



HAL
open science

Méthodes de réduction pour le recalage. Application au cas d'Ariane 5

Adrien Bobillot

► **To cite this version:**

Adrien Bobillot. Méthodes de réduction pour le recalage. Application au cas d'Ariane 5. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale Paris, 2002. Français. NNT : . tel-00504502

HAL Id: tel-00504502

<https://theses.hal.science/tel-00504502>

Submitted on 20 Jul 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthodes de réduction pour le recalage Application au cas d'Ariane 5

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 5 décembre 2002

pour l'obtention du

Doctorat de l'Ecole Centrale Paris

(spécialité mécanique)

par

Adrien BOBILLOT

sous la direction d'Étienne BALMÈS

Composition du jury

Président : Pierre LADEVÈZE

Rapporteurs : Marc BONNET
Daniel RIXEN

Examineurs : Étienne BALMÈS
Dominique BARTHE
Scott COGAN

Remerciements

Je tiens à exprimer un très grand merci à Etienne Balmès, sans qui cette thèse n'aurait jamais vu le jour. Il a plus que contribué, par son exceptionnelle disponibilité, son pragmatisme et son efficacité, à orienter les travaux réalisés et à résoudre les problèmes théoriques et informatiques rencontrés.

Cette thèse doit aussi beaucoup à l'équipe Dimensionnement des Structures d'EADS Launch Vehicles, qui a proposé une problématique particulièrement intéressante et fourni de nombreuses applications ainsi que des directions de recherche pertinentes. A travers les contacts réguliers avec Dominique Langlais, Thierry Romeuf, Dominique Barthe et Stéphane Toudic, cette thèse est restée ancrée dans un contexte industriel. Je leur adresse donc mes remerciements chaleureux.

Enfin, je tiens à remercier l'ensemble de l'équipe Structures du laboratoire MSSMAT pour sa convivialité et sa diversité, tant culturelle que scientifique.

Table des matières

Introduction	1
---------------------	----------

I Méthodes itératives en analyse modale	7
--	----------

Chapitre 1

La méthode d'itération sur les résidus - Principes

1.1	Estimation d'erreur sur une solution approchée	13
1.2	Opérateurs pour le calcul du résidu en déplacement	14
1.3	Itération sur les résidus	16
1.3.1	Liens avec le gradient conjugué préconditionné	16
1.3.2	Enrichissement et orthogonalisation	17
1.3.2.1	Conjugaison (orthonormalisation implicite)	18
1.3.2.2	Orthonormalisation explicite	19
1.3.2.3	Base modale réduite	20
1.3.2.4	Préfiltrage	20
1.3.3	Stratégies de redémarrage	21

Chapitre 2

Problèmes aux valeurs propres

2.1	Solveurs aux valeurs propres réels	23
2.1.1	Méthode des puissances inverses	24
2.1.2	Méthodes de sous-espaces, généralités	25
2.1.3	Méthode d'itération sur les sous-espaces: Bathe-Wilson	26
2.1.4	Enrichissement pur: Lanczos et Arnoldi	26
2.1.5	Enrichissement avec restart: Méthode IRA	27
2.1.6	Méthode d'itération sur les résidus	28

2.2	Problèmes aux valeurs propres complexes	31
2.2.1	Formulation	31
2.2.2	Itération sur les résidus	31
2.2.3	Application numérique	32

Chapitre 3

Problèmes multichamps

3.1	Formulations	36
3.1.1	Couplage fluide-structure	36
3.1.2	Amortissement viscoélastique	37
3.1.3	Couplage fluide-structure amortie	39
3.1.4	Expansion MDRE	40
3.2	Itérations sur sous-espaces multiples	40
3.2.1	Itération sur les résidus	40
3.2.1.1	Couplage fluide structure	40
3.2.1.2	Amortissement viscoélastique	42
3.2.1.3	Couplage fluide-structure amortie	42
3.2.1.4	MDRE	43
3.2.2	Bases de départ	44
3.2.2.1	Couplage fluide-structure	44
3.2.2.2	Amortissement viscoélastique	44
3.2.2.3	Couplage fluide-structure amortie	45
3.2.2.4	MDRE	45
3.3	Application couplage fluide structure	46
3.4	Application amortissement viscoélastique	48
3.5	Application couplage fluide structure amortie	50
3.6	Application MDRE	52

Chapitre 4

Sensibilités de vecteurs propres

4.1	Présentation du problème	58
4.1.1	Solution exacte pour valeur propre unique	58
4.1.2	Valeur propre multiple	59
4.2	Approximation sur base réduite	60
4.2.1	Principes	60

4.2.2	Bases de départ	61
4.2.3	Itération sur les résidus	62
4.2.4	Méthode à taille de base fixe	62
4.2.5	Gradient Projeté Conjugué Préconditionné (PCPG)	63
4.3	Applications	64
4.3.1	Précision	65
4.3.2	Temps de calcul	67

II Application au recalage

75

Chapitre 5

Outils pour le recalage

5.1	Critères de corrélation de forme	81
5.1.1	Traitement de l'incompatibilité spatiale	81
5.1.1.1	Observation	81
5.1.1.2	Expansion	82
5.1.2	Corrélation sur les capteurs	82
5.1.3	Corrélation sur les DDLs	83
5.1.4	Sélection des critères-Exemples	84
5.1.5	Appariement	86
5.1.6	Fonctions objectif $freq - MAC$	87
5.2	Critères en énergie	88
5.2.1	Erreurs de modèle et de mesure	89
5.2.2	Expansion MDRE	89
5.2.3	Formulation à deux champs de l'expansion	91
5.2.4	Fonction objectif associée à la MDRE	91
5.3	Paramétrisation en vue du recalage	92
5.3.1	Notion de modèle paramétré	93
5.3.2	Etude de sensibilité	95
5.3.2.1	Critère $freq - MAC$	95
5.3.2.2	Critère énergétique	96
5.3.2.3	Cas particulier des liens "rigides"	97
5.3.3	Localisation d'erreur-MDRE	99
5.4	Visibilité d'erreur-MDRE	100

5.4.1	Visibilité avec le résidu exact	101
5.4.2	Visibilité avec le résidu issu de la MDRE	104
5.4.3	Choix de l'indicateur	105
5.4.4	Effets liés aux erreurs sur les mesures	106
5.4.5	Localisation de plusieurs perturbations simultanées	108
5.4.6	Placement de capteurs pour la visibilité	109

Chapitre 6

Application au recalage de modèles d'Ariane 5
--

6.1	Application au modèle dynamique de l'EPC	114
6.2	ESC-A - Corrélation initiale	117
6.2.1	Modèle fourni par EADS - Assemblage	118
6.2.2	Description des essais	120
6.2.3	Corrélation calcul-essais	122
6.2.3.1	Modes proches	122
6.2.4	Problèmes de corrélation	128
6.3	Choix des paramètres	130
6.3.1	Connaissance de l'ingénieur	131
6.3.2	Étude de sensibilité	131
6.3.3	Localisation d'erreur	133
6.3.4	Visibilité d'erreur	135
6.4	ESC-A - Recalage	137
6.4.1	Paramètres sélectionnés	137
6.4.2	Mise en oeuvre	140
6.4.3	Recalage par groupes de paramètres	141
6.4.3.1	Recalages des raideurs des SARO	141
6.4.3.2	Recalages des raideurs des <i>ITS struts</i> et d' <i>ITS ring</i>	143
6.4.3.3	Recalages de la raideur des vérins de la maquette moteur	144
6.4.3.4	Recalages de la raideur des couronnes d'éléments SYLDA5	145
6.4.3.5	Recalages de la position des centres d'inertie	146
6.4.4	Recalage final <i>freq - MAC</i>	148

Annexe A Terminologie ESC-A-2	155
--------------------------------------	------------

Bibliographie	157
----------------------	------------

Introduction

Avec le développement conjoint des outils de modélisation et de la puissance de calcul, la simulation est devenue l'outil de conception principal pour des structures complexes telles que les lanceurs.

En phase de conception, on réalise une description géométrique (CAO) et on caractérise les matériaux constituant la future structure réelle. De cette description géométrique, on tire un modèle analytique basé sur une description continue de la structure en termes de poutres, coques, volumes. Dans ce modèle, les liaisons sont généralement idéalisées sous la forme d'hypothèses de liaison parfaite (continuité du déplacement) ou simplifiée (ressort équivalent, etc.). La discrétisation des modèles continus, par la méthode des éléments finis, et leur assemblage prenant en compte des hypothèses de liaison conduit à un modèle numérique qui permet le dimensionnement et la vérification d'objectifs de conception très divers (tenue mécanique en statique et dynamique, capacité de pilotage, etc.).

Le modèle numérique servant à vérifier la conformité aux objectifs de conception, il est essentiel d'assurer que ses prédictions correspondent bien à la réalité. Les phases de vérification et de validation considérées pour obtenir cette assurance sont illustrées en figure 1.

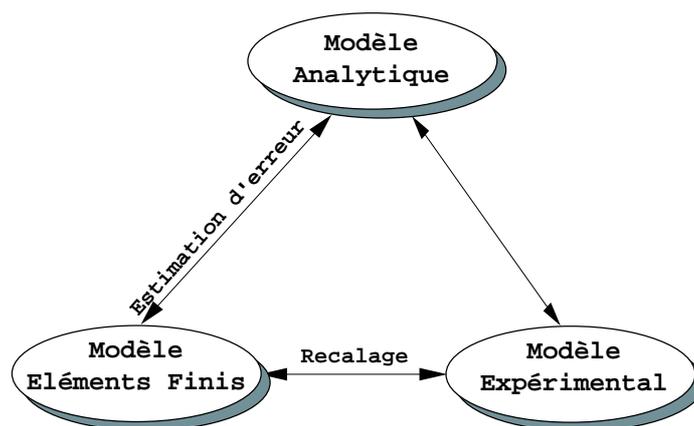


FIG. 1 – Problématique de la maîtrise de modèles.

Pour assurer la validité du modèle numérique, il convient de vérifier que les méthodes mises en oeuvre sont bien utilisées dans leur domaine de validité. Les principales hypothèses testées dans la phase de vérification sont les choix de lois de comportement (par des essais de caractérisation des matériaux) et la convergence des discrétisations du modèle éléments finis (l'erreur de discrétisation peut parfois être corrigée en introduisant des paramètres équivalents, comme montré en [27], ou en ayant recours au calcul adaptatif [3]).

Si la vérification des choix de méthodes numériques est suffisante pour des structures simples, il en va autrement de structures complexes où de nombreuses simplifications sont introduites dans la modélisation pour faciliter la construction du modèle. On est donc amené à considérer des essais sur la structure réelle ou certains de ces composants pour valider la pertinence des choix de modélisation retenus. Cette phase peut par ailleurs permettre d'estimer certains paramètres du modèle numérique ; on parle alors de recalage.

Le **premier objectif** de cette thèse est d'améliorer significativement la capacité à valider et recalibrer des modèles industriels de structures de type lanceur. Le recalage nécessitant une phase d'optimisation, comprenant de nombreuses analyses successives, les coûts de calcul constituent un facteur limitant. Le **deuxième objectif** est donc d'introduire des méthodes numériques suffisamment performantes pour permettre d'atteindre le premier objectif.

Le coût d'une série de calculs est lié à sa complexité, dont les principaux facteurs sont illustrés en figure 2.

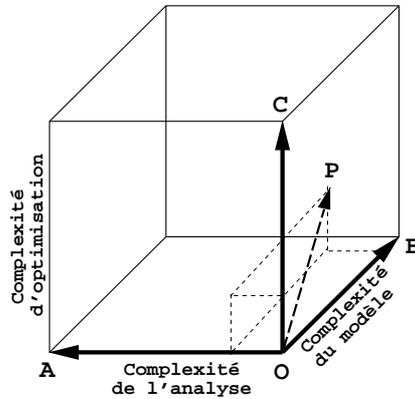


FIG. 2 – Diagramme de complexité des calculs en mécanique [60].

Le premier facteur de complexité est lié à la taille du modèle. Le nombre de degrés de liberté (DDLs) en est une bonne indication, bien qu'à nombre de DDLs égal une poutre élancée soit moins complexe qu'un objet volumique compact. Ainsi, depuis les années 70, on est passé de modèles EF comportant quelques centaines de DDLs à des modèles de quelques millions de DDLs à l'heure actuelle (du point O au point B).

Le deuxième axe de complexité concerne l'analyse réalisée sur le modèle. Dans ce domaine, la complexité va de la statique linéaire à des analyses non-linéaires complexes comme la propagation de fissures (point A).

Enfin, le dernier axe concerne la complexité de l'optimisation, qui regroupe le nombre d'analyses requises, mais aussi le nombre de paramètres étudiés et le type d'optimisation réalisée (de la méthode du gradient aux algorithmes génétiques).

L'existence de ces multiples facteurs de complexité montre clairement que, malgré l'augmentation rapide de la puissance de calcul, l'amélioration des techniques numériques mises en oeuvre pour la simulation numérique restera longtemps d'actualité.

La complexité des calculs réalisés ici, pour des applications de recalage, est liée à l'utilisation de modèles de taille significative (contenant souvent plus de 100000 DDLs) et à l'optimisation d'une dizaine de paramètres par des méthodes relativement classiques (Newton, Gradient conjugué préconditionné, Levenberg-Marquardt, etc.). Bien que les problèmes considérés soient linéaires, on cherche à prédire pour chaque valeur des paramètres un nombre significatif de quantités : modes, sensibilités, résultats d'expansion, etc. Par ailleurs, la prise en compte de l'amortissement ou du couplage avec un fluide complexifie significativement l'analyse. Ainsi, on estime que l'on se trouve au point P du diagramme de complexité.

La première partie de ce mémoire introduit une classe de méthodes de résolution itératives des problèmes rencontrés en dynamique linéaire avec comme cas particulier le recalage. L'introduction de cette classe de méthodes, dénommée méthode d'itération sur les résidus (ou RI pour *Residual Iteration*), constitue ainsi la **première contribution** de cette thèse.

Le chapitre 1 montre que la méthode RI se place dans le cadre général des analyses de Ritz, qu'elle utilise des indicateurs d'erreur pour enrichir le sous-espace d'approximation et reprend des techniques de préconditionnement et d'orthogonalisation.

Bien qu'aucun des ingrédients utilisés ne soit nouveau, leur combinaison en un formalisme unifié permet le développement aisé de solveurs adaptés à des problèmes non ou mal résolus à ce jour. Les chapitres suivants détaillent la mise en oeuvre de la méthode RI pour divers problèmes. Ainsi, le chapitre 2 traite des problèmes aux valeurs propres réels et complexes et analyse les liens entre la méthode RI et des méthodes de résolution plus classiques. Le chapitre 3 traite des problèmes à plusieurs champs que l'on rencontre en couplage fluide-structure, pour la modélisation de structures amorties ou dans la résolution du problème d'expansion par minimisation du résidu dynamique, utilisé en recalage. Le chapitre 4 traite enfin du calcul des sensibilités des vecteurs propres. Pour chaque type de problème, des applications numériques sur des modèles de taille significative permettent de montrer l'intérêt réel de la méthodologie proposée.

La deuxième partie de la thèse met en oeuvre les méthodes numériques développées dans la première partie, afin de contribuer à améliorer les méthodes utilisées lors de la validation et du recalage de modèles dynamiques.

Pour valider un modèle, il est nécessaire de le comparer avec un modèle expérimental, caractérisé par des modes ou des fonctions de transfert. La définition de mesures de la distance entre l'essai et les prédictions numériques correspondantes permet une validation. Le recalage consiste alors à faire varier des paramètres du modèle numérique pour minimiser la distance calcul-essais, comme décrit en figure 3.

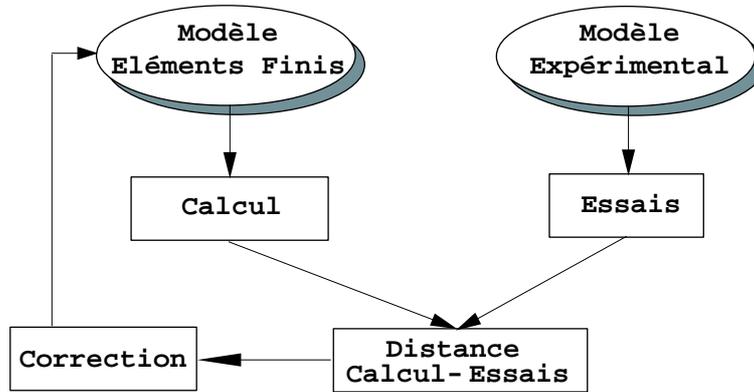


FIG. 3 – Principe du recalage.

Les méthodes de recalage se divisent en deux grandes familles : les méthodes globales, ou directes, qui modifient les matrices décrivant le modèle EF de manière globale, sans tenir compte des propriétés physiques inhérentes à ces matrices ; et les méthodes locales, ou indirectes, qui modifient le modèle localement en changeant des paramètres physiques de lois de comportement tels que le module d'Young, la masse volumique, etc. On trouvera des études bibliographiques en [55] et [48] notamment.

On se place dans cette thèse dans le cadre des méthodes locales, en se basant sur des modèles paramétriques de la structure étudiée. Les paramètres "optimaux" sont alors déduits d'une procédure d'optimisation qui consiste à minimiser la distance calcul-essais. Deux estimateurs d'erreur sont considérés, à savoir le critère fréquence/MAC et une variante de l'erreur en relation de comportement modifiée en vue du recalage [44, 23, 27]. Leurs formulations respectives sont détaillées au début du chapitre 5.

Dans l'optique du recalage, le choix des paramètres est d'une importance essentielle et plusieurs techniques classiques sont utilisées pour réaliser cette sélection. La technique la plus pragmatique est la revue par un groupe d'ingénieur des hypothèses de modélisation, qui permet de cerner les zones dont la modélisation est incertaine. L'analyse de sensibilité permet elle d'éliminer les paramètres non influents ne pouvant donc pas être déduits d'une procédure de recalage. Enfin, les indicateurs d'erreur en énergie sont susceptibles de localiser les erreurs de modèle. Le **deuxième contribution** de cette thèse est une réflexion sur la possibilité et la manière d'utiliser ces indicateurs pour localiser d'éventuelles erreurs sur les paramètres du modèle. Le choix des indicateurs, l'effet de la configuration capteur ou de la présence

d'erreurs non corrigées sont ainsi analysés ; et une technique de placement de capteurs pour améliorer la visibilité d'un paramètre particulier est proposée.

L'application finale ayant motivé le lancement de cette thèse est le recalage de modèles dynamiques de composants d'Ariane 5. La **troisième contribution** de cette thèse est donc la validation et le recalage des modèles industriels de maquettes dynamiques de l'Etage Principal Cryotechnique et de l'ESC-A, présentés dans le chapitre 6.

Première partie

Méthodes itératives en analyse modale

Cette première partie a pour but de présenter la méthode d'itération sur les résidus développée dans cette thèse. Dans un premier temps la méthode est introduite, par souci de simplicité, dans le cas particulier de la résolution de problèmes aux valeurs propres réels, afin d'exposer les différentes étapes qui la composent et de la positionner par rapport aux méthodes existantes. Dans un deuxième temps, la méthode est appliquée à la résolution de divers problèmes rencontrés en analyse modale (problèmes aux valeurs propres à un ou plusieurs champs, réels ou complexes, calcul de sensibilités de vecteurs propres ou encore résolution de l'expansion par minimisation du résidu dynamique). Lorsque d'autres méthodes existent pour résoudre ces problèmes, on évalue les performances relatives de la méthode d'itération sur les résidus en termes de temps de calcul et d'espace mémoire. Les modèles utilisés sont de taille industrielle, contenant un nombre de DDLs de l'ordre de 100000, de manière à mettre en valeur l'applicabilité de la méthode proposée.

Chapitre 1

La méthode d'itération sur les résidus - Principes

Sommaire

1.1	Estimation d'erreur sur une solution approchée	13
1.2	Opérateurs pour le calcul du résidu en déplacement	14
1.3	Itération sur les résidus	16
1.3.1	Liens avec le gradient conjugué préconditionné	16
1.3.2	Enrichissement et orthogonalisation	17
1.3.3	Stratégies de redémarrage	21

Ce chapitre cherche à présenter les principes de la méthode d'itération sur les résidus dans le cas particulier de la résolution de problèmes aux valeurs propres réels du premier ordre. En effet, les grandes lignes de la méthode sont identiques pour la résolution de ce type de problèmes ou pour celle de problèmes plus complexes présentés dans les chapitres suivants.

On s'intéresse donc ici à la recherche des modes propres d'une structure élastique, c'est à dire :

* Trouver les NM premières solutions propres $(\omega_j, \{\phi_j\})$ telles que

$$[K - \omega_j^2 M] \{\phi_j\} = 0, \quad (1.1)$$

où K est une matrice symétrique semi-définie positive , M est symétrique définie positive et NM désigne le nombre de modes recherchés.

La méthode d'itération sur les résidus fait partie des méthodes d'itération sur les sous-espaces, dont l'hypothèse sous-jacente est qu'une bonne approximation de la solution de (1.1) peut être recherchée dans un sous-espace engendré par les colonnes (vecteurs de Ritz) d'une matrice rectangulaire, ou base T , comportant N lignes et $NR \ll N$ colonnes (N est le nombre de DDLs du modèle considéré). Les vecteurs propres approchés sont alors donnés par $\{\tilde{\phi}_j\} = T \{\phi_j\}_R$ avec $\{\phi_j\}_R$ solution du problème réduit (résolu par une méthode de résolution complète de type QR [31])

$$[T]^T [K - \omega_{j,R}^2 M] [T] \{\phi_j\}_R = \{0\}. \quad (1.2)$$

La précision de la solution dépend ainsi seulement du sous-espace engendré par T et les différentes méthodes d'itération sur les sous-espaces consistent donc à construire un sous-espace de recherche adapté, comme le montre le théorème de la section 2.1.2.

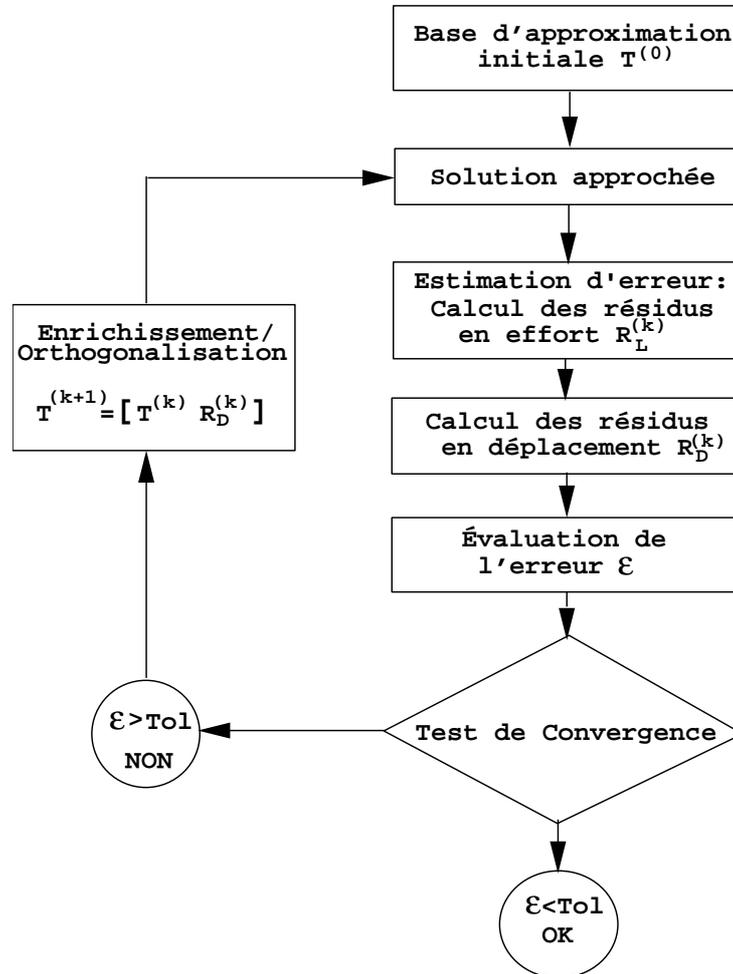


FIG. 1.1 – Schéma d'enrichissement du sous-espace de recherche par la méthode d'itération sur les résidus.

Le schéma 1.1 expose les grandes lignes de la méthode d'itération sur les résidus. Partant d'une base de départ $T^{(0)}$, on évalue à chaque pas d'itération k des résidus en effort associés au fait que le sous-espace $E^{(k)}$, engendré par $T^{(k)}$, ne contient pas la solution exacte. On applique alors un opérateur à ces résidus de manière à obtenir des résidus en déplacement, auxquels on associe une norme en énergie. La norme de ces résidus est alors utilisée comme indicateur d'erreur. Si celle-ci est trop importante le résidu en déplacement correspondant est utilisé pour enrichir la base, jusqu'à convergence.

Les points clés de la méthode sont donc la définition d'un indicateur d'erreur associé à la solution approchée (section 1.1), l'introduction d'un opérateur pour le calcul du résidu en déplacement (section 1.2) et la procédure d'enrichissement du sous-espace d'approximation (section 1.3).

1.1 Estimation d'erreur sur une solution approchée

À l'étape k , la solution est recherchée sur le sous-espace $E^{(k)}$ engendré par $T^{(k)}$, c'est à dire que l'on recherche la solution approchée $\{\tilde{\phi}_j\}$ sous la forme $\{\tilde{\phi}_j\} = T^{(k)} \{\phi_{j,R}\}$ où $(\omega_{j,R}, \{\phi_{j,R}\})$ est solution du problème projeté sur le sous-espace $E^{(k)}$

$$T^{(k)T} [K - \omega_{j,R}^2 M] T^{(k)} \{\phi_{j,R}\} = 0. \quad (1.3)$$

$\{\tilde{\phi}_j\} = T^{(k)} \{\phi_{j,R}\}$ étant une solution approchée, elle ne satisfait pas l'équation de départ, donc

$$R_{L,j}^{(k)} = [K - \omega_{j,R}^2 M] T^{(k)} \{\phi_{j,R}\} \neq 0. \quad (1.4)$$

$R_{L,j}^{(k)}$ est homogène à un effort et sera appelé par la suite résidu en effort (*Load Residual*) associé à la base $T^{(k)}$ et au mode j .

Le choix d'une norme pour le résidu conduit alors directement à un estimateur d'erreur. Certaines méthodes utilisent tout simplement une norme quadratique du résidu en effort (notamment la méthode de Sorensen, section 2.1.2, ou encore celle du gradient conjugué préconditionné pour le calcul des sensibilités, section 4.2.5). Mais pour donner un sens mécanique à la norme du résidu, il est classique de lui associer une énergie. Le résidu $R_{L,j}^{(k)}$ étant homogène à un effort, on calcule pour ce faire la réponse statique à cet effort

$$\{R_{D,j}^{(k)}\} = [\hat{K}]^{-1} \{R_{L,j}^{(k)}\}, \quad (1.5)$$

que l'on appellera Résidu en Déplacement (*Displacement Residual*) dans la suite de ce mémoire. Différents choix pour l'opérateur \hat{K} (homogène à une raideur) sont discutés en section 1.2.

Ayant obtenu un résidu en déplacement on peut alors considérer un indicateur d'erreur en énergie de déformation, défini comme l'énergie de déformation du résidu ramenée à l'énergie de déformation du mode étendu $T^{(k)} \{\phi_{j,R}\}$

$$\epsilon_j^{(k)} = \frac{\|\{R_{D,j}^{(k)}\}\|_K^2}{\|T^{(k)} \{\phi_{j,R}\}\|_K^2}. \quad (1.6)$$

Une alternative possible, bien qu'elle n'ait pas été utilisée dans ce travail, serait de considérer l'équivalent en énergie cinétique

$$\epsilon_j^{(k)} = \frac{\|\{R_{D,j}^{(k)}\}\|_M^2}{\|T^{(k)} \{\phi_{j,R}\}\|_M^2}. \quad (1.7)$$

N.B: Les modes satisfaisant les conditions d'orthogonalité en masse

$$\{T^{(k)}\phi_{k,R}\}^T [M] \{T^{(k)}\phi_{j,R}\} = \delta_{jk} \quad (1.8)$$

et en raideur

$$\{T^{(k)}\phi_{k,R}\}^T [K] \{T^{(k)}\phi_{j,R}\} = \omega_{j,R}^2 \delta_{jk}, \quad (1.9)$$

les dénominateurs de (1.6) et (1.7) se simplifient.

Pour comparer les performances relatives de différentes méthodes, on utilisera le même critère d'arrêt pour chacune d'entre elles. En effet, bien qu'il ait été vérifié que le critère d'arrêt de la méthode d'itération sur les résidus (1.6) et l'équivalent obtenu en considérant une norme quadratique (utilisé par de nombreuses méthodes) donnent des résultats très proches, l'utilisation d'un même critère d'arrêt pour toutes les méthodes est plus rigoureux dans les comparaisons de temps de calcul.

On appliquera donc à toutes les méthodes le critère (1.6) et on ne comptabilisera pas le temps supplémentaire nécessaire à son évaluation pour les méthodes utilisant une norme quadratique (peu coûteuse en termes de temps CPU). Ainsi, chaque méthode est comparable aux autres et seules les opérations nécessaires à chacune d'entre elles sont prises en compte.

1.2 Opérateurs pour le calcul du résidu en déplacement

De manière classique, la rigidité est considérée comme opérateur \hat{K} pour le calcul du résidu en déplacement (1.5). La présence de modes de corps rigide ou des problèmes de conditionnement numérique peuvent cependant conduire à l'utilisation d'autres opérateurs détaillés dans cette section.

En présence de modes de corps rigide, la rigidité n'est pas inversible et ne peut donc être choisie pour \hat{K} . Deux solutions classiques sont le *shift* en masse et le calcul de la réponse statique flexible.

Le *shift* en masse utilise

$$[\hat{K}(\alpha)]^{-1} = [K + \alpha M]^{-1}, \quad (1.10)$$

qui dans la base des modes normaux solutions de (1.1) s'exprime sous la forme

$$[\hat{K}(\alpha)]^{-1} = \sum_{j=1}^N \frac{\{\phi_j\} \{\phi_j\}^T}{\alpha + \omega_j^2}. \quad (1.11)$$

Pour α positif, $K + \alpha M$ est défini positif et donc inversible. Pour α négatif, il faut éviter la coïncidence avec une fréquence propre.

La réponse statique flexible est elle donnée par

$$[\hat{K}]_{Flex}^{-1} = \sum_{j=N_{CR}+1}^N \frac{\{\phi_j\} \{\phi_j\}^T}{\omega_j^2}, \quad (1.12)$$

où N_{CR} est le nombre de modes de corps rigide, qui peut être calculé par la méthode des liaisons temporaires [33], [29].

Les dénominateurs des expressions (1.11) et (1.12) font apparaître que les résidus en déplacement sont souvent dominés par des contributions basse fréquence pour lesquelles $\alpha + \omega_j^2$ est faible. Or ces composantes sont généralement retenues dans les bases $T^{(k)}$, comme on le verra dans la suite. Il est donc raisonnable de *filtrer les composantes basse fréquence* du résidus en déplacement selon les NM premiers modes en utilisant

$$\left[\hat{K}(\alpha) \right]_{Res}^{-1} = \sum_{j=NM+1}^N \frac{\{\phi_j\} \{\phi_j\}^T}{\alpha + \omega_j^2} = [K + \alpha M]^{-1} - \sum_{j=1}^{NM} \frac{\{\phi_j\} \{\phi_j\}^T}{\alpha + \omega_j^2}. \quad (1.13)$$

Si certaines valeurs $\alpha + \omega_j^2$ sont très faibles, la différence dans (1.13) conduit souvent à une perte de précision numérique. Il est alors utile de constater que pour $\Phi = [\phi_1 \dots \phi_{NM}]$, on a

$$\begin{aligned} \left[\hat{K}(\alpha) \right]^{-1} M \Phi \Phi^T &= \sum_{j=1}^N \frac{\{\phi_j\} \{\phi_j\}^T}{\alpha + \omega_j^2} M \Phi \Phi^T \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{\{\phi_j\} \{\phi_j\}^T M \Phi \Phi^T}{\alpha + \omega_j^2} \\ &= \sum_{j=1}^{NM} \frac{\{\phi_j\} \{\phi_j\}^T}{\alpha + \omega_j^2}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

D'où

$$\left[\hat{K}(\alpha) \right]_{Res}^{-1} = [K + \alpha M]^{-1} (I - M \Phi \Phi^T). \quad (1.15)$$

Cette expression à l'avantage d'orthogonaliser au préalable le résidu en effort par rapport aux modes basse fréquence et donc d'éviter la différence de grands nombres, source d'erreurs d'arrondis.

D'un point de vue mathématique, (1.15) est strictement équivalente à

$$\left[\hat{K}(\alpha) \right]_{Res}^{-1} = (I - M \Phi \Phi^T) [K + \alpha M]^{-1} \quad (1.16)$$

mais d'un point de vue numérique, (1.15) possède l'avantage de filtrer les composantes basse fréquence directement sur le résidu en effort, plutôt que de les filtrer sur le résidu en déplacement après l'application de l'opérateur $[K + \alpha M]^{-1}$, qui a tendance à amplifier les composantes basse fréquence.

Un avantage annexe de cette technique de *filtrage des composantes basse fréquence* est que pour un *shift* négatif $-\omega_{NM}^2 < \alpha < 0$, $\left[\hat{K}(\alpha) \right]_{Res}^{-1}$ reste définie positive. Les *shifts* négatifs étant souvent utilisés pour accélérer la convergence des calculs de valeurs propres, ce préconditionneur permet de conserver une factorisation tout en définissant un opérateur d'erreur défini positif ce qui permet de garantir la convergence de techniques de type gradient conjugué [1].

Dans la suite de cette thèse, on utilise généralement la méthode du *shift* en masse (1.10), en prenant $\omega_{flex}^2/10 < \alpha < \omega_{flex}^2$ où ω_{flex} est la pulsation propre du premier mode flexible.

En effet, cette méthode ne nécessite pas de connaître les premiers modes propres et est peu coûteuse en termes de temps de calcul. D'autre part lorsque l'on balaiera des intervalles paramétriques, c'est à dire lorsque l'on considérera des raideurs $K(p)$ dépendant d'un paramètre p donné (par exemple un module d'Young), on utilisera toujours le même préconditionneur $K(p_0)$ calculé en un point paramétrique p_0 . La factorisation n'est ainsi réalisée qu'une fois, ce qui induit un gain considérable en temps de calcul et ne détériore pas la convergence de l'algorithme.

Aucune étude systématique de l'influence du *shift* sur le taux de convergence n'a été menée dans cette thèse. Ceci constitue donc une perspective pour de futurs travaux. En effet, comme le montre l'équation (4.30) dans le cas de la méthode PCPG appliquée au calcul des sensibilités de vecteurs propres (section 4.2.5), l'utilisation de *shifts* bien choisis permet souvent d'améliorer la convergence.

1.3 Itération sur les résidus

Ayant évalué l'erreur associée à un sous-espace de recherche à travers le critère de convergence (1.6), il reste à enrichir le sous-espace.

On commence en section 1.3.1 par l'analyse des liens entre la méthodologie proposée et l'algorithme du gradient conjugué préconditionné utilisé pour la résolution de systèmes linéaires. La section 1.3.2 détaille ensuite les techniques d'orthogonalisation mises en oeuvre en pratique pour réaliser l'enrichissement. Enfin, la section 1.3.3 aborde la problématique des *redémarrages* nécessaires lorsque la taille des bases croît de façon trop importante.

1.3.1 Liens avec le gradient conjugué préconditionné

Dans le cas de la résolution d'un problème linéaire

$$[K] \{q\} = \{f\}, \quad (1.17)$$

une méthode de gradient conjugué préconditionné (PCG) par S est décrite par la récurrence suivante [34] ou [1]

1. Initialisation avec $k = 0$, $q_0 = 0$, $r_0 = \{f\}$
2. Tant que ($\|r_k\| \neq 0$)
 - 2a. $[S] \{z_k\} = \{r_k\}$ préconditionnement du résidu
 - 2b. Incrémentation $k = k + 1$
 - 2c. Si $k = 1$, $p_1 = z_0$ sinon
$$\beta_k = \frac{r_{k-1}^T z_{k-1}}{r_{k-2}^T z_{k-2}}$$

$$p_k = z_{k-1} + \beta_k p_{k-1}$$
 - 2d. $\alpha_k = \frac{r_{k-1}^T z_{k-1}}{p_k^T K p_k}$
 - 2e. $q_k = q_{k-1} + \alpha_k p_k$
 - 2f. $r_k = r_{k-1} - \alpha_k K p_k$

Fin Tant que

En développant la récurrence on a $q_k = \sum_{j=1}^k \alpha_j \{p_j\}$. La solution est donc recherchée dans l'espace engendré par les vecteurs $[p_1 \dots p_k]$. Au vu de l'étape 2c., ce sous-espace est identique à celui généré par les vecteurs $[z_0 \dots z_{k-1}]$. Seule la base change avec la propriété très utile d'orthogonalité des p_k (comme démontré pour la méthode de Lanczos en section 1.3.2.1).

La méthodologie d'itération sur les résidus reprend en les modifiant les ingrédients du gradient conjugué préconditionné.

- L'enrichissement est basé sur le résidu de l'étape précédente. Cependant, pour beaucoup des problèmes considérés dans les chapitres suivants, ce résidu doit être calculé explicitement plutôt que par récurrence comme à l'étape 2f du PCG.
- L'étape de calcul du résidu en déplacement abordé dans les sections précédentes correspond au préconditionnement du résidu, étape 2a.
- Le critère d'arrêt (1.6) porte typiquement sur la norme en énergie du résidu en déplacement plutôt que sur la norme quadratique du résidu en effort $\|r_k\|$.
- La solution approchée est obtenue par résolution dans le sous-espace engendré par T_k (par exemple, pour un calcul de modes (1.2)) plutôt que par la récurrence de l'étape 2e.
- L'étape de conjugaison, qui garantit en précision infinie l'orthogonalité de la base des p_k , est remplacée par une phase d'orthogonalisation lors de l'enrichissement, abordée en section 1.3.2.

Un dernier intérêt du PCG est que les p_i n'ont pas besoin d'être conservés puisque la solution et le résidu sont obtenus par récurrence. Ce problème de taille de base est pris en compte par l'utilisation de *redémarrages* explicites, détaillés en section 1.3.3.

1.3.2 Enrichissement et orthogonalisation

Les techniques d'itération sur les résidus considérées dans ce mémoire utilisent le critère d'erreur en énergie (1.6) et considèrent un enrichissement de la base par les résidus en déplacement dont l'erreur est supérieure à une tolérance *a priori* Tol , c'est à dire

$$\epsilon_j^{(k)} > Tol \Rightarrow \hat{T}^{(k+1)} = \left[T^{(k)}, \left\{ R_{D,j}^{(k)} \right\} \right]. \quad (1.18)$$

On a donc finalement

$$\hat{T}^{(k+1)} = \left[T^{(k)}, \left\{ R_{D,j_1}^{(k)} \right\}, \left\{ R_{D,j_2}^{(k)} \right\}, \dots, \left\{ R_{D,j_n}^{(k)} \right\} \right], \quad (1.19)$$

avec j_1, j_2, \dots, j_n t.q. $\epsilon_{j_1}^{(k)}, \epsilon_{j_2}^{(k)}, \dots, \epsilon_{j_n}^{(k)} > Tol$.

Dans de nombreux cas pratiques, les résidus obtenus pour différentes valeurs de k sont extrêmement colinéaires. Ceci induit un mauvais conditionnement des matrices réduites $(\hat{T}^{(k)T} M \hat{T}^{(k)}, \dots)$ et donc des erreurs numériques dans la solution réduite (1.2).

Dans la pratique, on applique donc une phase d'orthogonalisation aux vecteurs de $\hat{T}^{(k)}$ pour obtenir la base $T^{(k)}$ réellement retenue. Parmi les techniques d'orthogonalisation possibles, on a mis en oeuvre dans ce mémoire les techniques suivantes

- Technique de conjugaison assurant l'orthogonalité par une récursion (résolution de systèmes linéaires par la technique gradient conjugué, résolution de problèmes aux valeurs propres par l'algorithme de Lanczos, etc.).
- Orthonormalisation totale par rapport à la masse (Gram-Schmidt modifié, etc.). Une discussion de techniques adaptées à la prise en compte des problèmes de précision finie est donnée ci-dessous.
- Orthonormalisation totale par rapport à la masse et la raideur, par résolution du problème aux valeurs propres réduit (1.2). Une phase préalable d'orthonormalisation totale par rapport à la masse est souvent utile avant la résolution de (1.2).
- Techniques de préfiltrage dans l'estimation du résidu en déplacement.

1.3.2.1 Conjugaison (orthonormalisation implicite)

L'objectif de cette technique est de construire un sous-espace de vecteurs orthogonaux par récurrence, ce qui limite le besoin de stockage ou de rappel en mémoire des vecteurs du sous-espace. Cette technique est à la base des techniques de gradient conjugué (résolution de systèmes linéaires) ou de Lanczos (calcul de valeurs propres), qui s'appliquent aux problèmes dont l'opérateur associé est hermitien.

L'algorithme de Lanczos [33] appliqué à la résolution de (1.1) donne un bon exemple d'orthonormalisation implicite. Il consiste à construire progressivement une famille de vecteurs de Ritz

$$T^{(k)} = [z_1, z_2 = (K^{-1}M)z_1, z_3 = (K^{-1}M)z_2, \dots, z_{k+1} = (K^{-1}M)z_k], \quad (1.20)$$

en combinant les opérations d'itération inverse et d'orthogonalisation des itérés successifs dans la relation suivante

$$\gamma_{k+1}z_{k+1} = K^{-1}Mz_k - \alpha_k z_k - \beta_{k-1}z_{k-1}. \quad (1.21)$$

α_k et β_{k-1} sont calculés en imposant que z_{k+1} soit orthogonal à z_k et z_{k-1} , ce qui donne

$$\begin{aligned} \alpha_k &= z_k^T M K^{-1} M z_k \\ \beta_{k-1} &= z_k^T M K^{-1} M z_{k-1}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

γ_{k+1} assurant la normalisation de z_{k+1} ($z_{k+1}^T M z_{k+1} = 1$).

Une propriété intéressante de cet algorithme est qu'il construit implicitement une base orthogonale. Cette propriété (l'orthogonalité de z_{k+1} vis-à-vis des z_l , $0 < l < k + 1$), peut être montrée par récurrence.

1. On montre d'abord que z_3 est orthogonal à z_2 et z_1 , ce qui est une conséquence directe de la définition de α_2 et β_1 .

2. On suppose que z_k est orthogonal à z_l , $0 < l < k$, c'est à dire

$$z_k^T M z_l = 0 \quad \text{pour } l < k. \quad (1.23)$$

3. On fait alors évoluer la récurrence ($k=k+1$). Comme (1.22) nous donne l'orthogonalité de z_{k+1} vis-à-vis de z_k et z_{k-1} , il reste à montrer que $z_{k+1}^T M z_l = 0$, pour $0 < l < k - 1$. Pour cela, considérons

$$\begin{aligned} z_l^T M z_{k+1} &= \frac{1}{\gamma_{k+1}} z_l^T M (K^{-1} M z_k - \alpha_k z_k - \beta_{k-1} z_{k-1}) \\ &= \frac{1}{\gamma_{k+1}} z_l^T M (K^{-1} M z_k), \text{ cf. (1.23)} \\ &= \frac{1}{\gamma_{k+1}} z_k^T M (K^{-1} M z_l) \text{ (K et M sont symétriques)} \\ &= \frac{1}{\gamma_{k+1}} z_k^T M (\gamma_{l+1} z_{l+1} + \alpha_l z_l + \beta_{l-1} z_{l-1}) \\ &= 0 \text{ pour } l < k-1, \text{ cf. (1.23)}. \end{aligned}$$

(1.22) nous donne d'autre part $\gamma_k = \beta_{k-1}$.

On voit donc que l'orthogonalité de la base ainsi générée est implicitement assurée par l'algorithme lui-même. Pourtant, lorsque l'algorithme tend vers les modes de la structure, on observe une perte d'orthogonalité de la base $T^{(k)}$ due à des erreurs d'arrondis (précision finie). On a alors recours à des orthogonalisations explicites telles celles utilisées dans la méthode d'itération sur les résidus (section 1.3.2.2) ou dans la méthode d'Arnoldi (section 2.1.4).

1.3.2.2 Orthonormalisation explicite

La méthode d'itération sur les résidus utilise un algorithme de type Gram-Schmidt [21] pour rendre la base $T^{(k+1)}$ orthonormale en masse. Cet algorithme consiste à obtenir, à partir d'une famille de vecteurs $(x_i)_{i=1..n}$, une famille de vecteurs orthonormés $(y_i)_{i=1..n}$ en utilisant $y_1 = x_1 / \|x_1\|$, $y_2 = x_2 - (y_1, y_2) y_1$, $y_2 = y_2 / \|y_2\|$, ...

Ce procédé simple, mais très instable du fait des erreurs d'arrondis, peut être amélioré par l'utilisation de l'algorithme de Gram-Schmidt modifié, qui utilise des renormalisations successives des différents termes ajoutés pour éviter que des vecteurs disparaissent s'ils ont une amplitude trop faible. Pour des problèmes particulièrement mal conditionnés, l'algorithme de Gram-Schmidt modifié itératif sera préféré.

Les différentes méthodes décrites ci-dessus nous permettent d'obtenir une base $T^{(k+1)}$ orthonormée en masse, telle que

$$T^{(k+1)T} M T^{(k+1)} = I. \quad (1.24)$$

Ceci est généralement suffisant pour garantir le bon conditionnement de la base de réduction. Pourtant, il parfois est nécessaire d'éliminer certaines composantes de $T^{(k+1)}$ pour améliorer le conditionnement du problème réduit (1.2), comme décrit dans la section suivante.

Dans d'autre cas, lorsque les techniques de préfiltrage (1.26) ou (1.27) suffisent à assurer le bon conditionnement de la base de réduction, il n'est pas nécessaire d'orthonormaliser en

masse la base $T^{(k+1)}$ (on a alors $T^{(k+1)} = \hat{T}^{(k+1)} = [T^{(k)}, \{R_{D,j1}^{(k)}\}, \{R_{D,j2}^{(k)}\}, \dots, \{R_{D,jn}^{(k)}\}]$). Dans ce cas la projection du problème sur $T^{(k+1)}$ peut être accélérée en utilisant la projection déjà réalisée à l'étape k (sur $T^{(k)}$), car la partie de $T^{(k+1)}$ contenant $T^{(k)}$ n'a pas été modifiée. Ainsi, il ne reste plus qu'à projeter le problème sur les $\{R_{D,j}^{(k)}\}$ et à utiliser la projection précédente, ce qui est avantageux d'un point de vue temps de calcul.

Cette propriété est utilisée lorsque cela est possible, par exemple pour les applications de la méthode d'itération sur les résidus au calcul des sensibilités, présentées au chapitre 4.

1.3.2.3 Base modale réduite

Suite à une étape d'orthonormalisation complète par rapport à la matrice de masse ($T^{(k+1)T} M T^{(k+1)} = I$, cf. section précédente), il est parfois utile de résoudre le problème réduit (1.2) par une méthode QR appliquée à la matrice de rigidité réduite $T^{(k+1)T} K T^{(k+1)}$.

Pour le calcul des modes normaux, c'est la dernière étape conduisant aux valeurs et vecteurs propres. Pour d'autres applications, les valeurs propres réelles donnent souvent une idée du conditionnement du problème posé. En particulier, on constate souvent des problèmes de précision numérique si $\omega_{max}^2 / \omega_{min}^2 > 10^{16}$. Dans ce cas, on élimine les vecteurs de la base qui correspondent aux valeurs propres ω_j^2 telles que $\omega_j^2 / \omega_{min}^2 > 10^{16}$ de manière à régulariser le problème.

1.3.2.4 Préfiltrage

Comme on l'a détaillé en section 1.2, on peut éliminer les composantes basse fréquence dans le calcul des résidus en déplacement. Cette modification du calcul du résidu présente un avantage très net, car elle donne une meilleure précision numérique de la partie du résidu orthogonale aux directions de la base courante. Hors ce sont ces composantes qui viennent enrichir la base $T^{(k)}$ puisque l'on réalise une phase d'orthogonalisation pour passer de $\hat{T}^{(k)}$ à $T^{(k)}$.

Ainsi pour une base $T^{(k)}$ orthonormée en masse, la méthode habituelle serait de calculer la réponse statique

$$\{R_{D,j}^{(k)}\} = [\hat{K}]^{-1} \{R_{L,j}^{(k)}\}, \quad (1.25)$$

puis d'orthogonaliser,

$$R_{D,j}^{(k)} = R_{D,j}^{(k)} - [T^{(k)}] \left([T^{(k)}]^T M R_{D,j}^{(k)} \right). \quad (1.26)$$

Alors qu'une technique de préfiltrage orthogonalise le résidu en effort

$$R_{L,j}^{(k)} = R_{L,j}^{(k)} - M [T^{(k)}] \left([T^{(k)}]^T R_{L,j}^{(k)} \right), \quad (1.27)$$

puis calcule la réponse statique

$$\{R_{D,j}^{(k)}\} = [\hat{K}]^{-1} \{R_{L,j}^{(k)}\}. \quad (1.28)$$

Il a été montré en section 1.2 que pour une base contenant les premiers modes propres les deux approches sont identiques en arithmétique exacte mais la deuxième évite des erreurs d'arrondi, liées à de fortes contributions basse fréquence, en précision finie.

Pour une base contenant autre chose que des modes, les deux approches ne sont pas identiques, mais la motivation pour utiliser un filtrage du résidu en effort reste.

1.3.3 Stratégies de redémarrage

Une technique d'enrichissement pur doit converger très rapidement sous peine de conduire à des tailles de base très importantes rendant les calculs itératifs peu attractifs et posant des problèmes de perte d'orthogonalité détériorant le conditionnement numérique.

L'idée d'éliminer certains vecteurs de la base, c'est à dire de procéder à un *redémarrage*, est une solution naturelle à ce problème. Plusieurs stratégies sont possibles pour appauvrir une base $T^{(N_0)}$.

L'idée la plus simple est de conserver les solutions approchées à l'étape N_0 . Pour un calcul de valeurs propres on conservera ainsi $\left[\tilde{\phi}^{(N_0)}\right]$ correspondant aux NM premiers (les plus basse fréquence) modes propres dans l'espace engendré par $T^{(N_0)}$.

Dans le cas du calcul des modes propres, il est utile de combiner enrichissement et *redémarrage*. Puisque les vecteurs propres approchés $\left\{\tilde{\phi}_j^{(N_0)}\right\}$ pour $j > NM$ ne sont pas recherchés, il est utile d'orthogonaliser les résidus à conserver par rapport à ces modes approchés

$$\hat{R}^{(k)} = R^{(k)} - \tilde{\phi}_{NM+1\dots N_0}^{(N_0)} \left((\tilde{\phi}_{NM+1\dots N_0}^{(N_0)})^T M R_D^{(k)} \right) \quad (1.29)$$

avant de poursuivre avec la base

$$T^{(N_0+1)} = \left[\tilde{\phi}_1^{(N_0)} \dots \tilde{\phi}_{NM}^{(N_0)} \hat{R}_D^{(k)} \right], \quad (1.30)$$

qui sera essentiellement orthogonale aux modes $j > NM$. En imposant que les résidus ajoutés soient orthogonaux à des directions non intéressantes, on évite de parcourir ces directions plusieurs fois. Cette utilisation des modes éliminés pour orienter la poursuite des itérations est un des avantages importants des restarts de la méthode IRAM (voir 2.1.5).

L'extension d'une telle technique de filtrage pour d'autres problèmes que le calcul de modes propres serait une extension intéressante de ce mémoire.

Ces techniques de *redémarrage* ont été testées sur le cas de la résolution du problème de couplage fluide structure amortie (section 3.5), mais n'ont pas résolu les problèmes de convergence observés. Le développement de ces techniques constitue donc une perspective directe de cette thèse.

Chapitre 2

Problèmes aux valeurs propres

Sommaire

2.1	Solveurs aux valeurs propres réels	23
2.1.1	Méthode des puissances inverses	24
2.1.2	Méthodes de sous-espaces, généralités	25
2.1.3	Méthode d'itération sur les sous-espaces : Bathe-Wilson	26
2.1.4	Enrichissement pur : Lanczos et Arnoldi	26
2.1.5	Enrichissement avec restart : Méthode IRA	27
2.1.6	Méthode d'itération sur les résidus	28
2.2	Problèmes aux valeurs propres complexes	31
2.2.1	Formulation	31
2.2.2	Itération sur les résidus	31
2.2.3	Application numérique	32

Dans ce chapitre on traite de la résolution des problèmes aux valeurs propres, à solutions réelles ou complexes. Dans chacun des cas traités, on explicite l'algorithme d'itération sur les résidus et on le compare à des méthodes existantes. Puis des applications numériques permettent des évaluations en termes de temps de calcul et de mémoire requise.

2.1 Solveurs aux valeurs propres réels

Pour traiter des problèmes aux valeurs propres (1.1) de grande taille à matrices creuses, tels ceux étudiés en analyse modale à l'heure actuelle, on a recourt à des solveurs partiels. En effet, les solveurs complets (qui déterminent toutes les valeurs propres du problème de manière analytique), tels que le solveur QR, sont beaucoup trop coûteux pour des problèmes dépassant quelques milliers de DDLs.

Cette section présente une étude bibliographique sur les solveurs partiels, dont la finalité est de déterminer une partie seulement du spectre des solutions propres des problèmes élastiques.

On présente tout d'abord la méthode des puissances inverses qui s'applique à la détermination d'un nombre restreint de solutions propres (section 2.1.1), puis plusieurs méthodes d'itération sur les sous-espaces, destinées à déterminer plusieurs solutions propres dans le même temps ; à savoir la méthode de Bathe-Wilson (section 2.1.3), celles de Lanczos et d'Arnoldi (section 2.1.4) ainsi que la méthode IRA (Implicit Restarted Arnoldi, section 2.1.5). Enfin on situe la méthode d'itération sur les résidus par rapport à ces différentes méthodes de résolution (section 2.1.6).

