



**HAL**  
open science

# Vérification des facteurs d'intensité de contrainte calculés par XFEM

Julien Panetier

► **To cite this version:**

Julien Panetier. Vérification des facteurs d'intensité de contrainte calculés par XFEM. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2009. Français. NNT : . tel-00505777

**HAL Id: tel-00505777**

**<https://theses.hal.science/tel-00505777>**

Submitted on 26 Jul 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ENSC-2009 n°153

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par  
JULIEN PANETIER

pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE  
CACHAN**

Domaine :  
**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

Sujet de la thèse :  
**Vérification des facteurs d'intensité de contrainte  
calculés par XFEM**

Thèse soutenue le 15 mai 2009 à l'ENS de Cachan devant le jury composé de :

DOMINIQUE LEGUILLON	<b>Université Pierre et Marie Curie de Paris</b>	Président
PATRICK LABORDE	<b>Université Paul Sabatier de Toulouse</b>	Rapporteur
NICOLAS MOËS	<b>Ecole Centrale de Nantes</b>	Rapporteur
SYLVIE POMMIER	<b>ENS de Cachan</b>	Examinatrice
PIERRE LADEVÈZE	<b>ENS de Cachan</b>	Examineur

---

Laboratoire de Mécanique et Technologie  
ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6  
61, avenue du Président Wilson, F-94235 CACHAN CEDEX



Jean-Pierre Pelle et Pierre Ladevèze ont successivement dirigé ces travaux, je les remercie chaleureusement pour la confiance qu'ils m'ont accordée et les conseils qu'ils m'ont prodigués.

Je remercie également Laurent Gallimard et François Louf qui m'ont encadré à différents moments de ce travail.

Eric Florentin et Ludovic Chamoin m'ont beaucoup aidé dans la préparation de la soutenance, ils ne sont donc pas étrangers à cette belle réussite.

Je remercie les membres du jury :

- Dominique Leguillon pour avoir accepté de présider ce jury,
- Patrick Laborde et Nicolas Moës pour avoir rapporté ce travail de thèse,
- Sylvie Pommier pour avoir accepté d'être examinatrice.

Je remercie tous les amis du LMT et du DGM que je ne cite pas car ils sont nombreux - mais ils se reconnaîtront - pour les années laborieuses mais agréables passées dans les murs du LMT.

Je remercie Julie et ma famille pour m'avoir encouragé à mener à bien ce travail.



---

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Estimation de la qualité d'une solution éléments finis</b>	<b>7</b>
1 Qualité d'une solution éléments finis . . . . .	9
1.1 Modélisation du problème de référence . . . . .	9
1.2 Discrétisation du modèle continu . . . . .	10
1.3 Défauts de la solution approchée . . . . .	11
2 Estimation globale de l'erreur . . . . .	12
2.1 Définition de l'erreur de discrétisation . . . . .	12
2.2 La méthode des résidus d'équilibre . . . . .	13
2.2.1 Les méthodes explicites . . . . .	14
2.2.2 Les méthodes implicites . . . . .	14
2.3 Les techniques de lissage . . . . .	16
2.4 Le concept d'erreur en relation de comportement . . . . .	17
2.4.1 Définition et propriétés . . . . .	17
2.4.2 Construction des champs admissibles . . . . .	18
2.4.3 Construction optimisée des champs admissibles	20
2.5 Qualité des estimateurs d'erreur . . . . .	21
3 Estimation locale de l'erreur . . . . .	22
3.1 Estimateurs d'erreur des pollution . . . . .	22
3.1.1 Définition de l'erreur de pollution . . . . .	22
3.1.2 Mesure de l'erreur de pollution . . . . .	23
3.2 Estimateurs utilisant une technique d'extraction . . . . .	24
3.2.1 Fonction d'extraction . . . . .	25

---

3.2.2	Définition du problème adjoint . . . . .	26
3.2.3	Erreur sur la quantité d'intérêt . . . . .	27
3.3	Estimation directe de l'erreur locale . . . . .	28
4	Bilan . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Estimation d'erreur pour les problèmes avec singularités</b>	<b>31</b>
1	Mécanique linéaire élastique de la rupture . . . . .	33
1.1	Le problème de référence . . . . .	33
1.2	Calcul des quantités d'intérêts en pointe de fissure . . . . .	35
1.2.1	Le taux de restitution d'énergie . . . . .	35
1.2.2	Les facteurs d'intensité de contrainte . . . . .	36
1.2.3	Lien entre les deux descriptions . . . . .	37
2	Evaluation de la qualité des quantités d'intérêts . . . . .	38
2.1	Les principales techniques d'extraction . . . . .	39
2.1.1	Calcul numérique du taux de restitution d'énergie	39
2.1.2	Calcul numérique des facteurs d'intensité de contrainte . . . . .	41
2.2	Etat de l'art sur l'erreur en mécanique de la rupture . . . . .	45
2.2.1	Erreur sur $G$ . . . . .	45
2.2.2	Erreur sur $K_I$ et $K_{II}$ . . . . .	46
2.3	Bilan . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Encadrement des facteurs d'intensité de contrainte</b>	<b>49</b>
1	Présentation de la technique d'extraction . . . . .	51
1.1	Présentation de la technique d'extraction . . . . .	51
1.1.1	Expression de l'intégrale de contour . . . . .	51
1.1.2	Intégrale de domaine équivalente . . . . .	52
1.2	Propriétés de la technique d'extraction . . . . .	54
1.2.1	Mise en œuvre numérique . . . . .	54
1.2.2	Résultats numériques . . . . .	55
2	Estimation de l'erreur sur les facteurs d'intensité de contrainte . . . . .	57
2.1	Résolution du problème adjoint . . . . .	57
2.2	Un premier encadrement . . . . .	62
2.3	Amélioration de l'encadrement . . . . .	66
2.3.1	Optimisation locale des densités . . . . .	67
2.3.2	Nouvelles bornes pour les quantités d'intérêt . . . . .	71
3	bilan . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Traitement du problème de fissuration avec la XFEM</b>	<b>79</b>
1	Modélisation de la fissure par la XFEM . . . . .	80
1.1	Partition de l'unité . . . . .	80

---

---

1.2	Modélisation d'une fissure par la XFEM . . . . .	83
1.2.1	Définition de l'enrichissement . . . . .	83
1.2.2	Description de la fissure . . . . .	84
1.3	Implantation . . . . .	86
2	Qualité de la solution XFEM . . . . .	87
3	Bilan . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Estimateur d'erreur pour la XFEM</b>	<b>93</b>
1	Prise en compte de l'enrichissement en pointe de fissure . . . . .	95
1.1	Reconstruction du champ de contraintes sur $\Omega_2$ . . . . .	96
1.2	Reconstruction du champ de contraintes sur $\Omega_1$ . . . . .	97
1.3	Mise en œuvre numérique . . . . .	98
1.3.1	Influence du développement asymptotique . . . . .	100
1.3.2	Comportement global de l'estimateur . . . . .	102
2	Prise en compte de l'enrichissement de type Heaviside . . . . .	108
2.1	Détermination des densités . . . . .	108
2.2	Reconstuction d'un champ de contrainte admissible . . . . .	113
2.3	Résultats numériques . . . . .	114
3	Bilan . . . . .	118
<b>6</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>119</b>
1	Comportement global de l'estimateur pour la XFEM . . . . .	120
1.0.1	Sollicitation en mode $I$ . . . . .	120
1.0.2	Sollicitation en mode $II$ . . . . .	120
2	Encadrements des facteurs d'intensité de contraintes avec la XFEM . . . . .	125
3	Enrichissement du problème adjoint . . . . .	127
4	Bilan . . . . .	131
	<b>Conclusion</b>	<b>133</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>135</b>



---

# Table des figures

1.1	Définition du modèle de référence et des actions du milieu extérieur. 10	
1.2	Contributions locale et de pollution à l'erreur globale. . . . .	23
2.1	Modes d'ouvertures . . . . .	34
2.2	Problème de référence avec fissure . . . . .	35
2.3	Repère local associé à la pointe de fissure. . . . .	37
2.4	Couronne d'intégration pour l'intégrale $G_\theta$ . . . . .	40
2.5	Géométrie pour définition de l'extraction avec fonctions duales.	44
3.1	Couronne d'intégration pour l'extracteur des facteurs d'intensité de contrainte . . . . .	53
3.2	Problème test en mode $I$ . . . . .	56
3.3	Problème test en mode $I$ et $II$ . . . . .	57
3.4	maillage conforme à 1536 éléments. . . . .	58
3.5	$\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ pour problème adjoint $I$ , 1536 éléments. . . . .	60
3.6	$\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ pour problème adjoint $II$ , 1536 éléments. . . . .	61
3.7	Cartes d'erreur en mode $I$ et mode mixte , 1536 éléments. . . . .	62
3.8	Cartes d'erreur pour les problèmes adjoint $I$ et $II$ , 1536 éléments.	63
3.9	Convergence des erreurs globales relatives pour les problèmes à résoudre et les problèmes adjoints. . . . .	65
3.10	Comparaison des indices d'efficacité entre densités standards et optimisées, mode mixte pour $K_I$ . . . . .	69
3.11	Comparaison des indices d'efficacité entre densités standards et optimisées, mode mixte pour $K_{II}$ . . . . .	70
3.12	Comparaison des bornes pour $K_I$ en mode $I$ . . . . .	74
3.13	Comparaison des bornes pour $K_I$ en mode $II$ . . . . .	75
3.14	Comparaison des bornes pour $K_{II}$ en mode $II$ . . . . .	76

4.1	Définition du patch $\Omega_i$ associé au nœud $i$ pour la partition de l'unité $\varphi_i$ . . . . .	81
4.2	Visualisation de l'enrichissement pour un maillage régulier. . . . .	84
4.3	Allure des fonction $F_j$ au voisinage de la pointe de fissure : dans le sens de la lecture : $F_1, F_2, F_3$ et $F_4$ . . . . .	85
4.4	Calcul de la fonction $H$ en prenant le point de la fissure le plus proche. . . . .	86
4.5	Allure des fonction $\varphi_i H$ sur un élément quadrangle coupé par la fissure. . . . .	87
4.6	Représentation d'une fissure débouchante avec les deux fonctions level sets $\varphi$ et $\psi$ . . . . .	88
4.7	Représentation des fonctions level sets $\psi$ et $\varphi$ interpolées sur les fonctions de forme pour une fissure droite débouchante de pointe $[-0.5,0]$ . . . . .	89
4.8	Enrichissement géométrique. . . . .	90
4.9	Eléments de transition entre les différents types d'interpolation. . . . .	91
5.1	Problème de référence avec fissure conforme et séparation en une partie enrichie $\Omega_2$ et une partie classique $\Omega_1$ délimitées par la frontière $\Gamma$ . . . . .	95
5.2	Second problème pour obtention de la contrainte sur $\Omega_1$ avec continuité du vecteur contrainte sur $\Gamma$ . . . . .	98
5.3	Maillages pour reconstruction des champs de contrainte . . . . .	99
5.4	erreurs relatives sur $\Omega_2$ pour 100 éléments . . . . .	100
5.5	erreurs relatives sur $\Omega_2$ pour 1600 éléments . . . . .	101
5.6	erreurs sur $\Omega_2$ fonction du développement pour le benchmark en mode $I$ , maillage de 1536 éléments . . . . .	101
5.7	erreurs relatives globales sur $\Omega$ fonction du développement pour le benchmark en mode $I$ , maillage de 1536 éléments . . . . .	102
5.8	Enrichissement géométrique, maillages à 384, 864 et 1536 éléments. . . . .	104
5.9	Contributions à l'erreur globale pour les maillages à 864, 1536 et 3456 éléments. . . . .	105
5.10	Contributions à l'erreur globale pour les maillages à 864, 1536 et 3456 éléments, dans le cas de l'enrichissement géométrique . . . . .	106
5.11	Comparaison des erreurs relatives globales sur $\Omega$ pour les enrichissements classiques et géométriques . . . . .	107
5.12	Eléments enrichis par les fonctions $H\varphi_i$ . . . . .	109
5.13	Définition du problème sur une arrête coupée par le fissure . . . . .	111
5.14	Cas d'une fissure passant par deux arrêtes consécutives . . . . .	112
5.15	Cas d'une fissure passant par un nœud . . . . .	113
5.16	Problème sur un quadrangle à 16 nœuds enrichi . . . . .	114

---

5.17	Anneau ouvert pour test des champs SA . . . . .	115
5.18	Visualisation de l'enrichissement pour ouverture droite et inclinée	115
5.19	Visualisation des contribution à l'erreur avec ouverture droites. Eléments non enrichis imposés à 0 pour la deuxième figure. . . . .	116
5.20	Visualisation des contribution à l'erreur avec ouverture inclinée. Eléments non enrichis imposés à 0 pour la deuxième figure. . . . .	116
5.21	Comparaison des erreurs pour les problèmes XFEM ET FEM . . . . .	117
6.1	Contributions à l'erreur globale pour le problème en mode $I$ résolu par une analyse XFEM . Maillages à 1071 éléments. . . . .	121
6.2	Contributions à l'erreur globale pour le problème adjoint $I$ résolu par une analyse XFEM. Maillages à 1071 éléments. . . . .	121
6.3	Convergence de l'erreur en mode $I$ résolu par une analyse XFEM.	122
6.4	Convergence de l'erreur pour le problème adjoint $I$ résolu par une analyse XFEM. . . . .	122
6.5	Contributions à l'erreur globale pour le problème en mode $II$ résolu par une analyse XFEM. Maillages à 1071 éléments. . . . .	123
6.6	Contributions à l'erreur globale pour le problème adjoint $II$ résolu par une analyse XFEM. Maillages à 1071 éléments. . . . .	123
6.7	Convergence de l'erreur en mode $II$ résolu par une analyse XFEM.	124
6.8	Convergence de l'erreur pour le problème adjoint $II$ résolu par une analyse XFEM. . . . .	124
6.9	Comparaison des bornes entre un problème adjoint classique avec densités optimisées et un problème adjoint enrichi. Bornes pour $K_I$ en mode $I$ . . . . .	128
6.10	Comparaison des bornes entre un problème adjoint classique avec densités optimisées et un problème adjoint enrichi. Bornes pour $K_I$ en mode $II$ . . . . .	129
6.11	Comparaison des bornes entre un problème adjoint classique avec densités optimisées et un problème adjoint enrichi. Bornes pour $K_{II}$ en mode $II$ . . . . .	130



---

# Liste des tableaux

3.1	Influence de la taille de la couronne d'intégration à 1536 éléments.	56
3.2	Influence de la position de la couronne d'intégration à 1536 éléments. . . . .	57
3.3	Erreurs globales relatives pour le problème standard en mode <i>I</i> .	64
3.4	Erreurs globales relatives pour le problème standard en mode <i>II</i> .	64
3.5	Bornes pour $K_{I,h}$ pour le problème standard en mode <i>I</i> . . . . .	65
3.6	Bornes pour $K_{I,h}$ pour le problème standard en mode mixte. . .	66
3.7	bornes pour $K_{II,h}$ pour le problème standard en mode mixte. . .	66
3.8	Bornes pour $K_{I,h}$ pour le problème standard avec densités optimisées en mode <i>I</i> . . . . .	67
3.9	Bornes pour $K_{I,h}$ pour le problème standard avec densités optimisées en mode <i>II</i> . . . . .	68
3.10	Bornes pour $K_{II,h}$ pour le problème standard avec densités optimisées en mode <i>II</i> . . . . .	68
3.11	Bornes pour $K_I$ (nouvel encadrement) pour le problème standard avec densités optimisées en mode <i>I</i> . . . . .	72
3.12	Bornes pour $K_I$ (nouvel encadrement) pour le problème standard avec densités optimisées en mode <i>II</i> . . . . .	72
3.13	Bornes pour $K_{II}$ (nouvel encadrement) pour le problème standard avec densités optimisées en mode <i>II</i> . . . . .	73
6.1	Bornes pour $K_I$ pour le problème XFEM en mode <i>I</i> . Valeur référence : $K_{I,ref} = 9.33$ . . . . .	125
6.2	Bornes pour $K_I$ pour le problème XFEM en mode <i>II</i> . Valeur référence : $K_{I,ref} = 33.93$ . . . . .	125
6.3	Bornes pour $K_{II}$ pour le problème XFEM en mode <i>II</i> . Valeur référence : $K_{II,ref} = 4.53$ . . . . .	126



---

# Introduction

Les progrès considérables de l'informatique ces dernières décennies ont permis le développement et l'utilisation systématique d'outils de simulation numérique très performants. Dans le domaine de la mécanique des structures on retient particulièrement l'utilisation de la méthode des Eléments Finis qui est apparue dans les années soixante. Elle était alors essentiellement utilisée par les chercheurs et pour des domaines d'application très pointus en raison du coup et de la complexité de mise en œuvre. Depuis, le développement conjoint de calculateurs puissants et de modèles mécaniques pointus a ouvert la voie d'une discipline scientifique à part entière que la communauté Anglo-Saxonne appelle *Computational Mechanics*. Elle couvre en fait un champ de connaissance largement pluridisciplinaire (mécanique, mathématiques, informatique, matériaux...). Ces efforts de recherche ont rapidement débouché sur des applications au niveau industriel. Aujourd'hui, la conduite de simulations numériques complexes au sein des bureaux d'étude permet le dimensionnement au plus juste, l'amélioration de la compréhension de certains phénomènes et la réduction des essais habituellement menés sur des prototypes aux coûts prohibitifs.

Dans le contexte que nous venons d'évoquer, il est nécessaire de comprendre que la simulation numérique de phénomènes complexes ne répondra aux enjeux de manière positive que si l'on est en mesure d'en garantir la pertinence. En effet, la démarche qui consiste à simuler numériquement un système mécanique est constituée de plusieurs étapes de modélisation et conduit donc à une approximation de la solution recherchée. Il apparaît donc indispensable de pouvoir estimer et contrôler l'écart entre le problème réel traité et la solution numérique.

Les travaux présentés dans cette thèse s'inscrivent pleinement dans cette problématique. Nous nous intéressons d'abord aux problèmes de mécanique de la rupture traités par la méthode des Eléments Finis classique, puis par la XFEM introduite dans [Belytschko 99, Moës 99]. Les critères de dimensionne-

ment utilisés pour le calcul des pièces mécaniques présentant une ou plusieurs fissures font intervenir en pratique le taux de restitution d'énergie ou les facteurs d'intensité de contrainte en pointe de fissure. Le contrôle des calculs en mécanique de la rupture est une thématique assez peu explorée relativement aux autres thèmes. La sensibilité et l'instabilité des pièces mécaniques fissurées en font pourtant un domaine où la validation et le contrôle des calculs prennent tout leur sens. On peut citer tout d'abord les travaux de [Stone 98] qui s'intéressent au contrôle du chemin de propagation d'une fissure. Les travaux de [Heintz 04, Ruter 06, Xuan 06b] proposent des bornes pour le taux de restitution d'énergie. Seules les bornes présentées dans [Xuan 06b] sont garanties. Enfin, [Xuan 06a, Gallimard 06] ont établi des bornes garanties pour les facteurs d'intensité de contrainte en mode mixte.

Nous nous concentrons dans ce travail sur l'évaluation des facteurs d'intensité de contrainte. L'objectif est d'obtenir *des bornes strictes* (mathématiquement garanties) *et de qualité*, c'est-à-dire ne surestimant pas de manière exagérée l'erreur effectivement commise. Nous nous plaçons sous les hypothèses des petites perturbations sous chargement quasi-statique. Seuls les comportements linéaires élastiques sont envisagés.

Nous prenons pour modèle de référence le modèle issu de la mécanique des milieux continus. La solution du modèle de référence qui est considérée comme la solution exacte est dans la quasi totalité des cas inaccessible par le calcul analytique. Nous avons donc recours à la méthode des éléments finis qui fournit une solution numérique approchée. La qualité de la solution numérique, c'est-à-dire l'écart entre la solution numérique et la solution exacte, dépend en pratique du maillage utilisé (taille de maille, degré d'interpolation des éléments) et du schéma d'intégration en temps (type de schéma utilisé, pas de temps...). Ces erreurs sont qualifiées d'erreur de discrétisation. D'autres sources d'erreur peuvent apparaître, comme les erreurs dues à la précision machine (en pratique tout à fait négligeables), à la modélisation de la géométrie ou des conditions limites (ces erreurs relèvent de la modélisation même du problème et non de la qualité de la méthode numérique). Nous ne nous intéresserons ici qu'aux erreurs de discrétisation. Les premiers travaux de recherche concernant l'estimation des erreurs sont apparus presque conjointement au développement des éléments finis, dès les années soixante-dix. On distingue trois grandes familles d'estimateurs qui concernaient tout d'abord les problèmes de statique linéaire ou de thermique stationnaire :

- Les estimateurs basés sur les résidus des équations d'équilibre apparus dans [Babuška 78a];
- Les estimateurs basés sur le concept d'erreur en relation de comporte-

- ment introduits dans [Ladevèze 75] et développés dans [Ladevèze 83] ;
- Les estimateurs basés sur un lissage des contraintes éléments finis développés plus tardivement dans [Zienkiewicz 87].

Ces estimateurs permettent de quantifier l'erreur au sens de la norme énergétique et fournissent une information globale sur le calcul. Ils ont fait l'objet de développements très intéressants permettant par exemple de traiter des problèmes d'évolution en temps, des problèmes non linéaires ou de dégager des critères de remaillage [Babuška 82, Ladevèze 85, Johnson 91, Ladevèze 91, Ladevèze 99a, Rannacher 98]. Les travaux présentés dans cette thèse utilisent le concept d'erreur en relation de comportement qui a été développé au LMT, il s'appuie sur la reconstruction de champs admissibles [Ladevèze 91], [Ladevèze 97] et permet d'obtenir une borne supérieure de l'erreur exacte. Ce dernier point est très important car il garantit l'aspect conservatif de l'estimateur.

Cependant, une estimation globale de l'erreur est dans la plupart des cas insuffisante. En effet, les critères utilisés pour le dimensionnement des structures font intervenir des quantités locales comme le déplacement ou la contrainte en un point ou bien, ce que nous appelons de manière plus générale des quantités d'intérêt comme les facteurs d'intensité de contrainte. Les travaux concernant l'estimation de l'erreur sur les quantités d'intérêt sont plus récents : [Babuška 95, Ladevèze 97, Paraschivoiu 97, Rannacher 97, Peraire 98, Ladevèze 99b, Oden 99, Prudhomme 99, Strouboulis 00b, Stein 01, Pares 06, Chamoin 07b, Ladevèze 08a]. La grande majorité de ces travaux utilise une technique d'extraction linéaire pour la quantité d'intérêt et la résolution du problème adjoint. L'intérêt de cette technique est de se ramener à un problème global ou l'on exploite la connaissance des erreurs globales pour le problème à résoudre et le problème adjoint.

Les facteurs d'intensité de contrainte peuvent être calculés à partir de la solution éléments finis par une technique d'extraction, fonction linéaire du déplacement. La technique employée ici est inspirée de l'intégrale de contour proposée par [Stern 76] et généralisée aux autres types de singularités dans [Babuška 84, Leguillon 87]. On peut également citer les travaux de H.D. Bui dans [Bui 85]. La linéarité de l'extracteur permet de reprendre la technique d'estimation d'erreur sur les quantités d'intérêt, associée à l'erreur en relation de comportement, on obtient alors des *bornes garanties* pour les facteurs d'intensité de contrainte en mode mixte. L'encadrement proposé dans [Ladevèze 06] permet notamment d'encadrer directement la valeur exacte de  $K_I$  et  $K_{II}$ , on peut alors obtenir un encadrement plus ou moins fin en améliorant la reconstruction des champs admissibles ou la résolution du problème adjoint.

On s'intéresse ensuite à la XFEM introduite dans [Belytschko 99, Moës 99].

Cette extension de la méthode des éléments finis était dédiée dans un premier temps à la modélisation des fissures. On peut discerner deux motivations conduisant au développement de la XFEM :

- améliorer l’approximation de la solution en pointe de fissure par l’utilisation de la solution asymptotique ;
- s’affranchir du remaillage qui doit suivre l’évolution de la fissure par l’utilisation de fonctions discontinues de type Heaviside.

L’enrichissement par ces deux types de fonctions est réalisé par une partition de l’unité, formalisée dans le cadre des éléments finis par [Melenk 96]. Bien que plusieurs travaux concernant la convergence et les sources d’erreur aient été publiés -on peut à ce sujet consulter [Laborde 05, Chahine 06, Chahine 08] qui proposent en outre des techniques améliorant les propriétés de convergence- aucun estimateur permettant d’évaluer l’erreur XFEM de manière garantie n’a été proposé à ce jour. Nous montrons donc que les techniques utilisées pour les éléments fini standards et exploitant le concept d’erreur en relation de comportement peuvent être aisément adaptées à la XFEM. Nous exposons une méthode de reconstruction de champs qui permet de prendre en compte les fonctions asymptotiques d’une part, et les fonctions de type Heaviside d’autre part. On peut alors à nouveau proposer un encadrement garanti et pertinent pour les facteurs d’intensité  $K_I$  et  $K_{II}$  calculés dans le cadre d’une simulation par la XFEM.

Nous voyons donc que l’objectif ici n’est pas de fournir une indication sur l’erreur apte à servir pour un critère de remaillage, mais de fournir un encadrement garanti et de qualité sur les quantités qui intéressent directement l’ingénieur.

La rédaction de ce document est organisée de la manière suivante.

- Le premier chapitre rappelle les étapes de modélisation qui permettent d’établir et de résoudre un problème éléments finis à partir d’un modèle de référence continu. On définit alors l’erreur de discrétisation et les trois principaux estimateurs permettant d’évaluer l’erreur globale . On y expose ensuite les techniques d’estimation d’erreur sur les quantités d’intérêt.
- Le second chapitre rappelle le cadre de la mécanique linéaire élastique de la rupture et les définitions des quantités d’intérêt qui s’y rattachent : le taux de restitution d’énergie et les facteurs d’intensité de contrainte. Un état de l’art des techniques d’extraction et des travaux concernant l’estimation de leur qualité est présenté. Ce chapitre permet de situer les travaux présentés dans ce document par rapport aux travaux existants afin d’en souligner les enjeux.
- Dans le troisième chapitre, la fonction d’extraction retenue est présentée et étudiée. Nous exposons ensuite la méthode d’estimation d’erreur pour

les facteurs d'intensité de contrainte en mode mixte avec les premiers résultats pour les éléments finis standards. L'utilisation de benchmark en mode 1 et 2 permet de valider la méthode.

- Le quatrième chapitre présente les caractéristiques de la méthode XFEM et sa mise en œuvre. On y met en évidence les sources d'erreurs qui viennent altérer les résultats et la nécessité d'établir un estimateur d'erreur.
- Le cinquième chapitre est consacré à l'extension de l'erreur en relation de comportement à la XFEM. On y présente la reconstruction de champs spécifiquement développée pour ce type de problème.
- Le sixième chapitre présente des résultats numériques intéressants. On établit les bornes pour les facteurs d'intensité de contrainte extraits après une analyse XFEM. On y montre également comment on peut améliorer l'encadrement pour les éléments finis classiques en enrichissant le problème adjoint.



---

# Estimation de la qualité d'une solution éléments finis

*Ce premier chapitre présente un état de l'art pour l'estimation d'erreur en mécanique linéaire. Les trois principaux types d'estimateurs qui permettent d'obtenir une estimation globale de l'erreur sont d'abord présentés. L'accent est mis sur le concept d'estimateur en relation de comportement puisque c'est celui qui sera employé pour l'ensemble de l'étude. On présente ensuite les méthodes d'estimation de l'erreur locale ou plus généralement de l'erreur sur les quantités d'intérêts.*

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Qualité d'une solution éléments finis . . . . .</b>	<b>9</b>
1.1	Modélisation du problème de référence . . . . .	9
1.2	Discrétisation du modèle continu . . . . .	10
1.3	Défauts de la solution approchée . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Estimation globale de l'erreur . . . . .</b>	<b>12</b>

2.1	Définition de l'erreur de discrétisation . . . . .	12
2.2	La méthode des résidus d'équilibre . . . . .	13
2.3	Les techniques de lissage . . . . .	16
2.4	Le concept d'erreur en relation de comportement . . . . .	17
2.5	Qualité des estimateurs d'erreur . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Estimation locale de l'erreur . . . . .</b>	<b>22</b>
3.1	Estimateurs d'erreur des pollution . . . . .	22
3.2	Estimateurs utilisant une technique d'extraction . . . . .	24
3.3	Estimation directe de l'erreur locale . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Bilan . . . . .</b>	<b>29</b>

---

# 1 Qualité d'une solution éléments finis

La démarche qui consiste à simuler le comportement d'une structure en vue de son dimensionnement peut être extrêmement complexe selon les cas envisagés. Nous resterons ici dans le cadre strict des problèmes de statique linéaire élastiques, sous l'hypothèse des petites perturbations. Le problème physique réel est d'abord soumis à une première étape de modélisation qui conduit à un modèle relevant de la mécanique des milieux continus. Il en résulte donc un modèle mathématique qui se traduit le plus souvent par un système d'équations aux dérivées partielles à résoudre. Les erreurs pouvant intervenir dans cette première étape de modélisation ne sont pas envisagées dans ce travail. Nous considérons donc à partir de maintenant que la structure étudiée est correctement modélisée dans le cadre de la mécanique des milieux continus : la géométrie, les actions de l'environnement extérieur sur la structure et le comportement du matériau sont connus.

## 1.1 Modélisation du problème de référence

Nous considérons une structure représentée figure 1.1 par le domaine  $\Omega$ , de frontière  $\partial\Omega$ , soumise aux actions extérieures suivantes :

- une force volumique  $\underline{f}_d$  définie en tout point  $M$  de  $\Omega$  ;
- une action mécanique extérieure  $\underline{F}_d$  (condition limite de type Neumann) appliquée sur la partie  $\partial_2\Omega$  de  $\partial\Omega$  ;
- un déplacement imposé  $\underline{U}_d$  (condition limite de type Dirichlet) sur la partie  $\partial_1\Omega$  de  $\partial\Omega$  ;

avec  $\partial_2\Omega = \partial\Omega - \partial_1\Omega$  pour que le problème soit bien posé.

En notant  $\mathbf{K}$  l'opérateur de Hooke du matériau, le problème peut être formulé de la manière suivante : trouver un couple contrainte-déplacement  $(\underline{u}, \sigma)$  tel que :

- $\underline{u}$  est cinématiquement admissible (CA) : il vérifie les équations de liaison

$$\underline{u} \in \mathcal{U} \quad \underline{u}|_{\partial_1\Omega} = \underline{U}_d \quad (1.1)$$

- $\sigma$  est statiquement admissible (SA) : il vérifie les équations d'équilibre

$$\sigma \in \mathcal{S} \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0$$

$$\int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma \varepsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* dS \quad (1.2)$$

- $(\underline{u}, \sigma)$  vérifie la relation de comportement :

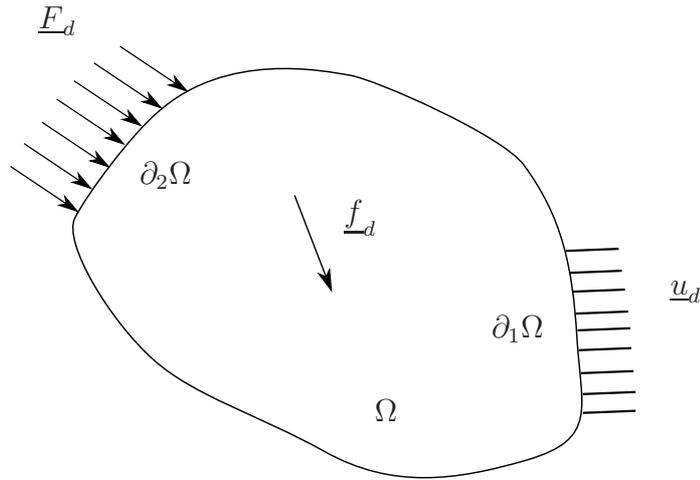


Figure 1.1: Définition du modèle de référence et des actions du milieu extérieur.

$$\sigma = \mathbf{K}\varepsilon(\underline{u}) \quad \forall M \in \Omega \quad (1.3)$$

$\mathcal{U}$  est l'espace de Sobolev des champs CA,  $\mathcal{S}$  est l'espace de Sobolev des champs SA.  $\mathcal{U}_0$  est le sous-espace de  $\mathcal{U}$  contenant les solutions à déplacement imposé nul sur  $\partial_1\Omega$ . On définit le tenseur des petites déformations linéarisé :

$$\varepsilon(\underline{u}) = \frac{1}{2}[\nabla\underline{u} + \nabla^t\underline{u}] \quad (1.4)$$

Le couple solution de ce problème de référence peut être considéré par la suite comme la solution exacte notée  $(\underline{u}_{ex}, \sigma_{ex})$ .

## 1.2 Discrétisation du modèle continu

La solution  $(\underline{u}_{ex}, \sigma_{ex})$  est dans la majorité des cas inaccessible par le calcul analytique. En effet, les espaces  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{S}$  étant de dimension non finie, il n'est possible d'accéder à la solution exacte que si l'on peut réduire la dimension de l'espace où est cherchée la solution, ce qui revient à formuler des hypothèses sur la forme de  $\underline{u}_{ex}$  ou sur  $\sigma_{ex}$ . Ceci n'est possible que pour quelques cas d'école. En pratique, nous avons donc recours à des méthodes d'approximation numérique. La plus employée de toute est la méthode des éléments finis (on pourra consulter [Zienkiewicz 00] pour des détails exhaustifs sur la méthode). Cela revient donc à chercher une approximation  $(\underline{u}_h, \sigma_h)$  de  $(\underline{u}_{ex}, \sigma_{ex})$  dans le sous-espace  $\mathcal{U}_h \times \mathcal{S}_h$  de  $\mathcal{U} \times \mathcal{S}$ . On peut alors reformuler le problème ainsi :

trouver un couple déplacement-contrainte  $(\underline{u}_h, \sigma_h)$  tel que :

- $\underline{u}_h$  vérifie les équations de liaison

$$\underline{u}_h \in \mathcal{U}_h \quad \underline{u}_h|_{\partial_1\Omega} = \underline{U}_d \quad (1.5)$$

- $\sigma_h$  vérifie les équations d'équilibre au sens éléments finis

$$\sigma_h \in \mathcal{S}_h \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{h,0}$$

$$\int_{\Omega} Tr[\sigma_h \varepsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* dS \quad (1.6)$$

- $(\underline{u}_h, \sigma_h)$  vérifie la relation de comportement :

$$\sigma_h = \mathbf{K}\varepsilon(\underline{u}_h) \quad \forall M \in \Omega \quad (1.7)$$

### 1.3 Défauts de la solution approchée

La solution  $(\underline{u}_h, \sigma_h)$  est donc une solution approchée, elle ne vérifie pas les équations du modèle continu. Le champ de déplacement  $\underline{u}_h$  vérifie toutefois les équations de liaison dans le cas statique linéaire élastique, sauf si l'on utilise une méthode de pénalisation pour imposer les déplacements. Le couple  $(\underline{u}_h, \sigma_h)$  vérifie la relation de comportement. Les principaux défauts concernent donc la contrainte éléments finis :

- le vecteur contrainte n'est pas continu à l'interface entre deux éléments :

$$\sigma_h|_{E_1} \cdot \underline{n}_{E_1} + \sigma_h|_{E_2} \cdot \underline{n}_{E_2} \neq \underline{0} \quad \text{sur } \Gamma_{E_1E_2} \quad (1.8)$$

- les conditions limites en effort ne sont pas vérifiées :

$$\sigma_h \cdot \underline{n} \neq \underline{F}_d \quad \text{sur } \partial_2\Omega \quad (1.9)$$

- l'équilibre local n'est pas respecté :

$$\underline{div}(\sigma_h) + \underline{f}_d \neq \underline{0} \quad \text{dans } \Omega \quad (1.10)$$

D'autres défauts dus à la méthode d'approximation peuvent être répertoriés :

- le maillage utilisé peut ne pas couvrir exactement la géométrie de la structure ;
- les conditions limites peuvent ne pas être représentées correctement par la base d'interpolation éléments finis choisie si celle-ci est trop pauvre ;
- des erreurs numériques interviennent également, elles sont dues à la précision machine ou aux techniques d'intégration.

Dans la suite de ce travail, nous considérerons ces erreurs additionnelles comme négligeables, comme c'est le cas dans la majorité des problèmes si les précautions suffisantes sont prises lors de la modélisation.

## 2 Estimation globale de l'erreur

### 2.1 Définition de l'erreur de discrétisation

On peut définir une mesure de l'erreur de discrétisation indépendamment de la manière dont elle est évaluée :

$$\underline{e}^u = \underline{u}_{ex} - \underline{u}_h \quad \forall M \in \Omega; \quad (1.11)$$

ou sur la contrainte :

$$\underline{e}^\sigma = \sigma_{ex} - \sigma_h \quad \forall M \in \Omega \quad (1.12)$$

On utilise couramment la norme globale énergétique car elle a un sens mécanique très fort et correspond aux normes standards de Sobolev :

$$\|\underline{e}^u\|_{\mathcal{K},\Omega} = \|\underline{u}_{ex} - \underline{u}_h\|_{\mathcal{K},\Omega} = \|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\mathcal{K}^{-1},\Omega}; \quad (1.13)$$

avec les produits scalaires :

$$\|\bullet\|_{\mathcal{K},\Omega}^2 = (\bullet, \bullet)_{\mathcal{K},\Omega} = \int_{\Omega} Tr[\varepsilon(\bullet)\mathcal{K}\varepsilon(\bullet)]d\Omega \quad (1.14)$$

$$\|\bullet\|_{\mathcal{K}^{-1},\Omega}^2 = (\bullet, \bullet)_{\mathcal{K}^{-1},\Omega} = \int_{\Omega} Tr[\bullet\mathcal{K}^{-1}\bullet]d\Omega \quad (1.15)$$

Cette erreur est l'erreur exacte sur le déplacement définie en tout point. On ne peut la calculer que si l'on connaît la solution exacte. En pratique, on ne saura déterminer qu'une estimation  $\underline{e}_h$  de  $\underline{e}$ .

On distingue deux types d'estimateurs globaux de l'erreur :

- les estimateurs *a priori* introduits dans [Azziz 72] et [Ciarlet 78], ils montrent que sous certaines conditions de régularité, il existe une constante  $C$  telle qu'asymptotiquement :

$$\|\underline{e}_h\| \leq Ch^q; \quad (1.16)$$

où  $h$  est la taille des éléments et  $q$  le degré d'interpolation des éléments finis égal à  $p$  si la solution est régulière. Cette formule est vérifiée dans le cas où on utilise la norme en énergie définie précédemment. Dans les cas d'une solution singulière, on prend  $q = \min(p, \alpha)$  où  $\alpha$  est l'ordre de la singularité. La constante  $C$  dépend du maillage et des données du problème, elle ne peut pas être calculée de manière explicite. Ces estimateurs *a priori* ne sont donc pas efficaces pour estimer de manière précise l'erreur commise lors d'un calcul éléments finis, en revanche ils sont utiles pour déterminer grossièrement l'ordre de convergence de la méthode. Ainsi pour une structure fissurée, la convergence est de l'ordre de  $h^{\frac{1}{2}}$ .

- les estimateurs *a posteriori* qui ne dépendent pas de la solution exacte du problème mais qui tirent profit de la solution éléments finis et de ses propriétés, ils sont exposés de manière détaillée dans [Ladevèze 04] et sont présentés dans la suite de ce chapitre.

## 2.2 La méthode des résidus d'équilibre

Cette méthode a été introduite dans [Babuška 78a] et repose sur le constat que la méthode des éléments finis en déplacement ne vérifie pas les équations d'équilibre. Ainsi, en injectant l'erreur  $\underline{e}^u = \underline{u}_{ex} - \underline{u}_h$  dans l'équation d'équilibre 1.2, on obtient ce que l'on appelle l'équation des résidus :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Tr[\mathcal{K}\varepsilon(\underline{e}^u)\varepsilon(\underline{u}^*)] d\Omega &= \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* dS \\ &- \int_{\Omega} Tr[\mathcal{K}\varepsilon(\underline{u}_h)\varepsilon(\underline{u}^*)] d\Omega \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Tr[\mathcal{K}\varepsilon(\underline{e}^u)\varepsilon(\underline{u}^*)] d\Omega &= \sum_E \int_E \underline{r}_E \cdot \underline{u}^* dE - \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} \underline{t}_{\Gamma} \cdot \underline{u}^* dS \\ &= \mathcal{R}(\underline{u}^*) \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

où  $E$  et  $\Gamma$  sont l'ensemble des éléments du maillage et leurs arrêtes.  $\mathcal{R}(\underline{u}^*)$  est la fonctionnelle des résidus. Les termes  $\underline{r}_E$  et  $\underline{t}_{\Gamma}$  sont définis par :

$$\begin{aligned} \underline{r}_E &= \underline{div}\sigma_h|_E + \underline{f}_d \\ \underline{t}_{\Gamma} &= \begin{cases} \sigma_h|_{E_1} \underline{n}_{E_1} + \sigma_h|_{E_2} \underline{n}_{E_2} & \text{si } \Gamma \text{ se trouve entre deux éléments } E_1 \text{ et } E_2 \\ \sigma_h|_E \underline{n}_E - \underline{F}_d & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Nous voyons que l'erreur  $\underline{e}^u$  est solution d'un problème global d'élasticité où les résidus sont les efforts imposés. Là encore, comme pour le problème à résoudre, il n'est pas possible de résoudre exactement ce problème, nous ne calculerons donc qu'une approximation  $\underline{e}_h$  de  $\underline{e}^u$ . On peut remarquer tout d'abord que :

$$\mathcal{R}(\underline{u}^*) = 0 \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{h,0} \quad (1.19)$$

ce qui est une traduction de la propriété d'orthogonalité de Galerkin très couramment employée dans le calcul d'erreur. On peut donc calculer une norme de l'erreur sous la forme :

$$\|\underline{e}^u\|^2 = (\underline{e}^u, \underline{e}^u)_{\mathcal{K},\Omega} = \sum_E \int_E \underline{r}_E \cdot \underline{e}^u dE - \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} \underline{t}_{\Gamma} \cdot \underline{e}^u d\Gamma \quad (1.20)$$

Les estimateurs en résidus exploitent tous cette équation, on peut cependant discerner deux sous-familles : les estimateurs explicites et les estimateurs implicites.

