



HAL
open science

Détection de filaments dans des images 2D et 3D : modélisation, étude mathématique et algorithmes

Alexis Baudour

► **To cite this version:**

Alexis Baudour. Détection de filaments dans des images 2D et 3D : modélisation, étude mathématique et algorithmes. Interface homme-machine [cs.HC]. Université Nice Sophia Antipolis, 2009. Français. NNT : . tel-00507520

HAL Id: tel-00507520

<https://theses.hal.science/tel-00507520>

Submitted on 30 Jul 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de Sciences

Spécialité : **Mathématiques**

préparée au laboratoire **Laboratoire J.A Dieudonne**

dans le cadre de l'École Doctorale **EDSFA**

présentée et soutenue publiquement

par

Alexis Baudour

le 18 mai 2009

Titre:

**Détection de Filaments dans des images 2D et 3D;
modélisation, étude mathématique et algorithmes**

Directeur de thèse: **Gilles Aubert**

Co-directeur de thèse: **Laure Blanc-Féraud**

Jury

M. Jacques Blum,	Président du jury
M. François Alouges,	Rapporteur
M. Denis Friboulet,	Rapporteur
M. Jean-Christophe Olivo-Marin,	Examineur
M. Yann Le Guilloux,	Examineur
M. Gilles Aubert,	Directeur de thèse
Mme. Laure Blanc-Féraud,	Co-directeur de thèse

Résumé

Cette thèse aborde le problème de la modélisation et de la détection des filaments dans des images 3D. Nous avons développé des méthodes variationnelles pour quatre applications spécifiques :

- l'extraction de routes où nous avons introduit la notion de courbure totale pour conserver les réseaux réguliers en tolérant les discontinuités de direction.
- la détection et la complétion de filaments fortement bruités et présentant des occultations. Nous avons utilisé la magnétostatique et la théorie de Ginzburg-Landau pour représenter les filaments comme ensemble de singularités d'un champ vectoriel.
- la détection de filaments dans des images biologiques acquises en microscopie confocale. On modélise les filaments en tenant compte des spécificités de cette dernière. Les filaments sont alors obtenus par une méthode de maximum à posteriori.
- la détection de cibles dans des séquences d'images infrarouges. Dans cette application, on cherche des trajectoires optimisant la différence de luminosité moyenne entre la trajectoire et son voisinage en tenant compte des capteurs utilisés.

Par ailleurs, nous avons démontré des résultats théoriques portant sur la courbure totale et la convergence de la méthode d'Alouges associée aux systèmes de Ginzburg-Landau. Ce travail réunit à la fois modélisation, résultats théoriques et recherche d'algorithmes numériques performants permettant de traiter de réelles applications.

Mots clefs : Image 3D, déconvolution, segmentation, filament, méthodes variationnelles, microscopie confocale.

Abstract

This thesis is devoted to the filament modeling and to the detection problem in 3D images. We developed some variational methods for four specific applications :

- We use the new concept of total curvature for the road detection in order to preserve a smooth network with corners.
- Detection and completion of filaments with strong noise component and occultations. We use magnetostatic and Ginzburg-Landau's theory to represent filaments as the singularities set of a vector field.
- Filaments detection in biological images produced by confocal microscopy. We modelize filaments taking into account characteristics of the confocal microscopy. The filaments are obtained with a maximum a posteriori estimation.
- Targets detection in sequences of infrared images. In this application we try to find trajectories optimizing the average luminosity between the trajectory and its neighbourhood, taking into account the differences between sensors.

Furthermore, we prove theoretical results relative to the total curvature and the convergence of Alouges' method associated to Ginzburg-Landau systems. This work gathers both modeling, theoretical results and development of effective numerical algorithms adapted to actual applications.

Keywords : 3D image, deconvolution, segmentation, filament, variational methods, confocal microscopy

Remerciements

Ce travail a été effectuée au laboratoire J.A. Dieudonné d'analyse numérique et au projet Ariana. Je remercie les deux équipes de ces laboratoires de m'avoir accueilli chaleureusement et de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions matérielles et morales.

Mes premières pensées vont naturellement à mes directeurs de thèse Laure Blanc-Féraud et Gilles Aubert qui m'ont guidé tout au long de cette thèse.

Je remercie les Professeurs Alouges et Friboulet d'avoir accepté de rapporter mon manuscrit.

Je suis heureux que Jacques Blum, Jean-Christophe Olivo-Marin et Yann Le Guilloux aient également accepté de participer à mon Jury.

Outre mes directeurs, de nombreuses personnes m'ont apporté un soutien scientifique et moral. Je tiens à remercier Pierre Weiss, pour les nombreux échanges que nous avons eus. Je remercie également l'ensemble du projet Ariana en particulier Alexandre Fournier, Olivier Zammit Ting Peng, Caroline Chaux, Guillaume Perrin, Maria Kulikova, Daniele Graziani et Jean-François Aujol.

Je remercie l'ensemble de l'équipe d'analyse numérique de l'UNSA en particulier L. Almeida, D. Chiron et L. Guillot.

Je remercie également Pooran, Sapna, Anna, Fabrice, Fabien, NinaWilliams et Oink pour leur soutien.

Cette thèse est dédiée à la mémoire Joël Rizzo.

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	iv
Table des matières	vii
Table des figures	xi
Introduction	1
1 Etat de l'art	7
1 Introduction	7
2 Méthodes stochastiques	8
2.1 Champs de Markov	8
2.2 Processus ponctuels marqués	8
3 Morphologie mathématique	9
4 Filtrage	11
5 Les méthodes variationnelles	14
6 Méthodes utilisant les ondelettes	15
7 Méthodes utilisant les SVM	18
2 Détection et complétion de filaments par une approche vectorielle	19
1 Introduction	19
2 Détection de Filaments	21
2.1 Localisation des filaments	22
2.2 Définition et calcul du squelette des filaments	23
2.3 Résultats	26
2.4 Le modèle de Ginzburg-Landau	27
2.5 Orientation des filaments	33
2.6 L'algorithme de complétion	34
3 Résultats	37
4 Conclusion	37

3	Minimisation du modèle de Ginzburg-Landau par l'algorithme de F. Alouges	41
1	Introduction	41
2	Résultats théoriques pour des champs de \mathbb{R}^3 dans S^2	42
3	Algorithme de F. Alouges pour des champs de \mathbb{R}^3 dans S^1	46
4	Algorithme discret de F. Alouges	47
5	Propriétés de l'algorithme de F. Alouges discret	48
	5.1 Equation différentielle vérifiée par u^m	48
	5.2 u^m n'est pas un minimum local de E_m	53
6	Etude de la convergence de la solution discrète vers la solution continue	55
	6.1 Introduction	55
	6.2 $u_\epsilon^m \rightarrow u_\epsilon$ lorsque m tend vers l'infini	55
	6.3 $u_\epsilon^m \rightarrow u^m$ lorsque ϵ tend vers 0	56
7	Propriétés de la suite u^m	58
	7.1 Majoration de $E(u^m)$	58
	7.2 Minoration de $E_m(u^m)$	61
	7.3 Etude de $\int_\Omega (1 - \ u^m\ ^2)^2 dx$	62
8	Conclusion	64
4	Courbure totale et détection de filaments	65
1	Définition d'un filament	66
2	Résultats théoriques sur la courbure totale	67
	2.1 Cas des courbes C^2	67
	2.2 Théorèmes de structures	68
	2.3 Le théorème de collage	69
3	Exemples de courbes BCT dans \mathbb{R}^2	75
	3.1 Exemples de courbes de courbure totale finie	75
	3.2 Exemple de courbure totale infinie	78
4	Détection de routes	81
	4.1 Algorithme	81
	4.2 Résultats pour des images de routes	82
5	Complément sur la courbure totale	85
6	Cas des courbes non simples	85
	6.1 Définition	85
7	Exemples dans \mathbb{R}^2	86
8	Nouvelle définition de la courbure totale	88

5	Modèle Gaussien	93
1	Modèle 2D	93
	1.1 Modélisation	93
	1.2 Energie proposée	95
	1.3 Minimisation de l'énergie E	98
	1.4 Algorithme	100
2	Résultats	102
3	Modèle 3D	104
	3.1 Modèle proposé	104
	3.2 Résultat en 3D	106
6	Détection de cible dans des séquences d'Image (confidentiel)	111
1	Introduction	111
2	Description de la méthode de détection	114
3	Discrétisation du problème	115
4	Algorithme	116
5	Résultats	118
7	Annexes	123
1	Majoration de $\int_{\Omega}(1 - u^m ^2)^2 dx$ en $\log(m)$	123
2	Preuve de la minoration de $\nabla u^m(x)$ sur un triangle	127
3	Calcul d'intégrale Gaussienne	128
	Bibliographie	131

TABLE DES MATIÈRES

Table des figures

1	Image d'un croisement de routes et Image réelle de filaments d'actine	3
1.1	Ellipse de taille minimale englobant les objets et leurs axes principaux	11
1.2	(a) Description multi-échelle de courbes par ondelettes et (b) par curvelets	17
2.1	L'ensemble des points de discontinuité de u_* relie a_1 et a_2	21
2.2	Représentation de v_1	22
2.3	En haut : image floue; au milieu : image bruitée et floue, PSNR=7.06 dB (image bruitée par rapport à image floue en haut); en bas : $v_1(x)$ pour $x \in M_\alpha$	24
2.4	Champs de vecteurs B' et A.	25
2.5	Squelette des filaments obtenu à partir de la Figure 2.3.	27
2.6	Image réelle de filament d'actine.	28
2.7	Squelette des filaments obtenu à partir de la Figure 2.6.	29
2.8	Image synthétique avec 3 filaments, PSNR=7.2dB.	30
2.9	Résultat de détection obtenu à partir de la Figure 2.8.	31
2.10	W_δ et W_d	33
2.11	A gauche : bonne orientation, à droite : mauvaise orientation pour la complétion.	34
2.12	Algorithme d'orientation.	35
2.13	En haut image originale, au milieu complétion des filaments, en bas image d'une coupe du champ u	36
2.14	Complétion des filaments trouvés dans la Figure 2.3.	38
2.15	Résultat pour une jonction triple.	38
3.1	Représentation de u^m	53
4.1	courbe D_1	76
4.2	courbe D_2	77
4.3	D : exemple de courbure totale infinie	79
4.4	Détection de routes par l'algorithme 4.1	83

TABLE DES FIGURES

4.5	image d'un croisement de routes par l'algorithme 4.4.1, en haut image originale, à gauche et à droite détection avec une longueur minimale de 7 pixels, en bas une détection avec une longueur minimale de 5 pixels	84
5.1	Représentation des valeurs dans l'axe orthogonal à un filament passant par x de la gaussienne en bleu et des valeurs des pixels correspondants	94
5.2	Représentation de $C(y_i)$, v et θ	95
5.3	Représentation d'une image de filaments de direction aléatoire.	96
5.4	Représentation de l' image convoluée observée après discrétisation et ajout d'un bruit gaussien.	97
5.5	Représentation de χ_1 et χ_2	98
5.6	Représentation F_n et F'_n	102
5.7	Résultat de la détection de la Figure 5.4 et comparaison avec l'image originale (Figure (5.3)).	103
5.8	Image 3D de filaments obtenue par microscopie confocale.	107
5.9	Résultat de la détection sur une image 3D de filaments en microscopie confocale.	108
5.10	Résultat de la détection sur une image 3D de filaments en microscopie confocale.	109
6.1	La cible se situe au milieu de l'image en dessous des nuages et s'étend sur trois pixels	112
6.2	La cible se situe au milieu des nuages, cachée par ces derniers, c'est le point le plus lumineux de la zone nuageuse	113
6.3	S_1 et S_2 sur chaque slide temporel	115
6.4	représentation de $\chi_1(i, j)$	116
6.5	représentation de $\chi_1(i, j)$ et $\chi_2(i, j)$	117
6.6	représentation de D^t et D^{t+1}	118
6.7	Résultat de notre détection sur l'image de la Figure (6.1)	119
7.1	Représentation de $\tilde{C}(y_i)$, θ , I_1 , I_2 et I_3	129

Introduction

Le problème de la détection d'objet dans une image est un thème central en traitement d'images. Pour interpréter de manière rapide et automatique l'information contenue dans une grande quantité d'images, il est souvent nécessaire dans un premier temps d'isoler les objets significatifs, pour permettre l'étude de leurs propriétés. De nombreuses méthodes ont donc été développées pour détecter des textures, des contours, des points, des formes spécifiques...

Parmi ces problèmes celui de la détection des filaments est certainement l'un des plus difficiles. Nous donnerons dans cette thèse une définition précise des filaments dans une image. Nous nous contenterons pour l'instant de l'idée intuitive suivante : Dans une image I tridimensionnelle, un filament est un objet qui peut être assimilé à une courbe. Les types de difficultés rencontrées pour la détection d'un filament sont sa finesse, sa non régularité, le bruit présent dans l'image, son faible contraste et le problème de l'interprétation globale.

Contrairement aux structures tubulaires, les filaments peuvent être assimilés à des structures de dimension 1. De plus une image numérique est représentée à une résolution finie. A ce phénomène s'ajoute le plus souvent une convolution due au système optique. Ces effets de discrétisation peuvent engendrer une perte importante de l'information originale. La différence essentielle entre un filament et un contour d'un objet est que dans le premier cas, il n'y a pas de variation brusque de l'intensité dans un voisinage du filament. Les pixels dans l'image qui sont susceptibles d'aider à la localisation du filament sont en nombre limité, contrairement à une détection de contour où la mesure d'une différence de luminosité entre deux zones peut suffire à fournir une localisation approchée. Cette limitation rend a priori peu fiable les méthodes utilisant des schémas numériques utilisant un nombre important de pixels comme par exemple les opérateurs différentiels d'ordre trois ou plus.

Un deuxième problème est la non régularité de la courbe associée aux filaments. La direction du filament peut présenter des discontinuités à cause d'occlusions par exemple. De plus les problèmes de convolution et de discrétisation voire de sous résolution induisent des difficultés sur le positionnement et même sur la définition

de la courbe associée à un filament. En outre cette courbe n'est pas nécessairement simple. Les cas de jonctions multiples et de portions de filaments contigus sont fréquents dans le cadre de l'extraction de routes par exemple.

Par ailleurs, on retrouve des difficultés communes à de nombreux problèmes en traitement d'images, comme la présence de bruit (dont les caractéristiques peuvent être inconnues) ou un faible contraste, par exemple dans le cas des images biologiques. Ces particularités sont accentuées par la fragilité de l'information sur le filament contenu dans l'image de par la finesse de ce dernier.

En outre dans des images présentant un bruit important, de nombreuses occultations ou un très faible contraste, un filament ne se différencie du bruit que par ses caractéristiques globales. Trouver les filaments dans leur globalité est un problème ardu. Une méthode de détection locale donne souvent un grand nombre de fausses alarmes positives et négatives. Il est alors complexe de reconstruire un filament dans son ensemble à partir d'une détection locale. C'est pourtant la méthode la plus utilisée. En effet une recherche exhaustive de l'ensemble des filaments possibles dans l'image se heurte souvent à un coût prohibitif en temps de calcul. On peut également initialiser la recherche avec un filament de base et faire évoluer sa position et sa forme pour satisfaire un critère particulier, mais ce type de méthode converge vers des maxima locaux qui ne correspondent pas toujours à de réels filaments.

Chaque application de détection de filaments présente une combinaison particulière des difficultés précédemment citées. Ces différences sont illustrées par la figure (1) qui donne une application d'extraction de routes et une image biologique. Aucune méthode ne peut donc être la panacée à toutes les situations. Au contraire, il convient d'adapter chaque méthode pour traiter efficacement les difficultés rencontrées. Nous proposons donc dans cette thèse quatre méthodes, pour quatre types d'application :

- Les images de routes.
- Les images de filaments présentant un bruit important et des occultations.
- Les images biologiques issues de la microscopie confocale.
- La détection de cible dans des séquences d'images infrarouges.

Des résultats sur des images réelles sont données pour chacune des applications. Nous remercions l'Institut Pasteur et l'entreprise Sagem DS pour leur collaboration et de nous avoir fourni plusieurs jeux d'images.

Cette thèse est un travail de mathématiques appliquées. Elle aborde le problème de la détection et de la complétion de filaments et utilise des outils mathématiques spécifiques. Elle comporte donc un mélange de parties mathématiques, et de parties

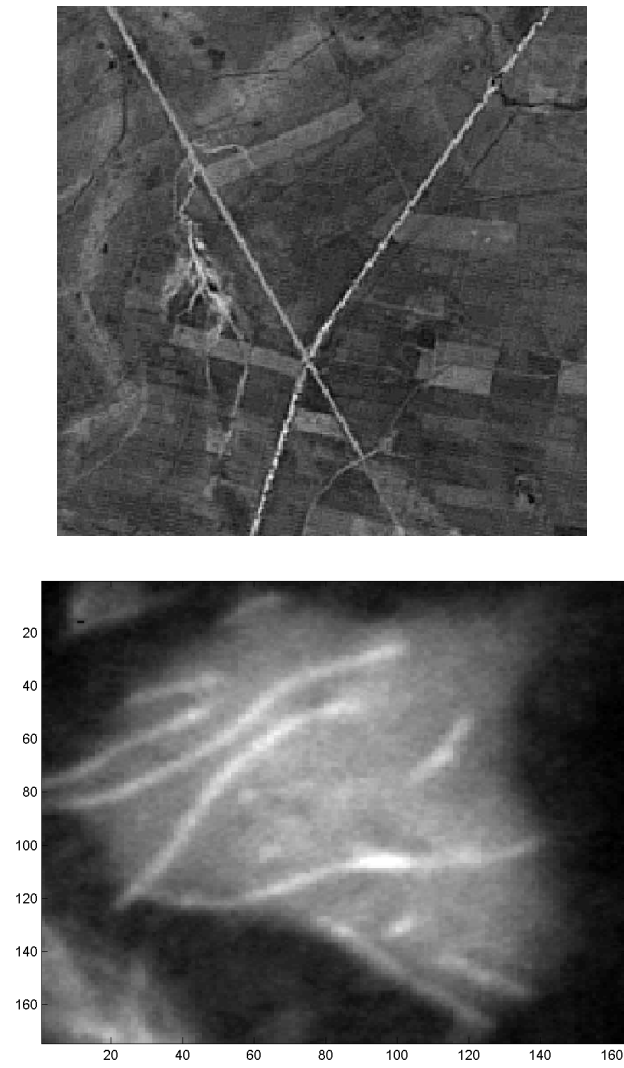


FIG. 1 – Image d'un croisement de routes et Image réelle de filaments d'actine

plus dédiées au domaine du traitement d'images. Les chapitres 1,2,5 et 6 sont orientés traitement d'images, tandis que les chapitres 3 et 4 sont plutôt des chapitres mathématiques.

Cette thèse est organisée de la façon suivante :

- Dans le **chapitre 1**, un état de l'art sur les différentes méthodes de détection et leurs applications est proposé. Nous avons regroupé en catégories les méthodes suivant le type de mathématique utilisé. On distinguera donc les méthodes stochastiques, les méthodes utilisant la morphologie mathématique, les méthodes de filtrages, les méthodes variationnelles et les approches par dictionnaires.
- Le **chapitre 2** présente une méthode de détection et de complétion pour les images de filaments présentant un bruit important et des occultations. Nous utilisons des idées issues de la magnétostatique pour représenter les filaments par des champs vectoriels plus faciles à traiter. Ces champs vectoriels nous donneront des conditions de bord pour une fonctionnelle inspirée de la théorie de Ginzburg-Landau dont le champ de vecteurs minimum u_* nous fournira la complétion désirée.
- Le **chapitre 3** est une étude théorique de la méthode de minimisation de F. Alouges pour les fonctionnelles de type Ginzburg-Landau présentées au chapitre 2 pour compléter les filaments. Nous reprenons l'étude faite dans [1] mais ici dans un cadre discret et pour des champs de vecteurs à valeur dans S^1 , le cercle unité de \mathbb{R}^2 . Les propriétés des solutions obtenues, les problèmes de dimension et la convergence des solutions discrètes vers les solutions continues sont abordés en détail.
- Dans le **chapitre 4**, nous introduisons la notion de courbure totale utile pour mesurer le caractère oscillant d'une courbe. La courbure totale est définie pour des courbes continues de classe C^1 par morceaux, éventuellement non simples (possibilité de jonctions). Nous démontrons des résultats théoriques portant sur la courbure totale et nous proposons une méthode d'extraction de routes utilisant cette notion.
- Dans le **chapitre 5**, nous avons donné un modèle de filaments en microscopie confocale tenant compte des spécificités de cette dernière en particulier le problème de convolution lié au système optique. Les filaments sont alors obtenus par une méthode de maximum à posteriori en minimisant la différence en norme L^2 entre le modèle théorique et l'image observée, ce qui correspond à l'hypothèse d'un bruit gaussien.

- Enfin le **chapitre 6** aborde le problème de la détection de cible dans des séquences d'images infrarouges. On cherche les trajectoires optimisants la différence de luminosité moyenne entre la trajectoire et son voisinage en tenant compte de la nature des capteurs CCD utilisés. Ce chapitre a été réalisé en collaboration avec la société Sagem Défense et demeure confidentiel.

Chapitre 1

Etat de l'art

1 Introduction

Il existe de nombreux travaux sur la détection de discontinuités sans saut dans des images comme la détection de filaments dans des images 2D ou 3D. Cela s'explique en partie par le grand nombre d'applications qui font intervenir la détection de structures fines. On pourra citer l'extraction de réseaux routiers [34, 46, 53], la détection de vaisseaux sanguins [39, 58], la détection de filaments dans des images biologiques [6, 30, 60], la détection de cibles pour les applications militaires...

De nombreuses difficultés sont attachées à la détection de filaments. Dans tout problème de traitement d'image, connaître les dégradations de l'image induites par le bruit ou la convolution due au système optique est très important. Le contraste par rapport au fond, la courbure, la finesse voire la sous résolution des filaments sont également des questions majeures. De nombreux problèmes de jonctions et de topologie sont aussi présents. En outre les occlusions doivent parfois être prises en compte dans la détection. Enfin le temps de calcul et la complexité des algorithmes peuvent être décisifs.

Une grande variété caractérise les méthodes qui ont été proposées, chacune essayant de s'adapter à l'application visée et à la combinaison particulière des difficultés présentées par cette dernière. On peut diviser les méthodes proposées suivant le domaine du traitement d'image auquel elles sont rattachées. Nous distinguerons les méthodes stochastiques, les méthodes à base de morphologie mathématique, les méthodes utilisant des filtres, les méthodes variationnelles et enfin les différentes approches par dictionnaires, en particulier les ondelettes.

2 Méthodes stochastiques

Les méthodes stochastiques sont courantes en traitement d'image. Elles sont en particulier utilisées dans la détection de réseaux, comme les routes, les fleuves ou les vaisseaux sanguins [33, 35, 51]. Ces objets peuvent être vus comme des structures de type filament.

2.1 Champs de Markov

Un champ de Markov est un processus stochastique dont les états futurs sont indépendants des états passés. Toute l'information de l'évolution future est contenue dans l'état présent. A chaque étape du processus le système peut changer d'état, ou demeurer invariant avec une certaine probabilité de distribution. Par exemple il peut s'agir d'une marche aléatoire sur les arêtes d'un graphe, et les étapes de transition (changement d'état) sont le déplacement d'un sommet à un sommet voisin, avec une distribution de probabilité indépendante de l'historique de la marche.

Cette méthode permet de caractériser localement les objets étudiés dans l'image. Dans le cadre de la détection de filaments, cette caractérisation peut être faite en termes de direction locale du filament, de contraste du filament par rapport au fond, de textures particulières, etc. Elle s'obtient par une comparaison de chaque pixel avec ses voisins. Les champs de Markov sont bien adaptés pour établir ces relations locales entre pixels. En contrepartie du fait du caractère local de ces relations, il est difficile d'imposer des contraintes géométriques globales sur les filaments recherchés.

Dans [55], les auteurs proposent une méthode pour détecter des segments qui repose sur des champs de Markov dans des espaces de configuration (position, taille, orientation). Dans un premier temps, on détermine un ensemble de segments candidats en utilisant deux détecteurs de lignes différents. Cette prédétection permet de construire un graphe sur les segments prédéfectés et les segments reliant ces derniers. Le graphe a les propriétés suivantes : chaque sommet est un segment, et deux sommets sont reliés par un arc si les segments ont une extrémité commune. Un champ de Markov est défini sur ce graphe et on obtient le réseau cherché par une méthode de recuit simulé.

2.2 Processus ponctuels marqués

Les processus ponctuels marqués ont l'avantage par rapport aux champs de Markov d'autoriser une initialisation aléatoire et l'ajout ou la suppression d'objets (position et caractéristiques) dans l'ensemble de l'image. Par exemple pour la détection

de réseaux routiers, on peut partir d'une prédétection grossière des segments constituant les routes et éliminer les fausses alarmes au cours du processus. Les processus ponctuels marqués permettent également de travailler avec des objets géométriques et non plus tenir compte des pixels et de tenir compte des interactions géométriques fortes entre les objets (segments dans le cas de l'extraction d'un réseau routier). On peut donc retrouver par cette méthode des segments de routes qui ont échappé à la prédétection, en utilisant l'information des segments voisins déjà détectés.

De façon similaire aux approches par champs de Markov sur graphe, les processus ponctuels marqués, encore appelés processus objet, reposent sur une modélisation de la scène par une collection d'objets et donnent lieu à la minimisation d'une énergie définie sur la totalité de l'image.

Comme application des processus ponctuels marqués avec des segments comme objets, on peut citer [34] et [54]. Les auteurs utilisent une modélisation où le réseau routier étudié est le résultat d'un processus ponctuel. Le réseau est le résultat d'un jet aléatoire de segments définis par quatre paramètres : position du centre, orientation, largeur et longueur. On modifie ensuite la position de ces segments jusqu'à obtenir un réseau linéique. Chaque segment dépend de quatre paramètres. Une énergie d'interaction est définie sur les segments voisins. Cette énergie dépend du nombre de segments dans une zone, du nombre de segments isolés, du nombre de segments reliés (c'est à dire les segments dont les extrémités sont proches), de la distance entre les extrémités et de la différence des orientations de ces derniers. L'énergie est minimisée par un recuit simulé intégré dans une simulation MCMC ("Markov Chain Monte Carlo"). Le nombre de segments n'est pas fixé mais est ajusté au cours de l'optimisation.

Le choix de l'énergie dépend des propriétés que l'on souhaite favoriser ou pénaliser. On peut par exemple pénaliser les segments isolés ou une trop grande courbure entre deux segments, favoriser la colinéarité, etc. L'énergie contient un terme image qui favorise un segment homogène et contrasté par rapport à son environnement. Cette méthode donne de bons résultats dans différents types d'images moyenne et haute résolution : aérienne, satellitaire et radar.

3 Morphologie mathématique

La morphologie mathématique est l'étude des objets contenus dans des images en fonction de leurs caractéristiques : forme, taille, relation avec leur voisinage, texture, et niveaux de gris ou de couleurs observés. Ces caractéristiques sont définies en utilisant des opérateurs topologiques. Dans le cas d'une application pour les détections de filaments, l'attribut de la forme sera le plus utilisé.

L'aspect de description de formes est fourni par la définition de formes géométriques élémentaires, appelées éléments structurants; ceux-ci définissent des primitives de base dont on pourra confirmer ou infirmer la présence dans la forme étudiée au moyen d'opérations ensemblistes comme l'érosion ou la dilatation. La dilatation morphologique de X par l'élément structurant B est définie par :

$$\delta_B(X) = \{x + b; b \in B, x \in X\}.$$

L'érosion de X par l'élément structurant B est définie par :

$$\epsilon_B(X) = \{x \in X; \forall b \in B; x + b \in B\}.$$

Les outils proposés ont été développés au départ pour traiter des images binaires. Leur utilisation a été ensuite étendue aux images en niveaux de gris : on parle alors de morphologie mathématique fonctionnelle.

[22] propose une méthode entièrement fondée sur la morphologie mathématique. Dans un premier temps, l'image est "binarisée", puis les structures recherchées sont reconstruites. La binarisation consiste à extraire une image binaire sur laquelle figurent les pixels susceptibles d'appartenir à l'entité étudiée. Les routes sont d'abord extraites par la transformation du chapeau haut de forme sur l'image fermée (l'image est érodée puis dilatée et retranchée à l'image de départ), permettant de mettre en évidence les structures fines et claires. L'image résultat est ensuite seuillée pour former l'image binarisée. Le réseau est finalement reconstruit en effectuant une dilatation, puis une squelettisation.

On peut trouver dans [5] une méthode pour la détection des routes utilisant une combinaison d'opérations morphologiques dans des images haute résolution. Dans un premier temps, l'image originale est segmentée et les routes sont séparées grossièrement de leur environnement. Une analyse granulométrique est réalisée pour déterminer la distribution de la taille et de la forme des objets dans l'image. Cette étape permet de sélectionner un seuil qui sera utilisé pour l'opération suivante. Une ouverture triviale est ensuite effectuée. Elle permet de déterminer les composantes convexes de l'ensemble des routes prédétectées. Puis on cherche les ellipses de tailles minimales englobant ces composantes connexes et leur axe principal (voir Figure 1.1). Ceci permet de garder uniquement les composantes connexes de l'image dont l'axe principal de l'ellipse minimale incluante est supérieur au seuil déterminé précédemment. Le réseau principal est alors extrait, et plusieurs opérations de morphologie mathématique sont à nouveau réalisées pour améliorer le résultat.

Une méthode de détection et de complétion des filaments pour des occlusions de faible dimension, est proposée dans [56] pour des images en 2D. Elle repose dans un

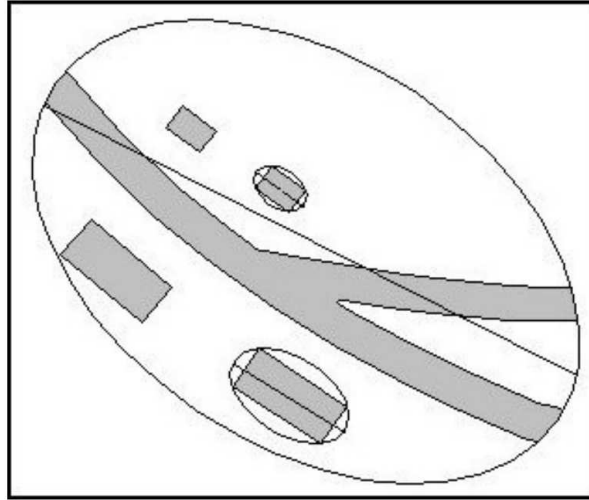


FIG. 1.1 – Ellipse de taille minimale englobant les objets et leurs axes principaux

premier temps sur le calcul sur tous les objets présents dans l'image I du "average squared gradient" (ASG) qui correspond à une version lissée du gradient classique en tenant compte des valeurs du gradient sur les points voisins. Dans un deuxième temps ce gradient est diffusé à travers l'ensemble de l'image I par un processus appelé : "average squared gradient vector flow". Ce processus repose sur la minimisation de l'énergie suivante :

$$E(v) = D(v) + \alpha S(v)$$

avec

$$D(v) = \int_{supp(I)} \|d\|^2 \|v - d\|^2 dx dy,$$

d étant l'ASG et

$$S(v) = \int_{supp(I)} \left(\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy$$

Le premier terme est un terme d'attache aux données c'est à dire l'"ASG" et le second permet d'obtenir la régularité du champ diffusé. L'image de détection est obtenue à partir du gradient diffusé v .

4 Filtrage

Les techniques de filtrage permettent d'étudier la trajectoire d'un point au cours du temps à l'intérieur d'un espace appelé espace d'états, les règles connues qui ré-

gissent cette trajectoire permet d'assimiler cette approche à une évolution de type système dynamique. On peut penser par exemple au mouvement d'un pendule. Plus précisément étant donnée une trajectoire dans l'espace d'état et les observations passées, le filtrage correspond à un processus d'estimation de l'état courant sachant son passé et les observations courantes. Le filtre de Kalman récursif a été particulièrement utilisé pour la détection de routes, il permet d'estimer les paramètres (ici la position et la forme de la route) d'un système dynamique bruité. L'estimation des paramètres est nettement plus précise au sens statistique qu'une méthode locale utilisant une séquence de pixels adjacents. Le filtre de Kalman permet également d'éviter que les fausses alarmes perturbent l'estimation des paramètres, de plus il est relativement robuste au problème de jonctions et d'intersections des routes.

Un filtre de Kalman est utilisé pour le modèle dynamique suivant :

L'évolution de la position x_k à l'instant k est donnée par

$$x_k = F_k x_{k-1} + B_k u_k + w_k.$$

On dispose des observations z_k à l'instant k

$$z_k = H_k x_k + v_k.$$

Les opérateurs F_k, B_k, H_k sont des opérateurs linéaires, w_k et v_k des bruit ajoutés et u_k une variable d'état temporel connue. Le but est d'estimer les x_k connaissant les z_k , le filtre de Kalman n'utilise que l'estimation de la position à l'instant k pour estimer la position à l'instant $k + 1$.

Un filtre de Kalman récursif est utilisé dans [57] pour prédire la position et la forme de la route à chaque instant. L'algorithme n'est pas appliqué à une séquence d'images, mais à une image fixe. Les routes sont décomposées en segments et le parcours de ces segments peut être vu comme un système dynamique. L'algorithme est initialisé par un segment fourni par un opérateur à partir duquel un profil caractéristique de la route est défini. La prédiction d'un nouveau segment se fait à partir des estimations de la direction et de la courbure de la route. Une mise en correspondance entre le profil caractéristique de la route et le profil courant permet d'évaluer la distance entre les deux profils. La position du nouveau segment est mise à jour selon cette distance. En incorporant les positions obtenues antérieurement, les autres paramètres tels que la direction et la courbure de la route peuvent être également mis à jour.

Une technique de filtrage particulière [42] peut être utilisée pour effectuer un suivi de route dans des images aériennes. L'intérêt du filtrage particulière basé sur des simulations séquentielles de type Monte Carlo, et de pouvoir maintenir plusieurs

hypothèses de suivi en même temps. Les distributions *a posteriori* sont estimées grâce un ensemble d'échantillons (appelés particules) qui sont successivement pondérés (en général selon la vraisemblance aux observations) et propagés. La flexibilité de l'approche permet de prendre en compte dans le modèle la régularité du filament (en particulier par rapport au gradient de l'image), la gestion des coins et la largeur faiblement variable des routes. Le processus est initialisé par la donnée d'un point d'amorce.

L'algorithme de [42] est modifié dans [10] en le rendant automatique grâce à l'extraction de segments d'amorce à l'aide de la transformée de Hough et de considérations topologiques. Une information tenant compte de l'homogénéité de la route est ajoutée ainsi que la gestion des petites occultations. Enfin, les auteurs proposent de fusionner plusieurs résultats selon une mesure quantitative d'extraction de la route.

Dans [29] Jacob étudie les filtres de la forme :

$$h(x, y) = \sum_{k=1}^M \sum_{i=0}^k \alpha_{k,i} \frac{\partial^{k-i}}{\partial x^{k-i}} \frac{\partial^i}{\partial y^i} g(x, y),$$

où g est une fonction fenêtre isotrope. Pour une image f , le score de détection est donné par

$$r^*(x) = \sup_{\theta} f(x) * h(R_{\theta}x),$$

avec R_{θ} une matrice de rotation. L'auteur montre que certains de ces filtres donnent le filtre de Canny pour les contours.

Dans [20] on s'intéresse au problème de la détection des filaments par filtrage dans le cas où les niveaux des deux zones bordant les filaments sont différents. La position du filament estimée par la réponse d'un filtre gaussien dépend de cette différence de niveaux de gris. Le filtre gaussien utilisé est de type 1D. Pour les images 2D, on estime localement la direction du filament par une utilisation classique des valeurs propres de la matrice Hessienne. Le filtre 1D est appliqué dans la direction orthogonale au filament. Les filaments sont déterminés par un algorithme de chaînage : on part d'un point de détection et on choisit le pixel voisin sur lequel la direction estimée du filament est la plus proche possible de celle du point de départ.

L'auteur propose également de déterminer la largeur des filaments en détectant les points représentant les bords droit et gauche des filaments en utilisant un filtre lié au gradient de l'image. La méthode permet une précision subpixelique.

5 Les méthodes variationnelles

Les méthodes variationnelles reposent sur une minimisation d'une énergie. Cette minimisation s'effectue en général en déterminant une équation d'évolution représentant une descente de gradient qui converge vers un minimum. L'énergie choisie est la combinaison de fonctions coût qui favorisent la présence de propriétés désirées, comme par exemple la régularité sur les objets étudiés.

Dans le cas de la recherche de contours, la technique des snakes est souvent utilisée. Elle est aussi utilisée pour la détection des filaments représentés par des courbes fermées. Il s'agit de courbes paramétrées qui se déforment suivant diverses contraintes. Les snakes ont été proposés dans [32] en utilisant une fonctionnelle qui est la somme d'une énergie interne et d'une énergie liée à l'image. Considérons un contour γ et une image I définis dans un sous ensemble Ω de \mathbb{R}^2 . La fonctionnelle proposée peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} E(\gamma) &= E_{interne}(\gamma) + E_{image}(\gamma, I) \\ &= \int_{\gamma} (\alpha |\gamma_p(p)|^2 + \beta |\gamma_{pp}(p)|^2) dp - \int_{\gamma} |\nabla I(\gamma(p))|^2 dp, \end{aligned}$$

avec $\gamma_p(p)$ le vecteur tangent à la courbe, $|\gamma_{pp}(p)|$ la courbure et $\nabla I(\gamma(p))$ le gradient de l'image ; toutes ces quantités étant évaluées au point $\gamma(p)$. Plus généralement, on considérera l'énergie interne ou énergie géométrique comme une énergie d'a priori, définissant des propriétés intrinsèques au contour. E_{image} est un terme d'attache aux données.

Comme application spécifique des snakes à la détection des filaments on peut citer [28]. Un des problèmes de la méthode des snakes est le temps de calcul qui peut être assez long ; un autre inconvénient est la difficulté de changer de topologie dans un modèle paramétrique. Dans le cas d'une détection de filaments cela peut être problématique s'il y a des jonctions ou si le nombre de filaments à détecter est inconnu. Pour corriger cela, on peut utiliser la méthode des level sets introduite dans [41]. L'idée est de remplacer l'évolution d'une courbe paramétrée par l'évolution des lignes de niveau d'une fonction ce qui autorise des fusions et des séparations d'objets. Cependant les lignes de niveau obtenues sont nécessairement des courbes fermées.

Dans [31] on introduit un modèle de particules chargées inspiré par la physique. Il est basé sur la simulation de particules chargées se déplaçant dans un champ électrostatique. Les charges sont attirées vers les contours des objets que l'on souhaite détecter par un champ électrique lié au gradient de l'image. Cette technique peut s'appliquer en particulier à des images de vaisseaux sanguins.

On notera que la méthode des snakes ou des level sets n'est pas vraiment adaptée à la détection de filaments car ces méthodes ont été initiées pour la détection de contours caractérisés par un saut de discontinuité de l'intensité dans toute direction transverse à leurs directions. De plus ces méthodes sont opérantes pour des courbes fermées.