On considèrera par souci de simplicité des problèmes où la matrice de raideur est inversible, c'est à dire pour lesquels on peut poser $\hat{K} = K$. Les problèmes nécessitant un *shift*, notamment les problèmes avec modes de corps rigide, peuvent être traités de la même manière en prenant $\hat{K} = K + \alpha M$.

2.1.1 Méthode des puissances inverses

Le principe fondamental de cette méthode est de résoudre le problème inverse de l'équation aux valeurs propres (1.1), à savoir

$$[K]^{-1} [M] \{\phi_j\} = \frac{1}{\omega_j^2} \{\phi_j\}, \quad (2.1)$$

en construisant une récurrence de la forme

$$\{y^{(n)}\} = [K]^{-1} [M] \{y^{(n-1)}\}. \quad (2.2)$$

Le rapport des composantes non nulles de $\frac{\{y^{(n)}\}}{\{y^{(n-1)}\}}$ converge vers l'inverse de la plus petite valeur propre de (1.1) $\frac{1}{\omega_1^2}$, cf. [33] et $\{y^{(n)}\}$ converge vers le vecteur propre correspondant ϕ_1 . En effet, le vecteur de départ $y^{(0)}$ peut être décomposé sur la base des vecteurs propres

$$y^{(0)} = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i, \quad (2.3)$$

et à l'itération p on en déduit

$$y^{(p)} = \left(\frac{1}{\omega_1^2}\right)^p \left(a_1 \phi_1 + \sum_{i=2}^N a_i \phi_i \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_i^2}\right)^p\right). \quad (2.4)$$

En notant que les valeurs propres ω_j^2 sont rangées dans l'ordre croissant, et en excluant les cas de valeurs propres multiples ou nulles, on vérifie que $y^{(p)} \rightarrow (1/\omega_1^{2p})a_1\phi_1$ quand $p \rightarrow +\infty$.

Dans la pratique, les problèmes de normalisation des itérés successifs sont évités en normalisant $y^{(p)}$ à chaque pas d'itération $\left(y^{(p)} = \frac{y^{(p)}}{\|y^{(p)}\|}\right)$. Par ailleurs, le taux de convergence de l'algorithme vers $\frac{1}{\omega_1^2}$ est en $O\left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right)$, une propriété commune à la plupart des algorithmes

itératifs de résolution de valeurs propres qui met en lumière les problèmes de convergence liés à l'existence de valeurs propres proches. Les valeurs propres successives sont alors obtenues en effectuant à chaque pas d'itération une déflation orthogonale par rapport aux vecteurs propres précédemment calculés.

Cette méthode, bien que facile à mettre en oeuvre pour le calcul d'un nombre restreint de valeurs propres, est peu appropriée à la détermination d'une partie non négligeable du spectre. Dans ce cas, les méthodes d'itération sur les sous-espaces détaillées dans la section 2.1.2 sont bien plus adaptées.

2.1.2 Méthodes de sous-espaces, généralités

Les méthodes d'itération sur les sous-espaces supposent qu'une bonne approximation de la solution de (1.1) peut être recherchée dans un sous-espace engendré par les colonnes d'une matrice rectangulaire T (comportant N lignes et $NR \ll N$ colonnes). Les vecteurs propres approchés sont alors donnés par $\{\tilde{\phi}_j\} = T\{\phi_j\}_R$ avec $\{\phi_j\}_R$ solution du problème réduit

$$[T]^T [K - \omega_{j,R}^2 M] [T] \{\phi_j\}_R = \{0\} \quad (2.5)$$

que l'on détermine par une méthode de type QR.

La précision de la solution ne dépend que du sous-espace engendré par T , comme le montre le théorème suivant (voir Lascaux et Théodor [45])

Théorème :

Soit $(\omega_j^2, \{\phi_j\})$ une solution propre de (1.1) et T une base orthonormée (i.e. t.q. $T^T M T = I$). Alors, si l'on note P l'opérateur de projection $u \rightarrow P(u) = T T^T M u$, le problème réduit (2.5) possède une solution $(\{\tilde{\phi}_j\}, \tilde{\omega}_j^2)$ t.q :

$$* |\omega_j^2 - \tilde{\omega}_j^2| \leq \beta \frac{\|(I-P)\{\phi_j\}\|_2^2}{\|P\{\phi_j\}\|_2^2}$$

$$* \sin(\{\phi_j\}, \{\tilde{\phi}_j\}) \leq \beta \frac{\|(I-P)\{\phi_j\}\|_2}{\|P\{\phi_j\}\|_2}$$

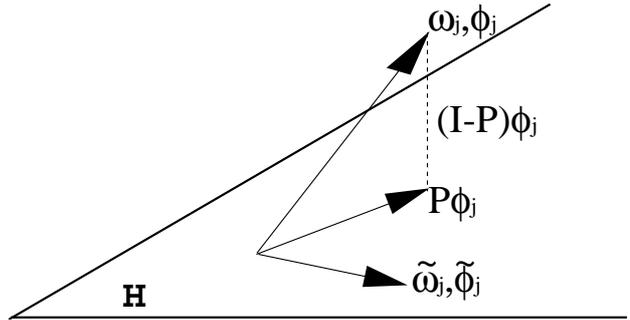


FIG. 2.1 – Illustration du théorème.

On montre de plus que, pour NR assez grand, β peut être majoré par un nombre qui ne dépend que de $K^{-1}M$ et de $\min_{\omega_i \neq \omega_j} (\omega_i^2 - \omega_j^2)$. Les différentes méthodes d'itération sur les sous-espaces consistent donc à construire un sous-espace de recherche optimal.

2.1.3 Méthode d'itération sur les sous-espaces : Bathe-Wilson

Cette méthode développée par Bathe [12] est une méthode d'itération sur les sous-espaces généralisant la méthode des puissances inverses, cf. section 2.1.1. En utilisant le principe d'itération de la méthode des puissances inverses, la méthode de Bathe construit une suite de bases $T^{(0)}, \dots, T^{(n)}$ qui engendrent respectivement les sous-espaces E^0, \dots, E^n par la récurrence

$$T^{(k+1)} = [K]^{-1} [M] T^{(k)}. \quad (2.6)$$

Ces sous-espaces sont destinés à converger vers l'espace E^∞ contenant les NM premiers vecteurs propres (ou modes) de (1.1). A chaque itération, les vecteurs de $T^{(k)}$ doivent être M-orthogonalisés, sinon toutes les colonnes de E^k finiraient par tendre vers le premier vecteur propre.

Le critère d'arrêt généralement utilisé dans cette méthode est lié à la convergence des valeurs propres, i.e. $|\omega^{2(k+1)} - \omega^{2(k)}| < Tol$. D'autre part on montre [33] que les sous-espaces successifs E^k convergent vers le sous-espace E^∞ , si tant est que le sous-espace de départ E^0 n'est orthogonal à aucun des vecteurs propres recherchés. Le taux de convergence vers chacun des modes ϕ_j est en $O\left(\frac{\omega_j^2}{\omega_{NR+1}^2}\right)$ et contrairement à la méthode des puissances inverses 2.1.1, ce taux de convergence est "global" et n'est pas affecté par la présence de modes multiples dans E^0 .

2.1.4 Enrichissement pur : Lanczos et Arnoldi

Le principe des méthodes de Lanczos [33] et d'Arnoldi [2] est de partir d'un vecteur z_1 et de considérer la séquence de Krylov

$$T^{(k)} = \left[z_1, z_2 = (K^{-1}M)z_1, z_3 = (K^{-1}M)^2 z_1, \dots, z_{k+1} = (K^{-1}M)^k z_1 \right]. \quad (2.7)$$

Les vecteurs de la séquence de Krylov sont très colinéaires et donc inexploitable à cause de problèmes de conditionnement numérique. L'algorithme de Lanczos utilise la technique d'orthogonalisation du gradient conjugué (applicable aux problèmes hermitiens) pour construire une base orthonormée en masse (section 1.3.2.1). La méthode d'Arnoldi utilise elle une orthogonalisation totale de z_k par rapport aux vecteurs de $T^{(k-1)}$ (applicable à tous problèmes aux valeurs propres). On a donc à l'étape k

$$\begin{bmatrix} K^{-1}M \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{(k)} \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{(k)} \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^{(k)} \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & R^{(k)} \\ \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

avec $H^{(k)}$ une matrice $(k \times k)$ de type Hessenberg supérieure dans le cas d'Arnoldi, tridiagonale dans le cas de Lanczos. Le résidu $R^{(k)}$ est nul sur les $k - 1$ premières composantes et s'écrit $R^{(k)} = H_{k+1,k} T_{k+1} e_k^T$. Il est intéressant de noter que la norme du résidu de l'élément de Ritz $(\tilde{\omega}_j^2, \{\tilde{\phi}_j\} = T^{(k)} \{\phi_j\}_R)$ est reliée à $R^{(k)}$ (voir [21]) par

$$\|r\|_2 = \left\| \left[K^{-1}M - \frac{1}{\tilde{\omega}_j^2} I \right] \{\tilde{\phi}_j\} \right\|_2 = |H_{k+1,k}| \left(e_k, \{\phi_j\}_R \right)_2. \quad (2.9)$$

2.1.5 Enrichissement avec restart : Méthode IRA

Cette méthode, développée par Sorensen depuis 1992 [58], est largement considérée comme la référence actuelle. Sa motivation provient du fait que les méthodes de Lanczos ou d'Arnoldi n'imposent pas de limite sur la taille de la base de réduction $T^{(k)}$. En général, l'algorithme nécessite un grand nombre d'itérations et l'orthogonalité des vecteurs entre eux devient difficile à imposer du fait de problèmes numériques. C'est pourquoi les méthodes de *redémarrage* ont rapidement été mises en oeuvre. Dans un premier temps, les stratégies de *redémarrage* étaient explicites, c'est à dire qu'après une estimation des modes propres par la méthode d'Arnoldi, ils étaient utilisés pour construire un nouveau vecteur z_1 utilisé comme point de départ d'un nouvel algorithme d'Arnoldi.

La méthode IRA suit une autre approche, plus efficace et numériquement stable, qui combine la méthode d'Arnoldi et la méthode QR avec *shift* implicite. Si l'on cherche à calculer NM solutions propres, alors l'algorithme se détaille ainsi :

-Construction d'un vecteur de départ z_1 .

-Jusqu'à convergence

1. Factorisation d'Arnoldi (2.8) pour $N = NM + NC$, avec en général $NC = NM$: $K^{-1}MT^{(N)} = T^{(N)}H^{(N)} + R^{(N)}$, à partir de z_0 la première fois puis à partir de la factorisation shiftée et tronquée à NM vecteurs par la suite.
2. Calcul des valeurs propres de $\omega_{j=1..N}^2$ de $H^{(N)}$, sélection des NC shifts $\omega_{j=NM+1..N}^2$.
3. Estimation de la qualité des modes. La solution propre $(\tilde{\omega}_j^2, \{\tilde{\phi}_j\})$ est considérée convergée si $|H_{j+1,j}|(e_j, \{\phi_j\}_R)_2 \leq \max(\epsilon \|H^{(k)}\|, Tol|\tilde{\omega}_j^2|)$: Sortie de boucle ou Restart.
4. Restart
 - 4.a Pour $j = NM + 1..N$

Q=I.
 Factorisation QR: $Q_j R_j = H^{(N)} - \omega_j^2 I$.
 $Q = Q Q_j$.
 Mise à jour de $H^{(N)}$: $H^{(N)} = Q_j^* H^{(N)} Q_j$, de $T^{(N)}$ et $R^{(N)}$.
 - Fin Pour $j = NM + 1..N$
 - 4.b Troncature de $H^{(N)}$, $T^{(N)}$ et $R^{(N)}$ à l'ordre $NM \rightarrow (H^{(NM)}, T^{(NM)}, R^{(NM)})$ contenant les NM solutions propres cibles.

-Fin Jusqu'à convergence

2.1.6 Méthode d'itération sur les résidus

On a vu en section 1.3.2 que la méthode d'itération sur les résidus consiste en la construction d'un sous-espace de recherche $E_{RI}^{(k)}$ (engendré par $T_{RI}^{(k)}$), par la loi d'itération

$$T_{RI}^{(k+1)} = \left[T_{RI}^{(k)}, \left\{ R_{D,j1}^{(k)} \right\}, \left\{ R_{D,j2}^{(k)} \right\}, \dots, \left\{ R_{D,jn}^{(k)} \right\} \right], \quad (2.10)$$

avec $j1, j2, \dots, jn$ t.q. $\epsilon_{j1}^{(k)}, \epsilon_{j2}^{(k)}, \dots, \epsilon_{jn}^{(k)} > Tol$ et

$$R_{D,j}^{(k)} = \hat{K}^{-1} [K - \omega_j^2 M] T_{RI}^{(k)} \{ \phi_{j,R} \}. \quad (2.11)$$

Ainsi,

$$T_{RI}^{(k+1)} = \left[T_{RI}^{(k)}, \hat{K}^{-1} [K - \omega_{j1}^2 M] T_{RI}^{(k)} \{ \phi_{j1,R} \}, \dots, \hat{K}^{-1} [K - \omega_{jn}^2 M] T_{RI}^{(k)} \{ \phi_{jn,R} \} \right]. \quad (2.12)$$

Or $T_{RI}^{(k)} \{ \phi_{j,R} \} \in \text{Vect}(T_{RI}^{(k)})$. De ce fait, on peut dire que

$$E_{RI}^{(k+1)} \in \text{vect} \left(\left[T_{RI}^{(k)}, \hat{K}^{-1} [K - \omega_j^2 M] T_{RI}^{(k)} \right] \right), \quad (2.13)$$

ou encore, en supposant que $\hat{K} = K$,

$$E_{RI}^{(k+1)} \in \text{vect} \left(\left[T_{RI}^{(k)}, \hat{K}^{-1} [M] T_{RI}^{(k)} \right] \right). \quad (2.14)$$

On voit alors la similarité avec la méthode de Bathe-Wilson, où $T_{B-W}^{(k+1)} = K^{-1} M T_{B-W}^{(k)}$, mais aussi avec la méthode d'Arnoldi (ou Lanczos) où $T_{Arn}^{(k+1)} = \left[T_{Arn}^{(k)}, (K^{-1} M)^{k+1} z_0 \right]$.

La méthode d'itération sur les résidus est en réalité à mi-chemin des méthodes de Bathe-Wilson et d'Arnoldi. On peut noter sur la figure 2.2 que la taille NR des sous-espaces successifs E^k engendrés par la méthode de Bathe-Wilson n'augmente pas mais reste constante, alors que dans la méthode d'Arnoldi (ou Lanczos) la taille augmente à chaque itération.

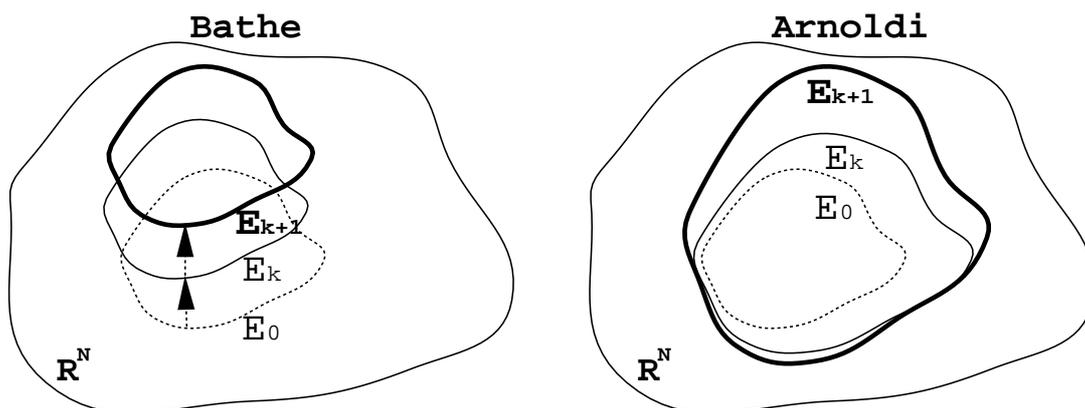


FIG. 2.2 – Enrichissement des sous-espaces. **a** : Itération de Bathe, **b** : Itération d'Arnoldi (ou Lanczos).

La méthode d'itération sur les résidus engendre des sous-espaces dont la taille augmente (le sous-espace $T_{RI}^{(k+1)}$ contient $T_{RI}^{(k)}$), comme dans Arnoldi ; mais d'autre part $T_{RI}^{(k)}$ est utilisé de manière similaire à la méthode de Bathe-Wilson pour calculer le terme d'enrichissement $K^{-1} [M] T_{RI}^{(k)}$.

Au-delà des ressemblances, la méthode d'itération sur les résidus diffère de ces méthodes sur plusieurs points

- * Le critère de convergence employé. La méthode d'itération sur les résidus possède un indicateur d'erreur physique (erreur en énergie).
- * La base de départ. La méthode d'itération sur les résidus démarre toujours d'une estimation de la solution.
- * La gestion de l'enrichissement. Celui-ci est basé sur un critère physique pour la méthode d'itération sur les résidus.

En effet, le critère (1.6) est physique, contrairement aux critères basés sur une norme quadratique du résidu (utilisés par Arnoldi, IRAM, etc.) ou sur la convergence des valeurs propres (Bathe-Wilson). Cet indicateur d'arrêt permet ainsi de donner une marge d'erreur sur la quantité calculée. Par exemple, si l'on fixe une tolérance $Tol = 10^{-6}$ pour (1.6), on peut dire que les modes ainsi calculés sont précis à 10^{-3} en termes d'erreur relative en énergie de déformation.

En ce qui concerne les bases de départ, la méthode d'itération sur les résidus se démarque clairement des autres. Toutes les méthodes décrites dans ce chapitre partent d'un vecteur généré par un processus aléatoire (Arnoldi, Lanczos, IRAM) ou d'une famille de vecteurs aléatoires (Bathe-Wilson). La méthode d'itération sur les résidus procède elle tout autrement, son domaine d'application n'étant pas exactement le même. En effet les méthodes décrites ici ont pour but de calculer les modes propres d'une structure élastique sans posséder aucune information sur celle-ci. La méthode d'itération sur les résidus démarre toujours, elle, d'une *estimation de la solution*.

Ainsi, dans le cas du calcul de modes, cette méthode est employée lorsque l'on étudie une structure sur un intervalle paramétrique. Partant d'une structure nominale ($p = p_0$), dont on connaît les modes propres (calculés par la méthode IRAM par exemple), on peut être amené à calculer les modes propres après avoir introduit une modification (par exemple une modification du module d'Young d'un groupe d'éléments, $p = p_1$). On utilise alors la méthode d'itération sur les résidus en partant de la base contenant les modes nominaux $T^{(0)} = [\phi(p_0)]$. Le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence est alors généralement très faible. Pour d'autres applications, par exemple le calcul des modes d'une structure couplée avec un fluide, la base de départ choisie pourra par exemple contenir les modes propres de la structure non couplée et ceux du fluide non couplé.

La procédure d'enrichissement de la méthode d'itération sur les résidus est, contrairement aux autres méthodes, directement basée sur le critère (1.6). Ainsi, seuls sont ajoutés à la base de réduction les résidus pour lesquels l'énergie associée est trop élevée. De ce fait la taille des bases ainsi générées reste raisonnable, ce qui accélère l'algorithme et diminue l'occurrence de problèmes de conditionnement (perte d'orthogonalité, ...).

De la même manière que dans l'algorithme IRAM, cf. section 2.1.2, on peut procéder dans la méthode d'itération sur les résidus à des *redémarrages* (section 1.3.3) lorsque des problèmes de conditionnement ou de taille excessive de la base apparaissent. Cependant les techniques de *redémarrages* testées au cours de cette thèse ne résolvent pas forcément tous les problèmes de convergence, comme le montre l'application de la section 3.5. Le développement de ce point particulier constitue donc une des perspectives de ce travail.

La recherche concernant les méthodes de calcul des modes d'une structure élastique étant particulièrement aboutie on ne cherche pas à rivaliser avec les méthodes présentées, notamment la méthode de Sorensen qui n'a plus à faire les preuves de sa supériorité. Cette section a simplement permis de situer la méthode développée par rapport aux méthodes existantes. Les sections et chapitres suivants vont maintenant chercher à présenter les nombreuses autres applications de la méthode. En effet le champ d'application de la méthode d'itération sur les résidus est bien plus étendu que celui des méthodes présentées ci-avant. Elle s'applique ainsi à de nombreux problèmes rencontrés en analyse modale (problèmes aux valeurs propres à un ou plusieurs champs, réels ou complexes, résolution de l'expansion par minimisation du résidu dynamique ou encore calcul de sensibilité de vecteurs propres).

La section suivante détaille l'application de la méthode aux problèmes aux valeurs propres complexes, les chapitres 3 et 4 s'attachant à exposer respectivement l'application de la méthode à divers problèmes multichamps et au calcul des sensibilités de vecteurs propres. Pour chaque application, on compare les performances de la méthode d'itération sur les résidus avec celles des méthodes existantes.

2.2 Problèmes aux valeurs propres complexes

L'aspect général de la méthode d'itération sur les résidus permet son application aux problèmes aux valeurs propres complexes, dont fait partie le calcul des modes de structures avec amortissement. Cette section traite du cas de l'amortissement constant (non dépendant de la fréquence), les amortissements dépendant de la fréquence étant détaillés en section 3.1.2 dans le cas particulier de la viscoélasticité linéaire (multichamps).

2.2.1 Formulation

Si l'on considère une structure avec amortissement constant, la raideur dynamique de cette structure s'écrit

$$Z(s) = Ms^2 + K + iB, \quad (2.15)$$

avec M la matrice de masse, K la matrice de raideur réelle, B la matrice de raideur complexe et $s = i\omega$ dénotant la variable de Laplace.

Le problème aux valeurs propres

$$Z(s_j)\psi_j = [Ms_j^2 + K + iB]\psi_j = 0 \quad (2.16)$$

est alors complexe. Le reste de cette section montre comment la technique d'itération sur les résidus se formule facilement pour ce type de problèmes et présente des performances numériques très intéressantes dans l'application considérée (amortissement hystérétique).

2.2.2 Itération sur les résidus

La méthode d'itération sur les résidus appliquée à la résolution de problèmes aux valeurs propres complexes procède, comme montré en [19] et [10], de la même manière que pour les problèmes réels (chapitre 1). On commence tout d'abord par calculer les résidus en effort associés aux modes complexes estimés dans $T^{(k)}$ par résolution de la version réduite du problème (2.16).

$$R_{L,j}^{(k)} = [Ms_{j,R}^2 + K + iB] T^{(k)} \{\psi_{j,R}\}, \quad (2.17)$$

qui sont non nuls et complexes.

Pour le calcul du résidu en déplacement on conserve les opérateurs réels discutés en section 1.2, c'est à dire que l'on considère $\hat{K} = K + \alpha M$, ce qui est un avantage important par rapport à des solveurs classiques qui utilisent au mieux une factorisation de la matrice complexe $Z(0) + \alpha M = K + iB + \alpha M$ [43].

Le résidu en déplacement $R_{D,j}^{(k)} = [\hat{K}]^{-1} \{R_{L,j}^{(k)}\}$ est complexe mais il peut être intéressant, pour des raisons de performances, d'utiliser une base réelle. On peut pour ce faire utiliser une décomposition en valeurs singulières du sous espace engendré par les parties réelles et imaginaires, c'est à dire résoudre

$$\| \{ R_{D,j}^{(k)} \} \| = \max_u \frac{\| [\Re \{ R_{D,j}^{(k)} \}, \Im \{ R_{D,j}^{(k)} \}] \{ u \} \|_K}{\| \{ u \} \|_2}, \quad (2.18)$$

qui donne une norme pour $R_{D,j}^{(k)}$ et une direction principale associée au vecteur $\{\tilde{u}\}$ pour lequel le maximum est atteint. La direction principale donnée par $\tilde{R}_{D,j}^{(k)} = \left[\Re\{R_{D,j}^{(k)}\}, \Im\{R_{D,j}^{(k)}\} \right] \{\tilde{u}\}$ est conservée pour l'enrichissement, si la norme associée (2.18) est jugée trop importante.

Pour lancer l'algorithme, l'idée classique est de retenir la base composée des NM premiers modes réels non amortis ϕ_j solutions de (1.1). Comme on le verra dans la section suivante, cette base donne souvent des résultats peu précis et on la complète donc par la réponse statique des modes flexibles à la partie imaginaire de la raideur [53]

$$T^{(0)} = \left[\phi_{1..NM}, \hat{K}^{-1} B \phi_{N_{CR}+1..NM} \right]. \quad (2.19)$$

2.2.3 Application numérique

Cas test

La méthode de calcul de modes complexes a été testée [19], [10] sur le modèle de bac à huile PSA Peugeot Citroën exposé en figure 2.3, qui présente un amortissement hystérétique.

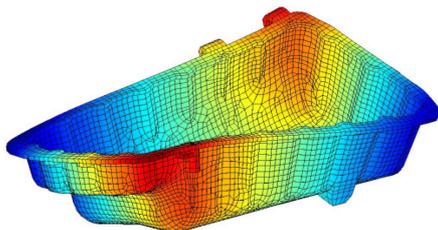


FIG. 2.3 – Modèle de bac à huile PSA Peugeot Citroën [19], [10].

Ce modèle est formé d'un matériau tricouche, composé d'une couche de viscoélastique (suffixe v , éléments volumiques) comprimée entre deux couches d'acier (suffixe e , éléments coques). Il possède 14227 éléments et 12931 noeuds (57457 DDLs). Le maillage de départ provient d'I-DEAS et les éléments additionnels utilisés pour modéliser la couche viscoélastique sont générés avec la *Structural Dynamics Toolbox* [9].

On considère que les deux matériaux e et v sont caractérisés par un amortissement hystérétique. Ainsi le problème aux valeurs propres s'écrit

$$Z(s_j)\psi_j = [Ms_j^2 + (1 + i\eta_e)K_e + (1 + i\eta_v)K_v] \psi_j = 0, \quad (2.20)$$

avec M la matrice de masse de la structure totale, K_e et K_v les matrices de raideur réelles des sous-structures e et v respectivement. $s = i\omega$ dénote la variable de Laplace et η_e, η_v dénotent les facteurs de perte des parties e et v respectivement.

Convergence

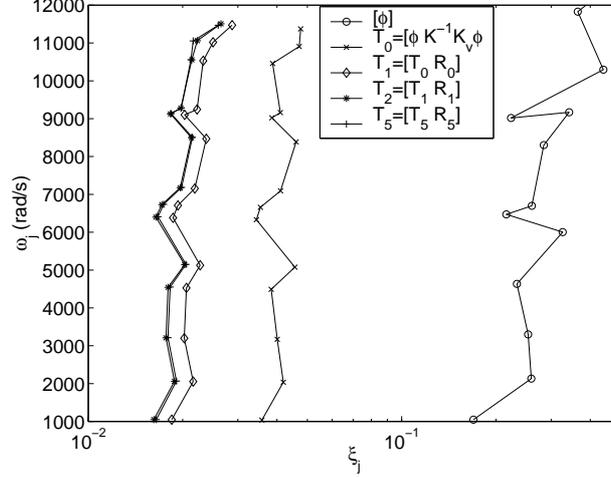


FIG. 2.4 – Convergence des pôles complexes pour $\eta_{acier} = 1\%$ et $\eta_{visco} = 1000\%$ (valeur excessive pour illustrer les besoins de l'enrichissement).

La figure 2.4 présente un exemple de convergence de la méthode itérative présentée ci-dessus. L'étude est réalisée sur les 20 premiers modes en introduisant un facteur de perte ($\eta_{acier} = 1\%$) dans l'acier et ($\eta_{visco} = 1000\%$) dans la couche de matériau viscoélastique. Le facteur de perte dans la couche de viscoélastique est excessif afin d'illustrer les besoins d'enrichir les bases de réduction. On trace alors les fréquences de résonance ($\omega_j = |s_j|$) en fonction de l'amortissement modal ($\xi_j = -\Re(s_j)/|s_j|$). Dans le cas présent le viscoélastique est peu efficace car les couches d'acier emmagasinent beaucoup plus d'énergie que la couche de viscoélastique, on s'attend donc à ce que l'amortissement modal soit principalement dû à l'acier. Dans ce cas (proche de celui d'un matériau unique uniforme), on aurait $\xi_j = 2\eta$ et on s'attend donc à ce que $\xi_j \approx 2\%$.

Les résultats obtenus pour différentes bases de réduction sont présentés sur la même figure. Tout d'abord, on a indiqué les résultats obtenus en recherchant la solution sur une base composée des modes réels non amortis $T = \phi_{1..20}$ solutions de (1.1). Cette base, bien que donnant généralement des résultats convenables, montre ici ses limites en surestimant grandement l'amortissement modal. L'ajout à cette base des réponses statiques aux efforts dans le viscoélastique, cf.(2.19) ($\hat{K}^{-1}K_v\phi_{7..20}$ pour les modes flexibles), c'est à dire $T^{(0)} = [\phi_{1..20}, \hat{K}^{-1}K_v\phi_{7..20}]$ améliore les résultats, mais l'amortissement modal reste surestimé. Enfin, en appliquant la méthode d'itération sur les résidus à partir de $T^{(0)}$, on voit qu'en deux itérations, on obtient la bonne valeur d'amortissement modal.

étude de temps de calcul

Le tableau 2.1 résume les résultats d'une comparaison des temps de calcul entre NASTRAN [49] version 70.7 et une implémentation de la méthode dans la SDT [9] version 4.1. Les matrices élémentaires sont importées de NASTRAN dans la SDT, de manière à pouvoir comparer simplement les résultats.

TAB. 2.1 – Temps CPU de quelques étapes clés, en secondes. Résolution de (1.1) et (2.20) (Bac à Huile, 57457 DDLs, N.A : Non Applicable)

	NASTRAN	SDT
Assemblage du modèle	41	N.A.
Factorisation de K	50	90
Substitutions inverses	5.2	2.7
20 modes normaux (1.1)	273	252
20 modes cpx.	1420-1447	286-332
Hystérétique (2.20) (Total)	$Tol' = 10^{-5}$	$Tol = 10^{-5}$

Le tableau 2.1 montre que la méthode proposée accélère le calcul par rapport à la méthode utilisée par NASTRAN. Tout d'abord, on compare les temps de calcul associés aux étapes élémentaires : factorisation de la raideur réelle, substitutions directes/inverses (calcul statique) et calcul des modes réels (1.1) (par un algorithme de Lanczos).

Les deux codes utilisent des routines de factorisation sparse multifrontales et la différence des temps de factorisation est donc attribuée à l'utilisation d'arbres de factorisation différents. La SDT passe plus de temps à optimiser la factorisation, ce qui entraîne des substitutions plus rapides. De ce fait, les temps de résolution de (1.1) sont similaires pour NASTRAN ou la SDT.

Pour résoudre le problème aux valeurs propres complexes (2.16), NASTRAN utilise un algorithme de Lanczos complexe [43], alors que la méthode d'itération sur les résidus est utilisée dans la SDT (en partant de la base $T^0 = [\phi_{1..20}]$). La tolérance est fixée à $Tol = 10^{-5}$ pour la méthode d'itération sur les résidus, NASTRAN utilisant une tolérance $Tol' = 10^{-5}$ dont la signification n'est pas clairement définie.

Le temps total relatif à NASTRAN inclut la factorisation de la matrice complexe et la résolution itérative, alors que pour la SDT, il inclut la factorisation de la matrice réelle, le calcul des modes réels associés à (1.1), ainsi que l'enrichissement itératif pour satisfaire (2.20).

Pour des facteurs de perte variant entre $\eta_{acier} = 1\%$ à 5% et $\eta_{visco} = 5$ à 30% pour l'acier et le viscoélastique respectivement, l'accélération est significative (de 4.3 à 5). On peut noter que plus l'amortissement est important, plus la méthode d'itération sur les résidus est coûteuse, tout en restant supérieure au Lanczos complexe. Ceci est un résultat attendu car pour des facteurs de perte faibles, une base de modes réels donne généralement une bonne approximation des modes complexes.

Chapitre 3

Problèmes multichamps

Sommaire

3.1	Formulations	36
3.1.1	Couplage fluide-structure	36
3.1.2	Amortissement viscoélastique	37
3.1.3	Couplage fluide-structure amortie	39
3.1.4	Expansion MDRE	40
3.2	Itérations sur sous-espaces multiples	40
3.2.1	Itération sur les résidus	40
3.2.2	Bases de départ	44
3.3	Application couplage fluide structure	46
3.4	Application amortissement viscoélastique	48
3.5	Application couplage fluide structure amortie	50
3.6	Application MDRE	52

La méthode d'itération sur les résidus s'applique aussi tout particulièrement aux problèmes à plusieurs champs, rencontrés notamment en couplage fluide-structure ou lorsque l'on ramène un problème aux valeurs propres d'ordre supérieur à 1 à un problème aux valeurs propres d'ordre 1. On va voir dans cette section des applications de cette méthode à des calculs élasto-acoustiques [19], aux calculs de structures viscoélastiques [19] [10], à la résolution de couplages fluide-structure amortie [19], ainsi qu'à la résolution de la MDRE [17] [15] [18].

Dans la section 3.1 on formule les différents problèmes multichamps qui ont été considérés, puis on expose leurs résolutions par la méthode d'itération sur les résidus en section 3.2 et enfin les applications réalisées sont détaillées dans les sections 3.3 à 3.6.

3.1 Formulations

3.1.1 Couplage fluide-structure

On considère ici le problème du couplage élasto-acoustique relatif à une structure élastique contenant un fluide compressible non pesant, avec ou sans surface libre, comme indiqué en figure 3.1.

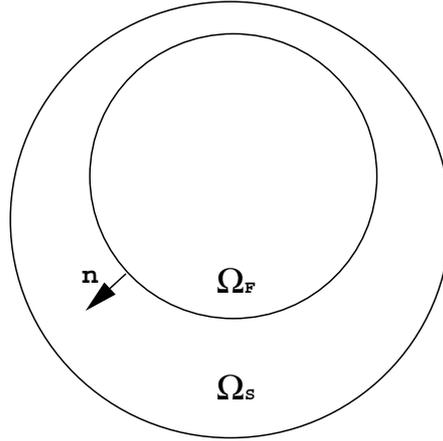


FIG. 3.1 – Schéma d'interaction fluide-structure.

Ce type de problème résulte, comme cela est détaillé en référence [47], en un problème aux valeurs propres réel à matrices non symétriques

$$\left[\begin{bmatrix} K & -C \\ 0 & F \end{bmatrix} + s^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ C^T & K_p \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} q \\ p \end{Bmatrix} = [Z_{str-fl}] \begin{Bmatrix} q \\ p \end{Bmatrix} = 0, \quad (3.1)$$

avec q les déplacements généralisés de la structure, p les variations de pression dans le fluide et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_S} \sigma_{ij}(u) \epsilon_{ij}(\delta u) dx &\Rightarrow \delta q^T K q \\ \int_{\Omega_S} \rho_S u \cdot \delta u dx &\Rightarrow \delta q^T M q \\ \frac{1}{\rho_F} \int_{\Omega_F} \nabla p \nabla \delta p dx &\Rightarrow \delta p^T F p \\ \frac{1}{\rho_F c^2} \int_{\Omega_F} p \delta p dx &\Rightarrow \delta p^T K_p p \\ \int_{\Sigma} p \delta u \cdot n dx &\Rightarrow \delta q^T C p. \end{aligned}$$

Les termes propres au solide (K et M) et au fluide (F et K_p) sont calculés de manière classique sur les maillages respectifs. Le calcul du terme de couplage C a été réalisé dans la SDT, sur des éléments de couplage à un point d'intégration situé au centre de gravité de l'élément. Lorsque les maillages de la structure et du fluide ne sont pas compatibles, il est nécessaire de procéder à un appariement. Pour chaque élément de fluide F_i (figure 3.2), on cherche alors l'élément solide S_i qui fait face au centre de gravité $G_{f,i}$, dans la direction de la normal à F_i . La projection de $G_{f,i}$ sur l'élément solide, P_i , appartient à S_i ; ce qui

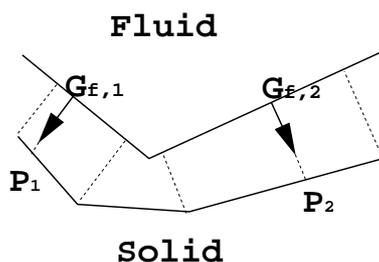


 FIG. 3.2 – Maillages incompatibles.

permet de calculer les coordonnées de référence r et s de P_i dans S_i (si S_i est un quad4, alors $-1 < r < 1$ et $-1 < s < 1$). Ainsi on détermine les poids qui doivent être associés à chaque noeud de S_i . Le terme de couplage associe ainsi les DDLs de F_i aux DDLs de S_i , avec les poids correspondants.

3.1.2 Amortissement viscoélastique

On a traité en section 2.2 du cas de l'amortissement hystérétique, qui est l'un des modèles les plus courants d'amortissement. Ici, on s'intéresse à la viscoélasticité linéaire, modèle dans lequel la contrainte est reliée à l'histoire des déformations à travers un produit de convolution avec une fonction de relaxation $h(t)$ (voir [56])

$$\sigma(t) = \int_0^{+\infty} \varepsilon(t - \tau) h(\tau, T, \sigma_0) d\tau. \quad (3.2)$$

Dans le domaine de Laplace, ceci équivaut à une loi de comportement où le matériau est caractérisé par un *Module Complexe* E (transformée de la fonction de relaxation), c'est à dire

$$\sigma(s) = E(s, T, \sigma_0) \varepsilon(s) = (E' + iE'') \varepsilon(s). \quad (3.3)$$

On peut donc considérer, dans le domaine fréquentiel, la viscoélasticité comme étant un cas particulier de l'élasticité avec un module d'Young complexe dépendant de la fréquence, de la température, des précontraintes ou d'autres facteurs d'environnement.

Expérimentalement, ce module complexe est déterminé par des essais dynamiques où l'on recherche en premier lieu sa dépendance à la fréquence [41]. Ceci nous permet alors de construire un modèle pour cette dépendance. Plusieurs approches sont possibles :

- $E(i\omega)$ est interpolé à partir d'abaques.
- $E(s)$ est représenté par une fraction rationnelle

$$E(s) = E_0 \frac{1 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_{nn} s^{nn}}{1 + \beta_1 s + \dots + \beta_{nd} s^{nd}}. \quad (3.4)$$

- $E(s)$ est représenté par d'autres formes analytiques, en particulier les dérivées fractionnaires [4].

Ces trois approches permettent de représenter correctement le comportement du matériau. Elles sont donc toutes valides et c'est la capacité à implémenter ces lois de comportement dans les solveurs EF qui rendra l'une ou l'autre de ces méthodes plus avantageuse.

La dépendance aux facteurs d'environnement (température, précontraintes) doit être *a priori* arbitraire, mais en pratique on considère qu'ils agissent seulement comme un décalage sur la fréquence [49]. On cherche donc lors des tests à caractériser une courbe maîtresse $E_m(s)$ et une fonction de décalage $\alpha(T, \sigma_0)$, c'est à dire que l'on cherche à décrire le module par

$$E(s, T, \sigma_0) = E_m(\alpha(T, \sigma_0)s). \quad (3.5)$$

Etant donné que l'énergie de déformation dépend linéairement de $E(s, T, \sigma_0)$, on peut représenter la raideur dynamique comme une combinaison linéaire de matrices constantes. Le problème aux valeurs propres s'écrit alors simplement

$$[Z(E_i, s)] \{q\} = \left[Ms^2 + K_e + \sum_i E_i(s, T, \sigma_0) \frac{K_{v,i}(E_0)}{E_0} \right] \{q\} = 0. \quad (3.6)$$

Un cas particulier pour la résolution de problèmes aux valeurs propres est le cas où E_i est représenté comme une fraction rationnelle. En effet, une fraction rationnelle (3.4), avec $nd > nn$ et tous ses pôles distincts, peut être décomposée en une somme de fractions rationnelles du premier ordre

$$E(s) = E_\infty - \left(\sum_{j=1}^n \frac{E_j}{s + \omega_j} \right). \quad (3.7)$$

Dans ce cas on utilise une transformation canonique de (3.6) en un problème linéaire d'ordre supérieur, par l'introduction d'un champ de relaxation interne $q_{vj} = -\frac{E_j}{(s+\omega_j)}q$ et du champ vitesse sq . Si l'on considère que $E(s)$ peut être approché avec un seul q_{vj} , même s'il est généralement nécessaire d'utiliser au moins 5 pôles dans (3.7) pour avoir une représentation précise de la loi de comportement observée expérimentalement, alors (3.6) peut s'écrire

$$\left[\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 & -M & 0 \\ K_e + E_\infty K_v & 0 & K_v \\ E_j M & 0 & \omega_j M \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} q \\ sq \\ q_v \end{Bmatrix} = 0. \quad (3.8)$$

En effet, la deuxième ligne de (3.8) donne la relation (3.6), la première ligne donne la relation entre le champs principal q et le champ vitesse sq : $sMq = Msq$ et la dernière ligne donne la relation entre q et le champ de relaxation interne q_v : $M(s + \omega_j)q_{vj} = -E_jMq$. On remarque que les relations entre les champs sont écrites de manière à avoir une matrice de masse diagonale par blocs, ce qui permet certaines simplifications lors de l'implémentation.

Le problème (3.8) est particulièrement coûteux à résoudre. En effet, on obtient bien un problème linéaire, mais le prix à payer est que la taille de ce problème a été multipliée par trois, ce qui représente dans le cas du bac à huile (figure 2.3) des matrices de taille 172371.

De plus, la matrice de raideur n'est ni bande ni symétrique. C'est pourquoi l'application à ce type de problème de la méthode d'itération sur les résidus est particulièrement intéressante, comme le montre l'application de la section 3.4.

On peut noter que le calcul des modes propres d'une structure avec amortissement visqueux,

$$Z(s)q = [Ms^2 + Cs + K]q = 0, \quad (3.9)$$

est résolu d'une manière similaire, en réalisant une transformation canonique nécessitant l'introduction du champ vitesse sq .

3.1.3 Couplage fluide-structure amortie

On considère maintenant le cas d'une structure amortie couplée avec un fluide. Si l'amortissement est de type hystérétique, il suffit alors de remplacer dans (3.1) la raideur de la structure par la raideur complexe de (2.20) et d'appliquer la méthode d'itération sur les résidus comme dans le cas du couplage fluide-structure non amortie (section 3.1.1). Dans ce cas cependant, les solutions sont complexes. On applique donc la méthode basée sur la décomposition en valeurs singulières présentée dans le cas de l'amortissement hystérétique (section 2.2.2) pour obtenir des résidus réels. Ainsi, on garde le caractère réel de la base de réduction. De même, l'ajout d'amortissement hystérétique dans le fluide ne demande pas de développements supplémentaires.

Dans cette section, on détaille le cas du couplage fluide-structure avec amortissement viscoélastique. Le problème à résoudre peut être déduit de celui du couplage sans amortissement (3.1), en remplaçant les matrices relatives à la structure par les matrices de (3.8). On obtient alors le système suivant, qui couple les cinq champs : déplacement q , vitesse sq , champ de relaxation q_v , fluctuation de pression p et dérivée temporelle de la fluctuation de pression sp par

$$\left[\begin{array}{ccccc} M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_p & 0 \\ 0 & C^T & 0 & 0 & K_p \end{array} \right] s + \left[\begin{array}{ccccc} 0 & -M & 0 & 0 & 0 \\ K_e + E_\infty K_v & 0 & K_v & -C & 0 \\ \alpha M & 0 & \omega_j M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K_p \\ 0 & 0 & 0 & F & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} q \\ sq \\ q_v \\ p \\ sp \end{array} \right\} = 0. \quad (3.10)$$

Ce problème aux valeurs propres est donc non symétrique et les matrices ne sont pas bandes. La taille du système est alors $2N_{DDLs, str} + 2N_{DDLs, fl} + n_{rel}N_{DDLs, str}$, où $N_{DDLs, str}$ est le nombre de DDLs de la structure, $N_{DDLs, fl}$ est le nombre de DDLs du fluide et n_{rel} est le nombre de champs de relaxation utilisés (ici $n_{rel} = 1$). On voit donc que la taille du problème peut très vite devenir rédhibitoire, les techniques classiques ne permettant pas sa résolution en des temps raisonnables. La technique d'itération sur les résidus permet elle une résolution peu coûteuse, comme le montre l'application de la section 3.5.

3.1.4 Expansion MDRE

L'expansion par minimisation du résidu dynamique (ou MDRE), dont on abordera l'utilité pour le recalage en section 5.2.2, peut elle aussi être résolue par la méthode d'itération sur les résidus [17] [15] [18]. En effet, l'expansion MDRE peut être formulée (section 5.2.3) comme un problème statique à deux champs $R_{D,j}$ et $\phi_{exp,j}$, qui s'écrit

$$\begin{bmatrix} -K & Z_j \\ Z_j & \gamma_j c^T Q_j c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{D,j} \\ \phi_{exp,j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma_j c^T Q_j y_{Test,j} \end{Bmatrix}. \quad (3.11)$$

La résolution de ce problème est particulièrement coûteuse si on la réalise de manière directe car la matrice concernée est non symétrique et non bande, mais l'application de la méthode d'itération sur les résidus à ce problème est relativement directe comme montré en section 3.2.

3.2 Itérations sur sous-espaces multiples

On a vu en section 3.1 que de nombreux problèmes rencontrés couplent plusieurs champs. Pour résoudre ce type de problèmes par des méthodes d'itérations sur les sous-espaces, on peut construire un seul sous-espace pour approcher les différents champs ou bien construire des sous-espaces adaptés à chacun des champs rencontrés, ce qui se révèle bien moins coûteux.

Les sections suivantes vont détailler, pour chacun des problèmes décrits précédemment, les adaptations de la méthode d'itération sur les résidus utilisées. On détaille notamment les différentes procédures d'enrichissement en section 3.2.1 et les bases de départ utilisées en section 3.2.2.

3.2.1 Itération sur les résidus

Cette section expose, pour les différents problèmes présentés, la procédure d'enrichissement des sous-espaces.

3.2.1.1 Couplage fluide structure

Le cas du couplage fluide structure conduit à la résolution d'un problème aux valeurs propres couplant le champ déplacement q au champ fluctuation de pression p . Ces deux champs, de natures différentes, sont recherchés dans des sous-espaces distincts. Ainsi au pas d'itération k , q et p sont recherchés dans les sous-espaces $T_q^{(k)}$ et $T_p^{(k)}$ respectivement.

Le problème (3.1) libre projeté s'écrit alors

$$\begin{bmatrix} T_q^{(k)T} K T_q^{(k)} & -T_q^{(k)T} C T_p^{(k)} \\ 0 & T_p^{(k)T} F T_p^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{j,R} \\ p_{j,R} \end{Bmatrix} - \omega_{j,R}^2 \begin{bmatrix} T_q^{(k)T} M T_q^{(k)} & 0 \\ T_p^{(k)T} C^T T_q^{(k)} & T_p^{(k)T} K_p T_p^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{j,R} \\ p_{j,R} \end{Bmatrix} = 0. \quad (3.12)$$

Les résidus en effort sont alors définis par le fait que les solutions approchées $\tilde{q}_j = T_q^{(k)} q_{j,R}$ et $\tilde{p}_j = T_p^{(k)} p_{j,R}$ ne satisfont pas les équations d'équilibre. Ainsi, on définit un résidu en effort pour le champ déplacement

$$\left\{ R_{L,q,j}^{(k)} \right\} = K \tilde{q}_j - C \tilde{p}_j - \omega_{j,R}^2 M \tilde{q}_j \quad (3.13)$$

et un résidu en effort pour le champ fluctuation de pression

$$\left\{ R_{L,p,j}^{(k)} \right\} = F \tilde{p}_j - \omega_{j,R}^2 C \tilde{q}_j - \omega_{j,R}^2 K_p \tilde{p}_j. \quad (3.14)$$

Les "résidus en déplacement" sont alors obtenus en utilisant des opérateurs associés à chacun des champs.

Pour le champ q , on utilise classiquement l'opérateur raideur de la structure, éventuellement shifté en masse, $\hat{K}_{str} = K + \alpha_{str} M$ décrit en section 1.2. De manière équivalente, on prendra pour le champ p $\hat{K}_{fl} = F + \alpha_{fl} K_p$.

A ce stade, on peut noter l'intérêt de travailler sur des champs séparés. En effet les algorithmes génériques de calcul de valeurs propres, appliqués à (3.1), nécessiteraient la factorisation de

$$\left[\begin{bmatrix} K & -C \\ 0 & F \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} M & 0 \\ C^T & K_p \end{bmatrix} \right], \quad (3.15)$$

alors que la méthode proposée utilise des opérateurs associés à chacun des champs et ne nécessite que la factorisation de blocs. Ceci réduit considérablement les temps de calcul, comme on le verra dans les applications.

Les résidus en déplacement, pour les champs déplacement et fluctuation de pression respectivement, sont alors simplement obtenus par

$$\left\{ R_{D,q,j}^{(k)} \right\} = \left[\hat{K}_{str} \right]^{-1} \left\{ R_{L,q,j}^{(k)} \right\} \quad (3.16)$$

et

$$\left\{ R_{D,p,j}^{(k)} \right\} = \left[\hat{K}_{fl} \right]^{-1} \left\{ R_{L,p,j}^{(k)} \right\}. \quad (3.17)$$

Les deux sous-espaces de recherche, $T_q^{(k)}$ et $T_p^{(k)}$, sont complétés indépendamment. Ainsi, on évalue l'erreur sur le champ déplacement et on enrichit la base correspondante

$$\epsilon_{q,j}^{(k)} = \frac{\| \left\{ R_{D,q,j}^{(k)} \right\} \|_K^2}{\| T_q^{(k)} \{ q_{j,R} \} \|_K^2} > Tol \Rightarrow T_q^{(k+1)} = \left[T_q^{(k)}, \left\{ R_{D,q,j}^{(k)} \right\} \right],$$

et de même pour le champ fluctuation de pression

$$\epsilon_{p,j}^{(k)} = \frac{\| \left\{ R_{D,p,j}^{(k)} \right\} \|_F^2}{\| T_p^{(k)} \{ p_{j,R} \} \|_F^2} > Tol \Rightarrow T_p^{(k+1)} = \left[T_p^{(k)}, \left\{ R_{D,p,j}^{(k)} \right\} \right].$$

3.2.1.2 Amortissement viscoélastique

Le cas de l'amortissement viscoélastique, modélisé par l'équation (3.8), couple les déplacements q , vitesses sq et champ de relaxation $q_v = -\frac{E_j}{(s+\omega_j)}q$. Ces trois champs dépendent tous linéairement des déplacements q et on les cherche donc dans un même sous-espace $T_q^{(k)}$ contenant des déplacements.

$T_q^{(k)}$ est enrichie à partir de résidus définis par la non vérification de la solution approchée à l'équation de départ (deuxième ligne de (3.8)). Ainsi, on pose

$$\left\{ R_{L,j}^{(k)} \right\} = Ms^2 T_q^{(k)} q_{j,R} + [K_e + E_\infty K_v] T_q^{(k)} q_{j,R} + K_v T_q^{(k)} q_{v,j,R} \neq 0. \quad (3.18)$$

De la même manière que pour le couplage fluide structure, le préconditionneur nécessaire pour obtenir des résidus en déplacement ne concerne qu'une partie de la matrice de raideur totale, à savoir

$$\left[\hat{K} \right]^{-1} = [K_e + E_\infty K_v + \alpha M]^{-1}. \quad (3.19)$$

Une fois encore, le fait de n'avoir à factoriser qu'une matrice de taille $N_{DDLs} \times N_{DDLs}$ représente un avantage certain de la méthode par rapport aux méthodes classiques telles que celle d'Arnoldi. De plus, on factorise une matrice réelle, ce qui réduit les temps de calcul et permet par la suite de construire simplement des sous-espaces de recherche réels.

Les résidus en déplacement sont alors simplement définis par

$$\left\{ R_{D,j}^{(k)} \right\} = \left[\hat{K} \right]^{-1} \left\{ R_{L,j}^{(k)} \right\}. \quad (3.20)$$

Ces résidus sont complexes et on cherche donc une direction principale réelle $\left\{ \tilde{R}_{D,j}^{(k)} \right\}$, en utilisant la décomposition en valeurs singulières (2.18), avant de la rajouter à la base $T_q^{(k)}$ si la norme associée est jugée trop importante

$$\epsilon_j^{(k)} = \frac{\|\left\{ \tilde{R}_{D,j}^{(k)} \right\}\|_{K_e+K_v}^2}{\|T_q^{(k)}\left\{ q_{j,R} \right\}\|_{K_e+K_v}^2} > Tol \Rightarrow T_q^{(k+1)} = \left[T_q^{(k)}, \left\{ \tilde{R}_{D,j}^{(k)} \right\} \right].$$

3.2.1.3 Couplage fluide-structure amortie

De la même manière que pour le couplage fluide-structure, on cherche les champs reliés aux déplacements (q , sq et q_v) et ceux reliés aux fluctuations de pression (p et sp) dans deux sous-espaces distincts $T_q^{(k)}$ et $T_p^{(k)}$, respectivement.

A chaque pas d'itération k , on définit un résidu en effort pour le champ q

$$\left\{ R_{L,q,j}^{(k)} \right\} = Ms^2 T_q^{(k)} q_{j,R} + [K_e + E_\infty K_v] T_q^{(k)} q_{j,R} + K_v T_q^{(k)} q_{v,j,R} - CT_p^{(k)} p_{j,R}, \quad (3.21)$$

qui traduit la non vérification de la deuxième ligne de (3.10), et un résidu en effort pour le champ p

$$\left\{ R_{L,p,j}^{(k)} \right\} = C^T s^2 T_q^{(k)} q_{j,R} + K_p s^2 T_p^{(k)} p_{j,R} + FT_p^{(k)} p_{j,R}. \quad (3.22)$$

qui traduit le non équilibre de la cinquième ligne de (3.10).