### 2.2.1 Les méthodes explicites

Les estimateurs explicites ont été les premiers élaborés dans [Babuška 78a], ils exploitent directement les équations 1.18 et 1.20 et permettent de construire une estimation globale sous la forme :

$$\|\underline{e}^u\|_{\mathcal{K},\Omega} \leq C \left[ \sum_E h_E^2 \|\underline{r}_E\|_E^2 + \sum_\Gamma l_\Gamma \|\underline{t}_\Gamma\|_\Gamma^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.21)$$

$h_E$  est une mesure de l'élément et  $l_\Gamma$  une mesure du bord de l'élément.  $C$  est une constante qui peut être évaluée de manière analytique ou numérique par la résolution de problèmes annexes. En pratique, elle est difficile à évaluer et est souvent choisie à priori. Ceci constitue un point critique de la méthode et justifie les améliorations apportées par les estimateurs implicites. Une revue détaillée des estimateurs explicites peut être trouvée dans [Verfürth 96]

### 2.2.2 Les méthodes implicites

Ces méthodes exploitent également l'équation des résidus 1.20 mais l'évaluation de  $\underline{e}^u$  est menée localement par la résolution de problèmes sur chaque élément ou sur des patches d'éléments. Les méthodes implicites sont plus coûteuses d'un point de vue numérique que les méthodes explicites mais elles fournissent de meilleurs résultats.

**2.2.2.1 Approche par éléments** Cette approche consiste à calculer une contribution par élément de l'erreur en cherchant le champ  $\underline{v}_E$  nul sur  $\partial_1 E = \partial_1 \Omega \cap \partial E$  tel que :

$$\int_E Tr [\mathcal{K}\varepsilon(\underline{v}_E)\varepsilon(\underline{u}^*)] dE = \int_E \underline{r}_E \cdot \underline{u}^* dE + \int_{\partial E - \partial_1 E} \underline{R} \cdot \underline{u}^* d\Gamma \quad \forall \underline{u}^* \text{ nul sur } \partial_1 E$$

où  $\underline{R}$  est une densité d'effort appliquée sur le contour de l'élément.  $\underline{v}_E$  est donc une estimation de l'erreur  $\underline{e}^u$ . La contribution à l'erreur pour chaque élément s'écrit alors :

$$\theta_E^2 = \int_E Tr [\mathcal{K}\varepsilon(\underline{v}_E)\varepsilon(\underline{v}_E)] dE$$

d'où l'estimation d'erreur globale :

$$\theta^2 = \sum_E \theta_E^2 = \sum_E \int_E Tr[\mathcal{K}\varepsilon(\underline{v}_E)\varepsilon(\underline{v}_E)] dE$$

Le point sensible de la méthode concerne le choix des densités d'effort  $\underline{R}$ , celles-ci doivent respecter l'équilibre sur chaque élément afin d'assurer l'existence d'une solution. Il existe trois manières de résoudre ce problème.

Une première solution consiste à chercher  $\underline{v}_E$  dans un sous-espace régularisant tel que l'espace de type éléments finis de degré  $p+1$  ( $p$  étant le degré des fonctions de base utilisée pour le problème à résoudre) privé des mouvements de solide rigide (voir [Ainsworth 97]). Une fois le problème régularisé on peut faire un choix quelconque pour les densités  $\underline{R}$ . Le plus souvent, on choisit :

$$\underline{R} = \begin{cases} -\underline{t}_\Gamma & \text{si } \Gamma \in \partial_2 E = \partial E \cap \partial_2 \Omega \\ -\frac{1}{2}\underline{t}_\Gamma & \text{sinon} \end{cases}$$

Une autre manière de procéder est de rechercher des densités  $\underline{R}$  qui vérifient l'équilibre. On détermine alors sur chaque arête :

$$\underline{R} = \eta_E \underline{A}_\Gamma - \frac{1}{2}\underline{t}_\Gamma \quad (\eta_E = \pm 1)$$

où le champs  $\underline{A}_\Gamma$  défini sur chaque arête  $\Gamma$  est à déterminer. Le champs  $\underline{v}_E$  est alors déterminé par un calcul éléments finis sur un élément de degré élevé. Cette méthode est détaillée dans [Ainsworth 93, Babuška 94].

La troisième méthode consiste à résoudre les problèmes locaux par éléments en appliquant des conditions limites de type Dirichlet.

Les deux premières méthodes fournissent un majorant de l'erreur globale  $\|\underline{e}^u\|_{\mathcal{K},\Omega}$ . La troisième n'est garantie que si l'on emploie les corrections développées par [Huerta 00].

**2.2.2.2 Approche par patchs d'éléments** L'idée est d'estimer l'erreur par une somme de contributions de patchs d'éléments. Chaque patch d'éléments est défini par l'ensemble des éléments ayant pour nœud commun un nœud  $i$ . Cette méthode plus ancienne est développée dans [Babuška 78b, Babuška 87]. Les problèmes locaux sont résolus en introduisant les résidus pour chargement et en bloquant les déplacements sur le bord du patch. On cherche donc ici une estimation locale  $\underline{v}_i$  nulle sur  $\partial_0 \Omega_i$  (partie de  $\partial \Omega_i$  privée  $\partial_2 \Omega$ ) de  $\underline{e}^u$  telle que :

$$\int_{\Omega_i} Tr[\mathcal{K}\varepsilon(\underline{v}_i)\varepsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = \sum_{E \subset \Omega_i} \int_E \underline{r}_E \cdot \underline{u}^* dE - \sum_{\Gamma \subset \Omega_i} \int_\Gamma \underline{t}_\Gamma \cdot \underline{u}^* d\Gamma$$

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne majore pas l'erreur exacte  $\|\underline{e}^u\|_{\mathcal{K},\Omega}$ . Différents auteurs ont proposés des modifications permettant d'obtenir un majorant de l'erreur utilisant des conditions de Neumann ([Strouboulis 92a]) ou la partition de l'unité ([Carstensen 00, Morin 01, Prudhomme 04, Pares 06]).

### 2.3 Les techniques de lissage

Cette technique a été proposée dans [Zienkiewicz 87]. Elle part du constat que le principal défaut de la solution éléments finis en déplacement est de présenter des champs de contraintes peu réguliers. Le vecteur contrainte est notamment discontinu à l'interface entre deux éléments. L'idée directrice de la méthode consiste à évaluer l'écart entre le champ éléments finis  $\sigma_h$  et un champ plus régulier  $\sigma^*$  :

$$\|\underline{e}_h\| = \|\sigma_h - \sigma^*\|_{\mathcal{K}^{-1},\Omega}$$

Si  $\sigma^*$  est de meilleure qualité que  $\sigma_h$  on a :

$$\|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\mathcal{K}^{-1},\Omega} \leq C \|\sigma_h - \sigma^*\|_{\mathcal{K}^{-1},\Omega} \quad \text{avec } C \leq 1$$

En pratique, il est impossible de connaître précisément la valeur de C, elle dépend de la qualité du champs lissé  $\sigma^*$  auquel un soin particulier doit donc être apporté. La première version de l'estimateur proposée dans [Zienkiewicz 87], appelée version ZZ1 consistait à rechercher une projection de  $\sigma^*$  sur les fonctions de formes utilisées pour le calcul éléments finis. On cherche alors  $\sigma^*$  comme une combinaison linéaire des  $\phi_i$  :

$$\sigma^* = \sum_i \sigma_i^* \phi_i$$

où les  $\sigma_i^*$  sont des opérateurs symétriques constants. Deux méthodes pour calculer les  $\sigma_i^*$  ont émergés :

- la première consiste à rechercher une projection globale de  $\sigma_i^*$  en minimisant l'écart au sens des moindres carrés entre le champs lissé et le champ éléments finis :

$$\min_{\sigma^*} \|\sigma^* - \sigma_h\|_{\mathcal{K}^{-1},\Omega}^2$$

Cette technique conduit à un système global très coûteux à résoudre.

- La seconde technique consiste à calculer une moyenne locale en chaque nœud  $i$  du maillage pondérée par la valeur de  $\sigma_h$  pour les éléments voisins du nœud  $i$ .

La méthode ZZ1 présente en outre l'inconvénient de très largement sous-estimer l'erreur exacte dans certains cas comme le montrent [Strouboulis 92a].

Dans la méthode ZZ2 [Zienkiewicz 92], une amélioration notable est apportée à l'estimateur et notamment au calcul des  $\sigma_i^*$ . Cette méthode est couramment appelée Super Convergent Patch Recovery (SPR). On cherche à présent à projeter le champ  $\sigma^*$  sur une base polynomiale donnée, et sur une décomposition du domaine  $\Omega$  en patches d'éléments  $\Omega_j$ . Sur chaque patch  $\Omega_j$ , on calcule un champ  $\tilde{\sigma}_j$  par une méthode de type moindres carrés :

$$\min_{\tilde{\sigma}_j} \sum_P \|\tilde{\sigma}_j(P) - \sigma_h(P)\|_{\mathcal{K}^{-1},\Omega}^2$$

Les points  $P$  sont des points d'échantillonnage choisis de telle sorte à coïncider avec les points de superconvergence du maillage lorsqu'ils sont connus. Pour un maillage 1D, il s'agit des points de Gauss.  $\sigma^*$  est ensuite obtenu en moyennant les contributions de chaque patch en extrapolant  $\tilde{\sigma}_j$  aux nœuds du maillage.

## 2.4 Le concept d'erreur en relation de comportement

Le principe de la méthode a été introduit dans [Ladevèze 75]. Elle a ensuite été développée au LMT pour les problèmes d'élasticité linéaire 2D et la thermique [Ladevèze 91],[Ladevèze 95] puis pour les problèmes 3D [Coorevits 97]. Cette estimateur présente l'avantage de fournir des bornes garanties (c'est-à-dire un majorant de l'erreur exacte) de l'erreur globale. L'idée de base est de déterminer à partir du couple éléments finis  $(\sigma_h, \underline{u}_h)$  un nouveau couple  $(\hat{\sigma}, \hat{\underline{u}})$  tel que  $\hat{\sigma}$  est SA et  $\hat{\underline{u}}$  est CA. On mesure ensuite l'erreur à travers la relation de comportement qui n'est plus vérifiée par le nouveau couple.

### 2.4.1 Définition et propriétés

Afin de définir l'erreur en relation de comportement en gardant un sens mécanique fort, nous faisons intervenir la formulation par les potentiels thermodynamiques. On introduit ainsi les potentiels duaux  $\phi(\varepsilon(\underline{u}))$  et  $\phi^*(\sigma)$ , avec :

$$\begin{aligned} \phi(\bullet) &= \frac{1}{2} Tr[\mathcal{K} \bullet \bullet] \\ \phi^*(\bullet) &= \frac{1}{2} Tr[\mathcal{K}^{-1} \bullet \bullet] \end{aligned}$$

On peut alors mesurer l'écart sur la relation de comportement entre  $\hat{\sigma}$  et  $\hat{\underline{u}}$  :

$$e_{RDC}^2 = \int_{\Omega} \left[ \phi(\varepsilon(\hat{\underline{u}})) + \phi^*(\hat{\sigma}) - Tr[\varepsilon(\hat{\underline{u}})\hat{\sigma}] \right] d\Omega \quad (1.22)$$

D'où l'expression de l'erreur en relation de comportement :

$$e_{RDC}^2 = \frac{1}{2} \|\hat{\sigma} - \mathcal{K}\varepsilon(\hat{\underline{u}})\|_{\mathcal{K}^{-1},\Omega}^2 \quad (1.23)$$

On utilise souvent l'erreur globale relative pour obtenir une bonne information sur l'erreur globale commise :

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\|\hat{\sigma} - \mathcal{K}\varepsilon(\hat{\underline{u}})\|_{\mathcal{K}^{-1},\Omega}^2}{\frac{1}{2}\|\hat{\sigma} + \mathcal{K}\varepsilon(\hat{\underline{u}})\|_{\mathcal{K}^{-1},\Omega}^2}} \quad (1.24)$$

On peut mettre en évidence deux propriétés importantes liées à l'erreur en relation de comportement. La première est le lien entre l'erreur et la solution exacte du problème :

$$e_{RDC} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\hat{\sigma}, \hat{\underline{u}}) = (\sigma_{ex}, \underline{u}_{ex}) \quad (1.25)$$

Cette relation est due au fait que les champs reconstruits sont admissibles, ils appartiennent donc aux bons espaces mathématiques, ce qui n'est pas forcément le cas pour les autres types d'estimateurs.

Une autre relation très importante est liée au théorème de Prager-Synge [Prager 47], elle assure un lien direct entre l'erreur en relation de comportement et l'erreur exacte :

$$\|\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}\|_{\mathcal{K},\Omega}^2 + \|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}\|_{\mathcal{K}^{-1},\Omega}^2 = 2.e_{RDC}^2 \quad (1.26)$$

Cette relation garantit que l'erreur en relation de comportement donne une borne supérieure de l'erreur. On peut également se servir de cette relation pour établir une nouvelle approximation de  $\sigma_{ex}$  en prenant la moyenne :

$$\sigma^* = \frac{1}{2}(\sigma_h + \hat{\sigma})$$

On obtient alors directement l'erreur :

$$\|\sigma_{ex} - \sigma^*\|_{\mathcal{K}^{-1},\Omega} = \frac{1}{2}e_{RDC} \quad (1.27)$$

## 2.4.2 Construction des champs admissibles

Comme nous l'avons vu, les propriétés importantes de l'erreur en relation de comportement découlent de l'admissibilité des champs reconstruits. La qualité de ces champs conditionne également la qualité de l'estimateur obtenu, un soin particulier doit être apporté à la construction des champs admissibles. La méthode des éléments finis en déplacement nous fournit en général un champs de déplacement approché  $\underline{u}_h$  CA, sauf pour quelques cas particuliers tels que les problèmes d'incompressibilité par exemple. On peut donc prendre directement :

$$\hat{\underline{u}} = \underline{u}_h \quad (1.28)$$

Toute la technique repose donc sur le choix de  $\hat{\sigma}$  qui sera reconstruit de façon simple à partir de la solution éléments finis d'après la méthode établie dans [Ladevèze 75] et [Ladevèze 83]. L'idée est de conserver un lien fort avec la solution  $\sigma_h$  en garantissant un lien énergétique via ce que l'on appelle la condition de prolongement, écrit pour chaque élément  $E$  et pour chaque nœud  $i$  :

$$\int_E (\hat{\sigma} - \sigma_h) \cdot \underline{\text{grad}}(\varphi_i) dE = \underline{0} \quad (1.29)$$

où les  $\varphi_i$  sont les fonctions de base de l'élément. On peut alors à partir de cette condition rechercher des densités d'effort  $\hat{\underline{F}}$  équilibrées avec le chargement sur chaque élément :

$$\int_{\partial E} \eta_E \hat{\underline{F}} \varphi_i d\Gamma = \int_E \sigma_h \cdot \underline{\text{grad}}(\varphi_i) dE - \int_{\Omega} \underline{f}_d \varphi_i dE \quad (1.30)$$

On suppose que les densités se décomposent uniquement sur les fonctions de base  $\varphi_i$ . On résout alors un système qui garantit à l'interface  $\Gamma_{12}$  entre deux éléments  $E_1$  et  $E_2$  :

$$\eta_{E_1} \hat{\underline{F}} + \eta_{E_2} \hat{\underline{F}} = \underline{0} \quad (1.31)$$

garantissant ainsi la continuité du vecteur contrainte  $\hat{\sigma} \cdot \underline{n}$  à l'interface entre les éléments.

Dans un deuxième temps, on calcule la contrainte admissible  $\hat{\sigma}$  solution des équations d'équilibre sur chaque élément :

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}} \hat{\sigma} + \underline{f}_d &= \underline{0} \quad \text{dans } E \\ \hat{\sigma}|_E \cdot \underline{n} &= \eta_E \hat{\underline{F}} \quad \text{sur } \partial E \end{aligned} \quad (1.32)$$

Dans la première version établie dans [Rougeot 89] et [Ladevèze 96], le champ  $\hat{\sigma}$  était recherché de manière analytique sous forme polynomiale, le degré nécessaire à la base polynomiale étant en pratique imposé par  $\underline{f}_d$ . Il existe une infinité de solutions au système 1.32, cependant, il est nécessaire d'imposer une condition pour assurer les conditions de compatibilité qui ne sont pas vérifiées par les densités. La technique retenue consiste à sous-découper les éléments en sous-éléments et à rechercher  $\hat{\sigma}$  polynomial sur chacun des sous-éléments en imposant la symétrie de l'opérateur  $\hat{\sigma}|_E$ . Le détail de cette construction est exposé dans [Rougeot 89]. Cette technique peut trouver ses limites dans le cas de zones à fort gradients dus à des singularités géométriques ou pour des éléments aplatis. Des modifications ont donc été apportées à la fois à la construction des densités et de la contrainte admissible. De récents travaux présentés dans [Ladevèze 08b] proposent une nouvelle technique hybride pour le calcul du champ de contraintes admissibles. Cette nouvelle construction exploite toujours la condition de prolongement combinée au calcul de

densités d'effort en équilibre sur des patchs d'éléments en utilisant la partition de l'unité. Cette méthode diminue le coût de calcul et s'avère plus simple à implémenter que la précédente.

### 2.4.3 Construction optimisée des champs admissibles

La première amélioration concernant les densités d'efforts a été introduite dans [Ladevèze 97]. Le principe est de se donner plus de liberté dans le choix des densités  $\hat{\underline{F}}$ . A cet effet, on affaiblit la condition de prolongement 1.29 en ne la faisant plus porter que sur les fonctions de formes associées aux nœuds non sommets. On scinde alors les densités en deux parties linéairement indépendantes :

$$\hat{\underline{F}}^{opt} = \hat{\underline{R}} + \hat{\underline{H}} \quad (1.33)$$

où :

- $\hat{\underline{H}}$  est la partie de  $\hat{\underline{F}}^{opt}$  correspondant aux fonctions de forme des nœuds non sommets. Elle est totalement déterminée par la condition de prolongement affaiblie.
- $\hat{\underline{R}}$  est la partie de  $\hat{\underline{F}}^{opt}$  correspondant aux fonctions de forme des nœuds sommets. Cette partie est déterminée de sorte à minimiser l'énergie complémentaire tout en respectant l'équilibre. Cela revient à minimiser l'erreur en relation de comportement.

Cette méthode peut rapidement devenir coûteuse car la détermination des densités conduit à la résolution d'un nouveau système. Cependant, la minimisation peut être menée uniquement sur un patch d'éléments, là où cela est nécessaire (c'est-à-dire dans les zones peu régulières). Le détail de la méthode pour les maillages 2D et 3D est donnée dans [Florentin 02].

La deuxième modification concerne le calcul de la contrainte admissible. La manière retenue pour optimiser le calcul de  $\hat{\sigma}_{|E}$  consiste à calculer le champs qui minimise l'énergie complémentaire et donc, par dualité, qui minimise l'énergie potentielle :

$$\min_{\hat{\sigma}_{|E} \in \mathcal{S}_{\hat{\underline{F}}^{opt}}} J_2^E(\hat{\sigma}) \leftrightarrow \min_{\underline{u}_E \in \mathcal{U}} J_1^E(\underline{u}_{|E}) \quad (1.34)$$

Ce problème ne peut pas être résolu de manière exacte, nous avons donc recours à une méthode éléments finis sur le simple élément E de degré  $p+k$  (c'est-à-dire une méthode dont le degré des fonctions de forme est élevé de  $k$  par rapport au degré  $p$  utilisé pour le calcul primal) comme proposé dans [Babuška 94]. Il est montré dans ce même article que d'excellents résultats sont obtenus pour  $k \geq 3$ . Ainsi, bien que  $\hat{\sigma}_{|E}$  soit obtenu par une méthode numérique, l'erreur commise est négligeable : le champ calculé ne vérifie plus rigoureusement l'équilibre mais les normes énergétiques du champ exact et du champ approché sont semblables.

Les études menées dans [Florentin 02] et [Ladevèze 04] montrent que ces modifications apportent une très nette amélioration de l'estimateur d'erreur pour les problèmes avec des zones peu régulières. L'optimisation des densités peut être menée à faible coût si elle est employée uniquement dans la zone utile. Quant à la reconstruction numérique locale par élément du champ de contrainte SA, elle présente l'avantage d'être facilement implantée dans un code et fournit de bien meilleurs résultats que la version analytique en régularisant le problème.

## 2.5 Qualité des estimateurs d'erreur

Les trois méthodes exposées dans ce chapitre pour estimer l'erreur globale d'un calcul éléments finis diffèrent non seulement par les techniques employées mais également par les résultats qu'elles fournissent. Afin de pouvoir évaluer la qualité d'un estimateur et de pouvoir comparer les différents estimateurs entre eux, il est donc nécessaire d'établir des critères objectifs. Un critère couramment employé est l'indice d'efficacité (également appelé indice d'effectivité, de l'anglais *effectivity index*). Il se définit ainsi :

$$\gamma = \frac{\text{mesure estimée de l'erreur}}{\text{erreur exacte}} \quad (1.35)$$

Ce critère permet de mettre en évidence deux propriétés importantes de l'estimateur :

- plus l'indice d'efficacité est proche de 1 et plus la mesure d'erreur est pertinente,
- l'indice d'efficacité doit être supérieur à 1 sinon cela signifie que la mesure d'erreur sous-estime l'erreur exacte.

Pour calculer l'indice d'efficacité, il est nécessaire de connaître l'erreur exacte et donc la solution exacte. En pratique, on le calcule pour des problèmes dont la solution est connue, ce qui permet de valider l'estimateur sur des cas tests. Une autre technique consiste à calculer la solution sur un maillage très fin. La pertinence de cette technique dépend de la qualité du maillage fin et des précautions prises pour transférer la solution d'un maillage à l'autre.

D'autres critères importants existent :

- la stabilité de l'estimateur, et donc sa sensibilité aux paramètres tels que le maillage, le type de problème à résoudre ;
- la convergence asymptotique de l'estimateur : en théorie, l'estimateur d'erreur devrait être consistant avec la méthode éléments finis utilisée et converger vers 0 lorsque l'on raffine le maillage ;
- le coût de l'estimateur doit rester raisonnablement inférieur au coût de calcul de la méthode éléments finis.

Plusieurs travaux visant à mettre en évidence certaines propriétés des différents estimateurs ont été publiés : [Strouboulis 92a], [Strouboulis 92b], [Babuška 94], [Ladevèze 97]. Il en ressort plusieurs points intéressants ;

- La qualité des différents estimateurs dépend des paramètres de calcul tels que le maillage, l'anisotropie ou le type de problème,
- la convergence asymptotique des estimateurs n'est pas garantie, elle n'arrive que pour certains maillages uniformes,
- les estimateurs de type « SPR » ont des indices d'efficacité globaux très proche de 1 mais ils peuvent localement largement sous-estimer l'erreur, ce qui en fait de bons indicateurs globaux mais les discrimine totalement pour une estimation locale de l'erreur,
- les estimateurs utilisant l'erreur en relation de comportement et certaines techniques associées aux estimateurs en résidus d'équilibre fournissent une majoration garantie de l'erreur exacte ; par ailleurs ces deux familles d'estimateur se rejoignent sur le fond en utilisant des reconstructions de champs équilibrés et des problèmes locaux numériques semblables.

### 3 Estimation locale de l'erreur

L'estimation globale de l'erreur fournit une information intéressante sur la qualité d'une solution éléments finis mais demeure insuffisante. En effet, un calcul éléments finis peut mener à une erreur globale correcte tout en fournissant localement une solution très éloignée de la solution exacte. Par ailleurs, les critères de dimensionnement utilisés en bureau d'étude font intervenir des quantités d'intérêts locales dont il apparaît nécessaire d'évaluer la qualité si l'on veut justifier l'utilité des estimateurs d'erreur. Nous exposons ici les différentes techniques qui permettent d'évaluer l'erreur locale.

#### 3.1 Estimateurs d'erreur des pollution

##### 3.1.1 Définition de l'erreur de pollution

La notion d'erreur locale et la compréhension des enjeux qui en découlent sont véritablement apparus avec le concept d'erreur en pollution introduit dans [Babuška 95]. Le principe est d'évaluer l'erreur locale sur une zone en la séparant en deux sources d'erreur : la première est relative aux éléments inclus et proches de cette zone, la seconde concerne le reste de la structure et a une influence sur la zone étudiée, c'est l'erreur de pollution. Soit  $e^u$  l'erreur globale définie sur l'ensemble de la structure  $\Omega$ , on s'intéresse alors à une zone locale  $\omega$  de  $\Omega$  et à la restriction de l'erreur  $e^u|_{\omega}$ . Cette erreur dépend donc de la discrétisation de la zone  $\omega$  elle-même mais aussi de la discrétisation hors de

cette zone. Il est donc possible de scinder  $\underline{e}_{|\omega}^u$  en une partie locale  $\underline{e}_{|\omega}^{u,loc}$  et une partie dite de pollution  $\underline{e}_{|\omega}^{u,pol}$ . On constate numériquement que les différentes parties se décomposent de la manière suivante :

$$(\underline{e}_{|\omega}^u)^2 = (\underline{e}_{|\omega}^{u,loc})^2 + (\underline{e}_{|\omega}^{u,pol})^2 \quad (1.36)$$

et nous pouvons définir ces deux parties par passage à la limite : si  $h$  caractérise la taille de maille des éléments dans la zone  $\omega$  :

$$\underline{e}_{|\omega}^{u,pol} = \lim_{h \rightarrow 0} \underline{e}_{|\omega}^u \quad (1.37)$$

Si  $h$  caractérise la taille de maille des éléments dans la zone  $\Omega - \omega$  :

$$\underline{e}_{|\omega}^{u,loc} = \lim_{h \rightarrow 0} \underline{e}_{|\omega}^u \quad (1.38)$$

La figure 1.2 montre un exemple de définition d'une zone locale sur un maillage. On peut alors obtenir de manière asymptotique les contributions de l'erreur locale et de l'erreur de pollution en raffinant les deux parties du maillage.

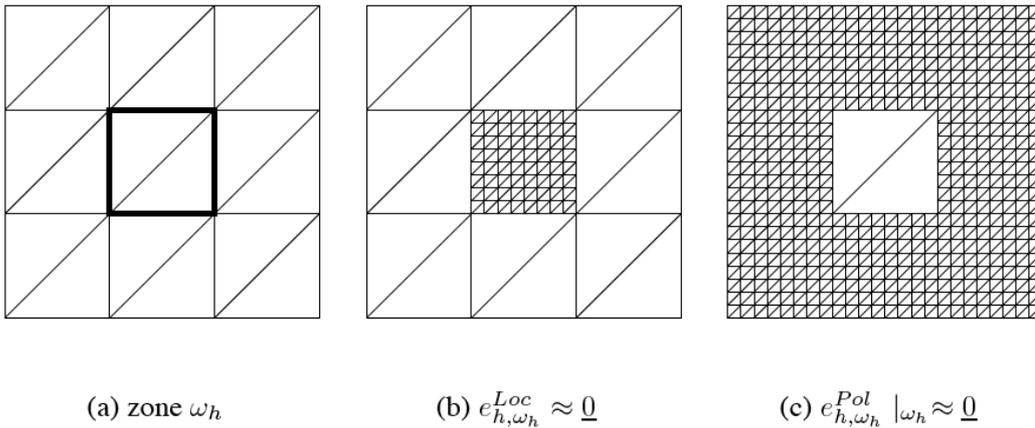


Figure 1.2: Contributions locale et de pollution à l'erreur globale.

### 3.1.2 Mesure de l'erreur de pollution

En reprenant l'exemple de la figure 1.2 on peut également redéfinir l'erreur locale à partir de l'équation des résidus d'équilibre : en considérant un patch d'éléments  $\omega_h$  couvrant la région d'intérêt  $\omega$ , on peut séparer l'erreur en deux composantes :

$$\underline{e}^u = \underline{v}_1^{\tilde{\omega}^h} + \underline{v}_2^{\tilde{\omega}^h}$$

où  $\tilde{\omega}^h$  correspond à  $\omega_h$  plus quelques couches d'éléments (en pratique, les résultats restent inchangés après deux couches d'éléments).

$\underline{v}_1^{\tilde{\omega}^h}$  et  $\underline{v}_2^{\tilde{\omega}^h}$  sont solutions de :

$$\int_{\Omega} Tr[\mathcal{K}\varepsilon(\underline{v}_1^{\tilde{\omega}^h})\varepsilon(\underline{u}^*)]d\Omega = \sum_{E \in \tilde{\omega}^h} \mathcal{R}_E^{eq}(\underline{u}^*) \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0$$

$$\int_{\Omega} Tr[\mathcal{K}\varepsilon(\underline{v}_2^{\tilde{\omega}^h})\varepsilon(\underline{u}^*)]d\Omega = \sum_{E \notin \tilde{\omega}^h} \mathcal{R}_E^{eq}(\underline{u}^*) \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0$$

où les termes  $\mathcal{R}_E^{eq}$  sont les résidus définis sur chaque élément  $E$  et obtenus après équilibrage. La restriction  $\underline{v}_1^{\tilde{\omega}^h}|_{\omega^h}$  représente l'erreur locale sur  $\omega^h$ . Elle est équivalente à l'erreur éléments finis dans  $\tilde{\omega}^h$  lorsqu'on a des conditions limites de Dirichlet égales à la solution exacte  $\underline{u}_{ex}$  sur  $\partial\tilde{\omega}^h$ .

La restriction  $\underline{v}_2^{\tilde{\omega}^h}|_{\omega^h}$  représente l'erreur en pollution sur  $\omega^h$ . Elle est égale à la solution exacte sur  $\tilde{\omega}^h$  du problème de référence avec des conditions limites de Dirichlet sur  $\partial\tilde{\omega}^h$  égales à l'erreur exacte  $\underline{e}^u$ .

Ces deux équations ne pouvant pas être résolues de manière exacte, une première technique consiste à les résoudre de manière approchée par une méthode éléments finis. Une autre approche proposée dans [Babuška 97] permet d'évaluer  $\underline{v}_2^{\tilde{\omega}^h}|_{\omega^h}$  en utilisant des fonctions de Green. En effet, les fonctions de Green décrivent les interactions entre les différentes parties du domaine  $\Omega$ . Par conséquent, la partie pollution qui affecte une zone  $\omega^h$  peut être évaluée en approchant une fonction de Green.

L'erreur de pollution fournit une information très riche sur la qualité du calcul et il est important de la prendre en compte lors d'une analyse éléments finis. Il apparaît clairement qu'il ne suffit pas de mailler correctement la zone d'intérêt pour avoir une bonne qualité locale.

### 3.2 Estimateurs utilisant une technique d'extraction

Cette technique est de loin la plus employée pour obtenir des bornes pour les quantités d'intérêts. Elle est particulièrement bien adaptée pour les problèmes linéaires. Elle est apparue à peu près en même temps dans différentes équipes de recherche : [Rannacher 97, Rannacher 98, Peraire 98, Prudhomme 99, Ladevèze 99a, Stein 01]. Le principe est que la quantité d'intérêt  $I$  que l'on cherche à évaluer est une fonctionnelle linéaire du déplacement, le calcul éléments finis puis la technique d'extraction nous permettent d'obtenir la valeur approchée  $I_h$ . En exploitant la propriété de linéarité, il est alors aisé d'estimer

$|I_{ex} - I_h|$ . En effet, on peut relier l'erreur sur  $I$  à l'erreur globale  $\underline{e}^u$  :

$$I(\underline{u}_{ex}) - I(\underline{u}_h) = I(\underline{e}^u) \quad (1.39)$$

### 3.2.1 Fonction d'extraction

L'idée est d'utiliser un opérateur d'extraction qui permet d'évaluer de façon globale la quantité locale  $I$ . De façon générale, l'opérateur peut se mettre sous la forme :

$$I = \int_{\Omega} Tr[\Sigma_{\sigma}\varepsilon(\underline{u})]d\Omega \quad \text{ou} \quad I = \int_{\Omega} Tr[\Sigma_{\varepsilon}\sigma]d\Omega \quad (1.40)$$

On peut alors définir l'erreur sur la quantité  $I$  :

$$I(\underline{e}^u) = \int_{\Omega} Tr[\Sigma_{\sigma}\varepsilon(\underline{e}^u)]d\Omega \quad (1.41)$$

On donne à titre d'exemple des fonctions d'extraction simples permettant d'obtenir une information sur la contrainte ou le déplacement. En général, on cherche à exprimer une valeur moyenne de la quantité locale, plus simple à mettre en œuvre que la valeur ponctuelle, incompatible avec la théorie du premier gradient. Cependant, les récents travaux de [Chamoin 07a] montrent que l'on peut estimer la valeur ponctuelle d'une quantité en utilisant les fonctions de Green appropriées. Ainsi pour la contrainte, on cherche à évaluer la moyenne de la composante  $ij$  sur l'élément  $E$  :

$$I^{ij} = \frac{1}{mes(E)} \int_E \sigma^{ij} dE \quad (1.42)$$

On peut lui associer la valeur exacte  $I_{ex}^{ij}$  et la valeur estimée par éléments finis  $I_h^{ij}$ . Dans le cas 2D on peut utiliser les trois extracteurs :

$$\Sigma_{\varepsilon}^1 = \frac{1}{|E|} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{|E|} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Sigma_{\varepsilon}^3 = \frac{1}{|E|} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

Pour estimer la composante  $i$  du déplacement moyen sur l'élément  $E$  :

$$I^i = \frac{1}{mes(E)} \int_E u^i dE \quad (1.44)$$

On peut alors utiliser les deux fonctions d'extraction ;

$$\underline{w}_1 = \frac{1}{|E|} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{w}_2 = \frac{1}{|E|} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

Notons qu'ici la fonction d'extraction se met sous la forme :

$$I = \int_{\Omega} \tilde{f}_{\Sigma} \cdot \underline{u} d\Omega \quad (1.46)$$

Pour d'autres quantités linéaires, les fonctions d'extraction peuvent toutefois être plus difficiles à obtenir, c'est le cas par exemple des facteurs d'intensité des contraintes auxquels nous nous intéressons dans cette thèse. Le détail des techniques d'extraction pour ces quantités est détaillé dans les chapitres suivants. Un problème encore ouvert est le cas des quantités d'intérêts non linéaires telles que le taux de restitution d'énergie par exemple. Le problème est alors que l'on ne peut plus exprimer simplement l'erreur commise sur  $I$  en fonction de l'erreur sur le problème global :

$$I(\underline{u}_{ex}) - I(\underline{u}_h) \neq I(\underline{e}^u) \quad (1.47)$$

La technique la plus couramment répandue consiste alors à linéariser la quantité  $I$  autour de  $\underline{u}_h$  en utilisant l'opérateur tangent. :

$$I(\underline{u}_{ex}) - I(\underline{u}_h) \simeq I_{T|\underline{u}_h}(\underline{e}^u) \quad (1.48)$$

L'inconvénient majeur est que l'on perd l'aspect garanti de l'erreur ainsi obtenue.

### 3.2.2 Définition du problème adjoint

Il n'est pas possible de connaître exactement  $\underline{e}^u$  et donc d'estimer directement  $I(\underline{e}^u)$ , nous avons donc recours à ce que nous appelons un problème adjoint. Ce problème adjoint est entièrement défini par le problème de référence résolu pour extraire  $I$  et par l'opérateur d'extraction utilisé pour  $I$ . Dans le cas de l'élasticité linéaire, il consiste à trouver un couple solution  $(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\sigma})$ , si l'on met l'opérateur d'extraction sous la forme générale :

$$I = \int_{\Omega} Tr[\Sigma_{\sigma}\varepsilon(\underline{u})]d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{f}_{\Sigma} \cdot \underline{u} d\Omega \quad (1.49)$$

–  $\tilde{\underline{u}}$  est cinématiquement admissible à 0 (CA<sub>0</sub>)

$$\tilde{\underline{u}} \in \mathcal{U}_0 \quad \tilde{\underline{u}}|_{\partial_1\Omega} = \underline{0} \quad (1.50)$$

–  $\tilde{\sigma}$  est statiquement admissible (SA) :

$$\tilde{\sigma} \in \mathcal{S} \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0$$

$$\int_{\Omega} Tr[\tilde{\sigma}\varepsilon(\underline{u}^*)]d\Omega = \int_{\Omega} Tr[\Sigma_{\sigma}\varepsilon(\underline{u}^*)]d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{f}_{\Sigma} \cdot \underline{u}^* d\Omega \quad (1.51)$$

–  $(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\sigma})$  vérifie la relation de comportement :

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{K}\varepsilon(\tilde{\underline{u}}) \quad \forall M \in \Omega \quad (1.52)$$

Le problème adjoint permet d'établir la relation :

$$I(\underline{e}^u) = \int_{\Omega} Tr[\mathcal{K}\varepsilon(\tilde{\underline{u}})\varepsilon(\underline{e}^u)]d\Omega \quad (1.53)$$

Ce problème est résolu par une méthode éléments finis, il est possible d'utiliser le même maillage que pour le problème primal à résoudre dont il ne diffère que par les conditions limites en déplacement, imposées à 0, et le chargement défini par l'extracteur.

### 3.2.3 Erreur sur la quantité d'intérêt

La résolution du problème adjoint conduit à la solution approchée  $(\tilde{\underline{u}}_h, \tilde{\sigma}_h)$ . La propriété d'orthogonalité de Galerkin permet d'écrire :

$$I(\underline{e}^u) = \int_{\Omega} Tr[\mathcal{K}\varepsilon(\tilde{\underline{u}}_{ex} - \tilde{\underline{u}}_h)\varepsilon(\underline{e}^u)]d\Omega \quad (1.54)$$

En notant :

$$\tilde{\underline{e}}^u = \tilde{\underline{u}}_{ex} - \tilde{\underline{u}}_h \quad (1.55)$$

qui correspond à l'erreur globale sur le problème adjoint, on peut alors utiliser le théorème de Cauchy-Schwartz pour obtenir une majoration de l'erreur sur  $I$  :

$$|I(\underline{e}^u)| \leq \|\underline{e}^u\|_{\mathcal{K},\Omega} \cdot \|\tilde{\underline{e}}^u\|_{\mathcal{K},\Omega} \quad (1.56)$$

On peut également l'écrire en sommant sur l'ensemble des éléments du maillage :

$$|I(\underline{e}^u)| \leq \sum_E \|\underline{e}^u\|_{\mathcal{K},E} \cdot \|\tilde{\underline{e}}^u\|_{\mathcal{K},E} \quad (1.57)$$

ce qui fournit en pratique de meilleurs résultats.

On voit ici que l'erreur locale sur la quantité d'intérêt peut être simplement majorée par le produit des erreurs globales sur le problème à résoudre et le problème adjoint. L'intérêt de la méthode est donc qu'il suffit de calculer deux erreurs à l'aide d'une des techniques globales exposées dans ce chapitre. Toutefois, si l'on veut obtenir une borne supérieure garantie de l'erreur sur la quantité d'intérêt, il convient de choisir une erreur globale qui majore l'erreur exacte. En pratique, peu d'auteurs proposent des estimations garanties de l'erreur locale : on peut citer les travaux récents de [de Almeida 06] et [Pares 08]

dans le cadre de l'élasticité ainsi que ceux utilisant l'erreur en relation de comportement. On peut en effet obtenir une borne supérieure garantie de  $|I(\underline{e}^u)|$  en utilisant l'erreur en relation de comportement :

$$|I(\underline{e}^u)| \leq 2 \cdot e_{RDC} \cdot \tilde{e}_{RDC} \quad (1.58)$$

ou :

$$|I(\underline{e}^u)| \leq \sum_E 2 \cdot e_{RDC,E} \cdot \tilde{e}_{RDC,E} \quad (1.59)$$

Cette dernière équation qui fait intervenir un à un les produits des contributions à l'erreur n'est pas vraie théoriquement. On constate toutefois empiriquement qu'elle est toujours vérifiée si les champs admissibles sont reconstruits avec les méthodes présentées. Il est important de noter que nous avons utilisé la propriété d'orthogonalité de Galerkin pour établir cette relation, ce qui signifie que nous disposons de peu de liberté pour résoudre le problème adjoint. En effet, on peut constater qu'en améliorant la résolution du problème adjoint, on peut affiner les bornes obtenues puisque l'erreur  $\tilde{e}_{RDC}$  diminue. Or, la propriété d'orthogonalité nous contraint à chercher  $\tilde{u}_h$  dans le même espace  $\mathcal{U}$  que  $u_h$  ou dans un espace  $\tilde{\mathcal{U}}$  tel que  $\mathcal{U}$  est un sous-espace de  $\tilde{\mathcal{U}}$ . En pratique, cela signifie que l'on doit utiliser le même maillage avec les mêmes fonctions d'interpolation ou bien raffiner le maillage de manière hiérarchique. Il est clair qu'il est également impossible d'utiliser des méthodes d'enrichissement différentes sur le problème adjoint avec cette majoration. Dans [Ladevèze 06], une majoration n'utilisant pas la propriété d'orthogonalité de Galerkin est proposée. Elle permet non seulement de s'affranchir de ces contraintes, mais elle fournit de plus des résultats plus précis. Elle offre une grande liberté dans la résolution du problème adjoint. Dans [Chamoin 08], le problème adjoint est résolu de manière non-intrusive en introduisant des fonctions d'enrichissement.

L'établissement de bornes garanties dans un cadre général est développé dans [Ladevèze 08a]. Les propriétés exposées dans cet article ont notamment permis de calculer des bornes garanties pour des problèmes d'évolution en temps tels que présentés dans [Chamoin 07a] et [Chamoin 07b].

### 3.3 Estimation directe de l'erreur locale

Cette technique est dédiée à l'estimation locale de l'erreur commise sur la contrainte. Il est montré dans [Ladevèze 97] que l'on peut utiliser directement la contribution  $e_{RDC,E}$  pour estimer l'erreur sur la contrainte dans l'élément  $E$  :

$$\|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\mathcal{K}^{-1},E}$$

Cette technique est utilisable pour les estimateurs en relation de comportement utilisant les reconstructions de champs optimisées. En effet, on constate

heuristiquement que pour ce type d'estimateur, la contribution élémentaire majore l'erreur exacte sur l'élément, ce qui n'est pas forcément le cas pour les autres estimateurs, notamment pour les estimateurs de type « ZZ » qui sous-estiment souvent largement l'erreur sur les contributions élémentaires.

