

Equations intégrales volumiques pour la diffraction d'ondes électromagnétiques par un corps diélectrique

El Hadji KONÉ

Institut de Recherche Mathématique de Rennes
Université de Rennes 1

Soutenance de thèse, Rennes
23 Juin 2010

Origine - Motivations - Objectif

- **Origine** : Projet IRMAR - IETR
- **Motivations** : Conception d'antennes lentilles
(association source primaire - lentille diélectrique et optimisation de forme)
- **Objectif** : Modélisation mathématique (analyse, simulations) par équations intégrales (\neq Optique Géométrique)

Problème à résoudre :

Déterminer le profil de rayonnement du champ électromagnétique étant données la lentille et la source primaire (**problème direct**)

Etapas pour la résolution :

- Analyse mathématique du problème de diffraction d'ondes électromagnétiques par un corps diélectrique
- Résolution numérique du problème

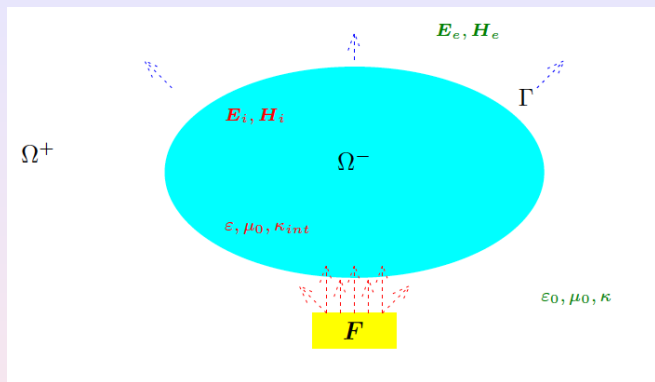
Plan

- 1 Analyse du problème de diffraction
- 2 Résolution de l'équation intégrale volumique
- 3 Tests numériques

Plan

- 1 Analyse du problème de diffraction
 - Le problème de diffraction
 - Les formulations intégrales
 - Quelques résultats d'analyse
- 2 Résolution de l'équation intégrale volumique
 - Traitement de singularités en 3D
- 3 Tests numériques
 - Matrices élémentaires
 - Spectre de l'opérateur intégral volumique
 - Profil du champ lointain
 - Champ intérieur

La diffraction électromagnétique



Permittivité électrique **discontinue** à la frontière Γ :

$$\epsilon > 0 \ (\sigma \equiv 0) \quad \epsilon|_{\Omega^-} \in C^1(\Omega^-) \cap C^0(\overline{\Omega^-}) \quad \epsilon|_{\Omega^+} = \epsilon_0$$

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \eta = 1 - \epsilon_r$$

$\mu \equiv \mu_0$, ω : la fréquence et $\kappa = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} > 0$: le nombre d'onde

Le problème

Trouver \mathbf{E} , \mathbf{H} tel que

$$\mathbf{E}_j := \mathbf{E}|_{\Omega^-} \in H(\text{rot}, \text{div}, \Omega^-), \mathbf{E}_e := \mathbf{E}|_{\Omega^+} \in H_{loc}(\text{rot}, \text{div}, \overline{\Omega^+}),$$

$$\mathbf{H}_j := \mathbf{H}|_{\Omega^-} \in H(\text{rot}, \Omega^-), \mathbf{H}_e := \mathbf{H}|_{\Omega^+} \in H_{loc}(\text{rot}, \overline{\Omega^+}), \text{ et}$$

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E}_j - i\kappa \mathbf{H}_j = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \times \mathbf{H}_j + i\kappa \epsilon_r \mathbf{E}_j = 0 \quad \text{dans } \Omega^- \\ \nabla \times \mathbf{E}_e - i\kappa \mathbf{H}_e = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \times \mathbf{H}_e + i\kappa \mathbf{E}_e = \mathbf{F} \quad \text{dans } \Omega^+ \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_e = \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_j \text{ et } \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_e = \mathbf{n} \cdot \epsilon_r \mathbf{E}_j \quad \text{sur } \Gamma \\ (\iff \mathbf{n} \times \mathbf{H}_e = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_j \text{ et } \mathbf{n} \times \mathbf{E}_e = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_j \quad \text{sur } \Gamma) \\ \mathbf{H}_e \times \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{E}_e = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right); r \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

où $\mathbf{F} \in H(\text{div}, \Omega^+)$ et $\text{supp} \mathbf{F} \subset\subset \Omega^+$

Plan

- 1 Analyse du problème de diffraction
 - Le problème de diffraction
 - **Les formulations intégrales**
 - Quelques résultats d'analyse
- 2 Résolution de l'équation intégrale volumique
 - Traitement de singularités en 3D
- 3 Tests numériques
 - Matrices élémentaires
 - Spectre de l'opérateur intégral volumique
 - Profil du champ lointain
 - Champ intérieur

Représentations intégrales

Proposition

Soit (\mathbf{E}, \mathbf{H}) une solution de (\mathcal{P}) , on a les représentations intégrales suivantes pour \mathbf{E} dans \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{E} = \nabla \mathcal{M}(\boldsymbol{\eta} \mathbf{E}_i) - \kappa^2 \mathcal{N}(\boldsymbol{\eta} \mathbf{E}_i) + \mathbf{D} \quad (\text{rep. int. volumique})$$

et

$$\mathbf{E} = \nabla S(\boldsymbol{\eta} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_i) - \nabla \mathcal{N}(\nabla \cdot \mathbf{E}_i) - \kappa^2 \mathcal{N}(\boldsymbol{\eta} \mathbf{E}_i) + \mathbf{D} \quad (\text{rep. int. surface-volume})$$

avec

$$\mathcal{M}\mathbf{u}(x) = \int_{\Omega^-} \mathbf{u}(y) \cdot \nabla_y G_\kappa(x-y) dy \quad \mathcal{N}\mathbf{u}(x) = \int_{\Omega^-} \mathbf{u}(y) G_\kappa(x-y) dy$$

$$Sf(x) = \int_\Gamma f(y) G_\kappa(x-y) ds(y)$$

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{i\kappa} \nabla_x \int_{\Omega^+} \nabla \cdot \mathbf{F}(y) G_\kappa(x-y) dy + i\kappa \int_{\Omega^+} \mathbf{F}(y) G_\kappa(x-y) dy$$

$$G_\kappa(x) = \frac{e^{i\kappa|x|}}{4\pi|x|} \text{ solution fondamentale de l'équation de Helmholtz}$$

● Représentation intégrale volumique

- ▶ Equations de Maxwell du second ordre

$$\longrightarrow \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = -\kappa^2 \boldsymbol{\eta} \mathbf{E} + i\kappa \mathbf{F}$$

- ▶ Convolution avec $\mathbb{G}_\kappa(x) = \left(\mathbf{1} + \frac{\nabla \nabla}{\kappa^2} \right) G_\kappa(x)$ (sol. fond. de $\nabla \times (\nabla \times) - \kappa^2$)

$$\longrightarrow \mathbf{E} = -\kappa^2 \mathbb{G}_\kappa * (\boldsymbol{\eta} \mathbf{E}) + i\kappa \mathbb{G}_\kappa * \mathbf{F}, \quad \text{avec } \boldsymbol{\eta}|_{\Omega^+} = 0 \text{ et } \mathbf{F}|_{\Omega^-} = 0$$

$$\longrightarrow \mathbf{E} = \nabla \mathcal{M}(\boldsymbol{\eta} \mathbf{E}_i) - \kappa^2 \mathcal{N}(\boldsymbol{\eta} \mathbf{E}_i) + \mathbf{D} \quad (\mathbf{D} = i\kappa \mathbb{G}_\kappa * \mathbf{F} \text{ onde incidente})$$

● Représentation intégrale surface-volume

- ▶ Intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^-} \boldsymbol{\eta}(y) \mathbf{E}_i(y) \cdot \nabla_y G_\kappa(x-y) dy &= - \int_{\Omega^-} \nabla \cdot (\boldsymbol{\eta}(y) \mathbf{E}_i(y)) G_\kappa(x-y) dy \\ &\quad + \int_{\Gamma} \mathbf{n}(y) \cdot (\boldsymbol{\eta}(y) \mathbf{E}_i(y)) G_\kappa(x-y) ds(y) \end{aligned}$$

- ▶ $\nabla \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_r \mathbf{E}_i) = 0$ (à partir des équations de Maxwell dans (\mathcal{P}))

$$\longrightarrow \nabla \cdot (\boldsymbol{\eta} \mathbf{E}_i) = \nabla \cdot ((1 - \boldsymbol{\epsilon}_r) \mathbf{E}_i) = \nabla \cdot \mathbf{E}_i$$

