



**HAL**  
open science

# Segmentation par contours actifs en imagerie médicale dynamique : application en cardiologie nucléaire

Eric Debreuve

## ► To cite this version:

Eric Debreuve. Segmentation par contours actifs en imagerie médicale dynamique : application en cardiologie nucléaire. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Nice Sophia Antipolis, 2000. Français. NNT : . tel-00506987

**HAL Id: tel-00506987**

**<https://theses.hal.science/tel-00506987>**

Submitted on 29 Jul 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse présentée à l'université de Nice-Sophia Antipolis  
pour l'obtention du titre de « Docteur ès sciences »

Spécialité : sciences pour l'ingénieur

---

Segmentation par contours actifs  
en imagerie médicale dynamique :  
application en cardiologie nucléaire

Éric DEBREUVE

Soutenue le 27 octobre 2000 devant le jury composé de Mme et MM. :

Isabelle MAGNIN	DR Inserm, Creatis	Rapporteur
Patrick BOUTHEMY	DR Inria, Irisa	Rapporteur
Michel BARLAUD	Pr, UNSA	Directeur de thèse
Jacques DARCOURT	Pr, UFR de médecine UNSA	Directeur de thèse
Gilles AUBERT	Pr, UNSA	Examineur
Nicholas AYACHE	DR Inria, Inria Sophia Antipolis	Examineur
Yves BIZAIS	Pr, UFR de médecine UBO	Examineur
Shérif MAKRAM-EBEID	Chef de projet, Philips Research	Examineur

---



Thèse présentée à l'université de Nice-Sophia Antipolis  
pour l'obtention du titre de « Docteur ès sciences »

Spécialité : sciences pour l'ingénieur

---

Segmentation par contours actifs  
en imagerie médicale dynamique :  
application en cardiologie nucléaire

Éric DEBREUVE

Soutenue le 27 octobre 2000 devant le jury composé de Mme et MM. :

Isabelle MAGNIN	DR Inserm, Creatis	Rapporteur
Patrick BOUTHEMY	DR Inria, Irisa	Rapporteur
Michel BARLAUD	Pr, UNSA	Directeur de thèse
Jacques DARCOURT	Pr, UFR de médecine UNSA	Directeur de thèse
Gilles AUBERT	Pr, UNSA	Examineur
Nicholas AYACHE	DR Inria, Inria Sophia Antipolis	Examineur
Yves BIZAIS	Pr, UFR de médecine UBO	Examineur
Shérif MAKRAM-EBEID	Chef de projet, Philips Research	Examineur

---



À Zinedine Zidane,  
à Mirza,  
à mes voisins,



Ce fut aux chiens de poser toute sorte de problèmes. Par exemple un matin, comme Ferrer se trouvait éjecté de son traîneau sur une arête de neige rugueuse, le véhicule privé de maîtrise commença de bringuebaler en tous sens. Mais, au lieu de s'arrêter, les animaux se croyant libres détalèrent à toute allure et dans plusieurs directions à la fois. Le traîneau finit par verser et se coincer en travers de la piste, immobilisant au bout de leurs courroies les chiens qui se mirent aussitôt à s'engueuler bruyamment entre eux. Cependant Ferrer tâchait de revenir à lui sur le bas-côté de la piste en se massant la hanche. L'ayant remis sur pieds, Angoutretok entreprit d'apaiser les bêtes à coups de fouet mais ne parvint qu'à envenimer les choses : loin de se calmer, le premier chien fouetté réagit en mordant son voisin, qui en mordit un suivant, qui en mordit deux autres qui réagirent de même avant que tout cela dégénérait en vaste conflit, dans une confusion totale. A grand-peine on parvint à les maîtriser. Puis on repartit. L'été boréal progressait. La nuit ne tombait jamais.

Jean Echenoz  
*Je m'en vais*, 1999  
Les éditions de minuit





Je sais gré à Mme Françoise Bussière, directrice du Laboratoire de biophysique et de traitement de l'image de la Faculté de médecine de Nice, et à MM. Gérard Favier et Pierre Bernhard, directeurs successifs du laboratoire I3S de Sophia Antipolis, de m'avoir accueilli dans leur laboratoire. Je remercie Mme Isabelle Magnin et M. Patrick Bouthemy d'avoir bien voulu rapporter à propos de ce document et pour les remarques dont ils m'ont fait part. Je remercie les membres du jury d'avoir accepté d'y siéger. Merci à Gilles Aubert d'en être le président.

Ce travail a été en partie réalisé au sein de l'action incitative « Cœur battant » du GDR-PRC ISIS.

Sabine, Ivan, les mots me manquent. Mon déguisement *Superman* aussi me manque depuis que maman l'a mis aux ordures à l'époque où, le tour de cou de la cape devenu trop petit, j'avais pris l'habitude de jouer au sauveur de l'univers en apnée, ajoutant encore au danger que constituait un envol du haut du toit de la maison. Mais voici que les mots me retrouvent. Ils ne vont pas être plaisants à lire. Mais soyons honnêtes, Sabine, Ivan. Pour une fois. Reconnaissez que vous n'avez aucun goût.

Voyages en Europe et vers le continent Nord-américain ont été de terribles épreuves que je dois au concours acharné de Michel Barlaud et Jacques Darcourt. Une thèse sous la direction d'un bipôle Nice-Sophia Antipolis donc, dont, au regard du temps de présence à une extrémité par rapport à l'autre, le centre de gravité a fait l'objet d'un ajustement permanent afin qu'il veuille bien résider le plus au milieu possible. Équilibre délicat qu'a perturbé une panne de voiture, définitive en quelque sorte : le soin de remédier à la défaillance a été abandonné au destin.

Abandonné au destin, tel ne fut pas mon sort. Certes, il a bien fallu me résoudre, Jacques Darcourt étant médecin, à lui accorder des créneaux d'activité hospitalière çà et là. Michel Barlaud a également une activité annexe que, par égard, je m'interdis de dévoiler – les pratiquants diront « affaler » – tout en indiquant, par souci de précision, qu'on s'y adonne à la surface d'un élément liquide que survolent des particules d'air animées d'un mouvement d'ensemble cohérent. Pourtant, ce mystérieux loisir ne fut pas une occasion de reprendre mon souffle. J'ai constamment subi sa bienveillante surveillance qui a souvent pris la forme de réunions en petit comité et d'appels téléphoniques.

De mon point de vue, les deux actions déterminantes qu'a menées Gilles Aubert depuis octobre 1997 sont l'utilisation judicieuse d'un traducteur électronique anglais vers ou depuis français, et un développement mathématique essentiel à nos séquences. Mais ce ne sont là que deux coups d'éclat d'une campagne de trois ans au cours de laquelle se sont succédé discussions, suggestions, solutions, corrections de publications, lettre de recommandation.

Gratitude envers Colette pour s'être occupée de tout. Et Confucius disait : « Il reste toujours un peu de parfum à la main qui donne des roses ».

Grand merci à Malick pour s'être occupé des plantes, pour son sens de l'organisation et pour les croissants. Hommage au secteur médical : Octave, fournisseur officiel de blagues et de coups de gueule, et l'équipe du service de médecine nucléaire du Centre Antoine Lacassagne.

Ce sont des stagiaires, thésard(e)s ou ancien(ne)s-un-des-deux d'I3S sans lesquels les pauses n'auraient pas eu la même saveur. En voici la liste, par ordre alphabétique : eilOrv aAdeimu, aeIKnr aBerr, bBo aCoty, aeEginu adiorT-Cruz, nsuA aeilntV, aeéhinpSt aehJn, aeéhinpSt aiimnrT – organisateur de soirées pour adultes –, aGostuv aiMnrt, Cehhioprst

aioPrst, eilLno Belnru, eilSvy beloTu, cdééFirr céiooPrs, aeirvX Dipsuu, aAbeellnn eGouz,  
ëJlo gJnu, parmi qui, en ordre chronologique, Sylvie, Stéphanie et Frédéric ont partagé  
avec moi leur bureau.

Merci à Micheline Hagnéré.

*Section poésie pour les muses*

Sophie rigole,  
Peut-être un peu plus  
Avec un peu plus d'alcool.  
De préférence de l'aqua viva,  
Il est bien entendu.  
On ne rigole pas avec n'importe quoi.

Agnès, issue d'la cuisine à Jupiter :  
Pâtes, œufs durs, frites,  
Elle est reine de la marmite.  
Alsa, Findus, Bolino,  
Maîtrise totale au fourneau.  
Sur son scooter, elle tient la bride,  
C'est des Michelin qui la guident.

Pat Marengo, je te propose de conclure.

## **Avertissement au lecteur**

Certaines expressions et tournures de phrase de ce document risquent de heurter la sensibilité des puristes de la linguistique, experts en sémantique, amateurs de belles-lettres ou, de façon générale, de toute personne s'aventurant à sa lecture.



# Table des matières

INTRODUCTION		1
Abréviations		3
<b>1 Introduction</b>		<b>5</b>
1.1 Imagerie en médecine nucléaire		5
1.1.1 En émission		6
1.1.2 En transmission		6
1.2 Motivations		7
1.3 Outils		9
1.4 Organisation du document		9
1.5 Notations		9
1.6 Terminologie		11
I CONTOURS ACTIFS ET ENSEMBLES DE NIVEAUX		15
<b>2 Contours actifs</b>		<b>17</b>
2.1 Intérêts		17
2.2 Principe		17
2.3 Les pionniers		19
2.3.1 Contours actifs classiques		19
2.3.2 Contours actifs géométriques		20
2.3.3 Contours actifs géodésiques		21
2.4 Formulation générale		22
2.4.1 Équation d'évolution		22
2.4.2 Équation de régularisation		23
<b>3 Ensembles de niveaux</b>		<b>25</b>
3.1 Gestion des contours actifs		25
3.2 Équations		27
3.2.1 Du contour actif à l'ensemble de niveaux		27
3.2.2 Points singuliers ou lieux de choc		28
3.2.3 Extension de la vitesse d'évolution		29
3.2.4 Réinitialisation		30
3.2.5 Mise en œuvre informatique		30
<b>4 Intérêt en médecine nucléaire</b>		<b>33</b>

<hr/>	
<b>II</b>	<b>35</b>
<hr/>	
<b>5</b>	<b>37</b>
5.1	37
5.2	37
5.2.1	38
5.2.2	38
5.2.3	39
<b>6</b>	<b>41</b>
6.1	41
6.2	41
6.2.1	41
6.2.2	42
6.2.3	43
6.2.4	44
6.3	45
6.3.1	45
6.3.2	45
<b>7</b>	<b>49</b>
7.1	49
7.2	49
7.3	49
7.4	50
7.5	51
7.6	51
<hr/>	
<b>III</b>	<b>53</b>
<hr/>	
<b>8</b>	<b>55</b>
8.1	55
8.1.1	55
8.1.2	55
8.2	56
8.2.1	56
8.2.2	56
8.2.3	57
8.2.4	57
<b>9</b>	<b>61</b>
9.1	61
9.2	61
9.2.1	61
9.2.2	62
9.2.3	62
9.2.4	63
9.2.5	63
9.2.6	65

9.2.7	Algorithme . . . . .	66
9.2.8	Initialisation . . . . .	68
9.3	Évaluation expérimentale . . . . .	68
9.3.1	Simulation MCAT . . . . .	68
9.3.2	Données cliniques . . . . .	69
9.3.3	Calcul de fraction d'éjection . . . . .	70
<b>10</b>	<b>Discussion</b>	<b>73</b>
10.1	Validité des hypothèses . . . . .	73
10.2	Avantages de la méthode . . . . .	74
10.3	Critique des résultats expérimentaux . . . . .	75
10.4	Influence de l'initialisation . . . . .	75
10.5	Convergence de l'algorithme . . . . .	75
10.6	Calcul du fond et de la perfusion apparente . . . . .	76
10.7	Travaux supplémentaires . . . . .	76
10.8	Étude expérimentale . . . . .	77
<hr/> <b>IV</b> SEGMENTATION ET MOUVEMENT <hr/>		<b>79</b>
<b>11</b>	<b>Contexte</b>	<b>81</b>
11.1	Rapport signal à bruit . . . . .	81
11.2	Quelques mots sur le recalage . . . . .	81
<b>12</b>	<b>Méthode proposée</b>	<b>85</b>
12.1	L'idée . . . . .	85
12.2	La méthode . . . . .	85
12.2.1	Ensembles de niveaux intermédiaires . . . . .	85
12.2.2	Interpolation . . . . .	86
12.2.3	Algorithme . . . . .	87
12.3	Application à la compensation cinétique . . . . .	88
12.3.1	Simulation MCAT . . . . .	88
<b>13</b>	<b>Discussion</b>	<b>91</b>
13.1	Validité des hypothèses . . . . .	91
13.2	Avantages de la méthode . . . . .	92
13.3	Critique des résultats expérimentaux . . . . .	92
13.4	Travaux supplémentaires . . . . .	93
13.5	Application au recalage . . . . .	93
<hr/> <b>CONCLUSION</b> <hr/>		<b>95</b>
<b>14</b>	<b>Conclusion</b>	<b>97</b>
14.1	Bilan des travaux . . . . .	97
14.1.1	Segmentation des cartes d'atténuation . . . . .	97
14.1.2	Segmentation des séquences cardiaques . . . . .	98
14.1.3	Segmentation et mouvement . . . . .	98
14.1.4	Mise en œuvre informatique . . . . .	99
14.2	Parmi les développements à considérer . . . . .	99
14.2.1	En transmission : segmentation des cartes d'atténuation . . . . .	99



14.2.2 En émission : segmentation des séquences cardiaques et mouvement	100
_____ ANNEXES _____	<b>101</b>
<b>A Des contours actifs aux ensembles de niveaux</b>	<b>103</b>
<b>B Approximation du gradient d'un ensemble de niveaux</b>	<b>105</b>
<b>C Construction d'un ensemble de niveaux</b>	<b>109</b>
<b>D Ensemble de niveaux et carte de distance</b>	<b>111</b>
<b>E Courbes à gradient constant d'un ensemble de niveaux</b>	<b>115</b>
<b>F Courbure et courbure moyenne</b>	<b>117</b>
_____ BIBLIOGRAPHIE _____	<b>119</b>
_____ INDEX _____	<b>129</b>

# Liste des figures

1.1	Schéma d'acquisition tomographique en émission . . . . .	6
1.2	Schéma d'acquisition tomographique en transmission et géométrie conique . . . . .	7
1.3	Image cartographique ornée de quelques courbes de niveau . . . . .	13
2.1	Composantes d'une force appliquée à un contour actif . . . . .	17
2.2	Équation de la chaleur géométrique bidimensionnelle . . . . .	18
2.3	Évolution d'un contour actif avec séparation . . . . .	18
2.4	Évolution d'un contour actif avec fusion . . . . .	19
3.1	Évolution d'un contour actif dans un ensemble de niveaux . . . . .	26
3.2	Points singuliers d'un ensemble de niveaux . . . . .	29
4.1	Exemples d'images de médecine nucléaire . . . . .	33
6.1	Projection estimée et projection mesurée . . . . .	43
6.2	Calcul des projections estimées . . . . .	45
6.3	Carte d'atténuation segmentée en 2D du fantôme . . . . .	47
6.4	Carte d'atténuation segmentée du fantôme vue en fausse dimension trois . . . . .	47
6.5	Carte d'atténuation segmentée en 3D du fantôme vue en coupes . . . . .	48
9.1	Segmentation de la séquence simulée vue en trois dimensions . . . . .	69
9.2	Segmentation de la séquence simulée vue en coupes temporelles . . . . .	70
9.3	Segmentation de la séquence simulée vue en coupes spatiales . . . . .	70
9.4	Segmentation de la séquence clinique vue en trois dimensions . . . . .	71
9.5	Segmentation de la séquence clinique vue en coupes temporelles . . . . .	72
9.6	Segmentation de la séquence clinique vue en coupes spatiales . . . . .	72
9.7	Perfusion apparente ou effet de surbrillance du myocarde . . . . .	72
9.8	Schéma des plans des valves . . . . .	72
10.1	Influence d'une région hypoperfusée sur la segmentation . . . . .	73
12.1	Coupes de la simulation avec segmentation superposée . . . . .	89
12.2	Compensation cinétique de la simulation . . . . .	89
12.3	Profils de la somme avec et sans compensation . . . . .	90
12.4	Déformations d'une grille régulière par recalage . . . . .	90



# Liste des tableaux

1	Liste des abréviations . . . . .	3
1.1	Liste des symboles : signes mathématiques et variables . . . . .	11
1.2	Liste des symboles : domaines et fonctions . . . . .	12
6.1	Algorithme de segmentation des cartes d'atténuation . . . . .	46
7.1	Volumes relatifs du fantôme calculés sur l'IRM et sur la segmentation . . . .	50
9.1	Algorithme de segmentation spatio-temporelle des séquences cardiaques . .	67
12.1	Algorithme de recalage à partir de contours . . . . .	88
13.1	Rapports signal à bruit de la somme avec et sans compensation . . . . .	93
B.1	Approximation de la norme du gradient . . . . .	106



# INTRODUCTION

---



## Abréviations

Creatis	– Centre de <b>R</b> echerche <b>E</b> t d' <b>A</b> pplications en <b>T</b> raitement de l' <b>I</b> mage et du <b>S</b> ignal
DR	– <b>D</b> irecteur, trice de <b>R</b> echerche
Inria	– <b>I</b> nstitut <b>N</b> ational de <b>R</b> echerche en <b>I</b> nformatique et en <b>A</b> utomatique
Inserm	– <b>I</b> nstitut <b>N</b> ational de la <b>S</b> anté <b>E</b> t de la <b>R</b> echerche <b>M</b> édicale
Irisa	– <b>I</b> nstitut de <b>R</b> echerche en <b>I</b> nformatique et <b>S</b> ystèmes <b>A</b> léatoires
IRM	– <b>I</b> magerie par <b>R</b> ésonance <b>M</b> agnétique
Pr	– <b>P</b> rofesseur
TEMP	– <b>T</b> omographie d' <b>É</b> mission <b>M</b> ono <b>P</b> hotonique
TEP	– <b>T</b> omographie par <b>É</b> mission de <b>P</b> ositons
UBO	– <b>U</b> niversité de <b>B</b> retagne <b>O</b> ccidentale
UFR	– <b>U</b> nité de <b>F</b> ormation et de <b>R</b> echerche
UNSA	– <b>U</b> niversité de Nice- <b>S</b> ophia <b>A</b> ntipolis
1D	– <b>U</b> ne <b>D</b> imension ou <b>M</b> ono <b>D</b> imensionnel, elle
2D	– <b>D</b> eux <b>D</b> imensions ou <b>B</b> i <b>D</b> imensionnel, elle
3D	– <b>T</b> rois <b>D</b> imensions ou <b>T</b> ri <b>D</b> imensionnel, elle

**Tab. 1** Liste des abréviations.





# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Imagerie en médecine nucléaire

L'imagerie d'émission en médecine nucléaire est une modalité fonctionnelle – par opposition à anatomique comme le sont l'IRM et l'imagerie radiologique. Cela signifie qu'elle permet d'observer des anomalies de la fonction de certains organes plutôt que leurs causes anatomiques. Deux phénomènes physiques sont mis à contribution en médecine nucléaire : l'émission de photons et l'émission de positons. Les dispositifs d'acquisition sensibles au premier sont les caméras de type TEMP. Ceux sensibles au second sont les caméras de type TEP. Les caméras TEMP hybrides ont la double compétence mais elles sont moins performantes en imagerie TEP que les caméras qui y sont dédiées. Les images TEMP et TEP sont, du point de vue de la segmentation, relativement semblables. Nous n'avons traité que des images issues de systèmes TEMP. Les descriptions suivantes en reflètent les principes et configurations les plus courants.

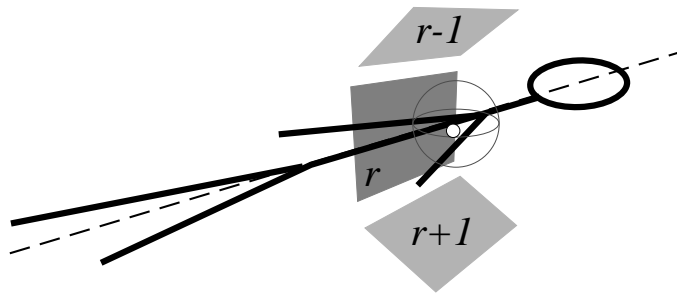
Les signaux qui permettent la formation d'une image de médecine nucléaire sont des photons  $\gamma$  émis par des éléments faiblement radioactifs. En imagerie d'émission, ce sont les radiopharmaceutiques, encore appelés radiotraceurs ou traceurs radioactifs. Un traceur radioactif est en général composé d'un vecteur et d'un marqueur. Le vecteur est spécifique d'un organe ou de quelques organes. Il peut être une molécule artificielle ou une structure présente dans l'organisme telles que les hématies ou les plaquettes sanguines. Le marqueur, ou radio-isotope, n'est souvent spécifique de rien. C'est un isotope radioactif produit par bombardement de particules, dans un accélérateur de particules ou dans un réacteur nucléaire. Les plus courants sont le technétium  $^{99m}\text{Tc}$ , le thallium  $^{201}\text{Tl}$ , le xénon  $^{133}\text{Xe}$ , l'iode  $^{131}\text{I}$  et l'indium  $^{111}\text{In}$ . Lorsque le marqueur est spécifique de quelque chose, il y a exception à la règle : il endosse également la casquette de vecteur et constitue donc à lui seul le traceur radioactif. Citons le xénon  $^{133}\text{Xe}$  pour l'examen des poumons – il s'agit d'un gaz –, l'iode  $^{131}\text{I}$  pour la thyroïde et le thallium  $^{201}\text{Tl}$  pour le cerveau. Que le traceur soit administré par voie veineuse – le plus souvent – comme le technétium  $^{99m}\text{Tc}$ -MIBI, par inhalation comme le xénon  $^{133}\text{Xe}$ , par voie orale comme l'indium  $^{111}\text{In}$ -pentétréotide . . . , il va se fixer sur le ou les organes dont le vecteur est spécifique.

En imagerie de transmission, seul le marqueur compte. Il est maintenu dans un conteneur dont certains photons  $\gamma$  s'échappent et traversent le patient. Les photons, émis depuis un organe du patient ou l'ayant traversé de part en part, sont en partie recueillis par le ou les détecteurs d'une gamma-caméra – les modèles à deux ou trois détecteurs permettent seulement de réduire le temps d'examen ou d'augmenter la qualité de l'examen, ce qui n'est déjà pas si mal. Un détecteur est la plupart du temps recouvert d'un collimateur servant à sélectionner les photons incidents suivant leur direction. La géométrie d'acquisition est

parallèle si le collimateur ne laisse passer que les photons dont la trajectoire est orthogonale au détecteur. Elle est en éventail si ne sont acceptés que les photons qui semblent provenir d'une droite parallèle en face du détecteur – axe focal – et émis dans des plans orthogonaux à cette droite. Enfin, elle est conique si les trajectoires autorisées se coupent en un point devant le détecteur – point focal. Les images acquises sont appelées des projections. L'histoire de la construction de l'image définitive servant au diagnostic est racontée dans les sections 1.1.1 et 1.1.2.

### 1.1.1 En émission

Les acquisitions en émission sont de type projection unique ou de type projections multiples avec rotation du détecteur. Dans le premier cas, on les dit « planaires » ou « scintigraphiques ». Dans le second, on les dit « tomographiques »<sup>1</sup>, d'où l'abréviation TEMP. Les acquisitions planaires sont utilisées en l'état pour le diagnostic. Les acquisitions tomographiques produisent une série de projections correspondant à l'observation d'une même région sous différents angles, régulièrement répartis sur 360 ou 180 degrés le plus souvent et le long d'une trajectoire plane, orthogonale à l'axe du corps du patient – voir figure 1.1. La géométrie d'acquisition ne dépend que du type de collimateur utilisé.



**Fig. 1.1** Schéma d'acquisition tomographique en émission. L'organe fixé par le traceur est représenté par un disque blanc approximativement au centre de la région observée. Le rectangle gris foncé noté  $r$  marque la position actuelle du détecteur. Les rectangles gris clair notés  $r-1$  et  $r+1$ , pour l'un rappelle et pour l'autre prédit, les positions précédente et suivante du détecteur. Il faut noter que cette dernière est matérialisée par une sphère bien qu'aucune des trois géométries classiques citées ne soit telle que l'intersection des champs de vue des projections est une sphère.

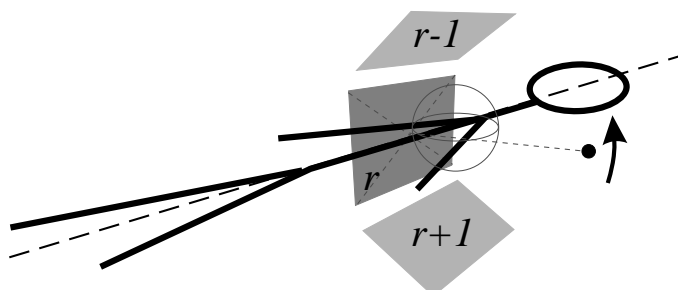
La région observée – en fait, la concentration, ou une grandeur proportionnelle, du traceur dans cette région – doit être reconstruite à partir des projections [Hebert et Leahy 1989, Tsui *et al.* 1991, Hudson et Larkin 1994, Laurette *et al.* 1998]. Pour établir le diagnostic, l'image reconstruite est la plupart du temps étudiée par présentation d'un ensemble de coupes ou affichage d'une isosurface. On peut également effectuer des traitements plus élaborés, par exemple une segmentation.

### 1.1.2 En transmission

Les acquisitions en transmission sont exclusivement de type projections multiples avec rotation du détecteur. Elles traduisent une information anatomique mais ne sont jamais interprétées. Elles sont une première étape de la correction du phénomène d'atténuation qui affecte les images d'émission – voir sections 5.1 et 5.2. Les acquisitions comptent un ensemble de projections correspondant à différents angles du détecteur et de la source radioactive externe régulièrement répartis sur 360 ou 180 degrés le plus souvent et le long

<sup>1</sup>Emploi abusif lorsque la géométrie est conique. En effet, les droites de projections sont obliques. Elles ne favorisent donc pas naturellement une reconstruction coupe par coupe.

d'une trajectoire plane, orthogonale à l'axe du corps du patient. Le détecteur et la source sont diamétralement opposés et le patient est situé entre eux – voir figure 1.2. La géométrie d'acquisition dépend uniquement du type de collimateur utilisé ou uniquement de la forme de la source – planaire, linéaire ou ponctuelle. De toute façon, le type et la forme doivent être en adéquation.



**Fig. 1.2** Schéma d'acquisition tomographique en transmission et géométrie conique. La source ponctuelle radioactive dans sa position actuelle est représentée par un disque noir. Le rectangle gris foncé noté  $r$  marque la position actuelle du détecteur. Les rectangles gris clair notés  $r - 1$  et  $r + 1$ , pour l'un rappelle et pour l'autre prédit, les positions précédente et suivante du détecteur. Les positions correspondantes de la source n'apparaissent pas pour alléger le dessin. La flèche indique tout de même son sens de rotation tel qu'on le devinait. Il faut noter que la région définie par rotation entre le détecteur et la source est matérialisée par une sphère bien qu'aucune des trois géométries classiques citées ne permette de produire une telle figure.

Il est souhaitable que l'intersection des volumes définis à chaque projection entre le détecteur et la source soit aussi proche que possible de la région d'émission observée à la section 1.1.1. Cela n'est toutefois pas systématique, ne serait-ce que parce les géométries d'acquisition en émission et en transmission ne sont pas nécessairement les mêmes.

La région de transmission observée – en fait, l'atténuation dans cette région – doit être reconstruite à partir des projections [Lange *et al.* 1987, Manglos *et al.* 1995, Gilland *et al.* 1998]. L'image reconstruite est appelée « carte d'atténuation » et elle constitue l'étape suivante de la correction du phénomène d'atténuation. Plusieurs méthodes achevant la tâche sont proposées dans [Tsui *et al.* 1989, Frey *et al.* 1992]. Indépendamment de la méthode, la correction de ce phénomène est particulièrement importante en imagerie cardiaque car le phénomène est spécialement pénalisant dans cette application : le thorax est large et l'atténuation augmente avec la longueur de tissu traversée.

## 1.2 Motivations

En émission comme en transmission, nous ne nous intéressons qu'aux acquisitions que nous avons appelées « à projections multiples avec rotation du détecteur ». Les images reconstruites sont des volumes ou des suites de volumes en imagerie dynamique – volumes au cours du temps.

La première méthode d'interprétation d'une image d'émission reconstruite est l'observation d'un ensemble de coupes. Elle constitue l'indispensable expertise qualitative du médecin. Toutefois, des mesures quantitatives sur les images peuvent faire découvrir une pathologie passée au travers des mailles du filet de l'expert. Plus vraisemblablement, ces mesures sont destinées à aider à l'évaluation de la gravité d'une pathologie reconnue par l'expert. La détermination d'une isosurface est un pas dans cette direction car on peut s'en servir pour calculer, par exemple, un volume ou une épaisseur. L'espoir est que l'isosurface soit proche du contour de l'organe étudié.

La segmentation a pour but de mieux coller à la réalité de l'organisme, soit la réalité anatomique – classification naturelle du corps en organes –, soit la réalité fonctionnelle – classification en région saine et région pathologique d'un organe. Les mesures opérées sur la segmentation sont alors directement transposables en paramètres de l'organe étudié. De plus, une méthode de segmentation peut être relativement robuste au bruit et intégrer des contraintes issues de connaissances *a priori* sur l'organe – par exemple, on pourrait fixer le volume de segmentation à une valeur considérée moyenne chez un patient normal. Classons les méthodes en trois catégories : celles qui n'utilisent que les projections et sont donc antérieures à la reconstruction [Battle *et al.* 1997], celles qui sont simultanées à la reconstruction [Teboul *et al.* 1998] et celles qui sont postérieures à la reconstruction [Germano *et al.* 1995, Nelson *et al.* 1996, Yezzi *et al.* 1997, Niessen *et al.* 1998, Mariano-Goulart *et al.* 1998, Faber *et al.* 1999, Zeng *et al.* 1999] – la méthode de classification, postérieure à la détermination du nombre de classes et à l'estimation de leurs paramètres, développée par Samson *et al.* [2000] utilise les ensembles de niveaux de façon ingénieuse. Dans tous les cas, la segmentation peut être utile pour améliorer la qualité de la reconstruction, par exemple en facilitant un lissage anisotrope [Teboul *et al.* 1998, Riddell *et al.* 2000]. Cependant, ce n'est pas un problème facile, moins encore en imagerie d'émission dynamique où il s'agit de segmenter une séquence d'images. En effet, parmi les examens de médecine nucléaire, le plus couramment réalisé à l'échelle mondiale est l'examen cardiaque. L'acquisition traditionnelle présentée en section 1.1.1 n'est pas adaptée à l'observation du myocarde. Il existe un mode d'acquisition synchronisé sur l'électrocardiogramme qui autorise la reconstruction de  $N$  images d'émission qui sont les configurations moyennes du cœur pendant les  $N^{\text{es}}$  de cycle. Une séquence d'images mérite que sa méthode de segmentation tente d'utiliser le fait qu'elle représente un même objet au cours du temps. Nous nous y employons dans la partie III. Puisque nous avons mentionné le calcul de paramètres de l'organe étudié, nous montrons que la fraction d'éjection du ventricule gauche est facilement évaluable à partir de la segmentation. Nous avons ensuite développé une méthode de compensation cinétique, présentée dans la partie IV, qui se sert de la segmentation calculée afin d'améliorer la qualité de la reconstruction.

Nous l'avons dit, les images de transmission reconstruites ne sont pas interprétées. Est-ce à dire que leur segmentation n'apporte rien ? Riddell *et al.* [2000] préconisent de reconstruire et segmenter une carte d'atténuation puis d'effectuer un lissage anisotrope de la carte reconstruite et de corriger l'atténuation des images d'émission avec la carte lissée. De cette façon, le biais résultant d'une correction avec une carte reconstruite brute est rendu quasiment nul. Dans la partie II, nous proposons une méthode de segmentation des cartes d'atténuation qui agit directement à partir des projections. Nous l'appliquons aux cartes d'atténuation du thorax dont la finalité est la correction de l'atténuation des images cardiaques d'émission.

Une des difficultés de la segmentation est qu'il n'existe pas vraiment de critère universel. La recherche de maxima locaux du gradient [Deriche 1987] permet bien sûr de trouver des frontières dans des images d'origines diverses : vidéo, satellite, médecine . . . Néanmoins, on risque de détecter des contours qui ne sont pas ceux de l'objet d'intérêt. Un critère écrit en fonction du type de l'image et de la connaissance *a priori* de l'objet est certainement le meilleur moyen de trouver ce qu'on cherche et uniquement cela. Autrement dit, il faut dénicher des paramètres discriminant le ou les objets du fond et, s'il y a plusieurs objets, les objets entre eux. Qui plus est, cette spécificité de la méthode a sans doute pour conséquence appréciable de diminuer la sensibilité au bruit, autre difficulté importante en segmentation – plus généralement, en traitement d'images. Nous avons essayé dans les parties II et III d'exploiter les particularités des données traitées.

### 1.3 Outils

Une des méthodes de plus bas niveau de segmentation est la détection de contours par un filtre dérivateur puis leur chaînage [Monga *et al.* 1991]. L'influence du bruit peut être pénible à maîtriser et la méthode est totalement indépendante du type et du contenu de l'image. La segmentation par bassins versants est assez populaire [Mariano-Goulart *et al.* 1998, Riddell *et al.* 2000] mais l'intégration de contraintes semble délicate. La technique des contours actifs mise en œuvre par ensembles de niveaux nous a paru apte au développement de méthodes de segmentation suffisamment robustes au bruit et fondées sur des contraintes dictées par la connaissance du type d'image et des objets d'intérêt – voir partie I.

### 1.4 Organisation du document

Ce document est agencé comme suit :

- le restant de cette partie est consacré aux notations et à la terminologie en usage ici ;
- la partie I décrit les principes fondamentaux des contours actifs et leur mise en œuvre par les ensembles de niveaux ;
- la partie II présente la méthode de segmentation des cartes d'atténuation développée ;
- la partie III est le siège du développement de la méthode de segmentation spatio-temporelle des séquences cardiaques ;
- la partie IV est réservée à la méthode de compensation cinétique des séquences cardiaques ;
- la dernière partie est l'occasion de conclure.

### 1.5 Notations

En règle générale, les lettres latines majuscules désignent les entrées ou données d'un algorithme. Les critères à minimiser s'appellent  $J$  quelque chose ou tout court – par exemple,  $J$ ,  $J_1$  et  $J_{4,n}$ .

Les minuscules lettres latines sont réservées aux sorties ou inconnues d'un algorithme. Ce sont souvent des images ou séquences d'images – considérées éventuellement comme des images en dimension quatre. Quelques exceptions cependant. Un point cartésien, en dimension deux ou trois, est référencé par  $x$  ou  $y$ . Un point de projection est noté  $r$ . Nous dénommons  $p$  les coordonnées curvilignes ou  $s$  lorsqu'elles sont paramétrées par longueur d'arc. Les lettres  $i$ ,  $j$  et  $n$  graduent les entiers naturels et  $t$  chronomètre le temps. Un  $k$  peut prendre une valeur réelle. Au bout du compte, plus d'exceptions que de règles peut-être.

Les ensembles de points sont notés en majuscules grecques. Par exemple, le domaine de définition des images  $\Omega$  et des projections  $\Theta$ , le domaine  $\Omega_n$  du myocarde dans l'image  $n$  d'une séquence cardiaque synchronisée et son contour  $\Gamma_n$ . En fait d'exemples, c'est un inventaire ou pas loin.

Les minuscules de la même famille servent de paramètres à l'algorithme – constantes réelles, fonctions de régularisation . . . – ou de variables intermédiaires parmi lesquelles  $\nu_n$ , vitesse d'évolution de contour actif, et  $\kappa_n$ , courbure de courbe plane ou courbure moyenne de surface.

Les nombres réels ont  $\mathbb{R}$  pour symbole de rattachement, et pour les entiers naturels, ce sera  $\mathbb{N}$ .

Les noms d'image et de contour sont affublés de parenthèses entre lesquelles se glisse un point si le nom est utilisé en tant que fonction, ou une lettre  $r, x, y, p$  ou  $s$  si une valeur – image – ou des coordonnées cartésiennes – contour – sont sollicitées. Ainsi,  $S_n(.)$  est une image et  $S_n(x)$  est la valeur qu'elle prend au point  $x$ . Autre exemple,  $\Gamma_n(.)$  est un contour et  $\Gamma_n(p)$  fournit les coordonnées cartésiennes correspondant aux coordonnées curvilignes  $p$ . Les notations se compliquent encore pour les inconnues au moment de leur estimation. En effet, nous utilisons souvent un schéma dynamique au sein duquel elles dépendent du temps. Nous ajoutons alors un « , . » ou un « , t » dans les parenthèses des images et des contours de sorte que le temps soit toujours la dernière variable. On concatène également « (.) » ou « (t) » aux noms des autres types d'inconnue – ni image, ni contour. Première des deux illustrations,  $b(.,.)$  est une fonction de l'espace et du temps et  $b(., t)$  est la restriction de cette fonction à l'instant  $t$ . Seconde illustration,  $o_n(.)$  est une fonction du temps dont la valeur à l'instant  $t$  est  $o_n(t)$ . Attention au risque de confusion du « (.) » d'une fonction de l'espace – exemple  $S_n(.)$  – avec le « (.) » d'une fonction du temps – exemple qui vient d'être vu avec  $o_n(.)$ . Dès lors que nous avons bien décrit cette convention, nous pouvons avouer que nous la bafouons allègrement, surtout dans l'écriture des équations et sous prétexte de clarté. Donc, à la place de :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \times |\nabla u|$$

il faut lire au choix :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(.,.) = \nu(.,.) \times |\nabla u|(.,.)$$

ou :

$$\forall x \in \Omega, \forall t \in \mathbb{R}^+, \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \nu(x, t) \times |\nabla u|(x, t) \quad (1.1)$$

Il manque évidemment aux trois schémas dynamiques précédents une condition initiale. Par exemple, l'équation (1.1) complète est :

$$\begin{cases} \forall x \in \Omega, u(x, t = 0) = u_0(x) \\ \forall x \in \Omega, \forall t \in \mathbb{R}^+, \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \nu(x, t) \times |\nabla u|(x, t) \end{cases}$$

où  $u_0(.)$  est la fonction initiale. C'est bien la dernière fois que nous décrivons entièrement un schéma dynamique. Désormais, nous nous en tiendrons à la version (1.1).

La dérivée – spatiale – d'une fonction  $u(.)$  de  $x$  à valeurs réelles est notée  $\nabla u(.)$  – vecteur gradient de  $u(.)$ . Pour rester cohérent avec cette notation, la dérivée partielle d'une fonction  $u(.,.)$ , de  $x$  et de  $t$  à valeurs réelles, par rapport à  $x$ , garde la notation précédente. En revanche, la dérivée partielle par rapport à  $t$  – temporelle – est écrite  $(\partial u / \partial t)(.,.)$ . Le laplacien de  $u(.)$  est noté  $\Delta u(.)$ .

Si  $\Gamma(.)$  est une fonction vectorielle de  $p$ , sa dérivée est  $\Gamma'(.)$ . Si elle dépend également de  $t$ , la dérivée partielle par rapport à  $p$  garde la notation précédente et la dérivée partielle par rapport à  $t$  est notée  $(\partial \Gamma / \partial t)(.,.)$ .

Pour en finir avec l'aspect général des notations, précisons que certains noms de vecteurs sont coiffés d'une flèche, comme pour le vecteur nul  $\vec{0}$ ,  $\vec{N}_n$  ou  $d\vec{y}$ . Voici venir deux tableaux de symboles 1.1 et 1.2 en renfort des explications précédentes.

Symbole	Catégorie	Signification
$\emptyset$		l'ensemble vide
$\exists!$		il existe un unique
$\triangleq$		vaut par définition
$\approx$		est approché par
$ \cdot $		valeur absolue d'un scalaire ou norme euclidienne d'un vecteur
$\langle \cdot, \cdot \rangle$		produit scalaire ou produit de dualité
$\alpha, \beta, \gamma$	paramètres	constantes appartenant à $\mathbb{R}^+$
$\mu_1, \mu_2, \mu_3$	données	coefficient d'atténuation constants appartenant à $\mathbb{R}^+$
$i, j, n$	variables	indices appartenant à $\mathbb{N}^*$
$t$	variable	indice temporel appartenant à $\mathbb{R}^+$
$dt$	paramètre	durée infinitésimale ou pas temporel d'échantillonnage
$r$	variable	points 2D ou 3D de coordonnées cartésiennes dans les projections
$x$	variable	points 2D ou 3D de coordonnées cartésiennes dans les images
$y$	inconnue	points 2D ou 3D de coordonnées cartésiennes dans les images
$d\vec{y}$	inconnue	vecteur de mouvement infinitésimal
$p$	variable	point 2D ou 3D de coordonnées curvilignes
$dp$		élément infinitésimal d'intégration sur un contour
$s$	variable	point 2D ou 3D de coordonnées curvilignes paramétrées par longueur d'arc
$d\epsilon$		élément infinitésimal d'aire

Tab. 1.1 Liste des symboles : signes mathématiques et variables.

## 1.6 Terminologie

Signalons en préambule que, s'agissant d'une frontière fermée, qu'elle soit courbe plane ou surface, nous emploierons le mot contour sans plus de précision – tout de même on dira parfois contour 1D dans le premier cas et contour 2D dans le second quand la distinction est nécessaire. S'il faut choisir le sens de parcours d'un contour 1D, nous choisissons le sens trigonométrique de sorte qu'une normale directe au contour soit dirigée vers son intérieur. Pour un contour 2D, nous qualifions également de directe une normale qui pointe vers l'intérieur. Quant à la « courbure », elle désigne indifféremment la courbure d'un contour 1D ou la courbure moyenne d'un contour 2D dans les développements valides pour ces deux dimensions.

Fixons à présent les sens que nous accordons à l'expression « ensemble(s) de niveau(x) ». La question est déjà de savoir quels pluriels nous allons considérer. Pour y répondre, revenons à l'expression originale « courbe de niveau ». Niveau est écrit au singulier et, sous couvert d'analogie, on dirait qu'ensemble de niveau est une expression plus générale où ensemble ferait indifféremment référence à une courbe – par exemple, une courbe de l'image cartographique 1.3 – ou une surface. Du coup, comment appellerait-on l'union des ensembles de niveau – c'est-à-dire la totalité de l'image 1.3 pour continuer d'exploiter cet



Symbole	Catégorie	Signification
$\Theta$	donnée	domaine de définition des projections en transmission
$\Omega$	donnée	domaine de définition d'une image fixe
$\Omega \times [1..N]$	donnée	domaine de définition d'une séquence de $N$ images
$\Psi$	donnée	domaine de variation des coordonnées curvilignes d'un contour ; par exemple, en dimension deux : $\Psi = [0; p_{\max}]$
$P(\cdot)$	donnée	projections type émission
$R$	modèle	opérateur de projection type émission
$S_n(\cdot)$	donnée	image $n$ d'une séquence cardiaque
$o_n$	inconnue	perfusion apparente du myocarde : valeur appartenant à $\mathbb{R}^+$
$b(\cdot)$	inconnue	image de fond d'une séquence : fonction scalaire de $x$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$
$\Omega_n$	inconnue	région de l'organe $n$ du thorax ou domaine tridimensionnel du myocarde dans l'image $n$ de la séquence
$\Gamma(\cdot), \Gamma_n(\cdot)$	inconnue	contour de segmentation : fonction vectorielle de $p$ ou $s$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ – $\Gamma_n(\cdot)$ est la frontière de $\Omega_n$ –
$u(\cdot), u_n(\cdot)$	inconnue	ensemble de niveaux dont le niveau zéro est $\Gamma(\cdot)$ ou $\Gamma_n(\cdot)$ : fonction scalaire de $x$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
$\vec{N}(\cdot), \vec{N}_n(\cdot)$	variable	normale au contour $\Gamma(\cdot)$ ou $\Gamma_n(\cdot)$ , ou à un contour de niveau de $u(\cdot)$ ou $u_n(\cdot)$
$\vec{v}(\cdot), \vec{v}_n(\cdot)$	variable	vitesse d'évolution du contour $\Gamma(\cdot)$ ou $\Gamma_n(\cdot)$
$\kappa(\cdot), \kappa_n(\cdot)$	variable	courbure de courbe plane, contour de niveau de $u(\cdot)$ ou $u_n(\cdot)$ 2D, ou courbure moyenne de surface, contour de niveau de $u(\cdot)$ ou $u_n(\cdot)$ 3D : fonction scalaire de $x$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
$s_i^{\rightarrow j}(\cdot)$	inconnue	image $i$ recalée par rapport à l'image $j$

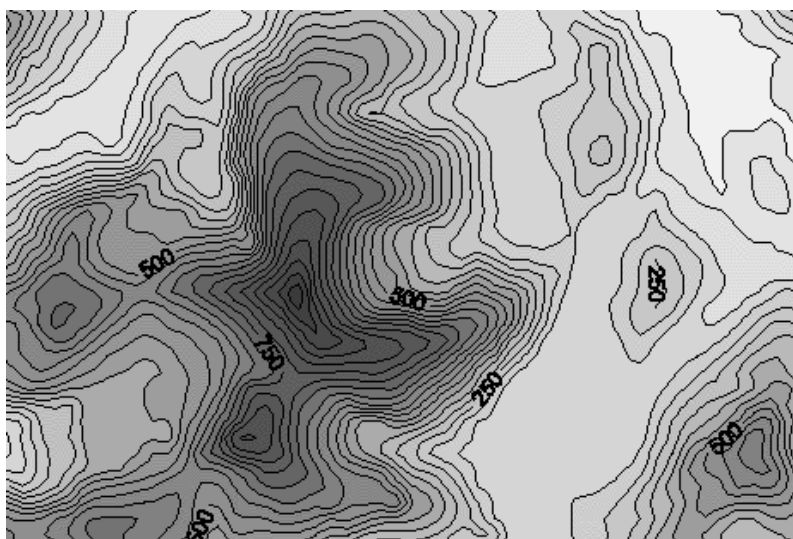
**Tab. 1.2** Liste des symboles : domaines et fonctions.

exemple – ? Un ensemble d'ensembles de niveau ? Nous dirons plutôt un contour de niveau par extension à courbe de niveau, qui donne au pluriel des contours de niveau qui, si on les groupe, forment un ensemble de contours de niveau que nous pouvons même réduire en ensemble de niveaux, le pluriel de niveau faisant office de contraction de contours de niveau.