En reconstruisant un champ  $\hat{\sigma}$  de bonne qualité (il doit être de meilleure qualité que  $\sigma_h$ ) on a alors :

$$\|\hat{\sigma} - \sigma_{ex}\|_{\mathcal{K}^{-1},E} = A\|\hat{\sigma} - \sigma_h\|_{\mathcal{K}^{-1},E} \quad \text{avec : } 0 \leq A \leq 1 \quad (1.60)$$

d'où l'existence d'une constante  $C$  telle que :

$$\|\sigma_h - \sigma_{ex}\|_{\mathcal{K}^{-1},E} \leq C\|\hat{\sigma} - \sigma_h\|_{\mathcal{K}^{-1},E} \quad \text{avec : } C = \frac{1}{1-A} \quad (1.61)$$

Cette technique a été utilisée dans [Florentin 02] pour fournir une estimation locale sur la contrainte de Von Mises.

## 4 Bilan

Nous avons fait dans ce chapitre une revue des différentes techniques permettant d'estimer l'erreur commise pendant un calcul éléments finis susceptibles de servir les objectifs exposés dans l'introduction de cette thèse. Nous avons vu que les estimateurs en résidus implicites et les estimateurs en relation de comportement se rejoignent et permettent d'obtenir une majoration de l'erreur exacte de bonne qualité. Les estimateurs de type « ZZ » sont simples à mettre en œuvre et fournissent une bonne estimation de l'erreur mais ils ne sont pas conservatifs.

Ces estimateurs globaux peuvent être utilisés pour estimer l'erreur commise sur une quantité d'intérêt  $I$  calculée par une technique d'extraction. Etant donné que nous recherchons à établir des bornes strictes pour les facteurs d'intensité de contraintes, le choix d'une technique d'estimation locale exploitant la technique du problème adjoint et l'estimateur d'erreur en relation de comportement apparaît bien approprié. On pourra de plus s'affranchir de la propriété d'orthogonalité pour se donner plus de liberté dans la résolution du problème adjoint afin d'obtenir des bornes de meilleure qualité.



---

# Estimation d'erreur pour les problèmes avec singularités

*L'objectif de ce chapitre est de situer le contexte et les enjeux de cette thèse. On rappelle les hypothèses de travail qui permettent de mettre en place le modèle de référence et qui conduit aux solutions asymptotiques en pointe de fissure. On rappelle ensuite succinctement les définitions des quantités d'intérêts couramment employées en mécanique de la rupture. Un bref état de l'art des techniques de calcul de ces quantités d'intérêts par éléments finis est présenté. Enfin, les travaux existants visant à évaluer la qualité des quantités extraites sont présentés.*

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Mécanique linéaire élastique de la rupture . . . . .</b>	<b>33</b>
1.1	Le problème de référence . . . . .	33
1.2	Calcul des quantités d'intérêts en pointe de fissure . . .	35

<b>2</b>	<b>Evaluation de la qualité des quantités d'intérêts . . .</b>	<b>38</b>
2.1	Les principales techniques d'extraction . . . . .	39
2.2	Etat de l'art sur l'erreur en mécanique de la rupture . .	45
2.3	Bilan . . . . .	46

---

# 1 Mécanique linéaire élastique de la rupture

Nous nous intéressons à la mécanique linéaire élastique de la rupture également appelée mécanique de la rupture fragile, par opposition à la mécanique de la rupture ductile. La mécanique de la rupture fragile se caractérise par un comportement global élastique linéaire de la structure fissurée. Le comportement non linéaire reste confiné en pointe de fissure. Ce type de problème peut être modélisé sous les hypothèses simples de la mécanique linéaire élastique. La mécanique de la rupture ductile concerne les problèmes où le comportement est globalement fortement non linéaire, nous ne traiterons pas ce type de problèmes ici.

La présence d'une fissure dans un milieu continu a pour effet de la fragiliser de façon plus ou moins sévère. Sous l'effet des sollicitations extérieures, la fissure peut se propager de manière cyclique (fatigue) ou brutale jusqu'à la ruine complète de la rupture. La motivation de la mécanique de la rupture est donc d'être capable d'évaluer le caractère critique d'une fissure existante et éventuellement de prédire sa propagation.

Nous exposons ici les bases de la mécanique de la rupture fragile pouvant servir notre propos. Des détails et développements plus exhaustifs peuvent être trouvés dans les ouvrages de référence [Bui 78] et [Leblond 02].

## 1.1 Le problème de référence

Il convient de définir correctement la notion de fissure : il s'agit d'un point de vue purement topologique d'une entaille dans un matériau continu. Du point de vue de la modélisation, cela se traduit par deux surfaces opposées  $S^+$  et  $S^-$  pouvant être confondues en une même surface  $S$  lorsque le solide est libre de chargement et distinctes lorsque celui-ci est soumis à des sollicitations extérieures. On voit donc apparaître une première discontinuité qui est d'ordre géométrique. Pour le mécanicien, la fissure s'interprète comme une discontinuité du champ de déplacement le long de la surface  $S$ . En effet, dans un milieu continu, le champ de déplacement solution est continu, en présence d'une fissure, il est discontinu au passage de  $S$ , on peut ainsi caractériser le saut de déplacement :

$$[\underline{u}] = \underline{u}^+ - \underline{u}^- \quad (2.1)$$

La nature du saut de déplacement permet de distinguer et de définir les trois modes d'ouvertures et donc les trois modes de sollicitation d'une fissure représentés sur la figure 2.1 :

- le mode  $I$  dit mode d'ouverture : le déplacement s'effectue selon une normale à la fissure ;

- le mode *II* dit mode de cisaillement plan ou glissement droit : le déplacement est tangent à la fissure et dans le plan de référence  $\Pi$  ;
- le mode *III* dit mode de cisaillement antiplan ou glissement vis : le déplacement est tangent à la fissure et normal au plan de référence  $\Pi$ .

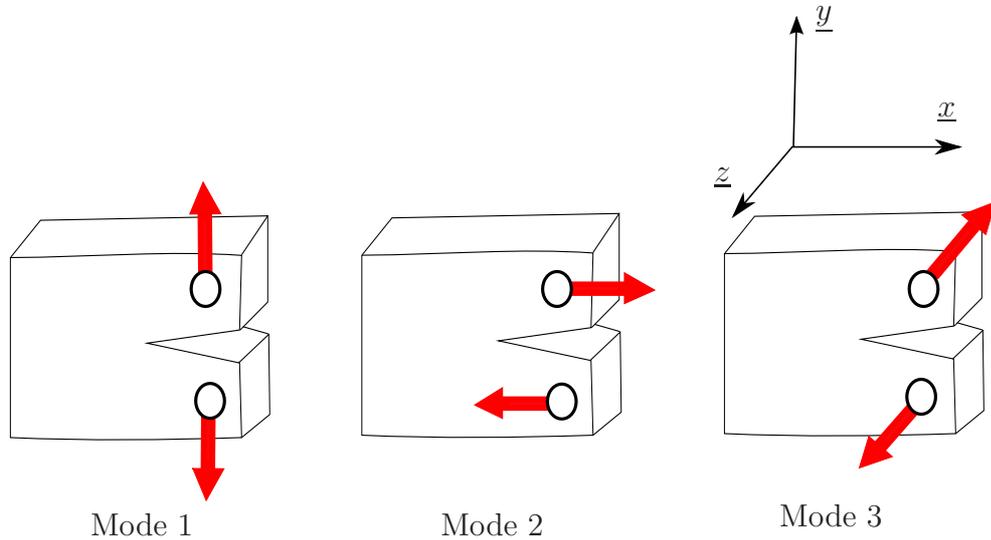


Figure 2.1: Modes d'ouvertures

Nous étudions pour l'instant uniquement les problèmes 2D en déformations planes, la géométrie de la fissure peut donc être ramenée à l'intersection entre les surfaces  $S^+$  et  $S^-$  et le plan d'étude  $\Pi$ . On obtient alors les lèvres de fissure  $l^+$  et  $l^-$  qui se rejoignent au point  $P$ , pointe de la fissure.

Les hypothèses sont celles de la mécanique des milieux continus linéaire élastique en petites perturbations. Nous considérons un milieu  $\Omega$  défini figure 2.2 de frontière  $\partial\Omega$  soumis aux sollicitations extérieures suivantes :

- une force volumique  $\underline{f}_d$  négligée dans la suite de cette étude ;
- une action mécanique extérieure  $\underline{F}_d$  (condition limite de type Neumann) appliquée sur la partie  $\partial_2\Omega$  de  $\partial\Omega$  ;
- un déplacement imposé  $\underline{U}_d$  (condition limite de type Dirichlet) sur la partie  $\partial_1\Omega$  de  $\partial\Omega$  ;

avec  $\partial_2\Omega = \partial\Omega - \partial_1\Omega$  pour que le problème soit bien posé. Les équations à résoudre sont donc les équations 1.1, 1.2 et 1.3.

On supposera de plus que les lèvres de la fissure ne sont pas sollicitées :

$$\sigma(M) \cdot \underline{n} = \underline{0} \quad \forall M \in l^+ \cup l^- \quad (2.2)$$

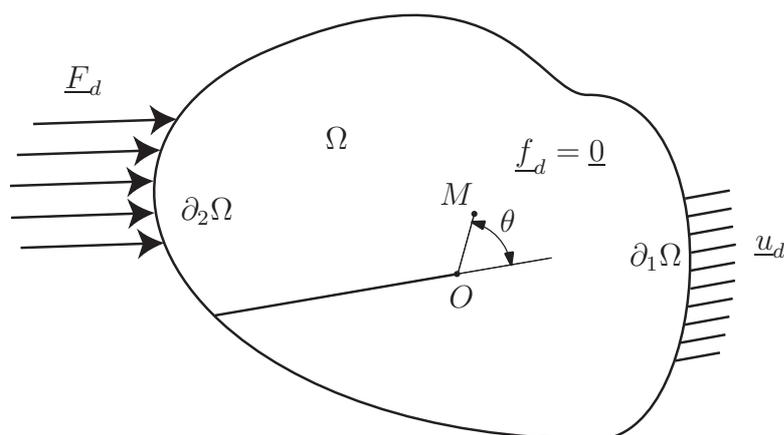


Figure 2.2: Problème de référence avec fissure

## 1.2 Calcul des quantités d'intérêts en pointe de fissure

On peut distinguer deux approches différentes pour modéliser la présence d'une fissure. La première est énergétique, elle conduit à la définition du taux de restitution d'énergie. La seconde consiste à étudier le comportement singulier de la solution en pointe de fissure dans le cadre de l'élasticité linéaire, elle conduit à la définition des facteurs d'intensité de contrainte.

### 1.2.1 Le taux de restitution d'énergie

On doit la première théorie sur le taux de restitution d'énergie à Griffith, elle s'applique alors uniquement à la rupture fragile. Cette théorie, étendue aux matériaux ductiles par Irwin et Orowan, revient à une vision globale du phénomène de fissuration qui consiste à étudier le bilan énergétique associé à la propagation de la fissure. Ainsi, en vertu des deux principes fondamentaux de la thermodynamique, on peut écrire :

$$P_{ext} = \dot{W}_{elas} + P_{diss} \quad \text{avec } P_{diss} \geq 0 \quad (2.3)$$

où  $P_{ext}$  est la puissance des actions extérieures au milieu étudié,  $\dot{W}_{elas}$  est la variation de l'énergie de déformation élastique, et  $P_{diss}$  la puissance dissipée (en chaleur) durant l'avancée de la fissure. La positivité de la dissipation est une traduction du second principe et garantit le caractère irréversible de l'avancée de la fissure. En notant  $l$  la longueur de la fissure et  $\underline{u}_d$  et  $\underline{F}_d$  étant respectivement les déplacements et les efforts imposés, le champ de déplacement  $\underline{u}$  est alors la solution des équations d'équilibre soumis au chargement défini par  $\underline{u}_d$

et  $\underline{F}_d$ . On peut donc exprimer l'énergie élastique en situation d'équilibre :

$$W_{elas}(l, \underline{u}_d, \underline{F}_d) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} Tr[\mathcal{K}\varepsilon(\underline{u})\varepsilon(\underline{u})]d\Omega - \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}d\Gamma \quad (2.4)$$

On montre :

$$P_{diss} = -\frac{\partial W_{elas}}{\partial l}(l, \underline{u}_d, \underline{F}_d) \dot{l} \quad (2.5)$$

On définit alors le taux de restitution d'énergie :

$$G = -\frac{\partial W_{elas}}{\partial l}(l, \underline{u}_d, \underline{F}_d) \quad (2.6)$$

Le taux de restitution d'énergie est donc vu comme l'énergie nécessaire à la propagation de la fissure par unité de longueur de fissure créée (ou bien par unité de surface en 3D). Le but est de comparer le taux de restitution d'énergie  $G$  calculé à sa valeur critique  $G_C$  :

$$\begin{cases} \text{si } G < G_C : & \text{pas de propagation} & \dot{l} = 0 \\ \text{si } G = G_C : & \text{propagation possible} & \dot{l} \geq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

L'intérêt de l'utilisation du taux de restitution d'énergie réside principalement dans le fait qu'il s'agit d'une quantité globale indépendante des hypothèses faites sur le comportement du matériau, il n'est donc pas restreint à la théorie linéaire élastique.

### 1.2.2 Les facteurs d'intensité de contrainte

La définition des facteurs d'intensité de contrainte découle directement des équations de l'élasticité linéaire. Sous ces hypothèses, on montre qu'il existe une seule solution asymptotique à énergie finie et que le champ de contrainte est singulier au voisinage de la pointe de fissure. Dans le repère local (figure 2.3) de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , dans le cas des déformations planes, on montre que le champ  $\sigma$  s'écrit :

$$\sigma_r = \frac{1}{4(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \left( 5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) K_I - \left( 5 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right) K_{II} \right\} + o(r^{-\frac{1}{2}}) \quad (2.8)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{4(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \left( 3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) K_I - \left( 3 \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right) K_{II} \right\} + o(r^{-\frac{1}{2}}) \quad (2.9)$$

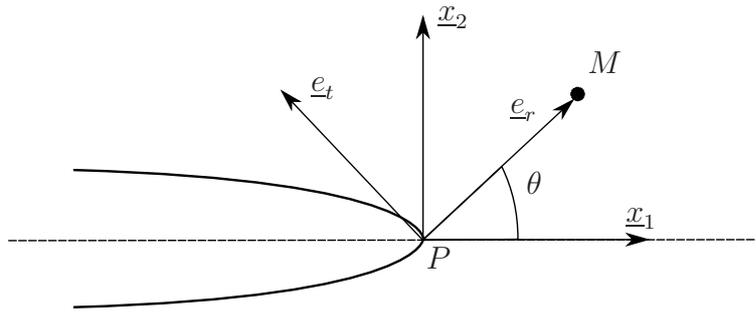


Figure 2.3: Repère local associé à la pointe de fissure.

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{4(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \left( \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) K_I - \left( \cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right) K_{II} \right\} + o(r^{-\frac{1}{2}}) \quad (2.10)$$

Les facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  qui apparaissent dans cette expression correspondent respectivement aux modes de sollicitation  $I$  et  $II$ . On voit ici qu'il s'agit de scalaires intervenant dans le développement de la contrainte et dont l'amplitude nous renseigne sur l'aspect critique de la fissure. Ils dépendent de la géométrie de la structure, de la fissure et du chargement. On remarque également que la contrainte présente une singularité au voisinage de  $r = 0$  en  $r^{-\frac{1}{2}}$ . On peut également établir l'expression du saut de déplacement le long de la fissure :

$$[u] = \frac{4(1-\nu)}{\mu} \left( \frac{r}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} [K_I e_x + K_{II} e_y] \quad (2.11)$$

Les facteurs d'intensité de contrainte peuvent alors être comparés à une valeur critique appelée ténacité du matériau  $K_{IC}$  :

$$\begin{cases} \text{si } K_I < K_{IC} : & \text{alors } \dot{l} = 0 \\ \text{si } K_I = K_{IC} : & \text{alors } \dot{l} \geq 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Les facteurs d'intensité de contrainte sont également couramment employés pour déterminer la direction prise par une fissure ou pour les problèmes de fatigue à travers la loi de Paris.

### 1.2.3 Lien entre les deux descriptions

Dans le cadre exclusif de l'élasticité linéaire quasi-statique en petites perturbations, la formule d'Irwin permet de relier le taux de restitution d'énergie

aux facteurs d'intensité de contrainte (en déformations planes) :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E^*} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (2.13)$$

On peut alors établir une relation entre le taux de restitution d'énergie critique et la ténacité en mode  $I$  :

$$G_C = \frac{1 - \nu^2}{E^*} K_{IC}^2 \quad (2.14)$$

avec :

$$E^* = E \quad \text{en contraintes planes et } E^* = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \text{en déformations planes} \quad (2.15)$$

*Remarque* : notons que les facteurs d'intensité de contrainte sont des quantités linéaires vis-à-vis du déplacement ce qui en fait des quantités privilégiées du point de vue de l'estimation d'erreur, au contraire du taux de restitution d'énergie qui est une forme quadratique du déplacement.

## 2 Evaluation de la qualité des quantités d'intérêts

Nous avons vu que la caractérisation du comportement d'une structure fissurée passe par le calcul des quantités d'intérêts que sont le taux de restitution d'énergie ou les facteurs d'intensité de contrainte. Le calcul de ces quantités permet de comparer les valeurs atteintes dans la configuration étudiée aux valeurs seuils qui interviennent dans les critères de propagation. La précision avec laquelle elles sont calculées devient donc un problème de premier plan pour le concepteur. Il existe des méthodes analytiques permettant d'évaluer  $G$  ou  $K_I$  et  $K_{II}$  pour des géométries particulières : fissures dans des milieux infinis ou semi-infinis par exemple. Ces solutions ont fait l'objet de nombreuses publications, elles sont regroupées dans des recueils tels que [Murakami 86]. Toutefois, ces méthodes analytiques deviennent obsolètes ou trop peu précises lorsque l'on souhaite étudier de manière fiable des structures industrielles aux géométries et aux chargement plus complexes. Nous avons alors recours à une simulation numérique de type éléments finis. Les quantités  $G$ ,  $K_I$  et  $K_{II}$  sont alors calculées à partir de la solution éléments finis à l'aide d'une technique d'extraction. Ceci conduit bien entendu à des approximations  $G_h$ ,  $K_{I,h}$  et  $K_{II,h}$  de  $G_{ex}$ ,  $K_{I,ex}$  et  $K_{II,ex}$ . Là encore, le problème de la fiabilité des calculs se pose, on peut distinguer deux sources d'erreur :

- la technique d'extraction elle-même peut être plus ou moins précise et plus ou moins bien adaptée à la structure des éléments finis,

- la technique d'extraction utilise la solution éléments finis  $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ , il convient donc de prendre en compte les erreurs de discrétisation.

Nous sommes donc ici au cœur même de la problématique de cette thèse. Afin d'éclairer nos choix et de situer nos travaux par rapport à ceux déjà effectués dans ce domaine, nous exposons dans un premier temps les principales techniques d'extraction que l'on peut trouver dans la littérature. Nous effectuons ensuite une revue bibliographique des estimateurs d'erreur concernant les quantités d'intérêts en mécanique de la rupture.

## 2.1 Les principales techniques d'extraction

### 2.1.1 Calcul numérique du taux de restitution d'énergie

Il s'agit ici de calculer la dérivée de l'énergie potentielle par rapport à l'avancée de fissure, ce qui n'est pas trivial à première vue. Les techniques les plus largement utilisées consistent à mettre l'expression du taux de restitution d'énergie donné par l'équation 2.6 sous la forme d'une intégrale de contour ou de domaine plus facile à évaluer dans le cadre d'une méthode numérique. Nous proposons ici un rapide inventaire de ces méthodes sans en donner les démonstrations ou les détails techniques pour lesquels le lecteur pourra consulter les références.

**2.1.1.1 Intégrale de Rice** Introduit dans [Rice 68], il s'agit de la plus ancienne expression sous forme intégrale de  $G$ . Soit  $\Gamma$  un contour quelconque encerclant la pointe de fissure, si les lèvres de la fissure sont libres de chargement, on montre :

$$J = G = \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{2} \text{Tr}[\sigma \varepsilon(\underline{u})] n_1 - \sigma \underline{n} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_1} \right) dS \quad (2.16)$$

Cette méthode a fait l'objet de beaucoup de développements numériques. Elle a l'avantage d'être indépendante du contour choisi et d'être relativement simple à mettre en œuvre. Il suffit de la calculer sur les contours des éléments, on peut toutefois s'interroger sur la pertinence d'utiliser les quantités éléments finis sur un contour. En effet, si les déplacements sont continus à la frontière entre deux éléments ce n'est pas le cas du vecteur contrainte. L'intégrale  $J$  n'est de plus véritablement adaptée qu'aux problèmes plans.

**2.1.1.2 Intégrale  $G_{\theta}$**  Cette intégrale est due à [Destuynder 83], elle s'exprime sous la forme d'une intégrale de domaine. Considérons une couronne  $C$  (cf figure 2.4) de contour intérieur  $\Gamma_1$  et de contour extérieur  $\Gamma_2$ , si l'on définit

le champ  $\underline{\theta}$  continuellement dérivable  $\forall M \in C$  tel que  $\underline{\theta} \cdot \underline{x}_1 = 1$  sur  $\Gamma_1$ ,  $\underline{\theta} \cdot \underline{x}_1 = 0$  sur  $\Gamma_2$  et  $\underline{\theta} \cdot \underline{x}_2 = 0$ , alors :

$$G_\theta = G = \int_C \left( -\frac{1}{2} \text{Tr}[\sigma \varepsilon(\underline{u})] \cdot \text{div}(\underline{\theta}) + \text{Tr}[\sigma(\varepsilon(\underline{u}) \underline{\text{grad}}(\underline{\theta}))] \right) d\Omega \quad (2.17)$$

Cette intégrale est indépendante de la couronne d'intégration choisie, elle peut être évaluée sur les champs éléments finis des éléments coupés ou inclus par la couronne. Cette technique a fait l'objet de nombreuses extensions dans le code éléments finis du CEA Castem2000.

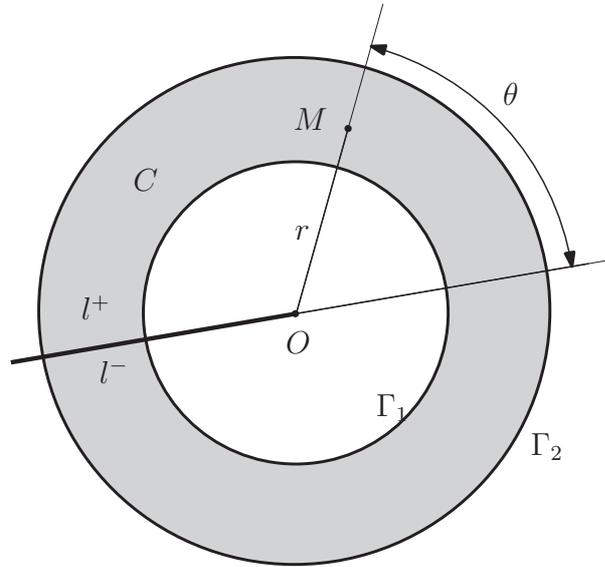


Figure 2.4: Couronne d'intégration pour l'intégrale  $G_\theta$

**2.1.1.3 Intégrales  $M$ ,  $T$  et  $A$**  On doit l'intégrale  $M$  à [Chen 77]. Si l'on considère le champ de déplacement réel  $\underline{u}$  et un champ admissible auxiliaire quelconque  $\underline{v}$ , l'idée est d'utiliser la forme bilinéaire d'énergie de déformation fonction de  $\varepsilon(\underline{u})$  et  $\varepsilon(\underline{v})$ . On obtient alors l'intégrale indépendante du contour  $\Gamma$  :

$$M = G = \int_\Gamma \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \sigma^v}{\partial x_1} \underline{u} - \sigma^u \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) dS \quad (2.18)$$

Cette intégrale a été étendue par [Bui 85] aux problèmes de thermoélasticité sous la dénomination d'intégrale  $T$ . L'intégrale  $A$  est une forme de l'intégrale  $T$  sous forme d'intégrale de domaine. Ces techniques, bien que fournissant de bons résultats, sont restées très marginales.

## 2.1.2 Calcul numérique des facteurs d'intensité de contrainte

**2.1.2.1 Extrapolation des déplacements** Cette méthode est très simple à mettre en œuvre, ce qui explique son succès, elle est cependant très peu précise. Elle part de la connaissance de la solution asymptotique en pointe de fissure et en particulier du saut de déplacement le long des lèvres de la fissure. Il suffit alors de comparer le saut de déplacement de la solution éléments finis pour les deux nœuds (appartenant à  $l^+$  et  $l^-$ ) les plus proches de la pointe de fissure au saut de déplacement théorique donné par 2.11. Les facteurs d'intensité de contrainte peuvent alors être calculés par :

$$K_{Ih} = \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [\underline{u}_h] \cdot \underline{n} \quad , \quad K_{IIh} = \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [\underline{u}_h] \cdot \underline{t} \quad (2.19)$$

Une variante de cette technique consiste à utiliser plusieurs points le long de la fissure afin d'améliorer la qualité de l'extrapolation. Cette technique dépend fortement des points utilisés pour le calcul, ceux-ci devant être en théorie le plus proche possible de la pointe de fissure. En pratique, un maillage très fin est requis en pointe de fissure pour obtenir des résultats corrects. De ce fait, cette méthode est souvent combinée à l'utilisation d'éléments spéciaux au voisinage de la pointe de fissure tels que les éléments avec nœuds aux quart afin d'améliorer les résultats.

**2.1.2.2 Utilisation des intégrales  $M$ ,  $T$  et  $A$**  Si l'on choisit le champ auxiliaire  $\underline{v}$  tel que  $K_I^v = 0$  d'une part et  $K_{II}^v = 0$  d'autre part, on voit qu'il est facile d'isoler les facteurs d'intensité de contrainte du champ réel  $\underline{u}$  grâce à la formule d'Irwin :

$$M = T = A = \frac{1}{E^*} (K_I^u K_I^v + K_{II}^u K_{II}^v) \quad (2.20)$$

**2.1.2.3 Intégrale d'interaction** Cette technique introduite dans [Shih 88] exploite l'intégrale de contour  $J$  et la solution asymptotique en pointe de fissure : on considère deux états en fond de fissure, l'état réel noté (1) et l'état auxiliaire noté (2) correspondant à la solution asymptotique pour les modes distincts  $I$  ou  $II$ . Si l'on écrit l'intégrale  $J$  pour la somme des deux états (1+2) on montre :

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + I^{(1,2)}$$

avec :

$$I^{(1,2)} = \int_C \left( \sigma^{(1)} \frac{\partial \underline{u}^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma^{(2)} \frac{\partial \underline{u}^{(1)}}{\partial x_1} - Tr[\sigma^{(1)} \varepsilon^{(2)}]_{\underline{x}_1} \right) \cdot \frac{\partial q}{\partial \underline{x}} d\Omega \quad (2.21)$$

où la fonction  $q$  est définie continuellement dérivable sur  $C$  (cf figure 2.4), elle vaut 0 sur  $\Gamma_2$  et 1 sur  $\Gamma_1$ . Si l'on choisit successivement pour le champ auxiliaire le mode pur  $I$  ( $K_I^{(2)} = 1$  et  $K_{II}^{(2)} = 0$ ) et  $II$  ( $K_I^{(2)} = 0$  et  $K_{II}^{(2)} = 1$ ), on peut déterminer les facteurs d'intensité de contrainte recherchés par :

$$K_I^{(1)} = \frac{E^*}{2} I^{(I, mode I)} \quad \text{et} \quad K_{II}^{(1)} = \frac{E^*}{2} I^{(I, mode II)} \quad (2.22)$$

Cette technique est très couramment employée pour les calculs utilisant la méthode XFEM depuis les travaux de [Belytschko 99]. Une technique similaire est employée pour extraire les facteurs d'intensité de contrainte avec l'intégrale  $G_\theta$ . Ces techniques fournissent de très bons résultats.

**2.1.2.4 Utilisation des fonctions duales** Cette technique est d'abord apparue dans [Stern 76] où elle ne concernait que les problèmes de fissuration. Elle a été étendue aux autres singularités géométriques (coins rentrants) dans [Babuška 84] et [Leguillon 87]. Nous exposons ici les principes et les grandes lignes de la méthode.

Nous nous plaçons donc tout d'abord dans le cas d'une singularité géométrique de type entaille et d'angle  $\omega \leq \pi$  figure 2.5, nous supposons que les forces de volume et les efforts sur les lèvres de fissure sont nuls. Au voisinage de cette singularité, la solution se développe de manière générale en puissance de la variable  $r$  :

$$\underline{u} = \underline{u}_0 + k_1 r^{\lambda_1} \underline{u}_1(\theta) + k_2 r^{\lambda_2} \underline{u}_2(\theta) + \dots \quad (2.23)$$

où les  $k_i$  sont les facteurs d'intensité de contrainte généralisés. La méthode générale consiste à rechercher une solution du problème d'élasticité générale de la forme  $r^\lambda \underline{u}(\theta)$ . En l'injectant dans la formulation variationnelle du problème d'élasticité, on obtient un problème aux valeurs propres :

$$-\lambda^2 a(\underline{u}(\theta), \underline{v}(\theta)) + \lambda b(\underline{u}(\theta), \underline{v}(\theta)) + c(\underline{u}(\theta), \underline{v}(\theta)) = 0 \quad \forall \underline{v}(\theta) \text{ CA} \quad (2.24)$$

où  $a(\bullet, \bullet)$  et  $c(\bullet, \bullet)$  sont des formes bilinéaires symétriques,  $b(\bullet, \bullet)$  est une forme bilinéaire antisymétrique. Le problème devient donc un problème aux valeurs propres  $\lambda$  pour les fonctions propres  $\underline{u}(\theta)$  :

$$A(\lambda)X = 0 \quad (2.25)$$

avec :

$$\text{trouver } \lambda \text{ tel que : } \det(A(\lambda)) = 0 \quad \text{et trouver } X \text{ tel que : } A(\lambda)X = 0 \quad (2.26)$$

Nous nous restreignons ici au cas où les valeurs propres sont réelles. On obtient une solution à énergie finie uniquement pour les valeurs propres positives

$\lambda \geq 0$  en 2D. On obtient alors par dérivation un champ de contraintes sous la forme :

$$\sigma_{ij} = kr^{\lambda-1} \mathbf{S}_{ij} + \dots \quad (2.27)$$

On retrouve donc bien la singularité de la contrainte pour les valeurs propres telles que :

$$0 < \lambda < 1 \quad (2.28)$$

Revenons à présent au cas particulier où la singularité considérée est une fissure :  $\omega = 0$  (les résultats qui suivent restent cependant valables pour les autres singularités), on trouve les valeurs propres positives suivantes :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} ; \lambda_3 = \lambda_4 = 1 ; \lambda_5 = \lambda_6 = \frac{3}{2} \dots \quad (2.29)$$

*Propriété importante : Si  $\lambda$  est solution du problème aux valeurs propres alors sa valeur duale  $-\lambda$  l'est également. Cette propriété permet d'établir la procédure de calcul des facteurs d'intensité des contrainte qui suit.*

On considère le rayon  $\rho$  infiniment proche de la pointe de fissure et le contour quelconque  $\Gamma$  (cf figure 2.5). Les lèvres  $l^+$  et  $l^-$  sont libres. Le théorème de réciprocité permet d'écrire sur le contour fermé  $\Gamma_\rho + \Gamma + l^+ + l^-$  pour les champs solutions du problème d'élasticité  $(\underline{v}, \sigma^v)$  et  $(\underline{u}, \sigma^u)$  :

$$\int_{\Gamma_\rho + \Gamma + l^+ + l^-} (\sigma^u \cdot \underline{n} \cdot \underline{v} - \sigma^v \cdot \underline{n} \cdot \underline{u}) dS = \int_{\Gamma_\rho + \Gamma} (\sigma^u \cdot \underline{n} \cdot \underline{v} - \sigma^v \cdot \underline{n} \cdot \underline{u}) dS = 0 \quad (2.30)$$

On note  $\Psi(\rho)$  :

$$\Psi(\rho) = \int_{\Gamma_\rho} (\sigma^u \cdot \underline{n} \cdot \underline{v} - \sigma^v \cdot \underline{n} \cdot \underline{u}) r d\theta \quad (2.31)$$

On peut alors réécrire cette intégrale en prenant :

$$\underline{u} = kr^\lambda \underline{u}^+(\theta) \quad \text{et} \quad \underline{v} = r^{-\lambda} \underline{u}^-(\theta) \quad (2.32)$$

Pour  $\alpha = \frac{1}{2}$  on peut déterminer le facteur d'intensité des contrainte en mode I ou II selon que l'on prend les vecteurs propre duaux  $\underline{u}^+$  et  $\underline{u}^-$  associés aux modes I ou II :

$$k = \frac{\Psi(\rho)}{\int_{\Gamma_\rho} (\sigma(r^\lambda \underline{u}^+) \cdot \underline{n} \cdot r^{-\lambda} \underline{u}^- - \sigma(r^{-\lambda} \underline{u}^-) \cdot \underline{n} \cdot r^\lambda \underline{u}^+) r d\theta} \quad (2.33)$$

$\Psi(\rho)$  peut alors être déterminé à partir du déplacement éléments finis d'après 2.30 sur le contour  $\Gamma$  :

$$\begin{aligned} \Psi(\rho) &= \int_{\Gamma_\rho} (\sigma(\underline{u}_h) \cdot \underline{n} \cdot r^{-\lambda} \underline{u}^- - \sigma(r^{-\lambda} \underline{u}^-) \cdot \underline{n} \cdot \underline{u}_h) r d\theta \\ &= - \int_{\Gamma} (\sigma(\underline{u}_h) \cdot \underline{n} \cdot r^{-\lambda} \underline{u}^- - \sigma(r^{-\lambda} \underline{u}^-) \cdot \underline{n} \cdot \underline{u}_h) dS \end{aligned} \quad (2.34)$$

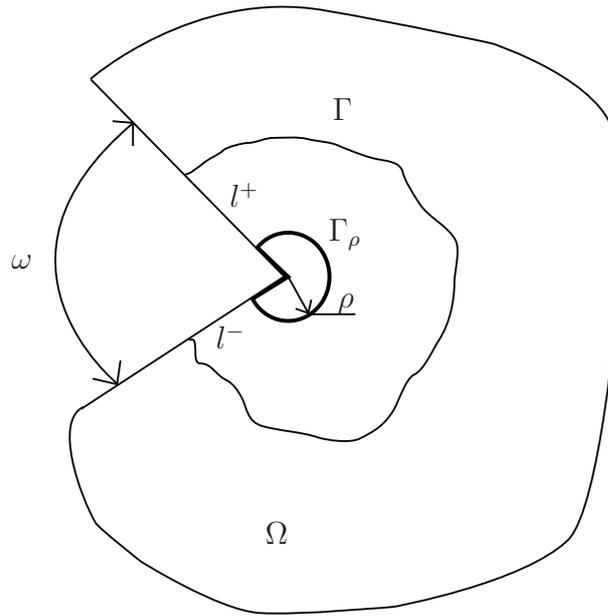


Figure 2.5: Géométrie pour définition de l'extraction avec fonctions duales.

En pratique le numérateur est donc calculé par une intégrale de contour indépendante du contour choisi. Le calcul nécessite tout de même la connaissance des solutions en pointe de fissure, elles sont données sous une forme analytique simple dans [Stern 76]. Le calcul de  $K_I$  et  $K_{II}$  se résume donc à une intégrale de contour :

$$K_\alpha = \int_\Gamma (\sigma^u \cdot \underline{n} \cdot \underline{v}_\alpha - \sigma_\alpha^v \cdot \underline{n} \cdot \underline{u}) dS \quad (2.35)$$

où les champs  $\underline{v}_\alpha, \sigma_\alpha^v$  sont connus analytiquement. Pour d'autres types de problèmes, [Leguillon 87] propose une méthode d'évaluation numérique des champs duaux. Un premier point intéressant concernant cette méthode est qu'elle permet une évaluation directe des facteurs d'intensité de contrainte (sans passer par le taux de restitution d'énergie) sans considérer les champs locaux de mauvaise qualité car le calcul peut se faire sur un contour loin de la singularité. L'autre aspect très intéressant est qu'elle donne une représentation exacte des facteurs d'intensité de contrainte (sans introduire d'autres erreurs que les erreurs de discrétisation) dans le cas où les champs auxiliaires sont connus. Enfin, elle peut s'adapter à tout types de singularités.

## 2.2 Etat de l'art sur l'erreur en mécanique de la rupture

Nous proposons dans cette section un bref état de l'art sur l'erreur en mécanique de la rupture. Tout d'abord, il est intéressant de remarquer que très peu de publications concernent ce sujet. Les premiers travaux notables sont ceux de [Stone 98]. Les auteurs s'intéressent à l'erreur commise sur la propagation et notamment sur l'angle de propagation d'une fissure en exploitant l'erreur globale en résidus. Le calcul des contributions à l'erreur globale permet de donner une estimation de l'erreur commise sur le calcul de l'angle de branchement calculé avec les quantités éléments finis. Il n'y a donc pas encore dans ces travaux d'erreur locale pour la rupture.

### 2.2.1 Erreur sur $G$

On trouve dans la littérature trois équipes qui se sont intéressées à l'estimation locale de l'erreur commise sur le taux de restitution d'énergie  $G$ . Elles utilisent toutes les techniques d'estimation d'erreur sur les quantités d'intérêts associées à la résolution du problème adjoint de [Rannacher 97, Rannacher 98, Peraire 98, Prudhomme 99, Ladevèze 99a, Stein 01].

Les premiers travaux sont ceux de [Heintz 04]. Ils utilisent les estimateurs développés dans [Johnson 92] et plutôt dédiés à l'adaptivité de maillage. Le taux de restitution d'énergie est calculé sous la forme d'une intégrale de contour et de domaine. Les bornes sont établies par linéarisation de  $G$ . Les bornes obtenues ne sont pas garanties et sous-estiment largement l'erreur vraie puisque les indices d'efficacité sont compris entre 0.2 et 1.

On trouve dans [Ruter 06] des bornes sur  $G$  évaluées par intégrale de contour avec linéarisation également. Les auteurs comparent les résultats avec des estimateurs globaux utilisant soit une technique de lissage des contraintes de type ZZ2 soit les résidus implicites avec conditions de Neumann (voir Chapitre 1). Les bornes ne sont donc pas garanties car les estimateurs globaux utilisés ne sont pas conservatifs. Les estimateurs de type ZZ2 sous-estiment largement l'erreur commise. En revanche, les différents estimateurs en résidus restent conservatifs et fournissent des résultats intéressants.

Seuls les travaux de [Xuan 06b] proposent des bornes garanties pour  $G$  en encadrant d'une part la partie linéaire et d'autre part la partie quadratique en fonction de l'erreur globale.

Il est intéressant de noter que ces différents auteurs, bien que travaillant dans le cadre de l'élasticité linéaire, utilisent le taux de restitution d'énergie alors même que son aspect non linéaire complique l'établissement de bornes garanties. L'argument retenu est qu'il n'existe pas de technique d'extraction des facteurs d'intensité de contrainte suffisamment fiable et précise pour les facteurs d'intensité de contrainte.

### 2.2.2 Erreur sur $K_I$ et $K_{II}$

On trouve les premières estimations d'erreur sur les facteurs d'intensité de contrainte dans [Strouboulis 00b]. Elles exploitent le concept d'erreur en pollution et ne fournissent donc pas de bornes garanties.

Les premières bornes garanties pour  $K_I$  et  $K_{II}$  apparaissent dans [Gallimard 06, Xuan 06a, Xuan 07]. Les travaux publiés dans [Gallimard 06] sont une partie de ceux développés dans cette thèse, notamment dans le troisième chapitre, nous n'en parlerons donc pas dans ce chapitre. Dans [Xuan 06a, Xuan 07] des bornes strictes sont proposées pour l'élasticité linéaire 2D. Les auteurs utilisent l'erreur sur les quantités d'intérêts associée à la méthode des résidus pour calculer l'erreur globale. La technique d'extraction retenue pour les facteurs d'intensité de contrainte est celle utilisant l'extrapolation des déplacements (équation 2.19). L'inconvénient de cette technique est qu'elle est trop peu précise et induit un chargement ponctuel ou très localisé pour le problème adjoint introduisant ainsi beaucoup d'erreur. En conséquence, les bornes obtenues sont très grossières, elles ne deviennent intéressantes que pour des maillages très fin (plus de 70 000 éléments pour une simple plaque fissurée) ce qui les rend peu utilisables en pratique. Notons tout de même que l'approche est équivalente à celle que nous avons retenue dans [Gallimard 06]. Les différences résident dans la technique d'extraction choisie et dans l'estimateur de l'erreur globale qui exploite l'erreur en relation de comportement.

## 2.3 Bilan

Nous avons vu dans ce chapitre les bases de la mécanique linéaire de la rupture ainsi que les principales techniques d'extraction associées au taux de restitution d'énergie et aux facteurs d'intensité de contrainte. Bien qu'il existe finalement de nombreuses techniques ayant pour certaines fait leurs preuves, la plus grande partie d'entre elles sont restées méconnues au profit de l'intégrale de Rice et de sa version intégrale de domaine pour le calcul de  $G$  et de l'extrapolation des déplacements pour le calcul de  $K_I$  et  $K_{II}$ . Le calcul robuste de ces quantités et leur fiabilité est un point très important du fait même de l'aspect critique des structures faisant l'objet d'une telle simulation. On remarque cependant que peu de travaux abordent le problème de la vérification de ces calculs. C'est pourquoi nous nous intéressons à ce domaine et proposons une méthode permettant d'encadrer de manière garantie les facteurs d'intensité des contraintes. Nous utiliserons la technique d'extraction basée sur les fonctions duales car elle fournit non seulement d'excellents résultats mais elle peut se mettre sous une forme d'intégrale de domaine bien appropriée à l'écriture du problème adjoint et peut de plus se généraliser à d'autres types de singularités.