● Représentation intégrale volumique

- ▶ Equations de Maxwell du second ordre

$$\longrightarrow \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = -\kappa^2 \boldsymbol{\eta} \mathbf{E} + i\kappa \mathbf{F}$$

- ▶ Convolution avec $\mathbb{G}_\kappa(x) = \left(\mathbf{1} + \frac{\nabla \nabla}{\kappa^2} \right) G_\kappa(x)$ (sol. fond. de $\nabla \times (\nabla \times) - \kappa^2$)

$$\longrightarrow \mathbf{E} = -\kappa^2 \mathbb{G}_\kappa * (\boldsymbol{\eta} \mathbf{E}) + i\kappa \mathbb{G}_\kappa * \mathbf{F}, \quad \text{avec } \boldsymbol{\eta}|_{\Omega^+} = 0 \text{ et } \mathbf{F}|_{\Omega^-} = 0$$

$$\longrightarrow \mathbf{E} = \nabla \mathcal{M}(\boldsymbol{\eta} \mathbf{E}_i) - \kappa^2 \mathcal{N}(\boldsymbol{\eta} \mathbf{E}_i) + \mathbf{D} \quad (\mathbf{D} = i\kappa \mathbb{G}_\kappa * \mathbf{F} \text{ onde incidente})$$

● Représentation intégrale surface-volume

- ▶ Intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^-} \boldsymbol{\eta}(y) \mathbf{E}_i(y) \cdot \nabla_y G_\kappa(x-y) dy &= - \int_{\Omega^-} \nabla \cdot (\boldsymbol{\eta}(y) \mathbf{E}_i(y)) G_\kappa(x-y) dy \\ &\quad + \int_{\Gamma} \mathbf{n}(y) \cdot (\boldsymbol{\eta}(y) \mathbf{E}_i(y)) G_\kappa(x-y) ds(y) \end{aligned}$$

- ▶ $\nabla \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_r \mathbf{E}_i) = 0$ (à partir des équations de Maxwell dans (\mathcal{P}))

$$\longrightarrow \nabla \cdot (\boldsymbol{\eta} \mathbf{E}_i) = \nabla \cdot ((1 - \boldsymbol{\epsilon}_r) \mathbf{E}_i) = \nabla \cdot \mathbf{E}_i$$

Equation intégrale surface-volume

$$(Surf + Vol) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{E}_*, \mathbf{e}_*) \in (L^2(\Omega^-))^3 \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ tel que :} \\ \left(\begin{array}{cc} \mathbf{1} - \nabla \mathcal{N}_\tau + \kappa^2 \mathcal{N}_\eta & -\nabla \mathcal{S}_\eta \\ -\gamma_1^- \mathcal{N}_\tau + \kappa^2 \gamma_n^- \mathcal{N}_\eta & \mathbf{1} - \gamma_1^- \mathcal{S}_\eta \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{E}_* \\ \mathbf{e}_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \gamma_n^- \mathbf{D} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

avec

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \epsilon_r$$

$$\mathcal{S}_\eta : f \mapsto \mathcal{S}(\eta f) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_\tau : \mathbf{u} \mapsto \mathcal{N}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u})$$

$$\gamma_1^- \mathbf{g} := (\partial_n(g|_{\Omega^-}))|_\Gamma \quad \text{et} \quad \gamma_n^- \mathbf{v} := (\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}|_{\Omega^-}))|_\Gamma$$

Equation intégrale volumique

$$(Vol) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E}_o \in (L^2(\Omega^-))^3 \text{ tel que :} \\ (\mathbf{1} - \nabla \mathcal{M}_\eta + \kappa^2 \mathcal{N}_\eta) \mathbf{E}_o = \mathbf{D} \end{array} \right.$$

avec

$$\mathcal{M}_\eta : \mathbf{u} \mapsto \mathcal{M}(\eta \mathbf{u}) \quad \mathcal{N}_\eta : \mathbf{u} \mapsto \mathcal{N}(\eta \mathbf{u})$$

Equation intégrale surface-volume

$$(Surf + Vol) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{E}_*, \mathbf{e}_*) \in (L^2(\Omega^-))^3 \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ tel que :} \\ \left(\begin{array}{cc} \mathbf{1} - \nabla \mathcal{N}_\tau + \kappa^2 \mathcal{N}_\eta & -\nabla \mathcal{S}_\eta \\ -\gamma_1^- \mathcal{N}_\tau + \kappa^2 \gamma_n^- \mathcal{N}_\eta & \mathbf{1} - \gamma_1^- \mathcal{S}_\eta \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{E}_* \\ \mathbf{e}_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \gamma_n^- \mathbf{D} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

avec

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \epsilon_r$$

$$\mathcal{S}_\eta : f \mapsto \mathcal{S}(\eta f) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_\tau : \mathbf{u} \mapsto \mathcal{N}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u})$$

$$\gamma_1^- \mathbf{g} := (\partial_n(g|_{\Omega^-}))|_\Gamma \quad \text{et} \quad \gamma_n^- \mathbf{v} := (\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}|_{\Omega^-}))|_\Gamma$$

Equation intégrale volumique

$$(Vol) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E}_o \in (L^2(\Omega^-))^3 \text{ tel que :} \\ (\mathbf{1} - \nabla \mathcal{M}_\eta + \kappa^2 \mathcal{N}_\eta) \mathbf{E}_o = \mathbf{D} \end{array} \right.$$

avec

$$\mathcal{M}_\eta : \mathbf{u} \mapsto \mathcal{M}(\eta \mathbf{u}) \quad \mathcal{N}_\eta : \mathbf{u} \mapsto \mathcal{N}(\eta \mathbf{u})$$

- 1 Analyse du problème de diffraction
 - Le problème de diffraction
 - Les formulations intégrales
 - Quelques résultats d'analyse
- 2 Résolution de l'équation intégrale volumique
 - Traitement de singularités en 3D
- 3 Tests numériques
 - Matrices élémentaires
 - Spectre de l'opérateur intégral volumique
 - Profil du champ lointain
 - Champ intérieur

Théorème ((\mathcal{P}) \implies (Surf+Vol))

(\mathbf{E}, \mathbf{H}) solution de (\mathcal{P}), alors ($\mathbf{E}_i, \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_i$) est solution de (Surf + Vol)

(Ind : Formules de représentations intégrales)

Théorème ((Surf+Vol) \implies (\mathcal{P}))

Si ($\mathbf{E}_*, \mathbf{e}_*$) est une solution de (Surf + Vol), alors on définit une solution (\mathbf{E}, \mathbf{H}) du problème (\mathcal{P}) en posant :

$$\mathbf{E}|_{\Omega^-} = \mathbf{E}_*$$

$$\mathbf{E}|_{\Omega^+}(x) = \nabla S(\boldsymbol{\eta} \mathbf{e}_*)(x) - \nabla \mathcal{N}(\nabla \cdot \mathbf{E}_*)(x) - \kappa^2 \mathcal{N}(\boldsymbol{\eta} \mathbf{E}_*)(x) + \mathbf{D}(x)$$

$$\mathbf{H}|_{\Omega^-} = \frac{1}{i\kappa} \nabla \times \mathbf{E}_* \quad \text{et} \quad \mathbf{H}|_{\Omega^+} = \frac{1}{i\kappa} \nabla \times \mathbf{E}|_{\Omega^+}$$

(Ind : Principe de continuation unique, relations de saut)

Théorème ((Surf+Vol) \iff (Vol))

$\mathbf{D} \in H(\text{div}, \Omega^-)$ et $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$

- $\mathbf{E}_o \in (L^2(\Omega^-))^3$ solution de (Vol), alors $\mathbf{E}_o \in H(\text{div}, \Omega^-)$ et (\mathbf{E}_o, e_o) est solution de (Surf + Vol), où $e_o = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_o \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$
- (\mathbf{E}_*, e_*) solution de (Surf + Vol), alors \mathbf{E}_* est solution de (Vol)

(Ind : Intégration par parties, prolongement par densité)

Théorème

Soit $\varepsilon_r \in C^1(\overline{\Omega^-})$ tel que $\varepsilon_r(x) \neq 0$ dans $\overline{\Omega^-}$ et $\varepsilon_r(x) \neq -1$ sur Γ . La matrice

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} - \nabla \mathcal{N}_\tau + \kappa^2 \mathcal{N}_\eta & -\nabla \mathcal{S}_\eta \\ -\gamma_1^- \mathcal{N}_\tau + \kappa^2 \gamma_n^- \mathcal{N}_\eta & \mathbf{1} - \gamma_1^- \mathcal{S}_\eta \end{pmatrix}$$

de $(L^2(\Omega^-))^3 \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $(L^2(\Omega^-))^3 \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. Si il existe $x \in \Gamma$ tel que $\varepsilon_r(x) = -1$, alors B n'est pas Fredholm.

