Etude de certaines catégories de modules de poids et de leurs restrictions à des paires duales

Guillaume Tomasini

Etude de certaines catégories de modules de poids et de leurs restrictions à des paires duales

Guillaume Tomasini

Introduction

L'objectif de ce mémoire est d'étudier certaines propriétés de restriction des modules de poids des algèbres de Lie réductives. D'une part, nous définissons une catégorie de modules de poids relative à une sous–algèbre de Levi standard dont nous décrivons les objets irréductibles. D'autre part, nous examinerons des propriétés de restriction à des paires duales des objets classés. Avant d'expliquer d'avantage le contenu de cette thèse, faisons une digression historique.

Inspiré par les travaux de Camille Jordan (1838-1922) et de Felix Klein (1849-1925), le mathématicien norvégien Sophus Lie (1842-1899) introduit dans *Über Gruppen von transformationen* en 1874 la notion de *groupes continus* auxquels il associe ce que nous appelons aujourd'hui une *algèbre de Lie*. Commence alors l'étude de ces algèbres. Entre 1888 et 1890, Wilhelm Killing (1847-1923) établit la classification des algèbres de Lie *semi–simples* sur $\mathbb{C}$ puis, en 1894, Elie Cartan (1869-1951) corrige et complète cette classification.

Parallèlement, en 1896, Georg Frobenius (1849-1917) introduit la notion de *caractère* pour les groupes finis et, en 1901, Issai Schur (1875-1941) développe la *théorie des représentations* pour les groupes finis et infinis. Enfin entre 1923 et 1938, Hermann Weyl (1885-1955) développe la théorie des groupes compacts et leur théorie des représentations. Il introduit aussi avec Eugene Wigner (1902-1995) cette nouvelle théorie en mécanique quantique.

Dès lors la théorie des algèbres de Lie et de leurs représentations va connaître un énorme succès et va tisser de nombreux liens avec entre autres la physique théorique, la combinatoire, l'analyse harmonique, la géométrie algébrique, l'algèbre homologique. La théorie des algèbres de Lie et de leurs représentations s'est beaucoup développée à travers des résultats de classification : la classification de Killing et Cartan des algèbres de Lie complexes semi–simples, la classification de Cartan des représentations de dimension finie de ces algèbres, la classification de Weyl des représentations unitaires des groupes compacts, la classification des modules de Harish–Chandra, pour n'en citer que quelques–uns.

Malgré tout, la classification de toutes les représentations *irréductibles* (qui sont en un certain sens les briques élémentaires de la théorie des représentations) d'une algèbre de Lie semi–simple semble irréaliste, même si le cas de $\mathfrak{sl}_2$ est aujourd'hui connu (voir par exemple [32]). Les développements de ces dernières années nous laissent toutefois entrevoir la résolution d'un problème certes plus restrictif mais néanmoins très général : la classification des modules de *Harish–Chandra généralisés* (voir la section 3.4 pour une définition). L'objet de cette thèse est cependant plus modeste : nous nous intéresserons à des propriétés de *restriction* d'un cas particulier de modules de Harish–Chandra généralisés : les modules de poids.

Expliquons le concept de module de poids plus en détails. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive. Soit $\mathfrak{h}$ une sous–algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On note $\mathcal{R}$ le système de racines associé au couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Dans sa thèse de 1966, Daya-Nand Verma étudie les modules qui portent aujourd'hui son nom. Ces modules jouent un rôle essentiel dans l'étude de la catégorie $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ introduite par Joseph Bernstein, Israel Gelfand et Sergei Gelfand en 1971 (voir [2]). Cette catégorie est une généralisation naturelle de la catégorie des représentations de dimension finie de $\mathfrak{g}$, basée sur les deux observations suivantes :

– Un $\mathfrak{g}$–module de dimension finie M est somme directe de ses espaces de poids, qui sont eux–mêmes de dimension finie :

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda, \quad \text{où } M_\lambda = \{m \in M \ : \ h \cdot m = \lambda(h)m, \ \forall\, h \in \mathfrak{h}\},$$

$$dim(M_\lambda) < \infty.$$

– Si on se fixe une décomposition triangulaire de $\mathfrak{g}$ de la forme $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, alors un module de dimension finie M est toujours $\mathfrak{n}^+$–fini, i.e. l'espace vectoriel engendré par l'action (itérée) de $\mathfrak{n}^+$ sur un vecteur fixé de M est de dimension finie :

$$dim(\mathcal{U}(\mathfrak{n}^+))m < \infty, \ \forall m \in M.$$

Ces deux propriétés sont les deux conditions exprimant l'appartenance à la catégorie $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ de Bernstein–Gelfand–Gelfand. Les modules irréductibles de cette catégorie sont construits comme des quotients des modules de Verma : ce sont les modules irréductibles de plus haut poids. Si l'on ne conserve que la première condition ci–dessus, on obtient les *modules de poids* étudiés indépendemment par Suren Fernando [11] et Vyacheslav Futorny [12] dans les années 80. Leur résultat principal ramène la classification des modules de poids irréductibles à celle des modules cuspidaux des algèbres de Lie simples (voir le théorème 2.3.5).

Précisons un peu cette notion. Pour $\alpha \in \mathcal{R}$, on note $\mathfrak{g}^\alpha$ l'espace radiciel de $\mathfrak{g}$ associé à la racine α. Un module de poids M est $\mathcal{R}$–*cuspidal* (ou *cuspidal* lorsqu'aucune confusion sur le système $\mathcal{R}$ est possible) si pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$ et tout vecteur X non nul de $\mathfrak{g}^{\alpha}$, l'action de X sur M est injective. Fernando a montré que les seules algèbres de Lie simples pouvant avoir des modules cuspidaux sont de type A ou C (voir le théorème 2.3.6). La classification des modules cuspidaux pour les algèbres de type A et C a débuté en 1987 par l'étude des modules cupsidaux de *degré* 1, i.e. dont tous les espaces de poids non triviaux sont de dimension 1. Dans ce cas, les modules cuspidaux irréductibles sont réalisés comme des polynômes formels sur lesquels l'algèbre de Lie agit par des opérateurs différentiels (voir la section 2.4). Ce résultat est dû à Daniel Britten et Franck Lemire [7]. En 2000, Olivier Mathieu a donné la classification des modules cuspidaux irréductibles dans le cas général [29]. D'autres approches sont ensuite venues compléter le théorème de Mathieu, notamment via des formules de Gelfand-Zetlin (voir par exemple [31] et la section 2.4).

Parallèlement à l'étude de ces diverses généralisations de la catégorie des modules de dimension finie, s'est posée la question de l'étude de restrictions de modules à des sous–algèbres. Un exemple de ces problèmes dits de *branchement* (ou *branching rules*) est résolu dans [27] par Littlewood qui examine des restrictions du groupe GL_n au groupe O_n ou encore du groupe GL_{2n} au groupe SP_{2n}. Un autre cas particulièrement étudié est celui où la sous–algèbre est formée d'une paire duale, i.e. de deux sous–algèbres de $\mathfrak{g}$ qui sont le commutant l'une de l'autre (dans $\mathfrak{g}$). Le premier exemple fondamental de restriction à une paire duale est donné par Roger Howe en 1989 dans [16] et [17]. Cet exemple traite de la représentation *minimale* (dite aussi représentation de Weil ou de Shale-Segal-Weil). A la suite des travaux de Howe de nombreux mathématiciens ont étudié ce type de problème. Mentionnons par exemple les travaux de S. Rallis et G. Schiffmann [38], de T. Przebinda [37], de J.S. Huang, P. Pandzic et G. Savin [18], ou encore de J.S. Li [26].

Dans cette thèse, nous nous intéressons à deux propriétés de restriction. Expliquons–en les principales idées. On fixe une base Δ du système de racines $\mathcal{R}$. Pour $\theta \subset \mathcal{R}$, on note $\mathfrak{p}_\theta$ la sous–algèbre parabolique standard associée à θ, $\mathfrak{n}_\theta^+$ sa partie unipotente et $\mathfrak{l}_\theta$ la sous–algèbre de Levi standard correspondante (voir la section 1.3 pour une définition). Nous étudions les $\mathfrak{g}$–modules de poids M qui, vus comme $\mathfrak{l}_\theta$–module, se décomposent en une somme directe de modules irréductibles de plus haut poids (qui sont rappelons–le les modules irréductibles de $\mathcal{O}(\mathfrak{l}_\theta)$. Notons provisoirement $\mathcal{P}(\theta)$ cette propriété. Pour étudier ces objets, nous introduisons une nouvelle famille de catégorie. Soit $\theta \subset S \subset \Delta$.

Définition 1 *La catégorie $\mathcal{O}_{S,\theta}(\mathfrak{g})$ est la sous–catégorie pleine de la catégorie* *des modules de poids M qui satisfont aux conditions suivantes :*

1. *Comme $\mathfrak{l}_\theta$–module, M est la somme directe de modules irréductibles de plus haut poids.*
2. *Le module M est $\langle S-\theta\rangle$–cuspidal.*
3. *Le module M est $\mathfrak{n}_S^+$–fini.*

Les modules appartenant à une catégorie $\mathcal{O}_{S,\theta}$ sont des exemples de modules ayant la propriété $\mathcal{P}(\theta)$. Nous étudions alors les modules irréductibles de ces catégories $\mathcal{O}_{S,\theta}$ et en donnons une classification dans certains cas (théorème 5.1.28). Dans ces cas, nous montrons aussi que la catégorie considérée est semi–simple (il s'agit donc d'un analogue du théorème de Weyl, concernant les modules de dimension finie). Les modules qui interviennent dans ces catégories sont essentiellement les modules de degré 1 étudiés dans [1] par Georgia Benkart, Daniel Britten et Franck Lemire en 1997.

Dans une deuxième étape, nous étudions la restriction de certains de modules de poids par rapport à une paire duale C–admissible de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_{2n}$. La paire duale en question est construite à partir d'une sous–algèbre de Levi $\mathfrak{l}_\theta$ (voir la section 6.4.1). Motivés par l'exemple de la paire duale (F_4, A_1) dans E_7 étudiée par J.S. Li dans [26], nous restreignons notre problème de restriction aux $\mathfrak{g}$–modules de poids qui ont la propriété $\mathcal{P}(\theta)$. En fait, nous restreignons notre problème aux modules irréductibles de la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}(\mathfrak{sl}_{2n}$. Cette thèse se compose comme suit.

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré à des rappels généraux : notion de modules et de catégories, notion d'algèbres de Lie réductives et de leur théorie des représentations (en particulier, notion d'espace de poids), puis enfin extensions de modules et action du centre de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons les objets principaux de cette thèse : les modules de poids. Nous rappelons notamment les notions de modules de Verma (généralisés) et de modules cuspidaux, ainsi que les deux théorèmes de Fernando (théorèmes 2.3.5 et 2.3.6) et la classification de Mathieu des modules cuspidaux. Enfin nous rappelons quelques résultats sur les extensions des modules cuspidaux.

Le troisième chapitre donne quelques exemples de catégories de modules. Nous rappelons quelques catégories plus ou moins bien connues : la catégorie $\mathcal{O}$ de Bernstein–Gelfand–Gelfand, et certaines de ses généralisations obtenues par Rocha–Caridi, ou encore Coleman et Futorny. Enfin, nous donnons une définition des modules de Harish–Chandra généralisés (dont les modules de poids sont un cas particulier).

Le quatrième chapitre est consacré à la définition de la catégorie $\mathcal{O}_{S,\theta}$. Nous donnons quelques propriétés simples de ces catégories : elle est notamment abélienne, noethérienne et artinienne. Nous montrons ensuite que les modules de degré 1 des algèbres de type A et C sont des exemples de modules irréductibles appartenant à certaines catégories $\mathcal{O}_{S,\theta}$.

La chapitre 5 est le cœur de ce mémoire. Nous y étudions en détails les catégories $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ qui sont un cas particulier des catégories introduites au chapitre précédent. Le résultat central de cette partie est le théorème 5.1.28 qui donne la classification des modules irréductibles des catégories $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$. Donnons-en un énoncé :

Théorème 1 *Supposons que θ soit une partie propre de Δ et que $(\mathfrak{g},\theta)$ ne soit pas dans la table 5.2 de la section 5.1.9. Alors, on a :*

1. *Il existe des modules non triviaux dans $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ si et seulement si $\mathfrak{g}$ est isomorphe à A_n et $\mathfrak{l}'_{\Delta-\theta}$ à A_m $(m < n)$ ou $\mathfrak{g}$ isomorphe à C_n et $\mathfrak{l}'_{\Delta-\theta}$ est isomorphe à la sous–algèbre $\mathfrak{sl}_2$ engendrée par la racine simple longue ou à C_k.*
2. *Pour ces parties Δ et θ, les modules irréductibles sont de degré 1 sauf si $\mathfrak{g}$ est de type A_n et $\mathfrak{l}'_{\Delta-\theta}$ de type A_1^1 pour $n > 2$.*
3. *Lorsque $\mathfrak{g} = A_n$, les modules irréductibles de degré 1 dans $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ sont isomorphes à*
$$N(\underbrace{-1,\dots,-1}_{k},a_1,\dots,a_m,\underbrace{0,\dots,0}_{l})$$
pour des entiers $k, l, m \geq 0$ satisfaisant $k + l + m = n + 1$ et $k + l > 0$ et pour $a_i \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$.
4. *Lorsque $\mathfrak{g} = C_n$, les modules irréductibles de degré 1 dans $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ sont isomorphes à $M(-1,\dots,-1,a_1,\dots,a_k)$ $(a_i \in \mathbb{C} - \mathbb{Z})$.*
5. *Si M est un module irréductible de degré 1 dans $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$, alors les $\mathfrak{l}_\theta$–modules irréductibles de plus haut poids qui interviennent dans la décomposition de M sous $\mathfrak{l}_\theta$ sont de la forme $L(a\omega_1)$ pour $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ou $L(a\omega_k) \otimes L(b\omega_1)$ pour a et b dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.*

La fin du chapitre est consacrée à la preuve de la semi–simplicité des catégories $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ étudiées ci–dessus (corollaires 5.2.3 et 5.2.8).

Dans le chapitre 6, nous commençons par rappeler la théorie des paires duales (telle qu'exposée dans [41]). Ensuite nous étudions la restriction de $\mathfrak{sl}_{2n}$–modules de poids de degré 1 à la paire duale $(\mathfrak{sl}_n,\mathfrak{sl}_2)$ de $\mathfrak{sl}_{2n}$ (voir la section 6.4.1 pour la construction de cette paire duale). La résultat principal de ce chapitre est le théorème 6.4.11 :

Théorème 2 *Supposons que* $a_1 - a_2 \notin \mathbb{Z}$. *Alors nous avons la décomposition suivante du* $\mathfrak{sl}_{2n}$*–module* N_{a_1,a_2} *comme* $\mathfrak{sl}_n \oplus \mathfrak{sl}_2$*–module :*

1. *Si* $n = 2$,

$$N_{a_1,a_2} = \oplus_{b\in\mathbb{Z}} L(-1 - a_1 + a_2 - 2b) \otimes L(a_1 - a_2 + 2b - 1).$$

2. *Si* $n > 2$,

$$N_{a_1,a_2} = \oplus_{b\in\mathbb{Z}} L(a_2 - b, 0, \ldots, 0, -1 - a_1 - b) \otimes L(a_1 - a_2 + 2b - (n - 1)).$$

Nous terminons ce chapitre par l'étude du cas "non–générique" $a_1 - a_2 \in \mathbb{Z}$, pour lequel nous donnons également une règle de branchement faisant intervenir cette fois des modules indécomposables mais non irréductibles (voir les théorèmes 6.4.15 et 6.4.16).

Table des matières

Chapitre 1

Rappels

Ce chapitre introductif a pour but de rappeler un certain nombre de faits que nous utiliserons par la suite. Il se compose comme suit. Nous commençons par quelques rappels sur la notion de modules sur un anneau. Ensuite nous donnons quelques définitions concernant la notion de catégorie. Puis, nous fixons certaines notations sur les algèbres de Lie que nous utiliserons systématiquement par la suite et nous rappelons les principales définitions concernant la notion de poids pour les modules sur une algèbre de Lie, ce qui nous servira de point de départ au chapitre 2. Nous faisons le lien entre suites exactes courtes de modules sur une algèbre de Lie et un certain cocycle. Enfin, nous rappelons des résultats de Harish–Chandra sur le centre de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi–simple. Pour tous les résultats et toutes les définitions concernant les modules et les catégories nous renvoyons à [4], [24], [8] et [28]. Le livre [20] est une bonne introduction à l'étude des modules sur une algèbre de Lie simple et aux résultats de Harish–Chandra. La plupart des preuves des résultats sur les modules se trouvent dans [4] ou dans [21] et [22].

1.1 Modules sur un anneau

Dans toute cette section, A désigne un anneau muni d'une unité notée 1. Un *A–module* (à gauche) est un groupe abélien M muni d'un morphisme d'anneau φ de A dans $End(M)$. On notera $a \cdot m$ au lieu de $\varphi(a)(m)$ l'action de A. Un *sous–module* d'un A–module M est un sous–groupe abélien N de M stable par l'action de A. Un *morphisme* de A–modules de M dans N est un morphisme entre les groupes abéliens M et N tel que $f(a \cdot m) = a \cdot f(m)$. L'inclusion d'un sous–module N de M dans M est un exemple de morphisme. On note $Hom_A(M, N)$ l'ensemble des morphismes entre les A–modules M et

N. Le noyau d'un morphisme $f : M \to N$ de A–modules est un sous–module du module M. L'image de f est un sous–module du module N.

Soit I un ensemble. Une famille $(m_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un A–module M est dite *génératrice* si tout $m \in M$ peut s'écrire comme combinaison linéaire finie de la forme $\sum a_i \cdot m_i$ (où $a_i \in A$). On dit qu'un module est *de type fini* s'il peut être engendré par une famille finie. On a une notion de *somme directe* de A–modules, de produit tensoriel de A–modules et de quotient d'un A–module par un sous–A–module et dans ce cas la projection est un morphisme de A–modules (voir [3, chapitre II]). Notons que tout quotient d'un module de type fini est encore de type fini (voir [3, II.16 corollaire 1]).

Une *suite exacte courte* de A–modules est la donnée de 3 modules M', M et N et de deux morphismes de modules : un morphisme i injectif de N dans M' et un morphisme p surjectif de M' sur M tels que $im(i) = ker(p)$. Une telle suite est notée :

$$(S) \;:\; 0 \to \; N \; \to \; M' \; \to \; M \; \to 0.$$

La suite exacte (S) est *scindée* s'il existe un morphisme s, appelé *section*, de M dans M' tel que $p \circ s = 1$. On peut définir plus généralement une notion de suite exacte (longue) par la donnée d'une famille de A–modules $(M_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et de morphismes $f_i : M_i \to M_{i+1}$ tels que $im(f_i) = ker(f_{i+1})$.

Un A–module est dit *noethérien* si toute suite croissante de sous–modules de M est stationnaire. En particulier un module noethérien est de type fini. Notons enfin que M est noethérien si et seulement si N et M/N sont noethériens pour un sous–module N de M donné (voir [21, thm 3.2]). De plus tout sous–module d'un module noethérien est aussi de type fini. Une catégorie (voir la section 1.2 pour la définition de catégorie) de A–modules est *noethérienne* si tout module de la catégorie est noethérien.

Un A–module est *artinien* si toute suite décroissante de sous–modules est stationnaire. Là encore, M est artinien si et seulement si N et M/N le sont pour un sous–module N de M donné (voir [21, thm 3.2]). Une catégorie de A–modules est *artinienne* si tout module de la catégorie est artinien.

Un A–module est *indécomposable* s'il ne peut s'écrire comme somme directe de deux sous–modules propres. Un module non nul M est *simple* ou *irréductible* s'il n'a aucun sous–module propre. En particulier, un module simple est artinien et noethérien. Remarquons qu'un sous–module N d'un module M est maximal pour l'inclusion si et seulement si M/N est simple. On a aussi

Théorème 1.1.1 ([21, thm 3.8]) *Si M est un A–module noethérien et artinien alors M est une somme directe finie de sous–modules indécomposables.*

Soit M un A–module. Une *série de composition* de M est une suite (M_n) de sous–modules de M tels que $M_n \subset M_{n+1}$, $M = \cup M_n$ et M_{n+1}/M_n est un A–module simple ou trivial. Les quotients M_{n+1}/M_n sont appelés *facteurs de composition.* Une *suite de Jordan–Hölder* est une série de composition de longueur finie (seul un nombre fini de modules et de facteurs de composition sont non nuls). Alors on a le

Théorème 1.1.2 ([21, thm 3.5]) *Si M est un A–module noethérien et artinien, alors M admet une suite de Jordan–Hölder. De plus, deux séries de Jordan–Hölder de M ont même facteurs de composition à permutation et à isomorphisme près.*

Un A–module M est *semi–simple* s'il est somme directe de (ses) sous–modules simples. Cette propriété est préservée par les sous–modules et les modules quotients :

Proposition 1.1.3 ([4, corollaire 1 $n^o 4$ §3]) *Soit M un A–module semi–simple. Alors tout sous–module de M et tout quotient de M est aussi semi–simple.*

Soit B un sous–anneau de A. Si M est un B–module à gauche, on peut construire un A–module qui étend le B–module M. En effet, l'anneau A est muni d'une structure naturelle de A–module à droite (par multiplication) et donc aussi de B–module à droite. On construit alors le module $A \otimes_B M$. Cet espace a une structure naturelle de A–modules : si $a \in A$, $a \cdot (a' \otimes m) = (aa') \otimes m$. Nous utiliserons souvent par la suite cette construction pour fabriquer des "modules induits" (voir 2.2).

1.2 Catégories

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1 *Une* catégorie $\mathcal{C}$ *est la donnée de*

($\mathcal{C}_1$) *Une collection d'objets $A, B, C, \ldots$*

($\mathcal{C}_2$) *Pour toute paire d'objets A et B, une collection de morphismes notée $Hom(A, B)$.*

($\mathcal{C}_3$) *Pour chaque triplet A, B, C, une composition associative notée $\circ$:*

$$Hom(B, C) \times Hom(A, B) \to Hom(A, C).$$

($\mathcal{C}_4$) *Pour chaque objet* A *un élément* $1 \in Hom(A, A)$ *appelé identité, qui est une unité pour* $\circ$.

De plus, les ensembles $Hom(A, B)$ *et* $Hom(A', B')$ *doivent être disjoints si* $(A, B) \neq (A', B')$.

Quelques catégories usuelles sont la catégorie des ensembles, la catégorie des groupes, des $\mathbb{C}$–espaces vectoriels, ... Si A est un anneau, l'ensemble des A–modules forme une catégorie (les morphismes sont alors les morphismes de A–modules). Une *sous–catégorie pleine* d'une catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie dont les objets sont un sous–ensemble de l'ensemble des objets de $\mathcal{C}$ et dont les morphismes sont ceux de la catégorie $\mathcal{C}$ (relatifs aux objets de la sous–catégorie).

Définition 1.2.2 *Un* foncteur covariant F *entre deux catégories* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{B}$ *est une application de* $\mathcal{C}$ *dans* $\mathcal{B}$ *satisfaisant les propriétés suivantes :*

($\mathcal{F}_1$) *A chaque objet* A *de* $\mathcal{C}$*, on associe un objet* $F(A)$ *de* $\mathcal{B}$.

($\mathcal{F}_2$) *A chaque morphisme* $f \in Hom(A, B)$ *on associe un morphisme* $F(f) \in Hom(F(A), F(B))$.

($\mathcal{F}_3$) *On a* $F(1_A) = 1_{F(A)}$ *et* $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

On a une définition analogue pour un foncteur *contravariant* mais cette fois si $f \in Hom(A, B)$ alors $F(f) \in Hom(F(B), F(A))$ et $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

La plupart des catégories que nous rencontrerons seront abéliennes. Nous allons en donner la définition.

Définition 1.2.3 *Une catégorie est* additive *si pour chaque couple d'objets* (A, B) *les ensembles* $Hom(A, B)$ *sont munis d'une structure de groupes abéliens, vérifiant les conditions*

($\mathcal{A}_1$) *La loi de composition des morphismes est bilinéaire.*

($\mathcal{A}_2$) *Il existe un objet zéro* 0 *tel que* $Hom(0, B)$ *et* $Hom(A, 0)$ *sont réduits à un élément pour tout* A *et tout* B.

($\mathcal{A}_3$) *Les produits finis et les coproduits finis existent dans cette catégorie.*

Rappelons que le *produit* de deux objets A et B est la donnée d'un objet P et de deux morphismes $f \in Hom(P, A)$ et $g \in Hom(P, B)$ satisfaisant la propriété universelle suivante : pour tout objet C et toute paire de morphismes $(\phi, \psi) \in Hom(C, A) \times Hom(C, B)$ il existe un unique morphisme

$h \in Hom(C, P)$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, "\phi"'] \arrow[ddr, "\psi"] & \\
& P \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Le *coproduit* des deux objets A et B est définie de manière duale : il s'agit de la donnée d'un objet S et de deux morphismes $f \in Hom(A, S)$ et $g \in Hom(B, S)$ telles que pour tout objet C et toute paire de morphismes $(\phi, \psi) \in Hom(A, C) \times Hom(B, C)$ il existe un unique morphisme $h \in Hom(S, C)$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "f"] \arrow[ddr, "\phi"'] & & B \arrow[dl, "g"'] \arrow[ddl, "\psi"] \\
& S \arrow[d, "h"] & \\
& C &
\end{tikzcd}$$

Le *noyau* d'un morphisme $f \in Hom(E, F)$ est la donnée d'un objet E' et d'un morphisme $g \in Hom(E', E)$ tels que pour tout objet X la suite suivante est exacte :

$$0 \to Hom(X, E') \to Hom(X, E) \to Hom(X, F).$$

Ici, l'application $Hom(X, E') \to Hom(X, E)$ est donnée par $\phi \mapsto g \circ \phi$ et l'application $Hom(X, E) \to Hom(X, F)$ par $\psi \mapsto f \circ \psi$. Le *conoyau* de f est un objet E'' et un morphisme $h \in Hom(F, F'')$ tel que la suite suivante soit exacte :

$$0 \to Hom(F'', X) \to Hom(F, X) \to Hom(E, X).$$

Ici, l'application $Hom(F'', X) \to Hom(F, X)$ est donnée par $\phi \mapsto \phi \circ h$ et l'application $Hom(F, X) \to Hom(E, X)$ par $\psi \mapsto \psi \circ f$. Ces objets sont uniques (à isomorphisme près) lorsqu'ils existent.

Définition 1.2.4 *Une catégorie* abélienne *est une catégorie additive dans laquelle noyaux et conoyaux existent pour tout morphisme $f \in Hom(E, F)$ et telle que*

($\mathcal{A}_4$) *Si $f \in Hom(E, F)$ est un morphisme dont le noyau est l'objet* 0*, alors f est le noyau de son conoyau.*

($\mathcal{A}_5$) *Si* $f \in Hom(E, F)$ *est un morphisme dont le conoyau est l'objet* 0*, alors* f *est le conoyau de son noyau.*

($\mathcal{A}_6$) *Un morphisme dont le noyau et le conoyau est l'objet* 0 *est un isomorphime.*

1.2.2 La catégorie Mod_A

L'exemple le plus important pour nous de catégorie abélienne est la catégorie Mod_A de tous les A–modules (pour un anneau A donné). Dans ce cas, le noyau d'un morphisme coincide avec la définition usuelle de noyau et le conoyau d'un morphisme correspond au quotient de son but par son image. Le produit et le coproduit de deux modules est leur somme directe. Une sous–catégorie pleine de Mod_A est abélienne si elle est stable par somme directe et si elle contient les noyaux et les images de tous les morphismes de A–modules. Pour plus de détails sur les catégories additives et abéliennes, on pourra consulter [28]. Un intérêt des catégories abéliennes est que la notion de suites exactes (longues ou courtes) a du sens. On peut alors parler de foncteurs exacts.

Un foncteur est dit *exact* s'il préserve les suites exactes courtes. Par exemple, un foncteur covariant F est dit exact si pour toute suite exacte courte

$$0 \to \ M' \ \to \ M \ \to \ N \ \to 0,$$

la suite courte déduite

$$0 \to \ F(M') \ \to \ F(M) \ \to \ F(N) \ \to 0$$

est exacte.

Soient X et Y deux A–modules. Alors $Hom_A(X, ?)$ et $Hom_A(?, Y)$ sont deux foncteurs covariants exacts à gauche à valeurs dans la catégorie des $\mathbb{Z}$–modules (voir [21, théorème 3.1]). Il existe un autre foncteur qui nous sera utile par la suite, le foncteur Ext. Soit M et N deux A–modules. Considérons l'ensemble des suites exactes courtes de la forme

$$0 \to N \to ? \to M \to 0.$$

En fait, on peut mettre une relation d'équivalence sur cet ensemble : les suites exactes courtes

$$0 \to N \to E \to M \to 0$$

et

$$0 \to N \to E' \to M \to 0$$

sont équivalentes s'il existe un morphisme de E dans E' tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & E' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

On note $Ext^1(M,N)$ le quotient.

Remarque 1.2.5 *On peut vérifier que le quotient a une structure de groupe commutatif dont l'élément neutre est la classe formée par toutes les suites exactes courtes scindées. Nous renvoyons à [8, chap. XIV] ou à [21, chap. 6 §7] pour la construction de la loi.*

En particulier $Ext^1(M,N)$ est trivial si toute suite exacte courte de la forme

$$0 \to N \to ? \to M \to 0$$

est scindée. Mentionnons enfin que toute suite exacte courte

$$0 \to N \to L \to M \to 0$$

donne naissance à une suite exacte (longue)

$$0 \to Hom(X,N) \to Hom(X,L) \to Hom(X,M)$$

$$\to Ext^1(X,N) \to Ext^1(X,L) \to Ext^1(X,M) \to Ext^2(X,N) \to \cdots,$$

où nous n'explicitons pas les foncteurs Ext^n qui permettent de continuer cette suite exacte (longue). Ces foncteurs peuvent être définis directement comme homologie d'une certaine résolution projective ou comme foncteurs dérivés (voir [8, chap. VI] ou [21, chap. 6]).

1.3 Algèbres de Lie réductives, sous–algèbres de Levi

Le corps de base de cette section est $\mathbb{C}$. Rappelons qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est *simple* si elle ne contient aucun idéaux propres ; elle est *semi–simple* si elle est la somme directe d'idéaux simples. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est *réductive* si elle est la somme directe d'idéaux simples et d'un idéal commutatif. On fixe une *sous–algèbre de Cartan* $\mathfrak{h}$ (il s'agit de la somme directe du centre de $\mathfrak{g}$ et d'une sous–algèbre de Cartan de sa partie semi–simple). On note $\mathcal{R}$ le système de racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$. On note Q le réseau des racines ($Q = \sum_{\mathcal{R}} \mathbb{Z}\alpha$). Pour $\alpha \in \mathcal{R}$, on note $\mathfrak{g}^\alpha$ le sous–espace radiciel de $\mathfrak{g}$ associé à la racine α, à savoir :

$$\mathfrak{g}^\alpha := \{x \in \mathfrak{g} \ : \ [h,x] = \alpha(h)x, \ \forall\, h \in \mathfrak{h}\}.$$

Lorsqu'une base Δ de $\mathcal{R}$ est fixée, on désigne par $\mathcal{R}^+$ l'ensemble des racines positives par rapport à Δ. On écrit $\alpha > 0$ lorsque $\alpha \in \mathcal{R}^+$ et $\alpha < 0$ lorsque $-\alpha \in \mathcal{R}^+$. On note $Q^+ = \sum_{\alpha>0} \mathbb{N}\alpha$. On a la décomposition triangulaire suivante :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+, \quad \text{où } \mathfrak{n}^+ := \oplus_{\alpha>0}\, \mathfrak{g}^\alpha \text{ et } \mathfrak{n}^- := \oplus_{\alpha<0}\, \mathfrak{g}^\alpha.$$

La sous–algèbre définie par $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ est la *sous–algèbre de Borel standard.*

Plus généralement, une base Δ de $\mathcal{R}$ étant fixée, on peut considérer une partie θ de Δ et les racines construites à partir de cette sous–partie :

$$\langle\theta\rangle := \mathcal{R} \cap \mathbb{Z}\theta,$$

où $\mathbb{Z}\theta$ est l'ensemble des combinaisons $\mathbb{Z}$–linéaire d'éléments de θ.

On pose alors

$$\mathfrak{g}^{\langle\theta\rangle} := \oplus_{\alpha\in\langle\theta\rangle}\, \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{l}_\theta := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^{\langle\theta\rangle}$$

$$\mathfrak{n}_\theta^+ := \oplus_{\alpha>0,\alpha\notin\langle\theta\rangle}\, \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{n}_\theta^- := \oplus_{\alpha<0,\alpha\notin\langle\theta\rangle}\, \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{p}_\theta := \mathfrak{l}_\theta \oplus \mathfrak{n}_\theta^+.$$

On appellera $\mathfrak{l}_\theta$ la *sous–algèbre de Levi standard* définie par θ et $\mathfrak{p}_\theta$ la *sous–algèbre parabolique standard* définie par θ. La sous–algèbre de Levi est une algèbre de Lie réductive. Son centre est contenu dans $\mathfrak{h}$. Plus pécisement, le centre de $\mathfrak{l}_\theta$ est

$$\mathfrak{h}_\theta := \{h \in \mathfrak{h} \ : \ \alpha(h) = 0, \ \forall\, \alpha \in \theta\}.$$

On note Q_θ le réseau des racines de $(\mathfrak{l}_\theta, \mathfrak{h})$ et Q_θ^+ la partie de Q_θ engendrée par les combinaisons positives des racines appartenant à θ. On notera $Q^\theta := Q - Q_\theta$ et $Q^{\theta+} := (Q^+ - Q_\theta^+) \cup \{0\}$. On notera $\alpha \geq^\theta \beta$ si $\alpha - \beta \in Q^{\theta+}$.

Remarquons que si $\theta = \emptyset$, alors la sous–algèbre de Levi standard définie par θ coincide avec la sous–algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ et la sous–algèbre parabolique avec la sous–algèbre de Borel standard. De même, si $\theta = \Delta$, la sous–algèbre de Levi standard définie par θ est égale à $\mathfrak{g}$ tout entier.

1.4 Modules et poids

Pour une algèbre de Lie réductive $\mathfrak{g}$, on note $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante et $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ le centre de l'algèbre enveloppante. L'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est noethérienne (voir par exemple [34, chapitre 1]). Une *représentation* de $\mathfrak{g}$ est un morphisme d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}(V)$ pour un espace vectoriel V. On parle aussi de $\mathfrak{g}$*–module*. En fait tout $\mathfrak{g}$–module peut s'étendre de manière unique en un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$–module. Un module non nul est dit *simple* ou *irréductible* s'il n'existe aucun sous–espace strict de V invariant par l'action de $\mathfrak{g}$. Il est dit *semi–simple* ou *complétement réductible* s'il est la somme directe de modules simples. Il est dit *indécomposable* s'il ne peut s'écrire comme la somme directe de deux sous–modules propres. Un module irréductible est indécomposable. La réciproque est fausse.

On notera $Mod(\mathfrak{g})$ la catégorie abélienne de tous les $\mathfrak{g}$–modules. Par abus de notation, on notera $M \in Mod(\mathfrak{g})$ pour dire que M est un $\mathfrak{g}$–module. La catégorie $Mod(\mathfrak{g})$ est très grosse. Nous allons définir par la suite certaines sous–catégories pleines de $Mod(\mathfrak{g})$ plus maniables.

Soit $M \in Mod(\mathfrak{g})$. On appelle *poids* de M toute forme linéaire $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ pour laquelle il existe un vecteur non nul v de M vérifiant $h \cdot v = \lambda(h)v$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$. On note

$$M_\lambda := \{v \in M \ : \ h \cdot v = \lambda(h)v, \, \forall \, h \in \mathfrak{h}\},$$

l'*espace de poids* associé à la forme $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Les éléments non nuls de M_λ sont les *vecteurs de poids* λ.

Le *support* du module M est défini par

$$Supp(M) = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \ : \ M_\lambda \neq 0\}.$$

On appelle *degré* du module M le nombre (éventuellement infini) suivant :

$$deg(M) := \sup_{\lambda \in Supp(M)} \{dim(M_\lambda)\}.$$

Remarquons enfin que la somme des espaces de poids d'un module donné M est toujours directe mais n'est pas toujours égale au module M en entier. On dira alors qu'un module est $\mathfrak{h}$*–diagonalisable* si

$$M = \oplus_{\lambda \in Supp(M)} M_\lambda.$$

1.5 Extensions de $\mathfrak{g}$–modules

Nous allons donner une nouvelle interprétation de $Ext^1(M, N)$ lorsque M et N sont deux $\mathfrak{g}$–modules. Nous avons vu que cela revient à regarder certaines suites exactes à isomorphisme près, à savoir des suites exactes courtes de la forme :

$$(S) : \ 0 \to N \to M' \to M \to 0.$$

Convenons de noter p la projection de M' sur M et i l'injection de N dans M'. La suite (S) est aussi une suite exacte d'espaces vectoriels. Grâce au lemme de Zorn et au thèorème du rang, on vérifie que cette suite exacte d'espaces vectoriels est scindée. En particulier, $M' = N \oplus M$ comme espace vectoriel. Nous noterons donc dans la suite (n, m) les éléments de M' où $n \in N$ et $m \in M$.

Lemme 1.5.1 *Supposons que M et N soient deux $\mathfrak{g}$–modules semi–simples. Soit (S) la suite exacte ci–dessus. Si M' est semi–simple, alors $M' = N \oplus M$ comme $\mathfrak{g}$–modules. En d'autres termes la suite est scindée.*

Démonstration. Comme on a (voir [21])

$$Ext^1(A \oplus B) = Ext^1(A, C) \oplus Ext^1(B, C)$$

et

$$Ext^1(A, B \oplus C) = Ext^1(A, B) \oplus Ext^1(A, C)$$

, on peut supposer que N et M sont irréductibles. On peut alors voir N comme un sous–$\mathfrak{g}$–module de M' et, par hypothèse sur M', il existe donc des $\mathfrak{g}$–modules irréductibles $(L_i)_{i \in I}$ tels que $M' = N \oplus (\oplus_i L_i)$. On regarde alors $p(\oplus L_i)$. C'est un sous–$\mathfrak{g}$-module de M. Comme M est irréductible et $ker(p) = N$, on en déduit que $p(\oplus L_i) = M$ et que $p : \oplus L_i \to M$ est injectif. On obtient donc que $\oplus L_i \cong M$ comme $\mathfrak{g}$–modules. On en déduit alors que I est réduit à un élément et donc que $M' = N \oplus M$ comme $\mathfrak{g}$–modules.

□

Revenons au cas général.

Proposition 1.5.2 *Soit (S) une suite exacte. Alors il existe une application linéaire $c : \mathfrak{g} \to Hom_{\mathbb{C}}(M, N)$ telle que*

–
$$c([X, Y])(m) = [c(X), Y](m) + [X, c(Y)](m),$$

où le crochet du membre de droite est le commutateur de $Hom_{\mathbb{C}}(M, N)$, i.e. $[c(X), Y](m) = c(X)(Y \cdot m) - Y \cdot (c(X)(m))$,

– *L'action de $\mathfrak{g}$ sur M' est donnée par $X \cdot (n, m) = (X \cdot n + c(X)(m), X \cdot m)$.*

Démonstration. On a vu que les éléments de M' sont de la forme (n, m). On doit avoir $p(X \cdot (n, m)) = X \cdot p((n, m)) = X \cdot m$ car p est un morphisme de $\mathfrak{g}$–modules. Donc $X \cdot (n, m) = (\star, X \cdot m)$. D'autre part, $X \cdot (n, 0) = (X \cdot n, 0)$ car i est un morphisme de $\mathfrak{g}$–modules. Comme $(n, m) = (n, 0) + (0, m)$, on en déduit que $X \cdot (n, m) = (X \cdot n + c(X)(m), X \cdot m)$ pour une application $c : \mathfrak{g} \to Hom_{\mathbb{C}}(M, N)$. On regarde à présent l'égalité $[X, Y] \cdot (0, m) = XY \cdot$

$(0, m) - YX \cdot (0, m)$. Cette égalité donne aussitôt la relation $c([X, Y])(m) = [c(X), Y](m) + [X, c(Y)](m)$. D'autre part en écrivant $X \cdot (0, am + m') = aX \cdot (0, m) + X \cdot (0, m')$ on montre que $c(X)$ est une application linéaire. Enfin la linéarité de c provient de $(X + Y) \cdot (0, m) = X \cdot (0, m) + Y \cdot (0, m)$.

$\square$

L'application c de la proposition est appelée un *cocycle* et la relation satisfaite par c la *relation de cocyle*.

Proposition 1.5.3 *Soient (S') et (S) deux suites exactes courtes de la forme*

$$(S) : \ 0 \to N \to M' \to M \to 0,$$
$$(S') : \ 0 \to N \to M'' \to M \to 0.$$

Les suites (S) et (S') sont isomorphes si et seulement les cocycles associés c et c' vérifient $c(X) = c'(X) + [X, \phi]$ pour une application linéaire $\phi : M \to N$.

Démonstration. Nous savons que les deux suites exactes sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de $\mathfrak{g}$–modules $\psi : M' \to M''$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & M' \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & M'' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Cela nous donne les relations $\psi((n, 0)) = (n, 0)$ et $p(\psi((n, m))) = m$. Ainsi comme $(n, m) = (n, 0) + (0, m)$, il existe une application $\phi : M \to N$ telle que $\psi(n, m) = (n + \phi(m), m)$. Il est facile de voir que ϕ doit être linéaire. On écrit alors que $\psi(X \cdot (0, m)) = X \cdot \psi((0, m))$ car ψ est un $\mathfrak{g}$–morphisme. Compte tenu du fait que $X \cdot (0, m) = (c(X)(m), X \cdot m)$, cela donne immédiatement la relation $c(X) = c'(X) + [X, \phi]$. La réciproque est claire.

$\square$

Un cocycle c tel qu'il existe une application $\phi : M \to N$ satisfaisant $c(X) = [X, \phi]$ est un *cobord*. Les deux propositions ci–dessus montrent qu'une suite exacte courte à isomorphisme près est caractérisée par un cocycle à un cobord près.

1.6 Le centre de l'algèbre enveloppante

Nous rappelons dans cette section quelques propriétés du centre $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Par le théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt (PBW), on peut écrire

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \oplus \left(\mathfrak{n}^- \mathcal{U}(\mathfrak{g}) + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+\right).$$

Notons *pr* la projection de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sur $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ déduite de cette décomposition. On pose alors $\chi_\lambda := \lambda \circ pr$ pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ étendu canoniquement en un morphisme de l'algèbre (commutative) $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. Ceci fournit un caractère du centre $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ par restriction. On note enfin ξ la restriction de *pr* à $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

Proposition 1.6.1 *Le morphisme ξ est injectif.*

Démonstration. Voir [20, thm 1.10] (preuve).

Théorème 1.6.2 (Harish–Chandra) *Tout caractère χ de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ est de la forme χ_λ pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. D'autre part, $\chi_\lambda = \chi_\mu$ si et seulement $\mu = w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$ pour w dans le groupe de Weyl W de $\mathfrak{g}$ (ici ρ désigne la demi–somme des racines positives).*

Démonstration. Voir [20, thm 1.10].

Posons $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$ le sous–espace de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ formé par les éléments de poids 0 sous l'action adjointe de $\mathfrak{h}$. Il est clair que $\mathcal{U}(\mathfrak{h}) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$ et que $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$. D'autre part, il est facile de décrire les éléments de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$. D'après PBW, tout monôme de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ peut s'écrire sous la forme $X_{-\beta_{i_1}} \cdots X_{-\beta_{i_r}} H X_{\beta_{j_1}} \cdots X_{\beta_{j_l}}$ avec $H \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$. Un tel élément est de poids 0 sous l'action adjointe de $\mathfrak{h}$ si et seulement si $\sum_k \beta_{j_k} = \sum_m \beta_{i_m}$. Nous utiliserons souvent par la suite l'action de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$ et de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Rappelons à ce stade le lemme de Schur :

Lemme 1.6.3 (Schur, [19]) *Soit M un $\mathfrak{g}$–module simple. Alors il existe $\chi \in \ddagger(\mathfrak{g})^*$ tel que*

$$\forall\, z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}),\ \forall\, m \in M,\ z \cdot m = \chi(z)m.$$

Le caractère χ associé à M par le lemme est appelé le *caractère infinitésimal* de M.

Chapitre 2

Les modules de poids

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réducive sur $\mathbb{C}$. Soit $\mathfrak{h}$ une sous–algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ fixée. On notera $\mathcal{R}$ le système de racines correspondant. Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord la notion de modules de poids. Nous donnons ensuite la construction des modules de Verma et des modules de Verma généralisés. Puis nous rappelons la définition des modules cuspidaux et leur construction. Nous donnons alors quelques résultats sur les extensions de modules cuspidaux. Nous finissons ce chapitre par un résultat sur les filtrations standards que nous utiliserons par la suite. Nous renvoyons à [30] et [11] pour les résultats sur les modules de Verma généralisés et à [11], [1], [31] et [29] pour les modules cuspidaux. Les généralités sur les modules de poids et la notion de dualité restreinte sont issues de [20].

2.1 Définition des modules de poids. Premières propriétés

2.1.1 Définition

Définition 2.1.1 *Un module* $M \in Mod(\mathfrak{g})$ *est appelé* module de poids *s'il vérifie les conditions suivantes :*

$(\mathcal{P}_1)$ *M est de type fini,*

$(\mathcal{P}_2)$ *M est $\mathfrak{h}$–diagonalisable,*

$(\mathcal{P}_3)$ *Les sous–espaces de poids de M sont tous de dimension finie.*

On note $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ la sous–catégorie pleine de $Mod(\mathfrak{g})$ des modules de poids.

Remarquons que dans la littérature, le terme module de poids désigne souvent un module $\mathfrak{h}$–diagonalisable sans aucune autre hypothèse.