En résumé :

- contour de niveau : courbe ou surface de niveau, par exemple  $\Gamma_1$  ;
- contours de niveau : plusieurs courbes ou surfaces de niveau, par exemple  $\Gamma_n, n \in [1..N]$  ;
- ensemble de niveaux : image de la totalité des courbes ou surfaces de niveau, par exemple  $u_1$  ;
- ensembles de niveaux : plusieurs images de la totalité des courbes ou surfaces de niveau, par exemple  $u_n, n \in [1..N]$ .

Poursuivons comme nous avons commencé avec le mot contour qui signifie aussi bien un contour – jusqu'ici tout va bien –, que le contour de niveau de niveau zéro d'un ensemble de niveaux, abrégé en contour de niveau zéro – de même on dira contour de niveau  $k$  ou de



**Fig. 1.3** Image cartographique ornée de quelques courbes de niveau.

niveau [strictement] (positif|négatif) –, qu'un contour actif, qu'un contour actif représenté par le contour de niveau zéro d'un ensemble de niveaux en évolution. Au choix suivant le contexte et suivant l'humeur.

Les négativité, positivité, infériorité, supériorité employées seules le sont au sens large. Par exemple, « négatif » signifie « strictement négatif ou égal à zéro ». Le sens strict est strictement précisé.

Pour désigner d'un seul mot un pixel ou un voxel, nous dirons « élément ». Enfin, nous emploierons l'expression « presque partout » pour qualifier une propriété vraie partout sauf en quelques points – cas continu – ou en quelques éléments – cas discret. Par « quelques points », nous entendons des points isolés, des points regroupés en courbes – cas de la dimension deux – ou des points agglutinés en surfaces – cas de la dimension trois –, mais pas plus. Typiquement, un résultat vérifié partout sauf sur le squelette d'un contour sera dit vrai presque partout.



# I CONTOURS ACTIFS ET ENSEMBLES DE NIVEAUX

---



## Chapitre 2

# Contours actifs

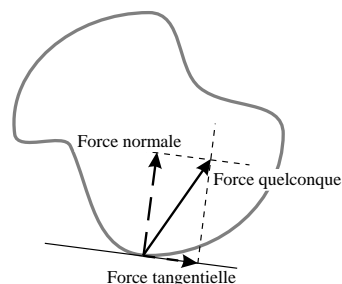
Un contour actif est un contour fermé dont la forme et la position peuvent évoluer d'un état initial, par exemple un gros carré excentré, vers un état final, par exemple un petit cercle centré. On dit aussi contour déformable mais c'est plus long donc nous dirons contour actif. On dit encore *snake* ; c'est plus court mais c'est anglais donc nous dirons quand même contour actif.

### 2.1 Intérêts

Le contour d'un objet est une courbe plane fermée dans une image bidimensionnelle ou une surface fermée dans une image tridimensionnelle. Sa détection peut être réalisée au moyen d'un filtre dérivateur [Deriche 1987] mais elle sera partielle, soit que certaines parties n'auront pas manifesté un gradient d'intensité suffisamment élevé pour être vues, soit que, le contour ayant été complètement trouvé, on dispose d'un ensemble d'éléments sans lien topologique, ce qui est déjà vrai dans le premier cas. On peut alors chaîner les points de contour [Monga *et al.* 1991] ou chercher le contour fermé leur collant au mieux grâce aux contours actifs [Borgefors 1988]. On peut aussi utiliser d'emblée les contours actifs. On accède ainsi directement à une information de plus haut niveau que l'élément isolé. De plus, des méthodes d'évolution de contours actifs permettent de diminuer la sensibilité au bruit du résultat – avec parfois une contrepartie fâcheuse concernant la détection des fortes concavités et fortes convexités, voir section 2.4.2 –, peut-être plus facilement qu'on est en mesure de le faire avec un filtre dérivateur.

### 2.2 Principe

Un contour actif évolue sous l'action d'une force. Cette force peut être d'intensité identique en tout point du contour ou non. Quant à sa direction, elle est *a priori* quelconque. Le quelconque est toujours décomposable en une composante tangentielle – autrement dit, en chaque point, de direction parallèle à la droite tangente au contour 1D ou au plan tangent au contour 2D – et une composante normale – en d'autres termes, en chaque point, de direction parallèle à la normale au contour. Rendez-vous à la figure 2.1 si vous souhaitez visualiser, en dimension deux, les forces en présence. Toujours dans le contexte bidimensionnel, en imaginant que le contour soit un élastique, la force tangentielle a pour effet de l'étirer

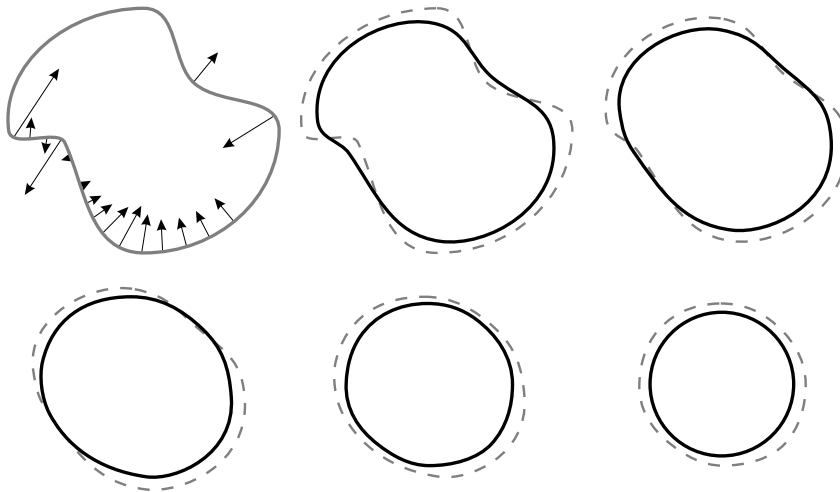


**Fig. 2.1** Composantes normale et tangentielle d'une force appliquée à un contour actif 1D.

ou de le faire se ramasser sans en changer la longueur ni la forme – élastique assez peu conventionnel donc. C’est pourquoi on résume en général la force appliquée à un contour actif à sa composante normale, la seule utile. Ainsi, la mise en équation du processus d’évolution conduit souvent à :

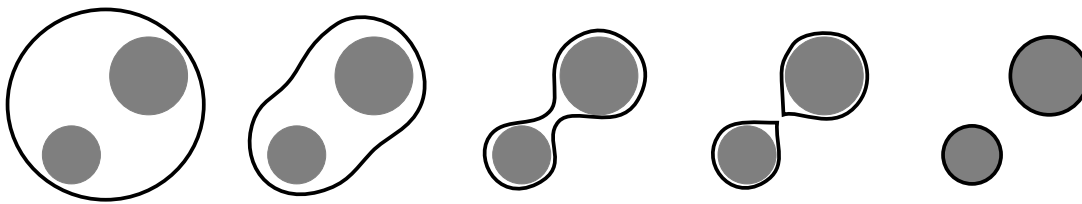
$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \nu \vec{N} \quad (2.1)$$

où  $\Gamma(\cdot, \cdot)$  est le contour actif et  $(\nu \vec{N})(\cdot, \cdot)$  est la force appliquée à  $\Gamma(\cdot, \cdot)$  et dont  $\vec{N}(\cdot, \cdot)$  représente la normale. Cette force induit une évolution plus ou moins rapide. Ainsi,  $\nu(\cdot, \cdot)$  est nommé vitesse d’évolution. La figure 2.2 illustre un exemple classique en dimension deux, légèrement commenté à la section 2.3.2, dans lequel la vitesse d’évolution est la courbure du contour.



**Fig. 2.2** Exemple d’évolution d’un contour actif 1D sous l’effet de l’équation de la chaleur géométrique – de gauche à droite et de haut en bas. Sur la première image figurent quelques forces initiales. Sur chaque image, la ligne discontinue grise reprend la ligne continue noire de l’image précédente. Dans la dernière image, la courbe initiale est devenue un cercle et va le rester tout en diminuant de taille jusqu’à disparition.

En dimension deux et en subissant un changement de topologie, voici sur les figures 2.3 et 2.4 le principe en images de la segmentation par contour actif. En guise de commentaire,



**Fig. 2.3** Évolution d’un contour actif 1D avec changement de topologie : séparation en deux contours.

faisons remarquer que le contour actif de la figure 2.3 évolue seulement en rétrécissant. Les contours actifs de la figure 2.4 évoluent seulement en expansion. Une évolution à sens unique typique des contours actifs classiques, géométriques et géodésiques que nous décrivons brièvement en sections 2.3.1, 2.3.2 et 2.3.3. D’autres définitions de la vitesse d’évolution autorisent des déformations vers l’extérieur du contour sur certaines de ses portions et vers son intérieur sur d’autres. Par exemple les méthodes développées dans [Paragios et Deriche 1999, Yezzi *et al.* 1999, Amadiou *et al.* 1999, Jehan-Besson *et al.* 2000] et dans

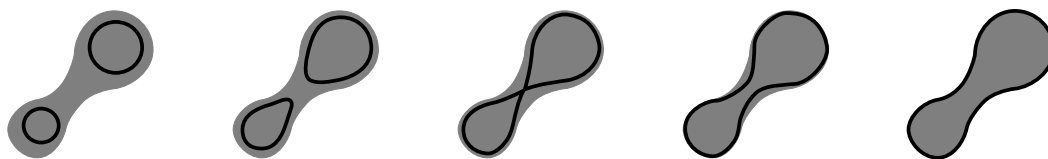


Fig. 2.4 Évolution de deux contours actifs 1D avec changement de topologie : fusion en un seul contour.

les parties II et III. Cette propriété est essentielle lorsque le contour initial, indécis, est à cheval sur le contour de l'objet. Une évolution en rétrécissant uniquement aurait tôt fait de réduire le contour à un fil ou à néant. Inutile également de songer à une dilatation. Elle pourrait bien, au pire, bouter le contour hors des limites de l'image.

## 2.3 Les pionniers

Sauf lorsque mention est faite du contraire, les contours des trois prochaines sections – numéros 2.3.1, 2.3.2 et 2.3.3 – sont des contours 1D.

### 2.3.1 Contours actifs classiques

Le premier modèle de contours actifs a été déposé par Kass *et al.* [1987]. Il est fidèlement variationnel avec son critère composé de deux énergies, l'une dite interne<sup>1</sup> – de régularisation –, l'autre dite externe – de consistance avec les données. Quoiqu'interne, la première n'est pas intrinsèque du contour<sup>2</sup>. Elle est la somme d'un terme de rigidité et d'un terme de non élasticité. La rigidité est commandée par l'interdiction à la courbe de prendre de fortes courbures et la courbure est une caractéristique intrinsèque. Par contre, la non élasticité est liée au paramétrage de la courbe. Elle n'est donc pas intrinsèque et, par suite, l'énergie interne non plus, comme nous le rappelions il y a peu. L'autre énergie, externe, fait référence à l'image à segmenter par l'intermédiaire d'une fonction  $G(\cdot)$  de  $x$ , point de coordonnées cartésiennes dans le domaine de définition  $\Omega$  de l'image, à valeurs positives. Idéalement, elle vaut zéro sur le contour des objets, un loin des objets et une valeur intermédiaire qui assure la continuité ailleurs. La minimisation du critère est obtenue par résolution de l'équation d'Euler-Lagrange associée à l'inconnue qu'est le contour. Elle entraîne la déformation du contour initial qui atteint à convergence une forme et une position minimisant le critère, c'est-à-dire la somme des deux énergies. On emploie pour cela un schéma dynamique du type :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \underbrace{\text{résistance à la courbure} + \text{résistance à l'élasticité}}_{\text{force interne}} + \underbrace{\text{attraction vers les bords de l'objet}}_{\text{force externe fonction de } G(\cdot)} \quad (2.2)$$

où  $\Gamma(\dots)$  est le contour actif. La force motrice du contour est une combinaison de la régularisation et de la consistance avec les données. La présence de la consistance avec les données paraît couler de source. Pourtant, il n'en va pas de même avec les contours actifs

<sup>1</sup>L'énergie interne est uniquement écrite en fonction du contour contrairement à l'énergie externe qui fait également appel aux données.

<sup>2</sup>Elle ne dépend pas seulement de la forme du contour, elle est conditionnée par sa paramétrisation. Il faut d'ailleurs noter que l'utilisation d'un contour paramétrique fait partie de la définition de ce modèle.



géométriques – voir section 2.3.2. Notons quatre inconvénients des contours actifs classiques. (i) Tout d’abord, le critère n’est pas intrinsèque du contour par la faute d’un élément de régularisation. Par conséquent, sa minimisation dépend de la paramétrisation. (ii) Ensuite, la force motrice n’est pas normale au contour. Elle comporte donc une partie inutile voire gênante. En effet, même lorsque le contour colle exactement à l’objet à segmenter, la force peut ne pas être nulle de par sa composante tangentielle. L’évolution ne sera donc pas considérée achevée. (iii) Une autre conséquence ennuyeuse de la composante tangentielle de la force motrice est la concentration et la raréfaction des points de discrétisation du contour dans certaines portions. Cela nécessite un rééchantillonnage périodique du contour [Charbonnier et Cuisenaire 1996], qui peut conduire à une instabilité du processus, ou l’introduction d’une contrainte de maintien d’un espacement constant entre les points [Berger 1991]. (iv) Enfin, la composante interne de la force contient un terme dérivé à l’ordre quatre. Il résulte d’une régularisation draconienne et pose, du fait de l’ordre élevé de dérivation, un problème d’approximation numérique.

Cette méthode a été développée en dimension trois par Terzopoulos *et al.* [1988]. On en a un exemple d’application dans [Cohen *et al.* 1992].

### 2.3.2 Contours actifs géométriques

Découverte du modèle géométrique de contours actifs avec Osher et Sethian [1988] qui abandonnent la formulation variationnelle – plus de minimisation de critère – pour une conception – comment dire ? – géométrique de l’évolution de contours : le point de vue adopté est celui de l’évolution des courbes planes. La silhouette d’une équation d’évolution correspondante est :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \nu \vec{N} \quad (2.3)$$

où  $\nu(\cdot, \cdot)$  est la vitesse d’évolution du contour  $\Gamma(\cdot, \cdot)$  et  $\vec{N}(\cdot, \cdot)$  est la normale, directe et de norme unitaire, à  $\Gamma(\cdot, \cdot)$ . Ce que présentent Osher et Sethian est un cas particulier de cette équation. À l’origine était l’équation de la chaleur ou de diffusion isotrope [Hummel *et al.* 1985] :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad (2.4)$$

où  $u(\cdot, t = 0)$  est une image bidimensionnelle. Ce schéma dynamique provoque le lissage de  $u(\cdot, t = 0)$ . Il est théoriquement équivalent à la convolution par une gaussienne de variance d’autant plus grande que le temps passe<sup>3</sup>. À convergence, la variance est infinie, ce qui donne à la gaussienne la forme d’une fonction constante. L’image  $u(\cdot, \cdot)$  a donc pour limite une image constante dont la valeur est la moyenne de  $u(\cdot, t = 0)$ .

Le terme de droite de (2.4) étant une dérivée spatiale à l’ordre deux, on définit par analogie une équation géométrique de la chaleur, non intrinsèque du contour<sup>4</sup> :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial p^2} \quad (2.5)$$

qui devient à l’aide de la paramétrisation par longueur d’arc :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s^2} = \kappa \vec{N} \quad (2.6)$$

<sup>3</sup>La variance de la gaussienne est une fonction croissante du temps  $t$ .

<sup>4</sup>La paramétrisation  $p$  n’est pas intrinsèque du contour si ce n’est pas la paramétrisation par longueur d’arc.

où  $\kappa(\dots)$  est la courbure de  $\Gamma(\dots)$  – voir annexe F. L'équation (2.6) est un schéma dynamique intrinsèque du contour appelé équation géométrique de la chaleur ou flux de raccourcissement euclidien. On dit aussi plus couramment qu'il s'agit d'un flux de minimisation de longueur. Quelle que soit une courbe initiale sans auto-intersection ni point singulier, elle évolue vers une forme convexe, puis circulaire, le tout en diminuant de taille jusqu'à disparaître en un point « circulaire » – voir figure 2.2 en section 2.2. Arrêtons son évolution avant cette tragique issue. Soit  $G(\cdot)$  une fonction de même gabarit que celle du même nom de la section 2.3.1. Alors l'équation :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = G\kappa \vec{N} \quad (2.7)$$

permet la segmentation des objets. Des objets ? Pas tout à fait. Elle autorise seulement la détermination de leur enveloppe convexe. Une chance donc s'ils sont convexes, sinon il faut avoir recours à la force ballon<sup>5</sup>  $\sigma$  [Cohen 1991] :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = G\{\sigma + \kappa\} \vec{N} \quad (2.8)$$

Le paramètre  $\sigma$  influence le sens d'évolution du contour. Strictement positif, il favorise l'évolution naturelle due à la courbure dans le sens du rétrécissement. S'il est strictement négatif, il provoque une évolution dans le sens de la dilatation. En outre, il fixe maintenant la concavité – s'il est positif – ou convexité – s'il est négatif – maximale qui peut être détectée. On remarque que la vitesse d'évolution est intrinsèque du contour et qu'elle est dirigée selon la normale au contour. De plus, par rapport aux contours actifs classiques, seul le terme de régularisation d'ordre deux a été préservé. La régularisation est donc moins sévère – on peut considérer cela comme un avantage ou un inconvénient – et son approximation numérique est moins délicate. Ajoutons à propos de la régularisation adoucie que, à l'approche du contour de l'objet à segmenter, la fonction  $G(\cdot)$  amenuise encore son poids parce qu'elle-même est en train de s'annuler pour signifier la convergence. Cela permet certainement une segmentation plus fidèle des objets, en particulier au niveau des coins, et une meilleure stabilité du processus. Enfin, il est dommage que la vitesse d'évolution ne dépende plus désormais que des caractéristiques géométriques du contour, à savoir la courbure servant de régularisation. La consistance avec les données n'agit qu'en tant que terme d'arrêt représenté par la fonction  $G(\cdot)$ .

Bien que ce modèle ait l'évolution des courbes planes pour philosophie d'origine et l'équation de la chaleur bidimensionnelle pour analogie fondatrice, il s'adapte sans difficulté théorique en dimension trois. En raccourci, il suffit de remplacer la courbure du contour 1D par la courbure moyenne du contour 2D [Caselles *et al.* 1996, Caselles, Kimmel, Sapiro et Sbert 1997] – voir tout de même la section 2.4.2 à propos de l'équivalence courbure en dimension deux et courbure moyenne en dimension trois.

### 2.3.3 Contours actifs géodésiques

On doit à Caselles *et al.* [1995] – travaux publiés ensuite sous la référence [Caselles, Kimmel et Sapiro 1997] – l'apparition des contours actifs géodésiques, ainsi nommés car ils convergent vers une solution de longueur minimale, selon une métrique définie par l'image à segmenter. Ils marquent le retour à l'esprit variationnel des contours actifs classiques – voir section 2.3.1. Mais ici, le terme régularisant de rigidité est supprimé. Une si simple simplification qui conduit pourtant à un développement théorique nouveau. En effet, le

---

<sup>5</sup>La force ballon a été identifiée plus tard comme provenant d'une contrainte d'aire minimale en dimension deux et de volume minimal en dimension trois [Cohen et Cohen 1993, Siddiqi *et al.* 1998].

critère à minimiser s'avère être équivalent à la longueur du contour pondérée par l'habituelle fonction  $G(\cdot)$  :

$$J(\Gamma) = \int_{\Psi} G(\Gamma(p)) |\Gamma'(p)| dp \quad (2.9)$$

où  $\Psi$  est le domaine de variation de  $p$ , coordonnée curviligne. On résout l'équation d'Euler-Lagrange associée à  $\Gamma(\cdot)$  grâce au schéma dynamique suivant :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = G \kappa \vec{N} + \langle \nabla G, \vec{N} \rangle \vec{N} \quad (2.10)$$

Remarquons que si  $G(\cdot)$  est la fonction constante égale à un, l'équation (2.10) n'est autre que l'équation géométrique de la chaleur, qui correspond donc à la minimisation de la longueur non pondérée du contour ou, plus généralement, pondérée par un terme constant. Le terme en supplément du modèle géométrique (2.7) n'est efficace qu'à proximité des contours des objets<sup>6</sup> sur lesquels il aide à mieux fixer le contour actif. Il n'entre en rien dans l'histoire des concavités. Nous sommes donc tenus à l'emploi de la force ballon – voir section 2.3.2, équation (2.8) – :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = G \{ \sigma + \kappa \} \vec{N} + \langle \nabla G, \vec{N} \rangle \vec{N} \quad (2.11)$$

Pour aller à l'essentiel, disons que les contours actifs géodésiques rassemblent les avantages des contours actifs classiques et géométriques. Dans le détail, la force motrice est intrinsèque du contour, elle est normale au contour, elle est due à la fois à la régularisation et à la consistance avec les données ; la régularisation est raisonnablement contraignante, elle ne comporte pas de terme dérivé à un ordre élevé et elle perd encore en importance au voisinage du contour des objets à segmenter.

De même que son homologue géométrique, le modèle géodésique se conjugue aussi facilement à la dimension trois qu'à la dimension deux – voir malgré tout la section 2.4.2 à propos de l'équivalence courbure en dimension deux et courbure moyenne en dimension trois. La source du développement en dimension trois est un critère d'aire minimale du contour pondérée par  $G(\cdot)$  à la place du critère (2.9) de longueur pondérée.

En dimension deux, plus amples informations et réflexions supplémentaires sur ces trois types majeurs de contours actifs peuvent être trouvées dans [Charbonnier et Cuisenaire 1996].

## 2.4 Formulation générale

Nous établissons dans cette section les traits communs aux contours actifs des trois parties suivantes – numéros II, III et IV – que nous ne prendrons parfois pas la peine de répéter. En particulier, nous discutons ici de la réinitialisation des ensembles de niveaux. Ce traitement, pourtant bien présent dans les algorithmes des parties II et III, y est explicitement passé sous silence.

### 2.4.1 Équation d'évolution

Nous reprenons l'équation générale d'évolution des contours actifs géométriques :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \nu \vec{N} \quad (2.12)$$

---

<sup>6</sup>Si la fonction  $G(\cdot)$  a été choisie telle que nous l'avons décrite à la section 2.3.1, son gradient est nul sauf à proximité des contours des objets. De manière générale,  $\nabla G(\cdot)$  est faible ou incohérent loin des objets.

où  $\nu(\dots)$  est la vitesse d'évolution du contour  $\Gamma(\dots)$  et  $\vec{N}(\dots)$  est la normale, directe et de norme unitaire, à  $\Gamma(\dots)$ . Les vitesses d'évolution se divisent en deux catégories : il y a celles qui sont définies heuristiquement – exemple en partie II – et celles qui découlent de la minimisation d'un critère – exemple en partie III. Dans les deux cas, le principe est que la vitesse d'évolution soit égale à zéro sur le contour des objets – en pratique, la vitesse d'évolution se contente d'être proche de zéro – et non nulle ailleurs. Pour les parties II et III, la non nullité peut se manifester par des valeurs strictement positives aussi bien que strictement négatives, autorisant une évolution de certains points du contour dans le sens du rétrécissement et d'autres dans le sens de la dilatation.

On peut aussi décider d'une autre partition des vitesses d'évolution : lorsque, pour tout  $t$ ,  $\nu(x, t)$  ne dépend que de grandeurs évaluées au point  $x$ , on parle à propos de l'évolution du contour de méthode pixel ou voxel ; lorsque, pour tout  $t$ ,  $\nu(x, t)$  dépend également ou exclusivement de grandeurs évaluées dans des régions de  $\Omega$  – par exemple, une valeur moyenne calculée sur l'intérieur de  $\Gamma(\cdot, t)$  –, le processus d'évolution du contour est qualifié de méthode région. Les méthodes régions sont en principe moins sensibles au bruit car elles prennent en compte plus d'information dans les données pour le calcul de la vitesse d'évolution – l'exemple pris plus haut de la moyenne d'une caractéristique est révélateur.

## 2.4.2 Équation de régularisation

Lorsque les contours actifs sont employés en segmentation, la vitesse d'évolution  $\nu(\dots)$  fait nécessairement référence aux données, détériorées par du bruit. Par conséquent, la vitesse d'évolution aussi est bruitée. Cela est marqué par des oscillations de faible amplitude et de haute fréquence le long du contour. Trois solutions au moins sont envisageables pour les combattre. Soit on lisse une fois pour toutes les données, soit on lisse à chaque itération  $t$  la vitesse d'évolution  $\nu(\cdot, t)$ , soit on modifie l'équation d'évolution de sorte à intégrer un terme de lissage du contour. Les deux premières possibilités sont discutées à la section 10.8. Détaillons la troisième, d'abord dans le cas bidimensionnel, telle que nous l'avons utilisée chaque fois qu'il a été question de régulariser un processus de contours actifs. Ce type d'oscillations implique des courbures élevées en valeur absolue. Nous avons vu en section 2.3.2 que l'équation géométrique de la chaleur avait pour effet, à terme, de rendre circulaire une courbe sans auto-intersection ni point singulier. Cela s'opère par réduction locale de la courbure en valeur absolue soit, en particulier, réduction des fortes concavités et fortes convexités. Ce traitement nous satisfait. Nous combinons donc les équations d'évolution (2.12) et géométrique de la chaleur (2.6) de la façon suivante :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \{\nu + \delta \kappa\} \vec{N} \quad (2.13)$$

où  $\delta$  est un paramètre constant positif. Le terme de courbure a ainsi été ajouté, dans un but déterminé certes, mais artificiellement. Au contraire, il voit le jour spontanément dans le développement du modèle des contours actifs géodésiques. Toutefois, si la vitesse d'évolution  $\nu(\dots)$  est issue de la minimisation d'un critère  $J$  par rapport à  $\Gamma(\dots)$ , alors le critère dont l'équation (2.13) provient est :

$$J + \delta \int_{\Psi} |\Gamma'(p)| dp \quad (2.14)$$

En conséquence, la quantité minimisée est un mélange, dosé par  $\delta$ , du critère d'origine et de la longueur du contour. Ce procédé de régularisation est appelé contrainte de longueur minimale – en faisant référence au but – ou contrainte de courbure – en faisant référence au moyen d'atteindre ce but. Il est utilisé dans [Yezzi *et al.* 1999] notamment.

Voyons à présent ce qu'il se passe en dimension trois. L'équation géométrique de la chaleur bidimensionnelle, dont nous avons dit qu'elle traduisait la minimisation de la longueur du contour, devrait avoir pour équivalent tridimensionnel une équation relative à la minimisation de l'aire du contour dont le critère est :

$$J = \int_{\Gamma} d\varepsilon \quad (2.15)$$

où  $d\varepsilon$  est l'élément infinitésimal d'aire sur  $\Gamma(\cdot)$ . L'équation correspondante à résoudre est :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \kappa \vec{N} \quad (2.16)$$

où  $\kappa(\cdot, \cdot)$  est la courbure moyenne de  $\Gamma(\cdot, \cdot)$ . Cependant, les choses ne sont pas aussi paradisiaques qu'en dimension deux. Il se peut qu'un contour, sans auto-intersection ni point singulier mais concave, développe des singularités en évoluant selon l'équation (2.16). Un exemple classique est une surface en forme d'haltère arrondi, traduction de *dumbbell* [Grayson 1989, Escher *et al.* 1998]. Des hypothèses de douceur et de convexité sont nécessaires à la preuve que cette équation amène le contour à devenir une sphère, de plus en plus petite, puis à disparaître en un point « sphérique » [Huisken 1984]. Dans le cadre des contours actifs géodésiques, il n'est pas louable de remplacer la courbure moyenne par une courbure plus arrangeante puisqu'elle est apparue dans la dérivation de l'équation d'Euler-Lagrange – quoique, si cela améliore en pratique la convergence. En tous les cas, d'autres termes de régularisation à base de courbure gaussienne ont été proposés dans [Chow 1985, Caselles et Sbert 1996]. Nous avons choisi de garder la courbure moyenne parce qu'elle est l'équivalent logique de la courbure d'un contour en dimension deux et par convenance – l'approximation numérique en est simple, voir annexe F. Ce type de régularisation est appelé contrainte de surface minimale ou contrainte de courbure.

Nous venons de voir l'aspect bénéfique d'une contrainte de courbure. Il existe un revers de la médaille qui est la mauvaise détection des fortes concavités et fortes convexités d'un objet, car elles ne peuvent pas être distinguées de celles induites par le bruit. C'est au moins le cas avec le modèle géométrique général que nous avons choisi. En revanche, le modèle géométrique particulier développé par Osher et Sethian [1988] et le modèle géodésique ne souffrent pas autant de cet inconvénient. En effet, la fonction  $G(\cdot)$  s'affaiblit au voisinage du contour des objets et entraîne dans son affaiblissement, par multiplication, la contrainte de courbure. Celle-ci aura donc pu jouer son rôle contre le bruit pendant l'évolution au large des objets. Puis elle s'efface à leur proximité. Encore faut-il pouvoir s'approcher suffisamment des parties concaves des objets<sup>7</sup>, ce qui dépend de la force ballon.

---

<sup>7</sup>Si la force ballon est strictement positive, le contour évolue dans le sens du rétrécissement. Les parties convexes sont atteintes sans difficulté puisque le terme de courbure y aide. Seule la force ballon peut permettre de détecter les parties concaves. Si la force ballon est strictement négative, il faut permuter « concavité » et « convexité » dans les phrases précédentes.

## Chapitre 3

# Ensembles de niveaux

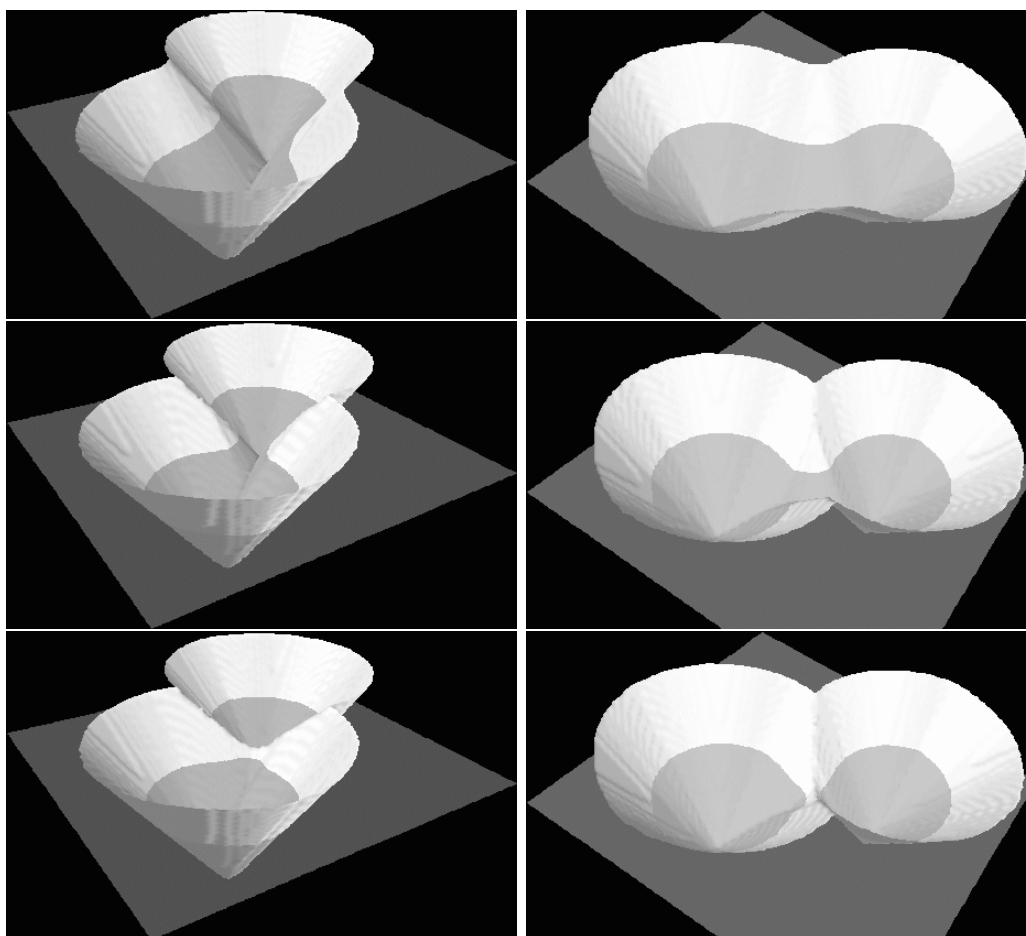
Les ensembles de niveaux ont tout d'abord été exploités pour la propagation de contours actifs géométriques par Osher et Sethian [1988], inspirés en particulier par Barles [1985]. Si vous êtes familier des ensembles de niveaux, passez directement à la section 3.2.

### 3.1 Gestion des contours actifs

L'évolution des contours actifs pose le problème de leur représentation. On peut par exemple envisager deux représentations explicites, également dites lagrangiennes. La première est composée d'une chaîne de points du contour, régulièrement espacés de préférence. La vitesse d'évolution est appliquée en chaque point. Il est souhaitable de conserver un écart identique entre les points – écart qui change au cours du temps en général. Cela suppose un rééchantillonnage périodique du contour [Charbonnier et Cuisenaire 1996] ou bien l'inclusion dans la vitesse d'évolution d'un terme qui impose cet écart constant en espace [Berger 1991]. D'autre part, la gestion des changements de topologie – séparation d'un contour en deux contours ou plus à partir d'un, traduction de *splitting*, et fusion de deux contours ou plus pour n'en former qu'un, traduction de *merging* – exige une détection, éventuellement coûteuse, des auto-intersections et collisions. La seconde représentation explicite est une version plus compacte de la première : le contour est matérialisé par une chaîne d'éléments connexes. Le changement de topologie reste problématique.

L'idée de la représentation implicite, ou eulerienne, est d'insérer le contour dans un ensemble de dimension supérieure – l'ensemble de niveaux – dont la déformation sans changement de topologie peut induire un changement de topologie du contour. Discutons d'un exemple en dimension deux. Le contour actif est une courbe plane fermée. Supposons qu'il représente le contour d'un lac de montagne. L'ensemble de dimension supérieure dans lequel on l'insère est une surface. Cette surface n'est autre que la montagne, soit la partie du sol tout autour du lac et également la partie noyée. Le contour est donc l'intersection de la montagne avec le plan du lac. Si le milieu du fond du lac, c'est-à-dire une partie de la partie immergée de la montagne, décide de s'élever progressivement pour aller respirer à la surface, il arrive un moment où le lac est coupé en deux. Il y a toujours une seule surface de montagne – pas de changement de topologie de l'ensemble qui sert de contenant au contour donc – mais deux lacs supposés de même altitude. L'intersection de la surface avec le plan des lacs fournit maintenant deux contours. La topologie du contour initial a bien changé.

Tout cela est raconté en images sur la figure 3.1. Supposons que l'altitude du plan du lac



**Fig. 3.1** Évolution avec changement de topologie d'un contour actif inséré dans un ensemble de niveaux. La colonne de gauche représente l'évolution en vue longitudinale. La colonne de droite représente l'évolution en vue transversale plongeante.

soit zéro<sup>1</sup>. L'altitude des points immergés de la surface est négative et l'est de plus en plus en direction du milieu de l'eau. Celle des points émergés est positive et on suppose qu'elle l'est de plus en plus à mesure qu'on s'éloigne du lac. Dès lors, la surface est équivalente à une image bidimensionnelle de hauteurs. Il n'y a donc pas, en termes de mise en œuvre de la méthode, d'augmentation perceptible de dimension du problème. Chaque pixel contient la hauteur, positive ou négative, à laquelle s'élève la surface à sa verticale, montante ou descendante. Dans cette image, le contour est composé des pixels de valeur nulle. On l'appelle donc le contour de niveau zéro – d'où le nom de « ensemble de niveaux » donné à la surface qui le contient ainsi que d'autres de niveaux non nuls. En réalité, peu de pixels ont une valeur nulle. Le contour de niveau zéro se devine aux pixels dont un voisin au moins est de signe opposé au leur. En effet, si un pixel est à l'extérieur du contour – valeur strictement positive – et un des ces voisins au moins est à l'intérieur – valeur strictement négative –, alors le contour de niveau zéro est quelque part entre les deux. Un ensemble de niveaux assure donc une précision de description du contour de niveau zéro très en-dessous du pixel puisqu'elle est seulement limitée par la précision du type de donnée informatique utilisé pour mémoriser les valeurs de l'image. Il ne faut bien sûr pas confondre cette précision-là avec celle d'une application de segmentation utilisant les ensembles de niveaux qui dépend

<sup>1</sup>Cela place bas un lac de montagne, pourra-t-on objecter.

essentiellement de la méthode. Pour achever d'établir les relations entre surface, ensemble de niveaux et image, nous donnons la formule unificatrice :

$$\forall x \in \Omega, k = u(x) \quad (3.1)$$

où  $\Omega$  est le domaine de définition de l'image ou ensemble de niveaux  $u(\cdot)$ . En un point  $x$  de  $\Omega$ , la valeur  $k = u(x)$  est la hauteur de la surface.

Mais la surface n'était qu'une illustration. Elle n'a d'ailleurs pas d'équivalent en dimension trois. Un ensemble de niveaux est simplement une fonction  $u(\cdot)$  de la position, bidimensionnelle ou tridimensionnelle, à valeurs réelles. Ces valeurs sont strictement positives à l'extérieur du contour, nulles sur le contour et strictement négatives à l'intérieur. Plutôt que « valeur », on dira « niveau ». À la section 3.2.1, nous allons imposer une contrainte supplémentaire aux ensembles de niveaux.

## 3.2 Équations

### 3.2.1 Du contour actif à l'ensemble de niveaux

Soit un contour fermé  $\Gamma(\cdot)$ . Un ensemble de niveaux défini par rapport à  $\Gamma(\cdot)$  est une fonction  $u(\cdot)$  de la position, dans le plan pour un contour qui est une courbe plane et dans l'espace pour un contour qui est une surface, à valeurs réelles telle que :

$$\begin{cases} \{x \mid u(x) = 0\} = \{\Gamma(p), p \in \Psi\} \\ \{x \mid u(x) > 0\} \text{ correspond à l'extérieur de } \Gamma(\cdot) \\ \{x \mid u(x) < 0\} \text{ correspond à l'intérieur de } \Gamma(\cdot) \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $\Psi$  est le domaine de variation de  $p$ , coordonnée curviligne. La première condition de (3.2) implique que :

$$\forall p \in \Psi, u(\Gamma(p)) = 0 \quad (3.3)$$

Il faut noter que le choix du signe à l'intérieur du contour est arbitraire. Seul compte le fait qu'il soit opposé à celui de l'extérieur. Une autre caractéristique est laissée à notre discrétion : la norme du gradient de  $u(\cdot)$  en tout point régulier – les points singuliers sont étudiés en section 3.2.2. Rien n'oblige d'ailleurs à ce qu'elle soit partout – presque partout – la même. Pourtant, puisqu'il va falloir l'estimer numériquement, nous l'imposons de sorte que le pas spatial d'échantillonnage<sup>2</sup> puisse être choisi identique en chaque élément. De plus, le respect du théorème de Shannon lui interdit d'être trop élevée. D'un autre côté, elle ne peut pas être nulle. Nous faisons le choix, tout à fait classique parmi les travaux sur les ensembles de niveaux, de la fixer à un, sage compromis entre zéro et l'infini. La conséquence est que, en tout point  $x$ , la valeur absolue de  $u(x)$  est la distance minimale au contour. D'après les conventions (3.2),  $u(x)$  est exactement cette distance si  $x$  est extérieur à  $\Gamma(\cdot)$  et son opposé si  $x$  est à l'intérieur ; on dit que  $u(\cdot)$  est une carte de distance signée. Nous essayons d'en donner l'intuition à l'annexe D à partir d'un développement de l'article [Rouy et Tourin 1992] – voir [Arnold 1983, Barles 1994] à propos de la carte de distance d'un contour comme unique solution de viscosité de l'équation dite eikonale qui impose une norme de gradient unitaire presque partout. Géométriquement, en reprenant la représentation sous forme de surface d'un ensemble de niveaux bidimensionnel – voir section 3.1 –, cela signifie que la hauteur de la surface en un point est égale à la distance

<sup>2</sup>En dimension un, une approximation de la dérivée de  $u(\cdot)$  à l'ordre un est, par exemple,  $\{u(x+dx) - u(x)\}/dx$  où  $dx$  est le pas spatial d'échantillonnage, souvent considéré indépendant de  $x$  et égal à un.



signée par rapport au contour de la projection de ce point sur le plan d'altitude zéro. Voilà pour l'aspect statique. Mais le contour évolue selon l'équation :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \{\nu + \delta\kappa\} \vec{N} \quad (3.4)$$

Le contour  $\Gamma(\cdot)$  dépend également du temps :  $\Gamma(\cdot, \cdot)$ . Il en va de même de l'ensemble de niveaux  $u(\cdot, \cdot)$  dont il faut déterminer une équation d'évolution telle que son contour de niveau zéro ait une évolution identique à celle de  $\Gamma(\cdot, \cdot)$  sous l'effet de l'équation (3.4). On utilise pour cela le fait que désormais l'équation (3.3) doit être vérifiée à chaque instant  $t$  :

$$\forall t \geq 0, \forall p \in \Psi, u(\Gamma(p, t), t) = 0 \quad (3.5)$$

Le calcul classique permettant de parvenir à l'équation suivante est rappelé en annexe A :

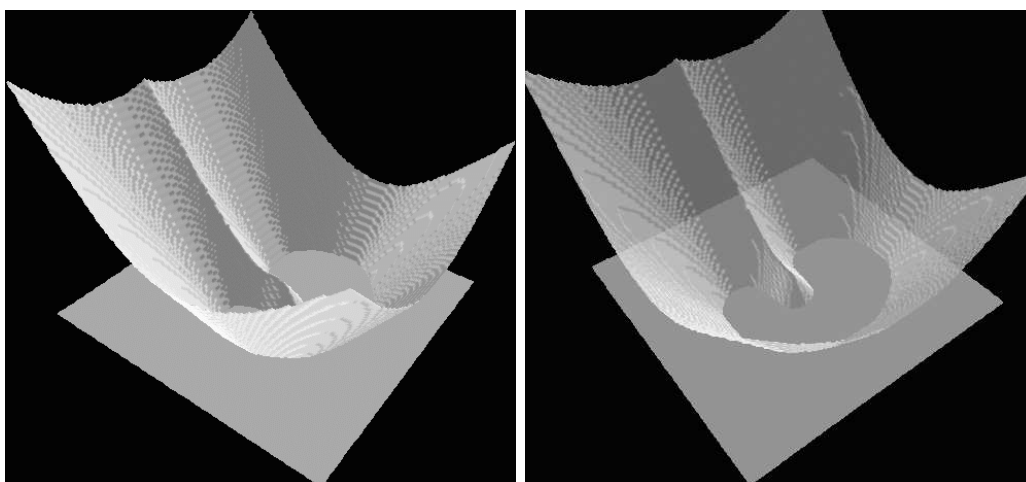
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \{\nu + \delta\kappa\} |\nabla u| \quad (3.6)$$

où  $\kappa(\cdot, \cdot)$  est la courbure du contour de niveau zéro – voir annexe F.

### 3.2.2 Points singuliers ou lieux de choc

Nous avons décidé d'imposer à  $u(\cdot)$  d'avoir un gradient de norme un en tout point régulier. Un point est régulier si le gradient  $y$  est défini. Si la condition (3.2) est vérifiée, peut-on avoir un gradient de norme un partout ? Il faut déjà que tous les points soient réguliers. Est-ce possible ? Il est clair que le squelette du contour de niveau zéro  $\Gamma(\cdot)$  est un lieu particulier de  $u(\cdot)$ . En effet, il est constitué de points chacun à égale distance d'au moins deux points de  $\Gamma(\cdot)$  tels qu'aucun autre point de  $\Gamma(\cdot)$  n'est à une distance strictement inférieure. En conséquence, partant d'un point du squelette, deux directions distinctes au moins sont possibles pour atteindre  $\Gamma(\cdot)$  en une distance minimale. L'ensemble de niveaux  $u(\cdot)$  étant une carte de distance, ce sont là deux choix pour la direction de son gradient. La conclusion est que, en tout point du squelette, le gradient de  $u(\cdot)$  n'est pas défini ou encore que les points du squelette sont singuliers [Blum et Nagel 1978, Malandain et Fernández-Vidal 1998]. Si le contour est convexe, il n'y a pas d'autres points singuliers. À l'inverse, une concavité est à l'origine de points singuliers supplémentaires situés à l'extérieur de  $\Gamma(\cdot)$ . Nous en avons un exemple sur la figure 3.2.

