



HAL
open science

Numerical simulation of mold filling in low pressure die casting

Ruhollah Dr. Tavakoli

► **To cite this version:**

Ruhollah Dr. Tavakoli. Numerical simulation of mold filling in low pressure die casting. Mechanics [physics.med-ph]. Sharif University of Technology, 2003. Persian. NNT: . tel-00484201

HAL Id: tel-00484201

<https://theses.hal.science/tel-00484201>

Submitted on 18 May 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی و علم مواد

پایان نامه کارشناسی ارشد

شبیه‌سازی حرکت سیال در فرایند ریخته‌گری تحت فشار کم

روح اله توکلی

استاد راهنما: دکتر پرویز دوامی - دکتر ناصر وره‌رام

استاد مشاور: دکتر رضا بابایی

آبان ۱۳۸۲

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی و علم مواد

پایان نامه کارشناسی ارشد

شبیه‌سازی حرکت سیال در فرایند ریخته‌گری تحت فشار کم

روح اله توکلی

استاد راهنما: دکتر پرویز دوامی - دکتر ناصر ورهرام

استاد مشاور: دکتر رضا بابایی

آبان ۱۳۸۲

با تشکر و قدردانی از :

اساتید راهنمای محترم، بواسطه راهنمایی‌های مفید ایشان در طول پروژه، آقای دکتر رضا بابایی از مرکز پژوهشی رازی که انجام این پژوهش بدون راهنمایی و همکاری ایشان میسر نبود، آقای دکتر حسین آشوری بواسطه راهنمایی در زمینه انجام آزمایش عملی، کادر محترم مرکز پژوهشی رازی از جمله خانم مهندس عسکری و آقای مهندس داداش‌زاده همچنین مسئولین محترم کارگاه ریخته‌گری دانشگاه صنعتی شریف، آقایان علوی و حاجی‌زاده که در انجام بخشهای عملی این پژوهش همکاری نمودند.

چکیده

این تحقیق با هدف فراهم آوردن ابزاری جهت شبیه‌سازی کامپیوتری حرکت سیال در فرایند ریخته‌گری تحت فشار کم انجام شد. در ابتدا مدل فیزیکی حاکم بر این فرایند مشخص شد. مواردی که در مدل‌سازی فیزیکی مورد توجه قرار گرفتند عبارتند از: حرکت سیال همراه با سطح آزاد، انتقال حرارت، تغییر فاز از حالت مذاب به جامد، جابجایی آزاد مذاب در اثر شیب دما، اثر انجماد بر حرکت سیال، اثر تنش‌های سطحی بر حرکت سیال، اثر هوای داخل قالب و هوای محبوس شده در مذاب بر حرکت سیال.

پس از مدل‌سازی فیزیکی و مشخص شدن معادلات دیفرانسیل حاکم، این معادلات توسط روش تفاضل محدود گسسته‌سازی شده و به معادلات جبری تبدیل شدند. جهت گسسته‌سازی معادلات در کلیه موارد از روشهایی با دقت درجه دوم استفاده شد. معادلات هم بروش صریح حل شدند و تنها برای محاسبه میدان فشار در هر گام زمانی از روش ضمنی (نسبت به مکان) استفاده شد.

نتایج حاصله هم با نتایج منتشر شده توسط سایر محققان و آزمایش انجام شده در این تحقیق، مقایسه شد تا صحت آنها بررسی شود. در کلیه موارد تطابق خوبی بین نتایج شبیه‌سازی و نتایج مورد انتظار مشاهده شد که نشان می‌دهد مدل مورد استفاده توانایی شبیه‌سازی این فرایند را دارا می‌باشد.

فهرست مطالب

فصل اول	مقدمه‌ای بر ریخته‌گری تحت فشار کم	۱
فصل دوم	مروری بر منابع پیرامون شبیه‌سازی پر شدن قالب	۴
فصل سوم	مدلسازی ریاضی	۷
۳-۱	مقدمه	۷
۳-۲	روش حل عددی	۸
۳-۳	مدلسازی سطح آزاد	۱۰
۳-۳-۱	روش <i>MAC</i>	۱۲
۳-۳-۲	روش <i>SPM</i> یا <i>TPM</i>	۱۲
۳-۳-۳	روش <i>CAS</i>	۱۳
۳-۳-۴	روش <i>VOF</i>	۱۴
۳-۳-۵	روش <i>LSM</i>	۱۸
۳-۳-۶	جمع بندی	۱۹
۳-۴	مدلسازی حرکت سیال	۱۹
۳-۴-۱	مکان تعریف متغیرها روی شبکه محاسباتی	۲۱
۳-۴-۲	روشهای حل معادلات نویر استوک	۲۳
۳-۵	مدلسازی هوای داخل قالب	۲۵
۳-۶	مدلسازی تنشهای سطحی	۲۶
۳-۷	مدلسازی انتقال حرارت و تغییر فاز	۲۷
فصل چهارم	مدلسازی عددی	۳۲
۴-۱	مدلسازی عددی سطح آزاد	۳۲

۳۸	گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل حاکم بروش اختلاف محدود ...	۴-۲
۳۸	گسسته‌سازی ترم زمانی	۴-۲-۱
۳۹	گسسته‌سازی ترمهای نفوذی	۴-۲-۲
۴۱	گسسته‌سازی ترمهای جابجایی	۴-۲-۳
۴۶	مدلسازی عددی معادلات نویر استوک	۴-۳
۴۹	گسسته‌سازی ترمهای چشمه	۴-۳-۱
۵۳	حل دستگاه معادلات خطی	۴-۳-۲
۵۵	شرایط مرزی حل معادلات نویر استوک	۴-۳-۳
۵۷	مدلسازی عددی انتقال حرارت و تغییر فاز	۴-۴
۵۹	محاسبه گام زمانی	۴-۵
۶۲	فصل پنجم بررسی نتایج	
۶۲	مقدمه	۵-۱
۶۳	معادلات نویر استوک	۵-۲
۶۶	معادلات نویر استوک همراه با انتقال حرارت	۵-۳
۶۹	انتقال حرارت همراه با تغییر فاز	۵-۴
۷۱	جابجایی سطح آزاد	۵-۵
۷۳	تنشهای سطحی	۵-۶
۷۴	پر شدن قالب در ریخته‌گری ثقلی	۵-۷
۸۶	آزمایش با آب	۵-۸
۹۲	نتیجه‌گیری	
۹۳	پیشنهادات	
۹۴	مراجع	

فصل اول

مقدمه ای بر ریخته‌گری تحت فشار کم^۱

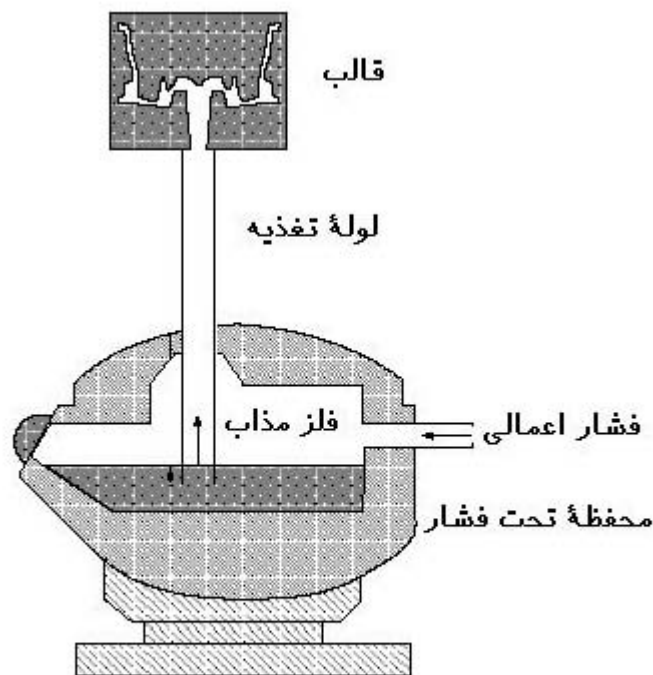
ریخته‌گری امروزه بعنوان یکی از مهمترین روشهای تولید قطعات صنعتی بحساب می‌آید. بطور کلی روشهای قطعه‌ریزی در ریخته‌گری به دو دسته ریخته‌گری در قالبهای موقت و دائمی تقسیم می‌شوند. در دسته اول پس از تولید قطعه قالب تخریب شده و قطعه از آن خارج می‌شود و در دسته دوم با باز شدن قالب قطعه خارج شده و قالب برای تولید قطعات بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد. ریخته‌گری در قالبهای دائمی خود به سه بخش تقسیم می‌شود که عبارتند از: ثقلی^۲، تحت فشار کم، تحت فشار زیاد^۳. ریخته‌گری تحت فشار زیاد از جهت مکانیزم پر شدن قالب بطور کامل با دو دسته دیگر تفاوت دارد ولی دو دسته دیگر شباهت زیادی به یکدیگر داشته و قابل مقایسه می‌باشند. در ریخته‌گری ثقلی مذاب در اثر نیروی ناشی از شتاب ثقل حرکت کرده و قالب را پر می‌کند و در ریخته‌گری تحت فشار کم مذاب در اثر اعمال یک نیروی خارجی بر شتاب ثقل غلبه کرده و به قالب تزریق می‌شود. شکل ۱-۱ بطور شماتیک ماشین ریخته‌گری تحت فشار کم را نشان می‌دهد. عملکرد ماشین به این صورت است که سطح مذاب درون کوره نگهدارنده تحت فشار هوای خشک قرار می‌گیرد. با افزایش تدریجی فشار مذاب از لوله تغذیه بالا رفته و با جریانی آرام قالب را پر می‌کند. حسن آرام بودن جریان در نبود تلاطم سطحی است که

¹. Low Pressure Die Casting

². Gravity Die Casting

³. High Pressure Die Casting

می تواند باعث مخلوط شدن اکسیدهای سطحی و حبس گاز در مذاب شود. طراحی قطعه و قالب به گونه ای است که انجماد بصورت جهت دار از بالا به پایین انجام می شود. به علت قطر زیاد لوله تغذیه، محل اتصال آن به قطعه بصورت مایع باقی مانده و نقش تغذیه رسانی را بازی می کند. پس از پایان انجماد قطعه، فشار برداشته شده و مذاب به داخل بوته کوره نگهدارنده برمی گردد [۲۱]. از مزایای این فرایند نسبت به روش ثقلی عبارتند از [۳]: نیمه اتوماتیک بودن فرایند که هزینه نیروی انسانی را کاهش می دهد، پر شدن قالب با الگویی کنترل شده و بدون تلاطم، انجماد جهت دار، کیفیت متالورژیکی بالای قطعات ریخته شده، بهره ریخته گری بالا و امکان تولید قطعات سنگین و پیچیده. امروزه این فرایند در صنایع کشور توسعه زیادی پیدا کرده و بسیاری از قطعات خودرو از این روش تولید می شوند.



شکل ۱-۱ ماشین ریخته گری تحت فشار کم [2].

از جمله مشکلات این فرایند پیچیدگی طراحی قالب و تنظیم سیکل فرایند است. در بسیاری از موارد این کار بصورت تجربی و سعی و خطا انجام می‌شود که باعث شده هزینه‌ها بالا رفته و کیفیت قطعه کاهش یابد. بدلیل وجود چنین مشکلاتی این فرایند نتوانسته است جایگاه واقعی خود را پیدا کند [۱].

بطور کلی پر شدن قطعه در ریخته‌گری تحت فشار کم شامل دو مرحله است اول بالا رفتن مذاب بصورت آرام از لوله تغذیه تا محل اتصال به قطعه، دوم پر کردن قطعه بدون تلاطم و با الگویی مناسب طوری که باعث حبس گاز و مخلوط شدن اکسیدهای سطحی با مذاب نشود [۱]. مواردی که باعث معیوب شدن یا کاهش کیفیت قطعه می‌شوند عبارتند از: نامناسب بودن الگوی پر شدن و ایجاد تلاطم سطحی، پخش شدن مذاب در قالب طوری که مذاب ایزوله ایجاد شود، انجماد زودرس و قطع جریان مذاب، فراهم نشدن انجماد جهت‌دار و در نتیجه ایجاد عیوب انقباضی، جابجایی آزاد مذاب پس از پر شدن قطعه که باعث تأخیر در انجماد قطعه شده و می‌تواند مانع انجماد جهت‌دار شود.

به منظور توسعه فرایند ریخته‌گری تحت فشار کم و استفاده از مزایای آن لازم است این موارد بصورت بهینه درآیند: طراحی قالب، سیستم آبگرد، المانهای حرارتی، دمای اولیه قالب، ضخامت و نوع پوشان مصرفی، محل‌های خروج هوا، فوق‌گداز مذاب و منحنی تغییرات فشار نسبت به زمان در کوره نگهدارنده. اثر هر یک از پارامترهای یاد شده تابع سایر موارد بوده و لذا کل مجموعه باید بطور همزمان مورد بررسی قرار گیرد. حال اگر از آزمایشات عملی برای بهینه‌سازی استفاده شود، اینکار نیاز به صرف وقت و هزینه زیادی دارد در حالی که بکارگیری شبیه‌سازی کامپیوتری می‌تواند باعث کوتاه شدن مسیر و کاهش هزینه‌ها شود. این پژوهش هم با هدف شبیه‌سازی کامپیوتری پر شدن قالب در فرایند ریخته‌گری تحت فشار کم پایه‌ریزی شده است. مهمترین مواردی که در این راستا باید مورد توجه قرار گیرند عبارتند از: حرکت سیال همراه با سطح آزاد (فصل مشترک مذاب- هوا)، انتقال حرارت همراه با تغییر فاز از حالت مذاب به جامد، اثر هوای داخل قالب، انجماد و تنشهای سطحی بر جریان مذاب.

فصل دوم

مروری بر منابع پیرامون شبیه‌سازی پر شدن قالب

از مسائل مهم در شبیه‌سازی پر شدن قالب حل معادلات حرکت همراه با سطح آزاد است. اگرچه در دهه ۶۰ روشهایی برای حل این گونه مسائل ارائه شد ولی عملاً شبیه‌سازی پر شدن قالب در فرایندهای ریخته‌گری از اواخر دهه ۸۰ آغاز شد. تعدادی از منابع موجود در این زمینه در جدول ۱-۲ آورده شده است. باید توجه کرد که در اغلب این منابع مختصراً به روش عددی مورد استفاده اشاره شده، سپس با مقایسه نتایج شبیه‌سازی و آزمایشات عملی تطابق بین نتایج نشان داده شده است.

با توجه به جدول ۱-۲ مشاهده می‌شود، در شروع محققان عمدتاً از روش $2D SOLA-VOF$ FDM استفاده کرده‌اند. علت این امر را می‌توان در توانایی این روش در حل مسائل حرکت سیال همراه با سطح آزاد، بعلاوه وجود کد کامپیوتری منتشر شده [۱۱] در این زمینه دانست که با کمی اصلاح و اضافه کردن قسمتهایی جهت حل معادلات انتقال حرارت همراه با تغییر فاز، به این کد، می‌توان از آن جهت شبیه‌سازی پر شدن قالب در فرایندهای ریخته‌گری استفاده کرد. با افزایش قدرت کامپیوترها، تلاشها برای حل مسائل سه‌بعدی آغاز شد. به علت پیچیدگی در مشخص کردن جهت‌گیری سطح آزاد در سه بعد در روش $SOLA-VOF$ ، روش MAC مورد توجه قرار گرفت و تکنیکهای ویژه‌ای برای غلبه بر ضعفهای آن از جمله کاهش حافظه کامپیوتری مورد نیاز، صورت گرفت [۲]. در ادامه توسعه روش $SOLA-VOF$ به سه بعد صورت گرفت و اصلاحاتی هم برای افزایش سرعت همگرایی، روی آن انجام شد.

<i>Researcher</i>	<i>Method</i>
<i>Walther and Sahm (1986) [4¹]</i>	<i>2D SOLA-VOF FDM²</i>
<i>Ingerslev and Anderson (1987) [5]</i>	<i>2D SMAC FDM</i>
<i>Hwang and Stoehr (1987) [6]</i>	<i>2D SOLA-VOF FDM</i>
<i>Lin and Hwang (1988) [7]</i>	<i>2D SOLA-VOF FDM</i>
<i>Sturm et al. (1988) [8]</i>	<i>2D SOLA-VOF FDM</i>
<i>Wang and Stoehr (1988) [9]</i>	<i>2D SOLA-VOF FDM</i>
<i>Svensson et al. (1988) [10]</i>	<i>2D FEM³</i>
<i>Hwang and Lin. (1989) [12]</i>	<i>3D SOLA-MAC FDM</i>
<i>Dhatt, et al. (1990) [13]</i>	<i>2D FEM-Quasi Level Set</i>
<i>Jong and Hwang (1991) [14]</i>	<i>3D SOLA-MAC FDM</i>
<i>K. S. Chan et al (1991) [15]</i>	<i>3D SIMPLEST-VOF FVM⁴</i>
<i>Lewis et al (1992) [16]</i>	<i>2D FEM-VOF</i>
<i>Xu and Mampaey (1994) [17]</i>	<i>Modified 3D SOLA-VOF FDM</i>
<i>Barkhurdarov and Williams (1995) [18]</i>	<i>Modified 3D SOLA-VOF FDM</i>
<i>Hao et al. (1995) [19]</i>	<i>Modified 3D SOLA-VOF FDM</i>
<i>Xu and Mampaey (1995) [20]</i>	<i>Modified 3D SOLA-VOF FDM</i>
<i>Kim and Hong (1995) [21]</i>	<i>3D SMAC FDM</i>
<i>Navity et al (1995) [22]</i>	<i>2D Lagrangian FEM</i>
<i>Gaston et al (1995) [23]</i>	<i>2D Lagrangian Eulerian FEM</i>

جدول ۱-۱ مروری بر منابع پیرامون شبیه‌سازی پر شدن قالب در ریخته‌گری.

¹. علامت \dagger معرف نقل قول از مرجع داده شده است.

². Finite Difference Method

³. Finite Element Method

⁴. Finite Volume Method

یکی از مشکلات روش *VOF* صریح بودن^۱ آن است که باعث می‌شود گام زمانی کوچک بوده و لذا زمان اجرای شبیه‌سازی خیلی طولانی می‌شود. تلاشهایی هم برای رفع این محدودیت انجام شده است که منجر به پیدایش روش *Implicit SOLA-VOF* شد [۲۴ تا ۲۶]. در این روش گام زمانی خیلی بزرگتر بوده و نتایج گزارش شده نشان دهنده کاهش زمان اجرای برنامه کامپیوتری است. ولی باید توجه کرد که کاربرد این روشها عمومی نبوده و برای حل همه مسائل قابل استفاده نیستند.

در یک جمع بندی ملاحظه می‌شود محققان عمدتاً از روش *SOLA-VOF FDM* استفاده کرده‌اند. در بخشهای بعد به طور مفصل به بررسی روشهای مختلف پرداخته شده و در نهایت روشی مناسب را انتخاب خواهد شد.

^۱. *Explicit*

فصل سوم

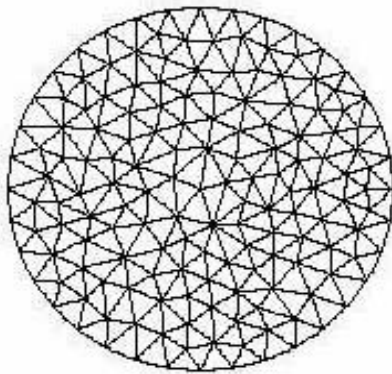
مدلسازی ریاضی

۳-۱ مقدمه

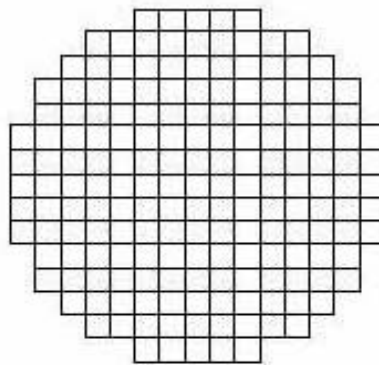
در این فصل مبانی تئوری شبیه‌سازی پرشدن قالب در فرایند ریخته‌گری تحت فشار کم بررسی می‌شود. برای این منظور ابتدا روش حل عددی معادلات حاکم ارائه خواهد شد. در ادامه به مدلسازی بخشهای مختلف مسأله پرداخته می‌شود که عبارتند از: مدلسازی سطح آزاد، حرکت سیال و انتقال حرارت همراه با تغییر فاز. در هر قسمت پس از ارائه مدلهای مختلف، روش مناسب را انتخاب خواهد شد. معیار انتخاب هم در کلیه موارد در درجه اول دقت و توانایی روش در حل مسئله و سپس کاهش زمان پردازش کامپیوتری خواهد بود.

۳-۲ روش حل عددی

بطور کلی معادلات حاکم بر اغلب پدیده‌های فیزیکی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای هستند. حل تحلیلی چنین معادلاتی در حالت‌های خاص و هنگامی که دامنه حل شکل ساده و مشخصی داشته باشد میسر خواهد بود و در غیر این صورت باید از روش‌های عددی استفاده کرد. امروزه روش‌های عددی زیادی برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای توسعه پیدا کرده‌اند. از میان آنها روش‌های تفاضل محدود^۱، المان محدود^۲ و حجم محدود^۳، عمومیت بیشتری دارند. در این روش‌ها ابتدا میدان حل به اجزای کوچکی تقسیم می‌شود که به این عمل مش‌بندی گویند. در روش تفاضل محدود، در مختصات دکارتی مشها (در حالت دو بعدی) به شکل مستطیلی هستند، و در روش المان محدود و حجم محدود هر مش می‌تواند به شکل یک چند ضلعی هندسی باشد. شکل ۳-۱ یک دایره مش‌بندی شده بروش‌های مختلف را نشان می‌دهد. باید یادآوری کرد که تحت شرایط مطلق روش‌های عددی بالا معادله و برای یک مسئله مشابه جوابها از لحاظ کیفی و کمی یکسان خواهند بود [۲۷].



ب { المان محدود



الف { تفاضل محدود

شکل ۳-۱ تصویر یک دایره مش‌بندی شده به روش‌های مختلف.

^۱ . Finite Difference Method (FDM)

^۲ . Finite Element Method (FEM)

^۳ . Finite Volume Method (FVM)

در روش تفاضل محدود معمولاً مشتقات جزئی معادله دیفرانسیل بطور مستقیم با چند جمله اول، عبارت حاصل از بسط سری تیلور آن جایگزین می‌شوند که به این عمل گسسته‌سازی^۱ گویند. دقت گسسته‌سازی بستگی به تعداد جملاتی دارد که از سری تیلور انتخاب می‌شوند [۲۸]. از ضعفهای این روش این است که مرزهای شیبدار و منحنی بصورت پله‌ای تقریب زده می‌شوند و لذا در این موارد از هندسه واقعی مسئله دور می‌شویم. همچنین ضمانتی برای بقای کمیت‌های فیزیکی حین حل وجود ندارد. از مزایای این روش سادگی آن و بهتر بودن خواص همگرایی آن نسبت به روش المان محدود است [۴]. کتب زیادی بر مبنای روش تفاضل محدود جهت حل مسائل سیالات وجود دارد از جمله منابع ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲ و ۳۳. روش تفاضل محدود در حل معادلات حرکت سیال در حالت گذرا همراه با سطح آزاد ابتدا توسط *Harlow and Welch* [۳۴] تحت عنوان روش *MAC* مورد استفاده قرار گرفت و در ادامه توسط *Nichols et al.* [۱۱] تحت عنوان روش *SOLA-VOF* توسعه پیدا کرد که همانطور که در فصل قبل اشاره شد عدد زیادی از محققان از این روش استفاده کردند.

در روش المان محدود، معادله دیفرانسیل برای هر المان نوشته شده و سپس با تشکیل یک دستگاه روی کل میدان حل، کمیت مورد نظر در نقاط گرهی المان محاسبه می‌شود. مقدار کمیت در نقاط غیر گرهی هم توسط توابع درونیابی مشخصی پیدا می‌شود. با مراجعه به منابع درمی‌یابیم کاربرد روش المان محدود در مقایسه با روش اختلاف محدود در حل مسائل سیالات خیلی محدودتر بوده است. از محاسن این روش عبارتند از: تقریب بهتر شکل هندسی، سادگی اعمال شرایط مرزی و کاهش تعداد المانها برای رسیدن به دقت یکسان در مقایسه با روش اختلاف محدود و از معایب آن می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: عدم بقای کمیت فیزیکی بیان شده توسط معادله دیفرانسیل، مشکل بودن جایگزین کردن ترمهای جابجایی^۲ در معادله دیفرانسیل، همگرایی ضعیف و غیر نرمال بودن دستگاه معادلات حاصل [۴]. تعدادی از کتب که در مورد مکانیک سیالات بر مبنای روش المان محدود نوشته

^۱. *Discretization*

^۲. *Advective*

شده‌اند عبارتند از: مراجع ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹ و ۴۰. بنظر می‌رسد روش المان محدود در شبیه‌سازی پر شدن قالب توسط تعداد کمی از محققان مورد استفاده گرفته است که در فصل قبل به تعدادی از آنها اشاره شد.

روش حجم محدود بر مبنای بقای یک کمیت مشخص پایه‌ریزی شده است. به این منظور ابتدا از معادله دیفرانسیل روی یک حجم کنترل انتگرال‌گیری می‌شود و توسط قضیه گوس انتگرال روی حجم تبدیل به انتگرال شار عبوری از سطوح حجم کنترل می‌شود. سپس مشتقات باقیمانده توسط سری تیلور به عبارات جبری تبدیل می‌شوند و در نهایت با حل معادلات جبری حاصل کمیت مورد نظر پیدا می‌شود [۴ و ۴۱]. مزیت این روش در بقای کمیت فیزیکی و تقریب مناسب شکل هندسی است [۴]. از جمله کتب موجود در این زمینه مراجع ۴۱ و ۴۲ هستند. در میان تحقیقات انجام شده در زمینه حرکت سیال همراه با سطح آزاد بروش حجم محدود، می‌توان به کارهای *Kothe* و همکارانش اشاره کرد [۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹ و ۵۰].

با توجه به مطالب ذکر شده، بنظر می‌رسد استفاده از روش حجم محدود همراه با مشهای بی‌سازمان^۱ (مثل شکل ۳-۱-ب) می‌تواند انتخاب مناسبی باشد. اما در عمل ردیابی سطح آزاد در این حالت بسیار پیچیده خواهد بود. بنابراین در این تحقیق از روش تفاضل محدود، برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مربوطه استفاده خواهد شد.

۳-۳ مدل‌سازی سطح آزاد^۲

به فصل مشترک فلز مذاب و هوای داخل قالب سطح آزاد گویند. حین پر شدن قالب این فصل مشترک بطور پیوسته تغییر شکل داده و مکان آن عوض می‌شود. فرض می‌کنیم A و B دو سیال مخلوط ناپذیر باشند (مذاب و هوای داخل قالب). اگر تنش سطحی ثابت باشد، در حالت تعادل شرایط مرزی روی فصل مشترک دو سیال عبارتست از:

^۱. *Unstructured Mesh*

^۲. *Free Surface*

$$V_A \cdot n = V_B \cdot n = V \cdot n \quad 3-1$$

$$V_A \cdot t = V_B \cdot t \quad 3-2$$

$$n \cdot (T_A - T_B) = 2 \kappa \sigma n \quad 3-3$$

در این روابط V ، n و t به ترتیب بردارهای سرعت، نرمال سطح و مماس بر سطح، T تنش و تنش وارد بر فصل مشترک، κ انحنای متوسط فصل مشترک^۱ و σ تنش سطحی هستند [۵۱]. بطور کلی دو دسته روش برای حل مسائل حرکت سیال همراه با سطح آزاد وجود دارد که عبارتند از: لاگرانژین^۲ و اولرین^۳. در روش لاگرانژین سیستم مختصات متحرک بوده و همراه سیال حرکت می‌کند. از محاسن این روش پیشروی دقیق فصل مشترک و سهولت اعمال شرایط مرزی بر فصل مشترک است و از جمله ضعفهای آن، درهم‌پیچیدن مشها و کاهش دقت بواسطه تغییر فرم شدید مشها است که لازم می‌دارد مش‌بندی مجدداً انجام شود. در دسته‌ای از روشهای لاگرانژی از ذرات به جای مش استفاده می‌شود. در این حالت هر ذره دارای کلیه خواص سیال بوده و رفتار سیال توسط اثر متقابل ذرات بر یکدیگر بیان می‌شود [۵۱]. از جمله این روشها، SPH^۴ است که اخیراً در شبیه‌سازی پر شدن قالبهای ریخته‌گری بخصوص ریخته‌گری تحت فشار بالا مورد توجه قرار گرفته است [۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷ و ۵۸]. به نظر می‌رسد این روش در حل مسائل همراه با سطح آزاد هنگامی که پخش شدن و پاشش شدید سیال را داشته باشیم توانا تر از سایر روشها باشد. در روش اولرین مکان محورهای مختصات ثابت بوده و سیال بین سلهای محاسباتی جابجا می‌شود. حسن این روش این است که بدون کاهش در دقت محاسبات سیال می‌تواند تحت تغییر شکل شدید درآید [۵۱]. در روشهای اولری می‌توان برای افزایش دقت از تکنیک ریزسازی سازگار مشها^۵ استفاده کرد. در این تکنیک در مناطق خاص مثلاً سطح آزاد مشها را ریز می‌کنند [۵۱]. به علت سادگی و در عین حال توانایی بالای روشهای اولری در این تحقیق از این روشها

¹. Kurvature

². Lagrangian

³. Eulerian

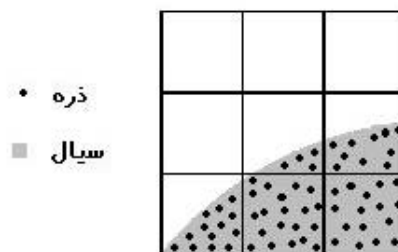
⁴. Smoothed Particle Hydrodynamics

⁵. Adaptive Mesh Refinement

استفاده می‌شود. در ادامه تعدادی از روشهای اولری که کاربرد بیشتری دارند، بررسی خواهند شد.

۱-۳-۳ روش MAC^1

در این روش از تعداد زیادی ذرات بی‌وزن و بی‌اثر بر حرکت سیال که در حجم سیال پخش شده‌اند برای ردیابی سطح آزاد استفاده می‌شود. نحوه کار به این صورت است که در ابتدا در سلهای حاوی سیال، تعداد مشخصی ذره قرار داده می‌شود و مکان ذرات ثبت می‌شود. پس از حل معادلات حرکت، سرعت هر ذره با میانگین‌گیری وزنی از سرعت سلولهای اطراف ذره محاسبه می‌شود. در ادامه با توجه به مکان قبلی ذره، سرعت آن و گام زمانی، مکان جدید ذره مشخص می‌شود. سطح آزاد در این روش فصل مشترک بین سلولهای حاوی ذره و بدون ذره است [۳۴] (شکل ۲-۳). از مزایای این روش سادگی و سهولت استفاده از آن برای مشهای بدون سازمان بوده و از معایب آن عبارتند از: نیاز به حافظه کامپیوتری زیاد [۲]، و نبود تضمینی برای بقای جرم حین جابجایی سیال بین سلها [۵۹].



شکل ۲-۲ ردیابی فصل مشترک توسط روش MAC .

