



**HAL**  
open science

**Machines-outils rapides à structure parallèle.  
Méthodologie de conception, applications et nouveaux  
concepts**

Olivier Company

► **To cite this version:**

Olivier Company. Machines-outils rapides à structure parallèle. Méthodologie de conception, applications et nouveaux concepts. Automatique / Robotique. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2000. Français. NNT : . tel-00481184

**HAL Id: tel-00481184**

**<https://theses.hal.science/tel-00481184>**

Submitted on 6 May 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE MONTPELLIER II**

- Sciences et Techniques du Languedoc -

**THESE**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE MONTPELLIER II**

Discipline : **Génie Informatique, Automatique et Traitement du Signal**

présentée et soutenue publiquement

par

**Olivier COMPANYY**

Le 05 décembre 2000

**Titre :**

**Machines-outils rapides à structure parallèle.  
Méthodologie de conception, applications  
et nouveaux concepts.**

Directeur de thèse :  
**Etienne DOMBRE**

**JURY**

**LALLEMAND Jean-Paul  
GAUTIER Maxime  
DOMBRE Etienne  
FOURNIER Alain  
PIERROT François**

**Professeur Université de Poitiers  
Professeur Université de Nantes  
Directeur de Recherche CNRS  
Professeur Univ. Montpellier II  
Chargé de Recherche CNRS**

**Rapporteur  
Rapporteur  
Dir. de thèse  
Président  
Examineur**



**UNIVERSITE MONTPELLIER II**

- Sciences et Techniques du Languedoc -

**THESE**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE MONTPELLIER II**

Discipline : **Génie Informatique, Automatique et Traitement du Signal**

présentée et soutenue publiquement

par

**Olivier COMPANYY**

Le 05 décembre 2000

**Titre :**

**Machines-outils rapides à structure parallèle.  
Méthodologie de conception, applications  
et nouveaux concepts.**

Directeur de thèse :  
**Etienne DOMBRE**

**JURY**

**LALLEMAND Jean-Paul  
GAUTIER Maxime  
DOMBRE Etienne  
FOURNIER Alain  
PIERROT François**

**Professeur Université de Poitiers  
Professeur Université de Nantes  
Directeur de Recherche CNRS  
Professeur Univ. Montpellier II  
Chargé de Recherche CNRS**

**Rapporteur  
Rapporteur  
Dir. de thèse  
Président  
Examineur**



*A Sandrine*



# Remerciements

---

Avant de présenter les travaux de recherche, il m'est naturel de remercier les personnes sans qui l'écriture de toutes ces belles équations aurait été moins agréable voire impossible.

Ces années passées au sein du Laboratoire d'Informatique, de Robotique et de Microélectronique de Montpellier ont été une source d'enrichissement considérable. J'exprime toute ma reconnaissance à la Direction du Laboratoire et du Département de robotique pour m'avoir accueilli, soutenu et qui m'ont permis d'aborder et d'apprécier le travail de recherche.

Mes remerciements vont également au Président et aux membres du Jury qui ont accepté d'évaluer mes travaux et pour l'intérêt qu'ils leur ont porté. Leur présence le jour de la soutenance m'a beaucoup touché.

Qu'Etienne Dombre et François Pierrot soient assurés de ma gratitude pour leur disponibilité, leur ouverture et la confiance qu'ils m'ont accordée.

Je tiens exprimer ma sympathie à tous les permanents du département de robotique ainsi que mes remerciements en deux exemplaires datés et signés aux administrations du Laboratoire et de l'Université pour leur efficacité.

La présence des (al)locataires du hall de robotique a été particulièrement importante. Parmi ceux qui sont passés et que l'on n'oublie pas je pense particulièrement à David, Hervé, Christophe, Eric, Yann et Lionel. Je remercie évidemment ceux qui sont encore là : Christine (et son fidèle compagnon Woodstock) , Philippe, Arnaud (blague officer), ceux qui seront encore là : Geovani (full total maîtrise), Frédéric (thésard représentatif), Julien, Christophe, Gilles, Jean-Damien, Vincent, Philippe(s), Jérôme, Benoît et la jeune équipe des 'parallel boys' : Frédéric (Nemausus thésardus), DELL et Sébastien.

Je n'oublie pas non plus l'heureux concours de circonstances qui a réorienté mon sujet de recherche vers la robotique parallèle.

Enfin, tous mes sentiments vont à Sandrine qui m'a accompagné pendant ces trois années et dont la présence à mes côtés a tout changé. Je remercie également ma famille et mes amis qui m'ont constamment soutenu, aidé, encouragé et supporté.

Sans oublier Marcel qui a l'air fier depuis qu'il a un docteur à la maison.





# Sommaire

---

<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE.....</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE I . ETAT DE L'ART DES MACHINES-OUTILS ET DES MÉCANISMES PARALLÈLES. ....</b>	<b>7</b>
<b>I.1. Etat de l'art des machines-outils « classiques ».....</b>	<b>8</b>
I.1.1. Historique.....	8
I.1.2. Quelques machines-outils.....	9
I.1.3. Terminologie.....	12
I.1.4. Définition des conventions.....	13
<b>I.2. Etat de l'art des robots parallèles.....</b>	<b>14</b>
I.2.1. Conventions de représentation.....	14
I.2.2. Présentation de quelques robots parallèles.....	18
<b>I.3. Machines-outils parallèles.....</b>	<b>23</b>
<b>CHAPITRE II . MÉTHODOLOGIE DE CONCEPTION.....</b>	<b>27</b>
<b>II.1. Introduction.....</b>	<b>27</b>
II.1.1. Synthèse de mécanismes en robotique.....	27
II.1.2. Synthèse de mécanismes pour les machines-outils d'usinage.....	29
II.1.3. Architectures parallèles candidates pour les machines-outils.....	29
<b>II.2. Choix de l'architecture.....</b>	<b>34</b>
<b>II.3. Modélisation générique.....</b>	<b>34</b>
II.3.1. Paramétrage.....	34
II.3.2. Modélisation géométrique.....	36
II.3.3. Modélisation cinématique.....	41
<b>II.4. Choix d'un agencement.....</b>	<b>42</b>
II.4.1. Choix d'un critère.....	43
II.4.2. Contraintes.....	45
II.4.3. Méthode.....	48
<b>II.5. Optimisation de l'agencement.....</b>	<b>49</b>
II.5.1. Paramétrage spécifique.....	49
II.5.2. Indicateurs utilisés.....	49
II.5.3. Optimisation.....	52
<b>II.6. Dimensionnement.....</b>	<b>52</b>
II.6.1. Rigidité.....	52
II.6.2. Etude de sensibilité.....	58
<b>II.7. Conclusion.....</b>	<b>61</b>

## **CHAPITRE III . APPLICATION À LA CRÉATION D'UNE MACHINE TROIS AXES. .... 63**

<b>III.1. Problématique.....</b>	<b>63</b>
<b>III.2. Choix de la structure.....</b>	<b>65</b>
<b>III.3. Modèles génériques. ....</b>	<b>66</b>
III.3.1. Modèles géométriques. ....	66
III.3.2. Modèles cinématiques.....	66
<b>III.4. Recherche de l'architecture de la machine. ....</b>	<b>66</b>
III.4.1. Réduction du nombre de paramètres.....	66
III.4.2. Evaluation des architectures possibles.....	67
<b>III.5. Modélisation de l'architecture choisie.....</b>	<b>70</b>
III.5.1. Paramétrage.....	70
III.5.2. Modèles spécifiques.....	71
<b>III.6. Evolution de quelques coefficients caractéristiques. ....</b>	<b>77</b>
III.6.1. Conditionnement.....	79
III.6.2. Transmission des vitesses. ....	79
III.6.3. Transmission des efforts. ....	80
III.6.4. Efforts dans les barres.....	81
III.6.5. Accélération.....	84
<b>III.7. Singularités et volume de travail.....</b>	<b>85</b>
III.7.1. Introduction.....	85
III.7.2. Calculs préliminaires. ....	86
III.7.3. Application à la recherche de singularités. ....	89
<b>III.8. Etude de la précision. ....</b>	<b>91</b>
<b>III.9. Applications. ....</b>	<b>91</b>
<b>III.10. Conclusion.....</b>	<b>93</b>

## **CHAPITRE IV . APPLICATIONS À L'USINAGE 5 AXES. .... 95**

<b>IV.1. Introduction. ....</b>	<b>95</b>
<b>IV.2. Champ des solutions pour le remplacement des têtes rotatives. ....</b>	<b>96</b>
IV.2.1. Architectures à chaîne passive.....	96
IV.2.2. Architectures symétriques pleinement parallèles.....	98
IV.2.3. Architecture asymétrique.....	99
IV.2.4. Bilan intermédiaire.....	100
<b>IV.3. Présentation du concept Macro-Micro. ....</b>	<b>100</b>
<b>IV.4. Spécifications de la partie micro. ....</b>	<b>102</b>
<b>IV.5. Sélection de la structure et de l'arrangement. ....</b>	<b>103</b>
<b>IV.6. Paramétrage.....</b>	<b>103</b>
<b>IV.7. Modèles.....</b>	<b>104</b>
<b>IV.8. Application.....</b>	<b>105</b>
IV.8.1. Données.....	105
IV.8.2. Paramètres.....	106
IV.8.3. Résultats.....	106
<b>IV.9. Etude de sensibilité.....</b>	<b>111</b>
<b>IV.10. Conclusion.....</b>	<b>111</b>

<b>CHAPITRE V . H4, UN NOUVEAU CONCEPT DE MACHINE 4 AXES PARALLÈLE. ....</b>	<b>115</b>
<b>V.1. Introduction.....</b>	<b>115</b>
<b>V.2. Présentation du concept symétrique.....</b>	<b>117</b>
<b>V.3. Condition de fonctionnement.....</b>	<b>119</b>
V.3.1. Analyse préliminaire.....	119
V.3.2. Détermination des liaisons manquantes.....	120
V.3.3. Condition géométrique.....	120
<b>V.4. Concept asymétrique. ....</b>	<b>124</b>
V.4.1. Description du concept.....	124
V.4.2. Conditions géométriques.....	125
<b>V.5. Exemples de déclinaisons et applications.....</b>	<b>126</b>
V.5.1. Robotique de manipulation.....	126
V.5.2. Usinage.....	128
<b>V.6. Modélisation et dimensionnement d'un H4 symétrique. ....</b>	<b>129</b>
V.6.1. Modélisation.....	130
V.6.2. Optimisation.....	136
V.6.3. Conclusion.....	142
<b>V.7. Modélisation et dimensionnement d'un H4 asymétrique. ....</b>	<b>142</b>
V.7.1. Modélisation.....	143
V.7.2. Optimisation.....	144
<b>V.8. Conclusion.....</b>	<b>146</b>
<b>CONCLUSION GÉNÉRALE.....</b>	<b>147</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>	<b>153</b>
<b>ANNEXES.....</b>	<b>153</b>

# Introduction générale.

---

Le monde de la machine-outil est en évolution permanente afin de répondre aux besoins des utilisateurs qui ont des contraintes de flexibilité de plus en plus fortes. Les deux paragraphes suivants sont des articles extraits de la presse spécialisée (revue l'Usine Nouvelle). Ils concernent deux évolutions survenues au cours de la dernière décennie dans le secteur de la machine-outil.

➤ **1994**, Exposition de machines-outils, Chicago.

« *Le monde de la machine-outil est en pleine effervescence. La sortie de la Variax, la nouvelle machine de Giddings&Lewis, une fraiseuse conçue comme un simulateur de vol, chamboule tous les principes en vigueur depuis des décennies dans le domaine de l'usinage. Les axes de la machine ne sont plus réels, mais... virtuels. Les glissières, roulements linéaires et autres chariots croisés n'existent plus. « La broche flotte dans l'espace », comme l'explique avec poésie son inventeur américain. Mais le cœur de l'innovation ne réside pas tant dans la partie matérielle de la machine que dans son logiciel de pilotage. Les vis à billes, les rotules, les vérins, la broche et les servomoteurs utilisés dans la construction de la machine sont de « vulgaires » composants du commerce. En revanche, l'ordinateur qui pilote tous les mouvements de l'outil dans l'espace utilise des algorithmes très compliqués, ayant nécessité six années de développement* » (extrait de Usine Nouvelle n°2475). L'auteur de l'article poursuit en mentionnant que les autres constructeurs saluent cette initiative, mais émet des réserves quant à la fiabilité de ses composants, à l'encombrement de la machine et à son volume de travail en particulier l'orientation de la broche. Depuis, d'autres constructeurs se sont engouffrés dans la brèche et ont proposé des machines similaires. Parmi eux, nous pouvons citer Ingersoll avec la machine « Octaedral Hexapod » et Geodectics , machine « G1000 ».

➤ **1996**, Salon Machine-Outil, Paris.

« *La vedette du dernier salon Machine-outil, à Paris, en avril dernier, était l'unité rapide d'usinage monobroche trois axes de Renault Automation/Comau. Sa principale originalité : l'emploi de moteurs linéaires pour asservir les axes. Pourquoi des moteurs linéaires ? « Ils offrent la possibilité d'atteindre des vitesses de coupe plus élevées, alliées à des temps de déplacement très courts », explique Claude Fioroni, responsable de la recherche-développement chez Renault Automation, à Castres. En effet, les moteurs linéaires conçus par Krauss Maffei Automation, un pionnier dans le domaine, atteignent des vitesses variant de 45 à 800 mètres par minute sur les trois axes X, Y, Z, des accélérations supérieures à 1 g (12 m/s<sup>2</sup>) et une répétitivité de 1 micron. Pourvu d'une monobroche d'une vitesse de 20 000 ou 24 000 tours par minute, le module d'usinage affiche des temps de cycle comparables aux solutions multibroches. De plus, la machine devient reconvertible rapidement. « Elle*

préfigure la future génération de machines-outils qui allieront la flexibilité des centres d'usinage à grande vitesse à la productivité des machines transferts », commente Xavier Desbazeille, responsable technique du Symap (syndicat de la machine-outil) » (extrait de Usine Nouvelle 01/10/96).

Ces deux extraits illustrent le besoin d'innovation du secteur de la « machinerie » qui génère, en Europe, un chiffre d'affaires proche de celui de l'industrie automobile et qui, par conséquent, emploie un grand nombre de personnes, beaucoup plus, par exemple, que l'industrie aéronautique. En France, ce secteur est en expansion et le Ministère de l'Industrie annonce une hausse record de l'augmentation de l'investissement dans l'industrie automobile française de 23,1%. Ce cas n'est pas isolé car, selon les mêmes sources (voir Figure 0- 1), la production manufacturière est en hausse ainsi que le taux d'utilisation des capacités de production dans l'industrie, ce qui entraîne une augmentation des biens d'équipement professionnels.

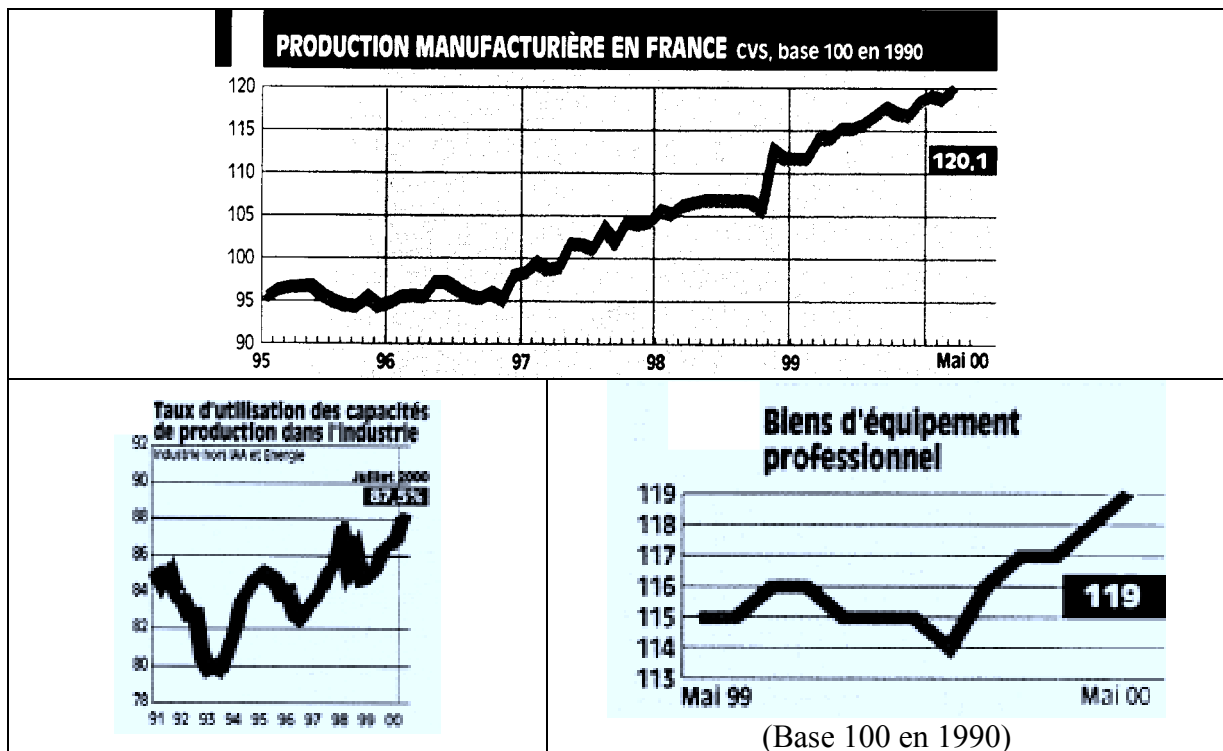


Figure 0- 1 : Statistiques du Ministère de l'Industrie.

Depuis quelques années, les performances des machines-outils fabriquées stagnaient. Les deux améliorations que nous venons de présenter montrent le besoin d'évolution permanent de ce secteur afin de proposer des machines de plus en plus rapides, flexibles et permettant d'effectuer de l'usinage à grande vitesse (UGV) qui présente de nombreux avantages par rapport à l'usinage conventionnel. Parmi ceux-ci, nous pouvons citer :

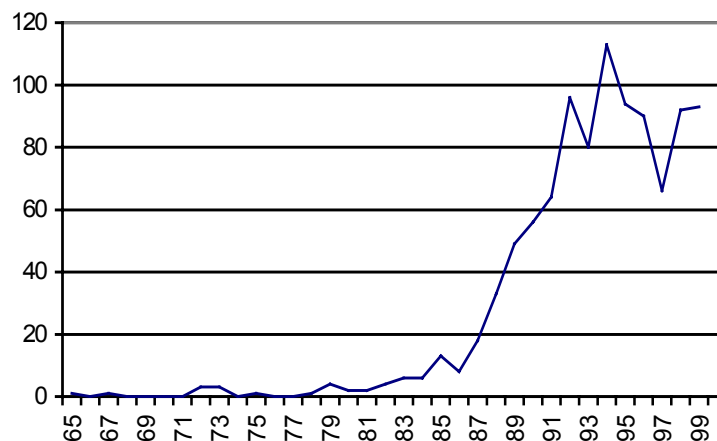
- les efforts de coupe sont réduits.
- une des conséquences du point précédent est que la précision de la pièce usinée par UGV est meilleure car elle subit moins de déformations lors de l'usinage.
- les calories dissipées lors de la coupe sont évacuées dans les copeaux et n'affectent pas thermiquement la pièce qui conserve alors une bonne stabilité dimensionnelle.

- les efforts de coupe étant réduits et la pièce n'étant pas affectée thermiquement, ce procédé permet d'usiner plus facilement des pièces minces telles que des voiles utilisées dans l'industrie aéronautique.
- l'état de surface de la pièce usinée est meilleur.
- la pièce est usinée plus rapidement avec un gain de temps de 3 à 10.
- enfin, pour certains types de matériaux, l'UGV permet l'usinage à sec, c'est-à-dire sans utiliser de fluide de coupe.

En conclusion, l'UGV permet d'obtenir des pièces de meilleure qualité, de réduire les temps d'usinage appelés « temps copeaux » et ainsi d'augmenter les cadences de production des machines. Mais cela n'est pas suffisant pour obtenir des cadences de production optimales. En effet, pour une machine d'usinage dont les performances dynamiques sont médiocres, les « temps copeaux » en UGV ne représentent alors, en moyenne, que 15% de la durée nécessaire à la production d'une pièce (« temps de cycle total »). Ce temps de cycle total est composé des :

- Temps de déplacement rapide de la machine (trajet de surface usinée à surface usinée ou trajet entre le changeur d'outils et la pièce).
- Temps de changement d'outil (freinage en rotation de la broche, déverrouillage de l'outil, enlèvement de l'outil, insertion du nouvel outil, verrouillage du nouvel outil, accélération en rotation de la broche).

Les deux évolutions présentées au début de cette introduction s'inscrivent dans la réduction des temps non productifs. Elles ne reposent pas sur des inventions à proprement parler. En fait, il s'agit de l'illustration des transferts de technologie qui ont été de mise dans la dernière décennie. Certains de ces transferts ont été puisés dans domaine de la robotique. Les deux articles cités au début de cette introduction montrent l'amélioration de deux parties des machines d'usinage : la motorisation et la cinématique (structure).



**Figure 0- 2: Evolution du nombre de publications concernant la robotique parallèle.**

Les travaux que nous avons réalisés portent sur le choix (éventuellement la création), le transfert et le dimensionnement de solutions à base de structures parallèles pour l'usinage.

Ces structures, étudiées largement par les roboticiens depuis les années 70 (voir Figure 0- 2)<sup>1</sup>, sont nouvelles pour les fabricants de machines-outils. Par conséquent, ils ont besoin des compétences des roboticiens pour développer de nouvelles machines plus performantes. Cette thèse s'inscrit donc à la frontière de la robotique, de la mécanique et du domaine de la machine-outil.

Le premier chapitre de ce manuscrit contient une présentation bibliographique des différents types de machines-outils « conventionnelles » existantes sur le marché. Nous précisons la notion normalisée d'« axe » dans le domaine de la machine-outil. Ensuite, en nous appuyant sur une étude bibliographique, nous examinerons quelques structures parallèles du domaine de la robotique en nous focalisant sur celles qui, à notre sens, peuvent trouver (ou ont déjà trouvé) des applications dans le domaine des machines-outils. Nous poursuivrons en dressant une liste, que nous espérons la plus complète possible, des applications des mécanismes parallèles aux machines-outils qui existent à l'heure actuelle au niveau de produit déjà commercialisé, de prototype ou de projet en cours de développement. L'examen des caractéristiques et des performances de la plupart de ces machines fournit une partie de la réponse au sujet de leur manque de succès commercial. En fait, tout simplement, ces machines ne sont pas en adéquation avec les demandes du marché car elles sont souvent trop complexes. Notre démarche dans la suite de ce manuscrit est d'étudier et de proposer des solutions parallèles différentes, mieux adaptées aux problèmes de l'usinage.

Dans le deuxième chapitre, nous proposons une démarche linéaire de conception de machines-outils à structure parallèle. Cette démarche comporte plusieurs étapes qui distinguent la recherche du type de mécanisme parallèle, de son agencement, de ses dimensions et des dimension des organes qui le composent. Dans un premier temps, nous procédons à une sélection de mécanismes parallèles adaptés à la réalisation de machines-outils rapides. Nous en établissons les modèles génériques géométriques et cinématiques afin de choisir l'agencement qui réalise le meilleur compromis entre l'encombrement, la facilité de réalisation et un critère de performance. A partir de ce choix, nous établissons des modèles plus complets tels que le modèle dynamique et les efforts dans la structure. Ces modèles permettent de retenir, à partir de plusieurs indicateurs, les dimensions optimales de la machine. Une fois la géométrie de la machine déterminée, il reste à déterminer le dimensionnement des pièces qui la composent afin d'obtenir les performances requises pour les machines-outils au niveau de la rigidité. Enfin, nous proposons un outil (étude de sensibilité) qui permet de déterminer quelles sont les cotes à réaliser avec précision lors de la réalisation de la machine.

Dans le troisième chapitre, nous utilisons la démarche exposée dans le second chapitre afin de concevoir une machine d'usinage trois axes c'est-à-dire qui possède uniquement trois translations de l'outil de coupe par rapport à la pièce, toutes les tâches d'usinage ne nécessitant pas obligatoirement cinq « axes » de mouvement. Nous recherchons, dans un premier temps, le mécanisme parallèle correspondant aux déplacements à effectuer, nous le modélisons dans le cas général et nous retenons le meilleur arrangement. Dans un second temps, nous modélisons cet arrangement de manière plus fine et nous déterminerons ses dimensions optimales. Ensuite, nous présentons une méthode basée sur l'évolution des valeurs

---

<sup>1</sup> Publications recensées par Jean-Pierre Merlet.  
[http://www-sop.inria.fr/saga/personnel/merlet/Grappe\\_year/biblio\\_espace.html](http://www-sop.inria.fr/saga/personnel/merlet/Grappe_year/biblio_espace.html)



singulières d'une matrice permettant de vérifier que le volume de travail de la machine ne contient pas de singularités. Nous terminons ce chapitre par la présentation du prototype réalisé par la société Renault Automation/Comau sur la base de ces développements.

Le quatrième chapitre se propose de trouver des solutions parallèles concernant l'usinage cinq axes. Nous débutons ce chapitre par une recherche de mécanismes adaptés à la réalisation de tâches d'usinage 5 axes, sans nous intéresser aux structures de type « hexapode » qui ont déjà été largement étudiées et dont les performances dynamiques ne sont pas intrinsèquement les meilleures. Nous abordons également le problème du remplacement des têtes rotatives sur les machines à structure cartésienne. A la suite de cette recherche de solutions, nous retenons deux concepts prometteurs que nous développerons dans la suite du manuscrit : le concept « macro-micro » et le concept H4. Le concept « macro-micro » est la mise en série d'une structure cartésienne série (de type portique, par exemple) et d'une structure parallèle. Une étude concernant le dimensionnement d'un sous-ensemble parallèle de machine 5 axes pour l'usinage de grandes pièces, en particulier pour le domaine de l'aéronautique, est ensuite menée. Cette étude utilise la démarche de conception présentée dans le second chapitre. Nous présentons les résultats obtenus sous forme de diagrammes en étoile et nous choisissons alors la solution qui nous semble offrir le meilleur compromis.

Le cinquième chapitre développe également un concept de machine 5 axes, le concept H4. Contrairement au quatrième chapitre dans lequel nous avons proposé l'association de deux structures courantes, il s'agit ici de la création d'une nouvelle famille de structures parallèles. Ce chapitre présente la genèse, l'étude et l'exploration d'une nouvelle famille de structures parallèles 4 axes qui, avec l'ajout d'un actionneur supplémentaire, permettent de réaliser des usinages 5 axes. Après avoir précisé le concept de cette famille de machines, nous étudions les conditions géométriques pour lesquelles les caractéristiques cinématiques de la structure sont conformes à celles que nous désirons. Nous déduisons de cette étude géométrique une nouvelle variante de la structure étudiée. Nous présentons ensuite quelques exemples de déclinaisons et d'applications et nous terminons par une étude sommaire de deux applications de ces structures à savoir une application dans le domaine de la robotique de manipulation (*pick and place* avec orientation) et une autre application dans le domaine de l'usinage 5 axes.

Enfin, nous terminerons ce manuscrit en présentant les conclusions et les nouvelles perspectives ouvertes par ces travaux de recherche ainsi que les approfondissements qui mériteraient d'être menés.



# **Chapitre I . Etat de l'art des machines-outils et des mécanismes parallèles.**

---

Les contraintes pesant sur les machines-outils d'usinage ont beaucoup augmenté tant du point de vue de la réduction des temps de cycle que de l'accroissement de la flexibilité de leur production. La réduction des temps de cycle est dictée par des critères économiques et la flexibilité par une grande capacité de réaction à l'évolution des marchés des pièces fabriquées. Ces contraintes ont abouti à de nombreuses évolutions dans le secteur de la machine-outil.

Le problème de la flexibilité a été résolu grâce à l'utilisation des commandes numériques sur les structures conventionnelles. Par contre, la réduction des temps de cycle fait intervenir plusieurs facteurs dont principalement le temps copeau, le temps de changement d'outil et le temps de déplacement rapide. Afin d'accroître la productivité, il faut donc réduire chacun de ces temps :

- La solution adoptée pour la diminution du temps copeau est l'utilisation de l'Usinage à Grande Vitesse (UGV).
- Diverses dispositions constructives ont été prises afin de réduire le temps de changement d'outil comme, par exemple, les changeurs d'outils intégrés à la broche ou les machines à deux broches qui changent d'outil en temps masqué.
- La réduction des temps de déplacement rapide passe par l'amélioration de la dynamique de la machine, pour cela, plusieurs étapes ont été franchies :
  - Utilisation de moteurs linéaires dont la dynamique est meilleure que celle des systèmes moteur rotatif + réducteur + système vis-écrou dont la vitesse est limitée par l'utilisation de vis à billes.
  - Réduction des masses déplacées grâce à l'utilisation d'alliages d'aluminium pour la réalisation des pièces massives en mouvement.
  - Utilisation de structures parallèles dont les performances dynamiques sont intrinsèquement meilleures que celles des structures cartésiennes conventionnelles.

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, la majeure partie de ce manuscrit se situe à la frontière de la robotique parallèle et du secteur de la machine-outil. Afin de bien asseoir les bases de ce manuscrit, la présentation de l'existant et des conventions de ces deux domaines sont nécessaires. Ce chapitre se divise principalement en trois parties. Dans la première, nous commençons par présenter les machines-outils conventionnelles les plus répandues, les machines à commande numérique et les conventions normalisées pour la désignation de leurs axes de mouvement. La seconde partie propose, dans un premier temps, des conventions de représentation du domaine de la robotique parallèle et présente ensuite les solutions parallèles de la robotique dont la contribution potentielle au domaine de la machine-outil nous semble intéressante. Enfin, la troisième partie de ce chapitre dressera un inventaire, le plus exhaustif possible, des solutions de machines-outils parallèles existantes à ce jour.

Nota :

Les notations, conventions, les propriétés et les théorèmes mathématiques utilisés dans la suite de ce manuscrit sont répertoriés dans l'**Annexe A**.

## **I.1. Etat de l'art des machines-outils « classiques ».**

### *I.1.1. Historique.*

Avant de poursuivre, nous allons présenter quelques dates clés dans l'évolution des « machines-outils » de tournage:

- 2000 ans avant Jésus Christ, la plus ancienne machine-outil jamais découverte est un tour. A l'âge du bronze, les artisans se servaient de tours à arc. Plus tard, le tour de potier sera découvert.
- Vers l'an 1500, Léonard de Vinci propose des solutions basées sur du tournage à mouvement continu. Son tour, comme beaucoup de ses inventions, est en avance sur son époque.
- Il faudra attendre le XIX<sup>ème</sup> siècle pour que les bases de la mécanique moderne poursuivent cette évolution et débouchent sur le tour automatique.

*« Une machine-outil est un appareil destiné à faire fonctionner des outils mécaniquement, le mouvement étant d'ailleurs transmis à la machine soit à la main, soit par l'intermédiaire d'un moteur. (...) Les machines-outils employées pour le travail des métaux sont très diverses et très répandues, et de nos jours les exigences de la construction ont amené à produire des types d'une grandeur vraiment colossale. (...) Les machines employées dans les ateliers de construction de machines comprennent :*

- *Les tours établis avec des dispositions et des dimensions variables selon les formes et les dimensions des pièces qu'ils sont destinés à travailler.*
- *Les machines à percer employées pour le perçage et l'alésage des pièces les plus diverses. (...)*
- *Les machines à fraiser employées très utilement pour le façonnage des pièces détachées.*
- *Les machines à aléser destinées à l'alésage des cylindres des machines à vapeur, des corps de pompes, etc.*
- *Les machines à raboter appliquées au dressage de pièces, telles que les bâtis de machines, plaques de fondation, etc. Les limeuses sont d'un emploi très répandu dans les ateliers d'ajustage, pour le rabotage des pièces détachées. (...)* »

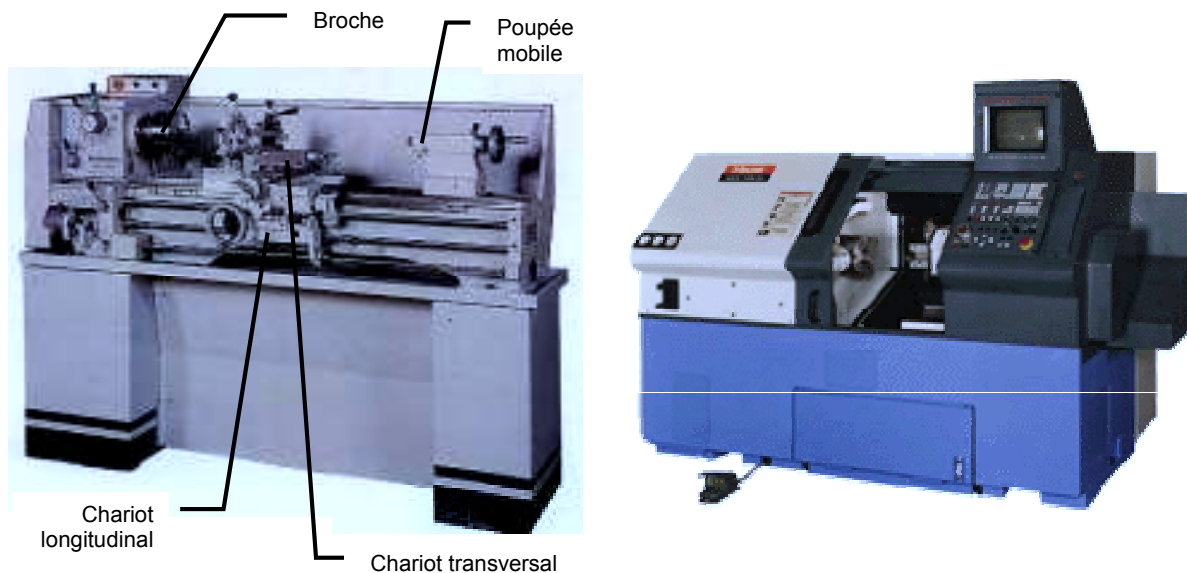
(Extraits de « La Grande Encyclopédie, inventaire raisonné des sciences des lettres et des arts » - H. Lamirault et C<sup>ie</sup>, éditeurs – environ 1910).

Historiquement les premières machines ont donc été des tours pour la fabrication de pièces de révolution. Les tours actuels sont toujours basés sur le même principe. Par contre, parmi les autres machines présentées dans cette encyclopédie, certaines ont évolué et d'autres ont disparu. Par exemple, les machines à raboter et les limeuses (rebaptisées ultérieurement

étaux limeurs) ont quitté les ateliers, remplacées par les fraiseuses. A la fin des années 70, l'apparition des premières commandes numériques a révolutionné le monde de la machine-outil. Les types de machines (tours – fraiseuses) n'ont pas fondamentalement changé, mais les temps de reconfiguration de ces machines ont été considérablement réduits par le remplacement des butées réglables (mécaniques ou électro-mécaniques) par des butées logicielles. L'utilisation des commandes numériques a également permis d'augmenter la complexité des formes réalisées grâce à la combinaison de mouvements suivant plusieurs axes. Nous allons maintenant présenter quelques machines courantes et les surfaces qu'elles permettent de générer.

### *1.1.2. Quelques machines-outils.*

Nous n'avons pas la prétention de réaliser ici un inventaire exhaustif de l'ensemble des machines-outils. Nous présentons uniquement les machines les plus courantes afin d'aider à la compréhension de la suite de ce manuscrit.



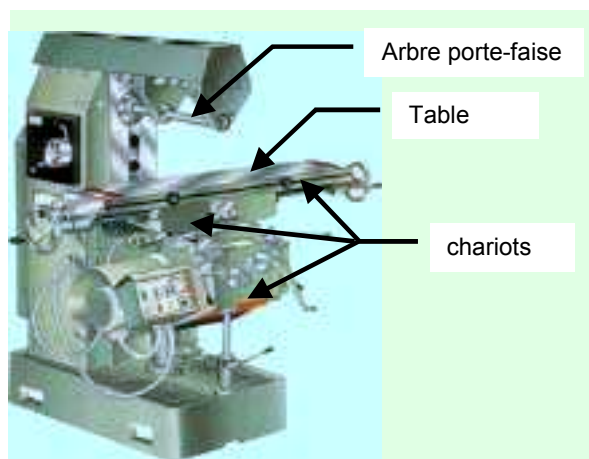
**Figure I-1: Tour conventionnel et tour à commande numérique.**

#### Les tours :

Les tours (voir Figure I-1) permettent de réaliser des surfaces hélicoïdales (filetage) et des surfaces de révolution : cylindres, cônes et plans (génératrice perpendiculaire à l'axe de révolution). L'utilisation principale de ces machines est l'usinage des arbres. La pièce, généralement tenue par le mandrin, a un mouvement de rotation (mouvement de coupe) transmis par la broche. L'outil peut se déplacer en translation suivant deux directions. Ces deux directions, perpendiculaires entre elles, appartiennent à un plan auquel l'axe de la broche est parallèle. Le premier mouvement de translation est parallèle à l'axe de la broche. Le deuxième mouvement de translation est perpendiculaire à l'axe de la broche. Bien que très répandues dans l'industrie, nous ne donnerons pas davantage d'explications sur ces machines car elles ne font pas, pour l'instant, partie des machines pour lesquelles nous avons cherché à améliorer les performances à l'aide de structures parallèles.

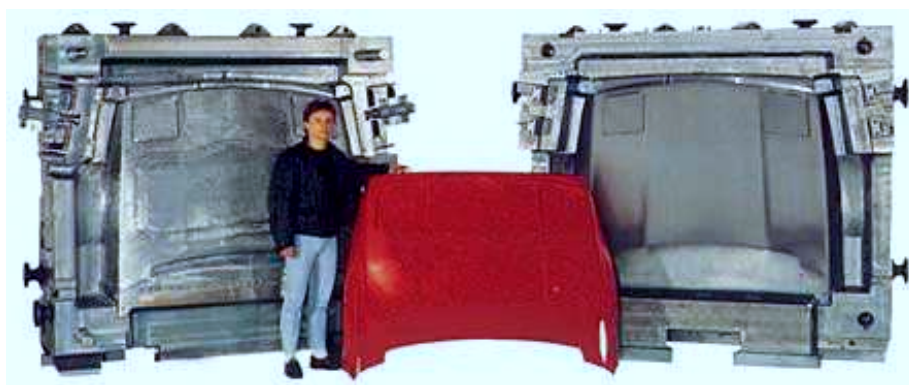
Les fraiseuses :

Les fraiseuses ont supplanté certaines machines (raboteuses, étaux limeurs) pour l'usinage de surfaces planes. Ces machines (voir Figure I-2) peuvent également servir pour des opérations de contournage. L'outil, une fraise, est fixé dans la broche et est animé d'un mouvement de rotation (mouvement de coupe). Il peut se déplacer en translation par rapport à la pièce suivant trois directions. L'appellation « fraiseuse à commande numérique » n'est pas très utilisée, on parlera plutôt de centre d'usinage 3 axes.



**Figure I-2 : Fraiseuse à broche horizontale et fraiseuse à commande numérique.**

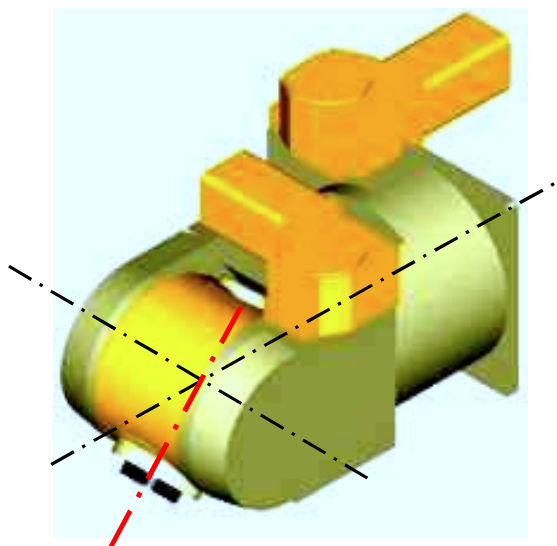
Même si les surfaces planes et cylindriques représentent la majeure partie des surfaces fonctionnelles des pièces (la plupart du temps usinées car ne pouvant être obtenues avec une précision suffisante par les procédés classiques d'élaboration des pièces brutes), l'usinage de surfaces complexes s'est développé. Ces surfaces gauches sont par exemple présentes sur les matrices d'emboutissage et sur les moules pour l'industrie de l'injection plastique. La Figure I-3 montre un exemple de matrice d'emboutissage utilisé pour la fabrication d'un capot de voiture.



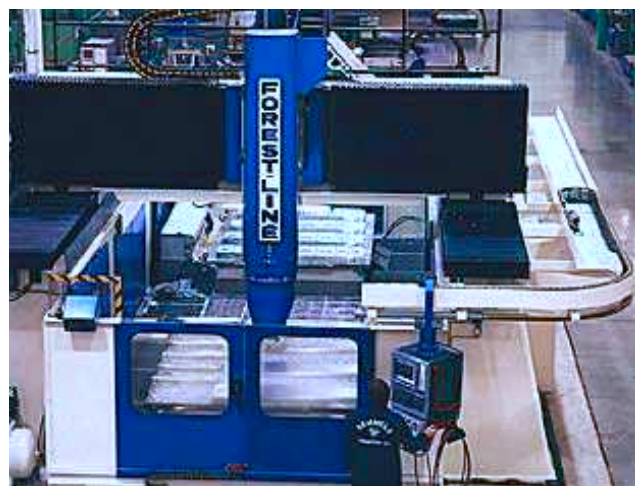
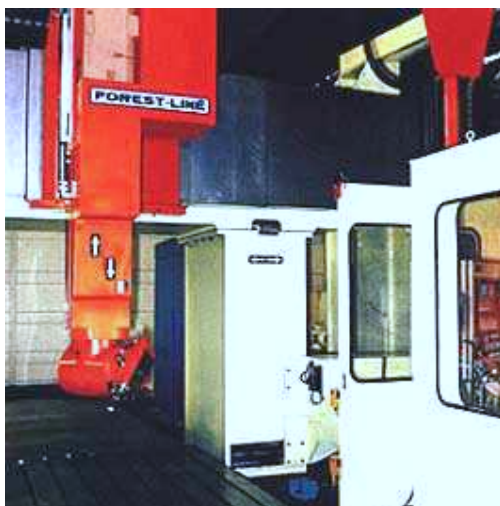
**Figure I-3 : Matrice d'emboutissage avec surface gauche.**

Les surfaces gauches peuvent être réalisées avec un centre d'usinage 3 axes en utilisant comme outil une fraise boule. Dans ce cas, les conditions de coupe de la fraise ne sont pas optimales. En effet, lorsque le point générateur de l'outil se trouve sur l'axe de rotation de la fraise, la vitesse de coupe en ce point est nulle. Pour résoudre ce problème il est nécessaire de pouvoir incliner l'axe de rotation de la fraise qui est également l'axe de rotation

de la broche. Cette inclinaison est obtenue en ajoutant sur le centre d'usinage 3 axes une tête rotative (Figure I-4). La tête rotative possède deux axes de rotation motorisés souvent concourants, l'équivalent dans le domaine de la robotique étant un poignet à deux degrés de liberté. L'association d'un centre d'usinage 3 axes et d'une tête rotative 2 axes constitue un centre d'usinage 5 axes (Figure I-5). Ceci montre une des différences entre les robots et les machines-outils. En effet, dans le cas général, les robots possèdent six degrés de liberté (axes) et les machines-outils ont cinq axes car l'orientation de l'outil de coupe autour de son axe n'a pas d'utilité, le mouvement de coupe étant directement communiqué à l'outil par le moteur de la broche.



**Figure I-4 : Tête rotative 2 axes.**

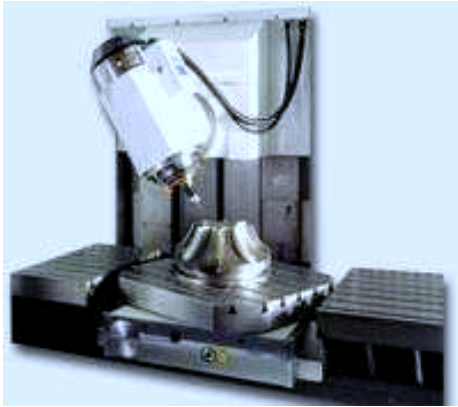


**Figure I-5 : Centre d'usinage 5 axes à tête rotative 2 axes.**

Remarque :

Une autre solution consiste à utiliser une tête rotative 1 axe combinée à un plateau tournant (voir Figure I-6). La réalisation de ce type de solution est plus simple que la réalisation d'une tête rotative deux axes. En contrepartie, les dimensions des pièces réalisées sont limitées par la dimension du plateau tournant.





**Figure I-6 : Centre d'usinage 5 axes à tête rotative 1 axe et plateau tournant.**

Les constructeurs de machines-outils étant nombreux et différents des fournisseurs de commandes numériques, une normalisation sur la dénomination des axes de ces machines a été nécessaire afin que l'association commande numérique-machine soit simple à réaliser. Les conventions adoptées vont maintenant être précisées.

### ***1.1.3. Terminologie.***

Le Mémotech de « génie mécanique » (collection A. Capiliez, Educavivre, éditions Casteilla, 1993) donne des définitions générales relatives à la désignation des machines d'usinage :

#### Machine-outil à commande numérique (MOCN) :

Machine-outil programmable équipée d'une commande numérique par ordinateur (CNC). Elle est dédiée à des fabrications variées de pièces différentes lancées en petits lots répétitifs.

#### Centre d'usinage (CU) :

C'est une MOCN équipée d'équipements périphériques qui assurent le changement automatique d'outils stockés dans les magasins d'outils, le changement automatique de pièces (palettisation) et éventuellement le convoyage des copeaux (convoyeur). Il est dédié à des fabrications variées de pièces différentes.

#### Machine autonome flexible :

C'est un CU doté d'un carrousel de palettes pour le chargement et le déchargement des pièces, de plusieurs magasins d'outils, de moyens d'auto-contrôle, d'un système de détection des bris et usures d'outils. Elle est dédiée à des fabrications variées de plusieurs familles de pièces.

#### Cellule flexible :

Il s'agit d'un système formé de plusieurs CU (2 à 3) semblables ou non reliés entre eux par un dispositif de transfert de pièces. Les fonctions de stockage, chargement et déchargement des pièces brutes et finies sont aussi automatiques. Elle est dédiée à des opérations spécifiques sur plusieurs familles de pièces.

#### Ligne transfert flexible :

Il s'agit d'un système formé de plusieurs MOCN, machines spéciales (à têtes interchangeables automatiquement) agencées linéairement conformément au flux des produits (gamme de fabrication). Elle est dédiée à une famille de pièces.



Atelier flexible :

C'est un système formé de plusieurs MOCN ou cellules flexibles (de 5 à 15) associé à des dispositifs de transfert de pièces (chargement, déchargement, stockage, contrôle) entièrement automatisés et gérés par un ordinateur central. Il est dédié à l'usinage des pièces d'une même famille.

**1.1.4. Définition des conventions.**

La norme NF Z 68-020 définit un système de coordonnées machine et les mouvements de la machine de telle façon qu'un programmeur puisse décrire les opérations d'usinage sans avoir à distinguer si l'outil s'approche de la pièce ou la pièce de l'outil. Ce système d'axes peut être défini d'après cette norme pour n'importe quel type de machine. Cette normalisation est notamment nécessaire pour garantir l'interchangeabilité des programmes sur plusieurs machines différentes. Cette norme étant complexe, nous allons en présenter une version simplifiée pour les machines les plus usuelles (voir [NF\_95] pour plus de détails).

Le système normal de coordonnées est un système cartésien rectangulaire de sens direct avec les trois principaux axes appelés **X**, **Y** et **Z** et avec des axes de rotation autour de chacun de ces axes appelés respectivement **A**, **B** et **C**.

Mouvements de translation **X**, **Y**, **Z**:

*Axe **Z** de mouvement:*

L'axe **Z** est parallèle à la broche principale de la machine. Lorsque la broche principale est pivotante ou orientable, l'axe **Z** doit être parallèle à l'axe de la broche quand cette dernière est dans la position zéro. La position zéro de référence est de préférence celle où la broche est perpendiculaire à la surface de bridage de la pièce.

*Axe **X** de mouvement:*

Quand cela est possible, l'axe **X** doit être horizontal et parallèle à la surface de bridage de la pièce. Pour les machines avec des pièces en rotation, l'axe **X** doit être radial et parallèle aux glissières du chariot transversal.

*Axe **Y** de mouvement:*

L'axe **Y** de mouvement forme avec les axes **X** et **Z** un trièdre de sens direct.

Mouvements de rotation **A**, **B**, **C** :

Les angles **A**, **B** et **C** définissent les mouvements de rotation effectués respectivement autour d'axes parallèles à **X**, **Y** et **Z**.

Direction :

Le sens positif des axes est défini de manière telle qu'un mouvement dans une direction positive d'axes de translation ou de rotation, augmente les valeurs positives de la position de la pièce par rapport à la machine.

Mouvements additionnels :

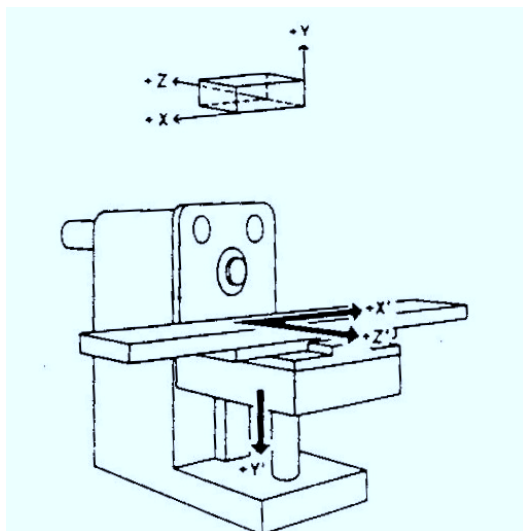
*Mouvements de translation :*

Quand, en plus des mouvements de translation primaire **X**, **Y** et **Z**, il existe des mouvements de translation secondaires parallèles à ceux-ci, ils seront respectivement désignés par **U**, **V** et **W**.

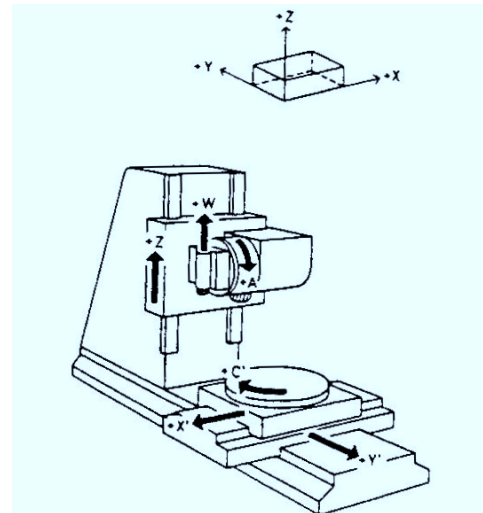
*Mouvements de rotation :*

Quand, en plus des mouvements de rotation primaires **A**, **B** et **C**, il existe des mouvements de rotation secondaires parallèles ou non à **A**, **B** et **C**, ceux-ci seront désignés par les lettres **D** ou **E**.

La Figure I-7, extraite de la norme NF Z 68 020 propose deux illustrations pour la dénomination des axes.



Fraiseuse à broche horizontale



Fraiseuse à broche verticale, tête pivotante et à plateau tournant

**Figure I-7 : Exemples de dénomination des axes.**

## **I.2. Etat de l'art des robots parallèles.**

Les machines-outils classiques sont basées sur des structures cartésiennes dont la description et la représentation sont relativement simples, d'autant plus que leurs axes de mouvement sont normalisés, ce qui n'est pas encore le cas des robots parallèles. Avant d'aller plus loin, nous allons choisir le mode de représentation des structures parallèles qui sera utilisé dans la suite de ce manuscrit.

### *I.2.1. Conventions de représentation.*

La représentation sur papier des robots parallèles (et en général des structures spatiales articulées) est un exercice difficile. Il existe plusieurs types de représentation. Chacun d'eux permet une lisibilité accrue de certains paramètres, mais s'accompagne d'une perte d'information sur les autres. Parmi les types de représentation, nous pouvons citer : la photographie (ou vue en perspective), le schéma cinématique, le dessin d'ensemble, les paramètres de Denavit-Hartenberg et le graphe d'agencement.

Pour illustrer ce propos, nous avons appliqué les différentes représentations à un mécanisme extrait de la famille du robot Delta [CLAV\_88], le Delta rotatif à doubles barres.

### I.2.1.1. Les vues en perspective (ou photographies).

Dans ce type de représentation, les articulations composant les chaînes cinématiques ne sont pas facilement visibles et identifiables (Figure I-8). Nous pouvons voir l'aspect général de la machine, mais pas de manière précise la disposition des articulations. Ce type de représentation n'est donc pas suffisant.



Figure I-8 : Photographie du robot Delta.

### I.2.1.2. Le schéma cinématique.

La norme NF EN ISO 3952-1 codifie la représentation des schémas cinématiques (Figure I-9). Ces schémas, très pratiques pour représenter l'agencement des différentes liaisons composant un mécanisme, sont de lecture aisée pour les mécanismes plans et les mécanismes spatiaux simples, mais deviennent vite illisibles pour les mécanismes spatiaux complexes (voir Figure I-10).

Liaisons	Exemples	Mouvements relatifs		Projection orthogonale 2D	Perspective 3D
		R	T		
Pivot		0	0		
		0	0		
		Rz	0		
Glissière		0	Tx		
		0	0		
		0	0		
Pivot glissant		0	0		
		0	0		
		Rz	Tz		
Rotule ou sphérique		Rx	0		
		Ry	0		
		Rz	0		

Figure I-9 : Représentation normalisée de quelques liaisons.

### I.2.1.3. Le dessin d'ensemble.

Le dessin d'ensemble est utilisé en mécanique. Il sert à définir un mécanisme, son assemblage et son fonctionnement. Plusieurs vues extérieures, coupes et sections sont rassemblées sur un document. Ce type de représentation est particulièrement bien adapté pour les mécanismes plans, mécanismes qui sont couramment utilisés en mécanique. Par contre, l'utilisation de dessins d'ensemble devient rédhibitoire pour les mécanismes spatiaux complexes tels que les robots parallèles.

### I.2.1.4. Les paramètres de Denavit-Hartenberg.

Parmi les méthodes et notations proposées pour effectuer une modélisation géométrique systématique des robots, la plus répandue en robotique est celle des paramètres de Denavit-Hartenberg [DEN\_55]. Ces paramètres permettent de modéliser aisément les robots dont les articulations possèdent chacune un degré de liberté. Elle est donc particulièrement efficace pour les robots série, mais bien qu'elle soit universelle et automatisée, elle complexifie la description des robots parallèles dont les articulations passives ont deux ou trois degrés de liberté et peut introduire des singularités qui n'existent pas physiquement. Cependant, l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs la rend intéressante aujourd'hui.

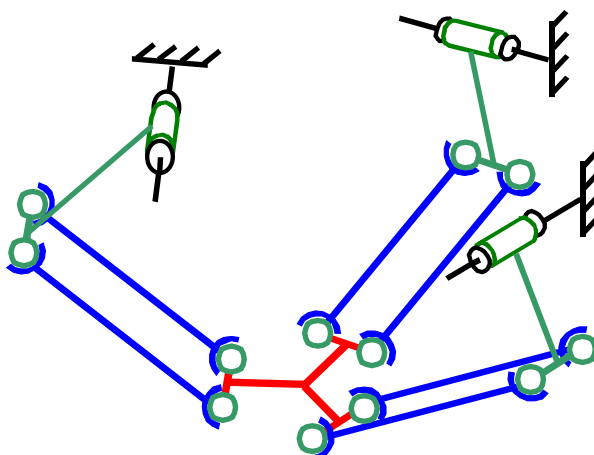


Figure I-10 : Schéma cinématique du robot Delta.

### I.2.1.5. Les graphes d'agencement.

Ces graphes ont été proposés par François PIERROT dans [PIER\_91]. Les conventions retenues sont présentées Figure I-11.

Nom de la liaison	Représentation	
	Liaison passive	Liaison motorisée
Rotoïde (pivot)		
Prismatique (glissière)		
Universelle (cardan)		
Sphérique (rotule)		

Figure I-11 : Conventions des graphes d'agencement.

Avec ce type de représentation (Figure I-12), les informations concernant l'agencement géométrique des liaisons sont perdues. Par contre la comparaison des familles de mécanismes parallèles ainsi que le décompte des degrés de liberté sont facilités à l'aide de la formule de Grübler (I-1).

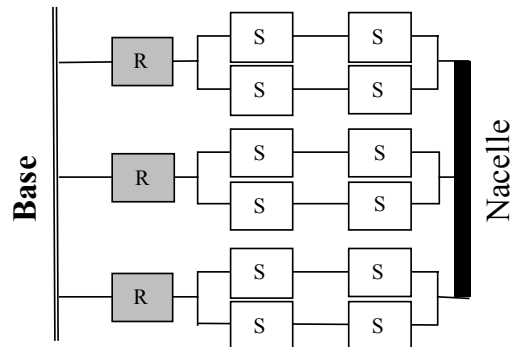


Figure I-12 : Graphe d'agencement.

Par exemple, sur la Figure I-12, nous constatons que le robot se décompose en trois chaînes possédant les mêmes articulations, disposées en parallèle entre la base et la nacelle. Par contre, nous ne pouvons pas affirmer que ces trois chaînes sont identiques du point de vue de leur géométrie. Le nombre de degrés de liberté de ce mécanisme se calcule en utilisant la formule de Grübler (I-1) qui donne la mobilité d'un mécanisme dans le cas général, en dehors des positions et des agencements singuliers.

$$m = 6N_p - 6N_l + \sum_{i=1}^{N_l} dof_i - m_{int} \quad (I-1)$$

où  $m$  est le nombre de degrés de liberté du mécanisme (en dehors configurations singulières),  $N_p$  le nombre de solides indépendants (bâti exclu),  $N_l$  le nombre de liaisons entre ces solides,  $dof_i$  le nombre de degrés de liberté de la liaison numéro  $i$  et  $m_{int}$  est le nombre de mobilités internes.

Pour le robot Delta de la Figure I-12, nous avons  $N_p = 10$ ,  $N_l = 15$ ,  $\sum_{i=1}^{N_l} dof_i = 39$ ,  $m_{int} = 6$  car chacune des barres à la possibilité de tourner sur elle-même (axe passant par le centre des deux liaisons rotule) sans que la position de la nacelle ne change. Finalement ; nous obtenons  $m = 6 \cdot 10 - 6 \cdot 15 + 39 - 6 = 3$ . Le mécanisme que nous avons représenté dans le graphe d'agencement de la Figure I-12 possède donc trois degré de liberté utiles. Par contre, ce type de calcul ne nous permet pas de connaître leur nature.

Remarque :

Un des principes les plus utilisés en robotique parallèle est d'imposer une distance entre des points positionnés par rapport à la base et des points appartenant à la nacelle. Ces couples de points définissent des segments de longueur variable (vérin) ou non (barre). Ces segments comportent une liaison rotule à chacune de leur extrémité, or comme nous venons de le voir, le défaut de cette solution est de laisser des mobilités internes au mécanisme. La suppression de ces mobilités internes est réalisée en remplaçant, pour chacun des segments, une des deux liaisons rotule (indifféremment du côté de la nacelle ou du côté de la base) par

une liaison cardan. Dans la suite de ce manuscrit, nous ne représentons que des mécanismes dont les mobilités internes ont été supprimées car, comme elles ne sont pas contrôlées elles sont la source de problèmes si on utilise ces mécanismes pour l'usinage précis de pièces.

#### 1.2.1.6. Représentation retenue.

Comme aucune des représentations que nous venons de proposer n'est satisfaisante à elle seule, nous avons retenu, pour la suite de ce manuscrit, la combinaison de deux représentations :

- une photographie, une vue en perspective, ou un schéma cinématique afin de visualiser facilement la disposition des liaisons.
- un graphe d'agencement qui permet une compréhension aisée de la cinématique de la machine, un comptage simple des degrés de liberté de l'organe terminal et une identification de la famille à laquelle appartient cette machine.

#### 1.2.2. Présentation de quelques robots parallèles.

Il est nécessaire de commencer par préciser la terminologie utilisée. Jean-Pierre Merlet donne les définitions suivantes [MERL\_97]:

- Un *manipulateur parallèle généralisé* est un mécanisme en chaîne cinématique fermée dont l'organe terminal est relié à la base par plusieurs chaînes cinématiques indépendantes.
- Un *manipulateur parallèle* est constitué d'un organe terminal à  $n$  degrés de liberté et d'une base fixe, reliés entre eux par au moins deux chaînes cinématiques indépendantes, la motorisation s'effectuant par  $n$  actionneurs simples.
- Un *manipulateur pleinement parallèle* est un *manipulateur parallèle* dont le nombre de chaînes est strictement égal au nombre de degrés de liberté de l'organe terminal.

Cette terminologie constitue en elle-même les bases d'une classification. D'autres classifications sont possibles suivant :

- le nombre de degrés de liberté de la nacelle.
- le type des degrés de liberté de la nacelle.
- les géométries de la base et de la nacelle (plates-formes de Gough).
- que la structure comporte ou non une ou plusieurs chaînes passives.
- que les actionneurs sont mobiles ou fixes.

Le nombre et le type des degrés de liberté de la nacelle conditionnent le type de tâche que le robot peut effectuer. Le fait d'avoir des actionneurs fixes réduit les masses en mouvement, et par conséquent améliore la dynamique de la nacelle. Nous n'avons pas ici la prétention de dresser la liste exhaustive de tous les robots parallèles existants. Nous allons seulement présenter ceux dont l'architecture est la mieux adaptée à la réalisation de machines-outils que ce soit par la nature et le nombre des degrés de liberté de la nacelle, pour leur

simplicité de réalisation (donc leur robustesse) ou pour leur bonne dynamique (pour une liste exhaustive des robots parallèles existants voir [MERL\_97] ou consulter son site Internet<sup>2</sup>).

Historiquement, le premier mécanisme parallèle a été imaginé par Gough [GOUG\_57] afin de tester le comportement de pneumatiques. La plate-forme mobile de ce mécanisme parallèle possède 6 degrés de liberté. Le premier prototype (Figure I-13) a été réalisé en 1955. La nacelle est reliée à la base à l'aide de 6 pattes identiques. Chacune de ces pattes est connectée, d'une part à la base par un joint de cardan et d'autre part à la nacelle par une liaison rotule. La longueur de chacune des pattes est modifiée à l'aide d'un vérin. Plusieurs robots reposant sur ce principe ont été proposés. Les variations par rapport à la plate-forme originale sont liées à la position des points d'ancrage des pattes sur la base et sur la nacelle. Ce type d'architecture est toujours d'actualité et nous pouvons citer, par exemple, les robots *F-100* et *F-200i* actuellement commercialisés par la société Fanuc (Figure I-14).

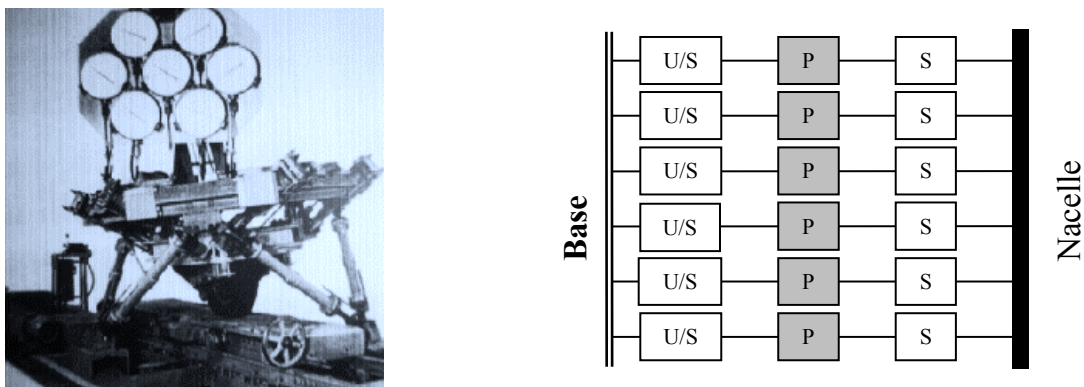


Figure I-13 : Plate-forme de Gough.



Figure I-14 : Robot parallèle Fanuc F-100.

Ce principe, légèrement modifié (Figure I-15), a été repris en 1965 par Stewart [STEW\_65] pour réaliser un simulateur de vol à 6 degrés de liberté. Cependant, de par l'architecture retenue, nous constatons que l'objectif de la réduction des masses en mouvement n'est pas pleinement atteint. Les plates-formes de Gough et de Stewart, souvent appelées abusivement toutes deux « plate-forme de Stewart », possèdent des actionneurs mobiles et par conséquent une dynamique réduite, bien que déjà meilleure que celle des robots série.

<sup>2</sup> <http://www-sop.inria.fr/saga/personnel/merlet/merlet.html>

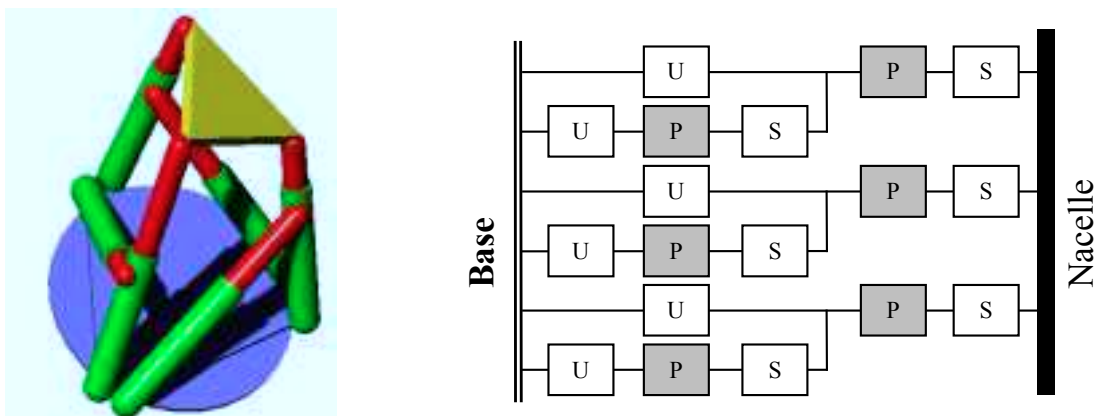


Figure I-15 : Plate-forme de Stewart.

Pour améliorer la dynamique de la plate-forme de Gough, l'idée est d'invertir les liaisons glissière et cardan en utilisant des barres de longueur fixe donc plus légères. Les actionneurs sont alors disposés sur la base. Cela aboutit au prototype « main gauche » développé à l'INRIA par Jean-Pierre Merlet [MERL\_91]. Ce robot, dont la plate-forme mobile possède également 6 degrés de liberté (Figure I-16), est constitué de 6 actionneurs linéaires reliés chacun à une barre de longueur fixe par un joint de cardan. La deuxième extrémité de ces barres est en liaison rotule par rapport à la nacelle.

Remarque :

Le robot Hexaglidle [HONE\_97] possède le même graphe d'agencement que la main gauche, seule la disposition des glissières dans l'espace diffère. Il sera assimilé à cette famille.