Voyons à présent en quoi les points singuliers peuvent être vus comme des lieux de choc. Cette terminologie fait référence à la propagation d'ondes où les lieux de choc correspondent aux intersections des caractéristiques, courbes le long desquelles la grandeur transportée par l'onde est constante. Ce phénomène est décrit dans [Sethian 1996], par exemple. À l'annexe E, nous donnons quelques idées visant à montrer que, dans une carte de distance, les caractéristiques sont des demi-droites ou des segments normaux à  $\Gamma(\cdot)$  – ce serait des droites si elles ne se coupaient pas aux lieux de choc. Cette question est étudiée dans [Arnold 1983]. Supposons ici que la grandeur transportée soit le vecteur gradient. Imaginons que  $u(\cdot)$  ne soit pas encore une carte de distance. Imaginons également qu'une onde parte de tous les points de  $\Gamma(\cdot)$  en même temps, à la même vitesse, vers l'intérieur et dans des directions en chaque point normales à  $\Gamma(\cdot)$ , donc le long des caractéristiques. Imaginons enfin que cette onde propage le vecteur gradient voulu pour que  $u(\cdot)$  soit une carte de distance. Les portions d'onde en vis-à-vis se rencontrent après avoir parcouru une distance égale et minimale pour atteindre ce point depuis le contour – minimale car sinon une autre portion de l'onde l'aurait atteint avant. Il s'agit donc d'un point du squelette et il s'y produit un choc. Si nous considérons maintenant la propagation équivalente vers l'extérieur de  $\Gamma(\cdot)$ , deux cas se conçoivent. Soit  $\Gamma(\cdot)$  est convexe et les ondes sont émises



**Fig. 3.2** Exemple en dimension deux d'un contour de niveau zéro concave à l'origine de points singuliers extérieurs. Ils sont situés sur l'arête vive de la partie de l'ensemble de niveaux, représenté sous forme de surface, face à nous. À gauche, l'ensemble de niveau apparaît opaque, à droite, il est légèrement transparent.

dans des directions divergentes. Elles ne s'entrechoquent pas. Soit  $\Gamma(\cdot)$  est concave. Une concavité donnée présente des parties de  $\Gamma(\cdot)$  les unes en face des autres. Les portions d'onde issues de ces parties se rencontrent en un lieu de choc, extérieur à  $\Gamma(\cdot)$ , s'étendant jusqu'à l'infini qui verra le choc des portions d'onde émises des zones de contact, de part et d'autre de la concavité, entre  $\Gamma(\cdot)$  et son enveloppe convexe.

### 3.2.3 Extension de la vitesse d'évolution

L'équation d'évolution (3.4) est définie sur  $\Gamma(\cdot, \cdot)$ , naturellement. L'équation d'évolution équivalente (3.6) de l'ensemble de niveaux est utilisable dans  $\Omega$ . Mais nous verrons en section 3.2.5 que l'évolution du contour de niveau zéro peut être gérée dans un domaine restreint, toutefois pas au point de contenir les seuls points du niveau zéro. Cela pose donc la question de la vitesse d'évolution à appliquer en dehors du contour de niveau zéro. Nous avons souhaité que  $u(\cdot)$  soit une carte de distance. Ainsi, la détermination de l'extension de la vitesse d'évolution doit avoir pour but que  $u(\cdot)$  reste une carte de distance. Il existe deux moyens au moins d'y parvenir. Le premier est proposé par Adalsteinsson et Sethian [1999]. La vitesse d'évolution est d'abord interpolée aux éléments de  $u(\cdot)$  dont un voisin au moins est de signe opposé au leur. Ce sont les éléments qui bordent le contour de niveau zéro. Puis, la vitesse d'évolution est propagée à partir de ces éléments, par une méthode de marche rapide, traduction de *fast marching method*, de sorte que la valeur le long des caractéristiques soit constante. Le deuxième moyen, proposé par Gomes et Faugeras [1999], est inverse : plutôt que de propager une valeur constante le long d'une caractéristique à partir du contour de niveau zéro, il s'agit pour un point d'aller chercher à l'intersection de la caractéristique sur laquelle il se trouve et du contour de niveau zéro la valeur à attribuer.

Lorsqu'on ne veut pas faire l'effort de cette extension, on peut décider d'appliquer directement la formule de la vitesse d'évolution en chaque élément. D'une part, cela n'est pas possible si ladite formule dépend d'une grandeur qui n'a de signification que sur le contour de niveau zéro, par exemple dans [Adalsteinsson et Sethian 1995b]. D'autre part, une telle pratique ne permet évidemment pas de garantir que  $u(\cdot)$  sera toujours une carte de distance. Telle que nous l'avons définie, la vitesse d'évolution est composée d'un terme de consistance avec les données  $\nu(\cdot, \cdot)$  et d'un terme de régularisation  $\delta\kappa(\cdot, \cdot)$ . La courbure

$\kappa(.,.)$  du contour de niveau zéro est calculable par une expression adaptée aux contours de niveaux quelconques – voir annexe F. On peut donc étendre sans souci cette partie de la vitesse d'évolution à  $\Omega$ . Dans les parties II et III, le terme de consistance avec les données peut être évalué n'importe où car tous ses composants ont un sens dans  $\Omega$ . Cependant, la vitesse d'évolution obtenue compromet l'aspect de carte de distance de  $u(.)$ . Nous tolérons cette compromission pendant quelques itérations, puis nous décidons que c'en est trop, il faut repartir sur de bonnes bases, nous réinitialisons – voir section 3.2.4. Cette manière classique de gérer l'évolution d'un ensemble de niveaux n'est pas justifiable théoriquement.

### 3.2.4 Réinitialisation

On suppose disposer d'un ensemble de niveaux légèrement déformé. Par « déformé », nous entendons que le gradient n'est pas toujours de norme un dans des régions autres que les lieux de choc. Ce n'est donc pas une carte de distance mais, au travers du « légèrement », nous faisons l'hypothèse qu'il en est suffisamment proche pour qu'un redressement du gradient de façon que sa norme soit un – sauf aux lieux de choc – permette de retrouver une carte de distance. Dans l'opération, la position du contour de niveau zéro doit être préservée. Rouy et Tourin [1992] posent un problème de réinitialisation plus général<sup>3</sup> que celui-là, montrent l'existence et l'unicité d'une solution de viscosité et la déterminent par la méthode de programmation dynamique. Puis, Sussman *et al.* [1994] proposent, sur les bases jetées par Rouy et Tourin, l'équation de réinitialisation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{signe}(u) \times \{1 - |\nabla u|\} \quad (3.7)$$

où  $\text{signe}(u)(.,.)$  est une fonction caractéristique du signe de  $u(.,.)$  que nous avons choisi sur trois étages : le  $-1$  si  $u(.,.)$  est strictement négative, le zéro si  $u(.,.)$  est nul et le  $+1$  si  $u(.,.)$  est strictement positive. Une discrétisation possible de l'équation (3.7) est :

$$u(., t + dt) = u(., t) + dt \times \text{signe}(u)(., t) \times \{1 - |\nabla u|(\cdot, t)\} \quad (3.8)$$

Cette relation est itérée jusqu'à ce que, pour un certain  $t$ , le maximum par rapport à  $x$  de  $\{1 - |\nabla u|(x, t)\}$  soit inférieur à un seuil. La préservation de la position du contour de niveau zéro, et même plus, la stabilité du schéma dynamique (3.8) dépendent de la discrétisation de  $|\nabla u|(\cdot, \cdot)$ . Des solutions sont données dans [Shu et Osher 1988, Shu et Osher 1989, Rouy et Tourin 1992, Sussman *et al.* 1994, Sethian 1996, Sussman *et al.* 1998]. Malgré cela, nous avons développé notre approximation, simple et efficace mais fondée sur des intuitions et l'observation de cas particuliers – voir annexe B.

Cette étape de réinitialisation est insérée périodiquement parmi les itérations d'évolution de l'ensemble de niveau. La fréquence de la manœuvre est bien sûr fonction du pas temporel d'échantillonnage de l'équation d'évolution. Dans les applications de segmentation que nous présentons, nous effectuons une réinitialisation toutes les trois ou quatre itérations d'évolution. Il ne reste plus qu'à signaler que nous ne rappellerons ni dans la présentation d'une méthode, ni dans l'algorithme qui en est donné, le recours à la réinitialisation, sauf s'il joue un rôle autre que celui que nous venons de présenter – voir justement l'annexe C à propos d'une utilisation de l'équation de réinitialisation comme équation d'initialisation.

### 3.2.5 Mise en œuvre informatique

L'équation d'évolution (3.6) est résolue numériquement par discrétisation et itération de la formule de récurrence obtenue. Nous avons choisi une discrétisation de même type

---

<sup>3</sup>Le problème de réinitialisation y est plus général, tant concernant la condition au bord, c'est-à-dire sur le contour de niveau zéro, que concernant l'objectif de valeur du gradient en chaque point.

que la méthode d'Euler, à savoir que  $\partial u / \partial t$  est estimé par une différence finie non centrée :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \approx \frac{u(\cdot, t + dt) - u(\cdot, t)}{dt} \quad (3.9)$$

et que la partie droite de l'équation est évaluée en  $t : \{\nu(\cdot, t) + \delta\kappa(\cdot, t)\} |\nabla u|(\cdot, t)$ . Il faut choisir une estimation initiale de  $u(\cdot, \cdot)$  que nous notons  $u_0(\cdot)$ . La formule de récurrence sur  $t$  est alors :

$$\begin{cases} \forall x \in \Omega, u(x, t = 0) = u_0(x) \\ \forall x \in \Omega, u(x, t + dt) = u(x, t) + dt \times \{\nu(x, t) + \delta\kappa(x, t)\} \times |\nabla u|(x, t) \end{cases} \quad (3.10)$$

Théoriquement, la convergence est indiquée par la stationnarité de la suite des contours de niveau zéro au-delà d'un certain rang :

$$\begin{aligned} & \exists t_{\max}, \forall n \in \mathbb{N}, \{u(\Gamma(p, t_{\max} + n \times dt)) = 0, p \in \Psi\} = \{u(\Gamma(p, t_{\max})) = 0, p \in \Psi\} \\ \iff & \exists t_{\max}, \forall n \in \mathbb{N}, \nu(\cdot, t_{\max} + n \times dt) + \delta\kappa(\cdot, t_{\max} + n \times dt) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

En pratique, la condition d'arrêt des itérations est vérifiée lorsque le maximum en valeur absolue des  $\{\nu(x, t) + \delta\kappa(x, t)\}$ , pour  $x$  appartenant à l'ensemble des éléments dont un voisin au moins est de signe opposé au leur, est strictement inférieur à un seuil que nous choisissons, quelle que soit l'application, entre  $10^{-1}$  et  $10^{-2}$ . Avec un ensemble de niveaux qui respecte une norme de gradient de un presque partout, cela revient à attendre que le déplacement du contour de niveau zéro soit inférieur à un dixième ou un centième de pixel ou voxel suivant la précision requise, la vitesse de convergence et la stabilité de l'évolution. Si l'évolution est rapide et stable, on peut se permettre de fixer une grande précision. Si l'évolution n'est pas stable – à l'approche de la convergence, le contour de niveau zéro oscille autour de la solution – ou est lente, il faut se contenter d'une faible précision. De plus, par sécurité, le processus est stoppé si un nombre maximal d'itérations est atteint.

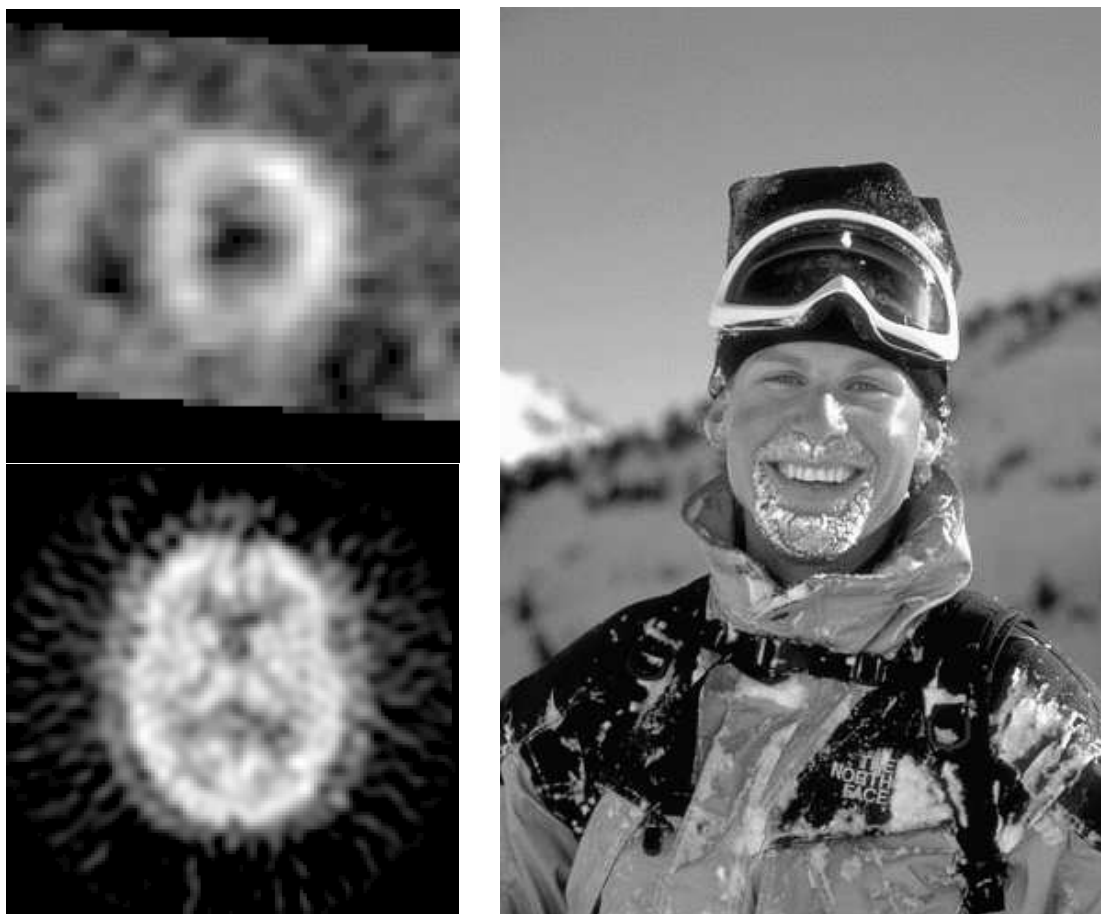
Au cours d'une étape d'évolution, le contour de niveau zéro se déplace au plus d'une distance de l'ordre de l'élément. Il ne sert à rien de faire évoluer les contours de niveau élevé en valeur absolue, c'est-à-dire loin du contour de niveau zéro. Pour diminuer le temps de calcul, on mémorise initialement les éléments de  $u(\cdot, \cdot)$  à moins d'une certaine distance, en valeur absolue, du contour de niveau zéro. Ils constituent la bande étroite, traduction de *narrow band*, dont l'épaisseur est un paramètre de l'algorithme. La vitesse d'évolution n'est calculée et l'ensemble de niveau n'évolue que dans cette bande. Le contour de niveau zéro risque de se déplacer vers les bords de la bande étroite. Lorsque la plus petite valeur absolue des éléments du bord intérieur de la bande – ces éléments sont strictement négatifs puisqu'ils sont à l'intérieur du contour de niveau zéro – ou la plus petite valeur des éléments du bord extérieur de la bande – ces éléments sont strictement positifs – devient inférieure à un seuil, le contour de niveau zéro pourrait « sortir » de la bande étroite dans les prochaines itérations. Il faut donc recentrer la bande étroite sur la position actuelle du contour de niveau zéro. Puis les itérations d'évolution peuvent reprendre jusqu'à ce qu'à nouveau le contour de niveau zéro soit trop proche d'un bord de la bande étroite ou qu'il ait convergé. Le choix de la largeur de la bande étroite est guidé par un compromis. Si elle est faible, elle contient peu d'éléments donc les itérations d'évolutions sont rapides. Mais si le contour de niveau zéro initial est loin de la solution, son déplacement va être important, le contour de niveau zéro se rapprochera souvent d'un bord de la bande étroite qu'il faudra recentrer au prix de quelques calculs. On imagine aisément le raisonnement miroir si la bande étroite est « large » et le contour de niveau zéro initial proche de la solution. Le choix se fait donc selon que l'initialisation est supposée bonne ou incertaine. Cette technique est due à Chopp [1993]. Elle a été étudiée avec attention dans [Adalsteinsson et Sethian 1995a]

notamment et son utilisation s'est généralisée – voir par exemple [Malladi *et al.* 1995]. Pour recentrer la bande étroite, nous effectuons quelques itérations de réinitialisation de manière à obtenir une carte de distance dans un intervalle symétrique de part et d'autre du contour de niveau zéro. Comme largeur de bande, nous choisissons en général  $[-4; +4]$  quelle que soit l'initialisation.

## Chapitre 4

# Intérêt en médecine nucléaire

Quel intérêt a-t-on à utiliser les contours actifs pour la segmentation d'images de médecine nucléaire? Ces dernières sont réputées pour être bruitées et de résolution assez grossière. Sur la figure 4.1, colonne de gauche, deux images de médecine nucléaire font effectivement preuve d'une mauvaise résolution mais de peu de bruit. Sans doute cela est-



**Fig. 4.1** Exemples d'images de médecine nucléaire dans la colonne de gauche : en haut, une coupe de cœur marqué au  $^{99m}\text{Tc}$ -Sestamibi; en bas, une coupe de cerveau marqué au  $^{99m}\text{Tc}$ -HMPAO. À droite, la photographie du skieur Lee Cohen a été prise à la station de ski Alta, UT, États-Unis, « *The best snow on earth* », citation anonyme.

il dû à un fort lissage à vocation diagnostique. On obtiendrait une meilleure résolution

en lissant moins. Précisons, à titre d'exemple et à toutes fins utiles, que la résolution à la distance de 10 cm d'un détecteur de gamma-caméra Prism 2000 – Picker International Inc., Cleveland, OH, États-Unis – équipé d'un collimateur haute résolution et de géométrie parallèle<sup>1</sup> est de l'ordre de 8 mm. Ce serait au prix d'un bruit plus important. Bref, comme nous l'annoncions, du bruit et peu de résolution.

Pour diminuer l'effet perturbant du bruit, la régularisation des contours actifs vue en section 2.4.2 est efficace. Mais ce n'est que l'apport d'une information arbitraire qui n'aide pas à la tâche, de segmentation par exemple. Il faut également que le terme de consistance avec les données soit peu gêné par le bruit. Nous avons fait remarquer à la section 2.4.1 qu'une méthode région de contours actifs satisferait probablement cette condition. En second lieu, lorsqu'une image à segmenter est de résolution faible, il est peut-être plus efficace de chercher de larges régions homogènes que des régions étroites de fort gradient. Les contours actifs semblent adaptés puisqu'il suffit de considérer leur intérieur comme une estimation, à faire évoluer dans le sens de l'adéquation aux données, des régions cherchées. Il faut cependant qu'une ou plusieurs caractéristiques d'homogénéité existent. En observant le skieur de la figure 4.1, on a bien du mal à en trouver. Par contre, toujours sur la même figure, images de gauche, on peut faire l'hypothèse raisonnable que l'intensité des éléments est homogène dans les régions d'intérêt – la paroi ventriculaire gauche ou le cortex. Le résumé de ce paragraphe est qu'une méthode région de contours actifs paraît adaptée à la segmentation d'images de médecine nucléaire.

---

<sup>1</sup>Les résolutions des géométries en éventail et conique peuvent être meilleures que celle de la géométrie parallèle [Tournier *et al.* 1994].

## II SEGMENTATION DE CARTES D'ATTÉNUATION

---





# Chapitre 5

## Contexte

### 5.1 Phénomène d'atténuation

Un des plus influents facteurs de dégradation des images TEMP – deux autres étant le diffusé Compton et l'effet de volume partiel – est l'atténuation photonique, souvent raccourcie en atténuation. Avant d'en proposer une description, signalons qu'on la nomme « absorption » en imagerie radiographique, par rayons X donc, ou tomодensitométrie. Le traceur radioactif émet régulièrement des photons dans des directions aléatoires. Suivons un de ces photons. S'il souhaite atteindre un détecteur, il lui faut traverser de la matière. D'abord le patient puis l'air. Ses possibles destins sont :

- le photon est pressé, il rejoint un détecteur en ligne directe et sans collision ;
- le photon est flâneur, il rencontre un détecteur à la suite d'une série de chocs avec la matière qui l'ont fait changer de direction et perdre de son énergie, on le qualifie de diffusé ;
- il subit un ou plusieurs chocs dont le dernier est fatal puisqu'il lui ôte toute son énergie – le photon disparaît dans les ténèbres – ou le redirige sur un chemin qui ne croise pas de détecteur – le photon disparaît dans la nature –, et dans les deux cas, le photon est perdu.

Lorsque la dernière éventualité a lieu alors que la direction initiale du photon pointait vers un détecteur, on parle de phénomène d'atténuation. Il concerne, considère-t-on, de l'ordre de 70 à 80 % des photons émis, selon le milieu atténuant et selon leur énergie<sup>1</sup>. En conséquence, les images d'émission reconstruites apparaissent par endroit moins brillantes que la réalité. Ainsi, l'image d'un cylindre rempli d'une activité uniforme sera inhomogène, avec une activité décroissante lorsqu'on se rapproche de l'axe du cylindre. Dans le contexte clinique, le diagnostic peut alors être en faveur d'une pathologie inexistante. Un exemple répandu est celui de la paroi inférieure du ventricule gauche qui risque d'être fermement déclarée comme le siège d'un infarctus. Comment corriger ce défaut ?

### 5.2 Correction

La correction de l'effet d'atténuation nécessite l'estimation du pouvoir atténuant des milieux traversés. La propriété atténuante d'un matériau dépend de sa densité, du numéro atomique des atomes qui le composent et de l'énergie de photon considérée. Elle

---

<sup>1</sup>Plus l'énergie initiale d'un photon est grande, moins il a de chance d'être atténué. Par exemple, la proportion atténuée des photons émis par l'iode-131 est plus faible que celle des photons émis par le thallium-201.

est caractérisée par un coefficient d'atténuation linéaire exprimé en  $\text{cm}^{-1}$ . La fonction qui donne le coefficient d'atténuation en un point est appelée carte d'atténuation. Elle n'est pas constante quoique pour certaines applications, l'imagerie cérébrale par exemple, une telle hypothèse – dite d'atténuation uniforme – ne soit pas très pénalisante [Rajeevan *et al.* 1998]. Nous intéressés à l'imagerie cardiaque pour laquelle la région atténuante est le thorax, nous avons adopté, comme cela est préconisé par nombre de travaux [Tsui *et al.* 1989, Frey *et al.* 1992], la modélisation non uniforme de l'atténuation. Une discrétisation de la fonction d'atténuation – que nous continuons d'appeler carte d'atténuation – s'obtient de différentes façons.

### 5.2.1 Sans acquisition en transmission

Les conditions de consistence contraintes par quelques *a priori* permettent de calculer une carte d'atténuation approximative sans autres données que celles d'émission [Natterer 1993, Welch *et al.* 1997, Laurette *et al.* 1999]. En effet, en l'absence de bruit, un nombre réduit de configurations d'atténuation sont cohérentes avec les données d'émission, ce qu'expriment les conditions de consistence. Une contrainte typique est celle du support qu'on impose cylindrique de section elliptique par exemple, sorte de thorax schématisé.

Il est également possible d'employer un schéma de résolutions alternées afin de reconstruire à la fois l'image en transmission et l'image d'émission corrigée de l'atténuation à partir de la relation de formation des projections en émission atténuées [Nuyts *et al.* 1999]. Traditionnellement, cette relation est utilisée pour estimer l'image d'émission corrigée alors qu'on dispose de l'image de transmission – une seule image inconnue au lieu de deux. Il faut donc régulariser plus pour parer à l'augmentation du nombre d'inconnues – ou de manière équivalente, la diminution relative des données.

La méthode de Panin *et al.* [1998] traite le cas intermédiaire entre pas d'acquisition en transmission et une acquisition en transmission : une acquisition tronquée – le champ de vue des projections n'est pas assez large pour l'objet observé. D'ordinaire, ce phénomène perturbe énormément la reconstruction de la carte d'atténuation. Panin *et al.* se sert d'une base de données d'acquisitions non tronquées comme base de décomposition de l'acquisition tronquée et ainsi la remplace par une combinaison linéaire de données correctes.

### 5.2.2 Avec transmission, sans segmentation

Plus classiquement, la carte d'atténuation est reconstruite à partir de projections acquises en transmission [Lange *et al.* 1987, Manglos *et al.* 1995, Gilland *et al.* 1998], simultanées ou séquentielles des acquisitions en émission. Elle est ensuite utilisée dans la modélisation du problème de reconstruction de l'image d'émission pour aboutir à un algorithme avec correction d'atténuation intrinsèque [Tsui *et al.* 1989, Frey *et al.* 1992]. Une carte d'atténuation reconstruite par un algorithme dépourvu de régularisation contient du bruit – dû au bruit dans les projections. La correction d'atténuation s'en trouve perturbée. On peut lisser les projections ou la reconstruction – en préservant pourtant les contours sans quoi la carte floue obtenue risque de ne pas faire l'affaire –, ou encore régulariser l'algorithme. Par exemple, des travaux [Laurette *et al.* 1998, Panin *et al.* 1999] proposent, avec l'aide de la régularisation semi-quadratique [Geman et Yang 1995, Charbonnier *et al.* 1997], d'insuffler un *a priori* de constance par morceaux de la carte mais ne parlent toutefois pas de régions homogènes anatomiques. La contrainte est donc locale et conduit à des images dans lesquelles un organe est constitué de plusieurs petites zones uniformes. Une façon de moins morceler les organes est, toujours en régularisation semi-quadratique, d'appliquer une contrainte de douceur aux contours [Debreuve *et al.* 1998] – qui est concrétisée en un

lissage avec préservation des discontinuités de l'image de la variable auxiliaire significative des contours.

### 5.2.3 Avec transmission et segmentation

Dans le cadre thoracique, la carte d'atténuation peut être efficacement considérée composée de quelques régions anatomiques uniformes. On distingue en général les poumons, la colonne vertébrale et le reste pudiquement nommé tissus mous. Il s'agit donc d'une segmentation grossière de la carte d'atténuation qui ensuite est utilisée soit immédiatement dans la méthode classique – voir section 5.2.2 –, soit en tant qu'*a priori* anatomique pour un lissage adaptatif de la carte d'atténuation reconstruite, carte lissée qui sert alors à la méthode classique [Riddell *et al.* 2000]. Comment calcule-t-on cette segmentation ?

#### De la carte reconstruite

On peut simplement calculer une segmentation de la carte d'atténuation reconstruite. Par détection de contours [Deriche 1987], par remplissage de bassins versants [Mariano-Goulart *et al.* 1998, Riddell *et al.* 2000], par évolution de contours actifs [Yezzi *et al.* 1997, Niessen *et al.* 1998] ... Mais dans ce cas, la qualité de la segmentation est liée à la qualité de la reconstruction. Il est donc intéressant de court-circuiter l'étape de reconstruction en segmentant directement à partir des projections en transmission.

#### À partir des projections

La question du calcul de la segmentation d'images radiologiques directement à partir des projections a été abordée par Thirion [1992]. Le principe d'acquisition est équivalent à l'imagerie de transmission TEMP. Les projections sont semblables quoique mieux résolues et moins bruitées. Thirion développe deux méthodes pour la dimension deux. La première consiste à appliquer une détection de contours dans les projections. Ils correspondent aux trajectoires des bords des objets en fonction de l'angle de projection. Plusieurs techniques sont alors étudiées pour « rétroprojeter » les points de contour, dont une recherche d'enveloppes de familles de droites. La seconde méthode est une évolution de contour actif guidée par le gradient des projections : à chaque étape, le contour estimé est projeté ; la trajectoire obtenue est localement déformée vers les régions de gradient élevé ; la nouvelle trajectoire est « rétroprojetée » ; et le nouveau contour est lissé. Ces deux méthodes ont des limitations. Tout d'abord, les contours sont difficiles à détecter dans les projections car ils ont une section très arrondie. D'ailleurs, Thirion effectue un réhaussement préalable – dans les projections TEMP, de moins bonne résolution et plus bruitées, ce traitement est plus hasardeux. D'autre part, la segmentation d'images complexes – comportant un objet concave ou plus d'un objet – s'avère délicate.

Thirion [1994] propose, en dimension deux toujours, de modifier le filtre de rétroprojection pour calculer en une itération le gradient ou le laplacien de la reconstruction. Thirion se sert des deux pour effectuer un suivi local de contour par marche le long de lignes isovaleurs, traduction de *marching lines*. En cas de faible résolution et de bruit important, les images de gradient et de laplacien ne sont peut-être pas en mesure de fournir, par une méthode locale, des contours placés avec précision et respectant une topologie attendue – contours fermés par exemple. Voyons à présent deux travaux dont nous nous sommes plus intimement inspirés.

Une contrainte géométrique, par le biais de contours actifs, au service d'une segmentation directe de la carte d'atténuation à partir des projections, voilà le défi exécuté par

Battle *et al.* [1999] et, plus anciennement, Battle *et al.* [1997]. Chaque région anatomique  $y$  est caractérisée par un contour et des propriétés atténuantes que résume le seul coefficient d'atténuation supposé connu. Les contours sont des surfaces discrétisées par des triangles. Leur évolution est menée dans l'espoir que les projections estimées – calculées en utilisant la carte d'atténuation représentée par la forme courante des contours et connaissant le modèle de formation des projections – ressemblent le plus possible aux projections acquises d'après un terme de consistance avec les données en logarithme de vraisemblance. Deux modes d'évolution des points de la surface, sommets des triangles, ont été étudiés. D'abord, un déplacement direct [Battle *et al.* 1997], ensuite une déformation dite de forme libre [Battle *et al.* 1999] dont voici le principe [Sederberg et Parry 1986]. Des points d'ancrage sont répartis régulièrement dans l'espace – par exemple  $5 \times 5 \times 5$  points dans un cube. Un sommet de la surface à déformer est un barycentre des points d'ancrage moyennant le choix de bonnes pondérations. Les points d'ancrage sont déplacés en vertu de la consistance avec les données. Pendant toute l'évolution et à convergence, les points de la surface sont les barycentres, chacun avec ses pondérations, des points d'ancrage à leurs positions successives – pour d'autres applications utilisant la déformation de forme libre, voir par exemple [Szeliski et Lavallée 1994, Bardinnet *et al.* 1996, Reissman *et al.* 1999].

Le travail présenté dans [Santosa 1996] ne concerne pas le calcul de cartes d'atténuation. Il est appliqué à la déconvolution d'images floues et la reconstruction de données acoustiques ou optiques diffractées. En revanche, la méthode d'évolution utilisée, dont la justification théorique est délicate et qui de toute façon ne peut être appliquée à notre contexte, a été le point de départ de notre algorithme. Elle consiste finalement à utiliser le gradient d'un critère de restauration pour l'évolution de contours actifs à vocation de segmentation des objets restaurés, mais sans véritable restauration de l'image.

Ces deux travaux [Santosa 1996, Battle *et al.* 1999] répondent au désir de segmentation sans transition, de reconstruction pour le premier, de restauration pour le second, et suppriment donc la dépendance de la qualité du résultat – la segmentation – de celle des intermédiaires – une reconstruction ou une restauration.

# Chapitre 6

## Méthode proposée

### 6.1 L'idée

Elle a pour fondement la contrainte géométrique par contours actifs. Nous choisissons *a priori* le nombre de régions anatomiques et nous modélisons chacune par son contour et son coefficient d'atténuation supposé connu. Nous fixons des contours initiaux que nous faisons évoluer sur le principe exploité par [Santosa 1996] en nous appuyant directement sur les projections en transmission. La vitesse d'évolution des contours doit être de type région pour mieux gérer le problème de la faible résolution et du bruit.

### 6.2 La méthode

#### 6.2.1 Un critère de reconstruction

Le développement théorique dans [Santosa 1996] justifie la méthode proposée à ceci près que garde n'est peut-être pas suffisamment prise de la discontinuité à la hauteur des frontières entre les régions. Notre choix de vitesse d'évolution des contours actifs est véritablement heuristique. Il tient son origine d'un critère classique des moindres carrés employé en reconstruction :

$$J(\mu) = \int_{\Theta} \{(R\mu)(r) - P(r)\}^2 \quad (6.1)$$

où  $\Theta$  est le domaine de définition des projections,  $R$  est l'opérateur de projection en transmission,  $\mu$  est la carte d'atténuation inconnue,  $P$  représente les projections acquises, en transmission, et  $r$  est un point de  $\Theta$  que nous aurions pu nommer  $x$  mais que nous avons nommé  $r$  pour mieux distinguer une expression écrite dans le domaine des projections d'une expression du domaine de l'image. En continu et en passant par dessus les considérations probabilistes pour simplifier, une valeur de projection est donnée par :

$$P(r) = A \times \exp - \int_{L_a^r} \mu(x) \quad (6.2)$$

où  $A$  est le nombre de photons émis depuis  $a$ , point d'émission extérieur au patient donc, dans la direction  $L_a^r$ ,  $r$  étant le point destination dans les projections. Synthétiquement, l'équation (6.2) prend la forme :

$$P(r) = (R\mu)(r) \quad (6.3)$$

On retrouve  $R$ , l'opérateur de projection en transmission, visiblement non linéaire. Mais, consécutivement à une division par  $A$ , prenons le logarithme naturel de (6.2) :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{P(r)}{A}\right) &= - \int_{L_a^r} \mu(x) \\ \iff \tilde{P}(r) &= \int_{L_a^r} \mu(x) \\ \iff \tilde{P}(r) &= (\tilde{R}\mu)(r) \end{aligned} \tag{6.4}$$

où  $\tilde{R}$  n'est plus tout à fait un opérateur de projection en transmission. Il est linéaire et l'équation (6.4) ressemble à celle de formation des projections en émission. Ainsi, nous appelons  $\tilde{R}$  l'opérateur de projection de type émission. Les projections  $\tilde{P}(\cdot)$ , qui sont le logarithme de la division de  $A$  par les projections en transmission, sont également qualifiées de type émission. Faisons dorénavant fi des tildes et considérons que l'équation (6.1) faisait déjà intervenir des éléments de type émission. Ce qui suit doit également être interprété en tant que type émission. Il est important de noter qu'une projection de type émission est composée de valeurs d'autant plus grandes que les régions atténuantes sont atténuantes, ou profondes, ou les deux – une projection en transmission manifeste un comportement opposé. Mais avant d'aller plus loin, discutons des conséquences de cette manipulation. Le bruit dans les projections, de Poisson en transmission, n'a plus de caractéristique *reconnaissable* en type émission. Le critère (6.1) peut cependant être déduit de l'hypothèse, probablement fausse, d'un bruit Gaussien dans les projections de type émission. Quoi qu'il en soit, nous n'avons pas besoin, dans notre approche, de connaître les propriétés du bruit. Nous nous contenterons de lisser les contours de segmentation au moyen d'une contrainte géométrique, indépendamment de sa nature. Mais nous n'en sommes pas là.

Le but est de minimiser le critère (6.1) en  $\mu$ . Il faut donc résoudre l'équation d'Euler-Lagrange associée :

$$\begin{aligned} \nabla J &= \vec{0} \\ \iff R^* \{R\mu - P\} &= \vec{0} \end{aligned} \tag{6.5}$$

où  $R^*$  est l'opérateur conjoint de  $R$ . Dans le domaine discret,  $R$  est une matrice et  $R^*$  est la matrice transposée  $R^t$  appelée opérateur de rétroprojection.

### 6.2.2 Vitesse d'évolution

Nous avons trois régions thoraciques et trois contours associés : un pour le contour extérieur du thorax, un pour la colonne vertébrale et un contour double pour les poumons. Nous avons donc trois contours actifs et autant d'équations d'évolution. L'équation générale d'évolution d'un contour actif géométrique est – voir section 2.3.2 – :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \nu \vec{N} \tag{6.6}$$

où  $\Gamma(\cdot, \cdot)$  est un des trois contours actifs,  $\nu(\cdot, \cdot)$  est la vitesse d'évolution et  $\vec{N}(\cdot, \cdot)$  est la normale, directe et de norme unitaire, au contour. À chaque instant, les contours forment la configuration estimée de la segmentation de la carte d'atténuation. Nous pouvons en calculer les projections. Si elles sont identiques aux projections acquises, alors  $\{(R\mu)(r) - P(r)\}$  vaut zéro pour tout  $r$ , et ainsi  $\nabla J(x)$  est également nul pour tout  $x$ . En donnant à  $\nu(\cdot)$  la valeur  $\pm \nabla J(\cdot)$ , on garantit qu'à convergence  $(\partial \Gamma / \partial t)(\cdot)$  est nulle partout et que donc le contour n'évolue plus. Le but est atteint. Il reste à savoir si ce doit être  $+\nabla J(\cdot)$  ou  $-\nabla J(\cdot)$ . Raisonnons au cas par cas à partir du schéma 6.1.

Si les contours sont correctement situés sauf le contour extérieur du thorax qui est extérieur au contour réel, alors la valeur calculée de la projection le long de la ligne noire est plus élevée que la valeur mesurée. Alors  $\{(R\mu)(r) - P(r)\}$  est strictement positif et la valeur rétroprojetée le long de cette même ligne, qui n'est autre que  $\pm\nabla J(\cdot)$ , est strictement positive. Le contour extérieur estimé étant trop large, il faut évoluer dans le sens de la normale interne. Le bon choix pour la vitesse d'évolution est donc  $+\nabla J(\cdot)$ . Un cheminement parallèle dans le cas où le contour extérieur du thorax est intérieur au contour réel s'achève sur la même déduction.

On confirme cette conclusion en rééditant les quelques phrases précédentes à propos de la colonne vertébrale.

La monotonie est brisée grâce aux poumons. Supposons toujours que les contours sont bien placés à l'exception des poumons, à l'extérieur des vrais poumons, réduisant donc l'espace alloué aux tissus mous. L'atténuation des poumons est environ le tiers de celle moyenne des tissus mous. On conclut sans risque que l'atténuation calculée est plus faible que la mesure. Donc la rétroprojection est strictement négative alors qu'il faut déformer les contours des poumons dans le sens de la normale interne. Cela impose que la vitesse d'évolution soit prise à  $-\nabla J(\cdot)$ .

En conclusion, voici les équations d'évolution – équation (6.7) pour le contour extérieur du thorax et la colonne vertébrale, et (6.8) pour les poumons – :

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t} = +\nabla J.\vec{N} \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t} = -\nabla J.\vec{N} \quad (6.8)$$

### 6.2.3 Régularisation

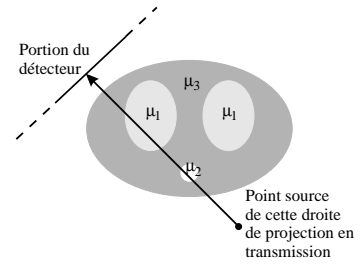
Le processus d'évolution des contours actifs est guidé par la vitesse d'évolution  $\pm\nabla J(\cdot)$  généralement corrompue par le bruit dans les projections. Pour cela, les contours finaux peuvent être irréguliers et de petits morceaux de contours ont pu rester accrochés et se déchirer pour encercler des pics de bruit. Ainsi que nous l'avons vu en section 2.4.2, une contrainte d'aire minimale est adaptée à la régularisation de ce genre de processus car de minces sacrifices en consistance avec les données – le critère (6.1) – permettent le lissage des contours principaux, et le cas échéant, le rétrécissement jusqu'à disparition des plus petits. L'expression de cette pénalité est :

$$J_{\text{rég}}(\mu) = J_{\text{rég}}(\Gamma_n) = \sum_{n=1}^3 \int_{\Gamma_n} d\varepsilon \quad (6.9)$$

où  $\Gamma_n(\cdot)$  est un contour parmi les trois et  $d\varepsilon$  est l'élément infinitésimal d'aire sur  $\Gamma_n(\cdot)$ . La minimisation de (6.9) par rapport à  $\Gamma_n(\cdot)$  est obtenue par résolution de l'équation :

$$\frac{\partial\Gamma_n}{\partial t} = \kappa_n \vec{N}_n \quad (6.10)$$

où  $\kappa_n(\cdot, \cdot)$  est la courbure de  $\Gamma_n(\cdot, \cdot)$  et  $\vec{N}_n(\cdot, \cdot)$  est la normale, directe et de norme unitaire, à  $\Gamma_n(\cdot, \cdot)$ . Rappelons que cette contrainte d'aire minimale est aussi nommée contrainte de courbure. L'addition de l'équation de régularisation (6.10) aux équations d'évolution (6.7) et (6.8) est précédée d'une multiplication de cette première par un paramètre positif  $\delta_n$



**Fig. 6.1** Comparaison entre la projection estimée et la projection mesurée.



d'ajustement du poids relatif des deux composantes. Les équations d'évolution sont donc maintenant :

$$\frac{\partial \Gamma_n}{\partial t} = \{\pm \nabla J + \delta_n \kappa_n\} \vec{N}_n \quad (6.11)$$

Nous avons permis de pondérer différemment la contrainte de courbure suivant les contours – dépendance en  $n$  de  $\delta$  – parce que la colonne vertébrale et le contour extérieur du thorax par exemple ont des courbures très éloignées. Si forte est celle de la colonne qu'en appliquant une régularisation globale importante afin de lisser suffisamment le contour extérieur, on pourrait bien la faire disparaître comme la vulgaire segmentation d'un pic de bruit. Nous n'en dirons pas davantage avant la section 10.5. Voir également la section 10.8.

### 6.2.4 Algorithme

Commençons par numéroter les  $n$  : un pour les poumons, deux pour la colonne vertébrale et trois pour les tissus mous. L'évolution des contours actifs est gérée par les ensembles de niveaux – voir section 3. Soit  $u_n(\dots)$  l'ensemble de niveaux qui représente le contour  $\Gamma_n(\dots)$ . La carte d'atténuation  $\mu(\dots)$  est entièrement déterminée par les signes des  $u_n(\dots)$  et les trois coefficients d'atténuation supposés connus  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  et  $\mu_3$ . Un point en lequel  $u_1(\dots)$  est négatif est situé dans un poumon. On lui assigne la valeur  $\mu_1$ . Pareillement avec l'indice deux puis trois. Si ces étapes successives ont échoué, le point est en-dehors du thorax : on lui attribue une valeur nulle d'atténuation. L'équation (6.11) est métamorphosée par les ensembles de niveau en – voir annexe A – :

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \{\pm \nabla J + \delta_n \kappa_n\} \cdot |\nabla u_n| \quad (6.12)$$

où :

$$\kappa_n = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|} \right) \quad (6.13)$$

La mise en œuvre informatique demande de discrétiser les dérivées continues impliquées. L'annexe F y répond partiellement par une approximation de  $\kappa_n(\dots)$ . Nous complétons ici même avec celle au premier ordre de  $\partial u_n / \partial t$  :

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(\cdot, t) \approx \frac{u_n(\cdot, t + dt) - u_n(\cdot, t)}{dt} \quad (6.14)$$

Nous n'allons pas tarder à donner un diagramme de l'algorithme plus de temps qu'il ne faut pour expliquer sommairement le calcul des projections estimées à l'instant  $t$ ,  $(R\mu)(\cdot, t)$ . Sur le schéma 6.2 est représentée une droite de projection en transmission avec le point d'émission des photons à gauche et le point de détection pour lequel nous voulons calculer la valeur de type émission à droite. La droite de projection traverse des voxels du volume atténuant discrétisé. Chaque voxel reçoit le coefficient d'atténuation de la région à laquelle il appartient. La valeur de projection de type émission est la somme sur tous les voxels traversés des produits entre la longueur d'intersection de la droite avec un voxel et son coefficient d'atténuation. Place à la synthèse de l'algorithme : tableau 6.1

En dimension trois, les ensembles de niveaux initiaux sont, pour toutes les régions, tels que leur contour de niveau zéro est un cylindre à section circulaire – en ce qui concerne la colonne vertébrale – ou elliptique. En dimension deux, ce sont simplement des coupes transverses, c'est-à-dire orthogonales à l'axe du corps, des ensembles de niveaux tridimensionnels.

Le paramètre  $dt$  est choisi tel que la valeur absolue de la vitesse d'évolution multipliée par  $dt$  soit comprise entre 0,1 et 0,2 durant les deux ou trois premières itérations. Nous

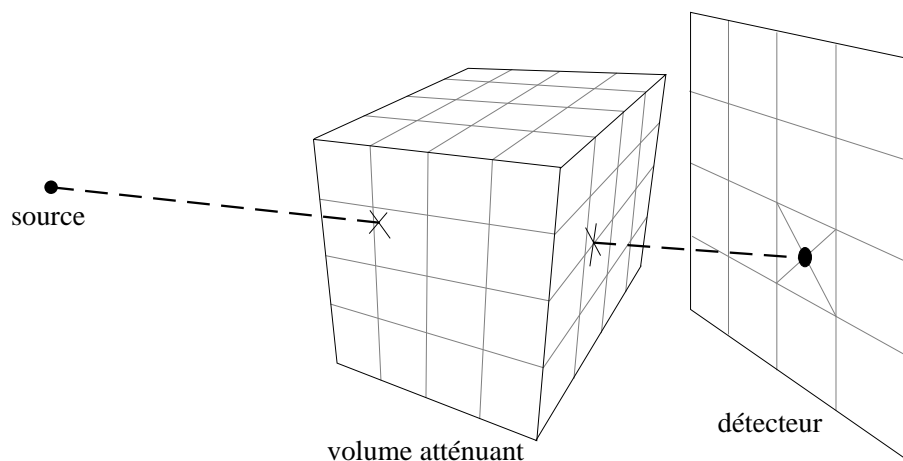


Fig. 6.2 Calcul des projections estimées.

avons remarqué que ces bornes arbitraires *assurent* à la fois la stabilité du processus et une vitesse de convergence raisonnable.