L'ensemble de ces contributions est présenté dans les chapitres suivants.



---

## Encadrement des facteurs d'intensité de contrainte

*Dans ce troisième chapitre, nous présentons la technique développée dans cette étude pour encadrer les facteurs d'intensité de contrainte en pointe de fissure évalués durant une analyse éléments finis. On expose d'abord l'extracteur retenu et on en justifie le choix. On aborde ensuite la résolution du problème adjoint et la construction des champs admissibles. Enfin, on présente les premiers encadrements obtenus pour des éléments finis de degré  $p1$ . Le but est de démontrer que l'on obtient une technique robuste à même de fournir des bornes supérieures garanties et pertinentes.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Présentation de la technique d'extraction . . . . .</b>	<b>51</b>
1.1	Présentation de la technique d'extraction . . . . .	51
1.2	Propriétés de la technique d'extraction . . . . .	54
<b>2</b>	<b>Estimation de l'erreur sur les facteurs d'intensité de contrainte . . . . .</b>	<b>57</b>

2.1	Résolution du problème adjoint . . . . .	57
2.2	Un premier encadrement . . . . .	62
2.3	Amélioration de l'encadrement . . . . .	66
<b>3</b>	<b>bilan . . . . .</b>	<b>77</b>

---

# 1 Présentation de la technique d'extraction

## 1.1 Présentation de la technique d'extraction

### 1.1.1 Expression de l'intégrale de contour

La technique d'extraction que nous avons retenue se base donc sur l'utilisation des fonctions duales exposées dans le deuxième chapitre. Dans le cas d'une fissure plane  $K_I$  et  $K_{II}$  peuvent être simplement calculés par une intégrale de contour sur un contour quelconque  $C$  encerclant la pointe de fissure :

$$K_\alpha = \int_C (\underline{u} \sigma_\alpha^v \underline{n} - \underline{v}_\alpha \sigma^u \underline{n}) dS \quad (3.1)$$

$\alpha = I, II$  en prenant les champs auxiliaires établis dans [Stern 76] :

$$v_r = \frac{1}{2(2\pi r)^{\frac{1}{2}}(1+\kappa)} \left\{ \left[ (2\kappa+1) \cos \frac{3\theta}{2} - 3 \cos \frac{\theta}{2} \right] c_1 + \left[ (2\kappa+1) \sin \frac{3\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right] c_2 \right\} \quad (3.2)$$

$$v_\theta = \frac{1}{2(2\pi r)^{\frac{1}{2}}(1+\kappa)} \left\{ \left[ -(2\kappa-1) \sin \frac{3\theta}{2} + 3 \sin \frac{\theta}{2} \right] c_1 + \left[ (2\kappa-1) \cos \frac{3\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \right] c_2 \right\} \quad (3.3)$$

$$\sigma_r^v = -\frac{\mu}{2(2\pi r^3)^{\frac{1}{2}}(1+\kappa)} \left\{ \left[ 7 \cos \frac{3\theta}{2} - 3 \cos \frac{\theta}{2} \right] c_1 + \left[ 7 \sin \frac{3\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right] c_2 \right\} \quad (3.4)$$

$$\sigma_\theta^v = -\frac{\mu}{2(2\pi r^3)^{\frac{1}{2}}(1+\kappa)} \left\{ \left[ \cos \frac{3\theta}{2} + 3 \cos \frac{\theta}{2} \right] c_1 + \left[ \sin \frac{3\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right] c_2 \right\} \quad (3.5)$$

$$\sigma_{r\theta}^v = -\frac{\mu}{2(2\pi r^3)^{\frac{1}{2}}(1+\kappa)} \left\{ 3 \left[ \sin \frac{3\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right] c_1 - \left[ 3 \cos \frac{3\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right] c_2 \right\} \quad (3.6)$$

Avec  $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  en contraintes planes et  $\kappa = 3 - 4\nu$  en déformations planes.

Pour  $(c_1 = 1, c_2 = 0)$  et  $(c_1 = 0, c_2 = 1)$  on obtient donc respectivement  $K_I$  et  $K_{II}$ .

### 1.1.2 Intégrale de domaine équivalente

Nous avons déjà abordé au chapitre 2 les problèmes liés à une intégrale de contour concernant l'intégrale de Rice. Le problème est le même ici, la contrainte éléments finis n'est pas définie à l'interface entre deux éléments. Une première solution peut consister à prendre la moyenne de la contrainte normale à l'interface entre deux éléments :

$$\sigma_{|\Gamma E_1 E_2} \equiv \frac{1}{2}(\sigma_{E_1} \cdot \underline{n} + \sigma_{E_2} \cdot \underline{n}) \quad (3.7)$$

ou bien d'appliquer une technique de lissage des contraintes localement. Ces techniques peuvent fournir de bons résultats mais elles peuvent introduire des approximations supplémentaires difficiles à contrôler. De plus, l'extracteur servant à définir le chargement du problème adjoint, il n'est pas aisé d'appliquer un effort sur un contour qui n'est pas sur la frontière du maillage, cela conduit localement à un saut du vecteur contrainte. C'est pourquoi nous proposons de transformer cette intégrale de contour en une intégrale de domaine plus cohérente vis-à-vis des champs éléments finis. C'est d'ailleurs sous cette forme qu'elle est proposée dans [Babuška 84]. On se donne une fonction  $\Phi$  continuellement dérivable sur la couronne  $C$  (cf figure 3.1) et telle que  $\Phi = 1$  sur le contour intérieur  $\Gamma_1$  et  $\Phi = 0$  sur le contour extérieur  $\Gamma_2$ . En multipliant 3.1 par la fonction  $\Phi$  et en appliquant le théorème de la divergence on obtient :

$$\begin{aligned} K_\alpha &= \int_{\Omega} Tr[\mathcal{K}\varepsilon(\Phi \underline{v}_\alpha)\varepsilon(\underline{u})] d\Omega - \int_{\Omega} Tr[(\sigma_\alpha \cdot \Phi)\varepsilon(\underline{u})] d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} (\sigma_\alpha \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{x}}) \cdot \underline{u} d\Omega \quad (3.8) \\ \alpha &= I, II \end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\mathcal{K}\varepsilon(\Phi \underline{v}_\alpha) - \sigma_\alpha \cdot \Phi = \mathcal{K} \begin{bmatrix} v_{\alpha x} \Phi_{,x} & \frac{1}{2}(v_{\alpha x} \Phi_{,y} + v_{\alpha y} \Phi_{,x}) \\ \frac{1}{2}(v_{\alpha x} \Phi_{,y} + v_{\alpha y} \Phi_{,x}) & v_{\alpha y} \Phi_{,y} \end{bmatrix} = \Sigma_\alpha \quad (3.9)$$

En notant de même :

$$\underline{f}_\alpha = -\sigma_\alpha \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{x}} \quad (3.10)$$

On retrouve l'extracteur linéaire sous sa forme canonique :

$$K_\alpha = \int_{\Omega} Tr[\Sigma_\alpha \varepsilon(\underline{u})] d\Omega + \int_{\Omega} \underline{f}_\alpha \cdot \underline{u} d\Omega \quad (3.11)$$

Il existe plusieurs manières de choisir la fonction  $\Phi$ . Le plus simple est de définir les contours  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  circulaires de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$ . On peut

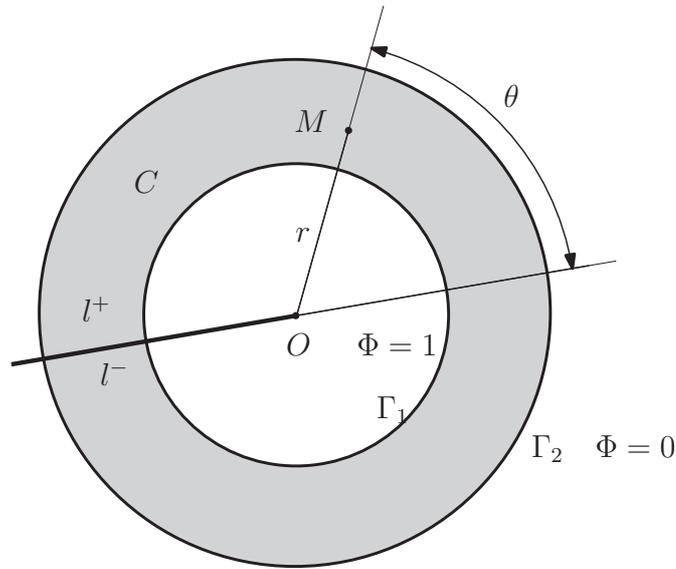


Figure 3.1: Couronne d'intégration pour l'extracteur des facteurs d'intensité de contrainte

alors choisir  $\Phi$  évoluant linéairement en fonction du rayon, ce qui revient à écrire :

$$\begin{cases} \Phi(r) = 1 & \text{si } r \leq R_1 \\ \Phi(r) = \frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ \Phi(r) = 0 & \text{si } r \geq R_2 \end{cases} \quad (3.12)$$

[Babuška 84] propose une fonction  $\Phi$  telle qu'un seul contour  $\Gamma_2$  est à définir (cela revient à prendre  $R_1 = \frac{R_2}{2}$  puis à adopter une loi de décroissance quadratique) :

$$\begin{cases} \Phi(r) = 1 & \text{si } 0 \geq r \leq \frac{R_2}{2} \\ \Phi(r) = 1 - 4\left(r - \frac{1}{2}\right)^2 & \text{si } \frac{R_2}{2} < r < R_2 \\ \Phi(r) = 0 & \text{si } r \geq R_2 \end{cases} \quad (3.13)$$

Notons que seul le gradient de la fonction  $\Phi$  intervient réellement dans le calcul. La seule véritable contrainte concernant le choix de la fonction concerne sa régularité  $\mathcal{C}^1$  sur la couronne d'intégration  $C$ . Par ailleurs, le choix d'une fonction polynomiale est mieux appropriée aux éléments finis. Il est inutile de choisir un degré trop élevé qui ne serait plus correctement représenté par la base éléments finis si celle-ci est de degré inférieur. Les deux fonctions  $\Phi$  présentées par les équations 3.12 et 3.13 répondent donc de manière positive à ces critères. Le choix de la fonction n'ayant pas d'influence sur les résultats nous choisirons par simplicité la fonction linéaire donnée par l'équation 3.12.

## 1.2 Propriétés de la technique d'extraction

### 1.2.1 Mise en œuvre numérique

Nous présentons ici la mise en œuvre numérique de cette technique d'extraction pour des problèmes de fissuration en 2D. L'objectif est d'évaluer les facteurs d'intensité de contrainte approchés par post-traitement de la solution éléments finis  $\underline{u}_h$  :

$$K_{\alpha,h} = \int_{\Omega} Tr[\Sigma_{\alpha}\varepsilon(\underline{u}_h)]d\Omega + \int_{\Omega} \underline{f}_{-\alpha} \cdot \underline{u}_h d\Omega \quad (3.14)$$

Le choix des contours  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  définissant la couronne d'intégration peut être fait en théorie de manière arbitraire. Il est bien entendu judicieux de se placer suffisamment loin de la pointe de fissure car près de la singularité la solution est de très mauvaise qualité.

Les intégrales définies par l'équation 3.14 sont déterminées par la somme des contributions par élément E de sorte que  $\forall E$  tel que  $E \cap C \neq \{\emptyset\}$  :

$$K_{\alpha,h} = \sum_E \left( \int_E Tr[\Sigma_{\alpha}\varepsilon(\underline{u}_h)]dE + \int_E \underline{f}_{-\alpha} \cdot \underline{u}_h dE \right) \quad (3.15)$$

pour les autres éléments E les contributions sont évidemment nulles puisque le gradient de  $\Phi$  est nul. Sur chaque élément on doit donc calculer :

$$\int_E Tr[\Sigma_{\alpha}([B_E] \cdot \underline{u}_N)]dE \quad (3.16)$$

et :

$$\int_E \underline{f}_{-\alpha} \cdot ([N_E] \cdot \underline{u}_N)dE \quad (3.17)$$

où  $[N_E]$  est la matrice élémentaire des fonctions d'interpolation,  $[B_E]$  la matrice élémentaire des dérivées des fonctions d'interpolation et  $\underline{u}_N$  le vecteur des inconnues nodales convergées tels que :

$$\underline{u}_{h|E} = [N_E] \cdot \underline{u}_N \quad \text{et} \quad \varepsilon(\underline{u}_{h|E}) = [B_E] \cdot \underline{u}_N$$

Une attention particulière doit être apportée à l'intégration, en effet si elle n'est pas conduite de manière pertinente elle entraîne l'introduction de nouvelles erreurs en plus de l'erreur de discrétisation commise sur  $\underline{u}_h$ . Les fonctions auxiliaires duales qui interviennent dans l'extraction ne sont pas polynomiales mais sont tout de même relativement régulières lorsqu'elles sont calculées assez loin de la singularité. L'expérience montre qu'une intégration à 16 points de Gauss par élément suffit donc pour que les erreurs d'intégration soient négligeables.

On calcule alors sur chaque élément le vecteur  $\underline{F}_E^\alpha(P_G)$  aux points de Gauss  $P_G$  tel que :

$$\underline{F}_E^\alpha(P_G) = [N_E(P_G)]^t \cdot \underline{f}_\alpha(P_G) + [B_E(P_G)]^t \cdot \underline{\Sigma}_\alpha(P_G) \quad (3.18)$$

Il reste à calculer :

$$K_{\alpha,h} = \sum_E \left( \sum_{P_G} \left( \underline{F}_E^\alpha(P_G) \right)^t \cdot \underline{u}_N \right) \quad (3.19)$$

On voit donc que la mise en œuvre numérique de la technique d'extraction malgré son apparente complexité ne comporte aucune difficulté. L'évaluation des vecteurs  $\underline{F}_E^\alpha(P_G)$  est d'un coût numérique négligeable vis-à-vis du calcul éléments finis. Ils peuvent ensuite être stockés pour être utilisés dans le problème adjoint.

### 1.2.2 Résultats numériques

On se propose d'étudier la technique d'extraction sur deux exemples couramment utilisés comme benchmarks dans la littérature. La structure considérée figure 3.2 est un solide bidimensionnel de dimensions  $w = 7$  et  $L = 16$  comportant une fissure débouchante de dimension  $a = \frac{w}{2}$ . Le matériau homogène isotrope a pour module d'Young  $E = 210GPa$  et coefficient de poisson  $\nu = 0.3$ . Le solide est soumis à ses deux extrémités à une traction uniforme  $\|\sigma \cdot \underline{n}\| = 1Pa$ . Les calculs sont réalisés avec des quadrangles à 4 nœuds, la figure 3.4 montre un exemple de maillage à 1536 éléments.

Pour cet exemple nous disposons d'une valeur analytique de  $K_I$  provenant des solutions exactes en milieu infini auxquelles sont apportées des termes correctifs :

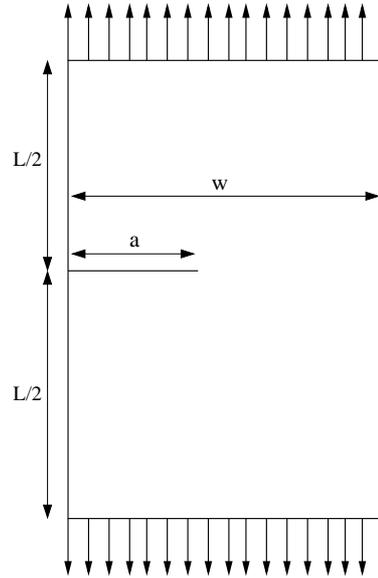
$$K_I = Y \cdot \sigma \sqrt{a} \quad \text{avec :} \\ Y = 1,99 - 0,41 \frac{a}{w} + 18,7 \left( \frac{a}{w} \right)^2 - 38,48 \left( \frac{a}{w} \right)^3 + 53,85 \left( \frac{a}{w} \right)^4 \quad (3.20)$$

a : longueur de fissure

w : largeur du solide

Cette expression donne pour valeur :  $K_I = 9.3833$ . Cette solution analytique n'est cependant pas une solution exacte. Nous considérons un maillage très fin d'environ 100 000 éléments, les quantités peuvent être considérées comme convergées : on obtient  $K_I = 9.3335$ , ce qui représente une erreur de 0.37% par rapport à la valeur analytique.

Le deuxième exemple figure 3.3 est le même que le premier avec un chargement en mode mixte : la base du solide est encastrée alors que l'autre extrémité

Figure 3.2: Problème test en mode  $I$ .

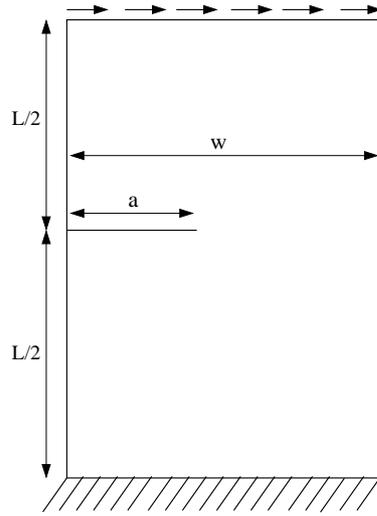
est soumise à une contrainte de cisaillement homogène  $\tau = 1Pa$ . Le maillage à 100 000 éléments permet de déterminer  $K_I = 33.93$  et  $K_{II} = 4.53$ , ce qui représente une erreur de 0.21% et 0.89% par rapport aux valeurs de référence fournies dans [Stern 76] ( $K_I = 34$  et  $K_{II} = 4.49$ ).

Le tableau 3.1 montre l'influence de la taille de la couronne d'intégration pour un maillage à 1536 éléments : on observe un écart maximum de 0.56% sur  $K_I$  et de 0.91% sur  $K_{II}$ . Le tableau 3.2 permet de mesurer l'influence de la position du contour d'intégration pour une taille de couronne à peu près équivalente : on note un écart maximum de 0.47% sur  $K_I$  et de 1.6% sur  $K_{II}$

$R_1$	$R_2$	$K_I$ mode $I$	$K_I$ mode mixte	$K_{II}$ mode mixte
2.	3.	8.9545	32.5245	4.3953
2.2	2.8	8.9300	32.4391	4.3551
2.4	2.6	8.9932	32.6205	4.3764

Tableau 3.1: Influence de la taille de la couronne d'intégration à 1536 éléments.

En conclusion, il apparaît que l'extracteur mis en place fournit des résultats d'une précision très satisfaisante, on montre de plus que les calculs sont relativement indépendants de la taille et de la position du contour d'intégration.

Figure 3.3: Problème test en mode  $I$  et  $II$ .

$R_1$	$R_2$	$K_I$ mode $I$	$K_I$ mode mixte	$K_{II}$ mode mixte
2.	3.	8.9545	32.5245	4.3953
1.	2.	8.9378	32.4647	4.3904
2.2	2.8	8.9300	32.4391	4.3551
1.2	1.8	8.8878	32.3067	4.4262

Tableau 3.2: Influence de la position de la couronne d'intégration à 1536 éléments.

## 2 Estimation de l'erreur sur les facteurs d'intensité de contrainte

La technique d'extraction étant parfaitement définie, nous abordons à présent l'estimation d'erreur pour les quantités extraites  $K_{I,h}$  et  $K_{II,h}$ . On utilise l'erreur en relation de comportement exposée au premier chapitre pour calculer l'erreur globale sur le problème à résoudre et le problème adjoint.

### 2.1 Résolution du problème adjoint

Le problème adjoint à résoudre (voir l'équation 1.51) est défini par : trouver un couple solution  $(\tilde{\underline{u}}_h, \tilde{\sigma}_h)$

- $\tilde{\underline{u}}_h$  est cinématiquement admissible à 0 ( $CA_0$ )

$$\tilde{\underline{u}}_h \in \mathcal{U}_{h,0} \quad \tilde{\underline{u}}_h|_{\partial_1\Omega} = \underline{0} \quad (3.21)$$

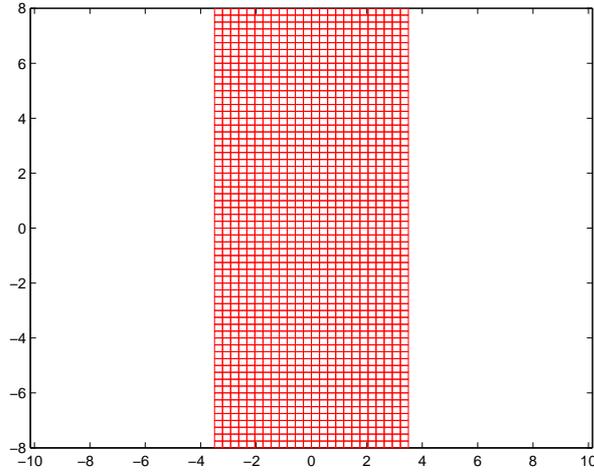


Figure 3.4: maillage conforme à 1536 éléments.

- $\tilde{\sigma}_h$  vérifie l'équilibre au sens éléments finis :

$$\tilde{\sigma}_h \in \mathcal{S}_h \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{h,0}$$

$$\int_{\Omega} \text{Tr}[\tilde{\sigma}_h \varepsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} \text{Tr}[\Sigma_{\alpha} \varepsilon(\underline{u}^*)] d\Omega + \int_{\Omega} \underline{f}_{\alpha} \cdot \underline{u}^* d\Omega \quad (3.22)$$

- $(\tilde{\underline{u}}_h, \tilde{\sigma}_h)$  vérifie la relation de comportement :

$$\tilde{\sigma}_h = \mathbf{K} \varepsilon(\tilde{\underline{u}}_h) \quad \forall M \in \Omega \quad (3.23)$$

Le chargement du problème adjoint revient donc à appliquer une précontrainte  $\Sigma_{\alpha}$  et un effort de volume  $\underline{f}_{\alpha}$  dans les éléments inclus dans la couronne  $C$  ou, coupés par la couronne  $\bar{C}$ . L'application de cet effort est réalisée avec les vecteurs  $\underline{F}_E^{\alpha}(P_G)$  déjà calculés pour l'évaluation des facteurs d'intensité de contrainte et qui permettent de déterminer facilement l'effort généralisé. Notons qu'il faut résoudre un problème adjoint par mode. Si l'on veut estimer l'erreur pour  $K_{Ih}$  et pour  $K_{IIh}$  il faudra donc résoudre un problème adjoint pour  $\alpha = I$  et un problème adjoint pour  $\alpha = II$ . On trace sur la figure 3.5 les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{yy}$  pour le problème adjoint en mode  $I$  avec le maillage représenté sur la figure 3.4 pour une couronne  $C$  telle que  $R_1 = 2$ . et  $R_2 = 3$ . On fait de même sur la figure 3.6 pour le mode  $II$ .

*Remarque :* la prise en compte de l'effort de volume  $\underline{f}_{\alpha}$  dans la reconstruction des champs admissibles est naturelle, elle l'est moins pour la précontrainte

$\Sigma_\alpha$ . Dans ce cas on intervient sur la condition de prolongement 1.29 en soustrayant  $\Sigma_\alpha$  à  $\tilde{\sigma}_h$ .  $\Sigma_\alpha$  est ensuite ajouté au champ équilibré à  $\hat{\tilde{\sigma}}$ .

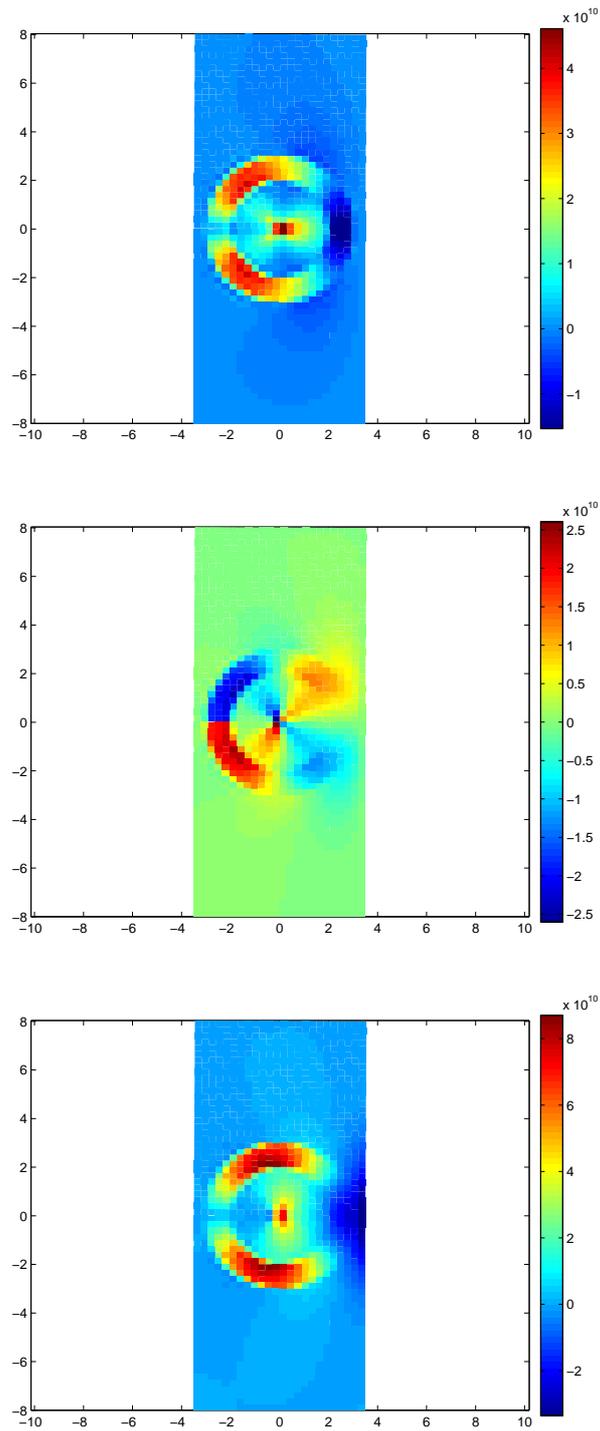


Figure 3.5:  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$  pour problème adjoint  $I$ , 1536 éléments.

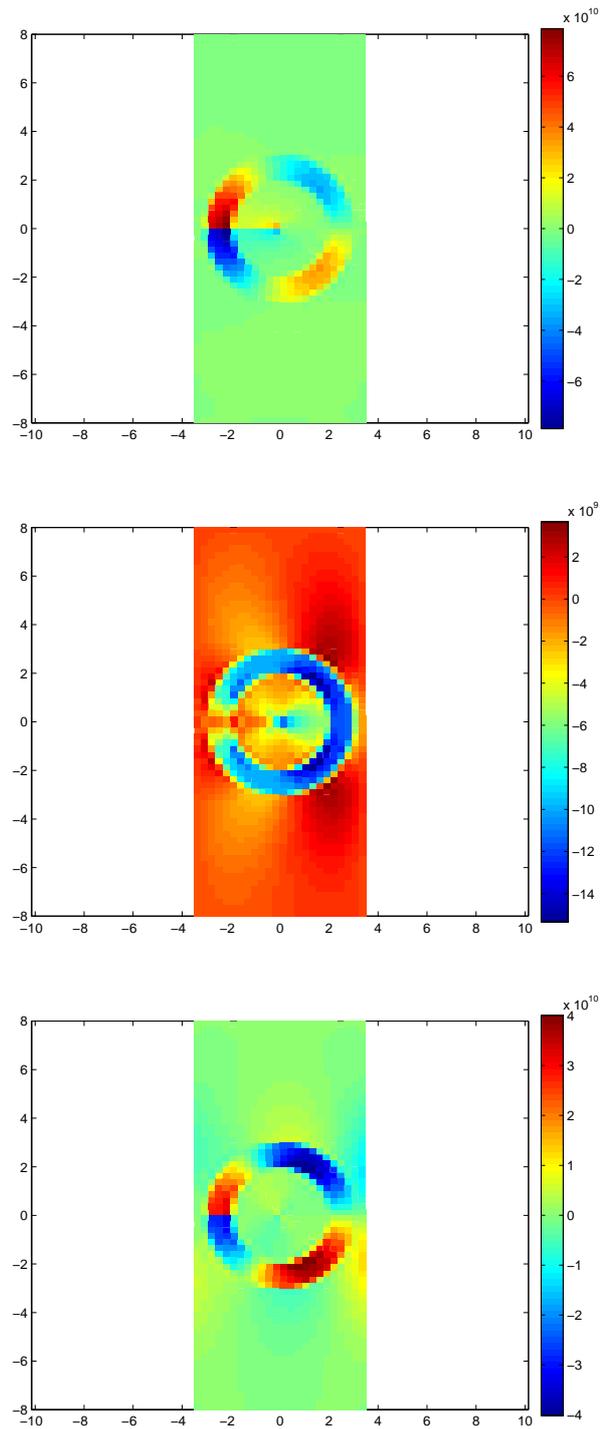


Figure 3.6:  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$  pour problème adjoint *II*, 1536 éléments.

## 2.2 Un premier encadrement

On se propose de valider la méthode avec les deux exemples figure 3.2 pour le mode  $I$  et figure 3.3 pour les modes  $I$  et  $II$  (mode mixte). Les calculs sont menés sur des éléments standards de type quadrangles à 4 nœuds. La procédure de reconstruction des champs admissibles est la reconstruction standard décrite dans le premier chapitre pour l'erreur en relation de comportement, et développée dans [Rougeot 89]. On trace sur la figure 3.7 les cartes

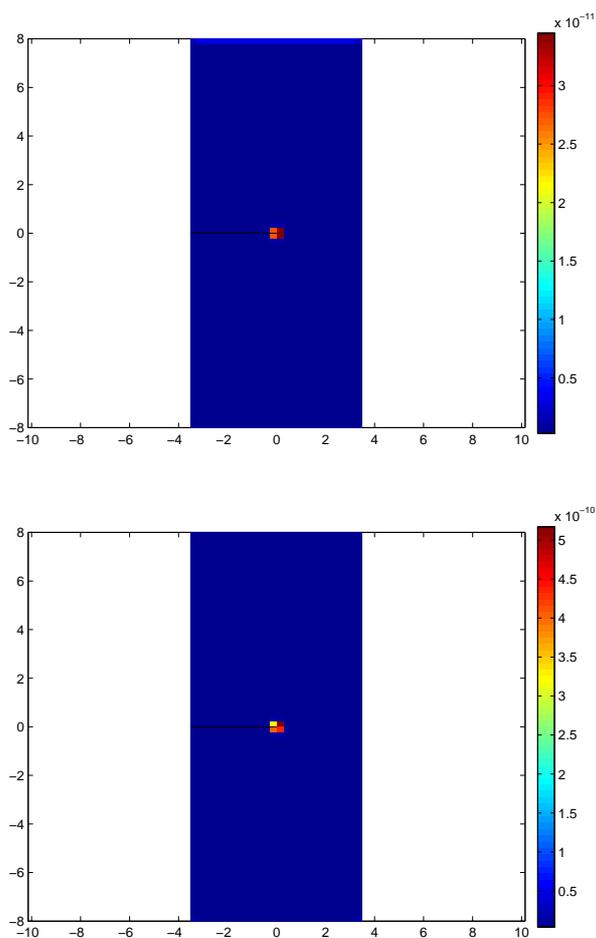


Figure 3.7: Cartes d'erreur en mode  $I$  et mode mixte , 1536 éléments.

d'erreur respectivement pour le problème à résoudre en mode  $I$  et le problème à résoudre en mode mixte. On retrouve bien la concentration d'erreur dans les éléments situés en pointe de fissure comme l'on peut s'y attendre.

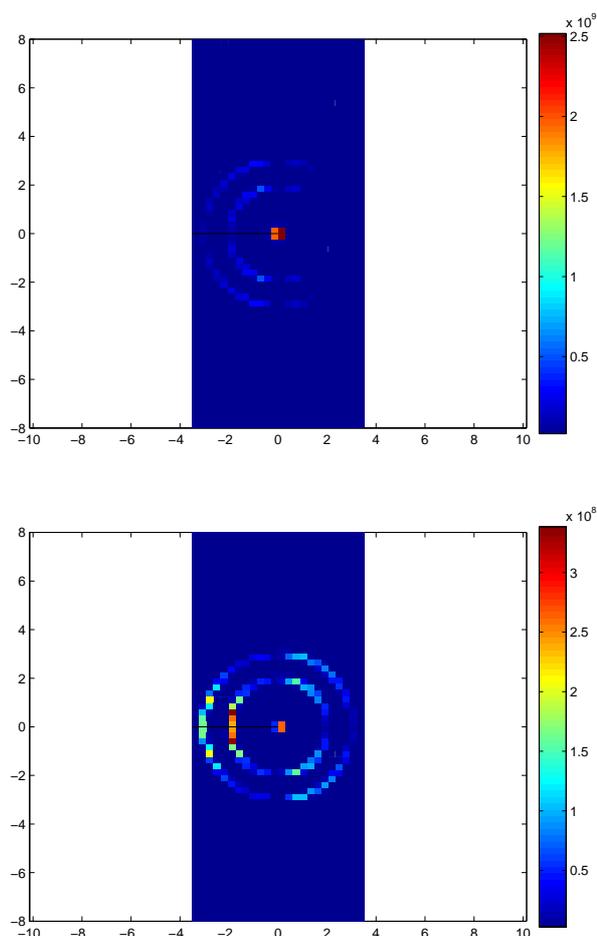


Figure 3.8: Cartes d'erreur pour les problèmes adjoint *I* et *II*, 1536 éléments.

La figure 3.8 représente les cartes d'erreur respectivement pour les problèmes adjoint en mode *I* et en mode *II*. On observe là encore que l'erreur est concentrée essentiellement en point de fissure. Le chargement n'introduit pas beaucoup d'erreur en mode *I*. En mode *II*, on constate que le chargement adjoint conduit à une erreur localisée dans les éléments bordant la couronne *C*, cette erreur peut même devenir localement importante.

Le tableau 3.3 donne à titre d'information les erreurs globales relatives définies par l'équation 1.24 pour le problème à résoudre en mode *I* et pour le problème adjoint associé. Le tableau 3.4 donne les erreurs globales relatives pour le mode *II* (l'erreur pour le problème adjoint en mode *I* est la même puisqu'il s'agit des mêmes maillages que pour le problème en mode *I*). La

figure 3.9 permet de comparer les comportements à convergence des différentes erreurs globales. Notons que les taux de convergence sont équivalents pour les quatre problèmes, celui-ci étant piloté par la singularité géométrique de la fissure. Ce graphique montre que le chargement spécifique du problème adjoint (une précontrainte et une force de volume appliquées localement) n'induit pas de singularité dans le calcul d'erreur malgré la forme particulière des fonctions duales.

nombre d'éléments	erreur globale relative problème à résoudre	erreur globale relative problème adjoint mode $I$
96	30.88%	31.40%
384	23.47%	22.27%
864	19.66%	18.43%
1536	17.25%	16.13%
3456	14.28%	13.25%
6144	12.45%	11.61%

Tableau 3.3: Erreurs globales relatives pour le problème standard en mode  $I$ .

nombre d'éléments	erreur globale relative problème à résoudre	erreur globale relative problème adjoint mode $II$
96	26.01%	34.94%
384	19.40%	21.28%
864	16.14%	17.17%
1536	14.11%	14.93%
3456	11.63%	12.09%
6144	10.12%	10.75%

Tableau 3.4: Erreurs globales relatives pour le problème standard en mode  $II$ .

On établit les bornes pour  $K_{I,h}$  à partir de l'expression 1.57. On donne dans le tableau 3.5 les valeurs de  $K_{I,h}$  ainsi que les bornes supérieures  $K_{I,h}^+$  et inférieures  $K_{I,h}^-$  obtenues en mode  $I$ .

Les tableaux 3.6 et 3.7 donnent respectivement les valeurs de  $K_{I,h}$  et  $K_{II,h}$  ainsi que les bornes supérieures et inférieures correspondantes obtenues en mode mixte.

On voit que ces premiers résultats pour une implantation classique de l'erreur fournissent déjà de bons encadrements pour  $K_{I,h}$  et ce, même pour des maillages relativement grossiers : pour une valeur de référence  $K_I = 9.33$ , on obtient  $7.1194 \leq K_{I,h} = 8.7439 \leq 10.3684$  avec 864 éléments en mode  $I$  pur. Les bornes s'affinent notablement avec le maillage :  $8.5081 \leq K_{I,h} = 9.1456 \leq$

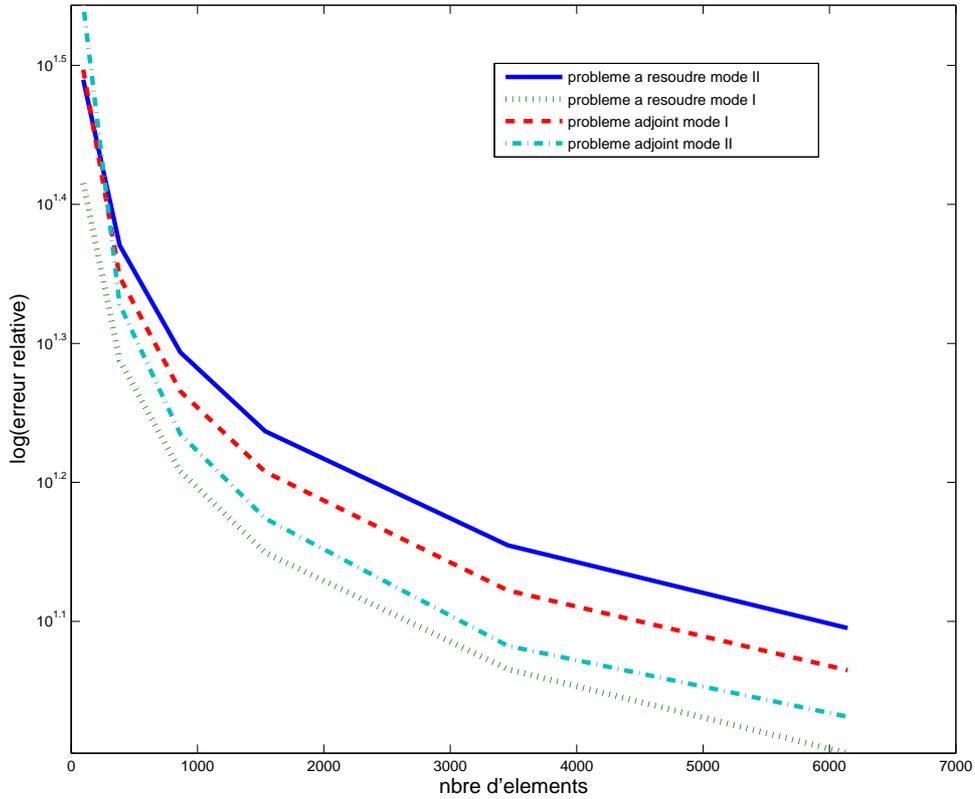


Figure 3.9: Convergence des erreurs globales relatives pour les problèmes à résoudre et les problèmes adjoints.

nombre d'éléments	$K_{I,h}$	$\sum_E 2.e_{RDC,E}.\tilde{e}_{RDC,E}$	$K_{I,h}^-$	$K_{I,h}^+$
96	7.7039	4.2251	3.4788	11.9290
384	8.5875	2.3928	6.1947	10.9803
864	8.7439	1.6245	7.1194	10.3684
1536	8.9545	1.2502	7.7043	10.2047
3456	9.0552	0.8422	8.2130	9.8974
6144	9.1456	0.6375	8.5081	9.7831

Tableau 3.5: Bornes pour  $K_{I,h}$  pour le problème standard en mode  $I$ .

9.7831 pour 6144 éléments en mode  $I$  pur. On constate les même propriétés en mode mixte pour  $K_{1,h}$ . En revanche les résultats pour  $K_{II,h}$  ne sont pas

nombre d'éléments	$K_{I,h}$	$\sum_E 2.e_{RDC,E} \cdot \tilde{e}_{RDC,E}$	$K_{I,h}^-$	$K_{I,h}^+$
96	27.6400	16.2514	11.3886	43.8914
384	31.0560	9.0193	22.0367	40.0753
864	31.7528	6.0797	25.6731	37.8325
1536	32.5245	4.6594	27.8651	37.1839
3456	32.9088	3.1257	29.7831	36.0345
6144	33.2362	2.3610	30.8752	35.5972

Tableau 3.6: Bornes pour  $K_{I,h}$  pour le problème standard en mode mixte.

nombre d'éléments	$K_{II,h}$	$\sum_E 2.e_{RDC,E} \cdot \tilde{e}_{RDC,E}$	$K_{II,h}^-$	$K_{II,h}^+$
96	3.9380	8.3560	-4.4180	12.2940
384	4.2210	3.2386	0.9824	7.4596
864	4.4826	2.0209	2.4617	6.5035
1536	4.3953	1.4457	2.9496	5.8410
3456	4.5484	0.9138	3.6346	5.4622
6144	4.4708	0.6578	3.8130	5.1286

Tableau 3.7: bornes pour  $K_{II,h}$  pour le problème standard en mode mixte.

très satisfaisants, les bornes restent trop larges et nécessitent un raffinement important du maillage pour devenir pertinentes.

*Remarque* : nous avons présenté dans ce paragraphe les résultats pour l'erreur en relation de comportement standard pour des quadrangles à 4 nœuds. Des résultats pour les triangles à 6 nœuds utilisant la même technique ont été publiés dans [Gallimard 06] avec les mêmes conclusions. Dans cet article, les calculs éléments finis étaient menés sous CAST3M et le calcul d'erreur était post-traité sous FORTRAN. Les résultats présentés ici sont tous réalisés sur un même code éléments finis-post traitement de l'erreur utilisant le logiciel MATLAB (la partie éléments finis a été codée dans le cadre d'une thèse par P.A. Guidault [Guidault 05]).

## 2.3 Amélioration de l'encadrement

Nous allons chercher dans cette section à améliorer les encadrements obtenus dans la section précédente. Nous proposons pour cela deux démarches. La première consiste à utiliser l'optimisation des densités en équilibre exposée au premier chapitre. La seconde consiste à utiliser une nouvelle expression des bornes pour les quantités d'intérêt n'utilisant plus la propriété d'orthogonalité de Galerkin.