Pour le champ déplacement, l'opérateur est le même que dans le cas de l'amortissement viscoélastique, à savoir

$$\left[\hat{K}_{str} \right]^{-1} = [K_e + K_v + \alpha_{str}M]^{-1}, \quad (3.23)$$

et l'opérateur associé aux champs du fluide est

$$\left[\hat{K}_{fl} \right]^{-1} = [F + \alpha_{fl}K_p]^{-1} \quad (3.24)$$

Les résidus en déplacement sont alors calculés à l'aide de ces préconditionneurs. Ainsi on définit simplement

$$\left\{ R_{D,q,j}^{(k)} \right\} = \left[\hat{K}_{str} \right]^{-1} \left\{ R_{L,q,j}^{(k)} \right\} \text{ et } \left\{ R_{D,p,j}^{(k)} \right\} = \left[\hat{K}_{fl} \right]^{-1} \left\{ R_{L,p,j}^{(k)} \right\}.$$

Ces résidus étant complexes, on enrichit les bases par les directions principales (2.18) dont la norme associée est jugée trop importante

$$\epsilon_{q,j}^{(k)} = \frac{\|\tilde{R}_{D,q,j}^{(k)}\|_{K_e+K_v}^2}{\|T_q^k\{q_{j,R}\}\|_{K_e+K_v}^2} > Tol \Rightarrow T_q^{(k+1)} = \left[T_q^{(k)}, \left\{ \tilde{R}_{D,q,j}^{(k)} \right\} \right],$$

$$\epsilon_{p,j}^{(k)} = \frac{\|\tilde{R}_{D,p,j}^{(k)}\|_{K_p}^2}{\|T_p^k\{p_{j,R}\}\|_{K_p}^2} > Tol \Rightarrow T_p^{(k+1)} = \left[T_p^{(k)}, \left\{ \tilde{R}_{D,p,j}^{(k)} \right\} \right].$$

3.2.1.4 MDRE

La MDRE couple les champs R_D et ϕ_{exp} , linéairement dépendants et homogènes à un déplacement (comme montré en section 5.2.3). C'est pourquoi au pas d'itération k on cherche ces deux champs dans le même sous-espace $T^{(k)}$, ce qui conduit au problème réduit

$$\begin{bmatrix} -T^{(k)T}KT^{(k)} & T^{(k)T}Z_jT^{(k)} \\ T^{(k)T}Z_jT^{(k)} & \gamma_jT^{(k)T}c^TQ_jcT^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{D,red,j} \\ \phi_{red,exp,j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma_jT^{(k)T}c^TQ_jy_{Test,j} \end{Bmatrix}. \quad (3.25)$$

Les solutions approchées $\tilde{R}_{D,j} = T^{(k)}R_{D,red,j}$ et $\tilde{\phi}_{exp,j} = T^{(k)}\phi_{red,exp,j}$ ne satisfaisant pas (3.11), on définit les résidus en effort

$$\begin{Bmatrix} R_{L,RD,j}^{(k)} \\ R_{L,\phi,j}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -K & Z_j \\ Z_j & \gamma_jc^TQ_jc \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{R}_{D,j} \\ \tilde{\phi}_{exp,j} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma_jc^TQ_jy_{Test,j} \end{Bmatrix}. \quad (3.26)$$

Le préconditionneur utilise l'opérateur raideur de la structure éventuellement shifté en masse $\hat{K}_{str} = K + \alpha_{str}M$, décrit en section 1.2.

Ainsi, les résidus en déplacement sont définis par

$$\begin{aligned} R_{D,RD,j}^{(k)} &= \hat{K}^{-1}R_{L,RD,j}^{(k)} \\ R_{D,\phi,j}^{(k)} &= \hat{K}^{-1}R_{L,\phi,j}^{(k)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

On enrichit alors la base avec les résidus en déplacement associés à une erreur trop importante

$$\begin{aligned}\epsilon_{R_D,j}^{(k)} &= \frac{\|R_{D,R_D,j}^{(k)}\|_K}{\|R_{D,j}^{(k)}\|_K} > Tol \Rightarrow \hat{T}^{(k+1)} = \left[T^{(k)}, \left\{ R_{D,R_D,j}^{(k)} \right\} \right], \\ \epsilon_{\phi,j}^{(k)} &= \frac{\|R_{D,\phi,j}^{(k)}\|_K}{\|\phi_{exp,j}\|_K} > Tol \Rightarrow T^{(k+1)} = \left[\hat{T}^{(k+1)}, \left\{ R_{D,\phi,j}^{(k)} \right\} \right].\end{aligned}$$

3.2.2 Bases de départ

3.2.2.1 Couplage fluide-structure

Pour le cas du couplage fluide-structure, on définit un sous-espace d'approximation initial pour le champ q et un autre pour le champ p . Ainsi, la base de départ s'écrit

$$T^{(0)} = \begin{bmatrix} T_q^{(0)} & 0 \\ 0 & T_p^{(0)} \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Le premier sous-espace, $T_q^{(0)}$, est composé en première approximation des NM premiers modes de la structure non couplée $\phi_{1..NM}^{str}$, solutions du problème

$$[K - \omega_{str}^2 M] \{ \phi^{str} \} = 0.$$

Si le couplage ne peut être négligé, cette approximation est relativement grossière et il est alors préférable d'ajouter à la base de départ les réponses statiques aux efforts modaux sur l'interface, c'est à dire d'utiliser

$$T_q^{(0)} = \left[\phi_{1..NM}^{str}, \hat{K}^{-1} C \phi_{N_{CR}+1..NM}^{fl} \right]. \quad (3.29)$$

où $\phi_{N_{CR}+1..NM}^{fl}$ sont les modes flexibles du fluide non couplé.

Pour le sous-espace associé au fluide on utilise aussi en première approximation la base des NM premiers modes du fluide non couplé, solutions de

$$[F - \omega_{fl}^2 K_p] \{ \phi^{fl} \} = 0,$$

auxquels on ajoute les réponses statiques aux efforts modaux sur l'interface, c'est à dire

$$T_p^{(0)} = \left[\phi_{1..NM}^{fl}, \hat{F}^{-1} C^T \phi_{N_{CR}+1..NM}^{str} \right]. \quad (3.30)$$

où $\phi_{N_{CR}+1..NM}^{str}$ sont les modes flexibles de la structure non couplée.

3.2.2.2 Amortissement viscoélastique

Les trois champs du problème (3.8) sont tous reliés linéairement au déplacement q . Il est donc naturel de rechercher les approximations de ces trois champs dans le même sous-espace. C'est pourquoi la base de départ prend la forme

$$T^{(0)} = \begin{bmatrix} T_q^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & T_q^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & T_q^{(0)} \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$T_q^{(0)}$ pouvant être formée, en première approximation, des NM premiers modes réels ($T_q^{(0)} = [\phi_{1..NM}^{re}]$) solutions du problème non amorti

$$[Ms^2 + K_e + K_v] \{\phi\} = 0. \quad (3.32)$$

Une amélioration consiste alors à ajouter les réponses statiques à des efforts unitaires dans le viscoélastique, c'est à dire de considérer

$$T_q^{(0)} = \left[\phi_{1..NM}^{re}, \hat{K}^{-1} K_v \phi_{1..NM}^{re} \right]. \quad (3.33)$$

avec $[\hat{K}]^{-1} = [K_e + K_v + \alpha M]^{-1}$.

3.2.2.3 Couplage fluide-structure amortie

Les champs couplés dans (3.10) sont de deux sortes. Les trois premiers, q , sq et q_v , sont reliés aux déplacements de la structure et les deux derniers, p et sp , sont reliés aux fluctuations de pression dans le fluide.

C'est pourquoi de la même manière que pour le couplage fluide structure, on choisit d'itérer sur deux sous-espaces distincts. Le premier, engendré par T_q , contient les solutions approchées du champ déplacement et le deuxième, T_p , celles du champ fluctuation de pression.

La base de départ s'écrit donc

$$T^{(0)} = \begin{bmatrix} T_q^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_q^{(0)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_q^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_p^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_p^{(0)} \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

où $T_q^{(0)}$ peut par exemple s'écrire

$$T_q^{(0)} = \left[\phi_{1..NM}^{str,re}, \hat{K}^{-1} K_v \phi_{NCR+1..NM}^{str,re}, \hat{K}^{-1} C \phi_{NCR+1..NM}^{fl} \right] \quad (3.35)$$

et

$$T_p^{(0)} = \left[\phi_{1..NM}^{fl}, \hat{F}^{-1} C^T \phi_{NCR+1..NM}^{str,re} \right], \quad (3.36)$$

en combinant les expressions obtenues pour le couplage fluide structure et pour l'amortissement viscoélastique.

3.2.2.4 MDRE

Les bases de réduction proposées en [8] et utilisées comme point de départ des itérations sont typiquement formées de modes propres et des réponses statiques à des efforts unitaires sur les capteurs, c'est à dire

$$T^{(0)} = \left[\phi_{1..NM}, \hat{K}^{-1} c^T \right]. \quad (3.37)$$

où c est l'opérateur de projection ou encore la matrice d'observation des DDLs mesurés (cf. section 5.1). On verra en section 3.6 l'importance de l'ajout des réponses statiques sur la précision obtenue.

3.3 Application couplage fluide structure

La méthode d'itération sur les résidus a été appliquée sur le cas du bac à huile PSA Peugeot Citroën. La structure est composée d'acier et comporte 5561 éléments et 8507 noeuds (33003 DDLs). Le fluide est lui composé de 7666 éléments et de 1470 DDLs (un DDL de fluctuation de pression par noeud).

Un exemple de mode couplé fluide-structure est présenté en figure 3.3. La surface supérieure du fluide étant libre, la fluctuation de pression y est nulle ; c'est pourquoi on visualise le champ de fluctuation de pression par le dessous, à travers la structure.

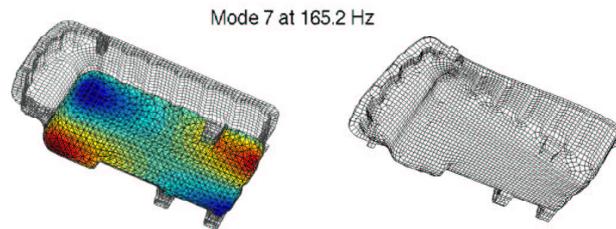


FIG. 3.3 – Premier mode flexible du bac à huile avec fluide. **a** : Fluctuations de pression dans le fluide, **b** : Déplacements de la structure.

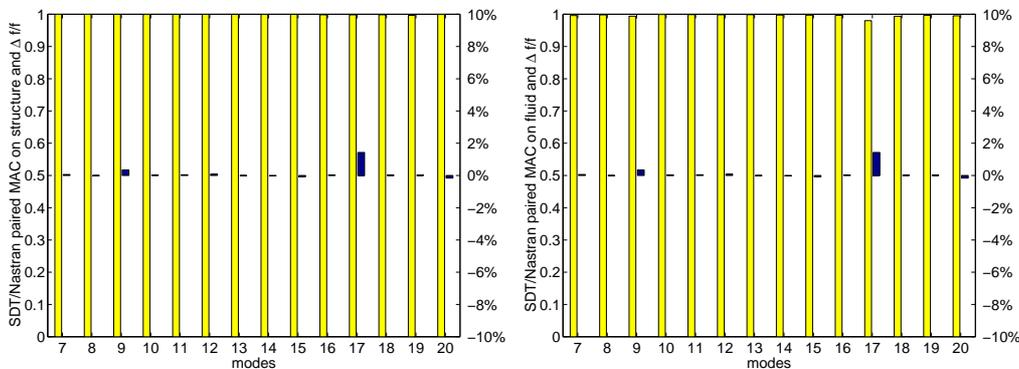


FIG. 3.4 – MAC_m et erreur relative en fréquence entre SDT et NASTRAN, **a** : champ déplacement q , **b** : champ fluctuation de pression p .

Ne disposant pas de solveur classique pour un problème non symétrique dans l'environnement SDT, un calcul NASTRAN est utilisé comme référence. La corrélation entre les résultats issus de NASTRAN et ceux obtenus par notre méthode dans la SDT est présentée en figure 3.4, qui représente le MAC pondéré en masse pour les déplacements q et la pression p , ainsi que les erreurs relatives en fréquence pour les modes flexibles 7 à 20.

On note une excellente corrélation, avec tous les MAC supérieurs à .98 et des erreurs en fréquence presque nulles, excepté pour le mode 17 pour lequel la fréquence obtenue par la SDT est supérieure de 1.5% à celle de NASTRAN. Cette différence marginale est attribuée à une différence de stratégie dans le calcul du terme de couplage C (voir section 3.1.1).

TAB. 3.1 – Temps CPU des principales étapes (en secondes). Résolution de (3.1) (Bac à huile, 31745 DDLs structure, 1470 DDLs fluide, N.A. : Non Applicable).

	NASTRAN	SDT
Factorisation de K	129	fluid : 1 structure : 15
20 modes fluide	N.A.	7
20 modes structure	N.A.	43
20 modes couplés (Total)	300 $Tol' = 10^{-5}$	109 $Tol = 10^{-5}$

Le tableau 3.1 résume les temps de calcul nécessaires pour le calcul des 20 premiers modes couplés, respectivement pour NASTRAN et pour la SDT. NASTRAN utilise un algorithme de Lanczos complexe (avec une tolérance $Tol' = 10^{-5}$ dont la signification n'est pas clairement définie), qui nécessite la factorisation de la matrice globale, alors que la méthode d'itération sur les résidus (en prenant $Tol = 10^{-5}$) factorise séparément les matrices relatives à la structure et au fluide (cf. 3.2). Pour cette application, le gain en temps de calcul est d'environ 3, même si le solveur SDT de modes normaux est moins efficace que celui de NASTRAN.

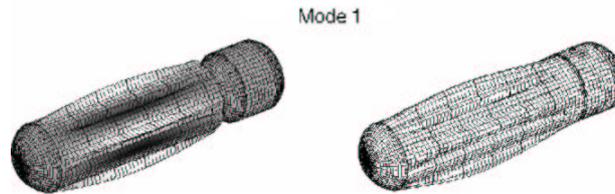


FIG. 3.5 – Premier mode flexible de l'étage cryotechnique d'Ariane 5 (sans amortissement, réservoirs remplis). **a** : Fluctuations de pression dans le fluide, **b** : Déplacements de la structure.

Une deuxième application concerne un modèle de l'étage cryotechnique d'Ariane 5 fourni par EADS Launch Vehicles, dont les deux réservoirs (d'Hydrogène et d'Oxygène) sont pleins. Ce modèle contient dans cette configuration 5832 éléments de structure (33708 DDLs) et 56112 éléments de fluide (54341 DDLs). La figure 3.5 représente les déplacements de la structure et les fluctuations de pression dans le fluide pour le premier mode flexible et le tableau 3.2 résume les temps de calcul des étapes clés. Le calcul n'a pu être réalisé dans

Nastran car il semble qu'il excédait les ressources disponibles, mais on peut noter que le calcul de 20 modes couplés par la méthode proposée ne prend qu'environ 10 min, ce qui est très raisonnable pour un modèle de plus de 88000 DDLs.

TAB. 3.2 – Temps CPU des principales étapes (en secondes). Résolution de (3.1) (Ariane 5, 33708 DDLs structure, 54341 DDLs fluide) par la méthode d'itération sur les résidus dans la SDT ($Tol = 10^{-5}$).

Factorisation de K	fluide : 88.6 structure : 17.7
20 modes fluide	217.6
20 modes structure	100.7
20 modes couplés (Total)	597 $Tol = 10^{-5}$

3.4 Application amortissement viscoélastique

La méthode appliquée au calcul de modes viscoélastiques a été testée sur le même modèle que pour le calcul de mode hystérétique, à savoir le modèle de bac à huile PSA Peugeot Citroën (figure 2.3) comportant 57457 DDLs.

Le modèle d'amortissement viscoélastique appliqué à la couche de polymère (dénotee v) comporte 3 paramètres et s'écrit

$$E(s, T) = E_{max} \frac{\alpha_T s + \omega_{min}}{\alpha_T s + \frac{E_{max} \omega_{min}}{E_{min}}}, \quad (3.38)$$

avec la fonction définissant le *shift* en fréquence

$$\log_{10}(\alpha_T) = -c_1 \frac{T - T_{ref}}{T - (T_{ref} - c_2)}. \quad (3.39)$$

Pour les applications numériques, on prend $E_{max} = 10GPa$, $E_{min} = 8GPa$, $\omega_{min} = 300Hz$, $c_1 = 2$, $T_{ref} = 70^\circ C$ et $c_2 = 100^\circ C$.

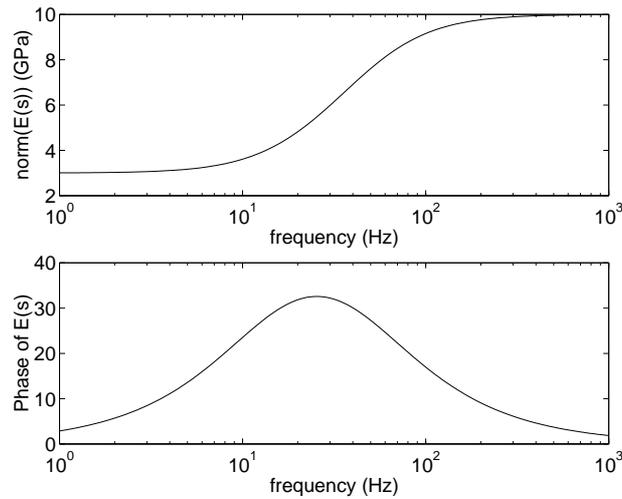


FIG. 3.6 – Evolution de $E(s,T)$ en fonction de la fréquence à $T = 30^\circ C$. **Haut** : Amplitude, **Bas** : Phase (degrés).

La figure 3.6 illustre, pour une température de $30^\circ C$, l'évolution de l'amplitude et de la phase de $E(s)$ avec la fréquence. On remarque qu'on atteint un maximum pour le facteur de perte à la fréquence où la pente du module de stockage est maximum.

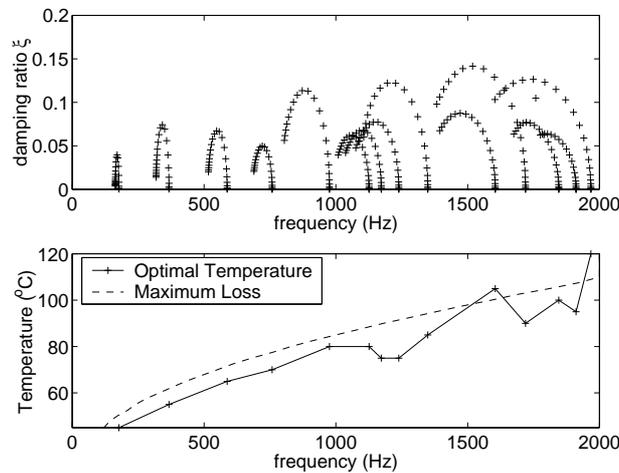


FIG. 3.7 – **Haut** : Evolution de ξ en fonction de la température, pour les modes flexibles 7 à 20, **Bas** : Températures d'amortissement optimal structurel et matériau, pour les modes flexibles 7 à 20.

Le haut de la figure 3.7 montre l'évolution de la fréquence et de l'amortissement modal ξ pour des températures allant de $T = 10$ à $120^\circ C$. Ce suivi des pôles montre que lorsque la

température augmente, les fréquences de résonance diminuent (le module d'Young du coeur de polymère diminue). Quant à l'amortissement, il augmente dans un premier temps puis diminue. On peut déduire de ce type d'étude la température optimale, en termes d'amortissement modal, pour chaque mode. Le bas de la figure 3.7 représente cette température, superposée avec la température correspondant à un facteur de perte maximal (maximum de $\frac{\Re(E(s,T))}{\Im(E(s,T))}$). On voit que ces températures diffèrent, ce qui montre l'importance de l'effet structural sur l'amortissement modal.

Cette étude a été rendue possible par l'utilisation de la méthode d'itération sur les résidus, des calculs aussi coûteux ne pouvant être réalisés que par des méthodes d'approximation. En effet, 20 points de température ont été calculés, ce qui représente le calcul des 14 premiers modes flexibles de 20 problèmes aux valeurs propres différents.

Le temps de résolution est, selon la température, de 81 à 1485 secondes. En effet, le niveau d'amortissement varie avec la température et plus l'amortissement est élevé, plus l'algorithme nécessite d'itérations pour converger.

NASTRAN ne permettant pas de résoudre ce type de problème, aucune comparaison de la méthode proposée n'est réalisée. Mais il est clair, étant donné la nature des matrices de (3.8), que des méthodes nécessitant la factorisation de la matrice de raideur se révéleraient très coûteuses.

3.5 Application couplage fluide structure amortie

L'application concerne ici encore le bac à huile PSA Peugeot Citroën formé d'un matériau tricouche, contenant de l'huile. Le module choisi pour la couche de polymère est

$$E(s) = 10\text{GPa} \left(1 - \frac{a}{s + w} \right), \quad (3.40)$$

avec $w = 1.133 \cdot 10^4 \text{rad/s}$ et $a = w/5$.

Le tableau 3.3 résume les temps de calcul SDT pour la méthode développée. Aucune comparaison n'est disponible car NASTRAN ne permet pas de réaliser ce type de calcul. Pour cette application, le problème se ramène à un problème aux valeurs propres couplé non symétrique de taille 174417 et la résolution est réalisée en moins de 19 min, ce qui est tout à fait raisonnable.

TAB. 3.3– Temps CPU en secondes. Résolution de (3.10) (Bac à Huile , 57457 DDLs structure, 1470 DDLs fluide, $Tol = 2 \cdot 10^{-4}$)

Factorisation de K	fluide : 2 structure : 90
20 modes fluides	8
20 modes structure	342
20 modes couplés (Total)	1128 $Tol = 2 \cdot 10^{-4}$

Les temps de calcul sont indiqués pour une tolérance $Tol = 2.10^{-4}$ car des problèmes de convergence, qui n'ont pu être résolus par des techniques de *redémarrage*, sont apparus pour des tolérances plus faibles.

La figure 3.8, qui illustre ces problèmes, montre l'évolution au cours des itérations de la taille des bases de réduction $T_q^{(k)}$ et $T_p^{(k)}$ ainsi que des erreurs relatives ϵ sur les deux champs, pour la procédure d'enrichissement classique et celle utilisant un *redémarrage* lorsqu'une tolérance $Tol = 10^{-6}$ est utilisée.

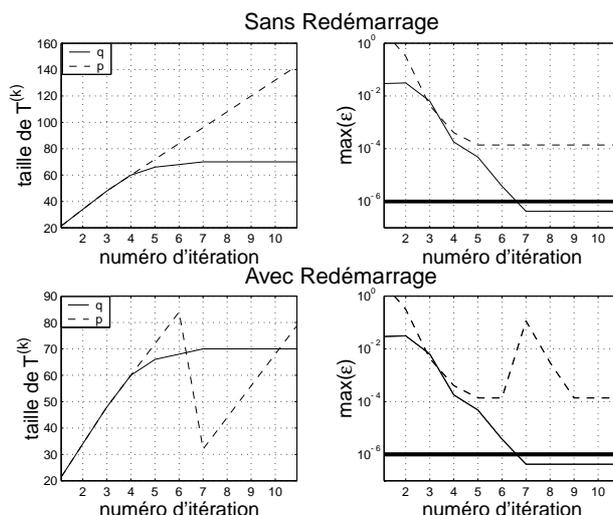


FIG. 3.8 – Convergence des déplacements q et de la fluctuation de pression p pour la méthode d'itération sur les résidus avec $Tol = 10^{-6}$ et de l'amortissement viscoélastique. **Haut** : sans redémarrage, **Bas** : avec redémarrage.

Au point de départ, les bases de réduction sont respectivement $T_q^{(0)} = [\phi_{str,1..20}]$ et $T_p^{(0)} = [\phi_{fl,1..20}]$ contenant les modes réels découplés. L'erreur relative sur le champ fluctuation de pression est alors supérieure à 100%, ce qui montre la mauvaise précision liée à l'utilisation de la base des modes découplés.

Puis la technique d'itération sur les résidus est appliquée. Au cours des 5 premières itérations l'erreur diminue, mais au-delà l'erreur sur les fluctuations de pression reste bloquée à $1.38 \cdot 10^{-4}$, alors que l'erreur sur les déplacements continue de diminuer et atteint la tolérance souhaitée.

Une stratégie de *redémarrage* serait peut être susceptible de résoudre ce problème, probablement lié à la précision numérique finie. Pourtant, les figures correspondant aux itérations avec *redémarrage* montre que cette technique ne permet pas la convergence. A l'itération 7, on redémarre l'algorithme en prenant une base contenant les solutions approchées à l'itération

6, $T_p^{(6)} p_R$, ainsi que les résidus associés (cf. section 1.3.3). L'erreur augmente alors significativement, le sous-espace de recherche étant plus restreint, puis diminue jusqu'à l'itération 9 et reste ensuite bloquée à $1.38 \cdot 10^{-4}$. Ainsi le *redémarrage* n'a pas amélioré la convergence dans ce cas particulier et une étude plus approfondie serait nécessaire pour la résolution de ce type de problèmes, constituant une perspective intéressante du travail de cette thèse. Une alternative possible est d'utiliser dans ce cas des bases de départ plus riches, telles celles décrites en (3.35) et (3.36).

3.6 Application MDRE

La résolution de la MDRE par la méthode d'itération sur les résidus est ici testée sur un modèle de couvre culasse Renault (figure 3.9), comptant 16840 DDLs, dont les matrices élémentaires ont été importées de NASTRAN. Ce modèle est présenté plus en détail dans le chapitre 5, où sont définies les notions de matrice de projection sur les capteurs c (section 5.1.1) et de pseudo-mesures (section 5.4).

Dans l'application considérée, on construit 10 pseudo-mesures (correspondant aux 10 premiers modes flexibles et définies sur les capteurs) non bruitées y_{Test} en diminuant de 50% la raideur de la partie centrale en gras sur la figure 3.9 ($K_{mod} = .5K_{mod,0}$). Ces pseudo-mesures sont alors étendues par la MDRE (3.11) en considérant $\gamma = 10^8$.

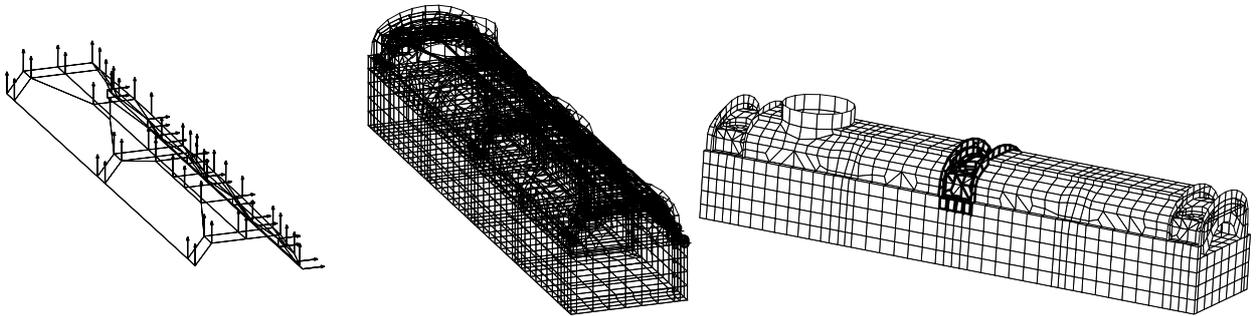


FIG. 3.9 – **a**: direction de mesures des capteurs, **b**: maillage expérimental du couvre culasse, **c**: Localisation de la modification $K_{mod} = .5K_{mod,0}$.

On compare alors les précisions associées à différents sous-espaces d'approximation pour la résolution de la MDRE et on montre le gain en temps de calcul obtenu en utilisant la méthode d'itération sur les résidus, par rapport à la résolution exacte.

Pour étudier la précision, les différentes bases étudiées sont respectivement

- Modale : $T_{mod} = [\phi_{nom,1:20}]$ contenant les modes de la structure nominale,
- Modale + réponses statiques à des efforts unitaires aux capteurs :

$$T_{mod+stat} = \left[\phi_{nom,1:20}, \hat{K}^{-1} c^T \right] \text{ où } c \text{ est la matrice d'observation associée aux capteurs (section 5.1.1),}$$

- Enrichie : T_{enr} qui est la base $T_{mod+stat}$ enrichie itérativement par la méthode d'itération sur les résidus en considérant une tolérance $Tol = 10^{-8}$.

L'application concernant le couvre culasse permet le calcul exact (3.11) de la MDRE, même si celui est particulièrement coûteux. La comparaison des précisions associées à l'utilisation des différentes bases de réduction utilise donc des erreurs relatives en énergie de déformation par rapport à la solution exacte pour établir la validité des déformées modales (α_j) et des résidus en déplacement (β_j) :

$$\alpha_j = \frac{\|\phi_{exp,exa,j} - \tilde{\phi}_{exp,j}\|_K^2}{\|\phi_{exp,exa,j}\|_K^2 + \|\tilde{\phi}_{exp,j}\|_K^2}, \quad \beta_j = \frac{\|R_{D,exa,j} - \tilde{R}_{D,j}\|_K^2}{\|R_{D,exa,j}\|_K^2 + \|\tilde{R}_{D,j}\|_K^2}. \quad (3.41)$$

Bien sûr des erreurs relatives en énergies cinétiques peuvent être utilisées, mais les résultats obtenus sont similaires et ne sont pas exposés ici.

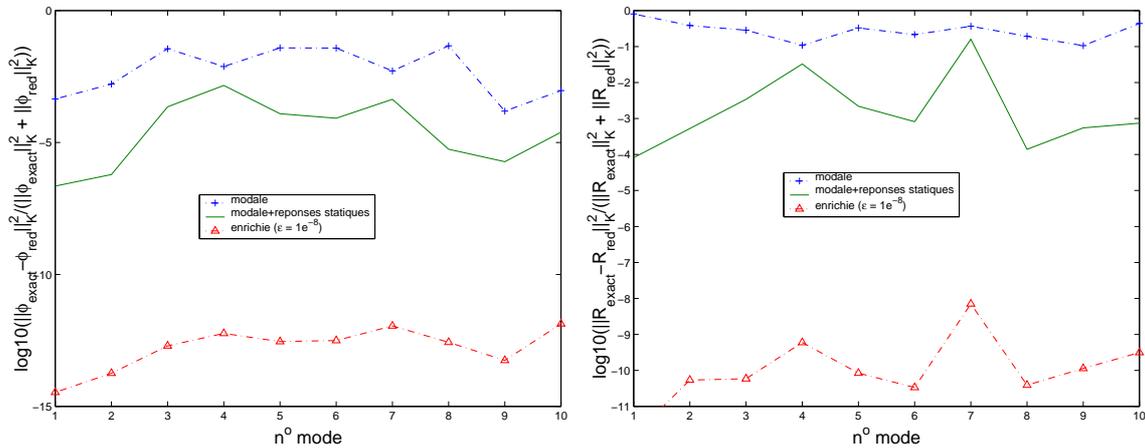


FIG. 3.10 – Précisions des résultats de l'expansion pour différentes bases de réduction (cas du couvre culasse). **a** : Déformées modales (α_j), **b** : Résidus en déplacement (β_j). $Tol = 10^{-8}$.

La figure 3.10 représente, pour le cas du couvre culasse, les erreurs relatives α_j et β_j (3.41) pour les pseudo-mesures 1 à 10. L'erreur est plus élevée pour les résidus que pour les modes étendus, avec une erreur de l'ordre de 100% sur les résidus pour la base modale. Rajouter les réponses statiques améliore la précision mais l'erreur sur les résidus atteint encore 10%. L'utilisation de la base enrichie avec une tolérance $Tol = 10^{-8}$ donne elle des erreurs associées en deçà de 10^{-8} , ce qui montre la pertinence du critère d'arrêt (1.6).

Le tableau 3.4 résume lui les temps de calcul nécessaires à la résolution de la MDRE sur le modèle du couvre culasse ($\gamma = 10^8$). La résolution exacte nécessite, pour chacun des 10 modes expérimentaux, la résolution de (3.11), alors que la résolution itérative nécessite la construction d'une base de départ et son enrichissement. Pour une précision $Tol = 10^{-8}$, la résolution itérative nécessite 8.5 min au lieu de 498 min pour la résolution exacte, ce qui

représente un facteur 60 en temps de calcul. D'autre part, la résolution itérative requiert quatre fois moins d'espace mémoire (400 Mo) que la résolution exacte (1.6 Go).

Étapes de calcul	itératif $Tol = 10^{-8}$	direct
$\phi_{1:20}$	231 sec	
$\hat{K}^{-1}c^T$	44 sec	
$\phi_{1:20} \hat{K}^{-1}c^T$	17 sec	
projection du modèle	7 sec	
enrichissement	211 sec	
total	8.5 min	498 min
Espace Mémoire	400 Mo	1.6 Go
Taille du problème	266	33680

TAB. 3.4 – Résumé des temps de calcul (Couvre culasse, processeur R10000).

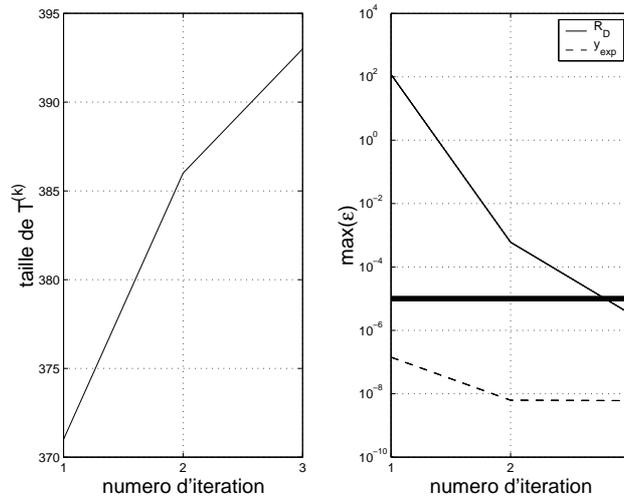


FIG. 3.11 – Etude de convergence de la résolution itérative de la MDRE. Evolution au cours des itérations **a** : de la taille de la base de réduction, **b** : du maximum de l'erreur relative ϵ (1.6) pour les champs R_D et ϕ_{exp} . Cas de l'ESC-A, 107135 DDLs, $Tol = 10^{-5}$.

La figure 3.11 illustre la convergence de la méthode pour la résolution de la MDRE sur le modèle de l'ESC-A contenant 107135 DDLs. L'expansion concerne les 15 premiers modes expérimentaux fournis par IABG (cf. section 6.2) et la tolérance fixée est $Tol = 10^{-5}$. La base de départ utilisée est composée des 60 premiers modes EF et des réponses statiques

à des efforts unitaires sur les 317 capteurs. La figure montre que l'erreur sur les résidus en déplacement est systématiquement plus élevée que l'erreur sur les modes étendus et que trois itérations suffisent pour atteindre la convergence des deux champs. La résolution requiert ainsi seulement 15 min de temps CPU, ce qui reste raisonnable vue la taille du problème à résoudre (la matrice associée à (3.11) est non symétrique et de taille 214270).

Chapitre 4

Sensibilités de vecteurs propres

Sommaire

4.1	Présentation du problème	58
4.1.1	Solution exacte pour valeur propre unique	58
4.1.2	Valeur propre multiple	59
4.2	Approximation sur base réduite	60
4.2.1	Principes	60
4.2.2	Bases de départ	61
4.2.3	Itération sur les résidus	62
4.2.4	Méthode à taille de base fixe	62
4.2.5	Gradient Projeté Conjugué Préconditionné (PCPG)	63
4.3	Applications	64
4.3.1	Précision	65
4.3.2	Temps de calcul	67

Les méthodes d'optimisation, employées en recalage et en optimisation, utilisent souvent les gradients pour orienter leurs recherches. En analyse modale ce gradient est généralement relié à des dérivées partielles, ou sensibilités, des modes par rapport à des paramètres physiques du modèle. Il est donc très important d'avoir à disposition des méthodes de calcul de ces sensibilités à la fois précises et peu coûteuses.

La littérature propose diverses méthodes de calcul de sensibilités. Une méthode exacte, proposée par Nelson [50], existe mais son coût en temps de calcul reste trop important. Parmi les nombreuses méthodes d'approximation, on peut citer la méthode modale (Fox et Kapoor [30]) connue pour son manque de précision. Cette méthode reste la plus utilisée et pourtant, des améliorations à cette méthode existent, tel que l'ajout de corrections statiques proposé par Wang [61] ou encore Liu [46], ou l'utilisation d'une base de type Lanczos proposée par Ojalvo et Zhang [52]. Dans un autre registre, on peut aussi citer la méthode de calcul itératif basée sur l'algorithme du gradient conjugué avec préconditionneur, proposée par Alvin [1].

Ce chapitre présente la problématique du calcul des sensibilités, la méthode de Nelson et compare différentes méthodes itératives d'approximation, dont la méthode d'itération sur les résidus [16] développée dans cette thèse.

4.1 Présentation du problème

4.1.1 Solution exacte pour valeur propre unique

Les modes sont solutions du problème aux valeurs propres

$$[K(p) - \omega_j^2 M(p)] \{\phi_j\} = [Z(\omega_j, p)] \{\phi_j\} = \{0\}, \quad (4.1)$$

et satisfont les conditions d'orthogonalité en masse

$$\{\phi_k\}^T [M] \{\phi_j\} = \delta_{jk} \quad (4.2)$$

et en raideur

$$\{\phi_k\}^T [K] \{\phi_j\} = \omega_j^2 \delta_{jk}. \quad (4.3)$$

L'équation (4.1) étant valide pour toutes les valeurs du paramètre p , sa dérivée par rapport à p est elle aussi nulle, ce qui donne

$$[Z(\omega_j)] \left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial p} \right\} = \{B(\omega_j)\}, \quad (4.4)$$

où

$$B(\omega_j) = \left[-\frac{\partial K}{\partial p} + \frac{\partial \omega_j^2}{\partial p} M + \omega_j^2 \frac{\partial M}{\partial p} \right] \{\phi_j\}. \quad (4.5)$$

Par définition des modes (4.1), la raideur dynamique $[Z(\omega)]$ est singulière aux fréquences propres ω_j et l'équation (4.4) n'a pas nécessairement de solution. D'autre part, un théorème classique d'algèbre linéaire stipule que les équations du type $Zq = B$ avec Z singulière ont une solution si et seulement si B est orthogonal au noyau de Z^T . D'après (4.1), ce noyau est le mode $\{\phi_j\}$ pour des valeurs propres simples et le sous-espace modal pour des valeurs propres multiples (section 4.1.2). On doit donc avoir $\{\phi_j\}^T B(\omega_j) = 0$, ce qui permet le calcul de la sensibilité des fréquences propres

$$\frac{\partial \omega_j^2}{\partial p} = \{\phi_j\}^T \left[\frac{\partial K}{\partial p} - \omega_j^2 \frac{\partial M}{\partial p} \right] \{\phi_j\}. \quad (4.6)$$

Les solutions de (4.4) prennent alors la forme générale

$$\left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial p} \right\} = \psi_j + \alpha \phi_j, \quad (4.7)$$

où ψ_j est une solution particulière et arbitraire de

$$[Z(\omega_j)] \{\psi_j\} = \{B(\omega_j)\}. \quad (4.8)$$

Comme proposé par Nelson [50], une solution particulière de (4.4) peut être déterminée en imposant qu'une des composantes de ψ_j soit nulle. Cette solution particulière existe clairement tant que la composante correspondante de ϕ_j est non nulle. Sachant qu'une composante de ψ_j est nulle, on peut éliminer une ligne et une colonne de (4.4), ce qui mène à un système non singulier qui peut être résolu simplement. Le seul problème est que cette méthode nécessite la factorisation de $Z(\omega_j)$ après élimination d'une ligne et d'une colonne. Cette factorisation doit être réalisée à chacune des fréquences des modes propres dont la sensibilité doit être calculée, ce qui tend à être très coûteux pour des applications réalistes à grand nombre de DDLs (voir applications numériques en section 4.3).

Ayant une solution particulière ψ de (4.8), une seule condition manque alors pour déterminer le coefficient α dans la forme générale (4.7). Comme la normalisation en masse (4.2) est toujours respectée, cette condition peut être dérivée par rapport à p , ce qui donne

$$\{\phi_j\}^T M \left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial p} \right\} = -\frac{1}{2} \{\phi_j\}^T \frac{\partial M}{\partial p} \{\phi_j\}. \quad (4.9)$$

Ainsi, si l'on connaît la solution particulière ψ_j de $Z(\omega_j)\psi_j = B(\omega_j)$, la sensibilité est donnée par

$$\left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial p} \right\} = \{\psi_j\} - (\phi_j^T M \psi_j + \frac{1}{2} \phi_j^T \frac{\partial M}{\partial p} \phi_j) \{\phi_j\}. \quad (4.10)$$

4.1.2 Valeur propre multiple

Dans le cas où la valeur propre ω_j a une multiplicité $k > 1$, les vecteurs propres associés, solutions de (4.1), sont dans un sous-espace de dimension k . Si l'on dénote par $[\Phi]_{N \times k}$ (N étant le nombre de DDLs) une base de ce sous-espace, orthonormale en masse, i.e. telle que $[\Phi]^T [M] [\Phi] = I_{k \times k}$, alors chaque vecteur $\{\phi_i\}$ de ce sous-espace est un mode propre à la fréquence propre ω_j et peut être écrit

$$\{\phi_i\} = \sum_{l=1}^k c_{li} \{\Phi_l\} = [\Phi_1 \dots \Phi_k] \{c_i\}, \quad (4.11)$$

ou sous forme matricielle

$$[\phi]_{N \times k} = [\Phi]_{N \times k} [c]_{k \times k}, \quad (4.12)$$

où $[\phi]$ est une matrice contenant les $\{\phi_i\}$ et $[c]$ est orthogonale ($c^T c = I$).

Si l'on note $[B(\omega_j)]_{N \times k}$ la matrice contenant les vecteurs

$$[B(\omega_j)]_i = \left[-\frac{\partial K}{\partial p} + \left(\frac{\partial \omega_j^2}{\partial p} \right)_i M + \omega_j^2 \frac{\partial M}{\partial p} \right] \{[\Phi] [c]\}_i, \quad (4.13)$$

alors l'équation donnant les sensibilités a une solution si et seulement si $[B(\omega_j)]_{N \times k}$ est orthogonale au noyau de $Z(\omega_j)^T$. Ainsi la condition est $[\Phi]^T [B(\omega_j)] = 0$, ce qui mène au $k \times k$ problème aux valeurs propres

$$\left([\Phi]^T \left[\frac{\partial K}{\partial p} - \omega_j^2 \frac{\partial M}{\partial p} \right] [\Phi] \right) [c]_i = \left(\frac{\partial \omega_j^2}{\partial p} \right)_i [c]_i. \quad (4.14)$$

Les valeurs propres sont les sensibilités des fréquences propres $\left(\frac{\partial\omega_j^2}{\partial p}\right)_i$ et les vecteurs propres sont les vecteurs $[c]_i$ donnant les modes propres $[\phi]_i$ pour lesquels les sensibilités sont calculées.

Les sensibilités des modes propres sont alors de la forme

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial p}\right]_{N\times k} = [\psi] + [\phi][\alpha]_{k\times k}, \quad (4.15)$$

où $[\psi]_{N\times k}$ contient la solution arbitraire particulière de $[Z(\omega_j)]\{\psi_i\} = [B(\omega_j)]_i$. Ces solutions particulières sont calculées en éliminant k lignes et colonnes de $Z(\omega_j)$ sur des DDLs qui ne correspondent pas à un zéro de $[\phi]$. En pratique, on élimine les lignes et colonnes correspondant au maximum d'amplitude de chaque $[\phi]_i$ (une ligne ne peut être éliminée qu'une fois).

Si pour un mode i particulier, $\left(\frac{\partial\omega_j^2}{\partial p}\right)_i$ a une multiplicité $k' > 1$, alors $[c]_i$ reste indéterminé. Shaw et Jayasuriya [57] ont traité ce cas en déterminant $[c]_i$ et le α correspondant, en considérant des dérivées d'ordre supérieurs de ω_j^2 .

Il arrive que toutes les dérivées soient multiples (par exemple si le paramètre étudié respecte la symétrie cyclique de la structure). $[c]_i$ est alors arbitraire. En ce cas, Dailey [26] a proposé une méthode de détermination de $[c]_i$ et α .

4.2 Approximation sur base réduite

On s'intéresse dans cette section aux techniques itératives de résolution de (4.4). Ayant présenté les principes communs à toutes ces méthodes en section 4.2.1, on détaille les bases utilisées pour démarrer le processus itératif en section 4.2.2 et les différentes stratégies d'itération (sections 4.2.3 à 4.2.5).

4.2.1 Principes

Comme on l'a vu précédemment, les méthodes de réduction sont largement utilisées pour résoudre des problèmes modaux. Comme détaillé en section 2.1.2, les modes approchés d'un modèle réduit sur une base T sont donnés par $\{\tilde{\phi}_j\} = T\{\phi_j\}_R$ où $\{\phi_j\}_R$ est solution du problème réduit

$$[T]^T [K(p) - \omega_{jR}^2 M(p)] [T] \{\phi_j\}_R = \{0\}. \quad (4.16)$$

Si l'on suppose que T est fixe, l'équation (4.16) est vérifiée pour toutes les valeurs de paramètres p et peut donc être dérivée. La sensibilité approchée prend alors la forme générale

$$\left\{\frac{\partial\tilde{\phi}_j}{\partial p}\right\} = [T] \left\{\frac{\partial\phi_j}{\partial p}\right\}_R = [T] \{\psi_j\}_R + \alpha T \{\phi_j\}_R, \quad (4.17)$$

où $\{\psi_j\}_R$ est solution de

$$[Z_R(\omega_j)] \{\psi_j\}_R = \{B(\omega_j)\}_R \quad (4.18)$$

avec $Z_R = T^T Z T$ et

$$\{B(\omega_j)\}_R = T^T \left[-\frac{\partial K}{\partial p} + \frac{\partial\omega_j^2}{\partial p} M + \omega_j^2 \frac{\partial M}{\partial p} \right] \{\phi_j\}. \quad (4.19)$$

Comme dans le cas des problèmes aux valeurs propres réels, les méthodes d'approximation cherchent à construire un sous-espace d'approximation approprié au problème posé. On expose ici les méthodes d'approximation itératives consistant à enrichir un sous-espace de recherche initial jusqu'à atteindre la précision souhaitée.

4.2.2 Bases de départ

La plupart des méthodes de résolution approchée des sensibilités font partie des méthodes d'approximation directes, qui consistent à construire un sous-espace de recherche que l'on suppose approprié *a priori* et que l'on ne cherche pas à enrichir itérativement.

Mais les sous-espaces de recherche ainsi construits peuvent aussi être utilisés par les méthodes d'enrichissement itératives comme point de départ $T^{(0)}$ des itérations.

Parmi les méthodes d'approximation directe, la plus utilisée est la méthode développée par Fox et Kapoor [30], qui utilise la base tronquée des modes. Cette méthode est facile d'emploi, peu coûteuse, mais manque de précision.

Ayant réalisé que les modes approchés $\{\tilde{\phi}_j\}$ sont souvent déterminés sur un sous-espace (section 2.1.2), Ojalvo et Wang [52] ont proposé de chercher les sensibilités sur ce même sous-espace. La base ainsi générée étant *a priori* plus riche que les modes seuls, l'approximation ne peut qu'être meilleure. Le niveau d'augmentation de qualité reste cependant inconnu.

En réalisant que dans l'équation de sensibilité (4.4) le second membre $B(\omega_j)$ correspond à un chargement représentatif de la modification, Balmès [7] a complété la base modale de Fox et Kapoor par la réponse statique à ce chargement

$$T_C = \left[\begin{array}{c} [\phi_1(p) \dots \phi_{NM}(p)] \\ \left[\hat{K} \right]^{-1} [B(\omega_i, p)]_{i \in T} \end{array} \right], \quad (4.20)$$

où $\phi_1(p) \dots \phi_{NM}(p)$ sont les modes "basse fréquence" contenant au moins les modes cibles (*target modes* T) pour lesquels on cherche la sensibilité. L'intérêt de garder dans la base plus de modes que ceux pour lesquels on cherche la sensibilité sera discuté en section 4.3.2.

Cette correction du premier ordre pourrait être étendue en utilisant les séries de Krylov $T^{(k)} = \left[\hat{K}^{-1} M \right]^k \left[\hat{K} \right]^{-1} [B(\omega_i, p)]_{i \in T}$, en faisant attention à bien orthogonaliser ces sous-espaces successifs. Ceci revient à utiliser l'idée de Ojalvo et Wang [52], mais en utilisant $\left[\hat{K} \right]^{-1} [B(\omega_i, p)]_{i \in T}$ comme base de départ de l'algorithme. On notera que le principe d'enrichissement de la base par des termes statiques a été proposé en [22] pour le calcul direct de réponses fréquentielles.

Enfin, on notera qu'il est possible et souhaitable d'utiliser la même factorisation de $\left[\hat{K} \right]^{-1}$ pour le calcul des modes propres (par une des méthodes détaillées au chapitre 2) et pour celui des corrections statiques (4.20) nécessaires à une bonne approximation.

4.2.3 Itération sur les résidus

Partant de la base de départ $T^{(0)} = T_C$ (4.20), la méthode d'itération sur les résidus [16] utilise à l'itération k les résidus en effort définis par

$$\left\{ R_{L,j}^{(k)} \right\} = [Z(\omega_j)] T^{(k)} \left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial p} \right\}_R - B(\omega_j), \quad (4.21)$$

qui sont non nuls du fait que $T^{(k)} \left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial p} \right\}_R$ ne satisfait pas (4.4).

Les résidus en déplacement sont alors obtenus par relèvement statique des résidus en effort, c'est à dire en utilisant le préconditionneur défini en (1.10).

$$\left\{ R_{D,j}^{(k)} \right\} = [\hat{K}]^{-1} \left\{ R_{L,j}^{(k)} \right\}. \quad (4.22)$$

Comme auparavant, la base est éventuellement enrichie par les résidus en déplacement dont l'énergie est jugée trop importante. Ainsi, on calcule tout d'abord l'erreur relative en énergie de déformation des résidus

$$\epsilon_j^{(k)} = \frac{\| \left\{ R_{D,j}^{(k)} \right\} \|_K^2}{\| T^{(k)} \left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial p} \right\}_R \|_K^2}, \quad (4.23)$$

puis on enrichit jusqu'à convergence avec la loi d'itération suivante :

$$\epsilon_j^{(k)} > Tol \Rightarrow T^{(k+1)} = \left[T^{(k)}, \left\{ R_{D,j}^{(k)} \right\} \right]. \quad (4.24)$$

La normalisation en masse de $T^{(k+1)}$ détaillée en section 1.3.2.2 n'a pas été nécessaire pour les applications considérées en section 4.3, les techniques de préfiltrage ayant été suffisantes pour assurer le bon conditionnement de la base de réduction. Pour optimiser l'implémentation, la projection de Z sur $T^{(k+1)}$ a donc pu être accélérée en utilisant la projection déjà réalisée à l'étape k (cf. section 1.3.2.2).

4.2.4 Méthode à taille de base fixe

La méthode d'itération sur les résidus proposée ici sera comparée à d'autres méthodes en section 4.3. Parmi les méthodes comparées, une méthode à taille de base fixe (sans la méthode d'accélération proposée par Ting [59]) a été développée. Partant de la base $T^{(0)} = T_C$ (4.20), sa loi d'itération est la suivante

$$T^{(k+1)} = \left[\phi_{1..NM}, T^{(k)} \left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial p} \right\}_R^{(k)}, R_D^{(k)} \right]. \quad (4.25)$$

Ces bases de réduction comprennent donc les modes exacts, la dernière estimation des sensibilités, ainsi que les résidus dont l'énergie est plus importante que la précision souhaitée, le critère d'arrêt utilisé étant le même que pour la méthode d'itération sur les résidus. En pratique, les sensibilités et les résidus ont besoin d'être orthogonalisés par rapport aux modes, une étape qui était inhérente aux formulations proposées en [62, 59].

4.2.5 Gradient Projeté Conjugué Préconditionné (PCPG)

Cette méthode, proposée par Alvin [1], débute avec la solution obtenue sur la base modale (Fox et Kapoor), puis cherche la partie complémentaire de la contribution modale en appliquant la méthode du gradient conjugué.

On approche donc la sensibilité par la contribution modale (Fox et Kapoor), i.e.

$$\left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial p} \right\} \approx \sum_{k=1}^{NM} a_{j,k} \{\phi_k\} = [\phi] a_j, \quad (4.26)$$

puis on recherche la partie complémentaire v_j telle que

$$Z(\omega_j)v_j = B(\omega_j) - Z(\omega_j)[\phi]a_j. \quad (4.27)$$

$Z(\omega_j)$ n'est pas définie positive, mais si l'on note $[\hat{\phi}]$ la matrice contenant les modes $NM + 1$ à N (N est le nombre de DDLs), alors le problème projeté

$$\left([\hat{\phi}]^T Z(\omega_j) [\hat{\phi}] \right) x_j = [\hat{\phi}]^T \left(B(\omega_j) - Z(\omega_j)[\phi]a_j \right), \quad (4.28)$$

avec $v_j = [\hat{\phi}] x_j$, fait appel à une matrice symétrique définie positive (pour $j \leq NM$) et peut être résolu par la méthode du gradient conjugué.

$[\hat{\phi}]$ n'étant *a priori* pas connu (seuls les premiers modes sont calculés), Alvin propose d'utiliser la relation

$$M^{-1} = [\phi, \hat{\phi}] [\phi, \hat{\phi}]^T \quad (4.29)$$

pour ramener (4.28) à un problème de type gradient conjugué avec préfiltrage. Sans rentrer dans le détail, les étapes clés (correspondant à l'étape 2a. de l'algorithme du gradient conjugué préconditionné détaillé en section 1.3.1) sont au pas d'itération k

1. $\hat{K}\tilde{y}_k = (I - M[\phi][\phi]^T)\tilde{r}_k$
2. $y_k = (I - [\phi][\phi]^T M)\tilde{y}_k$

On remarque que ces étapes sont équivalentes à l'utilisation du préconditionneur (1.15) détaillé en section 1.2 et que l'étape 2 (filtrage du résidu en déplacement) est inutile car le préfiltrage du résidu en effort est déjà réalisé à l'étape 1. D'autre part, on peut utiliser la factorisation de $[K + \alpha M]^{-1}$ déjà effectuée pour le calcul des modes par itération sur les sous-espaces.

Le critère d'arrêt utilisé est le critère classique de la méthode du gradient conjugué défini en section 1.3.1, utilisant une norme quadratique normalisée du résidu en effort. Le calcul du résidu est intrinsèque à la méthode, mais ce résidu est équivalent au résidu en effort défini dans (4.21), car il traduit le même déséquilibre.

