



HAL
open science

ADAPTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS A LA MODELISATION DES SYSTEMES ELECTROMECHANIQUES DE CONVERSION D'ENERGIE

Parviz Rafinéjad

► **To cite this version:**

Parviz Rafinéjad. ADAPTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS A LA MODELISATION DES SYSTEMES ELECTROMECHANIQUES DE CONVERSION D'ENERGIE. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1977. tel-00481925

HAL Id: tel-00481925

<https://theses.hal.science/tel-00481925>

Submitted on 7 May 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

PRESENTEE A

ECOLE CENTRALE DE LYON
ELECTROTECHNIQUE

36, Route de Dardilly
69130 ECULLY (France)
Tél. (78) 33.27.00

L'UNIVERSITE

SCIENTIFIQUE ET MEDICALE

L'INSTITUT

NATIONAL POLYTECHNIQUE

DE GRENOBLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR D'ETAT ES-SCIENCES

PAR

Parviz RAFINEJAD

Ingénieur I.N.P.G.

**ADAPTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS
A LA MODELISATION DES SYSTEMES
ELECTROMECHANIQUES DE CONVERSION D'ENERGIE**

Soutenu le 17 janvier 1977, devant la Commission d'Examen

JURY

Monsieur D. BLOCH

Président

Messieurs M. IVANES

S.J. POLAK

C. RIOUX

J.C. SABONNADIÈRE

P. SILVESTER

C.W. TROWBRIDGE

} Examineurs

Je tiens à exprimer mes remerciements très sincères à

Monsieur BLOCH, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure
d'Electrotechnique et de Génie Physique

qui m'a fait l'honneur de présider le Jury de cette thèse,

Monsieur TROWBRIDGE, Rutherford Laboratory,

Monsieur POLAK, NV Philips Gloeilampenfabr,

Monsieur RIOUX, Responsable du Groupe Electrotechnique du
Laboratoire de Physique des Plasmas,

Monsieur IVANES, Maître de Conférences à l'Institut National
Polytechnique de Grenoble,

qui ont bien voulu participer au Jury.

Que Monsieur SILVESTER, Chairman of Electrical Engineering
Department de l'Université de Mc Gill, à qui je dois ma carrière de
chercheur, soit assuré de ma profonde gratitude.

Je présente mes plus vifs remerciements à Monsieur
SABONNADIÈRE, Maître de Conférences à l'I.N.P.G., Directeur de mes
recherches, envers qui je suis redevable de toute la confiance, la
compréhension et l'attitude fraternelle qui m'ont été autant d'aides
inestimables.

J'exprime mes sincères remerciements à Messieurs KONRAD et
CZENDES, ex-chercheurs de l'Université de Mc Gill, pour leur amitié
et pour l'aide qu'ils m'ont apportées.

Je remercie chaleureusement tous mes camarades et amis du
Laboratoire d'Electrotechnique qui ont su créer une ambiance favorable
dans ma vie scientifique et sociale,

et plus particulièrement :

Monsieur COULOMB pour sa rigueur scientifique durant notre
collaboration et pour ses encouragements amicaux,

Mademoiselle SAUVE pour sa gentillesse, sa bonne humeur et
pour le soin qu'elle a apporté dans l'impression de ce travail,

Messieurs LATOMBE, PACAUT et MASSE pour leur amitié précieuse.

Je remercie également Messieurs MOREL et ANCELLE pour leur
riche contribution dans les réalisations de ma recherche.

*Le support financier de cette recherche a été assuré par la
Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique.*

	Pages
CHAPITRE I : UN POINT DE VUE SUR LES METHODES NUMERIQUES.....	1
CHAPITRE II : ETAT ENERGETIQUE D'UN SYSTEME ELECTRO- MAGNETIQUE DE CONVERSION D'ENERGIE.....	18
CHAPITRE III : FORMULATIONS EN ELEMENTS FINIS GEOMETRIQUES.....	49
CHAPITRE IV : FORCE.....	73

P R E F A C E

Lorsque ce travail a démarré en 1972, la méthode des éléments finis sous l'impulsion de P. Silvester et de l'équipe de Mc Gill commençait à pénétrer dans le domaine de l'électrotechnique. Elle était alors en concurrence avec la méthode des différences finies longuement étudiée par E.A. Erdelyi et ses chercheurs de l'Université du Colorado. Ces deux méthodes étaient cependant considérées comme des outils mathématiques destinés au calcul des champs magnétiques (ou électriques) dont la connaissance permettait alors d'accéder à d'autres grandeurs dont la connaissance est nécessaire à l'ingénieur.

Nous avons d'abord orienté notre recherche dans ce sens en essayant toutefois de rechercher plus une méthode de modélisation de la machine qu'un outil de calcul des champs. C'est la raison pour laquelle nos travaux ont été orientés vers la définition d'éléments permettant une bonne représentation de la géométrie de la machine. Ce souci de réaliser des modèles facilement utilisables nous a toujours guidés dans la construction d'un programme de calcul interactif dont le maniement par l'ingénieur puisse être rendu aisé grâce à l'existence de certains modules de contrôle des données et d'observation des résultats. Le souci de conserver à ce programme un temps de réponse suffisamment performant pour justifier l'utilisation conversationnelle nous a fait optimiser les algorithmes de résolution. L'ensemble ainsi construit constitue le système FLUX maintenant opérationnel et dont l'existence d'un manuel d'utilisation ne justifiait pas l'insertion au sein de cette thèse.

L'expérience que nous avons acquise au cours de nos travaux et l'évolution des recherches maintenant très nombreuses effectuées sur la méthode des éléments finis nous a conduits à considérer la méthode des éléments finis comme un véritable instrument de conception assistée

par ordinateur des dispositifs électromagnétiques. Lorsque l'on réfléchit à l'utilisation de l'ordinateur dans l'analyse des systèmes physiques on est très vite frappé par le rôle fondamental joué dans tous les exemples étudiés par le principe de décomposition et méthodologie de l'approximation. C'est la raison pour laquelle nous avons au cours de notre premier chapitre replacé les méthodes numériques dans le cadre général de l'étude des systèmes où elles constituent une étape particulière de la décomposition et s'appuient toujours sur une méthode d'approximation.

Le souci d'adapter la méthode des éléments finis à la conception assistée des dispositifs électromagnétiques les plus généraux nous obligeait à la recherche d'une formulation aussi générale que possible de la fonctionnelle énergétique dont l'optimisation sera la base de l'application de la méthode des éléments finis. Nous avons développé cette fonctionnelle (dans le chapitre II) pour l'analyse des champs tridimensionnels dans des milieux non linéaires pouvant être le siège de courants de Foucault.

La fonctionnelle construite il restait à définir la décomposition du domaine et l'approximation des grandeurs physiques elles-mêmes sur ce domaine, c'est l'objet du chapitre III où nous développons la construction des éléments finis de références que nous appelons simplexes et dont la connaissance (forme et fonctions de base) permet la construction de familles d'éléments dont l'assemblage permet la modélisation de tous les domaines rencontrés dans les applications pratiques.

Enfin, la modélisation et la simulation de tout convertisseur électromécanique ne pouvait se concevoir sans un travail de réflexion approfondi sur les forces de toute nature dont ce convertisseur est le siège et sur les moyens d'évaluer ces forces. La dualité qui existe au sein de la fonctionnelle entre la notion de potentiel vecteur et celle de déplacement permet d'appliquer directement le principe des travaux virtuels pour obtenir à partir de la fonctionnelle d'énergie une formulation originale des forces exercées sur tout élément de surface soumis à un déplacement.

La conclusion de notre travail développera quelques unes des directions de recherches dans lesquelles nous souhaiterions voir s'engager les travaux à venir...

CHAPITRE I

UN POINT DE VUE SUR LES METHODES NUMERIQUES

	Pages
1 - Introduction.....	1
2 - Décomposition et approximation.....	3
3 - Méthodes systématiques de résolution des équations aux dérivées partielles.....	8
4 - Mise en oeuvre des méthodes numériques.....	11
5 - Conclusion.....	15

I - INTRODUCTION

Physicien... Mathématicien... Ordinateur

L'histoire des mathématiques appliquées et de la physique abonde en exemples qui illustrent la fécondité des interactions entre la démarche inductive du physicien et celle déductive du mathématicien. Ces interactions ont permis l'élaboration de tout un ensemble de méthodes et de techniques (transformations intégrales, fonctions orthogonales, méthodes variationnelles) dont l'emploi, malgré l'absence de moyens de calcul efficace, a permis dans le passé d'apporter des solutions satisfaisantes aux problèmes pratiques nés de l'avancement des sciences et de la technologie. Le processus de cette évolution part généralement de l'ingénieur qui, confronté aux exigences économiques de l'activité industrielle, s'appuie sur son expérience pour rechercher par des méthodes heuristiques la solution de ses problèmes dans le cadre des outils mathématiques et des moyens de calcul qui sont à sa disposition .

Certaines de ces méthodes élaborées le plus souvent de manière intuitive, trouvent une généralisation ultérieure dans les développements rigoureux de l'analyse mathématique. Adaptées à leur origine à quelque domaine particulier de l'ingénierie, ces techniques, perfectionnées et généralisées deviennent alors des méthodes rigoureuses et fiables qui se transforment en moyen de travail puissant au service de l'ingénieur (ainsi le calcul opérationnel de Heaviside et la transformation de Laplace dont l'utilité dans les domaines de l'électricité et de l'automatique est devenue indiscutable, on pourrait également mentionner ici la "fonction" S de Dirac qui semble être la source de la théorie actuelle des distributions).

Le développement récent des moyens de calcul et en particulier l'augmentation continue de la puissance des ordinateurs modernes est un élément déterminant de l'évolution actuelle des méthodes et des moyens de l'analyse mathématique. En effet, un grand nombre de problèmes physico-mathématiques dont la résolution semblait impossible ont pu être abordés et résolus par l'emploi de méthodes nouvelles associées à l'utilisation de l'ordinateur. L'homme lui-même à travers l'emploi de l'ordinateur, modifie ses méthodes d'analyse, son attitude vis-à-vis des problèmes qu'il rencontre et prépare ainsi une évolution plus profonde de son mode de pensée.

Cette nouvelle interaction se superpose en la modifiant à celles qui existaient entre les physiciens et les mathématiciens et favorise l'éclosion de nouvelles méthodes de calcul ou la modélisation de méthodes connues qui trouvent à travers l'emploi de l'ordinateur une efficacité insoupçonnée | 1 |, | 2 |.

Dans les pages qui suivent, nous allons essayer de dégager quelques unes des idées fondamentales qui permettent l'application des méthodes algorithmiques aux sciences de l'ingénieur et plus particulièrement à l'étude des systèmes électromécaniques. Nous montrerons alors comment ces principes sont regroupés dans les méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles de la physique qui régissent le fonctionnement de la grande majorité des systèmes électriques et mécaniques. Notre prochain paragraphe sera consacré plus spécialement aux principes de "décomposition" et d'"approximation" qui sont à la base de nombreuses méthodes de résolution des problèmes aux dérivées partielles.

L'étude de la décomposition montrera les différentes approches de l'analyse d'un système complexe tandis que l'approximation permettra une taxonomie des diverses méthodes de résolution. Nous aborderons alors l'étude des méthodes systématiques de résolution des problèmes aux dérivées partielles avant de consacrer le dernier paragraphe à la mise en oeuvre de ces méthodes.

II - DECOMPOSITION ET APPROXIMATION : bases fondamentales des analyses des systèmes physiques | 3 |

Lorsque l'on entreprend la modélisation d'un système physique de structure complexe dont l'analyse mathématique requiert la résolution d'un système d'équations (algébriques, différentielles ou aux dérivées partielles) de taille ou de difficulté trop importante, le résultat peut néanmoins être obtenu en appliquant deux principes fondamentaux d'analyse : la décomposition et l'approximation dont nous allons préciser les modalités d'application.

Le principe :

a) Décomposition d'un système en éléments simples

Lorsque la structure du système à étudier est trop complexe pour être analysée en un seul bloc, il est toujours nécessaire de décomposer ce système en éléments plus simples et qui se prêtent mieux à la modélisation.

Cette décomposition ne peut être effectuée de manière quelconque car elle doit permettre de réaliser à partir de l'analyse une étude globale ultérieure. De ce fait, chacun des éléments issus de la décomposition doit comporter des conditions de liaisons qui permettront de reconstituer l'ensemble initial de manière unique. Cette contrainte impose de réserver à chaque élément un nombre fixe de degrés de liberté qui permettront ensuite son intégration à un assemblage déterminé. Les caractéristiques du système initial et le mode de décomposition imposent à chacun un nombre de contraintes égal au nombre de ses degrés de liberté.

Il devient possible par ce processus de ramener un problème général à l'étude de plusieurs problèmes particuliers dont la formulation

peut être choisie de manière à permettre ou faciliter l'application d'une méthode systématique. En outre une telle démarche permet de résoudre à moindre effort tout une classe de problèmes d'un même type. En effet, lorsque l'on a à étudier plusieurs systèmes possédant des composantes élémentaires communes, il devient particulièrement intéressant de déterminer l'ensemble des composantes communes à tous ces systèmes, de résoudre les problèmes liés à ces éléments et d'obtenir le modèle complet, en vérifiant les conditions d'assemblage qui lui sont propres.

Les considérations que nous venons de définir sont applicables à la quasi totalité des systèmes physiques et s'adaptent particulièrement bien à l'analyse et à la modélisation des systèmes électromécaniques. Nous allons à titre d'exemple détailler les aspects méthodologiques de la conception des machines électriques dont les principales étapes apparaîtront au cours de l'analyse.

Un exemple : les machines électriques

Etapas principales

- 1 - Décomposition d'un système de conversion d'énergie en ses éléments électriques et mécaniques.
- 2 - Définition des paramètres nécessaires à la reconstitution du système initial : il s'agit ici du couplage entre l'élément mécanique (couple, vitesse) et l'élément électrique (tension, courant).
- 3 - Analyse approfondie de chacun des éléments permettant d'aboutir de manière systématique à l'établissement des relations entre les paramètres définis ci-dessus (caractéristiques des performances).

Cette dernière étape consiste à résoudre simultanément les équations aux dérivées partielles (dans le domaine espace-temps) et les équations intégrales qui décrivent les relations entre les grandeurs globales électriques et mécaniques. Si l'on réitère l'application de ce procédé on s'aperçoit que l'on peut, grâce à une analyse harmonique, séparer les variables d'espace et de temps et à partir de cette analyse définir la notion d'inductance qui permet de séparer les problèmes de couplage entre le circuit électrique et le circuit magnétique.

En effet, le problème de calcul des performances est ici décomposé en éléments plus simples reliés par une grandeur globale qui est ici la matrice d'inductance. Il est alors possible d'étudier séparément le circuit électrique et le circuit magnétique. La modélisation de ce dernier implique la résolution des équations de Maxwell sur les variables d'espace, travail qui est trop important pour être réalisé en un seul bloc. Il faut alors renouveler l'application du principe de décomposition pour isoler des éléments de base pour lesquels il existe un modèle connu. Ainsi, le domaine de définition des variables d'espace sera découpé en plusieurs sous-domaines : rotor, stator, entrefer, tête de bobines, encoches... dont chacun sera étudié séparément (de manière exacte ou approchée...). L'analyse globale sera alors réalisée à l'aide de l'un des deux procédés. Si le couplage magnétique entre les diverses parties est assez faible pour pouvoir être négligé, la modélisation de chaque partie constitue un problème "bien-posé".

Les divers modèles sont réalisés séparément et leur intégration dans la solution initiale est très facile (c'est le cas par exemple des calculs de champ dans les têtes de bobines et dans les encoches, calculs qui sont nécessaires à l'évaluation de l'inductance de fuite). Lorsque par contre ce couplage n'est plus négligeable, il est possible de remplacer l'une des parties par un domaine équivalent en définissant bien entendu les conditions d'équivalence. On ramène ainsi la résolution d'un problème complexe à celle d'un problème plus simple mais qui tient compte de la complexité initiale (c'est le cas par exemple du remplacement d'un secteur encoche-dent par une surface lisse en définissant un coefficient de Carter).

Nous venons de voir sur cet exemple comment l'application répétée du principe de décomposition permet de ramener de manière systématique et réversible l'étude d'une machine électrique à celle de chacune de ses parties, elle-même souvent décomposée en sous-domaines équivalents mais dont la modélisation est connue. Cet exemple nous permet, en outre, de constater que la démarche employée fait état à chaque étape de plusieurs approximations. Ces approximations au domaine de validité bien défini doivent souvent être corrigées par des coefficients empiriques dont l'emploi enlève beaucoup de généralité au modèle. Le principe d'approximation que nous allons maintenant aborder permet de s'affranchir de ces coefficients empiriques et donc de réaliser des modèles plus généraux.

b) Approximation et méthodes approchées

Une méthode approchée de résolution d'un problème est une méthode qui conduit à une solution qui sans satisfaire entièrement les exigences du problème peut être considérée comme acceptable. Les méthodes approchées sont souvent dénigrées face aux méthodes directes dont le résultat est souvent acquis par l'application d'une formule plus ou moins compliquée. Il est cependant possible de construire des méthodes approchées qui conduisent avec autant de certitude que les méthodes directes à un résultat acceptable. Ces méthodes que nous qualifierons de rigoureuses doivent satisfaire aux trois impératifs suivants :

- 1 - Dans la démarche vers la solution il existe au moins une stratégie pour laquelle il est possible de définir des paramètres qui permettent de déterminer les limites (théoriques ou pratiques) d'application de la méthode (domaine de validité). (Par exemple parmi les méthodes itératives de résolution d'un système linéaire il est possible de définir une stratégie qui conduit à la solution en assurant à chaque pas la convergence de la méthode employée).

- 2 - Il est possible de définir des critères qui permettent pour chaque problème de choisir entre les diverses stratégies possibles. L'existence de tels critères conduit généralement à la définition d'une fonction d'incertitude (définition et choix d'une norme dans l'exemple des méthodes itératives).

- 3 - Quel que soit le point de départ de l'application de la méthode, il existe une direction qui dans l'espace des stratégies assure une décroissance progressive et continue de l'erreur.

Lorsque ces critères sont respectés, la méthode devient rigoureuse et il est alors possible de définir la notion de qualité d'une méthode approchée en considérant les limites à l'intérieur desquelles cette méthode peut évoluer. Ces limites sont des limites théoriques (pas de discrétisation nul, nombre d'itérations infini ...) ou des limites pratiques liées aux moyens de réalisation (nombre maximal d'itérations limite de la discrétisation par la capacité mémoire). On dira ainsi qu'une méthode est "meilleure" qu'une autre lorsque, pour une valeur limite des choix possibles, elle conduit à une erreur plus faible.

Un troisième élément important qui intervient dans l'application des méthodes approchées est la notion de convergence. Une méthode rigoureuse sera convergente quel que soit le choix des paramètres initiaux si l'on emploie une stratégie appropriée.

On peut conclure cette analyse en affirmant que les méthodes approchées qui satisfont aux trois conditions énoncées ci-dessus, ne se différencient pas à l'utilisation des méthodes directes qui deviennent rapidement inapplicables dès que les systèmes à étudier deviennent complexes. Les méthodes approchées rigoureuses peuvent alors leur être substituées en toute confiance car elles conduisent à des résultats dont la validité ne peut être mise en doute.

c) Adaptation réciproque de la décomposition et de l'approximation

La mise en oeuvre des principes de décomposition et d'approximation dans la résolution des problèmes complexes pose à son tour de nouveaux problèmes. Ces difficultés liées à la définition des composants élémentaires ou à la description des stratégies employées (et à leur influence sur la convergence) peuvent être aplanies par une adaptation réciproque des modes d'application de ces deux principes. En effet, il ne faut pas employer n'importe quelle méthode approchée avec une décomposition donnée mais adapter la méthode à chaque décomposition (ainsi les méthodes itératives de résolution d'un système linéaire issues d'une discrétisation par différence finie, ne s'appliquent pas forcément à la décomposition en éléments finis). Cette adaptation est quelquefois si profonde que dans certains processus de résolution il est presque impossible de discerner les deux principes précédents. C'est le cas notamment de la résolution numérique des équations aux dérivées partielles où la mise en oeuvre et l'adaptation des deux principes précédents ont permis de construire un ensemble de méthodes numériques très efficaces (éléments finis, différences finies).

La résolution des équations aux dérivées partielles de la physique étant presque toujours la clef de voûte de la construction d'un modèle numérique, nous consacrons nos prochains paragraphes à l'étude des méthodes systématiques qui permettent cette résolution.

III - METHODES SYSTEMATIQUES DE RESOLUTION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Les méthodes analytiques courantes | 4 |, | 5 | (séparation des variables, transformations conformes, perturbation) sont certainement systématiques dans leurs domaines de définition ; lesquels sont en général limités par des difficultés provenant de la complexité de l'espace

des variables (espace géométrique) et la non-linéarité de l'opérateur. Dans le début de ce paragraphe, nous discuterons des méthodes qui permettraient, en se servant des méthodes analytiques, l'affranchissement de ces difficultés d'une manière systématique. La possibilité de leur implantation nécessitant certaines approximations ne sera abordée qu'à la fin du paragraphe en évoquant les méthodes numériques actuelles (les différences finies et les éléments finis).

Si la résolution analytique d'une équation aux dérivées partielles (et des conditions aux limites associées) est impossible dès que le domaine Ω devient trop complexe ou l'opérateur L de l'équation non linéaire, il est par contre possible d'obtenir des solutions sur des domaines Ω_e élémentaires dont les caractéristiques sont bien définies et les formes convenablement choisies. Il existe en effet un certain type de domaines pour lesquels l'ensemble des fonctions u appartenant à l'espace des solutions du problème global peut être explicité par une expression analytique qui dépend de plusieurs paramètres. Il devient alors possible de déterminer la solution unique à l'aide des conditions aux limites par décomposition du domaine Ω en sous-domaines Ω_e appelés éléments. On obtient par ce moyen une méthode systématique de résolution d'un problème aux dérivées partielles défini sur un domaine quelconque.

Cette décomposition, lorsqu'elle est possible, entraîne le remplacement de la fonction u par une fonction u_e définie de manière unique sur chaque élément Ω_e . Afin que la décomposition soit réversible, il est nécessaire que la fonction u_e et la décomposition qui lui est associée satisfassent à certaines conditions de compatibilité.

