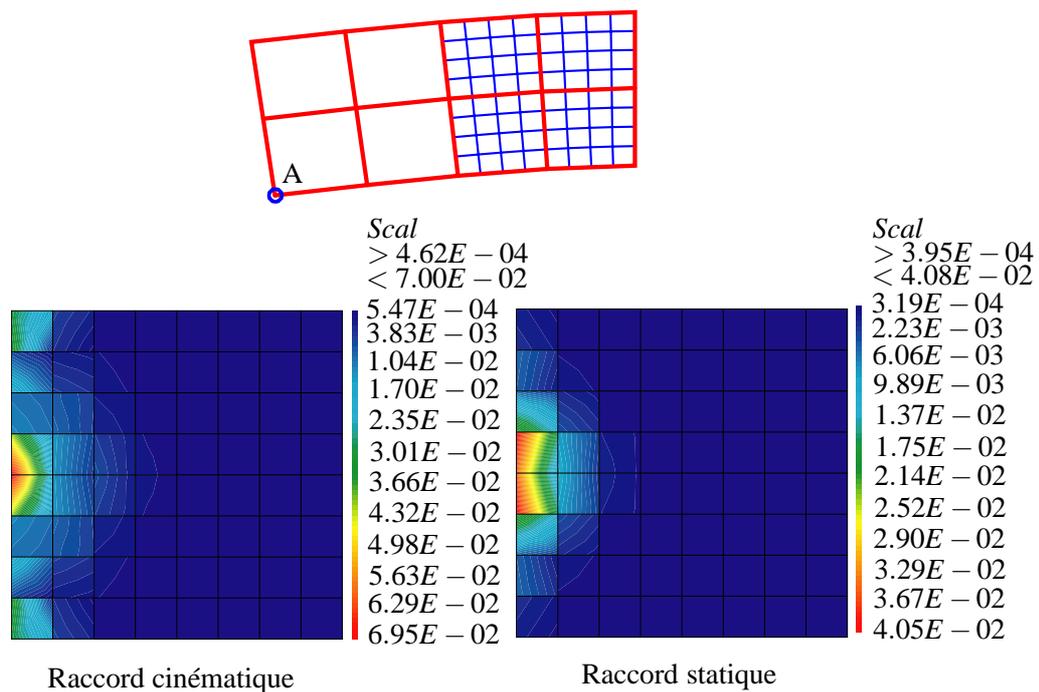


**Figure 3.18** - Poutre en flexion : déplacement du nœud A

Le moment quadratique  $I$  de la poutre avec une section rectangulaire est donné par  $I = tH^3/12$  où  $H$  et  $t$  sont respectivement, la largeur et l'épaisseur de la poutre.

Afin de tester le raccord, on envisage des discrétisations micro-macro telles que présentées en figure (3.17), qui se caractérisent par un raccord dans toute l'épaisseur de la poutre. De plus, on considère 3 niveaux de discrétisation micro-macro, avec respectivement 2, 4 et 8 sous-domaines, et à chaque fois une moitié du maillage micro et l'autre macro. Les calculs sont réalisés avec les deux méthodes micro-macro : cinématique et statique.





**Figure 3.19** - Erreur en énergie sur les sous domaines fins (moitié droite de la structure)

Les valeurs obtenues pour le déplacement de flexion à la base de l'extrémité libre (point A) sont présentés figure (3.18). Pour le maillage avec 8 sous domaines, l'erreur en énergie relative sur les sous domaines avec le maillage fin est donnée en figure (3.19).

On constate que la flèche au point A obtenue par la méthode FETI-DP micro-macro converge rapidement vers la solution numérique de référence (sous domaines fins partout), l'erreur étant inférieure à 5% pour 4 sous domaines. D'autre part, l'erreur en énergie reste également faible. On observe de plus que son maximum est atteint au voisinage des nœuds grossiers.

Si maintenant on compare les résultats des méthodes micro-macro cinématique et statique, il apparaît que la méthode statique fournit des résultats plus précis (c'est-à-dire plus proches de la référence numérique).

Cet exemple montre que les raccords (cinématique et statique) assurent un bon transfert des informations entre les sous domaines micro et macro. On note aussi que sur cet exemple, l'homogénéisation ne dégrade pas la précision des résultats, bien que l'état de contrainte ne soit pas homogène, cf. solution analytique (3.51).

### 3.7.2.2 Poutre en flexion : étude avec des éléments plaque

On étudie à présent un exemple similaire au précédent, mais avec des éléments plaque en 3D, cf. figure (3.20). La structure est encastée à une extrémité et soumise à l'autre extrémité à un effort



transversal ou à un moment de flexion réparti. Comme précédemment, on réalise un maillage micro-macro avec une moitié du maillage micro et l'autre macro.

Les caractéristiques du problème sont présentées dans le tableau (3.5).

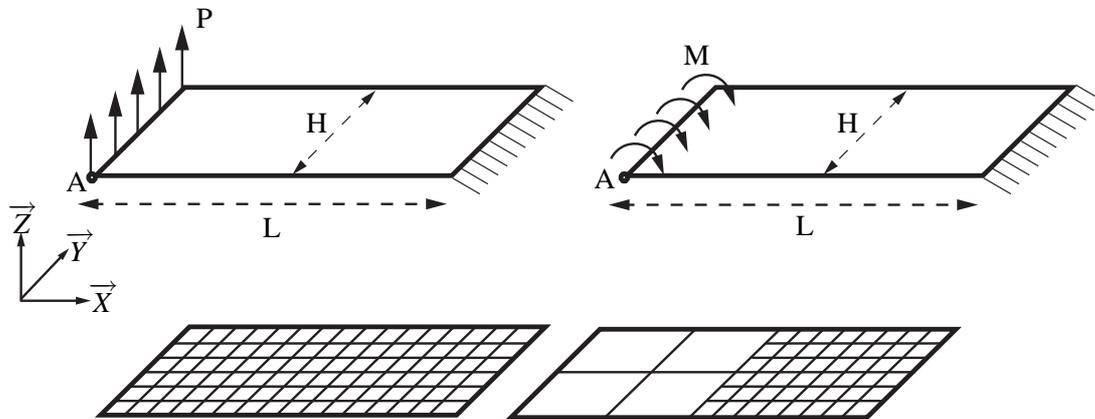


Figure 3.20 - Plaque en flexion

Longueur	$L = 2.$ (m)
Largeur	$H = 1.$ (m)
Épaisseur	$t = 1.e^{-3}$ (m)
Module d'Young	$E = 200$ (GPa)
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Force perpendiculaire	$P = 500$ (N/m)
Moment flexion	$M = 100$ ((N.m)/m)

Tableau 3.5 - Caractéristique de l'exemple, plaque en flexion (3D)

La comparaison des résultats du déplacement et de la rotation du point A, en figures (3.21) et (3.22), montre une erreur inférieure à 1% par rapport au déplacement de référence.

On a donc, sur ce cas de flexion, les mêmes conclusions que sur l'étude en contraintes planes. Il faut noter que l'état de contrainte est cependant moins hétérogène ici que dans le cas précédent.

### 3.7.3 Structures hétérogènes

Nous souhaitons maintenant évaluer la méthode FETI-DP micro-macro sur des exemples dans lesquels on a une localisation de contraintes. Il s'agit d'étudier ici la capacité de la méthode à fournir une bonne approximation de la solution dans la zone de localisation des contraintes, en restreignant la description micro au voisinage de cette zone, de façon à pouvoir diminuer le temps de calcul par rapport à un calcul avec une description micro de toute la structure.



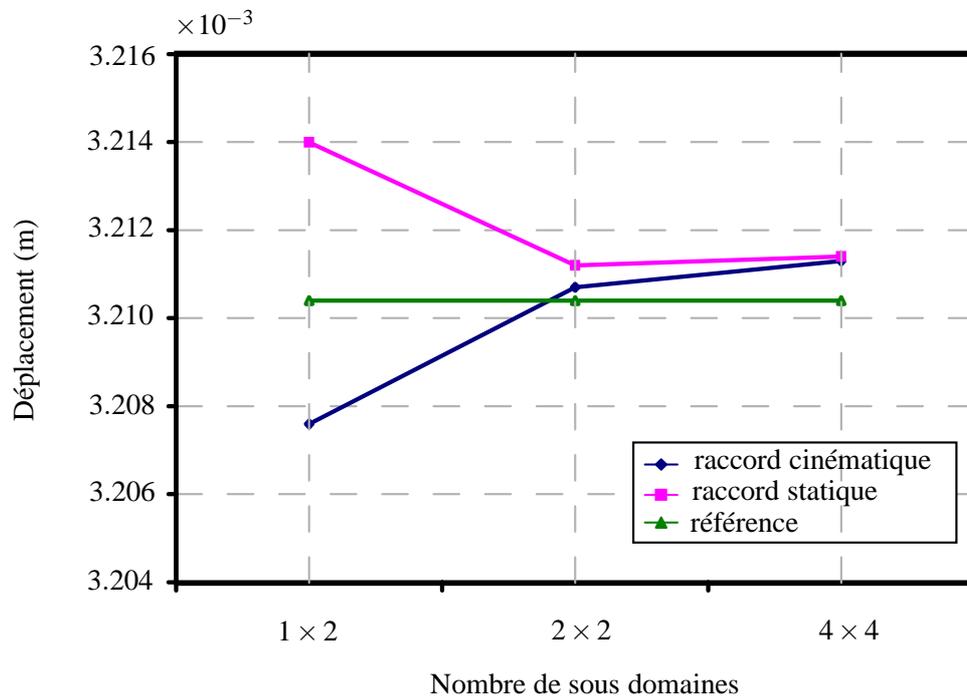


Figure 3.21 - Poutre en flexion : déplacement ( $u_z$ ) du nœud A

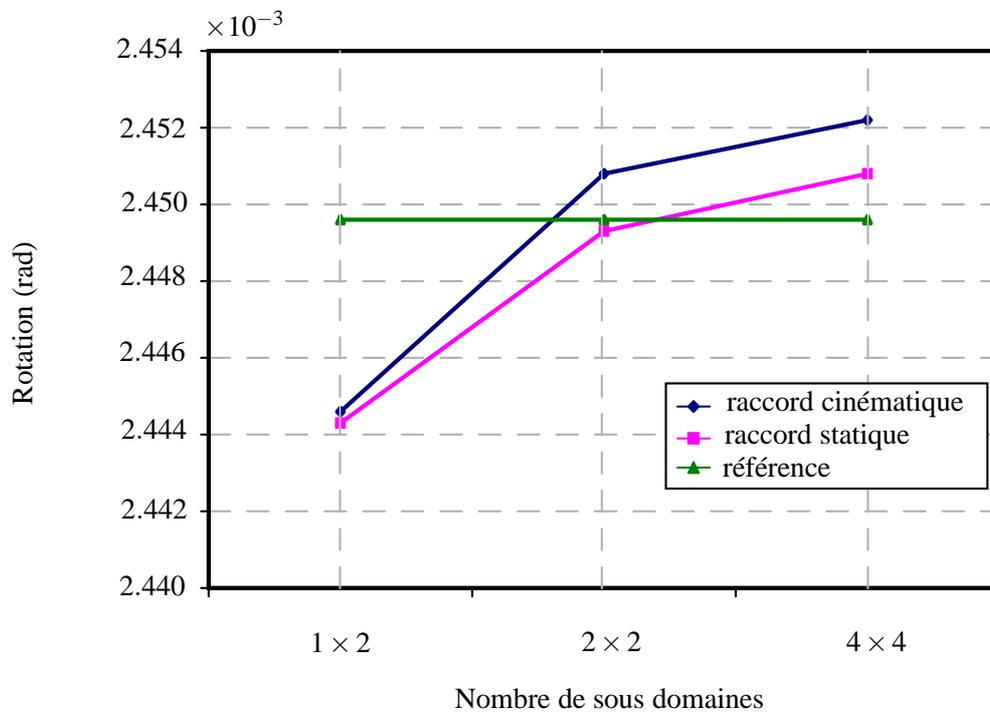


Figure 3.22 - Poutre en flexion : rotation ( $\theta_y$ ) du nœud A



On rappelle que nous n'utilisons pas de critère pour définir les zones micro et macro, par conséquent le choix de la zone micro peut être considéré comme un paramètre de la méthode. Il faudra donc étudier la sensibilité des résultats à ce paramètre.