Pour une masse unitaire, la technique du gradient conjugué préconditionné mise en oeuvre par Alvin converge et l'erreur associée à une norme en énergie (utilisant la matrice $K - \omega_j^2 M$) du résidu en effort est en

$$O\left(\frac{(\sqrt{\kappa} - 1)}{(\sqrt{\kappa} + 1)}\right)^k, \quad (4.30)$$

où

$$\kappa = \left(\frac{\omega_N^2 - \omega_j^2}{\omega_N^2 + \alpha} \right) / \left(\frac{\omega_{NM+1}^2 - \omega_j^2}{\omega_{NM+1}^2 + \alpha} \right). \quad (4.31)$$

Ce résultat, bien que très théorique car il n'est vrai qu'en l'absence d'erreurs d'arrondi, met en évidence l'influence significative de la position relative dans le spectre des fréquences du *shift* α , et de la distance entre la fréquence du dernier mode conservé ω_{NM+1} et celle ω_j du mode dont on calcule la sensibilité. La convergence est d'autant plus rapide que α est proche de $-\omega_j^2$ et que ω_{NM+1} en est loin.

La méthode d'itération sur les résidus exposée en section 4.2.3, comme le PCPG, enrichit le sous-espace par le calcul de la réponse du résidu en effort à un préconditionneur. Par contre, on itère simultanément sur les sensibilités de tous les vecteurs cibles (méthode par bloc). En précision infinie, le résultat de convergence du PCPG ne dépend que du sous-espace engendré par les différents itérés. Pour le calcul d'une seule sensibilité, la technique d'itération sur les résidus présente donc théoriquement un taux de convergence identique à celui du PCPG. Pour plusieurs vecteurs, le travail par bloc accélère la convergence et le recours possible à l'orthogonalisation totale (même si elle n'a pas été nécessaire pour les applications présentées) évite certains problèmes de convergence.

4.3 Applications

Les diverses méthodes détaillées dans les sections précédentes ont été évaluées sur deux modèles. Le premier est un modèle de couvre culasse Renault comptant 16840 DDLs (figure 4.1). Dix paramètres sont étudiés, à savoir les raideurs et masses des cinq groupes d'éléments décrits en figure 4.1.

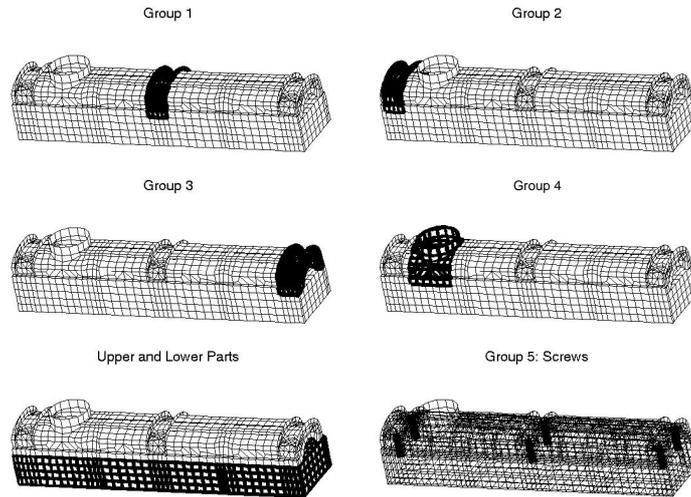


FIG. 4.1 – Groupes 1 à 5. Le groupe 5 est constitué de six vis connectant le couvre culasse à son bloc support.

Le deuxième est un modèle de l'étage supérieur cryotechnique d'Ariane 5, comportant 36928 DOFs, dont les matrices élémentaires ont été importées dans la SDT. Les dix paramètres étudiés sont des raideurs d'éléments de la ligne à oxygène (en gras sur la figure 4.2).

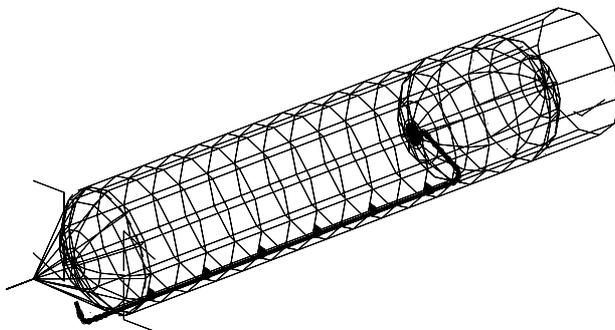


FIG. 4.2 – Modèle de l'étage supérieur cryotechnique d'Ariane 5, la ligne à oxygène est indiquée en gras.

Dans un premier temps, on analyse en section 4.3.1 la précision associée aux différentes bases de départ détaillées en section 4.2.2, ainsi que celle obtenue par la méthode d'itération sur les résidus. Puis en section 4.3.2 on étudie les effets du nombre de modes retenus dans la base de départ sur les temps de calcul des différentes méthodes itératives et on compare les performances de ces méthodes en fonction du nombre de paramètres considérés et du nombre de modes cibles.

4.3.1 Précision

Etant donné qu'il est possible de calculer les sensibilités exactes par la méthode de Nelson, nous avons tout d'abord cherché à quantifier l'erreur associée aux différentes bases de départ proposées en section 4.2.2 ainsi qu'à l'utilisation de la technique d'itération sur les résidus, afin de valider le critère de convergence (1.6) basé sur l'erreur relative en énergie de déformation.

Ainsi, pour chaque sensibilité $\frac{\partial \phi_j}{\partial p_i}$ ($j \in T$, T étant les indices des modes cibles (*Target*) dont on veut calculer les sensibilités et i les indices des paramètres), on calcule l'erreur en énergie de déformation et en énergie cinétique par rapport à la solution exacte, c'est à dire

$$\alpha_{i,j} = \frac{\left\| \frac{\partial \phi_j}{\partial p_i}{}_{\text{exa}} - \frac{\partial \phi_j}{\partial p_i}{}_{\text{approx}} \right\|_K^2}{\left\| \frac{\partial \phi_j}{\partial p_i}{}_{\text{exa}} \right\|_K^2 + \left\| \frac{\partial \phi_j}{\partial p_i}{}_{\text{approx}} \right\|_K^2}, \quad (4.32)$$

$$\beta_{i,j} = \frac{\left\| \frac{\partial \phi_j}{\partial p_i}{}_{\text{exa}} - \frac{\partial \phi_j}{\partial p_i}{}_{\text{approx}} \right\|_M^2}{\left\| \frac{\partial \phi_j}{\partial p_i}{}_{\text{exa}} \right\|_M^2 + \left\| \frac{\partial \phi_j}{\partial p_i}{}_{\text{approx}} \right\|_M^2}, \quad (4.33)$$

où $\frac{\partial \phi_j}{\partial p_i}_{\text{exact}}$ est la sensibilité exacte calculée par la méthode de Nelson et $\frac{\partial \phi_j}{\partial p_i}_{\text{approx}}$ est la sensibilité calculée sur base réduite. Ici, trois bases ont été considérées

- La base modale (méthode de Fox et Kapoor) contenant les NM premiers modes, où NM est l'indice maximum des modes cibles,
- La correction du premier ordre T_C donnée en (4.20),
- la base T_C (4.20) enrichie par la méthode d'itération sur les résidus avec une tolérance $Tol = 10^{-6}$.

Les figures 4.3 et 4.4 représentent les erreurs relatives sur les sensibilités, pour le couvre culasse et l'étage supérieur cryotechnique respectivement. D'après ces figures, le critère (1.6) basé sur l'erreur relative en énergie de déformation des résidus est pertinent car lorsqu'on se fixe une tolérance $Tol = 10^{-6}$, on trouve des erreurs en énergie, par rapport à la solution exacte, du même ordre de grandeur. Les résultats obtenus sur la base modale sont de grossières approximations de la solution avec une erreur pouvant atteindre 100% et la base T_C , bien qu'elle améliore ces résultats, manque tout de même de précision, avec une erreur atteignant 10%.

La méthode d'itération sur les résidus a été testée avec une tolérance de $Tol = 10^{-12}$ et la convergence est restée uniforme, sans problèmes numériques particuliers.

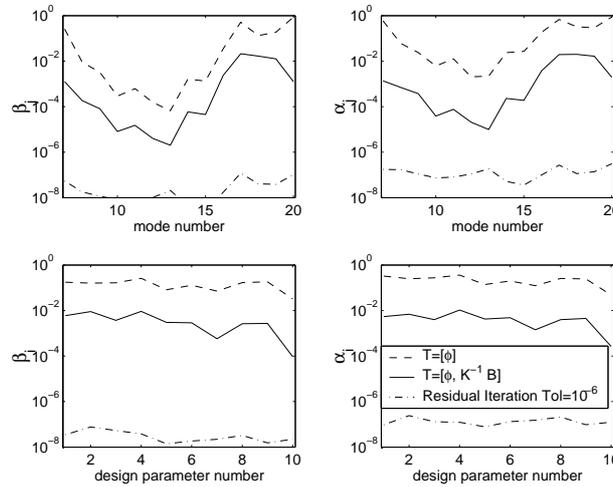


FIG. 4.3 – Erreurs relatives en énergie sur les sensibilités pour différentes bases de réduction (couvre culasse). Erreur en énergie cinétique (**gauche**) et en énergie de déformation (**droite**), moyennée sur les 10 directions pour les modes 7 à 20 (**haut**) et moyennée sur les 14 modes pour les paramètres 1 à 10 (**bas**).

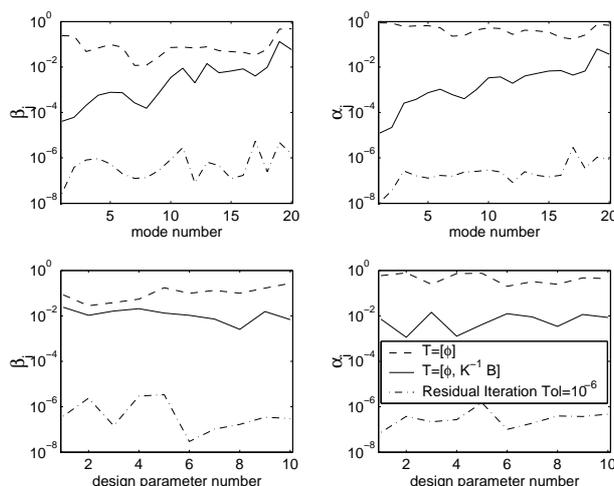


FIG. 4.4 – Erreurs relatives en énergie sur les sensibilités pour différentes bases de réduction (Ariane 5). Erreur en énergie cinétique (**gauche**) et en énergie de déformation (**droite**), moyennée sur les 10 directions pour les modes 1 à 20 (**haut**) et moyennée sur les 20 modes pour les paramètres 1 à 10 (**bas**).

4.3.2 Temps de calcul

On compare dans cette section les performances relatives des différentes méthodes de calcul de sensibilités, en termes de temps de calcul. Les temps de calcul ont été obtenus sur une machine biprocesseur (2 Pentium III à 1 GHz) où aucune autre tâche que le calcul des sensibilités n'était effectuée. En effet, les temps CPU ont tendance à beaucoup varier en fonction de la charge de la machine et il est donc nécessaire de n'exécuter aucune autre tâche pour réaliser des comparaisons. Même en prenant ces précautions, les temps de calcul restent peu reproductibles.

Dans un premier temps, on cherche à quantifier l'effet du nombre de modes NM retenus pour l'approximation de départ sur le temps de calcul des différentes méthodes d'itération, puis on tente de dégager les tendances d'évolution du temps de calcul avec le nombre de directions NP et le nombre de modes cibles NT .

L'effet du nombre de modes NM retenus pour l'approximation de départ a été étudié pour les trois méthodes itératives proposées. Ces modes interviennent dans la base de départ (4.20), commune à la méthode d'itération sur les résidus et à la méthode à taille de base fixe. Pour la méthode PCPG, ils interviennent dans le calcul modal préliminaire (4.26) et dans la définition du préconditionneur (1.15).

La figure 4.5 représente, pour le calcul des sensibilités des 14 premiers modes flexibles du couvre culasse par rapport au paramètre 1, le temps de calcul nécessaire aux différentes méthodes pour atteindre une tolérance de 10^{-6} , en fonction du rapport de la fré-

quence du dernier mode retenu dans la base de départ à la fréquence du dernier mode cible $\omega_{NM}/\omega_{max(T)}$. Cette figure indique que pour $\omega_{NM}/\omega_{max(T)} < 1.5 - 1.6$, le temps CPU diminue avec le nombre de modes dans la base de départ. Puis dans un deuxième temps, pour $\omega_{NM}/\omega_{max(T)} > 1.5 - 1.6$ le temps de calcul croît lentement avec le rapport $\omega_{NM}/\omega_{max(T)}$. On voit donc qu'il existe un compromis. En effet il est nécessaire de prendre en compte assez de modes dans l'approximation de départ afin qu'elle soit assez précise mais dans le même temps, mettre trop de modes nécessite plus de calculs préliminaires et il existe un seuil au-delà duquel ces calculs deviennent trop coûteux vis à vis de la précision requise. De plus, le coût de calcul des modes n'étant pas négligeable on ne peut en calculer qu'un nombre limité. Il semble donc qu'il existe une valeur optimale du nombre NM de modes. Étant donné que, globalement, la pente est plus grande pour $\omega_{NM}/\omega_{20} < 1.2$ que pour $\omega_{NM}/\omega_{20} > 1.2$, il semble donc que mettre dans la base de départ les modes jusqu'à $\omega_{NM}/\omega_{max(T)} \approx 1.2$ soit un bon compromis. A partir de maintenant, ce critère sera appliqué pour l'estimation initiale.

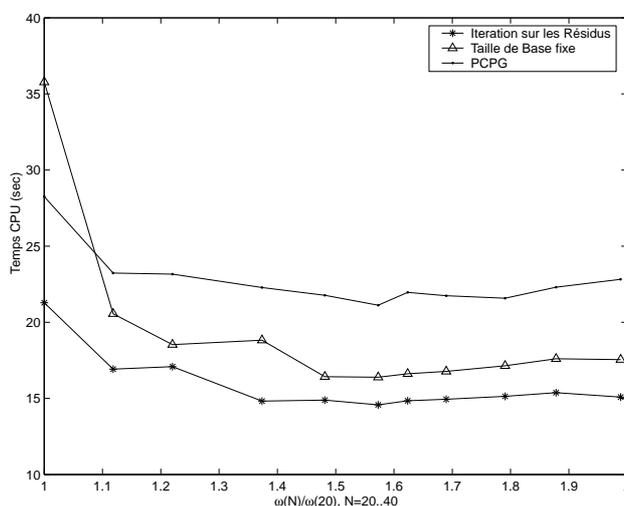


FIG. 4.5 – Temps de calcul fonction de $\omega_{NM}/\omega_{max(T)}$ ($NM = 20..40$, $max(T) = 20$). Couvre culasse, modes 7 à 20 - paramètre 1.

Dans un deuxième temps, on s'est intéressé à comparer les temps de calcul associés aux différentes méthodes, c'est à dire la méthode de calcul exacte (Nelson), la méthode d'itération sur les résidus (4.24), la méthode à taille de base fixe (4.25) ainsi que la méthode PCPG. Les trois méthodes itératives utilisent le même critère d'arrêt (4.23), mais le temps nécessaire pour évaluer ce critère (le calcul du résidu en déplacement (4.22) notamment) n'est pas comptabilisé pour la méthode PCPG afin de ne pas la pénaliser, car cette étape n'est pas intrinsèque à la méthode. La tolérance choisie pour les applications numériques est $Tol = 10^{-6}$.

Les figures 4.6 et 4.7 représentent les temps de calcul associés aux différentes méthodes, ainsi que les gains en temps de calcul (accélération= t_{Nelson}/t_{ite}), fonction du nombre de paramètres étudiés (NP de 1 à 10), respectivement pour le modèle du couvre culasse et pour celui d'Ariane 5. Les figures 4.8 et 4.9 représentent, elles, l'évolution en fonction du nombre de modes cibles NT , pour les deux mêmes modèles.

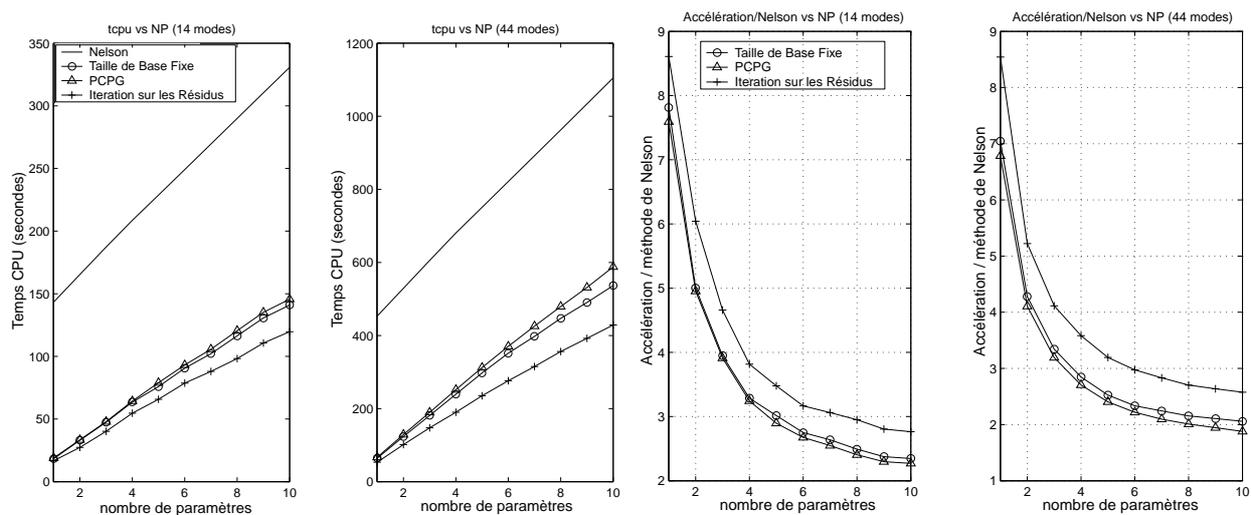


FIG. 4.6– a,b : Temps CPU fonction du nombre de paramètres, c,d : Accélération par rapport à la méthode de Nelson. Cas du couvre culasse, modes cibles $T = 7..20$ (a,c) et $T = 7..50$ (b,d).

Les figures 4.6 et 4.7 indiquent que le gain en temps de calcul décroît lorsque le nombre de paramètres NP croît. En effet, la méthode de Nelson permet d'utiliser la même factorisation de $Z(\omega_j)$ (nécessaire pour la résolution de (4.4)) pour chaque paramètre étudié, alors que la factorisation de $Z_R(\omega_j)$ utilisée dans (4.18) (méthodes de sous-espace) doit être effectuée pour chaque mode, mais aussi pour chaque paramètre, car la base de réduction dépend du paramètre étudié. De la même manière, la résolution par la méthode PCPG doit être effectuée pour chaque mode et chaque paramètre étudié, même si la factorisation de \hat{K} peut être conservée. Ainsi, la méthode exacte de Nelson devient plus intéressante d'utilisation pour un grand nombre de paramètres même si, pour les nombres de paramètres étudiés (jusqu'à $NP = 10$), les méthodes d'itération sur les résidus et PCPG restent moins coûteuses (accélérations > 1) pour une bonne tolérance ($Tol = 10^{-6}$).

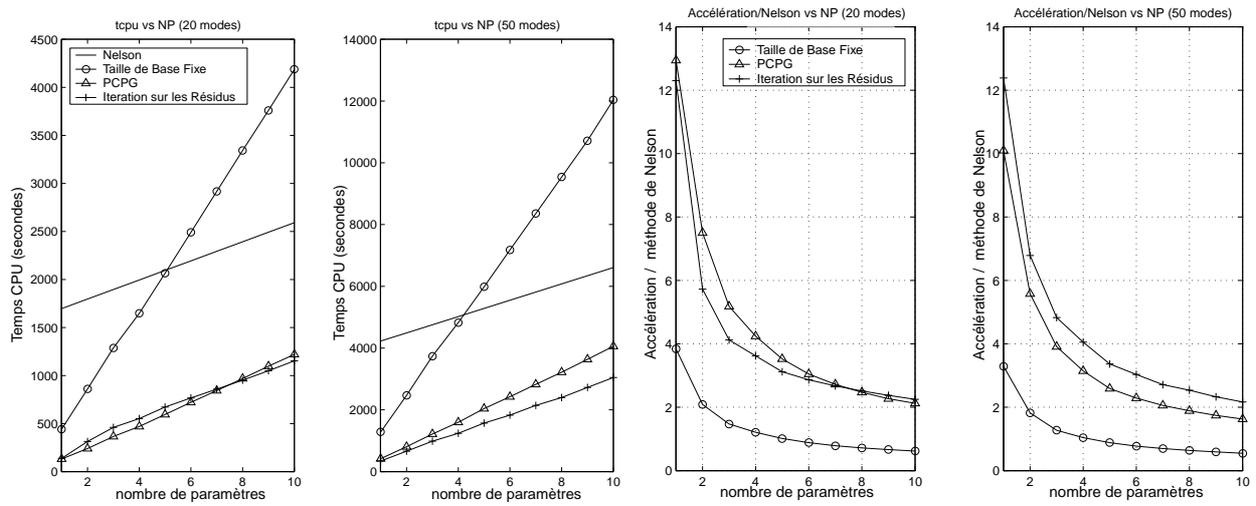


FIG. 4.7 – a,b : Temps CPU fonction du nombre de paramètres, c,d : Accélération par rapport à la méthode de Nelson. Cas d’Ariane 5, modes cibles $T = 1..20$ (a,c) et $T = 1..50$ (b,d).

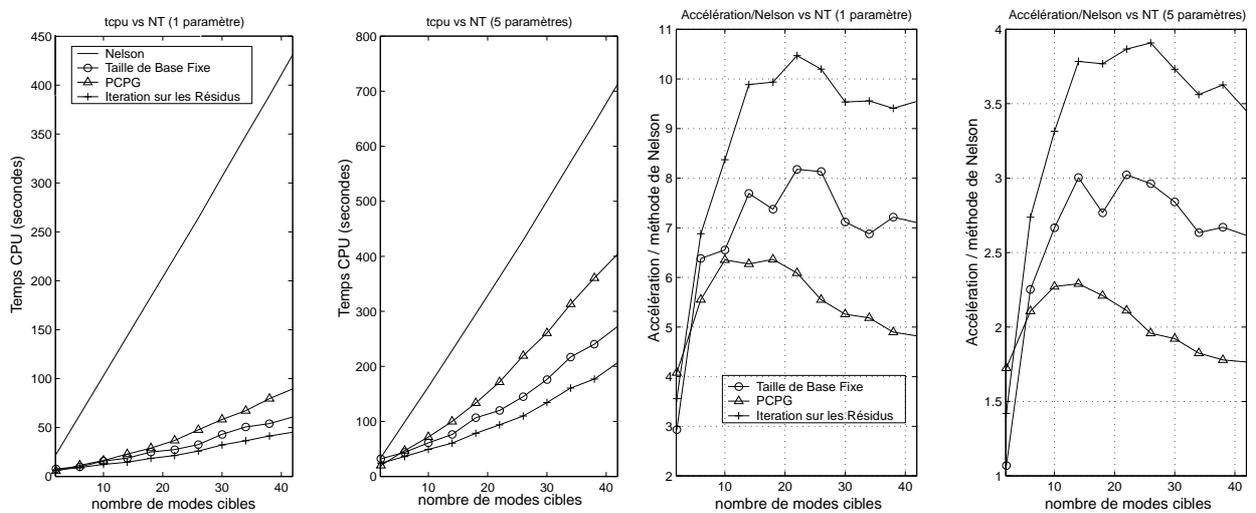


FIG. 4.8 – a,b : Temps CPU fonction du nombre de modes cibles, c,d : Accélération par rapport à la méthode de Nelson. Cas du couvre culasse, 1 paramètre (a,c) et 5 paramètres (b,d).

Les figures 4.8 et 4.9 montrent que les accélérations des différentes méthodes itératives augmentent fortement avec le nombre de modes cibles NT au début de l’intervalle d’étude,

puis stagne et diminue faiblement. Pour les méthodes à taille de base fixe et PCPG, cette tendance semble plus marquée dans le cas d'Ariane 5 que dans celui du couvre culasse.

D'autre part, les accélérations sont plus élevées pour le modèle d'Ariane 5 que pour celui du couvre culasse. Pour les méthodes d'itération sur les sous-espaces, ceci est principalement dû au fait que le modèle d'Ariane 5 contient plus de DDLs, de sorte que le ratio du nombre de colonnes sur le nombre de lignes des bases de réduction NR/N est plus faible.

La dépendance de l'accélération au nombre de DDLs est très liée à la méthode de factorisation utilisée. En effet on observe ici une accélération maximale de 16 environ pour le calcul de 37 sensibilités par rapport à un paramètre (figure 4.9.c), alors qu'on avait observé des accélérations jusqu'à 72 en utilisant une méthode de factorisation moins efficace. La méthode de factorisation utilisée ici est une méthode sparse multifrontale développée par Boeing en C, alors que la méthode précédemment utilisée était une méthode de factorisation skyline écrite en Fortran. A titre indicatif, la factorisation de Z (Ariane 5) par la méthode skyline prenait 700 sec alors que la méthode sparse utilisée ne nécessite qu'environ 70 sec. Si l'on utilisait les seuls solveurs disponibles dans MATLAB, les accélérations seraient encore plus importantes.

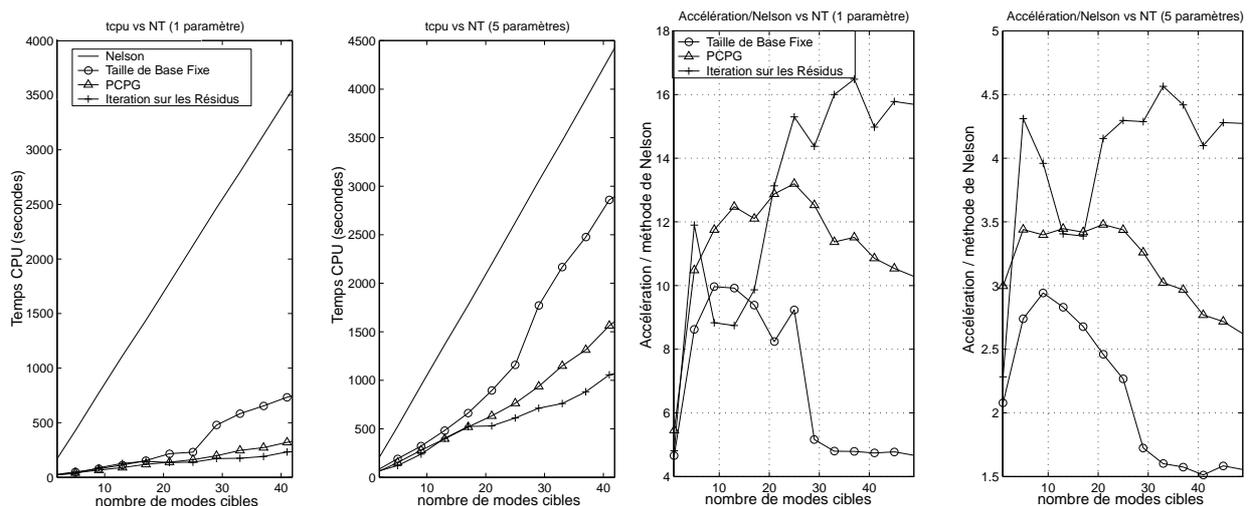


FIG. 4.9 – a,b: Temps CPU fonction du nombre de modes cibles, c,d: Accélération par rapport à la méthode de Nelson. Cas d'Ariane 5, 1 paramètre (a,c) et 5 paramètres (b,d).

Dans la plupart des cas, la méthode la moins coûteuse est la méthode d'itération sur les résidus. Les seules exceptions concernent Ariane 5 et correspondent aux calculs de 20 sensibilités présenté en figure 4.7.c, et au cas d'un paramètre $NP = 1$ et $NT = 9, 13, 17$ modes cibles (figure 4.9.c). Ces cas correspondent à une légère augmentation du temps de calcul de la méthode d'itération sur les résidus due à des variations ponctuelles de convergence. Mis à part ces cas ponctuels, la méthode d'itération sur les résidus est toujours la plus avantageuse. L'évolution des accélérations avec le nombre de paramètres NP est sensiblement la même

pour les trois méthodes, alors que l'évolution avec le nombre de modes cibles NT donne l'avantage à la méthode d'itération sur les résidus (plus NT est grand, plus la méthode d'itération sur les résidus prend le pas sur les autres).

La première partie de cette thèse a permis d'introduire la méthode d'itération sur les résidus (ou méthode RI pour Residual Iteration) et de montrer qu'elle donnait un formalisme unique permettant de construire des solveurs itératifs efficaces pour de nombreux problèmes rencontrés en dynamique des structures (problèmes aux valeurs propres réels ou complexes pour des modèles élastiques, viscoélastiques et vibroacoustiques) et en recalage (sensibilités de vecteurs propres et expansion MDRE).

Les principaux ingrédients de la méthode RI sont tous connus. En effet, l'utilisation du résidu dynamique pour enrichir un sous-espace de recherche est classique dans les méthodes de gradient. De même, l'utilisation de techniques d'orthogonalisation pour préserver le conditionnement du problème réduit est habituelle dans les méthodes de calcul de modes propres (Lanczos et IRAM). Finalement, le calcul du résidu en déplacement correspond à une technique de préconditionnement classique dans la résolution de systèmes linéaires. La contribution de cette thèse est d'avoir clarifié la manière de combiner ces ingrédients pour résoudre efficacement les problèmes posés.

La comparaison des temps de calcul avec NASTRAN dans diverses applications a montré des performances tout à fait intéressantes. En effet, le code de calcul NASTRAN étant très bien optimisé, le fait de rivaliser avec lui en utilisant une implémentation relativement sommaire montre l'intérêt très significatif de l'approche proposée. Les méthodes développées étant visiblement performantes, leur optimisation pour chaque application devient utile. Pour le calcul simple des modes réels, la méthode IRAM est plus performante car l'étape de création du résidu allonge légèrement les calculs. La technique RI ne devient intéressante que si l'on considère une structure bloc dans le modèle (couplage fluide structure ou sous-structuration), ou si l'on prend en compte une solution approchée résultant d'un calcul antérieur. Pour le calcul des modes complexes de modèles amortis, la technique RI permet de ne factoriser que la rigidité élastique (matrice réelle), et la prise en compte de lois de comportements viscoélastiques de type fraction rationnelle n'engendre pas de surcoût significatif. On attend donc une performance largement supérieure aux solveurs utilisés actuellement, ce qui mériterait d'être vérifié de manière plus systématique. Pour le calcul des sensibilités de vecteurs propres et l'expansion MDRE, les solveurs directs faisaient jusqu'à présent référence, mais on a montré que leur coût était très largement supérieur à celui de la méthode RI. Les développements réalisés permettent donc maintenant de résoudre ces problèmes de nombreuses fois à l'intérieur d'une boucle de recalage.

D'autres problèmes mériteraient désormais des analyses plus approfondies :

- l'incidence sur les coûts de calcul du choix de bases réelles ou complexes, ainsi que du *shift* dans le calcul du résidu en déplacement, devrait être établie ;
- les techniques de redémarrage utilisées dans certaines applications n'ont pour l'instant pas résolu les quelques problèmes de convergence rencontrés ;
- l'utilisation de factorisations par blocs, dans une technique de décomposition de domaine plutôt que pour les problèmes multi-champs considérés ici, pourrait conduire à des solveurs performants ;
- le parallèle établi avec les techniques de gradient conjugué fait penser que les résultats théoriques de convergence de ces méthodes pourraient être étendus à la méthode RI, qui n'a été ici que formulée et validée numériquement ;

- la gestion du critère d'arrêt est un point important qui devrait être raffiné pour optimiser la performance mais aussi pour établir de meilleures comparaisons avec d'autres algorithmes ou implémentations. Les comparaisons de temps de calcul avec le code NASTRAN ne sont en particulier pas pleinement rigoureuses de ce point de vue ;
- enfin, la technique RI est aussi très performante pour le calcul de réponses fréquentielles, en particulier dans les cas de structures amorties [10].

Deuxième partie
Application au recalage

Avec les récents développements de l'informatique, la modélisation prend de nos jours une part de plus en plus importante et tend à remplacer les expériences pour la validation de choix technologiques. Ainsi, lorsqu'un modèle est considéré représentatif de la réalité, on peut décider de modifications en les simulant, sans forcément avoir à refaire des expériences longues et coûteuses.

Mais afin de valider un modèle EF, il est nécessaire de le confronter à des données expérimentales. Lors de cette confrontation des différences apparaissent, qui peuvent provenir d'une mauvaise représentation de la géométrie, de simplifications trop importantes du modèle par rapport à la structure réelle, ou plus rarement d'une mauvaise connaissance des lois de comportement.

Dans ce cas, on procède à ce qui est appelé le *recalage* du modèle EF, qui consiste à minimiser la distance entre les résultats issus du modèle EF et ceux issus des expériences.

Cette deuxième partie de la thèse se propose, dans le chapitre 5, d'introduire les notions et outils nécessaires au recalage, en les illustrant sur des modèles académiques ou industriels. Puis dans le chapitre 6, on applique ces divers outils au recalage de deux sous-structures d'Ariane 5. L'une concerne l'Étage Principal Cryotechnique (EPC) d'Ariane 5 (section 6.1), qui a été la première application industrielle de la thèse. Le faible nombre de capteurs utilisés pour les mesures, le fait que ce modèle soit très peu détaillé et que les modes étudiés soient locaux font que les résultats obtenus sur ce modèle sont peu convaincants. La deuxième application concerne elle l'étage supérieur cryotechnique version A (ESC-A) d'Ariane 5, dont les résultats sont détaillés dans les sections 6.2 à 6.4.

Chapitre 5

Outils pour le recalage

Sommaire

5.1 Critères de corrélation de forme	81
5.1.1 Traitement de l'incompatibilité spatiale	81
5.1.2 Corrélation sur les capteurs	82
5.1.3 Corrélation sur les DDLs	83
5.1.4 Sélection des critères-Exemples	84
5.1.5 Appariement	86
5.1.6 Fonctions objectif $freq - MAC$	87
5.2 Critères en énergie	88
5.2.1 Erreurs de modèle et de mesure	89
5.2.2 Expansion MDRE	89
5.2.3 Formulation à deux champs de l'expansion	91
5.2.4 Fonction objectif associée à la MDRE	91
5.3 Paramétrisation en vue du recalage	92
5.3.1 Notion de modèle paramétré	93
5.3.2 Etude de sensibilité	95
5.3.3 Localisation d'erreur-MDRE	99
5.4 Visibilité d'erreur-MDRE	100
5.4.1 Visibilité avec le résidu exact	101
5.4.2 Visibilité avec le résidu issu de la MDRE	104
5.4.3 Choix de l'indicateur	105
5.4.4 Effets liés aux erreurs sur les mesures	106
5.4.5 Localisation de plusieurs perturbations simultanées	108
5.4.6 Placement de capteurs pour la visibilité	109

Le recalage [55, 32, 48] consiste de manière générale à modifier/corriger un modèle à partir d'une comparaison entre calcul et essais. Deux grands types de méthodes de recalage sont à discerner : les méthodes globales, ou directes, qui modifient les matrices de masse et de raideur de manière globale, sans tenir compte des propriétés physiques inhérentes à ces matrices ; et les méthodes locales, ou indirectes, qui modifient le modèle localement en

changeant les coefficients associés à des groupes d'éléments, i.e. des paramètres physiques tels que le module d'Young ou la masse volumique.

Les méthodes globales conduisent donc à des modèles de comportement (on reproduit le comportement dynamique) alors que les méthodes locales visent à enrichir les connaissances ayant conduit au modèle éléments finis en raffinant certains de ces paramètres.

Le recalage d'une structure fait appel à un ensemble complexe d'outils très divers exposés dans le diagramme 5.1, qui vont de la comparaison calcul-essais aux méthodes d'optimisation.

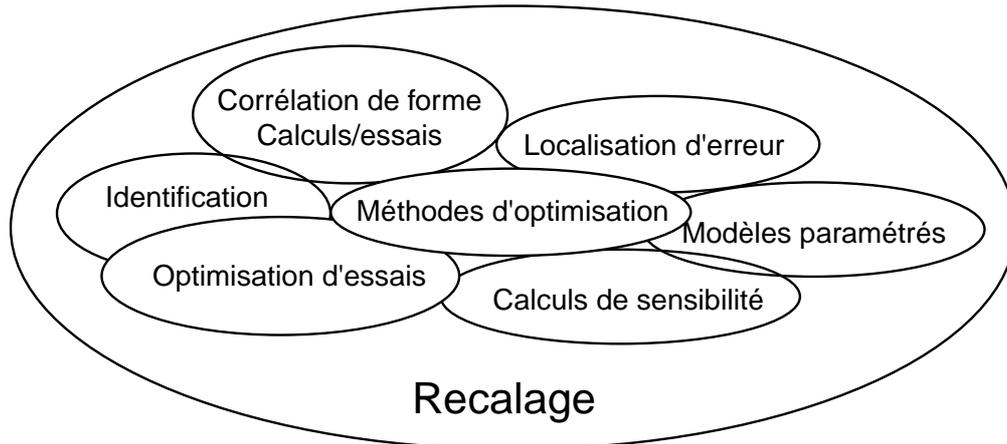


FIG. 5.1 – Outils pour le recalage.

Le point de départ d'une procédure de recalage est la comparaison calcul-essais, qui requiert pour l'analyse modale l'introduction des notions de corrélation de forme (section 5.1) ou d'erreur en relation de comportement (section 5.2) à partir desquelles on définit une mesure de la distance calcul-essais, à travers la construction de fonctions objectif. Dans cette thèse, on se place dans le cas particulier du recalage à partir de résultats d'analyse modale et la distance que l'on cherche à minimiser est donc relative aux modes et aux fréquences propres.

Etant donné que l'on se place ici dans le cadre des méthodes locales, la minimisation de cette distance fait alors appel à la notion d'optimisation paramétrique, consistant à minimiser les fonctions objectif en faisant varier des paramètres du modèle. La paramétrisation du modèle en un ensemble de paramètres p est abordée en section 5.3.1. L'optimisation ne pouvant faire intervenir qu'un nombre limité de paramètres, il est nécessaire de procéder à une étape de sélection de paramètres, réalisée par des études de sensibilité (section 5.3.2) ou grâce à des outils de localisation d'erreur (section 5.3.3).

La localisation d'erreur à partir de résultats expérimentaux constituant un problème de type *problème inverse*, la section 5.4 se propose d'étudier dans quelles conditions des pseudo-mesures construites à partir d'un modèle délibérément erroné permettent de localiser l'erreur introduite.

5.1 Critères de corrélation de forme

Pour définir une corrélation calcul-essais il faut calculer et mesurer les mêmes quantités puis définir une norme sur la différence. Les essais modaux fournissent généralement des fonctions de transfert (identification non paramétrique basées sur des techniques de traitement du signal) ou des modes (identification paramétrique basée sur des méthodes d'identification ou d'appropriation). Pour les modes, la comparaison des fréquences de résonance est un outil simple et fiable mais il donne peu d'informations. Pour enrichir le critère on compare aussi les déformées.

On expose dans les sections suivantes les critères de corrélation de forme, basés sur les notions de colinéarité et d'orthogonalité pour aboutir au critère de recalage fréquence/MAC. Les difficultés associées sont illustrées sur le cas de la maquette GARTEUR SM-AG-19.

La section 5.2 introduira elle les approches énergétiques qui se réfèrent explicitement aux notions d'erreurs de modèle et de mesure.

5.1.1 Traitement de l'incompatibilité spatiale

Pour comparer modes EF et expérimentaux, il faut tout d'abord faire en sorte que calculs et essais décrivent les mêmes quantités physiques par des vecteurs de même taille. En effet, les mesures ne sont pas forcément réalisées aux emplacements des noeuds EF, ni même dans les directions associées aux DDLs EF ; et surtout le nombre de points de mesure est généralement bien plus faible que le nombre de DDLs du modèle. Cette incompatibilité spatiale est traitée soit par observation des résultats EF sur les capteurs, soit en estimant les résultats expérimentaux sur l'ensemble des DDLs EF (expansion).

5.1.1.1 Observation

L'observation des résultats EF sur les capteurs correspond généralement à une application linéaire $c (R^{N_{DDLs}} \rightarrow R^{N_{capt}}) : \{\phi_{EF}\} \rightarrow \{c\phi_{EF}\}$. Cette application est appelée matrice d'observation (ou de projection) et cherche à estimer les déplacements de chaque capteur à partir des déplacements des noeuds EF (voir [8]).

Lorsque les capteurs sont situés sur des noeuds EF et mesurent dans les directions principales, c est alors une matrice booléenne qui extrait les DDLs EF correspondant aux directions de mesure des capteurs.

Mais si un capteur ne correspond à aucun noeud EF, des techniques plus évoluées doivent être mises en oeuvre. On peut dans un premier temps considérer que son mouvement est le même que celui du noeud EF le plus proche. Mais, en présence de rotations non négligeables, ceci peut mener à des erreurs importantes. Une amélioration consiste alors à prendre en compte les rotations en supposant une liaison rigide entre le capteur et le noeud EF, en prenant tout de même garde au fait que les rotations calculées dans les codes EF sont souvent sans aucune signification physique et doivent donc être utilisées avec précaution. Ces rotations peuvent dans ce cas être estimées à partir des déplacements de deux autres noeuds EF proches, fournissant ainsi une très bonne approximation.

5.1.1.2 Expansion

Les méthodes d'expansion réalisent l'opération inverse de l'observation et utilisent des informations du modèle pour estimer la réponse expérimentale sur tous les DDLs EF. Elles peuvent être classées en deux catégories, comme montré en [8].

D'une part les méthodes de sous-espace, qui utilisent le modèle pour construire le sous-espace dans lequel les modes étendus sont recherchés. Les plus classiques sont l'expansion modale [38]/SEREP [51], statique (basée sur la réduction de Guyan [36]), dynamique [42] et hybride [39, 54].

D'autre part les méthodes d'expansion qui utilisent à la fois les informations issues du modèle et celles provenant des mesures. On peut citer par exemple la méthode MDRE, basée sur la minimisation simultanée d'un terme d'erreur sur le modèle et d'un terme d'erreur sur les mesures, détaillée en section 5.2.2. Du fait d'un coût de calcul prohibitif, ces méthodes ont rarement été appliquées à des modèles de taille industrielle. Mais les outils développés au cours de cette thèse (section 3.1.4) permettent leur application.

Ayant traité cette incompatibilité spatiale, on procède alors à la corrélation calcul-essais. On présentera ici différents critères de corrélation, à savoir les critères *MAC* et un critère basé sur les composantes modales des modes étendus.

5.1.2 Corrélation sur les capteurs

Pour comparer modes expérimentaux $\{y_{Test,j}\}$ et modes EF sur les capteurs, on estime tout d'abord les modes EF au niveau des capteurs (section 5.1.1.1). Le critère *MAC* (*Modal Assurance Criterion*), introduit par D.J. Ewins dans [28] et basé sur les notions de colinéarité et d'orthogonalité, constitue alors un critère naturel de corrélation. Il est défini par

$$MAC_{Q'_j,i,j} = \frac{(\{y_{Test,j}\}^T [Q'_j] \{c\phi_{EF,i}\})^2}{(\{y_{Test,j}\}^T [Q'_j] \{y_{Test,j}\})(\{c\phi_{EF,i}\}^T [Q'_j] \{c\phi_{EF,i}\})}, \quad (5.1)$$

où c est la matrice d'observation ou de projection (cf. section 5.1.1) et Q'_j est une matrice de pondération des corrélations sur les différents capteurs. Quelques choix possibles pour cette pondération sont :

- $Q'_j = I$, ce qui correspond à un critère *MAC* classique sur tous les capteurs.
- $Q'_j = T^T M T$, masse réduite sur les capteurs. Le critère correspond alors à l'orthogonalité en masse sur les capteurs (voir *MAC* pondéré en masse en section 5.1.3), avec désensibilisation à la norme des vecteurs.

La masse réduite sur les capteurs se calcule de la manière suivante [8] :

On forme une base composée des réponses statiques à des efforts unitaires sur les capteurs, $T_{capteurs} = \hat{K}^{-1} c^T$ (la transposition de c générant une matrice d'entrée à partir d'une matrice d'observation, par le principe de réciprocité, et \hat{K} étant l'opérateur défini dans la section 1.2). Puis cette base est renormalisée afin que la base renormalisée

$\hat{T}_{\text{capteurs}}$ satisfasse $c\hat{T}_{\text{capteurs}} = I$, ce qui implique $\hat{T}_{\text{capteurs}} = T_{\text{capteurs}}(cT_{\text{capteurs}})^{-1}$. La masse réduite est alors $M_{\text{red}} = \hat{T}_{\text{capteurs}}^T M \hat{T}_{\text{capteurs}}$.

N.B: La condition $c\hat{T}_{\text{capteurs}} = I$ revient à choisir les mesures $\{y\}$ comme DDLs généralisés $\{q_{\text{red}}\}$ car alors $\{y\} = c\{q\} = (c\hat{T}_{\text{capteurs}})\{q_{\text{red}}\} = \{q_{\text{red}}\}$.

- Q'_j matrice de pondération sur les mesures, qui permet pour un mode expérimental j donné de donner un poids différent à chaque capteur selon la fiabilité de leurs mesures respectives (voir [13] pour avoir des exemples), ou de n'étudier l'appariement que sur certaines zones de la structure.

Le critère MAC vaut 1 (ou 100 selon la convention utilisée) pour une corrélation parfaite et 0 pour des modes totalement décorrélés.

5.1.3 Corrélation sur les DDLs

Comparer expériences et calculs sur les DDLs EF nécessite tout d'abord l'expansion des résultats expérimentaux (cf. section 5.1.1).

La comparaison peut alors être réalisée par le critère MAC pondéré en masse sur l'ensemble des DDLs.

$$MAC_{M,i,j} = \frac{(\{\phi_{\text{exp},j}\}^T [M] \{\phi_{\text{EF},i}\})^2}{(\{\phi_{\text{exp},j}\}^T [M] \{\phi_{\text{exp},j}\})(\{\phi_{\text{EF},i}\}^T [M] \{\phi_{\text{EF},i}\})}, \quad (5.2)$$

avec $\{\phi_{\text{exp},j}\}$ le mode expérimental $\{y_{\text{Test},j}\}$ étendu.

Ce critère est une variante, insensible à la normalisation des vecteurs, des critères d'orthogonalité classiques POC (Pseudo-Orthogonality Check) ou CGM (Cross Generalised Mass) qui ne tiennent pas compte de la renormalisation. La condition d'orthogonalité en masse des modes EF donne en effet $MAC_M(\phi_{\text{EF},i}, \phi_{\text{EF},j}) = \delta_{i,j}$.

Pour des expansions exprimant le mode étendu $\{\phi_{\text{exp},j}\}$ dans un sous-espace contenant les NM premiers modes EF $T = [\phi_{1..NM}, \dots]$, les composantes de $\{\phi_{\text{exp},j}\}$ dans cette base, $\{\phi_{\text{exp},j}\} = \sum_{k=1}^{NM} \alpha_k \{\phi_{\text{EF},k}\} + \dots$, donnent une bonne indication de la contribution de chaque mode analytique dans le mode expérimental. L'indice correspondant à $\max(|\alpha_k|)$ donne ainsi le mode analytique le mieux corrélé.

5.1.4 Sélection des critères-Exemples

Les critères précédents ont été testés sur le cas de la maquette Garteur. Cette maquette représentative d'un avion (figure 5.2.a) a été testée à partir de 1995 par 12 membres du groupe GARTEUR Structures and Materials Action Group 19. Les résultats de cet exercice ont été publiés dans différents articles et certaines données d'essais sont à la disposition du public. Les expériences ont été menées afin de mesurer les 14 premiers modes flexibles à l'aide de 24 capteurs (figure 5.2.b). Par la suite, le groupe de travail COST ACTION F3 s'est intéressé à comparer ces résultats expérimentaux aux résultats numériques obtenus sur un modèle simple à 1032 DDLs/124 éléments (figure 5.2.c).

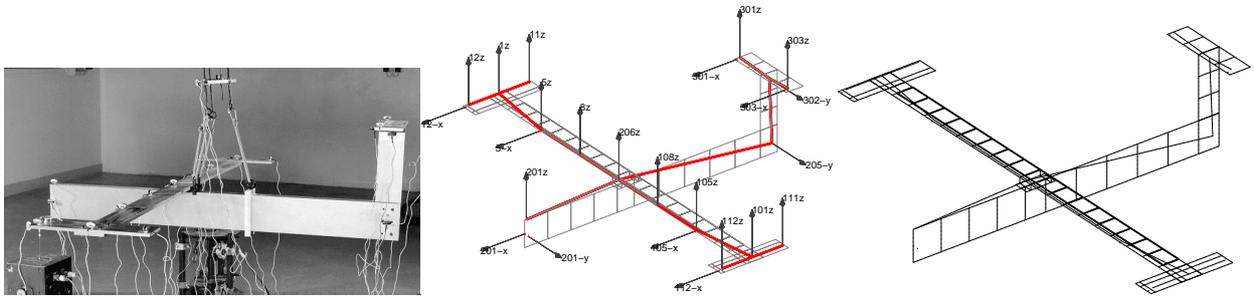


FIG. 5.2 – a : Vue générale de la structure Garteur, b : Configuration des capteurs, c : Modèle EF (la couche de contrainte est indiquée en gras).

Les résultats de corrélation pour les modes expérimentaux 2 et 9 de la maquette Garteur sont présentés dans la figure 5.3. On y compare

- MAC_{DDL} , le MAC entre les modes test étendus par la MDRE $\{\phi_{exp}\}$ (section 5.2.2) et les modes flexibles EF $\{\phi_{EF}\}$, sur tous les DDLs sans aucune pondération.
- $MAC_{M,DDL}$, le MAC pondéré en masse entre $\{\phi_{exp}\}$ et $\{\phi_{EF}\}$.
- MAC_{capt} , le MAC entre $\{y_{Test}\}$ et $\{c\phi_{EF}\}$ sur les capteurs.
- $MAC_{m,capt}$, le MAC pondéré en masse sur les capteurs.
- $MAC_{m,R}$, le MAC pondéré en masse sur les capteurs, mais en prenant la projection des modes expérimentaux étendus par la MDRE $\{c\phi_{exp}\}$ au lieu de $\{y_{Test}\}$.
- α_k , correspondant au critère basé sur les composantes de $\{\phi_{exp}\}$ sur la base réduite.

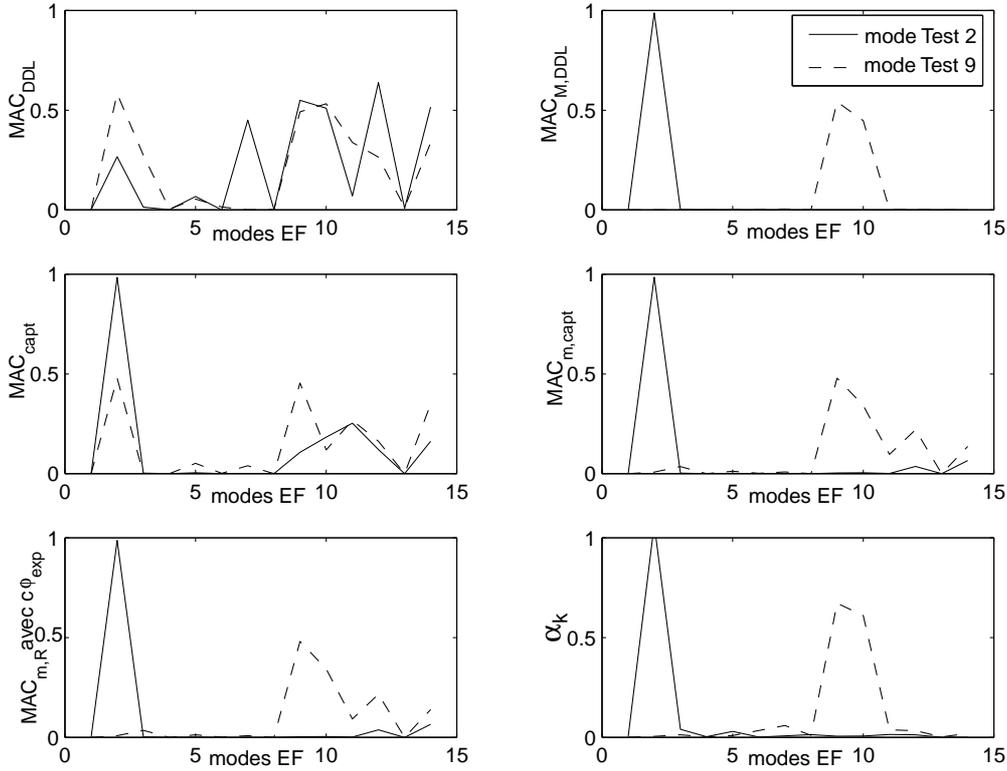


FIG. 5.3 – Résultats des différentes méthodes d'appariement pour les modes expérimentaux 2 et 9 de Garteur.

Cette figure indique que les MAC pondérés en masse permettent de mieux choisir les modes appariés que leurs homologues non pondérés. En effet, la figure MAC_{DDL} ne permet pas d'apparier un mode EF à un mode expérimental, alors que la pondération en masse ($MAC_{M,DDL}$) "débruite" l'appariement en ne faisant ressortir qu'un seul mode (sauf pour le mode 9 qui est couplé au mode 10). Lorsque l'on travaille avec les variantes projetées sur les capteurs, les mêmes conclusions ressortent, à savoir que la pondération en masse facilite l'appariement.

Le fait que la figure MAC_{DDL} ne permette pas l'appariement est lié à un problème de DDLs de vrillage dans les éléments coques. En effet, la normalisation par la matrice de masse des composantes modales liées à ces DDLs est indispensable pour pouvoir les comparer aux autres composantes car elles ne sont pas de même nature. Une alternative classique est de ne pas considérer les rotations.