Donnons tout de suite quelques propriétés simples de la catégorie $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$:

Proposition 2.1.2 *1. La catégorie $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est stable par sous–modules, par modules quotients, par somme directe finie.*

2. *Les modules de dimension finies sont tous dans la catégorie $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.*
3. *Si F un module de dimension finie, alors $M \mapsto M \otimes F$ est un foncteur exact de la catégorie $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ dans elle–même.*
4. *La catégorie $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est abélienne et noethérienne.*
5. *Tout module de $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$–fini : pour tout $v \in M$ l'ensemble $\{z \cdot v,\ z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})\}$ est de dimension finie.*

Démonstration.

1. Il est clair que les sous–modules, les modules quotients et les sommes directes finies de modules $\mathfrak{h}$–diagonalisables sont encore $\mathfrak{h}$–diagonalisables ([4, cor. 1 §3 n ° 3]). La dimension des espaces de poids dans ces trois cas est encore finie. Un quotient d'un module de type fini est encore de type fini. La somme directe d'un nombre fini de modules de type fini est encore de type fini. Il reste donc à vérifier qu'un sous–module d'un module de $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est de type fini. C'est une conséquence du fait que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est noethérien ([10, chap. 2 §3]).
2. La corps $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos et la sous–algèbre de Cartan commutative et composée d'éléments semi–simples, tout module de dimension finie est somme (nécessairement directe) de ses espaces de poids (de dimension finie). Tout module de dimension finie est (évidemment) de type fini.
3. Le module $M \otimes F$ est $\mathfrak{h}$–diagonalisable avec espaces de poids de dimension finie. Plus précisement,
$$(M \otimes F)_\lambda = \sum_{\mu+\nu=\lambda} M_\nu \otimes F_\mu.$$
Il reste à montrer que $M \otimes F$ est de type fini. Soit alors $v_1, \ldots, v_n$ une base de l'espace vectoriel F et soit $w_1, \ldots, w_m$ une famille génératrice du module M. Notons N le module engendré par la famille $(w_i \otimes v_j)$. C'est un sous–module de $M \otimes F$. Montrons qu'il est égal à $M \otimes F$ tout entier. Tout d'abord, N contient tous les éléments de la forme $w_j \otimes v$ pour $v \in F$ par combinaison linéaire. Soit alors $x \in \mathfrak{g}$. Alors
$$x \cdot (w_j \otimes v) = (x \cdot w_j) \otimes v + w_j \otimes (x \cdot v).$$

Ainsi, $(x \cdot w_j) \otimes v \in N$ comme différence de deux éléments de N. En itérant ce procédé, on obtient $(u \cdot w_j) \otimes v \in N$ pour tout $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. D'où $M \otimes F \subset N$. Ainsi $M \otimes F \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Montrons maintenant que le foncteur est exact. Si $0 \to N \to M' \to M \to 0$ est une suite exacte courte, alors $0 \to N \otimes F \to M' \otimes F \to M \otimes F \to 0$ est encore une suite exacte courte. L'application de $N \otimes F$ dans $M' \otimes F$ est le produit tensoriel de l'application $N \to M'$ avec l'identité de F. Il en va de même pour l'application de $M' \otimes F$ dans $M \otimes F$.

4. Comme la catégorie $Mod(\mathfrak{g})$ est abélienne, le premier point de cette proposition permet de conclure que $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ aussi. Comme $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est noethérienne, tout module de type fini est noethérien ([4, prop.7 §2 n$^\circ$ 3]).
5. Comme M est $\mathfrak{h}$–diagonalisable, il suffit de montrer que si $v \in M_\lambda$ alors $dim\, \mathcal{Z}(\mathfrak{g})v < +\infty$. Comme l'action de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ commute à celle de $\mathfrak{h}$, $z \cdot v$ reste dans le même espace de poids que v, espace de poids qui est de dimension finie.

□

Pour χ un caractère de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ et $M \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, on note

$$M^\chi := \{v \in M \ : \ \forall\, z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}),\ \exists\, n > 0,\ (z - \chi(z))^n \cdot v = 0\}.$$

L'espace M^χ est clairement un sous–module de M.

Corollaire 2.1.3 *Tout module M dans $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ se décompose sous $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ en :*

$$M = \oplus_{\chi \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})^*} M^\chi.$$

De plus, il n'y a qu'un nombre fini de M^χ non nuls.

Démonstration. Comme l'action de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ est finie sur $M \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ d'après la proposition précédente, le module M se décompose sous son action comme annoncé. Remarquons que l'on a $M_\lambda = \oplus_\chi (M_\lambda \cap M^\chi)$ car l'action de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ commute avec celle de $\mathfrak{h}$. Comme les différents sous–modules M^χ sont en somme directe et comme M est de type fini, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de M^χ non nuls.

□

Pour $\chi \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})^*$, on note $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})^\chi$ la sous–catégorie pleine de $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ des modules M tels que $M = M^\chi$. On a donc la décomposition

$$\mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \oplus_\chi \mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})^\chi.$$

Remarquons que tout module indécomposable M de $\mathcal{M}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ est nécessairement dans une catégorie $\mathcal{M}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})^{\chi}$.

2.1.2 Le dual restreint d'un module de poids

Nous allons maintenant introduire une notion de module dual qui diffère quelque peu de la notion usuelle de module contragrédient. Fixons une base Δ du système de racines $\mathcal{R}$. Soit $M \in \mathcal{M}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. On a donc la décomposition $M = \oplus M_\lambda$. Comme chaque M_λ est de dimension finie, son dual algébrique M_λ^* est encore de dimension finie. Posons $M^\vee := \oplus M_\lambda^*$. On veut mettre sur $M^\vee$ une structure de $\mathfrak{g}$–module. Définissons tout d'abord une anti–involution τ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Pour cela, on fixe une base de $\mathfrak{h}$ correspondant à la base Δ. On fixe ensuite un vecteur X_α dans $\mathfrak{g}^\alpha$ pour toute racine positive α. On définit ensuite $X_{-\alpha}$ dans $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ de sorte que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$. L'application linéaire τ est alors définie par

$$\tau(H) = H,\ \forall\, H \in \mathfrak{h}, \quad \tau(X_\alpha) = X_{-\alpha} \text{ et } \tau(X_{-\alpha}) = X_\alpha, \quad \forall\, \alpha \in \mathcal{R}.$$

Cette application s'étend canoniquement en un anti–automorphisme de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, encore noté τ. Par exemple, si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ alors τ est la transposition matricielle.

Lemme 2.1.4 *L'application τ fixe le centre $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ point par point.*

Démonstration. Soit ξ la restriction à $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ de la projection de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sur $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ (voir la définition en 1.6). Montrons que τ commute avec ξ. Soit $Z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Notons $Z = Z_1 + Z_2$ ($Z_1 \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ et $Z_2 \in (\mathfrak{n}^-\mathcal{U}(\mathfrak{g}) + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+)$) avec $Z_1 = \xi(Z)$. Ecrivons $Z_1 \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ sous la forme $Z_1 = \sum_{\underline{i}} \lambda_{\underline{i}} H_{i_1} \cdots H_{i_r}$. Alors $\tau(Z_1) = \sum_{\underline{i}} \lambda_{\underline{i}} H_{i_r} \cdots H_{i_1}$. D'autre part, $\xi(\tau(Z_2)) = 0$ car $\tau(\mathfrak{n}^-\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+$ et $\tau(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+) \subset \mathfrak{n}^-\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Donc ξ et τ commutent. Or, d'après la proposition 1.6.1 on sait que ξ est injectif. On vient de voir que $\xi(\tau(Z)) = \tau(\xi(Z))$ mais comme $\xi(Z) \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ et que $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ est une algèbre commutative, $\tau(\xi(Z)) = \xi(Z)$. Par injectivité, on a bien $\tau(Z) = Z$.

□

On définit l'action suivante sur M^* : pour $f \in M^*$, on pose

$$(x \cdot f)(v) = f(\tau(x) \cdot v).$$

Or, on peut identifier M_λ^* avec les formes f de M^* qui s'annulent sur les M_μ pour $\mu \neq \lambda$. Cela assure que l'action de $\mathfrak{g}$ sur M^* donne par restriction une action sur $M^\vee$.

Il est clair que $M^\vee$ est $\mathfrak{h}$–diagonalisable et que ses espaces de poids sont de dimension finie. Mais il n'est pas clair qu'il soit de type fini. Nous reviendrons sur ce point plus tard. Donnons néanmoins quelques propriétés évidentes de cette dualité :

Proposition 2.1.5 *1. L'application $M \mapsto M^\vee$ est un foncteur exact et contravariant, et $M^{\vee\vee} \cong M$.*

2. Pour deux modules de poids M et N, on a $(M \oplus N)^\vee = M^\vee \oplus N^\vee$. En particulier, si M est irréductible, $M^\vee$ aussi.

3. Si le module de poids M a un caractère central χ alors $M^\vee$ aussi.

Démonstration.

1. Soit $0 \to L \to M \to N \to 0$ une suite exacte. Alors la suite $0 \to N^\vee \to M^\vee \to L^\vee \to 0$ est aussi exacte. En effet, si on note i l'injection de L dans M. On définit l'application $i^\vee$ de $M^\vee$ dans $L^\vee$ par $f \mapsto f \circ i$. On vérifie que $i^\vee$ est surjective. On définit de même l'application $p^\vee$ de $N^\vee$ dans $M^\vee$ par $g \mapsto g \circ p$ et on vérifie que $p^\vee$ est injective. Il reste alors à montrer que $im(p^\vee) = ker(i^\vee)$. Une forme dans $im(p^\vee)$ s'annule sur $i(L)$ car la première suite est exacte. Ainsi $im(p^\vee) \subset ker(i^\vee)$. Comme les espaces considérés ici sont tous des $\mathfrak{h}$–modules, on conclut grâce à $im(i) = ker(p)$ que $im(p^\vee) = ker(i^\vee)$. Enfin, il est clair que $(M^\vee)^\vee \cong M$ car $\tau^2 = 1$.
2. Ce point est clair.
3. Cela résulte aussitôt du fait que τ fixe point par point le centre de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ d'après le lemme 2.1.4.

□

Pour pouvoir étudier plus en détails la catégorie $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (et en particulier ses modules simples), il nous faut à présent introduire la notion de module induit.

2.2 Induction parabolique

Lorsque $M \in Mod(\mathfrak{g})$, on peut considérer sa restriction à n'importe quelle sous–algèbre de $\mathfrak{g}$. Cela fournit une représentation de la sous–algèbre. La question naturelle qui se pose alors est peut–on faire la construction inverse, c'est–à–dire partir d'une représentation d'une sous–algèbre de $\mathfrak{g}$ est l'étendre de façon raisonnable à $\mathfrak{g}$. Nous présentons ici un cas particulier de ce type de construction : l'induction parabolique.

Dans un premier temps, regardons la sous–algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$. On a la décomposition $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ avec $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}^+] \subset \mathfrak{n}^+$. Étant donné une représentation de $\mathfrak{h}$, on peut donc toujours l'étendre en une représentation de $\mathfrak{b}$ en imposant que $\mathfrak{n}^+$ agisse trivialement sur le $\mathfrak{h}$–module. D'autre part, un $\mathfrak{h}$ –module irréductible est de dimension 1 car $\mathfrak{h}$ est commutative.

Soit alors $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. On note $\mathbb{C}_\lambda$ l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ muni de l'action de $\mathfrak{h}$ donnée par λ :

$$h \cdot z = \lambda(h)z, \quad \forall\, h \in \mathfrak{h},\ z \in \mathbb{C}.$$

On note encore $\mathbb{C}_\lambda$ le $\mathfrak{b}$–module obtenu par extension triviale. On pose alors

$$V(\lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} C_\lambda.$$

Cet espace est un $\mathfrak{g}$–module pour l'action par multiplication à gauche. Plus précisement, pour $x \in \mathfrak{g}$ et $u \otimes z \in V(\lambda)$, on a

$$x \cdot u \otimes z = (xu) \otimes z = ad(x)(u) \otimes z + (ux) \otimes z. \tag{2.1}$$

Ainsi, si $x \in \mathfrak{n}^+$, on a donc

$$x \cdot u \otimes z = ad(x)(u) \otimes z,$$

et si $x \in \mathfrak{h}$, on a

$$x \cdot u \otimes z = ad(x)(u) \otimes z + \lambda(x) u \otimes z.$$

De plus $1 \otimes \mathbb{C}_\lambda$ est isomorphe à $\mathbb{C}_\lambda$ comme $\mathfrak{h}$–module. La restriction de $V(\lambda)$ à $\mathfrak{h}$ contient donc $\mathbb{C}_\lambda$. On appelle $V(\lambda)$ le *module de Verma* de plus haut poids λ. Rappelons les principales propriétés de ce module :

Proposition 2.2.1 *1. Le module $V(\lambda)$ est un module de poids, isomorphe à $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ comme espace vectoriel. De plus Supp$(V(\lambda)) \subset \lambda - Q^+$.*

2. *Le module $V(\lambda)$ est indécomposable et possède un unique sous–module maximal $K(\lambda)$.*
3. *Soit pr la projection de $V(\lambda)$ sur $1 \otimes \mathbb{C}_\lambda$ donnée par la décomposition de $V(\lambda)$ en espaces de poids. Le module $K(\lambda)$ peut être caractérisé comme suit :*
$$K(\lambda) = \{v \in V(\lambda)\ :\ \forall\, u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^+),\ pr(u \cdot v) = 0\}.$$
4. *Le quotient $V(\lambda)/K(\lambda)$ est l'unique quotient irréductible de $V(\lambda)$. On le note $L(\lambda)$.*

Démonstration.

1. Vu comme $\mathfrak{g}$–module à gauche, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est $\mathfrak{h}$–diagonalisable. Ainsi $V(\lambda)$ est $\mathfrak{h}$–diagonalisable. Par construction, $V(\lambda)$ est engendré par l'élément $1 \otimes 1$; il est donc de type fini. Comme $\mathfrak{n}^+$ agit trivialement sur $1 \otimes \mathbb{C}_\lambda$, comme espace vectoriel $V(\lambda)$ est isomorphe à $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ (l'isomorphisme est l'application $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \mapsto u \otimes 1 \in V(\lambda)$). L'assertion sur le support est évidente. Les espaces de poids sont de dimension finie car ils sont en bijection avec les espaces de poids de $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ qui sont de dimension finie.

2. Remarquons que l'espace de poids λ de $V(\lambda)$ est de dimension 1, engendré par un élément non nul de $1 \otimes \mathbb{C}_\lambda$. Supposons que $V(\lambda)$ soit décomposable : $V(\lambda) = M_1 \oplus M_2$. Les modules M_i sont alors des modules de poids comme sous–modules d'un module de poids. En particulier, l'espace de poids λ dans $V(\lambda)$ est la somme des espaces de poids λ de M_1 et de M_2. Comme cet espace est de dimension 1, il est inclus dans un des deux modules, disons M_1. Mais comme il engendre $V(\lambda)$, c'est que $M_1 = V(\lambda)$. Ainsi le module $V(\lambda)$ est indécomposable. Par le lemme de Zorn, $V(\lambda)$ admet un sous–module maximal. Supposons qu'il en existe deux, soient K_1 et K_2. Alors $K_1 + K_2 = V(\lambda)$ par maximalité. Comme précédemment, un des deux modules doit contenir l'espace de poids λ, ce qui contredit le fait que $K_i \neq V(\lambda)$.
3. On vérifie sans mal que $K(\lambda)$ est bien un sous–module de $V(\lambda)$. Il reste à montrer qu'il est maximal. Soit K un module contenant strictement $K(\lambda)$. Alors il existe dans K un vecteur v tel que pour un certain $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)$, le vecteur $u \cdot v$ a une projection non nulle sur $1 \otimes \mathbb{C}_\lambda$. Le vecteur $u \cdot v$ est encore dans K. De plus, on peut supposer que v est un vecteur de poids. On a donc
$$u \cdot v = 1 \otimes z + \sum_{i=1}^{n} v_i,$$
où les v_i sont des vecteurs de poids μ_i strictement plus petit que λ. Ainsi, pour $h \in \mathfrak{h}$,
$$h \cdot (u \cdot v) = \lambda(h) 1 \otimes z + \sum_{i=1}^{n} \mu_i(h) v_i.$$
Comme $\lambda \neq \mu_1$, il existe $h_1 \in \mathfrak{h}$ tel que $\lambda(h_1) \neq \mu_1(h_1)$. On considère alors $u \cdot v - \mu_1(h_1) u \cdot v$. C'est encore un vecteur de K. En continuant ainsi de proche en proche, on montre que K contient un multiple de $1 \otimes z$ et donc contient $1 \otimes z$ et par suite $K = V(\lambda)$. D'où la maximalité de $K(\lambda)$.
4. Comme $K(\lambda)$ est maximal, il est clair que $V(\lambda)/K(\lambda)$ est irréductible. D'autre part, si K est un sous–module quelconque de $V(\lambda)$, les sous–modules de $V(\lambda)/K$ sont en bijection avec les sous–modules de $V(\lambda)$ qui contiennent K. Ainsi, si $V(\lambda)/K$ est irréductible, K est maximal et donc $K = K(\lambda)$.

$\square$

Nous donnerons d'autres propriétés de ces modules par la suite.

Nous allons à présent généraliser la construction d'induction à des sous–algèbres plus grosses que la sous–algèbre de Borel. Donnons nous une base Δ du système de racines $\mathcal{R}$ de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Fixons une partie θ de Δ. Nous avons rappelé comment construire une sous–algèbre de Levi $\mathfrak{l}_\theta$ et un parabolique $\mathfrak{p}_\theta$. On a la décomposition suivante :

$$\mathfrak{p}_\theta = \mathfrak{l}_\theta \oplus \mathfrak{n}_\theta^+, \quad \text{avec } [\mathfrak{l}_\theta, \mathfrak{n}_\theta^+] \subset \mathfrak{n}_\theta^+.$$

Ainsi étant donné un $\mathfrak{l}_\theta$–module N, on peut l'étendre en un $\mathfrak{p}_\theta$–module toujours noté N en posant $\mathfrak{n}_\theta^+ \cdot N = 0$. On pose alors

$$V(\theta, N) := \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p}_\theta)} N.$$

Nous noterons parfois $V_\Delta(\theta, N)$ pour insister sur la base Δ choisie. Nous appellerons $V(\theta, N)$ un *module de Verma généralisé* (MVG). Le cas des modules de Verma correspond au cas $\theta = \emptyset$. On a alors la proposition suivante (généralisant la proposition analogue pour $V(\lambda)$) :

Proposition 2.2.2 *Soit $N \in \mathcal{M}(\mathfrak{l}_\theta, \mathfrak{h})$ irréductible.*

1. *Le module $V := V(\theta, N)$ est un module de poids. Son support satisfait $Supp(V) \subset Supp(N) - Q^{\theta+}$*
2. *Le module V est indécomposable et possède un unique sous–module maximal $K(\theta, N)$.*
3. *Soit pr la projection de $V(\theta, N)$ sur $1 \otimes N$ donnée par la décomposition de $V(\theta, N)$ en espaces de poids. Le module $K(\theta, N)$ peut être caractérisé comme suit :*

$$K(\theta, N) = \{v \in V \ : \ \forall\, u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}_\theta^+),\ pr(u \cdot v) = 0\}.$$

4. *Le quotient $V(\theta, N)/K(\theta, N)$ est l'unique quotient irréductible de V. On le note $L(\theta, N)$. De plus, l'image de $1 \otimes N$ dans $L(\theta, N)$ est isomorphe à N comme $\mathfrak{l}_\theta$–modules.*

Démonstration. Pour le premier point, il suffit de remarquer que V est isomorphe à $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_\theta^-) \otimes N$ comme $\mathfrak{h}$–module. Pour le deuxième point, nous renvoyons à [11, prop. 3.3]. Ici l'irréductibilité de N est nécessaire. La preuve du troisième point et du quatirème point est identique à celle de la proposition 2.2.1.

□

Dans la suite, nous appellerons *induit parabolique* tout module irréductible de la forme $L(\theta, N)$ pour une sous–partie θ de Δ.

Pour un $\mathfrak{g}$–module M, on note $M^{\mathfrak{n}_\theta^+}$ le sous–espace suivant :

$$M^{\mathfrak{n}_\theta^+} := \{v \in M \ : \ \mathfrak{n}_\theta^+ \cdot v = 0\}.$$

C'est un sous–$\mathfrak{l}_\theta$–module de M. De plus, on a

Proposition 2.2.3 (Réciprocité de Frobenius, [11, prop. 3.1]) *Soit $N \in \mathcal{M}(\mathfrak{l}_\theta, \mathfrak{h})$. Soit $M \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Alors il existe un isomorphisme naturel*

$$\Phi_{M,N} : Hom(V(\theta, N), M) \cong Hom_{\mathfrak{l}_\theta}(N, M^{\mathfrak{n}_\theta^+}).$$

Démonstration. Pour $f \in Hom(V(\theta, N), M)$, on pose $\Phi_{M,N}(f) = f^{\mathfrak{n}_\theta^+} \circ (1 \otimes id_N)$ où $f^{\mathfrak{n}_\theta^+}$ est la restriction de f à $1 \otimes N$. On vérifie que cette application convient.

□

Proposition 2.2.4 (Propriété universelle des MVG, [11, prop.3.6]) *Soit $M \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Supposons que M soit engendré par un sous–$\mathfrak{l}_\theta$–module N de $M^{\mathfrak{n}_\theta^+}$. Alors il existe un unique morphisme de $\mathfrak{g}$–module ϕ de $V(\theta, N)$ dans M qui envoie $1 \otimes n$ sur n. De plus cette application est surjective.*

Démonstration. L'existence est un cas particulier de la proposition précédente. L'application est unique et est de plus surjective car N engendre M.

□

Théorème 2.2.5 *Les applications $L : N \mapsto L(\theta, N)$ et $F : M \mapsto M^{\mathfrak{n}_\theta^+}$ déterminent une correspondance bijective entre les $\mathfrak{l}_\theta$–modules de poids irréductibles et les $\mathfrak{g}$–modules de poids irréductibles M tels que $M^{\mathfrak{n}_\theta^+} \neq \{0\}$.*

Démonstration. Montrons d'abord que si M est un module de poids irréductible, alors $M^{\mathfrak{n}_\theta^+}$ est un $\mathfrak{l}_\theta$–module de poids irréductible s'il est non nul. C'est clairement un module $\mathfrak{h}$–diagonalisable, avec espaces de poids de dimension finie. Il suffit donc de montrer qu'il est irréductible. Soit N un sous–$\mathfrak{l}_\theta$–module non nul de $M^{\mathfrak{n}_\theta^+}$, que l'on peut supposer irréductible. Comme M est irréductible, $M = \mathcal{U}(\mathfrak{g})N$. On déduit de la proposition 2.2.4 une surjection de $V(\theta, N)$ sur M. Le noyau de cette application est donc inclus dans $K(\theta, N)$ (car le morphisme est non nul et que N est irréductible). Comme M est irréductible, on en déduit que M est isomorphe à $L(\theta, N)$, d'après la partie 4 de la proposition 2.2.2.

Montrons à présent que N est isomorphe à $L(\theta, N)^{\mathfrak{n}_\theta^+}$ en tant que $\mathfrak{l}_\theta$–module. Soit p la projection de $V(\theta, N)$ sur $L(\theta, N)$. On a donc un morphisme

$\Phi(p)$ de $\mathfrak{l}_\theta$–modules de N dans $L(\theta, N)^{\mathfrak{n}_\theta^+}$ via la proposition 2.2.3. Comme N est irréductible, le noyau de $\Phi(p)$ est réduit à $\{0\}$. Vérifions que $\Phi(p)$ est surjective. Soit $m \in L(\theta, N)^{\mathfrak{n}_\theta^+}$ un vecteur non nul de poids λ. Supposons que $m \notin \Phi(p)(N)$. Alors $m \in L(\theta, N)$ est l'image par la projection p d'un vecteur $v \in V(\theta, N)$ de même poids λ n'appartenant pas à $1 \otimes N$. Soit $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}_\theta^-)$ un vecteur de poids tel que le poids de $u \cdot v \in Supp(N)$. Alors $u \cdot v = 0$ car sinon $u \cdot v \in 1 \otimes N$ (d'après la proposition 2.2.2(1)) et comme $\Phi(p)(N)$ est un isomorphisme sur son image, on aurait $\Phi(p)(u \cdot v) \neq 0$. Ceci prouve que pour tout $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}_\theta^-)$ vecteur de poids, $pr(u \cdot v) = 0$ (où pr est la projection définie dans la proposition 2.2.2(3)) et donc que $v \in K(\theta, N)$ contredisant le fait que $p(v) = m \neq 0$. Ainsi $\Phi(p)$ est un isomorphisme. On en déduit donc que $M^{\mathfrak{n}_\theta^+} \cong N$.

□

2.3 Modules cuspidaux. Modules de poids irréductibles

Définition 2.3.1 *Soit $\alpha \in \mathcal{R}$. Un module de poids M est dit α–*cuspidal *si tout $X \in \mathfrak{g}^\alpha \setminus \{0\}$ agit sur M injectivement. Il est dit* cuspidal *s'il est α–cuspidal pour toute racine α.*

Remarque 2.3.2 *Si M est un module de poids cuspidal et irréductible, alors tous les espaces de poids non triviaux ont même dimension (qui est alors égal au degré de M). En effet, si $\alpha \in \mathcal{R}$, le vecteur X_α applique M_λ dans $M_{\lambda+\alpha}$ et l'application est une application linéaire injective par cuspidalité. Donc $dim(M_\lambda) \leq dim(M_{\lambda+\alpha})$. On obtient l'inégalité contraire en regardant $X_{-\alpha}$ qui applique $M_{\lambda+\alpha}$ dans M_λ. L'irréductibilité de M permet de conclure que tout vecteur de poids de M est obtenu comme l'image d'un espace de poids fixé de M par l'action de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.*

Les modules de poids irréductibles ont un comportement particulièrement simple vis–à–vis des X_α :

Lemme 2.3.3 *Soit M un module de poids irréductible. Alors X_α est injectif sur tout M ou localement nilpotent sur tout M.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathcal{R}$. Posons

$$M^{[\alpha]} := \{v \in M \ : \ \exists\, n > 0,\ X_\alpha^n \cdot v = 0\}.$$

Observons que $M^{[\alpha]}$ est un sous–module de M. En effet, soit $v \in M^{[\alpha]}$ et soit $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Montrons que $u \cdot v \in M^{[\alpha]}$. Or, on a

$$X_\alpha^m \cdot (u \cdot v) = \left(\sum_{i=0}^{m} ad(X_\alpha)^{m-i}(u) X_\alpha^i \right) \cdot v.$$

D'où notre assertion. Comme M est irréductible, ou bien $M^{[\alpha]} = M$ (auquel cas X_α est localement nilpotent sur tout M) ou bien $M^{[\alpha]} = \{0\}$. Dans ce dernier cas, X_α est injectf sur tout M (car un vecteur dans le noyau doit être a fortiori dans $M^{[\alpha]}$).

□

On note alors

$$\mathcal{R}^I(M) = \{\alpha \in \mathcal{R} \,:\, X_\alpha \text{ est injectif sur } M\},$$

$$\mathcal{R}^N(M) = \{\alpha \in \mathcal{R} \,:\, X_\alpha \text{ est localement nilpotent sur } M\}.$$

Le lemme précédent affirme que pour un module de poids irréductible on a $\mathcal{R} = \mathcal{R}^I(M) \sqcup \mathcal{R}^N(M)$. On note $\mathcal{R}_s^N(M) = \{\alpha \in \mathcal{R}^N(M) \,:\, -\alpha \in \mathcal{R}^N(M)\}$ la partie symétrique de $\mathcal{R}^N(M)$ et $\mathcal{R}_a^N(M) = \{\alpha \in \mathcal{R}^N(M) \,:\, \alpha \notin \mathcal{R}_s^N(M)\}$ sa partie antisymétrique.

On a aussi le lemme suivant :

Lemme 2.3.4 (Benkart, Britten, Lemire, [1, lem 4.7]) *Soit M un module de poids irréductible.*

1. *Soient α, $\beta \in \mathcal{R}^I(M)$. Alors si $\alpha + \beta$ est une racine, on a $\alpha + \beta \in \mathcal{R}^I(M)$.*
2. *Soient α, $\beta \in \mathcal{R}^N(M)$. Alors si $\alpha + \beta$ est une racine, on a $\alpha + \beta \in \mathcal{R}^N(M)$.*
3. *Soit $\alpha \in \mathcal{R}_s^I(M)$. Soit $\beta \in \mathcal{R}_s^N(M)$. Alors $\alpha + \beta \notin \mathcal{R}$.*
4. *Il existe une base Δ de $\mathcal{R}$ telle que les racines de $\mathcal{R}_a^N(M)$ sont toutes positives relativement à Δ. Une telle base étant fixée, $\Delta \cap \mathcal{R}_s^I(M)$ est une base de $\mathcal{R}_s^I(M)$.*

Démonstration.

1. Si $\alpha + \beta \notin \mathcal{R}^I(M)$, alors c'est une racine de $\mathcal{R}^N(M)$. Comme X_α et X_β sont injectives, pour tout $\lambda \in Supp(M)$ on a $\lambda + \mathbb{N}\alpha \subset Supp(M)$ et $\lambda + \mathbb{N}\beta \subset Supp(M)$. On en déduit aussitôt que $\lambda + \mathbb{N}(\alpha + \beta) \subset Supp(M)$. Ceci est impossible si $X_{\alpha+\beta}$ est localement nilpotent (auquel cas $\{\lambda + \mathbb{N}(\alpha + \beta)\} \cap Supp(M)$ doit être un ensemble fini).

2. C'est le corollaire 2.7 de [11].
3. Supposons que $\alpha+\beta$ soit une racine. Alors cette racine est soit dans $\mathcal{R}^I(M)$ soit dans $\mathcal{R}^N(M)$. Dans le premier cas, $\beta=(\alpha+\beta)+(-\alpha)$ serait aussi dans $\mathcal{R}^I(M)$. Dans le deuxième cas, $\alpha=(\alpha+\beta)+(-\beta)$ serait dans $\mathcal{R}^N(M)$. On a donc une contradition dans les deux cas.
4. Remarquons que $\mathcal{R}^N_a(M)$ est une partie close antisymétrique. En effet, soient α et β deux racines de $\mathcal{R}^N_a(M)$. Supposons que $\alpha+\beta$ soit une racine. Alors $\alpha+\beta\in\mathcal{R}^N(M)$ d'après le deuxième point. Mais $-\alpha-\beta\notin\mathcal{R}^N(M)$ car sinon $-\alpha=(-\alpha-\beta)+\beta\in\mathcal{R}^N(M)$ contrairement à l'hypothèse sur α. L'existence d'une base ayant la propriété voulue résulte alors de la proposition 22 p.163 de [5]. Pour la deuxième partie de l'assertion voir [1, lem 4.7(iv)].

□

Nous pouvons alors énoncer le

Théorème 2.3.5 (Fernando, [11, thm. 4.18], [29, thm. 1.2]) *Soit M un module de poids irréductible. Posons $\mathfrak{l}:=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{g}^{\mathcal{R}^I_s(M)}$. Alors $\mathfrak{l}$ est une sous–algèbre de Levi de $\mathfrak{g}$. Notons $\mathfrak{u}:=\mathfrak{g}^{\mathcal{R}^N(M)}$. La sous–algèbre $\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{u}$ est une sous–algèbre parabolique dont $\mathfrak{l}$ est la sous–algèbre de Levi. Le module $M^{\mathfrak{u}}$ des vecteurs invariants sous $\mathfrak{u}$ est un $\mathfrak{l}$–module irréductible cuspidal et $M\cong L(\mathcal{R}^I_s(M)\cup\mathcal{R}^N(M),M^{\mathfrak{u}})$.*

Démonstration. Du lemme précédent on déduit que $\mathcal{R}^I_s(M)\cup\mathcal{R}^N(M)$ est une partie parabolique standard pour un choix d'une base Δ de $\mathcal{R}$. La sous–algèbre parabolique associée est $\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{u}$; la sous-algèbre de Levi correspondante est $\mathfrak{l}$ en vertu du même lemme. Si $\mathcal{R}^N(M)$ est vide, le théorème est trivial. Sinon, par définition de $\mathcal{R}^N(M)$, le module $M^{\mathfrak{u}}$ est non nul. Il est irréductible d'après le théorème 2.2.5 et clairement cuspidal. L'induction est alors une conséquence du théorème 2.2.5.

□

Ainsi tout module de poids irréductible est induit à partir d'un module cuspidal irréductible. Cependant il n'existe pas de modules cupsidaux pour toutes les algèbres de Lie :

Théorème 2.3.6 (Fernando, [11, thm. 5.2]) *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple sur $\mathbb{C}$. S'il existe un $\mathfrak{g}$–module cuspidal, alors $\mathfrak{g}$ est de type A ou C.*

La démonstration fait appel à la dimension de Gelfand–Kirilov. Nous renvoyons à [11] pour une preuve.

Une conséquence non triviale des résultats de Fernando est le théorème suivant :

Théorème 2.3.7 (Fernando, [11, thm. 4.21]) *Tout module de la catégorie $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est artinien et admet donc une suite de Jordan–Hölder.*

Rappelons enfin un résultat de Lemire (voir [25]). Rappelons que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$ désigne l'espace de poids 0 pour l'action adjointe de $\mathfrak{h}$ sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ (c'est aussi le commutant de $\mathfrak{h}$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$).

Théorème 2.3.8 (Lemire, [25, thm. 1], [10, Ex.7.8.7(f)])

Soit M un module de poids irréductible. Soit $\lambda \in Supp(M)$. Alors M_λ est un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$–module irréductible. Réciproquement, soit N un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$–module irréductible de dimension finie. Alors il existe un unique module de poids M irréductible tel que N soit un espace de poids de M.

2.4 Construction des modules cuspidaux

Le théorème de Fernando 2.3.5 ramène la classification des modules de poids irréductibles à celle des modules cuspidaux pour une sous–algèbre de Levi. Bien sûr, d'après le théorème 2.3.6, il suffit de connaître les modules cuspidaux pour les algèbres simples de type A et C. La construction de ces modules est délicate. Nous nous contenterons ici d'en donner une ébauche.

Dans un premier temps, D. Britten et F. Lemire ont donné une construction (totalement explicite) des modules de poids cuspidaux irréductibles de degré 1 (c'est–à–dire rappelons–le des modules dont les espaces de poids non triviaux sont de dimension 1). Cette construction utilise l'algèbre de Weyl. Par la suite, O. Mathieu a donné une construction (non explicite) des modules de poids cuspidaux irréductibles de degré (fini) quelconque. Une construction explicite de certains modules cuspidaux pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n$ a ensuite été obtenue par V. Mazorchuk via des formules de Gelfand–Zetlin.

L'algèbre de Weyl W_N est l'algèbre associative engendrée par les $2N$ générateurs $q_1, \ldots, q_N$ et $p_1, \ldots, p_N$ satisfaisant les relations suivantes :

$$[q_i, q_j] = 0 = [p_i, p_j], \quad [p_i, q_j] = \delta_{ij}.$$

On peut penser à W_N comme à une algèbre d'opérateurs difféerntiels agissant sur $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$ en identifiant l'action de q_i avec la multiplication par x_i et celle de p_i avec la dérivée par rapport à la variable x_i. Cette façon de voir W_N permet de construire un certain nombre de représentations comme suit. Soit $a \in (\mathbb{C} - \mathbb{Z})^N$. Un N–uplet b de complexes est dit a–admissible si $b_i - a_i \in \mathbb{Z}$ pour tout i. On note $\mathcal{P}(a)$ l'ensemble des N–uplets complexes a–admissibles. A chaque N–uplet b de complexes a–admissible on attache un vecteur noté $x(b)$. Soit $W(a)$ l'espace vectoriel de base $x(b)$ ($b \in \mathcal{P}(a)$). On fait de $W(a)$ un W_N–module pour l'action suivante :

$$q_i \cdot x(b) = x(b + \epsilon_i) \quad p_i \cdot x(b) = b_i x(b - \epsilon_i),$$

où ϵ_i désigne le N–uplet dont toutes les composantes sont nulles sauf la i–ème qui vaut 1. On a alors la

Proposition 2.4.1 (Benkart–Britten–Lemire, [1, thm 2.9]) *Soit $a \in (\mathbb{C} - \mathbb{Z})^N$. Le W_N–module $W(a)$ est irréductible.*

Pourquoi s'intéresse–t–on ici à W_N ? Considérons la matrice élémentaire E_{ij} de taille n et l'application $E_{ij} \mapsto q_i p_j$. Cette application donne un morphisme d'algèbres de Lie injectif de $\mathfrak{gl}_N$ dans W_N. En particulier l'algèbre de Lie de type A_{N-1} peut se plonger dans W_N. On peut aussi réaliser C_N dans W_N comme la sous–algèbre de Lie engendrée par $\{q_i p_j, p_i p_j, q_i q_j \mid 1 \leq i, j \leq N\}$. On peut donc obtenir des modules irréductibles pour ces algèbres par restriction de W_N–modules. On pose alors $M(a)$ le sous–espace de $W(a)$ engendré par les $x(b)$ tels que $\sum(b_i - a_i) \in 2\mathbb{Z}$ et $N(a)$ le sous–espace de $W(a)$ engendré par les $x(b)$ tels que $\sum(b_i - a_i) = 0$. On a alors le

Théorème 2.4.2 (Benkart–Britten–Lemire, [1, prop. 2.12 et 5.5]) *Soit $a \in (\mathbb{C} - \mathbb{Z})^N$. Alors $M(a)$ est un C_N–module de poids irréductible cuspidal de degré 1 et $N(a)$ est un A_{N-1}–module de poids irréductible cuspidal de degré 1. Réciproquement tout C_N–module de poids irréductible cuspidal de degré 1 est isomorphe à un $M(a)$ et tout A_{N-1}–module de poids irréductible cuspidal de degré 1 est isomorphe à un $N(a)$.*

On a ainsi obtenu la classification complète des modules de poids irréductibles cuspidaux de degré 1. La classification est de plus explicite et l'action de $\mathfrak{g}$ est décrite complétement. Donnons ici l'action de certains éléments (toutes les autres actions peuvent se calculer en utilisant les équations donnant l'action de W_N sur $x(b)$). Si $\mathfrak{g} = A_{N+1}$, on note les racines simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ en suivant la numérotation de Bourbaki [5]. L'action est la suivante :

$$H_{\alpha_i} x(b) = (b_i - b_{i+1}) x(b) \tag{2.2a}$$

$$X_{\alpha_i} x(b) = b_{i+1} x(b - \epsilon_{i+1} + \epsilon_i) \tag{2.2b}$$

$$X_{-\alpha_i} x(b) = b_i x(b - \epsilon_i + \epsilon_{i+1}) \tag{2.2c}$$

Si $\mathfrak{g} = C_N$, on note les racines simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ en suivant la numérotation de Bourbaki. L'action est la suivante :

$$H_{\alpha_i} x(b) = \begin{cases} (b_i - b_{i+1}) x(b) & \text{si } i < n \\ (b_n + \frac{1}{2}) x(b) & \text{si } i = n \end{cases} \tag{2.3a}$$

$$X_{\alpha_i} x(b) = \begin{cases} b_{i+1} x(b - \epsilon_{i+1} + \epsilon_i) & \text{si } i < n \\ \frac{1}{2} x(b + 2\epsilon_n) & \text{si } i = n \end{cases} \tag{2.3b}$$

$$X_{-\alpha_i} x(b) = \begin{cases} b_i x(b - \epsilon_i + \epsilon_{i+1}) & \text{si } i < n \\ -\frac{1}{2} b_n (b_n - 1) x(b - 2\epsilon_n) & \text{si } i = n \end{cases} \tag{2.3c}$$

Nous allons maintenant présenter brièvement la classification de Mathieu. La notion essentielle est celle de famille cohérente. Une *famille cohérente de degré d* est un $\mathfrak{g}$–module $\mathfrak{h}$–diagonalisable $\mathcal{M}$ tel que

$$dim(\mathcal{M}_\lambda) = d, \; \forall\, \lambda \in \mathfrak{h}^*,$$

$$\forall\, u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})_0, \; \lambda \in \mathfrak{h}^* \mapsto tr(u_{|\mathcal{M}_\lambda}) \text{ est polynômiale en } \lambda.$$

Le support d'une famille cohérente est donc égal à $\mathfrak{h}^*$ tout entier. Une famille cohérente est dite *semi–simple* si c'est un $\mathfrak{g}$–module semi–simple. Une *fibre* de la famille cohérente $\mathcal{M}$ est un sous–$\mathfrak{g}$–module de $\mathcal{M}$ de la forme

$$\mathcal{M}[t] := \oplus_{\lambda \in t} \mathcal{M}_\lambda$$

pour $t \in \mathfrak{h}^*/Q$. Le module $\mathcal{M}$ est somme directe de toutes ses fibres. Une famille cohérente est dite *irréductible* si une de ses fibres est un $\mathfrak{g}$–module irréductible. Dans ce cas, Mathieu a prouvé que presque toutes les fibres sont irréductibles ([29, lem 4.7]).

Mathieu a montré que les sous–modules $\mathcal{M}[t]$ sont de longueur finie. On peut donc les remplacer par leur semi–simplifié $\mathcal{M}[t]^{ss}$ (c'est–à–dire par la somme directe des facteurs de composition d'une suite de Jordan–Hölder). On construit ainsi le semi–simplifié de $\mathcal{M}$ en posant $\mathcal{M}^{ss} = \oplus_{t \in \mathfrak{h}^*/Q} \mathcal{M}[t]^{ss}$. Si L est un module de poids de degré fini d et de dimension infinie, on appelle *extension cohérente* de L toute famille cohérente de degré d contenant L comme sous–quotient. On a alors la

Proposition 2.4.3 (Mathieu) *Soit L un module de poids de degré d et de dimension infinie.*

1. *Alors il existe une unique extension cohérente semi–simple de L, notée $\mathcal{EXT}(L)$.*
2. *L'extension $\mathcal{EXT}(L)$ est irréductible. Tout sous–module de dimension infinie de $\mathcal{EXT}(L)$ est un module de poids de degré d et a même extension que L.*

3. *Tous les sous–module simples de $\mathcal{EXT}(L)$ ont même caractère central.*
4. *Si $\mathcal{M}$ est une extension cohérente de L, alors $\mathcal{M}^{ss}$ est isomorphe à $\mathcal{EXT}(L)$.*

Démonstration. Voir [29, prop 4.8].

Mathieu a alors montré le

Théorème 2.4.4 (Mathieu) *Soit $\mathcal{M}$ une famille cohérente de degré d.*

1. *Il existe un ensemble Zariski–fermé $Sing(\mathcal{M})$ de $\mathfrak{h}^*/Q$ tel que pour tout $t \notin Sing(\mathcal{M})$, la fibre $\mathcal{M}[t]$ est un module de poids irréductible et cuspidal de degré d.*
2. *Tout module de poids irréductible et cuspidal de degré d apparaît comme fibre d'une famille cohérente de degré d.*
3. *Toute famille cohérente semi–simple de degré d irréductible est isomorphe à l'extension d'un module irréductible de plus haut poids de dimension infinie et de degré d.*

Démonstration. Voir [29, prop 5.4, prop 6.2].

Le dernier point du théorème 2.4.4 ramène l'étude des familles cohérentes semi–simples irréductibles à l'étude des modules de plus haut poids de dimension infinie dont le degré est fini. Cette étude fait l'objet des théorèmes 8.6 et 9.3 de [29].

Pour finir, nous allons donner la construction de V. Mazorchuk via les formules de Gelfand–Zetlin. Nous renvoyons à pour les généralités concernant ces formules. Nous supposons ici que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$. Soit $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $m_i - m_{i+1} \in \mathbb{N}^*$ pour $i \geq 2$. Soit $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $x_i - x_{i+1} \notin \mathbb{Z}$ pour tout i, $x_{n-1} - m_1 \notin \mathbb{Z}$, et $x_i - m_2 \notin \mathbb{Z}$ pour tout i. On considère les tableaux $[l] = (l_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq i}$ tels que

1. $l_{n,j} = m_j$,
2. $l_{i,1} - x_i \in \mathbb{Z}$, pour $1 \leq i \leq n-1$,
3. $l_{i,j} - l_{i-1,j} \in \mathbb{N}$, pour $i \geq 3$ et $j \geq 2$,
4. $l_{i-1,j} - l_{i,j+1} \in \mathbb{N}^*$, pour $i \geq 3$ et $j \geq 2$.

On note $T(m, x)$ l'ensemble des tableaux $[l]$ ayant les propriétés ci–dessus. Soit $M(m, x)$ le $\mathbb{C}$–espace vectoriel de base $T(m, x)$. Notons que la condition 2 ci–dessus implique que $M(m, x)$ est de dimension infinie. On met alors une action de $\mathfrak{sl}_n$ sur $M(m,x)$ via les formules de Gelfand–Zetlin suivante :

$$e_{i,i+1}\cdot[l] = -\sum_{j=1}^{i} a^{+}_{i,j}([l])[l+\delta^{i,j}] \tag{2.4}$$

$$e_{i,i-1}\cdot[l] = \sum_{j=1}^{i} a^{-}_{i,j}([l])[l-\delta^{i,j}], \tag{2.5}$$

où $\delta^{i,j}$ désigne le tableau tel que $(\delta^{i,j})_{k,l} = \delta_{i,k}\delta_{j,l}$ et où

$$a^{\pm}_{i,j}([l]) = \frac{\prod_{k=1}^{i\pm1}(l_{i,j}-l_{i\pm1,k})}{\prod_{k=1,k\neq j}^{i}(l_{i,j}-l_{i,k})}.$$

On peut vérifier que les formules de Gelfand–Zetlin définissent bien une structure de $\mathfrak{sl}_n$–module sur $M(m,x)$ (voir [31, lem 1]). On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.4.5 *[31, 33] Si $m_1 - m_2 \notin \mathbb{Z}$ ou s'il existe $r > 1$ tel que $m_1 = m_r$ ou si $m_1 - m_2 \in \mathbb{N}^*$ ou si $m_n - m_1 \in \mathbb{N}^*$, alors le module $M(m,x)$ est un module simple cuspidal de degré fini.*

2.5 Extensions de modules cuspidaux

2.5.1 Cas de $\mathfrak{sl}_2$

Dans cette section uniquement, $\mathfrak{g}$ désigne l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$. On note (X,H,Y) le $\mathfrak{sl}_2$–triplet satisfaisant

$$[H,Y] = 2Y, \quad [H,X] = -2X, \quad [Y,X] = H.$$

On considère la catégorie $\mathcal{C}$ des $\mathfrak{g}$–modules de poids cuspidaux. Dans ce cas, on a une description simple des irréductibles.