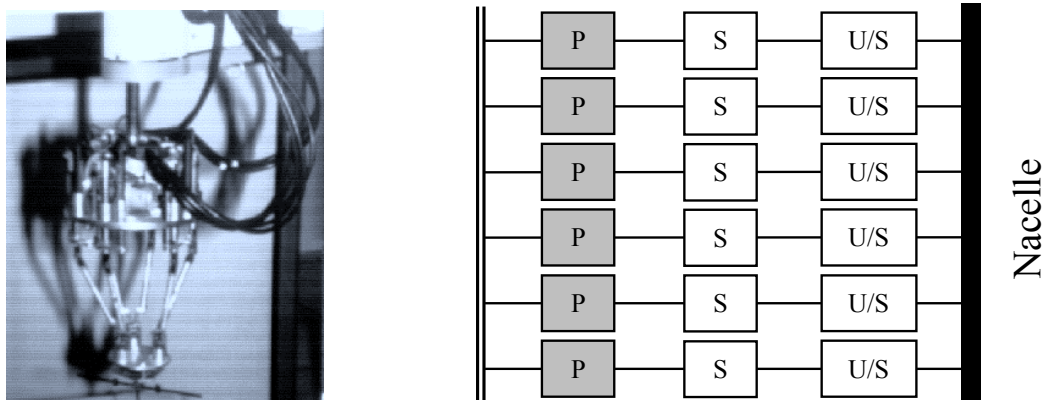


Figure I-16 : Prototype « main gauche »

L'organe terminal (nacelle) des robots que nous venons de présenter possède 6 degrés de liberté (3 translations et 3 rotations). Or, certaines tâches robotiques n'utilisent pas la totalité de ces 6 degrés de liberté. Par exemple, les tâches de *pick and place* nécessitent 3 degrés de liberté en translation (4 degrés de liberté pour du *pick and place* avec orientation). Le robot Delta, créé à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne [CLAV\_88] répond à ce besoin. Les mouvements de l'organe terminal de ce robot sont les 3 translations. La constitution de la première version du Delta est représentée sur les Figure I-8, Figure I-10 et



Figure I-12. L'apparition de cette structure ultra-légère a apporté un renouveau au domaine de la robotique parallèle. Plusieurs déclinaisons de ce robot sont possibles :

- La motorisation de ce robot peut être réalisée à l'aide d'actionneurs linéaires (Figure I-18) ou rotatifs (Figure I-8).
- Les barres reliant les moteurs à la nacelle peuvent être du type :
  - Doubles barres de même longueur montées sur rotule à chacune de leurs extrémités (ou cardan à une extrémité, rotule à l'autre). Si les barres d'une paire n'ont pas la même longueur, les mouvements de la nacelle ne sont pas des translations pures.
  - Simples barres possédant une liaison cardan à chacune de leurs extrémités. Dans ce cas, une condition géométrique régit la position des axes des cardans afin d'obtenir les mouvements de translation de la nacelle. De la même manière, si cette condition géométrique n'est pas respectée, les mouvements de la nacelle ne sont pas des translations pures. Par exemple, le robot Georg V de l'IFW (université d'Hanovre) ne respecte pas ces conditions. Sa nacelle ne se déplace donc pas en translation, cependant, pour ce robot, cela n'est pas pénalisant car la nacelle porte un poignet 2 axes.
  - Pour les architectures à base d'actionneurs rotatifs, on peut ajouter un mouvement de rotation de l'organe terminal (Figure I-17) . Dans ce cas, l'actionneur est localisé sur la base afin de ne pas pénaliser la dynamique de l'ensemble. Le mouvement est transmis à l'organe terminal par une chaîne passive.

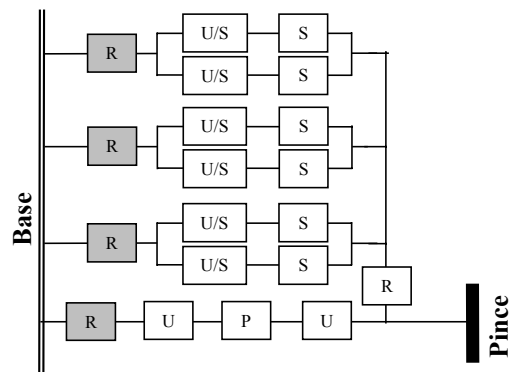


Figure I-17 : ABB FlexPicker - Robot Delta avec rotation de l'organe terminal.

Remarques :

- Le robot Triaglide appartient à cette famille.
- Le robot Star [HERV\_92] développé à l'Ecole Centrale de Paris n'appartient pas de manière stricte à cette famille. En effet, il possède les mêmes mouvements au niveau de la nacelle, des barres de longueur identique formant des parallélogrammes, mais la nature et la disposition des liaisons diffèrent, comme le montre son graphe d'agencement (Figure I-19). La formule de Grübler donne  $m = -9$ , or pratiquement, la nacelle de ce robot possède trois degrés de liberté de translation. En fait, il s'agit d'un mécanisme à la fois hyperstatique et singulier qui doit respecter certaines conditions géométriques afin de fonctionner.

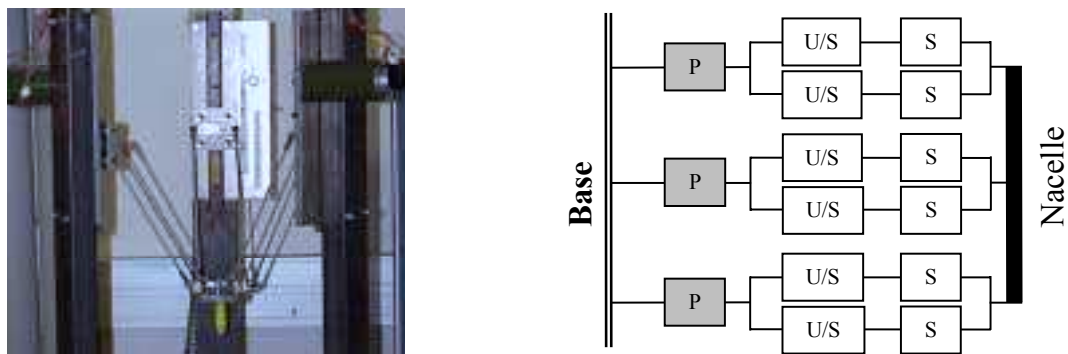


Figure I-18 : Robot Delta à actionneurs linéaires.

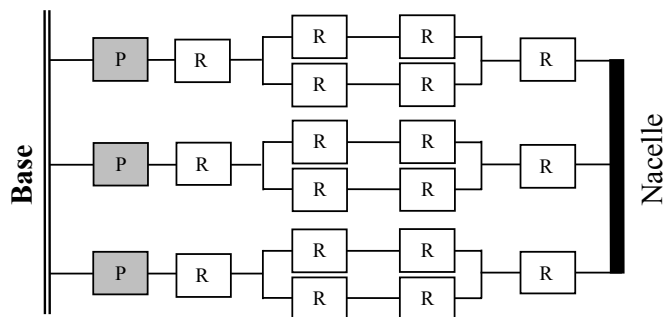


Figure I-19 : Graphe d'agencement du robot Star.

En 1991, François Pierrot propose une évolution du concept 3 axes du robot Delta vers un concept 6 axes. Ses travaux ont débouché sur la création du robot Hexa représenté sur la Figure I-20. Il est composé de 6 actionneurs rotatifs reliés chacun par une liaison rotule à une barre de longueur fixe. Chacune de ces barres est reliée à la nacelle par une liaison rotule. Tout comme le robot Delta, il s'agit d'un robot léger, donc rapide.

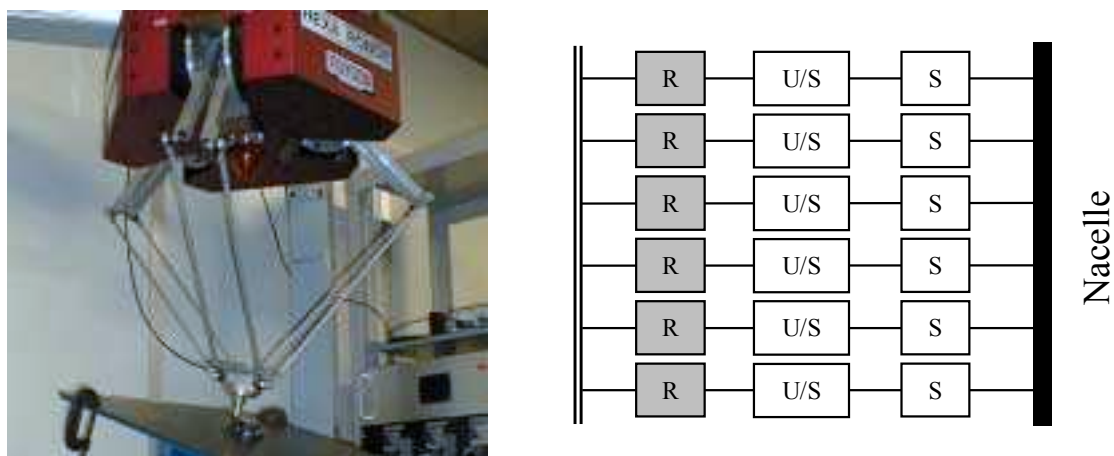


Figure I-20 : Robot Hexa.

Comme nous l'avons mentionné au début de ce paragraphe, il existe des robots qui ne sont pas pleinement parallèles. Industriellement, le plus connu d'entre eux est le Tricept [NEUM\_88] de la société Neos Robotics (Figure I-21). Ce robot est constitué d'une structure parallèle à 3 degrés de liberté à laquelle est associé un poignet à 2 ou 3 degrés de liberté monté en série. Sans ce poignet, la nacelle de ce robot se déplace sur une sphère de rayon

variable dont le centre est celui de la liaison cardan de la chaîne passive. La direction de la nacelle est alors celle de la tangente à la sphère que nous venons de considérer. Ce dernier point est pénalisant par exemple pour les opérations de *pick and place*. En effet, lors d'un déplacement entre deux points, le couplage entre les mouvements de translation et de rotation fait changer l'orientation de la nacelle. L'ajout du poignet 2 axes est nécessaire afin de compenser la variation d'orientation de la nacelle.

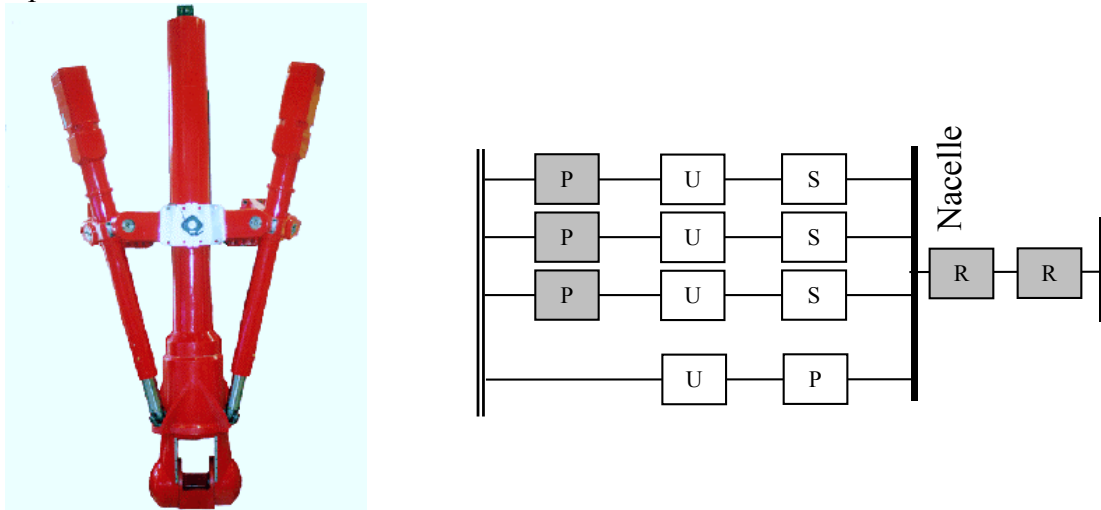


Figure I-21 : Robot Tricept.

Le robot Tricept a été récemment décliné sous forme de machine-outil. Depuis 1994, d'autres projets de machines-outils à base de structures parallèles ont vu le jour. Nous allons maintenant les présenter.

### I.3. Machines-outils parallèles.

La première machine d'usinage à architecture parallèle proposée est la Variax de Giddings&Lewis (Figure I-22) en 1994 [SHEL\_95]. Sa structure parallèle est du même type que celle de la plate-forme de Gough. Nous appellerons les machines de ce type « Hexapodes ».

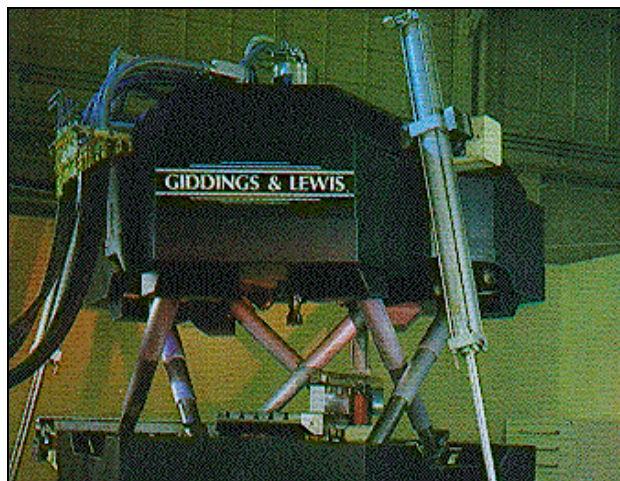


Figure I-22 : Machine Variax.

Beaucoup de machines-outils de la famille des hexapodes ont été proposées. Parmi les plus connues nous trouvons :

- La machine Ingersoll H0H600\*.
- La machine Mikromat 6X Hexapod\*.
- Les machines Geodetics G500 et G1000.
- La machine Cosmo Center PM-600\* de la société Okuma.
- La machine Tornado 2000\* de la société Hexel.
- La machine HEXACT\* développée par INA et l'IFW.
- L'Hexapode 300 de la société CMW\*, compact, destiné à être utilisé de manière autonome ou porté par une structure cartésienne.

Les machines ci-dessus étant de la famille des hexapodes, ce sont toutes des machines 5 axes au sens de l'usinage. Nous avons vu que la dynamique des robots parallèles est meilleure lorsque les actionneurs sont fixés sur la base. Les concepteurs de machine-outil ont donc proposé des solutions de machines, inspirées des robots parallèles correspondants :

- La machine HexaM\* de la société Toyota [PIER\_98]. Il s'agit en fait de la déclinaison du robot Hexa avec des actionneurs linéaires.
- La machine Hexaglide\* de l'ETHH (Zurich).
- La machine Triaglide\* de la société Mikron. Elle ne possède que trois degrés de liberté de translation.
- La machine Quickstep de la société Krause&Mauser. Tout comme la machine Triaglide, cette machine possède 3 degrés de liberté de translation. Cette machine a été exposée pour la première fois à l'EMO Paris 1999.
- La machine UraneSX de la société Renault Automation/Comau qui possède trois degrés de translation comme la machine Quickstep. Cette machine, équipée de moteurs linéaires, est capable d'accélérer à 3,5g sur l'ensemble de son volume de travail. Elle a été conçue afin de réaliser spécifiquement des opérations de perçage, lamage et taraudage à grande vitesse [PIER\_00].

Il existe également des machines hybrides ayant une ou plusieurs des caractéristiques suivantes :

- Seul un sous-ensemble de la machine est parallèle.
- La machine n'est pas pleinement parallèle (les pattes de la machine comportent plusieurs actionneurs en série).
- La machine comporte une chaîne passive.

Parmi ces machines hybrides, nous trouvons :

- La machine Dyna-M\* du WZL (Aix-la-Chapelle). Il s'agit d'une machine 3 axes constituée d'un mécanisme plan à deux degrés de liberté complété par un axe linéaire porté.
- La machine Georg V\* de l'IFW (Université de Hanovre).
- La machine Tricept TR805\* de NEOS Robotics dont l'architecture est identique à celle du robot du même nom.

---

\* Les photographies des machines concernées sont présentées dans l'annexe B.

- La machine Eclipse\* [KIM\_98] de l'Université Nationale de Séoul. Cette machine redondante permet aussi bien de réaliser des usinages de surfaces complexes 5 axes, des usinages 5 faces sans démontage sur des pièces prismatiques et du tournage vertical.
- Le projet Smartcuts\* qui associe 2 structures parallèles planes (3 degrés de liberté) montées suivant un agencement de type main droite (portant la broche) - main gauche (portant la pièce).

Enfin, nous terminons cette énumération par une machine intégrant un sous-ensemble parallèle : la machine Sprint Z3\* de la société DS Technologie dont l'intérêt est de proposer une alternative à l'utilisation problématique des têtes rotatives. Cette machine est déjà en service dans l'industrie. Le sous-ensemble parallèle constitue l'équivalent d'un poignet parallèle à deux degrés de liberté de rotation et un degré de liberté de translation destiné à être porté par une structure cartésienne **X, Y** ou **X, Y, Z**.

En conclusion, la plupart des machines-outils parallèles existantes possèdent 6 degrés de liberté au sens de la robotique et 5 axes au sens de la machine-outil. Pour la plupart des machines que nous venons de présenter, le succès commercial attendu n'est pas au rendez-vous et ce pour plusieurs raisons. Parmi elles, nous pouvons citer la méfiance des utilisateurs par rapport à ces machines dont les axes ne sont plus physiques mais résultant de la combinaison de plusieurs mouvements, mais surtout leur inadéquation par rapport aux attentes des utilisateurs de plusieurs points de vue. De manière générale, nous pouvons citer :

- Le ratio « empreinte au sol »/ « volume de travail » est mauvais.
- Les systèmes de commandes type numérique commencent à peine à intégrer les architectures parallèles.
- Les procédures d'étalonnage sont plus complexes.
- La présence d'articulations passives à plusieurs degrés de liberté.

et de manière spécifique aux hexapodes :

- L'utilisation de six moteurs pour seulement 5 degrés de liberté utiles.
- Les capacités d'orientation limitées.
- L'utilisation de vis à billes « flottantes » dans les « pattes ».
- La présence des moteurs dans les « pattes » qui entraîne la production d'énergie thermique dans les corps en mouvement et donc des dilatations.
- La difficulté d'utiliser des moteurs linéaires dans de telles architectures.

Il existe donc un besoin portant sur la création de nouvelles machines mieux adaptées aux tâches à effectuer. Avant d'envisager des solutions de machines parallèles répondant mieux à certains problèmes particuliers, nous allons, dans le deuxième chapitre, proposer une démarche et présenter les outils que nous allons utiliser dans la suite de ce manuscrit pour la conception de nouvelles machines.

---

\* Les photographies des machines concernées sont présentées dans l'annexe B.



## **Chapitre II . Méthodologie de conception.**

---

L'objectif de ce manuscrit est de proposer des solutions à base de mécanismes parallèles destinées à améliorer les performances des machines-outils. Par sa définition, ce problème est inclus dans celui de la synthèse de mécanismes qui constitue à elle seule une discipline à part entière. Nous n'avons pas ici la prétention d'explorer l'ensemble du domaine de la synthèse de mécanismes. Nous nous concentrerons principalement sur les solutions qui nous semblent les mieux adaptées à l'usinage précis et rapide des pièces.

Dans ce chapitre, nous présentons sommairement la problématique de la synthèse de mécanismes ainsi que quelques méthodes employées pour sa résolution. Nous poursuivons en précisant les restrictions, spécifiques à notre étude, sur les mécanismes recherchés. Cette réduction de l'espace de recherche des solutions rend plus favorable l'utilisation d'une méthode linéaire par rapport à une méthode plus générale. Les différentes étapes de notre démarche de conception sont :

- Dans un premier temps, nous sélectionnons une famille d'architectures parallèles correspondant à la tâche à effectuer.
- Une première phase de recherche nous permet de trouver la meilleure topologie à l'intérieur de cette famille
- Pour cette topologie, nous étudions l'évolution de plusieurs indicateurs en fonction d'un vecteur réduit de paramètres. A l'aide de ces indicateurs, nous fixons les dimensions du mécanisme qui agissent sur sa cinématique.
- Une fois le mécanisme sélectionné et ses dimensions calculées, il nous reste à dimensionner les organes qui le composent.

### **II.1. Introduction.**

#### *II.1.1. Synthèse de mécanismes en robotique.*

Avant de parler de synthèse de mécanismes, nous devons préciser la notion de mécanisme. Un mécanisme est un ensemble de pièces, déformables ou non, assemblées entre elles par des liaisons mécaniques. Dans la suite de ce manuscrit, nous considérerons que chacune des pièces constituant le mécanisme est indéformable. La synthèse de mécanismes consiste à trouver un mécanisme, le meilleur au sens d'un ou de plusieurs critères prédéfinis, pour accomplir une tâche donnée. Nous n'exposerons pas ici la synthèse de site robotisé qui prend en compte l'agencement de plusieurs postes. La première étape de la synthèse de mécanismes est de modéliser la tâche et ainsi de caractériser l'espace de recherche des solutions [CHED\_98].

Pour un robot, la tâche est l'ensemble des positions à atteindre qui peuvent être une liste de points de passage, une trajectoire à parcourir, une surface à laquelle le robot doit accéder et/ou un volume de travail. Ces positions doivent être atteintes sous une ou plusieurs des contraintes physiques de nature :

- Géométrique (collisions avec l'environnement du robot, zones où le robot ne doit pas pénétrer)
- Cinématique (vitesse de parcours d'une trajectoire)
- Dynamique (masse à transporter, accélération minimale ou effort à exercer par le robot)
- Environnementale (spécificité de l'environnement du robot telle que atmosphère marine ou apesanteur)

Concernant le mécanisme proprement dit, sa cinématique est totalement caractérisée par la connaissance du triplet  $\{\mathbf{T}, \mathbf{D}, \mathbf{P}\}$  où  $\mathbf{T}$  représente la topologie du mécanisme,  $\mathbf{D}$  ses dimensions et  $\mathbf{P}$  son placement par rapport au repère de référence [RAMS\_99]. Pour déterminer totalement ou partiellement ce triplet, les méthodes de résolution suivantes ont été utilisées [CHED\_98] :

- Méthodes reposant sur l'utilisation d'un catalogue, le plus exhaustif possible, de mécanismes ou de trajectoires associées, à partir duquel on choisit le mécanisme correspondant à la tâche à effectuer.
- Méthodes graphiques sur des constructions géométriques. Avec les méthodes utilisant un catalogue de mécanismes, ces méthodes sont les plus anciennes car, contrairement aux méthodes suivantes, elles ne nécessitent pas de gros moyens de calcul.
- Méthodes analytiques qui, à partir d'une liste de points de passage et d'une topologie  $\mathbf{T}$ , permettent de trouver les dimensions du mécanisme  $\mathbf{D}$ . L'inconvénient de ces méthodes est qu'elles sont limitées par le nombre de points de passage.
- Méthodes à base de systèmes experts utilisant un catalogue de mécanismes et un ensemble de règles.
- Méthodes algébriques basées sur la théorie des groupes de Lie ou, pour les mécanismes à chaîne fermée sur la résolution des équations de fermeture par des méthodes analytiques.
- Méthodes d'optimisation locales ou stochastiques (recuit simulé, réseaux de neurones, algorithmes génétiques ou multi-critères) qui envisagent la recherche de solution comme la minimisation d'un critère donné.

Même si nous pouvons assimiler les machines-outils à commande numérique actuelles à des robots (architecture série, notion main droite – main gauche, motorisation électrique, asservissement en position des axes, langage de programmation), le problème de la synthèse de leur cinématique comprend des objectifs différents. Nous allons examiner dans le paragraphe suivant quelles sont les spécificités de la synthèse de mécanisme pour les machines-outils d'usinage.



### II.1.2. Synthèse de mécanismes pour les machines-outils d'usinage.

Historiquement, les fraiseuses ont remplacé les étaux limeurs pour la réalisation de surfaces planes qu'il s'agisse de fraisage de face (en bout), de fraisage de profil (en roulant) ou combiné comme illustré sur la Figure II-1.

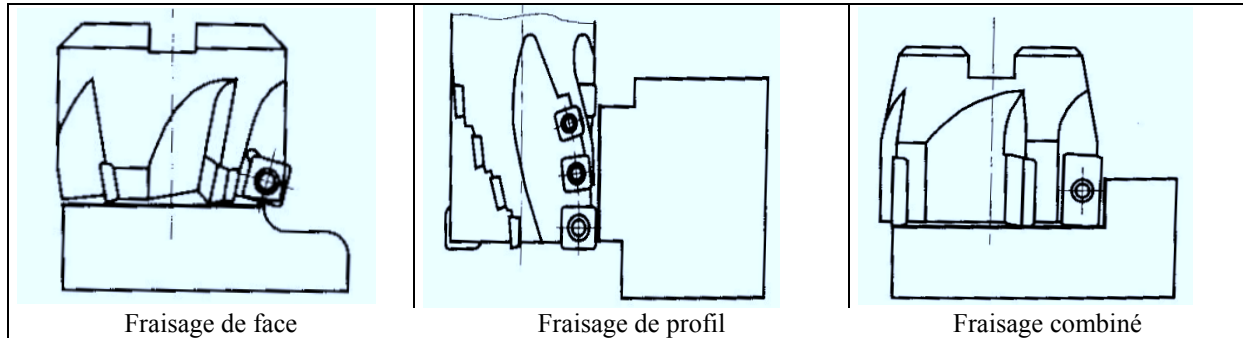


Figure II-1 : Types de fraisage.

Comme nous l'avons vu dans l'état de l'art, les fraiseuses sont composées de trois glissières linéaires perpendiculaires entre elles. Historiquement, cela était justifié par le fait que les surfaces usinées majoritairement étaient des surfaces planes et que le déplacement du chariot était réalisé manuellement. Si la machine était bien réglée, la qualité géométrique de la (des) surface(s) produite(s) était liée à la qualité des guidages (rectitude, roulis tangage et lacet de la glissière et défaut de perpendicularité). Ces structures cartésiennes ont été conservées lorsque les commandes numériques sont apparues car leur modélisation est aisée.

Dans les ateliers de production, les centres d'usinage, plus flexibles, ont remplacé les machines transfert qui nécessitent un remplacement, des modifications ou un nouveau réglage chaque fois que la géométrie de la pièce fabriquée est modifiée. Comme, au départ, ces machines ne sont pas dédiées à la fabrication d'une seule pièce, la tâche est un volume de travail qui, de par la constitution de ces machines, est un parallélépipède rectangle qui est simple à modéliser.

Pour les raisons que nous venons d'évoquer, le problème de la synthèse de la cinématique de ces machines est trivial. En effet, les tâches s'effectuent dans un volume de travail simple dans lequel des contraintes de performances minimales doivent être respectées. Parmi ces contraintes, nous pouvons citer la vitesse d'avance et l'accélération qui conditionnent la productivité de la machine, la précision et la rigidité auxquelles est liée la qualité des surfaces usinées et l'encombrement de la machine qui est capital si cette dernière doit s'insérer dans une ligne transfert. Nous allons examiner, dans le paragraphe suivant, les répercussions de ces contraintes sur le choix des architectures parallèles candidates.

### II.1.3. Architectures parallèles candidates pour les machines-outils.

La comparaison entre les machines-outils et les robots peut être étendue à la nature de leurs performances, mais, par contre, la valeur de ces performances n'est pas du même ordre de grandeur. A cause de cette différence, seulement quelques architectures parallèles utilisées

en robotique sont candidates en tant qu'architectures de machines-outils. Pour déterminer lesquelles, nous allons considérer plusieurs points cruciaux pour les machines-outils, à savoir les performances dynamiques, la précision, le comportement thermique et la rigidité. Nous compléterons ces points par quelques aspects pratiques en matière de simplicité de réalisation.

### II.1.3.1. Performances dynamiques.

Les performances dynamiques des machines-outils conditionnent leur productivité. Les machines-outils à structure cartésienne souffrent du même défaut que les robots série à savoir leur faible capacité d'accélération. Etant donné que, pour un effort de poussée donné, l'accélération résultante est inversement proportionnelle à la masse déplacée, l'amélioration des performances dynamiques passe obligatoirement par une réduction des masses en mouvement. Cette dernière constatation est particulièrement difficile à mettre en œuvre dans le cas des architectures série où on doit concilier la réduction des masses avec une bonne rigidité de la structure.

Avec les technologies actuelles, notamment en matière de motorisation, les machines à structure cartésienne réalisées tendent à s'approcher des limites (1,2 g d'accélération pour la machine Urane) en matière de capacité d'accélération et ce, principalement à cause de l'importance des masses transportées. Leur réduction revêt donc une importance capitale. L'utilisation des logiciels de calcul éléments finis et, dans certains cas, d'alliages à base d'aluminium à la place de la fonte ont permis d'obtenir des pièces plus légères, donc des machines possédant une meilleure dynamique. Cependant, les limites sont sur le point d'être atteintes.

Le principal intérêt d'utiliser des mécanismes parallèles à la place des architectures série réside dans le fait que leurs performances dynamiques sont intrinsèquement meilleures. Afin de profiter au maximum de l'amélioration de ces performances, nous devons choisir des architectures dont les pièces en mouvement sont les plus légères possibles, c'est à dire les structures dont les actionneurs (qui comptent parmi les pièces les plus massives) sont fixés sur le bâti de la machine.

### II.1.3.2. Comportement thermique.

Si, du point de vue des performances dynamiques, les machines-outils à structure parallèle doivent dépasser les machines-outils cartésiennes, sur d'autres points tels que la précision, leurs performances doivent être au moins égales à celles des structures série. La précision des machines est influencée par la qualité de réalisation de leurs organes, par la finesse de leur étalonnage ainsi que par leur comportement thermique. Si nous examinons le cas des hexapodes, par exemple la machine Ingersoll, nous constatons que l'énergie thermique dissipée par les moteurs provoque une augmentation de la température des « pattes » de la machine car ces « pattes » sont isolées thermiquement de la nacelle et du bâti de la machine par les articulations (voir Figure II-2). Cette augmentation de température induit un allongement des barres qui nuit au positionnement précis de l'outil. Une solution à ce problème est d'équiper la machine de capteurs de température et d'effectuer une compensation en ligne. Cependant, la solution idéale est d'évacuer l'énergie thermique dissipée par les moteurs dans le bâti, ce dernier étant beaucoup plus massif que les barres, son

augmentation de température et donc ses déformations seront très faibles. Pour se rapprocher au maximum de cette solution, nous devons avoir, comme dans le cas des performances dynamiques, des actionneurs fixés sur le bâti de la machine.

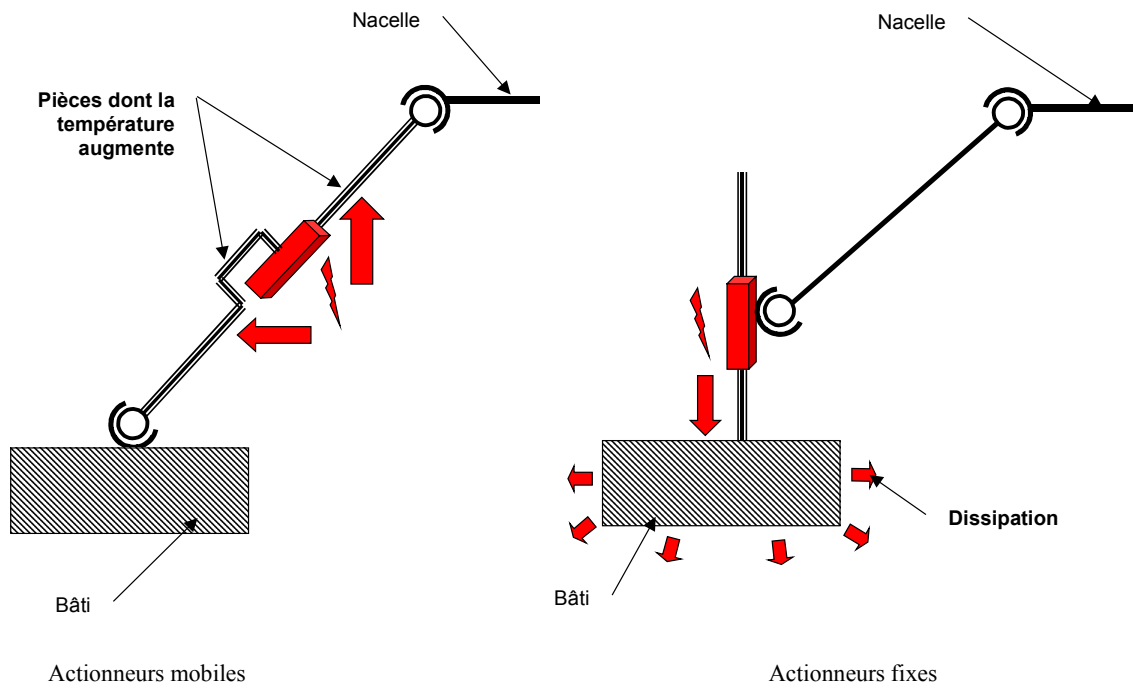


Figure II-2 : Dissipation de la chaleur générée par les moteurs.

Remarque :

Si des moteurs linéaires sont utilisés, compte tenu des puissances mises en jeu, il est nécessaire de prévoir un refroidissement du moteur par circulation de fluide. Les problèmes thermiques sont alors atténués, que les actionneurs soient fixes ou mobiles. Cependant, le fait d'utiliser des actionneurs mobiles pose des problèmes pour assurer la circulation du fluide entre les parties fixes et les parties mobiles.

II.1.3.3. Rigidité.

La rigidité des organes de la chaîne cinématique reliant la broche à l'outil est un point capital pour les machines-outils et ce afin que les efforts de coupe ne provoquent pas un déplacement de l'outil trop important entraînant un défaut de la géométrie et de la position de la surface usinée, même si ces efforts de coupe diminuent en usinage TGV. Pour obtenir une machine rigide, chacune des pièces chargées du mécanisme doit avoir une déformation minimale ce qui implique soit, l'utilisation de pièces massives au détriment de la dynamique de la machine, soit, un chargement des pièces favorable par rapport à leur géométrie. Nous voyons que, par rapport à notre problème, la deuxième solution est préférable. Nous allons maintenant examiner les sollicitations de chacune des pièces constituant typiquement un mécanisme parallèle :

- Le bâti de la machine est, par définition, un ensemble fixe. Sa masse n'a donc pas d'influence sur l'accélération de la machine. On a donc intérêt à augmenter sa masse afin de le rigidifier et de contribuer à la stabilité de la machine.

- La nacelle porte la broche de la machine. Pour ne pas pénaliser la dynamique de l'ensemble, sa géométrie doit être optimisée afin d'obtenir une pièce rigide avec une masse minimale.
- Les articulations de la machine devront également être rigides et leur masse minimale. Comme, pour certaines machines, il s'agit d'articulations du commerce (de marque INA, par exemple), nous ne parlerons pas de leur conception dans la suite de ce manuscrit.
- La motorisation, comme les articulations sont des organes d'intégration standard. Nous ne parlerons donc pas de leur conception. Par contre, le choix du type de motorisation (linéaire ou rotative) est important. Sur la Figure II-3, nous avons représenté les deux types de motorisations pour un robot Hexa. Nous constatons que dans le cas de la motorisation rotative, un « bras de levier » est utilisé. Les sollicitations à l'intérieur de ce bras sont de type flexion déviée, torsion et traction-compression. Ses déformations sont donc mal maîtrisées et, de plus, la flexion n'est pas une sollicitation favorable par rapport à notre problème. Nous retiendrons donc les architectures utilisant des actionneurs linéaires (moteur linéaire ou vis à billes).
- Enfin, il nous reste à considérer les éléments reliant la nacelle au bâti, à savoir, suivant le cas, les barres ou les vérins. Les sollicitations entraînant les déformations les plus faibles pour ce type de pièces qui sont, par définition, élancées sont des sollicitations en traction-compression ou en torsion suivant leur axe. Les sollicitations de type flexion entraînent des déformations importantes, donc une mauvaise rigidité de la machine, par exemple le mécanisme proposé par Tsai [TSAI\_96] (voir Figure II-4). A notre connaissance, il n'existe pas de mécanisme parallèle dont les pièces reliant le bâti à la nacelle travaillent en torsion pure. Si nous voulons que ces pièces travaillent en traction-compression, il ne faut pas leur transmettre de couple, ce qui est réalisable si on utilise une liaison rotule à une extrémité et une liaison rotule ou cardan à l'autre.

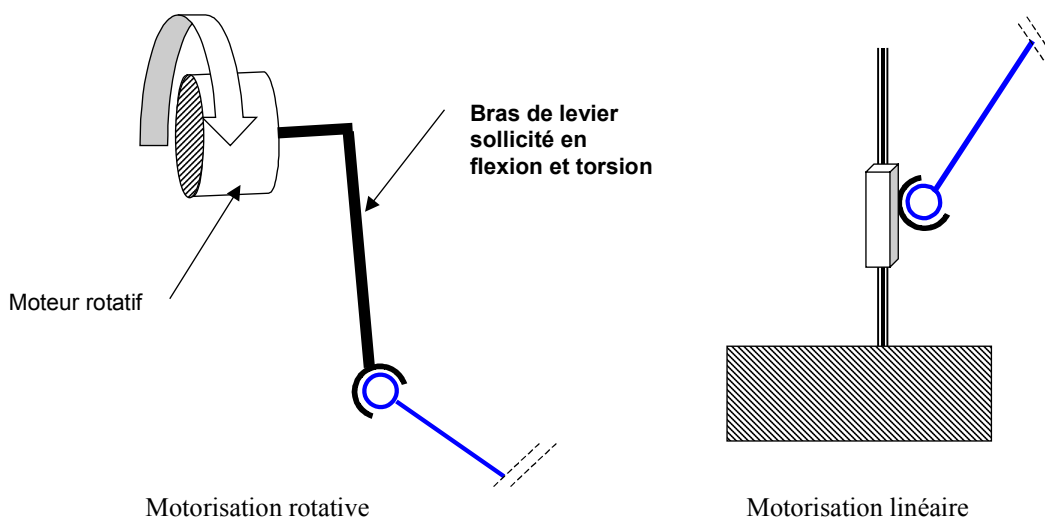


Figure II-3 : Comparaison motorisation rotative – motorisation linéaire.

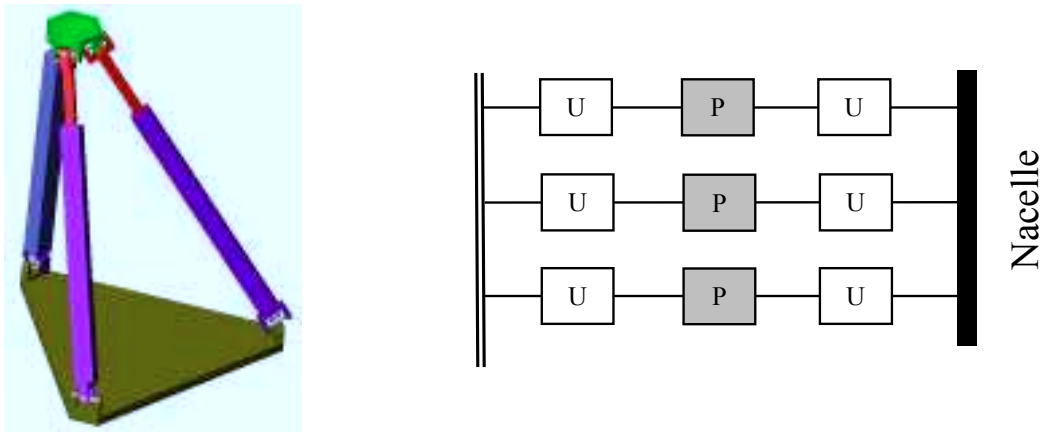


Figure II-4 : Mécanisme de TSAI (3 translations).

#### II.1.3.4. Réduction des coûts.

Pour terminer, nous considérons l'aspect modulaire et la simplicité de réalisation. Par aspect modulaire, nous entendons la possibilité d'utiliser plusieurs fois dans la machine le même assemblage de pièces afin de réduire les coûts d'étude et de fabrication de la machine. Ce type de conception est difficile pour les machines série dans lesquelles les charges portées par chacun des axes sont différentes. Par contre, pour les robots parallèles, on a la possibilité d'utiliser plusieurs « pattes » identiques. Cette constatation revient à rejeter les solutions de mécanismes parallèles à base de chaînes passives qui, de plus, présentent des inconvénients supplémentaires du point de vue des sollicitations complexes à l'intérieur de la chaîne passive entraînant, lors de la phase de conception, une augmentation de la masse des pièces qui la constituent au détriment de la dynamique.

Enfin, concernant la simplicité de réalisation, il est préférable d'utiliser des actionneurs fixes afin d'éviter la déformation des câbles qui les alimentent et éventuellement celle des canalisations qui les refroidissent.

#### II.1.3.5. Récapitulatif.

Les points suivants ressortent de notre phase de réflexion sur la conception d'une machine-outil parallèle performante :

- Actionneurs fixes sur le bâti
- Utilisation d'actionneurs linéaires
- Chaînes cinématiques identiques
- Pas de chaîne passive
- Utilisation de barres de longueur constante.

Les conclusions de l'analyse que nous venons de mener restreignent logiquement notre recherche à la famille de mécanismes vérifiant les propriétés ci-dessus. Dès à présent, nous remarquons que les architectures des robots Delta et Hexa à actionneurs linéaires appartiennent à cette famille. L'utilisation d'outils généraux de synthèse de mécanismes n'est pas appropriée à notre étude car trop lourde à mettre en œuvre.

## II.2. Choix de l'architecture.

Compte tenu de la réduction de l'espace de recherche à laquelle nous venons de procéder, il ne reste, parmi les architectures parallèles connues à ce jour, que deux architectures candidates : l'architecture Delta dont la nacelle possède trois degrés de liberté de translation et l'architecture P-U-S à six degrés de liberté, cette architecture ayant déjà été utilisée pour la réalisation de machines outils (HexaM). En fonction de la nature des tâches que devra effectuer la machine à construire (usinage trois ou cinq axes), il reste à choisir ou à créer une architecture et, pour cette dernière, trouver le meilleur type d'agencement. Pour cela, nous modélisons de manière générique l'architecture choisie afin d'évaluer un ou plusieurs critères de performance.

## II.3. Modélisation générique.

### II.3.1. Paramétrage.

#### Terminologie :

Nous appellerons « barres » les pièces reliant la nacelle aux actionneurs. Pour un agencement de type Delta, ces barres sont regroupées par paires. Nous appellerons « bras » les deux barres d'une paire reliant la nacelle au même actionneur dans le cas de l'utilisation d'actionneurs rotatifs.

Les mécanismes étudiés comportent une partie fixe reliée à une partie mobile (nacelle) par plusieurs barres. Nous utilisons deux repères (voir Figure II-5) :

- Un repère  $R_b$ , fixe, attaché arbitrairement au centre du volume de travail, soit le point O.
- Un repère  $R_n$  mobile, attaché à la nacelle. Nous désignerons par position de la nacelle l'origine du repère  $R_n$  dont les coordonnées sont exprimées dans  $R_b$ , soit le point E.

#### Remarques :

- Pour un agencement de type Delta, la disposition des articulations de la machine impose au repère  $R_n$  de rester parallèle au repère  $R_b$ . Pour simplifier notre exposé, les axes de  $R_n$  seront choisis parallèles et de même sens que ceux de  $R_b$ .
- Pour un agencement de type P-U-S, le  $R_n$  est choisi parallèle et de même sens que le repère  $R_b$  quand l'orientation de la nacelle est nulle.

Nous allons maintenant procéder à la description géométrique de ces deux architectures (Figure II-5 et Figure II-6) :

Pour une architecture de type Delta, les barres d'une même paire reliant la nacelle aux actionneurs sont toutes deux de longueur  $l_i$ . Elles sont attachées d'un côté, à la nacelle de part et d'autre du point  $B_i$  (points  $B_{i1}$  et  $B_{i2}$ ) et de l'autre côté, à l'actionneur numéro  $i$  de part et d'autre du point  $A_i$  (points  $A_{i1}$  et  $A_{i2}$ ).

Pour une architecture de type P-U-S, les barres ont chacune une longueur  $l_i$ . Elles sont reliées d'un côté à l'actionneur numéro  $i$  par une liaison rotule de centre le point  $A_i$  et de l'autre côté à la nacelle par une liaison cardan de centre le point  $B_i$ .

Chacun des points  $B_i$  se déplace sur une droite fixe. Chacune de ces trois droites est caractérisée par un vecteur directeur unitaire  $u_i$  et un point lui appartenant  $P_i$ .

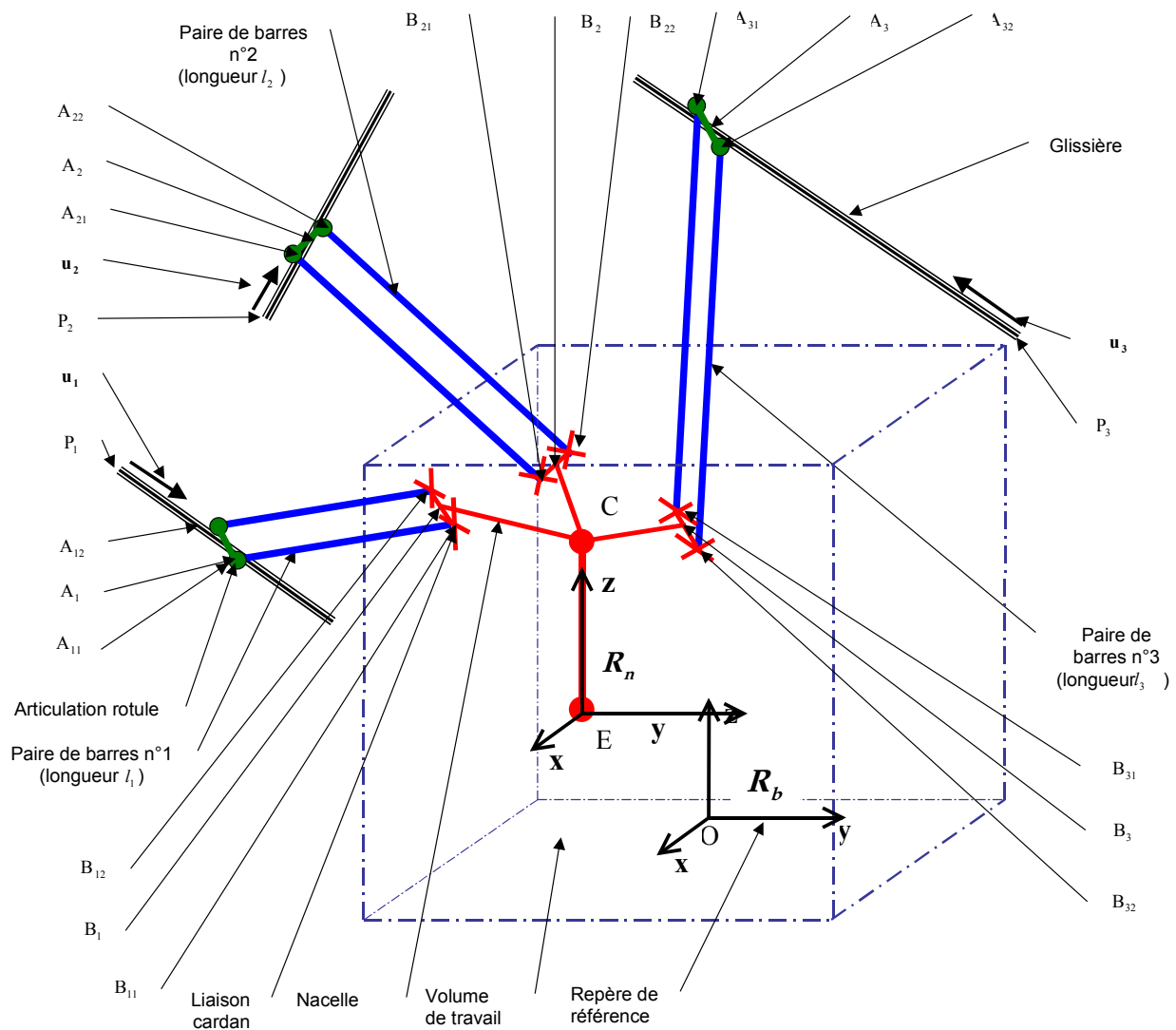


Figure II-5 : Paramétrage de la géométrie de structures de type Delta linéaire.

La Figure II-7 décrit la position des différents points considérés sur la nacelle :

- Le point G est le centre de gravité (situé sur l'axe de symétrie) de l'ensemble nacelle + électro-broche.
- Le point C est le centre de la nacelle.
- Le point D est le point correspondant à la face avant du cône de la broche. Les vitesses de la nacelle sont mesurées en ce point.
- Le point E est le point piloté. La position de la nacelle est donnée par les coordonnées de ce point.
- Le point F est le point d'application des efforts de coupe.

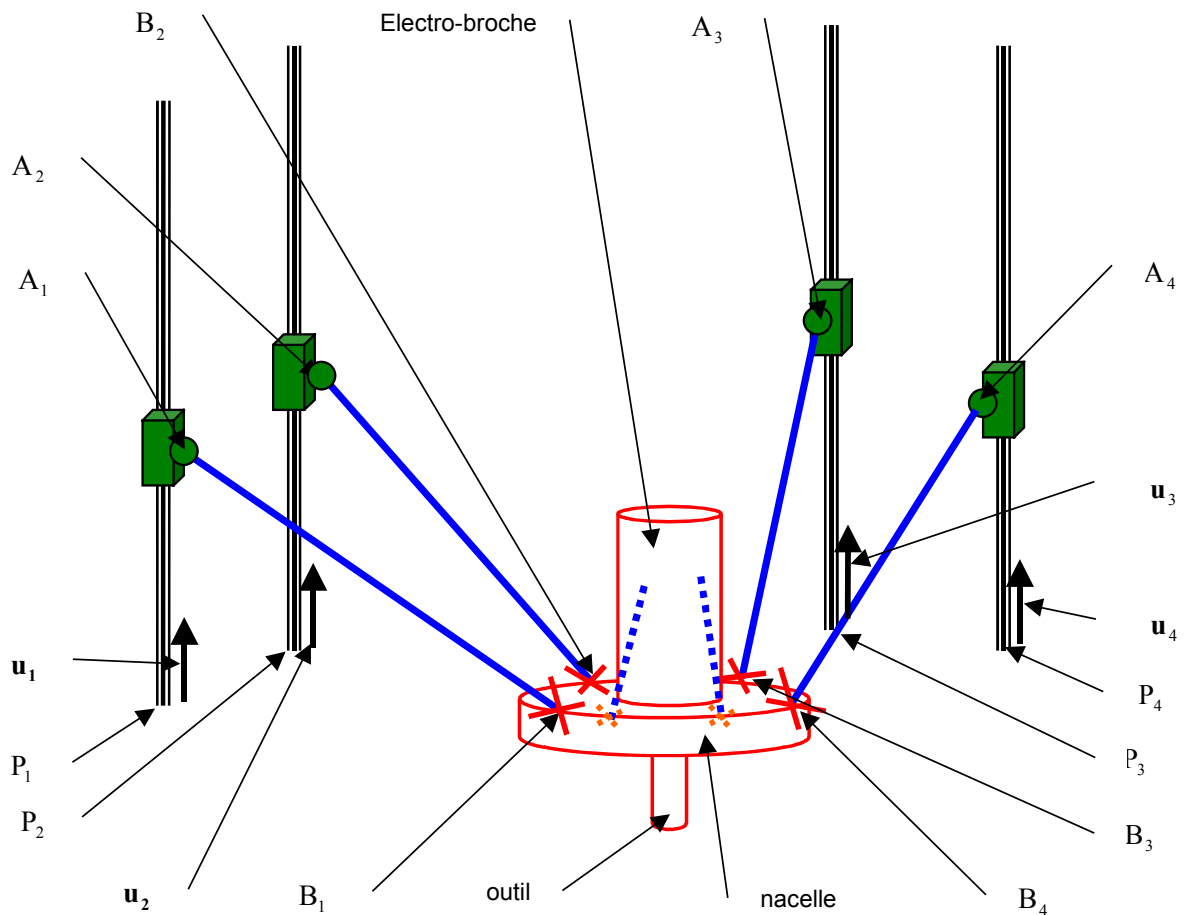


Figure II-6 : Paramétrage de la géométrie de structures de type P-U-S.

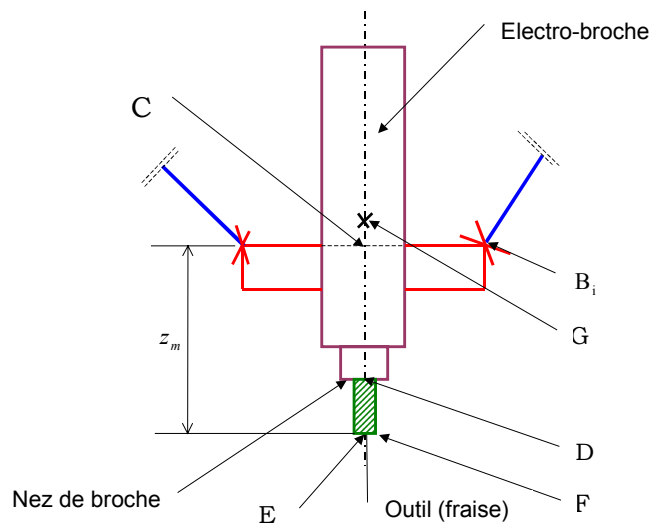


Figure II-7 : Points de la nacelle.

### II.3.2. Modélisation géométrique.

Le but des paragraphes qui suivent est de déterminer le système d'équations reliant la position et l'orientation de la nacelle à la position des actionneurs. Dans le cas de l'architecture P-U-S, nous devons considérer la position du point piloté de la nacelle (outil) et



son orientation ainsi que la position des six actionneurs. Nous devons donc choisir un paramétrage de l'orientation de la nacelle. Nous obtiendrons donc un système de six équations à six inconnues. Par contre, dans le cas de l'architecture Delta l'orientation reste constante et seulement trois actionneurs sont utilisés. Nous devons alors résoudre un système de trois équations à trois inconnues.

### II.3.2.1. Description des positions.

Nous appellerons position de la nacelle et nous noterons  $\mathbf{x}_E$  la position du point piloté (point E, voir Figure II-7) dans le repère de référence.

### II.3.2.2. Description des orientations.

Nous avons choisi le paramétrage Roulis Tangage Lacet(noté RTL), couramment utilisé en robotique, afin de décrire l'orientation de la broche dans l'espace. L'indice du repère initial étant noté  $\mathbf{i}$ , et celui du repère final noté  $\mathbf{f}$ , la définition que nous avons adoptée pour ces angles est (voir Figure II-8) :

- Le roulis, noté  $\varphi$ , décrit la rotation autour de l'axe  $\mathbf{z}_i$ .
- Le lacet, noté  $\psi$ , décrit la rotation autour de l'axe  $\mathbf{x}_1$ .
- Le tangage, noté  $\vartheta$ , décrit la rotation autour de l'axe  $\mathbf{y}_2$ .

Les rotations sont effectuées dans l'ordre d'énumération ci-dessus.

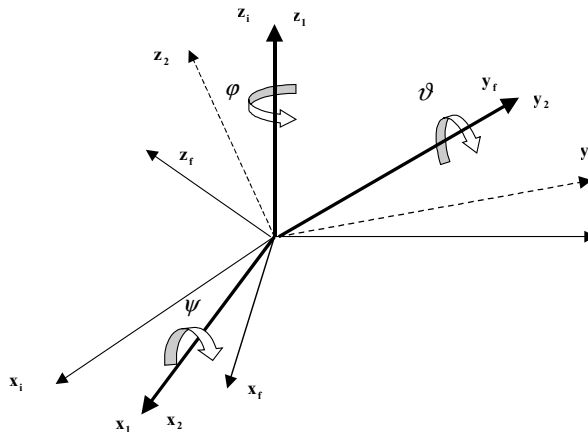


Figure II-8 : Angles de Roulis Tangage Lacet.

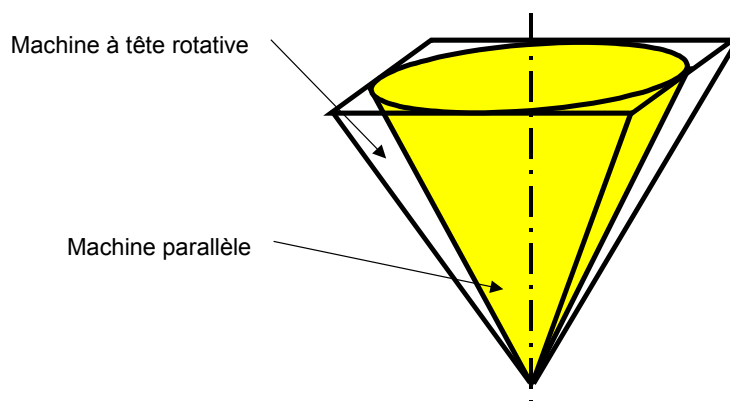


Figure II-9 : Plages de variation en orientation de l'axe de la broche.

Le paramétrage RTL n'est pas utilisé dans les commandes numériques, car il est superflu. En effet, comme nous l'avons vu dans l'état de l'art, les machines-outils à commande numérique ont au maximum 5 degrés de liberté (dont seulement deux en rotation) entre la pièce à usiner et la broche. Il n'est pas utile de paramétrer la rotation de la broche autour de son axe. D'un point de vue technologique, les têtes rotatives des machines-outils d'usinage 5 axes (voir Figure I-4) possèdent deux rotations en série, chacune d'entre elles ayant un débattement angulaire limité de type  $\pm \alpha$ . Lorsque aucun mouvement de translation n'est effectué, l'ensemble des positions occupées par l'axe de la broche est une pyramide (voir Figure II-9). Il est logique que les usineurs soient habitués à utiliser les angles décrivant les rotations autour des axes **A** et **B** correspondant aux deux premières rotations RTL.

Pour les machines-outils parallèles, le problème est différent car ces axes de rotation de la broche ne sont pas matérialisés physiquement. De plus, la plage de variation sous forme de pyramide est défavorable pour la plupart des mécanismes parallèles, alors que les usineurs ont plutôt besoin d'une plage de variation de l'orientation de la broche sous forme de l'intérieur d'un cône. Nous décrirons l'orientation de la nacelle par deux angles s'apparentant aux angles d'Azimut et d'Elévation (AZ-EL), mais ils ne permettent pas de décrire complètement la position angulaire de la nacelle. Ces angles définissent, en fait, la direction de l'axe **Z** de la broche. Ces angles, notés  $\alpha$  et  $\beta$  sont les suivants (voir Figure II-10) :

- $\alpha$ , azimut (rotation autour de l'axe  $z_i$ ), est compris entre 0 et 360 degrés.
- $\beta$ , élévation (en fait le complément à 90 degrés de l'élévation), est compris entre 0 et 90 degrés. Il s'agit de la rotation autour de l'axe  $x_i$ .

Les rotations sont effectuées dans l'ordre de l'énumération ci-dessus.

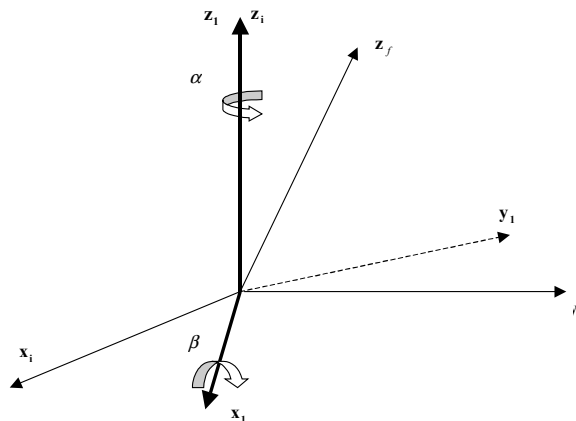


Figure II-10 : Angles Azimut - Elévation.

Pour calculer les angles RTL correspondant aux angles AZ-EL (afin de décrire l'orientation complète de la nacelle), il faut poser une condition supplémentaire réaliste, à savoir, dans le cas le cas des angles RTL,  $\varphi = 0$ , ce qui correspond à l'absence de rotation de la nacelle autour de l'axe **z**. Les calculs permettant le passage d'un paramétrage angulaire à l'autre vont être maintenant exposés. Soit **A** la matrice de passage du repère **i** au repère **f**. Avec le paramétrage RTL, la matrice **A**, s'écrit, en posant  $\varphi = 0$ , :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \psi & \cos \psi & -\cos \vartheta \sin \psi \\ -\sin \vartheta \cos \psi & \sin \psi & \cos \vartheta \cos \psi \end{bmatrix} \quad (\text{II-1})$$

La troisième colonne de la matrice de l'équation (II-1) correspond aux coordonnées de l'axe  $\mathbf{z}$  de la broche. Or, en notation AZ-EL, nous avons :

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix} \quad (\text{II-2})$$

Finalement, nous obtenons :

$$\mathbf{A}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}}{\cos \alpha \sin \alpha \sin^2 \beta} & 0 & \cos \alpha \sin \beta \\ \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}}{\cos \alpha \sin \beta \cos \beta} & \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}} & \sin \alpha \sin \beta \\ \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}} & \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}} & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (\text{II-3})$$

En conclusion, grâce à cette matrice, connaissant uniquement la direction de l'axe  $\mathbf{Z}$  de la broche (décrite par les angles AZ-EL), nous sommes capable de calculer la matrice de rotation  $\mathbf{A}$  correspondant au passage du repère mobile ( $\mathbf{R}_n$ ) au repère fixe ( $\mathbf{R}_b$ ), qui impose la condition  $\varphi = 0$ . Pour un robot Delta, le paramétrage de l'orientation de la nacelle est inutile car cette dernière reste parallèle à un plan de référence. Par souci d'homogénéisation des écritures, nous conserverons le paramétrage angulaire en choisissant  $\alpha = 0$  et  $\beta = 0$  ce qui correspond à  $\mathbf{A}(\alpha, \beta) = \mathbf{I}_3$ , où  $\mathbf{I}_3$  est la matrice identité en dimension 3.

### II.3.2.3. Modèle géométrique inverse.

Pour les architectures Delta et P-U-S, nous décrirons la position de la nacelle par le vecteur  $\mathbf{x}$  de dimension 5. Les trois premières coordonnées de ce vecteur contiennent la position du point E. Les deux autres coordonnées sont les angles AZ-EL.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_E \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (\text{II-4})$$

Soit  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \alpha, \beta)$ , la matrice de transformation homogène permettant de passer des coordonnées dans le repère de la nacelle d'origine E, au repère fixe.  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \alpha, \beta)$  s'écrit:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\alpha, \beta) & \mathbf{x}_E \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-5})$$

Soit  $\mathbf{B}_b$  (respectivement  $\mathbf{B}_n$ ), la matrice contenant les coordonnées des points  $\mathbf{B}_i$  dans le repère  $\mathbf{R}_b$  (respectivement  $\mathbf{R}_n$ ),  $\mathbf{E}_b$  (respectivement  $\mathbf{E}_n$ ), la matrice contenant les coordonnées des points  $\mathbf{E}_i$  dans le repère  $\mathbf{R}_b$  (respectivement  $\mathbf{R}_n$ ). La matrice  $\mathbf{B}_b$  s'obtient par:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_b \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, \alpha, \beta) \begin{bmatrix} \mathbf{B}_n - \mathbf{E}_n \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (\text{II-6})$$

Soit :

- $\mathbf{P}$  la matrice contenant les coordonnées des points  $P_i$  exprimées dans le repère  $\mathbf{R}_b$ .
- $\mathbf{A}$  la matrice contenant les coordonnées des points  $A_i$  exprimées dans le repère  $\mathbf{R}_b$ .
- $\mathbf{U}$  la matrice contenant les composantes des vecteurs  $\mathbf{u}_i$  exprimées dans le repère  $\mathbf{R}_b$ .

Pour calculer le vecteur des variables articulaires  $\mathbf{q}$ , nous écrivons que chacun des segments  $A_iB_i$ , pour  $1 \leq i \leq k$  (avec  $k = 3$  pour une architecture Delta et  $k = 6$  pour une architecture P-U-S), a une longueur constante  $l_i$ . Ce qui nous donne :

$$q_i^2 - [2\mathbf{u}_i \cdot (\mathbf{B}_i - \mathbf{P}_i)]q_i + (\mathbf{B}_i - \mathbf{P}_i)^2 - l_i^2 = 0 \quad (\text{II-7})$$

En répétant cette procédure pour chacune des  $k$  chaînes du robot, nous obtenons un système de  $k$  équations (II-7) reliant la position et l'orientation de la nacelle à la position des actionneurs. Chacune de ces équations est un polynôme du second degré en  $q_i$ . Ce polynôme possède soit :

- Deux solutions complexes conjuguées. Dans ce cas la position  $\mathbf{x}$  de la nacelle n'est pas accessible.
- Une solution réelle double. Dans ce cas, le mécanisme est dans une position singulière.
- Deux solutions réelles distinctes (position régulière).

Si la position  $\mathbf{x}$  est régulière (ce qui doit être le cas de tous les points de l'espace de travail de la machine), deux solutions réelles distinctes existent. Nous choisissons arbitrairement de ne conserver que la plus grande (pour obtenir la configuration correspondant à la plus petite, il suffit d'inverser le sens du vecteur directeur unitaire  $\mathbf{u}_i$ , comme le montre la Figure II-11).

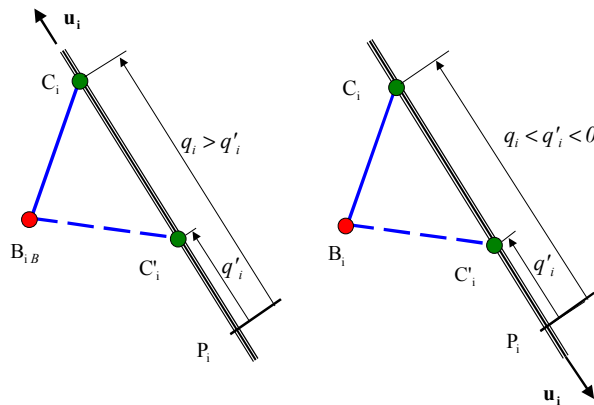


Figure II-11 : Solutions réelles distinctes.

La solution de l'équation (II-7) donnant la plus grande valeur de  $q_i$  est:

$$q_i = \mathbf{u}_i \cdot (\mathbf{B}_i - \mathbf{P}_i) + \sqrt{[\mathbf{u}_i \cdot (\mathbf{B}_i - \mathbf{P}_i)]^2 - [(\mathbf{B}_i - \mathbf{P}_i)^2 - l_i^2]} \quad (\text{II-8})$$

### II.3.2.4. Modèle géométrique direct.

Le modèle géométrique direct permet de calculer la position et l'orientation du point piloté de la nacelle, connaissant la position des actionneurs. Pour obtenir ce modèle, il faut résoudre le système (II-7) par rapport aux variables  $\mathbf{x}_E$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ . Dans le cas général, cette résolution ne peut se faire que de manière implicite car il n'existe pas de solution analytique à ce problème [MAVR\_99]. Nous remarquerons cependant que cette résolution est possible analytiquement, en particulier pour l'architecture Delta (voir chapitre III).

### II.3.3. Modélisation cinématique.

#### II.3.3.1. Modèle cinématique inverse.

Le modèle cinématique établit la relation entre la vitesse de la nacelle en translation et en rotation (que nous noterons  $\dot{\mathbf{x}}$ ) et  $\dot{\mathbf{q}}$  (vitesse linéaire des actionneurs) pour une position et une orientation données de la nacelle.

##### Remarques :

- Le vecteur vitesse de la nacelle  $\dot{\mathbf{x}}$  n'est pas la dérivée du vecteur position de la nacelle  $\mathbf{x}$  tel que nous l'avons défini.  $\dot{\mathbf{x}}$  est le torseur des vitesses de la nacelle exprimé au point D et non pas au bout de l'outil (point E).
- Afin de simplifier les expressions du modèle cinématique, nous allons supposer que nous connaissons  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{q}$  correspondants à la position courante de la nacelle.

L'équiprojectivité des vitesses d'un solide est la propriété qui sera utilisée afin d'établir les modèles cinématiques. Cette propriété sera appliquée à chacune des  $k$  barres. Pour la barre numéro  $i$ , nous avons :

$$\mathbf{v}_{A_i} \cdot \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i = \mathbf{v}_{B_i} \cdot \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \quad (\text{II-9})$$

avec  $\mathbf{v}_{A_i} = \dot{q}_i \mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{v}_{B_i} = \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{DB}_i$ , où  $\boldsymbol{\omega}$  est le vecteur vitesse de rotation instantanée de la nacelle. Il vérifie la propriété:

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \left( \mathbf{A}(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (\text{II-10})$$

soit :

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II-11})$$

Cette propriété traduit que le vecteur de rotation instantanée possède toujours une composante nulle suivant l'axe  $\mathbf{z}$  de la broche. L'équiprojectivité des vitesses appliquée à la barre numéro  $i$ , écrite pour l'ensemble des  $k$  barres nous donne l'écriture matricielle :

$$\mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}} \quad (\text{II-12})$$

avec :

$$\mathbf{J}_q = \text{diag}(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i) \quad (\text{II-13})$$

$$\mathbf{J}_x = {}^t \left[ \mathbf{AB} \quad {}^t (\mathbf{AB} \times \mathbf{DB}) \right] \quad (\text{II-14})$$

et :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_D \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (\text{II-15})$$

Le modèle cinématique inverse est l'expression de  $\dot{\mathbf{q}}$  en fonction de  $\dot{\mathbf{x}}$ . L'écriture du modèle cinématique inverse à partir de l'équation (II-12) est alors :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_q^{-1} \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}} \quad (\text{II-16})$$

Soit, en posant  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{J}_q$  :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{x}} \quad (\text{II-17})$$

où  $\mathbf{J}$  est appelée la matrice jacobienne.

