



HAL
open science

**COMPORTEMENT DES MATERIAUX
ABSORBANTS DANS LES CHAMPS ACOUSTIQUES
INTENSES ; MODELISATION DE TRAITEMENTS
ACOUSTIQUES REACTIFS A REACTION NON
LOCALE DANS LES CONDUITS**

Marc Pachebat, Jean-François Allard

► **To cite this version:**

Marc Pachebat, Jean-François Allard. COMPORTEMENT DES MATERIAUX ABSORBANTS DANS LES CHAMPS ACOUSTIQUES INTENSES ; MODELISATION DE TRAITEMENTS ACOUSTIQUES REACTIFS A REACTION NON LOCALE DANS LES CONDUITS. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, 1997. Français. NNT : . tel-00494951

HAL Id: tel-00494951

<https://theses.hal.science/tel-00494951>

Submitted on 24 Jun 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ACADÉMIE DE NANTES

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE

Spécialité: ACOUSTIQUE

présentée par
Marc PACHEBAT

pour obtenir le titre de Docteur d'Université

COMPORTEMENT DES MATÉRIAUX ABSORBANTS
DANS LES CHAMPS ACOUSTIQUES INTENSES;
et
MODÉLISATION DE TRAITEMENTS ACOUSTIQUES
RÉACTIFS
À RÉACTION NON LOCALE DANS LES CONDUITS.

Soutenue le 16 décembre 1997

devant le Jury composé de Messieurs :

J.F.ALLARD	Professeur émérite, Université du Maine, <i>Directeur de thèse</i>
Y.AURÉGAN	Maître de conférence, Université du Maine
H.BATARD	Docteur (Aérospatiale, Toulouse)
J.KERGOMARD	Directeur de recherche (CNRS), Université du Maine
S.LEWY	Ingénieur habilité (ONERA), <i>Rapporteur</i>
J.L.PEUBE	Professeur, (LEA) Université de Poitiers, <i>Rapporteur</i>
R.STAROBINSKI	Professeur, Université de Togliatti (Russie)

RÉSUMÉ — Ce travail s'inscrit dans la recherche de traitements acoustiques passifs de conception nouvelle, permettant une réduction accrue des nuisances sonores des réacteurs d'avions (traitements acoustiques de paroi) ou des moteurs thermiques automobiles (silencieux) par exemple. La première partie du mémoire présente l'étude du comportement des matériaux poreux dans les champs acoustiques intenses, lorsque le squelette poreux peut être considéré comme rigide. Deux dispositifs expérimentaux ont été mis au point. Le premier permet la mesure de la résistance au passage de l'air en fonction du nombre de Reynolds d'un écoulement à travers un échantillon (Loi de Darcy non linéaire). Deux comportements non linéaires distincts ainsi qu'un nombre de Reynolds critique sont mis en évidence expérimentalement pour chaque échantillon. Le second dispositif permet la mesure des coefficients de réflexion et de transmission acoustiques des mêmes échantillons, insérés dans un conduit, en fonction de la fréquence (80-800 Hz) et du niveau acoustique incident sur le matériau (110-150 dB *re* 20 μ Pa). Un modèle non linéaire semi-empirique est proposé, permettant de reproduire fidèlement les coefficients de transmission et de réflexion acoustiques obtenus expérimentalement. La seconde partie étudie un traitement acoustique de paroi réactif, à réaction non locale. En aéronautique, le principe utilisé pour réduire le bruit émis par un réacteur consiste à disposer sur les parois des tuyères, un grand nombre de résonateurs de Helmholtz. En pratiquant des trous dans les parois latérales, les champs acoustiques dans chaque résonateur peuvent être couplés. Les résonateurs constituent alors un traitement acoustique à réaction non locale, non modélisable par une impédance de paroi. Une modélisation analytique est présentée pour un guide d'onde de grande section ainsi traité en paroi par des résonateurs de Helmholtz couplés. Dans un second temps, en utilisant le formalisme des milieux périodiques (modèle discrétisé), une expression analytique des solutions de l'équation de dispersion (milieu de longueur infinie), et de la perte par insertion (longueur finie) est présentée dans le cas de deux modes plans couplés, dans un réseau périodique de deux guides d'ondes inhomogènes. Ces résultats sont illustrés dans le cas particulier d'un silencieux automobile à tube perforé classique, dans lequel on ajoute des diaphragmes. Ce travail met en évidence, du point de vue de l'atténuation acoustique d'un réseau de longueur finie, l'intérêt des bandes de fréquences où deux modes de réseau sont propagatifs.

ABSTRACT — This work is a contribution to an improved noise reduction provided by passive acoustic treatments, such as aircraft turbofan engines liners, or automotive mufflers. The first part deals with the behaviour of acoustic porous materials under high incident sound pressure levels, when the skeleton is motionless. Two experimental set-up are presented. The first one determines the flow resistivity of a porous samples as a function of the Reynolds number of the flow in the sample (Nonlinear Darcy law). The measurements exhibit two different non linear behaviour; one of these is the classical Forchheimer law (high Reynolds numbers), the other one being a quadratic function of the Reynolds number without linear term, as far as the Reynolds number is under a critical value which is determined from the measurements. The second set-up gives the acoustic reflection and transmission coefficients of a porous sample inserted in a tube, as a function of frequency (80-800 Hz) and incident sound pressure level (110-150 dB *re* 20 μ Pa). A semi-empirical model is presented. Accordance between predictions and measured reflection and transmission coefficients is satisfactory. The second part deals with reactive and non-locally reacting liners. Helmholtz resonators are known to be efficient in order to muffle inlet and outlet ducts of an aircraft turbofan engine. Let open a hole in the side-walls of the resonators; Thus the acoustic fields in the resonators are coupled. This type of acoustic treatment is no more locally reacting (wall impedance), and must be considered as a wave guide coupled to the inlet or outlet duct. First, an analytical model is presented for a large duct lined with such coupled Helmholtz resonators. Then, an analytical model is given for the acoustic propagation in a lattice made of two parallel waveguides periodically coupled by means of lateral perforations. The solutions of the dispersion equations (infinite length lattice) and the insertion loss (finite length), are given analytically, using formalism of periodic media (discrete model). These results are illustrated by calculating the sound attenuation of a classical automotive perforated tube muffler with added discontinuities, exhibiting the resonant maxima provided by the interferences of the two propagating modes of the lattice.

MOTS CLEFS — Acoustique, Ondes guidées, Atténuation, Matériaux absorbants, Régime non linéaire, Réseau périodique, Couplage de modes.

KEYWORDS — Acoustic, Waveguides, Attenuation, Absorbing materials, Non linearity, Periodic lattice, Mode coupling.

ACADÉMIE DE NANTES

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE

Spécialité : ACOUSTIQUE

présentée par
Marc PACHEBAT

pour obtenir le titre de Docteur d'Université

COMPORTEMENT DES MATÉRIAUX ABSORBANTS
DANS LES CHAMPS ACOUSTIQUES INTENSES
et
MODÉLISATION DE TRAITEMENTS ACOUSTIQUES
RÉACTIFS
À RÉACTION NON LOCALE DANS LES CONDUITS.

Soutenue le 16 décembre 1997
devant le Jury composé de Messieurs :

J.F.ALLARD	Professeur émérite, Université du Maine, <i>Directeur de thèse</i>
Y.AURÉGAN	Maître de conférence, Université du Maine
H.BATARD	Docteur (Aérospatiale, Toulouse)
J.KERGOMARD	Directeur de recherche (CNRS), Université du Maine
S.LEWY	Ingénieur habilité (ONERA), <i>Rapporteur</i>
J.L.PEUBE	Professeur, (LEA) Université de Poitiers, <i>Rapporteur</i>
R.STAROBINSKI	Professeur, Université de Togliatti (Russie)

REMERCIEMENTS

Ce mémoire est le résultat de travaux effectués au laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine de 1993 à 1997.

Je tiens à remercier M. Jean François Allard qui a accepté de diriger cette thèse.

Je remercie chaleureusement M. Jean Kergomard, ainsi que M. Yves Aurégan sans qui ce travail n'aurait pu voir le jour.

J'exprime ma gratitude à MM. Serge Lewy et Jean Laurent Peube, qui ont accepté d'être rapporteurs de ce travail.

Un Merci tout particulier à M. Denis Lafarge pour les discussions scientifiques fructueuses que nous avons eues.

Merci à Valérie C. et d'autres qui se reconnaîtront, de n'avoir pas lu ce document.

*Dieu a fait l'homme, son et image
... a dit Prévert.*

Introduction générale

Ce mémoire de thèse s'inscrit dans l'une des activités majeures des acousticiens : proposer des solutions pour réduire les nuisances sonores de notre environnement quotidien.

Le sujet de ce travail a pour origine la participation du Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine au programme européen de recherche concernant le bruit des réacteurs d'avions commerciaux FANPAC (Fan Noise Prediction And Control). L'extension des zones urbaines, l'intensification du trafic aérien au cours des dernières décennies, et dans une moindre mesure le confort des passagers, imposent aux constructeurs de proposer des appareils, et notamment des réacteurs, toujours plus silencieux. Ces réacteurs doivent tout d'abord être performants (rendement aérodynamique, consommation de carburant...), les considérations acoustiques devant s'accommoder de ces impératifs. Ainsi, les réacteurs ont augmenté de diamètre, sont devenus de plus en plus compacts, et comportent des soufflantes dont l'extrémité des aubes peut atteindre des vitesses transsoniques. Ces trois raisons sont autant de difficultés supplémentaires pour l'acousticien, qui doit faire face à des sources internes aux moteurs, très intenses ; leur rayonnement est de moins en moins entravé par les conduits amont et aval du réacteur, dont le raccourcissement réduit d'autant la surface disponible pour appliquer un traitement acoustique de paroi. Les normes de bruit pour l'accès aux aéroports deviennent toujours plus strictes, et elles seront dictées à l'avenir par qui saura fabriquer les avions commerciaux les plus silencieux. Les enjeux économiques sont considérables.

Le rayonnement acoustique des réacteurs implique conjointement la propagation d'ondes de choc dans les conduits de grand diamètre avec écoulement, et les traitements acoustiques de paroi censés limiter la propagation du son vers l'extérieur.

Le contenu de notre travail s'attachera en particulier aux traitements acoustiques de paroi dans les conduits, dont l'utilisation ne se limite pas à l'aéronautique et concerne aussi les silencieux automobiles ou industriels, et les tunnels ferroviaires par exemple.

Les traitements acoustiques actuels, utilisés dans des environnements tels que les réacteurs d'avions ou les silencieux automobiles, sont principalement constitués de structures métalliques telles que les plaques perforées, agencées de façon plus ou moins complexe, et ceci pour des raisons multiples telles que la simplicité de fabrication, le coût, la robustesse, la légèreté et la simplicité de la maintenance, ainsi que les bonnes performances que l'on peut en obtenir.

Comment améliorer les systèmes déjà existants ?

Les deux mécanismes mis en jeu dans les silencieux passifs sont la dissipation (ici les pertes visqueuses dans les perforations), et l'atténuation réactive (c'est à dire la réflexion de l'énergie acoustique vers la source). Lors de notre participation au programme FANPAC, il s'est révélé nécessaire d'aborder ces deux sujets, de par les progrès substantiels recherchés par les participants dans les performances des traitements acoustiques ; ce travail sera donc divisé en deux parties.

Le premier mécanisme à étudier est la dissipation. Les capacités d'absorption et de dissipation des matériaux poreux ne sont plus à démontrer, et pourraient être utilement associées à celles des plaques perforées déjà utilisées de façon courante. L'usage des matériaux poreux

s'est généralisé dans beaucoup de domaines (par exemple l'acoustique des bâtiments, les écrans urbains) mais il n'y a pas à l'heure actuelle en acoustique de modèle théorique adapté aux conditions rencontrées dans les réacteurs ou les silencieux automobiles; la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu dans le comportement des matériaux poreux soumis à de forts niveaux de bruit reste encore dépendante d'une étude expérimentale approfondie. La première partie de ce mémoire sera donc une étude du comportement des matériaux absorbants usuellement utilisés pour l'atténuation du bruit, dans les champs acoustiques intenses (matériaux poreux et plaques perforées).

Une seconde caractéristique des silencieux aéronautiques ou automobiles est qu'ils sont réactifs. En aéronautique en particulier, le principe consiste à disposer en paroi un grand nombre de résonateurs de Helmholtz (c'est à dire des perforations derrière lesquelles se trouvent des cavités fermées); ce n'est pas la dissipation mais la résonance des cavités qui produit principalement l'atténuation recherchée à la sortie du système. Ce genre de solution ayant été déjà largement étudié et utilisé, il convient d'explorer de nouvelles voies pour espérer progresser dans l'atténuation réactive du bruit. Imaginons de percer un trou entre chaque résonateur, l'ensemble des résonateurs disposés en paroi devient alors un guide d'onde. La seconde partie a pour objectif d'étudier ce type particulier de silencieux réactifs dans les conduits, qui entre dans la catégorie des traitements acoustiques à réaction non locale.

Ce mémoire est constituée de deux parties¹, présentées et pouvant être lues de façon indépendante.

¹. la table des matières se situe au début de chaque partie, les annexes et la bibliographie à la fin de chaque partie.

Première partie

COMPORTEMENT DES MATÉRIAUX
ABSORBANTS DANS LES CHAMPS
ACOUSTIQUES INTENSES

Table des matières

de la première partie

I COMPORTEMENT DES MATÉRIAUX ABSORBANTS DANS LES CHAMPS ACOUSTIQUES INTENSES

Introduction	9
1 Mesure de la résistance au passage de l'air	11
1.1 Introduction	11
1.2 Dispositif et méthode de mesure	11
1.3 Résultats	12
1.4 Discussion	14
1.5 Conclusion	17
2 Comportement acoustique non linéaire	19
2.1 Introduction	19
2.2 Principe de mesure	19
2.3 Résultats	22
2.4 Modélisation	22
2.5 Discussion	28
2.6 Conclusion	29
Conclusion	30
Annexes	33
A Modélisation acoustique en régime linéaire	33
A.1 Fluide équivalent	33
A.2 Paramètres caractéristiques de la géométrie poreuse	34
A.3 Densité effective	35
A.4 Compressibilité effective	36
B Résistance: étalonnage et méthode de mesure	37
B.1 Caractérisation de la résistance étalon	37
B.2 Méthode de mesure	38
C Coefficients de réflexion et de transmission: mesure	41
C.1 Dispositif expérimental	41
C.2 Étalonnage	42
C.3 Acquisition	42

C.4 Validation	43
C.4.1 Résistance	45
C.4.2 Longueur ajoutée	45
Bibliographie	47

Introduction de la première partie

Les matériaux utilisés en acoustique se caractérisent en premier lieu par une grande diversité, tant du point de vue de la matière qui les constitue que de la géométrie de leur structure. Ils ont pourtant en commun la particularité de contenir une grande part d'air capable de circuler librement, offrant ainsi une surface de contact importante entre une structure solide et un milieu fluide libre. C'est l'interaction entre ces deux phases qui est souvent utilisée en acoustique pour modifier la propagation du son dans l'air, et obtenir par exemple une absorption d'énergie grâce à la présence de la structure poreuse. La modélisation et la compréhension des phénomènes physiques se produisant lors de l'interaction vibroacoustique d'une couche poreuse avec un fluide viscothermique différent, selon que la structure poreuse est susceptible d'être ébranlée par l'onde aérienne ou bien est considérée comme parfaitement rigide et immobile. Les modèles théoriques existants se limitent au cas où l'onde acoustique incidente sur le matériau est de niveau modéré² (< 110 dB *re* 20μ Pa environ) [1, 2]. La réponse du matériau est alors indépendante de ce niveau, et le modèle permettant de la décrire est qualifié de *linéaire*.

Cependant, dans un grand nombre d'applications, les matériaux peuvent être soumis à des niveaux acoustiques très intenses (dans les réacteurs d'avions ou les silencieux automobiles par exemple). Le fait qu'il n'y ait pas, à l'heure actuelle, de modèle théorique non linéaire adapté à ces applications, est une des raisons qui limite l'utilisation des matériaux poreux dans ces conditions extrêmes. Pourtant, la maîtrise de la réponse non linéaire permettrait de disposer d'un degré de liberté supplémentaire en vue d'optimiser les performances des traitements acoustiques contenant un matériau poreux.

L'objectif de ce travail est dans un premier temps de caractériser expérimentalement, et de la façon la plus fine possible, le comportement des matériaux poreux soumis à un champ acoustique intense; dans un second temps d'éprouver un modèle semi-empirique pour reproduire le plus fidèlement possible les phénomènes observés. Nous nous limiterons au cas où, de par l'environnement dans lequel il est inséré, le matériau poreux peut être considéré comme ayant une structure rigide. Deux chapitres seront présentés.

1- *Une étude de la résistance au passage de l'air en écoulement permanent.* Une étude bibliographique a montré que, parmi les paramètres caractérisant un matériau poreux, la résistance au passage de l'air est la grandeur qui varie le plus lorsque l'intensité du champ acoustique croît. Elle est donc la première dont il faut connaître les variations pour espérer prédire correctement le comportement non linéaire du matériau. Une mesure précautionneuse de cette grandeur en fonction du débit filtrant à travers le matériau était d'autant plus nécessaire, que deux expressions concurrentes décrivant sa variation sont avancées dans la littérature. Un dispositif expérimental a été mis au point. La métrologie mise en jeu est fine car il faut déterminer la

2. Les phénomènes non linéaires observés dans les matériaux poreux dépendent, comme nous le verrons en détail, principalement de l'amplitude de la vitesse acoustique dans la structure poreuse; les niveaux acoustiques sont cependant donnés ici, à titre indicatif, en dB pour la pression incidente sur le matériau.

nature de la faible variation de la résistance au passage de l'air. Des échantillons de matériaux souvent utilisés en acoustique ont été mesurés.

2- *Une étude de l'évolution des coefficients de réflexion et de transmission acoustiques, en fonction de la fréquence et du niveau sonore.* Un banc de mesure des coefficients de réflexion et de transmission acoustiques d'un matériau poreux placé dans un tube muni d'une source acoustique et d'une terminaison anéchoïque a été mis au point ; il repose sur une méthode d'acquisition multivoies. Cette méthode, utilisée pour la première fois dans ce contexte, permet de présenter sur une gamme de fréquences (50 Hz—800 Hz) et de niveaux acoustiques (110 dB – 150 dB *re* 20 μ Pa), la réponse acoustique non linéaire des échantillons déjà étudiés dans le premier chapitre. Comme proposé dans les références [3, 4, 5, 6], un modèle linéaire couramment utilisé pour les matériaux poreux à structure rigide est modifié comme suit : la résistivité est remplacée par une résistivité non linéaire, grâce aux résultats expérimentaux du premier chapitre. Les résultats issus du modèle seront comparés aux coefficients de réflexion et de transmission mesurés, en fonction de la fréquence et du niveau acoustique, par le second dispositif expérimental. Une discussion sera proposée sur les performances de ce modèle semi-empirique, ainsi que les phénomènes observés.

Chapitre 1

Mesure de la résistance au passage de l'air des matériaux poreux acoustiques

1.1 Introduction

Les propriétés acoustiques d'un matériau poreux à structure rigide dépendent de paramètres physiques caractérisant la géométrie de cette structure (porosité, perméabilité, tortuosité, longueurs caractéristiques visqueuses et thermiques, définis dans l'annexe A). Ces paramètres peuvent être déterminés expérimentalement par des mesures non acoustiques ou ultrasonores. L'analyse de mesures d'impédance, réalisées à fort niveau acoustique (environ 110 dB *re* 20 μPa et au-delà) [3, 7], met en évidence la possibilité de prendre en compte de manière simple le comportement non linéaire du matériau par *la modification de la résistance au passage de l'air en fonction du niveau sonore*. Deux expressions concurrentes décrivant une correction non linéaire à la loi de Darcy en fonction du débit filtrant sont avancées dans la littérature. Une première série de résultats expérimentaux [8, 9, 10, 3] concernant à fois les matériaux poreux et les tôles perforées, tend à montrer que la résistance non linéaire est un fonction linéaire du nombre de Reynolds. Une seconde série de résultats théoriques [11, 12, 13] montre en revanche que la résistance est une fonction quadratique du nombre de Reynolds, sans terme linéaire, lorsque par exemple, le matériau poreux est isotrope, et que de plus le nombre de Reynolds est petit (c'est à dire que le terme convectif de l'équation de Navier-Stokes est petit, mais non négligeable devant le terme visqueux). Nous nous sommes donc attachés à déterminer cette résistance expérimentalement.

Pour préciser le domaine d'application de cette étude, on considère une onde acoustique plane de 140 dB (*re* 20 μPa) dans un matériau poreux saturé d'air dont les longueurs caractéristiques sont de l'ordre de 10^{-4}m . Les fluctuations de pression (p') sont alors égales à 200 Pa et induisent des fluctuations de vitesse (u') dont l'ordre de grandeur est $u' \simeq p'/\rho c = 0.5 \text{ms}^{-1}$ (c est la vitesse du son dans l'air et ρ la masse volumique de l'air). Le nombre de Reynolds construit avec la longueur caractéristique visqueuse vaut alors environ 3.

1.2 Dispositif et méthode de mesure

Pour effectuer la mesure, on compare la résistance au passage de l'air de l'échantillon (chute de pression/vitesse) à une résistance étalon dont la dépendance avec le débit est connue. La

résistance Res (Nm^{-3}s) est liée à la résistivité σ par la relation : $Res = \sigma l$, où l est l'épaisseur du matériau considéré.

Les échantillons et la résistance étalon sont disposés dans un même conduit cylindrique de section circulaire (diamètre 44,5 mm), muni de prises de pression (trous de 0,5 mm dans la paroi). Le conduit est alimenté en air sous pression par l'intermédiaire d'un réservoir stabilisateur d'environ 0,5 m³. Un soin particulier est apporté à l'étanchéité du dispositif. La pression est mesurée aux bornes des résistances à l'aide de capteurs de pression différentielle EFFA GA 75 (voir annexe B).

Nous avons choisi comme étalon un matériau à pores droits de section carrée parallèles à la direction de l'écoulement. Son principal intérêt est d'avoir une résistance dépendant peu du nombre de Reynolds de l'écoulement dans les pores. Cette indépendance de la résistance au débit a été vérifiée aussi bien de façon théorique qu'expérimentale (voir annexe B).

1.3 Résultats

Nous avons mesuré la résistance non linéaire au passage de l'air de deux catégories de matériaux utilisés en acoustique ; les autres caractéristiques mesurées en régime linéaire (voir la référence [14] ainsi que l'annexe A) sont données ci-dessous. Seule la constante de piégeage Γ , impliquée dans les échanges thermiques entre le fluide et la structure poreuse, et fixant la valeur du facteur de forme thermique M' (éq. A.13), n'a pu être évaluée expérimentalement (à ce sujet, voir [15]).

Nous avons mesuré **deux matériaux poreux**, ayant les caractéristiques suivantes :

1- un échantillon de **caoutchouc aggloméré** composé de morceaux de pneus de récupération (dont la taille moyenne est de l'ordre du millimètre), d'épaisseur $l = 53,0$ mm, de porosité $\phi = 0,47$ (éq. A.6), et de tortuosité $\alpha_\infty = 1,8$ (éq. A.7). La longueur caractéristique thermique est $\Lambda' = 7,5 \cdot 10^{-4}$ m (éq. A.9). La longueur caractéristique visqueuse est $\Lambda = 1,1 \cdot 10^{-4}$ m (éq. A.8). L'équation (A.11) donne alors pour le facteur de forme visqueux $M = 6,5$. Le facteur de forme thermique M' est choisi égal à 1 (éq. A.13) ;

2- un échantillon de **mousse polyuréthane** à bulles ouvertes, d'épaisseur $l = 43,7$ mm, de porosité $\phi = 0,98$, de tortuosité $\alpha_\infty = 1,3$. La longueur caractéristique thermique est $\Lambda' = 2,4 \cdot 10^{-4}$ m. La longueur caractéristique visqueuse est $\Lambda = 0,9 \cdot 10^{-4}$ m. Le facteur de forme visqueux vaut alors $M = 3,9$ (éq. A.11). Le facteur de forme thermique M' est choisi égal à 1.

Ces valeurs de longueur caractéristiques visqueuses permettent par exemple de définir un nombre de Reynolds à l'intérieur du matériau poreux par

$$Re = \frac{2\Lambda Q}{\phi \nu S}, \quad (1.1)$$

où Q est le débit filtrant à travers le matériau, S la section du guide cylindrique dans lequel il est inséré, et $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{m}^2\text{s}^{-1}$ la viscosité cinématique de l'air. La variation de la résistance de ces deux matériaux en fonction du nombre de Reynolds dans les pores est donnée figures 1.1.a et 1.2.a.

Nous avons mesuré **deux plaques métalliques perforées** dont les caractéristiques sont :

-une tôle perforée à 3% : épaisseur $l = 10^{-3}$ m, diamètre des perforations $d = 10^{-3}$ m, taux de perforation $t_p = 0,03$;

-une tôle perforée à 15% : épaisseur $l = 10^{-3}$ m, diamètre des perforations $d = 10^{-3}$ m, taux de perforation $t_p = 0,15$;

Le nombre de Reynolds dans les perforations est défini par

$$Re = \frac{dQ}{t_p \nu S}.$$

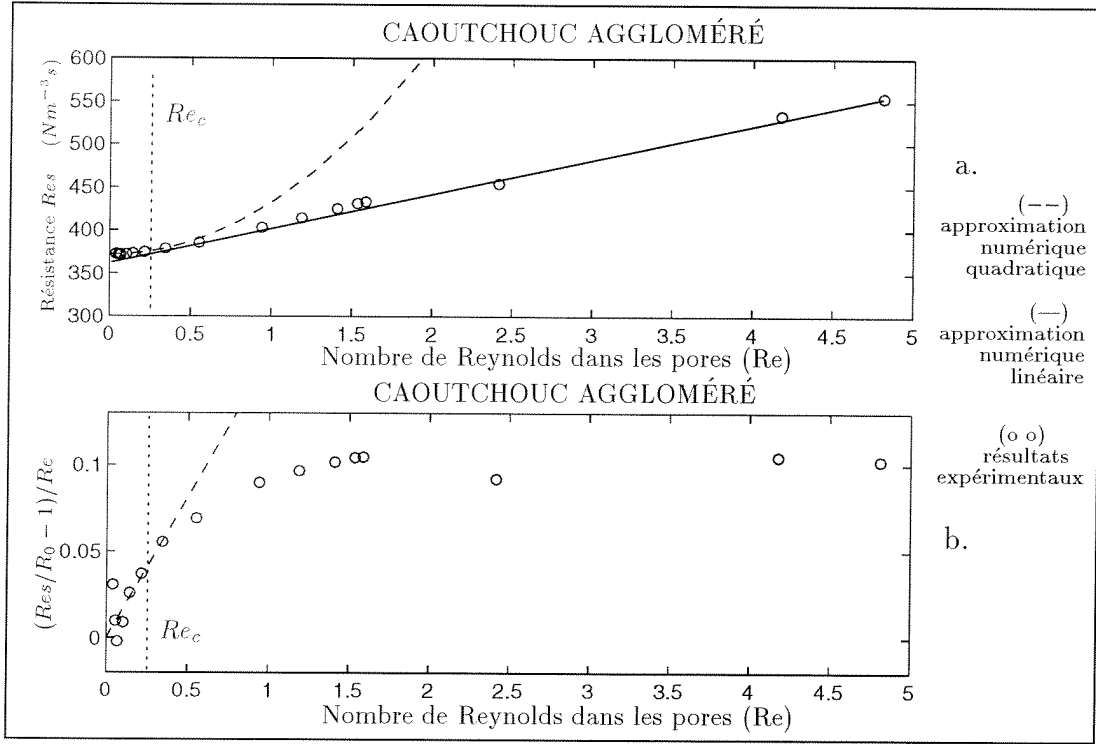


FIG. 1.1 - Pertes visqueuses: la figure a. représente la résistance à l'écoulement Res ; la figure b. représente la partie dépendant du nombre de Reynolds de la résistance Res , normalisée par la résistance estimée, à débit nul, par l'approximation quadratique sans terme linéaire (éq. 1.3)

Les courbes donnant la résistance de ces deux plaques perforées en fonction du nombre de Reynolds sont données figures 1.3.a et 1.4.a. Nos résultats expérimentaux mettent en évidence l'existence d'un *nombre de Reynolds critique*. Les figures 1.1.a, 1.2.a, 1.3.a, et 1.4.a laissent apparaître deux types de comportement de la résistance, de part et d'autre d'un nombre de Reynolds critique Re_c . Ce comportement est déterminé par une approximation numérique (représentée en pointillés sur les figures) du type $R_{th} = a_n Re^2 + b_n$ sur les n premiers points expérimentaux, où n est le nombre maximum de points pour lequel $b_{n-1} \simeq b_n$. Au-delà de ce $n^{\text{ème}}$ point (et du Reynolds critique Re_c qui lui correspond), l'approximation quadratique n'est plus valable. La variation de la résistance Res fonction du nombre de Reynolds est linéaire à partir de Re_c (figures 1.1.a, 1.2.a, 1.3.a, et 1.4.a). La droite ainsi définie coupe l'axe $Re = 0$, pour une valeur de la résistance inférieure à la résistance R_0 mesurée pour un débit quasi nul :

$$Res = (1 - \delta)R_0 + C_1 Re \quad (\text{non linéarité forte}). \quad (1.2)$$

Pour les nombres de Reynolds inférieurs au Reynolds critique, l'augmentation de résistance est liée à Re^2 sans terme du premier ordre :

$$Res = R_0 + C_2 Re^2 \quad (\text{non linéarité faible}) \quad (1.3)$$

(figures 1.1.b, 1.2.b, 1.3.b, et 1.4.b, où C_2 est le coefficient directeur de la droite en pointillés). Posons $C'_1 = \sqrt{4R_0 C_2 \delta}$; pour se raccorder, ces deux courbes et leur dérivée doivent vérifier l'équation $C_1 = C'_1$. Le choix du Reynolds critique Re_c (et du nombre de points n) est donc dans un deuxième temps affiné pour réaliser au mieux cette condition de raccordement. Les

valeurs obtenues pour ces paramètres sont consignées dans le tableau 1.

	δ	Re_c	R_0	C_1	C'_1	C_2	n
Tôle 3%	0.1455	12.24	20.69	0.4956	0.4913	0.0201	5
Tôle 15%	0.0817	14.47	5.612	0.0805	0.0796	0.0035	12
Mousse	0.1285	1.167	262.4	24.33	24.96	4.621	10
Caoutchouc	0.0133	0.2163	371.7	39.42	35.63	64.29	6

Tableau 1: Caractéristiques des pertes visqueuses dans les quatre matériaux mesurés

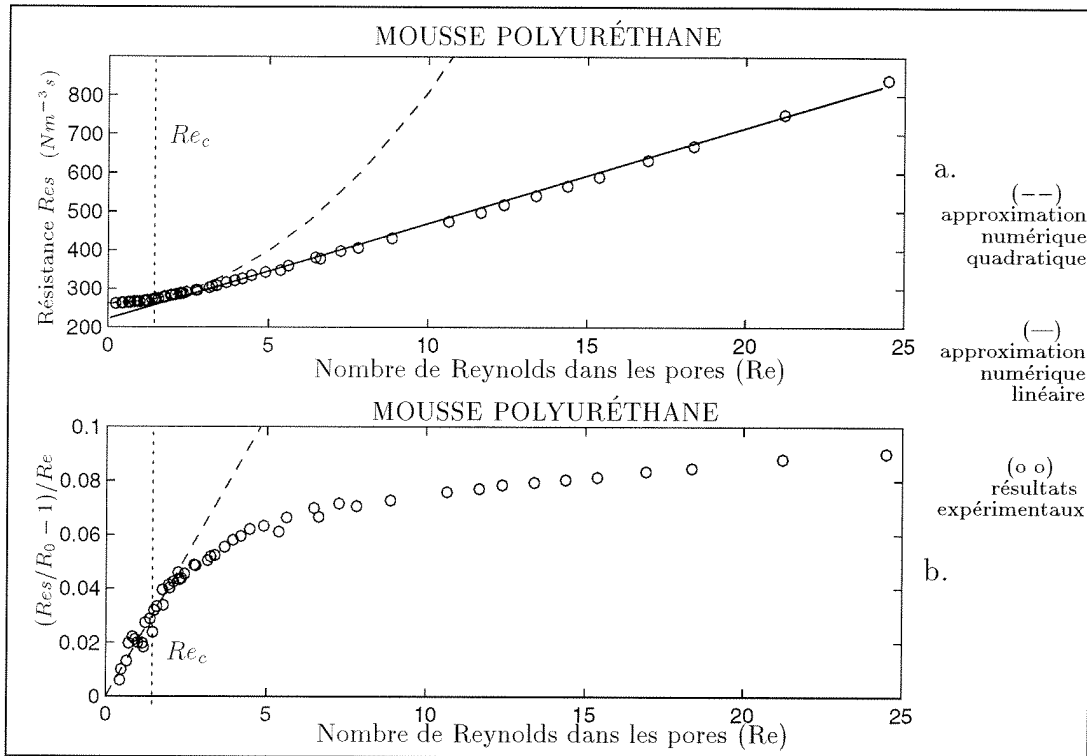


FIG. 1.2 - Pertes visqueuses: la figure a. représente la résistance à l'écoulement R_{es} ; la figure b. représente la partie dépendant du nombre de Reynolds de la résistance R_{es} , normalisée par la résistance R_{es} estimée, à débit nul, par l'approximation quadratique sans terme linéaire (ég. 1.3)

1.4 Discussion

Deux modèles sont actuellement proposés dans la littérature pour décrire l'évolution de la résistance avec le nombre de Reynolds.

- La résistance croît linéairement avec le nombre de Reynolds: loi de Forchheimer donnée par l'équation (1.2) (voir par exemple les résultats expérimentaux et les modèles semi-empiriques présentés dans les références [8, 9, 10, 3] concernant à la fois les tôles perforées et les matériaux poreux).
- La résistance croît quadratiquement (ég. 1.3) avec le nombre de Reynolds tant que celui-ci est faible, sans terme linéaire (voir [11, 12, 13] pour les modèles analytiques concernant les matériaux poreux).

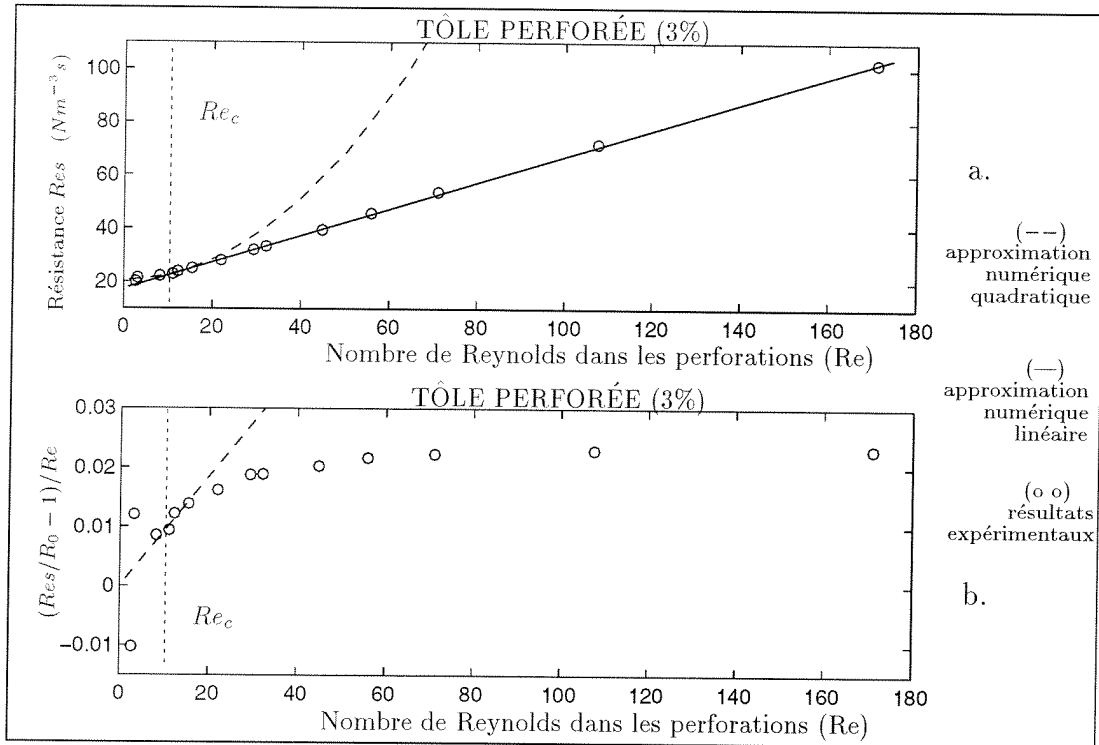


FIG. 1.3 - Pertes visqueuses: la figure a. représente la résistance à l'écoulement R_{es} ; la figure b. représente la partie dépendant du nombre de Reynolds de la résistance R_{es} , normalisée par la résistance estimée, à débit nul, par l'approximation quadratique sans terme linéaire (eq. 1.3)

Nos mesures mettent en évidence que l'évolution de la résistance des matériaux poreux comme des plaques perforées ne peut être décrite par une loi de type Forchheimer pour de faibles Reynolds. De plus, la loi linéaire qui apparaît pour des nombres de Reynolds plus importants ne tend pas vers R_0 lorsque Re tend vers 0. En revanche, nos mesures peuvent être correctement décrites, pour de faibles Reynolds, par une approximation quadratique sans terme linéaire. Il existe bien deux comportements non linéaires distincts de la résistance au passage de l'air, de part et d'autre d'un nombre de Reynolds critique. Ces résultats constituent pour les matériaux poreux, une première confirmation expérimentale de la loi de Darcy non linéaire obtenue par la théorie de l'homogénéisation des matériaux poreux [11, 12, 13]. Il ressort en outre de nos résultats expérimentaux que la résistivité non linéaire des plaques perforées présente les mêmes caractéristiques. Il convient toutefois de distinguer les deux types de matériaux étudiés. Les deux plaques perforées ne se différencient que par leur taux de perforation t_p . Les deux nombres de Reynolds critiques sont pratiquement identiques, ce qui laisse à penser que la transition entre la non linéarité faible (quadratique en Reynolds) et la non linéarité forte (linéaire en Reynolds) déterminant la valeur de Re_c , ne dépendrait pas du taux de perforation. Les autres paramètres δ , C_1 et C_2 sont en revanche d'autant plus grands que t est faible; Plus précisément, il semblerait que la transition entre les deux comportements se produise pour une vitesse critique dans les perforations qui, pour les échantillons mesurés ici, n'est pas significativement affectée par la modification de l'interaction entre les trous.

Les deux matériaux poreux ne se différencient que par leur porosité ϕ et leur tortuosité α_∞ . Les longueurs caractéristiques Λ et résistivités σ sont en effet très similaires (la longueur caractéristique thermique Λ' n'est pas prise en compte dans les phénomènes visqueux considérés

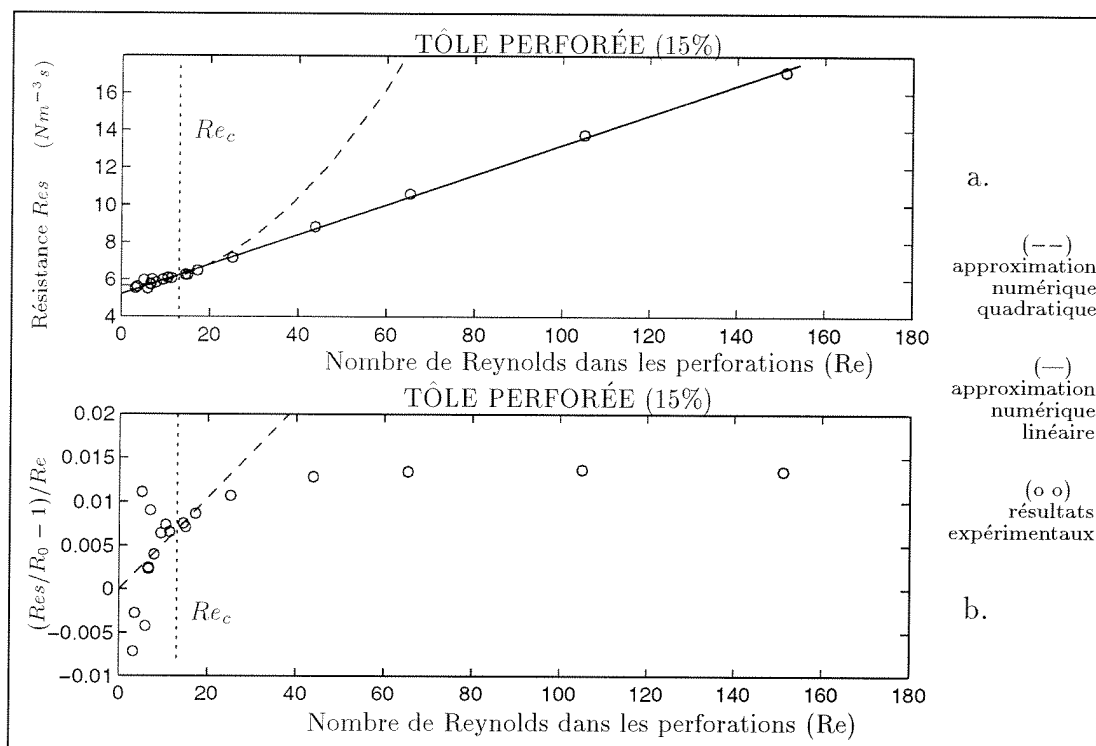


FIG. 1.4 - Pertes visqueuses: la figure a. représente la résistance à l'écoulement R_{es} ; la figure b. représente la partie dépendant du nombre de Reynolds de la résistance R_{es} , normalisée par la résistance estimée, à débit nul, par l'approximation quadratique sans terme linéaire (éq. 1.3)

ici); rappelons que plus le facteur de forme M est grand, plus la géométrie des pores est différente de celle d'un matériau à pores cylindriques droits [16, 17] (pour lequel les pertes visqueuses non linéaires sont négligeables aux nombres de Reynolds considérés ici). Il est alors aisé de comprendre que, à Λ fixé, le nombre de Reynolds critique Re_c est d'autant plus faible que le paramètre M , et donc les constriction de l'écoulement dans les pores, est grand.