۲-۳-۳ روش SPM^2 یا TPM^3

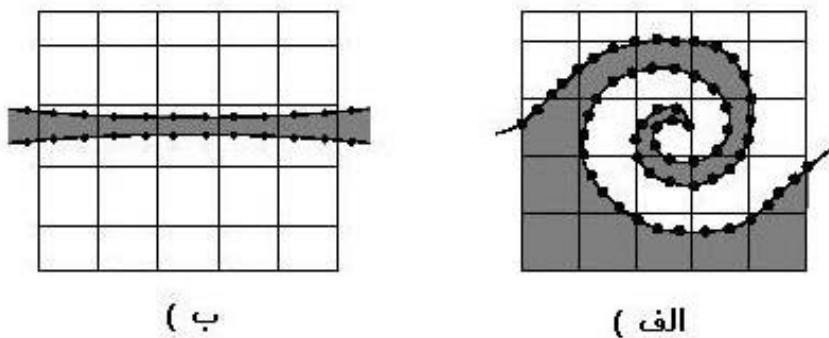
در این روش از ذراتی که بر سطح آزاد قرار دارند برای ردیابی سطح استفاده می‌شود. این روش خیلی دقیق‌تر از روش MAC است چون مکان دقیق سطح آزاد را می‌دهد (شکل الف-).

¹. Marker And Cell

². Surface Particle Method

³. Tracer Particle Method

۳-۳). در این روش می‌توان شکل سطح آزاد در حالتی که ضخامت سطح کمتر از یک سلول است را بدقت مشخص کرد (شکل ب-۳-۳). همچنین با عبور دادن یک تابع درونیابی شده درجه بالا از ذرات می‌توان انحناهای سطح و در نتیجه تنشهای سطحی را با دقت بالا محاسبه کرد [۶۰]. از جمله مشکلات این روش عبارتند از: پیچیدگی محاسبات هنگام برخورد دو جبهه سیال یا ایجاد جدایش در یک جبهه، پیچیدگی محاسبه سرعت ذرات در سه بعد و وجود نداشتن تضمینی برای بقای جرم حین پیشروی سیال [۵۹]. از جمله منابعی که به توسعه این روش پرداخته‌اند عبارتند از: مراجع ۶۰، ۶۱، ۶۲ و ۶۳.



شکل ۳-۳ ردیابی سطح آزاد با روش SPM [60].

۳-۳-۳ روش CAS'

در این روش ابتدا یک کمیت اسکالر تعریف شده و فصل مشترک توسط جابجایی این کمیت در میدان حل مشخص می‌شود. به عنوان مثال کمیت C تعریف شده بطوریکه:

$$C = \begin{cases} C_1 & \text{in Fluid} \\ C_2 & \text{out of Fluid} \\ > C_1, < C_2 & \text{at the Interface} \end{cases}$$

و کمیت C توسط حل معادله ۳-۴ پیدا می‌شود:

¹. Continuum Advection Schemes

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (V \cdot \nabla)C = 0$$

۳-۴

از جمله مشکلات این روش این است که حل مستقیم این معادله فصل مشترک واضحی را نمی‌دهد و فصل مشترک حاصل حالت نفوذی خواهد داشت. علت این امر در خطای ناشی از حل عددی معادله بالا است. چرا که علی‌رغم اینکه در این معادله ترم نفوذی نداریم، در اثر نفوذ کاذب^۱ ناشی از حل عددی، فصل مشترک به حالت نفوذی درمی‌آید [۵۹]. حتی با استفاده از روشهایی با دقت بالاتر از جمله *Van Leer* [۶۴]، *PPM* [۶۵] و *TVD* [۶۶] که می‌توانند خطای ناشی از نفوذ غیر واقعی را کم کنند، باز مشکل باقی خواهد ماند. به عنوان مثال پس از استفاده روش درجه چهارم *PPM* فصل مشترک بطور غیرقابل قبولی نفوذی بوده است [۵۹]. علی‌رغم مشکلات این روش، عده‌ای از آن برای حل مسائل حرکت سیال با سطح آزاد استفاده کرده‌اند به عنوان مثال *Jun and Spalding* [۶۷]، که گزارش آنها حاکی از تطابق خوب آزمایشات عملی و نتایج عددی بوده است. همچنین *Chan et al.* [۶۸] از آن برای شبیه‌سازی پرشدن قالب استفاده کردند. در دو مورد ذکر شده روش *Van Leer* برای گسسته‌سازی ترمهای جابجایی مورد استفاده قرار گرفته است.

۳-۳-۴ روش *VOF*^۲

در این روش از کمیت اسکالر F استفاده می‌شود به این صورت که مقدار آن در سلهای پر یک، در سلهای خالی صفر و در سطح آزاد مقدار آن بین صفر و یک است (بسته به کسر حجمی سیال درون آن). مقدار F هم توسط معادله زیر پیدا می‌شود [۶۹]:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (V \cdot \nabla)F = 0$$

۳-۵

البته این در حالتی است که معادله پیوستگی (۳-۶) برقرار باشد در غیر اینصورت معادله بفرم رابطه ۳-۷ خواهد بود [۷۰].

^۱. *False Diffusion*

^۲. *Volume Of Fluid*

$$\nabla \cdot V = 0$$

۳-۶

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot (VF) - (\nabla \cdot V)F = 0$$

۳-۷

اگر این معادله را بصورت مستقیم حل کنیم مشابه روش CAS، فصل مشترک به صورت نفوذی درمی آید. به این علت از روشهای هندسی استفاده می کنیم [۵۹]. اگر از معادله ۳-۷ را روی یک حجم کنترل انتگرال گیری کنیم، ترم دوم برابر مجموع شارهای عبوری از سطوح المان خواهد شد. محاسبه این شارها از روش هندسی شامل دو مرحله است. اول بازسازی وضعیت سیال در سل^۱، دوم جابجایی سیال بین سلها^۲. مرحله اول برای سلهای نیمه پر اهمیت دارد که باید شکل سطح آزاد در سل مشخص شود [۷۱]. در ادامه به تاریخچه روش VOF و پیشرفتهای انجام شده در زمینه آن اشاره می شود.

این روش اولین بار توسط Debar [۷۱] در سال ۱۹۷۴ مطرح شد. در ادامه and Noh Woodward [۷۱] (۱۹۷۶) روش SLIC^۳ را جهت بازسازی سطح آزاد استفاده کردند که در آن سطح آزاد بصورت پاره خطهایی افقی یا عمودی تقریب زده می شود (مطابق شکل ب-۴-۳). (Chorin [۷۲] (۱۹۸۰) با اصلاح روش SLIC از آن برای بررسی پیشروی شعله استفاده کرد. که در ادامه عده زیادی از جمله Sethian [۷۳] (۱۹۸۴) و Whitaker [۷۴] (۱۹۹۰) از همین روش استفاده کردند. Hirt and Nichols [۶۹] (۱۹۸۱) با مقداری اصلاحیه الگوریتم سلهای دهنده-گیرنده^۴ را مطرح کردند که کدهای زیادی براساس این روش توسعه پیدا کردند از جمله SOLA-VOF [۱۱]، NASA-VOF2D [۷۵]، NASA-VOF3D [۷۶]، FLOW3D [۷۷]، RIPPLE [۷۸ و ۷۰] و SURFER [۷۹]. یکی از مشکلات این روشها این است که فصل مشترک را بصورت خشن و پله ای تقریب می زنند و جابجایی سیال در بهترین حالت، دقت درجه اول خواهد داشت [۷۱]. در جهت رفع این مشکل Ashgriz and J. Y. Poo [۸۰] (۱۹۹۱) الگوریتم FLAIR را مطرح کرد که در آن فصل مشترک را بصورت یک پاره خط شیبدار تقریب زده

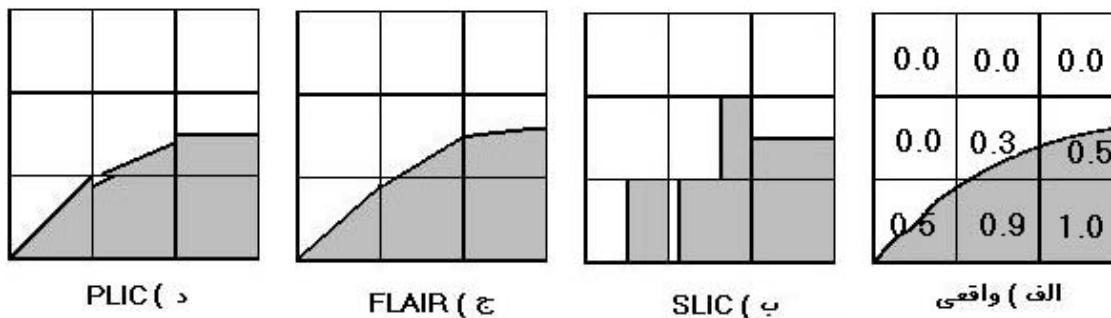
¹. Reconstruction

². Advection

³. Simple Line Interface Calculation

⁴. Donner-Acceptor Algorithm

می‌شد (مطابق شکل ج-۳-۴). به علت پیچیدگی و مشکل بودن تعمیم به سه بعد، این روش چندان توسعه پیدا نکرد. در ادامه روشهای مشابه زیادی تحت عنوان $PLIC$ ^۱ توسعه پیدا کردند که فصل مشترک را در دو بعد بصورت یک پاره خط و در سه بعد بصورت یک صفحه تقریب می‌زدند [۷۱، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴ و ۸۵] (مطابق شکل د-۳-۴). برای پیدا کردن معادله پاره خط از مقادیر تابع F در سلهای اطراف (بلوک 3×3 در دو بعد) استفاده می‌شود، به این صورت که پاره خط طوری انتخاب می‌شود که مجموع مربعات خطایی که پاره خط برای F تقریب می‌زند (در بلوک 3×3)، مینیمم شود. این روش بنام $LVIRA$ ^۲ شهرت یافت. به منظور کاهش زمان محاسبه $Pilliod$ الگوریتم بهینه شده $LVIRA$ را تحت عنوان $ELVIR$ ^۳ مطرح کرد [۷۱]. این الگوریتمها در حالت سه بعدی روی بلوک $3 \times 3 \times 3$ برای یافتن معادله صفحه بکار گرفته می‌شوند. برای سهولت در پیدا کردن معادله صفحه در سه بعد $Gueyffier$ [۸۳] *et al.* و $Scardovelli$ and $Zaleski$ [۸۴] روشی را ارائه کرده‌اند که در آن با حل یک معادله درجه سوم معادله صفحه مشخص می‌شود.



شکل ۳-۴ بازسازی سطح آزاد توسط روشهای مختلف [71].

^۱. *Picewise Linear Interface Calculation*

^۲. *Least Squares Volume-of-Fluid Interface Reconstruction Algorithm*

^۳. *Efficient Least Squares Volume-of-Fluid Interface Reconstruction Algorithm*

پس از بازسازی سطح آزاد نوبت به جابجایی سیال بین سلها می‌شود. مقدار سیالی که باید از فصل مشترک بین دو سل جابجا شود بوسیله مقدار سرعت و جهت آن، گام زمانی و شکل سطح آزاد (در مورد سلهای نیمه‌پر)، مشخص می‌شود. بطور کلی دو دسته الگوریتم جهت جابجایی سیال وجود دارد که عبارتند از: تکه‌ای^۱ یا جهت‌دار^۲ و یکپارچه^۳ یا چند جهته^۴. در الگوریتمهای جهت‌دار پس از مرحله بازسازی، ابتدا برای کلیه سلها سیال در جهت یکی از محورهای مختصات جابجا می‌شود. سپس بازسازی مجدد انجام شده و سیال در جهت محور دیگر جابجا می‌شود. اگر برای بازسازی سطح آزاد از روش *PLIC* استفاده شود و در هر گام زمانی جهت جابجایی نسبت به زمان قبل عوض شود، این الگوریتم دقت درجه دوم خواهد داشت [۷۱، ۸۱ و ۸۲]. بمنظور بهبود دقت، *Gueyffier et al.* [۸۳] از یک الگوریتم لاگرانژین برای جابجایی سیال استفاده کردند به این صورت که پس از مشخص شدن معادله صفحه، صفحه بطور مستقیم در جهت محور جابجایی حرکت کرده و مقدار سیال جابجا شده، با توجه به مکان جدید صفحه پیدا می‌شود. واضح است در عمل سیال بطور همزمان در جهت‌های مختلف حرکت می‌کند. برای رفع این مشکل، روشهای چند جهته توسعه پیدا کردند که در آنها سیال بطور همزمان، در جهت‌های مختلف محورهای مختصات جابجا می‌شود [۷۱، ۸۲، ۸۶، ۸۷، ۸۸ و ۸۹].

در کلیه روشهای اشاره شده در بالا، روش صریح بوده و برای محاسبه مقدار جدید *F* از اطلاعات زمان قبل استفاده می‌کنیم. به همین علت محدودیتی برای گام زمانی داریم به این صورت که سیال در یک گام زمانی باید مسافتی کمتر از طول یک سل را طی کند. برای رفع این محدودیت *Swaminathan and Voller* [۲۴] الگوریتم ضمنی را ارائه کردند. در این الگوریتم مبنای کار به این صورت است که تا زمانی که سل پر نشده است، سیال نمی‌تواند از آن خارج شود و انتقال سیال از سلهای پر صورت می‌گیرد. از محاسن این روش عبارتند از: فصل مشترک کاملاً مشخص و نبود نفوذ کاذب، بقای جرم بطور کامل، کاهش زمان

^۱. *Split*

^۲. *Dimensional*

^۳. *Unsplit*

^۴. *Multidimensional*

محاسبات، ساده بودن و سهولت اضافه کردن آن به کدهای عمومی حرکت سیال. از ضعفهای این روش این است که توانایی خالی کردن یک سل پرشده را ندارد. همچنین این روش تمایل به ضخیم کردن غیر واقعی فصل مشترک را دارد [۲۴]. باید تذکر داد که این روش بصورت صریح نیز قابل استفاده است [۹۰]. به علت ضعفهای اشاره شده، کاربرد این روش محدود شده و کمتر مورد توجه قرار گرفته است.

۳-۳-۵ روش LSM^۱

این روش اولین بار توسط Osher and Sethian [۹۱] (۱۹۸۸) مطرح شد. در این روش از یک کمیت اسکالر Φ استفاده می‌شود. مقدار این کمیت فاصله از فصل مشترک است بطوریکه مقدار آن در فاز سیال مثبت، در خارج سیال منفی و در فصل مشترک صفر است. مقدار کمیت Φ توسط رابطه ۳-۸ پیدا می‌شود [۵۹ و ۹۲]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + V |\nabla \phi| = 0 \quad ۳-۸$$

از آنجا که Φ در فصل مشترک ماهیت ناپیوسته دارد و معادله ۳-۸ برای کمیت‌های پیوسته قابل حل است، برای فصل مشترک یک ضخامت کم در نظر گرفته شده و Φ تحت یک مرحله هموارسازی^۲ قرار می‌گیرد. همچنین برای جلوگیری از نفوذی شدن فصل مشترک و حفظ خواص Φ ، پس از حل معادله ۳-۸، از یک معادله کمکی استفاده می‌کنیم که به این مرحله شروع مجدد^۳ گویند [۹۳].

بنظر می‌رسد در میان روشهای ردیابی فصل مشترک، این روش رقیب روش *VOF* بوده و از امتیازات آن محاسبه دقیق‌تر تنشهای سطحی است و از جمله ضعفهایش وجود نداشتن تضمینی برای بقای جرم حین حرکت فصل مشترک است به طوری که ممکن است تا حدود ۲۰ درصد کاهش جرم داشته باشیم [۹۴]. در راستای رفع این مشکل تلاشهایی انجام شده که عبارتند از: استفاده از روش ریزسازی سازگار مشها [۹۵]، استفاده از ذرات کمکی [۹۶] و ترکیب با روش *VOF* [۹۴ و ۹۷].

^۱. Level Set Method

^۲. Smoothing

^۳. Reinitialization

۶-۳-۳ جمع بندی

پس از یک جمع بندی از مطالب ذکر شده در این تحقیق، از روش *VOF* برای ردیابی سطح آزاد استفاده می شود که جزئیات آن عبارتند از: روش *PLIC* برای بازسازی سطح آزاد و روش جهت دار لاگرانژین برای جابجایی سیال بین سلها. اگرچه روشهای چندجهته دقت بالاتری دارند ولی به علت پیچیدگی هندسی و زمان بر بودن محاسبات از آنها صرف نظر می شود. همچنین به علت اینکه در فرایندهای پر شدن قالب اثر تنش سطحی ناچیز است، تلفیق روش *LSM* با روش *VOF* ضرورتی ندارد.

۴-۳ مدل سازی حرکت سیال

می توان فرض کرد که مذاب فلزات سیالی تراکم ناپذیر^۱ و نیوتنی است. اگر از اثر تغییر فاز صرف نظر کنیم، معادلات حاکم معادلات نویراستوک^۲ برای سیال تراکم ناپذیر هستند که در حالت بقایی^۳ عبارتند از [۲]:

۳-۹ تا ۳-۱۲:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} + S_x \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} + S_y \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho ww)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial z} + S_z \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

^۱. Incompressible

^۲. Navier Stokes

^۳. Conservatine

در این معادلات u ، v و w مؤلفه‌های بردار سرعت در جهت محورهای مختصات، P فشار، ρ چگالی، μ ویسکوزیته دینامیکی و S ها ترمهای چشمه^۱ هستند. ترمهای چشمه شامل نیروهایی است که بر حرکت سیال مؤثرند از جمله شتاب ثقل S_g و کاهش سرعت ناشی از انجماد S_e . ترمهای چشمه ناشی از شتاب ثقل توسط رابطه^{۳-۱۳} بیان می‌شود. در این رابطه اثر جابجایی^۲ مذاب بعلا تغییرات چگالی ناشی از وجود شیب دمایی، توسط تقریب بوسینسک^۳ مدل شده است. باید توجه کرد که اغلب منابع از این تقریب برای مدلسازی جابجایی آزاد سیال استفاده کرده‌اند [۲۶، ۹۸، ۹۹ و ۱۰۰].

$$\begin{cases} S_{gx} = \rho g_x \beta (T - T_{ref}) \\ S_{gy} = \rho g_y \beta (T - T_{ref}) \\ S_{gz} = \rho g_z \beta (T - T_{ref}) \end{cases} \quad 3-13$$

در رابطه^{۳-۱۳}، g شتاب ثقل، β ضریب انبساط حرارتی حجمی^۴ و T_{ref} دمای مرجع است. برای ترم چشمه ناشی از انجماد، Voller and Prakash [۱۰۰] (۱۹۸۷) رابطه‌ای را بر مبنای حرکت سیال در محیط متخلخل^۵ ارائه کردند (مطابق رابطه^{۳-۱۴}). این رابطه بعدها توسط عدة زیادی از محققان مورد استفاده قرار گرفت [۲۶، ۹۸، ۹۹ و ۱۰۰].

$$\begin{cases} S_{ex} = Au \\ S_{ey} = Av \\ S_{ez} = Aw \\ A = -C \frac{(1 - f_l)^2}{f_l^3 + b} \end{cases} \quad 3-14$$

در این رابطه C ثابتی است که بستگی به مورفولوژی منطقه خمیری دارد، f_l کسر حجمی مایع و b عدد کوچکی برای جلوگیری از صفر شدن مخرج است. البته روشهای دیگری نیز

¹. Source Term

². Convection

³. Boussinesq

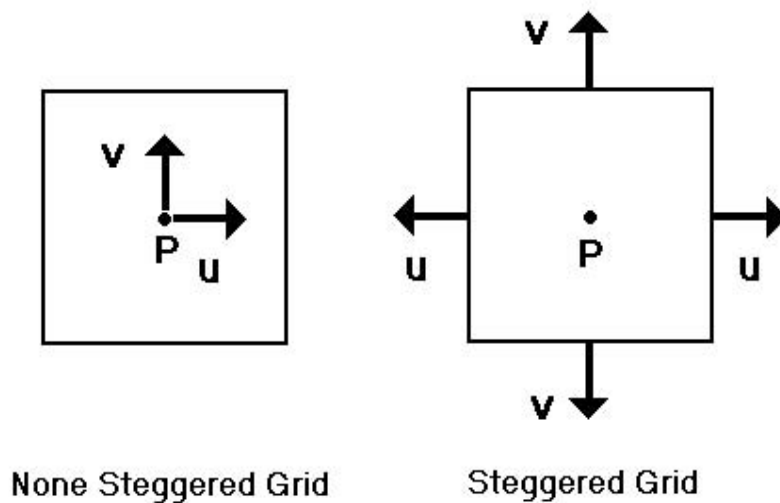
⁴. Volumetric Thermal Expansion Coefficient

⁵. Porous Media

جهت وارد کردن اثر انجماد وجود دارند از جمله : صفر کردن سرعت هنگامی که کسر حجمی جامد از حدی بحرانی بیشتر شود^۱ و افزایش ویسکوزیته با افزایش کسر حجمی جامد^۲ [۲]. با توجه به اینکه در ریخته‌گری تحت فشار کم جریان سیال آرام است می‌توان از اثر توربلانس^۳ صرف‌نظر کرد. حال به بررسی روشهای حل این معادلات می‌پردازیم.

۳-۴-۱ مکان تعریف متغیرها روی شبکه محاسباتی

بطور کلی دو روش برای مشخص کردن مکان متغیرها در شبکه محاسباتی وجود دارد. (۱) تعریف همه متغیرها در مرکز سل^۴ . (۲) تعریف سرعتها در مراکز سطوح سل و اسکالرها در مرکز آن^۵. شکل ۳-۵ این شبکه‌ها را در حالت دو بعدی نشان می‌دهد [۴۱].

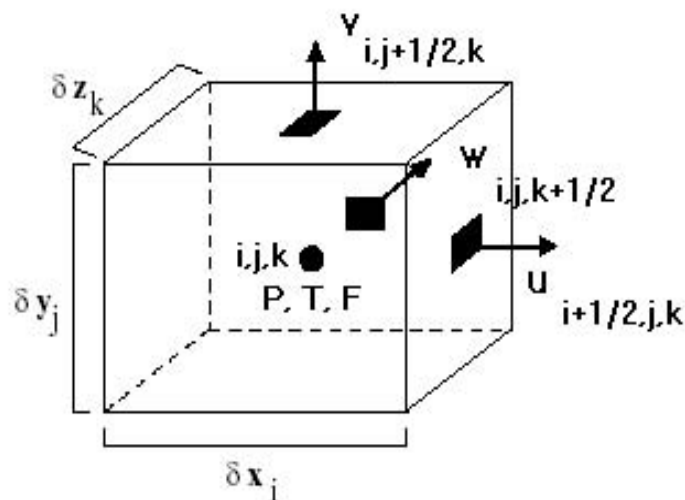


شکل ۳-۵ روشهای مختلف تعریف مکان متغیرها روی شبکه محاسباتی.

¹ . Switched-off
² . Effective Viscosity
³ . Turbulence
⁴ . None Staggered Grid
⁵ . Staggered Grid

استفاده از روش اول بطور مستقیم باعث بروز خطای عددی می‌شود. بعنوان مثال اگر یک مسئله یک بعدی را در نظر گرفته شود بطوریکه مقدار فشار در سل‌های متوالی بصورت یکدورمیان برابر باشد. هر سل در مرکز خود گرادیان فشار صفری را احساس می‌کند و این میدان فشار موجی بصورت یک میدان فشار یکنواخت احساس می‌شود. در روش دوم این مشکل برطرف شده است [۴۱]. اگر از مش‌های بی‌سازمان و تکنیک حجم محدود استفاده شود، استفاده از روش دوم باعث پیچیدگی زیاد می‌شود. در این حالت از روش اول به‌مراه درونیابی سرعتها به سطوح المان استفاده می‌شود [۱۰۱].

با توجه به مطالب ذکر شده در این تحقیق از روش دوم استفاده می‌شود. برای سهولت در بیان کمیتها، موقعیت مرکز هر سل با اندیس i,j,k مشخص می‌شود که به ترتیب معرف موقعیت روی محورها x,y,z هستند و با حرکت به سمت سطوح المان در هر جهت $\frac{1}{2}$ به اندیس آن جهت اضافه یا کم می‌شود (مطابق شکل ۶-۳). لازم به ذکر است در این تحقیق از طول مش ثابت استفاده خواهد شد.



شکل ۶-۳ تصویر یک سل محاسباتی و موقعیت متغیرها روی آن.

۲-۴-۳ روشهای حل معادلات نویر استوک

امروزه روشها زیادی برای حل معادلات نویر استوک وجود دارد. دسته‌ای از روشها ضمنی بوده که بیشتر برای حل مسائل پایدار^۱ بکار می‌روند. بعنوان مثال *SIMPLER* [۴۱]، *APPLE* [۱۰۲] و *PISO* [۱۰۳ و ۱۰۴]. البته روش *PISO* در حل مسائل گذرا^۲ نیز کاربرد دارد، اما باید توجه کرد که این روش نیاز دارد در هر گام زمانی پنج سری دستگاه معادلات خطی حل شود که این باعث افزایش زمان پردازش کامپیوتری می‌شود. دسته دیگر صریح بوده و غالباً برای حالت‌های گذرا مورد استفاده قرار می‌گیرند.

از اولین روشهای حل معادلات نویر استوک در حالت گذرا روش *MAC* [۳۴] است. در این روش ابتدا معادلات ۳-۹ تا ۳-۱۱ با یک میدان فشار حدسی یا مربوط به گام زمانی قبلی، بطور صریح حل می‌شوند. سپس سرعت‌های حاصله به همراه فشار مجهول، در معادله ۳-۱۲ قرار داده شده و با حل یک دستگاه معادله خطی میدان فشار طوری پیدا می‌شود که معادله ۳-۱۲ ارضا شود. در پایان سرعتها بر اساس فشار جدید تصحیح می‌شوند. تلاشهایی هم در جهت بهبود این روش صورت گرفته است. مثل توسعه الگوریتمهای *SMAC* [۱۰۵] و *SIMAC* [۱۰۶]. (باید تذکر داد که در این روشها معادلات تنها روی سل‌های حاوی سیال حل می‌شوند).

یکی از روشهای موفق دیگر الگوریتم *SOLA*^۳ [۱۰۷] است. در این الگوریتم پس از حل صریح معادلات ۳-۹ تا ۳-۱۱ با میدان فشار حدسی، مقدار تغییرات فشار مورد نیاز برای هر سل بطور جداگانه، با توجه به معادله ۳-۱۲ محاسبه می‌شود، سپس فشار و سرعت‌های وجوه آن اصلاح می‌شوند و این فرایند آنقدر تکرار می‌شود تا معادله ۳-۱۲ برای کلیه سل‌ها صادق باشد. *SOLA-VOF* [۱۱] نسخه توسعه یافته این الگوریتم جهت حل مسائل همراه با سطح آزاد است. *Hirt and Nichols* [۱۰۸] نشان دادند با اضافه کردن مقداری تراکم پذیری محدود به

¹. Steady State

². Transient

³. SOLution Algorithm

سیال، سرعت همگرایی افزایش می‌یابد. از محاسن این روش سادگی آن و عدم نیاز به حل دستگاه معادلات خطی است. اما باید توجه کرد که در مسائلی که تغییر فشار زیاد است، آهنگ همگرایی بسیار کم می‌شود و در این موارد بهتر است با حل یک دستگاه معادلات خطی میزان تغییر فشار را بطور همزمان روی کل میدان پیدا کنیم [۷۵]. یکی از اصلاحات دیگری که برای بهبود همگرایی انجام شده است، استفاده همزمان معادلات ۳-۹ تا ۳-۱۲ حین اصلاح فشار است [۱۷]. (در این روش نیز معادلات تنها روی سلهای حاوی سیال حل می‌شود.) این روش برای شبیه‌سازی پر شدن قالب در فرایندهای ریخته‌گری توسط محققین زیادی مورد استفاده قرار گرفته است از جمله مراجع ۴، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۷، ۱۸، ۱۹ و ۲۰.

PROJECTION [۷۰] یکی دیگر از روشهای حل معادلات نویر استوک در حالت گذرا است. در این روش معمولاً معادلات ۳-۹ تا ۳-۱۱ بدون در نظر گرفتن ترمهای حاوی فشار، بصورت صریح حل می‌شوند. سپس سرعتهای کاذب^۱ حاصله به همراه فشار مجهول، در معادله ۳-۱۲ قرار داده شده و با حل یک دستگاه معادلات خطی میدان فشار طوری پیدا می‌شود که معادله ۳-۱۲ را ارضا کند. در نهایت گرادیان فشار به سرعتهای کاذب اضافه شده و سرعتهای واقعی پیدا می‌شوند. این روش از زمان پیدایش تا بحال مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است و تلاشهای زیادی در جهت بهبود دقت آن صورت گرفته است به عنوان مثال مراجع ۶۰، ۷۸، ۷۹، ۸۲، ۸۳، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۱۰۹، ۱۱۰ و ۱۱۱. در این روش اکثر محققان برای حل مسائل همراه با سطح آزاد از روش میانگین‌گیری خواص استفاده کرده و معادلات را روی کل میدان حل کرده‌اند. از جمله مراجع ۶۰، ۷۸، ۷۹، ۸۲، ۸۳، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۱۱۲، ۱۱۳ و ۱۱۴. به نظر می‌رسد اکثر کارهای جدید با استفاده از روش اخیر و در جهت توسعه آن صورت می‌گیرد.

با یک جمع‌بندی مشخص می‌شود که محققان در زمینه شبیه‌سازی فرایندهای ریخته‌گری بیشتر از الگوریتم *SOLA-VOF* استفاده کرده‌اند در حالیکه در زمینه‌های دیگر حرکت سیال همراه با سطح آزاد بیشتر الگوریتم *Projection* مورد توجه بوده است. یکی از مشکلات روش *SOLA-VOF* این است که استفاده از شرط مرزی فشار در آن مشکل بوده و موجب ناپایداری

^۱. Pseudo

و همگرایی ضعیف می‌شود [۲]. بنابراین در این تحقیق از روش *Projection*، با خواص متغیر استفاده خواهد شد.

۳-۵ مدل‌سازی هوای داخل قالب

یکی از مسائل مهم در شبیه‌سازی پر شدن قالب مدل‌سازی هوای داخل قالب است که از نتایج آن می‌توان در جهت طراحی خروجی‌های هوا^۱ و تعیین الگوی درست پر شدن قالب استفاده کرد. بطور عمده دو روش برای مدل‌سازی هوا وجود دارد. در روش اول، هوا را بصورت یک گاز شبه ایده‌ال در نظر می‌گیرند. و فشار آن توسط رابطه ۳-۱۵ محاسبه می‌شود. در این رابطه P فشار، V حجم، n تعداد مولها، R ثابت عمومی گازها و T دما است. واضح است در این روش ابتدا باید حفره‌های هوایی شناسایی شوند. همچنین ادغام دو حفره یا تقسیم شدن یک حفره هوایی در نظر گرفته شود.

$$PV = nRT$$

۳-۱۵

در این روش معادلات حرکت فقط روی فاز مایع حل می‌شوند و فشار هوا بصورت شرط مرزی بر سطح آزاد اعمال می‌شود [۲ و ۱۱۵]. از جمله مشکلات این روش نیاز به اعمال شرط مرزی بر سطح آزاد است. چراکه بعلا پیچیدگی معادلات حاکم از تقریب استفاده می‌شود که می‌تواند باعث افزایش یا کاهش سرعت سطح آزاد نسبت به مقدار حقیقی آن شود [۱۱۶]. *Lee and Sheu* [۱۱۶] برای بهبود دقت اعمال شرط مرزی بر سطح آزاد از حل معادله لاپلاس در فاز گازی برای محاسبه سرعت‌های سطح آزاد استفاده کردند که شرایط مرزی آن در فصل مشترک، سرعت‌های حاصل از حل معادلات حرکت در فاز مایع است. در روش دوم معادلات روی کل میدان با خواص متغیر حل می‌شوند. اگر کسر حجمی سیال درون هر سل F باشد، ویسکوزیته و چگالی هر سل توسط رابطه ۳-۱۶ پیدا می‌شود (g و l بترتیب معرف گاز و مایع هستند) [۶۰، ۷۸، ۷۹، ۸۲، ۸۳، ۱۱۲، ۱۱۳].