### II.3.3.2. Modèle cinématique direct.

Le modèle cinématique direct est l'expression de  $\dot{\mathbf{x}}$  en fonction de  $\dot{\mathbf{q}}$ . Compte tenu des notations précédentes et de l'équation (II-17), le modèle cinématique direct s'écrit :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{II-18})$$

## II.4. Choix d'un agencement.

Maintenant que nous avons choisi et modélisé des points de vue géométrique et cinématique une architecture, il nous reste à répondre à deux questions : Comment allons-nous disposer les glissières (topologie  $\mathbf{T}$ ) et quelles dimensions ( $\mathbf{D}$ ) allons nous retenir ? Souvent les outils utilisés en synthèse de mécanismes résolvent ces deux problèmes simultanément. Nous avons choisi de répondre à ces deux questions séparément l'une après l'autre, car, dans notre cas, le choix de la topologie relève de critères dont certains sont subjectifs et l'optimisation des dimensions de critères qualitatifs. Dans un premier temps nous allons déterminer quel est le meilleur type d'agencement et dans le paragraphe II.5., nous rechercherons quelles sont les dimensions optimales pour cet agencement. Avant de comparer plusieurs solutions entre elles afin de retenir la meilleure, il nous faut choisir un critère.

### II.4.1. Choix d'un critère.

Plusieurs critères ont été proposés afin de comparer différents mécanismes par rapport à leur géométrie, leur architecture ou leurs dimensions. Ces critères peuvent être de plusieurs natures :

- Géométrique (encombrement de la machine, course des actionneurs, ratio encombrement de la machine par rapport à son volume de travail, volume de travail)
- Cinématiques (transformation des vitesses, isotropie, absence de singularités)
- Dynamiques (poussée des moteurs, efforts dans la structure, capacité d'accélération)
- Autres (rigidité de la machine, précision, facilité d'étalonnage)

A ce stade de notre recherche, nous devons choisir un critère rapide à évaluer et qui ne nécessite pas une modélisation fine du mécanisme, les autres critères seront utilisés pour le choix des dimensions optimales. Notre choix s'est porté sur des critères cinématiques tels que :

- L'indice de manipulabilité.
- Le facteur de conditionnement.
- Le conditionnement de la matrice jacobienne.

#### II.4.1.1. Indice de manipulabilité.

L'indice de manipulabilité a été défini par Yoshikawa dans [YOSH\_85]. La définition de ce critère,  $\omega$ , est :

$$\omega = \sqrt{\det(\mathbf{J}^t \mathbf{J})} \quad (\text{II-19})$$

Si  $\mathbf{J}$  est carrée, alors l'équation (II-19) s'écrit :

$$\omega = |\det(\mathbf{J})| \quad (\text{II-20})$$

Dans ce cas,  $\omega$  représente le volume de l'hyper-parallélépipède construit sur les colonnes de la matrice  $\mathbf{J}$ . Le critère  $\omega$  a été développé pour comparer les structures de robots série dont la cinématique s'écrit sous la forme :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \quad (\text{II-21})$$

Pour les robots série et pour une position  $\mathbf{q}$  des actionneurs, les cinq propositions suivantes sont équivalentes :

- La position du robot est singulière.
- L'organe terminal du robot perd un ou plusieurs degrés de liberté.
- Le rang de la matrice  $\mathbf{J}$  est inférieur à la dimension de l'espace opérationnel.
- $\det(\mathbf{J}^t \mathbf{J}) = 0$ .
- $\omega = 0$ .

Pour les robots série, le critère  $\omega$  est tributaire des dimensions de la machine. En effet, deux robots dont les géométries sont homothétiques ont des critères  $\omega$  différents. Les termes

de  $\mathbf{J}$  étant bornés par les dimensions du robot, la valeur de  $\omega$  est elle aussi bornée. On recherchera alors à maximiser le critère  $\omega$  pour avoir un machine performante.

Pour les robots parallèles de type Delta, le problème est différent. En effet, la matrice  $\mathbf{J}$  se décompose selon l'équation (II-16). Les termes constituants de  $\mathbf{J}_x$  et  $\mathbf{J}_q$  sont bornés, car ils dépendent uniquement de la position de la nacelle et de la géométrie du robot. Comme la machine que nous étudions n'est pas redondante, les matrices  $\mathbf{J}_x$  et  $\mathbf{J}_q$  sont carrées. L'expression (II-20) devient alors :

$$\omega = \frac{|\det(\mathbf{J}_q)|}{|\det(\mathbf{J}_x)|} \quad (\text{II-22})$$

Nous constatons que si  $\mathbf{J}_x$  est singulière, alors  $\omega$  tend vers l'infini. La recherche de  $\omega$  maximum n'a donc pas de sens dans le cas des machines parallèles de ce type.

#### II.4.1.2. Le facteur de conditionnement.

Le critère du facteur de conditionnement [NOUG\_85] est défini par :

$$\gamma = \frac{|\det(\mathbf{J})|}{\prod_{k=1}^n \|\mathbf{j}_k\|} \quad (\text{II-23})$$

où  $\mathbf{j}_k$  est le vecteur extrait de la k-ième colonne de la matrice  $\mathbf{J}$ . Le facteur  $\gamma$  représente le rapport entre le volume de l'hyper-parallélépipède construit sur les colonnes de  $\mathbf{J}$  et le volume que ce parallélépipède aurait si tous les vecteurs  $\mathbf{j}_k$  étaient orthogonaux. L'avantage de ce critère est que deux machines dont les géométries sont homothétiques possèdent le même facteur de conditionnement. Par définition, nous avons toujours  $0 \leq \gamma \leq 1$ . Pour que la machine soit performante, le facteur de conditionnement doit être maximal donc être le plus proche possible de 1.

#### II.4.1.3. Conditionnement de la matrice jacobienne.

La définition de ce critère, également appelé indice d'isotropie [SALS\_80], est le conditionnement de la matrice jacobienne, soit :

$$c = \text{cond}(\mathbf{J}) = \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{J})}{\sigma_{\min}(\mathbf{J})} \quad (\text{II-24})$$

La matrice  $\mathbf{J}$  transforme les vitesses de l'espace articulaire en vitesses de l'espace cartésien. Si le lieu des vitesses articulaires possibles est une hyper-sphère, le lieu des vitesses cartésiennes correspondantes est alors un hyper-ellipsoïde. Le critère  $c$  est le rapport entre le grand axe et le petit axe de cet hyper-ellipsoïde. Cette constatation permet de relier ce critère à l'isotropie cinématique de la machine. La Figure II-12 illustre cette propriété dans le cas où les espaces opérationnels et articulaires sont de dimension 2.

Comme le facteur de conditionnement, le conditionnement de la matrice jacobienne est invariant pour des machines homothétiques. Il est toujours plus grand que 1. Plus le conditionnement de la matrice jacobienne est proche de 1, « meilleure » est l'isotropie de la machine.



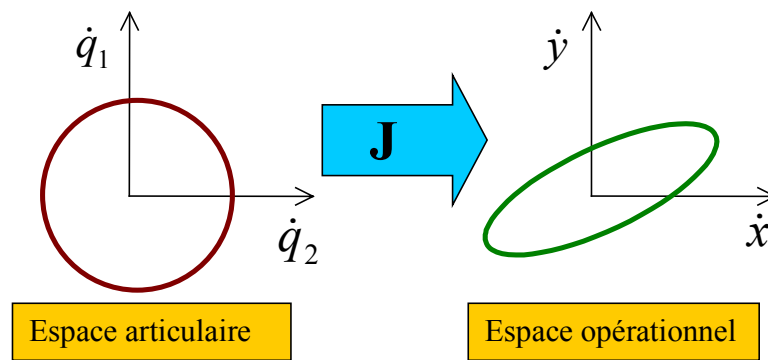


Figure II-12 : Conditionnement en dimension 2.

#### II.4.1.4. Choix.

Nous avons retenu comme critère le conditionnement de la matrice jacobienne, car il ne dépend pas d'un facteur d'échelle. De plus il semble le mieux adapté aux exigences des utilisateurs de machines-outils qui spécifient la norme de la vitesse cartésienne minimale quelle que soit sa direction.

Comme tous les critères cités, le critère du conditionnement est défini en un point du volume de travail, or les performances sont recherchées sur l'ensemble du volume de travail. Nous retiendrons donc comme critère la valeur maximale du conditionnement sur l'ensemble du volume de travail, cette valeur maximale étant obtenue par balayage. Une méthode plus efficace consiste à rechercher cette valeur par optimisation.

#### II.4.2. Contraintes.

Afin d'obtenir une machine réalisable et réaliste, nous devons respecter certaines contraintes matérielles et technologiques notamment en matière d'absence de collisions entre ses organes et du point de vue de l'encombrement total de la machine.

##### II.4.2.1. Collisions entre barres et actionneurs.

Les équations des modèles géométriques et cinématiques traduisent le comportement d'une machine théorique. Nous considérerons dans un premier temps les collisions entre la partie fixe des liaisons glissière et les barres (voir Figure II-13). Ce problème peut être résolu en adoptant des dispositions constructives (barres courbes ou décalées par rapport au « centre » des liaisons glissière (voir Figure II-14) qui permettent de déporter les glissières afin d'éviter ces collisions. Cependant, ces dispositions constructives engendrent des porte-à-faux qui, lorsque la nacelle est chargée, entraînent :

- une déformation de l'élément en porte à faux qui est nuisible au positionnement précis de la nacelle sous charge,
- un effort et un moment importants à encaisser au niveau du guidage des glissières entraînant donc un risque de ruine de la liaison ou une perte de rigidité.

De plus, le fait de déporter les glissières est pénalisant pour l'encombrement final de la machine, cette solution n'est donc pas idéale. C'est pourquoi nous avons retenu la solution qui

consiste à placer les liaisons rotules au plus près des liaisons glissières. Pour cette solution, des collisions entre les barres et les actionneurs sont possibles. Nous devons donc les détecter.

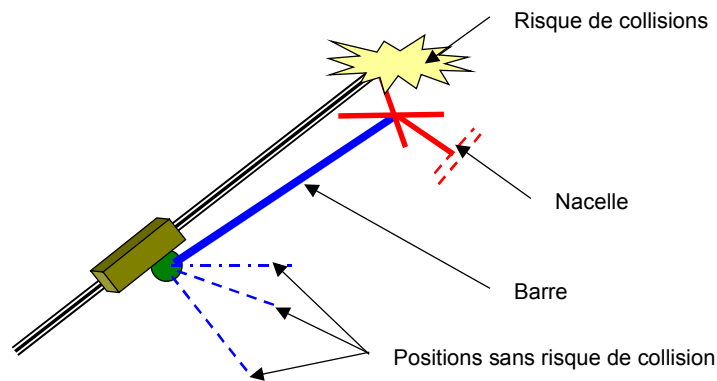


Figure II-13 : Collisions.

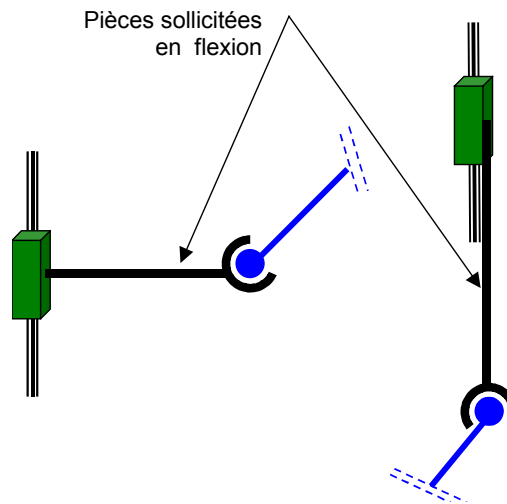


Figure II-14 : Dispositions constructives limitant les risques de collisions.

#### II.4.2.2. Collisions entre les barres.

Pour certaines dispositions particulières de l'architecture P-U-S (et également des hexapodes) dont les points  $B_i$  ne sont pas contenus dans le même plan, il existe un risque de collisions entre les barres (voir Figure II-15). Nous devons détecter ces collisions lors de notre recherche de la disposition.

#### Remarque :

Le problème des collisions entre les barres peut être résolu technologiquement car les barres sont portées par deux droites qui peuvent potentiellement se couper en un point. Si ce point est connu à l'avance, alors les collisions peuvent être évitées, en particulier si les barres sont connectées au même point sur la nacelle. Cela implique la conception d'un double joint de cardan dont tous les axes sont concourants au même point. Une solution technologique à ce problème est représentée sur la Figure II-16. Il s'agit d'une double rotule dont les deux premières rotations sont communes. Cette solution, relativement simple et peu encombrante présente l'inconvénient de rendre le mécanisme hyperstatique.

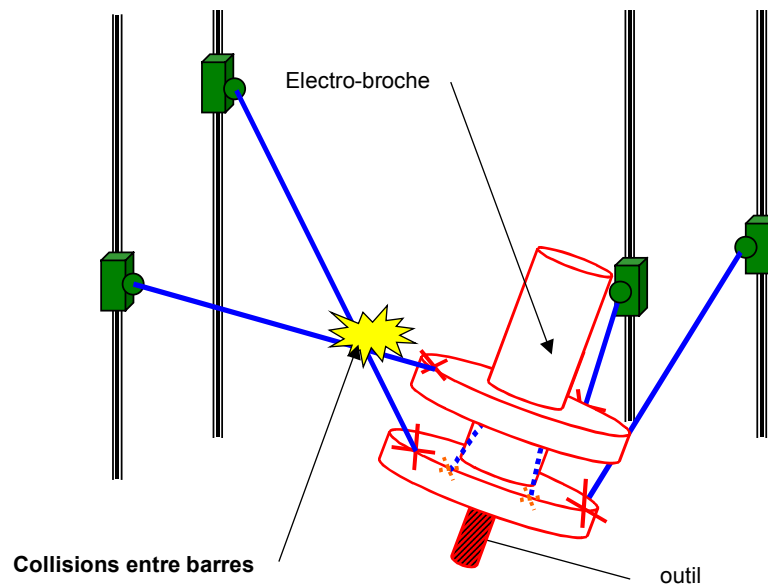


Figure II-15 : Collisions entre les barres.



Figure II-16 : Double rotule (Y joint).

#### II.4.2.3. Collisions entre les barres et la broche.

Sur la Figure II-17, nous voyons qu'il existe également un risque de collisions entre les barres et l'arrière de la broche. Cela induit, pour les machines 5 axes, une relation entre la distance minimale du centre des liaisons cardan à l'axe de l'électro-broche, son diamètre, sa longueur et la valeur maximale de l'angle souhaité pour l'orientation de la broche.

#### II.4.2.4. Collisions entre la nacelle et la pièce.

Enfin, nous devons considérer le risque éventuel de collisions entre la nacelle et la pièce usinée (voir Figure II-17). Ces collisions dépendent de la plus petite distance entre la pointe de l'outil et la nacelle. Pour éviter ces collisions, il faut fixer un rayon maximum de la nacelle afin que, par exemple, pour la plage d'orientations choisie, la nacelle et les cardans ne dépassent pas le plan vertical passant par le centre du nez de la broche.

#### II.4.2.5. Encombrement.

L'encombrement d'une machine de production est un point important qu'il s'agisse d'une machine s'insérant dans une chaîne transfert ou d'une machine autonome. Les machines s'insérant dans les chaînes transfert doivent avoir un encombrement compatible avec les pas standards des chaînes de production, typiquement 1,6 mètres pour leur largeur

(en Europe). Une partie des coûts liés à la possession d'une machine autonome est proportionnelle à l'encombrement au sol de cette machine. Finalement, dans les deux cas, lors de notre recherche du meilleur arrangement, nous devons tenir compte également de la contrainte forte d'encombrement.

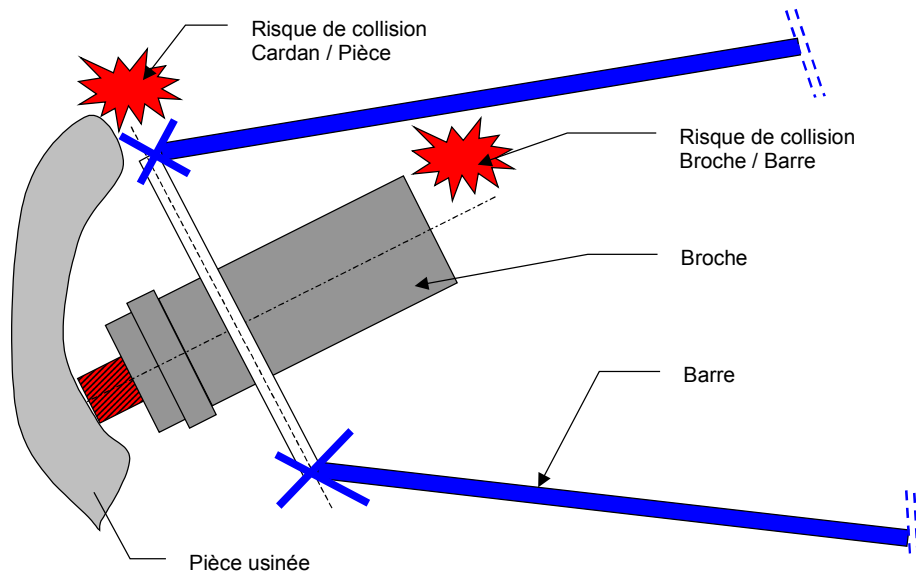


Figure II-17 : Collisions barre-broche et nacelle-pièce.

### II.4.3. Méthode.

A partir de la modélisation générique, du critère et des contraintes sélectionnées, nous allons déterminer quel est le meilleur arrangement. Une première solution consiste à utiliser le paramétrage que nous avons présenté dans la Figure II-5 et la Figure II-6 puis effectuer une optimisation sur les paramètres suivant le critère du conditionnement de la matrice jacobienne. Par exemple, les paramètres utilisés pour l'optimisation d'une structure de type Delta sont les suivants :

- position des points  $P_i$  dans  $R_b$  6 paramètres
- coordonnées des vecteurs directeurs  $u_i$  6 paramètres
- longueur des barres ( $l_i$ ) 3 paramètres
- position des points  $C_i$  dans  $R_n$  9 paramètres

Ceci fait au total une optimisation portant sur 24 paramètres, donc des temps de calcul assez longs pour obtenir, au final, un arrangement qui ne correspond pas à une machine réalisable de manière simple (arrangement des glissières ne possédant aucune propriété géométrique remarquable, paires de barres de longueurs différentes d'où manque de modularité).

Etant donné qu'il n'existe pas de méthode pour codifier le fait qu'un arrangement de trois droites dans l'espace est remarquable, nous avons choisi une voie différente qui recense et évalue une série d'arrangements intéressants. Cette méthode nous permet de disposer d'un tableau afin d'effectuer notre choix à partir de critères objectifs (valeur du conditionnement)

et de critères subjectifs comme par exemple une estimation de la simplicité de réalisation de la machine.

## II.5. Optimisation de l'agencement.

### II.5.1. Paramétrage spécifique.

Nous venons de sélectionner, dans les paragraphes précédents, le type et la topologie de la machine. Il nous reste à effectuer une optimisation des ses dimensions qui vont maintenant faire l'objet d'un paramétrage spécifique plus simple. Par exemple, si les points  $P_i$  sont sur un cercle et espacés angulairement de manière régulière, nous n'utiliserons que deux paramètres pour décrire leur position : le rayon du cercle et la valeur angulaire de leur espacement. De même nous considérerons que toutes les barres du mécanisme ont la même longueur  $L$ . Nous obtenons ainsi un nombre réduit de paramètres. Nous pouvons maintenant calculer l'évolution de plusieurs indicateurs en fonction de ces paramètres. Le calcul de ces indicateurs est présenté dans le paragraphe suivant.

### II.5.2. Indicateurs utilisés.

Les indicateurs que nous utilisons sont :

- la vitesse maximale des moteurs (voir modélisation générique)
- l'accélération maximale des moteurs
- l'effort de poussée des moteurs
- les efforts à l'intérieur des barres

Nous allons maintenant exposer le détail du calcul de ces indicateurs.

#### II.5.2.1. Relation entre les accélérations.

Nous recherchons l'expression de  $\ddot{\mathbf{q}}$  (accélération des moteurs) en fonction de  $\ddot{\mathbf{x}}$  (accélération désirée de la nacelle). En réalité  $\ddot{\mathbf{q}}$  est également fonction de  $\dot{\mathbf{x}}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{q}$ . La connaissance de cette relation nous permet de déterminer les caractéristiques requises concernant l'accélération des moteurs en fonction des performances en accélération demandées à la nacelle. L'expression recherchée s'obtient en dérivant le modèle cinématique par rapport au temps. En dérivant l'équation (II-12), nous obtenons :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_q^{-1}(\dot{\mathbf{J}}_x - \dot{\mathbf{J}}_q\mathbf{J}^{-1})\dot{\mathbf{x}} \quad (\text{II-25})$$

Remarque :

$\dot{\mathbf{J}}_q$  et  $\dot{\mathbf{J}}_x$  ne s'expriment pas analytiquement de manière simple dans le cas général. La seule manière de les calculer est de choisir une vitesse  $\dot{\mathbf{x}}$  pour la nacelle, puis un intervalle de temps  $\Delta t$  et de déterminer une valeur approchée de  $\dot{\mathbf{J}}_x(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  :

$$\dot{\mathbf{J}}_x(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \approx \frac{\mathbf{J}_x(\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\Delta t) - \mathbf{J}_x(\mathbf{x})}{\Delta t} \quad (\text{II-26})$$

ainsi que de  $\mathbf{J}_q(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  :

$$\dot{\mathbf{J}}_q(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \approx \frac{\mathbf{J}_q(\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\Delta t) - \mathbf{J}_q(\mathbf{x})}{\Delta t} \quad (\text{II-27})$$

### II.5.2.2. Modèle dynamique.

Nous calculons dans un premier temps la relation qui relie l'effort de poussée des moteurs aux efforts appliqués sur la nacelle du point de vue statique. Les efforts appliqués sur la nacelle sont représentés par un torseur (Force et Moment) exprimé au point D. Comme le modèle cinématique est également exprimé au point D, nous pouvons en déduire (dualité entre les efforts et les vitesses due à la conservation de la puissance mécanique) la relation :

$$\mathbf{F}_{\text{mot}} = {}^t\mathbf{J}\mathbf{F}_{\text{nac}} \quad (\text{II-28})$$

avec :

- $\mathbf{F}_{\text{mot}}$  Effort de poussée des moteurs
- ${}^t\mathbf{J}$  Transposée de la matrice jacobienne définie dans modèle cinématique
- $\mathbf{F}_{\text{nac}}$  Torseur des efforts appliqués sur la nacelle exprimé au point D qui s'écrit :

$$\mathbf{F}_{\text{nac}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext}} \\ \mathbf{M}_{\text{ext}} \end{bmatrix} \quad (\text{II-29})$$

Nous prenons maintenant en compte les phénomènes dynamiques afin de déterminer la poussée des moteurs nécessaire pour une accélération demandée de la nacelle. Pour faire cela, nous négligeons l'influence de la masse des barres devant la masse de la nacelle. L'effort de poussée  $\mathbf{F}_{\text{mot}}$  des moteurs lors d'une phase d'accélération résulte de la somme de plusieurs termes :

- $M_{\text{mot}}\ddot{\mathbf{q}}$  composante de l'effort moteur due à l'accélération de la masse ( $M_{\text{mot}}$ ) de la partie mobile des moteurs (secondaire du moteur + liaison rotule). Tous les moteurs sont identiques (modularité).
- ${}^t\mathbf{J}\mathbf{F}_{\text{ext}}$  composante de l'effort moteur due aux efforts extérieurs (principalement les efforts de coupe) appliqués à la nacelle.
- ${}^t\mathbf{J}\mathbf{F}_{\text{nac,acc,D}}$  composante de l'effort moteur due à l'accélération de la masse de la nacelle ( $M_{\text{nac}}$ ) exprimé au point D.

Si nous ne prenons pas en compte les effets dynamiques dus à la rotation de la nacelle, nous avons alors :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_D \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-30})$$

Le torseur des efforts dynamiques exprimé en D s'écrit :

$$\mathbf{F}_{\text{nac,acc,D}} = \begin{bmatrix} M_{\text{nac}}\ddot{\mathbf{x}} \\ M_{\text{nac}}\ddot{\mathbf{x}} \times \mathbf{GD} \end{bmatrix} \quad (\text{II-31})$$

Nous pouvons écrire cette relation sous la forme matricielle :

$$\mathbf{F}_{nac,acc,D} = -M_{nac} \mathbf{W} \ddot{\mathbf{x}}$$

avec :

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{GD}_z & \mathbf{GD}_y & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{GD}_z & 0 & -\mathbf{GD}_x & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{GD}_y & \mathbf{GD}_x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-32})$$

Finalement, l'effort de poussée des moteurs s'exprime par :

$$\mathbf{F}_{mot} = (M_{mot} \mathbf{J}^{-1} - M_{nac} {}^t \mathbf{J} \mathbf{W}) \ddot{\mathbf{x}} + M_{mot} \mathbf{J}_q^{-1} (\dot{\mathbf{j}}_x - \dot{\mathbf{j}}_q \mathbf{J}^{-1}) \dot{\mathbf{x}} + {}^t \mathbf{J} \mathbf{F}_{ext} \quad (\text{II-33})$$

### II.5.2.3. Efforts dans les barres.

Si nous isolons la nacelle, nous constatons qu'elle est soumise aux efforts suivants :

- Les efforts extérieurs (efforts de coupe)  $\mathbf{F}_{ext}$ ,  $\mathbf{M}_{ext}$
- Les efforts dus à l'accélération de la masse de la nacelle  $\mathbf{F}_{acc}$ ,  $\mathbf{M}_{acc}$
- Les efforts exercés par les 6 barres

Les efforts à l'intérieur d'une barre  $A_i B_i$  sont de type traction – compression (soit  $\mathbf{F}_{b_i}$  le vecteur représentant cet effort) car les barres possèdent une liaison rotule à une extrémité et une liaison cardan à l'autre. Pour une architecture P-U-S, nous construisons le vecteur  $\mathbf{f}_b$  tel que :

$$\mathbf{f}_b = {}^t [f_{b_1} \quad f_{b_2} \quad f_{b_3} \quad f_{b_4} \quad f_{b_5} \quad f_{b_6}] \quad (\text{II-34})$$

avec  $f_{b_i}$  tel que :

$$\mathbf{F}_{b_i} = f_{b_i} \frac{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i}{\|\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i\|} = f_{b_i} \frac{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i}{L} \quad (\text{II-35})$$

#### Remarque :

Pour tous les modèles que nous venons d'établir, nous avons assimilé (dans le cas des chaînes cinématiques d'un robot Delta) la paire de barres numéro  $i$  ( $A_{i1} B_{i1}$  et  $A_{i2} B_{i2}$ ) à une barre équivalente fictive ( $A_i B_i$ ). Pour calculer les efforts à l'intérieur des barres nous devons modéliser le mécanisme plus finement et considérer toutes les barres ( $A_{i1} B_{i1}$  et  $A_{i2} B_{i2}$ ). Le but de cette remarque est de préciser les notations. Les barres d'une chaîne P-U-S numéro  $i$  sont indicées  $i$ , et celles d'une chaîne P-(U-S) numéro  $i$  sont indicées  $ij$ .

L'équilibre de la nacelle s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{acc} + \sum_{i=1}^6 \mathbf{F}_{b_i} = 0 \\ \mathbf{M}_{ext} + \mathbf{M}_{acc} + \sum_{i=1}^6 (\mathbf{F}_{b_i} \times \mathbf{B}_i \mathbf{D}) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-36})$$

Ce système d'équations s'écrit sous la forme matricielle :

$$\mathbf{J}_b \mathbf{f}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{acc} \\ \mathbf{M}_{ext} + \mathbf{M}_{acc} \end{bmatrix} \quad (\text{II-37})$$

avec, pour une architecture P-U-S :

$$\mathbf{J}_b = -\frac{{}^t \mathbf{J}_x}{L} \quad (\text{II-38})$$

### II.5.3. Optimisation.

Pour effectuer le choix des dimensions du mécanisme, nous faisons varier le paramètre du modèle spécifique et nous étudions l'évolution des indicateurs que nous venons de présenter. En général, il n'existe pas de solution unique à la recherche des dimensions car les évolutions de certains indicateurs sont antagonistes (par exemple en raison de la dualité effort-vitesse). En fait, le choix des dimensions relève plutôt d'un compromis. Le choix peut être éventuellement guidé par l'utilisation d'éléments du commerce (moteurs, liaisons) dont les caractéristiques sont figées.

## II.6. Dimensionnement.

Dans notre démarche, nous avons choisi de découpler la disposition des pièces ( $T, D$ ) de la conception de chacune d'entre elles. Nous allons maintenant nous intéresser à ce dernier point qui conditionne la rigidité de la machine. D'autre part, la qualité de réalisation de chacune des pièces (écarts entre la valeur nominale des cotes et la valeur réelle de la pièce fabriquée) entraînent des erreurs de positionnement de la nacelle, donc de l'outil. Pour cela, nous proposons un outil (étude de sensibilité) qui permettra de déterminer quelles cotes doivent être fabriquées de manière précise, réglées ou être corrigées dans les modèles (étalonnage).

### II.6.1. Rigidité.

#### II.6.1.1. Introduction.

La rigidité d'une machine-outil correspond au rapport entre un effort appliqué à la broche et le déplacement résultant de cette dernière. Ce rapport évolue en fonction de la position de la broche à l'intérieur du volume de travail.

Normalement, l'étude de la rigidité doit prendre en compte la raideur de tous les éléments de la machine à savoir :

- la broche que nous considérons comme infiniment rigide
- la nacelle que nous considérons comme infiniment rigide
- les articulations côté nacelle
- les barres
- les articulations côté moteurs
- les platines de fixation considérées comme infiniment rigides



- les moteurs. D'après les informations que nous possédons sur les performances de l'asservissement, les moteurs peuvent être considérés comme infiniment rigides suivant leur axe.
- le guidage des moteurs
- le bâti que nous considérons comme infiniment rigide, car pouvant être théoriquement aussi massif que nous le voulons.

Une manière d'étudier la rigidité d'un ensemble mécanique est de connaître la géométrie exacte et les caractéristiques de chacune des pièces qui le compose. On utilise ensuite des techniques d'éléments finis afin de calculer la rigidité de cet ensemble pour une position donnée. Cette méthode donne une bonne estimation de la rigidité de la machine si le maillage des pièces est adapté. Les temps de calcul peuvent être longs et, de plus, si les caractéristiques de certains éléments changent, il faut répéter toute l'opération. Ces deux derniers points font que cette technique est bien adaptée pour estimer la rigidité d'une machine déjà construite, mais elle ne convient pas pour une phase de pré-étude.

Pour le pré-dimensionnement des organes, nous devons donc établir un outil qui donne rapidement une estimation de la rigidité de la machine afin de repérer les organes critiques et de les redimensionner. Le but de ce paragraphe est de fournir cet outil.

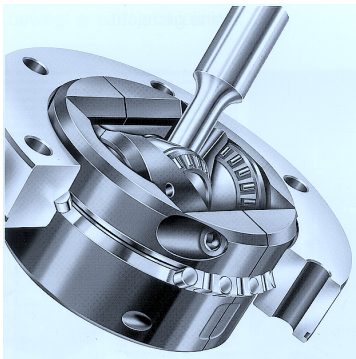
Pour cela nous considérons un effort et un moment appliqués au centre de la nacelle. Nous calculons ensuite de manière séparée le chargement et la déformation de chacun des éléments puis son incidence sur la position de la nacelle. Le déplacement total du centre de la nacelle sera la somme de toutes ces composantes (hypothèse des petits déplacements).

### II.6.1.2. Etude de l'influence de la rigidité des différents éléments.

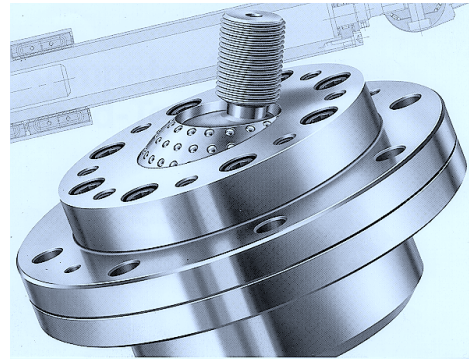
Dans ce paragraphe, nous allons analyser la déformation de chacun des éléments (pièces et liaisons) qui constituent la machine.

#### Rigidité des articulations côté nacelle.

Le calcul de la rigidité des articulations dépend de la technologie retenue pour les réaliser. On peut, soit utiliser de « vraies » liaisons rotule (rotules à billes INA par exemple), soit réaliser trois pivots concourants (voir Figure II-18).



Liaison rotule à 3 pivots concourants



Liaison rotule à billes

**Figure II-18 : Solution pour la réalisation des liaisons rotule.**

Dans un premier temps, nous allons présenter quelques résultats expérimentaux obtenus pour des articulations similaires<sup>3</sup> :

- Rotules à billes INA. Les raideurs obtenues (a priori quel que soit l'angle de l'articulation) sur les rotules INA diffèrent suivant le type de chargement (traction ou compression) : 395N/μm en compression et 220 N/μm en traction.  
Compte tenu de la nature du montage utilisé, la déformation résultante est suivant la direction de la barre. La dissymétrie entre traction et compression résulte de la conception même de la liaison car la surface de contact en compression est plus grande que celle en traction.
- Joints de cardan. Nous présentons quelques résultats expérimentaux obtenus avec le cardan utilisé dans le robot Georg V (voir Figure II-19). Les résultats sont les suivants (raideurs suivant l'axe d'une barre) :
  - Pour des angles nuls : 70 N/μm en traction et 30 N/μm en compression.
  - Pour des angles de 30° chacun : 13 N/μm en traction et 8 N/μm en compression.

Ces résultats nous amènent à formuler quelques remarques pour les cardans :

- Les ordres de grandeur de ces résultats ne sont pas compatibles avec l'utilisation de ces articulations dans une machine-outil.
- Il existe une différence entre la raideur en traction et celle en compression (environ un facteur 2 probablement imputable à la déformation des « fourches » des cardans)
- La rigidité de l'articulation varie fortement en fonction de la position du croisillon. Le modèle que nous allons établir devra intégrer cette variation.

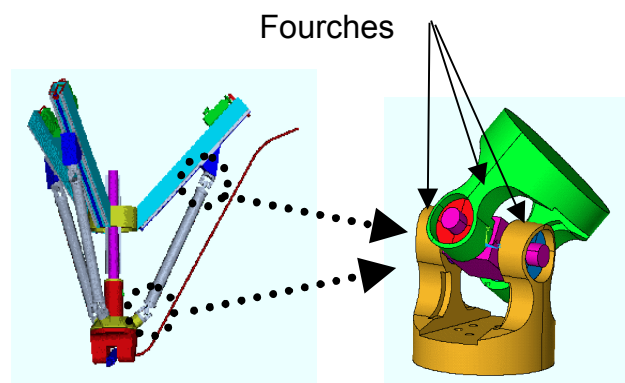


Figure II-19 : Articulations du robot GeorgeV.

Le choix effectué pour la machine est d'utiliser un joint de cardan à chacune des extrémités des barres plus une liaison pivot dans l'axe de la barre. Nous allons maintenant essayer de modéliser la raideur d'un cardan. Plusieurs niveaux de finesse de modélisation peuvent être considérés suivant que nous prenons ou non en compte :

- Le déplacement de l'articulation suivant l'axe de la barre.
- Le déplacement du joint suivant l'axe des croisillons.
- La position angulaire des axes du cardan.
- La variation de ces angles en fonction de la position de la nacelle.
- La déformation des fourches du cardan.

<sup>3</sup> Source : Travaux du projet européen ROBOTool

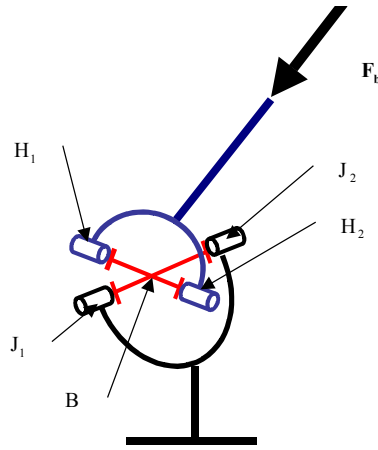


Figure II-20 : Schématisation d'un cardan.

D'après les remarques formulées pour les cardans du robot Georg V, nous avons retenu les hypothèses de modélisation suivantes :

- Les fourches sont infiniment rigides.
- Le croisillon est infiniment rigide.
- Les raideurs radiale et axiale des paliers à roulements sont les seules raideurs prises en compte. [HERN\_00] propose une étude analytique de la raideur des paliers à roulements.

Pour le premier axe du cardan côté barre, le montage des cardans est tel que le premier axe du croisillon est perpendiculaire à l'axe de la barre (voir Figure II-20). Soit  $F_b$  l'effort de traction-compression à l'intérieur d'une barre. En  $H_1$  et  $H_2$ , le palier est soumis uniquement à l'effort radial  $F_b$ . L'écrasement de ce palier vaut donc :

$$\Delta x_H = \frac{F_b}{k_{Hr}} \frac{AB}{L} \quad (\text{II-39})$$

avec  $k_{Hr}$  : raideur radiale du palier  $H_1-H_2$ .

La direction de cette déformation est celle de l'axe de la barre. Si l'effort dans la barre est de type compression, ce déplacement correspond à un raccourcissement de cette dernière.

Pour le deuxième axe du cardan côté nacelle, si nous appelons  $w$  un vecteur unitaire de direction  $J_1J_2$ ,  $F_b$  se décompose en un effort axial  $A = (F_b \cdot w) \cdot w$  et un effort radial  $R = F_b - (F_b \cdot w) \cdot w$ . Nous obtenons les déplacements suivants :

$$\Delta x_{J,a} = \frac{(F_b \cdot w) \cdot w}{k_{Ja}} \quad (\text{II-40})$$

$$\Delta x_{J,r} = \frac{F_b - (F_b \cdot w) \cdot w}{k_{Jr}} \quad (\text{II-41})$$

avec  $k_{Ja}$  raideur axiale du palier  $J_1-J_2$  et  $k_{Jr}$  raideur radiale du palier  $J_1-J_2$ . Ce déplacement peut être assimilé à une déformation de la nacelle. Or, un déplacement du point B sur la nacelle dans le plan perpendiculaire à la direction de la barre en B change la direction de la barre mais pas la position de la nacelle (approximation au premier ordre). Donc, seul le déplacement du point B (sur la nacelle) dans la direction de la barre influe sur la position de la nacelle. Si l'effort dans la barre est de type compression, le point B se rapproche de la

nacelle. Affirmer que le point B se rapproche de la nacelle est équivalent à affirmer que la barre se raccourcit.

En conclusion, le déplacement du centre de la liaison cardan est la somme des trois déplacements ci-dessus. Tout se passe comme si la composante de ce déplacement suivant l'axe de la barre correspondait à une variation de longueur de cette dernière. La quantité  $\Delta x$  sera considérée comme une variation de la longueur des barres et sera intégrée aux calculs comme telle.

$$\Delta x = \left[ \frac{\mathbf{F}_b}{k_{Hr}} + \left[ \frac{(\mathbf{F}_b \bullet \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}}{k_{Ja}} + \frac{\mathbf{F}_b - (\mathbf{F}_b \bullet \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}}{k_{Jr}} \right] \right] \frac{AB}{L} \quad (\text{II-42})$$

### Rigidité des barres.

Les barres sont composées de deux éléments dont nous devons considérer la raideur :

- Les barres elles-mêmes
- Le pivot dont l'axe est celui de la barre.

Par construction, ces barres sont sollicitées uniquement en traction – compression. Ces sollicitations restent suffisamment petites pour que les problèmes liés au flambement ne soient pas présents. La déformation d'une de ces barres est :

$$\Delta x = \frac{Fl}{SE} \quad (\text{II-43})$$

avec :

- $F$  effort de traction – compression dans la barre
- $l$  longueur initiale de la barre
- $S$  surface d'une section droite de la barre (les barres sont des tubes)
- $E$  module d'Young du matériau dans lequel sont réalisées les barres

La barre comporte une liaison pivot dont la direction est celle de l'axe de la barre. Les efforts sur cette liaison pivot sont des effort axiaux. La déformation axiale de cette liaison est :

$$\Delta x = \frac{F}{k_{Ba}} \quad (\text{II-44})$$

avec  $F$  effort dans la barre et  $k_{Ba}$  rigidité axiale du palier.

### Rigidité des articulations côté moteurs.

Si les articulations côté nacelle et côté moteurs sont identiques (cardans de même conception, même disposition), leurs déformations sont les mêmes que celles côté nacelle. Pour les mêmes raisons que pour les articulations côté nacelle, nous ne prendrons en compte que la déformation suivant l'axe de la barre et nous l'imputerons à une variation de longueur de la barre.

#### II.6.1.3. Calcul de la rigidité.

Maintenant que nous avons déterminé les déformations de chacun des éléments de la machine, nous allons calculer leur influence sur le déplacement de la nacelle pour un effort  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  et un moment  $\mathbf{M}_{\text{ext}}$  appliqués à la nacelle.

Les efforts dans les barres sont donnés par l'équation (II-37). Comme nous l'avons vu précédemment, les déformations que nous devons prendre en compte sont toutes assimilables à des variations de longueur des barres. Nous allons maintenant calculer chacune des composantes de la variation fictive de la longueur des barres. Nous considérons que toutes les articulations pivot sont identiques. Soit  $k_a$  (respectivement  $k_r$ ) la raideur axiale (respectivement radiale) équivalente d'un palier à roulements (nous supposons que tous les paliers à roulements sont identiques).

La variation équivalente de longueur des barres due aux cardans côté nacelle est :

$$\Delta l_i = \frac{F_i}{k_r} + \left[ \frac{(\mathbf{F}_{bij} \bullet \mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{w}_{ij}}{k_a} + \frac{\mathbf{F}_{bi} - (\mathbf{F}_{bi} \bullet \mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{w}_i}{k_r} \right] \bullet \frac{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i}{L} \quad (\text{II-45})$$

avec  $\mathbf{w}_{ij}$  vecteur unitaire suivant l'axe du croisillon de la barre numéro  $ij$  qui conserve une direction fixe par rapport au bâti.

La contribution de la raideur de la barre et du pivot axial à la variation équivalente est :

$$\Delta l_i = \frac{F_{bi} L}{SE} + \frac{F_{bi}}{k_a} \quad (\text{II-46})$$

La variation due aux cardans côté moteur est identique à celle produite par les cardans côté nacelle et finalement, le vecteur composé de la variation fictive de la longueur de chacune des barres est donné par :

$$\Delta \mathbf{l} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{F}_b \quad (\text{II-47})$$

avec :

$$\mathbf{M} = \text{diag} \left( \frac{4 - 2 \left( \mathbf{w}_i \bullet \frac{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i}{L} \right)^2}{k_r} + \frac{1 + 2 \left( \mathbf{w}_i \bullet \frac{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i}{L} \right)^2}{k_a} + \frac{L}{SE} \right) \quad (\text{II-48})$$

Le petit déplacement correspondant de la nacelle est alors :

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \theta \end{bmatrix} = {}^t \mathbf{J}_b^{-1} \mathbf{M} \mathbf{J}_b^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext}} \\ \mathbf{M}_{\text{ext}} \end{bmatrix} \quad (\text{II-49})$$

Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext}} \\ \mathbf{M}_{\text{ext}} \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \theta \end{bmatrix} \quad (\text{II-50})$$

avec  $\mathbf{K}$  matrice de raideur dont l'expression est :

$$\mathbf{K} = \mathbf{J}_b \mathbf{M}^{-1} {}^t \mathbf{J}_b \quad (\text{II-51})$$

## II.6.2. Etude de sensibilité.

### II.6.2.1. Introduction.

Nous allons écrire la matrice jacobienne reliant l'erreur de positionnement de la nacelle (en position et en orientation) aux erreurs de fabrication de la machine. Il s'agit d'une étude préliminaire de la précision de la machine hors étalonnage. A ce stade de la démarche, le but de cette étude est d'aider à la détermination du tolérancement des cotes des pièces fabriquées, même si il est possible de réutiliser la modélisation et les développements suivants dans une procédure d'étalonnage. Notre démarche est :

- Sélectionner les erreurs de fabrication de la machine.
- Pour ces erreurs chercher à écrire la matrice de sensibilité.

### II.6.2.2. Sélection des erreurs de fabrication des pièces.

Il existe un grand nombre d'erreurs et de manières de les modéliser. Par exemple, pour une architecture Delta, pour la position des points  $B_{ij}$  dans  $R_n$  (repère nacelle), nous pouvons choisir (Figure II-21) soit une modélisation en coordonnées cylindriques, soit une modélisation utilisant des repères locaux, soit une modélisation cartésienne. Les différents choix que nous avons faits pour la modélisation de la position des points (et par conséquent pour la modélisation des erreurs de position de ces points) sont relatifs à la cotation et aux méthodes de fabrication des pièces.

L'étude que nous allons mener ne portera que sur la géométrie de la machine réelle par rapport à la machine théorique (nominale). A ce stade de l'étude, nous avons besoin d'enrichir notre modèle, en particulier au niveau des liaisons entre les glissières et les actionneurs. En effet, pour les modèles cinématique et dynamique, nous avons considéré que le centre des liaisons rotule et glissières étaient confondus. Pour avoir un modèle d'erreur réaliste, nous devons considérer deux points distincts :  $A$  et  $A'$  (voir Figure II-22). Nous allons maintenant détailler ces erreurs (voir Figure II-5 ou Figure II-6 pour la désignation des points) :

- Erreur cartésienne sur la position des points  $P_i$  dans le repère fixe. Les points  $P_i$  sont des points appartenant aux glissières. Les variables articulaires sont comptées à partir de ces points (défaut de position de la glissière et offset).
- Erreur sur l'orientation des glissières. Nominale l'axe des glissières est l'axe  $z$ . Cependant des erreurs de montage font que ces glissières ne sont pas parallèles à  $z$ . Nous considérerons également un défaut d'orientation de chacune des glissières autour de son axe. Ce défaut d'orientation fait que l'intersection des plans de symétrie des glissières qui est nominale l'axe  $z$  n'est pas respectée.
- Erreur de positionnement des points  $A'_{ij}$  (centre des liaisons rotule sur le secondaire des moteurs) par rapport au secondaire des moteurs dans un repère lié aux surfaces de guidage.
- Erreur sur la longueur des barres (erreur sur la distance entre les centres des liaisons rotules à chacune des extrémités des barres).
- Erreur cartésienne de positionnement des points  $B_{ij}$  dans le repère lié à la nacelle.

Ne seront pas pris en compte dans cette étude les défauts liés à la géométrie interne des glissières ainsi que les erreurs liées à la géométrie des cardans (excentration des paliers , perpendicularité des axes, concourance des axes) dont les influences sont négligeables (second ordre).

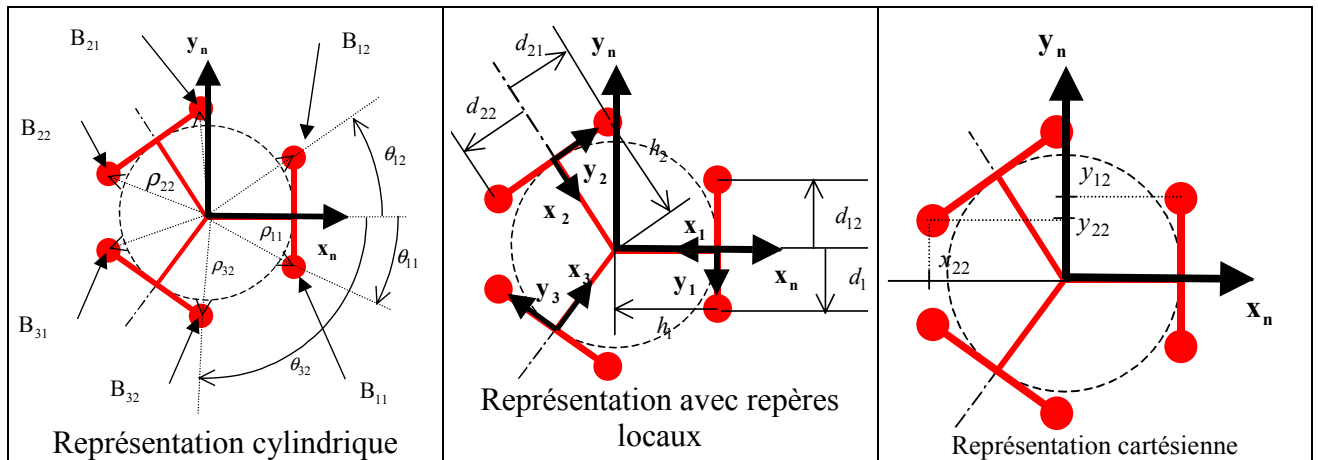


Figure II-21 : Méthodes pour le paramétrage de la position des points B sur la nacelle.

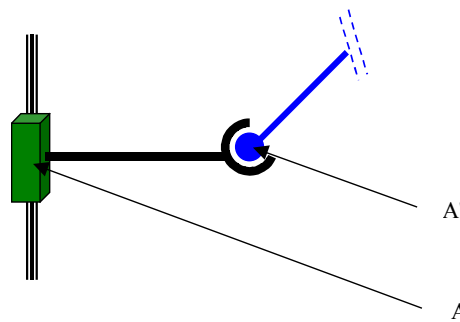


Figure II-22 : Définition des points A et A'.

### II.6.2.3. Ecriture du modèle d'erreurs.

Pour les variations de position nous considérons des variations par rapport aux valeurs nominales. Etant donné que nous recherchons une écriture matricielle reliant les erreurs de position de la nacelle aux erreurs de fabrication des éléments de la machine, nous supposons implicitement une linéarisation des équations au premier ordre (hypothèse des petits déplacements et principe de superposition). Dans la suite de cette étude, nous linéarisons toutes les équations au premier ordre afin d'obtenir un système linéaire.

Compte tenu de la modélisation de la géométrie des pièces que nous avons présentée, les positions réelles des différents points peuvent être déterminées. La position réelle des points  $P_i$  est :

$$\mathbf{P}_{i,\text{reel}} = \mathbf{P}_{i,\text{nom}} + \begin{bmatrix} dx_{P_i} \\ dy_{P_i} \\ dz_{P_i} \end{bmatrix} \quad (\text{II-52})$$

La position réelle des points  $A_i$  sur les glissières dans le repère absolu est :

$$\mathbf{A}_{i,\text{reel}} = \mathbf{P}_{i,\text{reel}} + q_i \begin{bmatrix} 1 & -drz_{g_i} & dry_{g_i} \\ drz_{g_i} & 1 & -drx_{g_i} \\ -dry_{g_i} & drx_{g_i} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{i,\text{nom}} \quad (\text{II-53})$$

La position réelle des points  $A'_i$  sur les platines (secondaire des moteurs) dans un repère  $R_i$ , lié aux surfaces de guidage des liaisons glissière, est :

$$\mathbf{A}'_{i,\text{reel}}|_{R_i} = \mathbf{A}'_{i,\text{nom}}|_{R_i} + \begin{bmatrix} dx_{A'_i} \\ dy_{A'_i} \\ dz_{A'_i} \end{bmatrix}_{R_i} \quad (\text{II-54})$$

La position des points  $A'_i$  dans le repère absolu est :

$$\mathbf{A}'_{i,\text{reel}} = \mathbf{A}'_{i,\text{nom}} + \begin{bmatrix} 0 & -drz_{g_i} & dry_{g_i} \\ drz_{g_i} & 0 & -drx_{g_i} \\ -dry_{g_i} & drx_{g_i} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{A}'_{i,\text{nom}}|_{R_i} + \mathbf{R}_i \cdot \begin{bmatrix} dx_{A'_i} \\ dy_{A'_i} \\ dz_{A'_i} \end{bmatrix} \quad (\text{II-55})$$

où  $\mathbf{R}_i$  est la matrice de passage du repère  $R_i$  au repère  $R_b$ .

Soit  $d\mathbf{X}$  et  $d\mathbf{R}$  les erreurs de position de la nacelle résultant des erreurs de fabrication

des différents organes de la machine. Nous posons  $d\mathbf{X} = \begin{bmatrix} dx_n \\ dy_n \\ dz_n \end{bmatrix}$  et  $d\mathbf{R} = \begin{bmatrix} drx_n \\ dry_n \\ drz_n \end{bmatrix}$

La position des points  $B_i$  dans le repère nacelle  $R_b$  est :

$$\mathbf{B}_{i,\text{reel}}|_{R_b} = \mathbf{B}_{i,\text{nom}}|_{R_b} + \begin{bmatrix} dx_{B_i} \\ dy_{B_i} \\ dz_{B_i} \end{bmatrix} \quad (\text{II-56})$$

La position des points  $B_i$  dans le repère de référence est, au premier ordre :

$$\mathbf{B}_{i,\text{reel}}|_{R_b} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{nom}} + \mathbf{A}_{\text{nom}} \cdot \mathbf{B}_{i,\text{nom}}|_{R_n} + \begin{bmatrix} dx_n \\ dy_n \\ dz_n \end{bmatrix} + \mathbf{A}_{\text{nom}} \cdot \begin{bmatrix} dx_{B_i} \\ dy_{B_i} \\ dz_{B_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -drz_n & dry_n \\ drz_n & 0 & -drx_n \\ -dry_n & drx_n & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{nom}} \cdot \mathbf{B}_{i,\text{nom}}|_{R_n} \quad (\text{II-57})$$

Pour trouver la relation entre  $(d\mathbf{X}, d\mathbf{R})$  et les erreurs de fabrication, il faut résoudre le système composé des 6 équations :

$$\{\mathbf{A}'_i \mathbf{B}_i\}^2 - (L + dl_i)^2 = 0 \quad (\text{II-58})$$

Au premier ordre, ce système devient :

$$\{[\mathbf{A}'_i \mathbf{B}_i]_{\text{nominal}} d\mathbf{A}'_i \mathbf{B}_i - L dl_i = 0 \quad (\text{II-59})$$



Soit, en considérant le vecteur d'erreur :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{1,3k} &= {}^t [dx_{P_1} \quad dy_{P_1} \quad dz_{P_1} \quad \dots \quad dx_{P_k} \quad dy_{P_k} \quad dz_{P_k}] \\
 \mathbf{E}_{3k+1,6k} &= {}^t [drx_{g_1} \quad dry_{g_1} \quad drz_{g_1} \quad drx_{g_2} \quad \dots \quad drx_{g_k} \quad dry_{g_k} \quad drz_{g_k}] \\
 \mathbf{E}_{6k+1+,6k+18} &= {}^t [dx_{A_{11}} \quad dy_{A_{11}} \quad dz_{A_{11}} \quad dx_{A_{12}} \quad \dots \quad dx_{A_{32}} \quad dy_{A_{32}} \quad dz_{A_{32}}] \\
 \mathbf{E}_{6k+19,6k+36} &= {}^t [dx_{B_{11}} \quad dy_{B_{11}} \quad dz_{B_{11}} \quad dx_{B_{12}} \quad \dots \quad dx_{B_{32}} \quad dy_{B_{32}} \quad dz_{B_{32}}] \\
 \mathbf{E}_{6k+37,6k+42} &= {}^t [dl_{11} \quad dl_{12} \quad dl_{21} \quad dl_{22} \quad dl_{31} \quad dl_{32}]
 \end{aligned} \tag{II-60}$$

La matrice de sensibilité relie les erreurs de fabrication des organes de la machine au défaut de positionnement de l'organe terminal par rapport à sa position nominale.

$$\mathbf{T} \begin{bmatrix} d\mathbf{X} \\ d\mathbf{R} \end{bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{E} \tag{II-61}$$

La matrice  $\mathbf{T}$  s'écrit :

$$\mathbf{T} = [\mathbf{A}\mathbf{B}_i \quad \mathbf{A}\mathbf{B}_i \times \mathbf{B}_i \mathbf{E}] \tag{II-62}$$

La matrice  $\mathbf{S}$  sera explicitée dans les chapitres suivants, pour une architecture Delta et une architecture P-U-S.

## II.7. Conclusion.

Dans ce chapitre, nous venons de proposer une démarche linéaire bien adaptée au choix, à la conception et au dimensionnement de machines-outils à architecture parallèle rapides. Dans les deux chapitres suivants, nous présentons deux exemples de mise en œuvre de cette démarche par rapport à des besoins concrets portant pour le troisième chapitre sur l'usinage 3 axes et dans le quatrième chapitre sur l'usinage 5 axes. Ces deux exemples mettront en évidence les limites des structures parallèles connues à ce jour, et aboutiront, dans le cinquième chapitre, à la présentation d'un concept complémentaire.



## **Chapitre III . Application à la création d'une machine trois axes.**

---

Pour réaliser tous les types de surfaces, une machine-outil 5 axes est nécessaire. Par contre, pour réaliser une seule famille de surfaces, ces 5 axes sont superflus et entraînent un surcoût inutile pour la machine. Nous avons vu, dans le tour d'horizon effectué dans le chapitre précédent, qu'il existe déjà beaucoup de machines-outils parallèles 5 axes basées sur des hexapodes. Ces machines ne sont pas conçues spécifiquement pour effectuer des opérations 3 axes. Il existe donc un besoin de solutions parallèles performantes dédiées à la réalisation de ce type d'usinage. Nous allons maintenant étudier la conception d'une telle machine-outil parallèle à partir de la démarche que nous venons de proposer dans le chapitre II.

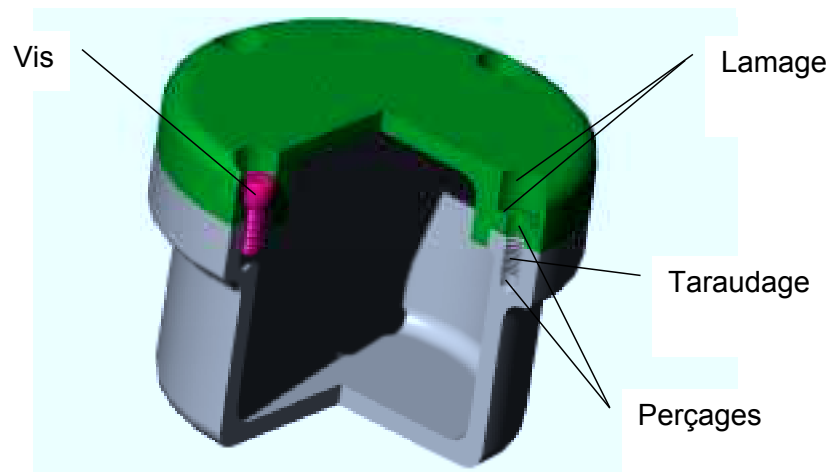
### **III.1. Problématique.**

Les centres d'usinage 3 axes permettent de réaliser plusieurs types de surfaces dont des surfaces planes (usinage de faces), des surfaces cylindriques, pas nécessairement de révolution (contournage), des surfaces cylindriques de révolution (perçages ou alésages), des lamages et des taraudages.

Des solutions parallèles 3 axes ont déjà été proposées dont la machine M-Konzept (voir Annexe B). Comme nous l'avons vu dans le tour d'horizon, la machine M-Konzept est une structure hybride composée d'un ensemble parallèle 2 axes (**X,Y**) complétée par un axe **Z** porté ce qui pénalise les performances dynamiques de l'ensemble. De plus, les actionneurs sont mobiles et deux chaînes passives sont utilisées.

Par exemple, les trois dernières opérations que nous avons citées dans les types de surfaces usinées par les machines 3 axes génèrent les surfaces nécessaires à l'assemblage de deux pièces à l'aide d'une ou plusieurs vis (voir Figure III-1). Ces opérations sont fréquentes dans la production d'organes automobiles, par exemple pour l'usinage d'une culasse qui sera par la suite assemblée avec un bloc moteur.

L'utilisation d'une machine spécifique pour réaliser ces surfaces est intéressante dans le cas d'une production de grande série. En effet, la machine est spécifique donc coûteuse et en contrepartie, il faut que sa cadence de production soit meilleure que celle des machines standard afin de réduire le prix de revient de chacune des pièces produites.



**Figure III-1 : Dénomination des surfaces usinées.**

Afin d'atteindre ces objectifs, les industriels ont utilisé, dans l'ordre chronologique, les machines suivantes :

#### Machines transfert.

Ces machines, souvent multibroches, sont étudiées et conçues pour la fabrication d'une seule pièce. La position et le mouvement des outils sont figés une fois pour toutes par la structure. Tout changement des dimensions de la pièce fabriquée impose la conception et la fabrication d'une nouvelle machine.

#### Machines à têtes multibroches.

Ces machines sont une évolution des machines transfert. La machine déplace une tête qui porte plusieurs outils dont les entraxes sont figés ou non. Tout changement des dimensions de la pièce fabriquée s'accompagne de la conception et de la fabrication d'une nouvelle tête ou d'un rerèglage des entraxes de la tête. La conception et la fabrication d'une nouvelle tête sont très coûteuses. La vitesse de rotation des têtes multibroches à entraxes réglables est limitée par l'utilisation de cardans pour transmettre le mouvement. L'aspect « flexible » de ces têtes s'accompagne d'une baisse de la productivité.

#### Machines à Commande Numérique (CN) à structure cartésienne.

La broche peut se déplacer par rapport à la pièce en translation dans les trois directions. Le même outil usinera séquentiellement chacun des trous. Un changement de dimensions de la pièce fabriquée entraîne la reprogrammation de la commande numérique. L'élaboration du nouveau programme est réalisée hors ligne ce qui réduit les temps improductifs de la machine. Ces machines sont donc très flexibles, mais leur point faible vient de l'aspect séquentiel de l'usinage qui allonge la durée du cycle d'usinage et par conséquent réduit les cadences de production.

Le marché et les normes (antipollution notamment) étant de plus en plus exigeants, les constructeurs automobiles doivent fréquemment changer les caractéristiques dimensionnelles des pièces produites. De plus, la réduction des coûts de fabrication est un point majeur. Les machines transfert possèdent de bonnes cadences de production mais ne sont pas flexibles. Avec les changements fréquents des caractéristiques dimensionnelles des pièces, l'amortissement de ces machines n'est pas encore atteint qu'elles sont déjà obsolètes. Les machines à tête multibroches possèdent des limitations dues à la transmission du mouvement de coupe à l'intérieur des têtes ce qui restreint les vitesses de coupe, donc les cadences de

production. Ces machines sont par définition flexibles, mais la fabrication d'une nouvelle tête lors d'un changement des dimensions de la pièce fabriquée est coûteuse. La capacité des machines CN à structure cartésienne à changer rapidement de type de production est excellente, mais par contre, leurs cadences de production sont, pour l'instant, plus faibles que celles des machines transfert ou multibroches. En effet, les machines CN percent séquentiellement chacun des trous alors que les machines transfert et multibroches effectuent tous les perçages en même temps.

L'idée est donc de conserver la réactivité apportée par l'utilisation de machines à commande numérique tout en augmentant leur productivité. Cette augmentation de la productivité passe par l'amélioration de la dynamique de ces machines. Un premier pas a été franchi par la société Renault Automation/Comau qui propose une machine CN à structure cartésienne dont les organes mobiles sont en aluminium (anciennement, ces organes étaient en fonte pour garantir une bonne stabilité dimensionnelle dans le temps), ce qui réduit les masses en mouvement. L'accélération de cette machine, l'Urane (voir Figure III-2), est de 1,5g selon les axes **X**, **Y** et **Z**.



**Figure III-2 : Machine Urane.**

### **III.2. Choix de la structure.**

Pour la machine que nous voulons réaliser, les déplacements de l'outil par rapport à la pièce sont les trois translations. Nous recherchons une structure parallèle dont les degrés de liberté de la nacelle correspondent à ces trois translations. Cette structure devra posséder des actionneurs linéaires fixes afin d'obtenir de bonnes performances dynamiques [PIER\_00]. Compte tenu des remarques formulées dans le chapitre II, nous choisissons un mécanisme de type Delta.

### III.3. Modèles génériques.

Le paramétrage que nous avons utilisé pour l'écriture des modèles génériques est celui de la Figure II-5.

#### III.3.1. Modèles géométriques.

Le modèle géométrique est donné par le système composé des trois équations (III-1) pour  $1 \leq i \leq 3$ .

$$q_i^2 - q_i [2(\mathbf{x} - \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i) \mathbf{u}_i] + [(\mathbf{x} - \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i)^2 - l_i^2] = 0 \quad (\text{III-1})$$

Nous en déduisons le modèle géométrique inverse pour une position  $\mathbf{x}$  est régulière :

$$q_i = (\mathbf{x} - \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i) \mathbf{u}_i + \sqrt{[(\mathbf{x} - \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i) \mathbf{u}_i]^2 - [(\mathbf{x} - \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i)^2 - l_i^2]} \quad (\text{III-2})$$

Pour la phase de sélection de l'arrangement, seul le modèle géométrique inverse nous est utile. Nous ne déterminerons pas le modèle géométrique direct dans le cas général, d'autant plus que son écriture est complexe.

#### III.3.2. Modèles cinématiques.

L'expression des matrices  $\mathbf{J}_x$  et  $\mathbf{J}_q$  du modèle cinématique est :

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1)_x & (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1)_y & (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1)_z \\ (\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2)_x & (\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2)_y & (\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2)_z \\ (\mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3)_x & (\mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3)_y & (\mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3)_z \end{bmatrix} \quad (\text{III-3})$$

$$\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3 \cdot \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III-4})$$

A partir de ces deux matrices, nous établissons les modèles cinématiques direct et inverse conformément aux équations (II-17) et (II-18).

### III.4. Recherche de l'architecture de la machine.

#### III.4.1. Réduction du nombre de paramètres.

Dans le cas le plus général, les droites sur lesquelles se déplacent les points  $A_i$ , la longueur  $l_i$  de chacune des barres et la position des points  $B_i$  dans  $\mathbf{R}_n$  sont quelconques.

Si nous menons une optimisation à partir de ces données, le nombre de paramètres est trop important. De plus certains d'entre eux ne sont pas indépendants. Par exemple, chacun

des mécanismes partiellement représentés sur la Figure III-3 possède la même matrice jacobienne et donc le même conditionnement. En effet, la matrice  $\mathbf{J}$  ne dépend que de la direction des vecteurs  $\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i$  et de  $\mathbf{u}_i$ . Or, la Figure III-3 montre que la configuration en pointillés est déduite de la configuration en trait fort par une translation de vecteur  $-\mathbf{EB}_i$ . Les vecteurs  $\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i$  et  $\mathbf{A}'_i\mathbf{E}$  sont égaux. Il existe donc une relation entre la position des points  $P_i$  et celle des points  $B_i$  telle que la matrice jacobienne (et par conséquent son conditionnement) reste la même.

Pour caractériser cette famille de mécanismes (qui sont cinématiquement équivalents et qui possèdent la même valeur du conditionnement de la matrice jacobienne), nous réalisons une « contraction » de la nacelle. En effet, nous considérerons que tous les points  $B_i$  sont confondus avec  $E$ . Nous évitons ainsi tout le paramétrage géométrique de la nacelle.