Éléments de preuve :

- $\gamma_1^- \mathcal{S}_\eta f = \int_\Gamma \eta(y) \partial_{n_x} G_\kappa(x-y) f(y) ds(y) + \frac{1}{2} \eta(x) f(x)$ (relations de saut)
- $(\mathbf{1} - \gamma_1^- \mathcal{S}_\eta) f = \alpha f - \mathcal{T} \eta f$
 $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon_r)$ et \mathcal{T} compact de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans lui même

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathcal{B} \\ 0 & \alpha \mathbf{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{K}_1 & 0 \\ \mathcal{K}_3 & \mathcal{K}_2 \end{pmatrix}$$

Théorème

Soit $\varepsilon_r \in C^1(\overline{\Omega^-})$ tel que $\varepsilon_r(x) \neq 0$ dans $\overline{\Omega^-}$ et $\varepsilon_r(x) \neq -1$ sur Γ . La matrice

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} - \nabla \mathcal{N}_\tau + \kappa^2 \mathcal{N}_\eta & -\nabla \mathcal{S}_\eta \\ -\gamma_1^- \mathcal{N}_\tau + \kappa^2 \gamma_1^- \mathcal{N}_\eta & \mathbf{1} - \gamma_1^- \mathcal{S}_\eta \end{pmatrix}$$

de $(L^2(\Omega^-))^3 \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $(L^2(\Omega^-))^3 \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. Si il existe $x \in \Gamma$ tel que $\varepsilon_r(x) = -1$, alors B n'est pas Fredholm.

Éléments de preuve :

- $\gamma_1^- \mathcal{S}_\eta f = \int_\Gamma \eta(y) \partial_{n_x} G_\kappa(x-y) f(y) ds(y) + \frac{1}{2} \eta(x) f(x)$ (relations de saut)
- $(\mathbf{1} - \gamma_1^- \mathcal{S}_\eta) f = \alpha f - \mathcal{T} \eta f$
 $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon_r)$ et \mathcal{T} compact de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans lui même

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathcal{B} \\ 0 & \alpha \mathbf{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{K}_1 & 0 \\ \mathcal{K}_3 & \mathcal{K}_2 \end{pmatrix}$$

Proposition

Soit $\varepsilon_r \in C^1(\overline{\Omega^-})$

- L'opérateur $\mathcal{A} = \nabla \mathcal{M}_\eta - \kappa^2 \mathcal{N}_\eta$ est borné de $(L^2(\Omega^-))^3$ dans lui-même et de $H(\text{div}, \Omega^-)$ dans lui-même.
- Si $\mathbf{E} \in (L^2(\Omega^-))^3$ et $(1 - \mathcal{A})\mathbf{E} \in H(\text{div}, \Omega^-)$, alors $\mathbf{E} \in H(\text{div}, \Omega^-)$.
- Si $\exists \varepsilon_1 > 0$ tel que $\varepsilon_r(x) \geq \varepsilon_1 \forall x \in \Omega^-$, alors $(1 - \mathcal{A})$ est Fredholm d'indice zéro dans $(L^2(\Omega^-))^3$ et est fortement elliptique : Il existe un opérateur compact \mathcal{K}_0 et une constante $c > 0$ tels que $\forall \mathbf{E} \in (L^2(\Omega^-))^3$, on ait l'inégalité de Gårding suivante :

$$\int_{\Omega^-} \overline{\mathbf{E}(x)} \cdot (1 - \mathcal{A})\mathbf{E}(x) dx \geq c \|\mathbf{E}\|_{(L^2(\Omega^-))^3}^2 - \|\mathcal{K}_0 \mathbf{E}\|_{(L^2(\Omega^-))^3}^2$$

Proposition

Soit $\varepsilon_r \in C^1(\overline{\Omega^-})$

- L'opérateur $\mathcal{A} = \nabla \mathcal{M}_\eta - \kappa^2 \mathcal{N}_\eta$ est borné de $(L^2(\Omega^-))^3$ dans lui-même et de $H(\text{div}, \Omega^-)$ dans lui-même.
- Si $\mathbf{E} \in (L^2(\Omega^-))^3$ et $(\mathbf{1} - \mathcal{A})\mathbf{E} \in H(\text{div}, \Omega^-)$, alors $\mathbf{E} \in H(\text{div}, \Omega^-)$.
- Si $\exists \varepsilon_1 > 0$ tel que $\varepsilon_r(x) \geq \varepsilon_1 \forall x \in \Omega^-$, alors $(\mathbf{1} - \mathcal{A})$ est Fredholm d'indice zéro dans $(L^2(\Omega^-))^3$ et est fortement elliptique : Il existe un opérateur compact \mathcal{K}_0 et une constante $c > 0$ tels que $\forall \mathbf{E} \in (L^2(\Omega^-))^3$, on ait l'inégalité de Gårding suivante :

$$\int_{\Omega^-} \overline{\mathbf{E}(x)} \cdot (\mathbf{1} - \mathcal{A})\mathbf{E}(x) dx \geq c \|\mathbf{E}\|_{(L^2(\Omega^-))^3}^2 - \|\mathcal{K}_0 \mathbf{E}\|_{(L^2(\Omega^-))^3}^2$$

Plan

- 1 Analyse du problème de diffraction
 - Le problème de diffraction
 - Les formulations intégrales
 - Quelques résultats d'analyse
- 2 Résolution de l'équation intégrale volumique
 - Traitement de singularités en 3D
- 3 Tests numériques
 - Matrices élémentaires
 - Spectre de l'opérateur intégral volumique
 - Profil du champ lointain
 - Champ intérieur

- On considère les intégrales de la forme :

$$I_{\alpha,KL} = \int_K \int_L \frac{F(x,y)}{|x-y|^\alpha} dy dx, \quad \alpha > 0$$

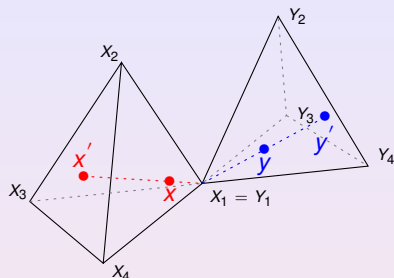
F : fonction régulière

K et L : deux tétraèdres non disjoints de sommets respectivement notés

$(X_i)_{i=1,\dots,4}$ et $(Y_i)_{i=1,\dots,4}$

- **Principe de la méthode** : (Jean Gay, Duffy)
 - ▶ Changements de variables à l'aide de transformations singulières
 - ▶ Description de la singularité à l'aide d'une variable uni-dimensionnelle
 - ▶ Elimination des singularités grâce aux Jacobiens des transformations

K et L ont un sommet commun



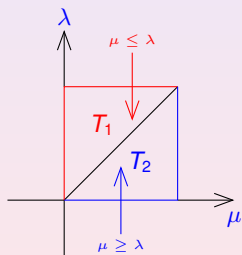
On pose $\Sigma_x := X_2X_3X_4$, $\Sigma_y := Y_2Y_3Y_4$

$$\begin{aligned}x &= \lambda x' + (1 - \lambda) X_1, & (\lambda, x') &\in [0, 1] \times \Sigma_x \\y &= \mu y' + (1 - \mu) Y_1, & (\mu, y') &\in [0, 1] \times \Sigma_y\end{aligned}$$

Jacobiens : $J_x = 3\lambda^2 \frac{|K|}{|\Sigma_x|}$ et $J_y = 3\mu^2 \frac{|L|}{|\Sigma_y|}$

K et L ont un sommet commun

- $y - x = \lambda(X_1 - x') + \mu(y' - X_1)$ (puisque $X_1 = Y_1$)
- $y - x = 0 \iff \lambda = \mu = 0$



On pose $[0, 1]^2 = T_1 \cup T_2$, avec

$$T_1 = \left\{ (\lambda, \mu) \in [0, 1]^2; \mu \leq \lambda \right\}$$

$$T_2 = \left\{ (\lambda, \mu) \in [0, 1]^2; \mu \geq \lambda \right\}$$

K et L ont un sommet commun

- Transformation de T_2 en T_1 en échangeant λ et μ (dans T_2)

- Transformation de Duffy dans T_1 :
$$\begin{cases} \lambda = \xi & \mu = \zeta\xi \\ (\xi, \zeta) \in [0, 1]^2 \\ Jac = \xi, \end{cases}$$