Proposition 2.5.1 *Soit M un module irréductible dans $\mathcal{C}$. Alors M est de degré 1. En particulier il existe $a_1, a_2 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ tel que $M \cong N(a_1,a_2)$.*

Démonstration. Comme M est irréductible l'opérateur de Casimir Ω de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ agit scalairement sur tout M. Or, $\Omega = \frac{1}{2}H^2 + H + 2XY$. Donc, XY agit scalairement sur tout M. Par conséquent, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$ agit diagonalement sur tout M car l'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$ est engendrée (en tant qu'algèbre) par H et XY. Comme chaque espace de poids de M est un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$–module irréductible (c'est la partie facile de la correspondance de Lemire, voir théorème 2.3.8), on en déduit que M est de degré 1.

$\square$

Nous allons à présent décrire $Ext^1_{\mathcal{C}}(M,N)$ (que nous noterons simplement $Ext^1(M,N)$) lorsque M et N sont deux $\mathfrak{g}$–modules de poids irréductibles et cuspidaux. Rappelons que nous avons vu au chapitre 1 (section 1.5) que $Ext^1(M,N)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de suites exactes courtes de la forme

$$0 \to N \to M' \to M \to 0.$$

D'après la proposition 1.5.2, ces suites exactes sont paramétrées par des cocycles $c \in Hom_{\mathbb{C}}(M,N)$. Si $M \in \mathcal{C}$, la condition de cuspidalité assure que X vu comme opérateur de M est bijectif et donc inversible. Nous noterons X^{-1} l'opérateur réciproque sur M.

Théorème 2.5.2 (Grantcharov, Serganova) *Soient M et N des $\mathfrak{g}$–modules simples cuspidaux. Alors si $M \ncong N$, $Ext^1(M,N)$ est trivial. D'autre part $Ext^1(M,M) = \mathbb{C}$. Plus précisement, dans ce dernier cas, à un cobord près, toute extension correspond à un cocyle c vérifiant $c(H) = 0 = c(X)$ et $c(Y) = bX^{-1}$ où $b \in \mathbb{C}$.*

Démonstration. Nous donnons ici une preuve différente de celle de [14]. Supposons que $Ext^1(M,N)$ est non trivial. Soit (S) une extension non scindée. Soit χ_N et χ_M les caractères infinitésimaux de N et M respectivement. D'après le corollaire 2.1.3, le module M' peut se décomposer en $M' = \oplus M'^{\chi}$. Comme l'injection de N dans M' est une application de $\mathfrak{g}$–modules, son image est inclus dans M'^{χ_N}. D'autre part, la projection de M' sur M est aussi une application de $\mathfrak{g}$–modules. Donc l'image de M'^{χ} est nul sauf si $\chi = \chi_M$. Comme le noyau de la projection est égale à l'image de l'injection, on en déduit donc que $M' = M'^{\chi_N} \oplus M'^{\chi_M}$. Si $\chi_N \neq \chi_M$, alors on doit avoir $M'^{\chi_N} = N$ et $M'^{\chi_M} = M$. Cela implique que la suite (S) est scindée. Cette contradiction assure que $\chi_N = \chi_M$. D'autre part, comme N, M et M' sont semi–simples comme $\mathfrak{h}$–modules, le lemme 1.5.1 implique que $M' = N \oplus M$ comme $\mathfrak{h}$–modules. Comme M et N sont cuspidaux, leurs supports sont de la forme $\lambda + 2\mathbb{Z}$ (pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$) et sont donc égaux ou disjoints. Si les supports sont disjoints, alors la suite (S) est scindée. En effet, l'action de X, Y, H sur un vecteur de poids λ fixé le transforme en un vecteur de poids appartenant à $\lambda + 2\mathbb{Z}$. Cela prouve que le $\mathfrak{h}$–module isomorphe à M inclus dans M' est un $\mathfrak{g}$–module, et est donc isomorphe à M comme $\mathfrak{g}$–module. Ainsi les supports de M et de N sont les mêmes. On en déduit alors que l'action de H, de Ω et donc aussi de XY sur M_λ et N_λ sont les mêmes. Ainsi les $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$–modules

M_λ et N_λ sont isomorphes. La correspondance de Lemire (théorème 2.3.8) implique alors que $M \cong N$.

On peut donc supposer $M = N$. Considérons donc la suite exacte courte

$$(S):\ 0 \to M \to M' \to M \to 0.$$

Soit c le cocyle correspondant. On a vu ci–dessus que (S) est scindée comme suite de $\mathfrak{h}$–modules. On peut donc supposer que $c(H) = 0$. En utilisant la relation de cocyle pour l'identité $[H, X] = -2X$ et $c(H) = 0$, on trouve alors $-2c(X)(m) = H \cdot c(X)(m) - c(X)(H \cdot m)$, ou encore

$$H \cdot (c(X)(m)) = c(X)(H \cdot m) - 2c(X)(m). \tag{2.6}$$

Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ un poids apparaissant dans le support de M. Par cuspidalité, les poids de M sous $\mathfrak{h}$ sont (tous) les éléments de $\lambda + 2\mathbb{Z}$. On fixe m_μ un vecteur de poids μ dans chaque espace de poids (de dimension 1 d'après la proposition précédente) de M. D'après l'équation (2.6), $c(X)(m_\mu)$ est un vecteur de poids $\mu - 2$. Comme les espaces de poids sont de dimension 1 par la proposition qui précède, on en déduit qu'il existe $\kappa(\mu) \in \mathbb{C}$ tel que $c(X)(m_\mu) = \kappa(\mu)m_{\mu-2}$. D'autre part, $X \cdot m_\mu$ est aussi un vecteur de poids $\mu - 2$ et donc il existe $\alpha(\mu - 2) \in \mathbb{C}$ tel que $X \cdot m_\mu = \alpha(\mu - 2)m_{\mu-2}$. Comme X est injectif sur M par cuspidalité, on a $\alpha(\mu - 2) \neq 0$.

Fixons $\phi(\lambda) \in \mathbb{C}$. Alors, on peut définir une fonction ϕ sur $\lambda + 2\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ grâce aux relations $\phi(\mu) - \phi(\mu - 2) = \kappa(\mu)/\alpha(\mu - 2)$. On définit alors une application linéaire φ sur M par $\varphi(m_\mu) = \phi(\mu)m_\mu$. Calculons $A := X\cdot\varphi(m_\mu)-\varphi(X\cdot m_\mu)$. On a $A = (\phi(\mu)\alpha(\mu-2)-\alpha(\mu-2)\phi(\mu-2))m_{\mu-2} = \kappa(\mu)m_{\mu-2} = c(X)(m_\mu)$. Ainsi on a montré que $c(X) = [X, \varphi]$. D'autre part, on a par construction de φ, $c(H) = [H, \varphi]$. Comme $g \in \mathfrak{g} \mapsto [g, \varphi]$ est un cobord, on peut donc supposer que $c(H) = 0 = c(X)$.

Comme ci–dessus, on a

$$H \cdot (c(Y)(m)) = c(Y)(H \cdot m) + 2c(Y)(m). \tag{2.7}$$

De plus, on a $0 = c([Y, X])(m) = c(Y)(X \cdot m) - X \cdot c(Y)(m)$. On déduit de l'équation (2.7) qu'il existe $\kappa'(\mu) \in \mathbb{C}$ tel que $c(Y)(m_\mu) = \kappa'(\mu)m_{\mu+2}$. On déduit de $c(Y)(X\cdot m_{\mu+2}) = X\cdot c(Y)(m_{\mu+2})$ que $\alpha(\mu)\kappa'(\mu) = \kappa'(\mu+2)\alpha(\mu+2)$. Donc le produit $\alpha\kappa'$ est constant. Ainsi il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que $\kappa' = b\frac{1}{\alpha}$. Autrement dit $c(Y) = bX^{-1}$ car $X^{-1}m_\mu = \frac{1}{\alpha(\mu)}m_{\mu+2}$ par définition de $\alpha(\mu)$.
□

Remarque 2.5.3 *Plus généralement, Grantcharov et Serganova ont été les extensions entre modules cuspidaux de $\mathfrak{sl}_n$ dans [14]. Voir aussi [33] pour une autre approche.*

2.5.2 Cas de $\mathfrak{sp}_{2n}$

Nous rappelons ici un résultat de Britten, Khomenko, Lemire et Mazorchuk :

Théorème 2.5.4 (BKLM) *Tout $\mathfrak{sp}_{2n}$–module de poids cuspidal est somme direct de modules de poids cuspidaux irréductibles.*

Démonstration. Voir [6, thm. 1]. On trouvera une autre approche de ce résultat utilisant la théorie des carquois dans [13].

2.6 Dualité pour les modules de poids

La construction de Mathieu des modules cuspidaux permet de prouver la proposition suivante :

Proposition 2.6.1 *Soit $M \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ irréductible. Alors M est isomorphe à $M^\vee$.*

Démonstration. Commençons par le montrer pour les modules irréductibles de plus haut poids. Soit $L(\lambda)$ un tel module. Montrons que $L(\lambda)^\vee$ est aussi un module de plus haut poids λ. Soit v un vecteur de plus haut poids. Soit v^* la forme linéaire qui vaut 1 sur v et 0 sur les espaces de poids $\mu \neq \lambda$ de $L(\lambda)$. Alors $v^* \in L(\lambda)^\vee$ est de poids λ. Soit $X_\alpha \in \mathfrak{n}^+$. Soit w un vecteur de poids μ de $L(\lambda)$. Alors $(X_\alpha \cdot v^*)(w) = v^*(X_{-\alpha} \cdot w)$. Cette expression est donc nulle sauf si le poids $\mu - \alpha$ de $X_{-\alpha} \cdot w$ vaut λ. Or, les poids de $L(\lambda)$ sont tous plus petits que λ. Donc $X_\alpha \cdot v^* = 0$. D'autre part, d'après la proposition 2.1.5, $L(\lambda)^\vee$ est irréductible. On en déduit donc la proposition dans ce cas.

Supposons à présent que M soit cuspidal. D'après le deuxième point du théorème 2.4.4, $M = \mathcal{M}[t]$ pour une extension cohérente semi–simple irréductible $\mathcal{M}$ d'un module irréductible de plus haut poids $L(\lambda)$ (de dimension infinie et de degré fini). Or, il est clair que le dual d'une famille cohérente semi–simple irréductible est encore une famille cohérente semi–simple irréductible (pour l'irréductibilité il s'agit de la proposition 2.1.5). D'autre part comme $L(\lambda)$ est un sous–quotient de $\mathcal{M}$ et comme le foncteur $^\vee$ est exact, $\mathcal{M}^\vee$ contient $L(\lambda)^\vee \cong L(\lambda)$ comme sous–quotient. Par l'unicité de la proposition 2.4.3, on déduit que $\mathcal{M}^\vee = \mathcal{M}$. Or, $M^\vee$ apparaît comme quotient de $\mathcal{M}^\vee$ et a les mêmes espaces de poids que M. Comme $M = \mathcal{M}[t]$, cela force $M = M^\vee$.

Passons au cas général. Par le théorème 2.3.5 de Fernando on sait que M est induit à partir d'un module cuspidal. Si le module cuspidal est trivial, alors M est un module de plus haut poids et la proposition est déjà montrée. Si l'induction est triviale (i.e. si M est cuspidal), la proposition est aussi montrée. On suppose donc que $M = L(\theta, C)$ avec θ une partie propre de Δ. Les espaces de poids de C sont des espaces de poids de M. Plus précisement si λ est un poids de C, on a $C_\lambda = M_\lambda$ (M est un quotient de $V(\theta, C)$ isomorphe comme $\mathfrak{h}$–module à $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_\theta^-) \otimes C$). Comme $C = C^\vee$ d'après ce que nous venons de voir, les espaces C_λ et C_λ^* sont isomorphes comme $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$-module (par la correspondance de Lemire, théorème 2.3.8) et donc M_λ est isomorphe à M_λ^*. D'autre part, $M^\vee$ est irréductible (d'après la proposition 2.1.5). La correspondance de Lemire (théorème 2.3.8) permet alors de conclure à l'isomorphisme entre M et $M^\vee$.

□

Corollaire 2.6.2 *Soit $M \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Alors M et $M^\vee$ sont tous deux de longueur finie et ont les mêmes facteurs de composition. En particulier, $M^\vee$ est de type fini et est donc un module de poids.*

Démonstration. Le module M est de longueur finie d'après le théorème 2.3.7. Le résultat sur $M^\vee$ est alors une conséquence immédiate de la proposition ci–dessus et de l'exactitude du foncteur $^\vee$ (proposition 2.1.5).

□

Chapitre 3

Exemples de catégories de modules

Dans toute cette partie, $\mathfrak{g}$ désigne une algèbre de Lie simple définie sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes et $\mathfrak{h}$ désigne une sous–algèbre de Cartan fixée. Nous notons $\mathcal{R}$ le système de racines associé à la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Pour une racine $\alpha \in \mathcal{R}$, nous poserons $\mathfrak{g}^\alpha$ l'espace radiciel associé. Plus généralement, pour $S \subset \mathcal{R}$, nous noterons $\mathfrak{g}^S := \oplus_{\alpha \in S} \mathfrak{g}^\alpha$. Nous fixons également une base Δ de $\mathcal{R}$. Nous en déduisons une décomposition triangulaire de $\mathfrak{g}$ de la forme $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$. Nous posons $Q = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z}\alpha$ et $Q^+ = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \mathbb{Z}^+\alpha$. Pour $S \subset \Delta$, $\langle S \rangle$ désigne les racines de $\mathcal{R}$ qui s'écrivent à l'aide des racines simples contenues dans S. Enfin, nous notons $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ son centre.

Le but de ce chapitre est de présenter certaines sous–catégories pleines de $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Nous commençons par la catégorie $\mathcal{O}$ de Bernstein–Gelfand–Gelfand, pour laquelle nous présenterons aussi certains résultats sur les modules projectifs. Ensuite nous donnerons deux généralisations de cette catégorie, l'une d'elles faisant intervenir la notion de cuspidalité. Enfin, nous donnerons quelques idées concernant la récente notion de modules de Harish–Chandra généralisés.

3.1 La catégorie $\mathcal{O}$ de Bernstein–Gelfand–Gelfand

Nous avons introduit dans le chapitre précédent la catégorie $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ des modules de poids. Nous avons décrit les irréductibles de cette catégorie (théorème 2.3.5). En particulier, nous avons vu que les modules cuspidaux sont en général difficiles à construire explicitemement. Nous allons construire une sous–catégorie pleine de $\mathcal{M}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ dont l'étude est plus facile.

Définition 3.1.1 (Bernstein–Gelfand–Gelfand, [2]) *La catégorie $\mathcal{O}$ est la sous–catégorie pleine de la catégorie $\mathcal{M}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ des modules de poids M qui sont de plus $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)$–fini, i.e. tels que $\dim \mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)m < \infty$ pour tout $m \in M$.*

Rappelons que l'on note M_λ l'espace de poids $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ du module M de la catégorie $\mathcal{O}$ et $Supp(M)$ l'ensemble des éléments $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ pour lesquels $M_\lambda \neq \{0\}$. Par abus de notation, nous écrirons $M \in \mathcal{O}$ pour dire que M est un objet de la catégorie $\mathcal{O}$.

Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, nous avons vu comment construire le module de Verma $V(\lambda)$ de poids λ et son quotient irréductible $L(\lambda)$.

Donnons à présent les propriétés de base de la catégorie $\mathcal{O}$.

Proposition 3.1.2 *Soient $M, N \in \mathcal{O}$.*

(1) Tout sous–module et tout module quotient de M est dans la catégorie $\mathcal{O}$. De plus $M \oplus N$ est aussi dans la catégorie $\mathcal{O}$.

(2) Il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \in \mathfrak{h}^*$ tels que $Supp(M) \subset \cup_{i=1}^q (\lambda_i - Q^+)$.

(3) Les modules de dimension finie sont dans la catégorie $\mathcal{O}$ et si F est un tel module, le foncteur $M \in \mathcal{O} \mapsto M \otimes F \in \mathcal{O}$ est exact.

(4) La catégorie $\mathcal{O}$ est abélienne, noethérienne et artinienne.

(5) Les modules $V(\lambda)$ et $L(\lambda)$ sont dans la catégorie $\mathcal{O}$.

(6) Les modules irréductibles de la catégorie $\mathcal{O}$ sont exactement les $L(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Démonstration.

(1) On a déjà montré un analogue de ce point pour $\mathcal{M}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Il suffit donc de vérifier dans chacun des cas que la propriété de $\mathfrak{n}^+$–finitude est bien conservée, ce qui est clair.

(2) Par hypothèse sur M, il existe $m_1, \ldots, m_q \in M$, que nous pouvons supposer être des vecteurs de poids, engendrant M :

$$M = \sum_i \mathcal{U}(\mathfrak{g}) m_i.$$

Pour chaque i, $M_i := \mathcal{U}(\mathfrak{n}^+) m_i$ est de dimension finie et stable sous $\mathfrak{h}$. Par le théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt (PBW), on a

$$M = \sum_i \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) M_i.$$

Pour tout i, le module $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)M_i$ est stable sous $\mathfrak{h}$ et est donc $\mathfrak{h}$–diagonalisable et ses espaces de poids sont de dimension finie car M_i est de dimension finie et car les espaces de poids de $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ sont de dimension finie. L'assertion sur $Supp(M)$ découle de $M = \sum \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)M_i$ et du fait que M_i étant de dimension fini a ses poids majorés par un élément λ_i de $\mathfrak{h}^*$ (remarquons que λ_i n'est pas nécessairement un poids de M_i).

(3) Le fait que les modules de dimension finie sont dans $\mathcal{O}$ est clair. L'exactitude du foncteur a déjà été montrée pour $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Il suffit juste de vérifier que $M \otimes F$ est encore n^+–fini. Il suffit de le faire pour $m \otimes f \in M \otimes F$. Alors comme M est $\mathfrak{n}^+$–fini, $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)m$ est de dimension finie. De même $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)f \subset F$ est de dimension finie. Or si $X \in \mathfrak{n}^+$, alors $X \cdot (m \otimes f) = (X \cdot m) \otimes f + m \otimes (X \cdot f)$. Donc $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)(m \otimes f)$ est de dimension finie car inclus dans $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)(m) \otimes F$.

(4) Ce point découle clairement du résultat analogue dans $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (proposition 2.1.2).

(5) Il suffit de montrer que $V(\lambda) \in \mathcal{O}$ car $\mathcal{O}$ est stable par quotient. Or, $V(\lambda) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathbb{C}$ comme espace vectoriel. L'assertion s'en déduit aussitôt.

(6) Le module M est $\mathfrak{n}^+$–fini. Donc il existe $v \in M$ non nul tel que $\mathfrak{n}^+ \cdot v = 0$ et on peut choisir pour v un vecteur de poids λ. Comme M est irréductible, il est engendré par ce vecteur v. La propriété universelle du module de Verma $V(\lambda)$ (proposition 2.2.4) et l'unicité d'un sous–module maximal de $V(\lambda)$ (proposition 2.2.1(3)) permet alors de dire que M est isomorphe à $L(\lambda)$.

$\square$

Soit $M \in \mathcal{O}$. Notons

$$\Omega(M) := \{\chi \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})^* \mid \exists\, m \in M - \{0\}, Zm = \chi(Z)m \quad \forall\, Z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})\}.$$

Proposition 3.1.3 *Soit $M \in \mathcal{O}$.*

(1) Le module M est $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$–fini et l'ensemble $\Omega(M)$ est fini et non–vide.

(2) Notons $M^\chi := \{m \in M \mid \exists\, k \in \mathbb{N},\ (Z - \chi(Z))^k m = 0 \quad \forall\, Z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})\}$. C'est un sous–module de M et $M = \oplus_{\chi \in \Omega(M)} M^\chi$.

Démonstration.

(1) D'après la proposition 2.1.2, le module de poids M est $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$–fini. Montrons que $\Omega(M)$ est non vide. Soit v un vecteur de plus haut poids et notons λ son poids. Un tel v existe car M est $\mathfrak{n}^+$–fini. Alors $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v$ est un

module de plus haut poids engendré par v, il admet donc un caractère infinitésimal. Le caractère χ ainsi obtenu est donc dans $\Omega(M)$.

Montrons à présent que $\Omega(M)$ est fini. Si ce n'était pas le cas, il serait possible de trouver dans M une infinité de vecteur de poids sous $\mathfrak{h}$ ayant des poids différents sous le centre $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Notons $(v_i)_{i\in I}$ ces vecteurs de poids. Comme les v_i ont des poids distincts sous $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, les modules $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v_i$ sont en somme directe. Le module $M' := \sum_{i\in I}\mathcal{U}(\mathfrak{g})v_i$ est un sous–module de M et donc est de type fini. Soient $w_1,\dots,w_n$ un ensemble de générateurs de M'. Alors il existe N tels que

$$w_j \in \sum_{i=0}^{N}\mathcal{U}(\mathfrak{g})v_i,\ \forall\, j\in [\![1,n]\!].$$

Ce qui contredit le fait que les w_j engendrent M'.

(2) Ce point découle de son analogue dans $\mathcal{M}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ (corollaire 2.1.3).

□

On pose

$$\mathcal{O}^\chi := \{M\in\mathcal{O}\ :\ M = M^\chi\}.$$

On traduit alors la proposition en écrivant que

$$\mathcal{O} = \oplus_{\chi\in\mathcal{Z}(\mathfrak{g})}\,\mathcal{O}^\chi.$$

3.2 La catégorie $\mathcal{O}_S$ de Rocha–Caridi

Une première généralisation de la catégorie $\mathcal{O}$ a été obtenue par Rocha–Caridi au début des années 80 dans [39]. Soit Δ une base du système de racines $\mathcal{R}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Fixons une partie S de Δ. La catégorie $\mathcal{O}_S$ est la sous–catégorie pleine de la catégorie des modules de poids, $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)$–finis dont la restriction à la sous–algèbre de Levi $\mathfrak{l}_S$ est somme directe de $\mathfrak{l}_S$–modules irréductibles de dimension finie. Il est clair que la catégorie $\mathcal{O}_S$ est une sous–catégorie pleine de la catégorie $\mathcal{O}$. D'autre part, si $S=\emptyset$, $\mathcal{O}_S$ coincide avec $\mathcal{O}$. La catégorie $\mathcal{O}_S$ a les propriétés suivantes :

Théorème 3.2.1 (Rocha–Caridi)

1. *La catégorie $\mathcal{O}_S$ est abélienne, noethérienne et artinienne.*
2. *Tout module de dimension finie est dans la catégorie $\mathcal{O}_S$.*
3. *Soit N un $\mathfrak{l}_S$–module irréductible de dimension finie. Alors $V(S,N)$ et $L(S,N)$ sont dans la catégorie $\mathcal{O}_S$. De plus tout module irréductible de $\mathcal{O}_S$ est de la forme $L(S,N)$ pour un $\mathfrak{l}_S$–module irréductible de dimension finie.*

4. *La catégorie $\mathcal{O}_S$ est $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$–finie.*

3.3 La catégorie $\mathcal{O}^\alpha$ de Coleman et Futorny

Dans [9], Coleman et Futorny ont proposé une autre généralisation de $\mathcal{O}$, qui n'est pas une sous–catégorie de $\mathcal{O}$. Soit α une racine simple. La catégorie $\mathcal{O}^\alpha$ est la sous–catégorie pleine de la catégorie des modules de poids, dont les objets sont $\langle\alpha\rangle$–cuspidaux, $\mathfrak{n}_\alpha^+$–finis et semi–simple sous l'action de l'opérateur de Casimir universel C de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Voici quelques unes des propriétés de $\mathcal{O}^\alpha$:

Théorème 3.3.1 (Coleman, Futorny)

1. *La catégorie $\mathcal{O}^\alpha$ est abélienne, noethérienne et artinienne.*
2. *Soit N un $\mathfrak{l}_\alpha$–module simple cuspidal. Alors $V(\alpha, N)$ et $L(\alpha, N)$ sont dans la catégorie $\mathcal{O}^\alpha$. De plus tout module simple de $\mathcal{O}^\alpha$ est de la forme $L(\alpha, N)$ pour un $\mathfrak{l}_\alpha$–module N simple et cuspidal.*
3. *La catégorie $\mathcal{O}^\alpha$ est $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$–finie.*

La condition de cuspidalité implique que tout module de $\mathcal{O}^\alpha$ est de dimension infinie. Un cadre plus général englobant les deux exemples ci–dessus est donné par Mazorchuk dans [30, chap. 12].

3.4 Les modules de Harish–Chandra généralisés

Soit $\mathfrak{l}$ une sous–algèbre quelconque de $\mathfrak{g}$. Un $(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})$–module M est un $\mathfrak{g}$–module $\mathcal{U}(\mathfrak{l})$–fini. Rappelons que cela signifie que pour tout $v \in M$, l'espace vectoriel $\mathcal{U}(\mathfrak{l})v$ est de dimension finie. Par exemple si $\mathfrak{b}$ désigne l'algèbre de Borel, le résultat de Bernstein–Gelfand–Gelfand donne une classification des $(\mathfrak{g}, \mathfrak{b})$–modules irréductibles. Un $(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})$–module M est de *type fini* si tout $\mathfrak{l}$–module irréductible de dimension finie apparaît avec multiplicité finie dans (une série de composition de) M. Un $\mathfrak{g}$–module qui est un $(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})$–module de type fini pour un certain $\mathfrak{l}$ est appelé un *module de Harish–Chandra généralisé*. Notons que les modules de poids sont des $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$–modules de type fini et donc des cas particuliers de modules de Harish–Chandra généralisés.

Remarque 3.4.1 *Le cas "classique" de Harish–Chandra est le cas où l'algèbre $\mathfrak{l}$ est la sous–algèbre de $\mathfrak{g}$ des points fixes sous l'action d'un automorphisme d'ordre* 2.

Dans la théorie des $\mathfrak{g}$–modules, une sous–algèbre particulière joue un rôle important. Soit M un $\mathfrak{g}$–module. Posons

$$\mathfrak{g}[M] := \{g \in \mathfrak{g} \mid \text{l'action de } g \text{ sur } M \text{ est localement finie}\}.$$

Cet espace est en fait une sous–algèbre de $\mathfrak{g}$. Ce fait est un théorème dû à Kac [23] et à Fernando [11]. Les travaux de Penkov, Serganova et Zuckerman [35] et [36] conduisent alors à une nouvelle définition des modules de Harish–Chandra généralisés : un $\mathfrak{g}$–module est un module de Harish–Chandra généralisé s'il est somme directe avec multiplicité finie de $\mathfrak{g}[M]_{red}$–modules irréductibles de dimension finie, où $\mathfrak{g}[M]_{red}$ désigne la partie réductive de $\mathfrak{g}[M]$. Une autre conséquence de leurs travaux est la construction via certains foncteurs d'induction cohomologique de modules de Harish–Chandra généralisé irréductibles.

Chapitre 4

La catégorie $\mathcal{O}_{S,\theta}$

Dans cette partie, nous fixons une partie θ de la base Δ. Cela correspond à une graduation de $\mathfrak{g}$ de la forme $\mathfrak{n}_\theta^- \oplus \mathfrak{l}_\theta \oplus \mathfrak{n}_\theta^+$. La sous–algèbre de Levi $\mathfrak{l}_\theta$ a pour centre $\mathfrak{h}_\theta \subset \mathfrak{h}$. Nous désignerons par S une partie de Δ contenant θ. Si M est un $\mathfrak{p}_S$–module, nous noterons $V(S,M)$ le MVG obtenu en induisant M de $\mathfrak{p}_S$ à $\mathfrak{g}$. Nous noterons parfois $V_{\mathfrak{g}}(S,M)$ pour insister sur le fait qu'il s'agit d'un $\mathfrak{g}$–module. Lorsque M est irréductible, le module $V(S,M)$ admet un unique sous–module propre maximal $K(S,M)$. Le quotient $L(S,M) = V(S,M)/K(S,M)$ que nous noterons aussi parfois $L_{\mathfrak{g}}(S,M)$ est alors un module irréductible. Nous renvoyons à la partie 2.2 pour les détails.

Dans ce chapitre, nous introduisons une sous–catégorie pleine de la catégorie des modules de poids en imposant certaines conditions de restriction et de cuspidalité. Nous donnons ensuite quelques exemples de modules simples de ces catégories obtenus comme modules de degré 1. Les résultats de ce chapitre et du suivant ont fait l'objet d'une publication aux Comptes Rendus Mathématiques [47].

4.1 Définition et premières propriétés de la catégorie $\mathcal{O}_{S,\theta}$

Commençons par un lemme sur les modules cuspidaux

Lemme 4.1.1 *Soit N un $\mathfrak{g}$–module de poids cuspidal irréductible. Soit V un $\mathfrak{g}$–module irréductible de dimension finie. Alors le module $V \otimes N$ est cuspidal.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Si ce n'est pas le cas, alors il existe $\alpha \in \mathcal{R}$ tel que $X := X_\alpha$ n'est pas injectif. Supposons tout d'abord que α est positive. Soit w un vecteur non nul dans le noyau de l'opérateur X. Soit

(w_i) une base formée de vecteurs de poids de V et (n_j) une base formée de vecteurs de poids de N. Décomposons w dans la base $(w_i \otimes n_j)$ formée de vecteurs de poids de $V \otimes N$: $w = \sum_{i \in I, j \in J} c_{i,j} w_i \otimes n_j$, avec $c_{i,j} \neq 0$. L'action de X sur w donne alors :

$$0 = X \cdot w = \sum_{i,j} c_{i,j}((X \cdot w_i) \otimes n_j + w_i \otimes (X \cdot n_j)).$$

Comme la somme est finie, il existe un indice j_0 pour lequel le poids μ_0 de n_{j_0} est maximal parmi les poids des n_i apparaissant dans l'écriture de w. Soit J' le sous–ensemble de J des indices pour lesquels le vecteur $n_{j'}$ d'indice $j' \in J'$ a le même poids que n_{j_0}. Alors le poids de $X \cdot n_{j'}$ (à savoir $\alpha + \mu_0$) est strictement plus grand que tous les poids des vecteurs n_j, $j \notin J'$ apparaissant dans l'écriture de w. On en déduit donc que $\sum_{i \in I, j \in J'} c_{i,j}(w_i \otimes X \cdot n_j) = 0$. Or, par cuspidalité, si on a $X \cdot n_j = X \cdot n_k$ alors on a $n_j = n_k$ et donc pour chaque $j \in J'$ on a $(\sum_i c_{i,j} w_i) \otimes X \cdot n_j = 0$. Il s'ensuit que $(\sum_i c_{i,j} w_i) = 0$ ou $X \cdot n_j = 0$. Le premier cas implique que $c_{i,j} = 0$ car les w_i forment une famille libre. Dans le deuxième cas, la cuspidalité du module N implique que $n_j = 0$ ce qui est absurde car n_j est un vecteur de poids (donc non nul par hypothèse). Nous avons donc obtenu $c_{i,j} = 0$ pour tout i et tout $j \in J'$. Cela est contraire au choix de J'. D'où une contradiction. Le raisonnement est analogue si la racine α est négative (on considère alors le plus bas poids).

□

Nous allons à présent définir une sous–catégorie pleine de $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Définition 4.1.2 *Soit $\theta \subset S \subset \Delta$. La catégorie $\mathcal{O}_{S,\theta}$ est la sous–catégorie pleine de la catégorie $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ des modules M tels que*

($\mathcal{O}_1$) *Le module M se décompose sous $\mathfrak{l}_\theta$ en une somme de modules irréductibles de plus haut poids,*

($\mathcal{O}_2$) *Le module M est $\langle S - \theta \rangle$–cuspidal,*

($\mathcal{O}_3$) *Le module M est $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_S^+)$–fini, i.e. $\forall\, m \in M$, $dim(\mathcal{U}(\mathfrak{n}_S^+)m) < \infty$.*

Nous noterons parfois $\mathcal{O}_{S,\theta}(\mathfrak{g})$ pour préciser l'algèbre de Lie considérée lorsque le contexte ne permettra pas clairement de l'identifier.

Faisons quelques remarques sur cette définition. Lorsque $S = \theta = \emptyset$, nous retrouvons la définition de la catégorie $\mathcal{O}$. Et la catégorie $\mathcal{O}_{S,S}$ contient la catégorie $\mathcal{O}_S$ de Rocha–Caridi (voir 3.2) : dans sa définition, Rocha–Caridi impose que les $\mathfrak{l}_\theta$–modules soient de dimension finie. Nous ne pouvons imposer une telle condition en toute généralité. En fait, la situation générale nécessite la dimension infinie comme le montre la seconde assertion du lemme :

Lemme 4.1.3 *1. Les multiplicités des $\mathfrak{l}_\theta$–modules apparaissant dans la décomposition d'un module $M \in \mathcal{O}_{S,\theta}$ sont finies.*

2. Supposons qu'il existe $\alpha \in S - \theta$ et $\beta \in \theta$ telles que $\alpha + \beta \in \mathcal{R}$. Soit $M \in \mathcal{O}_{S,\theta}$. Alors les $\mathfrak{l}_\theta$–modules irréductibles de la décomposition de M sont tous de dimension infinie.

Démonstration.

1. Cela résulte aussitôt de la finitude des espaces de poids et de la propriété $(\mathcal{O}_1)$.
2. D'après la propriété $(\mathcal{O}_2)$, on a $\alpha \in \mathcal{R}^I_s(M)$. Le lemme 2.3.4 implique alors que $\beta \notin \mathcal{R}^N_s(M)$. Or, X_β est localement nilpotent sur M d'après la propriété $(\mathcal{O}_1)$. Donc $X_{-\beta}$ est injective sur M et donc les $\mathfrak{l}_\theta$–modules de la décomposition de M ne peuvent être de dimension finie.

□

Proposition 4.1.4 *Soient $M, M' \in \mathcal{O}_{S,\theta}$.*

(1) Tout sous–module et tout module quotient de M est dans la catégorie $\mathcal{O}_{(S,\theta)}$. Le module $M \oplus M'$ est aussi dans $\mathcal{O}_{S,\theta}$.

(2) La catégorie $\mathcal{O}_{S,\theta}$ est abélienne, noethérienne et artinienne.

(3) La catégorie $\mathcal{O}_{S,\theta}$ est $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$–finie.

(4) Les modules irréductibles de $\mathcal{O}_{S,\theta}(\mathfrak{g})$ sont de la forme $L(S,N)$ pour $N \in \mathcal{O}_{S,\theta}(\mathfrak{l}_S)$ irréductible.

Démonstration.

(1) Soient M et M' deux modules de $\mathcal{O}_{S,\theta}$. D'après la proposition 2.1.2, tout sous–module N et tout module quotient N' de M sont encore des modules de poids et $M \oplus M'$ est aussi un module de poids. Il est clair que N, N' et $M \oplus M'$ sont encore $\mathfrak{n}_S^+$–finis. D'après la proposition 1.1.3, N, N' et $M \oplus M'$ satisfont la condition $(\mathcal{O}_1)$ de la catégorie $\mathcal{O}_{S,\theta}$. Il reste donc à prouver la $\langle S - \theta\rangle$–cuspidalité. Ce point est clair pour N et pour $M \oplus M'$. Montrons–le pour N'. Supposons que $N' = M/N$. Alors $\oplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} (M_\lambda + N)/N$ est une décomposition de M/N en espaces de poids. Si N' n'est pas $\langle S - \theta\rangle$–cuspidal, il existe une racine $\alpha \in \langle S - \theta\rangle$ tel que l'action du vecteur X_α sur $(M_\lambda + N)/N$ n'est pas injective. Donc $dim(X_\alpha \cdot ((M_\lambda + N)/N)) < dim((M_\lambda + N)/N)$. Or, par cuspidalité de M et de N, on a $dim(X_\alpha \cdot M_\lambda) = dim(M_\lambda)$ et $dim(X_\alpha \cdot N_\lambda) = dim(N_\lambda)$. Comme $X_\alpha \cdot ((M_\lambda + N)/N)$ est un supplémentaire de $X_\alpha \cdot N_\lambda$ dans $X_\alpha \cdot M_\lambda$ et que $(M_\lambda + N)/N$ est un supplémentaire de N_λ dans M_λ, on obtient une contradiction. Ainsi M/N satisfait aussi $\mathcal{O}_2$.

(2) Cela résulte de la proposition 2.1.2, du théorème 2.3.7 et de (1).

(3) Cela résulte de la proposition 2.1.2.

(4) Soit M un module irréductible de la catégorie $\mathcal{O}_{S,\theta}$. Si $S = \Delta$, il n'y a pas d'induction ($L(S,N) = N$). Il n'y a donc rien à démontrer dans ce cas. Supposons donc $S \neq \Delta$. Remarquons que l'espace $M^{\mathfrak{n}_S^+}$ des vecteurs de M qui sont annulés par $\mathfrak{n}_S^+$ est non nul car M est $\mathfrak{n}_S^+$–fini. Cet espace est clairement un sous–$\mathfrak{l}_S$–module de M et donc aussi un sous–$\mathfrak{l}_\theta$–module de M. En particulier, la proposition 1.1.3 et la condition $\mathcal{O}_1$ implique qu'il se décompose sous $\mathfrak{l}_\theta$ en modules irréductibles de plus haut poids. De plus le module $M^{\mathfrak{n}_S^+}$ est $\langle S-\theta\rangle$–cuspidal car c'est un sous–$\mathfrak{l}_S$–module de M qui est $\langle S-\theta\rangle$–cuspidal. D'après le théorème 2.2.5, il s'ensuit que $M^{\mathfrak{n}_S^+}$ est un $\mathfrak{l}_S$–module irréductible de poids, $\langle S-\theta\rangle$–cuspidal et que $M \cong L(S, M^{\mathfrak{n}_S^+})$.

□

4.2 Exemples : les modules de degré 1

Nous allons dans cette section décrire la classification des modules de poids irréductible de degré 1 et de dimension infinie. Ces modules joueront un rôle essentiel dans la classification des modules irréductibles des catégories $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$.

4.2.1 Construction des modules

Nous allons généraliser ici la construction présentée dans la partie 2.4. Nous reprenons les notations de cette partie. L'algèbre de Weyl W_n est engendrée par $\{q_i, p_i,\ 1 \leq i \leq n\}$. A un n–uplet de nombres complexes non entiers $b = (b_1, \ldots, b_n)$, nous avons associé un vecteur $x(b)$ et nous avons décrit l'action de q_i et p_j sur $x(b)$. Rappelons que l'on note ϵ_i le n–uplet dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i^e qui vaut 1. En fait, on peut étendre l'action des q_i et p_i au cas d'un n–uplet quelconque de la manière suivante :

$$q_i \cdot x(b) = \begin{cases} (b_i+1)x(b+\epsilon_i) & \text{si } b_i \in \mathbb{Z}_- \\ x(b+\epsilon_i) & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.1a}$$

$$p_j \cdot x(b) = \begin{cases} x(b-\epsilon_j) & \text{si } b_j \in \mathbb{Z}_- \\ b_j x(b-\epsilon_j) & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.1b}$$

Si on fixe un n–uplet $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de nombres complexes, on note

$$\mathcal{P}(a) := \{b \in \mathbb{C}^n\ :\ b_i - a_i \in \mathbb{Z},\ \text{et si } a_i \in \mathbb{Z},\ \text{alors } b_i < 0 \Leftrightarrow a_i < 0\}.$$

Un élément $b \in \mathcal{P}(a)$ est appelé *a–admissible* (ou simplement *admissible* lorsque a est clair). On pose $W(a) = \bigoplus_{b \in \mathcal{P}(a)} \mathbb{C}x(b)$. Muni de l'action décrite ci–dessus, $W(a)$ est un W_n–module. Plus précisement,

Proposition 4.2.1 (Benkart–Britten–Lemire, [1, thm 2.9])
Le W_n–module $W(a)$ est irréductible.

On pose alors $\mathcal{P}_0(a) = \{b \in \mathcal{P}(a) \ : \ \sum_i b_i = \sum_i a_i\}$. On pose également

$$N(a) = \bigoplus_{b \in \mathcal{P}_0(a)} \mathbb{C}x(b).$$

Rappelons que $\mathfrak{gl}_n$ (et donc $\mathfrak{sl}_n$) se plonge dans W_n par $E_{i,j} \mapsto q_i p_j$. On a alors le

Théorème 4.2.2 (Benkart–Britten–Lemire, [1, thm 2.12 et 5.8])

1. *L'espace $N(a)$ est un $\mathfrak{sl}_n$–module de poids irréductible de degré 1.*
2. *Soit M un $\mathfrak{sl}_n$–module de poids irréductible de degré 1 et de dimension infinie. Alors il existe des entiers $k, l, m \in \mathbb{N}$ avec $k + l + m = n$ tels que*

$$M \cong N(\underbrace{-1, \ldots, -1}_{k}, a_1, \ldots, a_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{l}), \ \ \textit{où } a_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

De même, notons $\mathcal{P}_{\bar{0}}(a) = \{b \in \mathcal{P}(a) \ : \ \sum_i b_i - \sum_i a_i \in 2\mathbb{Z}\}$ et posons $M(a) = \bigoplus_{b \in \mathcal{P}_{\bar{0}}(a)} \mathbb{C}x(b)$. On peut identifier $\mathfrak{sp}_{2n}$ à une sous–algèbre de W_n comme suit :

$$\mathfrak{sp}_{2n} = Vect\langle q_i p_j, p_i p_j, q_i q_j | 1 \leq i, j \leq n\rangle.$$

On a alors le

Théorème 4.2.3 (Benkart–Britten–Lemire, [1, thm 2.12 et 5.21])

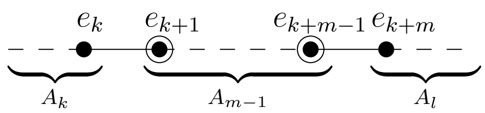
1. *L'espace $M(a)$ est un $\mathfrak{sp}_{2n}$–module de poids irréductible de degré 1.*
2. *Soit M un $\mathfrak{sp}_{2n}$–module de poids irréductible de degré 1 et de dimension infinie. Alors il existe des entiers $k, m \in \mathbb{N}$ avec $k + m = n$ tels que*

$$M \cong M(\underbrace{-1, \ldots, -1}_{k}, a_1, \ldots, a_m),$$

où soit $a_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ pour tout $1 \leq i \leq m$, soit $m = 1$ et $a_1 = -2$.

4.2.2 Propriétés des modules $N(a)$ et $M(a)$

On note $N(a) = N(\underbrace{-1,\ldots,-1}_{k}, a_1,\ldots,a_m, \underbrace{0,\ldots,0}_{l})$ où $k+l+m=n$ et $m>1$. Soit $\theta \subset \Delta$ la partie correspondante au diagramme suivant :



En utilisant l'action décrite dans la partie précédente (équations (4.1)), on constate que $N(a)$ est cuspidal sous l'action de $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$. Plus précisement, on a

$$\begin{aligned}
X_{e_i}\cdot x(b) &= (1+b_i)x(b-\epsilon_{i+1}+\epsilon_i), \quad \text{si } i<k, && (4.2a)\\
X_{e_i}\cdot x(b) &= (1+b_i)b_{i+1}x(b-\epsilon_{i+1}+\epsilon_i), \quad \text{si } i=k, && (4.2b)\\
X_{e_i}\cdot x(b) &= b_{i+1}x(b-\epsilon_{i+1}+\epsilon_i), \quad \text{si } k<i, && (4.2c)\\
X_{-e_i}\cdot x(b) &= (1+b_{i+1})x(b+\epsilon_{i+1}-\epsilon_i), \quad \text{si } i<k, && (4.2d)\\
X_{-e_i}\cdot x(b) &= x(b+\epsilon_{i+1}-\epsilon_i), \quad \text{si } i=k, && (4.2e)\\
X_{-e_i}\cdot x(b) &= b_i x(b+\epsilon_{i+1}-\epsilon_i), \quad \text{si } k<i, && (4.2f)\\
H_{e_i}\cdot x(b) &= (b_i-b_{i+1})x(b), \quad \forall\, i. && (4.2g)
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant décrire plus en détail l'action de $\mathfrak{l}_\theta$. Notons que la partie semi–simple $\mathfrak{l}'_\theta$ de $\mathfrak{l}_\theta$ est du type $A_k\times A_l$. En particulier les modules irréductibles de plus haut poids de $\mathfrak{l}'_\theta$ sont de la forme $L(\lambda)\otimes L(\lambda')$ où λ est un poids pour l'algèbre de type A_k et λ' pour l'algèbre de type A_l. Convenons de noter ω_i le poids d'une algèbre de type A dual à la coracine associée à la i^e racine simple d'une base du système de racines préalablement choisie.

Théorème 4.2.4 *Le module $N(a)$ se décompose sous $\mathfrak{l}_\theta$ en une somme directe de modules irréductibles de plus haut poids. De plus les vecteurs de plus haut poids sont les multiples de $x(-1,\ldots,-1,a_1+k_1,\ldots,a_m+k_m,0,\ldots,0)$ où $k_i\in\mathbb{Z}$ vérifient $\sum_i k_i=0$. En particulier, les $\mathfrak{l}'_\theta$–modules de plus haut poids de la décomposition de $N(a)$ sont de la forme $L(-1-a_1-k_1\omega_k)\otimes L(a_m+k_m\omega_1)$, où k_1 et k_m sont deux entiers.*

Démonstration. L'action explicite de $\mathfrak{l}_\theta$ sur $N(a)$ donnée par les équations ci–dessus montre que les vecteurs $x(-1,\ldots,-1,a_1+k_1,\ldots,a_m+k_m,0,\ldots,0)$ sont bien des vecteurs de plus haut poids et que l'action de $\mathfrak{l}^+_\theta$ est localement finie : on a par exemple $X_{e_i}^{b_i+1}\cdot x(b)=0$ pour $1\le i\le k$ ou $m+k+1\le i\le 2n$.

Soit $x \in N(a)$ un vecteur de plus haut poids. Alors il existe des scalaires λ_i et des $(n+1)$–uplets admissibles b^i en nombre fini, tels que $x = \sum \lambda_i x(b^i)$.