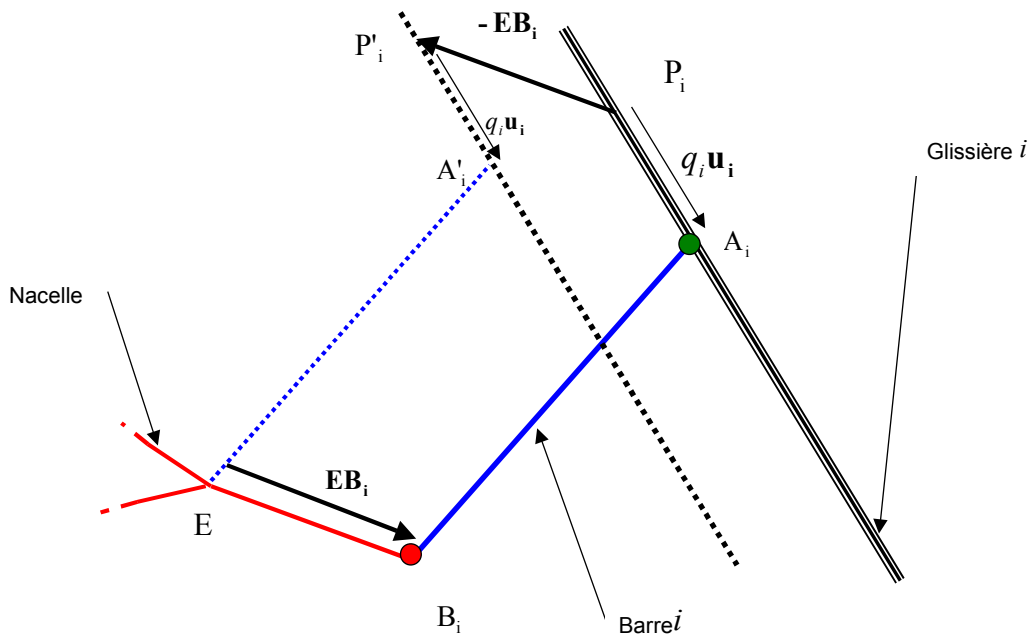


Figure III-3 : Dispositions possédant la même matrice jacobienne.

Il est évident que le représentant d'une famille de mécanismes tel que nous l'avons sélectionné ne présente pas d'intérêt pratique car il est difficilement réalisable. Pour obtenir une géométrie correspondant à une machine réalisable, nous effectuons une expansion de la nacelle en fonction de l'encombrement de la broche qu'elle devra porter. Cette expansion se réalise en effectuant une translation des liaisons glissières (ce qui revient à déplacer les points  $P_i$ ). Sous cette condition, nous obtenons l'écriture :

$$\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i = (\mathbf{x} - \mathbf{P}_i) - (q_i\mathbf{u}_i) \quad (\text{III-5})$$

### III.4.2. Evaluation des architectures possibles.

Afin de réduire la complexité du problème et dans un souci de simplicité de réalisation, nous considérons que toutes les barres sont rectilignes et ont la même longueur  $L$ . Nous avons donc recherché la meilleure machine au sens du critère sélectionné

(conditionnement de la matrice jacobienne) pour plusieurs agencements de géométrie particulière. Les agencements étudiés sont :

- Glissières parallèles.
  - Glissières non coplanaires parallèles à l'axe  $x$  (le cas glissières parallèles à l'axe  $y$  est identique).
  - Glissières parallèles à l'axe  $z$ .
- Glissières coplanaires.
  - Glissières parallèles à l'axe  $x$  (le cas glissières parallèles à l'axe  $y$  est identique).
  - Glissières concourantes perpendiculaires à l'axe  $z$ .
- Glissières perpendiculaires.
- Cas hybride.
- Glissières disposées sur un cône de demi angle au sommet  $\varphi$  et d'axe  $z$ .
  - Cas  $\varphi = 60^\circ$ .
  - Cas  $\varphi = 180^\circ$ .
  - Cas  $\varphi = 300^\circ$ .

L'illustration de ces agencements est donnée sur la Figure III-4. La méthode et résultats de la caractérisation de ces différents agencements sont présentés dans l'Annexe C. La Figure III-5 récapitule les résultats obtenus lors de l'évaluation de ces différents types d'agencement. Le cas des glissières perpendiculaires n'est pas présenté car l'encombrement de cette solution est trop important.

La machine que nous concevons sera utilisée dans une ligne transfert pour la production de pièces en grande série. Elle devra donc impérativement posséder, dans au moins une direction perpendiculaire à  $z$ , un encombrement inférieur au pas de la chaîne, soit 1,6 mètre. La valeur que nous retenons pour l'encombrement du modèle contracté (1,2 mètre) prend en compte l'expansion de la nacelle et l'encombrement des moteurs. Avec ces éléments d'analyse, nous constatons que seuls les cas « glissières parallèles à l'axe  $z$  » et « cas hybride » répondent à notre besoin. Finalement, nous retenons la solution « glissières parallèles à l'axe  $z$  » car sa réalisation est plus simple que le cas hybride.

#### Remarques :

- Le type de structure choisi permet d'avoir un déplacement aussi grand que l'on veut sur l'axe  $z$ .
- La réalisation d'une machine d'après le « cas hybride » est légèrement plus complexe. A notre connaissance, aucune machine basée sur cette disposition des liaisons glissières n'a été proposée à ce jour. Une étude plus approfondie de cette disposition mériterait d'être menée.
- Dans le cas présent, les contraintes d'encombrement sont tellement fortes qu'elles deviennent un critère aussi déterminant que le conditionnement pour le choix de l'agencement.

Nous allons maintenant développer les modèles complets de l'architecture de machine choisie.



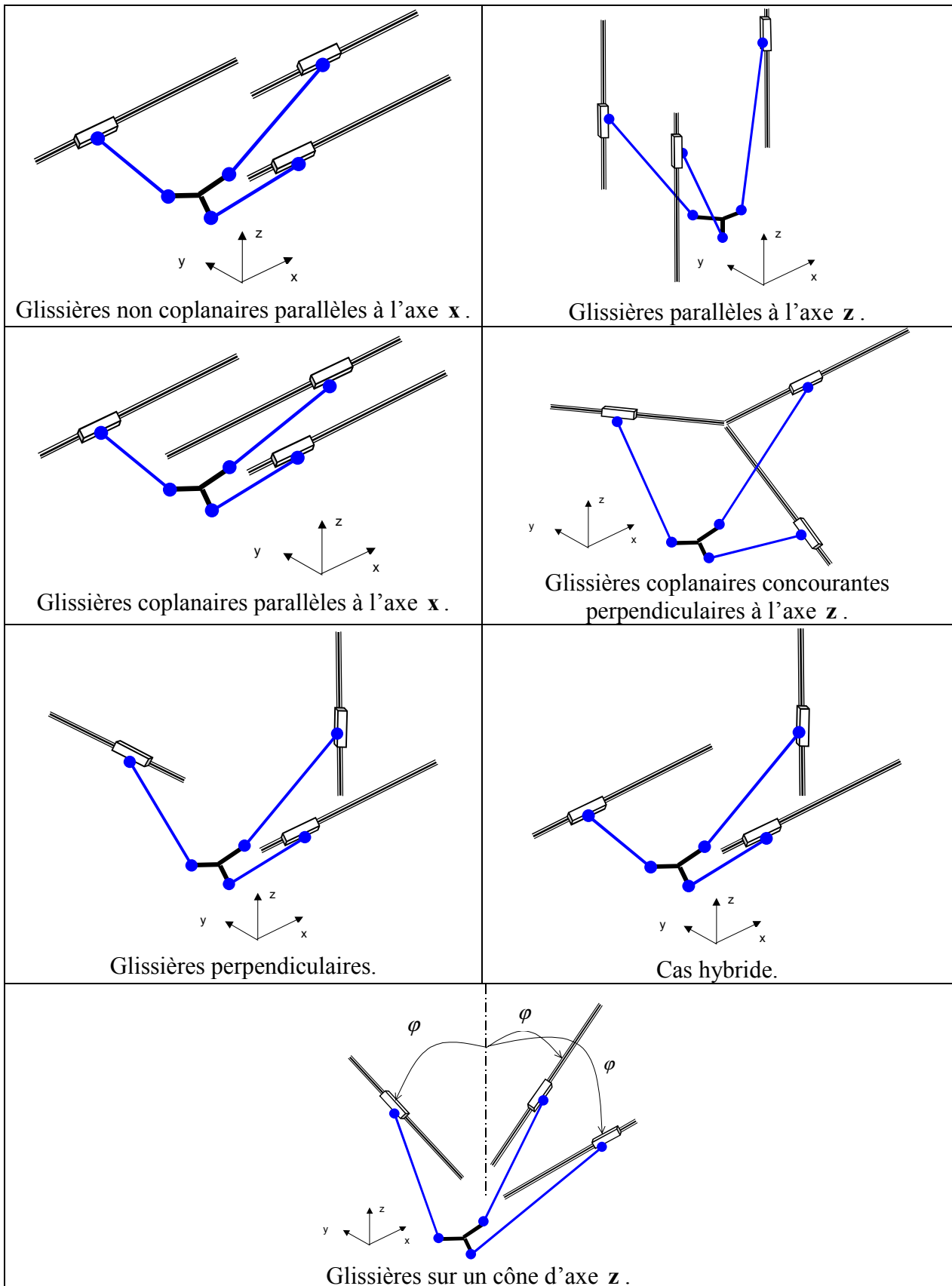


Figure III-4 : Illustration des agencements étudiés.

Type d'agencement	Encombrement <sup>4</sup> (mètres)	Conditionnement	Conditionnement pour encombrement de 1,2 m (modèle « contracté »)
Glissières non coplanaires parallèles à l'axe <b>x</b>	1,8	2,25	
Glissières non coplanaires parallèles à <b>x</b> (solution plus compacte)	1,35	2,67	
Glissières parallèles à l'axe <b>z</b>	1,4	2,38	2,69
Glissières coplanaires parallèles à l'axe <b>x</b>	1,6	2,65	
Glissières concourantes perpendiculaires à l'axe <b>z</b>	4	1,80	
Cas hybride	1,2	2,41	2,41
Glissières inclinées de 60°	2,4	1,38	

Figure III-5 : Evaluation des agencements.

### III.5. Modélisation de l'architecture choisie.

#### III.5.1. Paramétrage.

L'illustration de l'architecture que nous avons choisie est représenté Figure III-6.

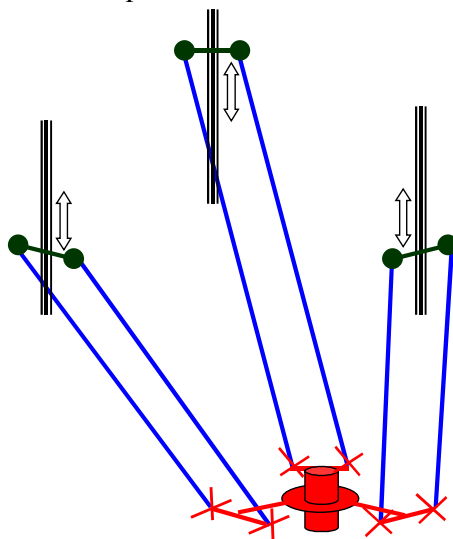


Figure III-6 : Schéma de principe.

Le paramétrage de cette agencement est présenté Figure III-7. Les glissières sont disposées sur un cylindre de rayon  $R$ . La nacelle a pour rayon  $r$ . L'espacement angulaire des glissières est de 120 degrés.

<sup>4</sup> L'encombrement est un critère essentiel pour cette application (voir paragraphe II.4.2.5. ).

### III.5.2. Modèles spécifiques.

#### III.5.2.1. Modèles géométriques.

En utilisant les paramètres définis Figure III-7, les grandeurs intervenant dans les modèles génériques s'écrivent :

Coordonnées des points  $P_i$  dans le repère fixe :

$$[\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2 \quad \mathbf{P}_3] = \begin{bmatrix} R & -\frac{R}{2} & -\frac{R}{2} \\ 0 & R\frac{\sqrt{3}}{2} & -R\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III-6})$$

Coordonnées des points  $B_i$  dans le repère mobile,  $R_n$  :

$$[\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3] = \begin{bmatrix} r & -\frac{r}{2} & -\frac{r}{2} \\ 0 & r\frac{\sqrt{3}}{2} & -r\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III-7})$$

Composantes des vecteurs  $u_i$  dans le repère fixe :

$$[\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III-8})$$



$$\begin{cases} (r-R+x)^2 + y^2 + (z-q_1)^2 = L^2 \\ \left( (R-r)\frac{1}{2}+x \right)^2 + \left( (r-R)\frac{\sqrt{3}}{2}+y \right)^2 + (z-q_2)^2 = L^2 \\ \left( (R-r)\frac{1}{2}+x \right)^2 + \left( (R-r)\frac{\sqrt{3}}{2}+y \right)^2 + (z-q_3)^2 = L^2 \end{cases} \quad (\text{III-10})$$

Le système (III-10) peut se réécrire :

$$\begin{cases} (A^2 + C^2 + 1)z^2 + 2(AE + CD - q_1)z + E^2 + D^2 + q_1^2 - L^2 = 0 \\ y = Az + B \\ x = Cz + D \end{cases}$$

$$\text{avec : } A = \frac{(q_2 - q_3)}{\sqrt{3}(r-R)} \quad B = \frac{q_3^2 - q_2^2}{2\sqrt{3}(r-R)} \quad C = \frac{2(q_2 - q_1) - A(r-R)\sqrt{3}}{3(R-r)} \quad (\text{III-11})$$

$$D = \frac{q_1^2 - q_2^2 - B\sqrt{3}(r-R)}{3(R-r)} \quad \text{et} \quad E = r - R + B$$

La première équation du système (III-11) admet deux solutions qui correspondent à deux positions de la nacelle (voir Figure III-8). La solution correspondant à la machine étudiée est la position basse. Il faut donc conserver la plus petite des deux solutions de l'équation polynomiale. Connaissant  $z$ , nous pouvons ensuite calculer  $x$  et  $y$  de manière unique.

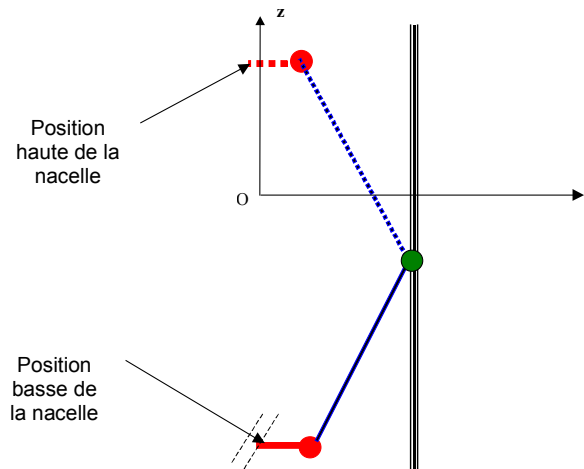


Figure III-8 : Représentation des deux solutions de l'équation polynomiale.

### III.5.2.2. Modèles cinématiques.

Dans le cas de l'architecture choisie et avec le paramétrage de la Figure III-7, les matrices  $\mathbf{J}_x$  et  $\mathbf{J}_q$  de l'équation (II-16) s'écrivent :

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} r-R+x & y & z-q_1 \\ \frac{1}{2}(R-r)+x & \frac{\sqrt{3}}{2}(r-R)+y & z-q_2 \\ \frac{1}{2}(R-r)+x & \frac{\sqrt{3}}{2}(R-r)+y & z-q_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} z-q_1 & 0 & 0 \\ 0 & z-q_2 & 0 \\ 0 & 0 & z-q_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III-12})$$

### III.5.2.3. Modèles dynamiques.

Pour pouvoir écrire le modèle dynamique, nous établissons:

- La relation entre un effort appliqué sur la nacelle et l'effort résultant sur les moteurs.
- La relation entre  $\ddot{\mathbf{q}}$  et  $\ddot{\mathbf{x}}$ .
- Les masses en mouvement.

Le modèle effort statique est donné par la relation (II-28) avec :

$$\mathbf{F}_{\text{nac}} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_{\text{mot}} = \begin{bmatrix} F_{\text{mot}1} \\ F_{\text{mot}2} \\ F_{\text{mot}3} \end{bmatrix} \quad (\text{III-13})$$

La relation entre les accélérations s'écrit conformément à l'équation (II-25). Pour l'arrangement de l'architecture Delta que nous avons retenu, les matrices  $\mathbf{J}_x$  et  $\mathbf{J}_q$ , définies dans les équations (II-26) et (II-27), s'expriment analytiquement :

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} - \dot{q}_1 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} - \dot{q}_2 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} - \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} \dot{z} - \dot{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{z} - \dot{q}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{z} - \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III-14})$$

Nous constatons que l'accélération des moteurs est composée de la somme de deux termes :

- $\mathbf{J}^{-1} \ddot{\mathbf{x}}$ , l'accélération des actionneurs due à l'accélération de la nacelle.
- $(\dot{\mathbf{J}}_x - \dot{\mathbf{J}}_q \mathbf{J}^{-1}) \dot{\mathbf{x}}$ , l'accélération des actionneurs due au déplacement de la nacelle à vitesse constante. Ce terme traduit la non linéarité de la relation entre la vitesse des actionneurs et la vitesse de la nacelle.

#### Masses en mouvement.

Pour établir le modèle dynamique inverse, nous devons prendre en compte les masses des pièces en mouvement. Les pièces en mouvement considérées sont :

- Nacelle (masse  $M_1$ ).
- Secondaire des moteurs linéaires (masse  $M_2$ ).
- Barres de fixation de la nacelle (masse  $M_b$ ).

La pratique montre que, pour simplifier les calculs, la masse de chaque barre de fixation peut être répartie pour une moitié sur la nacelle et pour l'autre moitié sur le secondaire des moteurs, tandis que son inertie est négligée. Cette simplification est représentée sur la Figure III-9. La simplification proposée ci-dessus nous donne les masses corrigées :

- Masse corrigée de la nacelle :

$$M_{\text{nac}} = M_1 + 6 \frac{M_b}{2} = M_1 + 3M_b \quad (\text{III-15})$$

- Masse corrigée de chaque secondaire de moteur :

$$M_{\text{mot}} = M_2 + 2 \frac{M_b}{2} = M_2 + M_b \quad (\text{III-16})$$

Remarque :

Pour faire la simplification ci-dessus, nous avons dû tenir compte de la technologie des liaisons. L'étude du modèle dynamique a été faite pour un mécanisme à deux barres et non pas pour un mécanisme à simples barres comme le montre la Figure III-9.

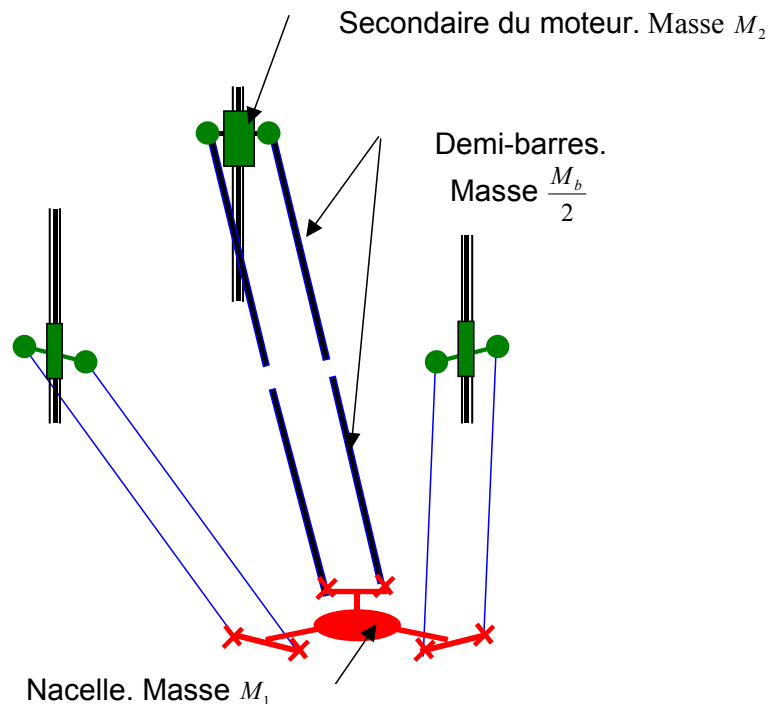


Figure III-9 : Répartition de la masse des barres.

Un grand nombre de simulations réalisées à l'aide du logiciel de simulation dynamique ADAMS permet de vérifier la validité de cette approximation. Par exemple, en modélisant une machine dont les caractéristiques géométriques sont  $r = 200mm$ ,  $R = 800mm$ ,  $d = 100mm$ ,  $L = 781mm$  et dont les masses des éléments en mouvement sont  $M_1 = 70kg$ ,  $M_2 = 70kg$  et  $M_b = 10kg$ .

Nous obtenons, en appliquant un effort moteur de 4000N aux deux premiers moteurs et de -8000N au troisième moteur, la norme de l'accélération résultante de la nacelle. Ensuite, nous comparons la norme de cette accélération dans trois cas (voir résultats Figure III-10) avec le logiciel ADAMS, en tenant compte de la masse des barres et en faisant l'hypothèse des masses corrigées et enfin, en intégrant l'équation différentielle du mouvement avec MATLAB.

Nous constatons que l'erreur entre les deux modèles ADAMS (barres avec masse et barres sans masse) est inférieure à 10%, ce qui est tout à fait acceptable pour les calculs de pré-dimensionnement que nous allons effectuer.

Modèle dynamique inverse.

Le modèle dynamique inverse donne la poussée que doit fournir chacun des moteurs pour des vitesses et des accélérations données de la nacelle. Cette poussée des moteurs doit vaincre les forces de frottement (négligées dans cette étude), les efforts extérieurs appliqués à la nacelle, l'inertie du secondaire des moteurs en translation et l'inertie de la nacelle en translation.

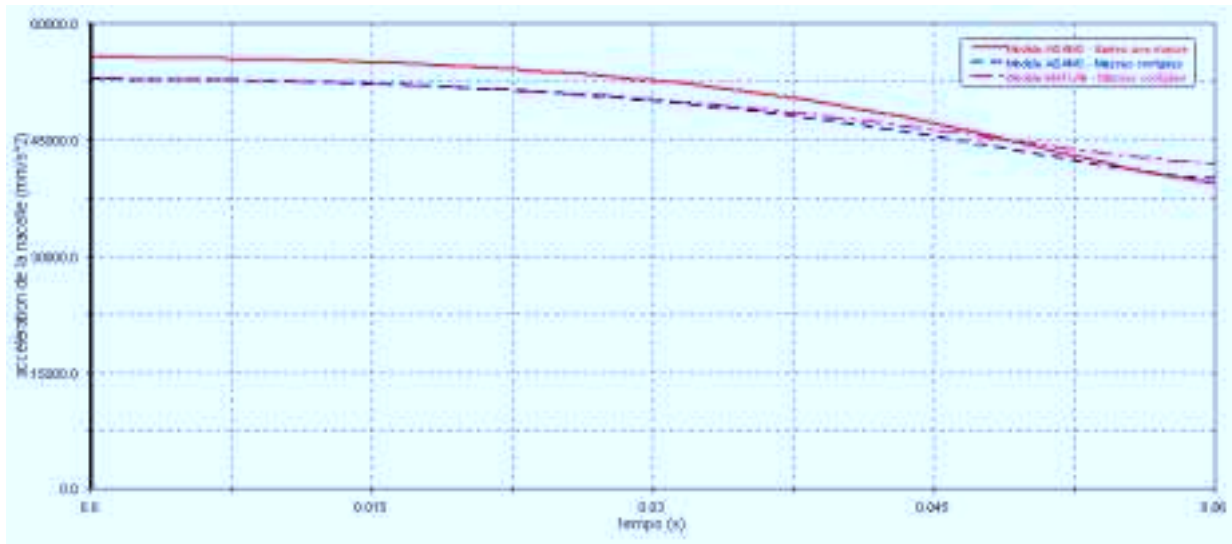


Figure III-10 : Vérification de l'hypothèse des masses corrigées.

Soit  $\Gamma_{mot}$  le vecteur dont les composantes sont les poussées nécessaires (suivant  $\mathbf{z}$ ) de chacun des moteurs pour déplacer la nacelle à partir de la position  $\mathbf{x}$ , à la vitesse  $\dot{\mathbf{x}}$ , avec une accélération  $\ddot{\mathbf{x}}$ , la nacelle étant soumise à l'effort extérieur  $\mathbf{F}_{nac}$ .  $\Gamma_{mot}$  comporte donc plusieurs termes :

- les efforts dus à l'accélération de la nacelle,  ${}^t\mathbf{J}(M_{nac}\ddot{\mathbf{x}})$ , qui peuvent s'écrire aussi :  $M_{nac}{}^t\mathbf{J}\ddot{\mathbf{x}}$
- les efforts dus à l'accélération de la masse du secondaire des moteurs,  $M_{mot}\ddot{\mathbf{q}}$ , qui peuvent s'écrire aussi :  $M_{mot}\mathbf{J}^{-1}\ddot{\mathbf{x}} + M_{mot}\mathbf{J}_q^{-1}(\dot{\mathbf{J}}_x - \dot{\mathbf{J}}_q\mathbf{J}^{-1})\dot{\mathbf{x}}$
- les efforts dus à un effort extérieur,  $\mathbf{F}_{ext}$ , appliqué sur la nacelle :  ${}^t\mathbf{J}\mathbf{F}_{ext}$

Après regroupement, le modèle dynamique inverse s'écrit :

$$\Gamma_{mot} = (M_{nac}{}^t\mathbf{J} + M_{mot}\mathbf{J}^{-1})\ddot{\mathbf{x}} + M_{mot}\mathbf{J}_q^{-1}(\dot{\mathbf{J}}_x - \dot{\mathbf{J}}_q\mathbf{J}^{-1})\dot{\mathbf{x}} + {}^t\mathbf{J}\mathbf{F}_{ext} \quad (\text{III-17})$$

#### III.5.2.4. Efforts dans les barres.

Pour une architecture Delta, le système (II-37) s'écrit sous forme matricielle :

$$\mathbf{J}_b\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ext} \\ \mathbf{m}_{ext} \end{bmatrix} \quad (\text{III-18})$$

avec :

$$\mathbf{J}_b = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & {}^t(\mathbf{DB}_{11} \times \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1) \\ {}^t\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & {}^t(\mathbf{DB}_{12} \times \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1) \\ {}^t\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 & {}^t(\mathbf{DB}_{21} \times \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2) \\ {}^t\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 & {}^t(\mathbf{DB}_{22} \times \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2) \\ {}^t\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3 & {}^t(\mathbf{DB}_{31} \times \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3) \\ {}^t\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3 & {}^t(\mathbf{DB}_{32} \times \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3) \end{bmatrix} \quad (\text{III-19})$$



Finalement, les efforts dans les barres sont donnés par :

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{J}_b^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{ext}} \\ \mathbf{m}_{\text{ext}} \end{bmatrix} \quad (\text{III-20})$$

Dans le cas où la force et le moment appliqués à la nacelle sont simplement dus à l'accélération de cette dernière, la force appliquée à la nacelle provient de l'inertie en translation de cette dernière, et le moment résulte de la distance  $h$  entre le centre de gravité de la partie mobile et le point D (voir Figure II-18 et Figure III-11).

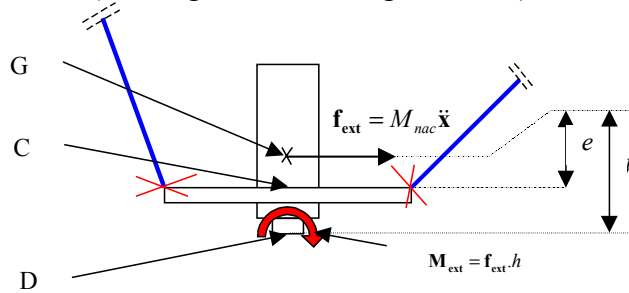


Figure III-11 : Efforts sur la nacelle dus à un balourd.

Si nous écrivons le système :

$$\begin{bmatrix} f_{11} \\ \vdots \\ f_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 & f_2^1 & f_3^1 & m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^6 & f_2^6 & f_3^6 & m_1^6 & m_2^6 & m_3^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (\text{III-21})$$

avec  $m_x = -hf_y$  et  $m_y = -hf_x$ , nous trouvons une écriture matricielle de l'équation (III-18), ne mettant en jeu que les composantes du vecteur force dû à l'accélération et une matrice  $6 \times 3$  :

$$\begin{bmatrix} f_{11} \\ \vdots \\ f_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 + hm_2^1 & f_2^1 - hm_1^1 & f_3^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^6 + hm_2^6 & f_2^6 - hm_1^6 & f_3^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (\text{III-22})$$

### III.6. Evolution de quelques coefficients caractéristiques.

La géométrie de la machine a été choisie dans la partie précédente, les paramètres restant libres pour l'optimisation sont les dimensions de la machine soient  $R, r$  et  $L$ . Le modèle « contracté » que nous avons utilisé dans un paragraphe précédent montre que les influences de  $R$  et  $r$  sur la cinématique sont couplées. La grandeur dimensionnante que nous prenons en compte est la différence  $(R - r)$ . La Figure III-12 montre l'évolution du maximum du conditionnement de la matrice jacobienne sur le volume de travail de la machine en fonction des deux paramètres dimensionnants  $L$  et  $(R - r)$ . Nous constatons que le maximum

du conditionnement sur le volume de travail diminue quand  $(R - r)$  augmente. Nous devons avoir  $(R - r)$  le plus grand possible. Or certaines contraintes d'encombrement limitent ces valeurs. Par exemple, le diamètre extérieur de l'électro-broche impose une valeur minimale  $r_{\min} = 0,15$  m. Ensuite, la machine doit avoir un encombrement réduit, actionneurs compris, ce qui entraîne  $R_{\max} = 0,7$  m, car le pas de chaînes transfert de production est typiquement de 1,6m et nous avons estimé à environ 0,4m la réserve de place nécessaire à la mise en place des moteurs et des articulations (l'encombrement des trois glissières étant plus faible que l'encombrement du cylindre auquel elles appartiennent).

Comme d'autre part il est souhaitable que la quantité  $(R - r)$  soit maximale, nous avons finalement retenu les valeurs  $r = r_{\min} = 0,15$  m et  $R = R_{\max} = 0,7$  m.

Le seul paramètre dimensionnel qui reste libre est la longueur des barres  $L$ . Jusqu'à présent, nous avons utilisé le critère du conditionnement maximal pour effectuer nos choix. Cependant, pour le dimensionnement de la machine, il est nécessaire de connaître l'évolution de certaines grandeurs caractéristiques (poussée maximale des moteurs, accélération maximale des moteurs, efforts dans les barres...) en fonction de  $L$ . Comme il n'existe pas de solution analytique pour l'évaluation de ces grandeurs, nous effectuerons un balayage de l'espace de travail (intérieur d'un cube de 0,5m de côté) selon  $x$  et  $y$  (nous n'effectuons pas de balayage suivant  $z$  car la géométrie et donc les caractéristiques de la machine sont invariantes quand  $z$  change) et nous conservons les valeurs minimales et/ou maximales des paramètres calculés sur l'espace de travail. Les résultats sont présentés dans un tableau dont le masque est donné Figure III-13:

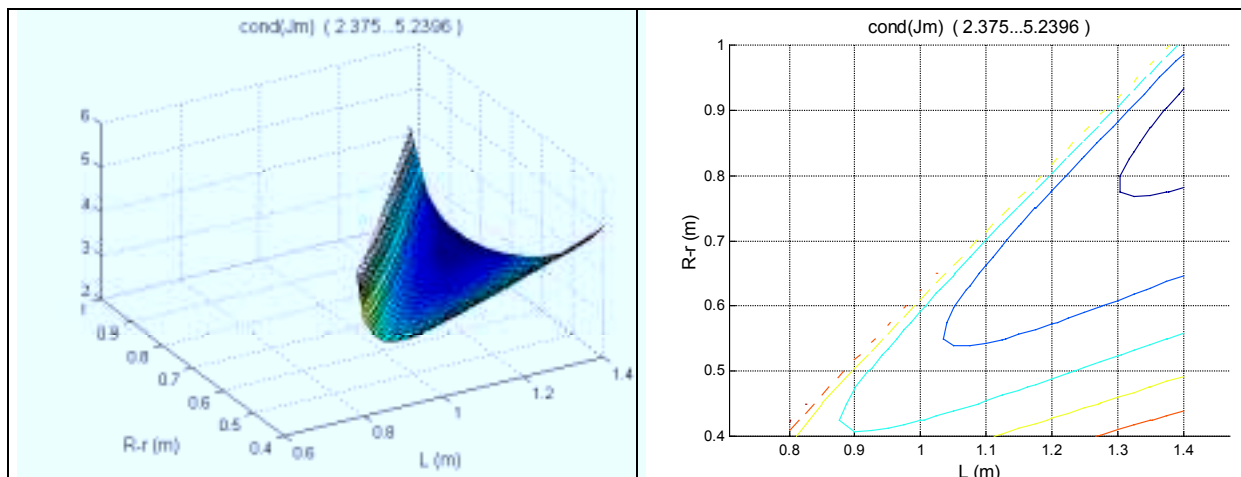


Figure III-12 : Maximum du conditionnement.

Représentation 3D de l'évolution du critère sur une tranche du volume de travail pour $L = 1,3$ m.	Représentation en courbes de niveau de l'évolution du critère sur une tranche du volume de travail pour $L = 1,3$ m.
Evolution du maximum et/ou du minimum du critère en fonction de $L$ .	

Figure III-13 : Représentation des résultats.

### III.6.1. Conditionnement.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, le conditionnement de la matrice jacobienne traduit l'isotropie de la machine. La Figure III-14 montre qu'il existe une valeur de  $L_{opt,cond}$  qui minimise le conditionnement, mais nous voyons que ce dernier évolue peu pour  $L > L_{opt,cond}$ .

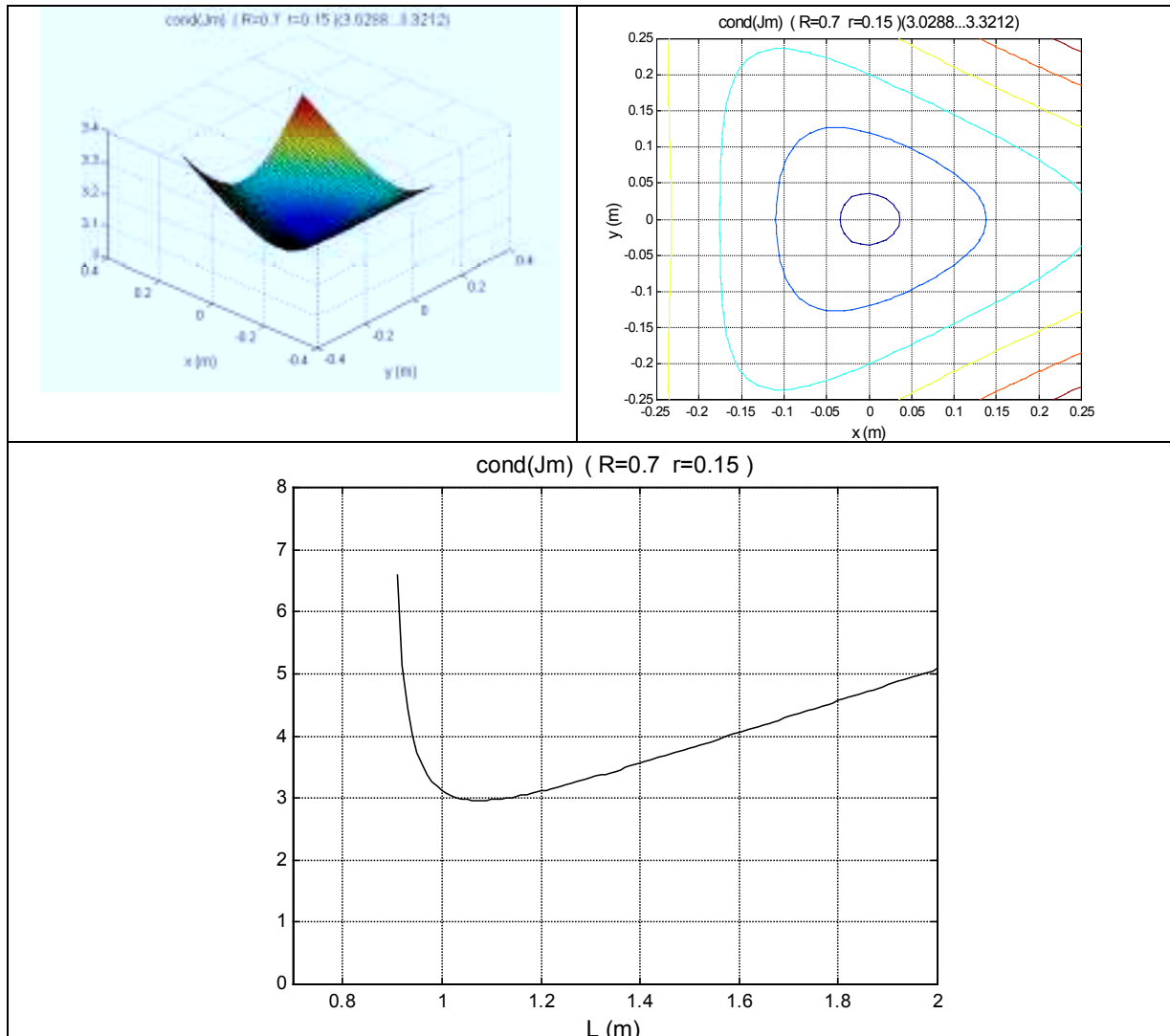


Figure III-14 : Conditionnement de la matrice jacobienne.

### III.6.2. Transmission des vitesses.

Les utilisations futures de cette machine requièrent une vitesse minimale de la nacelle qui doit être accessible dans toutes les directions. Pour une vitesse instantanée de direction quelconque de la nacelle, en un point de l'espace de travail, nous définissons le coefficient de transmission des vitesses ( $\eta_v$ ) comme étant la valeur maximale du rapport entre la vitesse des actionneurs et la vitesse de la nacelle en ce point. La valeur maximale de ce paramètre sur la totalité du volume de travail sera notée  $\eta_{v,max}$ . D'après la Figure III-15, nous constatons que

plus  $L$  est grand, meilleur est la transmission de vitesses ( $\eta_v$  petit). Quand  $L$  croit, ce rapport diminue car le mécanisme se rapproche d'un mécanisme singulier (le conditionnement augmente). Quand  $L$  tend vers l'infini, ce rapport tend vers 1. En effet, pour un mouvement suivant  $z$ , la vitesse des actionneurs est la même que celle de la nacelle.

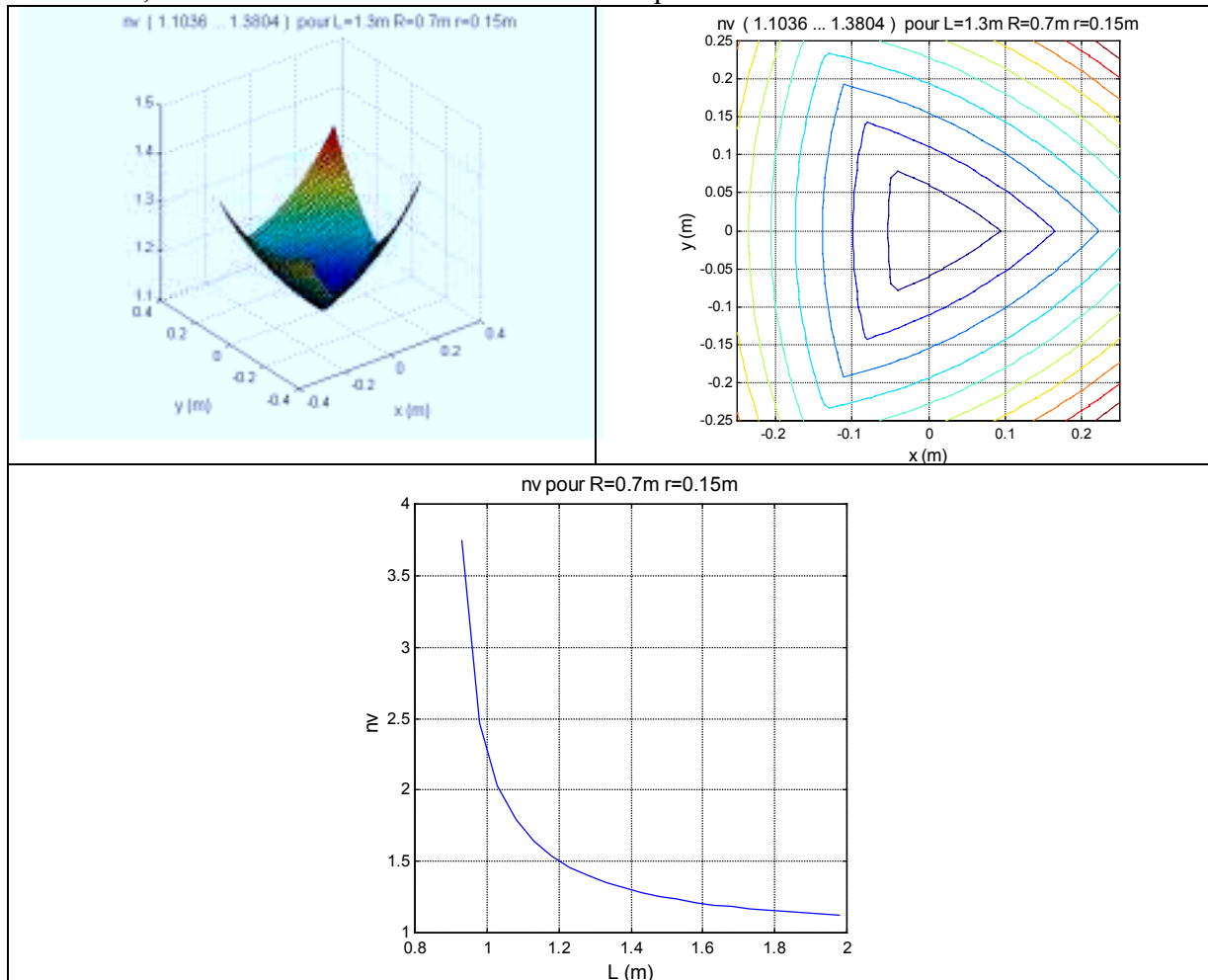


Figure III-15 :Transmission des vitesses dans une tranche du volume de travail.

### III.6.3. Transmission des efforts.

La définition du coefficient de transmission des efforts ( $\eta_f$ ) est similaire à celle du coefficient de transmission des vitesses. Pour un effort de direction quelconque appliqué à la nacelle et pour une position donnée de cette dernière, le coefficient de transmission des efforts est le rapport entre l'effort maximum sur les actionneurs et l'effort sur la nacelle. Les moments appliqués à la nacelle n'influent pas sur le coefficient de transmission des efforts car ils sont repris par la structure de la machine (par les paires de barres parallèles). D'après la Figure III-16, nous concluons que plus  $L$  est petit, meilleure est la transformation des efforts (poussée des moteurs plus faible). Ce résultat est logique car découlant de la relation de dualité qui existe de manière générale entre les efforts et les vitesses due à la conservation de la puissance mécanique.

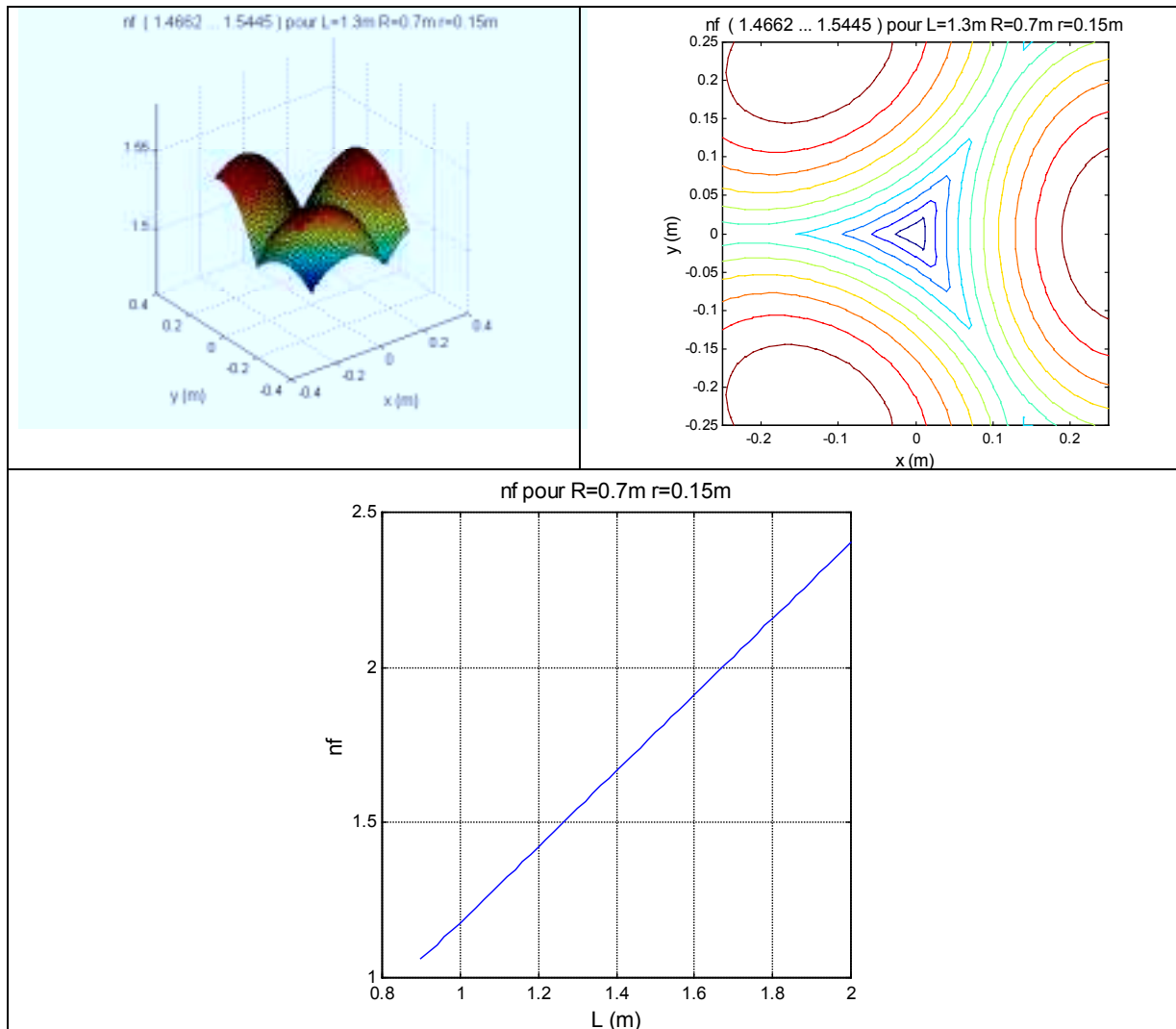


Figure III-16: Transmission des efforts.

#### III.6.4. Efforts dans les barres.

Les efforts dans les barres sont dus à l'ensemble des composantes (force et moment) du torseur des efforts appliqués à la nacelle. Nous avons, dans un premier temps étudié les influences séparées d'un effort et d'un moment de direction quelconque appliqué à la nacelle. Nous avons défini deux coefficients  $\eta_{b,f}$  et  $\eta_{b,m}$  qui sont respectivement le coefficient de transmission des efforts entre la nacelle et les barres et le coefficient de transformation des moments appliqués à la nacelle en efforts dans les barres. Les évolutions de ces deux coefficients sont représentées sur la Figure III-17 et la Figure III-18. Nous retenons de ces figures qu'il existe une valeur optimale de  $L$ .

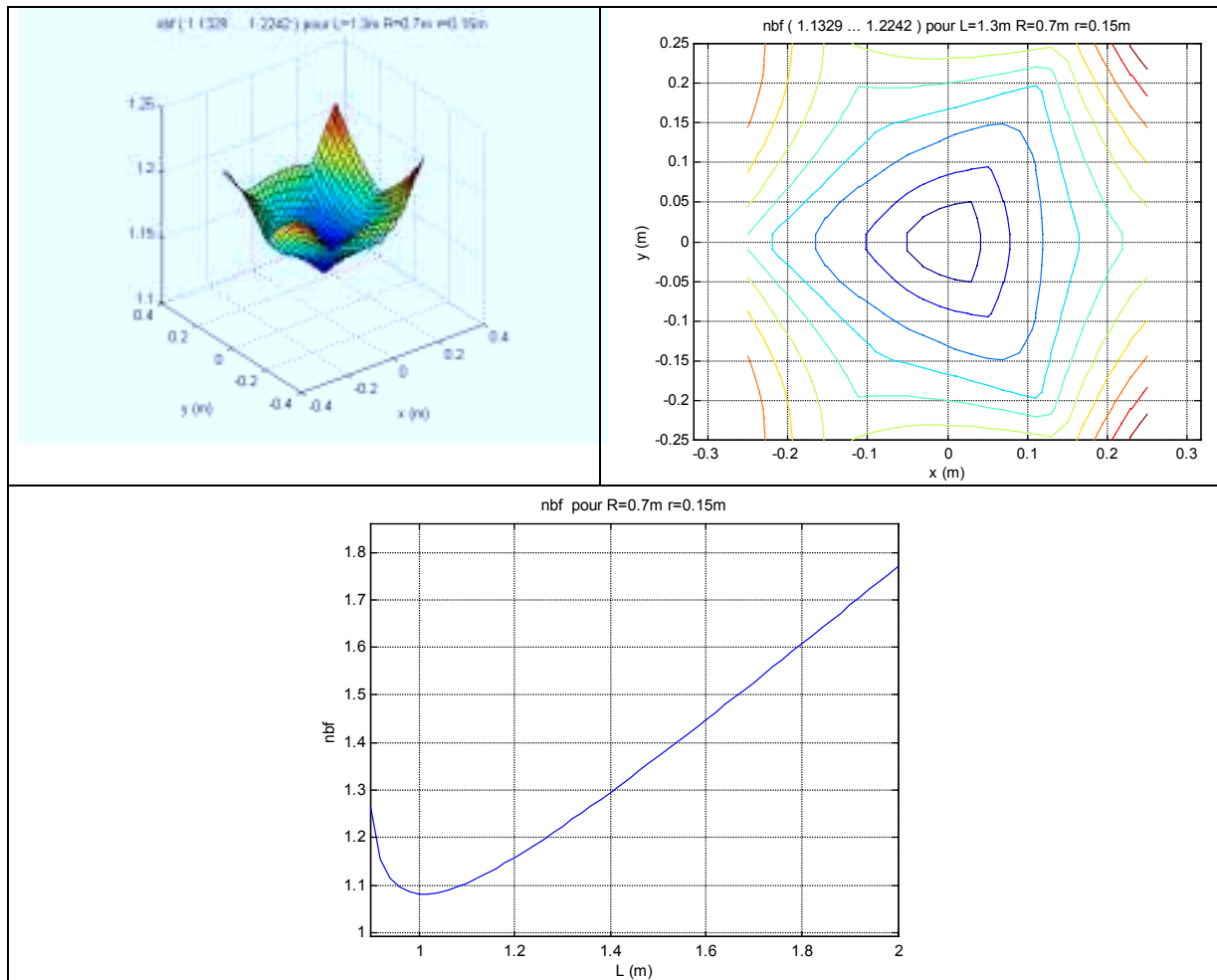


Figure III-17 : Effort dans les barres pour une force pure.

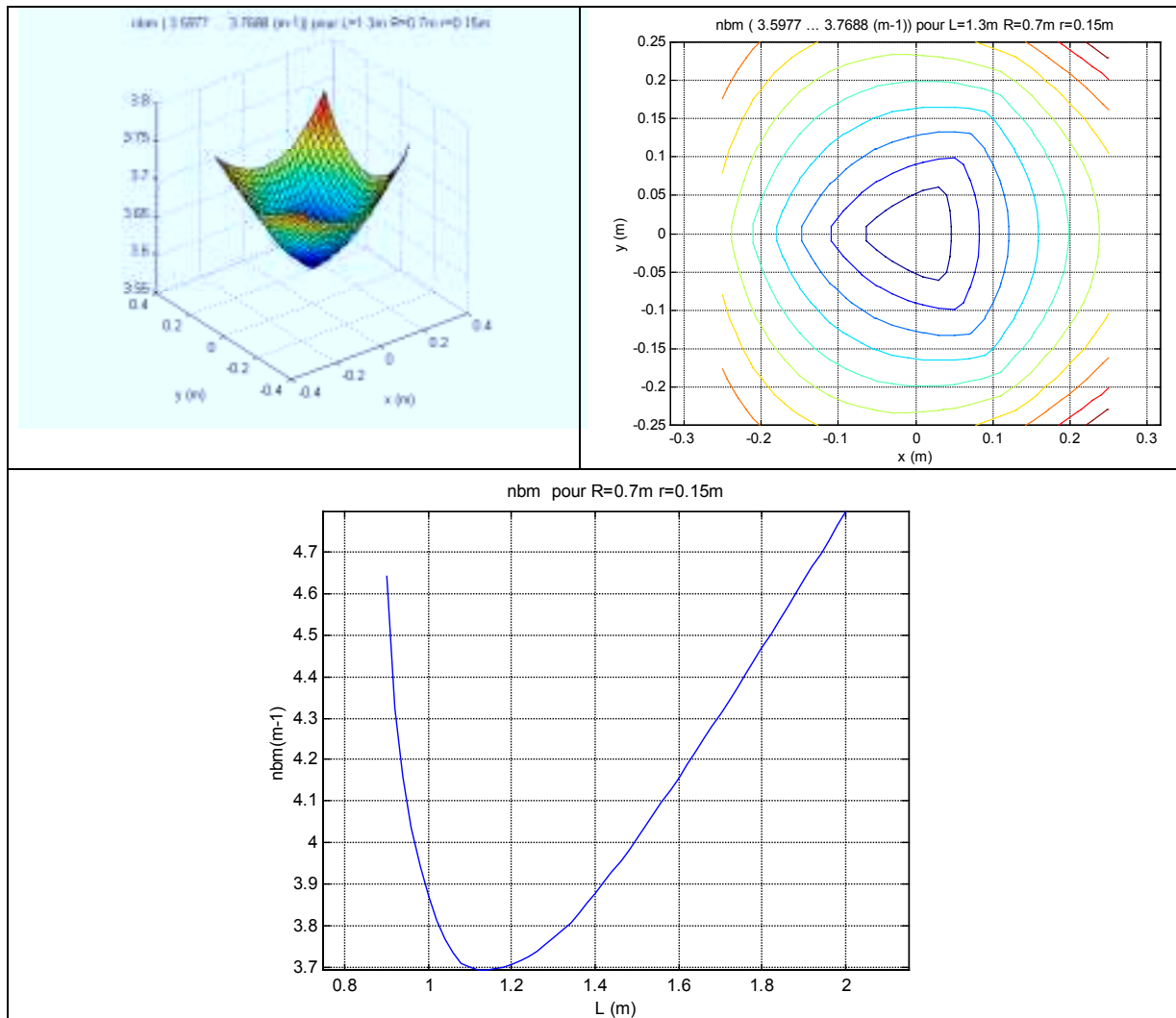
Avant d'utiliser ces résultats, nous devons cerner de manière plus précise les efforts prépondérants appliqués à la nacelle. Dans l'utilisation courante de ce type de machine, la nacelle est alternativement sollicitée par chacune des deux phases suivantes :

- Phase de déplacement rapide de la broche.

Pendant un déplacement rapide de la broche, l'outil n'usine pas. Lors d'un déplacement à vitesse constante, les efforts appliqués au centre de gravité de la nacelle sont nuls, alors que pendant les phases d'accélération (ou de décélération), les efforts appliqués en G ne sont pas nuls. Il est donc intéressant de connaître l'évolution des efforts dans les barres en fonction d'un effort appliqué à la nacelle en G et de l'excentration  $e$  du point G par rapport au plan de la nacelle (distance GC, voir Figure III-11).

- Phase d'usinage.

Pendant les phases d'usinage, la nacelle est soumise à deux sollicitations, une force de répulsion de l'outil et un moment (effort de coupe autour de l'axe  $z$ ). La valeur de ces efforts varie en fonction des paramètres de coupe, de la géométrie de l'outil et des matériaux usinés.



**Figure III-18 : Effort dans les barres pour un moment pur.**

L'intérêt d'utiliser des structures parallèles est d'améliorer les performances dynamiques de la machine en augmentant les accélérations de la nacelle lors des déplacements rapides. De manière concrète, cela se traduit par des efforts (d'inertie) sur la nacelle lors d'un déplacement rapide plus importants que lors d'un usinage. Pour la suite de l'étude, nous ne prenons donc en considération que les efforts résultant d'une accélération de la nacelle.

L'évolution du rapport  $\eta_{b, fm}$  entre les efforts dans les barres et les efforts d'inertie en fonction de  $L$  et  $e$  est représentée sur la Figure III-19. Intuitivement, nous aurions tendance à affirmer qu'il est souhaitable de réduire l'excentration du point G pour diminuer les efforts dans les barres. La Figure III-19 montre que la tendance est inversée. En effet, si la force crée un effort de traction (respectivement compression) dans les barres, le moment crée un effort de compression (respectivement traction) ce qui tend à réduire l'effort maximum dans les barres (dans le domaine de variation étudié pour  $e$ ).

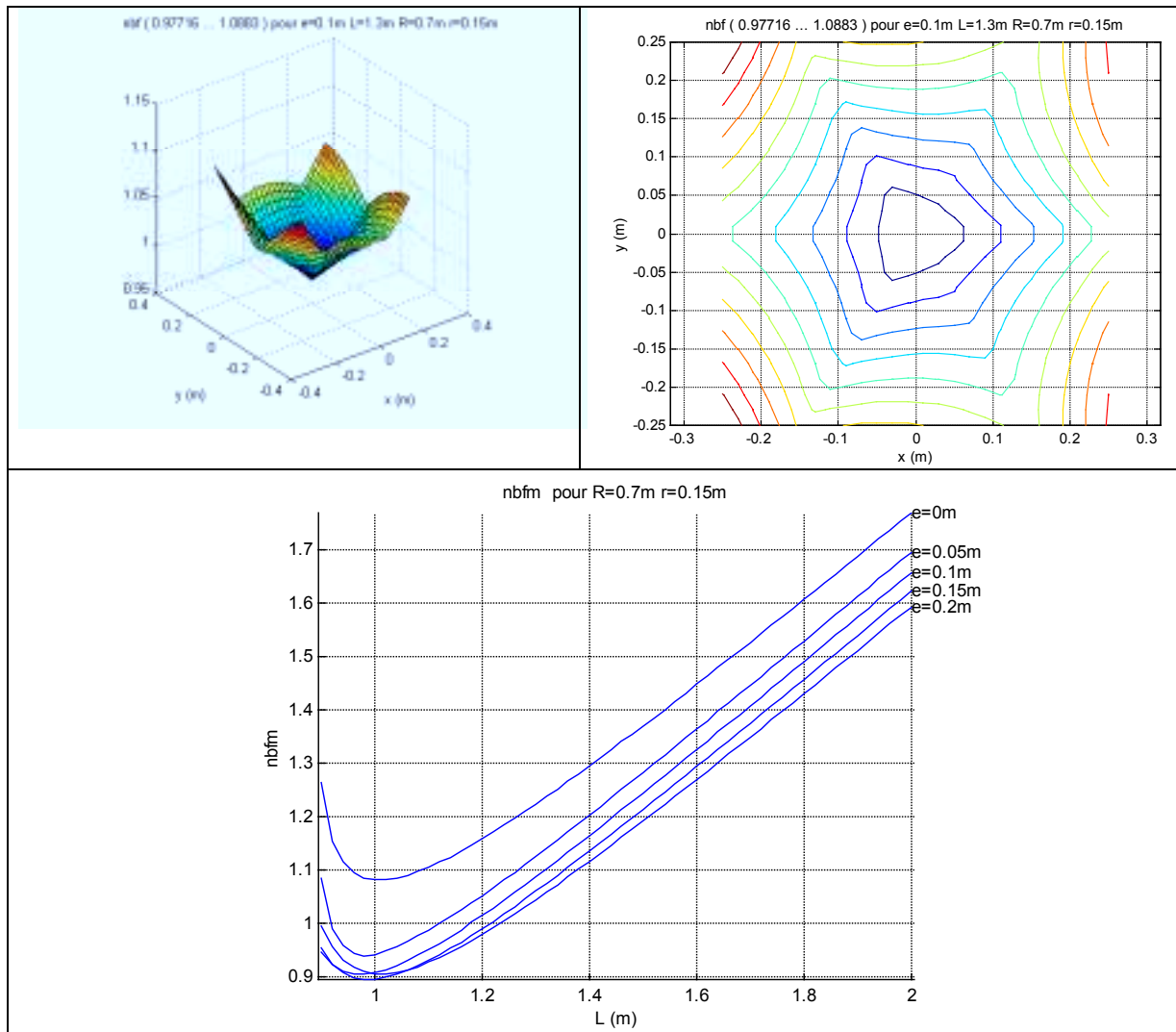


Figure III-19 : Effort dans les barres pour e variable.

### III.6.5. Accélérations.

L'accélération des moteurs se décompose en deux termes d'après l'équation (II-25). La valeur du coefficient de transmission des accélérations  $\eta_a$  est identique à celle du coefficient de transmission des vitesses (Figure III-15). L'évolution du terme non linéaire (coefficient  $\eta_{a,v}$ ) est représentée sur la Figure III-20 pour une vitesse unitaire de la nacelle. Pour une vitesse  $\dot{x}$  de la nacelle, le maximum de l'accélération des moteurs due à la vitesse vaut  $\eta_{a,v}\dot{x}^2$ .



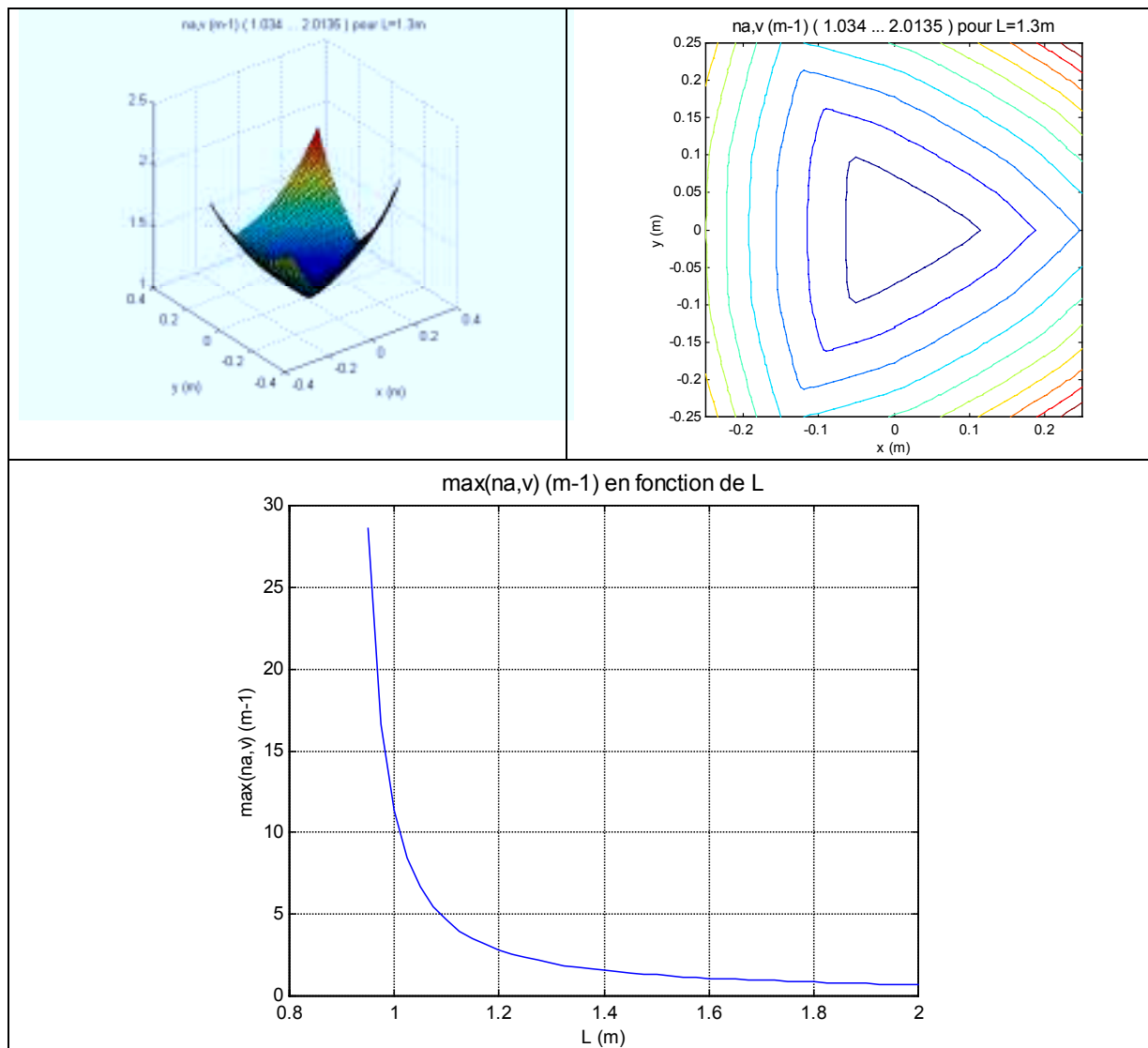


Figure III-20 : Accélération des moteurs.

## III.7. Singularités et volume de travail.

### III.7.1. Introduction.

Le but de cette partie est d'apporter un outil de vérification qui permet de s'assurer que le volume de travail de la machine que nous avons dimensionnée ne contient pas de singularités. De nombreuses études, par exemple [FIOR\_94] et [MAYE\_96], proposent de calculer les racines du déterminant de la matrice jacobienne.

L'approche que nous avons adoptée dans cette partie est différente. Pour dimensionner la machine, nous nous sommes contentés de calculer nos indicateurs en un nombre donné de points du volume de travail, ces points étant régulièrement répartis sur un quadrillage. Nous n'avons pas pris en compte le comportement de la machine entre les points de ce quadrillage. Par exemple, si nous considérons comme indicateur la plus petite valeur singulière de la matrice jacobienne sur le volume de travail, nous ne sommes pas certains que cette valeur est

obtenue pour un point de la grille. Cela signifie que si nous retenons la plus petite valeur sur le quadrillage, nous ne sommes pas sûrs qu'elle corresponde à la plus petite valeur sur l'ensemble du volume de travail et de plus, nous sommes incapables de donner l'écart entre ces deux valeurs.

L'outil que nous proposons permet de calculer un pas de la grille pour lequel nous sommes certains que la plus petite valeur singulière de la matrice jacobienne sur le volume de travail de la machine ne descend pas en dessous d'un certain seuil fixé à l'avance. La valeur du pas « sécurisé » peut être utilisée dans les procédures de balayage précédentes.

### III.7.2. Calculs préliminaires.

Quand une singularité est présente dans le volume de travail, la matrice jacobienne dégénère [MA\_91], donc son conditionnement augmente. Lors de notre recherche du maximum du conditionnement sur le volume de travail, nous avons effectué un balayage d'une tranche du volume de travail dans un plan d'altitude  $z_0$ . Aussi petit que soit le pas du balayage, seulement un nombre fini de points est testé. Nous ne pouvons donc pas, a priori, étendre le comportement de la machine en ces points au volume de travail tout entier. Le but de cette partie est de prouver de manière rigoureuse que le volume de travail de la machine que nous avons dimensionnée ne présente pas de singularité en étendant le comportement de la machine en un point à son voisinage.

Sjirk Koekebakker a présenté dans [KOEK\_97] une méthode mathématique permettant de démontrer la convergence d'un algorithme itératif de calcul du modèle géométrique direct de machines de type hexapode. A partir de ces travaux, nous présentons dans l'Annexe D, une adaptation de cette méthode à la démonstration de l'absence de singularités à l'intérieur du volume de travail d'un représentant de la famille des hexapodes, la machine INGERSOLL. Moyennant quelques adaptations supplémentaires, cette méthode peut être appliquée à la machine que nous venons de dimensionner.

#### Remarque :

Pour un robot ou une machine parallèle à bras de longueur constante (Delta, Hexa, Triaglide, Hexaglide..), les propositions suivantes sont équivalentes :

- La position de la nacelle caractérisée par le vecteur  $\mathbf{x}$  est singulière.
- $\mathbf{J}_x$  et/ou  $\mathbf{J}_q$  sont singulières.
- $\mathbf{J}_x$  et/ou  $\mathbf{J}_q$  ne sont pas inversibles.
- $|\mathbf{J}_x| = 0$  et/ou  $|\mathbf{J}_q| = 0$ .
- $\sigma_1(\mathbf{J}_x) = 0$  et/ou  $\sigma_1(\mathbf{J}_q) = 0$ .