En effet, les restrictions u_e de la fonction u à chaque élément Ω_e doivent, à l'intérieur de l'élément appartenir à la même classe de fonction que la solution recherchée u (c'est-à-dire avoir à l'intérieur de l'élément les mêmes propriétés de continuité et de dérivabilité). En outre, les fonctions u_e correspondant à deux éléments

adjacents, doivent sur la frontière commune à ces deux éléments vérifier des conditions compatibles avec la nature de l'opérateur. Ces conditions (continuité de la fonction et éventuellement de ses dérivées partielles) permettront de reconstituer la fonction u inconnue. Pour que la méthode garde suffisamment de généralité, ces conditions exigent que la fonction u_e sur la partie de la frontière de Ω_e qui sera partagée par un autre élément soit entièrement définie par les paramètres associés à cette partie. Ce morceau de la frontière s'appellera le côté d'élément. Deux éléments adjacents seront compatibles si ils partagent totalement les paramètres associés au côté commun. Cette même propriété permettra à l'élément de satisfaire à toutes les conditions aux limites lorsqu'il se trouve au bord du domaine Ω (Fig. 1).

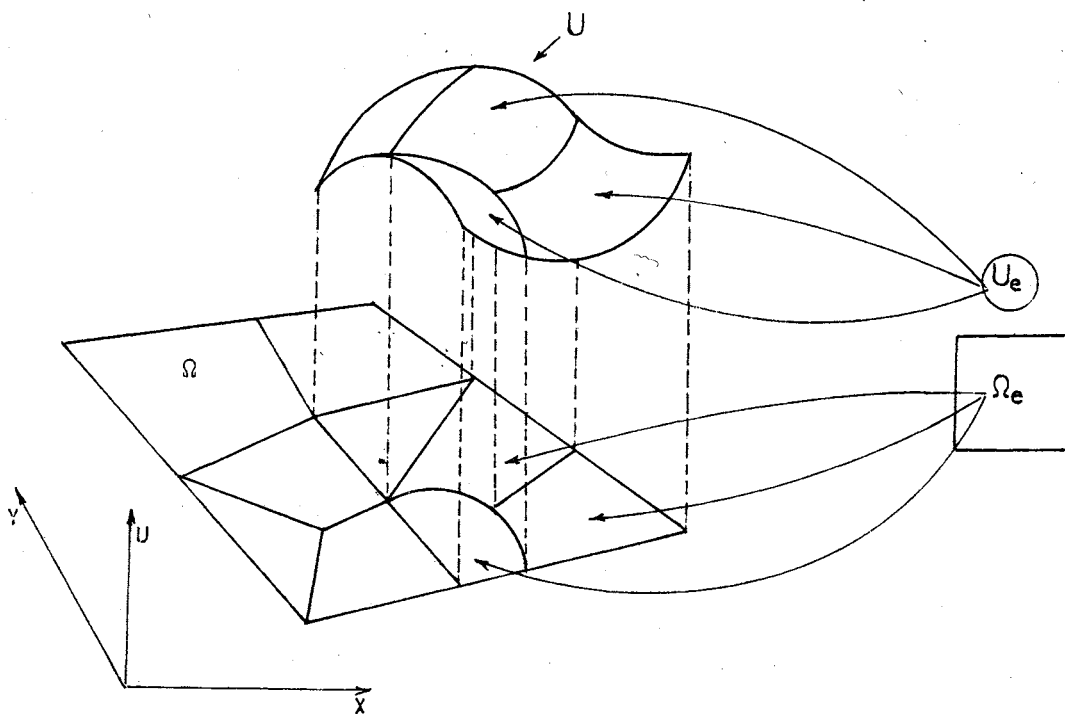


Figure 1 : Décomposition du domaine Ω et la fonction U .

Lorsque ces conditions de compatibilité sont remplies, l'opérateur se trouve vérifié à l'intérieur de chaque élément et la détermination de la fonction inconnue sera obtenue en écrivant que l'opérateur est

également vérifié sur la frontière entre chaque couple d'éléments adjacents. Ainsi dans la méthode aux différences finies on écrit directement les équations qui permettent de vérifier l'opérateur sur ces frontières tandis que dans la méthode aux éléments finis on s'attachera à minimiser une certaine fonctionnelle qui lui est rattachée. Après avoir décrit le principe des méthodes approchées, nous allons analyser le comportement de ces différentes méthodes lorsque l'on aborde les problèmes de mise en oeuvre.

IV - MISE EN OEUVRE DES METHODES NUMERIQUES

La mise en oeuvre des méthodes numériques de résolution des problèmes aux dérivées partielles comprend trois étapes principales : la définition des éléments types, la vérification approchée de l'opérateur et enfin l'implantation. Ces étapes, bien que distinctes, peuvent être communes à plusieurs problèmes différents et donc être étudiées de manière modulaire. En effet, les éléments types sont communs à tous les problèmes traités par la même méthode, la vérification de l'opérateur est propre à ce dernier et à tous problèmes qui lui sont associés, enfin l'implantation bien que spécifique de chaque problème comporte des tâches générales qui doivent faire l'objet d'un soin particulier.

a) Définition des éléments-types

Il s'agit de définir un petit nombre d'éléments de référence dont la géométrie Ω_e et la fonction locale u_e sont communes à tous les domaines. Ces éléments définis par les couples (u_e, Ω_e) doivent pour être généraux vérifier les conditions suivantes :

1 - Tout domaine Ω doit pouvoir être décomposé de manière réversible en éléments Ω_e' construits à partir des éléments de référence Ω_e par transformation conforme (application bijective).

2 - Les fonctions u_e doivent pouvoir satisfaire l'opérateur à l'intérieur de l'élément, et de plus, pouvoir satisfaire sur le contour de l'élément toute condition aux limites compatible avec la nature de

l'opérateur (en effet, la frontière de certains éléments Ω_e coïncidera avec la frontière du domaine et de ce fait les conditions aux limites susceptibles d'être imposées sur la frontière doivent pouvoir être vérifiées par u_e sur la frontière de chaque élément type).

3 - Compatibilité : pour que lors de la recomposition de Ω à partir des domaines Ω_e la fonction u_e soit effectivement la restriction de u à l'élément Ω_e il est nécessaire que les fonctions définies de part et d'autre de la frontière commune à deux éléments coïncident sur cette frontière. Cette condition exige la continuité de la fonction pour les équations du second ordre mais requiert en outre celle des dérivées normale dans le cas d'un opérateur du quatrième ordre comme l'opérateur biharmonique.

b) Vérification de l'opérateur et des conditions aux limites

La décomposition en éléments une fois réalisée, il faut imposer aux fonctions u_e définies dans l'élément Ω_e des relations fonctionnelles qui permettront à la fonction u de vérifier l'opérateur dans Ω et les conditions aux limites sur la frontière Γ de Ω . Cette opération sera caractéristique de la méthode employée car elle est réalisée de manière différente suivant que l'on utilise une méthode aux différences finies ou une méthode aux éléments finis.

Dans les méthodes aux différences finies [6 à 8] l'opérateur est satisfait à l'intérieur de chaque élément et les relations nécessaires à la vérification totale de l'opérateur sont obtenues en écrivant sur la frontière entre les éléments adjacents l'équation aux dérivées partielles. Par contre, la fonction u_e doit satisfaire directement les conditions aux limites imposées sur le contour Γ de Ω .

Dans la méthode aux éléments finis [16 à 21], la reconstitution de la fonction u est prévue indépendamment des fonctions locales u_e qui possèdent un nombre fixé de degrés de liberté (paramètres libres).

qui permet d'assurer la compatibilité entre les éléments. Les relations de vérification de l'opérateur et des conditions aux limites sont obtenues par la minimisation d'une fonctionnelle, opération dont le résultat est la solution du problème défini par l'opérateur et les conditions aux limites.

La recherche de cette fonctionnelle est un des problèmes importants de la méthode des éléments finis car il est entièrement lié à la représentation des phénomènes physiques étudiés.

On peut être tenté de discuter ici les avantages et inconvénients propres à chacune des méthodes ci-dessus, cependant cette discussion ne présente que peu d'intérêt lorsque l'on ne s'intéresse qu'à l'aspect théorique des méthodes. Par contre, elle sera mise en relief dans l'analyse de l'étape suivante qui concerne l'implantation où interviennent les différences les plus fondamentales de l'application de chacune des méthodes.

c) Implantation

Si les problèmes étudiés précédemment ont une grande importance dans la mise en oeuvre des méthodes, c'est au niveau de l'implantation que les critères qui conditionnent les choix effectués dans les étapes précédentes doivent être déterminés en fonction des performances recherchées lors de l'exécution. En effet, la complexité de la mise en oeuvre de tâches répétitives (mais dont la programmation est faite une seule fois) ne doit pas constituer un argument de choix dans la construction des programmes pour lesquels les seuls critères à retenir doivent être ceux liés aux performances (souplesse, fiabilité, temps de calcul, place mémoire...). Ces qualités propres aux méthodes des différences finies et éléments finis apparaissent dans les deux opérations importantes de l'implantation : la décomposition et la formulation des éléments.

1 - Décomposition

Le découpage géométrique du domaine doit être aussi précis que possible tout en restant simple et facile à réaliser. La construction des éléments de référence doit tenir compte de cette condition impérative.

La méthode des différences finies limite ce découpage à un quadrillage du domaine dont le seul élément de référence est le carré. Cette décomposition trop rigide est évidemment inadaptée aux domaines de formes géométriques compliquées. Par contre, la simplicité de repérage et d'assemblage des éléments facilite considérablement la mise en mémoire du modèle discret et la résolution numérique ultérieure. Cependant, cet avantage s'estompe rapidement lorsque l'on souhaite appliquer la méthode et le programme qui en est issu.

La méthode des éléments finis utilise comme éléments de références des polygones de forme quelconque et par là permet une finesse de modélisation des domaines adaptée aux exigences de l'utilisation. Il en résulte cependant la mise en mémoire d'un nombre important d'information, nécessaires à la définition de la forme et la position de chaque élément en vue de la recomposition du domaine. Ces informations concernent aussi bien les éléments rectilignes définis par leurs sommets que les éléments curvilignes modélisés par approximation polynomiale à l'aide de points discrets situés sur leur contour.

Le souci de réaliser un travail de recherche dont le résultat soit généralisable aux divers problèmes de l'ingénieur électricien nous a conduit à développer les outils nécessaires à la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis. Ce travail nous a conduit à étudier en détail le problème de la formulation des éléments de référence dont l'étude détaillée sera exposée au chapitre III, mais dont nous allons, dès-à-présent évoquer les points les plus saillants.

2 - Construction des éléments de référence

Les polygones convexes apparaissent comme les éléments de référence les plus adaptés à la modélisation de la plupart des domaines que l'on rencontre en Electrotechnique. Parmi ces polygones, nous retiendrons les plus simples qui sont le triangle et le quadrilatère. Ce choix réalisé, il a été nécessaire de construire les fonctions locales u_e associées à chacun de ces éléments. Comme nous l'étudierons en détail au chapitre III, les fonctions u_e doivent satisfaire des conditions de dérivabilité nécessaire à la vérification de l'opérateur ; en outre, ces fonctions u_e doivent disposer sur les bords des éléments d'un nombre de degrés de liberté qui permet d'adapter l'élément aux conditions aux limites compatibles avec la nature de l'opérateur, enfin, sur ces mêmes bords, la valeur de la fonction ne dépendra que des degrés de liberté associés à ce côté. Dans son aspect général, la recherche d'une telle fonction est un problème au moins aussi compliqué que le problème global ; cependant, la taille des éléments qui peut être choisie arbitrairement petite permet de construire des solutions approchées justifiées par la taille de l'élément.

Plusieurs méthodes d'approximations sont applicables pour la construction de telles fonctions, mais l'approximation polynomiale semble être actuellement la forme d'interpolation qui s'adapte le mieux à la construction, la taille et la géométrie des éléments les plus divers. Sa simplicité d'emploi qui a contribué très largement au succès de la méthode des éléments finis en fait la seule méthode pratiquement utilisée actuellement, elle ne doit cependant pas faire oublier l'existence d'autres formes d'approximation qui dans certains problèmes peuvent se révéler plus avantageuses [19].

V - CONCLUSION

La construction dans les sciences de l'ingénieur des modèles nécessaires à l'avancement des connaissances et aux progrès de la techno-

logie, nécessite une étroite collaboration entre le physicien qui analyse le phénomène et le mathématicien qui construit le modèle. Cette collaboration s'est enrichie depuis peu des possibilités de calcul considérables qu'offrent les ordinateurs actuels, ce qui a entraîné une modification sensible du processus de modélisation par l'intégration maintenant systématique des méthodes numériques.

La complexité de plus en plus grande des systèmes à étudier oblige de plus en plus à décomposer chaque entité en sous-ensembles plus simples à analyser. On utilise alors des méthodes systématiques d'approximation pour rendre compte du fonctionnement du système initial à partir des résultats de l'analyse de ses constituants élémentaires.

Nous avons appliqué cette méthodologie générale à la résolution des problèmes aux dérivées partielles du champ électromagnétique dont la solution est bien souvent la clef de voûte de la modélisation des systèmes de traitement de l'énergie électrique.

L'étude (non exhaustive) des principales méthodes de résolution des problèmes aux dérivées partielles (et plus particulièrement des problèmes aux limites) nous conduit à dégager la notion de méthode systématique en montrant que des méthodes approchées, qui satisfont à certains critères de rigueur et de maîtrise de l'erreur, permettent d'atteindre le résultat avec autant de certitudes que des méthodes directes basées sur l'analyse mathématique.

La notion de performance qui intervient alors au niveau de la mise en oeuvre permet de dégager des critères de choix qui sont basés sur les possibilités d'exploitation de chaque méthode. L'utilisation des principes de décomposition et d'approximation conduit à deux méthodes principales : les différences finies et les éléments finis. Le souci de généraliser les outils de modélisation que nous mettons à la disposition de l'ingénieur nous a conduit à développer plus en détail la méthode des éléments finis dont nous avons rappelé les principes de mise en oeuvre.

L'application de cette méthode nécessite pour chaque type de problème la définition d'une fonctionnelle dont l'extrémum donne la solution recherchée. Un choix judicieux de cette fonctionnelle facilite grandement l'intégration des résultats du calcul dans le processus de modélisation car il peut conduire à la détermination directe des grandeurs physiques fondamentales du modèle (forces, flux, inductances). C'est pourquoi nous consacrons la totalité du chapitre suivant à la recherche d'une fonctionnelle d'énergie adaptée à la représentation des systèmes de traitement de l'énergie électrique.

CHAPITRE II

ETAT ENERGETIQUE D'UN SYSTEME ELECTROMAGNETIQUE DE CONVERSION D'ENERGIE

	Pages
1 - Introduction.....	18
2 - Fonction d'état électromagnétique.....	21
2-1- Contribution des courants d'excitation.....	21
2-2- Contribution des courants induits.....	23
3 - Existence et unicité de la solution.....	28
4 - Fonction d'état d'un système non isolé non complet.....	34
5 - Conditions de continuité de A à la surface de deux milieux.....	38
6 - Analyse du champ par une fonction scalaire.....	41
7 - Application de la méthode des Eléments Finis.....	42
8 - Conclusion.....	46

I - INTRODUCTION

- Systèmes de conversion d'énergie

Un système énergétique global est composé d'une source d'énergie reliée aux appareils de transformation et de conversion par un élément de transport de cette énergie. L'étude d'un tel système nécessite l'analyse de tous ses éléments, ce qui n'est généralement possible que par une décomposition qui conduit alors à étudier chaque élément en remplaçant le reste du système par ses caractéristiques globales [9].

Les sources d'énergie, en particulier, peuvent être schématisées par une relation entre deux grandeurs intégrales (tension et courant, force et déplacement, entropie et température). Sous certaines hypothèses ces grandeurs deviennent indépendantes et la source est alors qualifiée de parfaite (tension constante, déplacement constant).

Lorsque dans l'étude d'un élément particulier, le système global peut être ramené à un ensemble de sources parfaites, on dit qu'il est isolé du système.

- Conversion d'énergie électromécanique - Absence du courant de déplacement - Variable d'état

La conversion d'énergie par voie électromécanique est due à une perturbation dans le couplage électromagnétique du système. Cette conversion s'effectue généralement en électrotechnique au niveau des générateurs de champ magnétique.

En effet les appareils industriels fonctionnant aux basses fréquences usuelles, la variation d'énergie du champ électrique est négligeable devant celle du champ magnétique. Il en résulte que les forces électriques et les courants de déplacement peuvent être négligés dans la construction des modèles.

Dans ces conditions, l'induction magnétique B définie par l'interaction des diverses sources de champ magnétiques devient la variable d'état du système pour laquelle la fonction d'état énergétique du système sera stationnaire.

- *Définition du système isolé et complet*

On peut alors considérer comme isolé tout système à l'extérieur duquel l'induction est nulle. En outre, si tous les courants sont inclus dans le système, celui-ci sera qualifié de complet. Ces deux notions permettent de définir sans ambiguïté la surface (S) de l'espace qui délimite le volume Ω du domaine à étudier.

- *Courants de conduction*

A l'intérieur du volume défini ci-dessus, toute densité de courant de conduction pourra être caractérisée par un vecteur J à divergence nulle. Il est défini dans un milieu dont la conductivité σ est une fonction d'espace qui aux fréquences habituelles est indépendante des vecteurs J et B. Il en résulte que l'on pourra superposer les courants de conduction indépendamment de leur nature qui diffère suivant que l'on étudie les courants d'excitation et les courants induits.

- *Les courants d'excitation J_0*

Sont créés par des sources extérieures à tension imposée constante. Ce type de courant est indépendant de l'état du système. Il peut être défini à l'aide d'un potentiel ϕ_0 solution des équations (1) :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} J_0 = \sigma \text{ grad } \phi_0 & \\ \text{div } (\sigma \text{ grad } \phi_0) = 0 & \text{(dans } \Omega) \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial n} = 0 & \text{(sur (S))} \\ \phi_0 = \pm V & \text{(Sur (S) aux points d'application)} \end{array} \right.$$

Remarques : 1) Dans l'hypothèse où les conducteurs sont infiniment minces ces équations expriment la loi d'Ohm.

2) En réalité le courant J_0 sort du système mais, lorsque les fils d'amenée du courant sont très rapprochés il est encore possible de considérer le système isolé et complet en supposant que les courants se referment à l'intérieur de (S) (fig. II-1). Dans ce cas, la source extérieure peut être remplacée par un courant interne J_0 tel que :

$$(2) \quad \begin{cases} \text{Rot } (J_0/\sigma) = 0 \\ \text{div } (J_0) = 0 \end{cases}$$

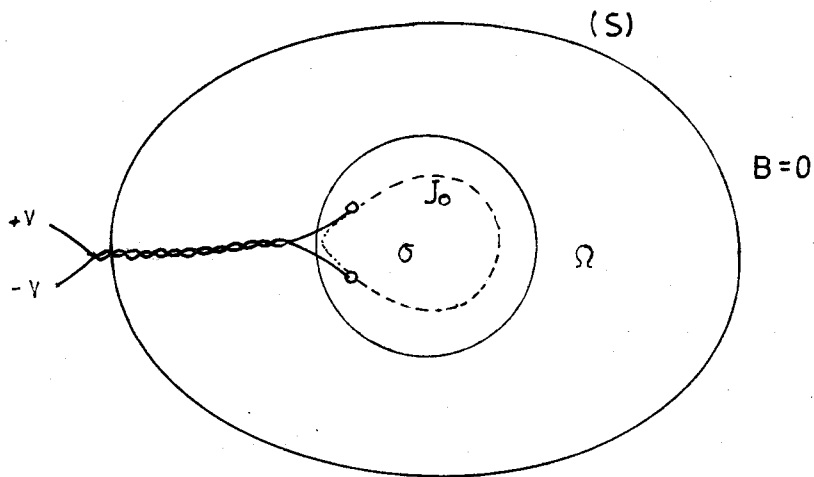


Figure II-1 : Système magnétique isolé et complet

- Les courants induits

Sont créés par une variation locale du champ magnétique et vérifient les équations (3) :

$$(3) \quad \begin{cases} \text{Rot } (g/\sigma) = - \frac{dB}{dt} \\ \text{div } (g) = 0 \\ g_n = 0 \end{cases} \quad \text{(composante normale à la surface du conducteur)}$$

Ayant défini successivement le domaine d'analyse, les sources d'énergie et la variable d'état, nous pouvons maintenant aborder l'étude fondamentale de la fonction d'état du système.

II - 2 - FONCTION D'ETAT ELECTROMAGNETIQUE

Nous allons, dans ce paragraphe, établir une fonctionnelle représentative de l'état du système. Cette fonctionnelle d'énergie s'exprimera en fonction de la variable d'état comme la somme de deux termes :

$$(4) \quad L = W_H + P_j$$

où W_H représente l'énergie magnétique totale emmagasinée dans le système donné par [17] :

$$(5) \quad W_H = \int_{\Omega} w_H d\Omega = \int_{\Omega} \left[\int_0^B H dB \right] d\Omega ,$$

et P_j l'énergie potentielle du courant J placé dans le champ d'induction B . Nous étudierons la construction de ce dernier terme en deux étapes : dans un premier temps nous considèrerons la contribution du courant d'excitation, pour introduire ensuite la contribution des courants induits.

II - 2 - 1 - Contribution des courants d'excitation

L'énergie potentielle de la densité de courant $J d\Omega$ placé dans le champ d'induction B est définie par le travail nécessaire pour amener cette densité de courant à l'extérieur du système où par définition l'induction est nulle.

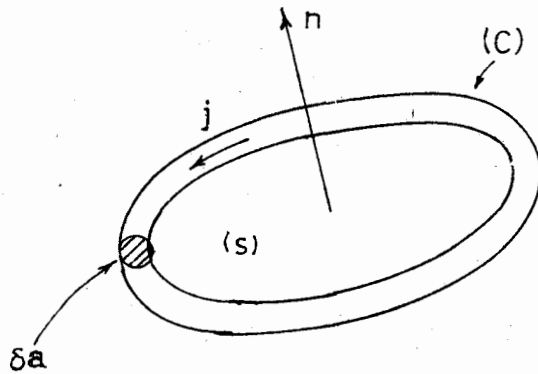


Figure II-2 : Circuit élémentaire de courant

Afin de respecter la conservation du courant ($\text{div } \mathbf{J} = 0$), nous raisonnons sur un circuit élémentaire infinitésimal analogue à celui de la figure II-2. Le travail nécessaire à un petit déplacement virtuel de ce circuit est égal à [10] :

$$(6) \quad \Delta (\delta p_j) = - j \delta a \int_{(s)} \vec{n} \cdot \delta \mathbf{B} \, ds$$

L'introduction du potentiel vecteur A défini par l'expression $\mathbf{B} = \text{Rot } \mathbf{A}$ dans le domaine Ω et par $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0$ constant à l'extérieur du système (où B est identiquement nul) permet d'appliquer le théorème d'Ostragradski :

$$(7) \quad \Delta (\delta p_j) = - \int_{(c)} j \delta a \, \vec{\delta A} \cdot d\vec{l}$$

Quand δa tend vers zéro $j \delta a \, d\vec{l} \rightarrow \mathbf{J} \, d\Omega$ et la somme de (7) sur tous les circuits élémentaires devient alors :

$$(8) \quad \delta P_j = \lim_{\delta a \rightarrow 0} \sum \Delta (\delta p_j) = - \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \vec{\delta A} \, d\Omega$$

Le travail dû au déplacement total est obtenu par intégration sur le potentiel vecteur :

$$(9) \quad P_j = - \int_{A_0}^A \delta P_j = - \int_{\Omega} J \cdot (A - A_0) d\Omega$$

d'où

$$(10) \quad P_j - P_{0j} = - \int_{\Omega} J \cdot A d\Omega$$

La fonctionnelle (4) s'écrira donc :

$$(11) \quad L = \int_{\Omega} \left[\int_0^B H dB - JA \right] d\Omega$$

Cette fonctionnelle sera, en vertu du principe du minimum d'énergie, rendue minimale par une répartition du potentiel vecteur A qui réalise l'équilibre énergétique avec une distribution donnée de courants. Il s'ensuit que tous les problèmes, dans lesquels la répartition spatiale des courants (injectés ou induits) est indépendante du champ, peuvent être étudiés à l'aide de cette fonctionnelle dont la minimisation permettra d'obtenir les paramètres globaux qui entrent dans la définition d'un schéma équivalent.