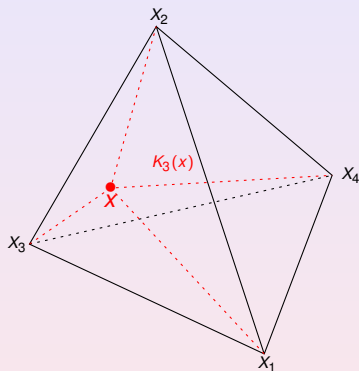
$$\Rightarrow I_{\alpha, KL} = \beta_{KL} \sum_{q=1}^2 \int_{[0,1]^2} \int_{\Sigma_x} \int_{\Sigma_y} \frac{F_q(\xi, \zeta, x', y')}{\Delta_{\alpha, q}(\xi, \zeta, x', y')} \zeta^2 \xi^{(5-\alpha)} ds(y') \times ds(x') d\zeta d\xi,$$

$$\beta_{KL} = 9 \frac{|K||L|}{|\Sigma_x||\Sigma_y|}$$

$$\Delta_{\alpha, q} = \begin{cases} |X_1 - x' + \zeta(y' - X_1)|^\alpha & \text{si } q = 1 \\ |\zeta(X_1 - x') + y' - X_1|^\alpha & \text{si } q = 2 \end{cases}$$

K et L sont confondus

Subdivision de K en fonction de $x \in K$.



$$K = \bigcup_{i=1}^4 K_i(x) \quad \text{et}$$

$$K_i(x) = \begin{cases} x x_2 x_3 x_4 & \text{si } i = 1 \\ x x_1 x_3 x_4 & \text{si } i = 2 \\ x x_1 x_2 x_4 & \text{si } i = 3 \\ x x_1 x_2 x_3 & \text{si } i = 4 \end{cases}$$

$$I_{\alpha, KK} = \sum_{i=1}^4 \int_K I_{\alpha, K}^{(i)}(x) dx \quad \text{avec} \quad I_{\alpha, K}^{(i)}(x) = \int_{K_i(x)} \frac{F(x, y)}{|x - y|^\alpha} dy$$

K et L sont confondus

- Dans $K_1(x) = xX_2X_3X_4$:
$$\begin{cases} \tilde{y}_1 = \mu_1 X_3 + (1 - \mu_1)X_4; & \mu_1 \in [0, 1] \\ y'_1 = \mu_2 X_2 + (1 - \mu_2)X; & \mu_2 \in [0, 1] \\ y_1 := y = \mu_3 \tilde{y}_1 + (1 - \mu_3)y'_1; & \mu_3 \in [0, 1] \end{cases}$$
- $y_1 - x = 0 \iff \mu_2 = \mu_3 = 0$
- Transformation de Duffy sur les variables $(\mu_2, \mu_3) \in [0, 1]^2$: $(\mu_2, \mu_3) \dashrightarrow (\xi, \zeta)$
- Un traitement similaire pour $i = 2, 3, 4$ conduit à

$$I_{\alpha, KK} = 12 \sum_{i=1}^4 \sum_{q=1}^2 \int_K |K_i(x)| \int_{[0, 1]^3} \frac{F(x, y_{iq})}{\Delta_{\alpha, iq}(x, \mu_1, \xi, \zeta)} J_{\alpha, q}(\xi, \zeta) d\xi d\zeta d\mu_1 dx$$

avec

$$J_{\alpha, q}(\xi, \zeta) = \begin{cases} (1 - \xi)\xi^{(2-\alpha)} & \text{si } q = 1 \\ (1 - \zeta\xi)\zeta\xi^{(2-\alpha)} & \text{si } q = 2 \end{cases}$$

Plan

- 1 Analyse du problème de diffraction
 - Le problème de diffraction
 - Les formulations intégrales
 - Quelques résultats d'analyse
- 2 Résolution de l'équation intégrale volumique
 - Traitement de singularités en 3D
- 3 **Tests numériques**
 - **Matrices élémentaires**
 - Spectre de l'opérateur intégral volumique
 - Profil du champ lointain
 - Champ intérieur

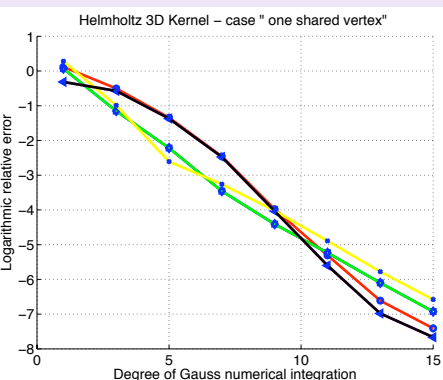
Convergence des matrices élémentaires

- Stabilité par rapport au degré de la formule de quadrature
- Degré de référence : $d = 17$
- **Gauss - Legendre** d : degré n : nombre de points
Segment : $n = \frac{d-1}{2}$
- Matrices 3×3 symétriques
→ Coefficients non nuls de la partie triangulaire supérieure

Pour un sommet commun

$$A_{KL,ij} = \int_K \int_L \varphi_i(x) \varphi_j(y) \widetilde{\mathbb{G}}_\kappa(x, y) dy dx$$

$$\widetilde{\mathbb{G}}_\kappa(x, y) = \left(-\kappa^2 \mathbb{I} + \nabla_x \nabla_y \right) \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$



$$K : (0, 0, 0) \quad (1, 0, 0) \quad (0, 1, 0) \quad (0, 0, 1)$$

$$L : (0, 0, 0) \quad (-1, 0, 0) \quad (0, -1, 0) \quad (0, 0, -1)$$

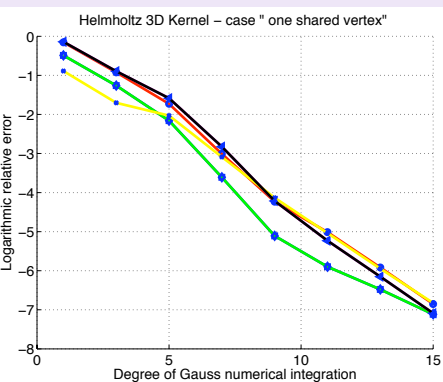
$$\varphi_i \quad \longrightarrow \quad (0, 0, 0) \quad \longleftarrow \quad \varphi_j$$

→ Erreur $\leq 1\%$ pour degré ≥ 7

Pour un sommet commun

$$\mathcal{A}_{KL,ij} = \int_K \int_L \varphi_i(x) \varphi_j(y) \widetilde{\mathbb{G}}_\kappa(x, y) dy dx$$

$$\widetilde{\mathbb{G}}_\kappa(x, y) = \left(-\kappa^2 \mathbb{I} + \nabla_x \nabla_y \right) \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$



$$K : (0, 0, 0) \quad (1, 0, 0) \quad (0, 1, 0) \quad (0, 0, 1)$$

$$L : (0, 0, 0) \quad (-1, 0, 0) \quad (0, -1, 0) \quad (0, 0, -1)$$

$$\varphi_i \longrightarrow (0, 0, 0)$$

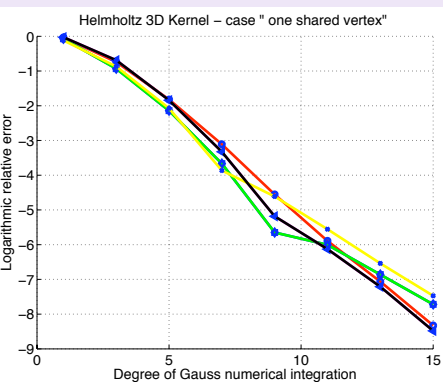
$$\varphi_j \longrightarrow (1, 0, 0)$$

→ Erreur $\leq 1\%$ pour degré ≥ 7

Pour un sommet commun

$$\mathcal{A}_{KL,ij} = \int_K \int_L \varphi_i(x) \varphi_j(y) \widetilde{\mathbb{G}}_\kappa(x, y) dy dx$$

$$\widetilde{\mathbb{G}}_\kappa(x, y) = \left(-\kappa^2 \mathbb{I} + \nabla_x \nabla_y \right) \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$



$$K : (0, 0, 0) \quad (1, 0, 0) \quad (0, 1, 0) \quad (0, 0, 1)$$

$$L : (0, 0, 0) \quad (-1, 0, 0) \quad (0, -1, 0) \quad (0, 0, -1)$$

$$\varphi_i \longrightarrow (1, 0, 0)$$

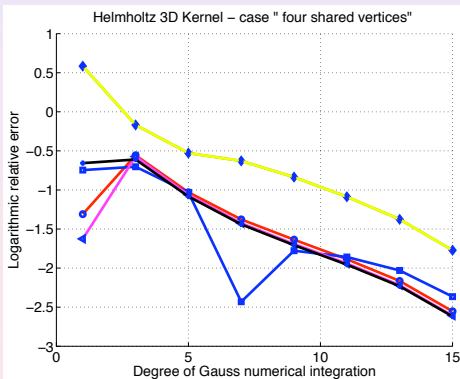
$$\varphi_j \longrightarrow (-1, 0, 0)$$

