CPPM-T-2009-06

UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE AIX-MARSEILLE II
FACULTÉ DES SCIENCES DE LUMINY
163 avenue de Luminy
13288 MARSEILLE Cedex 09

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : *Physique et Sciences de la Matière*

Mention : *Cosmologie et Astrophysique*

présentée par

Diane Talon-Esmieu

en vue d'obtenir le grade de docteur de l'Université de la Méditerranée

Extraction des paramètres cosmologiques par une approche multi-sondes

soutenue le 21 décembre 2009 devant le jury composé de

M.	F. Couchot	Rapporteur
M.	E. Kajfasz	Président du jury
M.	J.-P. Kneib	Examinateur
M.	P. Taxil	Examinateur
M.	A. Tilquin	Directeur de thèse
M.	Y. Zolnierowski	Rapporteur
Mme.	A. Ealet	Invitée

Remerciements

Je voudrais en premier lieu remercier les directeurs successifs du CPPM : Roy Aleksan pour m'avoir accueilli dans le laboratoire et Eric Kajfasz pour avoir accepté de présider mon jury de soutenance. Je remercie également les autres membres du jury : François Couchot et Yves Zolnierowski pour avoir accepté de rapporter mon travail et pour leurs commentaires constructifs ; Pierre Taxil et Jean-Paul Kneib d'avoir participé à ce jury. Merci à André Tilquin de m'avoir accepté en thèse sous sa direction et de m'avoir prodigué de précieux conseils. Je tiens à remercier Anne Ealet qui m'a fait confiance depuis mon stage de master 1 et qui m'a soutenu jusqu'à la fin de ma thèse. J'aimerais remercier les autres membres du groupes RENOIR : Charling Tao, Dominique Fouchez, Alain Bonnissent, sans oublier les thésards, Pascal Ripoche, Jérémy Ledu, Lei Sun, Pierre-Elie Crouzet et Raphaël Fromholtz. J'aimerais ici remercier les équipes cosmologies du CPT et du LAM avec qui j'ai eu le plaisir de travailler.

Je remercie aussi l'ensemble du personnel du CPPM, notamment l'équipe administrative, l'équipe communication et documentation ainsi que les services généraux qui contribuent grandement au bon accueil et à l'entente dans le laboratoire. Merci tout particulièrement à Magali Damoiseaux qui nous encourage à participer à toutes les manifestations scientifiques. Je tiens à remercier vivement Stephanie Escoffier avec qui j'ai partagé un bureau pendant ces trois années de thèse et qui a toujours su être de bons conseils. Merci aussi à Christian Curtil de m'avoir supporté quelques mois dans ce partage (non équitable) du bureau. J'aimerais bien sûr remercier les thésards et post-doc du CPPM mais aussi du LAM et du CPT, pour les échanges, les délires, et l'entraide : Pascal, Max, Jérémy, Sam, Gabrielle, Anne-Fleur, Pierre-Simon, Pierre-Elie, Nicolas, Imen, David, Anthony, Corey et bien sûr Marine dont on retiendra les calendriers comme oeuvre fédératrice dans sa qualité de déléguée élue. Je remercie aussi les amis physiciens Marine Guigou pour les "soirées filles" ô combien importantes, Jean-Phi notamment pour les (trop rares) week-end à la neige. Merci aussi aux non-physiciennes Célia et Lucy pour les discussions enflammées et les fameux barbecues.

Merci à Cédric pour sa présence et son soutien ainsi qu'à sa famille qui a fait le déplacement depuis Paris pour assister à ma soutenance. Cette page ne serait rien sans les remerciements à ma famille qui a toujours cru en moi, et qui m'a toujours soutenu, merci à mes parents, à ma soeur, Florence, ainsi qu'à Jean-Jacques et Danièle.

Table des matières

Résumé

Extraction des paramètres cosmologiques par une approche multi-sondes

Cette thèse présente un travail sur la détermination des paramètres cosmologiques, décrivant le contenu énergétique de l'Univers et sa courbure, à partir des données actuelles de supernovae (UNION), du fond diffus cosmologique (WMAP) et des oscillations acoustiques de baryons (SDSS).
L'observation de supernovae de type Ia a mis en évidence l'accélération de l'expansion de l'Univers souvent expliquée par une énergie noire, de nature inconnue.
Dans ce cadre, nous avons d'abord réalisé une analyse combinée de ces trois sondes qui montre que les données sont compatibles avec le modèle ΛCDM. A l'aide de simulations, nous avons étudié en détail les diverses hypothèses souvent utilisées pour extraires les paramètres cosmologiques. En particulier, la dégénérescence géométrique implique souvent de supposer la platitude. Nous avons étudié en détail le biais induit par cette hypothèse. Nous avons conclu qu'un univers courbe d'énergie noire dynamique peut être interprété comme un univers plat avec une constante cosmologique.

Cosmological parameters extraction with a miltiprobes approach

This thesis presents a work on the determination of the cosmological parameters, used to describe the energetic content of the Universe and its curvature, from the actual data : supernovae (UNION), cosmic microwave background (WMAP) and baryon acoustic oscillations (SDSS).
Type Ia supernovae observation has shown for the first time the acceleration of the Universe expansion, which is often explained by a dark energy component with an unknown nature.
In this context, we realized first a combined analysis of the three probes which shows data are compatible with the ΛCDM model. Then, using simulations, we examine in detail different assumptions often used to extract the cosmologcal parameters. In particular, because of the geometrical degeneracy, the flatness is often assumed. We study in detail the bias which can be introduced. We show that it is possible that a curved universe with a dynamical dark energy may be interpreted as a flat universe with a cosmological constant.

Introduction

La cosmologie est la science qui consiste en l'étude de l'Univers dans sa globalité dans le but de connaître sa géométrie, d'évaluer son contenu énergétique et de comprendre son évolution. L'ère de la cosmologie moderne commence au début du XX$^{\text{e}}$ siècle. Einstein, en établissant la relativité générale, pose les bases des modèles cosmologiques relativistes. La découverte de l'expansion de l'Univers par Hubble dans les années 1930 constitue la première avancée majeure en cosmologie. Plus récemment, en 1999, deux équipes indépendantes ont découvert, grâce à l'observation de supernovae, que l'expansion de l'Univers est accélérée. Une nouvelle composante responsable de cette accélération a alors été introduite : l'énergie noire. Depuis, de nombreuses autres observations et expériences ont contribué à construire ce que l'on appelle le modèle de concordance dans lequel l'Univers est plat et dominé à hauteur de 70% par l'énergie noire.

Dans cette thèse, nous allons étudier en détail comment déterminer cette composante à partir des données actuelles. Pour cela nous allons analyser les données issues de différentes sondes cosmologiques, principalement les supernovae mais aussi le fond diffus cosmologique et les oscillations acoustiques de baryons afin d'en extraire les paramètres cosmologiques décrivant l'Univers. Nous décrirons les hypothèses sous-jacentes et les difficultés liées à la mesure de l'énergie noire. Nous nous attacherons à étudier comment cette mesure est affectée par des hypothèses ou des contraintes extérieures mal contrôlées.

Dans le chapitre 1, nous décrirons le formalisme de la cosmologie, introduirons les paramètres cosmologiques et définirons l'énergie noire.

Dans le chapitre 2, nous décrirons les trois sondes que nous utiliserons par la suite. Nous nous intéresserons à la mesure de distance de luminosité grâce aux supernovae de type Ia, à la détection du rayonnement du fond diffus cosmologique et à la mesure des oscillations acoustiques de baryons dont l'empreinte dans les galaxies est visible grâce à de grands sondages. La complémentarité de ces trois sondes constitue en effet un atout considérable à la détermination des paramètres cosmologiques et en particulier de l'énergie noire.

Les chapitres suivants décrivent l'essentiel de mes travaux de thèse : l'extraction des paramètres cosmologiques grâce à la combinaison de sondes et l'étude d'hypothèses utilisées communément pour analyser les données.

Ainsi, dans le chapitre 3, nous utiliserons l'observation de supernovae comme unique sonde pour extraire les paramètres cosmologiques. Nous commencerons par décrire l'outil statistique que nous appliquerons dans toute cette thèse. Puis nous détaillerons les problèmes liés à la détermination des paramètres cosmologiques dus aux différentes dégénérescences et une solution possible qui consiste à supposer des hypothèses simples ou à imposer une contrainte extérieure.

Le chapitre 4 sera consacré à deux études menées avec des simulations de données de supernovae afin de tester deux hypothèses communément supposées pour déterminer la nature de l'énergie noire. Nous verrons quels effets provoque le fait de supposer l'équation de l'énergie noire constante ou d'imposer une contrainte a priori sur la densité de matière.

Dans le chapitre 5, nous utiliserons une analyse combinée qui permet de s'affranchir de certaines hypothèses. Nous introduirons alors les données du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons dans le but de les combiner avec celles des supernovae. Nous décrirons la méthode de combinaison, ses avantages mais aussi les difficultés qu'elle engendre. Nous introduirons alors les paramètres réduits du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons afin de réaliser des analyses combinées plus simples. Nous verrons alors que la dégénérescence géométrique rend difficile la détermination des paramètres d'énergie noire et de courbure.

Le chapitre 6 est dédié à l'étude de la dégénérescence géométrique et aux hypothèses utilisées pour la lever. Nous testerons alors l'hypothèse de platitude généralement utilisée pour déterminer les paramètres d'énergie noire. Nous verrons également l'impact que peut avoir l'hypothèse de constante cosmologique souvent supposée pour extraire le paramètre de courbure.

Pour finir, nous réaliserons dans le chapitre 7 une analyse combinée globale en utilisant un échantillon de supernovae ainsi que les données complètes du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons. Nous pourrons alors comparer les résultats avec ceux obtenus avec les paramètres réduits.

Chapitre 1

La cosmologie moderne

Dans ce chapitre nous introduirons la cosmologie, cette science qui étudie l'univers pour mieux le décrire, ainsi que son formalisme. Dans la section 1.1, nous rappellerons que la relativité générale constitue le socle de base de la cosmologie moderne en décrivant l'équation d'Einstein. Nous verrons que l'univers est en expansion dans la section 1.2, ce qui nous amènera à aborder la notion de distance en cosmologie dans la section 1.3 et à introduire les paramètres cosmologiques qui décrivent l'univers dans la section 1.4. La section 1.5 sera consacrée à l'énergie noire où nous décrirons quelques modèles possibles.

1.1 De la relativité générale à la cosmologie

La relativité générale constitue le cadre théorique de la cosmologie moderne. Introduite par A. Eintein, cette théorie pose les bases des modèles cosmologiques relativistes. Nous décrirons ici son équation principale et le postulat d'homogénéité et d'isotropie, pilier de la cosmologie moderne sur lequel s'appuie le formalisme que nous introduirons par la suite.

1.1.1 La relativité générale

En 1915, Einstein introduit une nouvelle théorie de la gravitation apportant des modifications fondamentales à celle de Newton. D'un point de vue classique, la gravitation est une force induite par un corps massif, l'espace est préexistant et le temps absolu. Dans le cadre de la relativité générale, la masse et l'énergie sont équivalentes et induisent un effet de courbure de l'espace-temps.
L'équation principale de cette théorie est connue sous le nom d'équation d'Einstein :

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

où $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ est le scalaire de Ricci, ou la courbure scalaire, $R_{\mu\nu}$ le tenseur de Ricci, $g_{\mu\nu}$ la métrique, G la constante de Newton et $T_{\mu\nu}$ le tenseur énergie-impulsion.
Cette équation montre l'égalité entre l'énergie, contenue dans le tenseur énergie impulsion dans le terme de droite, et la géométrie de cet espace, décrite par le terme de gauche.

Einstein, qui croit à un univers éternel et statique ne se satisfait pas de cette équation qui ne peut produire un univers statique. Il rajoute alors une constante qui s'oppose aux effets de la gravitation : la **constante cosmologique**, Λ. L'équation d'Einstein devient :

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1.2}$$

De cette manière, la nature géométrique de la constante cosmologique compense la gravitation et permet à l'univers d'être statique.

Dans les années 1930, avec la découverte d'un univers en expansion, Einstein abandonne cette constante. Elle sera réintroduite bien plus tard pour expliquer l'accélération de l'expansion de l'univers observée.

1.1.2 Le principe cosmologique

Un des piliers de la cosmologie moderne réside dans le principe cosmologique. Ce dernier suppose que l'univers est homogène et isotrope c'est-à-dire qu'aucun point de l'espace ni aucune direction n'est privilégié dans l'univers. D'un point de vue théorique, il n'y a aucune raison pour qu'un point de l'espace soit particulier.

Pourtant, l'homogénéité et l'isotropie de l'univers ne s'observent pas à notre échelle. Il suffit, par exemple, de lâcher un objet pour s'apercevoir que la direction privilégiée sera verticale vers le sol. A l'échelle du système solaire, l'inhomogénéité prend la forme de surdensités de matière que sont le Soleil et les planètes tandis que la direction privilégiée est celle pointant vers le corps le plus massif, le Soleil. A des échelles astrophysiques on observe des structures dans la distribution de matière : les galaxies, amas et superamas de galaxies.

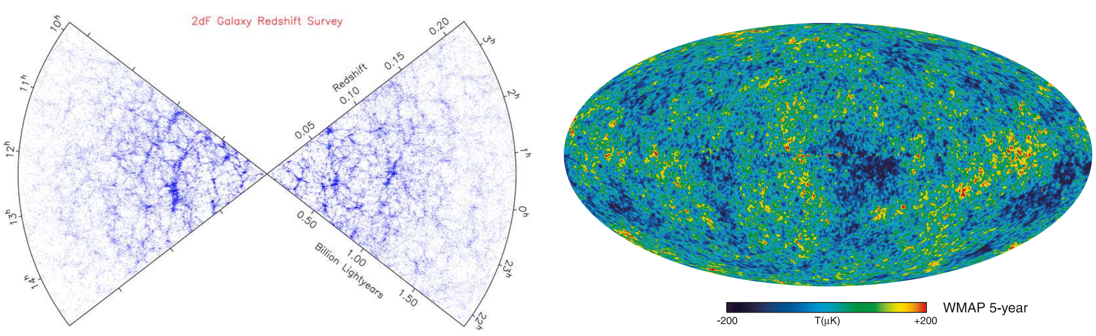

FIGURE 1.1 – *A gauche : Distribution des galaxies dans l'univers proche observé par 2dFGRS [3].*
A droite : Carte du ciel en température fournie par WMAP après 5 ans de prise de données [4]. La variation de couleur indique la variation de température.

L'homogénéité est cependant visible aux très grandes échelles. Les données de plusieurs larges sondages de galaxies tels que SDSS [1] [1][2] ou 2dFGRS [2] [3] montrent que la distribution de matière devient statistiquement homogène à partir de distances de 100 Mpc. La partie droite de la figure 1.1 représente la carte de la répartition spatiale des galaxies observées par 2dFGRS et illustre la diminution de grandes structures à très grande échelle.

D'autre part, l'isotropie a été vérifiée par la détection du rayonnement du fond diffus cosmologique. Ces photons, issus du découplage avec la matière, se sont propagés librement et ont aujourd'hui détectés avec une distribution d'énergie d'un corps noir à une température de 2.725 K. Les mesures réalisées par COBE [3] puis WMAP [4] ont révélé une température uniforme dans tout le ciel. La figure 1.1 illustre les écarts de température révélant des anisotropies très faibles, de l'ordre de $10^{-5}\,K$. L'univers peut donc être considéré comme isotrope.

Le principe cosmologique est donc vérifié aux grandes échelles et servira de postulat à la cosmologie.

1.1.3 La métrique de Robertson-Walker

Dans un univers homogène et isotrope régi par les lois de la relativité générale, la métrique de Robertson-Walker constitue une solution des équations d'Einstein. Elle est décrite par une dimension de temps, t, et trois d'espace, r, θ, ϕ en coordonnées sphériques :

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left(\frac{1}{1-kr^2}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi)\right) \tag{1.3}$$

Par convention on choisit le signe de la métrique tel que $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+,-,-,-)$.

Le paramètre k caractérise la courbure spatiale de l'univers et peut prendre trois valeurs :
- $k = 0$ correspond à un univers plat (section spatiale plane), la courbure spatiale est nulle,
- $k = 1$ correspond à un univers fermé (section spatiale sphérique), la courbure spatiale est positive,
- $k = -1$ correspond à un univers ouvert (section spatiale hyperbolique), la courbure spatiale est négative.

Le paramètre $a(t)$ est le facteur d'échelle et décrit l'évolution temporelle de l'univers et en particulier son expansion.

1. SLOAN Digital Sky Survey, programme d'observation d'objets astrophysiques, en particulier des galaxies par un télescope au sol
2. Two Degree Field Galaxy Redshift Survey, catalogue de galaxies issu de l'observatoire anglo-australien
3. Cosmic Background Explorer, satellite en vol de 1989 à 1993
4. Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, lancé en 2001

1.2 L'expansion de l'univers

1.2.1 Un univers en expansion

En 1930, Hubble remarque un rapport constant entre la vitesse de fuite des galaxies et leurs distances. Il en déduit une loi qui porte son nom :

$$v_{gal} = H_0 d_{gal} \tag{1.4}$$

où H_0 est la constante de Hubble. Les galaxies s'éloignent d'autant plus vite qu'elles sont distantes. Ce phénomène ne s'explique pas par des effets locaux. Cette loi reste vraie quelque soit la ligne de visée et dans tout l'univers. Ce phénomène est donc dû à l'expansion de l'univers. Cette découverte bouleverse le contexte cosmologique historique, l'univers n'est ni statique ni éternel, et pose les bases de la théorie du Big Bang qui décrit la "naissance" d'un univers dense et chaud qui refroidit avec l'expansion.

On différencie alors la distance physique d'un objet, de la distance comobile qui ne varie pas avec l'expansion de l'univers. Ces deux quantités sont reliées par le facteur d'échelle, comme suit :

$$D_{physique} = a(t) D_{comob} \tag{1.5}$$

En exprimant la vitesse physique en fonction de la distance physique grâce à cette relation, on obtient :

$$v_{physique} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} D_{physique} \tag{1.6}$$

On retrouve ici la loi de Hubble exprimée pour tout instant t. On peut donc définir le paramètre de Hubble, comme le taux d'expansion de l'univers à l'instant t :

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \tag{1.7}$$

La constante de Hubble, H_0, est ainsi la valeur particulière de ce paramètre à l'époque actuelle ($t = t_0$).
Sa détermination s'avère essentielle pour décrire l'évolution de l'univers ainsi que sa taille actuelle ou son âge. On peut en effet associer à la constante de Hubble, un temps et une distance caractéristiques :

$$t_H = \frac{1}{H_0} \tag{1.8}$$

$$R_H = \frac{c}{H_0} \tag{1.9}$$

où t_H est l'âge de l'univers si le paramètre de Hubble est constant au cours du temps et R_H est le rayon de Hubble, relié à la taille de l'univers observable.

La valeur de la constante de Hubble extraite des données actuelles, notamment celle du télescope spatial Hubble (HST), est de l'ordre de 70 $km\ s^{-1} Mpc^{-1}$ avec une précision

de 8% [6].
Grâce à la combinaison de données avec les supernovae et les oscillations acoustiques de baryons, l'équipe de WMAP, après 5 ans de prise de données, trouve une valeur de $70.5 \pm 1.3\ km\ s^{-1} Mpc^{-1}$ [5].
Remarquons ici que pour exprimer la valeur de la constante de Hubble, certains auteurs utilisent la notation h où $H_0 = 100\ h\ km\ s^{-1} Mpc^{-1}$.

1.2.2 Le décalage vers le rouge ou redshift

Il existe un moyen d'observer l'expansion de l'univers par la mesure du décalage en longueur d'onde observé sur des spectres d'objets lointains. Il s'agit d'un décalage vers le rouge, ou redshift, noté z et défini par l'expression suivante :

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_e}\,, \tag{1.10}$$

où $\Delta\lambda$ est la différence entre la longueur d'onde reçue et celle émise, λ_e.

En outre, ce décalage spectral est relié au facteur d'échelle. On peut le montrer par la différence de trajectoires entre 2 photons émis d'un même point à des moments différents. Considérons la trajectoire d'un photon le long d'une géodésique de la métrique de Robertson-Walker dans un repère choisi tel que $\theta = \phi = 0$. Le photon est émis à une distance r_1 à l'instant t_1 et reçu à l'origine du repère à l'instant t_0. Ainsi :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)\frac{dr^2}{1 - kr^2} = 0\,. \tag{1.11}$$

Par intégration on obtient :

$$\int_{t_1}^{t_0} c\,\frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}\,. \tag{1.12}$$

De même pour un autre photon émis du même point après un temps δt_1 et reçu après un temps δt_0 :

$$\int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} c\,\frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}\,. \tag{1.13}$$

On en déduit :

$$\int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} c\,\frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_0} c\,\frac{dt}{a(t)}\,. \tag{1.14}$$

Après intégration de cette égalité, on obtient :

$$\frac{\delta t_0}{\delta t_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}\,. \tag{1.15}$$

On choisit δt_1 comme la période de l'onde émise. De même δt_0 devient la période de l'onde reçue. D'après la définition reliant période et longueur d'onde ($\delta t = \frac{\lambda}{c}$) on trouve :

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \tag{1.16}$$

Puis en utilisant $\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda_1$ et la première expression du décalage sprectral :

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \tag{1.17}$$

On peut alors définir le décalage spectral cosmologique, notée par la suite redshift, par l'expression suivante :

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t)} \tag{1.18}$$

où $a_0 = a(t_0)$ est le facteur d'échelle à l'époque actuelle.

1.3 La notion de distance en cosmologie

La cosmologie a pour but l'étude de l'univers dans son ensemble, à travers la connaissance de sa géométrie et la détermination de son contenu énergétique. La mesure de distances est un moyen de sonder l'univers et permet de tester sa géométrie. L'univers étant en expansion, la notion de distance est plus ambiguë que dans le cadre d'un univers statique. C'est pourquoi on différencie les distances théoriques (distance comobile, distance propre) des distances mesurables (distance angulaire, distance lumineuse). Les définitions et les descriptions de ces distances sont traitées dans cette section.

1.3.1 Coordonnées et distance comobiles

Introduisons un système de coordonnées comobiles (χ, θ, ϕ) tel que :

$$d\chi = \frac{1}{\sqrt{1 - kr^2}} dr \tag{1.19}$$

soit

$$\chi = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \begin{cases} \arcsin(r) & \text{si } k = 1 \\ r & \text{si } k = 0 \\ \text{arcsinh}(r) & \text{si } k = -1 \end{cases} \tag{1.20}$$

Dans ce système, la métrique de Robertson-Walker s'écrit :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left(d\chi^2 + r(\chi)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi) \right) \tag{1.21}$$

où

$$r(\chi) = \begin{cases} \sin\chi & \text{si } k = 1 \\ \chi & \text{si } k = 0 \\ \sinh\chi & \text{si } k = -1 \end{cases} \tag{1.22}$$

La distance comobile, peut être condidérée comme la distance parcourue par un photon depuis la source observée le long d'une géodésique. Un photon émis au point $(r, 0, 0)$ au temps t est reçu par l'observateur à l'origine du repère au temps t_0. Puisque le photon suit la géodésique, on peut écrire :

$$ds = 0 \Leftrightarrow c^2 dt^2 = a^2(t) d\chi^2 \tag{1.23}$$

puis par intégration on définit la distance comobile :

$$\chi = \int_t^{t_0} c \, \frac{dt}{a(t)} \, . \tag{1.24}$$

Par changements de variables successifs on peut l'écrire en fonction du facteur d'echelle ou du redshift :

$$\chi = \int_{a(t)}^{a_0} c \, \frac{da}{\dot{a}a} = \frac{c}{a_0} \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \, . \tag{1.25}$$

1.3.2 La distance propre

La distance propre est la distance entre 2 points de l'espace à l'instant t. Par définition elle est décrite par la longueur de la géodésique spatiale entre les deux points : $ds = a(t) d\chi$. Elle est donc reliée à la distance comobile via le facteur d'échelle :

$$d_p = a(t)\chi \, . \tag{1.26}$$

1.3.3 La distance angulaire

La distance angulaire d'un objet est reliée à l'angle apparent observé et à sa taille physique. Supposons connue la taille (d) d'un objet perpendiculairement à la ligne de visée. Grâce à la mesure de l'angle apparent $(\delta\theta)$ supposé petit de cet objet, on peut déduire la distance sur la ligne de visée séparant l'observateur de l'objet :

$$d_A = \frac{d}{\delta\theta} \tag{1.27}$$

D'autre part la longueur étalon (d) est décrite par la géodésique spatiale : $\delta s = a(t) r(\chi) \delta\theta = d$ où t est l'instant de l'émission du photon.

La distance angulaire peut donc être réécrite en fonction du facteur d'échelle ou du redshift :

$$d_A = a(t) r(\chi) = a_0 \frac{r(\chi)}{(1+z)} \, . \tag{1.28}$$

1.3.4 La distance lumineuse

La méthode de chandelle standard permet de déterminer une distance grâce à la luminosité observée d'un objet à condition de suffisamment bien connaître la luminosité intrinsèque de l'objet. Par définition la distance lumineuse (d_L) est reliée au flux observé (Φ) de l'objet lumineux ainsi qu'à sa luminosité intrinsèque (L) :

$$\Phi = \frac{L}{4\pi d_L^2}\,. \tag{1.29}$$

On peut également exprimer le flux observé comme une puissance reçue par unité de surface :

$$\Phi = \frac{L_0}{S} \tag{1.30}$$

où S est la surface de la sphère atteinte par la lumière de l'objet aujourd'hui : $S = 4\pi a_0^2 r(\chi)^2$. La luminosité est une puissance et donc définie par une énergie pendant un temps donné. Pour la luminosité intrinsèque, on peut écrire : $L = \frac{\Delta E}{\Delta t}$. De même pour la luminosité reçue : $L_0 = \frac{\Delta E_0}{\Delta t_0}$. On en déduit :

$$L = \frac{\Delta E}{\Delta E_0}\frac{\Delta E_0}{\Delta t_0}\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\,. \tag{1.31}$$

Par la définition du redshift, $1+z = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\Delta E}{\Delta E_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t}$, la luminosité intrinsèque devient :

$$L = L_0(1+z)^2\,. \tag{1.32}$$

D'après les expressions 1.29, 1.30 et 1.32, on peut réécrire le flux observé :

$$\Phi = \frac{L_0(1+z)^2}{4\pi d_L^2} = \frac{L_0}{4\pi a_0^2 r(\chi)^2} \tag{1.33}$$

Soit l'expression de la distance de luminosité :

$$d_L = a_0 r(\chi)(1+z)\,. \tag{1.34}$$

On remarque ici que distance angulaire et lumineuse sont reliées par le redshift de la manière suivante :

$$d_L = d_A(1+z)^2\,. \tag{1.35}$$

1.4 Comment décrire l'univers

1.4.1 Les équations de Friedmann

Dans un univers homogène et isotrope, le tenseur énergie-impulsion de l'équation d'Einstein est celui d'un fluide parfait :

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} \tag{1.36}$$

où ρ et P sont respectivement la densité et la pression du fluide, $g_{\mu\nu}$ représente la métrique et u_μ et u_ν sont les quadrivecteurs de vitesse.

Dans ce cas, en écrivant les équations d'Einstein dans la métrique de Robertson-Walker et en tenant compte de la constante cosmologique, on obtient les équations de Friedmann suivantes :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho + \frac{\Lambda}{3} \tag{1.37}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \tag{1.38}$$

Ces équations sont fondamentales pour la cosmologie. Elles décrivent l'évolution de l'univers par le paramètre de Hubble $H = \frac{\dot{a}}{a}$ et sa géométrie par son paramètre de courbure, k, en fonction de la densité, ρ, et la pression, P, des fluides qui le composent.

Considérons l'univers comme un ensemble de fluides parfaits décrits par leurs pressions et densités reliées par leur équation d'état :

$$P = w\rho\,. \tag{1.39}$$

Par la suite nous identifierons w comme le paramètre de l'équation d'état d'un fluide. Il dépend du fluide considéré, permettant de le caractériser.

En appliquant la conservation de l'énergie-impulsion aux équations de Friedmann, on peut déduire :

$$d(\rho a^3) = -P da^3 \tag{1.40}$$

puis :

$$\dot{\rho} = -3(\rho + P)H \tag{1.41}$$

De manière générale, pour tout fluide, on peut intégrer l'expression (1.40) :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \exp\left(-3\int_1^a (1 + w(a))\, d\ln a\right)\,, \tag{1.42}$$

ou en terme de redshift :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \exp\left(3\int_0^{1+z} (1 + w(z))\, d\ln(1+z)\right)\,. \tag{1.43}$$

Si w est constant cela revient à écrire :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)} = (1+z)^{3(1+w)}\,. \tag{1.44}$$

Ces équations dépendent du fluide considéré à travers le paramètre d'équation d'état, w. Considérons différents fluides constituant l'univers et les cas de dominance de chacun d'eux :

Cas d'un univers dominé par la matière : La matière, composée de particules non relativistes constituant étoiles, gaz, galaxies, matière noire, etc, a une pression nulle, ce qui revient à un paramètre d'équation d'état $w = 0$. On en déduit $\rho \propto a^{-3}$ et $a \propto t^{2/3}$.

Cas d'un univers dominé par le rayonnement : Le rayonnement comprend les particules relativistes tels les photons ou les neutrinos relativistes, son paramètre d'équation d'état est $w = 1/3$. On en déduit $\rho \propto a^{-4}$ et $a \propto t^{1/2}$.

Cas d'un univers dominé par la constante cosmologique : La première équation de Friedmann s'écrit alors : $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3}$. On en déduit que le facteur d'échelle suit une évolution exponentielle : $a(t) \propto e^{t\sqrt{\Lambda/3}} = e^{tH}$.

Cas d'un univers dominé par l'énergie noire : De nature inconnue l'énergie noire serait un fluide responsable de l'accélération de l'expansion de l'univers. Il y a accélération si $\frac{\ddot{a}}{a}$ est positif soit $\rho + 3P$ négatif. Par la définition de l'équation d'état d'un fluide cela revient à $w < -1/3$. Dans le cas d'un paramètre w constant, on déduit $\rho \propto a^{-3(1+w)}$, dans le cas contraire l'évolution de ρ est régie par l'expression 1.42

Le tableau 1.1 résume les valeurs du paramètre d'équation d'état pour chaque fluide considéré.

fluide	w
rayonnement	1/3
matière	0
constante cosmologique	-1
énergie noire	$< -1/3$

TABLE 1.1 – *Paramètre d'équation d'état caractéristique de chaque fluide*

1.4.2 Les paramètres cosmologiques

On définit la densité critique comme la densité qu'aurait un fluide, seul composant de l'univers dans un univers plat sans constante cosmologique : $\rho_c = \frac{3c^2H^2}{8\pi G}$. A partir de cette définition, on introduit les densités réduites pour toutes les composantes de l'univers : $\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}$. Soit :

- pour la matière : $\Omega_M = \frac{\rho_M}{\rho_c} = \rho_M \frac{8\pi G}{3H^2c^2}$,
- pour le rayonnement : $\Omega_R = \frac{\rho_R}{\rho_c} = \rho_R \frac{8\pi G}{3H^2c^2}$,
- pour l'énergie noire : $\Omega_X = \frac{\rho_X}{\rho_c} = \rho_X \frac{8\pi G}{3H^2c^2}$.

On pose également :

- le paramètre de courbure : $\Omega_k = -\frac{kc^2}{a^2H^2}$,
- la constante cosmologique réduite : $\Omega_\Lambda = -\frac{\Lambda}{3H^2}$.

Les paramètres de densités réduites ainsi notés sont appelés les paramètres cosmologiques à partir desquels ont peut réécrire la première équation de Friedmann :

$$\sum_i \Omega_i + \Omega_k = 1 \tag{1.45}$$

Cette équation est une équation de contrainte essentielle en cosmologie, reliant les densités réduites d'énergie à la géométrie de l'univers. Cette expression est vraie à chaque instant et en particulier à l'époque actuelle. Par la suite on notera Ω_i les densités réduites actuelles et $\Omega_i(z)$ celles à l'époque z.

Grâce aux expressions précédentes, on peut exprimer les densités réduites à un redshift z en fonction des densités réduites actuelles :

$$\Omega_i(z) = \Omega_i \frac{\rho_i}{\rho_i^0} \frac{H_0^2}{H^2} \tag{1.46}$$

Nous avons présenté l'évolution des densités ρ en fonction du facteur d'échelle (ou du redshift) pour chaque fluide. On peut ainsi réécrire l'équation (1.45) pour tout redshift en fonction des densités réduites actuelles :

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_i \Omega_i \frac{\rho_i}{\rho_i^0} + \Omega_k \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2} = \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_R(1+z)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_X \frac{\rho_X}{\rho_X^0} + \Omega_k(1+z)^2 \tag{1.47}$$

Cette équation, qui relie le paramètre de Hubble aux densités d'énergie, est également une équation importante dans la détermination des paramètres cosmologiques. Notons ici que l'on peut exprimer le paramètre d'échelle a_0 en fonction des paramètres cosmologiques d'après la définition de Ω_k et de l'équation (1.45) :

$$a_0 = \frac{c}{H_0}\sqrt{\frac{-k}{\Omega_k}} = \frac{c}{H_0}\sqrt{\frac{1}{|\Omega_k|}} \tag{1.48}$$

On peut donc exprimer la coordonnée comobile de la manière suivante :

$$\chi = \frac{c}{a_0}\int_0^z \frac{dz}{H(z)} = \sqrt{|\Omega_k|}\int_0^z \frac{dz}{\frac{H(z)}{H_0}} \tag{1.49}$$

Puisque la coordonnée comobile intervient dans toutes les relations de distances, on peut ainsi extraire les paramètres cosmologiques à partir des données de distances.

1.4.3 Le modèle de concordance

Les mesures actuelles des diverses densités critiques a permis de faire émerger un modèle de cosmologie appelé le modèle de concordance. Les données de WMAP [4] ont notamment joué un rôle essentiel en établissant ce modèle standard de l'univers. Celui-ci explique aujourd'hui un grand ensemble de mesures cosmologiques et astronomiques effectuées sur un grand domaine de longueurs d'onde et d'outils d'observation : anisotropies du fond diffus cosmologique, abondance des éléments légers, observations des grandes structures (LSS pour Large Scale Structures) et propriétés des amas de galaxies, mesures de la constante de Hubble, accélération de l'expansion de l'univers mesurée par les supernovae (SNIa), et d'autres mesures. La concordance de ces données implique que l'univers est plat, avec des perturbations cosmologiques décrites par la théorie de relativité générale. Il a subi, durant ses premiers instants, une période d'expansion accélérée nommée inflation pendant laquelle sa taille a subi une croissance d'un facteur 10^{26}.

La détermination précise des densités dans l'univers est maintenant possible, en particulier celles de la densité de matière et la constante cosmologique, issues de [5] :

$$\begin{aligned} \Omega_M &= 0.258 \pm 0.027\,, \\ \Omega_\Lambda &= 0.742 \pm 0.030\,, \end{aligned}$$

On en déduit que l'univers est rempli à 74.2% d'énergie noire, de 25.8% de matière noire. La matière baryonique (atomes) ne contribue qu'à hauteur de 4.6%. La plus grande partie de la matière est de la matière noire. Notons que la densité actuelle de radiation est négligeable. Les données les plus récentes de WMAP ont également permis la détermination précise de la constante de Hubble : $H_0 = 70.5 \pm 1.3\ km\ s^{-1}Mpc^{-1}$ et de l'âge de l'univers : 13.73 ± 0.12 milliards d'années.

L'interprétation de ces résultats permet de dire que l'univers serait né d'un Big Bang chaud et a subi une expansion au cours du temps. Cette expansion s'est récemment accélérée, sous l'effet de la constante cosmologique ou d'une forme d'énergie noire.

Nous décrirons certaines de ces sondes dans le prochain chapitre et expliquerons comment ces résultats sont obtenus à partir des données.

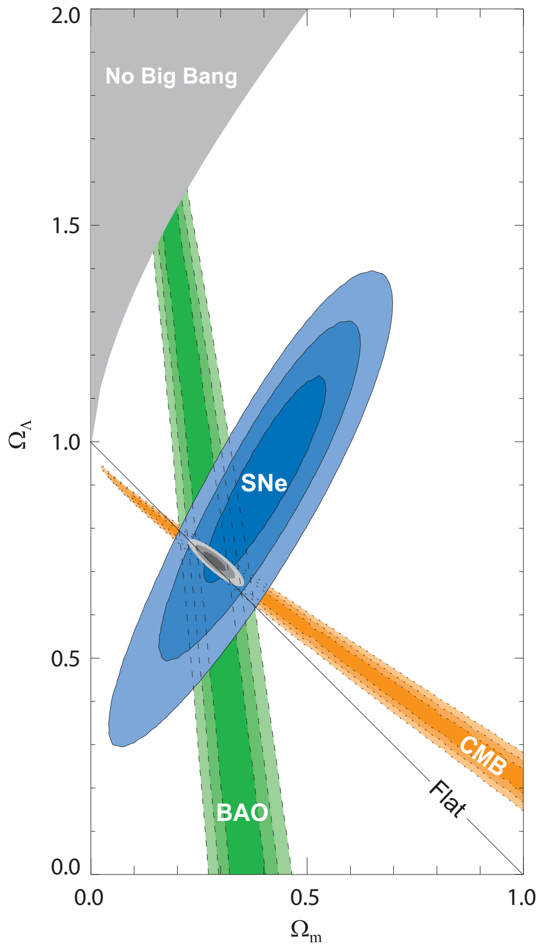

FIGURE 1.2 – *Représentation graphique des contraintes obtenues sur la densité de matière et la constante cosmologique grâce aux supernovae, au fond diffus cosmologique et aux oscillations acoustiques de baryons, séparément et en les combinant.*

1.5 L'énergie noire

Jusqu'à il y a une dizaine d'années, le modèle de référence décrivait un univers dominé par la matière, en expansion décélérée sous l'effet de la gravitation. Cependant, par les mesures d'amas de galaxies, on estimait que la matière visible ne représenterait que 10% de la matière totale, elle-même ne représentant que 30% de la densité totale.

Ce déficit de près de 70% dans le bilan total de l'énergie de l'univers a trouvé une réponse inattendue dans l'étude des supernovae de type Ia, puis confirmée par des observations plus récentes et les résultats de WMAP notamment. En 1999, deux collaborations indépendantes, SCP et Highz Team [7] [8], ont en effet mis en évidence par l'observation de supernovae [5] une composante nouvelle d'énergie, nommée énergie noire. Celle-ci est

5. Nous reviendrons sur le principe d'observation de supernovae pour sonder l'univers dans le chapitre

attribuée à une constante cosmologique ou de manière générale à une énergie quantique du vide. On peut aussi envisager que la relativité générale ne suffit plus à décrire l'univers, ce qui amènerait à une modification des équations d'Einstein.

1.5.1 Interprétations théoriques de l'énergie noire

Il existe différents candidats à l'énergie noire. Nous essaierons ici de décrire les principaux. Historiquement, la première et la plus simple des explications de l'accélération de l'expansion a été de réintroduire la constante cosmologique dans l'équation d'Einstein. Depuis, des solutions sous forme de champs scalaires ont été proposées. Nous verrons enfin comment distinguer ces candidats avec les données.

La constante cosmologique

La constante cosmologique a initialement été introduite par Einstein pour décrire un univers qu'il croyait statique. En 1922, Lemaître montre que génériquement, la relativité générale, sans constante cosmologique, prédit un univers en expansion. Hubble découvrant cette expansion par l'observation des vitesses de fuites des galaxies, la constante cosmologique est abandonnée. A la fin des années 1990, elle est réintroduite pour expliquer l'accélération de l'expansion, découverte grâce à l'observation de supernovae lointaines.

Les équations d'Einstein dans le cas d'une constante cosmologique sont données par :

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1.50}$$

De ce point de vue la constante cosmologique est une constante géométrique et naturelle, intrinsèque à la relativité générale au même titre que G. En plaçant l'expression de constante cosmologique dans le terme de droite, celle-ci s'interprète comme un fluide de tenseur énergie-impulsion :

$$T_{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \,. \tag{1.51}$$

Dans ce cas, lui sont attribuées une pression négative donnée par $P_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$ et une densité $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$. Son paramètre d'équation d'état est $w = P/\rho = -1$. Un tel fluide trouverait son origine dans les propriétés du vide en théorie quantique des champs et est connu sous le nom d'énergie du vide.

Bien que l'introduction de la constante cosmologique soit une solution simple, elle n'est pas complètement satisfaisante et l'interprétation de la constante cosmologique est l'un des problèmes les plus difficiles de la physique théorique.

En effet, il y a un désaccord entre la densité observée de la constante cosmologique et la densité attendue de l'énergie du vide. La densité observée est de l'ordre de

qui leur est dédié.

$\rho_\Lambda \simeq 10^{-47} GeV^4$. Le Modèle Standard de physique des particules, par l'intermédiaire du champ de Higgs donne une densité d'énergie du vide 10^{40} fois supérieure à la densité critique soit 120 ordres de grandeur supérieure à la densité observée dans le cas de la coupure à l'echelle de Planck et 60 ordres de grandeur pour la coupure à l'échelle électrofaible. Jusqu'à présent, aucune théorie ne comble cette différence.

De plus, les données récentes montrent que densité de matière et constante cosmologique sont de même ordre de grandeur actuellement ($\rho_m = 0.3\rho_c$, $\rho_\Lambda = 0.7\rho_c$) bien que leurs évolutions soient très différentes puisque la constante cosmologique est constante alors que $\rho_m \propto a^{-3}$. Cette coïncidence pose problème et motive la construction de nouveaux modèles d'énergie noire.

Les champs scalaires

Les champs scalaires permettent une approche différente notamment grâce à une équation d'état qui évolue en z et sont à l'origine de nombreux modèles d'énergie noire. Quintessence, k-essence et champs fantômes sont les plus étudiés. Nous présenterons ici les modèles de quintessence. Ces derniers introduisent un nouveau champ scalaire évoluant dans le temps sous l'action de la gravité et d'un champ suiveur permettant d'obtenir une valeur de la densité d'énergie noire proche de la densité d'énergie mesurée.

En relativité générale, l'action peut s'écrire sous la forme d'une somme de l'action de la gravité, S_{gr}, et de l'action des champs de matière, S_{mat}, reliée au contenu énergétique de l'univers :

$$S = S_{gr} + S_{mat} = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x\sqrt{-g}R + \int d^4x\sqrt{-g}L_m \tag{1.52}$$

où R est le scalaire de Ricci, $\sqrt{-g}$, le déterminant de la métrique et L_m le lagrangien du couplage à la matière. C'est cette action qui permet d'écrire les équations d'Einstein vues précédemment.
Dans le cas de champs scalaires, le lagrangien dépend du champ scalaire Φ et du potentiel correspondant $V(\Phi)$. Dans les modèles de quintessence, le lagrangien est alors donné par :

$$L_\Phi = \frac{1}{2}\partial^\mu\Phi\partial_\mu\Phi - V(\Phi) \tag{1.53}$$

Ainsi, on peut montrer que l'équation du mouvement pour un champ scalaire est une équation de Klein-Gordon :

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + \frac{dV}{d\Phi} = 0 \tag{1.54}$$

où $\dot{\Phi}$ et $\ddot{\Phi}$ sont respectivement les dérivées première et seconde du champ par rapport au temps.
A partir du lagrangien, on peut définir un tenseur énergie-impulsion équivalent à celui

d'un fluide parfait comobile de pression et densité :

$$P = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - V(\Phi) \tag{1.55}$$

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi) \tag{1.56}$$

Ces deux quantités permettent de réécrire la seconde équation de Friedmann :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}2(\dot{\Phi}^2 - V) \tag{1.57}$$

Le champ de quintessence sera alors responsable de l'accélération si le potentiel $V(\Phi)$ croît suffisamment pour que $\dot{\Phi}^2 < V(\Phi)$.

Il apparaît que les modèles de quintessence intéressants sont ceux pour lesquels le potentiel est faible pendant l'ère de domination de la matière puis croît pour entraîner l'accélération récente de l'expansion observée. Par conséquent, le principal problème de ces modèles réside dans la détermination du potentiel, afin de répondre à la valeur observée de la densité d'énergie noire.

Par ailleurs, on peut exprimer l'équation d'état en fonction du potentiel :

$$w_\Phi = \frac{P}{\rho} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - V(\Phi)}{\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi)} \tag{1.58}$$

où w_Φ est donc borné entre -1 et 1.
Remarquons que l'équation d'état n'est plus constante mais dépend du temps (redshift) puisque Φ, $\dot{\Phi}$ et $V(\Phi)$ dépendent du temps. L'expression décrivant l'évolution de la densité du champ est alors donnée par les équations (1.42) et (1.54). Dans la limite $\dot{\Phi}^2 \ll V(\Phi)$, $w_\Phi = -1$ ($\rho = -P$) le champ de quintessence se comporte comme pour une constante cosmologique. Par là même, il sera difficile de le distinguer de la constante cosmologique dans les données.

L'avantage de l'écriture des modèles de quintessence en terme de fluide est qu'ils peuvent être uniquement décrits par les paramètres Ω_Φ, $w_\Phi(z)$ et $w'_\Phi(z) = \frac{dw}{d\ln(1+z)}$, plus facilement extraits des données que le potentiel scalaire. Ainsi on peut classer les différents modèles de quintessence dans le plan $(w_\Phi(z), w'_\Phi(z))$ comme préconisé par Caldwell et Linder dans [9].

Outre le problème lié à la forme du potentiel, les modèles de quintessence n'admettent pas d'équation d'état avec $w < -1$. Or ces valeurs ne sont pas exclues par les données. Pour répondre à ce problème, d'autres modèles de champs scalaires ont été proposés dans la littérature. On les différencie par le lagrangien, dont le terme cinétique est négatif, et sont appelés champs fantômes. Le lagrangien de tels modèles est donné par :

$$L_\Phi = -\frac{1}{2}\partial^\mu\Phi\partial_\mu\Phi - V(\Phi) \tag{1.59}$$

Par analogie avec les modèles de quintessence, les modèles de champs fantômes peuvent être décrits par un fluide de paramètre d'équation d'état :

$$w_\Phi = \frac{P}{\rho} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi)}{\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - V(\Phi)} \tag{1.60}$$

Ainsi on obtient que $w_\Phi < -1$ pour $\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - V(\Phi) < 0$. De même que les modèles de quintessence, ces modèles peuvent être décrits par Ω_Φ, $w_\Phi(z)$ et $w'_\Phi(z)$ et complètent le plan $(w_\Phi(z), w'_\Phi(z))$. Remarquons que ces modèles souffrent du même problème que les modèles de quintessence quant à la forme de leurs potentiels.

1.5.2 La gravité modifiée

On peut aussi supposer que la relativité générale n'est pas suffisante et doit être modifiée à travers la modification de son action. Il s'agit d'étendre l'action donnée par l'expression 1.52, par la modification de l'action de Einstein-Hilbert (1er terme) ou du couplage aux champs de matière (2nd terme).

Les modèles théoriques les plus étudiés sont les tenseurs-scalaires pour lesquels un champ scalaire est directement couplé à la courbure [10, 11, 12]. De même, les théories dite $f(R)$ sont des généralisations de l'action de Einstein-Hilbert [13].

Il existe aussi des modifications du terme de gravité plus fortes dont les théories sous-jacentes sont plus complexes. Il s'agit des modèles avec dimensions supplémentaires [17] comme les modèles de gravité induite sur branes [16, 18] ou de multi-gravité [14, 15].

Pour une revue et une classification de ces modèles, voir [22] ainsi que les références citées.

Une autre approche consiste à revenir sur le principe cosmologique et considérer l'univers inhomogène et anisotrope. De tels modèles sont ceux de backreaction [19, 20, 21].

Par la suite nous ne nous intéresserons pas à ces modèles de modifications de la gravité qui restent pour la plupart difficiles à détecter dans les données actuelles. Ainsi nous supposerons que l'accélération de l'expansion est due à un fluide inconnu avec une équation d'état inconnue à déterminer.

1.5.3 La paramétrisation de l'équation d'état

Puisque la plupart des modèles d'énergie noire peuvent être décrits par un fluide, la paramétrisation la plus naturelle est celle de l'équation d'état.

Comme nous l'avons vu, la plupart des modèles prévoient une évolution dynamique de w. La paramétrisation la plus simple est alors :

$$w = w_0 + w_1 z \tag{1.61}$$

où w_0 représente la valeur actuelle de w, et le paramètre w_1 est égal à $w'(z) = \frac{dw}{dz}$. Cette paramétrisation varie en fonction du redshift mais elle n'est pas satisfaisante quant à son comportement à grand redshift où le terme $w_1 z$ sera artificiellement dominant. La limite à haut redshift des paramétrisations provient des données du fond diffus cosmologique. Au moment du découplage des photons[6] ($z \simeq 1100$), la densité d'énergie noire n'intervient pas, elle est estimée contribuer à moins de 10% du contenu énergétique de l'univers. Par conséquent, son évolution avec le redshift ne peut être plus rapide que celle de la densité de matière. D'après les relations entre évolution de densités et équations d'état, $w_X(z = 1100)$ ne peut donc pas être positif, autrement dit w_1 est nécessairement négatif ou nul. Cette contrainte sur l'équation d'état ne permet pas la paramétrisation d'un grand nombre de modèles théoriques où $w'(z)$ est positif.

Pour pallier notamment à cette difficulté, une autre paramétrisation a été introduite par Chevallier et Polarski [23] puis par Linder [24] :

$$w(z) = w_0 + w_a \frac{z}{1+z} \tag{1.62}$$

Nous la nommerons par la suite Chevallier-Polarski-Linder ou CPL. Notons que w_a est relié à $w'(z)$ pour un redshift de 1 par : $w'(1) = \frac{dw}{d\ln(1+z)}|_{z=1} = \frac{1}{2}w_a$.
Cette paramétrisation est simple (seulement 2 paramètres) et permet de décrire de nombreux modèles. Cependant, son comportement à grand redshift est également contraint par les données du fond diffus cosmologique. La contrainte $w(z = 1100) \leq 0$ se traduit par : $w_0 + w_a \leq 0$ mais élimine moins de modèles théoriques de cette paramétrisation que dans la précédente. Pour une comparaison de ces paramétrisations voir par exemple [25]. Actuellement, c'est la paramétrisation la plus utilisée dans la littérature et en particulier elle est préconisée dans le "Dark Energy Task Force"[26]. C'est cette paramétrisation que nous utiliserons par la suite.

1.6 Conclusion

Ce premier chapitre nous a permis de nous familiariser avec le formalisme de la cosmologie. Nous avons introduit les paramètres cosmologiques, dont l'extraction des données constitue l'essentiel de cette thèse. Nous avons décrit le modèle de concordance construit grâce à diverses observations de l'univers. Nous avons vu que ce modèle comprend une importante contribution d'énergie noire dont la nature est inconnue. Dans la suite de cette thèse nous nous efforcerons d'en déterminer la nature par une estimation de son équation d'état en utilisant les données de différentes sondes. Dans le chapitre suivant nous décrirons alors les principales sondes ayant permis d'établir ce modèle de concordance et que nous utiliserons par la suite.

6. cf. section dédiée au fond diffus cosmologique

Chapitre 2

Différents moyens de sonder l'Univers

Dans le premier chapitre, nous avons décrit le formalisme utile en cosmologie, les équations de bases et les paramètres cosmologiques. Nous avons également introduit la notion d'énergie noire et expliqué en quoi la connaissance de sa nature est importante pour une meilleure compréhension de l'univers. Dans ce chapitre, nous verrons les moyens actuels de sonder l'univers. Dans un premier temps nous décrirons les supernovae de type Ia dont l'observation permet une mesure de distance reliée au contenu de l'univers. Nous introduirons ensuite le fond diffus cosmologique et les oscillations acoustiques de baryons. Ces trois sondes sont complémentaires quant à la description de la géométrie et du contenu énergétique de l'univers. La combinaison de leurs données, apporte aujourd'hui la meilleure estimation des paramètres cosmologiques.

2.1 Les supernovae de type Ia

L'observation de supernovae de type Ia à grand redshift a amorcé, il y a une dizaine d'années une nouvelle ère de la cosmologie par la découverte de l'accélération de l'expansion de l'univers. Cette section est dédiée à la compréhension de la physique de ce type de supernovae ainsi qu'à leur emploi en cosmologie. Les données actuelles et les derniers résultats apportés par cette sonde seront également décrits.

2.1.1 Les chandelles standard, un moyen de mesurer des distances

La distance de luminosité

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, un moyen de mesurer des distances cosmologiques grâce à la luminosité connue d'un objet. La distance de luminosité définie par l'équation 1.29, à partir du flux observé permet une détermination de la cosmologie. En effet, d'après les expressions de la distance de luminosité (éq. 1.34) et de la distance comobile en fonction des paramètres cosmologiques (éq. 1.49) la distance de luminosité s'exprime ainsi :

$$d_L(z) = \frac{c}{H_0}\frac{1+z}{\sqrt{|\Omega_k|}}\,\mathcal{S}\left(\sqrt{|\Omega_k|}\int_0^z \frac{1}{\frac{H(z')}{H_0}}dz'\right) \tag{2.1}$$

où $\mathcal{S}(x) = \sinh(x),\ x,\ \sin(x)$ pour $\Omega_k > 0\,(k=-1),\ = 0\,(k=0),\ < 0\,(k=1)$ respectivement. Le terme $H(z)/H_0$, introduit dans l'équation 1.47, dépend des paramètres cosmologiques de la façon suivante :

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = (1+z)^2\,\Omega_k + (1+z)^3\,\Omega_M + \exp\left[3\int_0^z (1+w(z'))\ d\ \ln(1+z')\right]\Omega_X\,. \tag{2.2}$$

Les paramètres cosmologiques ainsi accessibles par une mesure de distances de luminosité sont les densités réduites (matière, énergie noire) et les paramètres de l'équation d'état de l'énergie noire (à travers $w(z)$).

La magnitude

En pratique, les astronomes utilisent plus fréquemment la magnitude. La magnitude apparente d'un objet est définie par le rapport du flux observé (F) et d'un flux de référence (F_0) :

$$m = -2.5\log_{10}\frac{F}{F_0} \tag{2.3}$$

La magnitude absolue (M) est définie comme la magnitude apparente qu'aurait un objet situé à 10 pc. On peut redéfinir la magnitude apparente en fonction de la magnitude absolue et la distance de luminosité :

$$m = M + 5\log_{10}(d_L) + 25 \ = \ M_s + 5\log_{10}(D_L) \tag{2.4}$$

où M est la magnitude absolue de l'objet astrophysique observé. Le paramètre M_s s'exprime $M_s = M - 5\log_{10}(H_0/c) + 25$ et peut être considéré comme un paramètre de normalisation. Il permet une estimation de H_0 dont la précision ne dépend que de la précision de la mesure de la magnitude absolue de l'objet observé. Le terme $D_L(z) \equiv (H_0/c)\ d_L(z)$ est la distance de luminosité indépendante de H_0 d'un objet de redshift z.

Le diagramme de Hubble

Le diagramme de Hubble se construit à partir des mesures de la magnitude et du redshift d'objets astrophysiques. Cet outil est ainsi utilisé en cosmologie pour la détermination des paramètres cosmologiques.
Un exemple est donné dans la figure 2.1 issue de Perlmutter *et al.* [8]. Le paramètre de normalisation M_S est contraint par des objets proches puisqu'indépendant du redshift. Au contraire les objets à grands redshifts sont utiles dans la détermination des densité d'énergie et de l'équation d'état de l'énergie noire car l'expression de la distance de luminosité (D_L) dépend du redshift.

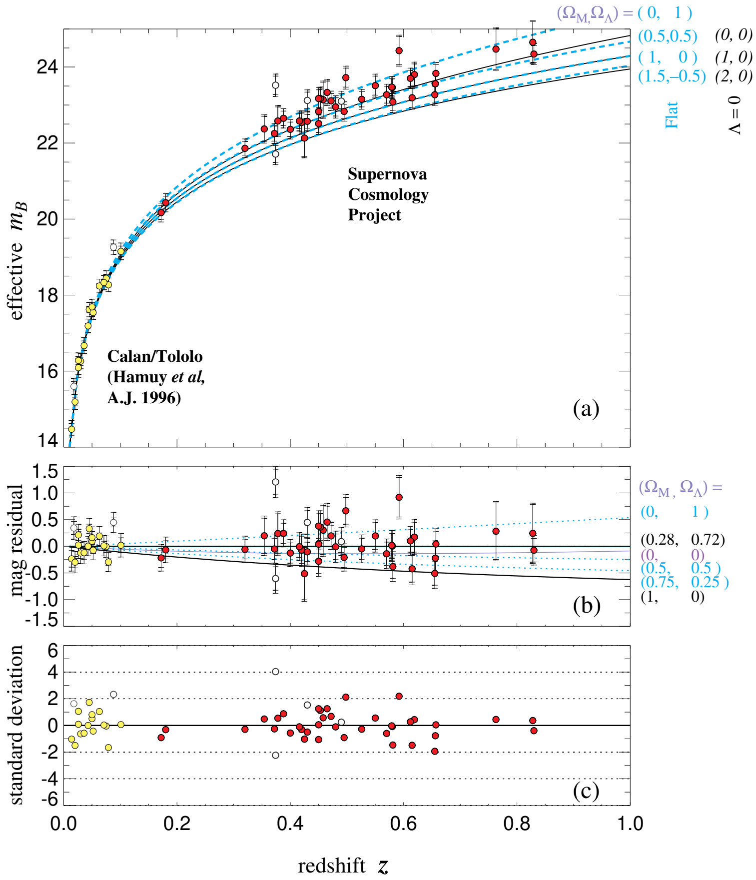

FIGURE 2.1 – Diagramme de Hubble : les magnitudes des supernovae observées sont en fonction du redshift mesuré pour chaque objet. Perlmutter et al.[8]

D'après la figure, la distinction de différents modèles cosmologiques n'est en effet possible qu'avec des objets de grand redshift ($z \simeq 1$). Les supernovae apparaissent alors comme de bons candidats pour ces mesures car suffisamment lumineuses pour être observées dans cette gamme de redshifts. Les prochains paragraphes sont dédiés à la description de certaines supernovae dites de type Ia dont une standardisation empirique rend possible leur utilisation en cosmologie.

2.1.2 Les supernovae de type Ia

Dans cette section, nous verrons comment certaines supernovae, celles de type Ia, peuvent être utilisées comme chandelles standard en cosmologie. Nous commencerons par une brève description des supernovae, puis nous introduirons la méthode d'observation et d'analyse.

Les supernovae : généralités

Les supernovae sont des explosions d'étoiles en fin de vie. Ces phénomènes sont très lumineux, autant qu'une petite galaxie, rapides, de quelques jours à quelques mois, mais rares, environ une supernovae tous les cent ans par galaxie. Le mécanisme d'explosion est différent selon les caractéristiques de l'étoile notamment sa masse et sa composition chimique. On distingue deux types différents de supernovae : les gravitationnelles et les thermonucléaires.

Le groupe de supernovae gravitationnelles est très hétérogène tant par leurs masses que leurs compositions chimiques. Ces types d'explosions concernent les étoiles en fin de vie de masse supérieure à $8M_{\odot}$. Il s'agit d'un effondrement gravitationnel du coeur de l'étoile formant une étoile à neutrons entourée d'un nuage de gaz chaud. En cas de présence d'hydrogène dans son spectre on parle de supernovae de type II sinon il s'agit de supernovae de type Ib ou Ic [1].

FIGURE 2.2 – Vue d'artiste d'un système binaire (naine blanche-géante rouge) avec accrétion de matière.

Les progéniteurs des supernovae thermonucléaires (ou supernovae de type Ia) sont des naines blanches dans un système binaire. La naine blanche est l'état final des étoiles plus légères. Lorsqu'elle est associée à une géante, elle absorbe de la matière de son compagnon par accrétion comme le montre la figure 2.2. Sa masse augmente alors jusqu'à atteindre la masse critique dite de Chandrasekhar (env. 1.4 $M_{\odot}$). Elle s'effondre alors sur elle-même sous l'effet de la gravité, ce qui provoque la fusion du carbone et de l'oxygène composant son coeur. Ceci entraîne une explosion thermonucléaire et une désintégration totale de la naine blanche. Ce phénomène est violent, rapide et lumineux (1% de l'énergie est dégagé sous la forme de photons). Des conditions d'explosion proches donnent des luminosités intrinsèques semblables ce qui permet leur utilisation en cosmologie en tant que chandelles standard. Ce modèle, actuellement admis par les astronomes et les théoriciens manque de précision par exemple sur l'âge de l'étoile progéniteur de la supernova ou la nature de

1. Historiquement la classification des supernovae n'a pas été réalisée en fonction de leur mécanisme d'explosion mais par la différence de leur spectres d'où cette notation.

son compagnon. Différents modèles sont aujourd'hui proposés par les théoriciens mais ces caractéristiques sont difficiles à observer et étudier.

Un moyen d'identifier une supernova de ce type consiste à réaliser son spectre. La spectroscopie permet en effet l'analyse de la lumière émise par un objet astrophysique à différentes longueurs d'ondes. L'observation de raies est caractéristique de la présence d'un élément chimique. En réalisant plusieurs spectres d'un objet au court du temps il est donc possible d'en étudier l'évolution de sa composition chimique. Une caractéristique des supernovae de type Ia est la présence de fortes raies de silicium dans son spectre au maximum de luminosité.

L'évolution de la luminosité au cours du temps représente également une caractéristique des supernovae Ia. Sa mesure permet d'établir une courbe de lumière associée à la supernova. La forme de cette courbe est en effet remarquable avec une augmentation spectaculaire de sa luminosité en quelques jours seulement puis une lente baisse durant plusieurs semaines à plusieurs mois. Nous verrons par la suite que dans un lot de supernovae, ces courbes de lumière présentent une dispersion de la magnitude au maximum d'environ 40%.

En résumé, les supernovae de type Ia présentent les mêmes conditions d'explosion (même mécanisme et même masse), leur spectre caractéristique permet une bonne identification, leur forte luminosité les rend visible même loin et leurs courbes de lumières sont semblables. Ces propriétés font des supernovae de type Ia de bons candidats de chandelles standard dans le but de tracer le diagramme de Hubble et contraindre des modèles cosmologiques.

La méthode d'analyse

L'utilisation de supernovae en cosmologie s'effectue en trois étapes :
- la détection de la supernova,
- son identification et la mesure de son redshift
- la mesure de sa magnitude et la construction de la courbe de lumière pour la standardisation.

Ces trois étapes nécessitent deux types de suivis. La détection et l'établissement de la courbe de lumière s'effectue par photométrie alors qu'une identification sure et une bonne mesure du redshift nécessitent un suivi spectroscopique.

La détection des supernovae La méthode de détection est basée sur une soustraction d'images. La comparaison d'images à différentes époques permet, en effet, de repérer les objets variables, tels les supernovae.

L'identification et la mesure des redshift Celles-ci sont réalisées par spectroscopie. Le redshift est mesuré par le décalage vers le rouge subi par le spectre de la supernova ou de sa galaxie hôte. En effet, cette mesure est plus précise avec le spectre de la galaxie (de l'ordre de 10^{-3}) que par celui de la supernova (de l'ordre de 10^{-2}).

Le type de la supernova est identifié par comparaison du spectre extrait avec des modèles de spectres de supernovae produits à différentes époques de l'explosion. Or le spectre de la supernova est pollué par celui de la galaxie hôte qu'il est nécessaire de soustraire. La stratégie de mesure de spectres est alors d'observer le spectre de la supernova ainsi que celui de sa galaxie soit en même temps soit en repointant la galaxie plus tard. Cette méthode est possible avec des instruments dits multi-objets (MOS) ou à longue fente (LSS) utilisés par les programmes SNLS et ESSENCE.

La mesure des magnitudes et le tracé des courbes de lumière La mesure de la magnitude est réalisée par photométrie. Un imageur équipé de filtres est monté sur le télescope. Chaque filtre est sensible à un certain intervalle de longueurs d'ondes. La magnitude de la supernova est alors mesurée à travers ces filtres. Comme les supernovae sont détectées dans une grande gamme de redshift, il est indispensable de connaître les effets des filtres en fonction du redshift. Idéalement, la mesure de la magnitude apparente devrait être réalisée dans le même filtre que le modèle de la magnitude absolue. En pratique, puisque les spectres des supernovae lointaines sont décalés vers le rouge, la gamme de longueur d'ondes couverte par le filtre dans le référentiel de la supernova sort en partie ou complètement du filtre dans le repère de l'observateur. Il est donc nécessaire d'utiliser plusieurs filtres et d'appliquer une correction, dite **correction K** définie par un facteur de correction entre les différents filtre.

Il est important de mesurer plusieurs fois la magnitude au cours de l'explosion y compris avant et après le maximum de luminosité. Cela permet la construction des courbes de lumière améliorant la standardisation. En effet les courbes de lumière des supernovae de type Ia sont semblables mais pas identiques, une dispersion de 40% des magnitudes au maximum est observée. Celle-ci induit une incertitude de 20% sur les mesures de distances entraînant une mauvaise détermination des paramètres cosmologiques. L'idée est alors de modéliser les courbes de lumière pour les rendre standard. Cette étape, est appelée la standardisation des courbes de lumière.

La standardisation des courbes de lumière Les courbes du haut de la figure 2.3 représentent les courbes de lumière d'un lot d'une vingtaine de supernovae observée pendant la campagne Calàn/Tololo. On remarque qu'elles ont la même forme et présentent une corrélation entre la luminosité au maximum et la largeur des courbes. Les supernovae les plus lumineuses sont celles dont les courbes de lumière sont les plus larges, c'est-à-dire dont la croissance et la décroissance sont les plus lentes. Un moyen empirique de corriger cette dispersion est d'utiliser un patron de courbe de lumière puis d'ajuster les courbes sur ce patron grâce à un facteur d'étirement (ou stretch). Ce facteur, en étirant ou contractant les courbes, permet de ramener la dispersion à 20%. Une illustration de l'utilisation de ce facteur sur un lot d'une vingtaine de supernovae proches est présentée figure 2.3 où sont représentées les courbes de lumière avant et après corrections de stretch. Il existe d'autres méthodes de standardisation mais nous ne les présenterons pas ici.