Le résultat obtenu avec $\{c\phi_{exp}\}$, en passant par la MDRE, est équivalent à son homologue avec $\{y_{Test}\}$, mais en jouant sur les paramètres γ et Q de l'expansion (section 5.2.2), l'utilisation de $\{c\phi_{exp}\}$ peut "estomper" les erreurs de mesures.

En conclusion, le fait de pondérer en masse permet un meilleur appariement et le critère basé sur les composantes de $\{\phi_{exp}\}$ sur la base modale constitue lui aussi un critère assez fiable.

La fiabilité des différents critères peut aussi être étudiée en analysant les autocorrélations, par exemple les *AUTOMAC* (*MAC* entre un groupe de modes et lui-même). Les conclusions obtenues sont les mêmes, comme détaillé en [13], à savoir que la pondération en masse permet de mieux discerner les modes entre eux.

5.1.5 Appariement

L'appariement des modes expérimentaux et EF est nécessaire lorsque l'ordre des modes expérimentaux diffère de celui des modes calculés, ce qui est fréquent dans des structures présentant des modes proches, comme les lanceurs. Cette procédure d'appariement est basée sur l'étude des *MAC* et des écarts en fréquence. Après avoir calculé, pour chaque couple de modes (i,j) , le critère de corrélation $MAC_{i,j}$ (sur les capteurs ou sur les DDLs EF, pondéré ou non en masse), l'appariement est réalisé en sélectionnant pour chaque mode expérimental le mode *EF* qui donne le *MAC* maximal et l'écart en fréquence minimal. Ce mode *EF* i est considéré apparié au mode expérimental j lorsque le $MAC_{i,j}$ est supérieur à 0.6 et que la différence relative en fréquence $\frac{f_{EF,i} - f_{Test,j}}{f_{Test,j}}$ est inférieure à 20%.

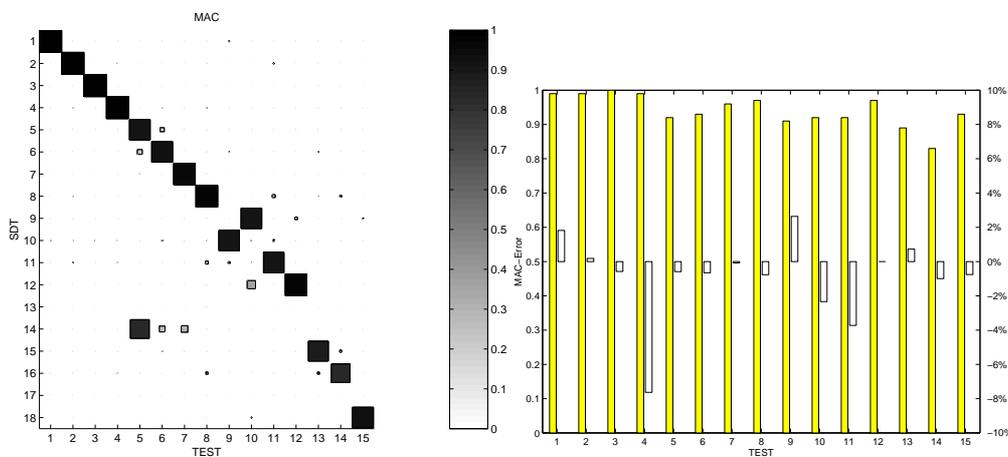


FIG. 5.4 – **a**: MAC_{capt} entre modes EF et expérimentaux, **b**: MAC_{capt} et erreur en fréquence après appariement. Cas de l'ESC-A (section 6.2).

La figure 5.4 montre un exemple de corrélation calcul-essais relatif au modèle de l'ESC-A (section 6.2.3). À gauche est représenté le critère *MAC* sur les capteurs en prenant $Q'_j = I$ pour chaque mode expérimental (la taille des carrés est proportionnelle à la valeur du *MAC*). Après appariement, on trace (figure de droite) la valeur du *MAC* pour chaque couple apparié, ainsi que l'erreur relative en fréquence. On voit que dans ce cas précis, la corrélation est plutôt

bonne avec moins de 10% d'erreur relative en fréquence et des MAC_{capt} tous supérieurs à 0.8. On remarque d'autre part que les modes expérimentaux 9 et 10 sont appariés aux modes EF 10 et 9 respectivement, et que les modes EF 13 et 14 n'ont pas été mesurés (aucun des modes mesurés n'est apparié avec eux).

5.1.6 Fonctions objectif $freq - MAC$

Les fonctions objectif permettent de mesurer la distance entre données expérimentales et résultats issus du calcul EF, afin de réaliser une optimisation paramétrique appelée recalage.

On considère dans ce mémoire deux types de critères, à savoir le critère $freq - MAC$ basé sur la corrélation géométrique et les écarts en fréquence, et un critère énergétique exposé en section 5.2.4.

La fonction objectif $freq - MAC$ combine une mesure de l'erreur sur les fréquences ainsi que le critère MAC . Pour chaque mode expérimental j , on définit un résidu comprenant l'erreur relative en fréquence ainsi que le terme $1 - MAC$ pour le couple de modes appariés i, j (idéalement, le MAC vaut 1). Le résidu s'écrit alors

$$R_j(p) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{f_{EF,i} - f_{Test,j}}{f_{Test,j}} \\ \beta(1 - MAC_{i,j}) \end{array} \right\},$$

où i représente le mode EF apparié (automatiquement) au mode expérimental j et β est un coefficient de pondération calculé de manière à ce que pour le modèle nominal ($p = p_0$, voir section 5.3.1), on ait le même poids pour les critères erreur en fréquence et MAC (moyennés sur les NM modes test cibles), i.e.

$$\beta \sqrt{\sum_{j=1}^{NM} \|1 - MAC_{i,j}\|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{NM} \left\| \frac{f_{EF,i} - f_{Test,j}}{f_{Test,j}} \right\|^2}. \quad (5.3)$$

La fonction objectif $J_{freq-MAC}$ associée aux NM résidus $R_j(p)$ s'écrit alors

$$J_{freq-MAC}(p) = \sqrt{\sum_{j=1}^{NM} \|R_j(p)\|^2}. \quad (5.4)$$

Cette fonction objectif a l'avantage de donner une mesure très pragmatique de la distance entre les expériences et le modèle EF. Ainsi, les critères MAC et erreurs en fréquence sont plus employés par l'industrie que les critères énergétiques (section 5.2). Mais cette fonction objectif a aussi le grand désavantage de ne pas être régulière, du fait que les appariements réalisés par le critère $freq-MAC$ ne sont pas les mêmes lorsque l'on fait varier certains paramètres du modèle EF. Ceci implique que la fonction $J_{freq-MAC}(p)$ possède souvent plusieurs minima locaux (voir figure 5.5), et l'application de méthodes d'optimisation simples (telles que les méthodes de sensibilité) ne permet pas forcément de trouver le minimum global.

Ainsi, on est contraint d'utiliser des méthodes d'optimisation plus complexes, telles celle de Levenberg-Marquardt [25], pour assurer la convergence. A l'inverse, on verra que les fonctions objectif énergétiques (section 5.2.4) sont d'allure beaucoup plus régulière, ce qui facilite leur minimisation.

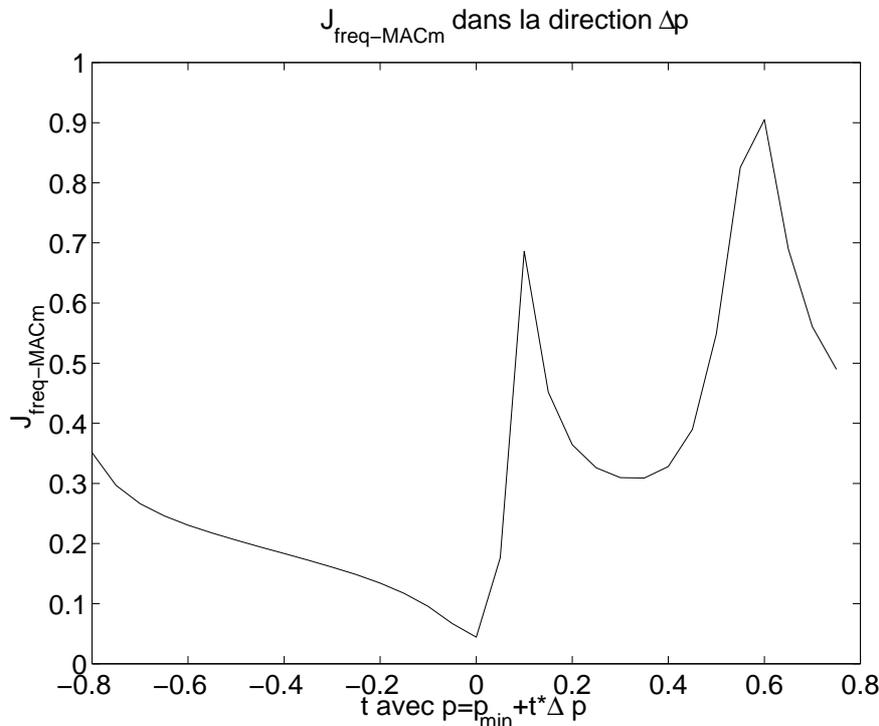


FIG. 5.5 – Exemple d'évolution du critère $J_{freq-MAC_{M,capt}}$ pour la maquette Garteur, observé dans une direction paramétrique particulière.

5.2 Critères en énergie

L'écart entre un modèle et des expériences peut aussi être estimé par l'intermédiaire de mesures énergétiques. La distance est alors composée de deux termes.

Le premier, appelé erreur de modèle, traduit le fait que les résultats expérimentaux ne vérifient pas l'équation de la dynamique et permet de remettre en cause la fiabilité du modèle. Il est à rapprocher, bien que sa formulation soit différente, de l'erreur en relation de comportement (ERDC) développée au LMT [44] [23] [27].

Le deuxième terme, appelé erreur de mesure, quantifie la distance entre données expérimentales et données EF projetées sur les capteurs. Il correspond dans l'ERDC à l'erreur sur les amplitudes mesurées qui mène à la construction de l'ERDC "modifiée" pour le recalage [27].

La section 5.2.1 détaille les deux termes d'erreur, puis la procédure d'expansion associée est exposée en section 5.2.2, et enfin la section 5.2.4 définit la fonction objectif basée sur ces critères énergétiques.

5.2.1 Erreurs de modèle et de mesure

La distance calcul-essais est ici définie par deux termes d'erreur, à savoir un terme d'erreur de modèle et un terme d'erreur de mesure.

L'erreur de modèle est définie comme étant la norme en énergie de déformation d'un résidu dynamique. Pour les modes propres, on définit classiquement le résidu dynamique par $R_{L,j} = Z(\omega_j)\phi_j$ et pour les fonctions de réponses en fréquence par $R_L = Z(\omega)q(\omega) - F(\omega)$. Pour la rigidité dynamique Z d'un modèle inexact calculée aux fréquences expérimentales et des déformées expérimentales étendues $\phi_{exp,j}$ ou q , ces résidus ne sont pas nuls.

Ces résidus dynamiques correspondant à des efforts généralisés, on doit leur associer des résidus en déplacement pour obtenir un indicateur d'erreur en énergie. Ceci est réalisé en calculant la réponse statique associée aux efforts généralisés

$$R_{D,j} = \hat{K}^{-1}R_{L,j}, \quad (5.5)$$

où \hat{K}^{-1} est l'opérateur décrit en section 1.2.

L'erreur de modèle est alors définie comme étant la norme en énergie de déformation du résidu en déplacement

$$\|R_{D,j}\|_K^2 = \{R_{D,j}\}^T [K] \{R_{D,j}\}. \quad (5.6)$$

L'erreur sur les mesures est elle définie par la distance entre les mesures $\{y_{Test,j}\}$ et la projection du mode EF sur les DDLs mesurés $c\{\phi_{exp,j}\}$ (c est l'opérateur de projection ou encore la matrice d'observation, cf. section 5.1), c'est à dire

$$\epsilon(\phi_{exp,j}) = \|\{y_{Test,j}\} - c\{\phi_{exp,j}\}\|_{Q_j}^2. \quad (5.7)$$

La norme quadratique Q_j permet la pondération des différents capteurs (un capteur défaillant peut ainsi être éliminé en fixant le terme correspondant de Q_j à 0). Une norme quadratique paraît plus appropriée qu'une norme en énergie de déformation comme celle proposée par Chouaki [24] ou Deraemaeker [27]. En effet, la signification physique d'une norme énergétique sur les mesures n'est pas évidente.

5.2.2 Expansion MDRE

L'expansion par minimisation du résidu dynamique (ou MDRE pour Minimum Dynamic Residual Expansion) est basée sur la minimisation, pour chaque mode expérimental j , d'une somme pondérée de l'erreur de modèle (5.6) et de l'erreur sur les mesures (5.7).

$$J(\omega_{Test,j}) = \min_{\phi_{exp,j}} (\|R_D(\phi_{exp,j})\|_K^2 + \gamma_j \epsilon(\phi_{exp,j})). \quad (5.8)$$

Le facteur de pondération γ_j étant défini de manière itérative de sorte que

$$\frac{\|\{y_{Test,j}\} - c\{\phi_{exp,j}\}\|_{Q_j}}{\|\{y_{Test,j}\}\|_{Q_j}} = \delta_j, \quad (5.9)$$

où δ_j représente une estimation de l'erreur relative sur les mesures $\{y_{Test,j}\}$. Le choix de cette valeur dépend donc d'une quantification *a priori* de l'erreur sur les mesures.

La quantification *a priori* des erreurs de mesures est une question ouverte. Certains travaux [35] ont cherché à utiliser des informations sur la variance du signal mesuré (répétabilité) pour estimer une variance des informations modales identifiées. On pourrait aussi considérer des variances liées à des essais de reproductibilité (démontage/remontage, pièces différentes, etc.). Au final cependant, les estimations de propriétés modales sont, en général, significativement biaisées. La validité des variances estimées n'est donc pas systématique. Pour les méthodes d'appropriation [11], la partie en phase de la réponse harmonique donne aussi une indication de la qualité de séparation du mode mesuré, mais il n'y a pas de transcription directe de cette indication en une valeur pour δ_j .

Dans l'étude menée en section 5.4.2, on cherche à tester la capacité à localiser des erreurs dans un modèle préalablement perturbé à partir de résultats pseudo-expérimentaux. Pour tenir compte du caractère inexact des vraies mesures on perturbe alors les pseudo-mesures par des "bruits" liés aux deux modèles d'erreur suivants.

Le premier (**Bruit 1**) considère des erreurs fréquentes dans les mesures par appropriation, où les modes voisins viennent perturber le mode que l'on tente d'approprier. Pour ce type d'erreur, au lieu de prendre $y_{Test} = c\phi(p_0)$ (les résultats pseudo-expérimentaux sont construits à l'aide du modèle nominal ($p = p_0$) par projection des résultats EF sur les capteurs), on construit pour chaque mode j

$$\{y_{Test,j}\} = c\{\phi(p_0)_j\} + \sigma_j \left(\sum_{i \neq j} x([-1; 1]) \frac{c\{\phi(p_0)_i\}}{|\omega_i^2 - \omega_j^2|} \right) A_j, \quad (5.10)$$

où σ_j est le niveau d'erreur introduit dans le mode j , $x([-1; 1])$ est un nombre aléatoire compris entre -1 et 1 (de distribution uniforme) et le terme $\frac{1}{|\omega_i^2 - \omega_j^2|}$ permet de prendre en compte le fait que les modes proches en fréquence interagissent plus que les modes à fréquences éloignées. Le terme de pondération A_j permet lui de vérifier la contrainte $\frac{\|\{y_{Test,j}\} - c\{\phi(p_0)_j\}\|}{\|\{y_{Test,j}\}\|} = \sigma_j$ (on prend ici $Q_j = I$, cf. (5.9)).

Le deuxième modèle d'erreur (**Bruit 2**) est un bruit aléatoire multiplicatif sur chaque capteur, c'est à dire que l'on construit chaque composante k de $y_{Test,j}$ (qui correspond au capteur k) par

$$y_{Test,j,k} = c\phi(p_0)_{j,k}(1 + \sigma_j x([-1; 1])) A_j \quad (5.11)$$

où σ_j est le niveau d'erreur introduit dans le mode j , $x([-1; 1])$ est un nombre aléatoire compris entre -1 et 1 (de distribution uniforme) et où le terme de pondération A_j permet de vérifier la contrainte $\frac{\|\{y_{Test,j}\} - c\{\phi(p_0)_j\}\|}{\|\{y_{Test,j}\}\|} = \sigma_j$ (ici aussi $Q_j = I$).

5.2.3 Formulation à deux champs de l'expansion

On cherche ici à reformuler (5.8) sous une forme appropriée au développement de méthodes itératives. En effet, plutôt que d'utiliser l'opérateur \hat{K} (équation (5.5)), on peut définir le résidu en déplacement par la relation $[K] \{R_{D,j}\} - [Z(\omega_{Test,j})] \{\phi_{exp,j}\} = 0$, et introduire un multiplicateur de Lagrange λ_j pour ajouter cette contrainte à la formulation du problème de minimisation (5.8). On obtient alors

$$\begin{aligned} J(\omega_{Test,j}) = & \min_{R_{D,j}, \phi_{exp,j}, \lambda_j} \left(\{R_{D,j}\}^T K \{R_{D,j}\} \right. \\ & + \gamma_j \|c \{\phi_{exp,j}\} - \{y_{Test,j}\}\|_{Q_j}^2 \\ & \left. + \lambda_j (K \cdot \{R_{D,j}\} - Z(\omega_{Test,j}) \{\phi_{exp,j}\}) \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

A l'optimum, la dérivée de $J(\omega_{Test,j})$ par rapport à $R_{D,j}$, $\phi_{exp,j}$ et λ_j doit être nulle, ce qui implique

$$\begin{bmatrix} K & 0 & K \\ 0 & \gamma_j c^T Q_j c & -Z_j \\ K & -Z_j & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{D,j} \\ \phi_{exp,j} \\ \lambda_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma_j c^T Q_j y_{Test,j} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.13)$$

où $Z_j = Z(\omega_{Test,j})$ est la raideur dynamique calculée aux fréquences expérimentales.

La première ligne de cette équation donne $\lambda_j = -R_{D,j}$, de sorte que les inconnues se résument aux deux champs $R_{D,j}$ et $\phi_{exp,j}$ (voir [23]). Le problème que l'on cherche à résoudre est donc

$$\begin{bmatrix} -K & Z_j \\ Z_j & \gamma_j c^T Q_j c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{D,j} \\ \phi_{exp,j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma_j c^T Q_j y_{Test,j} \end{Bmatrix}. \quad (5.14)$$

Le fait que le système (5.14) soit symétrique permet l'emploi de méthodes de résolution particulières. Pourtant cette résolution reste particulièrement coûteuse si on la réalise de manière directe. C'est pourquoi on a développé une méthode de résolution itérative exacte (cf. section 3.1.4) qui permet de mener des études systématiques sur des problèmes à grand nombre de DDLs. Le mode étendu par cette méthode satisfait à la fois des contraintes liées au modèle et des contraintes liées aux mesures, ce qui en fait une méthode d'expansion particulièrement efficace par rapport aux méthodes classiques, comme cela est montré en [8].

5.2.4 Fonction objectif associée à la MDRE

La méthode d'expansion détaillée ci-dessus donne par ailleurs une mesure de la distance calcul-essais. En effet, après avoir assemblé les matrices de masse et de raideur au point de conception p , on obtient les deux champs $(R_{D,j}(p), \phi_{exp,j}(p))$, puis en réinjectant ces solutions dans (5.8), on obtient pour chaque mode expérimental j

$$J(\omega_{Test,j}, p) = \|R_{D,j}(p)\|_K^2 + \gamma_j \|\{y_{Test,j}\} - c \{\phi_{exp,j}(p)\}\|_{Q_j}^2. \quad (5.15)$$

Ainsi on peut définir une mesure de la distance calcul-essais par la somme des $J(\omega_{Test,j}, p)$ sur les NM modes expérimentaux

$$J(\omega_{Test}, p) = \sum_{j=1}^{NM} J(\omega_{Test,j}, p). \quad (5.16)$$

Des variantes ont été introduites en [27] et [23].

Lors de l'optimisation de paramètres d'une structure par ce critère, on veillera à utiliser les mêmes valeurs γ_j pour toutes les valeurs de paramètres. En effet si l'on cherche à minimiser cette fonction, il est préférable de garder la pondération entre les deux termes d'erreur constante. Ainsi, les γ_j sont déterminés au nominal et sont ensuite considérés constants.

Le principal avantage des critères énergétiques tels que (5.16) est lié à la signification physique des erreurs de modèle et de mesure, qui induit une régularité des fonctions objectifs. Cette régularité est illustrée en figure 5.6, où l'on voit une fonction objectif beaucoup plus simple à optimiser que la fonction $J_{freq-MAC}$ illustrée en figure 5.5. Par ailleurs pour des structures présentant des modes proches, les critères énergétiques sont insensibles aux recombinaisons de modes alors que des ajustements des critères fréquence-MAC sont nécessaires (voir section 6.2.3).

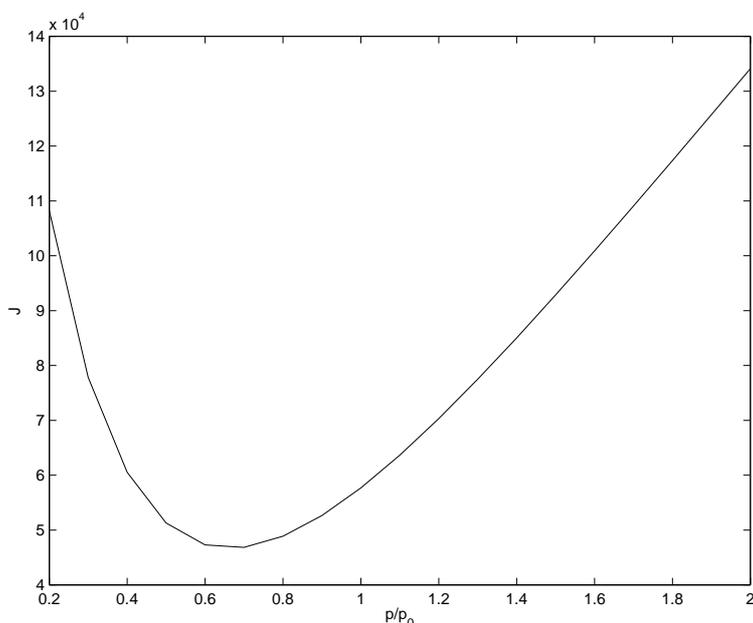


FIG. 5.6 – Somme de $J(\omega_{Test,j},p)$ sur les 14 premiers modes expérimentaux, cas de Garter, paramètre raideur de la couche de contrainte.

5.3 Paramétrisation en vue du recalage

Dans un modèle industriel, le nombre de paramètres susceptibles d'être recalés est très important. En effet si l'on définit des paramètres pour chacun des éléments du modèle, le nombre de variables à optimiser devient prohibitif et la faible sensibilité des fonctions objectif vis à vis de ces paramètres résulte dans un problème inverse très mal conditionné.

Il est donc nécessaire dans un premier temps de procéder à un regroupement des éléments du modèle en groupes d'éléments possédant des propriétés communes, comme détaillé en section 5.3.1.

Dans un deuxième temps et si le nombre de paramètres est toujours trop important, on sélectionne, parmi les paramètres ainsi définis, ceux qui ont le plus d'influence sur la distance calcul-essais. Ceci peut être réalisé par diverses méthodes telles qu'une étude de sensibilité des fonctions objectif (section 5.3.2) ou la localisation d'erreur par les critères énergétiques (section 5.3.3). La localisation d'erreur de modèle à partir de données expérimentales fait partie des problèmes de type "problème inverse". Avant d'assurer avec certitude que le modèle est erroné en un endroit particulier, il est donc utile de vérifier que des pseudo-mesures construites à partir du modèle modifié localement nous permettent réellement de localiser la perturbation introduite. Cette étude préalable de visibilité des erreurs, détaillée en section 5.4, est une contribution de cette thèse.

5.3.1 Notion de modèle paramétré

On appelle ici modèle paramétré [6] une famille de modèles de la forme générale du second ordre, dont les matrices dépendent d'un certain nombre de paramètres de conception α . Sous ces hypothèses, le modèle dynamique d'une structure libre peut être décrit par la famille d'équations

$$[M(\alpha)s^2 + C(\alpha)s + K(\alpha)] \{\phi\} = 0. \quad (5.17)$$

Ces paramètres de conception α sont généralement des masses volumiques, modules d'Young ou amortissements d'une partie de la structure, mais peuvent tout aussi bien être des épaisseurs, sections ou autres paramètres géométriques.

La dépendance au paramètre α est souvent non linéaire. Comme on se restreint pour le recalage au cas d'une paramétrisation linéaire de la flexibilité dynamique, on utilise donc des paramètres p dépendant non linéairement des α , tels que

$$[Z(p,s)] = [M(p)s^2 + C(p)s + K(p)] = \sum_{j=1}^{NP} p_j(\alpha) [Z_{j,\alpha}(s)]. \quad (5.18)$$

L'épaisseur t de plaques offrent un bon exemple de problème non linéaire pouvant être linéarisé. En effet il suffit de définir trois paramètres p : t pour les propriétés de membrane, t^3 pour la flexion et t^2 pour les effets de couplage. Cette méthode est applicable à la plupart des paramètres α liés à des propriétés élastiques, lorsque α peut être décomposé en un nombre fini de paramètres p . Mais certains cas (paramètres représentant des positions de noeuds, des courbures, etc.) ne peuvent être traités de cette manière.

Dans le cadre de cette thèse on se limitera à des paramètres de type masse et raideur qui ont un effet linéaire et on considèrera pour le recalage des structures non amorties, pour lesquelles $C = 0$. Dans ce cas on peut utiliser (5.18) en considérant $p_j(\alpha) = \alpha$, car l'effet de ces paramètres est linéaire. Une décomposition supplémentaire permet d'écrire les matrices

comme une somme pondérée sur les différentes matrices élémentaires (matrices associées à chaque élément de la structure)

$$[M(p)] = \sum_{j=1}^{NE} p_j^M [M_j^e], \text{ et } [K(p)] = \sum_{j=1}^{NE} p_j^K [K_j^e], \quad (5.19)$$

où le modèle nominal correspond à $p_j^M = p_j^K = 1$. Ce type de décomposition a un sens physique dans la mesure où elle permet de faire varier les propriétés matériaux de certains éléments sans pour autant modifier la connectivité.

Cette écriture permet de paramétrer le modèle par groupes d'éléments (ou sous-structures) possédant des propriétés communes. Pour un paramètre de masse associé à la sous-structure i contenant les éléments e_i , on aura ainsi

$$\begin{aligned} p_j^M &= 1 \text{ pour } j \notin e_i \\ p_j^M &= p_i \text{ pour } j \in e_i \\ p_j^K &= 1. \end{aligned} \quad (5.20)$$

La procédure est similaire pour des paramètres de raideur.

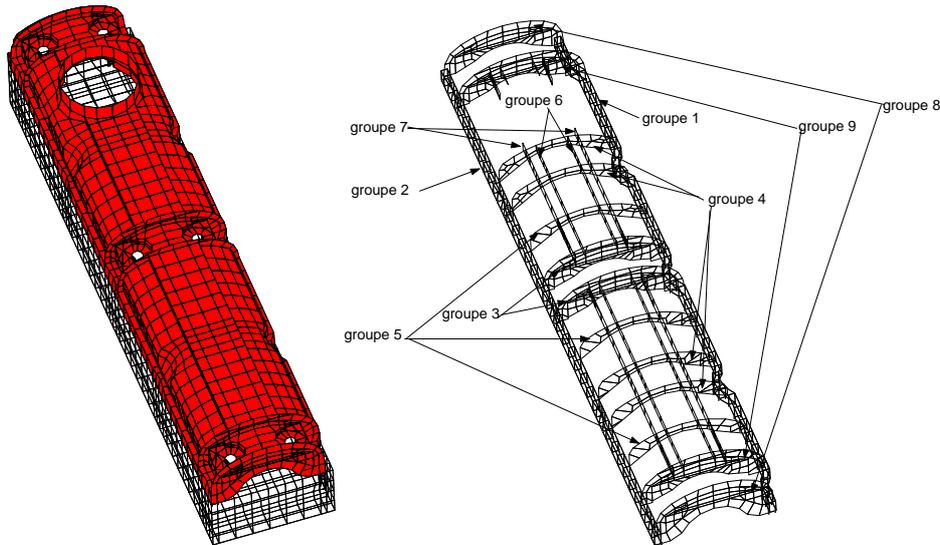


FIG. 5.7 – **a**: Modèle d'un couvre-culasse Renault vissé sur un bloc métallique. **b**: groupes d'éléments sélectionnés, ils représentent les nervures et renforts situés au-dessous de la partie supérieure. Le groupe 10 est composé des 564 ressorts de jonction connectant la partie haute à la partie basse.

Un exemple de ce type de paramétrisation est présenté dans le cas d'un modèle de couvre-culasse Renault comptant 16840 DDLs (figure 5.7.a). Ce modèle, initialement composé de

4154 éléments, est paramétré en définissant 10 groupes d'éléments. Les neuf premiers correspondent à des renforts ou nervures de la partie haute (figure 5.7.b) et le groupe 10 est composé des 564 ressorts de jonction connectant le couvre culasse à son bloc support. Les éléments non affectés par les 10 paramètres forment eux un groupe complémentaire dont les propriétés sont invariantes.

De cette manière, le nombre de paramètres susceptibles d'être recalés est réduit pour atteindre dans le cas présenté 2×10 paramètres (masses volumiques et modules d'Young des 10 sous-structures à propriétés variables). Pourtant pour des modèles complexes tels ceux étudiés au chapitre 6, cette étape de regroupement conduit généralement à un nombre de paramètres qui reste trop élevé pour procéder efficacement à un recalage. Une étape supplémentaire de sélection de ces paramètres, qui peut être réalisée par des études de sensibilité (section 5.3.2) ou de localisation d'erreur (section 5.3.3), est alors nécessaire.

5.3.2 Etude de sensibilité

Une procédure classique de sélection de paramètres consiste à mener une étude de sensibilité, c'est à dire d'étudier la sensibilité, par rapport aux différents paramètres, des fonctions objectif décrites dans les sections 5.1.6 et 5.2.4.

5.3.2.1 Critère *freq* – *MAC*

Pour ce qui est de la distance calcul-essais d'un point de vue géométrique et fréquentiel, il est intéressant d'étudier la sensibilité des fonctions $1 - MAC$ et $\Delta f/f$ aux divers paramètres retenus.

Si l'on considère le cas du *MAC* sur les mesures (les cas des autres *MAC* sont similaires), la sensibilité s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{dMAC_{i,j}}{dp} = \frac{\partial MAC_{i,j}}{\partial p} = 2 \frac{[\{y_{Test,j}\}^T [Q'_j] \{c \frac{\partial \phi_{EF,i}}{\partial p}\}] [\{y_{Test,j}\}^T [Q'_j] \{c\phi_{EF,i}\}]}{\|\{y_{Test,j}\}\|_{Q'_j}^2 \|\{c\phi_{EF,i}\}\|_{Q'_j}^2} \\ - 2 \frac{\|\{y_{Test,j}\}\|_{Q'_j}^2 \left[\left\{ c \frac{\partial \phi_{EF,i}}{\partial p} \right\}^T [Q'_j] \{c\phi_{EF,i}\} \right] [\{y_{Test,j}\}^T [Q'_j] \{c\phi_{EF,i}\}]^2}{\|\{y_{Test,j}\}\|_{Q'_j}^4 \|\{c\phi_{EF,i}\}\|_{Q'_j}^4}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

où $\partial \phi_{EF,i}/\partial p$ est généralement calculé de manière approchée par les techniques détaillées dans le chapitre 4.

Les dérivées de $f_{EF,i}^2$ sont elles données par (cf. chapitre 4)

$$\frac{d\omega_i^2}{dp} = \frac{\partial \omega_i^2}{\partial p} = \{\phi_i\}^T \frac{\partial Z(\omega_i, p)}{\partial p} \{\phi_i\}, \quad (5.22)$$

où $Z(\omega_i, p)$ est la raideur dynamique de la structure étudiée.

5.3.2.2 Critère énergétique

Le calcul de la sensibilité de la fonction énergétique (5.16) utilise le fait que les modes étendus minimisent (5.15). Si l'on écrit la dérivée sous la forme

$$\frac{dJ(\phi_{exp,j},p)}{dp} = \frac{\partial J(\phi_{exp,j},p)}{\partial p} + \frac{\partial J(\phi_{exp,j},p)}{\partial \phi_{exp,j}} \times \frac{\partial \phi_{exp,j}}{\partial p}, \quad (5.23)$$

alors comme $\frac{\partial J(\phi_{exp,j},p)}{\partial \phi_{exp,j}} = 0$, donc

$$\frac{dJ(\phi_{exp,j},p)}{dp} = \frac{\partial J(\phi_{exp,j},p)}{\partial p}. \quad (5.24)$$

Comme γ_j est constant (ce coefficient est calculé pour la structure nominale), alors

$$\begin{aligned} \frac{dJ(\phi_{exp,j},p)}{dp} &= \frac{d}{dp} \left(R_{D,j}(p)^T K(p) R_{D,j}(p) \right) \\ &= \frac{d}{dp} \left((K(p)^{-1} Z(\omega_j, p) \phi_{exp,j}(p))^T K(p) (K(p)^{-1} Z(\omega_j, p) \phi_{exp,j}(p)) \right) \\ &= \phi_{exp,j}(p)^T \frac{d}{dp} \left((K(p)^{-1} Z(\omega_j, p))^T K(p) (K(p)^{-1} Z(\omega_j, p)) \phi_{exp,j}(p) \right), \end{aligned} \quad (5.25)$$

en notant $\omega_j = \omega_{Test,j}$ et en supposant $K(p)$ inversible (sinon on considère l'opérateur \hat{K}). D'où l'on tire, en utilisant la symétrie de $K(p)$ et de $M(p)$,

$$\frac{dJ(\phi_{exp,j},p)}{dp} = 2\phi_{exp,j}(p)^T \frac{\partial Z(\omega_j, p)}{\partial p} R_{D,j}(p) - R_{D,j}(p)^T \frac{\partial K(p)}{\partial p} R_{D,j}(p). \quad (5.26)$$

Les dérivées ainsi obtenues sont tracées sur la figure 5.8 qui représente, pour le cas du couvre culasse Renault, l'évolution de $J(\omega_{Test,7},p)$ et de ces dérivées lorsque la raideur relative K/K_0 du socle (représenté par un maillage filaire sur la figure 5.7.a) varie.

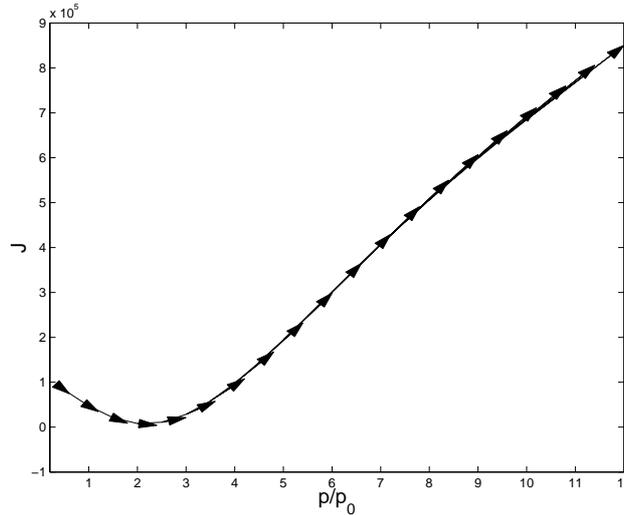


FIG. 5.8 – $J(\omega_{Test,7},p)$ pour le mode 7 et dérivées correspondantes, fonction de la raideur relative du socle. Cas du couvre-culasse Renault.

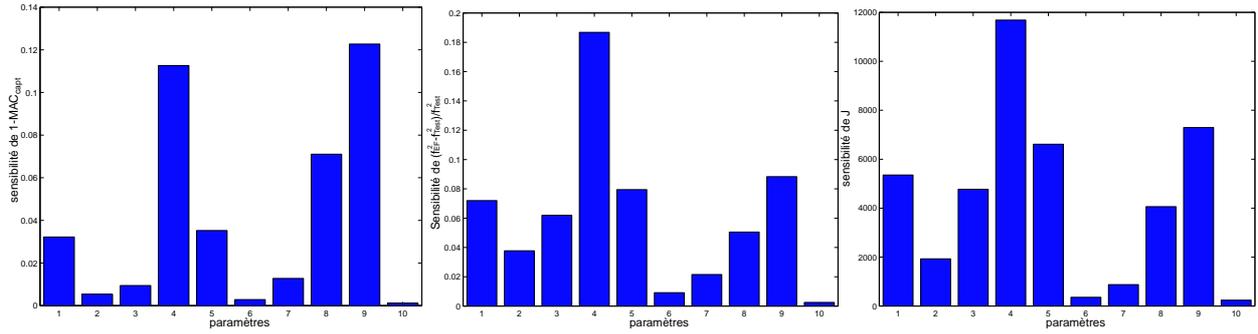


FIG. 5.9 – Sensibilités des critères **a**: $1 - MAC$, **b**: $\Delta f/f$ et **c**: $J(\omega_{Test})$. Cas du couvre culasse, paramètres 1 à 10.

Les figures 5.9.a, b et c représentent, pour le modèle du couvre culasse, la moyenne sur les 14 modes cibles de la valeur absolue des sensibilités des fonctions $1 - MAC$, $\Delta f/f$ et $J(\omega_{Test})$ respectivement, par rapport aux raideurs des 10 groupes d'éléments définis en figure 5.7.

Les trois fonctions ne sont pas sensibles aux mêmes paramètres, néanmoins les paramètres 4 et 9 (raideurs de renforts transverses) semblent particulièrement sensibles. De même les raideurs des groupes 6 et 7 (raideurs de renforts longitudinaux) semblent très peu sensibles. La raideur du groupe 10 paraît insensible, mais ceci est dû au fait qu'elle représente les ressorts de jonction dont la raideur est très élevée (10^8N/m). Comme l'indique le paragraphe suivant, les sensibilités des raideurs de liens rigides devraient être étudiées en utilisant une échelle logarithmique.

5.3.2.3 Cas particulier des liens "rigides"

Les liaisons rigides peuvent être modélisées soit par élimination, c'est à dire en imposant une relation de lien rigide entre les DDLs esclaves et les DDLs maîtres (les DDLs esclaves sont alors éliminés), soit par pénalisation, c'est à dire en intercalant un ressort de raideur élevée entre les DDLs maîtres et les DDLs esclaves. La méthode de pénalisation a l'avantage de permettre la variation de la raideur du lien rigide, qui devient ainsi un paramètre supplémentaire du modèle. Par contre elle peut introduire des problèmes de conditionnement numérique, car les raideurs des ressorts peuvent être très élevées et le rapport de certains termes de la matrice de raideur peut alors être au-delà de la précision numérique.

Dans le modèle du couvre culasse étudié ici, on a choisi pour la modélisation de la liaison couvre culasse - bloc support de procéder par pénalisation en utilisant des ressorts de jonction, notamment du fait que la jonction fait intervenir une couche de caoutchouc contrainte par des vis, ce qui n'en fait pas une liaison totalement rigide. De plus, le fait de procéder par pénalisation permet d'étudier l'influence de la raideur des liens rigides sur la dynamique de la structure.

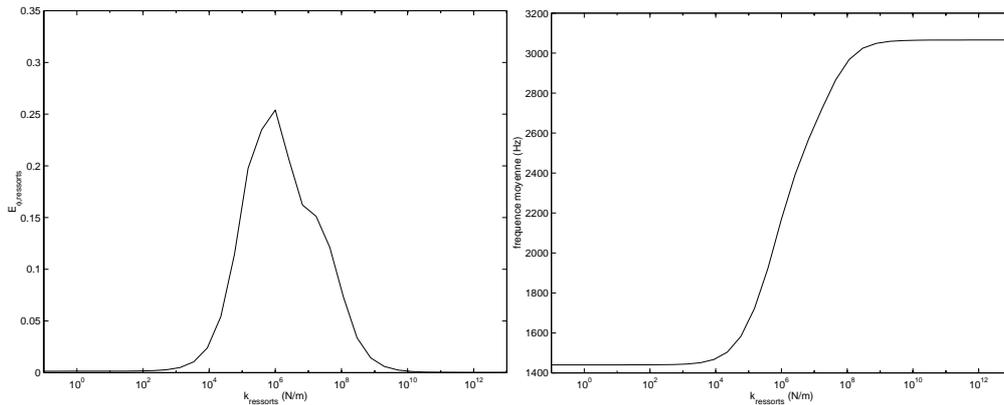


FIG. 5.10 – **a** : Fraction de l'énergie de déformation dans les ressorts de jonction (moyenne sur les 14 premiers modes flexibles), **b** : fréquence moyenne (sur les 14 premiers modes flexibles) fonction de la raideur des ressorts de jonction.

La figure 5.10 donne un exemple de ce type d'étude en échelle logarithmique, où l'on peut visualiser la fraction d'énergie de déformation dans les ressorts de jonction par rapport à l'énergie de déformation totale, moyennée sur les 14 premiers modes flexibles (figure 5.10.a), ou encore la fréquence moyenne sur les 14 premiers modes flexibles (figure 5.10.b), fonction de la raideur des ressorts de jonction.

La figure 5.10 montre que la raideur des ressorts de jonction est un paramètre qui n'est sensible que dans une gamme de raideur donnée (de 10^4 à 10^9 N/m environ), avec des paliers en dehors de ces plages. La fraction d'énergie atteint un pic pour une raideur de 10^6 N/m environ et a une valeur très faible pour une raideur élevée (car alors les ressorts sont trop raides pour se déformer) et pour une raideur faible (car alors la raideur est trop faible pour stocker de l'énergie). De manière similaire, la fréquence de résonance moyenne augmente considérablement avec la raideur des ressorts de jonction, en passant par deux paliers.

On voit donc que l'étude des liens rigides ne peut être menée de la même manière que pour des éléments "classiques". Ainsi si l'on cherche à étudier la sensibilité de liaisons rigides, la capacité à les localiser, ou si l'on cherche à recalibrer leur raideur, il faut travailler sur des plages de variation plus étendues, en utilisant une échelle logarithmique et en démarrant la procédure par un calage des paramètres de façon à se placer dans la zone sensible. Les procédures d'étude de sensibilité ou de recalage développées dans cette thèse ne sont pas adaptées à l'étude spécifique de liaisons très raides. Ceci constitue donc une perspective pour de futurs travaux.

5.3.3 Localisation d'erreur-MDRE

La localisation d'erreur à partir des résidus dynamiques de la MDRE (section 5.2.2) constitue une alternative à l'étude des sensibilités pour la sélection des paramètres à recaler.

En effet, les résidus $R_{D,j}$ issus du problème de minimisation traduisent le fait que les modes expérimentaux étendus $\phi_{exp,j}$ ne satisfont pas l'équation dynamique du modèle, c'est à dire $[K]\{R_{D,j}\} = [Z(\omega_{Test,j})]\phi_{exp,j} \neq 0$. Le défaut d'équilibre étant local il est naturel d'utiliser la répartition du résidu en déplacement pour essayer de localiser les erreurs de modèle.

Par exemple, on peut réaliser la localisation en considérant l'énergie élémentaire de ces résidus moyennée sur les NM modes expérimentaux, $\frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} (R_{D,j}^T K^{el} R_{D,j})$, et étudier la répartition de cette quantité sur les éléments de la structure.

Un exemple de localisation visuelle à partir de cette quantité est exposé en figure 5.11, où les zones les plus sombres sont celles où l'énergie moyenne du résidu est importante. Cette procédure de localisation d'erreur, bien que particulièrement simple à implémenter, ne permet pourtant pas la localisation de l'erreur dans un groupe d'éléments donné. En effet il n'est pas aisé, à partir de la figure 5.11, de désigner un groupe comme étant celui qui est erroné. De plus ces tracés conduisent souvent à des erreurs d'interprétation : les ressorts ou poutres sont souvent peu visibles sur le tracé, beaucoup de faces sont cachées dans des structures complexes, etc.

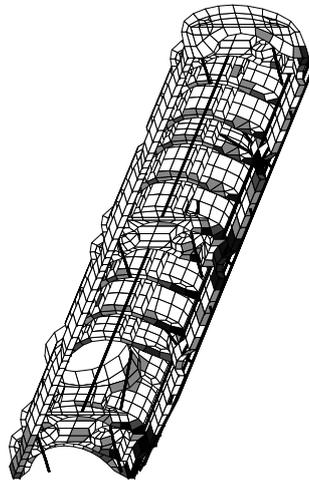


FIG. 5.11 – Localisation visuelle à partir de l'énergie élémentaire moyenne des résidus.

Il est donc nécessaire de développer des indicateurs d'erreur dont l'interprétation est plus systématique. La localisation résultant d'un problème inverse (on cherche à retrouver une

erreur à partir d'observations), il convient de s'assurer qu'un défaut introduit délibérément dans le modèle est visible par l'étude de ces indicateurs. Ceci fait l'objet de la section suivante.

5.4 Visibilité d'erreur-MDRE

La section précédente ayant montré les limitations d'une utilisation directe du résidu en déplacement issu de la MDRE pour localiser des erreurs de modèle, on propose ici une méthodologie destinée à valider des indicateurs d'erreur et leur gamme d'utilisation.

La méthodologie présentée fait intervenir des critères d'erreur, qui permettent de décider si un paramètre est erroné, et propose une étude préalable de visibilité qui permet de valider la capacité de chaque critère à détecter l'erreur possible sur chaque paramètre.

Cette méthodologie est illustrée pour le modèle du couvre culasse présenté en figure 5.7 pour lequel on génère des pseudo-mesures à partir des 14 premiers modes flexibles du modèle nominal ($p = p_0$). Les paramètres que l'on cherche à valider sont des perturbations en raideur sur chaque groupe d'éléments décrits en figure 5.7.b.

En section 5.4.1, on introduit les critères de localisation et on utilise les résidus exacts (sans passer par l'étape d'expansion, c'est à dire en supposant des mesures sur tous les DDLs du modèle) pour vérifier si ces critères permettent effectivement la localisation.

En section 5.4.2, on utilise des pseudo-mesures sur les 66 capteurs définis en figure 5.12.a, que l'on étend par la MDRE pour valider la capacité des critères retenus à localiser une erreur pour un essai réel. On aborde ensuite les questions importantes du choix des indicateurs, de l'influence des bruits de mesure réels et supposés, de l'influence d'erreurs de modèle résiduelles, et du placement de capteurs en vue de rendre visible un paramètre particulier.

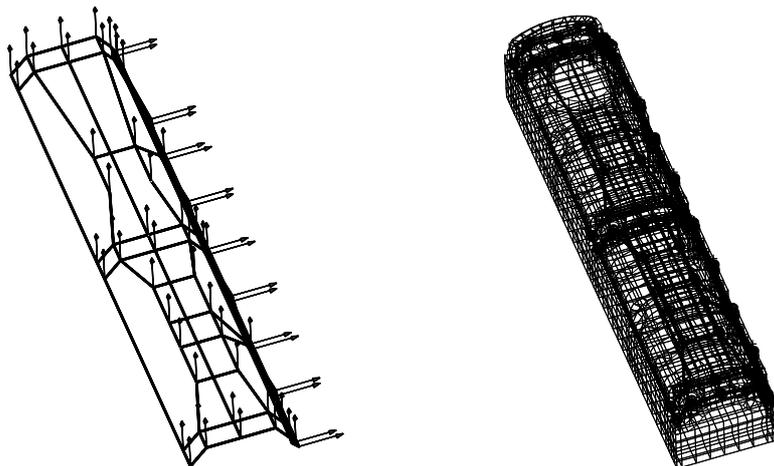


FIG. 5.12 – **a**: Directions de mesure des capteurs, **b**: Maillage expérimental (en gras) du couvre culasse.

5.4.1 Visibilité avec le résidu exact

Une des motivations de l'utilisation de la MDRE pour la localisation d'erreur est que les résidus en déplacement permettent théoriquement la localisation. Si l'on utilise la structure nominale ($p = p_0$) pour générer des pseudo-mesures et que la structure modifiée ($p = p_{mod}$) est utilisée pour l'expansion, la MDRE fournit idéalement une approximation de

$$R_D = \hat{K}_{p_{mod}}^{-1} (Z_{p_{mod}}(\omega_{p_0})\phi_{p_0}), \quad (5.27)$$

où ϕ_{p_0} sont les modes calculés pour $p = p_0$ (pseudo-mesures) et $Z_{p_{mod}}(\omega_{p_0})$ est la matrice de raideur dynamique assemblée pour $p = p_{mod}$ aux fréquences pseudo-expérimentales ω_{p_0} .

La localisation d'erreur est alors réalisée en étudiant la répartition d'énergie des résidus associés aux NM modes « expérimentaux ».

Comme le montre la figure 5.11, la localisation visuelle ne permet généralement pas la localisation d'erreur.

C'est pourquoi on propose ici des indicateurs d'erreur plus fiables. Pour chacune des modifications en raideur apportées au modèle, on calcule l'énergie de déformation des résidus R_D et des modes étendus ϕ_{exp} (ici $\phi_{exp} = \phi_{p_0}$ car on suppose des mesures sur tous les DDLs) dans chacune des $i = [1..11]$ sous-structures caractérisées par la liste des éléments associés.

Les différentes quantités étudiées pour la localisation sont alors la moyenne des fractions d'énergie de déformation modale

$$E_{1,\phi,i} = \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} \left(\frac{\sum_{el \in ss-struct.i} \phi_{exp,j}^T K^{el} \phi_{exp,j}}{\sum_{struct} \phi_{exp,j}^T K^{el} \phi_{exp,j}} \right), \quad (5.28)$$

la fraction des énergies de déformation modales moyennes

$$E_{2,\phi,i} = \frac{\frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} (\sum_{el \in ss-struct.i} \phi_{exp,j}^T K^{el} \phi_{exp,j})}{\frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} (\sum_{struct} \phi_{exp,j}^T K^{el} \phi_{exp,j})}, \quad (5.29)$$

la moyenne de l'énergie relative des résidus par rapport à celle des modes

$$E_{1,R_D,i} = \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} \left(\frac{\sum_{el \in ss-struct.i} R_{D,j}^T K^{el} R_{D,j}}{\sum_{struct} \phi_{exp,j}^T K^{el} \phi_{exp,j}} \right), \quad (5.30)$$

la fraction des moyennes des énergies

$$E_{2,R_D,i} = \frac{\frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} (\sum_{el \in ss-struct.i} R_{D,j}^T K^{el} R_{D,j})}{\frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} (\sum_{struct} \phi_{exp,j}^T K^{el} \phi_{exp,j})}, \quad (5.31)$$

la moyenne de l'énergie relative dans la sous-structure i des résidus par rapport à celle des modes

$$E'_{1,R_D,i} = \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} \left(\frac{\sum_{el \in ss-struct.i} R_{D,j}^T K^{el} R_{D,j}}{\sum_{el \in ss-struct.i} \phi_{exp,j}^T K^{el} \phi_{exp,j}} \right) \quad (5.32)$$

et la fraction des moyennes dans la sous-structure i

$$E'_{2,R_D,i} = \frac{\frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} (\sum_{el. \in ss-struct.i} R_{D,j}^T K^{el} R_{D,j})}{\frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} (\sum_{el. \in ss-struct.i} \phi_{exp,j}^T K^{el} \phi_{exp,j})}. \quad (5.33)$$

Dans le cas présent, on étudie la visibilité d'erreurs introduites dans les 10 paramètres (correspondant aux 10 groupes d'éléments définis dans la figure 5.7), en étudiant la répartition des indicateurs dans les 11 groupes d'éléments (les 10 groupes de la figure 5.7 plus le groupe complémentaire à propriété invariante).

Les indicateurs sont tracés sur des figures à deux dimensions pour permettre une meilleure lisibilité. L'abscisse correspond aux modifications introduites, c'est à dire une modification introduite dans le groupe 1, 2, ... 10 et l'ordonnée correspond aux sous-structures 1 à 11. Pour chaque modification introduite (abscisse), on visualise donc la répartition des énergies dans la structure (ordonnée). Les indicateurs ont été normalisés de manière à ce que pour chaque colonne, le maximum soit 1.

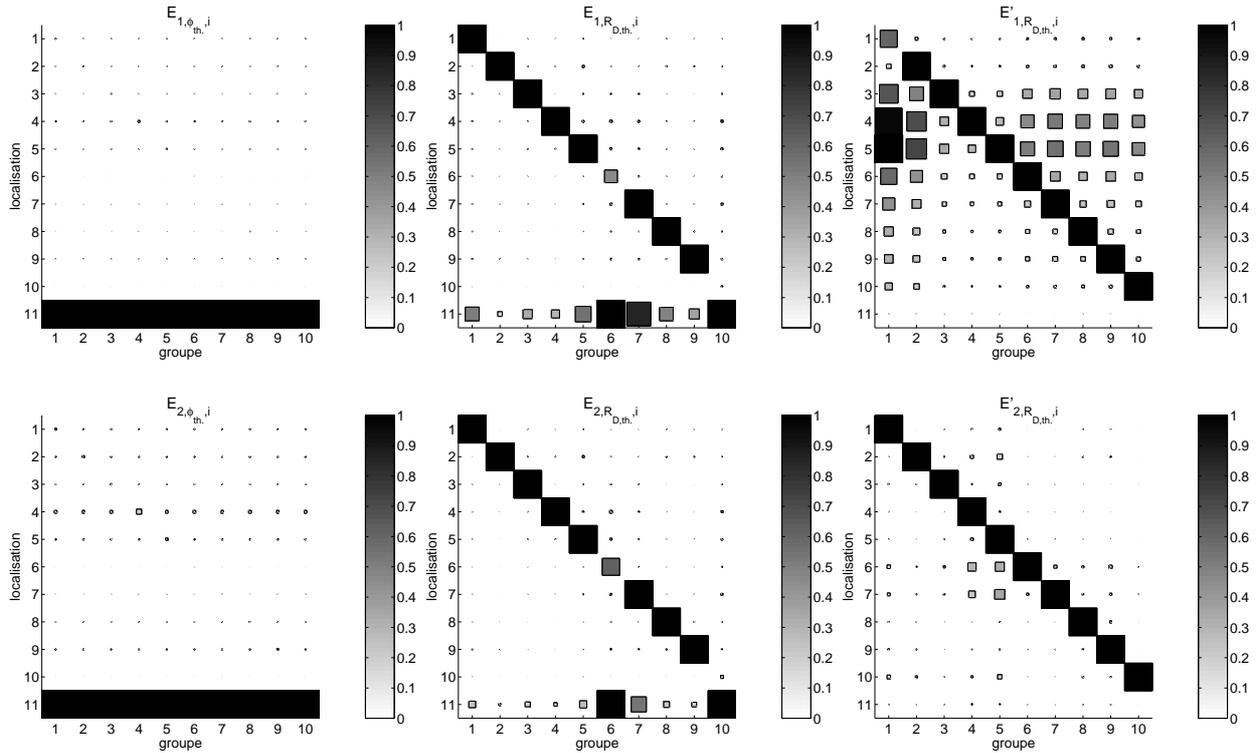


FIG. 5.13 – De gauche à droite: **a**: $E_{\phi_{th},i}$, **b**: $E_{R_D,th,i}$, **c**: $E'_{R_D,th,i}$. En abscisse: modification introduite, en ordonnée: répartition de l'énergie.