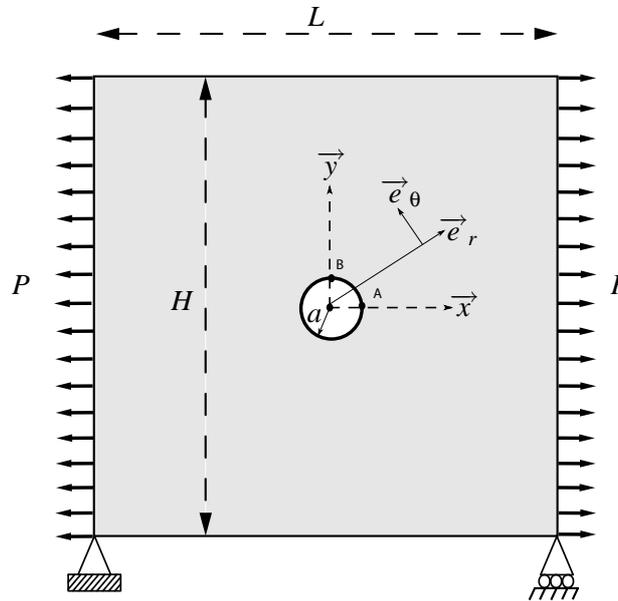


Figure 3.23 - Plaque infinie trouée en contraintes planes

### 3.7.3.1 Plaque infinie trouée : étude en contraintes planes

On considère le problème présenté en figure (3.23) avec un trou situé au centre de la structure. Le calcul est basé sur l'hypothèse de contraintes planes et les caractéristiques du problème sont présentées dans le tableau (3.6).

Longueur	$L = 2.1$ (m)
Largeur	$H = 2.1$ (m)
Épaisseur	$t = 5 \cdot 10^{-3}$ (m)
Rayon de trou	$a = 0.07$ (m)
Module d'Young	$E = 200$ (GPa)
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Force dans le plan	$P = 100$ (MPa)

Tableau 3.6 - Caractéristiques de l'exemple de la plaque trouée (2D)

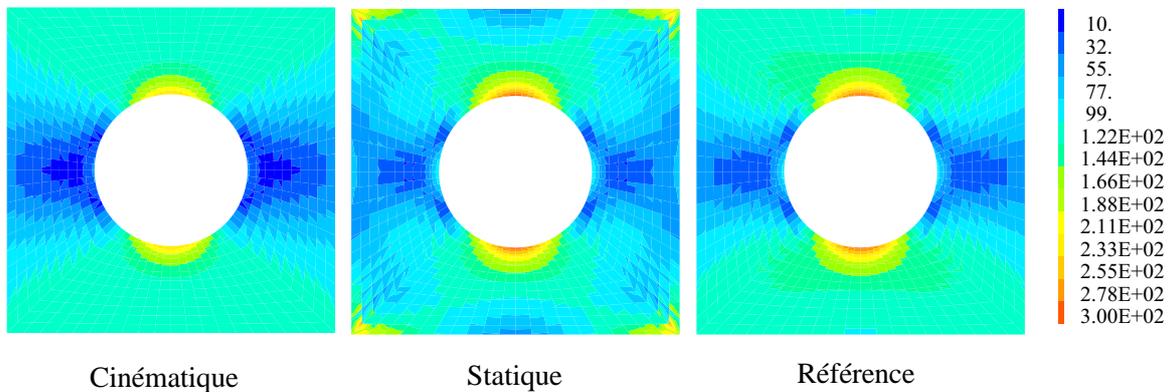
La solution analytique de la plaque infinie avec trou en coordonnées polaires est la suivante [Timoshenko et Goodier, 1970] :



$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{P}{2} \left[ \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos(2\theta) \right] \\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{P}{2} \left[ \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos(2\theta) \right] \\
\sigma_{r\theta} &= \frac{P}{2} \left[ \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4}\right) \sin(2\theta) \right]
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Les valeurs maximums de contrainte atteintes sur la frontière du trou sont les suivants :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta}(B) &= \sigma_{\theta\theta}(\theta = \frac{\pi}{2}) = +3P && + \text{traction} \\
\sigma_{\theta\theta}(A) &= \sigma_{\theta\theta}(\theta = 0) = -P && - \text{compression}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

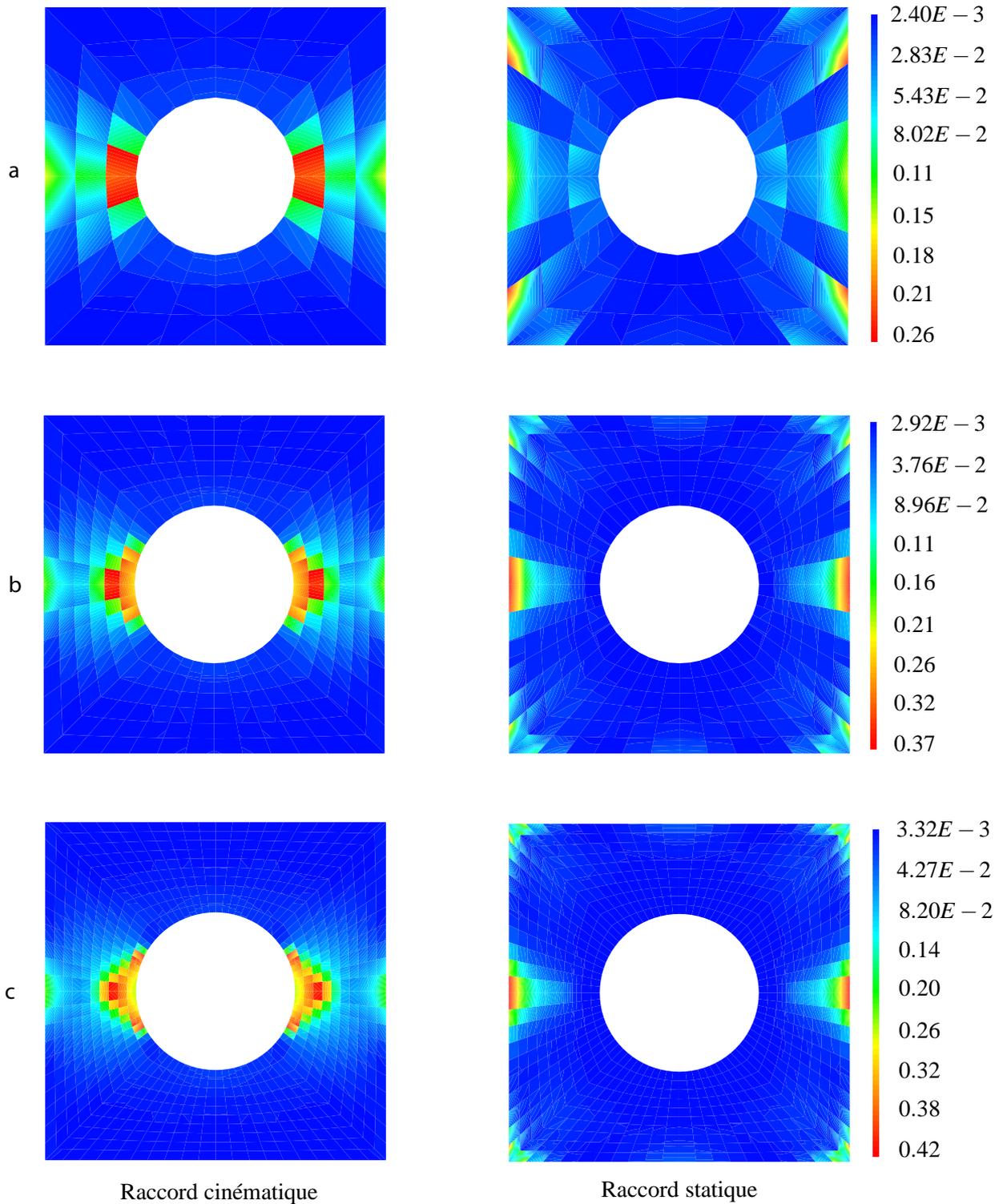


**Figure 3.24** - Contrainte de Von Mises de la plaque trouée en 2D

On décompose le domaine de façon régulière en 49 sous domaines ( $7 \times 7$ ). De cette façon, le sous domaine entourant le trou a un côté de longueur égale à un peu plus de 2 fois le diamètre du trou. Dans un premier temps, on ne garde comme sous domaine micro que le sous domaine placé au centre de la structure et comportant les hétérogénéités, les autres sous domaines sont modélisés de façon grossière (homogénéisée).

La solution de la méthode FETI-DP micro-macro (hypothèse cinématique ou statique) est comparée à la solution référence numérique (maillage fin partout) et analytique (hypothèse de plaque infinie). Sur la base du critère en énergie de déformation, équation (3.50), les erreurs relatives entre la solution FETI-DP micro-macro et la solution numérique de référence sont présentées sur les figures (3.25). À la différence des exemples précédents, le raccord micro-macro porte sur tout le contour du domaine micro. On a donc une erreur due au raccord sur toute la frontière du domaine micro. Comme dans l'exemple précédent, avec la méthode statique, l'erreur reste localisée au voisinage de la zone de raccord, et diminue rapidement lorsqu'on s'en éloigne. Ceci peut être rapproché du principe de Saint-Venant ce qui rejoint des observations faites dans





**Figure 3.25** - Erreur relative en énergie de déformation, les maillages  $6 \times 6$ ,  $12 \times 12$  et  $20 \times 20$  éléments par sous domaine

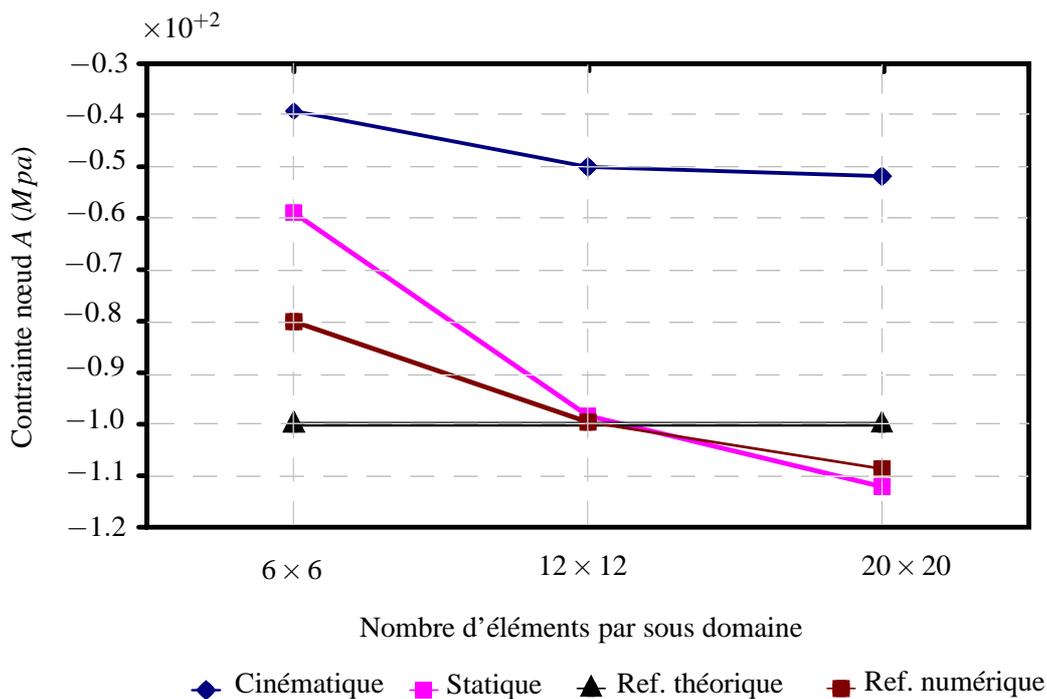


[Guidault, 2005]. En revanche, pour le raccord cinématique, sur cet exemple, l'erreur due au raccord augmente quand on s'éloigne du bord et qu'on se rapproche de l'hétérogénéité. On vérifie également que l'erreur diminue quand on augmente la densité du maillage dans la zone micro.