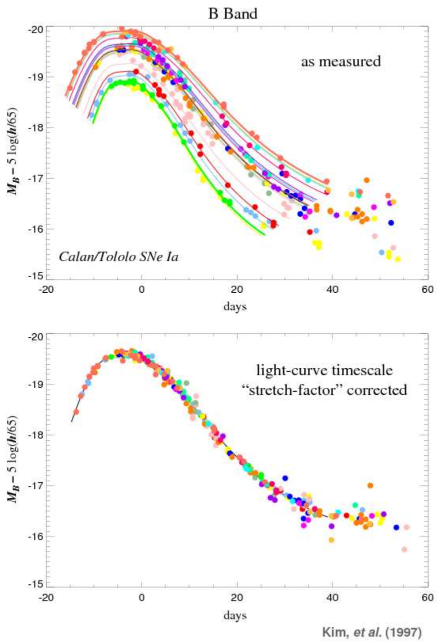

FIGURE 2.3 – *Courbes de lumière d'un lot d'une vingtaine de supernovae proches de la campagne Calàn/Tololo. A gauche : sans correction, à droite : après correction de stretch. Figure issue de A. Kim [27]*

2.1.3 Historique

Dans les paragraphes précédents nous avons vu que les supernovae sont de bons candidats d'observation dans un but cosmologique. En plus de leur grande luminosité permettant l'observation des plus lointaines d'entre elles et de la standardisation possible de leur courbes de lumière, leur échelle de redshift permet de réaliser un diagramme de Hubble dont l'ajustement donne des informations importantes quant au contenu de l'univers. Dans les années 1990, deux équipes indépendantes relèvent le défi et montrent une accélération de l'expansion de l'univers en utilisant l'observation de quelques dizaines de supernovae. Ces études ont donné lieu à deux articles fondateurs quant à l'utilisation de supernovae en cosmologie. Il s'agit de Riess *et al.* [7] et Perlmutter *et al.* [8].

L'équipe "high-z" de Riess utilise 16 supernovae de redshift compris entre 0.16 et 0.97 ainsi que 34 supernovae à bas redshift ($z < 0.1$). Ils trouvent que si l'univers est plat, Ω_M est autour de 0.2. Cette faible valeur de la densité de matière ne peut être expliquée que par la présence d'un nouveau fluide ou de la constante cosmologique complétant le bilan global de l'univers. En supposant uniquement que $\Omega_M \geq 0$, ils estiment qu'il existe une constante cosmologique avec un niveau de confiance de plus de 99.7%. De même ils excluent une décélération de l'expansion de l'univers à plus de 99.5% de niveau de confiance.

L'équipe Supernovae Cosmology Project (SCP) publie des résultats similaires avec un lot de 60 supernovae (42 supernovae de redshift compris entre 0.18 et 0.3 et 18 supernovae de redshift inférieur à 0.1). Ils obtiennent $\Omega_M = 0.28 \pm 0.09$ en supposant l'univers plat. Ils montrent également la présence d'une constante cosmologique à 99.8% de niveau de confiance. Les résultats sont illustrés par la figure 2.1, avec le diagramme de Hubble, et figure 2.4, montrant les contours de probabilité dans le plan (Ω_M, Ω_Λ). Sur le diagramme de Hubble, plusieurs modèles d'univers sont tracés. Le meilleur ajustement est $\Omega_M = 0.28$, $\Omega_\Lambda = 0.72$, supposant la platitude de l'univers. Sans cette hypothèse, les contours, figure 2.4, semblent exclure une constante cosmologique nulle ou négative et privilégie un Ω_M faible. Le modèle d'un univers plat avec une constante comologique nulle est exclu.

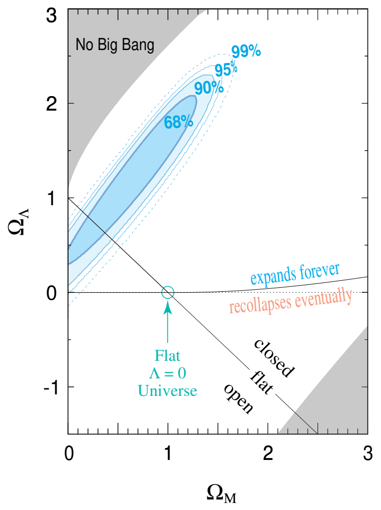

FIGURE 2.4 – *Contour de probabilités obtenus par l'ajustement du diagramme de Hubble, tracé avec 60 supernovae, suppposant une constante cosmologique ($w = -1$ fixé). Figure issue de Perlmutter et al. [8].*

Avec une statistique aussi faible ils ne peuvent pas déterminer l'origine de l'accélération de l'univers et suppose l'explication la plus simple la constante cosmologique. Leurs travaux encourageants ont ouvert la voie à de grands programmes dédiés à l'observation de supernovae tels SNLS et ESSENCE.

2.1.4 Résultats récents de cosmologie

L'expérience SNLS

Description de l'expérience

L'expérience SuperNovae Legacy Survey (SNLS) s'inscrit dans le cadre du programme Canada France Hawaï Telescope Legacy Survey (CFHTLS). Il s'agit de la mise à disposition à une collaboration franco-canadienne de différents télescopes d'Hawaï entre 2003 et 2008. Le projet SNLS fait parti du relevé profond couvrant $4\,deg^2$ à travers 4 champs de vue de $1\,deg^2$ chacun (D1, D2, D3, D4).

Son objectif scientifique consiste en l'observation de plus de 500 supernovae de type Ia de redshift compris entre 0.2 et 1, dans le but d'apporter de meilleures contraintes sur les paramètres cosmologiques et en particulier la densité d'énergie noire, Ω_X, (ou la constante cosmologique, Ω_Λ), et son équation d'état, w. Un tel programme d'observation de supernovae de type Ia en comologie permet d'augmenter fortement la statistique d'objets observés et contrôler les systématiques, au moins celles liées à l'instrumentation et aux conditions d'observation. Parallèlement, une statistique importante permet des études sur les supernovae elles-mêmes, sur une possible évolution en redshift, sur son environnement (population stellaire et galaxie hôte) par exemple et même étudier d'autres types de supernovae.

Dans SNLS, la détection et la mesure des magnitudes sont réalisées simultanément par un suivi photométrique tandis que l'identification et la mesure du redshift sont obtenus par spectroscopie. Ces deux suivis ne sont pas effectués aux mêmes endroits ni, a fortiori, avec les mêmes instruments.

Le **suivi photométrique** est réalisé au Canada France Hawaï Telescope (CFHT), situé au sommet du Mauna Kea à une altitude de 4200 mètres. Muni d'un miroir principal de 3.6 mètres, il bénéficie de conditions d'observation idéales : quasi absence de pollution lumineuse, faible humidité et pureté du ciel. La photométrie est réalisée grâce à un imageur à champ large, le MegaPrime, équipé d'une caméra, MegaCam, couvrant une surface de 1 degré carré de ciel. Cinq filtres sont utilisés couvrant principalement les longueurs d'ondes visibles et infra-rouge proches. Ils permettent de couvrir le filtre B dans le référentiel des supernovae jusqu'à un redshift de 1.

Durant la première année de prise de donnée, plus de 400 objets variables ont été détectés dont 142 ont fait l'objet d'une observation spectroscopique. Pour des détails sur le suivi photométrique, la chaîne de détection et le traitement des images, se rapporter à Ripoche (2007) [**?**] et Astier et al. [32].

Le **suivi spectroscopique** est réalisé grâce à différents télescopes : principalement au VLT et à Gemini, mais aussi aux Keck et Magellan. Au VLT les spectres sont mesurés grâce aux spectrographes FORS permettant une spectroscopie longue fente ou multi-objets. Cette méthode a permis une identification de 91 supernovae de type Ia durant la première année de prise de données de SNLS.

Les résultats

Après un an de prise de données, la collaboration SNLS a publié les résultats de l'observation de 71 supernovae de type Ia [32]. Afin de compléter cet échantillon, un lot de 44 supernovae proches a été rajouté. Ces données permettent de contraindre les paramètres de matière et de constante cosmologique. Les résultats de l'ajustement de Ω_M et Ω_Λ supposant la constante cosmologique, concordent avec ceux précédemment présentés établissant une faible densité de matière et la présence d'une constante cosmlogique (ou énergie noire) :

$$\Omega_M = 0.31 \pm 0.21 \text{ et } \Omega_\Lambda = 0.80 \pm 0.31.$$

En supposant que l'univers est plat, la densité de matière est mesurée à :

$$\Omega_M = 0.263 \pm 0.042(stat) \pm 0.032(sys).$$

La collaboration SNLS introduit d'une contrainte extérieure issue de données des oscillations acoustiques de baryons pour contraindre l'équation d'état de l'énergie noire. La mesure des oscillations acoustiques de baryons permet en effet une meilleure détermination de la densité de matière. Un paramètre résume l'information cosmologique de cette sonde, il s'agit du paramètre réduit A, mesuré par la collaboration SDSS à $A = 0.469 \pm 0.017$ [42]. Nous détaillerons ce paramètre et son implication cosmologique dans un paragraphe dédié dans la section consacrée aux oscillations acoustiques de baryons. Introduire ce paramètre dans l'ajustement des magnitudes des supernovae permet une meilleure contrainte sur les paramètres cosmologiques, en particulier Ω_M. Par les jeux de corrélations entre les paramètres l'ajout de cette contrainte extérieure diminue les incertitudes sur les paramètres cosmologiques. Cela permet une première mesure du paramètre d'équation d'état de l'énergie noire supposé constant. En supposant que l'univers est plat, ils trouvent :

$$w = -1.023 \pm 0.090(stat) \pm 0.054(sys).$$

Ces résultats sont résumés par les figures 2.5. Celles-ci montrent les contours de confiance obtenus par les ajustements utilisant l'échantilon SNLS seulement et l'apport de l'ajout des oscillations acoustiques de baryons.

Les erreurs systématiques

Les données actuelles de SNLS ont permis de nettement augmenter la statistique de supernovae analysées. Dans ces conditons, les erreurs systématiques ne peuvent plus être négligées et la collaboration a mis l'accent sur leur estimation. Parmi les erreurs systématiques il y a les erreurs dues à l'instrument de mesure (ou d'observation), qui doivent être connues et contrôlées, et celles dues à l'environnement ou aux supernovae elles-même, plus difficiles à estimer. Les estimations des incertitudes systématiques seront données pour le paramètre d'équation d'état de l'énergie noire, w, dans le cadre d'un ajustement avec la contrainte extérieure issue de la mesure des oscillations acoustiques de baryons (A), supposant l'univers plat.

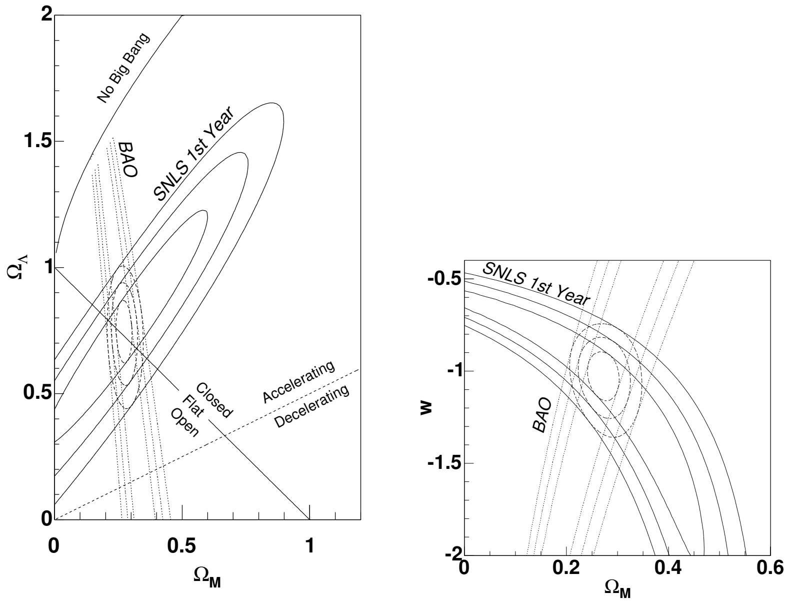

FIGURE 2.5 – *Contours à 68.3%, 95.5%, 99.7% de niveau de confiance des ajustements avec SNLS seulement, les oscillations acoustiques de baryons seulement (Eisenstein et al. [42]), et la combinaison des deux sondes. A gauche : ajustement de Ω_M et Ω_Λ supposant la constante cosmologique ($w = -1$) ; à droite : ajustement de Ω_M et w supposant l'univers plat. Figures issues de Astier et al. [32].*

Les erreurs liées à **la calibration photométrique** tiennent une place importante. L'utilisation de supernovae comme chandelles standard nécessite en effet une bonne mesure de la magnitude. Cela passe notamment par une cohérence des mesures. L'un des problèmes provient de l'échantillon à bas redshift utilisé dans l'analyse. Le système de calibration doit être le même pour les supernovae observée à petit comme à grand redshift. De plus, cela nécessite une bonne connaissance de la transmission des différents filtres utilisés pour la mesure de la magnitude.
La collaboration SNLS estime les effets dus à la calibration photométrique sur le paramètre w (après combinaison avec les oscillations acoustiques de baryons) à 0.048.

Les effets de **couleur** et **la correction K** sont considérés dans l'ajustement des courbes de lumière et donc comme des erreurs statistiques. Il n'y a pas de différence de traitement si l'effet de couleur provient de la couleur intrinsèque de la supernova ou d'une mauvaise reconstruction du flux dû à une mauvaise connaissance des filtres.
Ces erreurs sont traitées comme des erreurs statistiques et estimées sur w à 0.021.

Les **biais de sélection** sont également à prendre en compte. La contamination par des supernovae d'autres types est minimisée, voire rendue négligeable, grâce à une bonne spectroscopie.

Par contre le biais de Malmquist doit être pris en compte. En effet, la détection d'objets très lumineux peut être privilégiée par rapport à des objets moins lumineux. Concrètement, les supernovae les plus lumineuses sont détectés au détriment des moins lumineuses, surtout lointaines.
Ce biais est estimé à 0.025 sur la détermionation du paramètre w par SNLS.

Les erreurs systématiques les plus difficiles à estimer concernent celles dues à l'environnement de la supernova ou la supernova elle-même.

SNLS a étudié la possible **évolution en redshift** des supernovae. En introduisant le modèle d'explosion thermonucléaire de la supernova de type Ia, nous avons pointé le manque de connaissance des propriétés de ces supernovae. Les supernovae lointaines sont supposées avoir les mêmes caractéristiques que les proches. Cette approximation est effectuée pour la standardisation des courbes de lumière. Cependant les supernovae proviennent de différentes population d'étoiles pouvant entraîner des différences physiques. Certaines supernovae sont générées dans une population stellaire de courte durée de vie, les promptes, alors que d'autres sont issues de populations plus vieilles, les tardives. Des différences ont été remarquées entre ces deux populations de supernovae sur leurs courbes de lumière. Les promptes semblent avoir des courbes de lumière plus larges et leur luminosité est en moyenne plus importante [**?**]. De plus, la métallicité semble différente selon le redshift des supernovae observées [**?**].
La collaboration SNLS a étudié ces phénomènes mais, ne constatant pas d'effets d'évolution, choisit de ne pas en tenir compte dans les erreurs systématiques.

Notons également l'effet dû **aux poussières** qui peuvent altérer le flux de lumière issu de la supernova. Le chemin emprunté par les photons de la supernova à l'observateur n'est pas homogène. Ils doivent traverser la galaxie hôte, le milieu intergalactique et la voie lactée. Cela induit un rougissement difficile à corriger car dégénéré avec la relation couleur-luminosité intrinsèque de la supernovae. Si les poussières de notre galaxie sont relativement bien connues et donc leurs effets bien estimés, ce n'est pas le cas pour les poussières du milieu intergalactique.
Première critique de l'utilisation des supernovae de type Ia en cosmologie, notamment par Aguirre [37], la présence de poussière dans le milieu intergalactique aurait pour effet une mauvaise interprétation de la distance de luminosité. Cependant des études récentes (Mortsell & Goobar en 2003 [38] et Ostman & Mortsell en 2005 [39] ou encore Corasaniti [40]) ont montré que les données actuelles sont peu sensibles à de tels effets car l'amplitude de l'extinction induite est contenue dans la dispersion en magnitude des supernovae.
Le problème de l'effet d'extinction due à des poussières vient donc de notre manque de connaissance à la fois sur la poussière des galaxies distantes et sur la couleur intrinsèque des supernovae. Suivant ces conclusions, SNLS décide ne pas quantifier cet effet dans leur erreurs systématiques.

Il faut aussi mentionner le fait que le flux de photons émis par la supernova peut varier (être magnifié ou diminué) à cause des effets d'accumulation de masses sur la ligne de visée. Il s'agit de l'effet de **lentille gravitationnelle**. Une telle modification de la luminosité observée entraîne une augmentation de la dispersion dans le diagramme de Hubble à haut redshift.
Dans les données actuelles ce biais n'est pas le plus important et est souvent négligé. La collaboration SNLS a estimé sa contribution inférieur à 0.01 sur w après combinaison avec les oscillations acoustiques de baryons.

ESSENCE

Description de l'expérience

Le programme ESSENCE (Equation of State : SupErNovae trace Cosmoc Expansion), a pour but de déterminer le paramètre de l'équation d'état de l'énergie noire w avec une précison de 0.1 (à 1σ). Un lot de supernovae bien mesurées dans le domaine de redshift où il y a accélération de l'expansion de l'univers permettrait une telle mesure. Le projet initial prévoyait la détection de 200 supernovae de redshift compris entre 0.2 et 0.8 sur cinq ans. Commencé en 2002, avec un programme de 15 nuits par an, cette éxpérience a publié en 2007 les données et résultats des quatre premières années d'observation [33, 34].

Par bien des aspects le programme ESSENCE est comparable à celui de SNLS. Ces deux programmes d'observation de supernovae sont réalisés au sol grâce à des grands télescopes dans la même gamme de redshift. La stratégie de détection, la mesure de magnitudes et le suivi spectroscopique sont également semblables. Par contre, nous verrons dans la suite que le traitement des données est sensiblement différent.

Le télescope Blanco utilisé par la collaboration ESSENCE est un télescope de 4m situé au CTIO, au Chili. Equipé d'un imageur Mosaic II d'un champs de vue de 36 arcminutes, il permet un suivi de 32 champs. La stratégie consiste à détecter les supernovae bien avant le maximum de luminosité ce qui permet d'améliorer l'ajustement des courbes de lumière. Comme pour SNLS, les étapes de détection et suivi pour établir les courbes de lumière s'effectuent simultanément. De même, la soustraction d'image est automatisée. Si un objet variable apparaît et passe certains critères de sélection, il est ensuite suivi par spectroscopie.

Le suivi spectroscopique est assuré par de grands télescopes de 8m tels que le VLT, Gemini, Magellan et KECK. Les spectres sont utilisés pour l'identification des supernovae et la détermination de leurs redshifts. Ils permettent également des études comparatives entre des lots de supernovae à haut et à bas redshift par exemple.

Résultats

Sur 119 supernovae découvertes, confirmées et suivies pendant les quatre premières années de ce sondage, 60 ont été utilisées dans l'article de Wood-Vasey et al. [34] pour une estimation du paramètre d'équation d'état de l'énergie noire, w. Les résultats donnés ici sont issus de la combinaison des données d'ESSENCE avec le paramètre réduit A déduit de la mesure des oscillations acoustiques de baryons. Pour une meilleure comparaison avec SNLS il s'agit des mêmes conditions d'ajustement : A est issu de SDSS [42], l'univers est supposé plat et l'équation d'état des l'énergie noire constante. Le résultat de l'ajustement sur w est alors :

$$w = -1.05^{+0.13}_{-0.12}(stat) \pm 0.13(sys).$$

Cette valeur est en accord avec les résultats de SNLS. Les erreurs statistiques sont équivalentes, mais les erreurs systématiques estimées sont plus grandes.

Erreurs systématiques

Dans ce paragraphe nous allons détailler l'estimation des erreurs systématiques réalisées par la collaboration ESSENCE. Par soucis de comparaison avec SNLS, nous présenterons ces estimations sur le paramètre w pour une analyse des données des supernovae combinées avec le paramètre réduit A, dans les mêmes conditions d'ajustement. La platitude de l'univers et une équation d'état de l'énergie noire constante sont supposées.

Le traitement de la **calibration photométrique** donne une erreur équivalente à celle de SNLS. Elle est estimée à 0.045 sur le paramètre w.

La différence avec SNLS vient essentiellement de la méthode utilisée pour ajuster les courbes de lumière qui traite différemment les corrections K et les effets de couleur. En particulier, les effets de **couleur intrinsèque** à la supernova et de **l'extinction de la galaxie hôte** sont traités indépendemment et tiennent une place importante dans le budget total des erreurs systématiques. La cause la plus importante de variation de luminosité de supernovae provient de la diffusion et l'absorption dues aux poussières dans la galaxie hôte. L'erreur systématique attribuée à l'extinction de la galaxie hôte est estimée à 0.08 sur w.
La contribution à l'erreur systématique due à la couleur est estimée à à 0.06 sur w.
L'estimation de l'erreur due aux **poussières grises** est de l'ordre de 0.01.

Une erreur systématique liée à **l'évolution** est tirée des comparaisons de spectres de lots de supernovae à bas et haut redshift par Blondin [**?**]. Aucune évolution des supernovae avec le redshift n'a été mise en évidence néanmoins une très légère différence de population entre supernovae proches et lointaines n'est pas exclue. C'est pourquoi, une erreur systématiques sur w de 0.02 est rajoutée.

Enfin, le biais de sélection, ou **biais de Malmquist**, dû au fait que l'on sélectionne les supernovae les plus brillantes, est estimé à 0.02.

Discussion sur les erreurs sytématiques

L'estimation des erreurs systématiques prises en compte par SNLS et ESSENCE est résumée dans le tableau 2.1. Le total des incertitudes systématiques semble très différent, passant du simple au double de SNLS ($\sigma(w) = 0.054$) à ESSENCE($\sigma(w) = 0.13$). Les principales différences entre les deux estimations sont issues du traitement différent de la couleur. La collaboration ESSENCE prend en compte le traitement de l'extinction de la galaxie hôte et la couleur intrinsèque séparément. Ces deux valeurs pèsent énormément dans le bilan des erreurs systématiques. La collaboration SNLS choisit, à l'inverse, d'inclure la couleur mesurée dans l'ajustement des courbes de lumière et de la considérer comme une erreur statistique.

sources	SNLS	ESSENCE
calib. photo.	0.048	0.045
correction K	stat	0.005
extinction de la galaxie hôte	/	0.08
couleur intrinsèque	/	0.06
évolution	/	0.02
poussière grise	/	0.01
lentille gravitationnelle	/	< 0.001
biais de Malmquist	0.025	0.02
somme	**0.054**	**0.13**
couleur + corr K (stat)	0.021	/

TABLE 2.1 – *Estimations des erreurs systématiques avec SNLS et ESENCE*

Les données de SDSS, publiées en 2009 [43], confirment les résultats obtenus avec SNLS et ESSENCE. Les deux méthodes d'ajustement des courbes de lumière sont comparées ce qui montre l'intérêt porté sur le problème. Le contrôle des systématiques est aujourd'hui un enjeu majeur dans l'utilisation des supernovae en cosmologie.

Résultats d'échantillons combinées

Les données les plus récentes de supernovae dans un but cosmologique ont été compilées par différentes équipes. Le lot UNION contient 300 supernovae (dont 58 proches) [28]. Le lot CONSTITUTION [29] qui complète le lot UNION, apporte une centaine de supernovae proches de la campagne CfA.

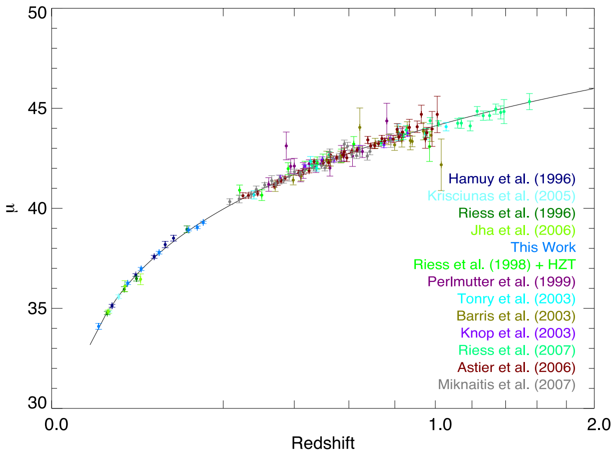

FIGURE 2.6 – *Diagramme de Hubble obtenu avec l'échantillon UNION. Figure issue de Kowalski et al. [28]*

L'échantillon UNION

Sur la figure 2.6 est tracé le diagramme de Hubble établi avec l'échantillon UNION. Les différentes couleurs correspondent aux différents lots de supernovae reccueillis dans la littérature. Cette compilation de données regroupe les supernovae des campagnes SCP [8] et High-z [7] pour les plus vieilles ainsi que le lot de la première année de SNLS [32], les supernovae publiées du projet ESSENCE [33, 34] et celles observées grâce au HST [30, 31] pour les données les plus récentes des supernovae distantes. Concernant les supernovae proches, un échantillon de 58 supernovae à bas redshift ($z < 0.1$) est constitué de données de supernovae publiées ces dix dernières années.

En supposant l'univers plat et la constante cosmologique, la valeur de la densité de matière obtenue est :

$$\Omega_M = 0.287 \pm 0.29(stat) \pm 0.39(sys).$$

L'ajustement obtenu en supposant l'univers plat et l'équation d'état de l'énergie noire constante, et en combinant l'échantillon UNION et la contrainte issue de la mesure des oscillations acoustiques de baryons (le paramètre réduit A), donne les résultats suivants :

$$\Omega_M = 0.285^{+0.020}_{-0.020}(stat)^{+0.011}_{-0.009}(sys)$$
$$w = -1.011^{+0.076}_{-0.062}(stat)^{+0.083}_{-0.087}(sys).$$

S'agissant des erreurs systématiques, les auteurs différencient celles communes à l'ensemble de l'échantillon et celles dépendant du lot original. Ils prennent en compte les effets du modèle d'ajustement des courbes de lumière, la calibration photométrique, la contamination, le biais de Malmquist et l'extinction galactique pour une estimation globale sur le paramètre w de 0.085.

L'échantillon CONSTITUTION

L'échantillon CONSTITUTION a été enrichi en supernovae proches par l'ajout d'une centaine de supernovae de CfA. Son ajustement combiné avec le paramètre réduit A issu de la mesure des oscillations acoustiques de baryons donne les résultats suivants, supposant l'univers plat et l'équation d'état de l'énergie noire constante :

$$w = -0.987^{+0.066}_{-0.068}(stat) \pm 0.11(sys)$$

Ce résultat est en accord avec celui obtenu à partir de l'échantillon UNION. La différence se situe sur l'estimation des erreurs systématiques. Celles-ci sont en effet plus élevées avec l'analyse de CONSTITUTION, plus proches de celles obtenues par ESSENCE. La méthode d'estimation des erreurs systématiques est originale. Les valeurs de w sont obtenues par différentes stratégies d'ajustement des courbes de lumière. Ces différentes méthodes supposent différentes hypothèses sous-jacentes et différents traitements notamment de la couleur. La plus grande différence de résultats entre les différentes méthodes d'ajustement donne l'estimation des erreurs systématiques, soit 0.12 sur le paramètre w.

Comparaison UNION/CONSTITUTION

Les résultats obtenus avec les échantillons UNION et CONSTITUTION sont illustrés dans la figure 2.7 tirée de Hicken et al. [29]. Dans la partie supérieure, les contours sont obtenus avec uniquement les supernovae. Une comparaison des échantillons est alors possible. En trait discontinu rouge, les ajustements sont réalisés avec l'échantillon UNION, alors qu'en trait plein noir, ils sont réalisés avec CONSTITUTION.

A gauche, les contours de confiance sont tracés dans le plan (Ω_M, Ω_Λ). L'ajustement des paramètres cosmologiques est réalisé avec l'hypothèse de constante cosmologique ($w = -1$). Les résultats sont compatibles avec le modèle de concordance ($\Omega_M \simeq 0.27$ $\Omega_\Lambda \simeq 0.73$) symbolisé par un point.

La figure de droite donne les contours obtenus dans le plan (Ω_M,w), en supposant l'équation d'état de l'énergie noire constante et l'univers plat. Les résultats sont aussi compatibles avec la constante cosmologique noté par un point.

La comparaison des deux échantillons montre que les supernovae proches bien qu'aidant à la détermination des paramètres cosmologiques n'apportent pas de grandes réductions des incertitudes mais permettent d'un peu mieux contraindre Ω_Λ. Les ajustements des deux échantillons sont sonc similaires et compatibles.

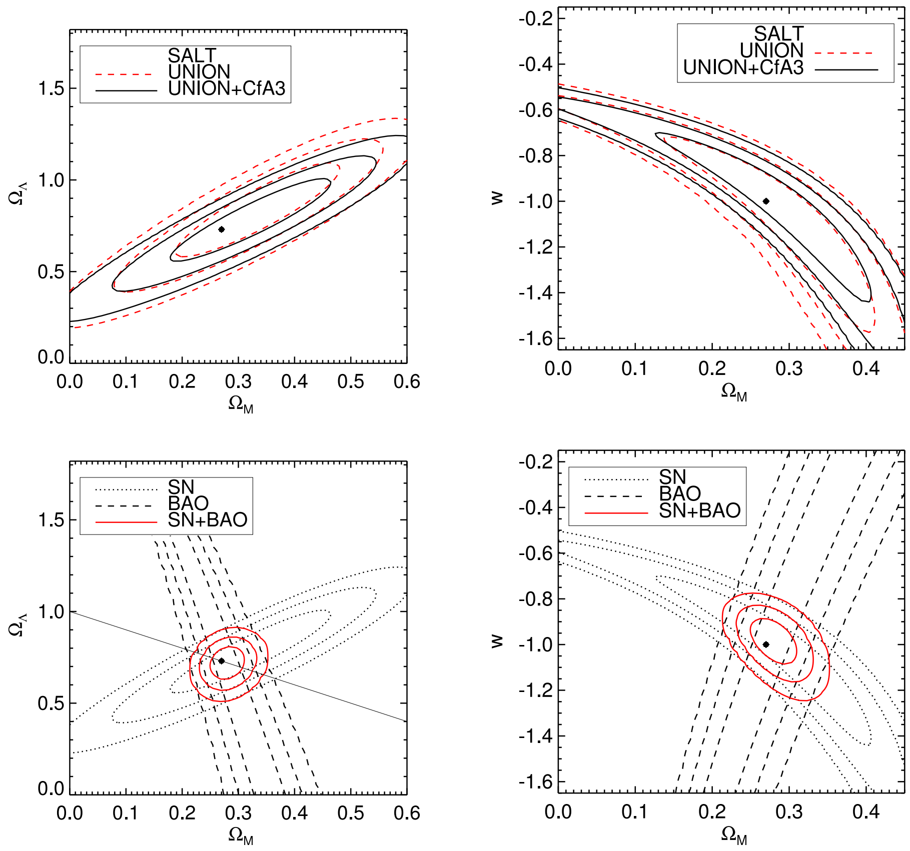

FIGURE 2.7 – *Contours de confiance dans le plan $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ avec l'hypothèse de constante cosmologique $(w = -1)$ à gauche, et (Ω_M, w) avec l'hypothèse de platitude de l'univers à droite. En haut les ajustements sont réalisés avec l'échantillon UNION en trait discontinu rouge, et avec CONSTITUTION en trait plein noir. En bas les ajustements sont réalisés avec l'échantillon CONSTITUTION seulement (en pointillés), puis combiné avec la containte extérieure venant des oscillations acoustiques de baryons, A (en trait plein rouge) ; pour indication, le contour obtenu par les oscillations acoustiques de baryons est tracé en trait discontinu. Figures issues de Hicken et al. [29].*

Dans la partie inférieure de la figure 2.7, les contours sont obtenus avec les données du lot CONSTITUTION en ajoutant le paramètre A contraignant la densité de matière. Ces graphiques montrent la complémentarité de ces deux sondes, afin d'obtenir de meilleures contraintes sur les paramètres cosmologiques.

Conclusion sur les résultats obtenus avec les données récentes

Dans la table 2.2, nous avons résumé les résultats obtenus avec les différents lots récents de supernovae.

$\Omega_k = 0$, $w = cst$ + BAO	w
ESSENCE	$-1.05 \pm 0.13(stat) \pm 0.13(sys)$
SNLS	$-1.023 \pm 0.090(stat) \pm 0.054(sys)$
UNION	$-1.011^{+0.076}_{-0.062}(stat)^{+0.083}_{-0.087}(sys)$
CONSTITUTION	$-0.987^{+0.066}_{-0.068}(stat) \pm 0.11(sys)$

Table 2.2 – Résultats des données actuelles des supernovae Ia

Les ajustements sont réalisés dans les même conditions :

- combinaison avec le paramètre A issu de la mesure des oscillations acoustiques de baryons,
- hypothèse de platitude de l'univers ($\Omega_k = 0$),
- hypothèse d'équation d'état de l'énergie noire constante ($w = const$).

Ces résultats sont compatibles avec la constante cosmologique ($w = -1$) à $1\,\sigma$ et l'augmentation statistique permet la réduction des erreurs statistique : de 0.13 avec la soixantaine de supernovae d'ESSENCE à 0.067 avec CONSTITUTION. Au delà de cette amélioration, la comparaison est intéressante du point de vue des systématiques.

En effet la faible erreur statistique obtenue oblige maintenant un meilleur contrôle des erreurs systématiques. Or l'estimation des erreurs systématiques diffère d'un échantillon à l'autre, montrant les différences dans les analyses des données. Nous constatons par ces différences d'estimations, le caractère subjectif du choix des sources potentielles à inclure ainsi que de la quantification de leurs effets. Du point de vue de ESSENCE, les erreurs systématiques sont déjà égales aux statistiques. Augmenter la taille de l'échantillon devient inutile. Les systématiques dominent alors comme le montrent les résultats avec CONSTITUTION. Malgré une méthode différente de traitement, les valeurs des erreurs systématiques de CONSTITUTION est en effet quasi identique à celle de ESSENCE.

Nous avons vu que l'estimation de SNLS est plus optimiste avec une erreur de 0.054 sur w, inférieure aux erreurs statistiques. Avec l'échantillon UNION l'évaluation des erreurs systématiques est similaire à celle de SNLS. La différence provient de la manière d'inclure les effets de couleur dans les systématiques. Avec UNION, l'extinction Galactique est également prise en compte entraînant un total des systématique plus élevé que pour SNLS.

En conclusion, avec ces nouveaux échantillons de supernovae, l'analyse n'est plus limitée par les erreurs statistiques. Les incertitudes systématiques sont maintenant le plus grand obstacle pour la cosmologie avec les supernovae. Ces deux types d'erreurs sont en effet aujourd'hui du même ordre. Dans le futur, de plus grands échantillons nécessiteront donc un meilleur contrôle de ces erreurs afin de les diminuer. Dans le paragraphe suivant, les perspectives futures d'observation de supernovae en cosmologie sont décrites.

2.1.5 Perspectives futures

L'objectif scientifique des futures missions d'observation de supernovae est la détermination de la nature de l'énergie noire. Pour cela l'extraction des paramètres cosmologiques doit inclure un paramètre décrivant une possible évolution temporelle de l'équation d'état de l'énergie noire. Le premier but est d'optimiser l'échantillon de supernovae :
- à bas redshift ($z < 0.1$), pour fixer le paramètre de normalisation M_S,
- à un redshift intermédiaire ($0.3 < z < 0.8$), gamme de redshift où apparaît l'accélération de l'expansion,
- à haut redshift ($z > 1$), phase de domination de la matière et décélération de l'expansion.

L'observation des supernovae de haut redshift, nécessite une mesure de la magnitude et du spectre en infra-rouge impossible au sol. Nous décrirons donc ici un programme spatial de type SNAP/JDEM tel que décrit dans Aldering et al. [41] et Kim et al. [67].

Plus de 2000 supernovae devraient être découvertes et bien mesurées dans la gamme de redshift jusqu'à 1.7. Afin de pouvoir contraindre une équation d'état de l'énergie noire dynamique, il faut pouvoir atteindre la précision de l'ordre du pour-cent sur l'extraction des paramètres cosmologiques. Il s'agit donc de contrôler au pour-cent les erreurs sur les observables mesurés (magnitude et redshift). Il sera donc nécessaire d'optimiser les erreurs systématiques afin qu'elles ne dépassent pas les erreurs statistiques. Pour cela, il faut améliorer la calibration des instruments, étudier les supernovae et leur environnement mais aussi améliorer l'analyse de données (biais, corrections K et standardisation). Dans ce cadre la mission SNAP/JDEM propose un telescope spatial avec un miroir de 2m équipé d'un imageur et d'un spectrographe couvrant les longueurs d'ondes visible et infra-rouge.

2.2 Le fond diffus cosmologique

Découvert en 1964 par Penzias et Wilson [44], le rayonnement du fond diffus cosmologique contribue à étayer la théorie du big bang selon laquelle, l'univers est isotrope et en expansion. En 1992, le satellite COBE (COsmic Background Explorer) [45] mesure avec précision son spectre électromagnétique qui s'avère celui d'un corps noir presque parfait à une température de $2.726\,K$ [46]. La mise en évidence de fluctuations de température de l'ordre de $10^{-5}\,K$ explique également l'origine des structures (galaxies, amas...). Le satellite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) [47], instrument de deuxième génération, a été mis en orbite en 2001 pour détecter ce rayonnement. Les cinq années de prise de données ont confirmé les anisotropies et, grâce à une meilleure résolution, ont permis l'utilisation de ce rayonnement comme sonde cosmologique contribuant à la détermination du contenu énergétique de l'univers, sa géométrie et son évolution. Le satellite Planck[48] dont le lancement a eu lieu en mai 2009 ouvrira de nouvelles perspectives.

Dans cette section, nous reviendrons sur ces notions et verrons comment la détection de ce rayonnement permet une mesure des paramètres cosmologiques. Dans un premier temps nous décrirons succintement l'histoire du fond diffus cosmologique de son origine à sa détection. Nous nous intéresserons ensuite aux anisotropies et leurs sources avant de décrire le spectre de puissance angulaire en terme de multipôles.

2.2.1 Origine du fond diffus cosmologique

L'univers primordial dense et chaud est à l'équilibre thermique. A cette époque, les photons ont une énergie suffisante pour ioniser la matière par interaction Compton :

$$e^- + p \leftrightarrows H + \gamma\,. \tag{2.5}$$

La matière forme un plasma d'électrons et ions en l'équilibre thermique avec le rayonnement. La température diminuant avec l'expansion de l'univers, l'énergie des photons diminue également jusqu'à ne plus être suffisante pour ioniser les atomes, principalement d'hydrogène, produits. On parle de recombinaison.

Le rayonnement et la matière baryonique sont alors découplés et évoluent indépendamment. Les photons se propagent librement quasiment sans interaction avec la matière et ne subissent que l'expansion. Le rayonnement conserve ainsi la forme d'un corps noir tandis que sa température diminue proportionnellement à $(1 + z)^{-1}$. Cest ainsi qu'il est détecté aujourd'hui sous la forme d'un rayonnement millimétrique de spectre d'un corps noir de température $2.726\,K$ [49, 46]. La figure 2.8 montre le spectre mesuré par FIRAS, un des instruments du satellite COBE.

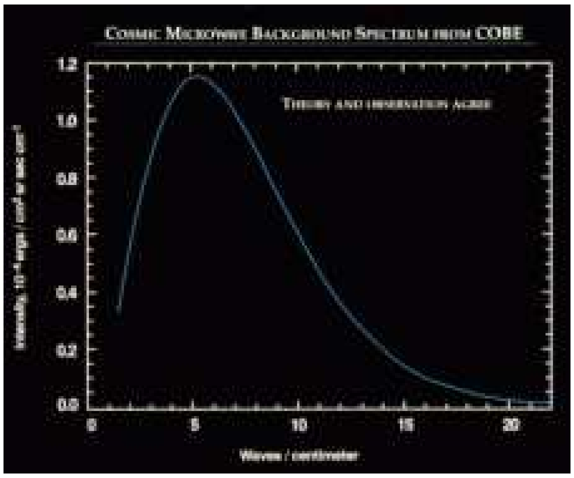

FIGURE 2.8 – *Spectre mesuré par l'instrument FIRAS du satellite COBE. Figure issue de [49].*

2.2.2 Les anisotropies

Les satellites COBE puis WMAP ont pu détecté des fluctuations de la température de l'ordre de $10^{-5}\,K$. La figure 2.9 montre les cartes du ciel en température telles que mesurées par COBE, à gauche, et WMAP, à droite. Les dégradés de couleur illustrent les différences de température. Ces fluctuations montrent les limites de l'isotropie supposée de l'univers. La meilleure résolution de WMAP permet d'obtenir une carte plus précise des anisotropies. Celles-ci trouvent leur origine dans différents phénomènes qui comprennent des fluctuations de la métrique et des oscillations acoustiques.

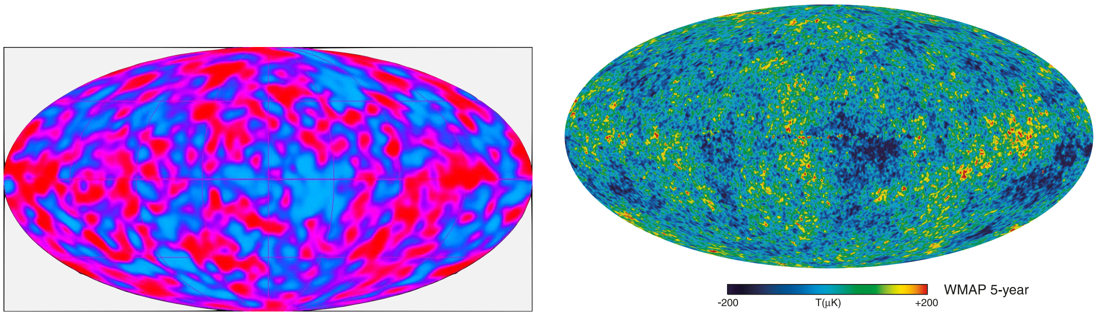

FIGURE 2.9 – *Cartes du ciel en température obtenues, à gauche, par COBE [50], à droite, par WMAP après 5 années de prise de données [52].*

L'origine des anisotropies

Perturbations primordiales Au début de son histoire, l'univers subit une période d'expansion accélérée appelée inflation. Les fluctuations quantiques générées pendant l'inflation se développent grâce à l'expansion accélérée de cette époque, devenant classiques. Différents modèles de perturbations primordiales ont été imaginés et étudiés []. Le modèle le plus simple et qui semble privilégié par les données actuelles, est de supposer un spectre de fluctuations primordiales scalaires défini en loi de puissance :

$$P(k) = A_s \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_s - 1} \tag{2.6}$$

où A_s est l'amplitude et n_s l'indice spectral des perturbations.

Oscillations acoustiques Nous avons vu qu'avant la recombinaison, les baryons sont couplés aux photons par interaction Compton. La matière baryonique a alors tendance à tomber dans les puits de potentiel formés par les fluctuations primordiales tandis que la pression de radiation limite cet effondrememnt gravitationnel. Le couplage baryons-photons produit alors des oscillations acoustiques.
Au moment du découplage, ces oscillations se figent et nous pouvons en retrouver la trace aujourd'hui dans le fond diffus cosmologique et dans la distribution de la matière baryonique comme nous le verrons plus loin.

Sources primaires

Les photons du fond diffus cosmologique subissent principalement deux effets, considérés comme anisotropies primaires : l'effet Sachs-Wolfe et l'effet Doppler.

L'effet Sachs Wolfe [53] est un effet gravitationnel. Quand un photon entre dans un puits gravitationnel, son énergie augmente. Lorsqu'il en sort, son énergie diminue. Ainsi les surdensités de matière correspondent à des spots froids et les sous-densités correspondent à des spots chauds. Puisque l'univers est en expansion, quand un photon traverse un changement de potentiel gravitationnel, il subit un potentiel différent en entrée et en sortie. Cet effet est essentiellement visible aux grandes échelles qui se traduit dans le spectre de puissance par un plateau à bas multipôles ($l < 20$).

$$\frac{\Delta T}{T}(\overrightarrow{n}) = \frac{1}{3}\Phi \tag{2.7}$$

L'effet Doppler est une perturbation cinétique. La variation de vitesse du plasma primordial implique un effet Doppler sur les photons du fond diffus cosmologique :

$$\frac{\Delta T}{T}(\overrightarrow{n}) = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}\,. \tag{2.8}$$

Sources secondaires

Les sources secondaires d'anisotropies sont dues à des objets astrophysiques sur le chemin de propagation des photons du fond diffus cosmologiques. Ces phénomènes sont des effets gravitationnels ou de diffusion.

Parmi les effets gravitationnels on peut citer l'effet Sachs-Wolfe intégré, source additionnelle d'anisotropies résultant de la variation temporelle des potentiels gravitationnels sur la trajectoire des photons du fond diffus cosmologique.
L'effet de lentille gravitationnelle est le deuxième effet gravitationnel. La trajectoire des photons issus du fond diffus cosmologique est modifiée à cause de la distorsion du champ gravitationnel due à la présence d'objets massifs. Le spectre de puissance est lissé ce qui peut faire disparaitre de petits pics à grands l.

L'effet Sunyaev-Zel'dovich (SZ) est un effet inverse Compton. Le photon gagne de l'énergie par diffusion avec un électron libre dans des gaz chauds présents dans les amas de galaxies.
Un effet de diffusion important est dû à la réionisation, période, pendant la formation des structures (environ $6 < z < 20$) durant laquelle l'univers est à nouveau globalement ionisé. Il y a alors diffusion entre électrons et photons. Le principal effet est la suppression des anisotropies. Le modèle le plus simple est une réionisation complète et instantanée à un redshift z_{re}. La réionisation est alors complètement caractérisée par sa profondeur optique, notée τ.

De la température au spectre de puissance

Nous avons vu l'origine des fluctuations de la température observées. Nous allons maintenant décrire comment construire un spectre de puissance angulaire à partir des mesures de températures.

Le dipôle La première étape est de soustraire le dipôle cosmologique. Cette anisotropie n'est pas intrinsèque au rayonnement du fond diffus cosmologique mais est dû au mouvement de la Terre (ou du point de Lagrange L2 pour les satellites) au sein du système solaire, lui-même en mouvement dans notre galaxie.
C'est un effet Doppler des photons du fond diffus cosmologique par rapport au mouvement relatif dans le système solaire. Si E_{CMB} est l'énergie des photons du fond diffus cosmologique dans le référentiel du fond diffus cosmologique et E l'énergie des photons mesurée alors on peut écrire : $E_{\mathrm{CMB}} = E\,(\gamma(1 + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}))$, avec $\overrightarrow{n}$, la direction de l'observation et $\overrightarrow{v}$, la vitesse relative de l'observateur dans le référentiel du fond diffus cosmologique. Puisque la fonction de distribtion des photons du fond diffus cosmologique suit la loi des corps noirs, la température mesurée s'exprime : $T(\overrightarrow{n}) = T_{CMB}\,(\gamma(1 + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}))^{-1}$. Ce dipôle a été mesuré une première fois par DMR [51], un instrument de COBE, puis par WMAP [52] : $T(\theta) = 3.355\,10^{-3}\cos\theta\,K$, où θ est l'angle entre la direction de l'observation($\overrightarrow{n}$) et la vitesse, $\overrightarrow{v}$. Connaissant la température moyenne mesurée du fond diffus cosmologique $T = 2.725\,K$, cette valeur implique une vitesse relative $v = 369 \pm 0.9 km.s^{-1}$ dans le référentiel du fond diffus cosmologique.

Construction du spectre Pour décrire mathématiquement les fluctuations de température, la méthode la plus appropriée est une décomposition en termes d'harmoniques sphériques. On peut alors écrire la différence de température suivant la direction observée :

$$\frac{\Delta T}{T}(\theta,\,\phi) = \sum_{l,m} a_{l,m} Y_{l,m}(\theta,\,\phi)\,, \tag{2.9}$$

avec $l > 1$ ($l = 1$ correspond au dipôle déjà soustrait). L'invariance par rotation assure que les coefficients, $a_{l,m}$, sont décorrélées. Leur moyenne sur différentes réalisations du ciel avec la même cosmologie est décrite par :

$$< a_{l,m} a^{*}_{l',m'} >= C_l\,\delta_{ll'}\delta_{mm'}\,, \tag{2.10}$$

définissant ainsi le spectre de puissance angulaire C_l. L'estimateur idéal est obtenu par la moyenne sur les m :

$$\hat{C}_l = \frac{1}{2l+1} \sum_m |a_{l,m}|^2\,. \tag{2.11}$$

La variance minimale atteignable, appelée variance cosmique, s'écrit :

$$\mathrm{var}\left(\hat{\mathrm{C}}_{\mathrm{l}}\right) = \frac{2}{2\mathrm{l}+1}\,\mathrm{C}_{\mathrm{l}}^2\,. \tag{2.12}$$

Si les coefficients $a_{l,m}$ sont gaussiens et indépendants, le spectre de puissance angulaire décrit complètement les anisotropies de température. La variance des anisotropies en température est donnée par :

$$\Delta T^2 = T^2 \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l \simeq T^2 \int \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l \mathrm{d} \ln \mathrm{l}\,. \tag{2.13}$$

La quantité généralement représentée dans les figures de spectres est donc $\frac{l(l+1)}{2\pi}C_l$.

La figure 2.10 représente le spectre de puissance des fluctuations en température issue de [54].

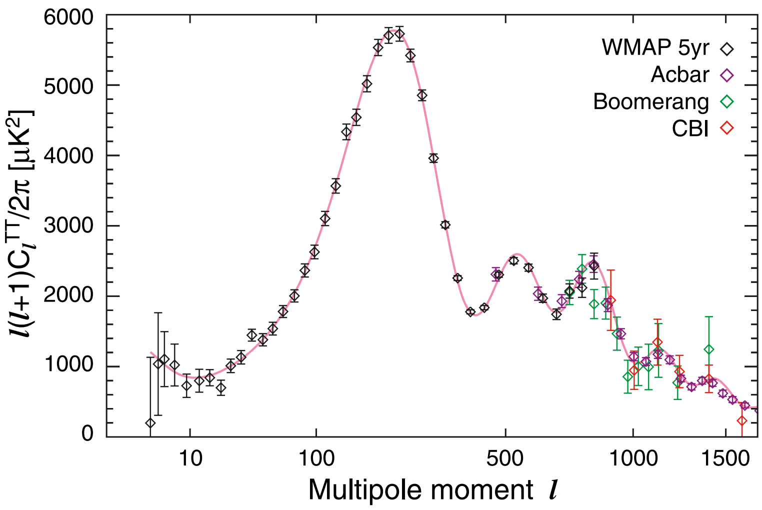

FIGURE 2.10 – *Spectre de puissance obtenu après 5 ans de prise de données avec WMAP. Figure issue de [54].*

2.2.3 Paramètres cosmologiques et données actuelles

Nous pouvons maintenant discuter des informations cosmologiques qu'apportent le fond diffus cosmologique. Nous allons décrire les différents paramètres et leur estimation.

Nous avons vu que pour caractériser les perturbations primordiales, deux paramètres sont nécessaires : A_s et n_s. L'amplitude du plateau Sachs-Wolfe, à bas l, est reliée à l'amplitude des perturbations primordiales, A_s.

La position du premier pic est liée à la distance angulaire à la surface de dernière diffusion qui dépend surtout de la courbure de l'univers, Ω_k. Le rapport d'amplitude des pics suivants dépend des paramètres de densité de matière Ω_M et de matière baryonique, Ω_b. Des effets sur la position des pics sont aussi liés à la densité d'énergie noire (ou constante

cosmologique) alors que l'équation d'état de l'énergie noire agit plutôt sur leur amplitude. Pour une revue détaillée et illustrée des effets de la valeur de ces différents paramètres sur le spectre de puissance, on pourra lire les publications de Hu, [55, 56] par exemple.
Par ailleurs, la plupart de ces paramètres sont dégénérés entre eux et avec la constante de Hubble, $h = H_0/100$. Nous verrons dans les chapitres suivants que la dégénérescence géométrique empêche la determination précise des paramètres de courbure et de densité d'énergie noire et que supposer une équation d'état de l'énergie noire dynamique amène des dégénérescences supplémentaires.

Pour que le lot de paramètres soit complet, il ne faut pas oublier la profondeur optique de la réionisation τ.

Cet ensemble de paramètres constitue le lot de paramètres que nous utiliserons par la suite. Pour briser les dégénérescences, il existe deux solutions. La première consiste à fixer certains paramètres, comme l'équation d'état de l'énergie noire ou la courbure. La deuxième revient à compléter les informations cosmologiques du fond diffus cosmologique par une combinaison avec d'autres sondes, les supernovae ou les oscillations acoustiques de baryons par exemple. En supposant une constante cosmologique, les résultats obtenus à partir des 5 années de prises de données de WMAP [5] sont donnés dans la table 2.3, d'abord en utilisant uniquement ces données puis en combinaison avec le lot de supernovae UNION [28] et les données des oscillations acoustiques de baryons de Percival et al. [57]

paramètre	WMAP seul	WMAP + SN + BAO
$100\Omega_b h^2$	2.273 ± 0.062	$2.267^{+0.058}_{-0.059}$
$\Omega_c h^2$	0.1099 ± 0.0062	0.1131 ± 0.0034
Ω_Λ	0.742 ± 0.030	0.726 ± 0.015
n_s	$0.963^{+0.014}_{-0.015}$	0.960 ± 0.013
τ	0.087 ± 0.017	0.084 ± 0.016
A_s	$(2.41 \pm 0.11) \times 10^{-9}$	$(2.445 \pm 0.096) \times 10^{-9}$

TABLE 2.3 – *Résultats obtenus avec les données de WMAP après 5 ans de prise de données supposant une constante cosmologique. Valeurs issues de [5].*

Le tableau montre que WMAP seul permet de mesurer un grand nombre de paramètres avec une grande précision. En outre, l'ajout des supernovae et des oscillations acoustiques de baryons améliore la précision en particulier sur $\Omega_c h^2$ et Ω_Λ.

2.3 Les oscillations acoustiques de baryons

Un autre moyen de sonder l'univers consiste à étudier la distribution de la matière. Si l'univers est homogène aux grandes échelles, les galaxies et amas de galaxies montrent que ce n'est plus la cas aux petites échelles. Cet effet prend son origine dans les perturbations primordiales. En outre, les oscillations acoustiques formées par le couplage des photons et des baryons avant la recombinaison et figées au moment du découplage sont aujourd'hui détectées dans le rayonnement du fond diffus cosmologique mais également dans la distribution de matière.

Nous décrirons d'abord la formation et l'évolution des grandes structures. Nous introduirons le spectre de puissance et la fonction de corrélations à deux points. Nous verrons ensuite l'intérêt de la mesure des oscillations acoustiques de baryons. Nous verrons enfin ce qu'apportent les données des sondages à larges champs sur la détermination des paramètres cosmologiques.

2.3.1 Les grandes structures

Nous avons vu que l'univers aux grandes échelles apparaît comme homogène et isotrope. Ce n'est plus le cas aux petites échelles, où l'on observe des filaments et des vides dans la distribution de matière, comme le montre la figure 2.11 pour le sondage de galaxies 2dFGRS. La distribution de matière est régie par la gravité. Les fluctuations initiales vont grandir dans les puits de potentiels. Les surdensités de matière noire ainsi créées seront des zones de créations des galaxies et conduiront à la formation des grandes structures. Cette évolution des inhomogénéités conduit à des structures qui évoluent de façon linéaire créant des vides de plus en plus grands quand la masse se rassemble autour des surdensités. Les non-linéarités apparaissent avec l'accroissement des régions denses quand les interactions locales deviennent importantes.

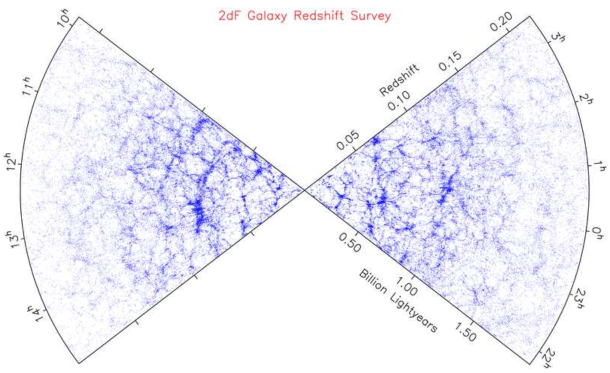

FIGURE 2.11 – *Distribution des galaxies dans l'univers proche comme observé par 2dFGRS.*

L'amplitude des structures ne commenceront à croître que tard dans l'histoire de l'univers, après le découplage. Le rayon de Hubble (l'horizon) s'accroît avec l'expansion et intègre des perturbations de plus en plus denses. Les perturbations de longueurs d'ondes plus courtes ont leur croissance différée jusqu'à la domination de la matière. La représentation de l'évolution des structures se fait par le spectre de puissance.

Le spectre de puissance

Le spectre de puissance permet de mesurer comment évoluent les fluctuations à différentes échelles. A priori, c'est le produit du spectre de puissance des fluctuations primordiales, $A_s k^{n_s}$, avec la fonction de transfert, $T(k)$:

$$P(k,z) = A_s k^{n_s} T^2(k)\,. \tag{2.14}$$

La fonction de transfert décrit les modifications de ces fluctuations pendant l'ère de domination de la radiation, à la recombinaison puis jusqu'à $z = 0$. Celle-ci est calculée numériquement ou en utilisant les formules décrites dans Eisenstein & Seo [?]. Les non-linéarités, connues grâce aux simulations numériques à N corps [?], sont également prises en compte. La fonction de transfert dépend de certaines caractéristiques des perturbations primordiales, du facteur de croissance et du contenu de l'univers.

La façon la plus simple de mesurer la distribution de la matière aux grandes échelles est de mesurer la positions des galaxies. On peut ainsi décrire le spectre de puissance des galaxies par rapport à celui de la matière, introduit précédemment :

$$P_{gg}(k) = b^2 P_{mm}(k)\,. \tag{2.15}$$

Le paramètre b représente le biais entre la densité de matière et la densité de galaxies. Pour construire le spectre de puissance des galaxies il faut utiliser les informations de distance et de position angulaire dans l'espace pour réaliser une cartographie 3D de l'univers proche.

La fonction de corrélation

Considérons la matière dont la densité $\rho(\overrightarrow{r},t)$, est fonction de la position et du temps. A l'instant t, la densité spatiale moyenne sur un volume V suffisamment grand est donnée par :

$$\overline{\rho}(t) = \frac{1}{V}\int_V \rho(\overrightarrow{r},t)\,d^3\overrightarrow{r}\,. \tag{2.16}$$

Les déviations de cette quantité permettent de définir la densité de perturbation :

$$\delta(\overrightarrow{r},t) = \frac{\rho(\overrightarrow{r},t)-\overline{\rho}(t)}{\overline{\rho}(t)}\,. \tag{2.17}$$

On peut alors définir la fonction de corrélation comme la moyenne sur le volume V :

$$\xi(\overrightarrow{r}) = \langle\delta(\overrightarrow{r})\delta(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{r})\rangle\,. \tag{2.18}$$

Comme pour le spectre de puissance, la fonction de corrélation de la matière est reliée à celui des galaxies par le biais, b : $\xi_{gg} = b^2\xi_{mm}$. En pratique, la fonction de corrélation à deux points est calculée en deux étapes. Il faut d'abord réaliser un comptage de toutes les paires de galaxies d'un relevé donné, comme une fonction de leur distance de séparation. Puis on compare ce comptage à celui de paires de points distribués aléatoirement dans le même volume.

La fonction de corrélation est reliée au spectre de puissance par une transformation de Fourier :

$$P(\overrightarrow{k}) = \int \xi(\overrightarrow{r}) e^{i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}} d^3\overrightarrow{r} \tag{2.19}$$

$$\xi(\overrightarrow{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int P(\overrightarrow{k}) e^{-i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}} d^3\overrightarrow{k} \tag{2.20}$$

L'hypothèse d'isotropie de l'univers permet de simplifier ces équations et de les exprimer en fonction des normes des vecteurs $\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{r}$.

2.3.2 Mesures des oscillations acoustiques de baryons dans les relevés de galaxies

Il est possible de détecter, dans les distributions de galaxies, les vestiges des oscillations acoustiques présentes dans l'univers avant la recombinaison.

Les oscillations acoustiques de baryons mesurées aujourd'hui grâce au spectre de puissance ou à la fonction de corrélation, prennent leur origine dans le plasma que formaient les baryons et les photons avant la recombinaison. A cette époque, les photons et les baryons étaient couplés et produisaient des oscillations acoustiques. Après la recombinaison, les photons se propagent librement, et forment le rayonnement du fond diffus cosmologique. De la même manière, la matière baryonique évolue et forme des structures. Nous retrouvons des traces de ces oscilations acoustiques de baryons sous la forme d'oscillations dans le spectre de puissance ou sous la forme d'un pic dans la fonction de corrélation entre les galaxies distantes de 150 Mpc.

On peut mesurer une distance ou la taille comobile d'un objet suivant la ligne de visée, reliée au paramètre de Hubble :

$$x_{\parallel} = \frac{c\,\Delta z}{H(z)} \tag{2.21}$$

et suivant la direction transverse liées à la distance angulaire :

$$x_{\perp} = (1+z) D_A(z)\,\Delta\theta \tag{2.22}$$

où Δz et $\Delta\theta$ sont les mesures de redshift et de l'angle. Si l'on connaît $x_{\parallel}$ et $x_{\perp}$ alors on peut déduire la distance angulaire et le paramètre de Hubble et l'objet mesuré est qualifié de "règle standard". En ce sens les oscillations acoustiques de baryons semble une bonne règle standard. Cependant, les données actuelles ne permettent pas de mesurer séparément la distance angulaire et le paramètre de Hubble. On utilise alors la moyenne sphérique de la fonction de corrélation. La distance associée, $D_V(z)$, est donc composée de $D_A(z)$ et $H(z)$:

$$D_V(z) = \left((1+z)^2 D_A^2(z) \frac{cz}{H(z)}\right)^{1/3} . \tag{2.23}$$

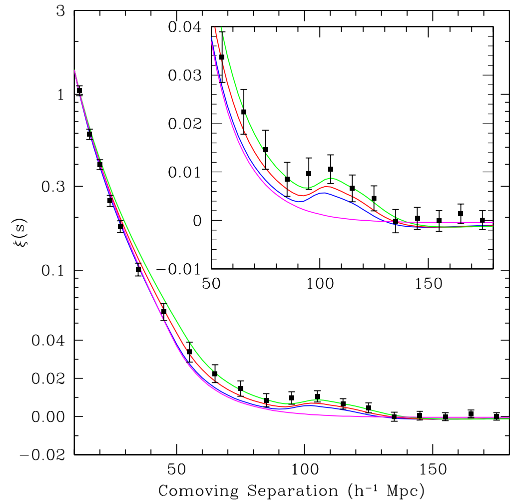

FIGURE 2.12 – *Fonction de corrélation montrant le pic dû aux oscillations acoustiques de baryons à* $100\,h^{-1}$ *Mpc. Figure issue de [42].*

2.3.3 Les expériences et les données actuelles

Nous avons vu que pour construire un spectre de puissance ou la fonction de corrélation, le meilleur moyen est d'utiliser les information de redshift et de position angulaire des galaxies. Le but des différents relevés de galaxies est alors de sonder un large volume grâce à un large champ de vue ou un sondage en profondeur. Les deux sondages les plus importants dans ce sens sont 2dFGRS (Two Degree Field Galaxy Redshift Survey) et SDSS (Sloan Digital Sky Survey).

SDSS : Ce programme, issu d'une collaboration internationale, de relevé de galaxies a démarré en 2000. Un catalogue de galaxies à été réalisé, dont 50 000 galaxies rouges particulièrement brillantes (LRG) qui constitue les meilleures données observationnelles pour étudier le spectre de puissance de la matière ou la fonction de corrélation. Cet échantillon a ainsi permis la mesure des oscillations acoustiques de baryons à un redshift

de $z = 0.35$ [42].
Grâce à la fonctions de corrélation illustrée dans la figure 2.12, la densité de matière est obtenue avec une grande précision : $\Omega_M = 0.273 \pm 0.025$ en supposant la platitude de l'univers et la constante cosmologique.

2dFGRS : Ce catalogue de galaxies est le fruit d'une collaboration anglo-australienne réalisé sur une période de cinq ans, de 1997 à 2002. C'est à partir de ces données qu'ont été obtenus les résultats les plus récents sur la mesure des oscillations acoustiques de baryons [**?**]. Ils utilisent la pseudo-distance $D_V(z)$ obtenue à deux redshift différents pour deux échantillons différents de galaxies, à $z = 0.2$ avec les galaxies de 2dFGRS et à $z = 0.35$ avec l'échantillon de SDSS. En combinant ces quantités aux données de SNLS et WMAP, ils obtiennent : $\Omega_M = 0.249 \pm 0.018$ et $w = -1.004 \pm 0.089$ en supposant l'univers plat et l'équation d'état de l'énergie noire constante.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit la mesure de distances grâce aux supernovae, l'observation des anisotropies dans le fond diffus cosmologique et la détection des oscillations acoustiques de baryons dans les galaxies. Ce chapitre a permis de mettre en évidence les atouts de chaque sonde présentées. D'après les résultats obtenus avec chacune, nous avons vu qu'elles apportent différentes informations cosmologiques. Les différences fondamentales en font des sondes complémentaires et leur combinaison constitue aujourd'hui le meilleur moyen d'extraire les paramètres cosmologiques et en particulier ceux caractérisant l'énergie noire.

Chapitre 3

Extraction des paramètres cosmologiques avec les supernovae

Dans ce chapitre, nous allons réaliser l'extraction des paramètres cosmologiques à partir des données des supernovae et interpréter les résultats obtenus.

Dans un premier temps, nous décrirons la méthode statistique d'extraction des paramètres cosmologiques que nous utilisons dans cette thèse. Nous l'appliquerons ensuite aux données des supernovae. Nous détaillerons les problèmes liés à ces ajustements, notamment les dégénérescences entre les paramètres qui limitent l'interprétation.

3.1 Méthode statistique d'extraction des paramètres cosmologiques

Nous allons présenter de manière générale la méthode statistique qui permet d'extraire une estimation des paramètres cosmologiques à partir des données de différentes sondes, par exemple à partir des mesures de magnitudes des supernovae.

Nous avons choisi d'utiliser une approche fréquentiste décrite dans [60]. Basée sur le calcul du maximum de vraisemblance et la méthode des moindres carrés, cette méthode permet de déterminer les valeurs centrales et les incertitudes des paramètres cosmologiques. Nous allons également décrire une représentation graphique des résultats.