### 2.3.1 Optimisation locale des densités

Nous utilisons ici la technique d'optimisation des densités introduite dans [Ladevèze 97] et dont le principe a été donné dans le premier chapitre. Elle présente un intérêt particulier pour les problèmes où l'on trouve de forts gradients mais devient rapidement très coûteuse, c'est pourquoi nous ne l'appliquons que sur un patch d'éléments proche de la pointe de fissure. Sélectionner deux couches d'éléments dans le sens du rayon autour de la pointe de fissure suffit en pratique. Dans les exemples qui suivent nous avons appliqué l'optimisation pour tous les éléments compris dans une zone circulaire de rayon  $r_{opti}$  telle que :  $r_{opti} \leq 0.5$ . Cette dimension a été choisie de manière expérimentale pour optimiser le rapport entre le coût de calcul et le gain sur la qualité de l'estimateur. Le fait de garder la taille de cette zone constante permet de garder un taux de convergence optimal. D'autre part le nombre d'éléments optimisés étant faible, le temps de calcul de l'erreur est peu affecté. L'optimisation est menée à la fois pour le problème à résoudre et pour le ou les problèmes adjoints.

On mène à nouveau les calculs sur les deux cas tests des figures 3.2 et 3.3. Le tableau 3.8 donne les bornes pour  $K_{I,h}$  en mode  $I$ . Les tableaux 3.9 et 3.10 donnent les bornes pour  $K_{I,h}$  et  $K_{II,h}$  en mode mixte. L'optimisation améliore de façon non négligeable la qualité des résultats mais les bornes restent trop larges pour le mode  $II$ .

L'optimisation des densités améliore le calcul des champs statiquement admissibles dans les zones singulières. Les figures 3.10 et 3.11 comparent les indices d'effectivité en mode mixte pour  $K_I$  et  $K_{II}$  en fonction de  $1/h$ ,  $h$  désignant la taille de maille. On retrouve bien une amélioration de l'effectivité dans le cas des densités optimisées comme pour l'erreur globale. On remarque bien cependant qu'elle n'est pas aussi prononcée pour  $K_{II}$  que pour  $K_I$ . D'autre part, l'évolution de l'effectivité est beaucoup moins monotone dans le cas de  $K_{II}$ , elle présente la même allure dans le cas optimisé et dans le cas standard. Ceci provient de l'erreur introduite par le chargement du problème adjoint en mode  $II$ .

nombre d'éléments	$K_{I,h}$	$\sum_E 2 \cdot e_{RDC,E} \cdot \tilde{e}_{RDC,E}$	$K_{I,h}^-$	$K_{I,h}^+$
96	7.7039	3.3245	4.3799	11.0284
384	8.5875	1.6940	6.8935	10.2815
864	8.7439	1.0504	7.6935	9.7934
1536	8.9545	0.7234	8.2311	9.6779
3456	9.0552	0.4486	8.6066	9.5038
6144	9.1456	0.3216	8.8240	9.4672

Tableau 3.8: Bornes pour  $K_{I,h}$  pour le problème standard avec densités optimisées en mode  $I$ .

nombre d'éléments	$K_{I,h}$	$\sum_E 2.e_{RDC,E}.\tilde{e}_{RDC,E}$	$K_{I,h}^-$	$K_{I,h}^+$
96	27.6400	13.1608	14.4792	40.8008
384	31.0560	6.5050	24.5510	37.5610
864	31.7528	3.9914	27.7614	35.7442
1536	32.5245	2.7363	29.7882	35.2608
3456	32.9088	1.6846	31.2242	34.5934
6144	33.2362	1.2035	32.0327	34.4397

Tableau 3.9: Bornes pour  $K_{I,h}$  pour le problème standard avec densités optimisées en mode  $II$ .

nombre d'éléments	$K_{II,h}$	$\sum_E 2.e_{RDC,E}.\tilde{e}_{RDC,E}$	$K_{II,h}^-$	$K_{II,h}^+$
96	3.9380	7.3938	-3.4558	11.3318
384	4.2210	2.6099	1.6111	6.8309
864	4.4826	1.5112	2.9714	5.9938
1536	4.3953	0.9916	3.4037	5.3869
3456	4.5484	0.5726	3.9758	5.1210
6144	4.4708	0.3886	4.0822	4.8594

Tableau 3.10: Bornes pour  $K_{II,h}$  pour le problème standard avec densités optimisées en mode  $II$ .

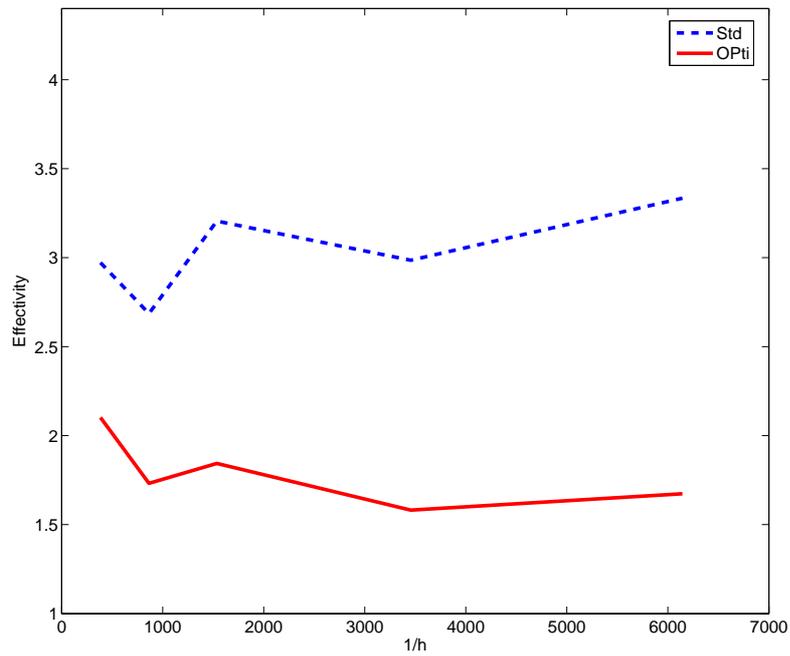


Figure 3.10: Comparaison des indices d'efficacité entre densités standards et optimisées, mode mixte pour  $K_I$ .

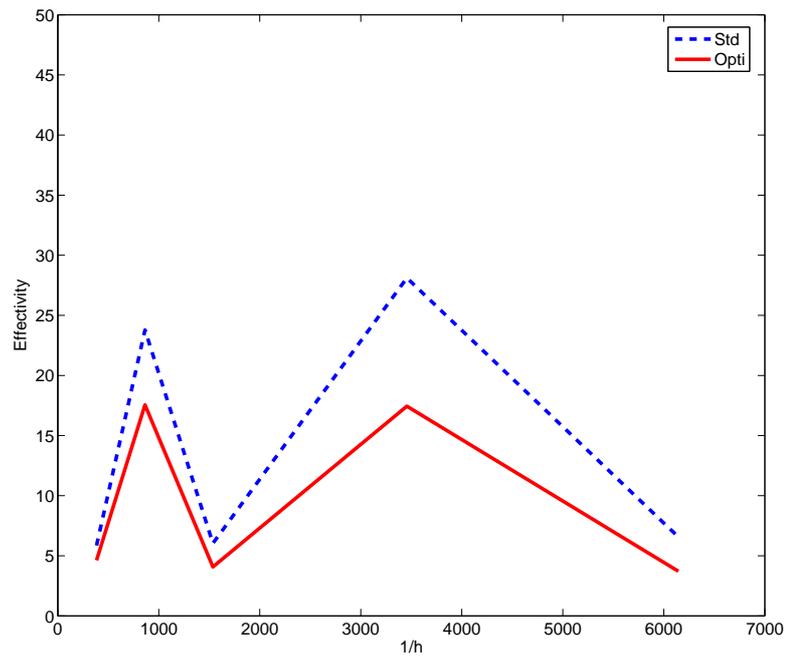


Figure 3.11: Comparaison des indices d'efficacité entre densités standards et optimisées, mode mixte pour  $K_{II}$ .

### 2.3.2 Nouvelles bornes pour les quantités d'intérêt

Nous allons à présent utiliser les nouvelles bornes introduites dans [Ladevèze 06] tout en conservant l'optimisation des densités sur le patch d'éléments défini précédemment. Une amélioration peut être obtenue en utilisant la borne supérieure :

$$|I - I_h - I_{hh}| \leq e_{RDC} \cdot \tilde{e}_{RDC} \quad (3.24)$$

avec :

$$\begin{aligned} I_{hh} &= \int_{\Omega} Tr[(\hat{\sigma} - \mathcal{K}\varepsilon(\hat{\underline{u}}))\mathcal{K}^{-1}(\tilde{\sigma}^*)]d\Omega + \int_{\Omega} Tr[\Sigma_{\sigma}\mathcal{K}^{-1}(\sigma_h - \mathcal{K}\varepsilon(\hat{\underline{u}}))]d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \tilde{\underline{f}}_{\Sigma} \cdot (\underline{u}_h - \hat{\underline{u}})d\Omega \end{aligned} \quad (3.25)$$

*Preuve dans le cas général :*

$$\begin{aligned} I - I_h &= \int_{\Omega} Tr[\Sigma_{\sigma}\mathcal{K}^{-1}(\sigma_{ex} - \sigma_h)]d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\underline{f}}_{\Sigma} \cdot (\underline{u}_{ex} - \underline{u}_h)d\Omega \\ I - I_h &= \int_{\Omega} Tr[\Sigma_{\sigma}\mathcal{K}^{-1}(\sigma_{ex} - \hat{\sigma})]d\Omega + \int_{\Omega} Tr[\Sigma_{\sigma}\mathcal{K}^{-1}(\hat{\sigma} - \sigma_h)]d\Omega + \\ &\int_{\Omega} \tilde{\underline{f}}_{\Sigma} \cdot (\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}})d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\underline{f}}_{\Sigma} \cdot (\hat{\underline{u}} - \underline{u}_h)d\Omega \\ &= \int_{\Omega} Tr[\Sigma_{\sigma}\mathcal{K}^{-1}(\sigma_{ex} - \mathcal{K}\varepsilon(\hat{\underline{u}}))]d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\underline{f}}_{\Sigma} \cdot (\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}})d\Omega - \\ &\left( \int_{\Omega} Tr[\Sigma_{\sigma}\mathcal{K}^{-1}(\sigma_h - \mathcal{K}\varepsilon(\hat{\underline{u}}))]d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\underline{f}}_{\Sigma} \cdot (\underline{u}_h - \hat{\underline{u}})d\Omega \right) \end{aligned}$$

en introduisant le problème adjoint (équation : 1.51 du premier chapitre) on obtient :

$$\begin{aligned} I - I_h &= \int_{\Omega} Tr[(\sigma_{ex} - \mathcal{K}\varepsilon(\hat{\underline{u}}))\mathcal{K}^{-1}(\hat{\hat{\sigma}} - \mathcal{K}\varepsilon(\hat{\underline{u}}))]d\Omega + \\ &\int_{\Omega} Tr[(\hat{\sigma} - \mathcal{K}\varepsilon(\hat{\underline{u}}))\varepsilon(\hat{\underline{u}})]d\Omega - \\ &\left( \int_{\Omega} Tr[\Sigma_{\sigma}\mathcal{K}^{-1}(\sigma_h - \mathcal{K}\varepsilon(\hat{\underline{u}}))]d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\underline{f}}_{\Sigma} \cdot (\underline{u}_h - \hat{\underline{u}})d\Omega \right) \end{aligned}$$

enfin, le théorème de Prager-Syngé (équation 1.26) permet d'obtenir en introduisant l'équation 1.27 :

$$I - I_h - I_{hh} = \int_{\Omega} Tr[(\sigma_{ex} - \mathcal{K}\varepsilon(\hat{\underline{u}}))\mathcal{K}^{-1}(\hat{\hat{\sigma}} - \mathcal{K}\varepsilon(\hat{\underline{u}}))]d\Omega$$

En pratique on peut donc obtenir les bornes pour les quantités d'intérêts :

$$I_h^+ = I_h + |I_{hh}| + e_{cre} \cdot \tilde{e}_{cre} \quad (3.26)$$

$$I_h^- = I_h - |I_{hh}| - e_{cre} \cdot \tilde{e}_{cre} \quad (3.27)$$

Dans notre cas seul le premier terme de  $I_{hh}$  intervient car  $\hat{u} = \underline{u}_h$ . Le terme  $I_{hh}$  est de faible influence et tend vers 0 plus ou moins rapidement selon les problèmes traités. On peut donc obtenir un encadrement jusqu'à deux fois meilleur. Une autre façon de voir les choses est de considérer  $I_{hh}$  comme une correction apportée à  $I_h$ , auquel cas on peut directement écrire :

$$I_h + I_{hh} - e_{cre} \cdot \tilde{e}_{cre} \leq I \leq I_h + I_{hh} + e_{cre} \cdot \tilde{e}_{cre} \quad (3.28)$$

Ceci fournit directement un encadrement de la valeur exacte qui peut être meilleur que l'encadrement réalisé sur la valeur approchée. On utilise cette dernière expression (équation 3.28) pour établir des bornes pour  $K_I$  en mode  $I$  (tableau 3.11) et mode mixte (tableau 3.12) et pour  $K_{II}$  (tableau 3.12).

nombre d'éléments	$K_{I,h} + K_{I,hh}$	$K_{I,h}^-$	$K_{I,h}^+$
96	8.9250	7.2628	10.58722
384	9.3264	8.4794	10.1734
864	9.2191	8.6939	9.7443
1536	9.2338	8.9221	9.6455
3456	9.2645	9.0402	9.488
6144	9.3426	9.1368	9.4584

Tableau 3.11: Bornes pour  $K_I$  (nouvel encadrement) pour le problème standard avec densités optimisées en mode  $I$ .

nombre d'éléments	$K_{I,h} + K_{I,hh}$	$K_{I,h}^-$	$K_{I,h}^+$
96	32.4199	14.4792	39.0003
384	33.8451	30.5926	37.0976
864	33.5275	31.532	35.523
1536	33.7475	32.380	35.115
3456	33.6810	32.839	34.523
6144	33.7950	33.193	34.397

Tableau 3.12: Bornes pour  $K_I$  (nouvel encadrement) pour le problème standard avec densités optimisées en mode  $II$ .

Nous obtenons donc ici d'excellents résultats tant pour le mode  $I$  que pour le mode  $II$  même pour des maillages très grossiers. On constate qu'il n'est

nombre d'éléments	$K_{II,h} + K_{II,hh}$	$K_{II,h}^-$	$K_{II,h}^+$
96	4.1362	0.4393	7.8331
384	4.8460	4.0411	5.6509
864	4.5589	3.8033	5.3145
1536	4.4492	3.9534	4.9450
3456	4.5830	4.2967	4.8693
6144	4.4961	4.3018	4.6904

Tableau 3.13: Bornes pour  $K_{II}$  (nouvel encadrement) pour le problème standard avec densités optimisées en mode  $II$ .

pas nécessaire de mailler très fin pour obtenir une très bonne approximation  $K_{\alpha,h} + K_{\alpha,hh}$  avec un encadrement très fin. Nous comparons sur les graphiques 3.12, 3.13 et 3.14 les bornes pour les trois encadrements testés. On note  $K_{\alpha,std}$  la borne pour l'encadrement standard,  $K_{\alpha,opti}$ , la borne pour l'encadrement avec densités optimisées,  $K_{\alpha,ne}$  la borne utilisant le nouvel encadrement donné par l'équation 3.28.

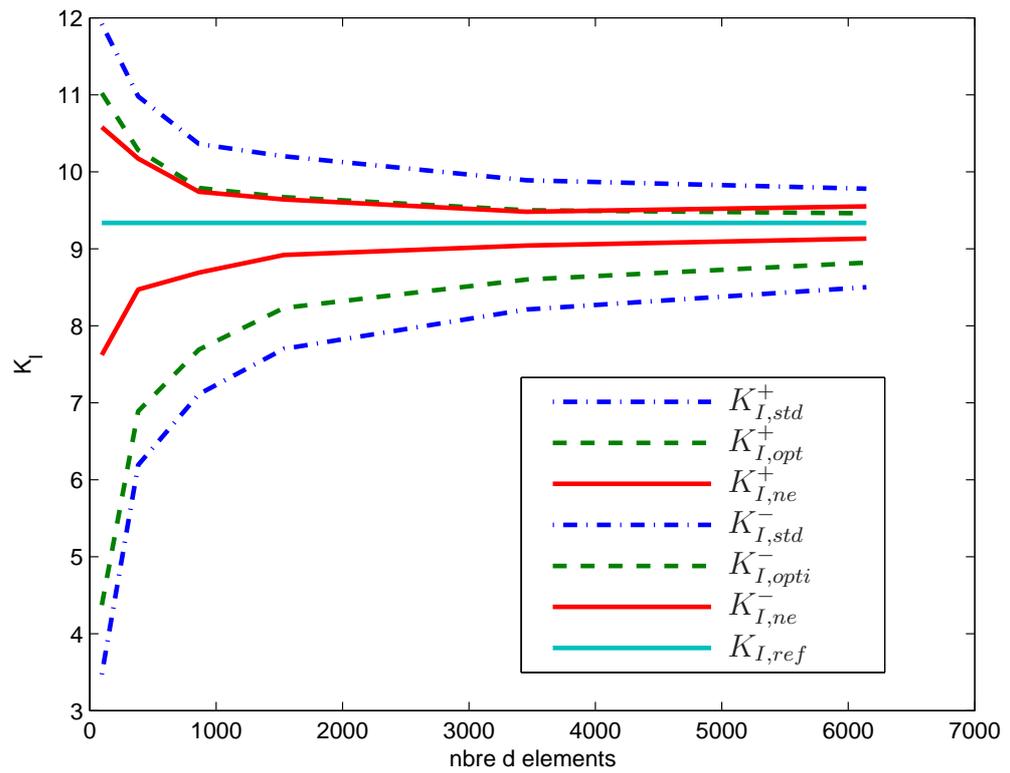
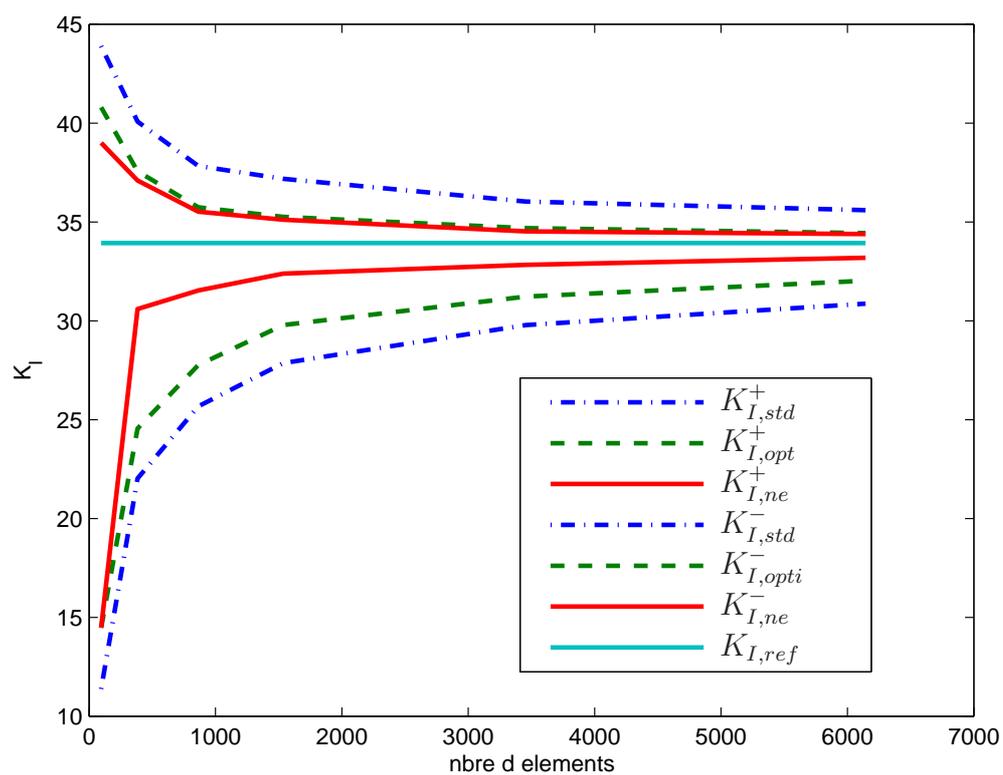
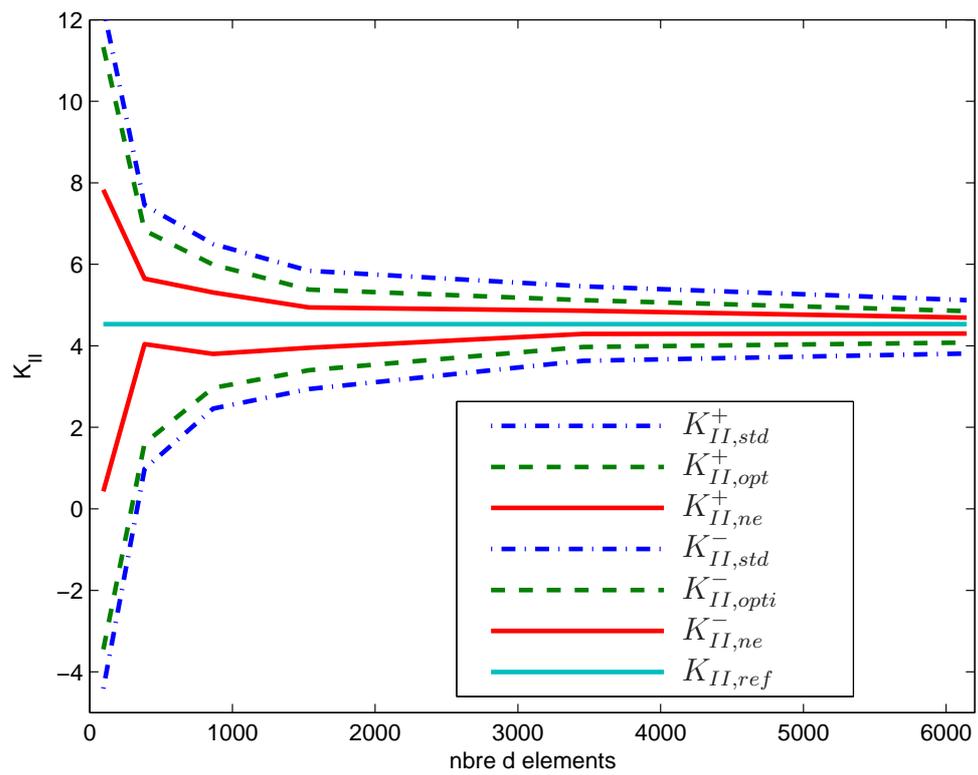


Figure 3.12: Comparaison des bornes pour  $K_I$  en mode  $I$ .

Figure 3.13: Comparaison des bornes pour  $K_I$  en mode II.

Figure 3.14: Comparaison des bornes pour  $K_{II}$  en mode  $II$ .

### 3 bilan

L'extraction des facteurs d'intensité de contrainte utilisant les fonctions duales apparaît finalement simple à mettre en œuvre dès lors que son expression analytique est connue. Il suffit de déterminer les efforts généralisés sur les éléments concernés par l'intégrale de domaine. Cette technique ne requiert aucun traitement particulier de la solution éléments finis. Les résultats obtenus avec cette technique sont très bons sans avoir à raffiner exagérément le maillage, notamment en pointe de fissure. La détermination des facteurs d'intensité de contrainte est très peu dépendante de la taille et de la position du domaine d'intégration.

La définition du problème adjoint et sa mise en œuvre se fait naturellement avec les efforts généralisés calculés lors de l'extraction. L'utilisation conjointe de l'optimisation des densités et des bornes définies dans [Ladevèze 97] fournissent des bornes garanties et de qualité même pour des maillages grossiers. La technique proposée dans ce chapitre répond donc de manière positive à la problématique que nous nous étions posée. Son aspect totalement *non-intrusif* la rend aisée à implanter sur tout type de code éléments finis.



---

# Traitement du problème de fissuration avec la XFEM

*Ce chapitre présente les caractéristiques de la modélisation d'une fissure par la XFEM. On y présente les enrichissements utilisés et leur mise en œuvre numérique. On aborde ensuite les différentes sources d'erreurs inhérentes à une telle modélisation.*

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Modélisation de la fissure par la XFEM . . . . .</b>	<b>80</b>
1.1	Partition de l'unité . . . . .	80
1.2	Modélisation d'une fissure par la XFEM . . . . .	83
1.3	Implantation . . . . .	86
<b>2</b>	<b>Qualité de la solution XFEM . . . . .</b>	<b>87</b>
<b>3</b>	<b>Bilan . . . . .</b>	<b>92</b>

---

# 1 Modélisation de la fissure par la XFEM

La modélisation de la propagation d'une fissure par éléments finis pose deux problèmes majeurs. Le premier est lié au fait que les champs de déplacement éléments finis classiques ne peuvent pas prendre en charge la discontinuité, ce qui contraint la fissure à se propager sur le bord des éléments. Le maillage doit donc être *conforme* à la fissure. Ceci suppose un remaillage à chaque pas de propagation. Le deuxième problème est lié à la singularité de la solution élastique en pointe de fissure qui n'est là encore, pas bien représentée par les champs éléments finis. Pour tenter de limiter l'erreur due à la singularité, on est contraint de mailler très finement la pointe de fissure ou bien d'utiliser des éléments spéciaux avec un rapport efficacité/coût relativement faible. L'idée est donc d'enrichir la base d'interpolation éléments finis afin de tenter de résoudre ces deux problèmes. La partition de l'unité (PUM) introduite dans [Melenk 96] propose une méthode pour augmenter l'espace d'approximation de la solution éléments finis et a donné naissance à la méthode des éléments finis étendus (XFEM) ([Belytschko 99] et [Moës 99]) et à la méthode des éléments finis généralisés (GFEM) ([Strouboulis 00a]). La première, qui fait l'objet de ce chapitre est directement consacrée aux problèmes de fissuration, la seconde permet de prendre en compte de manière générale la connaissance a priori de solutions locales. Cette solution peut être analytique ou bien provenir d'un problème spécifique avec un maillage très fin, de manière générale on parle de solution *handbook*. On peut également citer l'approche des fortes discontinuités (SDA) de [Oliver 00] qui permet de prendre en compte le saut de déplacement.

## 1.1 Partition de l'unité

L'objectif de la mise en place de la partition de l'unité par [Melenk 96] est l'enrichissement local de la solution éléments finis à l'aide de la solution analytique connue. Pour certains problèmes engendrant des solutions non régulières par exemple, la base polynomiale utilisée pour les éléments finis s'avère être inadaptée. Dans ce cas, le raffinement du maillage, que ce soit dans sa version  $h$  ou  $p$  permet difficilement d'approcher la solution. Si l'on connaît localement la forme de la solution sous une forme analytique, il est donc intéressant de pouvoir l'introduire dans l'espace d'approximation.

On considère le domaine d'étude  $\Omega$  dont le recouvrement est réalisé par un ensemble d'ouverts  $\mathcal{T} = \{\Omega_i\}_{i \in I}$ . Chaque  $\Omega_i$  peut recouvrir une partie de ses voisins. On dit alors qu'un ensemble de fonction  $\{\phi_i\}_{i \in I}$  définies sur les  $\Omega_i$  forment sur  $\Omega$  une partition de l'unité associée à la partition  $\mathcal{T}$  si il verifie :

$$\sum_{i \in I} \phi_i = 1 \quad \text{sur } \Omega \quad (4.1)$$

Les fonctions de forme éléments finis  $\varphi_i$  forment donc une partition de l'unité sur l'ensemble du maillage. Dans ce cas, l'ensemble  $I$  représente l'ensemble des nœuds du maillage,  $\Omega_i$  est le patch d'éléments ayant pour nœud commun  $i$  (figure 4.1).

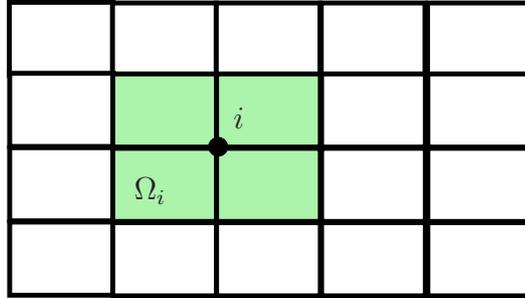


Figure 4.1: Définition du patch  $\Omega_i$  associé au nœud  $i$  pour la partition de l'unité  $\varphi_i$ .

Sur chaque patch  $\Omega_i$  on se donne de nouvelles fonctions  $v_i$  avec lesquelles on souhaite enrichir la solution, il peut s'agir d'une partie de la solution analytique connue ou de la base de fonctions générant la solution par exemple. Ces fonctions doivent appartenir à l'espace de Sobolev des fonctions de carré intégrable :  $\forall i \in I, v_i \in H^1(\Omega_i \cap \Omega)$ . On définit alors l'espace d'approximation PUM sur  $\Omega$  par :

$$V_{PUM} = \left\{ u(x) = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) v_i(x) \mid v_i \in V_i, V_i \subset H^1(\Omega_i \cap \Omega) \right\} \subset H^1(\Omega) \quad (4.2)$$

On montre alors la propriété importante suivante : si sur chaque patch  $\Omega_i$ , la fonction  $u$  peut être approximée par  $v_i$  telle que :

$$\|u - v_i\|_{L^2} \leq \epsilon_1(i)$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} (u - v_i) \right\|_{L^2} \leq \epsilon_2(i)$$

alors la fonction  $u_h = \sum_i \varphi_i v_i$  vérifie :

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C_1 \sqrt{\sum_i \epsilon_1(i)^2}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} (u - u_h) \right\|_{L^2} \leq C_2 \sqrt{\sum_i (\epsilon_1(i)^2 + \epsilon_2(i)^2)}$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes dépendant uniquement de la partition  $\mathcal{T}$ . En d'autres termes, la PUM permet de fournir une bonne approximation de  $u$  sur  $\Omega$  dès lors que l'on réalise une bonne approximation de  $u$  sur chaque  $\Omega_i$ , quelle que soit la partition de l'unité formée par les fonctions  $\varphi_i$ . L'espace  $V_{PUM}$  hérite des propriétés de chaque  $V_i$  et notamment des propriétés de régularité de la partition de l'unité formée par les  $\varphi_i$ .

On peut donc approcher la fonction  $u$  sur le domaine  $\Omega$  par :

$$u_h(\underline{x}) = \sum_{i \in I} \varphi_i(\underline{x}) \left( \sum_{j \in J} a_j^{(i)} v_j^{(i)}(\underline{x}) \right) \quad (4.3)$$

où  $v_j^{(i)}$  est une fonction de l'ensemble des fonctions d'enrichissement  $\{v_j^{(i)}\}_{j \in J}$  définie sur chaque  $\Omega_i$  et réalisant une bonne approximation  $u$ . Les  $\{\varphi_j^{(i)}\}_{j \in J}$  forment une partition de l'unité sur  $\Omega$ . Les  $\{a_j^{(i)}\}_{j \in J}$  sont des coefficients scalaires constants, ce sont les degrés de liberté PUM.

Que ce soit dans la GFEM ou la XFEM, on inclue dans la liste de fonctions la fonction constante  $v_j^{(i)} = 1$  afin de conserver dans l'espace de solution  $V_{PUM}$  les mouvements de corps rigides. Cela revient à inclure l'espace des fonctions éléments finis classiques. De plus, on peut alors utiliser des fonctions éléments finis de degré plus élevé (que l'on notera  $\hat{\varphi}_i$ ). Ainsi on arrive à la forme générale de l'approximation de la solution dans le cadre de la GFEM ou de la XFEM :

$$u_h(\underline{x}) = \sum_{i \in I=1}^{n_{FEM}} \hat{\varphi}_i(\underline{x}) u_i + \sum_{i=1}^{n_e} \varphi_i(\underline{x}) \left( \sum_{j=1}^{n_i} a_j^{(i)} v_j^{(i)}(\underline{x}) \right) \quad (4.4)$$

où  $n_{FEM}$  désigne donc le nombre total de nœuds du maillage,  $n_e$  le nombre de nœuds enrichis et  $n_i$  le nombre de fonctions d'enrichissement pour chaque nœud enrichi. Notons que le nombre d'inconnues si le champs recherché est un champs scalaire est alors :

$$n = n_{FEM} + \sum_{i=1}^{n_e} n_i \quad (4.5)$$

Le nombre d'inconnues est donc augmenté de  $\sum_{i=1}^{n_e} n_i$ . Il n'y a pas de règles particulières pour le choix des fonctions  $v_i^{(j)}$ , la seule véritable contrainte concerne leur régularité. Elles peuvent ensuite être choisies avec une grande liberté, elles peuvent constituer une base linéairement indépendante ou bien représenter simplement une collection de fonctions permettant d'améliorer la description locale. Elles peuvent même provenir d'une solution numérique fine comme c'est le cas dans la GFEM.

## 1.2 Modélisation d'une fissure par la XFEM

### 1.2.1 Définition de l'enrichissement

L'objectif de la XFEM développée dans [Belytschko 99] et [Moës 99] était tout d'abord d'exploiter la flexibilité offerte par la PUM pour ne plus avoir à réaliser des maillages conformes aux fissures, l'intégration des fonctions engendrant l'espace contenant la solution asymptotique en pointe de fissure permet de plus d'améliorer la qualité de la solution près de la singularité. Ainsi, afin de prendre en compte la discontinuité du déplacement à travers les lèvres de la fissure on enrichit la solution avec la fonction de type Heaviside  $H$ . Pour améliorer la solution en pointe de fissure, on enrichit avec les fonctions  $\{F_j\}_{j=1\dots 4}$  qui engendrent l'espace de la solution asymptotique (développée au premier ordre). Cette base de fonctions a été initialement utilisée pour la méthode Element Free Galerkin dans [Flemming 97]. On cherche alors une solution  $\underline{u}_h(\underline{x})$  telle que :

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{i \in N_{FEM}} \hat{\varphi}_i(\underline{x}) \underline{u}_i + \sum_{i \in N_d} \varphi_i(\underline{x}) H(\underline{x}) \underline{a}_i + \sum_{i \in N_p} \varphi_i(\underline{x}) \left( \sum_{j=1}^4 F_j(\underline{x}) \underline{b}_j^i \right) \quad (4.6)$$

où :

- $N_{FEM}$  est l'ensemble des nœuds du maillage et les fonctions  $\hat{\varphi}_i$  sont les fonctions choisies pour l'interpolation éléments finis classiques ;
- les fonction  $\varphi_i$  sont les fonctions choisies pour réaliser la partition de l'unité, choisie en pratique identique à  $\hat{\varphi}_i$  ;
- $N_d$  est l'ensemble des nœuds enrichis par  $H$  : un nœud appartient à  $N_d$  si son support (éléments connectés au nœud  $i$ ) est coupé par la fissure mais ne contient pas la pointe de fissure. Les  $\underline{a}_i$  sont les degrés de liberté correspondants ;
- $N_p$  est l'ensemble des nœuds enrichis par les fonctions  $F_j$  : un nœud appartient à  $N_p$  si son support contient la pointe de fissure. Les  $\underline{b}_j^i$  sont les degrés de liberté correspondants.

On voit sur la figure 4.2 la mise en place de l'enrichissement pour un maillage uniforme. Les fonctions  $F_j$  déterminées dans [Flemming 97] sont exprimées dans le repère local associé à la fissure (figure 2.3) :

$$\{F_j\} = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (4.7)$$

où seule la fonction  $\sin \frac{\theta}{2}$  est discontinue. La figure 4.3 montre l'allure des fonctions  $F_j$  au voisinage de la pointe de fissure.

La fonction  $H(\underline{x})$  est discontinue le long de la fissure, elle vaut 1 d'un coté et  $-1$  de l'autre. Elle a été définie dans [Moës 99] et se calcule à partir de la

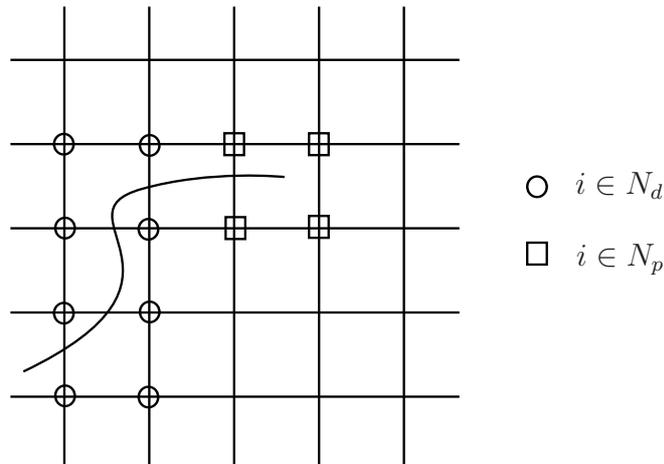


Figure 4.2: Visualisation de l'enrichissement pour un maillage régulier.

distance au point de la fissure le plus près du point considéré (voire figure 4.4) :

$$H(\underline{x}) = \text{signe}(\underline{x} - \underline{x}^*) \cdot \underline{n}^* \quad (4.8)$$

On voit sur la figure 4.5 l'allure des fonctions  $\varphi_i H$  pour un élément quadrangle coupé par la fissure.

*Remarque* : dans le cas où la fissure est confondue avec le bord des éléments, la modélisation XFEM revient à une modélisation par double nœuds et il est montré dans [Moës 99] que les inconnues  $\underline{a}_i$  sont les sauts de déplacement.

### 1.2.2 Description de la fissure

Dans le cadre des éléments finis classiques la géométrie de la fissure est définie par le bord des éléments auxquels elle se conforme et ne nécessite donc aucune description spécifique. Avec la modélisation de type XFEM, la fissure n'a plus d'existence matérielle du point de vue du maillage puisqu'elle peut se propager n'importe où à travers les éléments, elle n'intervient plus que dans l'évaluation des fonctions  $H$  et  $F_j$ . Il est donc nécessaire d'établir un outil de description adapté. Dans [Belytschko 99], [Moës 99] et [Dolbow 00], en 2D la fissure est décrite comme une succession de segments de droite, ce qui s'avéra rapidement difficile et lourd à implémenter. Une alternative retenue par la suite et introduite dans [Stolarska 01, Moës 02a, Moës 02b] utilise les levels sets (fonctions de niveau en français). La fonction de niveau associée à un détail, une fissure dans notre cas, donne en tout point du milieu étudié la distance au détail affectée d'un signe positif ou négatif afin de savoir si l'on se situe d'un

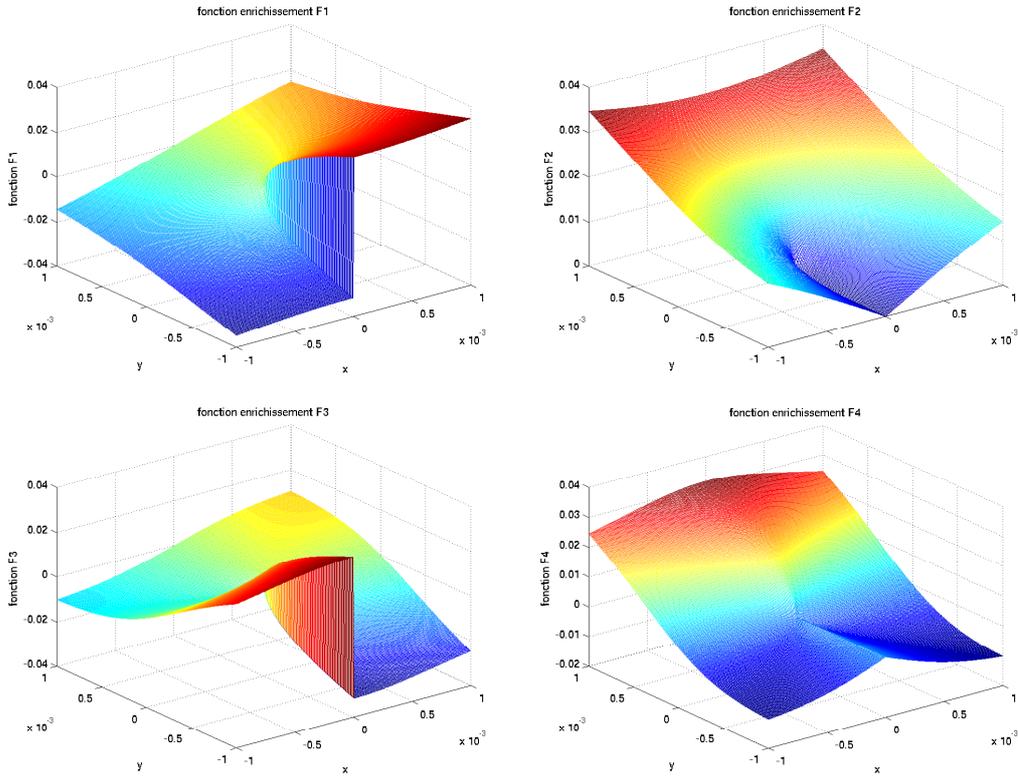


Figure 4.3: Allure des fonction  $F_j$  au voisinage de la pointe de fissure : dans le sens de la lecture :  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  et  $F_4$ .

côté ou de l'autre. Cette distance est la distance la plus courte à la fissure. La courbe iso-zéro décrit donc la fissure.

La description d'une frontière  $\Gamma(t) \subset \mathbf{R}^3$  par level sets est donc basée sur une représentation de la matière par les courbes de niveau d'une fonction  $l(\underline{x}, t) : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  décrivant l'évolution spatiale dans le temps de  $\Gamma(t)$ . La frontière est donc définie par :

$$\Gamma(t) = \{ \underline{x} \in \mathbf{R}^3 | l(\underline{x}, t) = 0 \} \quad (4.9)$$

L'équation d'évolution donnée par [Osher 88] est :

$$\frac{\partial l}{\partial t} + F \|\nabla l\| = 0 \quad (4.10)$$

où  $F$  est la vitesse de déplacement de la frontière en  $\underline{x} \in \Gamma(t)$  dans la direction de la normale extérieure.