Si maintenant on s'intéresse aux valeurs locales des contraintes au voisinage du trou, les résultats de la contrainte orthoradiale aux deux points  $A$  et  $B$  (figure 3.23) sont présentés dans les figures (3.26) et (3.27). Il apparaît que la méthode statique conduit à une erreur faible, alors que la méthode cinématique est à l'origine d'une erreur plus importante, ce qui est cohérent avec l'évolution spatiale de l'erreur décrite auparavant.

On note que même avec un seul sous domaine micro, dont l'hétérogénéité structurelle représente une proportion importante, la précision sur les contraintes locales est très bonne avec la méthode statique (de l'ordre de 1% d'écart entre la méthode FETI-DP micro-macro et la solution FETI-DP classique (micro partout) à partir d'un maillage  $12 \times 12$ ).

Du point de vue cinématique, la configuration déformée du sous domaine contenant le trou

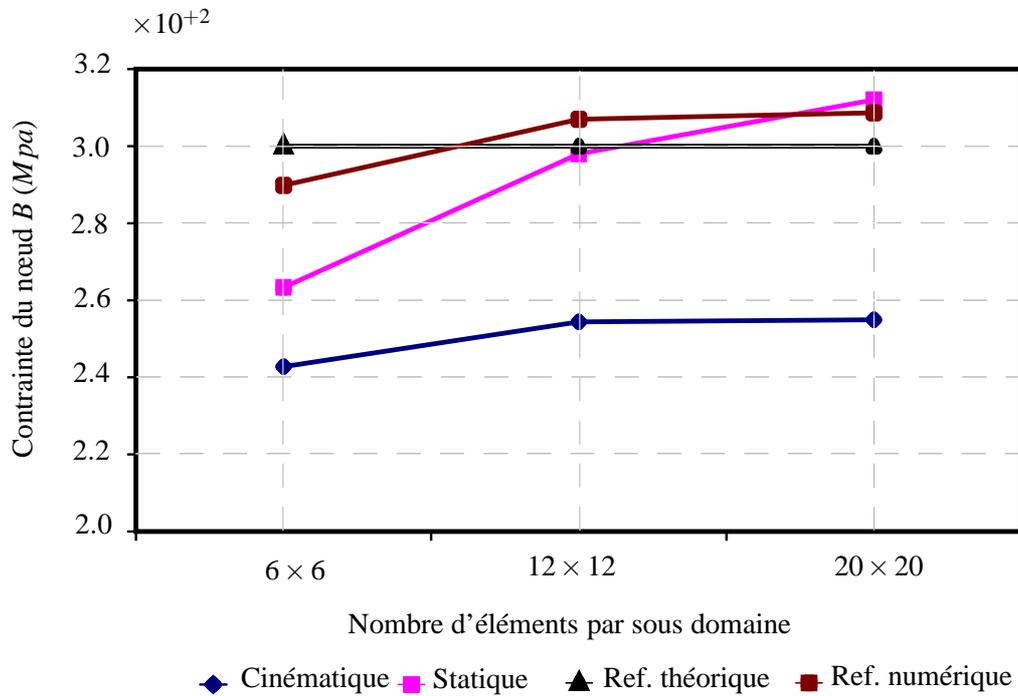


**Figure 3.26** - Plaque infinie : contrainte au point  $A$

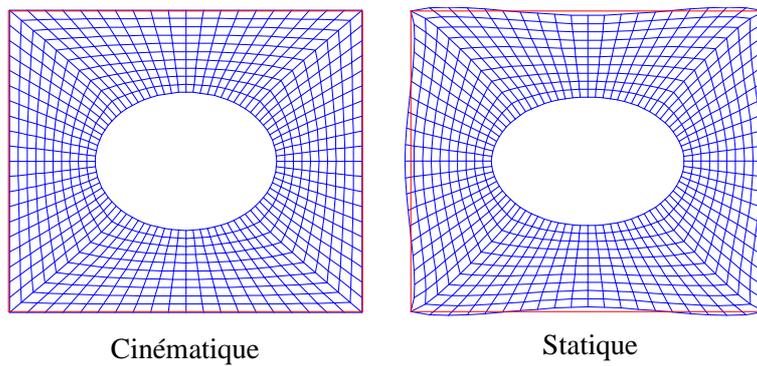
est donnée figure (3.28). Avec le raccord cinématique, la frontière reste droite alors que pour le raccord statique, l'écart micro-macro est nul en moyenne. Cette dernière déformée est plus plausible que la déformée cinématique qui ne représente l'effet de l'hétérogénéité que de façon globale.

On peut en outre montrer que l'erreur liée à l'utilisation de la méthode micro-macro dépend





**Figure 3.27** - *Plaque infinie : contrainte au point B*



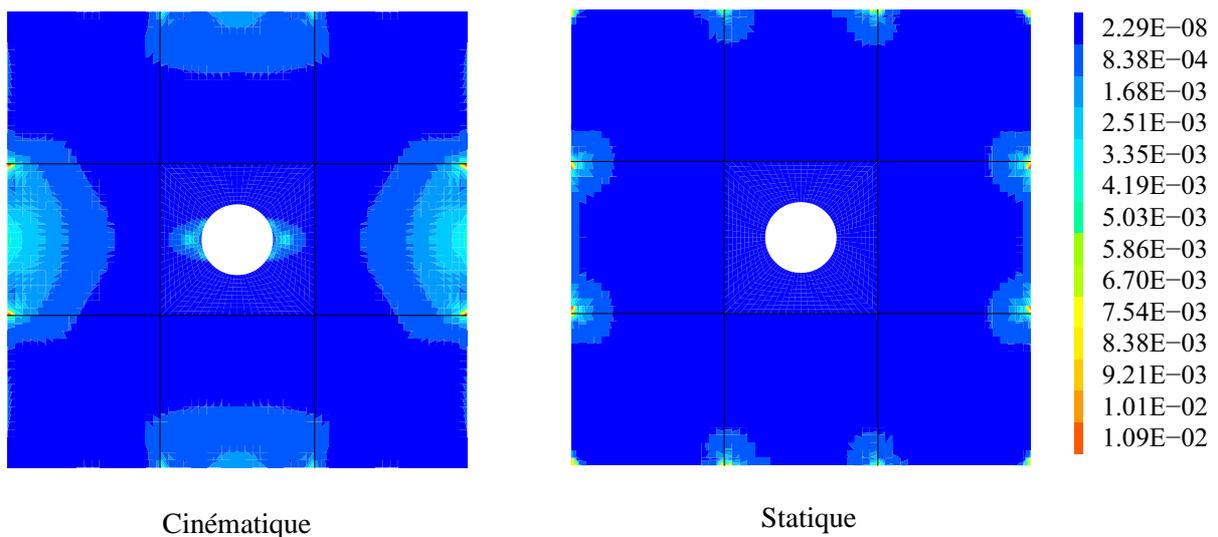
**Figure 3.28** - *Déformation du sous domaine contenant le trou*

de l'hétérogénéité de la zone micro. Ainsi, si on prend non plus un seul sous domaine micro, mais une couronne autour de l'hétérogénéité, l'erreur relative en énergie diminue de façon importante, cf. figure (3.29). Ceci résulte du fait que la zone de raccord est plus éloignée de l'hétérogénéité, ce qui rend moins critique les hypothèses liées au raccord. De plus, la zone de raccord micro-macro met en jeu un plus grand nombre d'éléments grossiers. Ainsi, avec la méthode cinématique, sur chaque côté du raccord, le déplacement de membrane est linéaire par morceaux, au lieu d'être linéaire quand on n'a qu'un seul sous domaine micro. Les résultats présentés ici sont cohérents avec ceux donnés dans [Guidault *et al.*, 2007].

Les mêmes tendances sont obtenues si, à la place d'augmenter la taille de la zone micro, on diminue le caractère hétérogène de la structure en considérant un trou de diamètre inférieur [Guidault *et al.*, 2007].

On note toutefois que quelle que soit la taille de la zone micro, avec la méthode cinématique, le maximum de l'erreur est obtenu sur ce cas en membrane au voisinage de l'hétérogénéité.

Enfin, le tracé de la contrainte de Von Mises du sous domaine contenant un trou est présenté



**Figure 3.29** - Distribution d'erreur dans le sous domaine avec trou, cas de la traction

en figure (3.24). Le niveau de contrainte pour la méthode cinématique est inférieur à celui de la référence, cela signifie que la méthode cinématique est plus raide.

### 3.7.3.2 Plaque infini trouée : étude en flexion

On reprend l'exemple de la structure précédente, mais cette fois-ci sollicitée en flexion par des moments uniformément répartis sur deux côtés opposés, cf. figure (3.30), avec des conditions aux limites cinématiques pour éliminer les mouvements de solide rigide.