3.1.1 La méthode statistique : le maximum de vraisemblance

Supposons un lot de N mesures de quantités $y = (y_1, ..., y_N)$ décrit par une fonction de probabilité $p(y, y_{th}(P, x_i))$ où $y_{th}(P, x_i)$ est une fonction des paramètres à estimer P, constituant le modèle théorique. Pour les supernovae, par exemple, il s'agit de l'expression de la magnitude en fonction des paramètres cosmologiques. On peut écrire la fonction de vraisemblance correspondant à la probabilité de cette courbe :

$$L = p(y, y_{th}(P, x_i)) \tag{3.1}$$

Si les mesures sont indépendantes, cette fonction s'écrit :

$$L = \prod_i p(y_i, y_{th}(P, x_i)) \tag{3.2}$$

Si les incertitudes de mesures sont en plus gaussiennes, cela revient à :

$$L = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(y_i - y_{th}(P,x_i))^2}{2\sigma_i^2}} \tag{3.3}$$

où les σ_i sont les incertitudes de mesures.
En passant par le logarithme, la fonction de vraisemblance, L, s'écrit alors :

$$\ln L = -\sum_i \ln(\sqrt{2\pi}\sigma_i) - \frac{1}{2}\sum_i \frac{(y_i - y_{th}(P, x_i))^2}{\sigma_i^2}\,. \tag{3.4}$$

On peut réécrire cette expression en introduisant le χ^2 :

$$\ln L = -\sum_i \ln(\sqrt{2\pi}\sigma_i) - \frac{1}{2}\chi^2\,. \tag{3.5}$$

Le χ^2 est alors défini par :

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(y_i - y_{th}(P, x_i))^2}{\sigma_i^2}\,. \tag{3.6}$$

La fonction la plus probable est celle qui maximise la fonction de vraisemblance L. Soit :

$$\frac{\partial L}{\partial P_\alpha} = 0\,. \tag{3.7}$$

Maximiser L revient alors à minimiser le χ^2 :

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial P_\alpha} = 0\,. \tag{3.8}$$

Si les mesures ne sont pas indépendantes, le χ^2 est défini en tenant compte des corrélations entre les mesures, ρ_{ij}, par la notation matricielle suivante :

$$\chi^2 = (\bar{y} - \bar{y_{th}}(P, x))^T V^{-1} (\bar{y} - \bar{y_{th}}(P, x)) \tag{3.9}$$

où $\bar{y}$ est le vecteur des mesures, $\bar{y_{th}}(P, x)$, le vecteur des valeurs théoriques prédites correspondant et $V_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$.

Par définition, la dérivée seconde du χ^2 est reliée à l'inverse de la matrice de covariance indépendamment des points de mesure :

$$V_{ij}^{-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\chi^2}{\partial y_i \partial y_j}\right] . \tag{3.10}$$

Pour résumer, si les incertitudes de mesure sont gaussiennes, trouver le meilleur ajustement revient à trouver les valeurs des paramètres (P) tels que le χ^2 soit minimal. Il s'agit donc de résoudre l'équation :

$$\frac{\partial\chi^2}{\partial P_\alpha} = 0 \tag{3.11}$$

Cette méthode des moindres carrés permet ainsi d'extraire la valeur centrale des paramètres cosmologiques.
Par contre, les incertitudes associées aux différents paramètres cosmologiques doivent être calculées à partir de celles de mesures des observables. Leur détermination est effectuée grâce à la théorie de propagation des incertitudes.

3.1.2 Calcul des incertitudes

A partir des incertitudes de mesure nous voulons déterminer celles sur les paramètres cosmologiques. Une théorie de propagation des incertitudes est alors nécessaire. On peut écrire le développement limité à l'ordre 2 du χ^2 autour du minimum :

$$\chi^2(P) = \chi^2_{min}(P^0) + \left.\frac{\partial\chi^2}{\partial P_i}\right|_{P_i^0}(P-P^0) + (P-P^0)^T\,\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\chi^2}{\partial P_i \partial P_j}\right](P-P^0) \tag{3.12}$$

où P^0 est le vecteur des valeurs des paramètres obtenues au minimum. Le second terme est nul. Au second ordre, le χ^2 est une fonction quadratique des P_i. Les incertitudes sur les paramètres cosmologiques P_i sont alors données par la matrice de covariance des P_i :

$$U_{ij}^{-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\chi^2}{\partial P_i \partial P_j}\right] \tag{3.13}$$

Par la définition du χ^2, équation 3.9, on peut calculer ses dérivées secondes :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\chi^2}{\partial P_i \partial P_j} = \left[\frac{\partial y_{th}(P)}{\partial P_j}\right]^T V^{-1}\left[\frac{\partial y_{th}(P)}{\partial P_j}\right] - (\bar{y} - \bar{y_{th}}(P,x))^T V^{-1}\left[\frac{\partial^2 y_{th}(P)}{\partial P_i P_j}\right] \tag{3.14}$$

Si l'expression du modèle $(y_{th}(P))$ dépend linéairement des paramètres à ajuster, le second terme s'annule. Les incertitudes sur les paramètres cosmologiques sont alors données pour la matrice de covariance U :

$$U^{-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\chi^2}{\partial P_i \partial P_j}\right] = J^T V^{-1} J \tag{3.15}$$

où J est la matrice jacobienne définie par :

$$J = \left[\frac{\partial y_{th}(P, x_i)}{\partial P_i} \right] \tag{3.16}$$

La matrice de covariance U ainsi définie ne dépend pas des mesures mais uniquement de leurs incertitudes (par V) et des points de mesure x_i. Cette méthode est appelée une analyse de Fisher. Elle est rigoureuse si le modèle est linéaire. Elle est également une bonne approximation si les incertitudes de mesures sont distribuées de façon gaussienne et se compensent autour de la courbe. Le second terme est alors négligeable. Cette méthode permet des études statistiques simples et rapides et reste valable dans la majorité des cas traités dans cette thèse.

Si la théorie n'est pas linéaire seules les équations 3.13 et 3.14 restent valables. Le calcul des incertitudes est alors plus complexes.

3.1.3 Incertitudes et niveaux de confiance

Le χ^2 est une variable statistique. La densité de probabilité du χ^2 pour N mesures indépendantes consécutives se calcule en utilisant la loi de conservation des probabilités. Si la mesure a une densité de probabilité $g(x)$, la probabilité du χ^2 s'écrit :

$$p(\chi^2)d\chi^2 = g(x)dx \tag{3.17}$$

ou

$$p(\chi^2) = g(x)\frac{1}{\frac{d\chi^2}{dx}} \,. \tag{3.18}$$

Dans le cas simple où $g(x)$ est une gaussienne on peut écrire :

$$p(\chi^2) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\chi^2}} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \,. \tag{3.19}$$

Dans le cas d'un χ^2 à n degrés de liberté :

$$p(\chi^2, n) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \,, \tag{3.20}$$

où Γ est la fonction gamma d'Euler.

Le niveau de confiance d'une expérience est défini comme la probabilité que toute nouvelle expérience donne un χ^2 supérieur :

$$\epsilon = CL(\chi^2) = \int_{\chi^2}^{+\infty} p(\chi^2, n) d\chi^2 \,. \tag{3.21}$$

L'incertitude d'une mesure (ou d'un paramètre) ou son intervalle de confiance est alors définie par $1-\epsilon$. On peut ainsi donner le résultat d'une mesure ou sur un paramètre avec une incertitude à $s\,\sigma$:

$$P = P^0 + s\,\sigma \quad \Leftrightarrow \quad \chi^2 = \frac{(P-P^0)^2}{\sigma_P^2} \leq \chi^2_{min} + s^2 \tag{3.22}$$

Dans le cas d'une variable, c'est-à-dire pour un degré de liberté, $s = 1$ correspond à un niveau de confiance, calculé par l'équation 3.19 de 68%. Pour 2 degrés de liberté, l'intervalle de confiance à $1\,\sigma$ correspond à une probabilité de 39.3%.

3.1.4 Contours de probabilité

Cette propriété du χ^2 est également utilisée pour tracer des contours de probabilité. Ces derniers permettent de connaître les valeurs les plus probables de deux paramètres. L'équation $\chi^2 = \chi^2_{min} + s^2$ définit en effet un contour d'iso-probabilité.

Avec l'analyse de Fisher, le contour de probabilité avec deux variables s'obtient en construisant la sous-matrice d'erreurs, u, correspondant aux variables considérées :

$$u = \begin{bmatrix} \sigma^2_{P_1} & \rho_{12}\sigma_{P_1}\sigma_{P_2} \\ \rho_{12}\sigma_{P_1}\sigma_{P_2} & \sigma^2_{P_2} \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

où les σ_{P_i} sont les incertitudes obtenues sur les deux paramètres considérés et ρ_{12}, leur coefficient de corrélation.
Le contour est alors défini par :

$$\chi^2 = \begin{bmatrix} P_1 - P_1^0 \\ P_2 - P_2^0 \end{bmatrix} u^{-1} \begin{bmatrix} P_1 - P_1^0 \\ P_2 - P_2^0 \end{bmatrix} + s^2 \tag{3.24}$$

Notons que la marginalisation sur les variables non considérées est ici automatique.

Le contour obtenu est une ellipse, dite de Fisher, autour de la valeur extraite au minimum du χ^2, comme le montre la figure 3.1. Les contours de probabilité permettent une représentation graphique des incertitudes des paramètres ajustés. En effet, la projection sur les axes définit un intervalle de confiance sur les paramètres considérés. Par exemple, un contour à $1\,\sigma$ correspond à 39% de probabilité. En projetant sur les axes, on a 68% de niveau de confiance sur les paramètres ajustés.

Les contours permettent de plus une indication sur la corrélation des paramètres. Même si l'épaisseur de l'ellipse dépend de l'échelle choisie pour les axes, une forte corrélation se traduit par une ellipse fine s'apparentant à un segment, tandis que des paramètres peu corrélés forment une ellipse plus ronde. L'angle que forme le grand axe de l'ellipse avec un axe du plan, dépend également de la corrélation entre les deux paramètres : $\tan 2\Phi = 2\rho_{ij}\frac{\sigma_i\sigma_j}{\sigma_i^2-\sigma_j^2}$.

Cette représentation graphique des résultats d'ajustements sera beaucoup utilisée dans la suite de cette thèse.

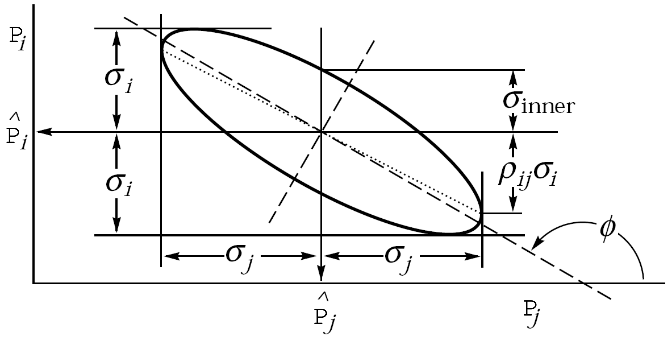

FIGURE 3.1 – *Contour de probabilité obtenue sur les paramètres P_i et P_j. Le minimum du χ^2 est obtenu pour $\hat{P}_i$ et $\hat{P}_j$.*

3.1.5 Cas non linéaire

Si le modèle ne dépend pas linéairement des paramètres à extraire, l'analyse de Fisher n'est, en général, pas valable. Dans ce cas, les incertitudes sur les paramètres cosmologiques ne sont plus gaussiennes, elles peuvent être asymétriques et dépendent des points de mesure. La seule définition du χ^2 qui reste valable est l'équation 3.9.

Les incertitudes sont alors déterminées numériquement en utilisant la probabilité du χ^2. Il faut alors résoudre l'équation :

$$\chi^2(P_\alpha, P) = \chi^2_{min} + s^2 \tag{3.25}$$

où $\chi^2(P_\alpha, P)$ est le χ^2 obtenu en fixant un paramètre puis en minimisant sur tous les autres paramètres.

Pour tracer des contours, la méthode est identique mais en fixant deux paramètres et en réalisant la marginalisation sur les autres paramètres. Comme la marginalisation s'effectue par minimisation du χ^2, les incertitudes ou les contours obtenus sont les plus probables. La construction de contours par cette méthode est rigoureuse tant que les incertitudes sur les mesures sont gaussiennes. Elle est exactement équivalente à l'analyse de Fisher dans le cas linéaire. Mais, si les incertitudes obtenues sur les paramètres considérés sont asymétriques, le contour ne ressemble plus à une ellipse.

3.1.6 Inclure des contraintes extérieures

Si un ou plusieurs paramètres cosmologiques sont déterminés avec précision par une autre mesure, on peut vouloir ajouter cette information. Cette mesure étant indépendante, elle peut être facilement incluse dans l'analyse en sommant les χ^2 :

$$\tilde{\chi}^2 = \chi^2 + \left(\frac{P - P_0}{\sigma(P)}\right)^2 \tag{3.26}$$

où P est ici la mesure du paramètre connu et $\sigma(P)$ son incertitude associée. La méthode reste donc inchangée quant à la détermination des paramètres de l'ajustement et de leurs incertitudes.

3.1.7 Synthèse

La méthode statistique que nous utiliserons par la suite est basée sur la méthode des moindres carrés. En supposant que les incertitudes de mesure soient gaussiennes, cette méthode permet d'extraire les valeurs centrales et les incertitudes des paramètres cosmologiques. Les valeurs centrales sont obtenues par la recherche du minimum du χ^2. Pour le calcul des incertitudes, nous avons distingué deux cas.

Si l'on suppose que le modèle dépend linéairement des paramètres cosmologiques, la méthode la plus simple est une analyse de Fisher. Les incertitudes sur les paramètres cosmologiques sont alors déduites uniquement des incertitudes de mesure et ne dépendent pas des mesures elles-mêmes. Les contours de probabilité sont des ellipses de Fisher obtenues par projection de la sous-matrice d'erreurs. Cette analyse est exacte pour les modèles linéaires mais reste une bonne approximation pour de nombreux modèles non linéaires et sera utilisée dans ce chapitre et dans la majorité des ajustements réalisés dans cette thèse.

Si le modèle ne dépend pas linéairement des paramètres cosmologiques, une méthode plus rigoureuse permet d'estimer les incertitudes sur les paramètres cosmologiques et tracer les contours. Nous l'appellerons la méthode exacte ou rigoureuse. Les incertitudes et les contours sont déterminés par la propriétés du χ^2 : $\chi^2 = \chi^2_{min} + 1$. Fixant un (ou deux) paramètres, la marginalisation sur tous les autres permet de déterminer l'incertitude (ou tracer le contour). Cette méthode sera utilisée dans certains cas pour vérifier l'analyse de Fisher.

Dans ce chapitre, les incertitudes seront données à 1 σ soit 68% de niveau de confiance. Les contours seront également donnés à 1σ soit 39% de niveau de confiance. Cela permet une visualisation des incertitudes par projection sur les axes. Notons que nous présenterons également certains contours à un niveau de confiance de 68%, 95% ou 99% pour une comparaison avec la littérature.

3.2 Extraction des paramètres cosmologiques à l'aide de supernovae

Dans cette section nous allons appliquer la méthode décrite précédemment pour extraire les paramètres cosmologiques des données des supernovae. Nous allons commencer par décrire la méthode appliquée aux données des supernovae. Nous utiliserons ensuite l'échantillon UNION, qui est l'un des échantillons les plus représentatifs des données actuelles pour extraire les paramètres cosmologiques.

Notons que les ajustements seront réalisés en négligeant le paramètre Ω_R. Sa valeur est en effet bien mesurée par WMAP [5]. Sa contribution, de l'ordre de 10^{-5}, n'intervient pas dans la détermination des autres paramètres cosmologiques avec les supernovae.

3.2.1 Méthode statistique appliquée aux supernovae

Nous expliquons ici la méthode appliquée aux données des supernovae dans le but d'extraire les paramètres cosmologiques.

L'observation de supernovae permet de tracer un diagramme de Hubble. Pour chaque supernova, la magnitude (m_i) mesurée à un redshift (z_i) est associée à une incertitude (σ_i). A partir des mesures de magnitudes, nous voulons extraire les paramètres cosmologiques. Nous voulons trouver la fonction qui passe au plus près de chaque magnitude mesurée en tenant compte des incertitudes de mesure, c'est-à-dire le modèle le plus probable.

Pour appliquer la méthode des moindres carrés, il est nécessaire de connaître l'expression de la magnitude en fonction des paramètres que l'on souhaite extraire, notés P_α. Nous avons vu dans les chapitres précédents qu'elle est reliée à la distance de luminosité par :

$$m_{th} = m_{th}(P_\alpha, z_i) = M_S + 5\log_{10}(D_L)\,. \tag{3.27}$$

Le terme D_L correspond à la distance de luminosité indépendante de H_0. Son expression déduite de l'équation 2.1.1, est donnée par :

$$D_L = \frac{1+z}{\sqrt{|\Omega_k|}}\mathcal{S}_k\left(\sqrt{|\Omega_k|}\int_0^z \frac{1}{\frac{H(z')}{H_0}}dz'\right)\,. \tag{3.28}$$

L'expression de la magnitude dépend des paramètres cosmologiques à travers le terme $\frac{H(z')}{H_0}$ introduit dans l'équation 1.47 et rappelée ici :

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_i \Omega_i \frac{\rho_i}{\rho_i^0} + \Omega_k(1+Z)^2 = \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_X\frac{\rho_X}{\rho_X^0} + \Omega_k(1+z)^2\,. \tag{3.29}$$

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, le terme $\Omega_X\frac{\rho_X}{\rho_X^0}$ dépend du modèle d'énergie noire considéré. Pour tenir compte d'une évolution en redshift de l'équation d'état de l'énergie noire, une paramétrisation est nécessaire. Nous utiliserons celle de Chevallier-Polarski-Linder (CPL) [23, 24] détaillé dans le paragraphe 1.5.3 et décrite par :

$$w(z) = w_0 + w_a \frac{z}{1+z} \,. \tag{3.30}$$

Ce terme prend différentes formes selon le modèle d'énergie noire considéré :
- pour la constante cosmologique, $\Omega_X \frac{\rho_X}{\rho_X^0} = \Omega_\Lambda$
- pour une équation d'état constante, $\Omega_X \frac{\rho_X}{\rho_X^0} = \Omega_X (1+z)^{3(1+w)}$
- pour la paramétrisation CPL $\Omega_X \frac{\rho_X}{\rho_X^0} = \Omega_X (1+z)^{3(1+w_0+w_a)} e^{-3w_a z/(1+z)}$.

Notons que les deux premières hypothèses peuvent être retrouvées à partir de la paramétrisation CPL : la constante cosmologique est décrite par couple ($w_0 = -1$, $w_a = 0$), l'équation d'état constante se traduit par $w_a = 0$.

A l'aide de cette paramétrisation, la distance de luminosité s'exprime sous la forme suivante :

$$D_L(z) = \frac{1+z}{\sqrt{|\Omega_k|}} \mathcal{S}_k \left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\Omega_M (1+z)^3 + \Omega_k (1+z)^2 + \Omega_X (1+z)^{3(1+w_0+w_a)} e^{-3w_a z/(1+z)}}} dz' \right) \tag{3.31}$$

Nous pouvons alors identifier les paramètres cosmologiques auxquels les supernovae sont sensibles. Nous pourrons extraire :
- les densités réduites de matière, Ω_M, et d'énergie noire, Ω_X,
- les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire, w_0 et w_a,
- le paramètre de normalisation du diagramme de Hubble, M_S.

Dans ce chapitre, ce lot de cinq paramètres est noté P_α.

Leur ajustement sur le diagramme de Hubble permet de trouver le modèle qui passe au plus près de chaque point de mesure. Les mesures de magnitudes sont indépendantes et supposées suivre une distribution gaussienne. On peut donc définir le χ^2 pour les supernovae :

$$\chi^2_{SN} = \sum \frac{(m_i - m_{th}(P_\alpha, z_i))^2}{\sigma_i^2} \tag{3.32}$$

Suivant la méthode statistique présentée précédemment, le calcul du χ^2 et la recherche du minimum permettent d'extraire les valeurs centrales. Le χ^2 est également utilisé pour déterminer les incertitudes des paramètres cosmologiques et tracer les contours.

Dans ce travail, nous avons utilisé un outil numérique dédié à l'analyse des supernovae développé dans notre groupe de recherche : le *kosmoshow* [61]. Ce programme permet, la minimisation du χ^2, un calcul d'erreurs par l'analyse de Fisher et le tracé de contours par l'analyse de Fisher ou par la méthode exacte.

3.2.2 Ajustement avec 5 paramètres libres

Nous pouvons commencer par l'ajustement le plus complet qui consiste à laisser libres les 5 paramètres cosmologiques, Ω_M, Ω_X, w_0, w_a et M_S, sans aucune hypothèse. On obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned} M_S &= 15.774 \pm 0.037 \\ \Omega_M &= 0.558 \pm 0.252 \\ \Omega_X &= 1.042 \pm 1.806 \\ w_0 &= -0.794 \pm 0.582 \\ w_a &= -1.81 \pm 8.10\,. \end{aligned}$$

Cet ajustement est difficile à réaliser. Le minimum du χ^2 est long à trouver à cause de multiples minima secondaires et des dégénérescences entre les différents paramètres. Les corrélations entre les paramètres cosmologiques sont en effet très fortes, $|\rho| \gtrsim 0.9$, soit une corrélation à plus de 90%.

Le paramètre de normalisation M_S est le seul paramètre ajusté avec une incertitude raisonnable. Sa valeur est celle attendue et dépend peu des conditions d'ajustement. Il sera pris en compte et extrait dans tous les ajustements, mais sa détermination variant peu, nous ne donnerons plus les valeurs obtenues de ce paramètre par la suite.

Les résultats sur les autres paramètres ne permettent aucune conclusion. L'erreur sur la densité d'énergie noire est tellement grande que celle-ci est compatible avec 0. Un univers sans énergie noire n'est donc pas exclu. De même, aucune information sur la nature de l'énergie noire ne peut être obtenue, les incertitudes sur w_0 et w_a étant trop grandes, jusqu'à ± 8 pour w_a. Les dégénérescences entre les paramètres se manifestent par des corrélations fortes et empêchent de déterminer les paramètres cosmologiques avec précision. Analytiquement, ces dégénérescences s'expliquent par l'expression de la distance de luminosité éq. 3.31. Nous reviendrons sur les dégénérescences et leurs origines dans le chapitre 5.

Avec les supernovae seules, il est impossible d'extraire les cinq paramètres sans hypothèses. Un moyen efficace de briser les dégénérescences est d'utiliser des hypothèses d'ajustement. Par exemple, supposer un modèle avec une constante cosmologique permet de supprimer le terme exponentiel, simplifie l'expression de la distance de luminosité et supprime deux paramètres de l'ajustement. Cela aura pour effet de réduire les incertitudes.

3.2.3 Détermination des densités réduites

Pour aider la minimisation, la façon la plus simple est de diminuer le nombre de paramètres à ajuster. Un ajustement plus facile consiste à supposer la constante cosmologique, ce qui revient à fixer $w_0 = -1$ et $w_a = 0$.

Historiquement, c'est l'ajustement qui a permis d'obtenir la première évidence d'une énergie noire (ou d'une constante cosmologique) par la découverte de l'accélération de l'expansion de l'univers [7, 8]. Plus récemment ces résultats ont été confirmés avec les données de SNLS [32], ESSENCE [34], UNION [28] et CONSTITUTION [29].

Avec l'échantillon UNION (sans aucune autre hypothèse), nous obtenons :

$$\Omega_M = 0.410 \pm 0.093$$
$$\Omega_X = 0.928 \pm 0.157\,.$$

Les valeurs centrales sont plus basses que celles obtenues sans hypothèse. De plus les incertitudes ont diminué. On observe une réduction d'un facteur 3 sur Ω_M et 11 sur Ω_X. Cet ajustement permet de mettre en évidence la présence d'énergie noire ($\Omega_X \neq 0$) à plus de 5 σ.

Ces résultats confirment ceux trouvés dans la littérature avec d'autres échantillons de supernovae ou d'autres sondes et sont compatibles avec le modèle de concordance (ΛCDM). La figure 3.2 permet la comparaison de nos résultats avec ceux obtenus par Kowalski et al. [28] avec le même échantillon et dans les mêmes conditions d'ajustement. Dans la partie gauche, la figure est issue de Kowalski et al. [28]. Les contours en dégradé de bleu correspondent à 68%, 95% et 99% de niveaux de confiance. Dans la partie de droite, les ellipses représentent nos résultats, obtenus pour les mêmes niveaux de confiance. Les contours de ces deux figures sont presque identiques. Cette comparaison permet également de valider notre méthode d'analyse, l'approche fréquentiste et l'analyse de Fisher dans ce cas.

3.2.4 Détermination d'une équation d'état de l'énergie noire constante

L'ajustement précédent n'apporte cependant aucune information sur la nature de l'énergie noire. Pour cela il faut pouvoir déterminer son équation d'état.

Nous avons vu que l'ajustement le plus général, avec cinq paramètres libres, ne contraint pas les paramètres d'énergie noire, Ω_X, w_0 et w_a. Il faut diminuer le nombre de paramètres en utilisant des hypothèses d'ajustement.

L'hypothèse la plus simple est de supposer une équation d'état constante ($w = w_0$) ce qui revient à fixer w_a à 0. Avec quatre paramètres libres, Ω_M, Ω_X, w_0 et M_S, l'ajustement donne les résultats suivants :

$$\Omega_M \quad = \quad 0.210 \pm 0.686$$

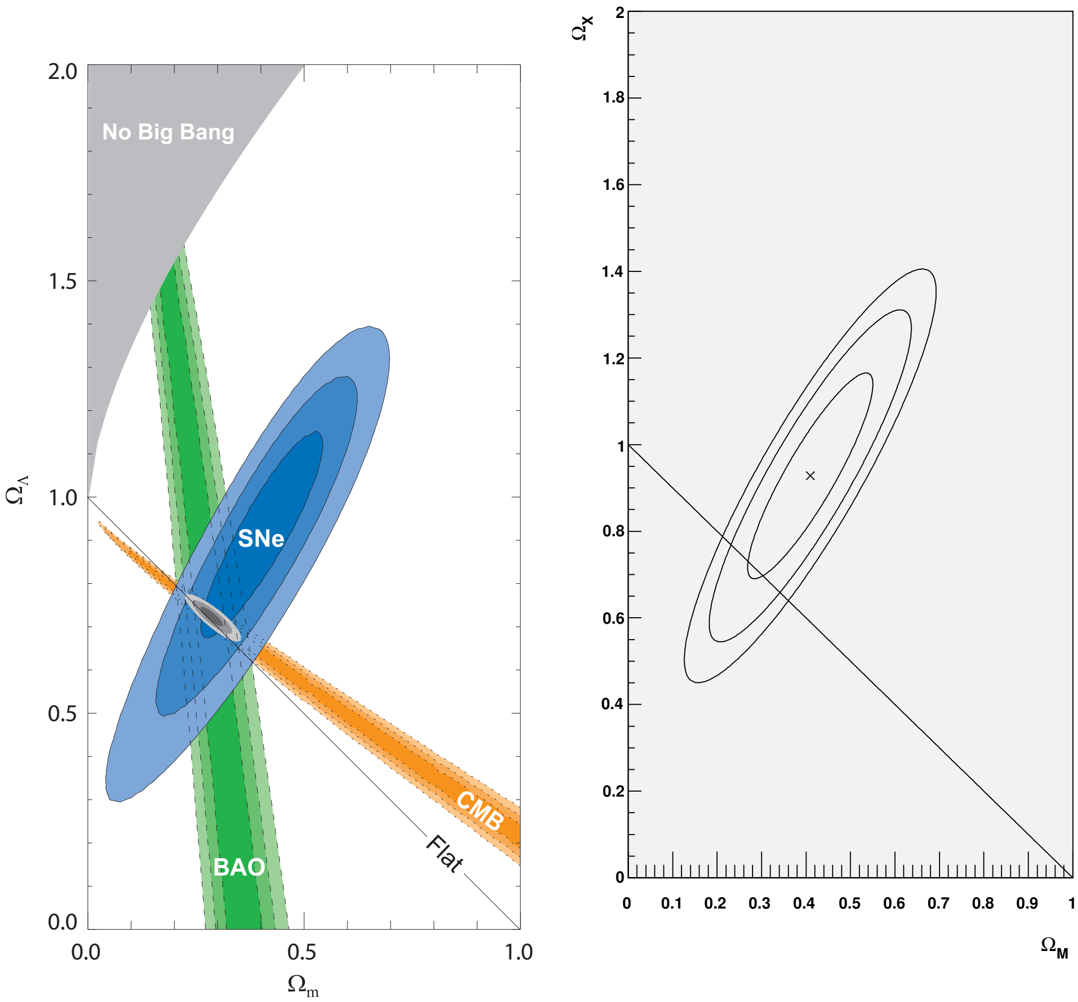

FIGURE 3.2 – *Représentation graphique des résultats de l'ajustement de Ω_M et Ω_X supposant une constante cosmologique. A gauche : figure publiée dans Kowalski et al [28], à droite : ellipses de Fisher obtenues par notre analyse. Les contours sont donnés à 68%, 95% et 99% de niveau de confiance.*

$$\begin{aligned} \Omega_X &= 1.706 \pm 1.667 \\ w_0 &= -0.624 \pm 0.470 \end{aligned}$$

Nous constatons que les incertitudes sur les densités d'énergie sont à nouveau importantes, n'excluant pas $\Omega_X = 0$. De plus les corrélations entre ces trois paramètres sont proches de 100%. Afin de briser au moins une dégénérescence, une hypothèse supplémentaire est nécessaire. Supposer l'univers plat permettrait de briser la dégénérescence entre Ω_M et Ω_X ce qui aurait pour effet de limiter les corrélations avec w_0. C'est la stratégie employée par la plupart des collaborations telles que SNLS [32] et ESSENCE [34] afin de mieux contraindre le paramètre w_0.

Hypothèse de platitude

Justifiée par la théorie de l'inflation, l'hypothèse d'univers plat est confortée par les résultats sur le fond diffus cosmologique. Après cinq ans de prise de données, la collaboration WMAP détermine le paramètre de courbure en supposant un modèle avec la constante cosmologique : $-0.2851 < \Omega_k < 0.0099$ à 95% de niveau de confiance [47]. De plus, les résultats des ajustements précédents sont compatibles avec une courbure nulle permettant ainsi l'utilisation de cette hypothèse dans les ajustements avec l'échantillon UNION.

La densité d'énergie noire est alors déduite de la valeur de la densité de matière par l'équation de contrainte : $\Omega_M + \Omega_X = 1$. Ainsi seuls trois paramètres restent libres : Ω_M, w_0 et M_S, le paramètre w_a étant fixé à 0. Les résultats sont :

$$\begin{aligned} \Omega_M &= 0.378 \pm 0.074 \\ w_0 &= -1.360 \pm 0.377\,. \end{aligned}$$

Nous constatons que ces résultats sont compatibles avec un modèle d'univers dominé par la constante cosmologique (ΛCDM) : Ω_M autour de 0.3 et w_0 compatible avec -1 à $1\,\sigma$. La figure 3.3 permet une comparaison avec les résultats publiés par Kowalski et al. [28]. A gauche, sont représentés les contours publiés, à droite, les ellipses que nous avons obtenues par l'analyse de Fisher. Les contours sont donnés à 68%, 95% et 99% de niveau de confiance. Les contours à 68% sont très proches, ce qui montre un bon accord entre les contours et valide notre estimation des incertitudes. Les différences, surtout visibles pour les contours de confiance à 95% et 99%, sont dues à l'utilisation de l'analyse de Fisher. Nous reviendrons sur ce point en détail plus loin.

La comparaison avec l'ajustement à quatre paramètres libres montre que limiter le nombre de paramètres ajustés à trois en supposant l'univers plat permet effectivement de diminuer les incertitudes. La valeur centrale de la densité de matière est remontée à 0.38 et son incertitude diminuée d'un facteur 9. La valeur centrale de w_0 a également changé passant de -0.62 à -1.36. Son incertitude est réduite d'un facteur 1.2 assurant ainsi une première estimation de l'équation d'état de l'énergie noire.

La comparaison avec l'ajustement supposant la constante cosmologique montre des résultats semblables. Le résultat sur w_0 est compatible avec la constante cosmologique à $1\,\sigma$. La valeur de Ω_M légèrement abaissée et son incertitude légèrement réduite, montrent un résultat compatible à moins d'$1\,\sigma$.

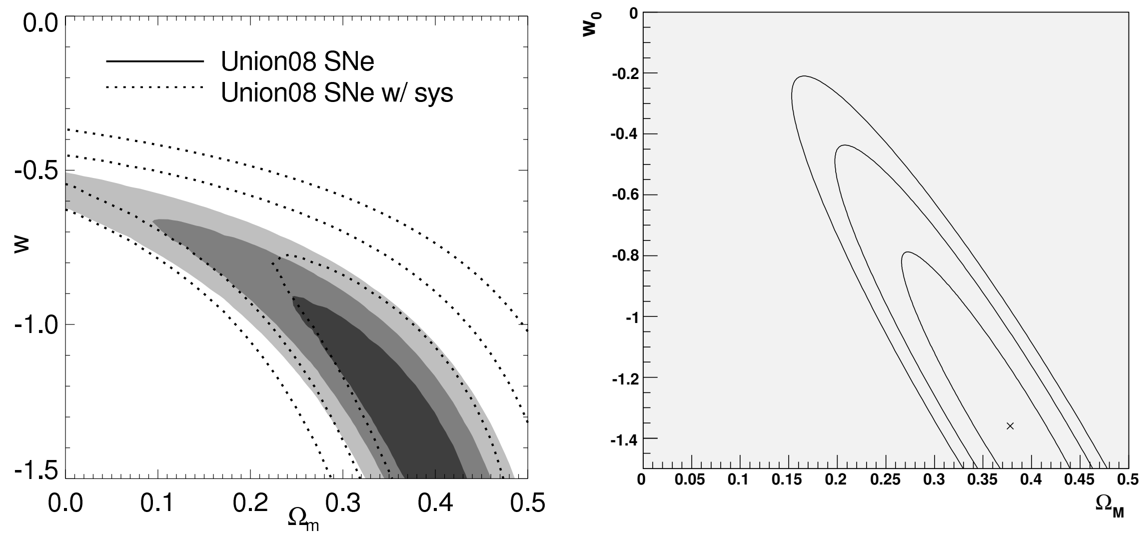

FIGURE 3.3 – *Représentation graphique des résultats de l'ajustement de Ω_M et w_0 supposant l'univers plat et une équation d'état de l'énergie noire constante. A gauche : figure publiée dans Kowalski et al [28], à droite : ellipses de Fisher obtenues par notre analyse. Les contours sont donnés à 68%, 95% et 99% de niveau de confiance.*

Conclusion

Supposer un univers plat permet de lever la dégénérescence entre les densités réduites Ω_M et Ω_X dans le but de déterminer la nature de l'énergie noire. Supposer en première approximation que l'équation d'état de l'énergie noire est constante, limite le nombre de paramètres à ajuster. Cet ajustement apporte, grâce à ces hypothèses, une première estimation du paramètre d'équation d'état de l'énergie noire, w_0, compatible avec la constante cosmologique. C'est cet ajustement qui est le plus souvent choisi par les équipes étudiant les supernovae car il permet la meilleure contrainte sur ce paramètre.

Néanmoins, l'hypothèse de l'équation d'état de l'énergie noire constante n'est pas anodine. On peut s'interroger sur l'impact d'une contribution variant avec le redshift dans l'équation d'état. Avec des données, le seul moyen de vérifier les résultats précédents et de laisser libre le paramètre w_a dans l'ajustement. C'est ce que nous proposons dans la section suivante. En contre-partie, il faut nous attendre à ce que les incertitudes obtenues dans ce cas soient plus grandes. Un autre moyen de vérifier le bien-fondé de cette hypothèse est d'utiliser des simulations de modèles d'énergie noire et de tester cette hypothèse pour chacun d'eux. Nous réaliserons cette étude dans le chapitre suivant.

3.2.5 Extraction des paramètres d'équation d'état de l'énergie noire

Dans le cadre de la détermination de la nature de l'énergie noire, nous avons d'abord supposé une équation d'état constante. Cependant, rien ne nous permet a priori d'exclure une contribution variant avec le redshift comme le suggère la majorité des modèles. Afin de vérifier si fixer w_a à 0 a un impact sur les résultats précédents, le meilleur moyen est de laisser libre w_a. Nous avons déjà montré que l'ajustement à 5 paramètres n'apporte aucune contrainte, nous continuerons donc à supposer l'univers plat. Les paramètres libres sont alors : Ω_M, w_0, w_a et M_S. Avec cet ajustement, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Omega_M &= 0.451 \pm 0.077 \\ w_0 &= -1.013 \pm 0.736 \\ w_a &= -5.895 \pm 9.634.\end{aligned}$$

Cet ajustement permet une bonne précision sur la densité de matière. Bien que sa valeur soit un peu plus haute que précédemment, son incertitude est comparable à celle obtenue avec les autres ajustements permettant des résultats compatibles. Les paramètres d'énergie noire sont au contraire peu contraints. Si w_0 est compatible avec -1, son incertitude est deux fois plus grande que celle obtenue précédemment, ne permettant pas une conclusion forte. Aucune information n'est obtenue sur le paramètre w_a dont l'erreur est nettement supérieure à sa valeur. De plus les corrélations entre ces trois paramètres sont quasi-entières ($|\rho| \gtrsim 0.9$), indiquant une dégénérescence.

L'hypothèse de platitude ne suffit plus. Malgré la grande statistique de l'échantillon UNION, les supernovae seules, ne permettent pas d'extraire le paramètre w_a. Une hypothèse supplémentaire est nécessaire, mais aucune autre hypothèse simple ne peut être supposée. Le seul paramètre sur lequel il est encore possible de jouer est Ω_M. En outre, il est possible de l'estimer indépendamment à partir d'autres sondes. Inclure cette information dans l'ajustement des données UNION, permettra de mieux contraindre ce paramètre et ainsi diminuer les incertitudes sur les autres paramètres, soient w_0 et w_a. Nous allons alors reprendre les ajustements précédents avec une contrainte extérieure sur Ω_M pour évaluer ses effets avant de l'utiliser dans le but d'extraire w_0 et w_a.

3.3 Utilisation de contraintes extérieures

Les résultats de l'analyse des données des oscillations acoustiques de baryons issues de SDSS ont été publiés par Eisenstein et al. en 2005 [42]. Les oscillations acoustiques de baryons offrent la meilleure précision sur l'estimation de Ω_M, comme le montre la figure 3.2. La combinaison de cette sonde avec le fond diffus cosmologique permet de contraindre plus fortement encore la densité de matière. Nous allons utiliser directement cette connaissance externe de Ω_M avec les supernovae pour obtenir une meilleure précision sur les autres paramètres de l'ajustement.

Le paramètre de densité de matière estimé par Eisenstein et al. [42] : $\Omega_M = 0.273 \pm 0.025 \pm 0.123\,(1 + w_0) \pm 0.137\,\Omega_k$. Ce résultat dépend des conditions d'ajustement sur l'équation d'état de l'énergie noire et la courbure.

La collaboration WMAP [5] a publié les résultats de la combinaison de leur données avec celles des oscillations acoustiques de baryons issues de Percival et al. [57]. Dans le cadre d'un modèle avec la constante cosmologique ($w = -1$), ils trouvent : $\Omega_M = 0.271 \pm 0.018$ [47].

Cette valeur de Ω_M était par ailleurs obtenues en analysant d'autres approches comme les mesures d'amas de galaxie qui privilégient des valeurs de Ω_M autour de 0.3 [**?**].

Nous proposons ici d'utiliser ces résultats pour contraindre a priori le paramètre de densité de matière. Cependant, plusieurs remarques préalables doivent être prises en compte.

Les ajustements donnés par WMAP et Eisenstein sont réalisés avec de nombreux paramètres, comprenant les paramètres cosmologiques mais aussi les paramètres intrinsèques au fond diffus cosmologique et aux oscillations acoustiques de baryons. Ces résultats tiennent compte des nombreuses corrélations avec tous les autres paramètres de l'ajustement.

Par ailleurs, ces résultats ont été obtenus dans des conditions d'ajustement restrictives, supposant la constante cosmologique, une équation d'état constante ou un univers plat. Comme le montrent les incertitudes estimées par Eisenstein et al., ne pas utiliser ces hypothèses, augmente l'erreur sur Ω_M. Nous avons de ce fait choisi de multiplier par deux l'incertitude obtenue sur Ω_M pour tenir compte de ces deux points essentiels.

Nous choisissons alors d'inclure, a priori dans l'ajustement, la contrainte : $\Omega_M = 0.27 \pm 0.04$. Notons que cette valeur de Ω_M est plus basse que celles que nous avons trouvées avec les ajustements utilisant l'échantillon UNION. Il faudra donc s'assurer de la compatibilité des valeurs obtenues pour chaque ajustement.

3.3.1 Effets d'une contrainte extérieure en supposant une constante cosmologique

Nous allons ici utiliser cette contrainte extérieure dans le cadre d'un ajustement des densités réduites Ω_M et Ω_X. Nous reprenons l'ajustement décrit dans la section 3.2.3 dans lequel nous avons supposé la constante cosmologique. Rappelons que nous considérons un modèle d'univers laissant libre le paramètre de courbure, l'hypothèse de platitude n'est pas utilisée dans ce cas. Nous avons vu que les deux paramètres extraits, Ω_M et Ω_X sont fortement corrélés ($|\rho| = 0.9$). Une meilleure connaissance de l'une de ces densités, en l'occurrence Ω_M, permettra donc de diminuer l'incertitude sur l'autre, Ω_X.

La valeur de la contrainte, 0.27 ± 0.04 est compatible à $1.5\,\sigma$ avec la valeur obtenue précédemment, 0.410 ± 0.093. Cette valeur centrale peut être utilisée a priori dans l'ajustement.

Les résultats de l'ajustement avec cette contrainte forte sont donnés par les contours en pointillés dans la figure 3.4 et par les valeurs :

$$\begin{aligned} \Omega_M &= 0.289 \pm 0.037 \\ \Omega_X &= 0.742 \pm 0.091\,. \end{aligned}$$

Ces résultats sont à comparer à ceux obtenus sans contrainte extérieure (contour en trait plein), rappelés dans le tableau 3.1. Nous constatons deux effets notables dus à cette contrainte. D'abord les valeurs centrales ont changé. La contrainte a priori impose une valeur de Ω_M plus faible que celle obtenue par l'ajustement sans contrainte extérieure, ce qui a pour effet d'abaisser la valeur de Ω_X, par le jeu des corrélations. De plus les incertitudes sont réduites. La diminution d'un facteur 3 des incertitudes sur Ω_M entraîne une diminution d'un facteur presque 2 sur Ω_X.

Cette contrainte extérieure joue son rôle, ses effets sur le paramètre Ω_X sont visibles, mais n'apporte pas de conclusion forte. Son utilisation permet de confirmer à $8\,\sigma$ la conclusion déjà obtenue quant à la présence d'une constante cosmologique ou d'une énergie noire.

Comme nous l'avons signalé l'incertitude sur Ω_M est difficile à estimer et peut varier selon les conditions d'ajustement. Nous allons alors étudier l'effet d'une contrainte extérieure plus ou moins forte sur l'incertitude de Ω_X et le coefficient de corrélation entre Ω_M et Ω_X. Pour cela, nous allons réaliser différents ajustements en faisant varier l'incertitude de la contrainte extérieure appliquée a priori sur Ω_M entre 0.01 et 0.3. La valeur centrale reste 0.27.

La figure 3.5 montre les résultats obtenus sur l'incertitude de Ω_X, sur le graphe de gauche, et le coefficient de corrélation, sur le graphe de droite, en fonction de la contrainte imposée sur Ω_M.
Les deux courbes obtenues présentent un plateau. En effet, peu de changements sont observés tant que la contrainte sur Ω_M reste plus grande que l'incertitude obtenue sans contrainte, soit autour de 0.1. Dans ce cas, l'incertitude de Ω_X reste autour de 0.14 et la corrélation élevée, $\rho \gtrsim 0.8$. La contrainte extérieure a peu de poids puisque l'intervalle imposé sur Ω_M est plus grand que l'incertitude obtenue sans contrainte extérieure. La détermination de Ω_M et Ω_X dépend peu de la contrainte extérieure appliquée. La contrainte sur Ω_M permet uniquement de converger plus vite vers le minimum du χ^2 en limitant l'intervalle possible sur Ω_M.
Au contraire, diminuer l'incertitude imposée sur Ω_M en dessous de 0.1 réduit les incertitudes sur Ω_X jusqu'à un facteur 2 pour une contrainte $\Omega_M = 0.27 \pm 0.02$. De même, la

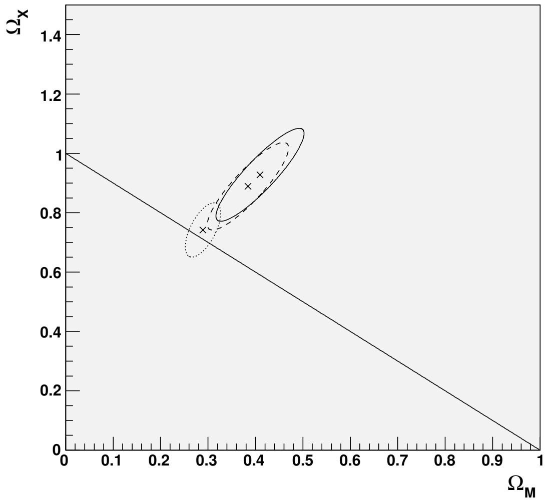

FIGURE 3.4 – *Ellipses de Fisher de l'ajustement de Ω_M et Ω_X supposant une constante cosmologique. En trait plein : sans contrainte extérieure, en trait discontinu : avec une contrainte extérieure faible ($\Omega_M = 0.27 \pm 0.2$), en pointillés : avec une contrainte extérieure forte ($\Omega_M = 0.27 \pm 0.04$). Les contours sont donnés à 39% de niveau de confiance.*

corrélation chute atteignant 0.2 pour une contrainte de ± 0.01. La contrainte extérieure joue ici son rôle et apporte une information suffisante pour diminuer l'incertitude sur Ω_X. La diminution de la valeur du coefficient de corrélation nous apprend que la contrainte extérieure a plus de poids dans l'ajustement. La détermination du paramètre Ω_M devient presque une mesure indépendante, se traduisant par une corrélation faible avec les autres paramètres ajustés, ici Ω_X.

Tenant compte de ces observations, nous choisissons de garder deux types de contraintes extérieures :

une forte, $\Omega_M = 0.27 \pm 0.04$, dont le poids dans l'ajustement est important rendant la mesure de Ω_M presque indépendante ;

une faible, $\Omega_M = 0.27 \pm 0.2$, qui ne permet pas une forte réduction des erreurs mais permet d'imposer à la densité de matière un intervalle de valeurs "raisonnables", c'est-à-dire des valeurs comprises entre 0.1 et 0.5.

Les résultats de ces ajustements en supposant la constante cosmologique sont rappelés dans le tableau 3.1. Ce tableau résume le fait qu'utiliser une contrainte forte sur Ω_M permet de fortement réduire les incertitudes sur Ω_X, alors qu'utiliser une contrainte faible change peu les résultats sur Ω_X par comparaison avec l'ajustement sans contrainte a priori sur Ω_M.

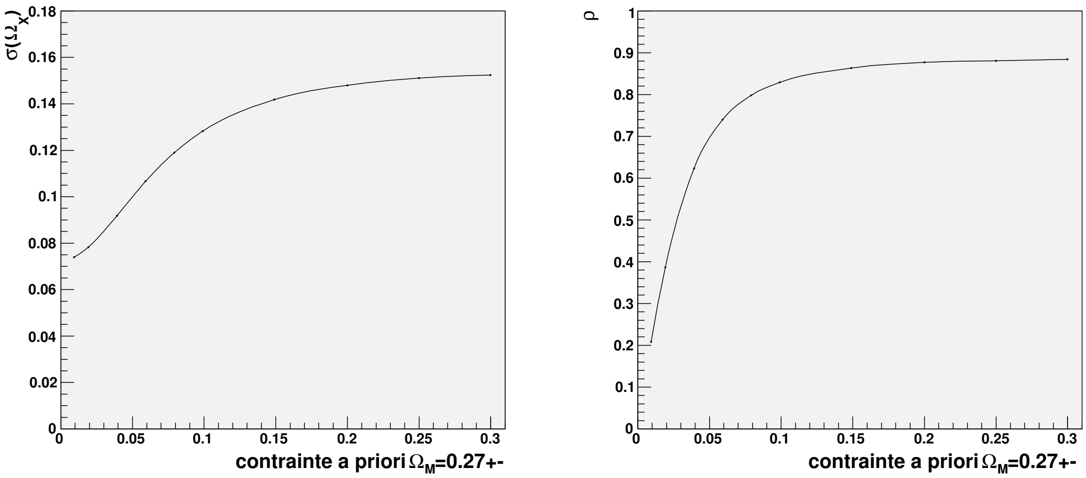

FIGURE 3.5 – *A gauche : incertitudes sur Ω_X en fonction de la contrainte sur Ω_M. A droite : corrélation entre Ω_M et Ω_X en fonction de la contrainte sur Ω_M.*

UNION	Ω_M	Ω_X
/	0.410 ± 0.093	0.928 ± 0.157
$\Omega_M = 0.27 \pm 0.2$	0.384 ± 0.086	0.889 ± 0.147
$\Omega_M = 0.27 \pm 0.04$	0.289 ± 0.037	0.742 ± 0.091

TABLE 3.1 – Résultats de l'ajustement de Ω_M et Ω_X supposant une constante cosmologique selon l'ajout d'une contrainte extérieure. Les incertitudes sont données à $1\,\sigma$, soit 68% de niveau de confiance.

3.3.2 Effet d'une contrainte extérieure sur la détermination d'une équation d'état de l'énergie noire constante

Nous allons maintenant appliquer la contrainte forte sur Ω_M dans la détermination d'une équation d'état constante. Nous avons vu que supposer l'univers plat donne w_0 compatible avec -1 avec une incertitude importante : $w_0 = -1.013 \pm 0.736$ (voir tableau 3.2). Le coefficient de corrélation entre Ω_M et w_0 est de plus très élevé : $\rho = -0.943$. Il apparaît alors que la connaissance d'un des paramètres, Ω_M, permettra là encore, une meilleure précision sur l'autre, w_0.

Cet ajustement donne les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \Omega_M &= 0.287 \pm 0.038 \\ w_0 &= -1.023 \pm 0.128 \end{aligned}$$

illustrés par l'ellipse en pointillé dans la figure 3.6.

Imposer une telle contrainte sur Ω_M engendre deux effets sur le paramètre d'équation d'état de l'énergie noire : un changement de valeur centrales et une réduction des incertitudes. Le changement de valeur centrale de Ω_M vers une valeur plus faible entraîne également un changement de valeur centrale de w_0, ce qui a pour effet de la rapprocher de la constante cosmologique ($w_0 = -1$). Graphiquement, ce phénomène s'explique par l'inclinaison de l'ellipse de Fisher de l'ajustement sans contrainte rappelée en trait continu noir dans la figure 3.6. Ramener Ω_M à une valeur plus basse entraîne une valeur de w_0 plus haute suivant l'inclinaison de l'ellipse obtenue sans contrainte extérieure.
De plus, comme attendu, l'incertitude sur w_0 est réduite d'un facteur 2. En effet, la diminution de l'incertitude sur Ω_M induit une réduction de celle sur w_0.

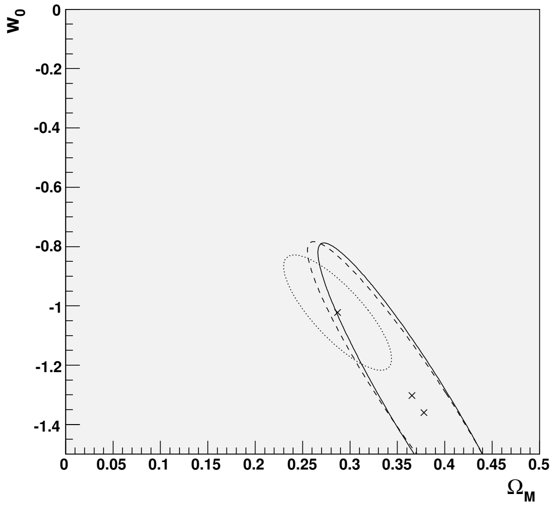

FIGURE 3.6 – Ellipses de Fisher de l'ajustement de Ω_M et w_0 supposant l'univers plat et une équation d'état de l'énergie noire constante. En trait plein : sans contrainte extérieure, en trait discontinu : avec une contrainte extérieure faible ($\Omega_M = 0.27 \pm 0.2$), en pointillés : avec une contrainte extérieure forte ($\Omega_M = 0.27 \pm 0.04$). Les contours sont donnés à 68% de niveau de confiance.

Si l'on impose la faible contrainte extérieure a priori dans l'ajustement ($\Omega_M = 0.27 \pm 0.2$), les résultats sont :

$$\begin{aligned} \Omega_M &= 0.365 \pm 0.073 \\ w_0 &= -1.302 \pm 0.342\,. \end{aligned}$$

L'ellipse correspondante est présentée en trait discontinu dans la figure 3.6.

La comparaison avec les résultats de l'ajustement sans contrainte montre que l'utilisation de cette contrainte faible apporte peu d'informations. Les résultats sont très proches aussi bien en comparant les valeurs centrales que les incertitudes et même la corrélation ($\rho = -0.941$). Les ellipses sont d'ailleurs presque identiques. Cela s'explique par le fait que la contrainte faible admet une incertitude plus grande que celle obtenue avec l'ajustement sans contrainte.

Les différentes valeurs sont comparées dans la table 3.2 et montrent qu'une contrainte forte est nécessaire pour obtenir une meilleure contrainte sur le paramètre d'équation d'état w_0 ($\sigma(w_0) < 0.2$).

UNION	Ω_M	w_0	w_a
plat + $w = cst$	0.378 ± 0.074	-1.360 ± 0.377	/
plat + $w = cst$ + $\Omega_M = 0.27 \pm 0.2$	0.365 ± 0.073	-1.302 ± 0.342	/
plat + $w = cst$ + $\Omega_M = 0.27 \pm 0.04$	0.287 ± 0.038	-1.023 ± 0.128	/
plat	0.451 ± 0.077	-1.013 ± 0.736	-5.895 ± 9.634
plat + $\Omega_M = 0.27 \pm 0.2$	0.426 ± 0.090	-1.142 ± 0.580	-3.518 ± 7.767
plat + $\Omega_M = 0.27 \pm 0.04$	0.270 ± 0.040	-1.225 ± 0.234	1.512 ± 1.264

TABLE 3.2 – Résultats des ajustements de Ω_M, w_0 et w_a supposant une univers plat, pour w_a fixé ou non à 0, selon l'ajout d'une contrainte extérieure. Les incertitudes sont déterminées par l'analyse de Fisher et données à $1\,\sigma$.

3.3.3 Extraction des paramètres d'équation d'état de l'énergie noire à l'aide d'une contrainte extérieure

Nous allons voir ici dans quelles conditions on peut déterminer le paramètre w_a, paramètre le plus difficile à extraire à cause de dégénérescences. En effet la corrélation entre les paramètres Ω_M et w_a est telle ($\rho = -0.9$) que ces deux paramètres sont complètement dégénérés. Utiliser une contrainte extérieure sur Ω_M apparaît alors comme le meilleur moyen d'augmenter la précision de la détermination de w_a.

Avec la contrainte $\Omega_M = 0.27 \pm 0.04$, on obtient :

$$\begin{aligned} \Omega_M &= 0.270 \pm 0.040 \\ w_0 &= -1.225 \pm 0.234 \\ w_a &= 1.512 \pm 1.264. \end{aligned}$$

Les contours de Fisher correspondants sont représentés par des pointillés dans la figure 3.7 dans les plans (Ω_M, w_0), à gauche, et (Ω_M, w_a), à droite.

Le premier constat est un résultat compatible avec le modèle ΛCDM et une équation d'état de l'énergie noire compatible avec la constante cosmologique, soit $w_0 = -1$ et $w_a = 0$. Les incertitudes sur les paramètres d'énergie noire ont diminué bien que n'étant toujours pas significatives pour w_a. Grâce à cette forte contrainte extérieure, l'erreur sur w_0 est réduite d'un facteur 3 et devient comparable à celles obtenues pour une équation d'état de l'énergie noire constante comme le montre la table 3.2. Sur w_a l'effet est d'autant plus fort que sa corrélation avec Ω_M était grande. Son incertitude est réduite d'un facteur 7 mais reste élevée, de l'ordre de 1 et ne permet pas d'apporter de conclusions fortes.

En outre, le décalage observé de la valeur de la contrainte sur Ω_M par rapport à la valeur centrale trouvée par l'ajustement sans contrainte entraîne un décalage de toutes les valeurs centrales de ce nouvel ajustement. La valeur centrale de w_0 a un peu baissé par rapport à l'ajustement sans contrainte et celle de w_a a beaucoup bougé passant de presque -6 à 1.5. Ce changement de valeurs centrales, faible sur w_0 mais très important sur w_a s'explique en partie par le jeu des corrélations. Par cette contrainte a priori, nous avons imposé un intervalle réduit sur Ω_M. Sa valeur centrale s'en est trouvée décalée de 0.45 à 0.27. Ce décalage sur Ω_M entraîne à son tour un décalage de la valeur centrale des paramètres d'équation d'état de l'énergie noire w_0 et de w_a.

Notons que, statistiquement, tous ces résultats sont compatibles à moins de 2.4 σ. Cependant ce changement brutal de valeur centrale de w_a nous amène à penser que cette contrainte peut induire de fausses interprétations. Il serait plus judicieux d'utiliser une contrainte plus faible ou de contraindre autrement ces deux paramètres.

Dans le cas de l'extraction du paramètre w_a, la contrainte faible, $\Omega_M = 0.27 \pm 0.2$, permet de pallier au problème de compatibilité des valeurs de Ω_M. Le résultat de l'ajustement avec l'analyse de Fisher donne :

$$\begin{aligned} \Omega_M &= 0.426 \pm 0.090 \\ w_0 &= -1.142 \pm 0.580 \\ w_a &= -3.518 \pm 7.767. \end{aligned}$$

L'ellipse de Fisher correspondante est représentée par un trait discontinu dans la figure 3.7.

Ces résultats sont très proches de l'ajustement sans contrainte pour les paramètres d'énergie noire, rappelés dans le tableau 3.2. Une contrainte trop faible ne permet donc pas de contraindre les paramètres d'énergie noire.

Cependant, nous remarquons dans le tableau 3.2 que l'incertitude sur Ω_M est plus élevée dans le cas contraint que sans contrainte a priori. De plus, cette erreur est identique à celle obtenue avec l'ajustement où w_a est fixé à 0. Il est étonnant que celle-ci ne soit alors pas plus grande en ajoutant un paramètre dans l'ajustement. Une explication de ce phénomène pourrait être une mauvaise estimation des incertitudes due à l'approximation de Fisher. Nous allons donc vérifier nos incertitudes en utilisant la méthode rigoureuse.

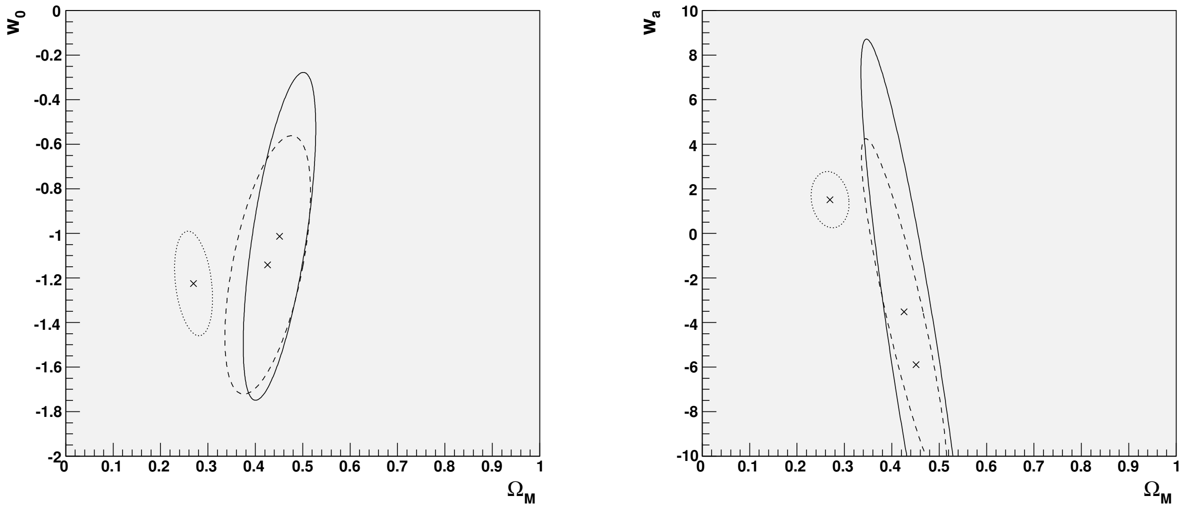

FIGURE 3.7 – Ellipses de Fisher dans le plan (Ω_M, w_0) à gauche et (Ω_M, w_a), à droite. En trait plein : sans contrainte extérieure, en trait discontinu : avec une contrainte extérieure faible ($\Omega_M = 0.27 \pm 0.2$), en pointillés : avec une contrainte extérieure forte ($\Omega_M = 0.27 \pm 0.04$). Les contours sont donnés à 39% de niveau de confiance.

3.4 Limites de l'analyse de Fisher

3.4.1 Validation des incertitudes

Dans l'ajustement laissant w_a libre nous avons pointé, section 3.3.3, certains résultats étonnants sur l'estimation des incertitudes de Ω_M. Rappelons que l'analyse de Fisher est une approximation qui n'est équivalente à la méthode rigoureuse que si l'observable mesurée dépend linéairement des paramètres d'ajustement. Or ce n'est pas le cas de l'expression de la magnitude en fonction des paramètres cosmologiques, d'autant plus si une paramétrisation dynamique de l'énergie noire est prise en compte.

Nous allons ici estimer la qualité de l'analyse de Fisher par comparaison avec une détermination des incertitudes par la méthode exacte en utilisant la formule 3.25. Deux exemples sont illustrés dans la figure 3.8 qui présente les contours utilisant les deux méthodes. Ces contours sont tracés dans les plans (Ω_M, w_0), à gauche, et (Ω_M, w_a), à droite, pour l'ajustement supposant uniquement l'univers plat sans contrainte, w_a étant un paramètre libre de l'ajustement. Ceux en trait plein sont réalisés avec la méthode exacte, par le calcul de $\chi^2_{min} + 1$ définissant 39% de niveau de confiance, ceux en trait discontinu sont tracés via une analyse de Fisher pour le même niveau de confiance.

Il apparaît que l'analyse de Fisher ne prend en compte qu'une partie du contour. Le contour exact n'est pas une ellipse, ce qui signifie que les incertitudes des paramètres ajustés ne sont pas gaussiennes. La projection sur les axes permettant une estimation des incertitudes sur les différents paramètres, ces contours montrent que l'analyse de Fisher sous-estime les incertitudes sur le paramètre Ω_M. L'intervalle correspondant à 68% de niveau de confiance (soit équivalent à une incertitude à $1\,\sigma$) contient les valeurs de ce paramètre comprises entre 0 et 0.5. Nous pouvons constater que l'incertitude sur Ω_M est aussi fortement asymétrique.

L'analyse de Fisher n'est donc pas adaptée pour calculer des incertitudes réalistes avec les données UNION dans ces conditions d'ajustement. Le calcul d'incertitudes avec la méthode exacte est plus compliqué mais nécessaire si l'on veut une incertitude en accord avec WMAP ou mettre une contrainte a priori sur Ω_M dans l'ajustement.

Aux vues de ces conclusions sur l'analyse de Fisher dans ce cas d'ajustement nous pouvons déduire que d'autres ajustements souffrent du même problème. Par exemple, l'ajustement à cinq paramètres, section 3.2.2, est un cas similaire où l'incertitude sur Ω_M est sous-estimée.

Dans le cas d'une équation d'état constante, les différences de contours entre ceux de Kowalski et les nôtres sont dues à l'analyse de Fisher. Néanmoins les différences sont minimes à 68% de niveau de confiance, l'estimation des incertitudes sur les paramètres sont donc correctes.

Notons que les ajustements réalisés avec une contrainte forte sur Ω_M donnent des résultats identiques avec les deux méthodes statistiques, analyse de Fisher ou méthode exacte.

En conclusion, l'analyse de Fisher n'est pas adaptée aux calculs d'erreurs dans les ajustements où w_a est libre et Ω_M pas ou peu contraint mais reste une bonne approximation dès qu'un de ces deux paramètres est fortement contraint ($w_a = 0$ ou par une contrainte forte sur Ω_M).

3.4.2 Validation des estimations des paramètres d'énergie noire avec ou sans contraintes extérieures avec l'erreur exacte

Nous avons vu que les incertitudes calculées par l'analyse de Fisher pour l'ajustement de la section 3.2.5 sont mal estimées. Nous avons alors évalué les incertitudes avec la méthode exacte et tracé les contours correspondants. Nous allons maintenant comparer ces nouveaux contours à ceux obtenus avec une contrainte extérieure forte sur Ω_M appliquée a priori en laissant libre w_0 et w_a. Pour une meilleure comparaison, ces contours sont tracés sur les mêmes graphiques, figure 3.8. En trait plein sont tracés les contours rigoureux sans contrainte extérieure. En pointillé sont tracés les contours avec une contrainte extérieure forte.