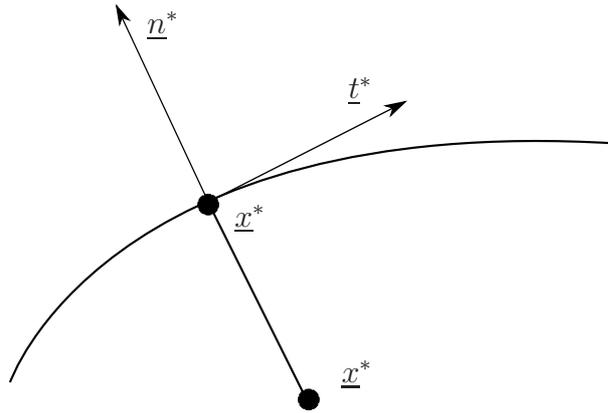


Figure 4.4: Calcul de la fonction  $H$  en prenant le point de la fissure le plus proche.

Dans les cas d'une fissure, deux fonctions de niveau au moins sont nécessaires pour décrire d'une part la ligne (ou la surface en 3D) de fissure et d'autre part la ou les fronts de fissure. Les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  telles qu'elles sont représentées figure 4.6 donnent respectivement la position de la ligne et de la pointe d'une fissure débouchante. Elles sont définies de sorte que leurs gradients soient orthogonaux au point  $P$ , ceci garantit que la pointe de fissure soit toujours définie :

$$\nabla\varphi\nabla\psi = 0 \text{ en } P \forall t \quad (4.11)$$

La simulation de la propagation de la fissure revient donc à mettre à jour les fonctions level sets à chaque pas de temps. En pratique, la valeur des level sets est calculée aux nœuds et interpolée sur les fonctions de forme éléments finis. La figure 4.7 permet de visualiser les fonctions level sets  $\psi$  (à gauche) et  $\varphi$  (à droite) pour une fissure débouchante. On voit donc que même si la fissure n'est plus conforme au maillage, la finesse de sa description dépend toujours de la finesse du maillage en  $h$  ou en  $p$ . Il est évident que dans le cas d'une fissure modélisée par des segments de droites, ceux ci doivent être au minimum de la dimension d'un élément. [Moës 03] propose une procédure de maillage adaptatif pour décrire de manière suffisamment précise la géométrie.

### 1.3 Implantation

Le code éléments finis XFEM utilisé dans cette thèse est celui développé au LMT par Pierre-Alain Guidault. Il s'agit d'un code orienté objet développé sous MATLAB et dont tous les détails techniques d'implantation ainsi que la validation sont exposés dans [Guidault 05].

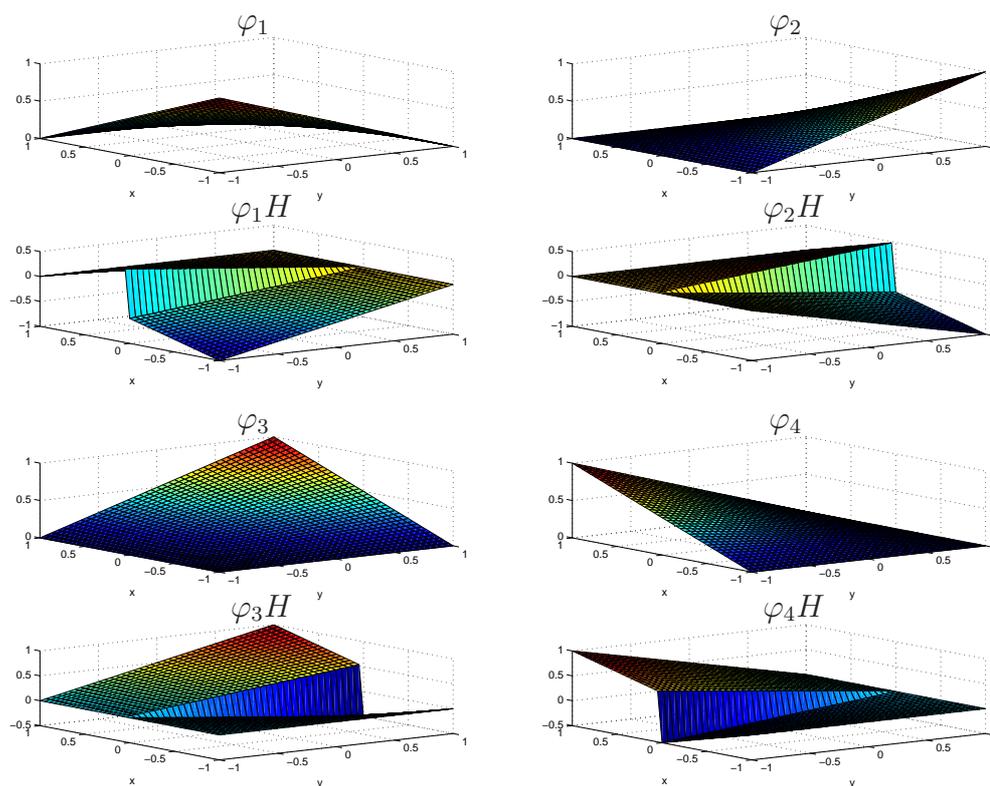


Figure 4.5: Allure des fonction  $\varphi_i H$  sur un élément quadrangle coupé par la fissure.

## 2 Qualité de la solution XFEM

La XFEM a rapidement suscité l'intérêt des industriels et des chercheurs puisque depuis son apparition en 1999, elle a fait l'objet de nombreux développements. Plusieurs codes de calculs tels que SAMCEF de Samtech, code ASTER, CAST3M et RADIOSS l'ont déjà intégrée depuis plusieurs années. En moins de dix ans, cette méthode est passée du milieu de la recherche au milieu industriel, ce qui est tout à fait exceptionnel. Toutefois, bien que fournissant des résultats relativement meilleurs et une utilisation plus confortable que les éléments finis classiques, il importe de contrôler la qualité des résultats de manière sérieuse. La XFEM reste une méthode numérique approchée et la spécificité des champs utilisés rend plus difficile l'évaluation de la qualité des résultats. Pour les éléments finis classiques, l'expérience accumulée ces trente dernières années associée aux nombreux outils d'estimation d'erreur permettent de mener une analyse complexe avec un maximum de confiance. Dans le cadre de la XFEM, le retour

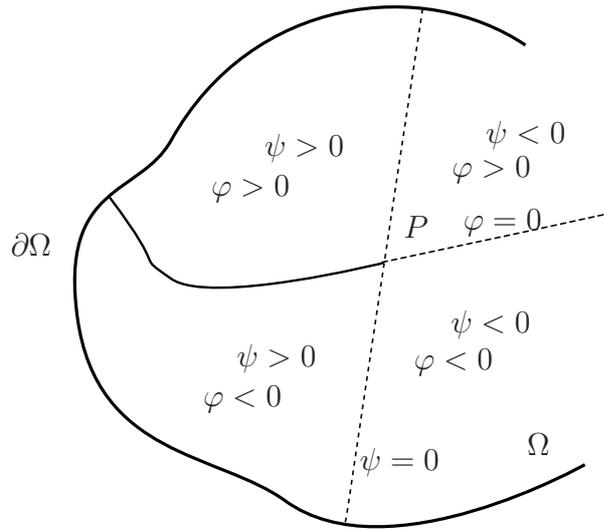


Figure 4.6: Représentation d'une fissure débouchante avec les deux fonctions level sets  $\varphi$  et  $\psi$ .

d'expérience est plus mince, les propriétés de convergence sont beaucoup moins évidentes et il n'existe à ce jour aucun outil sérieux permettant de contrôler de manière fiable les résultats.

On peut cependant citer les travaux de [Stazi 03, Laborde 05] qui ont permis de mettre en évidence un certain nombre de propriétés de la solution XFEM ainsi que les principales sources d'erreur. Il apparaît tout d'abord que le taux de convergence de la méthode XFEM n'est pas optimal puisqu'il demeure identique à celui de la méthode éléments finis classiques avec maillage de la fissure. cependant, le niveau d'erreur est bien inférieur pour la XFEM. On observe également que la qualité des champs au voisinage de la fissure, et notamment du champs de contrainte, reste mauvaise. Plusieurs sources d'erreur ont été mises en évidence dans [Stazi 03, Laborde 05, Béchet 05].

Citons tout d'abord l'intégration des termes de la matrice de rigidité. Au voisinage de la fissure, elle fait intervenir des termes singuliers. Le calcul des intégrales n'est donc pas exact comme pour les fonctions de base éléments finis classiques si l'on emploie la bonne quadrature de Gauss. En pratique, il convient de choisir une intégration à 16 points de Gauss au moins pour les éléments enrichis par les fonction  $F_j$ . [Laborde 05] propose une méthode d'intégration dite polaire permettant par transformation géométrique de calculer l'intégrale dans les coordonnées polaires en effaçant la singularité en  $r^{-\frac{1}{2}}$ .

Le conditionnement de la matrice de rigidité est dégradé par l'enrichissement en pointe de fissure. Ceci est dû au fait que les fonctions  $\varphi_i F_j$  ne

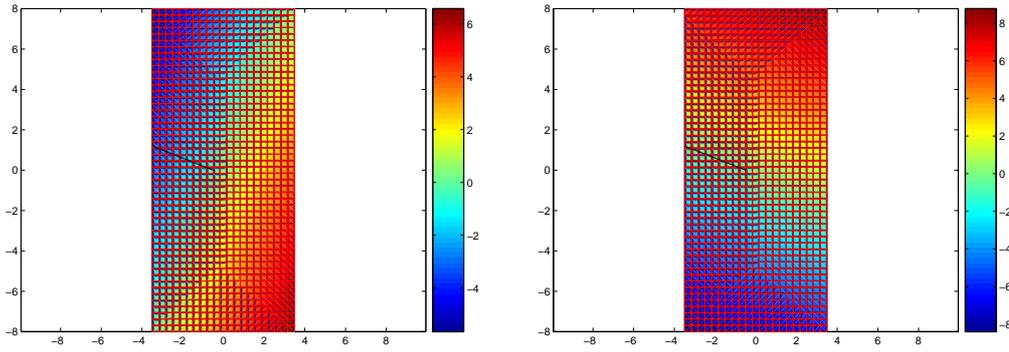


Figure 4.7: Représentation des fonctions level sets  $\psi$  et  $\varphi$  interpolées sur les fonctions de forme pour une fissure droite débouchante de pointe  $[-0.5, 0]$ .

sont pas linéairement indépendantes au niveau élémentaire. Dans le cas d'une modélisation XFEM avec des triangles à 3 nœuds on a par exemple les deux relations de dépendance linéaire :

$$\lambda_2(F_1 - F_4) + \lambda_1 F_3 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2(F_3 - F_2) + \lambda_1 F_4 = 0 \quad (4.12)$$

Le nombre de relations de ce type augmente avec le degré de la fonction retenue pour la partition de l'unité, ce qui explique que l'on travaille habituellement avec des éléments  $p1$ . D'autre part, le conditionnement se dégrade d'autant plus que  $h$  diminue.

Nous voyons sur la figure 4.2 que seuls les nœuds dont le support contient la pointe de fissure sont enrichis par les fonctions  $F_j$ , la taille de la zone enrichie diminue donc en même temps que l'on affine le maillage. [Béchet 05] propose de fixer la taille de la zone enrichie afin de la rendre indépendante de la taille de maille retenue par la suite. On peut par exemple choisir d'enrichir tous les nœuds dont le support est compris dans un disque de rayon  $R_{enrich}$  comme illustré sur la figure 4.8. C'est ce que l'on appelle l'enrichissement géométrique, la question du choix de la taille de la zone à enrichir reste bien entendue ouverte. S'il convient de prendre une zone suffisamment grande, il ne faut pas perdre de vue que plus le nombre d'éléments enrichis par les fonction  $F_j$  est grand et plus le conditionnement du problème est mauvais.

Enfin, les éléments réalisant le raccord entre la zone enrichie et la zone non enrichie sont également une source d'erreur non négligeable. Il est montré dans [Laborde 05] que l'erreur est plus importante dans les éléments de transition (voir figure 4.9) où l'interpolation est mixte, on a en effet pour ces éléments

des nœuds enrichis d'une part et des nœuds classiques d'autre part. L'erreur ne dépend toutefois pas de la largeur de la zone de raccord.

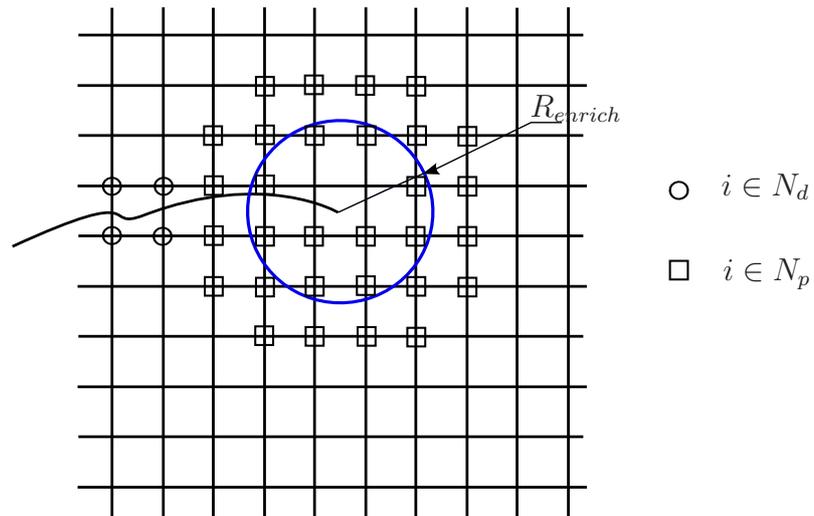
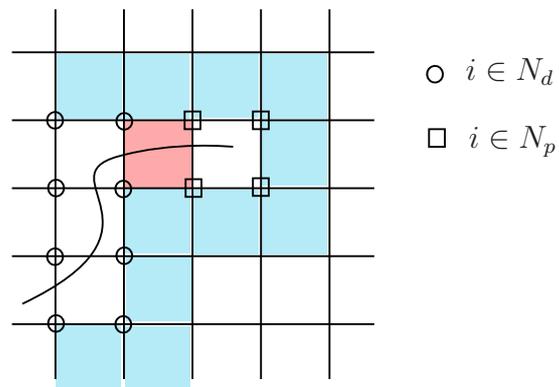


Figure 4.8: Enrichissement géométrique.



- Éléments de transition entre les zones enrichies et les zones classiques
- Éléments de transition entre les deux types d'enrichissement

Figure 4.9: Éléments de transition entre les différents types d'interpolation.

### 3 Bilan

Nous voyons donc que les sources d'erreur liées à la mise en œuvre de la XFEM sont multiples et bien plus complexes à appréhender et à maîtriser que dans le cas d'une simulation FEM classique. Si les résultats sont globalement meilleurs avec la XFEM, il est tout de même difficile d'assurer la pertinence des calculs dans une démarche de dimensionnement. Les travaux de [Stazi 03, Laborde 05, Béchet 05, Xiao 05] ont permis d'améliorer notre compréhension des différentes sources d'erreur liées aux calculs XFEM. Ils proposent également des solutions permettant d'améliorer la qualité locale de la solution XFEM et le taux de convergence de la méthode. Dans la suite de ce travail, nous ne cherchons pas à améliorer les résultats obtenus avec la XFEM. Nous nous plaçons du point de vue de la vérification des calculs tel qu'il a été exposé et développé dans les chapitre 1 et 2. Ainsi, notre objectif est de proposer un estimateur d'erreur conservatif pour la XFEM à même de garantir au concepteur la qualité des résultats obtenus.

---

# Estimateur d'erreur pour la XFEM

*Nous présentons dans ce chapitre les techniques de construction de champs admissibles élaborés pour évaluer l'erreur commise lors d'une analyse XFEM. On élabore une technique de construction pour chaque type d'enrichissement.*

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Prise en compte de l'enrichissement en pointe de fissure</b>	<b>95</b>
1.1	Reconstruction du champ de contraintes sur $\Omega_2$ . . . . .	96
1.2	Reconstruction du champ de contraintes sur $\Omega_1$ . . . . .	97
1.3	Mise en œuvre numérique . . . . .	98
<b>2</b>	<b>Prise en compte de l'enrichissement de type Heaviside</b>	<b>108</b>
2.1	Détermination des densités . . . . .	108
2.2	Reconstuction d'un champ de contrainte admissible . .	113
2.3	Résultats numériques . . . . .	114
<b>3</b>	<b>Bilan</b> . . . . .	<b>118</b>

---

L'idée est d'étendre le concept d'erreur en relation de comportement et la technique d'estimation des erreurs sur les quantités d'intérêt à la XFEM. L'erreur en relation de comportement peut s'adapter à tout type de méthode numérique dès lors que l'on est capable à partir d'une solution approchée  $(\underline{u}_h, \sigma_h)$  de reconstruire une solution admissible  $(\hat{\underline{u}}, \hat{\sigma})$ . Dans le cadre de la XFEM, le déplacement  $\underline{u}_h$  reste cinématiquement admissible, il convient toutefois de prendre des précautions lorsque l'on souhaite appliquer des conditions de Dirichlet sur la frontière d'éléments enrichis, ce problème a été résolu dans [Moës 06]. Dans la suite de ce travail, nous nous placerons dans le cas trivial où aucune condition de Dirichlet n'est imposée sur les degrés enrichis, on pourra donc prendre :

$$\hat{\underline{u}} = \underline{u}_h$$

En revanche, la contrainte  $\sigma_h$  présente toujours les mêmes défauts d'équilibre donnés par les équations 1.8, 1.9 et 1.10. De plus, la nature et la diversité des fonctions d'enrichissement ne nous permettent pas d'appliquer directement les techniques du paragraphe 2.4 du premier chapitre. Il est nécessaire de traiter différemment ces nouveaux champs de contraintes enrichis afin d'obtenir des champs *SA*. Il est proposé dans [Bordas 07] un estimateur d'erreur global pour la XFEM. Il repose sur une technique de lissage particulière des contraintes. Les champs singuliers sont traités par la méthode des moindres carrés mobiles (MLS). Cette méthode donne un bon indicateur d'erreur globale pouvant conduire à un critère de remaillage. Elle est cependant inadaptée à nos enjeux puisque nous cherchons une borne supérieure de l'erreur qui ne peut être obtenue qu'avec des champs de contrainte strictement *SA*.

Nous allons donc établir une nouvelle stratégie permettant de construire un champ de contraintes *SA* sur l'ensemble du problème XFEM. Observons premièrement que seuls les éléments enrichis nécessitent un traitement particulier, pour les autres éléments sur lesquels on applique une interpolation éléments finis classiques, les techniques du paragraphe 2.4 peuvent être appliquées. La nature fondamentalement différente des enrichissements par les fonctions  $H$  ou par les fonctions  $F_j$  nous conduit également à les distinguer dans la reconstruction des champs admissibles. Nous proposons dans la suite de ce chapitre une technique permettant d'obtenir des champs *SA* pour les éléments enrichis par les fonctions engendrant la solution asymptotique d'abord. Nous montrons ensuite que l'exploitation des propriétés d'équilibre éléments finis dans les éléments enrichis par la fonction  $H$  permettent de reconstruire simplement un champ *SA*. Enfin, la combinaison de ces différentes techniques nous permettra d'estimer l'erreur globale pour le problème XFEM complet puis de calculer les bornes pour  $K_I$  et  $K_{II}$ .

# 1 Prise en compte de l'enrichissement en pointe de fissure

Nous abordons ici la reconstruction des champs admissibles pour les éléments en pointe de fissure enrichis par les fonctions engendrant la solution singulière. Afin de ne traiter que ce type d'enrichissement et dans l'objectif de s'affranchir de toute pollution engendrée par les autres fonctions d'enrichissement, nous considérons un problème avec une fissure conforme aux frontières des éléments. Le seul enrichissement sera donc celui dû aux fonctions  $F_j$ . Le domaine  $\Omega$  défini sur la figure 5.1 présente une fissure débouchante dont les lèvres sont libres d'efforts. On peut donc distinguer deux types d'interpolation :

- sur un sous-domaine  $\Omega_2$ , les éléments sont enrichis par les fonctions  $F_j$  données par l'équation 4.7. La zone de transition (voire la figure 4.9) est comprise dans  $\Omega_2$
- le sous-domaine  $\Omega_1$  représente le reste du domaine  $\Omega$  tel que  $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$  et  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{\emptyset\}$ , où l'interpolation est réalisée uniquement avec les fonctions de base éléments finis classiques.

Les deux sous-domaines sont délimités par la frontière  $\Gamma$  qui s'appuie sur les frontières des éléments. Nous retenons cette séparation du domaine d'étude pour la reconstruction des champs admissibles.

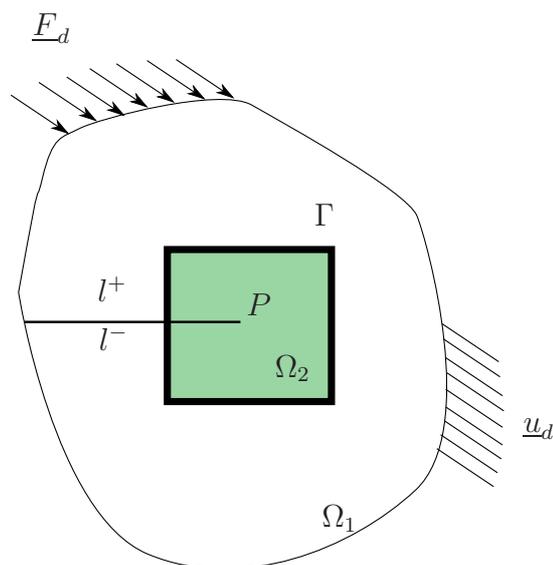


Figure 5.1: Problème de référence avec fissure conforme et séparation en une partie enrichie  $\Omega_2$  et une partie classique  $\Omega_1$  délimitées par la frontière  $\Gamma$

## 1.1 Reconstruction du champ de contraintes sur $\Omega_2$

Le sous-domaine  $\Omega_2$  contient donc les éléments enrichis totalement ou partiellement par les fonctions singulières. L'idée pour obtenir un champ  $SA$  sur cette zone est simple : nous allons exploiter la solution asymptotique au voisinage de la pointe de fissure. La zone d'enrichissement reste petite même si l'on utilise un enrichissement géométrique, nous restons donc dans la zone de pertinence de la solution asymptotique. Par ailleurs, elle nous permet d'obtenir très simplement une solution vérifiant les équations d'équilibre (1.2) sur  $\Omega_2$ . Comme nous l'avons vu dans le second chapitre, la solution du problème d'élasticité linéaire en pointe de fissure est la solution d'un problème aux valeurs propres. Si l'on ne garde que les solutions à énergie finie, le déplacement et la contrainte s'écrivent sous la forme d'un développement donné par les équations 2.23 et 2.27. Couramment, on ne retient que le premier ordre du développement qui conduit à la solution en contrainte donnée par les équations 2.8, 2.9 et 2.10 et qui fait intervenir les facteurs d'intensité de contraintes.

Dans le cadre des déformations planes, on peut facilement retrouver le développement asymptotique de la contrainte en utilisant les fonctions d'Airy :

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{i=1}^n r^{\beta_i+2} \Psi_i(\theta) \quad (5.1)$$

avec :

$$\Psi_i(\theta) = A_i \sin(\beta_i \theta) + B_i \cos(\beta_i \theta) + C_i \sin[(\beta_i + 2)\theta] + D_i \cos[(\beta_i + 2)\theta]. \quad (5.2)$$

où :  $\beta_i \in \left\{ -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \right\}$  et :

$$\begin{aligned} &\text{pour } \beta_i = n, \quad n \in \mathbf{N} \\ &B_i + D_i = 0 \\ &A_i n + C_i(n + 2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{pour } \beta_i = n + \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbf{N} \\ &A_i + C_i = 0 \\ &B_i \left(n + \frac{1}{2}\right) + D_i \left(n + \frac{5}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Le développement au premier ordre ( $n = 1$ ) revient à ne garder que  $\beta_1 = -\frac{1}{2}$ . On peut exprimer la contrainte au voisinage de la pointe de fissure :

$$\hat{\sigma}_{rr} = \frac{1}{r^2} \Phi_{,\theta\theta} + \frac{1}{r} \Phi_{,r} \quad (5.3)$$

$$\hat{\sigma}_{\theta\theta} = \Phi_{,rr} \quad (5.4)$$

$$\hat{\sigma}_{r\theta} = -\left(\frac{1}{r}\Phi_{,\theta}\right)_{,r} \quad (5.5)$$

Selon la taille de la zone  $\Omega_2$  considérée et afin d'améliorer la qualité du champ de contraintes  $\hat{\sigma}$ , on peut avoir intérêt à choisir un développement tel que  $n > 1$ . Il reste à déterminer les coefficients scalaires  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$ . Afin d'assurer un lien cohérent entre le champ XFEM  $\sigma_h$  et le champs  $SA$   $\hat{\sigma}$ , ils sont calculés par minimisation de l'erreur :

$$E_h(A_i, B_i, C_i, D_i) = \|\sigma_h - \hat{\sigma}\|_{\mathcal{K}^{-1}, \Omega_2} = \int_{\Omega_2} Tr[(\sigma_h - \hat{\sigma})\mathcal{K}^{-1}(\sigma_h - \hat{\sigma})]d\Omega \quad (5.6)$$

L'intégrale de l'équation 5.6 sera calculée par une méthode de Gauss en prenant les points de Gauss des éléments de  $\Omega_2$  ayant servi à intégrer la matrice de rigidité et où sont calculées les valeurs de  $\sigma_h$ . On calcule alors :

$$\min_{\hat{\sigma}} \left( \sum_{E \subset \Omega_2} \sum_{P_G} \int_E Tr[(\sigma_h(P_G) - \hat{\sigma}(P_G))\mathcal{K}^{-1}(\sigma_h(P_G) - \hat{\sigma}(P_G))]dE \right) \quad (5.7)$$

## 1.2 Reconstruction du champ de contraintes sur $\Omega_1$

Les éléments contenus dans  $\Omega_1$  sont des éléments classiques, nous appliquons donc directement les techniques de reconstruction de champs du paragraphe 2.4 du premier chapitre. Il faut cependant s'assurer de la continuité du vecteur contrainte sur le contour  $\Gamma$  délimitant les sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sans quoi l'admissibilité du champ de contrainte n'est plus assurée sur  $\Omega$ . Il faut donc forcer :

$$\hat{\sigma}_{\Omega_1} \cdot \underline{n}_1 + \hat{\sigma}_{\Omega_2} \cdot \underline{n}_2 = \underline{0} \quad \text{sur } \Gamma \quad (5.8)$$

Une manière d'assurer cette condition est de résoudre un nouveau système sur  $\Omega_1$  avec les mêmes conditions limites que celles appliquées sur  $\Omega$  et  $\partial\Omega$  du problème global et un chargement de type Neumann sur  $\Gamma$  donné par :

$$\sigma_{\Omega_1} \cdot \underline{n} = \hat{\sigma}_{\Omega_2} \cdot \underline{n} \quad \text{sur } \Gamma \quad (5.9)$$

Ce second problème ne comporte plus la singularité. Si la résolution de ce nouveau système est moins coûteuse que celle du problème global, elle devient tout de même non négligeable dans le temps de calcul complet ce qui est pour l'instant le point faible de cette méthode.

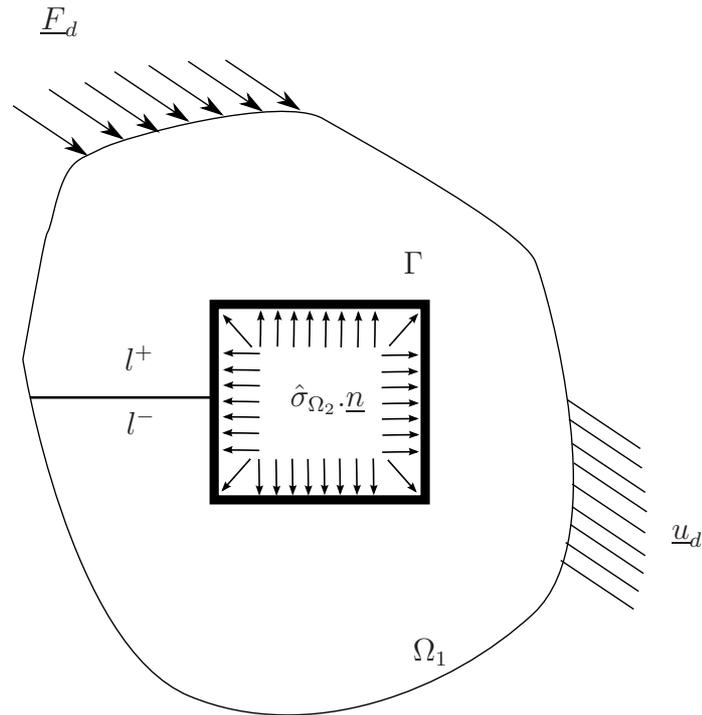


Figure 5.2: Second problème pour obtention de la contrainte sur  $\Omega_1$  avec continuité du vecteur contrainte sur  $\Gamma$ .

### 1.3 Mise en œuvre numérique

La mise en œuvre nécessite de scinder le maillage défini pour le problème à résoudre en deux maillages, l'un comprenant les degrés de liberté classiques (maillage de  $\Omega_1$ ), l'autre les degrés de liberté enrichis (maillage de  $\Omega_2$ ). La structure objet du code permet d'identifier aisément les deux sous-maillages à définir et cette partie ne pose donc pas de problème. On montre figure 5.3 un exemple de maillage et les deux sous-maillages associés. Pour le maillage de  $\Omega_2$ , les points de Gauss utilisés pour la construction des matrices de rigidité puis pour la minimisation sont repérés par des croix.

La minimisation de l'erreur sur  $\Omega_2$  est réalisée avec la fonction `FMINSEARCH` de MATLAB (méthode directe de Nelder Mead). Cette minimisation étant menée sur un petit nombre d'éléments, son coût est en conséquent négligeable. Pour imposer les efforts donnés par l'équation 5.9 sur le contour intérieur  $\Gamma$  on utilise une intégration à 5 points de Gauss sur les arêtes des éléments concernés. L'expérience montre que 5 points sont suffisants pour imposer  $\hat{\sigma}_{\Omega_2} \cdot \underline{n}$  sans introduire d'erreur.

Les exemples numériques sont menés sur les problèmes définis figure 3.2 pour le mode  $I$  et figure 3.3 pour le mode mixte. On change uniquement les dimensions pour obtenir une plaque carrée  $L = 2$ ,  $W = 2$  et  $a = 1$ . Ceci permet d'avoir dans un premier temps un maillage régulier pour réaliser les premiers tests.

L'objectif étant de pouvoir utiliser cet estimateur pour les facteurs d'intensité de contraintes, nous testons également sa sensibilité aux chargements des deux problèmes adjoints. Dans un soucis de simplification, la couronne sur laquelle est définie l'extracteur, et donc le chargement du problème adjoint, est choisie de façon à ne pas inclure les éléments enrichis.

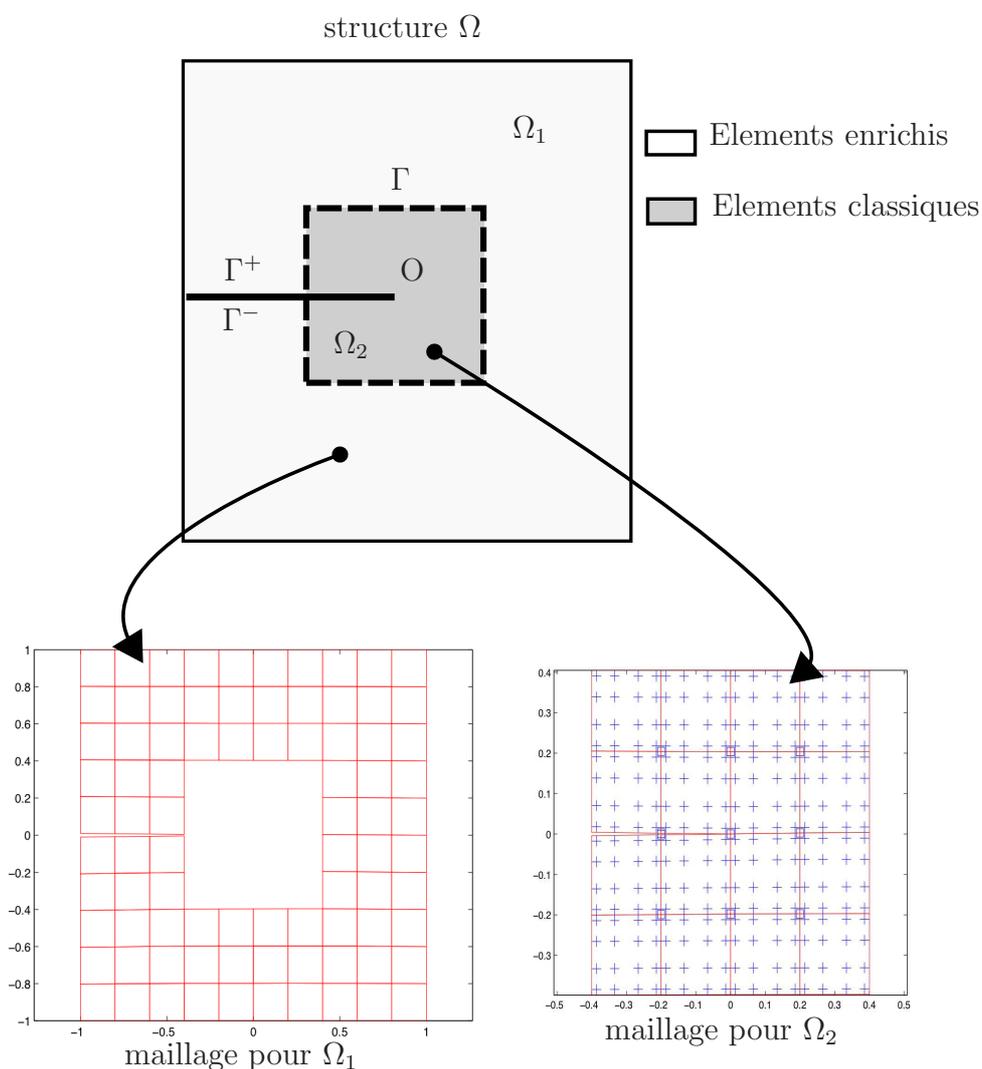


Figure 5.3: Maillages pour reconstruction des champs de contrainte

### 1.3.1 Influence du développement asymptotique

Nous allons dans un premier temps chercher à valider la technique de reconstruction des champs en déterminant également l'influence de l'ordre pour le développement des champs asymptotiques. On travaille directement sur le mode mixte. Les figures 5.4 et 5.5 montrent l'évolution de l'erreur relative définie par l'équation 5.6 pour des maillages à 100 et à 1600 éléments.

Remarquons tout d'abord que les niveaux d'erreur sur le sous-domaine  $\Omega_2$  sont assez faibles. Ils permettent donc de valider la technique proposée. D'autre part, un développement au quatrième ordre de la solution asymptotique suffit puisque l'erreur n'évolue quasiment plus à ce niveau. En outre la technique de reconstruction semble adaptée à la fois pour le problème à résoudre et pour le problème adjoint.

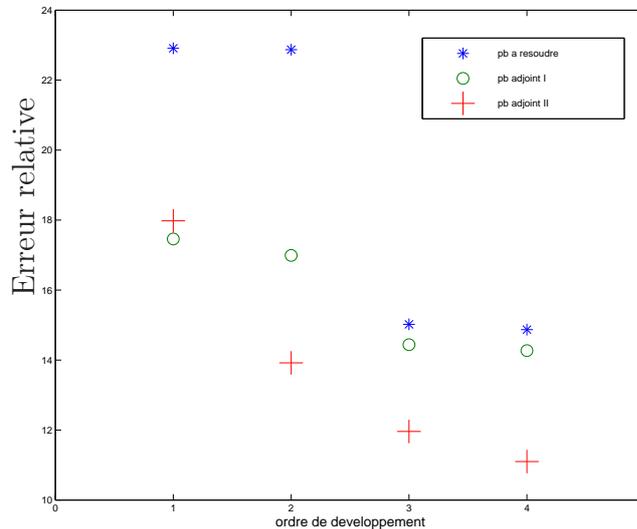


Figure 5.4: erreurs relatives sur  $\Omega_2$  pour 100 éléments

On reprend à présent l'exemple utilisé comme benchmark de la figure 3.2 en mode  $I$  avec un maillage à 1536 éléments. On trace figure 5.6 l'évolution de l'erreur sur la zone  $\Omega_2$  en fonction du développement jusqu'à l'ordre 8. On constate à nouveau que l'erreur n'évolue plus à partir du quatrième ordre. On trace figure 5.7 l'erreur relative globale en fonction du développement. On voit qu'il est préférable de ne pas aller au delà du troisième ou quatrième ordre puisque cela a pour effet d'augmenter légèrement l'erreur globale. Cela tient au fait que la contrainte admissible calculée s'éloigne de plus en plus de la

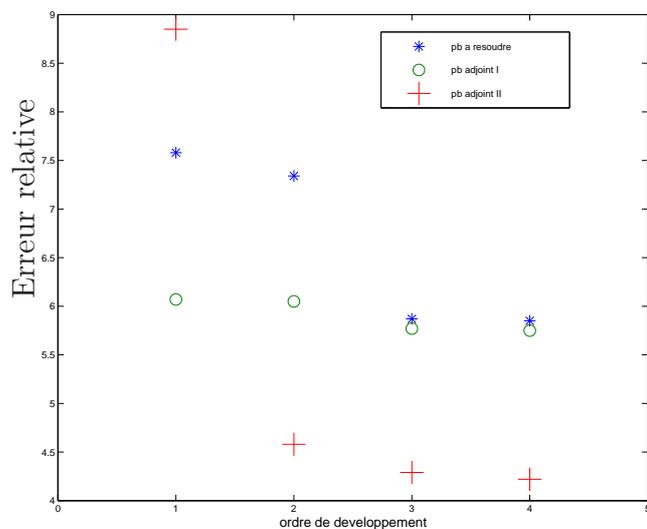


Figure 5.5: erreurs relatives sur  $\Omega_2$  pour 1600 éléments

contrainte éléments finis sur les éléments de transition et notamment sur le contour  $\Gamma$

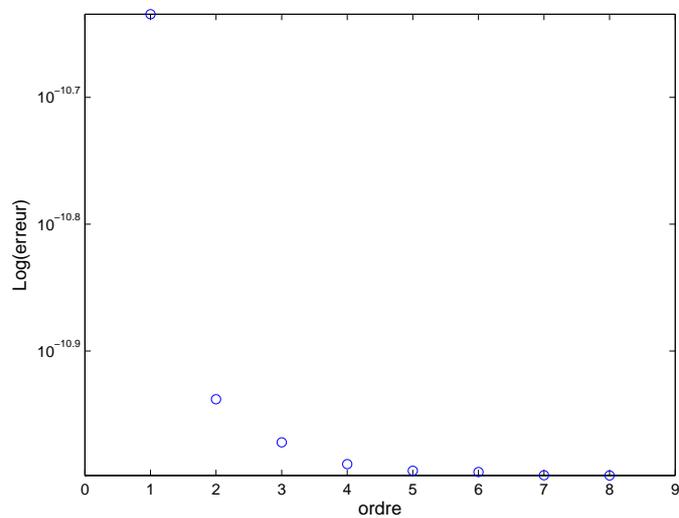


Figure 5.6: erreurs sur  $\Omega_2$  fonction du développement pour le benchmark en mode  $I$ , maillage de 1536 éléments

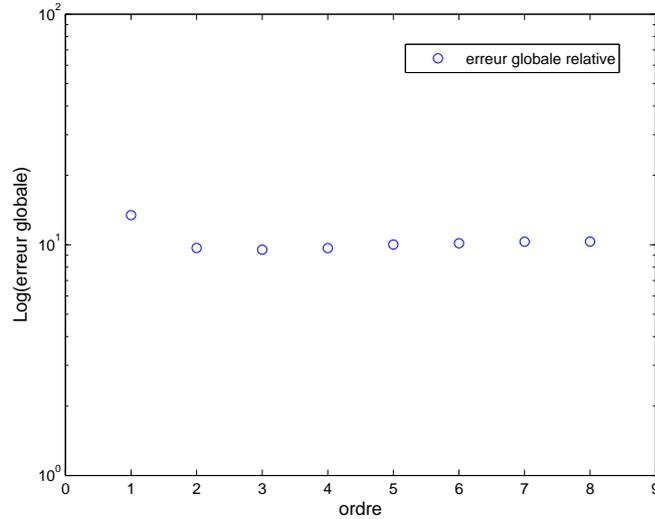


Figure 5.7: erreurs relatives globales sur  $\Omega$  fonction du développement pour le benchmark en mode  $I$ , maillage de 1536 éléments

### 1.3.2 Comportement global de l'estimateur

Nous allons évaluer dans ce paragraphe le comportement asymptotique de l'estimateur global. Nous prenons le modèle et le chargement de la figure 3.2 en mode  $I$ . L'objectif est de valider la convergence de l'estimateur proposé, de localiser les éléments où l'erreur est éventuellement concentrée et, de contrôler l'influence de l'enrichissement géométrique (voir la section 2 du chapitre 4, illustré par la figure 4.8). La définition de la taille de la zone enrichie est simplement définie sur un premier maillage grossier. Sur ce premier maillage, seuls les éléments contenant la pointe de fissure sont enrichis. On conserve ensuite la dimension de cette zone lorsque l'on raffine le maillage. On illustre cette démarche figure 5.8, le maillage grossier est un maillage à 384 éléments. On montre ensuite la zone enrichie pour un maillage à 864 éléments puis 1536 éléments. Il n'est pas nécessaire d'étudier à nouveau l'influence de l'ordre du développement puisque l'enrichissement géométrique n'a pas pour effet d'augmenter la taille de la zone enrichie mais de la conserver.