^۱. Vent

$$\begin{cases} \rho = F\rho_l + (1-F)\rho_g \\ \mu = F\mu_l + (1-F)\mu_g \end{cases} \quad 3-16$$

در این تحقیق از روش دوم استفاده خواهد شد.

3-6 مدل سازی تنش های سطحی

اگر از مؤلفه های مماسی تنش های سطحی صرف نظر کنیم، فشار ناشی از تنش سطحی در فصل مشترک از رابطه 3-17 تبعیت می کند.

$$P_s = \sigma\kappa \quad 3-17$$

در بعضی روشها این فشار پس از محاسبه، بصورت شرط مرزی به فشار سطح آزاد اضافه می شود [11، 75، 76 و 115]. در روش دقیق تر تنش سطحی بصورت یک ترم چشمه به معادله نویر استوک اضافه می شود. این روش به نام CSF^1 مشهور است [78 و 112]. مقدار این ترم مطابق رابطه 3-18 است. در این رابطه n بردار یکه نرمال بر سطح آزاد است.

$$\begin{cases} S_{st} = \sigma\kappa \hat{n} \\ \hat{n} = \frac{n}{|n|} \\ n = \nabla F \end{cases} \quad 3-18$$

مقدار انحنای متوسط سطح آزاد هم از رابطه 3-19 محاسبه می شود.

$$\kappa = -\left(\nabla \cdot \hat{n}\right) = \frac{1}{|n|} \left[\left(\frac{n}{|n|} \cdot \nabla\right) |n| - (\nabla \cdot n) \right] \quad 3-19$$

¹. Continuum Surface Force

در اکثر کارهای انجام شده از این روش و روشهای مشابه آن استفاده شده است. از جمله مراجع ۷۹، ۸۳، ۹۴، ۱۱۲ و ۱۱۷. در این تحقیق نیز از روش دوم استفاده می‌شود.

۳-۷ مدلسازی انتقال حرارت و تغییر فاز

بطور کلی برای مدلسازی انتقال حرارت از معادله انرژی استفاده می‌شود که شکل ساده شده آن بصورت رابطه ۳-۲۰ است.

$$c_p \left(\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u T)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v T)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w T)}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad ۳-۲۰$$

در این رابطه k ضریب هدایت حرارت و c_p ظرفیت حرارتی ویژه است. برای وارد کردن اثر تغییر فاز روشهای مختلفی وجود دارد. یکی از روشهایی که در گذشته مورد استفاده قرار می‌گرفت ظرفیت حرارتی مؤثر بود. در این روش اثر تغییر فاز وارد ظرفیت حرارتی می‌شود مطابق رابطه ۳-۲۱. L_f در این رابطه گرمای نهان ذوب است [۹]. واضح است این روش برای انجمادهای همدمای مثل فلزات خالص و آلیاژهای یوتکتیک قابل استفاده نیست. مگر اینکه مقدار کمی فاصله انجماد مجازی برای این فلزات در نظر گرفته شود.

$$\begin{cases} c_p = c_{p_l} & T > T_{liquidos} \\ c_p = \frac{L_f}{T_l - T_s} & T_{solidos} < T < T_{liquidos} \\ c_p = c_{p_s} & T < T_{solidos} \end{cases} \quad ۳-۲۱$$

یکی از دقیقترین روشها که امروزه بطور وسیعی مورد استفاده قرار گرفته است روش انتالپی^۱ است که در این تحقیق از آن استفاده می‌شود. از میان کارهای انجام شده در زمینه توسعه این روش تحقیقات Voller و همکارانش قابل توجه است [۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲ و ۱۲۳]. اگر انتالپی را با H و کسر حجمی مایع را با f_l نشان دهیم، رابطه ۳-۲۲ محاسبه می‌شود.

$$H = (1 - f_l) \int_{T_{ref}}^T \rho c_{solid} dT + f_l \int_{T_{ref}}^T \rho c_{liquid} dT + f_l L_f \quad ۳-۲۲$$

در روش انتالپی رابطه ۳-۲۰ بفرم زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(uH)}{\partial x} + \frac{\partial(vH)}{\partial y} + \frac{\partial(wH)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad ۳-۲۳$$

مشکل اصلی در حل این معادله غیر خطی بودن آن است. تلاشهایی برای حل این معادله بصورت غیر خطی شده است [۱۱۸] ولی بیشتر محققان با روشی خاص معادله را به خطی تبدیل کرده‌اند [۱۲۰]. بطور کلی روشها به دو دسته صریح و ضمنی تقسیم می‌شوند. در روشهای ضمنی محدودیتی روی گام زمانی نداریم و گام زمانی می‌تواند خیلی بزرگ انتخاب شود. در فرایند پر شدن قالب گام زمانی به علت محدودیتهای ناشی از حل معادلات حرکت، آنقدر کوچک است که معیار پایداری روش صریح را ارضا می‌کند. بنابراین در این تحقیق از روش صریح استفاده می‌شود.

روش کار به این صورت است که ابتدا معادله ۳-۲۳، برای محاسبه انتالپی، بطور صریح حل می‌شود. سپس توسط رابطه ۳-۲۴ دما پیدا می‌شود. در این رابطه از بسط تیلور برای خطی‌سازی استفاده شده است [۱۲۱].

$$T^{t+\Delta t} = T^t + \left(\frac{dT}{dH} \right)^t [H^{t+\Delta t} - H^t] \quad ۳-۲۴$$

^۱. Enthalpy

برای محاسبه شیب منحنی دما-انتالپی از رابطه ۳-۲۵ استفاده می‌شود (ε مقداری کوچک).

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{if } f_l = 1 & \frac{dT}{dH} = \frac{1}{c_{p_l}} \\ \text{if } 0 < f_l < 1 \text{ and } T \neq T_{eutectic} \pm \varepsilon & \frac{dT}{dH} = \frac{1}{\frac{c_{p_l} + c_{p_s}}{2} + L_f \frac{df_l}{dT}} \\ \text{if } 0 < f_l < 1 \text{ and } T = T_{eutectic} \pm \varepsilon & \frac{dT}{dH} = \frac{1}{\frac{c_{p_l} + c_{p_s}}{2} + \frac{L_f}{2\varepsilon}} \\ \text{if } f_l = 0 & \frac{dT}{dH} = \frac{1}{c_{p_s}} \end{array} \right. \quad 3-25$$

برای محاسبه کسر حجمی مایع از رابطه ۳-۲۶ استفاده می‌کنیم [۱۲۲].

$$f_l^{t+\Delta t} = f_l^t + \left(\frac{df_l}{dT} \right)^t [T^{t+\Delta t} - T^t] \quad 3-26$$

یکی از مسائل مهم در این قسمت تعیین شیب منحنی کسر حجمی مایع با دما است. اگر رابطه کسر حجمی مایع با دما مشخص باشد کار ساده است. بعنوان مثال رابطه خطی (۳-۲۷) قانون اهرم (۳-۲۸) یا قانون شایل (۳-۲۹) [۲].

$$f_l = \frac{T - T_{solidos}}{T_{liquidos} - T_{solidos}} \quad 3-27$$

$$f_l = \frac{C_0 m_l - k(T - T_m)}{(1 - k)(T - T_m)} \quad 3-28$$

$$f_l = \left(\frac{T - T_m}{m_l C_0} \right)^{1/(k_0 - 1)} \quad 3-29$$

در روابط بالا $T_{Liquidos}$ و $T_{Solidos}$ بترتیب دمای شروع و خاتمه انجماد، C_0 ترکیب اولیه، m_i شیب منحنی شروع انجماد بر حسب ترکیب شیمیایی، k ضریب توزیع و T_m نقطه ذوب فلز پایه در حالت خالص است. در مورد فلزات خالص یا در حالتی که رابطه مشخصی موجود نباشد، از رابطه ۳-۳۰ استفاده می‌شود [۱۲۲].

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{if } 0 < f_l < 1 \\ \text{if } f_l = 0 \text{ or } f_l = 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{df_l}{dT} = \frac{f_l^t - f_l^{t-\Delta t}}{T^t - T^{t-\Delta t} + 10^{-6}} \\ \frac{df_l}{dT} = 0 \end{array} \quad \text{۳-۳۰}$$

پس از محاسبه کسر حجمی مایع از رابطه ۳-۳۱ برای اصلاح آن استفاده می‌شود [۱۲۱].

$$f_l = \max \left[0, \min [f_l, 1] \right] \quad \text{۳-۳۱}$$

پس از محاسبه کسر حجمی مایع، ضریب انتقال حرارت، چگالی و ظرفیت حرارتی ویژه هر سل را با توجه به کسر حجمی مایع در آن محاسبه می‌شود. برای این منظور از یک میانگین‌گیری ساده استفاده می‌شود. برای نمونه رابطه ۳-۳۲ این محاسبه را برای ضریب انتقال حرارت نشان می‌دهد. باید توجه کرد که در مورد سل‌های نیمه پر تابع F نمایانگر مجموع کسر حجمی جامد و مایع موجود در سل است.

$$k = F \left(f_l k_{Liquid} + (1 - f_l) k_{Solid} \right) + (1 - F) k_{Aire} \quad \text{۳-۳۲}$$

در مورد انتقال حرارت هوای داخل قالب بهتر این است که در سطح آزاد تشعشع در نظر شود، اما بعلت اینکه در ریخته‌گری تحت فشار کم از آلیاژهای نقطه ذوب پایین (آلومینیم و منیزیم) استفاده می‌شود تشعشع ناچیز است. بنابر این برای سهولت، از حل معادله انرژی روی کل میدان با خواص متغیر استفاده می‌شود. حال در فصل مشترک فلز-قالب یا هوا-فلز خواص حرارتی تغییر شدید دارد. واضح است روی دیواره دو سل غیر همجنس باید

خواص ترکیبی از خواص دو سل باشد. *Voller* [۱۲۴] ادعا کرد اگر خواص تابع مکان باشد استفاده از میانگین هندسی مناسب است (رابطه ۳-۳۳).

$$k_M = \left[\frac{0.5}{k_R} + \frac{0.5}{k_L} \right]^{-1} \quad ۳-۳۳$$

در این رابطه k خاصیت مورد نظر بوده و اندیس‌های M, R, L بترتیب معرف سل چپ، سل راست و فصل مشترک دو سل هستند. اما اگر خواص تابع دما باشد استفاده از میانگین هندسی می‌تواند خطای زیادی را تولید کند. برای این منظور استفاده از تبدیل کیرشف^۱ می‌تواند منجر به جوابهای دقیقتری شود [۱۲۴ و ۱۲۵]. در این تحقیق فرض می‌شود خواص مستقل از دما هستند و از رابطه ۳-۳۳ استفاده می‌شود.

^۱. *Kirchhoff*

فصل چهارم

مدلسازی عددی

۴-۱ مدلسازی عددی سطح آزاد

روش عددی انتخاب شده بر اساس مراجع ۶۰، ۸۳ و ۸۴ می‌باشد. ابتدا به بازسازی سطح آزاد پرداخته می‌شود. نرمال بر سطح آزاد از رابطه ۴-۱ بدست می‌آید. برای بدست آوردن نرمال در مرکز سل ابتدا نرمال را در گوشه‌ها پیدا کرده (رابطه ۴-۲) و سپس با میانگین‌گیری بین ۸ گوشه هر سل، نرمال در مرکز سل محاسبه می‌شود (رابطه ۴-۳).

$$\hat{n} = \nabla F \quad \text{۴-۱}$$

: ۴-۲

$$\left\{ \begin{aligned} n_{x,i+1/2,j+1/2,k+1/2} &= \frac{F_{i+1,j,k} - F_{i,j,k} + F_{i+1,j+1,k} - F_{i,j+1,k} + F_{i+1,j,k+1} - F_{i,j,k+1} + F_{i+1,j+1,k+1} - F_{i,j+1,k+1}}{4\delta_x} \\ n_{y,i+1/2,j+1/2,k+1/2} &= \frac{F_{i,j+1,k} - F_{i,j,k} + F_{i+1,j+1,k} - F_{i+1,j,k} + F_{i,j+1,k+1} - F_{i,j,k+1} + F_{i+1,j+1,k+1} - F_{i+1,j,k+1}}{4\delta_y} \\ n_{z,i+1/2,j+1/2,k+1/2} &= \frac{F_{i,j,k+1} - F_{i,j,k} + F_{i,j+1,k+1} - F_{i,j+1,k} + F_{i+1,j,k+1} - F_{i+1,j,k} + F_{i+1,j+1,k+1} - F_{i+1,j+1,k}}{4\delta_z} \end{aligned} \right.$$

: ۴-۳

$$n_{i,j,k} = \frac{1}{8} \left(n_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} + n_{i-1/2,j+1/2,k+1/2} + n_{i+1/2,j-1/2,k+1/2} + n_{i-1/2,j-1/2,k+1/2} + \right. \\ \left. n_{i+1/2,j+1/2,k-1/2} + n_{i-1/2,j+1/2,k-1/2} + n_{i+1/2,j-1/2,k-1/2} + n_{i-1/2,j-1/2,k-1/2} \right)$$

اگر سطح آزاد را در سلهای نیمه پر با یک صفحه تقریب زده شود، معادله صفحه مطابق رابطه ۴-۴ خواهد بود. در این رابطه، α کمترین فاصله صفحه با مبدا مختصات در سل است. و مؤلفه‌های بردار نرمال مربوط به مرکز سل هستند. اگر حجم سیال درون سل را با $Volume$ نشان دهیم رابطه ۴-۵ برقرار خواهد بود.

$$n_x x + n_y y + n_z z = \alpha \quad \text{۴-۴}$$

: ۴-۵

$$\left\{ \begin{array}{l} Volume = \frac{1}{6n_1 n_2 n_3} \left[\alpha^3 - \sum_{j=1}^3 H(\alpha - n_j c_j) (\alpha - n_j c_j)^3 + \sum_{j=1}^3 H(\alpha - \alpha_{\max} + n_j c_j) (\alpha - \alpha_{\max} + n_j c_j)^3 \right] \\ n_1 = n_x \quad n_2 = n_y \quad n_3 = n_z \\ c_1 = \delta_x \quad c_2 = \delta_y \quad c_3 = \delta_z \\ \alpha_{\max} = n_1 c_1 + n_2 c_2 + n_3 c_3 \\ H(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

با توجه به رابطه ۴-۵، برای محاسبه α نیاز است معادله ۴-۵ بر حسب α حل شود. برای حل این معادله Gueyffier et al [۸۳] روش خاصی را پیشنهاد کردند که از آن استفاده می‌شود. مقادیر بحرانی برای α وجود دارد که به ازای آنها صفحه از یکی گوشه‌های سل می‌گذرد. بین هر دو مقدار بحرانی معادله ۴-۵ بصورت چند جمله‌ای درجه سوم بوده و برای آن جواب تحلیلی وجود دارد. بنابراین ابتدا دو مقدار بحرانی α را یافته، سپس توسط ریشه‌گیری α پیدا می‌شود (برای مطالعه بیشتر به مراجع ۶۰، ۸۳ و ۸۴ رجوع شود). پس از بازسازی سطح آزاد نوبت به جابجایی سیال بین سلها می‌رسد. همانطور که قبلاً اشاره شد در این مرحله از رابطه ۴-۶ استفاده می‌شود (U بردار سرعت است).

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot (UF) - F \nabla \cdot U = 0 \quad 4-6$$

ابتدا از معادله ۴-۶ روی حجم کنترل و بازه زمانی انتگرال گرفته می‌شود.

$$\int_0^\tau \int_{\Omega_{i,j,k}} \frac{\partial F}{\partial t} dt dV = - \int_0^\tau \int_{\partial\Omega_{i,j,k}} (UF) \cdot n dt dS + \int_0^\tau \int_{\Omega_{i,j,k}} F \nabla \cdot U dt dV \quad 4-7$$

با استفاده از الگوریتم جهت‌دار جابجایی رابطه ۴-۶ بصورت زیر درمی‌آید.

: ۴-۸

$$\int_{\Omega_{i,j,k}} \left[\left(F^3 - F^2 \right)_+ + \left(F^2 - F^1 \right)_+ + \left(F^1 - F^0 \right)_+ \right] dV = \sum_{l=1}^3 \left[- \int_0^\tau \int_{\Omega_l} F^{l-1} U \cdot dS_l dt + \int_0^\tau \int_{\Omega_{i,j,k}} F^{l-1} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} dV dt \right]$$

اندیس‌های ۱ تا ۳ در معادله بالا معرف جهات جابجایی سیال هستند. برای هر مرحله جابجایی در معادله بالا داریم:

$$\int_{\Omega_{i,j,k}} (F^{l+1} - F^l) dV = -\int_0^\tau \int_{\Omega_l} F^l u_l dS_l dt + \int_0^\tau \int_{\Omega_{i,j,k}} F^l \frac{\partial u_l}{\partial x_l} dV dt \quad 4-9$$

می توان معادله بالا را بصورت زیر نوشت.

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_x \delta_y \delta_z (F_{i,j,k}^{l+1} - F_{i,j,k}^l) = -\int_0^\tau \int_{\Omega_l} F^l u_l dS_l dt + \int_0^\tau \int_{\Omega_{i,j,k}} F^l \frac{\partial u_l}{\partial x_l} dV dt \\ F_{i,j,k} = \frac{1}{\delta_x \delta_y \delta_z} \int_{\Omega_{i,j,k}} F dV \end{array} \right. \quad 4-10$$

در معادله 4-10 ترم اول سمت راست اهمیت زیادی دارد که بروش هندسی محاسبه می شود. برای محاسبه هندسی سیال عبوری، صفحه بازسازی شده جابجا می شود. جهت های جابجایی با اندیس ۱، ۲ و ۳ نشان داده می شوند. جابجایی را برای جهت ۱ می نویسیم که برای سایر جهات بروش مشابه عمل می شود. برای سادگی فرض می شود دیواره سمت چپ در $x=0$ و دیواره سمت راست در $x=h=c_l$ قرار دارد و سرعت این دیواره ها بترتیب U_0 و U_h است. با یک درونیایی خطی سرعت سایر نقاط سل عبارت خواهد بود از:

$$u_1(x_1) = U_0 \left(1 - \frac{x_1}{h} \right) + U_h \frac{x_1}{h} \quad 4-11$$

فرض می شود در طول زمان جابجایی سرعتها ثابت هستند. مکان جدید نقاط عبارت خواهد بود از: (اندیس n معرف گام زمانی قبلی است)

$$x_1^* = x_1^n + u_1(x_1^n) \tau = \left[1 + \left(\frac{U_h + U_0}{h} \right) \tau \right] x_1^n + U_0 \tau \quad 4-12$$

X_2 و X_3 در طول این جابجایی ثابت هستند. از رابطه قبلی نتیجه می شود :

$$x_1^n = \frac{x_1^* - U_0 \tau}{1 + ((U_h + U_0) / h) \tau} \quad 4-13$$

حال معادله صفحه پس از جابجایی بصورت رابطه 4-14 یا 4-15 خواهد شد.

$$n_1^n \left[\frac{x_1^* - U_0 \tau}{1 + ((U_h + U_0) / h) \tau} \right] + n_2^n x_2^n + n_3^n x_3^n = \alpha^n \quad 4-14$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1^* x_1^* + n_2^* x_2^* + n_3^* x_3^* = \alpha^n \\ n_1^* = \frac{n_1^n}{1 + ((U_h + U_0) / h) \tau} \\ \alpha_1^* = \alpha^n + \frac{n_1^n U_0 \tau}{1 + ((U_h + U_0) / h) \tau} \end{array} \right. \quad 4-15$$

* = old Value for other direction

پس از جابجایی باید بررسی شود که چه مقدار سیال به سلهای همسایه وارد شده است. مثلاً اگر U_h مثبت و α^*/n_i^* بزرگتر از h باشد، نشان می دهد مقداری سیال وارد سل سمت راست شده است. این مقدار براحتی توسط رابطه 4-5 محاسبه می شود. برای این منظور از یک تبدیل مطابق رابطه 4-16 استفاده می شود.

$$x_1^* = h + x_1' \quad 4-16$$

که مختصات جدید فاصله از دیواره سمت چپ، سل سمت راست است. معادله 4-15 بصورت رابطه 4-17 در می آید.

$$\begin{cases} n_1^* x_1' + n_2^* x_2^* + n_3^* x_3^* = \alpha' \\ \alpha' = \alpha^* - n_1^* h \end{cases} \quad \text{۴-۱۷}$$

معادله ۴-۱۷ برای محاسبه مقدار سیال وارد شده به سل سمت راست بکار می‌رود. مقدار سیالی که احیاناً به سل سمت چپ وارد شده بطور مشابه محاسبه می‌شود. در نهایت مقدار سیال باقی‌مانده بوسیله رابطه ۴-۱۵ و ۴-۵ محاسبه می‌شود. بطور کلی مقدار سیال درون سل پس از جابجایی در یک جهت مطابق رابطه ۴-۱۸ خواهد بود.

$$\begin{cases} F_{i,j,k}^{(*,x_1)} = [(\phi^-)_{i,j,k} + (\phi^0)_{i,j,k} + (\phi^+)_{i,j,k}] \\ (\phi^+)_{i,j,k} = \begin{cases} \text{fluid entering from right cell} & \text{if } u_{\text{right}} < 0 \\ 0 & \text{if } u_{\text{right}} > 0 \end{cases} \\ (\phi^0)_{i,j,k} = \text{fluid remaining in cell} \\ (\phi^-)_{i,j,k} = \begin{cases} \text{fluid entering from left cell} & \text{if } u_{\text{left}} > 0 \\ 0 & \text{if } u_{\text{left}} < 0 \end{cases} \end{cases} \quad \text{۴-۱۸}$$

پس از جابجایی در سه جهت اندیس * تبدیل به $n+1$ یعنی گام زمانی جدید می‌شود. شرایط مرزی برای تابع F هم مطابق رابطه ۴-۱۹ خواهد بود. مبنای کار به این صورت است که گرادیان F روی دیواره‌ها صفر خواهد بود، ورودی‌ها همواره پر و خروجی‌ها همواره خالی هستند.

$$\begin{cases} F_{\text{wall}} = \begin{cases} F_{\text{adjacent fluid cell}} \\ \text{or} \\ \sum_{\text{neighbour fluid cell}} F_{nb} / \sum n_{nb} \end{cases} \\ F_{\text{inlet}} = 1 \quad F_{\text{outlet}} = 0 \end{cases} \quad \text{۴-۱۹}$$

۴-۲ گسسته سازی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بروش اختلاف محدود

رابطه ۴-۲۰ شکل کلی یک معادله انتقال را در حالت بقایی برای خاصیت فیزیکی ϕ نشان می‌دهد. در این معادله مؤلفه‌های بردار سرعت هستند و Γ ضریب نفوذ کمیت فیزیکی است. در این معادله چهار نوع ترم دیده می‌شود که عبارتند از: ترم زمانی، جابجایی، نفوذی و چشمه. ترم زمانی معرف تغییرات خاصیت با زمان می‌باشد. ترم جابجایی نشان دهنده انتقال خاصیت در اثر حرکت سیال است واضح است این اثر تابع جهت حرکت است. ترم نفوذی انتقال خاصیت در اثر نفوذ را نشان می‌دهد که در صورت همگن بودن محیط، این انتقال در همه جهات یکسان است و ترم چشمه معرف منبع تولید یا جذب خاصیت است.

: ۴-۲۰

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}}_{\text{time}} + \underbrace{\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w\phi)}{\partial z}}_{\text{advective}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)}_{\text{diffusive}} + \underbrace{S_\phi}_{\text{source}}$$

۴-۲-۱ گسسته سازی ترم زمانی

برای گسسته‌سازی ترم زمانی، معادله ۴-۲۰ بصورت ۴-۲۱ نوشته می‌شود (با توجه به صریح بودن روش نسبت به زمان). فرض می‌شود اندیس n معرف گام زمانی است. بنابراین داریم: $t_{n+1} = t_n + \delta t$. با انتگرال‌گیری از رابطه ۴-۲۱ نسبت به زمان، رابطه ۴-۲۲ حاصل می‌شود.

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = L(\phi(t)) \quad , \quad \phi(t_0) = \phi_0 \quad \text{۴-۲۱}$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{d\phi}{dt} dt = \phi_{n+1} - \phi_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} L(\phi(t)) dt \quad \text{۴-۲۲}$$

برای محاسبه انتگرال سمت چپ رابطه ۲۲-۴ روشهای مختلف وجود دارد. در شروع چون تنها شرایط اولیه موجود است، از تکنیک درجه اول اولر استفاده می شود (رابطه ۲۳-۴). این روش توسط عدة زیادی مورد استفاده قرار گرفته است [۱۱، ۳۴، ۷۰، ۷۵، ۷۶ و ۸۳]. در ادامه از روش درجه دوم Adams-bashforth [۹۳ و ۱۲۶] استفاده می شود (رابطه ۲۴-۴). البته تکنیکهایی با دقت بالاتر مثل روش درجه سوم Runge-Kutta [۱۲۷] وجود دارند که در اینجا از آنها صرف نظر می شود.

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \delta t L_n \quad 4-23$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{\delta t_n}{2} \left(\frac{\delta t_n + 2\delta t_{n-1}}{\delta t_{n-1}} L_n - \frac{\delta t_n}{\delta t_{n-1}} L_{n-1} \right) \quad 4-24$$

۴-۲-۲ گسسته سازی ترمهای نفوذی

تقریباً در تمامی منابع برای گسسته سازی ترمهای نفوذی از روش درجه دوم تفاضل مرکزی استفاده شده است. بعنوان مثال مراجع ۱۱، ۳۴، ۷۰، ۷۵، ۷۶ و ۸۳. در اینجا نیز از آن استفاده می شود. برای کمیت های اسکالر مثل دما، این ترم در مرکز سل محاسبه می شود. مطابق روابط زیر:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i,j,k} &= \frac{\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i+1/2,j,k} - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i-1/2,j,k}}{\delta_x} = \\ &= \frac{\left(\Gamma_{i+1/2,j,k} \frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k}}{\delta_x} \right) - \left(\Gamma_{i-1/2,j,k} \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i-1,j,k}}{\delta_x} \right)}{\delta_x} = \\ &= \frac{\Gamma_{i+1/2,j,k} (\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k}) - \Gamma_{i-1/2,j,k} (\phi_{i,j,k} - \phi_{i-1,j,k})}{\delta_x^2} \end{aligned} \quad 4-25$$

برای ترمهای دیگر هم روابط بصورت مشابه خواهد بود (۴-۲۶ و ۴-۲۷).

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{i,j,k} = \frac{\Gamma_{i,j+1/2,k} (\phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j,k}) - \Gamma_{i,j-1/2,k} (\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j-1,k})}{\delta_y^2} \quad ۴-۲۶$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{i,j,k} = \frac{\Gamma_{i,j,k+1/2} (\phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k}) - \Gamma_{i,j,k-1/2} (\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j,k-1})}{\delta_z^2} \quad ۴-۲۷$$

ضریب نفوذ کمیت فیزیکی در دیواره‌ها هم بوسیله میانگین هندسی محاسبه می‌شود (مطابق رابطه ۳-۳۳). بعنوان نمونه برای دیواره $i+1/2,j,k$ خواهیم داشت :

$$\Gamma_{i+1/2,j,k} = \left[\frac{0.5}{\Gamma_{i+1,j,k}} + \frac{0.5}{\Gamma_{i,j,k}} \right]^{-1} \quad ۴-۲۸$$

برای محاسبه مؤلفه‌های بردار سرعت ترمهای نفوذی روی دیواره سلها محاسبه می‌شوند. بعنوان نمونه اگر این کمیت u باشد، روابط ۴-۲۹ تا ۴-۳۱ را خواهیم داشت :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1/2,j,k} = \frac{\mu_{i+1,j,k} (u_{i+3/2,j,k} - u_{i+1/2,j,k}) - \mu_{i,j,k} (u_{i+1/2,j,k} - u_{i-1/2,j,k})}{\delta_x^2} \quad ۴-۲۹$$

: ۴-۳۰

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i+1/2,j,k} = \frac{\mu_{i+1/2,j+1/2,k} (u_{i+1/2,j+1,k} - u_{i+1/2,j,k}) - \mu_{i+1/2,j-1/2,k} (u_{i+1/2,j,k} - u_{i+1/2,j-1,k})}{\delta_y^2}$$

۴-۳۱ :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i+1/2,j,k} = \frac{\mu_{i+1/2,j,k+1/2} (u_{i+1/2,j,k+1} - u_{i+1/2,j,k}) - \mu_{i+1/2,j,k-1/2} (u_{i+1/2,j,k} - u_{i+1/2,j,k-1})}{\delta_z^2}$$

۴-۲-۳ گسسته سازی ترمهای جابجایی

اگر Φ یک کمیت اسکالر باشد، برای ترمهای جابجایی داریم:

$$\left(\frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \phi)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w \phi)}{\partial z} \right)_{i,j,k} = \rho_{i,j,k} \left(\frac{\partial(u \phi)}{\partial x} + \frac{\partial(v \phi)}{\partial y} + \frac{\partial(w \phi)}{\partial z} \right)_{i,j,k} \quad ۴-۳۲$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial(u \phi)}{\partial x} \right)_{i,j,k} = \frac{1}{\delta_x} (u_{i+1/2,j,k} \phi_{i+1/2,j,k} - u_{i-1/2,j,k} \phi_{i-1/2,j,k}) \\ \left(\frac{\partial(v \phi)}{\partial y} \right)_{i,j,k} = \frac{1}{\delta_y} (v_{i,j+1/2,k} \phi_{i,j+1/2,k} - v_{i,j-1/2,k} \phi_{i,j-1/2,k}) \\ \left(\frac{\partial(w \phi)}{\partial z} \right)_{i,j,k} = \frac{1}{\delta_z} (w_{i,j,k+1/2} \phi_{i,j,k+1/2} - w_{i,j,k-1/2} \phi_{i,j,k-1/2}) \end{array} \right. \quad ۴-۳۳$$

حال باید مقادیر کمیت Φ روی سطوح سل پیدا شود. ساده‌ترین راه استفاده از روش مرکزی است (برای نمونه رابطه ۴-۳۴). از مشکلات این روش این است که در عددهای رینولدز^۱ بالا جوابهای غیر فیزیکی تولید می‌کند. روش جریان بالا دست^۲ برای رفع این مشکل مطرح شد که در آن انتخاب Φ تابع جهت جریان است. (برای نمونه رابطه ۴-۳۵) [۴۱].