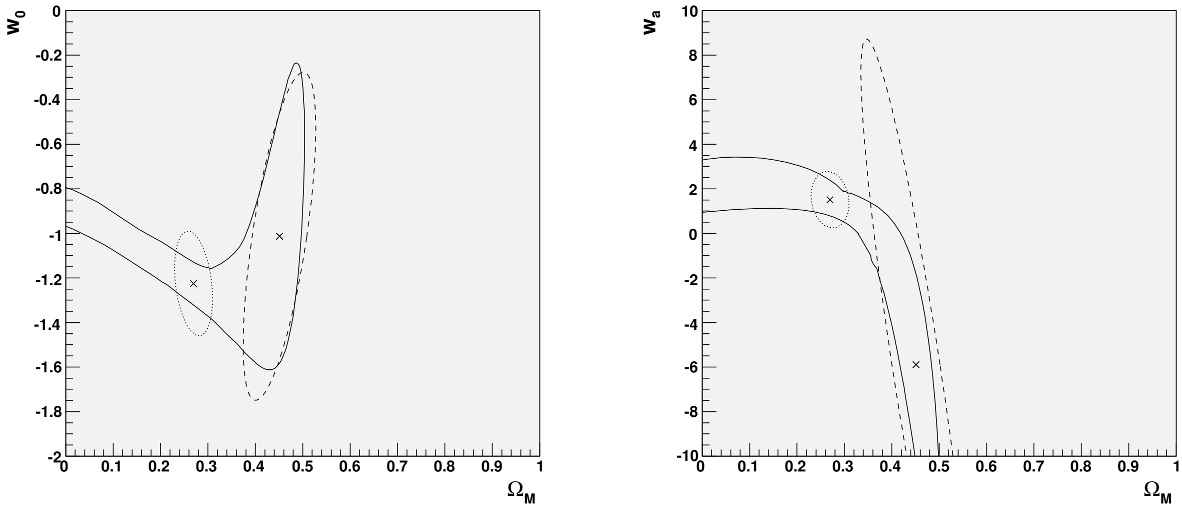

FIGURE 3.8 – Contours dans le plan (Ω_M, w_0) à gauche et (Ω_M, w_a), à droite pour l'ajustement avec w_a libre, supposant la platitude. En trait plein : avec la méthode exacte, sans contrainte extérieure, en trait discontinu : avec l'analyse de Fisher sans contrainte extérieure, en pointillés : avec une contrainte extérieure forte ($\Omega_M = 0.27 \pm 0.04$). Les contours sont donnés à 39% de niveau de confiance.

La valeur centrale obtenue avec la contrainte extérieure est maintenant bien incluse dans l'incertitude sur Ω_M sans la contrainte. Tous les ajustements sont donc statistiquement compatibles à moins de $1\,\sigma$. La contrainte extérieure sur Ω_M n'induit pas de problème de compatibilité statistique comme cela semble le cas avec l'analyse de Fisher.

Les contours rigoureux de l'ajustement sans contrainte permet d'expliquer ceux obtenus avec la contrainte sur Ω_M. Dans le plan (Ω_M, w_a), le contour rigoureux élargit l'intervalle des valeurs possibles de Ω_M vers les faibles valeurs et réduit celui de w_a. La finesse du contour illustre la forte corrélation entre ces deux paramètres. De plus, ce contour réalise un croissant presque en angle droit, impossible à prendre en compte avec l'analyse de Fisher. Ces caractéristiques lui confèrent des propriétés particulières et permettent d'expliquer le changement important de la valeur centrale de w_a et de ses incertitudes avec la contrainte extérieure. Imposer une certaine valeur de Ω_M conduit à imposer une valeur plus contrainte sur w_a dans certaines régions. L'incertitude sur w_a est déduite de la largeur du contour à $1\,\sigma$ à l'endroit de la contrainte imposée sur Ω_M. Ainsi, si l'on imposait une contrainte sur Ω_M plus proche de la valeur centrale obtenue avec l'ajustement sans contrainte, par exemple une valeur entre 0.4 et 0.5, l'incertitude estimée sur w_a serait beaucoup plus grande.

Nous constatons le même effet sur le paramètre w_0. L'intervalle imposé à Ω_M est situé dans le "bras" du contour dans le plan (Ω_M, w_0) obtenu sans contrainte. Dans cette partie du contour, l'intervalle des valeurs possibles sur w_0 est réduit. Cela explique la forte diminution de l'incertitude sur ce paramètre. De plus, la valeur imposée sur Ω_M étant située dans la partie inférieure du "bras", la valeur centrale de w_0 est plus basse que celle obtenue dans l'ajustement sans contrainte extérieure mais l'effet est moindre.

Ces deux remarques sur l'influence de la contrainte extérieure sur les paramètres de l'ajustement pointent les effets d'une telle contrainte a priori. Une contrainte forte sur un paramètre fortement corrélé à un autre entraîne une contrainte forte sur le second paramètre. Si le choix de la valeur centrale de la contrainte sur Ω_M avait été arbitrairement différent, les résultats sur les paramètres w_0 et w_a (valeurs centrales et incertitudes) auraient été différents. Ce phénomène montre le poids d'une contrainte a priori. Son utilisation requiert une forte confiance en sa valeur. L'utilisation d'une contrainte erronée pourrait entraîner des estimations erronées des autres paramètres.

De manière générale, ces conclusions sont les mêmes pour tous les ajustements effectués avec une contrainte extérieure forte. Nous avons vu qu'imposer une contrainte forte sur le paramètre de matière permet de réduire fortement l'incertitude sur les autres paramètres. Cette contrainte s'avère alors très utile pour déterminer les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire supposant $w_a = 0$ ou en le laissant libre.

Cependant, le changement de valeur centrale de Ω_M peut entraîner un changement de la valeur centrale des autres paramètres, ce qui affecte paradoxalement aussi l'estimation des incertitudes. En particulier, les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire, supposant $w_a = 0$ ou le laissant libre, changent avec ou sans contrainte. Avec les données actuelles, les contours illustrant les ajustements avec ou sans contrainte restent compatibles à moins de 2σ. Ce décalage ne constitue donc pas statistiquement un problème. Cependant, la contrainte agit comme une coupure sur le paramètre Ω_M car elle élimine une grande partie du contour dans les plans (Ω_M, w_0) (et (Ω_M, w_a)), ce qui a pour effet de diminuer les incertitudes sur w_0 (et w_a). Se pose alors la question de la confiance en cette contrainte extérieure, c'est-à-dire la confiance dans sa valeur et dans les conditions dans lesquelles celle-ci a été mesurée. Si une contrainte aussi forte mais de valeur centrale différente était supposée, l'intervalle possible sur w_0 (et w_a) en serait changé, et donc les incertitudes aussi. Ce cas illustre le risque de l'utilisation de contraintes extérieures que nous allons étudier en détail par la suite.

3.4.3 Validation des estimations des paramètres Ω_M et w_0 suivant la paramétrisation de l'équation d'état de l'énergie noire utilisée

De la même manière nous allons comparer les résultats obtenus sur Ω_M et w_0 si l'on suppose une équation d'état constante ou si l'on garde w_a dans l'ajustement. Ici aucune contrainte extérieure n'est incluse. Les différents résultats sont résumés dans le tableau 3.2 et les contours dans le plan (Ω_M, w_0) sont rappelés dans la figure 3.9. Le contour en trait plein correspond à l'ajustement laissant w_a libre, celui en trait discontinu correspond à l'ajustement supposant une équation d'état constante.

Les effets de l'hypothèse $w_a = 0$ sont semblables à ceux décrits pour l'ajout d'une contrainte extérieure sur Ω_M : valeurs centrales décalées et incertitudes réduites. Ils s'expliquent par les fortes corrélations entre les paramètres Ω_M, w_0 et w_a. Imposer $w_a = 0$, agit comme une coupure et induit sur Ω_M une valeur centrale plus basse et un intervalle des valeurs possibles réduit. Cet effet s'explique par la corrélation entre ces deux paramètres, illustrée par le contour de la figure 3.8.

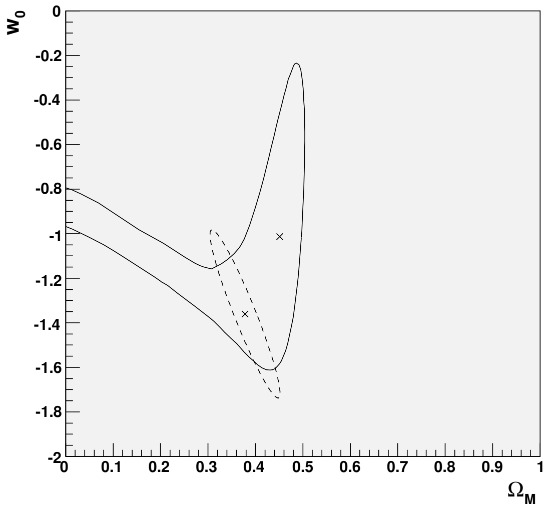

FIGURE 3.9 – Ellipses de Fisher dans le plan (Ω_M, w_0). En trait plein : w_a est libre dans l'ajustement, en trait discontinu : w_a est fixé à 0. La platitude de l'univers est supposée. Les contours sont donnés à 39% de niveau de confiance, sans contrainte extérieure.

En l'absence d'estimation précise de w_a, il est tentant de le fixer à 0. Cependant si une contribution d'évolution en redshift de l'équation d'état de l'énergie noire existe, les résultats sur w_0 s'en trouveraient changés. Ce cas illustre bien comment le choix de l'hypothèse sur l'énergie noire ou de sa paramétrisation peut induire un risque d'interpétation, risque que nous étudierons dans le prochain chapitre.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons vu comment extraire les paramètres cosmologiques des données des supernovae. Nous avons d'abord décrit la méthode statistique basée sur une méthode fréquentiste. Puis nous l'avons appliquée à l'échantillon UNION. Cette étude a montré les difficultés de la détermination des paramètres cosmologiques et les limites des données des supernovae. En effet, nous avons vu que des hypothèses ou contraintes extérieures sont nécessaires.

Nous avons d'abord supposé la constante cosmologique. Cette hypothèse nous a permis d'extraire une densité d'énergie noire non nulle.

Pour déterminer la nature de l'énergie noire nous avons dû supposer que l'univers est plat. Nous avons vu que malgré cette hypothèse, il est impossible d'obtenir une information précise sur une possible évolution de l'équation d'état de l'énergie noire par une estimation du paramètre w_a. Même avec une forte contrainte extérieure sur Ω_M, l'erreur reste de l'ordre de 1.

Pour le paramètre w_0, nous avons vu plusieurs solutions pour obtenir une estimation précise : fixer w_a à 0, appliquer une contrainte extérieure forte sur Ω_M, voire utiliser ces deux solutions dans un même ajustement. Dans tous les cas, la réduction de l'erreur sur w_0 est efficace, comme résumé dans le tableau 3.2.
Cependant, fixer w_a à 0, élimine de nombreux modèles d'univers possibles avec l'ajustement où w_a est libre, et amène ce paramètre à : $w_0 = -1.360 \pm 0.377$. La contrainte extérieure sur Ω_M a le même pouvoir statistique et réduit son erreur : $w_0 = -1.225 \pm 0.234$. L'utilisation des deux contraintes dans le même ajustement apporte le meilleur résultat avec $w_0 = -1.023 \pm 0.128$.

On a vu que supposer une équation d'état constante et imposer une valeur basse de Ω_M amène w_0 à être de plus en plus proche de la constante cosmologique. Nous avons abordé la question de l'impact d'une contrainte extérieure et d'une hypothèse sur l'équation d'état de l'énergie noire. Avec les données actuelles, ces trois résultats sur le paramètre w_0 restent compatibles à moins de 2 σ. Mais supposer une équation d'état constante, comme inclure une contrainte extérieure a priori dans l'ajustement n'est pas anodin. Si ces hypothèses étaient fausses, le résultat sur w_0 le serait peut-être aussi.

C'est dans ce cadre que s'inscrivent mes travaux de thèse. Dans le chapitre suivant nous étudierons en détail les effets induits par ces hypothèses grâce à des simulations.

Chapitre 4

Etude de biais d'analyse avec les supernovae

Dans ce chapitre nous décrirons deux études menées sur les conditions d'ajustement des paramètres cosmologiques avec les supernovae. Pour cela nous utiliserons des simulations et nous placerons dans le cadre d'extraction des paramètres d'équation d'état de l'énergie noire.
La première étude porte sur une hypothèse souvent supposée, une équation d'état constante.
La seconde étude porte sur l'effet d'une contrainte fausse imposée a priori sur Ω_M.

Nous décrirons d'abord la méthode et les simulations. Puis nous présenterons les résultats de ces deux études.

4.1 Introduction

Nous avons vu dans les chapitres précédents, que certaines hypothèses sont nécessaires pour estimer les paramètres d'énergie noire w_0 et w_a avec les supernovae. Dans le chapitre 3, nous avons dû supposer la platitude de l'univers. De plus, nous avons imposé une équation d'état de l'énergie noire constante ($w_a = 0$) pour obtenir la meilleure estimation de w_0. Puis, pour essayer d'extraire w_a, nous avons dû imposer une contrainte forte sur la densité de matière. Dans ce chapitre, nous allons quantifier les effets de ces deux hypothèses grâce à des simulations de données de supernovae.

Nous allons d'abord tester l'hypothèse sur l'équation d'état de l'énergie noire, $w_a = 0$. Nous allons utiliser des lots de supernovae dont les magnitudes sont simulées pour différents modèles d'univers comportant différents modèles d'énergie noire. Comme avec des données réelles, nous allons réaliser les ajustements imposant $w_a = 0$ pour extraire les autres paramètres cosmologiques, en particulier w_0. Puisqu'il s'agit de simulations, nous allons pouvoir vérifier les résultats obtenus par comparaison des valeurs ajustées et simulées. Si le résultat de l'ajustement s'éloigne de la valeur simulée, c'est que la mauvaise description de l'équation d'état induit un biais. Nous reviendrons sur cette définition dans la prochaine section.

Dans la seconde étude, nous allons étudier les effets d'une contrainte forte sur Ω_M imposée a priori dans l'ajustement alors qu'elle est fausse. Utilisant les simulations de magnitudes de supernovae pour différents modèles d'univers, nous allons supposer dans l'ajustement une valeur de Ω_M différente de celle simulée. Puisque nous connaissons le modèle de référence simulé, nous pouvons mesurer les effets de cette hypothèse fausse sur les résultats de l'ajustement obtenus.

Dans la section suivante, nous allons décrire la méthode d'analyse de ces deux études. Celle-ci comporte trois étapes, la simulation, l'ajustement et l'interprétation des résultats, que nous détaillerons.

4.2 Le schéma de l'étude

Les deux études présentées dans ce chapitre sont menées avec la même méthode d'analyse. Il s'agit de tester les effets induits par une hypothèse fausse sur les résultats de l'ajustement d'un lot de supernovae grâce à des simulations. Seules les hypothèses d'ajustement que nous voulons tester changent : d'abord $w_a = 0$, puis une contrainte forte sur Ω_M.

Ces études sont basées sur trois étapes :
- la simulation des magnitudes à partir du modèle d'univers choisi,
- l'ajustement des paramètres cosmologiques avec une hypothèse (vraie ou fausse),
- la vérification du résultat de l'ajustement par comparaison des paramètres ajustés avec ceux du modèle simulé.

Les simulations et les ajustements sont effectués grâce au *kosmoshow* [61] déjà utilisé dans le chapitre 3.

4.2.1 La simulation

La simulation permet de choisir les modèles cosmologiques que nous voulons tester. Il est ensuite possible de comparer les résultats de l'ajustement avec le modèle choisi comme vrai. Cette méthode permet donc d'identifier les modèles où l'hypothèse fausse induit une mauvaise reconstruction du modèle cosmologique.

La simulation est réalisé en deux temps. Il faut d'abord choisir un modèle cosmologique constitué des paramètres cosmologiques que nous choisissons comme vrais. A partir de ces derniers sont engendrées les magnitudes d'un lot de supernovae à différents redshifts. La distribution en redshift de ce lot est déterminée par un scénario statistique préalablement établi. Ces données simulées correspondent à des lots de supernovae attendus à court et à long terme. Le court terme est équivalent à un sondage au sol de type SNLS, le long terme correspond aux données attendues dans la prochaine génération d'expériences dans l'espace.

Les modèles cosmologiques

La première étape de la simulation des données est le choix d'un modèle cosmologique que nous considérons comme "vrai". Un modèle est décrit par 5 paramètres :

- M_s^F, le paramètre de normalisation, sa valeur est arbitrairement choisie à -3.6 suivant la notation utilisée par SNLS ;
- Ω_M^F et Ω_X^F, les densités réduites, en général, la simulation est réalisée avec $\Omega_M^F = 0.3$;
- w_0^F et w_a^F, les paramètres de l'équation d'état de l'énergie noire.

L'exposant F de l'anglais "fiducial" signifie que ce sont les paramètres que nous avons choisis comme "vrais" et que nous simulons. Notons que le paramètre de densité de rayonnement est négligé.

Dans ce chapitre, l'ajustement est réalisé avec l'hypothèse d'univers plat. Pour ne pas rajouter de sources de biais, la cosmologie choisie est aussi un univers plat. Nous aurons donc $\Omega_X^F = 1 - \Omega_M^F$.

La paramétrisation de l'énergie noire

Afin de prendre en compte une évolution de l'équation d'état de l'énergie noire au cours du temps, nous garderons la paramétrisation utilisée avec les données (CPL) :

$$w(z) = w_0 + w_a \frac{z}{1+z} \tag{4.1}$$

Pour caractériser un modèle d'énergie noire, nous utiliserons donc le couple (w_0, w_a). Dans cette notation, la constante cosmologique est décrite par le couple : $(-1, 0)$.

La première étude a été réalisée avec une paramétrisation légèrement différente :

$$w(z) = w_0 + w_1 z \tag{4.2}$$

Les figures sont donc décrites avec cette paramétrisation. A bas redshift ($z \simeq 1$), comme c'est le cas avec les supernovae, ces deux paramétrisations sont équivalentes en posant $w_1 = w_a/2$.

Les données de supernovae

Nous avons simulé des données de supernovae. La simulation consiste à calculer des magnitudes pour une distribution en redshift donnée et un modèle cosmologique choisi.

L'expression de la magnitude en fonction du redshift est décrite par l'équation 3.27 et 3.31.

Nous avons établi deux scénarios statistiques, nommés par la suite scénario à court terme ou à long terme, qui permettent une analyse de perspectives. Dans les deux scénarios statistiques, la dispersion en magnitude est supposée constante et indépendante du redshift, elle s'élève à 0.15 pour toutes les supernovae après correction. Nous avons également négligé les erreurs systématiques.

scénario à court terme : Les données simulées correspondent à un sondage au sol de type SNLS [64]. Il s'agit de 500 SNIa de redshift compris entre 0.3 et 1. La distribution des SNIa est décrite par la table 4.1. Pour compléter ce lot, nous ajoutons 200 SNIa proches de redshift inférieur à 0.1. Ces supernovae proches pourront être obtenues par la collaboration SN Factory par exemple [65].

scénario à long terme : Ce scénario correspond aux données attendues pour un sondage spatial de type JDEM (SNAP) [66, 67]. Cet échantillon, dont la distribution est décrite dans la table 4.1, compte 2000 SNIa de redshift compris entre 0.2 et 1.7. Nous complétons cet échantillon par 300 SNIa de redshift inférieur à 0.1.

z	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
SNLS	-	44	56	80	96	100	104	108	-	-	-	-	-	-	-	-
SNAP	35	64	95	124	150	171	183	179	170	155	142	130	119	107	94	80

TABLE 4.1 – *Nombre de supernovae simulées par intervalle de redshift de 0.1 pour les scénarios à court terme (SNLS) et à long terme (SNAP).*

4.2.2 Ajustement des paramètres cosmologiques

L'ajustement est effectué suivant la méthode statistique décrite précédemment. Les valeurs centrales sont calculées par minimisation de χ^2 et les incertitudes par une analyse de Fisher. Dans le chapitre 3, nous avons vu que si w_a est fixé à 0 ou si Ω_M est fortement contraint, cette analyse est équivalente à la méthode rigoureuse de calcul des incertitudes.

L'ajustement comprend au plus 5 paramètres correspondant à ceux simulés : M_s, Ω_M, Ω_X, w_0, w_a.
Nous supposons la platitude de l'univers dans tout le chapitre. Le paramètre Ω_X n'est donc pas ajusté, il est déduit du résultat sur Ω_M. Il s'agit de l'ajustement à 4 paramètres (parfois noté 4-fit dans les figures).
Dans la première étude, nous supposons de plus que l'équation d'état de l'énergie noire est constante. Le paramètre w_a est fixé à 0 et n'est pas ajusté. Il s'agit de l'ajustement à 3 paramètres (parfois noté 3-fit dans les figures).

4.2.3 Méthode d'analyse

Le but des analyses avec les données simulées est de comparer les paramètres "vrais" et les paramètres extraits de l'ajustement. Sans hypothèse d'ajustement, c'est-à-dire si les paramètres simulés et ajustés sont les mêmes, les valeurs centrales trouvées par l'ajustement concordent exactement avec les valeurs simulées. Dans le cadre de ces études, les paramètres extraits sont soumis à des conditions d'ajustement différentes des valeurs des paramètres simulés. Ces hypothèses d'ajustement, peuvent entraîner une mauvaise reconstruction des paramètres ajustés, c'est-à-dire un ajustement biaisé. Pour repérer et quantifier ces modèles, dont l'ajustement est biaisé, nous avons défini plusieurs critères. Un premier critère de qualité est déterminé par un test du χ^2, nommé par la suite critère de détectabilité. D'autres critères sont définis par la comparaison des paramètres extraits de l'ajustement avec les paramètres simulés ou des paramètres décrivant un modèle d'univers remarquable, ΛCDM par exemple.

Le critère de détectabilité

Dans une analyse de données, un moyen simple de vérifier la pertinence de l'ajustement consiste à tester la minimisation par un test du χ^2. Si le χ^2 est trop élevé, l'ajustement est mauvais, indiquant que le résultat n'est pas bon. Dans notre cas, un test du χ^2 est utilisé pour vérifier la détectabilité des fausses hypothèses, un χ^2 élevé indique que les hypothèses sont mauvaises. Rejeter des modèles par un tel test avec de vraies données est toujours délicat car de nombreuses hypothèses et sources de biais interviennent. Dans notre étude, seules les hypothèses d'ajustement induisent un mauvais χ^2. Ces études étant préalables à des prises de données, nous demandons un haut niveau de détectabilité. Les modèles pour lesquels le test donne un effet à 5 σ, c'est-à-dire $\chi^2 > 5\ \sigma(\chi^2)$, sont rejetés, la fausse hypothèse est détectée. Rappelons que $\sigma(\chi^2) = \sqrt{2N_{dof}}$ où N_{dof} est le nombre de degrés de liberté dans l'ajustement.

Dans notre étude, nous nous intéressons en particulier aux modèles dont l'ajustement semble correct, c'est-à-dire qui a passé le critère de détectabilité. En comparant le modèle que nous avons simulé avec le résultat de l'ajustement, nous vérifions a posteriori que les résultats sont compatibles avec le modèle simulé. De ce fait nous montrons si le test du χ^2 suffit à écarter toute mauvaise interprétation due aux fausses hypothèses, ou pas.

Autres critères

Si l'ajustement passe le critère de détectabilité, c'est-à-dire si le χ^2 est suffisamment faible, nous pouvons comparer les résultats obtenus au modèle choisi. Impossible à effectuer avec des vraies données, cette vérification est le cœur de l'étude de biais.
Un critère de comparaison entre le modèle reconstruit et celui simulé permet de définir un ajustement comme valide ou biaisé. La validité est donnée par la compatibilité des paramètres ajustés par rapport aux paramètres simulés. Au contraire le biais correspond à une incompatibilité entre les modèles ajusté et simulé.

Nous pourrons aussi vérifier si le résultat obtenu est compatible avec un modèle remarquable (par exemple ΛCDM), on parlera alors de confusion.
Validité, biais et confusion sont alors définis comme suit :

Validité : pour un quelconque paramètre P et sa valeur simulée P^F, $|P - P^F| < n\,\sigma(P)$;

Biais : pour un quelconque paramètre P et sa valeur simulée P^F, $|P - P^F| > n\,\sigma(P)$;

Confusion : pour un quelconque paramètre P et une valeur particulière $\tilde{P}$, $|P - \tilde{P}| < n\,\sigma(P)$.

Ces critères sont utilisés à $1\,\sigma$, c'est-à-dire $n = 1$.

Dans la suite, les résultats de l'analyse sont résumés par des figures présentées dans le plan des modèles d'énergie noire simulés (w_0^F, w_a^F). Nous définissons alors des zones délimitant les modèles simulés selon les critères obtenus :

la zone de mauvais ajustement, ou zone de détectabilité, où le test de χ^2 suffit à identifier le problème et rejeter l'ajustement ($\chi^2 > 5\sqrt{2N_{dof}}$) ;

la zone de bon ajustement, ou zone d'indétectabilité, où le test de χ^2 ne suffit pas à identifier le problème, l'ajustement semble correct ($\chi^2 < 5\sqrt{2N_{dof}}$) ;

la zone de validité, où les valeurs des paramètres ajustés sont compatibles à 1σ avec celles simulées ;

la zone de biais, où les valeurs des paramètres ajustés ne sont pas compatibles à 1σ avec celles simulées ;

zone de confusion, comprenant les modèles pour lesquels le résultat de l'ajustement est compatible à $1\,\sigma$ avec un modèle remarquable (par exemple ΛCDM).

4.3 Etude de la paramétrisation de l'énergie noire

Dans cette section, nous présentons les conséquences de l'hypothèse d'équation d'état de l'énergie noire constante dans le cas de modèles simulés avec une énergie noire dynamique. Cela revient à imposer $w_a = 0$ dans l'ajustement alors que le modèle d'énergie noire simulé comporte une dépendance en redshift, w_a, non nulle. Cette hypothèse est très souvent utilisée pour contraindre la nature de l'énergie noire. Nous avons vu qu'elle représente, en effet, un moyen efficace de réduire les incertitudes sur le paramètre w_0.

Dans le paragraphe suivant, nous allons illustrer le problème par un exemple sur un modèle particulier. Nous allons ensuite généraliser l'analyse en faisant varier l'équation d'état de l'énergie noire qui caractérise les différents modèles d'énergie noire. Les résultats présentés ici ont été publiés dans [62].

4.3.1 Illustration

Prenons un modèle d'univers avec une énergie noire dépendant fortement du redshift dans le scénario à long terme. Dans ce scénario, la statistique de supernovae simulées est

plus grande que celle des données actuelles et le redshift maximal du lot de supernovae est plus lointain, comme attendu pour SNAP.
Le modèle simulé est décrit par les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} \Omega_M^F &= 0.3 \\ \Omega_X^F &= 0.7 \\ w_0^F &= -0.7 \\ w_a^F/2 \simeq w_1 &= 0.8 \end{aligned}$$

Notons qu'il s'agit d'un univers plat dont l'énergie noire a une dépendance forte en temps. Ce modèle correspond au modèle proposé par Maor et al. [68].

L'ajustement est réalisé, dans le scénario à long terme, en imposant $w_a = 0$. Les résultats sur les paramètres Ω_M et w_0 sont les suivants :

$$\begin{aligned} \Omega_M &= 0.620 \pm 0.013 \\ w_0 &= -1.548 \pm 0.194 \end{aligned}$$

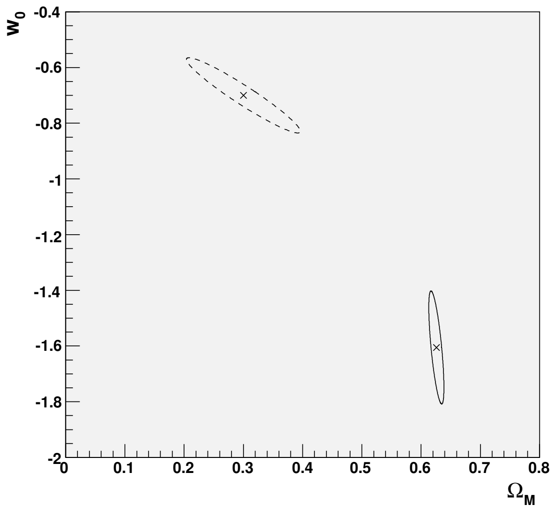

FIGURE 4.1 – *Contours obtenus dans le scénario à long terme pour deux ajustements du modèle proposé par Maor et al. [68] dans le plan (Ω_M, w_0). En trait plein : ajustement à 3 paramètres (w_a fixé à 0), en pointillés : ajustement à 4 paramètres (w_a libre). Dans les deux cas, une contrainte faible sur Ω_M est appliquée : $\Omega_M = 0.3 \pm 0.1$.*

Le contour correspondant est tracé en trait plein figure 4.1. Nous remarquons que ces valeurs sont très éloignées de celles simulées.

La précision obtenue sur Ω_M rend cette valeur incompatible avec la valeur simulée. Pour le paramètre w_0, la compatibilité n'est possible qu'à plus de $4\,\sigma$. Rappelons que la seule incohérence entre le modèle simulé et les conditions d'ajustement provient de l'hypothèse sur la paramétrisation de l'équation d'état de l'énergie noire. Imposer une équation d'état constante alors qu'elle ne l'est pas entraîne, dans ce cas, une mauvaise interprétation de la cosmologie, c'est-à-dire une densité de matière, Ω_M, et un paramètre d'énergie noire, w_0, mal reconstruits. Ils s'agit donc d'un cas de biais sur ces deux paramètres induit par l'hypothèse $w_a = 0$.

On s'aperçoit ici qu'une mauvaise hypothèse sur la nature de l'énergie noire entraîne non seulement un biais sur la détermination du paramètre d'énergie noire, w_0, mais aussi sur la densité de matière, Ω_M. Puisque l'hypothèse d'ajustement testée touche l'équation d'état de l'énergie noire, il n'est pas surprenant que w_0 subisse un effet de cette fausse hypothèse. En revanche, la source du biais sur le paramètre Ω_M n'est pas évidente. Celle-ci s'explique par le jeu des corrélations entre les paramètres. Nous avons déjà montré que les corrélations entre ces trois paramètres sont fortes. Imposer une valeur à l'un des trois paramètres a des répercussions sur la détermination des deux autres. Dans ce cas, l'hypothèse fausse $w_a = 0$, se traduit par un biais sur Ω_M et w_0.

Pour une comparaison, nous avons également réalisé l'ajustement complet à 4 paramètres, laissant libre w_a. Une contrainte faible sur Ω_M est ajoutée, $\Omega_M = 0.3 \pm 0.1$. Cette contrainte permet de faire converger l'ajustement et restreint l'intervalle sur Ω_M à des valeurs réalistes. Puisque faible et centrée sur la valeur simulée de Ω_M, celle-ci n'ajoute pas de biais supplémentaire. Les résultats obtenus sont les suivants :

$$\begin{aligned} \Omega_M^F &= 0.300 \pm 0.096 \\ w_0^F &= -0.700 \pm 0.135 \\ w_a^F/2 \simeq w_1 &= 0.800 \pm 0.162 \end{aligned}$$

Ces résultats sont centrés sur les valeurs du modèle simulé. Puisqu'il n'y a pas de fausse hypothèse, l'ajustement n'est pas biaisé. Les incertitudes ne sont pas très importantes et demeurent du même ordre que dans le premier ajustement. L'ellipse correspondant à cet ajustement dans le plan (Ω_M, w_0) est tracée en pointillé.

En résumé, le premier ajustement ne permet pas une bonne reconstruction de Ω_M et w_0 et le biais ne serait pas détectable dans les vraies données. Le second permet de considérer une évolution en temps de l'équation d'état de l'énergie noire, ne présente pas de biais et les incertitudes obtenues restent faibles. Dans ce cas, l'hypothèse $w_a = 0$ ne doit pas être supposée. Ce modèle est par conséquent un parfait exemple du danger de l'utilisation d'une hypothèse d'ajustement fausse.

4.3.2 Analyse générale

Nous voulons généraliser cette étude afin de quantifier les modèles dont l'ajustement est biaisé par l'hypothèse $w_a = 0$. Pour cela, nous simulons des modèles d'univers en faisant varier les paramètres w_0^F et w_a^F. Nous avons choisi de fixer la valeur simulée de la densité de matière à $\Omega_M^F = 0.3$, ce qui induit, par la platitude de l'univers, une densité d'énergie noire, $\Omega_X^F = 0.7$.

Nous réalisons ensuite les ajustements en supposant une équation d'état constante. Les modèles simulés comportent cinq paramètres dont $w_a^F \neq 0$, les ajustements sont effectués sur trois paramètres (M_S, Ω_M, w_0) supposant $w_a = 0$.

Nous appliquons également une contrainte faible sur la densité de matière, $\Omega_M = 0.3 \pm 0.1$. Cette contrainte est centrée sur la "vraie" valeur de Ω_M et reste suffisamment faible pour ne pas induire un résultat forcé sur Ω_M qui influerait sur notre analyse. Celle-ci permet de réduire le temps de calcul et de faire converger la recherche du minimum du χ^2, tout en ne perdant pas la généralité des résultats.

Nous vérifions enfin les résultats pour chaque modèle, afin de déterminer les biais possibles sur les trois paramètres ajustés (M_S, Ω_M et w_0). Cette étape constitue le coeur de l'étude du biais et n'est possible qu'avec des simulations. La méthode de cette étude est schématisée dans le tableau 4.2.

Simulation	Hypothèse	Ajustement	Etude
(M_s^F, Ω_M^F, Ω_X^F, w_0^F, w_a^F)	$w_a = 0$	M_s, Ω_M, w_0	Biais sur M_s, Ω_M, w_0 ?

TABLE 4.2 – *Schéma d'analyse.*

Nous appliquons cette méthode pour déterminer les cas où le résultat de l'ajustement est valide ou biaisé dans les deux scénarios statistiques, à long et à court terme. Les paramètres d'équation d'état simulés varient entre -2 et 0 pour w_0^F et entre -2 et 2 pour $w_1 \simeq w_a^F/2$. Les résultats de cette analyse sont présentés dans le plan des modèles d'énergie noire simulés, (w_0^F, w_1^F). Sur ces graphiques la ligne verticale pour $w_0^F = -0.48$ symbolise la frontière entre les modèles avec accélération de l'expansion ($w_0^F < -0.48$) et ceux avec décélération ($w_0^F > -0.48$). En outre, les modèles valides ou biaisés seront repérables dans ce plan par des zones de validité ou de biais.

Résultats pour le scénario à long terme

Le premier scénario statistique testé est celui à long terme. Les données de supernovae simulées sont de type SNAP, avec une statistique importante et une large distribution en redshift.

La figure 4.2 présente, dans le plan (w_0^F, $w_a^F/2$), les modèles d'énergie noire simulés. Pour chaque modèle, le résultat de l'étude de biais est décrit : détectabilité d'un problème par le test du χ^2 et validité ou biais du résultat de l'ajustement, c'est-à-dire compatibilité ou incompatibilité des paramètres ajustés avec les valeurs simulées. Nous étudions d'abord chaque paramètre de l'ajustement séparément. Les résultats sont illustrés par les graphiques *a, b* et *c* respectivement pour les paramètres M_S, Ω_M et w_0. Le graphique *d* regroupe l'analyse des trois paramètres.

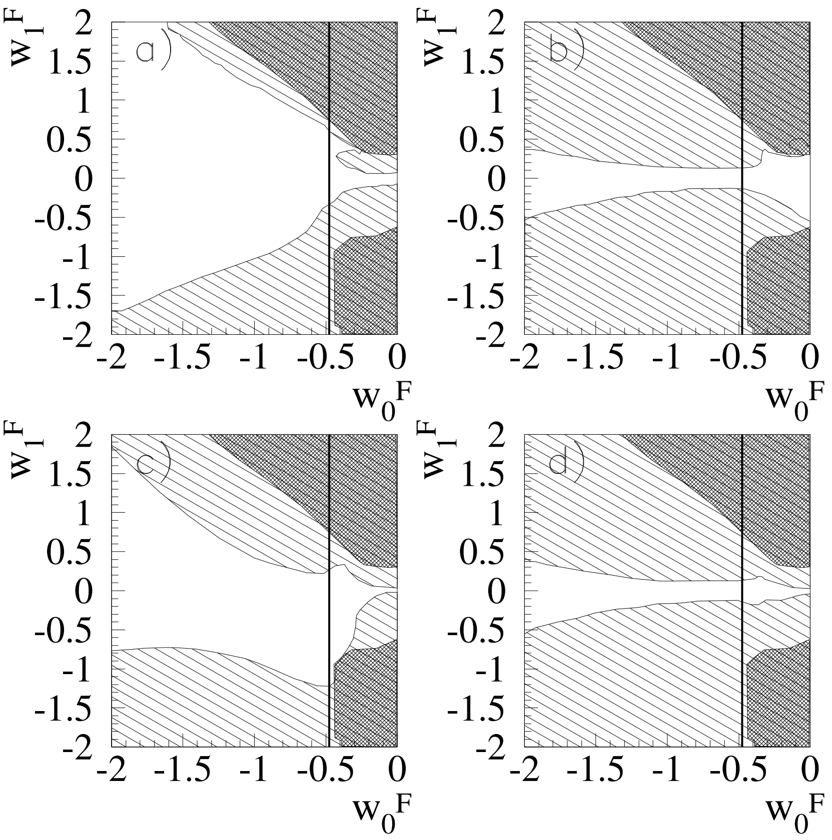

FIGURE 4.2 – *Résultats de l'analyse de biais dans le scénario à long terme.*
Les graphiques a, b et c, présentent les résultats pour les paramètres M_S, Ω_M et w_0 respectivement. Le d regroupe les résultats sur les trois paramètres.
Les surfaces ombrées sont les zones de détectabilité, les surfaces hachurées symbolisent les zones de biais, les surfaces restées blanches représentent les zones de validité.

La première étape de l'analyse consiste à appliquer le critère de détectabilité. Celui-ci permet de déterminer la **zone de détectabilité**, représentée par les surfaces ombrées sur les figures. Cette zone est commune aux quatre graphes puisqu'elle ne dépend pas du

paramètre étudié.
Dans ce scénario, celle-ci concerne peu de modèles. Ces derniers sont surtout concentrés vers les modèles présentant une décélération ou dont la contribution dynamique w_a^F est positive avec $w_0^F \gtrsim -1$. En résumé, les ajustements apparaissent bons dans la majorité du plan.

Les surfaces hachurées représentent les **zones de biais** et les surfaces blanches correspondent aux **zones de validité**. Ces zones dépendent du paramètre ajusté. Pour rappel, la zone de validité est constituée des modèles simulés dont le paramètre ajusté est compatible à $1\,\sigma$ avec la valeur simulée, alors que la zone de biais est constituée des modèles simulés dont le paramètre ajusté s'éloigne à plus de $1\,\sigma$ de la valeur simulée et dont ce biais n'est pas détectable par le test du χ^2.

Etudions les résultats obtenus pour chaque paramètre ajusté.

- La figure *a* montre que le paramètre de normalisation, M_s, est peu biaisé. La surface blanche, zone de validité, domine dans le plan. Pour la majorité des modèles testés l'ajustement de M_s est valide. Seuls certains modèles à grandes valeurs de w_a^F présente un biais. Peu corrélé avec les autres paramètres de l'ajustement, le résultat de M_S est peu influencé par l'hypothèse $w_a = 0$.

- La figure *b* donne les résultats sur le paramètre de densité de matière, Ω_M, et montre que l'ajustement de ce paramètre est biaisé dans la plupart des modèles testés. Seule une fine bande autour de $w_a^F = 0$ constitue la zone de validité. Ce biais s'explique le plus souvent par une valeur centrale éloignée de la valeur simulée associée à une incertitude petite.

- Sur la figure *c*, les résultats sur le paramètre d'équation d'état w_0, montrent une zone de validité plus grande. Les incertitudes sur ce paramètre restent larges permettant à l'ajustement d'être compatible avec le modèle simulé même si la valeur centrale est décalée. Les résultats sont biaisés pour $w_a^F/2 \lesssim -1$ et pour une partie des modèles $w_a^F/2 \gtrsim 0.5$.

Le graphique *d* représente les résultats de l'analyse regroupant tous les paramètres ajustés. Si pour un modèle testé, au moins un des trois paramètres ajustés est biaisé, l'ajustement est considéré biaisé et le modèle est inclus dans la zone de biais. Des trois paramètres ajustés, c'est Ω_M qui agrandit la zone de biais et contraint la zone de validité. Seuls les modèles avec une faible dépendance en redshift ne sont pas biaisés. Ils s'agit des modèles dont $w_a^F/2 < 0.2$ pour $w_0^F > -1$ et $w_a^F/2 < 0.4$ au-delà.

Remarquons que le modèle présenté en exemple se situe à la fois dans la zone de biais de Ω_M et w_0.

Résultats pour le scénario à court terme

Nous menons ici la même étude dans le scénario à court terme. La statistique du lot de supernovae simulées est plus faible que dans le scénario à long terme mais légèrement plus grande que celle des données actuelles.

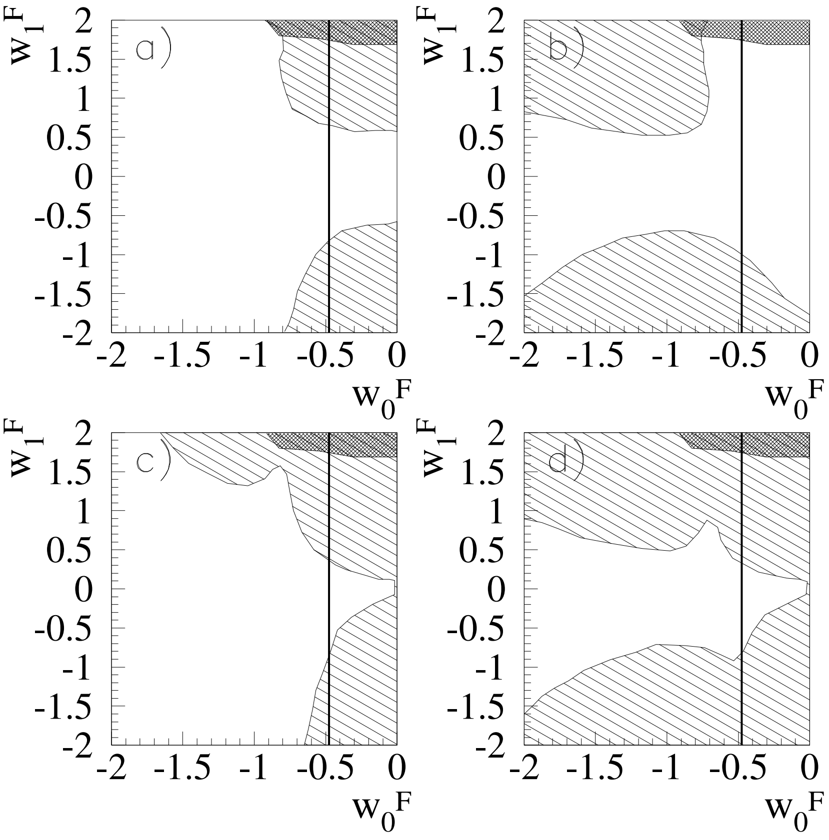

FIGURE 4.3 – *Résultats de l'analyse de biais dans le scénario à court terme.*
Les graphiques a, b et c, présentent les résultats pour les paramètres M_S, Ω_M et w_0 respectivement. Le d regroupe les résultats sur les trois paramètres.
Les surfaces ombrées sont les zones de détectabilité, les surfaces hachurées symbolisent les zones de biais, les surfaces restées blanches représentent les zones de validité.

La figure 4.3 présente les résultats de l'étude sur les paramètres ajustés. La légende est identique à celle de la figure 4.2. La zone de détectabilité est ombrée, les zones de biais sont hachurées et les zones de validité restent blanches. Les figures *a*, *b* et *c* illustrent les résultats de l'étude respectivement sur M_S, Ω_M et w_0. La figure *d* regroupe ces résultats.

Ces figures montrent que la zone de détectabilité est quasi-inexistante. Cela signifie que l'ajustement semble bon pour tous les modèles testés. S'il y a biais, il n'est pas détecté par le test du χ^2.

Le paramètre M_s, figure a, n'est biaisé que pour des modèles de décélération. L'hypothèse fausse sur la nature de l'énergie noire n'a pas de conséquence sur l'extraction de ce paramètre.
Le graphique b montre une zone de biais de Ω_M importante mais laisse une plus grande place à la zone de validité que dans le scénario précédent. Les modèles pour lesquels la reconstruction de Ω_M est valide se situent autour de la ligne $w_a^F = 0$, pour des valeurs de $|w_a^F/2|$ inférieures à 0.6.
La figure c montre que l'extraction du paramètre w_0 est valide dans une large majorité du plan. La figure d montre une zone de validité à nouveau contrainte par le paramètre Ω_M. Cependant elle est globalement plus étendue que dans le scénario étudié précédemment.

Ces résultats sont en accord avec ceux du scénario long terme. Le paramètre M_S n'est pas biaisé, le paramètre w_0 est bien reconstruit dans la majorité des modèles testés, le paramètre Ω_M est le paramètre le plus biaisé contraignant la zone de validité globale.
De manière générale, la statistique moins grande de ce scénario induit des incertitudes plus larges. Ce phénomène permet plus de compatiblité entre le paramètre ajusté et sa valeur simulée alors que la valeur centrale est décalée. Moins de modèles ont un ajustement biaisé. Dans le scénario à court terme, l'ajustement, en fixant w_a à 0, semble donc un bon moyen de contraindre les paramètres cosmologiques à condition que la dépendance en redshift de l'équation d'état de l'énergie noire soit suffisamment faible, $w_a^F/2 < 0.6$.

Conclusion des études sur les deux scénarios

Les conclusions de cette analyse dépendent à la fois des paramètres étudiés et du scénario statistique considéré. L'extraction du paramètre M_s ne pose pas de problème. Son estimation ne dépend pas de l'hypothèse sur l'équation d'état de l'énergie noire. Le paramètre w_0 est lui aussi bien reconstruit sur une grande partie du plan (w_0^F, w_a^F). Dans ces cas, l'hypothèse $w_a = 0$ n'entraîne pas de biais. Cette hypothèse semble un bon moyen de déterminer ce paramètre. Au contraire Ω_M est mal reconstruit sur la plus grande partie du plan. L'hypothèse $w_a = 0$ entraîne une mauvaise détermination de ce paramètre.

Ces résultats montrent qu'il y a compensation entre les paramètres ajustés. L'hypothèse incorrecte induit un effet complexe sur les paramètres les plus corrélés. Cet effet est dû à plusieurs facteurs : la valeur simulée de w_a, la corrélation de w_a avec les autres paramètres dans l'ajustement à 4 paramètres, la taille des incertitudes obtenues sur les paramètres ajustés et leurs corrélations.
Dans le cas d'un paramètre peu corrélé avec les autres, comme M_S, la fausse hypothèse n'influence pas le résultat de l'ajustement. Au contraire, les paramètres Ω_M et w_0, fortement corrélés à w_a, subissent un effet dû à la fausse hypothèse. Cet effet se caractérise par

un décalage de la valeur centrale plus ou moins grand selon la valeur de w_a simulée. Le facteur déterminant le biais ou la validité d'un ajustement est l'incertitude obtenue sur ces paramètres. Celle-ci étant réduite pour Ω_M, la majorité des ajustements sont biaisés. Le paramètre w_0 ayant des incertitudes plus grandes, le décalage de la valeur centrale est incluse dans celle-ci, permettant ainsi un ajustement valide dans de nombreux cas.
C'est pour la même raison que les modèles du scénario à long terme sont plus souvent biaisés que dans le court terme. Une statistique plus grande entraîne des incertitudes plus petites et donc un biais plus important.

Il est également important de noter le rôle du critère de détectabilité. Nous l'avons utilisé comme indicateur de qualité de l'ajustement. Nous avons vu que ce critère ne permet pas de détecter un biais dans la majorité des cas, exceptés pour des modèles exotiques de décélération ou avec une grande valeur de w_a. Cela signifie qu'avec de vraies données le biais n'est pas détectable.

Nous avons vu que si l'hypothèse $w_a = 0$ n'est généralement pas recommandée pour la détermination de Ω_M, elle est possible dans la majorité des cas pour l'ajustement de w_0. Nous avons également vu dans l'exemple, que les incertitudes sont du même ordre de grandeur dans le cas de l'ajustement à 4 paramètres, laissant libre w_a et dans le cas de l'hypothèse $w_a = 0$. Dans la section suivante, nous allons vérifier cette affirmation et quantifier les modèles où l'ajustement laissant libre w_a est préférable et ceux pour lesquels l'ajustement à 3 paramètres suffit.

4.3.3 Comparaison avec l'ajustement à quatre paramètres

Nous allons ici comparer les résultats obtenus pour l'ajustement à 4 paramètres, laissant libre w_a avec ceux obtenus par l'ajustement à 3 paramètres, fixant w_a à 0. Puisque le paramètre Ω_M est biaisé dans la majorité des cas étudiés précédemment, il est clair que l'ajustement à trois paramètres n'est pas indiqué pour son estimation. Par contre w_0 est peu biaisé. Nous voulons alors savoir si l'ajustement à 4 paramètres est nécessaire ou si l'ajustement à 3 paramètres suffit pour extraire ce paramètre.
Nous allons réaliser l'ajustement complet sur tous les modèles cosmologiques étudiés précédemment puis mener une étude sur la qualité des ajustements pour déterminer lequel des deux est le plus efficace. Dans ce but, nous utilisons un estimateur de qualité, E, défini par :

$$E = \sqrt{\sigma^2(w_0) + B^2(w_0)} \tag{4.3}$$

où $\sigma(w_0)$ est l'incertitude sur w_0 et où $B(w_0)$ exprime le biais sur w_0 par : $B(w_0) = |w_0 - w_0^F|$. Cet estimateur est calculé pour chaque modèle et pour les deux conditions d'ajustement. Pour l'ajustement à 4 paramètres, $E(4-\mathrm{par})$ est ramené à $\sigma(w_0)$, l'incertitude obtenue par cet ajustement, puisque le biais est nul. La différence des deux estimateurs, $E(4-\mathrm{par})-\mathrm{E}(3-\mathrm{par})$, permet de distinguer la condition d'ajustement privilégiée. Si la différence est positive, l'hypothèse $w_a = 0$ permet d'obtenir une meilleure contrainte sur w_0, sinon l'ajustement complet, laissant libre w_a, est nécessaire.

Cet estimateur est utilisé dans les deux scénarios statistiques. Les résultats sont présentés figure 4.4, à gauche pour le long terme et à droite pour le court terme.

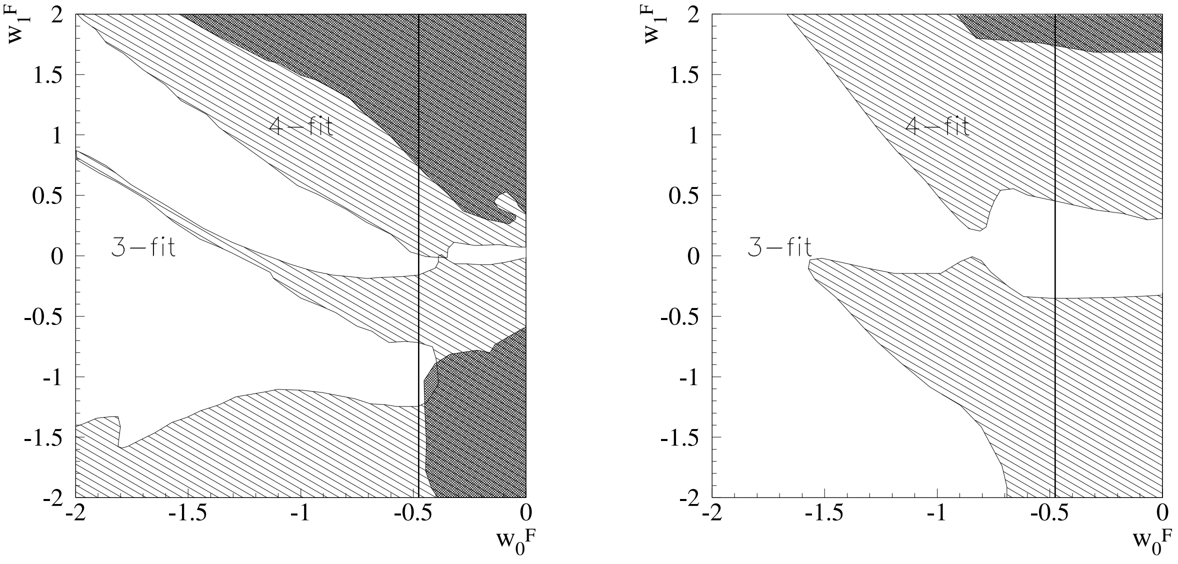

FIGURE 4.4 – *Résultats de l'étude de comparaison des ajustements à 3 ou 4 paramètres pour le long terme, à gauche, et le court terme, à droite. La zone ombrée correspond à la zone de détectabilité. La zone hachurée, notée 4-fit, est constituée des modèles pour lesquels l'ajustement à 4 paramètres est nécessaire. La zone blanche, notée 3-fit, est constituée des modèles pour lesquels l'ajustement à 3 paramètres suffit.*

Pour les modèles inclus dans la zone blanche, notée 3-fit, l'hypothèse $w_a = 0$ est préférable. Pour les modèles des zones hachurées, notée 4-fit, l'ajustement de w_a est nécessaire.

Dans une grande partie du plan l'ajustement à trois paramètres est suffisant pour contraindre le paramètre w_0. Il est intéressant de comparer ces figures aux graphiques *d* des figures 4.2 et 4.3. Ainsi l'on peut voir si les zones où l'hypothèse $w_a = 0$ peut être supposée coïncident avec les zones de validité de w_0. C'est en effet ce que l'on peut penser au premier abord. Si l'hypothèse $w_a = 0$ entraîne un biais, alors il vaut mieux ne pas l'utiliser. Si par contre l'ajustement de w_0 n'est pas biaisé, autant supprimer un paramètre à ajuster afin de réduire les incertitudes. Or ces zones ne coïncident pas exactement. Cette logique est respectée pour de nombreux modèles mais des exceptions sont présentes.

Pour les modèles biaisés, deux cas de figure existent. Si le biais est grand, l'ajustement

à 4 paramètres est préférable. Mais si le biais est faible et que l'ajustement à 4 paramètres donne des incertitudes très grandes, l'ajustement à 3 paramètres est préférable malgré le biais.
Pour les modèles valides, le raisonnement ne porte que sur la taille des incertitudes. Le meilleur ajustement est celui donnant les incertitudes les plus petites.
Par exemple, la fine bande hachurée au centre de la figure de gauche est constituée de cas où l'ajustement à 4 paramètres est préférable bien que l'ajustement à trois paramètres ne soit pas biaisé. Cela est dû à des incertitudes plus faibles avec l'ajustement à 4 paramètres. Ce phénomène est étonnant mais expliqué par la contrainte faible supposée sur Ω_M. Cette contrainte ne joue pas beaucoup sur l'ajustement à 3 paramètres. Par contre, sur l'ajustement à 4 paramètres, elle permet de réduire l'incertitude sur Ω_M en dessous de 0.1 et donc contraint légèrement w_0 par le jeu des corrélations. Le cas présenté en exemple, section 4.3.1, est un cas semblable, où l'incertitude sur w_0 est plus grande dans l'ajustement avec l'hypothèse $w_a = 0$ que dans l'ajustement complet. Ces cas sont quand même rares et les incertitudes, bien que plus petites, restent du même ordre de grandeur. Les incertitudes sont en fait comparables et les deux conditions d'ajustement sont valables.

En conclusion, l'ajustement à 3 paramètres est valable et suffit dans la plupart des cas. L'hypothèse $w_a = 0$ peut être utilisé pour extraire w_0, à court terme comme à long terme. Cependant, pour des modèles à forte dépendance en temps (grandes valeurs de $|w_a|$), l'ajustement complet est préférable.

4.3.4 Effet d'une contrainte forte sur Ω_M

Nous avons vu que la densité de matière, Ω_M, est le paramètre le plus souvent biaisé. Ce biais a pour effet de limiter la zone de validité des graphes *d* des figures 4.2 et 4.3 autour de $w_a^F = 0$. Contraindre a priori le paramètre Ω_M apparaît alors comme une solution pour augmenter la taille de la zone de validité. Il s'agit donc de forcer le résultat de l'ajustement à être correct pour ce paramètre. Nous allons appliquer la contrainte forte suivante : $\Omega_M = 0.3 \pm 0.01$. Cette contrainte est vraie puisque les modèles d'univers sont simulés avec $\Omega_M = 0.3$. Celle-ci ne devrait donc pas entraîner de biais supplémentaire.

La figure 4.5 montre les zones de biais et de validité du paramètre w_0 pour le scénario à long terme (à gauche) et à court terme (à droite). Ces graphiques remplacent les graphiques *c* des figures 4.2 et 4.3 mais avec une contrainte extérieure forte sur Ω_M. La légende est donc la même.

Les zones de détectabilité (ombrées) demeurent équivalentes à celles obtenues précédemment. Par contre, la zone de validité du paramètre w_0 est nettement réduite. De nombreux modèles qui n'étaient pas biaisés dans l'ajustement précédent, le deviennent lorsqu'on ajoute une contrainte forte (même vraie) sur Ω_M. L'explication de ce phénomène se trouve dans le jeu des corrélations des paramètres ajustés. Ce nouvel ajustement implique deux hypothèses d'ajustement :

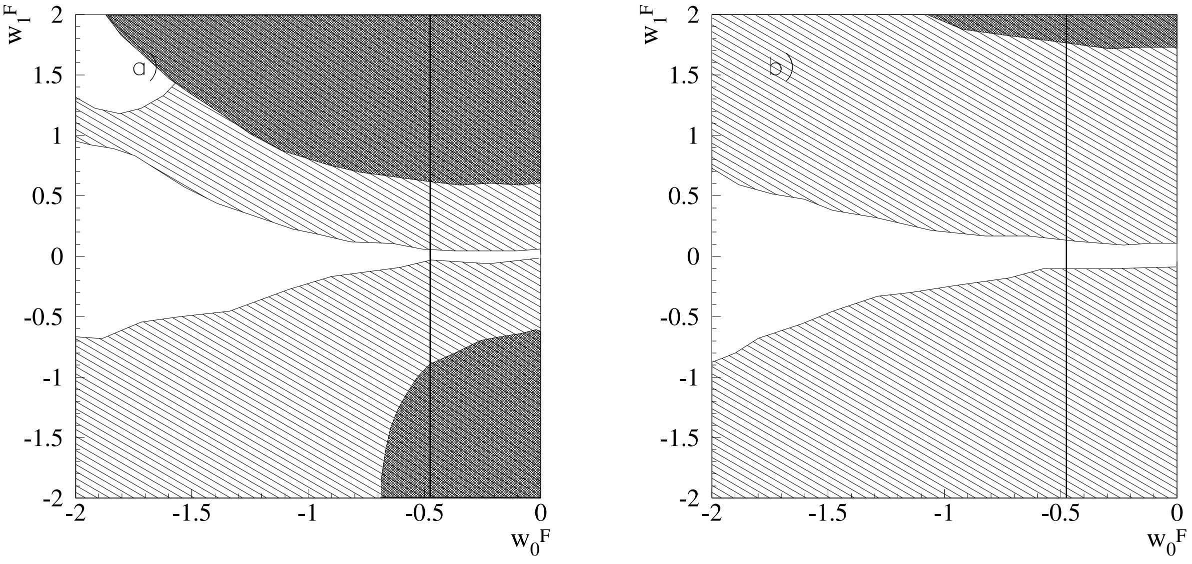

FIGURE 4.5 – *Résultat de l'étude de biais sur le paramètre w_0 supposant une contrainte forte sur Ω_M dans l'ajustement à trois paramètres ($\Omega_M = 0.3 \pm 0.01$). Le graphique a (b) présente les résultats du long (court) terme. Les surfaces ombrées sont les zones de détectabilité, les surfaces hachurées regroupent les modèles biaisés (zone de biais), les surfaces restées blanches représentent la zone de validité.*

- contraindre fortement Ω_M à 0.3, sa vraie valeur,
- imposer w_a à 0, une valeur fausse.

Ici, un seul paramètre est réellement ajusté : w_0. L'erreur d'estimation du paramètre w_a ne peut donc se propager que sur w_0, entraînant un biais d'autant plus élevé. Cela explique pourquoi, paradoxalement, les zones de biais sont plus grandes que lorsqu'aucune contrainte n'est utilisée sur Ω_M.

En conclusion, cette étude montre que si l'on veut utiliser l'hypothèse d'équation d'état de l'énergie noire constante, mieux vaut laisser libre le paramètre de densité de matière. Ce dernier "absorbe" l'effet dû à la fausse hypothèse. Son extraction est souvent biaisée mais permet une détermination du paramètre w_0, quant à elle, moins biaisée. Ce résultat montre bien l'ambiguïté de la conclusion précédente.

4.3.5 Conclusion

Nous avons étudié ici l'impact d'une hypothèse fausse supposée dans l'ajustement des données de supernovae. L'hypothèse consiste à considérer une équation d'état de l'énergie noire constante, ce qui revient à fixer w_a à 0. Dans ce but, nous avons réalisé des simulations pour un large panel de modèles d'énergie noire et pour différents scénarios statistiques correspondant à des observations futures attendues avec des programmes au sol et dans l'espace. Dans chaque cas, nous avons effectué un ajustement en fixant w_a à 0. Nous avons alors pu comparer les résultats obtenus avec les valeurs simulées pour vérifier la qualité de l'ajustement.

Nous avons vu que les résultats de l'étude sur le biais dépendent du paramètre ajusté et du scénario statistique considéré.
Alors que le paramètre M_S présente un ajustement valide pour tous les modèles testés le paramètre Ω_M est largement biaisé. Concernant le paramètre w_0, l'ajustement est valide dans la plupart des cas étudiés. Bien que le biais s'accentue dans le futur où les zones de validité sont restreintes, celui-ci reste bien reconstruit tant que la valeur simulée de w_a ne dépasse pas $|w_a| \simeq 2$.

L'effet de biais sur les résultats de l'ajustement imposant $w_a = 0$ est dû à de fortes corrélations entre les paramètres Ω_M, w_0 et w_a. Imposer une valeur sur l'un de ces trois paramètres, ici w_a, induit un décalage sur l'estimation des deux autres. La taille des incertitudes estimées détermine finalement le biais. C'est pourquoi le problème de biais est plus important dans le futur où la plus grande statistique permet une plus grande précision. En outre, cela explique pourquoi le paramètre Ω_M, avec des incertitudes petites, est plus souvent biaisé. Il apparaît alors que l'hypothèse $w_a = 0$ ne doit pas être utilisée pour extraire Ω_M.

Afin de réduire le biais constaté sur le paramètre Ω_M, nous avons fortement contraint ce paramètre a priori. Nous avons ainsi ajouté la contrainte $\Omega_M = 0.3 \pm 0.01$ centrée sur la valeur simulée de Ω_M. Cette condition d'ajustement supplémentaire entraîne alors un biais sur le paramètre w_0 plus fort et pour un plus grand nombre de modèles testés. Pour extraire ce paramètre, mieux vaut donc laisser Ω_M libre malgré sa mauvaise estimation.

Nous avons aussi réalisé les ajustements sans l'hypothèse fausse, c'est-à-dire en laissant libre w_a. Cela permet une comparaison avec l'ajustement en fixant w_a. Le but étant la meilleure précision sur le paramètre w_0 en limitant les biais, nous avons établi un estimateur de qualité basé sur la valeur du biais et l'incertitude sur w_0 obtenus pour ces deux ajustements. Il apparaît que fixer w_a est valable et suffisant dans la majorité des modèles testés. Néanmoins, si la "vraie" valeur de w_a est très grande ($|w_a| \gtrsim 2$), il sera préférable, dans le futur, de limiter l'utilisation de cette hypothèse. En outre, la précision obtenue sur le paramètre w_0 sera équivalente avec ou sans cette hypothèse.

4.4 Etude d'une contrainte a priori

Nous allons maintenant étudier l'effet d'une contrainte forte imposée a priori sur Ω_M. Dans cette étude, nous allons également utiliser des simulations de magnitudes de supernovae pour différents modèles d'énergie noire. Nous allons appliquer une contrainte fausse sur Ω_M dans l'ajustement et étudier son impact sur l'extraction des paramètres cosmologiques.

Nous allons d'abord introduire le problème grâce à un exemple. Puis nous généraliserons l'étude à différents modèles d'énergie noire.

4.4.1 Illustration

Dans le chapitre 3 nous avons voulu extraire les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire, w_0 et w_a des données du lot de supernovae UNION. Sans contrainte extérieure sur Ω_M nous avons obtenu des incertitudes très larges ne permettant pas de conclusion quant à l'évolution en redshift de l'énergie noire. Nous avons alors utilisé une contrainte extérieure forte sur Ω_M dans le but d'améliorer la précision sur les autres paramètres (w_0 et w_a).

Dans cette étude nous allons reproduire ces résultats par la simulation d'un lot de supernovae. Le lot utilisé est celui du scénario à court terme présenté dans la section 4.2. Celui-ci est similaire aux données actuelles de UNION par la distribution en redshift mais présente une statistique légèrement plus grande.
Nous choisissons de simuler un modèle d'univers dont les paramètres simulés sont les valeurs centrales obtenues avec les données UNION par l'ajustement sans contrainte sur Ω_M :

$$\begin{aligned}
\Omega_M^F &= 0.45\,, \\
w_0^F &= -1\,, \\
w_a^F &= -6\,.
\end{aligned}$$

Dans cet exemple, nous simulons un univers plat. L'ajustement sans contrainte sur Ω_M, réalisé avec la méthode rigoureuse, permet de retrouver les valeurs simulées. Les incertitudes obtenues sont très grandes, sur les trois paramètres ajustés. Le contour dans le plan (w_0, w_a) est tracé en trait plein dans la figure 4.6. Nous retrouvons avec la simulation des résultats similaires à ceux obtenus avec les données UNION.

Nous réalisons un second ajustement en imposant une contrainte forte sur Ω_M : $\Omega_M = 0.27 \pm 0.04$. C'est la contrainte que nous avons appliquée dans le chapitre 3 sur les données UNION. Dans cet exemple, nous savons que cette contrainte est fausse. On obtient :

$$\begin{aligned}
\Omega_M &= 0.270 \pm 0.040 \\
w_0 &= -1.198 \pm 0.142 \\
w_a &= 1.393 \pm 0.749.
\end{aligned}$$

Ces résultats sont également très proches de ceux obtenus avec les données UNION. La seule différence vient des incertitudes légèrement plus faibles ici, grâce à la plus grande

statistique.
Avec les simulations nous savons que la contrainte appliquée a priori sur Ω_M est fausse. En effet nous avons simulé Ω_M avec la valeur 0.45 puis nous avons imposé une valeur comprise entre 0.23 et 0.31 dans l'ajustement. En outre, cette contrainte fausse entraîne également un biais sur les paramètres d'équation d'état w_0 et w_a. Le paramètre w_0, le moins biaisé reste compatible à $1.4\,\sigma$ avec sa valeur simulée. Par contre, w_a s'éloigne de la valeur simulée à plus de 6 σ. Ce décalage a une incidence directe sur l'interprétation de la nature de l'énergie noire privilégiant un modèle avec w_a positif alors qu'il est en fait négatif.