Le signal de convergence est donné par l'annulation sans réserve des vitesses d'évolution  $\pm \nabla J(., t) + \delta_n \kappa_n(., t)$ . Étant entendu qu'en pratique on peut attendre longtemps ce miracle, nous avons pris le parti d'arrêter l'algorithme lorsque la valeur maximale des vitesses d'évolution dans un voisinage proche des contours de niveau zéro des  $u_n(., t)$  passe sous un seuil – voir section 3.2.5.

## 6.3 Évaluation expérimentale

### 6.3.1 Une acquisition en transmission

Nous avons recueilli le fruit d'une expérience d'acquisition de projections en transmission du large fantôme de torse de Jaszczak – Data Spectrum Corp., Chapel Hill, NC, États-Unis – menée au MIRL, Salt Lake City, UT, États-Unis. La manœuvre s'est jouée sur une gamma-caméra à deux détecteurs de modèle Prism 2000 et de manufacture Picker International Inc., Cleveland, OH, États-Unis. Les collimateurs étaient de géométrie parallèle pour éviter toute troncature. À présent, parlons chiffres. Une pause de 90 secondes pour chacune des 120 directions de projection échelonnées sur 360 degrés a eu raison de trois heures de temps. Les projections ont été acquises avec une discrétisation du détecteur de 128x120 pixels.

### 6.3.2 Un résultat

Le calcul de la segmentation de la carte d'atténuation est effectué directement d'après les projections. Pourquoi alors reconstruire cette carte avec une cinquantaine d'itérations de l'algorithme ML-EM? Afin de pouvoir superposer la segmentation à quelque chose et surtout pour y mesurer, valeurs moyennes dans des régions sphériques, les coefficients d'atténuation  $\mu_n$  dont nous avons besoin. Les dimensions choisies pour les  $u_n(.)$  sont 128x128x120. Nous avons d'abord développé la méthode en dimension deux. Un résultat faussement tridimensionnel s'obtient par empilement de coupes transverses. Les multiples projections et rétroprojections qui servent au calcul des vitesses d'évolution des ensembles de niveaux sont responsables d'une durée de convergence qui viendrait à bout de la plus profonde patience. Nous nous sommes donc contentés de l'utilisation d'une projection sur

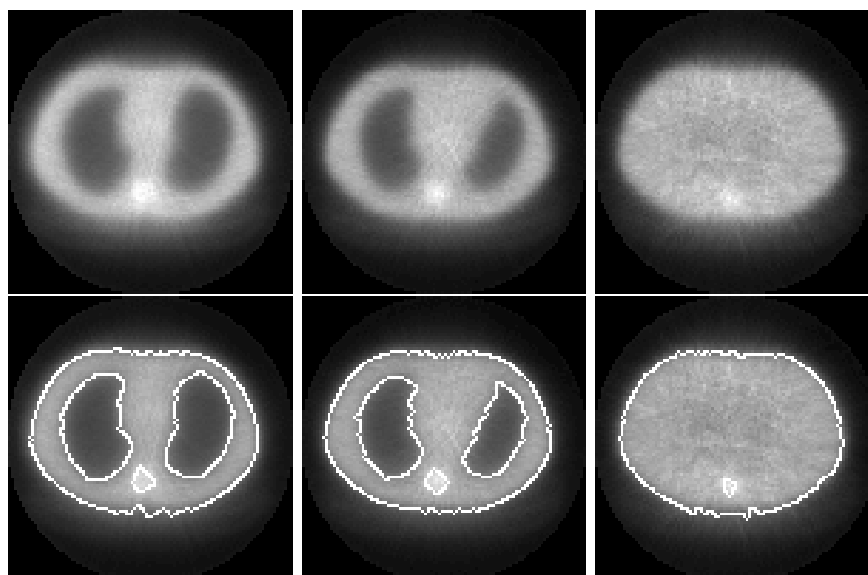
<p><math>\mu_1, \mu_2</math> et <math>\mu_3</math> : coefficients d'atténuation constants et connus  <math>u_n(., t = 0) \leftarrow</math> ensemble de niveaux initial de la région <math>n</math>  <math>t \leftarrow 0</math>  Fixer le paramètre <math>dt</math> (voir plus loin dans cette section)</p> <p><b>répéter</b></p> <p><i>Étape 1</i> : calcul du gradient du critère <math>\nabla J</math>  Calcul des projections estimées <math>(R\mu)(., t)</math>  <math>\nabla J(., t) \leftarrow (R^t\{R\mu - P\})(., t)</math></p> <p><i>Étape 2</i> : calcul des courbures <math>\kappa_n</math> (voir annexe F)</p> <p><i>Étape 3</i> : mise à jour de la segmentation <math>u_n</math>  <math>u_1(., t + dt) = u_1(., t) + dt \times \{-\nabla J(., t) + \delta_1 \kappa_1(., t)\} \times  \nabla u_1 (., t)</math>  <b>pour</b> <math>n</math> <b>dans</b> <math>\{2, 3\}</math>  <b>faire</b>  <math>u_n(., t + dt) = u_n(., t) + dt \times \{\nabla J(., t) + \delta_n \kappa_n(., t)\} \times  \nabla u_n (., t)</math>  <b>fait</b></p> <p><math>t \leftarrow t + dt</math>  <math>t_{\max} \leftarrow t</math></p> <p><b>jusqu'à</b> convergence (voir plus loin dans cette section)</p> <p>Segmentation <math>\leftarrow</math> contours de niveau zéro des <math>u_n(., t_{\max})</math></p>
---

**Tab. 6.1** Algorithme de segmentation des cartes d'atténuation.

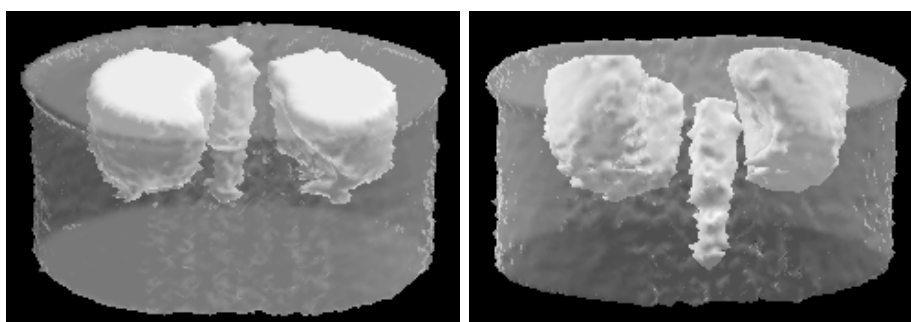
quatre. Pour chaque coupe, l'initialisation a été constituée d'ellipses pour le contour extérieur du thorax et les poumons, et d'un cercle pour la colonne vertébrale. D'une coupe à l'autre, les dimensions de ces éléments ont été conservées. Dans les coupes de la reconstruction où les poumons ou la colonne vertébrale n'étaient pas présents, les contours initiaux associés n'ont pas été placés. Ainsi, par empilement des initialisations des coupes, nous aurions obtenu des cylindres de section elliptique ou circulaire. La segmentation calculée est présentée en figures 6.3 et 6.4. Afin de disposer d'un moyen de comparaison objectif avec le fantôme, nous avons fait une acquisition en IRM après avoir rempli d'eau le volume des tissus mous et celui du foie. L'image tridimensionnelle obtenue a été segmentée par simple seuillage. Nous avons alors compté les voxels dans chaque région. Nous avons effectué les mêmes inventaires sur la segmentation calculée. Les résultats en valeurs relatives au volume total du fantôme sont respectivement pour les tissus mous, le poumon droit, le poumon gauche et la colonne vertébrale :

- dans l'image IRM, 82,9 %, 8,7 %, 6,9 % et 1,4 % ;
- dans la segmentation 2D, 83,9 %, 8,0 %, 7,0 % et 0,9 % ;
- correspondant aux erreurs relatives par rapport au volume de la région concernée dans l'image IRM +1,2 %, -7,6 %, +0,3 % et -27,6 %.

Sur la figure 6.3, image en bas et à gauche, on constate que la région postérieure de la segmentation de l'enveloppe du thorax est perturbée. La régularisation n'y fait pas grand chose, à moins peut-être de l'augmenter franchement. Mais ce serait au risque de voir les

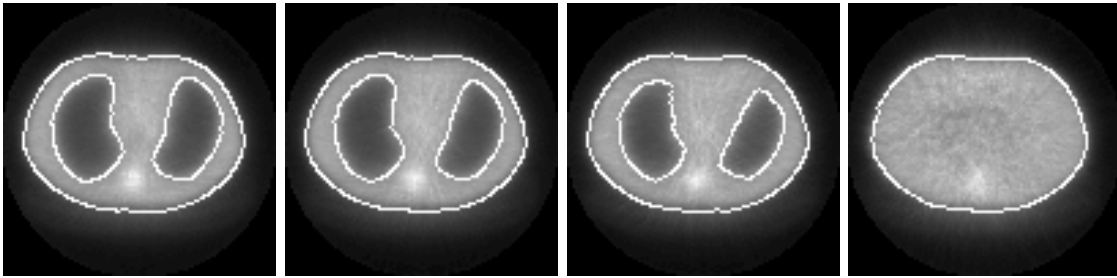


**Fig. 6.3** Trois coupes de la carte d'atténuation du fantôme de thorax. La reconstruction provient d'un algorithme ML-EM et la segmentation bidimensionnelle y est superposée sur la ligne du bas.



**Fig. 6.4** Vues en trois dimensions de l'empilement des segmentations bidimensionnelles du fantôme de thorax.

contours passer à travers les régions à segmenter. Nous pensons que cela est dû à l'influence de la colonne vertébrale. En effet, le contour qui la matérialise est irrégulier. Malheureusement, en raison de sa petite taille, nous n'avons pas une marge de manœuvre suffisante en termes de régularisation – voir section 2.4.2 à propos de la contrainte de courbure et des contours de petite dimension. Nous avons décidé de supprimer le contour correspondant à la colonne vertébrale dans l'extension de la méthode à la troisième dimension. Les ensembles de niveaux créés par empilement des résultats bidimensionnels ont servi de conditions initiales. La différence avec le résultat en dimension deux se voit surtout sur des coupes. Nous en présentons quelques unes sur la figure 6.5. Nous avons effectué les mêmes calculs de volume qu'en fausse dimension trois, mais pas de colonne vertébrale cette fois. Nous avons respectivement obtenu pour les tissus mous, le poumon droit et le poumon gauche : 81,2 %, 9,3 % et 8,1 %. Cela correspond aux erreurs relatives par rapport au volume de la région concernée dans l'image IRM -2,1 %, +7,1 % et +16,3 %.



**Fig. 6.5** Quatre coupes de la carte d'atténuation du fantôme de thorax. La reconstruction provient d'un algorithme ML-EM et la segmentation tridimensionnelle y est superposée.

# Chapitre 7

## Discussion

### 7.1 Validité des hypothèses

Les quatre hypothèses sont *(i)* qu'une carte d'atténuation est composée de régions anatomiques délimitées par des contours *(ii)* à l'intérieur desquels l'atténuation est uniforme *(iii)* et connue; *(iv)* ces régions sont au nombre de trois. La première hypothèse est certainement proche de la réalité. La deuxième n'est pas farfelue. La troisième est discutable. Bien sûr il existe des tables où des coefficients moyens d'atténuation, des ordres de grandeur sont donnés. Il faut les prendre avec précaution, au moins jusqu'à ce que l'influence des valeurs des coefficients sur la segmentation soit établie strictement ou d'expérience – voir section 7.6. La quatrième hypothèse est caricaturale. Les poumons, la colonne vertébrale et les tissus mous pour résumer la diversité du thorax. D'après [Riddell *et al.* 2000], la correction d'atténuation avec une telle carte d'atténuation segmentée, si elle n'introduit pas de bruit puisque la segmentation en est dépourvue, cause un biais des images d'émission. Serait-ce la preuve par l'exemple que le raccourci des trois régions est trop sévère? Mais tout n'est pas perdu car, toujours selon la même étude, la segmentation utilisée en masque de lissage adaptatif d'une carte d'atténuation reconstruite donne naissance à une carte lissée qui permet une correction d'atténuation avec un très faible ajout de bruit et un biais quasi nul. Dans ce contexte, la dernière hypothèse est convenable.

### 7.2 Avantages de la méthode

Un inconvénient de la méthode proposée par [Battle *et al.* 1999] et qui, par antagonisme, est un avantage de la nôtre, est la contrainte imposée par le choix du nombre de points d'ancrage et de leur espacement. Le cadre, encore mal maîtrisé, des déformations permises en est limité. En particulier, l'aspect local ou global des déformations est commandé par une plus ou moins grande densité des points d'ancrage respectivement en même temps qu'une plus ou moins grande instabilité. Nous n'avons pas cette contrainte. Les déformations de nos contours actifs seraient totalement libres si elles n'étaient guidées par la consistance aux données.

### 7.3 Critique des résultats expérimentaux

On peut déjà leur – en fait lui – reprocher de n'être pas assez nombreux. De plus, le temps total d'acquisition est bien loin de la réalité clinique. Les projections sont donc beaucoup moins bruitées que d'ordinaire. Enfin, il n'y a pas de troncature – le fantôme est

entièrement visible dans toutes les projections. Les données ne sont tout de même pas de qualité synthétique mais on aurait presque envie de dire idéales pour un traiteur d'images TEMP.

Le tableau 7.1 reprend tous les chiffres de volume énumérés à la section 6.3.2. À propos

	Tissus mous	Poumon droit	Poumon gauche	Colonne vertébrale
Image IRM	82,9	8,7	6,9	1,4
Segmentation 2D	83,9	8,0	7,0	0,9
Erreur relative	+1,2	-7,6	+0,3	-27,6
Segmentation 3D	81,2	9,3	8,1	–
Erreur relative	-2,1	+7,1	+16,3	–

**Tab. 7.1** Volumes relatifs – pourcentages – des différentes régions du fantôme, les mesures sur l'image IRM servant de références.

des résultats en dimension deux, signalons que la colonne vertébrale est, en coupe transverse, un petit objet par rapport à la résolution d'une gamma-caméra. On peut donc supposer que sa projection est marquée par l'effet de volume partiel [Hoffman *et al.* 1979, Kojima *et al.* 1989]. Elle apparaît donc plus mince qu'elle n'est d'où une sévère sous-estimation de son volume dans la segmentation. Nous pensons de plus que l'impossibilité de régulariser suffisamment son contour, et par conséquent son aspect irrégulier, entraînent du bruit dans les projections estimées pour les directions de projection de face et de dos. Ce bruit se retrouve forcément dans la différence avec les projections acquises puis dans les directions de rétroprojection de face et de dos. Si ce raisonnement est valable, le rayon d'influence du bruit est un peu étendu autour de la position du contour de la colonne vertébrale. Il dérange alors l'évolution du contour de l'enveloppe du thorax dans une région postérieure limitée proche de la colonne vertébrale. La conclusion serait que, pour bien régulariser le contour de l'enveloppe du thorax, il faudrait pouvoir en faire autant avec celui de la colonne vertébrale. Or, nous avons signalé que cela n'était pas envisageable. C'est pourquoi, nous avons décidé de supprimer le contour de la colonne vertébrale. Cette interprétation du phénomène doit être vérifiée sur des simulations puis en étudiant plus précisément la segmentation de cette acquisition.

## 7.4 Influence de l'initialisation

L'initialisation des contours est certainement très importante. Nous n'en avons pas de preuve théorique mais une réflexion intuitive nous pousse à le croire. Choisissons au départ un contour extérieur du thorax de taille largement surestimée et un contour de colonne vertébrale presque filiforme. Donnons initialement aux poumons leur contour exact par exemple. Les projections de cette carte d'atténuation d'un autre monde sont beaucoup plus élevées que les projections acquises. La vitesse d'évolution des contours, rétroprojection de l'erreur ainsi strictement positive, incite les contours extérieur et de la colonne vertébrale au rétrécissement, qui signe probablement la disparition de la colonne. Un contour actif se déforme, devient globalement plus gros ou plus petit mais lorsqu'il rétrécit jusqu'à disparition, il ne peut plus renaître. Quoiqu'avec la modélisation par un ensemble de niveaux, la disparition du contour, contour de niveau zéro rappelons-le, est synonyme de valeurs de  $u_n(.,.)$  partout strictement positives. Si ensuite la vitesse d'évolution est strictement négative, des valeurs de  $u_n(.,.)$  peuvent réapparaître strictement négatives donnant vie à

nouveau à un contour de niveau zéro. Cependant, tout le temps que  $u_n(.,.)$  a été strictement positive, point de contour de niveau zéro donc point de réinitialisation de l'ensemble de niveaux. En conséquence, le contour de niveau zéro ressuscité a de grandes chances d'être chaotique, inexploitable.

À la lumière de cet exemple exagéré, nous proposons d'initialiser le contour extérieur du thorax plutôt à l'intérieur du vrai contour et le contour de la colonne vertébrale avec une épaisseur suffisante. Notons d'ailleurs qu'il est envisageable d'obtenir des contours initiaux de bonne qualité en s'appuyant sur la rétroprojection des données.

## 7.5 Convergence de l'algorithme

Après lecture de la section 6.2, qui croirait que nous avons une démonstration de convergence ? Et la section 7.4 enfonce le clou. Encore et toujours un exemple pour illustrer la difficulté d'une telle preuve. Nous l'avons utilisé à la section 6.2.2. Il s'agit d'une carte d'atténuation estimée dont les contours sont correctement placés sauf un. On calcule les projections associées. On leur soustrait les projections acquises. La différence n'est pas nulle. On la rétroprojette : on étale des valeurs différentes de zéro le long des lignes de projection qui traversent le domaine de définition  $\Omega$  des ensembles de niveaux  $u_n(.,.)$ , pour obtenir la vitesse d'évolution. Au niveau du contour mal placé, la vitesse d'évolution prend des valeurs adaptées à la déformation vers la bonne position. Malheureusement, au niveau des contours pourtant bien placés, la vitesse d'évolution a, du fait de l'étalement de l'erreur, probablement des valeurs non nulles. En bref, la rétroprojection de l'erreur entre les projections calculées de la carte d'atténuation estimée et les projections acquises est à l'origine d'une dépendance malencontreuse entre les déformations des contours.

## 7.6 Travaux supplémentaires

Dans l'état actuel de la méthode, il serait intéressant, et à la fois difficile, de déterminer l'influence sur la segmentation calculée de l'utilisation de coefficients d'atténuation ne correspondant pas à ceux du thorax acquis. Les projections que nous avons traitées à la section 6.3.2 proviennent de l'acquisition d'un fantôme élémentaire tout à fait en accord avec notre modèle. Toutefois, nous pouvons nous tromper dans le choix des coefficients. Mais avec un thorax de patient, cette possibilité est inévitable car les tissus mous ne forment pas une région atténuante homogène comme nous le supposons. Le coefficient unique que nous employons ne correspond donc pas à l'acquisition. Comment cela rejaillit-il sur la segmentation ? D'après [Battle *et al.* 2000], les conséquences sont importantes, au point qu'y est proposé d'estimer les coefficients et la segmentation en simultané. La méthode de segmentation est identique à [Battle *et al.* 1999]. Celle d'estimation des coefficients n'est pas décrite. Il est simplement précisé que les valeurs initiales doivent être proches des solutions. Essayons de voir comment évaluer ces coefficients à partir du critère (6.1) que nous rappelons :

$$J(\mu) = \int_{\Theta} \{(R\mu)(r) - P(r)\}^2$$

Soit  $\Omega_n$  la région anatomique  $n$ . Dans la foulée, la fonction caractéristique de  $\Omega_n$  s'appellera  $\Omega_n(\cdot)$  – autrement dit,  $\Omega_n(x)$  vaut un si  $x$  appartient à  $\Omega_n$ , zéro sinon. Les  $\Omega_n$  sont



d'intersection vide deux à deux. La carte d'atténuation  $\mu(\cdot)$  est décomposée en :

$$\mu = \sum_{n=1}^3 \mu_n \Omega_n \quad (7.1)$$

On remplace (7.1) dans (6.1), dérivation par rapport à  $\mu_i$ , égalisation à zéro, résolution en  $\mu_i$  :

$$\mu_i = - \frac{\left\langle \left\{ \sum_{n=1, n \neq i}^3 \mu_n R \Omega_n \right\} - p, R \Omega_i \right\rangle}{\langle R \Omega_i, R \Omega_i \rangle} \quad (7.2)$$

Les inconnues seraient désormais les  $u_n(\cdot)$  et les  $\mu_n$ . On déciderait de valeurs initiales pour chacune. Puis on résoudreait en  $u_n(\cdot)$  à  $\mu_n$  constant. Puis le contraire. Puis ainsi de suite, schéma de minimisations alternées, jusqu'à convergence. Il y a fort à parier que, comme il est conclut dans [Battle *et al.* 2000], les valeurs initiales des coefficients doivent être prises non loin des vraies.

Il est clair que, sous l'effet de la gravité, les tissus postérieurs d'un patient couché sur le dos lors d'une acquisition thoracique en transmission sont comprimés et subissent un afflux de sang. Il est connu qu'il en résulte, à atténuation intrinsèque égale, une plus grande atténuation effective postérieure qu'antérieure. Ce phénomène n'est toutefois observé qu'à l'intérieur des poumons. En vertu de quoi, nous pourrions remplacer notre modèle de carte d'atténuation constante par morceaux par un modèle affiné par morceaux, plus périlleux à estimer bien sûr.

Si nous reconnaissons en plus qu'une évaluation sur des données cliniques, bruitées, affligées par la troncature, est essentielle, nous n'avons pour autant pas énuméré tous les travaux supplémentaires envisageables. On peut par exemple penser à étudier l'influence du nombre de projections à temps total d'acquisition constant. Plus précisément, notre méthode de segmentation est-elle capable, du fait de la contrainte géométrique intrinsèque des contours actifs et avec l'aide de la contrainte de courbure, de produire des résultats corrects lorsque le nombre de projections est réduit ? Si tel était le cas, il serait peut-être rentable d'acquérir peu de projections, chacune avec un temps de pause plus long pour obtenir des données moins bruitées.

### III SEGMENTATION DE SÉQUENCES CARDIAQUES

---



# Chapitre 8

## Contexte

Dans cette partie, il est question de cœur, et plus particulièrement de ventricule gauche. Ce dernier est plus épais que le reste des éléments du myocarde, donc plus facile à segmenter. Mais en même temps, il est le plus concerné par la maladie coronaire. Comme quasiment tous les travaux de traitement d'images appliqués à l'imagerie cardiaque, nous ne nous intéressons qu'à lui. Toutefois, en quelques occasions, cœur ou myocarde sont employés plutôt que ventricule gauche, à des fins esthétiques et presque sans autre incidence. Précisons que le myocarde désigne le muscle cardiaque. Ainsi, quand on parle de l'intérieur du myocarde, les cavités, parmi lesquelles celle du ventricule gauche, ne sont pas de la partie. Il s'agit de l'épaisseur du muscle. L'endocarde et l'épicarde représentent respectivement les parois interne et externe du ventricule gauche. La systole est la période du cycle cardiaque correspondant à la contraction du ventricule gauche. La diastole est la période du cycle au cours de laquelle le ventricule gauche se relâche. Pour indiquer les instants de contraction maximale et de relâchement total, on parle respectivement de télésystole et télédiastole.

---

### 8.1 Flou cinétique

#### 8.1.1 Examen cardiaque traditionnel

Lors d'un examen cardiaque traditionnel de médecine nucléaire, le détecteur – ou les détecteurs d'une gamma-caméra multi-têtes – acquiert les photons émis par le cœur dans un ensemble successif de directions avec un temps de pause de l'ordre de la dizaine de secondes. Une projection représente donc l'observation en continu de plusieurs cycles cardiaques et des poussières. La conséquence est un flou cinétique responsable d'une dégradation de résolution des projections et, par suite, de la reconstruction.

#### 8.1.2 Acquisition synchronisée

Un moyen de réduire l'effet du battement cardiaque sur la qualité des reconstructions est de synchroniser l'acquisition des photons sur l'électrocardiogramme. L'expression « acquisition synchronisée » est notre traduction du *gated SPECT* anglais. Le cycle cardiaque est découpé en  $N$  intervalles auxquels sont attribués équitablement  $N$  projections « partielles ». Pour une position du détecteur, les photons captés au cours du premier  $N^e$  de cycle sont affectés à la première projection partielle. Prochaine portion du cycle, projection partielle suivante. Les projections partielles sont épuisées lorsque le cycle se termine. Le nouveau cycle qui s'annonce est traité de la même manière, de la première à la dernière

projection partielle. La fin de la durée de pause sonne le glas de cette procédure périodique. La somme des  $N$  projections partielles obtenues alors est équivalente en termes de flou cinétique et de nombre de coups total à une projection traditionnelle équivalente, c'est-à-dire de même temps de pause. Individuellement, les projections partielles diffèrent d'une projection traditionnelle par un flou cinétique moindre, mais aussi par un rapport signal à bruit moins bon. Sont donc reconstruites  $N$  images du cœur dans les configurations moyennes respectives des  $N^{\text{es}}$  de cycle. La séquence cardiaque est l'ensemble de ces images.

## 8.2 Pourquoi et comment segmenter ?

### 8.2.1 Paramètres physiologiques

Des paramètres physiologiques tels que la fraction d'éjection et l'épaississement myocardique, ou la visualisation tridimensionnelle animée du battement cardiaque, sont utiles au diagnostic. Plus que la simple visualisation du mouvement, il est intéressant de déterminer la vitesse, sur les parois endocardique et épicaudique [Bardinet *et al.* 1996, Declerck 1997, Declerck *et al.* 1998] ou en tout point du myocarde [Gorce *et al.* 1997, Planat *et al.* 1998, Planat-Chrétien 1999], les courbures – ou une grandeur liée – des parois et leur évolution au cours du cycle [Clarysse *et al.* 1997]. Ces calculs peuvent requérir une étape de segmentation de la séquence, autrement dit, du myocarde dans les  $N$  configurations reconstruites. Clarysse *et al.* [1997] en font la demande écrite. Gorce *et al.* [1997] se passent de segmentation et les travaux présentés dans [Planat *et al.* 1998, Planat-Chrétien 1999] développent une méthode de segmentation et estimation de mouvement simultanées.

### 8.2.2 Segmentation séquentielle

Classiquement, les segmentations des  $N$  reconstructions sont indépendantes et réalisées séquentiellement. Elles n'utilisent que l'information spatiale de chaque image de la séquence. Les méthodes en question ont ou non un *a priori*, anatomique ou géométrique.

#### Sans *a priori*

Les contours actifs sont un moyen efficace de ne pas avoir d'*a priori* anatomique, c'est-à-dire géométrique, quoiqu'il ne s'agisse pas d'une impossibilité comme le prouvent Kass *et al.* [1987] ou Berger [1991]. Pour ce qui concerne l'IRM synchronisée, Yezzi *et al.* [1997] et Niessen *et al.* [1998] proposent d'employer des contours actifs géodésiques guidés par le gradient de l'image. Si les segmentations individuelles sont indépendantes les unes des autres, la séquence est étudiée dans l'ordre chronologique, l'initialisation de l'algorithme appliqué à l'image  $n + 1$  étant fonction de la segmentation calculée de l'image  $n$  et du flot optique de l'image  $n$  à l'image  $n + 1$ .

#### Avec *a priori* anatomique ou géométrique

Puisque, vu de loin, le cœur a une forme identique pour tout le monde, il est légitime de contraindre anatomiquement sa segmentation. On admet par exemple que, en dehors de l'apex, l'épaisseur moyenne du ventricule gauche en télédiastole est voisine de 1 cm. Cet argument, avec d'autres du même ordre, est utilisé par Germano *et al.* [1995] et Faber *et al.* [1999] afin de segmenter le myocarde dans chaque image de la séquence. Cela est réalisé en faisant appel à une mise en correspondance entre un profil radial du ventricule gauche et une courbe dépendant de paramètres, une décomposition de Fourier tronquée par exemple [Nichols *et al.* 1996], ou par une recherche de maximum d'intensité le long

d'un rayon [Germano *et al.* 1995, Faber *et al.* 1999]. Montagnat *et al.* [1999] utilisent, pour la segmentation d'images échocardiographiques par contours actifs, une recherche de maximum de la norme du gradient non loin d'une extrémité d'un segment, issu et normal au contour, situé dans une région relativement homogène – d'autres contraintes interviennent dans la désignation du maximum telle que la direction du gradient.

Un *a priori* géométrique est proposé par Clarysse *et al.* [1995]. Dès le départ, la surface endocardique est modélisée par une courbe *spline*. Puis une régularisation explicite est introduite. Elle défend la surface de segmentation de s'éloigner trop d'une surface de référence décrite grâce à un indice de forme utilisant les courbures principales [Koenderinck et Doorn 1992].

### 8.2.3 Segmentation avec cohérence temporelle

Les images d'une séquence sont liées entre elles par le fait qu'elles représentent le ou les mêmes objets à plusieurs instants : pour les séquences cardiaques, le cœur ; des passants pour celles de vidéo-surveillance. Pourquoi donc ne pas segmenter une séquence en se servant de l'information fournie par la transition temporelle entre les images successives ? On parle alors de segmentation spatio-temporelle dont la plus simple version est l'exploitation de la différence entre deux images successives seulement. La contrainte – locale temporellement – de conservation de l'intensité d'un point mobile ou non d'une image à la suivante est à l'origine de l'équation du flot optique qui est due à Horn et Schunck [1981]. Une version régularisée est développée dans [Gorce *et al.* 1997] pour l'application aux séquences cardiaques. Toutefois, ce procédé est bas niveau. Dans l'optique de l'adapter à des tâches évoluées de segmentation ayant une cohérence spatiale plus solide – groupement en régions spatiales de comportement cinétique homogène –, il faut introduire un modèle de mouvement, affiné [Bouthemy et François 1993] ou quadratique [Csurka et Bouthemy 1999] par exemple.

La déformation du cœur au cours du cycle cardiaque est complexe. Nous ne savons pas la modéliser fidèlement. D'un autre côté, nous ne voudrions pas perdre la généralité de la segmentation à cause d'un modèle trop rigide. La solution envisagée par Montagnat [1999] est une segmentation spatio-temporelle à mémoire de forme et de déformation. Autrement dit, il utilise la segmentation d'une séquence de référence comme modèle duquel il ne faut pas trop s'éloigner, tant spatialement – individuellement dans chaque image de la séquence – que temporellement – globalement en terme de déformation. Une contrainte supplémentaire de lissage temporel est employée dans cette méthode de contours actifs mis en œuvre par maillage simplexe – tétradimensionnel donc. Une autre possibilité, que nous avons choisie, est de développer une méthode sans modèle de déformation. Nous aimerions, tout comme dans [Montagnat 1999], tenir compte d'emblée de toute l'information disponible et pas uniquement deux images par deux images. Naturellement, cela nous interdit un traitement en temps réel, ce qui nous importe peu en fait.

À la section suivante, nous exposons succinctement et donnons quelques intuitions d'une méthode de segmentation de ce type, mais plus générale, qui est véritablement à l'origine de celle que nous proposons au chapitre 9.

### 8.2.4 Une segmentation simultanée *pixel*

Sautons le pas par rapport à la section précédente en nous demandant : pourquoi ne pas segmenter une séquence d'un trait en se servant de la cohérence entre les images ? C'est l'objet de [Kornprobst *et al.* 1999] dans le cadre de la vidéo-surveillance. Voici en bref le contexte et le principe de ce travail.

### Critère non contraint

Par hypothèse, une séquence est composée d'images en plan fixe dont l'arrière-plan – ou fond – est occulté par des objets non rigides en mouvement – par exemple, une séquence acquise avec une gamma-caméra de surveillance immobile. Ainsi, le fond est identique dans chaque image, ou bien encore, un pixel du fond qui n'est pas masqué par un objet est considéré d'intensité constante. Avant de présenter la première équation, faisons une remarque. À supposer que l'image du fond soit connue, sa comparaison pixel à pixel à une image quelconque de la séquence permettrait, selon qu'il y a correspondance ou non entre leurs valeurs, de segmenter cette dernière en fond et objet en mouvement. Le critère développé par Kornprobst *et al.* [1999] est le suivant :

$$J_1(c_n, b) = \sum_{n=1}^N \left[ \int_{\Omega} c_n^2(x) \times \{b(x) - S_n(x)\}^2 + \alpha \int_{\Omega} \{c_n(x) - 1\}^2 \right] + \beta \int_{\Omega} \varphi_b(|\nabla b(x)|) + \gamma \sum_{n=1}^N \int_{\Omega} \varphi_c(|\nabla c_n(x)|) \quad (8.1)$$

où :

- $S_n(\cdot)$  est l'image  $n$  de la séquence –  $n \in [1..N]$ ,  $N$  étant le nombre total d'images – ;
- $c_n(\cdot)$  est la segmentation spatio-temporelle à déterminer – voir la description de  $\hat{c}_n(\cdot)$  plus loin – ;
- $b(\cdot)$  est l'image du fond à déterminer ;
- $\varphi_b$  et  $\varphi_c$  sont des fonctions de régularisation ;
- et  $\Omega$  est le domaine spatial de définition des images.

La minimisation de (8.1) conduit à une image de fond estimée  $\hat{b}(\cdot)$  et une segmentation estimée de la séquence  $\hat{c}_n(\cdot)$ . En l'absence du terme de régularisation  $\varphi_b$  ( $\beta = 0$ ),  $\hat{b}(\cdot)$  revient simplement à une moyenne temporelle pondérée des images de la séquence :

$$\forall x \in \Omega, \quad \hat{b}(x) = \frac{\sum_{n=1}^N \hat{c}_n^2(x) S_n(x)}{\sum_{n=1}^N \hat{c}_n^2(x)} \quad (8.2)$$

où  $\hat{c}_n(x)$  est tel que :

- $\hat{c}_n(\cdot)$  est une fonction de  $\Omega$  dans  $[0; 1]$  ;
- $\hat{c}_n(x)$  est proche de un si  $x$  appartient au fond dans l'image  $n$  de la séquence ;
- $\hat{c}_n(x)$  est proche de zéro si  $x$  appartient à un objet en mouvement dans l'image  $n$  de la séquence.

En l'absence du terme de régularisation  $\varphi_c$  ( $\gamma = 0$ ),  $\hat{c}_n(\cdot)$  est calculé selon la formule suivante :

$$\forall x \in \Omega, \quad \hat{c}_n(x) = \frac{\alpha}{\alpha + \{\hat{b}(x) - S_n(x)\}^2} \quad (8.3)$$

Prenons le risque d'une explication intuitive du critère (8.1). La première somme sur  $n$  est le terme de consistance avec les données. Les deux derniers termes sont dédiés à la régularisation des solutions. Deux intégrales d'expressions positives composent le terme de consistance avec les données. La minimisation du critère (8.1) exige que ces expressions aient le bon goût d'être nulles ou proches de zéro. La première intégrale vaut zéro si et seulement si pour tout  $x$ ,  $b(x) = S_n(x)$  ou  $c_n(x) = 0$  ou les deux à la fois. Si  $b(x) = S_n(x)$  et  $c_n(x) = 0$ , alors l'expression dans la seconde intégrale est maximale – puisque de façon

générale  $c_n(x) \in [0; 1]$  et qu'il est ici pris égal à zéro. Or, ayant  $b(x) = S_n(x)$ , l'expression dans la première intégrale vaut zéro quelle que soit la valeur de  $c_n(x)$ . Autant choisir  $c_n(x) = 1$  de sorte que l'expression dans la seconde intégrale soit nulle. Ainsi, il semble que les deux conditions  $b(x) = S_n(x)$  et  $c_n(x) = 0$  soient mutuellement exclusives. Nous avons donc deux cas. Du point de vue de la minimisation, le premier est idéal car il annule les deux intégrales de consistance avec les données :

$$\begin{cases} b(x) = S_n(x) \\ c_n(x) = 1 \end{cases} \quad (8.4)$$

Le second est *symétrique* du premier :

$$\begin{cases} b(x) \neq S_n(x) \\ c_n(x) = 0 \end{cases} \quad (8.5)$$

En définitive, un point  $x$  du fond dans l'image  $n$  est caractérisé par  $c_n(x) = 1$  car la valeur  $S_n(x)$  de l'image est alors égale à la valeur  $b(x)$  du fond. Inversement, un point  $x$  d'un objet en mouvement dans l'image  $n$  est caractérisé par  $c_n(x) = 0$ . Bien entendu, dans ce dernier cas, l'expression dans la seconde intégrale est maximale, nous l'avons déjà remarqué. Dans l'idée de minimiser la première intégrale sans toutefois maximiser la seconde,  $c_n(x)$  ne devrait que se rapprocher de zéro. De combien il est la peine de se rapprocher de zéro est réglé par le paramètre  $\alpha$ . Par conséquent, la seconde intégrale agit comme une pénalité pour avoir attribué un point d'une image à un objet en mouvement. Sans cette pénalité, le critère (8.1) serait minimisé avec  $c_n(x) = 0$  pour tout  $n$  et tout  $x$ , concluant de la sorte que chaque image est entièrement faite d'objets en mouvement.

Ce modèle de segmentation a un riche historique. Il s'apparente à la formulation variationnelle originelle de Mumford et Shah [1985] pour la segmentation d'images fixes. Voici une intuition de cette hérédité. Nous considérons le cas d'une seule image ( $N = 1$ ). Supposons en outre que  $c_1(\cdot)$  est véritablement la fonction caractéristique de  $b(\cdot)$ , c'est-à-dire  $c_1(x)$  est exactement un si  $x$  appartient au fond et exactement zéro sinon. Le critère proposé par Mumford et Shah est :

$$J_{M-S}(w, \Gamma) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \{w(x) - S_1(x)\}^2 + \gamma \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla w(x)|^2 + L \quad (8.6)$$

où le couple  $(w(\cdot), \Gamma)$  représente la segmentation à déterminer de  $S_1(\cdot)$ ,  $w(\cdot)$  étant l'image segmentée et  $\Gamma$  l'ensemble des contours dans  $S_1(\cdot)$ , et  $L$  est une mesure de la longueur des contours. La représentation d'une image comme des objets superposés à un fond est maintenue. Donc  $w(x)$  peut être écrit  $c_1(x)b(x) + (1 - c_1(x))o_1(x)$  où  $o_1(\cdot)$  désigne l'image des objets.

On s'intéresse de plus près au premier terme de (8.6) en omettant les «  $(x)$  » pour plus de clarté :

$$\begin{aligned} \{w - S_1\}^2 &= \{[c_1b + (1 - c_1)o_1] - [c_1S_1 + (1 - c_1)S_1]\}^2 \\ &= \{[c_1b - c_1S_1] + [(1 - c_1)o_1 - (1 - c_1)S_1]\}^2 \\ &= \{c_1b - c_1S_1\}^2 + \{(1 - c_1)o_1 - (1 - c_1)S_1\}^2 \\ &\quad + 2\{c_1b - c_1S_1\}\{(1 - c_1)o_1 - (1 - c_1)S_1\} \\ &= c_1^2\{b - S_1\}^2 + (1 - c_1)^2\{o_1 - S_1\}^2 \\ &\quad + 2c_1(1 - c_1)\{b - S_1\}\{o_1 - S_1\} \end{aligned} \quad (8.7)$$

L'expression (8.7) a quelque ressemblance avec le critère (8.1). Tout d'abord, le premier terme de (8.7) apparaît dans la première intégrale de (8.1). Ensuite le deuxième terme



de (8.7) correspond à l'expression dans la seconde intégrale de (8.1), l'erreur quadratique exacte  $\{o_1(x) - S_1(x)\}^2$  se substituant à un terme au rôle d'erreur quadratique moyenne  $\alpha$ . Le troisième terme de (8.7) vaut zéro puisque  $c_1(\cdot)$  prend seulement les valeurs zéro et un.

D'autre part, le second terme de (8.6) est identique au terme de régularisation  $\varphi_c$  de (8.1) lorsque  $\varphi_c$  est la fonction carrée – régularisation de Tikhonov [1963]. Pas tout à fait identique, je vous l'accorde, car dans (8.6) le domaine d'intégration est  $\Omega \setminus \Gamma$  alors qu'il est  $\Omega$  dans (8.1). Effectivement,  $c_1(\cdot)$  est discontinue au franchissement de  $\Gamma$  : nous en avons fait l'hypothèse pour les besoins du petit raisonnement précédent – même si ce n'est pas la réalité de la méthode dont il est question. Il faudrait donc aussi intégrer sur  $\Omega \setminus \Gamma$  dans (8.1) si on ne veut pas d'ennui avec le calcul du gradient. Mais, nous l'avons dit, l'hypothèse de binarité de  $c_1(\cdot)$  est fausse.

En conclusion, les images de la séquence peuvent être segmentées en fond et objets en mouvement via un seuil compris entre zéro et un. Partout où  $c_n(\cdot)$  est inférieure au seuil, il s'agit d'un objet en mouvement. Le fond est partout ailleurs.

La segmentation obtenue par ce critère n'est pas globalement contrainte : aucune hypothèse ne contraint des pixels à l'appartenance au même objet en mouvement. Si ce n'est le terme de régularisation  $\varphi_c$ , la segmentation est réalisée pixel par pixel.

### Résolution et algorithme

Le critère (8.1) est minimisé par résolutions alternées des équations d'Euler-Lagrange en  $b(\cdot)$  et  $c_n(\cdot)$ . Ce sont des équations aux dérivées partielles qui impliquent un Laplacien pondéré – voir par exemple [Charbonnier *et al.* 1997] à ce sujet. Après discrétisation, elles sont résolues au moyen d'une méthode de Gauss-Seidel.

## Chapitre 9

# Méthode proposée

### 9.1 L'idée

Le but est de développer une méthode de segmentation spatio-temporelle avec la contrainte pour certains pixels connexes d'appartenir à un même objet en mouvement. On parle alors d'une méthode région par opposition aux méthodes pixel. Avec [Kornprobst *et al.* 1999] en toile de fond, l'idée est d'utiliser des contours actifs dont l'intérieur regroupe les pixels supposés quadriller un objet unique et entier. Souhaitons que ce soit effectivement le cas à convergence. Signalons que nous étudions la question directement en dimension trois.

### 9.2 Une méthode *région*

#### 9.2.1 Critère équilibré objet/fond

Le critère (8.1) accorde, au détriment des objets en mouvement, priorité au fond : le terme  $\int_{\Omega} c_n^2(x) \times \{b(x) - S_n(x)\}^2$  implique le fond  $b(\cdot)$  tandis que le terme  $\alpha \int_{\Omega} \{c_n(x) - 1\}^2$  ne fait pas intervenir l'intensité des objets en mouvement. Naturellement, il n'aurait pas été réaliste qu'il en fût autrement puisque les objets en mouvement dans une séquence de vidéo-surveillance ne sont pas en général d'intensité constante. Au contraire, dans les images TEMP, les voxels des organes observés sont approximativement de même valeur. Ainsi, nous nous permettons d'ajouter à l'hypothèse de fond identique dans chaque image d'une séquence TEMP celle d'objets en mouvement d'intensité constante, à tout le moins en espace. En s'intéressant aux séquences cardiaques synchronisées, on se limite à un objet en mouvement, le cœur. Si l'hypothèse de constance en espace est raisonnable, l'effet de surbrillance du myocarde [Galt *et al.* 1990, Mochizuki *et al.* 1991, Cooke *et al.* 1994], croissant durant la systole et maximal à son terme, nous interdit d'envisager la constance en temps. La constante  $o_n$  a donc la charge de désigner l'intensité du myocarde dans l'image  $n$ . Le critère suivant est équilibré au sens où il tient compte en toute symétrie du fond  $b(\cdot)$  et des  $N$  valeurs  $o_n$  de l'objet qui sont autant de nouvelles inconnues :

$$J_2(c_n, o_n, b) = \sum_{n=1}^N \left[ \int_{\Omega} c_n^2(x) \times \{b(x) - S_n(x)\}^2 + \int_{\Omega} \{c_n(x) - 1\}^2 \times \{o_n - S_n(x)\}^2 \right] \\ + \beta \int_{\Omega} \varphi_b(|\nabla b(x)|) + \gamma \sum_{n=1}^N \int_{\Omega} \varphi_c(|\nabla c_n(x)|) \quad (9.1)$$

### 9.2.2 Contrainte région

L'étape précédente est une particularisation de la méthode de Kornprobst *et al.* [1999] aux séquences TEMP. Voyons ici l'introduction d'une contrainte géométrique dont l'empreinte est en trois volets : (i) utilisation d'un contour initial par image, (ii) interprétation de l'intérieur des contours comme étant l'intérieur estimé du myocarde, (iii) évolution des contours de chaque image vers les véritables contours du myocarde. Nous sommes bien en présence d'une méthode usant des contours actifs avec une approche région – d'autres exemples de méthodes région sont développées dans [Yezzi *et al.* 1999] pour les images fixes et [Paragios et Deriche 1999] pour les séquences. Sans plus attendre, donnons le critère, évolution de (9.1), qui remplit ces nouvelles exigences :

$$J_3(\Omega_n, o_n, b) = \sum_{n=1}^N \left[ \int_{\overline{\Omega}_n} \{b(x) - S_n(x)\}^2 + \int_{\Omega_n} \{o_n - S_n(x)\}^2 \right] + \beta \int_{\Omega} \varphi_b(|\nabla b(x)|) \quad (9.2)$$

où  $\Omega_n$  est le domaine tridimensionnel à déterminer du myocarde dans l'image  $n$  et  $\overline{\Omega}_n = \Omega \setminus \Omega_n$ . Il convient de fournir les idées qui ont servi à déduire (9.2) de (9.1). Puisque il n'y a qu'un objet, nous pouvons introduire un domaine  $\Omega_n$  par image. Les conditions de minimisation du critère (8.1) – voir section 8.2.4 – étaient toujours valides pour le critère (9.1). En effet :

- si  $b(x) = S_n(x)$  et  $c_n(x) = 1$ , les deux intégrales du terme de consistance avec les données de (9.1) valent zéro et cela correspond au fond car  $b(x) = S_n(x)$  – qui s'écrit désormais «  $x$  appartient à  $\overline{\Omega}_n$  » – ;
- si  $b(x) \neq S_n(x)$  et  $c_n(x) = 0$ , la première intégrale du terme de consistance avec les données vaut zéro et la seconde intégrale  $\int_{\Omega} \{o_n - S_n(x)\}^2$  est nulle si  $o_n = S_n(x)$ , qui correspond en toute logique à l'objet – autrement exprimé par «  $x$  appartient à  $\Omega_n$  ».