Supposons par exemple que $k > 0$. Par hypothèse d'admissibilité, $b_1^i < 0$ pour tout i. Soit i_1 un indice pour lequel $b_1^{i_1}$ est le plus grand parmi les b_1^i intervenant dans l'écriture de x. En regardant l'action de X_{e_1} sur x, on conclut que $b_1^j = -1$. En effet, on a

$$X_{e_1} \cdot x = \sum_i \lambda_i \times (1 + b_1^i)\beta_2^i x(b^i - \epsilon_2 + \epsilon_1),$$

où $\beta_2^i = 1$ si $k > 1$ et $\beta_2^i = b_2^i$ si $k = 1$. On constate que le vecteur $x(b^{i_1} - \epsilon_2 + \epsilon_1)$ apparaît une seule fois dans le membre de gauche. Or $X_{e_1} \cdot x = 0$ car x est un vecteur de plus haut poids. Donc nécessairement le coefficient de $x(b^{i_1} - \epsilon_2 + \epsilon_1)$ dans le membre de gauche doit être nul. Ceci implique que nécessairement $b_1^j = -1$. On continue ainsi de proche en proche : si $k > 1$, on regarde un indice i_2 tel que $b_1^{i_2} = -1$ et $b_2^{i_2}$ est minimal parmi les b^i satisfaisant $b_1^i = -1$. Le même raisonnement en utilisant le fait que $X_{e_2} \cdot x = 0$, montre que $b_2^{i_2} = -1$. En utilisant succéssivement l'action de $X_{e_3}, \ldots X_{e_k}$, on montre que x contient un vecteur de la forme $x(-1, \ldots, -1, a_1 + k_1, \ldots, a_m + k_m, \star, \ldots, \star)$. On continue le même raisonnement avec les b_r^i pour $r > k + m$, qui sont tous des entiers strictement positifs à cause de l'hypothèse d'admissibilité. Plus précisement, on regarde un indice i_{m+k+1} tel que $b_{k+m+1}^{i_{k+m+1}}$ soit minimal et on montre que nécessairement on a $b_{k+m+1}^{i_{k+m+1}} = 0$ puis on continue avec $k + m + 2$ et ainsi de suite. On montre ainsi que x contient un vecteur de la forme $x(-1, \ldots, -1, a_1 + k_1, \ldots, a_m + k_m, 0, \ldots, 0)$. Comme ce vecteur est un vecteur de plus haut poids, on peut considérer la différence $x - \lambda x(-1, \ldots, -1, a_1 + k_1, \ldots, a_m + k_m, 0, \ldots, 0)$ (avec $\lambda \in \mathbb{C}$ choisi de sorte que le vecteur $x(-1, \ldots, -1, a_1 + k_1, \ldots, a_m + k_m, 0, \ldots, 0)$ n'apparaît plus dans la différence) et recommencer le raisonnement. Cela montre donc que les seuls vecteurs de plus haut poids de $N(a)$ sont les combinaisons linéaires de $x(-1, \ldots, -1, a_1 + k_1, \ldots, a_m + k_m, 0, \ldots, 0)$.

Enfin le $\mathfrak{l}_\theta$–module $\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta)x(-1, \ldots, -1, a_1 + k_1, \ldots, a_m + k_m, 0, \ldots, 0)$ est un module de plus haut poids, donc indécomposable. Il est irréductible si et seulement s'il ne contient aucun autre vecteur de plus haut poids. Cette condition est facilement vérifiée maintenant que nous connaissons la liste complète des vecteurs de plus haut poids de $N(a)$. En effet, d'après les équations (4.2), le poids sous $\mathfrak{l}'_\theta$ de $x(-1, \ldots, -1, a_1 + k_1, \ldots, a_m + k_m, 0, \ldots, 0)$ est $(0, \ldots, 0, -1-a_1-k_1) \otimes (a_m + k_m, 0, \ldots, 0)$. D'autre part, le centre de $\mathfrak{l}_\theta$ est engendré par les vecteurs H_{e_i} pour $k+2 \leq i \leq k+m-1$ et par $H_{e_1} + 2H_{e_2} + \cdots + kH_{e_k} + (k+1)H_{e_{k+1}}$ et $H_{e_{2n}} + 2H_{e_{2n-1}} + \cdots + lH_{e_{2n-l+1}} + (l+1)H_{e_{2n-l}}$. Si le vecteur $x(-1, \ldots, -1, a_1 + k'_1, \ldots, a_m + k'_m, 0, \ldots, 0)$ appartient au $\mathfrak{l}_\theta$–module engendré par $x(-1,\ldots,-1,a_1+k_1,\ldots,a_m+k_m,0,\ldots,0)$ alors l'action du centre de $\mathfrak{l}_\theta$ doit être la même sur ces deux vecteurs. Ceci impose $k_i = k'_i$ pour tout i. Donc le $\mathfrak{l}_\theta$–module engendré par $x(-1,\ldots,-1,a_1+k_1,\ldots,a_m+k_m,0,\ldots,0)$ est un module irréductible de plus haut poids.

Comme on a vu que le module $N(a)$ est $\mathfrak{l}_\theta^+$–fini, cela implique que tout vecteur $x(b)$ peut être envoyé sur un vecteur de plus haut poids en utilisant l'action de $\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta^+)$. Ainsi $N(a)$ est bien la somme directe des modules irréductibles ci–dessus.

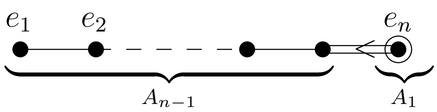
□

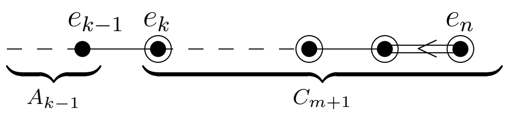
Corollaire 4.2.5 *Le module $N(a)$ est un module irréductible de la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}(\mathfrak{sl}_n)$*

Démonstration. Nous avons montré toutes les propriétés sauf la $\langle\Delta-\theta\rangle$–cuspidalité. Celle-ci découle des équations (4.2) qui montrent que X_{e_i} et X_{-e_i} sont injectifs sur tous les $x(b)$ (et donc sur tout $N(a)$) pour $k+1 \leq i \leq k+m$.

□

On note $M(a) = M(\underbrace{-1,\ldots,-1}_{k},a_1,\ldots,a_m)$, où $k+m = n$ et $m > 0$. Soit $\theta \subset \Delta$ la partie correspondante à l'un des diagrammes suivants (selon que $m = 1$ ou $m > 1$) :





En utilisant l'action décrite dans la partie précédente, on constate que $M(a)$ est cupsidal sous l'action de $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$. Plus précisement, on a

$$\begin{aligned}
X_{e_i}\cdot x(b) &= (1+b_i)x(b-\epsilon_{i+1}+\epsilon_i), \quad \text{si } i<k && (4.3a)\\
X_{e_i}\cdot x(b) &= (1+b_i)b_{i+1}x(b-\epsilon_{i+1}+\epsilon_i), \quad \text{si } i=k && (4.3b)\\
X_{e_i}\cdot x(b) &= b_{i+1}x(b-\epsilon_{i+1}+\epsilon_i), \quad \text{si } k<i<n && (4.3c)\\
X_{e_n}\cdot x(b) &= \frac{1}{2}x(b+2\epsilon_n) && (4.3d)\\
X_{-e_i}\cdot x(b) &= (1+b_{i+1})x(b+\epsilon_{i+1}-\epsilon_i), \quad \text{si } i<k && (4.3e)\\
X_{-e_i}\cdot x(b) &= x(b+\epsilon_{i+1}-\epsilon_i), \quad \text{si } i=k && (4.3f)\\
X_{-e_i}\cdot x(b) &= b_ix(b+\epsilon_{i+1}-\epsilon_i), \quad \text{si } k<i<n && (4.3g)\\
X_{-e_n}\cdot x(b) &= -\frac{1}{2}b_n(b_n-1)x(b-2\epsilon_n) && (4.3h)
\end{aligned}$$

Nous allons alors décrire l'action de $\mathfrak{l}_\theta$. Notons que cette fois $\mathfrak{l}'_\theta$ est de type A_1 si $m = 1$ et de type C_{m-1} sinon. On reprend la notation ω_i du cas précédent.

Théorème 4.2.6 *Le module $M(a)$ se décompose sous $\mathfrak{l}_\theta$ en une somme directe de modules irréductibles de plus haut poids. De plus les vecteurs de plus haut poids sont les multiples de $x(-1, \ldots, -1, a_1+k_1, \ldots, a_m+k_m)$ où $k_i \in \mathbb{Z}$ vérifient $\sum_i k_i \in 2\mathbb{Z}$. En particulier, les plus haut poids de $M(a)$ sont de la forme $L(\alpha\omega_{k-1})$.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle du théorème 4.2.4. □

Corollaire 4.2.7 *Le module $M(a)$ est un module irréductible de la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}(\mathfrak{sp}_{2n})$*

Donnons à présent quelques propriétés supplémentaires des modules $N(a)$ et $M(a)$ considérés ci–dessus. Tout d'abord, on peut remarquer que l'action de $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$ laisse stable le sous–espace vectoriel formé des vecteurs de plus haut poids sous l'action de $\mathfrak{l}_\theta$. Ce sous–espace a donc une structure de $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$–module cuspidal qui est en fait irréductible, comme on le constate à partir de l'action explicite de la sous–algèbre $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$. En fait, on a mieux :

Proposition 4.2.8 *Les modules $N(a)$ et $M(a)$ se décomposent sous $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$ en une somme directe de modules irréductibles cuspidaux.*

Démonstration. Par construction, l'action de $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$ est cuspidale. Faisons la preuve pour $N(a)$. Soit $x(b) \in N(a)$. Regardons le $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$–module engendré par $x(b)$. Soit $X \in \mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$ un vecteur de poids α. Alors $X \cdot x(b)$ est un vecteur de poids, non nul par cuspidalité de X. D'autre part, si $Y \in \mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$ est un vecteur de poids $-\alpha$, alors $Y(X \cdot x(b))$ est un vecteur non nul (par cuspidalité de Y), de même poids que $x(b)$. Comme $N(a)$ est de degré 1, $Y(X \cdot x(b))$ est donc un multiple non nul de $x(b)$. Ceci prouve que le module M est irréductible. En effet si $u \cdot x(b)$ est un élément non nul du module engendré par $x(b)$, avec $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{l}_{\Delta-\theta})$ un vecteur de poids. Alors pour tout monôme $v \in \mathcal{U}(\mathfrak{l}_{\Delta-\theta})$ de poids opposé à celui de u, $v(u \cdot x(b))$ est un multiple non nul de $x(b)$. Comme $N(a)$ est engendré comme espace vectoriel par les $x(b)$, la proposition est démontrée. En particulier, le module $\mathcal{U}(\mathfrak{l}_{\Delta-\theta})x(b)$ ne dépend que des b_i pour $i \notin \{k+1, \ldots, k+m\}$ et est isomorphe à $N(b_{k+1}, \ldots, b_m)$ comme $\mathfrak{l}'_{\Delta-\theta}$–module. □

Chapitre 5

La catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$

Dans cette partie, nous étudions la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}(\mathfrak{g})$ introduite dans le chapitre précédent. **Nous supposons ici que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple**. La première partie de ce chapitre est consacrée à l'étude des modules irréductibles dans $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$. En fait, nous écarterons certains couples (Δ,θ) pour lesquelles notre méthode ne fonctionne pas (voir la partie 5.1.9). Dans la dernière section de ce chapitre, nous montrons que certaines catégories $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ sont semi–simples.

5.1 Irréductibles de $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$

5.1.1 Module cuspidal sous–jacent

Commençons par une conséquence du théorème 2.3.5 de Fernando :

Lemme 5.1.1 *Soit $M \in \mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ irréductible. Alors $M \simeq L(\Delta-\theta, C)$ pour un $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$–module de poids irréductible cuspidal C.*

Démonstration. Comme M est $\langle\Delta-\theta\rangle$–cuspidal et se décompose sous $\mathfrak{l}_\theta$ en modules de plus haut poids, on a $\mathcal{R}^I_s(M) = \langle\Delta-\theta\rangle$ et $\langle\theta\rangle^+ \subset \mathcal{R}^N(M)$. Le théorème 2.3.5 de Fernando donne alors le résultat. $\square$

Remarquons qu'une conséquence de ce lemme et du théorème 2.3.6 est que $\mathfrak{l}'_{\Delta-\theta}$ doit être un produit de sous–algèbres de type A ou C.

Remarquons aussi que si $\theta = \emptyset$, alors M est un module de poids cuspidal irréductible. Nous avons rappelé leur classification dans la partie 2.4. D'autre part, si $\Delta = \theta$ la propriété de décomposabilité sous $\mathfrak{l}_\theta$ impose que M est de la forme $L(\Delta,\mathbb{C})$ où $\mathbb{C}$ est un $\mathfrak{h}$–module de dimension 1 (M est donc un

$\mathfrak{l}_\theta = \mathfrak{g}$–module irréductible de plus haut poids). Bien sûr tout tel module est dans la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\Delta}$.

Nous supposerons donc désormais que $\Delta \neq \theta$ et $\theta \neq \emptyset$. Par convention, nous entourons sur le diagramme de Dynkin de $(\mathcal{R}, \Delta)$ les racines de $\Delta - \theta$. Nous notons (e_i) les racines simples de Δ en suivant la numérotation de Bourbaki (voir [5] ou [19]).

Dans tout ce qui suit, nous notons p la projection de $V(\Delta - \theta, C)$ sur $L(\Delta - \theta, C)$. Nous renvoyons à la section 2.2 pour la définition de $V(\Delta - \theta, C)$ et de $L(\Delta - \theta, C)$. Rappelons également qu'un module de poids M est de degré 1 si tout espace de poids non trivial de M est de dimension 1.

Voici un second lemme que nous utiliserons beaucoup par la suite :

Lemme 5.1.2 *Soit $M = L(\Delta - \theta, C)$ un module irréductible de $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$. Soit $v \in C$ un vecteur de poids. Alors l'image par p de $1 \otimes v$ dans M (qui est non nulle) engendre un $\mathfrak{l}_\theta$–module irréductible de plus haut poids.*

Démonstration. D'après la proposition 2.2.2, p est un isomorphisme de $1 \otimes C$ sur son image. Ceci explique pourquoi $p(1 \otimes v) \neq 0$. Comme $\mathfrak{l}_\theta^+ \subset \mathfrak{n}_{\Delta-\theta}^+$, le $\mathfrak{l}_\theta$–module engendré par $p(1 \otimes v)$ dans M est un module de plus haut poids (revoir au besoin l'équation (2.1)). De ce fait, c'est un module indécomposable. Par $\mathcal{O}_1$, on sait que M vu comme $\mathfrak{l}_\theta$–module est semi–simple. Donc d'après la proposition 1.1.3 tout sous–$\mathfrak{l}_\theta$–module de M est également semi–simple. Le $\mathfrak{l}_\theta$–module indécomposable engendré par $p(1 \otimes v)$ doit donc être irréductible. $\square$

D'après le lemme 5.1.1, le module irréductible M de $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ est connu dès que l'on connaît le $\mathfrak{l}'_{\Delta-\theta}$–module C et l'action du centre de $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$ sur C. Nous devons donc trouver pour quels $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$–modules C le module $L(\Delta - \theta, C)$ satisfait la propriété $\mathcal{O}_1$. La stratégie que nous allons mettre en œuvre est la suivante. Nous allons montrer que pour certaines racines α et β bien choisies un élément de $V(\Delta - \theta, C)$ de la forme $X_{-\alpha-\beta} \otimes v$ a la même image dans $L(\Delta - \theta, C)$ qu'un multiple approprié de $X_{-\beta} \otimes (X_{-\alpha} v)$. A cause de la proposition 2.2.2, cela signifie qu'il existe $\kappa \in \mathbb{C}^*$ tel que $X_{-\alpha-\beta} \otimes v - \kappa X_{-\beta} \otimes (X_{-\alpha} v)$ est dans le noyau de p, i.e. dans le sous–module propre maximal $K(\Delta - \theta, C)$ de $V(\Delta - \theta, C)$. Cette dernière condition (appartenir au noyau de p) peut être testée à l'aide de la proposition 2.2.2 en regardant l'action de $\mathfrak{n}_{\Delta-\theta}^+$ sur $X_{-\alpha-\beta} \otimes v - \kappa X_{-\beta} \otimes (X_{-\alpha} v)$. Nous obtenons ainsi certaines conditions, notamment sur l'action de H_β (voir par exemple le lemme 5.1.6).

Dans une première étape, nous allons montrer le

Théorème 5.1.3 *Soit $M = L(\Delta - \theta, C)$ un module irréductible de $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$. Alors C est de degré 1.*

Avant de montrer ce théorème, nous avons besoin de plusieurs lemmes. Tout d'abord une conséquence immédiate du lemme de Benkart–Britten–Lemire (lemme 2.3.4) :

Lemme 5.1.4 *Soit $M = L(\Delta-\theta, C)$ un module irréductible de $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$. Soient $\alpha \in \langle \Delta - \theta\rangle^+$ et $\beta \in \langle\theta\rangle^+$ telles que $\alpha + \beta \in \mathcal{R}$. Alors pour tout vecteur de poids $v \in C$, $p(X_{-\alpha-\beta} \otimes v) \neq 0$ et $p(X_{-\beta} \otimes v) \neq 0$.*

Démonstration. En effet, $p(X_{-\alpha-\beta}\otimes v) = X_{-\alpha-\beta}p(1\otimes v)$. On sait que $p(1\otimes v)$ est non nul. Si $p(X_{-\alpha-\beta} \otimes v) = 0$ alors $X_{-\alpha-\beta}\, p(1 \otimes v) = 0$ et donc le lemme 2.3.3 entraîne que la racine $-\alpha - \beta \in \mathcal{R}^N(M)$. Comme M est $\mathfrak{l}_\theta^+$–fini d'après la condition $\mathcal{O}_1$, on a $\beta \in \mathcal{R}^N(M)$. Le lemme 2.3.4 implique alors que $(-\alpha - \beta) + \beta = -\alpha \in \mathcal{R}^N(M)$. Ceci est une contradiction car $\alpha \in \langle\Delta-\theta\rangle$ et donc $\alpha \in \mathcal{R}_s^I(M)$ d'après la condition de cuspidalité $\mathcal{O}_2$ de M. Donc $p(X_{-\alpha-\beta}\otimes v) \neq 0$. D'autre part, $p(X_{-\beta}\otimes v) \neq 0$ car $X_{\alpha+\beta}\cdot X_{-\beta}\otimes v = 1\otimes [X_{\alpha+\beta}, X_{-\beta}]v$ et $[X_{\alpha+\beta}, X_{-\beta}]v \neq 0$ par la condition de cuspidalité de C. □

Lemme 5.1.5 *Soit $M = L(\Delta - \theta, C)$ un module irréductible de $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$. Soit $\alpha \in \langle\Delta - \theta\rangle^+$ tel qu'il existe $\beta \in \theta$ satisfaisant $\alpha + \beta \in \mathcal{R}$. Soit $v \in C$ un vecteur de poids. Alors $X_\alpha X_{-\alpha}v \in \mathbb{C}v$.*

Démonstration. Considérons l'élément $u := X_{-\alpha-\beta}\otimes v \in V(\Delta-\theta, C)$. Il existe une constante de structure $c \in \mathbb{Z}^*$ telle que $[X_\beta, X_{-\alpha-\beta}] = cX_{-\alpha} \in \mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$. Comme $X_\beta \in \mathfrak{l}_\theta^+ \subset \mathfrak{n}_{\Delta-\theta}^+$, son action sur u est donnée par :

$$X_\beta \cdot u = [X_\beta, X_{-\alpha-\beta}] \otimes v = cX_{-\alpha} \otimes v = c1 \otimes X_{-\alpha}v. \tag{5.1}$$

La dernière égalité est vraie car $X_{-\alpha} \in \mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$. Comme M est $\langle\Delta-\theta\rangle$–cuspidal, on a $X_{-\alpha}v \neq 0$. Cela implique $p(u) \neq 0$ d'après la proposition 2.2.2. Or par le lemme 5.1.2, $\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta)(p(1 \otimes X_{-\alpha}v))$ est irréductible. Or M est une somme directe de $\mathfrak{l}_\theta$–modules irréductibles de plus haut poids par $\mathcal{O}_1$. De l'équation (5.1), on déduit la relation $X_\beta \cdot p(u) = cp(1\otimes X_{-\alpha}v)$. Ceci entraîne que le $\mathfrak{l}_\theta$–module engendré par $p(u)$ intersecte non trivialement le module irréductible $\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta)(p(1 \otimes X_{-\alpha}v))$. Or par $\mathcal{O}_1$ et la proposition 1.1.3, le module $\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta)p(u)$ est semi–simple. Cela prouve que ce module contient le module irréductible $\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta)(p(1 \otimes X_{-\alpha}v))$ et lui est donc égal (car $\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta)p(u)$ est engendré par un élément $p(u)$ tel que $X_\beta \cdot p(u) = cp(1 \otimes X_{-\alpha}v)$). En particulier, on a $p(u) \in \mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta)(p(1 \otimes X_{-\alpha}v))$. En comparant les poids de $p(u)$ et des éléments de $\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta^-)p(1 \otimes X_{-\alpha}v)$, on obtient une relation de la forme

$$p(u) = \eta p(X_{-\beta} \otimes X_{-\alpha}v), \quad \eta \in \mathbb{C}, \tag{5.2}$$

car β est une racine simple et donc $\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta^-)_{-\beta} = \mathbb{C}X_{-\beta}$. Comme $p(u) \neq 0$, le scalaire η est non nul.

Appliquons alors $X_{\alpha+\beta} \in \mathfrak{n}_{\Delta-\theta}^+$ à l'équation (5.2). On obtient :

$$p(H_{\alpha+\beta} \otimes v) = \eta p([X_{\alpha+\beta}, X_{-\beta}] \otimes X_{-\alpha}v).$$

Si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ désigne le poids de v et si on note c' la constante de structure (non nulle) telle que $[X_{\alpha+\beta}, X_{-\beta}] = c'X_\alpha \in \mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$, l'équation ci–dessus devient

$$\lambda(H_{\alpha+\beta})p(1 \otimes v) = \eta c' p(1 \otimes X_\alpha X_{-\alpha}v).$$

Comme η et c' sont non nuls, on a donc

$$p(1 \otimes (\kappa v) - 1 \otimes (X_\alpha X_{-\alpha}v)) = 0,$$

où $\kappa = \frac{\lambda(H_{\alpha+\beta})}{\eta c'}$. Comme p est un isomorphisme de $1 \otimes C$ sur C, on en déduit que

$$1 \otimes (\kappa v) - 1 \otimes (X_\alpha X_{-\alpha}v) = 0$$

et donc que

$$\kappa v - X_\alpha X_{-\alpha}v = 0.$$

Cela prouve bien que $X_\alpha X_{-\alpha}v = \kappa v \in \mathbb{C}v$.

□

Au cours de la démonstration du lemme, nous avons montré un cas particulier du lemme suivant :

Lemme 5.1.6 *Soit $M = L(\Delta - \theta, C)$ un module irréductible de $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$. Soit $\alpha \in \langle \Delta - \theta \rangle^+$. Soit $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_i) \in (\langle\theta\rangle^+)^i$ tels que $\alpha + \beta_1 + \cdots + \beta_k \in \mathcal{R}$ pour tout $k \leq i$. Soit $v \in C$ un vecteur de poids. Alors $p(X_{-(\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_i)} \otimes v) \neq 0$ et*

$$p(X_{-(\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_i)} \otimes v) \in p(\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta^-)_{-(\beta_1+\cdots+\beta_i)} \otimes X_{-\alpha}v).$$

En particulier, si $i = 1$ et β_1 est une racine simple, il existe une constante $\eta(v)$ non nulle telle que

$$p(X_{-\alpha-\beta_1} \otimes v) = \eta(v)p(X_{-\beta_1} \otimes X_{-\alpha}v).$$

Démonstration. Remarquons que l'action adjointe de $w = X_{\beta_1} \cdots X_{\beta_i} \in \mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta)$ sur $X_{-(\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_i)}$ donne un multiple non nul de $X_{-\alpha}$ (ce multiple peut se calculer explicitement en terme de constantes de structure). Ainsi l'action de w sur $X_{-(\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_i)} \otimes v \in V(\Delta - \theta, C)$ est donnée par un multiple non nul de $1 \otimes X_{-\alpha}v$.

Comme $\alpha \in \langle \Delta - \theta \rangle^+$, la condition $\mathcal{O}_2$ assure que $X_{-\alpha} v \neq 0$. D'après la proposition 2.2.2, cela implique que $p(X_{-(\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_i)} \otimes v) \neq 0$. D'autre part, nous avons montré que $X_{\beta_1} \cdots X_{\beta_i} \cdot p(X_{-(\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_i)} \otimes v)$ est un multiple non nul de $p(1 \otimes X_{-\alpha} v)$. D'après le lemme 5.1.2, $p(1 \otimes X_{-\alpha} v)$ engendre un $\mathfrak{l}_\theta$–module irréductible de plus haut poids. La condition $\mathcal{O}_1$ satisfaite par le module M conduit alors à

$$p(X_{-(\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_i)} \otimes v) \in p(\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta^-)_{-(\beta_1+\cdots+\beta_i)} \otimes X_{-\alpha} v).$$

Si $i = 1$ et β_1 est une racine simple, alors $\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta^-)_{-\beta_1} = \mathbb{C} X_{-\beta_1}$. Cela prouve le lemme.

□

Lemme 5.1.7 *Soit N un $\mathfrak{g}$–module de poids. Soient $\alpha, \gamma \in \mathcal{R}$ telles que*

1. *$\alpha + \gamma \in \mathcal{R}$ et $\alpha - \gamma \notin \mathcal{R}$.*
2. *$X_\alpha X_{-\alpha} v \in \mathbb{C} v$ et $X_\gamma X_{-\gamma} v \in \mathbb{C} v$, pour tout vecteur de poids $v \in N$.*

Alors $X_{\alpha+\gamma} X_{-\alpha-\gamma} v \in \mathbb{C} v$, pour tout vecteur de poids $v \in N$.

Démonstration. Il existe deux constantes de structure non nulles c et d telles que $c X_{\alpha+\gamma} = [X_\alpha, X_\gamma]$ et $d X_{-\alpha-\gamma} = [X_{-\alpha}, X_{-\gamma}]$. Ainsi, on a dans l'algèbre enveloppante :

$$cd X_{\alpha+\gamma} X_{-\alpha-\gamma} = (X_\alpha X_\gamma - X_\gamma X_\alpha)(X_{-\alpha} X_{-\gamma} - X_{-\gamma} X_{-\alpha}).$$

On développe cette quantité. Comme $\alpha - \gamma \notin \mathcal{R}$ par hypothèse, les vecteurs X_α et $X_{-\gamma}$ commutent tout comme $X_{-\alpha}$ et X_γ. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} cd X_{\alpha+\gamma} X_{-\alpha-\gamma} = & X_\alpha X_{-\alpha} X_\gamma X_{-\gamma} - X_\alpha X_\gamma X_{-\gamma} X_{-\alpha} \\ & - X_\gamma X_\alpha X_{-\alpha} X_{-\gamma} + X_\gamma X_{-\gamma} X_\alpha X_{-\alpha}. \end{aligned}$$

Appliquons v à cette égalité. On a

$$\begin{aligned} cd X_{\alpha+\gamma} X_{-\alpha-\gamma} \cdot v = & (X_\alpha X_{-\alpha})(X_\gamma X_{-\gamma} \cdot v) - X_\alpha (X_\gamma X_{-\gamma})(X_{-\alpha} \cdot v) \\ & - X_\gamma (X_\alpha X_{-\alpha})(X_{-\gamma} \cdot v) + (X_\gamma X_{-\gamma})(X_\alpha X_{-\alpha} \cdot v). \end{aligned}$$

Or la deuxième hypothèse implique que

$$X_\alpha X_{-\alpha}(X_{-\gamma} v) \in \mathbb{C} X_{-\gamma} v \text{ et } X_\gamma X_{-\gamma}(X_{-\alpha} v) \in \mathbb{C} X_{-\alpha} v.$$

On en déduit le lemme.

□

Lemme 5.1.8 *Soit N un $\mathfrak{g}$–module de poids. Soient $\alpha, \gamma \in \mathcal{R}$ telles que*

1. *$\alpha + \gamma \in \mathcal{R}$, $2\alpha + \gamma \in \mathcal{R}$ et $\alpha - \gamma \notin \mathcal{R}$.*
2. *$X_\alpha X_{-\alpha} v \in \mathbb{C}v$ et $X_\gamma X_{-\gamma} v \in \mathbb{C}v$, pour tout $v \in N$ un vecteur de poids.*

Alors $X_{2\alpha+\gamma} X_{-2\alpha-\gamma} v \in \mathbb{C}v$, pour tout $v \in N$ un vecteur de poids.

Démonstration. Il existe une constante de structure non nulle c telle que $cX_{2\alpha+\gamma} = [X_\alpha, [X_\alpha, X_\gamma]]$. La preuve est alors analogue à celle du lemme précédent.

□

Lemme 5.1.9 *Soit N un $\mathfrak{g}$–module de poids irréductible. Supposons que pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$ et tout vecteur de poids $v \in N$, $X_\alpha X_{-\alpha} v \in \mathbb{C}v$. Alors N est de degré* 1.

Démonstration. Soit $v \in N$ un vecteur de poids. Montrons que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_0 v \subset \mathbb{C}v$. Comme v est un vecteur de poids, on a déjà $\mathcal{U}(\mathfrak{h})v \subset \mathbb{C}v$. Or, l'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$ est engendrée par $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ et certains monômes de la forme $u = X_1 \cdots X_k$ où $k \in \mathbb{N}$ et chaque $X_i \in \mathfrak{g}^{\pm\beta}$ où $\beta \in \mathcal{R}$ est une racine simple : pour que $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$ il faut que la multiplicité de chaque racine simple β apparaissant dans u soit égale à la multiplicité de $-\beta$. En particulier, l'entier k doit être pair.

Montrons alors que $u \cdot v \in \mathbb{C}v$ par récurrence sur k. Si $k = 0$, alors $u = 1$ et $u \cdot v = v$. Si $k = 2$, alors $u = X_\beta X_{-\beta}$ ou $u = X_{-\beta} X_\beta$ pour une racine simple β. Dans le premier cas, on a $u \cdot v \in \mathbb{C}v$ par hypothèse et dans le deuxième cas on remarque que $u = X_\beta X_{-\beta} - H_\beta$ et on a donc à nouveau $u \cdot v \in \mathbb{C}v$.

Supposons alors le résultat vrai pour tout monôme de degré au plus $k-1$ et tout vecteur de poids. Soit $u = X_1 \cdots X_k$ un monôme de degré k. Remarquons que pour tout i, $X_i \cdots X_k \cdot v$ est un vecteur de poids. L'hypothèse de récurrence implique alors que si u contient un sous–monôme $X_j \cdots X_{i-1} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$ alors $X_1 \cdots X_{j-1}(X_j \cdots X_{i-1})(X_i \cdots X_k \cdot v) \in \mathbb{C}X_1 \cdots X_{j-1}(X_i \cdots X_k \cdot v)$. Comme $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$ alors $X_1 \cdots X_{j-1} X_i \cdots X_k \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$ et on peut appliquer à nouveau l'hypothèse de récurrence pour conclure que $u \cdot v \in \mathbb{C}v$.

Il suffit donc de montrer que u contient toujours un sous–monôme appartenant à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$. Raisonnons par l'absurde. Supposons par exemple que $X_1 \in \mathfrak{g}^\beta$ pour une racine simple (positive) β. Soit i_1 le premier entier strictement plus grand que 1 tel que X_{i_1} appartient à un espace radiciel associé à une racine simple (positive). Remarquons que si X correspond à une racine négative différente de $-\beta$, alors X_1 et X commutent (car ce sont des vecteurs appartenant à des espaces radiciels associés à des racines simples) et si X appartient à l'espace radiciel associé à $-\beta$ alors $X_1 X$ est un sous–monôme de

u appartenant à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$ ce qui est contraire à notre hypothèse. On peut donc supposer que tous les vecteurs X_i pour $1 < i < i_1$ appartiennent à des espaces radicielles associés à des racines négatives différentes de $-\beta$. Le même raisonnement appliqué à X_{i_1} montre que l'on peut supposer que tous les X_i avec $1 < i < i_1$ commutent avec X_{i_1} et donc on peut supposer que $i_1 = 2$. On regarde ensuite le premier X_j avec $j > 2$ appartenant à un espace radiciel associé à une racine simple (positive). Le même raisonnement montre que l'on peut supposer que $j = 3$. En continuant ce raisonnement, on peut supposer que les $k/2$ premiers vecteurs appartiennent à des espaces radiciels associés à des racines simples (positives). Et donc les $k/2$ derniers vecteurs appartiennent à des espaces radiciels associés à des racines négatives. Or parmi ces vecteurs il en existe (au moins) un qui appartient à l'espace radiciel associé à la racine opposée de la racine qui correspond au poids de l'espace radiciel auquel appartient $X_{k/2}$. Soit i le plus petit entier tel que X_i a cette propriété. Alors pour $k/2 < j < i$, X_j commute à $X_{k/2}$. Et donc après avoir fait commuter $X_{k/2}$ avec ces X_j on trouve le sous–monôme $X_{k/2}X_i$ qui appartient à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$, ce qui est une contradiction. Ainsi u contient un sous–monôme appartenant à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$ et donc $u \cdot v \in \mathbb{C}v$.

Ainsi on a bien montré que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_0 v \subset \mathbb{C}v$. La correspondance de Lemire (théorème 2.3.8) permet alors de conclure.

□

Démonstration. (théorème 5.1.3) Grâce au lemme 5.1.9, il suffit de montrer que pour tout $\alpha \in \langle\Delta - \theta\rangle$ et tout vecteur de poids $v \in C$, $X_\alpha X_{-\alpha} v \in \mathbb{C}v$. Comme $X_\alpha X_{-\alpha} - X_{-\alpha} X_\alpha \in \mathfrak{h}$ pour toute racine α, il suffit de le montrer pour toute racine α positive.

Fixons un vecteur de poids $v \in C$. Soit $\alpha \in \langle\Delta - \theta\rangle^+$. S'il existe $\beta \in \theta$ telle que $\alpha + \beta \in \mathcal{R}$, le lemme 5.1.5 appliqué à β et α donne $X_\alpha X_{-\alpha} v \in \mathbb{C}v$. Sinon, soit $\alpha' \in \langle\Delta - \theta\rangle^+$ telle que

- $\alpha + \alpha' \in \mathcal{R}$ et $\alpha - \alpha' \notin \mathcal{R}$,
- $\exists\, \beta \in \theta$, $\beta + \alpha' \in \mathcal{R}$ et $\beta + \alpha' + \alpha \in \mathcal{R}$.

Une telle racine α' existe toujours car les parties $\Delta - \theta$ et θ forment une partition du diagramme de Dynkin de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ qui est connexe. Le lemme 5.1.5 appliqué à β et α' d'une part et à β et $\alpha' + \alpha$ d'autre part donne $X_{\alpha'} X_{-\alpha'} v \in \mathbb{C}v$ et $X_{\alpha+\alpha'} X_{-\alpha-\alpha'} v \in \mathbb{C}v$.

Si $2\alpha' + \alpha \notin \mathcal{R}$, on peut appliquer le lemme 5.1.7 à $-\alpha'$ et $\alpha' + \alpha$. On obtient donc $X_\alpha X_{-\alpha} v \in \mathbb{C}v$. Si $2\alpha' + \alpha \in \mathcal{R}$ et $3\alpha' + \alpha \notin \mathcal{R}$, on remarque que $\beta + 2\alpha' + \alpha \in \mathcal{R}$. On peut donc appliquer le lemme 5.1.5 à β et $2\alpha' + \alpha$ pour obtenir $X_{2\alpha'+\alpha} X_{-(2\alpha'+\alpha)} v \in \mathbb{C}v$. On applique alors le lemme 5.1.8 aux racines $2\alpha' + \alpha$ et $-\alpha'$ pour obtenir $X_\alpha X_{-\alpha} v \in \mathbb{C}$. Si $2\alpha' + \alpha \in \mathcal{R}$ et $3\alpha' + \alpha \in \mathcal{R}$, alors $\beta + 2\alpha' + \alpha \in \mathcal{R}$ et $\beta + 3\alpha' + \alpha \in \mathcal{R}$. On applique alors le lemme 5.1.5 à

β et $2\alpha' + \alpha \in \mathcal{R}$ et à β et $3\alpha' + \alpha \in \mathcal{R}$ pour obtenir $X_{2\alpha'+\alpha}X_{-(2\alpha'+\alpha)}v \in \mathbb{C}v$ et $X_{3\alpha'+\alpha}X_{-(3\alpha'+\alpha)}v \in \mathbb{C}v$. A cause de [19, table 1 p.45], $4\alpha' + \alpha \notin \mathcal{R}$. On peut donc utiliser un analogue du lemme 5.1.8 appliqué à $3\alpha' + \alpha$ et $-\alpha'$ pour obtenir $X_\alpha X_{-\alpha}v \in \mathbb{C}v$. On a donc montré dans tous les cas que $X_\alpha X_{-\alpha}v \in \mathbb{C}v$. Le théorème est ainsi démontré.

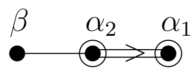
□

5.1.2 Les idéaux de $\mathfrak{l}'_{\Delta-\theta}$

Nous continuons ici avec les notations de la partie précédente. Nous allons à présent montrer le

Théorème 5.1.10 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple qui n'est pas de type C. S'il existe M irréductible dans $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}(\mathfrak{g})$, alors l'algèbre $\mathfrak{l}'_{\Delta-\theta}$ est produit d'idéaux de type A.*

Démonstration. En vertu du théorème 2.3.6 de Fernando, il suffit de montrer que $\mathfrak{l}'_{\Delta-\theta}$ n'a pas d'idéal de type C. Si $\mathfrak{l}'_{\Delta-\theta}$ contient un idéal de type C alors $\mathfrak{g}$ de type B_n ($n \geq 3$) ou F_4 et le diagramme de Dynkin de $\mathfrak{g}$ contient un morceau de la forme suivante :



Soit $v \in C$ un vecteur de poids. On regarde $u := p(X_{-\alpha_2-\beta} \otimes v)$. Comme β est une racine simple, le lemme 5.1.6 implique qu'il existe un scalaire $\eta(v)$ non nul tel que $u = \eta(v)p(X_{-\beta} \otimes X_{-\alpha_2}v)$. Appliquons $X_{\beta+\alpha_2+2\alpha_1}$ à cette égalité. On obtient

$$p([X_{\beta+\alpha_2+2\alpha_1}, X_{-\alpha_2-\beta}] \otimes v) = \eta(v) \times p([X_{\beta+\alpha_2+2\alpha_1}, X_{-\beta}] \otimes X_{-\alpha_2}v).$$

Or, $[X_{\beta+\alpha_2+2\alpha_1}, X_{-\alpha_2-\beta}] = 0$ et il existe une constante de structure c non nulle telle que $[X_{\beta+\alpha_2+2\alpha_1}, X_{-\beta}] = cX_{\alpha_2+2\alpha_1} \in \mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$. On a donc

$$0 = \eta(v)cp(1 \otimes X_{\alpha_2+2\alpha_1}X_{-\alpha_2}v).$$

La condition de cuspidalité $\mathcal{O}_2$ de M implique que $X_{\alpha_2+2\alpha_1}X_{-\alpha_2}v \neq 0$ et donc que $p(1 \otimes X_{\alpha_2+2\alpha_1}X_{-\alpha_2}v) \neq 0$. Ceci contredit le fait que $\eta(v)$ est non nul.

□

5.1.3 L'algèbre de Lie $\mathfrak{l}'_{\Delta-\theta}$ est simple

A présent nous allons montrer le

Théorème 5.1.11 *Soit $M = L(\Delta - \theta, C)$ un module irréductible de $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$. Alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{l}'_{\Delta-\theta}$ est simple de type A ou de type C.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Pour simplifier les notations nous supposerons que $\mathfrak{l}'_{\Delta-\theta}$ est le produit de deux algèbres de Lie simple de type A ou C que nous noterons $\mathfrak{l}_1$ et $\mathfrak{l}_2$. Nous noterons S_i la base de $\mathfrak{l}_i$ induite par $\Delta - \theta$. Le module cuspidal C prend alors la forme $C = C_1 \otimes C_2$ où C_i est un $\mathfrak{l}_i$–module cuspidal irréductible de degré 1.

Soit $v \in C$ un vecteur de poids. Soient $\alpha \in S_1$, $\alpha' \in S_2$ et $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \theta$ telles que $\alpha + \beta_1 + \cdots + \beta_k + \alpha' \in \mathcal{R}$. Nous supposerons que les β_i sont des racines simples distinctes. Considérons $u = X_{-(\alpha+\beta_1+\cdots\beta_k)} \otimes v$. D'après le lemme 5.1.6, on sait que $p(u) \neq 0$ et que

$$p(u) \in \mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta^-)_{-(\beta_1+\cdots+\beta_k)} p(1 \otimes X_{-\alpha} v).$$

Or, l'action adjointe de $X_{\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_k+\alpha'}$ sur $\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta^-)_{-(\beta_1+\cdots+\beta_k)}$ est triviale (car elle est triviale sur tout vecteur de la forme $X_{-(\beta_i+\cdots+\beta_j)}$ pour $1 \leq i \leq j \leq k$). Donc l'action de $X_{\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_k+\alpha'}$ sur $p(u)$ doit être triviale. Or cette action est donnée par

$$X_{\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_k+\alpha'} \cdot p(u) = p([X_{\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_k+\alpha'}, X_{-(\alpha+\beta_1+\cdots\beta_k)}] \otimes v).$$

Il existe une constante de structure c non nulle telle que

$$[X_{\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_k+\alpha'}, X_{-(\alpha+\beta_1+\cdots\beta_k)}] = cX_{\alpha'} \in \mathfrak{l}_{\Delta-\theta}.$$

Donc on obtient

$$X_{\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_k+\alpha'} \cdot p(u) = cp(1 \otimes X_{\alpha'} v).$$

La condition de cuspidalité $\mathcal{O}_2$ satisfaite par M assure que $X_{\alpha'} v \neq 0$ et donc que $p(1 \otimes X_{\alpha'} v) \neq 0$. Ceci contredit le fait que $X_{\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_k+\alpha'} \cdot p(u) = 0$.

□

5.1.4 Première réduction

Dans ce paragraphe, nous allons éliminer quelques cas par une méthode simple utilisant le lemme 5.1.6 et la possibilité de considérer de grandes racines.

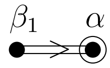
Type	$\boldsymbol{\Delta} - \theta$
B_n $(n > 3)$	$e_i,\ i \neq 1$
B_n	$\{e_i, \dots, e_{i+k}\},\ i+k < n,\ i \geq 1,\ k > 1$
C_n	$e_i,\ i < n$
C_n	$\{e_i, \dots, e_{i+k}\},\ i+k < n, k > 1$
F_4	e_i
F_4	$\{e_1, e_2\}$ ou $\{e_3, e_4\}$
D_n	$A_k,\ k > 1$
D_n	$e_i,\ i \notin \{1, n-1, n\}$
E	A_k, sauf $\{e_1\}$ ou $\{e_6\}$ dans E_6, et $\{e_7\}$ dans E_7
G_2	e_1 ou e_2

Table 5.1 – Première réduction

Théorème 5.1.12 *Pour les parties $\Delta - \theta$ du tableau 5.1, il ne peut exister de modules M irréductibles dans $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ et donc la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ est triviale.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Si M est un module irréductible dans $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ alors $M \cong L(\Delta - \theta, C)$ pour un $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$–module cuspidal irréductible.

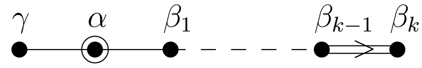
- Supposons que le diagramme de Dynkin de $\mathfrak{g}$ contienne un morceau de la forme suivante :



  Soit v un vecteur de poids dans C. On applique le lemme 5.1.6 à α et $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1)$. Comme β_1 est une racine simple, il existe un scalaire $\eta(v)$ non nul tel que $u = \eta(v)p(X_{-\beta_1} \otimes X_{-\alpha}v)$. Appliquons $X_{\beta_1+2\alpha} \in \mathfrak{n}^+_{\Delta-\theta}$ à cette égalité. On obtient

$$p([X_{\beta_1+2\alpha}, X_{-\alpha-\beta_1}] \otimes v) = \eta(v)p([X_{2\alpha+\beta_1}, X_{-\beta_1}] \otimes X_{-\alpha}v).$$

  Or, $[X_{2\alpha+\beta_1}, X_{-\beta_1}] = 0$ et il existe une constante de structure c non nulle telle que $[X_{\beta_1+2\alpha}, X_{-\alpha-\beta_1}] = cX_\alpha$. Ainsi on a $cp(1 \otimes X_\alpha v) = 0$. Comme C est cuspidal, l'action de X_α sur v ne peut être nulle, et donc $p(1 \otimes X_\alpha v) \neq 0$. D'où une contradiction. Ceci permet déjà d'éliminer les cas suivants : $(B_n, \{e_n\})$, $(C_n, \{e_{n-1}, \dots, e_i\})$ avec $i \leq n-1$, $(F_4, \{e_3\})$, $(F_4, \{e_3, e_4\})$.
- Supposons à présent que le diagramme de Dynkin de $\mathfrak{g}$ contienne un morceau de la forme suivante (avec $k > 0$) :



On reprend la même méthode utilisant le lemme 5.1.6 pour α et $\boldsymbol{\beta} = (\gamma, \beta_1 + \ldots + \beta_k, \beta_1 + \ldots + \beta_k)$. Notons $u := p(X_{-\gamma-\alpha-2\beta_1-\ldots-2\beta_k} \otimes v)$. Le lemme 5.1.6 donne alors $u \neq 0$ et $u \in p(\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta^-)_{-\gamma-2(\beta_1+\cdots+\beta_k)} \otimes X_{-\alpha}v)$. On applique alors à u le vecteur $X_{\gamma+2\alpha+2\beta_1+\cdots+2\beta_k} \in \mathfrak{n}^+_{\Delta-\theta}$. Or l'action adjointe de $X_{\gamma+2\alpha+2\beta_1+\cdots+2\beta_k}$ sur $\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta^-)_{-\gamma-2(\beta_1+\cdots+\beta_k)}$ est triviale. On doit donc avoir

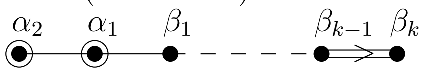
$$p([X_{\gamma+2\alpha+2\beta_1+\cdots+2\beta_k}, X_{\gamma+\alpha+2\beta_1+\cdots+2\beta_k}] \otimes v) = 0.$$

Or, il existe une constante de structure c non nulle telle que

$$[X_{\gamma+2\alpha+2\beta_1+\cdots+2\beta_k}, X_{\gamma+\alpha+2\beta_1+\cdots+2\beta_k}] = cX_\alpha.$$

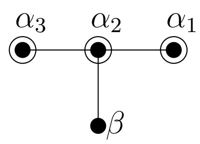
Et donc on a $cp(1 \otimes X_\alpha v) = 0$. Par cuspidalité de C, on a $X_\alpha v \neq 0$ et donc aussi $p(1 \otimes X_\alpha v) \neq 0$. On obtient donc une contradiction. Cela permet déliminer les cas : $(B_n, \{e_i\})$ pour $i < n$, $(F_4, \{e_2\})$, $(F_4, \{e_1\})$.