Ces résultats montrent qu'il est possible de définir un paramètre géométrique de longueur, en rapport avec les effets non linéaires. Soit v_c la vitesse critique dans les pores lorsque le nombre de Reynolds est égal à sa valeur critique Re_c (transition entre la non linéarité faible et la non linéarité forte). Par définition, nous savons que $v_c = (\nu Re_c)/(2\Lambda)$. Le paramètre intrinsèque de longueur L est alors défini en posant par exemple $(v_c L)/\nu = 1$, soit aussi :

$$L = \frac{\nu}{v_c} = \frac{2\Lambda}{Re_c}. \quad (1.4)$$

La transition a ainsi lieu lorsque le nombre de Reynolds construit avec la longueur L est égal à 1. Il vient pour la mousse $L \simeq 1,7\Lambda$, et pour le caoutchouc aggloméré $L \simeq 9,2\Lambda$. Nous remarquons que la valeur de L est, pour les deux matériaux poreux, supérieure à Λ , et qu'elle plus grande pour le caoutchouc aggloméré que pour la mousse polyuréthane, tout comme la tortuosité, et le facteur de forme.

Une autre définition du nombre de Reynolds aurait pu être choisie, ce qui aurait modifié les valeurs de Re_c ; en revanche, la longueur L construite ici est indépendante de la définition choisie dans l'équation (1.1), ainsi que des valeurs (mesurées par méthode ultrasonore) de la longueur caractéristique visqueuse Λ , et de la tortuosité α_∞ . Seule une erreur sur la valeur de la résistance étalon, ou dans l'évaluation de la porosité ϕ de l'échantillon, serait susceptible

d'affecter sa valeur. Il nous paraît important de s'assurer, dans un avenir proche, du caractère purement géométrique du paramètre L que nous avons introduit, par exemple en effectuant les mêmes mesures dans un fluide ayant des caractéristiques différentes de celles de l'air.

1.5 Conclusion

À faible nombre de Reynolds (non linéarité faible), l'évolution de la résistance semble être quadratique en Reynolds. La transition entre la loi quadratique et la loi linéaire (non linéarité forte) se produit dans les matériaux étudiés ici pour des valeurs du nombre de Reynolds critique Re_c plus faibles que celles obtenues expérimentalement et numériquement, par Rasoloarijaona et Auriault [12], dans un matériau modèle de structure périodique. De ce point de vue, les deux matériaux poreux et les deux plaques perforées se comportent de façon identique.

Nous avons déterminé expérimentalement la résistance de deux catégories de matériaux fréquemment utilisés en acoustique (de structure non périodique, désordonnée mais statistiquement homogène), et mis en évidence l'existence d'un nombre de Reynolds critique Re_c , marquant la transition entre une non linéarité faible et une non linéarité forte. Les deux lois polynomiales obtenues de part et d'autre de Re_c , confirment des résultats expérimentaux connus [9, 8, 10, 3] pour la loi linéaire ($Re > Re_c$) et corroborent expérimentalement pour la première fois, une série de résultats théoriques [11, 12, 13] pour la loi quadratique ($Re < Re_c$). Enfin, l'existence d'un nombre de Reynolds critique nous a suggéré de proposer une longueur intrinsèque (éq. 1.4), associée à la transition entre les deux types de non linéarité, dont la valeur ne devrait dépendre que de la géométrie microscopique de la structure poreuse.

La connaissance détaillée du comportement non linéaire des pertes visqueuses en fonction du nombre de Reynolds sera d'une grande utilité pour la modélisation du comportement acoustique non linéaire des deux matériaux poreux, abordée dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Matériau poreux : étude des coefficients de réflexion et de transmission acoustiques en fonction du niveau sonore

2.1 Introduction

La compréhension des phénomènes physiques impliqués dans le comportement des matériaux acoustiques soumis à de forts niveaux sonores reste à l'heure actuelle tributaire d'une étude expérimentale approfondie. Après avoir présenté un dispositif expérimental spécialement conçu pour mesurer les coefficients complexes de réflexion et de transmission acoustiques d'un matériau, en fonction de la fréquence et du niveau (c'est à dire du module de la vitesse acoustique dans l'échantillon), nous présentons les résultats obtenus. Le travail exposé dans ce chapitre consiste à étudier avec ce dispositif original, les moyens théoriques actuels, et cinq des six paramètres de la structure poreuse mesurés de façon indépendante, dans quelle mesure l'approche semi-empirique adoptée dans les références [3, 5, 6, 4] permet de décrire les phénomènes observés expérimentalement.

2.2 Principe de mesure

Le dispositif expérimental, l'étalonnage, l'acquisition des données, ainsi qu'une validation par la mesure d'une plaque perforée, sont décrits de façon détaillée en annexe C. Le matériau à tester est inséré dans un tube dans lequel nous pouvons créer des ondes acoustiques planes (entre 50 Hz et 800 Hz) grâce à une source électrodynamique, jusqu'à des niveaux de l'ordre de 150 dB (*re* 20 μ Pa) à l'interface amont de l'échantillon. La terminaison est anechoïque. Six microphones (trois en amont et trois en aval de l'échantillon) mesurent la pression acoustique en amplitude et en phase à l'intérieur des tubes.

Un calcul simple (voir [18], chapitre 11) permet d'évaluer la longueur x_c nécessaire à la formation d'une onde de choc dans un tube. Cette longueur est définie par :

$$x_c \simeq \frac{2 c \gamma P_0}{(\gamma + 1) \left| \partial_t p_1(x, t) \right|_{max}}, \quad (2.1)$$

où P_0 est la pression atmosphérique, $\gamma = 1,4$ le rapport des chaleurs spécifiques de l'air, c

la célérité du son, $p_1(x, t)$ est la pression acoustique. Pour une onde sinusoïdale progressive, $|\partial_t p_1(x, t)|_{max} = \omega p_1^+$, où p_1^+ est l'amplitude de la pression acoustique, et ω la pulsation. À 150 dB et 737 Hz, il vient $x_c \simeq 14$ m.

La longueur du dispositif expérimental où l'onde progressive plane présente un fort niveau (environ 3 m entre la source et l'échantillon) est nettement plus petite que x_c ce qui évite la formation du front d'onde de choc, même dans les conditions défavorables de mesure choisies ci-dessus (fort niveau et fréquence élevée). L'utilisation d'une terminaison anéchoïque permet d'obtenir un taux d'onde stationnaire très faible, et limite ainsi les effets cumulatifs non linéaires. Pour ces deux raisons, la propagation des ondes planes hors des échantillons sera considérée comme relevant de l'acoustique linéaire.

Le formalisme utilisé (voir par exemple [18, 19]) est celui des ondes incidentes et réfléchies dans chacun des tubes. La pression p_1 est décomposée en une somme de deux termes tels que

$$p(x_1) = p_1^+ (e^{-jk_1 x_1} + R_1 e^{jk_1 x_1}). \quad (2.2)$$

où $R_1 = \frac{p_1^-}{p_1^+}$ est le coefficient de réflexion en $x_1 = 0$, p_1^- et p_1^+ sont les amplitudes des ondes incidentes et réfléchies, et k_1 est la constante de propagation (pour un fluide viscothermique) dans le tube, donnée par :

$$k_1 = \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{1}{S_h} \frac{(1-j)}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{Pr}} \right) \right), \quad (2.3)$$

où Pr est le nombre de Prandtl, $S_h = a\sqrt{\omega/\nu} \gg 1$, ν la viscosité cinématique de l'air et a le rayon du tube.

La vitesse acoustique dans le tube est donnée par :

$$v(x_1) = \frac{p_1^+}{Z_c} (e^{-jk_1 x_1} - R_1 e^{jk_1 x_1}), \quad (2.4)$$

où $Z_c = \rho c$ est l'impédance caractéristique de l'air dans l'expression de laquelle on néglige les effets viscothermiques. Nous pouvons relier les ondes acoustiques en amont du matériau (indice 1) aux ondes acoustiques en aval du matériau (indice 2) par la matrice de diffusion :

$$\begin{pmatrix} p_2^+ \\ p_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^+ & R^- \\ R^+ & T^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^+ \\ p_2^- \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Les éléments de cette matrice sont par définition des coefficients de réflexion (R^+ et R^-) et de transmission (T^+ et T^-) dans chacun des sens de propagation, quand le matériau est chargé par une terminaison anéchoïque. En supposant l'échantillon de matériau symétrique, ($R = R^+ = R^-$), et réciproque, ($T = T^+ = T^-$), il ne reste que deux grandeurs complexes à déterminer. Une mesure avec deux microphones en amont et deux microphones en aval de l'échantillon est alors suffisante.

Normalisons tout d'abord la relation (2.5) par p_1^+ :

$$\begin{pmatrix} T_{12} \\ R_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^+ & R^- \\ R^+ & T^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{T_{12}}{R_2} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

où :

$$R_1 = \frac{p_1^-}{p_1^+} = \frac{H x_1^2 x_1^1 e^{-jk_1 x_1^1} - e^{-jk_1 x_1^2}}{e^{jk_1 x_1^2} - H x_1^2 x_1^1 e^{jk_1 x_1^1}}, \quad (2.7)$$

$$R_2 = \frac{p_2^+}{p_2^-} = \frac{H x_2^2 x_2^1 e^{jk_1 x_2^1} - e^{jk_1 x_2^2}}{e^{-jk_1 x_2^2} - H x_2^2 x_2^1 e^{-jk_1 x_2^1}}, \quad (2.8)$$

$$T_{12} = \frac{p_2^\dagger}{p_1^\dagger} = H x_2^1 x_1^1 \left(\frac{e^{-jk_1 x_1^1} + R_1 e^{jk_1 x_1^1}}{e^{-jk_1 x_2^1} + R_2 e^{jk_1 x_2^1}} \right). \quad (2.9)$$

Les trois quantités R_1 , R_2 et T_{12} sont déduites de la mesure des trois fonctions de transfert $H x_1^2 x_1^1$, $H x_2^2 x_2^1$, et $H x_1^1 x_2^1$ entre deux capteurs situés en amont (en x_1^1 et x_2^1) et deux capteurs situés en aval (en x_2^2 et x_1^2). Les coefficients anéchoïques de transmission T et de réflexion R , qui décrivent le comportement du matériau sont solution de l'équation (2.6), soit :

$$T = \frac{T_{12}(1 - R_1/R_2)}{1 - T_{12}^2/R_2^2}, \quad \text{et} \quad R = \frac{R_1 - T_{12}^2/R_2}{1 - T_{12}^2/R_2^2}. \quad (2.10)$$

À chaque mesure, la vitesse acoustique dans l'air, à l'interface amont de l'échantillon (située en $x = 0$) est donnée par :

$$V = v(x = 0) = \frac{(1 - R_1)}{(e^{-jk_1 x_1} R_1 + e^{jk_1 x_1})} \frac{p_1(x_1)}{\rho c},$$

et le nombre Reynolds acoustique dans l'échantillon, derrière l'interface amont du matériau poreux est défini (de façon analogue à l'équation 1.1) comme suit :

$$Re = \frac{2\Lambda |V|}{\phi \nu}. \quad (2.11)$$

Pour minimiser les erreurs, on doit choisir des fréquences telles qu'à une erreur de mesure de la fonction de transfert dH_{ij} , correspond une erreur minimale sur le coefficient de réflexion dR . En dérivant $R_{1,2}$ (indice 1 ou 2 pour amont ou aval) par rapport à H_{ij} , on obtient :

$$\frac{dR_{1,2}}{dH_{ij}} = \frac{(e^{-jk_1 x_j} + R_{1,2} e^{jk_1 x_j})^2}{2j \sin k_1 (x_j - x_i)}. \quad (2.12)$$

Quelle que soit la valeur du coefficient de réflexion, l'expression précédente montre que l'erreur commise sur R est grande lorsque :

$$\sin(k_1 (x_j - x_i)) = 0,$$

soit aussi

$$f = nc / (2\Delta x_{ij}) \quad (n \text{ entier}). \quad (2.13)$$

R est le moins sensible aux erreurs de mesure de la fonction de transfert lorsque les fréquences de mesure sont telles que :

$$\Delta x_{ij} = (2n + 1)\lambda/4. \quad (2.14)$$

soit,

$$f = (2n + 1)c / (4\Delta x_{ij}). \quad (2.15)$$

Pour résoudre les problèmes d'incertitude de mesure liés à l'écartement des microphones, nous avons utilisé trois microphones de part et d'autre du matériau. Les mesures sont alors *surdéterminées* et les coefficients R et T sont obtenus par la méthode des moindres carrés. La surdétermination est connue pour améliorer la qualité des mesures (voir par exemple [20] pour une revue exhaustive des différentes méthodes de mesure d'impédance) et a déjà été utilisée pour mesurer la réponse non linéaire des matériaux poreux avec un espacement entre microphones régulier [5]. Cependant, pour en tirer réellement profit, il faut veiller à ce que, à aucune des fréquences considérées, les distances inter-microphoniques ne soient simultanément proches d'un multiple de $\lambda/2$ (eq. 2.13) ; cette condition a été réalisée en choisissant des distances entre microphones dont les rapports sont par construction le plus proche possible du

nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. La relation (2.12) écrite pour l'amont (R_1) et pour l'aval du matériau (R_2) montre que l'erreur de mesure sera le plus indépendante possible du matériau mesuré si le taux d'onde stationnaire dans les tubes est faible ($R_{1,2} \approx 0$). L'utilisation d'une terminaison la plus anéchoïque possible, fabriquée par nos soins, comporte l'inconvénient de rendre la création de forts niveaux acoustiques plus difficile pour la source que dans le cas d'une terminaison fermée ; elle permet en revanche de minimiser les erreurs de mesure, et de limiter l'apparition d'harmoniques supérieurs [21] (dont l'amplitude reste inférieure d'au moins 20 dB à l'amplitude de la fréquence fondamentale d'excitation).

2.3 Résultats

Les caractéristiques des deux matériaux poreux mesurés ici sont identiques à celles données dans le chapitre 1 (section 1.3), à l'exception de l'épaisseur du caoutchouc aggloméré qui vaut $l = 27,7$ mm (l'épaisseur de la mousse polyuréthane reste inchangée : $l = 43,7$ mm). La caractérisation d'un matériau représente l'acquisition d'environ 250 points de mesure. La moitié (environ) des fréquences de mesure sont représentées pour le caoutchouc aggloméré (figures 2.1 et 2.2) et pour la mousse polyuréthane (figures 2.3 et 2.4), en termes de coefficient de transmission T et de réflexion R .

Le module $|T|$ indique l'atténuation subie par l'onde acoustique incidente lors de son passage à travers le matériau. $|T| = 1$ caractérise un matériau transparent du point de vue acoustique. On constate donc que d'une façon générale, l'augmentation de la fréquence et du nombre de Reynolds diminue la transparence. Dans le même temps, $|R|$ augmente, une partie de l'énergie manquante dans l'onde transmise étant dissipée dans le matériau, l'autre se retrouvant dans l'onde réfléchie. Dans le cas d'une interface entre deux milieux, le signe de $phase(R)$ donne la nature de la réflexion : le matériau se comporte de façon massique lorsqu'elle est positive et élastique lorsqu'elle est négative. Ici, La longueur finie des échantillons modifie le signe de $phase(R)$. Il est à noter que les quantités $|R|$ et $phase(T)$ ont une variation moins prononcée en fonction du nombre de Reynolds que $|T|$ et $phase(R)$.

2.4 Modélisation

Une revue de la littérature nous éclaire sur les points suivants : pour une onde acoustique plane de fort niveau ($\simeq 120$ dB *re* $20\mu\text{Pa}$ et au-delà) incidente sur un poreux, la réponse est essentiellement sinusoïdale [7] ; les échanges thermiques entre le fluide et la structure ne seraient pas significativement modifiés par le niveau sonore [5]. Il est bien établi que le surcroît d'atténuation observé provient du terme convectif d'inertie de l'équation de Navier-Stokes (cf. par exemple [12]). L'apparition de phénomènes non linéaires dans les matériaux acoustiques se manifeste donc par un changement de la forme du champ de vitesse dans les pores, correspondant à une dissipation accrue, ainsi qu'à une modification des effets inertiels ; pourtant, jusqu'à présent seuls les effets visqueux ont pu être mis en évidence expérimentalement.

Les travaux les plus récents [3, 5, 6, 4], s'inscrivent dans ce contexte, selon une démarche que nous décrivons succinctement : le modèle linéaire utilisé (voir [3] ou bien [22]) est modifié et intègre une densité effective dépendant du niveau acoustique, déterminée par approximation numérique de mesures en basse fréquence (30 Hz) et en écoulement statique [5, 6].

Ces travaux suscitent les deux remarques suivantes.

- Modifier la valeur de la résistance au passage de l'air d'un matériau poreux est indispensable pour espérer décrire son comportement acoustique non linéaire (ce sujet a fait l'objet du chapitre précédent) ; par contre, les effets inertiels résultants de la modification du champ microscopique

dans les pores ne peuvent être mis en évidence, de part les erreurs de mesures, et le fait que les paramètres de la structure poreuse ne sont pas mesurés par des procédés indépendants [5].

- La compréhension des phénomènes de propagation et de dissipation viscothermiques ainsi que la formulation de la densité effective et de la compressibilité effective du fluide équivalent au matériau poreux en régime linéaire ont substantiellement évolué depuis les publications citées ci-dessus. Un état de l'art est proposé en annexe A (voir essentiellement [2] pour les effets visqueux, [15] pour une formulation des effets thermiques analogue au problème visqueux de la référence [2], et [16, 17] pour une discussion sur la valeur du facteur de forme visqueux en fonction de la géométrie poreuse microscopique); Six paramètres pertinents ont été identifiés pour décrire la structure poreuse comme un fluide équivalent (la résistivité σ , la constante de piégeage Γ , la porosité ϕ , la tortuosité α_∞ et les longueurs caractéristiques visqueuse Λ et thermique Λ'); il est à noter qu'il existe désormais des moyens expérimentaux de déterminer les trois paramètres haute fréquence Λ , Λ' , et α_∞ , notamment par méthode ultrasonore [14], ainsi que la constante de piégeage [23], par mesure acoustique aux basses fréquences.

Pour calculer les deux quantités complexes T et R afin de les comparer aux résultats expérimentaux, nous utiliserons le modèle linéaire présenté en annexe A, et notamment les équations (A.3) et (A.4). Parmi les six paramètres cités plus haut, seul Γ n'a pas été mesuré par nos soins. Nous ne connaissons pas sa valeur et posons $M' = 1$ (eq. A.13), par analogie avec les échanges thermiques dans un matériau à pores cylindriques droits. Les cinq paramètres restants sont mesurés indépendamment du dispositif présenté dans ce chapitre; par conséquent, et contrairement aux travaux cités plus haut, aucun d'entre eux n'est considéré comme ajustable.

Notre objectif est, d'étudier dans quelle mesure l'approche adoptée dans les références [3, 5, 6, 4] permet de décrire les comportements observés expérimentalement. La méthode sera donc la suivante: la pression et la vitesse acoustiques dans le matériau s'écrivent d'après les équations (2.2) et (2.4), dans lesquelles les quantités caractéristiques de l'air k_1 et Z_c sont remplacées par celles du fluide équivalent k_{eff} et $Z_{c,eff}$, décrivant l'ensemble structure rigide-fluide dans les pores. On montre alors (en écrivant la continuité de pressions et des vitesses aux interfaces) que pour un échantillon de longueur l , les coefficients de transmission et de réflexion anéchoïques prennent la forme suivante:

$$T_{th} = \frac{1}{\cos(k_{eff}l) + j \frac{A^2+1}{2A} \sin(k_{eff}l)}, \quad (2.16)$$

et

$$R_{th} = \frac{j \frac{A^2-1}{2A} \sin(k_{eff}l)}{\cos(k_{eff}l) + j \frac{A^2+1}{2A} \sin(k_{eff}l)}, \quad (2.17)$$

avec $A = \frac{Z_{c,eff}}{\phi Z_c}$. Les équations (2.16) et (2.17) donnent la dépendance fréquentielle de la réponse des matériaux (modèle linéaire).

Le modèle linéaire ci-dessus (voir aussi l'annexe A) est modifié de la façon suivante: parmi les cinq paramètres mesurés de la géométrie poreuse (σ , ϕ , α_∞ , Λ , Λ'), la résistivité σ est choisie comme dépendant du niveau; La fonction $\sigma = \sigma(Re)$, déterminant la résistivité de la totalité de l'échantillon, est donnée par les approximations numériques issues des résultats expérimentaux du chapitre 1 (voir les figures 1.1 et 1.2, et les équations (1.2) et (1.3)); le nombre de Reynolds Re est calculé à partir du module de la vitesse dans l'échantillon, à l'interface amont (eq. 2.11). La comparaison entre le modèle (eq. 2.16 et 2.17) et les mesures est présentée sur les figures 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4. Les fréquences sont choisies parmi l'ensemble de la gamme explorée (50 - 800 Hz).

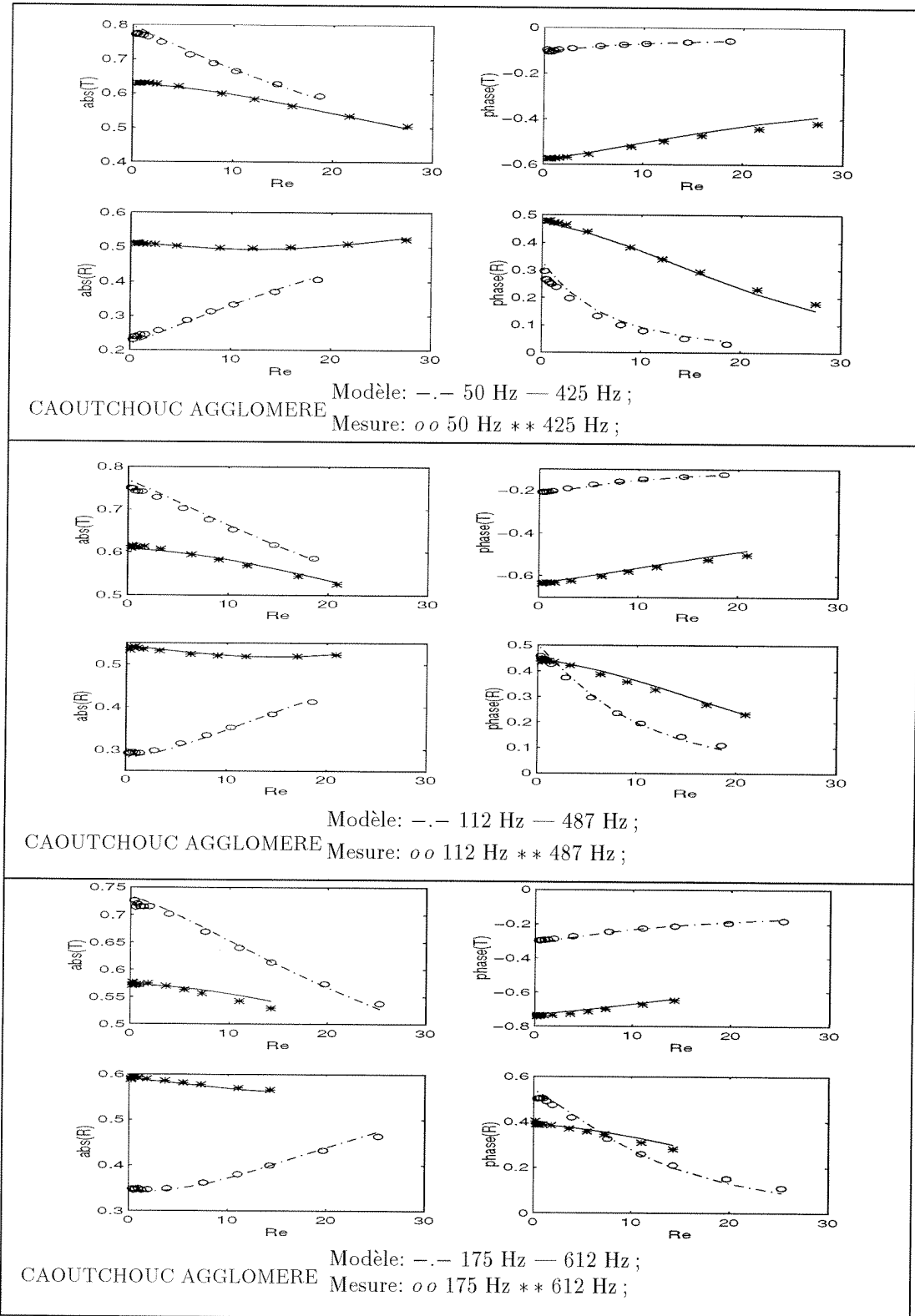


FIG. 2.1 - Comparaison de mesures de T et R , avec le modèle (eq. 2.16 et 2.17), à fréquence fixée, en fonction du nombre de Reynolds acoustique.

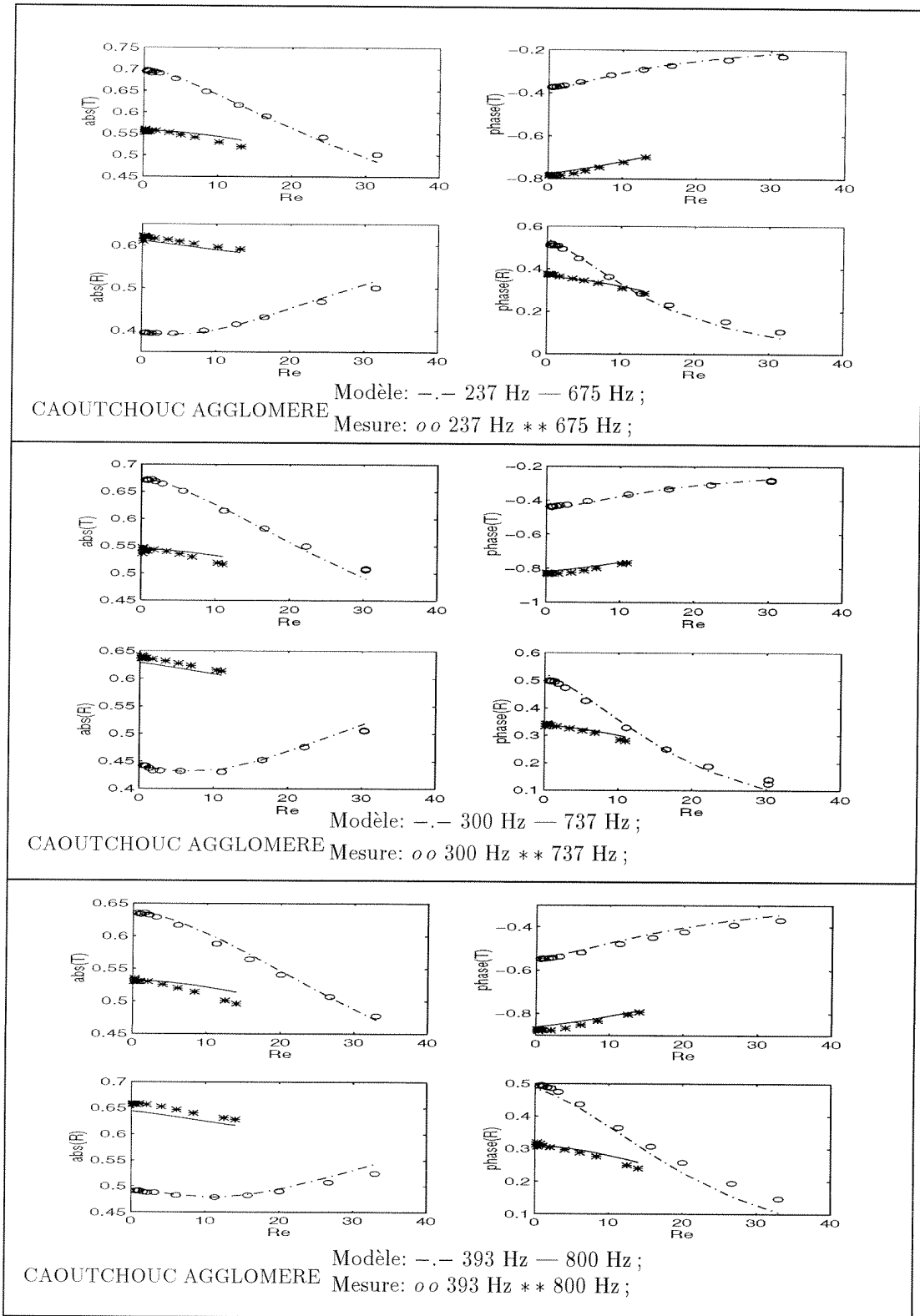


FIG. 2.2 - Comparaison de mesures de T et R , avec le modèle (eq. 2.16 et 2.17), à fréquence fixée, en fonction du nombre de Reynolds acoustique.

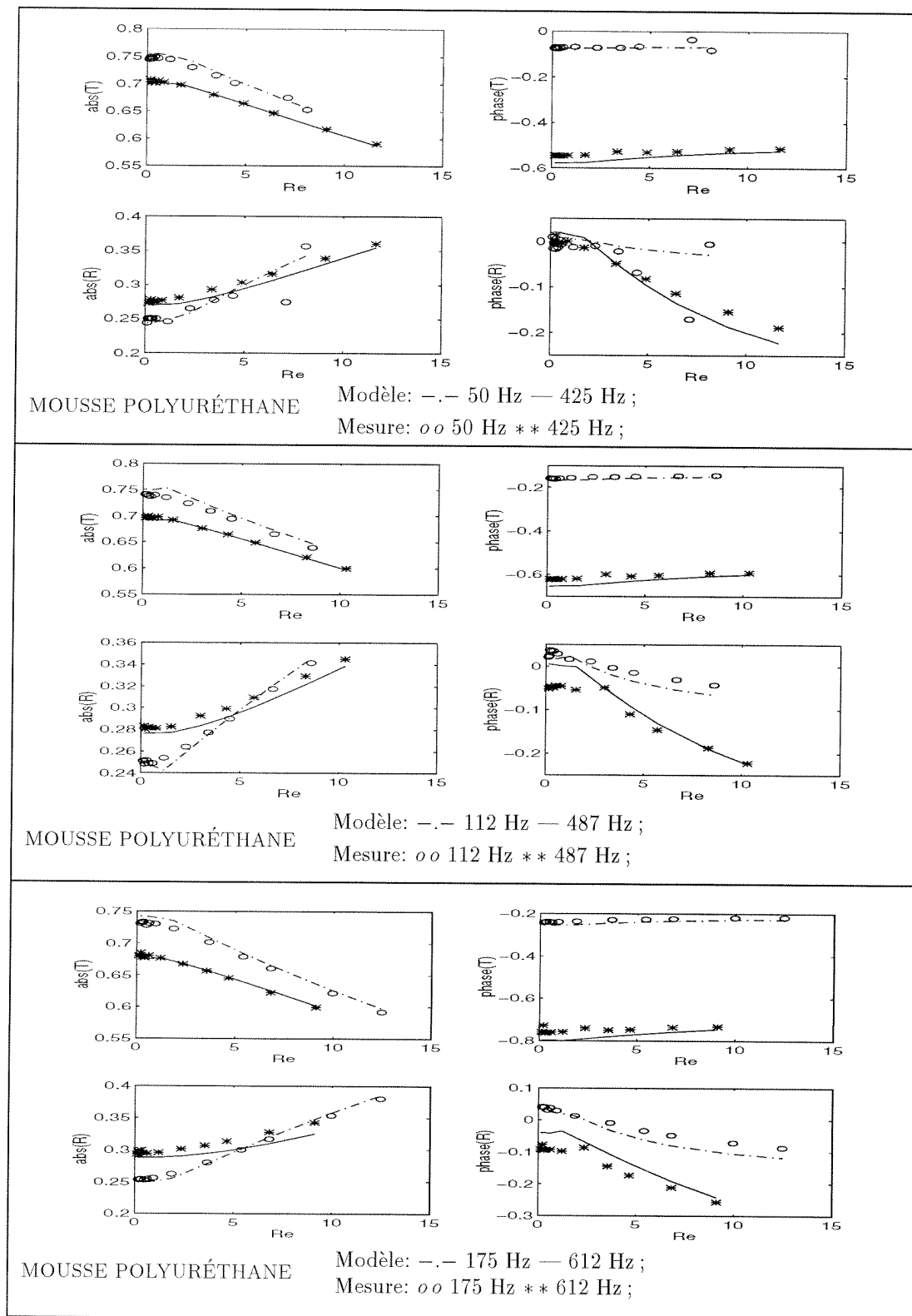


FIG. 2.3 - Comparaison de mesures de T et R , avec le modèle (eq. 2.16 et 2.17), à fréquence fixée, en fonction du nombre de Reynolds acoustique.

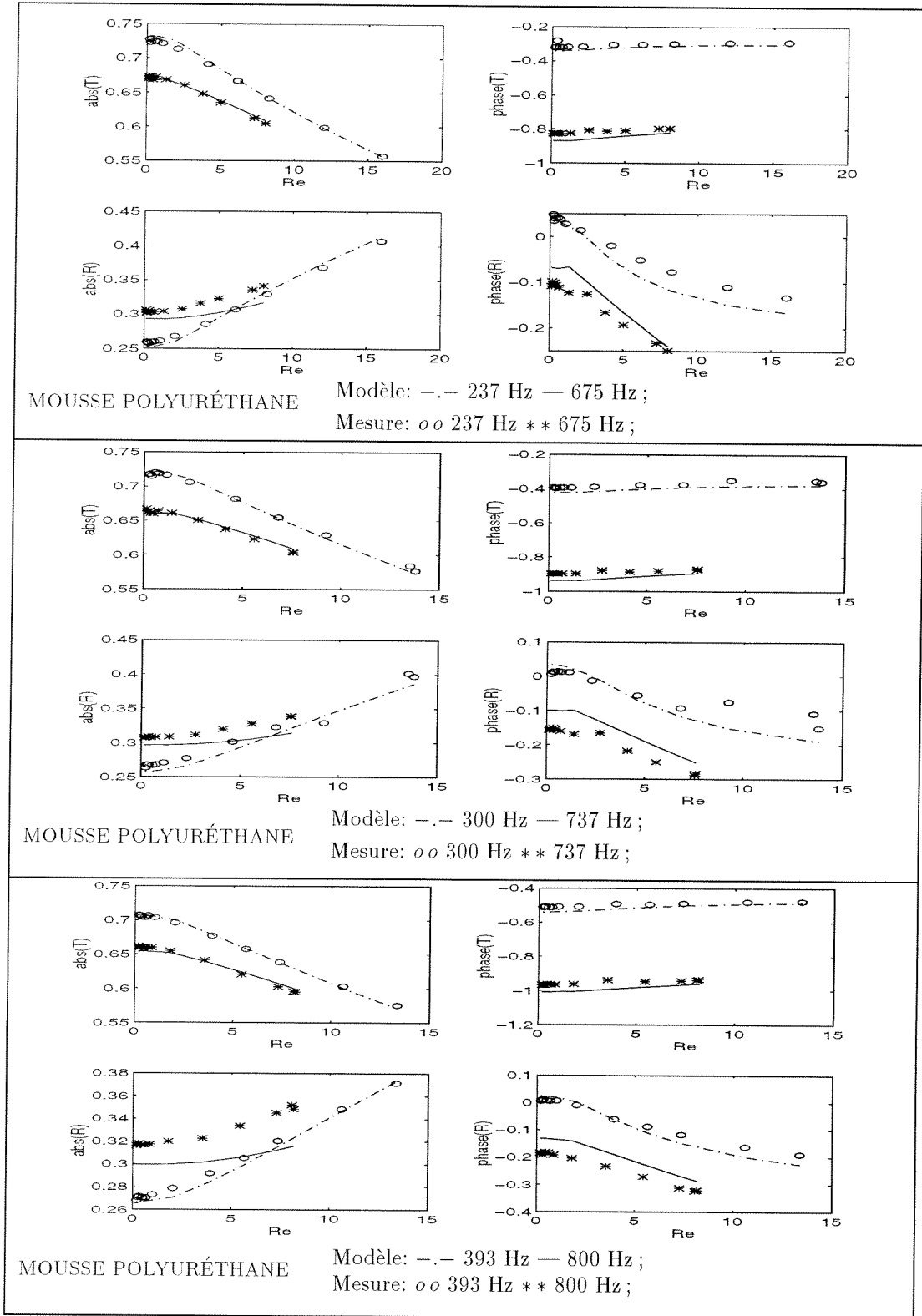


FIG. 2.4- Comparaison de mesures de T et R , avec le modèle (eq. 2.16 et 2.17), à fréquence fixée, en fonction du nombre de Reynolds acoustique.

2.5 Discussion

Faisons quelques remarques préliminaires à propos des figures 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4 ; de part les caractéristiques de la source utilisée, et la charge acoustique constituée par le dispositif expérimental, le niveau acoustique qu'il est possible d'obtenir à l'interface amont de l'échantillon diffère selon la fréquence choisie. Les niveaux acoustiques maximums atteints pour chacun des matériaux sont de l'ordre de 150 dB *re* 20 μ Pa (pour les fréquences entre 300 et 400 Hz). Tant la transmission que la réflexion mesurées dépendent du nombre de Reynolds ; on constate expérimentalement que cette dépendance a tendance à s'estomper à mesure que la fréquence augmente.

En ce qui concerne les prédictions, le modèle reproduit de façon satisfaisante les tendances expérimentales, que ce soit en fonction de la fréquence ou du nombre de Reynolds. Il convient toutefois de noter que, même à 800 Hz, la longueur d'onde dans l'air $\lambda = \frac{c}{f} = 0,428$ m est environ 10 fois supérieure à l'épaisseur de l'échantillon le plus épais ; nous choisissons de ne pas utiliser processus itératif déterminant le profil réel de la vitesse dans le matériau, et donc le profil de résistivité correspondant (voir [6] pour une telle méthode dans le cas d'une onde stationnaire dans le matériau).

On estime l'épaisseur de couche limite Dans un pore cylindrique droit par la longueur suivante : $e_\nu = \sqrt{2\nu/\omega}$. En posant $e_\nu = \Lambda$, on peut déduire pour chaque matériau une fréquence limite $f_l = \nu/(\pi\Lambda^2)$ indiquant la zone de transition entre un régime d'écoulement de Poiseuille (qualifié de basse fréquence) et un régime inertiel dans les pores (haute fréquence). Il vient alors $f_l = 394$ Hz pour le caoutchouc aggloméré et $f_l = 589$ Hz pour la mousse polyuréthane.

Le comportement fréquentiel asymptotique du modèle décrit en annexe A est déterminé par : la porosité ϕ et la résistivité σ aux basses fréquences, la tortuosité α_∞ et les longueurs caractéristiques Λ et Λ' aux hautes fréquences ; Le fait qu'aux basses fréquences le comportement des deux matériaux soit fidèlement reproduit par le modèle indique donc en premier lieu que la porosité et la résistivité ont été correctement déterminées (validant par là les résultats du premier chapitre) ; mais par ailleurs, le comportement haute fréquence est correctement décrit en fonction du nombre de Reynolds ; ceci est particulièrement net pour le caoutchouc aggloméré (figures 2.1 et 2.2), et laisse à penser que les écarts observés aux hautes fréquences pour la mousse polyuréthane (figures 2.3 et 2.4) sont tout à fait imputables à une incertitude sur la valeur mesurée des paramètres haute fréquence (Λ , Λ' , α_∞). Il est à noter que cette erreur influe sur la valeur du nombre de Reynolds, qui a été défini à l'aide de la longueur caractéristique visqueuse Λ (eq. 2.11).

Même si la méthode de modélisation choisie semble adaptée aux conditions expérimentales, une autre solution se présentait a priori. En effet, la résistivité est parfois définie comme suit :

$$\sigma = \nu \rho / k_0,$$

où k_0 est la perméabilité de la structure poreuse, qui ne dépend que de la géométrie de pores. Si l'on émet l'hypothèse que le surcroît d'atténuation visqueuse non tourbillonnaire, qui constitue le phénomène non linéaire dominant dans les poreux, peut être traduit en terme de viscosité équivalente (c'est-à-dire une augmentation de viscosité), tous les paramètres de la géométrie poreuse (k_0 , Λ , Λ' , α_∞ , et ϕ) restant égaux par ailleurs, alors le facteur de forme M (eq. A.11) devrait être gardé constant dans le modèle, et σ modifié comme précédemment, sauf dans la définition de M . Nous avons constaté au cours de ce travail, que cette approche produit des résultats dont la variation en fonction du nombre de Reynolds diffère très nettement, de celle des résultats expérimentaux et ne peut être retenue.

2.6 Conclusion

La modélisation des coefficients de réflexion et de transmission proposée dans ce chapitre pour deux matériaux poreux (figures 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4) reproduit de façon tout à fait satisfaisante le comportement des données expérimentales. Cette modélisation a été obtenue en rendant un des cinq paramètres mesurés de la structure poreuse (la résistivité) dépendant du nombre de Reynolds dans les pores, à l'aide d'un autre dispositif expérimental présenté dans le premier chapitre. Cette méthode a été proposée [7, 5] dans la littérature. L'objectif de notre travail était d'éprouver sa robustesse, ceci pour plusieurs raisons.

- La compréhension des interactions fluide-structure a considérablement progressé ces dernières années [2, 15], ce qui a notamment permis de définir six paramètres (la résistivité σ , la constante de piégeage Γ , la porosité ϕ , la tortuosité α_∞ et les longueurs caractéristiques visqueuse Λ et thermique Λ'), représentatifs des échanges thermovisqueux entre une structure poreuse immobile et un fluide saturant.
- Contrairement aux travaux présentés dans les références [5] et [3], l'état de l'art nous a permis de déterminer cinq de ces paramètres par des procédés indépendants du dispositif expérimental présenté (seule la constante de piégeage Γ impliquée dans les échanges thermiques a été choisie par analogie à un matériau à pores cylindriques droits).
- Un dispositif expérimental différent de ceux précédemment utilisés pour ce type de mesures a été conçu ; Il présente la particularité, de part sa terminaison anéchoïque et le domaine fréquentiel de mesure choisi, de pouvoir s'affranchir de la détermination de l'amplitude de la vitesse à l'intérieur de l'échantillon.

Non seulement nos résultats renforcent l'hypothèse selon laquelle l'augmentation de la résistivité est le phénomène prédominant permettant de tenir compte de la réaction non linéaire du matériau en fonction du niveau sonore, mais aucun autre phénomène majeur n'a pu être identifié, même pour des fréquences (800 Hz) où un régime inertiel d'écoulement est dominant dans les pores des matériaux mesurés. Malgré le fait que les deux échantillons mesurés présentent des porosités et des tortuosités très différentes, les mesures, ainsi que les prédictions, n'ont pas mis en évidence la nécessité d'opérer une correction prenant en compte d'éventuels effets inertiels non linéaires (par la modification de la tortuosité par exemple).