Dans [44], on remplace les snakes habituels par des fonctionnelles quadratiques s'exprimant comme des intégrales doubles. L'énergie en un point dépend alors de l'influence de l'ensemble des autres points de la courbe. Cette méthode a été utilisée pour l'extraction de routes en télédétection.

Dans [60], Bo Zhang présente une modélisation d'images de bâtonnets en microscopie. L'image M_N est modélisée par :

$$M_N(x, y) = b + \sum_{i=1}^N I_{B_i}(x, y),$$

avec N le nombre de bâtonnets, b le bruit de l'image supposé gaussien, $I_{B_i}(x, y)$ est l'image observée du i ème bâtonnet qui dépend de sa position, de son orientation, de sa longueur et de son intensité. Ces paramètres sont estimés par une prédétection. On cherche alors à minimiser la différence quadratique (1.1) entre M_N et l'image originale, en faisant évoluer les paramètres à optimiser, à savoir

$$\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} (M_N(i, j) - I(i, j))^2 \quad (1.1)$$

La position du centre des bâtonnets ne se situe pas nécessairement sur un point de la grille pixelique ; ceci permet d'obtenir une détection en super-résolution. On peut également séparer deux bâtonnets très proches.

6 Méthodes utilisant les ondelettes

Une ondelette ψ_1 est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ de moyenne nulle qui oscille localement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(t) dt = 0,$$

ψ_1 peut être dilatée/contractée (facteur d'échelle $e \in \mathbb{R}_+^*$) et translatée (paramètre de localisation $u \in \mathbb{R}$) :

$$\psi_{u,e}(t) = \frac{1}{\sqrt{e}} \psi_1\left(\frac{t-u}{e}\right)$$

La transformée en ondelettes continue du signal f est donnée par :

$$W_f(u, e) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{e}} \psi_1^* \left(\frac{t-u}{e} \right) dt$$

Le signal f peut être reconstruit à partir de $W_f(u, e)$ en employant la relation suivante :

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi_1}} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(u, e) \frac{1}{\sqrt{e}} \psi_1 \left(\frac{t-u}{e} \right) du \frac{de}{e^2}$$

avec

$$C_{\psi_1} = \int_0^{+\infty} \frac{|\psi_1(w)|^2}{w} dw.$$

Les ondelettes présentent l'avantage de donner une information localisée, cependant tous les types de transformations de type ondelettes ne sont pas adaptés à la détection de filaments. Par exemple les ridgelets [16] proposent des décompositions de l'image suivant des lignes, c'est le cas également pour un autre type de transformée : la transformée de Radon [23, 27]. Malheureusement elles ne permettent pas de représenter des segments de tailles différentes de celle de l'image.

La transformée en curvelets [18] est adaptée à la représentation des singularités de type filaments. L'idée est de constater qu'un filament représente une discontinuité si on observe son profil orthogonal. Cependant si on l'observe dans toute sa longueur, cette structure devient relativement lisse et donc facilement représentable. Cette idée a été introduite pour la première fois par Donoho et Candès [18]. Parmi les applications possibles des curvelets on peut citer [17, 59] en restauration d'images, [12] en séparation des sources, ou encore [19] en approximation d'images. Les curvelets reposent sur une base d'éléments orientés permettant une représentation plus parcimonieuse des structures curvilignes.

La transformée peut se résumer en quatre étapes de la manière suivante :

1. Une décomposition en sous bandes de l'image. Soient les filtres $P_0, \Delta_s, s \geq 0$, où P_0 est un filtre passe-bas et les Δ_s , des filtre passe-bandes ; on associe à une image f la suite d'images $(P_0 f, \Delta_1 f, \Delta_2 f, \dots)$.
2. Chaque sous-bande obtenue est divisée en carrés dyadiques (on les multiplie par une fenêtre carrée)
3. Chaque partition obtenue est normalisée.
4. Enfin chacun de ces carrés est analysé à l'aide d'une transformée en ridgelets.

Cette transformée permet de représenter une courbe avec moins de coefficients qu'une transformée en ondelettes classique (voir Figure 1.2).

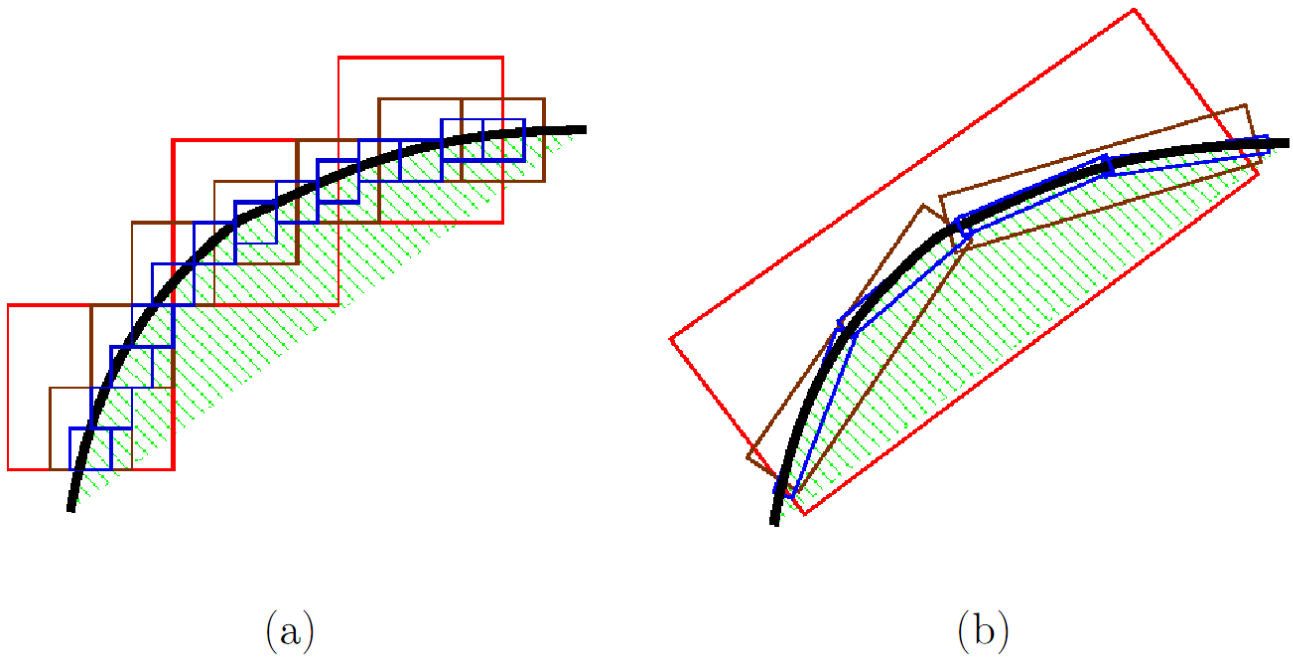


FIG. 1.2 – (a) Description multi-échelle de courbes par ondelettes et (b) par curvelets

7 Méthodes utilisant les SVM

[49] utilise les "Support Vector Machines" (SVM) comme méthode d'apprentissage pour la détection de filaments. Après une étape classique de débruitage, on calcule les valeurs propres de la matrice Hessienne de l'image à une échelle donnée σ (l'image I est convoluée avec une gaussienne G_σ de variance σ , puis on détermine la matrice Hessienne de l'image obtenue). Un certain nombre de tubes prédétectés servent de base d'apprentissage. Les valeurs propres $\lambda_1^\sigma(x)$, $\lambda_2^\sigma(x)$, $\lambda_3^\sigma(x)$ de la matrice Hessienne dans un voisinage du tube sont plongées dans un espace vectoriel de très grande dimension. Un produit scalaire est introduit sur cet espace vectoriel et est utilisé pour discriminer les autres portions tubulaires suivant un algorithme de SVM.

Chapitre 2

Détection et complétion de filaments par une approche vectorielle

1 Introduction

Dans cette section nous présentons un nouvel algorithme pour la détection et la complétion de structures fines de type filament dans des images 2D et 3D bruitées et floues. Notre application visée est la détection de filaments d'actine dans des images de cellules en microscopie confocale. Nous désignons par filament des structures de codimension $n-1$ dans un espace vectoriel de dimension n . Par exemple, en 3D, un filament est une ligne de discontinuité sans saut dans un volume homogène d'intensité constante inclus dans le support de l'image originale $I_r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, avec Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 . Généralement, les méthodes de prédétection donnent des filaments d'épaisseur non nulle à cause du flou introduit lors du processus d'acquisition. De plus certaines portions des filaments peuvent être manquantes à cause du bruit, d'un trop faible contraste ou d'une occultation. Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord affiner une prédétection dans le but de retrouver le filament original puis compléter les parties manquantes de cette détection. Pour la détection des filaments dans les images 2D et 3D, nous utilisons un champ de vecteurs tridimensionnel noté $\vec{\mathcal{B}}$ contenu localement dans le plan orthogonal au filament. Ce champ de vecteurs tourne localement autour du filament qu'on identifie comme l'ensemble de ses singularités (appelé ensemble de points de vorticité). En fait, les filaments peuvent être vus comme des lignes de courant et nous utilisons le champ magnétique associé $\vec{\mathcal{B}}$.

Le champ $\vec{\mathcal{B}}$ est donc la somme des contributions des différents filaments vus comme des lignes de courant. Travailler sur le champ $\vec{\mathcal{B}}$ au lieu de l'image originale présente plusieurs avantages. Tout d'abord le champ $\vec{\mathcal{B}}$ est un objet plus régulier

que l'image originale, il est donc plus facile d'utiliser des opérateurs différentiels sur ce dernier. De plus si une petite partie du filament est manquante à cause d'une occultation par exemple, le champ $\vec{\mathcal{B}}$ au niveau de la zone manquante en sera peu affecté car il est la somme de l'ensemble des contributions des filaments. Enfin on peut utiliser le champ $\vec{\mathcal{B}}$ dans le cas d'une situation topologique complexe comme une jonction de filaments.

La méthode de complétion (lorsque qu'une partie des filaments est manquante) est liée à la minimisation de l'énergie de Ginzburg-Landau (GL). L'introduction des modèles du type GL en traitement d'image est récente (cf [3, 25]).

Les modèles GL sont dédiés à l'étude de singularités de codimension k pour une champ u de \mathbb{R}^{n+k} dans \mathbb{R}^k [9, 36].

Plus précisément dans le cas 3D, nous chercherons un champ $u : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ minimisant

$$E_\epsilon(u) = \int_{\Omega} \left(\|\nabla u\|^2 + \frac{(1 - |u|^2)^2}{\epsilon^2} \right) dx$$

u étant égale à une fonction g sur la frontière $\partial\Omega$. La zone de complétion Ω et g sont définies à partir du champ de vecteurs $\vec{\mathcal{B}}$.

Il est montré dans [36] dans le cas où le degré de g est non nul (la notion de degré pour une fonctionnelle de type GL sera définie précisément par la suite), que la suite $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ des minimiseurs de E_ϵ converge à une sous suite près lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ vers un champ de vecteurs u_* dont l'ensemble des points de discontinuités relie les point de singularité de $g|_{\partial\Omega}$ de même degré (± 1). Par exemple sur la Figure 2.1 si a_1 et a_2 sont les deux seuls points de singularité de degré 1, l'ensemble de discontinuité de u_* est une ligne entre a_1 et a_2 . Cet ensemble de points de discontinuité sera le filament complété.

Pour les images en trois dimensions, calculer numériquement u_ϵ est généralement une tâche difficile pour ϵ petit. Nous utilisons dans un premier temps pour cela un algorithme proposé dans [47] qui consiste à résoudre une équation de diffusion pour un court intervalle de temps et d'appliquer un processus de renormalisation. L'algorithme est itératif et chacune des étapes s'exécute en alternance. Dans le chapitre suivant nous étudierons en détail une autre alternative proposée par F. Alouges [1].

Notons qu'il existe peu de méthodes dans la littérature dédiées à la détection et à la complétion de structures fines dans les images. La plupart d'entre elles s'appliquent aux structures tubulaires et non aux courbes [40, 45].

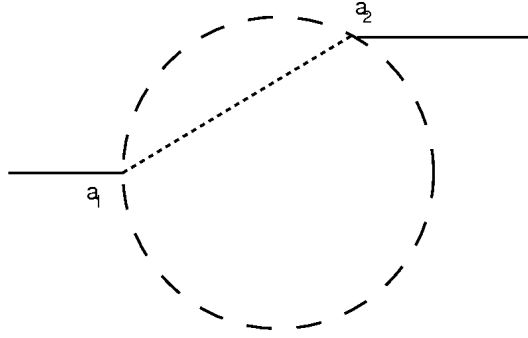


FIG. 2.1 – L'ensemble des points de discontinuité de u_* relie a_1 et a_2 .

Le chapitre s'organise de la manière suivante. Dans la section 1, nous définissons les notations et nous donnons notre définition d'un filament. Ensuite nous décrivons notre méthode de localisation des filaments en utilisant la matrice hessienne associée à l'image I . Ensuite nous construisons un champ de vecteurs \vec{B} dont l'ensemble des points de singularité donne le "squelette" des filaments. Nous utiliserons cette propriété pour détecter ces derniers. Afin d'améliorer la détection obtenue, nous introduisons le système d'équations de Ginzburg-Landau et nous montrons comment ces équations aux dérivées partielles nous permettent de compléter les parties manquantes des filaments. L'orientation des filaments sera un point important et nous l'examinerons en détail. Finalement nous donnerons des résultats numériques sur des images en 2D et en 3D.

2 Détection de Filaments

Nous définissons un filament par une courbe continue C^1 par morceaux incluse dans le support $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de l'image originale $I_r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $\vec{T}(x)$ la tangente à cette courbe en x et H_x le plan orthogonal à $\vec{T}(x)$. On suppose que pour tous $\vec{N} \neq 0$ et $\vec{N}' \neq 0$ inclus dans H_x :

$$\lim_{t \rightarrow 0} I_r(x + t\vec{N}) = \lim_{t \rightarrow 0} I_r(x + t\vec{N}') \quad (2.1)$$

On impose de plus que $I_r|_{H_x \cap \Omega}$ ait un maximum local en x . Nous détaillerons cette définition dans le chapitre 4.

En microscopie confocale, l'image observée I peut être approchée par la convolution de l'image originale I_r et d'un noyau gaussien [61]. Par conséquent dans l'image

observée I les filaments peuvent apparaître épais et flous. Notre but est de reconstituer les filaments originaux qui peuvent être vus comme le squelette des filaments épais.

2.1 Localisation des filaments

L'image 3D observée I est une fonction deux fois différentiable car nous supposons qu'elle est le résultat de la convolution de l'image réelle I_r avec un noyau gaussien G_σ de variance σ , i.e. $I = I_r * G_\sigma$. Les filaments peuvent être définis comme les extrema locaux de I , sans saut. Par exemple, si le fond est uniforme et que l'intensité est constante le long du filament, I_r peut être modélisée comme une image binaire : $I_r = 0$ dans le fond et $I_r = 1$ sur les filaments. D'après notre définition de filament pour tout point x du filament $I_r|_{H_x}$ est un maximum local, il est donc nécessaire d'utiliser un opérateur différentiel du second ordre pour qu'il explose au niveau des filaments, comme la matrice hessienne.

Nous notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres (avec $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$) et $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ les vecteurs propres de la matrice hessienne de I . On peut montrer que si des filaments sont présents dans une image alors $|\lambda_2|$ et $|\lambda_3|$ tendent vers $+\infty$ quand σ tend vers zéro sur le filament. De plus, nous avons $|\lambda_1| \ll |\lambda_2|$. Ceci nous mène à définir les ensembles M_α :

$$M_\alpha = \{(x, y, z); |\lambda_2 \lambda_3| > \alpha\}$$

où α est un seuil donné. La figure 2.2 résume les propriétés des λ_i et leurs interprétations :

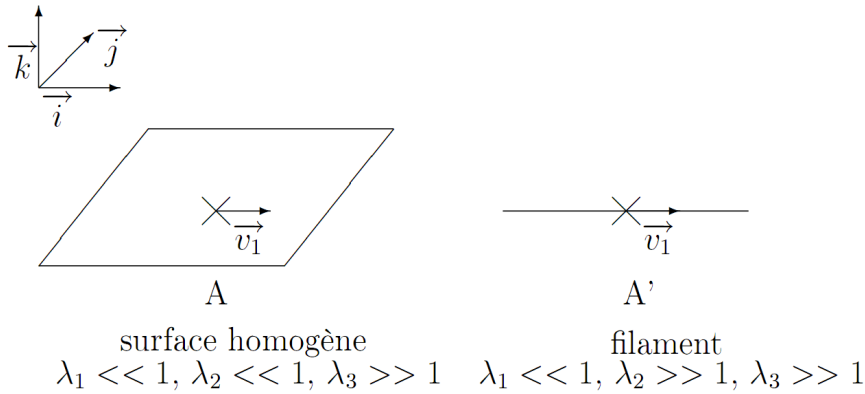


FIG. 2.2 – Représentation de v_1

L'ensemble M_α est utile pour la prédétection des filaments. Ils peuvent être caractérisés comme l'ensemble des points où l'image I a de grandes variations dans au moins deux directions (\vec{v}_2 and \vec{v}_3). Il s'ensuit que M_α contient des courbes, dont les directions sont données par $\vec{v}_1(x)$, ou des points isolés mais exclut les surfaces homogènes. En général, il y a un certain nombre de fausses alarmes et la détection obtenue ne donne pas des filaments fins (voir Figure 2.3). Dans cette figure les directions de $\vec{v}_1(x)$ pour $x \in M_\alpha$ sont assez précises pour donner une première localisation des filaments. Nous présentons dans la section suivante une méthode pour affiner cette prédétection dans M_α .

2.2 Définition et calcul du squelette des filaments

Notre but est d'affiner la prédétection. Avec les mêmes notations, nous notons $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs qui représente une prédétection des filaments :

$$\vec{v} = \begin{cases} \vec{v}_1 & \text{si } |\lambda_2 \lambda_3| > \alpha \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{cases}$$

M_α est le support du champ de vecteurs \vec{v} , et donne une première représentation des filaments épais.

Dans le but de modéliser un filament, nous faisons une analogie avec la magnéto-statique. Le filament est considéré comme un courant électrique et nous construisons le potentiel vecteur associé \vec{A} et le champ magnétique \vec{B} sur D .

$$\begin{aligned} \vec{A}(x) &= \int_{M_\alpha} \frac{\vec{v}(y)}{\|\vec{x}y\|} dy & \forall x \in D \\ \vec{B}(x) &= \text{rot } \vec{A} & \forall x \in D \end{aligned}$$

Nous introduisons aussi le champ de vecteurs $\vec{B}'(x)$ qui est la projection normalisée de $\vec{B}(x)$ dans le plan orthogonal à $\vec{A}(x)$.

Dans M_α , le champ de vecteur \vec{A} peut être vu comme une version régularisée de \vec{v} car il est la somme des contributions de tous les points prédétectés. Le vecteur \vec{B}' tourne localement autour du filament qui lui même correspond à son ensemble de singularités (voir Figure 2.4).

Par exemple, dans le cas d'un filament rectiligne, le champ de vecteurs \vec{B}' dans le plan orthogonal au filament est égal au champ de vecteurs \vec{B} . Dans ce plan, les

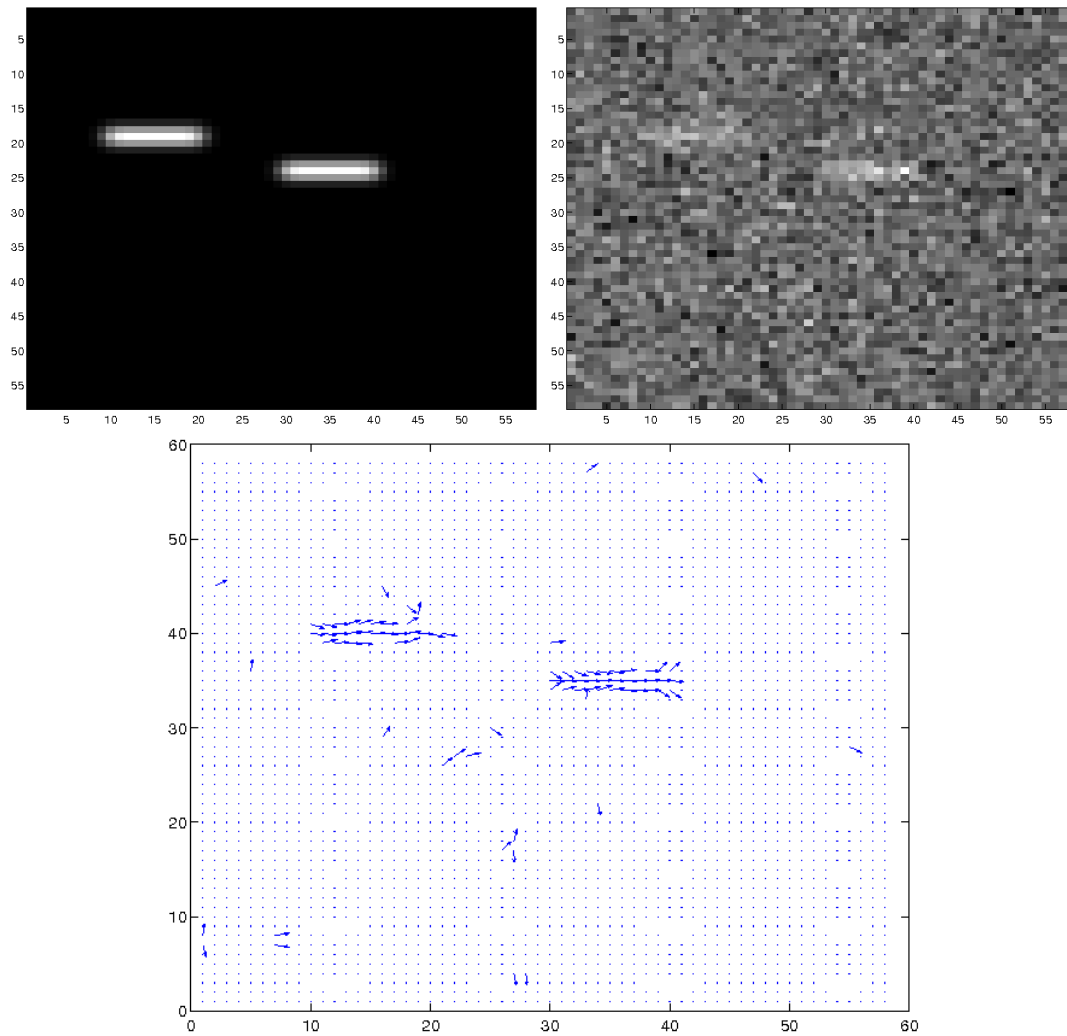


FIG. 2.3 – En haut : image floue; au milieu : image bruitée et floue, PSNR=7.06 dB (image bruitée par rapport à image floue en haut); en bas : $v_1(x)$ pour $x \in M_\alpha$.

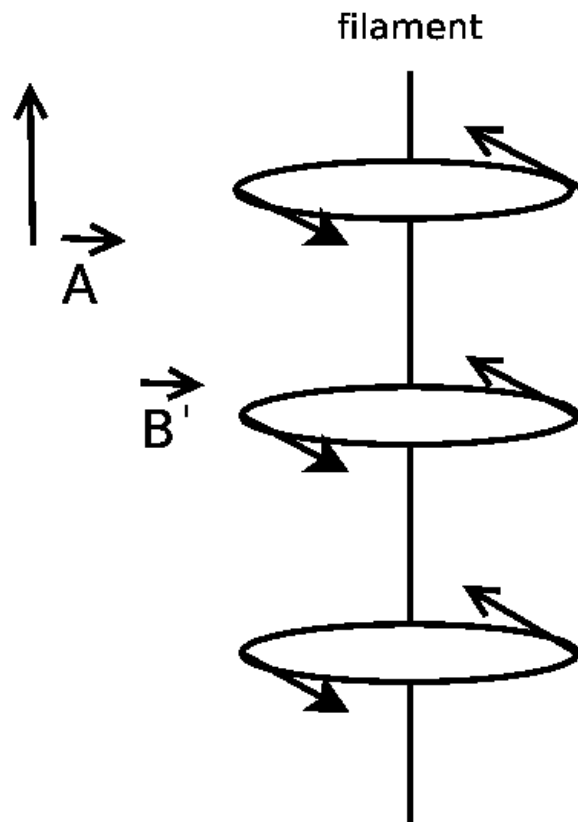


FIG. 2.4 – Champs de vecteurs B' et A .

coordonnées cartésiennes de \vec{B}' sont $(-\sin\theta, \cos\theta)$ où θ est l' angle polaire. On a :

$$\|\nabla\vec{B}'\|^2 = \left\|\frac{\partial\vec{B}'}{\partial r}\right\|^2 + \frac{1}{r^2}\left\|\frac{\partial\vec{B}'}{\partial\theta}\right\|^2.$$

Comme \vec{B}' ne dépend pas de la composante radiale r , on obtient $\frac{\partial\vec{B}'}{\partial r} = \vec{0}$ et $\|\nabla\vec{B}'\|^2 = \frac{1}{r^2}\left\|\frac{\partial\vec{B}'}{\partial\theta}\right\|^2$. Ce qui donne

$$\|\nabla\vec{B}'\|^2 = \frac{1}{r^2}.$$

On en déduit que $\|\nabla\vec{B}'\|^2$ tend vers $+\infty$ quand r tend vers 0. Ce cas particulier nous mène à la définition du squelette d'un filament :

Définition 2.1 *Le squelette d'un ensemble de filaments est défini comme*

$$S = \{x \in D, \lim_{y \rightarrow x} \|\nabla\vec{B}'(y)\| = +\infty\}.$$

En pratique pour éliminer les fausses alarmes, nous gardons seulement les points du squelette où $\|\vec{A}\| \geq \beta$ pour un β constant donné. Notons que notre définition du squelette n'est pas la définition donnée usuellement en morphologie mathématique [43]. Cependant elle nous permet d'avoir une idée intuitive de ce que peut être le squelette d'un filament épais.

2.3 Résultats

Nous pouvons voir une illustration de notre méthode sur la Figure 2.5, qui montre le squelette d'un filament épais dans une image qui présente un flou important ainsi qu'un bruit gaussien (voir Figure 2.3). Nous avons déterminé le champ de vecteurs \vec{v}_1 et les champs de vecteurs associés \vec{A} , \vec{B} et \vec{B}' . Le squelette S donne le filament original. Cette méthode est applicable dans de nombreux cas, y compris si la PSF du flou et le bruit ne sont pas parfaitement connus, ce qui est habituellement le cas dans les applications pratiques.

Nous avons également testé notre méthode sur une image réelle de filaments d'actine en microscopie confocale (Figure 2.6). Notre détection nous donne bien les filaments d'actine désirés (Figure 2.7).

Enfin nous avons créé une image synthétique, obtenue par la convolution de trois filaments dans un cube de $80 \times 80 \times 80$ voxels avec noyau gaussien à laquelle a été ajouté du bruit gaussien (voir la Figure 2.8). Le PSNR est de 7.2 dB. Le résultat de notre algorithme de détection donne le squelette original des filaments (voir la Figure 2.9).

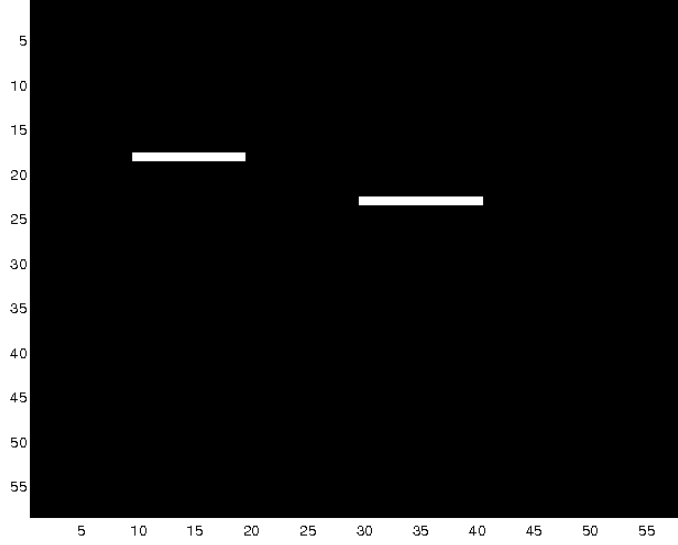


FIG. 2.5 – Squelette des filaments obtenu à partir de la Figure 2.3.

2.4 Le modèle de Ginzburg-Landau

A cause de dégradations et d'occultations, il peut arriver que des parties du filament soient manquantes avec la précédente détection. Nous ne pouvons pas utiliser les méthodes classiques d'inpainting [4, 7] pour effectuer la complétion. En effet l'idée générale de ces méthodes consiste à connecter les lignes de niveau qui sont, en général, des ensembles de sauts dans une image. Malheureusement, dans une image de filaments il n'y a pas de lignes de niveau à cause de son caractère discontinu. Nous proposons donc une nouvelle méthode de complétion basée sur la théorie de Ginzburg-Landau.

Les modèles de Ginzburg-Landau sont dédiés à l'étude des singularités de codimension k pour un champ u de \mathbb{R}^{n+k} dans \mathbb{R}^k [36]. Dans notre cas nous étudions des filaments dans \mathbb{R}^3 ; donc $k = 2$ et par conséquent nous avons besoin d'utiliser un champ de vecteurs à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

Une énergie de Ginzburg-Landau est du type :

$$E_\epsilon(u) = \int_{\Omega} \left(\|\nabla u(x)\|^2 + \frac{(1 - |u(x)|^2)^2}{\epsilon^2} \right) dx$$

Avec des valeurs $g(x)$ imposées pour u sur la frontière $\partial\Omega$, g étant une fonction continue de $\partial\Omega$ dans S^1 le cercle unité complexe.

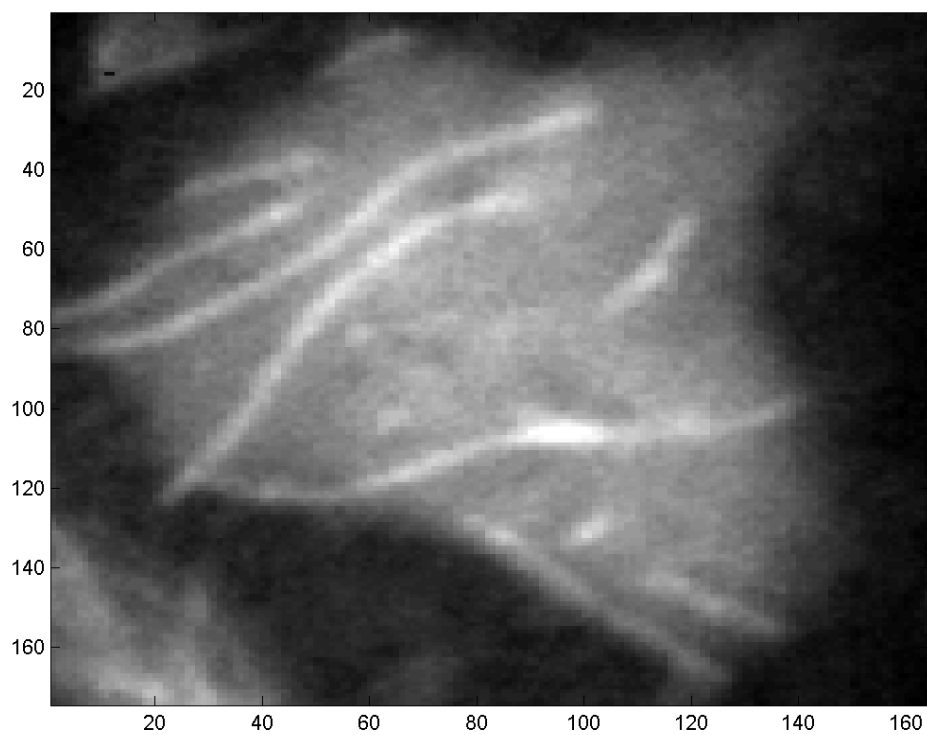


FIG. 2.6 – Image réelle de filament d'actine.

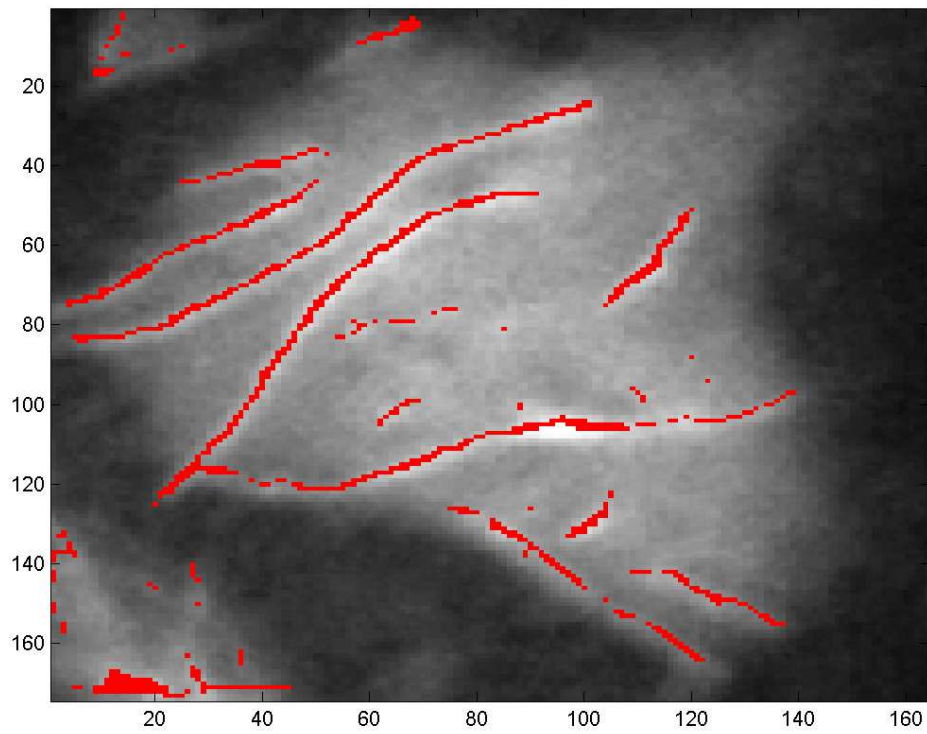


FIG. 2.7 – Squelette des filaments obtenu à partir de la Figure 2.6.

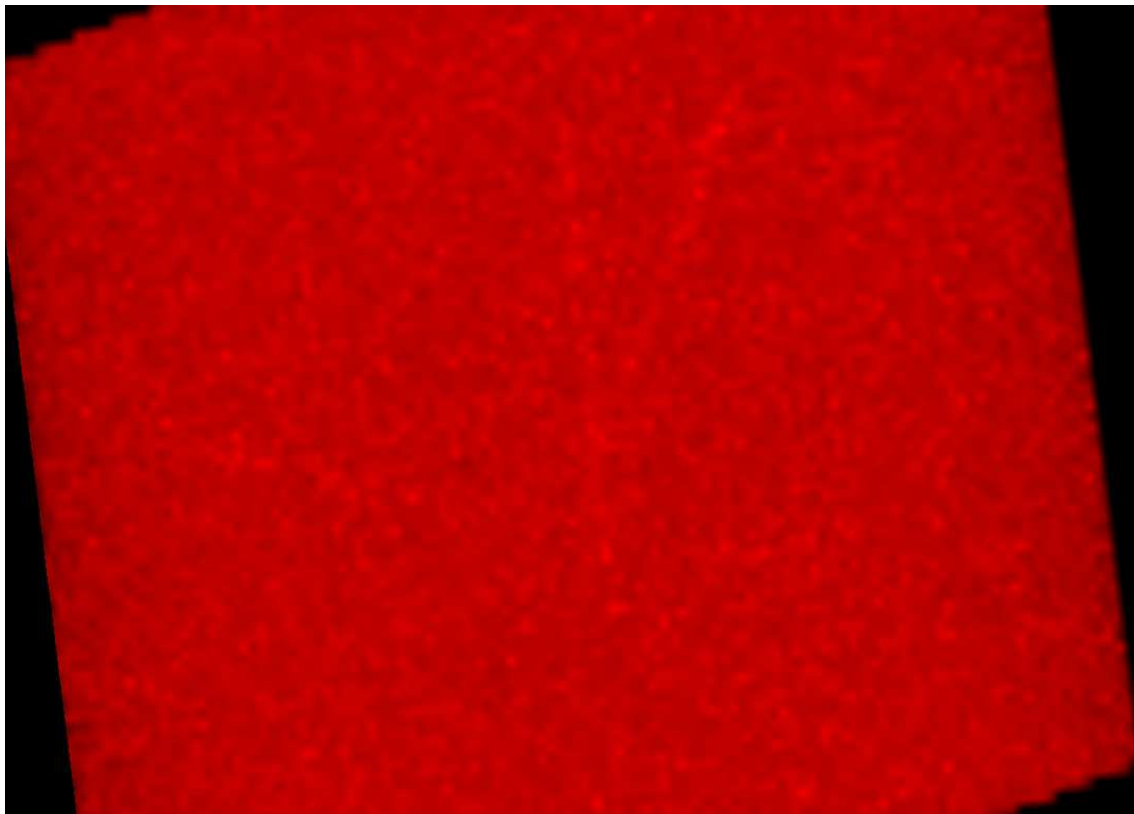


FIG. 2.8 – Image synthétique avec 3 filaments, PSNR=7.2dB.

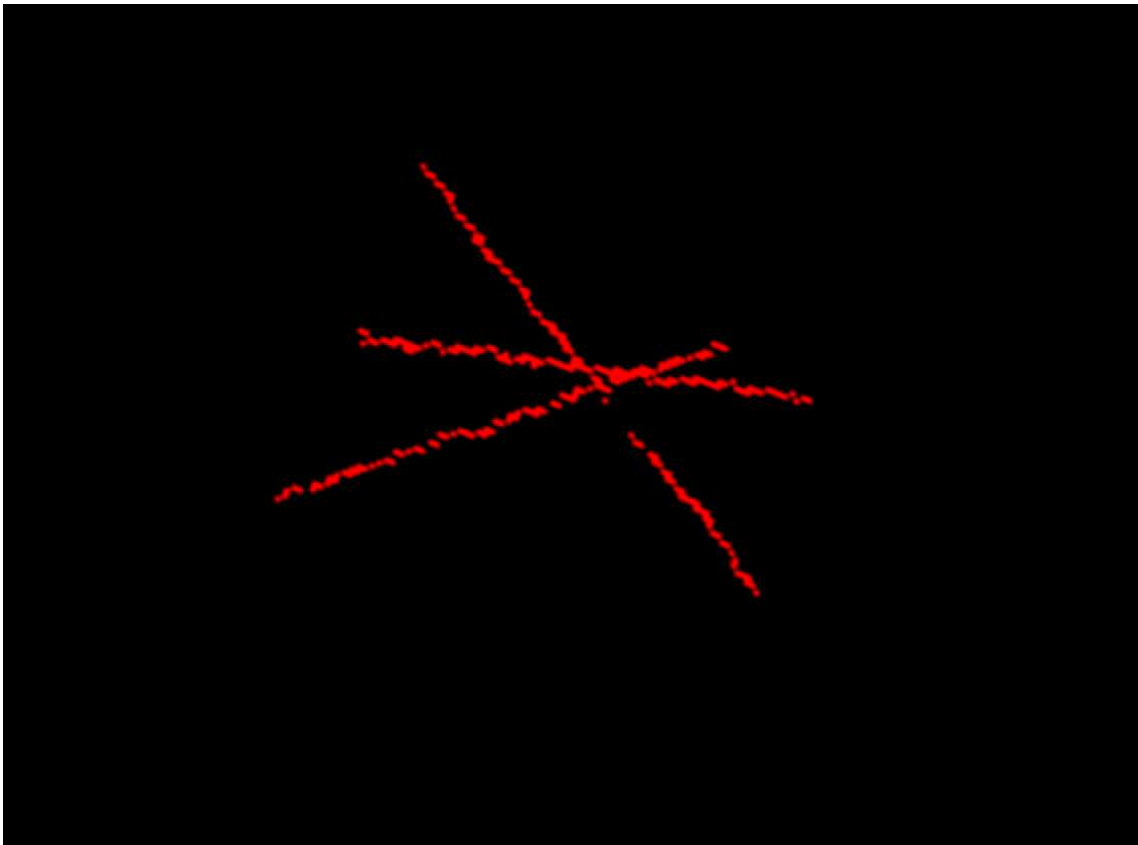


FIG. 2.9 – Résultat de détection obtenu à partir de la Figure 2.8.