La réécriture du critère (9.1) utilisant le fait que  $\Omega = \Omega_n \cup \overline{\Omega}_n$  et  $\Omega_n \cap \overline{\Omega}_n = \emptyset$  mène à :

$$\begin{aligned} J_2(c_n, o_n, b) = & \sum_{n=1}^N \left[ \underbrace{\int_{\Omega_n} c_n^2(x) \times \{b(x) - S_n(x)\}^2}_a + \underbrace{\int_{\overline{\Omega}_n} c_n^2(x) \times \{b(x) - S_n(x)\}^2}_b \right] \\ & + \underbrace{\int_{\Omega_n} \{c_n(x) - 1\}^2 \times \{o_n - S_n(x)\}^2}_c + \underbrace{\int_{\overline{\Omega}_n} \{c_n(x) - 1\}^2 \times \{o_n - S_n(x)\}^2}_d \\ & + \text{termes de régularisation} \end{aligned} \quad (9.3)$$

Les précédentes conclusions intuitives –  $c_n(\cdot)$  vaut zéro dans  $\Omega_n$  et un dans  $\overline{\Omega}_n$  – induisent la nullité des intégrales  $a$  et  $d$  pour former le critère (9.2). Nous pouvons supprimer le terme de régularisation  $\varphi_c$  car il cesse d'être utile dans la mesure où  $c_n(\cdot)$  n'est plus une fonction de  $\Omega$  dans l'intervalle  $[0; 1]$  mais une fonction de  $\Omega$  dans l'ensemble  $\{0, 1\}$ .

Nous avons donc à résoudre le critère (9.2) par rapport à trois variables ou groupes de variables : le fond  $b(\cdot)$ , les intensités du myocarde  $o_n$  et les domaines du myocarde  $\Omega_n$ .

### 9.2.3 Le fond

La minimisation du critère (9.2) par rapport au fond  $b(\cdot)$ ,  $\Omega_n$  étant fixé, est le résultat de la résolution de l'équation d'Euler-Lagrange associée. Ce critère, si le terme de régularisation  $\varphi_b$  est omis, est une expression des moindres carrés en  $b(\cdot)$ . Il est simple de montrer

que la solution est alors :

$$\forall x \in \Omega, \quad b(x) = \frac{\sum_{n=1}^N \omega_n(x) S_n(x)}{\sum_{n=1}^N \omega_n(x)} \quad (9.4)$$

où  $\omega_n(x)$  vaut un si  $x$  appartient à  $\bar{\Omega}_n$  et zéro sinon. L'équation (9.4) est une moyenne temporelle pondérée des images de la séquence. Si le terme de régularisation  $\varphi_b$  est préservé ( $\beta \neq 0$ ), la résolution en  $b(\cdot)$ , quoique moins immédiate, est un problème inverse classique [Charbonnier *et al.* 1997].

### 9.2.4 La perfusion apparente

En miroir de la section précédente, la résolution en  $o_n$ , intensité ou perfusion apparente du myocarde dans l'image  $n$ , est obtenue à  $\Omega_n$  fixé et en notant que (9.2) est un critère des moindres carrés par rapport à  $o_n$ . La formule établie est :

$$o_n = \tilde{S}_n(x), \quad x \in \Omega_n \quad (9.5)$$

où  $\tilde{S}$  désigne la valeur moyenne de la variable  $S$ . Le développement de cette section et son aboutissement trouvent écho dans [Cohen *et al.* 1993]. En effet, le problème qui s'y pose est de segmenter un lac de montagne, perçu comme une tâche d'intensité constante dans une image de modèle numérique de terrain en niveaux de gris. Le calcul simultané de son altitude est une conséquence de la minimisation du critère développé.

### 9.2.5 La segmentation

Parmi nos exigences à propos de la méthode de segmentation présentement en cours de développement, les contours actifs tiennent une bonne place. Oublions-les un instant et concentrons-nous sur la minimisation du critère (9.2) en  $\Omega_n$  à  $b(\cdot)$  et  $o_n$  fixés, soit la segmentation proprement dite de la séquence. Commençons par dire qu'elle n'est pas chose aisée. La raison en est que le calcul de l'équation d'Euler-Lagrange associée à  $\Omega_n$  est délicate. D'une part, les  $\Omega_n$  sont des domaines d'intégration. D'autre part, ils impliquent une discontinuité entre la valeur  $o_n$  à l'intérieur et les valeurs de  $b(\cdot)$  à l'extérieur. En conséquence, pour calculer la dérivée partielle de (9.2) par rapport à  $\Omega_n$ , la discontinuité doit être explicitement prise en compte, ce à quoi on parvient en dérivant au sens des distributions. L'idée est de considérer que  $\Omega_n$  est une famille de domaines déformables au cours du temps :  $\Omega_n(t), t \geq 0$ .

*Remarque* : à ce stade, il ne faut pas confondre ce temps  $t$ , qui marque les inconnues de l'algorithme au cours de la convergence depuis leur valeur initiale jusqu'à leur solution, avec l'indice  $n$  des images de la séquence. Donc,  $t$  référence les étapes de calcul pour le silicium – de zéro à  $t_{\max}$  par pas de  $dt$  – et  $n$  les instants du cycle cardiaque pour le patient – de un à  $N$  par pas de un.

---

Notons que le terme de régularisation  $\varphi_b$  apparaît dans une expression indépendante de  $\Omega_n$  et qu'il n'entre donc pas en considération dans le développement suivant.

Définissons :

$$F_n(t) = J_{3,n}(\Omega_n, o_n, b) = \int_{\bar{\Omega}_n(t)} \{b(x) - S_n(x)\}^2 + \int_{\Omega_n(t)} \{o_n - S_n(x)\}^2 \quad (9.6)$$

de sorte que :

$$J_3(\Omega_n, o_n, b) - \beta \int_{\Omega} \varphi_b(|\nabla b(x)|) = \sum_{n=1}^N F_n(t) = \sum_{n=1}^N J_{3,n}(\Omega_n, o_n, b) \quad (9.7)$$

Comment varie le critère (9.2) lorsque  $\Omega_n(\cdot)$  est légèrement déformé entre les instants  $t$  et  $t + dt$  ? En d'autres termes, que vaut  $F'_n(t)$  ?

Pour toute fonction  $\phi$ ,  $C^\infty$  et à support compact, la dérivée  $F'_n(t)$  au sens des distributions est définie par  $\langle F'_n(t), \phi \rangle$  où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit de dualité.

$$\begin{aligned} \langle F'_n(t), \phi(t) \rangle &\triangleq \int_{t=0}^{+\infty} F'_n(t) \phi(t) dt \\ &= - \langle F_n(t), \phi'(t) \rangle \quad (\text{propriété des distributions}) \\ &= - \int_{t=0}^{+\infty} \underbrace{\left\{ \int_{\bar{\Omega}_n(t)} \{b(x) - S_n(x)\}^2 \right\}}_{\bar{\theta}(t)} \phi'(t) dt \\ &\quad - \int_{t=0}^{+\infty} \underbrace{\left\{ \int_{\Omega_n(t)} \{o_n - S_n(x)\}^2 \right\}}_{\theta(t)} \phi'(t) dt \end{aligned} \quad (9.8)$$

En intégrant par parties :

$$\int_{t=0}^{+\infty} \theta(t) \phi'(t) dt = - \int_{t=0}^{+\infty} \theta'(t) \phi(t) dt + [\theta(t) \phi(t)]_0^{+\infty} \quad (9.9)$$

Le dernier terme de l'équation (9.9) est nul car  $\phi(t=0) = \phi(t \rightarrow +\infty) = 0$  pour cause de support compact de  $\phi$ . La manipulation jumelle sur la portion relative à  $\bar{\theta}$  et la substitution dans (9.8) conduisent à :

$$\begin{aligned} \langle F'_n(t), \phi(t) \rangle &= \int_{t=0}^{+\infty} \bar{\theta}'(t) \phi(t) dt + \int_{t=0}^{+\infty} \theta'(t) \phi(t) dt \\ &= \int_{t=0}^{+\infty} \{\bar{\theta}'(t) + \theta'(t)\} \phi(t) dt \end{aligned} \quad (9.10)$$

L'équation (9.10) est vraie pour toute fonction  $\phi$ ,  $C^\infty$  et à support compact. Donc, au sens des distributions :

$$F'_n(t) = \bar{\theta}'(t) + \theta'(t) \quad (9.11)$$

Le calcul de  $\bar{\theta}'(t)$ , qui n'est pas trivial, est classique en mécanique des milieux continus [Haug et Choi 1993]. Nous en donnons l'expression finale :

$$\bar{\theta}'(t) = \int_{\bar{\Omega}_n(t)} \frac{\partial}{\partial t} [\{b(x) - S_n(x)\}^2] + \int_{\Gamma_n(t)} \{b(x) - S_n(x)\}^2 \langle \vec{v}_n(x, t), \vec{N}_n(x, t) \rangle dp \quad (9.12)$$

où  $\Gamma_n(\cdot, t)$  est le contour orienté de  $\bar{\Omega}_n(t)$ ,  $\vec{v}_n(x, t)$  est  $\partial \Gamma_n(p, t) / \partial t$  - il s'agit donc de la vitesse d'évolution de  $\Gamma_n(\cdot, t)$  au point  $x = \Gamma_n(p, t)$  - et  $\vec{N}_n(x, t)$  est la normale, directe et de norme unitaire, à  $\Gamma_n(\cdot, t)$ .

*Remarque :* nous voyons, avec  $\vec{v}_n(x, t)$ , apparaître naturellement les contours actifs dans le processus de minimisation du critère (9.2) par rapport  $\Omega_n$ .

---

L'intégrale sur  $\overline{\Omega}_n(t)$  vaut zéro car  $\{b(x) - S_n(x)\}^2$  est indépendant de  $t$ . De façon similaire, puisque  $\{o_n - S_n(x)\}^2$  est indépendant de  $t$ ,  $\theta'(t)$  vaut :

$$\theta'(t) = \int_{\Gamma_n^*(t)} \{o_n - S_n(x)\}^2 \langle \vec{v}_n^*(x, t), \vec{N}_n^*(x, t) \rangle dp^* \quad (9.13)$$

où  $\Gamma_n^*(., t)$  est le contour orienté de  $\Omega_n(t)$ ,  $\vec{v}_n^*(x, t) = \partial \Gamma_n^*(p, t) / \partial t$  est la vitesse d'évolution de  $\Gamma_n^*(., t)$  au point  $x = \Gamma_n^*(p^*, t)$  et  $\vec{N}_n^*(x, t)$  est la normale, directe et de norme unitaire, à  $\Gamma_n^*(., t)$ . Sachant que  $\Gamma_n(., t)$  et  $\Gamma_n^*(., t)$  représentent le même contour avec une orientation opposée, il ressort que  $\vec{v}_n(., t) = \vec{v}_n^*(., t)$  et  $\vec{N}_n(., t) = -\vec{N}_n^*(., t)$ , et ensuite :

$$\theta'(t) = - \int_{\Gamma_n(t)} \{o_n - S_n(x)\}^2 \langle \vec{v}_n(x, t), \vec{N}_n(x, t) \rangle dp \quad (9.14)$$

Finalement :

$$F_n'(t) = \int_{\Gamma_n(t)} [\{b(x) - S_n(x)\}^2 - \{o_n - S_n(x)\}^2] \langle \vec{v}_n(x, t), \vec{N}_n(x, t) \rangle dp \quad (9.15)$$

Le terme  $\langle \vec{v}_n(x, t), \vec{N}_n(x, t) \rangle$  est la composante normale de la vitesse d'évolution, c'est-à-dire sa composante utile. Afin de minimiser avec une efficacité maximale le critère (9.2) par rapport à  $\Omega_n$ , il faut choisir  $\langle \vec{v}_n(x, t), \vec{N}_n(x, t) \rangle$  de sorte à rendre  $F_n'(t)$  le plus négatif possible. Or, nous ne connaissons ni la valeur absolue, ni le signe du terme  $[\{b(x) - S_n(x)\}^2 - \{o_n - S_n(x)\}^2]$ . Appelons-le  $A$ . Le seul moyen de garantir la négativité de  $F_n'(t)$  est de prendre  $\langle \vec{v}_n(x, t), \vec{N}_n(x, t) \rangle$  égal à  $-A$  car alors  $F_n'(t)$  est l'intégrale de  $-A^2$  sur  $\Gamma_n(t)$ . D'où :

$$\langle \vec{v}_n(x, t), \vec{N}_n(x, t) \rangle = - [\{b(x) - S_n(x)\}^2 - \{o_n - S_n(x)\}^2] \quad (9.16)$$

Nous en sommes à la conclusion que la vitesse d'évolution sur le contour de  $\Omega_n$  doit être :

$$\vec{v}_n(x, t) = \nu_n(x, t) \vec{N}_n(x, t) \quad (9.17)$$

$$= [\{o_n - S_n(x)\}^2 - \{b(x) - S_n(x)\}^2] \vec{N}_n(x, t) \quad (9.18)$$

Et l'équation d'évolution du contour actif est :

$$\frac{\partial \Gamma_n}{\partial t} = \nu_n \times \vec{N}_n \quad (9.19)$$

À supposer que  $o_n$  et  $b(.)$  soient connus, les équations (9.18) et (9.19) peuvent être interprétées comme suit : si tel point  $x$  du contour est à l'intérieur du myocarde, seul le second terme contribue à son évolution car  $\{o_n - S_n(x)\}$  est nul. La vitesse d'évolution est strictement négative : une déformation locale du contour vers l'extérieur est produite. *Vice versa*, si tel autre point  $x$  du contour est dans le fond,  $\{b(x) - S_n(x)\}$  vaut zéro, seul le premier terme de la vitesse d'évolution a du poids : une déformation locale du contour vers l'intérieur a lieu.

### 9.2.6 Régularisation

Le processus d'évolution des contours actifs est guidé par la vitesse d'évolution  $\vec{v}_n(., t)$  sujette à corruption par le bruit dans les images de la séquence. Pour cela, les contours finaux peuvent être irréguliers et de petits morceaux de contours ont pu rester accrochés, se déchirer puis encercler des pics de bruit. Ainsi que nous l'avons vu à la section 2.4.2, une contrainte d'aire minimale est adéquate pour régulariser ce genre de processus car de minces sacrifices en consistance avec les données permettent le lissage des contours principaux et, le cas échéant, le rétrécissement jusqu'à disparition des plus petits. À ce

stade, on aura remarqué comme une espèce de similitude avec la section 6.2.3, et ce n'est pas fini. L'expression de cette pénalité est :

$$J_{4,n}(\Omega_n) = J_{4,n}(\Gamma_n) = \int_{\Gamma_n} d\varepsilon \quad (9.20)$$

où  $d\varepsilon$  est l'élément infinitésimal d'aire sur  $\Gamma_n(\cdot)$ . La minimisation de (9.20) par rapport à  $\Gamma_n(\cdot)$  est obtenue par résolution de l'équation :

$$\frac{\partial \Gamma_n}{\partial t} = \kappa_n \vec{N}_n \quad (9.21)$$

où  $\kappa_n(\cdot, \cdot)$  est la courbure de  $\Gamma_n(\cdot, \cdot)$ . Rappelons que cette contrainte d'aire minimale est aussi nommée contrainte de courbure. Les équations d'évolution (9.19) et de régularisation (9.21) sont ajoutées, non sans avoir auparavant multiplié cette dernière par un paramètre positif  $\delta$  d'ajustement du poids relatif des deux composantes. Les équations d'évolution définitives sont donc :

$$\frac{\partial \Gamma_n}{\partial t} = \{\nu_n + \delta \kappa_n\} \vec{N}_n \quad (9.22)$$

Le critère sous-jacent est :

$$J_5(\Omega_n, o_n, b) = J_3(\Omega_n, o_n, b) + \delta \sum_{n=1}^N J_{4,n}(\Omega_n) \quad (9.23)$$

Ce critère n'entre pas dans le cadre de la minimisation d'une aire pondérée – voir section 10.5 à ce propos. Des développements de minimisations de longueur ou d'aire pondérées sont proposés dans [Caselles *et al.* 1995, Yezzi *et al.* 1997, Siddiqi *et al.* 1998, Angenent *et al.* 1999].

### 9.2.7 Algorithme

En prologue à la description pas à pas de l'algorithme, rappelons que la technique des ensembles de niveaux – voir section 3 – facilite grandement la gestion de l'évolution de contours actifs, soit pour ce qui nous occupe, la résolution de l'équation (9.22). L'ensemble de niveaux de l'image  $n$  est noté  $u_n(\cdot)$  auquel nous attribuons les propriétés :

- $u_n(\cdot)$  est strictement négatif dans  $\Omega_n$  ;
- $u_n(\cdot)$  est strictement positif dans  $\bar{\Omega}_n$  ;
- $u_n(\cdot)$  est nul sur  $\Gamma_n$ , c'est-à-dire que pour tout  $p$  dans  $\Psi$  :

$$u_n(x = \Gamma_n(p)) = 0 \quad (9.24)$$

où  $\Psi$  est le domaine de variation de  $p$ , coordonnée curviligne. La connaissance du signe de  $u_n(\cdot)$  est équivalente à celle de  $\Omega_n$ . Nous pouvons donc dans (9.23) remplacer les inconnues  $\Omega_n$  par les  $u_n(\cdot)$ . Depuis la section 9.2.5,  $\Omega_n$  est considéré comme une famille d'éléments déformables dans le temps. Le contour  $\Gamma_n$  subit nécessairement un sort identique, suivi de près par  $u_n(\cdot)$ . L'équation (9.24) devient :

$$u_n(\Gamma_n(p, t), t) = 0 \quad (9.25)$$

L'équation aux dérivées partielles suivante provient de la dérivation de (9.25) par rapport à  $t$  – voir annexe A – :

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \{\nu_n + \delta \kappa_n\} |\nabla u_n| \quad (9.26)$$

où :

$$\kappa_n = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|} \right) \quad (9.27)$$

La mise en œuvre informatique exige une discrétisation des variations continues en jeu. Nous laissons le soin à l'annexe F de présenter celle de  $\kappa_n(\cdot, \cdot)$  tandis que nous donnons ici même l'approximation au premier ordre de  $\partial u_n / \partial t$  :

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(\cdot, t) \approx \frac{u_n(\cdot, t + dt) - u_n(\cdot, t)}{dt} \quad (9.28)$$

L'algorithme pas à pas est au tableau 9.1, non loin après deux ultimes remarques :

- puisque le critère (9.23) est à minimiser en  $b(\cdot)$ ,  $o_n$  et  $u_n(\cdot)$ ,  $n \in [1..N]$ , nous utilisons un schéma à résolutions alternées : trois étapes correspondant aux trois ensembles d'inconnues sont itérées jusqu'à convergence ;
- le fond  $b(\cdot)$  et les perfusions apparentes  $o_n$  deviennent dépendantes de l'indice temporel  $t$  à la manière de  $u_n(\cdot) - b(\cdot, t)$  et  $o_n(t)$  - le temps que dure l'accomplissement de l'algorithme.

<p> <math>b(\cdot, t = 0) \leftarrow</math> fond initial  <math>o_n(t = 0) \leftarrow</math> perfusion initiale dans l'image <math>n</math>  <math>u_n(\cdot, t = 0) \leftarrow</math> ensemble de niveaux initial de l'image <math>n</math>  <math>t \leftarrow 0</math>            Fixer les paramètres <math>\beta</math>, <math>\varphi_b</math>, <math>\delta</math> et <math>dt</math> (voir section 9.2.8)         </p> <p><b>répéter</b></p> <p style="padding-left: 20px;"><i>Étape 1</i> : mise à jour du fond <math>b</math>  <math>b(\cdot, t) \leftarrow \arg \min_b \{J_5 \text{ avec } u_n \text{ gelé à } u_n(\cdot, t), n \in [1..N]\}</math> (en utilisant (9.4))</p> <p style="padding-left: 20px;"><i>Étape 2</i> : mise à jour des perfusions apparentes <math>o_n</math>  <math>o_n(t) \leftarrow \arg \min_{o_n} \{J_5 \text{ avec } u_n \text{ gelé à } u_n(\cdot, t)\}, n \in [1..N]</math> (en utilisant (9.5))</p> <p style="padding-left: 20px;"><i>Étape 3</i> : mise à jour des ensembles de niveaux <math>u_n</math>  <b>pour chaque</b> <math>n</math> <b>dans</b> <math>[1..N]</math> <b>et tout</b> <math>x</math> <b>dans</b> <math>\Omega</math>  <b>faire</b></p> <p style="padding-left: 40px;"> <math>\nu_n(x, t) \leftarrow \{o_n(t) - S_n(x)\}^2 - \{b(x, t) - S_n(x)\}^2</math>  <math>\kappa_n(x, t) \leftarrow \operatorname{div}(\nabla u_n(x, t) /  \nabla u_n(x, t) )</math>  <math>u_n(x, t + dt) \leftarrow u_n(x, t) + dt \times \{\nu_n(x, t) + \delta \kappa_n(x, t)\} \times  \nabla u_n(x, t) </math> </p> <p><b>fait</b></p> <p style="padding-left: 20px;"> <math>t \leftarrow t + dt</math>  <math>t_{\max} \leftarrow t</math> </p> <p><b>jusqu'à</b> convergence (voir section 10.5)</p> <p>Segmentation spatio-temporelle <math>\leftarrow</math> contours de niveau zéro des <math>u_n(\cdot, t_{\max})</math></p>
---

**Tab. 9.1** Algorithme de segmentation spatio-temporelle des séquences cardiaques.



### 9.2.8 Initialisation

Le lancement de l'algorithme est conditionné par la fourniture de  $b(., t = 0)$ ,  $o_n(t = 0)$  et  $u_n(., t = 0)$ ,  $n$  dans  $[1..N]$ . L'image initiale du fond  $b(., t = 0)$  est choisie nulle. La perfusion apparente initiale  $o_n(t = 0)$  est fixée à zéro pour tout  $n$ . L'ensemble de niveaux  $u_1(., t = 0)$  est tel que son contour de niveau zéro est une ellipsoïde tronquée et évidée avec des parois intérieure et extérieure *pas trop éloignées* des parois intérieure et extérieure du ventricule gauche dans la première image de la séquence. Cette initialisation est effectuée manuellement avec un contrôle visuel. Ensuite, on choisit  $u_n(., t = 0) = u_1(., t = 0)$  pour tout  $n$  dans  $[2..N]$ .

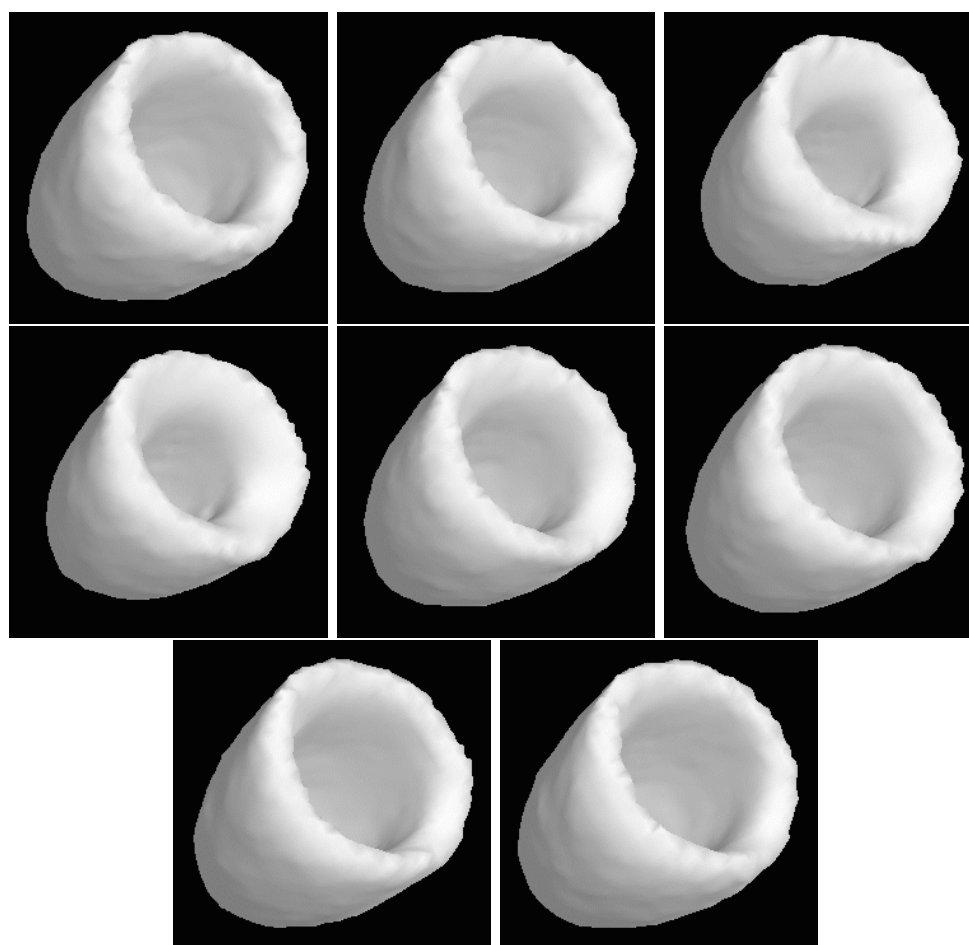
Les paramètres de l'algorithme sont  $\beta$ ,  $\varphi_b$ ,  $\delta$  et  $dt$ . Si nous avons décidé de fixer  $\beta$  à zéro, c'est que le fond des séquences TEMP traitées ici n'est pas suffisamment bruité pour justifier l'emploi d'un terme de régularisation  $\varphi_b$ . Nous avons compté sur le seul lissage temporel que traduit l'équation (9.4). Par conséquent, le choix de  $\varphi_b$  est hors sujet. La valeur du poids relatif  $\delta$  est piochée heuristiquement selon la douceur voulue des contours finaux. Quand ils sont exagérément irréguliers, il suffit d'augmenter  $\delta$ . Toutefois, une valeur trop importante est au détriment de la précision géométrique de la segmentation – voir sections 10.3 et 10.5. Enfin,  $dt$  est pris de façon que la valeur absolue de la vitesse d'évolution multipliée par  $dt$  soit bornée en-dessous par 0,1 et au-dessus par 0,2 au cours des deux ou trois premières itérations. D'expérience, ces bornes arbitraires *garantissent* la stabilité du processus en même temps qu'une vitesse de convergence satisfaisante.

## 9.3 Évaluation expérimentale

Nous avons appliqué notre méthode de segmentation à des séquences cardiaques TEMP synchronisées simulée et cliniques.

### 9.3.1 Simulation MCAT

Nous avons généré une séquence MCAT [LaCroix 1997, Pretorius *et al.* 1997] de 16 images dont huit seulement ont été utilisées – une image sur deux en partant de la première. Les images se sont vu ajouter un bruit de Poisson, si bien qu'au final les rapports signal à bruit sont, en moyenne sur les huit images, d'environ 32,5 en pic, 11,3 en énergie et 9,8 en variance. Les images n'ont pas été réorientées dans une direction particulière. Dans la suite, les coupes transverses font référence à des plans orthogonaux à l'axe du corps. Les huit volumes simulés utilisés de  $128^3$  voxels – de taille  $2,3 \times 2,3 \times 2,3$  mm<sup>3</sup> – représentant le tronc dans son entier ont été amputés de manière à obtenir des images de  $45 \times 40 \times 40$  voxels centrées sur le cœur. Seul le ventricule gauche a reçu une valeur de perfusion significative, identique dans chaque image. Ainsi, point d'effet de surbrillance du myocarde à déplorer durant la systole. Le contraste du ventricule gauche sur le fond est approximativement de 70 à 10. La valeur 0,01 a été assignée à  $\delta$  et  $dt$  valait  $4 \times 10^{-5}$ . L'algorithme a requis environ 350 itérations ou une trentaine de minutes sur une station HP 240 MHz. La segmentation calculée du ventricule gauche est présentée par les figures 9.1, 9.2 et 9.3. Il semble que la systole s'étende de la première image à la troisième ou quatrième en faisant montre d'une contraction régulière. Au contraire, la diastole, depuis la quatrième ou cinquième jusqu'à la huitième image, reflète une dilatation rapide au cours des deux premières images et beaucoup plus lente ensuite. Pour chaque image, nous avons considéré le rapport entre le nombre de voxels du ventricule gauche de la simulation MCAT et le nombre de voxels du ventricule gauche segmenté en tant qu'une mesure de l'erreur de segmentation. D'après les propriétés des ensembles de niveaux, le nombre de voxels du ventricule gauche segmenté

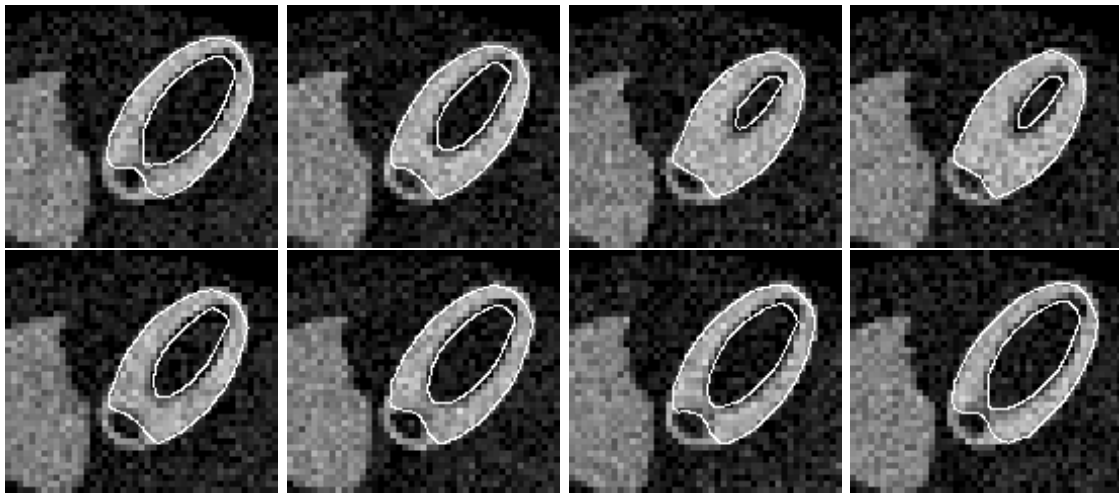


**Fig. 9.1** MCAT : segmentation spatio-temporelle tridimensionnelle du ventricule gauche. Ordre chronologique de gauche à droite et de haut en bas.

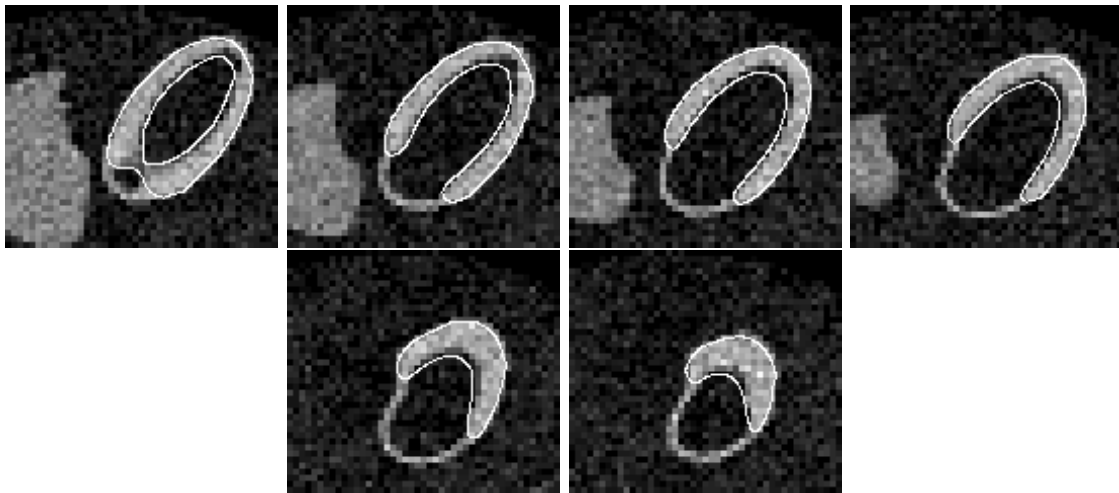
dans l'image  $n$  est le nombre de voxels négatifs de  $u_n(\cdot)$ . L'erreur moyenne sur les huit images est de 2,3 % avec un minimum et un maximum de 0,1 % – dans la huitième image – et 4,1 % – dans la troisième image.

### 9.3.2 Données cliniques

Nous avons traité une séquence clinique issue d'un examen au  $^{99m}\text{Tc}$ -Sestamibi réalisé au Centre Antoine Lacassagne à Nice. Les projections ont été acquises au repos par une gamma-caméra à trois détecteurs Picker Prism 3000 – Picker International Inc., Cleveland, OH, États-Unis – équipée de collimateurs basse énergie/haute résolution en éventail. Les 60 projections ont été mesurées sur 360 degrés avec un cycle cardiaque découpé en huit intervalles. Les huit images de la séquence ont été reconstruites par un algorithme clinique standard de filtrage rétroprojection avec filtre de Hamming. Elles ont subi une réorientation petit axe fournissant des images  $64 \times 64 \times 23$  aux voxels de  $2,5 \times 2,5 \times 5 \text{ mm}^3$ . Le diamètre maximal du ventricule gauche dans les coupes petit axe est de 28 voxels. Le contraste du ventricule gauche par rapport au fond est approximativement de 45 à 12 en télédiastole et 55 à 12 en télésystole. Nous avons fixé  $\delta$  à 0,015 et  $dt$  à  $5 \times 10^{-5}$ . La segmentation a nécessité autour de 200 itérations couvertes en 20 minutes environ de calcul avec une station HP 240 MHz. Seul le ventricule gauche a été segmenté. Les résultats sont exposés figures 9.4, 9.5 et 9.6. Il semble que la systole prenne place de la première à la troisième ou



**Fig. 9.2** MCAT : coupes transverses identiques de la segmentation spatio-temporelle tridimensionnelle. Ordre chronologique de gauche à droite et de haut en bas.

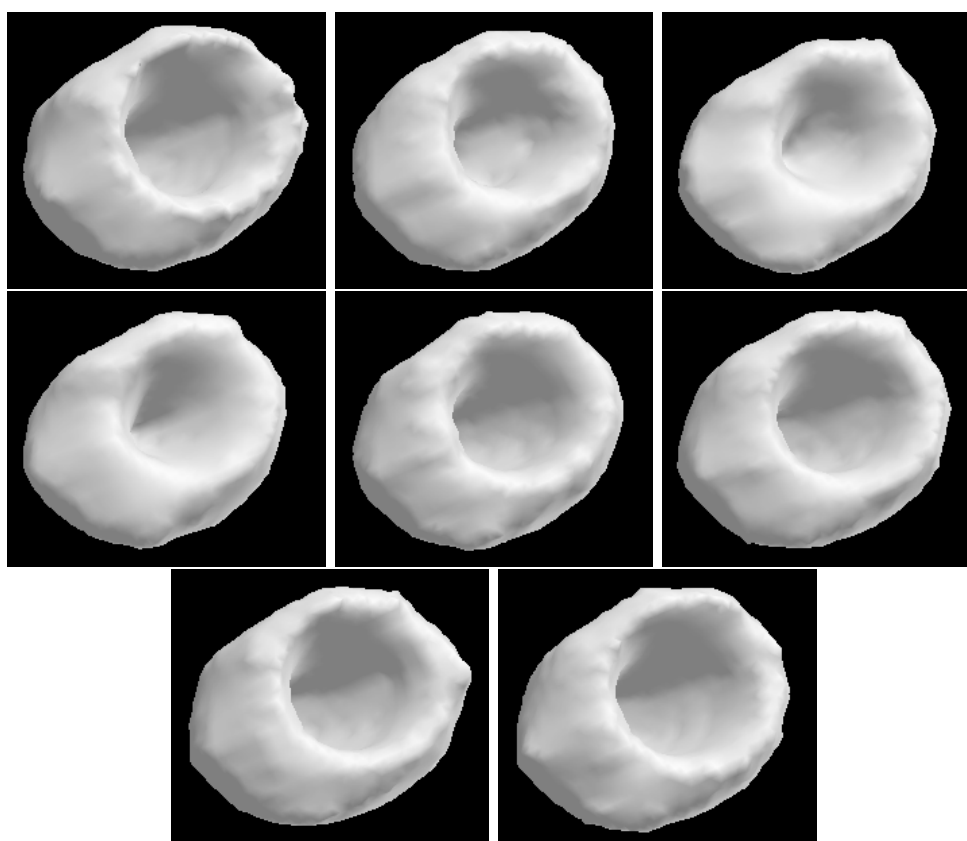


**Fig. 9.3** MCAT : quelques coupes transverses de la segmentation spatio-temporelle tridimensionnelle de la huitième image.

quatrième image suivant une contraction régulière. La diastole s'étire entre la quatrième ou cinquième image et la huitième, d'un coup d'abord – pendant les deux premières – puis très peu, presque imperceptiblement. Sur la figure 9.7 sont affichées les valeurs calculées  $o_n$  de perfusion apparente en fonction du numéro  $n$  de l'image. Cela nous donne une idée de l'effet de surbrillance du myocarde qui a affecté la séquence.

### 9.3.3 Calcul de fraction d'éjection

La segmentation du ventricule gauche en main, nous avons tenté le calcul de la fraction d'éjection. La méthode que nous avons employée tire avantage des propriétés des ensembles de niveaux. À convergence,  $u_n(\cdot)$  est négatif dans le myocarde et positif ailleurs – voir figure 9.8. En conséquence, le volume du ventricule gauche est proportionnel au nombre de voxels positifs emmurés par les voxels négatifs du myocarde d'un côté et une *surface des valves* de l'autre. Comme suggéré dans [Faber *et al.* 1999], nous avons choisi de matérialiser cette surface des valves au moyen de deux plans. Au contraire du protocole décrit dans



**Fig. 9.4** Patient : segmentation spatio-temporelle tridimensionnelle du ventricule gauche. Ordre chronologique de gauche à droite et de haut en bas.

cet article, nous avons disposé manuellement ces plans dans chaque image. La fraction d'éjection a été calculée avec la formule classique suivante :

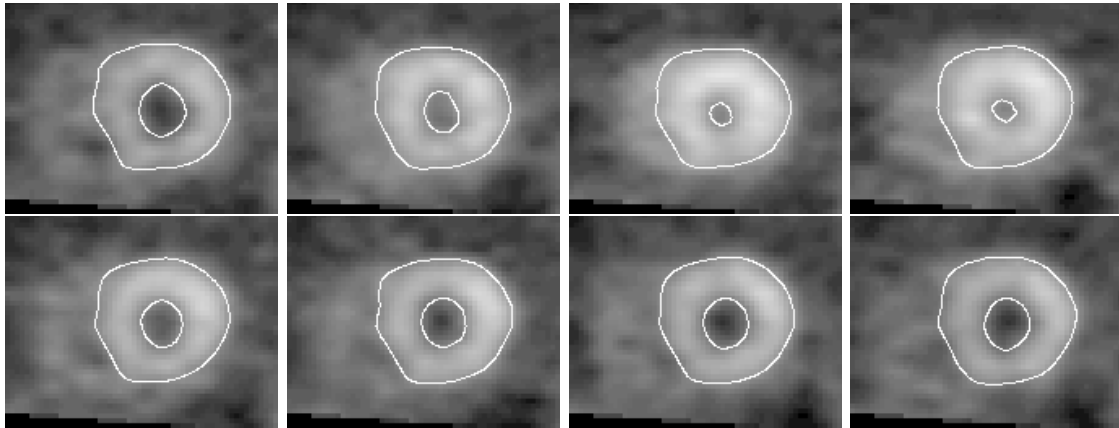
$$EF = \frac{100 \times (max - min)}{max} \quad (9.29)$$

où  $min$  et  $max$  sont respectivement les minimum et maximum des nombres de voxels du ventricule gauche.

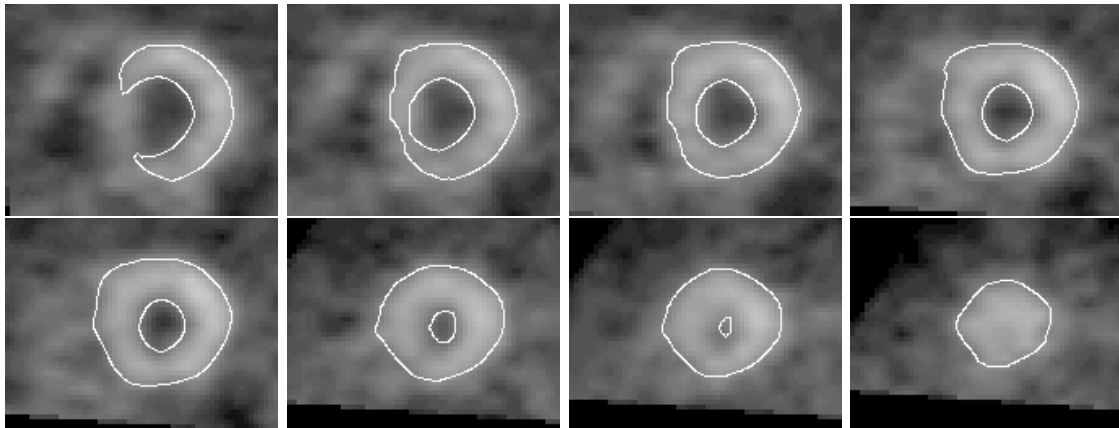
La fraction d'éjection exacte de la simulation MCAT présentée dans la section 9.3.1 est 61,4 % avec un volume gauche ventriculaire maximal dans la première image et un volume minimal dans la troisième. En ce qui concerne la segmentation, les volumes maximal et minimal ont également été constatés pour les première et troisième images respectivement. La fraction d'éjection calculée est 58,3 %, soit une erreur absolue de 3,1 % et une erreur relative en pour cent de pourcentage de 5,1 %.

Nous n'avons pas de mesure de référence de la fraction d'éjection de la séquence clinique vue en section 9.3.2. Cependant, nous savons que le patient en question ne souffrait pas de désordre cinétique. Avec des volumes maximal et minimal rencontrés à la première et quatrième image respectivement, nous avons déterminé une fraction d'éjection de 57,5 %, ce qui est une valeur normale.

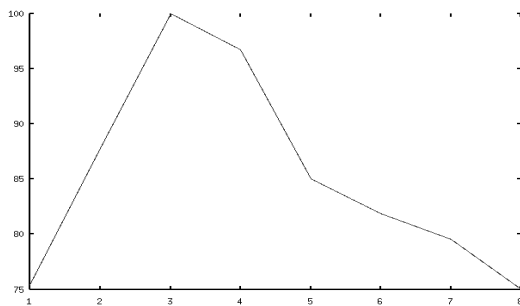
Enfin, une autre séquence provenant d'un patient manifestant une hypokinésie diffuse a été segmentée, segmentation qui a permis de calculer sa fraction d'éjection. Un examen par ultrasons avait auparavant permis de la mesurer à 30 %. Nous faisons la même remarque que précédemment à propos des volumes minimal et maximal pour un résultat égal à 27 %, soit une erreur absolue de 3 % et une erreur relative de 10 %.



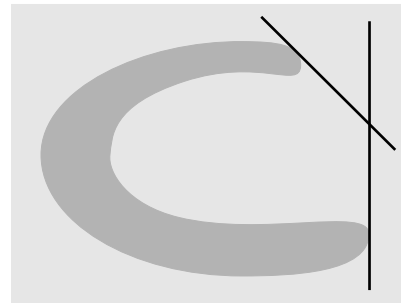
**Fig. 9.5** Patient : coupes petit axe *milieu* entre la base et l'apex de la segmentation spatio-temporelle tridimensionnelle. Ordre chronologique de gauche à droite et de haut en bas.



**Fig. 9.6** Patient : quelques coupes petit axe de la segmentation spatio-temporelle tridimensionnelle de la huitième image. De gauche à droite et de haut en bas : de la base vers l'apex.



**Fig. 9.7** Patient : valeurs calculées  $o_n$  de perfusion apparente – en pourcentage de la valeur la plus forte – en fonction du numéro  $n$  de l'image. Ce graphe est significatif de l'effet de surbrillance du myocarde.



**Fig. 9.8** Signe de l'ensemble de niveaux à convergence et plans des valves vus en coupe grand axe – la paroi septale est en haut.

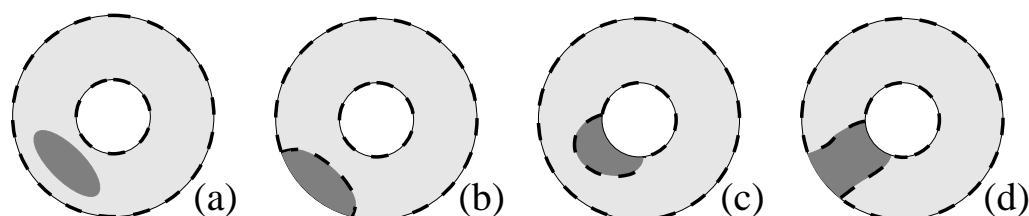
## Chapitre 10

# Discussion

### 10.1 Validité des hypothèses

Examinons tour à tour les deux hypothèses de la méthode de segmentation. Et d'un, le fond est supposé identique dans chaque image. Dans un examen cardiaque TEMP au  $^{99m}\text{Tc}$ -Sestamibi, en plus du myocarde, le foie, les reins – hors du champ de la gammacamera de toute façon – et la rate peuvent révéler un niveau de perfusion significatif. Le foie est à peine mobile sous l'action de la respiration. Dans l'ensemble, ces organes se tiennent tranquilles. Le reste du fond est dominé par du bruit lissé. En conséquence, cette hypothèse de fond identique est réaliste.