Conclusion de la première partie

Nous avons pu montrer, grâce à un dispositif classique dans son principe, que pour de faibles débits, le comportement de la résistance à l'écoulement (correction non linéaire à la loi de Darcy) des matériaux poreux est quadratique en fonction du débit filtrant, sans terme linéaire. Ceci est conforme aux résultats théoriques issus de l'homogénéisation du terme convectif d'inertie dans l'équation de Navier-Stokes d'un fluide saturant une structure poreuse. Ce résultat avait été obtenu auparavant pour un matériau prototype de structure périodique. Nous confirmons ce résultat pour deux matériaux poreux couramment utilisés en acoustique, et dont la géométrie microscopique est désordonnée et non périodique, mais statistiquement homogène (et dont cinq des six paramètres, nécessaires à la caractérisation acoustique, ont été mesurés). Nos mesures mettent en évidence la même correction quadratique à la loi de Darcy pour deux plaques perforées, lorsque le débit filtrant est faible ; nous ne disposons à l'heure actuelle ni d'explication théorique ni de confirmation expérimentale disponible dans la littérature à ce sujet. Au-delà d'une valeur critique du débit filtrant, toutes les résistances mesurées vérifient la loi empirique de Forchheimer, linéaire en fonction du débit filtrant, et largement illustrée dans la littérature. Le point de transition entre les deux comportements non linéaires a permis de définir une valeur critique du débit, ainsi qu'une longueur L intrinsèque à la géométrie microscopique des matériaux poreux, directement associée aux phénomènes non linéaires.

Il nous semble intéressant pour poursuivre cette étude, de s'assurer expérimentalement du caractère purement géométrique de la longueur L en reproduisant les mêmes expériences avec un fluide différent de l'air. De plus, il serait opportun de justifier théoriquement la corrélation que nous avons constatée pour chaque matériau, entre l'importance des phénomènes non linéaires observés d'une part, et les valeurs de L , du facteur de forme visqueux M , de la porosité ϕ , et de la tortuosité α_∞ d'autre part.

Dans le second chapitre, la méthode de mesure des coefficients de réflexion et de transmission acoustiques des deux matériaux poreux mesurés dans le premier chapitre est différente des travaux expérimentaux déjà publiés dans ce domaine. En revanche, la modélisation reprend dans son principe une méthode semi-empirique proposée dans la littérature. Elle intègre cependant tous les aspects les plus récents de la caractérisation des échanges viscothermiques dans les matériaux poreux à structure rigide, et notamment le fait qu'aucun des six paramètres du fluide équivalent au matériau n'est considéré comme ajustable. Pour chaque point de mesure (fréquence et niveau acoustique fixés), les paramètres linéaires du fluide équivalent à l'échantillon sont conservés, à l'exception de la résistivité, dont les caractéristiques non linéaires ont été mesurées au premier chapitre. Nos résultats montrent que, dans le domaine de fréquence choisi, et pour des échantillons de faible épaisseur devant la longueur d'onde, aucun phénomène significatif ne se manifeste, autre que l'augmentation des pertes visqueuses dans les matériaux avec le niveau sonore. Nous avons constaté expérimentalement que les conditions choisies et les erreurs de mesures ne permettent pas de discerner les effets inertiels liés à la modification du champ microscopique dans les pores, en fonction du niveau acoustique. Néanmoins, les résultats expérimentaux sont correctement reproduits par notre modèle, ce qui permet de penser

que la méthode utilisée est exploitable en pratique, pour des conditions d'utilisation des matériaux proches de nos conditions expérimentales (faible épaisseur devant la longueur d'onde, et structure rigide).

Le travail présenté dans le second chapitre peut évidemment être approfondi, par exemple en mesurant des matériaux dont l'épaisseur est comparable à la longueur d'onde, afin de constater si dans cette situation, l'approche théorique simple adoptée ci-dessus reproduit avec la même qualité les résultats expérimentaux, et de déterminer dans quelles conditions d'éventuels effets inertiels dépendants du niveau acoustique seraient susceptibles d'apparaître.

Annexe A

Modélisation des matériaux poreux à structure rigide en régime acoustique linéaire

Hormis lorsqu'elles sont solidaires d'un écran imperméable ou fortement résistif susceptible de les entrainer, les couches poreuses restent immobiles. C'est le cas pour beaucoup de matériaux poreux (laines de verre et mousses plastiques, à faible résistance au passage de l'air) couramment utilisés en acoustique. Le couplage vibroacoustique entre la phase fluide et la phase solide et/ou le rapport de leurs masses spécifiques sont, pour ces matériaux, insuffisants pour que l'onde aérienne ébranle la structure. Le milieu poreux est alors considéré de structure infiniment rigide, les ondes acoustiques ne se propageant que dans l'air libre inclus dans les pores.

A.1 Fluide équivalent

L'objectif est de modéliser l'effet macroscopique sur une onde acoustique aérienne, de la structure poreuse microscopique. Cette dernière présente généralement un aspect très complexe. Aussi, nous considérons un volume V contenant plusieurs pores mais petit devant la longueur d'onde λ dans le fluide. Cette condition de grande longueur d'onde permet de négliger les effets de viscosité du second ordre dans l'équation de Navier-Stokes, ainsi que la diffusion se produisant en haute fréquence. Les effets thermiques et visqueux sont ainsi découplés, et seront pris en compte séparément dans l'incompressibilité effective $K_{eff}(\omega)$ et la densité effective $\rho_{eff}(\omega)$ respectivement (où $\omega = 2\pi f$, f étant la fréquence). L'équation de Newton et l'équation de conservation de la masse décrivant le comportement du fluide prennent alors la forme suivante :

$$\rho_{eff}(\omega) \partial_t \mathbf{v} = -\mathbf{grad} p, \quad (\text{A.1})$$

et

$$\frac{1}{K_{eff}(\omega)} \partial_t p = -\mathit{div} \mathbf{v}, \quad (\text{A.2})$$

où p et \mathbf{v} désignent la pression acoustique et la vitesse acoustique, en moyenne sur le volume V . Pour un fluide libre, en dehors du volume occupé par la structure poreuse, la propagation d'une onde acoustique est entièrement déterminée par son nombre d'onde $k_0 = \omega/c = \omega\sqrt{\rho/K}$, et son impédance caractéristique $Z_c = \sqrt{\rho K}$, où c , ρ , et K désignent respectivement la célérité du son dans l'air, la densité, et l'incompressibilité adiabatique de l'air. Pour une onde progressive plane, se propageant dans un fluide incompressible et non visqueux, ces deux quantités sont

réelles. La modélisation de l'interaction fluide-structure en terme de fluide équivalent consiste à remplacer k_0 et Z_c par un nombre d'onde effectif complexe

$$k_{eff} = \omega \sqrt{\frac{\rho_{eff}}{K_{eff}}}, \quad (\text{A.3})$$

et une impédance caractéristique effective complexe

$$Z_{ceff} = \sqrt{\rho_{eff} K_{eff}}. \quad (\text{A.4})$$

Les sections A.3 et A.4 exposent rapidement de quelle façon la densité effective ρ_{eff} et l'incompressibilité effective K_{eff} sont obtenues.

A.2 Paramètres caractéristiques de la géométrie poreuse

1. la résistivité notée σ (en Nm^{-4}s), est mesurée en soumettant un échantillon de matériau (d'épaisseur l), inséré dans un tube, à une différence de pression statique ΔP . Un écoulement macroscopique apparaît alors à travers l'échantillon, dans le sens de la chute de pression. Le module de la vitesse macroscopique $|\mathbf{v}|$ du fluide à l'intérieur des pores, dépendant du matériau, est relié à σ par l'égalité suivante, connue sous le nom de *loi de Darcy* :

$$\sigma = \frac{\Delta P}{|\mathbf{v}| l}. \quad (\text{A.5})$$

La résistance au passage de l'air σ évalue les pertes visqueuses de l'écoulement fluide à travers la structure poreuse ; cette quantité est donc caractéristique de la géométrie poreuse, mais sa valeur dépend aussi de la viscosité du fluide utilisé.

Les quatre paramètres suivants sont en revanche définis uniquement par la géométrie microscopique du matériau.

2. La porosité ϕ représente le rapport entre le volume de fluide libre contenu dans le matériau V_f et le volume total V_t occupé par l'échantillon ; donc par définition :

$$\phi = \frac{V_f}{V_t}. \quad (\text{A.6})$$

Ce paramètre adimensionnel est, pour les poreux utilisés en acoustique, généralement de l'ordre de 0,9. Dans ce cas, il peut par exemple être obtenu avec une bonne approximation, par mesure directe du volume V_t , et par pesée de l'échantillon, la masse spécifique de la phase solide étant en général connue. Il est fréquent pour une mousse polyuréthane à bulles ouvertes, que la phase solide ne représente que 2 à 3 % du volume total occupé par l'échantillon (alors $\phi \approx 0,98$).

3. La tortuosité α_∞ est définie de la façon suivante :

$$\alpha_\infty = \frac{\frac{1}{V} \int |\mathbf{v}|^2 dV}{\frac{1}{V} \left| \int \mathbf{v} dV \right|^2}, \quad (\text{A.7})$$

où \mathbf{v} représente le champ de vitesse microscopique dans les pores, d'un fluide idéal (incompressible et non visqueux) et V un volume contenant plusieurs pores, et statistiquement significatif. Ce paramètre α_∞ permet de quantifier la différence en direction et en norme qui existe entre le champ de vitesse microscopique dans le volume V (numérateur de l'éq. A.7) et le champ macroscopique dans le volume V (dénominateur de l'éq. A.7), pour un fluide idéal. Les matériaux rencontrés en acoustique vérifient généralement $1 < \alpha_\infty < 2,5$.

4. La longueur caractéristique visqueuse Λ est définie par :

$$\frac{2}{\Lambda} = \frac{\int |\mathbf{v}|^2 dS}{\int |\mathbf{v}|^2 dV'} \quad (\text{A.8})$$

où V' désigne le volume de fluide contenu dans V , et S la surface de contact fluide-structure contenue dans V . Lorsque les pores sont des cylindres de rayon R , alors $\Lambda = R$ (en règle générale $10^{-5} \text{ m} < \Lambda < 10^{-3} \text{ m}$).

5. La longueur caractéristique thermique Λ' est définie par :

$$\frac{2}{\Lambda'} = \frac{\int dS}{\int dV'} \quad ; \quad (\text{A.9})$$

même si Λ et Λ' sont égaux dans le cas de pores cylindriques, on a pour des pores de géométrie quelconque $\Lambda < \Lambda'$.

Les trois paramètres α_∞ , Λ et Λ' peuvent être mesurés par différentes méthodes, notamment ultrasonores. Pour une discussion détaillée, voir [14].

6. La constante de piégeage Γ est impliquée dans les échanges thermiques, et décrit la rapidité avec laquelle une particule en mouvement Brownien dans le fluide, heurte la structure solide. Sa valeur peut être obtenue expérimentalement par la mesure du comportement asymptotique de la compressibilité effective aux basses fréquences (voir la section A.4 et [23,25]). Étant donné le caractère récent des méthodes permettant de mesurer ce paramètre, sa valeur sera ici choisie simplement par analogie avec les matériaux à pores cylindriques droits, pour lesquels $\Gamma = \frac{8}{\phi\Lambda^{1/2}}$.

A.3 Densité effective

La prise en compte des interactions inertielles et visqueuses entre la phase solide et la phase fluide se traduit par l'introduction d'une densité effective $\rho_{eff}(\omega)$ (eq. A.1) complexe et dépendant de la fréquence. Une expression analytique exacte a été obtenue (cf. [24] par exemple), dans le cas d'un matériau à pores cylindriques droits en résolvant l'équation de Navier-Stokes dans la géométrie considérée. La généralisation aux milieux poreux de géométrie quelconque [2] a été obtenue par raccordement des comportements asymptotiques basse et haute fréquence, et s'écrit (j désignant l'unité imaginaire):

$$\rho_{eff} = \rho \alpha_\infty \left(1 + \frac{1}{jx} \sqrt{1 + \frac{M}{2} jx} \right) \quad , \quad (\text{A.10})$$

où x est une fréquence adimensionnelle :

$$x = \omega \frac{\alpha_\infty \rho}{\sigma \phi} \quad ;$$

M est un paramètre adimensionnel appelé facteur de forme des pores :

$$M = \frac{8\rho\nu\alpha_\infty}{\sigma\phi\Lambda^2} \quad , \quad (\text{A.11})$$

et prenant des valeurs comprises entre 0,1 et 10 ; lorsque les pores sont cylindriques : $M = 1$. Enfin ν (m^2s^{-1}), est la viscosité dynamique du fluide saturant.

A.4 Compressibilité effective

Suivant un raisonnement en tous points analogue au paragraphe précédent, les échanges thermiques entre la phase fluide et la phase solide sont pris en compte grâce à l'introduction d'un module d'incompressibilité effective $K_{eff}(\omega)$ (eq. A.2) complexe et dépendant de la fréquence. La phase solide ayant une capacité calorifique très supérieure à celle de l'air, la température acoustique peut être considérée comme nulle sur la surface de contact entre les deux phases. L'équation de conduction de la chaleur conduit alors à une solution analytique lorsque les pores sont droits [24], qui a été généralisée par raccordement asymptotique aux matériaux de géométrie quelconque [1, 25]:

$$K_{eff} = \frac{K}{\gamma - \frac{\gamma-1}{1 + \frac{1}{jx'} \sqrt{1 + \frac{M'}{2} jx'}}}}, \quad (\text{A.12})$$

où x' est une fréquence adimensionnelle:

$$x' = \omega \frac{1}{\nu Pr \phi \Gamma},$$

M' est le facteur de forme thermique des pores :

$$M' = \frac{8}{\phi \Gamma \Lambda^2}; \quad (\text{A.13})$$

$Pr = 0,71$ est le nombre de Prandtl, $\gamma = 1,4$ est le rapport des chaleurs massiques de l'air, et Γ est la constante de piégeage [25]. Dans le cadre de ce travail, facteur de forme M' est choisi égal à un, comme c'est le cas pour un matériau à pores cylindriques droits, ce qui permet de donner une valeur à Γ en l'absence de mesure de ce paramètre.

Annexe B

Résistance : étalonnage et méthode de mesure

Le but de l'expérience est de caractériser la résistance au passage de l'air d'un matériau poreux. Celui-ci est placé dans un écoulement d'air ; deux quantités sont alors nécessaires pour caractériser totalement sa résistance : la différence de pression dans l'écoulement entre l'amont et l'aval du matériau d'une part, et le débit filtrant à travers l'échantillon d'autre part. La première est mesurée directement à l'aide d'un capteur différentiel de pression ; une mesure directe de la seconde est difficile dans le domaine de faibles débits utilisé ($< 0,01 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$), c'est pourquoi un étalon de résistance supposée connue (c'est-à-dire dont la caractérisation théorique et expérimentale est simple) et indépendante des conditions de mesure (notamment du débit filtrant) est utilisé. Une mesure de différence de pression aux bornes de cette résistance connue permettra de calculer le débit.

B.1 Caractérisation de la résistance étalon

- Description géométrique de la résistance étalon :

Il s'agit d'un matériau de section circulaire (diamètre 44,5 mm), de longueur totale $l = 16$ cm, comportant n pores droits ($n = 1315$), tous de section carrée, de côté $a = 0,88$ mm, parallèles à l'écoulement ; la porosité est $\phi = 0,68$.

- Caractérisation expérimentale :

- pour les débits très faibles, ($< 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3\text{s}^{-1}$), cette résistance est comparée à une résistance étalonnée (Laminar Flow Element, Meriam, 50MJ10-20) utilisée pour les mesures à faible débit au laboratoire (symbole ++ sur la figure B.1).

- Pour les débits moyens (de $1,1 \cdot 10^{-4}$ à $6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3\text{s}^{-1}$), la calibration est effectuée à l'aide d'un compteur à gaz et d'un chronomètre (symbole oo sur la figure B.1) ;

- Pour les débits supérieurs à $0,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3\text{s}^{-1}$, un cône suivi d'une portion cylindrique débouchant dans l'atmosphère est placé à l'extrémité du conduit. L'application du théorème de Bernoulli corrigé d'une approximation de couche limite permet de retrouver le débit (symbole xx sur la figure B.1) ;

- Toutes les mesures tiennent compte de la température et la pression atmosphérique.

- Caractérisation théorique :

La géométrie de la résistance étalon impose un écoulement monodimensionnel de l'air à travers les pores droits. Sa résistance peut donc être considérée en première approximation comme indépendante de la vitesse de l'écoulement du fait de l'absence de terme convectif dans l'équation de Navier-Stokes. La résistance à l'écoulement s'écrit classiquement [26], pour un profil de Poiseuille de la vitesse sur la section du tube :

$$R_0 = \frac{\rho S l \nu}{n\pi(a/2)^4},$$

où ρ et ν sont la densité et la viscosité de l'air, S est la section du conduit principal.

Toutefois, lorsque le débit filtrant augmente, la constriction des lignes de courant à l'entrée des pores devient non négligeable. Il apparaît ainsi une contribution non linéaire à la résistance de l'étalon. Celle-ci, dans le cas d'un tube de section circulaire, peut être obtenue en estimant la distance nécessaire à l'établissement d'un profil de Poiseuille, à partir de l'entrée du cylindre [26]. Finalement, on ajoute à R_0 le terme suivant :

$$R_{nl} = \frac{8\epsilon\rho S^2}{n^2a^4} v,$$

où v est la vitesse macroscopique de filtration, et ϵ est un coefficient déterminé empiriquement.

En admettant que ϵ prend des valeurs analogues dans le cas de pores à section carrée et circulaire, nous choisissons pour ϵ sa valeur maximale ($\epsilon = 0.56$) pour ne pas sous-estimer la correction non linéaire. La figure B.1 présente les mesures et les résistances théoriques R_0 (— · —) et $R_0 + R_{nl}$ (— —). Sur l'ensemble de la gamme des débits utilisés, la correction non linéaire théorique R_{nl} de la résistance étalon est inférieure à 1% et peut être négligée devant les erreurs de mesure. La résistance étalon mesurée vaut en moyenne ($R_0 = 193,5 \text{ N m}^{-3}\text{s}$), et nous considérerons qu'elle reste inchangée pour les conditions de mesure rencontrées.

Une erreur systématique sur cette valeur n'est jamais à exclure ; celle-ci serait sans effet sur la mesure de la résistance non linéaire des échantillons opérée au chapitre 1. En revanche, la détermination d'une longueur intrinsèque d'un matériau poreux y est naturellement sensible.

B.2 Méthode de mesure

La mesure consiste à choisir un matériau à mesurer, déterminer quels sont les deux capteurs différentiels de pression à utiliser, fixer la pression amont d'alimentation du système, puis pour chaque débit filtrant, à noter les différences de pression aux bornes de la résistance étalon et de l'échantillon.

- Choix du matériau à mesurer : plusieurs critères sont à examiner : le matériau doit pouvoir être considéré comme rigide tout au long de l'expérience (ce qui peut restreindre fortement la gamme de débit envisageable pour la mesure d'une laine de verre légère par exemple) et d'une structure telle qu'il soit possible d'y découper un échantillon de section circulaire correspondant au diamètre des tubes utilisés pour canaliser l'écoulement.
- Choix des capteurs de pression : Celui-ci est déterminé par la résistance de l'échantillon par rapport à celle de l'étalon ainsi que par la gamme de débits pour laquelle on désire effectuer la mesure. L'objectif étant de minimiser les erreurs absolues et relatives, il est préférable d'utiliser les capteurs dans la partie haute de leur dynamique, et pour cela d'ajuster l'épaisseur (et donc la résistance) de l'échantillon autant que possible.

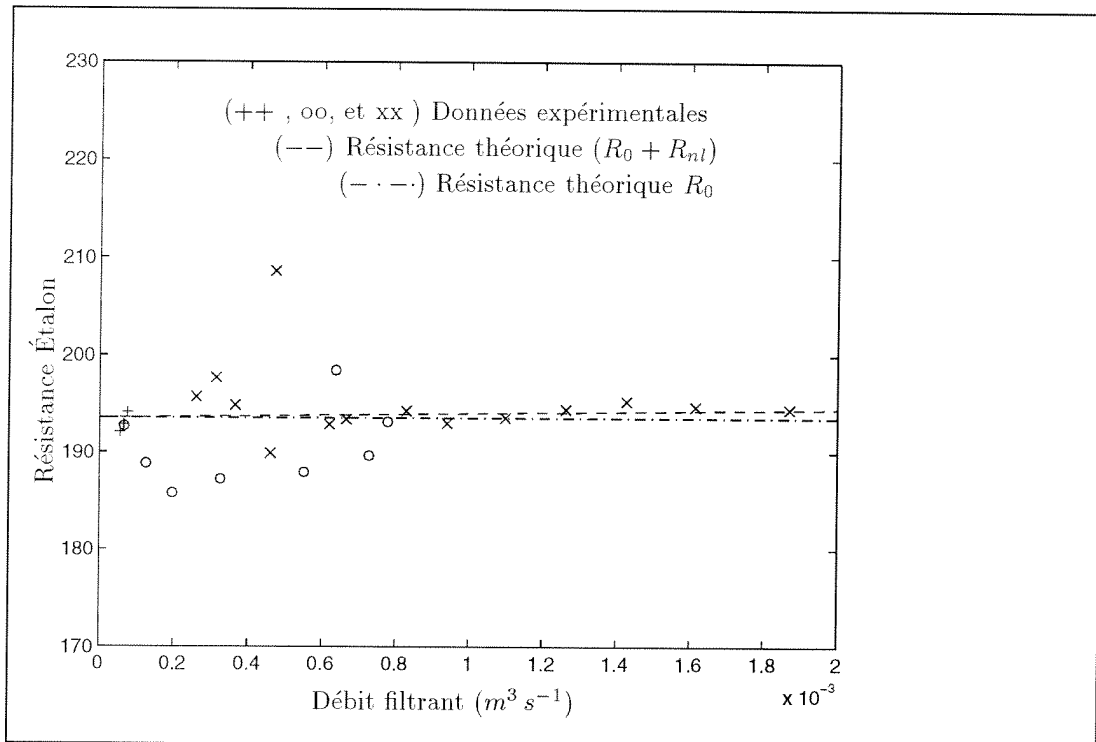


FIG. B.1 - *Mesure et prédiction de la résistance étalon en fonction du débit filtrant.*

- Conditions de mesure et acquisition : La pression amont du système n'a pas une grande importance sur la mesure dans l'absolu, mais ses fluctuations et instabilités sont une des principales causes d'erreur de mesure. Ce problème reste jusqu'à présent entier puisque nous n'avons pu trouver dans le commerce de détendeur dont la pression nominale était inférieure ou égale à la pression d'alimentation (6 atm). Une solution envisageable consisterait à alimenter le système non pas en air synthétique mais à l'aide d'une bouteille sous pression (200 atm).

Le choix du débit filtrant doit permettre de caractériser correctement le matériau, sans sortir de la gamme de travail des capteurs, et sans que le matériau ne se déforme ou ne se déplace sous l'effet de sa propre résistance. Dans le but de minimiser les erreurs dues aux fluctuations du système d'alimentation, la lecture des deux pressions différentielles se fait de façon simultanée sur deux voltmètres numériques, après 200 à 300 acquisitions automatiques d'une durée allant de 0,5 ms à 2 s chacune, dont on fait la moyenne. Le zéro des deux capteurs de pression est noté de la même façon en coupant le débit filtrant entre chaque mesure.

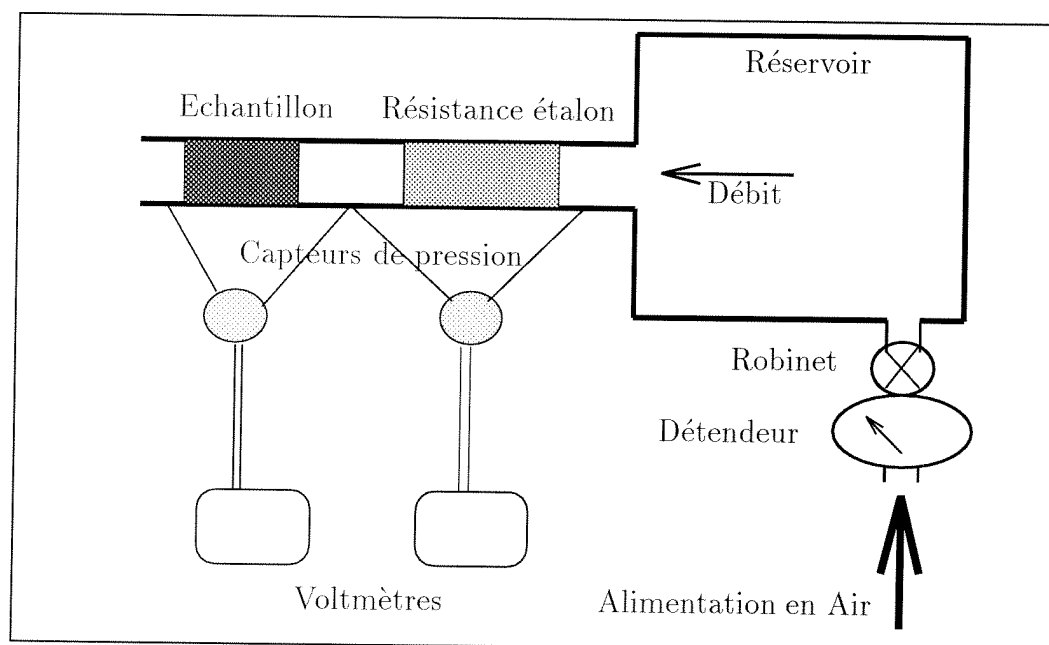


FIG. B.2 - Représentation du dispositif de mesure

Annexe C

Coefficients de réflexion et de transmission : mesure

C.1 Dispositif expérimental

Considérons un échantillon inséré dans un tube cylindrique. Afin de déterminer les variations du coefficient de transmission T et de réflexion R en fonction du niveau sonore, il est nécessaire d'utiliser un banc de mesure qui puisse fournir un champ acoustique de fort niveau et de mesurer finement le champ acoustique.

Une source électroacoustique, spécialement conçue pour ce banc de mesure, est située en amont de la zone de mesure acoustique. Cette source est capable de générer un signal sinusoïdal d'un niveau supérieur à 120 dB (*re* 20 μ Pa) sur la bande de fréquence 40 Hz-1000 Hz et supérieur à 145 dB (*re* 20 μ Pa) sur la bande de fréquence 40 Hz-500 Hz. Elle est reliée au guide d'onde principal par une jonction souple pour ne pas transmettre de vibrations mécaniques à la région de mesure. Cette source et son amplificateur de puissance sont pilotées à l'aide un frontal d'acquisition de type H.P. 3566/67 A. En aval de la source, un tube d'acier long de deux mètres est placé dans le but d'obtenir des ondes acoustiques planes dans la zone de mesure. A l'extrémité en aval du montage, une terminaison anéchoïque a été conçue et réalisée pour les besoins de ces mesures. Elle est constituée d'un tube perforé dont le taux de perforation augmente avec la distance recouvert d'une résistance acoustique constituée d'un tissu. Le module du coefficient de réflexion en pression de cette terminaison est inférieur à 0,2 dès que la fréquence est supérieure à 100Hz.

La zone de mesure proprement dite est constituée par l'assemblage de tubes d'acier rodé de longueur variable (de 70 mm à 2000 mm), de diamètre intérieur 30 mm et de diamètre extérieur 38 mm. La surface interne des tuyaux à une rugosité de l'ordre du micromètre. Les tuyaux peuvent être assemblés soit par des pièces d'adaptation en acier, soit par l'intermédiaire des supports de microphones. En effet, le diamètre des transducteurs (PCB 116B, diamètre 10,3 mm) étant large comparé au diamètre des tuyaux, les microphones ne peuvent pas être montés directement en ras de paroi. Des supports en acier ont donc été conçus pour incorporer les microphones au banc de mesure et ceux-ci servent aussi de pièces d'adaptation entre les différents tubes. Étant donné les contraintes relatives à l'espacement entre les capteurs en regard de la bande de fréquence explorée, cela permet de faire varier ces distances selon les besoins expérimentaux. Pour les résultats présentés, les écartements entre microphones sont 375 mm et 597 mm.

Les pressions acoustiques sont mesurées avec six transducteurs piézo-électriques à électronique intégrée (type PCB 116B) de résolution 91 dB et dont la dynamique est de 90 dB. Ils

sont alimentés directement par le système d'acquisition par l'intermédiaire de câbles coaxiaux de longueur 3 mètres. Ces capteurs sont compensés en accélération normale pour éviter la mesure d'éventuelles vibrations des parois du guide d'onde et sont adaptés sur les supports décrits précédemment. Un canal (3.5 mm de diamètre, 1.5 mm de longueur) relie le tube principal à une cavité cylindrique (10.3 mm de diamètre, 0.5 mm de hauteur) fermée en sa partie supérieure par la membrane du transducteur. La fréquence de résonance de cette cavité de Helmholtz ainsi constituée se situe autour de 8 kHz, de telle sorte que son effet reste négligeable aux fréquences utilisées.

Afin de déterminer précisément la vitesse du son, deux sondes de température (type Pt 100, 3 fils) de résolution 0.01 degré Celsius sont disposées sur la surface externe du guide de part et d'autre du matériau. Ces capteurs sont protégés par un matériau qui les isole thermiquement des fluctuations extérieures de température.

C.2 Étalonage de la chaîne de mesure

Une détermination précise de la fonction de transfert entre deux capteurs nécessite au préalable un étalonage rigoureux en gain et en phase des deux chaînes de mesure afin de minimiser les erreurs systématiques lors de l'acquisition de données. Chaque chaîne est constituée d'une petite cavité reliée au tube principal, d'un transducteur piézo-électrique, de sa connexion au système d'acquisition, du système d'acquisition lui-même et de l'analyseur. Dans le cadre de l'acoustique linéaire, les propriétés acoustiques d'un système linéaire sont indépendantes du type d'excitation et du niveau de la source. Un étalonage absolu de la chaîne de mesure n'est donc pas nécessaire pour déterminer des fonctions de transfert, en revanche, un étalonage relatif est indispensable. Pour déterminer les valeurs absolues, les étalonnages donnés par le constructeur sont utilisés.

Étant donné la façon dont sont montés les microphones, il apparaît nécessaire de calibrer les microphones *in situ*. Un capteur de référence est situé en ras de paroi d'une pièce d'adaptation fermant le tube. Cette paroi est supposée parfaitement réfléchissante le coefficient de réflexion γ vaut 1. Le microphone à étalonner est monté sur le support décrit précédemment et se situe à 7,5 mm de l'extrémité fermée.

La fonction de transfert entre le microphone situé en bout de tube et le microphone monté sur le support est mesuré pour chacun des capteurs utilisés dans l'étude. Le rapport de ces fonctions de transfert donne l'étalonage relatif entre deux capteurs.

C.3 Acquisition

L'acquisition et le traitement des signaux se fait sur un frontal d'acquisition de type H.P. 3566/67 A contrôlé par un P.C.. Nous avons choisi d'opérer en sinus glissant afin d'avoir le niveau le plus important possible à chaque fréquence de mesure. Les mesures ont été effectuées entre 50 et 800 Hz avec un pas moyen de 27 Hz. Le réglage du niveau de source se fait directement par le système d'acquisition.

Pour chaque niveau, le logiciel de traitement H.P. fournit un fichier contenant par exemple les fonctions de transfert et les niveaux sur chacune des voies.

Ces fichiers sont post-traités à l'aide du logiciel Matlab afin d'obtenir directement les coefficients complexes R et T qui déterminent les caractéristiques intrinsèques du matériau. Le post-traitement prend en compte l'étalonage des microphones, ainsi que la température, la pression atmosphérique, et l'humidité de l'air, lors de la mesure.

C.4 Validation de la méthode de mesure avec une plaque perforée

Cette section présente une mesure de l'impédance d'une plaque perforée (taux de perforation $t_p = 3\%$), dont les caractéristiques sont données au chapitre 1. Nous comparerons nos résultats avec ceux obtenus grâce aux mesures en écoulement continu (chapitre 1), ainsi qu'avec les modèles existants dans la littérature. Une grande quantité de publications traite ce sujet, et nous nous appuyerons ici sur une bibliographie non exhaustive [27, 10, 28, 29, 30, 21, 31, 32], représentant cependant une approche communément admise pour prédire l'impédance d'une plaque perforée en régime acoustique non linéaire.

La production de jet par une onde acoustique intense dans un orifice est connue comme un mécanisme non linéaire efficace de dissipation de l'énergie acoustique. Il est bien établi que lorsqu'un écoulement continu, ou bien une onde acoustique, possède une vitesse suffisante pour qu'il se produise un décollement de la couche limite visqueuse aux abords de la perforation, une partie de l'énergie cinétique acquise par le fluide en pénétrant dans l'orifice se dissipe, sans interagir avec le champ existant (voir [10] et [27] pour une revue des résultats les plus anciens)

Supposons la perforation infiniment mince et le fluide localement incompressible. En acoustique linéaire et sans écoulement continu, il n'y a pas de décollement de la couche limite visqueuse aux abords du trou, et les lignes de champ amont et aval sont symétriques par rapport au plan de la perforation. La chute de pression instantanée en régime sinusoïdal est proportionnelle à la vitesse dans la perforation, avec un coefficient complexe $Z_L = R + j\omega \rho L_p$, défini comme l'impédance de perforation en acoustique linéaire. Z_L (Nm^{-3}s) comporte une résistance R , traduisant les pertes visqueuses ; cette résistance a été mesurée dans le premier chapitre, lorsque la fréquence tend vers zéro, à l'aide du dispositif expérimental présenté en annexe B ; elle vaut $R_0 = 20,7 \text{Nm}^{-3}\text{s}$ (voir chapitre 1, tableau 1). La longueur ajoutée L_p consécutive à l'accroissement d'énergie cinétique subi par le fluide, au passage de la perforation, peut être calculée analytiquement, en tenant compte de l'interaction entre les perforations ([1], chapitre 10) ; pour un réseau carré de perforations circulaires, tel que $t < 0,6$, il vient :

$$L_p = \frac{1}{t_p} \left(l + 2 \left(\frac{8}{3\pi} \right) \left(\frac{d}{2} \right) (1 - 1,14\sqrt{t_p}) \right), \quad (\text{C.1})$$

où l est l'épaisseur de la plaque perforée et d le diamètre des perforations.

Lorsque le module de la vitesse acoustique dans la perforation $|V_p|$ est suffisamment grand et/ou le rayon de courbure du bord intérieur de la perforation suffisamment petit, pour provoquer un décollement de la couche limite visqueuse, cinq régimes non linéaires ont été identifiés

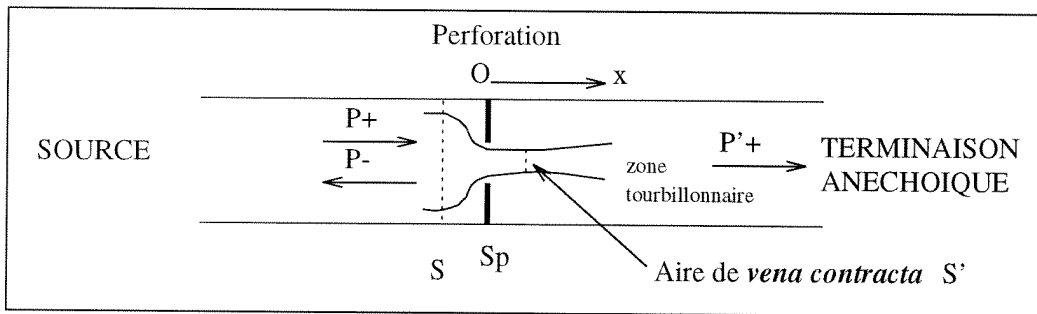


FIG. C.1 - Création de jet dans une perforation par un champ acoustique intense (pendant la demi-période où la vitesse acoustique est positive suivant l'axe Ox)

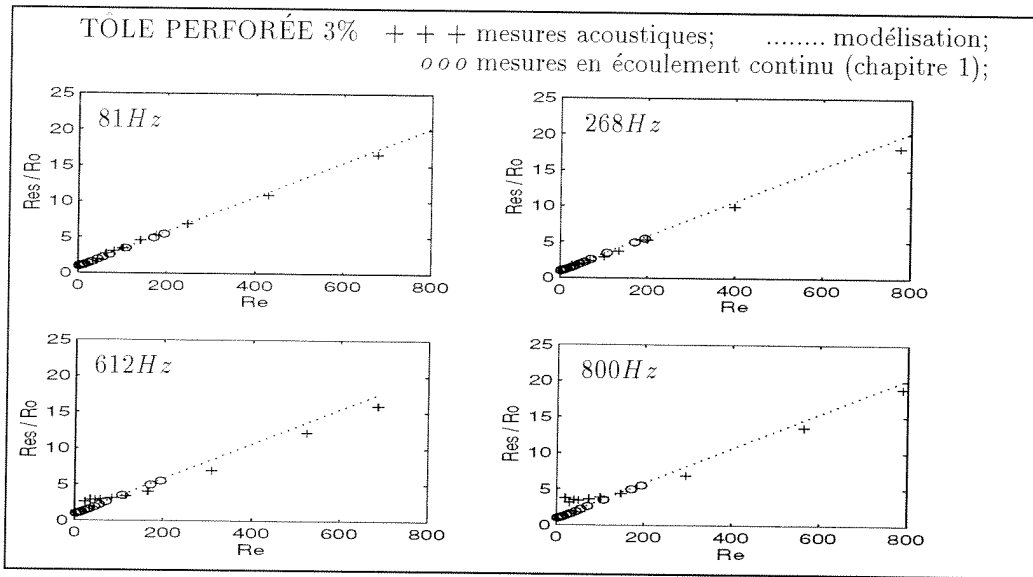


FIG. C.2 - Résistance normalisée, en fonction du nombre de Reynolds dans les perforations, et de la fréquence (R_0 est la résistance à débit nul, déduite des mesures du premier chapitre (tableau 1))

expérimentalement [33, 31], à mesure que le nombre de Reynolds acoustique $Re = |V_p| d/\nu$ (où d est le diamètre de la perforation) augmente dans les perforations. Deux d'entre eux influencent significativement l'impédance acoustique. Les phénomènes mis en jeu sont complexes, et seul le régime caractérisé par les plus forts nombres de Reynolds (pour lesquels l'impédance devient une fonction linéaire du nombre de Reynolds acoustique) a été modélisé dans la littérature pour les plaques perforées (par exemple [29, 30, 21]). La modélisation repose sur la conservation de l'énergie totale du fluide à travers l'orifice, par exemple le long d'une ligne de courant.

Considérons (figure C.1) une onde sinusoïdale de pression P^+ incidente sur la perforation, une onde réfléchiée P^- , et une onde transmise P'^+ (la terminaison en aval est supposée anéchoïque). Fixons la figure lors d'une demi-période où l'écoulement dans l'orifice se produit dans le sens de l'axe Ox . Le flux amont comporte une composante radiale lorsqu'il pénètre dans l'orifice, d'autant plus grande que le nombre de Reynolds Re et/ou que le taux de perforation $t_p = S_p/S$ est faible, où S est la surface du guide et S_p la surface ouverte de la perforation (l'influence de la géométrie exacte du profil de la perforation ne sera pas étudiée ici). Cette composante radiale de la vitesse acoustique ne s'annule alors qu'en aval de l'orifice, définissant ainsi une aire minimale de jet S' où la vitesse particulière selon l'axe (Ox) est maximale, et un coefficient de *vena contracta* $C_a = S'/S_p$. Le jet dissipe une part de son énergie cinétique qui peut être calculée [29]; on peut aussi évaluer cette énergie dissipée en mesurant un coefficient de *vena contracta* C_a [27, 30] si l'on suppose que la relation de Bernoulli est applicable. Plusieurs auteurs [10, 28, 21] ont montré que malgré le caractère non linéaire des phénomènes, le problème peut-être traité par un modèle fréquentiel, en régime sinusoïdal, assorti d'une éventuelle correction prenant en compte l'énergie transmises aux harmoniques supérieures de la fréquence d'excitation.

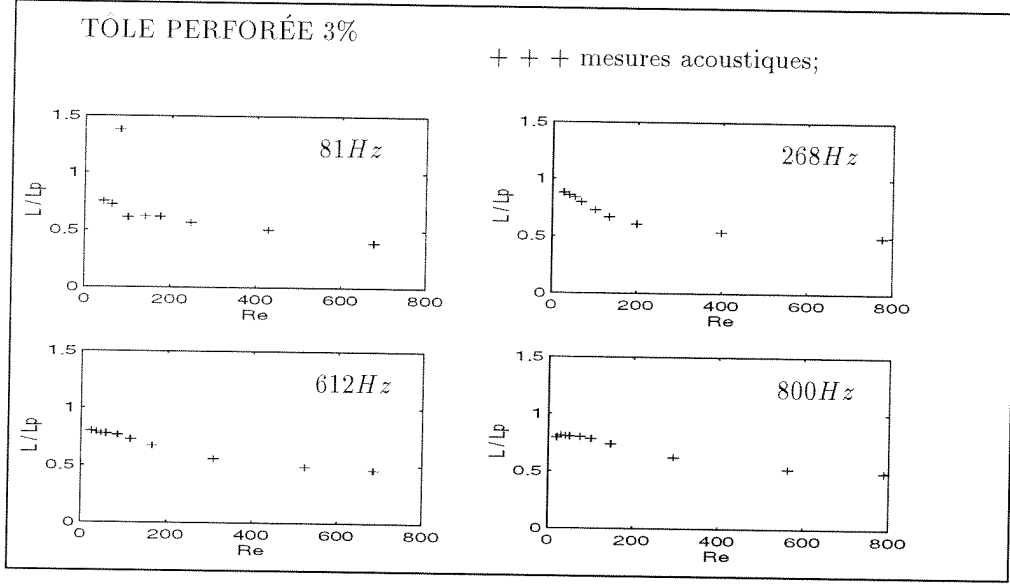


FIG. C.3 - Longueur ajoutée normalisée, en fonction du nombre de Reynolds dans les perforations (L_p est la longueur ajoutée en régime acoustique linéaire, donnée par l'équation C.1)

C.4.1 Résistance

La relation de Bernoulli (conservation de l'énergie totale le long d'une ligne de courant, pour un fluide non visqueux et incompressible), est appliquée entre une surface S où la vitesse acoustique radiale est nulle, et l'aire de vena contracta S' .

On en déduit l'expression d'une impédance purement résistive R_{NL} , et indépendante de la fréquence, en régime acoustique non linéaire :

$$R_{NL} = \frac{\rho}{2t} |V_p| \left[\left(\frac{1}{C_a} \right)^2 - t_p^2 \right] \quad (C.2)$$

où t_p est le taux de perforation. Le coefficient de vena contracta $C_a = 0,78$ est déterminé expérimentalement, à partir des mesures du premier chapitre ;

Si l'on admet simplement que les effets linéaires et non linéaires se superposent, il vient pour la résistance normalisée de la plaque perforée (représentée en pointillés sur la figure C.2) :

$$R_{tot}/R_0 = 1 + R_{NL}/R_0. \quad (C.3)$$

Il est à noter que la résistance R_{tot} ne dépend pas de la fréquence. La figure C.2 représente deux autres résistances, normalisées par R_0 .

- La résistance R_{es} (symbole ooo), mesurée au premier chapitre, en écoulement continu (données de la figure 1.3).