→ Erreur $\leq 1\%$ pour degré ≥ 7

Pour des tétraèdres confondus

$$\mathcal{A}_{K,ij} = -\kappa^2 \left(\int_K \int_K \varphi_i(x) \varphi_j(y) G_\kappa(x-y) dy dx \right) \mathbb{I} - \int_K \int_K \varphi_j(y) \nabla \varphi_i(x) (\nabla_y G_\kappa(x-y))^T dy dx$$

$$\int_{\partial K} \int_K \varphi_i(x) \varphi_j(y) \mathbf{n}(x) (\nabla_y G_\kappa(x-y))^T dy ds(x)$$



$$G_\kappa(x-y) = \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

$$K : (0,0,0) \quad (1,0,0) \quad (0,1,0) \quad (0,0,1)$$

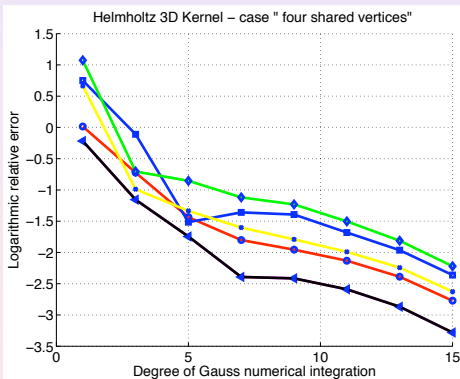
$$\varphi_i \quad \rightarrow \quad (0,0,0) \quad \leftarrow \quad \varphi_j$$

→ Erreur $\leq 1\%$ pour degré ≥ 13

Pour des tétraèdres confondus

$$\mathcal{A}_{K,ij} = -\kappa^2 \left(\int_K \int_K \varphi_i(x) \varphi_j(y) G_\kappa(x-y) dy dx \right) \mathbb{I} - \int_K \int_K \varphi_j(y) \nabla \varphi_i(x) (\nabla_y G_\kappa(x-y))^T dy dx$$

$$\int_{\partial K} \int_K \varphi_i(x) \varphi_j(y) \mathbf{n}(x) (\nabla_y G_\kappa(x-y))^T dy ds(x)$$



$$G_\kappa(x-y) = \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

$$K : (0, 0, 0) \quad (1, 0, 0) \quad (0, 1, 0) \quad (0, 0, 1)$$

$$\varphi_i \rightarrow (0, 0, 0)$$

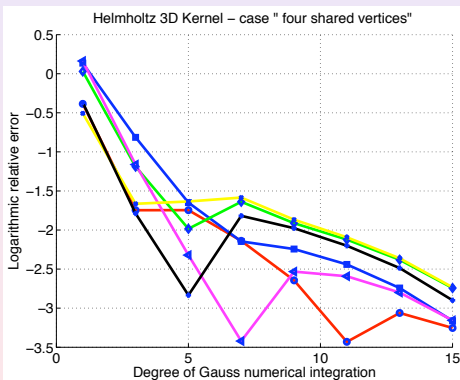
$$\varphi_j \rightarrow (1, 0, 0)$$

→ Erreur $\leq 1\%$ pour degré ≥ 13

Pour des tétraèdres confondus

$$\mathcal{A}_{K,ij} = -\kappa^2 \left(\int_K \int_K \varphi_i(x) \varphi_j(y) G_\kappa(x-y) dy dx \right) \mathbb{I} - \int_K \int_K \varphi_j(y) \nabla \varphi_i(x) (\nabla_y G_\kappa(x-y))^T dy dx$$

$$\int_{\partial K} \int_K \varphi_i(x) \varphi_j(y) \mathbf{n}(x) (\nabla_y G_\kappa(x-y))^T dy ds(x)$$



$$G_\kappa(x-y) = \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

$$K : (0, 0, 0) \quad (1, 0, 0) \quad (0, 1, 0) \quad (0, 0, 1)$$

$$\varphi_i \rightarrow (1, 0, 0)$$

$$\varphi_j \rightarrow (0, 1, 0)$$

→ Erreur $\leq 1\%$ pour degré ≥ 13

Plan

- 1 Analyse du problème de diffraction
 - Le problème de diffraction
 - Les formulations intégrales
 - Quelques résultats d'analyse
- 2 Résolution de l'équation intégrale volumique
 - Traitement de singularités en 3D
- 3 **Tests numériques**
 - Matrices élémentaires
 - **Spectre de l'opérateur intégral volumique**
 - Profil du champ lointain
 - Champ intérieur

Spectre de l'opérateur intégral volumique

- Equation : $(1 - \eta \tilde{\mathcal{A}}) \mathbf{E} = \mathbf{E}_{inc}$; $\eta = 1 - \epsilon_r$ et $\eta \tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$

$$\tilde{\mathcal{A}}\mathbf{u}(x) = \nabla_x \int_{\Omega^-} \nabla_y G_\kappa(x-y) \cdot \mathbf{u}(y) dy - \kappa^2 \int_{\Omega^-} G_\kappa(x-y) \mathbf{u}(y) dy$$

Problème mal posé pour ϵ_r non borné ou $\in \{0, -1\}$ (Analyse)

$\iff \eta$ non borné ou $\in \{1, 2\}$

$\implies \{0, \frac{1}{2}, 1\}$: spectre essentiel de $\tilde{\mathcal{A}}$

$[0, 1]$: enveloppe convexe du spectre essentiel de $\tilde{\mathcal{A}}$

- Discrétisation de $\tilde{\mathcal{A}}$ (Mélina++)

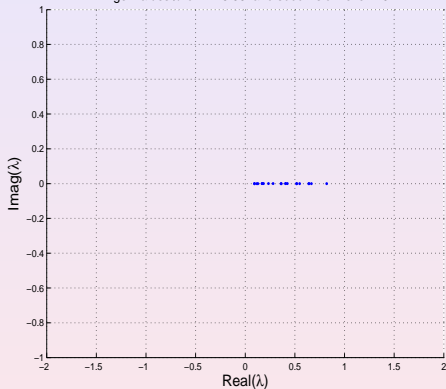
Maillage de la boule de rayon R :

Niveau de raffinement	0	1	2	3
Nombre de tétraèdres	8	$8^2 = 64$	$8^3 = 512$	$8^4 = 4096$

Calcul des valeurs propres (Matlab)

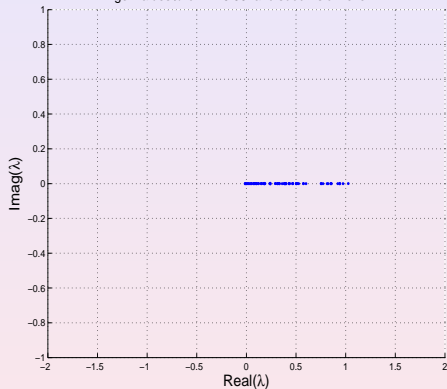
Valeurs propres pour $\kappa = 10^{-3}$ (\approx Laplace)

Eigenvalues λ for $k = 0.001$ and subdivision level = 0



8 tétraèdres

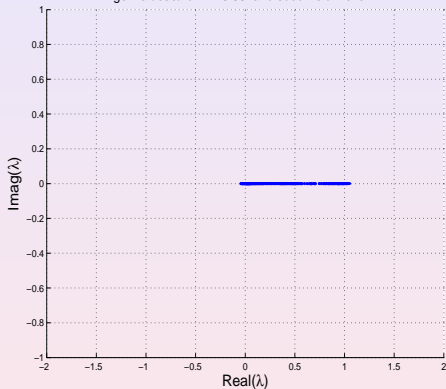
Eigenvalues λ for $k = 0.001$ and subdivision level = 1



64 tétraèdres

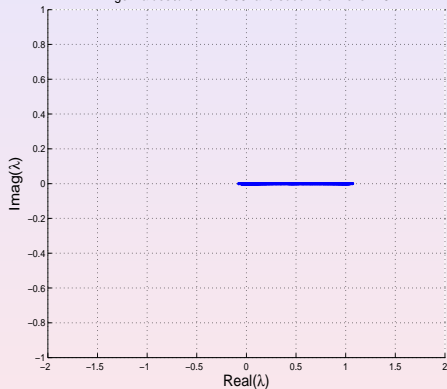
Valeurs propres pour $\kappa = 10^{-3}$ (\approx Laplace)