II - 2 - 2 - Contribution des courants induits (courants de Foucault)

Lorsque le système que l'on étudie comporte des courants de Foucault (moteurs à induction, fours...) la répartition de la densité de courant dans le domaine Ω est fonction du potentiel vecteur A à travers la loi de Faraday :

$$(12) \quad \text{Rot} (g/\sigma) = - \partial B / \partial t$$

La fonctionnelle (11) ne peut plus alors représenter l'état du système qui doit être étudié à partir de l'instant $t = 0$ jusqu'à l'instant

t considéré en fonction des conditions initiales et de l'équation d'évolution (12). L'existence des pertes Joules qui rendent le système non conservatif ne permet pas de définir un potentiel associé aux courants de Foucault. Nous allons dans le cas général où un courant d'excitation $J_0 = f(t)$ variable dans le temps crée dans les parties conductrices un courant induit g , définir une fonction d'énergie en considérant ce courant induit comme une source interne qui participe à l'échange énergétique avec l'extérieur.

Le travail produit par les courants induits entre les instants 0 et t est égal à :

$$(13) \quad P_g = \int_0^t \left(\int_{\Omega} g^2 / \sigma \, d\Omega \right) d\theta - \int_0^t \left(\int_{\Omega} (gAB) V d\Omega \right) d\theta = \int_{\Omega} p_g \, d\Omega$$

où V représente le vecteur vitesse de déplacement de ces courants induits. Le premier terme de ce travail représente les pertes Joules tandis que le second est le travail fourni par une énergie potentielle équivalente au terme $g A$ construit ci-dessus dans le cas où A est indépendant du temps. Considérons maintenant la fonctionnelle

$$(14) \quad L = \int_{\Omega} [(w_H - J.A) + P_g] \, d\Omega,$$

elle est égale à

$$(15) \quad L = \int_{\Omega} \left(\int_0^B H \, dB - J.A + \int_0^t g^2 / \sigma \, d\theta - \int_0^t (gAB) V d\theta \right) \, d\Omega$$

L'expression de g en fonction de A est obtenue à partir de (12) :

$$(16) \quad \text{Rot} (g/\sigma) = - \frac{\partial}{\partial t} (\text{Rot} A)$$

soit en intégrant

$$(17) \quad g = - \sigma \frac{\partial}{\partial t} (A + \text{grad } \phi)$$

où ϕ est un potentiel scalaire qui dépend de la jauge choisie [10] et

vérifie

$$(18) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} (A + \operatorname{grad} \phi) &= 0 \\ (A + \operatorname{grad} \phi) \cdot n &= 0 \quad (\text{composante normale}) \end{aligned}$$

La dérivée totale de $A + \operatorname{grad} \phi$,

$$(19) \quad \frac{d}{dt} (A + \operatorname{grad} \phi) = \frac{\partial}{\partial t} (A + \operatorname{grad} \phi) + B \wedge V$$

permet d'écrire la fonctionnelle (15) sous la forme :

$$(20) \quad L = \int [w_H - JA - \int_0^t g \frac{d}{d\theta} (A + \operatorname{grad} \phi) d\theta] d\Omega$$

Soit :

$$(21) \quad L = \int [w_H - J \cdot A - \int_0^{A+\operatorname{grad}\phi} g d(A + \operatorname{grad} \phi)] d\Omega$$

avec
$$g = -\sigma \frac{\partial}{\partial t} (A + \operatorname{grad} \phi)$$

ou

$$(22) \quad L = \int [w_H - JA - \int_0^A g dA] d\Omega$$

avec $\operatorname{div} A = 0$

Il est possible d'appliquer à cette fonctionnelle le principe de l'Action Hamiltonienne en définissant la fonction $F = \int_0^T L dt$ par un procédé du type Ritz-Galerkine ou l'utilisation des fonctions adjointes [12] pour pouvoir appliquer ensuite une méthode d'éléments finis [13].

On obtient alors une méthode pas à pas qui, dans certains problèmes où le milieu est non linéaire ou la géométrie variable sera le seul moyen de parvenir à une solution.

Cependant dans la pratique il est préférable de séparer l'espace et le temps en appliquant la méthode de séparation de variables

ou une analyse de Fourier lorsque cela est possible. On se ramène ainsi à un problème d'optimisation par rapport aux variables d'espace. Ces méthodes sont directement applicables dans les cas linéaires et quasi-linéaires [14], elle nécessite par contre une quasi-linéarisation dans l'étude des opérateurs non-linéaires.

- Comportement général du système linéaire en régime dynamique -
Séparation de variables

On écrit les variables A, g et B sous la forme (où A représente un vecteur à divergence nulle).

$$(23) \quad A = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i(t) a_i(\Omega)$$

$$(24) \quad B = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i B_i = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i(t) \text{Rot}(a_i)$$

$$(25) \quad g = -\sigma \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d\tau_i}{dt} a_i(\Omega)$$

Considérons alors les équations d'Euler-Lagrange de (22) en fonction de τ_i :

$$(26) \quad E_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \tau_i} = \sum_j \left[\int_{\Omega} \nu B_j \cdot B_i d\Omega \right] \tau_j + \left(\int_{\Omega} \sigma a_i \cdot a_j d\Omega \right) \frac{d\tau_j}{dt} - \int_{\Omega} J \cdot a_i d\Omega = 0$$

(avec $\nu = \frac{1}{\mu}$)

Elles constituent donc les équations en fonction du temps du système dont les coefficients seront déterminés par l'optimisation de (22) par rapport à chacune des variables d'espace a_i :

$$(27) \quad \delta L(a_i) = -\tau_i^2 \delta \left[\int_{\Omega} \left(w_i + \frac{1}{2} \lambda_i \sigma a_i \cdot a_i \right) d\Omega \right] + \tau_i \delta E_i(t)$$

$$\text{où } w_i = \int_0^{B_i^2} \frac{1}{2} v \, d b^2 \quad \text{et} \quad \lambda_i = \frac{d\tau_i}{dt} / \tau_i$$

Compte tenu de (26), la formule d'optimisation (27) est équivalente à :

$$(28) \quad L_i(a_i) = \int_{\Omega} (w_i + \frac{1}{2} \sigma \lambda_i a_i \cdot a_i) \, d\Omega$$

Dans le cas des problèmes linéaires λ_i et a_i seront les valeurs et vecteurs propres de l'opérateur linéaire : $\text{Rot}(v \text{ Rot } a)$ et vérifient donc :

$$(29) \quad \int_{\Omega} \sigma a_i \cdot a_j \, d\Omega = 0 \quad \forall i \neq j$$

$$\int_{\Omega} v B_i \cdot B_j \, d\Omega = 0$$

Le système d'équations (26) devient alors :

$$(30) \quad E(t) = (-\lambda_i \tau_i + \frac{d\tau_i}{dt}) \int_{\Omega} \sigma a_i \cdot a_i \, d\Omega - \int_{\Omega} J a_i \, d\Omega = 0$$

Etant donnée que J est une fonction connue de l'espace et du temps, l'équation (30) est entièrement caractérisée par les résultats du problème d'optimisation (28), qui établit en quelque sorte la fonction transfert du système | 9 |, | 15 |.

- Régimes permanents - Quasi-stationnaires

Dans ce cas une analyse de Fourier du courant d'injection, ramène le système linéaire ou quasi-linéaire à un régime sinusoïdal (quasi-stationnaire). En effet, en représentation complexe nous avons :

$$(31) \quad \begin{cases} J = \bar{J} e^{j\omega t} \\ A = \bar{A} e^{j\omega t} \\ g = -j\omega\sigma \bar{A}' e^{j\omega t} \quad (\bar{A}' = \bar{A} + g \bar{\text{grad}} \phi) \end{cases}$$

Après l'intégration du terme $\int_0^{\bar{A}'} \bar{g} dA' = \frac{1}{2} \bar{g} \bar{A}'$

La fonctionnelle (22) devient [39] :

$$(32) \quad L(\bar{A}, \text{grad } \bar{\phi}) = \int [\bar{w}_H - \bar{J} \cdot \bar{A}^* - \frac{1}{2} \bar{g} (\bar{A} + \text{grad } \bar{\phi})^*] d\Omega$$

On retrouve dans cette fonctionnelle les deux termes principaux de (4) qui représentent ici l'énergie emmagasinée et le potentiel de la densité de courants avec les notions familières de puissance apparente, active et réactive.

II - 3 - EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION

La fonctionnelle (32) établie dans le cadre de l'hypothèse de grandeurs sinusoïdales constitue un problème complet d'optimisation qui a la même caractéristique variationnelle que la fonctionnelle (21). Elle caractérise alors toutes les formules variationnelles spatiales des champs électromagnétiques (en l'absence de courant de déplacement).

Nous allons donc étudier les problèmes d'existence et d'unicité de la solution en fonction des conditions aux limites associées à cette fonctionnelle.

Dans ce but, écrivons la variation de L dans (32) pour une variation $\epsilon \Delta A$ du potentiel vecteur A (où ϵ est un paramètre indépendant de l'espace). Lorsque A varie de la quantité $\epsilon \Delta A$, l'induction B passe d'une valeur B à une valeur B + B₂ telle que B₂ = Rot ($\epsilon \Delta A$). L'énergie magnétique devient alors égale à (fig. II-3) :

$$(33) \quad w_H(A + \epsilon \Delta A) = \int_0^{B+B_2} v b db = \int_0^B v b db + \int_B^{B+B_2} v b db$$

$$= \int_0^B v b db + \int_0^{B_2} v(b+B) b db + H B_2$$

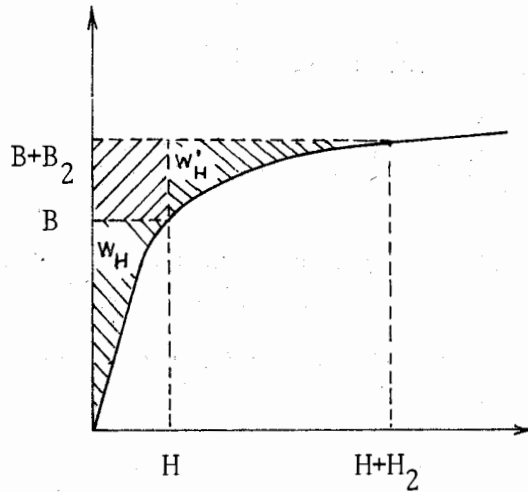


Figure II-3

Ou finalement :

$$(34) \quad w_H (A + \epsilon \Delta A) = w_H (A) + w'_H (\epsilon \Delta A) + H B_2$$

Avec :

$$(35) \quad w'_H (\epsilon \Delta A) = \epsilon^2 \int_0^{\text{Rot}(\Delta A)} v(b+B) b db = \epsilon^2 w'_{H2}$$

L'application de la formule de Green au terme $H B_2$ entraîne :

$$(36) \quad \int_{\Omega} H B_2 d\Omega = \int_{\Omega} H \text{Rot}(\epsilon \Delta A) d\Omega = \int_{\Omega} \epsilon \Delta A (\text{Rot} H) d\Omega + \int_{\partial \Omega} \epsilon \Delta A \Lambda H ds \quad (S)$$

ce qui permet d'écrire :

$$(37) \quad L(A + \epsilon \Delta A) = L(A) + \int_{\Omega} [\epsilon^2 w'_{H2} + \epsilon \Delta A (\text{Rot} H - J_0 - g)] d\Omega + \int_{\partial \Omega} \epsilon \Delta A \Lambda H ds \quad (S)$$

d'où

$$(38) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{L(A+\epsilon\Delta A) - L(A)}{\epsilon} = \epsilon \int_{\Omega} w_{H^2} d\Omega + \int [\Delta A (\text{Rot } H - J - g)] d\Omega + \int_{(S)} \Delta A \Lambda H \cdot n \, ds$$

Par conséquent le vecteur A qui vérifie :

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Rot}(H) = J + g \quad (\text{dans } \Omega) \\ [g = -j\omega\sigma (A + \text{grad } \phi)] \\ \text{et} \\ \Delta A \Lambda H \cdot n = 0 \quad (\forall \Delta A \text{ sur } (S)) \end{array} \right.$$

optimisera (32) en rendant la limite (38) identiquement nulle. Or le problème aux limites (39), correspondant aux équations de Maxwell avec les conditions aux limites naturelles, assure une solution unique pour B et g à condition que : $g_n = 0$ sur le bord du milieu où $\sigma\omega \neq 0$, condition qui n'est pas incluse dans l'optimisation. L'optimisation de L par rapport à ϕ assurera cette condition.

Une analyse analogue à la précédente permet d'évaluer la variation de L pour une variation $\epsilon\Delta\phi$ du potentiel scalaire ϕ :

$$(40) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{L[\text{grad } (\phi + \epsilon\Delta\phi)] - L[\text{grad } \phi]\} / \epsilon = j\omega \int_{\Omega} \sigma \epsilon (\text{grad } \phi)^2 d\Omega + \int_{\Omega} \Delta\phi (\text{div}g) d\Omega + \int_{(S)} \Delta\phi g_n \, d_s$$

La condition d'extrémalisation de L exige donc :

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div}g = j\omega\sigma [\text{div}(\text{grad } \phi) + \text{div}A] \quad (\text{dans } \Omega) \\ g_n = j\omega\sigma (\text{grad } \phi + A) \cdot n = 0 \quad (\text{sur } (S)) \end{array} \right.$$

L'ensemble des problèmes aux limites (39) et (41) issus de l'optimisation de L par rapport à A et à ϕ assure donc l'existence et l'unicité de B et g et par conséquent celles de A et ϕ partout où $\sigma\omega \neq 0$. En effet dans les milieux où $\sigma\omega = 0$, le problème (41) et donc

l'optimisation (40) sont automatiquement vérifiés quel que soit ϕ . Dans ces milieux l'unicité de B entraîne l'existence de A au gradient d'une fonction scalaire près.

Dans les deux calculs qui viennent d'être développés (37 et 40) le terme du second ordre est quadratique défini positif en ϵ et montre que l'extrémum de L est bien un minimum.

Nous en déduisons, en résumé, que : la fonctionnelle L dans (32) a un minimum pour lequel A et ϕ sont solutions des problèmes ci-dessous :

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Rot } (H) = J + g \\ \text{Rot } \left(\frac{g}{\sigma} \right) = -j\omega B \end{array} \right. \quad (\text{dans } \Omega)$$

avec :

$$(43) \quad \int_{(S)} \Delta A \cdot H \, ds = 0 \quad \forall \Delta A \quad \left\{ \begin{array}{l} A_t = 0 \Rightarrow H_n = 0 \\ H_t = 0 \quad \forall A_t \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{avec } B &= \text{Rot } (A) \\ g &= j\omega\sigma (A + \text{grad } \phi) \end{aligned}$$

et

$$(44) \quad \int_{(s)} \Delta \phi \cdot g_n \, ds = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} g_n = 0 \quad \forall \phi \Rightarrow \sigma (A_n + \frac{\partial \phi}{\partial n}) = 0 \\ \text{ou} \\ \phi = \text{cte} \quad \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \end{array} \right.$$

Les conditions (43) sont équivalentes à :

$\mu = \infty$ donc $H_t = 0$ (A et ϕ libre) dans les milieux infiniment perméables

ou $\sigma = \infty \Rightarrow B_n = 0$ ($A_t = 0$ et ϕ libre) dans les milieux perméables

ou enfin $B = 0 \Rightarrow (A = 0, \phi = 0)$ à l'infini.

La minimisation de la fonctionnelle (32) entraîne donc une solution unique pour B et g correspondant aux conditions ci-dessus.

La fonction ϕ sera entièrement définie en tout point où $\sigma\omega \neq 0$, le vecteur A étant alors unique en ces points et déterminé au terme $\text{grad } \phi$ près partout où $\sigma\omega = 0$.

- *Elimination de ϕ*

Les relations (39) et (41) montrent que l'introduction de la fonction ϕ n'avait d'autre but que celui d'assurer à g_n la valeur zéro sur le bord du conducteur. Lorsque cette condition est réalisée par ailleurs le gradient de la fonction ϕ s'annule automatiquement en tout point où $\sigma\omega \neq 0$, car elle devient alors une fonction harmonique dont le gradient n'a pas de composante normale à la surface du volume dans lequel $\sigma\omega \neq 0$.

Si l'on suppose que $\sigma\omega \neq 0$ dans tout le domaine Ω borné par une surface sur laquelle $H_t = 0$, l'optimisation de (32) en posant $\phi = 0$:

$$(45) \quad L = \int_{\Omega} (w_H - J A + \frac{1}{2} j\omega |A^2|) d\Omega$$

avec $A_n = 0$ sur (S)

assure l'unicité de A par définition de son rotationnel et de sa divergence. Dans ces conditions, le choix de $A_n = 0$, qui ne perturbe pas les conditions aux limites, permet de prendre ϕ égal à zéro.

Ce choix peut aisément être réalisé avec la condition aux limites générale (H_t définie sur la surface (S)). En outre, l'étude de la condition de continuité des composantes de A sur l'interface de deux domaines (voir ci-dessous) montre qu'il sera toujours possible d'imposer $A_n = 0$ à l'intérieur de la surface du milieu où $\sigma\omega \neq 0$, même si ce dernier se trouve à l'intérieur de Ω .

Nous reprendrons dans les paragraphes qui suivent, le problème de l'unicité de g et celle de A dans les régions où $\sigma\omega = 0$ après avoir détaillé les conditions générales aux limites et celles de continuité de A .

II - 4 - FONCTION D'ETAT D'UN SYSTEME NON-ISOLE ET NON COMPLET

Conditions aux limites générales

Dans la pratique un des premiers problèmes que l'on a à résoudre est celui de la définition d'un système isolé et complet. Le domaine d'étude est en général borné, car les appareils électrotechniques sont conçus pour être magnétiquement isolés de leur environnement par des dispositions technologiques diverses (écran de perméabilité infinie, écran parfaitement conducteur, concentration des densités de courant).

Il n'y a donc en général aucune difficulté à définir un système isolé, d'autre part lorsque le système n'est pas complet, il est possible d'admettre que le retour des courants est réalisé par la répartition d'une densité de courant superficielle connue (fig. II-4). Le volume est alors

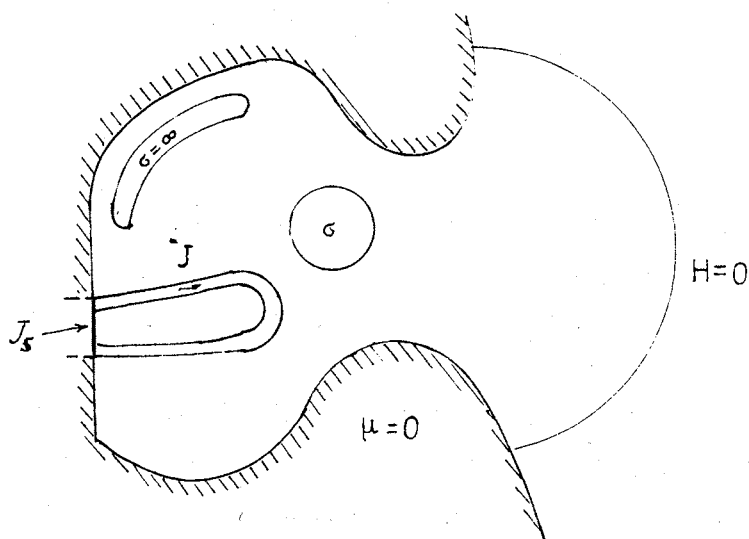


Figure II-4 : Domaine isolé et complet

limité par une surface au delà de laquelle l'énergie électromagnétique peut être considérée comme nulle dans le premier cas et infinie dans le deuxième.

Lors de la décomposition du système, les sous-systèmes seront magnétiquement couplés et constitueront donc des systèmes non isolés et parfois non complets. Dans ce cas chaque sous ensemble peut être complété en remplaçant le reste du domaine par une source magnétique superficielle répartie sur sa surface extérieure. La puissance de cette source est donnée par le flux du vecteur de Poynting à travers la surface de séparation et son énergie sera représentée par le terme $\int \mathbf{A} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, ds$ que nous allons justifier ci-dessous.

- Fonctionnelle générale pour un domaine non-isolé, non complet

Considérons par exemple un domaine Ω composé de deux parties séparées par une frontière (C). Nous allons établir la fonctionnelle générale vue d'une des deux régions (fig. II-5).