- La résistance R' (symbole $+++$), mesurée acoustiquement, et déduite des coefficients de réflexion et de transmission mesurés (eq. 2.10) par l'équation $R' = \rho c \Re \left(\frac{2R}{T} \right)$.

C.4.2 Longueur ajoutée

Aucune contribution réactive en régime non linéaire ne peut être déduite de l'application de la relation de Bernoulli. Il est pourtant expérimentalement établi [27, 32] que les phénomènes non linéaires provoquent une réduction la longueur ajoutée d'un facteur 1/2. Même si aucune

modélisation satisfaisante n'est disponible à notre connaissance, une interprétation quantitative souvent présentée consiste à associer l'inertie du fluide aux régions irrotationnelles de l'écoulement. Le facteur $1/2$ s'explique alors par le fait que pour de forts niveaux, l'écoulement n'est laminaire que d'un côté de la perforation. La figure C.3 représente la longueur ajoutée L (symbole $+++$), en fonction du nombre Reynolds et de la fréquence, normalisée par la longueur L_p (eq. C.1). L est déduite des coefficients de réflexion et de transmission mesurés (eq. 2.10) par l'équation : $L = \frac{c}{\omega} \Im \left(\frac{2R}{T} \right)$.

On constate que les trois résistances sont très proches, et que R' est pratiquement indépendante de la fréquence, sauf pour les nombres de Reynolds faibles, où les pertes augmentent avec la fréquence. La longueur ajoutée est conforme au raisonnement qualitatif présenté plus haut. Les résultats sont très similaires à ce que l'on peut trouver dans la littérature (par exemple [32]).

Bibliographie

- [1] ALLARD J.F. *Propagation of Sound in Porous Media: Modelling Sound Absorbing Materials*. Chapman et Hall, Londres, 1993.
- [2] JOHNSON D.L., KOPLIK J. et DASHEN R. Theory of Dynamic Permeability and Tortuosity in Fluid-Saturated Porous Media. *J.Fluid.Mechanics*, 176:379–402, 1987.
- [3] WILSON D.K. , MCINTOSH J.D. et LAMBERT R.F. Forchheimer Type of Nonlinearities for High Intensity Propagation of Pure Tones in Air-Saturated Porous Media. *J.Acoust.Soc.Am*, 84:350–359, 1988.
- [4] MCINTOSH J.D., ZORUSKI M.T. et LAMBERT R.F. Standing Wave Apparatus for Measuring Fundamental Properties of Acoustic Materials in Air. *J.Acoust.Soc.Am*, 88:1929–1939, 1990.
- [5] MCINTOSH J.D. et LAMBERT R.F. Nonlinear Wave Propagation Through Rigid Porous Materials. I. Nonlinear Parametrization and Numerical Solutions. *J.Acoust.Soc.Am*, 88:1939–1949, 1990.
- [6] LAMBERT R.F. et MCINTOSH J.D. Nonlinear Wave Propagation Through Rigid Porous Materials. II. Approximate Analytical Solutions. *J.Acoust.Soc.Am*, 88:1950–1959, 1990.
- [7] KUNTZ H.L. et BLACKSTOCK D.T. Attenuation of Intense Sinusoidal Waves in Air Saturated Porous Materials. *J.Acoust.Soc.Am*, 81:1723–1731, 1987.
- [8] FORCHHEIMER P. Wasserbewegung Durch Boden. *Z.Ver.Deutsch.Ing.*, 45:1782–1788, 1901.
- [9] BEAVERS G.S. et SPARROW E.M. Non Darcy Flow Through Fibrous Porous Media. *J.Appl.Mech.*, 36:711–714, 1969.
- [10] INGARD U. et ISING H. Acoustic Nonlinearity of an Orifice. *J.Acoust.Soc.Amer*, 42:6–17, 1967.
- [11] FIRDAOUS M. et GUERMOND J.L. Sur l'Homogénéisation des Équations de Navier-Stokes à Faibles Nombre de Reynolds. *C.R.Acad.Sci*, Série I(t.320):245–251, 1995. Paris.
- [12] RASOLOARIJAONA M. et AURIAULT J.L. Nonlinear Seepage Flow Through a Rigid Porous Medium. *Eur.J.Mech.B/Fluid*, 13:117–195, 1967.
- [13] WODIE J.C. et LEVY T. Correction Non Linéaire à la Loi de Darcy. *C.R.Acad.Sci*, Série II(t.312):157–161, 1991. Paris.
- [14] MELON M. *Caractérisation des Matériaux Poreux par Ultrasons Basse-Fréquence*. Université du Maine, Le Mans, France, 1996. Thèse de Doctorat.

- [15] LAFARGE D., LEMARINIER P., ALLARD J.F. et TARNOW V. Dynamic Compressibility of Air in Porous Structures at Audible Frequencies. *J.Acoust.Soc.Am.*, 102:1995–2005, 1997.
- [16] SMEULDERS D.M.J., VAN HASSEL R.R., VAN DONGEN M.E.H et JANSEN J.K.M. Similarity of Sharp-Edged Porous Media. *Int.J.Engng.Sci.*, 32:979–990, 1994.
- [17] FIRDAOUS M., GUERMOND J.L. et LAFARGE D. Some Remarks on the Acoustic Parameters of Sharp-Edged Porous Media. *Int.J.Engng.Sci.*, 1997. soumis.
- [18] PIERCE A.D. *Acoustics*. Acoustical Society of America, 2e edition, New York, 1989.
- [19] BRUNEAU M. *Introduction aux Théories de l'Acoustique*. Publications de l'Université du Maine, Le Mans, 1983.
- [20] DUBOS V. *Etude de l'Effet d'une Cheminée Latérale sur un Guide d'Onde Acoustique; Etude Théorique de l'Interaction de Deux Cheminées*. Université du Maine, Le Mans, France, 1996. thèse de doctorat.
- [21] CUMMINGS A. Acoustic Nonlinearities and Power Losses at Orifices. *A.I.A.A. Journal*, 22:786–792, 1984.
- [22] ATTENBOROUGH K. On the Acoustic Slow Wave in Air-Filled Porous Media. *J.Acoust.Soc.Amer.*, 81:93–102, 1987.
- [23] HENRY M. et ALLARD J.F. Acoustical Measurement of the Trapping Constant of Foams With Open Cells. *C.R.Acad.Sci, Série II b(t.324)*:1–9, 1997. Paris.
- [24] ZWICKER C. et KOSTEN C.W. *Sound Absorbing Materials*. Elsevier, New-York, 1949.
- [25] LAFARGE D. *Propagation du Son dans les Matériaux Poreux à Structure Rigide Saturés par un Fluide Viscothermique*. Université du Maine, Le Mans, France, 1993. Thèse de Doctorat.
- [26] ISAKA K. et MATSUDRIA M. Fluid Mechanical Considerations of Vocal Cord Vibration. *Speech Communication Research Laboratory Monograph Number 8*, 1972. Santa Barbara.
- [27] MELLING T.H. The Acoustic Impedance of Perforates at Medium and High Sound Pressure Levels. *J.Sound.Vib.*, 29:1–65, 1973.
- [28] INGARD U. Nonlinear Distortion of Sound Transmitted through an orifice. *J.Acoust.Soc.Amer.*, 48:32–33, 1970.
- [29] HOWE M.S. The Dissipation of Sound at an Edge. *J.Sound.Vib.*, 70:407–411, 1980.
- [30] CUMMINGS A. et EVERSMA W. High Amplitude Acoustic Transmission Through Duct Terminations: Theory. *J.Sound.Vib.*, 91:503–518, 1983.
- [31] LEBEDEVA I., DRAGAN S. et ZHDANOV R. High Intensity Sound Absorbers. *Fourth International Congress on Air and Structure-Borne Sound and Vibration*, pages 1183–1187, 1996. St Petersburg, Russie, 1996.
- [32] SULLIVAN W. et CROCKER M.J. Analysis of Concentric-Tube Resonators Having Unpartitioned Cavities. *J.Acoust.Soc.Am.*, 64:207–215, 1978.
- [33] INGARD U. et LABATE S. Acoustic Circulation Effects and the Nonlinear Impedance of Orifices. *J.Acoust.Soc.Amer.*, 22:211–219, 1950.

Deuxième partie

MODÉLISATION DE TRAITEMENTS ACOUSTIQUES RÉACTIFS À RÉACTION NON LOCALE DANS LES CONDUITS

Table des matières

de la deuxième partie

II MODÉLISATION DE TRAITEMENTS ACOUSTIQUES RÉACTIFS À RÉACTION NON LOCALE DANS LES CONDUITS

Introduction	53
1 Propagation acoustique dans les guides couplés	57
1.1 Énoncé du problème	57
1.2 Couplage entre $(m + n)$ modes et n trous latéraux	59
1.2.1 Matrice perforation	62
1.2.2 Exemple de couplage des premiers modes supérieurs	63
1.3 Réseau de longueur finie	67
1.3.1 Calcul par matrice admittance locale	68
1.3.2 Calcul de la perte par insertion	70
1.4 Conclusion	72
2 Modes plans couplés dans un réseau périodique	75
2.1 Calcul de la relation de dispersion	77
2.2 Dispersion dans un guide à résonateurs couplés	81
2.2.1 Deux cas extrêmes	82
2.2.2 Fréquences de coupure et de résonance	83
2.2.3 Bandes passantes et bandes d'arrêt dans le cas général	85
2.3 Matrice de transfert d'ordre quatre d'un réseau de N cellules	87
2.3.1 Vecteurs propres	87
2.3.2 Matrice de transfert d'une succession de N cellules asymétriques	88
2.3.3 Passage à une cellule symétrique	89
2.4 Matrice impédance pour N cellules symétriques	90
2.5 résonateurs coupés et silencieux à tubes perforés	93
2.5.1 Introduction	93
2.5.2 Conduit avec résonateurs couplés	94
2.5.3 Transition entre chambre d'expansion et long résonateur	98
2.5.4 Silencieux à tubes perforés avec partitions	100
2.6 Conclusion	103
Conclusion	103
Annexes	105

A	Calcul de l'équation de dispersion	107
B	passage matrice de transfert-matrice impédance	109
	Bibliographie	112

Introduction de la seconde partie

La dissipation et la réflexion sont deux principes utilisés afin de limiter la transmission de l'énergie acoustique dans les guides d'ondes passifs, en aval d'une source. La réduction du bruit dans les conduits comporte beaucoup d'applications comme les conduits de ventilation, les moteurs thermiques automobiles, les réacteurs d'avion, et plus récemment les tunnels ferroviaires. La revue faite par Lapin [1] donne une idée du nombre de publications dans ce domaine, et de l'intérêt de ce sujet en acoustique. Lorsque les *silencieux* ne doivent pas provoquer de trop grandes pertes de charge, les matériaux poreux sont écartés au profit des systèmes réactifs, susceptibles non pas de dissiper l'énergie mais de la réfléchir vers la source. Les modèles développés peuvent prendre en compte l'écoulement moyen dans le conduit à traiter (par exemple [2], [3] et [4] pour les silencieux automobiles), la propagation non linéaire liée à de forts niveaux acoustiques (voir [5] pour les tunnels ferroviaires), ou encore les pertes visqueuses non linéaires dans le traitement acoustique lui-même (par exemple [6] pour un silencieux à tubes perforés). Un silencieux peut être constitué d'un traitement acoustique ayant une structure périodique [7, 8]. Brillouin et Parodi [9] ont publié un ouvrage de référence passant en revue l'histoire de la propagation des ondes dans les milieux périodiques et proposent un formalisme s'appliquant à la cristallographie et aux guides d'ondes électromagnétiques ou acoustiques. Une revue publiée par Elachi [10] illustre les nombreux domaines où ce type de modèle est applicable.

Considérons un milieu homogène unidimensionnel présentant des discontinuités disposées régulièrement ; le milieu est un tuyau sonore de dimensions transversales petites devant la longueur d'onde. Lorsque ce milieu est de longueur infinie, la clé du problème consiste à résoudre l'équation de dispersion d'une cellule élémentaire et à déterminer les modes propres du réseau. De par son caractère périodique, le milieu est dispersif et comporte des bandes passantes et des bandes d'arrêt. Lorsque la fréquence d'excitation appartient à une bande d'arrêt, les modes propres du réseau sont évanescents, et l'on démontre qu'aucune énergie n'est transmise à travers le système, même en négligeant toute forme de dissipation [9]. En étudiant les vibrations solidiennes dans les plaques ou les poutres, Mead [11] a montré de façon très générale quelles étaient les conditions de transmission de l'énergie dans les guides d'ondes monodimensionnels complexes de structure périodique. Sommersel et Kristiansen [7] puis Åbom [8] ont conçu et mesuré les propriétés de silencieux acoustiques réactifs, constitués de réflecteurs disposés périodiquement dans un conduit (obstacles, discontinuités ou constriction).

Un second aspect vient s'ajouter aux bandes d'arrêt du réseau périodique dans le cas particulier des guides d'ondes acoustiques ; lorsqu'ils sont disposés en *dérivation* (cheminées ou résonateurs branchés par exemple), les réflecteurs provoquent en première approximation un saut de vitesse acoustique, et peuvent comporter des résonances, produisant des bandes d'arrêt supplémentaires (voir Depollier *et coll.* [14] pour une discussion). Ceci explique que classiquement, les acousticiens utilisent des résonateurs de Helmholtz branchés et disposés régulièrement comme traitement acoustique (par exemple [12], ou [15]). Les résonateurs de Helmholtz utilisés en aéronautique sont souvent couplés par paires [16, 17], pour ajuster l'atténuation optimale du traitement de paroi non plus sur une mais deux fréquences. Les traitements acoustiques des

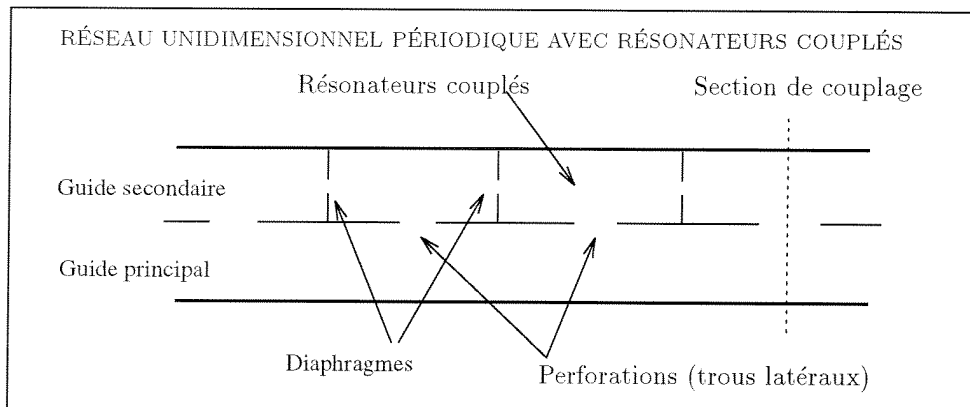


FIGURE : Exemple de réseau unidimensionnel inhomogène et périodique comportant des résonateurs couplés. Les solutions de l'équation de dispersion, et les modes propres du réseau sont connus dans deux cas : 1- les diaphragmes sont fermés (Résonateurs de Helmholtz branchés, voir par exemple Sugimoto et coll. [13]), 2- les diaphragmes sont totalement ouverts (voir Kergomard et coll. [17])

réacteurs actuels reposent sur cette conception mais, d'une façon générale, ce genre de solutions a atteint ses limites, et il s'avère nécessaire d'explorer d'autres configurations pour espérer une plus grande atténuation du son.

La question à l'origine de ce travail nous a été posée par les concepteurs de nacelles de réacteurs. Elle est la suivante : quels seraient les effets d'un couplage entre les résonateurs sur les performances d'un traitement acoustique aéronautique classique, constitué de résonateurs de Helmholtz branchés ? Prenons, pour fixer les idées, l'exemple simple d'un guide d'onde de faible diamètre devant la longueur d'onde, dont les résonateurs branchés en paroi ont été modifiés (voir figure ci-dessus) : chaque résonateur communique avec ses voisins immédiats, par l'intermédiaire d'un trou pratiqué dans ses parois latérales. L'ensemble des résonateurs constitue alors en lui-même un guide d'onde ; le champ acoustique dans le col des résonateurs n'est plus fermé sur une impédance connue et dépend du champ dans les résonateurs voisins (*réaction non locale*).

L'objet du premier chapitre de cette seconde partie est de proposer un modèle pour ce problème, pour un guide dont la géométrie est donnée par la figure 1.1 du premier chapitre. Nous considérons un guide de grand diamètre (m modes propagatifs), couplé en paroi à n guides secondaires, constitués de résonateurs de Helmholtz couplés longitudinalement. Le modèle analytique repose sur des hypothèses de linéarité, et d'écoulement moyen nul dans le système (que nous appellerons aussi réseau) ; le réseau acoustique de guides d'ondes est discrétisé en matrices de transfert, notées **PROP**, décrivant la propagation, et en matrices de couplage **PERF** entre les modes de chaque guide que nous appellerons matrices perforations. La matrice **PROP** prend ici une forme classique par blocs ($(m+n)$ biportes en parallèle) ; en revanche la matrice **PERF** sera déterminée grâce à une généralisation de la méthode intégrale modale que Kergomard et coll. [17] ont utilisée dans le cas du réseau de la figure. Un raisonnement sur le rapport entre les deux nombres m et n permettra de déduire les principales propriétés de cette matrice perforation. La formulation en matrices de transfert adoptée ci-dessus n'est pas adaptée au calcul des facteurs de perte par insertion ou par transmission, facteurs par lesquels on évalue généralement les performances des silencieux. Une méthode alternative, dite de *calcul par admittance locale* a précédemment été utilisée avec succès dans le cas de conduits à section continûment variable [18, 19] (modèle continu) ou pour les silencieux à tubes perforés [20] (modèle discret). Nous adapterons cette méthode au cas considéré ici en y intégrant une matrice perforation de forme

générale, pour finalement proposer une expression de la perte d'insertion par mode.

Dans le second chapitre, nous étudions le réseau périodique de la figure ci-dessus. Aux basses fréquences, seul le mode plan se propage dans les guides (principal et secondaire). Deux cas extrêmes sont connus : 1- les diaphragmes sont totalement fermés ; le système est constitué d'un guide traité en paroi par des résonateurs branchés (voir par exemple [13] pour la loi de dispersion et [21] pour la perte par insertion) ; 2- les diaphragmes sont totalement ouverts ; la matrice perforation a été calculée dans la référence [17], et la perte par insertion est celle d'un silencieux à tubes perforés (voir par exemple [4]). En faisant varier l'ouverture des diaphragmes, nous étudions en détail, et de façon analytique, la transition entre ces deux cas extrêmes, et l'effet du couplage des résonateurs, tant sur les solutions de l'équation de dispersion que sur la perte par insertion d'un système de longueur finie. D'un point de vue fondamental, ceci illustrera comment le couplage entre résonateurs affecte la bande d'arrêt due aux résonances de Helmholtz. D'un point de vue pratique, nous montrerons au paragraphe 2.5 comment le modèle présenté permet par exemple d'interpréter la transition entre long résonateur et chambre d'expansion, exposée par Sullivan *et coll.* [4], ou comment se modifie la perte par insertion d'un silencieux à tubes perforés lorsque des diaphragmes y sont ajoutés.

Chapitre 1

Propagation dans un système de guides d'ondes inhomogènes couplés

1.1 Énoncé du problème

La propagation du son est étudiée dans un guide d'onde complexe supposé de longueur infinie. Le système est constitué d'un guide principal rectiligne auquel on ajoute en paroi un traitement acoustique à réaction non locale¹. Le caractère dispersif d'un tel milieu de propagation est directement dicté par sa géométrie spatiale [9]. Le fluide est parfait, au repos et les parois sont parfaitement rigides.

Le système (ou réseau) étudié peut par exemple être représenté en géométrie cylindrique. La figure 1.1 donne l'exemple d'un réseau périodique suivant l'axe de propagation. Il est constitué d'un guide principal rectiligne et cylindrique (de section $S = \pi r_1^2$), couplé périodiquement en paroi à n guides secondaires sectoriels (de section $s = \frac{\pi}{n}(r_2^2 - r_1^2)$). Chaque guide secondaire (indice α) est couplé au guide principal par un trou latéral appelé *perforation* (de section S_α , $\alpha = 1..n$). Ces n perforations sont centrées sur des sections de couplage S_c ; ces dernières sont orthogonales à l'axe du cylindre principal. Sur la figure 1.1, le système représenté est périodique, et la longueur $2l$ (distance entre deux sections de couplage) correspond à la périodicité spatiale du réseau.

Les dimensions du réseau sont choisies de sorte que, aux fréquences considérées :

- 1- les perforations sont suffisamment espacées pour que les modes évanescents dus à leur présence n'interagissent pas avec ceux de la perforation la plus proche ; nous admettons cependant que si tel n'est pas le cas, le modèle n'est pas modifié qualitativement (voir pour une discussion [22]).
- 2- la section des guides secondaires est suffisamment petite pour que seul le mode plan y soit propagatif ;
- 3- m est le nombre de modes propagatifs dans le guide principal, lorsque les perforations sont obturées ;

Une approche directe de la propagation acoustique dans un réseau tel que celui de la figure 1.1 consiste par exemple à utiliser des matrices de transfert. Commençons par un cas simple ; soit un tube cylindrique rectiligne, dans lequel se propage une onde plane sinusoïdale.

¹. C'est-à-dire non modélisable par un impédance de paroi

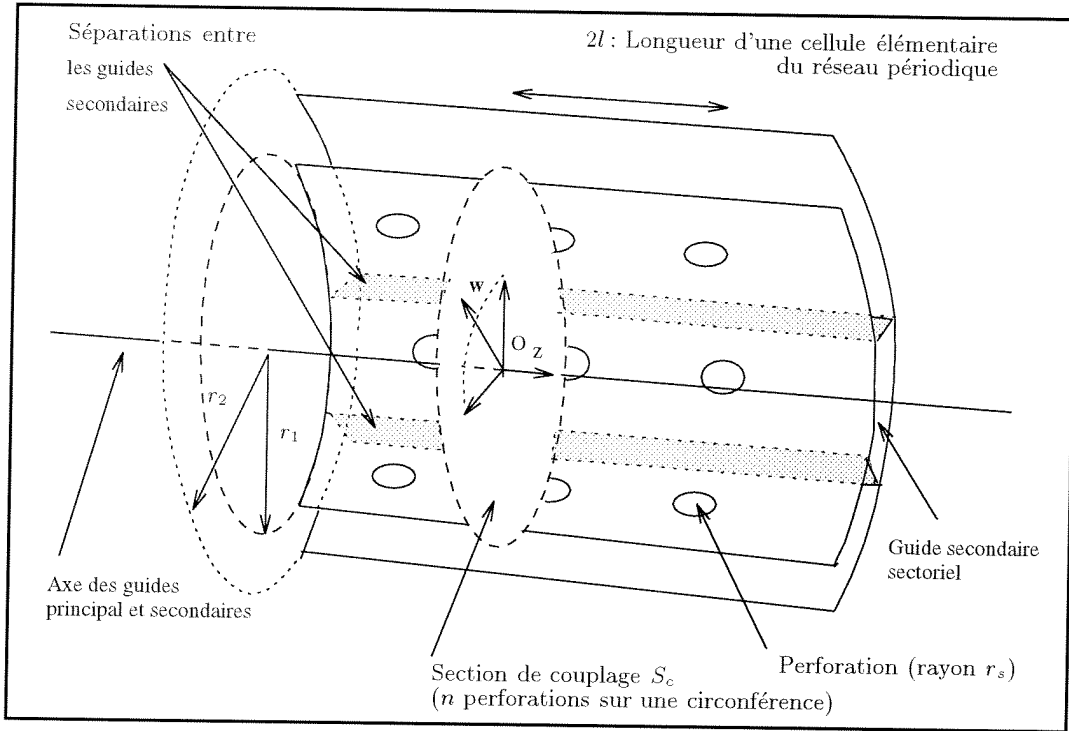


FIG. 1.1 - Description en géométrie cylindrique du type de réseau de guides d'ondes couplés étudié (ici, le réseau est périodique suivant l'axe Oz).

La matrice de transfert, notée T , de ce biporte est telle que :

$$\begin{pmatrix} p^{en} \\ u^{en} \end{pmatrix} = (T) \begin{pmatrix} p^{so} \\ u^{so} \end{pmatrix},$$

où p^{en} , u^{en} , et p^{so} , u^{so} désignent la pression et le débit acoustiques respectivement à l'entrée et à la sortie du biporte. Dans le cas choisi ici, et en négligeant les pertes lors de la propagation, les éléments de cette matrice s'écrivent

$$T_{11} = T_{22} = \cos(kl) \quad T_{12} = jZ_c \sin(kl), \quad T_{21} = (j/Z_c) \sin(kl),$$

où j est l'unité imaginaire, c est la célérité du son, ρ la densité de l'air et $Z_c = \rho c/S$ l'impédance caractéristique du mode plan (rapport pression débit), $k = \omega/c$, ω est la pulsation, et l la longueur du biporte. Cette matrice T représente un biporte symétrique ($T_{11} = T_{22}$) et réciproque ($\text{Det}(T) = 1$). L'avantage de ce type de matrice est que pour obtenir la matrice de transfert R d'une succession de N biportes mis bout à bout, il suffit de multiplier les matrices de transfert de chaque biporte (dans le cas du réseau périodique de la figure 1.1, $R = T^N$). Lorsque la fréquence est suffisamment élevée, plusieurs modes transversaux (disons m) se propagent simultanément dans une portion de guide rectiligne, et la matrice de transfert décrivant la propagation des modes, notée **PROP**, prend la forme simple d'une matrice diagonale par blocs, chaque bloc étant de la forme de la matrice T ci-dessus (en fait un $2m$ portes constitué de m biportes indépendants).

D'après la figure 1.1, la matrice de transfert d'une cellule élémentaire du réseau sera le résultat du produit de deux matrices : d'une part la matrice propagation **PROP**, diagonale par blocs, ($2(m+n)$ portes), et d'autre part une matrice de perforation, notée **PERF**, permettant

d'exprimer le champ acoustique à gauche d'une section de couplage S_c , en fonction du champ acoustique à droite de celle-ci. La difficulté réside dans le calcul de cette matrice perforation.

Une matrice perforation a déjà été obtenue dans la référence [13] lorsque deux modes plans, se propageant dans deux guides rectilignes, sont couplés par une perforation, en tenant compte des modes acoustiques symétriques et antisymétriques sur la surface de cette perforation. Notre travail consiste (paragraphe 1.2) à reprendre la méthode intégrale modale utilisée par ces auteurs et de l'appliquer au cas présenté sur la figure 1.1. Nous obtiendrons ainsi une matrice perforation, couplant les m modes du guide principal, avec les n modes plans des guides secondaires. Ce résultat prendra en compte la moyenne de la vitesse acoustique sur les perforations (piston plan), ce qui revient à négliger la discontinuité entre les pressions de part et d'autre d'une perforation.

Supposons maintenant que les guides secondaires de la figure 1.1 soient fermés à l'entrée et à la sortie d'un réseau de N cellules par un mur rigide. Nous obtenons un guide d'onde cylindrique de grand diamètre, traité en paroi par un traitement acoustique à réaction non locale et constitué d'un nombre fini de cellules. L'objectif du paragraphe 1.3 est de calculer la perte par insertion de ce traitement acoustique (rapport en dB des puissances émises sans traitement et avec traitement). Une expression analytique de la perte par insertion n'est pas disponible pour la configuration étudiée ici. L'utilisation de matrices de transfert afin d'obtenir le résultat numériquement pose plusieurs problèmes, notamment de divergence (voir [18] pour un modèle discrétisé et [19] pour un milieu continu). L'objectif du paragraphe 1.3 est de reformuler une méthode de calcul par admittance locale [18, 19, 20] dans le cas où les modes supérieurs du guide principal sont couplés aux modes plans des guides secondaires. L'effet des modes supérieurs sur les perforations est pris en compte dans le résultat.

1.2 Equation générale de couplage entre $(m + n)$ modes propagatifs dans un guide et n trous latéraux sur une section de couplage

Les étapes permettant d'obtenir la matrice perforation du système représenté par la figure 1.1 sont les suivantes : l'équation intégrale de Helmholtz-Huyghens est utilisée pour écrire la relation entre l'amplitude du champ acoustique sur les n perforations d'une section de couplage, et les coefficients modaux du champ acoustique dans le guide principal, à droite et à gauche de la section de couplage. Nous reprenons ensuite la même démarche dans chaque guide secondaire. L'élimination du champ acoustique sur les perforations permettra enfin de définir une matrice perforation dont les éléments seront explicités.

Considérons un guide rectiligne infini de section S , orienté selon l'axe des z , ainsi que n perforations sur les parois du guide, centrées en $z = 0$ (une seule section de couplage) ; la pression acoustique $p_o(\mathbf{r})$ dans ce guide est solution de l'équation d'onde en régime sinusoïdal dans le guide (on omettra dorénavant le facteur $e^{j\omega t}$ où t est le temps). Elle peut être décomposée en deux termes se propageant en sens opposé suivant l'axe (Oz) du guide :

$$p(\mathbf{r}) = p^+(\mathbf{r}) + p^-(\mathbf{r}) \quad (1.1)$$

où $\mathbf{r} = (\mathbf{w}, z)$ est le vecteur position dans le guide. La présence des perforations modifie la pression dans le guide, et la pression $p(\mathbf{r})$ est solution de l'équation intégrale de Helmholtz-Huyghens. Notons S_G la surface du système constituée d'une portion de guide, fermée à chaque extrémité, incluant les n perforations de la section de couplage. Lorsque les sources sont en

dehors du domaine d'intégration, la pression s'écrit [23] :

$$p(\mathbf{r}) = \int_{S_G} \{G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \partial_{n'} p(\mathbf{r}') - p(\mathbf{r}') \partial_{n'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} dS', \quad (1.2)$$

où $\partial_{n'}$ est la dérivée normale sortante à la surface S_G d'intégration, et $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est une fonction de Green du guide infini sans perforation.

Les considérations suivantes permettent de transformer l'équation intégrale (1.2) en solution intégrale :

- 1- les intégrations sur les parties de la surface S_G qui constituent chacune des terminaisons du guide, représentent la pression générée par ces surfaces et peuvent être interprétées comme les contributions $p^{g+}(\mathbf{r})$ (venant de la gauche) et $p^{d-}(\mathbf{r})$ (venant de la droite) des sources situées hors du domaine d'intégration ;
- 2- la dérivée de la pression s'annule sur les parois rigides du guide ;
- 3- la dérivée de la fonction de Green s'annule sur les parois rigides du guide, ainsi que sur la surface des perforations.

La solution de l'équation (1.2) peut alors s'écrire comme la somme de la pression en l'absence de perforations (due à la présence de sources hors du domaine d'intégration) et d'une intégrale sur les surfaces S_α ($\alpha = 1..n$) des perforations. En utilisant l'équation d'Euler, il vient :

$$p(\mathbf{r}) = p^{d+}(\mathbf{r}) + p^{d-}(\mathbf{r}) - j\omega\rho \sum_{\alpha=1}^n \int_{S_\alpha} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{r}') dS', \quad (1.3)$$

où $\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{r}')$ est la vitesse particulière, selon la normale sortante à la surface S_α .

L'équation (1.3) est utilisée ci-dessous pour décrire le couplage entre le champ acoustique dans le guide principal et les n pressions et vitesses acoustiques sur les perforations. La vitesse acoustique $\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{r}')$ est supposée uniforme sur les perforations.

Equation de couplage guide principal-perforations

Considérons d'abord le guide principal, muni d'un repère (O, \mathbf{w}, z) , et dans lequel les perforations sont obturées. La pression et la vitesse acoustiques se décomposent classiquement sur la base orthonormée des modes transversaux $\psi_i(\mathbf{w})$ du guide rectiligne infini sans perforations. Chaque mode a suivant l'axe Oz de propagation, un nombre d'onde $k_i = \sqrt{k^2 - \eta_i^2}$, et une fréquence de coupure $\omega_i = c\eta_i$ (on note c la célérité du son et $k = \frac{\omega}{c}$). Les indices croissants i correspondent à l'ordre croissant des fréquences de coupure ω_i , qui dépendent de la géométrie de la section transversale S du guide. Considérons les deux matrices diagonales suivantes :

$$E_{ij}^\pm(z) = e^{\pm k_i z} \delta_{ij}, \text{ et } Z_{c_{ij}} = \frac{\rho c}{S} \frac{k}{k_i} \delta_{ij},$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. La pression $p_1(\mathbf{r})$ et le débit $u_1^z(\mathbf{r}) = S v_1^z(\mathbf{r})$ suivant l'axe Oz dans le guide principal, peuvent s'écrire comme une somme infinie sur la base orthonormée des modes $\psi_i(\mathbf{w})$. Sous forme matricielle, il vient pour $p_1(\mathbf{r})$ et $u_1^z(\mathbf{r})$:

$$p_1(\mathbf{r}) = {}^t\psi(\mathbf{w}) [E^+(z) \mathbf{P}_1^+ + E^-(z) \mathbf{P}_1^-], \quad (1.4)$$

$$u_1^z(\mathbf{r}) = {}^t\psi(\mathbf{w}) Z_c^{-1} [E^+(z) \mathbf{P}_1^+ - E^-(z) \mathbf{P}_1^-], \quad (1.5)$$

où $\psi(\mathbf{w})$ est le vecteur colonne constitué des fonctions propres $\psi_i(\mathbf{w})$ du guide principal et \mathbf{P}_1^\pm est le vecteur colonne dont la $i^{\text{ème}}$ coordonnée est le coefficient modal de l'onde de pression associée au nombre d'onde $\pm k_i$.

Considérons maintenant le champ acoustique sur les perforations. Dans ce qui suit, nous écrivons que la vitesse normale est uniforme (piston plan) sur la surface des perforations. L'effet des modes supérieurs de perforation a été étudié dans la référence [13], dans le cas où il n'y a qu'un seul guide secondaire ($n = 1$) et où la fréquence est assez basse pour que seul le mode plan se propage dans les deux guides.

Le débit, et la pression sur les perforations seront notés : U_α^{pe} et P_α^{pe} ($\alpha = 1..n$). En projetant l'équation (1.3) sur les modes transversaux du guide à droite et à gauche de la section de couplage, et en en prenant la moyenne sur les n surfaces S_α des perforations, nous obtenons après quelques manipulations un système de trois équations vectorielles reliant les coefficients modaux à droite et à gauche de la section de couplage aux amplitudes sur les n perforations ; ce système s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{P}_1^g - \mathbf{P}_1^d = 0 \\ \mathbf{U}_1^g - \mathbf{U}_1^d = {}^t\mathbf{A}\mathbf{U}^{pe} \\ \mathbf{P}^{pe} = -\mathbf{H}\mathbf{U}^{pe} + \mathbf{A}\mathbf{P}_1^d \end{cases} \quad (1.6)$$

où les quantités sont définies de la façon suivante :

- $\mathbf{P}_1^g = \mathbf{P}_1^{g+} + \mathbf{P}_1^{g-}$, (respectivement $\mathbf{P}_1^d = \mathbf{P}_1^{d+} + \mathbf{P}_1^{d-}$), est le vecteur colonne constitué des coefficients modaux de la pression acoustique à gauche (respectivement à droite) de la section de couplage ;
- $(\mathbf{U}_1^g) = Z_c^{-1}[\mathbf{P}_1^{g+} - \mathbf{P}_1^{g-}]$, (respectivement $(\mathbf{U}_1^d) = Z_c^{-1}[\mathbf{P}_1^{d+} - \mathbf{P}_1^{d-}]$), est le vecteur colonne constitué des coefficients modaux de la vitesse acoustique à gauche, (respectivement à droite) de la section de couplage (au facteur S près) ;
- \mathbf{P}^{pe} et \mathbf{U}^{pe} désignent les vecteurs colonnes ($n \times 1$) ayant pour coordonnées l'amplitude de la pression P_α^{pe} et du débit U_α^{pe} sur les n perforations (pistons plans).
- les éléments de la matrice \mathbf{A} sont donnés par :

$$A_{\alpha i} = \frac{1}{S_\alpha} \int_{S_\alpha} \psi_i(\mathbf{w}) \cos(k_i z) dS ; \quad (1.7)$$

- enfin, la matrice impédance mutuelle \mathbf{H} ($n \times n$) est définie par :

$$H_{\alpha\beta} = \frac{j\omega\rho}{S_\alpha S_\beta} \int_{S_\alpha} \int_{S_\beta} \text{Re}[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dS dS', \quad (1.8)$$

où la fonction de Green du guide $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ s'écrit pour $z' > z$ de la façon suivante (voir par exemple [23] p 516) :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2j\omega\rho} {}^t\psi(\mathbf{w}) Z_c E^+(z) E^-(z') \psi(\mathbf{w}'). \quad (1.9)$$

Nous constatons que la matrice \mathbf{H} est symétrique, par définition ; de plus, il est possible de montrer que les éléments de \mathbf{H} sont des inductances, aux basses fréquences. Le système d'équations (1.6) généralise le résultat obtenu par Kergomard *et coll.* [13]. En toute généralité, il est composé de matrices et de vecteurs ayant une infinité d'éléments. Si les sections de couplage sont suffisamment éloignées entre elles (hypothèse 1 du paragraphe 1.1), alors les modes évanescent du guide principal sont fermés, à droite et à gauche de la section de couplage, sur leur impédance caractéristique [24]. Le système (1.6) reste valable en le tronquant pour ne garder que les modes propagatifs. Dans ces conditions, il se réduit à un système de $(2m + n)$ équations scalaires et \mathbf{A} est une matrice ($n \times m$). Dans le cas contraire, le système (1.6) ne change pas de forme, l'effet du couplage des modes évanescent pouvant être incorporé aux éléments des matrices \mathbf{A} et \mathbf{H} [22].

Equation de couplage guides secondaires-perforations

Pour décrire le couplage du mode plan se propageant dans un guide secondaire avec la perforation, il suffit de reprendre la démarche adoptée pour le système (1.6), à ceci près que seul le mode plan se propage dans le guide qui est couplé à la perforation. Avec un vecteur normal entrant, sur la perforation, il vient pour le guide secondaire numéro α couplé à la perforation notée S_α :

$$\begin{cases} p_\alpha^g - p_\alpha^d = 0 \\ u_\alpha^g - u_\alpha^d = -a' U_\alpha^{pe} \\ P_\alpha^{pe} = h' U_\alpha^{pe} + a' p_\alpha^d \end{cases} \quad (1.10)$$

où les quantités sont définies de la façon suivante :

- p_α^g (respectivement p_α^d), représente l'amplitude de la pression acoustique dans le guide secondaire à gauche (respectivement à droite) de la section de couplage ;
- u_α^g (respectivement u_α^d), représente l'amplitude du débit acoustique dans le guide secondaire à gauche (respectivement à droite) de la section de couplage ;
- P_α^{pe} et U_α^{pe} désignent la pression moyenne et le débit sur la perforation S_α ;
- la quantité adimensionnelle a' est définie par :

$$a' = \frac{1}{S_\alpha} \int_{S_\alpha} \cos(kz) dS_\alpha ; \quad (1.11)$$

- enfin, l'impédance h' s'écrit :

$$h' = \frac{j\omega\rho}{S_\alpha^2} \iint_{S_\alpha \times S_\alpha} \text{Re}[g_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dS_\alpha dS_\alpha, \quad (1.12)$$

où $g_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est la fonction de Green du guide secondaire infini.

1.2.1 Matrice perforation

L'obtention de la matrice que nous appelons perforation, décrivant la modification des coefficients modaux du champ acoustique dans chaque guide par le couplage des modes propagatifs via les perforations, consiste à éliminer des systèmes (1.6) et (1.10) les quantités acoustiques sur les perforations.

Nous pouvons pour cela créer d'après les équations (1.11) et (1.12), deux matrices diagonales :

$$A' = a' \delta_{\alpha\beta}, \quad H' = h' \delta_{\alpha\beta} \quad (1.13)$$

afin de mettre le système d'équations (1.10) sous la forme vectorielle suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{P}_2^g - \mathbf{P}_2^d = 0 \\ \mathbf{U}_2^g - \mathbf{U}_2^d = -{}^t A' \mathbf{U}^{pe} \\ \mathbf{P}^{pe} = H' \mathbf{U}^{pe} + A' \mathbf{P}_2^d \end{cases} \quad (1.14)$$

où \mathbf{P}_2 et \mathbf{U}_2 sont deux vecteurs ($n \times 1$) constitués des amplitudes de la pression p_α et du débit u_α ($\alpha = 1..n$) des modes plans dans les guides secondaires.

Même si ce système est formellement identique au système (1.6), chaque guide secondaire est séparé de son voisin par une paroi rigide (il n'y a pas de couplage circonferentiel entre résonateurs), le couplage entre les modes des guides secondaires ne peut donc s'opérer que via les perforations, et le champ acoustique présent dans le guide principal ; ceci est traduit par le

fait que les matrices H' et A' sont diagonales. Les systèmes (1.6) et (1.14) peuvent être résolus en posant

$$Y = Z^{-1}$$

où la matrice impédance $Z = H + H'$ est supposée inversible. La première étape consiste à éliminer la pression acoustique sur les perforations, en utilisant la troisième équation de chacun des systèmes (1.6) et (1.14). Nous obtenons ainsi une expression pour le débit acoustique sur chaque perforation. En introduisant cette expression dans la deuxième équation de chacun des systèmes, les quantités acoustiques sur les perforations sont éliminées. La matrice perforation notée PERF est écrite sous forme d'un assemblage de sous-matrices :

$$\text{PERF} = \begin{pmatrix} Id_{m \times m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Id_{n \times n} & 0 & 0 \\ Y_1 & -Y_2 & Id_{m \times m} & 0 \\ -Y_3 & Y_4 & 0 & Id_{n \times n} \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

avec les définitions suivantes :

$$Y = (H + H')^{-1}, \quad Y_1 = {}^tAYA \quad (1.16)$$

$$Y_2 = {}^tAYA', \quad Y_3 = A'YA \quad Y_4 = A'YA'. \quad (1.17)$$

La matrice A est donnée par l'équation (1.7). Les matrices $Id_{n \times n}$ et $Id_{m \times m}$ sont des matrices identité d'ordre n et m . Cette matrice permet de calculer les coefficients des modes propagatifs à gauche d'une section de couplage S_c en fonction des mêmes coefficients à droite :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^g \\ \mathbf{P}_2^g \\ \mathbf{U}_1^g \\ \mathbf{U}_2^g \end{pmatrix} = \text{PERF} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^d \\ \mathbf{P}_2^d \\ \mathbf{U}_1^d \\ \mathbf{U}_2^d \end{pmatrix}.$$

Il est à noter que même dans le cas où les perforations n'ont pas toutes la même géométrie ni les mêmes dimensions, et indépendamment de la géométrie de sections transversales des guides secondaires et principal, la matrice H est symétrique par construction ; les matrices H' et A' sont diagonales ; par conséquent, Y , Y_1 et Y_4 sont aussi des matrices symétriques. D'autre part, d'après les définitions ci-dessus, et sachant que A' est symétrique, nous pouvons écrire :

$$Y_2 = {}^tY_3.$$

En revanche, la structure et les symétries de la matrice A ($n \times m$) (éq. 1.7) dépendent directement du rapport existant entre le nombre de modes propagatifs m dans le guide principal, et le nombre de perforations n sur la circonférence d'une section de couplage. Ceci est discuté dans le paragraphe suivant. Notons aussi que la matrice perforation obtenue (éq. 1.15) est triangulaire par blocs : l'approximation du piston plan sur chacune des perforations implique directement que, la pression est conservée dans chaque guide au passage de la section de couplage.