^۱. Reynolds Number

^۲. Upwind

$$\phi_{i+1/2,j,k}^{Central} = \frac{\phi_{i+1,j,k} + \phi_{i,j,k}}{2} \quad 4-34$$

$$\phi_{i+1/2,j,k}^{Upwind} = \begin{cases} \phi_{i,j,k} & \text{if } u_{i+1/2,j,k} > 0 \\ \phi_{i+1,j,k} & \text{if } u_{i+1/2,j,k} < 0 \end{cases} \quad 4-35$$

مشکل روش جریان بالا دست، دقت کم (درجه اول بودن) و نفوذی بودن آن بخصوص در عددهای رینولدز کم است. برای رفع این عیب، روش هیبرید که ترکیبی از ایندو است ابداع شد. در این روش پارامتر α تعریف می‌شود که مقدار آن بین صفر و یک تغییر می‌کند. هنگامی که $\alpha = 1$ باشد روش به بالا دست و هنگامی که $\alpha = 0$ باشد به تفاضل مرکزی تبدیل می‌شود. (برای نمونه رابطه 4-36). دقت این روش بین درجه اول و دوم خواهد بود [41] و [70].

$$\begin{cases} \phi_{i+1/2,j,k}^{Hybrid} = \frac{1}{2} (1 + \alpha s_u) \phi_{i,j,k} + \frac{1}{2} (1 - \alpha s_u) \phi_{i+1,j,k} \\ s_u = \text{sign}(u_{i+1/2,j,k}) \end{cases} \quad 4-36$$

در ادامه تلاشهایی در جهت افزایش دقت و کاهش نفوذ کاذب¹ و نوسان² صورت گرفت که منجر به پیدایش روشهایی چون *Van Leer* [64 و 70]، *PPM* [65]، *TVD* [66]، *ENO* [128] و

¹. *False Diffusion*

². *Oscillation*

[۱۲۹] و [۱۳۰] WENO شد. در این تحقیق از تکنیک درجه دوم Van Leer استفاده می‌شود (برای نمونه رابطه ۴-۳۷).

$$\phi_{i+1/2,j,k}^{VanLeer} = \begin{cases} \phi_{i,j,k} + \frac{1}{2} \delta_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i,j,k}^{rg} \left(1 - \frac{u_{i+1/2,j,k} \delta t}{\delta_x} \right) & \text{if } u_{i+1/2,j,k} > 0 \\ \phi_{i+1,j,k} - \frac{1}{2} \delta_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i+1,j,k}^{rg} \left(1 + \frac{u_{i+1/2,j,k} \delta t}{\delta_x} \right) & \text{if } u_{i+1/2,j,k} < 0 \end{cases} \quad ۴-۳۷$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i,j,k}^{rg} = \alpha^{VL} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i,j,k}^{tg} \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i,j,k}^{tg} = \frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i-1,j,k}}{2\delta_x} \end{cases} \quad ۴-۳۸$$

$$\begin{cases} \alpha_{VL} = \max[0, \min(\alpha_1, \alpha_2, 1.0)] \\ \alpha_1 = \frac{\phi_{\max} - \min(\phi_{i,j,k}, \phi_{\max})}{\max(\varepsilon, \phi_{\max}^g - \phi_{i,j,k})} \\ \alpha_2 = \frac{\max(\phi_{i,j,k}, \phi_{\min}) - \phi_{\min}}{\max(\varepsilon, \phi_{i,j,k} - \phi_{\min}^g)} \\ \varepsilon \approx 10^{-10} \end{cases} \quad ۴-۳۹$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{\max} = \max(\phi_{i+1,j,k}, \phi_{i-1,j,k}) \\ \phi_{\min} = \min(\phi_{i+1,j,k}, \phi_{i-1,j,k}) \\ \phi_{\max}^g = \max(\phi_R^g, \phi_L^g) \\ \phi_{\min}^g = \min(\phi_R^g, \phi_L^g) \\ \phi_R^g = u_{i,j,k} + \frac{1}{2} \delta_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i,j,k}^{tg} \\ \phi_L^g = u_{i,j,k} - \frac{1}{2} \delta_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i,j,k}^{tg} \end{array} \right.$$

برای جایگذاری سایر ترمهای معادله ۴-۳۳ بطریق مشابه بالا عمل می‌شود. در ادامه روابط برای یکی از مؤلفه‌های سرعت (u) نوشته می‌شود. در این حالت روابط ۴-۳۲ و ۴-۳۳ بصورت روابط ۴-۴۱ و ۴-۴۲ در می‌آیند.

$$\left(\frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial z} \right)_{i+1/2,j,k} = \rho_{i+1/2,j,k} \left(\frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} + \frac{\partial(wu)}{\partial z} \right)_{i+1/2,j,k} \quad ۴-۴۱$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial(uu)}{\partial x} \right)_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{\delta_x} (\tilde{u}_{i+1,j,k} u_{i+1,j,k} - \tilde{u}_{i,j,k} u_{i,j,k}) \\ \left(\frac{\partial(vu)}{\partial y} \right)_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{\delta_y} (\tilde{v}_{i+1/2,j+1/2,k} u_{i+1/2,j+1/2,k} - \tilde{v}_{i+1/2,j-1/2,k} u_{i+1/2,j-1/2,k}) \\ \left(\frac{\partial(wu)}{\partial z} \right)_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{\delta_z} (\tilde{w}_{i+1/2,j,k+1/2} u_{i+1/2,j,k+1/2} - \tilde{w}_{i+1/2,j,k-1/2} u_{i+1/2,j,k-1/2}) \end{array} \right. \quad ۴-۴۲$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_{i,j,k} = \frac{1}{2} \left(u_{i+1/2,j,k} + u_{i-1/2,j,k} \right) \\ \tilde{u}_{i+1,j,k} = \frac{1}{2} \left(u_{i+3/2,j,k} + u_{i+1/2,j,k} \right) \\ \tilde{v}_{i+1/2,j+1/2,k} = \frac{1}{2} \left(v_{i,j+1/2,k} + v_{i+1,j+1/2,k} \right) \\ \tilde{v}_{i+1/2,j-1/2,k} = \frac{1}{2} \left(v_{i,j-1/2,k} + v_{i+1,j-1/2,k} \right) \\ \tilde{w}_{i+1/2,j,k+1/2} = \frac{1}{2} \left(w_{i,j,k+1/2} + w_{i+1,j,k+1/2} \right) \\ \tilde{w}_{i+1/2,j,k-1/2} = \frac{1}{2} \left(w_{i,j,k-1/2} + w_{i+1,j,k-1/2} \right) \end{array} \right. \quad 4-43$$

برای نمونه مقدار $u_{i,j,k}$ طبق روش *Van Leer*، جهت جایگذاری در رابطه 4-42 محاسبه می شود.

$$u_{i,j,k}^{VanLeer} = \left\{ \begin{array}{ll} u_{i-1/2,j,k} + \frac{1}{2} \delta_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-1/2,j,k}^{rg} \left(1 - \frac{\tilde{u}_{i,j,k} \delta t}{\delta_x} \right) & \text{if } \tilde{u}_{i,j,k} > 0 \\ u_{i+1/2,j,k} - \frac{1}{2} \delta_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1/2,j,k}^{rg} \left(1 + \frac{\tilde{u}_{i,j,k} \delta t}{\delta_x} \right) & \text{if } \tilde{u}_{i,j,k} < 0 \end{array} \right. \quad 4-44$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1/2,j,k}^{rg} = \alpha^{VL} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1/2,j,k}^{tg} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1/2,j,k}^{tg} = \frac{u_{i+3/2,j,k} - u_{i-1/2,j,k}}{2\delta_x} \end{array} \right. \quad 4-45$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{VL} = \max[0, \min(\alpha_1, \alpha_2, 1.0)] \\ \alpha_1 = \frac{u_{\max} - \min(u_{i+1/2,j,k}, u_{\max})}{\max(\varepsilon, u_{\max}^g - u_{i+1/2,j,k})} \\ \alpha_2 = \frac{\max(u_{i+1/2,j,k}, u_{\min}) - u_{\min}}{\max(\varepsilon, u_{i+1/2,j,k} - u_{\min}^g)} \end{array} \right. \quad 4-46$$

$$u_{\max} = \max(u_{i+3/2,j,k}, u_{i-1/2,j,k}) \quad u_{\min} = \min(u_{i+3/2,j,k}, u_{i-1/2,j,k}) \quad 4-47$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\max}^g = \max(u_R^g, u_L^g) \\ u_{\min}^g = \min(u_R^g, u_L^g) \\ u_R^g = u_{i+1/2,j,k} + \frac{1}{2} \delta_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1/2,j,k}^{tg} \\ u_L^g = u_{i+1/2,j,k} - \frac{1}{2} \delta_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1/2,j,k}^{tg} \end{array} \right. \quad 4-48$$

4-3 مدل سازی عددی معادلات نویر استوک

فرم بقای معادلات نویر استوک و پیوستگی برای سیال تراکم ناپذیر بصورت معادله 4-49 و 4-50 می باشد که در این تحقیق از آنها استفاده می شود.

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \nabla \bullet ((\rho V) \otimes V) = \nabla \bullet (\mu (\nabla V + \{\nabla V\}^T)) - \nabla P + S \quad 4-49$$

$$\nabla \bullet V = 0 \quad 4-50$$

در معادله 4-49، S شامل ترمهای چشمه ناشی از شتاب ثقل، تنش سطحی و انجماد می باشد. همانطور که اشاره شد برای حل این معادلات از الگوریتم *Projection* استفاده

می‌شود. برای سهولت کار ابتدا اپراتور $L(t)$ بصورت رابطه ۴-۵۱ و سرعت کاذب V^* بصورت رابطه ۴-۵۲ تعریف می‌شوند (با استفاده از تکنیک *Adams-Bashforth*).

$$L(t) = \nabla \cdot (V \otimes (\rho V)) + \nabla \cdot \left(\mu \left(\nabla V + \{ \nabla V \}^T \right) \right) + S \quad 4-51$$

$$V^* = V^n + \frac{\delta t_n}{2} \left(\frac{\delta t_n + 2\delta t_{n-1}}{\delta t_{n-1}} L(t_n) - \frac{\delta t_n}{\delta t_{n-1}} L(t_{n-1}) \right) \quad 4-52$$

روش *Projection* دو مرحله دارد. در مرحله اول سرعت‌های کاذب طبق رابطه ۴-۵۲ پیدا می‌شوند. سپس معادلات ۴-۵۳ و ۴-۵۴ حل می‌شوند. با ترکیب این دو معادله رابطه ۴-۵۵ بدست می‌آید [۷۰]. لازم به ذکر است برای گسسته‌سازی ترم‌های جابجایی و نفوذی در رابطه ۴-۵۱ بترتیب از روش‌های درجه دوم تفاضل مرکزی و *Van Leer* استفاده می‌شود.

$$\frac{V^{n+1} - V^*}{\delta t} + \frac{\nabla P^{n+1}}{\rho} = 0 \quad 4-53$$

$$\nabla \cdot V^{n+1} = 0 \quad 4-54$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla P^{n+1} \right) = \nabla \cdot \frac{V^*}{\delta t} \quad 4-55$$

روابط ۴-۵۶ و ۴-۵۷ فرم گسسته‌سازی شده طرفین رابطه بالا را نشان می‌دهند.

: ۴-۵۶

$$\left[\frac{\nabla \bullet V^*}{\delta t} \right]_{i,j,k} = \frac{1}{\delta t} \left(\frac{u_{i+1/2,j,k}^* - u_{i-1/2,j,k}^*}{\delta_x} + \frac{v_{i,j+1/2,k}^* - v_{i,j-1/2,k}^*}{\delta_y} + \frac{w_{i,j,k+1/2}^* - w_{i,j,k-1/2}^*}{\delta_z} \right)$$

: ۴-۵۷

$$\begin{aligned} \left(\nabla \bullet \frac{1}{\rho} \nabla P^{n+1} \right)_{i,j,k} &= \left(\left(\frac{P_{i+1,j,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^{n+1}}{\rho_{i+1/2,j,k}(\delta_x)} \right) - \left(\frac{P_{i,j,k}^{n+1} - P_{i-1,j,k}^{n+1}}{\rho_{i-1/2,j,k}(\delta_x)} \right) \right) \\ &+ \left(\left(\frac{P_{i,j+1,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^{n+1}}{\rho_{i,j+1/2,k}(\delta_y)} \right) - \left(\frac{P_{i,j,k}^{n+1} - P_{i,j-1,k}^{n+1}}{\rho_{i,j-1/2,k}(\delta_y)} \right) \right) \\ &+ \left(\left(\frac{P_{i,j,k+1}^{n+1} - P_{i,j,k}^{n+1}}{\rho_{i,j,k+1/2}(\delta_z)} \right) - \left(\frac{P_{i,j,k}^{n+1} - P_{i,j,k-1}^{n+1}}{\rho_{i,j,k-1/2}(\delta_z)} \right) \right) \end{aligned}$$

برای محاسبه چگالی در دیواره سلها از میانگین هندسی استفاده می‌شود. واضح است که حل معادله ۴-۵۵ منجر به حل یک دستگاه معادلات خطی می‌شود. این معادله به معادله پواسون^۱ معروف است. پس از حل دستگاه و محاسبه میدان فشار، سرعت‌های حقیقی بوسیله معادله ۴-۵۸ پیدا می‌شوند.

$$V^{n+1} = V^* - \delta t \frac{\nabla P^{n+1}}{\rho} \quad \text{۴-۵۸}$$

^۱. Poisson

۴-۳-۱ گسسته سازی ترمهای چشمه

ترمهای چشمه ناشی از نیروی گرانش، انجماد و تنشهای سطحی هستند که روابط ۴-۵۹ تا ۴-۶۱ بترتیب، فرم گسسته شده این ترمها را نشان می دهد. در رابطه ۴-۵۹ چگالی روی دیوارهها با میانگین هندسی محاسبه می شود.

$$S_g = \begin{cases} S_{gx\ i+1/2,j,k} = \rho_{i+1/2,j,k} g_x \beta \left(\left(\frac{T_{i,j,k}^n + T_{i+1,j,k}^n}{2} \right) - T_{ref} \right) \\ S_{gy\ i,j+1/2,k} = \rho_{i,j+1/2,k} g_y \beta \left(\left(\frac{T_{i,j,k}^n + T_{i,j+1,k}^n}{2} \right) - T_{ref} \right) \\ S_{gz\ i,j,k+1/2} = \rho_{i,j,k+1/2} g_z \beta \left(\left(\frac{T_{i,j,k}^n + T_{i,j,k+1}^n}{2} \right) - T_{ref} \right) \end{cases} \quad ۴-۵۹$$

$$S_e = \begin{cases} S_{ex\ i+1/2,j,k} = Au^*_{i+1/2,j,k} \\ S_{ey\ i,j+1/2,k} = Av^*_{i,j+1/2,k} \\ S_{ez\ i,j,k+1/2} = Aw^*_{i,j,k+1/2} \end{cases} \quad ۴-۶۰$$

$$S_{St} = \begin{cases} S_{Stx\ i+1/2,j,k} = \frac{1}{2} \left(S_{St\ i,j,k} + S_{St\ i+1,j,k} \right) \\ S_{Sty\ i,j+1/2,k} = \frac{1}{2} \left(S_{St\ i,j,k} + S_{St\ i,j+1,k} \right) \\ S_{Stz\ i,j,k+1/2} = \frac{1}{2} \left(S_{St\ i,j,k} + S_{St\ i,j,k+1} \right) \end{cases} \quad ۴-۶۱$$

$$S_{St\ i,j,k} = \sigma \kappa_{i,j,k} n_{i,j,k} 2F_{i,j,k} \quad ۴-۶۲$$

نرمال بر سطح از رابطه ۳-۱۸ محاسبه می شود که فرم گسسته شده آن بصورت رابطه ۴-۶۳ است. در این رابطه نرمال سطح در مرکز سل توسط میانگین گیری بین نرمال در گوشه های سل بدست می آید. رابطه ۴-۶۴ برای نمونه روش محاسبه نرمال در یکی از گوشه ها را نشان می دهد [۱۱۲].

$$n_{i,j,k} = \frac{1}{8} \left(n_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} + n_{i-1/2,j+1/2,k+1/2} + n_{i+1/2,j-1/2,k+1/2} + n_{i-1/2,j-1/2,k+1/2} \right. \\ \left. n_{i+1/2,j+1/2,k-1/2} + n_{i-1/2,j+1/2,k-1/2} + n_{i+1/2,j-1/2,k-1/2} + n_{i-1/2,j-1/2,k-1/2} \right) \quad ۴-۶۳$$

: ۴-۶۴

$$n_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} =$$

$$\left[\frac{F_{i+1,j,k} - F_{i,j,k} + F_{i+1,j+1,k} - F_{i,j+1,k} + F_{i+1,j,k+1} - F_{i,j,k+1} + F_{i+1,j+1,k+1} - F_{i,j+1,k+1}}{4 \delta_x} \right] \hat{i} \\ + \left[\frac{F_{i,j+1,k} - F_{i,j,k} + F_{i+1,j+1,k} - F_{i+1,j,k} + F_{i,j+1,k+1} - F_{i,j,k+1} + F_{i+1,j+1,k+1} - F_{i+1,j,k+1}}{4 \delta_y} \right] \hat{j} \\ + \left[\frac{F_{i,j,k+1} - F_{i,j,k} + F_{i,j+1,k+1} - F_{i,j+1,k} + F_{i+1,j,k+1} - F_{i+1,j,k} + F_{i+1,j+1,k+1} - F_{i+1,j+1,k}}{4 \delta_z} \right] \hat{k}$$

برای محاسبه انحنای از رابطه ۳-۱۹ استفاده می شود. در زیر فرم گسسته سازی شده اجزای این رابطه آورده شده است.

$$(\nabla \cdot \mathbf{n})_{i,j,k} = \left(\frac{\partial n_x}{\partial x} \right)_{i,j,k} + \left(\frac{\partial n_y}{\partial y} \right)_{i,j,k} + \left(\frac{\partial n_z}{\partial z} \right)_{i,j,k} \quad ۴-۶۵$$

: ㉞-㉞

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial n_x}{\partial x} \right)_{i,j,k} &= \frac{1}{4 \delta_x} \left(n_{x_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}} + n_{x_{i+1/2,j-1/2,k+1/2}} + n_{x_{i+1/2,j+1/2,k-1/2}} + n_{x_{i+1/2,j-1/2,k-1/2}} \right. \\ &\quad \left. - n_{x_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}} - n_{x_{i-1/2,j-1/2,k+1/2}} - n_{x_{i-1/2,j+1/2,k-1/2}} - n_{x_{i-1/2,j-1/2,k-1/2}} \right) \\ \\ \left(\frac{\partial n_y}{\partial y} \right)_{i,j,k} &= \frac{1}{4 \delta_y} \left(n_{y_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}} + n_{y_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}} + n_{y_{i+1/2,j+1/2,k-1/2}} + n_{y_{i-1/2,j+1/2,k-1/2}} \right. \\ &\quad \left. - n_{y_{i+1/2,j-1/2,k+1/2}} - n_{y_{i-1/2,j-1/2,k+1/2}} - n_{y_{i+1/2,j-1/2,k-1/2}} - n_{y_{i-1/2,j-1/2,k-1/2}} \right) \\ \\ \left(\frac{\partial n_z}{\partial z} \right)_{i,j,k} &= \frac{1}{4 \delta_z} \left(n_{z_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}} + n_{z_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}} + n_{z_{i+1/2,j-1/2,k+1/2}} + n_{z_{i-1/2,j-1/2,k+1/2}} \right. \\ &\quad \left. + n_{z_{i+1/2,j+1/2,k-1/2}} + n_{z_{i-1/2,j+1/2,k-1/2}} + n_{z_{i+1/2,j-1/2,k-1/2}} + n_{z_{i-1/2,j-1/2,k-1/2}} \right) \end{aligned} \right.$$

$$\left(\frac{n}{|n|} \cdot \nabla \right) |n| = \left(\frac{n_x}{|n|} \right)_{i,j,k} \left(\frac{\partial |n|}{\partial x} \right)_{i,j,k} + \left(\frac{n_y}{|n|} \right)_{i,j,k} \left(\frac{\partial |n|}{\partial y} \right)_{i,j,k} + \left(\frac{n_z}{|n|} \right)_{i,j,k} \left(\frac{\partial |n|}{\partial z} \right)_{i,j,k} \quad \text{㉞-㉞}$$

$$|n| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad \text{㉞-㉞}$$

$$\frac{\partial |n|}{\partial x} = \frac{1}{|n|} \left(n_x \frac{\partial n_x}{\partial x} + n_y \frac{\partial n_y}{\partial x} + n_z \frac{\partial n_z}{\partial x} \right) \quad \text{㉞-㉞}$$

$$\frac{\partial |n|}{\partial y} = \frac{1}{|n|} \left(n_x \frac{\partial n_x}{\partial y} + n_y \frac{\partial n_y}{\partial y} + n_z \frac{\partial n_z}{\partial y} \right) \quad \text{۴-۷۰}$$

$$\frac{\partial |n|}{\partial z} = \frac{1}{|n|} \left(n_x \frac{\partial n_x}{\partial z} + n_y \frac{\partial n_y}{\partial z} + n_z \frac{\partial n_z}{\partial z} \right) \quad \text{۴-۷۱}$$

: ۴-۷۲

$$\left(\frac{\partial n_x}{\partial y} \right)_{i,j,k} = \frac{1}{4 \delta_y} \left(n_{x_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}} + n_{x_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}} + n_{x_{i+1/2,j+1/2,k-1/2}} + n_{x_{i-1/2,j+1/2,k-1/2}} \right. \\ \left. - n_{x_{i+1/2,j-1/2,k+1/2}} - n_{x_{i-1/2,j-1/2,k+1/2}} - n_{x_{i+1/2,j-1/2,k-1/2}} - n_{x_{i-1/2,j-1/2,k-1/2}} \right)$$

: ۴-۷۳

$$\left(\frac{\partial n_x}{\partial z} \right)_{i,j,k} = \frac{1}{4 \delta_z} \left(n_{x_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}} + n_{x_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}} + n_{x_{i+1/2,j-1/2,k+1/2}} + n_{x_{i-1/2,j-1/2,k+1/2}} \right. \\ \left. - n_{x_{i+1/2,j+1/2,k-1/2}} - n_{x_{i-1/2,j+1/2,k-1/2}} - n_{x_{i+1/2,j-1/2,k-1/2}} - n_{x_{i-1/2,j-1/2,k-1/2}} \right)$$

برای محاسبه سایر مشتقات جزئی بردار نرمال بروش مشابه بالا عمل می شود. بمنظور افزایش دقت در محاسبه انحنا، بهتر است از مقادیر هموار شده F استفاده شود. برای این منظور استفاده از یک B - اسپلاین برای هموار کردن سطح پیشنهاد شده است [۱۱۲]. در این تحقیق نیز از یک B - اسپلاین درجه دوم استفاده شد. لازم به ذکر است که برای ردیابی سطح آزاد از مقادیر غیر هموار شده F استفاده می شود.

۴-۳-۲ حل دستگاه معادلات خطی

همانطور که اشاره شد برای محاسبه میدان فشار نیاز به حل یک دستگاه معادله خطی داریم. حل این دستگاه بسیار اهمیت دارد چرا که تقریباً حدود ۹۵-۸۵ درصد زمان صرف حل این دستگاه می‌شود. روشهای حل دستگاه معادلات خطی بطور کلی به دو دسته مستقیم^۱ و تکراری^۲ تقسیم می‌شوند. از میان روشهای مستقیم می‌توان به روشهای حذفی گوس^۳ و چلسکی^۴ اشاره کرد. روشهای مستقیم چندان مناسب نیستند چرا که علاوه بر نیاز به حافظه زیاد، منجر به حل دستگاهی بزرگ می‌شوند که زمان زیادی را صرف می‌کند. لذا از روشهای تکراری استفاده می‌شود [۴]. از جمله این روشها عبارتند از: SOR [۱۳۱]^۵، MG ^۶ [۱۳۲]، ADI [۱۰۰]^۷، $ICCG$ [۱۳۳ و ۱۳۴]^۸، $DICCG$ [۱۳۵ و ۱۳۶]^۹، $MGCG$ [۱۳۲]^{۱۰}، $BICGSTAB$ [۱۳۸]^{۱۱} و SIP [۱۳۹ و ۱۴۰]^{۱۲}.

SOR از ساده‌ترین روشهای تکراری است ولی همگرایی آن ضعیف است. برای حل این مشکل عده‌ای از محققان از $MGSOR$ استفاده کردند [۸۲، ۸۳، ۹۵]. ADI همگرایی بهتری نسبت به SOR داشته و بیشتر برای حل ضمنی معادلات نویر استوک بکار می‌رود [۲۴]. $ICCG$ قدرت همگرایی بالاتری نسبت سایر روشها دارد. به عنوان مثال اشاره شده که حدود ۸۰۰۰ مرتبه از GS ^{۱۳} و ۲۰۰ مرتبه از ADI سریعتر است [۱۳۳]. از مشکلات $ICCG$ وابستگی زیاد سرعت همگرایی به ضرایب است. برای رفع این مشکل روشهایی از جمله $DICCG$ و

¹. Direct

². Iterative

³. Gauss Elimination

⁴. Cholesky

⁵. Successive Overrelaxation

⁶. Multigrid

⁷. Alternating Direction Implicit

⁸. Incomplete Cholesky Conjugate Gradient

⁹. Deflated ICCG

¹⁰. Multigrid Preconditioned Conjugate Gradient

¹¹. Biconjugate Gradient Stabilized

¹². Strongly Implicit Procedure

¹³. Gauss Seidel

MGCG توسعه پیدا کردند. در این میان *MGCG* بسیار موفق بوده و بسیاری از محققان استفاده از آن را توصیه کرده‌اند [۸۲، ۸۳ و ۹۵]. لازم به ذکر است که برای استفاده از *ICCG* نیاز است ماتریس ضرایب مثبت معین^۱ و متقارن^۲ باشد. البته هنگامی که طول مش ثابت باشد، می‌توان معادله پواسون را به این صورت در آورد. یکی از الگوریتمهای مناسب با سرعت همگرایی بالا *BICGTAB* است که نیاز به متقارن بودن ماتریس ضرایب ندارد [۱۰۱ و ۱۳۱]. از دیگر روشها با قدرت همگرایی بالا *SIP* است که از محاسن آن عدم نیاز به متقارن بودن ماتریس ضرایب است. اگر چه سرعت همگرایی آن کمتر از *ICCG* است ولی در عوض وابستگی خیلی کمتری به حدس اولیه دارد [۴]. در این تحقیق از روش *ICCG* استفاده خواهد شد.

فرض می‌شود دستگاه معادله خطی بفرم رابطه ۴-۷۴ باشد. بطور کلی در روشهای تکراری می‌توان با شرطی کردن اولیه^۳ دستگاه را تبدیل به دستگاهی کرد که سرعت همگرایی آن بیشتر از دستگاه قبلی است (رابطه ۴-۷۵). هرچه UU^T به A^{-1} نزدیکتر باشد، همگرایی بهتر می‌شود.

$$Ax = b \quad \text{۴-۷۴}$$

$$\begin{cases} \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \\ \tilde{A} = UAU^T, \tilde{x} = U^{-T}x, \tilde{b} = Ub \\ UU^T \approx A^{-1} \end{cases} \quad \text{۴-۷۵}$$

^۱. Positive Definite

^۲. Symmetric

^۳. Precondition

اگر ماتریس A بفرم LL^T تجزیه شود (L ماتریس پایین مثلثی) به آن تجزیه چلسکی^۱ گویند و اگر این تجزیه بطور کامل انجام نشود به آن تجزیه ناقص چلسکی^۲ گویند. در الگوریتم $ICCG$ از این تجزیه جهت شرطی کردن اولیه استفاده می شود [۱۳۲]. برای مطالعه بیشتر به مراجع ۱۳۱ و ۱۳۲ مراجعه شود.

۴-۳-۳ شرایط مرزی معادلات نویر استوک

همانطور که اشاره شد در روش تفاضل محدود میدان حل به تعدادی مکعب تقسیم می شود. فرض می کنیم در جهات x, y, z مکعبها به ترتیب از ۱ تا m ، ۱ تا n و ۱ تا l ، اندیس گذاری شوند. برای حل معادلات به یکسری مش کمکی اطراف میدان حل نیاز است. بعنوان مثال برای گسسته سازی ترم نفوذی به اطلاعات سلهای قبل و بعدی نیاز است و در ردیف اول مش قبلی وجود ندارد بنابراین از این یک ردیف مشهای کمکی اطراف میدان حل استفاده می شود. محاسبات روی این سلها انجام نمی شود و مقادیر روی این سلها بوسیله اعمال شرایط مرزی مشخص می شود. باید توجه کرد که برای گسسته سازی ترمهای جابجایی با تکنیک $Van Leer$ نیاز به اطلاعات دو سل همسایه در هر طرف داریم بنابراین برای سلهای نزدیک مرز از روش هیبرید استفاده می شود.

معمولاً دو نوع شرط مرزی روی دیواره ها برای سرعت وجود دارد که عبارتند از: لغزان^۳ و بدون لغزش^۴. در اولی سیال بدون هیچ اصطکاکی روی دیواره لغزش می کند و در حالت دوم اصطکاک دیواره زیاد بوده و سرعت سیال روی دیواره صفر خواهد بود. جهت اعمال چنین شرایطی از یک تقریب خطی ساده استفاده می شود. شرط مرزی فشار هم روی دیواره ها به این صورت خواهد بود که گرادیان فشار روی دیواره صفر شود. رابطه ۷۶-۴ نمونه ای از اعمال این شرایط را نشان می دهد [۲ و ۱۱].

¹. Cholesky Decomposition

². Incomplete Cholesky Decomposition

³. Free Slip

⁴. No Slip

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{for all } j, k \\ u_{0,j,k} = 0 \\ v_{0,j,k} = \gamma v_{1,j,k} \\ w_{0,j,k} = \gamma w_{1,j,k} \\ P_{0,j,k} = P_{1,j,k} \\ \gamma = \begin{cases} -1 & \text{No Slip} \\ 1 & \text{Free Slip} \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{۴-۷۶}$$

اگر سل مرزی بیش از یک همسایه درونی داشته باشد از میانگین وزنی استفاده می‌شود. برای ورودی‌ها هم دو حالت وجود دارد: یکی سرعت در ورودی مشخص باشد و در دیگری فشار در ورودی مشخص باشد. نمونه‌ای از این شرایط مرزی در رابطه ۴-۷۷ آورده شده است. رابطه ۴-۷۸ نیز نمونه‌ای از اعمال شرایط مرزی در خروجی‌ها را نشان می‌دهد. در این رابطه فرض بر این است که فشار در خروجی مشخص باشد که در عمل در فرایندهای ریخته‌گری غالباً در خروجی‌ها فشار اتمسفری را داریم.

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{inlet} \text{ is Specified} & P_{inlet} \text{ is Specified} \\ u_{inlet cell} = u_{inlet} & u_{inlet cell} = u_{in} \\ v_{inlet cell} = v_{in} & v_{inlet cell} = v_{in} \\ w_{inlet cell} = w_{in} & w_{inlet cell} = w_{in} \\ P_{inlet cell} = P_{in} & P_{inlet cell} = P_{inlet} \end{array} \right. \quad \text{۴-۷۷}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{outlet cell} = u_{in} \\ v_{outlet cell} = v_{in} \\ w_{outlet cell} = w_{in} \\ P_{outlet cell} = P_{out} \end{array} \right. \quad \text{۴-۷۸}$$

اگر میدان حل محور تقارنی داشته باشد، می توان حل را روی یک نیمه میدان انجام داد و از شرط مرزی متقارن یا آینه‌ای روی آن محور استفاده کرد. اعمال این شرط مشابه شرط لغزان است. نوع دیگری شرط مرزی بنام تناوبی^۱ داریم که می تواند روی هر یک از جهات اعمال شود. کاربرد آن بیشتر مواردی است که شرایط در ابتدا و انتهای میدان حل در آن جهت یکسان باشد. یکی از کاربردهای آن بررسی مسائل دوبعدی است. در این حالت کافی است شرایط مرزی در بعد سوم تناوبی گرفته شود. رابطه ۷۹-۴ اعمال این شرط را در جهت محور x نشان می دهد [۱۱].