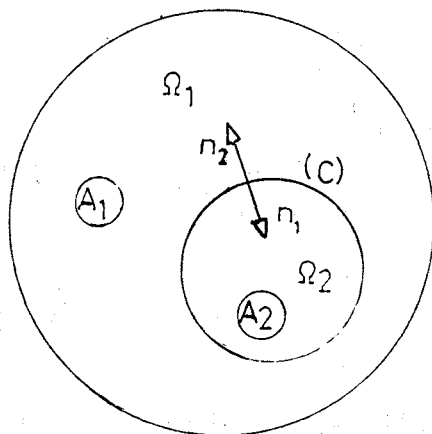


Figure II-5 : Décomposition de Ω en sous domaines Ω_1 et Ω_2

En effet, la fonction d'état peut s'écrire en fonction des potentiels vecteurs A_1 et A_2 définis dans les sous-domaines Ω_1 et Ω_2 et de celui A_C défini sur la surface de séparation :

$$(46) \quad L = \int_{\Omega_1} L(A_1, A_C) + \int_{\Omega_2} L(A_2, A_C)$$

Sa variation associée au potentiel vecteur A_2 s'écrira :

$$(47) \quad \delta L(A_2) = \delta L_{\Omega_1}(A_2) + \delta L_{\Omega_2}(A_2)$$

Or la variation totale de L dans Ω_1 est donnée par :

$$(48) \quad \delta L = \int_{\Omega_1} \delta A_1 \cdot (\text{Rot}H - J - g) d\Omega + \int_{(C)} \delta A_C \wedge H_1 \cdot n_1 ds$$

d'où :

$$(49) \quad \delta L_{\Omega_1}(A_2) = \int_{(C)} \delta A_C \wedge H_1 \cdot n_1 ds$$

car $\delta A_1 = 0$ dans Ω_2

Après la substitution de (49) dans (47) et compte tenu du fait que $n_2 = -n_1$ cette dernière devient :

$$(50) \quad \delta L(A_2) = \delta L_{\Omega_2}(A_2) - \int \delta A_C \wedge H_1 \cdot n_2 ds$$

La fonctionnelle d'un système isolé non complet sera donc égale à :

$$(51) \quad L = \int_{\Omega} (w_H - J \cdot A - \frac{1}{2} g \cdot A) d\Omega - \int_{(S)} A \wedge H \cdot n ds$$

Mais comme $(\text{AAH}) \cdot n = |A_t \wedge H'_t|$:

$$(52) \quad L = \int_{\Omega} (w_H - J \cdot A - \frac{1}{2} g \cdot A) d\Omega - \int_{(S)} |A_t \wedge H'_t| ds$$

Dans cette expression H'_t est, soit une fonction d'espace bien définie telle que $\text{Rot } H'_t = J_n$, soit une fonction d'espace dépendante du vecteur solution A. (S)

Dans les cas où il y a une différence importante entre l'énergie des deux parties, on peut considérer la partie à forte énergie comme une source parfaite vis-à-vis de l'autre. Dans ce cas H'_t dans l'équation (52) devient indépendant du champ à l'intérieur de Ω .

La figure (II-5-a) montre le domaine d'analyse du champ de la tête de bobine d'un contacteur, où le corps magnétique est remplacé par la source superficielle représentée par la répartition connue de H'_t sur la surface de séparation.

Par contre lorsque H'_t peut être supposé constant, il devient intéressant de définir une densité superficielle de courant dont la contribution à la fonctionnelle sera égale à $\int A_t \cdot J_t ds$. C'est le cas par exemple de la figure II-5-b, où pour le calcul du champ des têtes de bobines toute la partie intérieure de la machine pourra être remplacée par la densité de courant J_t indiquée sur la vue de face.

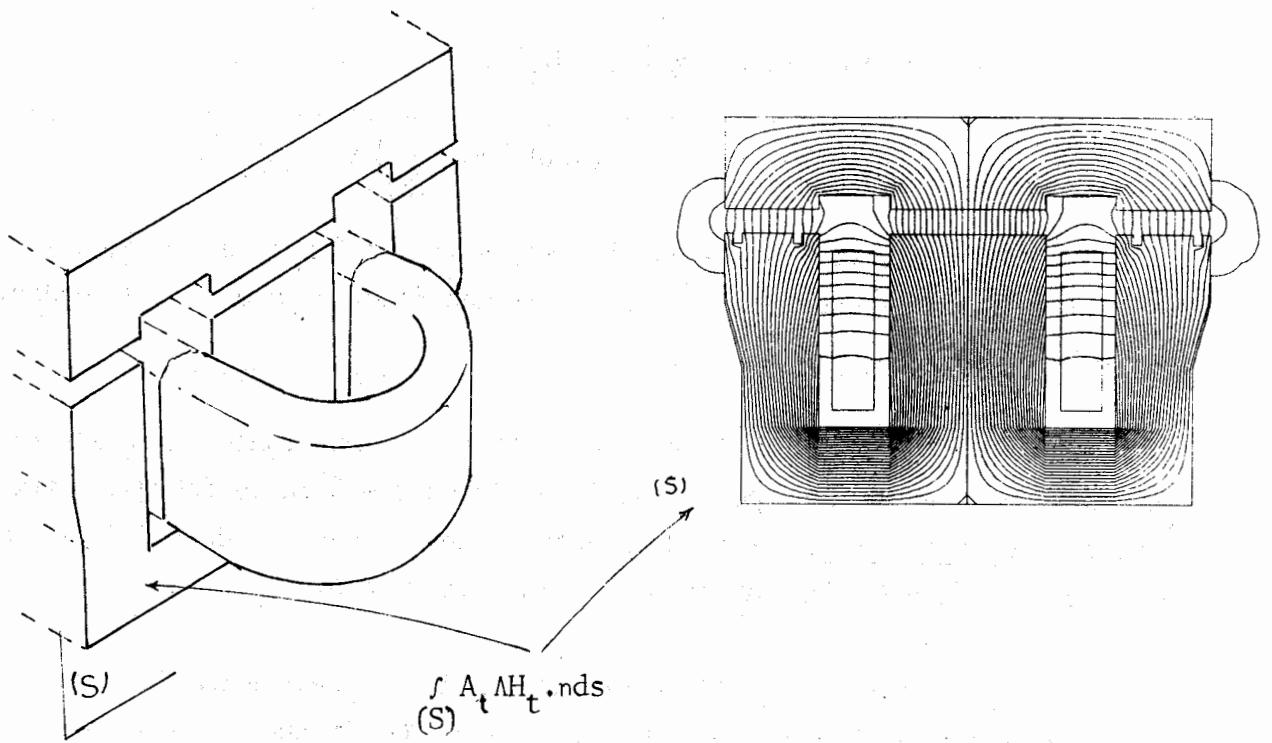


Figure II-5-a : Système non complet non isolé de la tête de bobine d'un contacteur

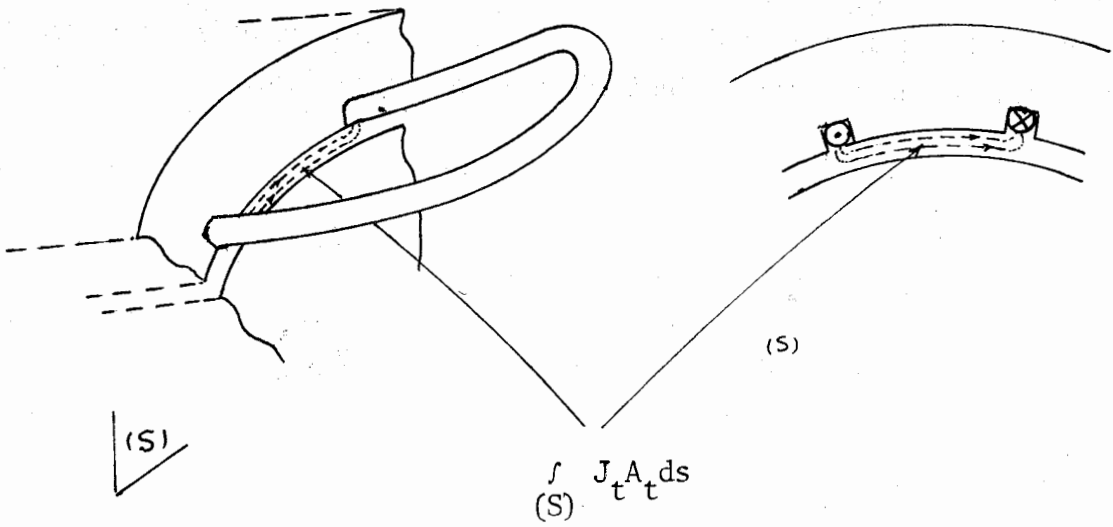


Figure II-5-b : Système quasi complet de la tête de bobine d'une machine

II - 5 - CONDITIONS DE CONTINUITÉ DE A A LA SURFACE DE DEUX MILIEUX

Nous allons dans ce paragraphe étudier les conditions de passage que l'on doit imposer au potentiel vecteur A à l'interface de deux milieux quelconques appartenant au domaine de définition de la fonctionnelle générale (52).

En effet, les composantes du champ doivent respecter les conditions de continuité propres à chaque composante :

$$(53) \quad \text{Rot } (A_i) \cdot n = \text{Rot } (A_j) \cdot n$$

$$(54) \quad \frac{\text{Rot } (A_i) \wedge n}{\mu_i} = \frac{\text{Rot } (A_j) \wedge n}{\mu_j}$$

La condition (53) sera entièrement satisfaite par la continuité de la composante tangentielle de A :

$$(55) \quad A_i \wedge n = A_j \wedge n$$

Afin d'analyser la condition (54) nous exprimons la variation de la fonctionnelle L à la limite des deux milieux dans une couche infinitésimale d'épaisseur ϵ (fig. II-6). Cette variation pour le milieu i est égale à :

$$(56) \quad \delta L_i (A_i) = \int_{S_{ij}} [\delta A_{it} \cdot (\text{Rot } H_i)_t - J_t \cdot \delta A_{it}] \epsilon ds +$$

$$\int_{S_{ij}} [\delta A_{in} \cdot (\text{Rot } N_i)_n - J_n \cdot \delta A_{in}] \epsilon ds +$$

$$\int_{S_{ij}} \delta A_{it} \wedge H_{it} \cdot n ds$$

où les indices n et t représentent les composantes normale et tangentielle du vecteur indicé.

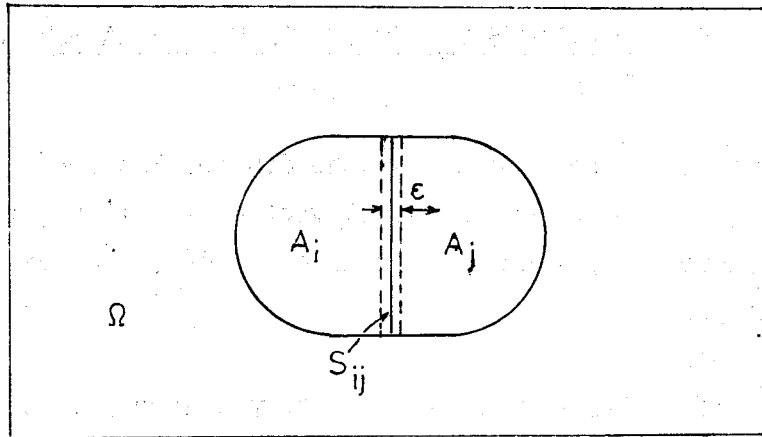


Figure II-6

La condition (55) implique :

$$(57) \quad \delta A_{it} = \delta A_{jt} = \delta A_t$$

La minimisation de la somme des fonctionnelles appliquée aux milieux i et j devient :

$$(58) \quad \delta L = \delta L(A_i) + \delta L(A_j) = 0$$

Lorsque ϵ tend vers zéro :

$$(59) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\delta L(A_i) + \delta L(A_j)] = \int_{S_{ij}} \delta A_t \Lambda(H_{it} - H_{jt}) ds = 0$$

Ce qui entraîne :

$$(60) \quad H_{it} = H_{jt}$$

La condition (55) est donc suffisante pour assurer la continuité du champ magnétique. La continuité de A_n nécessaire pour assurer la continuité de g dans le milieu à $\sigma\omega \neq 0$, n'est plus nécessaire en l'absence de g .

Il est alors possible de fixer $A_{jn} = 0$ sur l'un des côtés de l'interface. La vérification de $\text{Rot } H_{it} = J_n$ sera assurée par A_{in} et celle de $\text{Rot } H_{jt}$ le sera par (60).

Remarque : Sur l'unicité de $g = -j\omega\sigma A$ et de la nécessité de la condition (55).

Supposons que A soit le vecteur continu à divergence nulle qui minimise la fonctionnelle (52). Prenons dans chaque $\Omega_i \in \Omega$ une fonction scalaire ϕ_i continue et dérivable à l'intérieur de Ω_i . Nous montrons que le vecteur discontinu $(A + \text{grad } \phi_i)$ optimisera également la fonctionnelle (52) si :

$$(61) \quad \begin{aligned} 1) - \phi_i &= 0 & \forall_i \mid \omega\sigma(\Omega_i) \neq 0 \\ 2) - \phi_i &\text{ est continu } \forall_i \mid J(\Omega_i) \neq 0 \end{aligned}$$

En effet la fonctionnelle (52) appliquée au vecteur $A + \text{grad } \phi_i$ dans Ω_i et le domaine voisin Ω_j devient :

$$(62) \quad L(A, \phi_i, \phi_j) = L(A) + \frac{1}{2} j\omega \sum_{i,j} \int_{\Omega_i} \sigma_i (\text{grad } \phi_i)^2 d\Omega + \int_{S_{ij}} (\phi_i - \phi_j) J_n ds + \int_{S_{ij}} j\omega (\sigma_i \phi_i - \sigma_j \phi_j) A_n ds$$

Il en résulte que toutes transformations qui respectent les conditions ci-dessous maintiennent le minimum de L :

$$(63) \quad \begin{aligned} 1) \omega\sigma_i (\text{grad } \phi_i)^2 &= 0 & \text{ dans } \Omega_i \forall_i \\ 2) \omega (\sigma_i \phi_i - \sigma_j \phi_j) A_n &= 0 \\ 3) (\phi_i - \phi_j) J_n &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 1) \\ 2) \\ 3) \end{aligned}} \right\} \text{ sur l'interface}$$

Les conditions (1) et (2) impliquent que $\omega\sigma_i \phi_i = 0$, d'où l'unicité de $g = -j\omega\sigma A$.

La troisième condition met en évidence la nécessité de la continuité de la composante tangentielle de tous les vecteurs solution de l'optimisation de (52) à l'intérieur d'un milieu conducteur. Dans les milieux où $\sigma = 0$, ($\text{Rot } H = 0$), cette continuité n'est donc nécessaire qu'à un terme du type $\text{grad } \phi$ près. D'autre part, on en déduit que dans les deux derniers cas la composante normale du potentiel vecteur sur toutes les surfaces de séparation peut être totalement discontinu.

- Conditions aux limites sur A

En résumé, nous avons la fonctionnelle générale :

$$(64) \quad L(A) = \int_{\Omega} (w_H - JA + \frac{1}{2} \sigma' |A|^2) d\Omega - \int_{S_1} |A_t \wedge H_t| ds - \int_{S_2} A_t \cdot J_t ds$$

(où $\sigma' = j\omega\sigma$ dans le cas des régimes quasi-stationnaires) avec les conditions aux limites associées :

$$\left\{ \begin{array}{lll} H_t = F(S_1) & (S_1) \in (S) & A_n = 0 \\ J_t = P(S_2) & (S_2) \in (S) & \text{Aucune condition pour } A \\ H_n = 0 & (S_3) \in (S) & A_t = 0 \end{array} \right.$$

H_t et J_t peuvent être les fonctions connues du potentiel vecteur solution. Dans ce cas la condition $A_n = 0$ ne subsistera que si H_t vérifie :

$$\text{Rot}_{(S_1)} H_t = J_{n_s} + g_{n_s}$$

II - 6 - ANALYSE DU CHAMP PAR UNE FONCTION SCALAIRE

Il arrive souvent qu'une partie importante du domaine à étudier soit composé de matériaux qui ne sont pas conducteurs et à l'intérieur desquels le potentiel vecteur pourra être avantageusement remplacé par un potentiel scalaire.

Cette dernière fonction ψ sera choisie telle que :

$$H = \text{grad } \psi$$

Elle réalisera dans ce cas le minimum de la fonctionnelle de co-énergie :

$$(65) \quad L' = \int_{\Omega} \left[\int_0^H \mu h \, dh \right] d\Omega - \int_{(S)} \mu \psi H_n \, ds$$

Dans l'hypothèse où ce domaine est couplé magnétiquement avec un domaine où l'on est obligé d'introduire le potentiel vecteur A , tel que $B = \text{Rot } A$, il est possible de résoudre le problème global en écrivant la fonctionnelle.:

$$(66) \quad L = \int_{\Omega_1} w'_H \, d\Omega + \int_{\Omega_2} (w_H - JA + \frac{1}{2} \sigma' |A|^2) d\Omega + \int (\mu \psi \text{Rot } A'_t - A'_t \text{grad } \psi') n \, ds$$

(où $w'_H = \int_0^H \mu h \, dh$, $w_H = \int_0^B \nu b \, db$, σ' a la même signification que dans (64) et A'_t et ψ' sont les fonctions solutions).

Ce couplage pourra être réalisé facilement en définissant des éléments de surface dans les problèmes à trois dimensions et des éléments linéiques dans les problèmes à deux dimensions.

II - 7 - APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Le principe fondamental de la méthode des éléments finis, discuté au chapitre I, consiste à découper le domaine Ω , sur lequel le système physique est défini, en domaines élémentaires Ω_i^e tels que $\Omega = \cup \Omega_i^e$, $i = 1, N$. Toute fonction vectorielle définie sur le domaine Ω sera à l'intérieur de chaque élément Ω_i^e déterminée par sa restriction a_i^e à cet élément. Dans ces conditions la fonctionnelle L sera la somme

des intégrales calculées sur chaque élément :

$$(67) \quad L(A) = \sum_{i=1}^n L_e(a_i^e)$$

Cependant cette égalité n'aura de sens que si les restrictions a_i^e de A dans Ω_i respectent les conditions de convergence et de compatibilité.

- *La condition de convergence*

Elle impose que les A_i^e et $\text{Rot } A_i^e$ soient univoques et continues dans Ω_i^e et tendent de manière continue vers un ensemble de valeurs bien définies quand la plus grande dimension de chaque élément tend vers zéro.

- *La condition de compatibilité*

Les conditions de continuité de A, discutées au II-5 en décrivent les détails.

- *Approximation de A_i^e au sens de Ritz-Galerkin*

On exprime le potentiel vecteur a_i^e à l'aide d'une approximation de la forme :

$$(68) \quad a_i^e = \sum_{m=1}^n f_m(M) P_m \quad M \in \Omega^e$$

Les paramètres P_m seront choisis de manière à assurer la condition de compatibilité, la condition de convergence étant réalisée par le choix de fonctions f_m continues et dérivables. Le mode d'approximation le plus utilisé dans la méthode des éléments finis est l'interpolation polynomiale dans laquelle les paramètres P_m sont égaux aux valeurs de A_i en un certain nombre de points bien définis du domaine appelés noeuds :

$$(69) \quad a_i^e = \sum_{m=1}^n \alpha_m(M) A_m^*$$

Les polynômes α_m seront entièrement déterminés par les coordonnées des noeuds [16]. Il devient alors possible d'évaluer une approximation de la fonctionnelle d'énergie L^* suivant l'expression (67), et réaliser la minimisation par une simple dérivation de L^* en fonction des variables discrètes A_j^* telle que :

$$(70) \quad \frac{\partial L^*(A_j^*)}{\partial A_j^*} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L_i^*}{\partial A_j^*} = 0$$

Les équations (70) ci-dessus conduisent alors de manière algorithmique à la construction d'un système d'équations algébriques non-linéaires exprimé sous forme matricielle :

$$(71) \quad |S| \{A\} - \{F\} = 0$$

Au chapitre III nous reprendrons en détail la formulation de L_i^* et les matrices correspondantes, pour un élément général tridimensionnel courbe. Nous parlerons ensuite des polynômes d'interpolation α_m conduisant à la définition des polygones réguliers. Ces derniers appelés éléments de référence seront transformés par les mêmes polynômes d'interpolation en toute une famille des éléments géométriquement plus souples (polygones non réguliers courbes) (fig.III-3).

- L'ordre de convergence - Estimation d'erreur

De nombreux auteurs [22, 23] ont amplement abordé l'étude de la convergence et de la précision notamment dans le cas des fonctionnelles d'énergie. Nous en tirons, à titre de complément, une analyse simple et brève qui aboutit à une estimation d'erreur.

La restriction a_i de $A \in H^m(\Omega)$, ($m = 1$ dans notre cas) donnée par la formule d'interpolation polynômiale (69), dans un élément de dimension h_1, h_2, h_3 , inscrit dans une boule de diamètre $d : d = \max(h_1, h_2, h_3)$, entraîne une erreur asymptotique :

$$(72) \quad \epsilon_p = O h_1^{K_1} h_2^{K_2} h_3^{K_3}$$

où K_i = degré de polynôme dans chaque direction, majorée par :

$$(73) \quad \epsilon_p \leq O h^K \quad \text{où} \quad K = \frac{K_1 + K_2 + K_3}{3}$$

où h est le volume de la boule.

La fonctionnelle (52) porte sur les dérivées d'ordre $m(m=1)$ de A , l'erreur sur les termes de l'intégrale est alors de la forme :

$$(74) \quad \epsilon_i \leq O h^{K-m}$$

Et finalement l'approximation sur l'intégrale L_e sera :

$$(75) \quad \epsilon_L \leq O h^{K+1-m}$$

Compte tenu de la satisfaction parfaite des conditions de compatibilité et par conséquent la validité de (67), l'ordre de convergence de la fonctionnelle (52) est également donnée par :

$$(76) \quad |L - L^*| \leq O h^{K+1-m}$$

Cette formule constitue en elle-même une norme de A, on obtient ainsi une estimation d'erreur telle que :

$$(77) \quad ||A-a|| \leq O h^{K+1-m}$$

Dans notre cas avec $m = 1$:

$$(78) \quad ||A-a|| \leq O h^K$$

Cet ordre théorique de convergence lié à l'approximation (69) respectant les conditions de compatibilité et de convergence, sera affecté par toute autre perturbation apportée par :

- L'approximation des frontières courbes,
- L'incompatibilité des éléments,
- L'intégration numérique.

II - 8 - CONCLUSION

Arrivés au terme de ce chapitre, nous souhaitons formuler quelques réflexions sur la méthode des éléments finis et son application à la modélisation des systèmes physiques.

L'intérêt que cette méthode a suscité dans le milieu scientifique réside non seulement dans ses performances du point de vue mathématique ou analyse numérique mais plutôt dans sa facilité d'adaptation à l'analyse des problèmes de la physique pour l'ingénieur. En effet, le but d'une telle méthode n'est pas la résolution d'un système d'équations pour calculer le potentiel vecteur mais l'analyse de l'évolution du système soumis à diverses contraintes.

La méthode des éléments finis dans notre esprit consiste à réaliser un certain nombre d'éléments de base qui ont un rapport étroit avec la réalité physique et présentent leurs caractéristiques physiques

définies en fonction d'un petit nombre de paramètres permettant ainsi la modélisation réelle d'un objet complet.

L'adaptation de la méthode des éléments finis aux problèmes de modélisation revient à définir et à construire ces éléments de base. La qualité de l'adaptation dépend très fortement de l'étude approfondie que l'on a réalisée sur l'aspect physique du système que l'on veut modéliser. De même les performances obtenues lors de l'exploitation proviennent d'une décomposition adéquate qui est elle-même liée à une bonne connaissance de la physique du problème que l'on cherche à résoudre.