D'après le théorème sur la variation des valeurs singulières (Annexe A) :

$$\begin{cases} \left| \sigma_1(\mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0)) - \sigma_1(\mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0 + \mathbf{dx})) \right| = \left\| \mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0) - \mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0 + \mathbf{dx}) \right\| \leq \left\| \mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0) - \mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0 + \mathbf{dx}) \right\|_F = \left\| \mathbf{dJ}_x(\mathbf{x}_0) \right\|_F \\ \left| \sigma_1(\mathbf{J}_q(\mathbf{x}_0)) - \sigma_1(\mathbf{J}_q(\mathbf{x}_0 + \mathbf{dx})) \right| = \left\| \mathbf{J}_q(\mathbf{x}_0) - \mathbf{J}_q(\mathbf{x}_0 + \mathbf{dx}) \right\| \leq \left\| \mathbf{J}_q(\mathbf{x}_0) - \mathbf{J}_q(\mathbf{x}_0 + \mathbf{dx}) \right\|_F = \left\| \mathbf{dJ}_q(\mathbf{x}_0) \right\|_F \end{cases} \quad (\text{III-23})$$

or :

$$\begin{cases} \mathbf{dJ}_x(\mathbf{x}_0) = \mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0) - \mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0 + \mathbf{dx}) = [\mathbf{dA}_i \mathbf{B}_i] \\ \mathbf{dJ}_q(\mathbf{x}_0) = \mathbf{J}_q(\mathbf{x}_0) - \mathbf{J}_q(\mathbf{x}_0 + \mathbf{dx}) = \text{diag}([\mathbf{dA}_i \mathbf{B}_i]) \bullet \mathbf{z} \end{cases} \quad (\text{III-24})$$

Nous allons maintenant rechercher un majorant de  $\|\mathbf{dA}_i\mathbf{B}_i\|$  en fonction de  $\|\mathbf{dx}\|$ . Nous ne considérerons que les déplacements  $\mathbf{dx}$  suivant  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  (déplacement dans une tranche du volume de travail), le déplacement suivant  $\mathbf{z}$  ne présentant de manière évidente jamais de singularités. Pour le bras numéro  $i$ , nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} (x + B_{i,x} - P_{i,x})^2 + (y + B_{i,y} - P_{i,y})^2 + (z + B_{i,z} - P_{i,z} - q_i)^2 = L^2 \\ (x + dx + B_{i,x} - P_{i,x})^2 + (y + dy + B_{i,y} - P_{i,y})^2 + (z + B_{i,z} - P_{i,z} - q_i - dq_i)^2 = L^2 \end{cases} \quad (\text{III-25})$$

Soit, en soustrayant ces deux équations, nous obtenons :

$$dq_i = z + B_{i,z} - P_{i,z} - q_i \pm \sqrt{(z + B_{i,z} - P_{i,z} - q_i)^2 + dx(2(x + B_{i,x} - P_{i,x}) + dx) + dy(2(y + B_{i,y} - P_{i,y}) + dy)} \quad (\text{III-26})$$

Il existe donc deux valeurs pour  $dq_i$  qui correspondent aux deux positions possibles pour les actionneurs dans le modèle géométrique inverse. Nous retenons la plus petite solution soit :

$$dq_i = z + B_{i,z} - P_{i,z} - q_i - \sqrt{(z + B_{i,z} - P_{i,z} - q_i)^2 + dx(2(x + B_{i,x} - P_{i,x}) + dx) + dy(2(y + B_{i,y} - P_{i,y}) + dy)} \quad (\text{III-27})$$

En valeur absolue et après factorisation, nous obtenons :

$$|dq_i| = |z + B_{i,z} - P_{i,z} - q_i| \left| \sqrt{1 + \frac{dx(2(x + B_{i,x} - P_{i,x}) + dx) + dy(2(y + B_{i,y} - P_{i,y}) + dy)}{(z + B_{i,z} - P_{i,z} - q_i)^2}} - 1 \right| \quad (\text{III-28})$$

Comme, sur le domaine de définition de  $\sqrt{1+u}$ , nous avons toujours  $\sqrt{1+u} \leq 1 + \frac{u}{2}$  :

$$|dq_i| \leq \frac{|dx|(2|x + B_{i,x} - P_{i,x}| + |dx|) + |dy|(2|y + B_{i,y} - P_{i,y}| + |dy|)}{2|z + B_{i,z} - P_{i,z} - q_i|} \quad (\text{III-29})$$

En supposant que  $\begin{cases} |dx| \leq \alpha \\ |dy| \leq \alpha \end{cases}$ , nous avons alors :

$$|dq_i| \leq \frac{|dx|(2|x + B_{i,x} - P_{i,x}| + \alpha) + |dy|(2|y + B_{i,y} - P_{i,y}| + \alpha)}{2|z + B_{i,z} - P_{i,z} - q_i|} \quad (\text{III-30})$$

Nous devons maintenant, sur le volume de travail à tester :

- majorer  $|x + B_{i,x} - P_{i,x}|$  qui représente la valeur absolue de la composante sur  $x$  du vecteur  $\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i$ .
- majorer  $|y + B_{i,y} - P_{i,y}|$  qui représente la valeur absolue de la composante sur  $y$  du vecteur  $\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i$ .
- minorer  $|z + B_{i,z} - P_{i,z} - q_i|$  qui représente la valeur absolue de la composante sur  $z$  du vecteur  $\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i$ .

Si nous considérons le cercle centré sur l'axe  $z$  (voir Figure III-21) dans lequel est inscrite la tranche du volume de travail, nous avons, en appelant  $\rho$  le rayon de ce cercle :

$$\begin{cases} |x + B_{i,x} - P_{i,x}| \leq R - r + \rho \\ |y + B_{i,y} - P_{i,y}| \leq R - r + \rho \end{cases} \quad (\text{III-31})$$

Pour la minoration de  $|z + B_{i,z} - P_{i,z} - q_i|$ , nous avons :

$$(x + B_{i,x} - P_{i,x})^2 + (y + B_{i,y} - P_{i,y})^2 + (z + B_{i,z} - P_{i,z} - q_i)^2 = L^2 \quad (\text{III-32})$$

or,

$$(x + B_{i,x} - P_{i,x})^2 + (y + B_{i,y} - P_{i,y})^2 \leq (R - r + \rho)^2 \quad (\text{III-33})$$

Soit :

$$(z + B_{i,z} - P_{i,z} - q_i)^2 \geq L^2 - (R - r + \rho)^2 \quad (\text{III-34})$$

La condition  $L^2 - (R - r + \rho)^2 \geq 0$  étant vérifiée, nous pouvons écrire :

$$|z + C_{i,z} - P_{i,z} - q_i| \geq \sqrt{L^2 - (R - r + \rho)^2} \quad (\text{III-35})$$

Une fois majorée, l'équation (III-30) peut se mettre sous la forme :

$$|dq_i| \leq A(|dx| + |dy|) = A\|\mathbf{dx}\|_1 \leq 2A\|\mathbf{dx}\| \quad (\text{III-36})$$

avec :

$$A = \frac{2(R - r + \rho) + \alpha}{\sqrt{L^2 - (R - r + \rho)^2}} \quad (\text{III-37})$$

De plus, nous avons :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{dA}_i \mathbf{B}_i\| &\leq \|\mathbf{dA}_i\| + \|\mathbf{dB}_i\| \\ \|\mathbf{dA}_i \mathbf{B}_i\| &\leq |dq_i| + \|\mathbf{dx}\| \leq (2A + 1)\|\mathbf{dx}\| \end{aligned} \quad (\text{III-38})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \|\mathbf{dJ}_x(\mathbf{x}_0)\|_F &= \sqrt{\sum_{i=1}^3 \|\mathbf{dA}_i \mathbf{B}_i\|^2} \\ \|\mathbf{dJ}_q(\mathbf{x}_0)\|_F &= \sqrt{\sum_{i=1}^3 [\mathbf{dA}_i \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{z}]^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^3 \|\mathbf{dA}_i \mathbf{B}_i\|^2} \end{aligned} \right. \quad (\text{III-39})$$

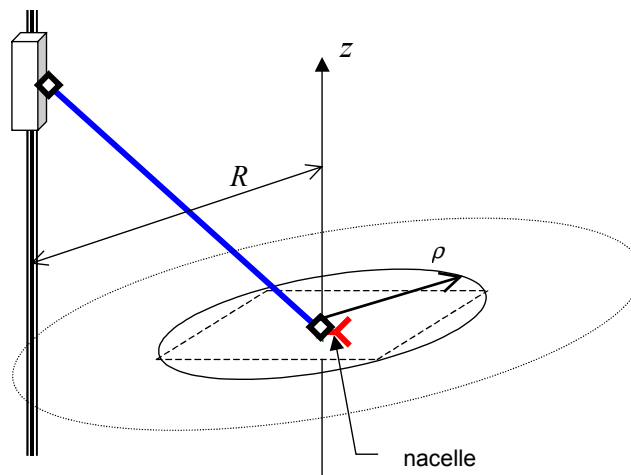


Figure III-21 : Cercle circonscrit.

Compte tenu des majorations faites précédemment, nous pouvons écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} \|\mathbf{dJ}_x(\mathbf{x}_0)\|_F &\leq \sqrt{3}(2A + 1)\|\mathbf{dx}\| \\ \|\mathbf{dJ}_q(\mathbf{x}_0)\|_F &\leq \sqrt{3}(2A + 1)\|\mathbf{dx}\| \end{aligned} \right. \quad (\text{III-40})$$

Soit, en conclusion :

$$\begin{cases} \left| \sigma_1(\mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0)) - \sigma_1(\mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0 + \mathbf{dx})) \right| \leq \sqrt{3}(2A+1)\|\mathbf{dx}\| \\ \left| \sigma_1(\mathbf{J}_q(\mathbf{x}_0)) - \sigma_1(\mathbf{J}_q(\mathbf{x}_0 + \mathbf{dx})) \right| \leq \sqrt{3}(2A+1)\|\mathbf{dx}\| \end{cases} \quad (\text{III-41})$$

Finalement, le système (III-41) permet de borner la variation de la plus petite valeur singulière de  $\mathbf{J}_x$  et de  $\mathbf{J}_q$ .

### III.7.3. Application à la recherche de singularités.

Le système d'inégalités (III-41) traduit la continuité uniforme des fonctions  $f_x(\mathbf{x}) = \sigma_1(\mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0 + \mathbf{dx}))$  et  $f_q(\mathbf{x}) = \sigma_1(\mathbf{J}_q(\mathbf{x}_0 + \mathbf{dx}))$ . Donc, étant donné la matrice  $\mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0)$ , nous venons de prouver que la plus petite valeur singulière de la matrice  $\mathbf{J}_x$  au point  $\mathbf{x}$  ne changera pas plus que  $\sqrt{3}(2A+1)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ . Les fonctions  $f_x(\mathbf{x})$  et  $f_q(\mathbf{x})$  sont donc lipchitsziennes. Cette affirmation est illustrée sur la Figure III-22.

Dans la suite de ce paragraphe, nous excluons du volume de travail toute position telle que  $\sigma_{\min} \leq s$ ,  $s$  étant un seuil préalablement fixé pour la plus petite valeur singulière de  $\mathbf{J}_x$ . Ceci nous amène à considérer deux cas :

- Premier cas :  $\sigma_1(\mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0)) - \sigma_1(\mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0 + \mathbf{dx})) \leq 0$ . Nous avons  $\sigma_1(\mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0 + \mathbf{dx})) \geq \sigma_1(\mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0))$ . Dans ce cas, il n'y a pas de problème puisque la plus petite valeur singulière ne risque pas de devenir inférieurs à  $s$ .
- Deuxième cas :  $\sigma_1(\mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0)) - \sigma_1(\mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0 + \mathbf{dx})) \geq 0$ . Dans ce cas, l'équation devient :  $\sigma_1(\mathbf{J}_x) \geq \sigma_1(\mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0)) - \sqrt{3}(2A+1)\|\mathbf{dx}\|$ . Si nous voulons avoir  $\sigma_1(\mathbf{J}_x) > s$ , il faut que la condition  $\sigma_1(\mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0)) - \sqrt{3}(2A+1)\|\mathbf{dx}\| > s$  soit vérifiée, ce qui correspond à  $\|\mathbf{dx}\| < \frac{\sigma_1(\mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0)) - s}{\sqrt{3}(2A+1)}$ .

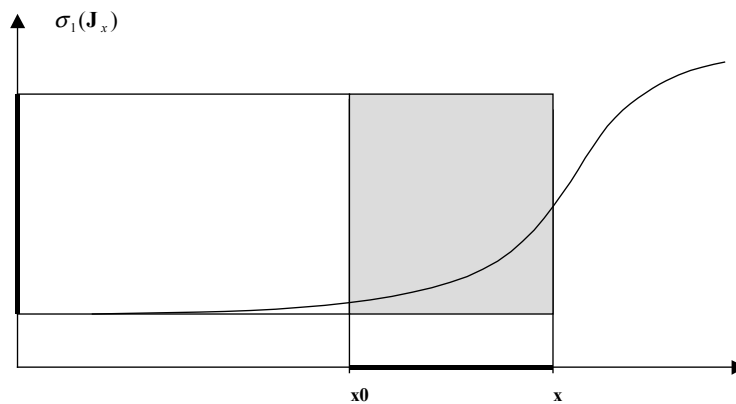


Figure III-22 : La fonction « plus petite valeur singulière » de  $\mathbf{J}_x$  est lipchitszienne

De manière concrète, si la position  $\mathbf{x}_0$  n'est pas rejetée,  $(\mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0)) > s$ , le voisinage de  $\mathbf{x}_0$  défini par  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \frac{\sigma_1(\mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0)) - s}{\sqrt{3}(2A+1)}$  avec  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \alpha$  ne l'est pas non plus.

Par exemple, l'application numérique pour  $\alpha = 100$ ,  $\rho = 250\sqrt{2}$ ,  $R = 700$ ,  $r = 150$  et  $L = 1300$  nous donne  $A = 2.05$ . Nous avons alors :

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < 0.116[\sigma_1(\mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0)) - s] \quad (\text{III-42})$$

D'après les conventions utilisées dans les démonstrations, le voisinage du point  $\mathbf{x}_0$  est un disque car nous avons utilisé la norme 2. Dans la suite, nous ne prendrons en compte qu'une sous partie de ce disque à savoir le compact (carré) qui lui est inscrit. Ce compact correspond à l'utilisation de la norme infinie. D'après la Figure III-23, nous trouvons une relation entre  $\|\mathbf{dx}\|$  et le pas de la grille.

En prenant en compte les remarques précédentes, l'algorithme que nous proposons d'utiliser est le suivant :

1. Choisir un pas pour la grille.
2. Si, pour chaque point  $\mathbf{x}_0$  de la grille, la condition «  $pas = 2 \cdot \|\mathbf{dx}\|_\infty < 2 \frac{0.116}{\sqrt{2}} [\sigma_{\min}(\mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0)) - s]$  » est vérifiée, alors, le volume de travail sélectionné est sain.
3. Si cette condition n'est pas vérifiée, recommencer à partir de l'étape 3 en choisissant un pas de grille plus petit.

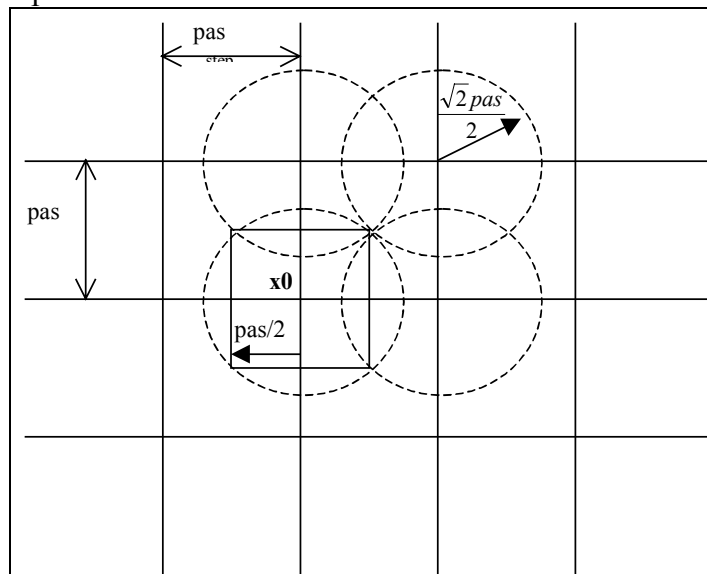


Figure III-23 : Choix du pas de la grille

Nous pouvons tenir le même raisonnement pour  $\mathbf{J}_q$  avec un seuil éventuellement différent. En conclusion, si pour  $\mathbf{J}_x$  et  $\mathbf{J}_q$  nous trouvons un pas de balayage tel que la condition (III-42) est vérifiée pour ces deux matrices, alors le volume de travail testé ne contient pas de singularité car il est constitué des voisinages « sains » de points  $\mathbf{x}_0$ .

A l'aide de cet algorithme, nous sommes capables de démontrer pour un volume de travail et une géométrie de machine donnés que le volume de travail est sain ou non au sens selon lequel les valeurs singulières de  $\mathbf{J}_x$  et  $\mathbf{J}_q$  ne descendent pas en dessous d'un seuil

préalablement fixé. L'intérêt d'une telle méthode est d'être compatible avec une décomposition en octree (voir [LAUW\_99] pour des exemples d'application des octree à la modélisation du volume de travail de machines parallèles) du volume de travail de la machine. Pour les machines conventionnelles le volume de travail est simple (cube) alors que pour les machines parallèles, la forme du volume de travail est complexe. Se restreindre à ne considérer qu'une sous-partie cubique ou cylindrique du volume de travail réduit considérablement ce dernier. Afin de profiter au maximum des capacités de la machine, il est souhaitable de retenir un modèle du volume de travail (la décomposition en octree étant un de ces modèles) pour vérifier que les outils de génération automatique de trajectoire fournissent des déplacements qui ne sortent pas du volume de travail.

### III.8. Etude de la précision.

Le calcul de la matrice de sensibilité a déjà été présenté dans le second chapitre (équation (II-61)) dans le cas général. Le calcul détaillé de la matrice **S** est présenté dans l'annexe E.

### III.9. Applications.

Comme nous l'avons déjà évoqué, nous avons tout intérêt à remplacer les machines à têtes multibroches peu ou pas flexibles par des machines plus flexibles mais dont les cadences de production sont au moins égales. Ce raisonnement se justifie par le fait qu'une chaîne transfert pour l'usinage de moteurs comporte environ 80 machines à têtes multibroches à changer ou rerégler lors d'une évolution du moteur. De plus, typiquement dans les chaînes transfert, les tâches qui déterminent la cadence de production sont les tâches de fraisage (voir Figure III-24). Le regroupement des tâches de perçage et de taraudage sur une même machine rapide permet d'utiliser au mieux les capacités de chaque poste et de réduire la longueur de la chaîne.

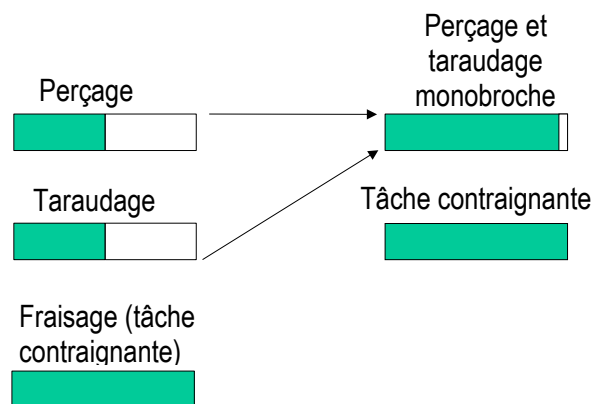


Figure III-24 : Temps d'occupation des postes.

Le choix des performances souhaitées n'est pas laissé au hasard. En effet, nous constatons sur la Figure III-25 que, la distance caractéristique entre deux perçages consécutifs

étant choisie égale à 100mm, le gain de temps est de 30% lorsque l'on passe d'une accélération de 1g à une accélération de 3,5g alors qu'il n'est que de 15% si on passe de 3,5g à 10g. Nous retiendrons donc 3,5g comme valeur de l'accélération de la nacelle (10g représente un surcoût trop important pour un gain minime). La vitesse maximale atteinte pour ce déplacement caractéristique effectué à 3,5g est de 120m/min (2m/s).

Finalement, nous voulons concevoir une machine dont les performances dynamiques au niveau de la nacelle sont :

- Une vitesse de  $v_{nac} = 120m.min^{-1}$  (soit  $2m.s^{-1}$ ) pour la nacelle en tout point du volume de travail et dans toutes les directions.
- Une accélération de  $\gamma_{nac} = 35m.s^{-2}$  pour la nacelle en tout point et dans toutes les directions.

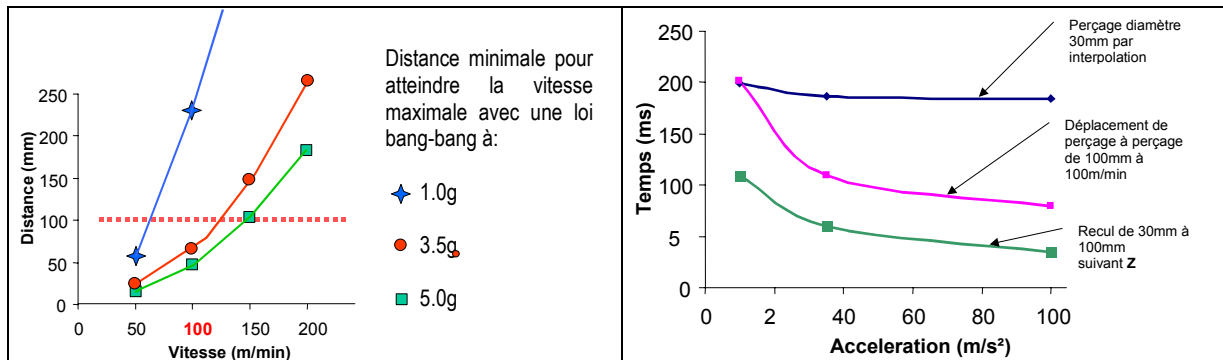


Figure III-25 : Analyse des performances dynamiques requises.

Les estimations des masses sont les suivantes :

- Masse corrigée de la nacelle  $M_{nac} = 100kg$ .
- Masse corrigée du secondaire des moteurs  $M_{mot} = 80kg$ .

Nous avons retenu une longueur de barres  $L = 1,3m$  car elle représente un bon compromis entre la transformation des vitesses et la poussée maximale des moteurs compte tenu de  $M_{nac}$  et  $M_{mot}$ , comme nous l'avons montré précédemment.

Nous obtenons les caractéristiques suivantes pour les moteurs :

- Vitesse maximale des moteurs  $\dot{q}_{max} = \eta_v v_{nac} = 2,76m.s^{-1}$ .
- Accélération maximale des moteurs  $\ddot{q}_{max} = \eta_a \gamma_{nac} + \eta_{a,v} v_{nac}^2 = 56,37m.s^{-2}$ .
- Poussée maximale des moteurs  $F_{mot,max} = M_{mot} \ddot{q}_{max} + M_{nac} \gamma_{nac} \eta_f = 9920N$

Pour une excentration nulle ( $e=0$ ), les efforts dans les barres sont de  $F_{b,max} = \eta_{b,fn} M_{nac} \gamma_{max} = 4290N$ .



### **III.10. Conclusion.**

Un prototype (Machine UraneSX) a été construit par la société Renault Automation/Comau d'après les calculs de dimensionnement effectués ci-dessus [PIER\_98a] [PIER\_98b] [PIER\_98c]. Ce prototype, présenté à l'EMO'99, est visible sur la Figure III-26. Les performances souhaitées pour cette machine ont été atteintes sur le prototype. Cependant, certains points restent encore à améliorer, en particulier dans les domaines de la commande et de l'étalonnage. Concernant la commande, les contrôleurs de machine-outil ont initialement été conçus pour piloter des structures cartésiennes dans lesquelles la gestion des axes est découplée. Ceci n'est pas vrai pour les structures parallèles, pour lesquelles il faut implanter le modèle géométrique.

Pour l'étalonnage, le problème est plus complexe. Les défauts géométriques sont difficiles à appréhender. De plus, certains problèmes d'hystérésis apparaissent. D'après des essais effectués de manière indépendante au centre de recherche technologique IKERLAN (Espagne) dans le cadre du projet européen Robotool, il semble que le problème d'hystérésis soit dû aux liaisons pivot des joints de cardan et rotule. Une étude plus approfondie mériterait d'être menée sur le problème spécifique de l'étalonnage des machines-outils parallèles en tenant compte des problèmes d'hystérésis qui ne sont plus négligeables compte tenu des efforts dans les articulations et des précisions requises pour le positionnement de l'outil coupant.



**Figure III-26 : Prototype UraneSX.**

Remarque :

La machine Quick Step, similaire à la machine UraneSX, a été présentée également au salon EMO'99. Il s'agit d'une structure pleinement parallèle développée simultanément à UraneSX par la société Krause & Mauser. Elle appartient à la famille des structures Delta à actionneurs linéaires. Les actionneurs étant fixes, le potentiel dynamique de la structure est bon, par contre, l'utilisation d'actionneurs rotatifs et de vis à billes pour générer les translations pénalise la dynamique globale de la machine. Une seconde version à moteurs linéaires est également proposée, mais les faibles performances des actionneurs employés entraînent de mauvaises performances dynamiques au niveau de la nacelle.

## Chapitre IV . Applications à l'usinage 5 axes.

---

Les machines d'usinage possèdent généralement 3 ou 5 axes de mouvement. Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à l'apport des structures parallèles pour les machines 3 axes (par exemple dédiées aux opérations PLT). Nous allons proposer maintenant des solutions à base de structures parallèles pour les machines 5 axes.

### IV.1. Introduction.

Sur les machines 5 axes classiques, la chaîne cinématique reliant l'outil à la pièce est constituée de la manière suivante (voir Figure IV-1):

- Une structure cartésienne 3 axes (Axes **X**, **Y**, **Z**), voir Figure IV-2.
- Une tête rotative 2 axes (**A** et **B**), voir Figure IV-2.

Le domaine d'utilisation des machines 5 axes est notamment l'usinage de moules pour l'industrie du plastique, de modèles pour la fonderie, de prototypes pour des essais soufflerie, de matrices pour l'industrie du métal en feuille ainsi que l'usinage de poches pour l'industrie aéronautique. La dynamique de ces machines est limitée ( $2ms^{-2}$  environ) par les masses importantes mises en mouvement dues à l'utilisation d'une architecture de type série. De plus, les têtes rotatives présentent quelques défauts (jeux, vibrations, déformations dues au porte-à-faux) qui affectent la qualité de la géométrie et de l'état de surface des pièces usinées.

Dans ce chapitre, nous allons rechercher les solutions construites sur des architectures parallèles qui permettent d'obtenir de meilleures performances. Nous allons envisager plusieurs solutions allant de la conception de nouvelles têtes rotatives à structure parallèle jusqu'à la conception de nouvelles machines [COMP\_99]. Dans un premier temps, nous examinons le champ des solutions possibles. Ensuite, nous sélectionnons l'une d'entre elles et nous fournissons les graphes et les outils permettant de la dimensionner.

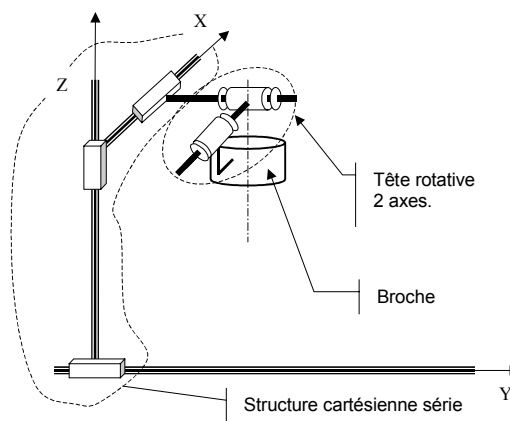
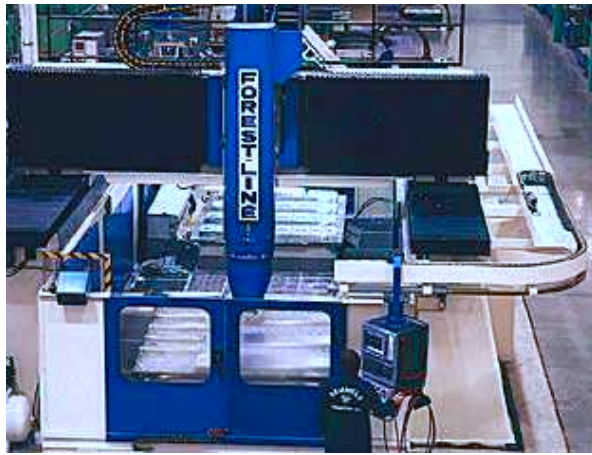


Figure IV-1 : Structure d'une machine cartésienne 5 axes.



**Figure IV-2 : Machine 5 axes type portique à structure cartésienne.**

Remarque :

Pour améliorer les performances dynamiques, sur certaines machines les trois translations de la broche par rapport à la pièce ne sont pas toutes les trois des translations de la broche par rapport au bâti. Certains mouvements de translation sont sur la pièce et les autres sur la broche ce qui correspond, en robotique, à une structure de type main droite – main gauche.

## **IV.2. Champ des solutions pour remplacer les têtes rotatives.**

A priori, les têtes rotatives composées de deux rotations en série ne sont plus assez performantes pour satisfaire les nouvelles attentes des usineurs. Nous allons envisager le remplacement de ces dernières par des architectures parallèles. Plusieurs solutions de ce type correspondent aux besoins : des architectures à chaîne passive, des architectures symétriques pleinement parallèles et des architectures asymétriques pleinement parallèles.

Remarques préliminaires :

- Afin d'obtenir une bonne dynamique de l'ensemble [COMP\_00], des actionneurs linéaires fixes sont utilisés. Ils sont reliés à la nacelle par des barres de longueur constante comme pour la machine Urane SX.
- Les solutions présentées combinent les deux rotations (**A** et **B**) des têtes rotatives classiques et une translation (axes **Z** ou **W**). En effet, elles utilisent des actionneurs linéaires pour motoriser les rotations, le mouvement de translation suivant l'axe **Z** peut être ainsi généré. Ainsi, une simple structure **X, Y** sera nécessaire pour déplacer la pièce usinée d'où une amélioration de la dynamique de la machine.

### *IV.2.1. Architectures à chaîne passive.*

Les structures à chaîne passive sont caractérisées par le fait qu'une chaîne dépourvue d'actionneurs relie le bâti de la machine à la plate-forme mobile. Cette chaîne limite les degrés de liberté de la plate-forme mobile aux mouvements désirés. Il suffit ensuite de

motoriser la plate-forme mobile à l'aide de chaînes à 6 degrés de liberté (dont un seul est motorisé) disposées en parallèle. La chaîne passive est souvent disposée au centre de la plate-forme mobile ce qui est difficilement compatible avec l'encombrement de la broche. Il est quand même possible de réaliser une tête basée sur ce type de structure, mais les dispositions constructives à adopter sont complexes.

L'architecture proposée sur la Figure IV-3 permet de réaliser une translation suivant **Z** et deux rotations suivant **A** et **B**. Les mouvements possibles de la nacelle sont ceux de la chaîne passive. La translation de la nacelle suivant l'axe **Z** est évidente ainsi que les rotations pures **A** et **B** autour du centre de la liaison cardan.

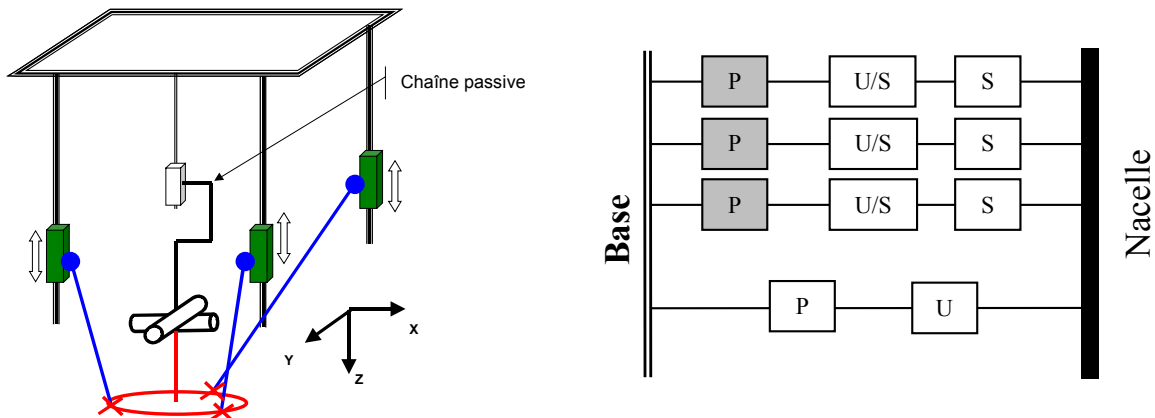


Figure IV-3 : Translation suivant Z – Chaîne passive.

Une variante de cette architecture, présentée sur la Figure IV-4, permet de réaliser une translation suivant l'axe **W** ainsi que les deux rotations suivant **A** et **B**. Cette solution trouve son intérêt sur certaines machines spéciales qui possèdent plusieurs broches. Sur ces machines, la gestion des correcteurs d'outils est complexe car plusieurs outils interviennent simultanément. Avec une structure de ce type, la gestion des correcteurs d'outils est simplifiée, car il suffit de déplacer la broche suivant l'axe **W** pour compenser une variation de la longueur de l'outil par rapport au nez de la broche. Outre les problèmes d'encombrement, ces solutions présentent plusieurs inconvénients :

- La conception de la chaîne passive entraîne des surcoûts.
- Les sollicitations de la chaîne passive sont plus complexes que celles des autres barres qui travaillent uniquement en traction – compression. Son dimensionnement est donc plus compliqué. Afin que la rigidité de la machine soit correcte, elle doit être plus massive que les barres au détriment de la dynamique de l'ensemble.

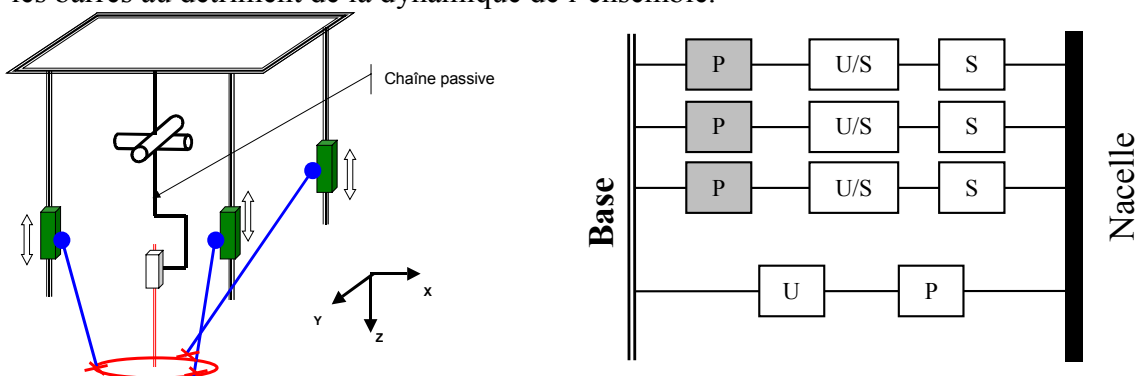


Figure IV-4 : Chaîne passive – Translation suivant W.

Ces inconvénients ne sont pas négligeables, mais ils ne sont pas, a priori, rédhibitoires puisque la société NEOS commercialise une version machine-outil de son robot à chaîne passive Tricept.

### IV.2.2. Architectures symétriques pleinement parallèles.

Les architectures que nous allons maintenant présenter sont des architectures pleinement parallèles afin d'améliorer les performances dynamiques.

L'architecture PRS (voir Figure IV-5) a été présentée à l'EMO par la société DS Technology. Une version à actionneurs rotatifs de cette architecture a été proposée par Lambert dans [LAMB\_87] ainsi qu'une déclinaison *Haptic device* dans [HUI\_95].

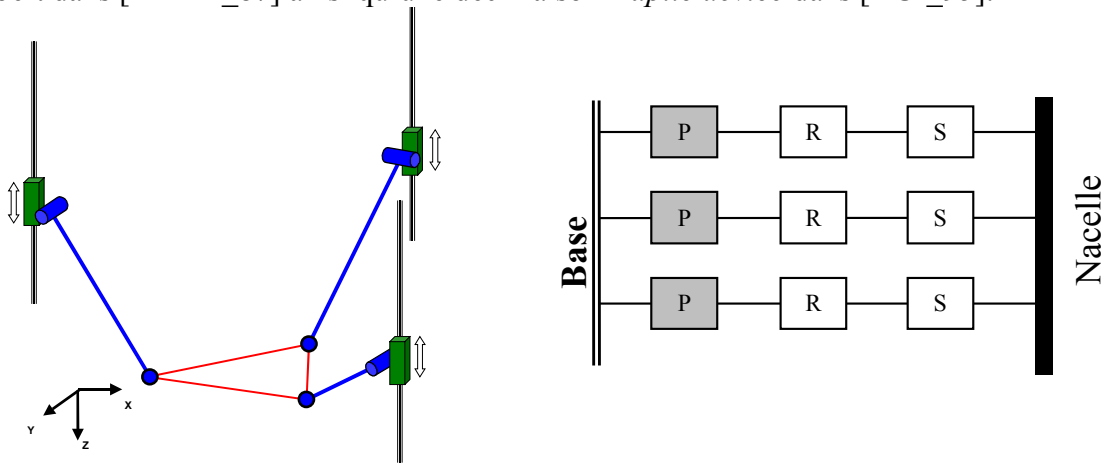


Figure IV-5 : Architecture PRS.

Une variante de cette architecture, l'architecture PSR est présentée sur la Figure IV-6. Concernant ces deux architectures, nous pouvons formuler les remarques suivantes :

- Les efforts à l'intérieur des barres sont de type traction – compression et flexion (contrairement à la machine Urane SX dont les barres sont uniquement sollicitées en traction – compression ce qui simplifie leur dimensionnement et diminue leur masse). Par conséquent, pour des caractéristiques de charge sur la nacelle et de rigidité égales, les barres de cette machine seront beaucoup plus massives que celles de Urane SX.
- La plate-forme mobile de cette structure possède 3 degrés de liberté. Il est évident que la translation suivant l'axe **Z** ne pose aucun problème. Par contre, les mouvements de rotation de la nacelle ne sont pas des mouvements « purs ». En effet, les rotations **A** et **B** s'accompagnent d'un petit déplacement du centre de la nacelle suivant **X** et **Y** ainsi que d'une petite rotation **C** autour de **W**. Nous ne pensons pas que cette rotation (de même axe que celle de l'outil) soit gênante pour la coupe, mais cela reste à vérifier. Une méthode d'optimisation peut être utilisée afin de réduire ce déplacement parasite [CARR\_00].

En conclusion, malgré les déplacements parasites de la tête lors d'une rotation, la simplicité de conception de ces solutions en font leur intérêt.

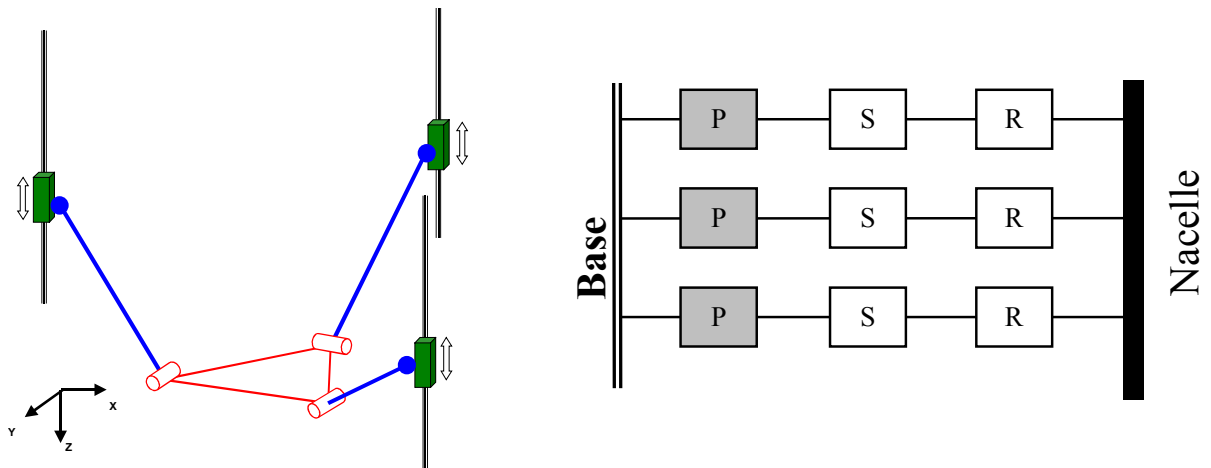


Figure IV-6 : Architecture PSR.

### IV.2.3. Architecture asymétrique.

Cette architecture est pleinement parallèle. Cependant, comme toutes les chaînes ne sont pas identiques, elle ressemble, en certains points, aux architectures à chaîne passive. L'idée est de motoriser la translation de la chaîne passive et, par conséquent, de supprimer une chaîne PSS motorisée ce qui aboutit au schéma cinématique de la Figure IV-7.

En analysant le schéma de cette solution, nous formulons les remarques suivantes :

- Les deux barres montées sur rotule travaillent en traction – compression. Leur dimensionnement en fonction des sollicitations mécaniques est donc simple. Par contre les sollicitations à l'intérieur de la barre portant la liaison cardan sont complexes. Cette barre doit donc être très massive au détriment de la symétrie et de la dynamique de l'ensemble.
- La translation suivant l'axe **Z** ne pose pas de problème. Les rotations suivant les axes **A** et **B** n'induisent aucun déplacement résiduel du centre de la nacelle.

En conclusion, cette architecture convient parfaitement pour le remplacement des têtes rotatives. Ses seuls inconvénients sont liés à son asymétrie (dynamique, coûts de conception et de fabrication supplémentaires).

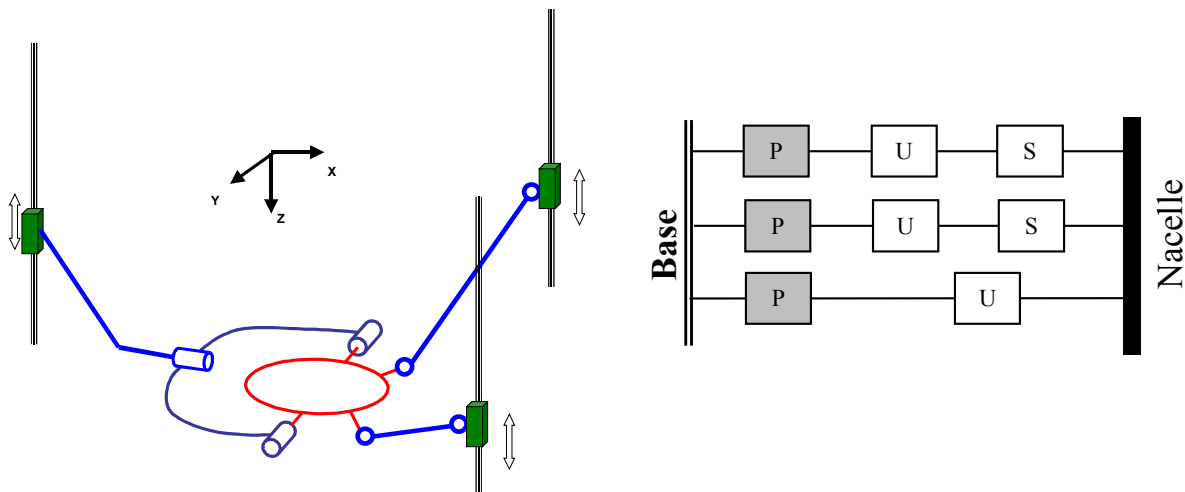


Figure IV-7 : Architecture asymétrique.

#### IV.2.4. Bilan intermédiaire.

Les solutions que nous venons de présenter sont des sous-ensembles performants mais nous ne pensons pas qu'elles soient intéressantes si on considère la globalité de la machine. En effet, il est inutile de demander de hautes performances dynamiques sur la tête (2 g d'accélération par exemple) si on ne peut garantir le même niveau sur le portique qui déplace la tête ( $2ms^{-2}$  pour les centres d'usinage classiques). Pour les « Architectures pleinement parallèles » et les « Architectures à chaîne passive » examinées précédemment, les performances globales de la machine seront celles du sous ensemble dont la dynamique est la plus faible (la structure série). Cependant, la machine de la société DS Technology qui utilise l'architecture PRS reste une solution intéressante dont certains exemplaires sont déjà intégrés à des chaînes de production car l'objectif du remplacement des têtes rotatives par une architecture plus simple et modulaire est pleinement atteint, même si le potentiel de performances n'est pas utilisé complètement.

L'usinage de pièces nécessite 5 axes (3 translations et deux rotations). Il n'est pas nécessaire que la structure apporte la rotation manquante, car cette rotation est celle de la broche qui donne le mouvement de coupe aux outils. Or, il n'existe pas de robot parallèle à 5 degrés de liberté correspondant à ce besoin [WANG\_97]. Les machines parallèles (dont certaines sont commercialisées) proposées pour l'usinage sont donc inspirées des robots parallèles 6 axes dont le dernier axe (rotation de la broche sur elle même) n'est pas utilisé.

Beaucoup de sociétés et d'universités ont utilisé des architectures parallèles à 6 degrés de liberté pour l'usinage 5 axes. Parmi celles ci, nous retiendrons 2 familles :

- Les plates-formes de Gough-Stewart. Dans cette famille, nous retrouvons les machines GIDDINGS&LEWIS, INGESOLL et HEXACT
- Les structures P-U-S à actionneurs fixes. Dans cette famille, nous retrouvons la machine Hexaglide et la machine HexaM inspirée du robot Hexa, construite par la société TOYODA.

Les solutions de machines d'usinage inspirées des robots parallèles déjà proposées souffrent souvent du même problème que les robots parallèles, à savoir un faible volume de travail pour un encombrement important. C'est pourquoi dans la suite de notre exposé nous allons développer deux concepts différents. Nous allons commencer par le concept « macro-micro » qui consiste à associer deux structures connues (une structure cartésienne et une structure parallèle) afin d'augmenter le volume de travail. Nous continuerons avec le concept H4 au chapitre suivant.

### IV.3. Présentation du concept Macro-Micro.

En poussant à l'extrême l'analyse de l'usinage de poches, par exemple dans le cas d'ailes d'avions, les tâches effectuées par la machine se décomposent en deux parties :

- des déplacements locaux qui correspondent à la tâche d'usinage. Ces déplacements doivent s'effectuer à grande vitesse afin de réduire les temps d'usinage.
- des déplacements globaux qui correspondent à un mouvement d'avance global de la machine lors de l'usinage. Ces déplacements peuvent être effectués à faible vitesse.



Le concept macro–micro découle de cette constatation. L'idée est de déplacer à l'aide d'une structure cartésienne  $X, Y, Z$  (ayant intrinsèquement une mauvaise dynamique, partie «macro»), une machine parallèle à 5 degrés de liberté qui possède une bonne dynamique (dans notre cas, il s'agira d'une structure parallèle à 6 degrés de liberté, partie «micro»). Une illustration cinématique de ce concept est représentée sur la Figure IV-8. La Figure IV-9 présente le concept de la commande à appliquer aux deux structures. Les mouvements d'avance à faible dynamique sont gérés par la structure cartésienne (typiquement pour la machine AEROSTAR du constructeur Forest-Liné, les accélérations de la structure cartésienne varient de 4,5 à  $6ms^{-2}$  suivant les modèles), alors que les petits mouvements à forte accélération sont gérés par la structure parallèle.

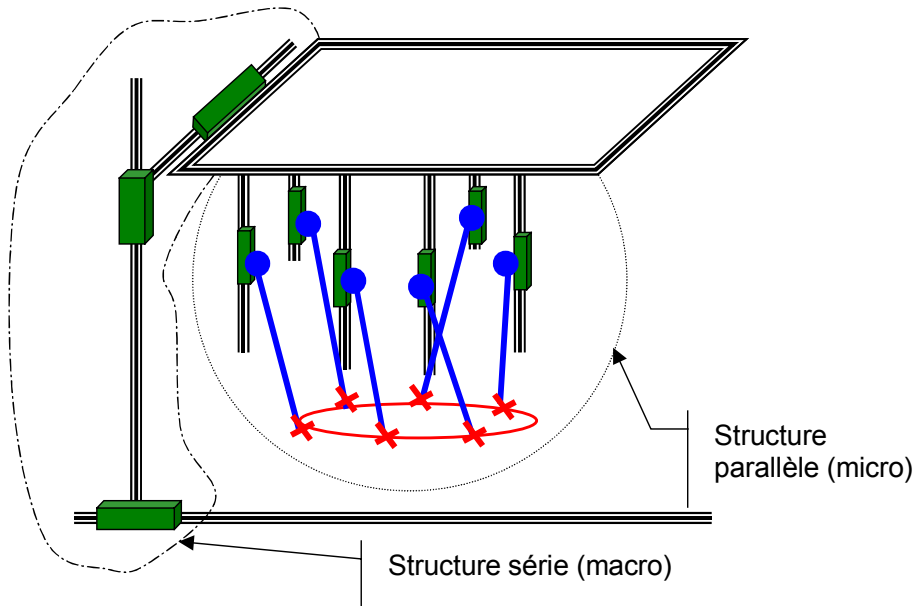


Figure IV-8 : Concept cinématique macro – micro.

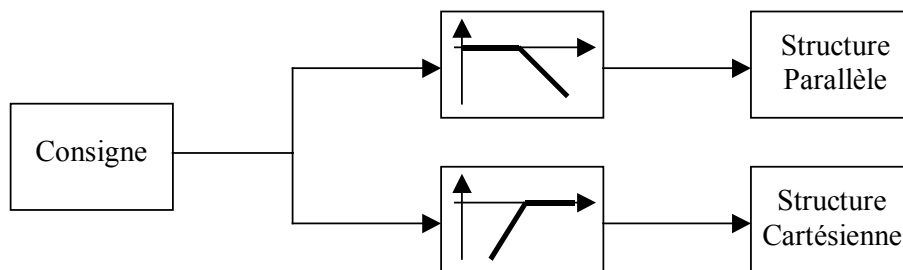


Figure IV-9 : Concept de la commande d'une structure macro-micro.

Une telle structure est cinématiquement redondante [GAIL\_83]. Par contre, elle n'est pas redondante sur le plan de la dynamique.

L'idée d'utiliser une structure parallèle portée par une structure série pour faire de l'usinage a déjà été proposée avec l'hexapode CMW de la société mécanique des Vosges. Cependant, comme son nom l'indique, la structure est de type hexapode et non pas Hexa, ce qui signifie que ses performances dynamiques sont certes meilleures que celles des machines conventionnelles mais théoriquement moins bonnes que celles de la solution que nous proposons. A notre connaissance, l'association de ces deux architectures pour réaliser une machine d'usinage n'a pas encore été réalisée. La conception de la structure cartésienne  $X, Y,$

**Z** fait partie du savoir faire des fabricants de machine-outil. La conception de l'ensemble parallèle est à effectuer. Sa réalisation est relativement simple car les 6 barres et les liaisons rotule et cardan sont identiques.

Cette solution permettrait d'avoir une synergie bénéfique entre deux types d'architectures dont les caractéristiques sont opposées. Nous allons maintenant étudier le dimensionnement du sous-ensemble parallèle, la partie « micro ».

#### IV.4. Spécifications de la partie micro.

Le domaine d'application de l'étude que nous allons mener est l'usinage de poches sur de grandes pièces pour l'industrie aéronautique. La machine issue de ce concept sera donc une machine de grande taille. La partie « micro » sera à elle seule aussi grande qu'une machine d'usinage conventionnelle et dépassera largement les dimensions des structures portées habituellement (par exemple l'hexapode CMW).

Le volume de travail de la partie micro est un cube de 0,5x0,5x0,4m. Chacune des tranches (perpendiculairement à l'axe **z**) de ce volume de travail se décompose en deux parties (voir Figure IV-10). La nacelle se déplacera uniquement en translation dans la zone A, tandis que dans la zone B, la nacelle se déplacera également en rotation suivant les axes **A** et **B**. L'axe de la broche restera dans un cône d'axe **z** et de demi-angle au sommet de 15 degrés.

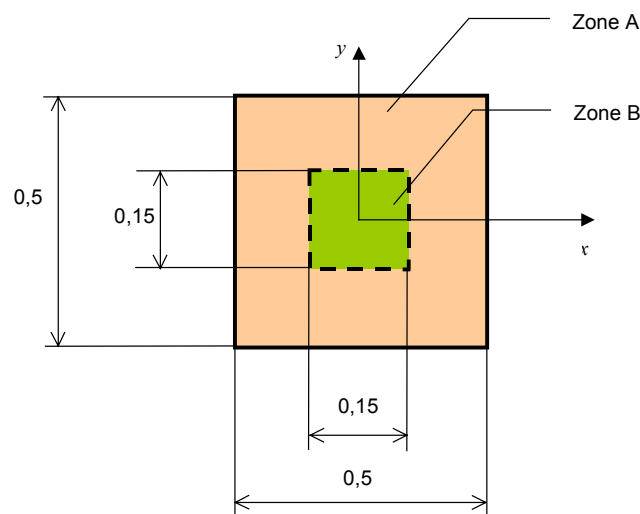


Figure IV-10: Tranche du volume de travail.

Les caractéristiques des déplacements de la nacelle sont :

- Vitesse d'avance rapide dans toutes les directions sur les zones A et B :  $v_{rap}$
- Vitesse d'avance en travail dans toutes les directions sur les zones A et B :  $v_{tra}$
- Vitesse de rotation minimale de la broche suivant **A** et **B** dans les zones A et B :  $\omega$
- Accélération linéaire minimale dans toutes les directions (phase d'avance rapide) :  $\gamma$

## IV.5. Sélection de la structure et de l'arrangement.

D'après le troisième chapitre, nous choisissons l'architecture P-U-S à actionneurs linéaires. Il nous reste maintenant à trouver le meilleur arrangement. Il ressort de la recherche menée au troisième chapitre que le meilleur arrangement du point de vue du conditionnement est l'arrangement appelé « glissières disposées sur un cône », le demi-angle au sommet du cône ayant pour valeur  $60^\circ$ . C'est également la valeur qui a été retenue pour la construction de la machine HexaM de la société TOYODA. Cette solution, relativement encombrante, est réductible pour une structure portée, c'est pourquoi, toujours d'après les résultats du troisième chapitre, nous avons choisi un agencement similaire à celui que nous avons retenu pour la machine UraneSX, agencement qui est le meilleur compromis entre le critère du conditionnement, l'encombrement et la simplicité de réalisation.

L'architecture et l'agencement retenus pour la partie micro sont représentés sur la Figure IV-11. Elle est constituée de la manière suivante :

- 6 actionneurs prismatiques de type moteur linéaire.
- 6 barres de longueur fixe.
- une nacelle portant la broche.
- Chacune des barres possède une liaison rotule à chaque extrémité qui la relie, d'une part, à un des actionneurs et, d'autre part, à la nacelle.

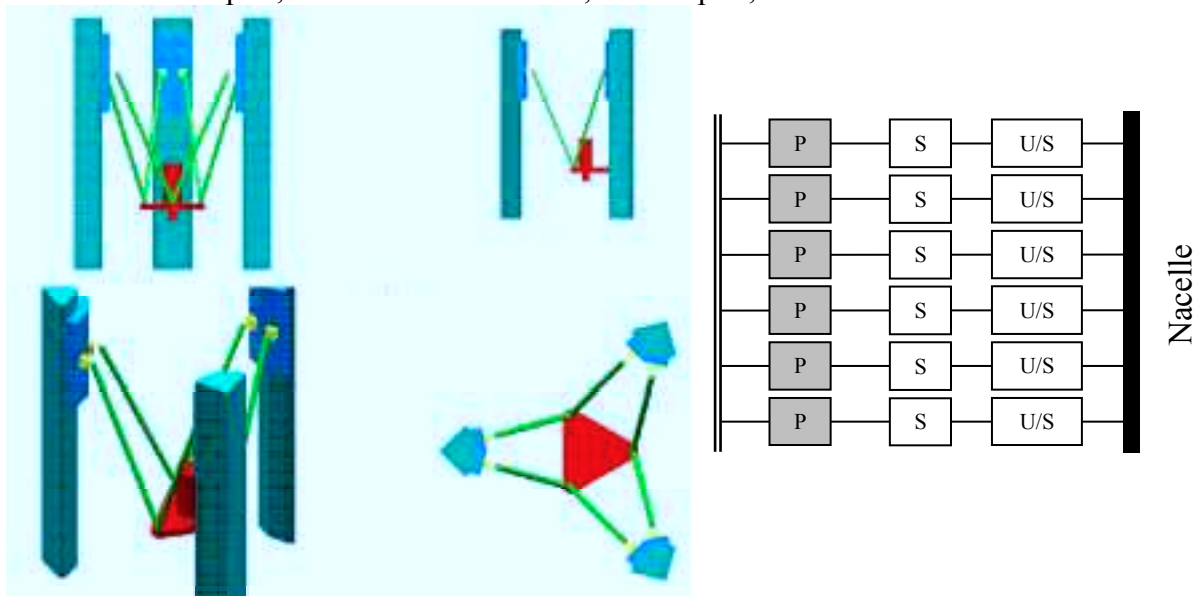


Figure IV-11 : Partie micro – Fraiseuse parallèle 5 axes.

## IV.6. Paramétrage.

La dénomination des points utilisés est présentée dans le chapitre II en particulier sur la Figure II-6 et la Figure II-7. Le paramétrage effectué est valable pour l'ensemble des machines de type P-U-S. Nous nous intéressons à une sous-famille dont les caractéristiques sont (voir Figure IV-12) :

- Longueur identique pour les six barres  $L$ .
- Rayon de la nacelle  $r$ .

- Rayon de la machine  $R$ .
- Distance minimale entre deux points  $B_i$  sur la nacelle  $d_B$  (pour des raisons d'encombrement des liaisons cardan).
- Distance minimale entre deux glissières sur le bâti  $d_A$  (pour des raisons d'encombrement des liaisons rotule).
- Les glissières sont parallèles et dirigées suivant l'axe  $z$ .

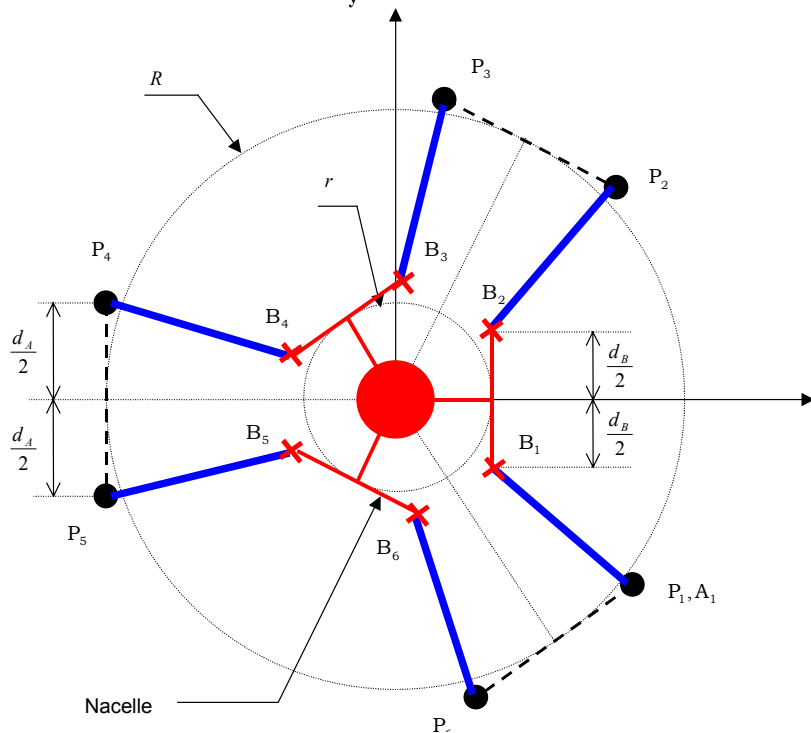


Figure IV-12 : Paramétrage spécifique.

## IV.7. Modèles.

Les modèles, géométriques, cinématiques, dynamiques et efforts dans les barres ont été calculés au second chapitre.

### Remarque :

D'après l'expression (II-37), nous allons étudier comment réduire les efforts dans les barres.

- $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  et  $\mathbf{F}_{\text{acc}}$  découlent des données du cahier des charges.
- $\mathbf{M}_{\text{ext}}$  et  $\mathbf{M}_{\text{acc}}$  dépendent de la géométrie de la machine. Pour réduire la contribution de  $\mathbf{M}_{\text{ext}}$ , il est intéressant de rapprocher le point D du point C alors que pour réduire la contribution de  $\mathbf{M}_{\text{acc}}$ , il est intéressant de rapprocher le point G du point C.

## IV.8. Application.

### IV.8.1. Données.

#### IV.8.1.1. Caractéristiques.

Les performances souhaitées pour la partie micro sont  $v_{rap} = 75m \text{ min}^{-1}$ ,  $v_{tra} = 50m \text{ min}^{-1}$ ,  $\omega = 40tr \text{ min}^{-1}$  et  $\gamma = 10ms^{-2}$ . Les masses corrigées des pièces en mouvement sont, pour la nacelle  $M_{nac} = 250kg$  et pour le secondaire des moteurs  $M_{mot} = 210kg$ . L'inertie de la nacelle en rotation n'a pas été prise en compte. La définition proposée pour les efforts de coupe est représentée Figure IV-13.

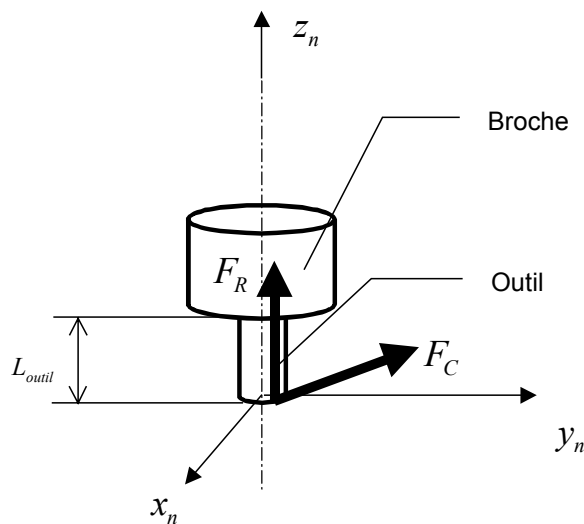


Figure IV-13 : Efforts de coupe.

Le torseur des efforts de coupe s'applique au « point de contact » entre l'outil et la pièce. Le rayon de l'outil est de  $10mm$ . Ce torseur est en fait composé de la somme de deux forces pures appliquées au point de contact. Ces forces sont :

- $F_c$ , contenue dans le plan perpendiculaire à l'axe de la broche et passant par le point de contact. La direction de  $F_c$  est quelconque dans ce plan. La valeur maximale de ses composantes dans le repère lié à la broche est de  $4500N$  suivant  $x_n$  et  $y_n$ .
- $F_R$ , effort de répulsion. Cet effort est dirigé suivant l'axe de la broche. La valeur maximale de sa norme est également  $4500N$ .
- Le point de contact peut être situé en tout point de la circonférence de l'outil.

#### IV.8.1.2. Encombrement des organes.

Nous prenons comme diamètre extérieur de l'électro-broche  $D = 0,240m$ . L'outil a une longueur  $L_{outil} = 0,1m$  mesurée par rapport à la face avant de la broche. Au vu des dimensions des liaisons du prototype de la machine URANE-SX, la distance retenue entre

deux cardans sur la nacelle a été choisie à 0,2m (compté entre les centres des liaisons cardans le plus proches) . D'autre part, une distance de 0,3m a été retenue pour l'entre-axes entre deux moteurs voisins.

## IV.8.2. Paramètres.

### IV.8.2.1. Variables dimensionnelles.

A cause des rotations de la nacelle, il n'est pas possible d'établir un modèle « contracté » permettant de réduire le nombre de paramètres comme pour la machine PLT. Le nombre de paramètres que nous devons considérer est important. Une partie des paramètres que nous utiliserons correspondent au paramétrage spécifique de la Figure IV-12. Nous considérerons donc  $R$ ,  $r$ ,  $L$  et  $z_m$ ,  $z_m$  est la distance entre les points C et E (Figure II-7).

L'encombrement de la broche nous impose une valeur minimale pour  $r$ . La distance minimale (mentionnée) à respecter induit, pour un  $z_m$  donné, une valeur maximale pour  $r$ .

Nous considérerons dans ce chapitre que le centre de gravité de l'ensemble nacelle-broche est situé à l'altitude  $z_m$ .

### IV.8.2.2. Indicateurs étudiés.

Les indicateurs que nous allons considérer pour choisir les valeurs des dimensions sont :

- $v_{mot,t}$  vitesse des moteurs pour une translation de la nacelle à  $v_{rap}$ .
- $v_{mot,r}$  vitesse des moteurs pour une rotation de la nacelle à  $\omega$ .
- $F_{mot,c}$  effort sur les moteurs dus à la coupe.
- $F_{bar,c}$  effort normal dans les barres dû à la coupe.
- $P_c$  puissance consommée dans les moteurs pendant la coupe à  $v_{tra}$ .
- $F_{mot,a}$  poussée des moteurs pour accélérer à  $\gamma$ .
- $P_a$  puissance consommée dans les moteurs pour accélérer.

## IV.8.3. Résultats.

Le nombre de paramètres et le nombre d'indicateurs étant importants, la présentation des résultats est complexe. Pour une meilleure lisibilité nous avons choisi de présenter ces résultats sous forme de diagrammes en étoile. En effet, cela donne une vue synthétique d'une ou plusieurs configurations, en regroupant sur une figure unique les 7 indicateurs étudiés ( $v_{mot,t}$ ,  $v_{mot,r}$ ,  $F_{mot,c}$ ,  $F_{bar,c}$ ,  $P_c$ ,  $F_{mot,a}$ ,  $P_a$ ) et un index illustrant l'encombrement ( $E = R + L$ ).

Chaque paramètre est multiplié par un facteur d'échelle permettant une lecture « homogène ». Le point « • » positionné sur chaque axe représente la valeur de référence du paramètre considéré, prise dans le tableau de la Figure IV-14.

Paramètre	Valeur du point de référence
$v_{mot,t}$	$1ms^{-1}$
$v_{mot,r}$	$1ms^{-1}$
$F_{mot,c}$	$1000N$
$F_{bar,c}$	$1000N$
$P_c$	$1000W$
$F_{mot,a}$	$1000N$
$P_a$	$1000W$
$E$	$1m$

Figure IV-14 : Echelles et unités des axes.

Nous avons testé l'ensemble des solutions correspondant au paramétrage fixé ( $R$ ,  $r$ ,  $L$ ,  $z_m$ ) et établi l'ensemble des diagrammes en étoile. Les Figure IV-15, Figure IV-16 et Figure IV-17 en présentent quelques uns.

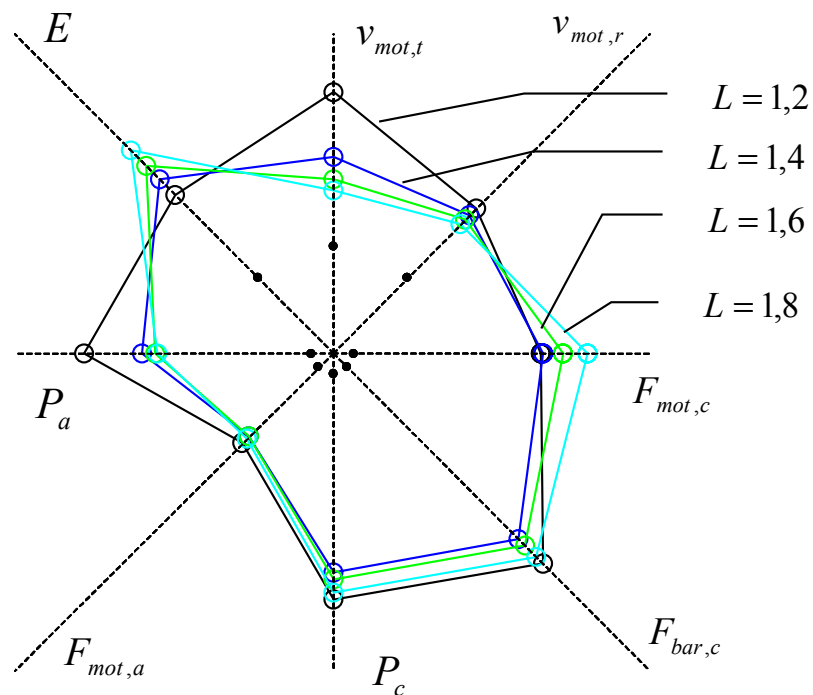


Figure IV-15 : Graphe en étoile  $r = 0,26$   $R = 0,9$   $z_m = 0,3$ .