Puisqu'il n'y a pas de résultat analytique pour cet exemple, les résultats de la méthode FETI-DP

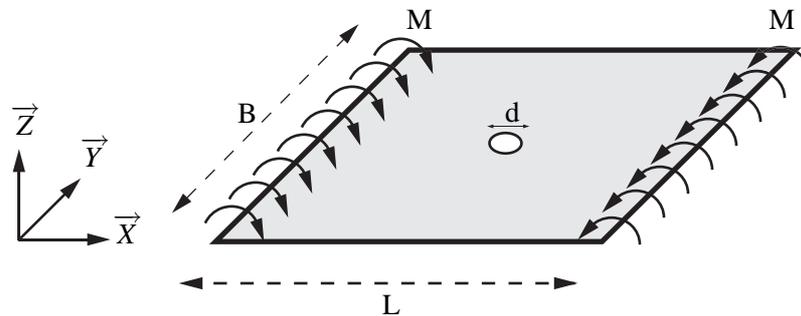


Figure 3.30 - Plaque en flexion pure

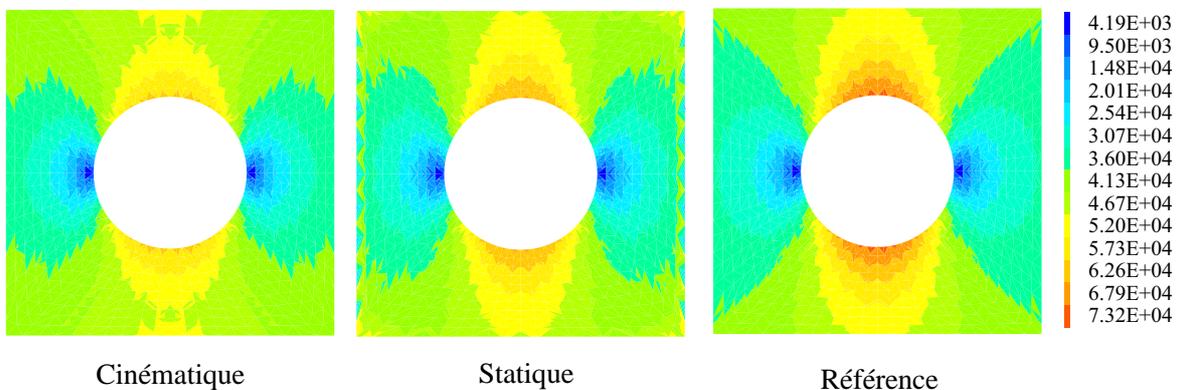


Figure 3.31 - Contrainte de Von Mises de la plaque trouée en 3D

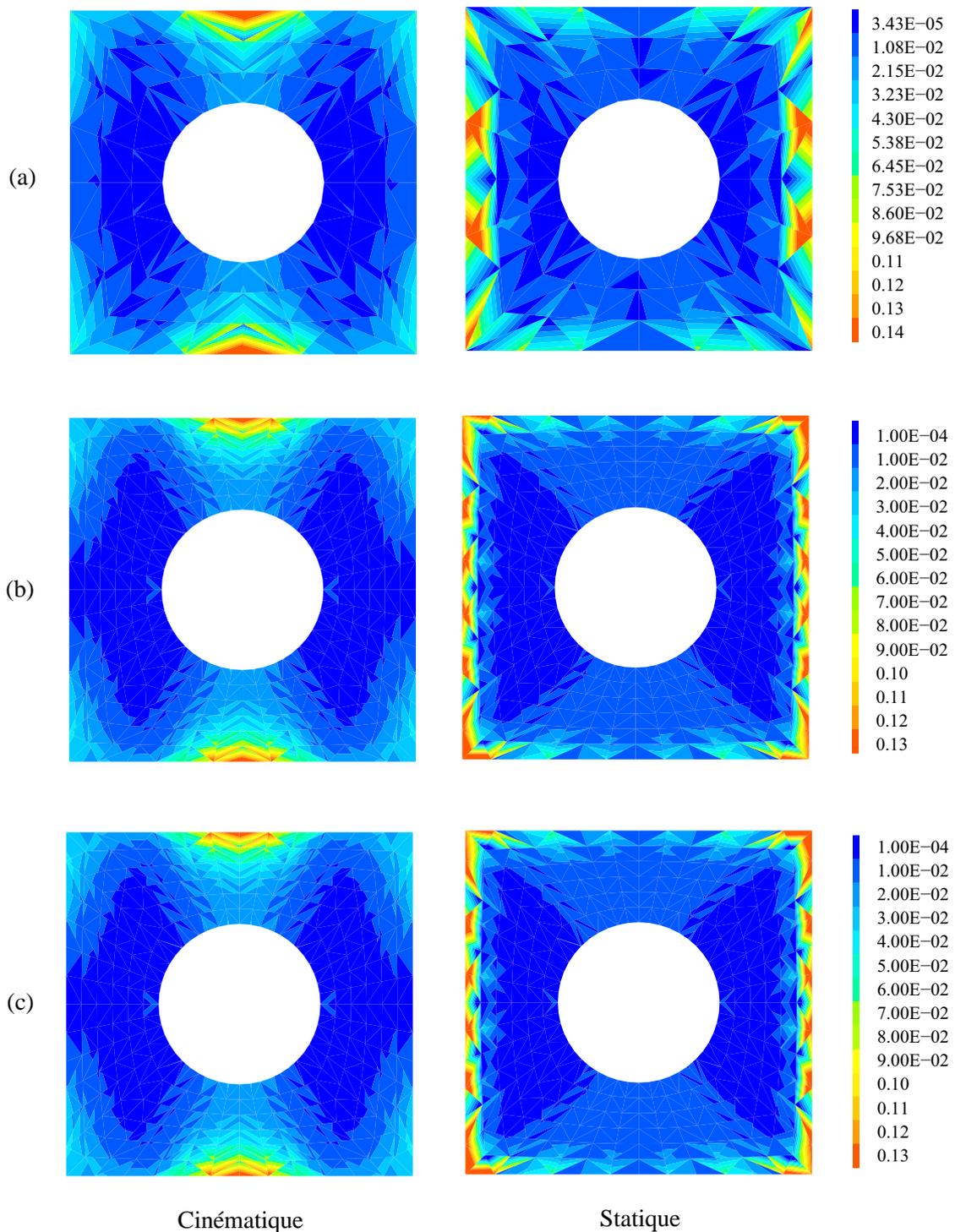
micro-macro sont comparés à ceux obtenus avec un maillage fin dans tous les sous domaines. Les résultats donnés en figure (3.32) montrent que, comme en membrane, le raccord statique est plus précis que le raccord cinématique. Cependant, on remarque qu'avec la méthode cinématique, l'erreur reste confinée au voisinage de la zone de raccord, alors qu'en membrane l'erreur atteignait son maximum autour du trou.

Il faut noter que l'évolution de l'erreur dans le cas de la flexion n'est pas la même que dans le cas de la traction. Les contraintes de Von Mises dans les deux cas cinématique et statique ont été comparées avec les résultats de référence, cf. figure (3.31).

### 3.7.3.3 Plaque raidie trouée : étude en flexion

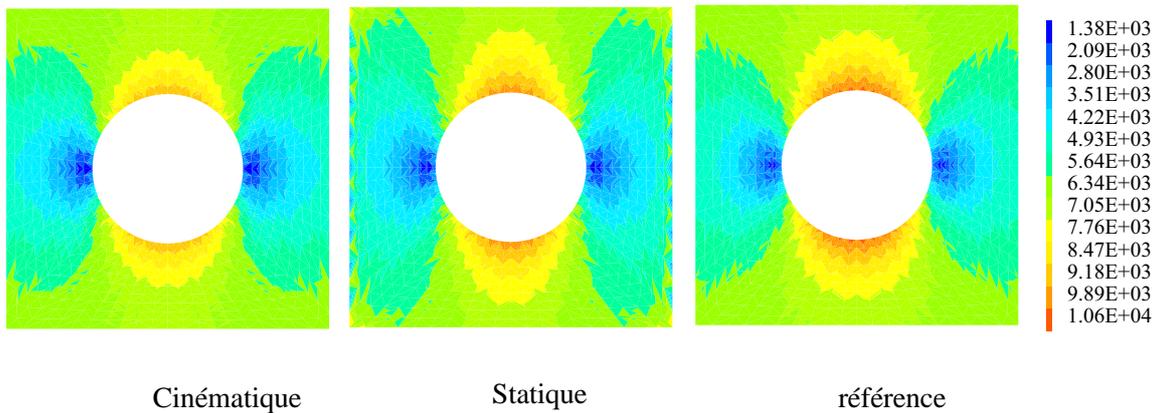
Enfin, comme dernier exemple, on considère une plaque raidie trouée en flexion. Dans cet exemple, on envisage les raidisseurs comme un sous domaine particulier avec un maillage macro sur les nœuds grossiers. De cette façon il n'y a pas de raidisseur sur l'interface micro-macro.





**Figure 3.32** - *Plaque en flexion : distribution d'erreur dans sous domaine avec le trou, (a)  $6 \times 6$  éléments par sous domaine, (b)  $12 \times 12$  éléments par sous domaine (c)  $20 \times 20$  éléments par sous domaine*





**Figure 3.33** - Plaque raidie : contrainte de Von Mises pour les sous domaines contenant des trous

Le tracé de l'erreur en énergie relative, figure (3.34) et la contrainte de Von Mises, figure (3.33), présentent la même tendance que la plaque trouée sans raidisseur présentée précédemment.

### 3.7.3.4 Assemblage de plaques

En vue de se rapprocher de l'application du navire à passagers, on considère maintenant un cas plus complexe, avec un assemblage de plaques dans l'espace 3D. Les géométries étudiées sont présentées figure (3.35).

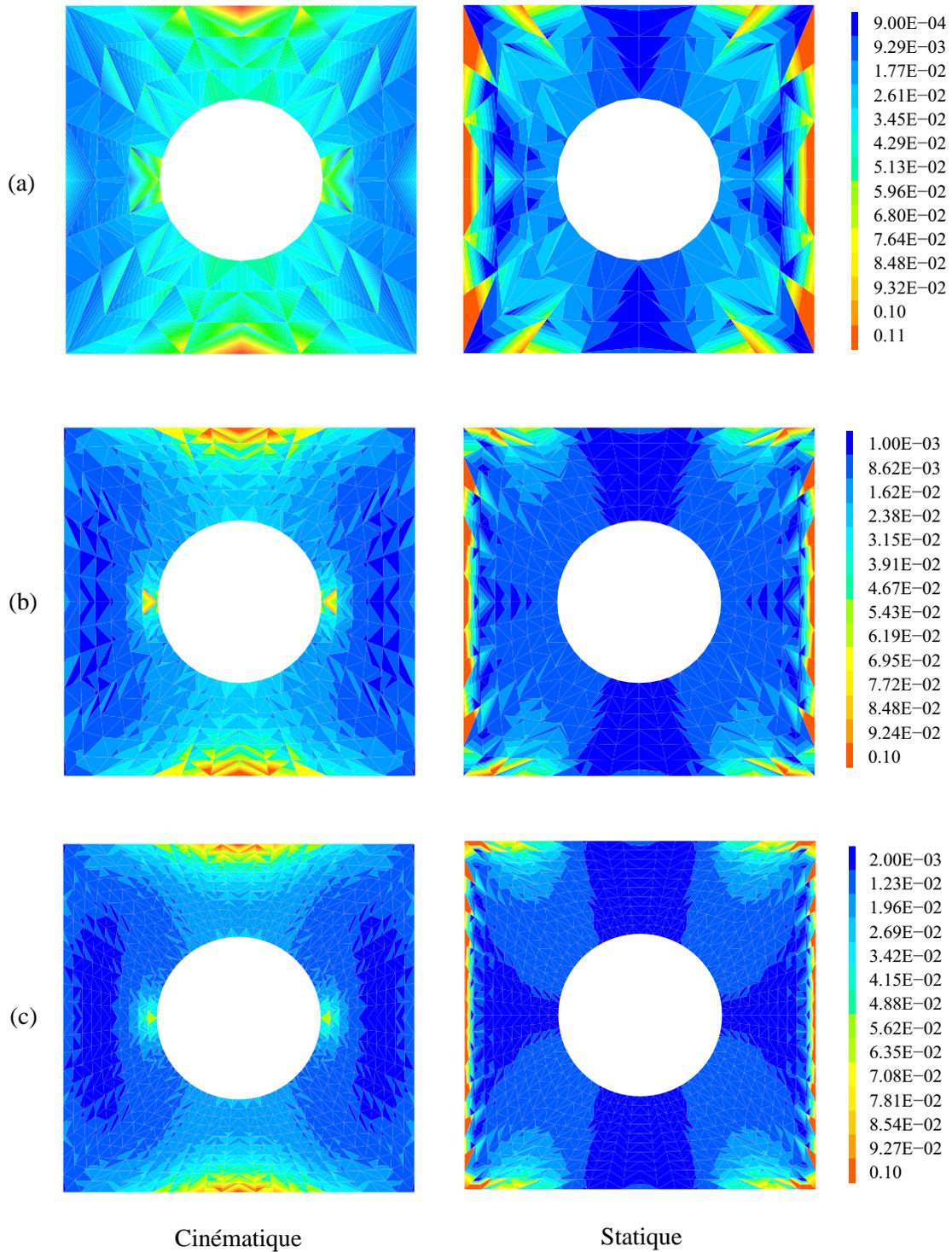
Les structures sont encastées à une extrémité et soumises à un chargement réparti linéaire à l'autre extrémité, comme présenté sur cette même figure. On a volontairement superposé un chargement de traction à un chargement de flexion, de façon à ce que la région où les contraintes sont nulles ne coïncide pas avec une zone du raccord, car on utilise une erreur relative en énergie de déformation.