**1.3.2.1 Résultats sans enrichissement géométrique** On observe figure 5.9 les contributions élémentaires à l'erreur globale pour les maillages

à 864, 1536 et 3456 éléments. On observe que le principal de l'erreur est toujours concentré sur les éléments en pointe de fissure. Il apparaît également une erreur, d'un niveau moindre, pour les éléments du contour  $\Gamma$  entre les sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Cette erreur peut être due à deux raisons :

- Comme nous l'avons vu dans les paragraphes précédents, l'erreur se concentre naturellement dans les éléments qui constituent la jonction entre deux zones aux interpolations différentes.
- L'autre source d'erreur est inhérente à la technique de construction des champs admissibles. On optimise l'erreur sur le sous-domaine  $\Omega_2$ , mais pas sur le contour. D'autre part la résolution du nouveau problème sur le sous-domaine  $\Omega_1$  introduit deux singularités faibles.

**1.3.2.2 Résultats avec enrichissement géométrique** On observe figure 5.10 les contributions élémentaires à l'erreur globale pour les maillages à 864, 1536 et 3456 éléments. On peut faire la même remarque que pour l'enrichissement classique mais on observe que la contribution en pointe de fissure est plus importante. En outre, cela a également pour effet d'étendre la zone où est concentrée l'erreur. On trace figure 5.11 l'évolution de l'erreur globale relative pour les problèmes avec enrichissements classiques et géométriques. Il est clair que les résultats sont donc un peu dégradés lorsque l'on utilise l'enrichissement géométrique contrairement ce que l'on aurait pu attendre. Les raisons peuvent être les suivantes :

- La technique de reconstruction de champ choisie est bien adaptée pour une zone localisée de faible dimension. On perd l'aspect local et donc la pertinence du développement utilisé avec l'enrichissement géométrique.
- D'autre part, la taille de la zone enrichie est peut être trop grande, il n'y a pas de règle pour la choisir.
- L'utilisation de l'enrichissement géométrique dégrade le conditionnement du système si on utilise pas une technique d'intégration particulière telles que celles proposées dans [Laborde 05]. Elle augmente également l'erreur dans la zone de raccord comme on peut l'observer dans nos résultats.

En conclusion, les résultats sont très satisfaisants pour l'estimateur proposé, ils permettent de fournir une erreur pertinente et conservative pour l'enrichissement en pointe de fissure. Cependant, il semble préférable de ne pas utiliser l'enrichissement géométrique qui dégrade l'estimation d'erreur. C'est une piste d'amélioration pour ce type d'enrichissement.

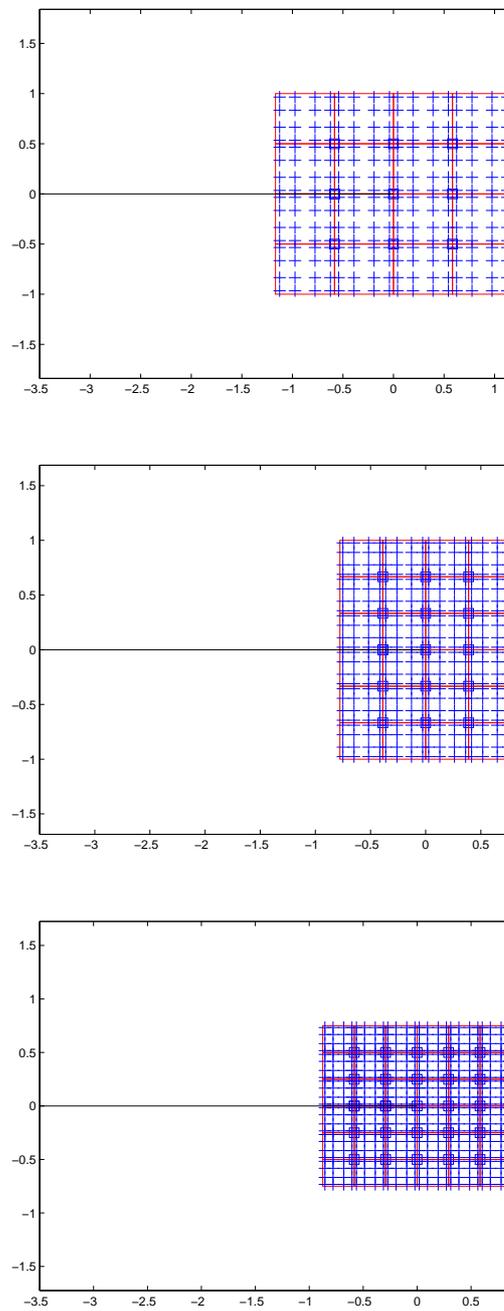


Figure 5.8: Enrichissement géométrique, maillages à 384, 864 et 1536 éléments.

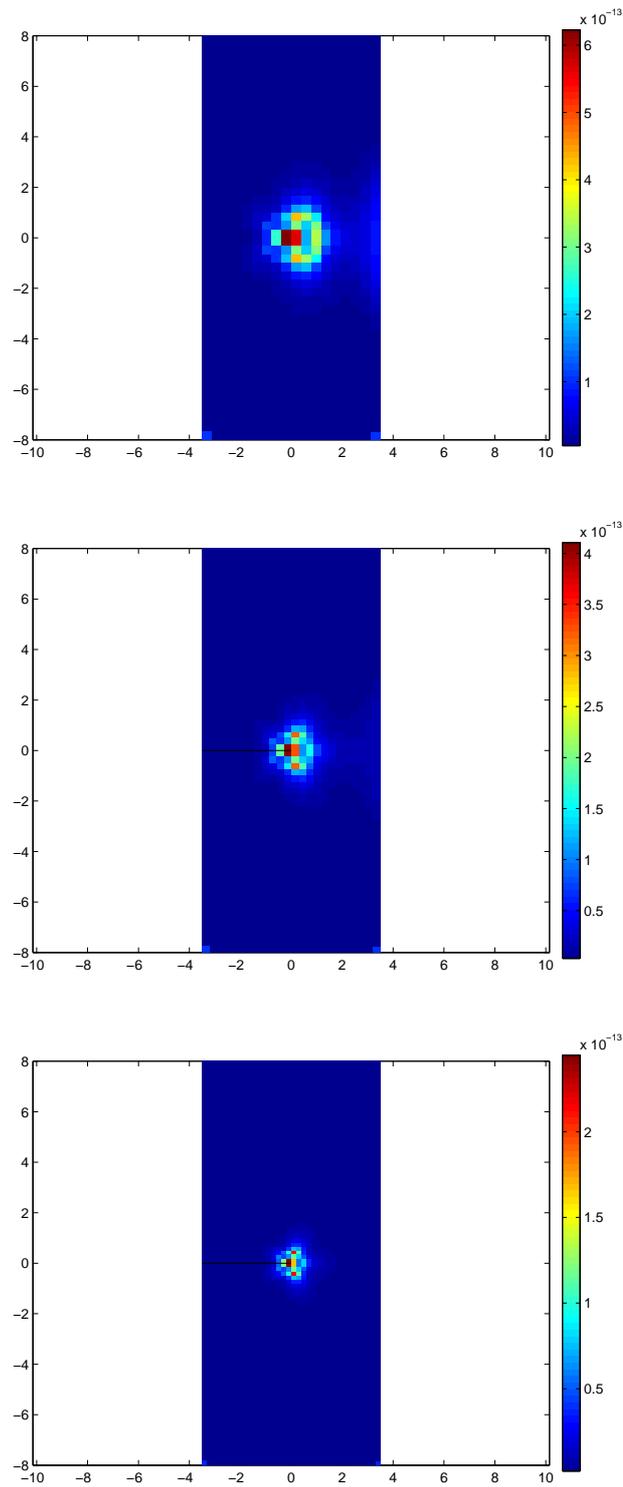


Figure 5.9: Contributions à l'erreur globale pour les maillages à 864, 1536 et 3456 éléments.

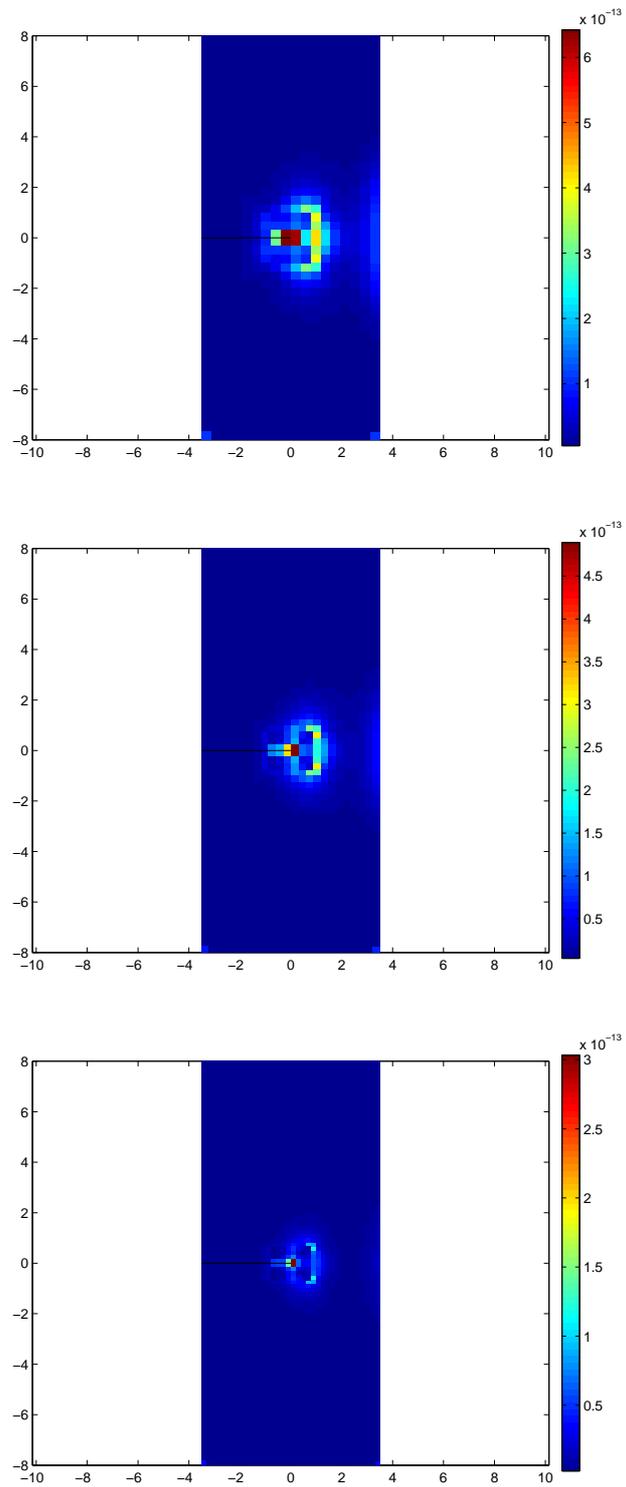


Figure 5.10: Contributions à l'erreur globale pour les maillages à 864, 1536 et 3456 éléments, dans le cas de l'enrichissement géométrique

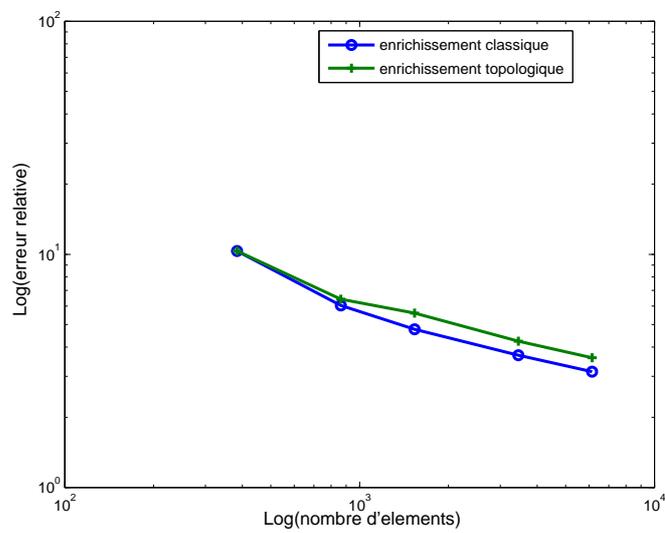


Figure 5.11: Comparaison des erreurs relatives globales sur  $\Omega$  pour les enrichissements classiques et géométriques

## 2 Prise en compte de l'enrichissement de type Heaviside

L'enrichissement de type Heaviside peut être pris en compte par les techniques classiques de reconstruction exposées au paragraphe 2.4 du premier chapitre. Cette conclusion provient de l'observation des propriétés de la solution éléments finis des éléments enrichis par la fonction  $H$ . Ces éléments ont deux types d'interpolation représentés figure 4.5 : l'une continue assurée par les fonctions éléments finis  $\varphi_i$ , l'autre discontinue et assurée par les fonctions  $\varphi_i H$  avec  $H = \pm 1$ . On voit que cette description ne complique pas tellement les choses au niveau local et nous conservons la propriété importante d'équilibre au sens des éléments finis (équation 1.6). Ceci nous permet d'écrire :

$$\int_E \sigma_h \cdot \underline{grad}(\varphi_i) dE = \int_{\partial E} \underline{F}_d \cdot \varphi_i ds + \int_E \underline{f}_d \cdot \varphi_i dE \quad (5.10)$$

mais également :

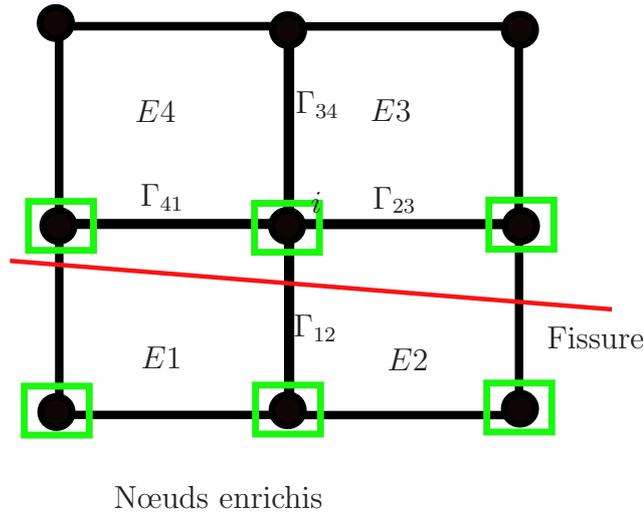
$$\int_E \sigma_h \cdot \underline{grad}(\varphi_i H) dE = \int_{\partial E} \underline{F}_d \cdot \varphi_i H ds + \int_E \underline{f}_d \cdot \varphi_i H dE \quad (5.11)$$

On peut donc utiliser la condition de prolongement (équation 1.29) à la fois pour les fonctions  $\varphi_i$  et  $\varphi_i H$  pour déterminer les densité d'effort. D'un point de vue théorique, la prise en compte de ce type d'enrichissement est donc identique aux éléments non enrichis.

### 2.1 Détermination des densités

Le problème qui se pose ici est la détermination des densités à l'équilibre sur chaque élément enrichi par les fonctions  $H\varphi_i$ . Pour les éléments classiques, il n'y a pas de traitement particulier à imposer, on adopte la technique de reconstruction exposée au premier chapitre. En fait, le problème ne se pose même que pour les éléments effectivement coupés par la fissure, pour les autres éléments présentant plusieurs nœuds enrichis mais non coupés, la fonction  $H$  est constante, toutes les quantités sont donc continues. Prenons par exemple la figure 5.12 qui fait intervenir quatre éléments avec le nœud sommet  $i$  en commun. Seuls les éléments  $E1$  et  $E2$  sont coupés par la fissure et doivent faire l'objet d'un traitement particulier. Pour les éléments  $E3$  et  $E4$ , on peut utiliser les techniques de reconstruction de champs classiques, où les densités se décomposent uniquement sur les fonctions de base  $\varphi_i$ .

Le problème qui se pose est donc celui défini par la figure 5.13. Sur l'arrête  $\Gamma_{12}$  commune aux deux éléments  $E1$  et  $E2$  et coupée par la fissure, nous allons


 Figure 5.12: Éléments enrichis par les fonctions  $H\varphi_i$ 

chercher à déterminer une densité d'effort qui se décompose en une partie continue et une partie discontinue. Cette densité d'effort sera construite dans le même esprit que le cas général. Elle peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des fonctions de base de l'élément restreintes à l'arrête considérée. Ceci revient à chercher sur  $\Gamma_{12}$  :

$$\hat{\underline{F}} = \hat{\underline{F}}_i \varphi_i + \hat{\underline{F}}_j \varphi_j + \hat{\underline{F}}_i^H H\varphi_i + \hat{\underline{F}}_j^H H\varphi_j \quad (5.12)$$

On doit au préalable déterminer les projections qui découlent de la condition de prolongement :

$$\underline{Q}_E(i) = \int_{\partial E} \eta_E \hat{\underline{F}} \varphi_i d\Gamma = \int_E \sigma_h \cdot \underline{\text{grad}}(\varphi_i) dE - \int_{\Omega} \underline{f}_d \varphi_i dE \quad (5.13)$$

et :

$$\underline{Q}_E^H(i) = \int_{\partial E} \eta_E \hat{\underline{F}} H\varphi_i d\Gamma = \int_E \sigma_h \cdot \underline{\text{grad}}(H\varphi_i) dE - \int_{\Omega} \underline{f}_d H\varphi_i dE \quad (5.14)$$

On relie  $\underline{Q}_E(i)$  (respectivement  $\underline{Q}_E^H(i)$ ) aux projections des densités sur chaque arrête. Ces projections sont dans un premier temps les inconnues que nous cherchons à déterminer. Pour l'élément  $E1$  de la figure 5.12 :

$$\underline{b}_{41} = \int_{\Gamma_{41}} \eta_E \hat{\underline{F}} \varphi_i d\Gamma \quad (5.15)$$

$$\underline{b}_{12} = \int_{\Gamma_{12}} \eta_E \hat{\underline{F}} \varphi_i d\Gamma \quad (5.16)$$

$$\underline{b}_{41}^H = \int_{\Gamma_{41}} \eta_E \hat{F} H \varphi_i d\Gamma \quad (5.17)$$

$$\underline{b}_{12}^H = \int_{\Gamma_{12}} \eta_E \hat{F} H \varphi_i d\Gamma \quad (5.18)$$

On a alors :

$$\underline{Q}_{E1}(i) = \underline{b}_{41} + \underline{b}_{12} \quad (5.19)$$

$$\underline{Q}_{E1}^H(i) = \underline{b}_{41}^H + \underline{b}_{12}^H \quad (5.20)$$

L'existence d'une solution est garantie par l'équilibre éléments finis :

$$\sum_E \underline{Q}_E(i) = \underline{0} \quad (5.21)$$

$$\sum_E \underline{Q}_E^H(i) = \underline{0} \quad (5.22)$$

Cependant la solution n'étant pas unique, on la recherche en effectuant une minimisation de l'écart entre les projections recherchées et les projections calculées à partir de la solution éléments finis. Dans le cas d'un nœud frontière soumis à des conditions de type Neumann, la solution est unique. Tous les  $\underline{b}$  peuvent donc être déterminés selon cette procédure. *Pour les  $\underline{b}^H$ , on peut établir une procédure explicite.* En effet observons que la fonction  $H\varphi_i - \varphi_i$  vaut 0 partout sauf sur la partie inférieure ( $H = -1$ ) de l'arrête  $\Gamma_{12}$ . On peut alors calculer :

$$\tilde{\underline{Q}}_E(i) = \int_{\partial E} \eta_E \hat{F} (H\varphi_i - \varphi_i) d\Gamma = \int_E \sigma_{h, \text{grad}}(H\varphi_i - \varphi_i) dE - \int_{\Omega} \underline{f}_d(H\varphi_i - \varphi_i) dE \quad (5.23)$$

Il apparaît alors :

$$\tilde{\underline{Q}}_{E1}(i) = \int_{\Gamma_{12}} \eta_E \hat{F} (H\varphi_i - \varphi_i) d\Gamma \quad (5.24)$$

$$\tilde{\underline{Q}}_{E2}(i) = \int_{\Gamma_{12}} \eta_E \hat{F} (H\varphi_i - \varphi_i) d\Gamma \quad (5.25)$$

L'existence d'une solution unique est alors garantie par la relation :

$$\tilde{\underline{Q}}_{E1}(i) + \tilde{\underline{Q}}_{E2}(i) = \underline{0} \quad (5.26)$$

Démonstration :

$$(\underline{Q}_{E1}^H(i) + \underline{Q}_{E2}^H(i) + \underline{Q}_{E3}^H(i) + \underline{Q}_{E4}^H(i)) - (\underline{Q}_{E1}(i) + \underline{Q}_{E2}(i) + \underline{Q}_{E3}(i) + \underline{Q}_{E4}(i)) = \underline{0}$$

et  $H = +1$  dans les éléments  $E3$  et  $E4$  d'où :

$$(\underline{Q}_{E1}^H(i) + \underline{Q}_{E2}^H(i)) - (\underline{Q}_{E1}(i) + \underline{Q}_{E2}(i)) = \tilde{\underline{Q}}_{E1}(i) + \tilde{\underline{Q}}_{E2}(i) = \underline{0}$$

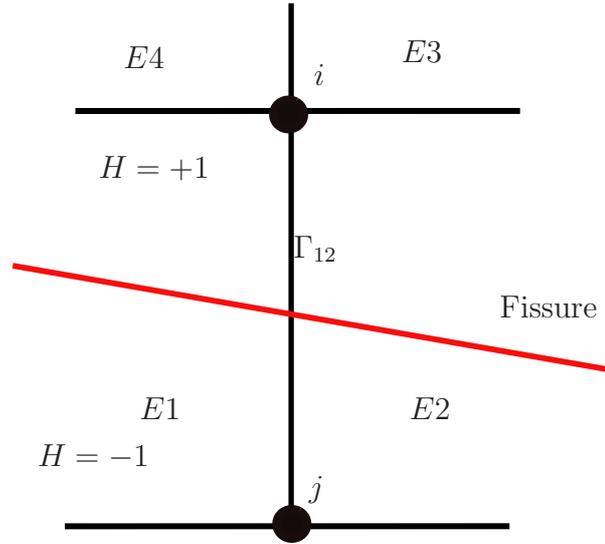


Figure 5.13: Définition du problème sur une arête coupée par le fissure

Reprenons l'exemple de la figure 5.13. On peut donc déterminer  $\underline{b}_{12}(i)$  et  $\underline{b}_{12}(j)$  par la technique habituelle. On calcule alors :

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{Q}}_{E1}(i) = -\tilde{\underline{Q}}_{E2}(i) &= \int_{\partial E} \eta_E \hat{F}(H\varphi_i - \varphi_i) d\Gamma = \int_E \sigma_{h, \underline{grad}}(H\varphi_i - \varphi_i) dE - \int_{\Omega} \underline{f}_d(H\varphi_i - \varphi_i) dE \\ & \quad (5.27) \\ \tilde{\underline{Q}}_{E1}(j) = -\tilde{\underline{Q}}_{E2}(j) &= \int_{\partial E} \eta_E \hat{F}(H\varphi_j + \varphi_j) d\Gamma = \int_E \sigma_{h, \underline{grad}}(H\varphi_j + \varphi_j) dE - \int_{\Omega} \underline{f}_d(H\varphi_j + \varphi_j) dE \\ & \quad (5.28) \end{aligned}$$

On a alors :

$$\underline{b}_{12}^H(i) = \tilde{\underline{Q}}_{E1}(i) + \underline{b}_{12}(i) \quad (5.29)$$

et :

$$\underline{b}_{12}^H(j) = \tilde{\underline{Q}}_{E1}(j) - \underline{b}_{12}(j) \quad (5.30)$$

$\hat{F}$  peut alors être facilement déterminé en inversant un petit système linéaire.

Il faut cependant discerner deux autres configurations. La première concerne le cas où la fissure coupe deux arêtes consécutives définies par la figure 5.14. On a dans ce cas :

$$\tilde{\underline{Q}}_{E1}(i) + \tilde{\underline{Q}}_{E3}(i) + \tilde{\underline{Q}}_{E4}(i) = \underline{0}$$

Observons que :

$$\tilde{\underline{Q}}_{E4}(i) = \int_{\Gamma_{34}} \sigma_{h|_{E4}} \cdot \underline{n} \psi_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{41}} \sigma_{h|_{E4}} \cdot \underline{n} \psi_i d\Gamma$$

En notant :

$$\psi_i = H\varphi_i \pm \varphi_i \quad (5.31)$$

On lève alors simplement l'indétermination en imposant :

$$\underline{\tilde{Q}}_{E3}(i) = - \int_{\Gamma_{34}} \sigma_{h|E4} \cdot \underline{n} \psi_i d\Gamma \quad (5.32)$$

$$\underline{\tilde{Q}}_{E1}(i) = - \int_{\Gamma_{41}} \sigma_{h|E4} \cdot \underline{n} \psi_i d\Gamma \quad (5.33)$$

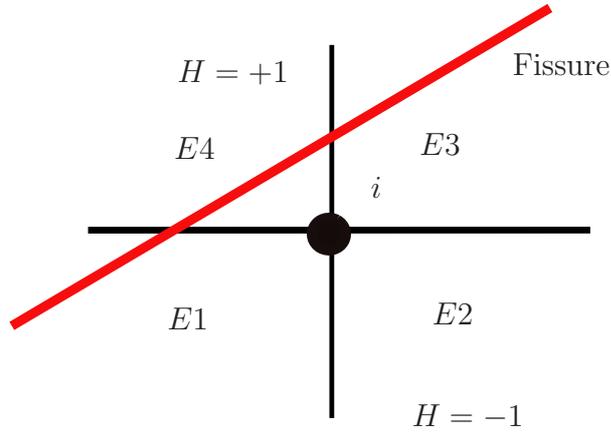


Figure 5.14: Cas d'une fissure passant par deux arrêtes consécutives

Le second cas concerne une fissure passant par un nœud comme modélisé sur la figure 5.15. Dans ce cas il n'y a pas de discontinuité à prendre en compte dans le calcul des densités. Il suffit d'écrire :

$$\underline{b}_{41}(i) = -\frac{1}{2}(\underline{Q}_{E4}(i) + \underline{Q}_{E4}^H(i)) \quad (5.34)$$

$$\underline{b}_{12}(i) = \frac{1}{2}(\underline{Q}_{E2}(i) + \underline{Q}_{E2}^H(i)) \quad (5.35)$$

$$\underline{b}_{23}(i) = \frac{1}{2}(\underline{Q}_{E2}^H(i) - \underline{Q}_{E2}(i)) \quad (5.36)$$

$$\underline{b}_{34}(i) = -\frac{1}{2}(\underline{Q}_{E4}^H(i) - \underline{Q}_{E4}(i)) \quad (5.37)$$

On voit que le calcul est ici totalement explicite.

Enfin, dans le cas où l'arrête considérée est soumise à des conditions de Neumann, on impose :

$$\underline{\tilde{Q}}_E(i) = \int_{\partial E} \underline{F}_d \psi_i d\Gamma \quad (5.38)$$

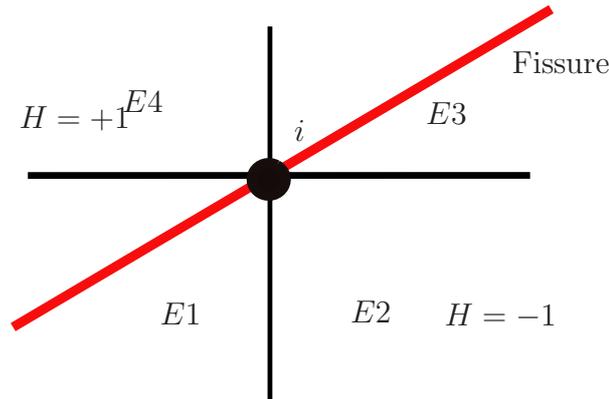


Figure 5.15: Cas d'une fissure passant par un nœud

Les propriétés d'équilibre éléments finis assurent l'existence et l'unicité d'une solution pour les densités.

Afin d'améliorer la construction des densités on utilisera l'optimisation des densités exposée au paragraphe 2.4 du premier chapitre et déjà utilisée localement au chapitre précédent pour le problème standard. L'optimisation ne concerne alors que les éléments présentant une discontinuité des densités. Cette optimisation présente un intérêt pour les cas limites où les dimensions des sous-éléments constitués par le passage de la fissure deviennent très différents. En plus d'améliorer la qualité de l'estimateur, elle permet de le rendre moins sensible aux paramètres géométriques. Elle est menée sur la partie continue et linéaire des densités.

## 2.2 Reconstitution d'un champ de contrainte admissible

Une fois les densités  $\hat{F}$  calculées, on veut reconstruire la contrainte SA  $\hat{\sigma}$  vérifiant les équations 1.32. Pour obtenir une solution rigoureusement SA, il faut en plus imposer sur les lèvres de la fissure  $l$  (on confond la lèvre supérieure  $l^+$  et la lèvre inférieure  $l^-$  tant que l'on travaille en petites perturbations) :

$$\hat{\sigma}_{h|E \cdot \underline{n}} = \underline{0} \quad (5.39)$$

Une solution simple est d'utiliser une résolution numérique de degré  $p + 3$  (comme suggéré dans [Babuška 94]) et enrichie avec les fonction  $H\varphi_i$  pour tous les éléments coupés par une fissure. Cela revient donc à résoudre un petit problème élément finis sur un quadrangle à 16 nœuds enrichi (voir la figure 5.16). La présence de l'enrichissement par les fonctions de type Heaviside garantit le respect de l'équation 5.39.

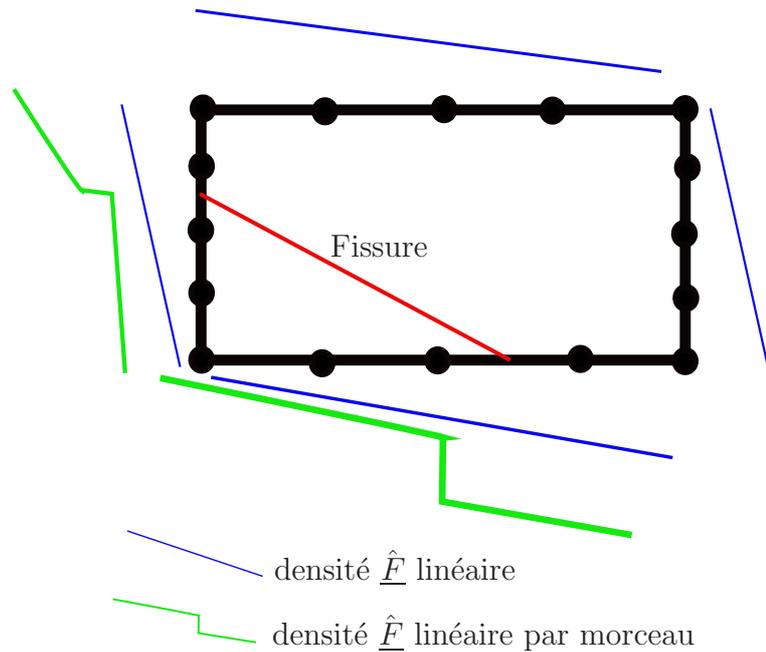


Figure 5.16: Problème sur un quadrangle à 16 nœuds enrichi

## 2.3 Résultats numériques

On teste la reconstruction de champ présentée sur un problème simple ne comportant pas la singularité géométrique due à la fissure. Cela permet de s'affranchir de l'erreur de pollution due à la singularité et de ne faire intervenir que l'enrichissement discontinu de type Heaviside. Le problème modélisé figure 5.17 est un anneau rectangulaire ouvert. Il est chargé de chaque côté par une traction uniforme  $\sigma = 100MPa$ . On prend pour paramètres matériau le module d'Young  $E = 210GPa$  et le coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . La discontinuité due à l'ouverture est modélisée grâce à l'enrichissement. On visualise figure 5.18 les éléments enrichis (avec les quadratures de Gauss) dans le cas d'une ouverture droite et dans le cas d'une ouverture inclinée.

Les niveaux d'erreur calculés sont très faibles dans la zone enrichie comme l'on pouvait s'y attendre. On trace sur les figures 5.19 et 5.20 les contributions à l'erreur globale par éléments pour un maillage à 92 éléments. Il existe tout de même une singularité peu sévère dans le problème : les deux angles rentrants à  $90^\circ$ . Les autres contributions ont dû être imposées à 0 afin que l'erreur dans la zone enrichie soit visible. On voit donc que l'erreur est négligeable sur les éléments enrichis par les fonctions  $H\varphi_i$ .

Les propriétés d'équilibre des éléments enrichis impliquent que l'on devrait avoir une erreur équivalente à celle obtenue dans le cas où l'ouverture serait

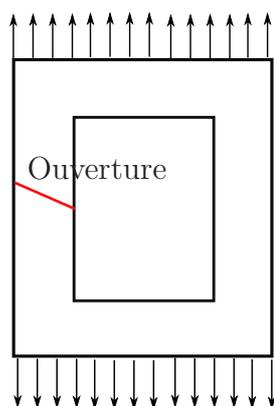


Figure 5.17: Anneau ouvert pour test des champs SA

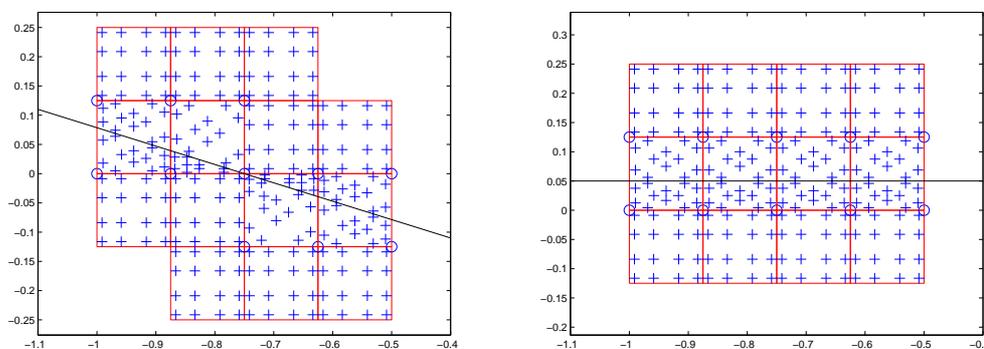


Figure 5.18: Visualisation de l'enrichissement pour ouverture droite et inclinée

maillée avec les sous-éléments utilisés pour la définition de la quadrature de Gauss. On trace figure 5.21 les erreurs pour le problème XFEM et pour le problème FEM équivalent dans le cas de l'ouverture droite. On retrouve bien les mêmes niveaux d'erreur, l'estimateur est donc consistant. Au regard de ces résultats, nous pouvons donc valider la pertinence de l'estimateur proposé pour l'enrichissement de type Heaviside.

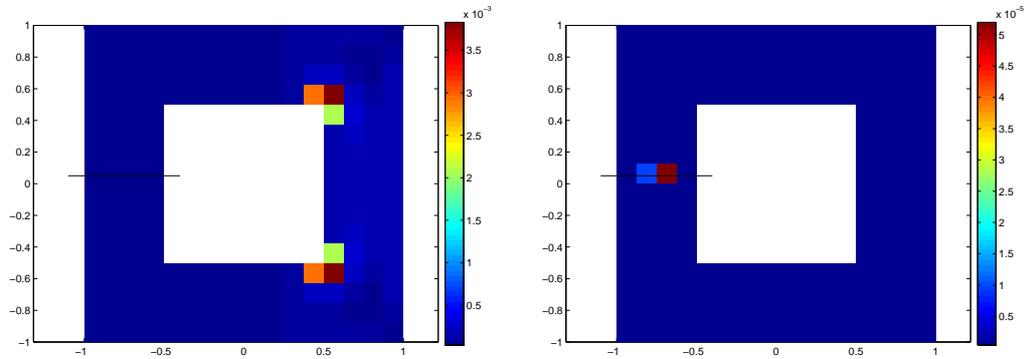


Figure 5.19: Visualisation des contribution à l'erreur avec ouverture droites. Éléments non enrichis imposés à 0 pour la deuxième figure.

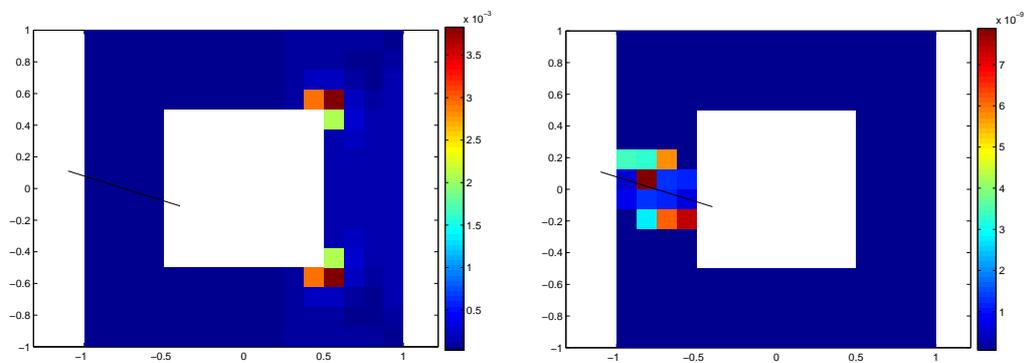


Figure 5.20: Visualisation des contribution à l'erreur avec ouverture inclinée. Éléments non enrichis imposés à 0 pour la deuxième figure.

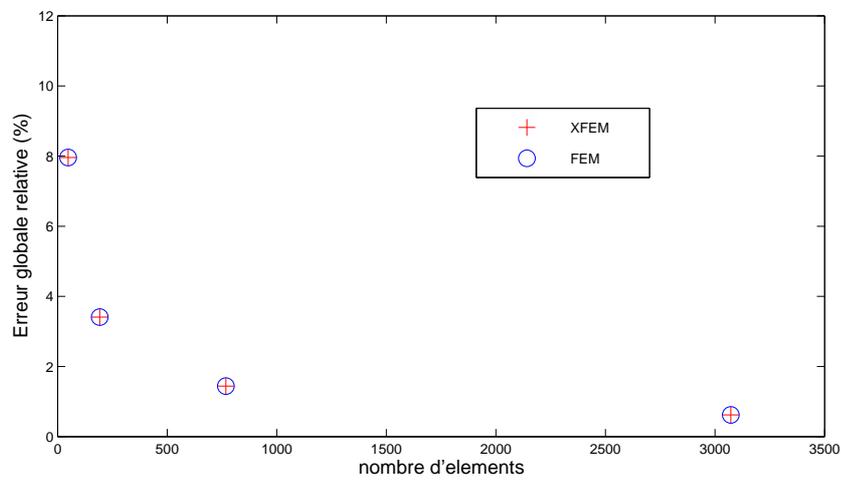


Figure 5.21: Comparaison des erreurs pour les problèmes XFEM ET FEM

### 3 Bilan

Nous avons élaboré dans ce chapitre deux stratégies distinctes pour estimer l'erreur commise lors d'une analyse XFEM. Nous nous sommes d'abord intéressés à l'enrichissement utilisant les fonctions qui génèrent la solution asymptotique en pointe de fissure. La construction des champs SA proposée repose sur l'aspect très local de cet enrichissement. Ainsi, en développant la solution asymptotique jusqu'à l'ordre 4 et raccordant ces champs au reste de la structure en imposant des conditions de Neumann, nous avons montré qu'il était possible d'évaluer l'erreur globale commise avec l'erreur en relation de comportement. Nous nous sommes ensuite intéressés à l'enrichissement de type Heaviside qui prend en charge le saut de déplacement le long des lèvres de la fissure. Une écriture simple de la condition de prolongement permet de construire des densités équilibrées discontinues de manière explicite. Une optimisation locale des densités linéaires (composante continue) permet ensuite d'établir un estimateur d'erreur pertinent et robuste. Il reste maintenant à combiner ces constructions de champs sur le problème XFEM complet et à appliquer la technique d'encadrement des facteurs d'intensité de contraintes développée au chapitre 3.

---

# Résultats numériques

*Ce chapitre regroupe les résultats numériques pour le problème d'encadrement des facteurs d'intensité de contraintes traité avec la XFEM. Les deux type d'enrichissement sont donc pris en compte. On propose également d'utiliser une méthode FEM classique pour le problème à résoudre et une méthode XFEM pour le problème adjoint afin d'améliorer l'encadrement.*

## Sommaire

---

1	Comportement global de l'estimateur pour la XFEM	120
2	Encadrements des facteurs d'intensité de contraintes avec la XFEM . . . . .	125
3	Enrichissement du problème adjoint . . . . .	127
4	Bilan . . . . .	131

---

# 1 Comportement global de l'estimateur pour la XFEM

Nous avons établi au chapitre précédent deux techniques de construction de champs admissibles pour l'erreur en relation de comportement adaptées aux deux enrichissements rencontrés dans la XFEM. Ces deux techniques se sont montrées efficaces lorsqu'elles étaient mises en œuvre séparément. Nous allons ici aborder le problème XFEM complet, c'est-à-dire avec l'enrichissement asymptotique en pointe de fissure et la modélisation de la discontinuité par les fonctions de type Heavyside. Nous nous intéressons pour l'instant aux erreurs globales. La section suivante traitera de l'encadrement des facteurs d'intensité de contraintes extraits par une méthode XFEM.

## 1.0.1 Sollicitation en mode $I$

Nous reprenons l'exemple du benchmark en mode  $I$  de la figure 3.2 avec le même chargement. Les figures 6.1 et 6.2 montrent respectivement les contributions à l'erreur globale pour le problème à résoudre et le problème adjoint  $I$ . On observe un comportement très sain de l'estimateur puisque l'erreur se concentre d'une part en pointe de fissure et d'autre part dans les éléments qui réalisent la transition entre deux interpolations (voir chapitre 4). On retrouve une erreur importante dans l'élément soumis à l'enrichissement à la fois par les fonction  $F_j$  et par les fonctions  $H$ . Les graphes 6.3 et 6.4 montrent l'évolution de l'erreur globale relative lorsque l'on raffine le maillage comparé à un problème résolu par une méthode FEM classique. L'erreur présente un bon comportement asymptotique pour le problème à résoudre et pour le problème adjoint.