- Supposons à présent que le diagramme de Dynkin de $\mathfrak{g}$ contienne un morceau de la forme suivante (avec $k > 0$) :



On reprend alors la même méthode en considérant cette fois α_1 et $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1 + \ldots + \beta_k, \beta_1 + \ldots + \beta_k)$ et donc le vecteur $u = p(X_{-\alpha_1-2\beta_1-\ldots-2\beta_k} \otimes x(b))$. On applique le lemme 5.1.6 et on applique au résultat le vecteur $X_{\alpha_2+2\alpha_1+2\beta_1+\cdots+2\beta_l} \in \mathfrak{n}^+_{\Delta-\theta}$. La contradiction est la même que celle du cas précédent. Nous avons donc éliminer les cas : $(B_n, \{e_i, \ldots, e_{i+k}\})$ $(i + k < n)$ et $(F_4, \{e_1, e_2\})$.

- Les cas restants dans les algèbres de type C (à savoir $(C_n, \{e_i\})$ pour $i < n - 1$ et $(C_n, \{e_i, \ldots, e_{i+k}\})$ pour $i + k < n - 1$) et $(F_4, \{e_4\})$ sont analogues.
- Supposons à présent que le diagramme de Dynkin de $\mathfrak{g}$ contienne un morceau de la forme suivante :



On considère le vecteur $u := p(X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\beta} \otimes v)$. Le lemme 5.1.6 appliqué aux racines $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ et $\boldsymbol{\beta} = (\beta)$ implique qu'il existe un scalaire $\eta(v)$ non nul tel que $u = \eta(v)p(X_{-\beta} \otimes X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}v)$. Appliquons $X_{\beta+2\alpha_2+\alpha_1+\alpha_3}$ à cette égalité. On trouve

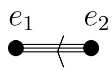
$$p([X_{\beta+2\alpha_2+\alpha_1+\alpha_3}, X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\beta}] \otimes v) = \eta(v)p([X_{\beta+2\alpha_2+\alpha_1+\alpha_3}, X_{-\beta}] \otimes X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}v). \quad (5.3)$$

Or,$[X_{\beta+2\alpha_2+\alpha_1+\alpha_3}, X_{-\beta}] = 0$ et il existe une constante de structure c non nulle telle que $[X_{\beta+2\alpha_2+\alpha_1+\alpha_3}, X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\beta}] = cX_{\alpha_2}$. Ainsi on obtient

$$cp(1 \otimes X_{\alpha_2}v) = 0.$$

Comme C est cuspidal, $X_{\alpha_2}v \neq 0$ et donc $p(1 \otimes X_{\alpha_2}v) \neq 0$. On a donc obtenu une contradiction. Cela permet déliminer certains cas dans D_n, E_6, E_7 et E_8.

- Les cas restants dans les algèbres de type D et E sont semblables.
- Si $\mathfrak{g} = G_2$, il n'y a que deux cas à considérer. Le diagramme de G_2 est le suivant :



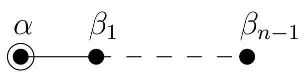
Pour le premier cas, on regarde $u = p(X_{-e_1-e_2} \otimes v)$. On utilise le lemme 5.1.6 pour e_1 et $\boldsymbol{\beta} = (e_2)$ et on applique le vecteur $X_{2e_1+e_2}$ sur le résultat. Pour le deuxième cas, on regarde $u = p(X_{-3e_1-e_2} \otimes v)$. On utilise le lemme 5.1.6 pour e_2 et $\boldsymbol{\beta} = (e_1, e_1, e_1)$ et on applique le vecteur $X_{3e_1+2e_2}$ sur le résultat.

□

Dans toute la suite, nous traiterons les cas restants lorsque $\mathfrak{g}$ est de type A ou C. Nous spécifierons ces cas par la notation $(\mathfrak{l}'_{\Delta-\theta}, \mathfrak{g})$.

5.1.5 Le cas (A_1^1, A_n)

Nous traitons ici le cas $\mathfrak{g} = A_n$ et $\Delta - \theta = \{e_1\}$ (ou $\{e_n\}$) correspondant au diagramme suivant :



Soit M un module irréductible dans la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$. D'après le lemme 5.1.1, il existe un $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$–module cuspidal C, irréductible de degré 1 tel que $M = L(\Delta - \theta, C)$. Comme $\mathfrak{l}'_{\Delta-\theta} = A_1$, le module C est de la forme $C =$

$N(a_1, a_2)$ (voir au besoin la section 4.2) et le centre de $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$ agit scalairement sur C. On note $A = a_1 + a_2$. Rappelons que C est engendré par des vecteurs notés $x(b)$ où $b = (b_1, b_2) \in \mathcal{P}_0(a) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_i - a_i \in \mathbb{Z}, z_1 + z_2 = A\}$. Rappelons enfin l'action de $X_{\pm\alpha}$ et de H_α sur $x(b)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} H_\alpha x(b) & = & (b_1 - b_2)x(b) \\ X_\alpha x(b) & = & b_2 x(b - \epsilon_2 + \epsilon_1) \\ X_{-\alpha} x(b) & = & b_1 x(b + \epsilon_2 - \epsilon_1) \end{array}\right.$$

Nous noterons b' la paire $(b'_1, b'_2) = (b_1 - 1, b_2 + 1)$.

Lemme 5.1.13 *On a* $p(X_{-\beta_1-\alpha} \otimes x(b)) = \frac{c+b_1}{b_2+1} p(X_{-\beta_1} \otimes x(b'))$, *où* $c = 0$ *ou* $-1 - A$.

Démonstration. On pose $u = p(X_{-\beta_1-\alpha} \otimes x(b))$. Comme $X_{-\alpha}x(b) = b_1 x(b')$ et $b_1 \neq 0$, le lemme 5.1.6 appliqué à α et $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1))$ assure qu'il existe $\eta(b)$ non nul tel que

$$u = \eta(b) p(X_{-\beta_1} \otimes x(b')). \tag{5.4}$$

D'autre part, comme $2H_{\beta_1} + H_\alpha$ est dans le centre de $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$, son action sur le module C est constante. Notons $c(b)$ l'action de H_{β_1} sur $x(b)$. Il vient alors que $2c(b) + (b_1 - b_2) = cte$ et donc que $c(b) = c + b_2$ pour une constante c. Appliquons X_{β_1} et $X_{\beta_1+\alpha}$ à l'équation (5.4). On a alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} p([X_{\beta_1}, X_{-\beta_1-\alpha}] \otimes x(b)) & = & \eta(b) p([X_{\beta_1}, X_{-\beta_1}] \otimes x(b')) \\ p([X_{\beta_1+\alpha}, X_{-\beta_1-\alpha}] \otimes x(b)) & = & \eta(b) p([X_{\beta_1+\alpha}, X_{-\beta_1}] \otimes x(b')) \end{array}\right.$$

Or, on a les constantes de structure suivantes :

$$[X_{\beta_1}, X_{-\beta_1-\alpha}] = X_{-\alpha},\ [X_{\beta_1+\alpha}, X_{-\beta_1}] = X_\alpha.$$

En utilisant l'action de H_α, H_β, X_α et $X_{-\alpha}$ sur $x(b)$ et $x(b')$, on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_1 p(1 \otimes x(b')) & = & \eta(b) c(b') p(1 \otimes x(b')) \\ (c(b) + b_1 - b_2) p(1 \otimes x(b)) & = & \eta(b) b'_2 p(1 \otimes x(b)) \end{array}\right.$$

Comme $p(1 \otimes x(b')) \neq 0$ et $p(1 \otimes x(b)) \neq 0$, on en déduit le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_1 & = & \eta(b) c(b') \\ (c(b) + b_1 - b_2) & = & \eta(b) b'_2 \end{array}\right.$$

La solution de ce système est

$$c = 0 \text{ ou } c = -1 - A \text{ et } \eta(b) = \frac{c + b_1}{b_2 + 1}.$$

□

Le lemme précédent et le corollaire 4.2.5 permet de traiter complétement le cas où $\mathfrak{g} = A_2$:

Corollaire 5.1.14 *Supposons que $\mathfrak{g}$ soit de type A_2. Soit $\theta \subset \Delta$ tel que $\Delta - \theta = \{e_1\}$. Alors $M \in \mathcal{O}_{\Delta,\theta}(\mathfrak{sl}_3)$ est irréductible si et seulement si M est isomorphe à $N(a'_1, a'_2, 0)$ pour $a'_1, a'_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.*

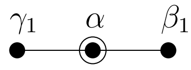
Démonstration. Soit $M \in \mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ irréductible. On remarque que le module M est isomorphe à $L(\Delta - \theta, C)$ pour un module cusipdal irréductible de degré 1 $C = N(a_1, a_2)$. Donc M est engendré par l'image $p(\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-_{\Delta-\theta}) \otimes C)$. Or, $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-_{\Delta-\theta})$ est engendré par les vecteurs $X^k_{-\beta_1} X^l_{-\beta_1-\alpha}$ $(k, l \geq 0)$. Donc M est engendré par les vecteurs $p(X^k_{-\beta_1} X^l_{-\beta_1-\alpha} \otimes x(b))$ et donc via le lemme précédant par les seuls $p(X^k_{-\beta_1} \otimes x(b))$. On vérifie sans mal que chaque espace de la forme $\oplus_k \mathbb{C} p(X^k_{-\beta_1} \otimes x(b))$ est un $\mathfrak{l}_\theta$–module irréductible. En fait, il suffit de vérifier que $p(X^k_{\beta_1} X^k_{-\beta_1} \otimes x(b))$ est un multiple non nul de $p(1 \otimes x(b))$. Ceci est vrai car l'action de H_{β_1} sur $x(b)$ est un nombre complexe non entier. Enfin il est facile de voir que ce module est de degré 1 et est isomorphe à $N(a_1, a_2, 0)$ lorsque $c = 0$ et à $N(-1-a_2, -1-a_1, 0)$ lorsque $c = -1-A$. Réciproquement le corollaire 4.2.5 assure que ces modules sont dans la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$.

□

Notre méthode ne permet pas de traiter efficacement le cas (A^1_1, A_n) général $(n > 2)$. Nous pouvons toutefois constater que les H_{β_i} pour $i > 1$ sont tous dans le centre de $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$ et agissent donc via un scalaire d_i sur C. Nous conjecturons que chaque d_i peut être soit nul soit déterminé de manière unique à partir des d_j pour $j < i$. De plus, si tous les d_i sont nuls alors le module M est isomorphe à un module de la forme $N(a_1, a_2, 0, \ldots, 0)$. Ces modules sont bien dans la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ d'après la partie 4.2. Nous traitons Ã titre d'exemple le cas (A^1_1, A_3) dans l'annexe B.

5.1.6 Le cas (A^k_1, A_n), $1 < k < n$

Soit $1 < k < n$. Supposons $\Delta - \theta = \{e_k\}$. Le diagramme de Dynkin de $\mathfrak{g} = A_n$ contient donc un morceau de la forme :



Soit M un module irréductible dans $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$, écrit sous la forme $L(\Delta - \theta, C)$ où C est un $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$–module cuspidal irréductible de degré 1. Ainsi comme

$\mathfrak{l}'_{\Delta-\theta} = \mathfrak{sl}_2$, $C = N(a_1, a_2)$. On reprend la méthode de la section précédente. On pose $A = a_1 + a_2$. Cette fois $H_\alpha + 2H_{\beta_1}$ et $H_\alpha + 2H_{\gamma_1}$ sont dans le centre de $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$. On note $c(b)$ et $c'(b)$ les actions respectives de H_{β_1} et H_{γ_1} sur $x(b)$. Vu le lemme 5.1.13, on a $c(b) = c + b_2$ et $c'(b) = c' + b_2$ avec c et c' pouvant valoir 0 ou $-1 - A$. Pour $b = (b_1, b_2)$ admissible, on pose $b' = (b_1 - 1, b_2 + 1)$. Ainsi $X_{-\alpha}x(b) = b_1 x(b')$.

Lemme 5.1.15 *Avec les notations ci–dessus, on a $c+c'+A+1 = 0$ et $cc' = 0$. En particulier, on peut toujours supposer que $c = 0$ et donc $c' = -1 - A$.*

Démonstration. Regardons $v := p(X_{-\gamma_1-\alpha-\beta_1} \otimes x(b))$. Le lemme 5.1.6 appliqué à α et $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \gamma_1)$ implique qu'il existe un scalaire $\eta(b) \in \mathbb{C}$ non nul tel que

$$v = \eta(b)p(X_{-\beta_1}X_{-\gamma_1} \otimes x(b')). \tag{5.5}$$

Appliquons $X_{\gamma_1+\alpha+\beta_1}$ à (5.5). On obtient :

$$\begin{aligned} p([X_{\gamma_1+\alpha+\beta_1}, X_{-\gamma_1-\alpha-\beta_1}] \otimes x(b)) =& \eta(b)p\left(([X_{\gamma_1+\alpha+\beta_1}, X_{-\beta_1}]X_{-\gamma_1}\right. \\ &\left. + X_{-\beta_1}[X_{\gamma_1+\alpha+\beta_1}, X_{-\gamma_1}]) \otimes x(b')\right). \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} [X_{\gamma_1+\alpha+\beta_1}, X_{-\gamma_1-\alpha-\beta_1}] =& H_{\beta_1+\alpha+\gamma_1} = H_{\beta_1} + H_\alpha + H_{\beta_1} \\ [X_{\gamma_1+\alpha+\beta_1}, X_{-\beta_1}] =& X_{\gamma_1+\alpha} \\ [X_{\gamma_1+\alpha+\beta_1}, X_{-\gamma_1}] =& - X_{\beta_1+\alpha}. \end{aligned}$$

Donc on a

$$p((H_{\beta_1} + H_\alpha + H_{\beta_1}) \otimes x(b)) = \eta(b)p((X_{\alpha+\gamma_1}X_{-\gamma_1} - X_{-\beta_1}X_{\alpha+\beta_1}) \otimes x(b').$$

Mais $[X_{\alpha+\gamma_1}, X_{-\gamma_1}] = -X_\alpha$ et $X_{\alpha+\beta_1} \in \mathfrak{n}^+_{\Delta-\theta}$. Donc on obtient finalement :

$$(c + b_2 + c' + b_2 + b_1 - b_2)p(1 \otimes x(b)) = - \eta(b)(b_2 + 1)p(1 \otimes x(b)). \tag{5.6}$$

Appliquons à présent $X_{\alpha+\beta_1}$ à l'équation (5.5). En tenant compte des constantes de structure de $\mathfrak{g}$ (voir l'annexe A), on obtient :

$$p(X_{-\gamma_1} \otimes x(b)) = \eta(b)(b_2 + 1)p(X_{-\gamma_1} \otimes x(b)).$$

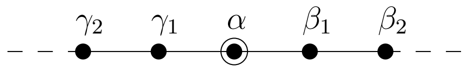
Comme $p(X_{-\gamma_1} \otimes x(b)) \neq 0$ par le lemme 5.1.4, on en déduit donc que $\eta(b)(b_2 + 1) = 1$ puis en utilisant l'équation (5.6) que $c + c' + A + 1 = 0$. Comme c et c' sont égaux soit à 0 soit à $-1 - A$, on conclut que $cc' = 0$ sauf peut être si $c = c' = -1 - A$. Dans ce cas, l'équation $c + c' + A + 1 = 0$ donne $-1 - A = 0$ et donc $c = c' = 0$.

□

Grâce à l'action explicite de $\mathfrak{h}$ sur C donnée par le lemme précédent, on déduit par la même méthode que celle employée pour le cas (A_1^1, A_2) le corollaire suivant :

Corollaire 5.1.16 *Tout module irréductible M de la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}(\mathfrak{sl}_4)$ avec $\Delta - \theta = \{e_2\}$ est isomorphe à $N(-1, a_1, a_2, 0)$ où $a_1, a_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$. En particulier M est de degré 1. De plus les $\mathfrak{l}'_\theta$–modules irréductibles qui interviennent dans la restriction de M à $\mathfrak{l}'_\theta \cong \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2$ sont les modules de plus haut poids de la forme $L(-1 - a_1 - k) \otimes L(a_2 - k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.*

Supposons à présent $n > 3$. On a donc le diagramme de Dynkin suivant :



Les H_{β_i} et H_{γ_j} pour $i, j > 1$ sont tous dans le centre de $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$. On note d_i et d'_j leur action sur C. On a alors :

Lemme 5.1.17 *Avec les notations ci–dessus, les d_i et les d'_j sont tous nuls.*

Démonstration. Faisons–le pour les d_i. Supposons le résultat faux. Soit i le premier indice tel que $d_i \neq 0$. Regardons alors $v := p(X_{-(\gamma_1+\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_i)} \otimes x(b))$. Le lemme 5.1.6 appliqué à α et $\boldsymbol{\beta} = (\gamma_1, \beta_1 + \cdots + \beta_i)$ implique que $v \neq 0$ et que

$$v \in p(\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta^-)_{-\gamma_1-\beta_1-\ldots-\beta_i} \otimes x(b')).$$

Comme $X_{-\gamma_1}$ commute à tous les $X_{-\beta_i}$, on a

$$\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta^-)_{-\gamma_1-\beta_1-\ldots-\beta_i} = X_{-\gamma_1}\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta^-)_{-\beta_1-\ldots-\beta_i}.$$

Ainsi, on peut écrire :

$$v = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_i} \eta_\sigma p(X_{-\gamma_1} X_{-\sigma(\beta_1)} \cdots X_{-\sigma(\beta_i)} \otimes x(b')), \tag{5.7}$$

où $b' = (b_1 - 1, b_2 + 1)$ comme auparavant. On applique alors les vecteurs $X_{\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_i}$ et $X_{\gamma_1+\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_i}$ à (5.7). Or,

$$X_{\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_i} \cdot p(X_{-\gamma_1} X_{-\sigma(\beta_1)} \cdots X_{-\sigma(\beta_i)} \otimes x(b')) = 0$$

sauf si $\sigma = \sigma_0 := (i, i-1, \ldots, 1)$. En effet, $[X_{\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_i}, X_{-\beta_j}] = 0$ sauf si $j = i$ et dans ce cas on a $[X_{\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_i}, X_{-\beta_i}] = X_{\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_{i-1}}$. Ainsi on a

$$\begin{aligned} X_{\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_i} \cdot p(X_{-\gamma_1} X_{-\sigma_0(\beta_1)} \cdots X_{-\sigma_0(\beta_i)} \otimes x(b')) &= p(X_{-\gamma_1} X_\alpha \otimes x(b') \\ &= b'_2 p(X_{-\gamma_1} \otimes x(b)), \end{aligned}$$

car $X_\alpha x(b') = b'_2 x(b)$. De même, on a

$$X_{\gamma_1+\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_i} \cdot p(X_{-\gamma_1} X_{-\sigma(\beta_1)} \cdots X_{-\sigma(\beta_i)} \otimes x(b')) = 0 \text{ sauf si } \sigma = \sigma_0,$$

et dans ce cas, on a

$$X_{\gamma_1+\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_i} \cdot p(X_{-\gamma_1} X_{-\sigma_0(\beta_1)} \cdots X_{-\sigma_0(\beta_i)} \otimes x(b')) = -X_\alpha.$$

On obtient donc :

$$X_{\gamma_1+\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_i} \cdot p(X_{-\gamma_1} X_{-\sigma(\beta_1)} \cdots X_{-\sigma(\beta_i)} \otimes x(b')) = -\, b'_2 p(1 \otimes x(b)).$$

D'autre part, on a

$$[X_{\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_i}, X_{-(\gamma_1+\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_i)}] = X_{-\gamma_1}$$

et

$$[X_{\gamma_1+\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_i}, X_{-(\gamma_1+\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_i)}] = H_{\gamma_1} + H_\alpha + H_{\beta_1} + \cdots + H_{\beta_i}.$$

On a donc obtenu les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} p(X_{-\gamma_1} \otimes x(b)) = & \eta_{\sigma_0}(b_2+1) p(X_{-\gamma_1} \otimes x(b)), \\ (c' + b_2 + b_1 - b_2 + c + b_2 + d_i) p(1 \otimes x(b)) = & -\eta_{\sigma_0}(b_2+1) p(1 \otimes x(b)). \end{cases}$$

Or, $p(X_{-\gamma_1} \otimes x(b)) \neq 0$ d'après le lemme 5.1.4. On en déduit que $\eta_{\sigma_0}(b_2+1) = 1$ puis que $d_i = 0$, d'où une contradiction.

□

Corollaire 5.1.18 *Soit $\mathfrak{g}$ de type A_n. Soit $\theta \subset \Delta$ tel que $\Delta - \theta = \{e_k\}$, pour $1 < k < n$. Les modules irréductibles M dans $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}(\mathfrak{sl}_{n+1})$ sont isomorphes à $N(-1, \ldots, -1, a_1, a_2, 0, \ldots, 0)$. En particulier, ils sont tous de degré 1.*

Démonstration. Soit $a = (-1, \ldots, -1, a_1, a_2, 0, \ldots, 0)$ et $a' = (a_1, a_2)$. Les deux lemmes précédents donnent l'action de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$ sur $p(1 \otimes x(a'))$. On remarque que cette action est la même que celle de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$ sur $x(a) \in N(a)$. La correspondance de Lemire (théorème 2.3.8) permet alors de conclure.

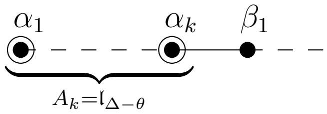
□

5.1.7 Le cas (A_k, A_n), $k > 1$

Nous allons montrer le

Théorème 5.1.19 *Soit $\mathfrak{g}$ de type A_n. Soit $1 < k < n$. Soit $\theta \subset \Delta$ tel que $\Delta - \theta$ est une partie connexe de Δ de cardinal k. Un module irréductible M est dans la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}(\mathfrak{sl}_{n+1})$ si et seulement s'il est isomorphe à $N(-1, \ldots, -1, a_1, \ldots, a_{k+1}, 0, \ldots, 0)$ où $a_1, \ldots, a_{k+1} \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$.*

Démonstration. Soit M un tel module. Alors $M = L(\Delta - \theta, C)$ pour un $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$–module irréductible cuspidal C de degré 1. Comme $\mathfrak{l}'_{\Delta-\theta} = A_k$–module, $C = N(a_1, \ldots, a_{k+1})$. Supposons que le diagramme de Dynkin de $\mathfrak{g}$ contienne un morceau de la forme suivante :



Le vecteur $H_{\alpha_1} + 2H_{\alpha_2} + \cdots + kH_{\alpha_k} + (k+1)H_{\beta_1}$ est dans le centre de $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$ et donc son action sur C est constante. En notant $c(b)$ l'action de H_{β_1} sur le vecteur admissible $x(b)$, on trouve $(b_1 - b_2) + 2(b_2 - b_3) + \cdots + k(b_k - b_{k+1}) + (k+1)c(b) = cte$. Comme $b_1 + \cdots + b_{k+1} = a_1 + \cdots + a_{k+1}$ par admissibilité de $x(b)$, on a alors $c(b) = c + b_{k+1}$ pour une constante c. On considère alors $u := p(X_{-\alpha_k-\beta_1} \otimes x(b))$. Notons $b' = (b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k - 1, b_{k+1} + 1)$ et $b'' = (b_1, \ldots, b_{k-2}, b_{k-1} + 1, b_k - 1, b_{k+1})$. On a $X_{-\alpha_k} x(b) = b_k x(b')$ et $X_{\alpha_k + \alpha_{k-1}} x(b) = b_{k+1} x(b'')$. Par le lemme 5.1.6, il existe donc $\eta(b) \in \mathbb{C}$ non nul tel que

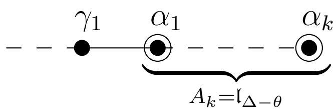
$$u = \eta(b) p(X_{-\beta_1} \otimes x(b')). \tag{5.8}$$

Appliquons X_{β_1} et $X_{\alpha_{k-1}+\alpha_k+\beta_1}$ à l'équation (5.8). On obtient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} b_k p(1 \otimes x(b')) & = & \eta(b) c(b') p(1 \otimes x(b')), \\ b_k p(1 \otimes x(b'')) & = & \eta(b)(b_{k+1} + 1) p(1 \otimes x(b'')). \end{array} \right.$$

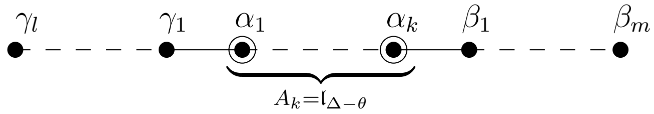
Comme $\eta(b) \neq 0$, $p(1 \otimes x(b')) \neq 0$ et $p(1 \otimes x(b'')) \neq 0$, on en déduit que $c = 0$.

On travaille de façon analogue si le diagramme de Dynkin de $\mathfrak{g}$ contient un morceau de la forme suivante :



Si $c'(b)$ désigne l'action de H_{γ_1} sur $x(b)$, on trouve que $c'(b) = c' - b_1$ et $c' = -1$.

En général, on a un diagramme de Dynkin de la forme :



Ensuite notons que tous les H_{β_i} et H_{γ_j} $(i, j > 1)$ sont dans le centre de $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$. Leur action est donc constante. On note d_i (resp. d'_j) cette constante. Montrons que ces constantes sont toutes nulles. Nous nous contenterons de le montrer pour les d_i. Si ce n'est pas le cas, soit m le premier indice strictement plus grand que 1 tel que $d_m \neq 0$. On applique le lemme 5.1.6 à $v := p(X_{-\alpha_k-\beta_1-\ldots-\beta_m} \otimes x(b))$ et donc à α_k et $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1 + \cdots + \beta_m)$. On obtient $v \neq 0$ et $v \in \mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta^-)_{-(\beta_1+\cdots+\beta_m)} p(1 \otimes x(b'))$. Plus précisement, on peut écrire

$$v = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} p(X_{-\beta_{\sigma(1)}} \cdots X_{-\beta_{\sigma(m)}} \otimes x(b')).$$

On applique alors $X_{\alpha_k+\beta_1+\cdots+\beta_m}$ et $X_{\alpha_{k-1}+\alpha_k+\beta_1+\cdots+\beta_m}$ à cette équation. Remarquons que l'action de ces deux vecteurs sur $p(X_{-\beta_{\sigma(1)}} \cdots X_{-\beta_{\sigma(m)}} \otimes x(b'))$ est nulle sauf si $\sigma = \sigma_0 = (m, m-1, \ldots, 1)$. Des calculs analogues à ceux du lemme 5.1.17 conduisent aux équations

$$\begin{cases} ((b_k - b_{k+1}) + c(b) + d_m)p(1 \otimes x(b)) = & \eta_{\sigma_0}(b_{k+1}+1)p(1 \otimes x(b)) \\ b_k p(1 \otimes x(b'')) = & \eta_{\sigma_0}(b_{k+1}+1)p(1 \otimes x(b'')). \end{cases}$$

On en déduit que $\eta_{\sigma_0}(b_{k+1}+1) = b_k$ et par suite que $d_m = 0$. D'où une contradiction.

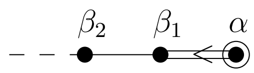
On conclut alors comme dans le corollaire 5.1.18 : on connaît par ce qui précède l'action de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$ sur $x(a_1, \ldots, a_{k+1})$. On compare alors avec l'action sur $x(a) \in N(a)$ où $a = (-1, \ldots, -1, a_1, \ldots, a_{k+1}, 0, \ldots, 0)$ et on applique la correspondance de Lemire (théorème 2.3.8).

□

5.1.8 Cas des algèbres de type C

On considère dans cette partie le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$. Nous avons déjà éliminé quelques cas dans la partie 5.1.4. Regardons les cas restants.

• **Cas où $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta} = A_1$.**



Soit M un module irréductible dans $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$. On écrit $M = L(\Delta-\theta, C)$ pour un $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$–module irréductible cuspidal de degré 1 C. Comme $\mathfrak{l}'_{\Delta-\theta}$–module, $C = N(a_1, a_2)$. On note $A = a_1 + a_2$. On pose $b' = (b_1 - 1, b_2 + 1)$. Ainsi $X_{-\alpha} \cdot x(b) = b_1 x(b')$. Le centre de $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$ contient le vecteur $H_{\beta_1} + H_\alpha$, qui doit donc agir sur $x(b)$ par une constante. En notant $c(b)$ l'action de H_{β_1} sur $x(b)$, on obtient alors $c(b) = c + 2b_2$.

Lemme 5.1.20 *Avec les notations ci–dessus, on a $c = 0$ ou $c = -2 - 2A$ et $2c + 2A + 1 = 0$.*

Démonstration. On procède comme dans le cas (A_1^1, A_2) (lemme 5.1.13 et corollaire 5.1.14). Ici, on doit considérer successivement $u := p(X_{-\alpha-\beta_1} \otimes x(b))$ et $v := p(X_{-\alpha-2\beta_1} \otimes x(b))$. Par le lemme 5.1.6, il existe un scalaire $\eta(b)$ non nul tel que $u = \eta(b)p(X_{-\beta_1} \otimes x(b'))$. Appliquons X_{β_1} et $X_{\alpha+\beta_1}$ à l'équation $u = \eta(b)p(X_{-\beta_1} \otimes x(b'))$. Notons que $H_{\alpha+\beta_1} = H_{\beta_1} + 2H_\alpha$. En tenant compte des constantes de structure de C_2 (voir au besoin [19, Exercise 6 p.150] ou l'annexe A), on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2b_1 p(1 \otimes x(b')) & = & \eta(b)c(b')p(1 \otimes x(b')) \\ (2(b_1 - b_2) + c(b))p(1 \otimes x(b)) & = & -2\eta(b)(b_2 + 1)p(1 \otimes x(b)) \end{array} \right.$$

Comme $p(1 \otimes x(b')) \neq 0$ et $p(1 \otimes x(b)) \neq 0$, la résolution de ce système conduit à $c = 0$ ou $c = -2 - 2A$ et à $\eta(b) = -\frac{c+2b_1}{2b_2+2}$.

On recommence le même calcul avec v. Par le lemme 5.1.6 appliqué à α et $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_1)$, il existe un scalaire $\eta'(b)$ non nul tel que $v = \eta'(b)p(X_{-\beta_1}^2 \otimes x(b'))$. En appliquant X_{β_1}, $X_{\alpha+\beta_1}$ et $X_{\alpha+2\beta_1}$ à cette équation, on trouve le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -p(X_{-\alpha-\beta_1} \otimes x(b)) & = & 2\eta'(b)(c(b') - 1)p(X_{-\beta_1} \otimes x(b')) \\ p(X_{-\beta_1} \otimes x(b)) & = & -4\eta'(b)(b_2 + 1)p(X_{-\beta_1} \otimes x(b)) \\ (c(b) + b_1 - b_2)p(1 \otimes x(b)) & = & 2\eta'(b)(b_2 + 1)p(1 \otimes x(b)) \end{array} \right.$$

On résout ce système en remarquant d'une part que $p(X_{-\beta_1} \otimes x(b)) \neq 0$ (d'après le lemme 5.1.4) et que $p(1 \otimes x(b)) \neq 0$ et en utilisant d'autre part, le fait que $u = p(X_{-\alpha-\beta_1} \otimes x(b)) = \eta(b)p(X_{-\beta_1} \otimes x(b'))$ avec $\eta(b) = -\frac{c+2b_1}{2b_2+2}$, $c = 0$ ou $c = -2 - 2A$. Cela impose alors $2c + 2A + 1 = 0$.

□

Corollaire 5.1.21 *Si $n = 2$, tout module irréductible M dans $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}(\mathfrak{sp}_4)$ est isomorphe à $M(-1, a_1 - a_2 - \frac{1}{2})$. En particulier, M est de degré 1. De plus, les $\mathfrak{l}'_\theta = \mathfrak{sl}_2$–modules qui interviennent dans la décomposition de M en $\mathfrak{l}'_\theta$–modules irréductibles sont de la forme $L(\alpha\omega_1)$.*

Démonstration. Comme dans le cas de type A, il suffit de vérifier que l'action de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_0$ sur $p(1 \otimes x(a_1, a_2)) \in M$ est la même que sur $x(-1, a_1 - a_2 - \frac{1}{2}) \in M(-1, a_1 - a_2 - \frac{1}{2})$. On conclut alors par la correspondance de Lemire (théorème 2.3.8).

□

Remarque 5.1.22 *Notons que si $c = 0$ alors le lemme 5.1.20 implique $a_1 - a_2 - \frac{1}{2} = 2a_1$ et si $c = -2 - 2A$, il implique $a_1 - a_2 - \frac{1}{2} = 2a_1 + 1$. Dans les deux cas, le fait que a_1 et a_2 doivent être des nombres complexes non entiers impliquent que $a_1 - a_2 - \frac{1}{2}$ est un complexe non entier. Réciproquement pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, il existe un couple (a_1, a_2) de complexes non entiers tels que $z = a_1 - a_2 - \frac{1}{2}$ et $z = 2a_1$ ou $z = 2a_1 + 1$.*

Remarquons aussi que $N(a_1, a_2) \cong N(-1 - a_2, -1 - a_1)$. Or, si $a_1 + a_2 = -\frac{1}{2}$ alors $(-1 - a_1) + (-1 - a_2) = -\frac{3}{2}$ et si $a_1 + a_2 = -\frac{3}{2}$ alors $(-1 - a_1) + (-1 - a_2) = -\frac{1}{2}$. Ainsi quitte à changer $N(a_1, a_2)$ en $N(-1 - a_2, -1 - a_1)$, on peut toujours supposer dans la situation du lemme 5.1.20 que $c = 0$ et $A = -\frac{1}{2}$.

On suppose à présent que $n > 2$. Nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème 5.1.23 *Tout C_n–module irréductible M dans la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ est isomorphe à $M(-1, \ldots, -1, a)$ pour $a \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$. En particulier, le module M est de degré 1. De plus, la décomposition de M en $\mathfrak{l}_\theta = \mathfrak{sl}_n$–modules fait intervenir uniquement des modules de plus haut poids de la forme $L(a\omega_1)$.*

Démonstration. On peut supposer que $c = 0$ et $A = -\frac{1}{2}$. Le vecteur H_{β_2} est dans le centre de $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$. Notons d l'action de H_{β_2} sur $x(b)$. Montrons que $d = 0$. Supposons par l'absurde que $d \neq 0$. Dans ce cas, on a $X_{\beta_2} \cdot (X_{-\beta_2} \otimes x(b)) = H_{\beta_2} \otimes x(b) = d \times 1 \otimes x(b) \neq 0$. Donc par la proposition 2.2.2, $p(X_{-\beta_2} \otimes x(b)) \neq 0$. On considère alors $u := p(X_{-\alpha-\beta_1-\beta_2} \otimes x(b))$. Soit $b' = (b_1 - 1, b_2 + 1)$, de sorte que $X_{-\alpha}x(b) = b_1 x(b')$. Par le lemme 5.1.6 appliqué à α et $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$, on a $u \in p(\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta^-)_{-\beta_1-\beta_2} \otimes x(b'))$. Or, $\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta^-)_{-\beta_1-\beta_2}$ est engendré par les deux vecteurs $X_{-\beta_1}X_{-\beta_2}$ et $X_{-\beta_2}X_{-\beta_1}$. Donc il existe deux scalaires $\eta_1(b)$ et $\eta_2(b)$ non tous les deux nuls tels que

$$u = \eta_1(b)p(X_{-\beta_2}X_{-\beta_1} \otimes x(b')) + \eta_2(b)p(X_{-\beta_1}X_{-\beta_2} \otimes x(b')). \tag{5.9}$$

On applique à (5.9) les vecteurs X_{β_1}, $X_{\alpha+\beta_1}$ et $X_{\alpha+\beta_1+\beta_2}$. En tenant compte des constantes de structure de C_3 (voir l'annexe A), on obtient le système :

$$\begin{cases} 0 = (\eta_1(b)c(b') + \eta_2(b)(c(b') + 1))p(X_{-\beta_2} \otimes x(b')) \\ p(X_{-\beta_2} \otimes x(b)) = -2(\eta_1(b) + \eta_2(b))(b_2 + 1)p(X_{-\beta_2} \otimes x(b)) \\ (2(b_1 - b_2) + c(b) + d)p(1 \otimes x(b)) = -\eta_1(b)(b_2 + 1)p(1 \otimes x(b)) \end{cases}$$

Par ce qui précède, $p(X_{-\beta_2}\otimes x(b')) \neq 0$, $p(X_{-\beta_2}\otimes x(b)) \neq 0$ et $p(1\otimes x(b)) \neq 0$. D'autre part, le lemme 5.1.20 donne explicitement $c(b)$ et $c(b')$. La solution de ce système aboutit alors à l'équation $d = 1 - 3b_1$. Or, d est une constante, donc indépendante de b_1. Cette contradiction assure donc que $d = 0$.

Pour $i \geq 2$, le vecteur H_{β_i} est dans le centre de $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$. Son action sur C est donc constante. Nous allons montrer par récurrence sur i que cette action est nulle. Nous avons déjà montré le résultat pour $i = 2$. Supposons le résultat vérifié jusqu'au rang $k-1$ et montrons le pour H_{β_k}. Raisonnons par l'absurde. On note à nouveau d l'action de H_{β_k} sur $x(b)$.

Commençons par un lemme :

Lemme 5.1.24 *Soient* $1 < i \leq j < k$. *Alors* $p(X_{-(\beta_i+\cdots+\beta_j)} \otimes x(b)) = 0$.

Démonstration. Nous faisons la démonstration par récurrence sur $j - i$. Si $i = j$, on a $X_{\beta_i} \cdot X_{-\beta_i} \otimes x(b) = H_{\beta_i} \otimes x(b) = 0$ par hypothèse sur l'action de H_{β_i}. Si $X \in \mathfrak{n}^+_{\Delta-\theta}$ est un vecteur de poids β différent de β_i, alors ou bien $\beta - \beta_i \notin \mathcal{R}$ ou bien $\beta - \beta_i$ est une racine positive appartenant à $\langle \Delta - \theta\rangle^+$ (car $i > 1$). Dans les ceux cas, l'action de X sur $X_{-\beta_i} \otimes x(b)$ est triviale. Ainsi l'action de $\mathfrak{n}^+_{\Delta-\theta}$ sur $X_{-\beta_i} \otimes x(b)$ est triviale. D'après la proposition 2.2.2, on en déduit que $p(X_{-\beta_i} \otimes x(b)) = 0$. Pour montrer le résultat par récurrence, il suffit de constater que si $X \in \mathfrak{n}^+_{\Delta-\theta}$ est un vecteur de poids β alors ou bien $\beta - (\beta_i + \cdots \beta_j)$ est une racine négative ou bien $\beta - (\beta_i + \cdots \beta_j) = 0$ ou bien $\beta - (\beta_i + \cdots \beta_j)$ est une racine positive appartenant à $\langle \Delta - \theta\rangle^+$ (car $i > 1$). Dans le premier cas, l'hypothèse de récurrence montre que l'action de X sur $X_{-(\beta_i+\cdots+\beta_j)} \otimes x(b)$ est triviale ; dans le deuxième cas, le fait que H_{β_l} agisse trivialement sur $x(b)$ lorsque $i \leq l \leq j$ montre que l'action de X sur $X_{-(\beta_i+\cdots+\beta_j)} \otimes x(b)$ est triviale ; dans le dernier cas, l'action de X sur $X_{-(\beta_i+\cdots+\beta_j)} \otimes x(b)$ est également triviale. Ainsi dans tous les cas l'action de X sur $X_{-(\beta_i+\cdots+\beta_j)} \otimes x(b)$ est triviale. D'après la proposition 2.2.2, on a donc $p(X_{-(\beta_i+\cdots+\beta_j)} \otimes x(b)) = 0$.

□

Soit $v = p(X_{-(\alpha+2\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_k)} \otimes x(b))$. Le lemme 5.1.6 appliqué à α et $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1 + \cdots + \beta_k, \beta_1)$ implique que $v \neq 0$ et que $v \in p(\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta^-)_{-(2\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_k)} \otimes x(b'))$. On ordonne les éléments de $\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta^-)_{-(2\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_k)}$ (grâce à PBW) en plaçant le plus à gauche les vecteurs de $\mathfrak{l}_\theta^-$ dont le poids est de la forme $\beta_k + \cdots + \beta_i$ puis en ordonnant les vecteurs qui restent selon la longueur de leur poids (i.e. le nombre de racines simples qu'il faut pour écrire le poids). En tenant compte du lemme ci–dessus, les seules contributions non nulles dans $p(\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta^-)_{-(2\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_k)} \otimes x(b'))$ donnent des scalaires μ_i tels que

$$v = \mu_1 p(X_{-(\beta_1+\cdots+\beta_k)} X_{-\beta_1} \otimes x(b')) + \mu_2 p(X_{-(\beta_2+\cdots+\beta_k)} X^2_{-\beta_1} \otimes x(b')) + \\ \mu_3 p(X_{-(\beta_3+\cdots+\beta_k)} X_{-\beta_1-\beta_2} X_{-\beta_1} \otimes x(b')) \\ + \cdots + \mu_k p(X_{-\beta_k} X_{-(\beta_1+\cdots+\beta_{n-1})} X_{-\beta_1} \otimes x(b')). \quad (5.10)$$

Appliquons $X_{\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_k}$ à (5.10). On trouve

$$p(X_{-\beta_1} \otimes x(b)) = 2(-\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_k)(b_2+1) p(X_{-\beta_1} \otimes x(b)).$$

Notons ensuite que le lemme ci–dessus implique

$$p(X_{-(\beta_2+\cdots+\beta_i)} X_{-\beta_1} \otimes x(b')) = p(X_{-(\beta_1+\cdots+\beta_i)} \otimes x(b')), \quad i < k.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} p(X_{-(\beta_2+\cdots+\beta_i)} X_{-\beta_1} \otimes x(b')) &= p(X_{-\beta_1} X_{-(\beta_2+\cdots+\beta_i)} \otimes x(b')) \\ &\quad + p([X_{-(\beta_2+\cdots+\beta_i)}, X_{-\beta_1}] \otimes x(b')) \\ &= X_{-\beta_1} p(X_{-(\beta_2+\cdots+\beta_i)} \otimes x(b')) \\ &\quad + p(X_{-(\beta_1+\cdots+\beta_i)} \otimes x(b')) \\ &= 0 + p(X_{-(\beta_1+\cdots+\beta_i)} \otimes x(b')) \end{aligned}$$

Appliquons alors $X^2_{\beta_1}, X_{\beta_1}X_{\beta_2}, \ldots, X_{\beta_1}X_{\beta_{k-1}}$ à (5.10). En tenant compte de la remarque ci–dessus et des constantes de structures (voir l'annexe A), on obtient les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 0 &=& (-2c(b')\mu_1 + 2c(b')(c(b')-1)\mu_2)\, p(X_{-(\beta_2+\cdots+\beta_k)} \otimes x(b')) \\ 0 &=& (-2(c(b')-1)\mu_2 + 2(c(b')-1)\mu_3)\, p(X_{-(\beta_3+\cdots+\beta_k)} X_{-\beta_1} \otimes x(b')) \\ 0 &=& (-(c(b')-1)\mu_3 + (c(b')-1)\mu_4)\, p(X_{-(\beta_4+\cdots+\beta_k)} X_{-\beta_2-\beta_1} \otimes x(b')) \\ & \cdots & \\ 0 &=& (-(c(b')-1)\mu_{k-1} + (c(b')-1)\mu_k)\, p(X_{-\beta_k} X_{-(\beta_1+\cdots\beta_{k-2}} \otimes x(b')) \end{array} \right.$$

D'autre part, comme $d \neq 0$, on a pour $i > 1$:

$$X_{\beta_1+\cdots+\beta_{i-2}} X_{\beta_i+\cdots+\beta_k} \cdot X_{-(\beta_i+\cdots+\beta_k)} X_{-(\beta_1+\cdots+\beta_{i-2})} \otimes x(b') = \\ d \times c(b') \times 1 \otimes x(b') \neq 0.$$

Ainsi d'après la proposition 2.2.2, on a

$$p(X_{-(\beta_i+\cdots+\beta_k)} X_{-(\beta_1+\cdots+\beta_{i-2})} \otimes x(b')) \neq 0.$$

On applique enfin $X_{\beta_1}X_{\beta_1+\cdots+\beta_k}$ à (5.10) pour obtenir l'équation :

$$2b_1p(1\otimes x(b')) = (((d+c(b')-1)\mu_1 + 2(c(b')-1)\mu_2 + (c(b')-1)\mu_3 \\ +\cdots+(c(b')-1)\mu_k)c(b'))\, p(1\otimes x(b')). \quad (5.11)$$

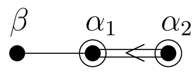
On résout alors le système d'inconnues $(\mu_1,\ldots,\mu_k,d)$ formé par les $k+1$ équations obtenues, en se rappelant que $c(b)=c+2b_2$, $c=0$ et $b_1+b_2=A=-\frac{1}{2}$. On obtient en particulier $d=1-2b_2-k\times\frac{2b_2+3}{2b_2+1}$. Ceci est absurde car d est une constante, indépendant de b_2. Cette contradiction montre donc que $d=0$. On en déduit alors comme dans le corollaire 5.1.18 que le module est isomorphe à un module de la forme $M(-1,\ldots,-1,a)$, $a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.