C'est pour cette raison que nous avons consacré l'essentiel de ce chapitre aux problèmes de conversion d'énergie et à l'étude d'une fonction de l'état énergétique d'un système électrotechnique dans des cas très généraux. A partir de cette formulation, il est possible d'établir pour les éléments de référence les formules d'intégration liées à la fonctionnelle, en utilisant un système de coordonnées locales qui permet de choisir pour ces éléments les formes géométriques les plus simples. Ces formules d'intégration établies une fois pour toutes peuvent alors être adaptées à la modélisation de la plupart des domaines rencontrés sans qu'il soit nécessaire d'effectuer pour chaque problème les opérations de base réalisées sur les éléments de référence. En outre, le fait de baser le calcul sur l'étude énergétique du système permet d'obtenir directement les forces sans calculer forcément le tenseur de Maxwell ou les courants induits sans passer nécessairement par le calcul du flux ou de l'induction.

Enfin, si dans notre étude nous n'avons pas pris en compte le mouvement de la matière, nous sommes persuadés qu'il est possible de concevoir un élément magnétohydrodynamique adapté à des problèmes d'électrodynamiques plus généraux. Cependant, l'adaptation de la méthode des éléments finis à chaque problème nouveau doit être précédée d'une étude fondamentale du phénomène que l'on désire simuler, de manière à réaliser

une formulation variationnelle compatible avec le but recherché. C'est ainsi que nous avons préféré établir la fonctionnelle d'énergie liée aux problèmes électrotechniques à partir des notions fondamentales de la conversion énergétique au lieu de partir de l'opérateur différentiel qui en découle. En effet, nous sommes persuadé qu'il est préférable dans une telle étude de travailler sur un modèle complet qui prend en compte toutes les lois physiques plutôt que d'admettre dès le départ des hypothèses simplificatrices qui rendront le problème plus accessible au traitement mathématique.

La méthode des éléments finis ainsi libérée du moule un peu contraignant dans lequel les exigences mathématiques risquaient de la confiner, pourra dans le domaine de l'électrodynamique jouer pleinement le rôle d'élément de base dans la construction des modèles de simulation à la disposition de l'ingénieur.

C H A P I T R E I I I

FORMULATIONS EN ELEMENTS FINIS GEOMETRIQUES

	Pages
1 - Introduction-notation, définition.....	49
2 - Approximation de la fonctionnelle d'énergie sur un élément tridimensionnel général.....	51
2-1- Energie magnétique d'un élément.....	52
2-2- Energie des courants d'excitation.....	57
2-3- Energie des courants d'induits (Foucault).....	58
3 - Traitement de la saturation par la méthode de Newton-Raphson.....	59
4 - Fonction d'interpolation - Fonction de trans- formation.....	62
4-1- Interpolation polynomiale - Simplexes complet et non complet.....	63
4-2- Transformation par interpolation polynomiale.....	64
5 - Intégration numérique.....	69
6 - ... De l'utilisation d'éléments d'ordre élevé.....	70

III - 1 - INTRODUCTION

Après avoir exposé en détail la construction de la fonctionnelle d'énergie associée aux problèmes électromagnétiques, nous allons, au cours de ce chapitre, analyser la formulation des éléments finis dont la construction permettra de déterminer les grandeurs magnétiques par minimisation de la fonctionnelle.

Nous développons d'abord la fonction d'état électromagnétique pour un élément fini tridimensionnel général. Nous serons alors conduits à étudier pour cet élément les fonctions de transformation géométrique et d'interpolation sur les grandeurs physiques.

Le paragraphe suivant sera consacré à l'analyse critique des raisons qui nous ont conduits à construire pour les problèmes bidimensionnels (et à fortiori tridimensionnels) des éléments d'ordre élevé.

Nous présentons, dans la dernière partie de ce chapitre, une méthode pour le calcul des forces et des couples à partir de la minimisation de la fonctionnelle d'énergie par rapport au déplacement. †

- Notations et définitions

1 - Le potentiel vecteur A est défini par ses trois composantes A_{x_1} , A_{x_2} , A_{x_3} dans le système de coordonnées réel. Chacune de ces composantes est considérée comme une fonction de l'espace. Dans la suite du chapitre, le terme A_i désignera le vecteur correspondant au point i et dans les formules, toute dérivation par rapport à A_i devra être interprétée comme la dérivation par rapport à l'une de ses composantes.

2 - Les indices inférieurs représentent les numéros d'ordre des points d'interpolation et les indices supérieurs portent sur les composantes d'un vecteur. Par exemple : $A_i^1 = A_{i,x_1} \dots$

† Voir chapitre IV.

- *Système de coordonnées locales*

Pour que notre formulation soit générale à tous types d'élément, nous la développons dans un système de coordonnées locales (u_1, u_2, u_3) définies par une transformation générale :

$$(79) \quad \begin{cases} x_1 = G_1(u_1, u_2, u_3) \\ x_2 = G_2(u_1, u_2, u_3) \\ x_3 = G_3(u_1, u_2, u_3) \end{cases}$$

Cette transformation est caractérisée par sa matrice Jacobienne : $g = |g_{ij}|$ où $g_{ij} = \frac{\partial G_j}{\partial u_i}$. Si l'on désigne par D et Δ les opérateurs différentiels :

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} \\ \frac{\partial}{\partial u_2} \\ \frac{\partial}{\partial u_3} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

il vient pour toute fonction scalaire ϕ :

$$(80) \quad \nabla\phi = (\Gamma D)\phi$$

où $\Gamma = g^{-1}$

et pour tout vecteur A de l'espace :

$$(81) \quad \nabla \times A = (\Gamma D) \times A$$

Le terme vectoriel ΓD peut, d'après les conventions que nous avons énoncées ci-dessus, être considéré comme le transformé du vecteur D dans cette transformation.

3 - Nous utilisons, dans ce chapitre, la notation Anglo-Saxonne habituelle qui consiste à représenter un opérateur de dérivation comme un vecteur. Ainsi on définira l'opérateur :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\text{div } A = \nabla \cdot A \quad (\text{produit scalaire})$$

$$\text{Rot } A = \nabla \times A \quad (\text{produit vectoriel})$$

Nous avons préféré utiliser cette notation car nous manipulons, dans ce chapitre, de nombreuses formules de changement de coordonnées qui portent sur des opérateurs différentiels (gradient et rotationnel). Cette notation nous permet de conserver un exposé suffisamment clair en étant raisonnablement condensé.

III - 2 - APPROXIMATION DE LA FONCTIONNELLE D'ENERGIE SUR UN ELEMENT FINI TRIDIMENSIONNEL QUELCONQUE

La formulation des éléments finis, correspondant à la fonctionnelle (52) du chapitre précédent, est obtenue en développant son expression et celle de ses dérivées par rapport aux variables discrètes A_i définies sur chaque élément. Cette fonctionnelle contient trois termes, l'énergie emmagasinée et les énergies potentielles dues aux courants d'excitation et aux courants induits. Ils seront étudiés en portant une attention particulière au terme associé à l'énergie magnétique qui contient les non-linéarités du milieu.

III - 2 - 1 - Energie magnétique d'un élément

Cette énergie donnée par (5), peut dans un élément de volume Ω_e s'écrire sous la forme :

$$(82) \quad W_H^e = \int_{\Omega_e} \left[\frac{1}{2} \int_0^{B^2} v(|b^2|) db \right] d\Omega.$$

Le potentiel vecteur A est par définition approché par :

$$(83) \quad \begin{cases} A^1 = \sum_i A_i^1 \alpha_i(u_1, u_2, u_3) \\ A^2 = \sum_i A_i^2 \alpha_i(u_1, u_2, u_3) \\ A^3 = \sum_i A_i^3 \alpha_i(u_1, u_2, u_3) \end{cases}$$

que nous désignerons par :

$$(84) \quad A = \sum_i A_i \alpha_i$$

L'induction B étant sur l'élément une fonction des variables A_i , la dérivée de W_H^e par rapport à A_i s'écrit :

$$(85) \quad \frac{\partial W_H^e}{\partial A_i} = \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} v \frac{\partial |B^2|}{\partial A_i} d\Omega$$

Le calcul de (85) nécessite le développement de $|B^2|$ à l'intérieur de l'élément. Dans le système x, l'induction B est définie à partir du potentiel vecteur A par la relation :

$$(86) \quad B = \nabla \times A = (\nabla D) \times \left(\sum_i A_i \alpha_i \right)$$

On démontre que cette expression peut s'écrire :

$$(87) \quad B = \sum_i (\nabla D \alpha_i) \times A_i$$

Puis en posant $C_i = \Gamma D\alpha_i$

$$(88) \quad B = \sum_i (C_i \times A_i)$$

et donc

$$(89) \quad |B^2| = B \cdot B = \sum_i \sum_j (C_i \times A_i) \cdot (C_j \times A_j)$$

En développant cette expression on obtient :

$$(90) \quad |B^2| = \sum_i \sum_j [(C_i \cdot C_j)(A_j \cdot A_i) - (C_i \cdot A_j)(C_j \cdot A_i)]$$

Et finalement l'expression de la dérivée de l'énergie emmagasinée :

$$(91) \quad \frac{\partial W_H^e}{\partial A_i} = \int_{\Omega} \left\{ \nu \sum_j [(C_i \cdot C_j)A_j - (C_i \cdot A_j)C_j] \right\} |g| \, du_1 \, du_2 \, du_3$$

où $|g|$ est le déterminant de la matrice Jacobienne g . Cette intégrale peut être exprimée sous forme matricielle. Dans ce but, nous allons étudier les deux termes qui la composent.

Le premier terme de (91) devient :

$$(92) \quad \int \nu \sum_j (C_i \cdot C_j) A_j |g| \, du_1 \, du_2 \, du_3 = \sum_j S_{ij} A_j$$

qui définit alors une matrice S telle que :

$$(93) \quad S_{ij} = \int \nu (C_i \cdot C_j) |g| \, du_1 \, du_2 \, du_3 = \int \nu D^T \alpha_i (\Gamma^T \Gamma) D \alpha_j |g| \, d\Omega$$

Le deuxième terme doit être explicité par rapport à chaque composante. En prenant les indices n et k pour les diverses composantes il s'écrit, pour la composante A_i^n :

$$(94) \quad \int \nu \sum_j (C_i \cdot A_j) C_j^n |g| \, du_1 \, du_2 \, du_3 = \sum_j \sum_k U_{ij}^{n,k} A_j^k$$

Conduisant ainsi à une deuxième matrice U :

$$U_{ij}^{n,k} = \int_V C_i^k C_j^n |g| du_1 du_2 du_3$$

en rappelant que :

$$(95) \quad C_i^k = \Gamma_{K,1} \frac{\partial \alpha_i}{\partial u_1} + \Gamma_{K,2} \frac{\partial \alpha_i}{\partial u_2} + \Gamma_{K,3} \frac{\partial \alpha_i}{\partial u_3}$$

On obtient alors le système matriciel :

$$(96) \quad \left\{ \frac{\partial W_H^e}{\partial A_i^n} \right\} = |S| \{A\} + |U| \{A\}$$

La forme des matrices S et U est représentée sur la figure III-1.

- S et U en coordonnées réelles

Dans le cas où il n'y a pas de transformation des coordonnées, le Jacobien est la matrice unité et le système s'écrit :

$$(97) \quad \begin{aligned} S_{ij} &= \int_V \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j dx_1 dx_2 dx_3 \\ U_{ij}^{nk} &= \int_V \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k} \times \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_n} dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

car nous avons : $C_i = \nabla \alpha_i$.

- Problèmes bidimensionnels

Dans ce cas les vecteurs A_i et C_j seront de forme :

$$A_j = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ A_j^3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad C_i = \begin{vmatrix} C_j^1 \\ C_j^2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

S =

S_{11}		S_{12}					S_{1n}		
	S_{11}		S_{12}					S_{1n}	
		S_{11}		S_{12}					S_{1n}
			S_{22}						
				S_{22}					
					S_{22}				
								S_{nn}	
									S_{nn}
									S_{nn}

Sym.

U =

U_{11}^{11}	U_{11}^{12}	U_{11}^{13}	U_{12}^{11}	U_{12}^{12}	U_{12}^{13}		U_{1n}^{11}	U_{1n}^{12}	U_{1n}^{13}
	U_{11}^{22}	U_{11}^{23}		U_{12}^{22}	U_{12}^{23}			U_{1n}^{22}	U_{1n}^{23}
		U_{11}^{33}			U_{12}^{33}				U_{1n}^{33}
							U_{nn}^{11}	U_{nn}^{12}	U_{nn}^{13}
								U_{nn}^{22}	U_{nn}^{23}
									U_{nn}^{33}

Sym.

Figure III-1 : Les matrices S et U

par conséquent la matrice U disparaît du système (96) et la matrice S sera toujours donnée par les mêmes expressions (93 ou 96) écrites pour les vecteurs C_i à deux dimensions.

- *Potentiel scalaire*

Dans les problèmes où il est possible d'utiliser un potentiel scalaire l'analyse est un peu plus simple. En effet, compte tenu du terme de co-énergie dans (65) et après l'application de la formule d'interpolation (84) à la fonction scalaire ψ nous aurons :

$$(98) \quad \frac{\partial W'_H}{\partial \phi_i} = \int \mu(|H|^2) \frac{\partial (\nabla \psi)^2}{\partial \psi_i} du$$

En utilisant la formule de changement de variables (80) il vient :

$$(99) \quad \frac{\partial W'_H}{\partial \psi_i} = \sum_j S_{ij} \psi_j$$

où S est une matrice formellement identique à la matrice (93) dans laquelle il convient de remplacer v par μ .

Remarque : Les coefficients C_i étant définis par $C_i = g^{-1} D\alpha_i$ il est plus commode de les remplacer par des termes V_i définis par :

$$(100) \quad V_i = |g| C_i$$

Ce qui entraîne :

$$(101) \quad \begin{aligned} S_{ij} &= \int_{\Omega} \frac{v}{|g|} (V_i \cdot V_j) du_1 du_2 du_3 \\ U_{ij}^{nk} &= \int \frac{v}{|g|} V_i^n V_j^k du_1 du_2 du_3 \end{aligned}$$

L'expression de $|B|^2$ ou de $|H|^2$ (si on traite un problème scalaire) devient dans le calcul de $v(|B|^2)$ ou $\mu(|H|^2)$:

$$(102) \quad \begin{aligned} |B|^2 &= \frac{1}{|g|^2} \sum_i \sum_j [(V_i \cdot V_j)(A_i \cdot A_j) - (V_i \cdot A_j)(V_j \cdot A_i)] \\ |H|^2 &= \frac{1}{|g|^2} \sum_i \sum_j (V_i \cdot V_j) \psi_i \psi_j \end{aligned}$$

II - 2 - 2 - Energie due aux courants d'excitation

L'énergie potentielle due à ces courants est donnée par (10) ; il vient alors :

$$(103) \quad Q_i = \frac{\partial P_j}{\partial A_i} = - \int \alpha_i J |g| du_1 du_2 du_3$$

J étant une fonction connue dans l'espace x^i , l'intégration est réalisable à partir des formules de changement de repère (79). Dans la pratique J est soit constant à l'intérieur d'un élément, ce qui entraîne :

$$(104) \quad Q_i = - J F_i$$

définissant ainsi une matrice colonne

$$(105) \quad F_i = \int \alpha_i |g| du_1 du_2 du_3$$

soit représenté par une formule d'interpolation identique à (84), ce qui implique :

$$(106) \quad Q_i = \sum_j T_{ij} J_j$$

conduisant à une nouvelle matrice

$$(107) \quad T_{ij} = \int \alpha_i \alpha_j |g| du_1 du_2 du_3$$

III - 2 - 3 - L'énergie des courants induits (Foucault)

Le dernier terme de la fonctionnelle, qui concerne l'énergie due à ces courants, est de la forme $P_g = \frac{1}{2} \int \sigma' |A|^2 d\Omega$ (64), où σ' est une fonction connue de l'espace ($\sigma' = j\omega\sigma$ pour les régimes quasi-stationnaires). On en déduit que :

$$(108) \quad \frac{\partial P_g}{\partial A_i} = \sum_j [(\int \sigma' \alpha_i \alpha_j |g| du_1 du_2 du_3) A_j]$$

Compte tenu de (106) et (107) cette expression s'écrit :

$$(109) \quad \frac{\partial P_g}{\partial A_i} = \sum_j T'_{ij} A_j$$

et comme σ' est généralement constant à l'intérieur d'un élément : $T' = \sigma' T$

En définitive le système matriciel obtenu en écrivant les conditions nécessaires d'optimisation de L, est défini pour un élément par :

$$(110) \quad \left\{ \frac{\partial L}{\partial A_i} \right\} = |S| \{A\} + |U| \{A\} + |T'| \{A\} + \{Q\}$$

ou en regroupant par le système général :

$$(111) \quad \left\{ \frac{\partial L}{\partial A_i} \right\} = |Z| \{A\} + \{Q\}$$

Remarque : Elément de surface - Elément linéique

En ce qui concerne le terme en intégrale de surface représentant l'énergie de la source superficielle (64), on définira un élément de surface sur un plan local u, v tel que :

$$(112) \quad X^i = G_i(u, v) \quad i = 1, 2, 3$$

Le terme $\int A \times H \cdot n ds$ devient alors :

$$(113) \quad P_G = \int (A \times H) \cdot (U \times V) du dv$$

où U et V sont des vecteurs unité des axes curvilignes :

$$(114) \quad U_i = \frac{\partial X^i}{\partial u} \quad \text{et} \quad V_i = \frac{\partial X^i}{\partial v}$$

P_S dans (113) peut être écrit :

$$P_S = \sum_i \int_S \{ \alpha_i [(H.V)U - (H.U)V] A_i \} du dv$$

III - 3 - TRAITEMENT DE LA SATURATION PAR LA METHODE NEWTON-RAPHSON

Dans tous les problèmes où l'on a affaire à des milieux saturables la présence du terme de perméabilité rend les équations (111) non linéaires. D'où la nécessité d'employer une méthode itérative.

La méthode Newton-Raphson, grâce à sa convergence quadratique et à sa facilité d'adaptation dans un processus d'optimisation, a été largement appliquée, de manière approchée, dans d'autres domaines de la physique [25], [26]. Dans notre cas, la méthode a été utilisée, pour le traitement des éléments triangulaire du premier ordre, avec une formulation exacte de la matrice Jacobienne [27].

Nous présentons ici la généralisation de cette adaptation aux éléments d'ordre élevé curvilignes en général. Son efficacité et sa rentabilité ont pu être appréciées dans l'application des éléments quadrilatéraux curvilignes aux problèmes de champ bidimensionnel dans les milieux saturables que nous avons présentés dans [34].

Cette méthode consiste [37] à linéariser les équations (70) au voisinage d'une solution approchée $A_i^{(K)}$ par :

$$(115) \quad \frac{\partial L}{\partial A_i} = \left(\frac{\partial L}{\partial A_i} \right)^{(K)} + \sum_j \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial A_i \partial A_j} \right)^{(K)} (A_j - A_j^{(K)}) \right] + \dots$$

L'optimisation $(\frac{\partial L}{\partial A_i} = 0)$ entraîne alors :

$$(116) \quad A_j^{(S)} = A_j^{(K)} - \sum_i \left[\left(\frac{\partial^2 L}{\partial A_i \partial A_j} \right)^{(K)} \right]^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial A_i} \right)^{(K)}$$

L'indice (S) indique que A_j ainsi obtenu n'est qu'une approximation car nous avons négligé les autres termes de la série (115). Les relations (116) constituent ainsi le système récurrent ci-dessous :

$$(117) \quad \{A\}^{K+1} = \{A\}^K - [M^{(K)}]^{-1} \{R\}^{(K)}$$

avec : $R_i^{(K)} = \left(\frac{\partial L}{\partial A_i} \right)^{(K)}$ et $M_{ij}^{(K)} = \left(\frac{\partial R_i}{\partial A_j} \right)^{(K)}$

L'expression de $\{R\}^{(K)}$ pour chaque élément est donnée par (110). Nous développons celle de M appelé Jacobien pour un élément général.

- *Matrice Jacobienne de Newton-Raphson pour un élément*

Compte tenu de (110), (107), (96) et (85) nous pouvons écrire :

$$(118) \quad M^{(K)} = \left\{ \frac{\partial}{\partial A_i} \left(\frac{\partial L}{\partial A_j} \right) \right\} = S^{(K)} + U^{(K)} + T^{(K)} + \left\{ \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial A_i} \frac{\partial |B|^2}{\partial A_j} d\Omega \right\}$$

Nous développons alors les termes de la dernière matrice que nous appelons M.

$$(119) \quad M_{ij} = \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial |B|^2} \frac{\partial |B|^2}{\partial A_i} \frac{\partial |B|^2}{\partial A_j} d\Omega$$

Suivant (91) et après quelques manipulations cette matrice s'écrit :

$$(120) \quad M_{ij}^{nK} = \int_{\Omega_e} \frac{\partial v}{\partial |B|^2} \left[\sum_m (C_i \cdot C_m) A_m^K - (C_i \cdot A_m) C_m^K \right] \left[\sum_1 (C_j \cdot C_1) A_1^n - (C_j \cdot A_1) C_1^n \right] |g| du_1 du_2 du_3$$

où en termes de V (100), il suffit de remplacer C par V et de diviser le tout par $|g|^4$.

En particulier nous obtenons dans le cas du potentiel scalaire :

$$(121) \quad M_{ij} = \int \frac{2}{|g|^3} \frac{\partial \mu}{\partial |H|^2} [\Sigma(V_i \cdot V_m) \psi_m] [\Sigma(V_j \cdot V_1) \psi_1] du_1 du_2 du_3$$

et pour le potentiel vecteur bidimensionnel,

$$(122) \quad M_{ij} = \int \frac{2}{|g|^3} \frac{\partial v}{\partial |B|^2} [\Sigma(V_i \cdot V_m) A_m^Z] [\Sigma(V_j \cdot V_1) A_1^Z] du_1 du_2$$

- Convergence de la méthode de Newton-Raphson - Modélisation de la caractéristique magnétique

Lors de l'application de cette méthode, l'hypothèse de l'absence du phénomène hystérésis a été implicitement adoptée (si elle n'était pas déjà incluse dans toutes tentatives de la séparation de la variable du temps). La caractéristique magnétique est alors univoque et le problème d'optimisation (70) admet une solution (discutée au chapitre II). Si la méthode Newton-Raphson converge, elle convergera vers cette solution à condition que le modèle $v(B^2)$ corresponde exactement à la caractéristique magnétique.