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{for all } j, k \\ u_{0,j,k} = u_{m-1,j,k} \quad , \quad u_{m,j,k} = u_{1,j,k} \quad , \quad u_{m+1,j,k} = u_{2,j,k} \\ v_{0,j,k} = v_{m-1,j,k} \quad , \quad v_{m,j,k} = v_{1,j,k} \quad , \quad v_{m+1,j,k} = v_{2,j,k} \\ w_{0,j,k} = w_{m-1,j,k} \quad , \quad w_{m,j,k} = w_{1,j,k} \quad , \quad w_{m+1,j,k} = w_{2,j,k} \\ p_{0,j,k} = p_{m-1,j,k} \quad , \quad p_{m,j,k} = p_{1,j,k} \quad , \quad p_{m+1,j,k} = p_{2,j,k} \end{array} \right. \quad 4-79$$

۴-۴ مدل سازی عددی انتقال حرارت و تغییر فاز

همانطور که در قسمت ۷-۳ اشاره شد برای حل معادله انرژی همراه با تغییر فاز از روش انتالی استفاده می شود (مطابق معادله ۲۳-۳). جهت گسسته سازی ترمهای زمانی، جابجایی و نفوذی بترتیب تکنیکهای *Adams-Bashforth* ، *Van Leer* و تفاضل مرکزی بکار گرفته می شوند. جزئیات الگوریتم هم در بخش ۷-۳ بطور کامل توضیح داده شده است. همانطور که در قسمت ۳-۳-۴ اشاره شد، برای حل هر معادله انتقال نیاز به یکردیف سلهای کمکی اطراف میدان حل داریم که قبل از حل معادله انتقال لازم است شرایط مرزی روی آنها اعمال شود.

^۱. Periodic

روی دیواره‌های قالب نیاز است شرایط مرزی برای دما مشخص شود. باید توجه کرد که چون در این قسمت حرکت سیال نداریم نیازی به اعمال شرایط مرزی انتالی نیست. حال روی دیواره می‌توان دو حالت داشت: دمای مشخص و جابجایی طبیعی^۱. حالت اول خیلی ساده است (برای نمونه رابطه ۴-۸۰) و در حالت دوم هم با نوشتن بالانس شار حرارتی در یک بعد رابطه لازم بدست می‌آید (برای نمونه رابطه ۴-۸۱). برای اعمال شرایط مرزی ورودی هم کافی است، دما و انتالی برابر دما و انتالی سیال ورودی قرار داده شوند (رابطه ۴-۸۲). در خروجی‌ها هم مقادیر دما و انتالی برابر سلهای همسایه داخل قرار داده می‌شوند (برای نمونه رابطه ۴-۸۳).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Specified Temperature on Wall} \\ \text{for all } j, k \\ T_{0,j,k} = T_{Wall} \end{array} \right. \quad 4-80$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Free Convection on Wall} \\ \text{for all } j, k \\ T_{0,j,k} = \frac{1}{k + h \delta_x} (k T_{1,j,k} + h \delta_x T_{Room}) \\ h = \text{Natural Convection Coefficient} \end{array} \right. \quad 4-81$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{inlet \ cell} = T_{inlet} \\ H_{inlet \ cell} = H_{inlet} = \rho c_p (T_{inlet} - T_{ref}) \end{array} \right. \quad 4-82$$

^۱. Natural Convection

$$\begin{cases} T_{outlet\ cell} = T_{in} \\ H_{outlet\ cell} = H_{in} \end{cases} \quad ۴-۸۳$$

۴-۵ محاسبه گام زمانی

بعلت اینکه در این تحقیق معادلات انتقال بصورت صریح حل می شوند، جهت پایداری حل نیاز است گام زمانی محدود باشد. این محدودیت ناشی از ترمهای جابجایی، نفوذی و تنشهای سطحی است که به ترتیب در روابط ۴-۸۴ تا ۴-۸۶ آورده شده اند [۷۶ و ۱۱۲]. همچنین ردیابی صریح سطح آزاد نیز محدودیتی روی گام زمانی ایجاد می کند که طبق روابط ۴-۸۴ و ۴-۸۷ می باشد [۷۱].

$$\delta t_{Advection} = Min \left\{ \frac{\delta_x}{|u_{i,j,k}|}, \frac{\delta_y}{|v_{i,j,k}|}, \frac{\delta_z}{|w_{i,j,k}|} \right\} \quad : \quad ۴-۸۴$$

$$\begin{cases} \delta t_{Diffusion} = \frac{1}{\Gamma} \left(\frac{2}{\delta_x^2} + \frac{2}{\delta_y^2} + \frac{2}{\delta_z^2} \right)^{-1} \\ \Gamma = Max \left(\alpha_{Liquid}, \alpha_{Solid}, \alpha_{Aire}, \alpha_{Mold}, \nu_{Liquid}, \nu_{Aire} \right) \\ \alpha = \frac{k}{\rho c_p}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \end{cases} \quad ۴-۸۵$$

$$\delta t_{Capillarity} = \left[\frac{\rho_{Liquid} + \rho_{Liquid}}{4 \pi \sigma} \text{Min} \left(\delta_x, \delta_y, \delta_z \right)^3 \right]^{1/2} \quad \text{۴-۸۶}$$

: ۴-۸۷

$$\delta t_{Split Advection} = \text{Min} \left\{ \frac{\delta_x}{|u_{i+1/2,j,k} - u_{i-1/2,j,k}|}, \frac{\delta_y}{|v_{i,j+1/2,k} - v_{i,j-1/2,k}|}, \frac{\delta_z}{|w_{i,j,k+1/2} - w_{i,j,k-1/2}|} \right\}$$

بنابراین جهت پایداری حل باید گام زمانی مینیمم گام زمانی بدست آمده از روابط قبلی باشد (مطابق رابطه ۴-۸۸).

$$\delta t = \text{Min} \left\{ \delta t_{Advection}, \delta t_{Diffusion}, \delta t_{Capillarity}, \delta t_{Split Advection} \right\} \quad \text{۴-۸۸}$$

در زیر بطور مختصر مراحل الگوریتم حل آورده شده است:

۱- وارد کردن هندسه، خواص فیزیکی و شرایط اولیه

۲- مش بندی

۳- محاسبه گام زمانی و $t = t + \Delta t$

۴- محاسبه سرعتهای کاذب

۵- اعمال شرایط مرزی روی سرعت

۶- حل معادله پواسون و محاسبه میدان فشار

۷- محاسبه سرعتهای حقیقی

۸- اعمال شرایط مرزی سرعت

۹- اعمال شرایط مرزی دما و انتالپی

- ۱۰- حل معادله انتقال حرارت و محاسبه انتالپی
- ۱۱- محاسبه دما و کسر حجمی مذاب
- ۱۲- حرکت سطح آزاد
- ۱۳- محاسبه خواص فیزیکی هر سل
- ۱۴- اگر زمان سپری شده کمتر از زمان نهایی است برگشت به مرحله ۳
- ۱۵- پایان

فصل پنجم

بررسی نتایج

۵-۱ مقدمه

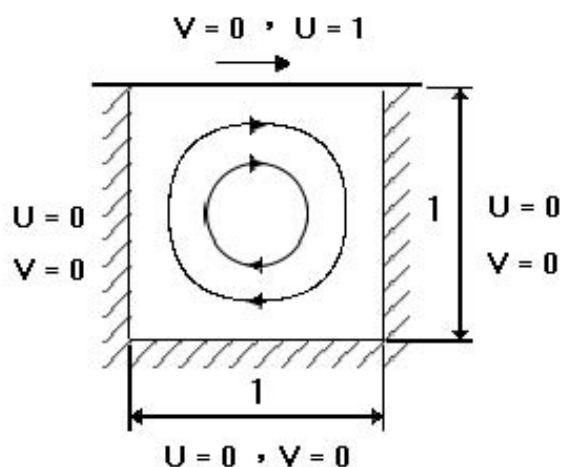
پس از مدلسازی عددی کد کامپیوتری بر مبنای مدل ارائه شده، نوشته شد. برای نوشتن کد از محیط برنامه‌نویسی *Visual C++ 6.0* و برای نمایش و تحلیل نتایج از نرم افزار *Tecplot 8.0* استفاده شد. بمنظور سهولت در کنترل برنامه و توسعه آن، از تکنیک برنامه‌نویسی بصورت شیء‌گرا^۱ استفاده شد. پس از آماده شدن کد کامپیوتری، نوبت به بررسی درستی نتایج آن می‌رسد که در این فصل به این موضوع پرداخته می‌شود. بطور کلی دو دسته روش برای بررسی نتایج حاصل از هر شبیه‌سازی وجود دارد. یکی مقایسه با نتایج کارهای گزارش شده توسط دیگران^۲ که این کارها می‌توانند تئوری یا آزمایشی باشند و دیگر انجام آزمایش و مقایسه با آن. در این تحقیق از هر دو روش استفاده شد. با توجه به اینکه برنامه بخشهای مختلفی دارد، ابتدا هر قسمت بطور جداگانه تست شده و پس از برطرف شدن اشکالات آن، همه قسمت‌ها بطور همزمان آزمایش شدند.

^۱. *Object Oriented Programming*

^۲. در میان کارهای محققان مختلف تعدادی بصورت شاخص در آمده‌اند و به عنوان محک (*Benchmark*) مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۵-۲ معادلات نویر استوک

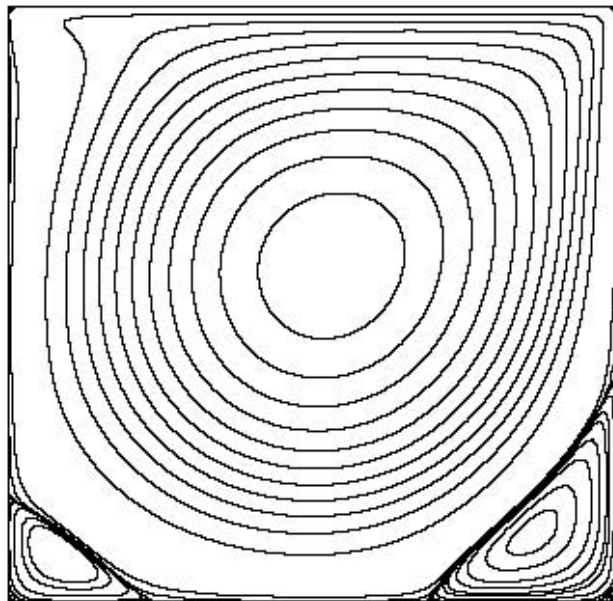
یکی از معروفترین آزمونها برای بررسی صحت حل معادلات نویر استوک به *Lid Driven Cavity* معروف است. در این آزمون سیال در محفظه دویبعدی در حالت ساکن قرار دارد. با حرکت دیواره فوقانی محفظه، سیال به حرکت در آمده و در نهایت به حالتی پایدار می‌رسد. در این حالت نتایج مورد بررسی قرار می‌گیرند. شکل ۵-۱ بطور شماتیک این آزمون و شرایط آن را نشان می‌دهد. تنها متغیر این آزمون عدد رینولدز است که اگر ابعاد و سرعت را واحد بگیریم، عکس ویسکوزیته سینماتیکی خواهد بود. *Ghia et al.* [۱۴۱] و [۱۴۲] این مسئله را با دقت بالا، در گستره اعداد رینولدز بین ۱۰۰ تا ۱۰۰۰۰ حل کردند که نتایج کار آنها امروزه بعنوان معتبرترین مرجع شناخته شده است. اگرچه این آزمون دویبعدی است ولی با انجام آن در صفحات مختلف محورهای مختصات، می‌توان کد سه بعدی را تست کرد. در این قسمت این آزمون را برای رینولدز ۱۰۰۰ انجام داده و نتایج با مرجع ذکر شده مقایسه می‌شود. شرایط مرزی در بعد سوم بصورت تناوبی در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۵-۱ هندسه و شرایط مرزی آزمون *Lid Driven Cavity*.

۱. در این تحقیق در کلیه آزمونهای دویبعدی شرایط مرزی در بعد سوم ناوبی در نظر گرفته می‌شود.

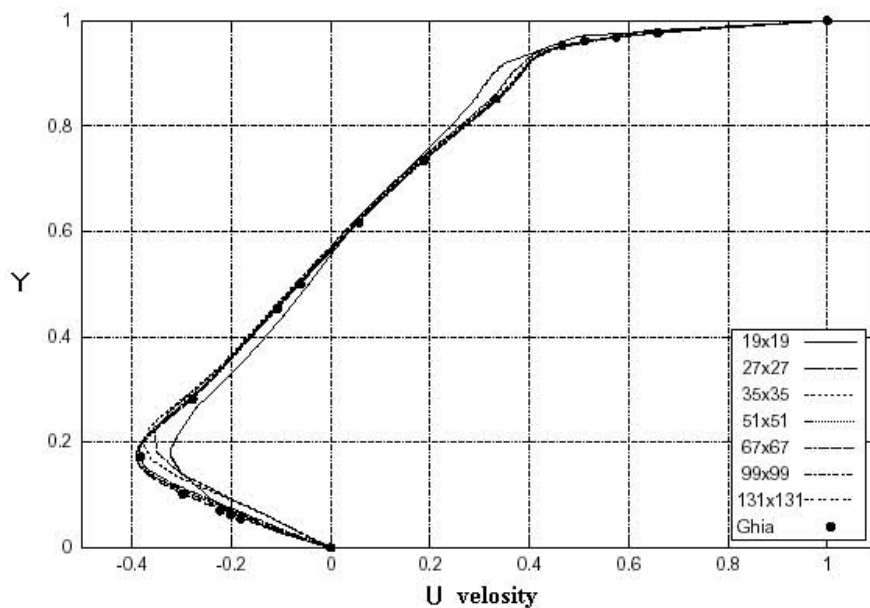
شکل ۲-۵ خطوط جریان^۱ را پس از برقرار شدن حالت پایدار نشان می‌دهد. ملاحظه می‌کنیم دو گرداب^۲ در گوشه‌ها و یکی در وسط تشکیل شده است که خطوط جریان به لحاظ کیفی مشابه نتایج Ghia و همکارانش است که از آوردن آن صرفنظر می‌کنیم. مقایسه کمی نتایج هم در شکل ۳-۵ آورده شده است. در قسمت الف شکل ۳-۵ تغییرات مؤلفه افقی بردار سرعت در طول خط عمودی گذرنده از مرکز محفظه، برای دانسیته‌های مش متفاوت رسم شده است و قسمت ب شکل هم تغییرات مؤلفه عمودی بردار سرعت در طول خط افقی گذرنده از مرکز محفظه را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود با افزایش دانسیته مش نتایج بر هم منطبق شده‌اند.



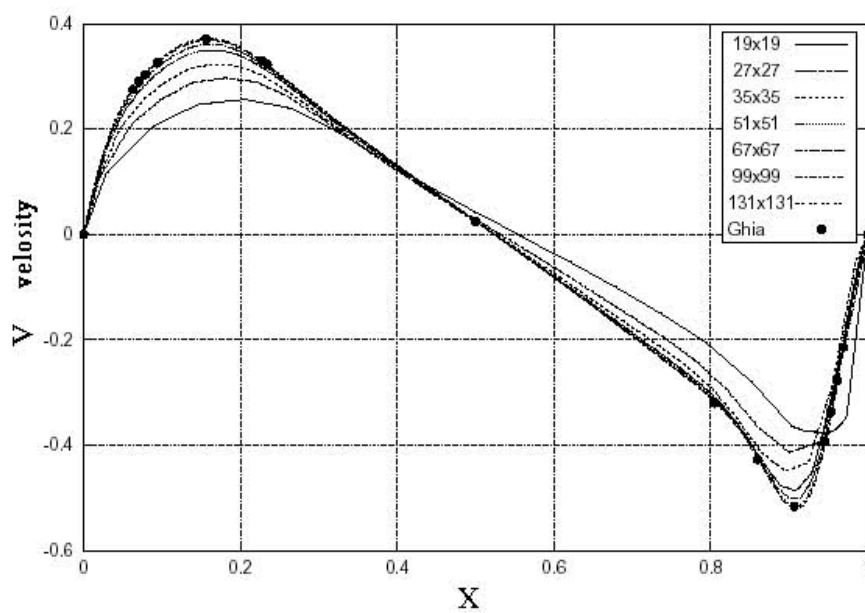
شکل ۲-۵ خطوط جریان محاسبه شده برای رینولدز ۱۰۰۰ روی میدان 131×131 مش.

^۱. Streamlines

^۲. Vortex



الف (تغییرات مؤلفه افقی بردار سرعت در طول خط عمودی گذرنده از مرکز محفظه



ب (تغییرات مؤلفه عمودی بردار سرعت در طول خط افقی گذرنده از مرکز محفظه

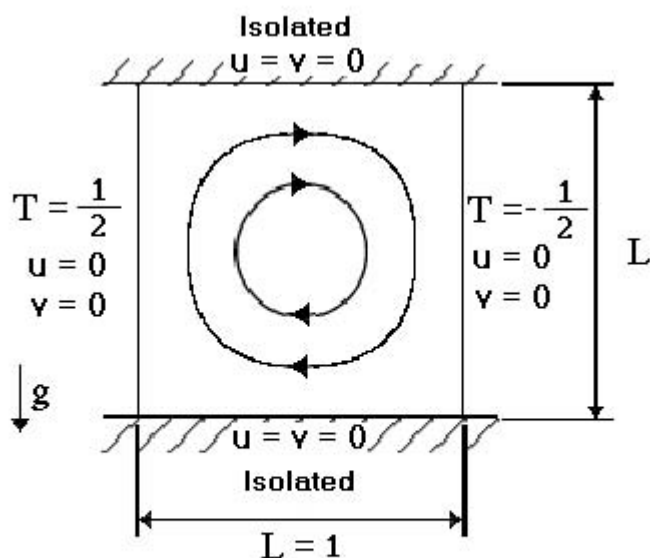
شکل ۳-۵ مقایسه کمی نتایج آزمون Lid Driven Cavity در دانسیته های مختلف مش با مرجع ۱۴۱.

۵-۳ معادلات نویر استوک همراه با انتقال حرارت

یکی از آزمونهای مناسب جهت حل معادلات نویر استوک همراه با انتقال حرارت، جابجایی طبیعی سیال در یک محفظه بسته، در اثر اختلاف دما بین دیوارهای آن است. شکل ۵-۴ بطور شماتیک هندسه و شرایط مرزی این آزمون را نشان می‌دهد. متغیرهای این آزمون اعداد $^1 Ra$ و $^2 Pr$ هستند که مقادیر آنها توسط روابط ۵-۱ و ۵-۲ محاسبه می‌شوند. در رابطه ۵-۱، ΔT اختلاف دمای بین دو دیواره است.

$$Ra = \frac{\rho g c_p \beta l^3 \Delta T}{\nu k} \quad 5-1$$

$$Pr = \frac{\rho c_p \nu}{k} \quad 5-2$$

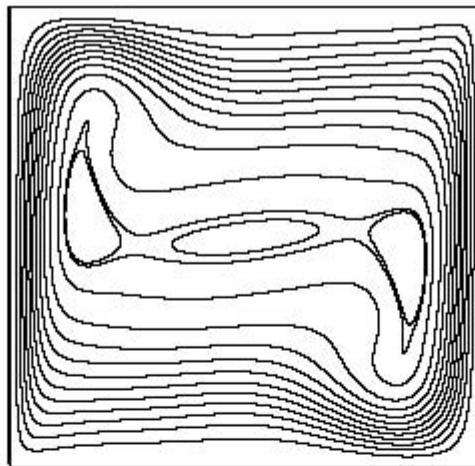


شکل ۵-۴ هندسه و شرایط مرزی آزمون جابجایی طبیعی.

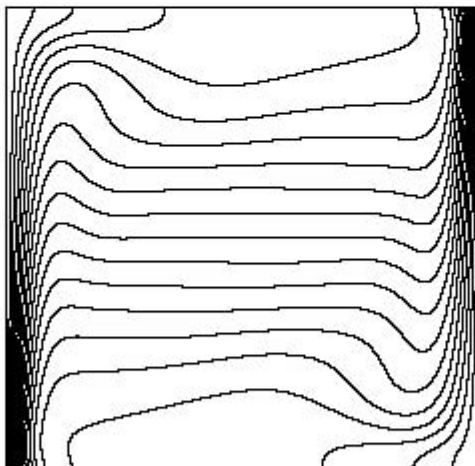
¹. Rayleigh

². Prandtl

در این قسمت این آزمون با $Ra = 10^6$ و $Pr = 0.71$ و دانسیته‌های مختلف مش، انجام شده و نتایج با *Vahl Davis* [۱۴۳-۱۴۶] مقایسه می‌شوند. شکل ۵-۵ خطوط جریان و خطوط همدمای را پس از رسیدن به شرایط پایدار نشان می‌دهد.



الف (خطوط جریان

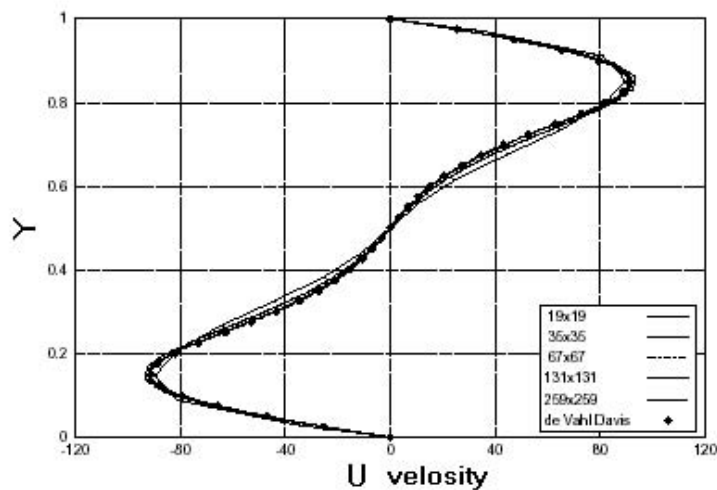


ب (خطوط همدمای

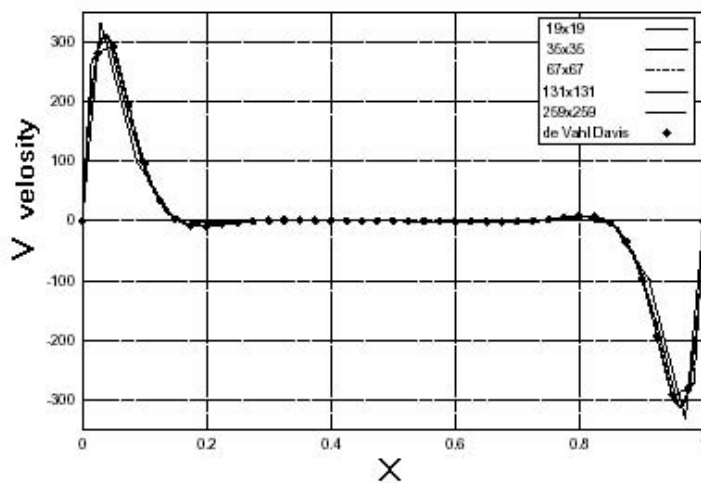
شکل ۵-۵ خطوط جریان و خطوط همدمای محاسبه شده برای

$Pr = 0.71$ و $Ra = 10^6$ روی میدان 131×131 .

مشابه قسمت ۲-۵، مقایسه کمی نتایج در شکل ۶-۵ آورده شده است. مشاهده می شود تطابق خوبی بین نتایج حاصله و نتایج *Vahl Davis* وجود دارد.



الف (تغییرات مؤلفه افقی بردار سرعت در طول خط عمودی گذرنده از مرکز محفظه

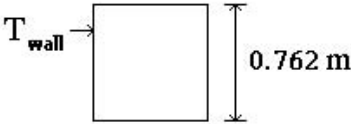


ب (تغییرات مؤلفه عمودی بردار سرعت در طول خط افقی گذرنده از مرکز محفظه

شکل ۶-۵ مقایسه کمی نتایج آزمون Natural Convection در دانسیته های مختلف مش با مرجع ۱۴۵.

۴-۵ انتقال حرارت همراه با تغییر فاز

در این قسمت انتقال حرارت همراه با تغییر فاز بدون در نظر گرفتن حرکت سیال بررسی می‌شود. برای این منظور انجماد یک فلز خالص و یک آلیاژ در نظر گرفته می‌شود. جهت مقایسه هم از نتایج *Swaminathan and Voller* [۱۲۰] استفاده می‌شود. در مورد اول انجماد همدمای مقطع یک شمش فولادی در نظر گرفته می‌شود. در مورد دوم انجماد مقطع یک شمش از آلیاژ $Al-4.5 Cu$ در نظر گرفته می‌شود و فرض می‌شود کسر حجمی مایع از قانون شایل پیروی می‌کند. هندسه، شرایط اولیه و خواص فیزیکی این دو مسئله بترتیب در شکل‌های ۵-۷ و ۵-۸ آورده شده‌اند. بعلاوه وجود تقارن در هر دو مورد یک چهارم شمش شبیه‌سازی می‌شود و محل‌های برش عایق در نظر گرفته می‌شود. میدان حل هم 100×100 مش لحاظ می‌شود. برای مقایسه کمی در هر دو مورد منحنی سرد شدن مرکز قسمت شبیه‌سازی شده شمش در تصاویر ۵-۹ و ۵-۱۰ آورده شده است که ملاحظه می‌شود تطابق خوبی بین نتایج برقرار است.

مقطع شمش فولادی	شرایط اولیه ، شرایط مرزی و خواص فیزیکی شمش فولادی	
	k	30.0 W/mK
	c_p	750.0 J/kg K
	ρ	7200.0 kg/m ³
	L	262.5 kJ/kg
	T_M	1500.0 °C
	$T_{initial}$	1535.0 °C
	T_{wall}	1150.0 °C

شکل ۵-۷ پارامترهای لازم جهت شبیه‌سازی انجماد مقطع شمش فولادی [120].

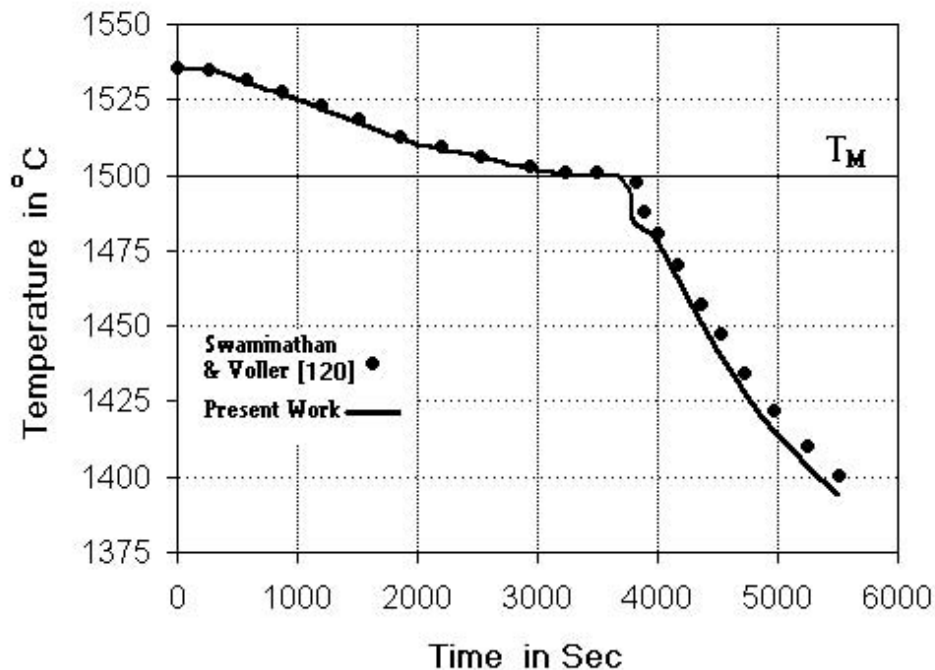
مقطع شمش Al-4.5 Cu

شرایط اولیه ، شرایط مرزی و خواص فیزیکی شمش Al-4.5 Cu

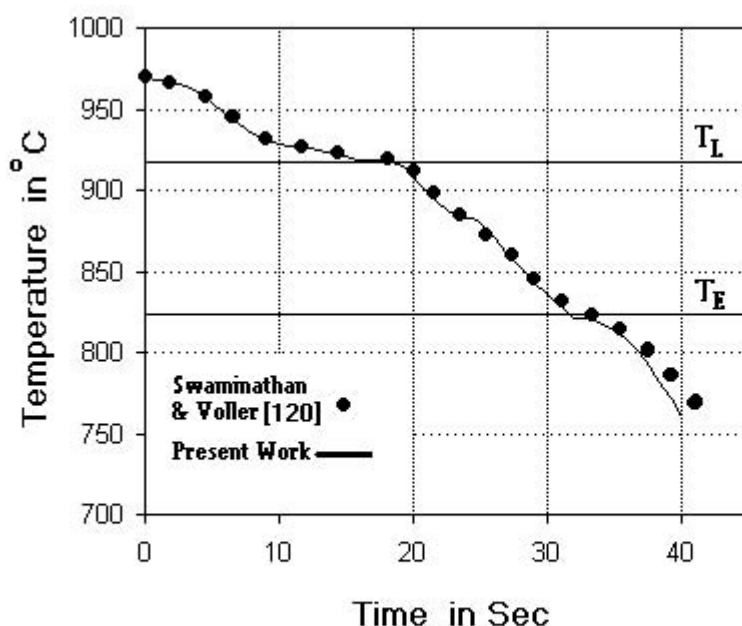


k_S	200.0 W/mK
k_L	90.0 W/mK
c_{PS}	900.0 J/kg K
c_{PL}	982.1 J/kg K
ρ	2800.0 kg/m^3
L	348.2 kJ/kg
T_E	821.0 k
T_L	919.0 k
T_M	933.0 k
$T_{initial}$	969.0 k
T_{inf}	290.0 k
h	2000.0 $\text{W/m}^2\text{K}$
K_{Scheil}	0.14

شکل ۵-۸ پارامترهای لازم جهت شبیه سازی انجماد مقطع شمش Al-4.5 Cu [120].



شکل ۵-۹ منحنی سرد شدن مرکز قسمت شبیه سازی شده شمش فولادی.



شکل ۱۰-۵ منحنی سرد شدن مرکز قسمت شبیه سازی شده شمش Al-4.5 Cu.