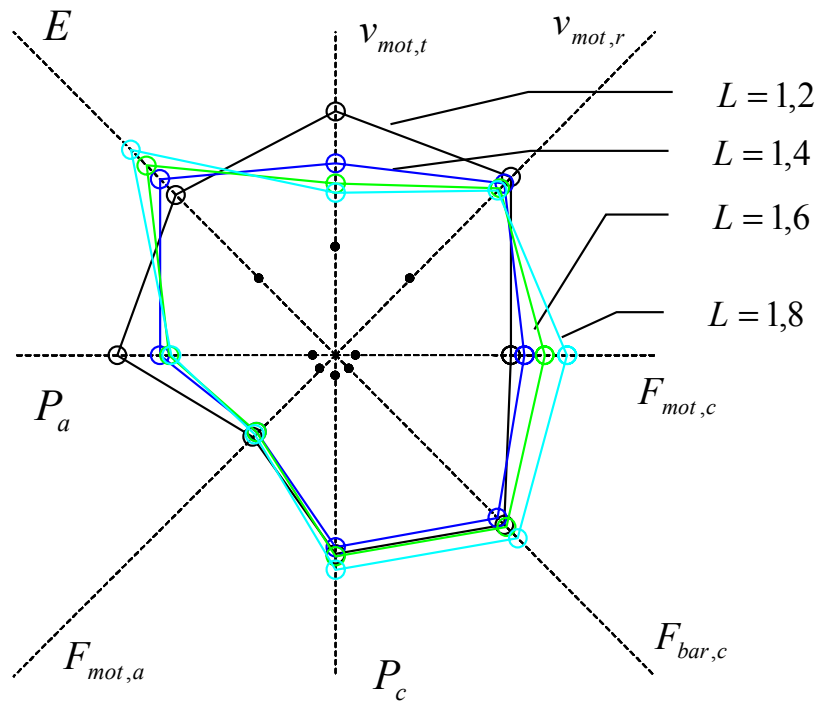


Figure IV-16 : Graphe en étoile  $r = 0,34$   $R = 0,9$   $z_m = 0,35$ .

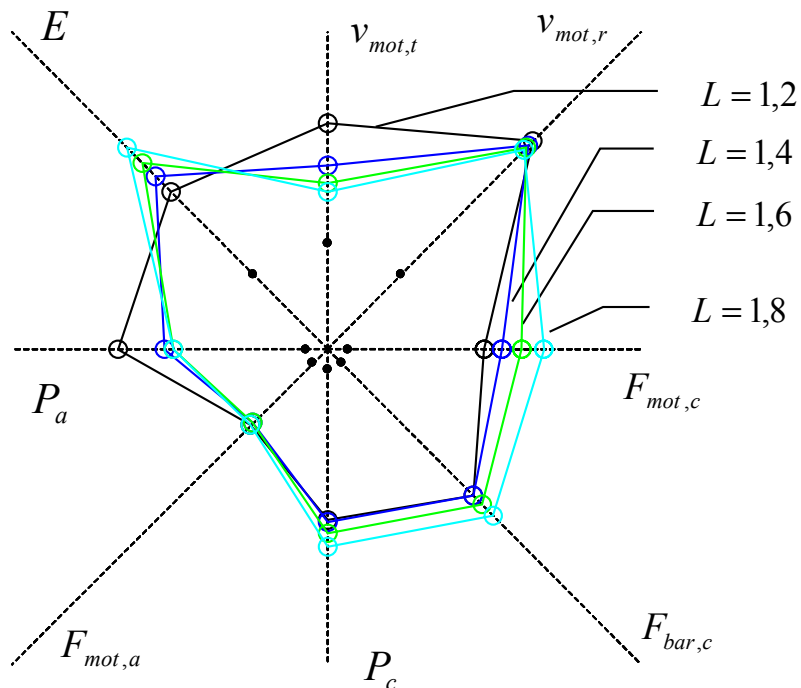


Figure IV-17 : Graphe en étoile  $r = 0,43$   $R = 0,9$   $z_m = 0,40$ .

La meilleure solution à notre problème est celle qui minimise l'ensemble des critères représentés sur les graphes précédents. Comme cette solution idéale n'existe pas, nous devons trouver le meilleur compromis à savoir que l'amélioration d'un critère ne doit pas



s'accompagner d'une augmentation trop importante des autres. Par exemple, sur la Figure IV-15, le polygone correspondant à  $r = 0,26$ ,  $R = 0,9$ ,  $z_m = 0,3$  et  $L = 1,4$  représente le meilleur compromis. Pour la Figure IV-16, il s'agit de  $r = 0,34$ ,  $R = 0,9$ ,  $z_m = 0,35$  et  $L = 1,4$ , et pour la Figure IV-17,  $r = 0,43$ ,  $R = 0,9$ ,  $z_m = 0,40$  et  $L = 1,4$ . Si nous comparons entre elles ces solutions, nous obtenons le graphe de la Figure IV-18.

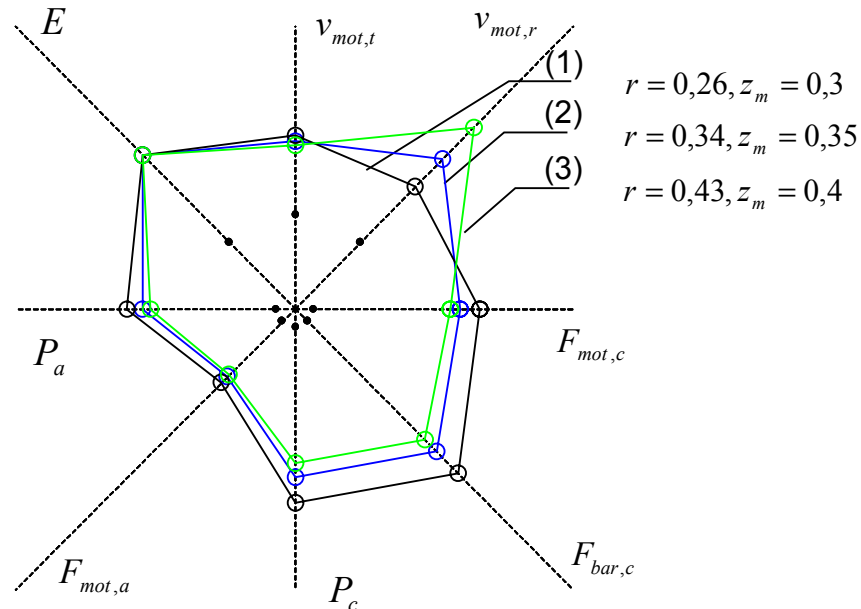


Figure IV-18 : Graphe en étoile  $L = 1,4$   $R = 0,9$ .

En analysant ce graphe, nous constatons que :

- La machine correspondant au polygone numéro 3 est défavorable du point de vue des vitesses des actionneurs lors d'un mouvement de rotation de la nacelle.
- La machine correspondant au polygone numéro 1 n'est favorable que pour la vitesse des moteurs lors d'une rotation de la nacelle.

Finalement, la machine correspondant au polygone numéro 2 semble le meilleur compromis. Ses dimensions sont  $L = 1,4m$ ,  $R = 0,9m$ ,  $r = 0,34m$ ,  $z_m = 0,35m$ . Nous allons maintenant regarder l'évolution des critères (Figure IV-19, Figure IV-20, Figure IV-21, Figure IV-22) que nous avons retenus pour le choix sur une tranche du volume de travail.

La lecture de ces courbes montre que les efforts pendant la coupe dans la zone B (avec inclinaison de la broche) induisent des efforts moteurs importants. Comme les vitesses maximales des moteurs sont du même ordre pour une translation et une rotation, la puissance consommée dans les moteurs est plus grande dans la zone B. Nous constatons également que cette zone est la plus critique pour les efforts dans les barres et par conséquent pour leur dimensionnement.

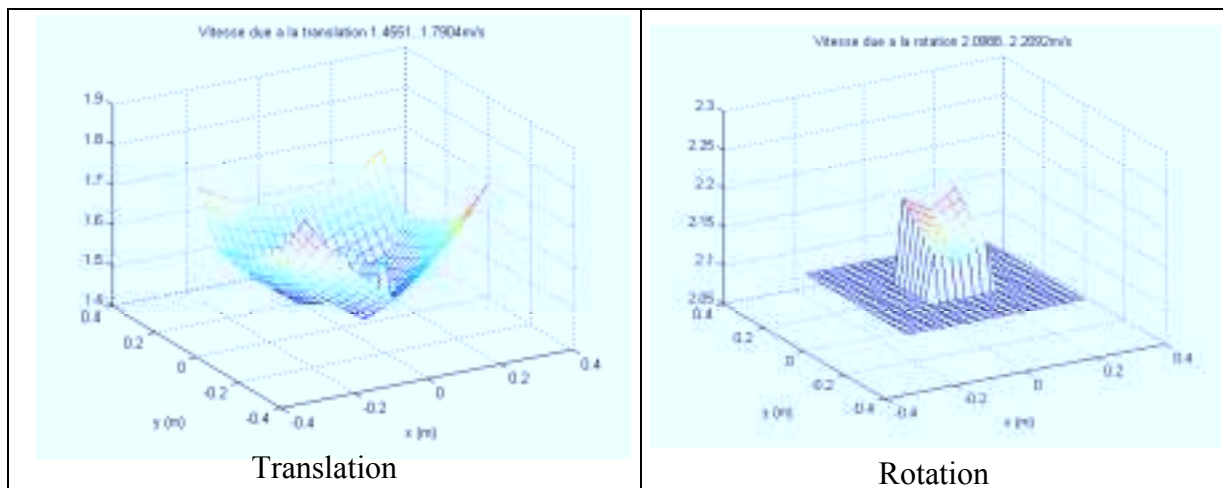


Figure IV-19 : Vitesse des moteurs pour une translation et une rotation.

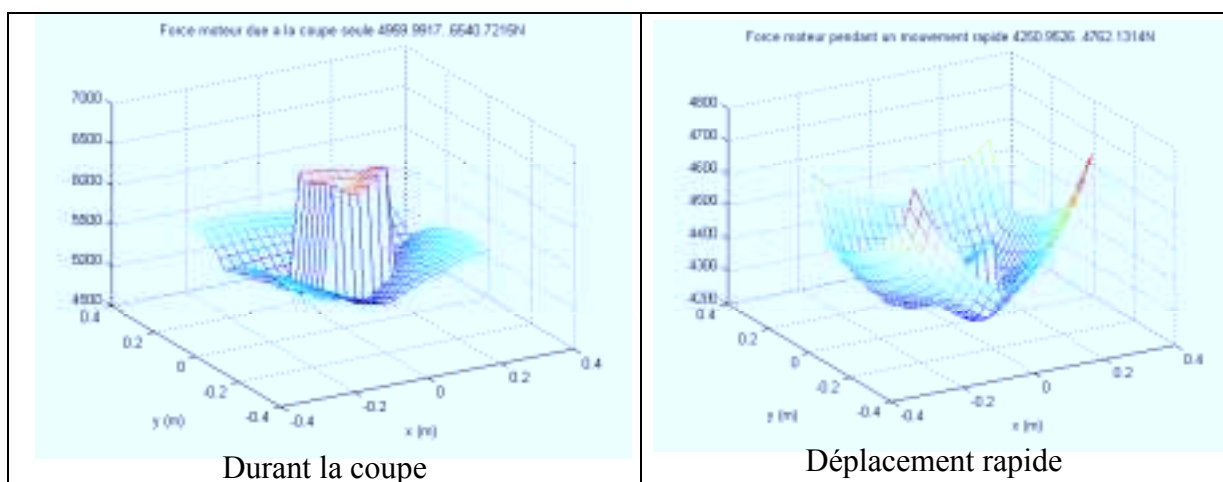


Figure IV-20 : Poussée des moteurs durant la coupe et durant un déplacement rapide.

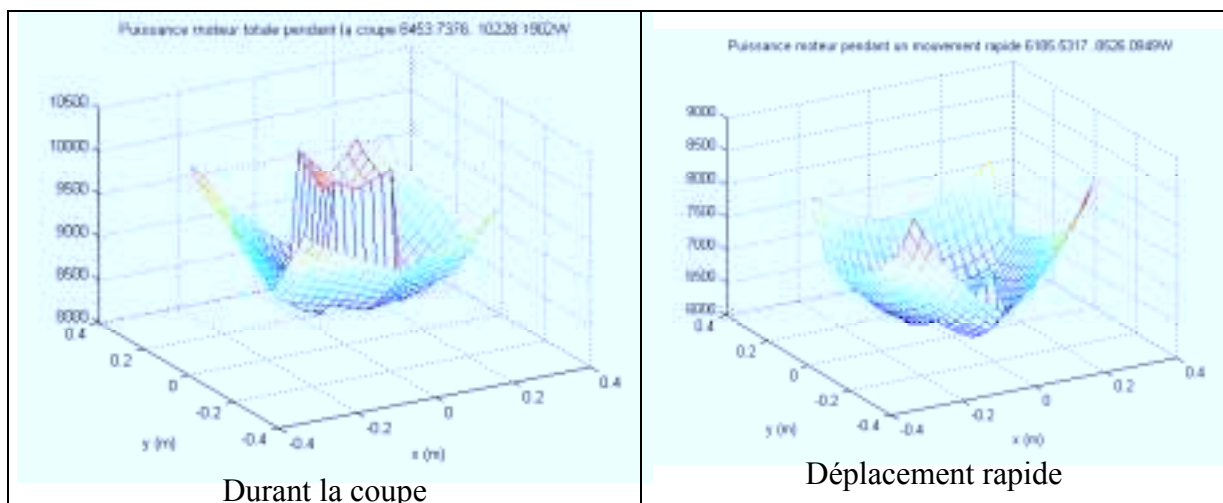


Figure IV-21 : Puissance consommée durant la coupe et durant un déplacement rapide.

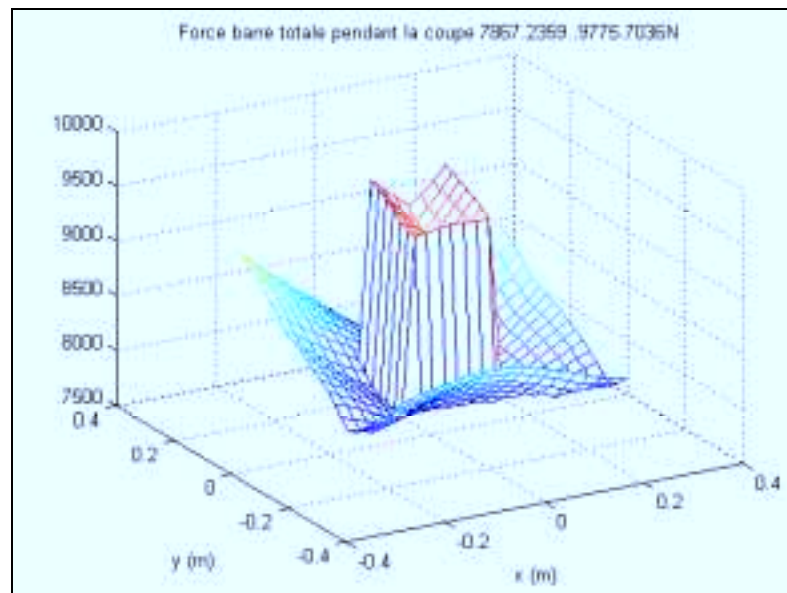


Figure IV-22 : Efforts dans les barres pendant la coupe.

## IV.9. Etude de sensibilité.

L'équation matricielle explicitant le modèle d'erreurs est donnée de manière générique par l'équation (II-61). Dans l'annexe F nous explicitons la matrice  $\mathbf{V}$  et nous analysons numériquement l'influence des erreurs de fabrication sur la précision du positionnement de la nacelle pour une architecture P-U-S dont les dimensions sont différentes.

## IV.10. Conclusion.

Les calculs effectués dans ce chapitre montrent que nous avons tout intérêt à nous rapprocher le plus possible de la machine idéale représentée sur la Figure IV-23. La conception de la machine idéale suppose la réalisation d'articulations particulières, équivalentes à deux liaisons rotule dont les centres sont confondus. Ce type d'articulation a déjà été construit et est utilisé, par exemple, dans la machine Géodétics (voir Figure IV-24). D'autres solutions technologiques permettent de réaliser trois liaisons rotules en un seul point (voir [NEUM\_88]).

D'autres dispositions des articulations sur la nacelle ont été proposées dans le cas des machines de type plate-forme de Stewart. Une solution fréquemment employée est d'accrocher les liaisons rotule dans deux plans différents, machine Hexact par exemple. Nous avons testé ce type de disposition, mais nous n'avons pas trouvé de résultats concluants à notre sens.

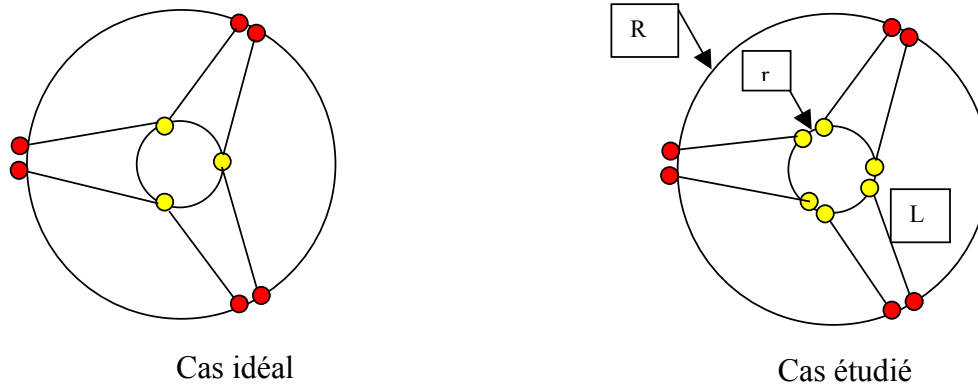


Figure IV-23 : Comparaison du cas idéal et de la machine étudiée.

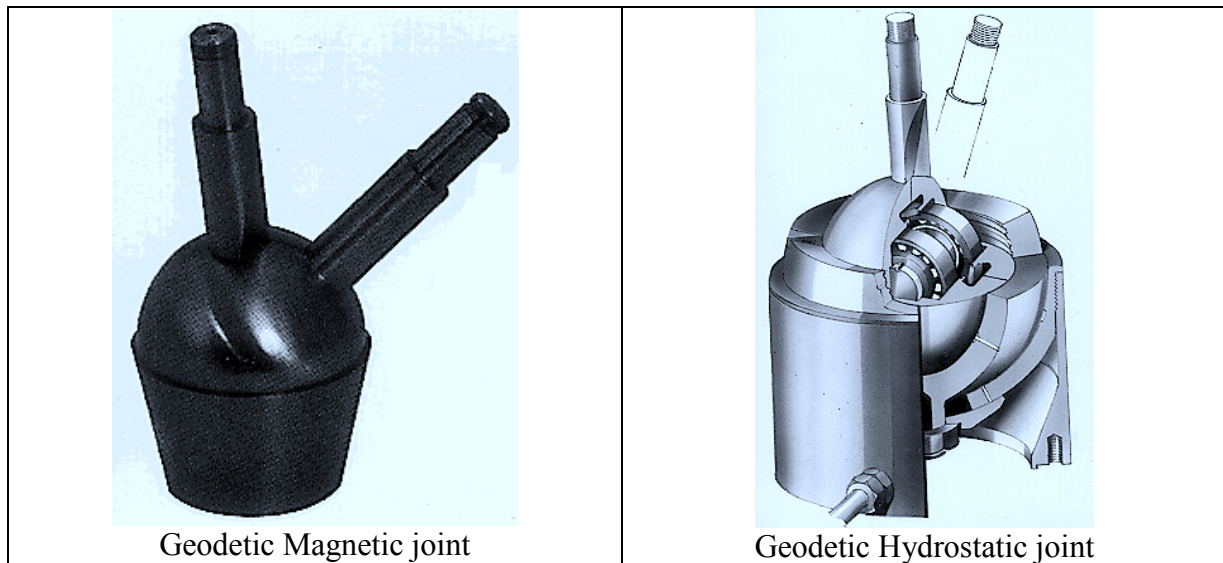


Figure IV-24 : Rotules doubles Geodetics.

Enfin, certaines dispositions constructives « exotiques » telles que des barres croisées et courbées pour éviter les collisions [WANG\_00] permettent certes d'avoir un meilleur conditionnement de la matrice jacobienne mais s'accompagnent d'efforts de flexion, voire de risque de flambage dans les barres ce qui est néfaste pour le comportement d'une machine-outil pour laquelle la rigidité est un indicateur important.

Comme pour la machine 3 axes du chapitre précédent, les résultats que nous avons obtenus permettent d'effectuer le choix des moteurs afin d'atteindre les performances désirées. Ces résultats permettent également de déterminer, connaissant la rigidité souhaitée, la section et le matériau utilisé pour les barres. Comme précisé au début de cette partie, la machine « macro-micro » est réservée à l'usinage de grosses pièces. Dans ce type d'application, elle permettrait d'obtenir des gains de productivité importants. Pour l'instant, aucun prototype basé sur ce principe n'a été construit.

Pour terminer, nous constatons que, prise de manière séparée, la partie « micro » peut à elle seule constituer une machine qui est compétitive par rapport aux machines série existantes. Objectivement, nous pensons qu'une telle machine, à motorisation et volume de travail équivalents, est moins performante que la machine HexaM de Toyota. En effet, nous nous sommes imposés une architecture particulière (les 6 glissières sont disposées sur un

cylindre d'axe  $z$  et sont parallèle à  $z$  ) alors que nous avons vu, pour la machine PLT, que le cas le plus favorable est une inclinaison des glissières d'environ 30 degrés par rapport à l'axe  $z$ . C'est également cette valeur de l'inclinaison des glissières qui a été trouvée comme optimale du point de vue des performances de la machine et retenue pour la fabrication de la machine HexaM. L'inconvénient de ce choix est l'encombrement final de la machine.

Le concept que nous venons de proposer n'est pas nouveau car il est voisin de l'hexapode CMW. Il utilise l'association de deux mécanismes connus. La machine obtenue est très encombrante et est sur-motorisée. Le chapitre suivant étudie également un concept de machine 5 axes. La différence avec ce chapitre est qu'il s'agit de la création (et non pas de la réutilisation) d'une nouvelle structure parallèle dont le principal avantage est d'arriver au final à une machine dont les performances sont potentiellement meilleures.



## Chapitre V . H4, un nouveau concept de machine 4 axes parallèle.

---

### V.1. Introduction.

Les machines parallèles possèdent pour la plupart 3 ou 6 degrés de liberté. Or, pour certaines opérations, 3 degrés de liberté sont insuffisants et 6 degrés de liberté sont superflus.

Par exemple, les opérations de *pick and place* avec orientation nécessitent 4 degrés de liberté. Ces 4 degrés de liberté consistent en trois translations et une rotation. La famille des robots Delta équipée d'un poignet a été initialement conçue pour répondre à ces spécifications. Certains agencements à actionneurs linéaires de cette famille, le TRIAGLIDE (Figure V-1) ou le LINEAPOD par exemple, ne permettent pas de rajouter cet axe supplémentaire. Il existe donc un besoin de machines pleinement parallèles à 4 degrés de liberté (3 translations et une rotation).

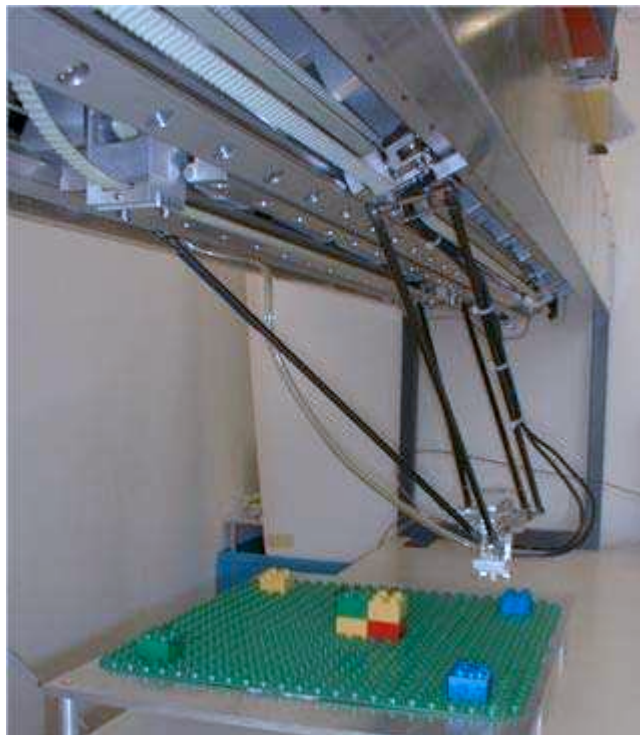


Figure V-1 : Robot Triaglide.

Pour l'usinage 5 axes, on utilise des hexapodes ou des structures de type HexaM. Cela induit un surcoût pour la machine puisque 6 moteurs sont nécessaires pour générer 6 degrés de liberté sur la nacelle alors que nous n'allons en utiliser que 5. De plus, souvent l'amplitude des rotations de la nacelle est limitée par des collisions et par la diminution des performances au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la position centrale de la machine.



La solution que nous proposons afin d'obtenir une machine 5 axes performante est d'utiliser une structure parallèle à 4 degrés de liberté complétée par un axe supplémentaire de mouvement. Cette structure peut être composée de l'une des deux manières suivantes :

- Une nacelle qui possède 4 degrés de liberté (3 translations et une rotation) qui déplace l'outil coupant, associée à un plateau tournant (1 degré de liberté de rotation) qui porte la pièce.
- Une nacelle qui possède 4 degrés de liberté (3 translations et une rotation) sur laquelle est monté en série un axe rotatif qui porte la broche.

Ces deux applications mettent en évidence le besoin de structures à 4 degrés de liberté. Mais l'étude de ces structures n'est pas un exercice facile comme le montrent la Figure V-2 et l'étude bibliographique qui nous a permis de recenser les machines à 4 degrés de liberté suivantes :

- Le simulateur de vol de Koevermans présenté dans [KOEV\_75].
- Le poignet à 4 degrés de liberté se décomposant en 3 rotations et 1 translation proposé par Reboulet dans [REBO\_91]
- Un mécanisme utilisé pour couper les verres convexes [HESS\_98].
- Un manipulateur à 4 degrés de liberté proposé par Tanev [TANE\_98].

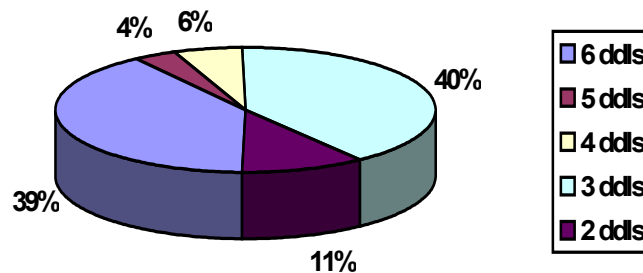


Figure V-2 : Répartition des structures parallèles d'après leurs degrés de liberté

Le mécanisme pour couper les verres convexes et le manipulateur de Tanev ne sont pas pleinement parallèles car certaines chaînes cinématiques possèdent plusieurs articulations motorisées. Enfin, le poignet à 4 degrés de liberté et le simulateur de vol possèdent quant à eux une chaîne passive.

De plus, parmi les machines à 4 degrés de liberté existantes répertoriées ci-dessus, aucune ne dispose de 3 translations et d'une rotation autour d'un axe de direction fixe. C'est pour palier ce manque que nous avons imaginé le concept du mécanisme H4, ce concept pouvant être aussi bien décliné en machine-outil qu'en robot.

Dans le même esprit, des travaux récents [ROLL\_99] ont abouti à la création de deux nouveaux robots parallèles à 4 degrés de liberté : le Kanuk et le Manta. Ces robots sont représentés sur la Figure V-3 et la Figure V-4.

Le robot Kanuk est constitué de 3 chaînes cinématiques. Deux sont de type Delta et la troisième comporte deux actionneurs (un linéaire et un rotatif). Cette chaîne est de type P-R-U-U. L'actionneur linéaire agit sur la position de la nacelle et l'actionneur rotatif agit sur son



orientation. Le principe du robot Manta est voisin de celui du Kanuk. La principale différence entre ces deux robots est le remplacement de la chaîne P-R-U-U par deux chaînes P-U-S.

Une des chaînes cinématiques du robot Kanuk possède deux actionneurs montés en série ce qui est pénalisant du point de vue dynamique. Les travaux sur les concepts que nous avons développés sont contemporains de la création de ces deux robots et, a posteriori, nous pouvons considérer qu'ils englobent le robot Manta.

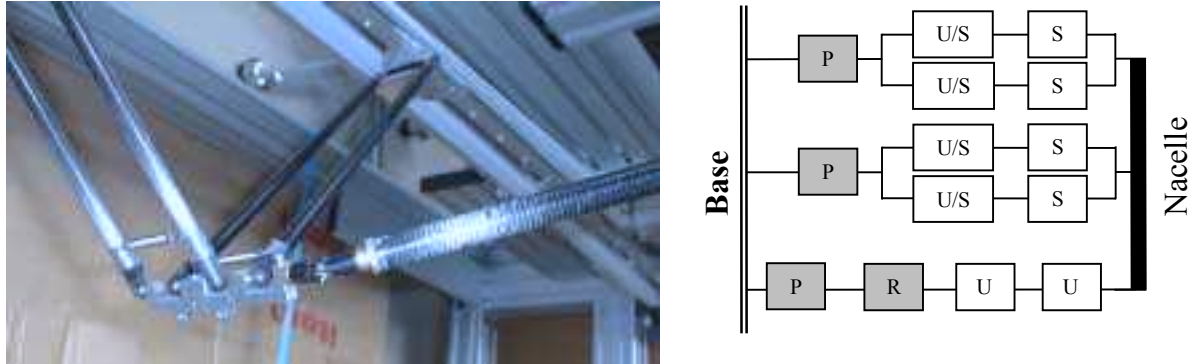


Figure V-3 : Robot Kanuk.

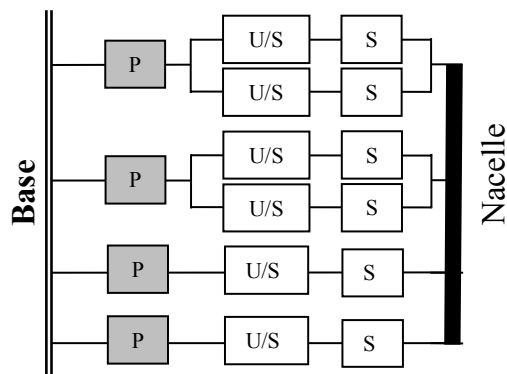


Figure V-4 : Robot Manta.

## V.2. Présentation du concept symétrique.

Le concept général que nous proposons est de construire une machine pleinement parallèle ne comportant aucune chaîne passive afin d'atteindre des performances élevées sur le plan des vitesses et des accélérations de la nacelle, ce qui nous impose les conditions suivantes :

- Le mécanisme est basé sur 4 chaînes cinématiques indépendantes entre la base et la nacelle.
- Chacune des chaînes est motorisée avec un seul actionneur.
- Les actionneurs sont directement fixés sur la base afin d'avoir une bonne dynamique.

De telles conditions et dispositions constructives ont déjà prouvé leur efficacité pour les machines parallèles, qu'elles appartiennent au domaine de la robotique (Delta, Hexa) ou à celui de la machine outil (UraneSX, HexaM). L'idée première est inspirée de la coopération de robots à partir de deux structures Delta ou Hexa à motorisation linéaire ou rotative. Rappelons que l'idée d'associer deux structures Delta afin d'obtenir un robot possédant plus

de trois degrés de liberté a abouti à la création du robot 2-Delta [GOUD\_95]. L'illustration de cette coopération est donnée sur la Figure V-5. Sur cette figure, nous constatons que :

- Ce mécanisme est symétrique.
- Les deux liaisons ajoutées (notées X) pour des raisons cinématiques sont à définir.
- La mécanisme est sur-motorisé car il possède 6 actionneurs pour 4 degrés de liberté souhaités pour l'organe terminal.

La Figure V-6 montre ce mécanisme après suppression de la sur-motorisation tout en conservant la symétrie. Nous devons maintenant définir, dans un premier temps, les liaisons manquantes. Mais, trouver la nature des liaisons est une condition nécessaire mais non suffisante. Par conséquent, dans un deuxième temps, nous recherchons les conditions géométriques sur la disposition des liaisons qui confèrent à l'organe terminal les degrés de liberté souhaités. Ces deux points clés font l'objet du paragraphe suivant.

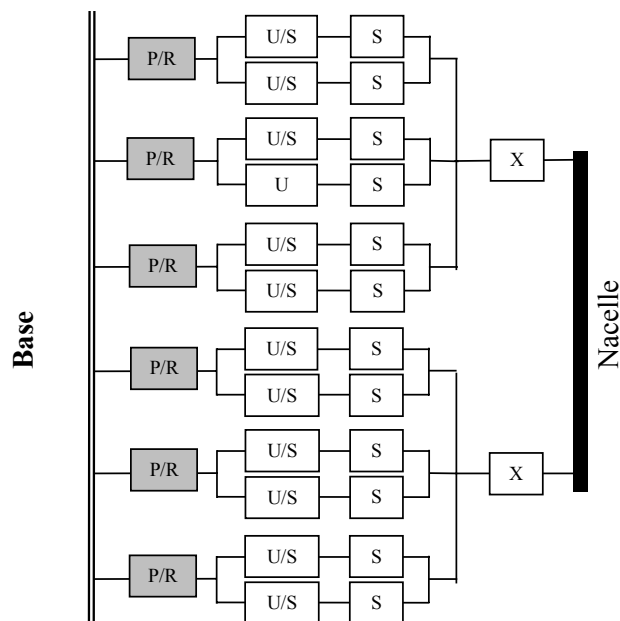


Figure V-5: Idée première.

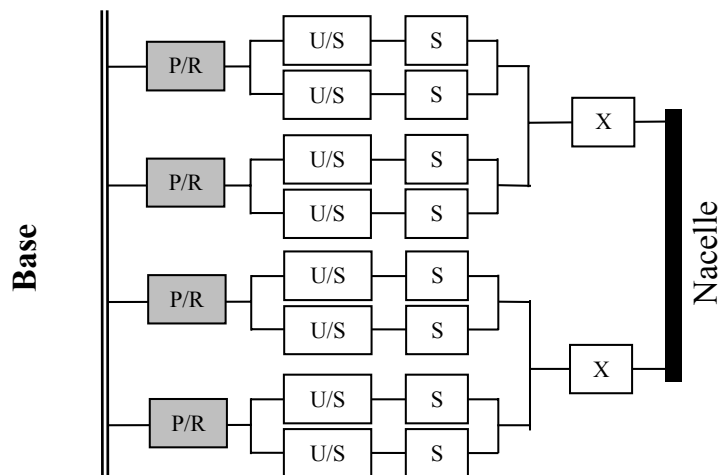


Figure V-6 : Mécanisme non-redundant.

### V.3. Condition de fonctionnement.

#### V.3.1. Analyse préliminaire.

Ce mécanisme est fortement inspiré de la famille des structures Delta et Hexa. A ce titre, il possède les mêmes variantes que celles de la structure Delta, à savoir :

- Utiliser de manière indifférente des actionneurs linéaires ou rotatifs.
- Pour chacun des bras, utiliser de manière indifférente deux barres disposées en parallélogramme ou une seule barre possédant une liaison cardan à chacune de ses extrémités.

Nous allons commencer par analyser les conditions qui doivent être respectées pour qu'une architecture de type Delta linéaire ne présente que des mouvements de translation. Nous avons vu dans l'étude bibliographique que les chaînes cinématiques utilisées dans la structure Delta peuvent être soit de type P-U-U soit de type P-(U-S)<sub>2</sub>.

- Les chaînes de type P-U-U, dont un exemple est donné Figure V-7, doivent respecter les conditions  $\mathbf{z}_2 // \mathbf{z}_3$  et  $\theta_2 = -\theta_3$  afin d'être compatibles avec la cinématique des structures Delta. Ces conditions correspondent à  $\mathbf{z}_1 // \mathbf{z}_4$ . Pour des raisons pratiques (relatives à la facilité de réalisation de la machine) les conditions  $\mathbf{z}_1 \bullet \mathbf{z}_2 = 0$ ,  $\mathbf{z}_3 \bullet \mathbf{z}_4 = 0$  et  $\mathbf{z}_2 \bullet \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 = 0$  sont ajoutées.
- La condition à respecter pour les chaînes P-(U-S)<sub>2</sub> représentées Figure V-8 est  $\mathbf{A}_{11} \mathbf{B}_{11} = \mathbf{A}_{12} \mathbf{B}_{12}$

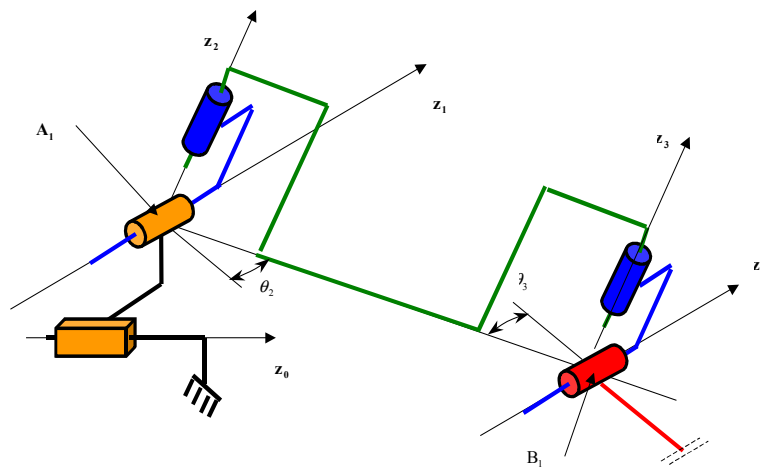


Figure V-7 : Chaîne P-U-U.

#### Analyse du point de vue de la cinématique :

- Chaîne P-(U-S)<sub>2</sub>

Une chaîne de ce type possède 5 degrés de liberté (3 translations et 2 rotations). Le mouvement que cette chaîne ne peut pas effectuer est donc une rotation. Il nous reste à déterminer l'axe de cette rotation. Comme les barres  $\mathbf{A}_{11} \mathbf{B}_{11}$  et  $\mathbf{A}_{12} \mathbf{B}_{12}$  sont infiniment rigides (elles ne peuvent ni s'allonger, ni se raccourcir), la rotation impossible à effectuer

est perpendiculaire au plan défini par les barres  $A_{11}B_{11}$  et  $A_{12}B_{12}$ . L'axe de cette rotation impossible est donc le vecteur  $A_{11}B_{11} \times B_{11}B_{12}$ .

- Chaîne P-U-U

Cette chaîne possède également des degrés de liberté du même type que celle ci-dessus (3 translations et 2 rotations). Le mouvement impossible est la rotation autour de la normale aux axes  $z_3$  et  $z_4$  soit  $z_3 \times z_4$ , ce qui peut également s'écrire  $(A_1B_1 \times z_4) \times z_4$  compte tenu des hypothèses précédemment formulées.

Conséquence :

Dans la suite de cette partie, nous ne considérerons que le type P-(U-S)<sub>2</sub>. Pour avoir la condition équivalente dans le cas P-U-U, il faut remplacer  $A_{11}B_{11} \times B_{11}B_{12}$  par  $(A_1B_1 \times z_4) \times z_4$ .

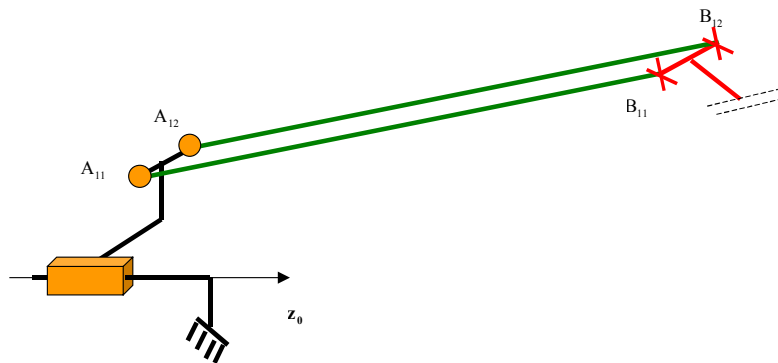


Figure V-8 : Liaison P-(U-S)<sub>2</sub>

### V.3.2. Détermination des liaisons manquantes.

Nous recherchons donc un mécanisme basé sur le graphe d'agencement de la Figure V-6. La formule de Grübler (équation (I-1)) nous donne le nombre de degrés de liberté des liaisons marquées X : Elles ont nécessairement un degré de liberté, typiquement des liaisons prismatiques, ou des liaisons rotoïdes [PIER\_99]. Pour des raisons de simplicité de réalisation et de bon sens, nous avons choisi d'utiliser des liaisons rotoïdes. Ces considérations nous amènent à proposer l'architecture représentée sur la Figure V-9. Cette architecture est basée sur l'utilisation de chaînes P-(U-S)<sub>2</sub>.

### V.3.3. Condition géométrique.

#### V.3.3.1. Calculs préliminaires.

Nous allons maintenant rechercher les conditions géométriques qui produisent le fonctionnement désiré du mécanisme à savoir que l'organe terminal doit avoir 3 degrés de liberté de translation et un degré de liberté de rotation autour d'un axe fixe.

Le problème classique en théorie des mécanismes est de déterminer le nombre, la nature et la disposition des liaisons qui permettent d'obtenir le mouvement désiré. Plusieurs méthodes permettent de résoudre ce problème. Parmi celles-ci et pour des applications aux mécanismes parallèles, nous pouvons citer la méthode basée sur les algèbres de Lie

[SUGI\_00] et une méthode similaire basée sur une vision plus pratique du problème [COMP\_99a] que nous avons retenue pour la suite de cet exposé.

Les propriétés que nous allons utiliser dans la suite de cette partie sont :

- Le mouvement possible pour deux chaînes cinématiques  $i$  et  $j$  montées en parallèle entre une base fixe et un organe terminal  $T$  est le mouvement commun à chacune de ces deux chaînes. Soit de manière formelle :  $ddl(T) = ddl(i) \cap ddl(j)$
- Le mouvement que deux chaînes cinématiques montées en parallèle ne peuvent pas faire est la somme des mouvements que chacune des chaînes ne peut pas faire. Soit de manière formelle la négation de la proposition précédente :  $\overline{ddl(T)} = \overline{ddl(i)} \oplus \overline{ddl(j)}$

La Figure V-8 décrit une chaîne P-(S-U)<sub>2</sub>. Comme, pour chacune des chaînes cinématiques, nous désirons des conditions de fonctionnement identiques à celles de la structure Delta, la position particulière que nous allons considérer est  $\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} = \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{12}$ .

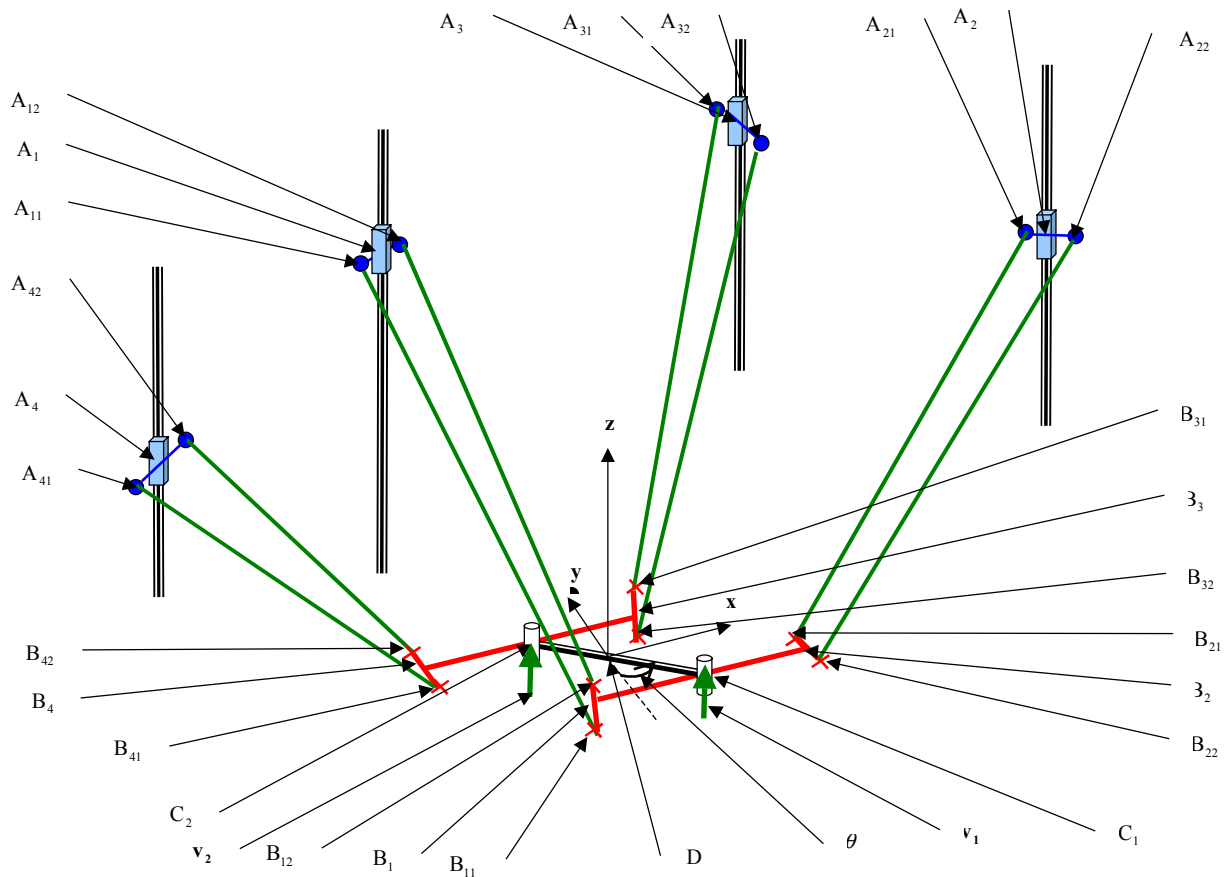


Figure V-9 : Proposition d'agencement pour le mécanisme H4 à actionneurs linéaires.

Comme précisé précédemment, l'extrémité d'une chaîne de ce type dans cette position possède (hors position singulière) 3 degrés de liberté de translation et 2 degrés de liberté de rotation. Le mouvement impossible à faire pour cette chaîne est la rotation autour de  $\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} \times \mathbf{B}_{11}\mathbf{B}_{12}$ . Les notations que nous utiliserons pour les indices sont :

- $1 \leq i \leq 4$  pour désigner les grandeurs correspondant au bras numéro  $i$ .

- $1 \leq j \leq 2$  correspondant à la demi structure Delta numéro  $j$  avec  $j=1$  pour  $i \in \{1,2\}$  et  $j=2$  pour  $i \in \{3,4\}$ .

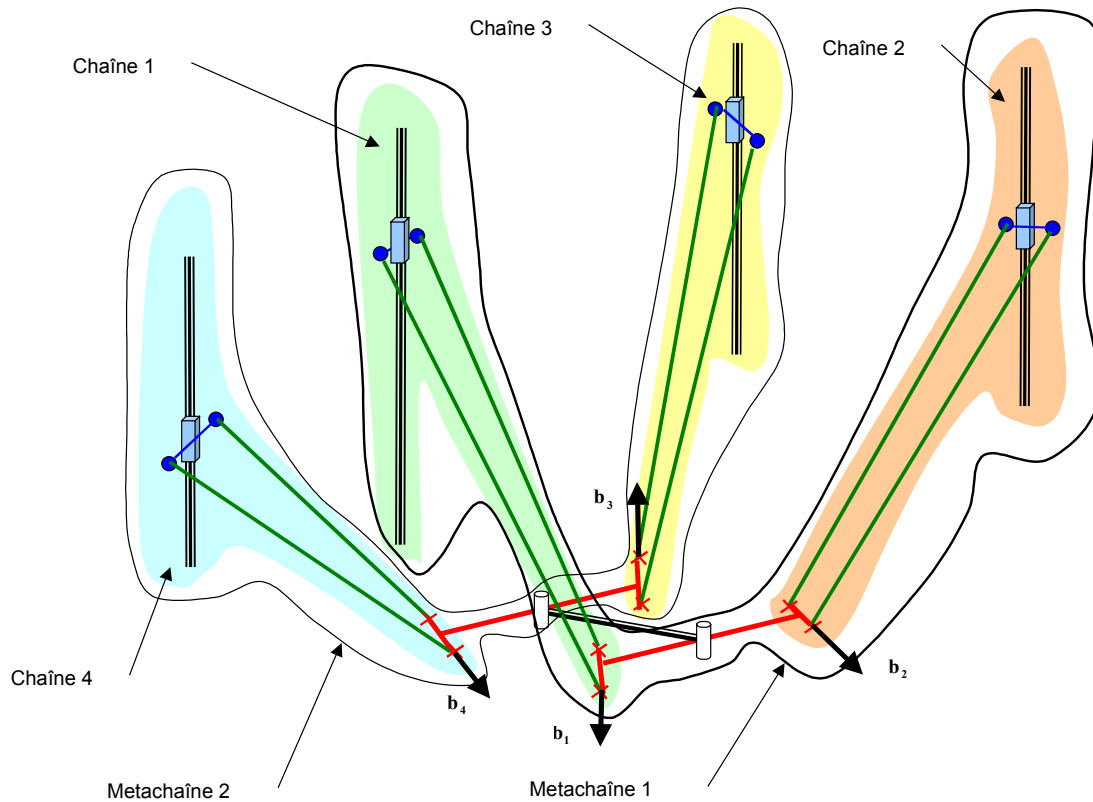


Figure V-10 : Terminologie.

Un représentant de cette famille de machines est schématisé Figure V-9. Les bras représentés sur le schéma sont de type P-(U-S)<sub>2</sub>. Pour simplifier les écritures :

- Nous noterons  $\mathbf{b}_i = \mathbf{B}_{i1}\mathbf{B}_{i2}$  (voir Figure V-10).
- Comme  $\mathbf{A}_{i1}\mathbf{B}_{i1} = \mathbf{A}_{i2}\mathbf{B}_{i2}$ , nous noterons cette direction  $\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i$ .

Avec ces notations, l'extrémité de chacune des chaînes P-(U-S)<sub>2</sub> ne peut pas tourner autour de  $\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i \times \mathbf{b}_i$

Maintenant, nous nous intéressons au segment  $B_1B_2$ . Nous nommerons  $B_1B_2$  la pièce à laquelle appartiennent les points  $B_1$  et  $B_2$ . Cette pièce est reliée à la base par les chaînes 1 et 2. Chacune de ces deux chaînes possède (entre autres) trois mouvements de translation. La pièce  $B_1B_2$  pourra donc effectuer les trois mouvements de translation.

Nous déterminons maintenant le (ou les) mouvements de rotation que peut effectuer  $B_1B_2$ . Compte tenu de la remarque préliminaire, nous pouvons écrire que  $B_1B_2$  ne peut tourner ni autour de  $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \times \mathbf{b}_1$ , ni autour de  $\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \times \mathbf{b}_2$ . Par conséquent, il ne peut donc tourner que autour de la normale commune à  $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \times \mathbf{b}_1$  et à  $\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \times \mathbf{b}_2$  soit  $(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \times \mathbf{b}_1) \times (\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \times \mathbf{b}_2)$ .

Le même raisonnement peut être tenu pour  $B_3B_4$  qui ne peut tourner que autour de  $(\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3 \times \mathbf{b}_3) \times (\mathbf{A}_4\mathbf{B}_4 \times \mathbf{b}_4)$ .

Maintenant, nous considérons le segment  $C_1C_2$ . Ce segment est relié :

- D'une part à  $B_1B_2$  par une liaison pivot d'axe  $\mathbf{v}_1$  en  $C_1$  à la métachaine 1 (voir Figure V-10).
- D'autre part à  $B_3B_4$  par une liaison pivot d'axe  $\mathbf{v}_1$  en  $C_2$  à la métachaine 2.

Tout se passe comme si ce segment était relié au bâti par deux chaînes parallèles à cinq degrés de liberté (les deux métachaines).

Les mouvements possibles pour l'extrémité de la métachaine 1 (hors positions singulières) sont les trois translations et deux rotations (autour de  $(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \times \mathbf{b}_1) \times (\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \times \mathbf{b}_2)$  et autour de  $\mathbf{v}_1$ ). Donc le mouvement impossible à faire pour cette chaîne est la rotation autour de  $[(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \times \mathbf{b}_1) \times (\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \times \mathbf{b}_2)] \times \mathbf{v}_1$ .

De même, l'extrémité de la métachaine 2 peut effectuer les trois translations et deux rotations (autour de  $(\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3 \times \mathbf{b}_3) \times (\mathbf{A}_4\mathbf{B}_4 \times \mathbf{b}_4)$  et autour de  $\mathbf{v}_1$ ). Donc le mouvement impossible à faire pour cette chaîne est la rotation autour de  $[(\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3 \times \mathbf{b}_3) \times (\mathbf{A}_4\mathbf{B}_4 \times \mathbf{b}_4)] \times \mathbf{v}_1$ .

Nous en concluons donc que les mouvements que peut effectuer l'organe terminal (segment  $C_1C_2$ ) de la machine complète sont les trois translations et la rotation autour de  $[(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \times \mathbf{b}_1) \times (\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \times \mathbf{b}_2)] \times \mathbf{v}_1 \times [(\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3 \times \mathbf{b}_3) \times (\mathbf{A}_4\mathbf{B}_4 \times \mathbf{b}_4)] \times \mathbf{v}_1$ .

### V.3.3.2. Condition nécessaire.

Nous voulons que les mouvements possibles du segment  $C_1C_2$  soient les trois translations et la rotation autour de  $\mathbf{v}_1$ .

Or, nous venons de montrer que l'organe terminal de la machine pouvait effectuer les trois translations. Quant à la rotation de l'organe terminal, elle s'effectue autour d'un axe quelconque et dont la direction change en fonction de la position de la nacelle. Nous allons maintenant déterminer la condition à respecter pour que la rotation du segment  $C_1C_2$  se fasse toujours autour de  $\mathbf{v}_1$  quelle que soit la position de la nacelle. Cette condition s'écrit :

$$[(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \times \mathbf{b}_1) \times (\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \times \mathbf{b}_2)] \times \mathbf{v}_1 \times [(\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3 \times \mathbf{b}_3) \times (\mathbf{A}_4\mathbf{B}_4 \times \mathbf{b}_4)] \times \mathbf{v}_1 = \alpha \mathbf{v}_1 \quad (\text{V-1})$$

avec  $\alpha \neq 0$

Ce qui peut également s'écrire, en posant  $\mathbf{w}_i = \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i \times \mathbf{b}_i$  :

$$-([\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2] \times \mathbf{v}_1) \bullet (\mathbf{w}_3 \times \mathbf{w}_4) \mathbf{v}_1 = \alpha \mathbf{v}_1 \quad (\text{V-2})$$

En simplifiant par  $\mathbf{v}_1$ , nous obtenons :

$$([\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2] \times (\mathbf{w}_3 \times \mathbf{w}_4)) \bullet \mathbf{v}_1 \neq 0 \quad (\text{V-3})$$

Soit, finalement :

$$[(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \times \mathbf{b}_1) \times (\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \times \mathbf{b}_2)] \times [(\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3 \times \mathbf{b}_3) \times (\mathbf{A}_4\mathbf{B}_4 \times \mathbf{b}_4)] \bullet \mathbf{v}_1 \neq 0 \quad (\text{V-4})$$

Cette condition traduit, pour une position donnée de la nacelle, l'existence d'une rotation du segment  $C_1C_2$  de direction  $\mathbf{v}_1$ .

Remarque :

Cette condition est nécessaire mais non suffisante. En effet, il faut écrire la matrice jacobienne de cette machine afin de vérifier qu'elle n'est pas dans une position singulière.

### V.3.3.3. Stabilité de la condition.

Nous venons de montrer que si la condition ci-dessus est respectée, la machine possède 3 degrés de liberté en translation et 1 en rotation autour de  $\mathbf{v}_1$  pour une position donnée (sous réserve que les barres à l'intérieur d'une paire restent parallèles).

Nous allons maintenant montrer que, si les barres à l'intérieur d'une paire sont parallèles pour une position non singulière de la machine, alors, elles restent parallèles pour toute position non singulière.

La démonstration précédente montre que le seul mouvement de rotation possible pour le segment  $C_1C_2$  est une rotation autour de  $\mathbf{v}_1$ . Donc le pivot d'axe  $\mathbf{v}_1$  en  $C_1$  reste d'axe  $\mathbf{v}_1$  (nous pouvons tenir le même raisonnement pour  $C_2$ ). Si le pivot reste d'axe  $\mathbf{v}_1$ , la seule rotation possible pour le segment  $B_1B_2$  est celle autour de  $\mathbf{v}_1$ . Or nous avons montré que la seule rotation possible pour  $B_1B_2$  est autour de  $(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \times \mathbf{u}_1) \times (\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \times \mathbf{u}_2)$ . Donc si  $\mathbf{v}_1$  et  $(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \times \mathbf{u}_1) \times (\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \times \mathbf{u}_2)$  ne sont pas colinéaires, le segment  $B_1B_2$  ne peut tourner dans aucune direction (idem pour  $B_3B_4$ ). Ces conditions s'écrivent :

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \times \mathbf{u}_1) \times (\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \times \mathbf{u}_2) &\neq \mathbf{v}_1 \\ (\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3 \times \mathbf{u}_3) \times (\mathbf{A}_4\mathbf{B}_4 \times \mathbf{u}_4) &\neq \mathbf{v}_1 \end{aligned} \quad (\text{V-5})$$

Donc, si ces conditions sont respectées, alors les segments  $B_1B_2$  et  $B_3B_4$  n'auront que des mouvements de translation. Chacune des deux branches du mécanisme se comporte comme si elle faisait partie d'une structure de type Delta complète puisque leur organe terminal n'a que des mouvements de translation. Cela nous permet de conclure que :

- Les segments  $B_1B_2$  et  $B_3B_4$  restent parallèles entre eux et ont une direction fixe.
- Les barres à l'intérieur d'une paire restent parallèles entre elles.

Maintenant que nous avons déterminé le mouvement des différents éléments de cette machine, nous pouvons en écrire les modèles de manière plus simple.

## V.4. Concept asymétrique.

### V.4.1. Description du concept.

Nous venons de déterminer l'architecture et les conditions de fonctionnement d'une nouvelle machine pleinement parallèle et complètement symétrique. Nous avons baptisé cette machine H4s. Cependant, si nous examinons à la Figure V-11 qui représente le concept symétrique en utilisant l'équivalence entre les chaînes  $P-(S-U)_2$  et les chaînes  $P-U-U$  (voir Figure V-7 et Figure V-8), nous remarquons que nous avons choisi de placer de manière symétrique les liaisons marquées X. Si nous ne respectons plus cette symétrie, nous pouvons placer les deux liaisons marquées X (qui sont en fait des liaisons pivot) aux points comportant



des liaisons U. De fait, deux des liaisons U se transforment en liaisons S (trois pivots concourants au même point). Et nous aboutissons au schéma bloc suivant (Figure V-11) qui décrit une variante de la structure H4, le H4a avec des liaisons U. Pour faire une analogie avec le H4 symétrique (H4s), nous pouvons présenter le H4a comme étant la coopération d'un Delta (2 chaînes), et d'un Hexa (2 chaînes).

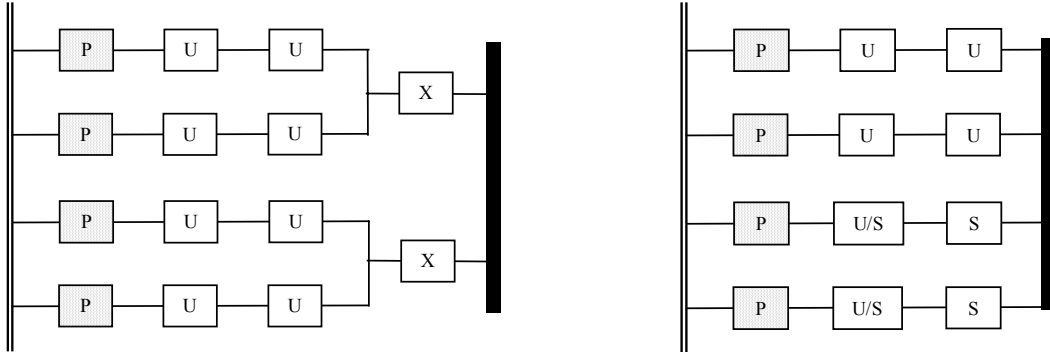


Figure V-11 : H4 symétrique et asymétrique avec liaisons U.

Comme nous avons vu que l'utilisation de chaînes U-U était équivalente à l'utilisation de chaînes  $(U-S)_2$ , nous déduisons le graphe d'agencement du mécanisme construit avec ces chaînes (Figure V-12).

#### V.4.2. Conditions géométriques.

Les mouvements souhaités pour la nacelle doivent être admissibles pour chacune des chaînes. Les chaînes P-U-S possédant 6 degrés de liberté, les mouvements de la nacelle sont donc forcément admissibles pour chacune d'elles. Deux chaînes  $P-(U-S)_2$  (P-U-U sur le dessin Figure V-11) lorsqu'elles sont reliées à un même organe terminal donnent quatre degrés de liberté à cet organe terminal. Ces degrés de liberté doivent correspondre à ceux souhaités pour la nacelle. Ils consistent en trois translations et une rotation autour d'un axe quelconque qui varie en fonction de la position. Cet axe est donné par la relation  $(\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \times \mathbf{u}_1) \times (\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 \times \mathbf{u}_2)$  qui a été démontrée pour le H4s. Pour que cet axe ait une direction fixe, il faut avoir  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ , auquel cas la rotation s'effectuera toujours autour de l'axe  $\mathbf{u}_1$ .

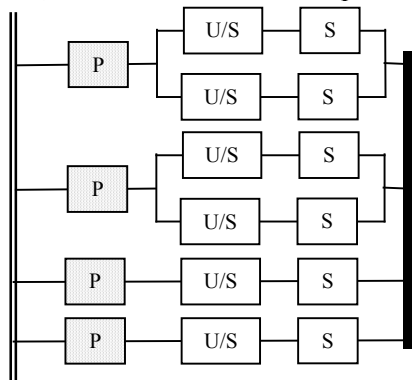


Figure V-12 : Mécanisme H4a avec liaisons S.

## V.5. Exemples de déclinaisons et applications.

Les travaux présentés dans les chapitres précédents traitent principalement du transfert de technologie depuis le domaine de la robotique vers celui de la machine-outil. Pour le mécanisme H4 et ses deux variantes, l'exposé est légèrement différent. Comme cette architecture est nouvelle, il n'existe pas encore d'application dans le domaine de la robotique, pas plus que dans celui de la machine-outil.

### V.5.1. Robotique de manipulation.

Dans le domaine de la robotique de manipulation (*pick and place*), les domaines d'application du H4 sont ceux du robot Delta. Nous pouvons effectuer quelques comparaisons entre ces deux structures.

#### V.5.1.1. Motorisation rotative.

Pour les solutions à motorisation rotative (Figure V-13 pour le H4s et Figure I-8 pour le robot Delta), la nacelle du H4s ne peut pas effectuer plus d'un quart de tour dans le sens des angles positifs et négatifs alors que l'organe terminal du Delta, de par son quatrième axe indépendant peut effectuer un tour complet dans sa version de base. Comme, dans le concept H4, la rotation de la nacelle est couplée avec les translations, pour une plage angulaire donnée de variation des moteurs (toutes dimensions étant égales par ailleurs), le volume de travail est plus petit que celui du Delta, d'autant plus petit que la plage de variation de l'orientation de la nacelle est grande. Cependant, la dynamique du Delta est pénalisée par la présence de la chaîne passive qui transmet la rotation.

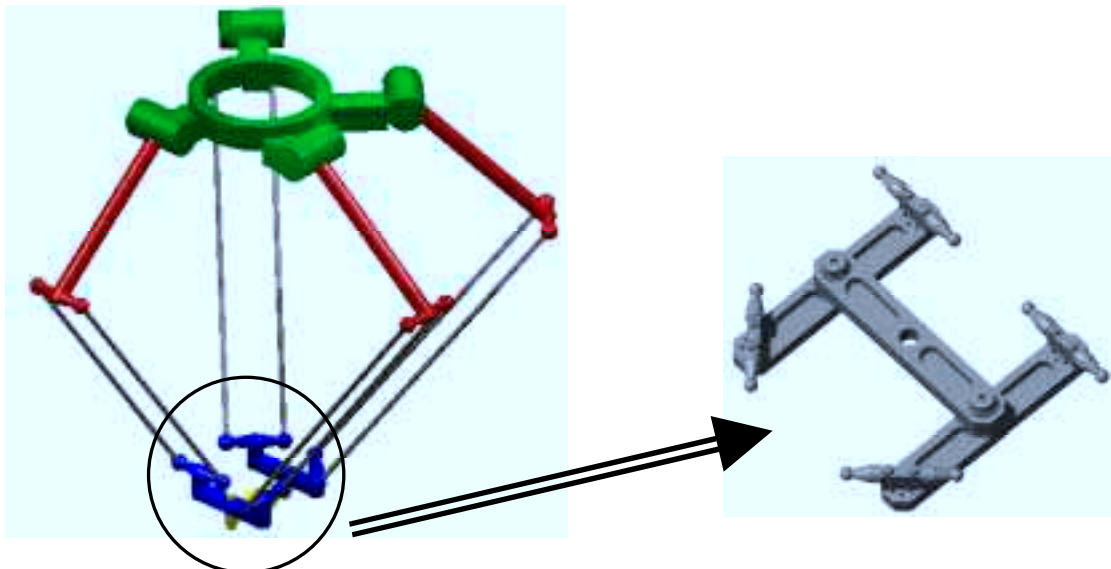


Figure V-13 : H4 symétrique à motorisation rotative.

Le principal point faible du robot présenté sur la Figure V-13 est l'amplitude de la rotation de l'organe terminal. Nous proposons maintenant deux dispositions constructives

permettant d'obtenir des rotations de 360 degrés au niveau de l'organe terminal afin d'obtenir une machine compétitive par rapport au robot Delta :

- De par sa conception, les rotations du robot H4 symétrique présenté sont limitées à  $\pm 45$  degrés. Pour les orientations de pick and place, il est préférable de pouvoir effectuer un tour complet. Une manière de réaliser cela est d'utiliser deux actionneurs rotatifs bistables (voir Figure V-14) montés en série avant l'effecteur. L'un de ces actionneurs doit avoir une course angulaire de 180 degrés et l'autre une course angulaire de 90 degrés. Ainsi, le fonctionnement du robot H4s est garanti sur les quatre quadrants. Le poids des deux actionneurs bistables montés en série avec la nacelle augmente l'amplitude des rotations mais risque de pénaliser fortement les performances dynamiques de la nacelle.
- Une autre variante de la cinématique de la nacelle présentée sur la Figure V-15 permet de réaliser des rotations de 360 degrés afin de disposer d'un robot directement concurrent du Delta en faisant intervenir un couplage entre la rotation de la barre centrale et la rotation de la pince (voir Figure V-16). Cette solution repose sur l'utilisation d'un train de deux engrenages (ou de deux poulies crantées et courroie crantée) dont le premier est fixé sur une des barres latérales du H et le deuxième en liaison pivot par rapport à la barre centrale du H. Si l'amplitude souhaitée pour la rotation est de  $360^\circ$ , le rapport de réduction est de 0.25.