La figure 5.13 représente ces différents indicateurs, pour des pseudo-mesures formées des $NM = 14$ premiers modes flexibles de la structure nominale, supposés mesurés sur tous les

DDLs (résidus exacts). Les modifications introduites sont des modifications en raideur. Pour les groupes d'éléments 1 à 9, la raideur a été augmentée de 100% ($K_{mod} = 2K_0$) et la raideur des ressorts de jonction (groupe 10) a été divisée par 10, passant de 10^{10} N/m à 10^9 N/m.

Les indicateurs $E_{\phi,i}$ de la figure 5.13 indiquent que l'énergie des modes est principalement localisée dans la sous-structure 11 (structure complémentaire). Ceci s'explique par le fait que cette sous-structure contient beaucoup plus d'éléments que les autres. Les paramètres considérés ne sont donc pas très sensibles en terme de fraction d'énergie modale.

Par la suite, on dira qu'un paramètre est localisable (un défaut dans sa valeur est visible) par un indicateur si, lorsqu'on y introduit un défaut, l'indicateur a une valeur deux fois plus importante dans le groupe correspondant que dans n'importe quel autre.

En suivant cette règle on constate que l'indicateur E_{1,R_D} permet seulement la localisation des groupes 1, 2, 3, 4, 5, 8 et 9, E_{2,R_D} permettant aussi de localiser le groupe 7. On remarque en outre que ces deux indicateurs ont tendance à localiser l'erreur dans le groupe 11, car ils privilégient les zones où l'énergie modale est élevée. Ce défaut a motivé l'introduction des indicateurs $E'_{1,R_D,i}$ et $E'_{2,R_D,i}$.

$E'_{1,R_D,i}$ conduit à une très mauvaise localisation alors que $E'_{2,R_D,i}$ localise tous les défauts de manière quasi-parfaite.

Cette figure a été réalisée en prenant comme raideur nominale des ressorts de jonction une valeur de 10^{10} N/m, alors que par la suite, on prendra une valeur nominale de 10^8 N/m et la modification introduite sera un raidissement de ces ressorts (multiplication par 10 de la raideur). Le cas de figure d'un raidissement n'a pas été présenté ici, car alors E_{2,R_D} et $E'_{2,R_D,i}$ localisent bien les erreurs, alors que dans le cas présenté d'un assouplissement, seul $E'_{2,R_D,i}$ permet la localisation, ce qui a été vérifié dans d'autres études.

On peut conclure de cette figure, ainsi que des autres études menées durant la thèse, que les résidus en déplacement théoriques permettent généralement la localisation d'erreur, l'indicateur $E'_{2,R_D,i}$ fournissant dans le cas présent les meilleurs résultats.

5.4.2 Visibilité avec le résidu issu de la MDRE

La capacité de l'expansion par minimisation du résidu dynamique, ou MDRE, à localiser des défauts a été testée selon la procédure suivante :

$$\begin{array}{c} \text{Projection} \\ \phi(p_0) \end{array} \longrightarrow c\phi(p_0) + \epsilon = y_{Test} \quad \begin{array}{c} \text{Expansion} \\ \text{MDRE}(p_{mod}) \end{array} \longrightarrow \phi_{exp} \longrightarrow [K_{p_{mod}}] R_D = [Z_{p_{mod}}(\omega_{p_0})] \phi_{exp}. \quad (5.34)$$

Dans un premier temps, on génère des pseudo-mesures à partir des $NM = 14$ premiers modes flexibles du modèle nominal ($p = p_0$). Pour ce faire, on projette les modes du modèle nominal sur les capteurs ($c\phi(p_0)$) et on y ajoute du bruit de mesure ϵ tel que l'erreur relative introduite $\frac{\|\{y_{Test,j}\} - c\{\phi(p_0)_j\}\|_{Q_j}}{\|\{y_{Test,j}\}\|_{Q_j}}$ soit égale à σ_j (la construction des bruits de mesure est décrite dans la section 5.2.2). Les capteurs (représentés par des flèches sur la figure 5.12) ne correspondant pas forcément, en direction ou en position, à des DDLs EF, la matrice c n'est pas booléenne et des méthodes d'interpolation doivent être mises en oeuvre (cf. section 5.1.1.1).

Les pseudo-fréquences expérimentales considérées sont, elles, les fréquences du modèle nominal non bruitées. En effet, la mesure des fréquences de résonance est généralement précise.

Ces pseudo-mesures sont alors étendues par la MDRE sur l'ensemble des degrés de liberté du modèle EF en utilisant les modèles perturbés. Le but de l'étude est alors de voir si l'on peut localiser, à partir des résultats issus de l'expansion, la perturbation que l'on a introduite. En d'autres termes, on cherche à déterminer si un défaut particulier est visible par les critères (5.30) à (5.33).

Pour mémoire, la MDRE consiste en la minimisation de la somme d'une erreur de modèle et d'une erreur sur les mesures. La pondération entre ces deux termes est choisie de manière à ce que l'erreur relative sur les mesures $\frac{\|\{y_{Test,j}\} - c\{\phi_{exp,j}\}\|_{Q_j}}{\|\{y_{Test,j}\}\|_{Q_j}}$ soit égale à l'erreur relative "supposée" δ_j (cf. équation (5.9)).

Dans les sections suivantes, on va analyser la visibilité par la MDRE de défauts en raideur introduits dans des groupes d'éléments de la structure (cf. figure 5.7) ; et on illustrera l'influence de l'erreur relative introduite dans les mesures σ_j , de l'erreur relative supposée *a priori* δ_j , du nombre de paramètres perturbés ou encore de la position des capteurs.

5.4.3 Choix de l'indicateur

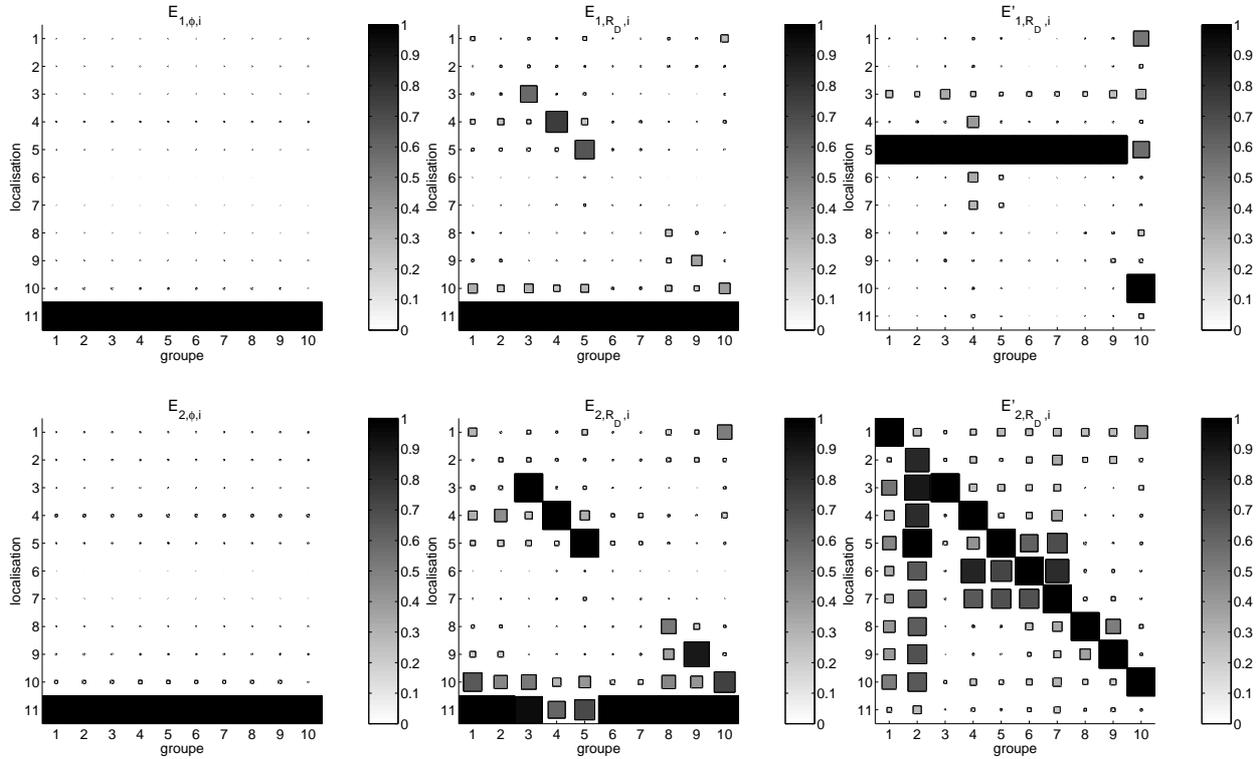


FIG. 5.14 – Localisation pour $\sigma_j = 1\%$ et $\delta_j = 1\%$ (bruit de type (5.10)). De gauche à droite : **a**: $E_{\phi,i}$, **b**: $E_{R_D,i}$, **c**: $E'_{R_D,i}$. En abscisse : modification introduite, en ordonnée : répartition de l'énergie.

La figure 5.14 montre, pour chacune des modifications introduites, la répartition dans chaque sous-structure i des différents indicateurs. De la même manière que dans l'étude de localisation avec le résidu exact, pour chaque modification introduite (abscisse) on visualise la répartition des énergies dans la structure (ordonnée). Les modifications introduites sont une augmentation de 100% de la raideur des groupes 1 à 9 ($K_{mod} = 2K_0$) et une multiplication par 10 de la raideur des ressorts de jonction (groupe 10) qui passe de 10^8 N/m à 10^9 N/m. La MDRE a été réalisée en introduisant un bruit de type (5.10) avec $\sigma_j = 1\%$ dans chaque mode j et en supposant une erreur relative $\delta_j = 1\%$.

Comme dans la section précédente, on voit que l'énergie des modes se concentre dans le groupe 11. Les indicateurs $E_{R_D,i}$ ont donc tendance à localiser dans le groupe 11 et ne permettent la localisation d'aucun groupe.

Les indicateurs E'_{R_D} étant eux définis comme des énergies relatives par sous-structure des résidus par rapport à celle des modes, le groupe 11 n'est plus privilégié par rapport aux

autres sous-structures. La localisation n'est tout de même possible que pour les groupes 3, 8, 9, 10 et dans une moindre mesure pour le groupe 1, avec l'indicateur E'_{2,R_D} .

On peut remarquer que le groupe 1 est localisable et que le groupe 2 ne l'est pas. Pourtant ces groupes sont quasiment identiques (cf. figure 5.7) et l'explication vient du fait que beaucoup de capteurs sont implantés du côté du groupe 1 et très peu du côté du groupe 2 (cf. figure 5.12.a). On verra en section 5.4.6 que le groupe 2 est localisable pour une configuration de capteurs spécifique.

5.4.4 Effets liés aux erreurs sur les mesures

On étudie ici l'influence de l'erreur relative σ_j introduite dans les pseudo-mesures et de l'erreur supposée *a priori* δ_j (cf. (5.9)). La figure 5.15 résume de manière condensée la capacité à localiser les différents groupes en fonction des valeurs de (σ_j, δ_j) , en étudiant la répartition de l'indicateur $E'_{2,R_D,i}$. En effet, seul cet indicateur permet théoriquement la localisation (section 5.4.1).

Pour une perturbation introduite dans chacun des 10 groupes d'éléments $i = 1..10$ décrits dans la figure 5.7, on visualise $\frac{E'_{2,R_D,i}}{\max_{k \neq i} (E'_{2,R_D,k})}$ si le maximum de $E'_{2,R_D,k}$ est atteint en $k = i$ (si le maximum d'énergie est dans le groupe où l'on a introduit la perturbation), sinon la valeur est fixée à 0 (localisation dans le mauvais groupe). Ainsi il est aisé de vérifier sur ces tracés si un groupe est localisable ou non. Si $\frac{E'_{2,R_D,i}}{\max_{k \neq i} (E'_{2,R_D,k})}$ est supérieur à 2, on considère la perturbation localisable, sinon on la considère non localisable.

Les tests numériques ont été réalisés en introduisant des bruits dans les mesures d'amplitude $\sigma_j = 0.1\%$, 1% , 5% et 10% et pour chacune de ces valeurs on a supposé des niveaux de bruit $\delta_j = 0.1\%$, 1% et 10% . La figure 5.15 représente (de gauche à droite) seulement les cas $\sigma_j = 1\%$, 5% et 10% car le cas $\sigma_j = 0.1\%$ est quasi-identique au cas $\sigma_j = 1\%$. Les figures du haut correspondent à un bruit de type (5.10) et celles du bas à un bruit de type (5.11).

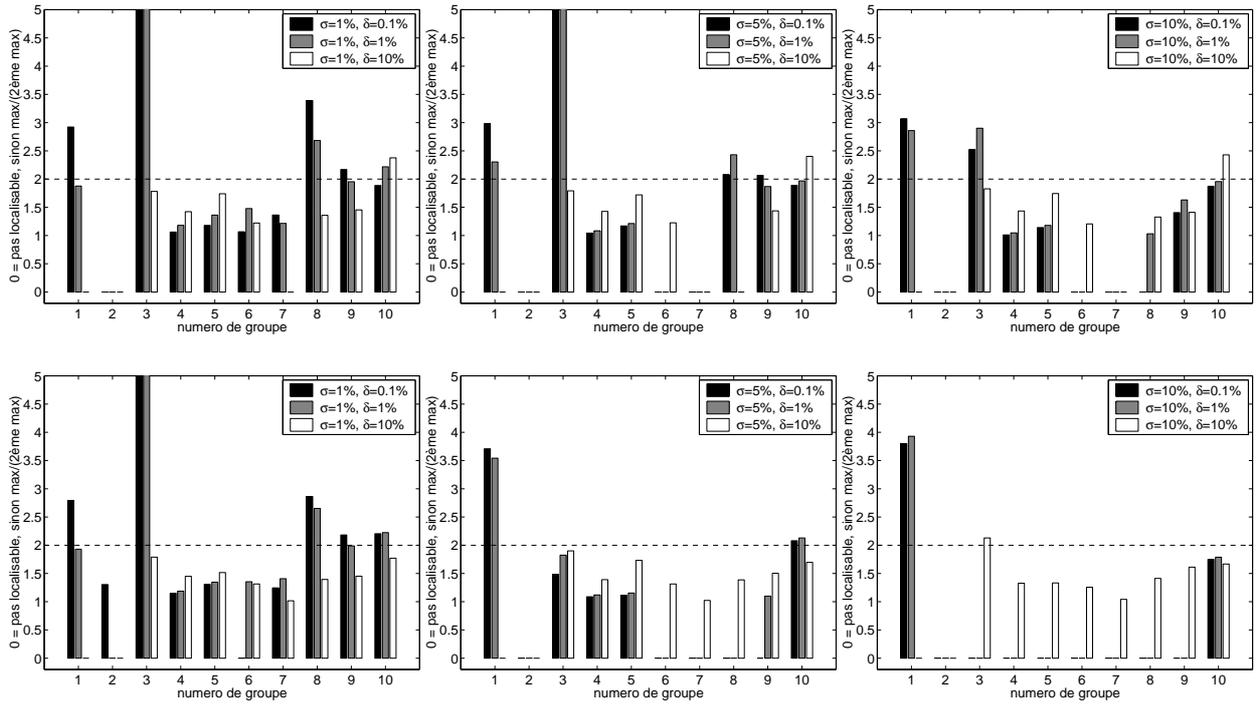


FIG. 5.15 – **Haut** : Bruit de type (5.10), **Bas** : bruit de type (5.11). Localisation avec l'indicateur E'_{2,R_D} pour σ_j égal à **Gauche** : 1%, **Milieu** : 5%, **Droite** : 10% et pour des valeurs de δ_j égales à 0.1%, 1% et 10%.

La figure 5.15 indique, conformément à l'intuition, que la localisation est peu sensible à des erreurs de mesure réelles faibles ($\sigma_j \leq 1\%$, le cas $\sigma_j = 0.1\%$ n'étant pas présenté car identique à $\sigma_j = 1\%$), mais se détériore pour des valeurs plus élevées ($\sigma_j \geq 1\%$). Pour ce qui est du bruit supposé δ_j , une hypothèse trop forte ($\delta_j = 10\%$) détériore fortement la visibilité des défauts mais rend dans le même temps insensible au bruit de mesure réel. On perd donc en acuité (capacité à localiser) mais on gagne en robustesse (ce qui est localisable l'est vraiment de manière claire). On remarque finalement que le bruit de type (5.11) est plus perturbant que le bruit de type (5.10), ce qui montre l'importance d'une réflexion sur le bruit de mesure réel.

5.4.5 Localisation de plusieurs perturbations simultanées

Les groupes 1, 3 et 8 étant considérés comme localisables pour $\sigma_j = 1\%$ (bruit de type (5.10)) et $\delta_j = 1\%$, ou presque localisable pour le groupe 1 (cf. figure 5.15), on cherche maintenant à savoir s'il est possible, en perturbant ces trois paramètres à la fois, de retrouver les perturbations introduites.

Pour la figure 5.16 on introduit une grande perturbation dans un des trois groupes (+100% de variation sur la raideur) et une perturbation faible dans les deux autres (+10%/−10% respectivement pour les figures de gauche et −40%/+30% pour celles de droite). Les figures du haut correspondent à une grande perturbation dans le groupe 1, celles du milieu dans le groupe 3 et celles du bas dans le groupe 8. Le critère pour la localisation est toujours le même, à savoir que pour qu'un groupe soit localisable, il faut que lorsqu'on le perturbe l'indicateur $E'_{2,R_D,i}$ ait une valeur deux fois plus importante dans ce groupe que dans les autres groupes.

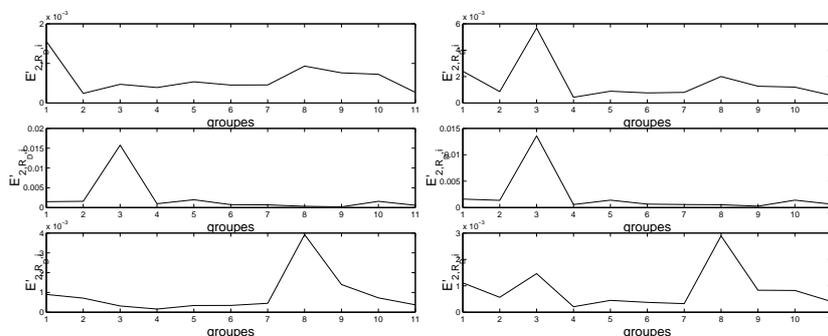


FIG. 5.16 – Localisation pour des perturbations introduites dans les groupes 1, 3 et 8 simultanément et $\sigma_j = 1\%$ (bruit de type (5.10)), $\delta_j = 1\%$. **Gauche : Haut :** $k_{1,mod}/k_{1,nom} = 2$, $k_{3,mod}/k_{3,nom} = .9$, $k_{8,mod}/k_{8,nom} = 1.1$, **Milieu :** $k_{1,mod}/k_{1,nom} = .9$, $k_{3,mod}/k_{3,nom} = 2$, $k_{8,mod}/k_{8,nom} = 1.1$, **Bas :** $k_{1,mod}/k_{1,nom} = .9$, $k_{3,mod}/k_{3,nom} = 1.1$, $k_{8,mod}/k_{8,nom} = 2$. **Droite : Haut :** $k_{1,mod}/k_{1,nom} = 2$, $k_{3,mod}/k_{3,nom} = .6$, $k_{8,mod}/k_{8,nom} = 1.3$, **Milieu :** $k_{1,mod}/k_{1,nom} = .6$, $k_{3,mod}/k_{3,nom} = 2$, $k_{8,mod}/k_{8,nom} = 1.3$, **Bas :** $k_{1,mod}/k_{1,nom} = .6$, $k_{3,mod}/k_{3,nom} = 1.3$, $k_{8,mod}/k_{8,nom} = 2$

L'analyse de la figure 5.16 permet de conclure que pour une perturbation forte dans un groupe et faible (+10%/−10%) dans les deux autres, le maximum d'erreur est localisé à chaque fois dans le groupe fortement perturbé (même si le groupe 1 n'est pas localisable car le rapport est inférieur à 2). Par contre lorsque les perturbations dans les deux autres groupes sont plus élevées (−40%/+30%), la localisation d'erreur n'indique pas toujours le groupe le plus perturbé. En effet, lorsque $k_{1,mod}/k_{1,nom} = 2$, $k_{3,mod}/k_{3,nom} = .6$ et $k_{8,mod}/k_{8,nom} = 1.3$, l'erreur semble être localisée dans le groupe 3 alors que c'est le groupe 1 le plus fortement perturbé.

Cette étude montre que le biais induit par la présence d'erreurs résiduelles non corrigées dans le modèle peut empêcher une localisation correcte.

5.4.6 Placement de capteurs pour la visibilité

Le placement de capteurs est une étape primordiale de la préparation d'essais. Cette étape joue en effet un rôle important dans la capacité des essais à décrire un mode particulier, ou à localiser un éventuel défaut dans le modèle.

Parmi les méthodes les plus utilisées, on peut citer la méthode EFI [40] (Effective Independence) consistant à garantir l'indépendance linéaire des modes mesurés. Partant d'un nombre initial de capteurs, la méthode les élimine un par un jusqu'à en obtenir le nombre désiré.

Les trois procédures implémentées dans le cadre de cette thèse et décrites ci-dessous procèdent tout autrement. Partant d'un nombre initial de capteurs, on en rajoute de manière itérative. Cette approche semble plus adaptée à une problématique industrielle, où un certain nombre de capteurs sont placés pour remplir des objectifs autres que la corrélation calcul-essais et le recalage.

1. Placement de capteurs pour l'identification modale.

La méthode la plus naturelle pour placer des capteurs est de les placer là où l'amplitude des modes EF que l'on cherche à caractériser lors des essais est la plus importante. Partant d'un nombre initial de capteurs, on cherche à l'itération n à placer le capteur au maximum de la moyenne sur les NM modes cibles des DDLs de translation l

$$\max_l \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} |\phi_{l,j}|.$$

Une variante possible consiste à placer les capteurs au maximum de l'énergie cinétique

$$\max_l \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} M_{ll} |\phi_{l,j}|^2,$$

où M_{ll} représente le terme diagonal de la matrice de masse correspondant au DDL de translation l .

Le problème de ce type de méthodes est qu'elles ont tendance à placer de nombreux capteurs dans la même zone. On est donc amené à définir une distance minimale entre les capteurs (par exemple un sous-multiple des longueurs caractéristiques de la structure). Bien sûr, deux capteurs mesurant dans des directions différentes peuvent être placés au même endroit et on interdit seulement la proximité de deux capteurs mesurant dans la même direction.

2. Placement de capteurs pour la détection d'une erreur donnée.

Si l'on veut placer les capteurs pour détecter une erreur de type masse ou raideur dans une sous-structure donnée, on calcule tout d'abord la dérivée des modes par rapport au

paramètre concerné. En effet, si l'on considère en première approximation que $\phi(p) = \phi(p_0) + (p - p_0) \frac{\partial \phi}{\partial p}$, alors la quantité qu'il faut mesurer pour détecter l'erreur est la sensibilité. Plus précisément, la quantité dont on cherche à distinguer la forme est la partie de la sensibilité orthogonale (par rapport aux matrices de masse M et de raideur K) aux modes, que l'on notera $\left(\frac{\partial \phi}{\partial p}\right)_{p,orth.}$.

Ainsi, si l'on veut optimiser le placement de capteurs pour la détection d'un défaut associé au paramètre p , on calcule $\left(\frac{\partial \phi}{\partial p}\right)_{p,orth.}$, ceci pour les NM modes cibles. Puis en partant d'un nombre initial de capteurs, on rajoute de manière itérative des capteurs au maximum de la moyenne sur les NM modes cibles des DDLs de translation l

$$\max_l \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} \left| \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial p}\right)_{p,orth.,l} \right|,$$

ou au maximum de l'énergie cinétique

$$\max_l \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} M_{ll} \left| \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial p}\right)_{p,orth.,l} \right|^2,$$

où M_{ll} représente le terme diagonal de la matrice de masse correspondant au DDL de translation l .

Le problème concernant la proximité des capteurs ainsi placés est résolu de la même manière que dans la méthode *Placement de capteurs pour l'identification modale*.

Une application de cette méthode est exposée en figure 5.17.

3. Fréquence de coupure maximale.

Cet algorithme de placement de capteurs consiste à maximiser la fréquence de coupure de la réduction-expansion de Guyan, voir [36], c'est à dire la fréquence du premier mode à capteurs fixes (premier mode de la structure encastree sur les capteurs).

Cette procédure nécessite de partir d'un nombre initial de capteurs suffisant pour que la structure encastree sur les capteurs n'ait pas de modes de corps rigide (typiquement 6 capteurs bien placés pour une structure 3D libre). On calcule alors le premier mode associé à la structure encastree sur les DDLs correspondants aux capteurs (mode à capteurs fixes), et on place le capteur suivant sur le DDL correspondant à un déplacement maximal de ce mode. Puis la procédure est poursuivie de manière itérative.

Pour des modèles de grande taille, les modes à capteurs fixes peuvent difficilement être calculés de manière exacte en un temps raisonnable. En effet, il faudrait résoudre le problème aux valeurs propres à chaque itération, ce qui est très coûteux d'un point de vue temps de calcul. Une méthode de calcul sur base réduite avec enrichissement itératif a été développée en [20] pour cette résolution.

Contrairement aux deux premières méthodes, la procédure impose naturellement une distance minimale entre les capteurs placés.

Application

La procédure "*Placement de capteurs pour la détection d'une erreur donnée*" détaillée précédemment a été testée sur le modèle du couvre culasse. En effet, le groupe 2 n'est pas localisable avec la configuration de capteurs de la figure 5.12 car les capteurs sont beaucoup plus nombreux du côté du groupe 1 (qui est localisable) que du groupe 2.

En suivant cette procédure, on a ajouté 6 capteurs en plus des 66 présents initialement, aux endroits où la partie orthogonale de la sensibilité $\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)_{p,orth.}$, avec $p = K_{grp.2}/K_{grp.2,0}$ est maximale, en termes de déplacement (figure 5.17.b) ou d'"énergie cinétique" (figure 5.17.c).

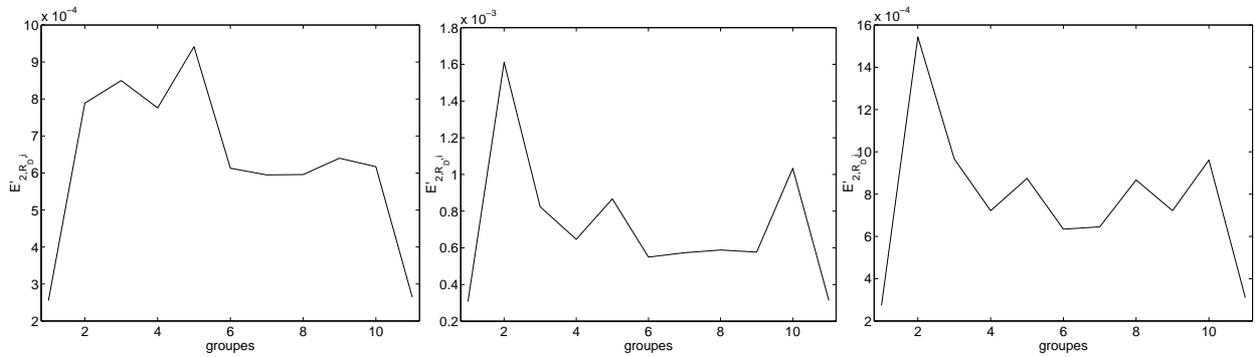


FIG. 5.17 – Localisation du groupe 2, par l'indicateur $E'_{2,R_D,i}$, avec différentes configurations de capteurs. **a** : nominale, **b** : déplacement maximal, **c** : énergie cinétique maximale.

La figure 5.17 montre que l'ajout de 6 capteurs seulement (en plus des 66 présents initialement) permet de localiser de manière beaucoup plus efficace le groupe 2, à la fois en utilisant le critère de placement basé sur l'énergie cinétique et celui basé sur le déplacement.

Chapitre 6

Application au recalage de modèles d'Ariane 5

Sommaire

6.1	Application au modèle dynamique de l'EPC	114
6.2	ESC-A - Corrélation initiale	117
6.2.1	Modèle fourni par EADS - Assemblage	118
6.2.2	Description des essais	120
6.2.3	Corrélation calcul-essais	122
6.2.4	Problèmes de corrélation	128
6.3	Choix des paramètres	130
6.3.1	Connaissance de l'ingénieur	131
6.3.2	Étude de sensibilité	131
6.3.3	Localisation d'erreur	133
6.3.4	Visibilité d'erreur	135
6.4	ESC-A - Recalage	137
6.4.1	Paramètres sélectionnés	137
6.4.2	Mise en oeuvre	140
6.4.3	Recalage par groupes de paramètres	141
6.4.4	Recalage final <i>freq - MAC</i>	148

Le recalage de modèles dynamiques est l'application finale ayant motivée les développements réalisés dans cette thèse. Dans le cadre du contrat de collaboration 000516 entre EADS Launch Vehicles et l'Ecole Centrale Paris, deux essais de maquettes dynamiques et les modèles correspondants ont été étudiés.

L'Etage Principal Cryotechnique (EPC) d'Ariane 5 a servi d'application durant les deux premières années. Si le recalage de ce modèle n'a conduit qu'à des améliorations mineures de la corrélation, les avancées méthodologiques réalisées ont pourtant été essentielles pour la suite. Les conclusions tirées de cette application sont résumées en section 6.1.

La deuxième application industrielle réalisée concerne l'Etage Supérieur Cryotechnique version A (ESC-A) d'Ariane 5. Dans la section 6.2, on présente le travail de lecture et de validation de ce modèle dans la Structural Dynamics Toolbox; puis les essais réalisés par IABG sont détaillés et la corrélation calcul-essais analysée. La section 6.3 propose alors une sélection des paramètres à recaler et enfin, le recalage est présenté en section 6.4.

6.1 Application au modèle dynamique de l'EPC

La première application industrielle de recalage réalisée dans cette thèse concernait l'essai MD-EPC (maquette dynamique de l'Etage Principal Cryotechnique d'Ariane 5). Le modèle correspondant, présenté en figure 6.1, contient plus de 36000 DDLs et est composé de 29 super-éléments et d'un modèle détaillé (85 éléments) de la ligne d'alimentation à oxygène (LAO), acheminant l'oxygène du réservoir au moteur (en gras sur la figure). Les expériences réalisées concernent les modes locaux de la LAO, qui sont mesurés par appropriation sur 146 capteurs (représentés par des astérisques sur la figure).

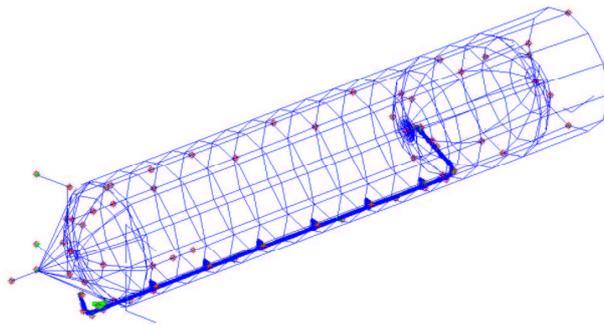


FIG. 6.1 – Modèle de l'étage principal cryotechnique. La ligne d'alimentation à oxygène est représentée en gras et les capteurs par des astérisques.

Les recalages (optimisations de paramètres) réalisés n'ont jamais conduit à des améliorations notables de la corrélation calcul-essais. Devant ce constat plutôt pessimiste, il est utile de résumer ici les conclusions tirées de l'application. Au final, l'effet le plus bénéfique de ce premier cas a été de valider les efforts d'industrialisation logicielle réalisés.

Problèmes de modélisation

Le recalage de paramètres physiques n'est compatible avec l'utilisation de super-éléments que si les paramètres retenus sont les raideurs ou masse globales. Pour la MD-EPC, il fallait recaler le modèle local de la LAO, ce qui a nécessité la transmission *a posteriori* des matrices élémentaires de ce composant. Pour l'application concernant l'ESC-A, on a tenu compte de cet écueil et les matrices élémentaires ont été fournies dès l'origine.

Les attaches connectant la LAO au reste du modèle ont un effet majeur sur la dynamique des modes cibles. Mais le modèle de ces attaches était très peu détaillé du fait d'une connaissance imprécise des positions d'articulation et des rigidités locales du support d'étrier au niveau des attaches. Pour ce genre de liaisons, il aurait fallu pouvoir remplacer la modélisation simplifiée initiale par un modèle localement plus détaillé.

Ce problème illustre la difficulté de recalibrer un modèle présentant des erreurs résiduelles. Ceci a été illustré en section 5.4.5 et sera aussi une limitation dans le cas de l'ESC-A (voir section 6.4).

Insuffisances des données expérimentales

Les essais sur la MD-EPC ont été réalisés par appropriation avec 146 voies de mesure. Tester des modes locaux (ici de la LAO) par appropriation est difficile. Les FRFs n'étant pas disponibles, la seule indication de qualité des mesures est donnée par le rapport partie réelle (partie en opposition de phase de la réponse)/partie imaginaire (partie en phase de la réponse). On a montré en [13] que la corrélation s'améliorait si les capteurs mal appropriés étaient éliminés ou considérés avec une pondération faible. Les mesures expérimentales présentaient donc des erreurs significatives mais difficiles à caractériser. Les modes locaux, et plus généralement les ensembles de modes proches en fréquence, présenteront toujours des difficultés de mesure (illustrées dans le cas de l'MD-EPC) et de recalage (illustrées dans le cas de l'ESCA).

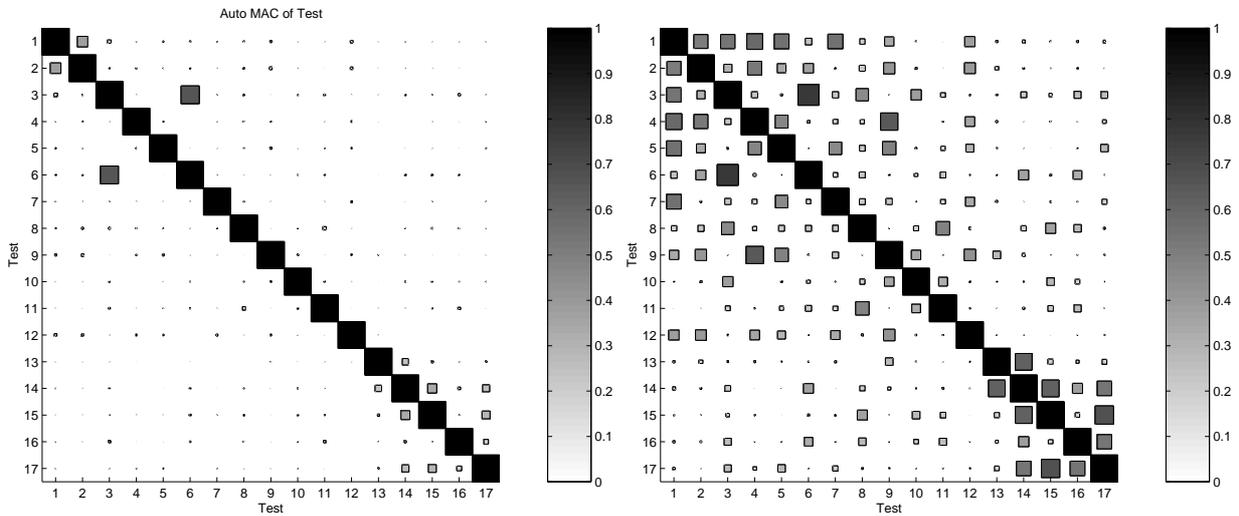


FIG. 6.2 – a : AutoMAC des modes test avec les 146 capteurs, b : AutoMAC des modes test avec cinq capteurs enlevés.

La densité de capteurs sur la LAO était trop faible. En effet, la figure 6.2 montre qu'enlevant seulement 5 capteurs pour chaque couple de modes (i,j) , l'autoMAC des modes

expérimentaux est nettement détérioré et beaucoup de modes expérimentaux se ressemblent. On obtient des MAC extra-diagonaux de 0.6, ce qui est la valeur limite pour décider si des modes sont corrélés entre eux ou non. La corrélation calcul-essais, base du recalage, est donc sujette à interrogation. Ce type d'interrogation a motivé les développements réalisés sur les méthodes de placement de capteurs. D'un point de vue industriel, il est cependant souvent difficile de disposer à temps du modèle pour réellement influencer sur la conception de l'essai.

Enseignements tirés

L'échec du recalage de l'EPC nous a permis de tirer des enseignements pour de futurs travaux. Ainsi, il a été entendu que la prochaine tentative de recalage concernerait des modes globaux, mesurés avec suffisamment de voies de mesure. Le modèle devrait aussi être suffisamment détaillé, de manière à pouvoir détecter finement des défauts et à introduire des modifications très locales (raideur de renforts, de vérins, etc.). Ces critères ont été respectés dans la livraison du modèle de l'ESC-A et des mesures correspondantes.

6.2 ESC-A - Corrélation initiale

Le deuxième modèle étudié concerne l'Étage Supérieur Cryotechnique version A (ESC-A) d'Ariane 5, qui contient les deux charges utiles (CUB et CUH, Charges Utiles Basse et Haute de 4,7 et 6,5 tonnes respectivement, voir figure 6.3).

L'analyse modale expérimentale de cet étage a été réalisée en configuration encastree (figure 6.3), en simulant les Charges Utiles et le moteur par des maquettes et avec les réservoirs d'oxygène et d'hydrogène (RLOX et RLH2, voir l'annexe A pour la signification des différentes abréviations) remplis. Ces expériences ont pour but de déterminer les caractéristiques modales et de valider le modèle dynamique dans la bande fréquentielle [2Hz – 100Hz].

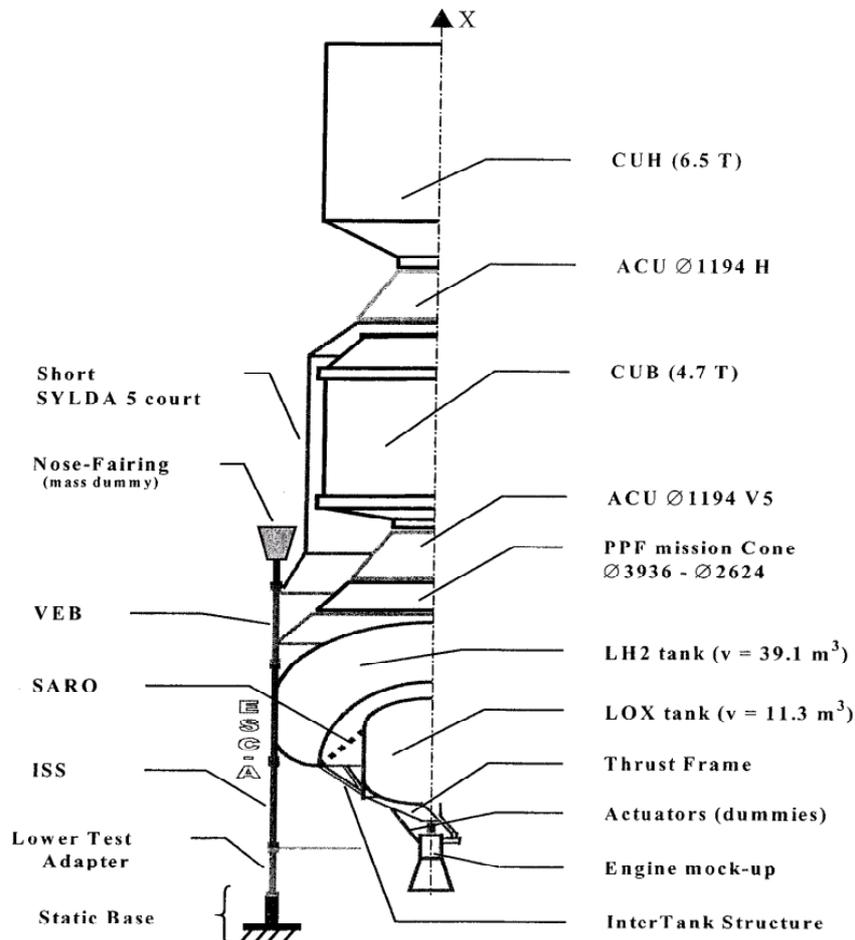


FIG. 6.3 – Représentation de l'étage supérieur cryotechnique.

6.2.1 Modèle fourni par EADS - Assemblage

Le modèle PERMAS [37] de la maquette dynamique ESC-A est composé de 26 sous-structures (dont 23 sont indiquées en figure 6.4), qui s'assemblent en trois ensembles intermédiaires (300, 400 et 500) pour donner finalement la structure complète 999. Les positions de certaines de ces sous-structures sont indiquées sur la représentation schématique de l'étage supérieur cryotechnique en figure 6.3.

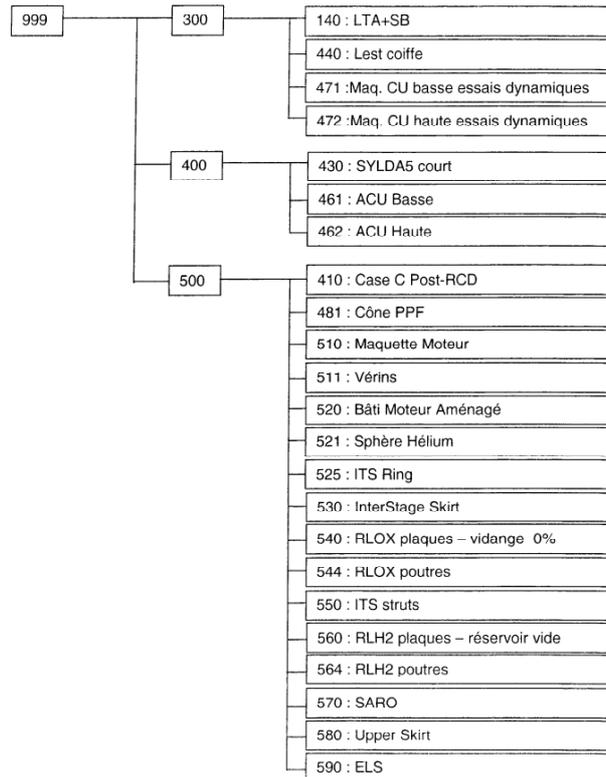


FIG. 6.4 – Dénomination et organisation des différentes sous-structures.

Les informations fournies par EADS-LV incluent les noeuds, éléments et matrices élémentaires (ou matrices des super-éléments) de chacune des 26 sous-structures, ainsi que les connexions entre elles. En effet dans PERMAS le modèle est assemblé successivement, en assemblant les ensembles intermédiaires 300, 400 et 500 puis la structure complète 999 (figure 6.4). Lors de chacun de ces assemblages successifs, des noeuds maîtres et esclaves sont définis et les matrices élémentaires sont assemblées les unes avec les autres pour ne donner finalement que deux matrices finales M_{PERMAS} et K_{PERMAS} . En ce qui concerne le recalage, le désavantage de cette méthode est que si l'on modifie une partie de la structure, il faut recommencer l'assemblage complet des matrices élémentaires, la renumérotation et la définition des relations maître-esclave.

L'assemblage du modèle de l'ESC-A a donc été réalisé dans la SDT de manière à avoir accès aux matrices élémentaires, afin de pouvoir procéder à la localisation d'erreur et au recalage sur chaque élément tout en travaillant sur le modèle global. Ceci a nécessité de garder accès à tous les noeuds, maîtres ou esclaves. Les 115116 DDLs finalement obtenus contiennent donc aussi les DDLs esclaves, ces derniers étant éliminés *a posteriori* en projetant les matrices finales par

$$M_{SDT} = R^T M R, K_{SDT} = R^T K R, \quad (6.1)$$

R (de taille 115116×107135) étant une matrice contenant les relations maîtres-esclaves (linéaires, rigides, etc.) et définissant les DDLs bloqués à l'interface de l'ESC-A et du sol.

L'assemblage dans la SDT est alors vérifié par le calcul du résidu dynamique en effort, associé aux matrices assemblées dans la SDT et aux modes PERMAS ($\omega_{PERMAS}, \phi_{PERMAS}$) fournis indépendamment

$$R_L = [K_{SDT} - \omega_{PERMAS}^2 M_{SDT}] \phi_{PERMAS} \neq 0,$$

qui nous permet de localiser les erreurs. En effet, si une des matrices contient une erreur sur le DDL n , alors le résidu R_L sera non nul sur ce même DDL.

Cette méthode de vérification a permis de corriger de nombreuses erreurs, notamment des erreurs de liaisons ou de lecture des matrices associées aux super-éléments. Le caractère non industriel de la procédure d'import de modèles PERMAS, lié au faible nombre de cas testés, a été source de pertes de temps conséquentes. Les procédures pour des modèles NASTRAN et ANSYS sont elles beaucoup plus fiables.

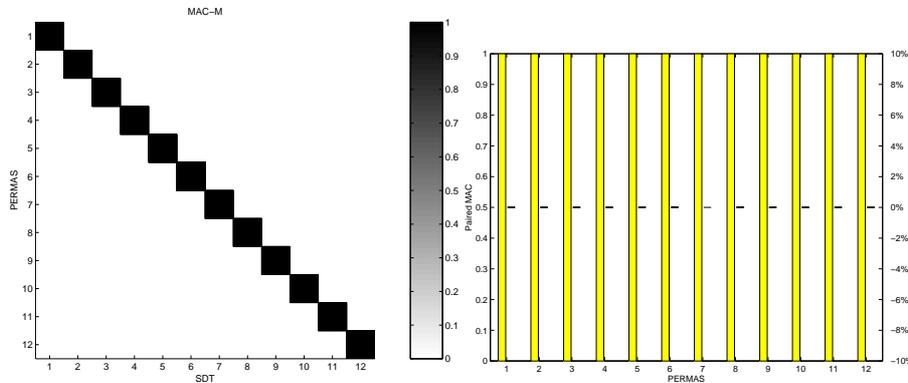


FIG. 6.5 – a: MAC pondéré en masse sur tous les DDLs entre les résultats SDT et les résultats PERMAS, b: MAC pondéré en masse pour les couples de modes appariés et erreur en fréquence.

Après correction des diverses erreurs rencontrées, la corrélation entre les résultats obtenus dans la SDT et les 12 modes fournis par EADS-LV est parfaite, avec des MAC strictement égaux à 1 et des erreurs relatives en fréquence $(f_{SDT} - f_{PERMAS})/f_{PERMAS}$ inférieures à 10^{-4} (figure 6.5), ce qui semble très raisonnable pour des matrices élémentaires transmises avec 14,

et non 16, chiffres significatifs. Les modèles étant réputés identiques, on peut alors étudier la corrélation calcul-essais et réaliser des recalages de paramètres sur le modèle assemblé dans la SDT.

6.2.2 Description des essais

Les résultats d'essais fournis par EADS-LV concernent les essais par appropriation réalisés par IABG en configuration encastree. Les essais par appropriation consistent à répartir les forces dans les différents excitateurs présents sur la structure (figure 6.6), de manière à exciter les modes indépendamment les uns des autres [11].

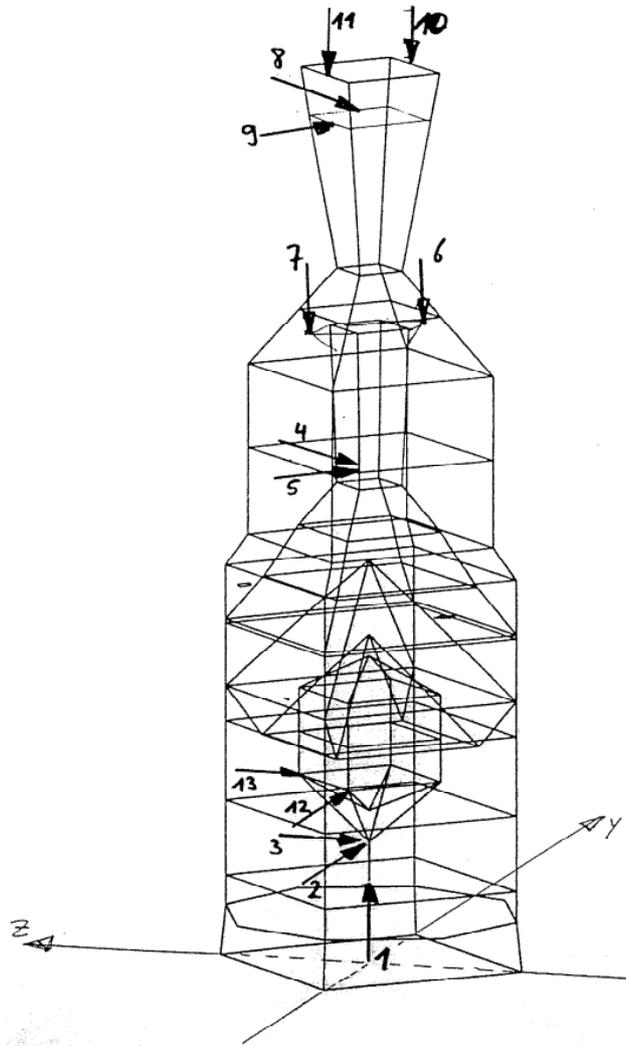


FIG. 6.6 – Position des excitateurs utilisés pour les mesures par appropriation.

Ces essais ont permis l'identification d'un certains nombre de modes entre 4 et 100Hz décrits dans le tableau 6.1, certains modes n'ayant pas été appropriés, notamment entre 19 et 26Hz ainsi qu'entre 32 et 45Hz. Ces résultats d'appropriation sont considérés valables jusqu'à 45Hz environ. Au-delà, on leur préférera les résultats d'analyse modale, qui n'ont pas été fournis et ne seront donc pas utilisés dans ce mémoire.

TAB. 6.1 – Dénomination des modes expérimentaux

Modes exp	f_{exp} (Hz)	Dénomination
1		1st lateral CUH 120°
2		1st lateral CUH 30°
3		1st lateral CUB 135°
4		1st lateral CUB 45°
5		1st lateral engine dummy, 95°
6		Lateral, RLOX, 95°
7		1st lateral engine dummy, 10°
8		Lateral, RLOX + CU, 0°
9		2nd lateral CUH, 100°
10		1st longitudinal
11		2nd lateral CUH, 10°
12		2nd longitudinal, CUH, RLOX in opposite phase
13		3rd lateral, 100°
14		3rd lateral, 10°
15		longitudinal, CUB
16		RLOX lower dome longitudinal
17		RLOX rotation, 100°
18		CUB 2nd lateral 10°, RLOX in phase
19		CUB 2nd lateral 100°, RLOX in phase
20		CUB 2nd lateral 100°, RLOX in opposite phase
21		RLOX lower dome longitudinal
22		RLOX rotation, 90°
23		RLOX, BMA
24		RLOX + BMA lower dome longitudinal
25		BMA, RLH2
26		RLOX lower dome longitudinal

Les déformées modales ont été mesurées à l'aide de 369 capteurs, mais seuls 317 d'entre eux seront utilisés car les positions et directions de mesure n'ont été fournies que pour ces seules voies de mesure. Ces capteurs sont représentés en figure 6.7, qui expose aussi le maillage expérimental réalisé (figure 6.7.d) pour la visualisation des modes expérimentaux.

La matrice d'observation c , qui permet la projection des modes EF sur les capteurs (par la fonction $\phi_{EF} \rightarrow c\phi_{EF}$, voir section 5.1.1.1), peut alors être calculée. Si il n'y a pas coïncidence des capteurs et des noeuds EF, les mouvements des capteurs sont interpolés à l'aide de liens rigides ou en imposant une relation linéaire entre le capteur et deux noeuds proches (pour les relations ILIN2 dans PERMAS).