D'autre part, les conditions de convergence de la méthode discutées dans [25], [28], portent sur la matrice Jacobienne et les dérivées secondes des termes $\frac{\partial L}{\partial A_i}$ qui sont entièrement caractérisées par le modèle $v(B^2)$ et notamment celui de $\frac{\partial v}{\partial B^2}$ (118) et (119).

Des caractéristiques magnétiques habituelles (et en particulier si l'on suppose que la pente est constante dans les zones à faible et forte induction), assurent la convergence de la méthode lorsque le point de départ est l'origine de A_i .

L'ordre de convergence et sa limite dépendent de la continuité et notamment de la monotonie de $\frac{\partial v}{\partial B^2}$. Il est clair qu'une fonction

analytique continue dérivable et monotone telle que dans [29], assure une convergence quadratique (convergence optimale de la méthode). Mais si l'imprécision d'un tel modèle par rapport à la caractéristique réelle peut être acceptable, il est loin d'être économique sur le plan du calcul numérique, en particulier dans les cas des éléments d'ordre élevés.

La modélisation habituelle par l'interpolation polynomiale est encore une fois très avantageuse, mais il lui manque la propriété essentielle nécessaire pour la convergence quadratique et sans oscillation : la continuité et la monotonie de $\frac{\partial v}{\partial B^2}$. Cependant, les fonctions splines [27] peuvent assurer un modèle continu pour v et sa dérivée. Néanmoins, l'ondulation de $\frac{\partial v}{\partial B^2}$ dans ce genre d'interpolation risque de perturber la convergence quadratique et en plus de créer une oscillation autour de la solution.

Compte tenu de ces remarques nous avons adopté un modèle utilisant les fonctions splines d'ordre (3) dont les intervalles, les coefficients et la pente finale seront déterminés par une méthode des moindres carrés pour approcher au mieux la courbe expérimentale et minimiser en même temps l'ondulation du modèle $\frac{\partial v}{\partial B^2}$.

III - 4 - FONCTIONS D'INTERPOLATION - FONCTIONS DE TRANSFORMATION

L'optimisation de la fonctionnelle conduit à travers la formulation qui vient d'être présentée, à la résolution d'un système d'équations dont les coefficients sont obtenus par l'évaluation dans chaque élément d'un certain nombre d'intégrales définies. Ces intégrales contiennent essentiellement les fonctions d'interpolation α_j (83) et éventuellement d'autres fonctions d'espace. La construction de ces polynômes d'interpolation (en respectant pour chaque élément les conditions de continuité et de convergence) et le calcul des intégrales correspondantes sont facilités par la définition des éléments de références que nous appellerons simplexes de formes géométriques simples (triangles équilatéraux, carrés, tétraèdres réguliers, cubes). La construction

des polynômes et le calcul des intégrales formulés pour les simplexes seront définis pour chaque élément réel appartenant à la famille du simplexe par une transformation appropriée du système de coordonnées. Ainsi chaque élément étant défini par sa forme (élément de référence) et un certain nombre de points (qui seront les sommets pour les éléments rectilignes), les fonctions de transformation seront construites de la même manière que les fonctions d'interpolation [33], ce qui entraînera, lorsque les points de définition de la fonction et du domaine coïncideront, le qualificatif d'iso-paramétrique pour l'élément correspondant.

III - 4 - 1 - Interpolation polynomiale - Simplexes complets

Les fonctions d'interpolation α_m dans (69) doivent répondre aux exigences de la convergence et de la compatibilité soient :

$$(123) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (a) & \alpha_m(M) \in H^1(\Omega_e) \quad M \in \Omega_e \\ (b) & \alpha_m(M_n) = \delta_{mn} \\ (c) & \sum \alpha_m(M) = 1 \\ (d) & \alpha_m(M_S) = 0 \quad M_S \in (S_1) \text{ et } M_m \notin (S_1) \end{array} \right.$$

(où S_1 représente l'un des côtés de l'élément).

Parmi toutes les formules d'interpolation polynomiales possibles, celles qui pour un nombre donné de points d'interpolation possèdent un degré minimal permettent une meilleure approximation avec un volume minimum de calcul [16]. Pour ces polynômes la vérification des conditions (123-b et c) entraîne celle de (123-d).

Les polynômes complets de Lagrange [16] pour les éléments carrés (et cubes) et les polynômes définis en coordonnées d'aire [31], [32], pour les triangles (et tétraèdres) satisfont parfaitement les conditions (123) avec une grande facilité d'implantation.

L'élément auquel l'une de ces deux formules est appliquée sera appelée élément complet. Il sera caractérisé par le degré des polynômes utilisés qui lui imposent une répartition bien définie des points d'interpolation (fig. III-2).

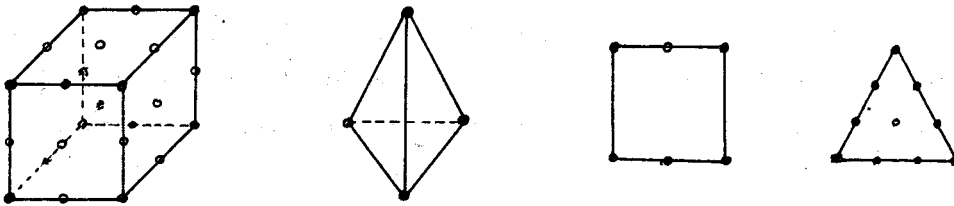


Figure III-2 : Simplexes complets

III - 4 - 2 - Transformation par interpolation

Les fonctions G_i de transformation (60) doivent :

1 - Assurer la bijectivité de la transformation de telle sorte que :

$$|g| \neq 0 \quad \text{dans le volume } |u^i| < 1$$

2 - Conserver la géométrie du domaine (les frontières).

3 - Respecter les conditions de convergence et de compatibilité (123) aux restrictions locales de la fonction (68).

En effet, cette dernière condition étant définie par la fonction d'interpolation $\alpha_i(u^i)$ (83), il est donc nécessaire que la formule d'interpolation satisfasse les conditions (123) dans le système de coordonnées réel.

Cette condition impose aux fonctions G_i , entre autre, les mêmes conditions de convergence et de compatibilité définies pour la

restriction locale de la fonction inconnue. Par conséquent, G_1 peut être choisie parmi ces dernières. En particulier si l'on définit un élément par un certain nombre de points, ces fonctions deviendront alors des fonctions d'interpolation analogues à (68). Pour que chaque côté de l'élément soit défini, de manière unique, par les points correspondants, il suffit que les fonctions d'interpolation soient les mêmes pour les trois coordonnées. On aura donc :

$$(124) \quad x^i = \sum_j \beta_j(u) X_j^i$$

où les β_j appartiennent à l'espace des fonctions α_j (83).

En ce qui concerne la condition de bijectivité, la formule (124) ne peut être assurée que pour une certaine forme d'élément. En effet, la formule (124), définie par les points d'interpolation, associe à un simplexe une famille d'élément pour lequel la transformation reste valable. Par exemple, tous les polygones convexes appartiennent au simplexe correspondant suivant une transformation polynomiale du premier ordre.

Dans le cas des éléments qui se trouvent sur une frontière courbe, la formule de transformation (124) ne peut plus respecter intégralement la forme de l'élément. Mais elle l'approximera par une surface polynomiale qui passe par un nombre défini de points sur la frontière fig. III-3.

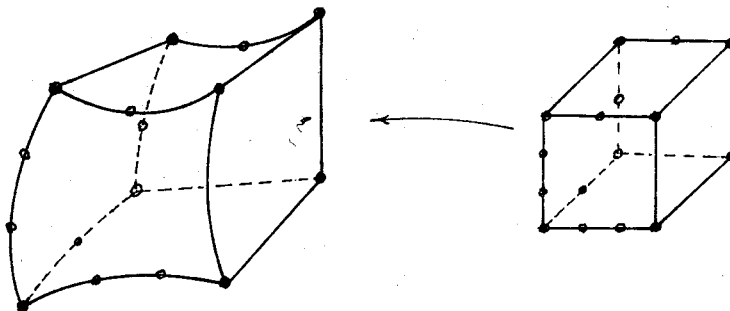


Figure III-3 : Eléments curvilignes

La condition (1) est dans le cas des éléments curvilignes le seul moyen de définir à priori l'appartenance d'un élément à la famille curviligne d'un simplexe. Il sera cependant possible de définir des conditions suffisantes ou nécessaires pour tester cette validité. Par exemple le test ci-après qui est nécessaire semble être suffisant dans les applications pratiques :

$$(126) \quad \int_{\Omega} |\bar{g}| \, d\Omega_e = \left| \int \bar{g} \, d\Omega_e \right|$$

où \bar{g} est le déterminant de la matrice Jacobienne.

Ainsi, à chaque simplexe il correspondra deux fonctions d'interpolation tout en appartenant à une même classe de polynôme mais définis selon des critères différents. Les points d'interpolation pour β_i sont des sommets et les points sur les côtés courbes pour approcher de mieux la forme géométrique du domaine. Tandis que le degré de α_i est défini par la précision d'approximation de la fonction. Néanmoins, le choix de la position des points intérieurs des côtés influencera cette précision.

Les éléments non complets que nous allons définir ci-dessous permettent d'assurer la meilleure position des points géométriques.

III - 4 - 3 - Polynômes d'interpolation pour un simplexe non complet

L'utilisation des simplexes complets définis au paragraphe III-4-1, est, dans le cas des éléments curvilignes, la source de difficultés importantes liées au choix des points intérieurs de l'élément. En effet, le choix de ces points a une grande influence sur la précision d'interpolation de la fonction et la régularité de la matrice Jacobienne de transformation, de plus la présence de ces points ou ceux situés sur les côtés rectilignes impose l'addition d'un nombre considérable de données qui ne sont pas significatives du découpage.

Par ailleurs l'utilisation d'éléments d'ordre différent au sein d'un même découpage rend la définition d'éléments simplexes non complets absolument nécessaire. Les simplexes non complets possèdent par définition un nombre de points d'interpolation quelconque qui correspondent toujours aux abscisses de Lagrange.

Il s'agit alors de définir les polynômes de degré minimal qui vérifient les conditions (123). Nous avons d'abord utilisé la méthode des lignes droites [34] pour les éléments quadrilatéraux et pour les points situés sur le contour. Puis, dans nos programmes, nous avons préféré d'utiliser la méthode ci-dessous qui permet d'établir de manière unique ces polynômes avec une grande facilité d'implantation. Cette méthode s'applique également aux éléments tri-dimensionnels et pour toute combinaison des points d'interpolation. Le procédé correspondant consiste à construire ces polynômes à partir des polynômes de Lagrange en enlevant les points en excédant.

Soit un élément à $(N+1)$ noeuds pour lesquels nous avons défini les polynômes α_i qui correspondent aux conditions (123). Toute fonction A peut sur cet élément être interpolée par :

$$(127) \quad A = \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i(\Omega) A_i$$

Si l'on désire retirer le point k de cet élément on peut démontrer que pour toute relation linéaire telle que :

$$(128) \quad A_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N d_j A_j \quad \text{avec} \quad \sum d_j = 1$$

Les polynômes β_j construits à partir des polynômes α_i suivant la formule :

$$(129) \quad \beta_j = \alpha_j + d_j \alpha_k$$

satisfont les conditions (123). On démontre en outre qu'il existe une seule combinaison des paramètres d_j qui rend le degré des polynômes β_j minimal. Si le point k est situé sur le côté de l'élément, les paramètres d_j sont les coefficients du polynôme de Lagrange écrits pour les points qui définissent ce côté et sont égaux à zéro pour les autres points.

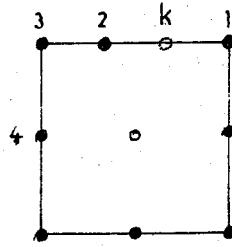
Exemple :

$$d_1 = \frac{1}{2}$$

$$d_2 = 1$$

$$d_3 = -\frac{1}{2}$$

$$d_j = 0 \quad j \geq 4$$

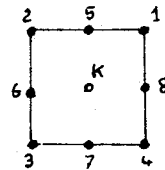


Pour les points situés à l'intérieur, le nombre des paramètres peut être réduit car pour les points j et n dans le simplexe qui sont à la même distance du point k , on aura $d_j = d_n$. On achèvera la détermination des d_j en annulant les coefficients des termes de plus haut degré des polynômes β_j .

Exemple - 1

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = \gamma$$

$$d_5 = d_6 = d_7 = d_8 = \lambda$$



$$\beta_1 = \frac{1}{4} uv (1+u) (1+v) + \gamma (1-u^2) (1-v^2) = \left(\frac{1}{4} + \gamma\right) u^2 v^2 + \dots$$

$$\beta_5 = \frac{1}{2} v(1-u^2) (1+v) + \lambda (1-u^2) (1-v^2) = \left(-\frac{1}{2} + \lambda\right) u^2 v^2 + \dots$$

d'où $\gamma = \frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ qui vérifie bien $\sum d_i = 1$.

Exemple - 2

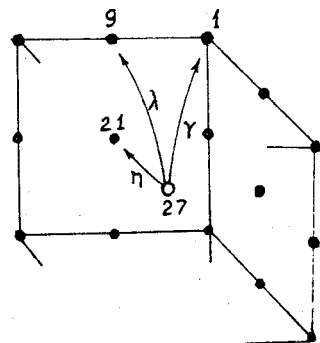
$$d_i = \gamma \quad i = 1, 8$$

$$d_{i+8} = \lambda \quad i = 1, 12$$

$$d_{i+20} = \eta \quad i = 1, 6$$

$$\beta_1 = \left(\frac{1}{8} - \beta\right) u^2 v^2 w^2 + \dots$$

$$\beta_9 = -\left(\frac{1}{4} + \gamma\right) u^2 v^2 w^2 + \dots$$



$$\beta_{21} = \left(\frac{1}{2} - \eta\right) u^2 v^2 w^2 + \dots$$

d'où : $\gamma = \frac{1}{8}$, $\lambda = -\frac{1}{4}$, $\eta = \frac{1}{2}$ vérifiant $\sum d_i = 1$

Nous avons alors :

$$\beta_1 = \frac{1}{8} (1+u)(1+v)(1+w)(1-w+uv+vw+wu)$$

$$\beta_9 = \frac{1}{4} (1-u^2)(1+v)(1+w)(v+w-1)$$

$$\beta_{21} = \frac{1}{2} (1-u^2)(1-v^2)(1+w)$$

III - 5 - INTEGRATION NUMERIQUE

Dans la définition des simplexes, les intégrations (93, 94) concernant tous les éléments d'un même type peuvent être effectuées indépendamment des conditions d'application. Dans les problèmes où les fonctions ne sont pas trop compliquées et les intégrands linéaires il est possible d'effectuer une intégration analytique. Cependant, compte tenu du caractère polynomial des intégrands et de la géométrie des simplexes (carrés, cubes) il est très facile de construire des formules d'intégration numérique efficaces et peu coûteuses [36]. En effet, toutes ces intégrations sont de la forme :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(u_1, u_2, u_3) du_1 du_2 du_3$$

L'application d'une formule d'intégration numérique (comme la formule de Gauss par exemple) conduit à remplacer l'intégrale par une expression algébrique de la forme :

$$(130) \quad I = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p W^{(i,j,k)} f(u_1^{(i)}, u_2^{(j)}, u_3^{(k)})$$

où m, n, p sont les nombres de points choisis et $W^{(i,j,k)}$ sont les poids de la formule d'intégration qui sont égaux aux produits des poids d'intégration dans chaque direction.

La rentabilité et l'efficacité de cette méthode dépend effectivement du nombre de points d'intégration choisis. Les limites inférieure et supérieure de ce nombre peuvent être facilement estimées en examinant les intégrants qui sont dans notre cas des polynômes dont le degré est défini par celui des polynômes d'interpolation et donc par le degré du simplexe correspondant.

III - 6 - ... DE L'UTILISATION D'ÉLÉMENTS D'ORDRE ÉLEVÉ

Les premiers éléments utilisés dans les calculs de champs magnétiques bidimensionnels étaient des éléments triangulaires du premier ordre [17]. Les éléments d'ordre élevé apportent une bonne précision avec une utilisation plus simple [35]. Les éléments triangulaires d'ordre élevé ont été utilisés pour des problèmes linéaires à frontière rectiligne. L'utilisation de ces éléments dont l'efficacité provient de l'usage de formules d'intégration analytique, perd de son intérêt dans les problèmes non linéaires et les domaines à frontières courbes. En effet, la nécessité de recourir à l'intégration numérique rend la famille curviligne des simplexes carrés et cubiques nettement plus intéressante.

Cependant, le travail initial de formulation et d'implantation de la méthode augmente avec l'ordre des éléments, et il est nécessaire dans une comparaison objective d'évaluer les coûts d'exploitation et d'amortissement de cet investissement.

Nous allons, à titre d'exemple, présenter une estimation des bilans pour des éléments quadrilatéraux par rapport aux éléments triangulaires du premier ordre. À précision égale le rapport du nombre d'éléments d'un découpage triangulaire à un découpage en quadrilatère d'ordre k varie comme k^4 , (fig. III-5), ce qui diminue d'autant le travail humain de préparation des données. Le temps de calcul est composé de construction et de résolution du système d'équations.

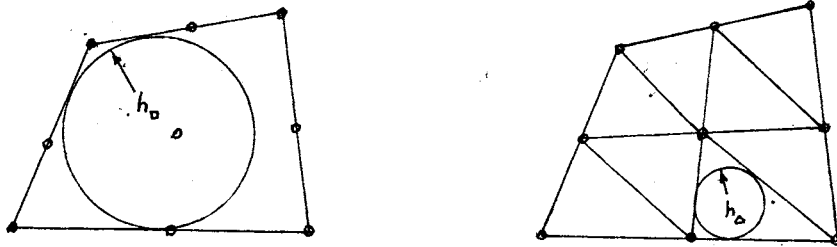


Figure III-5 : Comparaison des découpages en éléments quadrilatère et triangulaire

Le temps de construction de la matrice qui est plus important pour les éléments d'ordre élevé est cependant négligeable devant le temps de résolution du système dans une exécution complète. Le temps de résolution du système est fonction de la taille de la matrice et de la largeur de la bande à laquelle cette dernière est réductible. La largeur de la bande augmente avec l'ordre de l'élément et la taille de la matrice est proportionnelle au nombre de variables. Une estimation des temps de résolution du système par élimination de Gauss permet d'écrire en faisant intervenir l'ordre de convergence (78) :

$$(131) \quad \frac{t_q^k}{t_t} \approx \left(\frac{k^8}{N_q} \right)^3$$

où les indices q et k indiquent les éléments quadrilatères d'ordre k et t les éléments triangulaires du premier ordre.

Pour des éléments du second ordre la formule montre que l'utilisation de ces derniers est justifiée pour des problèmes conduisant à un nombre de variables supérieur à 200.

Cette estimation sera minorée par un découpage optimal. Un tel découpage portant sur la régularité de la fonction est plus facile

à réaliser pour des éléments triangulaires et exige un certain "savoir-faire" qui s'acquiert cependant assez facilement par expérience.

En outre, la réduction de la largeur de la bande est rendue cruciale par l'utilisation d'éléments d'ordre élevé. Cette opération nécessite un réarrangement de la matrice par une renumérotation des noeuds. Cette renumérotation a été réalisée par une méthode quasi-optimale semi-automatique [38] que nous avons adapté à des éléments d'ordre élevé.

Nous complétons cette étude théorique par l'analyse économique des cas d'exploitation dont nous avons eu connaissance.

Cette exploitation effectuée par d'autres personnes que l'auteur sur le même programme adapté uniformément aux deux types d'éléments, a privilégié l'utilisation d'éléments quadrilatéraux d'ordre élevé.

CHAPITRE IV

FORCE

	Pages
1 - Introduction - Forces d'origines électro- magnétiques.....	73
2 - Principe de notre méthode.....	75
2-1- Démonstration théorique de la méthode - Densité de force.....	76
2-2- Force et couple - Mouvement collectif.....	84
3 - Formulation en Eléments Finis.....	89
4 - Conclusion.....	93

IV - 1 - INTRODUCTION

- *Forces d'origine électromagnétique*

La notion de force est étroitement liée à celle du déplacement d'un objet physique. En effet, la force est définie par la variation d'une énergie par rapport à ce déplacement. Les forces dites d'origine électromagnétique sont donc liées à la variation de l'énergie électromagnétique du système. Ainsi le mouvement collectif d'un objet solide définit la force globale et toute déformation locale donne un sens à la densité de force.

Par le principe de conservation d'énergie ou le principe des travaux virtuels nous avons :

$$(132) \quad \delta L(l,A) + \int_V f \cdot \delta l \, d v + \sum_i F_i \cdot \delta l_i = 0$$

où l est la fonction de déplacement, f la densité de force et F_i sont des forces de contact appliquées aux points définis i . En réalité, cette relation est l'expression de l'optimisation à un instant donné de l'état électromécanique du système en fonction du déplacement. Le deuxième terme représente en effet la variation d'énergie mécanique liée aux masses. Cet état général doit être stationnaire en fonction de A et de l . Dans le chapitre précédent nous avons étudié ce problème d'optimisation par rapport au champ magnétique. Dans la mise en équation la fonction du déplacement, qui définit la position des éléments physiques du système, a été supposée connue, ce qui nous a permis d'évaluer les intégrales dans l'espace.

Dans les problèmes, où il s'agit des mouvements des corps solides, la fonction du déplacement est entièrement définie par un certain nombre de paramètres qui déterminent la rotation et la translation de chaque objet. Dans ce cas, l'étude complète du système électro-

mécanique se ramène à la détermination des forces d'origine électromagnétique correspondant à ces mouvements collectifs qui viennent ensuite compléter les équations intégrales du mouvement. Par contre, dans les cas où la matière subit une déformation, comme par exemple les problèmes de magnétohydrodynamique ou magnétostriction, la fonction de déformation ou d'écoulement sera une fonction inconnue de l'espace. Il sera donc nécessaire de faire intervenir les densités de force dans les équations de mouvement ou d'ajouter à notre fonctionnelle l'état mécanique du système.

Dans tous ces cas nous devons donc déterminer la variation de la fonction d'état électromécanique au cours d'un déplacement, soit par dérivation par rapport aux paramètres des mouvements collectifs, soit par application d'une méthode variationnelle.

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode variationnelle pour la détermination ou la formulation générale des forces de toute nature. La fonctionnelle correspondante sera bien entendu celle que nous avons déjà établie. Nous définissons d'abord le milieu électromagnétique continu, nous exprimons ensuite l'état énergétique de chaque particule élémentaire dans son système de coordonnées. Le principe variationnel de la méthode consiste donc à expliciter la fonction du déplacement, incluse de manière implicite dans les opérateurs différentiels, par une transformation du système de coordonnées.