Dans un premier temps, la structure comporte deux trous, et la zone micro se limite aux deux sous domaines qui entourent les trous, cf. figure (3.35). De plus, on envisage soit deux trous qui vont travailler en membrane (exemple N.1) soit deux trous qui vont être sollicités principalement en flexion (exemple No.2).

Avec le maillage micro-macro utilisé, on note qu'à l'interface commune aux deux sous domaines micro, on a à réaliser le raccord avec le sous domaine macro horizontal. On a donc un raccord micro-micro, et deux raccords micro-macro. Les caractéristiques du problème sont données dans le tableau (3.7). Les résultats de la distribution de l'erreur relative en énergie, sont présentés en figure (3.36) et (3.37) pour les exemples 1 et 2, respectivement.

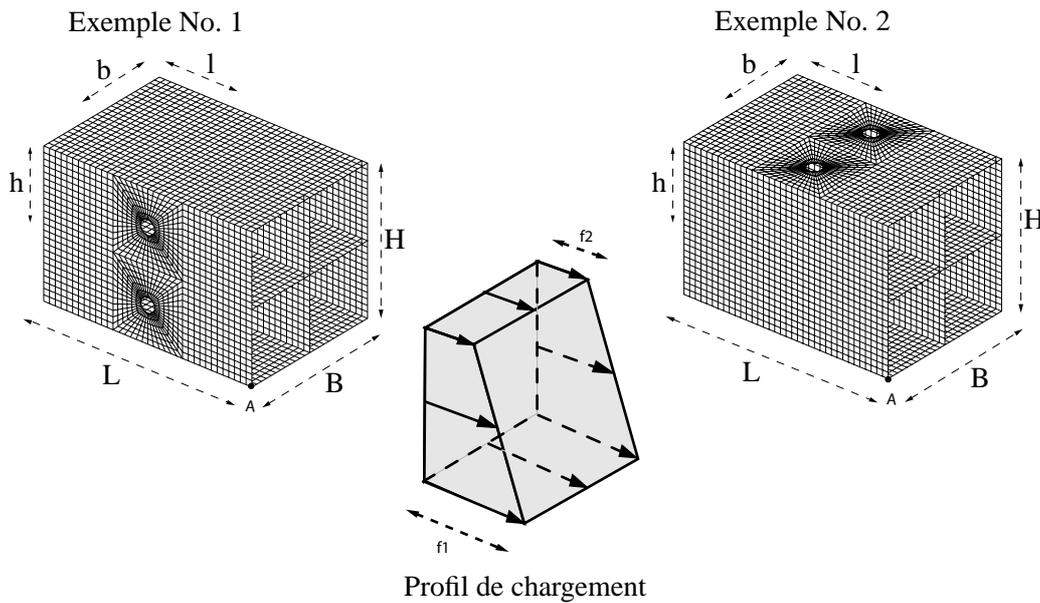
Dans les deux cas, avec la méthode statique, on a une erreur importante au voisinage des nœuds grossiers, mais qui est très localisée. Ainsi, on obtient une bonne précision sur les contraintes au





**Figure 3.34** - Plaque raidie en flexion : distribution d'erreur dans sous domaine avec le trou, (a)  $6 \times 6$  éléments par sous domaine, (b)  $12 \times 12$  éléments par sous domaine (c)  $20 \times 20$  éléments par sous domaine





**Figure 3.35** - Exemple d'assemblage de plaques et chargement appliqué

Longueur	$L = 3.0 \text{ (m)}, l = 1.0 \text{ (m)}$
Largeur	$B = 2.0 \text{ (m)}, b = 1.0 \text{ (m)}$
Hauteur	$H = 2.0 \text{ (m)}, h = 1.0 \text{ (m)}$
Épaisseur	$t = 5 \cdot 10^{-3} \text{ (m)}$
Rayon de trou	$a = 0.1 \text{ (m)}$
Module d'Young	$E = 200 \text{ (GPa)}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
–	$f1 = 2.0 \cdot 10^7 \text{ (N)}$
–	$f2 = 1.0 \cdot 10^7 \text{ (N)}$

**Tableau 3.7** - Caractéristiques de l'exemple d'assemblage de plaques

voisinage des trous. Avec la méthode cinématique, l'erreur est un peu plus faible dans la zone de raccord, mais devient plus importante au voisinage du trou. On a donc les mêmes conclusions que dans le cas de la plaque trouée en membrane.

Ces résultats montrent que quand on a des sollicitations combinées membrane flexion, la méthode cinématique ne fonctionne pas bien au bord du trou. On rappelle que cette méthode donnait des résultats satisfaisants à ce niveau pour des sollicitations de flexion (cf. section (3.7.3.2)), les résultats étant nettement moins bons en membrane (cf. section (3.7.3.1)). La méthode statique s'avère ainsi beaucoup plus robuste, avec une qualité de résultats indépendante de la nature des sollicitations.