Nous remarquons que le terme $\frac{(1-|u|^2)^2}{\epsilon^2}$ dans l'énergie de Ginzburg-Landau force, dans le processus de minimisation, la norme de \vec{u} à être proche de 1 pour ϵ petit.

L'énergie $E_\epsilon(u)$ a été introduite pour étudier le problème suivant :

Trouver $u : \Omega \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ tel que $u|_{\partial\Omega} = g$ avec $g(x) \in S^1$. On peut montrer [8] que si $\deg(g, \Omega) \neq 0$ alors ce problème n'a pas de solution dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Introduire la fonctionnelle $E_\epsilon(u)$ constitue donc une forme relaxée du problème.

Les propriétés des minimiseurs u_ϵ de E_ϵ dépendent beaucoup du degré [14] de la fonction g . Le degré correspond à l'idée intuitive du nombre de tours effectués par g en parcourant la frontière de Ω . Dans le cas où Ω est inclu dans \mathbb{R}^2 le degré pour une fonction u de classe C^1 sur Ω , à valeur dans S^1 , est donné par :

$$\deg(u, \partial\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} u \wedge u_\tau$$

avec u_τ la dérivée tangentielle de u selon $\partial\Omega$. Si le degré associé à g est nul, alors il existe des champs u de module 1 sur Ω et telles que $\int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2 dx$ soit finie.

Dans le cas où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^3 , on suppose que g est une fonction régulière sauf sur un ensemble de points de singularité $p_1, \dots, p_k, n_1 \dots n_l$. De plus le degré de g restreinte à la frontière d'un voisinage de p_i a pour valeur 1, de même ce degré est -1 pour n_i . Le degré de g est alors défini par $k - l$ voir [48].

Dans notre application nous choisissons $\Omega = D - W_\delta$ où $W_\delta = \{x \in D; \|\vec{A}(x)\| \geq \delta\}$ et la condition de bord est $u = \vec{B}'$ sur ∂W_δ (voir [36]), ce qui correspond à un degré non nul en présence de filaments. L'ensemble W_δ peut être vu comme un voisinage tubulaire de la version régularisée de l'ensemble M_α (le support des filaments épais, voir Figure 2.3) où les points isolés et les vecteurs \vec{v} mal orientés ont été éliminés (voir Figure 2.10). Précisons que le calcul de \vec{B}' dépend de l'orientation du champ de vecteurs \vec{v} . On définit également $W_d = \{x \in D, \|\vec{A}(x)\| \geq d\}$ qui est un voisinage des filaments plus large que W_δ . Le problème de l'orientation sera développé dans la section 2.5.

Pour $\epsilon > 0$ fixé, il est facile de montrer que $E_\epsilon(u)$ admet un minimiseur u_ϵ sur l'espace de Sobolev $H_{\vec{B}'}^1(\Omega; \mathbb{R}^2) = \{u \in L^2(\Omega)^2; \nabla u \in L^2(\Omega)^6; u = \vec{B}' \text{ sur } \partial W_\delta\}$. Grâce à la théorie générale des systèmes de Ginzburg-Landau, nous pouvons conjecturer que $u_\epsilon \rightarrow u_*$ quand $\epsilon \rightarrow 0$. L'ensemble des singularités de u_* étant un ensemble de codimension 2 qui crée une connection de longueur minimale entre les extrémités du squelette prédétecté (voir Figure 2.1), i.e. la complétion désirée. En fait u_* tourne autour des filaments complétés.

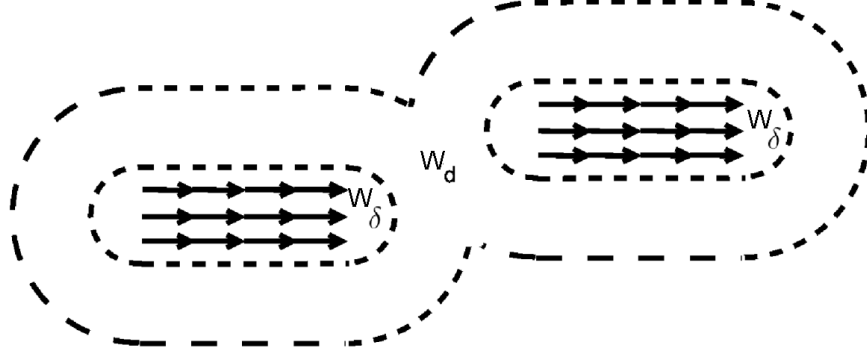


FIG. 2.10 – W_δ et W_d .

2.5 Orientation des filaments

La complétion de deux filaments sera possible si les orientations prédétectées (i.e. le champ de vecteurs \vec{v}) sont compatibles. La compatibilité est le fait que les degrés [14] η_1 et η_2 du champ de vecteurs \vec{B}' associés aux filaments F_1 et F_2 respectivement, sont de signes opposés (voir la Figure 2.11). En effet pour deux filaments, η_1 et η_2 sont égaux à ± 1 . Nous ne pouvons pas trouver une orientation globale qui permet la complétion de tous les filaments. Par exemple sur la Figure 2.11, les deux filaments sont bien orientés pour une complétion sur l'image de gauche, mais il sont en opposition sur l'image de droite.

Pour choisir une orientation locale pour un filament F_1 , il est nécessaire de considérer l'orientation des autres filaments dans un voisinage du filament F_1 . Nous donnons ci dessous un algorithme pour trouver une orientation locale.

L'idée est que les deux champs magnétiques associés aux filaments ont des directions proches si les orientations sont compatibles (cf. Figure 2.12). Nous expliquons comment trouver une orientation compatible pour deux filaments F_1 et F_2 qui sont sur la même composante connexe de M_α .

Nous notons $W_d^i = \{x \in D, \|\overline{A}_i(x)\| \geq d\}$ où \overline{A}_i est le potentiel vecteur associé au filament F_i , $i = 1, 2$. Nous calculons alors les champs magnétiques \vec{B}_1 et \vec{B}_2 sur W_d^1 et W_d^2 associés à F_1 et F_2 . Soit \vec{B}_2^* le champ magnétique associé à F_2 avec

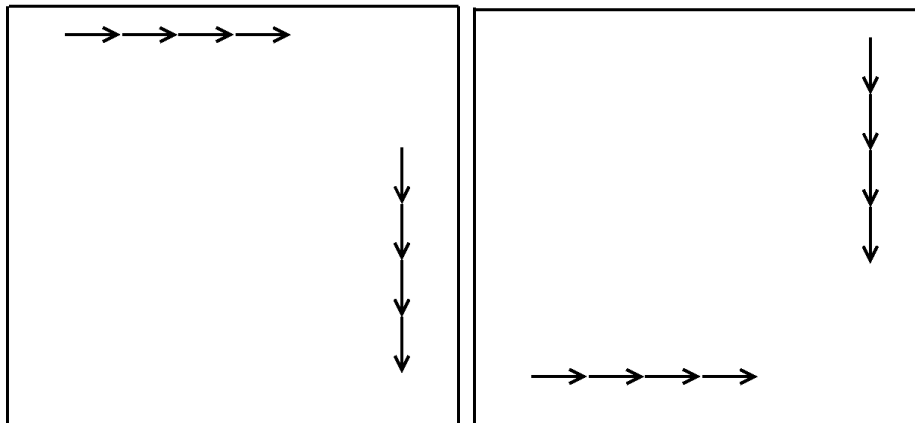


FIG. 2.11 – A gauche : bonne orientation, à droite : mauvaise orientation pour la complétion.

l'orientation inversée. Nous comparons ensuite I_2 et J_2 :

$$I_2 = \int_{W_d^1 \cap W_d^2} \|\vec{B}'_1 - \vec{B}'_2\| \quad J_2 = \int_{W_d^1 \cap W_d^2} \|\vec{B}'_1 - \vec{B}'_2^*\|$$

Si $J_2 < I_2$ nous changeons l'orientation de F_2 . Nous pouvons voir sur la Figure 2.12 qu'avec la bonne orientation \vec{B}'_1 et \vec{B}'_2 sont assez similaires sur $W_d^1 \cap W_d^2$.

Pour un grand nombre de filaments, nous utilisons un algorithme qui sélectionne l'orientation des filaments voisins deux par deux.

La Figure 2.13 montre un exemple de complétion sur deux filaments décalés contenus dans un même plan inclu dans \mathbb{R}^3 . La troisième figure représente le champ \vec{B} .

2.6 L'algorithme de complétion

En pratique, dans le but d'éviter des connections entre des filaments trop éloignés, nous effectuons notre algorithme sur un domaine plus petit que D . Nous définissons alors l'ensemble $W_d = \{x \in D; \|\vec{A}(x)\| \geq d\}$, où $d \ll \delta$ (voir Figure 2.10). L'ensemble Ω dans l'énergie de Ginzburg-Landau sera choisi tel que $\Omega = W_d - W_\delta$.

Calculer numériquement u_ϵ est généralement, pour les images 3D, une tâche difficile pour ϵ petit. En effet pour une méthode de descente de gradient il faut prendre un pas de l'ordre de ϵ , ce qui a pour conséquence une convergence très lente. Les méthodes de multi-grilles peuvent être utilisées [13]. Nous avons utilisé

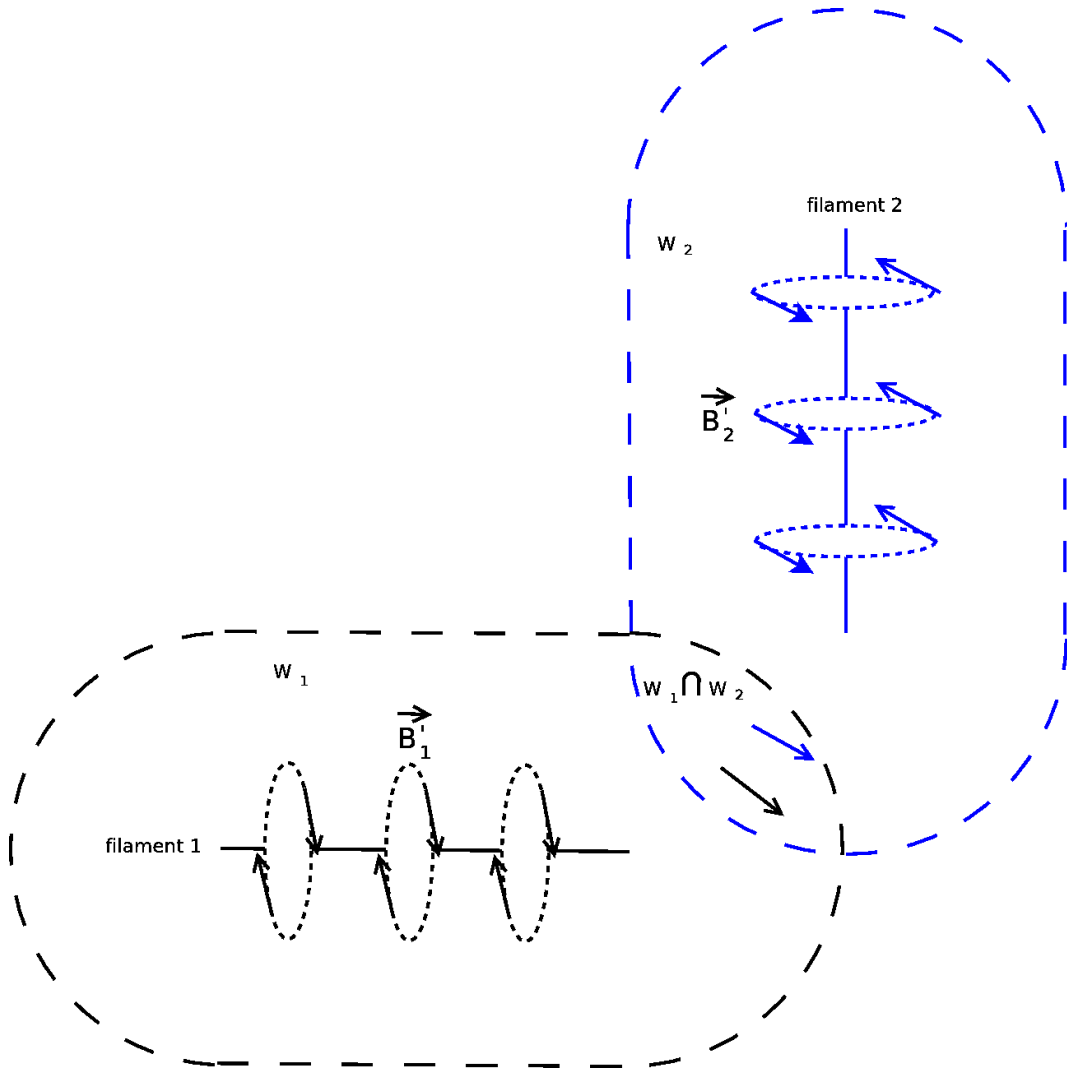


FIG. 2.12 – Algorithme d'orientation.

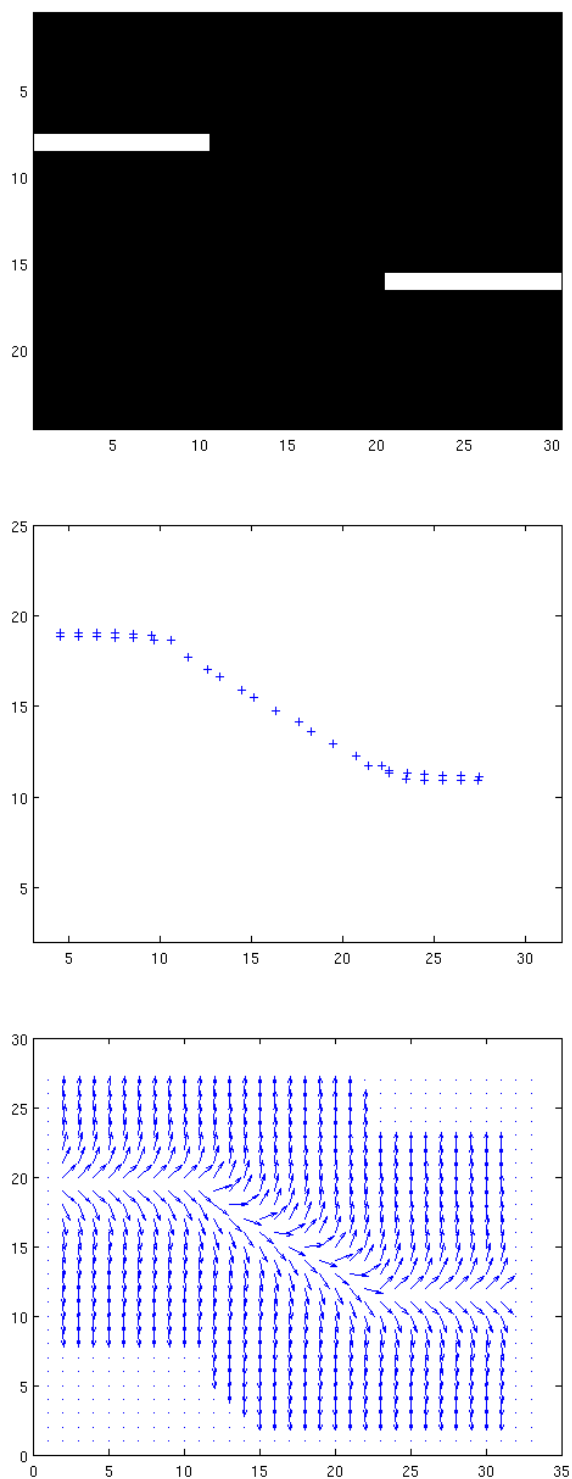


FIG. 2.13 – En haut image originale, au milieu complétion des filaments, en bas image d'une coupe du champ u

deux algorithmes différents pour calculer la solution limite du modèle de GL : un algorithme dû à Ruuth et al [47] et un algorithme dû à F. Alouges [1].

Nous décrivons tout d'abord l'algorithme à deux étapes proposé dans [47]. Il consiste à résoudre alternativement une équation de diffusion pour un temps court et à appliquer un processus de renormalisation. Nous initialisons cet algorithme itératif par $\vec{u}_0 = \vec{B}'$, on calcule v_{n+1} avec l'équation

$$\frac{v_{n+1} - u_n}{\delta t} = \Delta v_{n+1} \quad \text{sur } \Omega$$

puis on renormalise :

$$u_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{|v_{n+1}|} \quad \text{sur } \Omega$$

$$u_{n+1}(x) = \vec{B}' \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Il est montré dans [47] que cette méthode, au cours des itérations, correspond au premier ordre, à un mouvement par courbure des filaments. Il n'y a par contre pas de preuve de convergence.

Une autre méthode possible a été proposée par François Alouges dans [1] dont la convergence est prouvée pour les champs de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 . Nous étudierons en détail dans le chapitre suivant cette méthode pour les champs de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 . D'un point de vue qualitatif, les résultats numériques obtenus sont similaires.

3 Résultats

La Figure 2.14 est le résultat de la complétion de filaments de la Figure 2.3. Nous rappelons que \vec{B}' définit les conditions de bord dans le système de Ginzburg-Landau et que $\Omega = W_d - W_\delta$. Le filament est obtenu à partir du champ de vecteurs \vec{u}_* (la solution de GL lorsque ϵ est petit) en sélectionnant les points x tels que $\|\nabla u(x)\| > \gamma$.

Nous donnons aussi le résultat pour une jonction triple (voir Figure 2.15). Dans ce cas le degré de l'un des trois filaments doit être égal à 2 et les deux autres à ± 1 . Il est également nécessaire d'adapter l'algorithme d'orientation.

4 Conclusion

Nous avons présenté une méthode permettant de retrouver le squelette des filaments dans des images 3D, en les considérant comme des lignes de courants et

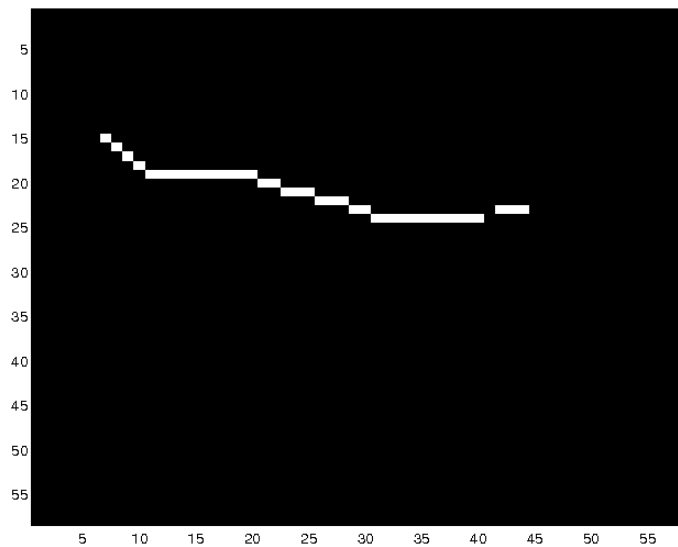


FIG. 2.14 – Complétion des filaments trouvés dans la Figure 2.3.

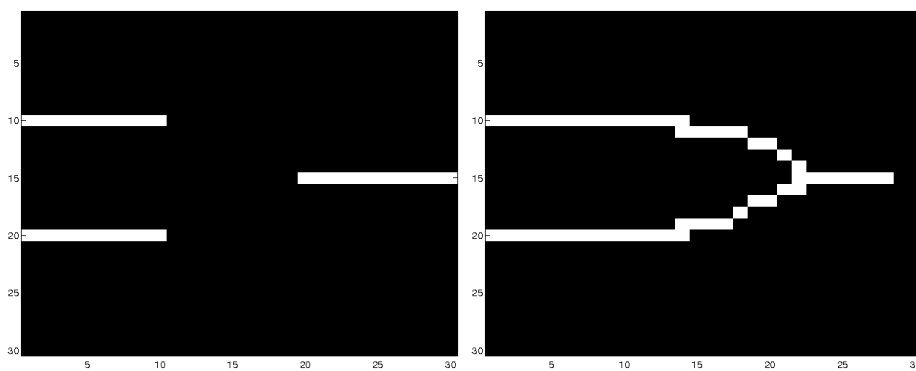


FIG. 2.15 – Résultat pour une jonction triple.

en introduisant le champ magnétique associé. Cette méthode s'est montrée efficace dans le cas d'images 3D avec un fort niveau de bruit et présentant des occultations. La partie de complétion nécessite une minimisation d'une énergie de type Ginzburg-Landau, ce qui est une tâche difficile. Une méthode numérique de minimisation de ce type d'énergie est étudiée en détails dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Minimisation du modèle de Ginzburg-Landau par l'algorithme de F. Alouges

1 Introduction

Dans cette partie nous allons rappeler la méthode de F. Alouges [1] pour minimiser la fonctionnelle de Ginzburg Landau pour un champ u à valeurs dans $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ (S^2 étant la sphère unité). Le cas de u à valeurs dans S^1 , le cercle unité dans \mathbb{R}^2 qui est celui de l'application du chapitre précédent sera discuté à la fin de la section. Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^3 , $u \in H_g^1(\Omega, S^2)$, $H_g^1(\Omega, S^2)$ étant l'espace de Sobolev des fonctions dans $H^1(\Omega, S^2)$ et vérifiant les conditions de bord $u = g$ sur $\partial\Omega$. Nous voulons résoudre le problème suivant :

$$\text{Inf}\{E(u); \|u\| = 1; u|_{\partial\Omega} = g\} \quad (3.1)$$

Avec $E(u)$ défini par :

$$E(u) = \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx \quad (3.2)$$

L'idée de l'algorithme est de s'affranchir de la contrainte $\|u\| = 1$, qui impose une minimisation sur un domaine non convexe, en considérant un problème auxiliaire convexe. Le schéma de l'algorithme, que nous détaillerons dans la section suivante, pour minimiser $E(u)$ sur $H_b^1(\Omega, S^2)$ est le suivant :

1. On se donne $u_0 \in H^1(\Omega, S^2)$ une fonction initiale.
2. $\forall n > 0$, on cherche v_n telle que $E(v_n) \leq E(u_n)$, avec $v_n \in H_b^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et non nécessairement $v_n \in H_b^1(\Omega, S^2)$

3. On renormalise et on pose $u_{n+1} = \frac{v_n}{\|v_n\|}$

Nous allons tout d'abord rappeler les propriétés de convergence de l'algorithme établies dans [1]. L'existence d'un minimum de $E(u)$ pour $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ne pose pas de problème. La question de l'existence d'un minimum de $E(u)$ pour $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ à valeurs dans la sphère unité S^1 est plus complexe et dépend du degré de b . Dans le cas où cette existence n'est pas assurée, on peut néanmoins considérer le problème de minimisation discrétisé associé. L'existence d'un minimum discret est toujours assuré. Nous allons introduire la version discrétisée de l'algorithme de F. Alouges dans le cas de champs de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 . Nous étudierons les solutions obtenues à partir de cet algorithme discret. Nous montrerons en particulier qu'elles vérifient une équation différentielle discrète et qu'elles ne sont pas toujours un minimum de l'énergie. Nous aborderons enfin les liens entre les minima discrets et les minima du problème continu. En particulier la question de la convergence vers les minima continus lorsque le pas de discrétisation tend vers 0 sera étudiée.

2 Résultats théoriques pour des champs de \mathbb{R}^3 dans S^2

Dans cette section 3.2, nous allons détailler l'algorithme, puis donner quelques propriétés issues de [1] et enfin nous rappelons la démonstration de sa convergence à partir de ces propriétés. Nous rappelons que $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) = \{v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3); v|_{\partial\Omega} = 0\}$.

Soit $K_u = \{w \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3), \text{ tels que } w(x) \cdot u(x) = 0 \text{ presque partout}\}$.

L'algorithme proposé dans [1] est le suivant :

1. on se donne u_0 une fonction initiale
2. $\forall n > 0$, on résout le problème

$$\text{minimiser } \int_{\Omega} \|\nabla(u_n - w)\|^2 dx \quad \text{pour } w \in K_{u_n}. \quad (3.3)$$

On note $w_n = w(u_n)$.

3. On pose $u_{n+1} = \frac{u_n - w_n}{\|u_n - w_n\|}$

Le problème (3.3) est un problème convexe qui est nettement plus simple à résoudre qu'une minimisation directe de $E(u)$ avec la contrainte $\|u\| = 1$.

Proposition 2.1

Si $v \in H_b^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et vérifie $\|v(x)\| \geq 1$ presque partout, alors on a $\frac{v}{\|v\|} \in H_b^1(\Omega, S^2)$ et de plus

$$\|\nabla(\frac{v(x)}{\|v(x)\|})\| \leq \|\nabla v(x)\| \quad (3.4)$$

d'où l'on déduit que

$$E(\frac{v(x)}{\|v(x)\|}) \leq E(v) \quad (3.5)$$

Preuve. La sphère S^2 est convexe, soit π la projection sur S^2 . Cette application est contractante. Donc

$$\|\frac{\pi v(x + t \vec{i}) - \pi v(x)}{t}\| \leq \|\frac{v(x + t \vec{i}) - v(x)}{t}\|$$

ce qui entraîne

$$\|\partial_1 \pi v(x)\| \leq \|\partial_1 v(x)\|.$$

∂_1 étant la dérivée partielle par rapport à la première coordonnée. En exprimant la définition du gradient on déduit la proposition.

■

On déduit de cette proposition que l'énergie décroît au cours de l'algorithme.

Lemme 2.2 Soit $v = u - w$, où w appartient à K_u , alors

$$\|v(x)\|^2 = \|u(x) - w(x)\|^2 = 1 + \|w(x)\|^2 \geq 1 \text{ presque partout}$$

Proposition 2.3 Le problème

$$\text{minimiser } \int_{\Omega} \|\nabla(u - w)\|^2 dx \text{ pour } w \in K_u \quad (3.6)$$

admet une solution unique appelée $w(u)$

Preuve. K_u est un convexe de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, fermé pour la topologie forte de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Par conséquent il existe $w(u)$ unique $\in K_u$ solution de (3.6); $w(u)$ est la projection de u sur K_u . Comme w est une projection, on peut le définir comme l'unique élément de K_u vérifiant :

$$\forall w' \in K_u; \int_{\Omega} \nabla(u - w) \cdot \nabla w' dx = 0 \quad (3.7)$$

■

De plus comme la fonction $w = 0$ appartient à K_u , on en déduit que

$$\int_{\Omega} \|\nabla(u - w(u))\|^2 dx \leq \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx$$

ce qui assure que l'énergie décroît lors de la première étape de l'algorithme

Théorème 2.4 *L'algorithme de F. Alouges converge : il existe une sous suite de u_n qui converge faiblement dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ vers une fonction harmonique $u_{\infty} \in H_b^1(\Omega, S^2)$. De plus la suite w_n converge fortement vers 0 dans $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$*

Preuve. Nous allons utiliser le lemme suivant

Lemme 2.5 *Pour tout $n \geq 0$, on a*

$$\int_{\Omega} \|\nabla u_n\|^2 dx = \int_{\Omega} \|\nabla(u_n - w_n)\|^2 dx + \int_{\Omega} \|\nabla w_n\|^2 dx \quad (3.8)$$

En écrivant la formulation variationnelle du problème (3.6) :

$$\int_{\Omega} \nabla(u_n - w_n) \cdot \nabla \Psi dx = 0 \quad \forall \Psi \in K_{u_n}$$

on choisit $\Psi = w_n$:

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla w_n = \int_{\Omega} \|\nabla w_n\|^2 dx$$

On obtient le lemme en utilisant cette identité dans (3.8).

D'après la proposition (2.3) l'énergie décroît :

$$\int_{\Omega} \|\nabla u_{n+1}\|^2 \leq \int_{\Omega} \|\nabla(u_n - w_n)\|^2 dx = \int_{\Omega} \|\nabla u_n\|^2 dx - \int_{\Omega} \|\nabla w_n\|^2 dx$$

donc

$$\int_{\Omega} \|\nabla w_n\|^2 dx \leq \int_{\Omega} \|\nabla u_n\|^2 dx - \int_{\Omega} \|\nabla u_{n+1}\|^2 dx$$

En sommant de $n=0$ à $n=N$ on obtient

$$\sum_{n=0}^N \int_{\Omega} \|\nabla w_n\|^2 dx \leq \int_{\Omega} \|\nabla u_0\|^2 dx$$

et la série

$$\sum_{n \geq 0} \int_{\Omega} \|\nabla w_n\|^2 dx$$

est convergente. Par conséquent $\int_{\Omega} \|\nabla w_n\|^2 dx$ tend vers 0. Par l'inégalité de Poincaré on obtient :

$$w_n \rightarrow 0 \text{ dans } H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \quad (3.9)$$

Il reste à prouver qu'une sous suite de u_n converge faiblement vers une fonction harmonique u_{∞} dans $H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Nous avons pour tout $n \geq 0$,

$$\int_{\Omega} \|\nabla u_n\|^2 dx \leq \int_{\Omega} \|\nabla u_0\|^2 dx$$

Ceci montre que la suite u_n est bornée dans $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Nous pouvons en extraire une sous suite qui converge faiblement dans $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ et fortement dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Nous notons u_{∞} la limite de u_n . Comme u_n appartient à $H_b^1(\Omega, S^2)$, et comme cet ensemble est fermé pour la topologie faible, on en déduit que u_{∞} appartient à $H_b^1(\Omega, S^2)$. Pour montrer que u_{∞} est harmonique, nous écrivons l'équation d'Euler-Lagrange pour laquelle w_n est solution :

$$\int_{\Omega} \nabla(u_n - w_n) \cdot \nabla \Psi dx = 0 \quad \forall \Psi \in K_{u_n}$$

Soit Ψ sous la forme $\Psi = \phi \times u_n$, où $\phi \in C_0^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, alors l'égalité précédente s'écrit

$$\int_{\Omega} \nabla(u_n - w_n) \cdot (\nabla \phi \times u_n + \phi \times \nabla u_n) dx = 0$$

En développant cette expression on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla \phi \times u_n - \nabla w_n \cdot (\nabla \phi \times u_n + \phi \times \nabla u_n) dx = 0$$

que l'on peut écrire

$$\forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega; \mathbb{R}^3); \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot u_n \times \nabla u_n - \nabla \phi \cdot u_n \times \nabla w_n + \phi \cdot \nabla u_n \times \nabla w_n dx = 0$$

ce qui montre que :

$$\operatorname{div}(u_n \times \nabla(u_n - w_n)) = \nabla w_n \times \nabla u_n$$

Au sens des distributions. En utilisant le fait que :

$$u_n \rightharpoonup u_{\infty} \text{ faiblement dans } H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \quad (3.10)$$

$$u_n \rightharpoonup u_\infty \text{ fortement dans } L^2(\Omega; \mathbb{R}^3) \quad (3.11)$$

$$w_n \rightharpoonup 0 \text{ fortement dans } H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \quad (3.12)$$

Nous pouvons passer à la limite et écrire

$$\operatorname{div}(u_\infty \times \nabla u_\infty) = 0$$

Au sens des distributions, ce qui est équivalent au fait que u_∞ est une application harmonique d'après [21]. ■

3 Algorithme de F. Alouges pour des champs de \mathbb{R}^3 dans S^1

Dans cette section, nous allons étudier les propriétés de l'algorithme dans le cas de champs de \mathbb{R}^3 dans S^1 . Nous ne pouvons pas directement généraliser les résultats théoriques pour $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, au cas $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. En effet, avec des conditions de bord défavorables, $E(u) = \int_\Omega \|\nabla u\|^2 dx$, peut être infinie pour toutes les fonctions $u \in H_b^1(\Omega, S)$. C'est le cas notamment si la condition de bord b contient des points de singularité de degré 1 ou plus, ce qui est le cas pour la méthode de complétion présentée au chapitre précédent utilisant une fonctionnelle de Ginzburg-Landau. C'est pour cette raison qu'on utilise des fonctionnelles intermédiaires E_ϵ , ce qui permet de relaxer la contrainte $\|u\| = 1$. La convergence de minimiseurs u_ϵ vers un champ u_* , lorsque ϵ tend vers 0 permet de donner un sens à la minimisation de $E(u)$ pour $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Cependant on ne rencontre pas ces problèmes dans les applications numériques discrètes. On peut appliquer formellement l'algorithme de la section précédente, pour trouver numériquement les minima de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau.

Nous n'avons pas étudié directement d'un point de vue théorique le problème continu pour des champs \mathbb{R}^3 à valeurs dans S^1 , ce travail a été fait dans [36]. Nous avons orienté notre étude vers le cas discret qui nous a semblé être plus proche des applications en imagerie. On peut appliquer formellement l'algorithme de la section précédente, pour trouver numériquement les minima de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau. Les résultats numériques sont similaires à l'algorithme présenté dans [47] dans le cas de champs de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Nous allons présenter la version discrète de l'algorithme de F. Alouges dans la section suivante. Les liens entre les fonctions discrètes obtenues et les minima du problème continu seront abordés à la fin du chapitre.

4 Algorithme discret de F. Alouges

Par souci de simplification, on supposera que dans la suite du chapitre que Ω est un parallépipède. Soit $\{T_m\}_{m>0}$, une triangulation de Ω par des tétraèdres T_i (Ω est divisé en cubes, chacun de ces cubes est divisé en deux tétraèdres) dont les côtés ont une longueur en $O(\frac{1}{m})$, $\Omega = \cup_{i=1}^{N(m)} T_i$. On notera Ω_m l'ensemble des points de discrétisation, c'est-à-dire les sommets de $\{T_m\}_m$. On note

$$T_m(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, u \text{ continue}, u|_{T \in \{T_m\}} \in P_1(T); u|_{\partial\Omega} = b_m\}$$

où $P_1(T) = \{\text{polynômes de degré 1 sur } T\}$ et b_m une discrétisation de $b(x)$ par des polynômes de degré 1 sur $\partial\Omega$. On note π_m la projection sur $T_m(\Omega)$.

Nous introduisons dans cette section la version discrétisée de l'algorithme de F. Alouges pour une fonction $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow S^1$ où $S^1 = \{z \in \mathbb{R}^2, |z| = 1\}$. Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^3 , b une fonction sur $\partial\Omega$. Nous notons b_m la discrétisation de la fonction b sur $\partial\Omega$. Nous voulons résoudre le problème suivant pour u dans $T_m(\Omega)$:

$$\text{Inf}\{E_m(u), u \in T_m(\Omega), \|u\| = 1\} \quad (3.13)$$

avec $E_m(u)$ défini par :

$$E_m(u) = \sum_{x_i \in \Omega_m} \|\nabla u(x_i)\|^2 \quad (3.14)$$

où

$$\|\nabla u(x_i)\|^2 = \|u(x_i + \vec{i}) - u(x_i)\|^2 + \|u(x_i + \vec{j}) - u(x_i)\|^2 + \|u(x_i + \vec{k}) - u(x_i)\|^2. \quad (3.15)$$

où $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Comme $u \in T_m(\Omega)$:

$$E_m(u) = \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx$$

u peut donc être vue comme une fonction discrète ou une fonction continue. Dans la suite du chapitre, on utilisera la notation continue ou discrète de l'énergie $E_m(u)$.

Le problème 3.13 peut se résoudre par un algorithme de F. Alouges discret :

1. On part d'une condition initiale discrète u_0 ,
2. $\forall n > 0$, on minimise l'énergie $E_m(u_n + w_n)$ avec w_n , un champ discret orthogonal à u et nul sur $\partial\Omega_m$.
3. On pose $u_{n+1} = \frac{u_n + w_n}{\|u_n + w_n\|}$

On itère jusqu'à convergence vers une fonction que l'on notera u^m .

Une implémentation de cet algorithme est donnée dans [1].

5 Propriétés de l'algorithme de F. Alouges discret

Dans cette section nous étudions les propriétés des fonctions discrètes u^m que donne l'algorithme discret de F. Alouges dont la convergence est assurée. Nous allons montrer les résultats suivants sur la version discrète de cet algorithme :

1. L'algorithme de F. Alouges discret converge vers une fonction u^m qui est solution d'une équation différentielle discrète.
2. u^m n'est pas toujours un minimum local de l'énergie de Ginzburg-Landau du problème (3.13).
3. u^m est un minimum local de l'énergie de Ginzburg-Landau si u^m satisfait une condition de régularité.

5.1 Equation différentielle vérifiée par u^m

Nous utilisons l'écriture pratique suivante :

$$\int_{\Omega} \|\nabla(u^m)\|^2 dx = \sum_{x_i \in \Omega_m} \|\nabla u^m(x_i)\|^2$$

Nous voulons trouver l'équation que u^m satisfait.

Théorème 5.1 *Soit $u^m \in T_m(\Omega)$ une fonction sur Ω , qui soit limite de l'algorithme de F. Alouges, alors u^m vérifie l'équation différentielle suivante :*

$$\Delta u^m = -\|\tilde{\nabla} u^m\|^2 u^m$$

Avec $\tilde{\nabla}$ un schéma discret particulier du gradient qui sera précisé ci dessous, Δ est le laplacien discret classique. De plus u^m est de module 1 aux points de discrétisation.

Notons qu'il est montré dans [8, 36] que $\Delta u_* = -\|\nabla u_*\|^2 u_*$, où u_* est solution du problème de Ginzburg-Landau continue, c'est à dire la limite de u_ϵ (voir chapitre précédent).

Preuve. On étudie d'abord le problème

$$\{ \text{Min} \int_{\Omega} \|\nabla u^m + w\|^2 dx; w \text{ continue}, w|_T \in P_1(T), w|_{\partial\Omega} = 0 \text{ et } w \cdot u^m = 0 \} \quad (3.16)$$

On note w^m la solution de ce problème. On montre que la solution de ce problème est $w^m = 0$.

Soit la suite u_n^m qui converge vers u^m et soit $w_n^m = w(u_n^m)$. D'après (3.9), w_n^m tend vers 0 dans $H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$. Il n'est pas clair que w_n^m tend vers w^m lorsque n tend vers l'infini, ce qui suffirait à montrer $w^m = 0$.

D'après (3.7), si pour tout $w' \in K_{u^m}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla(u^m - w_n^m) \cdot \nabla w' dx = 0$$

alors par unicité de w^m , on obtient $w^m = 0$.