Eigenvalues λ for $k = 0.001$ and subdivision level = 2



512 tétraèdres

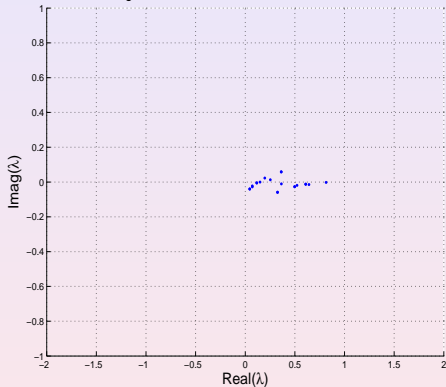
Eigenvalues λ for $k = 0.001$ and subdivision level = 3



4096 tétraèdres

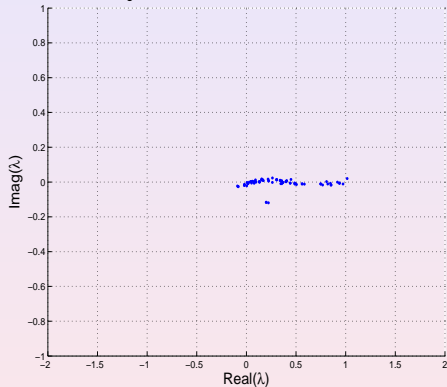
Valeurs propres pour $\kappa = 1$ ($\kappa R = 1$)

Eigenvalues λ for $k = 1$ and subdivision level = 0



8 tétraèdres

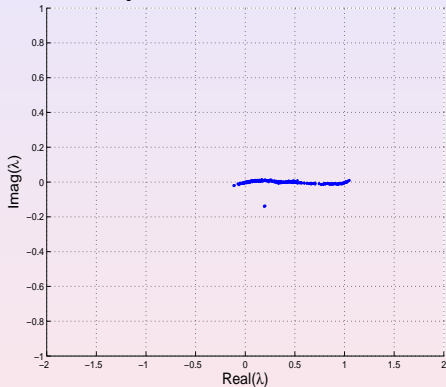
Eigenvalues λ for $k = 1$ and subdivision level = 1



64 tétraèdres

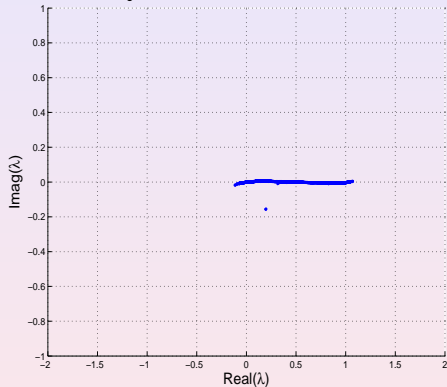
Valeurs propres pour $\kappa = 1$ ($\kappa R = 1$)

Eigenvalues λ for $k = 1$ and subdivision level = 2



512 tétraèdres

Eigenvalues λ for $k = 1$ and subdivision level = 3



4096 tétraèdres

Plan

- 1 Analyse du problème de diffraction
 - Le problème de diffraction
 - Les formulations intégrales
 - Quelques résultats d'analyse
- 2 Résolution de l'équation intégrale volumique
 - Traitement de singularités en 3D
- 3 **Tests numériques**
 - Matrices élémentaires
 - Spectre de l'opérateur intégral volumique
 - **Profil du champ lointain**
 - Champ intérieur

Formalisme

- \mathbf{E}_* : solution de l'équation intégrale volumique

- ▶ $\mathbf{E}_{diff}(\mathbf{x}) = -\nabla \times \nabla \times \int_{\Omega^-} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) G_\kappa(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{E}_*(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ (Champ diffracté)

- ▶ $\mathbf{E}_{diff}(\mathbf{x}) = \frac{e^{i\kappa|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \left\{ \mathbf{E}_\infty(\hat{\mathbf{x}}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \right\}, |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$

- ▶ $\mathbf{E}_\infty(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\kappa^2}{4\pi} \hat{\mathbf{x}} \times \left(\hat{\mathbf{x}} \times \int_{\Omega^-} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) e^{-i\kappa\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}} \mathbf{E}_*(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right)$ (Champ lointain)

$$\hat{\mathbf{x}} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta); \quad (\theta, \phi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

- Ondes incidentes :

- ▶ **Dipôle magnétique** : $\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{x}) = \nabla \times (\mathbf{p} G_\kappa(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$
(\mathbf{p} : polarisation \mathbf{x}_0 : point source)

- ▶ **Onde plane** : $\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{x}) = \mathbf{p} e^{i\kappa\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}$
(\mathbf{p} : polarisation \mathbf{d} : direction de propagation)

- Maillage de la boule :

Niveau de raffinement (niv)	Nombre de tétraèdres	Nombre de segments (sur un axe)
0	8	2
1	$8^2 = 64$	$2^2 = 4$
2	$8^3 = 512$	$2^3 = 8$
3	$8^4 = 4096$	$2^4 = 16$

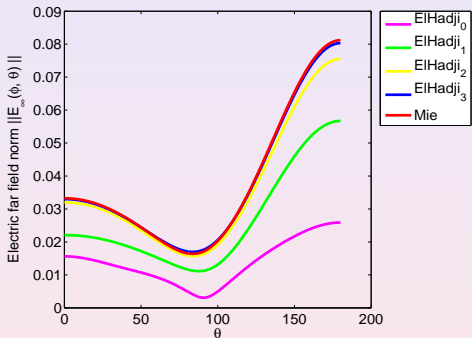
$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\kappa := \kappa_{ext})$$

$$\kappa_{int}^2 = \epsilon_r \kappa^2$$

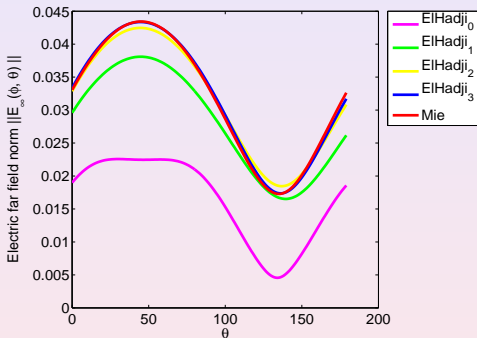
$$NbSeg/\lambda = \frac{2^{niv}}{\pi} \kappa$$

Dipôle magnétique

$k_{\text{ext}} = 2$, $k_{\text{int}} = 0.1$, $x_0 = (0, 0, 2)$, $p = (0, 1, 0)$ and $\phi = 0^\circ$

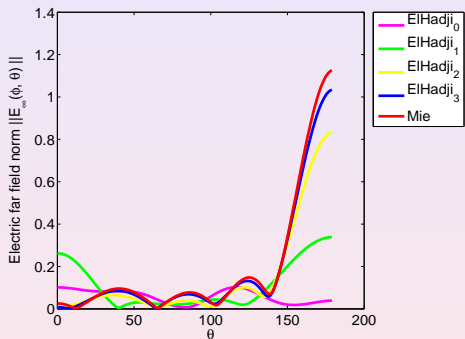


$k_{\text{ext}} = 2$, $k_{\text{int}} = 3$, $x_0 = (1.5, 0, 0)$, $p = (0, \cos(\pi/4), \sin(\pi/4))$ and $\phi = 90^\circ$

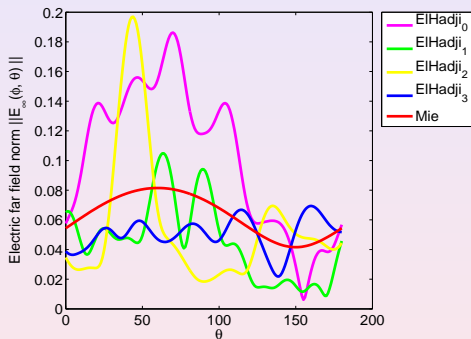


Dipôle magnétique

$k_{\text{ext}} = 5$, $k_{\text{int}} = 7$, $x_0 = (0, 0, 2)$, $p = (0, 1, 0)$ and $\phi = 90^\circ$

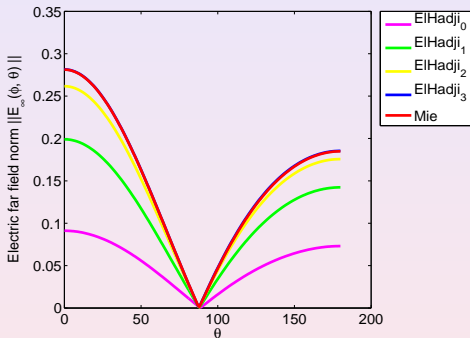


$k_{\text{ext}} = 10$, $k_{\text{int}} = 15$, $x_0 = (0, 3, 0)$, $p = (\cos(\pi/6), 0, \sin(\pi/6))$ and $\phi = 0^\circ$