۵-۵ جابجایی سطح آزاد

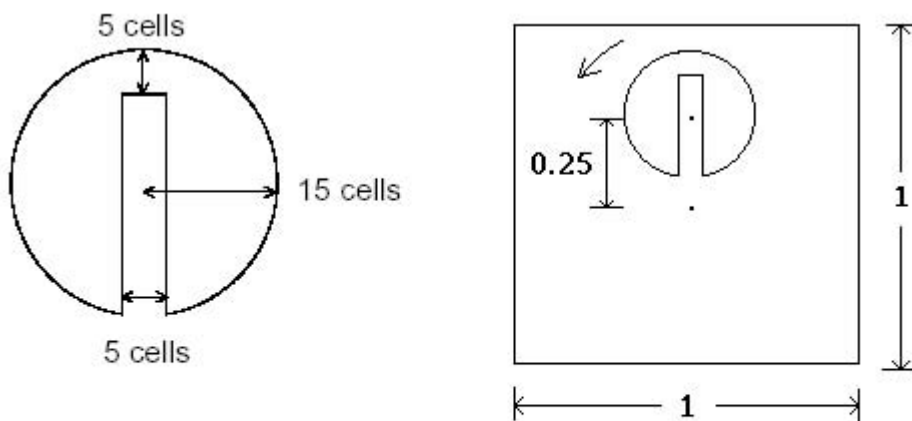
برای بررسی دقت الگوریتمهای جابجایی سطح آزاد مناسبترین راه جابجایی یک جسم جامد در یک میدان سرعت معلوم است. واضح است پس از جابجایی شکل هندسی جسم نباید تغییر کرده باشد و میزان تغییرات نشان دهنده خطا الگوریتم خواهد بود. یکی از آزمونهای معروف در این زمینه حرکت یک دایره چاکدار در یک میدان سرعت چرخشی است. این آزمون اولین بار توسط Zalesak [۸۶] مطرح شد و در ادامه بنام او شهرت یافت^۱. تابع جریان این میدان مطابق رابطه ۳-۵ است که مؤلفه‌های سرعت هم از رابطه ۴-۵ محاسبه می‌شوند (مؤلفه سرعت در جهت سوم را هم صفر می‌گیریم). شرایط هندسی این آزمون در شکل ۱۱-۵ آورده شده است که این میدان در هر بعد به ۱۰۰ مش تقسیم می‌شود. گام زمانی هم بگونه‌ای انتخاب می‌شود که یک دور کامل شامل ۶۲۸ گام زمانی

^۱. Zalesak Slotted Disk or Zalesal Circle

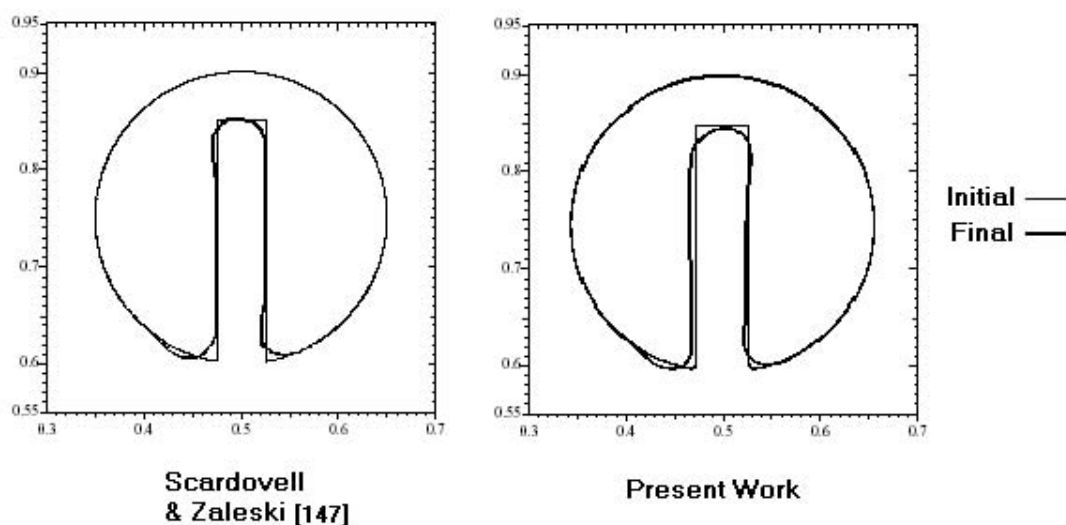
باشد [۱۴۷]. شکل ۵-۱۲ نتیجه این آزمون را بطور کیفی، پس از یک دور چرخش کامل، در مقایسه با Scardovelli and Zaleski [۱۴۷] نشان می‌دهد. ملاحظه می‌کنیم تطابق خوبی برقرار است.

$$\Psi(x, y) = -\frac{\Omega}{2} \left((y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 \right) \quad ۵-۳$$

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases} \quad ۵-۴$$



شکل ۵-۱۱ شرایط هندسی آزمون Zalesak Slotted Disc [147].



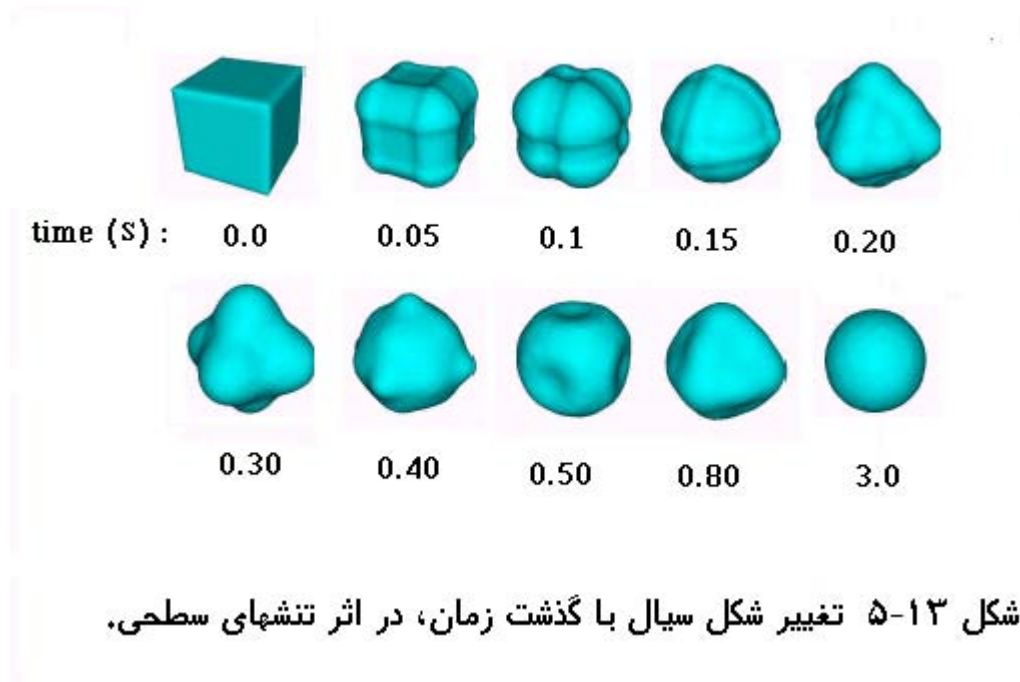
شکل ۱۲-۵ مقایسه کیفی نتایج آزمون Zalesak Slotted Disc.

۵-۶ تنشهای سطحی

در این قسمت با انجام آزمونی ساده صحت عملکرد تنشهای سطحی بصورت کیفی بررسی می شود. اگر یک تکه سیال با شکل اولیه مکعب در نظر گرفته شود که تنها تحت تأثیر تنشهای سطحی قرار دارد. واضح است که برای کاهش انرژی سیستم، با گذشت زمان سیال بشکل کروی در می آید. بمنظور برپایی چنین آزمونی مکعبی از آب بضلع ۵ سانتیمتر که توسط محیطی مکعبی از هوا بضلع ۱۰ سانتیمتر احاطه شده است در نظر گرفته می شود. طول مش ۲ میلیمتر و شرایط مرزی هم بصورت تناوبی لحاظ می شود. خواص فیزیکی مورد نیاز عبارتند از:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{water} = 10^{-3} \text{ Kg/ms} , \rho_{water} = 10^3 \text{ Kg/m}^3 \\ \mu_{Aire} = 10^{-5} \text{ Kg/ms} , \rho_{Aire} = 1 \text{ Kg/m}^3 \\ \sigma_{Water-Air} = 0.07275 \text{ N/m} \end{array} \right.$$

شکل ۱۳-۵ تغییر شکل سیال را با گذشت زمان نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود با گذشت زمان سیال بشکل کروی در آمده است. باید توجه کرد که در فرایندهای پرشدن قالب اثر تنشهای سطحی ناچیز است [۱۴۸ و ۱۴۹] ولی در این تحقیق بمنظور کامل شدن مدل اثر آنها در نظر گرفته شده است.

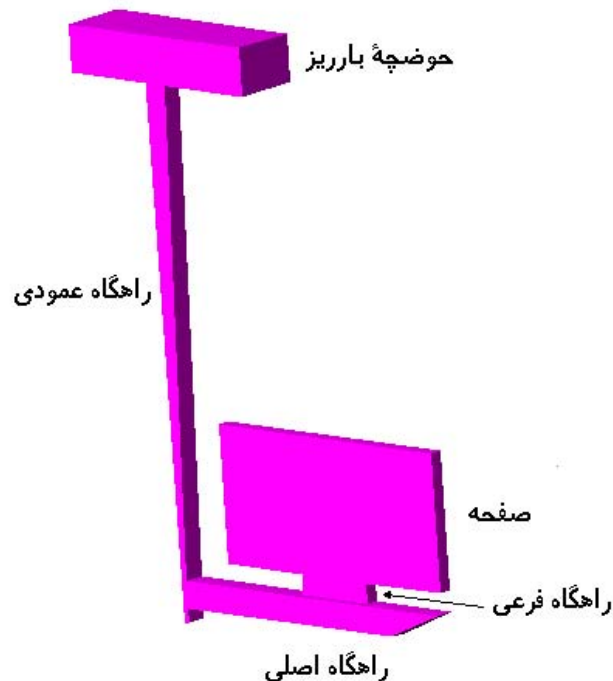


۵-۷ پر شدن قالب در ریخته‌گری ثقلی

در این قسمت به بررسی پر شدن قالب یک قطعه حقیقی ریخته‌گری پرداخته می‌شود که در آن بطور همزمان همه بخشهای مطرح شده در بالا دخالت دارند. قطعه مورد استفاده هم، یک صفحه نازک است که قبل از کنفرانس هفتم مدلسازی ریخته‌گری، جوشکاری و فرایندهای پیشرفته انجماد^۱، بعنوان آزمون محک (Benchmark) این کنفرانس مطرح شده

¹. Modeling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes VII

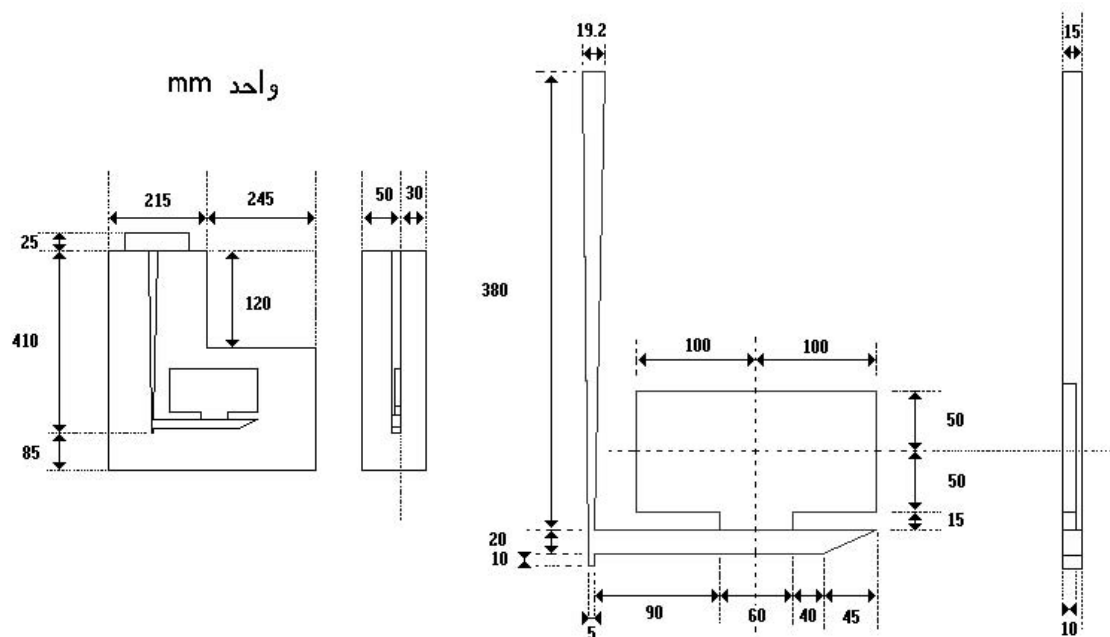
است [۱۴۹]. طرح این قطعه بطور شماتیک در شکل ۱۴-۵ و جزئیات مربوط به ابعاد آن در شکل ۱۵-۵ آورده شده است.



شکل ۱۴-۵ طرح شماتیک قطعه پیشنهاد شده جهت شبیه سازی در کنفرانس هفتم مدلسازی ریخته‌گری، جوشکاری و فرایندهای پیشرفته انجاماد [149].

ملاحظه می‌شود قطعه از پنج قسمت تشکیل شده است که عبارتند از: حوضچه بارریز، راهگاه عمودی، راهگاه اصلی، راهگاه فرعی و صفحه. ریخته‌گری این قطعه در دانشگاه Birmingham انجام شده است. برای ریخته‌گری از آلومینیوم خالص استفاده شده و نحوه کار به این صورت بوده که محل اتصال حوضچه بارریز و راهگاه عمودی توسط یک استوپر بسته شده و پس از پر کردن حوضچه بارریز و رسیدن دمای مذاب درون حوضچه به ۷۰۰ درجه سانتیگراد استوپر برداشته شده و مذاب وارد راهگاه عمودی شده است. در طول بارریزی هم همواره حوضچه بصورت پر نگه داشته شده است. همچنین حوضچه بگونه‌ای

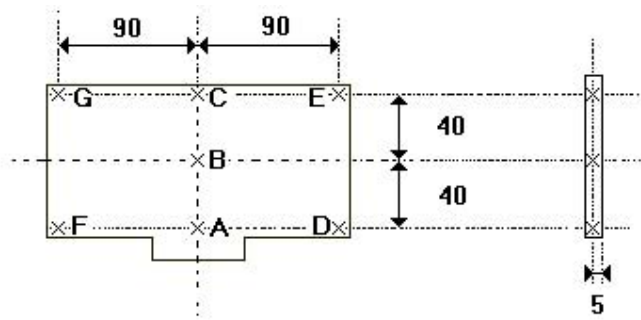
طراحی شده که حین پر شدن قالب، سطح فوقانی راهگاه بارریز تحت تأثیر فشار اتمسفری و وزن ۲۵ میلیمتر مذاب بالای خود قرار می‌گیرد. جهت ثبت کردن الگوی پر شدن قطعه از رادیوگرافی توسط اشعه X استفاده شده است. قالب هم از جنس ماسه سیلیسی با چسب سیلیکات سدیم انتخاب شده است تا رادیوگرافی میسر باشد و بعلت بالابودن قابلیت عبور هوای ماسه اثر فشار برگشتی^۱ هوای محبوس شده در قالب کاهش یابد. بمنظور بررسی انتقال حرارت و انجماد، ترموکوپلهایی مطابق شکل ۱۶-۵ در ۷ قسمت صفحه (A, B, C, D, E, F, G) تعبیه شده است که تغییرات دما را بر حسب زمان ثبت می‌کنند. برای حصول اطمینان، ذوب ریزی سه بار انجام شده و نتایج آن ارائه شده است [۱۴۹].



شکل ۵-۱ هندسه و ابعاد قطعه پیشنهاد شده جهت شبیه سازی در کنفرانس هفتم مدلسازی

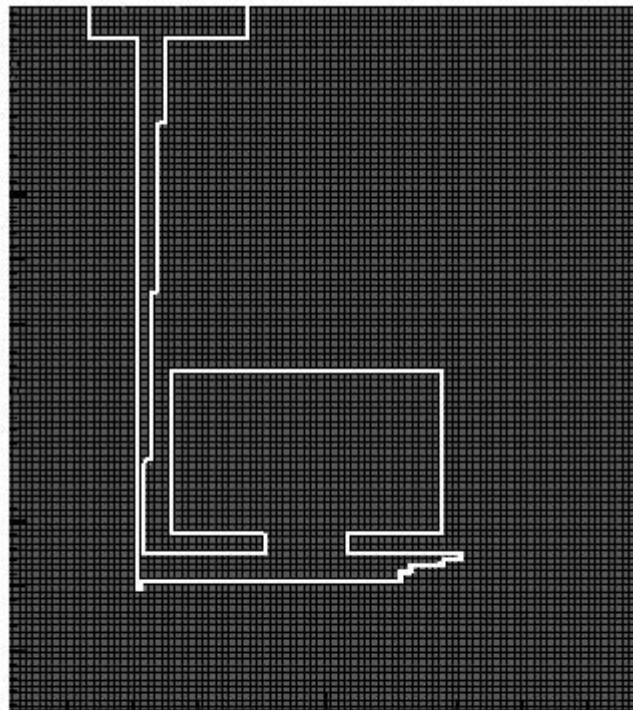
ریخته‌گری، جوشکاری و فرایندهای پیشرفته انجماد [149].

¹. Back Pressure



شکل ۵-۱۶ محل ترموکوپلهای تعبیه شده در قطعه بمنظور بررسی انجماد آن [149].

در این تحقیق از طول مش ۵ میلیمتر جهت شبیه‌سازی این قطعه استفاده شد. شکل ۵-۱۷ مقطع قطعه مش‌بندی شده را نشان می‌دهد (تعداد کل مشها حدود ۱۸۳ هزار عدد است).



شکل ۵-۱۷ مقطع قطعه مش‌بندی شده جهت شبیه‌سازی.

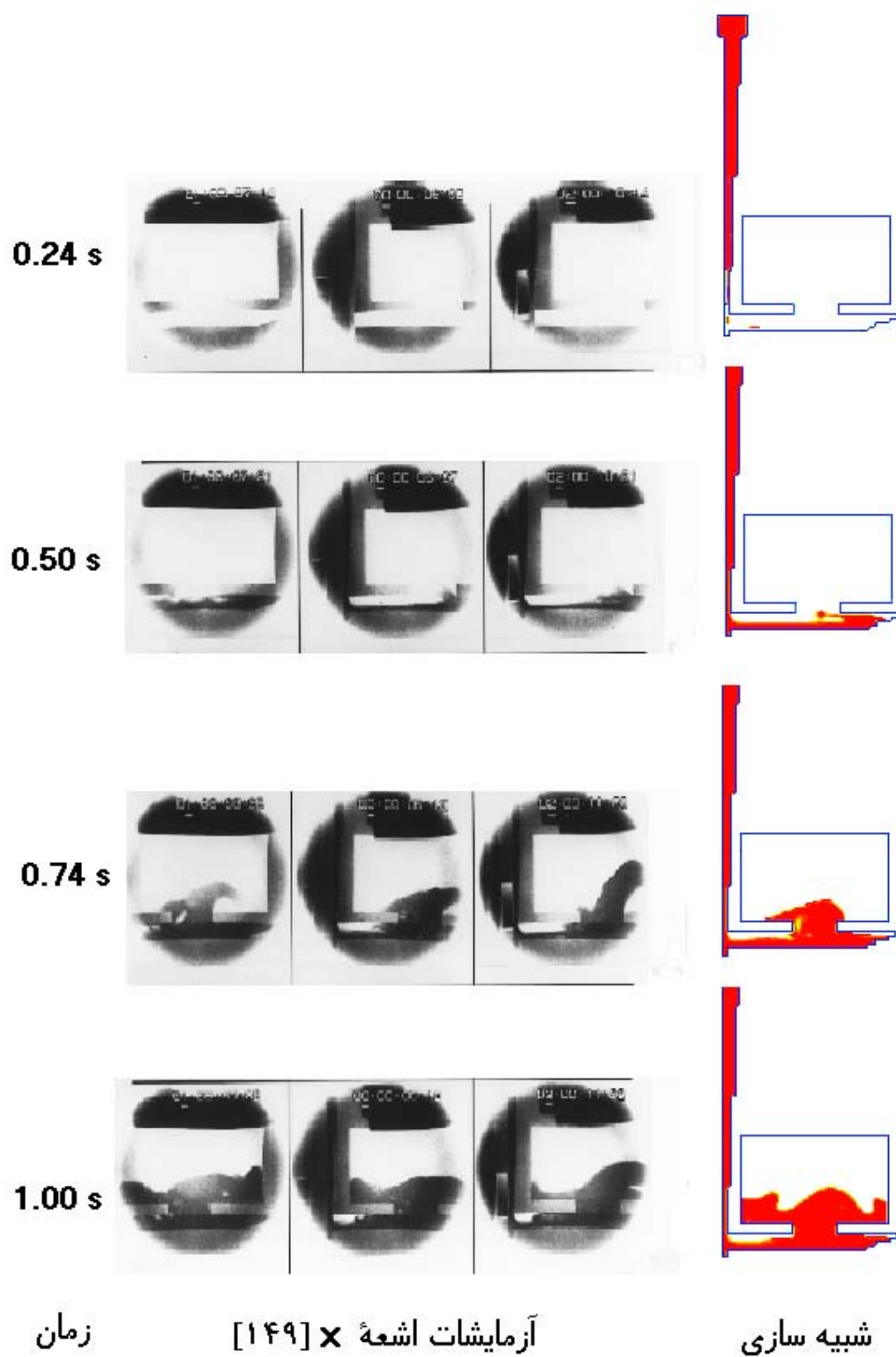
شرایط مرزی هم به اینصورت اعمال شد که روی سطح فوقانی حوضچه بارریز و سطح فوقانی صفحه، فشار اتمسفری اعمال شد و دیواره‌های قالب هم بصورت لغزان در نظر گرفته شد. انتقال حرارت روی دیواره‌های خارجی قالب هم بصورت جابجایی آزاد منظور شد. خواص فیزیکی مورد نیاز هم در جدول ۱-۵ آورده شده‌اند.

Material	$P \text{ Kg/m}^3$	$C_p \text{ J/Kg}^\circ\text{C}$	$K \text{ W/m}^\circ\text{C}$	$\mu \text{ NS/m}^2$
Liquid [154]	2550.0	1070.0	91.96	$1.7 e-3$ [151]
Solid [154]	2550.0	1170.0	209.0	-
Sand [151]	1520.0	1085.0	0.62	-
Air [151]	1.0	1000.0	0.025	$1.0 e-7$
$T_{Rom} \text{ }^\circ\text{C}$	$\sigma \text{ N/m}$ [152]	$T_{Liquidos} \text{ }^\circ\text{C}$ [152]	$T_{Solidos} \text{ }^\circ\text{C}$ [152]	$L \text{ J/Kg}$ [152]
25.0	0.9	660.4	635.0	397500
C [26]	$\beta \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ [26]	$h \text{ W/m}^2\text{ }^\circ\text{C}$ [120]	-	-
$1.6 e-5$	$4.0 e-5$	2000.0	-	-

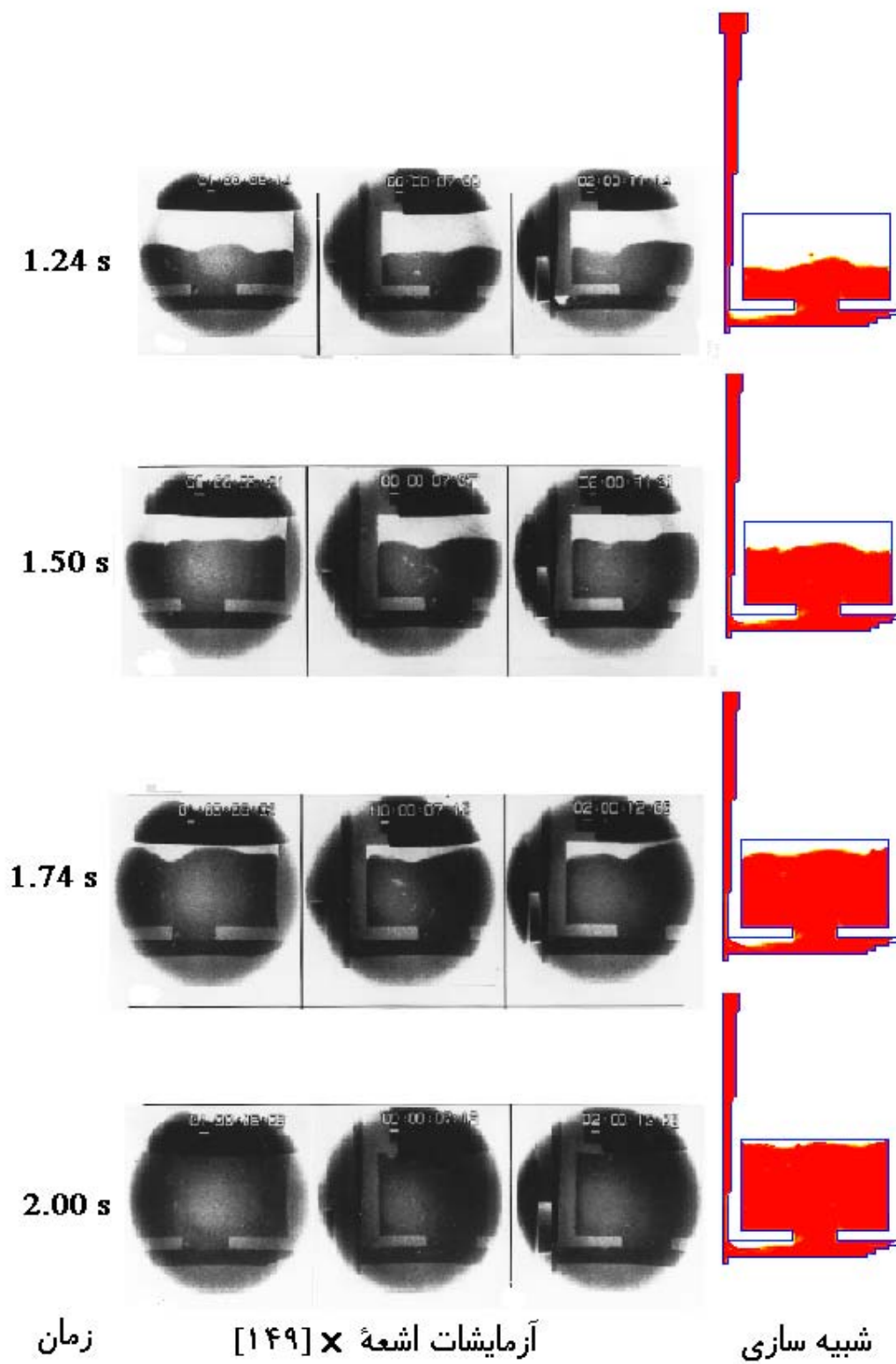
جدول ۱-۵ خواص فیزیکی مورد نیاز جهت شبیه سازی قطعه مورد نظر.

همچنین این قطعه توسط نرم افزارها و محققان مختلف شبیه‌سازی شده و نتایج آن در این کنفرانس ارائه شده است. از جمله: $CaPS-3D$ [۱۵۰]، $FLOW-3D$ [۱۴۸]، $LS-LS$ [۱۵۱]، $WRAFTS$ [۱۵۵]، $Rapid Cast$ [۱۵۴]، $DFDM / 3DFLOW$ [۱۵۳]، $Xu and Mampay$ [۱۵۲]، $FIDAP$ [۱۵۶] و $SIMULOR$ [۱۵۷]. حال در ادامه به بررسی نتایج این شبیه‌سازی می‌پردازیم.

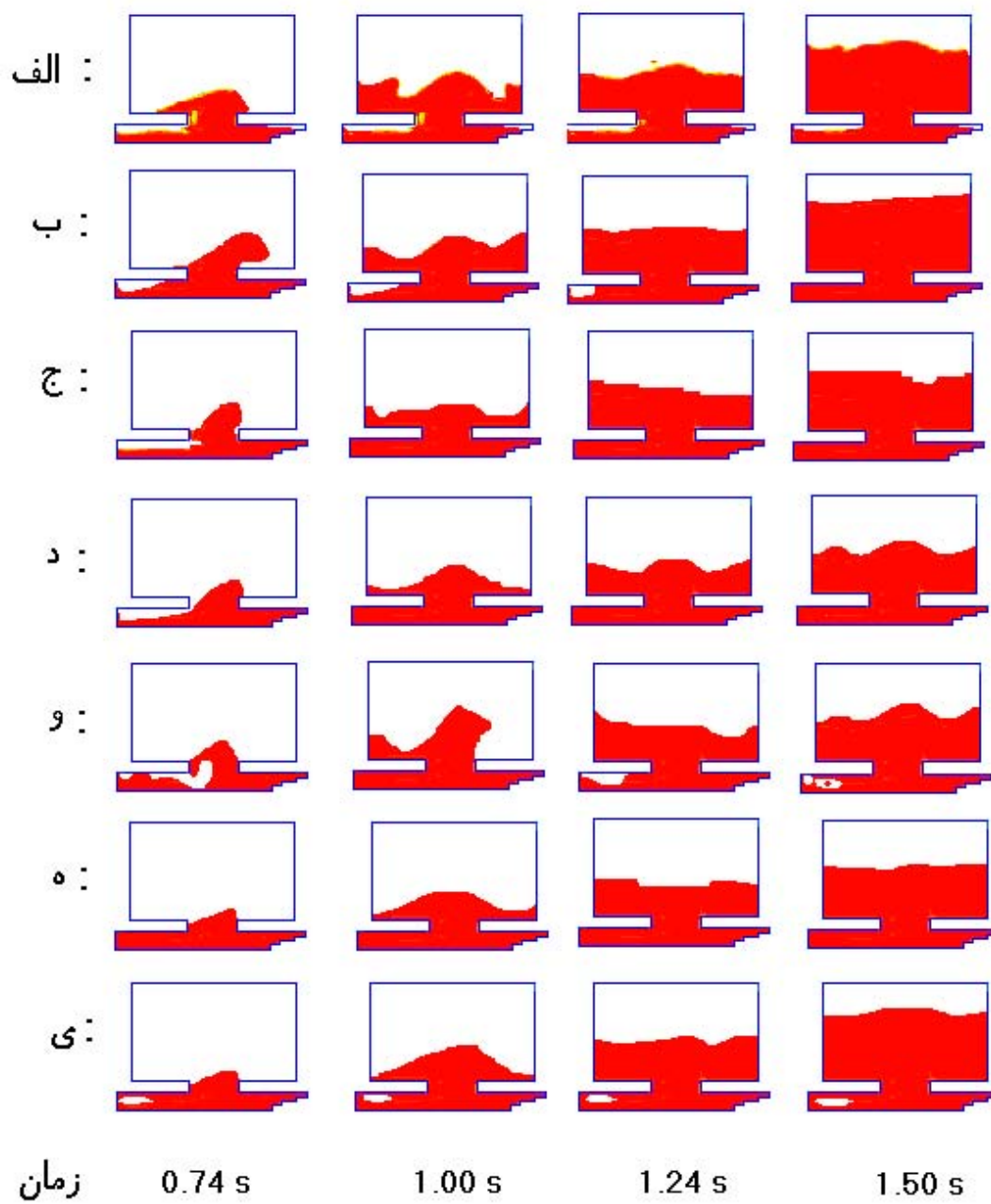
شکل‌های ۱۸-۵ و ۱۹-۵ نتایج مربوط به شبیه‌سازی الگوی پر شدن قطعه را در مقایسه با آزمایش عملی انجام شده توسط $Sirrell et al.$ [۱۴۹] نشان می‌دهند. همچنین مقایسه با نتایج شبیه‌سازی سایر محققان در شکل ۲۰-۵ آورده شده است.



شکل ۱۸-۵ مقایسه نتایج شبیه سازی و عملی مراحل پر شدن قطعه.



شکل ۱۹-۵ مقایسه نتایج شبیه سازی و عملی مراحل پر شدن قطعه.