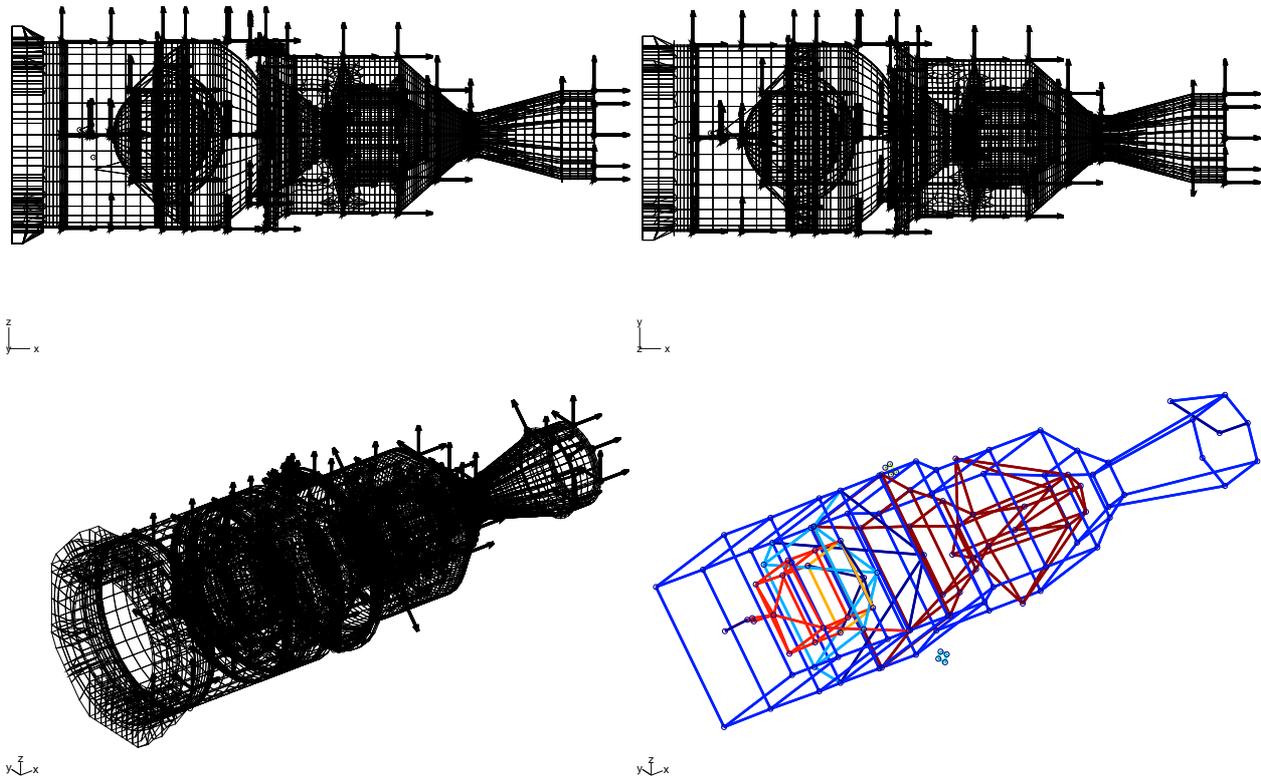


FIG. 6.7 – a, b, c : Position et direction des capteurs, d : Maillage expérimental.

6.2.3 Corrélation calcul-essais

6.2.3.1 Modes proches

L'étude des sensibilités montre que des modes très proches en fréquence sont sensibles à de petites variations du modèle ou de la structure testée. Il en résulte que pour une structure présentant des modes quasi-multiples, l'utilisation de critère de corrélation comparant des modes individuellement est sujette à caution.

Par contre, les variations significatives des formes modales sont limitées à des recombinaisons de modes dans le même sous-espace [5]. Ce que l'on exploitera pour définir une corrélation par bloc.

Les figures 6.8.a et 6.8.b représentent, en fonction du numéro de mode, les fréquences EF et les fréquences expérimentales correspondantes. Seules les 22 premières fréquences expérimentales sont représentées car les mesures expérimentales 23 à 26 donnent des fréquences trop différentes des données EF (ce qui n'est pas surprenant car la corrélation associée est très mauvaise, comme le montre la figure 6.9.a).

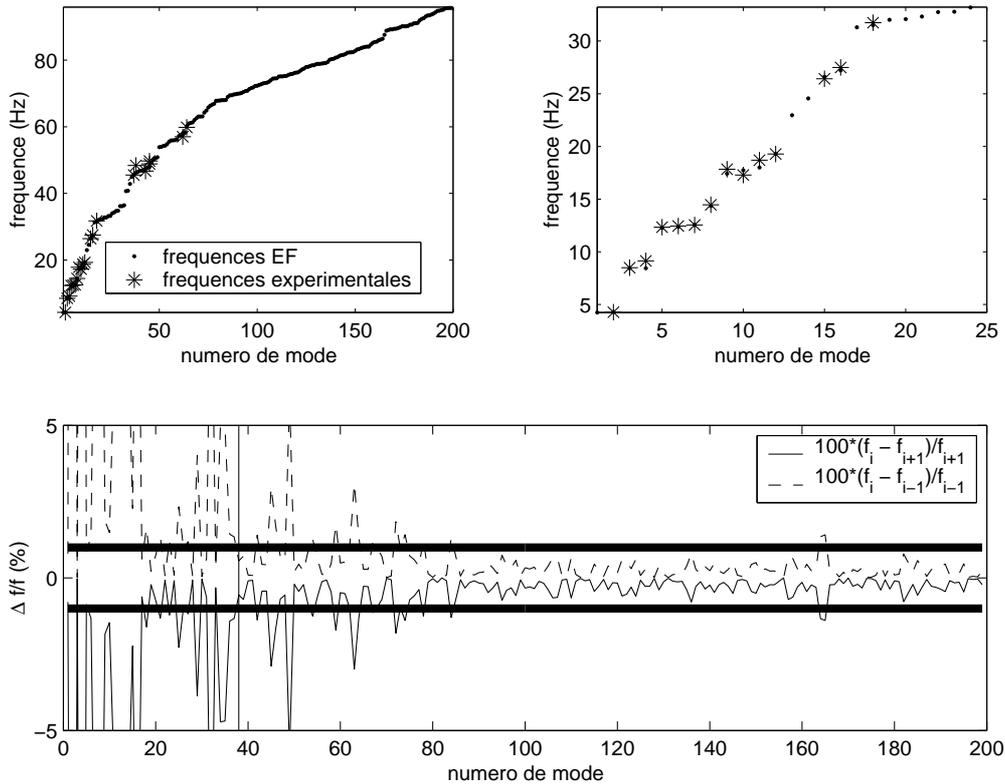


FIG. 6.8 – Répartition des fréquences éléments finis, les astérisques représentant les fréquences mesurées. **a**: 22 premières fréquences expérimentales, **b**: 15 premières fréquences expérimentales, **c**: Différences relatives des fréquences EF consécutives, les lignes horizontales délimitant +1% et -1%.

Par ailleurs la proximité des modes est indiquée en figure 6.8.c par le tracé des différences relatives des fréquences EF consécutives $(f_i - f_{i+1})/f_{i+1}$ et $(f_i - f_{i-1})/f_{i-1}$, avec superposées en gras les limites à +1% et -1%. En effet si l'on considère un amortissement modal de 1% (ce qui est raisonnable pour de nombreuses structures), alors les modes pour lesquels $|(f_i - f_{i+1})/f_{i+1}| < 1\%$ ont des résonances superposées.

La structure présente donc un certain nombre de paquets de modes en basse fréquence, puis un recouvrement quasi-continu au-delà du mode 50 (168 modes entre 40Hz et 95.9Hz).

Au-delà de 40 Hz, le recouvrement des résonances peut faire parler de comportement moyenne fréquence. Ceci est cohérent avec la constatation des essayeurs que *les résultats d'appropriation ne sont valables que jusqu'à 45 Hz environ*. Ces restrictions motivent l'utilisation des 15 premiers modes expérimentaux seuls pour les recalages réalisés en section 6.4.

Reste maintenant à gérer les paquets de modes basse fréquence.

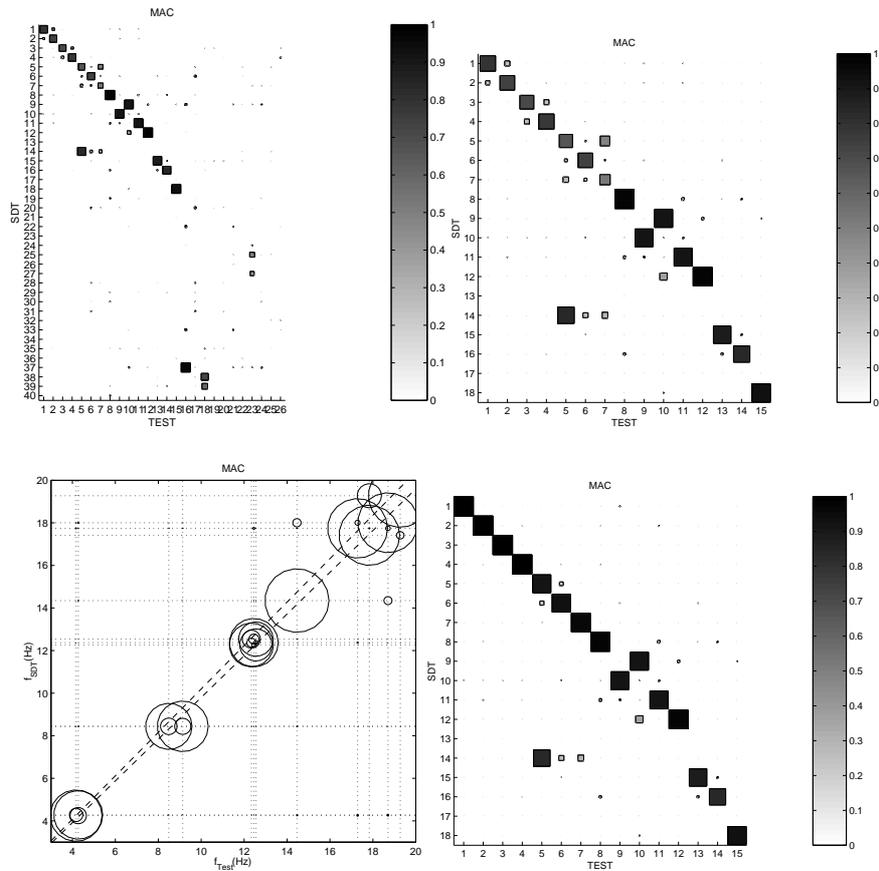


FIG. 6.9 – **a**: *MAC* entre modes SDT et TEST, **b**: *MAC* entre modes SDT et les 15 premiers modes expérimentaux, **c**: Tracé de *MAC* avec échelle des fréquences (le rayon des cercles est proportionnel à la valeur du *MAC*), **d**: *MAC* entre modes SDT et les 15 premiers modes expérimentaux après rotation des modes EF 1-2, 3-4 et 5-6-7.

La corrélation calcul-essais est étudiée à l'aide des *MAC* sur les capteurs (*MAC1* en dénomination EADS-LV) et des erreurs relatives sur les fréquences. La figure 6.9.a, qui représente les *MAC* sur les capteurs entre les modes expérimentaux et la projection des modes

EF, montre qu'après le 15ème mode expérimental on a pas de corrélation avec les 30 premiers modes EF. Ces modes expérimentaux sont en fait appariés avec des modes d'ordre supérieur (tableau 6.2). D'autre part, certains modes EF n'ont pas été mesurés lors de l'expérience (modes 13 et 14 par exemple). Au final les comparaisons ne seront réalisées que pour les 15 premiers modes, dont la corrélation initiale est indiquée en figure 6.9.b. 20

La figure 6.9.c est inspirée du critère F-MAC [28]. Elle consiste à tracer des cercles centrés sur les intersections des fréquences EF i et expérimentales j , dont le rayon est proportionnel à la valeur du $MAC_{i,j}$, permettant ainsi de visualiser sur la même figure à la fois les MAC et les erreurs relatives en fréquence (deux droites correspondant à des erreurs sur les fréquences de +1% et -1% sont superposées).

Cette figure met en lumière le fait que les modes 1-2, 3-4 et 5-6-7 constituent des groupes (ou paquets) de modes (ils ont des fréquences EF très proches les unes des autres avec moins de 2% de différence), que l'on peut recombinaison pour améliorer la corrélation. Ceci est très clair pour les modes 1-2 et 3-4 qui sont des modes de flexion de la CUH (Charge Utile Haute) et de la CUB (Charge Utile Basse) respectivement. En effet, la figure 6.10 montre que les modes 1 et 2 constitue une paire de modes de flexion de la CUH à la même fréquence, mais avec des plans de flexion orthogonaux, et de même pour les modes 3 et 4. De la même manière les modes 5, 6 et 7 (modes du RLOX et de la maquette moteur) seront considérés comme faisant partie d'un triplet de modes.

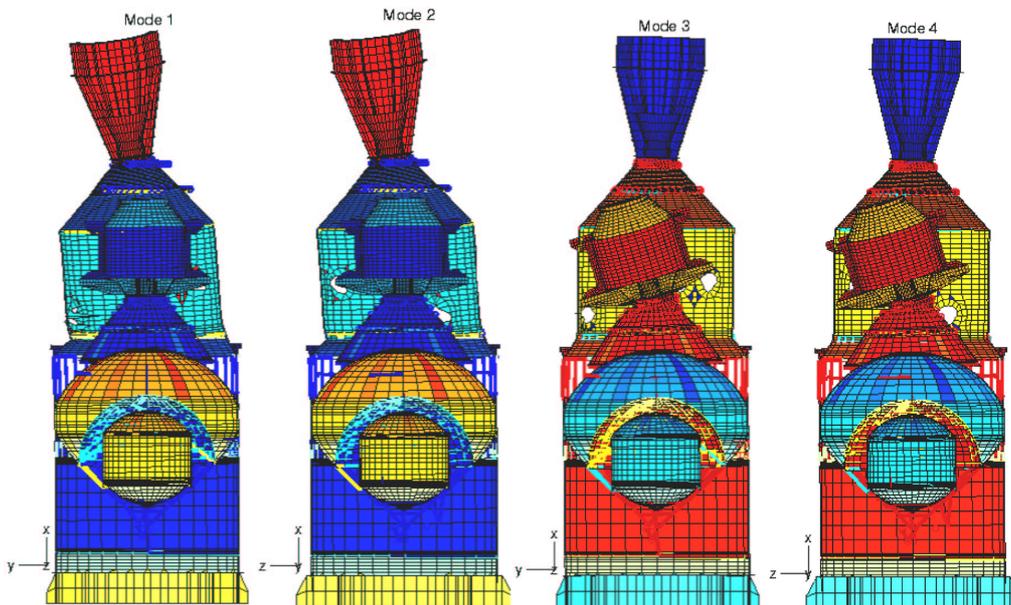


FIG. 6.10 – Mode 1, 2, 3 et 4 de flexion de la CUH et de la CUB respectivement.

Lorsque des modes EF sont multiples, une combinaison linéaire orthonormée de ces modes est toujours une base modale. Pour des modes très proches en fréquence, une petite perturbation du modèle peut induire une recombinaison significative de modes dans le paquet. Ainsi, on peut chercher une combinaison orthogonale des modes d'un même paquet qui améliore la corrélation de façon optimale.

Pour recombinaison des modes EF i et j de manière à ce qu'ils soient le plus proches possible des modes mesurés k et l , on cherche une matrice de rotation A telle que :

$$A = \operatorname{argmin} \|\phi_{test,k,l} - c\phi_{EF,i,j}A\|, \quad (6.2)$$

où c est la matrice d'observation et A une matrice de rotation, c'est à dire t.q. $A^T A = I$ de manière à préserver l'orthonormalité de la base modale.

Dans le cas de l'ESC-A, on a donc appliqué cette méthode aux paquets de modes 1-2, 3-4 et 5-6-7 (cf. figure 6.9.c), de manière à les recombinaison entre eux.

Pour la paire composée des modes 1-2, on trouve la matrice de rotation correspondant à une rotation du plan de flexion de 151.5° autour de x .

Pour la paire composée des modes 3-4, on trouve la matrice de rotation correspondant à une rotation du plan de flexion de 30.1° autour de x .

Pour le triplet composé des modes 5-6-7, la matrice de rotation est 3X3 et n'a pas d'interprétation en termes de plan de flexion.

La corrélation après rotation est grandement améliorée, cf. figure 6.9.d. Cette corrélation est résumée dans le tableau 6.2 pour les 25 premiers modes expérimentaux (appropriation), le 26ème mode n'étant apparié à aucun mode EF.

Modes exp	f_{exp} (Hz)	mode EF	f_{EF} (Hz)	MAC	$\Delta f/f$ (%)
1		1		99	1.82
2		2		99	0.18
3		3		100	-0.58
4		4		99	-7.63
5		5		92	-0.59
6		6		93	-0.66
7		7		96	-0.08
8		8		97	-0.77
9		10		91	2.64
10		9		92	-2.34
11		11		92	-3.73
12		12		97	-0.00
13		15		89	0.73
14		16		83	-0.99
15		18		93	-0.76
16		37		96	0.17
17		43		75	1.76
18		38		72	-4.54
19		45		67	-1.88
20		45		69	-3.56
21		62		77	1.38
22		64		76	0.61
23		199		59	38.50
24		90		25	-13.94
25		172		41	-2.66

TAB. 6.2 – Corrélation après rotation (modèle nominal).

Remise en cause de capteurs

Pour connaître d'éventuels problèmes liés à des capteurs mal positionnés ou à des directions de mesures erronées, on détermine les capteurs détériorant le plus la corrélation (capteurs à enlever pour améliorer au maximum la MAC sur les capteurs moyenné sur les 15 premiers modes). Le tableau 6.3 résume cette procédure et montre qu'il n'y a pas de capteur détériorant fortement la corrélation. En effet, aucun des 20 capteurs enlevés ne semble améliorer grandement les MAC .

On peut tout de même noter que beaucoup de capteurs détériorant la corrélation se trouvent au niveau des SRI, ou Systèmes de Référence Inertielle (capteurs V3M5..V3M12). Il semble donc que le modèle des SRI soit peu représentatif de la réalité. Bien que ceci ne perturbe que très peu la corrélation globale, l'impact en termes de qualité du modèle pour

l'objectif de pilotage n'est pas forcément négligeable.

Au cours de la construction de la matrice d'observation c à partir des directions et positions des capteurs, une erreur s'était glissée sur les directions de mesure de deux capteurs. Une analyse similaire à celle du tableau 6.3 avait alors clairement fait ressortir ces deux capteurs comme défaillants, montrant l'intérêt de ce genre d'étude pour la détection de ce type d'erreur.

TAB. 6.3 – Capteurs détériorant le plus la corrélation des modes expérimentaux 1 à 15.

Capteur	Moyenne	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Initial	94	99	99	100	99	92	93	96	97	91	92	92	97	89	83	93
V3M06Z	94	99	100	100	99	92	93	96	97	91	92	92	98	89	84	93
V3M12Z	94	99	100	100	99	92	93	96	97	91	92	92	98	89	85	93
V3U03Y	95	99	100	100	99	92	93	96	97	91	92	92	98	89	86	93
V3M10X	95	99	100	100	99	92	93	96	97	91	92	92	98	89	86	95
V3M08X	95	99	100	100	99	92	93	96	97	91	92	92	98	89	86	95
V3M11Z	95	99	100	100	99	92	93	96	97	91	92	92	98	89	87	96
V7M03Y	95	99	100	100	99	92	93	96	97	92	92	92	98	89	87	96
V3M10Z	95	99	100	100	99	92	93	96	97	92	92	92	98	89	87	96
V3M09Z	95	99	100	100	99	92	93	96	97	92	92	92	98	89	88	96
V3M05Z	95	99	100	100	99	92	93	96	97	92	92	92	98	89	88	96
V3M08Z	95	99	100	100	99	92	93	96	97	92	92	92	98	89	89	96
V3M07Z	95	99	100	100	99	92	93	96	97	92	92	92	98	89	89	96
V3M09X	95	99	100	100	99	92	93	96	97	92	92	92	98	89	89	97
V2X14Z	95	99	100	100	99	92	93	97	98	92	92	92	98	89	89	97
V7M01Y	95	99	100	100	99	92	93	97	98	92	92	92	98	89	89	97
V3M11X	95	99	100	100	99	92	93	97	98	92	92	92	98	89	89	97
V3M05X	95	99	100	100	99	92	93	97	98	92	92	92	98	89	89	97
V3M11Y	95	99	100	100	99	92	93	97	98	92	92	92	98	90	89	98
V3M07X	95	99	100	100	99	92	93	97	98	92	92	92	98	90	89	98
V3M10Y	95	99	100	100	99	92	93	97	98	92	92	92	98	90	89	98

La fourniture du modèle de l'ESC-A et la configuration d'essais évitent donc les écueils de la fourniture précédente concernant l'EPC (section 6.1). Ainsi le modèle est relativement bien détaillé et les mesures réalisées sur un grand nombre de capteurs (369) concernent des modes globaux, ce qui résulte en une très bonne corrélation calcul-essais.

Des problèmes de corrélation subsistent tout de même, comme détaillé en section 6.2.4.

6.2.4 Problèmes de corrélation

Comme motivé en section 6.2.3, on ne traite ici que des 15 premiers modes d'essais. Parmi ces modes, la corrélation est globalement très bonne avec des MAC presque tous au-dessus de 90 et des erreurs en fréquence de l'ordre de 1%.

On peut tout de même citer divers problèmes :

- Les expériences révèlent des dissymétries que le modèle ne prévoit pas. En effet, les modes 1-2, ainsi que 3-4, ont des fréquences EF beaucoup plus proches que les fréquences d'essais correspondantes. Ceci est particulièrement frappant sur le mode 4, avec plus de 7% d'erreur.
- Les modes EF 9 et 10 apparaissent dans un ordre inversé par rapport aux modes 9 et 10 d'essais.
- Le mode EF 11 a une fréquence trop faible.
- Pour le reste, les *MAC* sont généralement bons mais peuvent tout de même être améliorés (notamment pour les modes expérimentaux 13 et 14).

Problèmes de dissymétrie

Un des problèmes de corrélation les plus importants est lié aux modes d'essais 3 et 4, qui présentent une séparation en fréquence que le modèle ne reproduit pas. Seule une dissymétrie introduite dans le modèle peut permettre de rendre compte de cette dissymétrie.

Une étude de sensibilité des fréquences propres EF a permis d'éliminer d'éventuels effets de masse ajoutée liés aux excitateurs 4 et 5 ainsi que 6 et 7 (situés sur la CUB, voir figure 6.6).

Par contre, le fait de décentrer l'ensemble de la CUB par rapport à l'ACUB de 5cm en y et 5cm en z fait varier les fréquences de manière non négligeable. On voit notamment que les modes 3 et 4 se séparent (2% de séparation relative). Le caractère raisonnable de cette modification reste à valider (des excentrages plus faibles répartis sur plusieurs interfaces pourraient être considérés).

Une autre possibilité serait la présence de dissymétries dans la condition d'encastrement, mais cette hypothèse n'a pas été testée car les modes 3-4 sont dominés par la réponse de la charge utile basse.

Inversion des modes 9 et 10, fréquence du mode 11

Pour résoudre l'inversion des modes 9-10 EF par rapport aux données d'essais, on cherche à diminuer la fréquence du mode EF 10 et à augmenter celle du mode 9. Pour ce faire, on étudie la quantité $\frac{\partial \omega_j^2}{\partial p}$ pour $j = 9, 10$.

Cette étude est résumée dans les figures 6.11.a et 6.11.b. qui représentent les sensibilités des valeurs propres $\frac{\partial \omega_j^2}{\partial p}$ pour les modes 9 et 10, par rapport aux raideurs des 26 sous-structures composant le modèle de l'ESC-A (on considère en général que les masses sont connues précisément et on ne cherche pas à les modifier). Si l'on veut diminuer la fréquence du mode 10 et augmenter celle du mode 9, il faut trouver des paramètres qui influent sur la fréquence d'un mode sans modifier la fréquence de l'autre mode, car ici toutes les fréquences réagissent dans le même sens (augmentation ou diminution) à une variation de raideur. Parmi

les paramètres sensibles, la plupart ne sont pas modifiables (par exemple on ne fera pas varier la raideur de l'ACU haute car ce paramètre est considéré comme connu). Les paramètres modifiables, qui influent différemment sur les modes 9 et 10, sont par exemple la raideur du SYLDA5 (en fait la raideur des couronnes d'éléments autour des trous du SYLDA5, voir section 6.4.1), ou encore la raideur des *ITS struts*, paramètres qui seront recalés en section 6.4.

En ce qui concerne le mode 11 et parmi les paramètres modifiables (figure 6.11.c), on peut citer la raideur du SYLDA5, des SARO et des *ITS struts*.

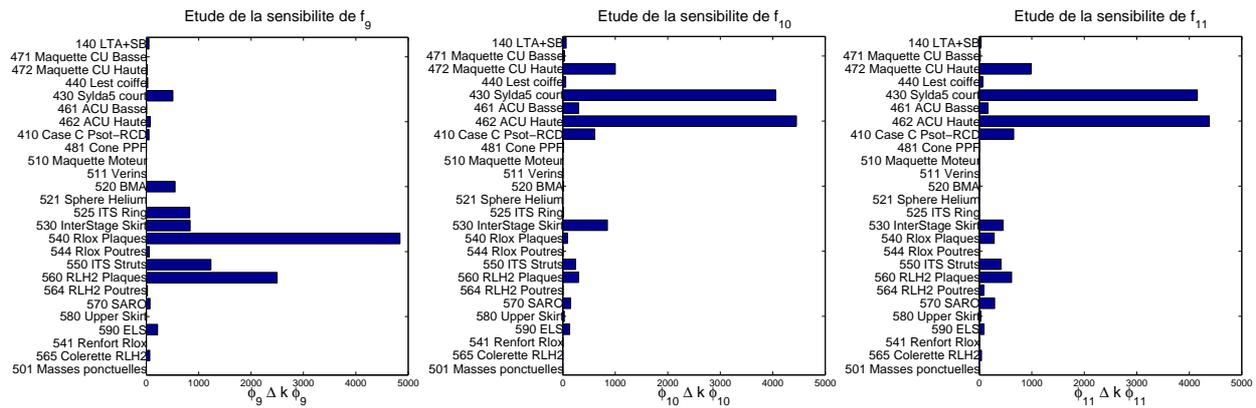


FIG. 6.11 – Sensibilité des valeurs propres $\frac{\partial \omega_j^2}{\partial p}$ pour les modes 9 (a), 10 (b) et 11 (c), par rapport aux raideurs des 26 sous-structures.

6.3 Choix des paramètres

Comme dans tout problème d'optimisation, le choix des paramètres est une phase cruciale du processus de recalage d'un modèle. Il s'agit en effet de limiter le nombre de paramètres à recaler afin d'améliorer le conditionnement du problème d'optimisation et de permettre une convergence en un temps raisonnable. Pour cette phase, différentes techniques peuvent être mises en oeuvre comme cela sera illustré dans les sections suivantes pour le cas de l'ESC-A.

La revue d'un modèle par les ingénieurs l'ayant réalisé permet de cerner un certain nombre d'approximations dont on peut vouloir tester la validité. Le recalage est alors vu comme une technique permettant de déterminer des paramètres équivalents pour un modèle erroné que l'on ne souhaite pas raffiner par une étude locale.

Les études de sensibilité permettent ensuite de déterminer les paramètres influents sur les fonctions objectif utilisées pour le recalage. On détecte ainsi les paramètres peu sensibles, qui ne sont pas forcément corrects mais conduisent à un problème d'optimisation mal conditionné, c'est à dire dont le résultat est très incertain.

Les critères d'erreur en énergie abordés en section 5.3.3 fournissent enfin une technique prenant directement en compte les mesures pour localiser des erreurs. Il convient cependant de valider les conclusions pouvant être tirées de ces analyses par une validation numérique de la capacité du critère retenu à localiser une erreur dans une sous-structure particulière.

6.3.1 Connaissance de l'ingénieur

Les moyens de sélection automatiques des paramètres (sensibilité, localisation d'erreur) permettent d'isoler grossièrement quelques paramètres qui semblent influents. Mais ils ne permettent pas de connaître exactement les parties de la structure qui sont sujettes à caution. Pour ce faire, il est nécessaire de faire appel au sens critique de l'ingénieur qui a réalisé le modèle EF.

En effet un modèle EF contient systématiquement des approximations, qui peuvent être de plusieurs types

- Modélisation de liaisons complexes par des liaisons simplifiées (liens rigides, relations linéaires, etc.).
- Approximation topologique : connexion d'une poutre au noeud EF le plus proche, même si physiquement la connection n'est pas exactement à cet endroit.
- Non convergence de maillage et autres problèmes numériques relevant de la phase de vérification du modèle.

Ces simplifications, inhérentes à la modélisation EF, peuvent parfois être "corrigées" par la recherche de paramètres équivalents.

Au cours de discussions avec les ingénieurs d'EADS-LV, il a ainsi été convenu que les simplifications méritant une attention particulière concernent les raideurs des vérins de la maquette moteur, de la sphère Hélium, des *ITS struts*, des SARO et des couronnes autour des trous du SYLDA5 (voir section 6.4.1), ainsi que les inerties des masses ponctuelles de la maquette moteur.

6.3.2 Étude de sensibilité

L'étude de sensibilité, qui consiste à étudier la sensibilité des différentes fonctions objectif par rapport aux paramètres, permet une sélection automatique de ceux qui influent sur la distance calcul-essais. Les fonctions objectif utilisées sont de deux types : les fonctions basées sur les *MAC* et les erreurs en fréquence (fonctions de type *freq-MAC*, section 5.1.6), et celles basées sur des critères énergétiques (section 5.2).

On s'intéresse donc ici aux sensibilités des erreurs relatives en fréquence, des *MAC* et de la fonction objectif $J(\omega_{Test}, p)$ par rapport aux raideurs et masses des 26 sous-structures composant le modèle de l'ESC-A. En effet, le nombre de paramètres à étudier étant trop important, on paramétrise dans un premier temps le modèle en s'appuyant sur le découpage en sous-structures.

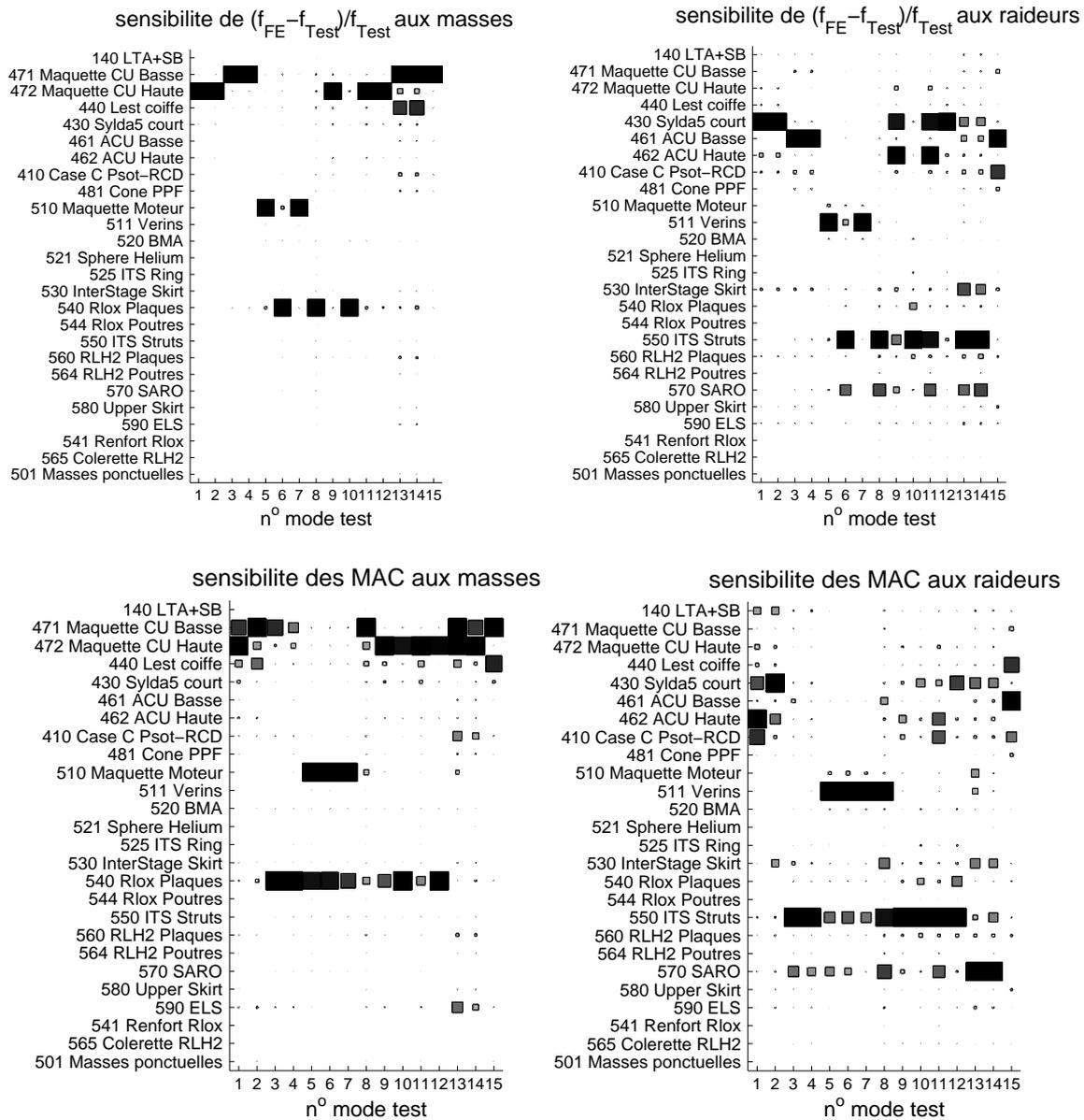


FIG. 6.12 – Pour chaque couple de mode apparié (tableau 6.2), sensibilité de $\Delta f/f$ et des MAC par rapport aux masses (a,c) et aux raideurs (b,d) des 26 sous-structures.

Les figures 6.12.a-6.12.d représentent, pour chaque couple de modes appariés (i,j) (cf. tableau 6.2), les sensibilités des critères $\frac{f_{EF,j} - f_{Test,i}}{f_{Test,i}}$ pour des variations de masse (6.12.a) et de raideur (6.12.b) dans chacune des sous-structures, ainsi que les sensibilités du critère $MAC_{i,j}$ pour des variations de masse (6.12.c) et de raideur (6.12.d).

Les figures 6.13.a et 6.13.b représentent elles les sensibilités de $J(\omega_{Test,p})$ par rapport à ces mêmes paramètres.

Les sensibilités ont été calculées en affectant des poids de 10 aux paramètres que l'on considère méconnus (cf. section 6.3.1) et qui correspondent à des sous-structures, à savoir les raideurs des vérins de la maquette moteur, de la sphère Hélium, des *ITS struts* et des SARO. Cette pondération de la sensibilité par le niveau de méconnaissance est importante pour l'interprétation des résultats.

Les figures 6.12 et 6.13 montrent que les masses les plus influentes sont celles des maquettes de charges utiles, de la maquette moteur ainsi que du RLOX et du RLH2, ce qui s'explique par le fait que ces masses sont les plus importantes. En termes de raideur, le SYLDA5, les adaptateurs de charges utiles, la case C, les Vérins, les *ITS struts* et les SARO jouent notamment un grand rôle.

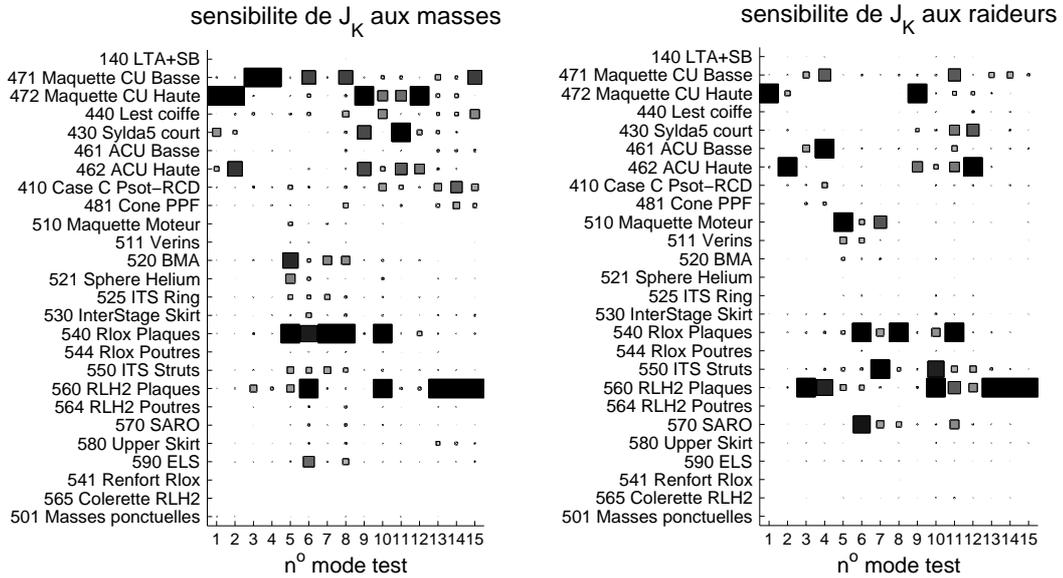


FIG. 6.13 – Sensibilité de $J(\omega_{Test}, p)$ par rapport aux masses (a) et aux raideurs (b) des 26 sous-structures.

6.3.3 Localisation d'erreur

La méthode d'expansion par minimisation du résidu dynamique (ou MDRE, voir section 5.2) a été appliquée à l'ESC-A à partir des $NM = 15$ premiers modes expérimentaux en supposant une erreur sur les mesures $\delta_j = 3\%$, choix motivé par le critère de qualité fourni par IABG. Elle permet, en plus d'étendre les résultats expérimentaux, d'obtenir un résidu dynamique traduisant le fait que les modes expérimentaux étendus ne satisfont pas l'équation dynamique du modèle. On étudie alors la répartition énergétique de ce résidu pour localiser les *erreurs de modèle*.

De manière à ne pas donner plus d'importance aux zones où l'énergie modale est im-

portante, l'énergie des résidus dans une sous-structure est ramenée à celle des modes. Ainsi, si l'on cherche à étudier la répartition d'erreur à partir des NM modes expérimentaux, on réalise l'expansion de ces modes et on étudie l'énergie de déformation (ou cinétique) relative moyenne des résidus obtenus par rapport à celle des modes étendus par la MDRE dans chaque sous-structure i , en utilisant le critère (5.33) proposé en section 5.4.1.

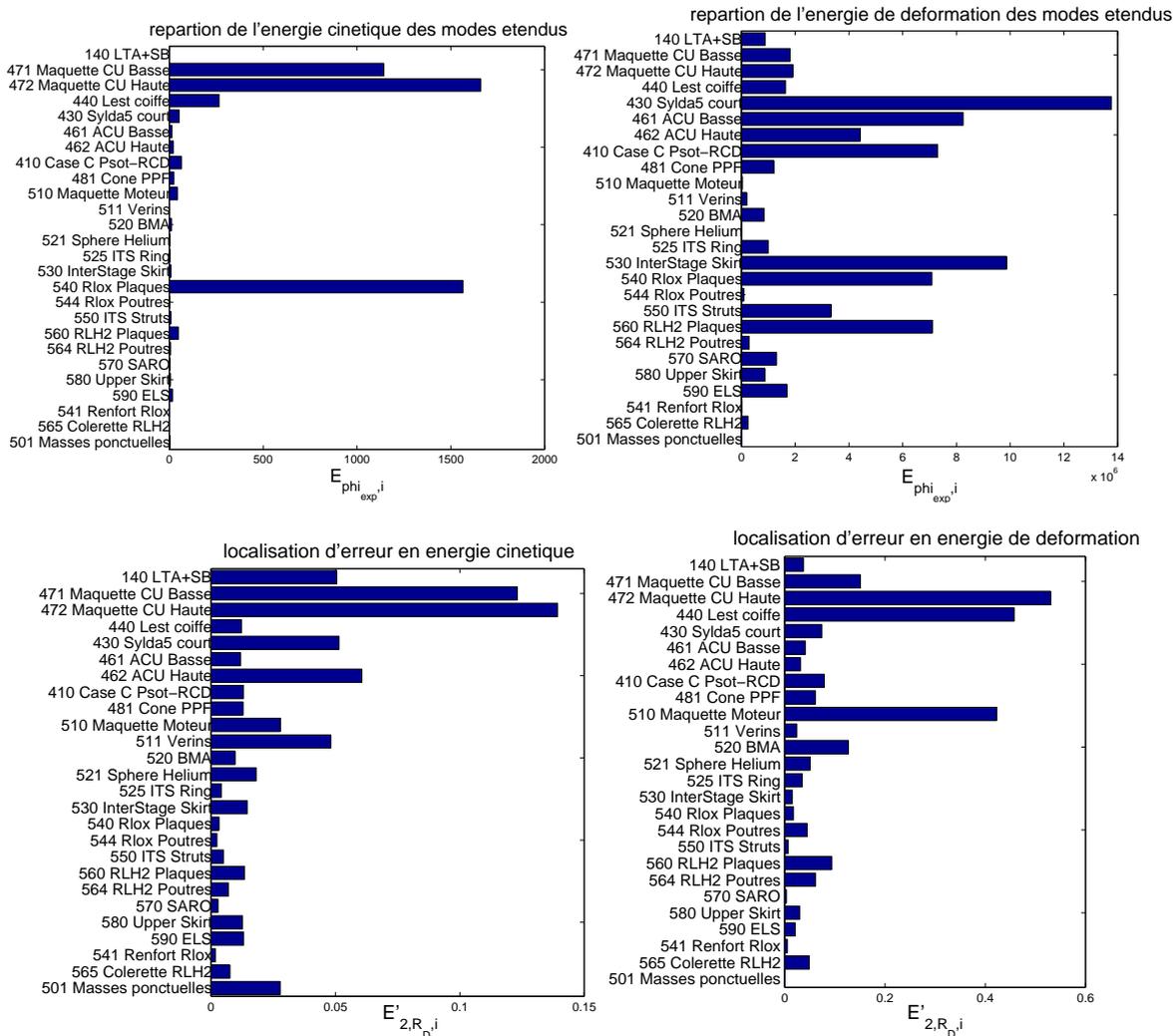


FIG. 6.14 – **a**: Energie cinétique des modes (dénominateur de $E'_{2,R_D,i}$), **b**: Energie de déformation des modes, **c**: Localisation d'erreur par l'indicateur $E'_{2,R_D,i}$, erreur en énergie cinétique, **d**: erreur en énergie de déformation.

Les figures 6.14.a et 6.14.b exposent la répartition de l'énergie (respectivement énergie cinétique et de déformation) des modes étendus moyennée sur les $NM = 15$ premiers modes expérimentaux, correspondant au dénominateur de (5.33), les figures 6.14.c et 6.14.d représentant la répartition de l'indicateur $E'_{2,R_D,i}$ (et sa variante en énergie cinétique).

On voit ainsi (figure 6.14.a) que les structures dans lesquelles l'énergie cinétique des modes étendus est la plus élevée sont la CUB, la CUH et le réservoir à oxygène, ce qui s'explique

par le fait que c'est dans ces sous-structures que l'on trouve les masses les plus importantes. Pour ce qui est de l'énergie de déformation (figure 6.14.b), les structures concernées sont principalement le SYLDA5, les adaptateurs (ACUB et ACUH), la CASE C POST-RCD, l'*InterStage Skirt* et les réservoirs (RLOX et RLH2).

L'indicateur d'erreur (figures 6.14.c et 6.14.d) indique que les CU, le lest coiffe, le SYLDA5, l'ACU haute, la maquette moteur ainsi que les vérins et le BMA semblent être des régions contenant des erreurs.

6.3.4 Visibilité d'erreur

La section 6.3.3 semble indiquer que certaines sous-structures contiennent des erreurs de modélisation. Pour confirmer ces suppositions il est nécessaire de mener une étude de visibilité, de la même manière qu'en section 5.4.

Ainsi, on cherche dans un premier temps à déterminer si des erreurs introduites dans les différentes sous-structures sont visibles en utilisant le résidu en déplacement théorique (cf. section 5.4.1)

$$R_D = \hat{K}_{p_{mod}}^{-1} (Z_{p_{mod}}(\omega_{p_0})\phi_{p_0}), \quad (6.3)$$

où ϕ_{p_0} sont les modes EF corrélés avec les 15 premiers modes expérimentaux (voir tableau 6.2), calculés pour $p = p_0$ (pseudo-mesures) et $Z_{p_{mod}}(\omega_{p_0})$ est la matrice de raideur dynamique assemblée pour la structure modifiée ($p = p_{mod}$) aux fréquences pseudo-expérimentales ω_{p_0} .

On étudie ici la capacité à localiser des erreurs en raideur (augmentation de la raideur de 10%, $K_{mod} = 1.1K_0$) introduites dans les différentes sous-structures en utilisant les 15 résidus de (6.3) et l'indicateur $E'_{2,R_D,i}$ développé en section 5.4.1. La sous-structure 501 ne contenant que des masses ponctuelles, aucun défaut en raideur n'y a été introduit et cette sous-structure n'est donc pas étudiée. La figure 6.15.a montre que si l'on disposait de mesures non bruitées des 15 premiers modes expérimentaux sur l'ensemble des DDLs EF, les défauts en raideur ($K_{mod} = 1.1K_0$) seraient visibles pour toutes les sous-structures étudiées, sauf pour *ITS ring* et dans une moindre mesure pour les poutres RLH2. Ceci s'expliquant par le fait qu'*ITS ring* est fortement connecté aux poutres du RLOX, de même que les poutres et la colerette du RLH2.

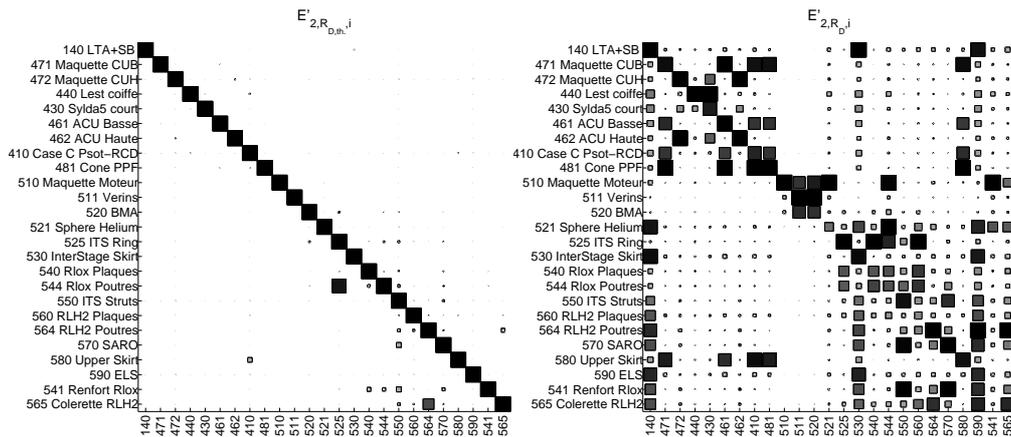


FIG. 6.15 – a: $E'_{2,R_{D,th},i}$, b: $E'_{2,R_{D,i}}$ pour $\sigma_j = 3\%$ et $\delta_j = 3\%$. En abscisse : modification introduite, en ordonnée : répartition de l'énergie. Cas de l'ESC-A.

Si maintenant on étudie la visibilité de ces mêmes défauts, mais en utilisant des pseudo-mesures obtenues sur les 317 capteurs et en prenant $\sigma_j = 3\%$ et $\delta_j = 3\%$ (c'est à dire en introduisant 3% d'erreur dans les mesures (bruit de type (5.10), cf. section 5.4) et en supposant 3% d'erreur, choix qui est motivé par le critère de qualité fourni par IABG), on obtient la figure 6.15.b. Cette figure indique que très peu de défauts sont vraiment localisables lorsqu'on utilise les résultats issus de la MDRE. Ainsi, seuls sont visibles des défauts introduits dans le Lest coiffe et la maquette moteur.

L'utilisation d'autres indicateurs d'erreur ($E_{1,R_{D,i}}$, $E_{2,R_{D,i}}$ ou $E'_{1,R_{D,i}}$) donne des conclusions légèrement différentes, avec parfois la localisation d'autres défauts (dans le SYLDA5, les vérins de la maquette moteur ou encore l'ACUB). De même, le fait de supposer une erreur plus faible sur les mesures (la valeur $\delta_j = .1\%$ a été testée) change les résultats, avec parfois une visibilité meilleure.

Au final cependant, les résultats de localisation sont à prendre avec une grande précaution. En effet, selon le type d'indicateur utilisé ou encore selon l'erreur supposée dans les mesures, les erreurs visibles sont différentes et aucun indicateur en particulier, de même qu'aucune valeur précise de δ n'ont donné des résultats bien meilleurs que les autres.

Ainsi les résultats de localisation d'erreur (qui indiquaient des erreurs de modèle dans les maquettes de CU, le lest coiffe, SYLDA5, l'ACU haute, la maquette moteur ainsi que les vérins et le BMA) obtenus en section 6.3.3 sont assez incertains dans ce cas précis. Une étude beaucoup plus approfondie serait nécessaire pour tirer des conclusions claires sur la visibilité d'erreur par ce critère énergétique pour des modèles aussi complexes.

6.4 ESC-A - Recalage

6.4.1 Paramètres sélectionnés

L'étude de la section 6.3 a montré que la localisation d'erreur ne permet pas en l'état actuel des choses une sélection objective des paramètres à recalage, du moins pour l'application considérée. Le choix de ces paramètres s'appuie donc sur la connaissance des ingénieurs d'EADS-LV et sur l'étude de sensibilité.

Ces deux critères nous ont permis de sélectionner les paramètres suivants

- Raideurs des 4 SARO (4 paramètres).

En effet, ces éléments ressortent de l'étude de sensibilité et n'ont pas tous exactement la même raideur, ce qui permet de dissymétriser la structure, comme le montre la figure 6.16 qui représente la disposition des SARO. De plus, bien que les raideurs des SARO aient été mesurées de manière très précise, la connexion de ces systèmes amortisseur au reste de la structure est réalisé sur le noeud le plus proche, cette simplification pouvant être remise en cause.

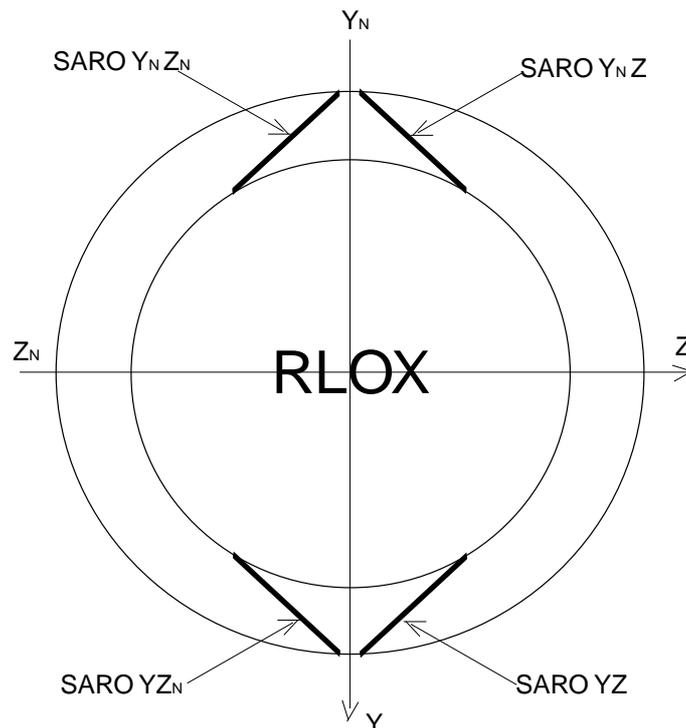


FIG. 6.16 – Schéma décrivant la disposition des SARO (Système Amortisseur du Réservoir à Oxygène).

- Raideurs des *ITS struts* et d'*ITS Ring* (2 paramètres).

La raideur des *ITS struts* a une influence très importante sur les critères *freq - MAC* et énergétiques. L'*ITS Ring* étant directement connecté aux *ITS struts*, ces paramètres peuvent être étudiés ensemble.

- Raideur des couronnes d'éléments autour des trous du SYLDA5 (1 paramètre).

Les 7 trous dans le SYLDA5 sont une des rares dissymétries de la structure. On a donc cherché à étudier cette dissymétrie en recalant la raideur des éléments se trouvant à la périphérie des trous (figure 6.17). Le nombre d'éléments autour de ces trous étant relativement réduit, le recalage de ces raideurs est susceptible de fournir des paramètres "corrigeant" cette simplification.

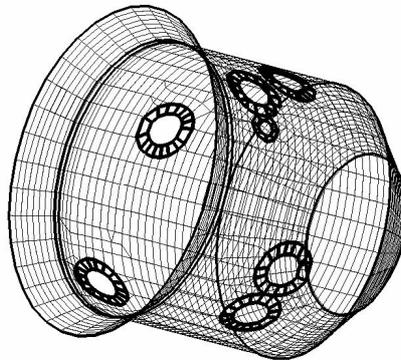


FIG. 6.17 – SYLDA5, les éléments dont la raideur est modifiée sont en gras.

- Raideurs des vérins de la maquette moteur (2 paramètres).

La raideur des vérins de la maquette moteur (sous-structure 511) ayant une influence sur la fonction objectif *freq - MAC* et en particulier sur les modes 5 et 7, ces éléments de connexion sont de bons candidats au recalage.

- Inerties des 2 masses ponctuelles de la maquette moteur (6 paramètres).

La masse de la maquette moteur étant un paramètre sensible pour la fonction objectif *freq - MAC*, et des doutes existant sur la position précise de ces deux masses ponctuelles, la donnée qui a été remise en cause est la position du centre d'inertie des masses ponctuelles situées sur la maquette moteur (la masse de 170Kg et celle de 56.8Kg). En effet si l'on considère que le centre d'inertie n'est pas à l'endroit où est placée la masse ponctuelle, des termes correcteurs doivent être ajoutés aux matrices de masse.

La matrice élémentaire d'une masse ponctuelle M située à une distance $dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y + dz.\vec{e}_z$ de son centre d'inertie est

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & Mdz & -Mdy \\ 0 & M & 0 & -Mdz & 0 & Mdx \\ 0 & 0 & M & Mdy & -Mdx & 0 \\ 0 & -Mdz & Mdy & I_{xx} + M(dy^2 + dz^2) & I_{xy} - Mdx dy & I_{xz} - Mdx dz \\ Mdz & 0 & -Mdx & I_{xy} - Mdx dy & I_{yy} + M(dx^2 + dz^2) & I_{yz} - Mdy dz \\ -Mdy & Mdx & 0 & I_{xz} - Mdx dz & I_{yz} - Mdy dz & I_{zz} + M(dx^2 + dy^2) \end{bmatrix}$$

où I est la matrice d'inertie calculée au centre de gravité.

Le recalage a été réalisé en négligeant les termes d'ordre 2 en (dx, dy, dz) , ces *offsets* ne pouvant dépasser 10cm (limite fixée lors du recalage).

Au final donc 15 paramètres sont sélectionnés. Il sont décrits dans le tableau 6.4, ainsi que les intervalles de variation autorisés.