Et de deux, dans une image, la valeur de perfusion apparente du myocarde est supposée constante. Lorsque le myocarde est en pleine santé, sa perfusion est homogène dans chaque image. L'hypothèse est alors correcte. La figure 10.1 est là pour nous rappeler qu'il y a parfois des pathologies avec défauts de perfusion, que plusieurs configurations sont possibles, et qu'il n'est pas interdit de faire des conjectures sur le résultat de leur segmentation – contours en ligne discontinue. Cas numéro un (figure 10.1.a), l'hypothèse n'est plus va-



**Fig. 10.1** Influence vraisemblable d'une région hypoperfusée – en gris foncé – sur la segmentation du ventricule gauche : les quatre configurations possibles d'hypoperfusion sont représentées en coupe petit axe. La région correctement perfusée est en gris clair. La ligne noire discontinue décrit la segmentation prévisible.

lide. Toutefois, cela ne se voit jamais en pratique. Dans le deuxième cas (figure 10.1.b), la segmentation ne figure pas le myocarde dans sa globalité anatomique. Néanmoins, gageons que la fraction d'éjection calculée sera encore bonne. Ce n'est certainement pas le cas du troisième (figure 10.1.c) pour lequel le volume mesuré du ventricule gauche est faux. Ce volume n'est même pas mesurable dans le dernier cas (figure 10.1.d) – il faudrait fermer la cavité ventriculaire au niveau du défaut de perfusion, d'une façon comparable à ce qui est fait au niveau des valves. Des tests sur simulations et données cliniques devraient nous éclairer quant à l'influence de cette erreur sur la fraction d'éjection calculée. Quoi qu'il en soit, notre hypothèse, si elle n'est pas toujours vérifiée par le myocarde, l'est en revanche par la segmentation calculée – la valeur dans  $\Omega_n$  est à peu près constante. Cela équivaut

à dire que le résultat de la méthode en respecte bien les fondements, ou encore qu'on ne récolte que ce que l'on a semé. Nous en discutons de nouveau à la section 10.7.

## 10.2 Avantages de la méthode

D'un point de vue théorique, nous avons annoncé que notre méthode a la propriété de prendre en compte la séquence entière dans les segmentations simultanées de chaque image. Un coup d'œil à la vitesse d'évolution des contours actifs – équation (9.18) – n'a pas l'air de le confirmer car seule l'image  $S_n(\cdot)$  est utilisée dans le calcul de  $\nu_n$ . En réalité, si toutes les images sont bien prises en compte dans l'évolution de la segmentation de chaque image, c'est par l'intermédiaire du fond  $b(\cdot)$  mis à jour d'une itération à l'autre en faisant appel à toute la séquence – équation (9.4).

Mais en fait, quel est l'avantage de segmenter une séquence avec un processus global tel que celui que nous proposons en comparaison de plusieurs processus indépendants, un par image? Le but de la segmentation est de déterminer des régions homogènes ou des frontières, c'est-à-dire des zones de fort gradient, entre des régions. En raisonnant sur les gradients, la question précédente revient à se demander s'il est plus facile, ou plus efficace, de trouver de forts gradients temporels que de forts gradients spatiaux. Les deux sont peut-être à utiliser conjointement pour un meilleur rendement. Remarquons qu'un gradient temporel et un flot optique sont deux approches distinctes. Un calcul de flot optique suppose qu'un voxel  $x$  dans l'image  $n$  conserve son intensité dans l'image  $n + 1$  à la position  $x + dx$  si  $dx$  est le vecteur tridimensionnel du mouvement du voxel entre les deux images. Les voxels sont, disons-le, suivis à travers les images. Un gradient temporel est la dérivée de la valeur d'un voxel par rapport au temps. Le terme  $\{b(x) - S_n(x)\}^2$  de la vitesse d'évolution  $\vec{\nu}_n$  est plus ou moins le carré d'une approximation au premier ordre d'un gradient temporel, si  $b(\cdot)$  est regardé comme une image de la séquence  $S_n(\cdot)$  à un instant où aucun objet n'est encore dans le champ de vision. Ce n'est pas sans rappeler l'image de différence entre deux images successives d'une séquence, ingrédient de base dans des travaux tels que [Paragios *et al.* 1996, Csurka et Boutheimy 1999].

Côté pratique, l'emploi de la technique par ensembles de niveaux facilite le calcul de la fraction d'éjection – voir section 9.3.3 – et il devrait en être de même avec d'autres paramètres dynamiques tel que l'épaississement myocardique. N'en restons pas à l'énonciation de cet exemple; allons jusqu'à en déblayer le terrain. Soit un point sur l'épicarde. Soit un point, proche, sur l'endocarde. Soit le segment qui les joint. Il est entièrement dans le myocarde et donc dans une région strictement négative de l'ensemble de niveaux de segmentation à l'exclusion des extrémités correspondant à des points de valeur nulle. Sur le chemin du segment, les valeurs de l'ensemble de niveaux décroissent, puisqu'on s'éloigne du niveau zéro, puis croissent, puisqu'on s'approche du niveau zéro de l'autre bord. Un minimum local a fatalement été traversé qui correspond, on le sent, au squelette du myocarde – puisque le gradient des ensembles de niveaux est maintenu à un, presque partout. Si le segment est perpendiculaire au squelette, alors la valeur du minimum local est la moitié d'une certaine définition de l'épaisseur locale du myocarde. On fait ce calcul en télédiastole. On trouve en télésystole le segment qui s'appareille le mieux avec ce premier-ci – à partir de coordonnées mi-sphériques mi-cylindriques [Faber *et al.* 1999] ou planisphériques [Declerck *et al.* 1998] dans un système lié au ventricule gauche par exemple. On en calcule aussi l'épaisseur et on a ainsi une mesure de l'épaississement local. Ce n'est là qu'un principe possible et tout reste à faire.

### 10.3 Critique des résultats expérimentaux

Les erreurs de segmentation de la simulation MCAT – rapport entre le vrai et le segmenté nombre de voxels du myocarde, voir section 9.3.1 – trouvent probablement deux origines.

Premièrement, les contours de segmentation ne sont pas idéalement situés sur les frontières du myocarde. On le doit au bruit, ou plutôt à la contrainte de courbure ajoutée pour le combattre. Cette contrainte n'autorise pas l'ajustement des contours actifs sur des formes très concaves ou très convexes – voir sections 2.4.2 et 10.5. Justement, cela se produit dans la cavité du ventricule gauche, troisième et quatrième images surtout. D'ailleurs, l'erreur de segmentation la plus importante a été notée en troisième image. Ce revers de médaille de la régularisation est insoluble. En présence de bruit, les contours déterminés peuvent être irréguliers, conduisant à des erreurs de segmentation. Avec l'introduction d'une contrainte de courbure qui lisse les contours, les erreurs de segmentation dues au bruit diminuent, mais apparaissent alors celles liées au problème des concavités et convexités profondes. Secondement, le nombre de voxels du myocarde de la simulation MCAT comprend ceux des valves, trop fines et pas assez perfusées pour être segmentées et donc non comptées dans le nombre de voxels du myocarde segmenté.

Les erreurs de calcul sur la fraction d'éjection – voir section 9.3.3 – ont apparemment deux raisons d'être. D'abord, nous venons de le discuter, la qualité de la segmentation. Ensuite, la localisation des plans des valves. Nous l'avons effectuée manuellement car l'objet n'était pas tant de proposer un algorithme robuste de calcul de fraction d'éjection que de montrer modestement sa faisabilité.

### 10.4 Influence de l'initialisation

Les initialisations de  $b(., t = 0)$  et  $o_n(t = 0)$  ne sont pas cruciales. Dans son allure actuelle, l'algorithme a pour première étape de la boucle principale le calcul de  $b(., t)$  sachant  $u_n(., t)$ . La deuxième étape est le calcul de  $o_n(t)$  sachant  $u_n(., t)$ . Conclusion, peu importe leur initialisation, ils sont immédiatement recalculés à des valeurs cohérentes avec  $u_n(., t)$ . Supposons alors que l'ordre des étapes soit changé dans la boucle principale : les calculs de  $b(., t)$  et  $o_n(t)$  deviennent les dernières phases. Cela implique qu'au cours de la première itération, les vitesses d'évolution des  $u_n(., t = 0)$  dépendent des valeurs initiales  $b(., t = 0)$  et  $o_n(t = 0)$ . Si elles sont loin de leurs solutions respectives, elles vont sûrement causer une mauvaise évolution des contours à cette itération. Néanmoins, les vitesses d'évolution sont toujours faibles donc  $b(., t = dt)$  et  $o_n(t = dt)$  vont être calculés d'après des  $u_n(., t = dt)$  qui ont mal, mais à la fois peu, évolués. La prochaine itération sera l'occasion de *commencer à nouveau* le processus de segmentation avec des valeurs plus cohérentes de  $b(., .)$  et  $o_n(., .)$ .

Par ailleurs, nous n'avons pas étudié l'influence de l'initialisation des  $u_n(., .)$ . Une chose est certaine pourtant : plus les contours initiaux sont éloignés de la solution, plus le processus de convergence est long. Un algorithme multi-résolution semble donc tout indiqué.

### 10.5 Convergence de l'algorithme

Nous ne nous sommes pas attelés à la démonstration théorique de convergence de l'algorithme. Le travail est pénible, en partie à cause du schéma de résolutions alternées. L'ajout de la contrainte de courbure ne nous autorise pas pour autant à interpréter notre méthode



en termes de minimisation d'aire pondérée, nous empêchant de nous inspirer des résultats théoriques à ce sujet. En effet, notre critère peut être écrit :  $\sum_n \{ \int_{\Omega} A_n + \int_{\Gamma_n} d\varepsilon \}$ , mais pas selon la formulation d'aire pondérée :  $\sum_n \int_{\Gamma_n} B_n d\varepsilon$ .

Débattons à peine plus de l'effet d'ajouter cette contrainte. Le but est de calculer une segmentation lisse et d'éviter, en convergeant, la formation de petits contours parasites autour de pics de bruit. Cependant, la courbure entre parfois en compétition avec la partie de la vitesse d'évolution de consistance avec les données – voir équation (9.22). En guise d'exemple, si une portion du contour initial est à l'intérieur de l'objet et que l'objet est convexe, la consistance avec les données est strictement négative tandis que la courbure sera indubitablement positive à l'approche de la frontière de l'objet – elle est même immédiatement positive si le contour initial est déjà convexe. On comprend mieux pourquoi notre critère régularisé nous prive de la segmentation précise des zones profondément concaves ou convexes. Les concavités et convexités maximales attendues sont fonction du paramètre  $\delta$  : si  $\delta$  est élevé, ce maximum est bas et inversement. Cette possible compétition entre les deux morceaux de la vitesse d'évolution est probablement un thème sensible de l'étude théorique de convergence de l'algorithme.

Le test numérique de convergence de l'algorithme dépend de l'évolution du niveau zéro entre deux itérations successives, celle-ci étant mesurée grâce aux valeurs absolues de la vitesse d'évolution dans le proche voisinage de celui-là. Si le maximum est inférieur à un seuil, l'algorithme est supposé avoir convergé – voir section 3.2.5.

## 10.6 Calcul du fond et de la perfusion apparente

Parmi les produits de l'algorithme, seuls les  $u_n(\cdot)$  sont pertinents pour la segmentation. Pourtant, on doit prendre la peine du calcul de  $b(\cdot)$  et des  $o_n$  puisque les vitesses d'évolution des  $u_n(\cdot)$  les réclament. Ils font donc office de variables auxiliaires. Le fond est effectivement sans intérêt diagnostique. Nous serions tenté de tirer pareille conclusion parlant des  $o_n$ . En effet, le  $^{99m}\text{Tc}$ -Sestamibi ne fournit pas une mesure quantitative. Cependant, l'effet de surbrillance du myocarde que traduit la variation relative des  $o_n$  est un indice de l'épaississement myocardique moyen comme cela est suggéré dans [Mochizuki *et al.* 1991, Cooke *et al.* 1994, Buvat *et al.* 1997].

## 10.7 Travaux supplémentaires

Faire l'hypothèse d'une perfusion constante du myocarde dans chaque image est vraisemblable. Clairement, les régions hypoperfusées sont exclues de la segmentation – voir section 10.1. Dans la mesure où l'imagerie TEMP est une modalité fonctionnelle, nous ne pouvons pas en espérer plus. Pourtant si, on désire segmenter le myocarde tout entier, qu'il soit perfusé avec homogénéité ou par bribes. De la sorte, les volumes des régions hypoperfusées – en pourcentage du volume total – pourraient par exemple être déterminés. Cette segmentation anatomique à partir de données fonctionnelles exige la définition d'un modèle anatomique comme dans [Germano *et al.* 1995, Nelson *et al.* 1996, Faber *et al.* 1999]. Nous pourrions essayer de modifier dans ce sens, par le biais de contraintes, le modèle de notre méthode.

## 10.8 Étude expérimentale

Nous avons appliqué notre méthode à une simulation de séquence cardiaque TEMP normale – pas de défauts de perfusion, pas de troubles cinétiques – et deux séquences cliniques, l’une au comportement cinétique normal, l’autre révélant une hypokinésie diffuse. Il va de soi qu’ « évaluation expérimentale de la méthode » n’est pas l’expression appropriée. Voyons, outre un plus grand nombre de séquences de tests, ce que cela impliquerait.

Malgré des conditions d’acquisitions identiques, la perfusion du myocarde varie d’un patient à l’autre pour des raisons physiologiques. En conséquence de quoi le contraste change entre les séquences cliniques. Dans le contexte d’une évaluation expérimentale rigoureuse, nous devrions effectuer une normalisation de séquence avant d’embrayer l’algorithme de segmentation. Cela pourrait être fait par un recadrage linéaire des intensités des images de façon que la dynamique soit  $[0; 100]$  par exemple. La méthode serait ainsi indépendante du contraste original de la séquence – particulièrement en ce qui concerne le choix de  $dt$ .

L’influence du paramètre  $\delta$  sur la segmentation doit être examinée. Pour commencer, sur des simulations, les erreurs de segmentation – comme celle que nous avons proposée à la section 9.3.1 – en fonction de  $\delta$  formeraient un graphe utile. Pour continuer, en se servant à la fois de simulations et de données cliniques, la fraction d’éjection, ou un autre paramètre calculé à partir de la segmentation, pourrait être étudiée, toujours en fonction de  $\delta$ . Nous avons réalisé plusieurs calculs de fraction d’éjection pour différentes valeurs de  $\delta$ . Aussi bien avec la simulation MCAT que la séquence clinique de la section 9.3.2, nous avons constaté que le volume obtenu du ventricule gauche en télédiastole était moins influencée par ce paramètre que celui en télésystole.

Observation somme toute logique puisque la courbure est globalement plus élevée en télésystole, ce qui pousse la régularisation à être plus contraignante – voir section 10.3.

Au final, la fraction d’éjection calculée augmente avec  $\delta$ . Cette augmentation, en relatif, vaut moins de 1 % avec la simulation MCAT pour  $\delta$  variant dans  $[0,05; 0,2]$ . Avec la séquence clinique, l’augmentation relative dépasse 19 % quand  $\delta$  vaut 0,2. Nous expliquons cette différence de sensibilité par l’aspect franc des bords du myocarde dans la simulation et plus en douce pente dans la séquence clinique. La consistance avec les données de la vitesse d’évolution est donc suffisamment costaute pour retenir les contours de segmentation sur la frontière du myocarde simulé, pendant qu’elle ne peut pas s’opposer à leur ascension de la pente du myocarde réel sous l’action de la contrainte de courbure. Ces tests préliminaires doivent être complétés par une étude plus approfondie.

Les acquisitions cardiaques TEMP synchronisées sont plus touchées par le bruit car le nombre de coups moyen par projection est  $N$  fois inférieur à celui d’acquisitions traditionnelles équivalentes. De manière générale, le bruit agit de manière néfaste sur les résolutions en  $b(\cdot)$ ,  $o_n$  et  $u_n(\cdot)$ . Il faut en fait distinguer  $b(\cdot)$  et  $o_n$ , obtenus par des calculs de valeurs moyennes<sup>1</sup>, ce qui réduit nettement l’influence du bruit. À l’opposé, les retombées sont critiques à l’égard des  $u_n(\cdot)$ . Pour s’en convaincre, il suffit de remarquer la présence, double de surcroît, de  $S_n(x)$  dans l’expression de la vitesse d’évolution – voir équation (9.18). Plus  $S_n(\cdot)$  est bruitée, plus la vitesse d’évolution est bruitée, plus les  $u_n(\cdot)$  sont perturbés, plus les contours fins sont irréguliers, moins on est content. Envisageons trois solutions. Numéro un, le lissage de la vitesse d’évolution à chaque itération. Si on laisse de côté la question du temps de calcul, il reste quand même qu’une – encore hypothétique – preuve de convergence de l’algorithme ne serait peut-être plus valide. Numéro deux, le lissage *a priori* de la séquence. Cela regroupe efficacité en temps de calcul et respect de la théorie

---

<sup>1</sup>Valeur moyenne par rapport au temps pour  $b(\cdot)$  et à l’espace pour  $o_n$ , voir respectivement les sections 9.2.3 et 9.2.4.

– l’algorithme converge simplement vers les contours lissés de la séquence. Nous ne l’avons pas jugé utile pour la simulation MCAT dont le niveau de bruit n’est pas trop important. Quant à la séquence clinique, elle a été reconstruite par l’algorithme standard du Centre Antoine Lacassagne visant à produire des images dédiées au diagnostic. L’algorithme de reconstruction inclut donc, pour donner une apparence suffisamment lisse, un filtrage *a posteriori* équivalent, du point de vue de la segmentation, à un filtrage *a priori*. Numéro trois, utilisation d’une contrainte de courbure – voir section 9.2.6. Malheureusement, ces deux dernières solutions, que nous avons combinées pour traiter la séquence clinique, entraînent une moins bonne localisation des contours alors qu’on gagne en stabilité. A-t-on avantage à employer conjointement ces deux dernières solutions? Si oui, avec quel poids relatif – valeur du paramètre  $\delta$  par rapport à la variance de la gaussienne du filtre de lissage *a priori* par exemple –? Vaut-il mieux lisser faiblement et fixer un  $\delta$  élevé ou l’inverse? D’autre part, une approche probabiliste du calcul de la vitesse d’évolution telle celles proposées par Yezzi *et al.* [1999] et Zeng *et al.* [1999] pourrait être efficace.

## IV SEGMENTATION ET MOUVEMENT

---



# Chapitre 11

## Contexte

Comme au cours de la partie précédente, cœur, myocarde et adjectifs associés tiennent parfois injustement lieu de ventricule gauche dans celle-ci. Ici, tout est raconté en dimension trois. Nous employons souvent « recalage » en parlant de la méthode développée au chapitre 12. Bien sûr, une des premières sections de cette partie – section 11.2 – sous-entend qu’il s’agit du thème. Pourtant, dans la section 13.1, nous faisons mine de nous en distinguer. Finalement, en section 13.5, nous négocions une filiation. Allez comprendre.

---

### 11.1 Rapport signal à bruit

Le plus des acquisitions synchronisées en imagerie cardiaque TEMP est, nous en avons discuté en section 8.1, la réduction du flou cinétique. Le nombre moyen de coups par projection  $N$  fois plus petit –  $N$ , nombre d’intervalles de synchronisation –, et donc un rapport signal à bruit *grosso modo* divisé par  $\sqrt{N}$ , en est le problème. Si alors on parvenait à replacer les  $N$  images du cœur dans une même configuration, c’est-à-dire à un même instant de la contraction, pour les ajouter, on retrouverait une image de rapport signal à bruit comparable à celui d’une image reconstruite à partir d’une acquisition traditionnelle, mais bien moins pénalisée par le flou cinétique. Synthétiquement dit, nous aimerions recaler vis-à-vis de la première image par exemple les  $N - 1$  autres.

### 11.2 Quelques mots sur le recalage

Il ne s’agit bien sûr pas d’une revue de la bibliographie, abondante, du domaine mais simplement de la présentation en grandes lignes des méthodes paramétriques. Nous entrons à peine plus dans le détail de certaines méthodes non paramétriques.

Le recalage est en quelque sorte le mouvement à appliquer aux voxels d’une première image pour faire que sa géométrie – en fait un sous-ensemble de sa géométrie – corresponde à celle d’une seconde. Selon que ce mouvement est décrit par une série de transformations identiques pour chaque voxel ou pas, le recalage est rigide ou non. Précisément, la rigidité est préservée par les translations et les rotations. Les transformations sont ou ne sont pas paramétriques. Remarquons qu’il ne faut pas associer paramétrique à rigide. Les transformations de courbes *spline* sont paramétriques et pas nécessairement rigides. Le cas le plus général est non rigide et non paramétrique. Mais avant toute chose, voyons les étapes classiques des méthodes paramétriques [Feldmar et Ayache 1996, Davis *et al.* 1997, Declerck 1997, Declerck *et al.* 1998].

(i) Des primitives sont extraites dans l’image de référence et dans l’image à recaler. Ce sont

au choix des contours [Deriche 1987], des points à forte courbure [Deriche et Giraudon 1993], des lignes de crête [Monga *et al.* 1994] ... Il faut qu'elles soient significatives de l'objet ou des objets principaux de l'image telle une esquisse.

(ii) La mise en correspondance des primitives consiste en l'appariement de chaque primitive de l'image de référence avec une et une seule primitive de l'image à recaler. L'opération est par exemple menée par un algorithme du plus proche voisin [Besl et McKay 1992, Zhang 1994, Feldmar et Ayache 1996] ou de maximum de corrélation [Evans *et al.* 1991]. Au terme de quoi on dispose d'un ensemble de couples (antécédent, image) que doit permettre de retrouver une transformation – éventuellement composée d'une série de transformations élémentaires.

(iii) Le calcul de la transformation fait suite au choix d'un modèle jugé adéquat à la description des déformations que l'image à recaler subissant, ses primitives se trouvent confondues avec celles de l'image de référence – par exemple un modèle rigide [Zhang 1994], affiné, localement affiné [Feldmar et Ayache 1996] ou de transformation entre deux courbes *spline* [Davis *et al.* 1997, Declerck 1997, Declerck *et al.* 1998]. L'estimation des paramètres de la transformation vise à minimiser l'écart entre l'image d'un antécédent attribuée par mise en correspondance et son image calculée par la transformation.

(iv) La transformation est ensuite appliquée dans tout le domaine de définition de l'image – c'est-à-dire en chaque voxel – pour obtenir l'image recalée [Davis *et al.* 1997] ou au moins en tout point de la courbe ou de la surface à recaler [Declerck 1997, Declerck *et al.* 1998]. Les étapes (ii) et (iii) sont parfois noyées dans un processus d'optimisation itératif [Besl et McKay 1992, Feldmar et Ayache 1996, Declerck 1997, Declerck *et al.* 1998].

Avec ce type de techniques, les déformations autorisées du ou des objets – pour nous, il s'agit du cœur – sont restreintes par le modèle de transformation choisi. Une méthode plus générale avec de vrais morceaux de flot optique est proposée par Klein [1999] qui récidive en [2000]. Les déformations autorisées de l'objet sont seulement contraintes par une hypothèse de propriété élastique – cette régularisation est nécessaire car différents champs de mouvement conduisent à la même image déformée. Malheureusement, le flot optique est sensible au bruit et surtout sa détermination dans les régions homogènes est entièrement dictée par sa valeur au niveau des contours et la régularisation appliquée [Gorce *et al.* 1997]. Dans les images TEMP, les contours sont parfois irréguliers ; le flot optique y sera houleux et risque ainsi de ne pas être propagé avec cohérence dans les régions homogènes. Il ne faut voir dans cette description qu'une présentation caricaturale de la méthode et surtout pas une présentation générale des méthodes de calcul du flot optique.

Thompson et Toga [1996] segmentent par des surfaces quelques régions essentielles du cerveau dans une image de référence et dans une image à traiter. Les surfaces homologues sont mises en correspondance point à point et les vecteurs de déplacement formés sont donc des transformations locales entre surfaces. La transformation à appliquer en un point quelconque est une moyenne fonction des distances aux points les plus proches situés sur chaque surface et des transformations qui y règnent. Cette méthode, non paramétrique, nécessite la segmentation puis la mise en correspondance point à point des surfaces homologues.

Une méthode beaucoup plus libre – ni segmentation, ni mise en correspondance – et tout aussi dense au sens où elle calcule une déformation en tout point du domaine de définition de l'image est celle développée par Thirion [1998]. On pourrait qualifier d'eulérienne la modélisation qui y est présentée. En chaque point, la déformation élémentaire à effectuer a la direction du gradient de l'image de référence et une valeur algébrique dépendant de la différence entre la valeur de l'image à recaler et celle de l'image de référence. Le principe est que dans l'image, le ou les objets d'intérêt ayant une valeur plus grande que le fond

– l'inverse ne mettrait évidemment pas la méthode en défaut –, le signe de cette différence indique si un point intérieur à l'objet dans l'image à recaler est bien en vis-à-vis d'un point intérieur à l'objet dans l'image de référence et pareillement pour l'extérieur. Le calcul est itéré jusqu'à convergence. Puisque les déformations sont locales et ne s'appuient pas sur des éléments anatomiquement significatifs, il faut que les deux images soient relativement proches. Ce n'est pas un inconvénient. Il suffit de faire appel à un recalage rigide préalable. Une autre condition est que les intensités des images soient comparables. Comme le précise Thirion, la règle de trois résout le problème si une seule modalité est en jeu. Il propose une solution lorsque deux modalités qui provoquent des réponses différentes pour un tissu identique interviennent. La vraie limitation réside dans les régions homogènes de l'image de référence. La première expression obtenue de la déformation élémentaire  $y$  est incohérente – régions presque homogènes – voire indéfinie – régions vraiment homogènes. D'autres expressions, heuristiques, sont alors envisagées. La méthode que nous proposons a une philosophie éloignée de cette précédente. Nous aboutissons pourtant à une déformation élémentaire qui n'y est pas complètement étrangère.





## Chapitre 12

# Méthode proposée

### 12.1 L'idée

La déformation du cœur entre deux images successives est complexe. Ne nous fixons aucune contrainte, essayons de trouver un moyen de recalcr non rigidement à l'aide d'une transformation non paramétrique. En prime, considérons comme primitives les contours de segmentation du ventricule gauche à disposition depuis la partie III et essayons de nous passer d'une étape de mise en correspondance explicite.

L'idée est donc de transformer le contour de segmentation de l'image à recalcr en le contour de segmentation de l'image de référence. Une transformation instantanée semble irréaliste. Disons plutôt itérative. En parallèle de cette déformation progressive de contour, nous voudrions faire suivre les voxels de l'image. À tout le moins, nous pouvons emmener les voxels du contour initial au fil de sa déformation. Bien sûr, cela ne suffit pas à recalcr l'image entière. Mais en imaginant que le contour soit flanqué de contours parallèles à la manière des couches d'un oignon, ce transport de voxels est possible pour chaque contour et donc dans toute l'image qui est ainsi recalcrée petit à petit. En matière d'ensembles de niveaux, le contour de segmentation correspond au niveau zéro. Les couches intérieures sont les niveaux à valeurs strictement négatives et les couches extérieures sont les niveaux à valeurs strictement positives. Nous pouvons donc certainement arriver à nos fins avec les ensembles de niveaux de segmentation des images à recalcr et de référence.

### 12.2 La méthode

La méthode fonctionne par construction de deux suites d'images, l'une composée d'ensembles de niveaux allant de la segmentation de l'image à recalcr à la segmentation de l'image de référence, l'autre composée d'images en voie de recalcr construites au gré des évolutions constatées dans l'autre suite.

#### 12.2.1 Ensembles de niveaux intermédiaires

Soient  $u_i(\cdot)$  et  $u_j(\cdot)$  les deux ensembles de niveaux de segmentation du cœur dans l'image à recalcr et de référence respectivement. Nous voudrions que  $u(\cdot)$ , ensemble de niveaux intermédiaire, converge vers  $u_j(\cdot)$  avec  $u_i(\cdot)$  comme estimée initiale. Prenons par exemple un critère classique des moindres carrés :

$$J(u) = \int_{\Omega} \{u_j(x) - u(x)\}^2 \quad (12.1)$$

De sorte à minimiser le critère (12.1) en  $u(\cdot)$ , il faut résoudre l'équation d'Euler-Lagrange associée :

$$\begin{aligned} \nabla J &= 0 \\ \iff -2\{u_j - u\} &= 0 \end{aligned} \quad (12.2)$$

La solution de (12.2) est identique à celle du schéma dynamique suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla J \quad (12.3)$$

où  $u(\cdot, t = 0) = u_i(\cdot)$ . Nous l'approchons numériquement au travers d'une approximation en différence finie du premier ordre :

$$\forall t \geq 0, \quad u(\cdot, t + dt) = u(\cdot, t) - dt \cdot \nabla J(\cdot, t) \quad (12.4)$$

### 12.2.2 Interpolation

Soient  $S_i(\cdot)$  et  $S_j(\cdot)$  les deux images du cœur dont les segmentations sont respectivement  $u_i(\cdot)$  et  $u_j(\cdot)$ . Notre objectif est de calculer  $s_i^{\rightarrow j}(\cdot)$ , une déformation non rigide de  $S_i(\cdot)$  telle que les contours du cœur déformé soient identiques à ceux du cœur dans  $S_j(\cdot)$  avec des intensités de voxel reliées à  $S_i(\cdot)$ . Appelons  $s(\cdot)$  une image intermédiaire entre  $S_i(\cdot)$  et  $s_i^{\rightarrow j}(\cdot)$ .

Entre  $u(\cdot, t)$  et  $u(\cdot, t + dt)$ , le contour de niveau zéro s'est déplacé en direction du contour de niveau zéro de  $u_j(\cdot)$ . Mais pas seulement. Chaque contour de niveau s'est aussi déplacé en direction de son partenaire dans  $u_j(\cdot)$ , à savoir le contour de même niveau. Soit  $y$  un voxel de  $\Omega$ . Il appartient à un unique contour de niveau de  $u(\cdot, t)$ , le contour de niveau  $u(y, t)$ , et nous posons  $k = u(y, t)$ . Nous sommes curieux du déplacement  $d\vec{y}$  de  $y$  entre le contour de niveau  $k$  de  $u(\cdot, t)$  et le contour de niveau  $k$  de  $u(\cdot, t + dt)$ . Puisqu'une infinité de déplacements peuvent justifier de la déformation de  $u(\cdot, t)$  en  $u(\cdot, t + dt)$ , nous devons faire une hypothèse. Nous supposons que les déformations des contours de niveau sont localement normales :  $d\vec{y}$  est normal au contour de niveau  $k$  de  $u(\cdot, t)$  au point  $y$ . Essayons de calculer  $d\vec{y}$ . Soit  $x$  le correspondant de  $y$  à  $t + dt$ . Nous avons :

$$\begin{cases} x = y + d\vec{y} \\ u(x, t + dt) = u(y, t) = k \end{cases} \quad (12.5)$$

Appliquons l'équation (12.4) en  $x$  :

$$\begin{aligned} \underbrace{u(x, t + dt)}_k &= u(x, t) - dt \times \nabla J(x, t) \\ \iff u(x = y + d\vec{y}, t) &= k + dt \times \nabla J(x, t) \end{aligned} \quad (12.6)$$

Le développement de Taylor -  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire - à l'ordre un de  $u(y + d\vec{y}, t)$  par rapport à  $y$  donne :

$$\begin{aligned} u(y + d\vec{y}, t) &= u(y, t) + \langle d\vec{y}, \nabla u(y, t) \rangle + o(|d\vec{y}|) \\ &\approx u(y, t) + \langle d\vec{y}, \nabla u(y, t) \rangle \end{aligned} \quad (12.7)$$

L'hypothèse de déformation localement normale est matérialisée par l'approximation (12.7), car seule la composante de  $d\vec{y}$  le long de  $\nabla u(y, t)$ , un vecteur normal en  $y$  au contour de niveau  $k$ , est préservée<sup>1</sup>. Alors, en combinant (12.6) et (12.7), nous avons :

$$\underbrace{u(y, t)}_k + \langle d\vec{y}, \nabla u(y, t) \rangle = k + dt \times \nabla J(x, t) \quad (12.8)$$

<sup>1</sup>Si nous avions voulu faire autrement, il aurait fallu développer à l'ordre deux au moins.

La seule solution à (12.8) qui soit en accord avec l'hypothèse de mouvement normal est :

$$d\vec{y} = dt \times \nabla J(x, t) \times \frac{\nabla u(y, t)}{|\nabla u(y, t)|^2} \quad (12.9)$$

Dans l'équation (12.9), nous remplaçons  $\nabla u(y, t)$  par  $\nabla u(x, t)$ . Mais de quel droit d'abord ? Une justification est tentée en annexe E – voir à ce propos [Arnold 1983]. En conclusion, d'après les équations (12.5) et (12.9), nous pouvons affecter la valeur  $s(y, t)$  à la position  $y + d\vec{y} = x$  de  $s(., t + dt)$  ou bien la valeur  $s(x - d\vec{y} = y, t)$  à la position  $x$  de  $s(., t + dt)$ . En théorie, cela ne fait pas plus de différence qu'entre bonnet blanc et blanc bonnet. En pratique, la dissemblance est proche du haut-de-forme face au béret basque – voir section 12.2.3.

### 12.2.3 Algorithme

Disposant de l'image  $s(., t)$  et de  $d\vec{y}$  pour tout point  $y$  de  $\Omega$ , nous devons calculer  $s(., t + dt)$ . Les coordonnées de  $d\vec{y}$  ne sont en général pas entières.

Si  $y$  est à coordonnées entières – c'est un voxel de  $s(., t)$  –, alors  $y + d\vec{y} = x$  ne l'est pas. On ne peut donc pas affecter directement la valeur  $s(y, t)$  à la position  $x$  dans  $s(., t + dt)$ . Paradoxe, nous appelons ce sens de mise à jour le sens direct – *forward scheme* en anglais. Ce problème a au moins deux issues. Soit on affecte  $s(y, t)$  au voxel de  $s(., t + dt)$  de coordonnées les plus proches. Soit on répartit sur plusieurs voxels de  $s(., t + dt)$  la valeur  $s(y, t)$  selon une gaussienne centrée en  $x$  [Klein 1998]. L'avantage de cette deuxième solution par rapport à la précédente est d'éviter que des voxels de  $s(., t + dt)$  ne reçoivent pas de valeur.

Si  $x$  est à coordonnées entières – c'est un voxel de  $s(., t + dt)$  –, alors  $x - d\vec{y} = y$  ne l'est pas. On ne dispose donc pas immédiatement de la valeur  $s(y, t)$ , qui peut être calculée par interpolation trilineaire, par exemple. Elle est ensuite affectée au voxel  $x$  de  $s(., t + dt)$ . Nous traduisons le *backward scheme* anglais en mise à jour arrière. Nous l'avons utilisée car il est clair qu'elle est plus simple à mettre en œuvre que la mise à jour directe avec étalement.

Voici regroupées au tableau 12.1 les étapes de l'algorithme de déformation parmi lesquelles s'est logée une réinitialisation de  $u(.,.)$  que nous motivons immédiatement après. En fin d'étape un est réinitialisé l'ensemble de niveaux  $u(., t + dt)$  pour qu'il retrouve un gradient de norme unitaire, presque partout, qu'il a pu perdre, un peu partout, lors de son évolution entre les instants  $t$  et  $t + dt$ . Cette réinitialisation préserve le contour de niveau zéro, rappelons-le – voir section 3.2.4 –, et procède à un réétalement régulier des contours de niveau de part et d'autre. En sus de la question d'approximation numérique du gradient de  $u(.,.)$ , dangereuse quand il devient trop fort par rapport à la taille des voxels – violation du théorème de Shannon –, pointons le fait qu'un gradient de norme unitaire est la condition qui nous a permis de changer  $\nabla u(y, t)$  en  $\nabla u(x, t)$ , substitution sans laquelle nous ne pouvons pas calculer le mouvement élémentaire  $d\vec{y}$  : nous ne disposons que d'une équation, l'équation (12.9), pour déterminer les deux inconnues  $d\vec{y}$  et  $y$ .

L'algorithme a convergé lorsque  $u(.,.)$  est égal à  $u_j(.,.)$ . Ayant fixé  $dt$ , sachant la différence maximale en valeur absolue entre  $u_i(.,.)$  et  $u_j(.,.)$  et d'après l'équation d'évolution de  $u(.,.)$  – voir équation (12.4) –, le nombre nécessaire d'itérations depuis  $u_i(.,.)$  jusqu'à  $u_j(.,.)$  est calculable. Mais ce calcul est remis en cause par l'introduction de la réinitialisation. Nous avons utilisé un test de convergence classique, quoique heuristique, qui compare l'erreur maximale en valeur absolue entre  $u(.,.)$  et  $u_j(.,.)$  à un seuil.

<p> <math>u(., t = 0) \leftarrow u_i(.)</math>  <math>s(., t = 0) \leftarrow S_i(.)</math>  <math>t \leftarrow 0</math>            Fixer le paramètre <math>dt</math> (voir section 13.3)         </p> <p><b>répéter</b></p> <p><i>Étape 1</i> : mise à jour de l'image <math>s</math> en cours de recalage</p> <p><math>\nabla J(., t) \leftarrow -2\{u_j(.) - u(., t)\}</math></p> <p><b>pour chaque</b> <math>x</math> <b>dans</b> <math>\Omega</math></p> <p><b>faire</b></p> <p><math display="block">d\vec{y} \leftarrow dt \times \nabla J(x, t) \times \frac{\nabla u(x, t)}{ \nabla u(x, t) ^2}</math></p> <p><math>s(x, t + dt) \leftarrow s(x - d\vec{y}, t)</math>            (le terme de droite est calculé par interpolation trilineaire)</p> <p><b>fait</b></p> <p><i>Étape 2</i> : mise à jour de l'ensemble de niveaux <math>u</math></p> <p><math>u(., t + dt) \leftarrow u(., t) - dt \cdot \nabla J(., t)</math>  <math>u(., t + dt) \leftarrow</math> réinitialisation de <math>u(., t + dt)</math> (voir section 3.2.4)</p> <p><math>t \leftarrow t + dt</math>  <math>t_{\max} \leftarrow t</math></p> <p><b>jusqu'à</b> convergence (voir plus loin dans cette section)</p> <p>Image recalée <math>s_i^{\rightarrow j}(.) \leftarrow s(., t_{\max})</math></p>
---

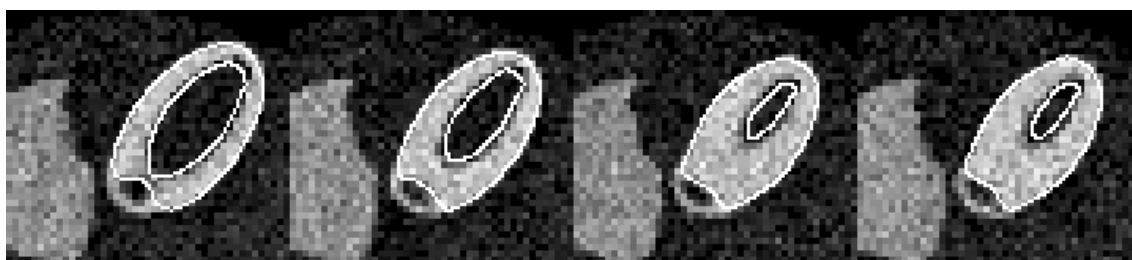
Tab. 12.1 Algorithme de recalage à partir de contours.

## 12.3 Application à la compensation cinétique

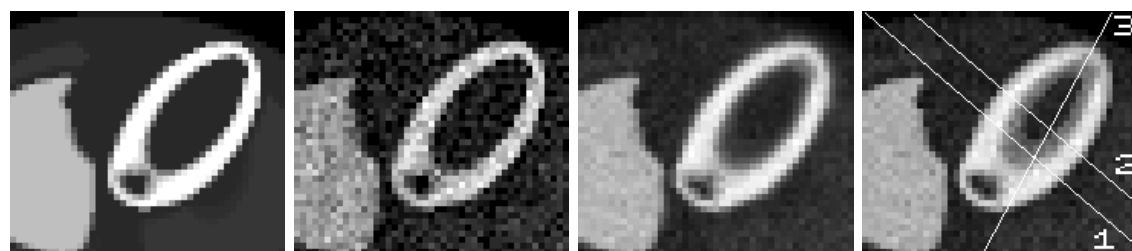
L'application qui nous intéresse en imagerie cardiaque TEMP synchronisée est la compensation cinétique, soit le recalage de  $N - 1$  images de la séquence dans la configuration de la  $N^e$ . Elles sont alors ajoutées pour augmenter le rapport signal à bruit sans l'inconvénient du flou cinétique. Voyons cela.

### 12.3.1 Simulation MCAT

La séquence MCAT simulée, présentée et segmentée à l'occasion de la section 9.3.1, comporte du bruit de Poisson. Nous avons utilisé l'ensemble de niveaux de segmentation de la première image comme référence sur laquelle nous avons tour à tour recalé les images numéro deux à huit. Tout a ensuite été additionné. Afin de rappeler l'allure de la séquence, des coupes des quatre premières images – correspondant à la systole – sont montrées en figure 12.1. La segmentation  $y$  est superposée. Sur la figure 12.2, on peut apprécier, de gauche à droite, la première image de la séquence avant ajout du bruit, la somme des images consécutive à leur recalage et la somme des images sans recalage préalable. Une appréciation plus objective est proposée par les profils de la figure 12.3. La première image non bruitée de la séquence tenant le rôle de référence, les rapports signal à bruit valent :



**Fig. 12.1** Coupes des quatre premières images de la séquence MCAT tridimensionnelle avec segmentation superposée.



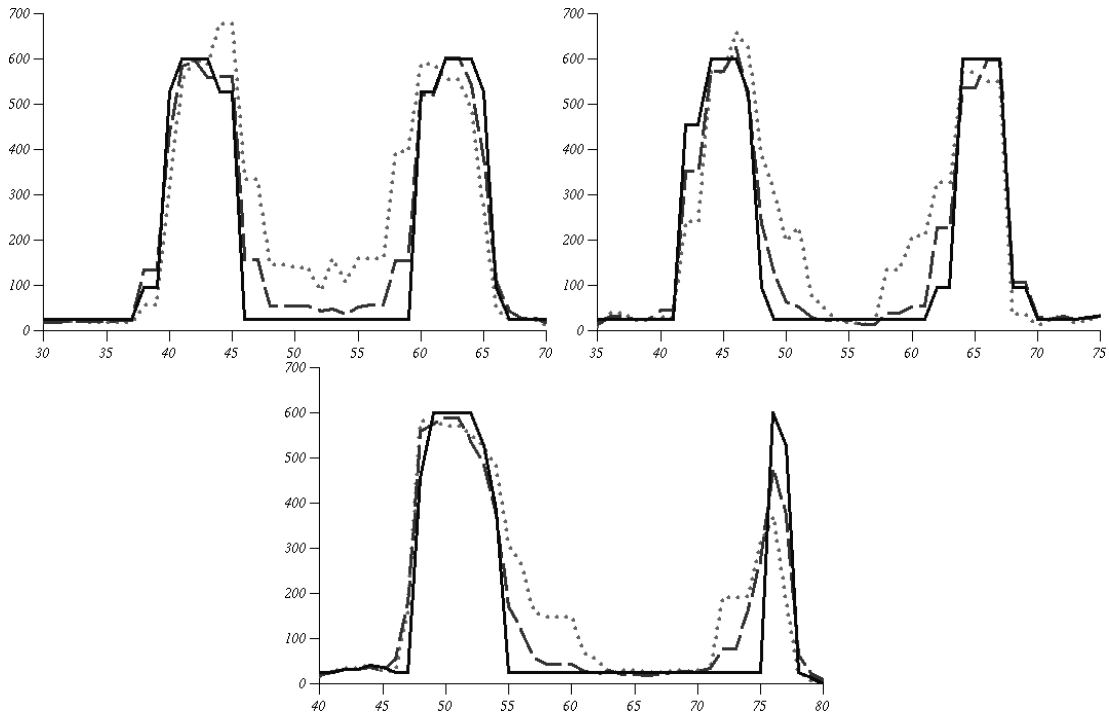
**Fig. 12.2** Coupes de la séquence MCAT : première image non bruitée (*gauche*), première image bruitée (*milieu-gauche*), somme après recalage – avec compensation cinétique – (*milieu-droit*) et somme sans recalage (*droite*).

- pour la première image bruitée 32,4 en pic, 11,1 en énergie et 9,7 en variance ;
- pour la somme sans recalage 32,1 en pic, 10,9 en énergie et 9,4 en variance ;
- et pour la somme après recalage 35,8 en pic, 14,5 en énergie et 13 en variance.