1.2.2 Exemple de couplage longitudinal des premiers modes supérieurs en géométrie cylindrique

L'objectif de ce paragraphe est d'explicitier les éléments de la matrice perforation (éq. 1.15) dans le cas particulier suivant : la géométrie est cylindrique, trois modes se propagent dans le guide principal ($m = 3$), et deux guides secondaires constituent le traitement acoustique ($n = 2$). Les propriétés de symétrie concernant les matrices A , et A' , et H sont présentées ci-dessous.

Géométrie cylindrique

Dans le cas où le guide principal est cylindrique, muni d'un repère (O, r, θ, z) , et de rayon r_1 , nous cherchons la forme que prend alors la matrice perforation. Les modes propres du guide cylindrique s'écrivent :

$$\psi_i(\mathbf{w}) = \psi_{pq}(\mathbf{w}) = N_{pq} \cos(p\theta + \phi_p) J_p(\gamma_{pq} \frac{r}{r_1}),$$

où N_{pq} est une constante de normalisation, ϕ_p est une constante qui dépend du choix du repère, γ_{pq} est le $(q+1)^{\text{ème}}$ zéro de la dérivée de la fonction de Bessel J_p , et l'indice i numérote l'ordre croissant des γ_{pq} . Les trois premiers modes propagatifs ($i = 0, 1$ ou 2) sont tels que $q = 0$, et $p = 0, 1$, ou 2 . Nous choisissons par simplicité de réduire l'étude à ces trois modes du guide principal; d'après l'équation(1.7), nous pouvons alors écrire :

$$A_{\alpha i} = A_{\alpha p} = \frac{1}{S_\alpha} N_{p0} J_p(\gamma_{p0}) \int_{S_\alpha} \cos(p\theta + \phi_p) \cos(k_{p0} z) dS, \quad p = 0, 1, 2; \quad (1.18)$$

De même, à partir de la définition de la matrice \mathbf{H} (éq. 1.8), il vient en géométrie cylindrique :

$$H_{\alpha\beta} = \frac{j\omega\rho}{S_\alpha S_\beta} \int_{S_\alpha} \int_{S_\beta} \sum_{p,q} \frac{N_{pq}^2 J_p(\gamma_{pq})}{2S} \sin(k_{pq}(z' - z)) \cos(p\theta + \phi_p) \cos(p'\theta + \phi'_p) dS dS'. \quad (1.19)$$

Dans les sous-paragraphes qui suivent, nous explicitons les matrices \mathbf{H} et \mathbf{A} dans le cas particulier de la figure 1.2. Nous montrons ci-dessous que le cas de deux guides secondaires identiques ($n = 2$), disposés en vis-à-vis et couplés aux trois premiers modes propagatifs ($m = 3$) du guide principal par deux perforations identiques, est un cas particulier pour la matrice perforation. La matrice $\mathbf{Y}_1 = {}^t\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}$ est alors diagonale: les modes du guide principal ne sont pas directement couplés entre eux par le passage de la perforation, mais uniquement par le biais des modes plans dans les deux guides secondaires.

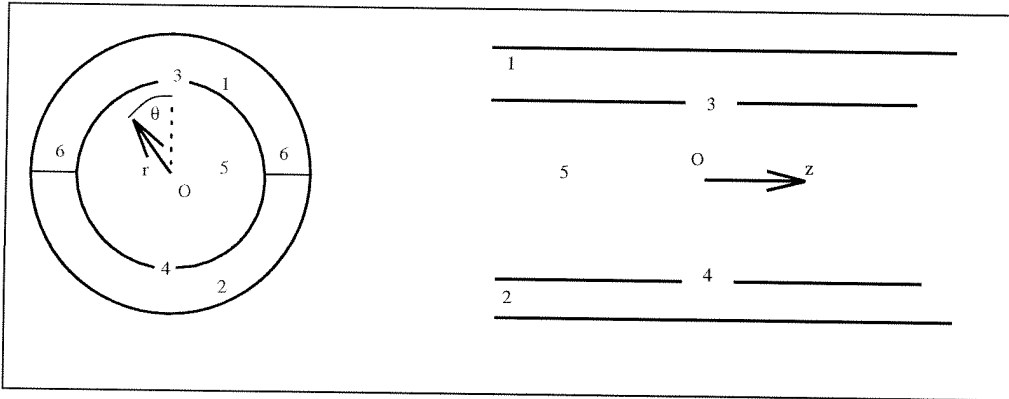


FIG. 1.2 - Configuration d'une cellule élémentaire du réseau pour $n = 2$. (1. et 2. : guides secondaires, 3. et 4. : perforations, 5. : guide principal cylindrique, 6. : séparation entre les guides secondaires)

Symétries de la matrice \mathbf{H} (1.8)

En prenant comme point de départ l'expression de la matrice \mathbf{H} dans le cas particulier de la géométrie cylindrique (éq. 1.19), nous supposons que toutes les perforations d'une même section

de couplage ont la même géométrie, et sont réparties sur la circonférence de façon régulière. Nous effectuons dans la deuxième intégrale le changement de variable $\phi'' = \phi' + 2\pi(\beta - \alpha)/n$, permettant de passer de la perforation S_β , à la perforation S_α . Dans ces conditions, il vient :

$$H_{\alpha\beta} = \sum_p^{\infty} \cos\left[\frac{2\pi p}{n}(\beta - \alpha)\right] H_1(p) + \sum_p^{\infty} \sin\left[\frac{2\pi p}{n}(\beta - \alpha)\right] H_2(p), \quad (1.20)$$

avec

$$H_1(p) = \frac{j\omega\rho}{S_\alpha^2} \int_{S_\alpha} \int_{S_\alpha} \sum_q^{\infty} \frac{N_{pq}^2 J_p(\gamma_{pq})}{2S} \sin(k_{pq}(z' - z)) \cos(p\theta + \phi_p) \cos(p'\theta + \phi'_p) dS dS'',$$

et

$$H_2(p) = \frac{j\omega\rho}{S_\alpha^2} \int_{S_\alpha} \int_{S_\alpha} \sum_q^{\infty} \frac{N_{pq}^2 J_p(\gamma_{pq})}{2S} \sin(k_{pq}(z' - z)) \cos(p\theta + \phi_p) \sin(p'\theta + \phi'_p) dS dS''.$$

Lorsque $n = 2$ (deux guides secondaires), d'une part le second terme de l'équation (1.20) est nul, et d'autre part $\cos\left[\frac{2\pi p}{n}(\beta - \alpha)\right] = (-1)^{p(\beta - \alpha)}$ avec $\alpha = 1, 2$ et $\beta = 1, 2$. Dans ce cas particulier, la matrice H prend la forme suivante :

$$H_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \sum_{p=0}^{\infty} H_1(p) & \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p H_1(p) \\ \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p H_1(p) & \sum_{p=0}^{\infty} H_1(p) \end{pmatrix}.$$

Même dans le cas simple envisagé ici ($n = 2$), nous sommes confrontés au calcul des deux éléments indépendants de la matrice $H_{\alpha\beta}$ (un diagonal est un non diagonal); chaque terme est une série doublement infinie, comportant les zéros des fonctions de Bessel J_p , à intégrer la surface de deux perforations (dont la surface n'est pas plane en géométrie cylindrique). Le même travail est ensuite à effectuer pour obtenir les éléments diagonaux de la matrice H' , grâce à la fonction de Green des guides secondaires (sectoriels). Une évaluation détaillée des éléments de la matrice perforation est disponible dans le cas particulier d'une seule perforation, couplée au mode plan; en étudiant les instruments de musique à trous latéraux, Keefe [25] en a donné une valeur approchée en géométrie cylindrique, lorsque le rayon de la perforation est petit devant celui du guide. Lorsque comme ici, plusieurs modes du guide principal sont couplés à plusieurs perforations, l'évaluation des éléments de la matrice perforation n'a pu être effectuée par manque de temps. La forme de la matrice A , présentée dans le sous-paragraphe suivant permet cependant de mettre en évidence une propriété intéressante de la matrice perforation.

Calcul de la matrice A (1.7)

Nous cherchons à écrire le terme général de la matrice A ; pour cela, nous choisissons de définir les deux quantités suivantes :

$$a_p = \frac{1}{S_1} N_{p0} J_p(\gamma_{p0}) \int_{S_1} \cos(p\theta + \phi_p) \cos(k_{p0}z) dS,$$

et

$$b_p = \frac{1}{S_1} N_{p0} J_p(\gamma_{p0}) \int_{S_1} \sin(p\theta + \phi_p) \cos(k_{p0}z) dS,$$

alors, la première ligne de la matrice A s'écrit :

$$A_{1p} = a_p,$$

et, par un simple changement de variable dans l'intégrale le terme général de A s'écrit :

$$A_{\alpha p} = a_p \cos(2\pi p(\frac{\alpha}{n})) - b_p \sin(2\pi p(\frac{\alpha}{n})) \quad \alpha = 1..n. \quad (1.21)$$

Ce résultat est utile pour calculer les éléments de Y_1 , pour lesquels on obtient :

$$\begin{aligned} (Y_1)_{pp'} &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n {}^t A_{\alpha p} Y_{\alpha\beta} A_{\beta p'} \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n Y_{\alpha\beta} [a_p \cos(2\pi p(\frac{\alpha}{n})) - b_p \sin(2\pi p(\frac{\alpha}{n}))] [a_{p'} \cos(2\pi p'(\frac{\beta}{n})) - b_{p'} \sin(2\pi p'(\frac{\beta}{n}))]. \end{aligned} \quad (1.22)$$

On remarque que si $n = 2$, alors tous les termes en b_p et $b_{p'}$ sont nuls dans la double somme, et l'équation (1.22) s'écrit :

$$(Y_1)_{pp'} = a_p a_{p'} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 (-1)^{p\alpha} (-1)^{p'\beta} Y_{\alpha\beta}.$$

Le terme de droite est nul si l'on pose $p \neq p'$, car la matrice $Y_{\alpha\beta}$ est symétrique, et lorsque le réseau est tel que celui représenté par la figure 1.2, tous les termes diagonaux de Y sont identiques.

Pour ne pas avoir une matrice Y_1 diagonale lorsque $n = 2$, il suffit par exemple que les perforations ou les guides secondaires ne soient pas identiques, ou bien que les perforations ne soient pas disposées en vis-à-vis. Une autre solution consiste à poser $n = 3$ (trois perforations sur une section de couplage) ; dans ce cas, même en ne prenant en compte que le premier mode supérieur de guide principal ($p = 1$ et $q = 0$), la matrice Y_1 n'est pas diagonale et les modes supérieurs du guide principal sont directement couplés entre eux.

En conclusion, nous avons montré que dans le cas particulier où il n'existe que deux perforations sont identiques, et disposées en vis à vis sur une section de couplage, les trois premiers modes propagatifs du guide cylindrique principal ne sont couplés entre eux que via le champ acoustique sur les perforations.

Matrice perforation d'ordre quatre

Dans certaines conditions, les éléments de la matrice PERF (notée \mathcal{PERF} lorsqu'elle est d'ordre quatre) de l'équation (1.15) sont connus. Considérons un guide principal dont le diamètre est suffisamment petit devant la longueur d'onde pour qu'un seul mode soit propagatif ($m = 1$), des sections de couplage ne comportant qu'une seule perforation, et un seul guide secondaire ($n = 1$). Dans ce cas particulier, la matrice PERF (éq. 1.15) permet de retrouver la matrice perforation d'ordre quatre, déjà présentée dans la référence [13]. En disposant dans les vecteurs, les quantités relatives au guide principal en haut, et celles relatives au guide secondaire en bas, il vient pour la matrice perforation d'ordre quatre :

$$\mathcal{PERF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ [Y_1]_{11} & 1 & -[Y_2]_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -[Y_3]_{11} & 0 & [Y_4]_{11} & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

ce qui permet de relier les amplitudes du mode plan de part et d'autre de la section de couplage de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} p_1^g \\ u_1^g \\ p_2^g \\ u_2^g \end{pmatrix} = (\mathcal{PERF}) \begin{pmatrix} p_1^d \\ u_1^d \\ p_2^d \\ u_2^d \end{pmatrix},$$

où :

- p_g^1 (respectivement p_d^1) représente l'amplitude de pression du mode plan dans le guide principal, à gauche (respectivement à droite) de la section de couplage ;
- p_g^2 (respectivement p_d^2) représente l'amplitude de pression du mode plan dans le guide secondaire, à gauche (respectivement à droite) de la section de couplage ;
- u_g^1 (respectivement u_d^1) représente l'amplitude du débit dans le guide principal, à gauche (respectivement à droite) de la section de couplage ;
- u_g^2 (respectivement u_d^2) représente l'amplitude du débit dans le guide secondaire, à gauche (respectivement à droite) de la section de couplage.

Nous cherchons à évaluer les quatre éléments non diagonaux de la matrice perforation d'ordre quatre \mathcal{PERF} . À partir des équations (1.7) et (1.11), il est immédiat de constater que

$$A_{11} = a'.$$

Cette égalité découle directement du fait que les caractéristiques du mode plan sont communes à tous les guides, quelle que soit leur géométrie. En utilisant cette équation, ainsi que les définitions données par les équations (1.16) et (1.17), pour les matrices Y_1 , Y_2 , Y_3 , et Y_4 , nous obtenons simplement que :

$$[Y_1]_{11} = [Y_2]_{11} = [Y_3]_{11} = [Y_4]_{11} = Y_s,$$

où Y_s est l'admittance de perforation classique, dont une évaluation détaillée est donnée dans la référence [13] lorsque la vitesse acoustique n'est pas constante sur la section de la perforation. Kergomard *et coll.* ont alors montré que Y_s est une admittance de couplage en parallèle des deux guides correspondants, due à l'existence de modes acoustiques symétriques sur la perforation. Lorsque comme ici, l'air est supposé vibrer en piston plan sur la perforation (premier mode symétrique), nous choisissons simplement pour $1/Y_s$ l'impédance d'un diaphragme de rayon r_s dans un écran infini [26] (rapport pression-débit) ; ceci permet d'écrire :

$$\frac{1}{Y_s} = \frac{j\omega\rho}{2r_s}. \quad (1.24)$$

En toute rigueur, la valeur de l'admittance Y_s dépend de la géométrie des guides d'ondes et de la perforation (voir [27] pour une évaluation en géométrie rectangulaire, et [13] pour une discussion sur les résultats disponibles dans la littérature). Cette valeur est modifiée lorsqu'il y a un écoulement moyen dans le système, ou lorsque le niveau est tel que l'impédance de perforation dépend du module de la vitesse sur la perforation (régime non linéaire). La valeur de l'admittance Y_s donnée par l'équation (1.24) sera utilisée dans le chapitre 2, pour étudier la propagation de deux modes plans couplés dans un réseau de deux guides d'ondes inhomogènes.

1.3 Réseau de longueur finie et méthode numérique de calcul de la perte par insertion

D'une façon générale, la formulation par matrice de transfert que nous avons utilisée ci-dessus est satisfaisante pour étudier la propagation dans un système de guides d'ondes couplés. Lorsque le réseau est de longueur finie (N cellules) et s'insère dans un conduit pour constituer un silencieux, il est nécessaire de connaître la matrice de transfert \mathbf{R} des N cellules (lorsque le réseau est périodique, on a simplement $\mathbf{R} = \mathbf{P}^N$ où \mathbf{P} est la matrice de transfert d'une cellule élémentaire du réseau). Les conditions aux limites sur les quantités acoustiques en début et

en fin de réseau permettent de caractériser totalement le système, en obtenant une matrice de transfert R' d'ordre inférieur à R .

Cette approche, séduisante par sa simplicité, est en pratique plus difficilement applicable qu'il n'y paraît. Prenons l'exemple d'un réseau périodique. D'une part, le calcul de $R = P^N$ est en général difficile à réaliser analytiquement; d'autre part, lorsqu'une paire des valeurs propres $e^{\pm\Gamma}$ de la matrice P d'une cellule élémentaire correspond à un mode évanescent du réseau, la constante de propagation Γ est réelle. Le calcul numérique de P^N n'est alors possible que pour un faible nombre de cellules (ou plus exactement $N\Gamma$ petit).

Pour résoudre cette difficulté, une méthode dite de *calcul par matrice admittance locale*, a précédemment été présentée dans les références [18, 19, 20], appliquée à divers problèmes. Dans la référence [20], les auteurs ont comparé leurs résultats numériques à un calcul par matrice de transfert publié par Sullivan [2], et montré clairement l'efficacité de l'approche adoptée, supprimant les instabilités numériques dues à de très grandes valeurs propres de matrices à multiplier, correspondant aux modes évanescents. Le problème traité dans la référence [20] comporte trois guides et trois modes plans couplés par des perforations où l'air vibre en piston plan. La méthode utilisée est formellement généralisée ci-dessous, lorsque des modes supérieurs sont présents sur les perforations et dans les guides. Une expression de la perte par insertion par mode est proposée dans le cas particulier où les guides secondaires sont fermés par un mur rigide en début et en fin de réseau.

1.3.1 Calcul par matrice admittance locale

Pour décrire la méthode de calcul par matrice admittance locale, nous partons d'un cas simple: un tube rectiligne de longueur finie, dans lequel se propage le mode plan; le biporte acoustique associé est symétrique, réciproque; nous le choisissons orienté antisymétriquement (pour fixer les idées, de la gauche —l'entrée— vers la droite —la sortie).

Connaissant l'admittance de sortie du biporte, nous cherchons son admittance d'entrée. La matrice admittance caractérisant un tel biporte prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} u^{so} \\ u^{en} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Y_a & Y_b \\ -Y_b & Y_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{so} \\ p^{en} \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

où p^{en} , u^{en} , p^{so} , et u^{so} sont les pressions et débits acoustiques, respectivement à l'entrée et à la sortie du biporte. En supposant connue l'admittance de sortie du biporte $Y^{so} = u^{so}/p^{so}$, l'équation (1.25) est alors équivalente à :

$$Y^{en} = Y_a - Y_b^2(Y^{so} + Y_a)^{-1}, \quad (1.26)$$

ce qui permet d'obtenir $Y^{en} = u^{en}/p^{en}$, c'est-à-dire l'admittance d'entrée du biporte. Dans le cas où la pression à l'entrée du système p^{en} est connue (comme par exemple lorsque l'on cherche à calculer le coefficient de perte par insertion), la pression à sa sortie est donnée d'après l'équation (1.25) par :

$$p^{so} = \frac{(Y_a - Y^{en})}{Y_b} p^{en}. \quad (1.27)$$

Il est à noter que cela revient à remplacer une matrice d'ordre deux (éq. 1.25) par deux relations scalaires (éq. 1.26 et 1.27). Supposons que le biporte soit remplacé par un multiporte composé de q biportes, indépendants, de même longueur, et ne communiquant pas entre eux (q est en fait le nombre total de modes, plans ou non, propagatifs dans les biportes); dans ce cas, les trois équations ci-dessus se généralisent immédiatement sous forme matricielle, comme suit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}^{so} \\ \mathbf{U}^{en} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Y_a & Y_b \\ -Y_b & Y_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{so} \\ \mathbf{P}^{en} \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

$$\mathbf{Y}^{en} = \mathbf{Y}_a - \mathbf{Y}_b(\mathbf{Y}^{so} + \mathbf{Y}_a)^{-1}\mathbf{Y}_b, \quad (1.29)$$

ainsi que

$$\mathbf{P}^{so} = \mathbf{Y}_b^{-1}(\mathbf{Y}_a - \mathbf{Y}^{en})\mathbf{P}^{en}, \quad (1.30)$$

où les quantités sont définies comme suit :

- \mathbf{P}^{en} et \mathbf{P}^{so} , sont les vecteurs colonne ($q \times 1$), constitués des amplitudes des pressions des modes propagatifs dans chaque guide, respectivement à l'entrée et à la sortie du système ;
- \mathbf{U}^{en} et \mathbf{U}^{so} sont les vecteurs colonne ($q \times 1$), constitués des amplitudes des vitesses acoustiques des modes propagatifs dans chaque guide (au facteur S_q près, où S_q est la surface du guide constituant le $q^{\text{ème}}$ biporte), respectivement à l'entrée et à la sortie du système ;
- \mathbf{Y}_a et \mathbf{Y}_b sont des matrices diagonales ($q \times q$), construites avec les éléments de la matrice admittance (éq. 1.25) pour chacun des guides ;
- \mathbf{Y}^{en} et \mathbf{Y}^{so} sont les *matrices admittance locale* ($q \times q$), respectivement à l'entrée et à la sortie du système.

Le formalisme ci-dessus présente l'avantage d'être tout aussi applicable lorsque le réseau n'est pas homogène (par exemple par la présence de diaphragmes ou de matériaux poreux dans certains des guides). De plus, l'ordre (ici q) des matrices manipulées (voir les équation 1.29 et 1.30) est deux fois inférieur à celui d'une matrice de transfert décrivant le même problème.

Étudions maintenant le cas où les guides sont couplés. Considérons q modes propagatifs (plans ou non), se propageant dans un réseau de guides ; admettons que les q modes soient couplés par des perforations. Supposons connue la matrice perforation reliant les amplitudes des modes acoustiques à droite et à gauche de la section de couplage. En généralisant l'équation (1.15), une forme de cette matrice peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}^g \\ \mathbf{U}^g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Sd}_1 & \mathbf{Z}_p \\ \mathbf{Y}_p & \text{Sd}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}^d \\ \mathbf{U}^d \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

où Sd_1 , et Sd_2 , sont deux matrices ($q \times q$) sans dimension ; le calcul donnant la matrice perforation (éq. 1.15) n'est pas assez général pour connaître les expressions des éléments des matrices Sd_1 , Sd_2 et \mathbf{Z}_p , mais nous avons vu dans le cas particulier où l'air vibre en piston plan sur les perforations, que, d'une part $\mathbf{Z}_p = 0$ et $\text{Sd}_1 = \text{Sd}_2 = Id_{q,q}$ et que, d'autre part \mathbf{Y}_p représente l'effet sur les modes propagatifs dans le réseau, des pistons plans sur des perforations. En prenant pour base l'équation (1.31), et en supposant connue la matrice admittance locale \mathbf{Y}^d ($q \times q$), à droite de la section de couplage, il est aisé de montrer que la matrice admittance locale \mathbf{Y}^g à gauche celle-ci s'écrit :

$$\mathbf{Y}^g = (\text{Sd}_1 + \mathbf{Z}_p \mathbf{Y}^d)^{-1}(\text{Sd}_2 \mathbf{Y}^d + \mathbf{Y}_p). \quad (1.32)$$

Cette équation décrit donc l'effet d'une section de couplage sur la matrice admittance locale. Il est à noter que lorsque l'air vibre en piston plan sur les perforations, ($\mathbf{Z}_p = 0$, et $\text{Sd}_1 = \text{Sd}_2 = Id_{q,q}$) l'effet des perforation dans l'équation (1.32) se limite à une simple addition (les admittances \mathbf{Y}_p et \mathbf{Y}^d sont en parallèle).

De même, l'effet des perforations sur la pression s'obtient à partir de l'équation (1.31) ; il vient :

$$\mathbf{P}^d = (\text{Sd}_1 + \mathbf{Z}_p \mathbf{Y}^d)^{-1} \mathbf{P}^g. \quad (1.33)$$

Dans le cas particulier où l'air vibre en piston plan sur les perforations, les équations (1.32) et (1.33) se simplifient pour donner :

$$\mathbf{Y}^g = (\mathbf{Y}^d + \mathbf{Y}_p) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}^d = \mathbf{P}^g. \quad (1.34)$$

Les deux équations (1.29) et (1.32), utilisées alternativement pour les portions du réseau où les guides ne sont pas couplés puis pour le passage des sections de couplage, permettent de

calculer la matrice admittance locale de façon itérative, en tout point du réseau, à partir de la matrice admittance locale de sortie. Une fois ce calcul fait et toutes ces matrices mémorisées, les équations (1.30) et (1.33) permettent à leur tour de connaître le vecteur pression dans le réseau et à sa sortie, connaissant la pression d'entrée. Il est à noter que l'ordre de ces opérations de la sortie vers l'entrée pour l'admittance locale et de l'entrée vers la sortie pour la pression, est fixé par les données du problème (la pression à l'entrée et l'admittance à la sortie); cet ordre n'est pas explicite dans la référence [20], bien que le succès de cette méthode itérative en dépende. Non décrivons ci-après en détail le processus de calcul, ainsi que la prise en compte des conditions aux limites à chaque extrémité du système, dans un cas particulier.

1.3.2 Calcul de la perte par insertion

Calculons la perte par insertion pour le réseau de la figure 1.1, dans le cas où les guides secondaires sont fermés, en début et en fin de réseau, par un mur rigide (figure 1.3). Le système est donc constitué d'un guide cylindrique de grand diamètre, dans lequel se propagent p modes; ce guide est traité en paroi sur une longueur finie par des guides secondaires fermés à chaque extrémité. Le réseau de longueur finie est constitué de $(N+1)$ portions de q biportes en parallèle; Les q biportes en parallèle sont couplés entre eux au niveau des N sections de couplage (voir figure 1.3).

La première étape du calcul consiste à obtenir les matrices admittance locale ($q \times q$) dans le réseau; la matrice admittance de sortie \mathbf{Y}^{so} ($q \times q$) est connue, et contient les conditions aux limites de fin de réseau, que nous expliciterons par la suite. Nous pouvons donc écrire

$$\mathbf{Y}^g(0) = \mathbf{Y}^{so}.$$

En remontant vers la source, la matrice admittance locale à droite de la première section de couplage est donnée par l'équation (1.29), décrivant l'effet de la propagation de tous les modes dans tous les biportes indépendants; il vient:

$$\mathbf{Y}^d(1) = \mathbf{Y}_a - \mathbf{Y}_b(\mathbf{Y}^g(0) + \mathbf{Y}_a)^{-1}\mathbf{Y}_b.$$

Le passage de la première section de couplage (éq. 1.32) donne:

$$\mathbf{Y}^g(1) = (\mathbf{Sd}_1 + \mathbf{Z}_p \mathbf{Y}^d(1))^{-1}(\mathbf{Sd}_2 \mathbf{Y}^d(1) + \mathbf{Y}_p).$$

En appliquant de ce cette façon $(N+1)$ fois la première équation et N fois la seconde, la matrice admittance locale $\mathbf{Y}^{en} = \mathbf{Y}^d(N+1)$ d'entrée du réseau est connue. Nous verrons plus loin comment lui appliquer les conditions aux limites à l'entrée.

La deuxième étape consiste à calculer les vecteurs pression du réseau, dont les coordonnées sont constituées des q coefficients modaux des modes qui sont propagatifs entre deux sections de couplage. Supposons le vecteur pression d'entrée $\mathbf{P}^{en} = \mathbf{P}^d(N+1)$ connu (vecteur colonne $q \times 1$). En appliquant alternativement l'équation (1.30) décrivant l'effet des q biportes, et l'équation (1.33) de couplage par les perforations, il vient pour le vecteur pression de sortie:

$$\mathbf{P}^{so} = \mathbf{F}(1) \mathbf{G}(1) \mathbf{F}(2) \mathbf{G}(2) \cdots \mathbf{G}(N-1) \mathbf{F}(N) \mathbf{G}(N) \mathbf{F}(N+1) \mathbf{P}^{en}, \quad (1.35)$$

où $\mathbf{G}(i) = (\mathbf{Sd}_1 + \mathbf{Z}_p \mathbf{Y}^d(i))^{-1}$ et $\mathbf{F}(i) = \mathbf{Y}_b^{-1}(\mathbf{Y}_a - \mathbf{Y}^d(i))$. Les pressions en sortie du réseau s'expriment aussi en fonction des pressions à l'entrée par:

$$\mathbf{P}^{so} = \mathbf{M} \mathbf{P}^{en}, \quad (1.36)$$

où le calcul de la matrice \mathbf{M} fait intervenir les $(N+1)$ matrices admittance locale $\mathbf{Y}^d(i)$ du réseau.

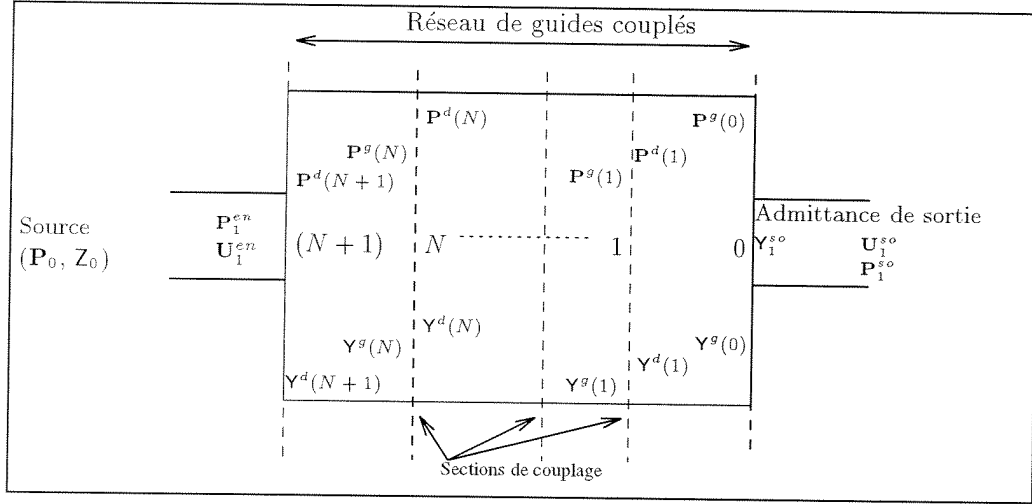


FIG. 1.3 - Schéma de calcul de la perte par insertion par matrice admittance locale, pour un réseau de guides en parallèle, couplés par des perforations situées sur N sections de couplage

La troisième étape introduit les conditions aux limites du réseau. Tous les guides secondaires de la première et de la dernière cellule sont fermés par un mur rigide. La vitesse acoustique aux endroits correspondants est donc nulle. Pour prendre en compte ces conditions, nous distinguons les modes du guide principal (disposés en haut) des modes dans les guides secondaires (en bas) comme suit :

$$\mathbf{P}^{en} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^{en} \\ \mathbf{P}_2^{en} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{U}^{en} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^{en} \\ \mathbf{U}_2^{en} \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

pour les vecteurs pression et vitesse, à l'entrée. De la même façon

$$\mathbf{P}^{so} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^{so} \\ \mathbf{P}_2^{so} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{U}^{so} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^{so} \\ \mathbf{U}_2^{so} \end{pmatrix}, \quad (1.38)$$

à la sortie du système. La condition de vitesse nulle aux extrémités du réseau s'écrit donc $\mathbf{U}_2^{en} = 0$ et $\mathbf{U}_2^{so} = 0$. Examinons maintenant la matrice admittance locale \mathbf{Y}^{so} de sortie. À cet endroit, tous les modes des guides secondaires sont découplés et sont fermés sur une admittance nulle (mur rigide). La matrice admittance des modes du guide principal $\mathbf{Y}_1^{so}(p \times p)$ est supposée connue (par exemple, la matrice est diagonale et les modes sont fermés sur leur admittance caractéristique). À la sortie du système, il vient :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^{so} \\ \mathbf{U}_2^{so} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1^{so} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^{so} \\ \mathbf{P}_2^{so} \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

À l'entrée du système, la matrice admittance locale $\mathbf{Y}^{en} = \mathbf{Y}^d(N+1)$ n'est pas diagonale, consécutivement au couplage par les perforations. En posant $\mathbf{Z}^{en} = (\mathbf{Y}^{en})^{-1}$, il vient :

$$\mathbf{P}^{en} = \mathbf{Z}^{en} \mathbf{U}^{en}.$$

En séparant les modes (éq. 1.37), la matrice \mathbf{Z}^{en} de l'équation précédente se décompose comme suit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^{en} \\ \mathbf{P}_2^{en} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1^{en} & \mathbf{Z}_2^{en} \\ \mathbf{Z}_3^{en} & \mathbf{Z}_4^{en} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^{en} \\ \mathbf{U}_2^{en} \end{pmatrix}, \quad (1.40)$$

De la même façon, en reformulant la matrice \mathbf{M} (éq. 1.36) par blocs, il vient :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^{so} \\ \mathbf{P}_2^{so} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^{en} \\ \mathbf{P}_2^{en} \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

Il reste à introduire les caractéristiques de la source, sous la forme d'un générateur de Thévenin d'impédance interne Z_0 , fournissant un vecteur pression \mathbf{P}_0 constitué de p modes dont l'amplitude est connue.

Lorsqu'il n'y a pas de traitement acoustique, la matrice impédance du générateur de Thévenin Z_0 et la matrice impédance de sortie $(Y_1^{so})^{-1}$ sont simplement disposées en série, et le vecteur pression de la source \mathbf{P}_0 s'exprime en fonction de la vitesse de sortie $(\mathbf{U}_1^{so})_S$ comme suit :

$$\mathbf{P}_0 = (Z)_S (\mathbf{U}_1^{so})_S, \quad (1.42)$$

où $Z_S = (Z_0 + (Y_1^{so})^{-1})$. La vitesse de sortie $(\mathbf{U}_1^{so})_S$ et la matrice impédance $(Z)_S$ sont indicées S pour indiquer qu'il n'y a pas de système inséré. Lorsque le traitement acoustique est inséré, les équations (1.39), (1.40), et (1.41) donnent la relation entre le vecteur pression de la source \mathbf{P}_0 (qui reste inchangé) et la vitesse de sortie $(\mathbf{V}'_s)_A$, (l'indice A indique que le système est inséré). Il vient :

$$\mathbf{P}_0 = (Z_A) (\mathbf{U}_1^{so})_A, \quad (1.43)$$

où

$$Z_A = \left\{ Z_0 (\mathbf{M}_1 Z_1^{en} + \mathbf{M}_2 Z_3^{en})^{-1} + (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 Z_3^{en} (Z_1^{en})^{-1}) \right\} (Y_1^{so})^{-1}.$$

La perte par insertion est définie par l'équation :

$$IL = 10 \log_{10} \frac{\text{Puissance émise sans système inséré}}{\text{Puissance émise avec système inséré}}. \quad (1.44)$$

À l'aide des équations (1.42) et (1.43) et après quelques manipulations, nous pouvons écrire que pour le mode numéro k en sortie de système :

$$IL(k) = 10 \log_{10} \left[\left\| \sum_{p=1}^m \frac{[(Z_S)^{-1}]_{k,p} [\mathbf{P}_0]_p}{[(Z_A)^{-1}]_{k,p} [\mathbf{P}_0]_p} \right\|^2 \right], \quad \text{avec } k = 1 \dots m. \quad (1.45)$$

L'équation (1.45) donne la perte par insertion pour chaque mode à la sortie du système, en fonction de la pression fournie par la source.

1.4 Conclusion

Lorsqu'un guide acoustique de grand diamètre est traité en paroi par un traitement acoustique à réaction non locale, nous avons montré que la propagation peut être décrite par un modèle discret, à l'aide de deux matrices de transfert de nature différente : une matrice propagation (PROP) diagonale par blocs de forme classique, et une matrice perforation (PERF). Une matrice perforation a été déterminée en généralisant une méthode intégration-modale déjà utilisée par Kergomard *et coll.* [13]. Nous avons donné une expression analytique de ces éléments et discuté ses propriétés de symétrie dans le cas particulier d'un réseau de géométrie cylindrique. Il existe au moins une configuration particulière (2 guides secondaires identiques en vis-à-vis) pour laquelle les trois premiers modes du guide principal ne sont couplés que par l'intermédiaire du champ acoustique sur les perforations. Lorsque le réseau est de longueur finie, nous avons d'autre part généralisé une méthode de calcul par matrice admittance locale précédemment utilisée pour calculer la perte par insertion de silencieux à tubes perforés [20]. Nous proposons

une expression de la perte par insertion par mode, permettant d'éviter les problèmes de divergences numériques que l'on rencontre lorsque l'on obtient ce type de résultats en utilisant des matrices de transfert. Il est nécessaire de compléter le travail présenté dans ce chapitre par une évaluation en géométrie cylindrique des intégrales données par les équations (1.7), (1.8), (1.11), et (1.12). Une fois ces éléments de la matrice perforation obtenus, des configurations très variées pourraient être étudiées. Par exemple il serait aisé d'incorporer un matériau modélisé comme un fluide équivalent, ou encore des diaphragmes dans les blocs de la matrice **PROP** décrivant les guides secondaires. La méthode présentée au paragraphe 1.3 permettrait alors de calculer les performances (perte par insertion) d'un traitement acoustique du type de ceux utilisés pour les réacteurs d'avion, mais à réaction non locale. Il pourrait être constitué par exemple de résonateurs de Helmholtz couplés, ou d'un matériau poreux disposé derrière un écran perforé, configurations qui intéressent particulièrement les concepteurs des nacelles de réacteurs.

Chapitre 2

Modes plans couplés dans un réseau périodique de guides d'ondes

Introduction

Nous considérons dans ce chapitre le cas particulier de deux guides d'ondes (il n'y a qu'un guide d'onde secondaire, voir figure 2.1), périodiquement couplés par des perforations (trous latéraux). Aux basses fréquences, quand seul le mode plan se propage dans chacun des guides, le transfert par une cellule élémentaire du réseau périodique est représenté par une matrice d'ordre quatre notée \mathcal{P} . Sa forme générale a été donnée dans la référence [13]. Cette matrice de transfert \mathcal{P} est le produit d'une matrice correspondant à l'effet de la perforation \mathcal{PERF} , et d'une matrice correspondant à la propagation dans les deux guides, \mathcal{PROP} . L'équation (1.23) du premier chapitre donne la matrice perforation d'ordre quatre, \mathcal{PERF} , lorsque l'on suppose que l'air vibre en piston plan sur les perforations. Dans le cas plus général où l'on ne fait pas cette hypothèse, la matrice \mathcal{PERF} a été trouvée égale à ([13]) :

$$\mathcal{PERF} = \mathcal{I} + \begin{pmatrix} \gamma_2 \mathbf{I} & -\gamma_2 \mathbf{I} \\ -\gamma_1 \mathbf{I} & \gamma_1 \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

où $\gamma_1 = \frac{S_1}{S_1+S_2}$, $\gamma_2 = \frac{S_2}{S_1+S_2}$, S_1 et S_2 sont les sections des guides ; \mathbf{I} et \mathcal{I} sont les matrices identité d'ordre deux et quatre respectivement ; Enfin, la matrice \mathbf{N} est donnée par

$$\mathbf{N} = \frac{2YZ}{1-YZ} \begin{pmatrix} 1 & 1/Y \\ 1/Z & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Notons ici que la matrice \mathbf{N} vérifie la propriété suivante : $\mathbf{N}^{-1} = 1/2(\mathbf{K} - 1)$, où

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1/Y \\ 1/Z & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.3)$$

Cette propriété nous sera utile par la suite. L'élément Y est une admittance représentant le couplage en parallèle des deux guides (voir chapitre 1) et l'élément Z est une impédance représentant le couplage en série. Un schéma équivalent de la matrice \mathcal{PERF} est donné dans la référence [13]. Cette matrice relie les vecteurs (p_1, v_1, p_2, v_2) de part et d'autre de la perforation, où p_1 et v_1 sont les pressions et vitesses acoustiques dans le guide principal (indice 1), et p_2 et v_2 dans le guide secondaire (indice 2). L'analyse générale est en effet plus simple pour les

grandeurs pressions et vitesses, même si pression-débit est un couple mieux approprié à l'étude des discontinuités (de ce fait, pour l'exploitation des résultats, c'est le couple pression-débit que nous utiliserons, mais nous le préciserons alors). Y est donc un rapport vitesse/pression, et Z un rapport pression/vitesse. La relation entre Y et Y_s (eq. 1.24) est la suivante :

$$\frac{1}{Y_s} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) \frac{1}{Y}.$$

Il est à noter que la perforation est modélisée comme ponctuelle, mais que la théorie qui y aboutit est rigoureuse et n'a pas besoin de cette hypothèse ; la seule restriction est que les distances entre deux perforations doivent être plus grandes que les dimensions transversales des guides, pour qu'il n'y ait pas de couplage par les modes de guide évanescents. Mais, même lorsque ce couplage existe, le modèle reste valable et seules les valeurs de Y et Z sont modifiées ; pour ce genre de considérations voir par exemple la référence [22].

La matrice propagation \mathcal{PROP} est celle de deux biportes et s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathcal{PROP} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_2 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

où

$$\mathbf{T}_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}, \text{ avec } i = 1, 2.$$

\mathbf{T}_1 est la propagation dans le guide principal, et \mathbf{T}_2 celle du guide secondaire. Dans le cas le plus général, les coefficients A_i , B_i , C_i et D_i sont quelconques. En l'absence d'écoulement, les matrices \mathbf{T}_i sont de déterminant 1 (chaque portion de guide est réciproque).

Le fait de supposer que ces matrices sont symétriques ($A_i = D_i$) ne diminue pas beaucoup la généralité du propos pour l'analyse d'un milieu périodique, car une cascade de cellules asymétriques peut se ramener à une cascade de cellules symétriques par un changement de variables approprié. Dans ce qui suit nous prendrons la réciprocité et la symétrie comme hypothèses, la matrice \mathcal{PROP} ne contenant plus que quatre coefficients indépendants. Ceci permet néanmoins de traiter de nombreux problèmes d'intérêt pratique, sans écoulement ; par exemple :

1. un guide muni de résonateurs couplés ;
2. un silencieux à tubes perforés avec ou sans partitions (diaphragmes) ;
3. Un guide entouré d'une plaque perforée, derrière laquelle est disposé un matériau absorbant modélisé comme un fluide équivalent.

Un cas particulier très facile à analyser est celui du silencieux à tube perforé simple, car alors les deux guides ont les mêmes caractéristiques (nombre d'onde k et impédance caractéristique ρc), et $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$. Ce cas est appelé *guides homogènes* dans la référence [13] : ils sont le siège de deux modes découplés, que le milieu soit périodique ou non, l'un étant le mode plan, l'autre le mode *flûte* (par analogie avec les instruments à vent à trous latéraux) ; pour ce dernier, les pressions dans les deux guides sont égales en module et en opposition de phase.