## 1.0.2 Sollicitation en mode $II$

Nous reprenons l'exemple du benchmark en mode  $II$  de la figure 3.3 avec le même chargement. Les figures 6.5 et 6.6 montrent respectivement les contributions à l'erreur globale pour le problème à résoudre et le problème adjoint  $II$ . On voit que l'erreur se localise dans les éléments enrichis par les fonction  $H$  pour les sollicitations en mode  $II$ . Il apparaît donc que l'estimateur présente une sensibilité anormale à ce type de sollicitation. Les graphes 6.7 et 6.8 montrent l'évolution de l'erreur globale relative lorsque l'on raffine le maillage comparé à un problème résolu par une méthode FEM classique. Le comportement pour le problème à résoudre est cohérent avec un taux de convergence légèrement supérieur à celui de l'erreur pour le problème FEM classique. En revanche, pour le problème adjoint, si on peut faire la même remarque pour

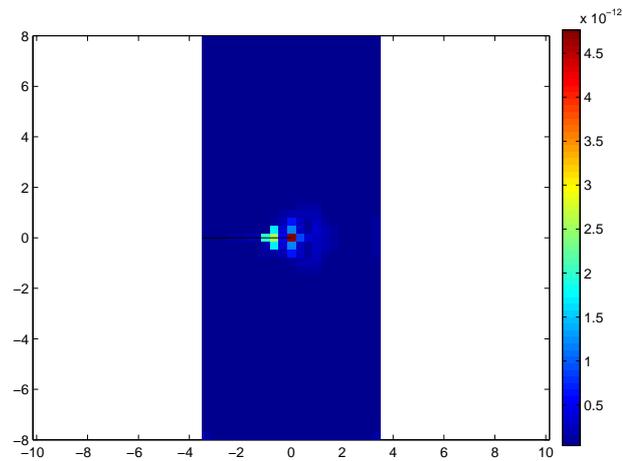


Figure 6.1: Contributions à l'erreur globale pour le problème en mode  $I$  résolu par une analyse XFEM . Maillages à 1071 éléments.

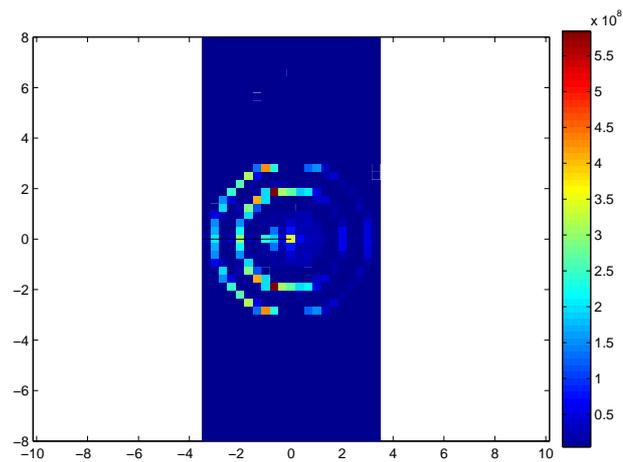
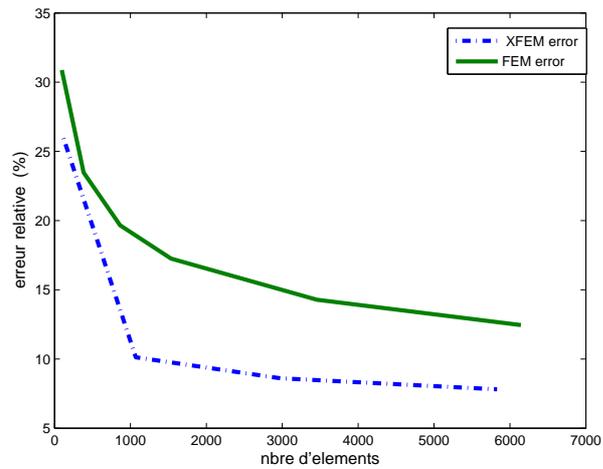
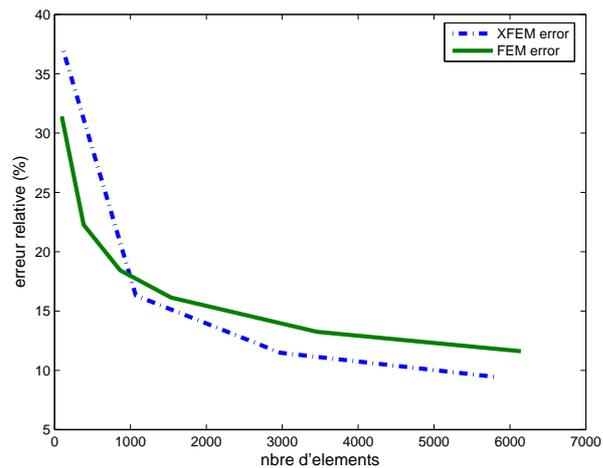


Figure 6.2: Contributions à l'erreur globale pour le problème adjoint  $I$  résolu par une analyse XFEM. Maillages à 1071 éléments.

le taux de convergence, on constate que le niveau d'erreur est anormalement élevé. Ce qui confirme une trop forte sensibilité de l'estimateur à ce chargement. On n'observait pas ce type de comportement lorsque nous avons validé la reconstruction des champs de manière indépendante. On peut donc supposer que le problème provient de l'effort appliqué sur la frontière  $\Gamma$  entre les

Figure 6.3: Convergence de l'erreur en mode  $I$  résolu par une analyse XFEM.Figure 6.4: Convergence de l'erreur pour le problème adjoint  $I$  résolu par une analyse XFEM.

domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  (voir chapitre 5, équation 5.9) lorsque l'on se situe sur les éléments enrichis par la fonction  $H$ . On voit donc ici que quelques améliorations peuvent encore être apportées à ce niveau.

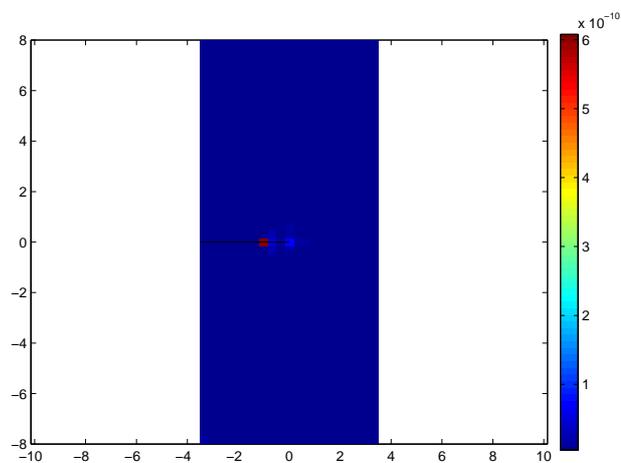


Figure 6.5: Contributions à l'erreur globale pour le problème en mode *II* résolu par une analyse XFEM. Maillages à 1071 éléments.

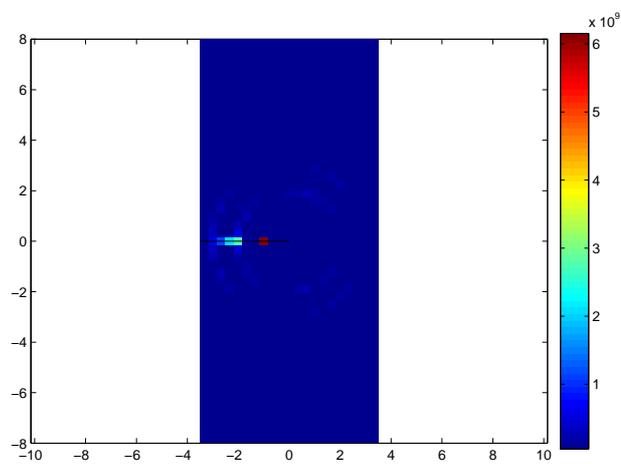


Figure 6.6: Contributions à l'erreur globale pour le problème adjoint *II* résolu par une analyse XFEM. Maillages à 1071 éléments.

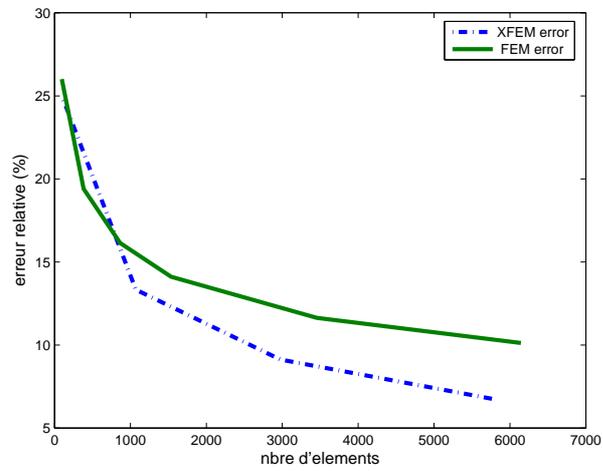


Figure 6.7: Convergence de l'erreur en mode  $II$  résolu par une analyse XFEM.

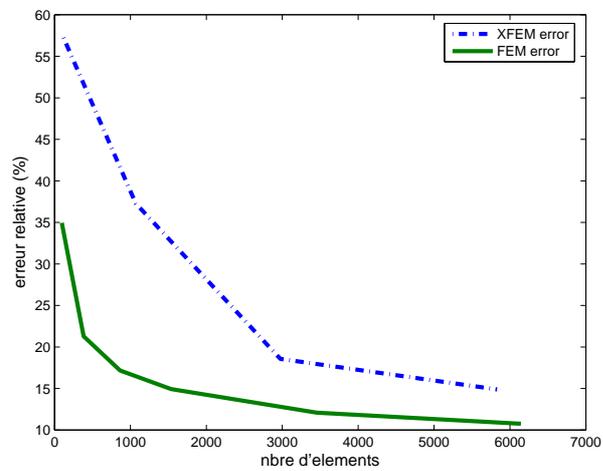


Figure 6.8: Convergence de l'erreur pour le problème adjoint  $II$  résolu par une analyse XFEM.

## 2 Encadrements des facteurs d'intensité de contraintes avec la XFEM

On établit enfin les bornes pour les facteurs d'intensité de contraintes extraits à partir d'une analyse XFEM. On utilise la technique d'estimation d'erreur développée dans cette thèse et combinant une extension de l'erreur en relation de comportement à la XFEM (voir chapitre 5) à une technique d'extraction linéaire (voir chapitre 3). On utilise également l'encadrement proposé dans [Ladevèze 06] (voir équation 3.28 chapitre 3). Comme nous l'avons vu, cette nouvelle expression permet d'encadrer la valeur exacte de la quantité d'intérêt et de travailler avec la quantité  $K_{\alpha,h} + K_{\alpha,hh}$  qui est une nette amélioration de  $K_{\alpha,h}$ .

Le tableau 6.1 montre les résultats en mode  $I$  pour le problème défini par la figure 3.2.

Les tableaux 6.2 et 6.3 montrent les résultats en mode  $II$  pour le problème défini par la figure 3.3.

Les quantités d'intérêt extraites pour  $K_I$  sont de très bonne qualité, le terme correctif permet donc d'approcher de manière très fine la valeur de référence. Par ailleurs les bornes obtenues sont d'excellente qualité.

Les quantités d'intérêt extraites pour  $K_{II}$  sont de moins bonne qualité comme cela est souvent le cas. le terme correctif ne permet pas dans ce cas d'améliorer les résultats. Les bornes obtenues sont de qualité correcte mais peuvent encore être améliorées aux vues des remarques que nous avons fait sur l'estimateur d'erreur en mode  $II$ .

nombre d'éléments	$K_{I,h}$	$K_{I,h} + K_{I,hh}$	$K_{I,h}^-$	$K_{I,h}^+$
1071	9.2137	9.2416	9.0223	9.4609
2975	9.3162	9.3167	9.2123	9.4141
5831	9.3231	9.3472	9.2847	9.3977

Tableau 6.1: Bornes pour  $K_I$  pour le problème XFEM en mode  $I$ . Valeur référence :  $K_{I,ref} = 9.33$ .

nombre d'éléments	$K_{I,h}$	$K_{I,h} + K_{I,hh}$	$K_{I,h}^-$	$K_{I,h}^+$
1071	33.3374	33.6305	32.5714	34.6896
2975	33.3390	33.9100	33.3398	34.4803
5831	33.8579	33.8742	33.5845	34.5845

Tableau 6.2: Bornes pour  $K_I$  pour le problème XFEM en mode  $II$ . Valeur référence :  $K_{I,ref} = 33.93$ .

nombre d'éléments	$K_{II,h}$	$K_{II,h} + K_{II,hh}$	$K_{II,h}^-$	$K_{II,h}^+$
1071	4.3963	5.3204	3.8389	6.8019
2975	4.3681	5.2492	4.0783	6.4200
5831	4.3964	4.8800	4.2227	5.5373

Tableau 6.3: Bornes pour  $K_{II}$  pour le problème XFEM en mode  $II$ . Valeur référence :  $K_{II,ref} = 4.53$ .

### 3 Enrichissement du problème adjoint

Les bornes introduites dans [Ladevèze 06] n'utilisent plus la propriété d'orthogonalité de Galerkin, nous disposons donc d'une grande liberté pour la résolution du problème adjoint. En outre, il est possible d'utiliser des espaces d'interpolation différents pour le problème à résoudre et le problème adjoint. Ainsi nous proposons dans ce paragraphe de traiter le problème à résoudre par une technique FEM classique et d'enrichir les éléments en pointe de fissure pour le problème adjoint. On reprend exactement les modèles et maillages utilisés au chapitre 3. On compare alors les encadrements pour un problème adjoint classique avec densités optimisées et un problème adjoint enrichi. La figure 6.9 présente les résultats pour  $K_I$  en mode  $I$ . La figure 6.10 présente les résultats pour  $K_I$  en mode  $II$ . La figure 6.10 présente les résultats pour  $K_{II}$  en mode  $II$ . On constate une très nette amélioration des bornes obtenues pour les deux modes de sollicitation. On voit donc ici que l'amélioration du problème adjoint permet d'affiner les bornes sans avoir à modifier le problème à résoudre. Cela peut présenter un intérêt dans le cas où l'on souhaite mener une analyse sur une structure complexe. On peut utiliser une analyse FEM classique pour laquelle on possède suffisamment de recul et dont la mise en œuvre reste raisonnable. On peut ensuite travailler de manière plus précise sur le problème adjoint là où cela est nécessaire (il peut y avoir plusieurs quantités d'intérêt à contrôler). La liberté laissée par l'encadrement proposé permet de définir un problème adjoint pour obtenir des bornes dont la précision peut être largement améliorée sans avoir à retoucher l'analyse du problème à résoudre.

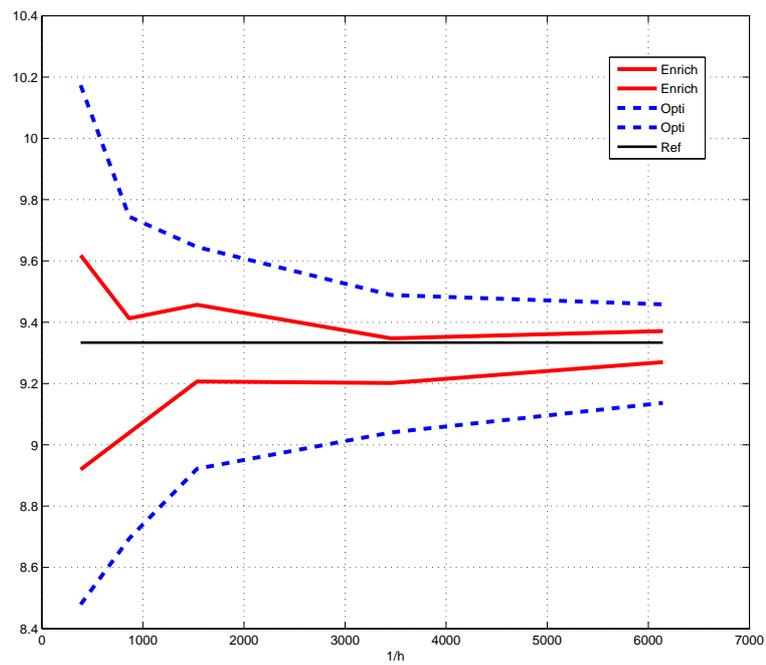


Figure 6.9: Comparaison des bornes entre un problème adjoint classique avec densités optimisées et un problème adjoint enrichi. Bornes pour  $K_I$  en mode  $I$

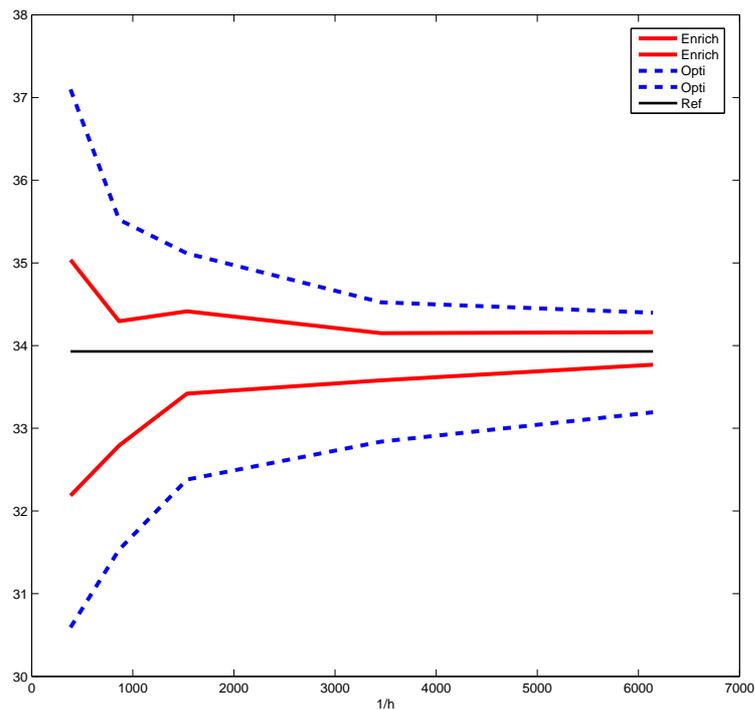


Figure 6.10: Comparaison des bornes entre un problème adjoint classique avec densités optimisées et un problème adjoint enrichi. Borne pour  $K_I$  en mode  $II$

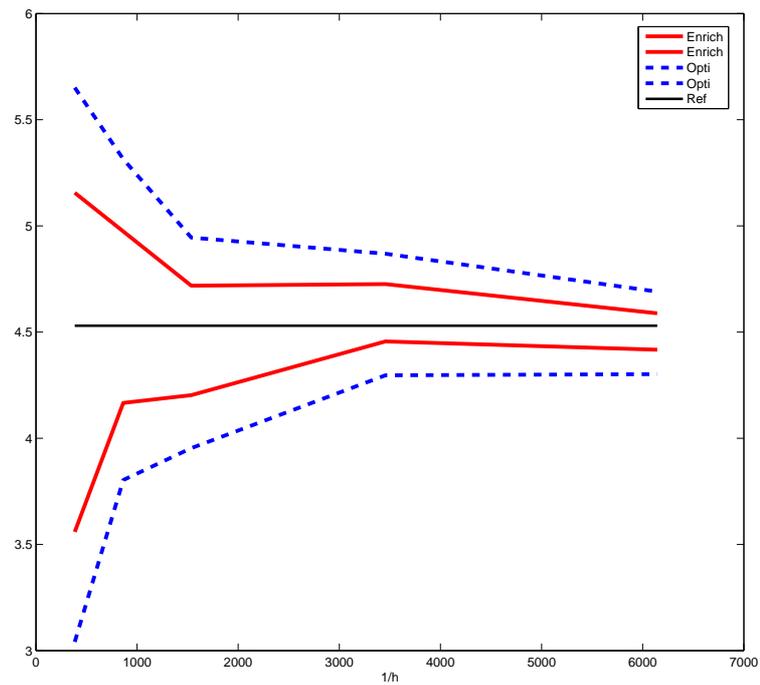


Figure 6.11: Comparaison des bornes entre un problème adjoint classique avec densités optimisées et un problème adjoint enrichi. Bornes pour  $K_{II}$  en mode  $II$

## 4 Bilan

Le comportement de l'estimateur d'erreur pour la XFEM s'avère très efficace hormis pour le problème adjoint en mode  $II$ . La technique proposée permet de fournir des bornes garanties pour  $K_I$  en mode  $I$  comme en mode  $II$  très précises. Rappelons de plus que ces bornes sont garanties, elles encadrent la valeur exacte de la quantité d'intérêt. Les bornes pour  $K_{II}$  peuvent encore être améliorées en améliorant la robustesse de l'estimateur.

Une piste intéressante est également celle qui consiste à réaliser un premier calcul de qualité moyenne puis, d'améliorer le problème adjoint jusqu'à obtention des bornes aussi fines que nécessaire. L'estimateur d'erreur permet alors simplement d'obtenir une bonne évaluation de la quantité d'intérêt, ce que l'on cherche habituellement directement sur le problème à résoudre. Cette démarche est dans l'esprit de celle proposée dans [Chamoin 07a] où seul le problème adjoint fait l'objet de gros efforts numériques et d'un enrichissement local.



---

# Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans cette thèse à l'estimation d'erreur à posteriori pour les problèmes de fissuration traités par une analyse éléments finis. Nous avons choisi de travailler sur les facteurs d'intensité de contraintes en pointe de fissure pour leur aspect linéaire, ce qui permet de proposer aisément un encadrement à caractère garanti, c'est à dire qui majore l'erreur vraie. La première étape de ce travail a consisté à trouver une technique d'extraction selon les exigences suivantes :

- s'adapter à l'écriture du problème adjoint pour le calcul d'erreur
- ne pas introduire d'approximations autres que les approximations numériques ;
- fournir des résultats robustes et de qualité ;
- être facile à implanter numériquement ;
- être non intrusive quelle que soit le type d'interpolation.

L'extracteur reposant sur le calcul des fonctions duales (ou conjuguées) a montré qu'il satisfaisait ces critères.

Il a ensuite été simple d'adapter la techniques d'estimation d'erreur sur les quantités d'intérêt utilisant le problème adjoint et un extracteur linéaire combinés à l'erreur en relation de comportement. L'optimisation des densités en pointe de fissure et la méthode donnée dans [Ladevèze 06] permettent d'obtenir d'excellents résultats pour toute sollicitation en 2D.

L'utilisation de plus en plus courante des techniques d'enrichissement et notamment de la XFEM pour les problèmes présentant des discontinuités nous ont conduit à nous pencher sur ce type d'interpolation. Nous avons alors proposé d'utiliser l'erreur en relation de comportement pour estimer l'erreur commise lors d'une analyse XFEM. L'erreur en relation de comportement présente l'avantage de fournir un majorant de l'erreur, quelque soit la méthode numérique, pour peu que l'on soit en mesure de construire des champs admissibles. Pour les champs en pointe de fissure, la technique de construction repose sur le développement asymptotique et donne de bons résultats tant que l'enrichissement reste localisé. Pour les champs discontinus obtenus avec la fonction saut  $H$ , nous avons montré que l'exploitation des propriétés d'équilibre

éléments finis permet d'adapter les techniques existantes pour les éléments finis classiques. La combinaison de ces constructions de champs admissibles donne de bons résultats exceptés pour les problèmes où le mode  $II$  est fortement activé.

Les bornes obtenues pour le facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  se montrent très pertinentes sans avoir à utiliser un maillage particulièrement fin. Pour  $K_{II}$ , les résultats sont moins satisfaisants, notons que c'est souvent le cas. Cependant, ces résultats doivent pouvoir être améliorés en réduisant la sensibilité de l'estimateur au mode  $II$ . Notons tout de même que l'aspect garanti des bornes obtenues ainsi que leur qualité les rendent utilisables en toute confiance par le concepteur. C'est un point clé car il s'agit ici de grandeurs fortement dimensionnantes.

Enfin nous avons proposé une démarche consistant à utiliser une méthode éléments finis classique et peu coûteuse pour la résolution du problème à partir duquel est extraite la quantité d'intérêt, qui peut être en premier lieu de mauvaise qualité. On peut ensuite améliorer le problème adjoint là où cela est nécessaire en l'enrichissant comme cela a déjà été réalisé dans [Chamoin 07a]. Nous voyons que l'estimation d'erreur ne se contente plus de valider la pertinence d'un premier calcul en vue de son amélioration, il n'est plus ici question de calcul adaptatif. L'aspect garanti des estimateurs proposés permet d'en faire des outils de calcul pour les quantités d'intérêt avec un maximum de fiabilité.

Enfin, nous pouvons envisager les perspectives suivantes aux travaux réalisés dans cette thèse :

- amélioration des résultats pour les problèmes où le mode  $II$  est fortement activé dans le cas de la XFEM ;
- extension aux quantités non linéaires comme le taux de restitution d'énergie, l'enjeu étant de garder l'aspect garanti ;
- extension à tout type de singularité géométrique 2D basée sur l'expression des fonctions duales appropriées ;
- extension aux problèmes 3D, les fonctions duales pouvant alors être évaluées numériquement.

---

# Bibliographie

- [Ainsworth 93] M. Ainsworth & J.T. Oden. *A priori error estimators for second-order elliptic systems. Part 2 : An optimal order process for calculating self-equilibrating fluxes*. Comput. Math. Appl., vol. 26, pages 75–87, 1993.
- [Ainsworth 97] M. Ainsworth & J.T. Oden. *A posteriori error estimation in finite element analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 142, pages 1–88, 1997.
- [Azziz 72] K. Azziz & I. Babuška. *The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations*. Academic Press, New York, vol. 33, pages 1975–1996, 1972.
- [Babuška 78a] I. Babuška & W.C. Rheinboldt. *Error estimates for adaptive finite element computation*. SIAM Journal of Numerical Analysis, vol. 15(4), pages 736–754, 1978.
- [Babuška 78b] I. Babuška & W.C. Rheinboldt. *A posteriori error estimates for the finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 12, page 1597, 1978.
- [Babuška 82] I. Babuška & W.C. Rheinboldt. *Computational error estimates and adaptive processes for some nonlinear structural problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 34, pages 895–937, 1982.
- [Babuška 84] I. Babuška & A. Miller. *The post-processing approach in the finite element method - Part 2 : the calculation of stress intensity factors*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 20, pages 1111–1129, 1984.

- [Babuška 87] I. Babuška & A. Miller. *A feedback finite element method with a posteriori error estimation. Part 1 : The finite element method and some basic properties of the a posteriori error estimator*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 61, pages 1–40, 1987.
- [Babuška 94] I. Babuška, T. Strouboulis, C.S. Upadhyay, C.S. Gangaraj & K. Copps. *Validation of a posteriori error estimators by numerical approach*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 37, pages 1073–1123, 1994.
- [Babuška 95] I. Babuška, T. Strouboulis, C.S. Upadhyay & S.K. Gangaraj. *A posteriori estimation and adaptative control of the pollution error in the h-version of the finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 38, pages 4207–4235, 1995.
- [Babuška 97] I. Babuška, T. Strouboulis, C.S. Upadhyay & S.K. Gangaraj. *Pollution error in the h-version of the finite element method and local quality of the recovered derivatives*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 140, pages 1–37, 1997.
- [Belytschko 99] T. Belytschko & T. Black. *Elastic crack growth in finite element with minimal remeshing*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 45, pages 601–620, 1999.
- [Bordas 07] S. Bordas, M. Duflot & P. Le. *A simple error for extended finite elements*. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2007.
- [Bui 78] H.D. Bui. *Mécanique de la rupture fragile*. Masson, 1978.
- [Bui 85] H.D. Bui & J.M. Proix. *Découplage de modes mixtes de rupture en thermoélasticité linéaire par des intégrales indépendantes du contour*. Actes du troisième colloque Tendances Actuelles en Calcul de Structure, Bastia, pages 631–643, 1985.
- [Béchet 05] E. Béchet, N. Moës & B. Burgardt. *Improved implementation and robustness study of the XFEM method for stress analysis around crack*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005.

- [Carstensen 00] C. Carstensen & S.A. Funken. *Fully reliable localized error control in the FEM*. SIAM J. Sci. Comput., vol. 21(4), pages 1465–1484, 2000.
- [Chahine 06] E. Chahine, P. Laborde & Y. Renard. *A quasi-optimal convergence result for fracture mechanics with XFEM*. Comptes rendus. Mathématiques, vol. 342(7), pages 527–532, 2006.
- [Chahine 08] E. Chahine, P. Laborde & Y. Renard. *Spider XFEM, an extended finite element variant for partially unknown crack-tip displacement*. Revue Européenne de Mécanique Numérique, vol. 17, pages 525–536, 2008.
- [Chamoin 07a] L. Chamoin. *Encadrement a posteriori de quantités locales dans les problèmes de viscoélasticité linéaire résolus par la Méthode des Eléments Finis*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cacchan, 2007.
- [Chamoin 07b] L. Chamoin & P. Ladevèze. *Bounds on history-dependent or independent local quantities in viscoelasticity problems solved by approximate methods*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 71(12), pages 1387–1411, 2007.
- [Chamoin 08] L. Chamoin & P. Ladevèze. *A non-intrusive method for the calculation of strict and efficient bounds of calculated outputs of interest in linear viscoelasticity problems*. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, vol. 197(9-12), pages 994–1014, 2008.
- [Chen 77] F.H.K. Chen & R.T. Shield. *Conservation laws in elasticity of the J-integral type*. Journal of Applied Mathematics and Physics, vol. 8, pages 1–22, 1977.
- [Ciarlet 78] P.G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North Holland, 1978.
- [Coorevits 97] P. Coorevits, J.P. Dumeau & J.P. Pelle. *Error estimator and adaptativity for three-dimensional finite element analyses*. Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics, Ladevèze and Oden Editors, Elsevier, pages 443–458, 1997.
- [de Almeida 06] J.P. Moitinho de Almeida & O.J.B. Almeida Pereira. *Upper bounds of the error in local quantities using equilibrated*

- and compatible finite element solutions for linear elastic problems.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 195, pages 279–296, 2006.
- [Destuynder 83] P. Destuynder. *Quelques remarque sur la mécanique de la rupture élastique.* Journal de mécanique théorique et appliquée, vol. 2, pages 113–135, 1983.
- [Dolbow 00] J. Dolbow, N. Moës & T. Belytschko. *Discontinuous enrichment in finite element with a partition of unity method.* Finite elements in anlysis and design, vol. 36, pages 235–260, 2000.
- [Flemming 97] M. Flemming, Y.A. Chu, B. Moran & T. Belytschko. *Enriched element free galerkin method for crack tip fields.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 40, pages 1483–1504, 1997.
- [Florentin 02] E. Florentin. *Sur l' évaluation de la qualité locale des contraintes éléments finis en élasticité tridimensionnelle.* PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2002.
- [Gallimard 06] L. Gallimard & J. Panetier. *Error estimation of the stress intensity factors for mixed-mode cracks.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 68, pages 299–316, 2006.
- [Guidault 05] P.A. Guidault. *Une stratégie de calcul pour les structures fissurées : analyse locale-globale et approche multiéchelle pour la fissuration.* PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2005.
- [Heintz 04] P. Heintz & K. Samuelsson. *On adaptive strategies and error control in fracture mechanics.* Computers and structures, vol. 82, pages 485–497, 2004.
- [Huerta 00] A. Huerta & P. Diez. *Error estimation including pollution assessment for nonlinear finite element analysis.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 181, pages 21–41, 2000.
- [Johnson 91] C. Johnson & P. Hansbo. *Adaptative finite element methods for small strain elasto-plasticity.* Proc of IUTAM Conf. on Finite Inelastic Deformations Theory and applications, Hannover (Allemagne), 1991.

- 
- [Johnson 92] C. Johnson & P. Hansbo. *Adaptative finite element methods in computational mechanics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 101, pages 81–143, 1992.
- [Laborde 05] P. Laborde, J. Pommier, Y. Renard & M. Salaün. *High-order extended finite element method for cracked domains*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 64, pages 354–381, 2005.
- [Ladevèze 83] P. Ladevèze & D. Leguillon. *Error estimate procedure in the finite element method and application*. SIAM Journal of Numerical Analysis, vol. 20(3), pages 485–509, 1983.
- [Ladevèze 85] P. Ladevèze. *Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures*. Comptes Rendus Académie des Sciences - Mécanique, Paris, vol. 300(II), pages 41–44, 1985.
- [Ladevèze 91] P. Ladevèze, J.P. Pelle & P. Rougeot. *Error estimation and mesh optimization for classical finite elements*. Engineering Computations, vol. 8, pages 69–80, 1991.
- [Ladevèze 95] P. Ladevèze. *Les bases de la méthode des erreurs en relation de comportement pour le contrôle adaptatif des calculs éléments finis : les travaux des années 1975*. Rapport n° 163, LMT-Cachan (France), 1995.
- [Ladevèze 96] P. Ladevèze & E.A.W Maunder. *A general method for recovering equilibrating element tractions*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 137, pages 111–151, 1996.
- [Ladevèze 97] P. Ladevèze & P. Rougeot. *New advances on a posteriori error on constitutive relation in finite element analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 150, pages 239–249, 1997.
- [Ladevèze 99a] P. Ladevèze, N. Moës & B. Douchin. *Constitutive relation error estimations for (visco) plasticity finite element analysis with softening*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 176, pages 247–264, 1999.
- [Ladevèze 99b] P. Ladevèze, P. Rougeot, P. Blanchard & J.P. Moreau. *Local error estimators for finite element linear analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 176, pages 231–246, 1999.

- [Ladevèze 04] P. Ladevèze & J.P. Pelle. Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics. Springer NY, 2004.
- [Ladevèze 06] P. Ladevèze. *Upper error bounds on calculated outputs of interest for linear and nonlinear structural problems*. Comptes Rendus Académie des Sciences - Mécanique, Paris, vol. 334, pages 399–407, 2006.
- [Ladevèze 08a] P. Ladevèze. *Strict upper error bounds for calculated outputs of interest in computational structural mechanics*. Computational Mechanics, vol. 42(2), pages 271–286, 2008.
- [Ladevèze 08b] P. Ladevèze. *Vérification des calculs éléments finis : une nouvelle technique non-intrusive pour le calcul des contraintes admissibles*. Rapport interne 270, LMT-Cachan, 2008.
- [Ladevèze 75] P. Ladevèze. *Comparaison de modèles des Milieux Continus*. PhD thesis, Université Paris VI, 1975.
- [Leblond 02] J.B. Leblond. Mécanique de la rupture fragile et ductile. Hermes, 2002.
- [Leguillon 87] D. Leguillon & E. Sanchez-Palencia. Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity. Masson, 1987.
- [Melenk 96] J.M. Melenk & I. Babuška. *The partition of unity finite element method : Basic theory and applications*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 139, pages 289–314, 1996.
- [Moës 99] N. Moës, J. Dolbow & T. Belytschko. *A finite element method for crack growth without remeshing*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 46, pages 131–150, 1999.
- [Moës 02a] N. Moës, A. Gravouil & T. Belytschko. *Non-planar 3D finite element method for crack growth by the extended finite element method and level sets - part i : Mechanical model*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 53, pages 2459–2568, 2002.
- [Moës 02b] N. Moës, A. Gravouil & T. Belytschko. *Non-planar 3D finite element method for crack growth by the extended finite element method and level sets - part ii : level set update*. International

- 
- Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 53, pages 2569–2586, 2002.
- [Moës 03] N. Moës, M. Cloirec, P. Cartraud & J.F. renacle. *A computational approach to handle complex microstructures geometries*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 192, pages 3163–3177, 2003.
- [Moës 06] N. Moës, E. Béchet & E. Tourbier. *Imposing Dirichlet boundary conditions in the extended finite element methods*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 67, pages 1641–1669, 2006.
- [Morin 01] P. Morin, R.H. Nochetto & K.G. Siebert. *Local problems on stars : A posteriori error estimators, convergence, and performance*. Math. Comput., vol. 72(243), pages 1067–1097, 2001.
- [Murakami 86] Y. Murakami. *Stress intensity factors handbook*. Pergamon Press : Oxford, 1986.
- [Oden 99] J.T. Oden & S. Prudhomme. *Goal-oriented error estimation and adaptativity for the finite element method*. TICAM report, Austin (USA), vol. 99, page 15, 1999.
- [Oliver 00] J. Oliver. *On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations*. International Journal of Solids and Structures, vol. 37, pages 7207–7229, 2000.
- [Osher 88] S. Osher & J.A. Sethian. *Fronts propagating with curvature-dependent speed : Alforithms based on Hamilton-jacobi formulations*. Journal of computational Physics, vol. 79(1), pages 12–49, 1988.
- [Paraschivoiu 97] M. Paraschivoiu, J. Peraire & A.T. Patera. *A posteriori finite element bounds for linear functional outputs of elliptic partial differential equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 150, pages 289–312, 1997.
- [Pares 06] N. Pares, P. Diez & A. Huerta. *Subdomain-based flux-free a posteriori error estimators*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 195(4-6), pages 297–323, 2006.

- [Pares 08] N. Pares, H. Santos & P. Diez. *Guaranteed energy error bounds for the Poisson equation using a flux-free approach : solving the local problems in subdomains*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008.
- [Peraire 98] J. Peraire & A.T. Patera. *Bounds for linear-functional outputs of coercive partial differential equations; local indicators and adaptive refinements*. Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics, Ladevèze and Oden Editors, Elsevier, pages 199–216, 1998.
- [Prager 47] W. Prager & J.L. Synge. *Approximation in elasticity based on the concept of functions spaces*. Quart. Appl. Math., vol. 5, pages 261–269, 1947.
- [Prudhomme 99] S. Prudhomme & J.T. Oden. *On goal-oriented error estimation for elliptic problems : application to the control of pointwise errors*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 176, pages 313–331, 1999.
- [Prudhomme 04] S. Prudhomme, F. Nobile, L. Chamoin & J.T. Oden. *Analysis of a subdomain-based error estimator for finite element approximations of elliptic problems*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 20(2), pages 165–192, 2004.
- [Rannacher 97] R. Rannacher & F. T. Stüttmeier. *A feedback approach to error control in finite element methods : application to linear elasticity*. Computational Mechanics, vol. 19, pages 434–446, 1997.
- [Rannacher 98] R. Rannacher & F.T. Stüttmeier. *A posteriori error control and mesh adaptation for finite element models in elasticity and elasto-plasticity*. Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics, Ladevèze and Oden Editors, Elsevier, pages 275–292, 1998.
- [Rice 68] J.R. Rice. *A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks*. Journal of Applied Mechanics, pages 379–386, 1968.
- [Rougeot 89] P. Rougeot. *Sur le contrôle de qualité des maillages éléments finis*. PhD thesis, Thèse de l'Université P. et M. Curie, Paris, 1989.

- [Ruter 06] M. Ruter & E. Stein. *Goal-Oriented a posteriori error estimates in linear elastic fracture mechanics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 195, pages 251–278, 2006.
- [Shih 88] C.F. Shih & R.J. Asaro. *Elastic-Plastic Analysis of Cracks on Bimaterial Interfaces Part I - Scale Yielding*. Journal Of Applied Mechanics, vol. 55, pages 299–316, 1988.
- [Stazi 03] F. Stazi, E. Budyn, J. Chessa & T. Belytschko. *An extended finite element method with higher order elements for curved cracks*. Computational Mechanics, vol. 31, pages 38–48, 2003.
- [Stein 01] E. Stein, S. Ohmnimus & E. Walhorn. *Local error estimates of fem for displacements and stresses in linear elasticity by solving local Neumann problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 52, pages 727–746, 2001.
- [Stern 76] M. Stern, E. B. Becker & R. S. Dunham. *A contour integral computation of mixed-mode stress intensity factors*. International Journal of Fracture, vol. 12, pages 359–368, 1976.
- [Stolarska 01] M. Stolarska, D.L. Copp & N. Moës ans T. Belytschko. *Modelling crack growth by level set and the extended finite element method*. International Journal for Numerical Metthods in Engineering, vol. 51(8), pages 943–960, 2001.
- [Stone 98] T. J. Stone & I. Babuška. *A numerical method with a posteriori error estimation for determining the path taken bay a propagating crack*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 160, pages 245–271, 1998.
- [Strouboulis 92a] T. Strouboulis & K.A. Haque. *Recent experiences with error estimation and adaptivity. Part 1 : Review of error estimators for scalar elliptic problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 97, pages 339–436, 1992.
- [Strouboulis 92b] T. Strouboulis & K.A. Haque. *Recent experiences with error estimation and adaptivity. Part 2 : Error estimation for h-adaptive approximations on grids of trianngles and quadrilaterals*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 100, pages 359–430, 1992.

- [Strouboulis 00a] T. Strouboulis, I. Babuška & K. Copps. *The design and analysis of the Generalized Finite Element Method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 181, pages 43–69, 2000.
- [Strouboulis 00b] T. Strouboulis, I. Babuška, D. Datta, K. Copps & S.K. Gangaraj. *A posteriori estimation and adaptive control of the error in the quantity of interest - Part 1 : A posteriori estimation of the error in the Von Mises stress and the stress intensity factors*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 181, pages 261–294, 2000.
- [Verfürth 96] R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. Wiley-Teubner, Stuttgart, 1996.
- [Xiao 05] Q.Z. Xiao & B.L. Karihaloo. *Improving the accuracy of XFEM crack tip fields using higher order quadrature and statically admissible stress recovery*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 66, pages 1378–1410, 2005.
- [Xuan 06a] Z.C. Xuan, B.C. Khoo & Z.R. Li. *Computing computing bounds to mixed mode stress intensity factors in elasticity*. Archive in Applied Mechanics, vol. 75, pages 193–209, 2006.
- [Xuan 06b] Z.C. Xuan, N. Parés & J. Peraire. *Computing upper and lower bounds for the J-integral in two-dimensional linear elasticity*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 195, pages 430–443, 2006.
- [Xuan 07] Z.C. Xuan, Z. Feng & D.Y. Gao. *Computing lower and upper bounds on stress intensity factors in bimetals*. International journal of Non-Linear Mechanics, vol. 42, pages 336–341, 2007.
- [Zienkiewicz 87] O.C. Zienkiewicz & J.Z. Zhu. *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24, pages 337–357, 1987.
- [Zienkiewicz 92] O.C. Zienkiewicz & J.Z. Zhu. *The superconvergent patch recovery an a posteriori error estimates. Part 1 : the recovery technique - Part 2 : error estimates and adaptivity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 33, pages 1331–1382, 1992.

- [Zienkiewicz 00] O.C. Zienkiewicz & R.L. Taylor. The finite element method fifth edition. Butterworth-Heinemann, 2000.