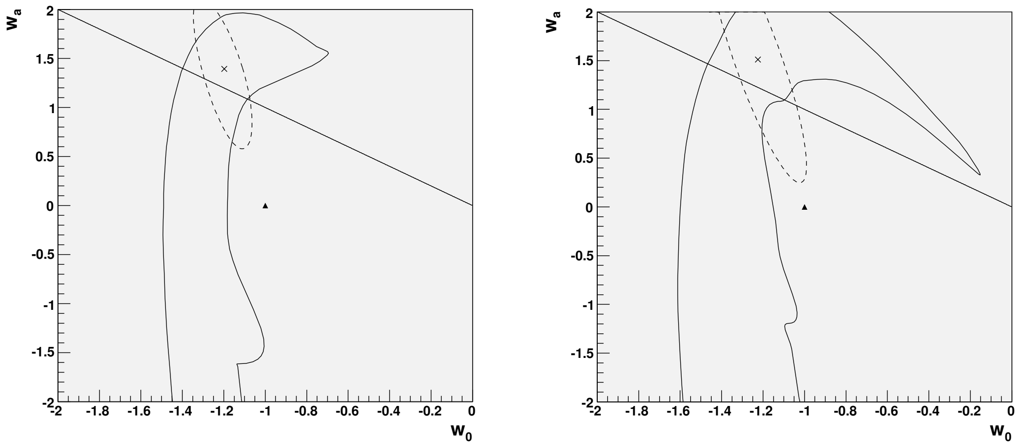

FIGURE 4.6 – *Contours obtenus pour les ajustements réalisés sur les simulations (à gauche) ou avec l'échantillon UNION (à droite), dans le plan (w_0, w_a). En trait plein : contour obtenu sans contrainte sur Ω_M. En pointillés : contour obtenu avec une contrainte forte imposée sur Ω_M.*

La figure 4.6, illustre les résultats des deux ajustements dans le plan (w_0, w_a), en utilisant des simulations ou les données UNION. En trait plein, le contour est obtenu avec un ajustement complet sans contrainte a priori. En pointillé, le contour est obtenu avec la contrainte forte sur Ω_M. A gauche, les contours sont réalisés avec les données simulées et à droite ils sont réalisés avec les données réelles d'UNION. La figure obtenue avec des simulations d'univers avec $\Omega_M = 0.45$ ressemble à s'y méprendre à celle obtenue avec les données UNION.
Avec les données simulées, nous savons que la contrainte ajoutée est erronée et nous pouvons mesurer le biais induit par celle-ci sur les paramètres extraits.
Avec les données réelles, rien ne permet de vérifier si cette contrainte appliquée est correcte et donc permet une détermination plus précise des paramètres cosmologiques ou si elle est fausse et entraîne une détermination erronée de la cosmologie.
Cet exemple illustre le problème de fiabilité et de confiance à porter à une contrainte

extérieure.

4.4.2 Analyse générale

Schéma d'analyse

L'analyse que nous menons ici est une généralisation réalisée en appliquant la même méthode que dans la section précédente. Les différents modèles d'univers sont simulés, en variant les paramètres w_0 et w_a. Nous fixons la densité de matière simulée à $\Omega_M^F = 0.45$, ce qui induit une valeur de densité d'énergie noire $\Omega_X^F = 0.55$ par la platitude de l'univers. Ces densités sont choisies pour garder la même valeur que celles testées en exemple. Pour une comparaison avec d'autres modèles, nous avons également réalisé l'étude pour $\Omega_M^F = 0.35$ ($\Omega_X^F = 0.65$) et $\Omega_M^F = 0.3$ ($\Omega_X^F = 0.7$), valeurs plus proches du modèle de concordance. L'ajustement est réalisé avec la contrainte fausse, $\Omega_M = 0.27 \pm 0.04$. Nous vérifions ensuite si le résultat est compatible avec le modèle simulé, afin de quantifier les modèles biaisés. Nous vérifions également la compatibilité du résultat avec le modèle de concordance, c'est-à-dire si les valeurs reconstruites de w_0 est w_a sont compatibles avec la constante cosmologique ($w_0 = -1$ et $w_a = 0$), nous parlerons alors de confusion avec le modèle ΛCDM.
La méthode d'analyse est schématisée par le tableau suivant :

Simulation	Contrainte	Ajustement	Etude
($\Omega_M^F = 0.45$, $\Omega_X^F = 0.55$) ($\Omega_M^F = 0.35$, $\Omega_X^F = 0.65$) ($\Omega_M^F = 0.3$, $\Omega_X^F = 0.7$)	$\Omega_M = 0.27 \pm 0.04$	M_s, Ω_M, w_0, w_a	Biais ou confusion sur : w_0 et w_a ?

Résultats de l'analyse

Nous appliquons cette méthode pour le scénario à court terme, de type SNLS, comme dans l'exemple. La platitude est fixée. L'analyse est d'abord réalisée pour :

$$\begin{aligned} \Omega_M^F &= 0.45 \\ \Omega_X^F &= 0.55\,. \end{aligned}$$

Un balayage des valeurs des paramètres d'équation d'état de l'énergie noire est effectué : w_0^F varie entre -2 et 0, w_a^F entre -4 et 4. Les figures de résultats de l'analyse sont données dans le plan des modèles d'énergie noire simulés (w_0^F, w_a^F). Cela permet de repérer :

les zones de biais, hachures obliques noires, constituées des modèles simulés dont l'ajustement est biaisé ;

les zones de validité, surfaces blanches, constituées des modèles simulés dont l'ajustement est valide ;

les zones de confusion, hachures horizontales rouges, constituées des modèles simulés dont l'ajustement est compatible avec la constante cosmologique.

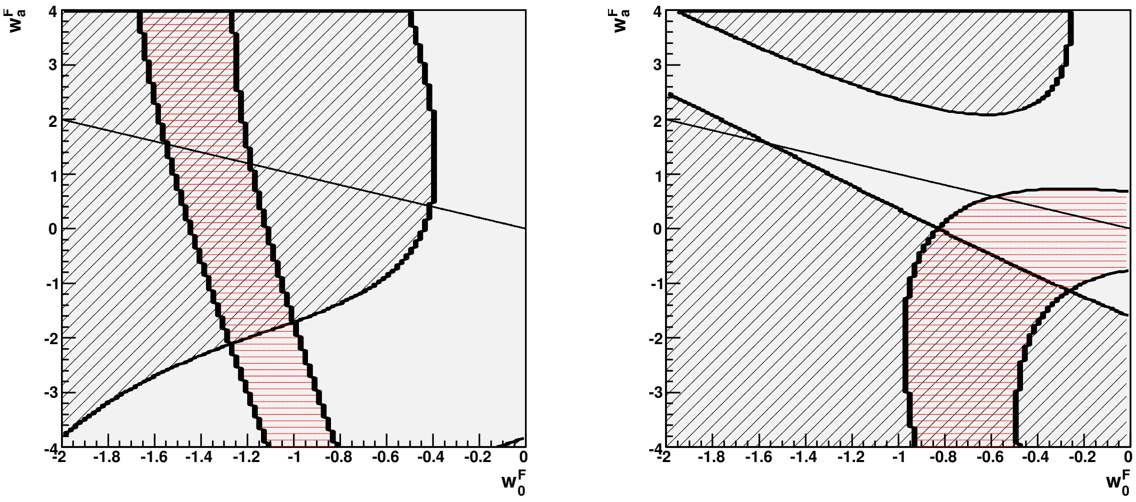

FIGURE 4.7 – *Résultats, dans le plan des modèles simulés (w_0^F, w_a^F), de l'analyse menée sur les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire, w_0, à gauche, et w_a à droite. Les zones hachurées en noir (hachures obliques) sont les zones de biais. En rouge (hachures horizontales), ce sont les zones de confusion, à gauche si w_0 est compatible avec -1 et à droite si w_a est compatible avec 0.*

L'étude est menée distinctement sur les paramètres w_0 et w_a en repérant le biais et la validité de chacun de ces deux paramètres. Les figures 4.7 montrent ainsi les résultats obtenus séparément sur w_0, à gauche et w_a à droite.

On peut constater en premier lieu qu'il n'y a pas de zone de mauvais ajustement. Cela signifie que tous les modèles testés passent le critère de détectabilité, les χ^2 obtenus montrent des ajustements corrects. S'il y a biais celui-ci n'est pas détecté.

Le second constat concerne les zones de biais. Celles-ci, très importantes, dominent le plan. On en conclut que les paramètres w_0 et w_a sont mal reconstruits pour la plupart des modèles testés. La contrainte a priori sur Ω_M entraîne donc une mauvaise détermination de w_0 et w_a dans la plupart des cas.
Nous pouvons également remarquer que les zones de biais (ou de validité) de ces deux paramètres ne recouvrent pas la même partie du plan. Cela veut dire que, dans de nombreux cas, un seul des deux paramètres est bien reconstruit. La zone de validité du paramètre w_0 concerne les modèles avec $w_0^F > -0.5$ ou $w_a^F < -2$. Ce sont des modèles exotiques proches de la décélération de l'expansion ou avec une valeur de w_a très grande. La zone de validité de w_a correspond au contraire à des modèles avec w_a^F positifs ou proches de 0. Celles-ci ne coïncident donc que pour des modèles avec $w_0^F \gtrsim -0.5$ et $w_a^F \gtrsim 0$.

Le critère de confusion permet de visualiser les modèles dont l'ajustement est compatible avec une valeur remarquable de w_0 et w_a. Nous avons quantifié les modèles où w_0 est compatible à $1\,\sigma$ avec -1 et w_a avec 0. Nous avons choisi ces valeurs pour correspondre à la constante cosmologique ($w_0 = -1$ et $w_a = 0$) ou à une équation d'état de l'énergie noire constante ($w_a = 0$). Ces zones de confusion définies pour chaque paramètre sont représentées dans la figure 4.7 en hachures horizontales rouges.
Pour le paramètre w_0, cette zone s'étend aux modèles pour lesquels w_0^F est compris entre -1.6 et -0.8. Pour certains cas de cette zone, cette confusion n'est pas problématique puisque compatible avec la valeur simulée, mais pour les modèles avec w_0 compris entre -1.6 et -1.1 avec une valeur de w_a supérieure à -2 l'ajustement est biaisé et w_0 confondu avec -1.
La même étude, réalisée sur w_a, montre une confusion possible avec 0 pour les modèles avec $w_a^F < 1$ et $w_0^F > -1$. Les cas de confusion cumulée à un biais correspondent à $w_a^F < 0$. Pour ces ajustements une équation dynamique est reconstruite comme une équation d'état constante entraînant une mauvaise interprétation de la nature de l'énergie noire.

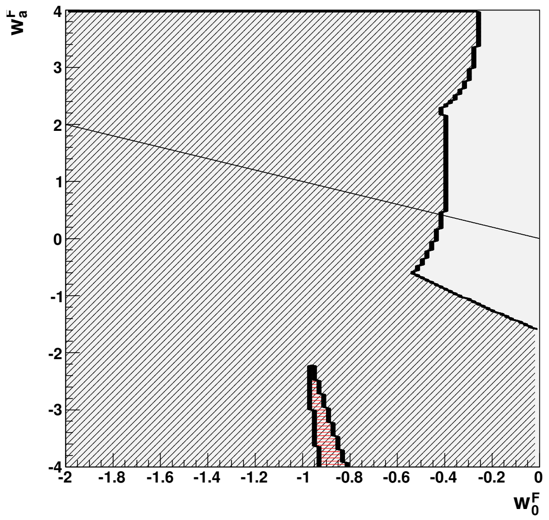

FIGURE 4.8 – *Résultats de l'analyse dans le plan (w_0^F, w_a^F) pour $\Omega_M^F = 0.45$. Zone hachurée en noir (hachures obliques) : zones de biais (si l'un au moins des deux paramètres est mal reconstruit). Zone blanche : zone de validité (les deux paramètres sont bien reconstruits). Zone hachurées en rouge (hachures horizontales) : zone de confusion avec le modèle ΛCDM (si w_0 est compatible avec -1 et w_a compatible avec 0, l'équation d'état reconstruite correpond à celle de la constante cormologique).*

La figure 4.8 regroupe ces résultats pour une vision globale de l'équation d'état de l'énergie noire. Un ajustement est défini comme biaisé si l'un au moins des paramètres d'énergie noire (w_0 ou w_a) est biaisé. Comme nous l'avons vu, la quasi-totalité des modèles

testés ont au moins un paramètre biaisé (zone de biais symbolisée par des hachures obliques). La fausse contrainte a priori appliquée sur le paramètre de densité de matière, Ω_M, entraîne une mauvaise détermination des paramètres d'équation d'état de l'énergie noire et donc une mauvaise interprétation de sa nature.
Nous avons vu dans l'étude précédente que le paramètre Ω_M est très corrélé aux paramètres d'équation d'état de l'énergie noire, w_0 et w_a. Imposer une valeur fausse à Ω_M entraîne alors une mauvaise estimation de ces paramètres par le jeu des corrélations.

En outre, certains des modèles biaisés sont compatibles avec une constante cosmologique. Il s'agit de modèles d'énergie noire dynamique caractérisés par : $w_0^F \simeq -0.9$ et $w_a^F < -2$. Dans ces cas, une énergie noire dynamique est reconstruite comme la constante cosmologique.

Nous avons également réalisé l'étude dans le scénario à long terme. Dans ce scénario, la statistique est plus grande et l'intervalle en redshift plus étendu. Les modèles testés montrent tous un biais sur les paramètres de l'équation d'état de l'énergie noire. Les incertitudes plus petites permettent moins de compatibilité avec le modèle simulé. Le problème du biais est donc identique, voire plus étendu, dans le long terme. Par contre, la confusion avec la constante cosmologique est moindre, ne concernant que les modèles avec $w_a^F < -4$.

Comparaison avec d'autres modèles d'univers

Nous avons réalisé la même étude pour des densités de matière et d'énergie noire simulées plus proches du modèle de concordance :

1^er^cas : à $2\,\sigma$ de la contrainte a priori appliquée sur Ω_M

$$\begin{aligned} \Omega_M^F &= 0.35 \\ \Omega_X^F &= 0.65\,. \end{aligned}$$

2^e^cas : à $1\,\sigma$ de la contrainte a priori appliquée sur Ω_M

$$\begin{aligned} \Omega_M^F &= 0.3 \\ \Omega_X^F &= 0.7\,. \end{aligned}$$

Les résultats de l'étude de biais sur les paramètres w_0 et w_a sont présentés dans le plan $(w_0^F,\, w_a^F)$ des modèles simulés dans la figure 4.9. La légende est identique à celle de la figure 4.8.

1^er^cas :
Les résultats sont présentés dans la partie gauche de la figure 4.9. La zone de biais est moins grande que dans le cas précédent. Une partie des modèles testés sont donc valides. La zone de validité s'étend sur un large quart du plan pour des valeurs de w_0^F et w_a^F :

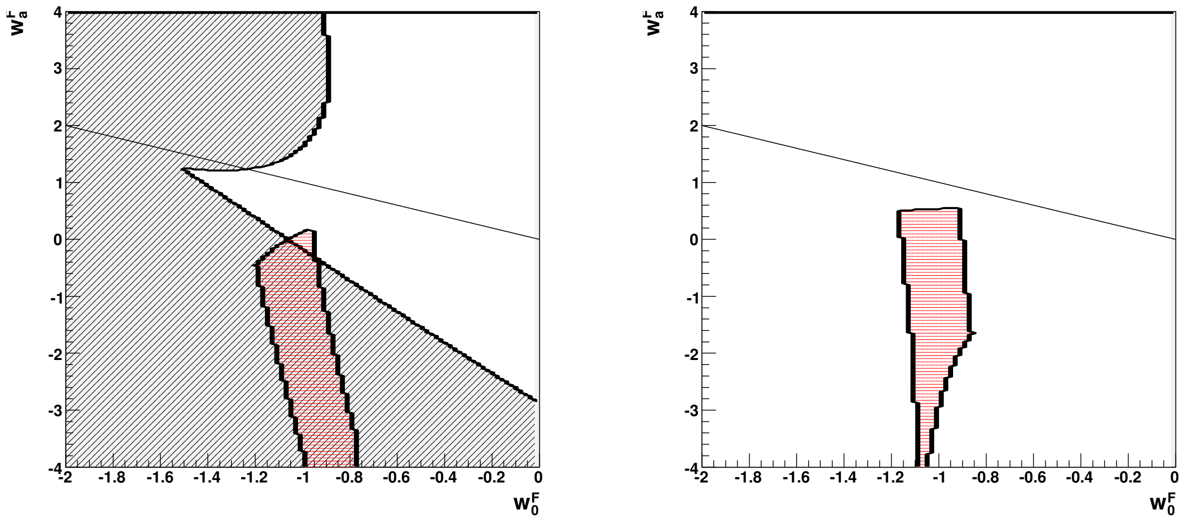

FIGURE 4.9 – *Résultats de l'analyse dans le plan (w_0^F, w_a^F). A gauche : $\Omega_M^F = 0.35$, à droite : $\Omega_M^F = 0.3$. Zone hachurée en noir : zones de biais (si l'un au moins des deux paramètres est mal reconstruit). Zone blanche : zone de validité (les deux paramètres sont bien reconstruits). Zone hachurées en rouge : zone de confusion avec le modèle ΛCDM (si w_0 est compatible avec -1 et w_a compatible avec 0, l'équation d'état reconstruite correpond à celle de la constante cosmologique).*

$w_0^F \gtrsim -1.2$ et $w_a^F > -3$. En particulier, la constante cosmologique est bien reconstruite, contrairement à l'analyse précédente où ce modèle était biaisé.
Néanmoins il existe une zone de confusion avec la constante cosmologique autour de $w_0^F = -1$. Celle-ci est grande mais n'est pas problématique. En effet, les valeurs reconstruites sont compatibles avec la constante cosmologique mais les valeurs simulées le sont aussi. Les modèles pour lesquels cette confusion apparaît est proche de la constante cosmologique : $w_0^F = -1$ et les incertitudes sur w_a sont suffisamment grande pour permettre $w_a = 0$.

2ᵉcas :
Les résultats de l'étude, présenté dans la partie droite de la figure 4.9 montrent que les modèles d'énergie noire sont bien reconstruits. Il n'y a pas de biais, les ajustement sont valides dans tout le plan. Cela s'explique par le fait que la contrainte imposée sur Ω_M est très proche de la valeur simulée. L'intervalle imposée sur Ω_M étant de 0.04, la valeur simulée de Ω_M est incluse dans la contrainte imposée. La simulation et la contrainte imposée sont compatibles, il n'y a donc pas de source de biais. La zone rayée en rouge montre les modèles compatibles avec la constante cosmologique mais leur ajustement reste valide.

Nous avons donc mené l'étude de biais pour des modèles d'univers avec une densité de matière qui s'éloigne à 1σ de la contrainte imposée ($\Omega_M^F = 0.3$), à 2σ ($\Omega_M^F = 0.35$) et à plus de 3σ ($\Omega_M^F = 0.45$). Nous avons montré que le biais apparaît dès que la valeur simulée de Ω_M s'éloigne à plus de 1σ de la valeur imposée. De plus, les ajustements sont toujours corrects. Le test du χ^2 ne permet pas de détecter ce biais, ce qui indique que cela sera très difficilement discernable avec de vraies données.

4.4.3 Conclusion de l'étude

Nous avons mené l'étude de biais sur différents modèles d'univers. La contrainte imposée sur Ω_M est source de biais dès qu'elle est fausse. Si la valeur simulée de Ω_M est suffisamment proche de la valeur de la contrainte, il n'y a pas de biais et la contrainte permet de réduire les incertitudes sur les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire w_0 et w_a. Par contre si la valeur simulée de Ω_M s'éloigne de la valeur imposée, un biais apparaît dans l'extraction des paramètres w_0 et w_a. Plus la valeur simulée de Ω_M s'éloigne de la valeur de la contrainte plus le biais est fort et étendu sur le plan (w_0^F, w_a^F). Ces mauvaises estimations des paramètres w_0 et w_a engendrent une mauvaise interprétation de la cosmologie qui ne peut pas être détectée par un test du χ^2. Ces résultats montrent donc les risques liés à l'utilisation d'une mauvaise contrainte extérieure avec les données réelles. Nous avons aussi montré que le problème loin d'être résolu dans le long terme s'accentue. En effet une plus grande statistique réduit les incertitudes et augmente donc le biais.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons testé deux conditions d'ajustement souvent utilisées avec les données des supernovae. Nous avons étudié l'hypothèse d'une équation d'état constante ($w_a = 0$), puis l'effet d'une contrainte forte imposée sur Ω_M. Les deux études ont été réalisées dans le cadre de simulations de données de supernovae.

Nous avons montré dans la première étude que supposer une équation d'état constante peut engendrer des biais sur les autres paramètres cosmologiques. En particulier, cet ajustement ne donne pas une bonne estimation de Ω_M, paramètre fortement biaisé. Par contre, nous avons vu qu'il est valable dans la plupart des cas pour extraire le paramètre w_0.

La seconde étude a montré qu'imposer une valeur fausse à Ω_M, entraîne une mauvaise détermination de la nature de l'énergie noire voire, parfois, une confusion avec le modèle de concordance. Nous avons vu que ce problème est présent dans les données actuelles et le sera dans le futur. Les résultats actuellement obtenus avec les supernovae sont tous dépendants de cette hypothèse. Une validation des choix de contraintes extérieures est donc nécessaire.

Dans les deux études nous avons montré que les biais dans la détermination des paramètres cosmologiques ne sont pas détectables dans des données réelles. Cela pose un problème de confiance dans les résultats obtenus avec les données actuelles de supernovae. Dans ces deux études nous avons utilisé avec les simulations les mêmes méthodes qu'avec les données réelles et les mêmes conditions d'ajustement. Nous avons testé ces conditions, fixer w_a à 0 ou imposer une valeur a priori à Ω_M par une contrainte forte, dans le but de déterminer la nature de l'énergie noire. Nous avons montré que supposer $w_a = 0$ est possible dans la plupart des cas, par contre, l'utilisation d'une contrainte forte sur Ω_M seule ou avec la première hypothèse, n'est pas recommandé. Pourtant si l'on veut déterminer la nature de l'énergie noire, les supernovae seules, sans hypothèse ou contrainte forte, ne sont pas suffisantes.

La combinaison globale de données d'autres sondes cosmologiques apparaît alors comme une solution à ce problème. Combiner les données des supernovae avec celles du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons par exemple, semble un moyen de ne pas utiliser de contrainte sur Ω_M. Cette combinaison permettrait donc de déterminer les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire sans contrainte sur Ω_M.
Nous introduirons cette combinaison de données dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

Analyses combinées

5.1 Introduction

Nous avons vu que les supernovae seules permettent aujourd'hui de mettre en évidence l'accélération de l'univers prouvant la présence d'une constante cosmologique ou d'une énergie noire. Par contre la nature de l'énergie noire reste difficile à déterminer. Dans le chapitre 3, nous avons vu que pour obtenir une première estimation de l'équation d'état de l'énergie noire, plusieurs hypothèses sont nécessaires dans l'ajustement. L'univers est supposé plat et l'équation d'état de l'énergie noire est supposée constante. En considérant une équation d'état de l'énergie noire qui évolue avec le temps, la seule estimation des paramètres d'énergie noire est obtenue en ajoutant une contrainte forte sur la densité de matière. Pour extraire les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire, il est donc nécessaire de bien contraindre la densité de matière et la courbure de l'univers.

Dans le chapitre 4, nous avons montré, à l'aide de simulations, les risques consistant à supposer une équation d'état constante ou à ajouter une contrainte extérieure forte. Ces hypothèses, si elles sont erronées ou mal utilisées, peuvent en effet entraîner des conclusions fausses et une mauvaise interprétation des données. Nous avons alors préconisé de ne pas les utiliser au profit de combinaison de données issues de sondes complémentaires.

La figure issue de Kowalski et al. [28], reprise dans les chapitres 2 et 3, nous a permis de montrer que le fond diffus cosmologique et les oscillations acoustiques de baryons sont des sondes complémentaires aux supernovae. Le fond diffus cosmologique semble apporter une information sur la courbure de l'univers (Ω_k) et les oscillations acoustiques de baryons sont particulièrement sensibles à la densité de matière. Ces deux apports sont nécessaires aux supernovae pour obtenir une estimation des paramètres d'énergie noire. Leur combinaison permettrait alors d'éviter l'ajout de contraintes extérieures ou d'hypothèses théoriques.

Dans ce chapitre, nous allons voir comment effectuer cette combinaison de données. Nous présenterons d'abord la description statistique de l'analyse du fond diffus cosmolo-

gique et des oscillations acoustiques de baryons, dans la section 5.2. Nous décrirons les paramètres cosmologiques associés et le calcul de leurs χ^2.
Dans la section 5.3, nous détaillerons la méthode d'une combinaison de données des supernovae, du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons en mettant en avant les atouts d'une telle analyse mais aussi les difficultés qu'elle engendre.

Nous introduirons alors dans la section 5.4, les paramètres réduits du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons permettant une analyse combinée simplifiée.
Grâce à ces derniers, nous étudierons, dans la section 5.5, les dégénérescences qui rendent difficile l'extraction des paramètres cosmologiques.
Dans la section 5.6, nous appliquerons enfin la méthode de combinaison aux données des supernovae, avec les paramètres réduits du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons pour extraire les paramètres cosmologiques et en particulier les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire, w_0 et w_a.

5.2 Les sondes

Cette section est dédiée au fond diffus cosmologique et aux oscillations acoustiques de baryons dans le but d'une combinaison de données avec celles des supernovae. Nous détaillerons les paramètres auxquels ces sondes sont sensibles et la méthode de leur extraction dans les données.

5.2.1 Le fond diffus cosmologique

La détection du fond diffus cosmologique est réalisée grâce à la mesure de température du ciel. Dans le chapitre 2 nous avons vu que les anisotropies de température mesurées permettent de réaliser un spectre angulaire dont la forme dépend de nombreux paramètres. L'ajustement des paramètres est alors réalisé sur le spectre à travers les C_l.
Ces paramètres, que nous avons introduits au chapitre 2, sont rappelés ici :
- la densité de matière baryonique, Ω_b, et de matière noire, Ω_c, constituant la densité de matière, Ω_M, par leur somme ;
- la densité d'énergie noire : Ω_X ;
- les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire : w_0 et w_a.

Le paramètre de courbure, Ω_k, est déduit des autres paramètres par l'équation de Friedmann : $\Omega_M + \Omega_X = \Omega_T = 1 - \Omega_k$. Notons que le fond diffus cosmologique est sensible distinctement à la matière baryonique et noire contrairement aux supernovae qui sont sensibles à l'ensemble de la matière sans distinction.

Les autres paramètres dont il faut tenir compte sont décrits par [69, 5, 47, 58] et dans la section 2.2.3 de ce manuscrit :
- h, la constante de Hubble ;

– les paramètres du spectre de fluctuations scalaires primordiales : A_s, l'amplitude des perturbations, et n_s, l'indice spectral scalaire ;
– τ, la profondeur optique de réionisation.

Ces paramètres constituent le lot le plus simple donné par WMAP où les perturbations primordiales sont supposées gaussiennes et adiabatiques. Neuf paramètres doivent donc être ajustés. Dans le cas le plus restrictif, supposant l'univers plat et une constante cosmologique, six paramètres sont à ajuster (Ω_b, Ω_c, h, A_s, n_s et τ).

Les données utilisées ici sont issues des cinq années de détection de WMAP [69, 5, 47]. Le χ^2 du fond diffus cosmologique est déduit des C_l du spectre en température du fond diffus cosmologique. Son calcul n'est pas trivial car les C_l ne sont pas indépendants. Il faut également prendre en compte les caractéristiques du détecteur comme la résolution, quantifiée par une fonction fenêtre, w_l ou le bruit, N_l. A cause de la corrélation des C_l, la forme exacte de la fonction de vraisemblance, L, est difficile et longue à obtenir en terme de temps de calcul. Une approximation est nécessaire. Celle proposée par la collaboration WMAP est composée d'une partie gaussienne et d'un terme lognormal ajouté pour tenir compte de la non-gaussianité, [59, 69] :

$$\ln L = \frac{1}{3} \ln L_{Gauss} + \frac{2}{3} \ln L_{LN} , \tag{5.1}$$

Le terme gaussien est donné par :

$$-2 \ln L_{Gauss} = \sum_{ll'} (C_l^{th} - C_l)\, Q_{ll'}\, (C_{l'}^{th} - C_{l'}) , \tag{5.2}$$

où les C_l correspondent aux multipoles mesurés, les C_l^{th} représentent le modèle en fonction des paramètres à ajuster et $Q_{ll'}$ est la matrice dite de courbure.
Le terme lognormal s'exprime :

$$-2 \ln L_{LN} = \sum_{ll'} (z_l^{th} - z_l)\, \mathcal{Q}_{ll'}\, (z_{l'}^{th} - z_{l'}) , \tag{5.3}$$

où les variables z_l^{th} et z_l sont les variables lognormales définies par : $z_l^{th} = \ln(C_l^{th} + N_l)$ et $z_l = \ln(C_l + N_l)$.

On peut donc écrire le χ^2 du fond diffus cosmologique :

$$\chi^2_{CMB} = -2 \ln L = -\frac{2}{3} \ln L_{Gauss} - \frac{4}{3} \ln L_{LN} . \tag{5.4}$$

5.2.2 Les oscillations acoustiques de baryons

Nous avons précédemment constaté que pour une estimation de l'équation d'état de l'énergie noire, il est nécessaire d'avoir une bonne connaissance de la densité de matière.

Or, comme nous l'avons vu dans la section 2.3, les oscillations acoustiques de baryons fournissent cette information. Nous utiliserons ici les données de SDSS présentées dans Eisenstein et al. [42].

Les paramètres sont ajustés sur le spectre de puissance, $p(k)$, ou sur la fonction de corrélation, $\xi(r)$. Nous avons choisi de suivre la méthode issue de Seo et Eisenstein [70] et Eisenstein et al. [42], et calculé le χ^2 sur la fonction de corrélation. Nous retrouvons avec cette sonde la plupart des paramètres introduits avec le fond diffus cosmologique : les paramètres du spectre des fluctuations primordiales, A_s et n_s et le paramètre de Hubble h auxquels il faut ajouter le paramètre de biais, b. Pour compléter ce lot, nous devons également inclure les paramètres cosmologiques, Ω_b, Ω_c, Ω_X, w_0 et w_a. Notons que, dans ce cas aussi, la matière baryonique et la matière noire sont estimées séparément.

Le χ^2 est donné sous la forme matricielle :

$$\chi^2_{BAO} = (\xi - \xi_{th})^T V^{-1} (\xi - \xi_{th}). \tag{5.5}$$

La matrice de covariance V est donné par Eisenstein et al. [42].

5.3 La combinaison de données

Dans cette section nous allons expliquer la méthode de combinaison de données. Nous décrirons le principe de telles analyses en insistant sur ses atouts mais aussi les difficultés qu'elles entraînent.

5.3.1 Méthode statistique de combinaison

Nous avons introduit la méthode statistique d'extraction des paramètres cosmologiques dans le chapitre 3. Celle-ci, basée sur la méthode des moindres carrés, permet de réaliser aisément une combinaison de données. Puisque les mesures des différentes sondes sont indépendantes les unes de autres, la combinaison s'effectue par la somme des χ^2 de chaque sonde :

$$\tilde{\chi^2} = \chi^2_{SN} + \chi^2_{CMB} + \chi^2_{BAO} \,. \tag{5.6}$$

C'est alors ce nouveau χ^2 qui doit être minimisé.
Néanmoins, chaque sonde ajoutée augmente le nombre de paramètres à ajuster. Avec la combinaison des trois sondes, ce lot est constitué de 11 paramètres. Il comprend :

- les paramètres cosmologiques (communs aux trois sondes) : Ω_b, Ω_c, Ω_X, w_0 et w_a ;
- le paramètre de normalisation du paramètre de Hubble propre aux supernovae : M_S ;
- les paramètres du spectre des fluctuations primordiales : A_s et n_s ;
- le paramètre de Hubble, h ;
- la profondeur de ionisation, τ ;
- le biais, b.

5.3.2 Le principe d'une analyse combinée

Dans une analyse combinée, l'information de chaque sonde est prise en compte. En outre, contrairement à l'utilisation d'une contrainte extérieure, la combinaison de données permet de prendre en compte tous les paramètres dans le même ajustement global. Le poids de chaque sonde et les corrélations entre les paramètres sont déterminés par le calcul du χ^2.
De plus, une plus grande statistique et des informations complémentaires permettent d'éviter l'utilisation de certaines hypothèses.

Ce traitement rigoureux apporte ainsi des résultats plus fiables et plus complets. Les valeurs centrales, les incertitudes et les corrélations de tous les paramètres sont déterminés par le même ajustement et exactement dans les mêmes conditions.

La combinaison des données des supernovae, du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons implique l'extraction de nombreux paramètres, jusqu'à 11. Cet accès à un nombre élevé de paramètres permet une description plus complète de l'univers mais engendre des dégénérescences qui se manifestent par des grandes corrélations, des larges incertitudes et compliquent la recherche du minimum du χ^2.

Le χ^2 de la combinaison de ces trois sondes présente en effet plusieurs minima secondaires qui influent sur le processus de minimisation. La convergence vers le minimum est plus difficile, il est ainsi possible de "tomber" dans une minimum secondaire. Si un minimum secondaire est atteint avant le minimum absolu du χ^2, les valeurs centrales trouvées sont décalées et les incertitudes mal estimées.

Pour éviter ces cas, la méthode d'exploration du χ^2 demande un grand nombre de calcul de χ^2. Or, du fait de la complexité du fond diffus cosmologique, le calcul d'un seul χ^2 prend 2 minutes de temps CPU. La minimisation est alors d'autant plus longue qu'il y a de paramètres à ajuster et donc d'espaces des paramètres à explorer. Un ajustement à 10 paramètres, supposant l'univers plat, prend 24 heures de calcul en temps CPU, soit environ 12 heures de temps réel avec un ordinateur personnel.

La méthode d'analyse et de contour est la plus rigoureuse par minimisation et marginalisation (cf. 3.1.5). Les valeurs centrales et les incertitudes sont obtenues par minimisation sur tous les paramètres. Les contours sont établis par marginalisation dans l'espace des paramètres représenté, c'est-à-dire par une minimisation en chaque point du plan sur les autres paramètres. Avec cette méthode, réaliser un contour demande une importante densité de points dans l'espace des paramètres considérés (au moins 400). Plusieurs centaines d'ajustements sont donc nécessaires. Utiliser une grille de calcul permet de paralléliser les ajustements sur plusieurs centaines de machines simultanément. Typiquement environ 400 machines sont sollicitées. Un contour, demandant par exemple 20.000 heures CPU, est ainsi obtenu en quelques jours. Avec les données, cette méthode, bien que longue est donc possible. Nous reviendrons sur une analyse combinée de données issues des supernovae, du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons dans le chapitre 7.

Avec les simulations, une étude comme celle présentée dans le chapitre précédent, avec plusieurs centaines de modèles cosmologiques testés, devient impossible. Il faudrait, en effet, réaliser plusieurs centaines, voire plusieurs milliers d'ajustements, coûteux en temps de calcul. Une approche simplifiée de la combinaison de données est donc nécessaire. Dans ce but, nous avons choisi d'utiliser des paramètres réduits, remplaçant les données du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons. Ce moyen plus rapide de réaliser des analyses combinées permet d'extraire les principaux paramètres cosmologiques. Ces paramètres réduits, extraits des données, sont présentés dans la section suivante.

5.4 Les paramètres réduits

Le fond diffus cosmologique et les oscillations acoustiques de baryons induisent un grand nombre de paramètres à ajuster rendant la minimisation longue et difficile. Afin de répondre à ce problème, des paramètres réduits sont souvent utilisés pour déterminer l'équation d'état de l'énergie noire.

Dans cette section, nous présenterons les paramètres réduits du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons, leur expression en fonction des paramètres cosmologiques, leur extraction des données et leur utilisation avec les supernovae.

5.4.1 Les paramètres réduits du fond diffus cosmologique

Le paramètre réduit le plus utilisé et le plus important du fond diffus cosmologique est le paramètre R, souvent nommé *shift parameter*. Pour compléter les informations de ce paramètre, et afin d'obtenir des résultats de plus en plus proches du fond diffus cosmologique complet, sont parfois ajoutés la position du premier pic, l_a, et le redshift à la recombinaison, z_*. Ces trois paramètres forment alors le lot de paramètres réduits appelé *distance priors*.

Le paramètre R

Le fond diffus cosmologique est sensible à certaines distances de l'époque du découplage à travers la position et l'amplitude des pics du spectre de ses anisotropies. Le paramètre R est relié à la distance angulaire à l'époque de la recombinaison, z_*, par définition :

$$R = \sqrt{\Omega_M H_0^2}\,(1+z_*)D_A(z_*) = \sqrt{\Omega_M H_0^2}\,r(z_*) \tag{5.7}$$

Son expression tient compte des paramètres cosmologiques par l'expression de la distance angulaire :

$$R = \sqrt{\frac{\Omega_M}{|\Omega_k|}} S_k \left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^{z_*} \frac{dz'}{\frac{H(z)}{H_0}} \right) \tag{5.8}$$

où la fonction $S_k(x)$ s'exprime :

$$S_k(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } k = 1 \\ x & \text{si } k = 0 \\ \sinh x & \text{si } k = -1 \end{cases} \tag{5.9}$$

Comme pour toute distance, nous retrouvons ici le terme $\frac{H(z)}{H_0}$ à travers l'intégrale sur z déjà vue dans l'expression des distances de luminosité des supernovae, équation 3.28. C'est par ce terme que sont déterminés les paramètres cosmologiques, densités d'énergie et paramètres d'équation d'état de l'énergie noire :

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_X(1+z)^{3(1+w_0+w_a)} e^{-3w_a z/(1+z)} \tag{5.10}$$

Il est important de noter que R est indépendant de H_0. Les seuls paramètres ajustables intervenant dans cette expression, sont les densités d'énergie, Ω_M et Ω_X, et les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire.

Le paramètre R peut être vu comme une caractéristique du spectre des anisotropies du fond diffus cosmologique. Il a notamment été introduit pour étudier la dégénérescence géométrique entre les paramètres de courbure et la constante cosmologique par Bond et Efsthatiou [71, 72]. Ces derniers montrent que des spectres identiques peuvent être obtenus à partir de valeurs différentes du paramètre de courbure et de la constante cosmologique en fixant les conditions du spectre de fluctuations primordiales [1]. Ces spectres identiques sont caractérisés par une même valeur de R. Ce paramètre contient donc la majeure partie de l'information cosmologique du fond diffus cosmologique.

Du point de vue expérimental, la valeur de ce paramètre est extraite du spectre en température des anisotropies du fond diffus cosmologique. Les données sont issues de l'expérience WMAP. Le paramètre R dépend cependant du modèle de perturbations primordiales supposé, comme le montre Elgaroy et al. [73]. Pour extraire ce paramètre, la collaboration WMAP utilise alors une loi de puissance, modèle le plus simple et qui semble être privilégié dans les données. Elgaroy et al. [73] illustre aussi la dépendance de R avec les modèles de neutrinos massifs. Là encore, nous nous en tiendrons, comme WMAP, au cas de neutrinos de masse minimale de $0.05\,eV$ et au nombre de 3.04.

1. Nous reviendrons sur la notion de dégénérescence géométrique dans la section 5.5

Avec ces hypothèses, Wang et Mukherjee [74, 75] montrent que l'extraction du paramètre R ne dépend pas du modèle d'univers supposé. La figure 5.1 illustre l'extraction du paramètre R dans différents cas : ΛCDM, équation d'état constante ou variant avec le redshift, univers plat ou courbe.

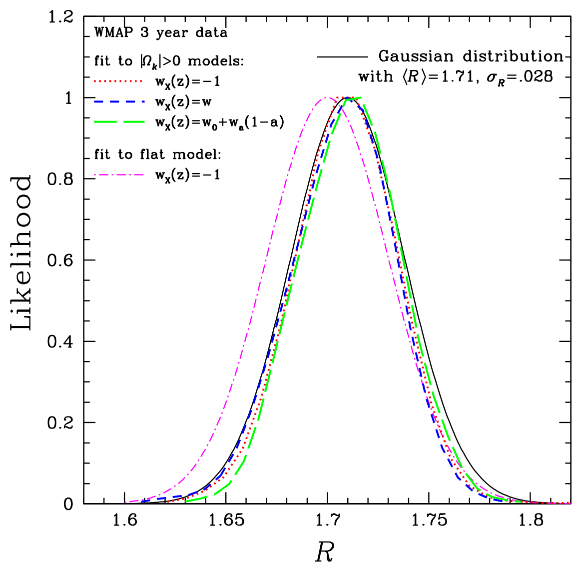

FIGURE 5.1 – *Extraction du paramètre R des données de 3 ans de WMAP. Figure issue de Wang & Mukherjee [75]*

Avec les données des trois premières années de WMAP la moyenne des maxima de vraisemblance (L), est obtenue pour : $R = 1.71 \pm 0.03$ [75].
Avec la même méthode, WMAP donne, après 5 ans d'expérience : $R = 1.710 \pm 0.019$ [5].

L'utilisation de R en substitution aux données du fond diffus cosmologique est alors possible. Le χ^2 s'exprime comme décrit chapitre 3 :

$$\chi^2_R = \left(\frac{R - R^{th}}{\sigma_R}\right)^2$$

où R est la valeur extraite des données et σ_R sont incertitude associée, R^{th} est l'expression de R dépendant des paramètres cosmologiques décrite par l'équation 5.8.

Il apparaît que le nombre de degrés de liberté (les paramètres cosmologiques) est plus grand que le nombre de mesures (1). Ce paramètre ne peut pas être utilisé seul. Il doit être combiné à une autre sonde telles les supernovae.

Les "distance priors" de WMAP

Depuis 2007, certains auteurs (Wang & Mukherjee[75], Elgaroy & Multamäki[73], Komatsu et al.[5]) préconisent de compléter les informations apportées par le paramètre R en utilisant la position du premier pic, l_a, pour se rapprocher des résultats obtenus par le CMB complet. Le paramètre l_a est alors introduit afin de reproduire au plus près les résultats de l'extraction des paramètres cosmologiques par l'analyse complète du spectre des anisotropies du fond diffus cosmologique.
Ce paramètre s'exprime :

$$l_a = \pi \frac{r(z_*)}{r_s(z_*)} \tag{5.11}$$

où $r(z_*)$ est la distance comobile au redshift de la recombinaison, z_*, et $r_s(z_*)$ est l'horizon sonore à la recombinaison. Ce dernier terme s'exprime :

$$r_s(z_*) = \frac{1}{H_0\sqrt{3}} \int_{z_*}^{\infty} \frac{dz}{\left(\frac{1}{1+z}\right)^2 \frac{H(z)}{H_0} \sqrt{1 + \left(\frac{3\Omega_b}{4\Omega_\gamma}\right)\left(\frac{1}{1+z}\right)}} \tag{5.12}$$

où Ω_γ est la densité de photons et vaut $\Omega_\gamma = 2.469\,10^{-5}\,h^{-2}$. Comme R, l_a dépend des paramètres cosmologiques par l'expression de $r(z_*)$ mais également à travers $r_s(z_*)$. Nous remarquons également que d'autres paramètres se rajoutent à ceux présents dans R : Ω_b et h dont dépend Ω_γ. Il faut donc en tenir compte dans les ajustement. Notons que le paramètre l_a, contrairement à R, n'est donc pas indépendant de H_0.

Le paramètre l_a est extrait du spectre des anisotropies du fond diffus cosmologique avec la même méthode que celle utilisée pour le paramètre R. Le cadre théorique de l'extraction est également le même. La figure 5.2, tirée de Wang et al. [75], illustre l'extraction de ce paramètre des données de WMAP après trois ans d'observation pour différents modèles d'univers. Le résultat obtenue est de : $l_a = 302.5 \pm 1.2$. Avec cinq ans de données, la collaboration WMAP extrait l_a avec la valeur : $l_a = 302.10 \pm 0.86$ [5].

Wang & Mukherjee [75, 76] préconisent l'utilisation d'un troisième paramètre tenant compte de la densité de matière baryonique et de la constante de Hubble : $\Omega_b h^2$. La collaboration WMAP propose le redshift à la recombinaison, z_*. Celui-ci complète le lot de paramètres réduits extraits des données de WMAP. Son expression dépend non trivialement de $\Omega_b h^2$. Pour une expression complète voir [5]. Extraite des données de WMAP après cinq ans de mesures, sa valeur est : $z_* = 1090.04 \pm 0.93$.

Ces trois paramètres n'étant pas indépendants, le χ^2 correspondant est noté :

$$\chi^2_{wmap} = (\bar{y} - \bar{y_{th}})^T V^{-1} (\bar{y} - \bar{y_{th}}) \tag{5.13}$$

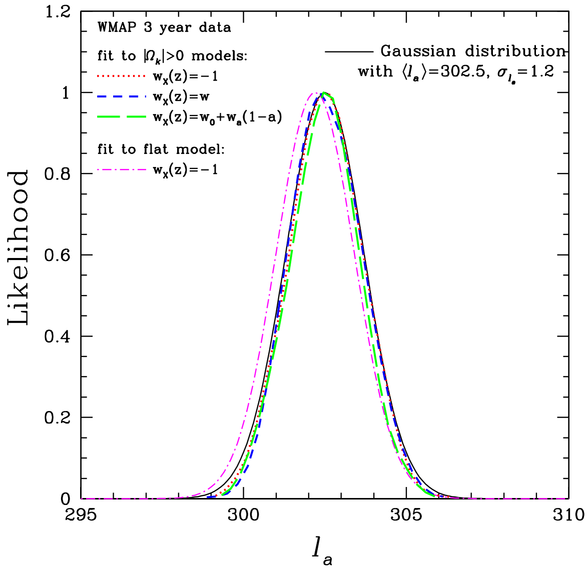

FIGURE 5.2 – Extraction du paramètre l_a des données de 3 ans de WMAP. Figure issue de Wang & Mukherjee [75]

où $\bar{y}$ est le vecteur des mesures (l_a, R, z_*) et $\bar{y_{th}}$, le vecteur des valeurs théoriques prédites correspondant, V^{-1} est l'inverse de la matrice de covariance dont les terme diagonaux sont les carrés des incertitudes (σ_i^2) et les termes non diagonaux dépendent des corrélations ($\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$). Les corrélations entre ces trois paramètres sont données par WMAP [5] : $\rho_{R\,l_a} = 0.1109$, $\rho_{R\,z_*} = 0.6928$, $\rho_{z*\,l_a} = 0.4215$.

Conclusion sur les paramètres réduits du fond diffus cosmologique

Le lot de paramètres (R, l_a, z_*) est parfois désigné dans la littérature par les *distance priors* de WMAP. La politique de WMAP est d'utiliser ce lot de paramètres pour les combinaisons avec les échantillons de supernovae dans le but de déterminer la nature de l'énergie noire.

Historiquement, le paramètre R a été introduit avant les autres paramètres. Ce paramètre est une bonne approximation du fond diffus cosmologique et permet les ajustements les plus simples sur les paramètres cosmologiques. En effet, c'est le seul paramètre complètement indépendant de H_0 et Ω_b.
Ajouter l_a et z_* semble compléter les informations apportées par R afin de reproduire au plus près les informations du spectre des anisotropies du fond diffus cosmologique.

Cependant, avec ces paramètres, il faut tenir compte de H_0 et Ω_b, qui doivent être ajustés simultanément aux 5 autres paramètres cosmologiques présents dans R. Notons, de plus, que l_a et z_* ne permettent pas de lever la dégénérescence géométrique intrinsèque au fond diffus cosmologique.

Dans le but d'extraire les paramètres d'énergie noire (w_0 et w_a), R semble alors suffisant. C'est pourquoi, par la suite, nous privilégierons l'utilisation de R aussi bien avec les données qu'avec les simulations.
Notons que dans l'utilisation de R nous fixerons z_* à sa valeur extraite par WMAP. Nous avons vérifié en calculant R pour différentes valeurs de z_* que les valeurs obtenues restent compatibles avec les incertitudes sur R déterminées par WMAP.

5.4.2 Paramètres réduits des oscillations acoustiques de baryons

Les oscillations acoustiques de baryons peuvent être utilisées pour mesurer à la fois la distance angulaire, $D_A(z)$, dans la direction transverse et le paramètre de Hubble, $H(z)$, dans la direction de la ligne de visée. Cependant, la précision des mesures actuelles ne permet pas d'extraire ces deux distances séparément. On utilise alors la moyenne sphérique de la fonction de corrélation. La distance associée, $D_V(z)$, est donc composée de $D_A(z_{BAO})$ et $H(z_{BAO})$:

$$D_V(z) = \left((1+z)^2 D_A^2(z) \frac{cz}{H(z)} \right)^{1/3} \tag{5.14}$$

Cette quantité est à la base de deux paramètres réduits : A et $\frac{r_s}{D_V}(z)$.

Le paramètre A

Il est défini par la relation :

$$A = \Omega_m \frac{H_0}{cz_{BAO}} D_V(z_{BAO}) \tag{5.15}$$

En reprenant l'équation 5.14, le paramètre A s'exprime en fonction des paramètres cosmologiques par :

$$A = \sqrt{\Omega_m} \left(\frac{H(z_{BAO})}{H_0} \right)^{-1/3} \left[\frac{1}{z_{BAO}\sqrt{|\Omega_k|}} \mathcal{S}_k \left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^{z_{BAO}} \frac{1}{\frac{H(z')}{H_0}} dz' \right) \right]^{2/3} \tag{5.16}$$

où le redshift, z_{BAO} est le redshift moyen auquel les galaxies sont observées.

Le paramètre A contient la majeure partie de l'information cosmologique issue des oscillations acoustiques de baryons à travers les paramètres cosmologiques contenus dans le terme $\frac{H(z')}{H_0}$.

L'avantage de ce paramètre est qu'il est indépendant de la constante de Hubble H_0. Les seuls paramètres pris en compte et donc à ajuster sont les paramètres cosmologiques, Ω_M, Ω_X, w_0, w_a.

Le paramètre A, extrait par Eisenstein [42] à partir du sondage de galaxies SDSS, correspond à un redshift moyen $z_{BAO} = 0.35$. La collaboration SDSS a mesuré A : $A_{SDSS} = 0.469(n_s/0.98)^{-0.35} \pm 0.017$ avec $n_s = 0.95$. Par la suite nous utiliserons la valeur : $A = 0.469 \pm 0.017$.

Le rapport $\frac{r_s}{D_v}$

Percival et al. [57], propose d'inclure les données issues des BAO en utilisant le rapport $\frac{r_s}{D_v}$, mesuré au redshift des mesures des oscillations acoustiques de baryons. Comme pour le fond diffus cosmologique, $r_s(z_{BAO})$ est l'horizon sonore au redshift moyen des galaxies mesurées.

Les paramètres cosmologiques interviennent à la fois dans la distance angulaire exprimée dans $D_V(z_{BAO})$ et dans l'horizon sonore, $r_s(z_{BAO})$. De plus, l'utilisation de l'horizon sonore implique, comme avec l_a, de prendre en compte Ω_b et H_0.

Les valeurs de $\frac{r_s}{D_v}$ sont extraites des données de SDSS et de 2dFGRS (Two Degree Field Galaxy Redshift Survey), Percival et al. [57], à deux redshifts différents :
- à $z = 0.35$, utilisant les même données que Eisenstein, $\frac{r_s}{D_v}(0.35) = 0.1094 \pm 0.0033$;
- à $z = 0.2$, $\frac{r_s}{D_v}(0.2) = 0.1980 \pm 0.0058$;

avec un coefficient de corrélation de $\rho = 0.39$.

Conclusion sur les paramètres réduits des oscillations acoustiques de baryons

Les conclusions sur ces deux moyens d'inclure les données des oscillations acoustiques de baryons sont semblables à celles sur les paramètres réduits du fond diffus cosmologique. Historiquement le paramètre A a été introduit le premier et semble contenir la plupart de l'information des oscillations acoustiques de baryons. Nous avons vu que ce paramètre est indépendant de H_0. Au contraire, le rapport $\frac{r_s}{D_v}$ dépend de H_0 et Ω_b. Dans les études présentées dans cette thèse, le but est de contraindre les paramètres w_0 et w_a. Un cadre simple avec les cinq paramètres cosmologiques semble le plus adapté, c'est pourquoi nous utiliserons la plupart du temps le paramètre A plutôt que le rapport $\frac{r_s}{D_v}$.

5.4.3 Comparaison méthode globale et paramètres réduits

Les paramètres réduits sont la plupart du temps utilisés pour extraire les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire. Il est aussi important de vérifier la cohérence des résultats obtenus avec ceux d'une analyse globale qui utilisent toutes les données des différentes sondes. Nous allons comparer les deux méthodes dans le cadre d'une équation d'état de l'énergie noire constante en utilisant les données de WMAP. Les données sont issues de ESSENCE et SNLS pour les supernovae, des 5 ans de détection de WMAP pour le fond diffus cosmologique et de SDSS pour les oscillations acoustiques de baryons. La figure 5.3, issue de [5], montre les résultats dans le plan ($w = w_0$, Ω_k). Dans la partie gauche de la figure, les contours représentent les résultats de la combinaison globale des données, à droite les paramètres réduits sont utilisés en substitution aux données du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons. Ici, les paramètres réduits utilisés sont les *distance priors*, (R, l_a, z_*) pour le fond diffus cosmologique et A pour les oscillations acoustiques de baryons.

Ces figures montrent que les résultats bien que moins précis avec les paramètres réduits, sont très proches de la combinaison globale. Les paramètres réduits contiennent donc les informations sur les paramètres cosmologiques suffisant à obtenir une première estimation des paramètres d'énergie noire.

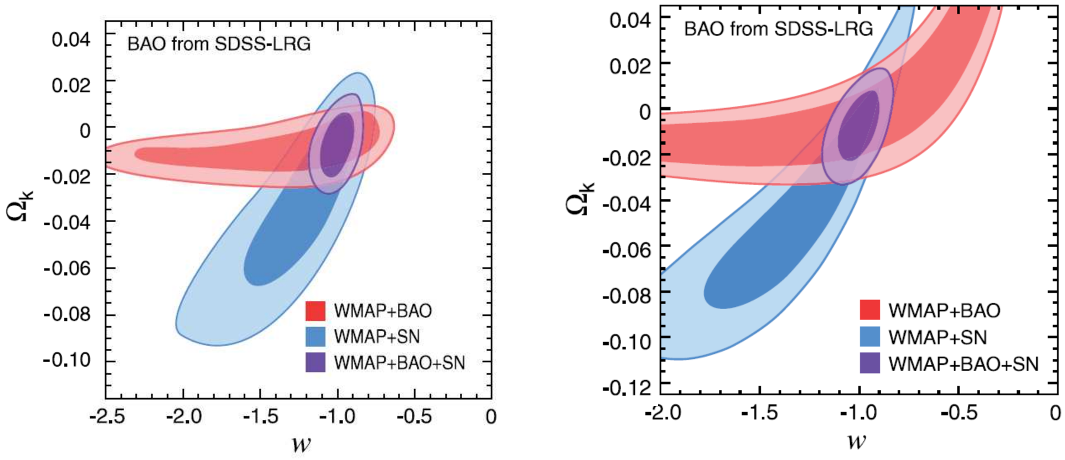

FIGURE 5.3 – *Résultats des ajustements supposant une équation d'état de l'énergie noire constante pour la combinaison des données du fond diffus cosmologique, des oscillations acoustiques de baryons et des supernovae, dans le plan ($w = w_0$, Ω_k). A gauche avec les données complètes du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons issues de WMAP et SDSS, à droite en utilisant les paramètres réduits : (R, l_a, z_*) et A. Figures issues de [5].*

5.4.4 Conclusion sur les paramètres réduits

L'utilisation des paramètres réduits est une méthode rapide, simple et efficace de déterminer les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire. Le temps de calcul est considérablement réduit : le calcul des χ^2 et donc le processus de minimisation est plus simple et plus rapide. Seuls les paramètres cosmologiques standards (Ω_M, Ω_X, w_0, w_a) font partie de l'ajustement réduisant le nombre de paramètres à extraire.

De plus, les résultats obtenus avec les paramètres réduits, pour une équation d'état constante, sont équivalents à ceux obtenus par la méthode globale de combinaison. Leur utilisation semble donc un bon moyen de réaliser des analyses combinées pour estimer les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire.

Par la suite, nous utiliserons les paramètres réduits R et A en combinaison avec les supernovae. Cette combinaison sera utilisée dans la section 5.6 avec des données et dans le chapitre suivant avec des simulations.

5.5 Dégénérescences et paramètres réduits

Dans cette section, nous allons étudier, d'un point de vue analytique, les dégénérescences présentes dans les données des supernovae, du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons en utilisant les paramètres réduits.

En pratique, ces dégénérescences rendent difficile l'extraction des paramètres cosmologiques. Nous y avons été confrontés dans le chapitre 3 avec les supernovae. Nous avons montré qu'il est impossible d'extraire les paramètres cosmologiques des données des supernovae uniquement par un ajustement sans contrainte extérieure ou théorique. Les fortes corrélations obtenues sont la manifestation dans l'ajustement de ces dégénérescences. Nous avons pu les briser en utilisant différentes hypothèses : platitude de l'univers, hypothèse forte sur l'équation d'état de l'énergie noire, constante cosmologique ($w = -1$), équation d'état constante ($w = w_0$), ou une contrainte forte sur la densité de matière, Ω_M.

Nous allons montrer que les dégénérescences présentes dans les données de chaque sonde se manifestent différemment selon la sonde considérée. Nous allons ainsi étudier deux aspects de la dégénérescence géométrique. Nous nous intéresserons d'abord à la dégénérescence entre les paramètres de densité d'énergie et le paramètre de courbure. Pour cela nous supposerons une constante cosmologique. Puis nous expliquerons la difficulté d'extraire les paramètres d'énergie noire par la dégénérescence entre les paramètres de densités d'énergie et les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire.

5.5.1 La dégénérescence géométrique

La dégénérescence géométrique a été beaucoup étudiée notamment par Bond et Efstathiou [71, 72]. Cette dégénérescence touche en particulier le spectre en température du fond diffus cosmologique. Ils montrent que des spectres identiques peuvent être obtenus avec des valeurs différentes de la constante cosmologique (Ω_Λ) et de la courbure (Ω_k). De plus ces spectres sont caractérisés par une valeur identique de R.

Nous reprenons ici cette étude sur les données du fond diffus cosmologique avec le paramètre R mais également sur celles des oscillations acoustiques de baryons avec le paramètre A. Nous faisons varier les paramètres Ω_k et Ω_X et nous calculons les paramètres R et A en chaque point supposant la constante cosmologique. Afin de prendre en compte des modèles d'univers réalistes, nous avons fait varier Ω_k entre -0.5 et 0.5 et Ω_X entre 0 et 1. De plus nous avons imposé les valeurs de Ω_M entre 0 et 1.

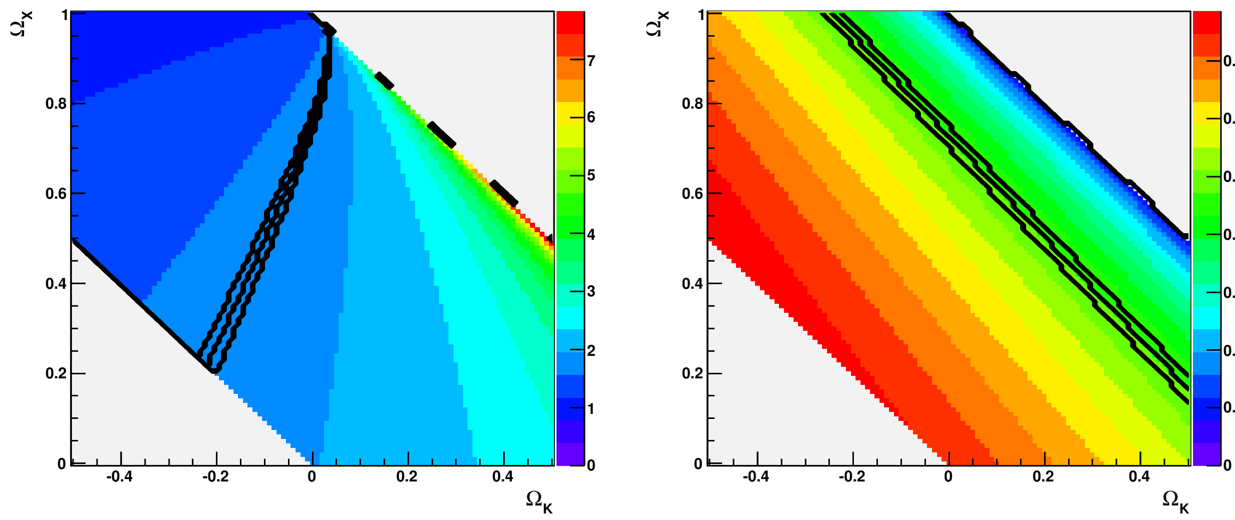

FIGURE 5.4 – *Dans le plan (Ω_k, Ω_X), les paramètres R (à gauche) et A (à droite) sont calculés pour chaque point avec la valeur de Ω_M fixée par l'équation de Friedmann et supposant une constante cosmologique ($w = -1$). Les courbes en noir correspondent aux valeurs extraites des données : $R = 1.71 \pm 0.019$ et $A = 0.469 \pm 0.017$.*

La figure 5.4 illustre les résultats obtenus. Dans la partie gauche, la figure montre les valeurs de R symbolisées par un dégradé de couleur. La même figure est présentée dans la partie de droite pour le paramètre A. Les droites encadrant la zone d'analyse sont caractérisées respectivement de gauche à droite par $\Omega_M = 1$ et $\Omega_M = 0$. En noir, les courbes représentent les valeurs de R et A actuellement extraites et leurs incertitudes : $R = 1.71 \pm 0.019$ et $A = 0.469 \pm 0.017$.

Il apparaît que les données actuelles du fond diffus cosmologique ne permettent pas de différencier un effet dû à la courbure avec la constante cosmologique. De nombreux modèles sont compatibles avec la valeur extraite de R. Cela explique pourquoi l'univers est souvent supposé plat dans les analyses de données. Cette hypothèse permet de lever la dégénérescence et contraindre le paramètre Ω_X (ou Ω_M).

La figure de droite montre que le paramètre A est aussi sujet à la dégénérescence géométrique, une même valeur de A est possible pour différentes valeurs de Ω_k et Ω_X. Nous constatons également que les "iso-A" sont quasi-parallèles aux courbes de $\Omega_M = cst$. Cela signifie que le paramètre A permet une bonne estimation de la densité de matière, Ω_M. Ainsi, on peut déduire, à partir de la valeur extraite de A, une valeur de Ω_M entre 0.25 et 0.3.

Nous remarquons, de plus, que les courbes de R constant et A constant ont des directions différentes. Les utiliser ensemble permet donc de briser la dégénérescence entre la courbure et la constante cosmologique. D'après le figure 5.4, nous pouvons déterminer un intervalle de valeurs possibles de Ω_k et Ω_X :

$$\begin{aligned} -0.04 < \quad & \Omega_k \quad < 0.02 \\ 0.70 < \quad & \Omega_X \quad < 0.76 \end{aligned}$$

5.5.2 Dégénérescence avec les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire

Un autre aspect des dégénérescences se situe dans l'extraction des paramètres d'équation d'état de l'énergie noire. Cette dégénérescence a été étudiée par Maor et al. [77, 68] et Upadhye et al. [25] pour les distances de luminosité mesurée pour les supernovae mais se retrouve de la même manière dans les données du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons à travers les distances angulaires au moment du découplage (donc dans R) et au redshift d'observation des galaxies (donc dans A). Elle provient de la relation de double intégrale présente dans les expressions de distances lorsqu'une équation d'état variant avec le redshift est considérée :

$$r(z) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \mathcal{S}_k \left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_X \exp\left(3 \int_0^{1+z} (1+w(z))\, d\ln(1+z)\right)}} dz' \right) \tag{5.17}$$

ou lorsqu'une paramétrisation de l'équation d'état de l'énergie noire est utilisée :

$$r(z) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \mathcal{S}_k \left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_X(1+z)^{3(1+w_0+w_a)} e^{-3w_a z/(1+z)}}} \right) \tag{5.18}$$

Cette dégénérescence implique que des équations d'état de l'énergie noire fondamentalement différentes donnent la même fonction de distance de luminosité. La figure 5.5, extraite de [77], illustre cet argument. La figure (a) montre les distances de luminosité pour les différents modèles d'énergie noire représentés dans la figure (c). Nous voyons que les écarts relatifs donnés dans la figure (b) sont inférieurs à 1% alors que les dépendances en temps peuvent être très fortes.

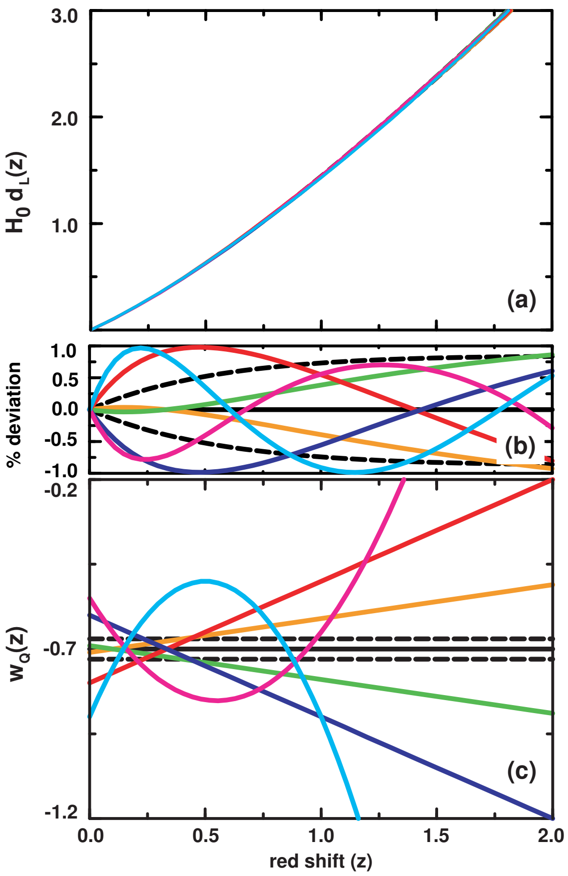

FIGURE 5.5 – *(a) Distances de luminosité $D_L(z)$ calculées pour un univers plat ($\Omega_M = 0.3$, $\Omega_X = 0.7$) pour les 9 équations d'état de l'énergie noire tracées dans la figure (c).*
(b) illustre le pourcentage de déviation des $D_L(z)$ par rapport au $D_L(z)$ obtenu pour le modèle $w = -0.7$ et montre que la déviation est inférieure à 1%. Figure issues de Maor et al. [77].