Le but de ce chapitre est de discuter la propagation acoustique linéaire, dans deux guides périodiques sans écoulement, soit de longueur infinie (en étudiant l'équation de dispersion), soit de longueur finie (par diagonalisation de la matrice d'une cellule élémentaire). Les calculs traitant le cas général sont analytiques : ceci nous permet de tirer pleinement parti d'une analyse paramétrique, même si celle-ci est limitée dans ce document à quelques cas particuliers.

En outre, le calcul numérique concernant ce type de milieux est délicat lorsque l'un des modes de réseau est évanescent, car une des valeurs propres de la matrice d'une cellule élémentaire du réseau périodique est alors très grande. Une résolution par une formulation en matrice

admittance locale inspirée de la référence [20] est exposée dans le premier chapitre (paragraphe 1.3); nous l'avons aussi utilisée dans un premier temps mais nous avons trouvé un résultat analytique, qui est évidemment préférable. Les calculs mènent à un résultat de forme très compacte (dont la concision eût été à notre avis difficile à obtenir par le biais d'un logiciel de calcul formel). Le paragraphe (2.1) établit l'équation de dispersion, et nous verrons, grâce aux solutions de cette équation, l'intérêt d'un modèle discret pour décrire le comportement acoustique de deux modes plans couplés. Le paragraphe (2.2) analyse les résultats dans le cas d'un réseau de résonateurs couplés. Le paragraphe (2.3) présente la diagonalisation de la matrice \mathcal{P} d'une cellule élémentaire du milieu, et le paragraphe (2.4) en déduit la matrice impédance (d'ordre quatre puis d'ordre 2 après fermeture du guide extérieur 2 pour obtenir un réseau de longueur finie), ainsi que la perte par insertion. Enfin, le paragraphe (2.5) analyse la perte par insertion d'une portion finie d'un guide d'onde à résonateurs couplés. Nous verrons notamment comment le modèle permet par exemple d'interpréter la transition entre une chambre d'expansion et un long résonateur déjà présentée dans la référence [4], et nous étudierons comment se modifie la perte par insertion lorsque l'on ajoute des diaphragmes dans une chambre d'expansion.

2.1 Calcul de la relation de dispersion

À partir de la matrice d'ordre quatre $\mathcal{P}\mathcal{E}\mathcal{R}\mathcal{F}$ (eq. 2.1), et de la matrice d'ordre quatre $\mathcal{P}\mathcal{R}\mathcal{O}\mathcal{P}$ (eq. 2.4), une cellule élémentaire du réseau est entièrement caractérisée. La question se pose toutefois de choisir la cellule élémentaire de façon judicieuse pour simplifier le calcul du déterminant de la matrice \mathcal{P} qui y est associée. L'idée de choisir une cellule symétrique centrée sur la perforation est intéressante mais impose le calcul du produit de trois matrices. Pour le calcul de l'équation de dispersion mené ici, il est préférable de choisir une cellule asymétrique, $\mathcal{P} = \mathcal{P}\mathcal{E}\mathcal{R}\mathcal{F} \times \mathcal{P}\mathcal{R}\mathcal{O}\mathcal{P}$. Nous cherchons les quatre valeurs propres de la matrice \mathcal{P} en résolvant l'équation aux valeurs propres $(\mathcal{P} - \lambda\mathcal{I}) = 0$. En revanche, lors de la diagonalisation, la première solution s'avèrera préférable (et la matrice de transfert d'une cellule symétrique sera alors notée \mathcal{P}_s).

Tous les calculs utilisent la partition des matrices d'ordre quatre en sous-matrices d'ordre deux. Ceci permet de retrouver beaucoup plus simplement les résultats de la référence [13] (et en particulier l'équation (46))¹.

En partant des équations (2.1), (2.4) et (2.2), il vient :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}\mathcal{E}\mathcal{R}\mathcal{F} \times \mathcal{P}\mathcal{R}\mathcal{O}\mathcal{P} = \begin{pmatrix} (1 + \gamma_2\mathbf{N})\mathbf{T}_1 & -\gamma_2\mathbf{N}\mathbf{T}_2 \\ -\gamma_1\mathbf{N}\mathbf{T}_1 & (1 + \gamma_1\mathbf{N})\mathbf{T}_2 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Les quatre valeurs propres sont notées λ , $\tilde{\lambda} = 1/\lambda$, λ' , et $\tilde{\lambda}' = 1/\lambda'$; elles sont deux à deux inverses puisque le système est supposé réciproque, et vérifient par définition :

$$(\mathcal{P} - \lambda\mathcal{I}) \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.6)$$

où

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ v_1 \\ p_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

1. Les matrices d'ordre quatre sont notées en majuscules calligraphiées (par exemple $\mathcal{P}\mathcal{E}\mathcal{R}\mathcal{F}$), les matrices d'ordre deux en script (par exemple \mathbf{T}_1), et les vecteurs en caractères majuscules gras (par exemple \mathbf{V}_1). Toutes les autres quantités sont des scalaires.

est un vecteur propre de la matrice \mathcal{P} , qui représente l'effet sur la propagation d'une cellule élémentaire du réseau. L'équation (2.6) se décompose en deux équations matricielles d'ordre deux :

$$\begin{cases} [(1 + \gamma_2 \mathbf{N})\mathbf{T}_1 - \lambda \mathbf{I}]\mathbf{V}_1 - \gamma_2 \mathbf{N}\mathbf{T}_2 \mathbf{V}_2 & = 0 \\ -\gamma_1 \mathbf{N}\mathbf{T}_1 \mathbf{V}_1 + [(1 + \gamma_1 \mathbf{N})\mathbf{T}_2 - \lambda \mathbf{I}]\mathbf{V}_2 & = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

En les combinant, il vient :

$$\begin{cases} [(\mathbf{N} + 1)\mathbf{T}_1 - \lambda \mathbf{I}]\mathbf{V}_1 & = [(\mathbf{N} + 1)\mathbf{T}_2 - \lambda \mathbf{I}]\mathbf{V}_2 \\ \gamma_1(\mathbf{T}_1 - \lambda \mathbf{I})\mathbf{V}_1 & = -\gamma_2(\mathbf{T}_2 - \lambda \mathbf{I})\mathbf{V}_2 \end{cases} \quad (2.9)$$

Après quelques manipulations, la première équation du système (2.9) précédent devient :

$$[\mathbf{T}_1 + \lambda \mathbf{I} + \mathbf{K}(\mathbf{T}_1 - \lambda \mathbf{I})]\mathbf{V}_1 = [\mathbf{T}_2 + \lambda \mathbf{I} + \mathbf{K}(\mathbf{T}_2 - \lambda \mathbf{I})]\mathbf{V}_2, \quad (2.10)$$

où la matrice d'ordre deux \mathbf{K} est donnée par l'équation (2.3).

La seconde équation du système (2.9), et le système (2.8) permettent alors d'écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{T}_0(\mathbf{T}_1 - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{V}_1 = 0 \\ \mathbf{T}_0(\mathbf{T}_2 - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{V}_2 = 0 \end{cases}, \quad (2.11)$$

avec

$$\mathbf{T}_0 = \gamma_2(\mathbf{T}_1 + \lambda \mathbf{I})(\mathbf{T}_1 - \lambda \mathbf{I})^{-1} + \gamma_1(\mathbf{T}_2 + \lambda \mathbf{I})(\mathbf{T}_2 - \lambda \mathbf{I})^{-1} + \mathbf{K}. \quad (2.12)$$

Étant donné que les modes dans le guide principal (indice 1) et dans le guide secondaire (indice 2) sont couplés par l'intermédiaire des perforations ($\mathcal{PERF} \neq \mathcal{I}$), les valeurs propres des modes propres du réseau seront différentes des valeurs propres des modes plans dans chaque guide. Nous pouvons en déduire que si λ est solution de l'équation (2.6), alors les matrices $(\mathbf{T}_1 - \lambda \mathbf{I})$ et $(\mathbf{T}_2 - \lambda \mathbf{I})$ ont des déterminants non nuls ; par conséquent, la matrice \mathbf{T}_0 , définie par l'équation (2.12) doit vérifier

$$\text{Det}(\mathbf{T}_0) = 0. \quad (2.13)$$

C'est l'équation de dispersion d'une cellule élémentaire du réseau périodique. Ce résultat comporte l'avantage d'avoir réduit le déterminant de l'ordre quatre calculé par Kergomard *et coll.* [13] à un déterminant d'ordre deux.

En posant

$$\mathbf{T}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & A_0 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

et en notant

$$ch\Gamma = 1/2(\lambda + 1/\lambda), \quad \text{et}, \quad sh\Gamma = 1/2(\lambda - 1/\lambda), \quad (2.15)$$

dans l'équation de dispersion (2.13), il vient :

$$A_0 = -sh\Gamma \left(\frac{\gamma_2}{ch\Gamma - A_1} + \frac{\gamma_1}{ch\Gamma - A_2} \right), \quad (2.16)$$

$$B_0 = \frac{1}{Y} - \left(\frac{\gamma_2 B_1}{ch\Gamma - A_1} + \frac{\gamma_1 B_2}{ch\Gamma - A_2} \right), \quad (2.17)$$

$$C_0 = \frac{1}{Z} - \left(\frac{\gamma_2 C_1}{ch\Gamma - A_1} + \frac{\gamma_1 C_2}{ch\Gamma - A_2} \right), \quad (2.18)$$

et l'équation de dispersion (2.13) s'écrit alors :

$$A_0^2 = B_0 C_0. \quad (2.19)$$

C'est l'équation (46) de la référence [13], qui a deux solutions notées Γ , et Γ' , correspondant à deux modes de propagation dans le réseau. En remplaçant λ par $\tilde{\lambda} = 1/\lambda$ dans l'équation (2.11),

A_0 change de signe mais l'équation (2.19) reste inchangée. Pour la suite, nous introduisons deux notations :

$$w = \frac{B_0}{A_0} = \frac{A_0}{C_0}, \quad \text{et} \quad w' = \frac{B'_0}{A'_0} = \frac{A'_0}{C'_0}, \quad (2.20)$$

relatives à chaque mode Γ et Γ' . L'annexe A montre que l'équation de dispersion (2.19) peut s'écrire :

$$ch^2\Gamma - ch\Gamma [A_1 + A_2 + \frac{\gamma_2 D'_1 + \gamma_1 D'_2}{1-YZ}] + A_1 A_2 + \frac{1}{1-YZ} [\gamma_2 D'_1 A_2 + \gamma_1 D'_2 A_1 + YZ\Pi\gamma_1\gamma_2] = 0, \quad (2.21)$$

où

$$D'_1 = 2A_1YZ + B_1Y + C_1Z,$$

$$D'_2 = 2A_2YZ + B_2Y + C_2Z, \quad \text{et} \quad \Pi = 2 + B_1C_2 + B_2C_1 - 2A_1A_2.$$

L'équation (2.21) fait apparaître des termes d'interaction (en YZ) entre les inductances en série Z et en parallèle Y de la perforation. Aux basses fréquences, Z et Y étant toutes deux inductives c'est Y qui l'emporte et l'on peut ignorer Z dans D_1 , D_2 et Π , bien qu'en toute rigueur, une analyse de la dépendance fréquentielle des coefficients A_1 , B_1 , C_1 , A_2 , B_2 , C_2 soit pour cela nécessaire. Celle-ci montrerait cependant que les termes en YZ sont petits (voir Khettabi [27] pour un tel raisonnement en géométrie bidimensionnelle). Dans le paragraphe suivant (2.2), nous ferons donc l'approximation $Z = 0$ qui consiste à admettre que l'air vibre en piston plan sur les perforations. L'équation (2.21) se simplifie alors en :

$$ch^2\Gamma - ch\Gamma [A_1 + A_2 + E_1 + E_2] + A_1 A_2 + E_1 A_2 + E_2 A_1 = 0, \quad (2.22)$$

où

$$E_1 = \gamma_2 B_1 Y \quad \text{et} \quad E_2 = \gamma_1 B_2 Y \quad (2.23)$$

soit aussi :

$$(ch\Gamma - A_1 - E_1)(ch\Gamma - A_2 - E_2) = E_1 E_2. \quad (2.24)$$

C'est sous cette forme que nous discutons le problème des résonateurs couplés (paragraphe 2.2). L'équation (2.24) a deux solutions Γ et Γ' , qui représentent les constantes de propagation des deux modes propres du réseau. Les fréquences de coupure de l'un des modes (par exemple Γ) sont obtenues lorsque $ch\Gamma = \pm 1$; elles n'existent que pour des milieux non dissipatifs — A_1 , A_2 , E_1 et E_2 réels — cependant nous nous intéressons surtout aux effets réactifs et ignorons la dissipation dans l'étude des solutions de l'équation (2.24). La diagonalisation effectuée au paragraphe 2.3 et l'écriture de la matrice impédance (paragraphe 2.4) reprendront le cas général, pour lequel la matrice perforation \mathcal{PERF} est donnée par l'équation 2.1, et pour laquelle $Z \neq 0$; enfin, l'analyse des résultats (paragraphe 2.5) de la perte par insertion sera faite à nouveau pour $Z = 0$.

Nous pouvons d'ores et déjà utiliser l'équation (2.24) pour analyser rapidement les comportements de plusieurs cas particuliers très importants, montrant l'effet de couplage des perforations.

1- Guides homogènes: la propagation se fait avec la même vitesse (et atténuation) dans les deux guides ($\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$ et $A_1 = A_2 = A$). Dans ce cas, $ch\Gamma = A$ est une solution de l'équation de dispersion (2.24). Pour ce mode, les pressions dans les deux guides sont égales; il s'agit donc du mode plan. L'autre solution vaut: $ch\Gamma' = A + E_1 + E_2$. Nous verrons au paragraphe 2.2 un exemple de ce mode, évanescent aux basses fréquences, puis propagatif au dessus d'une fréquence de coupure.

2- Faible couplage: si les perforations sont petites, Y l'est aussi, et donc E_1 et E_2 sont petits. Les deux solutions de l'équation (2.24) sont alors

$$ch\Gamma = A_1 + \frac{1}{2} [E_1 + E_2 + \frac{E_1 - E_2}{A_1 - A_2}],$$

et

$$ch\Gamma' = A_2 + \frac{1}{2}\left[E_1 + E_2 - \frac{E_1 - E_2}{A_1 - A_2}\right].$$

Il s'agit des modes plans de chaque conduit, chacun étant légèrement modifié par la présence de l'autre.

3- Fort couplage : si les perforations sont très grandes, jusqu'à ce que la paroi entre les guides disparaisse, la valeur de l'admittance de perforation donnée par l'équation (1.24) n'est plus valable, car Y doit tendre vers l'infini (ceci peut s'analyser clairement en géométrie bidimensionnelle [27]). En considérant alors les quantités A_1/E_1 et A_2/E_2 comme petites, on obtient la solution suivante : $ch\Gamma = E_1 + E_2$, qui prend des valeurs très grandes ; le mode correspondant est donc très évanescent, au point de pouvoir l'ignorer. L'autre solution s'écrit

$$ch\Gamma' = \frac{\gamma_1 A_1 B_2 + \gamma_2 A_2 B_1}{\gamma_1 B_2 + \gamma_2 B_1}, \quad (2.25)$$

et ne dépend pas de l'admittance de perforation Y . Il, s'agit donc de la solution pour deux guides sans séparation, mais où la propagation est différente de celle dans chaque guide. À la limite d'un milieu continu, on peut ainsi imaginer deux fluides qui ne se mélangent pas, pour lesquels la pression est uniforme sur une section droite comprenant les deux guides, et dans lesquels le débit est conservé (le débit sortant à chaque abscisse de l'un des guides entre intégralement dans l'autre guide). Il est possible, dans ce cas de mode unique, de remplacer, pour l'un des milieux, l'influence de l'autre milieu par l'admittance (en dérivation) d'un système branché équivalent. Ainsi pour le milieu 1, nous pouvons mettre en dérivation une admittance $Y_2/2$ à chaque extrémité du biporte (pour des raisons de symétrie), et par identification avec l'équation (2.25) il vient :

$$Y_2 = \frac{2(A_1 - A_2)}{B_1 + B_2(S_1/S_2)}. \quad (2.26)$$

Ce type de considérations, ramenant un milieu à réaction non locale à un milieu à réaction locale a déjà été étudiée, en particulier par Nayfeh *et coll.* [28]. Nous noterons simplement que la forme de l'équation (2.26) montre que ce concept de réaction locale est abstrait, puisque cette admittance censée caractériser le biporte représentant le milieu 2 dépend en fait des caractéristiques du biporte 1, tout au moins dans le cas général.

Ces remarques permettent de bien définir notre problème et de justifier précisément le choix du titre de ce chapitre. Il est commun de penser qu'aux basses fréquences, dans les conduits, il n'existe qu'un seul mode, plan (tant que les dimensions transversales sont petites devant la longueur d'onde). Pourtant, en disposant une séparation longitudinale, nous créons bien deux modes indépendants, et les deux modes subsistent encore même si les guides sont couplés par des perforations. Si les perforations deviennent grandes jusqu'à faire disparaître la séparation, l'un de ces modes devient tellement évanescent qu'en pratique il disparaît lui aussi. Le problème traité dans ce chapitre peut donc être défini comme suit : il s'agit de la propagation dans les conduits dont les dimensions transversales sont petites devant la longueur d'onde, mais où des séparations partielles conduisent à l'existence de deux modes. Nous pouvons en particulier imaginer que le cas où tous deux sont propagatifs amène à des comportements particuliers très différents du cas simple, sans séparations. Ajoutons que nous nous sommes intéressés à une description discrète, qui permet d'avoir une beaucoup plus grande variété de comportements pour chaque guide, contrôlable par exemple par le choix du type de chaque guide (partitions, fluide équivalent à un matériau poreux, ou discontinuités par exemple). Enfin, notons que le problème continu est inclus dans le problème discret, par passage à la limite.

Nous pensons donc que ce travail doit permettre d'aborder une grande variété de problèmes, et nous nous sommes consacrés dans la suite de ce chapitre à un problème ayant deux paramètres

principaux : l'ouverture de perforations couplant deux guides, et l'ouverture des diaphragmes couplant deux cellules adjacentes dans le guide secondaire.

2.2 Étude de la dispersion dans un guide à résonateurs couplés

Nous supposons dans ce paragraphe 2.2 que l'air dans les perforations vibre en piston plan ($Z=0$, et la matrice perforation \mathbf{N} (éq. 2.2) devient triangulaire). Nous utilisons donc l'équation de dispersion (2.24) du paragraphe précédent. Les impédances et admittances seront par ailleurs exprimées en rapport pression sur débit.

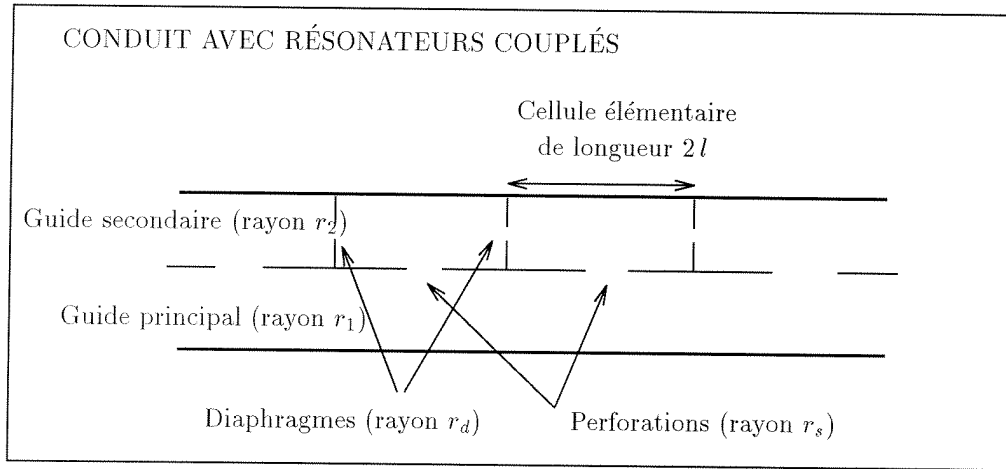


FIG. 2.1 - Exemple d'un réseau de guide d'onde à résonateurs couplés

Le réseau est décrit sur la figure 2.1. Nous pouvons expliciter les trois matrices d'ordre deux \mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_2 (éq. 2.4), et \mathbf{N} (éq. 2.2). La matrice \mathbf{T}_1 décrivant la propagation dans le guide principal entre deux perforations consécutives s'écrit :

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} \cos(2kl) & jZ_{c1}S_1 \sin(2kl) \\ \frac{j}{Z_{c1}S_1} \sin(2kl) & \cos(2kl) \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

où $2l$ est la longueur d'une cellule, $Z_{c1} = (\rho c)/S_1$, et S_1 est la section du guide principal. La matrice propagation dans le guide secondaire s'écrit :

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} \cos(2kl) & jZ_{c2}S_2 \sin(2kl) \\ \frac{j}{Z_{c2}S_2} \sin(2kl) & \cos(2kl) \end{pmatrix} + \frac{Z_d}{2Z_{c2}} \begin{pmatrix} j \sin(2kl) & Z_{c2}S_2(1+\cos(2kl)) \\ \frac{1}{Z_{c2}S_2}(\cos(2kl)-1) & j \sin(2kl) \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

où $Z_{c2} = (\rho c)/S_2$, S_2 est la section du guide secondaire, et

$$Z_d = j \frac{\omega \rho}{2r_d} \left(1 - \frac{r_d}{r_2}\right) \quad (2.29)$$

est l'inductance des diaphragmes disposés dans le guide secondaire. Par simplicité, nous avons choisi pour Z_d la partie imaginaire de l'impédance d'un diaphragme dans un écran infini [26] ; la correction apportée par le facteur $(1 - \frac{r_d}{r_2})$ est une simplification du résultat donné par Fock [29] pour prendre en compte le fait que le diaphragme est inséré dans un guide de rayon r_2 . Elle sera suffisante pour notre étude.

Enfin, en posant $Z = 0$ dans l'équation (2.2), la matrice \mathbf{N} s'écrit :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

où l'admittance de perforation est donnée par l'équation (1.24) :

$$\frac{1}{Y_s} = j \frac{\omega \rho}{2r_s},$$

et Y_s est reliée à Y par

$$\frac{1}{Y_s} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) \frac{1}{Y}.$$

2.2.1 Deux cas extrêmes (figure 2.2)

Silencieux à tubes perforés (guides d'ondes homogènes) : pas de diaphragmes dans le guide extérieur

Lorsqu'il n'y a pas de partitions dans le guide extérieur ($Z_d = 0$), le système est simplement constitué de deux tubes parallèles, couplés périodiquement par des trous latéraux, sur la surface desquels l'air vibre en piston plan. Les solutions de l'équation de dispersion (2.24) sont alors données par :

$$ch\Gamma = \cos(2kl) \quad (\text{soit aussi} \quad \Gamma = 2jkl), \quad (2.31)$$

et

$$ch\Gamma' = \cos(2kl) + \frac{1}{2} Y_s j \sin(2kl) (Z_{c1} + Z_{c2}). \quad (2.32)$$

La première solution est celle du mode plan dans le réseau ; les pressions dans les deux guides p_1 et p_2 sont égales, et le mode est propagatif quelle que soit la fréquence (lorsqu'il n'y a pas de pertes, ceci est équivalent à $-1 < ch\Gamma = \cos(2kl) < 1$).

La seconde solution $ch\Gamma'$, appelée *mode flûte* dans la référence [13], est évanescence aux basses fréquences, les pressions dans chaque guide, p_1 et p_2 , étant égales, mais en opposition de phase. Une première fréquence de coupure apparaît pour $ch\Gamma' = 1$, au-delà de laquelle le mode flûte devient propagatif. Il redevient ensuite évanescence, une seconde fréquence coupure, située plus haut en fréquence étant donnée par : $ch\Gamma' = -1$.

Résonateurs de Helmholtz branchés : diaphragmes totalement fermés

Lorsque les diaphragmes dans le guide extérieur sont totalement fermés ($1/Z_d = 0$), les résonateurs sont totalement découplés ; le système est constitué d'un guide principal (guide 1) selon l'axe duquel sont périodiquement connectés des résonateurs branchés. Le réseau ne comporte alors plus qu'un guide d'onde ; une des solutions de l'équation de dispersion prend des valeurs infinies, et devient donc infiniment évanescence (en pratique, elle disparaît). Le mode restant est donné par la solution bien connue :

$$ch\Gamma = \cos(2kl) + \frac{1}{2} j Z_{c1} Y_e \sin(2kl), \quad (2.33)$$

où

$$\frac{2}{Y_e} = \frac{2}{Y_s} - j Z_{c2} \cot(kl). \quad (2.34)$$

La quantité Y_e représente l'admittance d'entrée d'un résonateur branché. L'unique mode du réseau (en trait plein sur la figure 2.2), associé à l'équation (2.33), a un comportement très proche de celui du mode plan, sauf au voisinage de la fréquence de résonance de Helmholtz

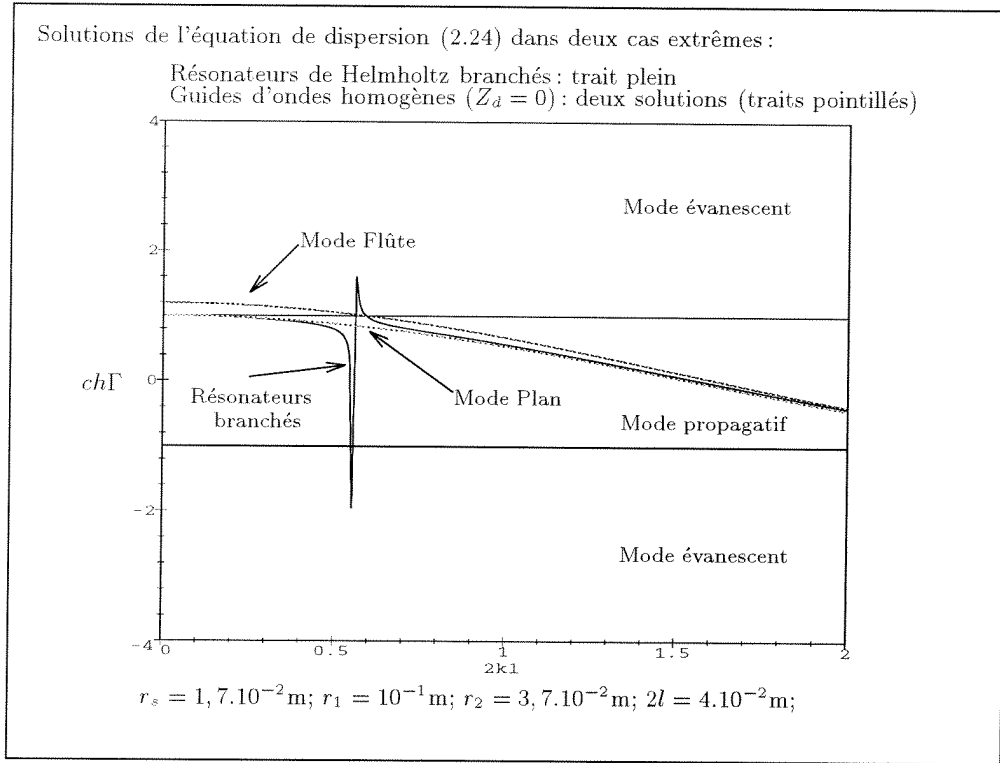


FIG. 2.2 - Solutions de l'équation de dispersion (2.24) en fonction de la fréquence adimensionnelle $2kl$, pour deux cas extrêmes du réseau de la figure 2.1 : 1- un réseau sans diaphragmes dans le guide secondaire (voir les équations (2.31) pour le mode plan et (2.32) pour le mode flûte, et 2- un réseau dont les diaphragmes du guide secondaire sont fermés (solution donnée par l'équation 2.33))

f_{res} , pour laquelle l'admittance d'entrée du résonateur Y_e devient infinie. Le mode de réseau est alors évanescent : c'est la bande d'arrêt de Helmholtz.

Les solutions données par les équations (2.31), (2.32), et (2.33), dans les deux cas extrêmes $Z_d = 0$ et $1/Z_d = 0$ sont représentées sur la figure (2.2), lorsqu'il n'y a pas de pertes viscothermiques dans le réseau. Cette dernière hypothèse permet de localiser facilement les fréquences de résonance, et ne limite en rien la généralité du propos puisque les phénomènes étudiés ici sont purement réactifs.

2.2.2 Fréquences de coupure et de résonance

Résonateurs de Helmholtz branchés, non couplés

La fréquence de résonance d'un résonateur de Helmholtz branché est donnée par (éq. 2.34) :

$$\frac{2}{Y_s} = jZ_{c2} \cot(kl). \quad (2.35)$$

La figure (2.3.c) représente le résonateur correspondant. Lorsque $kl \ll 1$, l'équation ci-dessus correspond à la fréquence de Helmholtz bien connue, pour un résonateur à constantes localisées.

Les deux fréquences de coupure, situées de part et d'autre de la résonance de Helmholtz

sont données par $ch\Gamma = \pm 1$ dans l'équation (2.33). La plus grande des deux est donnée par :

$$\frac{2}{Y_s} = j(Z_{c1} + Z_{c2})\cot(kl) ; \quad (2.36)$$

elle correspond à la résonance du résonateur représenté sur la figure (2.3.b) : les deux impédances caractéristiques sont en série, et aux basses fréquences ($kl \ll 1$), les deux volumes $2l S_1$ et $2l S_2$ se comportent comme des ressorts en série ; cette fréquence est donc supérieure à celle obtenue pour un volume plus petit $2l S_2$ lors de la résonance de Helmholtz (figure 2.3.c). La plus petite fréquence de coupure vient en posant $ch\Gamma = -1$, soit aussi :

$$\frac{2}{Y_s} = j \{-Z_{c1}\tan(kl) + Z_{c2}\cot(kl)\} ; \quad (2.37)$$

Le résonateur correspondant à cette fréquence est représenté sur la figure (2.3.a). Il comporte deux parois parfaitement rigides dans le guide secondaire, et deux parois infiniment souples dans le guide principal (condition d'impédance nulle). En effet, aux fréquences de coupure, les pression et vitesses acoustiques sont dans chaque guide, soit égales (figure 2.3.b), soit en opposées (figure 2.3.a). Enfin, il est à noter que lorsque le guide principal a une section S_1 beaucoup plus grande que la section du guide secondaire S_2 , les deux fréquences de coupure définies par les équations (2.36) et (2.37), tendent à se rapprocher, la bande d'arrêt de Helmholtz devenant de plus en plus étroite.

Résonateurs branchés couplés

Supposons maintenant que les résonateurs branchés sont couplés à leurs voisins par l'intermédiaire de diaphragmes de rayon r_d (l'impédance des diaphragmes Z_d est donc non nulle et de valeur finie). En posant $ch\Gamma = \pm 1$ dans l'équation (2.24), il vient pour les fréquences de coupure :

$$\text{pour } ch\Gamma = -1, \quad \frac{2}{Y_s} = -j\tan(kl)(Z_{c1} + Z_{c2}\Psi), \quad \text{avec } \Psi = \frac{2Z_{c2} - Z_d j \cot(kl)}{2Z_{c2} + Z_d j \tan(kl)} ; \quad (2.38)$$

$$\text{et pour } ch\Gamma = +1, \quad \frac{2}{Y_s} = j(Z_{c1} + Z_{c2})\cot(kl). \quad (2.39)$$

La seconde fréquence de coupure (éq. 2.39) du réseau de résonateurs couplés (que l'on note f_2) ne dépend pas de l'ouverture des diaphragmes ; elle reste donc inchangée quel que soit le couplage entre les résonateurs et la valeur de r_d . Il est aisé de montrer qu'elle est identique à

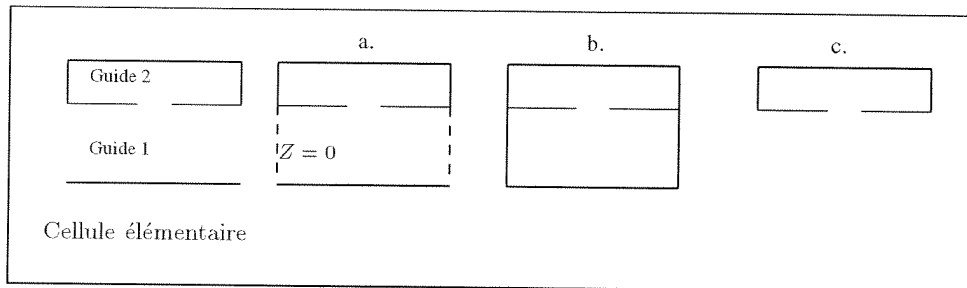


FIG. 2.3 - *Interprétation des fréquences de coupure d'un réseau de résonateurs branchés non couplés, en terme de résonances : a.- fréquence de coupure basse (éq. 2.37), b.- fréquence de coupure haute (2.36), c.- fréquence de résonance de Helmholtz (éq. 2.35).*

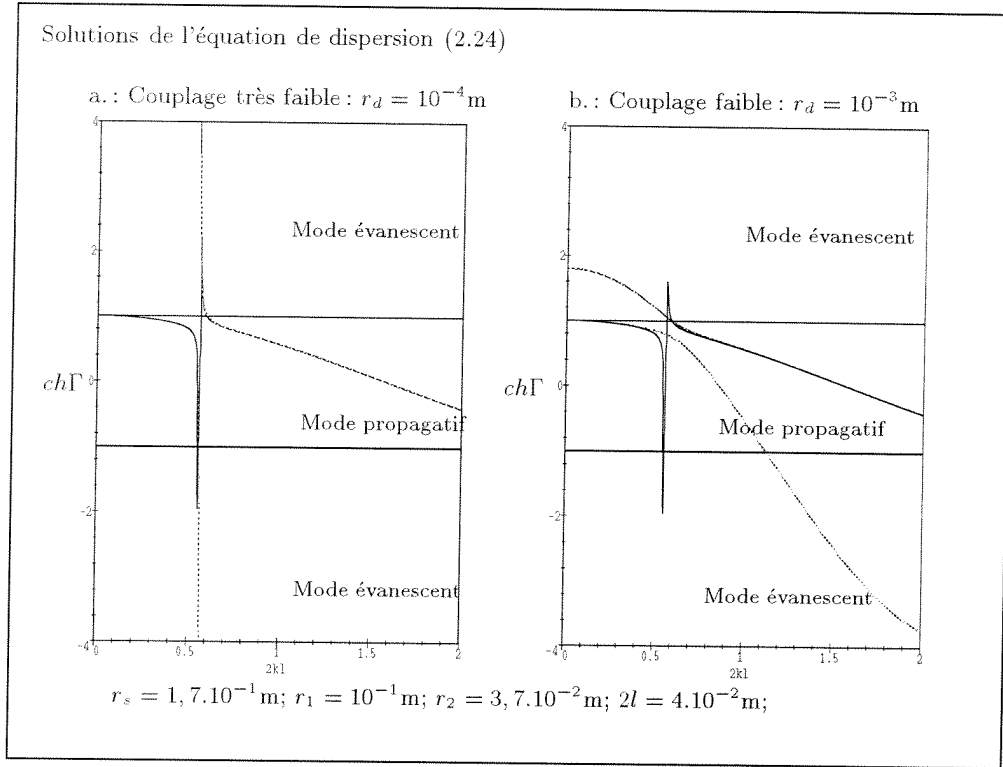


FIG. 2.4 - Solutions de l'équation de dispersion dans le réseau périodique de guides d'ondes à résonateurs couplés de la figure 2.1 en fonction de la fréquence adimensionnelle $2kl$: en pointillés les deux solutions de l'équation (2.24) ; la solution donnée par l'équation (2.33) est représentée en trait plein, à titre indicatif.

la première fréquence de coupure du mode flûte (cas sans diaphragme, éq. 2.32), ainsi qu'à la fréquence de coupure supérieure de la bande d'arrêt de Helmholtz (cas des diaphragmes fermés, éq. 2.36).

La première fréquence de coupure f_1 (éq. 2.38) dépend en revanche de l'ouverture des diaphragmes. À mesure que l'on ouvre les diaphragmes, Z_d passe d'une valeur infinie à une valeur nulle (éq. 2.29), f_1 passe de la fréquence de coupure inférieure de la bande d'arrêt de Helmholtz (éq. 2.37) à une valeur donnée par $\cos(2kl) = -1$, qui est en fait la fréquence de Bragg du mode plan défini par la première des équations du système (2.31). Il existe donc, dans le cas général, une valeur critique du couplage (c'est-à-dire une valeur de Z_d et de r_d) pour laquelle $f_1 = f_2$. Lorsque le rayon d'ouverture des diaphragmes r_d est supérieur à cette valeur critique, la fréquence de coupure f_1 donnée par $ch\Gamma = -1$ (éq. 2.37) est supérieure à f_2 (éq. 2.36).

2.2.3 Bandes passantes et bandes d'arrêt dans le cas général

Il est important de noter que l'effet du diaphragme entre les résonateurs est traduit par les termes en Z_d/Z_{c2} qui tendent à être négligeables aux basses fréquences, et ceci quelle que soit la valeur de r_d . Il est normal que le système se comporte alors comme un réseau sans partition dans les guides secondaires, avec un mode plan propagatif et un mode flûte évanescent (paragraphe 2.2.1). Au contraire, pour des valeurs de r_d suffisamment petites et des fréquences suffisamment grandes, les mêmes termes deviennent prédominants et le comportement du système tend

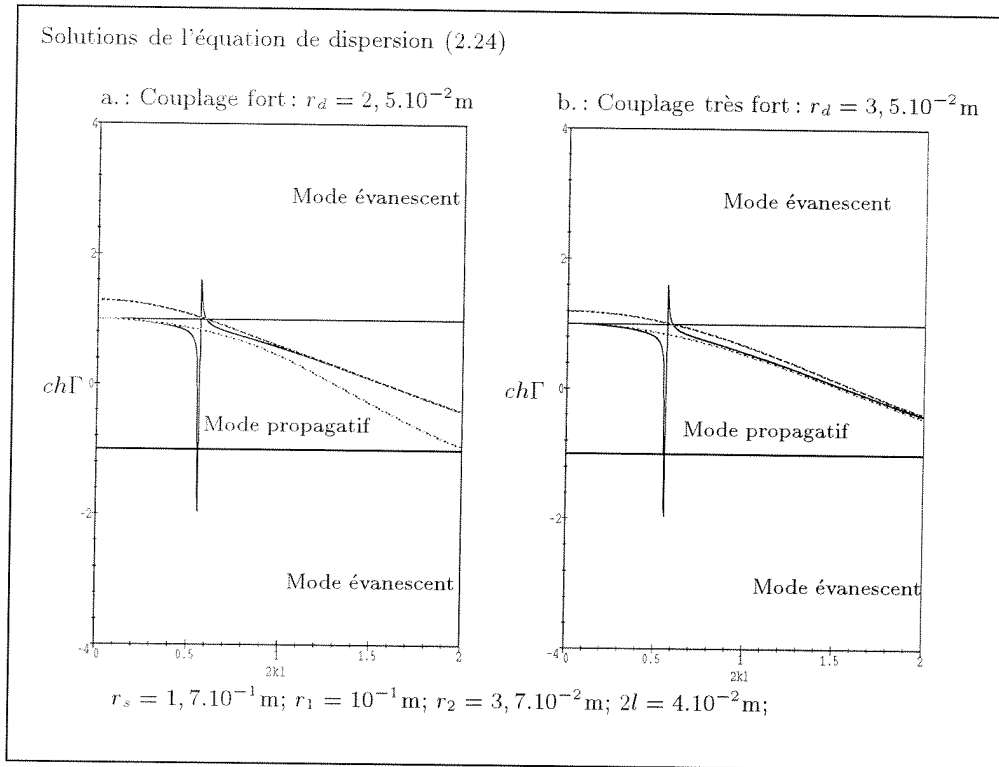


FIG. 2.5 - Solutions de l'équation de dispersion dans le réseau périodique de guides d'ondes à résonateurs couplés de la figure 2.1 en fonction de la fréquence adimensionnelle $2kl$: en pointillés les deux solutions de l'équation (2.24); la solution donnée par l'équation (2.33) est représentée en trait plein, à titre indicatif.

vers celui des résonateurs de Helmholtz branchés, non couplés. Ceci permet de comprendre les solutions de l'équation de dispersion dans le cas général, telles qu'elles sont représentées, dans quatre cas différents, sur les figure 2.4.a, 2.4.b, 2.5.a, et 2.5.b. Deux situations se distinguent.

- Couplage très faible : la fréquence de coupure f_1 donnée par l'équation (2.38) est inférieure à f_2 donnée par l'équation (2.39) (figure 2.4.a); il existe entre ces deux fréquences une bande d'arrêt (car les deux modes du réseau sont évanescents), mais elle est d'autant plus étroite que le couplage est plus fort. En dehors de cette bande d'arrêt, un seul mode, proche du mode plan, se propage, l'autre étant évanescent. En conclusion, l'effet du couplage très faible réside principalement dans le fait qu'il réduit la largeur de la bande d'arrêt de Helmholtz.
- Couplage faible, fort et très fort : dans ces trois cas, au contraire, $f_1 > f_2$; il n'y a plus de bande d'arrêt, mais une zone où les deux modes de réseau sont propagatifs (située dans l'intervalle $[f_2, f_1]$). Cette zone est d'autant plus large que le couplage entre résonateurs est fort. Dans le cas du couplage faible ($r_d = 10^{-3} \text{ m}$), le taux de perforation des diaphragmes $((r_d/r_2)^2 = 7,3 \cdot 10^{-4})$ est suffisant pour que la bande d'arrêt ait disparu. En dehors de cette zone, un seul mode, proche du mode plan, se propage, l'autre étant évanescent (figures 2.4.b 2.5.a et 2.5.b).

En conclusion, un couplage très faible entre résonateurs ne semble pas favorable, car son effet se résume principalement à réduire la largeur en fréquence de la bande d'arrêt de Helmholtz. Dans la bande d'arrêt, le mode le plus évanescent est négligeable; en dehors de la bande d'arrêt, le mode évanescent peut être négligé devant le mode propagatif, ce qui permet d'affirmer que les résonateurs très faiblement couplés se comportent comme des résonateurs non couplés pour

lesquels nous pourrions définir une impédance d'entrée équivalente, incluant l'effet du couplage très faible.

Lorsque le couplage est faible, fort ou très fort, la bande d'arrêt a disparu. Le réseau comporte une bande de fréquence dans laquelle deux modes propres du réseau sont propagatifs. Il est alors impossible de considérer ce système comme à réaction locale. En pratique, un faible couplage suffit pour obtenir dans une bande de fréquence un réseau à deux modes propagatifs, bien que les dimensions transversales du système soient petites devant la longueur d'onde. De plus, la largeur de cette bande de fréquence peut être calculée et modifiée, en changeant simplement le diamètre des diaphragmes entre résonateurs. Pour déterminer dans quelle mesure cette bande à deux modes est susceptible de produire une atténuation, il est nécessaire d'étudier un réseau de longueur finie. Ceci fait l'objet des paragraphes qui suivent.