شکل ۲۰-۵ مقایسه نتایج شبیه سازی الگوی پر شدن قالب : الف) این تحقیق

ب) FLOW-3D [148] ج) CaPS-3D [150] د) Xu and Mampaey [152]
و) DFDM3D [153] ه) Rapid Cast [154] ی) .SIMULOR [157]

ملاحظه می‌شود در ۰/۲۵ ثانیه راهگاه عمودی پر شده و مذاب وارد راهگاه اصلی می‌شود. در ادامه در قسمت بالای سمت راست راهگاه اصلی یک منطقهٔ مرده تشکیل شده و در آنجا مقداری هوای حبس شده وجود دارد. در تصاویر رادیوگرافی با گذشت زمان این منطقه کوچک شده و پس از ۱/۵ ثانیه بطور کامل از بین رفته است. در حالی که در نتایج شبیه‌سازی این منطقه تا پایان باقی مانده است. البته فیلم شبیه‌سازی نشان می‌دهد که مقداری از این هوای محبوس در حین پر شدن قالب با مذاب وارد قطعه شده و بصورت حباب هوایی صعود کرده و از سطح فوقانی خارج می‌شود.

در توجیه باقی ماندن این هوا باید به این نکته اشاره کرد که در عمل با پر شدن قطعه فشار اعمالی از سوی مذاب روی هوای محبوس بالا رفته که این باعث می‌شود مقداری از هوا حل شده، مقداری هم از دیواره‌های قالب خارج شود (قالب ماسه‌ای بوده و قابلیت عبور گاز را دارا است) و مقداری هم به حباب‌های ریز تبدیل شده و با مذاب مخلوط شود. با توجه به اینکه در مدل فیزیکی مورد استفاده این مسائل لحاظ نشده‌اند و هوا هم بصورت گازی تراکم ناپذیر در نظر گرفته شده است، پس از پر شدن قطعه مقداری از این هوا بصورت محبوس در راهگاه باقی مانده است. در مقایسه با نتایج سایر محققان این نکته قابل توجه است که در مواردی که اثر فشار برگشتی گاز روی مذاب در نظر گرفته نشده است (از جمله مراجع ۱۴۸، ۱۵۰، ۱۵۲ و ۱۵۴)، در اغلب موارد راهگاه اصلی زود تر از زمان واقعی بطور کامل پر شده است در حالی که در نظر گرفتن اثر فشار برگشتی گاز (از جمله مراجع ۱۵۳ و ۱۵۷) باعث شده راهگاه اصلی تا پایان کار بطور کامل پر نشود.

تفاوت آشکار دیگر بین نتیجهٔ شبیه‌سازی و واقعی در شکل پروفیل سطح آزاد در بازهٔ زمانی ۰/۵ تا ۱/۰ ثانیه است. یکی از دلایل این تفاوت در توربلانس اولیهٔ جریان است که بواسطهٔ سقوط مذاب از ارتفاع زیاد راهگاه اصلی ایجاد می‌شود (در مرجع ۱۴۹ به این نکته اشاره شده است). همانطور که اشاره شد، مدلسازی توربلانس در این پژوهش انجام نشده است. ملاحظه می‌شود در زمانهای بعدی تطابق نسبتاً خوبی بین نتایج برقرار است.

با مقایسه کیفی الگوی پر شدن حاصل از شبیه‌سازی تحقیق حاضر و سایر محققان (شکل ۲۰-۵) با آزمایش عملی می‌توان اظهار کرد که نتایج این پژوهش رضایتبخش است. باید توجه کرد که تفاوت بین نتایج محققان مختلف عمدتاً ناشی از تفاوت بین روش حل عددی معادلات حاکم و خواص فیزیکی استفاده شده است.

زمان پر شدن کامل قالب که از آزمایش عملی بدست آمده ۲/۲ ثانیه گزارش شده است. زمان حاصل از شبیه‌سازی در این پژوهش حدود ۲/۱ ثانیه می‌باشد (رسیدن مذاب به سطح فوقانی صفحه). بطور کلی، این تفاوت (و تفاوت در شکل سطح آزاد حین پر شدن) می‌تواند ناشی از عوامل مختلفی باشد که در ادامه به تعدادی از آنها اشاره می‌شود : در این تحقیق دیواره‌های قالب بصورت لغزان در نظر گرفته شد در حالی که در عمل دیواره‌ها مقداری اصطکاک دارند، تفاوت هندسه قطعه شبیه‌سازی شده از هندسه واقعی بعلا محدودیت روش اختلاف محدود در تقریب زدن شکل هندسی، اختلاف مدل فیزیکی واقعی با مدل مورد استفاده در شبیه‌سازی، خطای حل عددی معادلات فیزیکی حاکم، تفاوت خواص فیزیکی واقعی با خواص مورد استفاده در شبیه‌سازی، تغییر خواص با دما در حالی که در این شبیه‌سازی خواص بصورت ثابت در نظر گرفته شدند و وجود تلاطم در حالت واقعی که در مدل فیزیکی مورد استفاده، لحاظ نشده است.

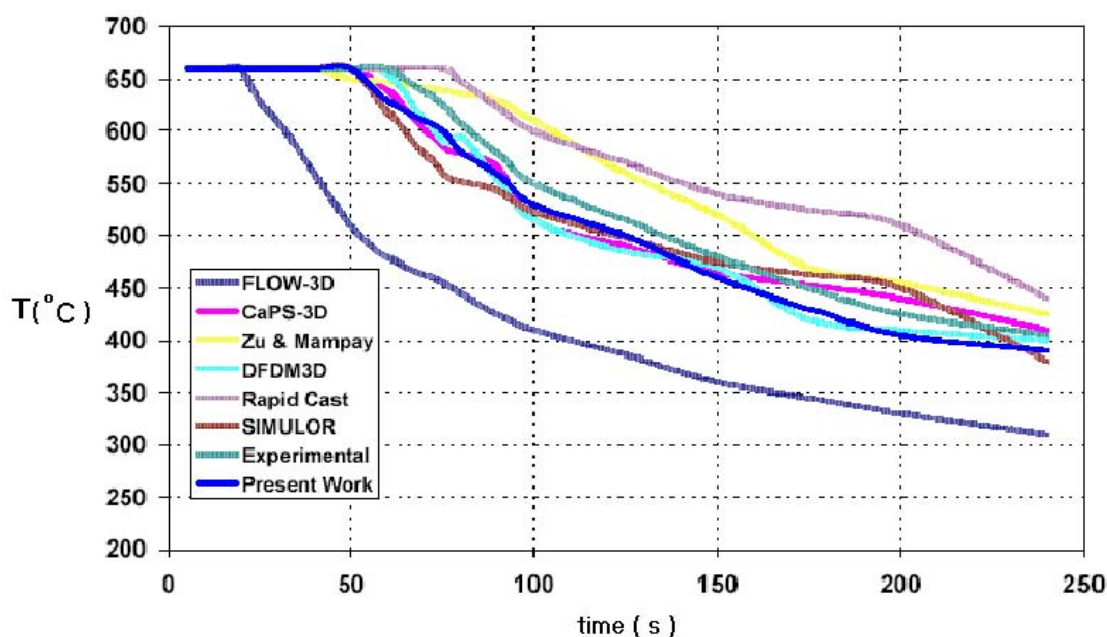
زمانهای پر شدن گزارش شده از سوی سایر محققان هم در جدول ۲-۵ آورده شده است. *Xu and Mampaey* [۱۵۲] در گزارش خود اثر اصطکاک دیواره را هم بررسی کردند و گزارش کرده‌اند که هنگامی که اصطکاک دیواره صفر باشد زمان پر شدن ۲/۱۵ ثانیه خواهد بود و با افزایش اصطکاک زمان پر شدن افزایش یافته و در حالت اصطکاک کامل این زمان ۲/۳۳ ثانیه است.

<i>FLOW-3D</i> [148]	<i>CaPS-3D</i> [150]	<i>Lewis et al.</i> [151]
1.83 s	2.15 s	2.4 s
<i>Zu & Mampaey</i> [152]	<i>DFDM / 3DFLOW</i> [153]	<i>Rapid Cast</i> [154]
2.15-2.33 s	2.3 s	2.2
<i>LS-DYNA3D</i> [156]	<i>FIDAP</i> [156]	<i>SIMULOR</i> [157]
2.2 s	4.0 s	2.06 s

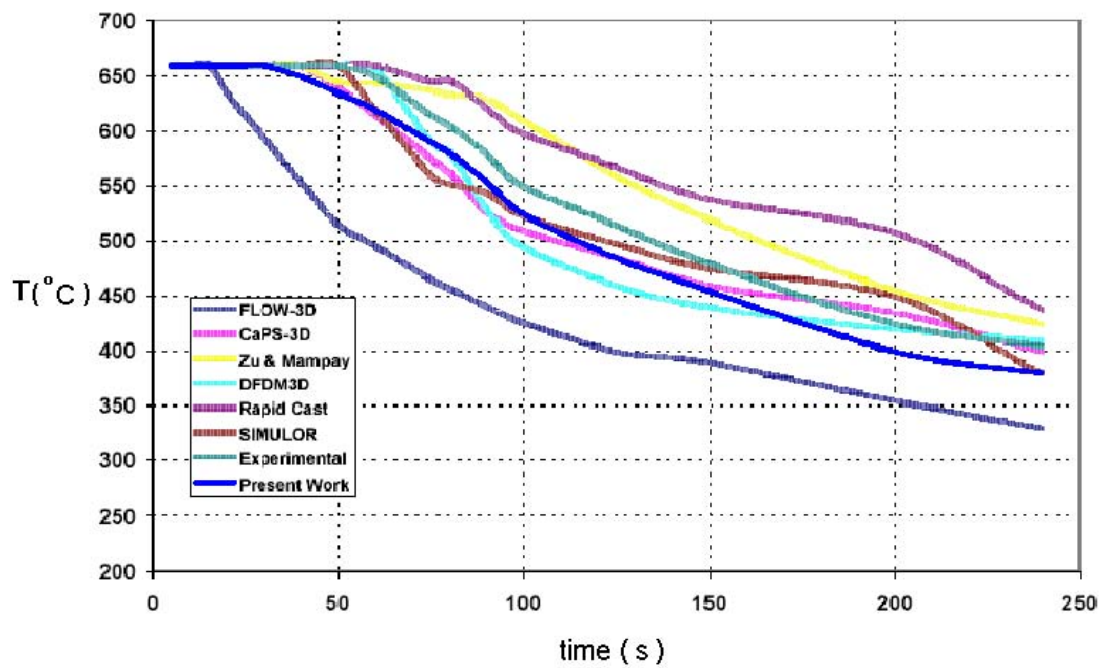
جدول ۲-۵ زمانهای پر شدن گزارش شده توسط محققان مختلف.

نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد حین پر شدن قطعه انجمادی انجام نشده است و تنها در لحظات اولیه، هنگام ورود مذاب از راهگاه فرعی به صفحه مقدار کمی مذاب به سطوح قالب پاشیده شده و در آن نقاط منجمد شده است.

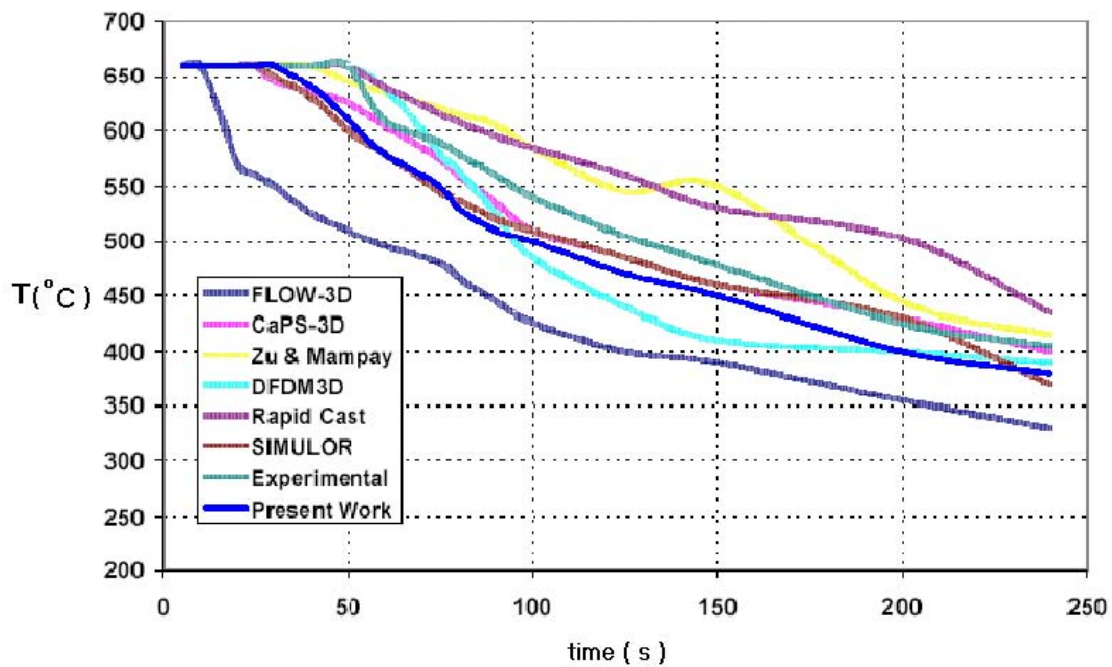
شکل‌های ۵-۲۱، ۵-۲۲ و ۵-۲۳ بترتیب نتایج حاصل از منحنی‌های سرد شدن نقاط A ، B و C مشخص شده در شکل ۵-۱۶ را در مقایسه با نتایج آزمایش عملی و سایر محققان نشان می‌دهند. ملاحظه می‌شود تطابق قابل قبولی برقرار است. تفاوت قابل توجه بین آزمون عملی و شبیه‌سازی در تحقیق اخیر این است که سرعت سرد شدن قطعه در شبیه‌سازی مقداری بیشتر از حالت واقعی است. علل زیادی می‌تواند باعث ایجاد این تفاوت شود که تعدادی از آنها مشابه موارد ذکر شده در قسمت قبل است. ولی عمده‌ترین دلایل اختلاف عبارتند از: تفاوت در خواص فیزیکی استفاده شده و وجود مقاومت حرارتی در فصل مشترک قالب - فلز که باعث کند شدن انتقال حرارت می‌شود و در مدل‌سازی لحاظ نشده است. باید توجه کرد که در این تحقیق معادلات انتقال حرارت بصورت صریح حل شده‌اند در حالی که سایر محققان بمنظور کاهش زمان پردازش کامپیوتری، معادلات را پس از پر شدن قالب بصورت ضمنی حل کرده‌اند. بنابراین انتظار داریم نتایج تحقیق حاضر دقیق‌تر باشد.



شکل ۵-۲۱ منحنی سرد شدن نقطه A ، مربوط به این تحقیق، محققان مختلف و آزمایش عملی.



شکل ۵-۲۲ منحنی سرد شدن نقطه B، مربوط به این تحقیق، محققان مختلف و آزمایش عملی.



شکل ۵-۲۳ منحنی سرد شدن نقطه C، مربوط به این تحقیق، محققان مختلف و آزمایش عملی.

۵-۸ آزمایش با آب

همانطور که قبلاً اشاره شد، هدف از این تحقیق فراهم آوردن ابزاری جهت شبیه‌سازی کامپیوتری فرایند ریخته‌گری تحت فشار کم است. اما باید توجه کرد که استفاده از ماشین ریخته‌گری تحت فشار کم جهت بررسی صحت نتایج با مشکلاتی همراه است که در زیر به تعدادی از آنها اشاره می‌شود.

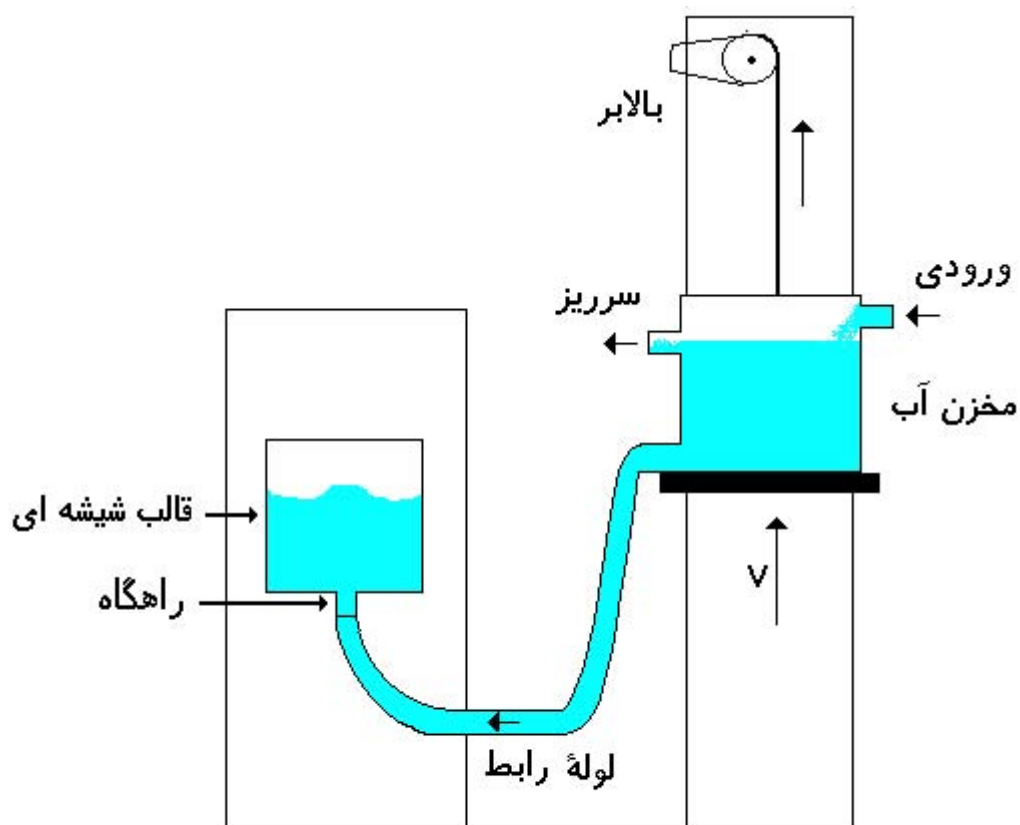
در ریخته‌گری تحت فشار کم غالباً از قالب فلزی استفاده می‌شود. تهیه یک قالب فلزی برای این منظور بسیار هزینه‌بر بوده و مضافاً در صورت تهیه چنین قالبی نیاز به خواص فیزیکی آن داریم که خواص فیزیکی صحیح آن بسختی قابل دسترس است و با مراجعه به منابع در می‌یابیم منابع مختلف خواص فیزیکی متفاوتی را گزارش کرده‌اند. همچنین خواص فیزیکی مذابها بدقت مشخص نیست و در منابع تفاوت‌های قابل توجهی وجود دارد [۱۴۹]. در قالبهای فلزی مقاومت حرارتی بین تکه‌های قالب و فاصله هوایی ایجاد شده (در فصل مشترک قطعه-قالب) در اثر انجماد، تأثیر زیادی بر انتقال حرارت دارند که مدلسازی آنها در این تحقیق انجام نشده است نکته دیگر تنظیم پارامترهای کنترلی این فرایند از جمله تغییرات فشار با زمان حین پر شدن قالب است که اغلب ماشینهای موجود فاقد ابزار کنترلی مناسب هستند.

همچنین ثبت کردن الگوی پر شدن قالب در این حالت مشکل بوده و استفاده از رادیوگرافی توسط اشعه X میسر نیست. اغلب کسانی که الگوی پر شدن در قالبهای فلزی را ثبت کرده‌اند، از تعداد محدودی حسگر دمایی استفاده کرده‌اند. روش کار هم به این صورت است که حسگرها را در نقاط خاصی از محفظه قالب قرار می‌دهند. با ورود مذاب به قالب، پس از تماس مذاب با حسگر، زمان تماس ثبت می‌شود. در نهایت با توجه به محل حسگرها و زمان تماس الگوی پر شدن بدست می‌آید. واضح است دقت کار بستگی به تعداد حسگرها دارد. باید توجه کرد که وجود حسگر در محفظه قالب به عنوان یک مانع سر راه سیال عمل می‌کند و افزایش تعداد آنها باعث تغییر در نحوه جریان سیال می‌شود [۲] که این می‌تواند باعث بی اعتبار شدن آزمایش شود.

بنابراین بنظر می‌رسد انجام آزمایش عملی با ماشین ریخته‌گری تحت فشار کم نیاز به صرف هزینه و زمان زیادی داشته و در نهایت ممکن است نتایج حاصله چندان قابل استفاده و تحلیل نباشد.

در این راستا راه حلی که بسیاری از محققان در پیش گرفته‌اند، استفاده از قالبهای شیشه‌ای و آب بعنوان سیال پرکننده قالب است. این روش در بررسی ریخته‌گری ثقلی و تحت فشار کم آلیاژهای آلومینیم بسیار رایج است [۱۵۸ و ۱۵۹].

با توجه به مطالب ذکر شده، در این پژوهش از یک آزمایش ساده استفاده شد که در آن فقط حرکت سیال (بدون انتقال حرارت) مطرح بوده و شرایط پر شدن آن مشابه ریخته‌گری تحت فشار کم است. شکل ۲۴-۵ بطور شماتیک سیستم بکار رفته جهت انجام این آزمایش را نشان می‌دهد.



شکل ۲۴-۵ سیستم بکار رفته جهت انجام آزمایش عملی در این تحقیق.

قالب مورد استفاده شیشه‌ای بوده و الگوی پر شدن، بطور مستقیم توسط فیلمبرداری ثبت می‌شود. سیال مورد استفاده هم آب است که خواص فیزیکی آن با دقت بالا در منابع موجود می‌باشد. بمنظور افزایش کیفیت ثبت الگوی پر شدن مقدار کمی جوهر رنگی به آب اضافه شد.

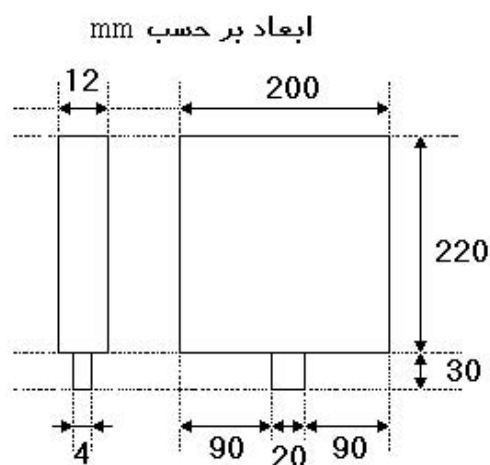
روش کار هم به این صورت است که محل قالب ثابت بوده و در شروع کار مخزن آب در ارتفاعی قرار دارد که سطح آب تا ورودی راهگاه بالا آمده است. با حرکت بالابر به سمت بالا، مخزن آب بالا رفته و فشار اعمالی روی سیال بطور پیوسته افزایش می‌یابد که باعث می‌شود سیال وارد راهگاه شده و از آنجا وارد قالب شود. حرکت بالابر بسمت بالا تا جایی ادامه می‌یابد که قالب بطور کامل پر شود. بمنظور ثابت نگه داشتن سطح آب در مخزن، در ارتفاع مشخصی از آن یک ورودی آب قرار داده شده است و برای جلوگیری از افزایش ارتفاع آب در آن از یک سرریز استفاده شده است (مطابق شکل ۲۴-۵).

وجه تشابه این سیستم با ریخته‌گری تحت فشار کم افزایش پیوسته فشار بمنظور پر شدن قالب با جریانی آرام است. باید توجه کرد که در ریخته‌گری ثقلی فشار در ورودی یا ثابت بوده یا بطور پیوسته کاهش می‌یابد. لذا ممکن است در شروع بعلت بالا بودن فشار، جریان ناآرام باشد.

خواص فیزیکی مورد نیاز در جدول ۳-۵، و جزئیات ابعاد هندسی و پارامترهای مورد نیاز جهت شبیه‌سازی، در شکل ۲۵-۵ آورده شده‌اند. همچنین طول مش ۴ میلیمتر در نظر گرفته شد. شرایط مرزی هم عبارتند از: اصطکاک دیواره‌ها صفر است، روی سطح فوقانی قالب و مخزن آب، فشار اتمسفری اعمال می‌شود و مخزن در پایان هر گام زمانی با توجه به سرعت بالابر مقداری بسمت بالا حرکت می‌کند.

$\rho_{Water} \text{ Kg / m}^3$	$\rho_{Air} \text{ Kg / m}^3$	$\mu_{Water} \text{ Kg / ms}$	$\mu_{Air} \text{ Kg / ms}$	$\sigma_{Water-Air} \text{ N / m}$
998.2	1.205	1.002 e-3	1.81 e-5	7.275 e-2

جدول ۳-۵ خواص فیزیکی مورد نیاز جهت شبیه‌سازی.



سرعت بالابر 110 mm/s

ارتفاع آب در مخزن 300 mm

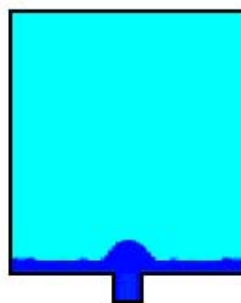
مقطع لوله رابط 600 mm^2

شکل ۲۵-۵ ابعاد هندسی قالب و پارامترهای مورد نیاز جهت شبیه سازی.

شکل‌های ۲۶-۵ و ۲۷-۵ نتایج حاصل از شبیه‌سازی را در کنار نتایج آزمایش عملی نشان می‌دهند. ملاحظه می‌شود تطابق نسبتاً خوبی بین نتایج برقرار است. تنها تفاوتی که وجود دارد این است که تلاطم و موجهای سطحی در حالت آزمایش مقداری بیشتر از شبیه‌سازی است، بخصوص از ثانیه ۳ به بعد که موج مشخصی روی سطح تشکیل شده است. علت این امر را می‌توان در نوسانات مکانیکی ایجاد شده در اثر حرکت بالابر به سمت بالا دانست که این مسأله در شبیه‌سازی لحاظ نشده است.



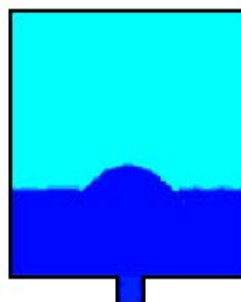
$t = 0.5 \text{ s}$



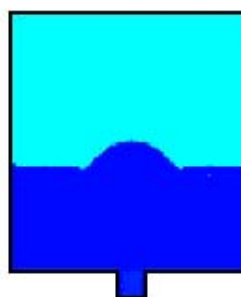
$t = 1.0 \text{ s}$



$t = 1.5 \text{ s}$



$t = 2.0 \text{ s}$



آزمایش

شبيه سازى

شکل ۲۶-۵ مقایسه نتایج شبیه سازی الگوی پر شدن قالب با نتایج آزمایش عملی.



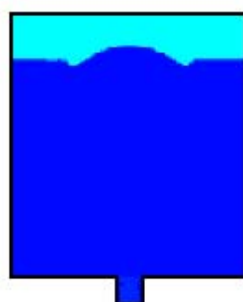
$t = 2.5 \text{ s}$



$t = 3.0 \text{ s}$



$t = 3.5 \text{ s}$



$t = 4.0 \text{ s}$



آزمایش

شبيه سازى

شکل ۲۷-۵ مقایسه نتایج شبیه سازی الگوی پر شدن قالب با نتایج آزمایش عملی.

نتیجه گیری

در این تحقیق شبیه سازی جریان سیال در ریخته گری تحت فشار کم مورد بررسی قرار گرفت. در ابتدا مدل سازی فرایند انجام شد. مواردی که در مدل سازی مورد توجه قرار گرفتند عبارتند از: حرکت سیال همراه با سطح آزاد، انتقال حرارت همراه با تغییر فاز و اثر پدیده های مختلف بر حرکت سیال از جمله: اثر انجماد، تنش های سطحی، جابجایی طبیعی سیال و هوای داخل قالب. پس از مدل سازی ریاضی روش حل عددی ارائه شد. برای بررسی صحت نتایج از نتایج گزارش شده توسط سایر محققان و آزمایش انجام شده در تحقیق حاضر استفاده شد. در کلیه موارد تطابق خوبی بین نتایج شبیه سازی و نتایج مورد انتظار مشاهده شد و در صورت وجود اختلاف علل آن تشریح شد. حل عددی مورد استفاده هم حلی پایدار بوده و در موارد بررسی شده، هیچگونه ناپایداری و عدم همگرایی مشاهده نشد. اعمال شرایط مرزی بصورت فشار مشخص یا متغیر با زمان، در ورودی و خروجی ها براحتی و بدون کاهش دقت میسر می باشد. در مجموع می توان نتیجه گرفت مدل مورد استفاده توانایی شبیه سازی جریان سیال در ریخته گری تحت فشار کم را دارا می باشد و با مقداری اصلاح و تکامل می تواند در صنعت مورد استفاده قرار گیرد. از مهمترین مواردی که می تواند در تکمیل مدل مورد توجه قرار گیرد مدل سازی مقاومت حرارتی بین تکه های قالب و فاصله هوایی تشکیل شده حین انجماد است.

پیشنهادات

- استفاده از روش حجم محدود با مشهای بی‌سازمان برای حل معادلات حاکم.
- مدل‌سازی توربلانس بمنظور شبیه‌سازی ریخته‌گری تحت فشار بالا.
- شبیه‌سازی پر شدن قالب توسط روش *SPH*.
- استفاده از پردازش موازی¹ برای حل معادلات حاکم بمنظور کاهش زمان اجرا.
- حل ضمنی معادلات حاکم پس از پر شدن قالب بمنظور کاهش زمان اجرا.
- بررسی رفتار فیزیکی حبابهای هوا در داخل مذاب و مدل‌سازی ریاضی آن.
- مدل‌سازی مقاومت حرارتی ناشی از تشکیل فاصله‌های هوایی حین انجماد.
- مدل‌سازی مقاومت حرارتی بین تکه‌های قالب.
- استفاده از مدل‌های ساده و با راندمان بالاتر برای مدل‌سازی هوای داخل قالب.
- استفاده از روشهایی با سرعت همگرایی بالاتر جهت حل دستگاه معادلات خطی.
- بررسی قابلیت عبور گاز از دیواره قالبهای ماسه‌ای و مدل‌سازی ریاضی آن.
- محاسبه ضریب اصطکاک دیواره قالب توسط مقایسه نتایج آزمایشگاهی و شبیه‌سازی.
- شبیه‌سازی سیالیت مذاب با استفاده از مدل‌سازی حرکت سیال همراه با رشد دندریت.
- مدل‌سازی کشش سطحی دیواره‌ها و بررسی اثر آن بر حرکت سیال و پر شدن قالب.
- وارد کردن اثرات میکروسکوپی از جمله جوانه‌زنی در معادله انتقال حرارت.