Nous allons montrer que cette dégénérescence existe aussi avec les paramètres R et A. Pour cela, nous supposons un univers plat ($\Omega_M = 0.3$ et $\Omega_X = 0.7$) et nous calculons les paramètres R et A pour différents modèles d'énergie noire en faisant varier les paramètres d'équation d'état w_0 et w_a. Les résultats sont présentés dans la figure 5.6 à gauche pour R et à droite pour A.

Cette figure montre la dégénérescence intrinsèque aux paramètres R et A entre les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire. Une même valeur de R ou A peut être obtenue avec des équations d'état très différentes. Un seul paramètre ne permet donc pas de distinguer une évolution en temps de l'équation d'état. Les valeurs de R et A extraites des données actuelles sont tracés en noir. Celles-ci admettent des équation d'état très différentes. La valeur extraite de R n'apporte aucune contrainte sur w_0 et w_a. Néanmoins la valeur extraite de A permet de légèrement contraindre le paramètre w_0. Si l'on considère w_a entre -2 et 2, on définit un intervalle sur w_0 entre -1.2 et 0.3. La combinaison des deux semble plus prometteuse et définit une zone de valeurs possibles :

$$\begin{aligned} -1.1 < \;& w_0 & < -0.4, \\ -2 < \;& w_a & < 1.2\,. \end{aligned}$$

Nous montrons ici que, supposant un univers plat, la combinaison de R et A permet de réduire la dégénérescence. Cependant, cette zone demeure trop grande pour conclure sur l'équation d'état de l'énergie noire.

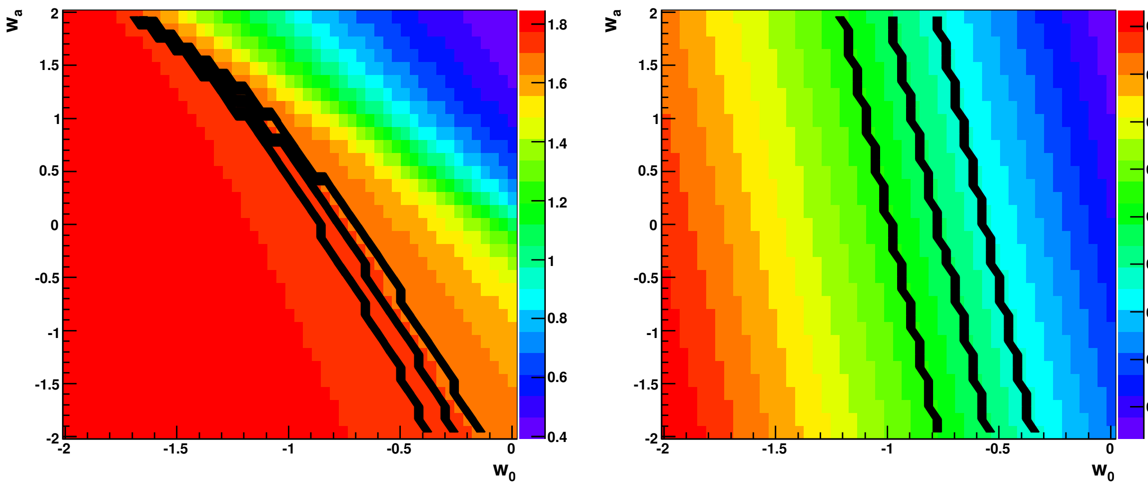

FIGURE 5.6 – *Illustration de la dégénérescence avec les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire pour un univers plat :* $\Omega_k = 0$ ($\Omega_M = 0.3$, $\Omega_X = 0.7$). *Les valeurs de R (A) sont présentées à gauche (à droite). En noir, les trois courbes correspondant aux valeurs mesurées des paramètres R et A et leurs incertitudes :* $R = 1.71 \pm 0.019$ *et* $A = 0.469 \pm 0.017$.

De plus, nous avons supposé l'univers plat, c'est-à-dire que nous n'avons pas pris en compte la dégénérescence entre les paramètres Ω_k et Ω_X. Nous allons alors réaliser la même étude pour différentes courbures de l'univers :

$$\begin{aligned} \Omega_k = \;& -0.05 \quad (\Omega_M = 0.35,\, \Omega_X = 0.7), \\ \Omega_k = \;& 0.05 \quad (\Omega_M = 0.3,\, \Omega_X = 0.75). \end{aligned}$$

Les résultats sont illustrés par les figures 5.7 et 5.8.

De façon générale, il y a peu de variations des "iso-A" selon la valeur de Ω_k mais ces courbes dépendent beaucoup de la valeur de Ω_M. Au contraire, la bande définie par les valeurs extraites du paramètre R se déplacent dans le plan suivant la courbure et les valeurs de Ω_M utilisées.

Le cas de l'univers ouvert de courbure $\Omega_k = -0.05$, figure 5.7, est présenté avec une densité de matière $\Omega_M = 0.35$ (et $\Omega_X = 0.7$). Les courbes de A correspondant aux données actuelles se sont déplacées vers des valeurs de w_0 plus grandes, proches des modèles de décélération de l'univers. Les "iso-R" au contraire s'en éloignent vers des valeurs de w_0 de plus en plus négatives mais présentent une dégénérescence très grande. Les valeurs actuelles de R sont en effet possibles pour de très nombreux modèles d'énergie noire, cette zone est même plus grande que celle obtenue pour un univers plat. Cependant, ces courbes ne se situant pas dans la même partie du plan que celles de A, elles ne sont pas compatibles. La combinaison de R et A permet alors de détecter les modèles d'univers rejetés par les données actuelles. La combinaison prend son sens dans cet exemple.

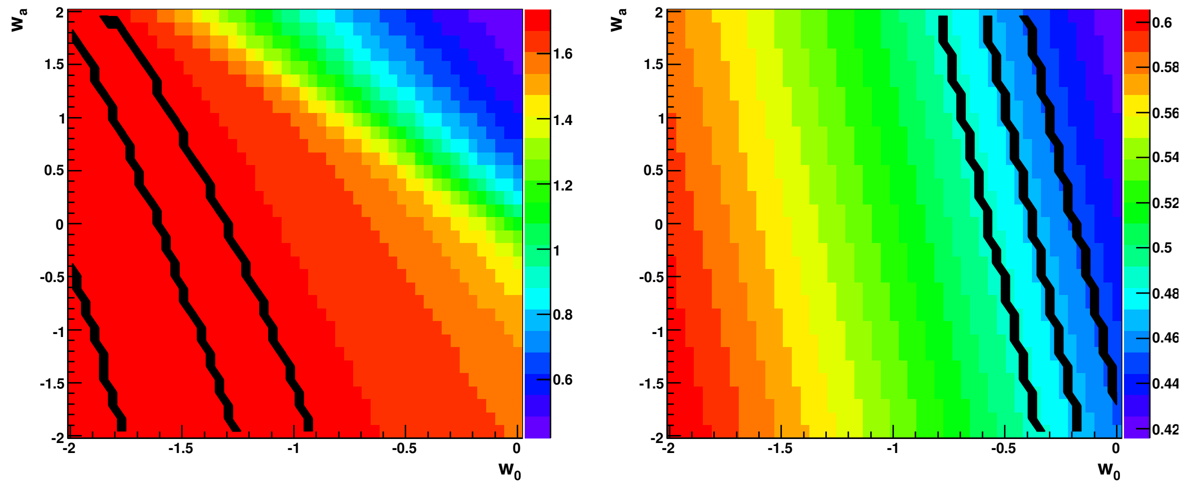

FIGURE 5.7 – *Illustration de la dégénérescence avec les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire pour un univers ouvert :* $\Omega_k = -0.05$ ($\Omega_M = 0.35$, $\Omega_X = 0.7$)*. Les valeurs de R (A) sont présentées à gauche (à droite). En noir, les trois courbes correspondant aux valeurs mesurées des paramètres R et A et leurs incertitudes :* $R = 1.71 \pm 0.019$ *et* $A = 0.469 \pm 0.017$.

A l'inverse, prenons l'exemple d'un univers fermé de courbure $\Omega_k = 0.05$ avec $\Omega_M = 0.3$ (et $\Omega_X = 0.65$), figure 5.8. Nous remarquons d'abord que les courbes de A sont identiques à celles du cas de l'univers plat car la même valeur de Ω_M a été utilisée. Les courbes des valeurs de R correspondant aux valeurs extraites des données, sont légèrement décalées vers des valeurs de w_0 et w_a plus grandes. Nous observons également que la bande définie est resserrée. Le paramètre R est donc moins dégénéré pour les courbures Ω_k positives que dans les cas de courbure, Ω_k, nulle ou négative. En outre, il y a recouvrement des "iso-R" et des "iso-A" définissant une zone de modèles d'énergie noire possibles :

$$\begin{aligned} -1.2 < \ & w_0 \ < -0.6 \\ 0 < \ & w_a \ < 1.5\,. \end{aligned}$$

Cette zone est différente de celle obtenue dans le cas de l'univers plat. Elle est située légèrement plus haut dans le plan correspondant à des modèles avec w_a positifs.

Cet exemple et sa comparaison avec le modèle d'univers plat montre que les dégénérescences sont difficiles à briser. Avec les données de R et A, nous constatons qu'il faut fixer au moins un paramètre, la courbure, ou les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire pour pouvoir estimer les autres paramètres.

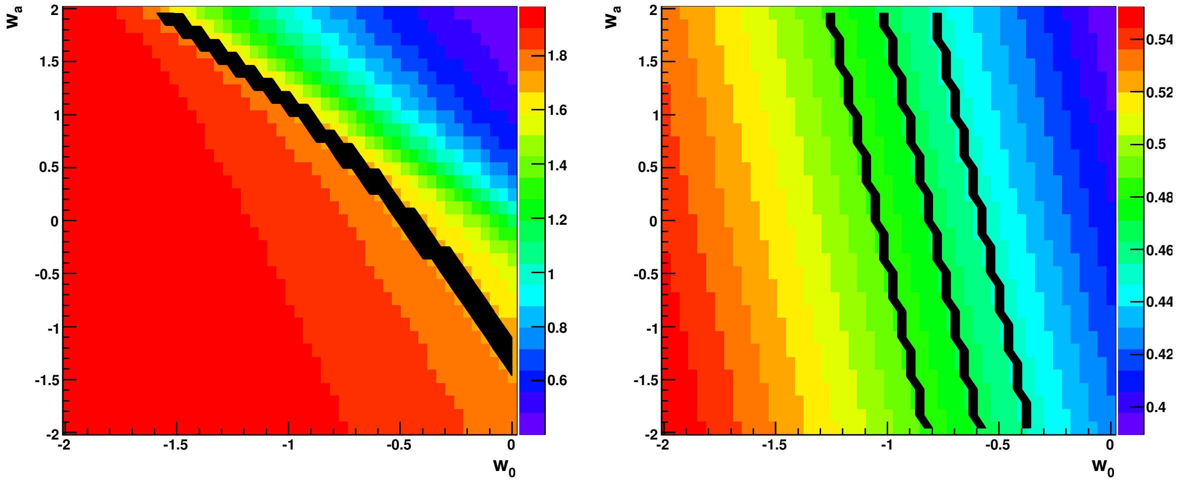

FIGURE 5.8 – *Illustration de la dégénérescence avec les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire pour un univers fermé :* $\Omega_k = 0.05$ *(*$\Omega_M = 0.3$, $\Omega_X = 0.65$*). Les valeurs de* R *(*A*) sont présentées à gauche (à droite). En noir, les trois courbes correspondant aux valeurs mesurées des paramètres* R *et* A *et leurs incertitudes :* $R = 1.71 \pm 0.019$ *et* $A = 0.469 \pm 0.017$.

5.5.3 Conclusion

Nous avons vu deux aspects des dégénérescences qui rendent difficile l'extraction des paramètres cosmologiques.

Nous avons d'abord étudié la dégénérescence géométrique qui lie le paramètre de courbure, Ω_k, à la densité d'énergie noire, Ω_X (ou de matière, Ω_M). Nous avons montré qu'elle est présente aussi bien dans les données du fond diffus cosmologique que dans celles des oscillations acoustiques de baryons. Avec une seule de ces sondes, le seul moyen de lever cette dégénérescence est de supposer un univers plat. Le paramètre R (ou A) permet alors de déterminer la valeur de Ω_X correspondante. Pour éviter une telle hypothèse nous avons montré que la combinaison de R et A permet de contraindre la courbure de l'univers et la densité d'énergie noire dans une zone autour de $\Omega_k = 0$ et $\Omega_X = 0.7$.

Nous avons ensuite abordé la question d'une équation d'état de l'énergie noire pouvant évoluer avec le redshift. Une dégénérescence est présente dans R et A empêchant la détermination des paramètres d'équation d'état w_0 et w_a. Nous avons montré qu'en fixant la courbure, la combinaison de R et A permet de contraindre les modèles d'énergie noire possibles et rejeter certains modèles de courbure négative (univers fermés).
Par contre, si aucun des paramètres n'est fixé, courbure ou modèle d'énergie noire, les dégénérescences rendent impossible une estimation des paramètres cosmologiques même avec une combinaison de R et A.

Dans la section suivante, nous allons utiliser les paramètres R et A en combinaison avec les supernovae, dans le but d'extraire les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire grâce à des ajustements.

5.6 Application d'analyses combinées à l'aide de paramètres réduits

Dans cette section, nous allons extraire les paramètres d'énergie noire des données actuelles. Nous allons utiliser le lot UNION [28] pour les supernovae le paramètre réduit R issu de des 5 ans de données de WMAP [5] et A issu de SDSS [42]. Nous montrerons successivement ce qu'apporte l'un et l'autre de ces paramètres dans l'extraction des paramètres cosmologiques, en particuliers w_0 et w_a. Nous pourrons alors comparer les résultats avec ceux que nous avons obtenus avec les supernovae seules en utilisant l'hypothèse de platitude et une contrainte forte sur Ω_M.

Puisque le but est la détermination des paramètres d'équation d'état de l'énergie noire, toutes les figures seront présentées dans le plan (w_0, w_a). Notons que les contours sont tracés à $1\,\sigma$, soit 39% de niveau de confiance.

5.6.1 Energie noire avec les supernovae (UNION) et A (SDSS)

Nous avons vu dans la section précédente que la plus grande information sur la densité de matière provient des oscillations acoustiques de baryons. Nous allons donc d'abord utiliser le paramètre A en combinaison avec les supernovae d'UNION.

Sans hypothèse sur la courbure de l'univers, l'ajustement ne converge pas. Nous supposons alors que l'univers est plat. Les résultats de l'ajustement sont donnés par :

$$\begin{aligned}\Omega_M &= 0.267 \pm 0.021 \\ w_0 &= -1.223 \pm 0.211 \\ w_a &= 1.529 \pm 1.270\,.\end{aligned}$$

Ces résultats montrent que le paramètre A apporte effectivement une forte contrainte sur Ω_M. Il permet de retrouver la contrainte que nous avons utilisée dans les chapitres précédents. Le paramètre w_0 est également bien contraint. Le paramètre avec la plus grande incertitude reste w_a. Nous pouvons remarquer que les résultats sont compatibles avec la constante cosmologique à moins de 2 σ.

La figure 5.9, compare ces résultats avec ceux obtenus en n'utilisant que les supernovae, c'est-à-dire sans l'utilisation de A. Pour les trois contours présentés, nous avons supposé la platitude de l'univers. Le contour en trait plein correspond à l'ajustement des données des supernovae sans contrainte a priori. Le contour en trait discontinu est obtenu avec la combinaison supernovae et A sans autre hypothèse que la platitude. Le contour obtenu avec les supernovae seules en imposant une contrainte forte sur Ω_M ($\Omega_M = 0.27 \pm 0.04$) est tracé en pointillés.

Nous voyons que les contours avec A ou avec la contrainte extérieure sur Ω_M sont quasi-identiques. L'ajout de A est donc équivalent à l'application d'une contrainte a priori sur Ω_M et permet de relâcher cette contrainte.

5.6.2 Energie noire avec les supernovae (UNION) et R (WMAP)

Nous voulons maintenant étudier l'apport du paramètre R dans une combinaison avec les supernovae. Dans un premier temps nous réalisons l'ajustement sans hypothèse ni contrainte a priori. Cette combinaison de données conduit aux résultats suivants :

$$\begin{aligned}\Omega_M &= 0.482 \pm 0.094 \\ \Omega_X &= 0.605 \pm 0.062 \\ w_0 &= -0.964 \pm 0.618 \\ w_a &= -5.178 \pm 7.677\,.\end{aligned}$$

Nous remarquons que cet ajustement aboutit, un minimum du χ^2 a été trouvé. Rappelons que ce n'est pas le cas en considérant les données supernovae seules ou en combinaison avec A dans les mêmes conditions d'ajustement. On obtient des contraintes sur les densités réduites de matière et d'énergie noire équivalentes à celles obtenues avec les supernovae seules supposant la constante cosmologique (cf. chapitre 3). Par contre, l'estimation des

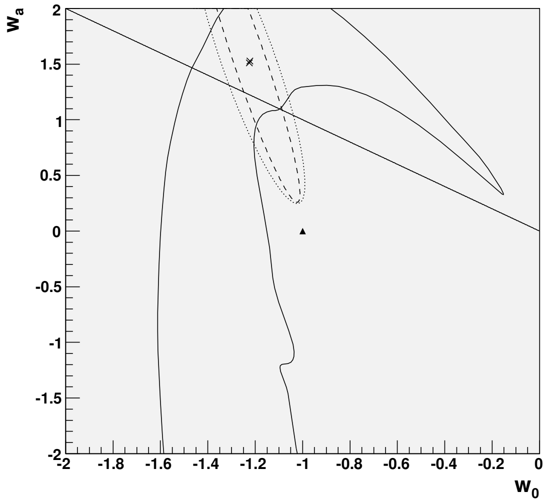

FIGURE 5.9 – Comparaison d'ajustements selon les sondes utilisées et les hypothèses d'ajustement. En trait plein : contour réalisé avec les supernovae seules supposant la platitude, en pointillés : contour avec les supernovae seules supposant la platitude et imposant une contrainte forte sur Ω_M ($\Omega_M = 0.27 \pm 0.04$), en trait discontinu : le paramètre A est ajouté aux supernovae, contour réalisé supposant la platitude.

paramètres d'équation d'état de l'énergie noire reste difficile. Les incertitudes sont grandes, en particulier sur w_a de l'ordre de 8. Celles-ci ne permettent aucune conclusion forte sur la nature de l'énergie noire, bien que les résultats soient compatibles avec une constante cosmologique. L'ajout du paramètre R permet de relâcher la platitude mais n'est pas suffisant pour éviter toute hypothèse ou contrainte extérieure.

Si l'on suppose à nouveau la platitude de l'univers, on obtient :

$$\begin{aligned} \Omega_M &= 0.305 \pm 0.070 \\ w_0 &= -1.282 \pm 0.360 \\ w_a &= 1.289 \pm 0.914\,. \end{aligned}$$

Par comparaison avec l'ajustement sans hypothèse, nous remarquons qu'imposer la platitude induit une valeur plus basse de Ω_M, la rapprochant du modèle de concordance. En outre, comme attendu, les incertitudes sur les paramètres d'énergie noire sont réduites. Sur w_0 la réduction est d'un facteur presque 2 mais elle est encore plus visible sur w_a où elle atteint un facteur 8. L'hypothèse de platitude permet donc une première estimation de la nature de l'énergie noire. Il est alors possible d'extraire w_0 et w_a avec une précision semblable à celle obtenue avec les supernovae combinées à A dans les mêmes conditions d'ajustement mais ici sans contrainte directe sur la densité de matière.

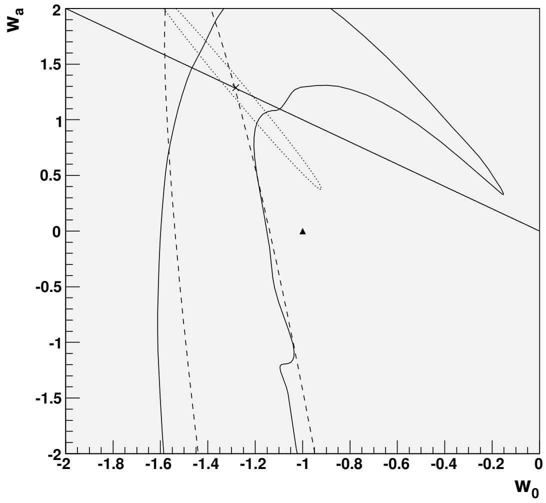

FIGURE 5.10 – Contours obtenus par différents ajustements. En trait plein l'ajustement est réalisé avec la méthode rigoureuse avec UNION en supposant la platitude. En tirets, le contour est obtenu par une analyse de Fisher avec les données UNION en ajoutant le paramètre R sans supposer la platitude. En pointillés le contour est obtenu avec les mêmes données (UNION + R) avec l'hypothèse de platitude.

Les contours correspondant à ces ajustements sont tracés dans la figure 5.10. Celle-ci représente l'extraction des paramètres w_0 et w_a des données des supernovae avec ou sans R. En trait plein, l'ajustement est réalisé avec les supernovae seules supposant uniquement la platitude. En tirets, le paramètre R est ajouté aux supernovae sans hypothèse dans l'ajustement, tous les paramètres sont libres. En pointillés, le contour est tracé pour l'ajustement de la combinaison supernovae et R en fixant la platitude.

Nous pouvons noter que le contour obtenu grâce à la combinaison des supernovae avec R sans hypothèse est semblable à celui obtenu avec les supernovae seules supposant la platitude. En ajoutant la platitude, le contour obtenu est plus petit, ce qui s'explique par le fait que cette hypothèse brise la dégénérescence géométrique étudiée précédemment.

5.6.3 Energie noire avec les supernovae (UNION), A (SDSS) et R (WMAP)

Avec l'hypothèse de platitude

Nous avons vu que l'hypothèse de platitude reste nécessaire pour l'extraction des paramètres d'équation d'état de l'énergie noire, w_0 et w_a dans l'ajustement des supernovae avec A comme avec R. Nous réalisons alors l'ajustement de la combinaison des trois sondes, supernovae, R et A, supposant la platitude de l'univers. Les résultats de cet ajustement sont les suivants :

$$\begin{aligned} \Omega_M &= 0.275 \pm 0.018 \\ w_0 &= -1.123 \pm 0.137 \\ w_a &= 0.8 \pm 0.5\,. \end{aligned}$$

Ceux-ci sont les meilleurs obtenus sur les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire. D'une part le paramètre A apporte la plus forte contrainte sur Ω_M. D'autre part, la combinaison des trois sondes permet de diminuer les incertitudes sur w_0 et w_a. Cette réduction est d'environ d'un facteur 2 par rapport aux incertitudes obtenues avec les combinaisons à deux sondes.

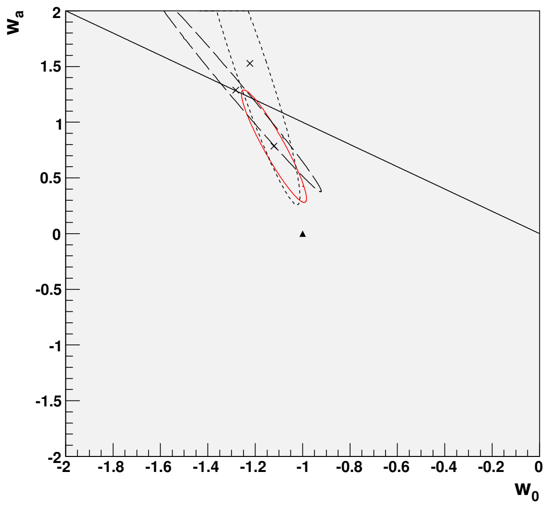

FIGURE 5.11 – *Comparaison des contours obtenus avec différentes combinaisons supposant la platitude. Trait plein rouge : ajustement UNION + R + A, en tirets courts : UNION + A, en tirets longs : UNION + R.*

La figure 5.11 regroupe les contours obtenus, supposant la platitude, des combinaisons à deux et trois sondes. En tirets courts, le contour tracé est celui de l'ajustement des supernovae et de A. En tirets longs, le contour correspond à l'ajustement des données des supernovae avec R. En trait plein rouge, le contour est celui de l'ajustement de la combinaison des trois sondes, supernovae, R et A.

Nous constatons que les combinaisons supernovae avec A et supernovae avec R apportent des résultats équivalents lorsque la platitude est fixée mais avec des orientations différentes. Nous remarquons également que les trois contours sont statistiquement compatibles. Le contour de la combinaison des supernovae avec R et A se situe à l'intersection des deux autres. Cette combinaison apporte alors les meilleures contraintes sur les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire.

Sans l'hypothèse de platitude

Nous voulons aussi étudier le cas le plus général en relâchant l'hypothèse de platitude. Nous réalisons alors l'ajustement des supernovae combinées aux paramètres R et A sans aucune hypothèse ni contrainte a priori. Tous les paramètres sont libres. Les résultats obtenus sont les suivants :

$$\begin{aligned} \Omega_M &= 0.270 \pm 0.020 \\ \Omega_X &= 0.688 \pm 0.476 \\ w_0 &= -1.250 \pm 1.038 \\ w_a &= 1.399 \pm 3.116 \,. \end{aligned}$$

La densité de matière, Ω_M, est contrainte grâce au paramètre A. Par contre, les paramètres d'énergie noire, Ω_X, w_0 et w_a sont mal contraints. En particulier, l'incertitude sur w_a ne permet plus de conclure quant à une éventuelle évolution de l'équation d'état de l'énergie noire en fonction du redshift.
Pour comprendre cet effet il est nécessaire de s'intéresser aux coefficient de corrélation obtenus entre ces quatre paramètres. Le paramètre Ω_M est en effet peu corrélé aux autres paramètres cosmologiques ($\rho_{\Omega_M \Omega_X} \simeq \rho_{\Omega_M w_0} \simeq \rho_{\Omega_M w_a} \simeq 0.24$). Au contraire, les trois paramètres d'énergie noire sont très fortement corrélés ($\rho_{\Omega_X w_0} \simeq \rho_{\Omega_X w_a} \simeq \rho_{w_0 w_a} \simeq 1$). On comprend bien ici l'effet de la dégénérescence géométrique et pourquoi l'hypothèse de platitude apporte autant en terme de réduction des incertitudes.

Les contours correspondant aux ajustements des trois sondes, à travers les paramètres réduits, avec ou sans l'hypothèse de platitude sont représentés dans la figure 5.12. Nous remarquons que l'utilisation des paramètres réduits R et A avec les supernovae n'est pas équivalente à l'hypothèse de platitude. A cause de la dégénérescence géométrique présente dans les trois sondes, l'ajustement sans fixer la platitude reste plus grand. Les meilleures contraintes obtenues le sont donc avec l'hypothèse de platitude. Cela explique pourquoi la plupart des résultats actuels d'analyses combinées sont donnés avec cette hypothèse.

5.6.4 Comparaison avec les résultats de WMAP

Dans cette section, nous allons vérifier la cohérence de nos résultats avec ceux obtenus par WMAP [5]. Les paramètres réduits utilisés pour extraire l'équation d'état de l'énergie noire sont le lot (R, l_a, z_*) pour le fond diffus cosmologique et les rapports $\frac{r_s}{D_V}$ à $z = 0.2$ et $z = 0.35$ pour les oscillations acoustiques de baryons. La compilation de supernovae utilisée est semblable au lot UNION. Les résultats sont donnés supposant un univers plat avec une paramétrisation de l'équation d'état légèrement différente de celle de Chevallier-Polarski-Linder que nous avons choisie. Cette paramétrisation à deux paramètres, w_0

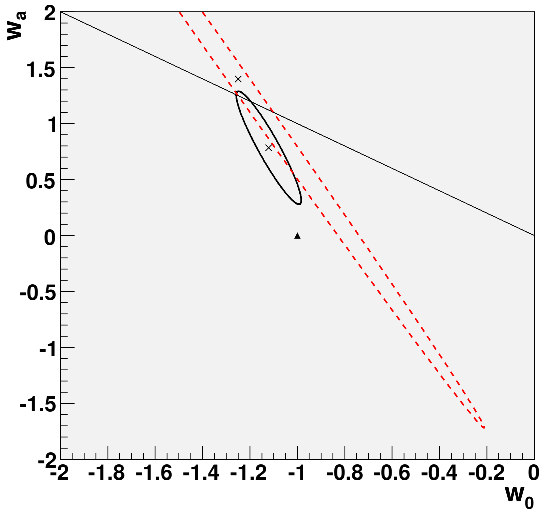

FIGURE 5.12 – *Comparaison des contours obtenus par la combinaison UNION + R + A avec l'hypothèse de platitude en trait plein, sans hypothèse en tirets.*

et w', tend vers la paramétrisation CPL à bas redshift et vers -1 à grand redshift. Le paramètre w_0 se retrouve dans les deux paramétrisations. Le paramètre w' est équivalent à w_a permettant une comparaison de ces deux paramètres. Les résultats sont :

$$\begin{aligned} w_0 &= -1.06 \pm 0.14 \\ w' &= 0.36 \pm 0.62\,. \end{aligned}$$

La figure 5.13 compare le contour obtenu par WMAP à gauche, à celui que nous avons obtenu, à droite.

Ces résultats sont tout à fait comparables à ceux que nous avons obtenus dans les mêmes conditions d'ajustement, en supposant la platitude de l'univers. Le contour de WMAP est plus bas que le nôtre, ce qui s'explique par une valeur plus basse du paramètre w'. Cet écart est cependant suffisamment faible pour que les deux paramètres soient compatibles à moins de $1\,\sigma$. En ce qui concerne les incertitudes, elles sont presque identiques.

Cette comparaison montre que les paramètres R et A apportent la plupart de l'information et justifie a posteriori le fait de n'utiliser que ces deux paramètres.

5.6.5 Conclusion

Nous avons réalisé une étude sur la combinaison des supernovae d'UNION avec les paramètres réduits R de WMAP et A de SDSS. Nous résumons dans la table 5.1 les

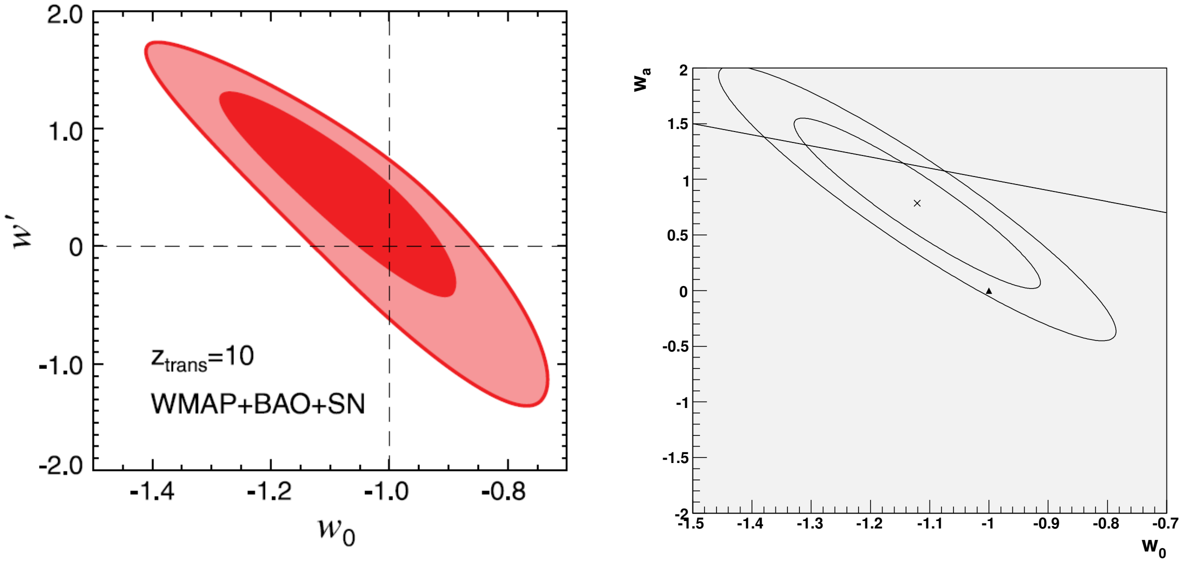

FIGURE 5.13 – *Comparaison des contours obtenus en utilisant les paramètres réduits, avec l'hypothèse de platitude.*
A gauche : contour obtenu par WMAP dans la paramétrisation (w_0, w') et avec la combinaison de supernovae avec le lot de paramètres réduits (R, l_a, z_*) et les rapports ($\frac{r_s}{D_V}(z = 0.2, z = 0.35)$), figure issue de [5].
A droite : contour obtenu avec la combinaison de UNION avec les paramètres réduits R et A.

différents résultats obtenus dans ce chapitre.

Nous avons d'abord montré que l'utilisation du paramètre A est équivalent à l'ajout d'une contrainte forte sur Ω_M dans l'ajustement des supernovae.
Nous avons ensuite montré qu'utiliser le paramètre R n'est pas suffisant pour éviter d'utiliser l'hypothèse de platitude à cause de la dégénérescence géométrique. Dans ces conditions, utiliser R ou A en combinaison avec les supernovae donne des estimations de l'équation d'état de l'énergie noire proches (incertitudes équivalentes mais contours orientés différemment).

La combinaison des trois sondes, supposant la platitude, permet alors la meilleure contrainte actuelle sur w_0 et w_a.
Relâcher la platitude entraîne à nouveau une grande incertitude sur les paramètres d'équation d'état w_0 et w_a. Cet ajustement ne permet pas de conclusion sur la nature de l'énergie noire et sa possible évolution en redshift.

Nous avons également comparé nos résultats avec ceux de WMAP utilisant les mêmes données. Les différences d'ajustement proviennent de la paramétrisation utilisée et de l'utilisation des paramètres réduits. Les deux résultats sont compatibles et montrent que R et A suffisent pour extraire l'équation d'état de l'énergie noire.

Données	Hypothèses	Ω_M	Ω_X	w_0	w_a
SN	platitude	0.451 ± 0.077	/	-1.013 ± 0.736	-5.895 ± 9.634
SN	plat. + cont.	0.270 ± 0.040	/	-1.225 ± 0.234	1.512 ± 1.264
SN + A	platitude	0.267 ± 0.021	/	-1.223 ± 0.211	1.529 ± 1.270
SN + R	/	0.482 ± 0.094	0.605 ± 0.062	-0.964 ± 0.618	-5.178 ± 7.677
SN + R	platitude	0.305 ± 0.070	/	-1.282 ± 0.360	1.289 ± 0.914
SN + R + A	/	0.270 ± 0.020	0.688 ± 0.476	-1.250 ± 1.038	1.399 ± 3.116
SN + R + A	platitude	0.275 ± 0.018	/	-1.123 ± 0.137	0.800 ± 0.504

TABLE 5.1 – table

Chapitre 6

Etude du biais sur la courbure

6.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons mis en évidence la difficulté d'extraire le paramètre de courbure et les paramètres d'énergie noire par un ajustement sans hypothèse ni contrainte a priori. Nous avons alors utilisé l'hypothèse de platitude de l'univers ou imposé une équation d'état de l'énergie noire simple (constante ou de type constante cosmologique).

Ces hypothèses sont les plus répandues et les plus souvent utilisées pour la détermination des paramètres cosmologiques. Extraire simultanément l'équation d'état de l'énergie noire et le paramètre de courbure est rendu très difficile par les dégénérescences entre les différents paramètres et en particulier la dégénérescence géométrique. L'hypothèse de platitude est alors supposée pour extraire l'équation d'état de l'énergie noire et l'hypothèse de constante cosmologique est supposée pour extraire la courbure. Ces hypothèses permettent de briser la dégénérescence géométrique et ainsi obtenir des résultats plus précis sur la nature de l'énergie noire ou la courbure de l'univers.

L'hypothèse de platitude est justifiée par l'inflation. Comme la plupart des modèles inflationnaires prédisent la platitude de l'univers ($|\Omega_k| < 10^{-5}$), cette propriété est souvent prise comme garantie dans la littérature. Cependant, d'un point de vue expérimental, cette précision n'est pas si forte. L'incertitude sur le paramètre de courbure Ω_k, obtenue à partir des données de WMAP en ajoutant un échantillon de supernovae et les données de SDSS des oscillations acoustiques de baryons est : $\pm 0.006(68\%) \pm 0.013(95\%)$, en supposant la constante cosmologique [5, 47]. En supposant une équation d'état paramétrée par $w(z) = w_0 + w_a \frac{z}{1+z}$ et en utilisant les paramètres réduits, la précision est seulement de $\pm 0.018(68\%) \pm 0.04(95\%)$ [5, 47]. Considérer une équation d'état variant dans le temps augmente le nombre de degrés de liberté et diminue la précision du résultat.

Supposer une constante cosmologique constitue l'hypothèse la plus simple sur la nature de l'énergie noire. Mais les résultats sur l'énergie noire sont difficiles à obtenir. Souvent l'équation d'état de l'énergie noire est supposée constante. Les résultats de l'ajustement des données de WMAP en ajoutant un lot de supernovae et les données des oscillations acoustiques de baryons de SDSS sont : $w_0 = -0.98 \pm 0.07(68\%) \pm 0.13(95\%)$ [5, 47]. En supposant une évolution en redshift et la platitude, nous avons obtenu avec les paramètres réduits : $w_0 = -1.12 \pm 0.14$ $w_a = 0.80 \pm 0.50$. Ces résultats sont compatibles avec la constante cosmologique mais les incertitudes sont grandes.

Un argument en faveur de l'utilisation de ces hypothèses est la cohérence des résultats. Avec les données actuelles, les résultats du premier ajustement, en supposant la constante cosmologique, sont compatibles avec un univers plat. Le second ajustement, pour extraire les paramètres d'énergie noire, est alors réalisé pour un univers plat. Le résultat étant compatible avec la constante cosmologique il y a cohérence avec les résultats du premier ajustement. C'est par cette méthode que sont obtenues les contraintes les plus récentes du modèle de concordance WMAP[5], SNLS[32], SDSS[42].

Nous avons démontré que la dégénérescence géométrique et le nombre de paramètres d'énergie noire peuvent modifier profondément ce résultat. Nous avons déjà montré certaines mauvaises déterminations des paramètres cosmologiques engendrées par des hypothèses fausses sur les données des supernovae. Nous allons nous intéresser ici aux hypothèses induites par la dégénérescence géométrique : la platitude de l'univers ou la constante cosmologique. Nous allons pour cela utiliser des simulations des données de supernovae, du fond diffus cosmologique grâce au paramètre réduit R et des oscillations acoustiques de baryons grâce à A.

Nous allons d'abord aborder le problème de façon analytique dans la section 6.2. Nous reprendrons ensuite la méthode d'analyse utilisée dans le chapitre 4 pour tester ces deux hypothèses et quantifier les biais possibles. Nous étudierons l'impact de supposer un univers plat sur la détermination de la nature de l'énergie noire dans la section 6.3, puis l'effet induit par l'hypothèse d'une constante cosmologique sur l'extraction de la courbure dans la section 6.4. Dans la section 6.5, nous reviendrons sur ces deux hypothèses afin de vérifier le principe de cohérence.

6.2 La dégénérescence géométrique et l'énergie noire

Dans cette section nous abordons le problème de la dégénérescence géométrique de façon analytique suivant l'étude menée par Clarkson et al. [79]. Nous prenons comme point de départ les équations de la distance de luminosité, $D_L(z)$ et du paramètre de Hubble, $H(z)$, que nous considérons comme des observables parfaitement connues. Ces équations sont explicitées dans les chapitres 1, 2 et 3, par les équations 3.28 et 3.29, et rappelées ici pour le cas le plus général d'un univers courbe avec une équation d'état de l'énergie noire pouvant varier avec le redshift $(w(z))$:

$$D_L(z) = \frac{1+z}{\sqrt{|\Omega_k|}} \mathcal{S}_k \left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_X \mathrm{e}^{3\int_0^{1+z}(1+\mathrm{w(z)})\mathrm{d}\ln(1+\mathrm{z})} + \Omega_\mathrm{k}(1+\mathrm{z})^2}} dz' \right) \quad (6.1)$$

$$H(z) = H_0 \left(\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_X \mathrm{e}^{\left(3\int_0^{1+z}(1+\mathrm{w(z)})\mathrm{d}\ln(1+\mathrm{z})\right)} + \Omega_\mathrm{k}(1+\mathrm{z})^2 \right)^{1/2} . \quad (6.2)$$

Considérons un modèle d'univers non plat dont l'énergie noire est de type constante cosmologique ($w = -1$). Dans ce cas, nous pouvons exprimer les fonctions $D_L(z)$ et $H(z)$ définies par les trois paramètres Ω_M, Ω_Λ, Ω_k :

$$D_L(z) = \frac{1+z}{\sqrt{|\Omega_k|}} \mathcal{S}_k \left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_k(1+z)^2}} dz' \right) , \quad (6.3)$$

$$H(z) = H_0 \left(\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_k(1+z)^2 \right)^{1/2} . \quad (6.4)$$

Il s'agira des observables simulées, supposées parfaitement connues.

Nous voulons tester la fiabilité de l'hypothèse de platitude souvent imposée pour déterminer la nature de l'énergie noire. Nous utilisons donc les fonctions $D_L(z)$ et $H(z)$, décrites par les équations 6.1 et 6.2, pour calculer l'équation d'état de l'énergie noire en imposant $\Omega_k = 0$. L'équation d'état de l'énergie noire, $w(z)$ s'exprime en fonction de $D_L(z)$ et $H(z)$:

$$w(z) = -\frac{1}{3} \frac{\Omega_k H_0^2(1+z)^2 + 2(1+z)HH' - 3H^2}{H_0^2(1+z)^2[\Omega_M(1+z)+\Omega_k] - H^2} , \quad (6.5)$$

$$w(z) = \frac{2}{3} \frac{(1+z)\left\{[\Omega_k D_L^2 + (1+z)^2]D_L'' - \frac{1}{2}(\Omega_k D_L'^2 + 1)[(1+z)D_L' - D_L]\right\}}{[(1+z)D_L' - D_L]\left\{(1+z)[\Omega_M(1+z)+\Omega_k]D_L'^2 - 2[\Omega_M(1+z)+\Omega_k]D_L D_L' + \Omega_M D_L^2 - (1+z)\right\}} . \quad (6.6)$$

où nous avons utilisé l'équation de Friedmann et noté $\Omega_X = 1 - \Omega_M - \Omega_k$.

Ainsi l'équation d'état de l'énergie noire se dérive de deux façons différentes, par la distance de luminosité $D_L(z)$ ou parla fonction $H(z)$ en supposant un univers plat. Les fonctions $w(z)$ reconstruites en fonction du redshift sont présentées dans la figure 6.1. La courbure testée est $\Omega_k = -0.02$, en bleu $w(z)$ est dérivée de la fonction $D_L(z)$, en jaune $w(z)$ est dérivée de $H(z)$.

D'après la figure, les valeurs reconstruites de $w(z)$ s'éloignent de la vraie valeur, -1, avec le redshift. Cet effet est visible quel que soit le moyen de reconstruction de $w(z)$, par

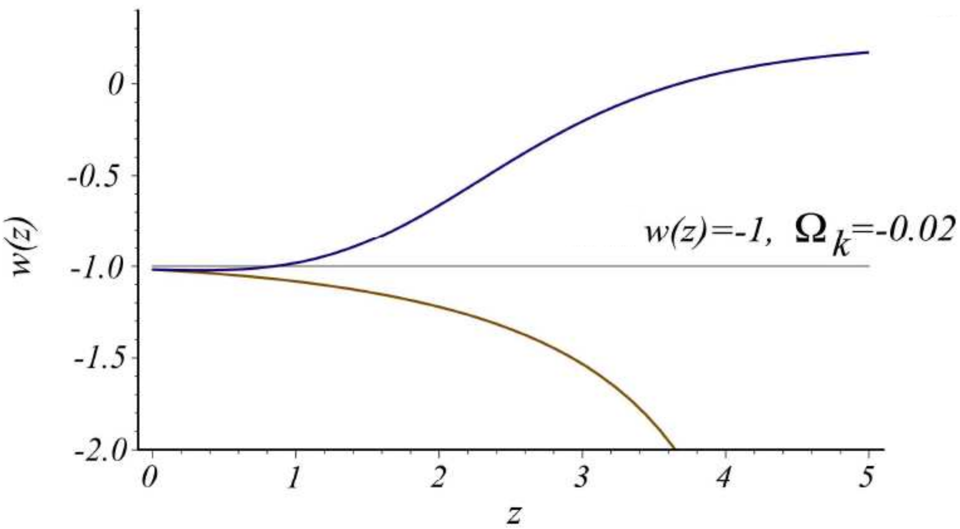

FIGURE 6.1 – *Courbes de l'équation d'état de l'énergie noire reconstruite supposant un univers plat : en bleu à partir de la fonction $D_L(z)$ et en or à partir de $H(z)$. Ces fonctions ont été calculés pour un univers de courbure $\Omega_k = -0.02$ avec une constante cosmologique. Figure issue de Clarkson et al. [79]*

la distance de luminosité ou par le paramètre de Hubble.

Nous pouvons également constater que les incertitudes de reconstruction de $w(z)$ sont opposées selon la méthode utilisée ($D_L(z)$ ou $H(z)$). L'écart obtenu sur le $w(z)$ reconstruit atteint 50% dès $z \simeq 3$ quand $w(z)$ est dérivé à partir du paramètre de Hubble et dès $z \simeq 2.5$ quand $w(z)$ est dérivé à partir de la distance de luminosité.

Une étude plus poussée dans Clarkson et al. [79] est réalisée pour différentes courbures. Même avec une courbure de 0.1% ($|\Omega_k| < 0.001$) il apparaît une mauvaise reconstruction de l'équation d'état de l'énergie noire dès $z \simeq 2$.

La reconstruction de $w(z)$ par la distance de luminosité a une particularité. Elle change de nature à un point de pivot $z = 0.86$. Pour les modèles fermés, $\Omega_k < 0$, $w(z)$ est reconstruit comme une énergie noire fantôme, $w(z) < -1$, jusqu'à $z = 0.86$ et $w(z) > -1$ au delà. A l'inverse, pour les modèles ouverts, $\Omega_k > 0$, $w(z)$ est reconstruit avec $w(z) > -1$, jusqu'à $z = 0.86$ et $w(z) < -1$ au delà. Au delà de ce point de pivot, toutes les valeurs de $w(z)$ sont biaisées quelle que soit la courbure supposée dans le modèle simulé. Les variations sur $w(z)$ sont en plus très fortes et rapides. Il faudrait contraindre Ω_k à 10^{-5} pour obtenir un écart inférieur à 1% entre la constante cosmologique simulée et $w(z)$ reconstruit, à un redshift de 5.

On peut déduire de cette étude que la dégénérescence géométrique est difficile à

contrôler. Baser l'interprétation des observations sur un modèle d'univers plat alors qu'il ne l'est pas, peut s'avérer dangereux et entraîner une mauvaise détermination de l'équation d'état de l'énergie noire. La courbure se manifeste alors comme une énergie noire dynamique. Cet effet s'explique dans l'équation du paramètre de Hubble, également présent dans l'expression de la distance de luminosité. On peut réécrire le terme d'énergie noire comme un terme de constante cosmologique et un terme de courbure : $\Omega_X f(z) = \Omega_\Lambda + \Omega_k(1+z)^2$. L'effet d'une énergie noire variant avec le temps compense celui de la courbure. Ignorer la courbure de l'univers (supposer $\Omega_k = 0$) induit alors une mauvaise reconstruction de l'équation d'état de l'énergie noire.
Notons que ces effets visibles avec le paramètre de Hubble et la distance de luminosité sont identiques avec la distance angulaire.

6.3 Etude de biais liés à l'hypothèse de platitude

Nous allons maintenant étudier ce problème avec des données simulées de supernovae et des paramètres réduits R et A. Nous allons simuler des modèles d'univers dont la courbure est non nulle et réaliser l'ajustement en supposant l'univers plat. Nous comparons les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire obtenus par l'ajustement avec ceux du modèle simulé. Le but de l'étude est de quantifier l'effet de l'hypothèse de platitude sur l'équation d'état de l'énergie noire. A l'inverse de l'étude menée dans la section précédente, l'analyse est quantitative et le cadre plus réaliste, tenant compte des incertitudes statistiques des ajustements.

6.3.1 La méthode

La méthode est la même que celle utilisée dans le chapitre 4 sur l'étude de biais liés à des hypothèses d'ajustement avec les supernovae. Nous avons ajouté aux supernovae les paramètres réduits R et A permettant de prendre en compte l'information issue du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons. Nous allons étudier l'effet de l'hypothèse de platitude sur les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire ajustés lorsque l'univers simulé n'est pas plat. Cette étude, suivant la méthode décrite chapitre 4, se compose en trois étapes :

- la simulation, c'est-à-dire le calcul des magnitudes des supernovae et des paramètres réduits R et A pour un modèle d'univers non plat,
- l'ajustement des paramètres cosmologiques (Ω_M, w_0, w_a) supposant l'univers plat,
- l'analyse par comparaison des résultats de l'ajustement avec le modèle simulé.

La méthode d'analyse est schématisée dans le tableau 6.1.

Simulation	Hypothèse	Ajustement	Etude
$(\Omega_M^F, \Omega_X^F, w_0^F, w_a^F)$	$\Omega_k = 0$ $(\Omega_M + \Omega_X = 1)$	Ω_M, w_0, w_a	Biais sur Ω_M, w_0, w_a ?

TABLE 6.1 – *Schéma d'analyse.*

La simulation

La simulation se compose du choix d'un modèle d'univers et de la simulation des données. Le modèle d'univers choisi comme vrai est caractérisé par 5 paramètres :
- M_S^F, le paramètre de normalisation du diagramme de Hubble,
- Ω_M^F et Ω_X^F, les densités réduites de matière et d'énergie noire,
- w_0^F, w_a^F, les paramètres d'énergie noire.

La somme de Ω_M^F et Ω_X^F définit la courbure de l'univers :

$$\Omega_M^F + \Omega_X^F = \Omega_T^F = 1 - \Omega_k^F \,. \tag{6.7}$$

Si $\Omega_T > 1$ (soit $\Omega_k < 0$), il s'agit d'un univers fermé.
Si $\Omega_T < 1$ (soit $\Omega_k > 0$), il s'agit d'un univers ouvert.
Si $\Omega_T = 1$ (soit $\Omega_k = 0$), il s'agit d'un univers plat.

La simulation est réalisée pour différents scénarios statistiques représentant les données attendues dans le futur. Nous reprenons les scénarios utilisés dans le chapitre 4.

Le **scénario à court terme** est défini par un lot de 700 supernovae de type SNLS, introduit au chapitre 4, section 4.2.1.
Nous ajoutons les paramètres réduits du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons.
Pour le fond diffus cosmologique, nous utilisons le paramètre R publié par WMAP pour 3 ans de données : $\sigma(R) = 0.03$ [80].
Pour les oscillations acoustiques de baryons, nous utilisons le paramètre A dont l'incertitude associée est extraite des données de SDSS : $\sigma(A) = 0.017$ [42].

Le **scénario à long terme** est défini par un lot de 2300 supernovae de type SNAP, introduit au chapitre 4, section 4.2.1.
Pour le fond diffus cosmologique, nous avons choisi une incertitude $\sigma(R) = 0.01$ comme attendu pour la mission PLANCK [48].
Pour les oscillations acoustiques de baryons, nous avons choisi une incertitude réduite, $\sigma(A) = 0.005$, qui est approximativement attendue dans les futurs larges sondages, missions spatiales dédiées aux BAO de type "stage-IV" décrit par le DETF [26][81].

L'ajustement

L'ajustement est réalisé avec la méthode statistique introduite dans le chapitre 3. Les valeurs centrales sont déterminées par une minimisation du χ^2, les incertitudes sont estimées par une analyse de Fisher et les contours réalisés sont des ellipses de Fisher.

L'ajustement est effectué avec une hypothèse fausse, ici l'hypothèse de platitude. Les paramètres ajustés sont alors : M_S, Ω_M, w_0 et w_a. Le paramètre Ω_X est déduit de la platitude par $\Omega_X = 1 - \Omega_M$. Cette hypothèse est la seule différence entre les paramètres simulés et ajustés.

Les critères de détection du biais

Les critères utilisés dans les analyses de ce chapitre sont les mêmes que ceux utilisés dans le chapitre 4.
Le critère de détectabilité permet de sélectionner les ajustements corrects, c'est-à-dire ceux qui passent le test du χ^2 : $\chi^2 < 5\sqrt{2N_{dof}}$
Le biais et la validité d'un ajustement sont définis par la comparaison des valeurs ajustées et simulées. Si, pour un quelconque paramètre P et sa valeur simulée P^F, $|P - P^F| < \sigma(P)$, l'ajustement est compatible à $1\,\sigma$ avec la valeur simulée, on parle de validité. Sinon, il s'agit d'un ajustement biaisé.

Les résultats de l'analyse sont souvent donnés dans les plans des paramètres simulés. Nous distinguons :

la zone de détectabilité, constituée des modèles dont les ajustements sont qualifiés de mauvais ($\chi^2 > 5\sqrt{2N_{dof}}$),

la zone d'indétectabilité, constituée des modèles dont les ajustements sont corrects ($\chi^2 < 5\sqrt{2N_{dof}}$).

Nous définissons également :

la zone de biais, comprenant les modèles dont l'ajustement est biaisé,

la zone de validité, comprenant les modèles aux ajustements valides.

6.3.2 Etude de biais pour un univers dominé par une constante cosmologique

Dans un premier temps nous allons étudier des modèles d'univers dont l'énergie noire est de type constante cosmologique. Les données de supernovae, R et A sont simulées avec une courbure non nulle ($\Omega_k \neq 0$) et pour une constante cosmologique, paramétrée par : $w_0^F = -1$ et $w_a^F = 0$. Nous réalisons l'ajustement supposant l'univers plat. Nous allons montrer l'effet induit par l'hypothèse de platitude.

Un exemple

Pour une illustration du problème, nous avons simulé deux modèles d'univers (ouvert et fermé) dans les deux scénarios statistiques (à court et à long terme). Les résultats des ajustements avec et sans l'hypothèse de platitude sont présentés figure 6.2, dans le plan (w_0, w_a).

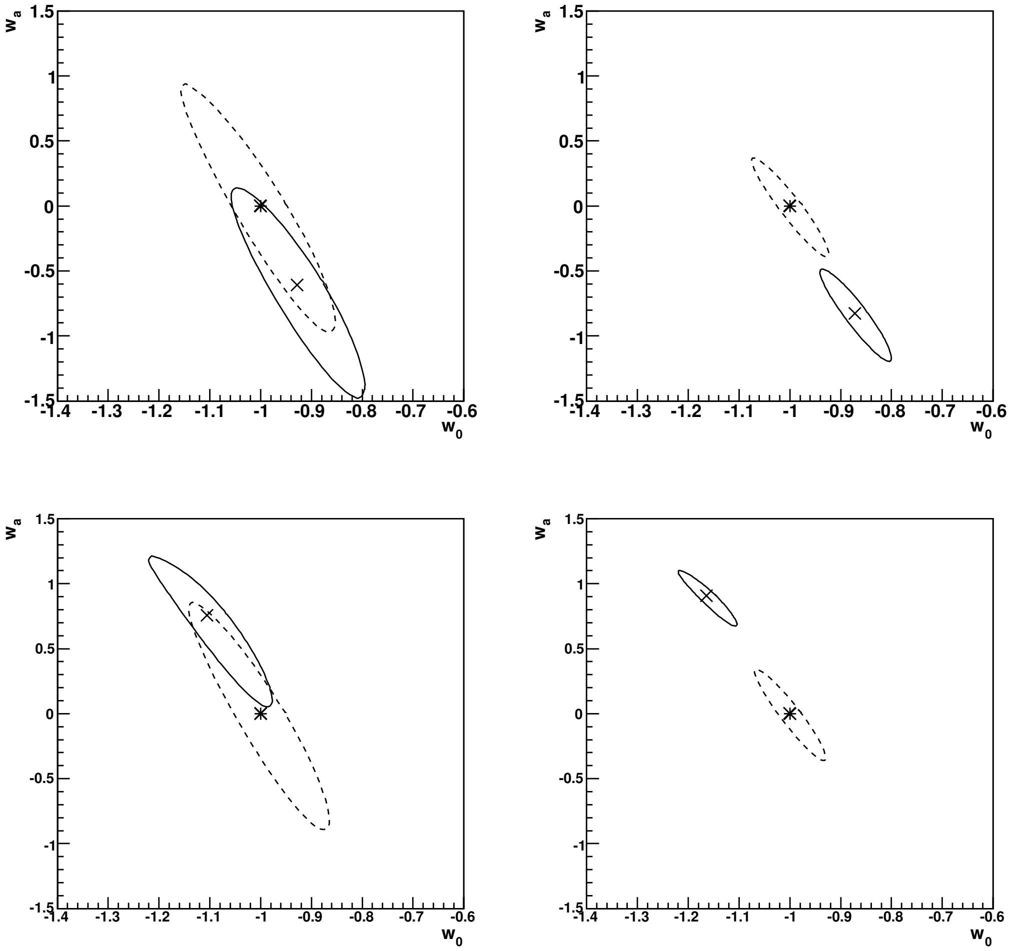

FIGURE 6.2 – *Illustration du biais par les contours.*
Modèles simulés : $\Omega_M^F = 0.3$, $\Omega_X^F = 0.68$, en haut ; $\Omega_M^F = 0.3$, $\Omega_X^F = 0.72$, en bas ; à gauche : scénario à court terme ; à droite : scénario à long terme ; en trait plein : contours obtenus en supposant la platitude ; en pointillés : contours obtenus sans hypothèse.

Le premier modèle testé est un univers ouvert avec :

$$\Omega_M^F = 0.3,\ \Omega_X^F = 0.68,\ (\Omega_k^F = 0.02),\ w_0^F = -1,\ w_a^F = 0.$$

Dans le scénario à court terme, les résultats de l'ajustement avec l'hypothèse de platitude, sur l'équation d'état de l'énergie noire sont :

$$\begin{aligned} w_0 &= -0.93 \pm 0.14 \\ w_a &= -0.61 \pm 0.87 \end{aligned}$$

Ces résultats sont représentés dans la partie supérieure gauche de la figure 6.2 par l'ellipse en trait plein. Nous constatons que les valeurs centrales obtenues sont déviées de la constante cosmologique simulée symbolisée par l'astérisque. Cependant les erreurs sont suffisamment grandes pour que le résultat reste compatible à $1\,\sigma$ avec la constante cosmologique.

Dans le scénario à long terme, c'est-à-dire avec une plus grande statistique, le contour obtenu en supposant la platitude est donné dans la partie supérieure droite de la figure 6.2. Les valeurs centrales sont déviées, comme dans le scénario précédent, et les incertitudes réduites. Le résultat est donc biaisé. L'équation d'état de l'énergie noire est mal reconstruite. La constante cosmologique simulée est reconstruite comme une énergie noire dynamique et le biais n'est pas détectable par un test du χ^2.

Nous avons également simulé un modèle d'univers fermé :

$$\Omega_M^F = 0.3,\ \Omega_X^F = 0.72,\ (\Omega_k^F = -0.02),\ w_0^F = -1,\ w_a^F = 0.$$

Les résultats de l'ajustement supposant la platitude sont présentés dans les figures du bas. Les conclusions sont identiques à celles obtenues pour le modèle d'univers ouvert. Les valeurs centrales ne correspondent pas aux valeurs simulées. Néanmoins, la taille des incertitudes dans le scénario à court terme est suffisamment grande pour que le résultat reste compatible avec la constante cosmologique simulée. Dans le long terme, par contre, la réduction des incertitudes par la plus grande statistique, entraîne un biais dans la reconstruction de l'équation d'état de l'énergie noire.

Nous venons de voir, à travers ces exemples que la fausse hypothèse de platitude peut engendrer une mauvaise détermination des paramètres d'équation d'état de l'énergie noire. Ces cas sont des exemples de compensation de la courbure par un effet d'énergie noire et corroborent les résultats de l'étude présentée dans la section précédente. Dans la section suivante, nous allons généraliser cette étude pour différentes courbures d'univers.

Analyse complète

Nous réalisons une étude systématique en faisant varier le paramètre de courbure. Cela permet de quantifier les modèles d'univers pour lesquels un biais est possible. Pour faire varier le paramètre de courbure simulé, nous fixons $\Omega_M^F = 0.3$ et faisons varier Ω_X. Nous avons également réalisé des simulations avec des valeurs de Ω_M comprises entre 0.2 et 0.5 pour vérifier la cohérence de l'étude. Les résultats obtenus dans ces cas, confirmant ceux obtenus avec $\Omega_M^F = 0.3$, ils ne seront pas présentés. Le modèle d'énergie noire simulé reste la constante cosmologique.

Les paramètres M_S, Ω_M, w_0 et w_a sont ensuite ajustés en supposant un univers plat. Le paramètre de normalisation, M_S, dépend peu de la cosmologie, sa détermination n'est donc pas affectée par la fausse hypothèse de platitude. Il sera omis dans la suite de l'analyse.

Résultat de l'étude dans le scénario à court terme

L'étude est d'abord réalisée dans le court terme, à partir des données simulées de supernovae de type SNLS et les incertitudes sur R et A correspondant aux données actuelles.

La figure 6.3 représente les résultats de l'étude menée en faisant varier le paramètre de courbure, Ω_T, entre 0.9 et 1.2. Nous avons simulés la constante cosmologique $w_0^F = -1$, $w_a^F = 0$ et gardé $\Omega_M^F = 0.3$. Ces valeurs sont représentées par les lignes horizontales. La figure décrit les résultats de l'ajustement en supposant la platitude de l'univers sur les paramètres w_0, w_a et Ω_M respectivement de gauche à droite. La courbe noire relie les valeurs centrales et les barres verticales représentent les incertitudes sur chaque paramètre ajusté pour chaque modèle testé.
Les résultats sont également résumés dans la table 6.2.

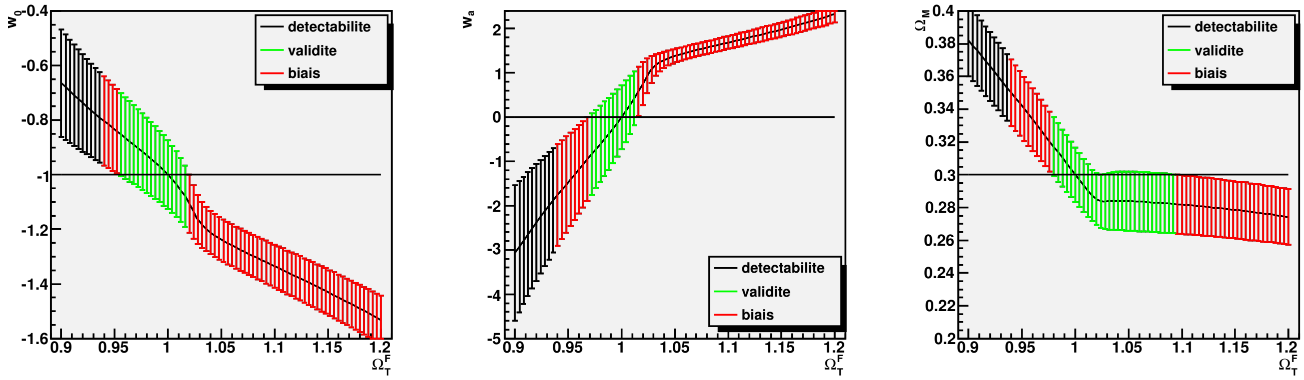

FIGURE 6.3 – *Résultats, dans le scénario à court terme, des ajustements des paramètres* w_0, w_a *et* Ω_M *respectivement de gauche à droite pour les modèles* $\Omega_M^F = 0.3$ *et 0.6* $< \Omega_X^F <$*0.9 (soit* $0.9 < \Omega_T < 1.1$*). En noir : la zone de mauvais ajustement, en vert : la zone de validité et en rouge la zone de biais.*

La zone de détectabilité est représentée en rouge. En noir le χ^2 est suffisamment bas pour qualifier l'ajustement de bon. Nous constatons que, dans la plupart des cas simulés, l'ajustement semble correct. Le test de détectabilité permet d'identifier un mauvais ajustement pour les modèles de courbure $\Omega_T^F < 0.94$ (soit $\Omega_k > 0.06$). Dans le cas des univers fermés, le χ^2 n'est pas suffisant pour détecter la fausse hypothèse.

Le premier graphique montre l'évolution de l'ajustement de w_0 en fonction de la courbure simulée. Les valeurs centrales varient beaucoup, de -1.3 à -0.8, selon les modèles testés. Pour la plupart des ajustements, la barre d'erreur ne croise pas la droite de la valeur simulée, cela signifie que les valeurs de w_0 ajustées s'éloignent à plus de 1 σ de la valeur simulée. Ces zones de biais s'étendent de $\Omega_T^F = 0.94$ à 0.95 et $\Omega_T^F > 1.02$.

Le deuxième graphique montre les résultats de l'étude sur le paramètre w_a. Les valeurs de w_a varient de -1.3 à 1.5. Les incertitudes sont très grandes, de l'ordre de 1, mais diminuent pour les univers fermés. On observe un biais indétectable dans la détermination de ce paramètre pour les modèles ouverts avec Ω_T^F compris entre 0.94 et 0.97 et pour les modèles fermés avec Ω_T^F supérieur à 1.02.

Le troisième graphique permet de vérifier la reconstruction du paramètre de densité de matière Ω_M. Les valeurs de Ω_M ajustées, proches de la valeur simulée, sont comprises entre 0.27 et 0.35 lorsque l'ajustement est bon et sont compatibles avec 0.3 à $1\,\sigma$ dans la plupart de ces cas. Nous constatons cependant que pour certains modèles, Ω_M est mal reconstruit. Il s'agit des modèles dont les valeurs de Ω_T^F sont comprises entre 0.94 et 0.98 ou supérieures à 1.12. Pour ces modèles, le biais n'est pas détectable.