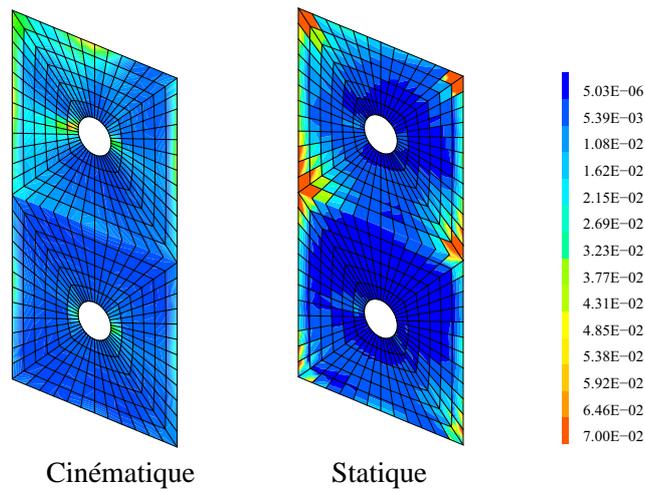


Figure 3.36 - Distribution d'erreur dans le sous domaine avec trou

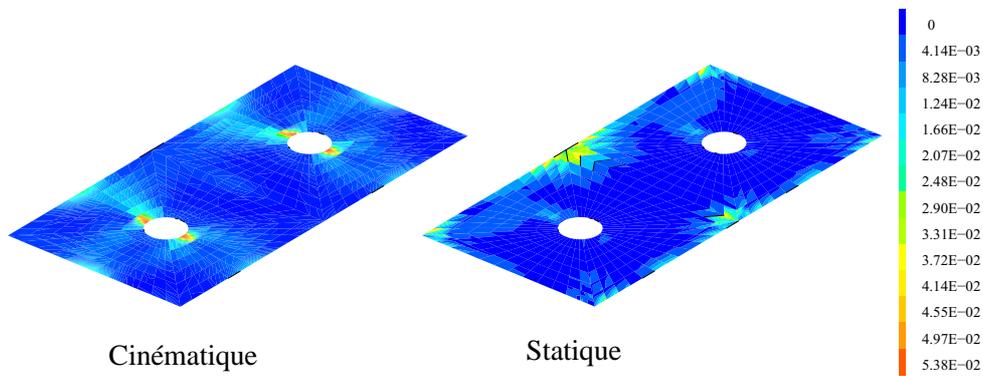


Figure 3.37 - Distribution d'erreur dans le sous domaine avec trou

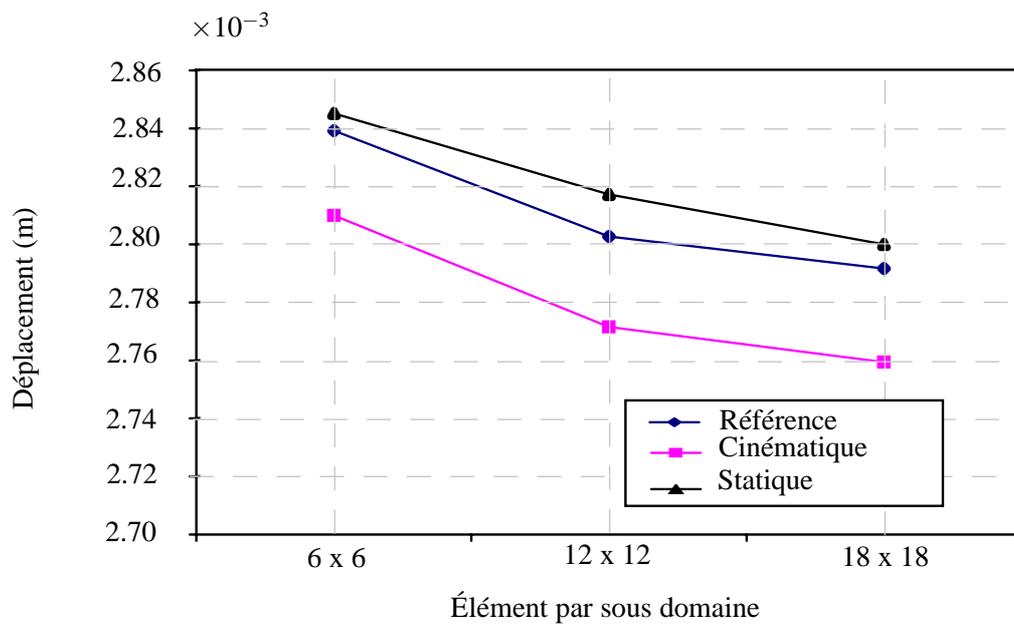


Figure 3.38 - Amplitude du déplacement du nœud A



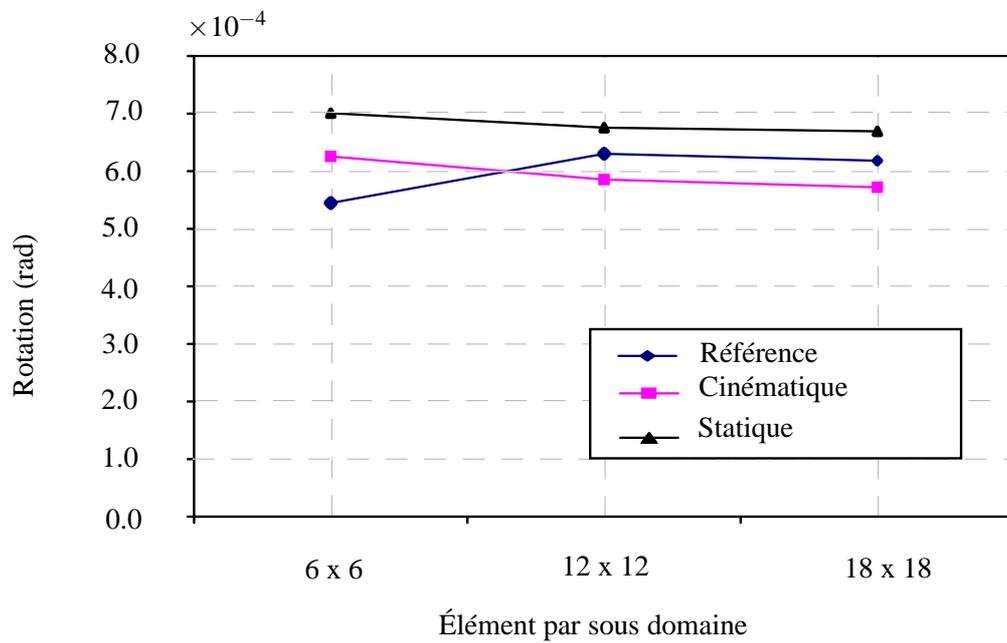


Figure 3.39 - Amplitude de la rotation du nœud A

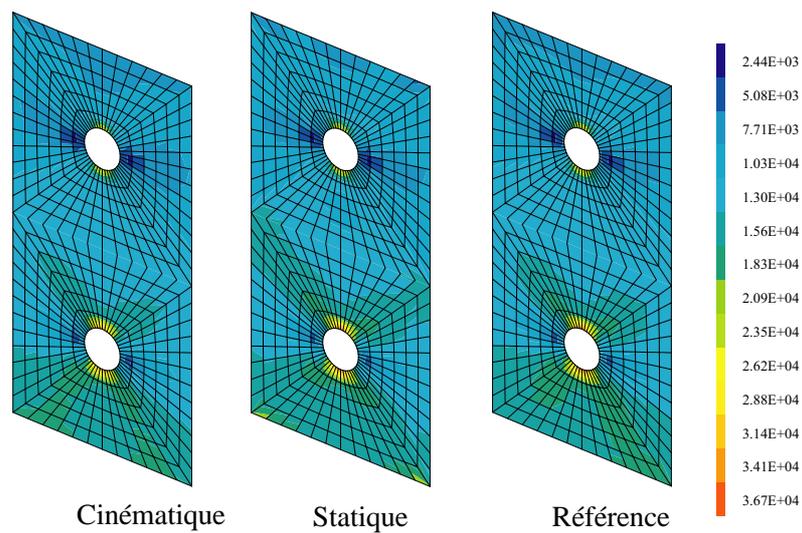


Figure 3.40 - Contrainte de Von Mises dans les sous domaines contenant des trous

On considère un dernier exemple dans lequel tous les sous domaines sur les parois verticales du bord de la structure comportent des trous, comme c'est le cas des navires à passagers avec des hublots. Il s'agit ici de tester la méthode avec des sous domaine macros qui comportent des trous : on va donc cette fois-ci homogénéiser des sous domaines hétérogènes. L'exemple est présenté en figure (3.41) et on ne garde un maillage micro que dans les sous domaines situés au centre des parois verticales du bord.

Les résultats sur l'erreur relative en énergie sont présentés figure (3.42). On constate que cette erreur reste faible, même si elle est un peu plus élevée que dans le cas où les sous domaines macro entourant les sous domaines micro sont homogènes.

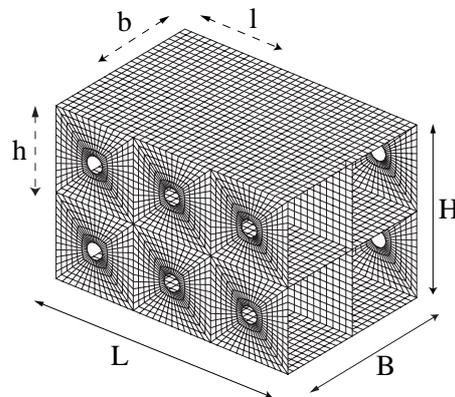


Figure 3.41 - Exemple avec plusieurs trous

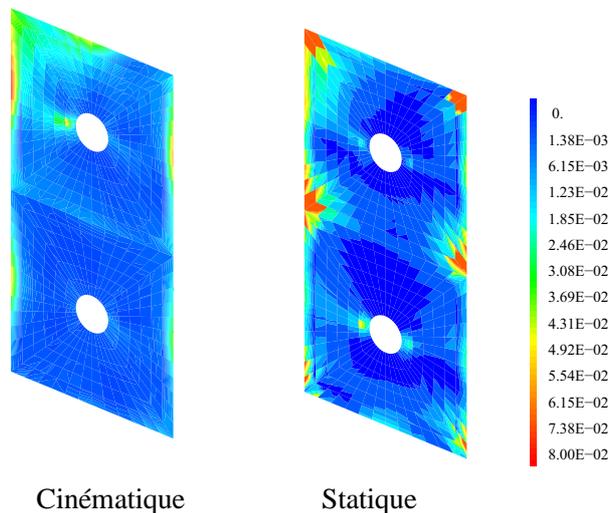


Figure 3.42 - Distribution d'erreur dans le sous domaine avec trou

*Remarque*

L'existence de trou dans le sous domaine peut être traduite comme une hétérogénéité. Dans ce



cas, plus la taille du trou est grande plus le sous domaine est hétérogène. Pour montrer cet effet sur le résultat du calcul avec maillage micro macro, l'exemple de (3.41) est refait, en utilisant une taille de trou deux fois plus importante. Le niveau d'erreur est élevé par rapport au résultat précédent.

### 3.8 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons proposé une version multi-échelle d'une méthode de décomposition de domaine FETI-DP. Cette approche permet de travailler avec un modèle comportant des sous domaines incompatibles, avec deux échelles de discrétisation. Une discrétisation fine dans les zones d'intérêt, et grossière partout ailleurs. Cette dernière étant obtenue par homogénéisation numérique d'une description initiale fine. Le raccord entre sous domaines incompatibles a été traité de deux façons différentes, en cohérence avec les hypothèses de localisation adoptées pour l'homogénéisation numérique. Ces raccords sont en outre simples d'implantation dans le cadre de la méthode FETI-DP pour lequel on peut intégrer finalement des équations de liaison. Des exemples de validation de type *patch test* ont permis de montrer que la méthode redonne la solution analytique. Des exemples à état de contrainte non homogène ont ensuite été étudiés, et les erreurs introduites par le raccord et l'homogénéisation ont été évaluées de façon globale (déplacement en un point par exemple) et locale (erreur en énergie) en prenant comme référence la solution avec des sous domaines fins partout. L'analyse des résultats a montré que les deux types de raccords introduisent une erreur aux interfaces. Dans le cas du raccord *mortar*, l'erreur reste confinée dans la zone de raccord, alors que le raccord cinématique peut donner lieu à une erreur importante, même loin de la zone de raccord. Le résultat démontre en particulier le caractère très approximatif de l'approche descendante (chapitre 1), dans laquelle la réanalyse locale est réalisée en appliquant des conditions aux limites en déplacement issues du calcul global.



---

## Conclusions et perspectives

### 4.1 Bilan des travaux

Ce travail de thèse avait pour objectif la mise au point d'une méthode de simulation numérique rapide et fiable de structures hétérogènes de grande taille, telles qu'un navire à passagers.

Pour tenir compte des détails structuraux et du comportement global de l'ensemble de la structure dans la même simulation, le moteur de la stratégie de calcul sélectionnée est celui d'une décomposition de domaine multiéchelle.

Dans une première partie, nous avons tout d'abord sélectionné, parmi les méthodes existantes pour les calculs de grande taille, la méthode de décomposition de domaine FETI-DP. Ce choix a été notamment motivé par le fait que les degrés de liberté des nœuds sommets des sous-domaines interviennent dans le problème global à résoudre, ce qui correspond au maillage grossier du navire utilisé en bureaux d'études. Les méthodes FETI-DP peuvent être très performantes numériquement et exploiter pleinement les puissances d'ordinateurs à architecture parallèle, si l'étape de résolution du système par un algorithme de gradient conjugué est optimisée. C'est sur ce point que ce sont portés nos efforts dans la première partie de notre travail. Ceci nous a amenés notamment à considérer les raidisseurs primaires comme un sous domaine à part entière. D'autre part, étant donné la forte hétérogénéité des structures étudiées, un préconditionneur tenant compte de la raideur locale d'interface a été utilisé, de façon à préserver une bonne vitesse de convergence lors de la résolution du système. Pour les mêmes raisons, des conditions adaptées ont été utilisées pour modéliser le raccord de deux sous domaines en flexion. L'analyse d'un exemple sur un tronçon de navire à passagers a montré l'efficacité de la méthode développée.

Dans une seconde partie, nous avons cherché à optimiser la méthode précédente, en tenant



compte du fait que la taille des sous domaines est petite devant celle de la structure. On a donc proposé une méthode de décomposition de domaine avec l'utilisation de discrétisations différentes selon les sous domaines, et incluant une méthode d'homogénéisation pour représenter l'échelle grossière. Une discrétisation dite fine (microscopique) est utilisée pour les sous domaines dans les zones d'intérêt, et une discrétisation grossière (macroscopique) ailleurs. Nous avons alors proposé deux méthodes de raccord (collocation et *mortar*) pour le traitement de l'interface entre les sous domaines microscopique et macroscopique. Les méthodes d'homogénéisation qui ont été couplées à FETI-DP pour la détermination de la raideur des sous domaines macroscopiques, utilisent des hypothèses de localisation identiques à celles utilisées pour le raccord. De nombreux exemples ont été étudiés. Nous avons montré que la méthode *mortar* est plus précise que la méthode en déplacement (collocation), et permet d'obtenir une bonne précision au voisinage des détails structuraux, les erreurs introduites par le raccord et l'homogénéisation étant localisées près des interfaces incompatibles.

On dispose donc ainsi d'une méthode FETI-DP micro-macro qui peut réaliser l'analyse d'une structure avec des sous domaines maillés finement, ou condensés numériquement sur ses nœuds grossiers.

## 4.2 Perspectives

Les perspectives à ce travail sont nombreuses et se situent principalement dans le prolongement du chapitre 2.

Un aspect important qui n'a pas été abordé est la façon dont on définit les zones fines et grossières. A ce niveau, en vue d'optimiser le temps de calcul, on a intérêt à définir le maximum de sous domaines grossiers, à condition de ne pas dégrader la précision de la solution du problème d'ensemble. Ce problème revient aussi à déterminer la zone d'influence des détails structuraux, ou parmi ceux-ci, ceux qui nécessitent une modélisation fine. Il serait opportun ici de travailler avec des estimateurs d'erreur *a posteriori*, pour pouvoir faire évoluer de façon itérative les zones fines et grossières (à l'image de ce qui est fait dans les méthodes de maillage adaptatif).

Une autre voie d'amélioration de la méthode FETI-DP micro-macro se situe dans le choix de l'espace des multiplicateurs de Lagrange, qui interviennent dans le raccord entre deux sous domaines fin et grossier. En effet, même si l'erreur obtenue avec un multiplicateur constant est faible, on peut espérer la diminuer encore en choisissant un espace de multiplicateurs plus riche. De cette façon, il est clair qu'on assure mieux la continuité des déplacements à l'interface non compatible. Ceci pourrait se faire en prenant une base polynômiale, ou encore en choisissant comme côté maître le côté de l'interface maillé finement.



Au chapitre 1, nous avons montré tout l'intérêt d'utiliser un préconditionneur performant. Ce type de préconditionneur doit maintenant être adapté à l'approche développée au chapitre 2. Celle-ci se caractérise par l'existence d'équations de liaison supplémentaires (issues du raccord micro-macro). Plusieurs pistes sont proposées à ce niveau dans la littérature, voir [Bavestrello *et al.*, 2007] par exemple.

Par ailleurs, dans le chapitre 2, nous n'avons présenté qu'un seul exemple avec des raidisseurs, ceux-ci étant représentés de façon macroscopique. Il conviendrait d'étendre la méthode FETI-DP micro-macro de façon à ce qu'elle puisse intégrer des raidisseurs à l'échelle micro ou macro. Ceci nous permettrait ainsi d'aborder un exemple plus représentatif du navire à passagers.