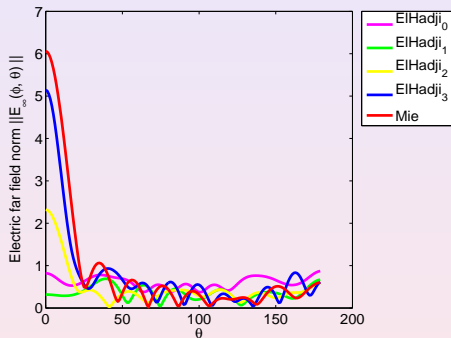


Onde plane

$k_{\text{ext}} = 1$, $k_{\text{int}} = 0.5$, $d = (0, 0, 1)$, $p = (1, 0, 0)$ and $\phi = 0^\circ$



$k_{\text{ext}} = 10$, $k_{\text{int}} = 15$, $d = (0, 0, 1)$, $p = (1, 0, 0)$ and $\phi = 90^\circ$



Erreur sur le calcul du champ lointain

- Norme L^2 : $\phi \in [0, 2\pi]$

$$\|\mathbf{u}(\cdot, \phi)\|^2 = \int_0^\pi |\mathbf{u}(\theta, \phi)|^2 d\theta \approx \sum_{q=1}^N \omega_q |\mathbf{u}(\theta_q, \phi)|^2$$

- Erreur relative :

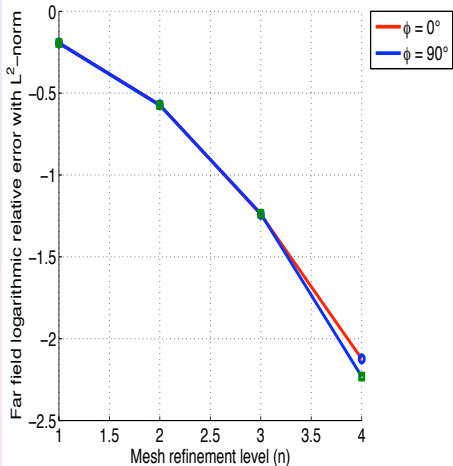
\mathbf{E}_∞ : Equation intégrale volumique

$\mathbf{E}_{M,\infty}$: Série de Mie

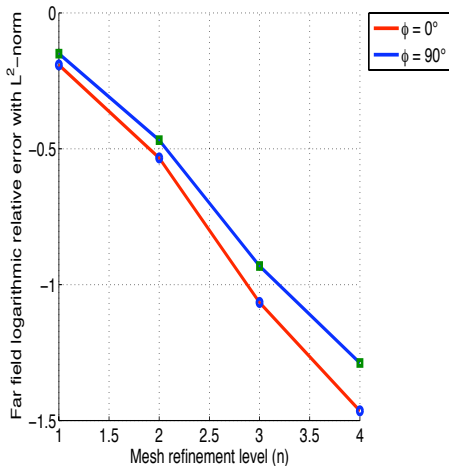
$$\frac{\|\mathbf{E}_{M,\infty}(\cdot, \phi) - \mathbf{E}_\infty(\cdot, \phi)\|}{\|\mathbf{E}_{M,\infty}(\cdot, \phi)\|} = \frac{\sqrt{\sum_{q=1}^N |\mathbf{E}_\infty(\theta_q, \phi) - \mathbf{E}_{M,\infty}(\theta_q, \phi)|^2}}{\sqrt{\sum_{q=1}^N |\mathbf{E}_{M,\infty}(\theta_q, \phi)|^2}}$$

Erreur - Dipôle magnétique

$k_{\text{ext}} = 1, k_{\text{int}} = 0.5, x_0 = (0, 0, 2)$ and $p = (0, 1, 0)$

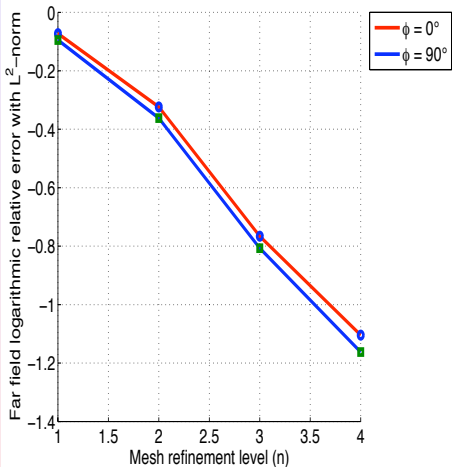


$k_{\text{ext}} = 1, k_{\text{int}} = 2, x_0 = (1.5, 0, 0)$ and $p = (0, \cos(\pi/4), \sin(\pi/4))$

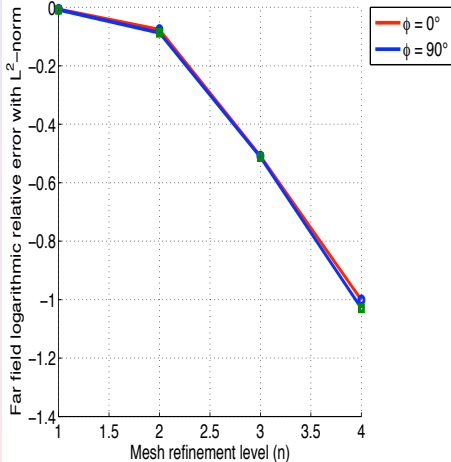


Erreur - Dipôle magnétique

$k_{\text{ext}} = 2, k_{\text{int}} = 3, x_0 = (0, 0, 2)$ and $p = (0, 1, 0)$

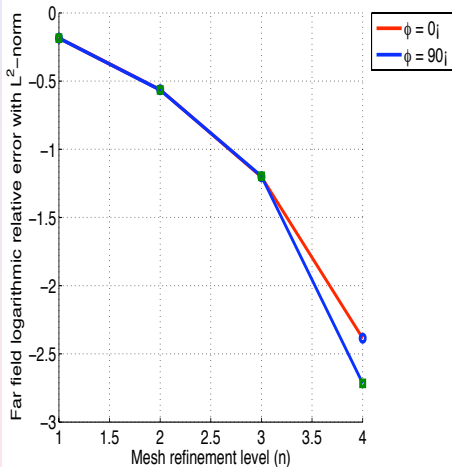


$k_{\text{ext}} = 5, k_{\text{int}} = 7, x_0 = (0, 0, 2)$ and $p = (0, 1, 0)$

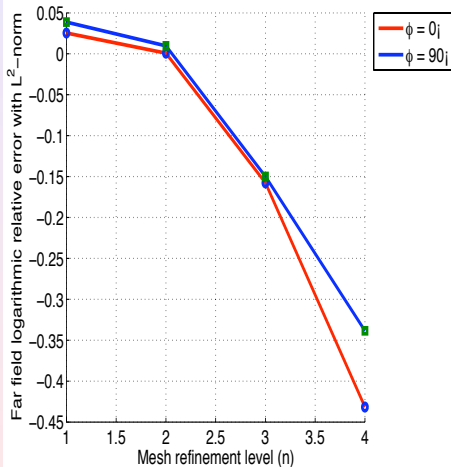


Erreur - Onde plane

$k_{\text{ext}} = 1, k_{\text{int}} = 0.5, d = (0, 0, 1)$ and $p = (1, 0, 0)$



$k_{\text{ext}} = 10, k_{\text{int}} = 15, d = (0, 0, 1)$ and $p = (1, 0, 0)$



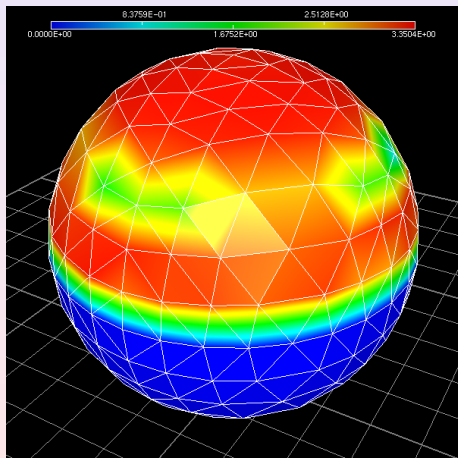
Plan

- 1 Analyse du problème de diffraction
 - Le problème de diffraction
 - Les formulations intégrales
 - Quelques résultats d'analyse
- 2 Résolution de l'équation intégrale volumique
 - Traitement de singularités en 3D
- 3 **Tests numériques**
 - Matrices élémentaires
 - Spectre de l'opérateur intégral volumique
 - Profil du champ lointain
 - **Champ intérieur**