TAB. 6.4 – Liste des paramètres sélectionnés pour le recalage.

paramètre	variation relative autorisée
Raideur SARO YZ (situé dans la partie $Y > 0$ et $Z > 0$ du modèle)	0.5 – 2
Raideur SARO YNZ (situé dans la partie $Y < 0$ et $Z > 0$ du modèle)	0.5 – 2
Raideur SARO YNZN	0.5 – 2
Raideur SARO YZN	0.5 – 2
Raideur ITS struts	0.5 – 2
Raideur ITS ring	0.5 – 2
Raideur des couronnes d'éléments autour des trous SYLDA5	0.2 – 5
Raideur Vérin maquette moteur situé dans la partie $Z > 0$	0.5 – 2
Raideur Vérin maquette moteur situé dans la partie $Z < 0$	0.5 – 2
Position de la masse ponctuelle de la maquette moteur 170Kg (3 paramètres)	$-0.1\text{m} < dx < 0.1\text{m}$ $-0.1\text{m} < dy < 0.1\text{m}$ $-0.1\text{m} < dz < 0.1\text{m}$
Position de la masse ponctuelle de la maquette moteur 56.8Kg (3 paramètres)	$-0.1\text{m} < dx < 0.1\text{m}$ $-0.1\text{m} < dy < 0.1\text{m}$ $-0.1\text{m} < dz < 0.1\text{m}$

Les variations relatives autorisées sont relativement grandes, la vérification du caractère physique des valeurs recalées étant réalisée *a posteriori* à la fin du calcul.

6.4.2 Mise en oeuvre

On a utilisé pour le recalage les fonctions objectif $J_{freq-MAC}$ et $J(\omega_{Test}, p)$ (définies en sections 5.1.6 et 5.2 respectivement), en considérant les $NM = 15$ premiers modes expérimentaux.

La fonction objectif $J_{freq-MAC}$ utilise un facteur de pondération β (5.3), défini au modèle nominal ($p = p_0$), de manière à donner le même poids au terme relatif aux erreurs en fréquence et à celui relatif aux MAC (un MAC sur tous les capteurs est utilisé). D'autre part, la procédure consistant à recombinaer les paquets de modes 1-2, 3-4 et 5-6-7 (détaillée en section 6.2.3) est effectuée à chaque pas de l'optimisation.

Pour ce qui est de la fonction objectif énergétique $J(\omega_{Test}, p)$, le facteur de pondération γ est calculé itérativement de sorte que pour le modèle nominal l'erreur relative sur les mesures δ (5.9) soit de 3%, choix motivé par le critère de qualité fourni par IABG, qui garantit des mesures précises à 3%. Une norme euclidienne est choisie pour le terme d'erreur sur les mesures ($Q_j = I$), car aucun des 317 capteurs ne semble particulièrement défaillant (cf. tableau 6.3) et que l'on a pas de critère de qualité de la mesure sur chaque capteur.

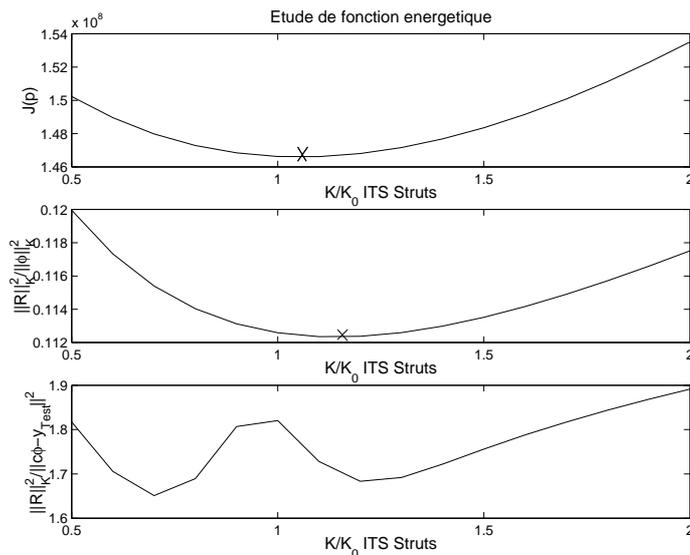


FIG. 6.18 – Etude de la fonction énergétique $J(\omega_{Test}, p)$ en fonction de $p = K/K_0$, cas de la raideur de *ITS Struts*. **a**: $J(\omega_{Test}, p)$, **b**: moyenne de $\|R_D\|_K^2 / \|\phi_{exp}\|_K^2$ sur les 15 modes expérimentaux, **c**: Rapport de l'erreur de modèle sur l'erreur de mesure.

La figure 6.18 représente respectivement, en fonction de la raideur K/K_0 des *ITS Struts* (K_0 est la raideur du modèle nominal), la fonction $J(\omega_{Test}, p)$, la moyenne sur les 15 modes expérimentaux du terme d'erreur de modèle normalisé par l'énergie des modes étendus $\|R_D\|_K^2 / \|\phi_{exp}\|_K^2$ et le rapport moyen de l'erreur de modèle sur l'erreur de mesure $\|R_D\|_K^2 / (\gamma \|c\phi_{exp} - y_{test}\|^2)$.

Elle montre que la fonction objectif et l'erreur de modèle ont une allure très régulière et qu'elles atteignent leurs minima respectifs pour des valeurs de raideur légèrement différentes. Le rapport des deux termes d'erreur est lui de l'ordre de l'unité sur l'intervalle paramétrique étudié ($1.6 < R < 1.9$), ce qui garantit que lors du recalage les deux termes seront bien minimisés.

Le recalage consiste alors à minimiser les deux fonctions objectif décrites précédemment en faisant varier les paramètres sélectionnés en section 6.4.1.

Durant cette thèse on a tenté de développer des méthodes d'optimisation, notamment des méthodes basées sur la sensibilité (interpolations quadratiques, cf. [14]). Mais les performances n'étant pas meilleures qu'avec les outils d'optimisation généralistes implémentés dans l'*Optimization Toolbox* [25], on préfère ces derniers qui sont plus robustes. Précisément, la fonction *lsqnonlin* est utilisée pour la minimisation de $J_{freq-MAC}$ et *fmincon* pour celle de $J(\omega_{Test}, p)$. Les gradients de $J(\omega_{Test}, p)$, dont le calcul est explicité en section 5.3.2, sont utilisés pour orienter les directions de recherches. Cette information n'est pas prise en compte pour la fonction $J_{freq-MAC}$, le calcul par différences finies étant jugé moins coûteux.

6.4.3 Recalage par groupes de paramètres

Dans un premier temps, on regroupe les paramètres sélectionnés (tableau 6.4) en plusieurs sous-groupes, à savoir

- Groupe 1 : Raideurs des SARO (4 paramètres).
- Groupe 2 : Raideurs des *ITS struts* et d'*ITS ring* (2 paramètres).
- Groupe 3 : Raideur des couronnes d'éléments autour des trous SYLDA5 (1 paramètre).
- Groupe 4 : Raideur des vérins de la maquette moteur (2 paramètres).
- Groupe 5 : Inerties des 2 masses ponctuelles de la maquette moteur (6 paramètres).

En effet, on ne peut procéder au recalage sur 15 paramètres à la fois car les algorithmes d'optimisation convergent mal dans ce cas. De plus, les recalages par groupes vont permettre de voir l'influence respective des paramètres sur la corrélation.

6.4.3.1 Recalages des raideurs des SARO

Le recalage des raideurs des SARO est présenté en figures 6.19 et 6.20 pour les fonctions objectif $J_{freq-MAC}$ et $J(\omega_{Test}, p)$ (énergétique) respectivement.

On voit que pour le recalage *freq - MAC* la raideur de certains SARO augmente (pour les SARO YZN et YNZ) alors que celle du SARO YZ diminue, la raideur du SARO YNZN restant quasiment inchangée. L'impact de ce recalage est surtout visible sur le critère *MAC*, où l'on constate une nette amélioration des *MAC* associés aux modes 9, 10, 11, 13 et surtout 14, et est moins flagrant pour les erreurs en fréquence, pour lesquelles on constate une faible amélioration sur les modes 6 et 14. Ces résultats montrent que le recalage *freq - MAC* tend à rompre la symétrie cyclique du modèle pour retrouver la dissymétrie observée dans les résultats expérimentaux, sans pourtant corriger les principaux problèmes de dissymétrie observés sur les modes 3 et 4, qui ne font pas directement intervenir les SARO.

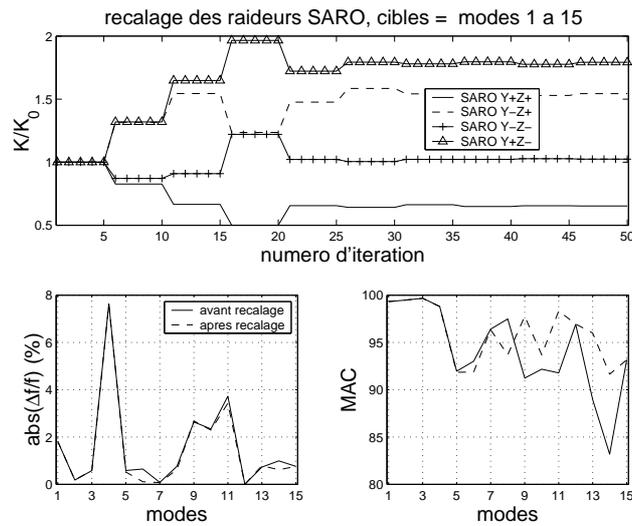


FIG. 6.19 – Recalage $freq - MAC$ des raideurs SARO.

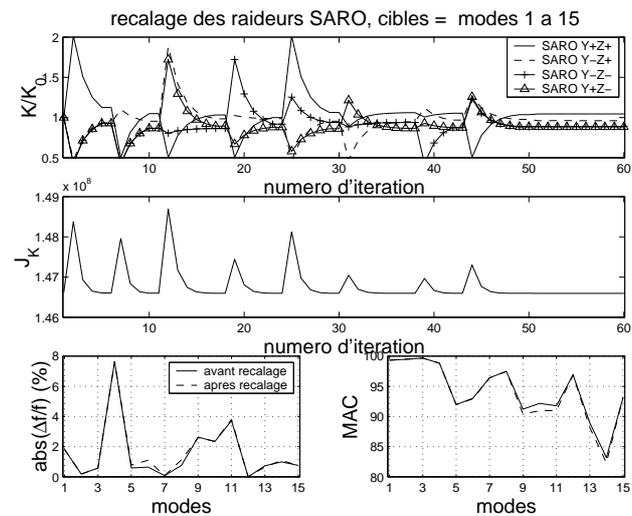


FIG. 6.20 – Recalage énergétique des raideurs SARO. $J_K = J(\omega_{Test})$.

L'optimisation de la fonction énergétique donne des conclusions tout à fait différentes, avec une légère augmentation de la raideur du SARO YNZ et une légère diminution pour les autres SARO. On peut noter d'autre part que la fonction objectif énergétique est très peu sensible aux variations des SARO (moins de $2 \cdot 10^{-4}$ de variation relative entre le nominal et la valeur après recalage) et que ce recalage détériore légèrement les MAC des modes 9, 10 et 11 ainsi que l'erreur en fréquence pour les modes 6 et 8.

6.4.3.2 Recalages des raideurs des ITS struts et d'ITS ring

Les résultats obtenus pour le recalage des raideurs des ITS struts et d'ITS ring sont exposés en figures 6.21 et 6.22 pour $J_{freq-MAC}$ et $J(\omega_{Test}, p)$ respectivement.

Le recalage *freq-MAC* augmente la raideur d'ITS Ring ($K \approx 1.5K_0$) et des ITS Struts ($K \approx 1.1K_0$), ce qui améliore notablement la corrélation du mode expérimental 10 (en MAC et en fréquence) sans changer pour autant l'appariement (les modes EF 9 et 10 sont toujours inversés par rapport aux modes expérimentaux). Notons que l'erreur relative sur la fréquence du mode 8 diminue également.

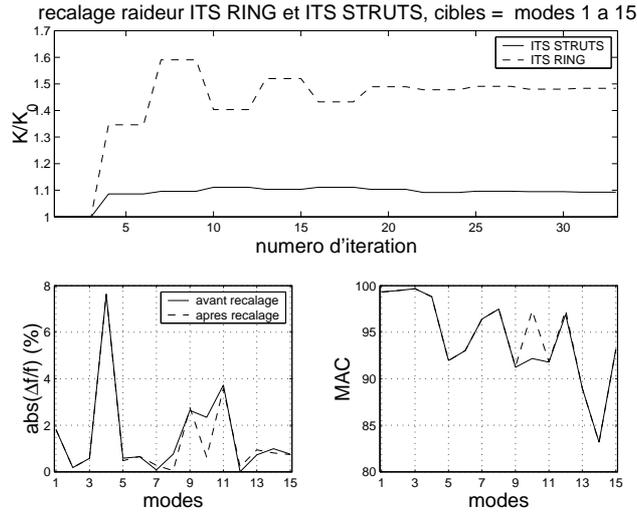


FIG. 6.21 – Recalage *freq-MAC* des raideurs des ITS struts et d'ITS ring.

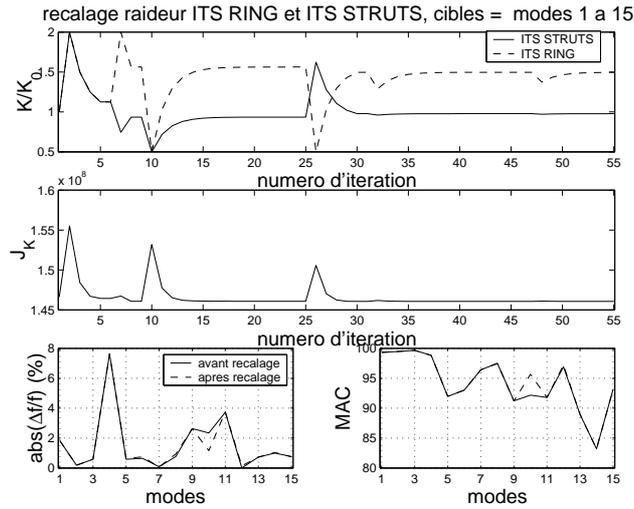


FIG. 6.22 – Recalage énergétique des raideurs des ITS struts et d'ITS ring. $J_K = J(\omega_{Test})$.

Le recalage $J(\omega_{Test,p})$ augmente lui aussi la raideur d'*ITS Ring* d'environ 50% mais ne modifie pas la raideur des *ITS Struts*. La corrélation du mode 10 est améliorée dans des proportions similaires au recalage *freq - MAC*, mais l'erreur en fréquence du mode 8 reste inchangée. D'autre part $J(\omega_{Test,p})$ diminue de manière non négligeable (0.35% de variation relative).

D'après les figures 6.21 et 6.22, il semble que la corrélation des modes expérimentaux 10 et 8 est influencée par la raideur d'*ITS Ring* et des *ITS Struts* respectivement. Ces résultats indiquent clairement un défaut de modélisation à ce niveau.

6.4.3.3 Recalages de la raideur des vérins de la maquette moteur

Les résultats de ces recalages sont exposés dans les figures 6.23 et 6.24.

Le recalage *freq - MAC* augmente très légèrement la raideur du vérin $Z > 0$ et laisse quasiment inchangée celle du vérin $Z < 0$. Les améliorations de corrélation sont minimales, avec une faible amélioration en fréquence pour les modes 5 et 6.

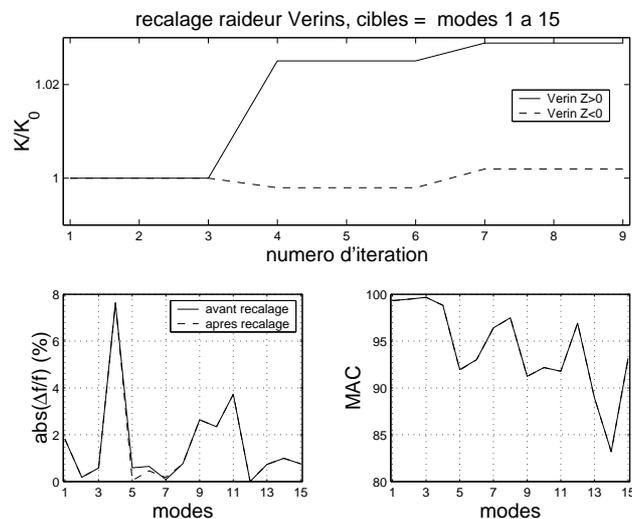


FIG. 6.23 – Recalage *freq - MAC* des raideurs vérins.

Le recalage $J(\omega_{Test,p})$ a un effet inverse, la raideur du vérin $Z > 0$ étant diminuée ($K \approx .96K_0$) et celle du vérin $Z < 0$ étant augmentée ($K \approx 1.056K_0$). Ceci induit une faible détérioration de la corrélation en fréquence des modes 5 et 7.

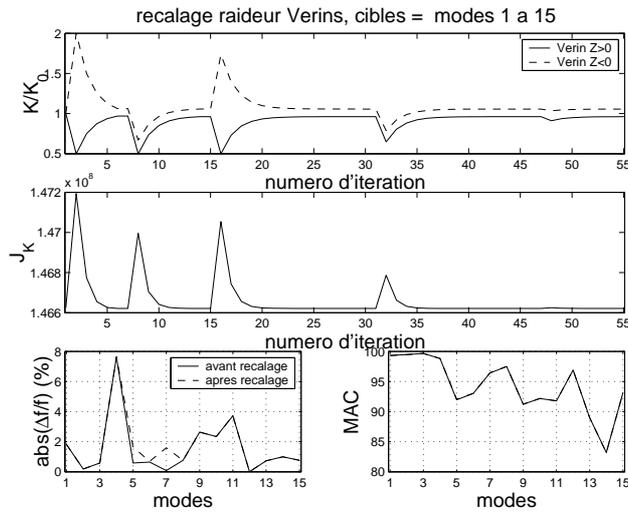


FIG. 6.24 – Recalage énergétique des raideurs verins. $J_K = J(\omega_{Test})$.

6.4.3.4 Recalages de la raideur des couronnes d'éléments SYLDA5

Les résultats des recalages de la raideur des couronnes d'éléments autour des trous du SYLDA5 sont présentés en figure 6.25 et 6.26.

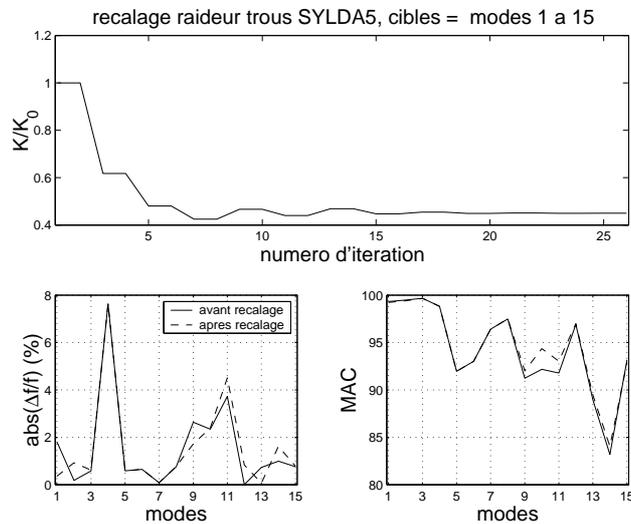


FIG. 6.25 – Recalage *freq* – *MAC* des raideurs des trous du SYLDA5.

Le recalage *freq* – *MAC* a tendance à diminuer la raideur, ce qui accentue la dissymétrie. En termes de *MAC* et d'erreur en fréquence, les résultats sont mitigés. En effet les *MAC* des modes 9, 10 et 11, ainsi que les erreurs en fréquence des modes 1, 9 et 13 sont améliorés; mais certaines fréquences sont détériorées (celles des modes 2, 11, 12 et 14). On note tout de

même que ce paramètre affecte sensiblement les modes 1 et 2, ce qui laisse penser que d'autres recalages affectant la symétrie du SYLDA5 pourraient éventuellement régler les problèmes de dissymétrie des modes 1 et 2.

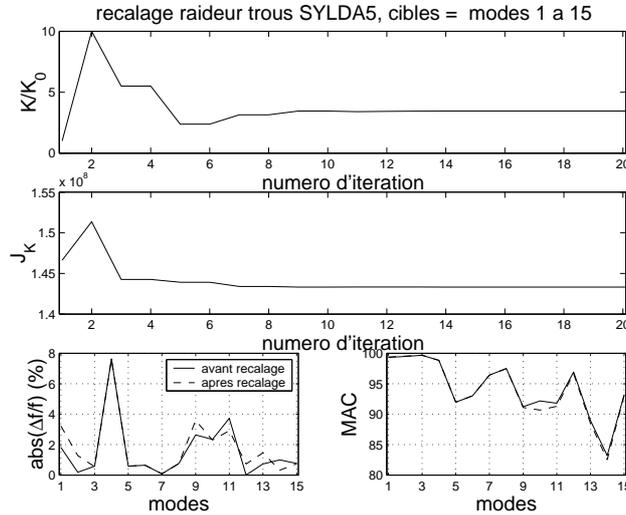


FIG. 6.26 – Recalage énergétique des raideurs des trous du SYLDA5. $J_K = J(\omega_{Test})$.

Le recalage $J(\omega_{Test}, p)$ a l'effet inverse et augmente la raideur. Ceci a pour effet de détériorer la corrélation des modes 1, 2, 9, 10, 12 et 13, tout en diminuant la valeur de la fonction objectif de 2.25%. Les objectifs de corrélation (fréquence et MAC) et d'erreur en énergie donnent donc ici des indications opposées.

6.4.3.5 Recalages de la position des centres d'inertie

Les résultats des recalages de la position des centres d'inertie des deux masses de la maquette moteur sont donnés en figure 6.27 et 6.28.

Le recalage $freq - MAC$ n'influence que les modes 5 (MAC et erreur en fréquence améliorés) et 6 (MAC amélioré). Il tend à déplacer le centre d'inertie de la masse de 170Kg dans la direction $Y < 0$ et $Z < 0$ et celui de la masse de 56.8Kg dans la direction $X > 0$, $Y < 0$ et $Z > 0$ (en effet il faut interpréter les résultats en prenant les valeurs opposées de celles lues sur la figure car si la masse ponctuelle est située à une distance \vec{d} de son centre d'inertie alors le centre d'inertie est situé à une distance $-\vec{d}$ de la masse ponctuelle).

Les corrections apportées à la position de la masse de 56.8Kg sont plus importantes et atteignent la limite fixée de 10cm car cette masse est faible et sa position est donc moins influente.

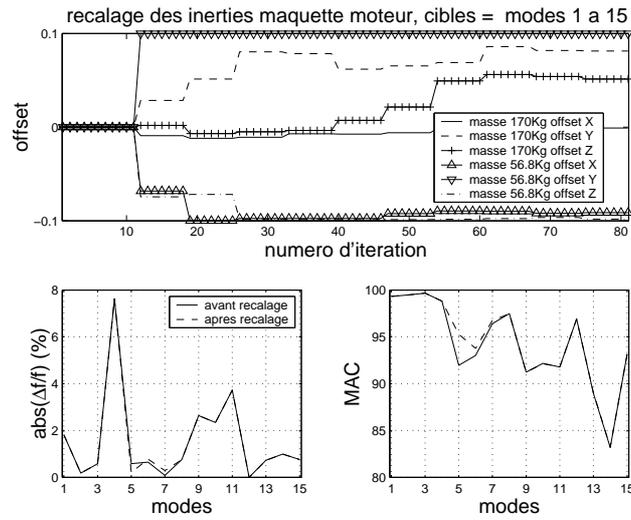


FIG. 6.27 – Recalage $freq - MAC$ des inerties de la maquette moteur.

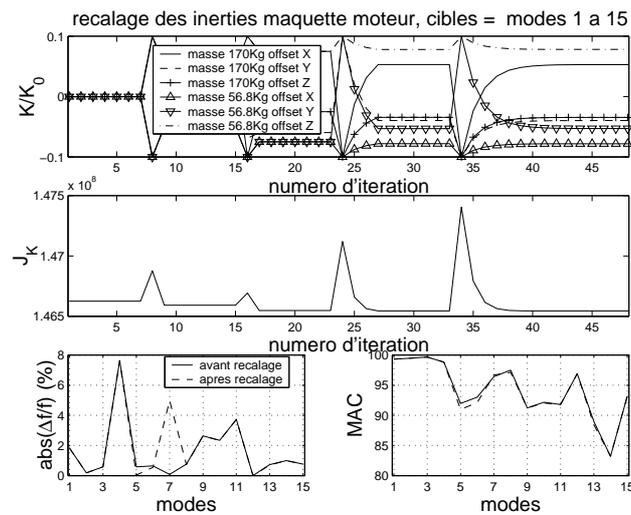


FIG. 6.28 – Recalage énergétique des inerties de la maquette moteur . $J_K = J(\omega_{Test})$.

Le recalage $J(\omega_{Test}, p)$ donne des *offsets* différents du recalage $freq - MAC$ et détériore grandement l'erreur en fréquence sur le mode 7. La fonction objectif varie peu, avec une diminution de 0.027% seulement.

6.4.4 Recalage final $freq - MAC$

Les résultats des recalages utilisant la fonction objectif $J(\omega_{Test}, p)$ donnent des résultats de corrélation décevants, mis à part pour le cas des raideurs des *ITS Struts* et d'*ITS Ring*. Le dernier recalage effectué, qui reprend tous les paramètres recalés précédemment, concerne donc la fonction objectif $J_{freq-MAC}$ seulement. Ce recalage est réalisé de manière séquentielle selon la procédure suivante (voir section 6.4.3 pour la définition des groupes)

- Recalage groupe 1
- Recalage groupe 2
- Recalage groupe 3
- Recalage groupe 4
- Recalage groupe 5

et ceci cinq fois de suite.

Le tracé des paramètres fonction du numéro d'itération (figure 6.29) montre bien les 5 phases de recalage (séparées par des traits verticaux) et à l'intérieur de chacune des phases, les recalages successifs des différents groupes de paramètres.

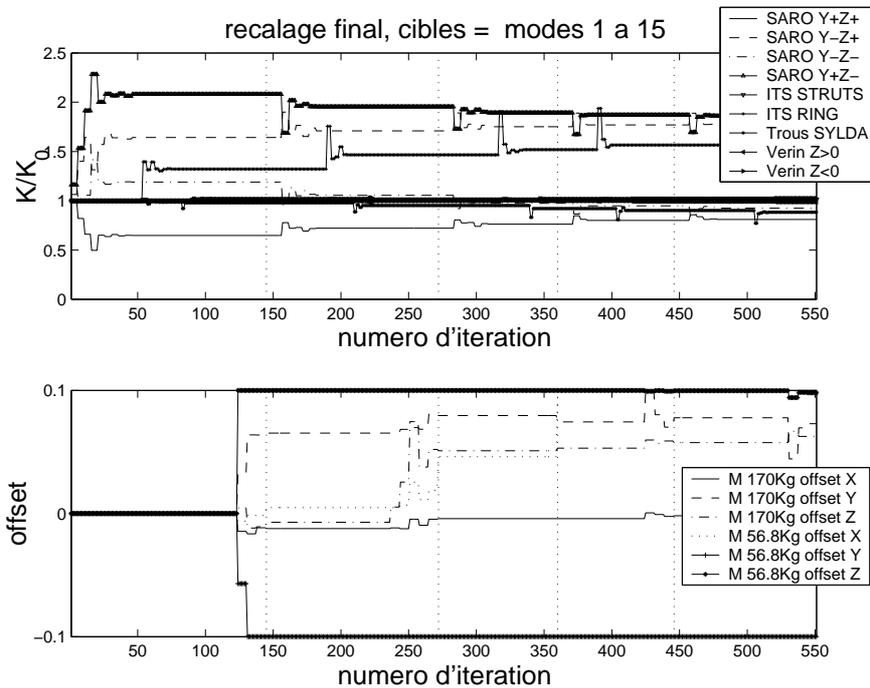


FIG. 6.29 – Variations des paramètres lors du recalage Final. **Haut** : variations des raideurs, **bas** : variations des *offsets*.

	K/K_0 ou <i>offsets</i> (mètre)
SARO YZ	0.816
SARO YNZ	1.666
SARO YNZN	0.796
SARO YZN	1.6
<i>ITS struts</i>	1.01
<i>ITS ring</i>	1.582
Trous SYLDA5	0.882
Vérin Z>0	0.988
Vérin Z<0	1.025
$\Delta X_{CG}(170\text{Kg})$	$-4 \cdot 10^{-4}$
$\Delta Y_{CG}(170\text{Kg})$	$7.3 \cdot 10^{-2}$
$\Delta Z_{CG}(170\text{Kg})$	$6.3 \cdot 10^{-2}$
$\Delta X_{CG}(56.8\text{Kg})$	$1 \cdot 10^{-1}$
$\Delta Y_{CG}(56.8\text{Kg})$	$-1 \cdot 10^{-1}$
$\Delta Z_{CG}(56.8\text{Kg})$	$9.8 \cdot 10^{-2}$

TAB. 6.5 – Valeurs des paramètres recalés.

Les valeurs des paramètres recalés sont présentées dans le tableau 6.5, qui montre que certaines variations sont relativement importantes, parfois même exagérées.

Par exemple, les raideurs des SARO ont été mesurées de manière précise et même si des défauts de modélisation (par exemple des problèmes dans la modélisation des points d'attache) peuvent être corrigés par une variation de la raideur, les valeurs fournies par le recalage ne représentent pas la réalité. Ces valeurs excessives sont principalement dues au fait que le modèle ne contient pas les dissymétries révélées par les expériences. Ainsi, les corrections excessives apportées aux raideurs des SARO (cf. figure 6.16) cherchent à dissymétriser le modèle, sans pourtant engendrer la forte dissymétrie sur les modes 3 et 4.

Pour ce qui est des *offsets*, les valeurs recalées atteignent 10cm pour la masse de 56.8Kg, ce qui est trop important vis à vis de la taille des objets considérés. Mais ceci s'explique par le fait que cette masse est relativement faible et constitue donc un paramètre peu sensible, ce qui implique un mauvais conditionnement du problème inverse lié à l'optimisation. Ce problème s'illustre aussi par le fait que les *offsets* de la masse de 56.8Kg obtenus pour le recalage final diffèrent totalement de ceux obtenus pour le recalage de la position des centres d'inertie seuls, ce qui n'est pas le cas pour la masse de 170Kg.

Ce dernier recalage améliore tout de même sensiblement la corrélation de nombreux modes. Ceci est visible sur la figure 6.30, qui donne un aperçu de la corrélation avant et après ce recalage, mais aussi dans le tableau 6.6 qui présente plus en détail les résultats obtenus.

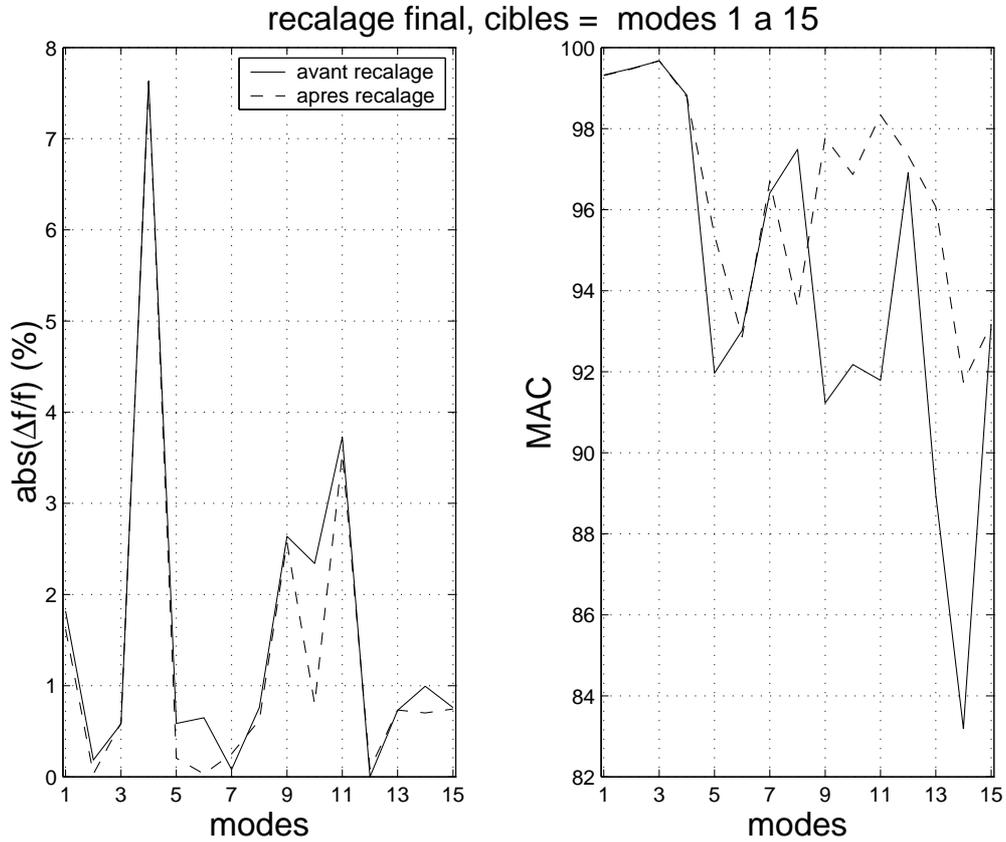


FIG. 6.30 – Erreurs en fréquence et MAC avant et après le recalage final.

Mode test	f_{exp} (Hz)	mode EF initial	f_{EF} initial	$\Delta f/f$ initial	MAC initial	mode EF final	f_{EF} final	$\Delta f/f$ final	MAC final
1		1		1.82 (%)	99	1		1.62(%)	99
2		2		0.18	99	2		0.03	99
3		3		-0.58	100	3		-0.59	100
4		4		-7.63	99	4		-7.62	99
5		5		-0.59	92	5		-0.21	95
6		6		-0.65	93	6		0.03	93
7		7		-0.08	96	7		0.25	97
8		8		-0.76	97	8		0.62	94
9		10		2.64	91	10		2.57	98
10		9		-2.34	92	9		-0.80	97
11		11		-3.73	92	11		-3.54	98
12		12		-0.00	97	12		0.09	97
13		15		0.73	89	14		0.73	96
14		16		-0.99	83	15		-0.70	92
15		18		-0.76	93	17		-0.74	93
16		37		0.17	96	37		0.24	96
17		43		1.76	75	43		1.77	76
18		38		-4.54	72	38		-4.54	72
19		45		-1.88	67	45		-1.88	66
20		45		-3.56	69	45		-3.56	69
21		62		1.38	77	63		1.44	79
22		64		0.61	76	64		0.81	71
23		199		38.50	59	200		38.47	51
24		90		-13.94	25	92		-13.84	24
25		172		-2.66	41	169		-3.31	33

TAB. 6.6 – Corrélation avant et après recalage

Ce tableau indique notamment l'appariement, les erreurs en fréquence ainsi que les MAC avant et après le recalage final. D'un point de vue fréquence, on constate une nette amélioration pour le mode expérimental 10 et une plus légère pour les modes 5, 6 et 14. D'un point de vue corrélation de forme (critère MAC), les modes expérimentaux 5, 9, 10, 11, 13 et 14 sont nettement améliorés, alors que le mode 8 est légèrement détérioré. D'autre part l'appariement varie peu du modèle nominal au modèle recalé, du moins pour les 15 premiers modes expérimentaux où l'on constate des changements d'appariement pour les modes 13, 14 et 15 seulement. Le MAC moyen sur les 15 premiers modes expérimentaux passe lui de 94,24 à 96,47, et la moyenne sur les 15 premières erreurs en fréquence passe de 1,56% à 1,34%, ce qui montre que le recalage améliore le modèle de manière non négligeable.

D'autre part bien que les résultats d'appropriation pour les modes 16 à 25 soient considérés comme peu fiables, il est important de noter que le recalage effectué sur les modes 1 à 15 seulement ne détériorent pas particulièrement la corrélation des modes 16 à 25 (le mode 26 n'est corrélé avec un aucun des modes EF 1 à 200). Ceci constitue un critère non négligeable de validité d'un recalage, dans la mesure où l'on recalcule le modèle sur une plage de fréquence donnée sans pour autant détériorer la validité de ce modèle en dehors de cette plage.

La deuxième partie de cette thèse s'est intéressée au recalage de modèles dynamiques en s'articulant en deux grands chapitres : l'un présentant les outils du recalage et l'autre des applications de ces outils aux recalages de sous-structures d'Ariane 5.

Le principe d'étude de visibilité, introduit au chapitre 5, paraît être une avancée méthodologique importante pour l'utilisation pertinente de critères d'erreur en énergie en vue de la localisation d'erreur dans le modèle. Les deux applications traitées (couvre culasse et ESC-A) permettent de conclure que les indicateurs d'erreur en énergie ne permettent pas systématiquement la localisation, d'où l'importance de l'étude préalable de visibilité d'erreur proposée dans cette thèse.

La méthode de placement de capteurs pour la localisation d'une erreur donnée constitue dans les cas problématiques une solution intéressante, mais elle nécessite de disposer d'une analyse approfondie des méconnaissances de paramètres du modèle au moment de la conception d'essais. Contrairement à l'habitude industrielle d'exploiter des analyses modales génériques, il s'agirait alors de concevoir une expérience en vue de valider des hypothèses sur les valeurs de certains paramètres du modèle. Si l'objectif est plus contraignant et moins ambitieux, sa réussite est aussi beaucoup plus probable. Une poursuite de cette réflexion sur les objectifs atteignables par une expérience donnée serait très utile.

Le chapitre 6 a lui permis d'appliquer les outils du chapitre 5 au recalage de deux sous-ensembles d'Ariane 5. La première application, qui concerne l'Etage Principal Cryotechnique, n'était pas adaptée au recalage et les écueils relevés ont contribué à bien cibler les besoins pour l'application concernant l'Etage Supérieur Cryotechnique ESC-A. L'étude de la corrélation calcul-essais pour ce modèle a permis de mettre en oeuvre les méthodes de recombinaisons de modes ayant des fréquences très proches et a révélé une très bonne concordance entre modes expérimentaux et EF. Pourtant, quelques problèmes de corrélation restent, liés pour la plupart au fait que l'expérience a mis en lumière des dissymétries fortes dans la structure testée, que l'on ne retrouve pas dans le modèle EF.

Les paramètres à recalculer ont principalement été sélectionnés grâce au savoir-faire des ingénieurs d'EADS-LV ; et dans une moindre mesure par la méthode des sensibilités. En effet l'étude de visibilité a montré que la localisation par des critères énergétiques était peu fiable.

Le recalage de ces paramètres a été réalisé en utilisant la fonction objectif énergétique et celle basée sur les critères erreur en fréquence et MAC sur les capteurs. On a ainsi pu observer que ces fonctions étaient souvent antagonistes, l'optimisation par la fonction énergétique détériorant la corrélation $freq - MAC$. Le recalage considéré comme optimal est donc basé sur la fonction objectif $freq - MAC$ seule. Ce recalage a donné de bons résultats, avec une amélioration des MAC sur les 15 premiers modes de 94.24 à 96.47 et des erreurs en fréquence passant de 1.56% à 1.34%, sans détériorer la corrélation des modes 16 à 25 qui n'étaient pas considérés.

Pourtant, les valeurs des paramètres recalés sont dans certains cas non représentatives de la réalité. Par exemple les variations de raideur des SARO sont trop importantes pour

s'expliquer par un défaut de modélisation de ceux-ci. Mais ces valeurs excessives mettent en lumière le besoin de dissymétriser le modèle EF pour qu'il corresponde à l'expérience. Une étude considérant séparément les raideurs des couronnes d'éléments autour des trous du SYLDA5 serait susceptible de corriger les erreurs en fréquence sur les modes 1 et 2, mais le problème lié aux modes 3 et 4 reste lui entier.

Ce dernier point illustre la difficulté fondamentale que représente les biais de modèle non corrigés. L'essai ESC-A présente une dissymétrie qui ne peut être expliquée seulement par un changement paramétrique du modèle (l'hypothèse de décentrage des charges utiles semble la plus plausible). Tous les résultats de recalage sont donc biaisés et il est difficile d'établir si ce biais est petit ou non devant les corrections proposées.

Ce travail a en définitive permis de faire évoluer et de valider l'ensemble des outils liés au recalage sur des cas industriels. L'optimisation de ces outils, la création de modèles d'incertitudes ainsi que le traitement de paramètres à grandes plages de variation (représentations pénalisées de liaisons presque rigides) constituent alors des perspectives intéressantes. Par ailleurs l'équilibre entre le recalage, permettant parfois la détermination de paramètres équivalents, et le recours à des modèles détaillés locaux est une autre réflexion importante pour l'objectif de validation de modèles.

Annexe A

Terminologie ESC-A-2

ACU	: Adaptateur de Charge Utile
ACUB	: Adaptateur de Charge Utile Basse
ACUH	: Adaptateur de Charge Utile Haute
BM	: Bâti Moteur
BMA	: Bâti Moteur Aménagé
CU	: Charge Utile
CUB	: Charge Utile Basse
CUH	: Charge Utile Haute
ELS	: Extended Lower Skirt
ESC-A	: Etage Supérieur Cryotechnique version A
IF	: InterFace
ISS	: Inter Stage Skirt
ITS	: Inter Tank Structure
LTA	: Lower Test Adaptator
MD	: Maquette Dynamique
RLH2	: Réservoir à Hydrogène Liquide
RLOX	: Réservoir à Oxygène Liquide
SARO	: Système Amortisseur du Réservoir à Oxygène
SRI	: Système de Référence Inertielle
SYLDA5	: SYstème de Lancement Double Ariane
US	: Upper Skirt
VEB	: Vehicle Equipment Bay (CASE)

Bibliographie

- [1] Alvin, K.E. Efficient Computation of Eigenvector Sensitivities for Structural Dynamics. *AIAA Journal*, 1997.
- [2] Arnoldi, W.E. The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. *Quart. Appl. Math.*, pages 17–19, 1951.
- [3] Aubry, D. and Lucas, D. and Tie, B. Une approche intégrée pour le calcul adaptatif par éléments finis. *Revue Européenne des Éléments Finis*, pages 105–118, Vol. 7, no 1–2–3, 1997.
- [4] Bagley, L.R. and Torvik, P.J. Fractional calculus - A different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA Journal*, 21(5):741–748, 1983.
- [5] Balmès, E. High Modal Density, Curve Veering, Localization: A Different Perspective on the Structural Response. *Journal of Sound and Vibration*, 161(2):358–363, 1993.
- [6] Balmès, E. *Modèles analytiques réduits et modèles expérimentaux complets en dynamique des structures*. Mémoire d’habilitation à diriger des recherches soutenue à l’Université Pierre et Marie Curie le 10 juillet 1997, 1995.
- [7] Balmès, E. Efficient Sensitivity Analysis Based on Finite Element Model Reduction. *IMAC*, pages 1168–1174, 1998.
- [8] Balmès, E. Review and Evaluation of Shape Expansion Methods. *IMAC*, pages 555–561, 2000.
- [9] Balmès, E. *Structural Dynamics Toolbox 5 (for use with MATLAB)*. <http://www.sdtools.com>, February 2001.
- [10] Balmès, E. and Bobillot, A. Analysis and design tools for structures damped by viscoelastic materials. *IMAC*, February 2002.
- [11] Balmès, E. and Chapelier, C. and Lubrina, P. and Fargette, P. An evaluation of modal testing results based on the force appropriation method. *IMAC*, pages 47–53, 1995.
- [12] Bathe, K. J. Solution Methods of Large Generalized Eigenvalue Problems in Structural Engineering. *Report UC SESM 71-20, Civil Engineering Department, University of California, Berkeley*, 1971.
- [13] Bobillot, A. Méthodes de réduction appliquées au recalage. Applications à la MD-EPC Ariane 5. *Rapport Contractuel Aérospatiale 544279, Juillet*, 1999.
- [14] Bobillot, A. Recalage du modèle dynamique de l’Etage Principal Cryotechnique. *Rapport Contractuel Aérospatiale 544279, Décembre*, 1999.
- [15] Bobillot, A. and Balmès, E. Expansion par minimisation du résidu dynamique. Résolution et utilisation pour la localisation d’erreur. *Actes du 6^{ème} Colloque National en Calcul des Structures, Giens*, 2001.

- [16] Bobillot, A. and Balmès, E. Iterative Computation of Modal Sensitivities. *Submitted to AIAA Journal*, 2001.
- [17] Bobillot, A. and Balmès, E. Solving Minimum Dynamic Residual Expansion and Using Results for Error Localization. *IMAC*, pages 179–185, 2001.
- [18] Bobillot, A. and Balmès, E. Expansion par minimisation du résidu dynamique. Résolution et utilisation pour la localisation d’erreur. *Revue Européenne des Éléments Finis, numéro spécial*, 2002.
- [19] Bobillot, A. and Balmès, E. Iterative techniques for eigenvalue solutions of damped structures coupled with fluids. *AIAA SDM Conference*, 2002.
- [20] Bobillot, A. and Balmès, E. Méthodes de recalage de modèles dynamiques - Applications à la MD-EPC. *Rapport Contractuel Aérospatiale 544279*, pages 22–23, Juillet 2000.
- [21] Boiteau, O. Algorithme de résolution pour le problème généralisé. *Code_Aster, Version 5.0, Doc. R5.01.01-C*, pages 1–78, 2001.
- [22] Bouazzouni, A. and Lallement, G. and Cogan, S. Selecting a Ritz Basis for the Reanalysis of the Frequency Response Functions of Modified Structures. *Journal of Sound and Vibration*, 199(2) :309–322, 1997.
- [23] Chouaki, A. *Recalage de Modèles Dynamiques de Structures avec Amortissement*. Doctoral dissertation LMT/ENS Cachan, 1997.
- [24] Chouaki, A. and Ladevèze P. and Proslie L. Updating Structural Dynamic Models with Emphasis on the Damping Properties. *AIAA Journal*, 36(6) :1094–1099, June 1998.
- [25] Coleman, Branch and Grace. *Optimization Toolbox version 2 (for use with MATLAB)*. The MathWorks, 1999.
- [26] Dailey, R. L. Eigenvector Derivatives with Repeated eigenvalues. *AIAA Journal*, pages 486–491, 1989, Vol.27, No. 4.
- [27] Deraemaeker, A. *Sur la maîtrise des modèles en dynamique des structures à partir de résultats d’essais*. Doctoral dissertation LMT/ENS Cachan, 2001.
- [28] Ewins, D.J. *Modal Testing: Theory, Practice and Application*. Research Studies Press, 2nd Edition, 2000.
- [29] Farhat, C. and Géradin, M. On the General Solution by a Direct Method of a Large-Scale Singular System of Linear Equations: Application to the Analysis of Floating Structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41 :675–696, 1998.
- [30] Fox, R.L. and Kapoor, M.P. Rate of Change of Eigenvalues and Eigenvectors. *AIAA Journal*, 6 :2426–2429, 1968.
- [31] Francis, J.F.G. The QR Transformation: a unitary Analogue to the LR Transformation, Parts I and II. *Computer Journal*, 4 :265–271, 332–345, 1961/1962.
- [32] Friswell, M.I. and Mottershead, J.E. *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1995.
- [33] Géradin, M. and Rixen, D. *Mechanical Vibrations. Theory and Application to Structural Dynamics*. John Wiley & Wiley and Sons, 1994, also in French, Masson, Paris, 1993.
- [34] Golub, G.H. and Van Loan, C.F. *Matrix computations*. Johns Hopkins University Press, 1983.

-
- [35] Guillaume, P. and Verboven, P. and Vanlanduit, S. Frequency Domain Maximum Likelihood Estimation of Modal Parameters with Confidence Intervals. *International Seminar on Modal Analysis, Leuven, September, 1998*.
- [36] Guyan, R.J. Reduction of Mass and Stiffness Matrices. *AIAA Journal*, 3:380, 1965.
- [37] Intes Publication. *PERMAS User's Reference Manual*. Number 450, Rev. F Stuttgart, 2000.
- [38] Kammer, D.C. Test-Analysis Model Development Using an Exact Modal Reduction. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, pages 174–179, 1987.
- [39] Kammer, D.C. A Hybrid Approach to Test-Analysis Model Development for Large Space Structures. *Journal of Vibration and Acoustics*, 113(3):325–332, 1991.
- [40] Kammer, D.C. Sensor Placement for On Orbit Modal Identification and Correlation of Large Space Structures. *J. Guidance, Control, and Dynamics*, 14(2), 1991.
- [41] Kergourlay, G. and Balmès, E. Conception d'un banc de mesure des propriétés de films viscoélastiques. *IME2002, Besançon, Juillet 2002*.
- [42] Kidder, R.L. Reduction of Structural Frequency Equations. *AIAA Journal*, 11(6), 1973.
- [43] Komzsik, L. Implicit computational solution of generalized quadratic eigenvalue problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 37:799–810, 2001.
- [44] Ladevèze, P. *Erreur en Relation de Comportement en Dynamique : théorie et application au recalage de modèles de structures*. Rapport Interne 150, L.M.T, Cachan, 1993.
- [45] Lascaux et Théodor. *Analyse Numérique Matricielle Appliquée à l'Art de l'Ingénieur, Tome 2*. Masson, 1987.
- [46] Liu, Z.S. and Chen S. and Zhao, Y. An Accurate Method for Computing Eigenvector Derivatives of Free-Free Structures. *Computers and Structures*, 52(6):1135–1143, 1994.
- [47] Morand, H. J.-P. and Ohayon, R. *Fluid-Structure Interaction: Applied Numerical Methods*. J. Wiley & Sons 1995, also in french, Masson, Paris, 1992.
- [48] Mottershead, J.E. and Friswell, M.I. Model Updating in Structural Dynamics: A Survey. *Journal of Sound and Vibration*, pages 347–375, 1993, 167 (2).
- [49] MSC/NASTRAN. *Quick Reference Guide 70.5*. MacNeal Shwendler Corp., Los Angeles, CA, February, 1998.
- [50] Nelson, R.B. Simplified Calculations of Eigenvector Derivatives. *AIAA Journal*, 14:1201–1205, 1976.
- [51] O'Callahan, J.C. and Avitabile, P.A. and Riemer, R. System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP). *IMAC VII*, pages 29–37, 1989.
- [52] Ojalvo, I.U. and Zhang, L.-M. Efficient Eigenvector Sensitivities by a New Procedure Based on Lanczos Vectors. *AIAA Journal*, pages 2392–2394, 1996.
- [53] Plouin, A.S. and Balmès, E. Steel/viscoelastic/steel sandwich shells. Computational methods and experimental validations. *IMAC*, pages 384–390, 2000.
- [54] Roy, N.A and Girard, A. and Bugeat, L.-P. Expansion of Experimental Modeshapes - An Improvement of the Projection Technique. *IMAC*, pages 152–158, 1993.
- [55] Roy, N.A. and Girard, A. and Bugeat, L.P. and Bricout, J.N. A Survey of Finite Element Updating Methods. *Proc. of Int. Symp. on Environmental Testing for Space Programs- Test Facilities and Methods, ESTEC, Noordwijk, The Netherlands, June 26-29, 1990*.

- [56] Salençon, J. *Viscoélasticité*. Presse des Ponts et Chaussées, Paris, 1983.
- [57] Shaw, J. and Jayasuria, S. Modal sensitivities for repeated eigenvalues and eigenvalue derivatives. *AIAA Journal*, 30(3):850–852, 1992.
- [58] Sorensen, D.C. Implicit applications of polynomial filters in a k-step Arnoldi method. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 13:357–385, 1992.
- [59] Ting, T. Accelerated Subspace Iteration for Eigenvector Derivatives. *AIAA Journal*, pages 2114–2118, 1992, Vol.30, No. 8.
- [60] Venkataraman, S. and Haftka, R. Structural Optimization: What Has Moore’s Law Done For Us? *43rd AIAA/SDM conference*, pages AIAA–2002–1342, 2002.
- [61] Wang, B.P. Improved Approximate Methods for Computing Eigenvector Derivatives in Structural Dynamics. *AIAA Journal*, 29(6):1018–1020, 1990.
- [62] Zhang, O. and Zerva, A. Accelerated Iterative Procedure for Calculating Eigenvector Derivatives. *AIAA Journal*, 35(2):340–348, 1997.

Résumé

Cette thèse s'intéresse au recalage de modèles dynamiques, processus d'optimisation au cours duquel on corrige des paramètres du modèle de manière à minimiser une distance calcul-essai. A chaque itération, de nombreuses quantités doivent être déterminées (modes de la structure, sensibilités, localisation d'erreur, etc.).

Ainsi le recalage fait intervenir des calculs particulièrement coûteux. C'est pourquoi on développe dans un premier temps une méthode de résolution approchée, applicable à divers problèmes rencontrés en analyse modale et plus particulièrement dans le recalage. Cette méthode, dénommée *méthode d'itération sur les résidus*, est ainsi appliquée au calcul de modes (de structures élastiques ou amorties, couplées ou non avec un fluide), à la résolution d'une méthode d'expansion ou encore au calcul de sensibilités. Des comparaisons avec des méthodes existantes montrent, sur des modèles industriels, des performances extrêmement intéressantes tout en gardant une méthodologie unifiée, simple de mise en oeuvre.

Dans un deuxième temps, on expose les divers outils utilisés pour le recalage. Sur ce sujet, les contributions principales de cette thèse sont l'introduction d'une démarche systématique pour la détermination de la visibilité d'erreurs, ainsi qu'une méthode de placement de capteurs pour localiser un défaut donné. Finalement, ces outils sont appliqués au recalage des modèles de l'étage principal cryotechnique et de l'étage supérieur cryotechnique d'Ariane 5.

Mots-clés: Dynamique, Recalage, Méthodes Itératives, Méthodes de sous-espaces, Ariane 5.

Abstract

This thesis deals with dynamic model updating, an optimisation process where model parameters are modified in order to minimize a measure of Test/Analysis differences. At each iteration step several quantities must be computed, such as modes, sensitivities, error localization, etc.

Thus, updating is a costly process in terms of CPU and memory storage. That's why the first contribution of this thesis is the introduction of an approximate resolution method, which can be applied to several problems met in structural dynamics and in updating in particular. This method, named *Residual Iteration Method* (or RI), is applied to the computation of modes (of elastic or damped structures, coupled or not with a fluid), of modal sensitivities and to the resolution of a costly expansion process. Comparisons are made with other methods on industrial size models. In these applications, the RI method shows very good performance while retaining the simplicity of a unified framework

In a second part, the numerous tools used in the updating process are detailed. The main contributions in this area are the introduction of a systematic process to assess model errors visibility and the development of a sensor placement method for the localization of specific model errors. Finally, these tools are applied to the updating of Ariane 5 models.

Keywords: Dynamics, Updating, Iterative Methods, Subspace Methods, Ariane 5.