Si on souhaite s'attaquer à un calcul d'ensemble du navire, en adoptant des sous domaines de dimension 3m par 3m, ce qui correspond en moyenne à la distance entre ponts et à la largeur d'une cabine, on aboutit à quelques milliers de sous domaines. Ceci nécessitera probablement un calcul de type parallèle.

La même technique de couplage d'échelle dans une démarche de décomposition de domaine peut aussi être appliquée de façon récursive pour définir, par exemple, une troisième échelle qui permettrait de représenter les détails de tailles inférieures très localement (comme les variations de contraintes dans les assemblages, modélisés de façon tridimensionnelle, pour vérifier des calculs en fatigue).

Enfin, le passage à l'analyse dynamique (fréquences propres et niveaux d'accélération pour les vérifications de confort acoustique, ou analyse transitoire directe) pourrait aussi bénéficier d'une analyse à plusieurs échelles dans un cadre similaire.





# A

## Préconditionneur - matrice pondération *superlumped*

Le preconditionneur de la méthode FETI proposé initialement par [Farhat et Roux, 1991] n'est pas cohérent d'un point de vue mécanique [Rixen et Farhat, 1999]. C'est pourquoi pour avoir une démarche efficace, Rixen [Rixen et Farhat, 1999] a proposé d'utiliser des matrices de pondération dans le preconditionneur.

En effet, si on examine les différentes étapes de preconditionnement, cette matrice de pondération (*scaling*) est utilisée afin de distribuer le saut de déplacement  $\Delta u$ , et la correction sur le multiplicateur de Lagrange, notée  $z$ , de manière convenable sur l'interface entre les sous-domaines.

Le figure (A.1) présente un système de ressorts 1D, avec deux sous-domaines de raideur diffé-

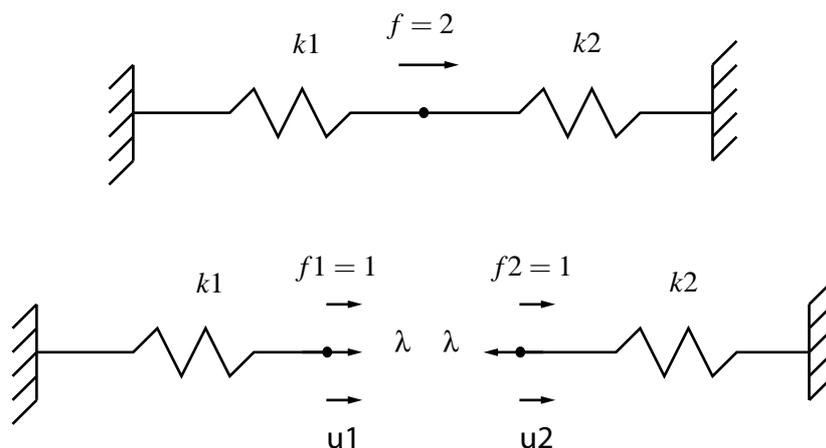


Figure A.1 - ressort hétérogène

rente ( $k_1 < k_2$ ). L'équilibre de chaque sous-domaine s'écrit :



$$\begin{aligned} k_1 u_1 &= 1 + \lambda \\ k_2 u_2 &= 1 - \lambda \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

La compatibilité du déplacement sur l'interface conduit à la solution exacte suivante :

$$u_1 = u_2 = u = \frac{2}{(k_1 + k_2)}, \quad \lambda = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad (\text{A.2})$$

Or, lorsqu'on résout les équations (A.1), avec une méthode itérative, à la première itération ( $\lambda^0 = 0$ ), on a :

$$u_1^0 = \frac{1}{k_1}, \quad u_2^0 = \frac{1}{k_2} \quad (\text{A.3})$$

Le saut de déplacement est alors égal à :

$$r^0 = u_1^0 - u_2^0 = \frac{(k_1 - k_2)}{(k_1 k_2)} \quad (\text{A.4})$$

Ce saut n'est pas nul si la raideur des deux côtés de l'interface n'est pas la même. On redistribue donc ce saut de part et d'autre de l'interface. Ceci amène alors à résoudre sur chaque sous domaine un problème à déplacement imposé. Tout l'enjeu consiste à bien répartir le saut de déplacement sur les deux sous domaines, de façon à obtenir des efforts correspondant aux déplacements imposés en équilibre.

Les déplacements à l'interface sur chaque sous domaine sont notés :

$$r_1^0 = \beta_1 r^0, \quad r_2^0 = \beta_2 r^0, \quad \text{avec } \beta_1 + \beta_2 = 1 \quad (\text{A.5})$$

et on cherche à déterminer  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . Il en résulte des efforts, qui correspondent à une correction sur les multiplicateurs de Lagrange :

$$z_1^0 = \beta_1 k_1 r^0, \quad z_2^0 = \beta_2 k_2 r^0 \quad (\text{A.6})$$

D'après (2.59) et (2.60) et la symétrie des opérateurs utilisés dans le preconditionneur, on utilise la même pondération que dans (A.5) pour partager cette correction entre les sous domaines :

$$\bar{z}_1 = \beta_1^2 k_1 r^0, \quad \bar{z}_2 = \beta_2^2 k_2 r^0 \quad (\text{A.7})$$

en utilisant l'équation (A.4), on peut écrire la force de traction sur l'interface :

$$\bar{\lambda} = \frac{(\beta_1^2 k_1 + \beta_2^2 k_2)(k_1 - k_2)}{k_1 k_2} \quad (\text{A.8})$$

les coefficients  $\beta_1$  et  $\beta_2$  doivent être choisis de manière à ce que  $\bar{\lambda}$  soit le plus proche possible de sa valeur exacte (A.2). Dans ce cas on trouve :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{k_2}{k_1 + k_2} \\ \beta_2 &= \frac{k_1}{k_1 + k_2} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$



# B

---

## Condition de raccord de la plaque en 3D

Lorsqu'on utilise les éléments finis de plaque avec la théorie de *Kirchhoff*, tels que les éléments de type *DKT* ou *DKQ*, il faut traiter de façon particulière le raccord entre les différents sous domaines.

Pour présenter la condition de raccord de la plaque en 3D, on considère deux sous domaines (ici deux plaques non coplanaires)  $\Omega^{(r)}$  et  $\Omega^{(s)}$ , qui sont connectés sur la ligne de jonction  $\Gamma$ , cf. figure (B.1). Sur cette ligne, on définit deux repères orthonormaux locaux  $(n_r, t_r, z_r)$  et  $(n_s, t_s, z_s)$ , chacun d'entre eux étant associé à un sous domaine.

La compatibilité cinématique du déplacement et de la rotation sur la ligne de jonction  $\Gamma$  impose les relations suivantes [Bernadou *et al.*, 1988] :

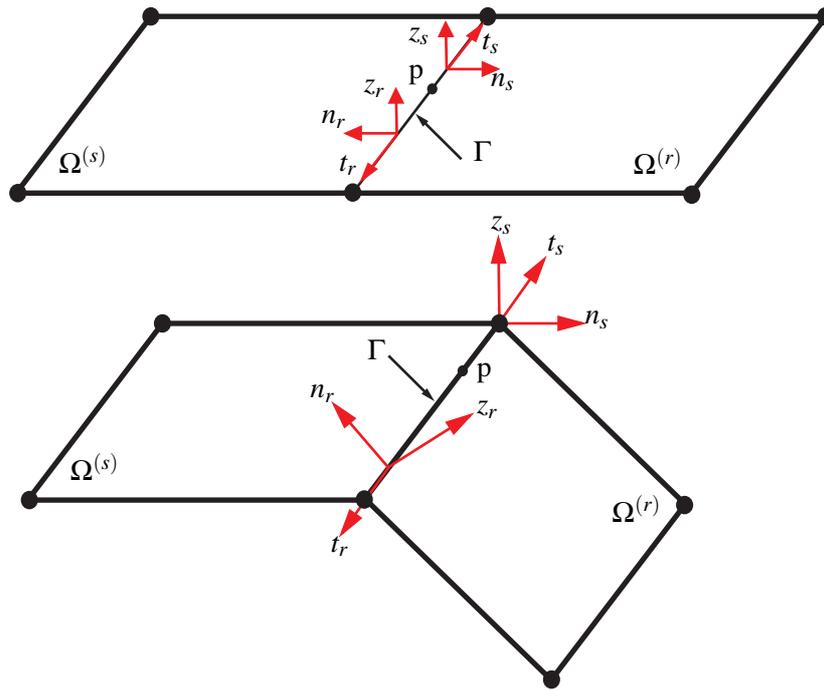
$$\begin{aligned} \forall p \in \Gamma, \quad \vec{U}^s(p) &= \vec{U}^r(p) && \text{pour le déplacement} \\ \vec{\theta}^s(p) &= \vec{\theta}^r(p) && \text{pour la rotation} \end{aligned} \tag{B.1}$$

où  $p$  est un point sur l'interface  $\Gamma$ ;  $\vec{U}$ ,  $\vec{\theta}$  sont les vecteurs de déplacement et de rotation dans le repère local de chaque sous domaine sur l'interface.

Les vecteurs de déplacement et de rotation sur l'interface dans les bases locales des sous domaines sur l'interface  $\Gamma$ , sont donnés par :

$$\begin{aligned} \vec{U}^r &= u_n^r \vec{n}_r + u_t^r \vec{t}_r + u_z^r \vec{z}_r \\ \vec{\theta}^r &= \theta_n^r \vec{n}_r + \theta_t^r \vec{t}_r + \theta_z^r \vec{z}_r \\ \vec{U}^s &= u_n^s \vec{n}_s + u_t^s \vec{t}_s + u_z^s \vec{z}_s \\ \vec{\theta}^s &= \theta_n^s \vec{n}_s + \theta_t^s \vec{t}_s + \theta_z^s \vec{z}_s \end{aligned} \tag{B.2}$$





**Figure B.1** - Interface de plaque dans les cas coplanaire et non coplanaire

En particulier, pour les éléments plaque de type *DKT* et *DKQ*, le degré de liberté de la rotation perpendiculaire à la plaque ( $\theta_z$ ), n'est pas défini dans le repère local. D'autre part, selon l'hypothèse de *Kirchhoff*, les déformations de cisaillement transversal sont nulles ( $\gamma_{sz} = 0$ ), ce qui implique les relations suivantes [Batoz et Dhatt, 1993] :

$$\theta_n = u_{z,t} \quad , \quad \theta_t = -u_{z,n}$$

où  $_{,t}$  et  $_{,n}$  présente la dérivée par rapport aux directions  $\vec{t}$  et  $\vec{n}$ .

On peut donc réécrire (B.2) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \vec{\theta}^r &= u_{z,t_r}^r \vec{n}_r - u_{z,n_r}^r \vec{t}_r \\ \vec{\theta}^s &= -u_{z,t_s}^s \vec{n}_s - u_{z,n_s}^s \vec{t}_s \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Il faut noter que  $\vec{t}_r = -\vec{t}_s$ , on peut donc présenter la continuité de la rotation ainsi :

$$\vec{\theta}^r - \vec{\theta}^s = -(u_{z,n_r}^r + u_{z,n_s}^s) \vec{t}_r + u_{z,t_r}^r \vec{n}_r - u_{z,t_s}^s \vec{n}_s = \vec{0} \quad (\text{B.4})$$

Les vecteurs  $\vec{n}_r$ ,  $\vec{t}_r$  et  $\vec{n}_s$  étant indépendants, la seule équation résultant de la continuité de la rotation sera :

$$u_{z,n_r}^r + u_{z,n_s}^s = 0 \Rightarrow \theta_t^r + \theta_t^s = 0 \quad (\text{B.5})$$

Autrement dit, étant donné qu'on peut seulement définir la rotation dans le plan, pour deux plaques non coplanaires, on écrit la continuité de la rotation en se limitant à la composante dont



---

la direction est commune aux deux plans, c'est-à-dire la direction  $\vec{t}$ .