Dans une première étape nous appliquons cette méthode à la formulation générale de la densité de force. Cette formulation aboutissant au tenseur de Maxwell dans les cas traités jusqu'ici, permet de présenter le principe de la méthode et de justifier la procédure qui sera utilisée dans la formulation générale en éléments finis. De même l'étude de la force globale aboutissant dans une étude théorique, à l'intégration du tenseur sur la surface permet de décrire l'algorithme adopté dans l'application de la méthode des éléments finis. Cette

méthode permet de calculer la valeur des forces sans aucune approximation supplémentaire et avec un coût de calcul équivalent (dans le cas des triangles premier ordre) ou nettement plus faible (dans le cas général) que par l'application brutale du tenseur de Maxwell. Les algorithmes correspondant contenant les mêmes termes que les formules du chapitre III, assurent en outre, une grande facilité d'implantation.

IV - 2 - PRINCIPE DE LA METHODE

- Définition du milieu continu électromagnétique

Nous définissons par μ et ϵ un milieu électromagnétique continuellement réparti dans l'espace. Un élément de ce milieu aura donc une perméabilité μ et une permittivité ϵ . A tout point de l'espace il correspond un potentiel vecteur A et un potentiel scalaire ϕ qui associent à chaque élément une quantité d'énergie, qui dépend de la valeur des grandeurs μ et ϵ caractéristiques de leurs propriétés électromagnétiques.

Dans cet exposé nous avons négligé le courant de déplacement et donc nous négligeons toute propagation d'onde dans le milieu. En effet, nous supposons que les mouvements des objets sont trop lents pour pouvoir créer une vibration propagatoire sensible dans le milieu, ce qui explique que les ondes électromagnétiques ne participent pas à la conversion d'énergie en électrotechnique.

Par contre, l'énergie électrique absente dans notre formulation de l'état électromagnétique peut être incluse dans l'évaluation des forces. En effet, nous avons supprimé le terme de l'énergie électrique ce qui nous a permis, par l'hypothèse de $\frac{\partial D}{\partial t} = 0$ et le choix de la jauge de Coulomb ($\nabla \cdot A = 0$), de séparer le calcul des deux champs. Nous avons donc étudié le champ magnétique en supposant que la répartition de la densité de courant est connue ou qu'elle ne dépend que de A . Le champ électrique pourrait en effet être séparément déterminé par cette répartition et celle des charges d'espaces.

Nous aborderons l'étude des forces d'origine magnétique en considérant l'énergie magnétique, celles d'origine électrique s'obtenant de manière analogue.

IV - 2 - 1 - Démonstration du principe de la méthode

Nous appliquons la méthode au calcul de la densité de force en un point et de la force globale sur la surface d'un volume borné, en absence de courant et en introduisant le potentiel scalaire (65). Cette étude nous permet de présenter et de justifier le principe de la méthode que nous employons ensuite dans le cas du potentiel vecteur à trois dimensions en présence de courant.

- Densité de force en un point $J = 0$

- Principe variationnelle de la méthode

La densité de force en un point indicé i , est définie par la variation d'énergie du système dans une déformation virtuelle ξ_i appliquée au point i telle que :

$$(133) \quad f \cdot \xi_i = \lim_{\delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\delta v} \delta L' \quad \forall \xi_i \rightarrow 0$$

où L' est la fonctionnelle de coénergie (65).

Nous prenons donc un volume δv autour du point i tel qu'au delà de son contour extérieur le milieu reste immobile (fig. IV-1). Il en résulte que le milieu étant continu, toute fonction de déplacement l dans le volume δv sera également continue. Un tel déplacement entraîne un changement de position,

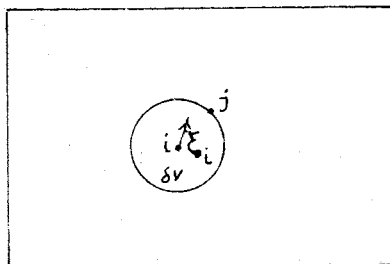


Figure IV-1

pour tous les points situés à l'intérieur du volume δv défini par :

$$(134) \quad X' = X + l(X)$$

Le terme en intégrale de surface dans la fonctionnelle L' (65), ne varie pas dans ce déplacement. En effet, il s'agit d'une variation en fonction du déplacement en gardant l'autre variable indépendante (le potentiel) constante. Le champ H est le gradient du potentiel ψ par rapport aux coordonnées réelles du milieu (X'), et la densité d'énergie doit être intégrée dans ce même système qui dépend du déplacement par (134).

- Séparation de la fonction déplacement par une transformation du système de coordonnées

La relation (134) constitue en soi la formule de transformation de coordonnées. La dimension infinitésimale de δv , nous permet d'approximer la fonction l par son développement en série ou en général par une fonction d'interpolation qui respectera sa continuité et sa dérivabilité. Nous avons déjà traité dans le chapitre III, des fonctions d'interpolation qui ont ces propriétés.

Nous utilisons donc la même notation pour l :

$$(135) \quad l(X) = \sum_j \beta_j(X) l_j = \beta_i(X) l_i \quad \text{car } l_j = 0 \quad \forall j \neq i \quad j \in (S)$$

Nous rappelons que β_i vérifie pour toute fonction scalaire :

$$(136) \quad \left\{ \begin{array}{l} l^K \sim \beta_i^K l_i^K \rightarrow l_i^K \\ \text{et} \\ \nabla l^K \sim \nabla \beta_i^K l_i^K \rightarrow \nabla l_i^K \\ \nabla \cdot l \sim \nabla \beta_i \cdot l \rightarrow \nabla \cdot l_i \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} l_i^K = \text{composante } X^K \text{ de } l_i \\ \text{Quand } X \rightarrow X_i \\ \delta v \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

Il suffit pour cela que β_i soit continue et au moins une fois continuellement dérivable ; c'est bien la même fonction que (83). La formule (133) devient alors :

$$(137) \quad f_i \cdot \xi_i = \lim_{\delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\delta v} \frac{\partial L'}{\partial l_i} \cdot \xi \quad \text{avec } \xi = \delta l$$

La fonctionnelle L' est donc une fonction de l_i qui intervient implicitement dans tout opérateur différentiel et intégral. En effet la formule (135) est équivalente à celle utilisée dans le chapitre III. Nous utilisons les mêmes notations pour écrire les formules de transformations :

$$(138) \quad \begin{cases} g = I + D \beta_i l_i \\ \Gamma = g^{-1} \end{cases} \quad \text{avec } g_{Kj} = \delta_{Kj} + \frac{\delta \beta_i}{\partial X^K} l_i^j$$

Le champ $H = \nabla \psi$ s'écrit donc :

$$(139) \quad H = \nabla' \psi = (\Gamma D) \psi$$

(où ∇' indique l'opérateur différentiel par rapport à X') et le terme en co-énergie :

$$(140) \quad \delta L' = \delta \int_{\delta v} \left(\frac{1}{2} \int_0^{H^2} \mu \, dh^2 \right) |g| dv = \int_{\delta v} w'_H |g| dv$$

le contour étant fixe nous pouvons écrire :

$$(141) \quad \delta L' = \int_{\delta v} \delta w'_H |g| dv + \int_{\delta v} w'_H \delta |g| dv$$

Développons les termes de cette relation :

$$(142) \quad \delta w'_H = \int_0^{H^2} \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial l_i} \cdot \xi \, dh^2 + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial H^2}{\partial l_i} \cdot \xi$$

Par la définition du milieu électromagnétique, μ est associé aux éléments de volume dv' et peut dépendre éventuellement de la densité

de masse ρ associée également à ce volume. Or, cette dernière varie en fonction du déplacement :

$$\rho |g| dv = dm$$

$$(142) \quad \frac{\partial \rho}{\partial l_i} |g| + \rho \frac{\partial |g|}{\partial l_i} = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial l_i} = - \rho \frac{\partial |g|}{\partial l_i} / |g|$$

d'où

$$(143) \quad \frac{\partial \mu}{\partial l_i} = - \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \frac{\partial |g|}{\partial l_i} / |g|$$

On aura donc pour (141) :

$$(144) \quad \delta L' = \int_{\delta v} \frac{1}{2} \mu \delta H^2 \cdot \xi |g| dv + \int_{\delta v} \left[\int_0^H (\mu - \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \rho) h dh \right] \frac{\partial |g|}{\partial l_i} \cdot \xi dv$$

Développons le premier terme :

$$(145) \quad \frac{1}{2} \mu \delta H^2 = B. \frac{\partial H}{\partial l_i} \cdot \xi$$

Dans l'expression (139) de H, seul le terme Γ dépend du déplacement (138), l'expression (145) devient alors :

$$(146) \quad B. \frac{\partial H}{\partial l_i} \cdot \xi = B. \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial l_i} D\psi \right) \cdot \xi$$

Pour cette dérivation nous pouvons écrire :

$$(147) \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial l_i} = - \Gamma \frac{\partial g}{\partial l_i} \Gamma$$

Compte tenu de (138), la dérivée de g par rapport à chacune des composantes devient :

$$(148) \quad \frac{\partial g}{\partial l_i}^{(k)} = \delta_{jk} D \beta_i, \quad \text{égale à } [0 \ D \beta_i \ 0] \text{ pour } k = 2$$

et (146) pour $l_i \rightarrow 0 \quad g, \Gamma \rightarrow I$

$$(149) \quad B. \frac{\partial H}{\partial l_i} \cdot \xi = - \sum_k BH^{(k)} \cdot \nabla_{\beta_i} \xi^{(k)}$$

En particulier quand $\delta v \rightarrow 0$, compte tenu de (136) nous aurons :

$$(150) \quad B. \delta H = - \sum_k BH^{(k)} \cdot \nabla_{\xi}^{(k)}$$

Suivant l'identité :

$$(151) \quad \nabla \cdot (\xi \cdot BH) = \sum_k BH^{(k)} \cdot \nabla_{\xi}^{(k)} + \xi \cdot (\nabla \cdot BH)$$

L'intégrale de (150) s'écrit :

$$(152) \quad \int_{\delta v \rightarrow 0} B. \delta H |g| dv = - \int_{\delta v \rightarrow 0} [\nabla \cdot (\xi \cdot BH) - \xi \cdot (\nabla \cdot BH)] dv$$

Le premier terme, par la formule de Gauss, ramène le terme $\xi \cdot BH$ sur la surface où $\xi = 0$, donc :

$$(153) \quad \frac{1}{\delta v} \int_{\delta v} B. \delta H dv \xrightarrow{\delta v \rightarrow 0} \xi \cdot (\nabla \cdot BH)$$

Traitons à présent le deuxième terme de (141). Le déterminant $|g|$ est donné par :

$$(154) \quad \begin{cases} |g| = U_1 \cdot U_2 \times U_3 = U_2 \cdot U_3 \times U_1 = U_3 \cdot U_1 \times U_2 \\ \text{avec} \\ U_k = \frac{\partial X^k}{\partial X^k} = \epsilon^{(k)} + \frac{\delta \beta_i}{\partial X^k} l_i \end{cases}$$

où $\epsilon^{(k)}$ est le vecteur unité de base de l'axe $X^{(k)}$ d'où :

$$(155) \quad \frac{\partial |g|}{\partial l_i} \cdot \xi = [\epsilon(U_2 \times U_3) + \epsilon(U_3 \times U_1) + \epsilon(U_1 \times U_2)] \cdot (D\beta_i \xi)$$

Pour $l_i = 0$:

$$(156) \quad \left(\frac{\partial |g|}{\partial l_i} \cdot \xi \right)_{l_i=0} = \sum_k \epsilon \epsilon^{(k)} \cdot \nabla_{\beta_i} \xi^{(k)}$$

et pour la limite $\delta v \rightarrow 0$; le terme correspondant dans (144) devient :

$$(157) \quad \int_{\delta v} \int_0^H \left(\mu - \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \rho \right) h dh \left[\frac{\partial |g|}{\partial l_i} \cdot \xi \right] dv \xrightarrow{\delta v \rightarrow 0} \int_{\delta v} (E_H \sum_k \epsilon \epsilon^{(k)} \cdot \nabla \xi^k) dv$$

or

$$(158) \quad \nabla \cdot (I \cdot \xi) E_H = E_H \sum_k \epsilon \epsilon^{(k)} \cdot \nabla \xi^{(k)} + (\nabla \cdot I) \cdot \xi E_H$$

et compte tenu de $\xi = 0$ sur le contour, (157) devient :

$$(159) \quad \frac{1}{\delta v} \int_{\delta v} \int_0^H \left(\mu - \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \rho \right) h dh \left[\frac{\partial |g|}{\partial l_i} \cdot \xi \right] dv \xrightarrow[\substack{\delta v \rightarrow 0 \\ l_i = 0}]{} - E_H (\nabla \cdot I) \cdot \xi$$

D'où la densité de force dans (137), en substituant (159) et (152) dans (144) :

$$(160) \quad f = \nabla \cdot [BH - I \int_0^H \left(\mu - \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \rho \right) h dh]$$

Et nous avons directement le tenseur de Maxwell dans le cas général :

$$(161) \quad T = BH - I \int_0^H \left(\mu - \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \rho \right) h dh$$

Qui correspond bien à [41] dans le cas linéaire et à [44] sans magnétostriction :

- Potentiel vecteur tridimensionnel - Présence de courant

Dans le cas général, le champ magnétique est représenté par le potentiel vecteur à trois dimensions et la fonctionnelle d'énergie est donnée par (52). Nous procédons de la même manière pour définir la densité de force et puis la formuler à partir de (52).

La formule (133) s'écrit alors :

$$(162) \quad f \cdot \xi = - \lim_{\delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\delta v} \delta L$$

Parmi les termes de L (52), seule l'énergie emmagasinée participe à cette variation. Car, le contour étant fixe le terme en intégrale de surface restera constant. De même les deux termes en J et g resteront inchangés, puisqu'ils dépendent de la charge électrique et de sa vitesse. Cette dernière est définie par E_0 ou $\frac{\partial A}{\partial t}$ qui ne dépend pas du déplacement virtuel supposé à un instant donné.

L'induction B écrite en système de coordonnées du milieu $\delta v'$ devient :

$$(163) \quad B = \nabla' \times A' = (\nabla D) \times (\nabla A)$$

et la variation de L :

$$(164) \quad \delta L = \int_{\delta v} \delta w_H |g| dv + \int_{\delta v} w_H \delta |g| dv$$

Le deuxième terme se développe exactement comme (144).

Nous développons donc le premier :

$$(165) \quad \delta w_H = \delta \int_0^{B^2} \frac{1}{2} v db^2 = H \cdot \delta B$$

Pour des raisons dont nous parlerons dans la conclusion, nous supposons cette fois que la perméabilité ne change pas dans cette déformation. En effet, notre déformation fictive n'entraîne pas forcément une déformation des matériaux associés.

Compte tenu de (163), (165) devient :

$$(166) \quad H \cdot \delta B = H \cdot \frac{\partial B}{\partial l_i} \cdot \xi = H \cdot \left[\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial l_i} D \right) \times A + (\nabla D) \times \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial l_i} A \right) \right]$$

Suivant (147) et (148) et pour $l_i=0$ nous aurons :

$$(167) \quad H \cdot \delta B = - \sum_k \nabla \beta_i \xi^{(k)} \times \frac{\partial A}{\partial X^k} + \xi^{(k)} \nabla \times \nabla \beta_i A^{(k)}$$

Le deuxième terme peut s'écrire :

$$(168) \quad \nabla \times \nabla_{\beta_i} A^{(k)} = A^{(k)} \nabla \times \nabla_{\beta_i} + \nabla A^{(k)} \times \nabla_{\beta_i}$$

(167) devient alors :

$$(169) \quad \begin{aligned} H \cdot \delta B &= - \sum_k H \cdot \nabla_{\beta_i} \xi^{(k)} \times \left(\frac{\partial A}{\partial X}(k) - \nabla A^{(k)} \right) \\ &= - \sum_k \nabla_{\beta_i} \xi^{(k)} \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial X}(k) - \nabla A^{(k)} \right) \times H \end{aligned}$$

Or,

$$(170) \quad \left(\frac{\partial A}{\partial X}(k) - \nabla A^{(k)} \right) = B \times \delta_k$$

Où

$$(171) \quad \delta_k = \delta_{k1} \epsilon^{(1)} + \delta_{k2} \epsilon^{(2)} + \delta_{k3} \epsilon^{(3)} \quad (\delta : \text{Kronecker})$$

Donc :

$$(172) \quad (B \times \delta_k) \times H = (H \cdot B) \delta_k - H^{(k)} B$$

En utilisant l'identité :

$$(173) \quad \nabla_{\beta_i} \cdot V = \nabla \cdot (\beta_i V) - \beta_i \nabla \cdot V$$

dans (169), nous avons :

$$(174) \quad \frac{1}{\delta V} \int_{\delta V} H \cdot \delta B \, dv \xrightarrow[\delta V \rightarrow 0]{} \nabla \cdot [I(H \cdot B) - BH] \cdot \xi_i$$

Et finalement la densité de force :

$$(175) \quad f = \nabla \cdot [BH - \nabla \cdot I(H \cdot B - \int_0^B hdb)]$$

Ou :

$$(175) \quad f = \nabla \cdot (BH - I \int_0^H b dh)$$

Nous retrouvons donc le même tenseur.

Gardons à présent les formules de la force moyenne pour un volume fini δv suivant (149, 156, 169 et 172) :

$$(176) \quad f_m = \frac{\partial L'}{\partial l_i} = - \frac{\partial L}{\partial l_i}$$

$$(177) \quad f_m = \int_{\delta v} [-(B \cdot \nabla \beta_i)H + I \cdot \nabla \beta_i \int_0^H (\mu - \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \rho) h dh] dv \quad \dagger$$

En effet, dans le cas d'application de la méthode des éléments finis les volumes δv sont finis et ne tendent pas vers zéro. Nous nous arrêtons donc à l'expression (177) qui détermine la valeur moyenne de la force sans aucune approximation autre que celle déjà introduite par la méthode ; car la fonction d'interpolation est dérivée une fois, comme dans la formulation du champ.

IV - 2 - 2 - Force et couple, mouvement collectif

La force globale exercée sur un corps solide de volume v est définie par la variation de la fonction d'état énergétique du système pour un déplacement fictif ξ de ce corps :

$$(178) \quad F \cdot \xi = -\delta L = \delta L'$$

Considérons la surface (S'), fig. IV-2, située à une distance δ de (S). Nous pouvons également définir cette force par la somme des forces exercées dans le volume (v') borné par (S') quand δ tend vers zéro.

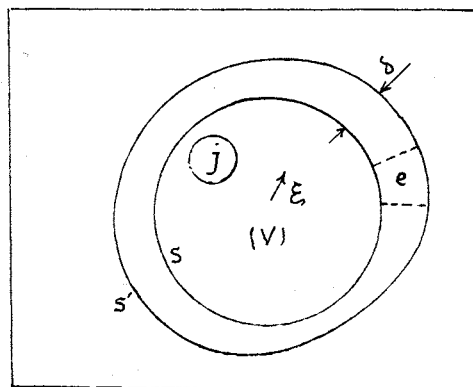


Figure IV-2 : Mouvement fictif du corps v - Zone déformée

† Voir la conclusion IV-4.

Nous supposons en effet que le déplacement ξ de v produit une déformation dans le milieu continu v' dont la surface extérieure (S') est fixe. La variation de L ou de L' dans (178) est donc la variation de L ou de L' dans le volume v' . Par le même raisonnement qu'au paragraphe ci-dessus, seuls les termes correspondant à l'énergie emmagasinée dans L ou L' interviennent.

Appliquons notre méthode à tout élément de ce volume. Tous les éléments j , situés à l'intérieur du volume v , ont le même déplacement et par conséquent la fonction de transformation (134) devient :

$$(179) \quad X' = X + \xi$$

et la matrice de transformation g ne dépend pas de ξ , on a donc :

$$(180) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = \frac{\partial L'}{\partial \xi} = \lim_{\delta v_e \rightarrow 0} \sum_e \frac{\partial L'_e}{\partial \xi} \\ \text{ou} \\ F = - \frac{\partial L}{\partial \xi} = - \lim_{\delta v_e \rightarrow 0} \sum_e \frac{\partial L_e}{\partial \xi} \end{array} \right.$$

où L_e et L'_e sont la restriction de L ou L' aux éléments de volume δv_e , compris entre (S) et (S') (voir figure IV-2).

La fonction de déplacement pour chaque élément e schématisé par la figure IV-3 peut être interpolée d'après (135) par :

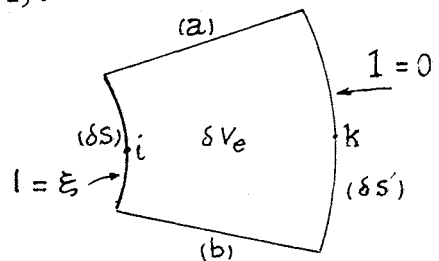


Figure IV-3

$$(181) \quad l = \sum_k \beta_k(X) l_k = \xi \sum_i \beta_i(X) = \beta_i^! \xi : i \in (\delta S)$$

car $l_k = 0 : k \in \delta S'$. Cette formule assure également la continuité du milieu en respectant la forme rectiligne de deux côtés (a) et (b).

Etant donné que (181) est identique à (135), les termes dans la sommation (180) seront équivalents à (177), d'où :

$$(182) \quad F = \lim_{\delta S_e \rightarrow 0} \sum_e \int_{\delta v_e} \left[-(B \cdot \nabla \beta'_i) H + I \cdot \nabla \beta'_i \left(\int_0^H \left(\mu - \frac{\partial \mu}{\partial p} \rho \right) h dh \right) \right] dv$$

Nous faisons ici la remarque suivante :

Dans ces formules nous n'avons pas exigé que $\delta \rightarrow 0$. En effet, le choix de (S'), tant qu'il n'inclue pas d'autres objets solides ne nécessite pas d'approximation. Puisque dans ce cas toute hypothèse sur la répartition du déplacement d'un milieu sans masse mécanique sera valable tant que la continuité du milieu est respecté. Cela se justifie en d'autres termes par la conservation des lois physiques dans une transformation bijective du système de coordonnées qui respecte la continuité du milieu, [45], III-4-2. Mais en raison de la simplicité du calcul, on réduira cette zone à sa limite théorique qui est nulle, ou à sa limite pratique qui est définie préalablement par une discrétisation. De même, la surface (S) peut être arbitrairement choisie à condition qu'elle englobe le volume de l'objet en question et qu'elle n'inclue pas d'autres objets massifs. La démonstration théorique ci-dessous confirmera cette remarque :

Suivant (III-4-2), le polynôme β'_i est linéaire sur les côtés (a) et (b). En particulier quand $\delta S \rightarrow 0$, il restera linéaire dans la direction n, normale à la surface (S), fig. IV-4 :

$$(183) \quad \beta'_i = \frac{\delta - x}{\delta}$$

et donc :

$$(184) \quad \nabla \beta'_i = \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = -\frac{n}{\delta}$$

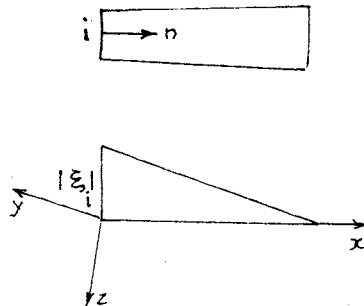


Figure IV-4

La relation (182) devient alors :

$$(185) \quad F = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \int_{S(\delta)} [(B \cdot n)H - I \cdot n \int_0^H (\mu - \frac{\delta\mu}{\delta\rho})h dh] ds d\delta$$

Quand δ tend vers zéro nous aurons bien l'intégrale du tenseur (161) sur la surface (s). Pour toute valeur finie de δ , cette formule donne également la force exacte, en prenant la moyenne sur toutes les surfaces entre (S) et (S'). Ceci justifie, en outre, notre remarque ci-dessus.