Soit donc $w' \in K_{u^m}$ fixé, pour simplifier les notations, on définit le produit scalaire $|$:

$$(u^m - w_n^m)|w' = \int_{\Omega} \nabla(u^m - w_n^m) \cdot \nabla w' dx$$

$$(u^m - w_n^m)|w' = (u_n^m - w_n^m)|w' + (u^m - u_n^m)|w'$$

(3.10) montre que $(u^m - u_n^m)|w'$ tend vers 0.

$$(u_n^m - w_n^m)|w' = (u_n^m - w_n^m)|(w' - (w' \cdot u_n^m)u_n^m) + (u_n^m - w_n^m)|(w' \cdot u_n^m)u_n^m$$

Avec $(w' \cdot u_n^m)u_n^m$ désignant la fonction discrète qui a pour valeur $(w'(i, j, k) \cdot u_n^m(i, j, k))u_n^m(i, j, k)$ au point (i, j, k) . Comme u_n^m est unitaire aux points de discrétisation, $(w' - (w' \cdot u_n^m)u_n^m) \cdot u_n^m = 0$. Donc $(w' - (w' \cdot u_n^m)u_n^m)$ est nul sur la frontière de Ω :

$$w' - (w' \cdot u_n^m)u_n^m \in K_{u_n^m}.$$

En utilisant (3.7) on obtient

$$(u_n^m - w_n^m)|(w' - (w' \cdot u_n^m)u_n^m) = 0$$

Il reste à montrer que $(u_n^m - w_n^m)|(w' \cdot u_n^m)u_n^m$ tend vers 0. Mais $w' \cdot u^m = 0$, donc

$$(u_n^m - w_n^m)|(w' \cdot u_n^m)u_n^m = (u_n^m - w_n^m)|(w' \cdot (u_n^m - u^m))u_n^m$$

$(u_n^m - u^m)$ tend vers 0 fortement dans L^2 ce qui donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n^m - w_n^m)|(w' \cdot (u_n^m - u^m))u_n^m = 0$$

En effet le produit scalaire $|$ est une somme discrète sur un nombre fixé de points et de plus u_n^m et w_n^m sont des suites bornées.

Donc on en déduit $w^m = 0$.

Nous allons à présent trouver l'équation différentielle satisfaisante par u^m . La forte convexité de E_m implique que pour tout w admissible et pour t réel différent de 0 nous avons (puisque $w^m = 0$) :

$$\int_{\Omega} \|\nabla(u^m)\|^2 dx < \int_{\Omega} \|\nabla(u^m + tw)\|^2 dx.$$

$$\int_{\Omega} \|\nabla(u^m + tw)\|^2 dx = \int_{\Omega} \|\nabla u^m\|^2 dx + 2t \int_{\Omega} \nabla u^m \cdot \nabla w dx + O(t^2)$$

Ce qui entraîne en choisissant t suffisamment petit et de signe opposé à $\int_{\Omega} \nabla u^m \cdot \nabla w dx$:

$$\int_{\Omega} \nabla u^m \cdot \nabla w dx = 0$$

Donc pour tout w admissible, comme w s'annule sur $\partial\Omega$, par intégration par parties discrète on obtient :

$$\int_{\Omega} \Delta u^m \cdot w dx = 0 \tag{3.17}$$

(3.17) est vraie pour tout w donc Δu^m est parallèle à u^m , ce qui entraîne :

$$\Delta u^m = \lambda(x)u^m$$

Essayons de déterminer la fonction λ . Le cas discret donne un résultat qui est légèrement différent de l'équation donnée dans [8, 36] : $\Delta u_* = -\|\tilde{\nabla} u_*\|^2 u_*$. Pour la fin de la démonstration, par souci de lisibilité, on notera u pour u^m . Soit un point $x = (i, j, k)$, nous avons

$$\Delta u(i, j, k) = \lambda u(i, j, k) \tag{3.18}$$

ce qui donne

$$u(i+1, j, k) + u(i-1, j, k) + u(i, j+1, k) + u(i, j-1, k) + u(i, j, k+1) + u(i, j, k-1) - 6u(i, j, k) = \lambda u(i, j, k) \tag{3.19}$$

Nous calculons le produit scalaire de chaque membre avec $u(i, j, k)$ et nous obtenons :

$$(u(i+1, j, k) + u(i-1, j, k) + u(i, j+1, k) + u(i, j-1, k) + u(i, j, k+1) + u(i, j, k-1)) \cdot u(i, j, k)$$

$$-6 = \lambda$$

Nous remarquons :

$$|\partial_1 u(i, j, k)|^2 = \|u(i+1, j, k) - u(i, j, k)\|^2 \quad (3.20)$$

$$= 1 - 2u(i+1, j, k).u(i, j, k) + 1 \quad (3.21)$$

$$= 2 - 2u(i+1, j, k).u(i, j, k) \quad (3.22)$$

Nous définissons $|\partial_1^- u(i, j, k)|^2 = \|u(i, j, k) - u(i-1, j, k)\|^2$. Nous remarquons que

$$|\partial_1^- u(i, j, k)|^2 = 2 - 2u(i-1, j, k).u(i, j, k) \quad (3.23)$$

Nous notons que $\partial_1 u(i, j, k) = \partial_1^+ u(i, j, k)$, et nous trouvons l'expression suivante pour λ :

$$\begin{aligned} \lambda = & \frac{-1}{2} (|\partial_1^+ u(i, j, k)|^2 + |\partial_1^- u(i, j, k)|^2 + |\partial_2^+ u(i, j, k)|^2 + |\partial_2^- u(i, j, k)|^2 \\ & + |\partial_3^+ u(i, j, k)|^2 + |\partial_3^- u(i, j, k)|^2) \end{aligned}$$

Ce résultat donne pour λ une discrétisation de la norme du gradient de u^m qui n'est pas la discrétisation usuelle.

Nous notons cette discrétisation alternative par $\|\tilde{\nabla} u^m\|^2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (|\partial_1^+ u(i, j, k)|^2 + |\partial_1^- u(i, j, k)|^2 + |\partial_2^+ u(i, j, k)|^2 + |\partial_2^- u(i, j, k)|^2 + \\ |\partial_3^+ u(i, j, k)|^2 + |\partial_3^- u(i, j, k)|^2) \end{aligned} \quad (3.24)$$

et l'équation satisfaite par u^m est donc :

$$\Delta u^m = -\|\tilde{\nabla} u^m\|^2 u^m \quad (3.25)$$

■

Nous pouvons facilement montrer que si u^m satisfait $\Delta u^m = -\|\tilde{\nabla} u^m\|^2 u^m$ alors l'énergie $F_{u^m}(w^m)$

$$F_{u^m}(w^m) = \int_{\Omega_m} \|\nabla(u^m - w^m)\|^2 dx \quad (3.26)$$

atteint son minimum pour $w^m = 0$.

Exprimons sous une autre forme l'équation qui est satisfaite par u^m . Cette deuxième formulation sera utilisée dans la section 5.2 pour donner une condition nécessaire pour qu'une fonction u^m soit solution du problème (3.13).

Nous utilisons une paramétrisation polaire pour chaque point (i, j, k) de $u^m(i, j, k)$ à savoir $u^m(i, j, k) = e^{i\theta(i, j, k)}$. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 5.2 *Soit u^m une solution du problème (3.13), soit θ^m associé à u^m et soit $V(x)$ le 6 voisinage de x , alors pour tout point x appartenant à l'intérieur de Ω :*

$$\sum_{v \in V(x)} \sin(\theta(x+v) - \theta(x)) = 0 \quad (3.27)$$

Preuve. On a :

$$\|u^m(i+1, j, k) - u^m(i, j, k)\|^2 = 2 - 2u^m(i+1, j, k) \cdot u^m(i, j, k) \quad (3.28)$$

$$= 2 - 2\cos(\theta(i+1, j, k) - \theta(i, j, k)) \quad (3.29)$$

Trouver la fonction u^m qui minimise E_m est équivalent à trouver θ qui minimise l'énergie $E'_m(\theta)$:

$$\begin{aligned} E'_m(\theta) = & - \sum_{\Omega_m} \cos(\theta(i+1, j, k) - \theta(i, j, k)) + \cos(\theta(i, j+1, k) - \theta(i, j, k)) \\ & + \cos(\theta(i, j, k+1) - \theta(i, j, k)) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Nous pouvons dériver cette équation par rapport à chaque $\theta(i, j, k)$ et nous obtenons que pour chaque point (i, j, k) le minimum θ satisfait :

$$\begin{aligned} & \sin(\theta(i+1, j, k) - \theta(i, j, k)) + \sin(\theta(i-1, j, k) - \theta(i, j, k)) + \sin(\theta(i, j+1, k) - \theta(i, j, k)) + \\ & + \sin(\theta(i, j-1, k) - \theta(i, j, k)) + \sin(\theta(i, j, k+1) - \theta(i, j, k)) + \sin(\theta(i, j, k-1) - \theta(i, j, k)) = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

De façon simplifiée cette formule s'écrit

$$\sum_{v \in V(x)} \sin(\theta(x+v) - \theta(x)) = 0 \quad (3.32)$$

■

En fait cette équation est équivalente à $\Delta u^m \cdot (u^m)^\perp = 0$ qui est équivalente à l'équation $\Delta u^m = -\|\tilde{\nabla} u^m\|^2 u^m$

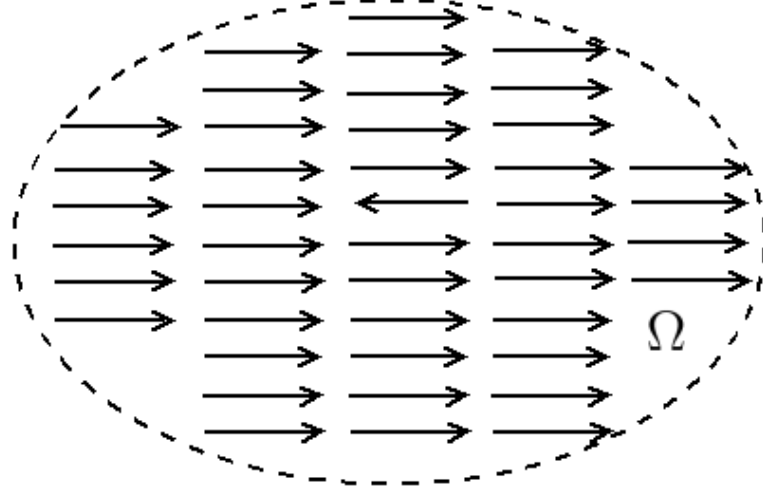


FIG. 3.1 – Représentation de u^m .

5.2 u^m n'est pas un minimum local de E_m

u^m n'est pas toujours un minimum local de E_m . En effet choisissons $b_m = \vec{i}$ constant sur $\partial\Omega_m$. Choisissons $u^m = \vec{i}$ sur Ω_m sauf sur un point x où nous avons $u^m(x) = -\vec{i}$, voir Figure 3.1. Le champ de vecteurs u^m satisfait

$$\Delta u^m = -\|\tilde{\nabla} u^m\|^2 u^m$$

Donc nous pouvons utiliser (3.26) et nous savons que $\int_{\Omega} \|\nabla(u^m - w^m)\|^2 dx$ est minimum pour $w^m = 0$. Donc nous pouvons choisir $u_0^m = u^m$ comme une fonction initiale pour l'algorithme de F. Alouges. A chaque itération l'algorithme donne la même fonction $u_n^m = u^m$. L'algorithme est donc stationnaire. On en déduit la convergence vers u^m ; de plus u^m n'est pas un minimum local de l'énergie E_m . En effet, si nous changeons légèrement la valeur au point x où $u(x) = -\vec{i}$, l'énergie E_m diminue (au voisinage de x , $u(x) = \vec{i}$).

Théorème 5.3 *Soit θ tel que pour tout point x appartenant à Ω et pour tout v dans $V(x)$, $\cos(\theta(x+v) - \theta(x)) > 0$. Nous appelons cette condition, la condition de régularité. Si θ vérifie l'égalité :*

$$\sum_{v \in V(x)} \sin(\theta(x+v) - \theta(x)) = 0 \quad (3.33)$$

Alors θ est un minimum local de E_m .

Preuve. Il est suffisant pour prouver le théorème de montrer que la matrice hessienne de E_m au point θ est une matrice définie positive. Pour prouver cela, il est suffisant de prouver que chaque sous matrice de taille $(2,2)$ est une matrice définie positive.

Calculons la sous matrice H de taille 2×2 associée à $\theta(i, j, k)$ et $\theta(i + 1, j, k)$. Les coefficients sont

$$H(1, 1) = \frac{\partial^2 E_m}{\partial \theta(i, j, k)^2}$$

$$H(1, 2) = \frac{\partial^2 E_m}{\partial \theta(i, j, k) \partial \theta(i + 1, j, k)}$$

$$H(2, 2) = \frac{\partial^2 E_m}{\partial \theta(i + 1, j, k)^2}$$

$$H(1, 1) = \cos(\theta(i+1, j, k) - \theta(i, j, k)) + \cos(\theta(i-1, j, k) - \theta(i, j, k)) + \cos(\theta(i, j+1, k) - \theta(i, j, k)) + \cos(\theta(i, j-1, k) - \theta(i, j, k)) + \cos(\theta(i, j, k+1) - \theta(i, j, k)) + \cos(\theta(i, j, k-1) - \theta(i, j, k))$$

L'expression de $H(2, 2)$ est similaire

$$H(1, 2) = H(2, 1) = \cos(\theta(i, j, k) - \theta(i + 1, j, k))$$

La trace de H est strictement positive grâce à la condition de régularité (chaque terme de la somme est strictement positif). Le déterminant de H est strictement positif, en effet $H(1, 1) > H(2, 1)$ et $H(2, 2) > H(2, 1)$, donc

$$H(1, 1)H(2, 2) - H(2, 1)^2 > 0$$

Donc les valeurs propres de H sont strictement positives ; donc H est définie positive. Pour la même raison les autres sous matrices sont définies positives. Nous en déduisons que la matrice hessienne de E_m est définie positive et donc que θ est un minimum local de l'énergie. ■

Comme corollaire, nous remarquons que chaque fonction u^m obtenue comme limite de l'algorithme de F. Alouges qui satisfait la condition de régularité, est un minimum local de l'énergie E_m . En effet l'équation (3.33) est équivalente à $\Delta u^m \cdot (u^m)^\perp = 0$ et u^m vérifie $\Delta u^m = -\|\tilde{\nabla} u^m\|^2 u^m$, donc u^m vérifie (3.33).

6 Etude de la convergence de la solution discrète vers la solution continue

6.1 Introduction

On rappelle que u_* est la limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ de la suite $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ des minimiseurs des fonctionnelles continues E_ϵ sur Ω qui convergent lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, avec

$$E_\epsilon(u) = \int_{\Omega} \left(\|\nabla u\|^2 + \frac{(1 - |u|^2)^2}{\epsilon^2} \right) dx \quad (3.34)$$

avec $u_\epsilon|_{\partial\Omega} = b$ (voir [36]).

Dans cette section nous allons aborder le problème du lien entre le champ u^m minimum de la fonctionnelle discrète E_m sur Ω et u_* . On rappelle que u^m est une solution du problème discret :

$$\text{Inf}\{E_m(u), u \in T_m(\Omega), \|u\| = 1\} \quad (3.35)$$

Avec T_m défini par :

$$T_m(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, u \text{ continue}, u|_T \in \{T_m\} = P_1(T); u|_{\partial\Omega} = b_m\}$$

On appelle u_ϵ^m une solution du problème discret :

$$\text{Inf}\{E_\epsilon(u); u \in T_m(\Omega)\} \quad (3.36)$$

6.2 $u_\epsilon^m \rightarrow u_\epsilon$ lorsque m tend vers l'infini

Nous avons noté u_ϵ un minimum de l'énergie de Ginzburg-Landau E_ϵ pour le problème continu.

Montrons que u_ϵ^m converge vers u_ϵ , quand m tend vers l'infini i.e lorsque le pas de discrétisation tend vers 0. La suite $(u_\epsilon^m)_m$ appartient à $L^\infty(\Omega_n)$ (voir Proposition 6.1), de plus $\int_{\Omega_m} \|\nabla u_\epsilon^m\|^2$ est bornée par une constante indépendante de m . Donc u_ϵ^m est majorée dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, nous pouvons extraire une sous suite qui converge vers v_ϵ .

Nous notons $\pi_m(u_\epsilon)$ la projection de u_ϵ sur l'espace de fonctions affines par morceaux $T_m(\Omega)$. On montre en utilisant les résultats d'approximation par éléments

finis de [26] que $E_\epsilon(\pi_m(u_\epsilon))$ tend vers $E_\epsilon(u_\epsilon)$ quand m tend vers l'infini. Comme u_ϵ^m est solution du problème (3.36) Nous avons pour tout m :

$$E_\epsilon(\pi_m(u_\epsilon)) \geq E_\epsilon(u_\epsilon^m)$$

Nous prenons la limite inférieure quand m tend vers l'infini sur les termes de gauche et de droite, nous obtenons

$$E_\epsilon(u_\epsilon) \geq E_\epsilon(v_\epsilon)$$

Donc v_ϵ est un minimum de l'énergie de Ginzburg-Landau sur Ω .

6.3 $u_\epsilon^m \rightarrow u^m$ lorsque ϵ tend vers 0

Il semble qu'il ne soit pas possible de montrer que $u_\epsilon^m \rightarrow u^m$. Cela est du à la divergence lorsque ϵ tend vers 0 de :

$$\int_{\Omega_m} \frac{(1 - \|v\|^2)^2}{\epsilon^2} dx.$$

Nous allons changer légèrement la définition de u_ϵ^m dans cette section. u_ϵ^m est défini comme le minimum de :

$$\tilde{E}_\epsilon(u) = \sum_{x_i \in \Omega_m} \|\nabla u(x_i)\|^2 + \frac{(1 - \|u(x_i)\|^2)^2}{\epsilon^2} \quad (3.37)$$

Nous allons montrer que nous pouvons extraire une sous suite de u_ϵ^m , lorsque ϵ tend vers 0, qui converge vers u^m pour la topologie discrète.

Proposition 6.1

$\|u_\epsilon^m\|$ est plus petit que 1

Preuve. Nous reprenons la démonstration de la Proposition 2.1 pour prouver que $\|u_\epsilon^m\|$ est plus petit que 1 pour chaque point. Par l'absurde on suppose qu'il existe un point $x \in \Omega_m$ tel que $\|u_\epsilon^m(x)\| > 1$. Soit π la projection sur S^1 . Cette application est contractante. Donc pour tout $x \in \Omega_m$; tel que $\|u_\epsilon^m(x + \vec{i})\| \geq 1$ et $\|u_\epsilon^m(x)\| > 1$:

$$\|\pi(u_\epsilon^m(x + \vec{i})) - \pi(u_\epsilon^m(x))\| \leq \|u_\epsilon^m(x + \vec{i}) - u_\epsilon^m(x)\| \quad (3.38)$$

Si $\|u_\epsilon^m(x + \vec{i})\| \leq 1$, il est clair que

$$\|u_\epsilon^m(x + \vec{i}) - \pi(u_\epsilon^m(x))\| < \|u_\epsilon^m(x + \vec{i}) - u_\epsilon^m(x)\| \quad (3.39)$$

On note π_{B_1} la projection sur la boule unité. Soit $v_\epsilon^m \in T_m(\Omega)$, tel que

$$v_\epsilon^m(x_i) = \pi_{B_1}(u_\epsilon^m(x_i))$$

D'après 3.38 et 3.39, $E(v_\epsilon^m) \leq E(u_\epsilon^m)$. D'après les conditions de bord imposées sur u_ϵ^m , il existe au moins un point x correspondant à la situation 3.39. Donc l'inégalité est stricte et

$$E(v_\epsilon^m) < E(u_\epsilon^m)$$

à fortiori

$$\tilde{E}_\epsilon(v_\epsilon^m) < \tilde{E}_\epsilon(u_\epsilon^m)$$

Donc pour tout point x de Ω_m , $\|u_\epsilon^m(x)\| \leq 1$. On en déduit facilement que $\|u_\epsilon^m(x)\| \leq 1$ sur Ω . ■

On en déduit que pour une suite ϵ_p qui tend vers 0 à m fixé, la suite $E_{\epsilon_p}(u_{\epsilon_p}^m)$ est bornée, car il y a un nombre fini de points. Donc pour tout p , $\int_\Omega \|\nabla u_{\epsilon_p}^m\|^2$ est bornée dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, donc la suite $u_{\epsilon_p}^m$ est bornée dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$; nous pouvons extraire une sous suite qui converge vers une limite v_m lorsque ϵ_p tend vers 0.

Comme $\int_{\Omega_m} \frac{(1-\|u_{\epsilon_p}^m\|^2)^2}{\epsilon^2} dx$ est majorée par $E_{\epsilon_p}(u_{\epsilon_p}^m)$ et donc nous pouvons en déduire $\|v_m\| = 1$ aux points de discrétisation.

S' il existe une fonction discrétisée u^m de module 1 sur Ω_m telle que :

$$\int_{\Omega_m} \|\nabla u^m\|^2 dx < \int_{\Omega_m} \|\nabla v_m\|^2 dx,$$

alors nous avons pour tout ϵ :

$$\int_{\Omega_m} \|\nabla u^m\|^2 < \int_{\Omega_m} \left(\|\nabla v_m\|^2 + \frac{(1-\|u_\epsilon^m\|^2)^2}{\epsilon^2} \right) dx$$

Grâce à la convergence de $u_{\epsilon_p}^m$ vers v_m nous pouvons trouver ϵ tel que

$$\int_{\Omega_m} \|\nabla u^m\|^2 < E_\epsilon(u_\epsilon^m)$$

Mais

$$E_{m,\epsilon}(u^m) = \int_{\Omega_m} \|\nabla u^m\|^2$$

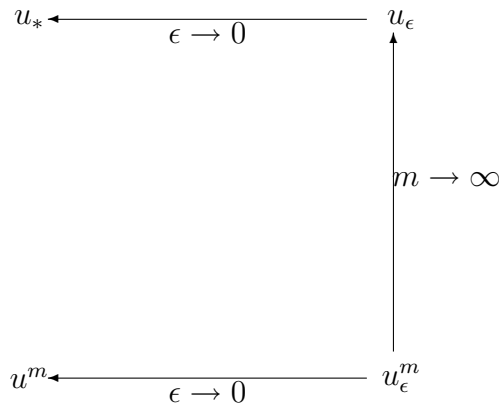
Donc

$$E_{m,\epsilon}(u^m) < E_{m,\epsilon}(u_\epsilon^m)$$

C'est une contradiction avec la définition de u_ϵ^m .

Donc $\int_{\Omega_m} \|\nabla u^m\|^2 = \int_{\Omega_m} \|\nabla v_m\|^2$ et $\|v_m\| = 1$ partout. Donc v_m est un minimum de E_m .

Nous avons résumé les résultats de convergence sur le diagramme suivant (en confondant les deux définition de u_ϵ^m) :



Il serait souhaitable pour compléter le diagramme de montrer que u^m tend u_* quand $m \rightarrow \infty$. Malheureusement on ne peut pas utiliser la convergence de u_ϵ^m vers u_* lorsque l'on fait tendre m vers l'infini, puis ϵ vers 0. On ne dispose pas de théorème d'inversion de limites pour montrer que u_ϵ^m tend vers u_* lorsque l'on fait tendre ϵ vers 0 (et donc $u_\epsilon^m \rightarrow u^m$), puis m vers l'infini. La section suivante établit cependant des résultats de majoration et minoration sur la suite u^m .

7 Propriétés de la suite u^m

7.1 Majoration de $E(u^m)$

Dans cette section on montre des bornes pour les champs u^m à valeurs dans \mathbb{R}^2 et solutions du problème (3.36).

Théorème 7.1 *Soit $u^m \in T_m(\Omega)$ solution du problème (3.36), avec des conditions de bord $\pi_m(b) = b_m$. Si $\deg(b, \partial\Omega) \neq 0$ alors*

$$\int_{\Omega} \|\nabla u^m\|^2 dx \leq 2\pi \ln(m) + C$$

avec C une constante indépendante de m .

Preuve. Nous allons montrer cette majoration sur une suite de fonctions w_m , telles que $w_m \in T_m(\Omega)$; comme u^m est un minimum de l'énergie E_m , l'inégalité sera vérifiée pour u^m .

Soit x un point de l'intérieur de Ω . Pour m suffisamment grand, on définit C_m le disque de centre x et de rayon $\frac{1}{m}$. On paramétrise le disque C_m par un angle θ . On peut trouver une fonction ψ unitaire harmonique sur Ω privé de C_1 qui vérifie $\Psi = e^{i\theta}$ sur ∂C_1 et $\psi = b$ sur $\partial\Omega$ et soit v_m :

$$v_m = \begin{cases} \chi(mr)e^{i\theta} & x \in C_m \\ e^{i\theta} & x \in C_1 - C_m \\ \Psi(x) & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.40)$$

Avec χ une fonction C^∞ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ qui vaut 0 en 0 et 1 en 1. On suppose de plus que la dérivée de χ est nulle en 1 de manière à assurer un raccord C^1 avec la fonction constante 1. Nous allons d'abord montrer que v_m satisfait l'inégalité recherchée, puis que la suite de fonctions $w_m = \pi_m(v_m)$, discrétisées de la suite v_m , satisfait également cette inégalité, ce qui montrera le résultat recherché.

$$E(v_m) = \int_{\Omega - C_1} \|\nabla v_m\|^2 dx + \int_{C_1 - C_m} \|\nabla v_m\|^2 dx + \int_{C_m} \|\nabla v_m\|^2 dx \quad (3.41)$$

$$= \int_{\Omega - C_1} \|\nabla \Psi\|^2 dx + \int_{C_1 - C_m} \|\nabla e^{i\theta}\|^2 dx + \int_{C_m} \|\nabla [\chi(mr)e^{i\theta}]\|^2 dx \quad (3.42)$$

$\int_{\Omega - C_1} \|\Psi\|^2 dx$ est une constante indépendante de m . De plus $\|\nabla e^{i\theta}\|^2 = \frac{1}{r^2}$, on en déduit :

$$\int_{C_1 - C_m} \|\nabla e^{i\theta}\|^2 dx = \int_{\frac{1}{m}}^1 \frac{1}{r^2} 2\pi r dr \quad (3.43)$$

$$= 2\pi \ln(m) \quad (3.44)$$

On majore le premier terme de (3.42) par une constante. Par ailleurs on a :

$$\|\nabla[\chi(mr)e^{i\theta}]\|^2 = m^2(\chi'(mr))^2 + \frac{\chi^2(mr)}{r^2} \quad (3.45)$$

$$\int_{C_m} \|\nabla[\chi(mr)e^{i\theta}]\|^2 dx = \int_0^{\frac{1}{m}} (m^2(\chi'(mr))^2 + \frac{\chi^2(mr)}{r^2}) 2\pi r dr \quad (3.46)$$

On fait le changement de variable $x = mr$

$$= \int_0^1 ((x\chi'(x))^2 + \frac{\chi^2(x)}{x}) 2\pi dx \quad (3.47)$$

Comme χ vaut 0 en 0 et est de classe C^∞ , $\int_0^1 \frac{\chi^2(x)}{x} 2\pi dx$ existe et $\int_0^1 ((x\chi'(x))^2 + \frac{\chi^2(x)}{x}) 2\pi dx$ est une constante indépendante de m . On a donc

$$\int_{\Omega} \|\nabla v_m\|^2 dx \leq 2\pi \log(m) + C \quad (3.48)$$

Soit donc w_m la discrétisation de v_m . Comme w_m est affine par morceaux, on dispose de la propriété suivante :

$$\int_{\Omega} \|\nabla w_m\|^2 dx \leq \int_{\Omega} \|\nabla v_m\|^2 dx \quad (3.49)$$

On en déduit que

$$\int_{\Omega} \|\nabla w_m\|^2 dx \leq 2\pi \log(m) + C \quad (3.50)$$

w_m est de module 1 en tout point de discrétisation de Ω_m sauf éventuellement en 4 points au maximum inclus dans C_m . En effet w_m est de module 1 sur $\Omega - C_m$, C_m est un disque de rayon $\frac{1}{m}$, donc son intérieur ne peut contenir que au plus 4 points de Ω_m . On change la valeur de w_m de ces points pour que $\|w_m\| = 1$ sur tous les points de discrétisation de Ω_m , ce qui ne change pas l'énergie modulo une constante fixe.

L'inégalité cherchée est toujours vraie pour une nouvelle constante :

$$\int_{\Omega} \|\nabla w_m\|^2 dx \leq 2\pi \log(m) + C'$$

Comme u^m est le minimum d'énergie pour E. On en déduit :

$$\int_{\Omega} \|\nabla u^m\|^2 dx \leq 2\pi \log(m) + C'. \quad (3.51)$$

■

Cette inégalité est très similaire aux majorations que l'on obtient dans le cas continu pour des suites u_ϵ de minimiseurs de E_ϵ . En effet on montre dans [8], avec des conditions de bord de degré 1 que :

$$\int_{\Omega} \|\nabla u_\epsilon\|^2 dx \leq 2\pi \log(\epsilon) + C$$

avec C une constante fixe dépendant des conditions de bord. Il est tentant de faire un parallèle entre $\frac{1}{m}$ et ϵ , cependant comme nous allons le voir dans les sections suivantes, tous les résultats en continu sur u_ϵ ne se traduisent pas dans le cas discret sur u^m .

7.2 Minoration de $E_m(u^m)$

Dans cette section on étudie des champs u^m à support dans \mathbb{R}^2 , solutions du problème (3.36). Nous allons montrer que dans certains cas on peut minorer l'énergie de u^m . Le lemme suivant montre que pour tout x dans Ω , on peut trouver un anneau arbitrairement proche de x , sur lequel $\|u^m(x)\| > \frac{1}{2}$.

Lemme 7.2 *Soit $u^m \in T_m(\Omega)$ solution du problème (3.36), avec des conditions de bord $\pi_m(b) = b_m$ avec $\deg(b, \Omega) = 1$. Soit a un point de Ω (pas nécessairement de Ω_m), et soient les disques $B_k^m = B(a, r \frac{k\sqrt{m}}{m})$ avec k variant de $[\frac{\sqrt{m}}{2}]$ ($[\]$ désignant la partie entière) à $[\sqrt{m}]$ (r est choisi pour que tous les disques B_k^m soient contenus dans Ω). Soient les anneaux $C_k^m = B(a, r \frac{k\sqrt{m}}{m}) - B(a, r \frac{(k-1)\sqrt{m}}{m})$,*

Alors $\exists M > 0; \forall m > M; \exists k \in \mathbb{N}; \forall x \in C_k^m$

$$\|u^m(x)\| > \frac{1}{2}$$

Preuve.

Par l'absurde si pour tout k on pouvait trouver $x_k \in C_k^m = B(a, r \frac{k\sqrt{m}}{m}) - B(a, r \frac{(k-1)\sqrt{m}}{m})$ tel que $\|u^m(x_k)\| < \frac{1}{2}$ alors on peut trouver une constante $\beta > 0$ indépendante de m telle que $E(u^m|_{C_k}) > \beta$ (voir Annexe 2). On en déduit que $E(u^m) \geq \beta(\sqrt{\frac{m}{2}} - 1)$. Pour m suffisamment grand cela contredit le fait que $E(u^m) \leq 2\pi \ln(m) + C$ d'après (3.51). Donc pour tout m suffisamment grand on peut trouver k tel que $\|u^m\| > \frac{1}{2}$ sur C_k .

■

Théorème 7.3 Soit $u^m \in T_m(\Omega)$ solution du problème 3.36, avec des conditions de bord $\pi_m(b) = b_m$ avec $\deg(b, \Omega) = 1$. Soit a un point de Ω , soit C_k^m donné par le lemme 7.2. Alors

$$\exists \gamma > 0$$

$$\int_{\Omega_m} \|\nabla u^m\|^2 > \gamma |\ln(m)| + C \quad (3.52)$$

avec γ indépendant de m .

Preuve.

On utilise le résultat suivant issu de [15] :

Théorème 7.4 Soit B_R un disque de rayon R et p un point, soit $\Omega = B_R - B(p, R_0)$. Soit u une fonction régulière de Ω dans \mathbb{C} , nous supposons que $0 < a \leq |u| \leq 1$ sur Ω et que de plus $\frac{1}{R_0^2} \int_{\Omega} (|u|^2 - 1)^2 \leq K$. On suppose que $\deg(u, \partial\Omega) = 1$. On note $u_0(z) = \frac{z-p}{|z-p|}$. Alors

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 - C \quad (3.53)$$

avec C une constante dépendante seulement de a et K .

On applique ce théorème en prenant $a = \frac{1}{2}$ et $R_0 = \frac{\sqrt{\ln(m)}}{m}$. D'après l'Annexe (1), il existe C_2 telle que

$$m^2 \int_{\Omega_m} (1 - |u^m|^2)^2 dx \leq C_2 2\pi \ln(m)$$

On en déduit que la condition $\frac{1}{R_0^2} \int_{\Omega} (|u|^2 - 1)^2 \leq K$ est bien vérifiée :

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 = 2\pi \ln\left(\frac{m}{\sqrt{\ln(m)}}\right).$$

D'où l'inégalité (3.52).

■

7.3 Etude de $\int_{\Omega} (1 - \|u^m\|^2)^2 dx$

Dans [8], les auteurs montrent que :

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} (1 - \|u_{\epsilon}\|^2)^2 dx \geq C \quad (3.54)$$

Ce résultat est central dans la démonstration de l'existence d'une limite u_* pour u_ϵ lorsque ϵ tend vers 0. Le résultat équivalent dans le cas discret serait :

$$m^2 \int_{\Omega_m} (1 - \|u^m\|^2)^2 dx \geq C$$

Or on montre le théorème suivant :

Théorème 7.5 *Soit $u^m \in T_m(\Omega)$ solution du problème 3.36, avec des conditions de bord $\pi_m(b) = b_m$ avec $\deg(b, \partial\Omega) = 1$. S'il existe $\gamma > 0$ tel que :*

$$\int_{\Omega_m} \|\nabla u^m\|^2 > \gamma |\ln(m)| + C \quad (3.55)$$

Alors il existe $\gamma' > 0$

$$m^2 \int_{\Omega} (1 - \|u^m\|^2)^2 dx > \gamma' |\ln(m)| + C \quad (3.56)$$

Notons que dans les conditions du Théorème (7.3), l'hypothèse (3.55) est vérifiée.

Preuve. on montre dans l'Annexe (1) que

$$\frac{1}{15} \int_{\Omega_m} \|\nabla u\|^2 \leq m^2 \int_{\Omega_m} (1 - \|u\|^2)^2 dx$$

Par hypothèse on a

$$\int_{\Omega_m} \|\nabla u^m\|^2 > \gamma |\ln(m)| + C \quad (3.57)$$

On en déduit le théorème. ■

En fait on montre facilement qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 strictement positives, telles que pour m suffisamment grand :

$$C_1 2\pi \ln(m) \leq m^2 \int_{\Omega_m} (1 - \|u^m\|^2)^2 dx \leq C_2 2\pi \ln(m)$$

$m^2 \int_{\Omega_m} (1 - \|u\|^2)^2 dx$ tend donc vers l'infini quand m tend vers l'infini, ce qui est différent du cas continu, voir l'équation (3.54). Ce résultat tend à infirmer la convergence de u^m vers u_* lorsque m tend vers l'infini, ou tout du moins cette convergence pourrait s'effectuer dans un sens plus faible que la convergence de u_ϵ vers u_* .

8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié l'algorithme de F. Alouges pour des systèmes de type Ginzburg-Landau. Cette fonctionnelle ne pose pas de problème pour les champs de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 et on montre facilement la convergence. Par contre pour les champs de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 des problèmes d'existence à ϵ fixé se posent et nous introduisons la version discrétisée de l'algorithme de F. Alouges. Nous avons montré que cet algorithme converge vers une fonction u^m qui satisfait l'équation différentielle discrète $\Delta u^m = -|\tilde{\nabla} u^m|^2 u^m$, qui est très proche de l'équation vérifiée par u_* la solution du problème continu. Nous avons montré cependant que u^m n'est pas toujours un minimum local et donné une condition suffisante pour assurer que u^m est un minimum local.

Par ailleurs, nous avons comparé les propriétés de u^m solution du problème (3.36) et de u_ϵ minimum de E_ϵ . Nous avons montré des résultats de convergence sur u^m et donné des estimations de $E_m(u^m)$ et de $m^2 \int_{\Omega_m} (1 - |u^m|^2)^2 dx$, proches de celles données dans [8] sur u_ϵ . On obtient en particulier une majoration de l'énergie identique. Nous avons montré cependant que la symétrie entre u_ϵ et u^m est imparfaite. Ces différences seront étudiées dans des travaux futurs.

Chapitre 4

Courbure totale et détection de filaments

Les filaments sont des objets avec une épaisseur très faible, ce qui permet de les considérer comme des courbes. Nous allons donner dans ce chapitre une définition précise d'un filament. Pour cela nous allons définir et utiliser la notion de courbure totale d'une courbe. Cette notion est à rapprocher de celle de variation totale (voir [24]) pour une fonction. Cette notion est très utilisée en traitement d'image, par exemple pour la décompression d'images JPEG [2], en déconvolution [11] ou en restauration [37].

On utilisera la notion de courbure totale pour proposer une méthode de détection de routes à la section 4.1. Par rapport à la méthode de détection présentée au chapitre 2, elle présente l'avantage de mieux gérer les filaments avec des fortes courbures ponctuelles et les jonctions de routes. Elle est de plus rapide en temps de calcul (elle ne nécessite pas la minimisation d'une fonctionnelle de Ginzburg-Landau). Elle est par contre moins robuste aux occlusions, les résultats sont également moins bons pour les images avec un bruit très important comme celle de la Figure (2.3).

Nous allons démontrer que certains théorèmes pour les fonctions dont la variation totale est bornée ont des équivalents pour les courbes ayant une courbure totale bornée. Cette approche sera illustrée sur des exemples dans la section suivante.

Les courbes considérées seront incluses dans des images $I : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, nous supposons que ces images sont de classe C^2 . Si nécessaire, on peut convoluer avec un noyau gaussien l'image pour satisfaire à cette hypothèse.

1 Définition d'un filament

Définition 1.1 Courbure totale

Soit $C(s)$ une courbe simple (c'est à dire ne se recoupant pas elle même) de \mathbb{R}^3 , continue, C^1 par morceaux, paramétrée par l'abscisse curviligne, avec $t \in [0; L]$, L étant la longueur de la courbe C . On note $\overrightarrow{T}(t) = (T_x(t), T_y(t), T_z(t))$ le vecteur unitaire tangent à $C(t)$, et soient P et Q les points $C(0)$ et $C(L)$. On définit

$$E = \{ \overrightarrow{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3), \text{ à support compact, tel que } \overrightarrow{\phi} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \\ \text{avec } \overrightarrow{\phi(C(0))} = \overrightarrow{\phi(C(L))} = \overrightarrow{0}; \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 \leq 1 \}$$

Nous définissons C_T la courbure totale de $C(t)$ par

$$C_T = \sup_{\overrightarrow{\phi} \in E} \int_0^L T_x(s) \frac{\partial \phi_1(C(s))}{\partial s} + T_y(s) \frac{\partial \phi_2(C(s))}{\partial s} + T_z(s) \frac{\partial \phi_3(C(s))}{\partial s} ds \quad (4.1)$$

Nous verrons ci-dessous que si $C(s)$ est de classe C^2 , et si note $k(s)$ sa courbure en s (on choisit la définition classique de la courbure qui impose $k(s) \geq 0$) alors :

$$C_T = \int_0^L k(s) ds \quad (4.2)$$

Pour tout $t \in [0; L]$ on définit H_t le plan orthogonal à $\overrightarrow{T}(t)$ passant par $C(t)$.