2.3 Calcul de la matrice de transfert d'ordre quatre d'un réseau de N cellules

Nous avons vu au paragraphe précédent (2.2) qu'un faible couplage entre les résonateurs du réseau de la figure 2.1 est suffisant pour obtenir une bande de fréquence où deux modes propres du réseau sont propagatifs. Nous nous intéressons maintenant à un réseau composé d'un nombre fini de cellules (disons N). À chaque extrémité du réseau, les diaphragmes des guides secondaires sont remplacés par un mur rigide (figure 2.6). L'objectif de ce paragraphe 2.3 est

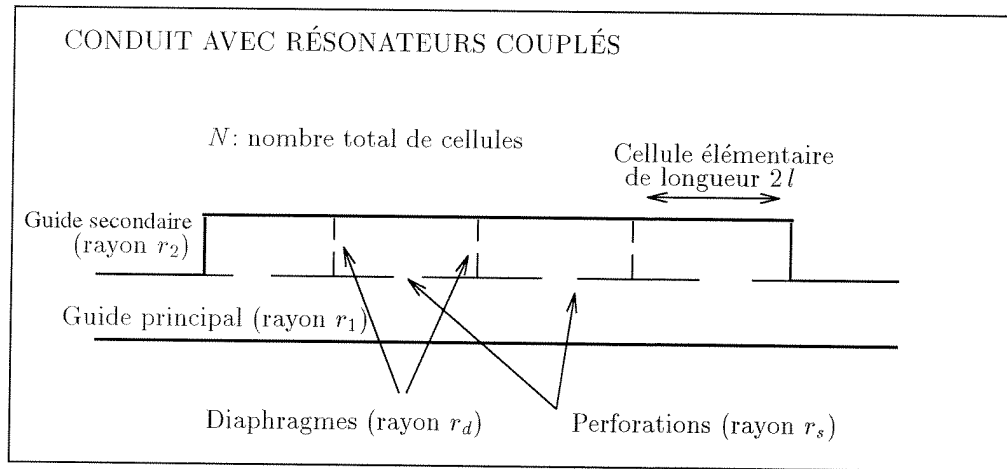


FIG. 2.6 - Schéma d'un conduit périodique avec résonateurs couplés; pour un réseau de longueur finie (N cellules), le guide secondaire est fermé, à l'entrée et à la sortie, par un mur rigide. .

d'obtenir la matrice de transfert \mathcal{R} (4,4) des N cellules du réseau. Par un processus classique de diagonalisation, nous calculons tout d'abord $\mathcal{R} = \mathcal{P}^N$ (où \mathcal{P} est donné par l'équation 2.5), pour finalement aboutir à la matrice de transfert \mathcal{P}_s^N pour N cellules symétriques (cellule centrée sur la perforation). Nous montrons ci-dessous que cette matrice s'écrit :

$$\mathcal{P}_s^N = \begin{pmatrix} H_1 & H'_1 \\ H_2 & H'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_N & 0 \\ 0 & D'_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 & H'_1 \\ H_2 & H'_2 \end{pmatrix}^{-1}, \quad (2.40)$$

où

$$D_N = \begin{pmatrix} chN\Gamma & shN\Gamma \\ shN\Gamma & chN\Gamma \end{pmatrix}, \quad D'_N = \begin{pmatrix} chN\Gamma' & shN\Gamma' \\ shN\Gamma' & chN\Gamma' \end{pmatrix}.$$

Les éléments des matrices \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 , \mathbf{H}'_1 et \mathbf{H}'_2 ne dépendent pas du nombre de cellules N et sont exprimées en fonction des coordonnées des vecteurs propres du réseau et des solutions de l'équation de dispersion d'une cellule (éq. 2.60 et 2.61) (Les indices 1 et 2 correspondent toujours aux deux guides, Γ et Γ' étant les constantes de propagation des deux modes propres du réseau).

2.3.1 Vecteurs propres

Ce paragraphe a pour base les équations présentées au paragraphe (2.1). Le vecteur propre $(\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2)$ correspondant à la valeur propre λ s'obtient à partir de l'équation (2.10), ce qui donne :

$$p_1 [(A_1 - \lambda) + w C_1] + v_1 [B_1 + w (A_1 - \lambda)] = 0, \quad (2.41)$$

où $\mathbf{V}_1 = {}^t(p_1, v_1)$ et w sont donnés par (2.20) (idem avec \mathbf{V}_2 et w'). Par ailleurs, la première équation du système (2.9) donne entre les coordonnées \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 la relation suivante :

$$\gamma_1 [(A_1 - \lambda)p_1 + B_1 v_1] + \gamma_2 [(A_2 - \lambda)p_2 + B_2 v_2] = 0. \quad (2.42)$$

Bien entendu, chaque vecteur propre n'est défini qu'à une constante près : une des coordonnées de chaque vecteur peut être choisie arbitrairement. Une équation similaire à (2.42) est obtenue pour le vecteur propre ${}^t(\tilde{\mathbf{V}}_1 \tilde{\mathbf{V}}_2) = (\tilde{p}_1, \tilde{v}_1, \tilde{p}_2, \tilde{v}_2)$, en changeant λ en $\tilde{\lambda} = 1/\lambda$, ainsi que w en $(-w)$. Pour ${}^t(\mathbf{V}'_1 \mathbf{V}'_2)$ et ${}^t(\tilde{\mathbf{V}}_1 \tilde{\mathbf{V}}_2)$, les notations se modifient de façon évidente.

La matrice de passage \mathcal{Q} , constituée des vecteurs propres, s'écrit donc :

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}'_1 \\ \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}'_2 \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

où l'on définit les quatre matrices carrées d'ordre deux comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= (\mathbf{V}_1, \tilde{\mathbf{V}}_1), & \mathbf{q}'_1 &= (\mathbf{V}'_1, \tilde{\mathbf{V}}'_1), \\ \mathbf{q}_2 &= (\mathbf{V}_2, \tilde{\mathbf{V}}_2), & \mathbf{q}'_2 &= (\mathbf{V}'_2, \tilde{\mathbf{V}}'_2), \end{aligned} \quad (2.44)$$

les vecteurs propres étant obtenus à partir des équation (2.41) et (2.42) et les équations similaires.

2.3.2 Matrice de transfert d'une succession de N cellules asymétriques

Pour une succession de N cellules asymétriques, la diagonalisation aboutit au résultat classique suivant :

$$\mathcal{P}^N = \mathcal{Q} \mathcal{X}^N \mathcal{Q}^{-1}, \quad (2.45)$$

où

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\lambda}' \end{pmatrix}$$

est la matrice diagonale d'une cellule du réseau. Plutôt que les valeurs propres, il est préférable d'utiliser les constantes de propagation Γ et Γ' (éq. 2.15) car nous cherchons une matrice de transfert \mathcal{P}^N pour les pressions et les vitesses, et voulons faire apparaître les fonctions hyperboliques des arguments $N\Gamma$ et $N\Gamma'$.

Nous écrivons l'équation :

$$\mathcal{P}^N = \mathcal{Q} \mathcal{E} (\mathcal{E}^{-1} \mathcal{X}^N \mathcal{E}) \mathcal{E}^{-1} \mathcal{Q}^{-1}, \quad (2.46)$$

où

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \mathbf{E} \end{pmatrix} \text{ avec } \mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Un calcul du terme central donne :

$$(\mathcal{E}^{-1} \mathcal{X}^N \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} chN\Gamma & shN\Gamma & 0 & 0 \\ shN\Gamma & chN\Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & chN\Gamma' & shN\Gamma' \\ 0 & 0 & shN\Gamma' & chN\Gamma' \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Avant de calculer $\mathcal{Q}\mathcal{E}$, on écrit afin de satisfaire à l'équation (2.41) :

$$\begin{cases} p_1 = q_1[B_1 + w(A_1 - \lambda)], \\ v_1 = q_1[\lambda - A_1 - wC_1], \end{cases} \quad (2.49)$$

où q_1 est une constante arbitraire. Pour \tilde{p}_1 et \tilde{v}_1 , la même constante q_1 est choisie de façon que :

$$\begin{cases} \tilde{p}_1 = q_1[B_1 + w(A_1 - 1/\lambda)], \\ \tilde{v}_1 = q_1[1/\lambda - A_1 - wC_1]. \end{cases} \quad (2.50)$$

Il suffit de modifier les notations pour obtenir l'analogie des équations (2.49) et (2.50) pour les quantités dans le guide extérieur (indice 2), et pour les valeurs propres λ' et $\tilde{\lambda}'$.

On trouve à partir des équations (2.43) et (2.47) :

$$\mathcal{Q}\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1\mathbf{E} & \mathbf{Q}'_1\mathbf{E} \\ \mathbf{Q}_2\mathbf{E} & \mathbf{Q}'_2\mathbf{E} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

où

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{E} = q_1 \begin{pmatrix} B_1 - wsh\Gamma & w(A_1 - ch\Gamma) \\ ch\Gamma - A_1 & sh\Gamma - wC_1 \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

et des équations similaires pour $\mathbf{Q}'_1\mathbf{E}$ (en remplaçant q_1, w, Γ par q'_1, w', Γ'), $\mathbf{Q}_2\mathbf{E}$, et $\mathbf{Q}'_2\mathbf{E}$. Il est à noter que q_1 et q'_1 peuvent être choisis arbitrairement mais que q_2 et q'_2 leur sont respectivement liés : en effet, en utilisant les équations (2.42) et (2.49) il vient sans difficulté :

$$\gamma_1 q_1(ch\Gamma - A_1) + \gamma_2 q_2(ch\Gamma - A_2) = 0, \quad (2.53)$$

et de même pour q'_1, q'_2 , et Γ' .

2.3.3 Passage à une cellule symétrique

Il est intuitif que le produit de N matrices est plus simple si la matrice représente une cellule symétrique plutôt qu'asymétrique. En outre, une cellule symétrique permet de prendre les conditions limites de réseau de façon simple. Pour passer à une cellule symétrique, nous décomposons les matrices de transfert \mathbf{T}_1 et \mathbf{T}_2 comme suit (en omettant les indices 1 et 2) :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^g \times \mathbf{T}^d, \quad (2.54)$$

où \mathbf{T}^g (gauche) est l'inverse de la matrice \mathbf{T}^d (droite) retournée.

Par exemple, pour le guide extérieur avec diaphragmes, \mathbf{T}_2^g correspond à la propagation sur la distance l et à la moitié de l'effet du diaphragme (figure 2.7). Nous noterons

$$\mathbf{T}^d = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{T}^g = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

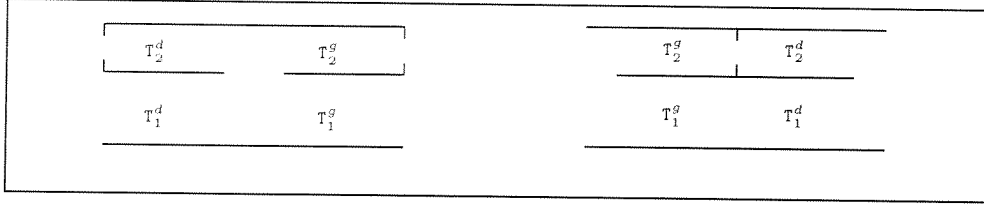


FIG. 2.7 - Schéma des matrices propagation dans une cellule élémentaire. La matrice propagation entre deux perforations, dans chaque guide, est le produit $\mathbf{T}^g \times \mathbf{T}^d$.

Les équations (2.54) et (2.55) impliquent :

$$A_1 = a_1 d_1 + b_1 c_1, \quad B_1 = 2b_1 d_1, \quad C_1 = 2a_1 c_1. \quad (2.56)$$

La même équation s'écrit dans le guide secondaire (indice 2). Alors, au lieu de nous intéresser à

$$\mathcal{P}^N = [\mathcal{P}\mathcal{E}\mathcal{R}\mathcal{F} \quad \mathcal{P}\mathcal{R}\mathcal{O}\mathcal{P}]^N,$$

nous calculons

$$\mathcal{P}_s^N = [\mathcal{P}\mathcal{R}\mathcal{O}\mathcal{P}^d \quad \mathcal{P}\mathcal{E}\mathcal{R}\mathcal{F} \quad \mathcal{P}\mathcal{R}\mathcal{O}\mathcal{P}^g]^N = [\mathcal{P}\mathcal{R}\mathcal{O}\mathcal{P}^d \quad \mathcal{P}^N \quad (\mathcal{P}\mathcal{R}\mathcal{O}\mathcal{P}^d)^{-1}] \quad (2.57)$$

où

$$\mathcal{P}\mathcal{R}\mathcal{O}\mathcal{P}^{d,g} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1^{d,g} & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_2^{d,g} \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Il suffit donc, à partir de l'équation (2.52), de calculer $\mathbf{T}_1^d \mathbf{Q}_1 \mathbf{E}$ et les matrices similaires, qui sont $\mathbf{T}_1^d \mathbf{Q}'_1 \mathbf{E}$, $\mathbf{T}_2^d \mathbf{Q}_2 \mathbf{E}$, et $\mathbf{T}_2^d \mathbf{Q}'_2 \mathbf{E}$. Ceci permet d'écrire :

$$\mathbf{T}_1^d \mathbf{Q}_1 \mathbf{E} = \mathbf{H}_1 \begin{pmatrix} ch\Gamma/2 & sh\Gamma/2 \\ sh\Gamma/2 & ch\Gamma/2 \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

où

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} h_{p1} & 0 \\ 0 & h_{v1} \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

avec

$$\begin{cases} h_{p1} = q_1(b_1 ch\Gamma/2 - a_1 wsh\Gamma/2), \\ h_{v1} = q_1(d_1 sh\Gamma/2 - c_1 wch\Gamma/2). \end{cases} \quad (2.61)$$

Finalement, les équations (2.46), (2.48), et (2.55) à (2.61) donnent le résultat cherché :

$$\mathcal{P}_s^N = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}'_1 \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_N & 0 \\ 0 & \mathbf{D}'_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}'_1 \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}'_2 \end{pmatrix}^{-1}, \quad (2.62)$$

où

$$\mathbf{D}_N = \begin{pmatrix} chN\Gamma & shN\Gamma \\ shN\Gamma & chN\Gamma \end{pmatrix}.$$

Nous avons omis d'expliciter \mathbf{H}'_1 , \mathbf{H}_2 , \mathbf{H}'_2 , et \mathbf{D}'_N , que l'on déduit de \mathbf{H}_1 et \mathbf{D}_N , avec des notations évidentes.

\mathcal{P}_s^N est la matrice de transfert pour N cellules symétriques. Pour des raisons de divergences numériques (dans le cas où Γ est réel et le mode de réseau correspondant évanescant), et pour pouvoir prendre simplement en compte les conditions aux limites de fin de réseau, il est alors utile d'écrire, pour la même succession de cellules, la matrice impédance d'ordre quatre \mathcal{Z}_N . Ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

2.4 Matrices impédance d'ordre quatre et d'ordre deux pour une portion de N cellules symétriques

Un calcul (annexe B) à partir de l'équation (2.62), donne la matrice impédance reliant les vecteurs pression et débit acoustique :

$$\begin{pmatrix} p_1^{en} \\ p_2^{en} \\ p_1^{so} \\ p_2^{so} \end{pmatrix} = \mathcal{Z}_N \begin{pmatrix} u_1^{en} \\ u_2^{en} \\ u_1^{so} \\ u_2^{so} \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

où les exposants *en* et *so* désignent l'entrée et la sortie de la portion de N cellules, et la lettre u représente un débit acoustique (par exemple $u_1 = S_1 v_1$).

En adoptant maintenant une orientation des débits *l'un vers l'autre* (par exemple en changeant le signe des débits dans chaque guide à la sortie du système u_1^{so} et u_2^{so}), il vient pour la matrice impédance :

$$\mathcal{Z}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_p \mathbf{C}_N \mathbf{S}_N^{-1} \mathbf{H}_v^{-1} \boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{H}_p \mathbf{S}_N^{-1} \mathbf{H}_v^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \\ \mathbf{H}_p \mathbf{S}_N^{-1} \mathbf{H}_v^{-1} \boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{H}_p \mathbf{C}_N \mathbf{S}_N^{-1} \mathbf{H}_v^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

où

$$\mathbf{H}_p = \begin{pmatrix} h_{p1} & h'_{p1} \\ h_{p2} & h'_{p2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_v = \begin{pmatrix} h_{v1} & h'_{v1} \\ h_{v2} & h'_{v2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_N = \begin{pmatrix} chN\Gamma & 0 \\ 0 & chN\Gamma' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_N = \begin{pmatrix} shN\Gamma & 0 \\ 0 & shN\Gamma' \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1/S_1 & 0 \\ 0 & 1/S_2 \end{pmatrix}.$$

La nouvelle orientation choisie fait apparaître la symétrie de cette matrice \mathcal{Z}_N , résultant de la réciprocité du système, sous réserve de vérifier que chacune des sous-matrices d'ordre deux est symétrique, ce qui implique :

$$\begin{cases} \gamma_1 h_{p1} h'_{v1} = -\gamma_2 h_{p2} h'_{v2} \\ \gamma_1 h'_{p1} h_{v1} = -\gamma_2 h'_{p2} h_{v2} \end{cases}, \quad (2.65)$$

car la symétrie doit être vraie pour tout N . La vérification directe de ces deux égalités est très lourde dans le cas général.

En utilisant l'équation (2.63), il est simple de *fermer* le guide 2 sur des impédances connues. Par exemple des parois rigides telles que $u_{2e} = 0$ et $u_{2s} = 0$. La matrice d'ordre quatre du système de N cellules symétriques se réduit alors pour le guide 1 à une matrice d'ordre deux :

$$\begin{pmatrix} p_1^{en} \\ p_1^{so} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{en} \\ u_1^{so} \end{pmatrix}, \quad (2.66)$$

où les éléments de la matrice sont définis par :

$$Z_{11} = Z_{22} = Z_c \coth N\Gamma + Z'_c \coth N\Gamma',$$

et

$$Z_{12} = Z_{21} = Z_c / shN\Gamma + Z'_c / shN\Gamma',$$

avec

$$Z_c = \frac{1}{S_1 \Delta_v} h_{p1} h'_{v2}, \quad \text{et} \quad Z'_c = -\frac{1}{S_1 \Delta_v} h'_{p1} h_{v2},$$

où

$$\Delta_v = h_{v1} h'_{v2} - h'_{v1} h_{v2}$$

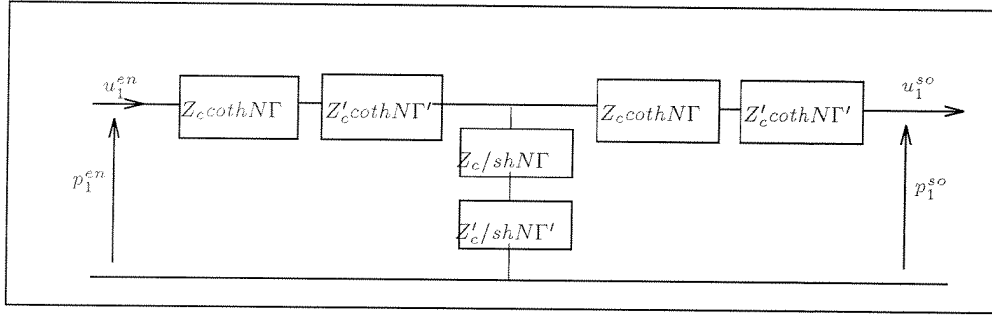


FIG. 2.8 - Représentation du schéma équivalent en T, pour le réseau de N cellules de la figure 2.6; les impédances sont données par l'équation (2.66)

est en fait le déterminant de la matrice \mathbf{H}_v .

Les quantités Z_c et Z'_c peuvent être qualifiées d'*impédances caractéristiques* des modes Γ et Γ' car elles correspondent à l'impédance d'un mode en milieu infini en l'absence de l'autre, c'est-à-dire lorsque ce dernier est évanescents ou a une impédance caractéristique nulle. Ces expressions montrent qu'il n'y a pas de terme pouvant tendre vers l'infini lorsque Γ et Γ' sont réels (et que les modes de réseau sont évanescents), ce qui est un avantage de la matrice impédance. Chacun des éléments du schéma en T (figure 2.8) se décompose lui-même en deux éléments en série, correspondant à chaque mode. Ce type de situation se rencontre lorsqu'il y a plusieurs modes dans un seul guide; ainsi Kergomard *et coll* [22] ont montré que pour une chambre d'expansion, chacun des éléments du circuit équivalent se décompose en une série infinie correspondant à un mode de guide.

Il reste alors à exprimer le facteur de perte par insertion du système inséré dans un conduit, défini comme le rapport des puissances transmises avec et sans traitement, pour une onde progressive incidente fixée et une terminaison anéchoïque (voir par exemple Pierce [24]):

$$IL = 10 \log_{10} \frac{1}{4} |A + D + B/Z_{c1} + CZ_{c1}|^2, \quad (2.67)$$

où Z_{c1} est l'impédance caractéristique du guide 1, et A , B , C et D sont les coefficients de la matrice de transfert d'ordre deux associée à la matrice impédance d'ordre deux du système de longueur finie donnée par les équations (2.66). Il vient pour la perte par insertion:

$$IL = 10 \log_{10} |M_0|^2,$$

où

$$M_0 = \frac{Z_{c1}}{Z_{12}} \left\{ \frac{Z_{11}^2}{Z_{12}^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{Z_{11}^2}{Z_{c1}^2} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{c1}^2} + 1 \right) \right\}. \quad (2.68)$$

Dans le cas où il n'y a pas de dissipation lors de la propagation et dans les perforations, Z_{11} et Z_{12} sont imaginaires purs, et l'équation (2.67) donne:

$$IL = 10 \log_{10} \left(1 - \frac{1}{4} \left(\frac{Z_{c1}}{Z_{12}} \right)^2 \left(\frac{Z_{11}^2}{Z_{c1}^2} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{c1}^2} - 1 \right)^2 \right). \quad (2.69)$$

On peut comprendre par ces derniers résultats que le comportement de la perte par insertion devient véritablement complexe lorsque deux modes sont propagatifs.

- Deux modes propagatifs: le phénomène essentiel est que l'impédance en parallèle Z_{12} du schéma en T peut s'annuler (éq. 2.66): en effet, lorsque Γ et Γ' sont réels, l'équation

$$\frac{Z_c}{sh N\Gamma} = -\frac{Z'_c}{sh N\Gamma'} \quad (2.70)$$

a des solutions.

- Si l'un des deux modes de réseau est évanescent, la quantité $\frac{Z_c}{shN\Gamma}$ associée est très petite (sauf si $N\Gamma$ est très petit, auquel cas on a une sorte *d'effet tunnel*, et le mode est alors peu différent d'un mode propagatif). Si l'autre mode est propagatif, alors l'équation (2.70) n'a pas de solutions. Si l'autre mode est lui aussi évanescent, l'équation (2.70) a au plus une solution lorsque N varie ; mais il est clair que dans le cas de deux modes évanescents, l'essentiel est que le facteur de perte par insertion est toujours très grand (bien qu'en pratique limité par les pertes).

Le résultat le plus nouveau dans un système à deux modes se rencontre donc lorsque les deux modes de réseau sont propagatifs : l'équation (2.70) peut avoir des solutions, et le facteur de perte par insertion présenter des résonances résultant de l'interaction des deux modes propagatifs. Dans l'analyse qui suit, nous introduisons de la dissipation tant dans la propagation que dans les perforations pour en étudier les effets en ayant des amplitudes de résonance réalistes.

2.5 Étude de la perte par insertion pour un conduit à résonateurs couplés et un silencieux à tubes perforés

2.5.1 Introduction

Dans ce paragraphe, nous utilisons les résultats analytiques du paragraphe précédent, en posant $Z = 0$ dans la matrice perforation, pour modéliser les deux types de milieux de propagation suivants :

1. les conduits à résonateurs couplés ;
2. les silencieux à tubes perforés avec partitions périodiques.

En effet, le formalisme peut être identique dans les deux cas, et il nous a paru intéressant de généraliser une étude entamée par Sullivan et Crocker [4] et d'en approfondir les interprétations. Nous verrons notamment tout l'intérêt d'avoir pu résoudre l'équation de dispersion pour interpréter les courbes de perte par insertion des systèmes étudiés.

En admettant que l'impédance en série des perforations est nulle, alors les coefficients w et w' sont nuls eux aussi, et le système d'équations (2.61) se simplifient notablement, pour donner :

$$h_{p1} = q_1 b_1 ch\Gamma/2, \quad \text{et} \quad h_{v1} = q_1 d_1 sh\Gamma/2. \quad (2.71)$$

En insérant ce résultat dans l'équation (2.66), il vient :

$$\begin{aligned} Z_c &= \frac{1}{S_1} \frac{h_{p1} h'_{v2}}{h_{v1} h'_{v2} - h'_{v1} h_{v2}}, \\ &= \frac{1}{S_1} \frac{b_1}{d_1} \frac{q_1 q'_2}{(q_1 q'_2 - q'_1 q_2)} coth\Gamma/2. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Enfin, en utilisant l'équation (2.53) reliant q_1 et q_2 , il vient :

$$Z_c = \frac{1}{S_1} \frac{b_1}{d_1} \frac{(ch\Gamma - A_2)(ch\Gamma' - A_1)}{(ch\Gamma - ch\Gamma')(A_2 - A_1)} coth\Gamma/2. \quad (2.73)$$

L'équation de dispersion (2.22), permet de mettre ce résultat sous la forme suivante :

$$Z_c = \frac{1}{S_1} \frac{b_1}{d_1} \frac{(ch\Gamma - A_2 + E_2)}{(ch\Gamma - ch\Gamma')} coth\Gamma/2, \quad (2.74)$$

$$= \frac{1}{S_1} \frac{b_1}{d_1} \frac{(ch\Gamma - A_1 + E_1)}{(ch\Gamma' - ch\Gamma)} \coth\Gamma/2.$$

C'est cette dernière forme que nous nous avons utilisée pour le calcul du facteur de perte par insertion (éq. 2.66 et 2.68). Nous prenons en compte la dissipation dans les perforations en ajoutant un terme réel (résistance) aux deux impédances purement imaginaires des diaphragmes Z_d (éq. 2.29) et des perforations $1/Y_s$ (1.24). Pour la perforation nous ajoutons à $1/Y_s$ le terme suivant [30] :

$$Res_s = \frac{S_1 + S_2}{2S_1S_2} \rho \left(\frac{e_s}{r_s} + 2 \right) \sqrt{2\nu\omega},$$

où $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ est la viscosité cinématique de l'air, e_s est l'épaisseur de la perforation et r_s son rayon. De la même façon, nous ajoutons à Z_d la résistance

$$Res_d = \frac{1}{S_d} \rho \left(\frac{e_d}{r_d} + 2 \right) \sqrt{2\nu\omega},$$

où e_d est l'épaisseur du diaphragme, et r_d son rayon. Ces valeurs de résistance d'un orifice ont été données par Ingard [30]. Il est admis qu'elles n'évaluent qu'approximativement la résistance réelle d'un orifice ; nous ne les utiliserons ici que pour rendre la représentation des coefficients de perte par insertion plus réaliste, et notamment limiter la valeur de l'atténuation lors des résonances. L'épaisseur des diaphragmes et des perforations a été choisie égale à $0,8 \cdot 10^{-3} \text{m}$.

Enfin, la dissipation associée aux phénomènes de propagation est prise en compte en remplaçant $k = \omega/c$ dans chaque guide par (voir [23] par exemple) :

$$k_{1,2} = \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{1}{S_{h1,2}} \frac{(1-j)}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{Pr}} \right) \right),$$

où Pr est le nombre de Prandtl, γ est le rapport des chaleurs spécifiques de l'air, $S_{h1,2} = r_{1,2} \sqrt{\omega/\nu}$, et r_1 et r_2 sont les rayons des guides 1 et 2. L'impédance caractéristique est posée égale à $Z_{c1} = \rho c/S_1$ dans le guide 1, et $Z_{c2} = \rho c/S_2$ dans le guide 2. Nous négligeons donc les effets viscothermiques dans son expression.

2.5.2 Conduit avec résonateurs couplés

Nous présentons les résultats fournis par le modèle pour le réseau de la figure 2.6, déjà présenté au paragraphe 2.2, lorsque nous avons interprété les solutions de l'équation de dispersion. Dans ce paragraphe, le réseau est de longueur finie : le guide secondaire est fermé par une paroi rigide à chaque extrémité du réseau, et le nombre de cellules élémentaires est fixé à 30. Les solutions de l'équation de dispersion (à gauche), ainsi que la perte par insertion (à droite), sont représentés sur les figures 2.9 et 2.10, pour quatre ouvertures des diaphragmes entre résonateurs ($r_d = 10^{-4} \text{m}$, 10^{-2}m , $2,5 \cdot 10^{-2} \text{m}$, et $3,5 \cdot 10^{-2} \text{m}$) les autres dimensions du réseau étant fixées ($r_s = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{m}$, $2l = 4 \cdot 10^{-2} \text{m}$, $r_1 = 10^{-1} \text{m}$ et $r_2 = 3,7 \cdot 10^{-2} \text{m}$). Nous représentons également à titre indicatif la solution de l'équation de dispersion pour un réseau de résonateurs de Helmholtz non couplés (c'est-à-dire $r_d = 0$).

Pour de très faibles couplages entre résonateurs (figure 2.9, courbes a. et b.), nous avons vérifié que notre calcul de perte par insertion (éq. 2.68 et 2.74) redonne effectivement le résultat connu d'un réseau de 30 résonateurs branchés non couplés, pour lequel un seul mode de réseau existe. La figure 2.9.b fait apparaître un pic d'absorption autour de la résonance de Helmholtz des résonateurs, résonance qui se retrouve à $kl \simeq 0.6$ sur la courbe a. (figure 2.9) : quelle que soit la fréquence, l'un des modes est très fortement évanescent, l'autre a un comportement identique à celui du mode unique qui existe lorsqu'il n'y a pas de couplage.

Pour un faible couplage ($r_d = 10^{-2} \text{m}$, figure 2.9, courbes c. et d.), la forme de la courbe de perte par insertion est proche de celle du cas très faiblement couplé (figure 2.9, courbe b.),

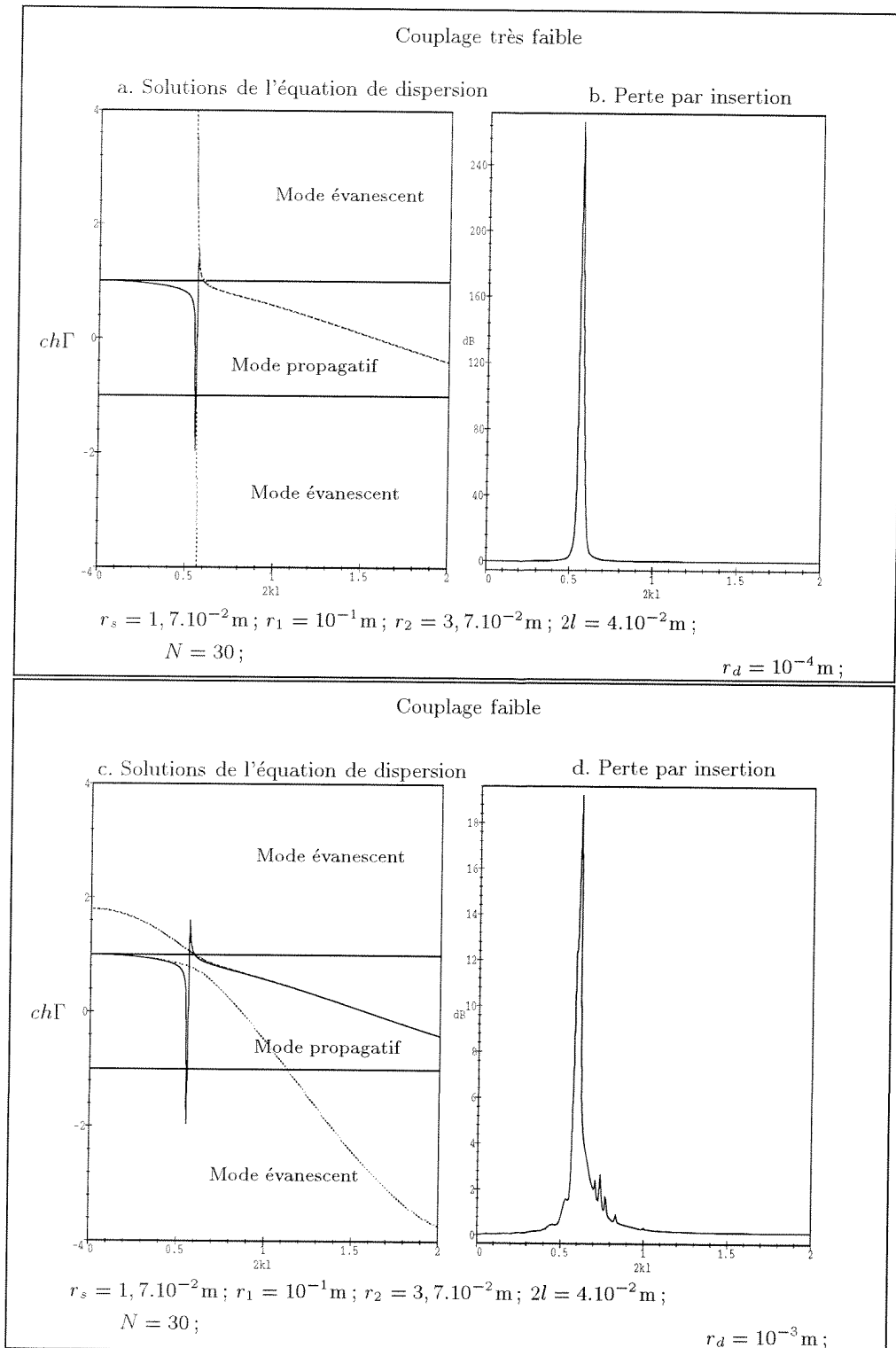


FIG. 2.9 - Effet du couplage (valeur de r_d) sur la loi de dispersion d'une cellule élémentaire (à gauche), ainsi que la perte par insertion (à droite), pour le réseau de longueur finie représenté sur la figure 2.6, en fonction de la fréquence adimensionnelle $2kl$. Sur la courbe de gauche : en pointillés, les deux solutions de l'équation de dispersion; en trait plein la solution pour des résonateurs non couplés ($r_d = 0$).

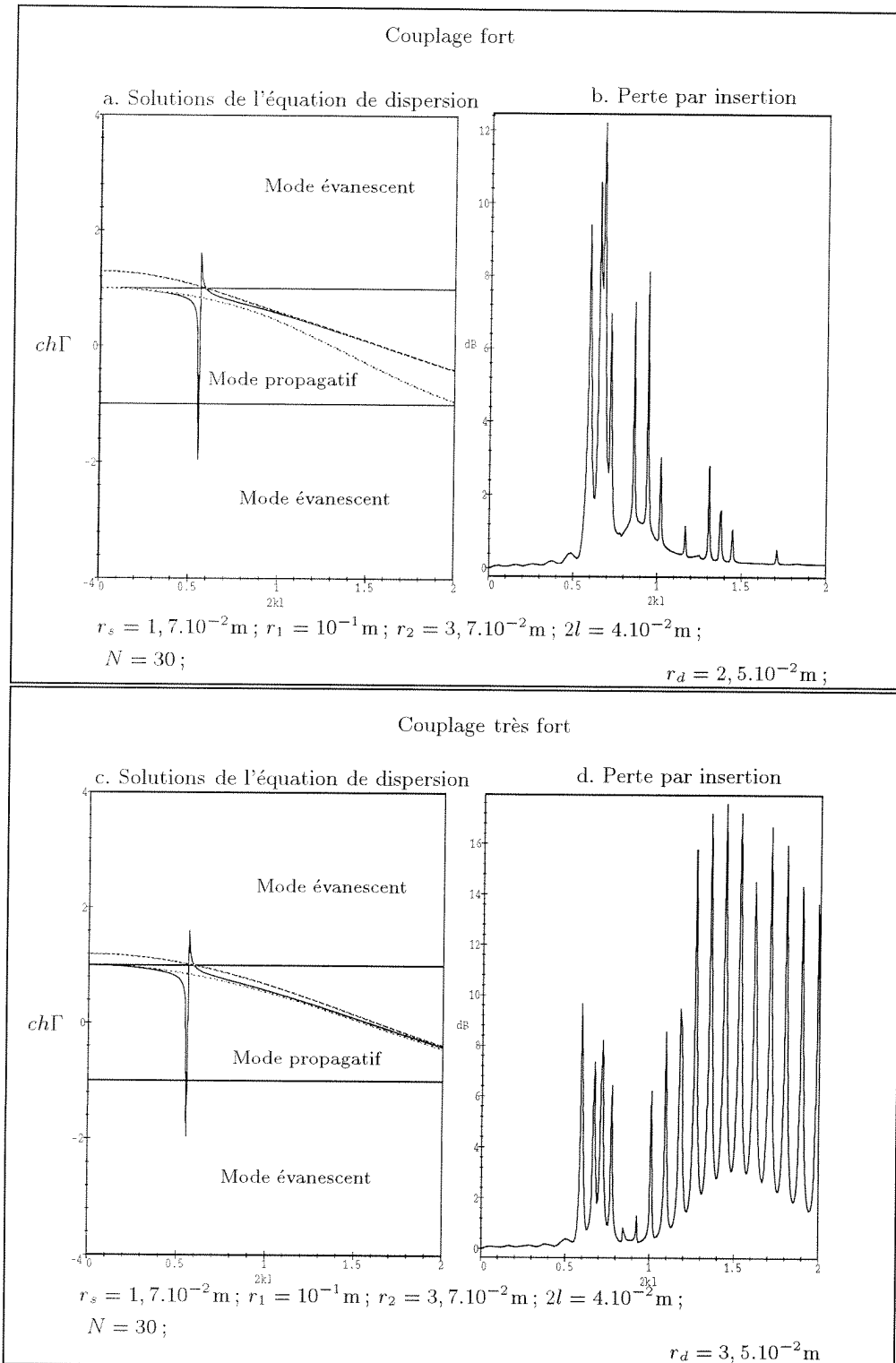


FIG. 2.10 - Effet du couplage (valeur de r_d) sur la loi de dispersion d'une cellule élémentaire (à gauche), ainsi que la perte par insertion (à droite), pour le réseau de longueur finie représenté sur la figure 2.6, en fonction de la fréquence adimensionnelle $2kl$. Sur la courbe de gauche : en pointillés, les deux solutions de l'équation de dispersion ; en trait plein la solution pour des résonateurs non couplés ($r_d = 0$).

et la fréquence de résonance légèrement plus élevée ; mais le maximum d'atténuation est de 20 dB au lieu de 250 dB. Cette différence s'interprète en modifiant le nombre de cellules : en traçant la courbe b. de la figure 2.9 pour un réseau de 15 cellules au lieu de 30, nous avons pu constater que le maximum d'atténuation est clairement divisé par deux dans le cas du couplage le plus faible. Même si nous ne présentons pas ici de démonstrations analytique rigoureuse, un effet cumulatif du nombre de cellules apparaît dans le cas du couplage très faible, car les deux modes sont évanescents à la résonance (bande d'arrêt) et le maximum d'atténuation est proportionnel à N . Dans le cas du couplage faible, la résonance est due à l'interaction des deux modes propagatifs du réseau et l'effet cumulatif est absent, ainsi que la bande d'arrêt. La valeur du maximum d'atténuation est alors inversement proportionnelle à la puissance perdue, cette dernière étant elle-même proportionnelle au nombre de cellules N ; la valeur maximale de la perte par insertion varie dans ce cas non plus comme N mais comme $\log_{10}(N)$.

Quand le couplage devient fort à très fort (figure 2.10, courbes b. et d.), deux phénomènes apparaissent, d'autant plus marqués que le couplage est fort.

1- Aux basses fréquences, de légères oscillations sont dues à l'existence d'un mode de propagation unique (le mode plan, l'autre mode étant évanescent) et la perte par insertion prend alors la forme bien connue (sans dissipation) :

$$IL = 10 \log_{10} \left(1 + 1/4 \left(\frac{Z_{ct}}{Z_{c1}} - \frac{Z_{c1}}{Z_{ct}} \right)^2 \sin(2Nkl) \right), \quad (2.75)$$

où $Z_{ct} = \rho c / (S_1 + S_2)$, $2Nl$ est la longueur totale de la chambre d'expansion et $k = \omega/c$. Le conduit traité par des résonateurs couplés se comporte alors comme une simple *chambre d'expansion*. Le rapport des sections de la partie traitée sur la partie non traitée $\frac{S_1+S_2}{S_1} = \frac{Z_{ct}}{Z_{c1}}$ est ici très voisin de 1 et les oscillations correspondant aux modes longitudinaux de la chambre d'expansion présentent donc une amplitude très faible.

2- Pour les fréquences supérieures à la résonance de Helmholtz d'une cellule, apparaissent des résonances dues aux interférences de deux modes propagatifs (figure 2.10 courbes b. et d.). L'amplitude de ces résonances est liée à la dissipation, et leur espacement très régulier (surtout lorsque le couplage est très fort, figure 2.10, courbe d.). Les deux modes ayant des constantes de propagation $\Gamma = j\phi$ et $\Gamma' = j\phi'$, très voisines, il est possible de montrer que les résonances sont données par $\sin(N\phi) = 0$. Comme les deux modes de réseau sont très peu différents du mode plan loin de la résonance de Helmholtz, on peut écrire que $\sin(N\phi) \simeq \sin(N\phi') \simeq \sin(2Nkl) = 0$, ce qui explique que l'espacement de ces pics d'atténuation soit identique à la périodicité des oscillations observées aux basses fréquences, alors que seul le mode plan se propage dans le réseau.