□

• **Supposons à présent que $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$ est de type** C Nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème 5.1.25 *Les modules irréductibles de la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ sont les modules de degré* 1 *de la forme $M(a)$ considérés dans la section 4.2.*

Démonstration. • Commençons par la cas suivant :



Un module irréductible M de $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ est de la forme $L(\Delta-\theta,C)$. On sait que C est un module irréductible cuspidal de degré 1 et est donc de la forme $C=M(a)=\oplus\,\mathbb{C}x(b)$. D'autre part, l'action de $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$ sur $x(b)$ a été décrite dans la section 2.4. Notons $c(b)$ l'action de H_β sur $x(b)$. Comme $H_\beta+H_{\alpha_1}+H_{\alpha_2}$ est dans le centre de $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$, on en déduit qu'il existe $c\in\mathbb{C}$ tel que $c(b)=c-b_1$. La valeur de c est alors donnée par le lemme suivant :

Lemme 5.1.26 *Le scalaire c vaut* -1.

Démonstration. Soit $b'=b+\epsilon_2-\epsilon_1$. Alors $X_{-\alpha_1}x(b)=b_1x(b')$. Soit $u:=p(X_{-\alpha_1-\beta}\otimes x(b))$. Par le lemme 5.1.6, on sait qu'il existe un scalaire $\eta(b)$ non nul tel que $u=\eta(b)p(X_{-\beta}\otimes x(b'))$. Appliquons $X_{\beta+\alpha_2+\alpha_1}$ à cette égalité. On a

$$p([X_{\beta+\alpha_1+\alpha_2},X_{-\beta-\alpha_1}]\otimes x(b)) = \eta(b)p([X_{\beta+\alpha_2+\alpha_1},X_{-\beta}]\otimes x(b').$$

En tenant compte des constantes de structures dans C_3 (voir l'annexe A), on obtient $1=\eta(b)$. Appliquons ensuite X_β puis $X_{\beta+\alpha_1}$ à l'égalité $u=$

$\eta(b)p(X_{-\beta} \otimes x(b'))$. On trouve alors un système dont la résolution conduit à $c(b) = -b_1 - 1$.

□

On vérifie alors (comme dans le corollaire 5.1.18) que le C_3–module $L(\Delta - \theta, C)$ ainsi obtenu est isomorphe à $M(-1, a, b)$ pour des nombres complexes a et b non entiers.

• Dans le cas général où $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta} = C_2$ et $\mathfrak{g} = C_n$, on montre que pour $i \geq 2$ l'action de H_{β_i} est triviale. Ceci se prouve par récurrence comme dans le théorème précédent, en considérant cette fois $v = p(X_{-(\alpha_1+\beta_1+\cdots+\beta_i)} \otimes x(b))$ et l'action des vecteurs $X_{\alpha_2+\alpha_1+\beta_1+\cdots+\beta_i}$, $X_{\alpha_1+\beta_1+\cdots+\beta_i}$, ...

• Lorsque $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta} = C_k$ dans $\mathfrak{g} = C_n$ avec $k > 2$, le diagramme de Dynkin contient en particulier le diagramme du cas (A_{k-1}, A_{n-1}) de la section 5.1.7. On connaît donc la description de l'action du centre de $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$. Il reste à vérifier qu'avec cette action $L(\Delta - \theta, C)$ est isomorphe à $M(-1, \ldots, -1, a_1, \ldots a_k)$ par la même méthode que dans le corollaire 5.1.18.

□

Si nous rassemblons les résultats de toute cette partie, nous avons montré le :

Corollaire 5.1.27 *Supposons que $\mathfrak{g} = C_n$. Alors les seuls modules irréductibles appartenant à une catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}(\mathfrak{g})$ sont les modules $M(a)$ obtenus dans la section 4.2.*

5.1.9 Énoncé de la classification

Notre méthode ne permet pas d'étudier les cas de la table 5.2 ci–dessous.

Type	$\mathbf{\Delta} - \theta$
B_n	e_1
D_n	e_1 ou e_{n-1} ou e_n
E_6	e_1 ou e_6
E_7	e_7

Table 5.2 – Cas exclus

Nous allons à présent rassembler les résultats de ce chapitre et de la section 4.2 pour énoncer le théorème de classification. Nous

Théorème 5.1.28 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple. Soit $\theta \subset \Delta$ tel que $\theta \neq \Delta$ et $\theta \neq \emptyset$. Supposons que $(\mathfrak{g}, \Delta - \theta)$ ne figure pas dans la table 5.2. Alors :*

1. *Il existe des modules non triviaux dans $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ si et seulement si $\mathfrak{g}$ est isomorphe à A_n et $\mathfrak{l}'_{\Delta-\theta}$ à A_m $(m < n)$ ou $\mathfrak{g}$ isomorphe à C_n et $\mathfrak{l}'_{\Delta-\theta}$ est isomorphe à la sous–algèbre $\mathfrak{sl}_2$ engendrée par la racine simple longue ou à C_k.*
2. *Pour ces parties Δ et θ, les modules irréductibles sont de degré 1 sauf si $\mathfrak{g}$ est de type A_n et $\mathfrak{l}'_{\Delta-\theta}$ de type A_1^1 pour $n > 2$.*
3. *Lorsque $\mathfrak{g} = A_n$, les modules irréductibles de degré 1 dans $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ sont isomorphes à*
$$N(\underbrace{-1,\ldots,-1}_{k},a_1,\ldots,a_m,\underbrace{0,\ldots,0}_{l})$$
pour des entiers $k,l,m \geq 0$ satisfaisant $k+l+m = n+1$ et $k+l > 0$ et pour $a_i \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.
4. *Lorsque $\mathfrak{g} = C_n$, les modules irréductibles de degré 1 dans $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ sont isomorphes à $M(-1,\ldots,-1,a_1,\ldots,a_k)$ $(a_i \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})$.*
5. *Si M est un module irréductible de degré 1 dans $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$, alors les $\mathfrak{l}_\theta$–modules irréductibles de plus haut poids qui interviennent dans la décomposition de M sous $\mathfrak{l}_\theta$ sont de la forme $L(a\omega_1)$ pour $a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ ou $L(a\omega_k)\otimes L(b\omega_1)$ pour a et b dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.*

Remarque 5.1.29 *Lorsque $\mathfrak{g} = A_n$ et $\mathfrak{l}'_{\Delta-\theta}$ de type A_1^1 pour $n > 2$, il existe des modules irréductibles dans $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ qui ne sont pas de degré 1. Nous renvoyons pour cela Ã l'annexe B.*

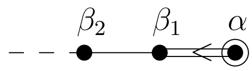
5.2 Extensions dans les catégories $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$

Dans cette section nous supposons que l'algèbre $\mathfrak{g}$ est de type A ou C. De plus lorsque $\mathfrak{g}$ est de type A_n, nous supposons que $\Delta - \theta \neq \{e_1\}$ et $\Delta - \theta \neq \{e_n\}$. Nous noterons $Ext^1(M,N)$ au lieu de $Ext^1_{\mathcal{O}_{\Delta,\theta}}(M,N)$.

5.2.1 Le type C

Nous supposons ici que $\mathfrak{g}$ est de type C.

• Commençons par le cas $\Delta - \theta = \{\alpha\}$, correspondant au diagramme de Dynkin de $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ suivant :



Nous avons vu que les modules irréductibles de $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ sont les modules

$$M_a = M(-1, \dots, -1, a),$$

où $a \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$. Rappelons la décomposition de M_a en espaces de poids :

$$M_a = \oplus_k \, \mathbb{C}x(-1 - k_n, \dots, -1 - k_1, a - k_0),$$

la somme portant sur les $(n+1)$-uplets k de nombres entiers tels que $\sum_{i=0}^n k_i \in 2\mathbb{Z}$ et $k_1 \geq 0, \dots, k_n \geq 0$. Un tel k sera appelé admissible. On note par la suite $x(k)$ l'élément $x(-1 - k_n, \dots, -1 - k_1, a - k_0)$.

Théorème 5.2.1 *On a $Ext^1(M_b, M_a) = \{0\}$*

On peut reformuler le théorème en disant que toute suite exacte courte

$$(S_{a,b}) : 0 \to M_a \to M \to M_b \to 0$$

avec $M \in \mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ est scindée.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que d'après le lemme 1.5.1 une telle suite est scindée comme suite de $\mathfrak{l}_\theta$–modules car les $\mathfrak{l}_\theta$–modules M_a, M_b et M sont semi–simples.

$\star$ Supposons dans un premier temps que $M_a \ncong M_b$. Rappelons l'action de $\mathfrak{h}$ sur M_a :

$$\begin{cases} H_{\beta_n} x(k) &= & (k_{n-1} - k_n)x(k) \\ & \vdots & \\ H_{\beta_2} x(k) &= & (k_1 - k_2)x(k) \\ H_{\beta_1} x(k) &= & (k_0 - a - k_1 - 1)x(k) \\ H_\alpha x(k) &= & (a - k_0 + \frac{1}{2})x(k) \end{cases}$$

On en déduit que $Supp(M_a) \cap Supp(M_b) = \emptyset$. En effet, si le poids de $x(-1-k_n, \dots, -1-k_1, a-k_0)$ est le même que celui de $x(-1-k'_n, \dots, -1-k'_1, b-k'_0)$, alors on a

$$\begin{cases} k_{n-1} - k_n &= & k'_{n-1} - k'_n \\ \vdots &= & \vdots \\ k_1 - k_2 &= & k'_1 - k'_2 \\ k_0 - a - k_1 - 1 &= & k'_0 - b - k'_1 - 1 \\ a - k_0 + \frac{1}{2} &= & b - k'_0 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

La solution de ce système donne $k_i = k'_i$ pour $i > 0$ et $b = a - k_0 + k'_0$. D'autre part, par admissibilité, on a $k_0 + (k_1 + \cdots + k_n) \in 2\mathbb{Z}$ et $k'_0 + (k'_1 + \cdots + k'_n) \in 2\mathbb{Z}$.

Compte tenu de $k_i = k'_i$ pour $i > 0$, on en déduit $k_0 - k'_0 \in 2\mathbb{Z}$ et donc $b \in a + 2\mathbb{Z}$. Cela signifie que le vecteur $x(-1-k'_n, \dots, -1-k'_1, b-k'_0) \in M_b$ apparaît dans M_a et par suite que $M_a \cong M_b$, contrairement à notre hypothèse.

Or, toute suite exacte $(S_{a,b})$ correspond à un cocycle c. Si β et β' sont deux racines, alors la relation de cocyle donne

$$c([H_\beta, X_{\beta'}])x = [c(H_\beta, X_{\beta'}]x + [H_\beta, c(X_{\beta'}]x.$$

D'après ce qui précède, $c(H_\beta) = 0$ car $H_\beta \in \mathfrak{l}_\theta$ et car la suite $(S_{a,b})$ est scindée comme suite de $\mathfrak{l}_\theta$–modules. Ainsi, si on choisit pour x un vecteur de poids λ de M_b, il existe une constante $c(\beta, \beta')$ telle que

$$c(\beta, \beta')c(X_{\beta'})x = H_\beta \cdot c(X_{\beta'})x - \lambda(H_\beta)c(X_{\beta'})x.$$

Cela signifie que $c(X_{\beta'})x$ est un vecteur de poids de M_a dont le poids appartient à $\lambda + Q$ (où Q désigne le réseau des racines). Si on considère $\{\beta, \beta'\} = \{\alpha, -\alpha\}$, la cuspidalité de M_a implique alors que $\lambda \in Supp(M_a)$ en contradition avec le fait que $\lambda \in Supp(M_b)$. Ceci entraîne que $c = 0$ et donc que toute suite exacte courte $(S_{a,b})$ est scindée.

$\star$ Il reste donc à considérer le cas $M_a \cong M_b$ et donc la suite exacte courte $(S_{a,a})$. On sait qu'une telle extension est associée à un cocyle c (voir la section 1.5).

Comme la suite $(S_{a,a})$ est scindée comme suite de $\mathfrak{l}_\theta$–modules, on en déduit que $c(X) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{l}_\theta$. Grâce à la relation de cocycle, pour montrer que $c = 0$ il suffit de montrer que $c(X_\alpha) = 0 = c(X_{-\alpha})$. Rappelons l'action de $X = X_{-\alpha}$ et de $Y = X_\alpha$ sur M_a :

$$\begin{cases} Yx(k) &= \frac{1}{2}x(k - 2\epsilon_0) \\ Xx(k) &= -\frac{1}{2}(a - k_0)(a - k_0 - 1)x(k + 2\epsilon_0) \end{cases}$$

D'après la proposition 4.2.8, M_a est une somme directe de $\mathfrak{l}$–modules irréductibles cuspidaux deux à deux non isomorphes, où $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}X \oplus \mathbb{C}Y$. Les $\mathfrak{l}$–modules sont donc de la forme $\mathcal{U}(\mathfrak{l})x(k)$. A cause de l'action de X et Y, les vecteurs $x(k')$ qui apparaissent dans $\mathcal{U}(\mathfrak{l})x(k)$ satisfont $k'_i = k_i$ pour $i > 0$. Ainsi le module $\mathcal{U}(\mathfrak{l})x(k)$ est paramétré par $\tilde{k} = (k_1, \dots, k_n)$. D'après le théorème 2.5.2, on connaît donc le cocycle c sur chaque $\mathcal{U}(\mathfrak{l})x(k)$: $c(X) = 0$ et $c(Y) = b(\tilde{k})X^{-1}$ pour $b(\tilde{k}) \in \mathbb{C}$. Dans la suite nous noterons $b(k)$ au lieu de $b(\tilde{k})$ en se rappelant que b ne dépend pas de k_0.

Soit $\beta \in \langle\theta\rangle^+$ telle que $\alpha + \beta \in \mathcal{R}$. On peut écrire $\beta = \beta_1 + \cdots + \beta_i$ avec les notations de la section 5.1.8. Alors on a $[Y, X_\beta] = -X_{\alpha+\beta}$ et $[-X_{\alpha+\beta}, X_{-\beta}] = 2Y$ (voir l'annexe A). En utilisant la relation de cocycle, on obtient donc

$$2c(Y) = c([[Y, X_\beta], X_{-\beta}]) = [[c(Y), X_\beta], X_{-\beta}],$$

car $c(X_{\pm\beta}) = 0$ puisque $X_{\pm\beta} \in \mathfrak{l}_\theta$. Cette identité est une identité dans $End_{\mathbb{C}}(M_a)$. Calculons l'effet des deux membres sur $x(k) \in M_a$. Rappelons que l'on a

$$\begin{cases} X_\beta x(k) &= -k_i(a-k_0)x(k-\epsilon_i+\epsilon_0) \\ X_{-\beta}x(k) &= x(k+\epsilon_i-\epsilon_0) \end{cases}$$

De plus, l'action de X rappelée ci–dessus permet de montrer que

$$X^{-1}x(k) = -\frac{2}{(a-k_0+2)(a-k_0+1)}x(k-2\epsilon_0).$$

Ainsi on a d'une part

$$2c(Y)x(k) = -\frac{4b(k)}{(a-k_0+2)(a-k_0+1)}x(k-2\epsilon_0). \tag{5.12}$$

On en déduit d'autre part que

$$[c(Y), X_\beta]x(k) = \frac{2k_i}{a-k_0+1}(b(k-\epsilon_i)-b(k))x(k-\epsilon_i-\epsilon_0)$$

puis que

$$\begin{aligned}[][[c(Y), X_\beta], X_{-\beta}]x(k) = &\frac{2(k_i+1)}{a-k_0+2}(b(k)-b(k+\epsilon_i)) \\ &- \frac{2k_i}{a-k_0+1}(b(k-\epsilon_i)-b(k)). \end{aligned}\tag{5.13}$$

En égalant les deux équations (5.12) et (5.13), on obtient

$$\begin{aligned}2b(k) = k_i(a-k_0+2)(b(k-\epsilon_i) \\ - b(k)) - (k_i+1)(a-k_0+1)(b(k)-b(k+\epsilon_i)).\end{aligned}\tag{5.14}$$

Soit k tel que $k_i = 0$. Alors l'équation (5.14) donne $2b(k) = -(a-k_0+1)(b(k)-b(k+\epsilon_i)$ et donc $(a-k_0+3)b(k) = (a-k_0+1)b(k+\epsilon_i)$. Comme $b(k)$ ne dépend par de k_0, on doit nécessairement avoir $b(k) = 0 = b(k+\epsilon_i)$. On montre alors par récurrence à l'aide de l'équation (5.14) que $b(k+n\epsilon_i) = 0$ pour tout entier positif n. Ainsi le cocycle c est nul et l'extension est triviale. $\square$

Corollaire 5.2.2 *Soit $\theta \subset \Delta$ telle que $\Delta \setminus \theta = \{\alpha\}$. Alors la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}(\mathfrak{sp}_{2n})$ est semi–simple.*

Démonstration. D'après le théorème 2.3.7, tout module de poids admet une suite de Jordan–Hölder de longueur finie. Montrons alors que tout module M dans $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ est semi–simple par récurrence sur la longueur de M. Si $l(M) = 1$, alors M est irréductible. Si $l(M) = 2$, alors M est une extension d'un module irréductible M_a par un module irréductible M_b. D'après le théorème 5.2.1, une telle extension est scindée et M est donc semi–simple. Pour la récurrence, soit M' un sous–module de M de longueur $l(M)-1$. Par hypothèse de récurrence, M' est semi–simple. Maintenant, M est une extension de M' par un module irréductible M_a. Comme $Ext^1(A \oplus B, C) = Ext^1(A, C) \oplus Ext^1(B, C)$, on en déduit que $Ext^1(M_a, M') = 0$ et donc que M est semi–simple.

□

• D'après le théorème de classification, il reste à faire le cas où $\Delta - \theta$ est de type C_k. Les modules irréductibles de $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ sont des modules de degré 1 et donc sont somme directe de $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$–modules irréductibles cuspidaux par la proposition 4.2.8. D'autre part, si M' est dans $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ alors le $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$–module M' est cusipdal. D'après le théorème 2.5.4, le $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$–module M' est semi–simple. D'apreṡ le lemme 1.5.1, on en déduit que l'extension du module irréductible M par le module irréductible N est scindée comme extension de $\mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$–module. D'après le même lemme et la condition $\mathcal{O}_1$, c'est aussi le cas comme extension de $\mathfrak{l}_\theta$–modules. Donc l'extension est scindée dans $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$. En reprenant mot pour mot la preuve du corollaire précédent on a donc montré

Corollaire 5.2.3 *Soit $\theta \subset \Delta$ telle que $\Delta \setminus \theta = C_k$. Alors la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}(\mathfrak{sp}_{2n})$ est semi–simple.*

Remarque 5.2.4 *Lorsque $\theta = \Delta$, la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\Delta}(\mathfrak{sp}_{2n})$ est semi–simple par définition. D'autre part, si $\theta = \emptyset$, la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\emptyset}(\mathfrak{sp}_{2n})$ est semi–simple d'après le théorème 2.5.4. Ainsi pour le type C, la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ est semi–simple pour toute partie θ de Δ.*

5.2.2 Le type A

Nous supposons ici que $\mathfrak{g}$ est de type A_n et que $\Delta - \theta \neq \{e_1\}$ et $\Delta - \theta \neq \{e_n\}$.

• Dans un premier temps, nous supposons que $\Delta - \theta = \{\alpha\} = \{\alpha_{l+1}\}$. D'après le théorème de classification 5.1.28, les modules irréductibles de $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ sont les modules

$$N_a = N(-1, \ldots, -1, a_1, a_2, 0 \ldots, 0),$$

où $a_i \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$. Rappelons la décomposition de N_a en espaces de poids :

$$N_a = \oplus_k \mathbb{C}x(-1-k_l,\ldots,-1-k_1,a_1-k_0,a_2+k'_0,k'_1,\ldots,k'_m),$$

la somme portant sur les $(n+1)$-uplets (k,k') de nombres entiers tels que $\sum_{i=0}^{l} k_i = \sum_{i=0}^{m} k'_i$ et $k_1 \geq 0,\ldots,k_l \geq 0, k'_1 \geq 0,\ldots,k'_m \geq 0$. Un tel (k,k') sera appelé admissible. On note par la suite $x(k,k')$ l'élément $x(-1-k_l,\ldots,-1-k_1,a_1-k_0,a_2+k'_0,k'_1,\ldots,k'_m)$.

Théorème 5.2.5 *On a* $Ext^1(N_b,N_a) = \{0\}$.

On peut reformuler le théorème en disant que toute suite exacte courte

$$(S_{a,b}) : 0 \to N_a \to M \to N_b \to 0$$

avec $M \in \mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ est scindée.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que d'après le lemme 1.5.1, une telle suite est scindée comme suite de $\mathfrak{l}_\theta$–modules car les $\mathfrak{l}_\theta$–modules N_a, N_b et M sont semi–simples. Notons c le cocycle associée à la suite $(S_{a,b})$. Nous allons montrer que $c=0$.

$\star$ **Supposons que** $N_a \not\cong N_b$**.** D'après le théorème 4.2.4, les vecteurs de plus haut poids sous $\mathfrak{l}_\theta$ de N_a et N_b sont les $x(k,k')$ avec $k_i = 0 = k'_i$ pour $i>0$. Rappelons l'action explicite de $\mathfrak{h}$ sur les $x(k,k')$:

$$\left\{\begin{array}{ccc}
H_{\alpha_1}\cdot x(k,k') & = & (k_{l-1}-k_l)x(k,k') \\
 & \vdots & \\
H_{\alpha_{l-1}}\cdot x(k,k') & = & (k_1-k_2)x(k,k') \\
H_{\alpha_l}\cdot x(k,k') & = & (-1-k_1-a_1+k_0)x(k,k,') \\
H_{\alpha_{l+1}}\cdot x(k,k') & = & (a_1-a_2-k_0-k'_0)x(k,k,') \\
H_{\alpha_{l+2}}\cdot x(k,k') & = & (a_2+k'_0-k'_1)x(k,k,') \\
H_{\alpha_{l+3}}\cdot x(k,k') & = & (k'_1-k'_2)x(k,k,') \\
 & \vdots & \\
H_{\alpha_n}\cdot x(k,k') & = & (k'_{m-1}-k'_m)x(k,k,')
\end{array}\right.$$

Pour éviter toute confusion, nous noterons $x(k,k')$ les vecteurs de base de N_b et $y(j,j')$ ceux de N_a. De l'action de $\mathfrak{h}$, nous tirons le lemme suivant :

Lemme 5.2.6 *Si les vecteurs $x(k,k')$ et $y(j,j')$ ont même poids sous $\mathfrak{h}$, alors il existe $K \in \mathbb{Z}$ tel que*

$$y(j,j') = y(\,-1-k_l+K,\ldots,-1-k_1+K,a_1-k_0+K,\\ a_2+k'_0+K,k'_1+K,\ldots,k'_m+K)$$

et satisfaisant les conditions d'admissibilité

$$K - k_l \leq 0, \ldots, K - k_1 \leq 0, k'_1 + K \geq 0, \ldots, k'_m + K \geq 0.$$

En particulier, si $x(k,k')$ est un vecteur de plus haut poids sous $\mathfrak{l}_\theta$ et si $y(j,j')$ a même poids que $x(k,k')$, alors nécessairement $K = 0$ et $N_a \cong N_b$.

Cherchons le cocycle c associée à la suite exacte $(S_{a,b})$. Comme N_a, N_b et M sont semi–simples comme $\mathfrak{l}_\theta$–module, on sait déjà que le cocycle c est nul sur $\mathfrak{l}_\theta$ d'après le lemme 1.5.1. Il reste donc à calculer $c(X_{\pm\alpha})$. Or, N_a et N_b se décompose sous $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}X_\alpha \oplus \mathbb{C}X_{-\alpha}$ en une somme directe de modules irréductibles par la proposition 4.2.8. D'après le théorème 2.5.2, on en déduit qu'on a $c(X_{-\alpha}) = 0$ sur chaque sous–$\mathfrak{l}'$–modules irréductibles de N_b et donc sur tout N_b. Soit $x = x(k,k') \in N_b$ un vecteur de plus haut poids sous $\mathfrak{l}_\theta$, de poids λ. Alors $c(X_\alpha)(x)$ est un vecteur de N_a de poids $\lambda + \alpha$. En effet, comme $c(\mathfrak{h}) = 0$ par ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}\underbrace{c([H_\alpha, X_\alpha])(x)}_{2c(X_\alpha)(x)} &= \underbrace{[c(H_\alpha), X_\alpha](x)}_{0} + [H_\alpha, c(X_\alpha)](x) \\ &= H_\alpha \cdot c(X_\alpha)(x) - \lambda(H_\alpha)c(X_\alpha)(x).\end{aligned}$$

Comme le module N_a est $(-\alpha)$–cuspidal, on en déduit que N_a a un vecteur de poids λ, i.e. de même poids que $x(k,k')$. D'après le lemme ci–dessus, un tel vecteur n'existe pas. Ainsi $c(X_\alpha)(x) = 0$.

Soit alors $\beta \in \langle\theta\rangle^+$. Soit $y = X_{-\beta}x$. Comme $[X_\alpha, X_{-\beta}] = 0$, la relation de cocycle et le fait que $c(X_{-\beta}) = 0$ (car $X_{-\beta} \in \mathfrak{l}_\theta$), montre que

$$0 = c([X_\alpha, X_{-\beta}])(x) = c(X_\alpha)(y) - X_{-\beta} \cdot c(X_\alpha)(x).$$

Or, on vient de voir que $c(X_\alpha)(x) = 0$. Donc, $c(X_\alpha)(y) = 0$. Le même calcul montre que si $x = x(k,k') \in N_b$ est un vecteur tel que $c(X_\alpha)(x) = 0$ alors $c(X_\alpha)(X_{-\beta}x) = 0$. Comme N_b est une somme directe de $\mathfrak{l}_\theta$–modules irréductibles, un raisonnement par induction montre que $c(X_\alpha) = 0$ sur tout N_b. Ainsi le cocycle est nul est la suite est scindée.

$\star$ **Supposons que** $N_a \cong N_b$**.** On regarde donc la suite exacte courte $(S_{a,a})$. Soit c le cocycle associé. D'après la condition $\mathcal{O}_1$, le lemme 1.5.1 implique que $c(Z) = 0$ pour $Z \in \mathfrak{l}_\theta$.

Grâce à la relation de cocycle, pour montrer que $c = 0$ il suffit donc de montrer que $c(X_\alpha) = 0 = c(X_{-\alpha})$. Rappelons l'action de $X = X_{-\alpha}$ et de $Y = X_\alpha$ sur N_a :

$$\begin{cases} Yx(k,k') &= (a_2 + k'_0)x(k - \epsilon_0, k' - \epsilon_0) \\ Xx(k,k') &= (a_1 - k_0)x(k + \epsilon_0, k' + \epsilon_0) \end{cases}$$

On en déduit alors que

$$X^{-1} \cdot x(k,k') = \frac{1}{a_1 - k_0 + 1} x(k-\epsilon_0, k'-\epsilon_0).$$

Soit $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}X \oplus \mathbb{C}Y$. D'après la proposition 4.2.8, N_a est une somme directe de $\mathfrak{l}$–modules irréductibles cuspidaux deux à deux non isomorphes. D'après les équations ci–dessus, le $\mathfrak{l}$–module irréductible $\mathcal{U}(\mathfrak{l})x(k,k')$ ne dépend que des k_i et k'_i pour $i > 0$. On note alors $\tilde{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ et $\tilde{k}' = (k'_1, \ldots, k'_n)$ (on oublie donc les premiers entiers k_0 et k'_0). D'après le théorème 2.5.2, on connaît donc le cocycle c sur chaque $\mathcal{U}(\mathfrak{l})$–module irréductible $\mathcal{U}(\mathfrak{l})x(k,k')$: $c(X) = 0$ et $c(Y) = b(\tilde{k}, \tilde{k}')X^{-1}$, où $b(\tilde{k}, \tilde{k}') \in \mathbb{C}$. Dans la suite nous noterons $b(k,k')$ au lieu de $b(\tilde{k}, \tilde{k}')$ en se rappelant que b ne dépend ni de k_0 ni de k'_0.

On reprend les notations de la section 5.1.6. Soit $\beta = \beta_1 + \cdots + \beta_i \in \langle\theta\rangle^+$. Alors on a $\alpha + \beta \in \mathcal{R}$, $[Y, X_\beta] = X_{\alpha+\beta}$ et $[X_{\alpha+\beta}, X_{-\beta}] = Y$ (voir annexe A). En utilisant la relation de cocycle, on obtient donc $c(Y) = [[c(Y), X_\beta], X_{-\beta}]$ (car $c(Z) = 0$ lorsque $Z \in \mathfrak{l}_\theta$). Cette identité est une identité dans $End_{\mathbb{C}}(N_a)$. Calculons l'effet des deux membres sur $x(k,k') \in N_a$. Rappelons que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_\beta x(k,k') & = & k'_i x(k, k'+\epsilon_0-\epsilon_i) \\ X_{-\beta} x(k,k') & = & (a_2+k'_0) x(k, k'+\epsilon_i-\epsilon_0) \end{array} \right.$$

Ainsi on a d'une part

$$c(Y)x(k,k') = \frac{b(k,k')}{a_1-k_0+1} x(k-\epsilon_0, k'-\epsilon_0). \tag{5.15}$$

On en déduit que

$$[c(Y), X_\beta]x(k,k') = \frac{k'_i}{a_1-k_0+1}(b(k,k'-\epsilon_i) - b(k,k'))x(k-\epsilon_0, k'-\epsilon_i)$$

puis que

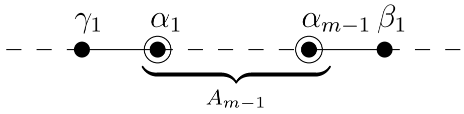
$$\begin{aligned} &[[c(Y), X_\beta], X_{-\beta}]x(k,k') = \\ &\qquad \frac{a_2+k'_0}{a_1-k_0+1}\,((k'_i+1)(b(k,k') - b(k,k'+\epsilon_i)) \\ &\qquad\qquad -k'_i(b(k-\epsilon_i) - b(k,k')))\,x(k-\epsilon_0, k'-\epsilon_0). \end{aligned} \tag{5.16}$$

En égalant les deux équations (5.15) et (5.16), on obtient

$$\begin{aligned} b(k,k') = (k'_i+1)(a_2+k'_0)&(b(k,k') - b(k,k'+\epsilon_i)) \\ &- k'_i(a_2+k'_0)(b(k,k'-\epsilon_i) - b(k,k')). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Soit k' tel que $k'_i = 0$. On a alors $b(k,k') = (a_2 + k'_0)(b(k,k') - b(k,k'+\epsilon_i))$. Donc $(a_2 + k'_0 - 1)b(k,k') = (a_2 + k'_0)b(k,k'+\epsilon_i)$. Comme $b(k,k')$ ne dépend pas de k_0, ceci implique que $b(k,k') = 0 = b(k,k'+\epsilon_i)$. On montre ensuite par récurrence à l'aide de l'équation (5.17) que $b(k,k'+n\epsilon_i) = 0$ pour tout entier positif n. On travaille de même avec les racines $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_i$. Ainsi on obtient $b(k,k') = 0$ et donc le cocycle c est nul et l'extension est triviale. $\square$

• Nous allons à présent faire le cas général $card(\Delta \setminus \theta) > 1$. Rappelons que $\Delta \setminus \theta$ est une partie connexe en vertu du théorème 5.1.28. Considérons donc le diagramme de Dynkin suivant :



Dans ce cas, les modules simples sont les

$$N_a = N(\underbrace{-1,\dots,-1}_{k}, a_1,\dots,a_m, \underbrace{0,\dots,0}_{l}).$$

Quitte à changer la numérotation des racines simples, on peut toujours supposer que $l > 0$.

Théorème 5.2.7 *On a* $Ext^1(N_b, N_a) = \{0\}$.

Démonstration. La stratégie est de se ramener au cas précédent. Notons c le cocyle associé à une suite exacte

$$0 \to N_a \to M \to N_b \to 0.$$

Soit $\bar\theta = \{\beta_1,\dots,\beta_l\}$. Considérons la partie $\theta^1 = \bar\theta \cup \{\alpha_{m-1}\}$. On note $\mathfrak{l}^1$ la sous–algèbre de Levi correspondante. On a donc $\mathfrak{l}^1 = A_{l+1}$. Par un raisonnement analogue à celui de la proposition 4.2.8, on montre que N_a se décompose sous $\mathfrak{l}^1$ en une somme directe de modules irréductibles. Ces modules sont de la forme $N(c_1, c_2, 0, \dots, 0)$ pour $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Ainsi on peut voir N_a et N_b comme des sommes directes de modules irréductibles de la catégorie $\mathcal{O}_{\theta^1,\bar\theta}$. D'autre part, M est aussi un module de cette catégorie par restriction. En utilisant le théorème 5.2.5, on en déduit que $c(X_{\alpha_{m-1}}) = 0$ et $c(X_{-\alpha_{m-1}}) = 0$. On reprend ensuite le même raisonnement avec la partie $\theta^2 = \bar\theta \cup \{\alpha_{m-2} + \alpha_{m-1}\}$. On en déduit alors que $c(X_{\alpha_{m-2}+\alpha_{m-1}}) = 0$ et $c(X_{-(\alpha_{m-2}+\alpha_{m-1})}) = 0$. En appliquant la relation de cocycle à l'égalité $[X_{\alpha_{m-1}+\alpha_{m-2}}, X_{-\alpha_{m-1}}] = X_{\alpha_{m-2}}$, on en déduit que $c(X_{\alpha_{m-2}}) = 0$ et $c(X_{-\alpha_{m-2}}) = 0$. On continue ainsi avec les parties $\theta^k = \bar{\theta} \cup \{\alpha_{m-k} + \cdots + \alpha_{m-1}\}$. On en déduit que le cocyle c est nul et donc que $Ext^1(N_b, N_a) = \{0\}$.

□

En regroupant les résultats des théorèmes 5.2.5 et 5.2.7 et en recopiant la preuve du corollaire 5.2.2, on montre

Corollaire 5.2.8 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de type A_n. Soit θ une partie propre de Δ telle que $\Delta - \theta$ soit différente de $\{e_1\}$ et de $\{e_n\}$. Alors la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}(\mathfrak{sl}_{n+1})$ est semi–simple.*

Remarque 5.2.9 *Lorsque $\theta = \Delta$, la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\Delta}(\mathfrak{sl}_n)$ est semi–simple par définition. Lorsque $\theta = \emptyset$, la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\emptyset}(\mathfrak{sl}_n)$ n'est pas semi–simple. Les modules indécomposables dans ce cas ont été étudiés par Grantcharov et Serganova [14] et par Mazorchuk et Stroppel [33].*

Chapitre 6

Paires duales et correspondances

Dans tout ce chapitre, $\mathfrak{g}$ désigne une algèbre de Lie simple sur $\mathbb{C}$. Soit $\mathfrak{h}$ une sous–algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ fixée. Soit $\mathcal{R}$ le système de racine associé au couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Fixons une base Δ de $\mathcal{R}$. Dans un premier temps, nous allons rappeler comment construire certaines paires duales associées à des espaces préhomogènes. Ensuite nous établirons des correspondances de type Howe pour certains modules $N(a)$ restreints à la paire duale $(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_n)$ de $\mathfrak{sl}_{2n}$.

6.1 Les espaces préhomogènes de type parabolique

Rappelons quelques notations introduites dans le premier chapitre. Soit θ une partie de Δ. Nous noterons $\langle\theta\rangle$ l'ensemble des racines qui s'écrivent comme combinaison linéaire des éléments de θ. Posons

$$\mathfrak{h}(\theta) = \sum_{\alpha\in\langle\theta\rangle} \mathbb{C}H_\alpha.$$

Notons $\mathfrak{h}_\theta$ l'orthogonal de θ, à savoir

$$\mathfrak{h}_\theta = \{X \in \mathfrak{h} \ : \ \alpha(X) = 0 \, \forall \, \alpha \in \theta\}.$$

Soit $\mathfrak{l}_\theta$ le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{h}_\theta$. C'est une algèbre de Lie réductive de centre $\mathfrak{h}_\theta$. De plus,

$$\mathfrak{l}_\theta = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^{\langle\theta\rangle}.$$

Posons alors

$$\mathfrak{n}_\theta^\pm := \mathfrak{g}^{\mathcal{R}^\pm - \langle\theta\rangle^\pm}.$$

Définissons enfin
$$\mathfrak{p}_\theta = \mathfrak{l}_\theta \oplus \mathfrak{n}_\theta^+.$$
Nous noterons H_θ l'unique élément de $\mathfrak{h}_\theta$ qui vérifie
$$\alpha(H_\theta) = 2 \quad \forall\, \alpha \in \Delta - \theta.$$
Posons
$$d_k(\theta) = \{X \in \mathfrak{g},\ [H_\theta, X] = 2kX\}.$$

Lemme 6.1.1 *Avec les notations ci–dessus :*
$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} d_k(\theta), \quad [d_i(\theta), d_j(\theta)] \subset d_{i+j}(\theta), \quad \mathfrak{l}_\theta = d_0(\theta), \quad \mathfrak{n}_\theta^+ = \oplus_{k\geq 1} d_k(\theta).$$

Démonstration. Cela résulte aussitôt de calculs élémentaires en utilisant l'identité de Jacobi. □

Une conséquence du lemme est que les sous–espaces $d_k(\theta)$ définissent une $\mathbb{Z}$–graduation de $\mathfrak{g}$. Nous appelerons ce type de graduation une *graduation de type parabolique.*

Pour expliciter une telle graduation il suffit de se donner une partie $\theta \subset \Delta$. Dans la suite, nous dessinerons une telle partie en entourant dans le graphe de Dynkin de $(\mathcal{R}, \Delta)$ les racines de $\Delta - \theta$ (nous parlerons alors de *diagramme de Dynkin à poids* et de racines encerclées). Notons que cette convention est compatible avec la convention utilisée pour la classification des modules irréductibles de la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$.

Mentionnons à présent le lien avec la théorie des espaces préhomogènes. Cette théorie a été initiée par Mikio Sato à la fin des années 70 (voir par exemple [44] et [45]). Un des intérêts de cette notion est que sous certaines hypothèses plus restrictives (et notamment la régularité dont il sera question plus loin) on sait associer des fonctions zeta locales et globales satisfaisant des équations fonctionnelles remarquables qui généralisent la fonction zeta de Riemann (voir par exemple [46] et [41]).

Rappelons tout d'abord la définition d'espace préhomogène. Soit G un groupe algébrique linéaire connexe, défini sur $\mathbb{C}$. Soit ρ une représentation rationnelle de dimension finie de G dans un $\mathbb{C}$–espace–vectoriel V. Le triplet (G, ρ, V) est un *espace préhomogène* s'il existe une G–orbite Ω dans V Zariski–ouverte. Un espace préhomogène est dit *irréductible* lorsque la représentation ρ est irréductible.

La notion d'espace préhomogène est en fait une notion infinitésimale au sens suivant :

Proposition 6.1.2 *Soit ρ une représentation rationnelle de G dans un $\mathbb{C}$–espace de dimension finie V. Sont alors équivalentes :*

1. *Le triplet (G, ρ, V) est un espace préhomogène*
2. $\exists\, x \in V \ : \ dim(V) = dim(G) - dim(G_x)$
3. $\exists\, x \in V \ : \ dim(V) = dim(\mathfrak{g}) - dim(\mathfrak{g}_x)$
4. $\exists\, x \in V \ : \ X \in \mathfrak{g} \mapsto d\rho(X)(x) \in V$ *est surjective.*

Démonstration. Voir la proposition 1.1.2 de [41].

Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Delta, \theta)$ une graduation de type parabolique de $\mathfrak{g}$. Notons G le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$ (qui est un groupe algébrique connexe). Notons également L_θ le sous–groupe connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}_\theta$ (c'est aussi le centralisateur de $\mathfrak{h}_\theta$ dans G). Soit W_θ le groupe de Weyl du système de racines $\langle\theta\rangle$. Soit $\mathcal{R}'$ l'ensemble des racines α telles $\alpha(H_\theta) = 2$.

Théorème 6.1.3 (Vinberg) *Les orbites de L_θ dans $d_1(\theta)$ sont en nombre fini, paramétrées par les orbites de W_θ dans l'ensemble des couples $(\vartheta, \mathcal{R}'')$ tels que*

1. $\vartheta \subset \theta$ *et* $\mathcal{R}'' \subset \mathcal{R}'$.
2. $\vartheta \cup \mathcal{R}''$ *peut être complété en une base de* $\mathcal{R}$.
3. *Le diagramme de Dynkin à poids formé de $\vartheta \cup \mathcal{R}''$ où les racines encerclées sont celles de $\mathcal{R}''$ est un diagramme distingué (cela signifie que la dimension du sous–espace d_0 et du sous–espace d_1 sont les mêmes).*

Démonstration. Voir le théorème 4.1.10 de [41].

Ce théorème fondamental de Vinberg a pour conséquence :

Corollaire 6.1.4 *Le triplet $(L_\theta, Ad, d_1(\theta))$ est un espace préhomogène.*

Les espaces préhomogènes ainsi construits sont dits de type parabolique. Par abus de notation, nous noterons un tel préhomogène $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ ou aussi $(\mathfrak{l}'_\theta, d_1(\theta))$. Lorsque $\mathfrak{n}_\theta^+$ est commutatif (ce qui implique que les $d_i(\theta)$ sont tous nuls pour $|i| > 1$) nous dirons que l'espace préhomogène est de type parabolique commutatif.

Remarquons qu'il est facile de savoir si un tel espace préhomogène est irréductible. En effet :

Proposition 6.1.5 *L'espace préhomogène $(L_\theta, Ad, d_1(\theta))$ est irréductible si et seulement si $\Delta - \theta$ est réduit à une racine simple.*

Démonstration. Voir la proposition 4.2.1 de [41].

Une autre notion concernant les espaces préhomogènes est essentielle dans tout ce qui va suivre : la notion de régularité. Une fraction rationnelle f sur V non nulle est un *invariant relatif* pour l'espace préhomogène (G, ρ, V) s'il existe un caractère χ de G tel que

$$\forall\, g \in G,\, \forall\, x \in V,\; f(g \cdot x) = \chi(g) f(x).$$

Notons que les seules fractions rationnelles invariantes (i.e. $\chi = id$) sont les constantes (car un tel invariant est constant sur la grosse orbite qui est dense dans V). On en déduit que deux invariants relatifs correspondant au même caractère sont proportionnels et que tout invariant relatif est une fonction homogène.

On a une description complète des invariants relatifs. Soit S le complémentaire de la grosse orbite dans V. On peut décomposer S comme réunion (finie) de composantes irréductibles (de codimension 1). Soient $S_1, \ldots, S_r$ ces composantes. Il existe donc des polynômes f_i tels que $S_i = \{x \in V : f_i(x) = 0\}$. Ces polynômes sont des invariants relatifs, dits *fondamentaux*, et tout invariant relatif peut s'écrire sous la forme

$$c \prod_{k=1}^{r} f_k^{m_k}, \quad m_k \in \mathbb{N},\; c \in \mathbb{C}.$$

(pour les détails voir le théorème 1.2.5 de [41])

On en arrive enfin à la notion d'espace préhomogène régulier. L'espace préhomogène (G, ρ, V) est dit *régulier* s'il possède un invariant relatif dont le hessien en un point de la grosse orbite est non nul.

Dans le cas des espaces préhomogènes de type parabolique cette notion a priori compliquée se ramène à la notion plus maniable de $\mathfrak{sl}_2$–triplets :

Théorème 6.1.6 (Rubenthaler) *Si l'espace préhomogène de type parabolique $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ est irréductible et si f est un invariant relatif de degré n, alors*

$$\left(-\frac{B(H_\theta, H_\theta)}{2n} \varphi_f(x), H_\theta, x \right)$$

est un $\mathfrak{sl}_2$–triplet pour tout x dans la grosse orbite (où B désigne la forme de Killing et $\varphi_f = df/f$).

Démonstration. Voir le théorème 4.3.2 de [41].

Ce théorème a pour conséquence :

Corollaire 6.1.7 *Soit $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ un espace préhomogène de type parabolique irréductible. Alors on a les équivalences suivantes :*

1. *L'espace préhomogène est régulier*
2. *Il existe un invariant relatif non trivial*
3. *Il existe $Y \in d_1(\theta)$ et $X \in d_{-1}(\theta)$ tels que (X, H_θ, Y) soit un $\mathfrak{sl}_2$–triplet.*

La liste des espaces préhomogènes irréductibles réguliers de type parabolique est donnée dans les tables I et II de [41].

Nous n'avons jusqu'à présent considéré que le cas où l'espace préhomogène $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ était irréductible. Nous allons maintenant considérer le cas général. La décomposition du $\mathfrak{l}_\theta$–module $d_1(\theta)$ en sous–modules irréductibles se fait comme suit.

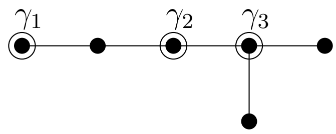
Désignons par $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ les racines simples de $\Delta - \theta$. Notons Δ_i la composante connexe de $\theta \cup \{\gamma_i\}$ qui contient γ_i et posons $\theta_i = \Delta_i - \{\gamma_i\}$. Soit

$$\mathfrak{h}_i = \sum_{\alpha \in \Delta_i} \mathbb{C} H_\alpha, \quad \mathfrak{g}_i = \mathfrak{h}_i + \mathfrak{g}^{\langle \Delta_i \rangle}, \quad \mathfrak{l}_{\theta_i} = \mathfrak{h}_i \oplus \mathfrak{g}^{\langle \theta_i \rangle}.$$

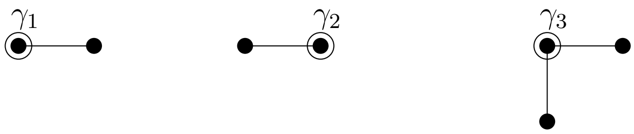
L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_i$ est réductive et la sous–algèbre $\mathfrak{l}_{\theta_i}$ est une sous–algèbre de Levi. À la partie θ_i de Δ_i est associé un espace préhomogène, que l'on note $(\mathfrak{l}_{\theta_i}, d_1^i(\theta))$. Comme on peut plonger $d_1^i(\theta)$ dans $\mathfrak{g}$, l'algèbre $\mathfrak{l}_\theta$ agit sur $d_1^i(\theta)$ et il est facile de voir que $d_1^i(\theta)$ est ainsi un $\mathfrak{l}_\theta$–module irréductible. On a alors la proposition suivante.