Dans le cas de la méthode des éléments finis, δs et δ ont des valeurs finies qui ne tendent pas vers zéro. L'intégrale du tenseur sur la surface (S) n'est donc qu'une approximation. L'hypothèse de cette approximation est que l'intégrand dans (185) est constant sur la distance δ . Toutefois, il existe une distance $0 < \delta' < \delta$ pour laquelle cette hypothèse devient optimale. C'est cette surface optimale que l'on cherchait par l'intuition [44].

La formule (182) qui résulte directement de l'application de la méthode des éléments finis à l'équation de force (185), correspond alors à la recherche théorique de cette surface, tout en étant plus simple et sans approximation supplémentaire.

- Couples - Mouvement rotatif

Dans ce cas tous les points i situés sur la surface (S) auront un déplacement tel que, (fig. IV-5) :

$$(186) \quad l_i = R_i \times \theta$$

et donc :

$$(187) \quad T = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \sum_i \frac{\partial L}{\partial l_i} \times R_i$$

avec

$$R_i = X_i - X_C$$

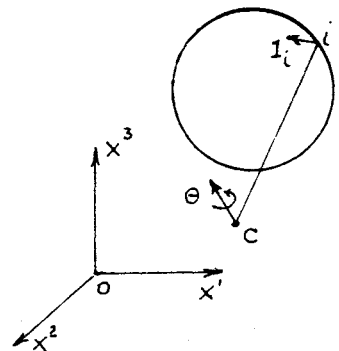
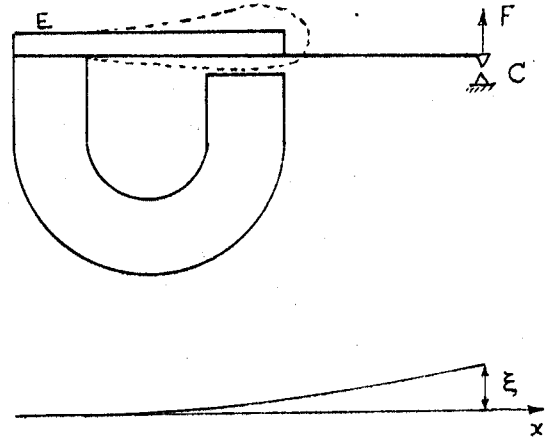


Figure IV-5

Par conséquent on obtient directement le couple à partir de (182) en multipliant vectoriellement chaque intégrale par R_i .

- *Fonction de déplacement inconnue - Exemple de flexion :*

A titre d'exemple nous traitons le problème de la figure (IV-6). Dans cet exemple, il s'agit de calculer la force F sur le contact C . La lame magnétique D est encastrée du côté E .



Si l'on suppose que l'objet D est parfaitement rigide la force F est totalement indéfinie. Nous retrouvons alors la notion de force liée au déplacement que nous avons présentée au début du chapitre. En réalité, D subit une flexion qui dépend de ses propriétés mécaniques :

Figure IV-6

$$(188) \quad l = a \xi \phi(x)$$

et la formule (132) devient :

$$(189) \quad F \cdot \xi = - a \xi \cdot \sum_i \frac{\partial L}{\partial l_i} \phi_i(x) - \delta F(l)$$

où $F(l)$ est l'énergie mécanique emmagasinée dans D .

IV - 3 - FORMULATION EN ELEMENTS FINIS

La formule (177) constitue en effet l'algorithme général de la participation d'un point i appartenant à un élément dans la force moyenne. Par exemple dans le cas où le point i est le sommet partagé par un certain nombre d'éléments, figure IV-7-a, la force moyenne en ce point sera naturellement la sommation des participations de tous ces éléments.

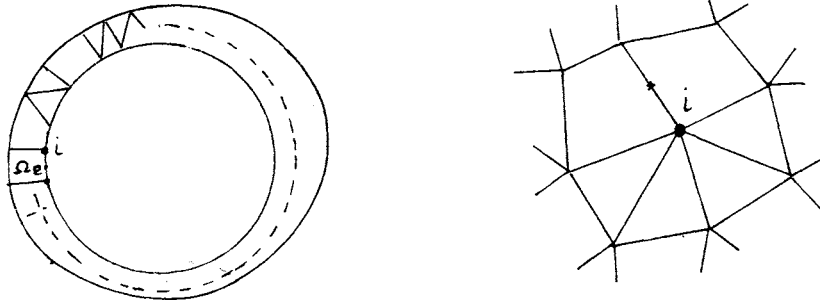


Figure IV-7 : Zone d'intégration pour la force moyenne

Dans le cas où un système de coordonnées local (élément simplexe) est introduit, l'expression du premier terme de (177) s'obtient en remplaçant dv par $|g|d\Omega$ et $\nabla\beta_i$ par $C_i = \Gamma D\beta_i$. Mais en ce qui concerne le deuxième terme, compte tenu de (155), on aura :

$$(190) \quad \left\{ \begin{array}{l} |g| = V_1 \cdot V_2 \times V_3 \\ V_k = DX^{(k)} \end{array} \right.$$

et donc :

$$(191) \quad \frac{\partial |g|}{\partial l_i^{(2)}} = V_1 \cdot D\beta_i \times V_3 = |Dg|_i^{(2)}$$

- Algorithmes matriciels

Nous allons cependant montrer comment l'application directe de notre méthode à la formulation en éléments finis de la fonctionnelle

permet d'obtenir aisément les formes matricielles des expressions (177).

En effet, la discrétisation du domaine et puis l'introduction d'un système de coordonnées local u , nous ont conduit aux formules (90) et (102) pour $|B|^2$ et pour $|H|^2$ dans lesquelles toute fonction de déplacement est explicitée dans les termes C_i et le déterminant $|g|$ de l'intégration. Nous avons déjà développé, par (19) la variation de ce dernier qui définit le deuxième terme dans la formulation de force. L'intégrant étant l'énergie ou la co-énergie stockée, l'algorithme matriciel ne peut être formulé que dans le milieu linéaire (force ou couple global) :

$$(192) \quad \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \nu |B|^2 |Dg| d\Omega = \{A\}^t [S_{2p} + U_{2p}] \{A\}^t$$

ou

$$(193) \quad \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \mu |H|^2 |Dg| d\Omega = \{\psi\}^t [S'_{2p}] \{\psi\}$$

où $|Dg|$ est donnée par (191) et S_{2p} et S'_{2p} sont des matrices pour chaque élément définies par :

$$(194) \quad \left\{ \begin{aligned} (S_{2p})_{hj} &= \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \nu (C_h \cdot C_j) |Dg| du \\ (U_{2p})_{hj}^{kn} &= \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \nu C_h^k C_j^n |Dg| du \end{aligned} \right.$$

S_{2p} et U_{2p} ont la même structure que S et U dans (97).

De même, pour la co-énergie :

$$(195) \quad (S'_p)_{hj} = \int_{\Omega} \mu (C_h \cdot C_j) |Dg| du$$

En ce qui concerne le premier terme dans la formule de force, il est nécessaire de dériver $|B|^2$ ou $|H|^2$ par rapport à un déplacement quelconque du point i :

$$(196) \quad \frac{\partial |B|^2}{\partial l_i} = \sum_h \frac{\partial |B|^2}{\partial C_h} \frac{\partial C_h}{\partial l_i}$$

Vu la dualité de C et le potentiel dans les formules de $|B|^2$ et $|H|^2$, la dérivation de ces dernières auront la même forme que pour A, (91) :

$$(197) \quad \frac{\partial |B|^2}{\partial C_h} = 2 \sum_j [(A_h \cdot A_j) C_j - (A_h \cdot C_j) A_j]$$

et pour le potentiel scalaire :

$$(198) \quad \frac{\partial |H|^2}{\partial C_h} = 2 \sum_j (\psi_h \cdot \psi_j) C_j$$

Le terme $\frac{\partial C_h}{\partial l_i}$, compte tenu de (147) et (148) devient :

$$(199) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C_h}{\partial l_i} = \frac{\partial \Gamma}{\partial l_i} D\alpha_h = - C_i C_h \quad (\text{terme tensoriel}) \\ \text{avec } C_i = \Gamma D\beta_i \end{array} \right.$$

Et finalement :

$$(200) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} v \frac{\partial B^2}{\partial l_i} |g| du = - \{A\}^t [S_{1p} + U_{1p}] \{A\} \\ \text{avec} \end{array} \right.$$

$$(S_{1p})_{hj} = + \int_{\Omega_e} v C_h (C_j \cdot C_i) |g| du$$

ou pour le potentiel scalaire :

$$(201) \quad \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \frac{\partial H^2}{\partial l_i} |g| du = - \{\psi\}^t [S_{1p}] \{\psi\}$$

avec

$$(202) \quad (S'_{1p})_{hj} = \int_{\Omega_e} \mu C_h (C_j \cdot C_i) |g| du$$

Enfin la participation de l'élément à la force moyenne au point i :

$$F_{mi}^e = \{A\}^t [S_p + U_p]_i \{A\}$$

$$(203) \quad \begin{cases} S_p = S_{1p} - S_{2p} \\ U_p = U_{1p} - U_{2p} \end{cases}$$

Dans le cas bidimensionnel $U_p = 0$.

Pour le potentiel scalaire :

$$(204) \quad \begin{cases} F_{mi}^e = \{\psi\}^t [S'_p] \{\psi\} \\ S'_p = -S'_{1p} + S'_{2p} \end{cases}$$

Remarques :

1 - Dans ces algorithmes, les termes matriciels contiennent les vecteurs C_h ou $|Dg|_i$ dont les composantes correspondent à celles de la force F_{mi} dans le système de coordonnées réelles. En pratique il suffit d'établir la matrice correspondant à l'une des composantes et les autres s'obtiendront par une sorte de permutation.

2 - Dans le cas où $r = I$ et $C_i = \nabla \beta_i$, nous aurons les mêmes termes sauf pour $|Dg|_i$ qui deviendra $\nabla \beta_i$. β_i peut être égale à α_i , (83), mais, notamment en ce qui concerne la force ou le couple global, il est préférable de choisir pour β_i le polynôme correspondant au simplexe de degré minimal.

3 - Dans le cas du calcul de la force et du couple global, les points i sont naturellement situés sur une surface qui englobe l'objet. Ils appartiennent à l'ensemble des noeuds du domaine discrétisé. Mais en général, et notamment dans le calcul de la force locale, le point i peut être quelconque. Toutefois, pour pouvoir définir aisément la fonction d'interpolation β_i on choisit de préférence les points correspondant aux coordonnées de Lagrange (voir III-4-2), fig. IV-8.

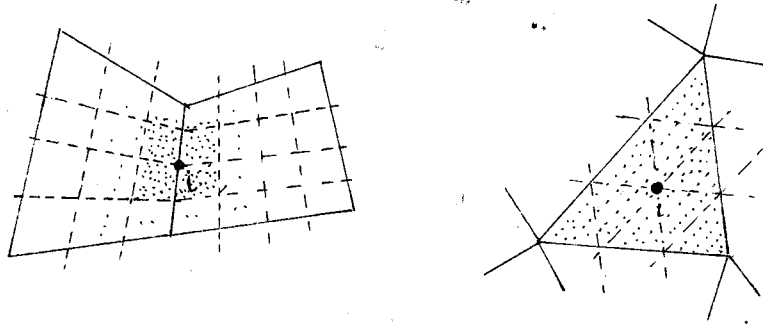


Figure IV-8 : Points et zones du calcul des forces locales

IV - 4 - CONCLUSION

Nous avons, dans ce chapitre, présenté un concept physique de la notion de force en électromagnétisme. Nous avons, par la définition du milieu électromagnétique et de la fonction de déplacement associée, assimilé cette analyse à celle d'un milieu élastique en mécanique.

Le potentiel, défini par la disposition de l'ensemble des densités de courant ou des charges électriques est associé à l'espace. Nous avons alors appliqué une méthode variationnelle liée au déplacement et dans laquelle le courant ou la charge électrique n'intervient pas (même dans le calcul de la force dans les conducteurs). D'autre part, l'état mécanique du système étant couplé à son état électromagnétique par l'intermédiaire des forces d'origine électromagnétique nous avons conféré au milieu électromagnétique une existence physique indépendante du milieu mécanique. Ce concept physique nous permet de définir et d'évaluer la densité de force en tout point y compris à l'intérieur de matériaux mécaniquement rigide.

Nous avons présenté notre méthode dans une étude théorique des deux problèmes que nous rencontrons en électromagnétisme : le potentiel scalaire du champ électrique ou du champ magnétique en l'absence

de courant et le potentiel magnétique tridimensionnel. Dans cette présentation nous avons utilisé le modèle habituel de la densité d'énergie dans les matériaux saturables ce qui nous a permis de retrouver les formules existantes. Cependant, le principe de notre étude qui associe μ et ϵ au milieu plutôt qu'à l'espace permettrait de traiter tout autre modèle (en particulier celui de l'anisotropie) de manière analogue.

Toutefois il faut ici faire une remarque importante sur la variation de μ en fonction de la densité de masse ρ . Lors de l'étude théorique dans le cas du potentiel scalaire nous avons obtenu le terme $\int_0^H \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \rho \, h \, dh$ qui dans un matériau linéaire devient égal à $\frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \rho H \cdot H$, [41]. Par le même processus nous aurions dans le cas du potentiel vecteur, abouti au terme :

$$- \int_0^B \frac{\partial v}{\partial \rho} \rho \, b \, db = \int_0^B \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \rho \frac{1}{\mu} \, h \, db$$

qui dans un matériau linéaire est équivalent au terme précédent. Nous pensons que la formule présentée dans le texte devrait mieux représenter ce phénomène de magnétostriction dans les milieux saturables. Cependant dans la pratique il est suffisant de considérer le terme correspondant au matériau linéaire qui, dans les deux cas précédents, est le même. Nous espérons dans l'avenir pouvoir approfondir par cette méthode l'étude de la magnétostriction dans les milieux saturables en recherchant un modèle mieux adapté.

Nous souhaitons que le principe que nous venons de présenter conduise à une meilleure conception de la notion de force en électromagnétisme et que notre méthode permette une modélisation mathématique plus exacte des phénomènes complexes (magnétohydrodynamique, magnétostriction, etc...).

REFERENCES ET BIBLIOGRAPHIES

- | 1 | - ANGEL, E. - BELLMAN, E. : *Dynamic Programing and Partial Differential Equations*. Academic Press, 1972.
- | 2 | - VEINOTT, C.G. : *Computer-Aided Design of Electric Machinery*. MIT Press, 1972.
- | 3 | - SIMON, H.A. : *La Science des Systèmes (Science de l'Artificiel)*. Epi éditeur, 1974.
- | 4 | - BINNS, K.J. - LAWRENSON, P.J. : *Analysis and Computation of Electric and Magnetic Field Problems*. Pergamon Press, 1963.
- | 5 | - BEWLEY, L.U. : *Two-Dimensional Fields in Electrical Engineering*. Dover Pub. Inc., 1963.
- | 6 | - AMES, F.W. : *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Barnes & Noble, 1969.
- | 7 | - FORSYTHE, G.E. - WASOW, W.R. : *Analysis and Computation of Electric and Magnetic Field Problems*. Pergamon Press, 1963.
- | 8 | - ERDELYI, E.A. - FUCHS, E.F. - BINKLEY, D.H. : "Non-linear magnetic field analysis of DC machines". I.E.E.E. Trans. Power App. Syst. Vol. PAS-89, pp. 1545-1583, 1970.
- | 9 | - WOODSON, H.H. - MELCHER, J.R. : *Electromecanical Dynamics, Part I : Discrete Systems*. J. Wiley, 1968.
- | 10 | - JACKSON, J.D. : *Classical Electrodynamics*. J. Wiley, 1967.
- | 11 | - WHITEMAN, J.R. : *The Mathematics of Finite Elements and Applications*. Academic Press, 1973.
- | 12 | - HOPPE, V. : "Finite Elements with harmonic interpolation function". (voir | 11 |).
- | 13 | - FOGGIA, A. - SABONNADIÈRE, J.C. - SILVESTER, P. : "Finite Elements solution of saturated travelling magnetic field problems". I.E.E.E. Trans. Power App. Syst., Vol. PAS-94, pp. 866-871, 1975.
- | 14 | - COURANT, R. - HILBERT, D. : *Methods of Mathematical Physics, Vol. 1*, Inter-Science Pub. Inc., 1953.

- [15] - COULOMB, J.L. (1975) : *Contribution à l'étude des Phénomènes électrotechniques dans les machines électriques. Thèse Docteur 3ème Cycle, Univ. Grenoble.*
- [16] - ZIENKIEWICZ, D.C. : *The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill, 1971.*
- [17] - SILVESTER, P. - CHARI, M.V.K. : "Finite-element solution of saturable magnetic field problems". I.E.E.E. Trans. Power App. Syst Vol. PAS-89, pp. 1642-1651, 1970.
- [18] - KONRAD, A. - COULOMB, J.L. - SABONNADIÈRE, J.C. - SILVESTER, P. : "Finite element analysis of steady-state skin effect in a slot-embedded conductor". I.E.E.E. Winter Power Meeting, New-York N.Y., 1975.
- [19] - CARPENTER, C.J. : "Finite-element network models and their applications to eddy-current problems". Proc. I.E.E., Vol. 122, n° 4, April 1975.
- [20] - CSENDES, Z.J. : "Non-divergent vector Finite Element for magnetic field calculations". Proc. Conf. COMPUMAG, Oxford, 1976.
- [21] - POLAK, S.J. - WACHTERS, A. - DE BEER, A. : "An account for the use of the FEM for magnetostatic problems". Proc. Conf. COMPUMAG, Oxford, 1976.
- [22] - CIARLET, P.G. : "Orders of convergence in Finite Element methods". (voir [11]).
- [23] - HUBBARD, B. : *Numerical Solution of Partial Differential Equations-II, Academic Press, 1971.*
- [24] - NOBLE, B. : "Variational Finite Element methods for initial value problems". (voir [11]).
- [25] - ODEN, J.T. : *Finite Elements of Nonlinear continua. McGraw-Hill, 1972.*
- [26] - DESAI, C.S. - ABEL, J.F. : *Introduction to the Finite Element Method. VNR, 1972.*
- [27] - SILVESTER, P. - CABAYAN, H.S. - BROWNE, B.T. : "Efficient techniques for Finite-element analysis of electric machines". I.E.E.E. Trans. Power App. Syst., Vol. PAS-92, pp. 1274-1281, 1973.
- [28] - RALL, L.B. : *Computational Solution of Nonlinear Operator Equations. J. Wiley, 1969.*

- [29] - GLOWINSKI, R. - MARROCO, A. : "Finite Element approximation and iterative methods of solution for 2-D non-linear magneto-static problems". Proc. Conf. COMPUMAG, Oxford, 1976.
- [30] - LANDAU, L.D. - LIFSHITZ, E.M. : *Electrodynamics of Continuous Media*. Pergamon Press, 1960.
- [31] - SILVESTER, P. : "Higher-order polynomial triangular Finite Elements for potential problems". Int. J. Eng. Sci., Vol. 7, n° 8, pp. 849-861, 1969.
- [32] - SILVESTER, P. : "Tetrahedral polynomial Finite Elements for the helmoltz equations". Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 4, pp. 405-413, 1972.
- [33] - EGATTOUDIS, J. (1968) : *Isoparametric elements in two and three dimensional analysis*. PhD. Thesis, Univ. Wales, Swansea.
- [34] - SILVESTER, P. - RAFINEJAD, P. : "Curvilinear Finite Elements for two-dimensional saturable magnetic fields". I.E.E.E. Trans. Power App. Syst., Vol. PAS-93, n° 6, pp. 1861-1870, 1974.
- [35] - KONRAD, A.K., (1974) : *Triangular Finite Elements for vector field in electromagnetics*. PhD. Thesis, McGill Univ.
- [36] - IRONS, B.M. : "Engineering application of numerical integration in stiffness method". J.A.I.A.A., 14, 2037-7, 1966.
- [37] - RAFINEJAD, P. - COULOMB, J.L. - SABONNADIÈRE, J.C. : "Modélisation des machines tournantes et prédétermination de leurs caractéristiques". R.G.E., t. 84, n° 9, Sept. 1975.
- [38] - GEORGE, J., (1971) : *Computer implementation of the Finite Element method*. PhD. Thesis, Stanford Univ.
- [39] - OKUDA, H. - KAWAMURA, T. - NISHI, M. : "Finite-element solution of magnetic field and Eddy current problems in the end zone of turbine generators". I.E.E.E. PES Winter Meeting & Tesla Symposium, New-York N.Y., Jan. 1976.
- [40] - GARRIDO, M.S. : *Contribution à la théorie dynamic des systèmes électromécaniques*. Thèse de Docteur Es-Sciences Physiques. Univ. Nancy, (1968).
- [41] - WOODSON, H.H. - MELCHER, J.R. : *Electromechanical Dynamics, Part II : Field, Forces and Motion*. J. Wiley, 1968.
- [42] - SILVESTER, P. - KONRAD, A. : "Analysis of transformer linkage phenomena by high-order Finite-elements". I.E.E.E. Trans. Power App. Syst., Vol. PAS-92, pp. 1843-1855, 1973.

- [43] - RAFINEJAD, P. - SABONNADIÈRE, J.C. : "Finite Element Computer programs in design of electromagnetic devices". I.E.E.E. Trans. Magnetic, Vol. MAG-12, n° 5, 1976.
- [44] - REICHERT, K. - FREUNDL, H. - VOGT, W. : "The calculation of forces and torques within numerical magnetic field calculation methods". Proc. Conf. COMPUMAG, Oxford, 1976.
- [45] - ELLIOT, R.S. - *Electromagnetics*, McGraw-Hill, 1966.