Définition 1.2

Nous définissons les filaments inclus dans une image I comme des courbes $C(t)$ simples de \mathbb{R}^3 , continues, C^1 par morceaux qui vérifient

1. $\forall t \in [0; L], \overrightarrow{N} \neq 0$ et $\overrightarrow{N}' \neq 0$ inclus dans H_t :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} I(x + t\overrightarrow{N}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} I(x + t\overrightarrow{N}') \quad (4.3)$$

2. $C(t)$ est maximum local pour $I|_{H_t \cap \Omega}$.
3. $C_T < \infty$
4. $\int_C |\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}| dt < \infty$

avec $\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = {}^t \overrightarrow{T}(t) \nabla^2 I \overrightarrow{T}(t)$ (où $\nabla^2 I$ est la matrice hessienne de I), désigne la dérivée partielle seconde de I dans la direction de $\overrightarrow{T}(t)$. La condition 4 vient de l'hypothèse

selon laquelle la variation de luminosité sur un filament est essentiellement linéaire. Pour minimiser $\int_C |\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}| dt$ il faut que $\overrightarrow{T}(t)$ soit parallèle à $\overrightarrow{v_1}$ le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de la matrice hessienne de I (${}^t X \nabla^2 I X$ avec $\|X\| = 1$, est minimum quand $X = \overrightarrow{v_1}$). Les hypothèses 2) et 4) pour une image C^2 bornée sont automatiquement vérifiées. On utilisera cette définition pour les filaments dans les chapitres suivants.

On associe à $C(t)$ une norme $\| \cdot \|_\mu$ de C pour $\mu > 0$ par

$$\|C\|_\mu = \frac{1}{L} \left(\int_C \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} dt + \mu C_T \right) \quad (4.4)$$

2 Résultats théoriques sur la courbure totale

Dans la suite, on notera BCT l'ensemble des courbes simples continues C^1 par morceaux et de courbure totale bornée.

2.1 Cas des courbes C^2

Si la courbe est C^2 , la courbure totale peut s'exprimer directement en fonction de la courbure classique de la courbe. Rappelons tout d'abord la définition de la courbure.

Définition 2.1 Courbure

Soit $C(s)$ une courbe paramétrée par son abscisse curviligne, simple, de classe C^2 , le vecteur tangent $\overrightarrow{T}(s)$ est défini par :

$$\overrightarrow{T}(s) = \frac{\partial C(s)}{\partial s}$$

et on a $\forall s$:

$$\|\overrightarrow{T}(s)\| = 1$$

La courbure en s , $k(s)$, est définie par :

$$k(s) = \left\| \frac{\partial \overrightarrow{T}(s)}{\partial s} \right\|$$

Proposition 2.2 Soit C une courbe paramétrée simple, de classe C^2 , et soit L sa longueur alors :

$$C_T = \int_0^L k(s) ds$$

La courbure totale est donc simplement l'intégrale de la courbure le long de la courbe, dans le cas C^2 . Ceci permet d'avoir une idée intuitive de cette notion et de la calculer facilement dans un certain nombre de cas. Cependant la courbure totale s'applique dans un cadre plus général pour des courbes anguleuses comme des routes par exemple.

Preuve. On a

$$C_T = \sup_{\vec{\phi} \in E} \int_0^L \overrightarrow{T(s)} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial \phi(C(s))}}{\partial s} ds$$

$\overrightarrow{T(s)}$ est C^1 et $\overrightarrow{\phi(C(s))}$ s'annule en 0 et en L donc par intégration par partie :

$$= \sup_{\vec{\phi} \in E} \int_0^L \frac{\partial \overrightarrow{T(s)}}{\partial s} \cdot \overrightarrow{\phi(C(s))} ds$$

comme $\|\overrightarrow{\phi(C(s))}\| \leq 1$

$$\leq \int_0^L k(s) ds.$$

soit ϵ fixé, comme $k(s)$ est une fonction continue on peut trouver une suite $\vec{\phi}_n$, C^1 à support compact ne contenant pas $C(0)$ et $C(L)$ qui converge uniformément vers $\frac{\partial \overrightarrow{T(s)}}{\partial s}$ si $\|\frac{\partial \overrightarrow{T(s)}}{\partial s}\| \neq 0$ (sinon on prolonge $\vec{\phi}_n$ par continuité) pour $\epsilon \leq s \leq L - \epsilon$

$$\int_{\epsilon}^{L-\epsilon} \frac{\partial \overrightarrow{T(s)}}{\partial s} \cdot \overrightarrow{\phi_n(C(s))} ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\epsilon}^{L-\epsilon} k(s) ds \quad (4.5)$$

$$\int_{[0;\epsilon] \cup [L-\epsilon, L]} \left| \frac{\partial \overrightarrow{T(s)}}{\partial s} \cdot \overrightarrow{\phi_n(C(s))} \right| ds \leq 2\epsilon \cdot \|k\|_{\infty} \quad (4.6)$$

Donc on en déduit à partir de cette suite ϕ_n que

$$C_T \geq \int_0^L k(s) ds$$

ce qui démontre la propriété. ■

2.2 Théorèmes de structures

Nous aurons besoin du théorème de représentation de Riesz.

Théorème 2.3 Soit $\tilde{L} : C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire satisfaisant pour tout K compact $\subset \mathbb{R}^n$

$$\sup\{\tilde{L}(f) \mid f \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m); |f| \leq 1, \text{supp}(f) \subset K\} < \infty$$

Où $C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ est l'ensemble des fonctions C^∞ à valeurs dans \mathbb{R}^m . Alors il existe une mesure de Radon μ sur \mathbb{R}^n et $\vec{\sigma} \in L^1(d\mu)$ telles que

- $\|\vec{\sigma}(x)\| = 1$ μ -presque partout
 - $\tilde{L}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \vec{\sigma} d\mu$
- pour $f \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$

On déduit du théorème de représentation de Riesz un théorème de structure pour les courbes BCT.

Théorème 2.4 (théorème de structure)

Soit une courbe $C(s)$ BCT, alors pour tout U ouvert, tel que $\{C(s), 0 < s < L\} \subset U$ il existe une mesure de Radon μ sur U et $\vec{\sigma}$ telle que $\forall \phi \in C_c^1(U - \{C(0), C(L)\}, \mathbb{R}^3)$

- $|\vec{\sigma}(x)| = 1$, μ presque sûrement
- $\int_0^L \overrightarrow{T}(s) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\phi(C(s))}}{\partial s} ds = \int \vec{\phi} \cdot \vec{\sigma} d\mu$

Ce théorème donne donc une expression plus simple de $\int_0^L \overrightarrow{T}(s) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\phi(C(s))}}{\partial s} ds$ qui sera utile pour la démonstration du théorème de collage (voir ci dessous).

2.3 Le théorème de collage

Nous allons tout d'abord généraliser le résultat du théorème de structure aux fonctions C^1 à support compact qui ne s'annulent pas aux extrémités de la courbe. Ce qui nous permettra de démontrer le théorème de collage. Ce théorème sera utile pour calculer la courbure totale de certaines courbes.

Lemme 2.5

Soit $C(s)$ une courbe BCT, alors pour tout U ouvert tel que $\{C(s), 0 \leq s \leq L\} \subset U$, $\forall \phi \in C_c^1(U, \mathbb{R}^3)$ on a

$$\int_0^L \overrightarrow{T}(s) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\phi(C(s))}}{\partial s} ds = \int \vec{\phi} \cdot \vec{\sigma} d\mu + \overrightarrow{T}(L) \cdot \overrightarrow{\phi(C(L))} - \overrightarrow{T}(0) \cdot \overrightarrow{\phi(C(0))} \quad (4.7)$$

Preuve. Soient P et Q les extrémités de C . Pour tout $\epsilon > 0$, soient χ_{P_ϵ} , χ_ϵ , χ_{Q_ϵ} une partition de l'unité (c'est à dire trois fonctions de classe C^∞ de U dans $[0,1]$, telles que $\forall x \in U$; $\chi_{P_\epsilon}(x) + \chi_\epsilon(x) + \chi_{Q_\epsilon}(x) = 1$), on impose que : $\text{supp}(\chi_{P_\epsilon}) \subset B(P, \epsilon)$ et $\text{supp}(\chi_{Q_\epsilon}) \subset B(Q, \epsilon)$, et que le support de χ_ϵ soit disjoint de $B(P, \frac{\epsilon}{2})$ et $B(Q, \frac{\epsilon}{2})$.

On impose également que χ_{P_ϵ} et χ_{Q_ϵ} soient à symétrie sphérique, c'est à dire que $\chi_{P_\epsilon}(x) = g(\|x - P\|)$ où g est une fonction de \mathbb{R}^+ dans $[0,1]$, on ajoute également la condition que g soit décroissante (on suppose le même type de condition pour χ_{Q_ϵ}). Soit $\vec{\phi}$ fixé $\in C_c^1(U, \mathbb{R}^3)$.

$$\int \overrightarrow{T(s)} \cdot \frac{\partial \vec{\phi}(C(s))}{\partial s} ds = \int \overrightarrow{T(s)} \cdot \frac{\partial [(\chi_{P_\epsilon}(x) + \chi_\epsilon(x) + \chi_{Q_\epsilon}(x)) \vec{\phi}(C(s))]}{\partial s} ds = \quad (4.8)$$

$$= \int \overrightarrow{T(s)} \cdot \frac{\partial [(\chi_{P_\epsilon}(x) + \chi_{Q_\epsilon}(x)) \vec{\phi}(C(s))]}{\partial s} ds + \int \overrightarrow{T(s)} \cdot \frac{\partial [\chi_\epsilon(x) \vec{\phi}(C(s))]}{\partial s} ds \quad (4.9)$$

Etudions le second terme de (4.9). On peut appliquer le théorème de structure (2.4) :

$$\int \overrightarrow{T(s)} \cdot \frac{\partial [\chi_\epsilon(x) \vec{\phi}(C(s))]}{\partial s} ds = \int \chi_\epsilon \vec{\phi} \cdot \vec{\sigma} d\mu \quad (4.10)$$

Or $|\chi_\epsilon \vec{\phi}| \leq |\phi|$ qui est μ -intégrable et $\chi_\epsilon \vec{\phi}$ converge simplement vers ϕ donc d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \chi_\epsilon \vec{\phi} \cdot \vec{\sigma} d\mu = \int \vec{\phi} \cdot \vec{\sigma} d\mu \quad (4.11)$$

Etudions maintenant le premier terme de (4.9). Plus précisément le terme associé à χ_{P_ϵ} (le terme associé à χ_{Q_ϵ} se traite de la même manière). Comme C est de classe C^1 on a $\overrightarrow{T(s)} = \overrightarrow{T(0)} + \overrightarrow{\eta(s)}$, avec $\lim_{s \rightarrow 0} \eta(s) = 0$,

$$\int_0^L \overrightarrow{T(s)} \cdot \frac{\partial [(\chi_{P_\epsilon}(C(s))) \vec{\phi}(C(s))]}{\partial s} ds = \int (\overrightarrow{T(0)} + \overrightarrow{\eta(s)}) \cdot \frac{\partial [(\chi_{P_\epsilon}(C(s))) \vec{\phi}(C(s))]}{\partial s} ds$$

La partie avec $\overrightarrow{T(0)}$ donne le résultat cherché. En effet :

$$\begin{aligned} \int_0^L \overrightarrow{T(0)} \cdot \frac{\partial [(\chi_{P_\epsilon}(C(s))) \vec{\phi}(C(s))]}{\partial s} ds &= \overrightarrow{T(0)} \cdot [\chi_{P_\epsilon}(Q) \vec{\phi}(Q) - \chi_{P_\epsilon}(P) \vec{\phi}(P)] = \\ &= -\overrightarrow{T(0)} \cdot \vec{\phi}(P). \end{aligned}$$

Il reste à montrer que le terme associé à $\eta(s)$ tend vers 0 pour terminer la démonstration, à savoir

$$\int_0^L \overrightarrow{\eta(s)} \cdot \frac{\partial [(\chi_{P_\epsilon}(C(s))) \vec{\phi}(C(s))]}{\partial s} ds =$$

$$\int_0^L \overrightarrow{\eta}(s) \cdot \frac{\partial \chi_{P_\epsilon}(C(s))}{\partial s} \overrightarrow{\phi}(C(s)) + \int_0^L \overrightarrow{\eta}(s) \cdot \chi_{P_\epsilon}(C(s)) \frac{\partial \overrightarrow{\phi}(C(s))}{\partial s} ds \quad (4.12)$$

Les deux intégrandes sont nulles pour $s \geq 2\epsilon$. En effet on a $\overrightarrow{C(0)C(s)} = s\overrightarrow{T(0)} + \overrightarrow{o(s)}$ et $\overrightarrow{T(0)}$ est unitaire. Pour ϵ suffisamment petit, pour tout $s \geq 2\epsilon$. Il vient $\|\overrightarrow{C(0)C(s)}\| \geq \epsilon$. Donc $C(s)$ n'appartient pas à $B(P, \epsilon)$. Donc l'intégrande est nulle pour $s \geq 2\epsilon$. Par conséquent pour les deux termes de (4.12) on étudie l'intégrale de 0 à 2ϵ .

Dans le deuxième terme de (4.12), l'intégrande peut être majorée par une constante ce qui entraîne :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\epsilon} \overrightarrow{\eta}(s) \cdot \chi_{P_\epsilon}(C(s)) \frac{\partial \overrightarrow{\phi}(C(s))}{\partial s} ds = 0$$

Majorons à présent le premier terme de (4.12) soient $\eta_\epsilon = \sup_{0 \leq s \leq 2\epsilon} \|\overrightarrow{\eta}(s)\|$ et M un majorant de ϕ .

On peut majorer, pour ϵ fixé, le premier terme de (4.12) par :

$$\int_0^{2\epsilon} \eta_\epsilon M \left| \frac{\partial \chi_{P_\epsilon}(C(s))}{\partial s} \right| ds \quad (4.13)$$

Nous allons montrer que pour ϵ suffisamment petit et pour tout $s \leq 2\epsilon$,

$$\frac{\partial \chi_{P_\epsilon}(C(s))}{\partial s} \leq 0$$

En effet

$$\frac{\partial \chi_{P_\epsilon}(C(s))}{\partial s} = \overrightarrow{\nabla}[\chi_{P_\epsilon}](C(s)) \cdot \overrightarrow{T(s)}$$

comme

$$\overrightarrow{T(s)} = \overrightarrow{T(0)} + \eta s$$

et puisque χ_{P_ϵ} est à symétrie sphérique c'est à dire $\chi_{P_\epsilon}(x) = g(\|x - P\|)$ avec g décroissant, on a

$$\overrightarrow{\nabla}[\chi_{P_\epsilon}](C(s)) = -a \overrightarrow{C(0)C(s)}$$

où a est un réel positif. En utilisant la relation

$$\overrightarrow{C(0)C(s)} = s\overrightarrow{T(0)} + \overrightarrow{o(s)}$$

on obtient finalement

$$\overrightarrow{\nabla}_{\chi_{P_\epsilon C(s)}} \cdot \overrightarrow{T(s)} = -a(s\overrightarrow{T(0)} + \overrightarrow{o(s)}) \cdot s\overrightarrow{T(0)} + \overrightarrow{o(s)}$$

cette dernière expression est négative pour s suffisamment petit et donc on a bien

$$\frac{\partial \chi_{P_\epsilon}(C(s))}{\partial s} \leq 0$$

ceci nous permet d'estimer (4.13)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\epsilon} \eta_\epsilon M \left| \frac{\partial \chi_{P_\epsilon}(C(s))}{\partial s} \right| ds &= - \int_0^{2\epsilon} \eta_\epsilon M \frac{\partial \chi_{P_\epsilon}(C(s))}{\partial s} ds \\ &= \eta_\epsilon M \chi_{P_\epsilon}(P) = \eta_\epsilon M \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \eta_\epsilon M &= 0 \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

Théorème 2.6 (théorème de collage)

Soient deux courbes $C_1(s)$ et $C_2(s)$ BCT de longueur L_1 et L_2 , telles que $C_1(L_1) = C_2(0)$.

Soit D la courbe continue C^1 par morceaux de longueur $L_1 + L_2$ définie par

$$D(t) = \begin{cases} C_1(t) & \text{si } 0 \leq t \leq L_1 \\ C_2(t - L_1) & \text{si } L_1 \leq t \leq L_1 + L_2 \end{cases}$$

Alors D est BCT et

$$C_T(D) = C_T(C_1) + C_T(C_2) + \|\overrightarrow{T_1(L_1)} - \overrightarrow{T_2(0)}\| \quad (4.14)$$

Preuve. Nous allons utiliser le lemme précédent pour majorer $C_T(D)$. Soient $P = C_1(0)$ et $Q = C_2(L_2)$, et $R = C_1(L_1) = C_2(0)$ le point de recollement.

Soit U un ouvert ne contenant pas P et Q et contenant l'intérieur de la courbe D et soit $\vec{\phi}$ à support compact inclus dans U . On note $\overrightarrow{T(s)}$ la dérivée de $D(s)$.

$$\int_0^L \overrightarrow{T(s)} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\phi(D(s))}}{\partial s} ds = \int_0^{L_1} \overrightarrow{T_1(s)} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\phi(C_1(s))}}{\partial s} ds + \int_0^{L_2} \overrightarrow{T_2(s)} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\phi(C_2(s))}}{\partial s} ds \quad (4.15)$$

où $L = L_1 + L_2$. Avec le lemme précédent on a :

$$= \int \vec{\phi} \cdot \vec{\sigma}_1 d\mu_1 + \overrightarrow{T_1(L_1)} \cdot \overrightarrow{\phi(R)} + \int \vec{\phi} \cdot \vec{\sigma}_2 d\mu_2 - \overrightarrow{T_2(0)} \cdot \overrightarrow{\phi(R)}. \quad (4.16)$$

On peut trouver une suite de fonctions $\vec{\phi}_n$ qui converge presque partout vers $\vec{\phi}$ et telle que pour tout n le support de $\vec{\phi}_n$ soit inclus dans U et ne contienne pas P et R

et telle que pour tout x dans U , $\|\vec{\phi}_n(x)\| \leq 1$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous donne :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \vec{\phi}_n \cdot \vec{\sigma}_1 d\mu_1 = \int \vec{\phi} \cdot \vec{\sigma}_1 d\mu_1.$$

On en déduit que :

$$\int \vec{\phi} \cdot \vec{\sigma}_1 d\mu_1 \leq C_T(C_1) \quad (4.17)$$

de même

$$\int \vec{\phi} \cdot \vec{\sigma}_2 d\mu_2 \leq C_T(C_2) \quad (4.18)$$

comme pour tout x , $\|\vec{\phi}(x)\| \leq 1$

$$(\overrightarrow{T_1(L_1)} - \overrightarrow{T_2(0)}) \cdot \overrightarrow{\phi(R)} \leq \|\overrightarrow{T_1(L_1)} - \overrightarrow{T_2(0)}\|. \quad (4.19)$$

Donc finalement en combinant (4.16) avec (4.17), (4.18), (4.19), on obtient :

$$C_T(D) \leq C_T(C_1) + C_T(C_2) + \|\overrightarrow{T_1(L_1)} - \overrightarrow{T_2(0)}\|$$

Montrons l'inégalité inverse, soit $\epsilon > 0$ et soit U , $\vec{\phi}_{1_\epsilon}$ et $\vec{\phi}_{2_\epsilon}$ tels que

$$\int_0^{L_1} \overrightarrow{T_1(s)} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\phi_{1_\epsilon}(C_1(s))}}{\partial s} ds \geq C_T(C_1) - \epsilon$$

et

$$\int_0^{L_2} \overrightarrow{T_2(s)} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\phi_{2_\epsilon}(C_2(s))}}{\partial s} ds \geq C_T(C_2) - \epsilon$$

Quitte à multiplier par des partitions de l'unité adéquates on peut supposer que la distance entre les supports de $\vec{\phi}_{1_\epsilon}$ et de $\vec{\phi}_{2_\epsilon}$ est strictement positive et que ces supports sont disjoints d'une boule $B(R, \eta)$ avec $\eta > 0$.

Soient l_1 et l_2 , tels que $[L_1 - l_1, L_1] = \{s, C_1(s) \in B(R, \eta)\}$ et $[0, l_2] = \{s, C_2(s) \in B(R, \eta)\}$. On choisit η suffisamment petit pour que $l_1 \leq 2\eta$ et $l_2 \leq 2\eta$.

Si $\overrightarrow{T_1(L_1)} = \overrightarrow{T_2(0)}$, en concaténant $\vec{\phi}_{1_\epsilon}$ et $\vec{\phi}_{2_\epsilon}$, $C_T(D) \geq C_T(C_1) + C_T(C_2) - 2\epsilon$, ce qui montre (4.14). Si $\overrightarrow{T_1(L_1)} \neq \overrightarrow{T_2(0)}$, il existe ϕ_η avec un support inclus dans $B(R, \eta)$, tel que :

$$\overrightarrow{\phi_\eta(R)} = \frac{\overrightarrow{T_1(L_1)} - \overrightarrow{T_2(0)}}{\|\overrightarrow{T_1(L_1)} - \overrightarrow{T_2(0)}\|}$$

et $\forall s \in [0, l_2]$

$$\left\| \overrightarrow{\frac{\partial \phi(C_2(s))}{\partial s}} \right\| \leq \frac{2}{\eta}$$

(on suppose une condition identique pour C_1), on a

$$\int_0^{l_2} \overrightarrow{T(s)} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial \phi_\eta(C_2(s))}{\partial s}} ds = \int_0^{l_2} (\overrightarrow{T(0)} + \overrightarrow{\epsilon(s)}) \cdot \overrightarrow{\frac{\partial \phi_\eta(C_2(s))}{\partial s}} ds$$

avec $\|\overrightarrow{\epsilon(s)}\| \leq \epsilon$, le support de $\overrightarrow{\phi_\eta}$ est inclus dans $B(0, \eta)$, donc $\overrightarrow{\phi_\eta(C_2(l_2))} = \overrightarrow{0}$, par conséquent pour le premier terme on a

$$\int_0^{l_2} \overrightarrow{T(0)} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial \phi_\eta(C_2(s))}{\partial s}} ds = \overrightarrow{T(0)} \cdot \frac{\overrightarrow{T_1(L_1)} - \overrightarrow{T_2(0)}}{\|\overrightarrow{T_1(L_1)} - \overrightarrow{T_2(0)}\|}$$

il reste à majorer le deuxième terme

$$\left| \int_0^{l_2} \overrightarrow{\epsilon(s)} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial \phi_\eta(C_2(s))}{\partial s}} ds \right| \leq l_2 \epsilon \frac{2}{\eta}$$

donc

$$\left| \int_0^{l_2} \overrightarrow{\epsilon(s)} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial \phi_\eta(C_2(s))}{\partial s}} ds \right| \leq 4\epsilon$$

En faisant la même estimation pour C_1 , et en faisant tendre ϵ vers 0 on obtient :

$$C_T(D) \geq C_T(C_1) + C_T(C_2) + \|\overrightarrow{T_1(L_1)} - \overrightarrow{T_2(0)}\|$$

ce qui termine la preuve.

■

On a une propriété de semi continuité pour la courbure totale.

Proposition 2.7 (semi continuité)

Soit C_k une suite de courbes simples paramétrées continues C^1 par morceaux, de vecteurs tangents unitaires \overrightarrow{T}_k ayant pour extrémités deux points fixes P et Q , et soit C ayant les mêmes extrémités P et Q et telle que $\|\overrightarrow{T}_k - \overrightarrow{T}\|_{L^1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, où \overrightarrow{T} est le vecteur unitaire tangent à $C(s)$, alors :

$$C_T(\overrightarrow{T}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} C_T(\overrightarrow{T}_k)$$

Nous verrons un exemple ci dessous qui montre que l'inégalité peut être stricte.

Preuve. $\forall \epsilon > 0$, soit ϕ , telle que

$$C_T(C) - \epsilon \leq \int \overrightarrow{T}(s) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\phi}(C(s))}{\partial s} ds$$

comme $\|\overrightarrow{T}_k - \overrightarrow{T}\|_{L^1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

$$\begin{aligned} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int \overrightarrow{T}_k(s) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\phi}(C(s))}{\partial s} ds \\ &\leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} C_T(C_k) \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition

■

3 Exemples de courbes BCT dans \mathbb{R}^2

On présente quelques exemples illustrant la notion de courbure totale définie dans 1.1.

3.1 Exemples de courbes de courbure totale finie

Soit la courbe $C(t)$ définie par

$$C(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ (\frac{1}{2}, t - \frac{1}{2}) & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

On ne peut pas définir la courbure en $t=1$ car la courbe C n'est pas C^2 . On ne peut donc pas appliquer la formule (4.2). On va donc directement appliquer la définition. La longueur de cette courbe est 2.

$$C_T = \sup_{\phi \in E} \int_0^1 \frac{\partial \overrightarrow{\phi}_1(C(t))}{\partial x} dt + \int_1^2 \frac{\partial \overrightarrow{\phi}_2(C(t))}{\partial y} dt$$

De l'hypothèse sur le support de ϕ on déduit que :

$$= \sup_{\phi \in E} \phi_1(C(1)) - \phi_2(C(1)).$$

Comme $\phi_1^2 + \phi_2^2 \leq 1$; le maximum est donc :

$$= \sqrt{2}$$

Comparons ce résultat avec les courbes $D_1(s)$ et $D_2(s)$ similaires à $C(s)$ mais qui sont plus régulières.

$$D_1(s) = (\cos(\frac{\pi}{2}(s-1)), 1 + \sin(\frac{\pi}{2}(s-1))) \quad 0 \leq s \leq 1$$

D_1 est C^2 .

$$D_2(s) = \begin{cases} (2s, 0) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2}(2s - \frac{3}{2})), \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}(2s - \frac{3}{2}))) & \text{si } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ (1, 2s - 1) & \text{si } \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

D_2 est C^2 par morceaux et C^1 (le raccord n'est pas C^2).

On peut voir les représentations graphiques de D_1 et de D_2 sur les figures (4.1) et (4.2)

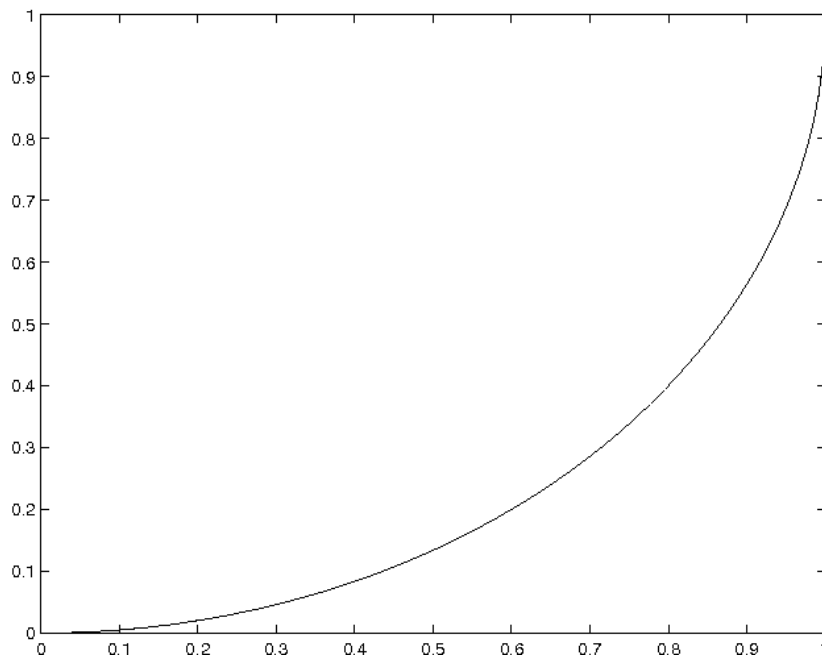


FIG. 4.1 – courbe D_1

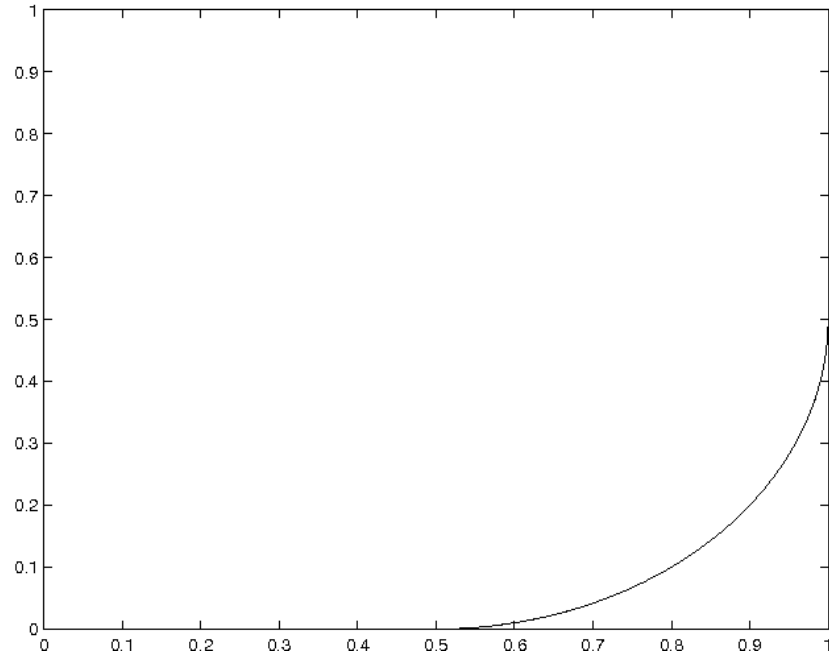


FIG. 4.2 – courbe D_2

On calcule la courbure totale de $D_1(t)$ en utilisant la formule

$$C_T(D_1) = \int_0^L k(s) ds$$

Comme la courbure en tout point de D_1 est égale à 1.

$$\begin{aligned} C_T(D_1) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 ds \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On remarque que $\frac{\pi}{2}$ est supérieur à $\sqrt{2}$, cependant les valeurs numériques sont proches. Pour D_2 on peut appliquer le théorème de collage (2.6) en séparant la courbe D_2 en 3 morceaux de classe C^2 correspondant à : $0 \leq s \leq \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} \leq s \leq \frac{3}{4}$ et $\frac{3}{4} \leq s \leq 1$.

Comme les deux liaisons entre les morceaux sont C^1 , la courbure totale de C est égale à la somme des courbures totales des trois morceaux. Les courbures totales du premier morceau et du troisième morceau sont nulles. Pour le deuxième morceau,

on peut appliquer le même raisonnement que pour C_1 , la courbure est constante et égale à 2. La longueur est $\frac{\pi}{4}$ donc :

$$\begin{aligned} C_T(D_1) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2ds \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On trouve le même résultat que pour D_1 .

Si on définit de manière similaire une suite de courbes D_n , avec des quarts de cercles de plus en plus petits, on peut montrer que la suite \vec{T}_n converge en norme L^1 vers \vec{T} (le vecteur tangent associé à la courbe C), on peut donc appliquer la proposition de semi-continuité.

On en déduit que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} C_T(D_n) \geq C_T(C)$$

Ce qui est effectivement vérifié, car $\forall n; C_T(D_n) = \frac{\pi}{2}$ et on a bien $\sqrt{2} \leq \frac{\pi}{2}$. Par contre on voit qu'il n'y a pas nécessairement égalité dans la proposition.

3.2 Exemple de courbure totale infinie

Nous allons donner un exemple d'une courbe compacte paramétrée qui est continue et C^1 par morceaux mais dont la courbure totale est infinie. Soit $n(x)$ pour $x \in [0; 4[$ défini par

$$n(x) = [\log_2(\frac{1}{1 - \frac{x}{4}})]$$

ou $[]$ désigne la partie entière et \log_2 le logarithme binaire. Pour simplifier les notations on notera n pour $n(x)$. Soit la courbe D définie par :

$$D \begin{cases} (x, (-1)^n \sqrt{1 - \frac{(x-4+\frac{3}{2^n})^2}{4^n}}) & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ (4, 0) & \text{si } x=4 \end{cases}$$

Son graphe est donné dans la figure (4.3) .

Proposition 3.1 *La courbe $D(t)$ a une courbure totale infinie.*

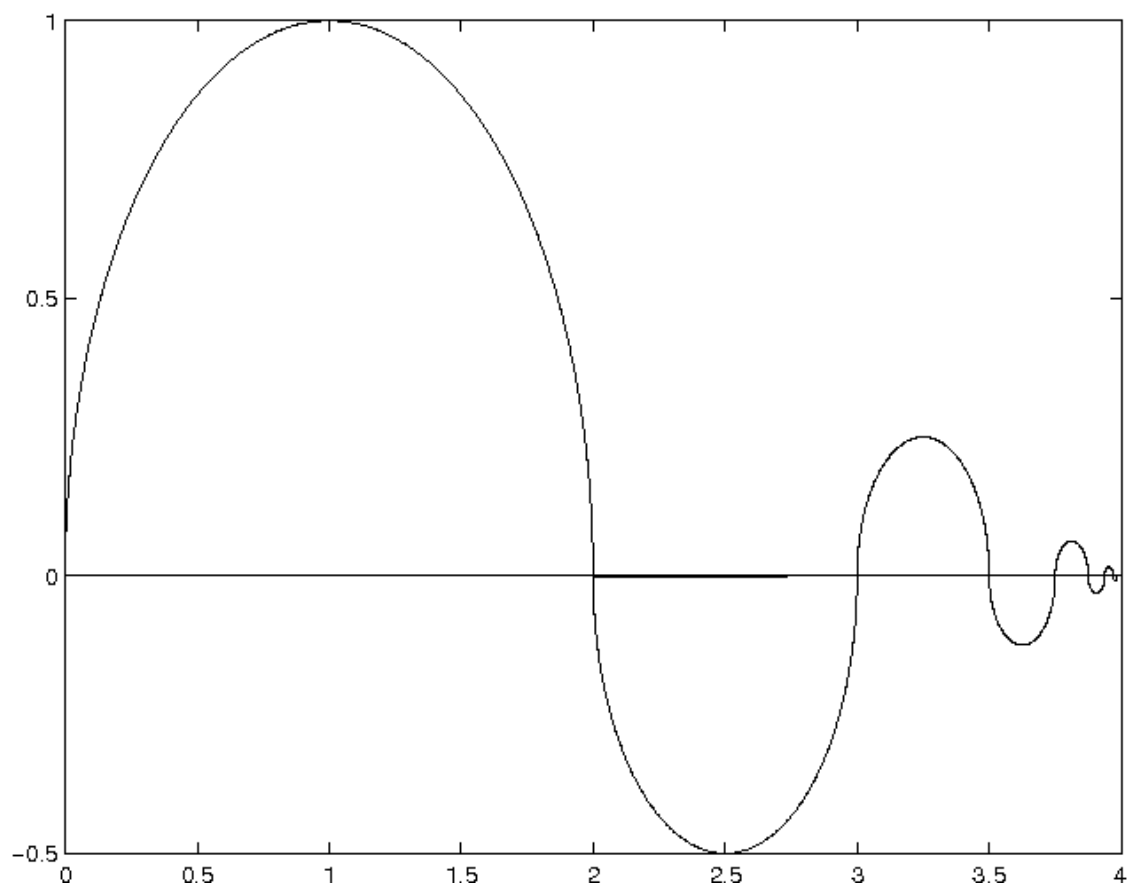


FIG. 4.3 – D : exemple de courbure totale infinie

Preuve. Il est clair que cette courbe est C^1 sauf à son extrémité, on la paramétrise en utilisant l'abscisse curviligne. Soit L sa longueur

$$L = \pi \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \right)$$

$$L = 2\pi$$

D est donc une courbe paramétrée continue et C^1 par morceaux, déterminons sa courbure totale.

Pour tout m entier strictement positif, on définit D_m par

$$D_m = \left(x, (-1)^n \sqrt{1 - \frac{(x - 4 + \frac{3}{2^n})^2}{4^n}} \right) \quad \text{si } 0 \leq x \leq 4(1 - \frac{1}{2^m})$$

En fait D_m est la restriction aux m premiers demi-cercles de D .

Pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout entier m strictement positif, il existe $\phi_m \in C^1$ à support compact.

On suppose que le support de ϕ_m est inclu dans $]0, 4(1 - \frac{1}{2^m})[\times]-\infty, \infty[$ et que

$$\int_0^{L_m} \overrightarrow{T_m(s)} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial \phi_m(D_m(s))}{\partial s}} ds \geq C_T(D_m) - \epsilon$$

comme

$$\int_0^{L_m} \overrightarrow{T_m(s)} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial \phi_m(D_m(s))}{\partial s}} ds = \int_0^L \overrightarrow{T(s)} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial \phi_m(D_m(s))}{\partial s}} ds$$

on en déduit que

$$C_T(D) \geq C_T(D_m) - \epsilon$$

On peut appliquer le théorème de collage pour calculer $C_T(D_m)$, car D_m est le recollement de m demi-cercles. Donc

$$C_T(D_m) = \sum_{i=0}^m \frac{\pi}{2^i} 2^i$$

$$C_T(D_m) = \pi m$$

et donc

$$C_T(D) = \infty$$

■

4 Détection de routes

4.1 Algorithme

Dans cette section nous allons présenter une méthode pour la détection des routes utilisant la courbure totale. Nous reprenons les notations de la section 2.1. Notre algorithme comporte les trois étapes suivantes :

1. Estimation de la hessienne de l'image I , calcul des vecteurs propres de la hessienne et de $M_m = \{(x, y, z); |\lambda_2 \lambda_3| > m\}$.
2. Trouver pour tout a de M_m la courbe maximale $C_a \subset M_m$, telle que $a \in C_a$ et en tout point de C_a , $\vec{T} // \vec{v}_1$.
3. Déterminer la courbe $C \subset C_a$ et $a \in C$, vérifiant $L_{min} \leq L_C(C)$ (L_{min} est une longueur minimale que l'on impose au filament) tel que $\frac{C_T(C)}{L_C(C)}$ soit minimale.

Le fait de minimiser $\frac{C_T(C)}{L_C(C)}$ permet d'éviter les courbes ayant trop d'oscillations. Pour trouver C_a on crée une liste de points à coordonnées réelles inclus dans M_m , dont le premier élément est $a_0 = a$ et le deuxième $a_1 = a + \vec{v}_1(a)$. Le point a_2 est défini de la même manière : $a_2 = a_1 + \vec{v}_1(a_1)$ avec $\vec{v}_1(a_1)$ l'interpolation bilinéaire des 4 vecteurs $\{\vec{v}_1(i, j), \vec{v}_1(i+1, j), \vec{v}_1(i, j+1), \vec{v}_1(i+1, j+1)\}$ associés aux quatre points aux coordonnées entières les plus proches de a_1 . On calcule de même a_{-1}, a_{-2}, \dots avec $-\vec{v}_1(a)$. Pour que C_a soit plus régulière et diminuer le temps de calcul, on peut imposer que $\|\vec{v}_1(a_n) - \vec{v}_1(a_{n+1})\| \leq \alpha$. Lors de la construction de C_a , on calcule la longueur et la courbure totale de la courbe C_n engendrée par $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ à chaque itération n . De plus on détermine n pour lequel $\frac{C_T(C_n)}{L_C(C_n)}$ soit minimale.