¹. *Parallel Processing*

1. J. H. Kuo, F. L. Hsu and W. S. Hwang, “ *Development of an Interactive Simulation Simulation System for the Determination of the Pressure – Time Relationship During the Filling in the Low Pressure Casting Process*”, Science and Technology of Advanced Materials, 2 (2001) p. 131.
2. E. S. Duff, “ *Fluid Flow Aspects of Solidification Modelling : Simulation of Low Pressure Die Casting*“, PhD Thesis, University of Queensland, Queensland, 1999.
3. S. Morimoto, N. Ohnishi and S. Okada, “ *Development of Low Pressure Die Casting Process for Improved Soundness of Aluminum Castings*“, AFS Transactions, (1987) p. 39.
4. M. D. Lipinski, “ *Mold Filling Simulation for Casting Processes*“, PhD Thesis, Warschau, 1996.
5. P. Ingerslev and S. T. Anderson, “ *Flow Analysis of Mould Filling Using High Speed Motion Pictures of the Metal, Water Modeling and Numerical Calculations*“, 54th International Foundry Congress, New Dehli, India, 1987.
6. W. S. Hwang and R. A. Stoehr, “ *Computer Simulation for the Filling of Castings*“, AFS Transactions, 95 (1987) p. 174.
7. H. J. Lin, W. S. Hwang, “ *Combined Fluid Flow and Heat Transfer Analysis for the Filling of Casting*“, in: A. F. Giamei and G. J. Abbaschian (eds), Modeling of Casting , Welding and Advanced Solidification Processes – VI, Proceedings VI th. Int. Conf., Miami, TMS-AIME, (1988) p. 487.
8. J. C. Sturm, W. Schafer and P. R. Sahn, “ *Modeling the Mold Filling and Solidification of a Steel Hammer Casting by Use of Computer Aided Solidification Technologies (CASTS) Software System*“, in: A. F. Giamei and G. J. Abbaschian (eds), Modeling of Casting , Welding and Advanced Solidification Processes – VI, Proceedings VI th. Int. Conf., Miami, TMS-AIME, (1988) p. 845.
9. R. A. Stoehr, C. Wang, “ *Coupled Heat Transfer and Fluid Flow in the Filling of Castings*“, AFS Transactions, (1988) p. 733.
10. I. L. Svensson, J. Hoernfeldt and L. Eriksson, “ *Mould Filling and Heat Transfer in Shaped Casting*“, in: A. F. Giamei and G. J. Abbaschian (eds), Modeling of Casting , Welding and Advanced Solidification Processes – VI, Proceedings VI th. Int. Conf., Miami, TMS-AIME, (1988) p. 899.
11. B. D. Nichols, C. W. Hirt, and R. S. Hotchkiss, “ *SOLAVOF : a Solution Algorithm for Transient Fluid Flow with Multiple Free Boundaries*” Tech. Rep. LA-8355, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, (1980).
12. H. J. Lin and W. S. Hwang, “ *Tree Dimensional Fluid Flow Simulation for Mold Filling*“, AFS Transactions, (1989) p. 855.

13. G. Dhatt, D. M. Gao and A. B. Cheikh, “ *a Finite Element Simulation of Metal Flow in Moulds*”, Int. J. for Numerical Methods in Engineering, 30 (1990) p. 821.
14. S. H. Jong and S. W. Hwang,” *Tree Dimensional Mold Filling Simulation for Casting and its Experimental Verification*”, AFS Transactions, (1991) p. 117.
15. K. S. Chan, K. Pericleous and M. Cross,” *Numerical Simulation of Flow Encountered during Mold Filling*”, Applied Mathematical Modelling, 15 (1991) p. 624.
16. A. S. Usmani, J. T. Cross and R. W. Lewis,” *a Finite Element Model for the Simulations of Mould Filling in Metal Casting and the Associated Heat Transfer*”, Int. J. for Numerical Methods in Engineering, 35 (1992) p. 787.
17. Z. A. Xu and F. Mampaey, “ *Experimental and Simulation Study on Mold Filling Coupled with Heat Transfer*”, AFS Transactions, (1994) p. 181.
18. M. Barkhurdarof and K. Williams, “ *Simulation of Surface Turbulence Fluid Phenomena during Mold Filling*”, AFS Transactions, (1995) p. 669.
19. S. Hao, K. Anzai and E. Niyama, “ *Numerical Simulation of Fluid Flow as Applied to Casting Design*”, AFS Transactions, (1995) p. 41.
20. F. Mampaey and Z. A. Xu, “ *Simulation and Experimental Validation of Mould Filling*”, in: M. Cross and J. Campbell (eds), Modeling of Casting , Welding and Advanced Solidification Processes – VII, Proceedings VII th. Int. Conf., England, TMS-AIME, (1995) p. 3.
21. S. B. Kim and C. P. Hong, “ *Filling and Solidification Sequences in Gravity Tilt-Pour Casting*”, in: M. Cross and J. Campbell (eds), Modeling of Casting , Welding and Advanced Solidification Processes – VII, Proceedings VII th. Int. Conf., England, TMS-AIME, (1995) p. 155.
22. S. N. Navity, C. Taylor, R. W. Lewis and D. V. Tram, “ *Finite Element Modeling of Mould Filling in Metal Casting*”, in: M. Cross and J. Campbell (eds), Modeling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes – VII, Proceedings VII th. Int. Conf., England, TMS-AIME, (1995) p. 15.
23. L. Gaston, B.Glut, M. Bellet and J. L. Chenot, “ *an Arbitrary Lagrangian Eulerian Finite Element Approach to None-Steady State Fluid Flow : Application to Mould Filling*”, in: M. Cross and J. Campbell (eds), Modeling of Casting , Welding and Advanced Solidification Processes – VII, Proceedings VII th. Int. Conf., England, TMS-AIME, (1995) p. 163.
24. C. R. Swaminathan and V. R. Voller, “ *Time – Implicit Filling Algorithm*”, Applied Mathematical Modelling, 18 (1994) p. 101.
25. W. S. Kim and I. T. Im, “ *Analysis of a Mold Filling Using an Implicit SOLA-VOF*”, Numerical Heat Transfer, part A, 35 (1999) p. 331.
26. I. T. Im, W. S. Kim and K. S. Lee, “ *a Unified Analysis of Filling and Solidification in Casting with Natural Convection*”, Int. J. of Heat and Mass Transfer, 44 (2001) p. 1507.

27. T. M. Shih, “ *Numerical Heat Transfer*”, Hemisphere, Washington Publishing Corporation, (1984).
28. John D. Anderson and Jr. Anderson, ” *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*”, Mc Graw Hill, (1995).
29. C. A. J. Fletcher,” *Computational Techniques for Fluid Dynamics 1. Fundamental and General Techniques*”, Springer Vlg., Berlin, (1988).
30. C. A. J. Fletcher,” *Computational Techniques for Fluid Dynamics 2. Specific Techniques for Different Flow Categories*”, Springer Vlg., Berlin, (1988).
31. J. C. Tannehill, D. A. Anderson and R. H. Pletcher, ” *Computational Fluid Mechanics & Heat Transfer*”, Taylor & Francis, U. S. A., (1997).
32. C. Hirsch, “ *Numerical Computation of Internal and External Flows*”, Vol. 1, Numerical Discretization, John Wiley (1990).
33. P. J. Roache, “ *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*”, Hermosa Publishers, (1998).
34. J. E. Welch, F. H. Harlow, J. P. Shannon and B. J. Daly, “ *The MAC Method a Computing Technique for Solving Viscous, Incompressible, Transient Fluid-Flow Problems Involving Free Surfaces*”, Tech. Rep. LA-3425, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, (1966).
35. J. N. Reddy and D. K. Gartling, “ *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*”, C. R. C. Press, 1994.
36. R. I. Lewis, “*Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems*”, Cambridge University Press, 1991.
37. M. D. Guntzburger, “ *Finite Element Methods for Viscous Incompressible Flows: a Guide to Theory, Practice and Algorithms*”, Academic Press Inc, 1989.
38. O. Pironeau. “*Finite Element Methods for Fluids*”, John Wiley & Sons, 1989.
39. A. J. Baker, “*Finite Element Computational Fluid Mechanics*”, Hemisphere Publishing Corporation, U. S. A., 1983.
40. C. Taylor and T. G. Hughes, “ *Finite Element Programming of the Navier-Stokes Equations*”, Pentech Press, Swansea, 1981.
41. S. V. Patankar, “ *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*”, Hemisphere, Washington Publishing Corporation, 1980.
42. H. K. Versteeg and W. Malalasekera, “ *An Introduction to Computational Fluid Dynamics : The Finite Volume Method*”, Addison-Wesley Pub. Co. , 1996.
43. D. Kothe, M. Williams, K. Lam, D. Korzekwa, P. K. Tubesing and E. G. Puckett, “ *A Second Order Accurate, Linearity Preserving Volume Tracking Algorithm for Free Surface*

- Flows on 3-D Unstructured Meshes*", Tech. Rep. LA-UR-99-2038, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, (1999).
44. D. B. Kothe, " *Perspective on Eulerian Finite Volume Methods for Incompressible Interfacial Flows*", Tech. Rep. LA-UR-97-3559, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, (1997).
 45. V. Reddy, D. B. Kothe, C. Beckermann, R. C. Ferrell and K. L. Lam, " *High Resolution Finite Volume Parallel Simulations of Mould Filling and Binary Alloy Solidification on Unstructured 3-D Meshes*", Tech. Rep. LA-UR-97-136, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, (1997).
 46. D. B. Kothe, R. C. Ferrell, J. A. Turner and S. J. Mosso, "A High Resolution Finite Volume Method for Efficient Parallel Simulation of Casting Processes on Unstructured Meshes", Tech. Rep. LA-UR-97-30, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, (1997).
 47. S. J. Mosso, B. K. Swartz, D. B. Kothe and S. P. Clancy, " *Recent Enhancements of Volume-Tracking Algorithms for Irregular Grids*", Tech. Rep. LA-CP-96-227, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, (1996).
 48. S. J. Mosso, B. K. Swartz, D. B. Kothe and R. C. Ferrell, " *A Parallel Volume-Tracking Algorithm for Unstructured Meshes*", Tech. Rep. LA-UR-96-2420, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, (1996).
 49. D. B. Kothe, W. J. Rider, S. J. Mosso, J. S. Brock and J. I. Hochstein, " *Volume Tracking of Interfaces Having Surface Tension in Two and Three Dimensions*", Tech. Rep. LA-UR-96-88, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, (1996).
 50. J. U. Brackbill and D. B. Kothe, " *Dynamical Modeling of Surface Tension*", Tech. Rep. LA-UR-96-1706, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, (1996).
 51. J. M. Floryan and H. Rasmussen, " *Numerical Methods for Viscous Flows with Moving Boundaries*", Appl. Mech. Rev., 42 (1989) p. 323.
 52. P. W. Cleary and J. Ha, " *Modelling the High Pressure Die Casting Process Using SPH*", Material Forum, 25 (2001) p. 1.
 53. P. W. Cleary and V. Ahuja, " *High pressure die casting simulation using Smoothed Particle Hydrodynamics*", Int J. Cast Metals Res., 12 (2000) p. 335.
 54. J. Ha. And P. W. Cleary, " *Comparison of SPH simulations of high pressure die casting with those of Schmidt and Klein*", Int J. Cast Metals Res., 12 (2000) p. 409.
 55. P. W. Cleary, J. Ha, V. Alguine and T. Nguyen, " *Casting process modelling*", Applied Mathematical Modelling, 26 (2002) p. 171.
 56. J. Ha. And P. W. Cleary, " *Comparison of SPH simulations of high pressure die casting with the experiments and VOF simulations of Schmid and Klein*", J. Cast Metals Research, 12 (2000) p. 409.
 57. P. W. Cleary and J. Ha, " *Three dimensional modelling of high pressure die casting*", J. Cast Metals Research, 12 (2000) p. 357.

58. P. W. Cleary and J. J. Monaghan, " *Conduction modelling using smoothed particle hydrodynamics*", J. Copm. Phys., 148 (1999) p. 227.
59. D. Kothe, D Juric, K. Lam and B. Lally , " *Numerical Recipes for Mold Filling Simulation*", Tech. Rep. LA-UR-98-214, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, (1998).
60. S. Zaleski, " *Computation of Multi Phase Flow by Volume of Fluid and High Order Front Tracking Methods*", UMR CNRS 7607, University Pierre et Marie Curie, Paris, (2000).
61. S. O. Unverdi and G. Tryggvason, " *A Front-Tracking Method for Viscous, Incompressible, Multi-Fluid Flows*", J. Copm. Phys., 100 (1992) 25-37.
62. J. S. Brock and J. W. Painter, "Tracer-Particle Advection: Components, Choices, and a New Alternative", Tech. Rep. LAUR-98-4691, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, (1998).
63. J. S. Brock, J. W. Painter and D. B. Kothe, " *Tracer-Particle Advection : Algorithm Components and implementation Methods*", Tech. Rep. LA-UR-98-5659, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, (1998).
64. B. Van Leer, " *Toward the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method*", J. Copm. Phys., 32 (1979) p. 101.
65. P. Collela and P. Woodward, J. Copm. Phys., 54 (1984) p. 174.
66. A. Harten, " *High resolution schemes for hyperbolic conservation laws*", J. Copm. Phys., 49 (1983) p. 357.
67. L. Jun and D. B. Spalding, " *Numerical Simulation of Flows with Moving Interfaces*", Physico Chemical Hydrodynamics, 10 (1988) p. 625.
68. K. S. Chan, K. Pericleous and M. Cross, " *Numerical Simulation of Flows Enconuntered during Mold-Filling*", Applied Mathematical Modeling, 15 (1991) p. 624.
69. C. W. Hirt and B. D. Nichols, " *Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries*", J. Copm. Phys., 39 (1981) p. 201.
70. D. B. Kothe, R. C. Mjolsness and M. D. Torrey, " *RIPPLE : A Computer Prpgram for Incompressible Flows with Free Surfaces*", Tech. Rep. LA-12007-MS, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, (1991).
71. J. E. Pilliod and E. G. Puckett, " *Second Order Volume-of-Fluid Algorithms for Tracking Material Interfaces*", Technical Report, Lawrence Berkeley National Laboratory, No LBNL-40744, Submitted to J. Copm. Phys., (1998).
72. A. J. Chorin, " *Flame Propagation and Advection Algorithm*", J. Copm. Phys., 35 (1980) p. 1.
73. J. A. Sethain, " *Turbolent Combustion in Open and Closed Vessels*", J. Copm. Phys., 54 (1984) p. 425.

74. N. Whitaker, "Numerical Solution of Hele-Shaw Equations", J. Copm. Phys., 90 (1990) p. 176.
75. M. D. Torrey, L. D. Cloutman, R. C. Mjolsness, and C. W. Hirt. "NASA-VOF2D: A Computer Program for Incompressible Flows with Free Surfaces", Tech. Rep LA-10612-MS, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, (1985).
76. M. D. Torrey, R. C. Mjolsness, and L. R. Stein, "NASA-VOF3D: A Three-Dimensional Computer Program for Incompressible Flows with Free Surfaces", Tech. Rep LA-11009-MS, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, (1987).
77. C. W. Hirt, "Flow-3D Users Manual", Flow Sciences Inc., (1988).
78. D. B. Kothe and R. C. Mjolsness," RIPPLe: A New Model for Incompressible Flows with Free Surfaces", AIAA Journal, 30 (1992) p. 2694.
79. B. Lafaurie, S. Zaleski and G. Zanetti, "Modelling Merging and Fragmentation in Multiphase Flows with SURFER", J. Copm. Phys., 113 (1994) p. 134.
80. N. Ashgriz and J. Y. Poo, "FLAIR, Flux Line-Segment Model for Advection and Interface Reconstruction", J. Copm. Phys., 93 (1991) p. 449.
81. W. J. Rider and D. B. Kothe," Reconstructing Volume Tracking", J. Copm. Phys., 141 (1998) p. 112.
82. E. G. Puckett, A. S. Almgren, J. B. Bell, D. L. Marcus and W. J. Rider, "A High-Order Projection Method for Tracking Fluid Interfaces in Variable Density Incompressible Flows", J. Copm. Phys., 130 (1997) p. 269.
83. D. Gueyffier, J. Li, A. Nadim, R. Scardovelli and S. Zaleski, "Volume-of-Fluid Interface Tracking with Smoothed Surface Stress Methods for Three-Dimensional Flows", J. Copm. Phys., 152 (1999) p. 423.
84. R. Scardovelli and S. Zaleski, "Analytical Relations Connecting Linear Interfaces and Volume Fractions in Rectangular Grids", J. Copm. Phys., 164 (2000) p. 228.
85. D. B. Kothe, M. W. Williams, K. L. Lam, D. R. Korzekwa, E. G. Puckett and P. K. Tubesing, "A Second-Order Accurate, Linearity Preserving Volume Tracking Algorithm for Free Surface Flows on 3D Unstructured Meshes", Proceedings of the 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference, San Francisco, California, USA, (1999).
86. S. T. Zalesak, "Fully Multidimensional Flux-Corrected Transport Algorithm for Fluids", J. Copm. Phys., 31 (1979) p. 335.
87. P. K. Smolarkiewicz, "A Fully Multidimensional Positive Definite Advection Transport Algorithm with Small Implicit Diffusion", J. Copm. Phys., 54 (1984) p. 325.
88. J. B. Bell, C. N. Dawson and G. R. Shubin, "An Unsplit, Higher Order Godunov Method for Scaler Conservation Laws in Multiple Dimension", J. Copm. Phys., 74 (1988) p. 1.
89. D. J. E. Harvie and D. F. Fletcher, "A New Volume of Fluid Advection Algorithm : The Stream Scheme", 162 (2000) p. 1.

90. J. A. Luoma and V. R. Voller, “*An Explicit Scheme for Tracking the Filling Front During Polymer Mold Filling*”, *Applied Mathematical Modelling*, 24 (2000) p. 575.
91. S. Osher and J. Sethian, “*Front Propagating with Curvature-Dependent Speed : Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations*”, *J. Copm. Phys.*, 79 (1988) p. 12.
92. J. Zhu and J. Sethain, “*Projection Methods Coupled to Level Set Interface Techniques*”, *J. Copm. Phys.*, 102 (1992) p. 128.
93. M. Sussman, P. Smerka and S. Osher, “*A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow*”, *J. Copm. Phys.*, 114 (1994) p. 146.
94. M. Sussman and E. G. Puckett, “*A Coupled Level Set and Volume of Fluid Method for Computing 3D and Axisymmetric Incompressible two-Phase Flows*”, *J. Copm. Phys.*, 162 (2000) p. 301.
95. M. Sussman, A. S. Almgren, J. B. Bell, P. Collela, L. H. Howell and M. L. Welcome, “*An Adaptive Level Set Approach for Incompressible Two-Phase Flows*”, *J. Copm. Phys.*, 148 (1999) p. 81.
96. D. Enright, D. Nguyen, F. Gibou and R. Fedkiw, “*Using the Particle Level Set Method and a Second Order Accurate Pressure Boundary Condition for Free Surface Flows*”, *Proceedings, 4th ASME JSME Joint Fluids Engineering Conference, Honolulu, Hawaii, USA, 2003.*
97. M. Sussman, “*A Second Order Coupled Level Set and Volume-of-Fluid Method for Computing Groth and Collapse of Vapor Bubbles*”, *University of California, Submitted to J. Copm. Phys.*, (2002).
98. F. P. Incorpora, A. H. H. Engel and W. D. Bennon, “*Numerical Analysis of Binary Solid-Liquid with Bouyancy and Surface Tension Driven Convection*”, *Numerical Heat Transfer A*, 16 (1989) p. 407.
99. M. Giangi, F. Stella and T. A. Kowalewski, “*Phase Change Problems with Free Convection : Fixed Grid Numerical Simulation*”, *Computing and Visualization in Science*, 2 (1999) p. 123.
100. C. Chao-Hsin, “*Numerical Simulation of Fluid Flow with Phase Change*”, *PhD Thesis, University of Alabama, 1991.*
101. D. Kim and H. Choi, “*A Second-Order Time-Accurate Finite Volume Method for Unsteady Incompressible Flow on Hybrid Unstructured Grids*”, *J. Copm. Phys.*, 162 (2000) p. 411.
102. S. L. Lee and R. Y. Tzong, “*Artificial Pressure-Linked Equation*”, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 35 (1992) p. 2705.
103. R. I. Issa, “*Solution of Implicitly Discretised Fluid Flow Equations by Operator-Splitting*”, *J. Copm. Phys.*, 62 (1985) p. 40.

104. P. J. Oliveira and R. I. Issa, “ *An Improved PISO Algorithm for the Computation of Buoyancy-Driven Flows*”, Numerical Heat Transfer, 40B (2001) p. 473.
105. A. A. Amsden and F. H. Harlow, “ *The SMAC Method : A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flow*”, Tech. Rep. LA-4337, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, (1970).
106. V. Armenio, “ *An Improved MAC Method (SIMAC) for Unsteady High-Reynolds Free Surface Flows*”, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, 24 (1997) p. 185.
107. C. W. Hirt, B. D. Nichols and N. C. Romero, “ *SOLA a Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flow*”, Tech. Rep. LA-5842, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, (1975).
108. C. W. Hirt and B. D. Nichols, “ *Adding Limited Compressibility to Incompressible Hydrocodes*”, J. Copm. Phys., 34 (1980) p. 390.
109. J. B. Bell and P. Colella, “ *A Second-Order Projection Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations*”, J. Copm. Phys., 85 (1989) p. 257.
110. P. Collela and K. Pao, “ *A Projection Method for Low Speed Flows*”, J. Copm. Phys., 49 (1999) p. 245.
111. D. L. Brown, R. Cortez and M. L. Minion, “ *Accurate Projection Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations* “, 168 (2001) p. 464.
112. J. U. Brackbill, D. B. Kothe and C. Zemach, “ *A Continuum Method for Modeling Surface Tension*”, J. Copm. Phys., 100 (1992) p. 335.
113. J. B. Bell and D. Marcus, “ *A Second-Order Projection Method for Variable-Density Flows*”, J. Copm. Phys., 101 (1992) p. 334.
114. M. Sussman, E. Fatemi, P. Smerka and S. J. Osher, “ *An Improved Level Set Method for Incompressible Two-Phase Flows*”, 27 (1998) p. 663.
115. V. Maronnier, M. Picasso and J. Rappaz, “ *Numerical Simulation of Free Surface Flows*”, J. Copm. Phys., 155 (1999) p. 439.
116. S. L. Lee and S. R. Sheu, “ *A New Numerical Formulation for Incompressible Viscous Free Surface Flow without Smearing the Free Surface*”, Int. J. of Heat and Mass Transfer, 44 (2001) p. 1837.
117. J. U. Brackbill and D. B. Kothe, “ *Dynamical Modeling of Surface Tension*”, Tech. Rep LA-UR-96-1706, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, (1996).
118. D. A. Knoll, D. B. Kothe and B. Lally, “ *A New Nonlinear Solution Method for Phase Change Problems*”, Tech. Rep LA-UR-98-2350, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, *to be published in Numerical Heat Transfer 35B*, (1999).
119. S. E. Hibbert, N. C. Markatos and V. R. Voller, “ *Computer Simulation of Moving-Interface, Convective, Phase-Change Processes*”, Int. J. of Heat and Mass Transfer, 31 (1988) p. 1785.

120. C. R. Swaminathan and V. R. Voller, “ *A General Enthalpy Method for Modeling Solidification Processes*”, Metallurgical Transactions, 23B (1992) p. 651.
121. V. R. Voller, “ *An Overview of Numerical Methods for Solving Phase Change Problems*”, Advances in Numerical Heat Transfer, 1 (1996) p. 341.
122. C. R. Swaminathan and V. R. Voller, “ *Towards a General Numerical Scheme for Solidification Systems*”, Int. J. of Heat and Mass Transfer, 40 (1997) p. 2859.
123. V. R. Voller, “ *A Similarity Solution for the Solidification of a Multicomponent Alloy*”, Int. J. of Heat and Mass Transfer, 40 (1997) 2869-2877.
124. V. R. Voller, “ *Numerical Treatment of Rapidly Changing and Discontinuous Conductivities*”, Int. J. of Heat and Mass Transfer, 44 (2001) p. 4553.
125. B. Lally, L. Biegler and H. Henein, “ *Finite Difference Heat Transfer Modeling for Continuous Casting*”, Metallurgical Transactions, 21B (1990) p. 761.
126. J. Kim and P. Moin, “ *Application of Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations*”, J. Copm. Phys., 59 (1985) p. 308.
127. H. Le and P. Moin, “ *An improvement of fractional step methods for the incompressible Navier-Stokes Equations*”, J. Copm. Phys., 92 (1991) p. 369.
128. C.W. Shu and S. Osher, “ *Efficient Implementation of Essentially Non- Oscillatory Shock-Capturing Schemes*”, J. Copm. Phys., 77 (1988) p. 439.
129. C.W. Shu and S. Osher, “ *Efficient Implementation of Essentially Non- Oscillatory Shock-Capturing Schemes II*”, J. Copm. Phys., 83 (1989) p. 32.
130. G. S. Jiang and C. W. Shu, “ *Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes*”, J. Copm. Phys., 126 (1996) p. 202.
131. Y. Saad, “ *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*”, PWS Publishing Company, Boston, 1996.
132. O. Tatebe, “ *MGCG Method : A Robust and HighlyParallel Iterative Method*”, PhD Thesis, University of Tokyo, 1996.
133. D. S. Kershaw, “ *The Incomplete Cholesky-Conjugate Gradient Method for the Iterative Solution of Systems of Linear Equations*”, J. Copm. Phys., 26 (1978) p. 43.
134. J. A. Meijerink and H. A. Van Der Vorst, “ *Guidelines for the Usage of Incomplete Decompositions in Solving Sets of Linear Equations They Occur in Practical Problems*”, J. Copm. Phys., 44 (1981) p. 134.
135. C. Vuik, A. Segal and J.A. Meijerink, “ *An Efficient Preconditioned CG Method for the Solution of a Class of Layered Problems with Extreme Contrasts in the Coefficients*”, J. Copm. Phys., 152 (1999) p. 385.

136. C. Vuik, A. Segal, L. el Yaakoubi and E. Dufour, “ *A Comparison of Various Deflation Vectors Applied to Elliptic Problems with Discontinuous Coefficients*”, Applied Numerical Mathematics, 41 (2002) p. 219.
137. O. Tatebe, “ *The Multigrid Preconditioned Conjugate Gradient Method*”, Proceedings of Sixth Copper Mountain Conference on Multigrid Methods, NASA Conference Publication 3224, (1993) p. 621.
138. O. Tatebe and Y. Oyanagi, “ *Efficient Implementation of the Multigrid Preconditioned Conjugate Gradient Method on Distributed Memory Machines*”, Proceedings of Supercomputing '94, IEEE Computer Society, (1994) p. 194.
139. H. L. Stone, “ *Iterative Solution of Implicit Approximations of Multidimensional Partial Differential Equations*”, SIAM J. Numer. Anal., 5 (1968) p. 530.
140. A. Settari and K. Aziz, “ *A Generalization of the Additive Correction Methods for the Iterative Solution of Matrix Equations*”, SIAM J. Numer. Anal., 10 (1973) p. 506.
141. U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin, “ *High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier–Stokes Equations and a Multigrid Method*”, J. Comp. Phys., 48 (1982) p. 387.
142. K. N. Ghia and U. Ghia, “ *Elliptic Systems : Finite-Difference Method III*”, in : W. J. Minkowycz, E. M. Sparrow, G. E. Schneider and R. H. Pletcher (eds), Handbook of Numerical Heat Transfer, (1988) p. 293.
143. G. de Vahl Davis, “ *Laminar Natural Convection in an Enclosed Rectangular Cavity*”, Int. J. of Heat and Mass Transfer, 11 (1968) p. 1674.
144. G. de Vahl Davis, “ *Natural Convection in a Square Cavity: The Full Benchmark Solutions*”, Technical Report 1982/FMT/2, School of Mechanical and Industrial Engineering, University of New South Wales, (1982).
145. G. de Vahl Davis, “ *Natural Convection of air in a Square Cavity: A Benchmark Numerical Solution*”, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, 3 (1983) p. 249.
146. G. de Vahl Davis and I. P. Jones, “ *Natural Convection in a Square Cavity: A Comparison Exercise*”, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, 3 (1983) p. 227.
147. R. Scardovelli and S. Zaleski, “ *Interface Reconstruction with Least-Square Fit and Split Eulerian-Lagrangian Advection*”, (2002) , Available from www.lmm.jussieu.fr/~zaleski/interface_pubs.html.
148. M. R. Barkurdarov and C. W. Hirt, “ *Casting Simulation: Mold Filling and Solidification- Benchmark Calculation Using FLOW-3D*”, in: M. Cross and J. Campbell (eds), Modeling of Casting , Welding and Advanced Solidification Processes – VII, Proceedings VII th. Int. Conf., England, TMS-AIME, (1995) p. 935.
149. B. Sirrell, M. Holliday and J. Campbell, “ *The Benchmark Test 1995*”, in: M. Cross and J. Campbell (eds), Modeling of Casting , Welding and Advanced Solidification Processes – VII, Proceedings VII th. Int. Conf., England, TMS-AIME, (1995) p. 915.

150. H. M. Domanus and R. C. Schmitt, “ *Computer Simulation Using CaPS of an Aluminum Casting*”, in: M. Cross and J. Campbell (eds), Modeling of Casting , Welding and Advanced Solidification Processes – VII, Proceedings VII th. Int. Conf., England, TMS-AIME, (1995) p. 947.
151. R. W. Lewis, K. Ravindran and V. Tran, “ *Finite Element Simulation of the Bench Mark Mould Filling Problem*” , in: M. Cross and J. Campbell (eds), Modeling of Casting , Welding and Advanced Solidification Processes – VII, Proceedings VII th. Int. Conf., England, TMS-AIME, (1995) p. 955.
152. Z. A. Xu and F. Mampaey, “ *Mould Filling and Solidification Simulation of the Bench Mark Casting*”, in: M. Cross and J. Campbell (eds), Modeling of Casting , Welding and Advanced Solidification Processes – VII, Proceedings VII th. Int. Conf., England, TMS-AIME, (1995) p. 963.
153. I. Ohnaka and J. D. Zhu, “ *Computer Simulation of Fluid Flow and Heat Transfer of the Bench Mark Test by DFDM /3DFLOW*”, in: M. Cross and J. Campbell (eds), Modeling of Casting , Welding and Advanced Solidification Processes – VII, Proceedings VII th. Int. Conf., England, TMS-AIME, (1995) p. 971.
154. M. A. Layton, C. M. Wang, C. Cheng, K. O. Yu and J. Paul, “*Bench Mark Test Casting : Modeling of Mold Filling and Solidification*”, in: M. Cross and J. Campbell (eds), Modeling of Casting , Welding and Advanced Solidification Processes – VII, Proceedings VII th. Int. Conf., England, TMS-AIME, (1995) p. 975.
155. F. Sant, G. Backer, “ *Application of WRAFTS Fluid Flow Modeling Software to the Bench Mark Test Casting*”, in: M. Cross and J. Campbell (eds), Modeling of Casting , Welding and Advanced Solidification Processes – VII, Proceedings VII th. Int. Conf., England, TMS-AIME, (1995) p. 983.
156. D. J. Ruiz and Y. Khandhia, “ *Filling and Solidification with Coupled Heat Transfer and Stress Analysis*”, in: M. Cross and J. Campbell (eds), Modeling of Casting , Welding and Advanced Solidification Processes – VII, Proceedings VII th. Int. Conf., England, TMS-AIME, (1995) p. 991.
157. C. Rigaut, H. Meyer, A. Charbonnier and A. Bourg, “ *Bound Robin Benchmark Exercise for Mould Filling and Solidification*”, in: M. Cross and J. Campbell (eds), Modeling of Casting , Welding and Advanced Solidification Processes – VII, Proceedings VII th. Int. Conf., England, TMS-AIME, (1995) p. 1007.
158. J. Ha, P. Cleary, V. Alguine and T. Nguyen, “ *Simulation of Die Filling in Gravity Die Casting Using SPH and MAGMASoft*”, Second International Conference on CFD in the Minerals and Process Industries CSIRO, Melbourne, Australia, (1999) p.423.
159. J. H. Kuo and W. S. Hwang, “*Development of an Interactive Simulation System for Die Cavity Filling and its Application to the Operation of a Low-Pressure Casting Process*”, Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 8 (2000) 583.