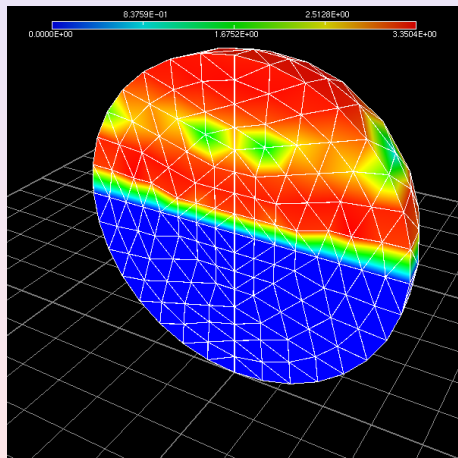
Superposition en hémisphères

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \varepsilon_r(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1.1 + 10^6 i & \text{si } x_3 \leq 0 \\ 0.95 & \text{si } x_3 > 0 \end{cases}$$

Onde plane : direction $\mathbf{d} = (0, 0, -1)$, polarisation $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$ et $\kappa = 5$



Champ à la surface

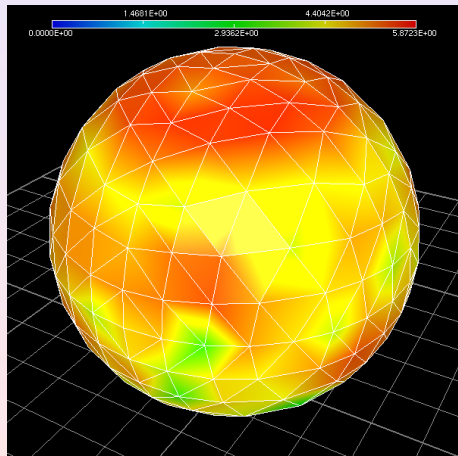


Coupe intérieure (plan $x_1 = 0$)

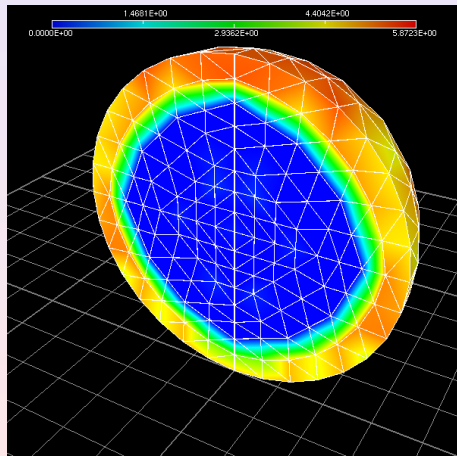
Superposition en boules concentriques

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \epsilon_r(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1.1 + 10^6 i & \text{si } |\mathbf{x}| \leq 3/4 \\ 0.95 & \text{si } 3/4 < |\mathbf{x}| \leq 1 \end{cases}$$

Onde plane : direction $\mathbf{d} = (0, 0, -1)$, polarisation $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$ et $\kappa = 5$



Champ à la surface

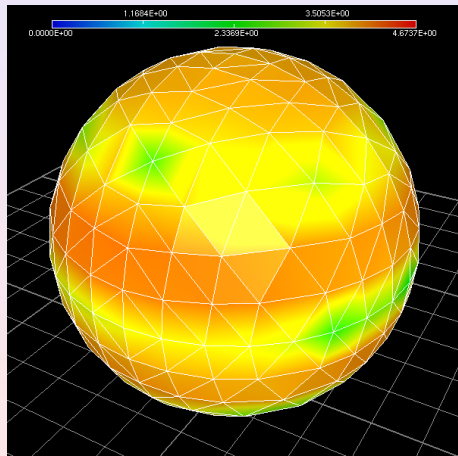


Coupe intérieure (plan $x_1 = 0$)

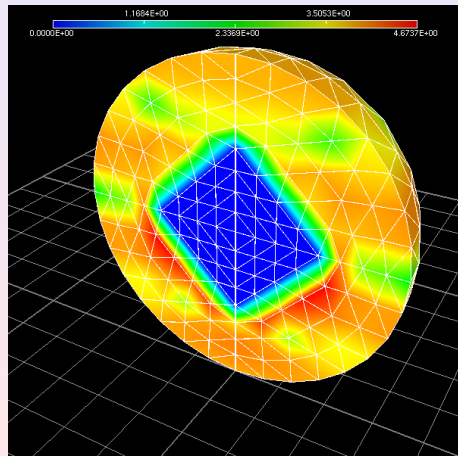
Superposition en boules concentriques

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \epsilon_r(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1.1 + 10^6 i & \text{si } |\mathbf{x}| \leq 1/2 \\ 0.95 & \text{si } 1/2 < |\mathbf{x}| \leq 1 \end{cases}$$

Onde plane : direction $\mathbf{d} = (0, 0, -1)$, polarisation $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$ et $\kappa = 5$



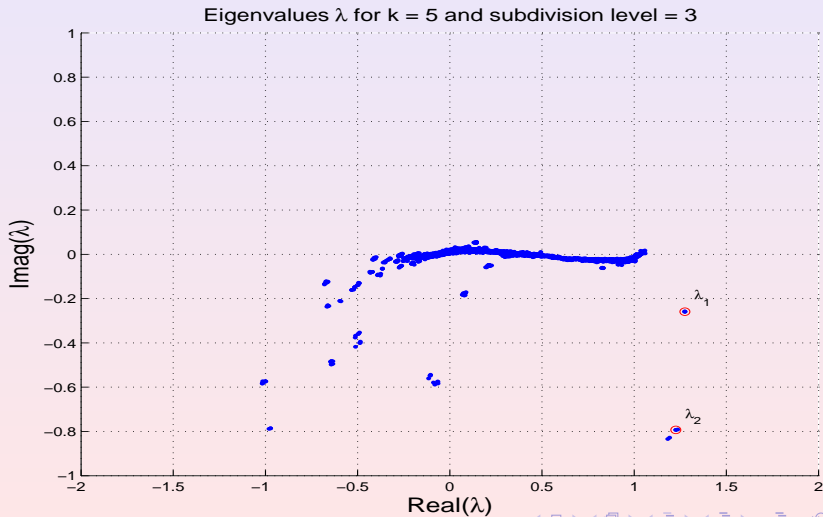
Champ à la surface



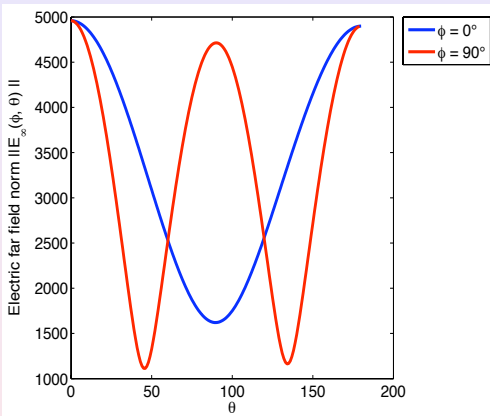
Coupe intérieure (plan $x_1 = 0$)

Résonances

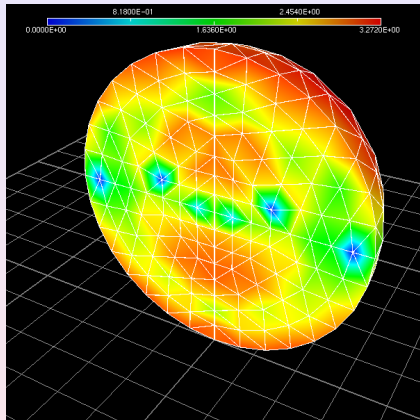
Valeur propre $\lambda_2 = 1.226 - 0.793i$, permittivité $\epsilon_r = 0.425 - 0.372i$



Résonances



Profil de rayonnement lointain



Coupe intérieure (plan $x_1 = 0$)

Conclusion

- Formulation et analyse de deux équations intégrales équivalentes au problème de diffraction
- Développement d'une méthode de traitement de singularités et résolution de l'équation intégrale volumique → Implémentation dans Mélina++ (<http://anum-maths.univ-rennes1.fr/melina/index.html>)
- Validation de la méthode à l'aide des séries de Mie

- Couplage avec des Méthodes Multipôles Rapides
- Validation du modèle pour des obstacles non homogènes au moyen de résultats empiriques
- Optimisation de formes d'antennes lentilles