La courbure totale des sous courbes de C_a se calcule par la formule donnée par le théorème de collage, c'est à dire

$$C_T = \sum_n \|\vec{v}_1(a_n) - \vec{v}_1(a_{n+1})\|$$

La distance entre les points consécutifs des courbes valant toujours 1, le calcul de la longueur est immédiat. On peut imposer une longueur minimale L_{min} si on veut éviter des filaments de 3 ou 4 pixels peu significatifs. Une fois que la courbe optimale est isolée, on marque les points de coordonnées entières les plus proches de cette dernière, afin qu'ils ne soient pas réutilisés pour un autre filament.

4.2 Résultats pour des images de routes

On peut voir sur la figure (4.4) le résultat de notre algorithme sur une image de routes de 652×892 pixels. Toutes les routes sont détectées sauf les chemins qui ont une largeur trop importante, comme par exemple le chemin dans le village en bas à droite qui est plus large qu'une route, autour des fermes, ou le chemin vertical qui sort de la ferme la plus au sud, ou encore juste avant l'intersection à gauche de la ferme la plus au nord. On note également que les intersections ne sont pas détectées probablement à cause de leur largeur et des incertitudes sur la hessienne en ces points.

Si l'on compare ces résultats avec la méthode markovienne proposée dans [52] sur la même image, on remarque que notre méthode permet de détecter quelques portions de routes supplémentaires. Par ailleurs notre détection donne une localisation plus précise des routes en particulier celles présentant une forte courbure. Cependant la méthode proposée dans [52] semble meilleure pour les jonctions de routes et les parties cachées par les arbres.

Les filaments obtenus sont assez fins et continus (quelques discontinuités sont dues à la résolution inférieure de la photo). Comme on pouvait le prédire les parties de routes cachées par des arbres ne sont pas détectées. La plupart des parties isolées de routes sont détectées.

Il y a un certain nombre de filaments détectés qui ne sont pas des routes, mais la plupart ont réellement la forme de filament sur l'image. Le plus spectaculaire est certainement celui parallèle à la route au centre de la photo qui est sans doute un chemin. On trouve également des motifs qui ressemblent à des filaments dans certains champs ou dessinés par négatif avec des arbres (c'est à dire une zone claire entre deux arbres). Cependant 2 ou 3 filaments détectés sont difficilement expliquables comme ceux en haut à gauche de l'image

Globalement le résultat est bon et serait meilleur si on pouvait détecter les intersections de routes et compléter les routes cachées par des arbres. Notons d'ailleurs qu'on peut facilement déterminer à partir du gradient de l'image et des niveaux de gris, si une extrémité d'un filament correspond à une intersection, une occultation par une ombre ou si elle est l'extrémité réelle du filament.

Sur la figure (4.5), on peut voir le résultat de notre algorithme sur une image nettement plus bruitée représentant des routes et des chemins pour des longueurs de filaments minimum de 7 et 5 pixels. Nous avons appliqué sur cette image un débruitage issu du modèle de Rudin-Osher-Fatemi.

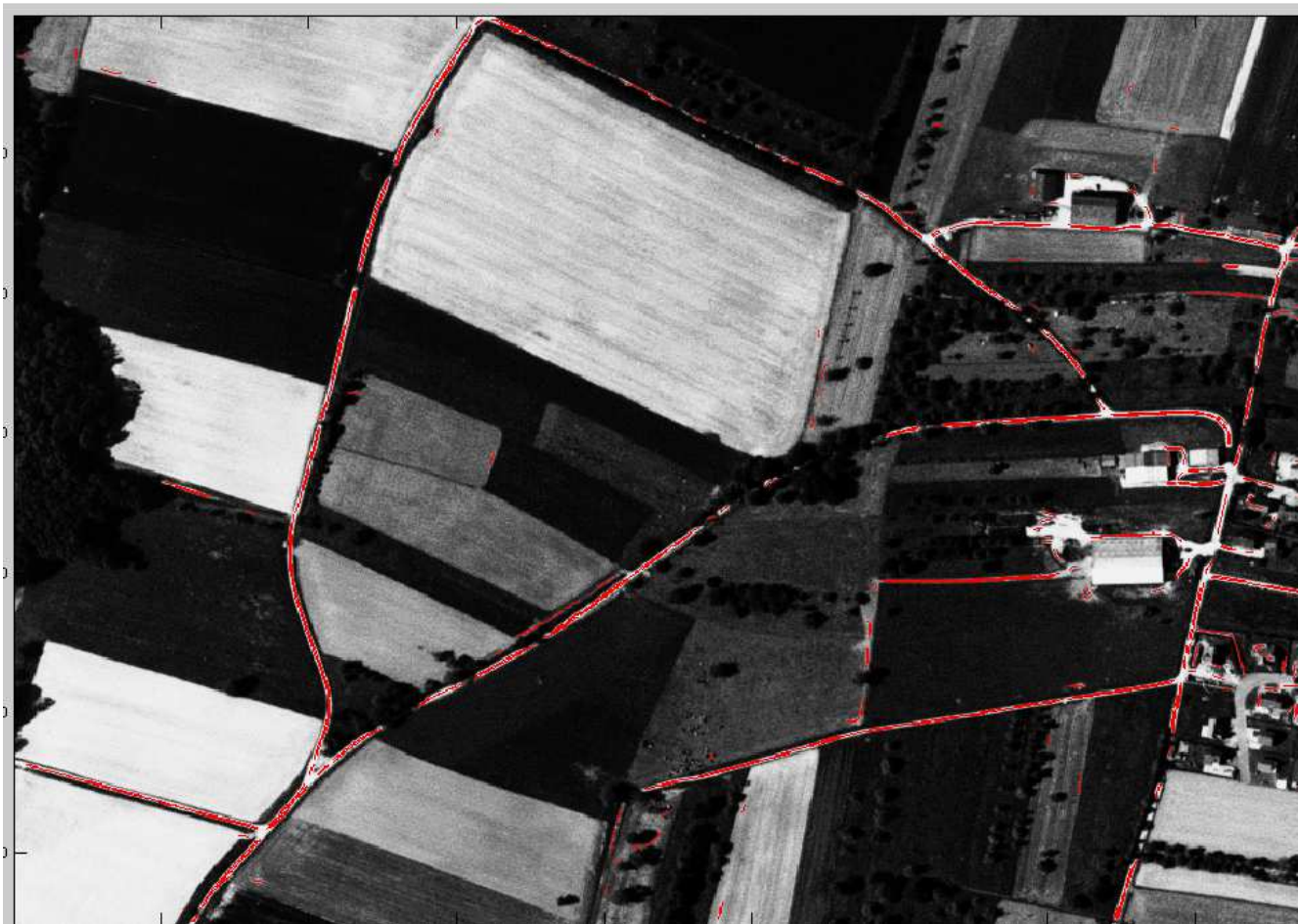


FIG. 4.4 – Détection de routes par l'algorithme 4.1

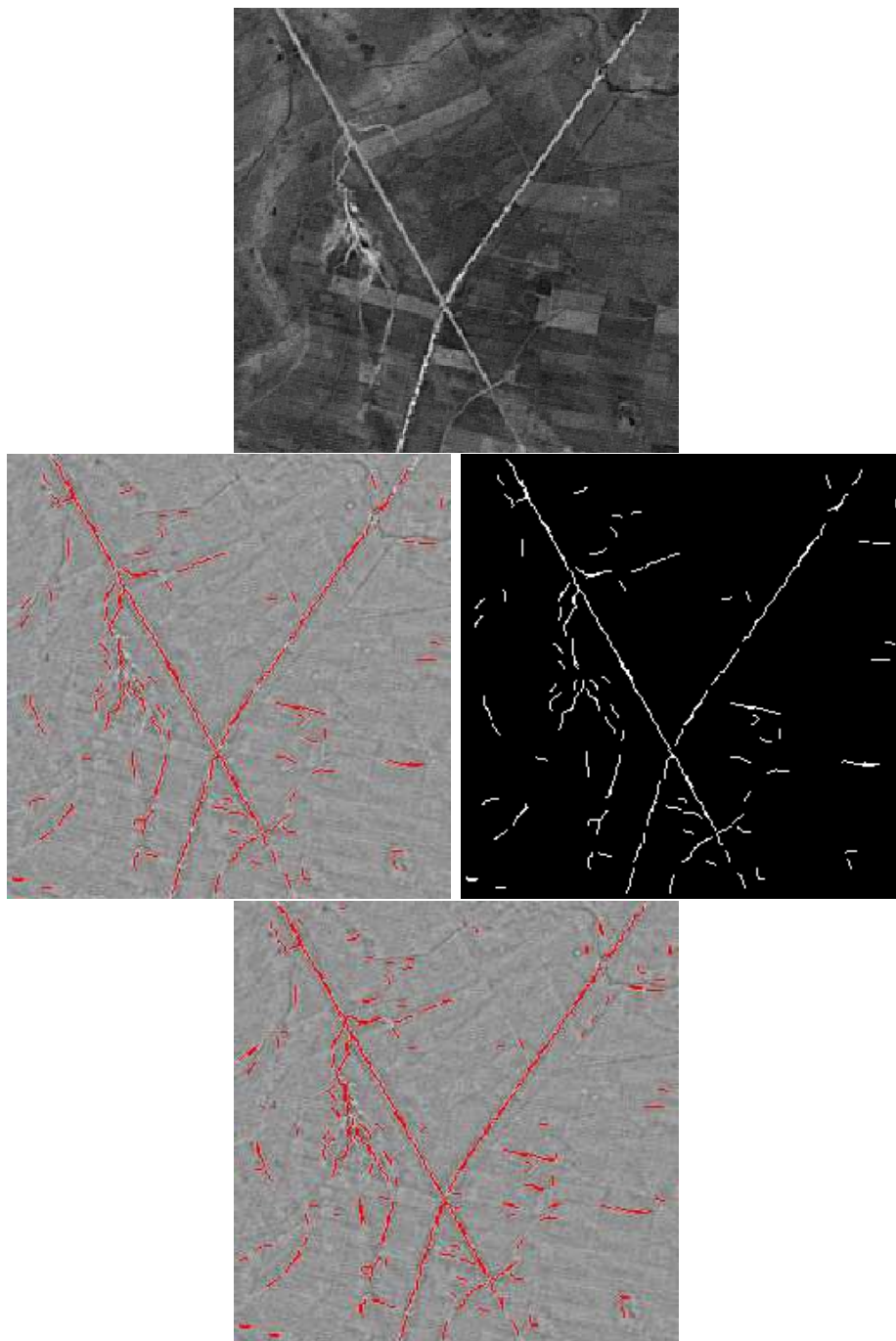


FIG. 4.5 – image d'un croisement de routes par l'algorithme 4.4.1, en haut image originale, à gauche et à droite détection avec une longueur minimale de 7 pixels, en bas une détection avec une longueur minimale de 5 pixels

Les routes sont assez bien détectées, en particulier l'intersection est bien représentée. On retrouve les chemins de l'image originale, le chemin en forme de veine est un peu mieux détecté avec une longueur minimale de 5 pixels, mais de nouveaux morceaux de filaments apparaissent pour lesquels il est difficile de dire s'ils sont dus au bruit ou non.

5 Complément sur la courbure totale

Dans cette section nous allons aborder le problème de la définition de la courbure totale pour des courbes non simples. Nous montrons tout d'abord les limites de notre définition, et nous donnerons ensuite une définition adaptée aux courbes non simples.

On rappelle tout d'abord la définition de la courbure totale.

Soit $C(s)$ une courbe simple (c'est à dire ne se recoupant pas elle même) de \mathbb{R}^3 , continue, C^1 par morceaux, paramétrée par l'abscisse curviligne, avec $t \in [0; L]$, L étant la longueur de la courbe C . On note $\overrightarrow{T}(t) = (T_x(t), T_y(t), T_z(t))$ le vecteur tangent à $C(t)$ unitaire, et soient P et Q les points $C(0)$ et $C(L)$. On notera $\Omega = \{V, V \text{ ouvert connexe borné de } \mathbb{R}^3\}$; et on définit

$$E = \{ \overrightarrow{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \text{ à support compact, tel que } \overrightarrow{\phi} \in C^1([0, L], \mathbb{R}^3) \\ ; \text{ telle que } \overrightarrow{\phi}(0) = \overrightarrow{\phi}(L) = \overrightarrow{0} \text{ et } \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 \leq 1 \}$$

$$\text{On note } C_T = \sup_{\overrightarrow{\phi} \in E} \int_0^L \overrightarrow{T}(s) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\phi}(s)}{\partial s} ds$$

6 Cas des courbes non simples

6.1 Définition

Dans toute la suite nous désignerons par courbe, tous les sous ensembles C de \mathbb{R}^3 connexes par arc qui peuvent s'écrire :

$$C = \cup_{i=1}^n C_i$$

avec C_i des courbes simples de \mathbb{R}^3 , continues, C^1 par morceaux de longueur L_i , paramétrées par l'abscisse curviligne, avec $t \in [0; L_i]$.

Soit $\{x_m\}$ l'ensemble des points qui correspondent aux extrémités de la courbe C (c'est à dire les points $C_i(0)$ et $C_i(L_i)$ qui n'appartiennent pas à une autre courbe C_j). On définit E par

$$E = \{ \vec{\phi}, \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3); \vec{\phi} \text{ à support compact, et telles que} \\ \forall x_m; \overrightarrow{\phi(x_m)} = \vec{0} \text{ et } \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 \leq 1 \}$$

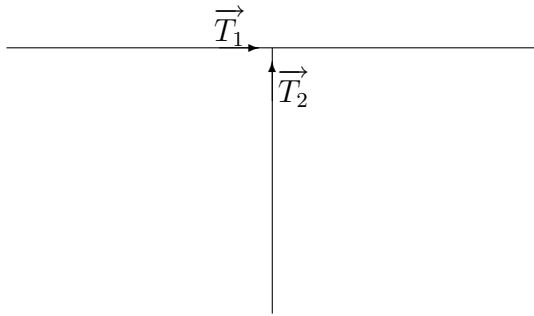
Nous pouvons maintenant définir la courbure totale de C :

$$C_T = \sup_{\vec{\phi} \in E} \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \overrightarrow{T_i(s)} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\phi(C_i(s))}}{\partial s} ds$$

Le vecteur tangent $\overrightarrow{T_i}$ est orienté suivant le choix du paramétrage de C_i . A cause de l'impossibilité de trouver un paramétrage canonique pour C , on remplace dans la définition de C_T , $\overrightarrow{\phi(s)}$ par l'expression plus compliquée $\overrightarrow{\phi(C_i(s))}$. La définition de C_T ne dépend ni de la décomposition $C = \cup_{i=1}^n C_i$ choisie, ni de l'orientation des paramétrages choisis.

7 Exemples dans \mathbb{R}^2

Etudions un premier exemple de courbe C présentant une jonction triple en angle droit.



Nous divisons C en une partie horizontale C_1 de longueur 2 et une partie verticale C_2 de longueur 1. Calculons la courbure totale de C

$$C_T = \sup_{\vec{\phi} \in E} \left(\int_0^2 \overrightarrow{T_1(s)} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\phi(C_1(s))}}{\partial s} ds + \int_0^1 \overrightarrow{T_2(s)} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\phi(C_2(s))}}{\partial s} ds \right)$$

\vec{T}_1 et \vec{T}_2 sont constants, on peut donc calculer les deux intégrales

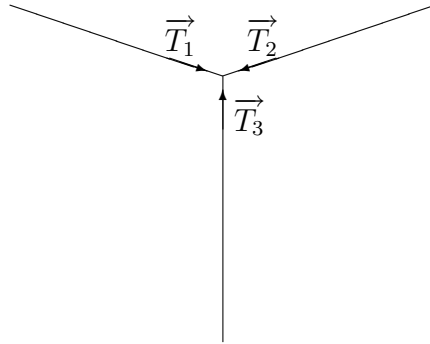
$$= \sup_{\vec{\phi} \in E} (\vec{T}_1 \cdot (\overrightarrow{\phi(C_1(2))} - \overrightarrow{\phi(C_1(0))}) + \vec{T}_2 \cdot (\overrightarrow{\phi(C_2(1))} - \overrightarrow{\phi(C_2(0))})$$

Comme $C_1(2)$, $C_1(0)$ et $C_2(0)$ sont des extrémités de C , trois des quatre termes sont nuls et

$$\sup_{\vec{\phi} \in E} \vec{T}_2 \cdot (\overrightarrow{\phi(C_2(1))}) = 1$$

Par conséquent $C_T=1$. Rappelons que dans le cas d'une courbe simple formant un angle droit la courbure totale est $\sqrt{2}$. Donc une courbure présentant une jonction triple avec un angle droit a une courbure totale plus petite qu'une courbe simple avec un angle droit. Ceci est peu satisfaisant, la jonction triple pouvant s'obtenir en ajoutant une courbe à une courbe en angle droit. Intuitivement donc la jonction triple devrait avoir une courbure totale plus grande. Nous reviendrons sur ce point.

Etudions un deuxième exemple d'une jonction triple rectiligne quelconque



Pour calculer la courbure totale de cette courbe D on divise la courbe en 3 parties avec des vecteurs unitaires tangents \vec{T}_1 , \vec{T}_2 et \vec{T}_3 . En faisant un calcul similaire au précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} D_T &= \sup_{\vec{\phi} \in E} (\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3) \cdot \overrightarrow{\phi(C_1(1))} \\ &= \|\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3\| \end{aligned}$$

On retrouve une courbure totale de C égale à 1 pour l'exemple précédent avec $\vec{T}_1 = -\vec{T}_2$. On remarque que si on a une jonction à 120 degrés la courbure totale est nulle. Montrons que c'est le seul cas de jonction triple où la courbure totale est

nulle. Soit 3 vecteurs unitaires tels que $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = \vec{0}$. En les remplaçant par des complexes a, b et c de modules 1 on a :

$$a + b + c = 0$$

quitte à multiplier par $\frac{1}{c}$ (ce qui revient à faire une rotation des 3 vecteurs), on peut supposer que $c=1$

$$a + b + 1 = 0 \tag{4.20}$$

en prenant le conjugué des deux membres (en utilisant le fait que a et b sont de module 1)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1 = 0$$

$$\frac{a+b}{ab} = -1$$

$$\frac{-1}{ab} = -1$$

$$ab = 1$$

Avec (4.20), on déduit que a, b et c sont les racines cubiques de l'unité. Donc seul le cas de la jonction triple à 120 degrés donne une courbure totale nulle. Ce résultat n'est pas très satisfaisant : il est contraire à l'intuition qu'une jonction triple à 120 degrés ait la même courbure totale qu'une droite. De plus si on l'utilisait dans un algorithme de détection, on pourrait craindre que de fausses jonctions multiples apparaissent à cause de leur faible coût.

Dans la section suivante, nous allons changer la définition de la courbure totale pour remédier à ce problème.

8 Nouvelle définition de la courbure totale

On garde les notations de la section précédente. Tout d'abord nous changeons la définition pour E :

$$E = \{ \vec{\phi}, \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3); \vec{\phi} \text{ à support compact, et telles que } \|\vec{\phi}\| \leq 1 \}$$

La seule différence est qu'on n'impose plus que ϕ soit nulle aux extrémités. Nous donnons comme nouvelle définition de la courbure totale de C :

$$C_T = \sup_{\vec{\phi} \in E} \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \vec{T}_i(s) \cdot \overrightarrow{\frac{\partial \phi(C_i(s))}{\partial s}} ds$$

La seule différence réside dans le changement de définition de E . Cette définition présente un premier avantage : il n'est plus nécessaire de déterminer les extrémités de la courbe C . Il peut être difficile de vérifier si chaque $C_i(0)$ ou $C_i(L_i)$ appartient à une autre courbe C_j .

Nous noterons \tilde{C}_T , la courbure totale donnée par l'ancienne définition. Le théorème suivant donne la différence essentielle entre C_T et \tilde{C}_T .

theorem 8.1 *Soit C une courbe et p son nombre d'extrémités ; on a :*

$$C_T = \tilde{C}_T + p$$

Preuve.

On a le lemme suivant

Lemme 8.2

Soit C une courbe ; $\forall \vec{\phi} \in C_c^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, on a

$$\sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \overrightarrow{T_i(s)} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial \phi(C_i(s))}{\partial s}} ds = \int \vec{\phi} \cdot \vec{\sigma} d\mu + \sum_{i=1}^n \epsilon(C_i(L_i)) \overrightarrow{T_i(L_i)} \cdot \overrightarrow{\phi(C_i(L_i))} - \epsilon(C_i(0)) \overrightarrow{T_i(0)} \cdot \overrightarrow{\phi(C_i(0))} \quad (4.21)$$

Avec ϵ la fonction caractéristique des extrémités x_m .

Pour prouver ce lemme, il suffit de reprendre la démonstration du lemme (2.5). Soit $\vec{\phi} \in C_c^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ de norme plus petite que 1 presque partout.

On peut trouver une suite de fonctions $\vec{\phi}_n$ qui converge presque partout vers $\vec{\phi}$ et telle que pour tout n et m on ait $\vec{\phi}_n(x_m) = \vec{0}$ et $\|\vec{\phi}_n(x)\| \leq 1$. Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \vec{\phi}_n \cdot \vec{\sigma} d\mu = \int \vec{\phi} \cdot \vec{\sigma} d\mu$$

On en déduit que

$$\int \vec{\phi} \cdot \vec{\sigma} d\mu \leq \tilde{C}_T$$

Dans l'équation (4.21) on a pour tout i : $\epsilon(C_i(L_i)) \overrightarrow{T_i(L_i)} \cdot \overrightarrow{\phi(C_i(L_i))} \leq 1$ et $-\epsilon(C_i(0)) \overrightarrow{T_i(0)} \cdot \overrightarrow{\phi(C_i(0))} \leq 1$. En prenant le sup sur $\vec{\phi}$ dans (4.21), on obtient :

$$C_T \leq \tilde{C}_T + p \quad (4.22)$$

Montrons que $C_T \geq \tilde{C}_T + p$. Soit $\epsilon > 0$ et $\vec{\phi}_\epsilon$ tel que

$$\sum_{i=1}^m \int_0^{L_i} \vec{T}_i(s) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\phi_\epsilon(C_i(s))}}{\partial s} ds \geq \tilde{C}_T - \epsilon \quad (4.23)$$

Soit $\vec{\phi}_\epsilon^n$ une suite dans $C_c^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $\|\vec{\phi}_\epsilon^n(x)\| \leq 1$ presque partout qui vérifie la condition suivante aux extrémités x_m :

$$\sum_{i=1}^m \epsilon(C_i(L_i)) \vec{T}_i(L_i) \cdot \overrightarrow{\phi_\epsilon^n(C_i(L_i))} - \epsilon(C_i(0)) \vec{T}_i(0) \cdot \overrightarrow{\phi_\epsilon^n(C_i(0))} = p \quad (4.24)$$

On impose que $\vec{\phi}_\epsilon^n$ converge presque partout vers $\vec{\phi}_\epsilon$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \int_0^{L_i} \vec{T}_i(s) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\phi_\epsilon(C_i(s))}}{\partial s} ds &= \int \vec{\phi}_\epsilon \cdot \vec{\sigma} d\mu \\ \sum_{i=1}^m \int_0^{L_i} \vec{T}_i(s) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\phi_\epsilon^n(C_i(s))}}{\partial s} ds &= \int \vec{\phi}_\epsilon^n \cdot \vec{\sigma} d\mu \end{aligned}$$

On peut appliquer le théorème de convergence dominée, on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \vec{\phi}_\epsilon^n \cdot \vec{\sigma} d\mu = \int \vec{\phi}_\epsilon \cdot \vec{\sigma} d\mu \quad (4.25)$$

En utilisant (4.23) et (4.25), on trouve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \vec{\phi}_\epsilon^n \cdot \vec{\sigma} d\mu \geq \tilde{C}_T - \epsilon \quad (4.26)$$

A partir de (4.21) , (4.24) et (4.26), on obtient finalement

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \int_0^{L_i} \vec{T}_i(s) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\phi_\epsilon^n(C_i(s))}}{\partial s} ds \geq \tilde{C}_T - \epsilon + p \quad (4.27)$$

En faisant tendre ϵ vers 0, il en résulte

$$C_T \geq \tilde{C}_T + p \quad (4.28)$$

(4.22) et (4.28) donnent la conclusion voulue :

$$C_T = \tilde{C}_T + p$$

■

De ce théorème on peut en déduire que le nombre d'extrémités est pénalisé. La courbure totale d'une droite, par exemple, ne sera pas nulle mais égale à 2. Ceci est contraire à l'intuition, mais pour une jonction triple rectiligne à 120 degrés, on obtient 3. Cette dernière valeur est bien strictement supérieure à celle de la droite ce qui corrige un défaut de l'ancienne définition.

On montre facilement que pour 2 droites ayant une jonction simple à 120 degrés, la courbure totale est :

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2 = 3$$

C'est exactement la même que pour une jonction triple à 120 degrés.

Chapitre 5

Modèle Gaussien

1 Modèle 2D

1.1 Modélisation

Le but de ce chapitre est de proposer un modèle pour la détection locale de filament dont l'épaisseur peut être inférieure au pixel dans des images 2D issues de la microscopie confocale en biologie. Nous utiliserons donc les propriétés des images issues de la microscopie confocale pour donner une méthode de détection plus spécifique que la méthode proposée au chapitre 2. On désigne par I_r l'image originale. La PSF (fonction décrivant la réponse du système optique à une source ponctuelle) peut être déduite de la connaissance que l'on a du microscope. Elle peut être également obtenue de manière empirique [38, 50] en débruitant l'image obtenue par une petite bille fluorescente. La PSF peut être également approchée par une gaussienne G_σ [61] dont on connaît la variance σ .

On désignera par \vec{v} la direction d'un filament rectiligne et par A l'intensité lumineuse au niveau de l'axe du filament. Dans ce chapitre on supposera que l'intensité d'un filament rectiligne a une décroissance gaussienne suivant la distance à l'axe de ce dernier, voir Figure (5.1).

L'image observée I est composée de pixels centrés en y_i (où i désigne l'indice du pixel) et on note $C(y_i)$ les surfaces des carrés associés aux pixels y_i voir la figure (5.2). On modélise la valeur obtenue en chaque pixel associé à y_i par l'intégrale sur $C(y_i)$ de l'image réelle convoluée voir Figure (5.1), ce qui correspond à des capteurs CCD. Cette valeur est différente de l'intensité lumineuse aux points de discrétisation y_i . On notera D l'opérateur associé à cette discrétisation. On suppose par ailleurs qu'un bruit gaussien b a été ajouté à chaque pixel de l'image finale. Plus spécifiquement

la valeur de tout pixel $I(y_i)$ centré en y_i est :

$$I(y_i) = \int_{C(y_i)} \int_{\mathbb{R}^2} I_r(z) G_\sigma(y - z) dz dy + b(y_i) \quad (5.1)$$

Ce qui peut s'écrire de manière plus simple par :

$$I = D(I_r * G_\sigma) + b \quad (5.2)$$

Notre but est de retrouver I_r à partir de I . Les figures (5.3) et (5.4) représentent I_r et I .

Soit maintenant un segment rectiligne défini par le triplet (x, \vec{v}, A) . On modélise "l'éloignement" de y_i à x par une décroissance, du type gaussien, de son intensité par rapport à l'axe du filament. Par conséquent si \vec{w} est un vecteur unitaire perpendiculaire à \vec{v} , on suppose (dans le cas non bruité) que

$$F_{x, \vec{v}, A}(y_i) = \int_{C(y_i)} A e^{-\frac{(\vec{x}y, \vec{w})^2}{\sigma}} dy$$

$F_{x, \vec{v}, A}(y_i)$ représente la valeur théorique de l'image observée contenant le segment $F_{x, \vec{v}, A}$. La position x n'est pas nécessairement le centre d'un pixel de l'image obtenue, ce qui nous permettra d'obtenir une détection précise.

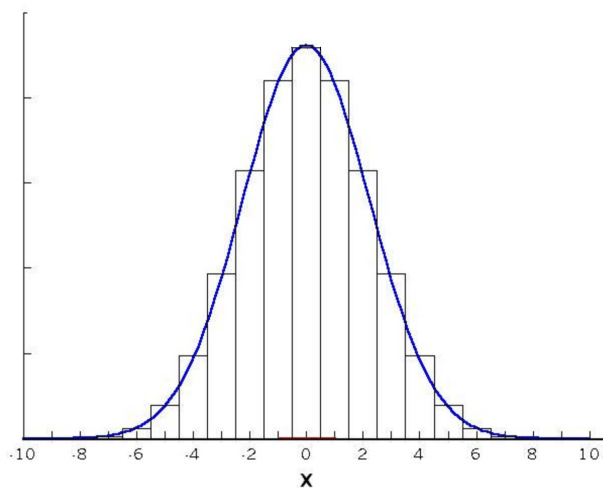
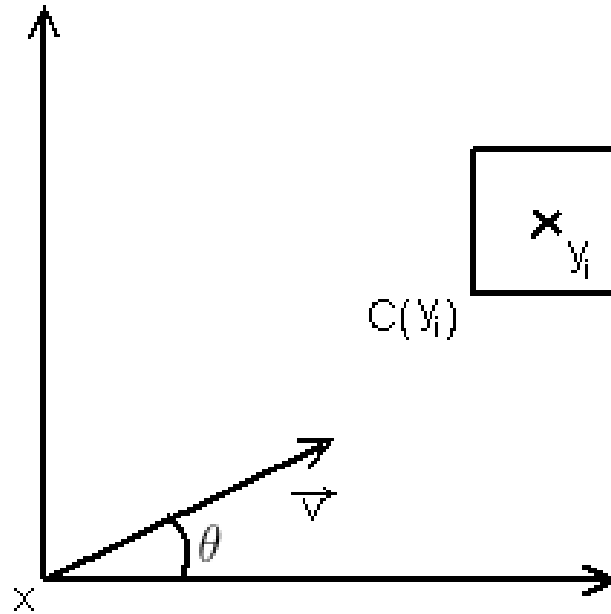


FIG. 5.1 – Représentation des valeurs dans l'axe orthogonal à un filament passant par x de la gaussienne en bleu et des valeurs des pixels correspondants


 FIG. 5.2 – Représentation de $C(y_i)$, v et θ .

1.2 Energie proposée

Nous voulons détecter localement les filaments. On suppose que tous les filaments que l'on souhaite détecter peuvent être décomposés en segments de longueur l fixée. On fait l'hypothèse que chaque portion de filament de longueur l peut être approchée par un filament rectiligne sur un disque $C(x, l)$ de diamètre l et de centre x . \vec{v} est un vecteur unitaire désignant la direction du filament et A est l'intensité du filament.

Nous cherchons donc les triplets (x, \vec{v}, A) tels que $F_{x, \vec{v}, A}$ soit le plus proche possible de l'image observée I sur $C(x, l)$. Comme le bruit b ajouté à l'image observée I est de type gaussien, le maximum de vraisemblance qu'une portion de filament d'intensité A se situe à la position x , et dont la direction est le vecteur unitaire \vec{v} est obtenu en minimisant l'énergie E :

$$E(x, \vec{v}, A) = \sum_{y_i \in \text{support de } I} \chi(\|xy_i\|) (I(y_i) - \int_{C(y_i)} A e^{-\frac{(\vec{x}\vec{y} \cdot \vec{w})^2}{\sigma}} dy)^2$$

La fonction χ est une fonction qui permet de délimiter un voisinage circulaire de x proche de $C(x, l)$ dont le diamètre l est la longueur caractéristique des portions de filaments que l'on souhaite détecter (pour les expériences numériques nous avons choisi $l = 4\sigma$). Plusieurs choix sont possibles pour χ :

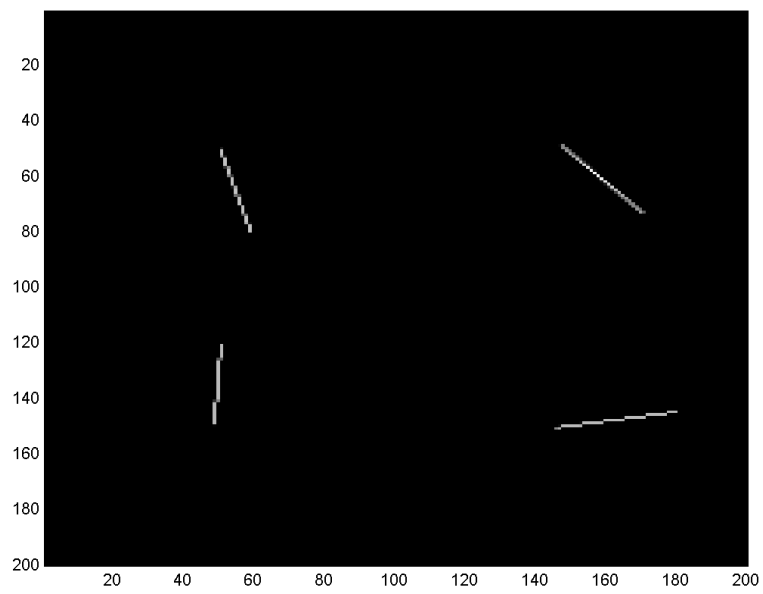


FIG. 5.3 – Représentation d'une image de filaments de direction aléatoire.

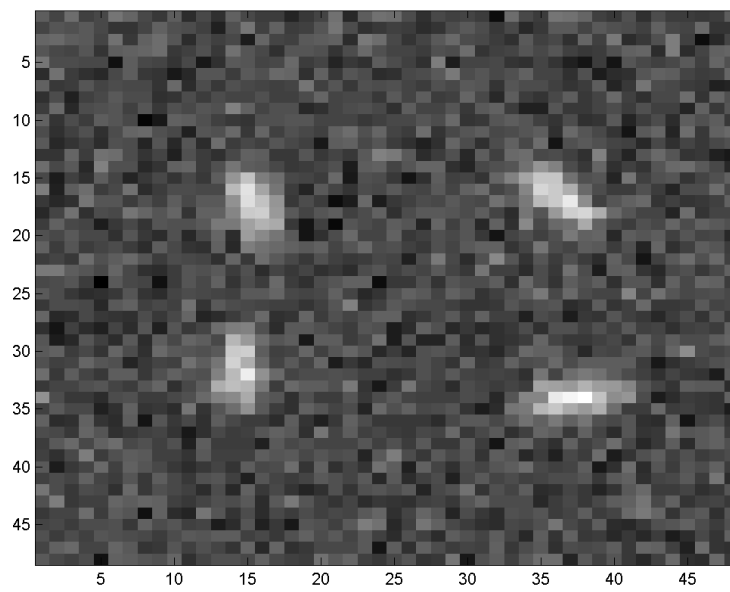


FIG. 5.4 – Représentation de l' image convoluée observée après discrétisation et ajout d'un bruit gaussien.

$$\chi_1(\|xy\|) = \left(\frac{l}{2} - \|xy\|\right)^+, \text{ si } \|xy\| > \frac{l}{2} \text{ et } 1 \text{ sinon}$$

ou

$$\chi_2(\|xy\|) = e^{-2(\|xy\| - \frac{l}{2})^2} \text{ si } \|xy\| > \frac{l}{2} \text{ et } 1 \text{ sinon}$$

La deuxième fonction proposée pour le choix de χ est plus régulière, il en résulte une meilleure stabilité numérique dans les expériences. Nous choisirons donc cette dernière. Les deux fonctions sont représentées sur la Figure 5.5.

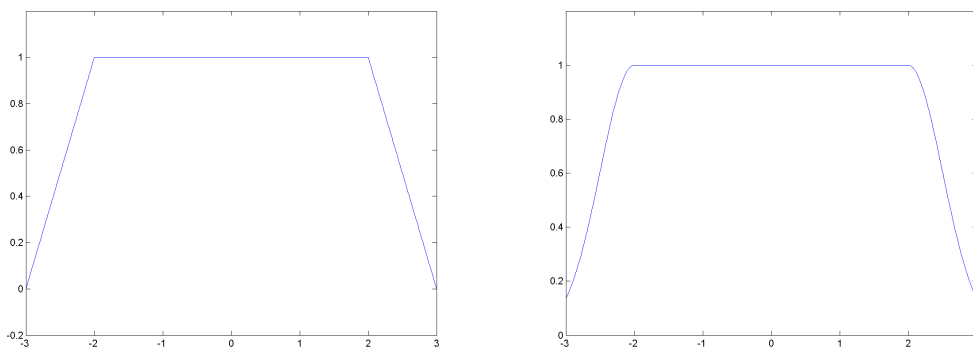


FIG. 5.5 – Représentation de χ_1 et χ_2 .

1.3 Minimisation de l'énergie E

Nous allons détailler dans cette section la minimisation de E et nous verrons dans la section suivante comment utiliser cette minimisation dans l'algorithme de détection. La première étape de la minimisation est une prédétection. On détermine des points candidats pouvant être au voisinage de filaments et une bonne estimation \vec{v} . Cela peut être fait par exemple au moyen d'une méthode de prédétection en utilisant la matrice hessienne de I qui détermine le vecteur propre \vec{v}_1 associé à la plus petite valeur propre de la hessienne (voir la section suivante).

La méthode itérative est la suivante : à chaque étape on détermine l'amplitude A optimale, ensuite on cherche une variation dx de x qui minimise E , puis on itère en cherchant un nouveau A optimal. On effectue donc une descente de gradient sur la variable x en supposant A constant et en optimisant A à chaque itération. Pour x donné le A optimal vérifie :

$$\sum_{y_i} \chi(\|xy_i\|) \int_{C(y_i)} e^{-\frac{(\overline{xy} \cdot \overline{w})^2}{\sigma}} dy (I(y_i) - \int_{C(y_i)} A e^{-\frac{(\overline{xy} \cdot \overline{w})^2}{\sigma}} dy) = 0$$

Le A optimal est donc :

$$A = \frac{\sum_{y_i} \chi(\|xy_i\|) \int_{C(y_i)} e^{-\frac{(\overline{xy} \cdot \overline{w})^2}{\sigma}} dy (I(y_i))}{\sum_{y_i} \chi(\|xy_i\|) (\int_{C(y_i)} e^{-\frac{(\overline{xy} \cdot \overline{w})^2}{\sigma}} dy)^2}$$

Trouver le A optimal nécessite le calcul de $\int_{C(y_i)} e^{-\frac{(\overline{xy} \cdot \overline{w})^2}{\sigma}} dy$, il est crucial pour l'efficacité de l'algorithme de calculer rapidement cette intégrale. Une formule de cette intégrale permettant un calcul rapide est donnée dans l'annexe (3).