2.5.3 Transition entre chambre d'expansion et long résonateur

Lorsqu'il n'y a pas de diaphragmes (réseau de guides homogènes), le problème de la transition entre un comportement de chambre d'expansion et de *long résonateur* a été traité par Sullivan et Crocker [4], dans le cas d'une densité de perforation et donc d'un milieu continu. L'idée d'aborder ce problème grâce aux modes de conduits finis a été exploitée par Pierce [24] et Jayaraman et Yam [3] ; la relation avec un milieu discret se trouve en référence [22]. Nous reprenons le cas présenté par Sullivan et Crocker [2] à la lumière de nos résultats analytiques pour le coefficient de perte par insertion. Une chambre d'expansion est couplée à un tube perforé dont seul le taux de perforation σ varie. Lorsque σ est faible, la masse acoustique du *goulot équivalent* du résonateur, constitué des perforations et du volume annulaire du guide secondaire, est très grande ; sa fréquence de résonance f_{res} est très basse. Quand σ augmente et que le volume du résonateur reste inchangé, cette fréquence f_{res} augmente aussi. Pour $\sigma = 100\%$, f_{res} tend vers

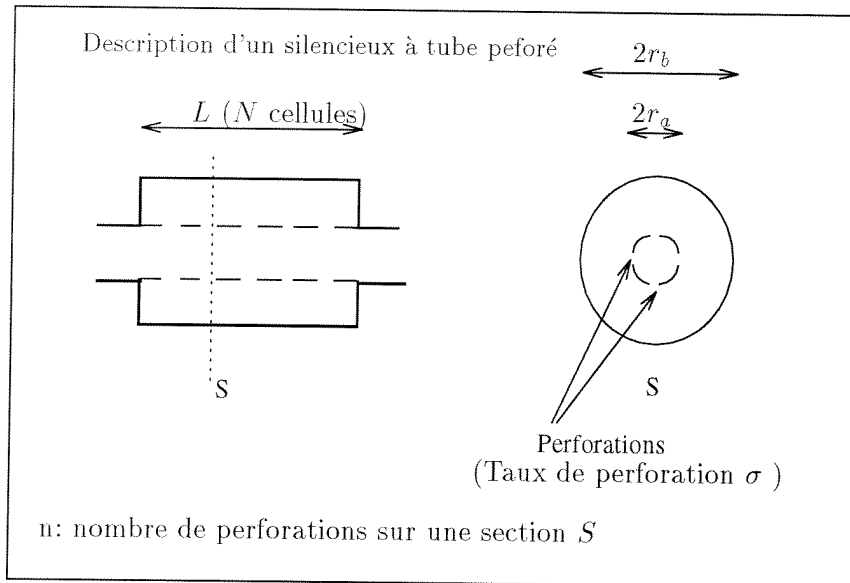


FIG. 2.11 - Description d'un silencieux à tube perforé sans partitions; les résultats relatifs à cette géométrie sont présentés sur la figure 2.12.

infini et le système est devenu une chambre d'expansion simple (le tube perforé est devenu acoustiquement transparent), dont la perte par insertion est simplement donnée par l'équation (2.75). Sur la première courbe de la figure 2.12, le taux de perforation de la chambre d'expansion est fixé à $\sigma = 46\%$ et, à l'exception de la résonance de Helmholtz que l'on devine être légèrement supérieure à 3500 Hz , la perte par transmission (ici égale à la perte par insertion) est caractéristique d'une chambre d'expansion. À mesure que σ décroît ($\sigma = 23\%$, 12% , 6% , et 2%), la fréquence de Helmholtz f_{res} décroît pour atteindre 500 Hz . Dans ces quatre derniers cas, la fréquence de résonance interagit avec des arches des modes longitudinaux de la chambre d'expansion.

Nous n'étudierons pas plus avant ce phénomène. Par contre, nous vérifions qu'au dessus de la fréquence de résonance de Helmholtz du résonateur long (environ 1700 Hz sur la figure 2.12, par exemple) apparaissent, comme il est noté par les auteurs, des résonances équidistantes correspondant à deux fois la longueur de la chambre d'expansion; grâce aux résultats précédents (paragraphe 2.5.2), nous pouvons dire que ce phénomène correspond à un régime à deux modes propagatifs dans le réseau. En outre, nous sommes en mesure d'expliquer la situation suivante: lorsque le taux de perforation σ décroît, le couplage entre les guides diminue et les caractéristiques du mode flûte se rapprochent de celles du mode plan (les deux solutions de l'équation de dispersion se rapprochent l'une de l'autre (équ. 2.24) avec $A_1 = A_2 = \cos(2kl)$ puisqu'il n'y a pas de diaphragme). Il n'y a plus d'interférences lorsque les constantes de propagation des deux modes sont égales, ce qui explique pourquoi les résonances deviennent de plus en plus étroites à mesure que le taux de perforation σ décroît.

Il est à noter que ce raisonnement à propos du couplage des deux modes propagatifs de réseau est simple lorsque le nombre de perforations dans le sens longitudinal ne change pas et que la variation de σ correspond à une variation du taux de perforation circonférentiel (c'est-à-dire du nombre de trous sur la circonférence, dans une cellule élémentaire). De cette façon, le nombre N de cellules et le volume du guide secondaire pour une cellule sont fixés. Dans le cas où le taux circonférentiel est fixé, notre modèle implique d'allonger la longueur d'une cellule élémentaire,

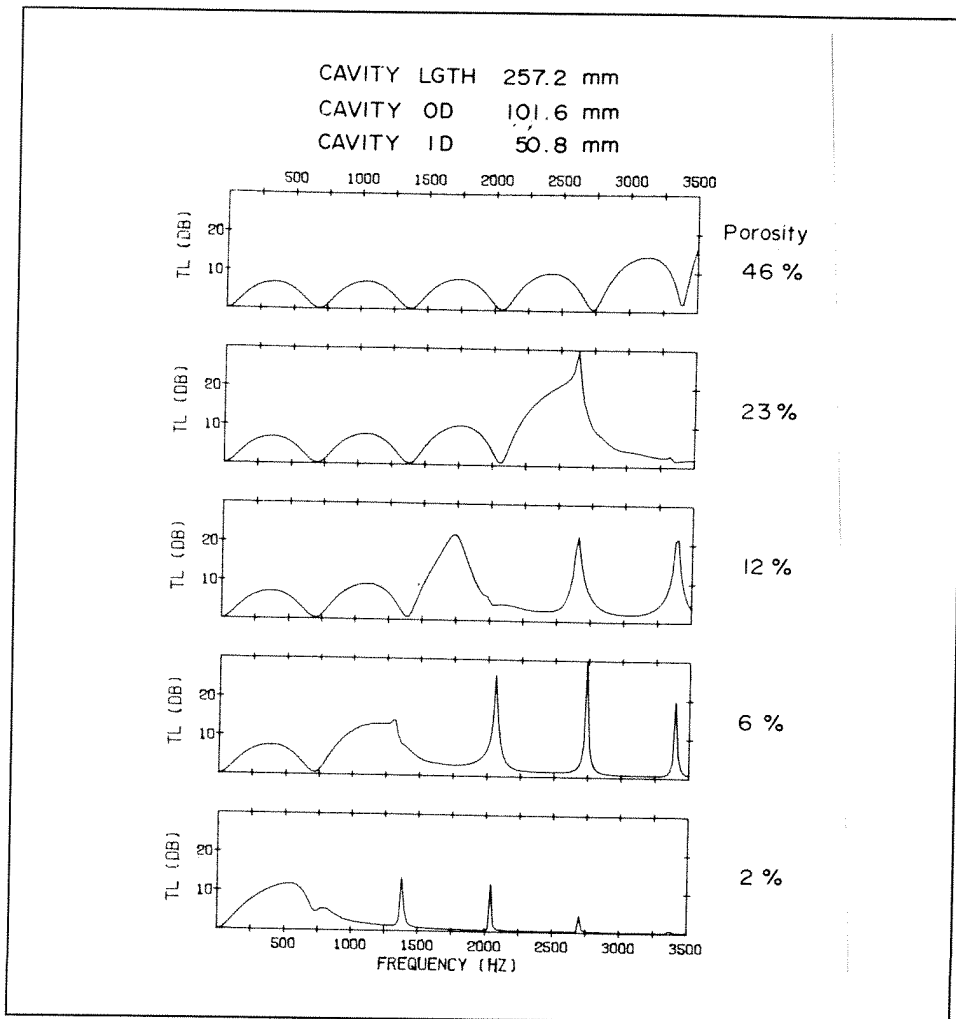


FIG. 2.12 - Effet du taux de perforation σ sur la perte par transmission TL , pour un résonateur long sans partitions, soit $\sigma' = 100\%$. D'après Sullivan et Crocker [4]. Ici, la perte par transmission est égale à la perte par insertion (terminaison anéchoïque).

ou bien de diminuer le diamètre des perforations lorsque σ diminue. La fréquence du résonateur correspondant à une cellule diminue. Un raisonnement à nombre de cellules constant est alors impossible, ce qui rend difficile l'interprétation de la largeur des résonances en utilisant, comme nous l'avons fait plus haut, les solutions de l'équation de dispersion d'une cellule élémentaire, tout en gardant les caractéristiques globales du système conformes à celles de la référence [2].

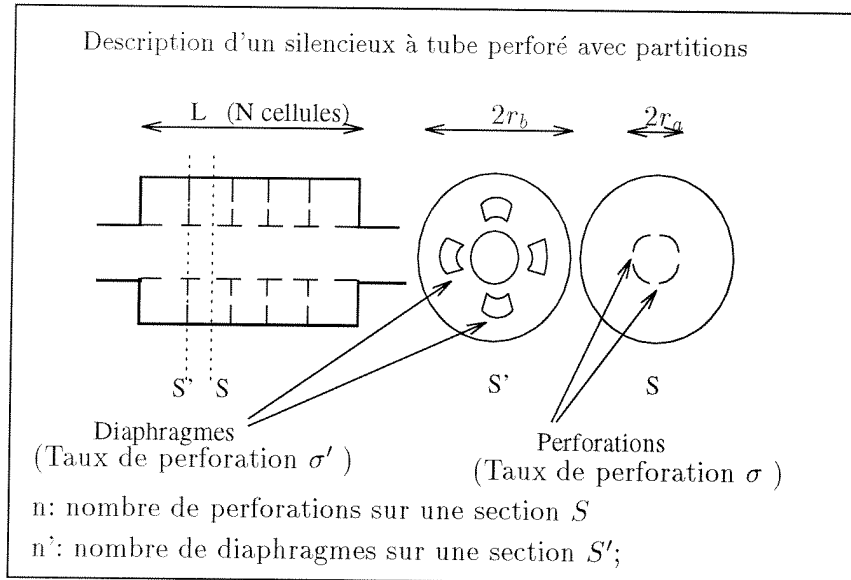


FIG. 2.13 - Description d'un silencieux à tube perforé avec partitions; les résultats relatifs à cette géométrie sont présentés sur la figure 2.12 lorsque $\sigma' = 100\%$, et sur les figures 2.14 et 2.15 lorsque $\sigma = 2\%$.

2.5.4 Silencieux à tubes perforés avec partitions

Enfin, nous ajoutons des diaphragmes dans un silencieux à tubes perforés. Ces diaphragmes sont situés dans le guide secondaire (figure 2.13) et leur plus ou moins grande ouverture permet de passer d'un long résonateur, tel que nous l'avons étudié précédemment ($\sigma' \approx 100\%$), à un réseau de résonateurs de Helmholtz branchés ($\sigma' \approx 0\%$). C'est la transition entre ces deux configurations qui nous intéresse ici.

Nous partons d'un long résonateur sans partitions, tel qu'il est décrit dans la référence [4] et représenté sur la figure 2.13, lorsque que l'on ouvre totalement les diaphragmes (ce qui donne la figure 2.11). La perte par insertion calculée par les auteurs a été présentée sur la troisième courbe de la figure 2.12 ($\sigma = 12\%$). La configuration géométrique exacte du réseau utilisé dans le modèle de la référence [2] n'a pu être précisément déterminée (notamment le taux de perforation circonférentiel). La perte par insertion été recalculée par nos soins pour un réseau approchant. Nous obtenons un résultat (figure 2.15, courbe d.) très proche de la troisième courbe de la figure 2.12 en posant $\sigma = 2\%$, $n = 3$ (trois perforations sur la circonférence de chaque cellule élémentaire), et $N = 69$ (nombre total de cellules). Tous les autres paramètres sont fixés et leur valeur est celle de la référence [4]. Nous ajoutons les solutions de l'équation de dispersion correspondantes (figure 2.15, courbe c.), que nous avons obtenues, et qui vont nous être utiles pour interpréter nos résultats.

La solution de l'équation de dispersion pour un réseau de résonateurs branchés non couplés, est représentée à titre indicatif, sur les quatre courbes de dispersion (trait continu fin). Trois

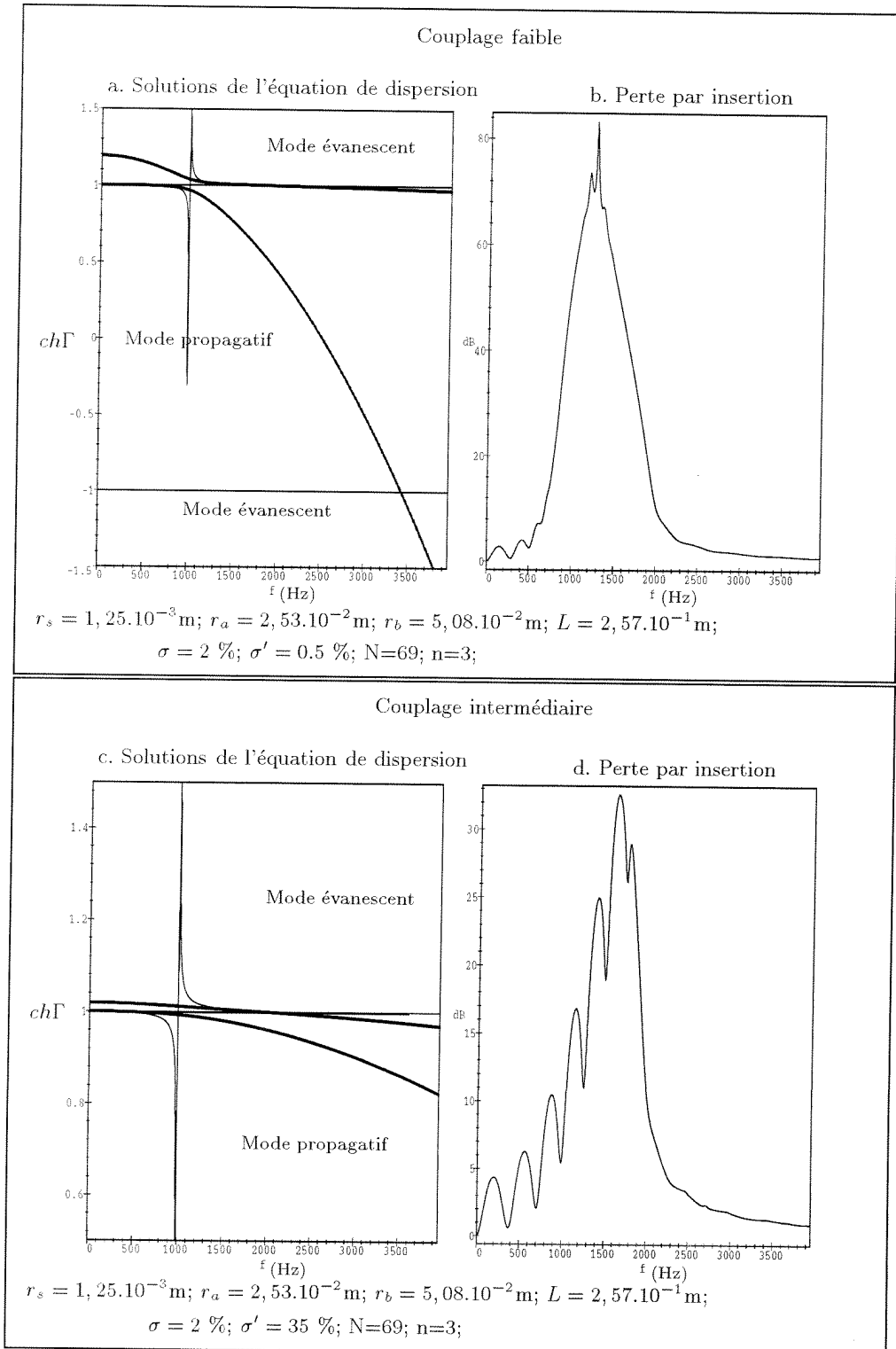


FIG. 2.14 - Effet de partitions dans une chambre d'expansion, en fonction de la fréquence pour deux couplages ($\sigma' = 0,5 \%$ et $\sigma' = 35 \%$); à droite: en trait gras, les deux solutions de l'équation de dispersion du réseau (la solution pour des diaphragmes fermés ($\sigma' = 0$) est représentée en trait fin, à titre indicatif); à gauche la perte par insertion.

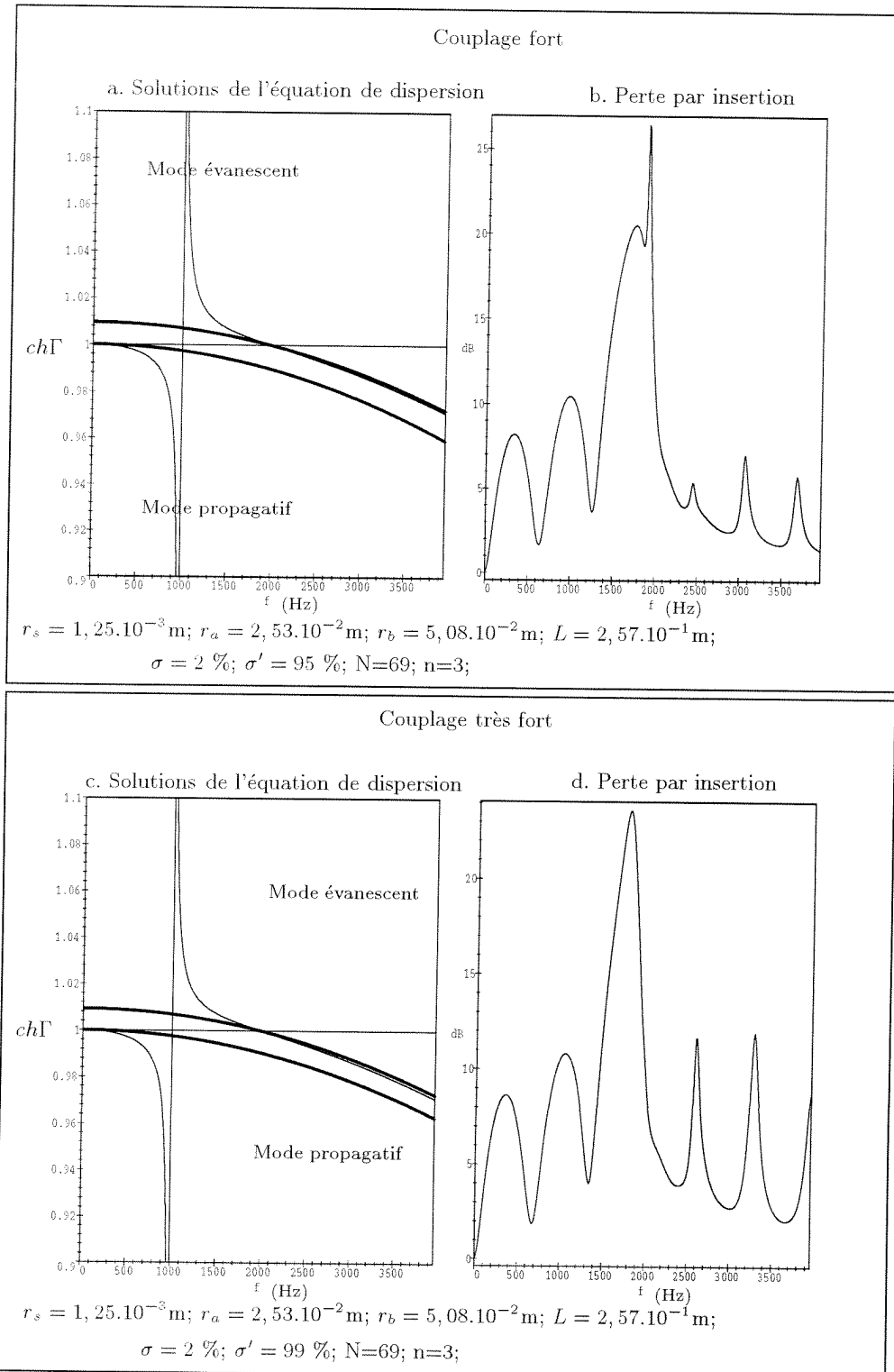


FIG. 2.15 - Effet de partitions dans une chambre d'expansion, en fonction de la fréquence pour deux couplages ($\sigma' = 95 \%$ et $\sigma' = 99 \%$); à droite : en trait gras, les deux solutions de l'équation de dispersion du réseau (la solution pour des diaphragmes fermés ($\sigma' = 0$) est représentée en trait fin, à titre indicatif); à gauche la perte par insertion.

autres cas sont représentés (relation de dispersion à gauche, et perte par insertion à droite), pour différentes valeurs de l'ouverture des diaphragmes entre cellules, déterminée par σ' .

Les courbes a. et b. de la figure 2.14 présentent le cas d'un réseau de résonateurs branchés, peu couplés ; le couplage est tout de même suffisant pour que la bande d'arrêt de Helmholtz ait disparu. La fréquence f_1 de coupure du mode propagatif aux basses fréquences se situe vers 3400 Hz (figure 2.14, courbe a.) et la fréquence f_2 de coupure du mode flûte vaut environ 2000 Hz (rappelons que f_2 reste inchangée dans les quatre cas analysés ici). Les courbes c. et d. de la figure 2.14 concernent le cas d'un réseau de résonateurs peu couplés. Les courbes a. et b. de la figure 2.15 présentent le cas d'une chambre d'expansion avec des partitions très ouvertes. Enfin, les courbes c. et d. de la figure 2.15 présentent le cas d'un long résonateur sans partitions, analogue à la troisième courbe de la figure 2.12.

À mesure que le couplage entre résonateurs augmente, d'une part la fréquence f_1 de coupure du mode propagatif aux basses fréquences augmente et, d'autre part, le mode flûte est de moins en moins évanescent en dessous de sa fréquence de coupure f_2 . D'une façon générale, les deux solutions de l'équation de dispersion tendent à se rapprocher sur l'ensemble de la gamme de fréquence étudiée. Nous constatons sur la courbe b. de la figure 2.15 que dès que l'aire ouverte des diaphragmes représente plus de la moitié de celle de la chambre d'expansion (ce qui donne ici environ $\sigma' = 95\%$), les résonances d'interférences discutées dans le paragraphe 2.5.3 (et situées au-dessus de $f_2 = 2000$ Hz) apparaissent. Le pic principal d'atténuation, visible aux alentours de 1700 Hz sur les figures 2.14.c, 2.15.b, et 2.15.d, a déjà été interprété dans la référence [4] comme la résonance de Helmholtz du long résonateur. Il se manifeste ici car le taux de perforation σ choisi au départ est suffisamment faible pour que cette résonance se situe dans le domaine de fréquence considéré. La résonance de Helmholtz d'une cellule du réseau est située à 1100 Hz (voir par exemple la courbe b. de la figure 2.15). Nous pouvons remarquer sur les courbes de perte par insertion que, lorsque le couplage entre résonateurs diminue (en partant donc de la figure 2.15.d vers la figure 2.14.b), la fréquence de résonance de Helmholtz de la chambre d'expansion diminue logiquement, s'approchant (2.14.b) de la résonance d'une cellule élémentaire du réseau.

2.6 Conclusion

Le modèle analytique que nous avons trouvé est très général : même si nous ne l'avons exploité que dans un petit nombre de cas particuliers, il reste certainement beaucoup de possibilités pour concevoir des traitements réactifs. L'équation de dispersion, la matrice impédance d'ordre quatre comme le schéma équivalent en T, l'équation des résonances dues à l'interaction des deux modes quand ils sont propagatifs, s'appliquent à tout milieu discretisé sans écoulement, le passage au continu étant également possible. Quand on monte en fréquence, il est intuitif que les solutions possibles deviennent très variées, et il resterait à analyser aussi généralement que possible comment concevoir un traitement qui produise sur telle bande de fréquence soit deux modes propagatifs, soit bien entendu deux modes évanescents. Rappelons à ce propos qu'il existe dans certains cas deux modes évanescents "conjugués", pour lesquels la variation de phase et d'intensité acoustique sont non nuls dans chacun des guides, mais de sens contraire [13, 11]. Par ailleurs le phénomène de réfraction de Bragg [15] commence à des fréquences plus hautes que celles que nous avons étudiées, puisque la longueur d'onde doit être de l'ordre des dimensions longitudinales d'une seule cellule. Pour le problème envisagé initialement, c'est-à-dire le traitement en nids d'abeilles à résonateurs couplés, nous avons montré, comme il est intuitif, que la bande de fréquences traitée était plus large mais avec un moindre atténuation que lorsqu'il n'y a pas de couplage ; en revanche un couplage fort est plus favorable qu'un couplage faible. En ce qui concerne les très basses fréquences, on sait que tant que les dimensions sont très inférieures

à la longueur d'onde, seul l'effet de la compressibilité du volume d'air du traitement intervient, et donc que la limite d'atténuation à une fréquence donnée ne dépend pas de la forme intérieure du traitement. Cependant, des systèmes enroulés, ou couplés, permettant d'obtenir un effet de propagation sur une longueur plus grande que la longueur traitée, devraient être étudiés.

Conclusion de la deuxième partie

L'étude du traitement acoustique à réaction non locale des réacteurs d'avions est un vaste sujet auquel nous pensons avoir apporté une contribution utile. Dans le chapitre un, nous avons proposé un modèle, certes simplifié (par l'approximation du piston plan), mais qui permet d'analyser de façon générale la relation entre le nombre de perforations dans une section droite, et le nombre de modes dans le conduit principal. Même si nous n'avons pas exploité le calcul numérique par la méthode de la matrice admittance locale. Cette méthode pourra être un outil pour l'exploitation du modèle, valable d'ailleurs que le milieu soit périodique ou non. À la question de savoir si la réaction non locale est bénéfique, nous n'avons pas apporté de réponse complète, cependant dans le chapitre deux, nous pensons avoir donné des éléments de réponse, ainsi que des propositions assez claires pour en comprendre les effets, aux fréquences pour lesquelles le conduit est de dimensions transversales inférieures à la longueur d'onde. Il reste évidemment beaucoup à faire :

- essayer de concevoir des matériaux à réaction non locale en s'appuyant sur l'avantage que peuvent présenter les interférences entre deux modes propagatifs ;
- poursuivre l'étude du chapitre un dans le cas des systèmes de longueur infinie, c'est-à-dire en cherchant les équations de dispersion à plusieurs modes, et dans le cas d'un système de longueur finie, en utilisant la méthode de la matrice admittance locale, qui permet en particulier de prendre en compte simple des conditions aux limites de début et de fin de réseau.

L'application à des matériaux ou poreux est possible dans ces modèles, mais il faut rester réaliste quant à ses limites car il est parfois impossible de considérer ces matériaux simplement comme un fluide équivalent homogène et isotrope. De même, doivent être pris en compte, d'une part les effets non linéaires, auxquels la première partie a été consacrée, et qui peuvent intéresser autant les milieux poreux que les perforations, et d'autre part les effets d'écoulement. Cependant nous pensons avoir montré qu'une première approche, linéaire sans écoulement et pour de faibles dissipations, peut apporter beaucoup dans la conception de systèmes réactifs.

Annexe A

Calcul de l'équation de dispersion

Nous rappelons les notations définies par les équations (2.16), (2.17) et (2.18) :

$$A_0 = -sh\Gamma \left(\frac{\gamma_2}{ch\Gamma - A_1} + \frac{\gamma_1}{ch\Gamma - A_2} \right)$$

$$B_0 = Y^{-1} - \frac{\gamma_2 B_1}{ch\Gamma - A_1} - \frac{\gamma_1 B_2}{ch\Gamma - A_2} \quad C_0 = Z^{-1} - \frac{\gamma_2 C_1}{ch\Gamma - A_1} - \frac{\gamma_1 C_2}{ch\Gamma - A_2}$$

Le calcul de l'équation de dispersion consiste à écrire :

$$A_0^2 - B_0 C_0 = 0$$

$$= sh\Gamma^2 \left(\frac{\gamma_2}{ch\Gamma - A_1} + \frac{\gamma_1}{ch\Gamma - A_2} \right)^2$$

$$- \left(Y^{-1} - \frac{\gamma_2 B_1}{ch\Gamma - A_1} - \frac{\gamma_1 B_2}{ch\Gamma - A_2} \right) \left(Z^{-1} - \frac{\gamma_2 C_1}{ch\Gamma - A_1} - \frac{\gamma_1 C_2}{ch\Gamma - A_2} \right)$$

En développant, en utilisant les égalités $A_1^2 - B_1 C_1 = 1$, $A_2^2 - B_2 C_2 = 1$ (réciprocité) et en utilisant les notations suivantes : $E_1 = \gamma_2 Y B_1$, $E_2 = \gamma_1 Y B_2$, $F_1 = \gamma_2 Z C_1$, $F_2 = \gamma_1 Z C_2$, il vient :

$$A_0^2 - B_0 C_0 =$$

$$\gamma_1^2 \frac{ch\Gamma + A_1}{ch\Gamma - A_1} + \gamma_2^2 \frac{ch\Gamma + A_2}{ch\Gamma - A_2} + \frac{2\gamma_1 \gamma_2 (ch^2\Gamma - 1)}{(ch\Gamma - A_1)(ch\Gamma - A_2)}$$

$$+ \frac{1}{YZ} \left(\frac{E_1 F_2 + E_2 F_1}{(ch\Gamma - A_1)(ch\Gamma - A_2)} + \frac{E_1 + F_1}{ch\Gamma - A_1} + \frac{E_2 + F_2}{ch\Gamma - A_2} - 1 \right).$$

Comme $\gamma_1 = \frac{s_1}{s_1 + s_2}$ et $\gamma_2 = \frac{s_2}{s_1 + s_2}$, on peut écrire $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, le numérateur de l'expression ci-dessus s'écrit :

$$YZ \{ ch^2\Gamma + ch\Gamma(\gamma_1 - \gamma_2)(A_1 - A_2) - A_1 A_2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - 2\gamma_1 \gamma_2 \}$$

$$- ch^2\Gamma + ch\Gamma(E_1 + F_1 + A_1 + E_2 + F_2 + A_2)$$

$$- A_1 A_2 - E_2 F_1 - E_1 F_2 - A_1(E_2 + F_2) - A_2(E_1 + F_1),$$

L'équation de dispersion devient :

$$ch^2\Gamma(YZ - 1) + ch\Gamma \{ (\gamma_1 - \gamma_2)(A_1 - A_2) + E_1 + F_1 + A_1 + E_2 + F_2 + A_2 \}$$

$$- A_1 A_2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - 2\gamma_1 \gamma_2 - A_1 A_2 - E_2 F_1 - E_1 F_2 - A_1(E_2 + F_2) - A_2(E_1 + F_1) = 0.$$

En posant :

$$\gamma_2 D'_1 = E_1 + F_1 + 2YZ\gamma_2 A_1, \quad \text{et} \quad \gamma_1 D'_2 = E_2 + F_2 + 2YZ\gamma_1 A_2,$$

ainsi que

$$\Pi = 2 + B_1 C_2 + B_2 C_1 - A_1 A_2,$$

nous obtenons la forme présentée pour l'équation de dispersion (2.21) :

$$ch^2 \Gamma - ch \Gamma \left\{ A_1 + A_2 + \frac{\gamma_1 D'_2 + \gamma_2 D'_1}{1 - YZ} \right\} \\ + A_1 A_2 + \frac{1}{1 - YZ} \{ \gamma_1 D'_2 A_1 + \gamma_2 D'_1 A_2 + YZ \gamma_1 \gamma_2 \Pi \} = 0.$$

Annexe B

Passage d'une matrice de transfert à une matrice d'impédance, pour N cellules

Il s'agit, connaissant la matrice de transfert reliant les pressions et vitesses dans chaque guide pour N cellules (eq. 2.62)

$$\begin{pmatrix} p_1^{en} \\ v_1^{en} \\ p_2^{en} \\ v_2^{en} \end{pmatrix} = (\mathcal{P}_s^N) \begin{pmatrix} p_1^{so} \\ v_1^{so} \\ p_2^{so} \\ v_2^{so} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

de trouver la matrice \mathcal{Z}_N telle que:

$$\begin{pmatrix} p_1^{en} \\ p_2^{en} \\ p_1^{so} \\ p_2^{so} \end{pmatrix} = (\mathcal{Z}_N) \begin{pmatrix} u_1^{en} \\ u_2^{en} \\ u_1^{so} \\ u_2^{so} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

où $u_i = S_i v_i$, ($i = 1, 2$) désigne les débits acoustiques, choisis ici orientés *l'un vers l'autre*.

En utilisant la forme (2.62) de la matrice \mathcal{P}_s^N , on peut par exemple ne considérer que la matrice centrale, pour écrire que:

$$\begin{pmatrix} V_{p1}^{'en} \\ v_1^{'en} \\ V_{p2}^{'en} \\ v_2^{'en} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_N & 0 \\ 0 & \mathbf{D}'_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{p1}^{'so} \\ v_1^{'so} \\ V_{p2}^{'so} \\ v_2^{'so} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

où les coordonnées des deux vecteurs ont la dimension d'une vitesse; ceci apparaîtra clairement plus loin. Cette expression s'écrit aussi:

$$\begin{pmatrix} V_{p1}^{'en} \\ V_{p2}^{'en} \\ v_1^{'en} \\ v_2^{'en} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_N & \mathbf{S}_N \\ \mathbf{S}_N & \mathbf{C}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{p1}^{'so} \\ V_{p2}^{'so} \\ v_1^{'so} \\ v_2^{'so} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

ou bien encore:

$$\begin{pmatrix} V'_{p1}{}^{en} \\ V'_{p2}{}^{en} \\ V'_{p1}{}^{so} \\ V'_{p2}{}^{so} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_N \mathbf{S}_N^{-1} & \mathbf{S}_N^{-1} \\ \mathbf{S}_N^{-1} & \mathbf{C}_N \mathbf{S}_N^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1'^{en} \\ v_2'^{en} \\ v_1'^{so} \\ v_2'^{so} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

où \mathbf{C}_N et \mathbf{S}_N sont deux matrices diagonales d'ordre deux, définies comme suit:

$$\mathbf{C}_N = \begin{pmatrix} chN\Gamma & 0 \\ 0 & chN\Gamma' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_N = \begin{pmatrix} shN\Gamma & 0 \\ 0 & shN\Gamma' \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

En isolant la matrice de droite dans l'équation (2.62), on peut écrire que:

$$\begin{pmatrix} p_1^{en} \\ v_1^{en} \\ p_2^{en} \\ v_2^{en} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}'_1 \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V'_{p1}{}^{so} \\ v_1'^{so} \\ V'_{p2}{}^{so} \\ v_2'^{so} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

d'où l'on tire immédiatement que, grâce au caractère diagonal des matrices \mathbf{H}_i et \mathbf{H}'_i ($i = 1, 2$)

$$\begin{pmatrix} p_1^{en} \\ p_2^{en} \\ v_1^{en} \\ v_2^{en} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_p & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V'_{p1}{}^{en} \\ V'_{p2}{}^{en} \\ v_1'^{en} \\ v_2'^{en} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

avec

$$\mathbf{H}_p = \begin{pmatrix} h_{p1} & h'_{p1} \\ h_{p2} & h'_{p2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_v = \begin{pmatrix} h_{v1} & h'_{v1} \\ h_{v2} & h'_{v2} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

Il est à noter que toutes les matrices d'ordre deux sont ici adimensionnelles, à l'exception de \mathbf{H}_p , qui a la dimension d'une impédance. De la même façon, à gauche, il vient :

$$\begin{pmatrix} V'_{p1}{}^{so} \\ v_1'^{so} \\ V'_{p2}{}^{so} \\ v_2'^{so} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}'_1 \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^{so} \\ v_1^{so} \\ p_2^{so} \\ v_2^{so} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.10})$$

ce qui donne

$$\begin{pmatrix} p_1^{so} \\ p_2^{so} \\ v_1^{so} \\ v_2^{so} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_p & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V'_{p1}{}^{so} \\ V'_{p2}{}^{so} \\ v_1'^{so} \\ v_2'^{so} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

À l'aide des équations (B.5), (B.8), et (B.11), il vient immédiatement que:

$$\begin{pmatrix} p_1^{en} \\ p_2^{en} \\ p_1^{so} \\ p_2^{so} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_p \mathbf{C}_N \mathbf{S}_N^{-1} \mathbf{H}_v^{-1} & -\mathbf{H}_p \mathbf{S}_N^{-1} \mathbf{H}_v^{-1} \\ \mathbf{H}_p \mathbf{S}_N^{-1} \mathbf{H}_v^{-1} & -\mathbf{H}_p \mathbf{C}_N \mathbf{S}_N^{-1} \mathbf{H}_v^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{en} \\ v_2^{en} \\ v_1^{so} \\ v_2^{so} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

En choisissant d'exprimer la matrice impédance en pression-débit orientés symétriquement et entrants, on obtient le résultat (2.64):

$$\begin{pmatrix} p_1^{en} \\ p_2^{en} \\ p_1^{so} \\ p_2^{so} \end{pmatrix} = (\mathcal{Z}_N) \begin{pmatrix} u_1^{en} \\ u_2^{en} \\ u_1^{so} \\ u_2^{so} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

avec

$$(\mathcal{Z}_N) = \begin{pmatrix} H_p C_N S_N^{-1} H_v^{-1} \Sigma & H_p S_N^{-1} H_v^{-1} \Sigma \\ H_p S_N^{-1} H_v^{-1} \Sigma & H_p C_N S_N^{-1} H_v^{-1} \Sigma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1/S_1 & 0 \\ 0 & 1/S_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

Bibliographie

- [1] LAPIN A.D. Sound Attenuation in Waveguides. *Sov. Phys. Acoust.*, 21:215—222, 1975.
- [2] SULLIVAN W. A Method for Modelling Perforated Tube Muffler Components. Part I. Theory. *J. Acoust. Soc. Am.*, 66:772—778, 1979.
- [3] JAYARAMAN K. et YAM K. Decoupling Approach to Modelling Perforated Tube Muffler Components. *J. Acoust.Soc.Am.*, 69:390—396, 1981.
- [4] SULLIVAN W. et CROCKER M.J. Analysis of Concentric-Tube Resonance Having Unpartitioned Cavities. *J. Acoust. Soc. Am.*, 64:207—215, 1978.
- [5] SUGIMOTO N. Propagation of Non Linear Acoustic Waves in a Tunnel With an Array of Helmholtz Resonators. *J. Fluid. Mech*, 244:55—78, 1992.
- [6] SULLIVAN W. A Method for Modelling Perforated Tube Muffler Components. Part II. Applications. *J. Acoust. Soc. Am.*, 66:779—788, 1979.
- [7] SOMMERSEL B. et KRISTIANSSEN U.R. Reduction of Sound in a Low Velocity Flow Duct by the Use of Bragg Reflections. *Applied Acoustics*, 9:35—43, 1976.
- [8] ABOM J. An Analytical Model for Reactive Silencers Based on Bragg-Scattering. *J. Sound Vib.*, 121:384—388, 1987. Lettre à l'éditeur.
- [9] BRILLOUIN L. et PARODI M. *Propagation des Ondes dans les Milieux Périodiques*. Masson, Paris, 1956.
- [10] ELACHI C. Waves in Active and Passive Periodic Structures. *Proceedings of the IEEE*, 64(12):1666—1698, 1976.
- [11] MEAD D.J. A General Theory of Harmonic Wave Propagation in Linear Periodic Systems With Multiple Coupling. *J. Sound Vib.*, 27:235—258, 1973.
- [12] SUGIMOTO N. et HOROKIA T. Dispersion Characteristics of Sound Waves in a Tunnel With an Array of Helmholtz Resonators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 97:1446—1459, 1995.
- [13] KERGOMARD J. et KHETTABI A. and MOUTON X. Propagation of Acoustic Waves in two Waveguides Coupled by Perforations. *Acta Acustica*, 2:1—16, 1994.
- [14] DEPOLLIER C., KERGOMARD J. et LALOE F. Localisation d'Anderson des Ondes dans les Réseaux Acoustiques Unidimensionnels Aléatoires. *Ann.phys.fr.*, 11:457—492, 1986.
- [15] BRADLEY C.E. Time Harmonic Acoustic Bloch Wave Propagation in Periodic Waveguides. Part I. Theory. *J. Acous. Soc. Am.*, 96:1844—1853, 1994.

- [16] DEAN L.W. Increase in Effectiveness of Low Frequency Acoustic Liners by Use of Coupled Helmholtz Resonators. *Papers-American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 19:1—8, 1977.
- [17] FAULKNER L.L. Multiple Frequency Optimization of Coupled Helmholtz Resonators for Improved Acoustic Nacelle Liners for Turbofan Engines. *American Institute of Aeronautics and Astronautics 7th Aeroacoustics Conference*, 1981. octobre 5—7, Palo Alto, California, Etats Unis.
- [18] ROURE A. Propagation du Son dans les Conduits a Section Continument Variable. *Euro-mech 94*, pages 1—10, 1977. Marseille.
- [19] PAGNEUX V., AMIR N. et KERGOMARD J. A Study of Wave Propagation in Varying Cross-Section Waveguides by Modal Decomposition. Part I. Theory and Validation. *J. Acoust.Soc.Am.*, 100:2034—2048, 1996.
- [20] DESMONS L. et KERGOMARD J. Calculation of Perforated Tubes Mufflers: Admittance Matrix Formulation Versus Transfer Matrix formulation. *3rd International Congress on Air and Structure-borned Sound and Vibration*, pages 671—675, 1994. June 13—15, Montreal, Canada.
- [21] BAZHENOV D.V., BAZHENOVA L.A. et RIMSKII-KORSAKOV A.V. Waveguide and resonant silencers. *Acoustical Physics*, 42:525—531, 1996.
- [22] KERGOMARD J., GARCIA A., TAGUI G. et DALMONT J.P. Analysis of Higher Order Mode Effects in an Expansion Chamber Using Modal Theory and Equivalent Circuits. *J. Sound Vib.*, 123:457—475, 1989.
- [23] BRUNEAU M. *Introduction aux Théories de l'Acoustique*. Publications de l'Université du Maine, Le Mans, 1983.
- [24] PIERCE A.D. *Acoustics*. Acoustical Society of America, 2nd edition, New York, 1989.
- [25] KEEFE D.H. Theory of the Single Woodwind Tone Hole. *J. Acoust.Soc.Am.*, 72:35—51, 1992.
- [26] LORD RAYLEIGH . *Theory of Sound*. Dover publications, New York, 1877. re-issue, two volumes, second editions, 1945.
- [27] KHETTABI A. *Étude de Discontinuités dans les Guides d'Ondes Acoustiques Bidimensionnels par Décomposition Modale et Transformation Conforme*. Université du Maine, Le Mans, France, 1994. Thèse de Doctorat.
- [28] NAYFEH A.H., KAISER J.F., TELIONOIS D.P. Acoustic of Aircraft Engine-Duct Systems. *A.I.A.A journal*, 13:130—153, 1975.
- [29] FOCK V.A. A Theoretical Investigation of the Acoustical Conductivity of a Circular Aperture in a Wall Put Across a Tube. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S. (Doklady Akad. Nauk. SSSR)*, 31:875—878, 1945.
- [30] INGARD U. On the Theory and Design of Acoustic Resonators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 25:1037—1061, 1953.