Proposition 6.1.8 *La décomposition $d_1(\theta) = \oplus_i\, d_1^i(\theta)$ est la décomposition de $d_1(\theta)$ en $\mathfrak{l}_\theta$–modules irréductibles.*

Regardons un exemple :



Ici $\mathfrak{l}_\theta$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2$. Les parties Δ_i sont alors les suivantes :



Les sous–algèbres $\mathfrak{l}_{\theta_1}$ et $\mathfrak{l}_{\theta_2}$ sont toutes les deux isomorphes à la première copie de $\mathfrak{sl}_2$ de $\mathfrak{l}_\theta$ et $\mathfrak{l}_{\theta_3}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2$. Les espaces $d_1^1(\theta)$ et $d_1^2(\theta)$ sont des représentations irréductibles de dimension 2 de $\mathfrak{sl}_2$ et $d_1^3(\theta)$ est le produit tensoriel de deux représentations irréductibles de dimension 2 de deux copies de $\mathfrak{sl}_2$.

Par la suite, nous noterons H_i l'unique élément de $\mathfrak{h}_i$ tel que $\alpha(H_i) = 0$ si $\alpha \in \theta_i$ et $\gamma_i(H_i) = 2$ (par construction $d_1^i(\theta) = \{X \in \mathfrak{g}_i \,:\, [H_i, X] = 2X\}$). Remarquons que $\sum_i \mathbb{C}H_i = \mathfrak{h}_\theta$. Les espaces préhomogènes donnés par les couples (Δ_i, θ_i) sont les *composantes irréductibles* de l'espace préhomogène donné par le couple (Δ, θ).

Pour finir, notons que la notion de régularité pour un espace préhomogène de type parabolique non irréductible ne se ramène pas toujours à la notion de $\mathfrak{sl}_2$–tripet comme le montre l'exemple 4.3.1 de [41].

6.2 La notion de paire duale

La notion de paire duale a été introduite par R. Howe dans le cas du groupe métaplectique (voir [15]). Nous en donnons ici une définition générale au niveau des algèbres de Lie.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive sur $\mathbb{C}$. Un couple $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ de sous–algèbres réductives de $\mathfrak{g}$ est appelée une *paire duale* si le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ est égal à $\mathfrak{b}$ et vice–versa. Rappelons que le centralisateur de l'algèbre $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ est

$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = \{X \in \mathfrak{g} \,:\, [X, Y] = 0 \,\forall\, Y \in \mathfrak{a}\}.$$

Nous dirons qu'une sous–algèbre réductive est une *sous–algèbre de Howe* si elle est égale à son bi–commutant. Dans ce cas le couple $(\mathfrak{a}, Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}))$ est une paire duale.

Une classification des paires duales dans le cas complexe a été donnée par H. Rubenthaler dans [42]. Cette classification utilise la notion d'espace préhomogène de type parabolique. Nous allons en rappeler ici les principaux ingrédients.

Fixons une base Δ d'un système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Un couple (Δ, θ) avec $\theta \subset \Delta$ est dit *admissible* si les composantes irréductibles de l'espace préhomogène de type parabolique associé sont toutes régulières. Le couple est dit *C–admissible* si les composantes irréductibles sont de plus de type commutatif.

Donnons quelques exemples. Le couple $(\Delta, \emptyset)$ est toujours C–admissible (ses composantes sont toutes égales à $\odot$). L'exemple de la partie précédente n'est pas admissible car les composantes de type A_2 ne sont pas régulières.

Soit (Δ, θ) un couple admissible. Par le corollaire 6.1.7, il existe pour chaque i des éléments $X_i \in d^i_{-1}(\theta)$ et $Y_i \in d^i_1(\theta)$ tels que (X_i, H_i, Y_i) soit un $\mathfrak{sl}_2$–triplet.

Théorème 6.2.1 (Rubenthaler) *Soit (Δ, θ) un couple admissible. Alors la famille des $\mathfrak{sl}_2$–triplets (Y_i, H_i, X_i) engendre une sous–algèbre simple $\tilde{\mathfrak{g}}_\theta$ dans $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. Voir [40].

La sous–algèbre $\tilde{\mathfrak{g}}_\theta$ du théorème est appelée sous–algèbre admissible (resp. C–admissible) associée au couple admissible (resp. C–admissible) (Δ, θ). Dans le cas du couple $(\Delta, \emptyset)$ on trouve $\tilde{\mathfrak{g}}_\emptyset = \mathfrak{g}$ car $\mathfrak{g}$ est engendrée par les $\mathfrak{sl}_2$–triplets $(Y_\alpha, H_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{R}}$.

On a alors le

Théorème 6.2.2 (Rubenthaler) *Soit (Δ, θ) un couple C–admissible. Alors la sous–algèbre C–admissible $\tilde{\mathfrak{g}}_\theta$ associée est une sous–algèbre de Howe.*

Démonstration. C'est le théorème 4.1 de [42].

Cela fournit un premier de type de paires duales. Le cas $(\Delta, \emptyset)$ fournit la paire duale triviale $(\mathfrak{g}, \{0\})$. Les autres paires duales sont obtenues à partir de certaines sous–algèbres admissibles. Pour une description complète on pourra consulter [42]. Dans la suite nous nous intéresserons principalement aux paires duales C–admissibles obtenues par le théorème 6.2.2. Notons que dans ce cas, $\mathfrak{h}_\theta$ est une sous–algèbre de Cartan de $\tilde{\mathfrak{g}}_\theta$ et $Z_{\mathfrak{g}}(\tilde{\mathfrak{g}}_\theta) \subset \mathfrak{l}_\theta$.

6.3 Exemples de correspondances

La notion de paire duale s'est avérée très efficace pour résoudre des problèmes de restriction (ou *branching rules*). Nous allons à présent donner quelques exemples simples de tels problèmes. Commençons avec un exemple trivial pour motiver la notion de paire duale. Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux algèbres de Lie simples. Posons $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Alors, il est clair que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est une paire duale dans $\mathfrak{g}$. On sait dans ce cas que les représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{g}$ sont isomorphes au produit tensoriel d'une représentation irréductible de $\mathfrak{a}$ et d'une représentation irréductible de $\mathfrak{b}$. Plus généralement une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$ se casse en une somme directe de représentations irréductibles et donc en une somme de produits tensoriels. Dans certains cas, une représentation donnée de $\mathfrak{a}$ apparaissant dans la restriction à $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ d'un $\mathfrak{g}$–module V de dimension finie est associée à une et une seule représentation de $\mathfrak{b}$ apparaissant dans la restriction de V à $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b}$. On appelle ce phénomène *une correspondance de type Howe*. Le premier exemple non trivial d'une telle correspondance est apparue dans les travaux de R. Howe dans les années 80 et a donné lieu par la suite à une abondante littérature (e.g. [16], [17], [38], [37], [18], [26],…).

Considérons à présent une algèbre de Lie réductive $\mathfrak{g}$. Notons $\mathfrak{z}$ son centre et $\mathfrak{g}'$ sa partie semi–simple. Alors $(\mathfrak{z}, \mathfrak{g})$ est une paire duale de $\mathfrak{g}$. Notons que dans ce cas une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ est une représentation irréductible de $\mathfrak{g}'$ munie d'une action scalaire du centre $\mathfrak{z}$.

Donnons maintenant un exemple un peu plus évolué. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple qui admet une structure d'espace préhomogène de type parabolique commutatif irréductible. A cet espace préhomogène, on a vu comment associer une paire duale $(\tilde{\mathfrak{g}}_\theta, Z_\mathfrak{g}(\tilde{\mathfrak{g}}_\theta))$. Posons $\mathfrak{a} = \tilde{\mathfrak{g}}_\theta$ et $\mathfrak{b} = Z_\mathfrak{g}(\tilde{\mathfrak{g}}_\theta)$. On a vu que $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{l}_\theta$ et que $\mathfrak{h}_\theta$ est une sous–algèbre de Cartan de $\mathfrak{a}$. L'algèbre $\mathfrak{g}$ agit sur elle–même par l'action adjointe. Le module peut aussi être vu comme un $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b}$–module et est semi–simple (car de dimension finie). Essayons d'identifier ses sous–modules irréductibles. Rappelons que l'on a la décomposition

$$\mathfrak{g} = d_{-1}(\theta) \oplus \mathfrak{l}_\theta \oplus d_1(\theta).$$

On pose $H = H_\theta$. On note (X, H, Y) le $\mathfrak{sl}_2$–triplet qui correspond à l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$. On a alors le

Théorème 6.3.1 (Rubenthaler) *Soit U_1 l'orthogonal de $\mathbb{C}X$ dans $d_1(\theta)$ relativement à la forme de Killing B de $\mathfrak{g}$. On a alors*

$$d_1(\theta) = \mathbb{C}Y \oplus U_1.$$

De plus cette décomposition est la décomposition de $d_1(\theta)$ en $\mathfrak{b}$–modules irréductibles.

Démonstration. Voir theorem 7.1 de [43].

En utilisant le théorème, on a aussi la décomposition suivante (en $\mathfrak{b}$–modules irréductibles) :

$$d_{-1}(\theta) = \mathbb{C}X \oplus U_{-1},$$

où U_{-1} est l'orthogonal de $\mathbb{C}Y$ dans $d_{-1}(\theta)$ relativement à la forme de Killing.

Comme $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, on peut décomposer $\mathfrak{g}$ en somme directe de $\mathfrak{a}$–modules irréductibles de plus haut poids. Cherchons quels sont les vecteurs de plus haut poids dans $\mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{n}_\theta^+$ est commutatif et que tous les éléments de $\mathfrak{n}_\theta^+$ ont par hypothèse un poids égal à 2 sous l'action de H, on en déduit que l'espace $\mathfrak{g}$ contient $dim(\mathfrak{n}_\theta^+)$ fois la représentation irréductible de dimension 3 de $\mathfrak{a}$. Cette représentation est isomorphe à $\mathfrak{a}$. Les autres plus haut poids possibles sont de poids 0 vu les poids de $\mathfrak{g}$ sous H. De tels vecteurs commutent alors avec tout $\mathfrak{a}$. Ce sont donc exactement les éléments de $\mathfrak{b}$. Ainsi la représentation triviale de $\mathfrak{a}$ apparaît avec multiplicité $dim(\mathfrak{b})$.

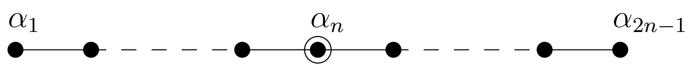
On sait aussi que $\mathfrak{g}$ se décompose sous $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ en une somme directe de modules irréductibles. Un tel module est un produit tensoriel d'un $\mathfrak{a}$–module irréductible et d'un $\mathfrak{b}$–modue irréductible. Nous avons déjà identifié tous les $\mathfrak{a}$–modules intervenant dans $\mathfrak{g}$. Posons alors $\mathfrak{m} = [X, U_1]$. Il est clair que $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{l}_\theta$. D'autre part, l'identité de Jacobi et le théorème 6.3.1 permettent de montrer que $\mathfrak{m}$ est un $\mathfrak{b}$–module irréductible (isomorphe à U_1 et U_{-1}). La décomposition de $\mathfrak{g}$ sous $\mathfrak{a}$ que l'on a obtenu s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &= dim(\mathfrak{n}_\theta^+)\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \\ &= (\mathfrak{a} \oplus U_1 \oplus U_{-1} \oplus \mathfrak{m}) \oplus \mathfrak{b}.\end{aligned}$$

En remarquant que $\mathfrak{a}$ est un $\mathfrak{b}$–module triviale et que $\mathfrak{b}$ est un $\mathfrak{b}$–module irréductible, on obtient la décomposition de $\mathfrak{g}$ sous $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ suivante :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \otimes 1 \oplus 1 \otimes \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{m}.$$

Remarquons que cette décomposition est symétrique en $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ si et seulement si $\mathfrak{m} \cong \mathfrak{b}$ comme $\mathfrak{b}$–module. Cette situation arrive par exemple dans le cas suivant :



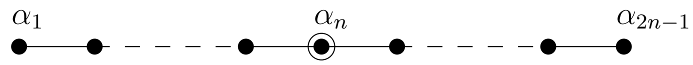
Remarquons aussi que si $\mathfrak{m} \ncong \mathfrak{b}$, alors à chaque $\mathfrak{b}$–module de cette décomposition est associé un unique $\mathfrak{a}$–module. Mais le $\mathfrak{a}$–module $\mathfrak{a}$ correspond aux deux $\mathfrak{b}$–modules 1 et $\mathfrak{m}$.

6.4 Correspondances de type Howe dans $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$

Nous allons à présent étudier des correspondances dans certaines des catégories $\mathcal{O}_{\delta,\theta}$. Nous choisirons toujours des paires duales $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ de la forme $(\tilde{\mathfrak{g}}_\theta, Z_\mathfrak{g}(\tilde{\mathfrak{g}}_\theta))$ (données par les théorèmes 6.2.1 et 6.2.2) qui correspondent à l'espace préhomogène construit à partir de la partie θ. En particulier cela signifie que $\mathfrak{b} := Z_\mathfrak{g}(\tilde{\mathfrak{g}}_\theta) \subset \mathfrak{l}_\theta$.

6.4.1 La paire duale $(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_n)$ dans $\mathfrak{sl}_{2n}$

Nous avons vu que la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ associée est non nulle seulement si $\mathfrak{g}$ est de type A_n ou C_n. Nous écarterons ici le cas $\mathfrak{g} = C_n$. Ainsi dans toute la suite, $\mathfrak{g}$ désigne l'algèbre de Lie A_n. En comparant les parties θ qui fournissent une catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ non nulle et celles fournissant une paire duale (voir la table 5 de [42]), on conclut qu'il n'y a qu'un cas à examiner :



On supposera donc à partir de maintenant que $\mathfrak{g} = A_{2n-1}$ et $\Delta - \theta = \{\alpha_n\}$. Nous avons vu dans cette situation la classification des modules irréductibles de $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$. En particulier, nous avons montré que les modules irréductibles de $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}$ sont les modules

$$N(a) := N(\underbrace{-1,\ldots,-1}_{n-1}, a_1, a_2, \underbrace{0,\ldots,0}_{n-1}), \quad \text{où } a_i \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}.$$

Rappelons que les vecteurs de poids de $N(a)$ sont les $x(b)$ pour $b \in \mathbb{C}^{2n}$ admissible, i.e. pour $i < n$, b_i est un entier strictement négatif, pour $j > n+1$, b_j est un entier positif (ou nul), $b_n - a_1 \in \mathbb{Z}$, $b_{n+1} - a_2 \in \mathbb{Z}$ et $\sum_i b_i = a_1 + a_2 - (n-1)$. L'action de $\mathfrak{g}$ sur $N(a)$ est donnée par les équations suivantes :

$$X_{-\alpha_i} \cdot x(b) = \begin{cases} (b_{i+1}+1)x(b+\epsilon_i-\epsilon_{i+1}) & \text{si } i < n-1 \\ x(b+\epsilon_{n-1}-\epsilon_n) & \text{si } i = n-1 \\ b_i x(b+\epsilon_i-\epsilon_{i+1}) & \text{si } i \geq n+1 \end{cases} \tag{6.1a}$$

$$X_{\alpha_i} \cdot x(b) = \begin{cases} (b_i+1)x(b-\epsilon_i+\epsilon_{i+1}) & \text{si } i < n-1 \\ b_n(b_{n-1}+1)x(b-\epsilon_{n-1}+\epsilon_n) & \text{si } i = n-1 \\ b_{i+1} x(b-\epsilon_i+\epsilon_{i+1}) & \text{si } i \geq n+1 \end{cases} \tag{6.1b}$$

$$H_{\alpha_i} \cdot x(b) = (b_i - b_{i+1})x(b) \tag{6.1c}$$

On peut calculer plus généralement l'action d'un vecteur quelconque de $\mathfrak{g}$ grâce aux équations (4.1) et au plongement de A_{2n-1} dans W_{2n}. Nous avons décrit dans le théorème 4.2.4 les vecteurs de plus haut poids de $N(a)$ pour l'action de $\mathfrak{l}_\theta$. Rappelons–en l'énoncé dans notre cas particulier :

Proposition 6.4.1 *Comme $\mathfrak{l}_\theta$–module, le module $N(a)$ se décompose en une somme directe de modules irréductibles de plus haut poids de dimension infinie. De plus, chaque module intervenant dans la décomposition intervient* *avec multiplicité* 1 *et les plus haut poids sont*

$$(\underbrace{0,\ldots,0}_{n-2}, -1-b_n, b_{n+1}, \underbrace{0,\ldots,0}_{n-2}) \otimes (-(n-1)+b_n-b_{n+1})$$

sous $\mathfrak{h}(\theta) \oplus \mathfrak{h}_\theta$.

Dans la suite, on notera N_{a_1,a_2} au lieu de $N(a)$. Décrivons à présent la paire duale. La sous–algèbre de Levi $\mathfrak{l}_\theta$ est l'ensemble de matrices suivant :

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right),\ A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ tr(A+B) = 0 \right\}.$$

En particulier, la partie semi–simple de $\mathfrak{l}_\theta$ est la somme de deux copies de $\mathfrak{sl}_n$. L'espace $\mathfrak{h}(\theta)$ est la sous–algèbre de Cartan de cette partie semi–simple et consiste donc en les matrices diagonales de trace nulle. La paire duale C–admissible $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est alors construite comme suit :

$$\mathfrak{b} := \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right), \quad \text{avec } A \in \mathfrak{sl}_n.$$

Le commutant de $\mathfrak{b}$ est alors $\mathfrak{a} := \langle X, H, Y \rangle$, où

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_{-(\alpha_i+\cdots+\alpha_{n+i-1})}, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} X_{\alpha_i+\cdots+\alpha_{n+i-1}}, \quad \text{et}$$

$$H = H_{\alpha_1} + 2H_{\alpha_2} + \cdots + nH_{\alpha_n} + (n-1)H_{\alpha_{n+1}} + \cdots + 2H_{\alpha_{2n-2}} + H_{\alpha_{2n-1}}.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$ et $\mathfrak{b}$ à $\mathfrak{sl}_n$. Rappelons que $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{l}_\theta$ et que le centre de $\mathfrak{l}_\theta$ est la sous–algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_\theta = \mathbb{C}H$ de $\mathfrak{a}$.

Notons $\mathfrak{h}_n$ la sous–algèbre de Cartan de $\mathfrak{b}$:

$$\left(\begin{array}{c|c} H & 0 \\ \hline 0 & H \end{array} \right), \quad \text{avec } H \text{ diagonale de trace nulle.}$$

6.4.2 Action de $\mathfrak{b}$ sur N_{a_1,a_2}

Nous avons rappelé l'action de $\mathfrak{l}_\theta$ sur le module N_{a_1,a_2} ci–dessus. Décrivons à présent l'action de X et $Y \in \mathfrak{a}$:

Lemme 6.4.2 *Pour* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *on a*

$$X_{\alpha_i+\ldots+\alpha_{n+i-1}} x(b) = \begin{cases} (b_i+1)b_{n+i}x(b-\epsilon_{n+i}+\epsilon_i) & si\ i<n, \\ b_{2n}x(b-\epsilon_{2n}+\epsilon_n) & si\ i=n, \end{cases} \tag{6.2a}$$

$$X_{-(\alpha_i+\ldots+\alpha_{n+i-1})} x(b) = \begin{cases} x(b+\epsilon_{n+i}-\epsilon_i) & si\ i<n, \\ b_n x(b+\epsilon_{2n}-\epsilon_n) & si\ i=n, \end{cases} \tag{6.2b}$$

Démonstration. Notons que le vecteur $X_{\alpha_i+\ldots+\alpha_{n+i-1}}$ correspond à la matrice élémentaire $E_{i,n+i}$ et le vecteur $X_{-(\alpha_i+\ldots+\alpha_{n+i-1})}$ à $E_{n+i,i}$Ceci est une conséquence des équations (4.1).

□

Pour obtenir une corrrespondence, il nous faut au préalable décrire l'action de $\mathfrak{b}$ sur N_{a_1,a_2}. Notons $\mathfrak{b}^+$ la sous–algèbre de $\mathfrak{b}$ des matrices telles que X est triangulaire supérieure avec des zero sur la diagonale. Grâce à la proposition 6.4.1, nous savons que l'action de $\mathfrak{b}^+$ est localement finie. Nous allons donc étudier le sous–espace $M_0 := N_{a_1,a_2}^{\mathfrak{b}^+} = \{m \in N_{a_1,a_2} \,:\, X \cdot m = 0, \forall\, X \in \mathfrak{b}^+\}$. Definissons $X_i := X_{\alpha_i} + X_{\alpha_{n+i}}$ and $X_{-i} := X_{-\alpha_i} + X_{-\alpha_{n+i}}$. De l'équation (4.1) nous obtenons

$$X_i \cdot x(b) = \begin{cases} (b_i+1)x(b+\epsilon_i-\epsilon_{i+1}) + b_{n+i+1}x(b+\epsilon_{n+i}-\epsilon_{n+i+1}) & \text{si } i < n-1 \\ b_n(b_{n-1}+1)x(b-\epsilon_n+\epsilon_{n-1}) + b_{2n}x(b+\epsilon_{2n-1}-\epsilon_{2n}) & \text{si } i = n-1 \end{cases} \tag{6.3}$$

Lemme 6.4.3 *Soit $x = \sum_k \lambda_k x(b^k) \in M_0$ un vecteur de poids pour $\mathfrak{h}_\theta \oplus \mathfrak{h}_n$. Alors il existe k_0 et k_1 tels que*

$$x(b^{k_0}) = x(-1,\ldots,-1,b_n^{k_0},\ldots,b_{2n}^{k_0})$$

et

$$x(b^{k_1}) = x(b_1^{k_1},\ldots,b_{n+1}^{k_1},0,\ldots,0).$$

Démonstration. Notons que si b est admissible alors $b_1 < 0$. Soit i_1 un indice tel que $\lambda_{i_1} \neq 0$ et $b_1^{i_1}$ est maximal parmi les valeurs possibles des différents b_1^k intervenant dans l'expression de x. Supposons que $b_1^{i_1} \neq -1$. Alors en appliquant X_1 à $x(b^{i_0})$ on obtient grâce à l'equation (6.3) la somme des deux vecteurs :

$$(b_1^{i_1}+1)x(b^{i_1}+\epsilon_1-\epsilon_2) + b_{n+2}^{i_1}x(b^{i_1}+\epsilon_{n+1}-\epsilon_{n+2}).$$

Le premier morceau est un vecteur $x(b')$ tel que $b'_1 = b_1^{i_1}+1 > b_1^{i_1}$. Le deuxième morceau est de la forme $x(b'')$ avec $b''_1 = b_1^{i_1}$. Par hypothèse sur x, on a $X_1 \cdot x = 0$. Par maximalité de $b_1^{i_1}$, le vecteur $x(b')$ ne peut apparaître dans l'expression de $X_1 \cdot x$ que dans le premier morceau de $X_1 \cdot x(b^{i_1})$. Son coefficient doit donc être nul. Or, ce coefficient vaut $(b_1^{i_1}+1)$, non nul par hypothèse. On déduit de cette contradiction que $b_1^{i_1} = -1$.

Comme b est admissible, on doit aussi avoir $b_2 < 0$. Soit i_2 un indice tel que $\lambda_{i_2} \neq 0$, $b_1^{i_2} = -1$ et $b_2^{i_2}$ est maximal parmi les valeurs possibles des différents b_2^k intervenant dans l'expression de x et satisfaisant la condition $b_1^k = -1$. Le même raisonnement utilisant l'équation (6.3) conduit à $b_2^{i_2} = -1$.

Finalement, en appliquant successivement $X_3, \ldots, X_{n-1}$, on obtient un indice k_0 satisfaisant les conditions du lemme, i.e. $b_1^{k_0} = \cdots = b_{n-1}^{k_0} = -1$.

Si b est admissible, on a aussi $b_{2n} \geq 0$. Ainsi, pour trouver k_1, on raisonne de même en commençant avec l'action de X_{n-1} sur un vecteur $x(b^{j_1})$ tel que $\lambda_{j_1} \neq 0$ et $b_{2n}^{j_1}$ est minimal parmi les différents b_{2n}^k intervenant dans l'expression de x. Nous prouvons alors que nécessairement $b_{2n}^{j_1} = 0$. En appliquant successivement $X_{n-2}, \ldots, X_1$, on obtient par le même raisonnement un indice k_1 satisfaisant les conditions du lemme, i.e. $b_{n+2}^{k_1} = \cdots b_{2n}^{k_1} = 0$.

$\square$

Corollaire 6.4.4 *Soit k_0 et k_1 comme dans le lemme 6.4.3. Alors il existe des entiers c_n, c_{n+1}, c_{2n} avec $c_{2n} \geq 0$ tels que*

$$x(b^{k_0}) = x(-1, \ldots, -1, a_1 + c_n, a_2 + c_{n+1}, 0, \ldots, 0, c_{2n})$$

et

$$x(b^{k_1}) = x(-1 - c_1', -1, \ldots, -1, a_1 + c_n', a_2 + c_{n+1}', 0, \ldots, 0),$$

avec $c_n + c_{n+1} + c_{2n} = 0$, $c_1' = c_{2n}$, $c_n' = c_n + c_{2n}$ and $c_{n+1}' = -c_n$.

Démonstration. Posons $b_n^{k_0} = a_1 + c_n$, $b_{n+1}^{k_0} = a_2 + c_{n+1}$, $b_{n+i}^{k_0} = c_{n+i}$ pour $2 \leq i \leq n$. Posons alors $b_n^{k_1} = a_1 + c_n'$, $b_{n+1}^{k_1} = a_2 + c_{n+1}'$, $b_i^{k_1} = -1 - c_i'$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Ainsi, on a

$$b^{k_0} = (-1, \ldots, -1, a_1 + c_n, a_2 + c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots, c_{2n}),$$

$$b^{k_1} = (-1 - c_1', \ldots, -1 - c_{n-1}', a_1 + c_n', a_2 + c_{n+1}', 0, \ldots, 0).$$

Les deux vecteurs $x(b^{k_0})$ et $x(b^{k_1})$ doivent être des vecteurs admissibles et doivent avoir le même poids sous l'action des sous–algèbres de Cartan de $\mathfrak{a}$ (car elle commute avec $\mathfrak{b}$) et de $\mathfrak{b}$. Cela donne les équations suivantes

$$\begin{aligned} \text{admissibilité de } x(b^{k_0}): &\quad c_n + c_{n+1} + \ldots + c_{2n} = 0 \\ \text{admissibilité de } x(b^{k_1}): &\quad -(c_1' + \ldots + c_{n-1}') + c_n' + c_{n+1}' = 0 \end{aligned}$$

$$\text{poids sous } \mathfrak{h}_\theta \text{ de } x(b^{k_0}) \text{ et } x(b^{k_1}): \quad c_n - (c_{n+1} + \ldots + c_{2n}) = -(c_1' + \ldots + c_{n-1}') + c_n' - c_{n-1}'$$

$$\begin{array}{r} \text{poids de } x(b^{k_0}) \text{ et } x(b^{k_1}) \\ \text{sous } H_1, \ldots, H_{n-1} \end{array} : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} c_{n+1} - c_{n+2} & = & c_2' - c_1' + c_{n+1}' \\ c_{n+2} - c_{n+3} & = & c_3' - c_2' \\ & \vdots & \\ c_{2n-2} - c_{2n-1} & = & c_{n-1}' - c_{n-2}' \\ -c_n + c_{2n-1} - c_{2n} & = & -c_{n-1}' - c_n' \end{array} \right.$$

Après quelques calculs, nous trouvons que l'unique solution de ce système en les inconnues c'_i est

$$\begin{cases} c'_1 &= -c_n - c_{n+1} \\ c'_i &= -c_{n+i},\ 1 < i < n \\ c'_n &= c_{2n} + c_n \\ c'_{n+1} &= c'_1 + \ldots + c'_{n-1} - c'_n \end{cases}$$

En utilisant le fait que les vecteurs $x(b^{k_0})$ et $x(b^{k_1})$ sont admissibles, on déduit que nécessairement $c_{n+i} \geq 0$ pour $2 \leq i \leq n$ et $c'_j \geq 0$ pour $1 \leq j \leq n-1$. Ceci impose $c_{n+i} = c'_i = 0$ pour $2 \leq i \leq n-1$. En prenant en compte le fait que $c_n + c_{n+1} + \cdots + c_{2n} = 0$ par admissibilité de $x(b^{k_0})$, on obtient

$$c'_1 = c_{2n}, \quad c'_n = c_n + c_{2n}, \quad c'_{n+1} = -c_n \tag{6.4}$$

□

Dans la suite, nous écrirons

$$x(b^{k_0}) = x(-1, \ldots, -1, a_1 + b, a_2 - b - c, 0, \ldots, 0, c)$$

où b et c sont des entiers tels que $c \geq 0$. Cherchons à présent quels sont les vecteurs admissibles $x(b)$ ayant le même poids sous $\mathfrak{h}_\theta \oplus \mathfrak{h}_n$ que $x(b^{k_0})$. Nous avons le lemme :

Lemme 6.4.5 *Notons*

$$x := x(-1 - b_1, \ldots, -1 - b_{n-1}, a_1 + b_n, a_2 + b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots, b_{2n})$$

un vecteur admissible. Alors x a le même poids que $x(b^{k_0})$ sous l'action de $\mathfrak{h}_\theta \oplus \mathfrak{h}_n$ si et seulement si

$$\begin{cases} b_{n+i} &= b_i, \quad 1 \leq i < n \\ b_n &= b + b_1 + \cdots + b_{n-1} \\ b_{n+1} &= b_1 - (b + c) \\ b_{2n} &= c - (b_1 + \cdots + b_{n-1}) \end{cases}$$

Démonstration. Comme dans la preuve du corollaire 6.4.4, nous écrivons les équations obtenues en exprimant le fait que x doit être un vecteur admissible et que x et $x(b^{k_0})$ ont même poids sous l'action de $\mathfrak{h}_\theta$ et $\mathfrak{h}_n$:

$$-(b_1 + \cdots + b_{n-1}) + b_n + \cdots + b_{2n} = 0 \tag{6.5}$$

$$-(b_1 + \ldots + b_{n-1}) + b_n - (b_{n-1} + \cdots + b_{2n}) = 2b \tag{6.6}$$

$$\begin{cases} b_2 - b_1 + b_{n+1} - b_{n+2} &= -b - c \\ b_3 - b_2 + b_{n+2} - b_{n+3} &= 0 \\ &\vdots \\ b_{n-1} - b_{n-2} + b_{2n-2} - b_{2n-1} &= 0 \\ -b_{n-1} - b_n + b_{2n-1} - b_{2n} &= -b - c \end{cases} \tag{6.7}$$

Posons alors $\tilde{b}_i = b_i - b_{n+i}$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $\tilde{b}_n = b_n + b_{2n}$. Ecrivons les équations (6.5) et (6.7) dans les nouvelles variables $\tilde{b}_i$:

$$-(\tilde{b}_1 + \cdots + \tilde{b}_{n-1}) + \tilde{b}_n = 0$$
$$-(b_1 + \ldots + b_{n-1}) + b_n - (b_{n-1} + \cdots + b_{2n}) = 2b$$
$$\left\{\begin{array}{rcc} \tilde{b}_2 - \tilde{b}_1 & = & -b-c \\ \tilde{b}_3 - \tilde{b}_2 & = & 0 \\ & \vdots & \\ \tilde{b}_{n-1} - \tilde{b}_{n-2} & = & 0 \\ -\tilde{b}_{n-1} - \tilde{b}_n & = & -b-c \end{array}\right.$$

L'unique solution de ce système en les inconnues $\tilde{b}_i$ est $\tilde{b}_2 = \cdots = \tilde{b}_{n-1} = 0$, $\tilde{b}_1 = b + c$, $\tilde{b}_n = b + c$. Ainsi, nous avons

$$b_n + b_{2n} = c + b,\ b_{n+1} = b_1 - c - b,\ \text{ et } b_{n+i} = b_i \text{ pour } 2 \leq i \leq n-1.$$

En utilisant alors l'équation (6.6), on exprime les b_{n+i} pour $i \geq 0$ en les variables b_j pour $1 \leq j \leq n-1$, ce qui donne le lemme.

□

Corollaire 6.4.6 *Soit $x \in M_0$ un vecteur de poids sous $\mathfrak{h}_\theta \oplus \mathfrak{h}_n$. Alors il existe deux entiers b et c tels que $c \geq 0$ et*

$$x = \sum_{k_i \geq 0,\ |\underline{k}| \leq c} \lambda_{\underline{k}}\, x(-1-k_1, \ldots, -1-k_{n-1}, a_1 + b + |\underline{k}|,$$
$$a_2 - b - c + k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, c - |\underline{k}|),$$

où $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$, $|\underline{k}| = \sum_i k_i$ et $\lambda_{\underline{k}} \in \mathbb{C}$. Dans la suite, nous noterons ce x par $x(b,c)$.

Si $n > 2$, le poids sous $\mathfrak{h}_n$ de $x(b,c)$ est $(a_2 - b - c, 0, \ldots, 0, -1 - a_1 - b - c)$ et sous $\mathfrak{h}_\theta$ $a_1 - a_2 + 2b - (n-1)$. Si $n = 2$ le poids sous $\mathfrak{h}_n$ de $x(b,c)$ est $(-1 - a_1 + a_2 - 2(b+c))$ et sous $\mathfrak{h}_\theta$ $a_1 - a_2 + 2b - 1$.

Démonstration. Grâce au lemme 6.4.3 et au corollaire 6.4.4, on sait que $x = \sum_i \lambda_i\, x(b^i)$ et qu'il existe un indice i_0 tel que $b^{i_0} = (-1, \ldots, -1, a_1 + b, a_2 - b - c, 0, \ldots, 0, c)$ pour deux entiers b et c avec $c \geq 0$. Alors par le lemme 6.4.5 les autres $x(b^i)$ apparaissant dans l'expression de x sont de la forme $x(b^i) = x(-1-k_1, \ldots, -1-k_{n-1}, a_1 + b + (k_1 + \cdots + k_{n-1}), a_2 + k_1 - b - c, k_2, \ldots, k_{n-1}, c - (k_1 + \cdots + k_{n-1}))$. D'autre part, ces vecteurs doivent être admissible. De ce fait, nous devons avoir :

$$k_i \in \mathbb{N}, \quad \text{and } c - (k_1 + \cdots + k_{n-1}) \geq 0.$$

C'est là le corollaire.

□

Proposition 6.4.7 *Soit x comme dans le corollaire 6.4.6. Ecrivons*

$$x = \sum_{k_i \geq 0,\, |\underline{k}| \leq c} \lambda_{\underline{k}}\, x(-1-k_1, \dots, -1-k_{n-1}, a_1+b+|\underline{k}|,$$
$$a_2-b-c+k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, c-|\underline{k}|),$$

pour des entiers b and c (≥ 0). Alors $\lambda_{\underline{k}} = \kappa(\underline{k})\lambda_{\underline{0}}$, où $\lambda_{\underline{0}} \in \mathbb{C}$ et

$$\kappa(\underline{k}) = \binom{k_1+k_2}{k_1} \cdots \binom{k_1+\cdots+k_{n-1}}{k_1+\cdots+k_{n-2}} \times$$
$$\frac{\prod_{j=1}^{k_1+\cdots+k_{n-1}}(c+1-j)}{(k_1+\cdots+k_{n-1})!\prod_{j=1}^{k_1+\cdots+k_{n-1}}(a_1+b+j)}.$$

Réciproquement si

$$x = \sum_{k_i \geq 0,\, |\underline{k}| \leq c} \lambda_{\underline{k}}\, x(-1-k_1, \dots, -1-k_{n-1}, a_1+b+|\underline{k}|,$$
$$a_2-b-c+k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, c-|\underline{k}|)$$

avec $\lambda_{\underline{k}} = \kappa(\underline{k})\lambda_{\underline{0}}$, alors $x \in M_0$.

Démonstration. D'après l'équation (6.3), on a

$$X_1 \cdot x = \sum_{\underline{k}} \lambda_{\underline{k}} \Big[-k_1 x(-k_1, -2-k_2, -1-k_3, \dots, -1-k_{n-1}, a_1+b+|\underline{k}|,$$
$$a_2-b-c+k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, c-|\underline{k}|)$$
$$+ k_2 x(-1-k_1, \dots, -1-k_{n-1}, a_1+b+|\underline{k}|,$$
$$a_2-b-c+k_1+1, k_2-1, k_3, \dots, k_{n-1}, c-|\underline{k}|)\Big]. \quad (6.8)$$

Soit $\underline{k} \in \{(k_i)_{1\leq i<n} \;:\; k_i \geq 0 \text{ and } \sum_i k_i \leq c\}$. Supposons $k_1 > 0$. Soit $\underline{k}' = (k'_i)_{1\leq i\leq n-1}$ tel que $k'_1 = k_1-1$, $k'_2 = k_2+1$, et $k'_i = k_i$ sinon. Cherchons le coefficient de

$$x(-k_1, -2-k_2, -1-k_3, \dots, -1-k_{n-1}, a_1+b+|\underline{k}|,$$
$$a_2-b-c+k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, c-|\underline{k}|)$$

dans l'expression de $X_1 \cdot x$. Nous trouvons

$$-k_1\lambda_{\underline{k}} + (k_2+1)\lambda_{\underline{k}'}.$$

Comme $x \in M_0$, on a $X_1 \cdot x = 0$. Ainsi on doit avoir $-k_1\lambda_{\underline{k}} + (k_2+1)\lambda_{\underline{k}'} = 0$, i.e. $\lambda_{\underline{k}} = \frac{k_2+1}{k_1}\lambda_{\underline{k}'}$. Par induction on trouve $\lambda_{\underline{k}} = \binom{k_1+k_2}{k_1}\lambda_{\underline{k}^1}$ où $\underline{k}^1 = (0, k_1 + k_2, k_3, \ldots, k_{n-1})$. On cherche ensuite le coefficient de

$$x(-1, -k_2-k_1, -2-k_3, -1-k_4, \ldots, -1-k_{n-1}, a_1+b+|\underline{k}|,$$
$$a_2-b-c+k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, c-|\underline{k}|)$$

dans $X_2 \cdot x(\underline{k}^1)$. Cela permet alors d'exprimer $\lambda_{\underline{k}^1}$ grâce à $\lambda_{\underline{k}^2}$ où $\underline{k}^2 = (0, 0, k_1+k_2+k_3, k_4 \ldots, k_{n-1})$. Plus précisement, on trouve $\lambda_{\underline{k}^1} = \binom{k_1+k_2+k_3}{k_1+k_2}\lambda_{\underline{k}^2}$. En utilisant ainsi successivement l'action de $X_3, \ldots, X_{n-1}$ sur x, on exprime $\lambda_{\underline{k}}$ grâce $\lambda_{\underline{0}}$.

La réciproque est claire.

□

A partir de maintenant, nous noterons $x(b,c)$ le vecteur de M_0 obtenu par la proposition 6.4.7 avec $\lambda_{\underline{0}} = 1$. Nous noterons également

$$x_{\underline{k}}(b,c) = x(-1-k_1, \ldots, -1-k_{n-1}, a_1+b+|\underline{k}|, a_2-b-c+k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, c-|\underline{k}|)$$

oú $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_{n-1})$ avec $k_i \in \mathbb{N}$ et $|\underline{k}| = k_1 + \cdots + k_{n-1} \leq c$.

Corollaire 6.4.8 *Pour $2 \leq i \leq n-2$ on a $X_{-i} \cdot x(b,c) = 0$.*

Démonstration. De l'équation (6.1b), on conclut que X_{-i} agit trivialement sur $x_{\underline{k}}(b,c)$ si et seulement si $k_i + k_{i+1} = 0$. Si l'action est non triviale, on a $X_{-i} \cdot x_{\underline{k}}(b,c) = -k_{i+1}x_{\underline{k}'}(b,c) + k_i x_{\underline{k}''}(b,c)$ où

$$k'_j = \begin{cases} k_j & \text{si } j \neq i \text{ ou } i+1 \\ k_i - 1 & \text{si } j = i \\ k_{i+1}+1 & \text{si } j = i+1 \end{cases},$$

et

$$k''_j = \begin{cases} k_j & \text{si } j \neq n+i \text{ ou } n+i+1 \\ k_{n+i} - 1 & \text{si } j = n+i \\ k_{n+i+1}+1 & \text{si } j = n+i+1 \end{cases}.$$

On regarde alors les occurences de $x_{\underline{k}'}(b,c)$ dans $X_{-i} \cdot x(b,c)$. Il apparaît dans l'expression de $X_{-i} \cdot x_{\underline{k}}(b,c)$ comme nous l'avons déjà remarqué ci–dessus et dans le deuxième terme de l'expression de $X_{-i} \cdot x_{\underline{l}}(b,c)$ où

$$l_j = \begin{cases} k_j & \text{si } j \neq n+i \text{ ou } n+i+1 \\ k_{n+i} + 1 & \text{si } j = n+i \\ k_{n+i+1}-1 & \text{si } j = n+i+1 \end{cases}.$$

Ainsi le coefficient de $x_{\underline{k}'}(b,c)$ dans $X_{-i}\cdot x(b,c)$ est $(-k_{i+1})\lambda_{\underline{k}}+l_i\lambda_{\underline{l}}$. En utilisant l'expression de $\lambda_{\underline{k}}$ donnée dans la proposition 6.4.7, on conclut que ce coefficient est nul.

□

6.4.3 Une correspondance de Howe pour N_{a_1,a_2}

Cas générique

Pour énoncer et prouver une correspondance de Howe pour le module $N := N_{a_1,a_2}$ nous avons besoin de calculer l'action de $\mathfrak{a}$ sur M_0.

Lemme 6.4.9 *Soient b et c deux entiers avec $c\geq 0$. Alors*

1. *$X\cdot x(b,c)$ est un élément non nul de M_0 égal à un multiple de $x(b-1,c+1)$.*
2. *Le vecteur $Y\cdot x(b,c)$ est non nul si et seulement si $c(a_1-a_2+2b+c-(n-2))\neq 0$. Dans ce cas, le vecteur est égal à un multiple de $x(b+1,c-1)$.*

Démonstration. Comme l'action de $\mathfrak{a}$ commute avec l'action de $\mathfrak{b}$, $Y\cdot x(b,c)$ et $X\cdot x(b,c)$ sont deux vecteurs de M_0. Posons $b'=b+1$ et $c'=c-1$. Via le lemme 6.4.2, on a :

$$\begin{aligned}
&Y\cdot x(b,c)=\\
&\sum\lambda_{\underline{k}}(a_2-b'-c'+k_1)(-k_1)x(-k_1,-1-k_2,\dots,-1-k_{n-1},a_1+b'+|\underline{k}|-1,\\
&\qquad a_2-b'-c'+k_1-1,k_2,\dots,k_{n-1},c'-|\underline{k}|+1)\\
&\quad+\sum_{i=2}^{n-2}\sum\lambda_{\underline{k}}(-k_i)^2x(-1-k_1,-1-k_2,\dots,-1-k_{i-1},\\
&\qquad -k_i,-1-k_{i+1},\dots,-1-k_{n-1},a_1+b'+|\underline{k}|-1,\\
&\qquad a_2-b'-c'+k_1,k_2,\dots,k_{i-1},k_i-1,k_{i+1},\dots,k_{n-1},c'-|\underline{k}|+1)\\
&\quad+\sum\lambda_{\underline{k}}(c'+1-|\underline{k}|)x(-1-k_1,\dots,-1-k_{n-1},a_1+b'+|\underline{k}|,\\
&\qquad a_2-b'-c'+k_1,k_2,\dots,k_{n-1},c'-|\underline{k}|)
\end{aligned}\tag{6.9}$$

Comme $Y\cdot x(b,c)\in M_0$, ce doit être une combinaison linéaire de $x(b'',c'')$. Mais chaque vecteur $x(b'',c'')$ contient un vecteur de la forme $x_{\underline{0}}(b'',c'')=x(-1,\dots,-1,a_1+b'',a_2-b''-c'',0,\dots,0,c'')$. Le seul vecteur de cette forme dans l'expression de $Y\cdot x(b,c)$ est $x_{\underline{0}}(b',c')$. Ceci prouve que si $Y\cdot x(b,c)$ est non nul alors c'est un multiple de $x(b',c')$. Pour savoir quand ce vecteur est nul, il suffit donc de calculer le coefficient de $x_{\underline{0}}(b', c')$ dans l'équation ci–dessus. La première somme donne une contribution égale à $-(a_2 - b - c + 1)\lambda_{\underline{\epsilon_1}}$; la deuxième $\sum_{i=2}^{n-2} -\lambda_{\underline{\epsilon_i}}$ et la dernière c (rappelons ici que le coefficient $\lambda_{\underline{0}}$ de $x(b, c)$ vaut 1 par convention). Grâce à la proposition 6.4.7, on trouve une contribution totale égale à :

$$\frac{c}{a_1 + b + 1}(a_1 - a_2 + 2b + c - (n - 2))\lambda_{\underline{0}}.$$

On utilise la même méthode pour évaluer $X \cdot x(b, c)$. Le coefficient de $x_{\underline{0}}(b - 1, c + 1)$ dans l'expression de $X \cdot x(b, c)$ est $a_1 + b$, qui n'est jamais nul car $a_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ par hypothèse. Cela donne le lemme.