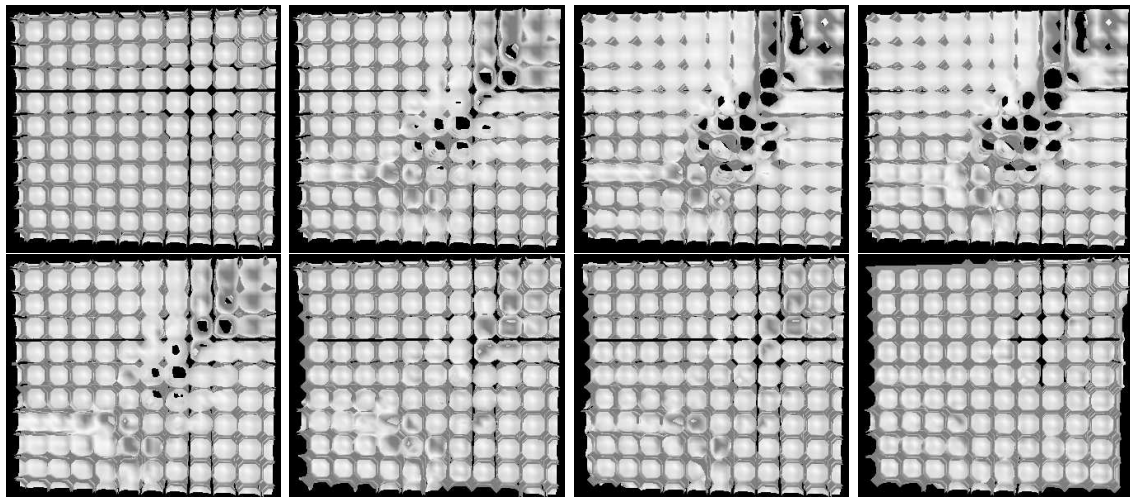
Nous avons réalisé une seconde expérience en bruitant plus la séquence MCAT, toujours à l'aide d'un bruit de Poisson. La segmentation employée pour le recalage n'a pas été recalculée. Cela signifie que les déformations successives respectives des images à recaler ont été identiques au cours des deux tests. Ce point, discutable, peut être justifié en soulignant le fait que la méthode de recalage est *a priori* indépendante de la méthode de segmentation, pourvu qu'elle fournisse des ensembles de niveaux. Nous avons obtenu les rapports signal à bruit suivants :

- pour la première image bruitée 29,5 en pic, 8,3 en énergie et 6,8 en variance ;
- pour la somme sans recalage 31,7 en pic, 10,4 en énergie et 8,9 en variance ;
- et pour la somme après recalage 35,1 en pic, 13,9 en énergie et 12,4 en variance.

Pour tenter de visualiser la déformation finale entre une image à recaler et l'image recalée, nous avons appliqué les déformations successives pour chacun des sept recalages à une grille régulière. Les résultats, difficilement exploitables, sont présentés sur la figure 12.4.



**Fig. 12.3** Profil 1 (*gauche*), profil 2 (*droite*) et profil 3 (*dessous*) : les lignes pointillés correspondent à la somme sans recalage, les lignes discontinues correspondent à la somme après recalage et les lignes continues à la première image sans ajout de bruit.



**Fig. 12.4** Déformations d'une grille régulière induites par le recalage des images deux à huit de la séquence MCAT sur la première image : en haut et à gauche, la grille originale, puis, de gauche à droite et de haut en bas, les déformations obtenues pour les images deux à huit.

# Chapitre 13

## Discussion

### 13.1 Validité des hypothèses

Nous faisons l'hypothèse qu'une déformation globale est constituée d'une succession de déformations localement normales. Il ne peut donc pas se produire de véritable rotation au cours de l'évolution du contour initial vers le contour de référence. Imaginons une ellipse de grand axe vertical, que nous dupliquons et tournons par rapport à son centre d'un angle de 90 degrés. Le petit axe de l'une – autrement nommé croissant – est confondu avec le grand axe de l'autre. Certains algorithmes de recalage, rigides et même non rigides, opéreraient une rotation, mais pas notre méthode qui écraserait le grand axe et étirerait le petit axe de l'ellipse à recalcer. En ce sens, elle s'apparente plus à une recherche de déformation minimale – interprétation plus qu'intuitive et motivée uniquement par le caractère normal aux contours de niveau des déformations –, qu'à un recalage. Malgré cela, nous proposons à la section 13.5 d'en faire usage comme tel. Pour revenir quelques lignes à l'idée de déformation minimale, Younes [1999] dérive mathématiquement une méthode de recalage non rigide de courbes planes à partir d'une fonction de coût définissant une distance entre des courbes [Younes 1998]. La déformation solution du problème est minimale par rapport à cette distance. Malheureusement, l'application aux courbes fermées et la faisabilité numérique obligent à des compromis sous-optimaux. L'extension au recalage de surfaces ne semble pas trivial.

La question est de savoir si cette hypothèse est justifiée. Pas pour l'application des séquences cardiaques synchronisées car le cœur a un mouvement de torsion – rotation autour de l'axe du ventricule gauche qu'on dénomme « twist » en anglais –, progressivement moins prononcé depuis la base jusqu'à l'apex où il n'est pas loin d'être proche de zéro. Mais à quel point la compensation cinétique en est-elle gênée? Sur un cœur sain, cela ne devrait pas avoir d'importance. Nous le voyons en considérant le cas d'un cœur souffrant d'un défaut de perfusion. Deux possibilités : seule la partie bien perfusée a été segmentée ou nous disposons du contour anatomique du myocarde. Dans le premier cas, cela ne devrait pas avoir d'importance. Nous le voyons en considérant le second. La zone hypoperfusée est emportée par le mouvement de torsion. Ainsi, les images recalées, qui auront essentiellement subi des déformations radiales, ne mettront pas en correspondance cette zone. Lors de l'addition des images, un flou cinétique, dépendant de l'amplitude de la rotation, apparaîtra au niveau du défaut de perfusion. Théoriquement, nous ne pouvons pas avoir ce désagrément si le contour n'encadre que la région bien perfusée car alors le recalage mettra également en correspondance la frontière de la zone hypoperfusée.



## 13.2 Avantages de la méthode

Le champ possible des déformations de notre méthode de recalage – non rigide et non paramétrique – est libre puisque les contours de référence et à recaler sont quelconques, c'est-à-dire qu'ils n'appartiennent pas à une famille qui dicterait les espaces de départ et d'arrivée des déformations. Justement, le fait que les primitives utilisées soient des contours est un avantage. Alors qu'en général ce sont des points ou des lignes, nous prenons en compte plus d'information, mieux structurée, sans avoir à effectuer de mise en correspondance. En outre, nous n'utilisons pas l'intensité des images de référence ni à recaler pour le calcul des déformations. Une application de recalage entre images de différentes modalités n'est donc pas perçue comme une épreuve plus compliquée qu'entre images de même nature. En revanche, dans les deux cas, elle nécessite un prérecalage rigide – voir section 13.5.

Revenons sur le développement de Thirion [1998]. La déformation élémentaire déduite de l'équation du flot optique et de considérations géométriques est – en prenant les notations de cette partie – :

$$d\vec{y} = \{s(y, t) - S_j(y, t)\} \times \frac{\nabla S_j(y, t)}{|\nabla S_j(y, t)|^2} \quad (13.1)$$

De notre côté, en combinant l'équation (12.9) avec l'expression de  $\nabla J$  qui apparaît dans l'équivalence (12.2), nous obtenons :

$$d\vec{y} = 2dt \times \{u(x, t) - u_j(x, t)\} \times \frac{\nabla u(x, t)}{|\nabla u(x, t)|^2} \quad (13.2)$$

Négligeons qu'une expression est évaluée en  $y$  et l'autre en  $x$ . Il s'agit du schéma direct contre le schéma arrière dont nous avons discuté en section 12.2.3. Le coefficient  $2dt$  n'a pas d'importance non plus. Finalement, la seule différence majeure est que l'expression (13.1) est appliquée aux intensités des images tandis que (13.2) est appliquée aux valeurs des ensembles de niveaux représentant la segmentation des images. Nous avons donc besoin d'une étape de segmentation. En revanche, nous n'avons pas d'indéfinition de la déformation élémentaire dans les régions homogènes. Pour conclure, l'approche de Thirion est radiométrique. La nôtre est géométrique.

## 13.3 Critique des résultats expérimentaux

La somme des images sans avoir auparavant recalé induit un flou cinétique. Cet effet est largement atténué lorsque peine est prise de recaler par rapport à une des images les autres – voir figure 12.2. Sur les profils un et deux de la figure 12.3, on constate que les contours du myocarde sont plus ou moins francs suivant qu'il y a eu recalage ou non. Cependant, les multiples interpolations ont laissé des traces sur le chemin du recalage – voir figure 12.3, profil trois, au niveau de la paroi endocardique qui n'est pas délimitée de manière parfaitement nette. Cela vient du nombre d'itérations de déformation qui vient du choix de  $dt$ . Plus il est petit – sans doute plus l'hypothèse de déformation localement normale est valide –, plus il faut d'itérations, plus il est effectué d'interpolations. L'image recalée souffre alors de lissage, semble-t-il. Plus il est élevé, plus l'hypothèse de déformation localement normale est discutable, mais moins l'image recalée est lissée par les interpolations successives. Nous l'avons choisi tel que cinquante itérations ou moins suffisent.

Abordons la critique sous l'angle du rapport signal à bruit par rapport à la première image non bruitée. Un tableau récapitulatif des différentes valeurs en jeu est le bienvenu.

Nous lui étiquetons le numéro 13.1. Pour la première expérience, les rapports signal à bruit

	Pic	Énergie	Variance
Première image bruitée	32,4	11,1	9,7
Somme sans recalage	32,1	10,9	9,4
Somme après recalage	35,8	14,5	13,0
Première image bruitée	29,5	8,3	6,8
Somme sans recalage	31,7	10,4	8,9
Somme après recalage	35,1	13,9	12,4

**Tab. 13.1** Rapports signal à bruit de la somme avec et sans compensation : en haut, premier test, en bas, second test.

de la somme obtenue après recalage sont meilleurs que ceux de la première image bruitée. Cela porte à croire que le bruit a été diminué sans trop introduire de flou cinétique. Quant à la somme sans précaution de recalage, si le bruit a été visiblement réduit par moyennage temporel – voir figure 12.2 –, l'apparition d'un flou cinétique est sans doute la raison de moins bons rapports signal à bruit que ceux de la première image bruitée, et à plus forte raison ceux de la somme après recalage. Dans la deuxième expérience, nous constatons également de meilleurs rapports signal à bruit de la somme après recalage. Toutefois, ils ne sont pas aussi bons que dans la première expérience. Cela paraît logique car les images recalées sommées sont de toutes façons plus bruitées. Remarquons que les rapports signal à bruit de la somme sans recalage sont cette fois plus élevés que ceux de la première image bruitée. La réduction du bruit par moyennage temporel l'emporte donc sur l'introduction du flou cinétique.

## 13.4 Travaux supplémentaires

À l'origine, concernant les séquences cardiaques, nous comptions compenser le mouvement en déformant les sept dernières images vers la première – début de la systole –, ajouter les huit pour améliorer le rapport signal à bruit – ça, nous l'avons fait –, puis déplier sept fois cette meilleure image vers les sept derniers instants de sorte à obtenir une séquence avec des caractéristiques de bruit comparables à une acquisition non synchronisée équivalente ; tiens, nous ne l'avons pas fait. Ou plutôt, nous l'avons fait, mais pas présenté car sans grand succès. Le pourquoi persiste à nous échapper. Remarquons toutefois que le sens de déformation qui fonctionne est celui d'un cœur contracté vers un cœur dilaté. Du travail en perspective donc.

## 13.5 Application au recalage

Nous n'avons besoin que de trois choses : un ensemble de niveaux, une image et un ensemble de niveaux. Le premier ensemble de niveaux est la segmentation d'un objet d'intérêt dans l'image – son contour de niveau zéro est le contour de l'objet. Le second ensemble de niveaux a un contour de niveau zéro de la forme que nous aimerions donner à l'objet et qui correspond en général à celle d'un objet équivalent mais pas géométriquement identique. L'algorithme déforme l'image à cette fin. Aucune obligation que les contours soient la segmentation d'un objet en mouvement non rigide. Nous pourrions donc

envisager une application de recalage entre des images d'un même patient ou de patients différents, d'une seule ou de plusieurs modalités. En imagerie cérébrale, par exemple, il suffirait d'avoir la segmentation par un contour du cortex ou de la boîte crânienne dans deux images, la référence et l'image à recalcr. La construction des ensembles de niveaux associés est notamment possible en calculant une carte de distance en chanfrein [Borgefors 1988] ou euclidienne [Danielsson 1980], ou en utilisant l'équation de réinitialisation – voir section 3.2.4 et annexe C. Cependant, une étape préalable est nécessaire. La déformation étant libre et sans attache anatomique, et d'après l'exemple donné en section 13.1, on imagine aisément le résultat d'une tentative de recalage entre deux images de cerveau orientées à 90 degrés l'une de l'autre. Il faut donc auparavant effectuer un recalage rigide et, pourquoi pas, une mise à l'échelle globale pour donner environ la même taille aux deux contours – une philosophie plus que cousine est d'ailleurs au cœur de la méthode développée par Montagnat et Delingette [1998] en reconstruction.

Quand on pense imagerie cérébrale, on pense atlas, on pense atlas de Talairach et étiquetage de régions. Un moyen est de recalcr le cerveau de Talairach sur une image de patient, via la primitive que constitue le cortex par exemple. Les régions étiquetées de Talairach, déformées par le recalage et superposées à l'image du patient, en permettent l'étiquetage. Naturellement, il s'agit d'une correspondance qui colle à la déformation dictée par la méthode de recalage. En effet, une autre méthode conduisant au même mariage des primitives, avec une déformation différente, pourrait fournir une autre correspondance. Une première étape de validation, globale, est de confronter l'étiquetage déterminé par des experts à celui proposé par recalage. Mais, puisque le principe du recalage est de déduire une déformation partout à partir de déformations imposées limitées dans l'espace – les primitives –, il vaut la peine d'étudier les mouvements locaux durant le recalage. « Telle région a été correctement déformée », concluent les experts. Fort bien, mais quelle est la densité de la région déformée par rapport à celle, supposée uniforme par exemple, de la région initiale? Les points ont-ils été tassés au milieu ou centrifugés? On pourrait dire qu'une méthode est d'autant plus performante qu'elle préserve l'uniformité de la densité. Plus généralement, ce pourrait être un élément de caractérisation d'une méthode de recalage. Pour en arriver là, il faut être en mesure de suivre un point au cours de la déformation. D'un côté, ce n'est pas foncièrement interdit par notre méthode. De l'autre, c'est assez délicat, une délicatesse à laquelle nous ne nous sommes pas encore attaqués avec férocité.

CONCLUSION

---



# Chapitre 14

## Conclusion

### 14.1 Bilan des travaux

Les objectifs que nous nous étions proposé d'atteindre étaient le développement de méthodes de segmentation dédiées à l'imagerie de médecine nucléaire, c'est-à-dire adaptées à ses caractéristiques. La segmentation devait être un moyen de calculer des paramètres de l'organe observé et d'améliorer les images d'émission. Les méthodes des contours actifs nous ont paru adaptées pour deux raisons : (i) elles imposent d'emblée un contrainte géométrique de contours fermés et (ii) , en définissant des vitesses d'évolution de type région, elles permettent d'être moins sensible au bruit et à la faible résolution des images TEMP. Nous avons employé, pour leur mise en œuvre informatique, la technique des ensembles de niveaux avec une extension basique des vitesses d'évolution, nécessitant alors des réinitialisations périodiques.

#### 14.1.1 Segmentation des cartes d'atténuation

L'utilisation de cartes d'atténuation reconstruites bruitées introduit un biais dans les images d'émission corrigées. Il suffit de les lisser, soit pendant le processus de reconstruction – régularisation –, soit ensuite. Si ce lissage implique une perte d'information au niveau des contours, la correction d'atténuation est perturbée. Pour lisser fortement en préservant les contours, le meilleur moyen est de disposer d'une segmentation. Dans ce cas, la segmentation ne peut pas être calculée sur la reconstruction puisqu'on attend la segmentation pour reconstruire, à moins de considérer un algorithme itératif de reconstructions et segmentations successives. Une autre possibilité est d'aborder le problème de la segmentation directement à partir des projections, sans reconstruction intermédiaire. La qualité de la segmentation est ainsi indépendante de celle de la reconstruction.

Nous avons développé une méthode de ce type pour les cartes d'atténuation du thorax qui servent à corriger l'atténuation subie par les images cardiaques d'émission. La vitesse d'évolution des contours découle de manière heuristique d'un critère de reconstruction. Nous avons choisi un modèle classique composé des poumons, de la colonne vertébrale et des tissus mous. Un contour actif a été attribué à chaque région. La méthode suppose que l'atténuation à l'intérieur de chaque contour est constante et connue. L'évaluation expérimentale n'a été menée que sur un jeu de données d'un fantôme anthropomorphe de torse acquises avec un fort taux de comptage et sans troncature. Le résultat donne satisfaction *visuellement*. Les erreurs de segmentation mesurées sont faibles sauf pour la colonne vertébrale. Nous pensons que l'effet de volume partiel en est pour partie responsable.

### 14.1.2 Segmentation des séquences cardiaques

La segmentation des séquences cardiaques TEMP synchronisées peut être réalisée image par image, sans utilisation de l'information temporelle. L'information spatiale n'est pas forcément suffisante à cause du bruit et de la faible résolution. Nous avons adopté le point de vue opposé d'une segmentation spatio-temporelle d'un trait, autrement dit une segmentation de toute la séquence d'un bloc en se servant de l'information de transition temporelle entre les images successives.

Pour cela, nous avons établi un critère spécifique à minimiser faisant intervenir toutes les images de la séquence et, pour chaque image, le domaine inconnu du ventricule gauche. Nous avons alors considéré ces domaines comme les éléments de suites de domaines dont la limite doit minimiser le critère. Par dérivation des équations d'Euler-Lagrange au sens des distributions, nous sommes naturellement parvenus à l'expression d'une vitesse d'évolution de la frontière des domaines, c'est-à-dire à une méthode de minimisation par contours actifs, un par image de la séquence. Chacun représente le ventricule gauche à un stade particulier du cycle cardiaque. Nous faisons l'hypothèse d'une valeur de perfusion constante à l'intérieur de chaque contour mais pas nécessairement identique pour tous les contours. Ces valeurs sont des inconnues de la méthode au même titre que les contours de segmentation. L'algorithme de résolution suit un schéma de minimisations alternées. Une séquence simulée et deux séquences de patients acquises et reconstruites en routine clinique ont été le baptême du feu de la méthode. Dans le cadre d'une évaluation expérimentale quantitative, nous avons constaté des erreurs de segmentation faibles sur la simulation. Nous avons également calculé les fractions d'éjection des trois séquences à partir de leur segmentation. Pour une des séquences cliniques, nous ne disposons pas d'une mesure de référence. Pour l'autre ainsi que pour la séquence simulée, la valeur obtenue est proche de celle de référence.

### 14.1.3 Segmentation et mouvement

Les séquences cardiaques TEMP synchronisées ont, à temps total d'acquisition égal, un rapport signal à bruit plus faible que les reconstructions d'acquisitions traditionnelles qui, en revanche, souffrent d'un flou cinétique. En recalant non rigidement les images de la séquence par rapport à la fin de diastole par exemple, on peut les ajouter de sorte à augmenter le rapport signal à bruit sans introduire de flou cinétique. La condition importante du recalage est qu'il mette le mieux possible en correspondance les contours des ventricules gauches dans les configurations des différents instants. Cela suggère naturellement que les primitives de recalage soient des sous-ensembles des contours. Nous avons voulu les utiliser en totalité. Or, la déformation d'un contour à un autre est trop complexe pour être identifiée à un modèle paramétrique.

Nous avons donc développé une méthode de recalage non rigide et non paramétrique entre deux contours. Elle s'appuie, pour propager les déformations depuis le contour jusque dans toute l'image, sur les ensembles de niveaux. Afin de lever une indétermination, nous faisons l'hypothèse de déformations localement normales. L'application à la compensation cinétique des séquences cardiaques n'a été testée que sur une simulation. La qualité de la somme des images de la séquence, mesurée par des rapports signal à bruit, est largement en faveur de celle obtenue après recalage comparée à celle obtenue sans recalage. En revanche, le « dépliement » de l'image ainsi meilleure dans l'idée de retrouver une séquence cardiaque améliorée n'a pas donné satisfaction. Par ailleurs, nous pensons que cette méthode est applicable au recalage non rigide de façon générale et cela sans complexité supplémentaire dans le cas de modalités différentes des deux images.

#### 14.1.4 Mise en œuvre informatique

Ces trois méthodes ont eu besoin de réinitialisations régulières des ensembles de niveaux. Une méthode d'approximation du gradient a été mise au point pour répondre aux exigences de l'équation classiquement employée à cette fin.

## 14.2 Parmi les développements à considérer

### 14.2.1 En transmission : segmentation des cartes d'atténuation

Le critère de segmentation des cartes d'atténuation n'est pas idéal. En particulier parce qu'il nécessite de connaître les coefficients d'atténuation. Bien qu'ils soient disponibles pour certains tissus et à certaines énergies de rayonnement gamma, Battle *et al.* [2000] mettent en garde contre l'utilisation aveugle de ces valeurs « étalon » car la disparité d'un patient à un autre n'est pas forcément négligeable. De même, l'augmentation artificielle du coefficient d'atténuation de la partie postérieure des poumons due à la position allongée sur le dos du patient lors de l'acquisition plaide en faveur de cette méfiance. Un changement brutal de direction serait de transposer la philosophie des travaux de Yezzi *et al.* [1999] – qui ne concerne que l'image – à l'imagerie de transmission – qui oscille entre image et projections. On peut la résumer en quelques mots : méthode de classification supervisée par contours actifs, où « supervisée » rappelle qu'il faut savoir à l'avance le nombre de types de région que compte l'image<sup>1</sup>. L'avantage de cette méthode est que les valeurs dans l'image à segmenter des caractéristiques des types de régions ne sont pas des paramètres. Mieux encore, elles sont itérativement estimées. L'inconvénient, mais enfin cela est bien normal, est que le nombre nécessaire de caractéristiques discriminantes par type est fonction du nombre de types : deux types réclament une caractéristique, trois types réquisitionnent deux caractéristiques et ainsi de suite. Pour notre cas, supposons l'abandon de la colonne vertébrale. Nous avons trois types de région qui sont les poumons, les tissus mous et l'air environnant. Nous devons donc choisir deux caractéristiques. Yezzi *et al.* [1999] utilisent par exemple la moyenne et la variance. Puisque les coefficients d'atténuation des trois types de régions sont distincts, la moyenne est toute trouvée. Nous pourrions hâtivement nous faire la réflexion qu'en imagerie de médecine nucléaire le bruit est de Poisson, que la moyenne est aussi la variance et que donc cette dernière est également discriminante. Mais ce serait là pécher par confusion entre les projections, dans lesquelles le bruit est bien de Poisson, et l'image, dans laquelle le bruit est difficilement caractérisable et probablement pas de Poisson<sup>2</sup>. Si la moyenne tient toujours, la variance n'est en réalité certainement pas valable. Cette question reste ouverte et une autre avant celle-là n'a pas été posée. Nous voulons calculer une segmentation de la carte de transmission à partir des projections. Nous devons inévitablement, pour faire évoluer des contours actifs dans le domaine de l'image, utiliser un opérateur de projection ou un opérateur de rétroprojection, voire les deux comme dans la méthode que nous avons développée. La question est donc : les travaux de Yezzi *et al.* [1999] auront-ils un sens au travers d'un opérateur de projection et/ou rétroprojection ?

N'oublions pas qu'une évaluation réelle de la méthode, avec des simulations et des données cliniques – ce qui signifie un taux de comptage réaliste<sup>3</sup> et une possible troncature des projections –, est encore à effectuer.

---

<sup>1</sup>Le nombre de type de régions doit être connu mais le nombre de régions de chaque type est libre.

<sup>2</sup>« une friture sans nom » diraient quelques-uns,

<sup>3</sup>« non extraterrestre » diraient d'autres,



### 14.2.2 En émission : segmentation des séquences cardiaques et mouvement

Le critère de segmentation spatio-temporelle a besoin de mouvements francs pour être efficace. Or, les volumes reconstruits en imagerie cardiaque d'émission sont de l'ordre de  $64 \times 64 \times 25$  voxels. Une discrétisation plus fine ne serait certainement pas en cohérence avec la résolution des images. En conséquence, la contraction du ventricule gauche au cours d'une séquence ne dépasse pas une amplitude de cinq voxels dans une image relativement floue. Une façon d'améliorer la méthode à moindres frais est de lui fournir des reconstructions de meilleure qualité, c'est-à-dire avec correction des effets de la résolution du ou des détecteurs et du diffusé Compton entre autres [Laurette *et al.* 2000].

Pour véritablement rendre la méthode plus performante, il pourrait être intéressant d'ajouter une surface médiane dont l'évolution serait guidée par une recherche de maxima locaux. Le lieu des maxima locaux a toutes les chances d'être à mi-distance de l'endocarde et de l'épicarde. L'évolution de cette surface serait couplée à celle de la surface de segmentation par la contrainte de correspondance avec son squelette. Cela offrirait deux avantages : que le mouvement du myocarde soit important ou non, les maxima locaux sont aussi facilement – ou bien aussi difficilement – repérables et les zones hypoperfusées du myocarde devraient être détectables. Afin de justifier ce dernier point, disons qu'un maximum local peut toujours être trouvé dans une zone de faible valeur et, si ce n'est pas le cas, une contrainte de courbure sur la surface médiane est en mesure de produire un morceau de plan traversant la zone hypoperfusée en continuité avec le reste de la surface. Notons qu'une telle contrainte ressemble, bien que de très loin, à la recherche de maxima locaux le long de profils radiaux des méthodes [Germano *et al.* 1995, Faber *et al.* 1999].

La méthode de compensation cinétique semble fonctionner. Le dépliement de l'image améliorée ne se déroule pas correctement. Nous ne savons pas pourquoi. Ce problème est donc à mettre en tête de l'ordre du jour. Ensuite, il faudrait mieux évaluer la méthode, avec des données cliniques en particulier.

## ANNEXES

---



## Annexe A

# Des contours actifs aux ensembles de niveaux

Cette annexe vient en renfort des sections 3.2.1 et 9.2.7. Elle décrit de façon générale le calcul classique permettant de transformer l'équation d'évolution d'un contour actif en l'équation d'évolution équivalente de l'ensemble de niveaux associé, qu'il s'agisse de dimension deux ou trois.

Soit le rappel de l'équation d'évolution (9.22) :

$$\frac{\partial \Gamma_n}{\partial t} = \{\nu_n + \delta \kappa_n\} \vec{N}_n$$

Soit le rappel de l'équation (9.25) qui exprime la relation d'un ensemble de niveaux avec son contour de niveau zéro :

$$u_n(\Gamma_n(p, t), t) = 0$$

La dérivée de (9.25) par rapport à  $t$  est :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \Gamma_n}{\partial t}, \nabla u_n \right\rangle + \frac{\partial u_n}{\partial t} &= 0 \\ \iff \frac{\partial u_n}{\partial t} &= - \left\langle \frac{\partial \Gamma_n}{\partial t}, \nabla u_n \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Remplaçant  $\partial \Gamma_n / \partial t$  d'après (9.22) :

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = - \{\nu_n + \delta \kappa_n\} \langle \vec{N}_n, \nabla u_n \rangle \quad (\text{A.2})$$

La dérivée de (9.25) par rapport à  $p$  est :

$$\langle \nabla u_n(\Gamma_n(p, t), t), \Gamma'_n(p, t) \rangle = 0 \quad (\text{A.3})$$

L'équation (A.3) nous dit que sur  $\Gamma_n(\cdot, \cdot)$ ,  $\nabla u_n(\cdot, \cdot)$  est orthogonal à  $\Gamma_n(\cdot, \cdot)$  donc colinéaire à  $\vec{N}_n(\cdot, \cdot)$ . Puisque  $u_n(\cdot, \cdot)$  est une fonction croissante de l'intérieur de  $\Gamma_n(\cdot, \cdot)$  vers l'extérieur,  $\nabla u_n(\cdot, \cdot)$  est de direction opposée à  $\vec{N}_n(\cdot, \cdot)$ . Enfin,  $\vec{N}_n(\cdot, \cdot)$  est de norme un. Donc :

$$\vec{N}_n = - \frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|} \quad (\text{A.4})$$

Finalement, (A.2) est équivalente à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial t} &= \{\nu_n + \delta \kappa_n\} \left\langle \frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|}, \nabla u_n \right\rangle \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} &= \{\nu_n + \delta \kappa_n\} |\nabla u_n| \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Tel qu'est fait le calcul, l'équation (A.5) n'est valable que sur  $\Gamma_n(\cdot, \cdot)$ . Or, nous voudrions étendre son utilisation, si ce n'est dans tout  $\Omega$ , au moins dans un voisinage de  $\Gamma_n(\cdot, \cdot)$ . Nous abordons le sujet en section 3.2.3.

## Annexe B

# Approximation du gradient d'un ensemble de niveaux

Ce n'est pas qu'il n'existe pas d'approximation du gradient d'un ensemble de niveaux – on en trouve par exemple dans [Shu et Osher 1988, Shu et Osher 1989, Rouy et Tourin 1992, Sussman *et al.* 1994, Sethian 1996, Sussman *et al.* 1998]. C'est qu'elles sont évoluées et difficiles à interpréter. L'approximation de gradient présentée dans cette annexe est dédiée à la mise en œuvre de la réinitialisation d'un ensemble de niveaux. Toutefois, elle peut être employée sans dommage dans une tâche d'évolution.

Soit  $u(\cdot)$  un ensemble de niveaux. En dimension deux, on note  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  les vecteurs  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$  respectivement. En dimension trois,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  désignent les vecteurs  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 1)$ . Enfin, on écrit  $u_i(\cdot)$  la composante du gradient de  $u(\cdot)$  selon l'axe de direction  $\vec{i}$ . L'idée est que le contour de niveau zéro d'un ensemble de niveaux est la référence. Une approximation de gradient à l'aide de différences finies doit donc tenir compte d'éléments qui le pointent. Depuis un élément de l'ensemble de niveaux à valeur strictement positive, le contour de niveau zéro est du côté de la pente descendante. Autrement dit, il faut piocher le voisin de valeur minimale. À l'inverse, quand on est sur un élément strictement négatif, le contour de niveau zéro est dans le sens du voisin de valeur maximale. Si l'élément est nul, il appartient au contour de niveau zéro. Nous considérons que le gradient peut être estimé en utilisant à la fois le voisin d'en haut et celui d'en bas, de façon symétrique. En dimension un, nous décidons donc de l'approximation de la norme du gradient suivante,  $\min(\dots)$  et  $\max(\dots)$  étant respectivement les fonctions de minimum et maximum :

- si  $u(x) > 0$  alors  $|\nabla u|(x) \approx \sqrt{\{u(x) - \min(u(x+1), u(x-1))\}^2}$  ;
- si  $u(x) = 0$  alors  $|\nabla u|(x) \approx \sqrt{\{u(x+1) - u(x-1)\}/2}^2$  ;
- si  $u(x) < 0$  alors  $|\nabla u|(x) \approx \sqrt{\{u(x) - \max(u(x+1), u(x-1))\}^2}$ .

On a envie d'étendre ce schéma à la dimension deux par simple « duplication ». Si  $u(x)$  est strictement positif par exemple, alors :

$$\begin{aligned} |\nabla u|(x) &\approx \sqrt{\{u_i(x)\}^2 + \{u_j(x)\}^2} \\ &\approx \sqrt{\{u(x) - \min(u(x+\vec{i}), u(x-\vec{i}))\}^2 + \{u(x) - \min(u(x+\vec{j}), u(x-\vec{j}))\}^2} \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

Prenons pour ensemble de niveaux la carte de distance d'un cercle. Plaçons-nous sur un pixel strictement positif  $x$  de la droite dirigée par  $\vec{i}$  et passant par le centre du cercle. Alors  $|u_i|(x)$  vaut un et  $|u_j|(x)$  est faible mais non nul. Par conséquent, la valeur estimée de  $|\nabla u|(x)$  est strictement plus grande que un alors la valeur véritable est un exactement.

Nous proposons donc d'utiliser une différence centrée dans les directions où le pixel est un extremum local. Ainsi,  $|u_j|(x)$  vaut  $|u(x + \vec{j}) - u(x - \vec{j})|/2$  c'est-à-dire zéro et  $|\nabla u|(x)$  est évalué à un. Si maintenant  $x$  est le centre du cercle, c'est un minimum local dans les deux directions  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ . De là,  $|u_i|(x)$  et  $|u_j|(x)$  sont nuls puisqu'ils sont estimés par une différence centrée. On obtient une valeur de  $|\nabla u|(x)$  nulle également. Bien sûr, le gradient n'est pas défini en ce point. Alors y estimer une valeur de gradient nulle ou toute autre valeur est tout aussi faux. Appliquons à  $u(\cdot)$  l'algorithme de réinitialisation dont nous rappelons le schéma dynamique discrétisé (3.8) :

$$u(\cdot, t + dt) = u(\cdot, t) + dt \times \text{signe}(u)(\cdot, t) \times \{1 - |\nabla u|(\cdot, t)\}$$

Découvrons ensemble et sous contrôle d'hussier le résultat après quelques itérations. La valeur du centre  $x$  du cercle a été abaissée car  $|\nabla u|(x, t = 0)$  est égal à zéro et  $\text{signe}(u)(x, t = 0)$  vaut  $-1$ . Le pire, c'est qu'à diminuer la valeur de  $u(x)$  à coups de  $-dt$ , nous ne modifions pas la valeur estimée de  $|\nabla u|(x)$ , toujours nulle. Si nous laissons l'algorithme poursuivre sa route, il nous mènera droit à la divergence. En résumé, n'utiliser que des différences non centrées comme en dimension un – voir équation (B.1) – n'est pas une bonne solution. Mais, l'emploi systématique de différences centrées dans les directions où le pixel est un extremum local n'est pas idéal. Nous choisissons une solution intermédiaire. Pour un pixel  $x$ , lorsque  $u(x)$  est strictement positif, l'approximation de  $|\nabla u|(x)$  qui évite les deux problèmes cités est synthétisée par le tableau B.1. Nous l'expliquons comme suit : pour un

<pre> a ← min(u(x + <math>\vec{i}</math>), u(x - <math>\vec{i}</math>)) b ← min(u(x + <math>\vec{j}</math>), u(x - <math>\vec{j}</math>))  <b>si</b> a &lt; b <b>alors</b>    u<sub>i</sub> (x) ≈  u(x) - a     <b>si</b> u(x) est un extremum local dans la direction <math>\vec{j}</math>   <b>alors</b>      u<sub>j</sub> (x) ≈  u(x + <math>\vec{j}</math>) - u(x - <math>\vec{j}</math>) /2   <b>sinon</b>      u<sub>j</sub> (x) ≈  u(x) - b    <b>fin</b> <b>sinon</b>    u<sub>j</sub> (x) ≈  u(x) - b     <b>si</b> u(x) est un extremum local dans la direction <math>\vec{i}</math>   <b>alors</b>      u<sub>i</sub> (x) ≈  u(x + <math>\vec{i}</math>) - u(x - <math>\vec{i}</math>) /2   <b>sinon</b>      u<sub>i</sub> (x) ≈  u(x) - a    <b>fin</b> <b>fin</b> </pre>
---

**Tab. B.1** Approximation de la norme du gradient pour les éléments strictement positifs.

pixel  $x$  tel que  $u(x)$  est strictement positif, nous cherchons le voisin en connexité quatre de

valeur minimale. Dans la direction correspondante, nous estimons la composante du gradient par une différence non centrée entre  $u(x)$  et la valeur du minimum. Nous estimons la composante dans l'autre direction par (i) une différence centrée ou (ii) une différence non centrée utilisant la valeur minimale parmi les deux voisins suivant que (suite de i)  $x$  est un extremum local dans cette direction ou (suite de ii) non.

Si  $u(x)$  strictement négatif, le canevas de l'approximation est identique. Il suffit de remplacer la fonction de minimum par celle de maximum et le test  $a < b$  par  $a > b$ .

Enfin, si  $u(x)$  est nul, les deux composantes du gradient sont estimées par une différence centrée.

Avant de refermer le dossier bidimensionnel, remarquons qu'avec cette approximation, la norme du gradient calculée au centre du cercle donné précédemment en exemple est un. Nous n'aurions donc pas de problème à appliquer une réinitialisation.

L'approximation de la norme du gradient en dimension trois est opérée dans le même esprit qu'en dimension deux. Côté strictement positif, nous cherchons d'abord celui des six voisins qui a la valeur minimale. Nous nous en servons pour calculer la composante du gradient dans la direction correspondante à l'aide d'une différence non centrée. Nous effectuons dans les deux autres directions le test d'extrémalité locale afin de déterminer si nous devons employer une différence centrée ou non centrée.

Jusqu'alors, ce n'était que valeurs absolues de composantes et normes de gradient. Une approximation du vecteur gradient avec ses composantes à valeurs signées s'obtient par escamotage des valeurs absolues en prenant garde d'inverser éventuellement l'ordre des deux termes de la différence. Par exemple, si  $u_i(x)$  doit être estimé par une différence non centrée, ce sera  $\{u(x) - u(x - i)\}$  ou  $\{u(x + i) - u(x)\}$  plutôt que  $\{u(x - i) - u(x)\}$  ou  $\{u(x) - u(x + i)\}$ . Si  $u_i(x)$  doit être estimé par une différence centrée, ce sera  $\{u(x + i) - u(x - i)\}/2$  au lieu de  $\{u(x - i) - u(x + i)\}/2$ .

Nous n'avons pas encore abordé le sujet du calcul en bord d'image. Nous l'avons traité le plus simplement possible :

- nous cherchons l'élément de valeur extrême parmi les voisins qui sont dans les limites de l'image, en connexité quatre en dimension deux – au moins deux et au plus quatre voisins – et en connexité six en dimension trois – au moins trois et au plus six voisins – ;
- nous n'effectuons le test d'extrémalité locale directionnelle que si les deux voisins concernés sont dans les limites de l'image, sinon nous utilisons une différence non centrée avec le seul voisin disponible.





## Annexe C

# Construction d'un ensemble de niveaux

Voici une recette de construction d'un ensemble de niveaux dont on a dessiné le contour de niveau zéro souhaité. On peut affecter la valeur zéro au contour,  $-1$  à l'intérieur et  $+1$  à l'extérieur si le contour est matérialisé par des éléments de l'image, ou bien attribuer la valeur  $-0,5$  à l'intérieur et  $+0,5$  à l'extérieur avec un contour inter-éléments. Cela constitue l'image  $u(., t = 0)$ . On lance alors le schéma dynamique discrétisé de réinitialisation (3.8) :

$$u(., t + dt) = u(., t) + dt \times \text{signe}(u)(., t) \times \{1 - |\nabla u|(., t)\}$$

où  $\text{signe}(u)(.,.)$  est une fonction qui donne le signe de  $u(.,.)$  que nous avons choisi sur trois étages : le  $-1$  si  $u(.,.)$  est strictement négative, le zéro si  $u(.,.)$  est nul et le  $+1$  si  $u(.,.)$  est strictement positive. Nous avons estimé  $|\nabla u|(.,.)$  par la technique présentée à l'annexe B. Dans les zones homogènes,  $|\nabla u|(.,.)$  est nul. En se plaçant dans une région strictement positive de surcroît, l'équation (3.8) montre que  $u(., t + dt)$  vaut  $u(., t) + dt$ . Donc, à chaque itération, un élément strictement positif où le gradient est nul est augmenté de  $dt$ . Dans un lieu strictement négatif de gradient nul, on aurait un abaissement de  $dt$ . Nous concluons qu'avec l'initialisation  $u(., t = 0)$  choisie, l'ensemble de niveaux est correctement propagé sur une distance de  $n \times dt$  de part et d'autre du contour de niveau zéro  $-n \times dt$  vers l'intérieur et  $n \times dt$  vers l'extérieur – après de l'ordre de  $n$  itérations. Si nous souhaitons construire l'ensemble de niveaux dans tout le domaine de définition  $\Omega$ , nous pouvons estimer le nombre d'itérations nécessaires en calculant :

- la distance maximale parmi les distances minimales entre le contour de niveau zéro et le bord de l'image ;
- le rayon maximal d'un cercle en dimension deux ou d'une sphère en dimension trois intérieur et tangent maximal au contour de niveau zéro ;
- le maximum des deux précédentes valeurs.

La division de ce dernier résultat par  $dt$  est l'estimation cherchée. Ou bien, on peut arrêter l'évolution lorsque la plus grande différence  $u(., t + dt) - u(., t)$  en valeur absolue est inférieure à un seuil. Naturellement, plus  $dt$  est grand, plus la durée de convergence est faible, mais plus le risque d'instabilité est important. Que ce soit pour construire ou réinitialiser un ensemble de niveaux, nous avons toujours joué la sécurité avec un  $dt$  de  $0,1$ .



## Annexe D

# Ensemble de niveaux et carte de distance

Le but de cette annexe est de donner l'intuition qu'une fonction à valeurs réelles positives  $u(\cdot)$  définie sur le domaine  $\Omega^+$ , unique solution de viscosité de l'équation eikonale qui impose que (i) la norme du gradient vaut un partout dans  $\Omega^+$  où le gradient est défini et que (ii) la valeur est zéro sur la frontière  $\Gamma(\cdot)$  de  $\Omega^+$ , vérifie la propriété [Arnold 1983, Barles 1994] :

$$\forall x \in \Omega^+ \text{ tel que } \nabla u(x) \text{ existe, } \exists! p \in \Psi, u(x) = |\Gamma(p) - x| \quad (\text{D.1})$$

où  $\Gamma(p)$  est le point de  $\Gamma(\cdot)$  le plus proche de  $x$ . En pratique pour l'application qui nous concerne, il s'agit d'établir qu'un ensemble de niveaux dont la norme du gradient vaut un presque partout est une carte de distance signée.

Le moyen d'y parvenir consiste à presque recopier la section « **3.1. Optimal control theory and dynamic programming principle** » de l'article de Rouy et Tourin [1992], l'appliquer à notre cas particulier puis conclure en quelques phrases.

Soit  $u(\cdot)$  la solution de viscosité de :

$$\begin{cases} \forall x \in \Omega^+, |\nabla u(x)| = n(x) \\ \forall p \in \Psi, u(\Gamma(p) - x) = \phi(x) \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

où  $n(\cdot)$  est une fonction continue et  $\phi(\cdot)$  est une fonction continûment dérivable. On peut remarquer que :

$$\forall x \in \Omega^+, |\nabla u(x)| = n(x) \iff \sup_{|q| \leq 1} \{\langle \nabla u(x), q \rangle - n(x)\} = 0 \quad (\text{D.3})$$

La fonction  $u(\cdot)$  apparaît donc comme la fonction de valeur du problème du temps de sortie suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy_x}{dt}(t) = -q(t), t \geq 0 \\ y_x(0) = x \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

où  $y_x(\cdot)$  est le vecteur d'état du système dynamique et  $q(\cdot)$  est un vecteur de contrôle de l'ensemble des contrôles admissibles :

$$\mathcal{A} = \{q : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ mesurable} \mid |q(t)| \leq 1, t \geq 0\} \quad (\text{D.5})$$

La fonction de coût du problème du temps de sortie (D.4) est :

$$J(x, q) = \int_0^T n(y_x(t)) dt + \phi(y_x(T)) \quad (\text{D.6})$$

où  $T$  représente le temps de sortie de  $\Omega^+$ . On voudrait qu'il soit minimal :

$$T = \min\{t \geq 0 \mid \exists p \in \Psi, y_x(t) = \Gamma(p)\} \quad (\text{D.7})$$

et  $y_x(T)$  est le point de sortie, qui appartient donc à  $\Gamma(\cdot)$ . Pour finir, la fonction de valeur est :

$$u(x) = \inf_{q(\cdot) \in \mathcal{A}} J(x, q) \quad (\text{D.8})$$

Appliquons ce raisonnement à notre cas particulier :

$$\begin{cases} \forall x \in \Omega^+, n(x) = 1 \\ \forall p \in \Psi, \phi(\Gamma(p)) = 0 \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

Le problème prend la forme :

$$\begin{cases} \forall x \in \Omega^+, |\nabla u(x)| = 1 \\ \forall p \in \Psi, u(\Gamma(p)) = 0 \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

Le critère (D.6) devient :

$$J(x, q) = \int_0^T dt = T \quad (\text{D.11})$$

et la fonction de valeur est maintenant :

$$u(x) = \inf_{q(\cdot) \in \mathcal{A}} T \quad (\text{D.12})$$

Revoyons la signification de ce problème du temps de sortie. Un point  $x$  de la région  $\Omega^+$  n'appartenant pas à  $\Gamma(\cdot)$  est le point de départ. Nous souhaitons sortir de  $\Omega^+$  le plus vite possible. Autrement dit, il s'agit d'atteindre un point de la frontière  $\Gamma(\cdot)$  dans un temps minimal. Nous avons une contrainte sur le vecteur vitesse instantanée  $q(\cdot)$  : il doit appartenir à l'ensemble  $\mathcal{A}$ , sa norme est donc inférieure à un. Évidemment, nous devons choisir cette limite supérieure. De plus, le chemin le plus court étant la ligne droite, nous imposons :

$$\forall t_1, t_2 \geq 0, q(t_1) = q(t_2) \quad (\text{D.13})$$

En définitive, nous avons choisi une vitesse constante en direction et en norme, de norme un. Dans ces conditions, le temps de parcours  $T$  est égal à la distance parcourue. Ce temps étant minimal, la distance l'est également et, notre trajectoire étant rectiligne, elle a pour expression  $|y_x(T) - x|$ , sachant que  $y_x(T)$  est égal à  $\Gamma(p)$  pour un certain  $p$  de  $\Psi$ . L'équation (D.12) est donc équivalente à :

$$\exists p \in \Psi, u(x) = |\Gamma(p) - x| \quad (\text{D.14})$$

où, puisque la distance est minimale entre  $x$  et le point de sortie,  $p$  est tel que :

$$\forall p_1 \in \Psi, |\Gamma(p_1) - x| \geq |\Gamma(p) - x| \quad (\text{D.15})$$

Mais existe-il  $p_1$  appartenant à  $\Psi$  tel que  $|\Gamma(p_1) - x| = |\Gamma(p) - x|$ ? En d'autres termes, y a-t-il unicité de  $p$  dans l'équation (D.14)? Soient  $p_1$  et  $p_2$  appartenant à  $\Psi$  tels que :

$$u(x) = |\Gamma(p_1) - x| \quad (\text{D.16})$$

$$u(x) = |\Gamma(p_2) - x| \quad (\text{D.17})$$

La dérivée de (D.16) par rapport à  $x$  est :

$$\nabla u(x) = -\frac{\Gamma(p_1) - x}{|\Gamma(p_1) - x|} \quad (\text{D.18})$$

En effet, il est simple de vérifier que :

$$\forall x \in \Omega^+, |x| \neq 0, \quad \frac{\partial |x|}{\partial x} = \frac{x}{|x|} \quad (\text{D.19})$$

On procède de même avec (D.17) et on égale les deux expressions de  $\nabla u(x)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(p_1) - x}{|\Gamma(p_1) - x|} &= \frac{\Gamma(p_2) - x}{|\Gamma(p_2) - x|} \\ \Leftrightarrow \frac{\Gamma(p_1) - x}{u(x)} &= \frac{\Gamma(p_2) - x}{u(x)} \quad (\text{d'après (D.16) et (D.17)}) \\ \Leftrightarrow \Gamma(p_1) - x &= \Gamma(p_2) - x \\ \Leftrightarrow p_1 &= p_2 \end{aligned}$$

Il y a bien unicité du point de sortie. Si maintenant  $x$  appartient à  $\Gamma(\cdot)$ , alors il existe un unique  $p$  appartenant à  $\Psi$  tel que  $x$  égal  $\Gamma(p)$  et le temps de sortie minimal  $u(x)$  est nul. Donc  $u(x)$  est bien égal à  $|\Gamma(p) - x|$ . Nous concluons donc que si les conditions (D.10) sont respectées, alors :

$$\exists! p \in \Psi, \quad u(x) = |\Gamma(p) - x| \quad (\text{D.20})$$

où  $\Gamma(p)$  est le point de  $\Gamma(\cdot)$  le plus proche de  $x$ .