Cherchons le gradient de E en fonction de x. Pour simplifier la présentation, on commence par déterminer le gradient de

$$(I(y_i) - \int_{C(y_i)} A e^{-\frac{(\overline{xy} \cdot \overline{w})^2}{\sigma}} dy)^2$$

on remplace x par $x + dx$:

$$\begin{aligned} & (I(y_i) - \int_{C(y_i)} A e^{-\frac{(y-x-dx \cdot \overline{w})^2}{\sigma}} dy)^2 \\ &= (I(y_i) - \int_{C(y_i)} A e^{-\frac{((y-x) \cdot \overline{w} - dx \cdot \overline{w})^2}{\sigma}} dy)^2 \\ &= (I(y_i) - \int_{C(y_i)} A e^{-\frac{((y-x) \cdot \overline{w})^2}{\sigma}} e^{\frac{2(y-x) \cdot \overline{w} dx \cdot \overline{w}}{\sigma}} dy)^2 \\ &= (I(y_i) - \int_{C(y_i)} A e^{-\frac{((y-x) \cdot \overline{w})^2}{\sigma}} dy - \int_{C(y_i)} A e^{-\frac{((y-x) \cdot \overline{w})^2}{\sigma}} \frac{2(y-x) \cdot \overline{w} dx \cdot \overline{w}}{\sigma} dy)^2 \end{aligned}$$

En développant on obtient comme terme au premier ordre :

$$-4(I(y_i) - \int_{C(y_i)} A e^{-\frac{((y-x) \cdot \overline{w})^2}{\sigma}} dy) \int_{C(y_i)} A e^{-\frac{((y-x) \cdot \overline{w})^2}{\sigma}} dy \frac{2(y-x) \cdot \overline{w} dx \cdot \overline{w}}{\sigma}$$

la direction de descente de gradient est donc :

$$-4(I(y_i) - \int_{C(y_i)} A e^{-\frac{((y-x) \cdot \overline{w})^2}{\sigma}} dy) \int_{C(y_i)} A e^{-\frac{((y-x) \cdot \overline{w})^2}{\sigma}} dy \frac{(y-x) \cdot \overline{w} \overline{w}}{\sigma}$$

Calculons à présent le gradient de la fonction $x \rightarrow \chi(\|x - y\|)$

$$\begin{aligned} \chi(\|y - x - dx\|) - \chi(\|y - x\|) &= \chi(\sqrt{\|y - x\|^2 - 2(y - x)dx}) - \chi(\|y - x\|) + O(dx^2) \\ &= \chi(\|x - y\| - \frac{y - x}{\|y - x\|}dx + O(dx^2)) - \chi(\|y - x\|) \\ &= \chi'(\|x - y\|)\left(\frac{x - y}{\|x - y\|}dx\right) + O(dx^2) \end{aligned}$$

on en déduit le dx optimal pour la descente de gradient :

$$\begin{aligned} dx &= \sum_{y_i} \chi'(\|x - y\|) \frac{x - y}{\|x - y\|} (I(y_i) - \int_{C(y_i)} Ae^{-\frac{(\bar{x}\bar{y}\cdot\bar{w})^2}{\sigma}} dy)^2 \\ &\quad - 4\chi(\|x - y\|) (I(y_i) - \int_{C(y_i)} Ae^{-\frac{((y-x)\cdot\bar{w})^2}{\sigma}} dy) \int_{C(y_i)} Ae^{-\frac{((y-x)\cdot\bar{w})^2}{\sigma}} dy \frac{(y - x)\cdot\bar{w}\bar{w}}{\sigma} \end{aligned}$$

A partir de cette expression on peut donc appliquer une méthode classique de descente de gradient à pas constant pour trouver le x optimal et obtenir une détection précise de la position du filament.

1.4 Algorithme

Prédétection

La première étape de l'algorithme est une prédétection des filaments. Nous allons décrire cette prédétection dans le cas d'une image 3D, on adapte facilement la méthode au cas 2D. Nous utilisons le même algorithme que dans le chapitre 2. Rappelons le brièvement. Soit $H(x, y, z)$ la matrice hessienne en (x, y, z) associée à I . Soit P_M^5 l'espace des polynômes de variables X, Y, Z de degré 2 restreints à un cube de centre M de $5 \times 5 \times 5$ pixels. La matrice hessienne de I en un point M est estimée numériquement en calculant la projection L^2 sur P_M^5 de la restriction de I à un cube de centre M de $5 \times 5 \times 5$ pixels. Cette méthode est plus stable qu'un schéma discret aux différences finies.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les trois valeurs propres de $H(x, y, z)$ (on omet dans la suite la dépendance en (x, y, z) par souci de lisibilité), avec $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$. Soit α un réel strictement positif , nous définissons M_α par :

$$M_\alpha = \{(x, y, z); |\lambda_2\lambda_3| > \alpha\}$$

Sur une image sans bruit, \vec{v}_1 est théoriquement constant au voisinage d'un filament localement rectiligne, il suffit donc de calculer \vec{v}_1 sur un pixel proche du filament

pour trouver la direction de ce dernier. Notre estimation de \vec{v}_1 est robuste au bruit gaussien et on obtient effectivement \vec{v} avec une bonne précision.

Pour notre prédétection nous sélectionnons les points qui appartiennent à M_α pour un seuil α fixé et nous utilisons \vec{v}_1 comme une estimation de la direction des filaments associés à ces points.

Recherche du x, v et A optimaux

Nous allons décrire cette recherche dans le cas d'une image 3D que nous étudions dans la section suivante, on adapte facilement la méthode au cas 2D. L'algorithme est itératif. A chaque itération, nous allons détecter une portion de filament de longueur l . On notera x_1, \dots, x_n, \dots les centres des portions de filaments détectés. A l'étape n , on sélectionne le pixel y_n tel que $|\lambda_2(y_n)|$ soit maximum (ce serait $|\lambda_2(y_n)\lambda_3(y_n)|$ pour une image 3D) et tel que y_n n'appartienne à aucun disque $C(x_1, l), \dots, C(x_{n-1}, l)$.

Le pixel y_n sera le point initial de descente de gradient pour déterminer x_n . La prédétection permet de donner une estimation de la direction \vec{v} du filament associée à y_n . A partir de cette dernière, on détermine le A optimal.

La méthode itérative pour trouver x_n est la suivante : à chaque étape on détermine l'amplitude A optimale, on cherche une variation dx de x qui minimise E , puis on itère en cherchant un nouveau A optimal. On effectue donc une descente de gradient sur la variable x en supposant A constant et en optimisant A à chaque itération (voir la section (1.3)). Si lors de la descente de gradient suivant x , les disques $C(x, l)$ et $C(x_p, l)$ avec $p < n$ ont une intersection non vide, on arrête l'itération n et on élimine y_n de l'ensemble des pixels sélectionnables pour la prédétection. x_n prend de plus la valeur x .

Après convergence vers x_n et vers A_n , on optimise alors \vec{v} par une descente de gradient sur E , x_n et A_n étant constants. Le triplet (x_n, \vec{v}_n, A_n) nous donne alors la n ième portion de filament détectée, notée $F_n = F(x_n, \vec{v}_n, A_n)$ si la condition $\frac{E(x_n, \vec{v}_n, A_n)}{A_n^2} < \gamma$ avec γ une constante fixée ne dépendant pas de n . Cette condition permet de vérifier si le triplet F_n trouvé correspond effectivement à un filament selon notre modèle. On peut alors itérer l'algorithme et choisir le pixel y_{n+1} .

Cette méthode présente l'avantage d'une détection fine des filaments bien que sur l'image de microscopie, les filaments apparaissent épais. Cette détection est proche de la structure originale du filament avant convolution et permet une précision inférieure au pixel.

Reconstitution du filament

Cette méthode présente l'inconvénient que les filaments obtenus ne sont pas connexes. Pour améliorer cela, on peut modifier l'algorithme de la manière suivante : à la fin d'une itération lorsque l'on dispose de (x_n, \vec{v}_n, A_n) , on considère le filament associé à $(x_n + l\vec{v}_n, \vec{v}_n, A_n)$. Il s'agit d'un filament de longueur l collé au filament associé à x_n . Nous allons utiliser ce filament comme condition initiale pour étendre notre détection à un filament de longueur $2l$. Pour cela on cherche le filament F'_n d'énergie E minimale dont l'extrémité soit $x_n + \frac{l}{2}\vec{v}_n$ (voir Figure (5.6)), on note \vec{w}_n sa direction et x'_n son centre. On élimine pour la prédétection les pixels contenus dans $C(x'_n, l)$. On peut alors itérer ce processus pour étendre de la même façon F'_n .

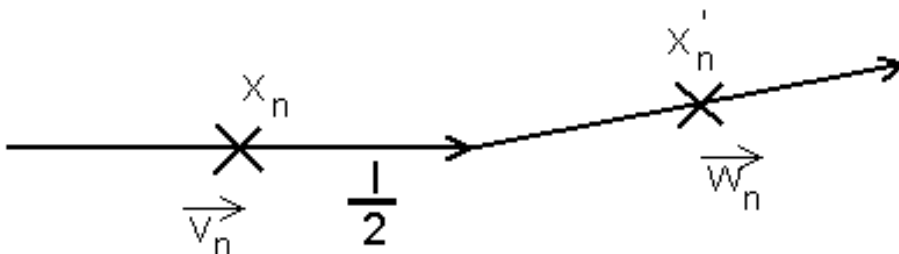


FIG. 5.6 – Représentation F_n et F'_n .

2 Résultats

On crée une image synthétique de filaments avec une orientation quelconque et de longueur 30 pixels. Pour créer l'image synthétique, on calcule l'intensité en chaque pixel qui est proportionnelle à la longueur de la partie du filament qui traverse le pixel (voir la Figure (5.3)). On le convolue par une gaussienne, puis on le discrétise avec une résolution cinq fois moins grande et enfin on ajoute un bruit gaussien (voir la Figure (5.4)).

On a testé notre algorithme sur une image de quatre filaments (voir Figure (5.4)). L'image originale est représentée sur la Figure (5.3). On compare notre résultat de détection avec l'image originale sur la Figure (5.7). Pour cette image nous avons optimisé les directions \vec{v} de chacun des filaments après avoir déterminé les positions x et les amplitudes A . On obtient alors une direction très proche de l'image réelle.

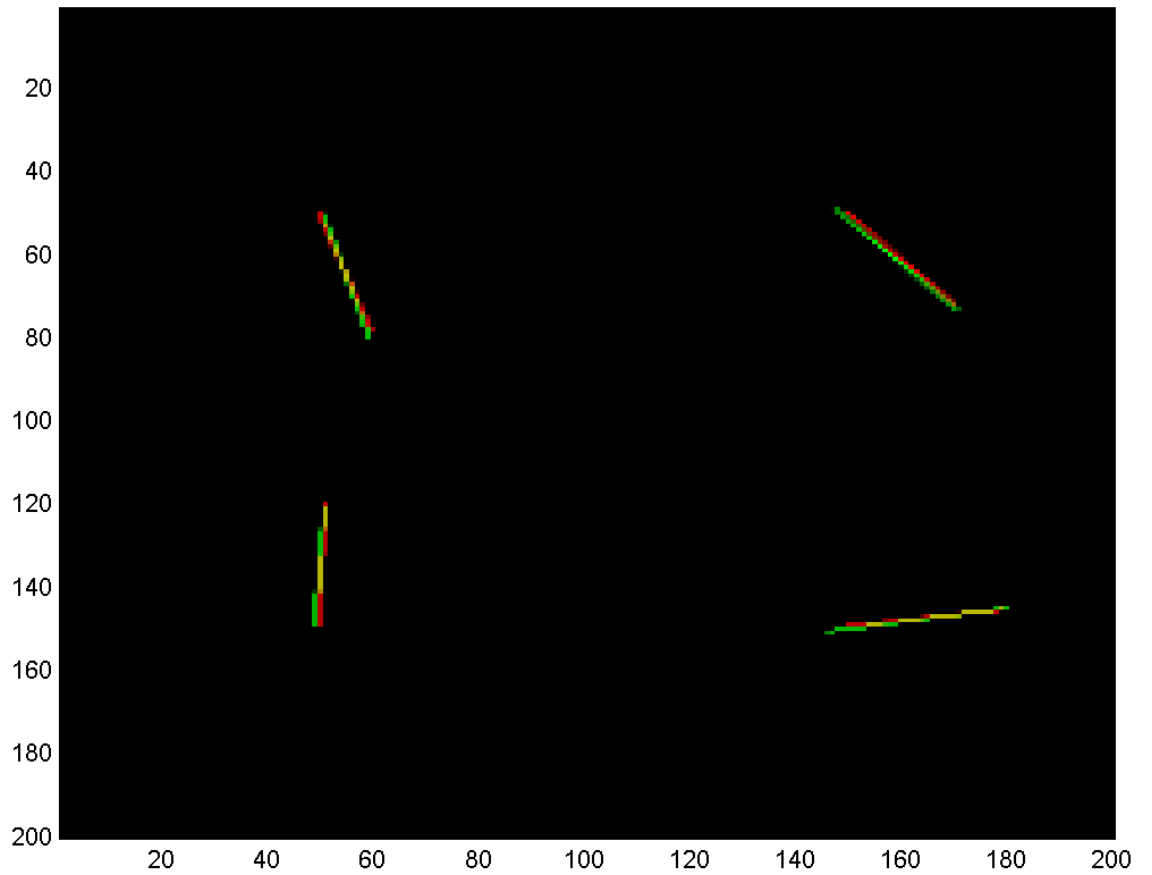


FIG. 5.7 – Résultat de la détection de la Figure 5.4 et comparaison avec l'image originale (Figure (5.3)).

3 Modèle 3D

3.1 Modèle proposé

Nous voulons étendre notre modèle dans le cas d'image 3D en microscopie confocale et définir une énergie pour mesurer la vraisemblance d'un filament à une position x et une intensité A . On suppose que l'on a prédéterminé grossièrement un filament (l'erreur est de l'ordre de 1 pixel) et que l'on connaît son orientation $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ à partir de la matrice hessienne de l'image.

On modélise l'image observée par la convolution de l'image réelle avec une gaussienne de variance σ^2 dans le plan (Oxy) et par une convolution avec une gaussienne suivant l'axe Oz de variance α^2 [61]. Nous voulons déterminer l'image théorique observée pour un filament rectiligne.

Un petit élément de courbe de longueur dt situé au point B donne après double convolution une intensité $I(M)$ proportionnelle à $f(BM) = e^{-\frac{d_{XY}(BM)^2}{\sigma^2}} e^{-\frac{d_Z(BM)^2}{\alpha^2}}$ avec d_{XY} la distance dans le plan (Oxy) et d_Z la distance suivant la droite (Oz) . Notons que $d_{XY}(BM)^2 = d_X(BM)^2 + d_Y(BM)^2$. Supposons que nous ayons une droite dans \mathbb{R}^3 orientée par le vecteur unitaire $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ passant par l'origine. L'intensité $I(x, y, z)$ de l'image convoluée de cette droite en un point (x, y, z) est donc proportionnelle à :

$$A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(tu_1-x)^2+(tu_2-y)^2}{2\sigma^2} - \frac{(tu_3-z)^2}{2\alpha^2}} dt.$$

Où A_0 est une constante de proportionnalité relative à l'intensité du filament. On définit $\beta = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$.

$$I(x, y, z) = A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(tu_1-x)^2+(tu_2-y)^2+\beta(tu_3-z)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Pour simplifier les notations, nous allons supposer que $2\sigma^2 = 1$, nous faisons un changement de variable affine $t = \lambda s$. On pose :

$$v_1 = \lambda u_1$$

$$v_2 = \lambda u_2$$

$$v_3 = \lambda u_3$$

avec λ choisi tel que $v_1^2 + v_2^2 + \beta v_3^2 = 1$. On obtient donc :

$$I(x, y, z) = \lambda A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(sv_1-x)^2 - (sv_2-y)^2 - \beta(sv_3-z)^2} ds$$

Développons l'exposant :

$$I(x, y, z) = \lambda A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 v_1^2 - t^2 v_2^2 - \beta t^2 v_3^2 + 2t v_1 x + 2t v_2 y + 2\beta t v_3 z - x^2 - y^2 - \beta z^2} dt$$

Comme $v_1^2 + v_2^2 + \beta v_3^2 = 1$, cela donne

$$I(x, y, z) = \lambda A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 + 2t v_1 x + 2t v_2 y + 2\beta t v_3 z - x^2 - y^2 - \beta z^2} dt$$

$$I(x, y, z) = \lambda A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t - v_1 x - v_2 y - \beta v_3 z)^2 + (v_1 x + v_2 y + \beta v_3 z)^2 - x^2 - y^2 - \beta z^2} dt$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t - v_1 x - v_2 y - \beta v_3 z)^2} dt$ est une constante indépendante de x, y, z .

Donc l'image obtenue est de la forme

$$I(x, y, z) = A e^{(v_1 x + v_2 y + \beta v_3 z)^2 - x^2 - y^2 - \beta z^2}$$

avec A une constante indépendante de (x, y, z) représentant l'intensité du filament. On désigne par \cdot le produit scalaire suivant :

$$(x, y, z) \cdot (x, y, z) = x^2 + y^2 + \beta z^2$$

Le fait que $\beta > 0$ assure que \cdot est bien un produit scalaire. $\vec{w} = (v_1, v_2, v_3)$ est un vecteur unitaire pour ce produit scalaire. On a donc :

$$(v_1 x + v_2 y + \beta v_3 z)^2 - x^2 - y^2 - \beta z^2 = (\vec{w} \cdot \vec{OM})^2 - \vec{OM} \cdot \vec{OM}$$

Soient \vec{w}_1 et \vec{w}_2 deux vecteurs, tels qu'ils forment avec \vec{w} une base orthonormale pour ce produit scalaire. On exprime \vec{OM} le vecteur de coordonnées (x, y, z) dans cette base.

$$\vec{OM} = a \vec{w} + b \vec{w}_1 + c \vec{w}_2$$

ce qui donne :

$$(\vec{w} \cdot \vec{OM})^2 - \vec{OM} \cdot \vec{OM} = b^2 + c^2$$

il s'agit de la distance de M à la droite engendrée par \vec{w} . On obtient donc :

$$I(x, y, z) = A e^{-(\vec{w}_1 \cdot \vec{OM})^2 - (\vec{w}_2 \cdot \vec{OM})^2}$$

ce qui est très similaire au modèle du 2D. Malheureusement nous n'avons pas de formule simple de l'intégrale de cette fonction sur des cubes. Nous optons donc pour une discrétisation simple : on suppose que la valeur observée en un pixel est la valeur

ponctuelle en ce pixel de l'image réelle et non plus l'intégrale de cette dernière sur le volume du pixel. Nous définissons donc l'énergie E suivante :

$$E(x, \vec{v}, A) = \sum_{y_i} \chi(\|xy_i\|) (I(y_i) - Ae^{-\frac{(\vec{w}_1 \cdot xy_i)^2 - (\vec{w}_2 \cdot xy_i)^2}{\sigma}})^2$$

On obtient des expressions similaires à la section précédente pour $\frac{\partial E}{\partial x}$ et on peut appliquer une descente de gradient sur x et A . On peut de même optimiser la direction en \vec{v} , en faisant une descente de gradient.

3.2 Résultat en 3D

Nous avons testé notre algorithme sur une image réelle 3D de filament issue de la biologie obtenue par microscopie confocale (voir Figure 5.8). Les Figures 5.9 et 5.10 montrent le résultat de notre méthode sous deux angles différents, on retrouve bien les filaments présents sur l'image originale.

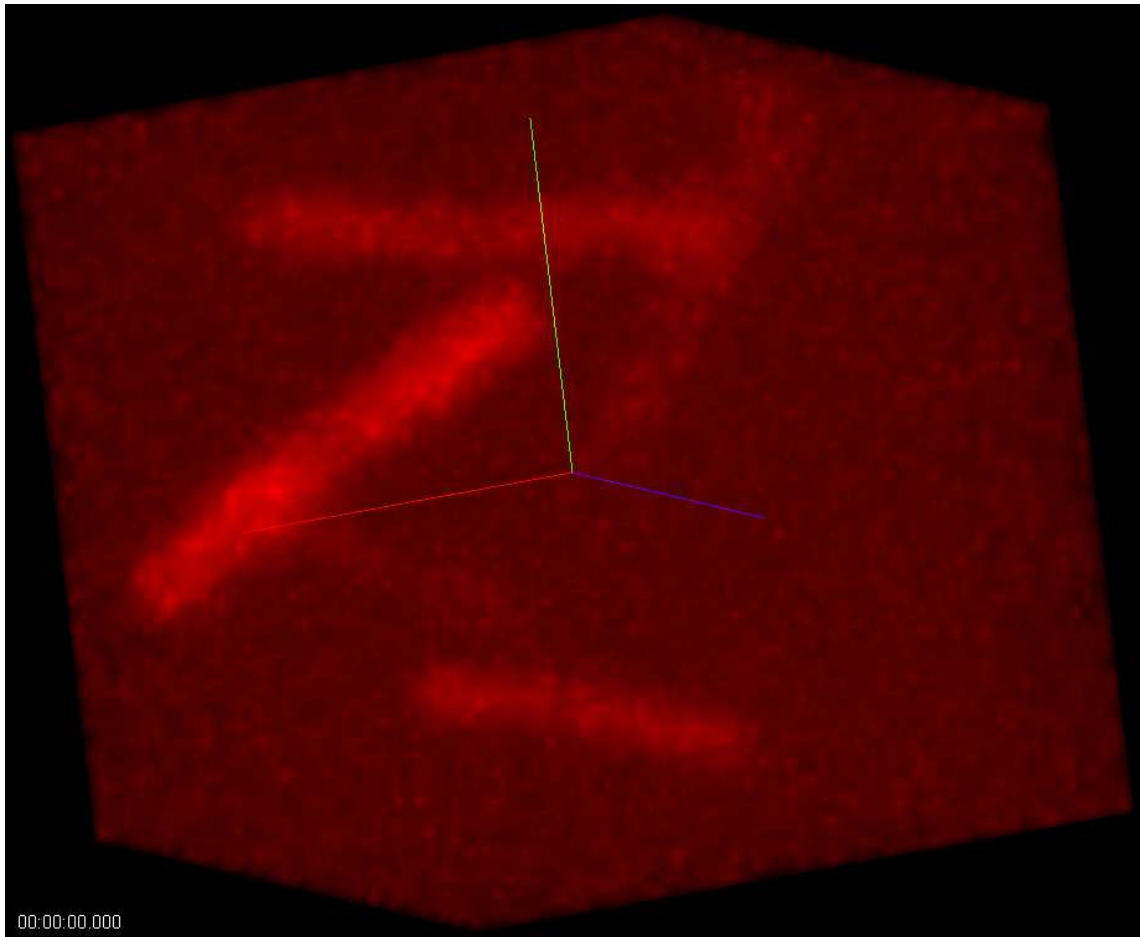


FIG. 5.8 – Image 3D de filaments obtenue par microscopie confocale.

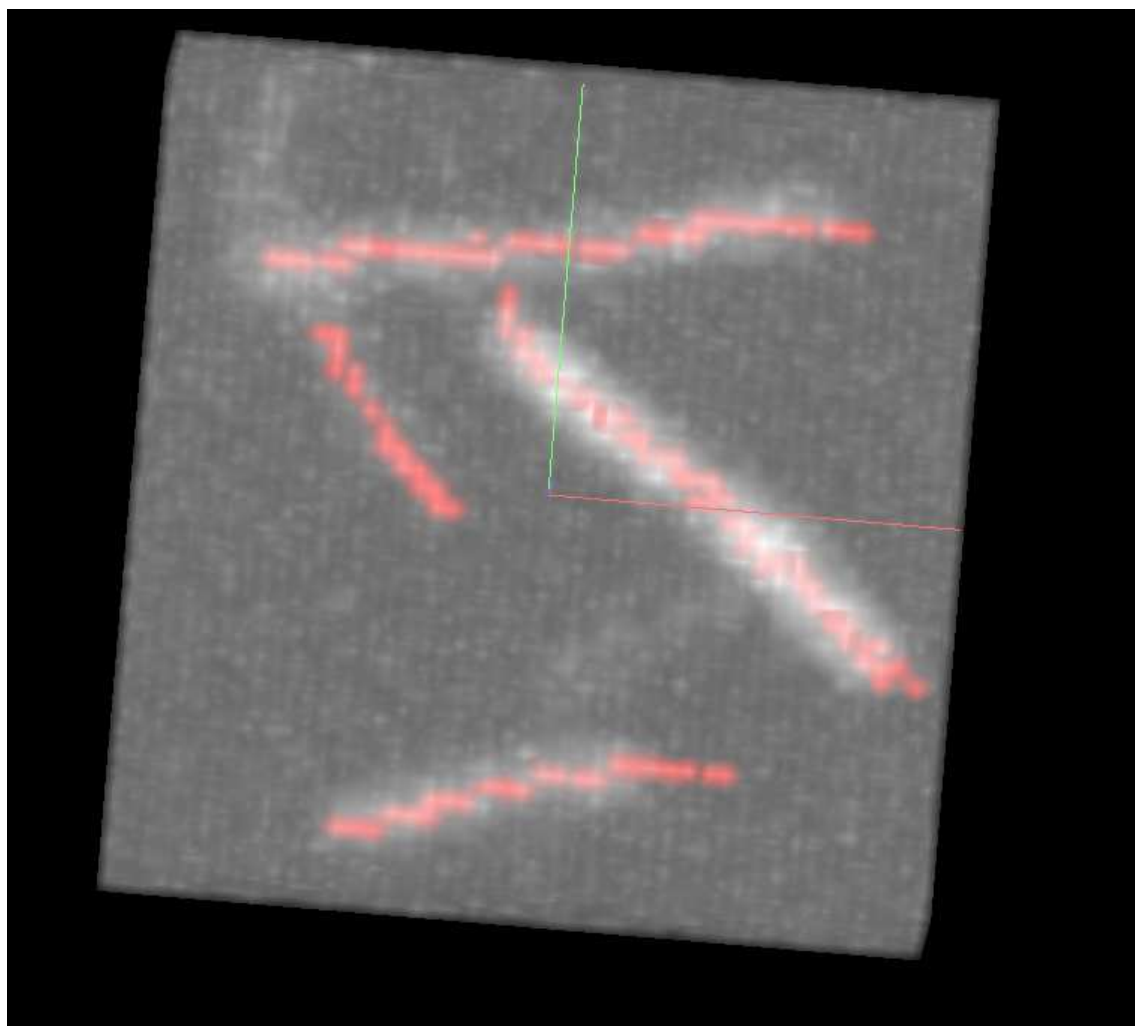


FIG. 5.9 – Résultat de la détection sur une image 3D de filaments en microscopie confocale.

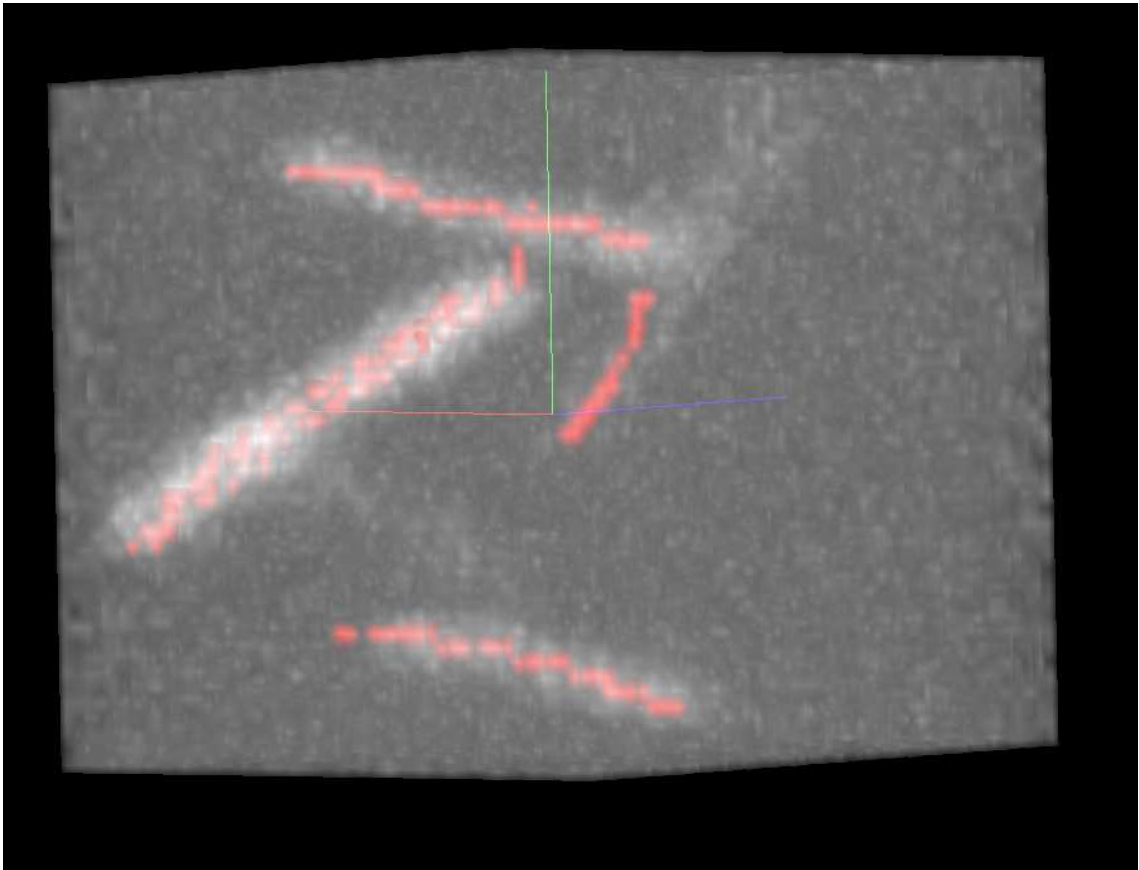


FIG. 5.10 – Résultat de la détection sur une image 3D de filaments en microscopie confocale.

Chapitre 6

Détection de cible dans des séquences d'Image (confidentiel)

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la détection de filaments pour une application particulière. Nous souhaitons effectuer la détection de cible dans une séquence d'images infrarouges filmées depuis un avion. Nous allons tenir compte des spécificités de cette application, pour proposer une méthode plus adaptée que celles données aux chapitres 2 et 5. La séquence d'images est fournie par l'entreprise Sagem. Les caractéristiques du problème sont les suivantes

1. La cible est faiblement contrastée par rapport au reste de l'image à cause de son éloignement (voir Figure (6.1)).
2. La cible a un mouvement proche d'un mouvement rectiligne.
3. A cause de la résolution limitée des capteurs CCD de la caméra, des effets de discrétisation sont présents dans l'image.
4. Bien que considérée comme ponctuelle la cible subit la convolution du système optique et peut donc avoir un support sur plusieurs pixels de l'image (voir Figure (6.1)).
5. Le flot optique de la cible est assez faible par rapport à la vitesse de l'avion.
6. Des phénomènes d'occlusion de la cible sont possibles, à cause par exemple de nuages présents dans la séquence (voir Figure (6.2)).

Le déplacement de l'avion induit le déplacement d'un grand nombre de points lumineux sur la séquence d'images. Tous ces points lumineux peuvent constituer des fausses alarmes dans notre détection. Afin de simplifier le problème il est souhaitable de se ramener à une séquence d'images sans mouvement de caméra. Ceci est rendu



FIG. 6.1 – La cible se situe au milieu de l'image en dessous des nuages et s'étend sur trois pixels

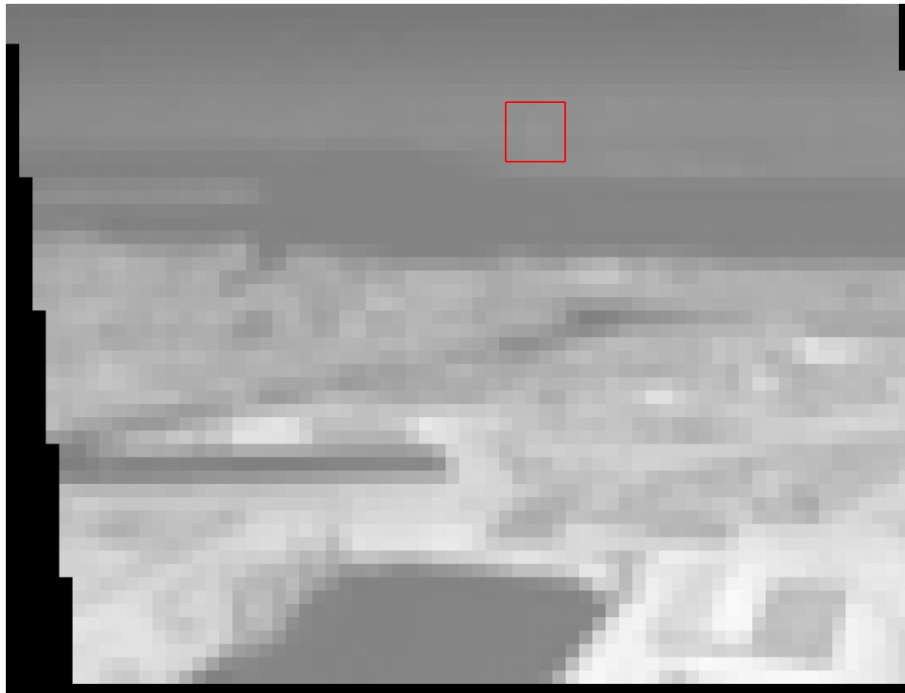


FIG. 6.2 – La cible se situe au milieu des nuages, cachée par ces derniers, c'est le point le plus lumineux de la zone nuageuse

possible par un traitement fourni par la Sagem pour compenser le mouvement des images. Pour cela la scène est considérée comme filmée par une caméra ayant une trajectoire localement rectiligne. La séquence est découpée en sous séquences de 20 images. Sur chaque sous séquence on détermine les paramètres de position, d'angle et de vitesse de la caméra à partir d'un certain nombre de points fixes dans l'image prédétectés. On en déduit une transformation géométrique qui, appliquée à chaque image, permet d'obtenir une séquence d'images très proche d'une séquence sans mouvement de caméra.

Cette méthode présente l'inconvénient de considérer la cible comme un point du plan. Il peut en résulter des erreurs dans la position de la cible sur la séquence compensée. Par ailleurs le découpage de la séquence, induit un changement de position brutal de la cible toutes les vingt images. D'autres erreurs sur la position de la cible peuvent être induites par le bruit gaussien de la caméra infrarouge, les effets de discrétisation, les effets d'occultation.

2 Description de la méthode de détection

On notera $I^t(x, y)$, l'image au temps t .

On fait donc l'hypothèse que dans un intervalle de temps court, la trajectoire est proche d'une droite (7 images dans les expériences numériques). On cherche à effectuer une détection locale de la trajectoire en cherchant des portions de droite approchant cette dernière. A chacune de ces portions de droites qui interpole la trajectoire dans l'espace $2D+t$, on associe un cercle S_1^t centré au point de cette droite contenu dans l'image I^t (voir Figure 6.3). Les cercles S_1^t ont un rayon constant r_1 (r_1 est égal à 0.75 pixel dans les expériences numériques). Grâce à l'hypothèse de quasi rectilignité de la trajectoire, on suppose que la cible pour toute image I^t est contenue dans le disque S_1^t . On introduit ensuite les disques S_2^t de même centre que les disques S_1^t et dont le rayon est une constante fixée r_2 (r_2 est égal à 2 pixel dans les expériences numériques), voir Figure (6.3).

Du fait de la présence de la cible dans les disques S_1^t , I^t sera en moyenne plus lumineuse sur S_1^t que sur $S_2^t - S_1^t$. Nous allons utiliser cette propriété pour détecter localement la cible. Plus précisément nous allons chercher les portions de droites telles que la différence de luminosité moyenne sur les disques S_1^t et $S_2^t - S_1^t$ soit maximum.

Cette dernière condition est équivalente à chercher une trajectoire telle que

$$\sum_t \frac{\int_{S_1^t} I^t(x, y) dx dy}{|S_1^t|} - \frac{\int_{S_2^t} I^t(x, y) dx dy}{|S_2^t|}$$

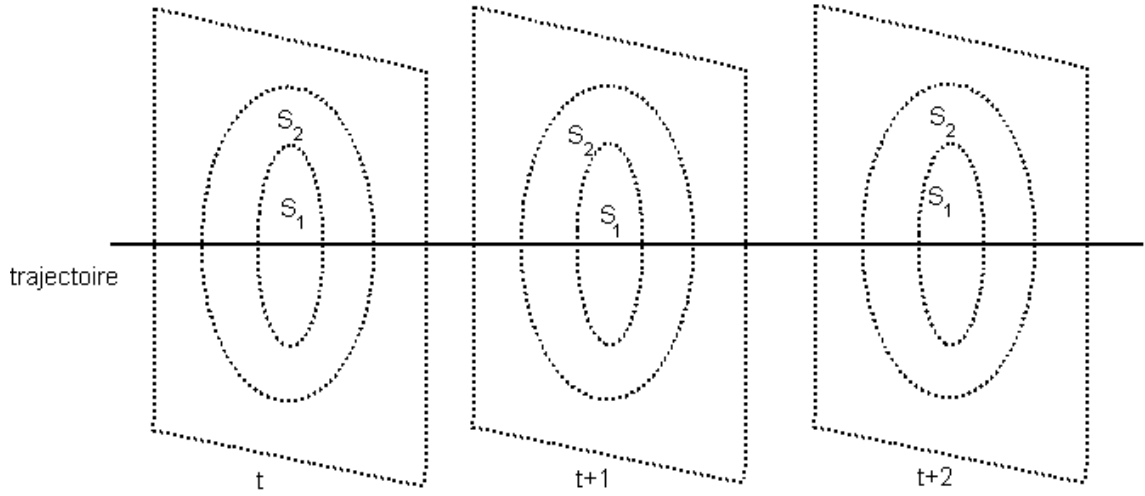


FIG. 6.3 – S_1 et S_2 sur chaque slide temporel

soit maximum

3 Discrétisation du problème

On définit $\chi_1(i, j)$ dans une I^t comme la surface de l'intersection entre le disque S_1^t et la surface du pixel centré en (i, j) . On définit de même χ_2 comme la surface de l'intersection entre $S_2^t - S_1^t$ et la surface du pixel centré en (i, j) voir Figure (6.4) et (6.5).

On paramétrise la droite associée à la trajectoire par

$$t \rightarrow (x_0 + a.t, y_0 + b.t)$$

L'énergie qu'on cherche à maximiser est donc

$$E(x_0, y_0, a, b) = \sum_t \sum_{i,j} \frac{\chi_1(i - x_0 + a.t, j - y_0 + b.t) I(i, j)}{\text{surf}(S_1^t)} - \frac{\chi_2(i - x_0 + a.t, j - y_0 + b.t) I(i, j)}{\text{surf}(S_2^t)}$$

On maximise E en faisant une descente de gradient sur x_0, y_0, a, b .