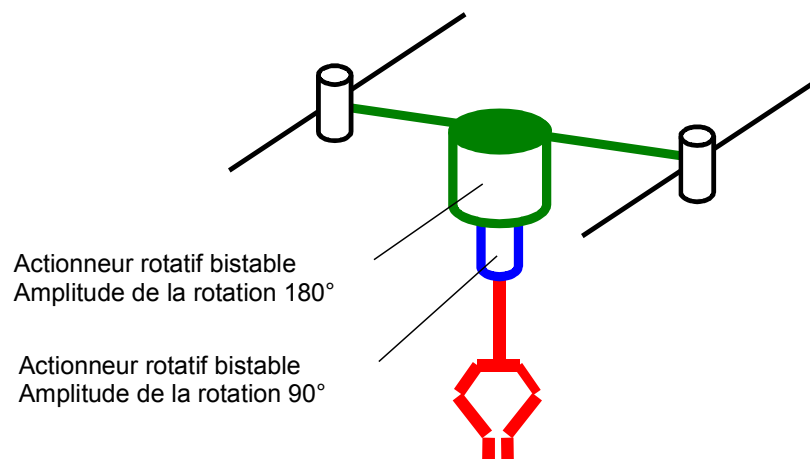


Figure V-14 : Utilisation d'actionneurs rotatifs bistables.

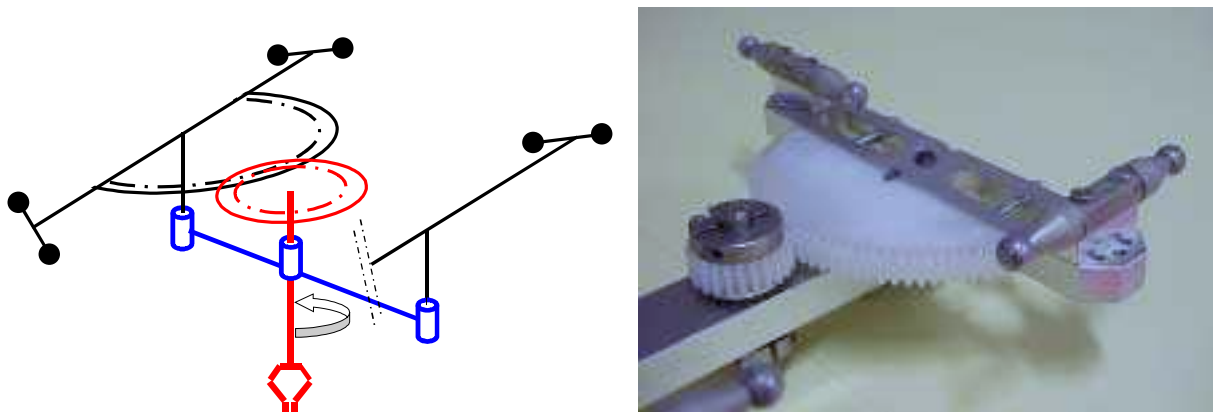


Figure V-15 : Modification de la nacelle pour effectuer des rotations de  $360^\circ$ .

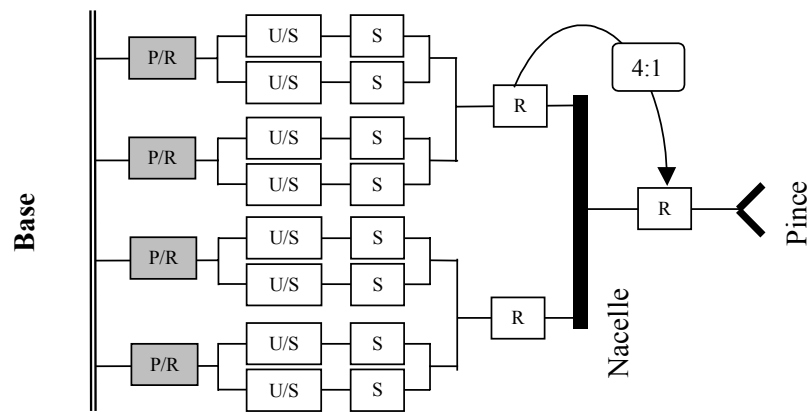


Figure V-16 : Graphe d'agencement pour une rotation obtenue par couplage.

#### V.5.1.2. Motorisation linéaire.

Pour les solutions à motorisation linéaire, le H4a (Figure V-17) est une solution intéressante. En effet, sur les robots de type Triaglide ou même Delta linéaire, il est quasi-impossible de rajouter une chaîne cinématique supplémentaire pour obtenir un degré de liberté de rotation de la nacelle.

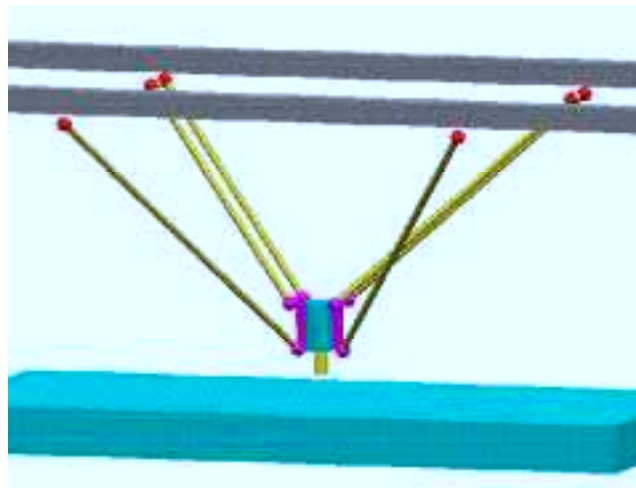


Figure V-17 : H4 asymétrique à motorisation linéaire.

#### V.5.2. Usinage.

Dans le domaine de l'usinage l'architecture H4 présente également un intérêt. A priori, les solutions avec une motorisation rotative ne sont pas adaptées à ce type d'application, car, comme nous l'avons vu précédemment, les architectures avec motorisation linéaire conviennent mieux en termes de rigidité (elles ne comportent pas d'élément en flexion). Dans ce domaine, le H4 asymétrique s'impose naturellement par rapport au H4 symétrique car sa conception est beaucoup plus simple. En effet, il comporte moins de pièces et de liaisons que le concept symétrique. Il est donc plus simple à concevoir, plus précis et plus rigide.

Pour l'usinage 3 axes (3 translations), il est clair que l'architecture H4 n'est pas compétitive par rapport à l'architecture Delta linéaire. En effet, l'architecture H4 dispose d'un

degré de liberté supplémentaire par rapport à la tâche qui reste inutilisé, ce qui n'est pas le cas de l'architecture Delta linéaire.

Par contre, pour l'usinage 5 axes, les solutions parallèles existantes ne sont pas satisfaisantes en raison des remarques que nous avons formulées dans le deuxième chapitre. Une solution à base de H4 asymétrique complétée d'un axe rotatif sur la pièce ou sur la broche (Figure V-18) nous semble être un bon compromis. L'intérêt d'une telle solution réside dans la suppression des têtes rotatives deux axes qui posent des problèmes de rigidité.

L'axe rotatif supplémentaire peut donc être ajouté sur la table de la machine (voir Figure I-6) ou entre la broche et la nacelle (voir Figure V-18) en fonction de l'utilisation de la machine. En effet, pour la production en grande série de pièces de taille classique (typiquement industrie automobile), il est préférable de choisir la solution comportant une table rotative car la dynamique de cette solution est meilleure et a priori comparable à celle de la machine UraneSX. Par contre, pour l'usinage de pièces longues en petite série (typiquement industrie aéronautique) l'utilisation d'une table rotative n'est pas concevable. Nous préférons donc la solution de la Figure V-18 qui permet d'avoir une très grande course de la nacelle dans la direction des glissières mais au détriment de la dynamique. Ce dernier point n'est pas rédhibitoire car la dynamique de la machine est malgré tout meilleure que celle des architectures série de type portique existantes (Figure I-5), la tête rotative deux axes a été supprimée et les exigences sur les performances dynamiques de ces machines sont moins importantes.

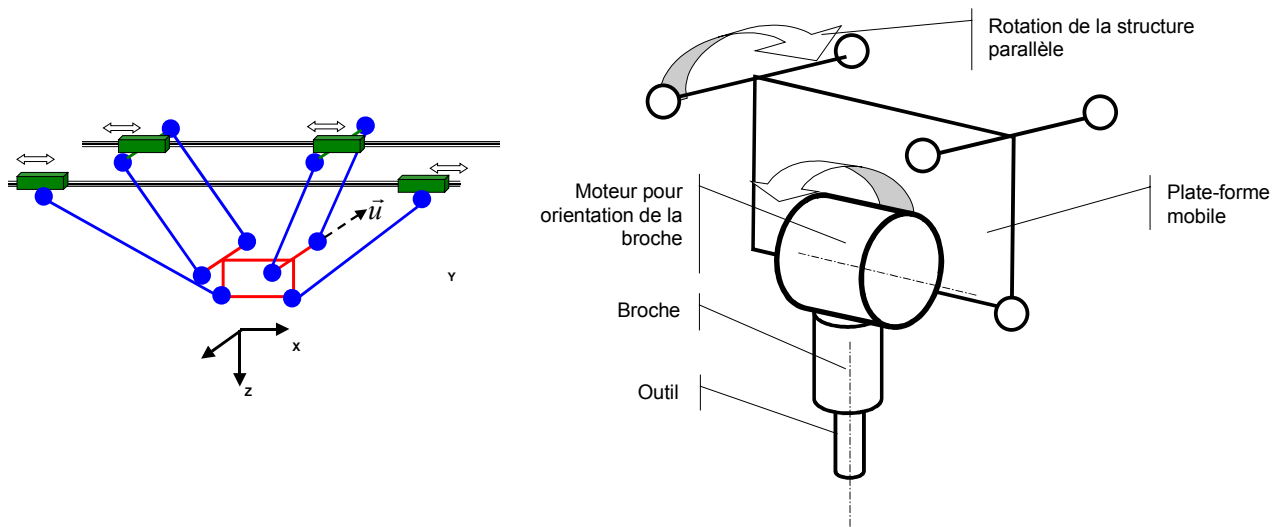


Figure V-18 : Exemple de machine 5 axes.

## V.6. Modélisation et dimensionnement d'un H4 symétrique.

Le premier exemple est celui d'un H4 symétrique à motorisation rotative (Figure V-13). Il correspond au premier prototype réalisé pour valider le concept du point de vue cinématique. Ce premier prototype étant réalisé avec peu de moyens, il s'adresse au domaine de la robotique de manipulation car les investissements dans ce domaine sont moins coûteux que dans le domaine de la machine-outil.

### V.6.1. Modélisation.

#### V.6.1.1. Paramétrage.

La solution que nous avons retenue est représentée sur la Figure V-19. La Figure V-20 montre une vue détaillée de la nacelle et la Figure V-21, la position des points, des vecteurs et des dimensions utilisés qui ne font que préciser le paramétrage déjà utilisé à la Figure V-9 pour la version à actionneurs linéaires.

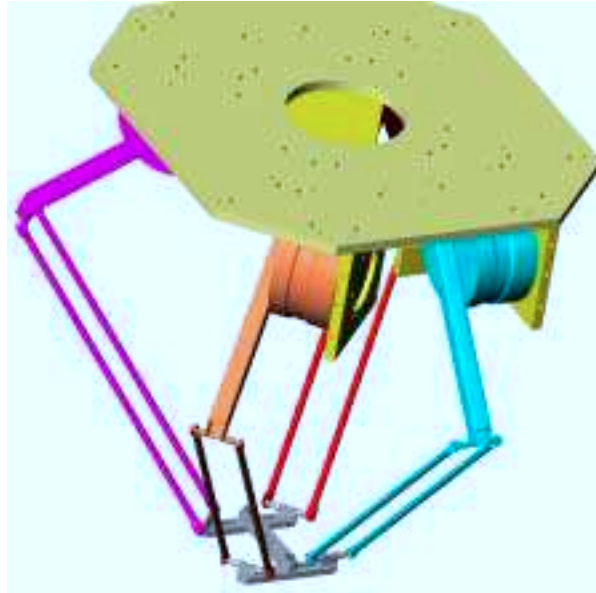


Figure V-19 : Solution retenue pour le H4s.

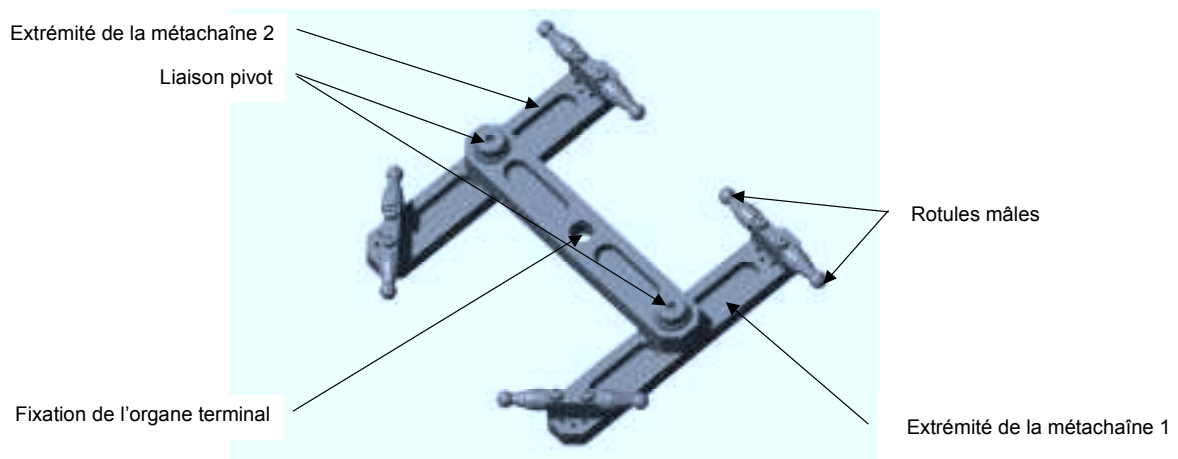


Figure V-20 : Vue de la nacelle.

Nous pouvons effectuer quelques remarques à propos de la Figure V-21 :

- Il existe une relation entre la distance  $d$ , l'écartement entre deux barres d'une même paire (que nous avons choisi égal à  $60\text{mm}$  comme pour le robot Delta), et le débattement angulaire maximal de la nacelle. Cette relation se détermine d'après des critères de collisions. Dans notre cas, pour une valeur de  $\theta$  maximal de  $\pm 45$  degrés, nous avons trouvé une valeur minimale  $d_{\min} = 60\text{mm}$  que nous conserverons comme valeur de  $d$ .
- Nous avons choisi de prendre  $d$  comme dimension caractéristique de chacune des trois pièces composant le mécanisme en forme de « H » afin de simplifier les équations.

- La famille des vecteurs unitaires  $\mathbf{b}_i$  est située dans un plan perpendiculaire à l'axe  $\mathbf{z}$  et « tourne autour de  $\mathbf{z}$  dans le sens trigonométrique ». Chaque vecteur  $\mathbf{b}_i$  est caractérisé par l'angle  $\alpha_i$  mesuré entre l'axe  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{b}_i$ .
- Les axes des moteurs sont tous situés dans le même plan. Ce plan est perpendiculaire à l'axe  $\mathbf{z}$  et est situé à une altitude nulle.

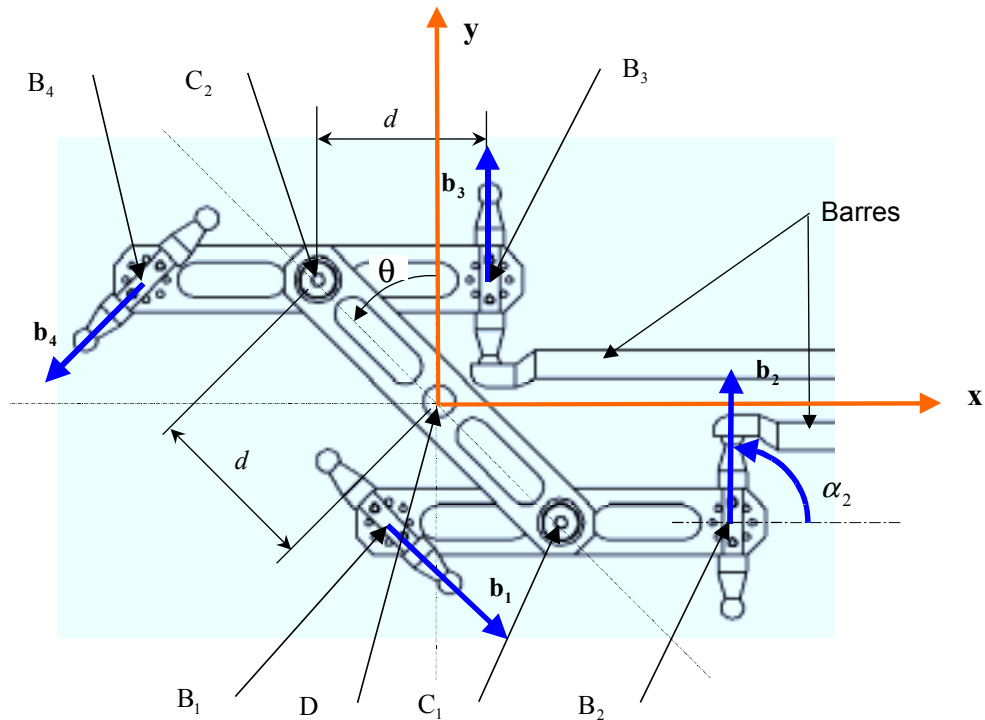


Figure V-21 : Paramétrage de la nacelle.

Pour terminer, le paramétrage d'un bras moteur est décrit sur la Figure V-22, avec  $r$  rayon du bras (tous les bras ont la même longueur),  $L$  longueur des barres (toutes les barres ont la même longueur) et l'angle  $\theta_i$  qui correspond à la variable articulaire  $q_i$  mesurée par rapport à la verticale dans le sens trigonométrique direct autour de  $\mathbf{b}_i$ .

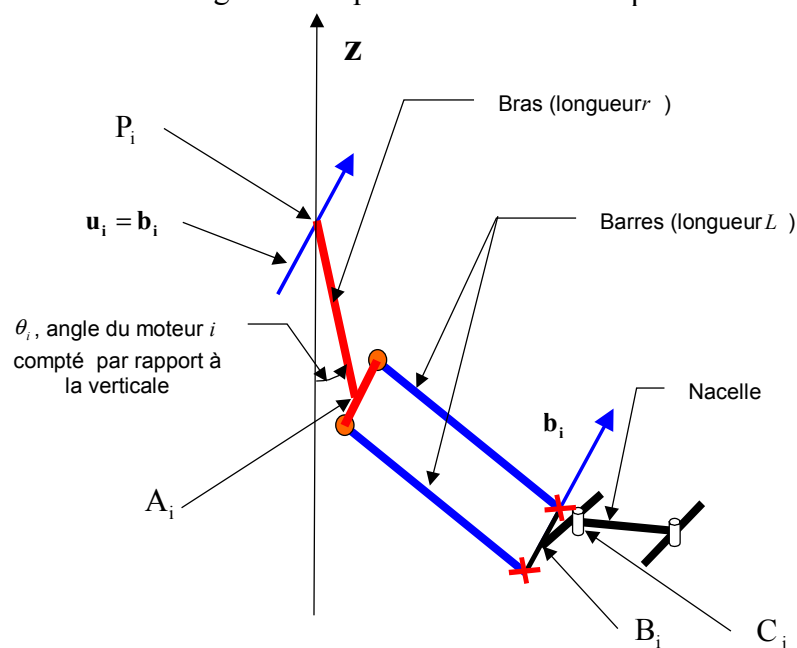


Figure V-22 : Paramétrage des bras.

### V.6.1.2. Modèle géométrique.

#### Modèle géométrique inverse.

Compte tenu du paramétrage proposé, la position des points  $P_i$  s'écrit :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x_{P_1} & x_{P_2} & x_{P_3} & x_{P_4} \\ y_{P_1} & y_{P_2} & y_{P_3} & y_{P_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V-6})$$

La position des points  $A_i$  s'écrit :

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{P}_i + \mathbf{Rot}(\mathbf{u}_i, q_i) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{bmatrix} \quad (\text{V-7})$$

où  $\mathbf{Rot}(\mathbf{u}_i, q_i)$  est la matrice traduisant la rotation autour de  $\mathbf{u}_i$  d'angle  $q_i$ .

Les vecteurs  $\mathbf{u}_i$  s'écrivent :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_2) & \cos(\alpha_3) & \cos(\alpha_4) \\ \sin(\alpha_1) & \sin(\alpha_2) & \sin(\alpha_3) & \sin(\alpha_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V-8})$$

Finalement :

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} - r \begin{bmatrix} \sin(\alpha_1)\sin(q_1) & \sin(\alpha_2)\sin(q_2) & \sin(\alpha_3)\sin(q_3) & \sin(\alpha_4)\sin(q_4) \\ -\cos(\alpha_1)\sin(q_1) & -\cos(\alpha_2)\sin(q_2) & -\cos(\alpha_3)\sin(q_3) & -\cos(\alpha_4)\sin(q_4) \\ \cos(q_1) & \cos(q_2) & \cos(q_3) & \cos(q_4) \end{bmatrix} \quad (\text{V-9})$$

Nous pouvons exprimer la position des points  $B_i$ , soit :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_D & x_D & x_D & x_D \\ y_D & y_D & y_D & y_D \\ z_D & z_D & z_D & z_D \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} \sin(\theta)-1 & \sin(\theta)+1 & -\sin(\theta)+1 & -\sin(\theta)-1 \\ -\cos(\theta) & -\cos(\theta) & \cos(\theta) & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V-10})$$

Le système d'équations reliant la position de la nacelle à la position des actionneurs est donné par la relation  $\|\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i\| = L$  pour  $1 \leq i \leq 4$ . Cette relation s'écrit :

$$\begin{aligned} & L_i \sin(q_i) + M_i \cos(q_i) + N_i = 0 \\ \text{avec :} & L_i = 2r[\sin(\alpha_i)\mathbf{P}_i \mathbf{B}_{i,x} - \cos(\alpha_i)\mathbf{P}_i \mathbf{B}_{i,y}] \\ & M_i = 2r\mathbf{P}_i \mathbf{B}_{i,z} \\ & N_i = r^2 + \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i^2 - L^2 \end{aligned} \quad (\text{V-11})$$

En effectuant le changement de variable  $t_i = \tan\left(\frac{q_i}{2}\right)$ , nous obtenons le système d'équations du second degré en  $t_i$  :

$$[N_i - M_i]t_i^2 + [2L_i]t_i + [M_i + N_i] = 0 \quad (\text{V-12})$$

Nous posons :

$$\Delta_i = L_i^2 - N_i^2 + M_i^2 \quad (\text{V-13})$$



Si les quatre  $\Delta_i$  sont tous positifs, la position de la nacelle est accessible et le vecteur des variables articulaires est donné par :

$$q_i = 2 \operatorname{Atan} \left[ \frac{-L_i \pm \sqrt{\Delta_i}}{N_i - M_i} \right] \quad (\text{V-14})$$

En réalité, l'équation du second degré amène à deux positions des actionneurs (solutions réelles) distinctes si  $\Delta_i > 0$ . Ces deux solutions sont représentées sur la Figure V-23. Elles peuvent être qualifiées « bras vers l'intérieur » et « bras vers l'extérieur ». La solution qui nous intéresse est celle que nous avons appelée « bras vers l'extérieur » car son volume de travail est plus grand pour la configuration considérée. Cette solution se traduit par le choix du plus petit  $q_i$  compte tenu du sens que nous avons choisi pour les vecteurs  $\mathbf{u}_i$ . Comme la fonction arctangente est croissante, cela implique le choix du plus petit  $t_i$  dans les solutions de l'équation du second degré :

$$q_i = 2 \operatorname{Atan} \left[ \frac{-L_i - \varepsilon \sqrt{\Delta_i}}{N_i - M_i} \right] \quad (\text{V-15})$$

avec :

$\varepsilon = 1$  pour  $N_i - M_i \geq 0$  et  $\varepsilon = -1$  sinon.

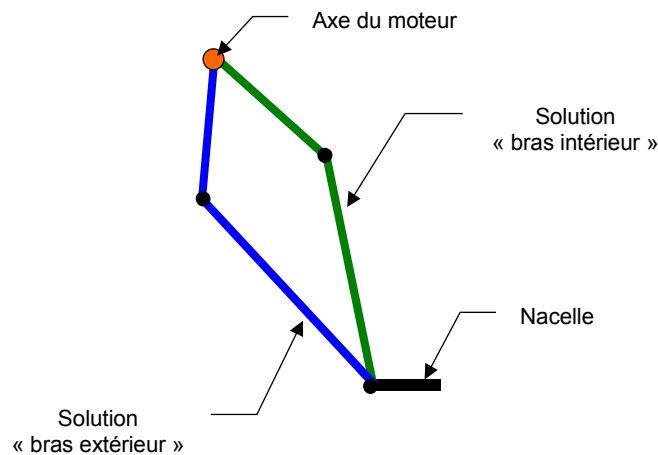


Figure V-23 : Choix de l'angle des moteurs.

#### Modèle géométrique direct :

La recherche du modèle géométrique direct peut être décomposée en deux étapes :

- Les  $q_i$  étant connus, nous pouvons calculer la position des points  $A_i$ .
- A partir de la position des points  $A_i$ , nous recherchons la position de la nacelle.

Nous avons essayé deux approches afin de trouver une expression analytique du modèle géométrique direct.

- Approche cartésienne.

Nous allons essayer une méthode utilisant les coordonnées cartésiennes. Avant de continuer, nous allons procéder à une simplification. En effet, dans le chapitre III, nous avons vu que si la nacelle reste parallèle à elle-même, nous pouvons utiliser un modèle contracté. Dans notre cas, la nacelle n'est pas rigide mais les côtés du H restent parallèles à eux-mêmes en fonctionnement nominal. Nous pouvons donc utiliser un modèle

contracté pour chacune des métachâînes. En fait, tout se passe comme si les paires de barres avaient comme origine des points  $A'_i$  (points  $A_i$  décalés) et étaient connectées aux points  $C_j$  (voir Figure V-25).

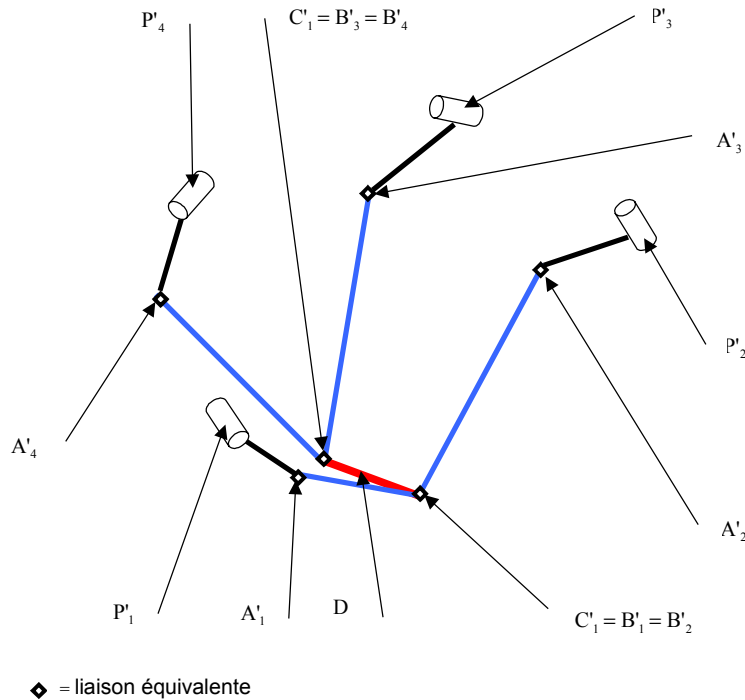


Figure V-24 : Modèle contracté.

Pour trouver la position de la nacelle, il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} (x + d \sin(\theta) - a'_{1x})^2 + (y - d \cos(\theta) - a'_{1y})^2 + (z - a'_{1z}) - L^2 = 0 \\ (x + d \sin(\theta) - a'_{2x})^2 + (y - d \cos(\theta) - a'_{2y})^2 + (z - a'_{2z}) - L^2 = 0 \\ (x - d \sin(\theta) - a'_{3x})^2 + (y + d \cos(\theta) - a'_{3y})^2 + (z - a'_{3z}) - L^2 = 0 \\ (x - d \sin(\theta) - a'_{4x})^2 + (y + d \cos(\theta) - a'_{4y})^2 + (z - a'_{4z}) - L^2 = 0 \end{cases} \quad (V-16)$$

La résolution de ce système aboutit à la résolution d'un polynôme de degré 8, et nous n'obtenons pas de solution analytique par cette méthode.

- Approche géométrique.

Nous pouvons essayer une approche géométrique pour la recherche de la position de la nacelle. De par la construction du mécanisme, les points  $C_j$  sont contraints chacun à se déplacer sur un cercle. En effet, le point  $C_1$  est contraint de se déplacer sur un cercle ayant pour centre le milieu du segment  $A'_1A'_2$  (soit  $A'_{12}$ ) et pour rayon  $\sqrt{L^2 - \frac{(A'_1A'_2)^2}{4}}$ . Le même raisonnement peut être tenu pour le point  $C_2$ . Le problème se résume donc à trouver un segment de longueur  $2d$ , perpendiculaire à  $\mathbf{z}$  et dont les extrémités appartiennent à deux cercles (voir Figure V-25). Nous n'avons pas trouvé de solution analytique à ce problème qui semble simple en apparence.

En conclusion, pour cette machine, nous n'avons pas trouvé d'expression analytique du modèle géométrique direct. La seule manière de connaître la position de la nacelle en fonction de la position des moteurs est d'utiliser une méthode numérique. Ces méthodes sont fréquemment utilisées en robotique parallèle afin d'obtenir le modèle géométrique direct dont l'expression analytique n'existe pas.

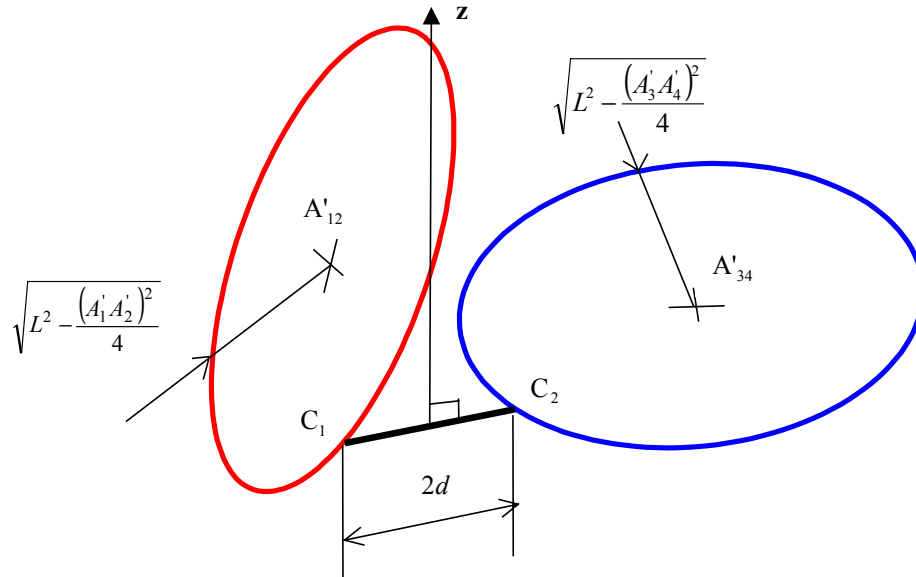


Figure V-25 : Approche géométrique.

Remarque :

Une alternative aux méthodes dont la convergence peut être aléatoire au voisinage de singularités est d'utiliser des capteurs additionnels ([TANC\_95], [INOUE\_85] et [ARAI\_90]) afin de connaître les variables articulaires de certaines articulations passives. Dans le cas du robot H4s, les articulations pivot au niveau de la barre centrale du H sont facilement instrumentables à l'aide de capteurs angulaires. La lecture de l'angle au niveau de ces articulations fournit directement la valeur de  $\theta$ . La résolution analytique du modèle géométrique direct peut alors être menée.

V.6.1.3. Modèle cinématique.

Les modèles cinématiques et la manière de les établir sont similaires à ceux présentés dans le chapitre II. Nous écrivons la relation d'équiprojectivité sur chacune des barres :

$$\mathbf{v}_{A_i} \bullet \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i = \mathbf{v}_{B_i} \bullet \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \quad (V-17)$$

avec  $j = 1$  pour  $i \in \{1,2\}$  et  $j = 2$  pour  $i \in \{3,4\}$ .

Ce qui donne, sous la forme matricielle habituelle :

$$\mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_q &= \text{diag}([(A_i B_i \times P_i A_i) \bullet \mathbf{u}_i]) \\ \dot{\mathbf{q}} &= [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4] \\ \mathbf{J}_x &= [{}^t A_i B_i \quad (A_i B_i \times DC_j) \bullet \mathbf{z}] \\ \dot{\mathbf{x}} &= [\dot{x}_D \quad \dot{y}_D \quad \dot{z}_D \quad \dot{\theta}] \end{aligned} \quad (V-18)$$

A partir de l'équation (V-18) nous établissons les modèles cinématiques direct et inverse comme dans les chapitres précédents.

### V.6.2. Optimisation.

L'objectif que nous poursuivons est de réaliser un prototype nous permettant de valider le concept du H4. Les paragraphes suivants traiteront donc du pré-dimensionnement d'un tel robot.. Contrairement aux applications précédentes, nous avons choisi d'utiliser une méthode rapide semi-graphique afin de choisir à la fois l'arrangement et les dimensions afin d'obtenir un volume de travail donné. Pour cela, nous allons proposer une méthode de dimensionnement pour les robots Delta rotatifs que nous adapterons au cas du robot H4s rotatif. Cette méthode géométrique de dimensionnement s'apparente à celle présentée dans [HUAN\_00].

#### V.6.2.1. Optimisation de la transformation de vitesse d'un robot Delta.

Le problème que nous nous posons est (voir Figure V-26), pour un volume de travail cylindrique, comment, dans un plan passant par l'axe du cylindre, placer un moteur rotatif afin d'avoir la meilleure transformation des vitesses et quelles sont les longueurs ( $r$ ) des bras et des barres ( $L$ ) correspondantes.

Pour que la transformation de vitesse entre les bras et les barres soient correctes, il faut que la direction des barres s'écarte le moins possible du plan normal au bras. Ceci est en contradiction avec le fait que, pour avoir un volume de travail étendu, le débattement angulaire des barres doit être important. Comme dans les optimisations que nous avons déjà menées, cela doit faire l'objet d'un compromis.

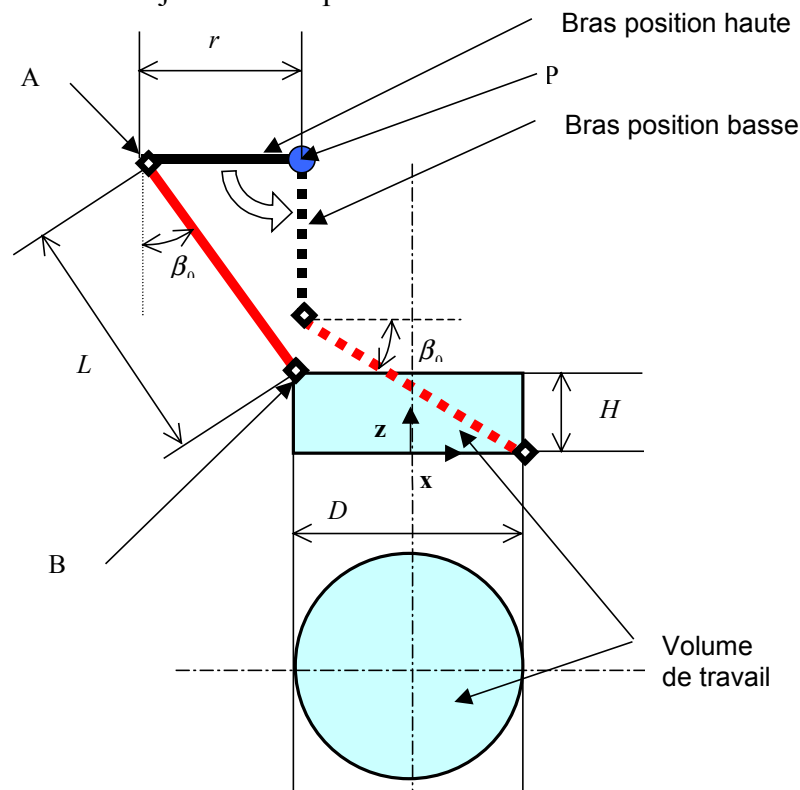


Figure V-26 : Etude géométrique.

Nous avons traduit ce compromis sous forme géométrique en posant la condition que l'angle entre la projection des barres sur le plan balayé par le bras de levier et la normale au bras de levier soit, en valeur absolue, plus petit qu'une valeur fixée à l'avance  $\beta_0$ .

D'après la Figure V-26 nous pouvons écrire les deux relations géométriques :

$$\begin{cases} D - L \cos \beta - r + L \sin \beta = 0 \\ L \sin \beta_0 + r - L \cos \beta_0 - H = 0 \end{cases} \quad (V-19)$$

Nous calculons maintenant l'évolution de  $|\beta|$  (Figure V-27) et de  $\frac{L}{r}$  (Figure V-28), valeur absolue de l'angle entre la normale à la barre qui appartient au plan balayé par le bras et le bras, pour un rapport  $\eta = \frac{H}{D}$  et un angle initial  $\beta_0$  donnés.

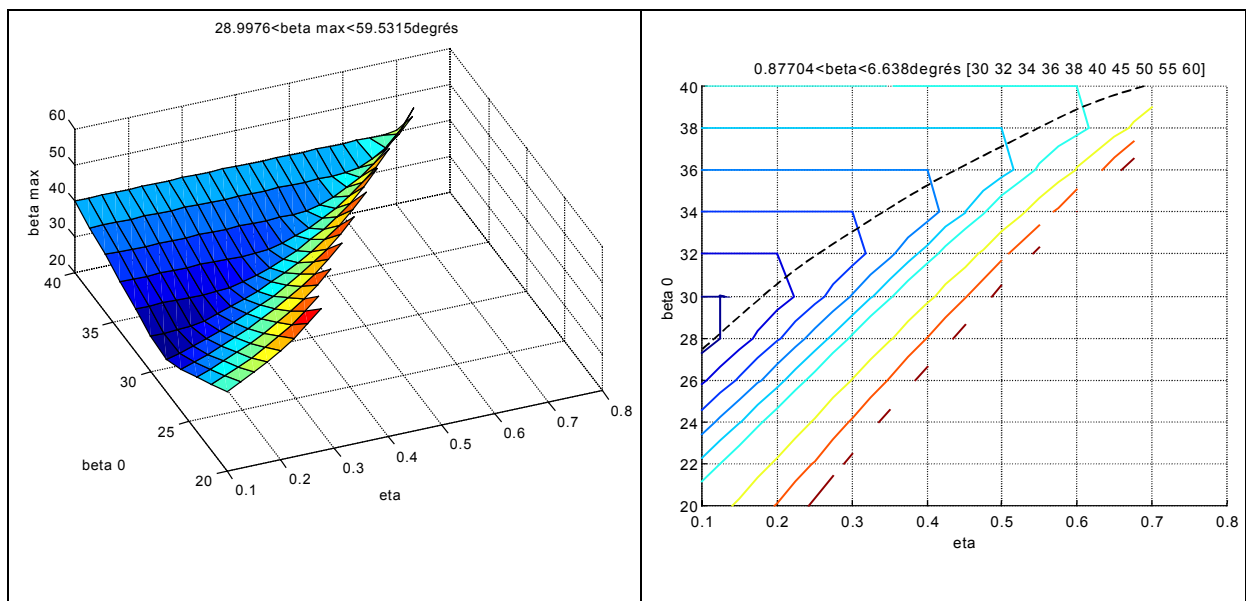


Figure V-27 : Evolution de  $\beta_{\max}$  en fonction de  $\beta_0$  et  $\eta$ .

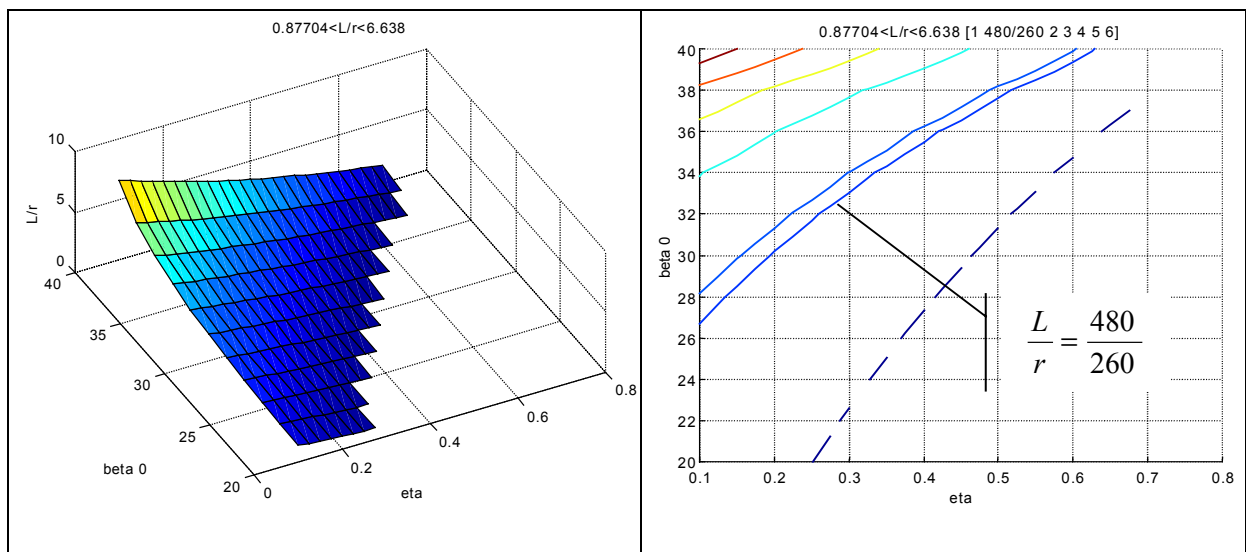


Figure V-28 : Evolution du rapport  $L/r$  en fonction de  $\beta_0$  et  $\eta$ .

Sur ces deux figures, nous constatons que :

- Pour respecter les hypothèses formulées, nous ne devons pas avoir  $\eta > 0.6$  ce qui signifie que nous avons impérativement  $H \leq 0.6D$ .
- Pour avoir une bonne transformation des vitesses sur le volume de travail, les barres doivent rester proches de la perpendiculaire au bras aux quelles elles sont reliées. Par conséquent, nous devons avoir l'angle  $\beta$  le plus petit possible. Cette condition est notée sur la Figure V-27 par la courbe en pointillés.
- Grâce à la courbe décrite ci-dessus, pour un rapport  $\eta$  donné, nous pouvons déduire l'angle  $\beta_0$  optimal au sens de la transformation des vitesses.
- Sur la Figure V-28, nous avons tracé le rapport  $\frac{L}{r} = \frac{480}{260}$ . Ce rapport correspond aux dimensions du prototype initial du robot Delta. Si nous comparons la relation entre  $\beta_0$  et  $\eta$  qui en découle, nous constatons qu'elle est pratiquement confondue avec celle de la courbe donnant la relation entre  $\beta_0$  et  $\eta$  pour l'angle  $\beta_0$  optimal (Figure V-27).

La conclusion de cette analyse préliminaire est que, soit à partir du volume accessible d'un robot Delta, soit à partir de la longueur des bras ou des barres, nous sommes capables d'effectuer un placement rapide des moteurs permettant d'avoir une bonne transformation des vitesses.

#### V.6.2.2. Application au H4s rotatif.

Nous voulons réaliser un prototype pour valider le concept du H4s rotatif. Nous utilisons des bras et des barres identiques à ceux du robot Delta à savoir  $r = 0,26m$  et  $L = 0,48m$ . Ces dimensions, comme nous venons de le voir dans l'analyse préliminaire correspondent à un rapport optimal pour la transformation des vitesses.

Nous avons fixé  $d$  à sa valeur minimale afin d'éviter les collisions entre les barres tout en ayant un encombrement restreint de la nacelle, soit  $d = 0,06m$  pour des rotations de  $\pm 45^\circ$ . Nous allons maintenant chercher pour un volume accessible de hauteur  $H = 0,1m$  quels sont le diamètre et le meilleur placement des moteurs.

Si nous faisons abstraction des rotations, d'après les résultats de l'analyse de la transformation des vitesses d'un robot Delta, nous obtenons  $D = 0,42m$  et  $\cos \beta_0 - \sin \beta_0 = \frac{1}{3}$ . Ce qui correspond à  $\beta_0 = 31.4^\circ$ . Avec les notations de l'analyse préliminaire, la position du point P est :

$$\mathbf{P} = {}^t[-0,2 \quad 0 \quad 0,51] \quad (\text{V-20})$$

Maintenant, nous allons calculer le diamètre du volume de travail en incluant les rotations de la nacelle. La position extrême des points C est atteinte lorsqu'ils sont situés sur le diamètre  $D = 0,42m$ . Sur la Figure V-29, les arcs de cercle représentent les positions balayées par les points C lors d'une rotation de  $\pm 45^\circ$ . La position extrême du centre de la nacelle est donnée par la courbe en pointillés. Le cercle en trait fort est le cercle de diamètre maximal inscrit dans la courbe en pointillés. Dans notre cas, son diamètre est  $D' = 0,330m$  et son centre est décalé de  $0,045m$  vers le haut de la figure.

Nous allons préciser le placement des moteurs. Pour cela, nous allons nous appuyer sur la géométrie et les repères de la Figure V-30. En utilisant les notations que nous avons adoptées sur la Figure V-21, nous avons des informations sur la position des points  $P_i$ . En effet, chaque point  $P_i$  est situé sur un cercle de rayon  $\rho$  et de centre  $O_i$ , avec :

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} -60 & 60 & 60 & -60 \\ -45 & -45 & 45 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \rho = 0,2m \quad (\text{V-21})$$

L'altitude du volume accessible est comprise entre  $-0,51m$  et  $-0,41m$ . Nous rappelons que le diamètre de ce volume accessible est  $D' = 0,33m$ .

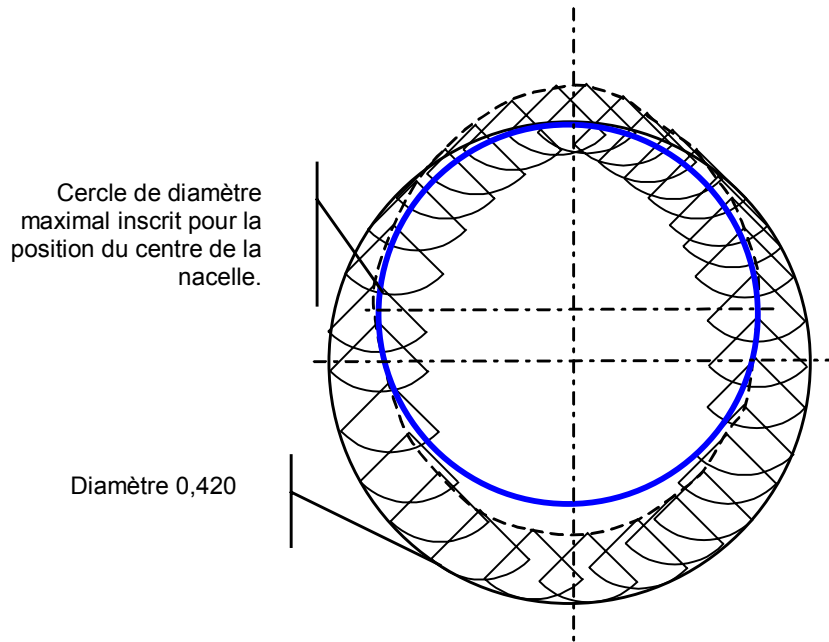


Figure V-29 : Prise en compte des rotations de la nacelle.

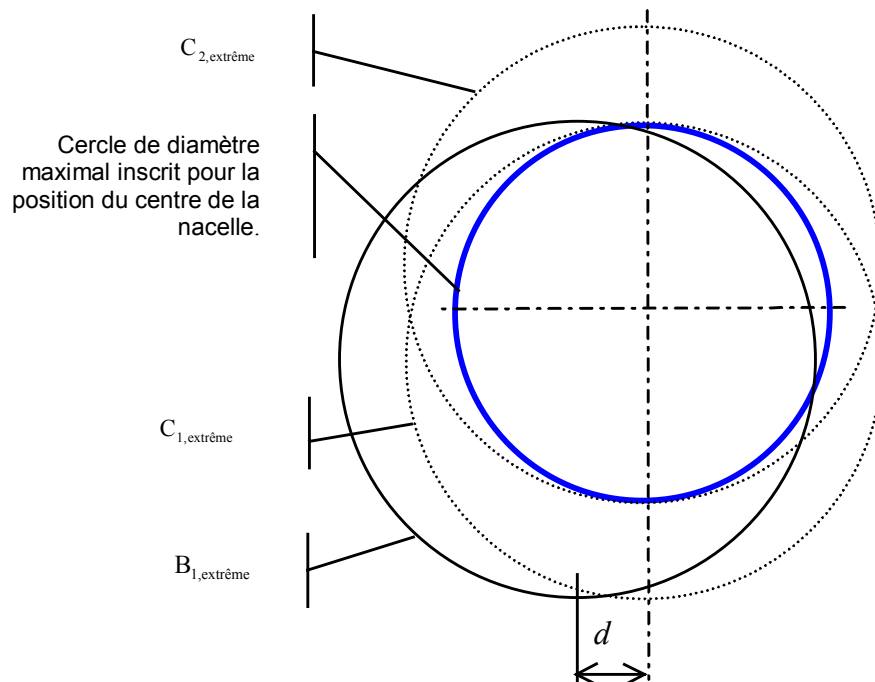


Figure V-30 : Placement des moteurs.

Les paramètres restant à déterminer sont les angles  $\alpha_i$ . Ils ont été discrétisés comme indiqué sur la Figure V-31 par pas de 45 degrés pour les valeurs qui induisent un placement du point  $P_i$  du côté opposé à la nacelle par rapport au point  $B_i$ .

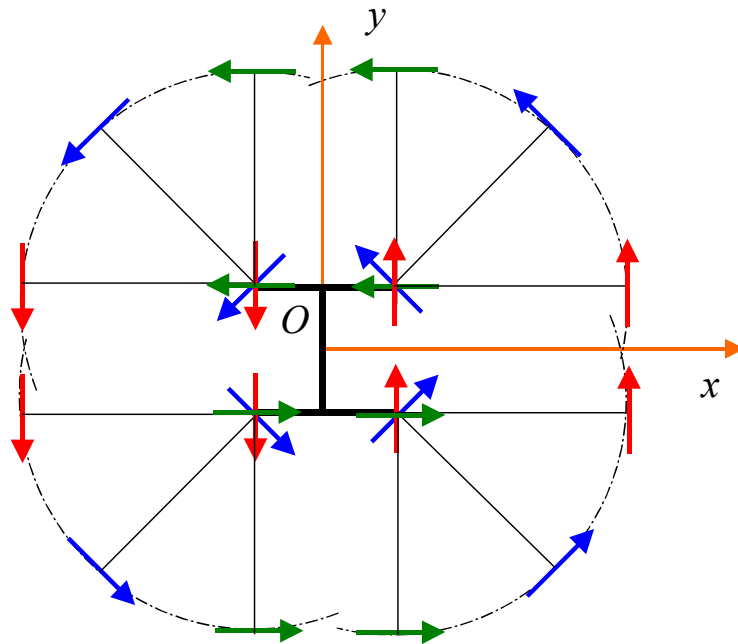


Figure V-31 : Discretisation des  $\alpha_i$ .

Nous sommes amené à considérer  $4^3$  solutions. Parmi ces solutions, la condition de l'équation (V-4) nous permet d'effectuer un premier tri sur les solutions valides d'un point de vue cinématique. D'autre part, en considérant les symétries nous trouvons plusieurs représentants pour une même machine. Il nous reste alors les configurations valides représentées sur la Figure V-32.

Configuration A	Configuration B	Configuration C	Configuration D
Configuration E	Configuration F	Configuration G	Configuration H
Configuration I	Configuration J	Configuration K	Configuration L

Figure V-32 : Solutions valides.



Chacune des solutions valides proposées ci-dessus est évaluée en utilisant le critère du conditionnement de la matrice jacobienne. Les résultats sont présentés dans le tableau de la Figure V-33.

Configuration	Vérification du volume accessible	Meilleur conditionnement* à l'intérieur du cylindre	Plus mauvais conditionnement* à l'intérieur du cylindre	Rapport entre le plus mauvais conditionnement* et le meilleur.
A	OK	3.13	36.44	11.65
B	OK	2.03	19.12	9.42
C	OK	2.22	11.42	5.15
D	OK	1.40	17.01	12.16
<b>E</b>	<b>OK</b>	<b>1.74</b>	<b>6.71</b>	<b>3.85</b>
F	OK	1.81	14.12	7.78
G	OK	2.03	9.07	4.46
H	OK	1.40	14.02	10.02
<b>I</b>	<b>OK</b>	<b>1.90</b>	<b>5.69</b>	<b>2.99</b>
J	OK	2.32	14.90	6.42
K	OK	1.83	9.03	4.93
L	OK	2.17	9.00	4.14

Figure V-33 : Evaluation des arrangements.

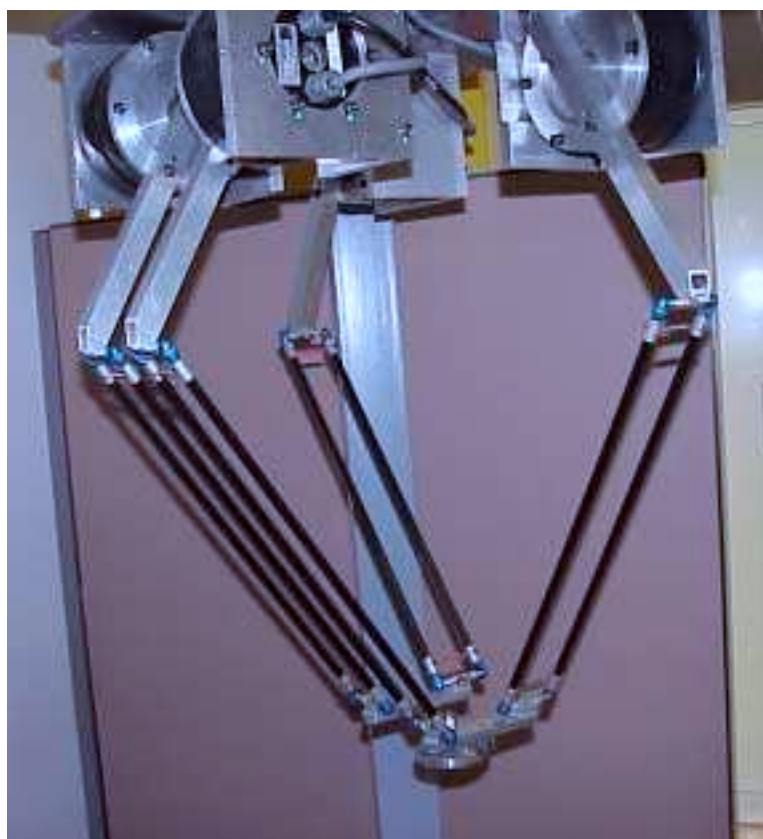


Figure V-34 : Prototype du robot H4s.

\* Matrice jacobienne normalisée. Les valeurs de la quatrième colonne sont divisées par une grandeur caractéristique du mécanisme.

### V.6.3. Conclusion.

Sur le tableau de la Figure V-33, nous voyons que la configuration I est celle qui présente le plus petit conditionnement maximal sur le volume de travail. De plus, le rapport entre le plus grand et le plus petit conditionnement sur le volume de travail est le plus faible, ce qui garantit des performances homogènes sur l'ensemble du volume de travail. La configuration E, bien que théoriquement moins favorable que la configuration I, possède de bonnes caractéristiques.

Pour valider ces résultats, nous avons construit un prototype modulaire (position des moteurs et angle des rotules réglables). La configuration I est actuellement en cours de test (voir photo Figure V-34).

## V.7. Modélisation et dimensionnement d'un H4 asymétrique.

Nous allons maintenant effectuer le dimensionnement d'un H4 asymétrique linéaire. Nous avons vu dans le paragraphe « étude des domaines d'application et déclinaisons » que cette architecture pouvait être adaptée à l'usinage 5 axes. Nous proposons ici une pré-étude d'une machine outil de ce type. Le but de cette pré-étude est la réalisation d'un prototype au sein du LIRMM. Compte tenu des coûts importants des organes nécessaires à la réalisation d'une machine d'usinage coupant du métal, nous nous sommes orientés vers une machine légère de type machine à bois.

### Remarque :

Le concept H4 asymétrique peut être, comme le concept symétrique, décliné pour des tâches de *pick and place* avec orientation. Un exemple d'une telle déclinaison est représenté sur la Figure V-35.

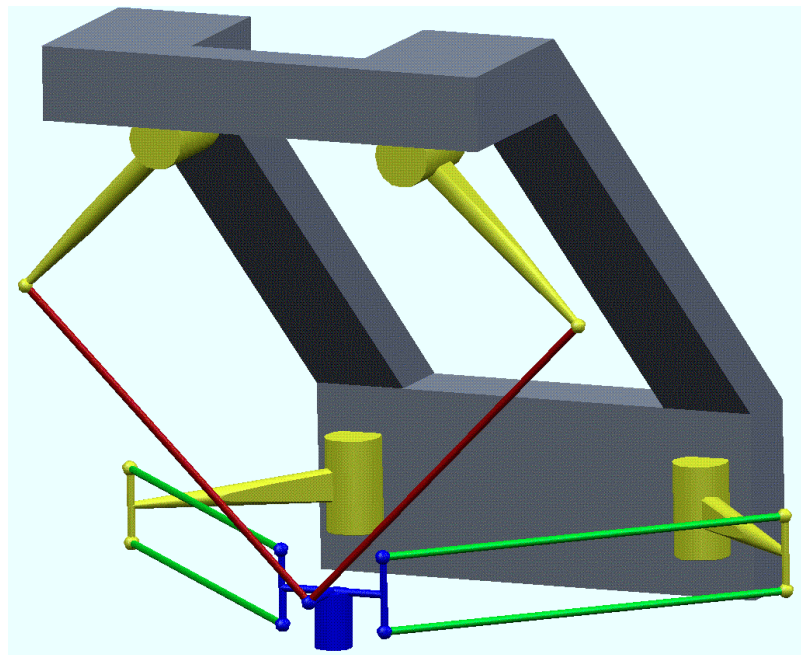


Figure V-35 : Utilisation du concept asymétrique pour des tâches de pick and place.

### V.7.1. Modélisation.

#### V.7.1.1. Paramétrage.

La machine que nous allons pré-dimensionner est un H4 asymétrique à motorisation linéaire (Figure V-17) qui s'adresse au domaine de la machine-outil. Les moyens nécessaires à la construction d'une machine-outil étant sans commune mesure avec ceux dont dispose un laboratoire, l'étude est menée pour une machine à bois, moins onéreuse que pour machine coupant du métal.

Le type d'architecture que nous avons retenu pour ce prototype est celui de la Figure V-17. Le paramétrage que nous avons adopté est représenté sur la Figure V-36. Dans la suite de cette pré-étude, nous avons choisi d'utiliser un axe **C** sur la pièce.

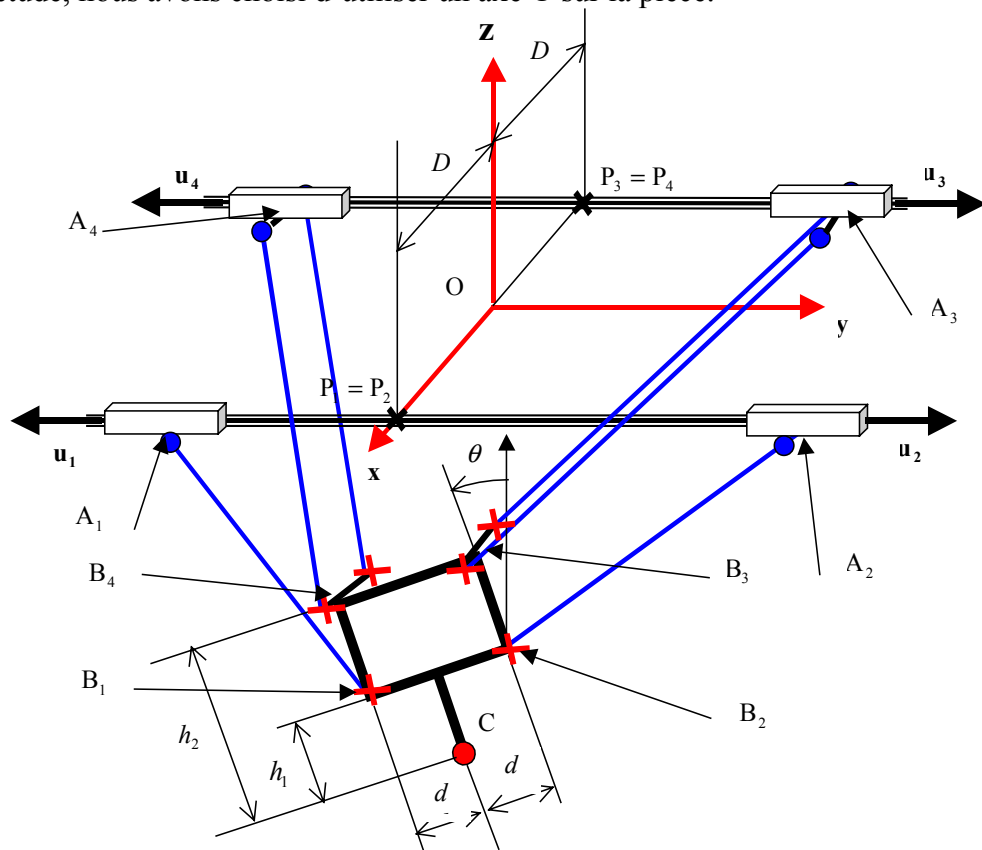


Figure V-36 : Paramétrage de l'architecture choisie.

#### V.7.1.2. Modèle géométrique.

D'après les notations de la Figure V-36, le modèle géométrique inverse s'écrit, si le point est accessible et en ne conservant que la plus grande des deux solutions pour  $q_i$  :

$$q_i = -\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i + \sqrt{(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i)^2 - \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i^2 + L^2} \quad (\text{V-22})$$

Le système composé des quatre équations (V-22) pour  $1 \leq i \leq 4$  constitue de modèle géométrique inverse du H4a considéré. A priori, il n'existe pas d'expression analytique donnant le modèle géométrique direct. Seules des méthodes itératives permettent de calculer la position et l'orientation de la nacelle connaissant la position des moteurs. Les travaux de

Luc Rolland<sup>5</sup> sur le robot Kanuk ont recensé 8 configurations possibles de la nacelle pour une position donnée des actionneurs.

### V.7.1.3. Modèle cinématique.

Comme pour toutes les architectures que nous avons modélisées jusqu'à présent, nous utilisons la propriété d'équi-projectivité des vitesses d'un solide appliquée à chacune des quatre barres, soit sous forme matricielle :

$$\mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_q &= \text{diag}(\mathbf{u}_i \bullet \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i) \\ \mathbf{J}_x &= \begin{bmatrix} {}^t \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i & \mathbf{C} \mathbf{B}_i \times \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \bullet \mathbf{x} \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{q}} &= {}^t [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4] \text{ et } \dot{\mathbf{x}} = {}^t [\dot{x}_C \quad \dot{y}_C \quad \dot{z}_C \quad \dot{\theta}] \end{aligned} \quad (\text{V-23})$$

Comme pour toutes les machines que nous avons modélisées précédemment, nous déduisons de l'équation (V-23) les modèles cinématiques direct et inverse faisant intervenir la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$ .

### V.7.2. Optimisation.

Nous utilisons les résultats obtenus dans la phase de modélisation afin de déterminer une machine optimale pour un cahier des charges donné.

#### V.7.2.1. Volume de travail.

Une section droite de ce volume de travail perpendiculairement à l'axe  $y$  est un carré de  $400\text{mm}$  de côté. La longueur du volume de travail (suivant  $y$ ), n'influe pas sur notre optimisation car, le comportement de la machine est le même quelle que soit la section considérée (perpendiculairement à l'axe  $y$ ). La plage de variation de l'angle  $\theta$  doit être de  $\pm 45^\circ$ . Comme pour l'étude de la partie « micro » du chapitre précédent, nous devons éviter les collisions entre la nacelle et la pièce usinée (voir Figure V-37).

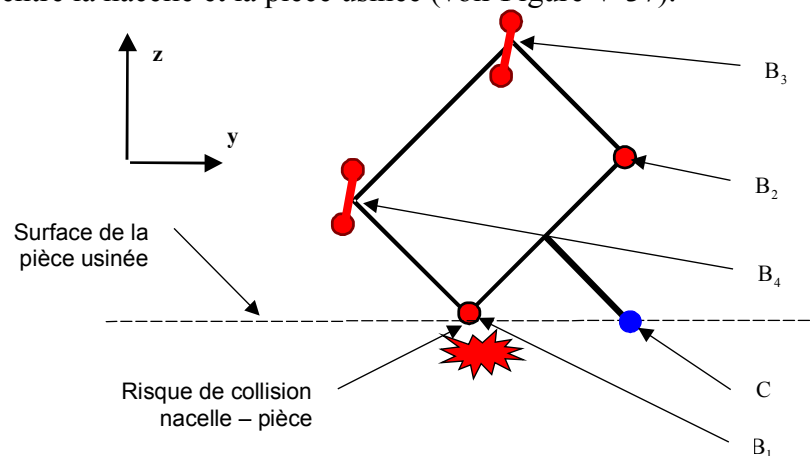


Figure V-37 : Collision nacelle – pièce.

<sup>5</sup> Source site Internet de Luc Rolland : <http://www.loria.fr/~rolland/>

### V.7.2.2. Méthode.

Comme pour la machine 3 axes, nous effectuons un balayage (suivant  $x$  et suivant  $z$ ) d'une tranche du volume de travail. Nous supposons que le centre du volume de travail appartient au plan médian des glissières. Afin d'éviter les collisions nacelle – pièce et pour tenir compte de l'encombrement des articulations, nous prendrons  $h_1 \geq 2d$ .

Les grandeurs que nous optimisons sont  $D$ ,  $d$ ,  $L$ ,  $h_2$  et  $z_m$ .  $z_m$  est l'altitude du centre du volume de travail. Nous fixons  $h_1$  à sa valeur minimale, soit  $h_1 = 2d$  car plus  $h_1$  est grand, plus le volume de travail se réduit pour une orientation maximale donnée. La Figure V-38 donne les limites de notre espace de recherche.

Grandeur	$D$	$d$	$L$	$h_2$	$z_m$
mini	200	100	0	$1.5d + 150$	-1000
maxi	750	300	1500	$4d$	-400

**Figure V-38 : Plage de variation des grandeurs à optimiser.**

### V.7.2.3. Résultats.

Nous recherchons la meilleure machine au sens du meilleur conditionnement maximal de la matrice jacobienne sur le volume de travail de la machine. Les résultats obtenus dans le Chapitre II montrent que, si nous utilisons directement le maximum du conditionnement de la matrice jacobienne comme critère, la procédure d'optimisation tend à allonger les barres au maximum afin d'obtenir de faibles variations du conditionnement sur le volume de travail. Ce résultat n'est pas satisfaisant car l'allongement des barres se fait au détriment des efforts dans les barres, ce qui est préjudiciable pour la rigidité de la machine.

Pour éviter de converger vers un tel cas, le critère que nous minimisons sur le volume de travail est le produit du conditionnement maximal (de la matrice jacobienne normalisée) et de la longueur des barres. Cette optimisation donne les valeurs suivantes :  $D = 300mm$ ,  $d = 100mm$ ,  $L = 1000mm$ ,  $h_2 = 300mm$  et  $z_m = -600mm$ .

Cette machine (Figure V-39) présente des risques de collisions entre les barres, en particulier entre les parallélogrammes et les barres simples. Ce problème peut être résolu en décalant suivant  $x$  les rotules sur la nacelle. Pour compenser ce décalage, il faut déplacer de la même quantité les rotules correspondantes au niveau de la liaison glissière.