Ce raisonnement est trivialement étendu au cas d'une fonction  $u(\cdot)$  à valeurs réelles négatives. Il suffit de l'appliquer à la fonction  $u_1(\cdot) = -u(\cdot)$ .



## Annexe E

# Courbes à gradient constant d'un ensemble de niveaux

Le développement suivant est valable en dimensions deux et trois, s'il est toutefois valable – voir [Arnold 1983] à ce propos. L'annexe D discute d'une assertion dont la véracité est supposée acquise.

Soit  $u(\cdot)$  un ensemble de niveaux de domaine de définition  $\Omega$ , carte de distance signée d'un contour  $\Gamma(\cdot)$ . Soit  $y$  un point régulier de  $\Omega$  – le gradient de  $u(\cdot)$  en  $y$  est défini. Soit enfin  $p$  la coordonnée curviligne du point de  $\Gamma(\cdot)$  le plus proche de  $y$  – il est unique car  $y$  est un point régulier. Nous savons donc que  $u(y)$  est la distance signée la plus petite en valeur absolue de  $y$  à un point de  $\Gamma(\cdot)$ , c'est-à-dire la distance à  $\Gamma(p)$ . La valeur absolue de cette distance est égale à la norme du vecteur  $\Gamma(p) - y$ . Si  $y$  est à l'extérieur de  $\Gamma(\cdot)$ , alors la distance est positive :

$$u(y) = +|\Gamma(p) - y| \quad (\text{E.1})$$

Il n'est pas difficile de vérifier que :

$$\forall x \in \Omega, |x| \neq 0, \quad \frac{\partial|x|}{\partial x} = \frac{x}{|x|} \quad (\text{E.2})$$

D'où la dérivée de  $u(y)$  par rapport à  $y$  :

$$\nabla u(y) = -\frac{\Gamma(p) - y}{|\Gamma(p) - y|} \quad (\text{E.3})$$

Le vecteur  $\Gamma'(p)$  est tangent au contour au point  $\Gamma(p)$ . Le produit scalaire entre les vecteurs  $\nabla u(y)$  et  $\Gamma'(p)$  vaut :

$$\langle \nabla u(y), \Gamma'(p) \rangle = -\frac{1}{|\Gamma(p) - y|} \times \langle \Gamma(p) - y, \Gamma'(p) \rangle \quad (\text{E.4})$$

La distance entre  $\Gamma(p)$  et  $y$  est, par choix de  $\Gamma(p)$ , minimale par rapport à l'ensemble des points de  $\Gamma(\cdot)$ , c'est-à-dire minimale par rapport à  $p$ . Autrement dit, la dérivée de  $|\Gamma(p) - y|$  par rapport à  $p$  est nulle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial|\Gamma(p) - y|}{\partial p} &= \left\langle \frac{\Gamma(p) - y}{|\Gamma(p) - y|}, \Gamma'(p) \right\rangle \\ &= \frac{1}{|\Gamma(p) - y|} \langle \Gamma(p) - y, \Gamma'(p) \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$



D'où  $\langle \Gamma(p) - y, \Gamma'(p) \rangle$  est nul. En d'autres mots, le point  $\Gamma(p)$  est une projection orthogonale de  $y$  sur  $\Gamma(\cdot)$ . D'après l'équation (E.4), on déduit alors que les vecteurs  $\nabla u(y)$  et  $\Gamma'(p)$  sont orthogonaux. Si  $y$  est à l'intérieur de  $\Gamma(\cdot)$ , nous avons :

$$u(y) = -|\Gamma(p) - y| \quad (\text{E.6})$$

Cela ne change rien au raisonnement précédent ni à sa double conclusion que le point de  $\Gamma(\cdot)$  le plus proche de  $y$  est un projeté orthogonal de  $y$  sur  $\Gamma(\cdot)$  et que  $\nabla u(y)$  est colinéaire à la droite de projection en question.

Soit  $x$  un point de la demi-droite ou du segment passant par  $y$  et  $\Gamma(p)$ , contenant  $\Gamma(p)$  et délimité strictement par des lieux de choc. Nous aimerions assez que le point de  $\Gamma(\cdot)$  le plus proche de  $x$  soit encore  $\Gamma(p)$ . Vérifions que la coordonnée curviligne  $p$  annule bien la dérivée de la fonction  $|\Gamma(\cdot) - x|$  de distance à  $x$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\Gamma(p) - x|}{\partial p} &= \left\langle \frac{\Gamma(p) - x}{|\Gamma(p) - x|}, \Gamma'(p) \right\rangle & (\text{E.7}) \\ &= \frac{1}{|\Gamma(p) - x|} \langle \Gamma(p) - x, \Gamma'(p) \rangle \\ &= \frac{1}{|\Gamma(p) - x|} [\langle \{\Gamma(p) - y\} + \{y - x\}, \Gamma'(p) \rangle] \\ &= \frac{1}{|\Gamma(p) - x|} [\langle \Gamma(p) - y, \Gamma'(p) \rangle + \langle y - x, \Gamma'(p) \rangle] & (\text{E.8}) \end{aligned}$$

Le premier produit scalaire de l'équation (E.8) est nul, nous l'avons constaté. Le second l'est aussi puisque les vecteurs  $y - x$  et  $\Gamma(p) - y$  sont colinéaires. Le point  $\Gamma(p)$  remplit donc une condition qui le propulse candidat au point de  $\Gamma(\cdot)$  le plus proche de  $x$ . Il se pourrait que d'autres candidats  $\Gamma(p_i)$  soient à la même distance minimale de  $x$ . Nous éliminons tous ces concurrents hypothétiques en rappelant que  $x$  n'est pas dans un lieu de choc. La conclusion est que sur toute la demi-droite ou le segment passant par  $y$ , le point de  $\Gamma(\cdot)$  le plus proche est  $\Gamma(p)$ . Une conséquence supplémentaire est qu'en tous ces points, la fonction  $\nabla u(\cdot)$  prend la même valeur vectorielle dont un représentant est  $\nabla u(\Gamma(p))$ . En effet, pour tout  $x$  de cette demi-droite ou segment, on peut écrire l'équation (E.4) avec le même point  $\Gamma(p)$  que pour  $y$  et ainsi arriver à la conclusion que  $\nabla u(x)$  et  $\Gamma'(p)$  sont orthogonaux. Donc  $\nabla u(x)$  est colinéaire à  $\nabla u(y)$ . Ils sont tous deux de norme un et ils ont le même sens puisque la fonction distance est monotone dans les régions qui ne comprennent pas de lieux de choc. Cela nous permet une dernière intrusion dans le domaine des déductions : les courbes à gradient constant d'un ensemble de niveaux sont des demi-droites ou des segments orthogonaux au contour de niveau zéro délimités par le squelette du contour de niveau zéro – pour les demi-droites et les segments – et éventuellement un autre lieu de choc extérieur au contour de niveau zéro – pour les segments.

## Annexe F

# Courbure et courbure moyenne

Nous rappelons ici les expressions continues et des discrétisations possibles de la courbure d'une courbe plane et de la courbure moyenne d'une surface, toutes deux représentant un contour de niveau d'une image.

Soit  $u(\cdot)$  un ensemble de niveaux. En dimension deux, on note  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  les vecteurs  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$  respectivement. En dimension trois,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  désignent les vecteurs  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 1)$ . Nous proposons  $u_i(\cdot)$  comme notation de la dérivée première dans la direction  $\vec{i}$  et  $u_{ij}(\cdot)$  pour la dérivée d'ordre deux par rapport à la direction  $\vec{i}$  puis  $\vec{j}$ . De plus, on suppose que la fonction  $u(\cdot)$  respecte la propriété :  $u_{ij}(\cdot) = u_{ji}(\cdot)$ .

La courbure  $\kappa(\cdot)$  d'une courbe plane vaut :

$$\kappa = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \frac{u_{ii}u_j^2 + u_{jj}u_i^2 - 2u_{ij}u_iu_j}{|\nabla u|^2} \quad (\text{F.1})$$

La valeur  $\kappa(x)$  est la courbure en  $x$  du contour de niveau de  $u(\cdot)$  passant par  $x$ . Des approximations des dérivées partielles premières s'obtiennent facilement à partir de développements limités à l'ordre un de  $u(x + \vec{i})$  et  $u(x - \vec{i})$  et leurs compères en  $\vec{j}$ . Pour les dérivées partielles à l'ordre deux, on calcule le développement limité à l'ordre un des approximations précédentes. Par exemple :

$$u_i(x) \approx \frac{u(x + \vec{i}) - u(x - \vec{i})}{2} \quad (\text{F.2})$$

$$u_{ii}(x) \approx u(x + \vec{i}) - 2u(x) + u(x - \vec{i}) \quad (\text{F.3})$$

$$u_{ij}(x) \approx \frac{u(x + \vec{i} + \vec{j}) - u(x + \vec{i} - \vec{j}) - u(x - \vec{i} + \vec{j}) + u(x - \vec{i} - \vec{j})}{4} \quad (\text{F.4})$$

La courbure moyenne  $\kappa(\cdot)$  d'une surface est donnée par :

$$\kappa = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \quad (\text{F.5})$$

$$= \frac{u_{ii}\{u_j^2 + u_k^2\} + u_{jj}\{u_i^2 + u_k^2\} + u_{kk}\{u_i^2 + u_j^2\}}{|\nabla u|^3} - \frac{2u_{ij}u_iu_j + 2u_{ik}u_iu_k + 2u_{jk}u_ju_k}{|\nabla u|^3} \quad (\text{F.6})$$

La valeur  $\kappa(x)$  est la courbure moyenne en  $x$  du contour de niveau de  $u(\cdot)$  passant par  $x$ . Les approximations des dérivées partielles sont identiques au cas bidimensionnel.



## BIBLIOGRAPHIE

---



# Bibliographie

- Adalsteinsson D. et J. A. Sethian, 1995a. A fast level set method for propagating interfaces. *J. Comput. Phys.* **118** : 269–277.
- Adalsteinsson D. et J. A. Sethian, 1995b. A level set approach to a unified model for etching, deposition, and lithography I : Two-dimensional simulations. *J. Comput. Phys.* **120** : 128–144.
- Adalsteinsson D. et J. A. Sethian, 1999. The fast construction of extension velocities in level set methods. *J. Comput. Phys.* **148** : 2–22.
- Amadiou O., E. Debreuve, M. Barlaud et G. Aubert, 1999. Inward and outward curve evolution using level set method. Dans *Proc. IEEE Signal Processing Society International Conference on Image Processing (ICIP)*.
- Angenent S., S. Haker, A. Tannenbaum et R. Kikinis, 1999. On the Laplace-Beltrami operator and brain surface flattening. *IEEE T. Med. Imaging* **18** : 700–711.
- Arnold V. I., 1983. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. Springer-Verlag.
- Bardinet E., L. Cohen et N. Ayache, 1996. Tracking and motion analysis of the left ventricle with deformable superquadrics. *Med. Image Anal.* **1** : 129–149.
- Barles G., 1985. Remarks on a flame propagation model. Rapport de recherche 464, Projet Sinus, Inria Sophia Antipolis, Sophia Antipolis, France.
- Barles G., 1994. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*. Springer-Verlag.
- Battle X., G. S. Cunningham et K. M. Hanson, 1997. 3D tomographic reconstruction using geometrical models. Dans *Proc. International Symposium on Optical Science and Technology (SPIE annual meeting)*, vol. 3034, p. 346–357.
- Battle X., C. L. Rest, A. Turzo et Y. Bizais, 1999. Reconstruction of a geometrical attenuation map using free-form deformations. Dans *Proc. IEEE Medical Imaging Conference (MIC)*.
- Battle X., C. L. Rest, A. Turzo et Y. Bizais, 2000. Free-form deformation in tomographic reconstruction. Application to attenuation map reconstruction. À paraître dans *IEEE T. Nucl. Sci.* .
- Berger M., 1991. *Les contours actifs : modélisation, comportement et convergence*. Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Lorraine, Nancy, France.
- Besl P. et N. McKay, 1992. A method for registration of 3D shapes. *IEEE T. Pattern Anal.* **14** : 239–256.
- Blum H. et R. N. Nagel, 1978. Shape description using weighted symmetric axis features. *Pattern Recogn.* **10** : 167–180.
- Borgefors G., 1988. Hierarchical chamfer matching : A parametric edge matching algorithm. *IEEE T. Pattern Anal.* **10** : 849–865.

- Bouthemy P. et E. François, 1993. Motion segmentation and qualitative dynamic scene analysis from an image sequence. *Int. J. Comput. Vision* **10** : 157–182.
- Buvat I., M. L. Bartlett, A. N. Kitsiou, V. Dilsizian et S. L. Bacharach, 1997. A “hybrid” method for measuring myocardial wall thickening from gated PET/SPECT images. *J. Nucl. Med.* **38** : 324–329.
- Caselles V., R. Kimmel et G. Sapiro, 1995. Geodesic active contours. Dans *Proc. IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*.
- Caselles V., R. Kimmel et G. Sapiro, 1997. Geodesic active contours. *Int. J. Comput. Vision* **22** : 61–79.
- Caselles V., R. Kimmel, G. Sapiro et C. Sbert, 1996. Minimal surfaces : A three dimensional segmentation approach. Dans *Proc. European Conference on Computer Vision (ECCV)*.
- Caselles V., R. Kimmel, G. Sapiro et C. Sbert, 1997. Minimal surfaces : A geometric three dimensional segmentation approach. *Numer. Math.* **77** : 423–451.
- Caselles V. et C. Sbert, 1996. What is the best causal scale-space for 3D images? *SIAM J. Appl. Math.* **56** : 1199–1246.
- Charbonnier P., L. Blanc-Féraud, G. Aubert et M. Barlaud, 1997. Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *IEEE T. Image Process.* **6** : 298–311.
- Charbonnier P. et O. Cuisenaire, 1996. Une étude des contours actifs : modèles classique, géométrique et géodésique. Rapport de recherche 163, Laboratoire de télécommunications et télédétection, Université catholique de Louvain, Louvain-la-neuve, Belgique.
- Chopp D. L., 1993. Computing minimal surfaces via level set curvature flow. *J. Comput. Phys.* **106** : 77–91.
- Chow B., 1985. Deforming convex hypersurfaces by the  $n$ th root of the Gaussian curvature. *J. Differ. Geom.* **22** : 117–138.
- Clarysse P., D. Friboulet et I. Magnin, 1997. Tracking geometrical descriptors on 3-D deformable surfaces : Application to the left-ventricular surface of the heart. *IEEE T. Med. Imaging* **16** : 392–404.
- Clarysse P., F. Poupon, B. Barbier et I. Magnin, 1995. 3D boundary extraction of the left ventricle by a deformable model with a priori information. Dans *Proc. IEEE Signal Processing Society International Conference on Image Processing (ICIP)*.
- Cohen I., L. Cohen et N. Ayache, 1992. Using deformable surfaces to segment 3D images and infer differential structure. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing : Image Understanding* **56** : 242–263.
- Cohen L., 1991. On active contour models and balloons. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing : Image Understanding* **53** : 211–218.
- Cohen L., E. Bardinet et N. Ayache, 1993. Surface reconstruction using active contour models. Dans *Proc. International Symposium on Optical Science and Technology (SPIE annual meeting)*. Également disponible sous : rapport de recherche 1824, Projet Epidauré, Inria Sophia Antipolis, Sophia Antipolis, France.
- Cohen L. et I. Cohen, 1993. Finite element methods for active contour models and balloons for 2D and 3D images. *IEEE T. Pattern Anal.* **15** : 1131–1147. Également disponible sous : rapport de recherche 9124, Ceremade, Université Paris IX Dauphine, Paris, France.

- Cooke C. D., E. V. Garcia, S. J. Cullom, T. L. Faber et R. I. Pettigrew, 1994. Determining the accuracy of calculating systolic wall thickening using a fast Fourier transform approximation : A simulation study based on canine and patient data. *J. Nucl. Med.* **35** : 1185–1192.
- Csurka G. et P. Bouthemy, 1999. Direct identification of moving objects and background from 2D motion models. Dans *Proc. IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*.
- Danielsson P. E., 1980. Euclidean distance mapping. *Computer Graphics and Image Processing* **14** : 227–248.
- Davis M. H., A. Khotanzad, D. P. Flaming et S. E. Harms, 1997. A physics-based coordinate transformation for 3-D image matching. *IEEE T. Med. Imaging* **16** : 317–328.
- Debreuve É., I. Laurette, P. M. Koulibaly, J. Darcourt et M. Barlaud, 1998. Attenuation map reconstruction in uncollimated cone beam geometry using coupled PDE's. Dans *Proc. IEEE Medical Imaging Conference (MIC)*.
- Declerck J., 1997. *Étude de la dynamique cardiaque par analyse d'images tridimensionnelles*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, Inria Sophia Antipolis, France.
- Declerck J., J. Feldmar et N. Ayache, 1998. Definition of a four-dimensional continuous planispheric transformation for the tracking and the analysis of left-ventricle motion. *Med. Image Anal.* **2** : 197–213.
- Deriche R., 1987. Using Canny's criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector. *Int. J. Comput. Vision* **1** : 167–187.
- Deriche R. et G. Giraudon, 1993. A computational approach for corner and vertex detection. *Int. J. Comput. Vision* **10** : 101–124.
- Escher J., U. F. Mayer et G. Simonett, 1998. On the surface diffusion flow. Dans *Proc. NSE-6 conference*.
- Evans A. C., W. Dai, L. Collins, P. Neelin et S. Marrett, 1991. Warping of a computerized 3-D atlas to match brain image volumes for quantitative neuratomical and functional analysis. Dans *Proc. International Symposium on Optical Science and Technology (SPIE annual meeting)*.
- Faber T. L., C. D. Cooke, R. D. Folks, J. P. Vansant, K. J. Nichols, E. G. DePuey, R. I. Pettigrew et E. V. Garcia, 1999. Left ventricular function and perfusion from gated SPECT perfusion images : An integrated method. *J. Nucl. Med.* **40** : 650–659.
- Feldmar J. et N. Ayache, 1996. Rigid, affine and locally affine registration of free-form surfaces. *Int. J. Comput. Vision* **18** : 99–119. Également disponible sous : rapport de recherche 2220, Projet Epidaure, Inria Sophia Antipolis, Sophia Antipolis, France.
- Frey E. C., B. M. W. Tsui et J. R. Perry, 1992. Simultaneous acquisition of emission and transmission data for improved Thallium-201 cardiac SPECT imaging using a Technetium-99m transmission source. *J. Nucl. Med.* **33** : 2238–2245.
- Galt J. R., E. V. Garcia et W. L. Robbins, 1990. Effects of myocardial wall thickness on SPECT quantification. *IEEE T. Med. Imaging* **9** : 144–150.
- Geman D. et C. Yang, 1995. Nonlinear image recovery with half-quadratic regularization. *IEEE T. Image Process.* **4** : 932–945.
- Germano G., H. Kiat, P. B. Kavanagh, M. Moriel, M. Mazzanti, H. T. Su, K. F. V. Train et D. S. Berman, 1995. Automatic quantification of ejection fraction from gated myocardial perfusion SPECT. *J. Nucl. Med.* **36** : 2138–2147.



- Gilland D. R., R. J. Jaszczak, K. L. Greer et R. E. Coleman, 1998. Transmission imaging for nonuniform attenuation correction using a three-headed SPECT camera. *J. Nucl. Med.* **39** : 1105–1110.
- Gomes J. et O. Faugeras, 1999. Reconciling distance functions and level sets. Dans *Proc. International Conference on Scale-Space Theories in Computer Vision (Scale-Space)*.
- Gorce J.-M., D. Friboulet et I. Magnin, 1997. Estimation of three-dimensional cardiac velocity fields : Assessment of a differential method and application to three-dimensional CT data. *Med. Image Anal.* **1** : 245–261.
- Grayson M. A., 1989. A short note on the evolution of a surface by its mean curvature. *Duke Math. J.* **58** : 555–558.
- Haug E. et K. K. Choi, 1993. *Methods of engineering mathematics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Hebert T. et R. Leahy, 1989. A generalized EM algorithm for 3-D bayesian reconstruction from Poisson data using Gibbs priors. *IEEE T. Med. Imaging* **8** : 194–202.
- Hoffman E. J., S.-C. Huang et M. E. Phelps, 1979. Quantitation in positron emission computed tomography : 1. effect of object size. *J. Comput. Assist. Tomo.* **3** : 299–308.
- Horn B. et B. Schunck, 1981. Determining optical flow. *Artif. Intell.* **17** : 185–203.
- Hudson H. M. et R. S. Larkin, 1994. Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data. *IEEE T. Med. Imaging* **13** : 601–609.
- Huisken G., 1984. Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres. *J. Differ. Geom.* **20** : 237–266.
- Hummel R. A., B. Kimia et S. W. Zucker, 1985. Gaussian blur and the heat equation : Forward and inverse solutions. Dans *Proc. IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*.
- Jehan-Besson S., M. Barlaud et G. Aubert, 2000. Detection and tracking of moving objects using a new level set based method. Dans *Proc. International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*.
- Kass M., A. Witkin et D. Terzopoulos, 1987. Snakes : Active contour models. *Int. J. Comput. Vision* **1** : 321–331.
- Klein G. J., 1998. Forward deformation of PET volumes using material constraints. Dans *Proc. IEEE Workshop on Biomedical Image Analysis (WBIA)*.
- Klein G. J., 1999. Forward deformation of PET volumes using non-uniform elastic material constraints. Dans *Proc. International Conference on Information Processing in Medical Imaging (Ipmi)*.
- Klein G. J., 2000. Four-dimensional processing of deformable cardiac PET data. Dans *Proc. IEEE Workshop on Mathematical Methods in Biomedical Image Analysis (MMBIA)*.
- Koenderinck J. J. et A. J. V. Doorn, 1992. Surface shape and curvature scales. *Image Vision Comput.* **10** : 557–565.
- Kojima A., M. Matsumoto, M. Takahashi, Y. Hirota et H. Yoshida, 1989. Effect of spatial resolution on SPECT quantification values. *J. Nucl. Med.* **30** : 508–514.
- Kornprobst P., R. Deriche et G. Aubert, 1999. Image sequence analysis via partial differential equations. *J. Math. Imaging Vis.* **11** : 5–26.
- LaCroix K. J., 1997. *Evaluation of an attenuation compensation method with respect to defect detection in Tc-99m-Sestamibi myocardial SPECT images*. Thèse de doctorat, University of North Carolina at Chapel Hill, Chapel Hill, États-Unis.

- Lange K., M. Bahn et R. Little, 1987. A theoretical study of some maximum likelihood algorithms for emission and transmission tomography. *IEEE T. Med. Imaging* **6** : 106–114.
- Laurette I., R. Clackdoyle, A. Welch, F. Natterer et G. T. Gullberg, 1999. Comparison of three applications of ConTraSPECT. *IEEE T. Nucl. Sci.* **46** : 2146–2153.
- Laurette I., J. Darcourt, L. Blanc-Féraud, P. M. Koulibaly et M. Barlaud, 1998. Combined constraints for efficient algebraic regularized methods in fully 3D reconstruction. *Phys. Med. Biol.* **43** : 991–1000.
- Laurette I., G. L. Zeng, A. Welch, P. Christian et G. T. Gullberg, 2000. A three-dimensional ray-driven scatter and geometric response correction technique for SPECT in inhomogeneous media. *À paraître dans Phys. Med. Biol.*
- Malandain G. et S. Fernández-Vidal, 1998. Euclidean skeletons. *Image Vision Comput.* **16** : 317–327.
- Malladi R., J. A. Sethian et B. C. Vemuri, 1995. Shape modeling with front propagation : A level set approach. *IEEE T. Pattern Anal.* **17** : 158–175.
- Manglos S. H., G. M. Gagne, A. Krol, F. D. Thomas et R. Narayanaswamy, 1995. Transmission maximum-likelihood reconstruction with ordered sunsets for cone beam CT. *Phys. Med. Biol.* **40** : 1225–1241.
- Mariano-Goulart D., H. Collet, P.-O. Kotzki, M. Zanca et M. Rossi, 1998. Semi-automatic segmentation of gated blood pool emission tomographic images by watersheds : Application to the determination of right and left ejection fractions. *Eur. J. Nucl. Med.* **25** : 1300–1307.
- Mochizuki T., K. Murase, Y. Fujiwara, S. Tanada, K. Hamamoto et W. N. Tauxe, 1991. Assessment of systolic thickening with thallium-201 ECG-gated single-photon emission computed tomography : A parameter for local left ventricular function. *J. Nucl. Med.* **32** : 1496–1500.
- Monga O., R. Deriche, G. Malandain et J. P. Cocquerez, 1991. Recursive filtering and edge closing : Two primary tools for 3D edge detection. *Image Vision Comput.* **9** : 203–214.
- Monga O., R. Lengagne et R. Deriche, 1994. Crest line extraction in volume 3D medical images : A multi-scale approach. Rapport de recherche 2338, Projet Syntim, Inria Rocquencourt, Le Chesnay, France.
- Montagnat J., 1999. *Modèles déformables pour la segmentation et la modélisation d'images médicales 3D et 4D*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, Sophia Antipolis, France.
- Montagnat J. et H. Delingette, 1998. Globally constrained deformable models for 3D object reconstruction. *Signal Processing* **71** : 173–186.
- Montagnat J., H. Delingette et G. Malandain, 1999. Cylindrical echocardiographic image segmentation based on 3D deformable models. Dans *Proc. International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI)*.
- Mumford D. et J. Shah, 1985. Boundary detection by minimizing functionals. Dans *Proc. IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*.
- Natterer F., 1993. Determination of tissue attenuation in emission tomography of optically dense media. *Inverse Probl.* **9** : 731–763.
- Nelson A. D., G. J. Muswick, R. F. Muzic et X. Descamps, 1996. A robust edge detection method for gated radionuclide ventriculograms. *J. Nucl. Med.* **37** : 685–689.

- Nichols K., E. G. DePuey et A. Rozanski, 1996. Automation of gated tomographic left ventricular ejection fraction. *J. Nucl. Cardiol.* **3** : 475–482.
- Niessen W. J., B. M. ter Haar Romeny et M. A. Viergever, 1998. Geodesic deformable models for medical image analysis. *IEEE T. Med. Imaging* **17** : 634–641.
- Nuyts J., P. Dupont, S. Stroobants, R. Benninck, L. Mortelmans et P. Suetens, 1999. Simultaneous maximum a posteriori reconstruction of attenuation and activity distributions from emission sinograms. *IEEE T. Med. Imaging* **18** : 393–403.
- Osher S. et J. A. Sethian, 1988. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J. Comput. Phys.* **79** : 12–49.
- Panin V. Y., G. L. Zeng et G. T. Gullberg, 1998. Reconstructions of truncated projections using an optimal basis expansion derived from the cross-correlation of a "knowledge set" of a priori cross-sections. *IEEE T. Nucl. Sci.* **45** : 2119–2125.
- Panin V. Y., G. L. Zeng et G. T. Gullberg, 1999. Total variation regulated EM algorithm. *IEEE T. Nucl. Sci.* **46** : 2202–2210.
- Paragios N. et R. Deriche, 1999. Geodesic active regions for motion estimation and tracking. Dans *Proc. IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*.
- Paragios N., P. Pérez, G. Tziritas, C. Labit et P. Bouthemy, 1996. Adaptive detection of moving objects using multiscale techniques. Dans *Proc. IEEE Signal Processing Society International Conference on Image Processing (ICIP)*.
- Planat A., I. Magnin, O. Ratib, D. Didier et D. Revel, 1998. Estimation de mouvement par approche multi-échelle souple avec prise en compte des discontinuités. Dans *Actes Reconnaissance de Formes et Intelligence Artificielle (RFIA)*.
- Planat-Chrétien A., 1999. *Estimation de mouvement par maillage actif multi-échelle avec prise en compte des discontinuités : application à l'imagerie cardiaque en résonance magnétique*. Thèse de doctorat, Institut national des sciences appliquées de Lyon, Lyon, France.
- Pretorius P. H., W. Xia, M. A. King, B. M. W. Tsui, T. S. Pan et B. J. Villegas, 1997. Evaluation of right and left ventricular volume and ejection fraction using a mathematical cardiac torso phantom for gated pool SPECT. *J. Nucl. Med.* **38** : 1528–1534.
- Rajeevan N., I. G. Zubal, S. Q. Ramsby, S. S. Zoghbi, J. Seibyl et R. B. Innis, 1998. Significance of nonuniform attenuation correction in quantitative brain SPECT imaging. *J. Nucl. Med.* **39** : 1719–1726.
- Reissman P.-J., J. Lötjönen, I. Magnin et T. Katila, 1999. Model extraction from magnetic resonance volume data using the deformable pyramid. *Med. Image Anal.* **3** : 387–406.
- Riddell C., J. A. Carrasquillo, S. K. Libutti et S. L. Bacharach, 2000. Class-dependent Gaussian filtering of short transmission scans for unbiased PET attenuation correction. Dans *Proc. Society of Nuclear Medicine's Annual Meeting (SNM annual meeting)*.
- Rouy E. et A. Tourin, 1992. A viscosity solutions approach to shape-from-shading. *SIAM J. Numer. Anal.* **29** : 867–884.
- Samson C., L. Blanc-Féraud, G. Aubert et J. Zerubia, 2000. A level set model for image classification. *À paraître dans Int. J. Comput. Vision*.
- Santosa F., 1996. A level-set approach for inverse problems involving obstacles. *ESIAM : COCV* **1** : 17–33.
- Sederberg T. et S. Parry, 1986. Free-form deformation of solid geometric models. *Comput. Graphics* **20** : 151–160.

- Sethian J. A., 1996. *Level set methods*. Cambridge University Press.
- Shu C. W. et S. Osher, 1988. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, I. *J. Comput. Phys.* **77** : 439–471.
- Shu C. W. et S. Osher, 1989. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II. *J. Comput. Phys.* **83** : 32–78.
- Siddiqi K., Y. Bérubé Lauzière, A. Tannenbaum et S. W. Zucker, 1998. Area and length minimizing flows for shape segmentation. *IEEE T. Image Process.* **7** : 433–443.
- Sussman M., E. Fatemi, P. Smereka et S. Osher, 1998. An improved level set method for incompressible two-phase flows. *Comput. Fluids* **27** : 663–680.
- Sussman M., P. Smereka et S. Osher, 1994. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *J. Comput. Phys.* **114** : 146–159.
- Szeliski R. et S. Lavallée, 1994. Matching 3-d anatomical surfaces with non-rigid deformations using octree-splines. Dans *Proc. IEEE Workshop on Mathematical Methods in Biomedical Image Analysis (MMBIA)*.
- Teboul S., L. Blanc-Féraud, G. Aubert et M. Barlaud, 1998. Active contour models for segmentation and reconstruction on medical images. Dans *Proc. Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*.
- Terzopoulos D., A. Witkin et M. Kass, 1988. Constraints on deformable models : Recovering 3-D shape and nonrigid motion. *Artif. Intell.* **36** : 91–123.
- Thirion J.-P., 1992. Segmentation of tomographic data without image reconstruction. *IEEE T. Med. Imaging* **11** : 102–110.
- Thirion J.-P., 1994. Direct extraction of boundaries from computed tomography scans. *IEEE T. Med. Imaging* **13** : 322–328.
- Thirion J.-P., 1998. Image matching as a diffusion process : An analogy with Maxwell's demons. *Med. Image Anal.* **2** : 243–260. Également disponible sous : rapport de recherche 2547, Projet Epidaure, Inria Sophia Antipolis, Sophia Antipolis, France.
- Thompson P. et A. W. Toga, 1996. A surface-based technique for warping three-dimensional images of the brain. *IEEE T. Med. Imaging* **15** : 402–417.
- Tikhonov A. N., 1963. Regularization of incorrectly posed problems. *Sov. Math. Dokl.* **4** : 1624–1627.
- Tournier E., C. Mestais et O. Peyret, 1994. Le compromis sensibilité-résolution, méthodes de collimation, caméras multi-têtes, méthodes tomographiques. *Médecine nucléaire* **18** : 317–321.
- Tsui B. M. W., G. T. Gullberg, E. R. Edgerton, J. G. Ballard, J. R. Perry, W. H. McCartney et J. Berg, 1989. Correction of nonuniform attenuation in cardiac SPECT imaging. *J. Nucl. Med.* **30** : 497–507.
- Tsui B. M. W., X. Zhao, E. C. Frey et G. T. Gullberg, 1991. Comparison between ML-EM and WLS-CG algorithms for SPECT image reconstruction. *IEEE T. Nucl. Sci.* **38** : 1766–1772.
- Welch A., R. Clack, F. Natterer et G. T. Gullberg, 1997. Toward accurate attenuation correction in SPECT without transmission measurements. *IEEE T. Med. Imaging* **16** : 532–541.
- Yezzi A., S. Kichenassamy, A. Kumar, P. Olver et A. Tannenbaum, 1997. A geometric snake model for segmentation of medical imagery. *IEEE T. Med. Imaging* **16** : 199–209.

- Yezzi A., A. Tsai et A. Willsky, 1999. A statistical approach to snakes for bimodal and trimodal imagery. Dans *Proc. IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*.
- Younes L., 1998. Computable elastic distances between shapes. *SIAM J. Appl. Math.* **58** : 565–586.
- Younes L., 1999. Optimal matching between shapes via elastic deformations. *Image Vision Comput.* **17** : 381–389.
- Zeng X., L. H. Staib, R. T. Schultz et J. S. Duncan, 1999. Segmentation and measurement of the cortex from 3-D MR images using coupled-surfaces propagation. *IEEE T. Med. Imaging* **18** : 927–937.
- Zhang Z., 1994. Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces. *Int. J. Comput. Vision* **13** : 119–152. Également disponible sous : rapport de recherche 1658, Projet Robotvis, Inria Sophia Antipolis, Sophia Antipolis, France.

INDEX

---



# Index bibliographique

## A

- [Adalsteinsson et Sethian 1995a] – 31.
- [Adalsteinsson et Sethian 1995b] – 29.
- [Adalsteinsson et Sethian 1999] – 29.
- [Amadiou *et al.* 1999] – 18.
- [Angenent *et al.* 1999] – 66.
- [Arnold 1983] – 27, 28, 87, 111, 115.

## B

- [Bardinet *et al.* 1996] – 40, 56.
- [Barles 1985] – 25.
- [Barles 1994] – 27, 111.
- [Battle *et al.* 1997] – 8, 40.
- [Battle *et al.* 1999] – 40, 49, 51.
- [Battle *et al.* 2000] – 51, 52, 99.
- [Berger 1991] – 20, 25, 56.
- [Besl et McKay 1992] – 82.
- [Blum et Nagel 1978] – 28.
- [Borgefors 1988] – 17, 94.
- [Bouthemy et François 1993] – 57.
- [Buvat *et al.* 1997] – 76.

## C

- [Caselles et Sbert 1996] – 24.
- [Caselles *et al.* 1995] – 21, 66.
- [Caselles *et al.* 1996] – 21.
- [Caselles, Kimmel et Sapiro 1997] – 21.
- [Caselles, Kimmel, Sapiro et Sbert 1997] – 21.
- [Charbonnier et Cuisenaire 1996] – 20, 22, 25.
- [Charbonnier *et al.* 1997] – 38, 60, 63.
- [Chopp 1993] – 31.
- [Chow 1985] – 24.
- [Clarysse *et al.* 1995] – 57.
- [Clarysse *et al.* 1997] – 56.
- [Cohen 1991] – 21.
- [Cohen et Cohen 1993] – 21.
- [Cohen *et al.* 1992] – 20.
- [Cohen *et al.* 1993] – 63.
- [Cooke *et al.* 1994] – 61, 76.

- [Csurka et Bouthemy 1999] – 57, 74.

## D

- [Danielsson 1980] – 94.
- [Davis *et al.* 1997] – 81, 82.
- [Debreuve *et al.* 1998] – 38.
- [Declerck 1997] – 56, 81, 82.
- [Declerck *et al.* 1998] – 56, 74, 81, 82.
- [Deriche 1987] – 8, 17, 39, 82.
- [Deriche et Giraudon 1993] – 82.

## E

- [Escher *et al.* 1998] – 24.
- [Evans *et al.* 1991] – 82.

## F

- [Faber *et al.* 1999] – 8, 56, 57, 70, 74, 76, 100.
- [Feldmar et Ayache 1996] – 81, 82.
- [Frey *et al.* 1992] – 7, 38.

## G

- [Galt *et al.* 1990] – 61.
- [Geman et Yang 1995] – 38.
- [Germano *et al.* 1995] – 8, 56, 57, 76, 100.
- [Gilland *et al.* 1998] – 7, 38.
- [Gomes et Faugeras 1999] – 29.
- [Gorce *et al.* 1997] – 56, 57, 82.
- [Grayson 1989] – 24.

## H

- [Haug et Choi 1993] – 64.
- [Hebert et Leahy 1989] – 6.
- [Hoffman *et al.* 1979] – 50.
- [Horn et Schunck 1981] – 57.
- [Hudson et Larkin 1994] – 6.
- [Huisken 1984] – 24.
- [Hummel *et al.* 1985] – 20.

## J

- [Jehan-Besson *et al.* 2000] – 18.



## K

- [Kass *et al.* 1987] – 19, 56.
- [Klein 1998] – 87.
- [Klein 1999] – 82.
- [Klein 2000] – 82.
- [Koenderinck et Doorn 1992] – 57.
- [Kojima *et al.* 1989] – 50.
- [Kornprobst *et al.* 1999] – 57, 58, 61, 62.

## L

- [LaCroix 1997] – 68.
- [Lange *et al.* 1987] – 7, 38.
- [Laurette *et al.* 1998] – 6, 38.
- [Laurette *et al.* 1999] – 38.
- [Laurette *et al.* 2000] – 100.

## M

- [Malandain et Fernández-Vidal 1998] – 28.
- [Malladi *et al.* 1995] – 32.
- [Manglos *et al.* 1995] – 7, 38.
- [Mariano-Goulart *et al.* 1998] – 8, 9, 39.
- [Mochizuki *et al.* 1991] – 61, 76.
- [Monga *et al.* 1991] – 9, 17.
- [Monga *et al.* 1994] – 82.
- [Montagnat 1999] – 57.
- [Montagnat et Delingette 1998] – 94.
- [Montagnat *et al.* 1999] – 57.
- [Mumford et Shah 1985] – 59.

## N

- [Natterer 1993] – 38.
- [Nelson *et al.* 1996] – 8, 76.
- [Nichols *et al.* 1996] – 56.
- [Niessen *et al.* 1998] – 8, 39, 56.
- [Nuyts *et al.* 1999] – 38.

## O

- [Osher et Sethian 1988] – 20, 24, 25.

## P

- [Panin *et al.* 1998] – 38.
- [Panin *et al.* 1999] – 38.
- [Paragios et Deriche 1999] – 18, 62.
- [Paragios *et al.* 1996] – 74.
- [Planat-Chrétien 1999] – 56.
- [Planat *et al.* 1998] – 56.
- [Pretorius *et al.* 1997] – 68.

## R

- [Rajeevan *et al.* 1998] – 38.
- [Reissman *et al.* 1999] – 40.
- [Riddell *et al.* 2000] – 8, 9, 39, 49.
- [Rouy et Tourin 1992] – 27, 30, 105, 111.

## S

- [Samson *et al.* 2000] – 8.
- [Santosa 1996] – 40, 41.
- [Sederberg et Parry 1986] – 40.
- [Sethian 1996] – 28, 30, 105.
- [Shu et Osher 1988] – 30, 105.
- [Shu et Osher 1989] – 30, 105.
- [Siddiqi *et al.* 1998] – 21, 66.
- [Sussman *et al.* 1994] – 30, 105.
- [Sussman *et al.* 1998] – 30, 105.
- [Szeliski et Lavallée 1994] – 40.

## T

- [Teboul *et al.* 1998] – 8.
- [Terzopoulos *et al.* 1988] – 20.
- [Thirion 1992] – 39.
- [Thirion 1994] – 39.
- [Thirion 1998] – 82, 83, 92.
- [Thompson et Toga 1996] – 82.
- [Tikhonov 1963] – 60.
- [Tournier *et al.* 1994] – 34.
- [Tsui *et al.* 1989] – 7, 38.
- [Tsui *et al.* 1991] – 6.

## W

- [Welch *et al.* 1997] – 38.

## Y

- [Yezzi *et al.* 1997] – 8, 39, 56, 66.
- [Yezzi *et al.* 1999] – 18, 23, 62, 78, 99.
- [Younes 1998] – 91.
- [Younes 1999] – 91.

## Z

- [Zeng *et al.* 1999] – 8, 78.
- [Zhang 1994] – 82.



## Segmentation par contours actifs en imagerie médicale dynamique : application en cardiologie nucléaire

En imagerie d'émission, la médecine nucléaire fournit une information fonctionnelle sur l'organe étudié. En imagerie de transmission, elle fournit une information anatomique, destinée par exemple à corriger certains facteurs de dégradation des images d'émission. Qu'il s'agisse d'une image d'émission ou de transmission, il est utile de savoir extraire de façon automatique ou semi-automatique les éléments pertinents : le ou les organes d'intérêt et le pourtour du patient lorsque le champ d'acquisition est large. Voilà le but des méthodes de segmentation. Nous avons développé deux méthodes de segmentation par contours actifs, le point crucial étant la définition de leur vitesse d'évolution. Elles ont été mises en œuvre par les ensembles de niveaux. En premier lieu, nous nous sommes intéressés à l'imagerie statique de transmission de la région thoracique. La vitesse d'évolution, définie heuristiquement, fait directement intervenir les projections acquises. La carte de transmission segmentée, obtenue ainsi sans reconstruction, doit servir à améliorer la correction de l'atténuation photonique subie par les images cardiaques d'émission. Puis nous avons étudié la segmentation des séquences cardiaques – d'émission – synchronisées par électrocardiogramme. La méthode de segmentation spatio-temporelle développée résulte de la minimisation d'un critère variationnel exploitant d'un bloc l'ensemble de la séquence. La segmentation obtenue doit servir au calcul de paramètres physiologiques. Nous l'avons illustré en calculant la fraction d'éjection. Pour terminer, nous avons exploité les propriétés des ensembles de niveaux afin de développer une méthode géométrique de recalage, non rigide et non paramétrique. Nous l'avons appliquée à la compensation cinétique des images des séquences cardiaques synchronisées. Les images recalées ont alors été ajoutées de sorte à produire une image dont le niveau de bruit est comparable à celui d'une image cardiaque statique sans toutefois souffrir de flou cinétique.

**Mot-clés : Segmentation spatio-temporelle, séquences cardiaques, contours actifs, ensembles de niveaux, recalage non rigide et non paramétrique, médecine nucléaire.**

## Active contour segmentation in dynamic medical imaging: application to nuclear cardiology

In emission imaging, nuclear medicine provides functional information about the organ of interest. In transmission imaging, it provides anatomical information whose goal may be the correction of physical phenomena that corrupt emission images. With both emission and transmission images, it is useful to know how to extract, either automatically or semiautomatically, the organs of interest and the body outline in the case of a large field of view. This is the aim of segmentation. We developed two active contour segmentation methods. They were implemented using level sets. The key point is the evolution velocity definition. First, we were interested in static transmission imaging of the thorax. The evolution velocity was heuristically defined and depended only on the acquired projections. The segmented transmission map was computed w/o reconstruction and could be advantageously used for attenuation correction. Then, we studied the segmentation of cardiac gated sequences. The developed space-time segmentation method results from the minimization of a variational criterion which takes into account the whole sequence. The computed segmentation could be used for calculating physiological parameters. As an illustration, we computed the ejection fraction. Finally, we exploited some level set properties to develop a non-rigid, non-parametric, and geometric registration method. We applied it for kinetic compensation of cardiac gated sequences. The registered images were then added together providing an image with noise characteristics similar to a cardiac static image but w/o motion-induced blurring.

**Key words: Space-time segmentation, cardiac gated sequences, active contours, level sets, non-rigid and non-parametric registration, nuclear medicine.**