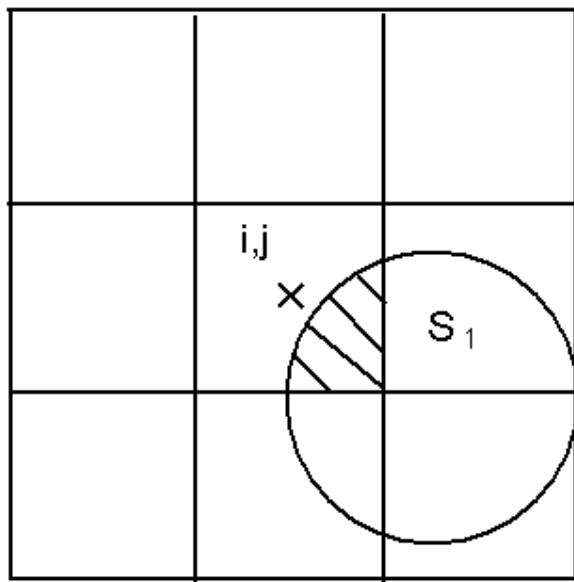


FIG. 6.4 – représentation de $\chi_1(i, j)$

4 Algorithme

Notre algorithme se résume de la manière suivante :

1. On élimine le fond de l'image en soustrayant la moyenne de I sur une séquence de 20 images.
2. On calcule la matrice hessienne H en chaque point de l'image sans fond ainsi que ses valeurs propres et ses vecteurs propres.
3. On initialise x_0, y_0, a et b à partir de valeurs propres et des vecteurs propres de H .
4. On maximise $E(x_0, y_0, a, b)$. Le point (x_0, y_0, t) est sélectionné si $E(x_0, y_0, a, b)$ satisfait une condition de seuil.
5. On optimise E sur les points suivants $(x_0, y_0, t) : (x_0 + a, y_0 + b, t + 1)$ et $(x_0 - a, y_0 - b, t - 1)$. On note D^t la droite optimale.
6. On crée une matrice $E'(x, y, n)$ de même dimension que I , on donne la valeur $E(x_0, y_0, a, b)$ à $E'([x_0], [y_0], t)$ ($[]$ étant la partie entière). On donne cette même valeur à tous les points de D^t , on fait de même pour D^{t+1} et D^{t-1} .
7. Pour tout t , on sélectionne les points (x, y) de l'image I^t tels que $E'(x, y, t)$ soit

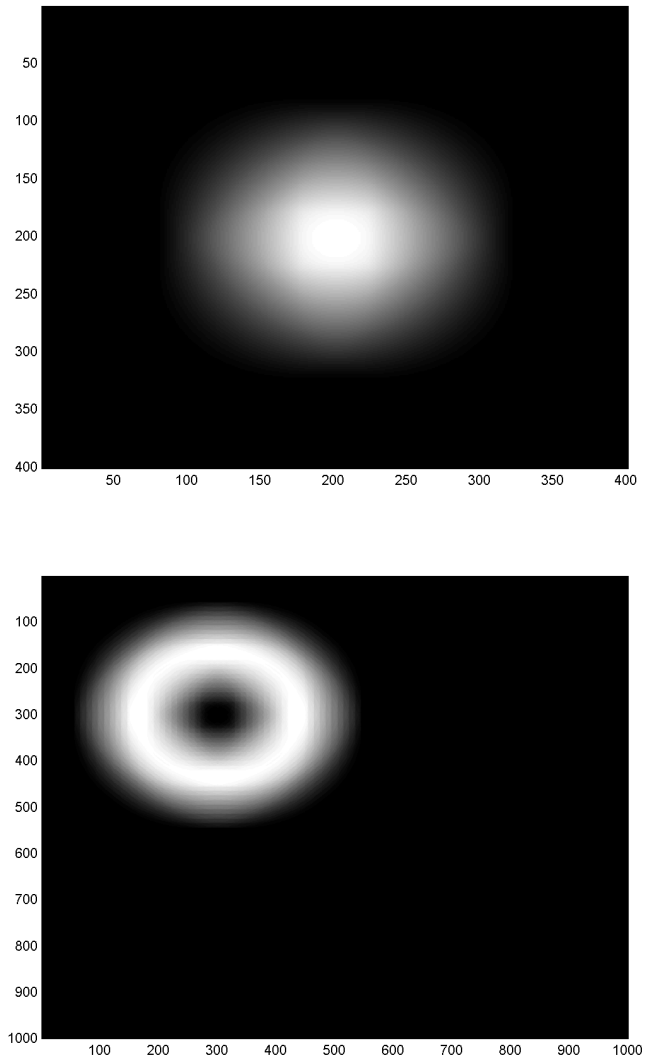


FIG. 6.5 – représentation de $\chi_1(i, j)$ et $\chi_2(i, j)$

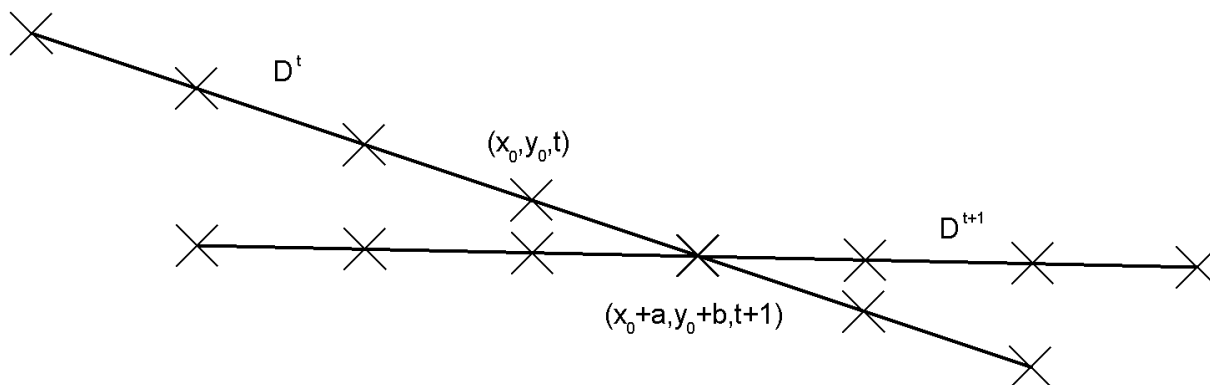


FIG. 6.6 – représentation de D^t et D^{t+1}

maximum pour les variables x et y et vérifie une condition de seuil $E'(x, y, t) > \beta$.

À l'étape 4) on sélectionne le point (x_0, y_0, t) s'il satisfait une condition de seuil. On initialise l'algorithme à l'étape 2 avec les points $(x_0 + a, y_0 + b, t + 1)$ et $(x_0 - a, y_0 - b, t - 1)$, la direction initiale pour D^{t+1} est la même que celle D^t , i.e. a pour coefficients directeur a et b (voir Figure (6.6)). À l'étape 6) si $E'([x_0], [y_0], t) = E_{old}$ est déjà affecté non nulle, on choisit comme nouvelle valeur de $E'([x_0], [y_0], t)$: $\max(E_{old}, E(x_0, y_0, a, b))$.

5 Résultats

Nous avons testé notre méthode sur la séquence d'images associée aux Figures (6.1) et (6.2). La Figure (6.7) montre notre résultat de détection pour le slide de la Figure (6.1). On note la présence d'une fausse alarme et la bonne détection de la cible. Au cours de la séquence le nombre de fausses alarmes varie entre zéro et une demi douzaine. La cible est détectée sur la majorité de la séquence. Cependant dans le cas d'un contraste trop faible, comme pour l'image associée à la Figure (6.2), notre méthode donne des faux négatifs.

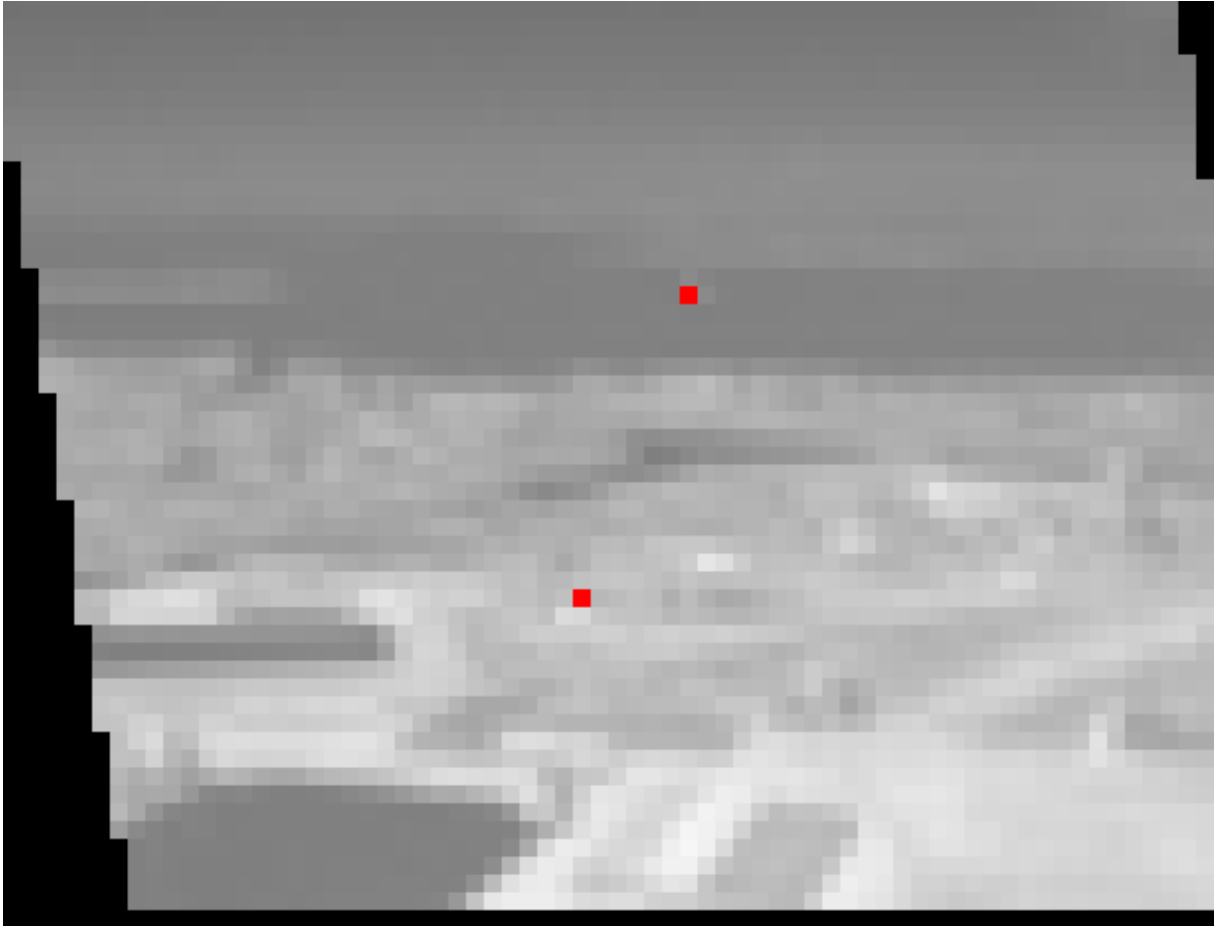


FIG. 6.7 – Résultat de notre détection sur l'image de la Figure (6.1)

Conclusion et Perspectives

Synthèse des travaux effectués

Nous avons axé cette thèse sur le développement de quatre méthodes pour la détection de filaments. Chaque méthode étant particulièrement adaptée pour un type d'application : la détection de routes, la détection de filaments dans des images 3D bruitées présentant des occultations, la détection de filaments dans des images de microscopie confocale et la détection de cible dans des séquences d'images. Nous avons également introduit le concept de courbure totale et étudié le problème de la minimisation de l'énergie de Ginzburg-Landau dans le cas discret à l'aide de la méthode proposée par F. Alouges.

Introduction de la courbure totale

Une contribution théorique de cette thèse est l'introduction de la courbure totale, qui permet de mesurer le caractère oscillant d'une courbe. Cette notion s'applique à des courbes présentant des points anguleux et à des courbes non simples. Nous avons démontré des propriétés de la courbure totale, comme le théorème de collage, qui permettent le calcul simple dans de nombreux cas. Nous avons également montré que cette notion est adaptée à la détection de routes, en proposant une méthode dédiée.

Etude de la méthode de F. Alouges pour la minimisation d'une énergie de type Ginzburg-Landau

Nous avons prolongé l'étude menée dans [1], en nous intéressant au cas plus complexe d'un champ $\vec{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow S^1$. En étudiant le problème discrétisé nous avons établi une équation fonctionnelle vérifiée par u^m le minimum discret et montré que cette méthode ne convergerait pas nécessairement vers un minimum local. Les résultats théoriques sur cette méthode semblent plus rigoureux que ceux proposés par [47]. Nous avons également étudié le comportement de u^m lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro et démontré une borne inférieure et supérieure pour l'énergie associée à u^m en $\log(m)$.

Méthode de détection par champ magnétique

Nous avons proposé une méthode simple et robuste pour détecter les filaments dans des images 3D. L'algorithme est basé sur la représentation des filaments par un champ magnétique, ces derniers étant vus comme des lignes de courants. Comme

il y a des parties manquantes dans la détection, nous utilisons ce champ de vecteurs et une énergie de Ginzburg-Landau pour compléter les filaments.

Méthode de détection de filaments dans des image biologiques

Nous avons présenté une méthode de détection de filaments adaptée aux spécificités de l'image en microscopie confocale. Notre méthode permet de gérer les problèmes de convolution dus à l'optique et le bruit gaussien. Les problèmes de discrétisation sont également pris en compte dans le cas 2D. Notre méthode se caractérise par la comparaison de l'image avec un modèle théorique de filaments.

Détection de cible dans des séquences d'images 2D

Enfin nous avons introduit une méthode de détection de cible, pour des images avec un faible contraste et des effets de discrétisation importants. Elle consiste à considérer la séquence comme une image 3D et à chercher des cylindres de faible diamètre dans cette dernière sur lesquels la luminosité moyenne est plus forte qu'au voisinage de ces derniers.

Perspectives

Beaucoup de questions restent ouvertes et plusieurs directions de recherche peuvent être envisagées. Une question importante est peut être la suivante : peut on utiliser la définition étendue aux courbes non simples de la courbure totale pour développer des méthodes adaptées à la détection de réseaux routiers complexes et plus généralement à des images de filaments présentant des jonctions ? Les jonctions dans la détection de filaments sont un problème sur lequel la plupart des méthodes de détection éprouvent des difficultés. Les exemples simples de jonction que nous avons considéré semblent indiquer que la courbure totale est bien adaptée pour ce problème. Cependant l'utilisation d'une fonctionnelle incluant la courbure totale risque de poser des problèmes complexes de minimisation.

Une autre question théorique porte sur la confirmation (ou l'infirmer) que la solution u^m du problème de Ginzburg-Landau discret converge vers la solution u_* du problème continu lorsque le pas d'échantillonnage tend vers 0. Malgré des similarités évidentes entre u_ϵ et u^m , nous avons montré des différences importantes entre ces deux derniers, notamment pour

$\int_{\Omega_n} (1 - |u^m(x)|^2)^2 dx$. Ces différences incitent à penser que si la convergence vers u_* est vraie, il s'agit d'une convergence dans un sens faible.

Une perspective plus directe concerne la méthode de détection de cible dans des séquences. Notre méthode s'avère efficace d'un point de vue local, cependant elle ne gère pas le problème des occultations partielles. Des travaux ultérieurs utilisant les informations sur la trajectoire et les résultats de détection sur l'ensemble de la séquence pourraient permettre de développer une méthode plus globale.

Chapitre 7

Annexes

1 Majoration de $\int_{\Omega}(1 - |u^m|^2)^2 dx$ en $\log(m)$

Soient a, b, c des nombres réels quelconques. On définit u à support sur le triangle T dont les sommets sont $(0, 0); (1, 0); (1, -1)$. Sur ce triangle on pose :

$$u = a + x(b - a) + y(b - c)$$

Ce qui permet d'obtenir $u(0, 0) = a; u(1, 0) = b; u(1, -1) = c$. On cherche à calculer

$$\int_T (1 - |u|^2)^2 dx = \int_T 1 - 2|u|^2 + |u|^4 dx$$

On calcule l'intégrale suivante

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{-x}^0 (a + x(b - a) + y(b - c))^4 dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{(a + x(b - a) + y(b - c))^5}{5(b - c)} \right]_{-x}^0 dx \\ &= \int_0^1 \frac{(a + x(b - a))^5 - (a + x(c - a))^5}{5(b - c)} dx \end{aligned} \tag{7.1}$$

Déterminons le premier terme de (7.1) :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (a + x(b - a))^5 dx \\ &= \frac{1}{6(b - a)} [(a + x(b - a))^6]_0^1 \end{aligned}$$

$$= \frac{b^6 - a^6}{6(b - a)}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{-x}^0 (a + x(b - a) + y(b - c))^4 dy dx = \\ & \frac{1}{30(b - c)} \left(\frac{b^6 - a^6}{b - a} - \frac{c^6 - a^6}{c - a} \right) \\ & = \frac{1}{30(b - c)} (b^5 - c^5 + a(b^4 - c^4) + a^2(b^3 - c^3) + a^3(b^2 - c^2) + a^4(b - c)) \\ & = \frac{1}{30} [(b^4 + b^3c + b^2c^2 + bc^3 + c^4) + (a(b^3 + b^2c + bc^2 + c^3)) + a^2(b^2 + bc + c^2) + a^3(b + c) + a^3(b + c) + a^4] \end{aligned} \quad (7.2)$$

Cette formule est vraie pour tout triplet de réels (a, b, c) , donc elle est vraie pour des variables (a, b, c) (on considère alors la formule 7.2 comme un polynôme en les variables (a, b, c)). Nous pouvons substituer à ces variables des vecteur (a, b, c) de \mathbb{R}^2 . De plus on suppose que les vecteurs (a, b, c) vérifient $a^2 = b^2 = c^2 = 1$ (au sens du produit scalaire), ce qui mène à :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{-x}^0 (a + x(b - a) + y(b - c))^4 dy dx &= \frac{1}{30} [(1 + bc + 1 + bc + 1) \\ &+ (ab + ac + ab + ac) + 2 + bc + ab + bc + 1] \\ &= \frac{6 + 3ab + 3bc + 3ac}{30} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{10}(ab + bc + ac) \end{aligned}$$

On calcule maintenant les autres termes de

$$\begin{aligned} & \int_T (1 - |u|^2)^2 dx = \int_T 1 - 2|u|^2 + |u|^4 dx \\ & \int_0^1 \int_{-x}^0 (a + x(b - a) + y(b - c))^2 dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{(a + x(b - a) + y(b - c))^3}{3(b - c)} \right]_{-x}^0 dx \\ &= \int_0^1 \frac{(a + x(b - a))^3 - (a + x(c - a))^3}{3(b - c)} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (a + x(b-a))^3 dx \\ &= \frac{1}{4(b-a)} [(a + x(b-a))^4]_0^1 \\ &= \frac{b^4 - a^4}{6(b-a)} \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{-x}^0 (a + x(b-a) + y(b-c))^2 dy dx = \\ &= \frac{1}{12(b-c)} \left(\frac{b^4 - a^4}{b-a} - \frac{c^4 - a^4}{c-a} \right) \\ &= \frac{1}{12(b-c)} (b^3 - c^3 + a(b^2 - c^2) + a^2(b-c)) \\ &= \frac{1}{12} (b^2 + bc + c^2 + ab + ac + a^2) \end{aligned}$$

Nous pouvons utiliser la relation $a^2 = b^2 = c^2 = 1$ avec le même raisonnement que précédemment :

$$= \frac{1}{12} (3 + ab + bc + ac)$$

Nous pouvons maintenant calculer l'intégrale désirée :

$$\begin{aligned} & \int_T (1 - |u|^2)^2 = \int_T 1 - 2|u|^2 + |u|^4 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} (ab + bc + ac) + \frac{6 + 3ab + 3bc + 3ac}{30} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{ab + bc + ac}{15} \\ &= \frac{1}{30} ((a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2) \end{aligned}$$

D'autre part nous avons

$$\int_T |\nabla u|^2 = \frac{1}{2} ((b-a)^2 + (b-c)^2)$$

On en déduit que

$$\frac{1}{15} \int_T |\nabla u|^2 \leq \int_T (1 - |u|^2)^2$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{30}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2) \leq \frac{1}{30}((a-b)^2 + (b-c)^2 + 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2) \\ &= \frac{1}{10}((a-b)^2 + (b-c)^2) \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\int_T (1 - |u|^2)^2 \leq \frac{1}{5} \int_T |\nabla u|^2$$

En faisant un changement de variable pour se ramener du triangle T au triangle T_m de côté $\frac{1}{m}$, on obtient :

$$\frac{1}{15} \int_{T_m} |\nabla u|^2 \leq m^2 \int_{T_m} (1 - |u|^2)^2 \leq \frac{1}{5} \int_{T_m} |\nabla u|^2$$

Cette inégalité est vraie pour tout triangle T_m de Ω_m donc

$$\frac{1}{15} \int_{\Omega_m} |\nabla u|^2 \leq m^2 \int_{\Omega_m} (1 - |u|^2)^2 \leq \frac{1}{5} \int_{\Omega_m} |\nabla u|^2$$

Etant donnés les résultats de la section 7.1, il existe en particulier une constante C_1 strictement positive, telle que pour m suffisamment grand on ait :

$$m^2 \int_{\Omega_m} (1 - |u|^2)^2 \leq C_2 2\pi \ln(m)$$

2 Preuve de la minoration de $\nabla u^m(x)$ sur un triangle

Soient a, b, c trois vecteurs unitaires. S' il existe p, q, r 3 réels strictement positifs tels que $p + q + r = 1$ et

$$\|pa + qb + rc\| < \frac{1}{2}$$

Alors

$$|(pa + qb + rc) \cdot a| < \frac{1}{2}$$

$$pa^2 + qb \cdot a + rc \cdot a = 1 - q + qb \cdot a - r + rc \cdot a$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(q\|b - a\|^2 + r\|c - a\|^2) < \frac{1}{2}$$

Ce qui donne

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2}(q\|b - a\|^2 + r\|c - a\|^2)$$

$$1 < \|b - a\|^2 + \|c - a\|^2$$

On en déduit que s' il existe x appartenant à un triangle T dont les côtés sont de longueur $\frac{1}{m}$ tel que $|u^m(x)| < \frac{1}{2}$ alors on peut trouver une constante $\beta > 0$ indépendante de m telle que $\int_T \|\nabla u^m\|^2 > \beta$.

3 Calcul d'intégrale Gaussienne

Le but de cette section est de calculer l'intégrale :

$$\int_{C(y_i)} e^{-\frac{(\vec{y} \cdot \vec{w})^2}{\sigma}} dy$$

L'origine du repère sera noté x (en référence à la section 1), $\vec{w} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ est un vecteur unitaire et y_i est un pixel délimité par le carré $C(y_i)$ (voir Figure 5.2). On paramétrise les carrés par leur centre, la longueur du côté et l'angle d'un côté avec l'axe des abscisses. On a donc $C(y_i) = (y_i, l, 0)$. On fait le changement de variable $z = \frac{y}{\sigma}$:

$$\int_{C(y_i)} e^{-\frac{(\vec{y} \cdot \vec{w})^2}{\sigma^2}} dy = \int_{C'(y_i)} e^{-(\vec{z} \cdot \vec{w})^2} \sigma^2 dz$$

avec $C'(y_i) = (\frac{y_i}{\sigma}, \frac{l}{\sigma}, 0)$.

On note R_θ la matrice de rotation suivante $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

On fait le changement de variable $w = R_{-\theta} z$ $z = R_\theta w$, ce qui donne :

$$\int_{C(y_i)} e^{-\frac{(\vec{y} \cdot \vec{w})^2}{\sigma^2}} dy = \int_{\tilde{C}(y_i)} e^{-(\vec{w} \cdot \vec{i})^2} \sigma^2 dw$$

avec $\tilde{C}(y_i) = (R_{-\theta} \frac{y_i}{\sigma}, \frac{l}{\sigma}, -\theta)$, (voir Figure (7.1)). En divisant le carré $\tilde{C}(y_i)$ en trois parties, on peut le déformer en un hexagone de même surface et dont les longueurs caractéristiques sont L_1 , L_2 et L_3 .

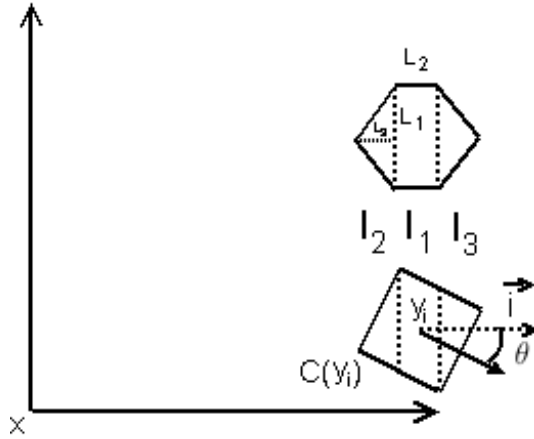
Comme la fonction $e^{-(\vec{w} \cdot \vec{i})^2} \sigma^2$ ne dépend que de la coordonnée horizontale de \vec{w} , on peut prendre l'hexagone H comme domaine d'intégration, on le divise en 3 parties et on calcule les 3 intégrales associées I_1 , I_2 et I_3 . On note c_x la coordonnée horizontale de y_i dans le nouveau repère :

$$L_1 = \frac{l}{\sigma \cos\theta}$$

$$L_2 = \frac{l}{\sigma} (1 - \tan\theta) \cos(\theta) = L_2 = \frac{l}{\sigma} (\cos(\theta) - \sin(\theta))$$

$$L_3 = \frac{l}{\sigma} \sin\theta$$

$$I_1 = \int_{c_x - \frac{L_2}{2}}^{c_x + \frac{L_2}{2}} e^{-w^2} \sigma^2 dw$$


 FIG. 7.1 – Représentation de $\tilde{C}(y_i)$, θ , I_1 , I_2 et I_3

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{c_x - \frac{L_2}{2} - L_3}^{c_x - \frac{L_2}{2}} (w - (c_x - \frac{L_2}{2} - L_3)) \frac{L_1}{L_3} e^{-w^2} \sigma^2 dw \\
 &= \frac{L_1}{2L_3} \sigma^2 (e^{-(c_x - \frac{L_2}{2} - L_3)^2} - e^{-(c_x - \frac{L_2}{2})^2}) - \int_{c_x - \frac{L_2}{2} - L_3}^{c_x - \frac{L_2}{2}} \frac{L_1}{L_3} (c_x - \frac{L_2}{2} - L_3) e^{-w^2} \sigma^2 dw \\
 I_3 &= \int_{c_x + \frac{L_2}{2}}^{c_x + \frac{L_2}{2} + L_3} ((c_x + \frac{L_2}{2} + L_3) - w) \frac{L_1}{L_3} e^{-w^2} \sigma^2 dw \\
 &= \frac{L_1}{2L_3} \sigma^2 (e^{-(c_x + \frac{L_2}{2} + L_3)^2} - e^{-(c_x + \frac{L_2}{2})^2}) + \int_{c_x - \frac{L_2}{2}}^{c_x + \frac{L_2}{2} + L_3} \frac{L_1}{L_3} (c_x + \frac{L_2}{2} + L_3) e^{-w^2} \sigma^2 dw
 \end{aligned}$$

On obtient la valeur de $\int_{C(y_i)} e^{-\frac{(\bar{y} \cdot \bar{w})^2}{\sigma^2}} dy$ par la formule :

$$\int_{C(y_i)} e^{-\frac{(\bar{y} \cdot \bar{w})^2}{\sigma^2}} dy = I_1 + I_2 + I_3$$

Cette expression est facilement calculable avec une table de la fonction *erf* et permet une implémentation rapide.

Bibliographie

- [1] F. ALOUGES. « A new algorithm for computing liquid crystal stable configurations : The harmonic mapping case ». *SIAM Journal on Numer. Anal.*, 34(5) :1708–1726, 1997.
- [2] F. ALTER, S. DURAND J. FROMENT. *Adapted total variation for artifact free Decompression of JPEG Images*, 23. Springer Netherlands, 2005.
- [3] G. AUBERT, J. AUJOL L. BLANC-FÉRAUD. « Detecting Codimension Two Objects in an Image with Ginzburg-Landau Models ». *International Journal of Computer Vision*, 65(1) :29–42, 2005.
- [4] C. BALLESTER, J.M BERTALMIO, V. CASELLES J. SAPIRO, G. Verdera. « Filling-In by Joint Interpolation of Vector Fields and Gray Levels ». *Transactions on Image Processing, IEEE*, 10 :1200–1211, August 2001.
- [5] Emmanuel BALTSAVIAS, Chunsun ZHANG, Chunsun ZHANG, Shunji MURAI, Shunji MURAI Emmanuel P. BALTSAVISAS. « Road Network Detection by Mathematical Morphology ». *Proc. ISPRS Workshop 3D Geospatial Data Production : Meeting Application Requirements*, 185–200, 1999.
- [6] Alexis BAUDOUR, Gilles AUBERT Laure BLANC-FÉRAUD. « Detection and Completion of Filaments : A Vector Field and PDE Approach ». *SSVM*, 451–460, 2007.
- [7] M. BERTALMIO, V CASELLES, G. HARO G. SAPIRO. *The Handbook of Mathematical Models of Computer Vision*. Springer Verlag, 2005.
- [8] F. BETHUEL, F. BREZIS F. HÉLEIN. *Ginzburg-Landau Vortice*. Birkhäuser, 1994.
- [9] F. BETHUEL, G. ORLANDI D. SMETS. « Convergence of the parabolic Ginzburg-Landau equation to motion by mean curvature ». *Ann. of Math.* 163, (1) :37–163, 2006.
- [10] Manuele BICEGO, Silvio DALFINI, Gianni VERNAZZA Vittorio MURINO. « Automatic road extraction from aerial images by probabilistic contour tracking ». *ICIP (3)*, 585–588, 2003.

- [11] J. BIOUCAS, M. FIGUEIREDO J. OLIVEIRA. « Total Variation-Based Image Deconvolution : a Majorization-Minimisation Approach ». *ICASSP*, 2, may 2006.
- [12] J. BOBIN, J.-L. STARK, Y. MOUDDEN M.J. FADILI. « Blind Source Separation : The sparsity Revolution ». *Advances in Imaging and Electron Physics*, 2008.
- [13] A. BORZI K. KUNISCH. *A Multigrid Method for the Optimal Control of Time-Dependent Reaction Diffusion Processes*, 69. Birkhäuser, 2001.
- [14] H. BREZIS. « Degree Theory : Old and New ». in *M. Matzeu and A. Vignoli eds., Topological Nonlinear Analysis II. Degree, Singularity and Variations*, 2005.
- [15] H. BREZIS, F. MERLE T. RIVIÈRE. *Quantization effects for $-\Delta u = u(1 - |u|^2)$ in \mathbb{R}^2* , 317. C.R. Acad. Sc. Paris, 1993.
- [16] E. CANDÈS. « Ridgelets : theory and applications. Ph.D. Thesis, Technical Report, Department of Statistics, Stanford University ». 1998.
- [17] E. CANDÈS. « The curvelet transform for image denoising ». *Proc. International Conference on Image Processing*, 1, 7–10, 2001.
- [18] E. CANDÈS D. DONOHO. « Curvelets– A Surprisingly Effective Nonadaptive Representation For Objects with Edges ». *Technical report, California Institute of Technology*, 1999.
- [19] E. CANDÈS D. DONOHO. « New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise- C^2 singularities ». *Comm. Pure Appl. Math.*, 57, 219–266, 2002.
- [20] S. CARSTEN. « An Unbiased Detector of Curvilinear Structures ». *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE*, 20(2) :113–125, February 1998.
- [21] Y. CHEN. *The weak solutions to the evolution problem of harmonic maps*, 201. *Math Z.*, 1989.
- [22] I. DESTIVAL. « Recherche automatique des réseaux linéaires sur les images SPOT ». *Bulletin de la S.FPT*, 5–16, 1999.
- [23] R. DUDA Hart P.. « Use of the Hough transformation to detect lines and curves ». *ACM*, 15, 11–15, 1972.
- [24] L. EVANS R. GARIEPY. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press, 1992.
- [25] H. GROSSAUER O. SCHERZER. « Using the Complex Ginzburg-Landau Equation for Digital Inpainting in 2D and 3D ». *Scale Space Methods in Computer Vision, Prague*, 2695 :1080, 2003.
- [26] J. HASLINGER P. NEITTAANMAKI. *Finite element approximation*. Wiley, 1996.

-
- [27] ILLINGWORTH KITTLER. « A Survey of the Hough Transform ». *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 44 :87–116, 1988.
- [28] M. JACOB, T. BLU, C. VAILLANT, J.H. MADDOCKS M. UNSER. « 3-D shape estimation of DNA molecules from stereo cryo-electron micro-graphs using a projection-steerable snake ». *IEEE Transactions on Image Processing*, 15 :214–227, 2006.
- [29] M. JACOB M. UNSER. « Design of steerable filters for feature detection using Canny-like criteria ». *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE*, 26(8) :1007–1019, August 2004.
- [30] Mathews JACOB, Thierry BLU, C. VAILLANT, J. H. MADDOCKS Michael UNSER. « 3-D shape estimation of DNA molecules from stereo cryo-electron micro-graphs using a projection-steerable snake ». *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(1) :214–227, 2006.
- [31] A. JALBA, M. WILKINSON J. ROERDINK. « CPM : A Deformable Model for Shape recovery and segmentation based on charged particles ». *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE*, 26(10) :1320–1336, October 2004.
- [32] Michael KASS, Andrew WITKIN Demetri TERZOPOULOS. « Snakes : Active contour models ». *International Journal of Computer Vision*, V1(4) :321–331, January 1988.
- [33] C. LACOSTE. « *Extraction de Réseaux Linéiques à partir d’Images Satellitaires et Aériennes par Processus Ponctuels Marqués* ». PhD thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, septembre 2004.
- [34] C. LACOSTE, X. DESCOMBES J. ZERUBIA. « Point Processes for Unsupervised Line Network Extraction in Remote Sensing ». *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 27(10) :1568–1579, October 2005.
- [35] C. LACOSTE, X. DESCOMBES, J. ZERUBIA N. BAGHDADI. « Extraction of hydrographic networks from satellite images using a hierarchical model within a stochastic geometry framework ». *Proc. European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, Antalya, Turkey, septembre 2005.
- [36] F. H. LIN T. RIVIÈRE. « Complex Ginzburg-Landau equation in high dimension and codimension two area minimizing currents ». *J.Eur.Math.Soc.*, (1) :237–311, 1999.
- [37] F. MALGOUYES. « Minimizing the total variation under a general convex constraint for image restoration ». *IEEE transactions on image processing*, 11(12) :1450–1456, 2002.

- [38] M. MARIM, B. ZHANG, J.-C. OLIVO-MARIN C. ZIMMER. « Improving single particle localization with an empirically calibrated gaussian kernel ». *IEEE International Symposium on Biomedical Imaging*, 2008.
- [39] Ana Maria MENDONÇA Aurélio C. CAMPILHO. « Segmentation of retinal blood vessels by combining the detection of centerlines and morphological reconstruction ». *IEEE Trans. Med. Imaging*, 25(9) :1200–1213, 2006.
- [40] O. NEMITZ, M. RUMPF, T. TASDIZEN R. WHITAKER. « Anisotropic Curvature Motion for Structure Enhancing Smoothing of 3D MR Angiography Data ». *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. to appear.
- [41] Stanley OSHER James A. SETHIAN. « Fronts Propagating with Curvature-Dependent Speed : Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations ». *Journal of Computational Physics*, 79 :12–49, 1988.
- [42] P. PÉREZ, A. BLAKE M. GANGNET. « JetStream : probabilistic contour extraction with particles ». *Proc. IEEE Int Conf. Computer Vision, ICCV'01*, Vancouver, Canada, July 2001.
- [43] Joseph M. REINHARDT William E. HIGGINS. « Comparison Between the Morphological Skeleton and Morphological Shape Decomposition ». *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 18(9) :951–957, 1996.
- [44] M. ROCHERY. « *Contours actifs d'ordre supérieur et leur application à la détection de linéiques dans des images de télédétection* ». PhD thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, Sophia Antipolis, septembre 2005.
- [45] M. ROCHERY, I.H. JERMYN J. ZERUBIA. « Higher Order Active Contours ». *International Journal of Computer Vision*, 69(1) :27–42, August 2006.
- [46] Marie ROCHERY, Ian H. JERMYN Josiane ZERUBIA. « New higher-order active contour energies for network extraction ». *ICIP (2)*, 822–825, 2005.
- [47] S. RUUTH, B. MERRIMAN, J. XIN S. OSHER. « Diffusion generated motion by mean curvature for filaments ». *Journal of Nonlinear Science*, 11(6) :473–493, January 2001.
- [48] E. SANDIER. *Ginzburg-Landau Minimizers from R^n to R^{n+1} and minimal Connections*, 50. Indiana University Mathematics Journal, 2001.
- [49] A. SANTAMARFA-PANG, T. BILDEA, C. COLBERT, P. SAGGAU A. KAKADIARIS. « Towards segmentation of irregular tubular structures in 3D confocal microscope images ». *MIAAB Proceedings*, 76–85, 2006.
- [50] J. W. SHAEVITZ D. A. FLETCHER. « Enhanced three-dimensional deconvolution microscopy using a measured depth-varying point-spread function ». *J.Opt. Am. A*, 24(9), 2007.

-
- [51] R. STOICA. « *Processus ponctuels pour l'extraction de réseaux linéiques dans les images satellitaires et aériennes* ». PhD thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, February 2001.
- [52] R. STOICA, X. DESCOMBES J. ZERUBIA. « A Markov point process for road extraction in remote sensed images ». Research Report 3923, Inria, 2000.
- [53] R. STOICA, X. DESCOMBES J. ZERUBIA. « A Gibbs point process for road extraction in remotely sensed images ». *International Journal of Computer Vision*, 57(2) :121–136, 2004.
- [54] Radu STOICA, Xavier DESCOMBES Josiane ZERUBIA. « A Gibbs Point Process for Road Extraction from Remotely Sensed Images ». *International Journal of Computer Vision*, 57(2) :121–136, 2004.
- [55] F. TUPIN, J.-F. MANGIN, E. PECHERSKY, J.-M. NICOLAS H. MAÎTRE. « A graph-based representation to detect linear features ». *Journal Computing, Archives for Informatics and Numerical Computation*, S12 :98–104, 1998.
- [56] R. VERDU-MONEDERO J. ANGULO. « Spatially-variant directional mathematical morphology operators based on a diffused average squared gradient field ». *Acivs , to be published in lectures Notes in Computer Science*, 2008.
- [57] G. VOSSELMAN J. de KNECHT. « Road tracing by profile matching and Kalman filtering ». *Automatic Extraction of Man-Made object from aerial and space images*, 265–274, avril 1995.
- [58] Frédéric ZANA Jean-Claude KLEIN. « Segmentation of vessel-like patterns using mathematical morphology and curvature evaluation ». *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(7) :1010–1019, 2001.
- [59] B. ZHANG, M.J. FADILI J.-L. STARK. « Wavelets, Ridgelets and Curvelets for Poisson Noise Removal ». *IEEE Transactions on Image Processing*, 17 :1093–1108, 2008.
- [60] Bo ZHANG, Jost ENNINGA, Jean-Christophe OLIVO-MARIN Christophe ZIMMER. « Automated super-resolution detection of fluorescent rods in 2D ». *ISBI*, 1296–1299, 2006.
- [61] Bo ZHANG, Josiane ZERUBIA Jean-Christophe OLIVO-MARIN. « A study of Gaussian approximations of fluorescence microscopy PSF models ». *Three-Dimensional and Multidimensional Microscopy : Image Acquisition and Processing XIII*, 6090(1) :60900K, 2006.