Pour deux plaques coplanaires, comme  $n_r = -n_s$  d'après (B.4), on pourrait aussi imposer  $u_{z,t_r}^r + u_{z,t_s}^s = 0$ , mais en théorie de *Kirchhoff* cette relation est redondante avec la continuité de  $u_z$  le long de l'interface.

En résumé, on raccorde toutes les composantes des déplacements ( $u$ ,  $v$  et  $w$ ), et on ne recolle que la rotation dans la direction de l'interface (la direction de  $\vec{t}$ ).





# Références

- S. Fenster A. UGURAL : *Advanced strength and Applied Elasticity*. 3rd ed. Prentice-Hall : Englewood Cliffs, 1995. 86
- M. AMINPOUR et T. KRISHNAMURTHY : A two-dimensional interface element for multi-domain analysis of independently modeled three-dimensional finite element meshes. *AIAA paper 97-1297*, pages 1853–1861, 1997. 63
- M. AMINPOUR, J. RANSOM et S. MCCLEARY : A coupled analysis method for structures with independently modelled finite element subdomains. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 38:3695–3718, 1995. 61, 63
- K. BATHE : *Finite Element Procedures*. PRENTICE HALL, Englewood Cliffs, 1996. 8, 47, 76
- J. BATOZ et G. DHATT : *Modélisation des structures par élément finis*, volume Volume 2 - Poutres et Plaques. HERMES, Paris, hermès édition, 1993. 43, 68, 70, 114
- J. BATOZ et G. DHATT : *Modélisation des structures par élément finis*, volume Volume 1 - Solides élastiques. HERMES, Paris, hermès édition, 1995. 7
- H. BAVESTRELLO, P. AVERY et C. FARHAT : Incorporation of linear multipoint constraints in domain-decomposition-based iterative solvers -part ii : Blending feti-dp and mortar methods and assembling floating substructures. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196:1347–1368, 2007. 77, 79, 80, 109
- F. BELGACEM et Y. MADAY : The mortar element method for three dimensional finite elements. *Model Math. Anal. Numer.*, 31:289–302, 1997. 61
- M. BERNADOU, S. FAYOLLE et F. LENE : Numerical analysis of junction between plates. *Rapport de recherche-INRIA n° 865*, 1988. 47, 48, 71, 113
- C. BERNARDI, Y. MADAY et A. PATERA : A new nonconforming approach to domain decomposition : The mortar element method. *Collège de France Seminar*, pages 13–51, 1994. 61, 72



- N. DOKEVA : *Scalable mortar methods for elliptic problems on many subregions*. Phd thesis, Faculty of the graduate school university of southern California, 2006. 79
- D. DUREISSEIX : Vers des stratégies de calcul performantes pour les problèmes multiphysiques et le passage par le multiéchelle. *Mémoire HDR de l'université Pierre et Marie Curie (PARIS 6)*, pages 1–116, 2001. 17
- D. DUREISSEIX et C. FARHAT : A numerically scalable domain decomposition method for the solution of frictionless contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(12):2643–2666, 2001. 48
- G. DUVAUT : *Mécanique des milieux continus*, volume Masson. Springer, 1990. 7
- C. FARHAT : A lagrange multiplier based divide and conquer finite element algorithm. *In J. Comput. Syst. Engrg*, volume 2, pages 149–156. 1991. 13
- C. FARHAT, P. CHEN, J. MANDEL et F. ROUX : The two level FETI method part ii : Extension to shell problems, parallel implementation and performance results. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 155:153–179, 1998a. 13, 20
- C. FARHAT et M. GÉRADIN : Using a reduced number of lagrange multipliers for assembling parallel incomplete field finite element approximations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 97:333–354, 1992. 63
- C. FARHAT et M. GÉRADIN : On the general solution by a direct method of a large-scale singular system of linear equations : Application to the analysis of floating structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41:675–696, 1998. 80
- C. FARHAT, C. LACOUR et D. RIXEN : Incorporation of linear multipoint constraints in substructure based iterative solvers. part i : a numerically scalable algorithm. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 43:997–1016, 1998b. 79
- C. FARHAT, M. LESOINNE, P. LE TALLEC, K. PIERSON et D. RIXEN : FETI-DP : a dual-primal unified FETI method - part I : a faster alternative to the two-level FETI method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(7):1523–1544, 2001. 18, 19, 20
- C. FARHAT, M. LESOINNE et K. PIERSON : A scalable dual-primal domain decomposition method. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 7(7-8):687–714, 2000a. 19, 20
- C. FARHAT et J. MANDEL : The two level FETI method for static and dynamic plate problems part i : An optimal iterative solver for biharmonic system. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 155:129–151, 1998. 13, 17, 20



- C. FARHAT, J. MANDEL et F. ROUX : Optimal convergence properties of the FETI domain decomposition method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 115:365–385, 1994. 17
- C. FARHAT, K. PIERSON et M. LESOINNE : The second generation FETI methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometrically non-linear structural analysis problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 184:333–374, 2000b. 20
- C. FARHAT et F. ROUX : A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:1205–1227, 1991. 13, 111
- C. FARHAT et F. ROUX : Implicit parallel processing in structural mechanics. In J. Tinsley ODEN, éditeur : *Computational Mechanics Advances*, volume 2, pages 1–124. North-Holland, 1994. 13, 19, 28, 30
- G. GEYMONAT et F. KRASUCKI : Analyse asymptotique du comportement en flexion de deux plaques collées. *Comptes Rendus à l'Académie des Sciences de Paris*, 325(325): 307–314, 1997. Serie Iib. 48
- M. GÉRADIN et D. RIXEN : *Mechanical vibrations : theory and application to structural dynamics*. John Wiley, Chichester, England ; New York, 2nd édition, 1997. 77
- P. GUIDAULT : Une stratégie de calcul pour les structures fissurées : analyse locale-globale et approche multi échelle pour la fissuration. *Thèse de doctorat*, pages 1–178, 2005. 95
- P. GUIDAULT, O. ALLIX, L. CHAMPANEY et J. P. NAVARRO : A two-scale approach with homogenization for the computation of cracked structures. *Computer and Structure*, pages 1360–1371, 2007. 97
- P. HAURET et M. ORITZ : Bv estimates for mortar methods in linear elasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 195:4783–4793, 2006. 72
- B. HERRY, L. VALENTIN et A. COMBESCURE : An approach to the connection between subdomains with non-matching meshes for transient mechanical analysis. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 55:973–1003, 2002. 72
- I. HIRAI, B. WANG et W. PILKEY : An efficient zooming method for finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20:1671–1683, 1984. 2
- O. HUGHES : *Ship Structural Design*. John Wiley - Sons, 1983. 51



- H. KIM : Interface element method (iem) for a partitioned system with non-matching interfaces. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 191:3165–3194, 2002. 62
- H. KIM : Interface element method : treatment of non-matching nodes at the ends of interfaces between partitioned domains. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 192:1841–1858, 2003. 62
- H. KIM : A feti-dp formulation for compressible elasticity with mortar constraints. *LECTURE NOTES IN COMPUTATIONAL SCIENCE AND ENGINEERING*, 55:383–390, 2007. 79
- H. KIM et C. LEE : A preconditioner for the feti-dp formulation with mortar methods in two dimensions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, pages 2159–2175, 2005. 72
- C. LACOUR et Y. MADAY : Two different approaches for matching non-conforming grids : The mortar element method and the feti method. *BIT*, 37:720–738, 1997. 72
- P. LADEVÈZE : *Mécanique non-linéaire des structure - Nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales*. Paris Hermes, 1996. 17
- P. LADEVÈZE et D. DUREISSEIX : Une nouvelle stratégie de calcul micro-macro en mécanique des structure. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Series IIB Mechanics Physics Astronomy*, 327:1237–1244, 1999. 18
- P. LE TALLEC : Domain decomposition methods in computational mechanics. *In Computational Mechanics Advances*, volume 1, pages 123–217. North-Holland, 1994. 10, 13, 19
- P. LE TALLEC, D. ROECK et M. VIDRASCU : A neumann-neumann domain decomposition algorithm for solving plate and shell problems. *SIAM J. Num. Ana.*, 35(2):836–867, 1998. 10
- P. LE TALLEC et M. VIDRASCU : Méthode de décomposition de domaines en calcul de structures. *Actes du premier colloque national en calcul des structures*, I:33–49, 1993. 10
- J. MANDEL : Balancing domain decomposition. *Communications in Applied Numerical Methods*, 9:233–241, 1993. 13
- J. MANDEL et M. BREZINA : Balancing domain decomposition for problems with large jumps in coefficients. *Mathematics of Computation*, 65:1387–1401, 1996. 13
- J. MANDEL et C. DOHRMANN : Convergence of a balancing domain decomposition by constraints and energy minimization. *Numerical Linear Algebra with Applications*, (10):639–659, 2003. 13, 18



- K. MAO et C. SUN : A refined global/local finite element analysis method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:29–43, 1991. 2
- A. MOBASHER AMINI, D. DUREISSEIX, P. CARTRAUD et N. BUANNIC : A micro-macro strategy for ship structural analysis with FETI-DP method. *In III European Conference on Computational Mechanics Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering, Lisbon, Portugal*, pages 233–240, 2006. 51
- A. NOUY : Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en temps et en espace pour le calcul de structures fortement hétérogènes. *Thèse de doctorat*, pages 1–211, 2003. 2
- K. PARK et C. FELIPPA : A variational principle for the formulation of partitioned structural system. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 47:395–418, 2000. 61, 63
- L. QUIROZ et P. BECKERS : Non-conforming mesh gluing in the finite elements method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:2165–2184, 1995. 61, 63, 64
- D. RIXEN : *Substructuring and dual methods in structural analysis*. Phd thesis, Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées, 1997. 61, 64, 65
- D. RIXEN : Extended preconditioners for the feti method applied to constrained problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54:1–26, 2002. 79
- D. RIXEN et C. FARHAT : A simple and efficient extension of a class of substructure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:501–534, 1999. 29, 31, 111
- D. RIXEN, C. FARHAT et M. GÉRADIN : A two step, two-field hybrid method for the static and dynamic analysis of substructure problem with conforming and non-conforming interfaces. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 154:229–264, 1998. 63
- Y. SAAD : *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. PWS publishing company, 3rd edition édition, 2000. 12
- P. SUQUET : *Introduction à la mécanique des matériaux composites*. Cours, école polytechnique. 1990. 75
- S. TIMOSHENKO et J. GOODIER : *Theory of elasticity*, volume Third Edition. Mac Graw-Hill, 1970. 92
- A. TOSELLI et O. WIDLUND : *Domain Decomposition Methods - Algorithms and Theory*, volume Springer Series in Computational Mathematics. Springer, 2005. 6
- J. WHITCOMB : Iterative global - local finite element analysis. *Computer and Structure*, 40:1027–1031, 1991. 2



B. WOHLMUTH : A mortar finite element method using dual space for the lagrange multipliers. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38:989–1012, 2000. 61

O. ZIENKIEWICZ et R. TAYLOR : *The finite element method*. Butterworth Heinemann, fifth édition, 2000. 8, 76