	$\chi^2 > 5\sigma(\chi^2)$	Zone de Biais	Zone de Validité	Zone de Biais
w_0	$\Omega_T^F < 0.94$	$0.94 < \Omega_T^F < 0.95$	$0.95 < \Omega_T^F < 1.02$	$\Omega_T^F > 1.02$
w_a	$\Omega_T^F < 0.94$	$0.94 < \Omega_T^F < 0.97$	$0.97 < \Omega_T^F < 1.02$	$\Omega_T^F > 1.02$
Ω_M	$\Omega_T^F < 0.94$	$0.94 < \Omega_T^F < 0.98$	$0.98 < \Omega_T^F < 1.12$	$\Omega_T^F > 1.12$
Tous	$\Omega_T^F < 0.94$	$0.94 < \Omega_T^F < 0.98$	$0.98 < \Omega_T^F < 1.02$	$\Omega_T^F > 1.02$

TABLE 6.2 – *Zones de biais et de validité des paramètres w_0, w_a et Ω_M dans le scénario à court terme.*

En résumé, l'hypothèse de platitude induit souvent une mauvaise détermination de la nature de l'énergie noire mais a peu de répercussions sur la détermination de la densité de matière. Dans ce scénario, Les résultats ne sont compatibles avec la constante cosmologique que si la courbure "vraie" est $0.97 < \Omega_T^F < 1.02$. Pour les autres valeurs de courbure, les ajustements sont biaisés.

Résultats de l'analyse dans le scénario à long terme

Nous avons réalisé la même étude dans le scénario à long terme. Rappelons qu'il s'agit d'une statistique plus grande de supernovae et d'incertitudes réduites pour les valeurs de R et A. La figure 6.4 illustre l'évolution des valeurs ajustées des paramètres w_0, w_a et Ω_M en fonction de la courbure simulée et la table 6.3 résume les zones de validité et de biais.

Dans ce scénario, le test du χ^2 suffit souvent à identifier et rejeter un mauvais ajustement. Ces cas sont plus nombreux que dans le scénario à court terme. L'ajustement semble bon sur un intervalle réduit qui correspond à des valeurs de Ω_T^F comprises entre 0.97 et 1.14 ($-0.14 < \Omega_k < 0.03$). Une statistique plus grande permet donc une meilleure détectabilité du problème lié à la fausse hypothèse.

Les formes des courbes sont semblables au premier scénario. Cela signifie que les valeurs centrales sont similaires. Cependant les incertitudes sur les paramètres ajustés sont

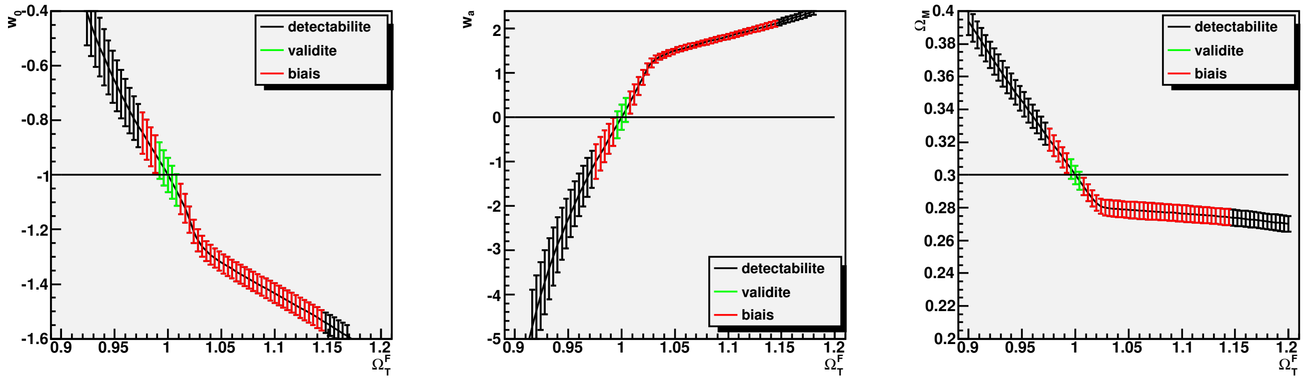

FIGURE 6.4 – *Résultats, dans le scénario à long terme, des ajustements des paramètres w_0, w_a et Ω_M respectivement de gauche à droite pour les modèles $\Omega_M^F = 0.3$ et 0.6 < Ω_X^F <0.9 (soit $0.9 < \Omega_T < 1.1$). En noir : la zone de mauvais ajustement, en vert : la zone de validité et en rouge la zone de biais.*

	$\chi^2 > 5\sigma(\chi^2)$	Zone de Biais	Zone de Validité	Zone de Biais	$\chi^2 > 5\sigma(\chi^2)$
w_0	Ω_T^F <0.97	$0.97 < \Omega_T^F < 0.99$	$0.99 < \Omega_T^F < 1.01$	$1.01 < \Omega_T^F < 1.14$	$\Omega_T^F > 1.14$
w_a	Ω_T^F <0.97	$0.97 < \Omega_T^F < 0.99$	$0.99 < \Omega_T^F < 1.01$	$1.01 < \Omega_T^F < 1.14$	$\Omega_T^F > 1.14$
Ω_M	Ω_T^F <0.97	$0.97 < \Omega_T^F < 0.99$	$0.99 < \Omega_T^F < 1.01$	$1.01 < \Omega_T^F < 1.14$	$\Omega_T^F > 1.14$

TABLE 6.3 – *Zones de biais et de validité des paramètres w_0, w_a et Ω_M dans le scénario à long terme.*

réduites grâce à la plus grande statistique. La conséquence est la présence de zones de biais, où les paramètres sont mal ajustés bien que le χ^2 soit faible.

Les intervalles de biais sont identiques pour les trois paramètres ajustés. Contrairement au premier scénario, le paramètre de densité de matière est biaisé de la même façon que les paramètres d'énergie noire, pour de nombreux modèles d'univers simulés. Les zones de biais s'étendent, pour les univers ouverts entre $\Omega_T^F = 0.97$ et 0.99 et pour les univers fermés entre 1.01 et 1.14. La zone de validité est réduite aux modèles simulés avec moins de 1% de courbure.

Conclusion

Les résultats sur les risques de confusion avec une énergie noire dynamique à partir des ajustements avec l'hypothèse de platitude sont résumés dans la table 6.4. En conclusion, l'hypothèse de platitude peut entraîner une mauvaise reconstruction des paramètres cosmologiques, densité de matière et paramètres d'équation d'état de l'énergie noire. Dans ces cas, la constante cosmologique est très largement reconstruite comme une énergie noire dynamique, la courbure est compensée par un effet d'énergie noire.

	$\chi^2 > 5\sigma(\chi^2)$	Biais	Validité	Biais	$\chi^2 > 5\sigma(\chi^2)$
court		Ω_k^F <-0.02	-0.02< Ω_k^F <0.03	0.03< Ω_k^F <0.06	Ω_k^F >0.06
long	Ω_k^F <-0.14	-0.14< Ω_k^F <-0.01	-0.01< Ω_k^F <0.01	0.01< Ω_k^F <0.03	Ω_k^F >0.03

TABLE 6.4 – *Domaine de validité de l'hypothèse de platitude sur la détermination des paramètres de l'équation d'état de l'énergie noire w_0 et w_a.*

Dans le scénario à court terme, la fausse hypothèse n'est détectée que pour des cas de courbures Ω_k supérieures à 0.06. Dans le scénario à long terme, le critère de détectabilité permet de repérer la valeur du χ^2 trop élevée pour une courbure simulée inférieure à -0.14 ou supérieure à 0.03, mais n'empêche pas le biais. La mesure de $w(z)$ en supposant la platitude de l'univers, n'est fiable que si la vraie courbure est inférieure à 2% pour les données actuelles ou à court terme et inférieure à 1% pour les données futures.

Cette étude nuance l'étude analytique présentée précédemment. En tenant compte des erreurs statistiques, et en réalisant un ajustement dans les mêmes conditions qu'avec des vraies données, les conclusions sont moins restrictives. Nous avons vu, dans la première étude, que même une courbure $|\Omega_k| < 0.001$ ne permettait pas une reconstruction correcte de $w(z)$. Cette étude a été menée avec des observables supposées parfaitement connues, autrement dit sans tenir compte des erreurs de mesure. Si l'on en tient compte, nous venons de montrer que la reconstruction de $w(z)$ est correcte pour une courbure $|\Omega_k| < 0.02$ ($|\Omega_k| < 0.01$) pour le scénario à court (long) terme. Cette conclusion semble permettre d'utiliser l'hypothèse de platitude puisqu'elle est mesurée au pour-cent par WMAP.

Nous allons vérifier ces conclusions dans le cas de modèles d'énergie noire simulés différents de la constante cosmologique.

6.3.3 Etude généralisée pour une énergie noire dynamique

Nous avons repris la même analyse en simulant des modèles d'énergie noire qui évoluent avec le redshift.

Un exemple

Nous avons simulé, par exemple, dans le scénario à court terme, un univers ouvert décrit par $\Omega_M^F = 0.3$ $\Omega_X^F = 0.66$, d'énergie noire dynamique :

$$w_0^F = -1.2\,, w_a^F = 1.1\,.$$

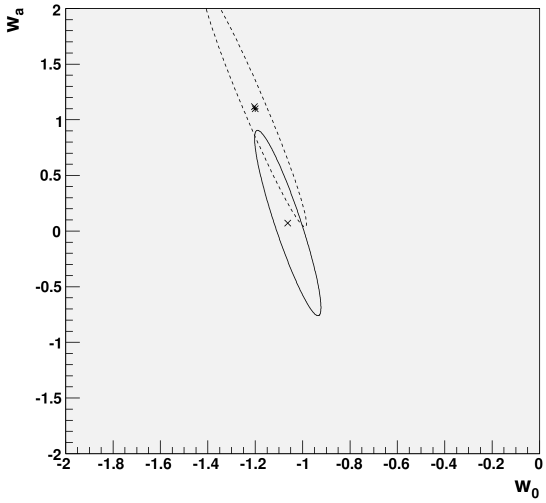

FIGURE 6.5 – *Ellipses de Fisher à 1 σ illustrant les résultats, dans le scénario à court terme, des ajustements du modèle $\Omega_M^F = 0.3$, $\Omega_X^F = 0.66$, $w_0 = -1.2$, $w_a = 1.1$, avec l'hypothèse de platitude (trait plein) ou sans (pointillés). L'astérisque signale le modèle simulé.*

Nous avons alors ajusté les paramètres cosmologiques en supposant la platitude de l'univers. Les résultats de l'ajustement sont :

$$\begin{aligned} w_0 &= -1.06 \pm 0.14 \\ w_a &= 0.06 \pm 0.82 \end{aligned}$$

Ils sont représentés par la croix et l'ellipse en trait plein de la figure 6.5.

Nous remarquons d'abord que les valeurs centrales obtenues sont décalées des valeurs simulées, symbolisées par l'astérisque. Ces résultats sont compatibles avec l'énergie noire simulée à un peu plus de $1\,\sigma$. La fausse hypothèse de platitude a pour effet de décaler les valeurs centrales de l'ajustement et induit un biais dans la reconstruction des paramètres d'équation d'état de l'énergie noire. Cet effet est identique à celui que nous avons vu dans le cas précédent en simulant une constante cosmologique.
De plus, nous pouvons constater que les résultats sont compatibles à moins de $1\,\sigma$ avec la constante cosmologique. C'est ce que nous appellerons la confusion avec la constante cosmologique.
Le χ^2, bon, ne permet pas de détecter le biais ni la confusion avec la constante cosmologique.

Nous avons également tracé en pointillé l'ellipse correspondant à l'ajustement sans l'hypothèse de platitude.

Les valeurs centrales sont identiques aux valeurs simulées. Les incertitudes obtenues sont légèrement plus grandes (moins de 2 fois plus grandes). L'énergie noire est donc bien reconstruite. La compatibilité avec la constante cosmologique n'est qu'à plus de $1\,\sigma$. Les incertitudes sont grandes mais il n'y a ni biais ni confusion avec la constante cosmologique.

Cette illustration est un bon exemple de la mauvaise utilisation d'une hypothèse d'ajustement. Dans les prochains paragraphes, nous allons quantifier les modèles d'univers problématiques dans les deux scénarios statistiques, à court et à long terme.

Analyse complète

Dans cette étude, nous avons simulé différents modèles d'énergie noire pour différentes courbures. Nous choisissons les cas de courbure en fixant $\Omega_M^F = 0.3$ et en faisant varier Ω_X^F entre 0.6 et 0.8, ce qui revient à un paramètre de courbure Ω_T^F compris entre 0.9 et 1.1 (soit $|\Omega_k^F| < 0.1$). Pour chaque cas nous simulons différents modèles d'énergie noire en faisant varier w_0^F entre -1.8 et 0 et w_a^F entre -2 et 2. Les résultats les plus représentatifs sont illustrés dans le plan des modèles d'énergie noire simulés (w_0^F, w_a^F) dans les figures 6.6 et 6.7 respectivement dans le court et le long terme.

L'analyse comprend trois étapes.
La première est le critère de détectabilité, pour vérifier l'influence de l'hypothèse de platitude sur le χ^2 obtenu.

La seconde consiste à comparer les résultats de l'ajustement des paramètres d'équation d'état de l'énergie noire avec les valeurs simulées. Dans cette étude le biais est défini si l'un au moins des paramètres w_0 ou w_a est biaisé. Inversement les ajustements valides sont caractérisés par une bonne reconstruction de ces deux paramètres à la fois. Notons que le paramètre Ω_M n'est pas pris en compte ici. Nous avons vu dans l'étude précédente que ce paramètre n'est biaisé que dans des cas ou les autres paramètres le sont aussi. Pour cette raison, nous n'étudierons pas le biais de ce paramètre.

La troisième étape concerne la confusion avec la constante cosmologique. Dans certains cas, l'énergie noire reconstruite est compatible à $1\,\sigma$ avec la constante cosmologique. Plusieurs cas sont alors à distinguer. Si l'énergie noire simulée est proche de la constante cosmologique, c'est-à-dire si $|w_0^F + 1| < \sigma(w_0)$ et $|w_a^F| < \sigma(w_a)$, le cas n'est pas problématique. Si le cas apparaît dans la zone de validité, ce n'est pas problématique non plus. Les autres cas sont des confusions avec la constante cosmologique.

Résultats de l'étude dans le scénario à court terme

La figure 6.6 montre les résultats de l'étude obtenus pour des courbures :
$\Omega_T^F = 0.94, 0.96, 0.98, 1.01, 1.02, 1.04$ respectivement de gauche à droite et de haut en

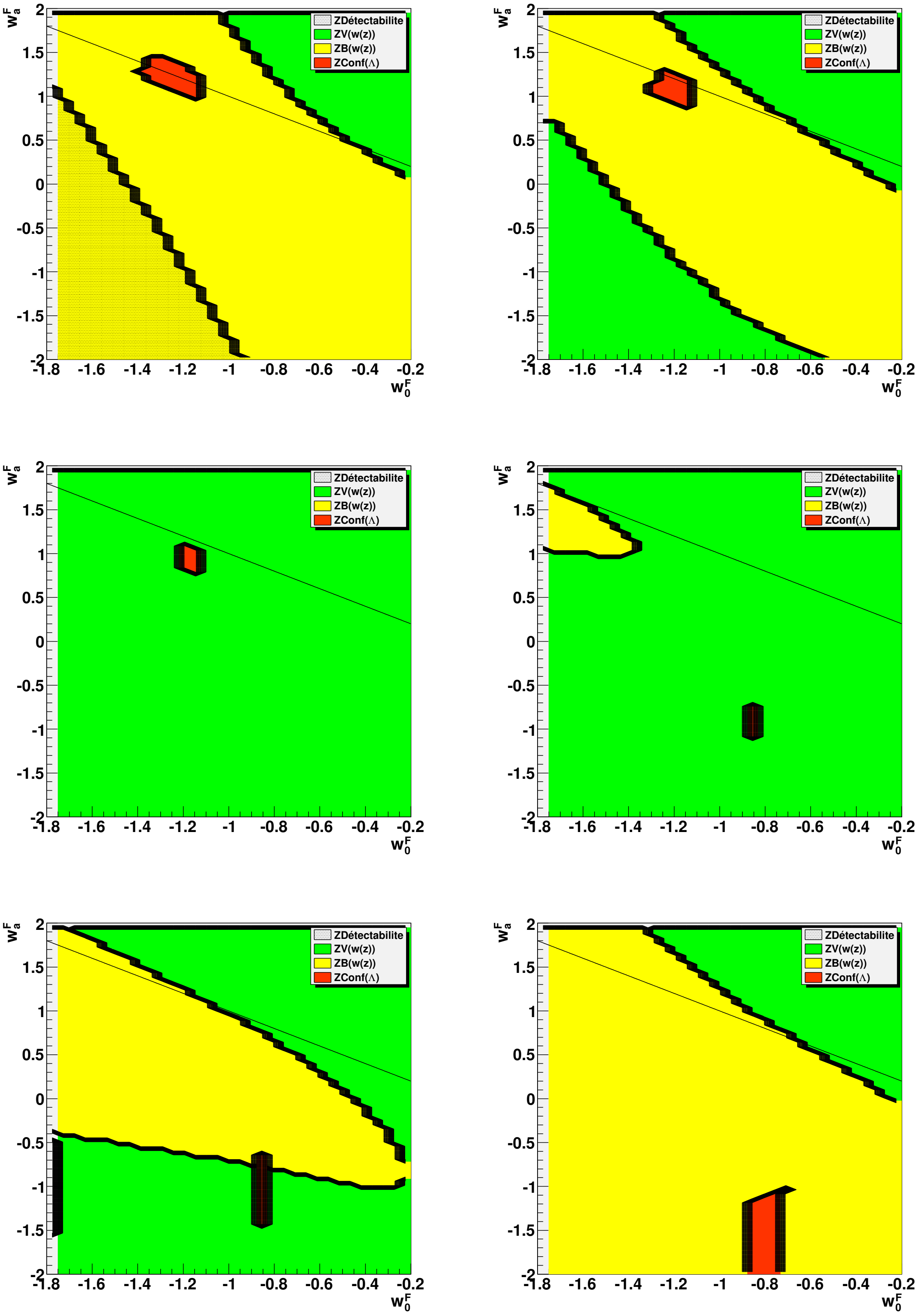

FIGURE 6.6 – *Résultats de l'étude sur la détermination des paramètres de l'équation d'état de l'énergie noire pour des modèles simulés dans le scénario à court terme avec* Ω_M^F*=0.3 et* Ω_X^F*= 0.64, 0.66, 0.68, 0.71, 0.72 et 0.74 respectivement de haut en bas et de gauche à droite.*

bas.

Dans le premier graphique, représentant les résultats de l'étude pour des univers ouverts de courbure $\Omega_T^F = 0.94$, seuls les modèles d'énergie noire caractérisés par $w_0^F < -1$ et $w_a^F < 1$ sont rejetés par le critère de détectabilité. Dans ces cas seulement, l'ajustement est qualifié de mauvais. Dans tous les cas de courbure avec $\Omega_T^F > 0.94$, le test du χ^2 indique un bon ajustement pour tous les modèles d'énergie noire testés. Dans le scénario à court terme, pour la plupart des modèles testés, l'hypothèse de platitude n'altère donc pas la qualité de l'ajustement.

Nous voulons alors savoir si l'équation d'état de l'énergie noire est bien reconstruite ou biaisée. Les résultats changent selon la courbure étudiée.

- **Les cas d'univers ouverts** de courbure $\Omega_T^F \leq 0.96$ (première rangée de la figure 6.6) :
  L'équation d'état de l'énergie noire est mal déterminée pour de nombreux modèles d'énergie noire. Ces modèles constituent la zone de biais repérée en jaune. Cette zone diminue cependant plus la courbure testée est proche de $\Omega_T^F = 1$.
  Dans ces cas il existe une zone de confusion, colorée en vert, dans laquelle l'énergie noire reconstruite est compatible avec la constante cosmologique. La position de cette zone dans le plan indique que la confusion apparaît pour des modèles d'énergie noire simulées exotiques, de grand w_a et proche de la limite imposée par l'utilisation du fond diffus cosmologique avec cette paramétrisation.

- **Les cas proches de la platitude,** de courbure $0.98 \leq \Omega_T^F \leq 1.01$ (deuxième rangée) :
  La reconstruction des paramètres d'énergie noire est valide pour tous les modèles testés (surface bleue). Seule une petite zone de biais apparaît dans le cas $\Omega_T^F = 1.01$ pour des valeurs extrêmes de w_0^F et w_a^F ($w_0^F < -1.4$ $w_a^F > 0.9$).
  On remarque quelques modèles pour lesquels les résultats sont compatibles à moins de $1\,\sigma$ avec la constante cosmologique (surface verte) mais ces cas se situent dans la zone de validité et ne sont pas problématiques.

- **Les cas d'univers fermés** avec $\Omega_T^F \geq 1.02$ (troisième rangée) :
  La zone de validité reste grande pour la courbure $\Omega_T^F = 1.02$ mais rétrécit vite quand la courbure simulée augmente. La zone de biais s'agrandit alors plus la courbure simulée s'éloigne de la platitude pour atteindre la quasi totalité du plan.
  La zone de confusion se situe dans la zone de validité pour $\Omega_T^F = 1.02$, grandit et se situe dans la zone de biais pour $\Omega_T^F = 1.04$ puis disparaît pour des courbures plus grandes.

Dans le scénario à court terme, le risque de biais dus à la fausse hypothèse de platitude existe pour des modèles de courbure qui s'éloignent à plus de 2% de la platitude.

Ce biais n'est quasiment jamais détectable par le test de détectabilité. De plus, le risque de confondre un modèle d'énergie noire dynamique avec la constante cosmologique existe pour certains modèles d'énergie noire dans les univers ouverts.

Résultats de l'étude dans le scénario à long terme

Les résultats de l'étude dans le scénario à long terme, avec une plus grande statistique, sont illustrés dans la figure 6.7.

Dans ce scénario, il existe des zones de mauvais ajustement dans différents cas. Si la courbure est supérieure à 3%, c'est-à-dire $\Omega_T^F < 0.97$ et $\Omega_T^F > 1.03$, la plupart des ajustements sont mauvais et le χ^2 permet de rejeter l'ajustement dans la majeure partie du plan.

La figure montre trois types de résultats sur le biais selon la courbure simulée :

- **Les cas d'univers ouverts** avec $\Omega_T^F \leq 0.98$ (première rangée) :
  La zone de biais couvre la quasi-intégralité du plan et ce biais n'est détectable que pour les univers de courbure $\Omega_T^F \leq 0.96$. Le cas $\Omega_T^F = 0.98$ (graphique de droite) est le plus critique car il existe une zone de confusion avec la constante cosmologique située dans la zone de biais et non exclue par le test du χ^2.

- **Les cas proches de la platitude,** de courbure $0.995 \leq \Omega_T^F \leq 1.005$ (deuxième rangée) :
  Ces cas montrent que pour une courbure inférieure à 0.5%, la détermination de la nature de l'énergie noire est correcte malgré l'hypothèse de platitude.

- **Les cas d'univers fermés** avec $\Omega_T^F \geq 1.1$ (troisième rangée) :
  L'extraction des paramètres d'énergie noire est biaisée dans la majorité des modèles testés. La zone de confusion, en revanche, est extrêmement petite et même rejetée par le test de détectabilité dans le dernier cas.

Les résultats du scénario à long terme diffèrent peu du court terme. Une plus grande statistique et une meilleure précision sur R et A apportent une plus grande détectabilité de la fausse hypothèse dès un écart de la platitude de 3%. Cependant le biais reste important. Seuls les cas de courbure inférieure à 0.5% restent valides quel que soit le modèle d'énergie noire simulé. Les cas de confusion avec la constante cosmologique concernent les univers ouverts $\Omega_T^F \simeq 0.98$ pour des modèles $w_0^F < -1$ et $w_a^F > 0$.

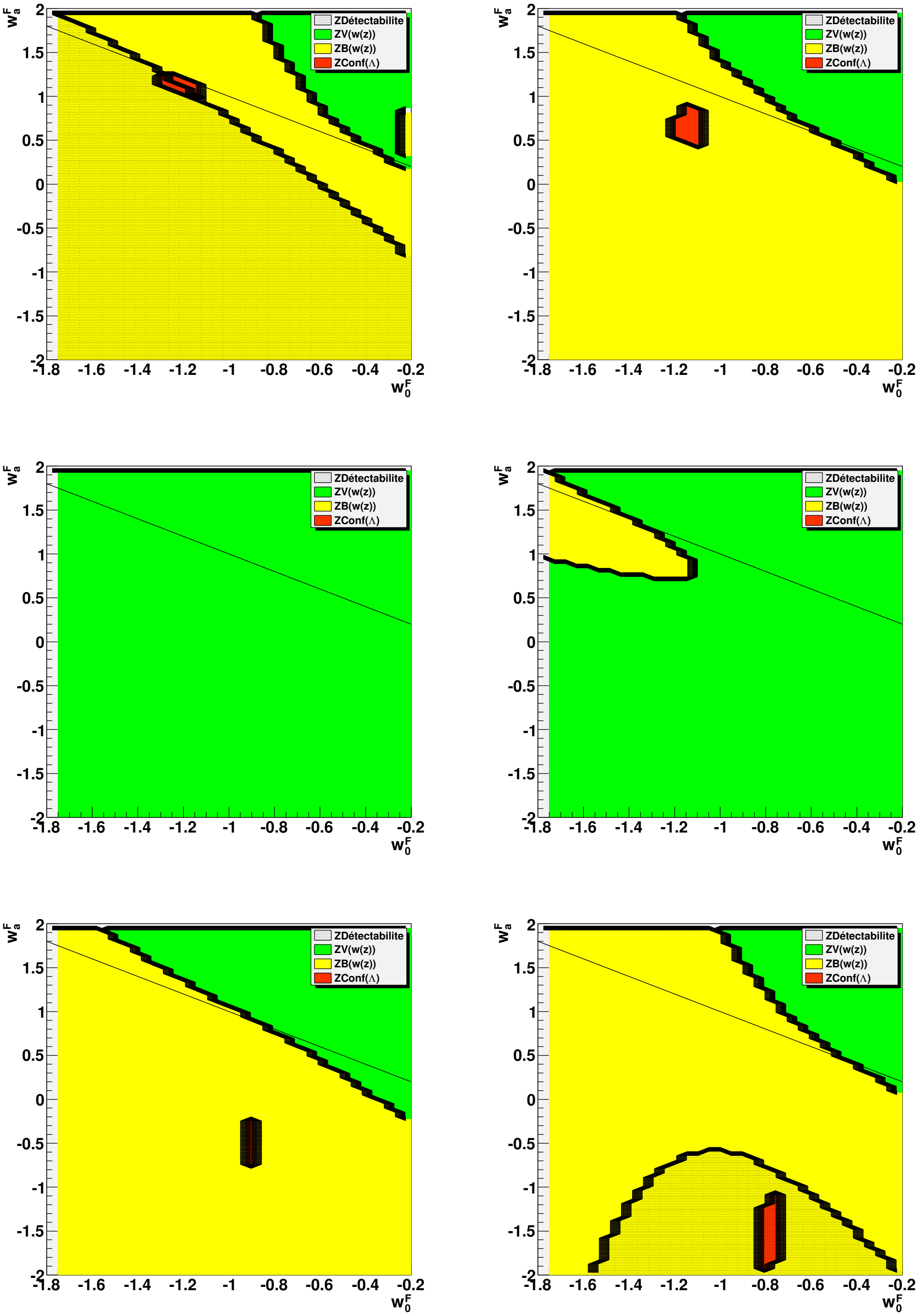

FIGURE 6.7 – *Résultats de l'étude sur la détermination des paramètres de l'équation d'état de l'énergie noire pour des modèles simulés dans le scénario à long terme avec* $\Omega_M^F = 0.3$ *et* Ω_X^F*= 0.66, 0.68, 0.695, 0.705, 0.71 et 0.73, respectivement de haut en bas et de gauche à droite.*

6.3.4 Conclusion de l'étude de biais lié à l'hypothèse de platitude

Nous avons montré à travers ces deux études qu'imposer la platitude de l'univers peut entraîner une mauvaise reconstruction de l'énergie noire. La courbure de l'univers est souvent compensée par un effet sur l'énergie noire, comme nous l'avons expliqué dans la section 6.2.
Nous avons d'abord montré que la constante cosmologique est parfois reconstruite comme une énergie noire dynamique, et ce dès une courbure de 2% dans le scénario à court terme et 1% dans le scénario à long terme. La généralisation de l'étude a montré que la plupart des modèles d'énergie noire testés sont mal reconstruits pour une courbure simulée supérieure à 2% (1%) dans le scénario à court (long) terme. En particulier, une énergie noire dynamique peut être reconstruite comme une constante cosmologique, souvent pour des univers ouverts avec $w_0^F < -1$ et $w_a^F > 0$.
Cette configuration est particulièrement intéressante puisque les résultats de l'ajustement sont en accord avec le modèle de concordance obtenu avec les données actuelles, par exemple avec les supernovae, le fond diffus cosmologique et les oscillations acoustiques de baryons. Ce résultat montre la fragilité du modèle de concordance retrouvé en simulant un univers ouvert avec une énergie noire dynamique.

La courbure déterminée par WMAP est incluse dans la zone de validité. Ce résultat semble indiquer que le risque de biais ou de confusion est écarté. Cependant la courbure est déterminée en supposant la constante cosmologique. Cette hypothèse peut être source de biais. Nous allons l'étudier dans la section suivante.

6.4 Etude de biais lié à l'hypothèse de constante cosmologique

La constante cosmologique est l'hypothèse la plus simple possible sur la nature de l'énergie noire. Elle est souvent supposée pour briser la dégénérescence liant les densités d'énergie et les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire (cf. le paragraphe 5.5). En particulier elle est souvent supposée pour déterminer la courbure de l'univers. Elle est justifiée par une théorie simple, l'ajout d'une constante dans l'équation d'Einstein, et par les résultats obtenus pour différents ajustements supposant l'univers plat.

Nous allons étudier ici les effets de cette hypothèse lorsqu'elle est fausse. Cette étude est réalisée avec la même méthode que l'étude précédente grâce à des simulations des données des supernovae et des paramètres réduits R et A.

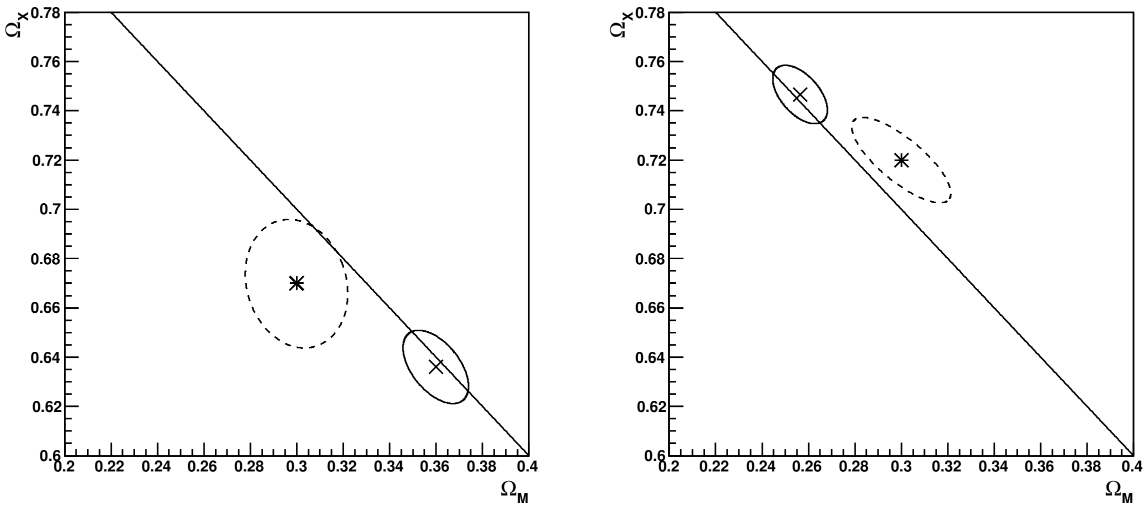

FIGURE 6.8 – *Contours à 1σ dans le plan (Ω_M,Ω_X) dans le scénario à court terme avec ou sans l'hypothèse de constante cosmologique (trait plein et en pointillé respectivement). A gauche, modèle simulé : $\Omega_M^F = 0.3$, $\Omega_X^F = 0.67$, $w_0^F = -0.9$, $w_a^F = 0.5$. A droite, modèle simulé : $\Omega_M^F = 0.3$, $\Omega_X^F = 0.72$, $w_0^F = -0.9$, $w_a^F = -1.5$.*

6.4.1 Un exemple

Nous avons simulé deux modèles d'univers de courbure non nulle et d'énergie noire dynamique dans le scénario à court terme :

$$\begin{aligned} \text{un univers ouvert :} \quad & \Omega_M = 0.3,\ \Omega_X = 0.67\, w_0^F = -0.9,\ w_a^F = 0.5, \\ \text{un univers fermé :} \quad & \Omega_M = 0.3,\ \Omega_X = 0.72\, w_0^F = -0.9,\ w_a^F = -1.5. \end{aligned}$$

Les contours à $1\,\sigma$ de l'ajustement avec ou sans hypothèse de constante cosmologique sont présentés dans le plan (Ω_M, Ω_X) de la figure 6.8, respectivement en trait plein et en pointillés. Le modèle simulé est signalé avec l'astérisque et les valeurs centrales obtenues par l'ajustement avec l'hypothèse de constante cosmologique sont signalées par la croix.

On constate d'abord que les valeurs centrales sont décalées dans les deux exemples. Les incertitudes, petites, ne permettent une compatibilité avec le modèle simulé qu'à plus de $2\,\sigma$. La courbure est mal estimée.

Nous avons également tracé la droite, $\Omega_M + \Omega_X = 1$, symbolisant la platitude de l'univers. Nous constatons que les résultats de l'ajustement supposant la constante cosmologique sont compatibles à moins de $1\,\sigma$ avec la platitude. Nous appellerons ces cas des cas de confusion avec un univers plat.

Avec cette illustration nous avons montré qu'imposer la constante cosmologique ($w = -1$) peut entraîner une mauvaise détermination de la courbure. De plus, il est possible d'interpréter un modèle d'énergie noire dynamique avec une courbure non nulle comme un univers plat dominé par une constante cosmologique dans les données actuelles. Le décalage des ellipses ne se fait pas dans le même sens mais le biais et la confusion apparaissent aussi bien pour un univers ouvert que pour un univers fermé.

Dans les sections suivantes nous allons différencier ces problèmes. Nous nous intéresserons d'abord au problème de biais, puis plus particulièrement à la confusion avec un univers plat, résultat au coeur du modèle de concordance.

6.4.2 Biais de reconstruction du paramètre de courbure

Suivant la méthode d'analyse précédente, nous avons simulé des modèles d'univers de courbures différentes en fixant $\Omega_M^F = 0.3$ et en faisant varier Ω_X^F entre 0.6 et 0.8. Pour chaque cas de courbure nous avons fait varier w_0^F entre -2 et 0 et w_a^F entre -2 et 2.

On cherche à savoir si la courbure est bien reconstruite. De plus nous allons vérifier si les paramètres ajustés, Ω_M et Ω_X sont indépendamment bien reconstruits.

Les figures 6.9 et 6.10 montrent les résultats de cette étude dans les scénarios à court et à long terme respectivement.

Résultats de l'étude dans le court terme

La figure 6.9 représente les résultats de l'étude obtenus pour des courbures : $\Omega_T^F = 0.9, 0.98, 1.02, 1.04$.

Comme dans les autres études de biais la première étape est la vérification de la qualité de l'ajustement. Le test du χ^2 joue son rôle et permet de rejeter un grand nombre d'ajustements.
La zone de bon ajustement, quasi identique pour tous les cas de courbure que nous avons testés, est restreinte à $-1.5 < w_0^F < -0.5$. De plus, elle diminue légèrement quand Ω_X^F augmente à cause du poids de ce paramètre dans le calcul du χ^2.

Nous avons représenté en vert clair, la zone de validité de la courbure, c'est-à-dire où la somme $\Omega_T = \Omega_M + \Omega_X$ est compatible avec la courbure simulée, Ω_T^F. La zone en vert foncé est constituée des modèles pour lesquels les paramètres Ω_M et Ω_X sont tous les deux bien reconstruits, c'est-à-dire pour lesquels Ω_M et Ω_X sont indépendamment compatibles avec leurs valeurs simulées, Ω_M^F et Ω_X^F. Cette zone est l'intersection de la zone de validité de Ω_M avec celle de Ω_X et est notée $ZV(\Omega_M) \cap ZV(\Omega_X)$ dans la légende de la figure. Cette zone est la même pour toutes les courbures simulées. Elle comprend les modèles avec w_0^F entre -1.2 et -0.5.

Nous pouvons remarquer que la zone de validité de la courbure ne correspond pas toujours à une bonne reconstruction des paramètres Ω_M et Ω_X. La comparaison des surfaces vert clair et vert foncé montre que la courbure est valide sur une plus grande surface que celle composée des modèles présentant une bonne reconstruction de Ω_M et Ω_X à la fois. Cela signifie que la courbure peut être bien reconstruite par compensation des biais sur Ω_M et Ω_X. Par exemple dans les modèles ouverts, avec $\Omega_T^F = 0.9$ (premier graphique), la zone de validité de la courbure couvre la majeure partie du plan alors que les paramètres Ω_M et Ω_X sont biaisés.

Résultats de l'étude dans le long terme

Nous avons réalisé la même étude avec une statistique plus grande, dans le scénario à long terme. Les résultats sont quasi-identiques quelle que soit la courbure simulée, Ω_T^F, entre 0.9 et 1.1. C'est pourquoi nous n'avons représenté qu'un seul cas de courbure : $\Omega_T^F = 0.97$.

La zone de bon ajustement est réduite. Le critère de détectabilité permet de rejeter la plupart des ajustements.

Dans ce scénario, il n'y a pas de différence notable entre la validité de la courbure et celle des paramètres Ω_M et Ω_X. La courbure est bien reconstruite uniquement quand Ω_M et Ω_X sont bien reconstruits. Nous remarquons que la zone de validité, en vert, est petite. Elle s'étend de part et d'autre de la constante cosmologique ($w_0^F = -1$ et $w_a^F = 0$) suivant une fine bande de modèles. La plupart des modèles testés restent biaisés.

Conclusion sur le biais

Dans cette étude nous avons supposé la constante cosmologique dans l'ajustement pour déterminer la courbure de l'univers. Nous avons montré que le test du χ^2 permet de détecter la fausse hypothèse dès que w_0^F s'éloigne de -1 : $|w_0^F + 1| > 0.5$.

Cependant, nous avons vu que la plupart des modèles testés présentent un ajustement biaisé. La courbure est mal reconstruite. Le biais apparaît quelle que soit la courbure simulée, pour les univers ouverts comme fermés. Les modèles pour lesquels l'ajustement reste valide sont également identiques quelle que soit la courbure que nous avons simulée et s'étend autour de la constante cosmologique ($w_0^F \simeq -1$ et $w_a^F \simeq 0$). Nous avons vu que le problème est identique dans le futur. Bien que le critère de détectabilité permette de rejeter encore plus de mauvais ajustements, le biais reste possible.

6.4.3 Confusion avec un univers plat

Nous avons vu que l'hypothèse $w = -1$ entraîne souvent un biais conduisant à une mauvaise détermination de la courbure. Nous allons maintenant étudier une possible

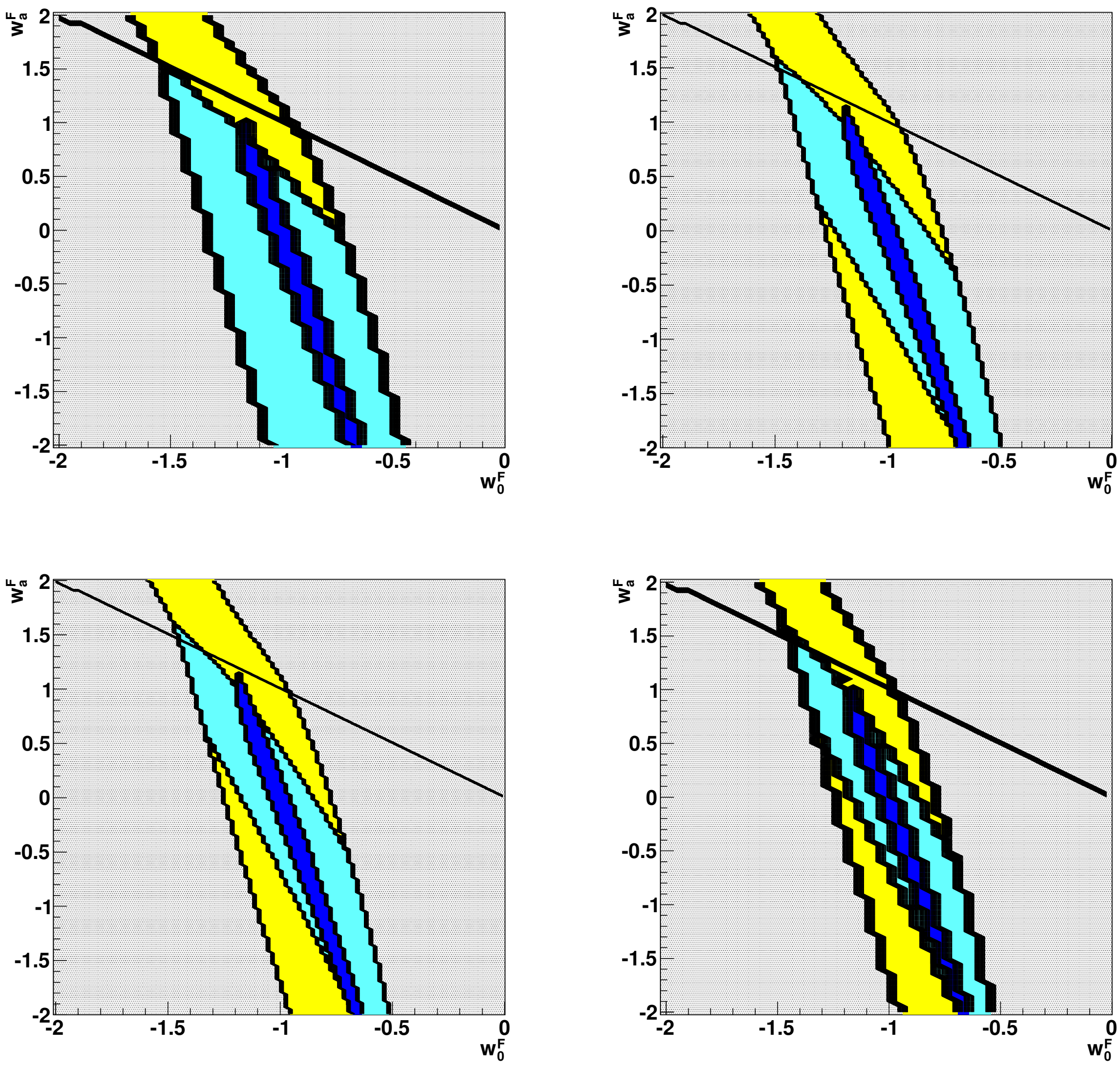

FIGURE 6.9 – *Résultats de l'étude sur la détermination du paramètre de courbure pour des modèles simulés dans le scénario à court terme avec* $\Omega_M^F = 0.3$ *et* Ω_X^F*= 0.6, 0.68, 0.72 et 0.74, respectivement de haut en bas et de gauche à droite.*
En grisé : zone de détectabilité. En jaune : zone de biais. En bleu clair : zone de validité de la courbure ($|\Omega_T - \Omega_T^F| < \sigma(\Omega_T)$)*. En bleu foncé : zone de validité de* Ω_M *et* Ω_X ($|\Omega_M - \Omega_M^F| < \sigma(\Omega_M)$ *et* $|\Omega_X - \Omega_X^F| < \sigma(\Omega_X)$)*.*

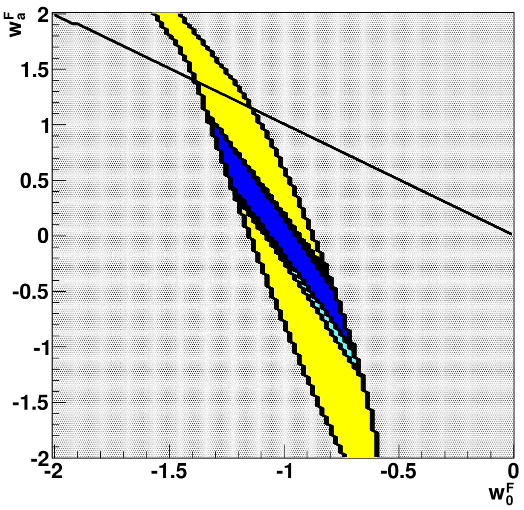

FIGURE 6.10 – *Résultats de l'étude sur la détermination du paramètre de courbure dans le scénario à long terme avec* $\Omega_M^F = 0.3$ *et* Ω_X^F*= 0.67.*
En grisé : zone de détectabilité. En jaune : zone de biais. En bleu clair : zone de validité de la courbure ($|\Omega_T - \Omega_T^F| < \sigma(\Omega_T)$)*. En bleu foncé : zone de validité de* Ω_M *et* Ω_X ($|\Omega_M - \Omega_M^F| < \sigma(\Omega_M)$ *et* $|\Omega_X - \Omega_X^F| < \sigma(\Omega_X)$)*.*

confusion avec la platitude.

Les figures 6.11 et 6.12 montrent les résultats de cette étude dans les scénarios à court et à long terme respectivement. Nous avons regroupé les résultats de l'étude menée pour différents cas de courbure sur la même figure. Nous avons vu que la zone de détectabilité reste la même quelle que soit la courbure simulée, nous n'en avons donc tracé qu'une seule. Par définition, la zone de confusion regroupe les modèles pour lesquels l'ajustement donne un résultat compatible à moins de $1\,\sigma$ avec la platitude ($\Omega_T = 1$). Elles sont représentées par des contours de différents traits et couleurs. Les résultats de l'étude sur les univers ouverts sont en rouge et ceux sur les univers fermés sont en vert.

Résultats de l'étude de confusion avec un univers plat dans le scénario à court terme

Dans le scénario à court terme, nous avons testé la confusion avec la platitude pour des courbures, Ω_T^F, comprises entre 0.9 et 1.1 et choisi de présenter les résultats obtenus pour les univers de courbure $\Omega_T^F = 0.94$, 0.98, 1.02, 1.03. Les zones de confusion correspondantes sont situées de haut en bas sur la figure. Leur présence montre qu'un univers courbe peut être reconstruit comme plat.
Notons que, dans la figure 6.11, les astérisques signalent les modèles pris en exemple

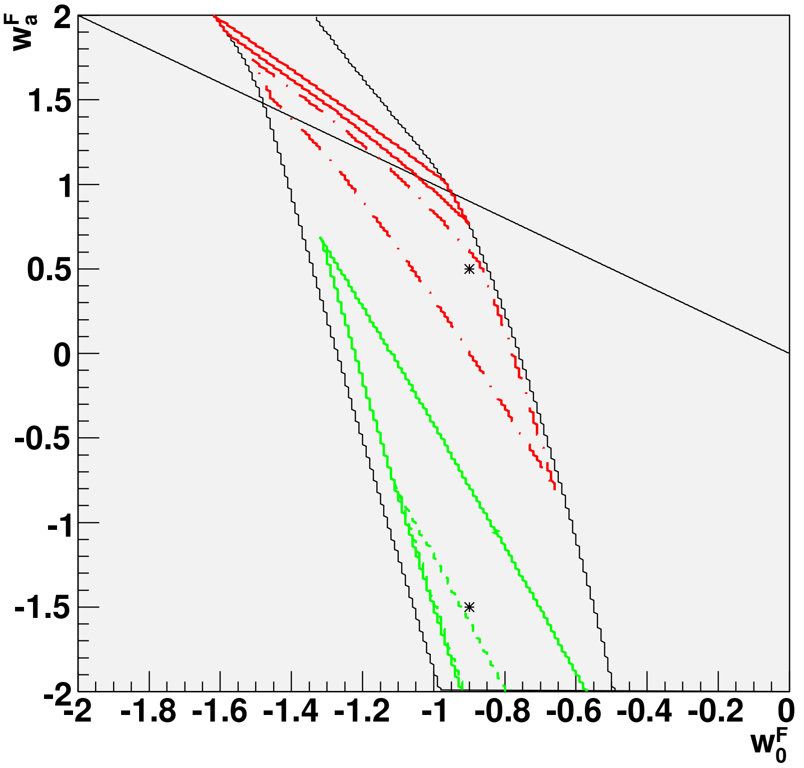

FIGURE 6.11 – *Résultats de l'étude sur la confusion avec la platitude dans le scénario à court terme avec* $\Omega_M^F = 0.3$ *et* Ω_X^F*= 0.64, 0.68, 0.72, 0.73. Les zones de confusion correspondantes sont situées de haut en bas respectivement. Les zones de confusion rouges illustrent les univers simulés ouverts, et les vertes illustrent les univers simulés fermés. Les astérisques correspondent aux exemples de la figure 6.8. La droite noire correspond à la limite physique de la paramétrisation :* $w_0^F + w_a^F = 0$

précédemment.

Pour les univers ouverts (en rouge en haut), la confusion est possible même avec de fortes courbures, par exemple pour $\Omega_T^F = 0.94$ ($\Omega_k^F = 0.06$). Plus la courbure simulée est grande plus la zone de confusion rétrécit et se déplace vers des grands w_a^F. Elle va jusqu'à dépasser la limite $w_0 + w_a = 0$ imposée par l'utilisation de cette paramétrisation incompatible avec les données du fond diffus cosmologique au delà de cette limite. Pour des courbures $\Omega_T^F < 0.94$, celle-ci est située complètement au delà de cette limite.

Pour les univers fermés (en vert en bas), on assiste à la même réduction de la taille des zones de confusion plus on s'éloigne de la platitude. Néanmoins, contrairement aux univers ouverts, le critère de détectabilité permet de limiter fortement la confusion avec un univers plat si la courbure simulée est trop grande. La confusion est ainsi rejetée par ce critère dès $\Omega_T^F = 1.04$.

En résumé, une confusion avec un univers plat est possible pour des courbures simulées, Ω_T^F, comprises entre 0.94 et 1.03. Le critère de détectabilité limite la surface des zones de confusion autour de $-1.4 < w_0^F < -0.5$ mais la confusion est possible pour des valeurs de w_a^F même grandes.

Résultats de l'étude de confusion avec un univers plat dans le scénario à long terme

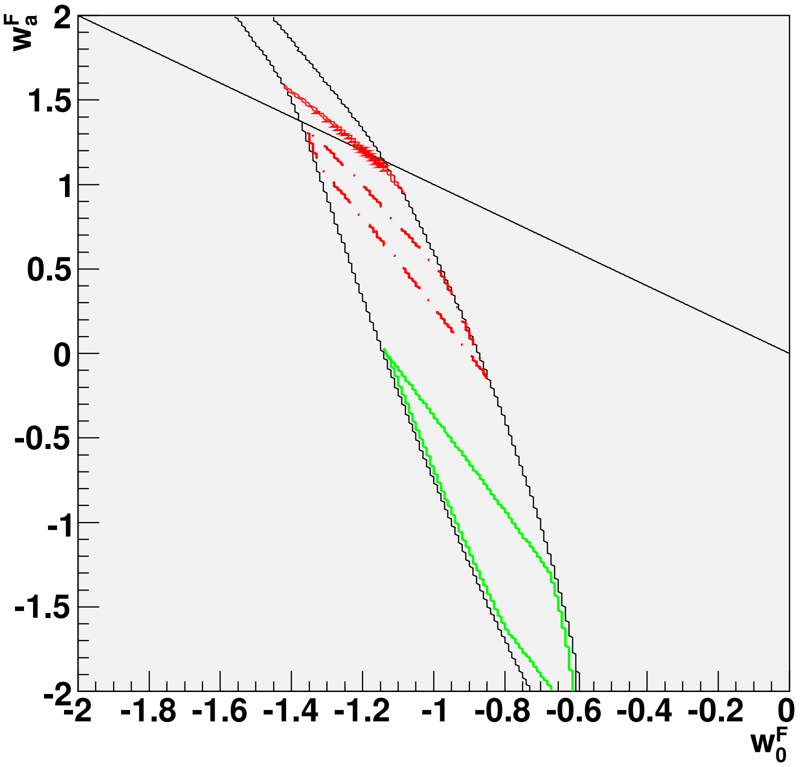

FIGURE 6.12 – *Résultats de l'étude sur la confusion avec la platitude dans le scénario à long terme avec $\Omega_M^F = 0.3$ et Ω_X^F= 0.67, 0.69, 0.71. Les zones de confusion correspondantes sont situées de haut en bas respectivement. Les zones de confusion rouges illustrent les univers simulés ouverts, et les vertes illustrent les univers simulés fermés. La droite noire correspond à la limite physique de la paramétrisation : $w_0^F + w_a^F = 0$*

Dans la figure 6.12, nous avons représenté les résultats de l'étude, dans le scénario futur, pour des paramètres de courbure $\Omega_T^F = 0.97$, 0.99 et 1.01. Les résultats sont semblables à ceux du scénario à court terme. Ici, comme nous l'avons vu dans l'étude de biais, la plus grande statistique permet une meilleure détectabilité, c'est-à-dire une zone de bon ajustement réduite. Cela a une incidence directe sur les zones de confusion qui sont réduites également.

Pour des univers ouverts les zones de confusion sont proches de la limite $w_0 + w_a = 0$ mais existent pour des courbures même grandes, de $\Omega_T^F = 0.99$ à $\Omega_T^F = 0.97$. Pour une plus grande courbure, la zone de confusion passe au delà de la limite.

Pour des univers fermés, seuls les univers de courbure $\Omega_T^F = 1.01$ ont une zone de confusion indétectables par le test du χ^2. Le critère de détectabilité permet en effet de rejeter les confusions pour des courbures plus grandes.

6.4.4 Conclusion

Grâce à des simulations de données de supernovae combinées aux paramètres réduits R et A, nous avons réalisé une étude sur le biais lié à l'utilisation de l'hypothèse de constante cosmologique ($w = -1$) dans les ajustements.

Nous avons pu voir que le critère de détectabilité permet de repérer les ajustements mauvais pour les modèles s'éloignant de $w_0^F = -1$ et de limiter la zone de bon ajustement aux modèles $|w_0^F + 1| < 0.5$. Ce résultat diffère ainsi de ce que nous avons trouvé dans l'étude de biais dû à l'hypothèse de platitude. De plus cette zone diminue dans le long terme grâce à la plus grande statistique.

En comparant les paramètres de courbure obtenus par l'ajustement avec $w = -1$ fixé, aux valeurs simulées, nous avons vu que la courbure est mal reconstruite dans la plupart des modèles testés. Le test du χ^2 n'est donc pas suffisant pour détecter la fausse hypothèse. La détermination de la courbure n'est valide que pour une fine bande de modèles d'énergie noire autour de $w_0^F = -1$.

Parmi les modèles biaisés, certains sont compatibles avec la platitude. Les zones de confusion avec un univers plat peuvent être grandes par exemple pour les univers de courbure simulée $|\Omega_k| = 0.02$ (0.01) dans le court (long) terme. Elles sont bornées par la limite imposée par la paramétrisation ($w_0 + w_a = 0$) pour les univers ouverts de courbure $\Omega_k^F > 0.06$ (0.03) dans le court (long) terme et par la zone de détectabilité pour les univers fermés de courbure $\Omega_k < -0.03$ (-0.01) dans le court (long) terme.

Ces cas montrent qu'il est possible d'obtenir le modèle de concordance (univers plat et constante cosmologique) alors que le "vrai" univers est courbe et d'énergie noire dynamique. L'hypothèse de constante cosmologique, souvent supposée dans les ajustements actuels, peut induire sur la courbure un résultat compatible avec la platitude alors que l'univers est courbe.

Cette étude émet un doute sur l'utilisation des conditions d'ajustement utilisées (ici fixer $w = -1$) et donc sur les résultats ainsi obtenus, le modèle de concordance.

6.5 Le cercle vicieux

Souvent, les hypothèses de platitude et de constante cosmologique sont justifiées par le principe de cohérence. Puisque l'ajustement réalisé en supposant la constante cosmologique donne un univers plat, alors la platitude est fixée pour déterminer les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire. Ces résultats étant compatibles avec la constante cosmologique justifieraient a posteriori son hypothèse dans le premier ajustement.

Dans cette section nous allons vérifier ce principe de cohérence. Pour cela, nous allons chercher s'il existe des modèles d'univers courbes avec une énergie noire dynamique qui sont reconstruits plats dans l'ajustement en fixant $w = -1$ et compatible avec la constante cosmologique dans l'ajustement réalisé avec la platitude.

6.5.1 Analyse

La méthode d'analyse utilisée dans cette dernière étude est une compilation des études menées précédemment sur les hypothèses de platitude et de constante cosmologique. Puisque ces deux études ont été réalisées à partir des mêmes univers simulés, nous utiliserons les résultats de chacune.

La méthode consiste à rassembler dans la même figure les zones de confusion des deux études. Les figures seront présentées pour une courbure donnée dans le plan des modèles d'énergie noire (w_0^F, w_a^F).
Reprenant la première étude, nous distinguerons en rose les modèles dont les ajustements réalisés avec la platitude donnent un résultat compatible avec la constante cosmologique. Ces modèles constituent la zone de confusion avec la constante cosmologique, notée $ZConf(w = -1)$.
Grâce aux résultats de la seconde étude, nous repérerons en rouge les modèles dont les ajustements réalisés en fixant $w = -1$ donnent un résultat compatible avec la platitude. Ces modèles constituent la zone de confusion avec la platitude, notée $ZConf(\Omega_T = 1)$.

Si les deux zones de confusion sont distinctes, aucun modèle d'énergie noire n'est reconstruit à la fois plat et avec une constante cosmologique dans les deux conditions d'ajustement. Le principe de cohérence suffit donc à conclure que l'un au moins des ajustements est faux et donc l'une au moins des hypothèses mal appropriée.

Si les deux zones de confusion se croisent, certains modèles se retrouvent dans les deux zones de confusion. Cela signifie qu'un univers courbe d'énergie noire dynamique, sera ajusté par une univers plat avec une constante cosmologique d'abord en supposant la platitude puis en fixant $w = -1$. Avec les données réelles, la confiance en ce résultat sera grande puisque les résultats des deux ajustements sont compatibles et cohérents.

Pour quantifier ces différents modèles nous nous aidons des résultats obtenus à partir des deux études précédentes présentées dans les sections 6.3 et 6.4.
Nous avons vu, dans la première étude, que l'hypothèse de platitude peut être supposée sans danger si la courbure simulée est inférieure à 2% (1%) dans le scénario à court (long) terme. Nous ne regarderons donc pas ces cas.
La seconde étude a aussi montré que pour des courbures trop grandes le critère de détectabilité et la limite imposée par $w_0 + w_a < 0$ empêchent les confusions avec un univers plat dues à l'hypothèse de constante cosmologique.
Nous limiterons donc l'étude au cas possibles de confusion, soit :

- dans le scénario à court terme : $0.94 \leq \Omega_T^F < 0.98$ et $1.02 \leq \Omega_T^F \leq 1.03$
- dans le scénario à long terme : $0.97 \leq \Omega_T^F \leq 0.99$ et $\Omega_T^F = 1.01$

Concernant le critère de détectabilité, nous avons vu qu'il est inefficace dans la plupart des ajustements supposant la platitude alors qu'il permet de rejeter de nombreux ajustements réalisés en fixant $w = -1$. Nous ne prendrons en compte que les modèles contenus dans l'intersection des deux zones de bon ajustement.

Ces quelques critères sur la courbure et les modèles d'énergie noire permettent de contraindre les modèles susceptibles de donner à la fois une confusion avec l'univers plat et avec la constante cosmologique.

Résultats de l'étude dans le scénario à court terme

Dans la gamme de courbure possible, nous avons choisi de présenter trois résultats représentatifs, deux univers ouverts et un univers fermé. La figure 6.13 résume les résultats obtenus, dans le scénario à court terme, pour la confusion avec un univers plat et une confusion avec la constante cosmologique pour des courbures simulées $\Omega_T^F = 0.94$, $\Omega_T^F = 0.97$ et $\Omega_T^F = 1.03$.

Le résultat obtenu pour la courbure $\Omega_T^F = 0.94$, graphique de gauche, est original quant aux zones de détectabilité. La zone hachurée en gris correspond à la zone de détectabilité de l'hypothèse de platitude. Concernant les zones de confusion, nous pouvons voir qu'elles se situent toutes deux dans la même partie du plan mais au delà de la limite imposée par la paramétrisation $w_0^F + w_a^F = 0$. S'il y a intersection, elle se situe dans une région non

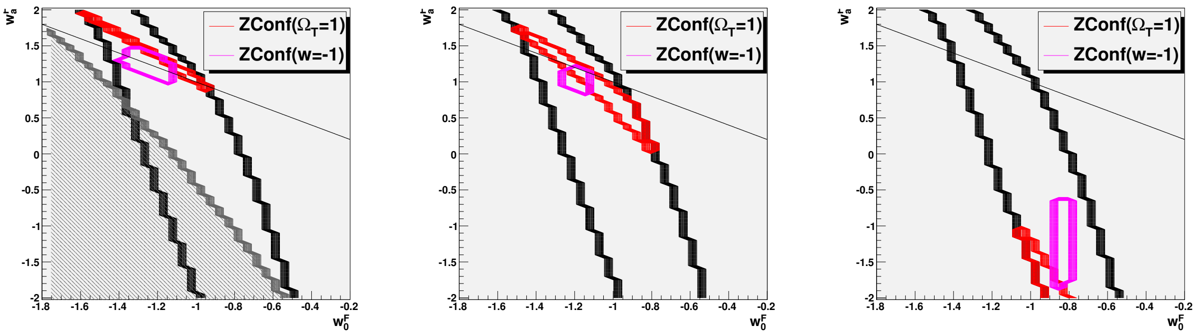

FIGURE 6.13 – *Résultats de l'étude dans le scénario à court terme pour des courbures simulées* $\Omega_T^F = 0.94,\ 0.97,\ 1.03$*, résumant les résultats des études précédentes.*
Les traits noirs encadrent les zones de bon ajustement, les contours rouges correspondent aux zones de confusion avec un univers plat, notée ZConf($\Omega_T = 1$*).*
Les hachures grises correspondent à la zone de détectabilité et les contours roses repèrent les zones de confusion avec la constante cosmologique, notée ZConf($w = -1$*).*

physique interdite par le fond diffus cosmologique.

Le cas de courbure $\Omega_T^F = 0.97$, graphique central, est de ce point de vue plus intéressant. Non seulement les deux zones de confusion se coupent mais en plus ce recouvrement se situe dans la région physique du plan. En effet, pour certains modèles d'univers, les résultats des ajustements sont compatibles avec la constante cosmologique en supposant la platitude et également compatibles avec la platitude en supposant la constante cosmologique :

$$-1.3 \leq w_0^F \leq -0.8$$
$$0.8 \leq w_a^F \leq 1.3\,.$$

Ces cas sont le parfait contre-exemple à l'utilisation du principe de cohérence. Avec des données réelles, puisque les deux conditions d'ajustement différentes convergent vers le même résultat, en l'occurrence le modèle ΛCDM plat, la confiance dans le résultat est grande. Avec les simulations, nous savons que ce résultat est en fait biaisé dans les deux ajustements par une hypothèse erronée.

Les cas d'univers fermés sont plus restreints grâce au critère de détectabilité qui limite les zones de confusion dans les ajustements réalisés en supposant la constante cosmologique. Pour une courbure $\Omega_T^F = 1.03$, graphique de droite, les deux zones de confusion existent, et se croisent pour $w_0^F \simeq -0.85$, $w_a^F \simeq -1.8$. L'intersection est très petite mais ce modèle d'univers présente les deux confusions amenant à croire au modèle ΛCDM plat.

Pour résumer, bien que peu nombreux, il existe des modèles d'univers courbes (surtout ouverts) avec une énergie noire dynamique qui sont compatibles à moins de $1\,\sigma$ avec le modèle de concordance, ΛCDM plat, que l'on suppose la platitude ou la constante cosmologique.

Résultats de l'étude dans le scénario à long terme

La figure 6.14 résume les résultats obtenus, dans le scénario à long terme, pour la confusion avec un univers plat et une confusion avec la constante cosmologique pour des courbures simulées $\Omega_T^F = 0.98$ et $\Omega_T^F = 1.01$.
Dans ce scénario, grâce à la plus grande statistique, la zone de bon ajustement avec l'hy-

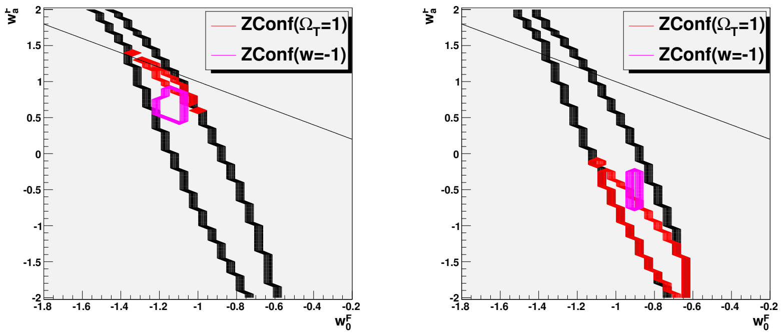

FIGURE 6.14 – *Résultats de l'étude dans le scénario à long terme pour des courbures simulées* $\Omega_T^F = 0.98,\ 1.01$, *résumant les résultats des études précédentes.*
Sur l'étude des ajustements en supposant la constante cosmologique, les traits noirs encadrent les zones de bon ajustement, les contours rouges correspondent aux zones de confusion avec un univers plat, notée ZConf($\Omega_T = 1$).
Sur l'étude des ajustements en imposant platitude, les hachures grises correspondent à la zone de détectabilité et les contours roses repèrent les zones de confusion avec la constante cosmologique, notée ZConf($w = -1$).

pothèse de constante cosmologique est réduite. Les zones de confusion sont alors également réduites. Les cas présentant les deux confusions sont donc moins probables.

La figure de gauche donne les résultats de l'analyse pour une courbure simulée $\Omega_T^F = 0.98$. Les zones de confusion existent et se situent dans la partie supérieure du plan, près de la limite $w_0 + w_a = 0$. La zone d'intersection est minime et correspond à $w_0^F \simeq -1.1$, $w_a^F \simeq -0.85$.

Pour les univers fermés, le graphique de droite résume les résultats pour le cas de courbure $\Omega_T^F = 1.01$. Les zones de confusion existent et se situent dans la moitié inférieure du plan vers $w_a^F < 0$. De plus, elles se croisent pour $w_0^F \simeq -0.9$ et $w_a^F \simeq -0.7$.

En résumé, le scénario à long terme réduit la probabilité de trouver deux ajustements biaisés donnant le même résultat, ici le modèle de concordance.