□

Corollaire 6.4.10 *Supposons que $a_1 - a_2 \notin \mathbb{Z}$. Alors pour tous les entiers b et c avec $c \geq 0$, le $\mathfrak{b}$–module engendré par $x(b, c)$ est un module irréductible de plus haut poids.*

Démonstration. Le $\mathfrak{b}$–module $\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b, c)$ engendré par $x(b, c)$ est un module de plus haut poids et est donc indecomposable. Il est irréductible si et seulement si $x(b, c)$ est l'unique vecteur de plus haut poids dans $\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b, c)$, à un scalaire multiplicatif près. Tout autre vecteur de plus haut poids dans $\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b, c)$ serait de la forme $x(b', c')$. Mais les vecteurs $x(b, c)$ et $x(b', c')$ ont doivent aussi avoir même poids sous $\mathfrak{h}_\theta$. En utilisant le poids sous $\mathfrak{h}_\theta$ des vecteurs de M_0 donné par le corollaire 6.4.6, on trouve $b' = b$. Si $x(b', c') \in \mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b, c)$, il existe un vecteur $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{b}^-)$ tel que $u \cdot x(b, c) = x(b, c')$. Ceci implique $c \leq c'$ car les vecteurs X_{-i} peuvent seulement augmenter la $2n$–ième composante des vecteurs admissibles. Donc si $c \neq c'$, on a $c < c'$. Ensuite notre hypothèse $a_1 - a_2 \notin \mathbb{Z}$ et le lemme 6.4.9, entraîne $Y^{c+1} \cdot x(b, c) = 0$ et $Y^{c+1} \cdot x(b', c') \neq 0$. Comme $Y \in \mathfrak{a}$ commute avec $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{b})$, on devrait avoir $uY^{c+1}x(b, c) = Y^{c+1}x(b, c')$. Ceci est une contradiction.

□

Théorème 6.4.11 *Supposons que $a_1 - a_2 \notin \mathbb{Z}$. Alors nous avons la décomposition suivante de N_{a_1,a_2} comme $\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}$–module :*

1. *Si $n = 2$,*

$$N_{a_1,a_2} = \oplus_{b\in\mathbb{Z}} L(-1 - a_1 + a_2 - 2b) \otimes L(a_1 - a_2 + 2b - 1).$$

2. *Si $n > 2$,*

$$N_{a_1,a_2} = \oplus_{b\in\mathbb{Z}} L(a_2 - b, 0, \ldots, 0, -1 - a_1 - b) \otimes L(a_1 - a_2 + 2b - (n - 1)).$$

Démonstration. On sait par la proposition 6.4.1 que le module N_{a_1,a_2} est localement fini sous $\mathfrak{l}_\theta^+$. Donc aussi sous $\mathfrak{b}^+$. Donc pour tout vecteur v dans N_{a_1,a_2} il y a un élément u de $\mathcal{U}(\mathfrak{b}^+)$ tel que $u \cdot v$ est dans M_0. D'après le corollaire 6.4.10, on sait que tout vecteur de poids de M_0 engendre un $\mathfrak{b}$–module irréductible de plus haut poids. Donc $N_{a_1,a_2} = \oplus_{b\in\mathbb{Z},c\in\mathbb{N}} \mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,c)$ est la décomposition de N_{a_1,a_2} en $\mathfrak{b}$–modules irréductibles. L'hypothèse sur $a_1 - a_2$ assure que $Y \cdot x(b,c) = 0$ si et seulement si $c = 0$. Ainsi nous avons la chaîne suivante de $\mathfrak{b}$–modules :

$$0 \rightharpoonup \mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,0) \rightleftharpoons U(\mathfrak{b})x(b-1,1) \rightleftharpoons \cdots \rightleftharpoons U(\mathfrak{b})x(b-k,k) \rightleftharpoons \cdots ,$$

où $\rightharpoonup$ désigne l'action de X et $\leftharpoondown$ l'action de Y. Grâce au lemme 6.4.9, on conclut que cette chaîne est un $\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}$–module irréductible, isomorphe d'après le corollaire 6.4.6 à $L(-1 - a_1 + a_2 - 2b) \otimes L(a_1 - a_2 + 2b - 1)$ si $n = 2$ et à $L(a_2 - b, 0, \ldots, 0, -1 - a_1 - b) \otimes L(a_1 - a_2 + 2b - (n-1))$ si $n > 2$.

□

Une conséquence de ce théorème est la correspondance de type Howe suivante dans le cas ″générique″ $a_1 - a_2 \notin \mathbb{Z}$:

$$L(-1 - a_1 + a_2 - 2b) \leftrightarrow L(a_1 - a_2 + 2b - 1), \quad \text{si } n = 2,$$

$$L(a_2 - b, 0, \ldots, 0, -1 - a_1 - b) \leftrightarrow L(a_1 - a_2 + 2b - (n-1)), \quad \text{si } n > 2.$$

Cas non générique

Considérons à présent le cas non générique $a_1 - a_2 \in \mathbb{Z}$. D'après le lemme 6.4.9, on a $Y \cdot x(b,c) = 0$ si et seulement si $c = 0$ ou $a_1 - a_2 + 2b + c = n - 2$ et $X \cdot x(b,c)$ est toujours non nul. On sait aussi que le $\mathfrak{a}$–module engendré par $x(b,0)$ est un module de plus haut poids $a_1 - a_2 + 2b - (n-1)$. Comme espace vectoriel, ce module est $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{C}x(b-k,k)$. Le vecteur $x(b-k,k)$ pour $k > 0$ est un vecteur de plus haut poids pour $Y \in \mathfrak{a}$ si et seulement si $a_1 - a_2 + 2b - k = n - 2$. Ainsi il y a au plus un k pour lequel $x(b-k,k)$ est un vecteur de plus haut poids pour $\mathfrak{a}$. Nous avons donc montré le

Corollaire 6.4.12 *Supposons que $a_1 - a_2 \in \mathbb{Z}$. Soit $b \in \mathbb{Z}$.*

1. *Si $a_1 - a_2 + 2b - (n-2) \leq 0$ alors le $\mathfrak{a}$–module engendré par $x(b,0)$ est irréductible.*
2. *Si $a_1 - a_2 + 2b - (n-2) > 0$, alors le $\mathfrak{a}$–module engendré par $x(b,0)$ est de longueur 2 :*

$$\mathcal{U}(\mathfrak{a})x(b,0) \supset \mathcal{U}(\mathfrak{a})x(b-(a_1-a_2+2b-(n-2)), a_1-a_2+2b-(n-2)) \supset \{0\},$$

where $\mathcal{U}(\mathfrak{a})x(b-(a_1-a_2+2b-(n-2)), a_1-a_2+2b-(n-2))$ *est un* $\mathfrak{a}$*–module irréductible de plus haut poids* $a_1-a_2+2b-(n-1)$ *et le quotient*

$$\mathcal{U}(\mathfrak{a})x(b,0)/\mathcal{U}(\mathfrak{a})x(b-(a_1-a_2+2b-(n-2)), a_1-a_2+2b-(n-2))$$

est un $\mathfrak{a}$*–module irréductible de plus haut poids* $a_1-a_2+2b-(n-1)$*. Dans ce cas, le* $\mathfrak{a}$*–module* $\mathcal{U}(\mathfrak{a})x(b,0)$ *est isomorphe au module de Verma* $V(a_1-a_2+2b-(n-1))$ *de plus haut poids* $a_1-a_2+2b-(n-1)$*.*

En reprenant la méthode du corollaire 6.4.10, on montre le résultat suivant :

Corollaire 6.4.13 *Supposons que* $a_1-a_2\in\mathbb{Z}$*. Soit* $b\in\mathbb{Z}$ *tel que* $a_1-a_2+2b-(n-2)\geq 0$*. Alors pour tout* $c\in\mathbb{N}$*, le* $\mathfrak{b}$*–module engendré par* $x(b,c)$ *est un* $\mathfrak{b}$*–module irréductible de plus haut poids* $(a_2-b-c, 0, \cdots, 0, -1-a_1-b-c)$*.*

Démonstration. La preuve du corollaire 6.4.10 peut aussi être appliqué à ce cas car l'hypothèse sur b et le corollaire 6.4.12 assure que $Y\cdot x(b,c)$ est non nul dès que $c>0$.

□

En général, le même argument montre que le seul vecteur $x(b,c')$ qui peut appartenir au $\mathfrak{b}$–module engendré par $x(b,c)$ doit satisfaire $c'>c$ et $a_1-a_2+2b+c+c'=n-2$. Dans ce cas, nous avons :

Proposition 6.4.14 *Soit* $b\in\mathbb{Z}$ *tel que* $a_1-a_2+2b-(n-2)<0$*. Soit* $c\in\mathbb{N}$ *tel que* $a_1-a_2+2b+c-(n-2)=0$*. Alors le* $\mathfrak{b}$*–module* $\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,c)$ *est contenu dans le* $\mathfrak{b}$*–module* $\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,0)$*. De plus, le* $\mathfrak{b}$*–module* $\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,0)$ *est de longueur* 2 *et a pour série de composition :*

$$\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,0)\supset\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,c)\supset\{0\}.$$

Démonstration. Pour prouver le premier point, il suffit de trouver $u\in\mathcal{U}(\mathfrak{b})$ tel que $u\cdot x(b,0)=\alpha x(b,c)$, avec $\alpha\in\mathbb{C}^*$. Définissons $Z'\in\mathfrak{b}$ par $Z'=E_{n,1}+E_{2n,n+1}$ et

$$Z''=\sum_{i=1}^{n-2}\left(E_{i+1,1}+E_{n+i+1,n+1}\right)\left(E_{n,i+1}+E_{2n,n+i+1}\right)\in\mathcal{U}(\mathfrak{b}).$$

Remarquons que $[Z',Z'']=0$. Pour $\lambda\in\mathbb{C}$, on pose $Z_\lambda=Z'+\lambda Z''$. Alors $[Z_\lambda, Z_{\lambda'}]=0$ pour tout $\lambda,\lambda'\in\mathbb{C}$. Nous utiliserons par la suite les constantes de structure données par :

$$\begin{aligned}
[X_1, Z_\lambda] =& \left(E_{n,2} + E_{2n,n+2}\right)\left(\lambda(n-2) - 1 + \lambda H_1\right) \\
& - \lambda \sum_{i=2}^{n-2} \left(E_{n,i+1} + E_{2n,n+i+1}\right)\left(E_{i+1,2} + E_{n+i+1,n+2}\right), \\
[X_i, Z_\lambda] =& 0, \quad \text{for } 2 \leq i \leq n-2, \\
[X_{n-1}, Z_\lambda] =& \left(E_{n-1,1} + E_{2n-1,n+1}\right)\left(1 + \lambda H_{n-1}\right) \\
& + \lambda \sum_{i=1}^{n-3} \left(E_{i+1,1} + E_{n+i+1,n+1}\right)\left(E_{n-1,i+1} + E_{2n-1,n+i+1}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[E_{n,2} + E_{2n,n+2}, Z_\lambda] =& \lambda Z' \left(E_{n,2} + E_{2n,n+2}\right), \\
[H_1, Z_\lambda] =& - Z_\lambda, \\
[E_{i+1,2} + E_{n+i+1,n+2}, Z_\lambda] =& 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[E_{n-1,1} + E_{2n-1,n+1}, Z_\lambda] =& - \lambda Z' \left(E_{n-1,1} + E_{2n-1,n+1}\right), \\
[H_{n-1}, Z_\lambda] =& - Z_\lambda, \\
[E_{n-1,i+1} + E_{2n-1,n+i+1}, Z_\lambda] =& 0.
\end{aligned}$$

Pour $1 \leq i \leq c$, posons $\lambda_i = \frac{1}{a_1+b+i}$ (notons que $a_1 + b + i$ est non nul car $a_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$). Posons aussi $Z_i = Z_{\lambda_i}$ et $Z = Z_1 \cdots Z_c$. Posons enfin $x = Z \cdot x(b, 0)$. Montrons que x est un vecteur de plus haut poids pour $\mathfrak{b}$. Nous savons déjà que $x(b, 0)$ est un vecteur de plus haut poids sous $\mathfrak{b}$. Il reste donc à montrer que $ad(X_i)(Z) \cdot x(b, 0) = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Grâce aux relations ci–dessus, on vérifie que $ad(X_i)(Z) = 0$ pour $2 \leq i \leq n-2$. Calculons $ad(X_1)(Z) \cdot x(b, 0)$. On obtient :

$$ad(X_1)(Z) \cdot x(b,0) = [X_1, Z_1] Z_2 \cdots Z_c \cdot x(b,0) + \cdots + Z_1 \cdots Z_{c-1} [X_1, Z_c] \cdot x(b,0).$$

Dans l'expression de $[X_1, Z_i]$, on trouve les vecteurs $(E_{k+1,2} + E_{n+k+1,n+2})$. Mais nous avons vu que ces vecteurs commutent avec tous les Z_j. De plus, grâce au corollaire 6.4.8, on vérifie que $(E_{k+1,2} + E_{n+k+1,n+2})$ agit trivialement sur $x(b, 0)$. Donc la seule partie dans l'expression de $[X_1, Z_i]$ qui peut donner une contribution non nulle dans l'expression de $ad(X_1)(Z) \cdot x(b, 0)$ est $(E_{n,2} + E_{2n,n+2})\,(\lambda_i(n-2) - 1 + \lambda_i H_1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
& ad(X_1)(Z) \cdot x(b,0) = \\
& \qquad \left(E_{n,2} + E_{2n,n+2}\right)\left(\lambda_1(n-2) - 1 + \lambda_1 H_1\right) Z_2 \cdots Z_c \cdot x(b,0) \\
& \quad + \cdots + Z_1 \cdots Z_{c-1} \left(E_{n,2} + E_{2n,n+2}\right)\left(\lambda_c(n-2) - 1 + \lambda_c H_1\right) \cdot x(b,0).
\end{aligned}$$

A l'aide des calculs effectués plus haut, on obtient :

$$H_1 Z_k \cdots Z_c = -(c+1-k) Z_k \cdots Z_c + Z_k \cdots Z_c H_1.$$

Donc on a

$$\begin{aligned} ad(X_1)(Z) \cdot x(b,0) =& Z_2 \cdots Z_c \left(\lambda_1(n-2) - 1 + \lambda_1 H_1 - (c-1)\lambda_1\right) \cdot x(b,0) \\ & + \cdots + Z_1 \cdots Z_{c-1} \left(\lambda_c(n-2) - 1 + \lambda_c H_1\right) \cdot x(b,0). \end{aligned}$$

Or, d'après le corollaire 6.4.6, on a $H_1 \cdot x(b,0) = (a_2 - b)x(b,0)$. En utilisant la définition de c, on conclut que $(\lambda_k(n-2) - 1 + \lambda_k H_1 - (c-k)\lambda_k) \cdot x(b,0) = 0$, impliquant à son tour $ad(X_1)(Z) \cdot x(b,0) = 0$.

Comme $[Z_\lambda, Z_{\lambda'}] = 0$, on peut aussi écrire $Z = Z_c \cdots Z_1$. Calculons $ad(X_{n-1})(Z) \cdot x(b,0)$ en utilisant la même méthode que ci–dessus. On prouve alors que $ad(X_{n-1})(Z) \cdot x(b,0) = 0$. Ainsi $Z \cdot x(b,0)$ est un vecteur de plus haut poids pour $\mathfrak{b}$ (notons que $Z \cdot x(b,0)$ est un bien un vecteur de poids car Z est un vecteur de poids de $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$).

Il reste à montrer que $Z \cdot x(b,0) \neq 0$. Calculons alors le coefficient de $x_{\underline{0}}(b,c)$ dans l'expression de $Z \cdot x(b,0)$. Nous avons vu que Z' commute avec Z''. Donc Z est un polynôme homogène de degré c en les deux variables Z' et Z''. Remarquons que Z'' ne peut pas augmenter la $2n$–ième composante des vecteurs admissibles. Donc le seul monôme dans l'expression de Z qui peut donner le vecteur admissible $x_{\underline{0}}(b,c)$ lorsque l'on calcule son action sur $x(b,0)$ est Z'^c, dont le coefficient dans le polynôme Z est 1. Après quelques calculs, on trouve que le coefficient de $x_{\underline{0}}(b,c)$ dans $Z \cdot x(b,0)$ est $(a_2-b)(a_2-b-1)\cdots(a_2-b-(c-1))$. Ce coefficient est non nul car $a_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Ainsi grâce à la proposition 6.4.7, on conclut que $Z \cdot x(b,0)$ est un multiple non nul de $x(b,c)$.

Notre choix pour l'entier c et le lemme 6.4.9 implique que $Y \cdot x(b, c+k) \neq 0$ pour $k > 0$. On peut alors utiliser la même preuve que dans le corollaire 6.4.10 pour montrer que $\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,c)$ est un $\mathfrak{b}$–module irréductible. Ainsi le $\mathfrak{b}$–module $\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,0)$ est un module de plus haut poids (contenant le $\mathfrak{b}$–module irréductible $\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,c)$), qui a donc une série de composition de longueur finie constituée de modules de plus haut poids. Mais nous avons remarqué que $\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,0)$ ne peut contenir d'autres vecteurs de plus haut poids que les combinaisons linéaires de $x(b,0)$ et $x(b,c)$ (nous l'avons remarqué juste avant l'énoncé de cette proposition). De ceci nous concluons que

$$\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,0) \supset \mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,c) \supset \{0\}$$

est la série de composition de $\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,0)$.

□

Nous pouvons à présent énoncer une correspondance de type Howedans le cas non générique :

Théorème 6.4.15 *Supposons que $a_1 - a_2 \in \mathbb{Z}$ et $n > 2$. Soit $b \in \mathbb{Z}$. Alors on a la correspondance suivante :*
- *Si $a_1 - a_2 + 2b - (n-2) = 0$, alors $\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,0)$ est un $\mathfrak{b}$–module irréductible isomorphe à $L(a_2 - b, 0, \ldots, 0, -1 - a_1 - b)$ et on a $L(a_2 - b, 0, \ldots, 0, -1 - a_1 - b) \leftrightarrow L(-1)$.*
- *Si $a_1 - a_2 + 2b - (n-2) > 0$, alors $\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,0)$ est un $\mathfrak{b}$–module irréductible isomorphe à $L(a_2 - b, 0, \ldots, 0, -1 - a_1 - b)$ et on a $L(a_2 - b, 0, \ldots, 0, -1 - a_1 - b) \leftrightarrow V(a_1 - a_2 + 2b - (n-1))$.*
- *Si $a_1 - a_2 + 2b - (n-2) < 0$, alors $\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,0)$ est un $\mathfrak{b}$–module indécomposable de longueur 2 et on a $\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,0) \leftrightarrow L(a_1 - a_2 + 2b - (n-1))$.*

Démonstration. C'est une conséquence des corollaires 6.4.12 et 6.4.13 et de la proposition 6.4.14.

□

Théorème 6.4.16 *Supposons que $a_1 - a_2 \in \mathbb{Z}$ et $n = 2$. Soit $b \in \mathbb{Z}$. Alors on a la correspondance suivante :*
- *Si $a_1 - a_2 + 2b = 0$, alors $\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,0)$ est un $\mathfrak{b}$–module irréductible isomorphe à $L(-1)$ et on a $L(-1) \leftrightarrow L(-1)$.*
- *Si $a_1 - a_2 + 2b > 0$, alors $\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,0)$ est un $\mathfrak{b}$–module irréductible isomorphe à $L(a_2 - a_1 - 2b - 1)$ et on a $L(a_2 - a_1 - 2b - 1) \leftrightarrow V(a_1 - a_2 + 2b - 1)$.*
- *Si $a_1 - a_2 + 2b < 0$, alors $\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,0)$ est un $\mathfrak{b}$–module indécomposable de longueur 2 isomorphe à $V(a_2 - a_1 - 2b - 1)$ et on a $V(a_2 - a_1 - 2b - 1) \leftrightarrow L(a_1 - a_2 + 2b - 1)$.*

Démonstration. C'est une conséquence des corollaires 6.4.12 et 6.4.13 et de la proposition 6.4.14.

□

Remarquons que dans les deux cas, nous avons obtenu une correspondance des caractères infinitésimaux. Donnons à présent une autre interprétation du théorème 6.4.15. Tout d'abord, nous avons obtenu la décomposition suivante de N_{a_1,a_2} comme $\mathfrak{b}$–module :

$$N_{a_1,a_2} = \sum_{b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{N}} \mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,c).$$

Nous avons aussi vu que $\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,c)$ est soit un module irréductible soit un module indécomposable de longueur 2. Considérons alors le semisimplifié $N^s_{a_1,a_2}$ de N_{a_1,a_2} obtenu en remplaçant les $\mathcal{U}(\mathfrak{b})x(b,c)$ non irréductibles par leurs facteurs de composition. L'espace $N^s_{a_1,a_2}$ est encore un $\mathfrak{b}$–module (mais plus un $\mathfrak{g}$–module) et nous avons la décomposition suivante comme $\mathfrak{b}$–module :

$$N^s_{a_1,a_2} = \bigoplus_{b\in\mathbb{Z},c\in\mathbb{N}} L(a_2 - b - c, 0, \ldots, 0, -1 - a_1 - b - c).$$

Il est clair que $N^s_{a_1,a_2}$ est stable par l'action de $\mathfrak{a}$ induite par l'action $\mathfrak{a}$ sur N_{a_1,a_2}. Le théorème 6.4.15 conduit à la correspondance de type Howe suivante pour le $\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}$–module $N^s_{a_1,a_2}$:

- Si $a_1 - a_2 + 2b - (n-2) = 0$, alors on a $L(a_2 - b, 0, \ldots, 0, -1 - a_1 - b) \leftrightarrow L(-1)$.
- Si $a_1 - a_2 + 2b - (n-2) > 0$, alors on a $L(a_2 - b, 0, \ldots, 0, -1 - a_1 - b) \leftrightarrow V(a_1 - a_2 + 2b - (n-1))$.
- Si $a_1 - a_2 + 2b - (n-2) < 0$, alors on a $L(a_2 - b, 0, \ldots, 0, -1 - a_1 - b) \leftrightarrow L(a_1 - a_2 + 2b - (n-1))$.

Notons que dans cette correspondance certains $\mathfrak{a}$–modules ne sont pas irréductibles. On peut donc considérer le semisimplifié $N^{ss}_{a_1,a_2}$ de $N^s_{a_1,a_2}$ (que nous appelons le bi–semisimplifié de N_{a_1,a_2}). Pour ce module, on obtient la correspondance suivante :

- Si $a_1 - a_2 + 2b - (n-2) = 0$, alors on a $L(a_2 - b, 0, \ldots, 0, -1 - a_1 - b) \leftrightarrow L(-1)$.
- Si $a_1 - a_2 + 2b - (n-2) > 0$, alors on a $L(a_2 - b, 0, \ldots, 0, -1 - a_1 - b) \leftrightarrow L(a_1 - a_2 + 2b - (n-1)) \oplus L(-(a_1 - a_2 + 2b - (n-3))$.
- Si $a_1 - a_2 + 2b - (n-2) < 0$, alors on a $L(a_2 - b, 0, \ldots, 0, -1 - a_1 - b) \leftrightarrow L(a_1 - a_2 + 2b - (n-1))$.

Notons que ce n'est plus une correspondance bijective. On peut aussi donner une interprétation du théorème 6.4.16 de la même manière. La correspondance "finale" dans le "bi–semisimplifié" de N_{a_1,a_2} est dans ce cas la suivante :

- Si $a_1 - a_2 + 2b = 0$, alors on a $L(-1) \leftrightarrow L(-1)$.
- Si $a_1 - a_2 + 2b > 0$, alors on a $L(a_2 - a_1 - 2b - 1) \leftrightarrow L(a_1 - a_2 + 2b - 1) \oplus L(-(a_1 - a_2 + 2b + 1))$.
- Si $a_1 - a_2 + 2b < 0$, alors on a $L(a_2 - a_1 - 2b - 1) \leftrightarrow L(a_1 - a_2 + 2b - 1)$.

Annexe A

Constantes de structure

Dans cette annexe nous allons expliciter certaines constantes de structures dans les algèbres de type A et C. Les notations des racines suit celle de Bourbaki [5].

A.1 Cas des algèbres de type A

On considère ici $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, que l'on identifie aux matrices complexes de taille $n \times n$ et de trace nulle. On note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire dont le seul coefficient non nul est le coefficient en position (i, j) dont la valeur est 1. On peut donc prendre comme base de $\mathfrak{sl}_n$ les matrices $E_{i,j}$ pour $1 \leq i \neq j \leq n$ et $E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Le sous–espace de $\mathfrak{sl}_n$ de poids $e_i + \cdots + e_j$ pour $i \leq j$ est alors la droite $\mathbb{C}E_{i,j+1}$. L'espace de poids opposé est donné par la droite engendrée par la transposée. Le crochet de $\mathfrak{sl}_n$ est le commutateur de $M_n(\mathbb{C})$. Ainsi, on a par exemple pour $k < j$:

$$[X_{e_i+\cdots+e_j}, X_{e_{j+1}+\cdots+e_k}] = [E_{i,j+1}, E_{j+1,k+1}] = E_{i,k+1} = X_{e_i+\cdots+e_k},$$

$$[X_{e_i+\cdots+e_j}, X_{-(e_i+\cdot+e_k)}] = [E_{i,j+1}, E_{k+1,i}] = -E_{k+1,j+1} = -X_{e_{k+1}+\cdots+e_j}.$$

On peut donc calculer facilement toutes les constantes de structure de $\mathfrak{sl}_n$.

A.2 Cas des algèbres de type C

On considère ici $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$, que l'on identifie aux matrices complexes de taille $2n \times 2n$, de trace nulle, de la forme suivante (voir par exemple [19, p.3]) :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{pmatrix},$$

où A, B, C sont des matrices $n\times n$ telles que B et C soient de plus symétriques.

Ainsi si $e_1, \dots e_{n-1}$ désignent les racines simples qui engendrent une sous–algèbre de type A_{n-1} et si e_n désigne la racine simple longue, on a :

$$\mathfrak{g}^{e_i+\cdots+e_j} = \mathbb{C}(E_{i,j+1} - E_{n+j+1,n+i}), \quad i \le j \le n-1,$$

$$\begin{gathered}\mathfrak{g}^{e_i+\cdots+e_n} = \mathbb{C}(E_{n,n+i} + E_{i,2n}), \quad i \le n,\\ \mathfrak{g}^{2e_i+\cdots+2e_{n-1}+e_n} = \mathbb{C}E_{i,n+i}, \quad i < n,\\ \mathfrak{g}^{e_i+\cdots+e_{j-1}+2e_j+\cdots+2e_{n-1}+e_n} = \mathbb{C}(E_{i,n+j} + E_{j,n+i}), i < j < n.\end{gathered}$$

Les espaces de poids associés aux poids opposés à ceux ci–dessus sont donnés par les droites engendrées par les transposées. A titre d'exemple, on peut calculer quelques constantes de structure (qui ont été utilisées au chapitre 5) :

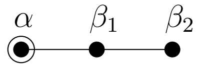
$$\begin{aligned}[X_{e_1+\cdots+e_{n-2}+2e_{n-1}+e_n}, X_{-(e_1+\cdots+e_n)}] =&[E_{1,2n-1} + E_{n-1,n+1}, E_{n+1,n} + E_{2n,1}]\\ =&E_{n-1,n} - E_{2n,2n-1} = X_{e_{n-1}},\\ [X_{e_1+\cdots+e_{n-2}+2e_{n-1}+e_n}, X_{-(e_1+\cdots+e_{n-1})}] =&[E_{1,2n-1} + E_{n-1,n+1}, E_{n,1} - E_{n+1,2n}]\\ =&-(E_{n-1,2n} + E_{n,2n-1}) = -X_{e_{n-1}+e_n},\\ [X_{e_{n-1}+e_n}, X_{-e_{n-1}}] =&[E_{n,2n-1} + E_{n-1,2n}, E_{n,n-1} - E_{2n-1,2n}]\\ =&-E_{n,2n} - E_{n,2n} = -2X_{e_n}.\end{aligned}$$

Remarquons que l'identification de $\mathfrak{sp}_{2n}$ avec des matrices $2n \times 2n$ n'est pas celle utilisée pour les modules de degré 1 de Benkart–Britten–Lemire. Dans ce cas, on identifie X_{e_i} avec q_ip_{i+1} lorsque $i < n$ et X_{e_n} avec $\frac{1}{2}q_n^2$. On identifie aussi H_{e_n} avec $q_np_n + \frac{1}{2}$. On trouve plus généralement l'image de X_α pour une racine α positive en l'exprimant à l'aide des racines simples et des constantes de structure. Par exemple, $X_{e_{n-1}+e_n} = [X_{e_{n-1}}, X_{e_n}]$ et donc l'image de $X_{e_{n-1}+e_n}$ est $[q_{n-1}p_n, \frac{1}{2}q_n^2]$. Compte tenu du crochet dans W_n, $X_{e_{n-1}+e_n}$ a donc pour image $q_{n-1}q_n$.

Annexe B

Le cas (A_1^1, A_3)

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$. Nous allons ici décrire complètement la catégorie $\mathcal{C} := \mathcal{O}_{\Delta,\theta}(\mathfrak{g})$ associée à la partie $\theta = \{e_2, e_3\}$ de la base standard $\Delta = \{e_1, e_2, e_3\}$. Cela correspond au diagramme de Dynkin suivant :



Reprenons les notations de la section 5.1.5. L'algèbre $\mathfrak{l} := \mathfrak{l}_{\Delta-\theta}$ est donnée par

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}X_\alpha + \mathbb{C}X_{-\alpha}.$$

La partie semi–simple de $\mathfrak{l}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et son centre est de dimension 2, engendré par $H_1 := H_\alpha + 2H_{\beta_1}$ et $H_2 := H_{\beta_2}$. Nous avons vu qu'un module irréductible de $\mathcal{C}$ est de la forme $L(\Delta - \theta, C)$ pour un $\mathfrak{l}$–module irréductible cuspidal C. Comme $\mathfrak{l}'$–module, on a $C = N(a_1, a_2)$. Le module C est alors entièrement déterminé par $a_1, a_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et par les scalaires associés à l'action (centrale) de H_1 et H_2.

Soit $V(\Delta - \theta, C)$ le module de Verma généralisé associé à C et p la projection de ce module sur $L(\Delta - \theta, C)$. Le module de Verma $V(\Delta - \theta, C)$ est engendré par des éléments de la forme $u \otimes x(b)$ où $x(b) \in N(a_1, a_2)$ et $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-_{\Delta-\theta})$. On identifie alors C aux éléments de la forme $1 \otimes x(b)$. D'après la discussion ci–dessus, H_1 et H_2 agissent sur les éléments de la forme $1 \otimes x(b)$ par un scalaire (ne dépendant donc pas de b). Notons respectivement c' et d ces scalaires. Ainsi on a

$$H_1 \cdot 1 \otimes x(b) = c' \times 1 \otimes x(b) \tag{B.1}$$
$$H_2 \cdot 1 \otimes x(b) = d \times 1 \otimes x(b) \tag{B.2}$$

Sachant que $H_\alpha \cdot x(b) = b_1 - b_2$, on en déduit que $H_{\beta_1} \cdot 1 \otimes x(b) = \frac{c'+b_2-b_1}{2}$. Comme $b_1 + b_2 = a_1 + a_2 =: A$ (par admissibilité de $x(b) \in N(a_1, a_2)$), on a donc

$$H_{\beta_1} \cdot 1 \otimes x(b) = (b_2 + \frac{c' - A}{2})1 \otimes x(b)$$

On pose alors $c := \frac{c'-A}{2}$. Ainsi on a

$$H_{\beta_1} \cdot 1 \otimes x(b) = (c + b_2)1 \otimes x(b) \tag{B.3}$$

D'après le lemme 5.1.13 de la section 5.1.5, on a

$$p(X_{-\alpha-\beta_1} \otimes x(b)) = \eta(b)p(X_{-\beta_1} \otimes x(b'), \tag{B.4}$$

où $b' = (b_1 - 1, b_2 + 1)$, $\eta(b) = \frac{c+b_1}{b_2+1}$ et de plus $c \in \{0, -1 - A\}$. Nous noterons $L_{c,d}(a_1, a_2)$ le module irréductible $L(\Delta - \theta, C)$ où C est le $\mathfrak{l}$–module irréductible cuspidal, isomorphe à $N(a_1, a_2)$ comme $\mathfrak{l}'$–module et sur lequel l'action de H_{β_1} et H_2 est donnée par les équations (B.3) et (B.2). D'après le corollaire 5.1.14 de la section 5.1.5, $L_{0,0}(a_1, a_2)$ est isomorphe à $N(a_1, a_2, 0, 0)$ et que $L_{-1-A,0}(a_1, a_2)$ est isomorphe à $N(-1 - a_2, -1 - a_1, 0)$. Dans tout ce qui suit, nous supposerons donc que $d \neq 0$.

Cette condition impose que $p(X_{-\beta_2} \otimes x(b)) \neq 0$. En effet, on a $X_{\beta_2} \cdot X_{-\beta_2} \otimes x(b) = H_2 \otimes x(b) = d \times 1 \otimes x(b) \neq 0$ et on conclut grâce à la proposition 2.2.2. Nous allons chercher les valeurs possibles de d comme dans la section 5.1.6. D'après le lemme 5.1.6, il existe $\eta_1(b), \eta_2(b) \in \mathbb{C}$ tels que

$$p(X_{-\alpha-\beta_1-\beta_2} \otimes x(b) = \eta_1(b)p(X_{-\beta_2}X_{-\beta_1} \otimes x(b')) + \eta_2(b)p(X_{-\beta_1}X_{-\beta_2} \otimes x(b)) \tag{B.5}$$

Appliquons $X_{\alpha+\beta_1+\beta_2}$ à l'équation (B.5). On obtient

$$p(H_{\alpha+\beta_1+\beta_2} \otimes x(b)) = \eta_1(b)p(X_\alpha \otimes x(b')),$$

ce qui donne donc

$$c+d+b_1 =(b_2+1)\eta_1(b). \tag{B.6}$$

Appliquons maintenant X_{β_2} à (B.5). On obtient alors

$$p(X_{-\alpha-\beta_1}\otimes x(b)) = \eta_1(b)p(H_2X_{-\beta_1}\otimes x(b')) + \eta_2(b)p(X_{-\beta_1}H_2\otimes x(b')),$$

ce qui donne donc

$$\eta(b) =(d+1)\eta_1(b) + d\eta_2(b). \tag{B.7}$$

Appliquons enfin $X_{\beta_1+\beta_2}$ à (B.5). On obtient alors

$$p(X_{-\alpha}\otimes x(b)) = \eta_1(b)p(H_{\beta_1}\otimes x(b')) + \eta_2(b)p(-H_2\otimes x(b')),$$

ce qui donne donc

$$b_1 =(c+b_2+1)\eta_1(b) - d\eta_2(b). \tag{B.8}$$

On déduit des équations (B.6), (B.7) et (B.8) :

$$\begin{cases} \eta_1(b) = & -\frac{c+b_2+2}{b_2+1}, \\ \eta_2(b) = & \frac{c+b_2+1}{b_2+1}, \\ d = & -2-A-2c. \end{cases}$$

En particulier, nous avons montré que d est entièrement déterminé par le choix de c. Réciproquement, il nous reste à montrer que pour $c\in\{0,-1-A\}$ et d comme ci–dessus le module $L_{c,d}(a_1,a_2)$ appartient à la catégorie $\mathcal{C}$. Nous nous contentons de le faire pour $(c,d)=(0,-2-A)$, le deuxième cas étant similaire.

Par construction, le module $L := L_{0,-2-A}(a_1,a_2)$ est un module de poids irréductible et $\mathfrak{l}$–cuspidal. Il nous suffit donc de vérifier la condition de restriction à la sous–algèbre de Levi associée à $\theta=\{\beta_1,\beta_2\}$. Par PBW, les vecteurs de L sont des combinaisons linéaires de vecteurs de la forme

$$p(X^{m_1}_{-\beta_1-\beta_2}X^{m_2}_{-\beta_2}X^{m_3}_{-\beta_1}X^{m_4}_{-\alpha-\beta_1-\beta_2}X^{m_5}_{-\alpha-\beta_1}\otimes x(b)).$$

Grâce aux équations (B.4) et (B.5), les vecteurs de L sont donc des combinaisons linéaires de vecteurs de la forme

$$p(X^{m_1}_{-\beta_1-\beta_2}X^{m_2}_{-\beta_2}X^{m_3}_{-\beta_1}\otimes x(b)).$$

Cela prouve déjà que L est somme directe des modules $M_b := p(\mathcal{U}(\mathfrak{l}_\theta) \otimes x(b))$. Pour montrer que $L \in \mathcal{C}$, il reste donc à montrer que chaque M_b est un $\mathfrak{l}_\theta$–module irréductible. Par construction, c'est un module de poids, engendré par le vecteur de plus haut poids $p(1 \otimes x(b))$. En particulier, c'est donc un module indécomposable. Soit $\lambda = b_2\omega_1 + (-2 - A)\omega_2$ le poids de $p(1 \otimes x(b))$. Soit V le $\mathfrak{l}_\theta$–module de Verma de poids λ. On peut voir V comme un sous–$\mathfrak{l}_\theta$–module du module de Verma généralisé $V(\Delta - \theta, C)$ associé à L. Grâce à un théorème de Bernstein–Gelfand–Gelfand (voir [20, thm 5.1]), on conclut que le module V admet un sous–module irréductible si et seulement si $A \in \mathbb{Z}_{<-1}$. Dans tous les autres cas, V est donc irréductible (car il ne contient aucun sous–module irréductible) et donc M_b aussi (car par propriété universelle de V, il existe une surjection de V sur M_b). Lorsque $A \in \mathbb{Z}_{<-1}$, V admet un unique sous–module irréductible $L(\mu)$ où $\mu = s_{\beta_2} \cdot \lambda$ (voir [20, thm 5.1]). L'unicité est une conséquence du cas particulier de la conjecture de Kazdhan–Lusztig pour les algèbres de Lie de rang 2 (voir apr exemple [20, chapitre 8]). Ce sous–module est engendré par $X_{-\beta_2}^{-A-1} \otimes x(b)$. Il est d'autre part facile de voir que $X_{-\beta_2}^{-A-1} \otimes x(b)$ est annulé aussi par l'action de $X_{\alpha+\beta_1}$ et de $X_{\alpha+\beta_1+\beta_2}$. En utilisant la caractérisation de L comme quotient du module de Verma généralisé $V(\Delta - \theta, C)$ (i.e. la proposition 2.2.2), on conclut que $p(X_{-\beta_2}^{-A-1} \otimes x(b)) = 0$. Or par propriété universelle de V, il existe une surjection de V sur M_b. Nous venons de montrer que $p(L(\mu)) = 0$. Donc, on peut passer au quotient pour obtenir une surjection de $V/L(\mu) \cong L(\lambda)$ sur M_b. Cela prouve alors que M_b est irréductible.

On a donc montré la première partie de la

Proposition B.0.1 *Les modules irréductibles de la catégorie $\mathcal{O}_{\Delta,\theta}(\mathfrak{sl}_4)$ sont les modules $L_{c,d}(a_1, a_2)$ pour $a_1, a_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $c \in \{0, -1 - a_1 - a_2\}$ et $d \in \{0, -2 - a_1 - a_2 - 2c\}$.*

De plus, lorsque $d = 0$, le module $L_{c,d}(a_1, a_2)$ est un module de degré 1, isomorphe à un module de la forme $N(a_1', a_2', 0, 0)$. Lorsque $d \notin \mathbb{Z}$, le module $L_{c,d}(a_1, a_2)$ n'est pas de degré fini.

Le premier point de la deuxième partie se montre comme dans la section 5.1.5. Le dernier point provient du fait que les $\mathfrak{l}_\theta$–modules qui interviennent dans la décomposition de $L_{c,d}(a_1, a_2)$ sont exactement des modules de Verma (comme nous l'avons expliqué ci–dessus), qui sont évidemment de degré infini.

Bibliographie

[1] G. Benkart, D. Britten, and F. Lemire. Modules with bounded weight multiplicities for simple Lie algebras. *Math. Z.*, 225(2) :333–353, 1997.

[2] I. N. Bernšteĭn, I. M. Gel′fand, and S. I. Gel′fand. Differential operators on the base affine space and a study of $\mathfrak{g}$-modules. In *Lie groups and their representations (Proc. Summer School, Bolyai János Math. Soc., Budapest, 1971)*, pages 21–64. Halsted, New York, 1975.

[3] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3.* Hermann, Paris, 1970.

[4] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique, Fasc. XXIII.* Hermann, Paris, 1973. Livre II : Algèbre. Chapitre 8 : Modules et anneaux semi-simples, Nouveau tirage de l'édition de 1958, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1261.

[5] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique.* Masson, Paris, 1981. Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4, 5 et 6. [Lie groups and Lie algebras. Chapters 4, 5 and 6].

[6] D. Britten, O. Khomenko, F. Lemire, and V. Mazorchuk. Complete reducibility of torsion free C_n-modules of finite degree. *J. Algebra*, 276(1) :129–142, 2004.

[7] D. Britten and F. Lemire. A classification of simple Lie modules having a 1-dimensional weight space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 299(2) :683–697, 1987.

[8] H. Cartan and S. Eilenberg. *Homological algebra.* Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999. With an appendix by David A. Buchsbaum, Reprint of the 1956 original.

[9] A. Coleman and V. Futorny. Stratified L-modules. *J. Algebra*, 163(1) :219–234, 1994.

[10] J. Dixmier. *Algèbres enveloppantes.* Gauthier-Villars Éditeur, Paris-Brussels-Montreal, Que., 1974.

[11] S. Fernando. Lie algebra modules with finite-dimensional weight spaces. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 322(2) :757–781, 1990.

[12] V. Futorny. *The weight representations of semisimple finite dimensional Lie algebras*. PhD thesis, Kiev University, 1987.

[13] D. Grantcharov and V. Serganova. Category of $\mathfrak{sp}(2n)$-modules with bounded weight multiplicities. *Mosc. Math. J.*, 6(1) :119–134, 222, 2006.

[14] D. Grantcharov and V. Serganova. Cuspidal representations of $\mathfrak{sl}(n+1)$. *arXiv :0710.2682v1*, 2007.

[15] R. Howe. θ-series and invariant theory. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 275–285. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[16] R. Howe. Remarks on classical invariant theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 313(2) :539–570, 1989.

[17] R. Howe. Transcending classical invariant theory. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(3) :535–552, 1989.

[18] J. Huang, P. Pandžić, and G. Savin. New dual pair correspondences. *Duke Math. J.*, 82(2) :447–471, 1996.

[19] J. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1978. Second printing, revised.

[20] J. Humphreys. *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category $\mathcal{O}$*, volume 94 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[21] N. Jacobson. *Basic algebra. II.* W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1980.

[22] N. Jacobson. *Basic algebra. I.* W. H. Freeman and Company, New York, second edition, 1985.

[23] V. Kac. Constructing groups associated to infinite-dimensional Lie algebras. In *Infinite-dimensional groups with applications (Berkeley, Calif., 1984)*, volume 4 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 167–216. Springer, New York, 1985.

[24] S. Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.

[25] F. Lemire. Weight spaces and irreducible representations of simple Lie algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 22 :192–197, 1969.

[26] J. S. Li. The correspondences of infinitesimal characters for reductive dual pairs in simple Lie groups. *Duke Math. J.*, 97(2) :347–377, 1999.

[27] D. E. Littlewood. Products and plethysms of characters with orthogonal, symplectic and symmetric groups. *Canad. J. Math.*, 10 :17–32, 1958.

[28] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[29] O. Mathieu. Classification of irreducible weight modules. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(2) :537–592, 2000.

[30] V. Mazorchuk. *Generalized Verma modules*, volume 8 of *Mathematical Studies Monograph Series*. VNTL Publishers, L′viv, 2000.

[31] V. Mazorchuk. Quantum deformation and tableaux realization of simple dense $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$-modules. *J. Algebra Appl.*, 2(1) :1–20, 2003.

[32] V. Mazorchuk. *Lectures on* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$*-modules*. Imperial College Press, 2010.

[33] V. Mazorchuk and C. Stroppel. Cuspidal $\mathfrak{sl}_n$-modules and deformations of certain brauer tree algebras. *arXiv :1001.2633v1*, 2010.

[34] R. Moody and A. Pianzola. *Lie algebras with triangular decompositions*. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. John Wiley & Sons Inc., New York, 1995. A Wiley-Interscience Publication.

[35] I. Penkov and V. Serganova. Generalized Harish-Chandra modules. *Mosc. Math. J.*, 2(4) :753–767, 806, 2002. Dedicated to Yuri I. Manin on the occasion of his 65th birthday.

[36] I. Penkov, V. Serganova, and G. Zuckerman. On the existence of $(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})$-modules of finite type. *Duke Math. J.*, 125(2) :329–349, 2004.

[37] T. Przebinda. The duality correspondence of infinitesimal characters. *Colloq. Math.*, 70(1) :93–102, 1996.

[38] S. Rallis and G. Schiffmann. The orbit and θ correspondence for some dual pairs. *J. Math. Kyoto Univ.*, 35(3) :423–493, 1995.

[39] A. Rocha-Caridi. Splitting criteria for $\mathfrak{g}$-modules induced from a parabolic and the Bernšteĭn-Gel′fand-Gel′fand resolution of a finite-dimensional, irreducible $\mathfrak{g}$-module. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 262(2) :335–366, 1980.

[40] H. Rubenthaler. Construction de certaines sous-algèbres remarquables dans les algèbres de Lie semi-simples. *J. Algebra*, 81(1) :268–278, 1983.

[41] H. Rubenthaler. *Algèbres de Lie et espaces préhomogènes*, volume 44 of *Travaux en Cours*. Hermann, Paris, 1992.

[42] H. Rubenthaler. Les paires duales dans les algèbres de Lie réductives. *Astérisque*, (219) :121, 1994.

[43] H. Rubenthaler. Non-parabolic prehomogeneous vector spaces and exceptional Lie algebras. *J. Algebra*, 281(1) :366–394, 2004.

[44] M. Sato. Theory of prehomogeneous vector spaces (algebraic part)—the English translation of Sato's lecture from Shintani's note. *Nagoya Math. J.*, 120 :1–34, 1990. Notes by Takuro Shintani, Translated from the Japanese by Masakazu Muro.

[45] M. Sato and T. Kimura. A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants. *Nagoya Math. J.*, 65 :1–155, 1977.

[46] M. Sato and T. Shintani. On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces. *Ann. of Math. (2)*, 100 :131–170, 1974.

[47] G. Tomasini. On a generalisation of Bernstein-Gelfand-Gelfand category $\mathcal{O}$. *Comptes rendus - Mathematique*, 348 :509–512, 2010.