6.5.2 Un exemple

A partir de ces résultats nous allons montrer un cas problématique dans le scénario à court terme :

$$\Omega_M^F = 0.3,\ \Omega_X^F = 0.67, \qquad w_0^F = -1.2,\ w_a^F = 1.1.$$

La figure 6.15 donne les contours réalisés avec les deux hypothèses fausses. Le gra-

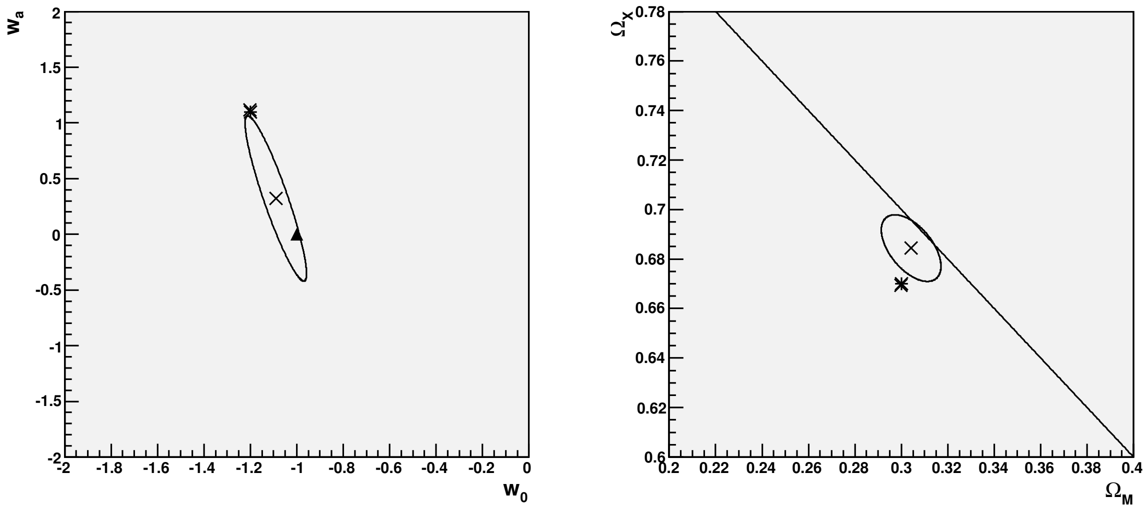

FIGURE 6.15 – *Contours à 1σ des ajustements du modèle simulé : $\Omega_M^F = 0.3$, $\Omega_X^F = 0.67$, $w_0^F = -1.2$, $w_a^F = 1.1$, dans le scénario à court terme.*
A gauche : dans le plan (w_0, w_a) en supposant un univers plat.
A droite : dans le plan (Ω_M,Ω_X) avec l'hypothèse de constante cosmologique.

phique de gauche présente, dans le plan (w_0, w_a), le contour à 1 σ obtenu en supposant la platitude. Le triangle signale la constante cosmologique qui se situe bien à l'intérieur de l'ellipse confirmant la confusion avec la constante cosmologique.
A l'inverse, le graphique de droite montre, dans le plan (Ω_M, Ω_X), le contour à 1 σ obtenu en imposant la constante cosmologique. La platitude est symbolisée par la droite $\Omega_M + \Omega_X = 1$. L'ellipse coupant cette droite, l'ajustement est bien compatible à moins d'1 σ avec la platitude.

Ce modèle est un bon exemple de la "double confusion" qui permet de reconstruire le modèle ΛCDM plat à partir de simulations d'un modèle courbe d'énergie noire dynamique. Le principe de cohérence procure une confiance excessive dans ce résultat puisque les deux ajustements donnent le même résultat dans des conditions différentes. Cet exemple, montre donc bien la faiblesse de ce principe.

Cependant cet exemple permet également de nuancer cette conclusion. Il y a certes confusion avec le modèle de concordance à l'issue de deux ajustements dont les conditions induisent des biais. Le modèle est mal reconstruit mais ce biais est faible. Nous remarquons que le modèle simulé symbolisé par un astérisque sur les deux graphiques de la figure 6.15 est à peine à plus d'1 σ des valeurs obtenues par les ajustements.

6.5.3 Conclusion de l'étude

Nous avons montré, dans cette section, quelques modèles d'univers qui mettent à mal le principe de cohérence et le modèle de concordance. Certains modèles d'univers courbes avec une énergie noire dynamique sont en effet reconstruits plat avec une constante cosmologique. Ces résultats semblent pourtant fiables puisque cohérents pour les deux conditions d'ajustement.

Avec les données réelles, il est impossible de réaliser cette étude et d'identifier cette "double confusion" à l'aide de ces deux types d'ajustements. Le seul moyen reste d'effectuer l'ajustement sans hypothèse, c'est-à-dire de laisser libres tous les paramètres. Il apparaît en effet que l'augmentation des incertitudes sur les paramètres cosmologiques due à la dégénérescence géométrique est préférable aux biais et confusions apportés par les hypothèses d'ajustement.

Cependant, nous avons également montré que les modèles présentant la "double confusion" sont rares et les ajustements sont souvent compatibles avec le modèle simulé à 2 σ. Ces remarques montrent que le principe de cohérence reste un moyen efficace de repérer les biais dus aux hypothèses d'ajustement.

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons testé deux hypothèses souvent utilisées pour briser la dégénérescence géométrique dans la détermination des paramètres cosmologiques : la platitude et la constante cosmologique. Nous avons utilisé des simulations de données de supernovae combinées aux paramètres réduits R et A.

D'un point de vue théorique, nous avons vu que supposer la platitude alors que l'univers est courbe a un effet sur l'équation d'état de l'énergie noire. Nous avons en effet montré grâce à des simulations que la plupart des modèles d'univers courbes présentent des ajustements biaisés si l'on suppose la platitude. De plus le biais sur l'équation d'état de l'énergie noire est dans la majorité des cas indétectable par le test du χ^2.
En particulier, nous avons distingué certains modèles d'énergie noire dont le résultat de l'ajustement en supposant la platitude est compatible à moins d'1 σ avec la constante cosmologique. Seuls les modèles simulés avec une courbure inférieure à 2% (1%) présentent

systématiquement des résultats compatibles avec les valeurs simulées à moins d'1 σ.

Nous avons ensuite testé l'hypothèse de constante cosmologique. Nous avons montré que l'effet sur la courbure est important. La plupart des ajustements réalisés en imposant $w = -1$ donnent un paramètre de courbure biaisé. Les résultats s'éloignent à plus d'1 σ de la courbure simulée et nombre d'entre eux sont également compatibles à moins d'1 σ avec la platitude. Ces derniers sont la preuve qu'imposer $w = -1$ peut induire une confusion avec le modèle de concordance ΛCDM.

Ces deux études nous ont amené à vérifier le principe de cohérence. Ces deux conditions d'ajustement sont en effet souvent justifiées a posteriori par la cohérence de leurs résultats donnant le modèle de concordance.
Nous avons alors cherché des modèles d'univers courbes d'énergie noire dynamique dont l'ajustement en supposant la platitude et celui supposant la constante cosmologique donnent le modèle de concordance. En regroupant les résultats des études précédentes, nous avons montré que cette "double confusion" est en effet possible pour un ensemble restreint de modèles. Ces quelques modèles mettent à mal ce principe de cohérence et permettent un doute sur le modèle de concordance trouvé avec les données actuelles dans ces conditions d'ajustement mais restent marginaux. Le principe de cohérence est donc une méthode relativement sûre pour éviter les problèmes de confusions.

Avec les données réelles, le seul moyen de vérifier les résultats consiste à réaliser un ajustement sans hypothèse, c'est-à-dire en laissant libre tous les paramètres. Cet ajustement est possible au prix d'une augmentation des incertitudes due aux plus grand nombre de paramètres et à la dégénérescence géométrique. Cependant, nous avons vu que cette augmentation est inférieure à 2, ce qui reste acceptable, surtout dans les ajustements futurs. Cet ajustement sera la meilleure méthode à terme.

Chapitre 7

Une analyse combinée globale

7.1 Introduction

Dans le but de déterminer les paramètres cosmologiques, nous avons d'abord utilisé les supernovae auxquelles nous avons ajouté le fond diffus cosmologique et les oscillations acoustiques de baryons. Dans une première approximation, nous avons utilisé des paramètres réduits R et A. Nous avons montré qu'ils permettent d'extraire les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire avec ou sans l'hypothèse de platitude (cf. chap. 5). En outre, les paramètres réduits autorisent des études impossibles à mener avec les données complètes du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons. Nous les avons utilisés dans des études de biais pour simuler des données et effectuer des milliers d'ajustements de manière plus rapide (cf. chap. 6).

Dans ce chapitre, nous allons vérifier l'utilisation de ces paramètres par comparaison à une analyse combinée globale en prenant en compte les données complètes du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons. Nous allons d'abord décrire le cadre de l'analyse combinée complète dans la section 7.2. Nous détaillerons ensuite la méthode de détermination des incertitudes dans la section 7.3. Nous donnerons les résultats de l'analyse combinée des sondes deux à deux puis la combinaison des trois sondes dans la section 7.4. Nous pourrons alors comparer ces résultats avec ceux obtenus avec les paramètres réduits dans la section 7.5.

7.2 Cadre de l'analyse combinée

Dans ce chapitre nous réalisons une analyse combinée à partir des données complètes de chaque sonde. Nous utilisons les données actuelles du fond diffus cosmologique, des oscillations acoustiques de baryons et des supernovae pour extraire les paramètres cosmologiques. En particulier, pour déterminer la nature de l'énergie noire, nous cherchons à extraire son équation d'état. Comme précédemment, nous utilisons pour cela la paramétrisation CPL décrite dans le chapitre 1 et caractérisée par les paramètres w_0 et w_a

par : $w(z) = w_0 + w_a \frac{z}{1+z}$.

La méthode statistique utilisée ici est l'approche fréquentiste que nous avons décrite aux chapitres 3 et 5. Rappelons que dans la méthode des moindres carrés, la combinaison revient à sommer les χ^2 de chaque sonde. Le calcul de ces χ^2 s'effectue en parallèle pour chaque sonde.

7.2.1 Cadre lié au fond diffus cosmologique

Pour le fond diffus cosmologique, les données utilisées sont issues de WMAP après 5 ans de détection [47].
Le code CMBEASY [82, 84, 85] est utilisé pour la construction du spectre du fond diffus cosmologique dans le calcul du χ^2. L'utilisation de ce code impose l'hypothèse de platitude de l'univers. Nous avons vu précédemment que celle-ci peut induire des biais mais que le principe de cohérence permet d'avoir confiance dans le résultat.

Supposer une énergie noire dynamique implique de tenir compte des perturbations auxquelles le fond diffus cosmologique peut être sensible. Leur prise en compte dépend du modèle de perturbations considéré. En l'absence de consensus, nous avons choisi de ne pas les prendre en compte.

Nous avons vu dans le chapitre 5 que l'utilisation des données complètes du fond diffus cosmologique implique l'ajustement de nombreux paramètres, rappelés ici :
- Ω_b, la densité de matière baryonique et Ω_c, la densité de matière noire,
- w_0 et w_a, les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire,
- $h = H_0/100$, la constante de Hubble,
- τ, la profondeur optique à la recombinaison,
- n_s, l'indice spectral du spectre des perturbations primordiales,
- σ_8, l'amplitude des perturbations de densité à 8 Mpc.

7.2.2 Cadre lié aux oscillations acoustiques de baryons

Pour les oscillations acoustiques de baryons nous utilisons les fonctions de corrélations issues de SDSS [42].

Pour le calcul du χ^2, un programme basé sur la paramétrisation de Hu et Eisenstein [86], a été développé au sein du groupe : BAOfit [87].
Ce code prend en compte 7 paramètres à ajuster. Outre les densités de matière noire et baryonique, les paramètres d'équation d'état, la constante de Hubble et σ_8, il faut tenir compte du biais, b.

7.2.3 Cadre lié aux supernovae

Pour les supernovae, nous continuons à utiliser l'échantillon UNION [28]. Le calcul du χ^2 des supernovae est réalisé par le Kosmoshow [61] comme nous l'avons montré dans les chapitres précédents.

Rappelons que, contrairement aux deux autres sondes, les supernovae ne sont pas sensibles à la densité de matière noire ou baryonique mais à leur somme, Ω_M. Les autres paramètres à ajuster sont les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire, w_0 et w_a, et le paramètre de normalisation, M_S.

7.2.4 La méthode statistique

La méthode des moindres carrés est basée sur la recherche du minimum du χ^2 nécessaire à la fois pour extraire les valeurs centrales des paramètres d'ajustement et pour calculer leurs incertitudes. Techniquement, les calculs des χ^2 s'effectuent en parallèle pour chaque sonde grâce aux programmes dédiés. La procédure de recherche du minimum est ensuite réalisée grâce à MINUIT [88]. Pour tracer les contours à deux paramètres ou pour estimer certaines incertitudes, plusieurs centaines de minimisations sont nécessaires. Elles sont alors effectuées en parallèle sur la grille de calcul EGEE [89]. Cette procédure et les différentes options constituent le programme ZEN [61] développé au sein du groupe.

L'utilisation du code CMBEASY pour le fond diffus cosmologique impose de ne considérer que des modèles d'univers plats. De fait, nous n'ajustons pas le paramètre de densité d'énergie noire, Ω_X, qui pourra être déduit de la valeur de Ω_M extraite. Le nombre de paramètres à ajuster s'élève alors à 10 : Ω_b, Ω_c, w_0, w_a, h, τ, n_s, σ_8, b et M_S.

7.3 Estimation des incertitudes

Grâce au programme ZEN, les valeurs centrales sont obtenues par la minimisation du χ^2 en prenant en compte tous les paramètres de l'ajustement. Il faut ensuite déterminer les incertitudes. Le moyen le plus simple de les évaluer consiste à écrire la matrice d'incertitudes à partir de la dérivée seconde du χ^2. Une méthode équivalente est de résoudre l'équation

$$\chi^2 = \chi^2_{min} + 1 \tag{7.1}$$

pour chaque paramètre à ajuster, réalisant ainsi une marginalisation sur les autres paramètres. Une troisième méthode est basée sur la simulation.
Dans cette section nous allons décrire ces trois méthodes, leurs utilisations, leurs avantages et leurs inconvénients.

7.3.1 La méthode directe

Le code MINUIT [88] permet de calculer des incertitudes directement en utilisant la propriété du χ^2 :

$$U_{ij}^{-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\chi^2}{\partial P_i \partial P_j}\right] \tag{7.2}$$

où U_{ij} est la matrice de covariance, composée des incertitudes, σ_i et des coefficients de corrélation ρ_{ij} entre les paramètres P_i.

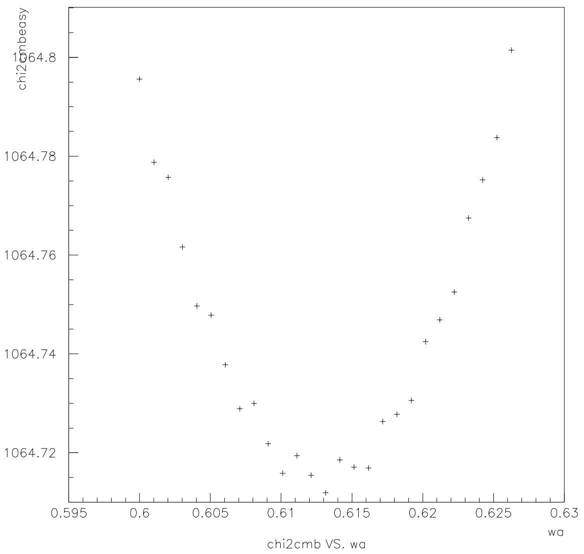

FIGURE 7.1 – *Distribution de χ^2 en fonction de w_a.*

Cette méthode est la plus simple mais la dérivée seconde du χ^2 doit être déterminée numériquement. La figure 7.1 montre que la distribution du χ^2 du fond diffus cosmologique est entachée d'instabilités numériques. Le calcul de la dérivée seconde par le calcul de la courbure de la distribution au minimum est difficile. Les instabilités forment artificiellement une forte courbure. Les incertitudes sont donc fortement sous-estimées, comme par exemple pour la combinaison d'un lot de supernovae, du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons :

$$\begin{aligned}
\Omega_b &= 0.04647 \pm 9.3\,10^{-4}\,,\\
\Omega_c &= 0.220 \pm 0.0017\,,\\
w_0 &= -1.029 \pm 0.053\,,\\
w_a &= 0.40 \pm 0.22\,.
\end{aligned}$$

Ces incertitudes sont jusqu'à 10 fois plus petites que celles que nous avons obtenues dans les mêmes conditions avec les paramètres réduits et également presque 10 fois plus petites que celles obtenues par $WMAP$[5] dans des conditions plus restrictives (avec une équation d'état de l'énergie noire constante). Cette incompatibilité montre l'effet des instabilités numériques sur le calcul des incertitudes. Cette méthode n'est donc pas fiable ni applicable si le fond diffus cosmologique est présent dans la combinaison. Il faut alors trouver un autre moyen de estimer les incertitudes.

7.3.2 Calcul des niveaux de confiance

Nous avons alors choisi d'utiliser la propriété du χ^2 sur les niveaux de confiance.

$$\chi^2(P_\alpha, P) = \chi^2_{min} + s^2 \tag{7.3}$$

Cette méthode, rigoureuse si les erreurs de mesures sont gaussiennes, permet de calculer les erreurs sur chaque paramètre et construire des contours. C'est celle choisie par Yèche et al. [58]. Cependant, elle ne permet pas de déterminer facilement la matrice de covariance car demande un calcul d'erreur indépendant pour chaque paramètre ajusté.

Pour chaque paramètre considéré, nous balayons sa valeur autour du minimum et nous cherchons le minimum du χ^2 sur tous les autres paramètres. Pour résoudre l'équation 7.3 et obtenir les incertitudes, nous ajustons la distribution par un polynôme (figure 7.2). Avec cette technique les résultats obtenus sur les paramètres cosmologiques sont les suivants :

$$\begin{aligned}
\Omega_b &= 0.0463 \pm 0.0022\,, \\
\Omega_c &= 0.221 \pm 0.012\,, \\
w_0 &= -1.04 \pm 0.11\,, \\
w_a &= 0.39 \pm 0.34\,.
\end{aligned}$$

Cette méthode permet de lisser les instabilités numériques. Cependant, à cause de ces dernières, l'ajustement de la distribution de χ^2 peut être faussé. En effet, les minima trouvés sont systématiquement sur-évalués et l'ajustement donne une valeur de la courbure surestimée se traduisant par des incertitude sous-estimées. Le cas de w_a est caractéristique car c'est celui où l'on trouve les instabilités les plus grandes.

La comparaison avec les résultats de la littérature [5, 90] montre que ces erreurs sont effectivement sous-estimées. Les différences avec [90] dont les conditions d'ajustement sont identiques mais la méthode statistique différente est de l'ordre d'un facteur 2. La première raison provient des instabilités numériques. La seconde vient du fait que les incertitudes sur les C_l du fond diffus cosmologique ne sont pas exactement gaussiennes. Dans ce cas, la valeur de s^2 de l'équation 7.3 doit être calibrée.

7.3.3 Méthode de simulation (Monte Carlo)

Dans le but d'obtenir une meilleure estimation des incertitudes, nous avons alors utilisé des simulations Monte Carlo. Cette méthode est théoriquement équivalente à la

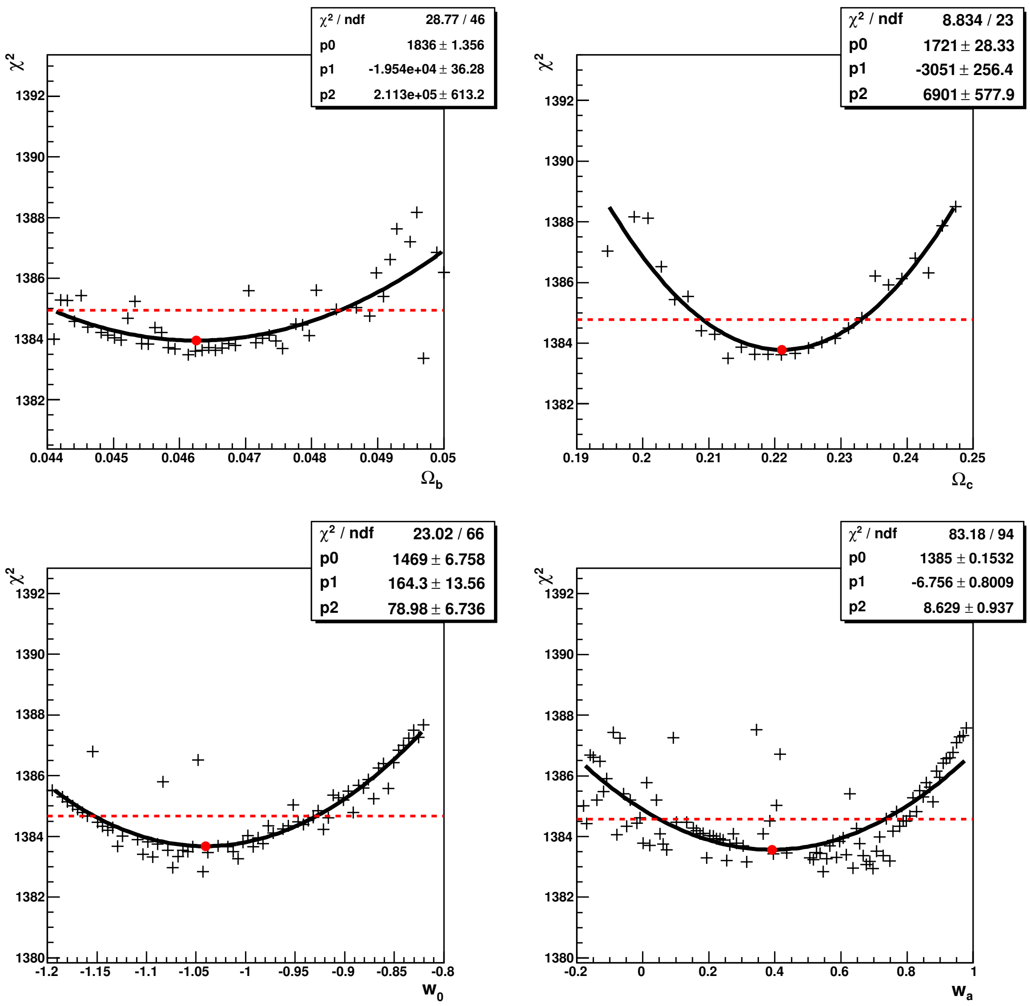

FIGURE 7.2 – *Illustration de l'ajustement des distributions de χ^2 minimaux sur différents paramètres : Ω_b, Ω_c, w_0, w_a, de haut en cas et de gauche à droite.*

précédente.

La première étape de cette technique est basée sur la recherche du vecteur minimisant le χ^2 qui servira à la simulation. Les valeurs trouvées sont considérées comme le vrai modèle. La deuxième étape est la simulation des observables de chaque sonde (magnitudes des supernovae, C_l pour le fond diffus cosmologique et fonction de corrélation pour les oscillations acoustiques de baryons). Plusieurs centaines d'expériences sont alors simulées en utilisant l'expression théorique de ces observables à partir du modèle considéré comme vrai. Pour chaque point de mesure de chaque sonde, la valeur est tirée aléatoirement à l'intérieur de l'erreur expérimentale en tenant compte de la matrice de corrélation complète de chaque sonde et de la non gaussianité des erreurs des C_l.

Nous réalisons ensuite un nouvel ajustement par la recherche du minimum de χ^2 pour chaque expérience simulée. On utilise alors la distribution de ces nouveaux ajustements pour calculer les erreurs. La matrice de covariance est alors définie par les moments d'ordre 2 :

$$U_{ij} = < P_i P_j > - < P_i >< P_j > \ . \tag{7.4}$$

Il est également possible de donner les erreurs asymétriques en calculant la variance de la distribution des paramètres par rapport aux paramètres du modèle utilisé.

Cette méthode est plus fiable parce que la non gaussianité des incertitudes des C_l est prise en compte. De plus, les incertitude estimées incluent les instabilités numériques du fond diffus cosmologique.

Les résultats de l'analyse combinée des supernovae avec le fond diffus cosmologique et les oscillations acoustiques de baryons avec cette méthode sont les suivants :

$$\begin{aligned}
\Omega_b &= 0.0465 \pm 0.0051\,, \\
\Omega_c &= 0.220 \pm 0.025\,, \\
w_0 &= -1.029 \pm 0.178\,, \\
w_a &= 0.401 \pm 0.759\,, \\
h &= 0.6927 \pm 0.027\,, \\
n_s &= 0.961 \pm 0.039\,, \\
\tau &= 0.0916 \pm 0.060\,, \\
\sigma_8 &= 0.760 \pm 0.061\,, \\
M_s &= 15.765 \pm 0.038\,, \\
b &= 2.459 \pm 0.2285846\,.
\end{aligned}$$

La comparaison de ces résultats sur les paramètres Ω_b, Ω_c, w_0 et w_a et ceux obtenus avec la méthode précédente montre quelques différences. Les valeurs centrales sont légèrement différentes. Cela provient de l'ajustement de la distribution de χ^2 dont le minimum est légèrement différent du minimum trouvé par MINUIT. Les incertitudes sont ici plus grandes et compatibles avec les résultats donnés par [90], qui présente les conditions d'ajustement les plus proches des nôtres.

Par la suite nous utiliserons cette méthode pour la détermination des incertitudes et nous reviendrons sur les résultats obtenus et la comparaison avec la littérature.

7.3.4 Les contours

Un moyen de visualiser les résultats d'extraction des paramètres cosmologiques consiste à tracer les contours. Dans ce chapitre, nous présenterons les contours dans le plan $(w_0,\, w_a)$.

Comme pour le calcul des incertitudes, les contours peuvent être établis par différentes méthodes. La principale méthode utilise l'équation 7.3 à deux dimensions, c'est-à-dire en fixant deux paramètres et en marginalisant tous les autres autant de fois que le nombre de points définis sur une grille (typiquement entre 400 et 800). C'est cette méthode que nous avons utilisée jusqu'à présent et que nous allons utiliser à nouveau dans ce chapitre.

Un exemple de contour est présenté dans la figure 7.3 pour un ajustement de la combinaison des trois sondes. L'échelle de couleur représente le niveau de confiance.

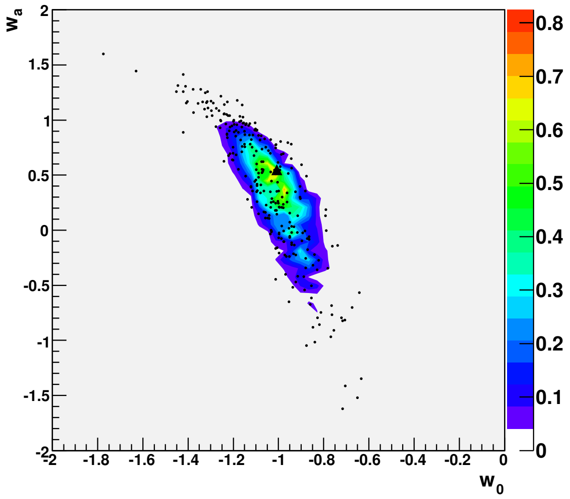

FIGURE 7.3 – *Contour obtenu avec la combinaison des trois sondes (SN+CMB+BAO). Le dégradé de couleur correspond à la méthode $\chi^2_{min} + s^2$. Les points noirs correspondent aux simulations réalisées à partir des valeurs obtenues par un ajustement global.*

Cependant, nous avons vu que les incertitudes estimées avec cette méthode sont sous-estimées si l'on utilise les données du fond diffus cosmologique. Les contours, comme les incertitudes, sont mal calibrés à cause de la non-gaussianité des erreurs sur les C_l et sous-estimés par les instabilités.

A l'heure actuelle nous n'avons pas de meilleur outil pour tracer les contours mais nous pouvons tracer les points correspondant aux valeurs obtenues pour chaque simulation. Les points noirs de la figure 7.3 permettent de vérifier le premier contour et confirmer sa forme à défaut des niveaux de confiance.

Dans la suite, nous utiliserons cette méthode pour tracer tous les contours. Ceux obtenus à partir des supernovae, des oscillations acoustiques de baryons ou des paramètres réduits seront fiables mais ceux obtenus avec le fond diffus cosmologique feront office d'illustration. Seules les incertitudes obtenues à partir des simulations seront considérées comme sûres et c'est sur ces dernières que nous baserons nos interprétations et conclusions.

7.4 Résultats de l'analyse combinée

Nous allons utiliser la méthode décrite précédemment pour réaliser les ajustements de différentes combinaisons de sondes. Comme avec les paramètres réduits, dans le chapitre 5, nous allons étudier l'apport de chaque sonde aux supernovae réalisant différentes combinaisons : supernovae et oscillations acoustiques de baryons, supernovae et fond diffus cosmologique puis la combinaison des trois sondes. Les différents résultats sont résumés dans la table 7.1.

Paramètres	SN	SN + BAO	SN + CMB	SN + CMB + BAO
Ω_b		0.059 ± 0.022	0.0479 ± 0.0055	0.0465 ± 0.0051
Ω_c		0.224 ± 0.021	0.241 ± 0.048	0.220 ± 0.025
Ω_M	$0.451^{+0.062}_{-9.}$	0.283 ± 0.041	0.289 ± 0.051	0.273 ± 0.028
w_0	-1.02 ± 0.77	-1.28 ± 0.25	-1.12 ± 0.27	-1.03 ± 0.18
w_a	-5.9 ± 10.9	1.2 ± 1.8	0.41 ± 0.99	0.40 ± 0.76
h		0.758 ± 0.061	0.683 ± 0.033	0.693 ± 0.027
n_s			0.959 ± 0.045	0.961 ± 0.039
τ			0.118 ± 0.061	0.092 ± 0.060
σ_8		0.755 ± 0.100	0.764 ± 0.069	0.760 ± 0.061
M_s	15.77 ± 0.04	15.75 ± 0.03	15.75 ± 0.04	15.77 ± 0.04
b		2.44 ± 0.33		2.46 ± 0.23

TABLE 7.1 – *Table de résultats des ajustements réalisés avec différentes combinaisons des supernovae fond diffus cosmologique et oscillations acoustiques de baryons .*

Les supernovae seules

Nous avons vu dans le chapitre 3 que les incertitudes évaluées par une analyse de Fisher sont mal estimées. Le contour obtenu dans le plan (Ω_M, w_0) montrait notamment des erreurs très asymétriques sur le paramètre de densité de matière. Avec la méthode de simulation, nous pouvons calculer les incertitudes de manière fiable. Ces nouveaux résultats sont donnés dans la première colonne de la table 7.1.

Ces derniers confirment la forte asymétrie sur Ω_M. Les supernovae ne permettent pas une bonne détermination de ce paramètre mais donnent une limite supérieure.
Comme nous l'avons déjà vu, les incertitudes sur les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire sont également très grandes. Le contour établi à 39% de niveau de confiance, rappelé dans la partie gauche de la figure 7.4, est très grand, n'apportant aucune conclusion sur la nature de l'énergie noire.

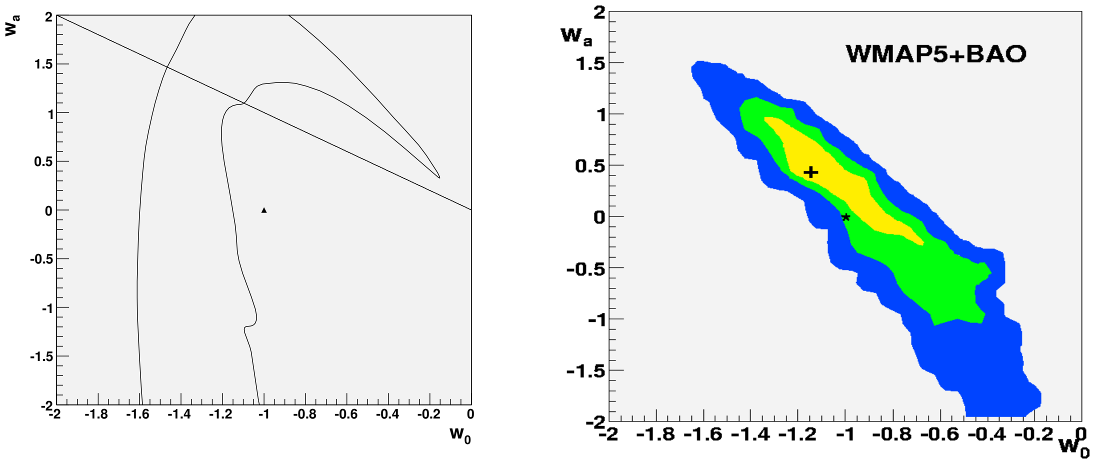

FIGURE 7.4 – *Contours dans le plan(w_a, w_0) illustrant les résultats de différents ajustements sur ces deux paramètres.*
A gauche : Contour obtenu à 39% de niveau de confiance avec les supernovae seulement.
A droite : Contour obtenu pour la combinaison des données du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons.

Sur cette figure, nous avons également illustré le contour obtenu en combinant le fond diffus cosmologique avec les oscillations acoustiques de baryons. Ces contours sont orientés différemment. La combinaison des trois sondes semble alors pouvoir contraindre les paramètres d'équation d'état w_0 et w_a. Nous allons d'abord réaliser les combinaisons de sondes deux à deux pour étudier l'apport de chacune, puis nous combinerons les trois.

La combinaison supernovae et oscillations acoustiques de baryons

Les résultats de la combinaison des données des supernovae avec celles des oscillations acoustiques de baryons sont donnés dans la deuxième colonne de la table 7.1. Notons que nous avons ajouté une contrainte sur h venant de HST [?].

Cette combinaison nécessite l'ajustement de plusieurs paramètres supplémentaires qu'apportent les oscillations acoustiques de baryons.
La première remarque concerne les densités de matière noire et baryonique. Contrairement aux supernovae, les oscillations acoustiques de baryons permettent une bonne estimation de ces paramètres.
Sur les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire, les erreurs sont également fortement réduites, d'un facteur 3 sur w_0, permettant une première estimation de ce paramètre, et d'un facteur 6 sur w_a.
Remarquons que la valeur centrale de w_a a beaucoup changé mais au vu de l'incertitude sur ce paramètre, ces valeurs restent compatibles à $1\,\sigma$.

Ces résultats sont comparables et équivalents à l'ajout d'une contrainte a priori sur Ω_M comme celle que nous avons imposée dans le chapitre 3.

La combinaison supernovae et fond diffus cosmologique

Les résultats de l'ajustement des neuf paramètres issus de la combinaison de données des supernovae avec le fond diffus cosmologique sont donnés dans la troisième colonne du tableau 7.1.

Le fond diffus cosmologique permet une bonne précision sur les deux paramètres de densité de matière. Cette combinaison permet même une meilleure précision sur le paramètre Ω_b que la combinaison des supernovae et des oscillations acoustiques de baryons divisant ainsi son erreur par 4.
Cette combinaison, comme la précédente, permet de réduire les erreurs sur les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire. Les résultats sur w_0 sont semblables à ceux obtenus avec les supernovae et les oscillations acoustiques de baryons, les valeurs centrales sont proches et les erreurs équivalentes.
Sur w_a, la réduction de l'erreur par rapport à l'utilisation des supernovae seules, est drastique. L'ajout du fond diffus cosmologique permet d'obtenir une incertitude inférieure à 1, plus petite qu'avec les oscillations acoustiques de baryons.

Notons que les résultats de cette combinaison sont statistiquement compatibles avec ceux obtenus avec les supernovae seules ou combinées aux oscillations acoustiques de baryons. Il y a cohérence des résultats, la combinaison des trois sondes est alors possible.

La combinaison des trois sondes

La combinaison des trois sondes apporte les résultats les plus précis. Ces derniers sont donnés dans la dernière colonne de la table 7.1.

Avec cette combinaison, les paramètres de densité de matière sont bien déterminés. Le fond diffus cosmologique apporte la plus grande précision sur Ω_b, qui atteint $4\,10^{-3}$, et les oscillations acoustiques de baryons permettent de mieux contraindre Ω_c.

Sur les paramètres d'équation d'état, la réduction des incertitudes est dominée par la combinaison des supernovae avec le fond diffus cosmologique. La combinaison des trois sondes permet d'obtenir une incertitude inférieure à 1 sur w_a.

On peut également remarquer l'effet des corrélations différentes selon la combinaison considérée. Les incertitudes de tous les paramètres ajustés sont réduites, même pour les paramètres présents dans une seule sonde. Par exemple, l'incertitude sur le biais des oscillations acoustiques de baryons b, diminue dans la combinaison des trois sondes. Cela provient essentiellement de la meilleure précision sur les paramètres h et σ_8 avec lesquels le biais est le plus corrélé.

De manière générale, l'ajout du fond diffus cosmologique ou des oscillations acoustiques de baryons aux supernovae permet de réduire fortement les incertitudes et combiner les trois permet d'obtenir une meilleure précision.

Comparaison avec la littérature

De telles analyses combinées sont rares. Les résultats présentés par la collaboration WMAP, par exemple, ne sont pas obtenus dans les mêmes conditions d'ajustement. Les paramètres d'équation d'état de l'énergie noire sont déterminés à l'aide des paramètres réduits ou l'équation d'état est supposée constante. Dans ce cas, les résultats de tous les paramètres ajustés sont compatibles à moins d'$1\,\sigma$ bien que les incertitudes obtenues ici soient plus grandes à cause de l'ajustement d'un paramètre supplémentaire, w_a.

La publication de Li et al. [90] présente les résultats d'une analyse combinée similaire à la nôtre. Les sondes et les données sont les mêmes, les conditions d'ajustement sont identiques, l'univers est supposé plat et l'équation d'état de l'énergie noire est également caractérisée par la paramétrisation CPL. Les différences résident dans la méthode statistique et le fait qu'un modèle de perturbations de l'énergie noire est pris en compte. L'approche statistique est bayesienne, basée sur des chaînes de Markov [91]. Les résultats de l'ajustement des trois sondes en supposant l'univers plat sont les suivants :

$$\begin{aligned} h &= 0.705 \pm 0.022 \\ \Omega_M &= 0.26 \pm 0.02 \\ w_0 &= -1.06 \pm 0.16 \\ w_a &= 0.36 \pm 0.66\,. \end{aligned}$$

La comparaison avec les nôtres montre qu'ils sont compatibles à moins d'$1\,\sigma$. Les valeurs trouvées sont très proches. Notons cependant que ces incertitudes sont légèrement plus faibles que celles que nous avons obtenues. Cette compatibilité et cette cohérence dans les résultats valident notre analyse et la méthode statistique utilisée.

7.5 Comparaison avec l'utilisation des paramètres réduits

Grâce aux résultats obtenus, et à la confiance portée par la vérification des résultats dans la littérature, nous pouvons maintenant vérifier l'utilisation des paramètres réduits. Pour une meilleure comparaison des deux types d'analyses combinées, nous avons rappelé les différents résultats dans les tables 7.2 et 7.3.

Les comparaisons des contours entre les combinaisons globales et celles utilisant les paramètres réduits sont données dans les figures 7.5, 7.6 et 7.7. Rappelons que pour les

Paramètres	SN	SN + BAO	SN + CMB	SN + CMB + BAO
Ω_M	$0.45^{+0.06}_{-9.}$	0.283 ± 0.041	0.289 ± 0.051	0.273 ± 0.028
w_0	-1.02 ± 0.77	-1.28 ± 0.26	-1.12 ± 0.27	-1.03 ± 0.18
w_a	-5.9 ± 10.9	1.2 ± 1.8	0.4 ± 1.0	0.4 ± 0.8

TABLE 7.2 – *Table de résultats sur les paramètres Ω_M, w_0 et w_a.*

Paramètres	SN	SN + A	SN + R	SN + R + A
Ω_M	$0.45^{+0.06}_{-9.}$	0.267 ± 0.021	0.305 ± 0.070	0.275 ± 0.018
w_0	-1.02 ± 0.77	-1.22 ± 0.21	-1.28 ± 0.36	-1.12 ± 0.14
w_a	-5.9 ± 10.9	1.5 ± 1.3	1.3 ± 0.9	0.8 ± 0.5

TABLE 7.3 – *Table de résultats sur les paramètres Ω_M, w_0 et w_a pour la combinaison des données des supernovae avec les paramètres réduits R et A.*

combinaisons globales, les niveaux de confiance indiqués ne sont corrects que si le fond diffus cosmologique n'est pas utilisé.

Les combinaisons supernovae et oscillations acoustiques de baryons

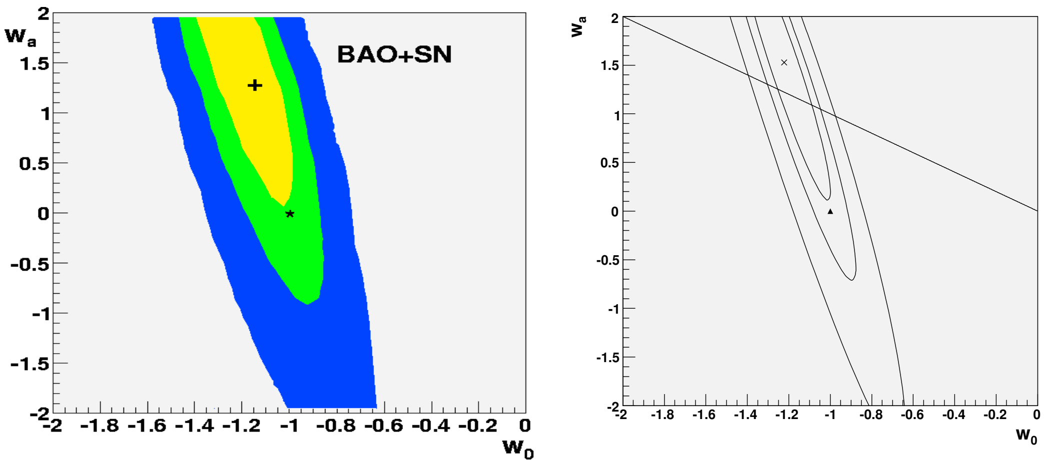

FIGURE 7.5 – *Contours dans le plan (w_0, w_a) obtenus par la combinaison des supernovae avec les oscillations acoustiques de baryons, à gauche, par la combinaison des données complètes, à droite avec le paramètre réduit A. Ces contours sont donnés à 39%, 68% et 95% de niveaux de confiance.*

De manière générale, les résultats obtenus avec la combinaison complète ou avec le paramètre A sont statistiquement compatibles.

Sur Ω_M les valeurs centrales sont très proches mais les incertitudes obtenues avec la combinaison complète sont plus grandes.
Dans la figure 7.5, les contours dans le plan (w_0, w_a) montrent une forte ressemblance. Les valeurs centrales sont proches et les incertitudes équivalentes bien que l'incertitude obtenue avec A soit légèrement plus faible.
Notons que ces résultats sont compatibles avec la constante cosmologique à moins de 2 σ.

Les combinaisons supernovae et fond diffus cosmologique

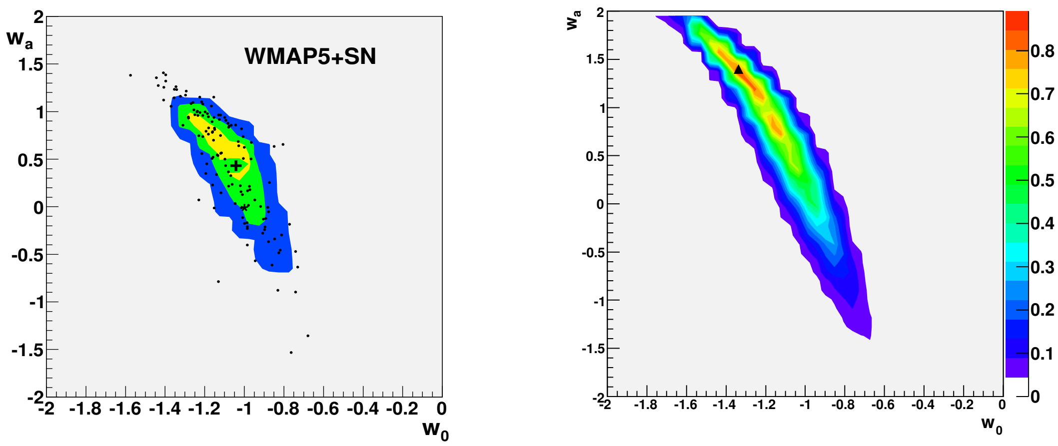

FIGURE 7.6 – *Contours dans le plan (w_0, w_a) obtenus par la combinaison des supernovae avec le fond diffus cosmologique, à gauche, par la combinaison des données complètes, à droite avec le paramètre réduit R. Le contour de gauche est qualitatif, celui de droite est donné à 39%, 68% et 95% de niveaux de confiance.*

Le cas de la combinaison des supernovae et du fond diffus cosmologique est plus complexe. Les contours dans le plan (w_0, w_a), présentés figure 7.6, montrent des différences induites par l'écart des valeurs centrales de w_a. La valeur de w_a obtenue par la combinaison complète est en effet plus basse que celle obtenue avec le paramètre réduit R. Cet effet est engendré par une contrainte imposée à l'ajustement des données complètes de WMAP avec la paramétrisation CPL. Les données du fond diffus cosmologique sont incompatibles avec une équation d'état de l'énergie noire positive au moment de la recombinaison. Nous avons alors imposé $w_0 + w_a < 0$ amenant une valeur de w_a plus proche de 0. Nous n'avons pas imposé cette contrainte avec les paramètres réduits, c'est pourquoi le contour dépasse cette limite et est centré sur une valeur de w_a plus grande.
Paradoxalement, la comparaison des deux types de combinaison montre que les valeurs centrales de w_0 et Ω_M restent proches et que les incertitudes obtenues sur ces trois paramètres sont équivalentes.

Les combinaisons supernovae, fond diffus cosmologique et oscillations acoustiques de baryons

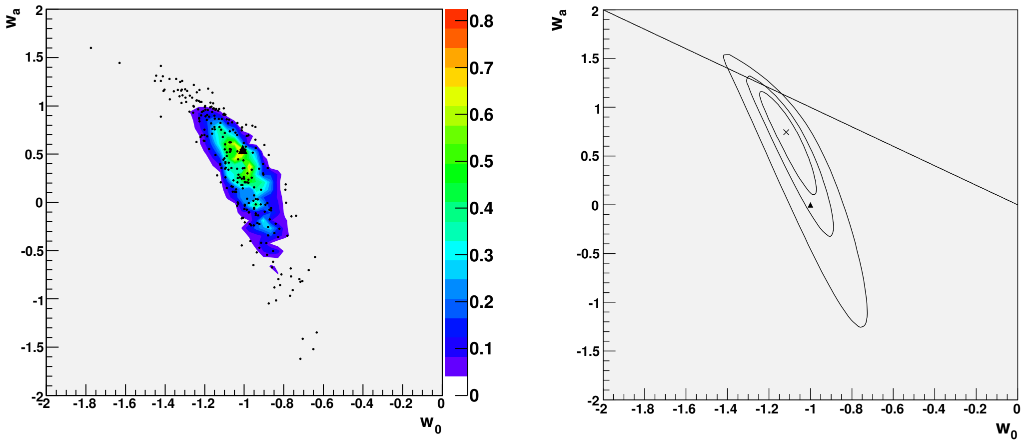

FIGURE 7.7 – *Contours dans le plan (w_0, w_a) obtenus par la combinaison des supernovae avec le fond diffus cosmologique et les oscillations acoustiques de baryons, à gauche, par la combinaison des données complètes, à droite avec les paramètres réduits R et A. Le contour de gauche est qualitatif, celui de droite est donné à 39%, 68% et 95% de niveaux de confiance.*

La combinaison des trois sondes présente les mêmes différences que la combinaison précédente. Les résultats obtenus par les données complètes ou les paramètres réduits sont statistiquement compatibles mais les valeurs centrales de w_a sont différentes. Cet écart sur w_a entraîne un décalage des contours.

7.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une méthode originale d'extraction des paramètres cosmologiques et d'estimation des incertitudes. Nous l'avons utilisée pour réaliser les analyses combinées avec les données des supernovae, du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons.

Par les combinaisons des sondes deux à deux, nous avons montré la cohérence des résultats de ces trois sondes. La combinaison des trois permet une estimation de l'équation d'état de l'énergie noire compatible à moins d'1 σ avec la constante cosmologique.

La comparaison de ces résultats avec une étude similaire publiée par Li et al. [90] montre une forte compatibilité. Cela conforte nos résultats et valide à la fois notre méthode statistique fréquentiste et notre méthode de calcul d'erreurs.

Nous avons également pu comparer ces résultats avec ceux que nous avions obtenus avec les paramètres réduits. Nous avons montré que les paramètres R et A permettent une bonne approximation et sont un bon moyen de déterminer l'équation d'état de l'énergie noire. Cette étude comparative valide a posteriori l'utilisation de ces paramètres réduits dans les chapitres précédents et apporte un argument supplémentaire à nos conclusions.

Conclusion

Suite à la découverte de l'accélération de l'expansion de l'Univers, en 1999, de nombreux projets de sondage de l'Univers à des fins cosmologiques ont vu le jour. Ces programmes d'observation de supernovae de type Ia tels que SNLS, ESSENCE et SDSS, de relevé de galaxies comme 2dF et SDSS ainsi que de détection du rayonnement du fond diffus cosmologique avec WMAP ont apporté de nouvelles données de plus en plus précises et complètes amenant à établir et confirmer le modèle de concordance. Ce modèle décrit l'Univers comme plat, dominé par une composante de nature inconnue : l'énergie noire.

Dans cette thèse, nous avons présenté comment extraire les paramètres cosmologiques décrivant l'Univers à partir des données actuelles des supernovae de type Ia, du fond diffus cosmologique et des oscillations acoustiques de baryons. Dans ce cadre, nous nous sommes focalisés sur l'étude des hypothèses d'ajustement grâce à des simulations de données.

Dans un premier temps, nous avons analysé les données des supernovae de l'échantillon UNION [28] en utilisant une méthode statistique originale dans ce contexte, basée sur une approche fréquentiste. Cependant, des dégénérescences fortes entre les paramètres cosmologiques rendent difficiles l'extraction des paramètres et l'estimation de leurs erreurs. Afin de lever ces dégénérescences, nous avons alors supposé une constante cosmologique pour extraire une densité d'énergie noire non nulle. L'extraction de la valeur du paramètre d'état w_0 a également nécessité des hypothèses d'analyse : la platitude de l'Univers et une équation d'état de l'énergie noire constante. Ces hypothèses permettent une première estimation de w_0, compatible avec la constante cosmologique.
Considérer une évolution en temps de l'équation d'état de l'énergie noire requiert l'ajout d'une contrainte extérieure sur la densité de matière. Malgré celle-ci, l'erreur sur le paramètre w_a reste importante, de l'ordre de 1, ne permettant pas de conclure sur une potentielle contribution dynamique à l'équation d'état de l'énergie noire.

Dans un second temps, nous avons voulu quantifier les risques de biais sur les résultats obtenus, induits par ces hypothèses. Nous avons alors simulé des données de supernovae pour différents modèles d'énergie noire puis réalisé l'analyse de ces données en supposant une équation d'état constante ou une contrainte erronée sur la densité de matière. Cette étude montre que des hypothèses trop strictes ou erronées entraînent des biais importants entre les modèles reconstruits et simulés. La combinaison de plusieurs sondes apparaît alors comme une solution élégante d'éviter l'utilisation de ces hypothèses.

Dans ce but, nous avons ajouté à notre analyse les données du fond diffus cosmologique issues de WMAP [47] et celles des oscillations acoustiques de baryons issues de SDSS [42]. Néanmoins, la prise en compte des données globales de ces sondes nécessite d'extraire un plus grand nombre de paramètres et de se servir d'un outil statistique plus complexe. Nous avons alors choisi de réaliser d'abord une analyse combinée simplifiée en utilisant les paramètres réduits de ces sondes.
Nous avons montré que le paramètre A, issu des oscillations acoustiques de baryons, apporte les mêmes informations qu'une contrainte extérieure sur la densité de matière et permet ainsi d'éviter cette hypothèse. L'ajout du paramètre R, issu du fond diffus cosmologique, complète la combinaison et permet, en supposant l'Univers plat, la meilleure estimation des paramètres cosmologiques. En particulier, nous avons pu extraire une première estimation de la contribution dynamique de l'équation d'état montrant des résultats compatibles avec la constante cosmologique.

Cependant, les paramètres R et A ne suffisent pas à éviter l'hypothèse de platitude. En effet, ce n'est qu'en supposant l'Univers plat que nous avons pu briser la dégénérescence géométrique entre le paramètre de courbure et les paramètres d'énergie noire. Cela explique que la plupart des analyses combinées actuelles soient réalisées avec la platitude.
Dans le but d'évaluer l'impact de cette hypothèse sur les résultats, nous l'avons testé à l'aide de simulations. Nous avons simulé les données de supernovae ainsi que les paramètres réduits R et A dans le cas d'univers courbes avec une énergie noire dynamique. Nous avons ensuite réalisé l'ajustement supposant la platitude. Les résultats de cette étude montrent que les effets de courbure et d'énergie noire se compensent. Si l'on suppose la platitude, un biais peut apparaître sur la détermination de l'énergie noire. Par exemple, une énergie noire dynamique peut être reconstruite comme une constante cosmologique sans que ce biais ne soit détectable dans des données réelles.
Nous avons alors réalisé l'étude inverse, en supposant une constante cosmologique pour extraire le paramètre de courbure. Nous avons trouvé que certains modèles d'univers courbes peuvent être reconstruits comme plats.
Ces deux études nous ont amenés à vérifier le principe de cohérence. Ces deux conditions d'ajustement sont en effet souvent justifiées a posteriori par la cohérence de leurs résultats donnant le modèle de concordance. Nous avons ainsi cherché des modèles d'univers courbes d'énergie noire dynamique reconstruits comme plats avec une constante cosmologique dans les deux conditions d'ajustement. Nous avons vu que de telles confusions sont possibles mais restent rares. Le principe de cohérence reste donc un bon moyen de vérifier la fiabilité des résultats.

La dernière partie de ces travaux de thèse est consacrée à une analyse combinée réalisée avec les données globales des trois sondes. Les résultats obtenus en supposant l'Univers plat sont compatibles avec la constante cosmologique. La comparaison avec l'étude menée par Li et al. [90] avec les mêmes données et des conditions similaires mais avec une méthode basée sur l'approche bayesienne, montre un excellent accord validant ainsi la

méthode statistique utilisée.
La comparaison avec l'analyse simplifiée réalisée avec les paramètres réduits montre également des résultats en accord. Les paramètres réduits permettent donc une bonne approximation et constituent un bon moyen de déterminer l'équation d'état de l'énergie noire.

Nous avons montré que la combinaison permet d'apporter des informations cosmologiques complémentaires en évitant d'utiliser des hypothèses ou des contraintes a priori. De ce point de vue, c'est la façon la plus sûre d'obtenir des résultats les plus précis. Néanmoins, la combinaison demande un outil statistique lourd. La grille de calcul permet déjà de considérablement réduire le temps de calcul.
Les futures données attendues avec Planck, des meilleures mesures de oscillations acoustiques de baryons et des futures missions spatiales apporteront encore plus de précision. Le défi majeur de ces prochains programmes sera alors de contrôler les erreurs systématiques. L'ajout d'autres sondes comme l'effet de lentille gravitationnelle faible permettra également des tests de cohérence entre les sondes.

Bibliographie

[1] D. W. Hogg, D. J. Eisenstein, M. R. Blanton, N. A. Bahcall, J. Brinkmann, J. E. Gunn and D. P. Schneider, Astrophys. J. **624** (2005) 54 [arXiv :astro-ph/0411197].

[2] J. Yadav, S. Bharadwaj, B. Pandey and T. R. Seshadri, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **364** (2005) 601 [arXiv :astro-ph/0504315].

[3] M. Colless *et al.*, arXiv :astro-ph/0306581.

[4] G. Hinshaw *et al.* [WMAP Collaboration], arXiv :0803.0732 [astro-ph].

[5] E. Komatsu *et al.* [WMAP Collaboration], arXiv :0803.0547 [astro-ph].

[6] W. L. Freedman *et al.* [HST Collaboration], Astrophys. J. **553** (2001) 47 [arXiv :astro-ph/0012376].

[7] A.G. Riess et al., Astron. J. **116**, 1009 (1998)

[8] S. Perlmutter et al. Astrophys. J. **517**, 565 (1999)

[9] R. R. Caldwell and E. V. Linder, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 141301 [arXiv :astro-ph/0505494].

[10] B. Boisseau, G. Esposito-Farese, D. Polarski and A. A. Starobinsky, Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 2236 [arXiv :gr-qc/0001066].

[11] G. Esposito-Farese and D. Polarski, Phys. Rev. D **63** (2001) 063504 [arXiv :gr-qc/0009034].

[12] A. Riazuelo and J. P. Uzan, Phys. Rev. D **66** (2002) 023525 [arXiv :astro-ph/0107386].

[13] S. Capozziello, S. Carloni and A. Troisi, Recent Res. Dev. Astron. Astrophys. **1** (2003) 625 [arXiv :astro-ph/0303041].

[14] I. I. Kogan, S. Mouslopoulos, A. Papazoglou, G. G. Ross and J. Santiago, Nucl. Phys. B **584** (2000) 313 [arXiv :hep-ph/9912552].

[15] T. Damour and I. I. Kogan, Phys. Rev. D **66** (2002) 104024 [arXiv :hep-th/0206042].

[16] G. R. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, Phys. Lett. B **484** (2000) 112 [arXiv :hep-th/0002190].

[17] V. Sahni and Y. Shtanov, arXiv :0811.3839 [astro-ph].

[18] V. Sahni and Y. Shtanov, JCAP **0311** (2003) 014 [arXiv :astro-ph/0202346].

[19] T. Buchert, J. Larena and J. M. Alimi, Class. Quant. Grav. **23** (2006) 6379 [arXiv :gr-qc/0606020].

[20] T. Buchert, Gen. Rel. Grav. **40** (2008) 467 [arXiv :0707.2153 [gr-qc]].

[21] S. Rasanen, JCAP **0611** (2006) 003 [arXiv :astro-ph/0607626].

[22] J. P. Uzan, Gen. Rel. Grav. **39**, 307 (2007) [arXiv :astro-ph/0605313].

[23] M. Chevallier and D. Polarski, Int. J. Mod. Phys. D **10** (2001) 213 [arXiv :gr-qc/0009008].

[24] E. V. Linder, Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 091301 [arXiv :astro-ph/0208512].

[25] A. Upadhye, M. Ishak and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D **72**, 063501 (2005) [arXiv :astro-ph/0411803].

[26] Dark Energy Task Force report to the Astronomy and Astrophysics Advisory Committee, http ://www.nsf.gov/mps/ast/detf.jsp ; A. Albrecht et al., [arXiv :astro-ph/0609591].

[27] A. Kim, 1997, PhD Thesis, University ok California, Berkeley

[28] M. Kowalski *et al.*, Astrophys. J. **686** (2008) 749 [arXiv :0804.4142 [astro-ph]].

[29] M. Hicken *et al.*, arXiv :0901.4804 [astro-ph.CO].

[30] A. G. Riess *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], Astrophys. J. **607** (2004) 665 [arXiv :astro-ph/0402512].

[31] A. G. Riess *et al.*, Astrophys. J. **659** (2007) 98 [arXiv :astro-ph/0611572].

[32] P. Astier *et al.* [The SNLS Collaboration], Astron. Astrophys. **447** (2006) 31 [arXiv :astro-ph/0510447].

[33] G. Miknaitis *et al.*, Astrophys. J. **666** (2007) 674 [arXiv :astro-ph/0701043].

[34] W. M. Wood-Vasey *et al.* [ESSENCE Collaboration], Astrophys. J. **666** (2007) 694 [arXiv :astro-ph/0701041].

[35] M. Hamuy *et al.* Astron. J. **112** (1996) 2408 [arXiv :astro-ph/9609064].

[36] A. G. Riess *et al.*, Astron. J. **117** (1999) 707 [arXiv :astro-ph/9810291].

[37] A. Aguirre, ApJ, 525, 583

[38] E. Mortsell and A. Goobar, JCAP **0309** (2003) 009 [arXiv :astro-ph/0308046].

[39] L. Ostman and E. Mortsell, JCAP **0502** (2005) 005 [arXiv :astro-ph/0410501].

[40] P. S. Corasaniti, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **372** (2006) 191 [arXiv :astro-ph/0603833].

[41] G. Aldering *et al.* [SNAP Collaboration], arXiv :astro-ph/0209550.

[42] D.J. Eisenstein et al., Astrophys. J. **633**, 560 (2005)

[43] R. Kessler *et al.*, arXiv :0908.4274 [astro-ph.CO].

[44] A. A. Penzias and R. W. Wilson, Astrophys. J. **142** (1965) 419.

[45] http ://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/

[46] J. C. Mather, D. J. Fixsen, R. A. Shafer, C. Mosier and D. T. Wilkinson, Astrophys. J. **512** (1999) 511 [arXiv :astro-ph/9810373].

[47] http ://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/parameters.cfm

[48] http ://planck.esa.gov

[49] D. J. Fixsen, E. S. Cheng, J. M. Gales, J. C. Mather, R. A. Shafer and E. L. Wright, Astrophys. J. **473** (1996) 576 [arXiv :astro-ph/9605054].

[50] C. L. Bennett, G. Hinshaw, A. Banday, A. Kogut, E. L. Wright, K. Loewenstein and E. S. Cheng, Astrophys. J. **414** (1993) L77.

[51] A. Kogut *et al.*, Astrophys. J. **419** (1993) 1 [arXiv :astro-ph/9312056].

[52] G. Hinshaw *et al.* [WMAP Collaboration], Astrophys. J. Suppl. **180** (2009) 225 [arXiv :0803.0732 [astro-ph]].

[53] R. K. Sachs and A. M. Wolfe ApJ **147** (1967) 73

[54] M. R. Nolta *et al.* [WMAP Collaboration], Astrophys. J. Suppl. **180** (2009) 296 [arXiv :0803.0593 [astro-ph]].

[55] W. Hu, Lecture notes on CMB theory : From nucleosynthesis to recombination, [arXiv :0802.3688 [astro-ph]].

[56] W. Hu, http ://background.uchicago.edu/ whu/

[57] W. J. Percival, S. Cole, D. J. Eisenstein, R. C. Nichol, J. A. Peacock, A. C. Pope and A. S. Szalay, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **381** (2007) 1053 [arXiv :0705.3323 [astro-ph]].

[58] C. Yeche, A. Ealet, A. Refregier, C. Tao, A. Tilquin, J. M. Virey and D. Yvon, arXiv :astro-ph/0507170.

[59] L. Verde *et al.* [WMAP Collaboration], Astrophys. J. Suppl. **148** (2003) 195 [arXiv :astro-ph/0302218].

[60] C. Amsler et al. (Particle Data Group), Physics Letters B667, 1 (2008)

[61] A. Tilquin http ://marwww.in2p3.fr/renoir/Kosmo-Pheno.php3

[62] J. M. Virey, P. Taxil, A. Tilquin, A. Ealet, D. Fouchez and C. Tao, Phys. Rev. D **70** (2004) 043514 [arXiv :astro-ph/0403285].

[63] J. M. Virey, A. Ealet, C. Tao, A. Tilquin, A. Bonissent, D. Fouchez and P. Taxil, Phys. Rev. D **70** (2004) 121301 [arXiv :astro-ph/0407452].

[64] see e.g. http ://cfht.hawai.edu/Science/CFHTLS-OLD/history_2001.html

[65] W. M. Wood-Vasey *et al.*, New Astron. Rev. **48** (2004) 637 [arXiv :astro-ph/0401513].

[66] http ://snap.lbl.gov

[67] A.G. Kim et al., Mon. Not. R. Astron Soc. **347**, 909 (2004)

[68] I. Maor, R. Brustein, J. McMahon and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D **65** (2002) 123003 [arXiv :astro-ph/0112526].

[69] J. Dunkley *et al.* [WMAP Collaboration], Astrophys. J. Suppl. **180** (2009) 306 [arXiv :0803.0586 [astro-ph]].

[70] H. J. Seo and D. J. Eisenstein, Astrophys. J. **598** (2003) 720 [arXiv :astro-ph/0307460].

[71] J.R. Bond, G. Efsthatiou and M. Tegmark, Mon. Not. R. Astron Soc. **291**, L33 (1997)

[72] G. Efsthatiou and J.R. Bond, Mon. Not. R. Astron Soc. **304**, 75 (1999)

[73] O. Elgaroy and T. Multamaki, arXiv :astro-ph/0702343.

[74] Y. Wang and P. Mukherjee, Astrophys. J. **650** (2006) 1 [arXiv :astro-ph/0604051].

[75] Y. Wang and P. Mukherjee, Phys. Rev. D **76** (2007) 103533 [arXiv :astro-ph/0703780].

[76] P. Mukherjee, M. Kunz, D. Parkinson and Y. Wang, Phys. Rev. D **78** (2008) 083529 [arXiv :0803.1616 [astro-ph]].

[77] I. Maor, R. Brustein and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 6 [Erratum-ibid. **87** (2001) 049901] [arXiv :astro-ph/0007297].

[78] J. M. Virey, D. Talon-Esmieu, A. Ealet, P. Taxil and A. Tilquin, JCAP **0812**, 008 (2008) [arXiv :0802.4407 [astro-ph]].

[79] C. Clarkson, M. Cortes and B. A. Bassett, JCAP **0708**, 011 (2007) [arXiv :astro-ph/0702670].

[80] D. N. Spergel *et al.* [WMAP Collaboration], Astrophys. J. Suppl. **170**, 377 (2007) [arXiv :astro-ph/0603449].

[81] A. Cimatti et al. [arXiv :0804.4433]

[82] M. Doran, JCAP **0510** (2005) 011 [arXiv :astro-ph/0302138].

[83] M. Doran and C. M. Mueller, JCAP **0409** (2004) 003 [arXiv :astro-ph/0311311].

[84] M. Doran, JCAP **0506** (2005) 011 [arXiv :astro-ph/0503277].

[85] www.cmbeasy.org/

[86] W. Hu and D. J. Eisenstein, Astrophys. J. **498** (1998) 497 [arXiv :astro-ph/9710216].

[87] Lei Sun, thèse de doctorat de l'Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II et Peking University.

[88] F. James and M. Roos, Comput. Phys. Commun. **10** (1975) 343.

[89] Enabling Grids for E-sciencE (EGEE) http ://www.eu-egee.org Virtual Organisation (VO) ESR (Earth Science Research)

[90] H. Li *et al.*, arXiv :0812.1672 [astro-ph].

[91] A. Lewis and S. Bridle, Phys. Rev. D **66** (2002) 103511 [arXiv :astro-ph/0205436].