Les résultats donnés par l'optimisation sont prometteurs. Ils demandent à être affinés en prenant en compte des variantes de la géométrie que nous venons d'étudier. En effet, afin de simplifier le paramétrage, nous avons choisi de relier les deux parallélogrammes à la même glissière. Il serait intéressant d'étudier le cas où ils ne sont pas reliés à la même glissière. Nous avons également choisi d'utiliser des barres de longueur identique pour les parallélogrammes et pour les barres simples. Ce choix permet de réduire le nombre de paramètres nécessaires à l'optimisation mais il n'est pas très judicieux du point de vue de la géométrie puisque, logiquement, sur la Figure V-36, les barres 1 et 2 devraient être plus longues que les deux autres.

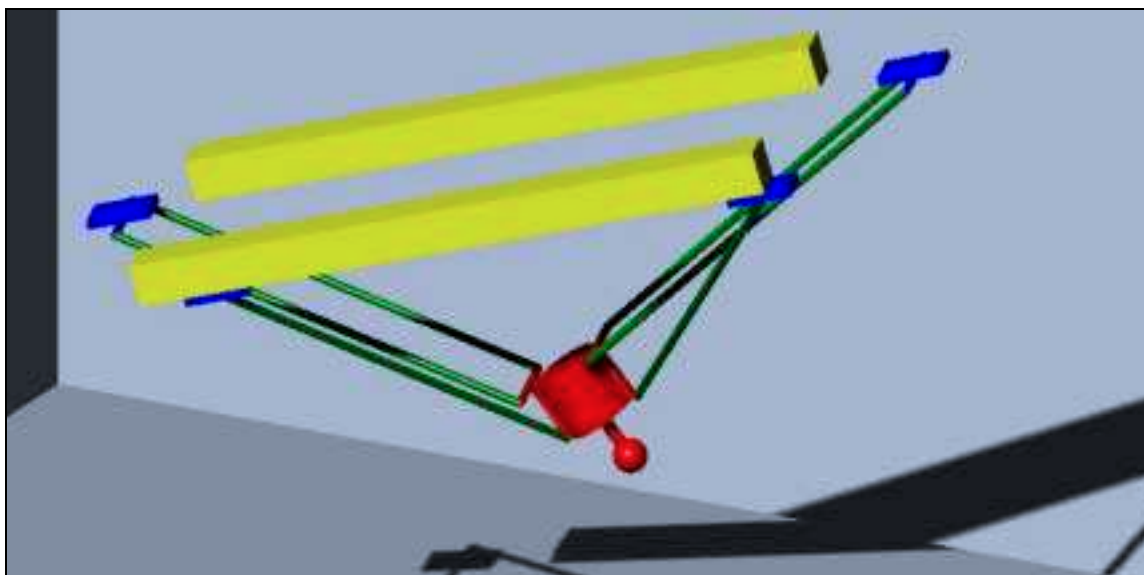


Figure V-39 : H4a optimisé (conditionnement et longueur des barres).

## V.8. Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons évoqué la genèse d'une nouvelle famille prometteuse de nouvelles architectures parallèles à quatre degrés de liberté se décomposant en trois translations et une rotation autour d'un axe fixe. Nous avons étudié les conditions géométriques garantissant le fonctionnement cinématique de cette famille dont plusieurs variantes ont été proposées. Nous avons présenté une procédure géométrique rapide de dimensionnement d'un robot Delta à partir de son volume de travail. Nous avons adapté cette procédure à la variante symétrique à actionneurs rotatifs du robot H4. Ensuite, nous avons présenté une pré-étude d'une structure asymétrique à actionneurs linéaires pour réaliser des opérations d'usinage 5 axes.

Un prototype de manipulateur symétrique rotatif (H4s) a été construit. Il est actuellement en test au LIRMM. Il a fait l'objet de travaux de thèse portant sur l'étude de sa commande.

Un prototype de machine-outil basé sur le H4a à actionneurs linéaires devrait être étudié plus en détail et construit l'année prochaine également dans le cadre de travaux de thèse.

# Conclusion générale.

---

Les travaux présentés dans ce mémoire présentent une approche mécanique des structures parallèles. Les premières adaptations de ces structures, utilisées en robotique, dans d'autres domaines ont été les micro-mécanismes. Ce mémoire s'intéresse à l'adaptation aux machines-outils des mécanismes parallèles utilisés en robotique. Les micro-mécanismes vont dans le sens d'une diminution de l'échelle des robots tandis que les machines vont dans le sens de son augmentation. Cependant, la conception et le dimensionnement de ces machines ne se réduisent pas à considérer uniquement des machines homothétiques des robots existants. En effet, les performances attendues des machines-outils sont différentes de celles des robots parallèles. Les accélérations et les vitesses sont moindres, mais les caractéristiques de rigidité et de précision doivent être comparables à celles des machines conventionnelles existantes. Ces caractéristiques sont sans commune mesure avec celles des robots.

Nous nous sommes attaché à proposer une démarche de sélection de mécanismes parallèles pertinents et à proposer une démarche et des outils de conception afin de pré-dimensionner des machines-outils parallèles dont la dynamique est bien meilleure que celle des machines cartésiennes existantes. Nous avons ensuite appliqué cette démarche à deux cas particuliers relatifs à l'usinage 3 et 5 axes.

Nous avons pré-dimensionné des machines dont l'adéquation de la structure avec la tâche à réaliser était la meilleure possible, ce qui n'est pas toujours le cas des machines du commerce présentées dans le premier chapitre qui se veulent plutôt universelles et qui n'ont encore rien prouvé en termes d'efficacité d'usinage. De plus, leur ratio encombrement – volume de travail est moins bon que celui des machines universelles conventionnelles.

Dans le troisième chapitre, nous avons choisi et dimensionné une structure permettant de réaliser des usinages 3 axes de manière plus efficace que les machines 5 axes existantes en appliquant notre démarche. Sur la base des résultats de ce chapitre, la société Renault Automation/Comau a construit le prototype de la machine UraneSX qui permet d'effectuer des opérations PLT 3 axes et dont les performances dynamiques (au minimum 3,5g d'accélération en translation de la broche) sont nettement supérieures aux machines conventionnelles existantes.

Dans le quatrième chapitre nous avons recherché de nouvelles solutions basées sur des architectures parallèles afin de répondre au besoin de l'usinage 5 axes et mis en évidence les points forts du concept « macro-micro » reposant sur la mise en série d'une structure cartésienne 3 axes et d'une structure parallèle 5 axes. L'étude de la structure parallèle « micro » a ensuite été menée en termes de performances dynamiques, en utilisant à nouveau la démarche proposée, comme dans le troisième chapitre.

Enfin, dans le cinquième chapitre, nous proposons une nouvelle architecture parallèle : l'architecture H4, pour laquelle nous avons recherché les conditions géométriques de

fonctionnement. Nous en avons ensuite présenté quelques exemples de déclinaison dans le domaine de la robotique de manipulation et dans le domaine de la machine-outil pour lesquels nous avons réalisé deux pré-dimensionnements. Un prototype a été construit afin de valider le concept H4 symétrique à motorisation rotative pour la robotique de manipulation.

Ces travaux menés pendant trois années au LIRMM ont présenté une approche différente des applications à l'usinage des mécanismes parallèles en ne se restreignant pas aux simples hexapodes. L'utilisation de moteurs linéaires (de préférence fixes pour améliorer la dynamique et l'évacuation de la chaleur produite) semble indiscutable tant les gains en simplicité de leur intégration, les poussées et les raideurs atteintes sont sans commune mesure avec ceux des moteurs rotatifs qui nécessitent l'utilisation d'un système vis-écrou.

Ces travaux ont également dégagé de multiples perspectives, notamment par rapport à la nouvelle architecture H4. Maintenant que nous en avons validé le concept pour la robotique de manipulation, il serait intéressant :

- D'explorer l'ensemble des agencements possibles pour le H4 afin de sélectionner le plus performant pour une application donnée.
- De réaliser des optimisations et des dimensionnements plus approfondis correspondant à des cas concrets.
- Et surtout de dimensionner et de construire une machine-outil 5 axes basée sur ce concept (ce à quoi il était destiné à la base) afin de prouver sa viabilité et de comparer ses performances par rapport aux autres machines parallèles 5 axes.

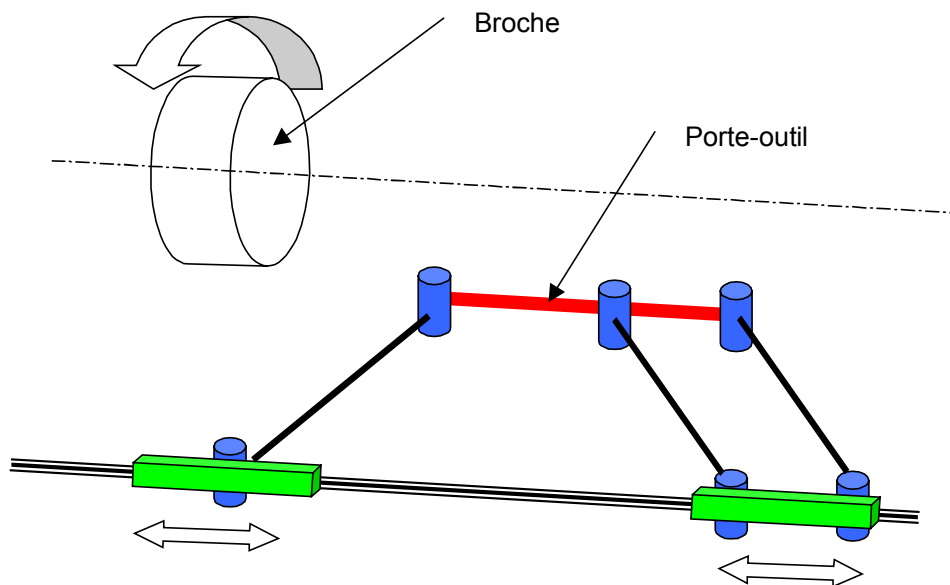
Concernant l'architecture Delta linéaire étudiée dans le deuxième chapitre, il ressort de l'étude de l'agencement des liaisons glissières que le « cas hybride » présente de bonnes caractéristiques du point de vue du conditionnement de la matrice jacobienne. Une étude plus détaillée de ce cas mériterait d'être menée.

Volontairement, dès l'introduction, nous avons exclu les machines de tournage. Nous pensons que des solutions à base d'architectures parallèles peuvent améliorer les performances dynamiques de ces machines. A notre connaissance et à ce jour personne n'a proposé de telle solution. Un exemple de solution est l'utilisation d'un mécanisme plan à deux (ou trois) degrés de liberté, l'axe de la broche étant contenu dans le plan du mécanisme. Une machine de ce type est schématisée sur la Figure V-40. A priori, avec les performances dynamiques du sous-ensemble parallèle portant l'outil, il serait possible d'usiner directement des cames (ou des pièces qui ne sont pas purement de révolution) sur cette machine si la broche est indexée en rotation, autrement dit si il existe un axe **C** sur la broche). Concrètement, cette machine permettrait de réaliser des pièces qui ne sont pas nécessairement de révolution et dont l'équation de la surface est connue en coordonnées cylindriques.

Nous terminerons en citant un article de Jean-Pierre Merlet [MERL\_00] dont le titre est « *Kinematics' not dead* » : « A mon avis, la puissance de calcul des ordinateurs et les lois de commande seraient utilisées à meilleur escient si elles servaient à développer un comportement intelligent du robot dans son ensemble sans se soucier du contrôle bas niveau des mouvements de base du robot ». En fait, dans cette approche, la transformation du mouvement est 'gérée' par la cinématique du mécanisme et non pas par un calculateur contrôlant le mouvement de plusieurs moteurs. Ceci met en évidence la nécessité de structures



mécaniques dont la cinématique est en adéquation parfaite avec la tâche à effectuer. C'est là que se trouvent les erreurs de jeunesse des premières machines-outils parallèles. En effet, on a commencé par construire des machines 5 axes dont l'architecture était homothétique de celle des robots parallèles existants en changeant uniquement le dimensionnement des organes mécaniques. Les performances attendues n'étaient pas au rendez-vous, la réussite commerciale non plus. Nous pensons que la conception des machines-outils est en train de rentrer dans une nouvelle phase en meilleure adéquation avec, d'une part les tâches d'usinage à effectuer et d'autre part les performances (mais aussi les limitations) des mécanismes parallèles. Ces limitations vont certainement conduire à des architectures hybrides série-parallèle qui permettront de combiner deux concepts aux comportements antagonistes dans une synergie bénéfique pour les performances. D'ailleurs les premières machines que nous appellerons de deuxième génération, ont déjà vu le jour que ce soit Hexapode CMW, Tricept, Eclipse ou UraneSX.



**Figure V-40 : Tour parallèle à mécanisme parallèle.**

Enfin, nous ne pouvons pas conclure sans évoquer les machines M-Konzept et Sprint Z3, que nous qualifierons de troisième génération et qui représentent les machines outils de demain. Ces machines utiliseront des moteurs linéaires et seront dédiées à l'usinage rapide afin d'être rentables. Elles seront hybrides de type parallèle-série, le sous ensemble parallèle possédant un faible nombre de degrés de liberté ce qui le rend plus simple et plus performant.



# BIBLIOGRAPHIE



# Bibliographie

---

- [ARAI\_90] Arai T., Cleary K.  
Design, analysis and construction of a prototype parallel link manipulator,  
IEEE Int. Workshop on Intelligent Robots and Systems (IROS),  
Ibaraki, Japan, 3-6 Juillet 1990, volume 1, p. 205-212
- [CARR\_00] Carretero J.A., Podhorodeski R.P., Nahon M.A., Gosselin C.M.  
Kinematic analysis and optimization of a new three degree-of-freedom spatial  
parallel manipulator,  
Journal of mechanical design, mars 2000, vol 122, p.17-24
- [CHED\_98] Chedmail P., Dombre E., Wenger P.  
La CAO en robotique,  
Editions Hermès - 1998
- [CLAV\_88] Clavel R.  
DELTA, a fast robot with parallel geometry,  
18<sup>th</sup> Int. Symp. on Industrial Robot, Lausanne, 26-28 Avril 1988, p. 91-100,
- [COMP\_00] Company O., Pierrot F., Launay F., Fioroni C.  
Modelling and preliminary design issues of a 3-axis parallel machine-tool,  
PKM-2000 conference, 13 –15 septembre 2000, Ann Arbor, p. 14-23
- [COMP\_99] Company O., Pierrot F.  
Tête d'usinage à structure parallèle,  
Rapport de Recherche Interne, Référence LIRMM n°99062
- [COMP\_99a] Company O., Pierrot F.  
A new 3T-1R parallel robot,  
Proceedings ICAR'99 : 9<sup>th</sup> International Conference on Advanced Robotics,  
Tokyo, Japan, 25-27 Octobre 1999, p. 557-562
- [DENA\_55] Denavit J. Harenberg R.S.  
A kinematic notation for lower pairmechanism based on matrices,  
Trans. of ASME, J. of applied mechanics, Vol. 22, juin 1955, p.215-221.
- [FIOR\_94] Fioretti A.  
Implementation-oriented kinematics analysis of a 6 dof parallel robotic platform,  
4<sup>th</sup> IFAC Symposium on Robot Control, Capri, 19-21 Septembre 1994, p. 43-50
- [GAIL\_83] Gaillet A., Reboulet C.  
Dispositif d'articulation actif à compliance. 25 juillet 1983,  
Brevet français n°83.12263
- [GOSS\_90] Gosselin C., Angeles J.  
Singularity analysis of closed-loop kinematic chains,  
IEEE Trans. On Robotics and Automation, 6(3) :281-290, Juin 1990
- [GOUD\_95] Goudali A., Lallemand J-P., et Zegloul S.  
Espace de travail de la nouvelle structure 2-Delta,  
Revue d'Automatique et Productique Appliquée, 1995,.p. 205-210
- [GOUG\_57] Gough V.E.  
Contribution to discussion of papers on research in automobile stability, control and  
tyre performance,  
Proc. Auto Div. Inst. Mech. Eng., 1956-1957.

- [HERN\_00] Hernot X., Sartor M., Guillot J.  
Calculation of the stiffness matrix of angular contact ball bearings by using the analytical approach,  
Journal of mechanical design, mars 2000, vol 122, p. 83-90
- [HERV\_92] Hervé J.M.  
Group mathematics and parallel link mechanisms,  
IMACS/SICE Int. Symp. On Robotics, Mechatronics, and Manufacturing Systems, Kobe, 16-20 Septembre 1992, p. 459-464
- [HESS\_98] Hesselbach J., Plitea N., Frindt M., Kusiek A.  
A new parallel mechanism to use for cutting convex glass panels,  
ARK, Strobl, 29 Juin-4 Juillet 1998, p. 165-174
- [HONE\_97] Honegger M., Codourey A., et Burdet E.  
Adaptive control of the Hexaglide, a 6 dof parallel manipulator,  
IEEE Int. Conf. On Robotics and Automation, Albuquerque, 21-28 Avril 1997, p. 543-548
- [HUAN\_00] Huang T., Jiang B.  
Determination of the carriage stroke of 6-PSS parallel manipulators having the specific orientation capability in a prescribed workspace,  
Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Francisco, CA, Avril 2000, p. 2382-2385
- [HUI\_95] Hui R. et al.  
Mechanisms for haptic feedback,  
IEEE International Conference on Robotics and Automation, Nagoya, 25-27 Mai 1995, p. 2138-2143
- [INOUE\_85] Inoue H., Tsusaka Y., et Fukuizumi T.  
Parallel manipulator,  
Proceedings 3<sup>rd</sup> ISRR, Gouvieux, France, 7-11 Octobre 1985, p. 321-327
- [KIM\_98] Kim J. and Park F.C.  
Eclipse – A new parallel mechanism prototype,  
Proceedings of the First European-American Forum on Parallel Kinematic Machines, Milan, Italy, 31 août – 1<sup>er</sup> septembre 1998
- [KOEK\_97] Koekebakker S.  
Indirect position measurement and singularities in a Stewart platform with an application to a model-based control,  
Selected Topics in Identification, Modelling and Control, Vol 10, Decembre 1997
- [KOEV\_75] Koevermans W.P. et al.  
Design and performance of the four d.o.f. motion system of the NLR research flight simulator,  
AGARD Conference Proceedings. No 198, La Haye, 20-23 Octobre 1975
- [LAMB\_87] Lambert M.  
Polyarticulated retractile mechanism, 24 Mars 1987,  
United States Patent 4,651,589, Société Becart S.A.
- [LAUW\_99] Lauwers B., Li Q., Pierrot F., Crosnier A., Company O.,  
Advanced NC-programming of parallel machine tool structures using workspace models and NC-simulation systems,  
PKM'99 : International Workshop on Parallel Kinematic Machines, Milan, Italy, 30 Novembre 1999, p. 3-9.
- [LING\_94] Ling S-H., Huang M.Z.  
Kinestatic analysis of general parallel manipulators,  
In ASME Mechanisms Design Conf., Minneapolis, 14-16 Septembre 1994

- [MA\_91] Ma O., Angles J.  
Architecture singularities of platform manipulators,  
Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and  
Automation, p.1542 –1547
- [MAVR\_99] Mavrodīs C.  
Completely specified displacements of a rigid body and their application in the direct  
kinematics of in-parallel mechanisms,  
Journal of mechanical design, décembre 99, vol 121, p. 485-491
- [MAYE\_96] Mayer St-Onge B. et Gosselin C.  
Singularity analysis and representation of spatial six-dof parallel manipulators,  
J. Lenarcic V. Parenti-Castelli editor,  
Recent Advances in Robot Kinematics, Kluwer 1996, p. 389-398.
- [MERL\_00] Merlet J-P.  
Kinematics' not dead,  
Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and  
Automation, San Francisco, CA , Avril 2000, p. 1-6
- [MERL\_91] Merlet J-P.  
Articulated device for use in particular in robotics, 1<sup>er</sup> Octobre 1991,  
United States Patent n°5,053,687.
- [MERL\_97] Merlet J-P.  
Les Robots parallèles,  
Hermès, Paris, 1997.
- [NEUM\_88] Neumann K.E.,  
Robot, 22 Mars 1988,  
United States Patent n° 4,732,525, Neos Product HB Norrtälje Suède
- [NF\_95] NF Z 68-020  
Norme Française – AFNOR,  
Nomenclature des axes et des mouvements pour la commande numérique des  
machines (Z 68-020/Projet)
- [NOUG\_85] Nougier J.P.  
Méthodes de calcul numérique,  
Masson éditeur, 1985
- [PIER\_00] Pierrot F., Company O.  
Towards non-hexapod mechanisms for high performance parallel machines,  
Accepté à IECON 2000, Nagoya, 22-28 octobre 2000.
- [PIER\_91] Pierrot F.  
Robots Pleinement Parallèles Légers : Conception Modélisation et Commande,  
Thèse de doctorat, Université Montpellier II, Montpellier, 24 Avril 1991
- [PIER\_98] Pierrot F., Shibukawa T.,  
From Hexa to HexaM,  
IPK'98 : Internationales Parallel kinematik-Kolloquium,  
Zürich, 4 juin, 1998, p. 75-84
- [PIER\_98a] Pierrot F., Company O.  
Etude préliminaire d'une machine PLT à architecture parallèle,  
Rapport de Recherche Interne, Référence LIRMM n° 98059
- [PIER\_98b] Pierrot F., Company O.  
Etude préliminaire d'une machine PLT à architecture parallèle (Phase 2),  
Rapport de Recherche Interne, Référence LIRMM n° 98094
- [PIER\_98c] Pierrot F., Company O.  
Etude préliminaire d'une machine PLT à architecture parallèle (Rapport Final),  
Rapport de Recherche Interne, Référence LIRMM n° 98119

- [PIER\_99] Pierrot F., Company O.  
H4 : a new family of 4-dof parallel robot,  
Proceedings AIM'99 : IEEE/ASME International Conference on Advanced  
Intelligent Mechatronics, Atlanta, Georgia, USA, 19-22 Septembre, 1999, p. 508-  
513
- [RAMS\_99] Ramstein E.  
Contribution à la formulation générale d'un problème de synthèse de mécanismes  
et résolution,  
Thèse de doctorat, Institut de Recherche en Cybernétique de Nantes, Nantes, 2  
février 1999
- [REBO\_91] Reboulet C. et al.  
Rapport d'avancement projet VAP, thème 7, phase 3,  
Rapport de Recherche 7743, CNES/DERA, Janvier 1991
- [ROLL\_99] Rolland L.  
The Manta and the Kanuk : Novel 4-DOF Parallel Mechanisms for Industrial  
Handling,  
IMECE'99 Conference, Nashville, USA, Nov. 14-19, 1999., vol 67, p. 831 - 844
- [SALS\_80] Salisbury J.K.  
Active stiffness control of a manipulator in cartesian coordinates,  
Proceedings of 19<sup>th</sup> IEEE Conference on decision and control, Albuquerque,  
décembre 1980, p. 95-100
- [SHEL\_95] Sheldon P.C.  
Six axis machine tool, 14 Février 1995,  
United States Patent n° 5,388,935 Giddings & Lewis.
- [STEW\_65] Stewart D.  
A platform with 6 degrees of freedom,  
Proc. Of the Institution of mechanical engineers, 1965., p. 371-386
- [SUGI\_00] Sugimoto K.  
Synthesis of connecting chains for parallel manipulators based on Lie algebra,  
Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and  
Automation, Workshop on Smart Mechanisms, San Francisco, CA , Avril 2000
- [TANC\_95] Tancredi L.  
De la simplification et la résolution du modèle géométrique direct des robots  
parallèles,  
Thèse de doctorat, École des Mines de Paris, Sophia, 20 Décembre 1995
- [TANE\_98] Tanev T.K.  
Forward displacement analysis of a three legged four-degree-of-freedom parallel  
manipulator,  
ARK, Strobl, 29 Juin-4 Juillet 1998, p. 147-154
- [TSAI\_96] Tsai L-W.  
Kinematics of a three-dof platform with three extensible limbs,  
J. Lenarcic V. Parenti-Castelli, editor, Recent Advances in Robot Kinematics,  
Kluwer, 1996, p. 401-410
- [VEBL\_10] Veblen O., Young J.W.  
Projective geometry,  
The Athenaeum press, 1910
- [WANG\_00] Wang Y., Newman W. S., Stoughton R.S.  
Workspace analysis of the Paradex ROBOT - a Novel closed chain, kinematically  
redundant manipulator,  
Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and  
Automation, San Francisco, CA , Avril 2000, p. 2392-2397



- [WANG\_97] Jiegao W., Gosselin C. M  
Kinematic analysis and singularity representation of spatial five-degree-of-freedom parallel mechanisms,  
Journal of Robotic Systems Vol.14, No.~12, p.851—869, 1997
- [YOSH\_85] Yoshikawa T.  
Manipulability of robotic mechanisms,  
The international Journal of Robotics reseach, Vol 4, N°2, p. 3-9, 1985



# ANNEXES

---



## Annexe A : Conventions mathématiques.

### A.1. Notations.

#### A.1.1. Dimensions.

Sauf indications contraires, les unités utilisées dans ce rapport sont les unités S.I. à savoir le mètre ( $m$ ), le kilogramme ( $kg$ ) et la seconde ( $s$ ).

#### A.1.2. Notations mathématiques.

Les notations mathématiques utilisées sont les notations normalisées françaises :

Type mathématique	Notation
Scalaire	$x$
Vecteur	$\mathbf{x}$
Matrice	$\mathbf{X}$
Norme 2 (ou euclidienne)	$\ \mathbf{x}\ $
Norme infinie	$\ \mathbf{x}\ _{\infty}$
Norme de Frobenius	$\ \mathbf{X}\ _F$
Valeurs singulières (Les valeurs singulières d'une matrice seront numérotées de la plus petite à la plus grande)	$\sigma_i(\mathbf{X})$
Dérivation une fois par rapport au temps	$\dot{x}$
Dérivation deux fois par rapport au temps	$\ddot{x}$
Transposition de matrice (ou de vecteur)	${}^t\mathbf{X}$
Conditionnement d'une matrice carrée	$cond(\mathbf{X})$
Déterminant d'une matrice carrée	$Det(\mathbf{X}) =  \mathbf{X} $

### A.2. Théorèmes, définitions et propriétés mathématiques utilisés.

#### A.2.1. Normes.

##### Définition :

La norme Frobenius d'une matrice carrée est définie par :

$$\|\mathbf{M}\|_F = \sqrt{\text{trace}[\mathbf{M}^t \mathbf{M}]} = \sqrt{\sum_{i,j} (m_{i,j})^2} \quad (\text{A-1})$$

Propriété 1 :

Nous avons toujours, pour une matrice  $\mathbf{M}$  :

$$\|\mathbf{M}\| \leq \|\mathbf{M}\|_F \quad (\text{A-2})$$

Propriété 2 :

Pour un vecteur de dimension  $n$ , nous avons toujours :

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty \quad (\text{A-3})$$

### *A.2.2. Valeurs singulières.*

Théorème 1 :

Soient  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{E}$  deux matrices de dimension  $n \times n$  et soit  $k \in \mathbb{N} / 1 \leq k \leq n$ , nous avons alors :

$$|\sigma_k(\mathbf{A} + \mathbf{E}) - \sigma_k(\mathbf{A})| \leq \sigma_n(\mathbf{E}) \quad (\text{A-4})$$

Cette proposition est vraie en particulier pour  $k = 1$  c'est à dire pour la plus petite valeur singulière.

## **Annexe B : Quelques machines-outils parallèles.**

---

Nous présentons, dans cette annexe, les machines-outils parallèles déjà existantes. Ces machines sont énumérées dans l'état de l'art proposé dans le chapitre I.

### **B.1. Machine Ingersoll Hoh600.**

Il s'agit d'une des premières machines d'usinage 5 axes du type hexapode. 6 pattes télescopiques montées sur rotules relient la nacelle au bâti. La version présentée ici est à broche horizontale. Une version à broche verticale existe également.



**Figure B- 1 : Machine Ingersoll H0h600.**

### **B.2. Mikromat 6X Hexapod.**

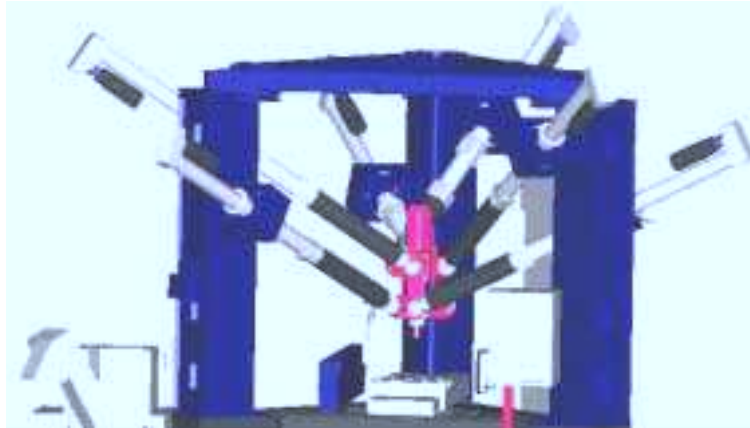
Comme son nom l'indique cette machine appartient à la famille des hexapodes. Elle est similaire à la machine INGERSOLL ci-dessus. Sa principale différence est la disposition des articulations rotule sur la nacelle. En effet, les centres des liaisons rotule n'appartiennent pas au même plan. Ils sont situés dans deux plans distincts perpendiculaires à l'axe de la broche. Cette disposition constructive est intéressante afin de réduire les risques de collision entre barres. Par contre, pour les pattes les plus éloignées de l'outil, le débattement angulaire est accentué ce qui contribue à réduire la plage de variation de l'orientation de la nacelle.

### **B.3.Hexel Tornado 2000.**

Il s'agit d'une machine de type hexapode similaire à la machine INGERSOLL.

#### **B.4. Cosmo Center PM-600.**

Il s'agit également d'une machine de type hexapode développée par la société Okuma.



**Figure B- 2 : Machine Mikromat 6X.**



**Figure B- 3 : Hexel Tornado 2000.**

#### **B.5. Machine Hexact.**

Il s'agit encore d'une machine de type hexapode dont la disposition des pattes est intéressante. En effet, comme la machine Mikromat, les pattes sont connectées à la nacelle dans deux plans perpendiculaires à l'axe de la broche. Ces plans sont situés de part et d'autre d'un plan médian sur lequel la deuxième extrémité des pattes est connectée. Les six points de connexion sur le plan médian constituent les sommets d'un hexagone régulier. Cette disposition des liaisons est intéressante du point de vue de la simplicité de conception de la machine et de sa compacité. Par contre, elle souffre de deux défauts majeurs :

- Comme pour la machine Mikromat, les débattements angulaires sont réduits à cause de l'éloignement des plans de connexion par rapport à l'outil.



- La machine, telle qu'elle a été conçue, présente une singularité au centre de son volume de travail (raideur nulle pour un moment appliqué autour de l'axe de la broche quand cette dernière a une orientation nulle).



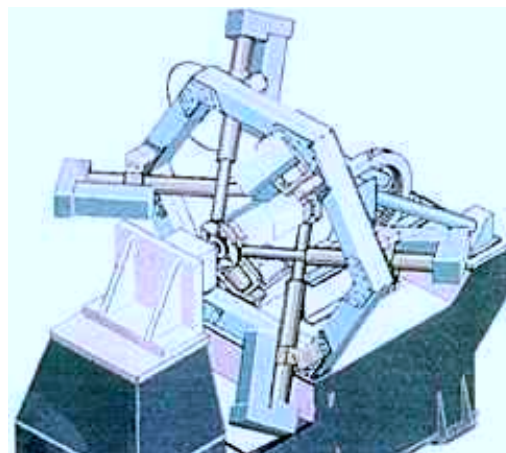
**Figure B- 4 : Okuma Cosmo Center PM-600.**

## **B.6.Hexapode CMW.**

Cette machine (Figure B- 6)est de type hexapode. Elle peut être utilisée soit de manière autonome (son volume de travail est alors limité), soit portée par une structure cartésienne destinée à la positionner en plusieurs endroits afin de recouvrir un volume de travail plus important.

## **B.7.Hexaglide.**

L'Hexaglide est une machine qui appartient à la famille « main gauche ». Elle est composée de 6 actionneurs linéaires fixes et d'une nacelle reliés par des barres de longueur fixe montées sur rotule. Il s'agit d'une machine d'usinage 5 axes. Sa particularité réside dans la disposition des liaisons glissières qui sont toutes coplanaires et de même direction. Cette disposition permet d'avoir une direction de déplacement privilégiée afin d'usiner des pièces longues.



**Figure B- 5 : Machine HEXACT.**

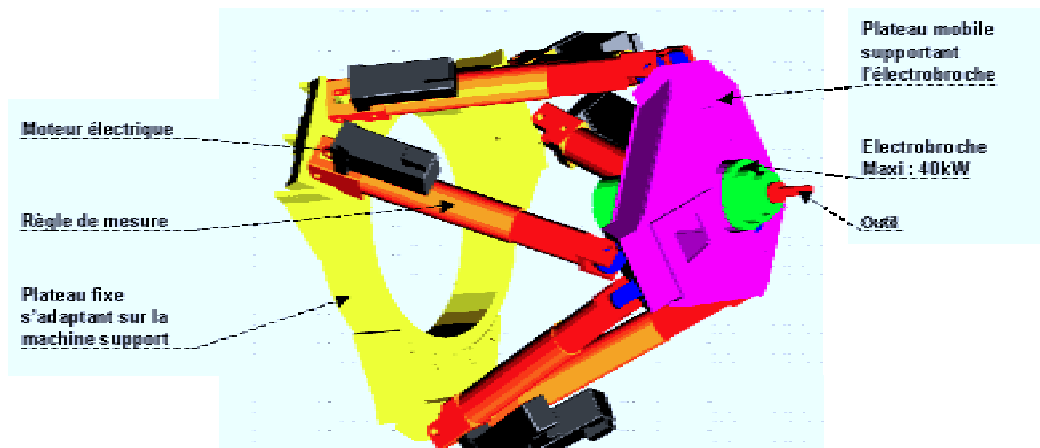


Figure B- 6 : Hexapode CMW.

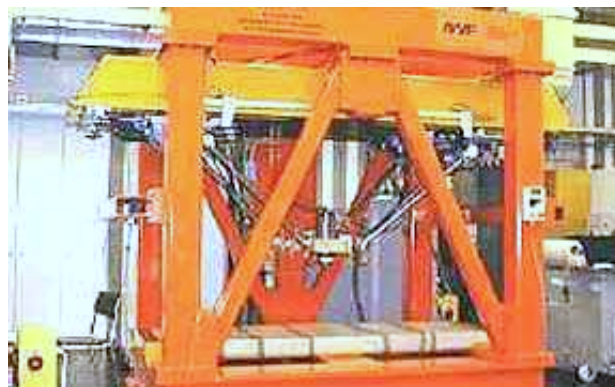


Figure B- 7 :Machine Hexaglide.

## B.8. HexaM.

Cette machine construite par la société Toyoda est une variante du robot Hexa.



Figure B- 8 : Machine Toyoda HexaM.

### B.9.Triaglide.

La machine Triaglide est une machine 3 axes à actionneurs linéaires. Il s'agit de la version machine-outil de l'architecture du robot Delta. Les liaisons glissières sont parallèles entre elles ce qui permet d'avoir une direction de déplacement privilégiée pour l'usinage de pièces longues.

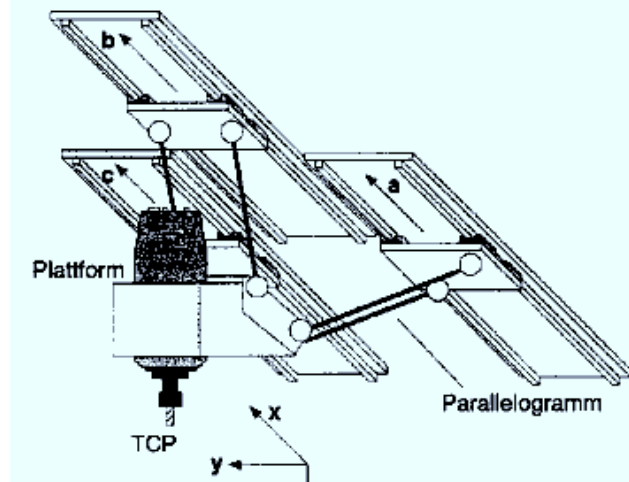


Figure B- 9 : Machine Triaglide.

### B.10.Dyna-M.

Il s'agit d'une machine 3 axes composée d'un mécanisme parallèle plan à chaînes passives portant un axe **Z**.

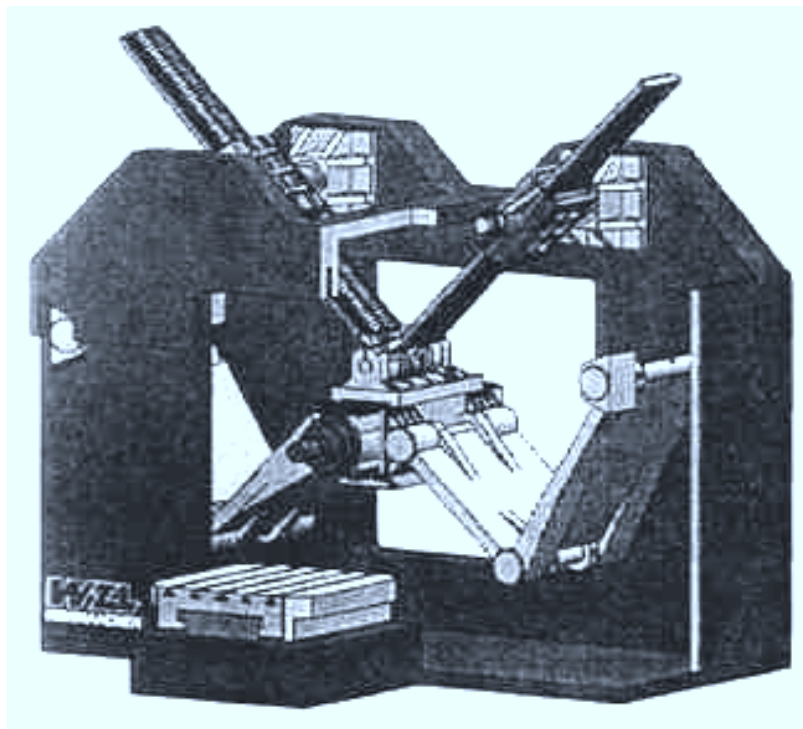


Figure B- 10 : Machine Dyna-M.

### **B.11. Georg V.**



**Figure B- 11 : Machine Georg V.**

### **B.12. Tricept.**

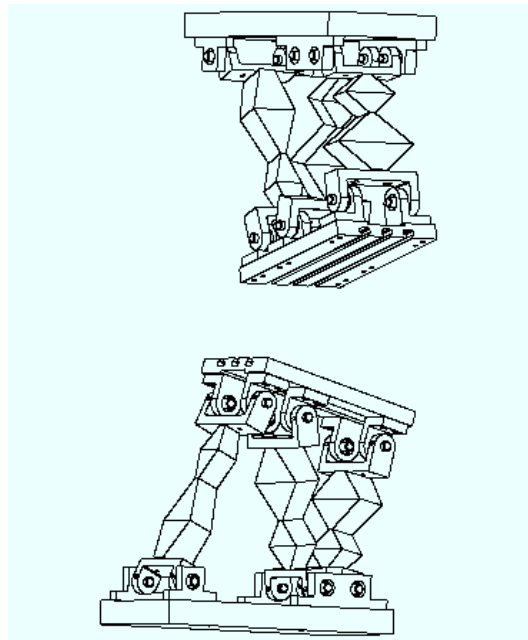


**Figure B- 12 : Machine-outil Tricept TR805.**

### **B.13. Projet Smartcuts.**

Comme le montre la figure ,il s'agit de l'association de deux mécanismes plans à 3 degrés de liberté dont l'un porte la pièce et l'autre la broche, l'ensemble constituant une machine 5 axes.





**Figure B- 13 : Projet Smartcuts.**

### **B.14. Eclipse.**



**Figure B- 14 : Machine Eclipse**



## **Annexe C : Evaluation des agencements pour une structure Delta à actionneurs linéaires**

---

Comme précisé dans le troisième chapitre, le nombre de paramètres caractérisant l'agencement d'un robot Delta à actionneurs linéaires est trop important pour mener une optimisation dans le cas général. De plus, cette optimisation doit fournir des résultats qui seront utilisés pour la réalisation d'une machine physique. Cette dernière condition implique que la solution retenue doit présenter un minimum de propriétés géométriques, ce qui est incompatible avec des résultats quelconques issus d'une optimisation numérique dans le cas général. Nous avons donc recensé et évalué plusieurs agencements possibles. La définition des agencements et leur évaluation sont présentés dans cette annexe.

Le volume de travail que nous avons considéré est un parallélépipède dont les dimensions sont 0,5m suivant  $x$ , 0,5m suivant  $y$  et 0,4m suivant  $z$  qui est également la direction de l'axe de la broche de la machine.

### **C.1. Glissières parallèles.**

#### *C.1.1. Glissières parallèles à l'axe $x$ .*

Nous allons étudier l'agencement dans lequel les trois glissières sont parallèles à l'axe  $x$ . Sur la Figure C- 1, nous distinguons plusieurs sous-familles d'agencements en fonction de la position des glissières par rapport au volume de travail.

Nous allons maintenant discuter de l'intérêt de ces familles par rapport à notre problématique.

##### Famille 1.

La famille 1 ne présente pas beaucoup d'intérêt car les glissières ne sont pas toutes situées du même côté de l'espace de travail par rapport à l'axe  $z$ . Cela entraîne des collisions entre les bras et la pièce à usiner car la broche reste parallèle l'axe  $z$ . Les solutions appartenant à cette famille ne seront pas étudiées.

##### Famille 2.

Pour la famille 2, les glissières sont toutes situées du même côté du volume de travail par rapport au plan  $(O, x, y)$ . Deux glissières sont situées du côté  $y$  positif, la troisième du côté  $y$  négatif. La répartition du conditionnement en fonction de la longueur des barres est représentée sur la Figure C- 2. La zone de convergence encadrée sur la Figure C- 2 est plus intéressante. En effet, la longueur des barres  $y$  est faible et le maximum du conditionnement de la matrice jacobienne sur le volume de travail est inférieur à 2,5. Cette famille qui s'apparente à l'architecture Triaglide est donc retenue.

Pour les points appartenant à la zone citée ci-dessus, l'intersection de l'axe des glissières avec le plan  $(y, z)$  est représentée sur la Figure C- 3. Cette figure montre que l'ensemble des points d'intersection est situé sur un cercle centré sur l'espace de travail et dont le rayon vaut approximativement 1,2 mètre.

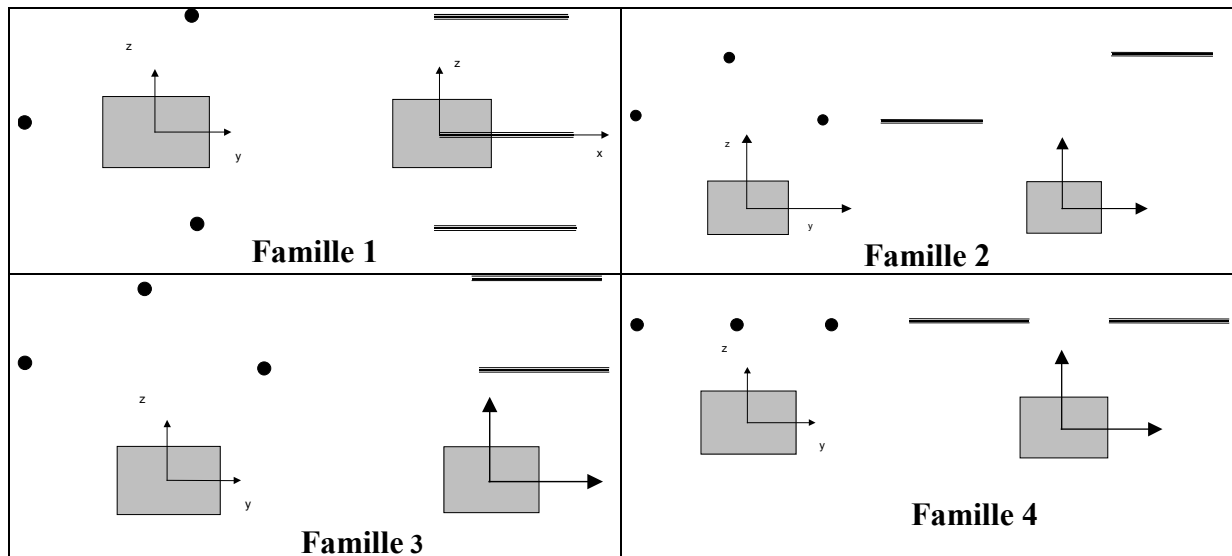


Figure C- 1 : Familles de solutions.

Nous avons sélectionné la configuration suivante avec  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,9 & 0 & 0,9 \\ 0,8 & 1,2 & 0,8 \end{bmatrix}$  et une longueur de barres de  $L = 1,7$  mètres. Cette disposition des glissières donne un conditionnement de 2,25. La machine correspondante est représentée schématiquement sur la Figure C- 4.

Remarque :

Une configuration avec une faible longueur de barres est indiquée sur la Figure C- 5 par une flèche. Le maximum du conditionnement correspondant à cette configuration vaut 2,6. La longueur des barres est 1,35 mètre, le rayon du cylindre sur lequel sont disposées les

glissières est 1 mètre et la position des points P est  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,85 & -0,15 & 0,5 \\ 0,45 & 0,95 & 0,75 \end{bmatrix}$ . Le conditionnement vaut 2,37.

Famille 3.

La famille 3 diffère de la famille 2 par le fait que les trois glissières sont situées du côté  $y$  positif. Les résultats concernant cette famille ne seront pas présentés car, ils sont plus mauvais que ceux de la famille 2.

Famille 4.

Pour la famille 4, les trois glissières sont situées dans le même plan parallèle au plan  $(O, x, y)$ . Cette famille, qui appartient à l'architecture Triaglide, peut être également classée dans la catégorie glissières coplanaires. Elle sera étudiée plus loin dans cette annexe.



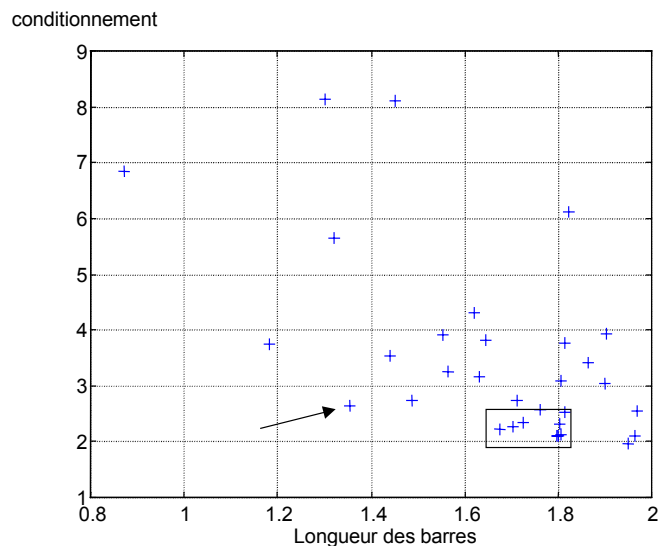


Figure C- 2 : Conditionnement en fonction de la longueur des barres.

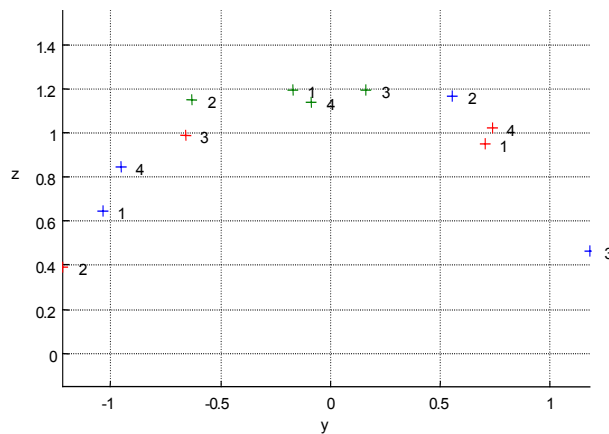


Figure C- 3 : Intersection des glissières avec le plan (y, z)

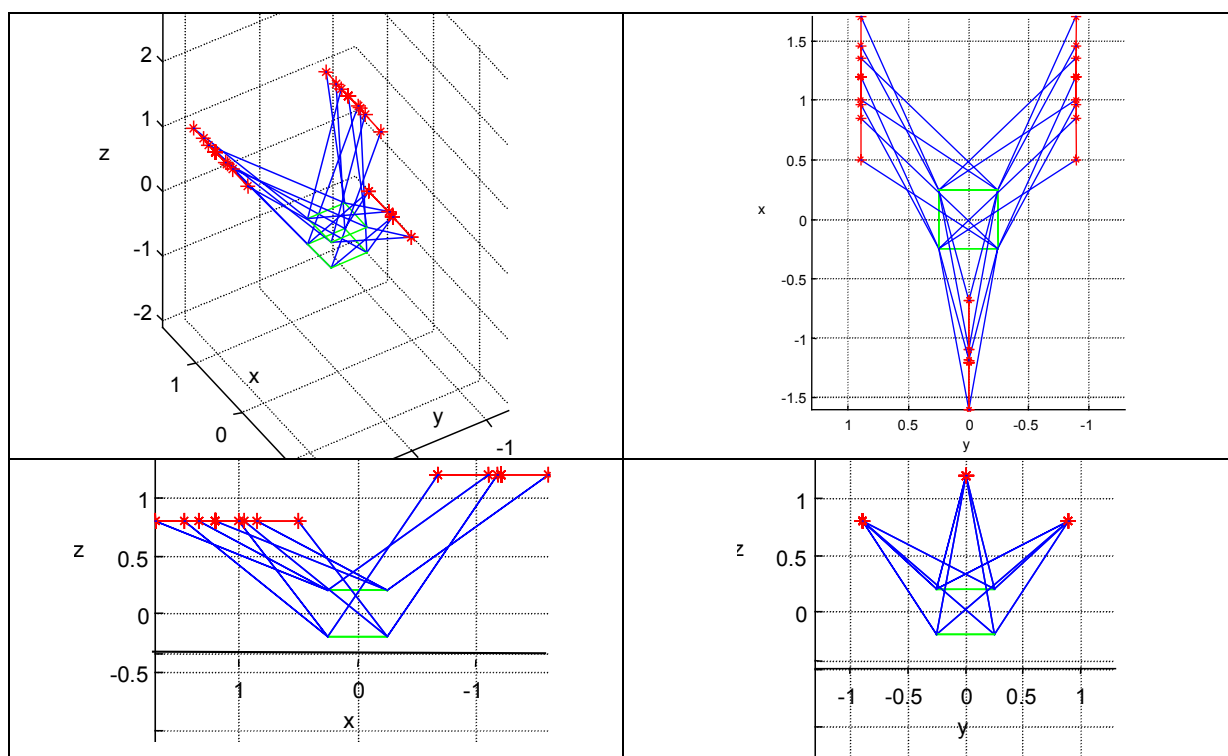


Figure C- 4 : Solution retenue.

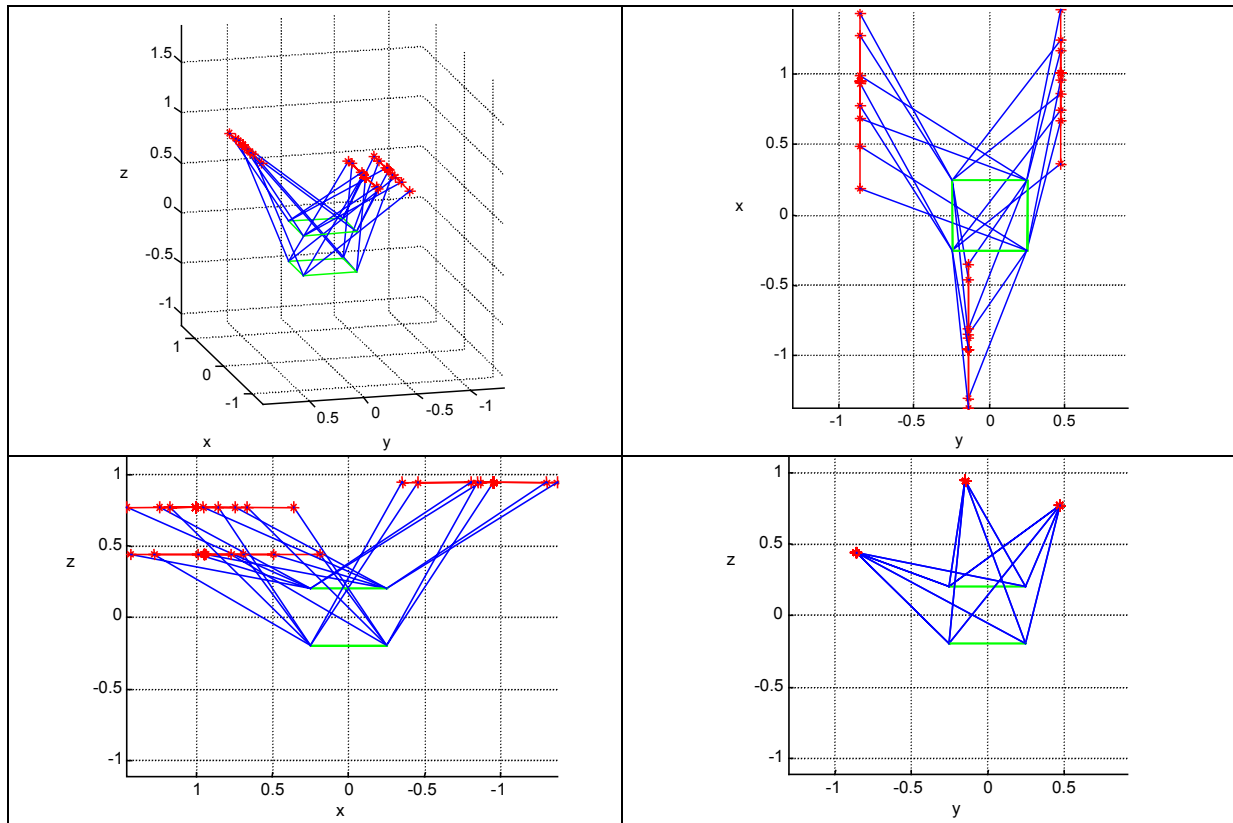


Figure C- 5 : Solution retenue pour un faible encombrement

### C.1.2. Glissières parallèles à l'axe $z$ .

La configuration étudiée ici est définie de la manière suivante :

- Les glissières sont parallèles à l'axe  $z$ .
- Afin d'éviter les collisions entre les barres et la pièce usinée, les glissières sont toutes situées du même côté par rapport au volume de travail (côté  $z$  positif).

Pour cet agencement, la répartition du conditionnement en fonction de la longueur des barres est représentée sur la Figure C- 6. La zone la plus intéressante est caractérisée par un maximum du conditionnement inférieur à 2,5 et une longueur de barres  $L$  inférieure à 1.6 mètre. La Figure C- 7 représente la position des points d'intersection des glissières avec le plan  $(x, y)$  pour la zone sélectionnée ci-dessus (marquée '+'). La moyenne de la position des glissières est marquée '\*'. La Figure C- 7 montre également que les points d'intersection sont globalement disposés sur un cercle dont le centre est celui du volume de travail. Son rayon est de 0,9 mètre. La Figure C- 8 montre la répartition de l'espacement angulaire des points représentés sur la Figure C- 7 pour chacune des configurations. Nous voyons que cet espacement est voisin de 120 degrés.

D'après les remarques que nous venons d'effectuer, nous avons sélectionné une solution représentative, voisine de la solution numéro 3 de la Figure C- 7. Ses caractéristiques

sont  $L = 1,4$  mètres et  $\mathbf{P} = 0,85 \begin{bmatrix} -1 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Le conditionnement vaut alors 2,38. L'agencement correspondant à cette configuration est dessiné sur la Figure C- 9.

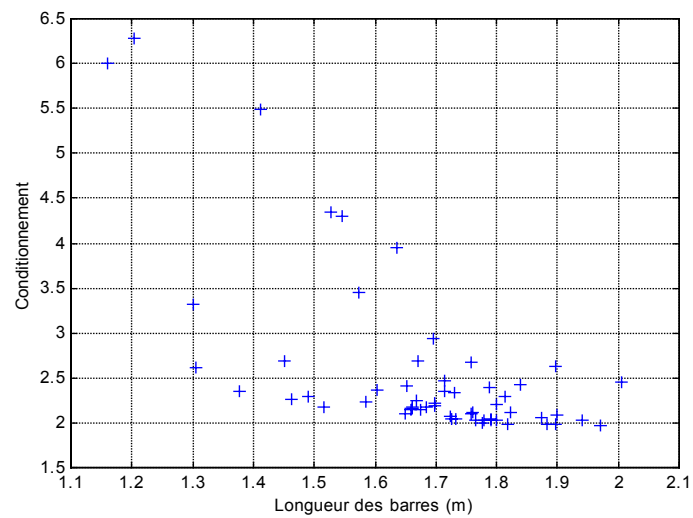


Figure C- 6 : Conditionnement en fonction de la longueur des barres.

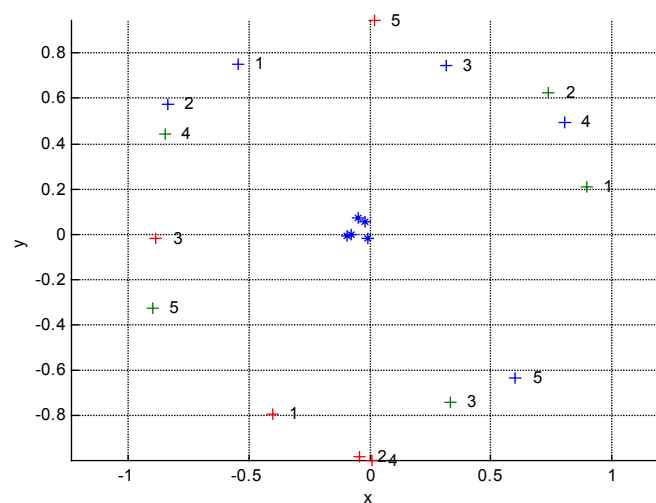


Figure C- 7 : Position des points P et de leur moyenne.

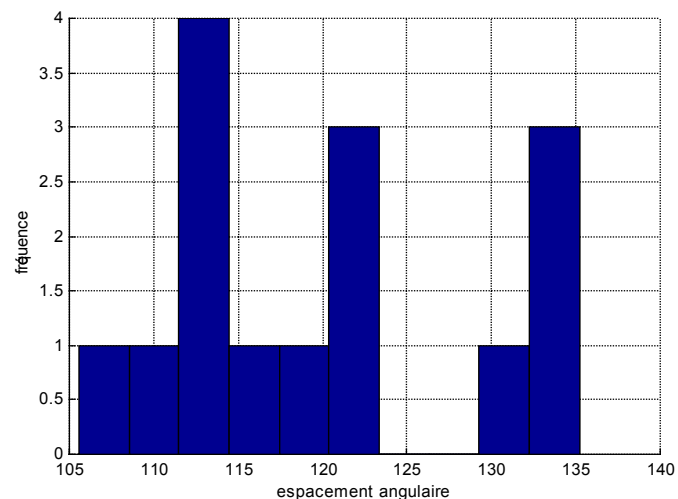


Figure C- 8 : Répartition de l'espacement angulaire des glissières.

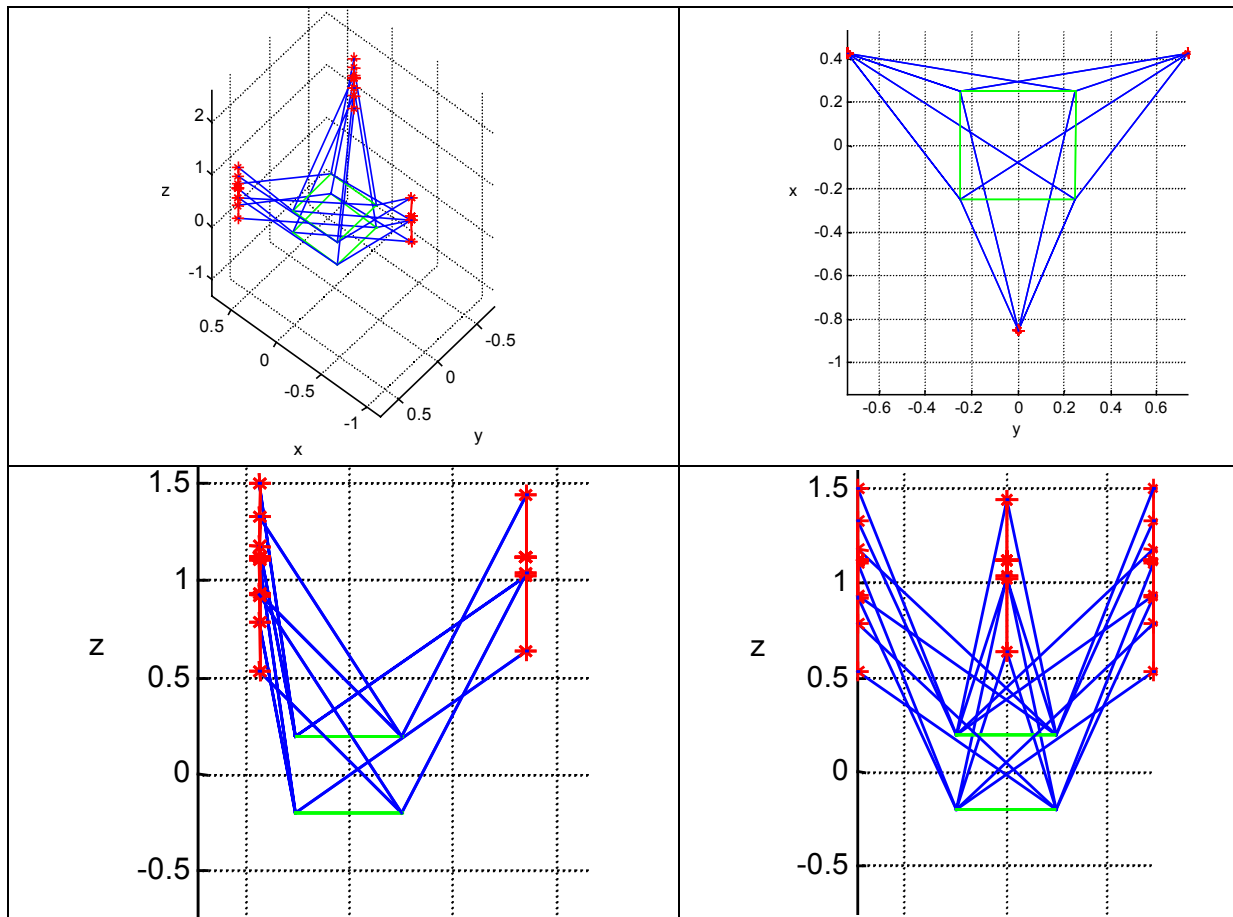


Figure C- 9 : Solution retenue.

L'encombrement de la solution retenue étant trop important (1,5 m pour le modèle contracté), nous avons effectué une seconde recherche avec, comme contrainte supplémentaire, un encombrement suivant la direction  $x$  de 1,2 mètres pour le « mécanisme contracté ».

Les résultats de cette recherche sont  $L = 1,35$  m et  $\mathbf{P} = 0,7$  
$$\begin{bmatrix} -1 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le conditionnement vaut alors 2,69 . Ce mécanisme est représenté sur la Figure C- 10.

## C.2.Glissières coplanaires.

### C.2.1.Glissières parallèles entre elles.

Ce type d'architecture est inclus dans la famille Triaglide. Les deux arrangements des glissières présentés Figure C- 11 sont possibles. L'algorithme d'optimisation a toujours convergé vers le cas n°1. Le paramétrage utilisé pour l'optimisation est montré sur la Figure C- 12.

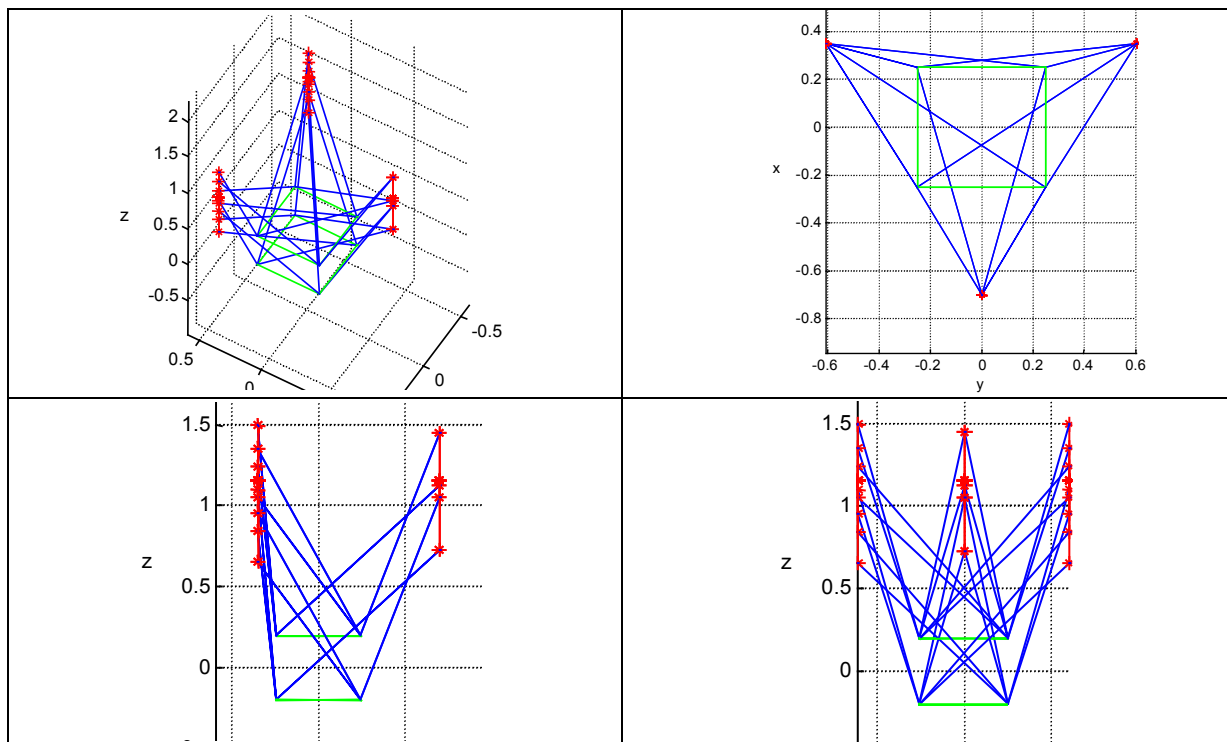


Figure C- 10 : Solution retenue pour un encombrement réduit.

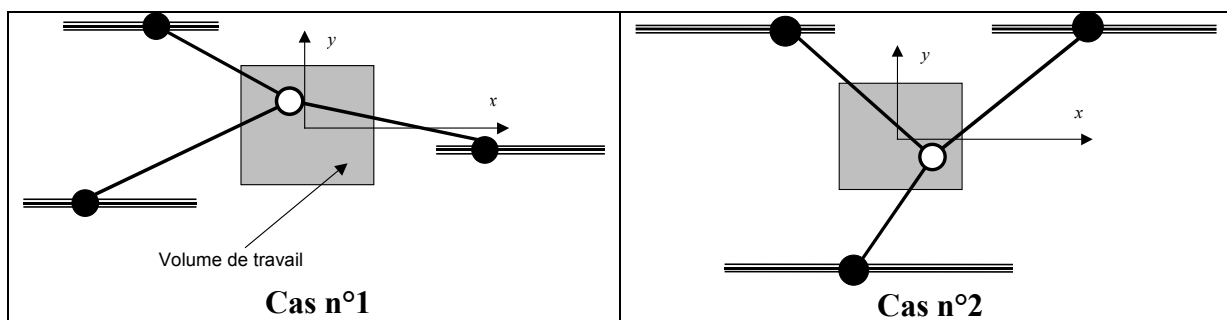


Figure C- 11 : Agencements pour une machine TRIAGLIDE à glissières coplanaires.

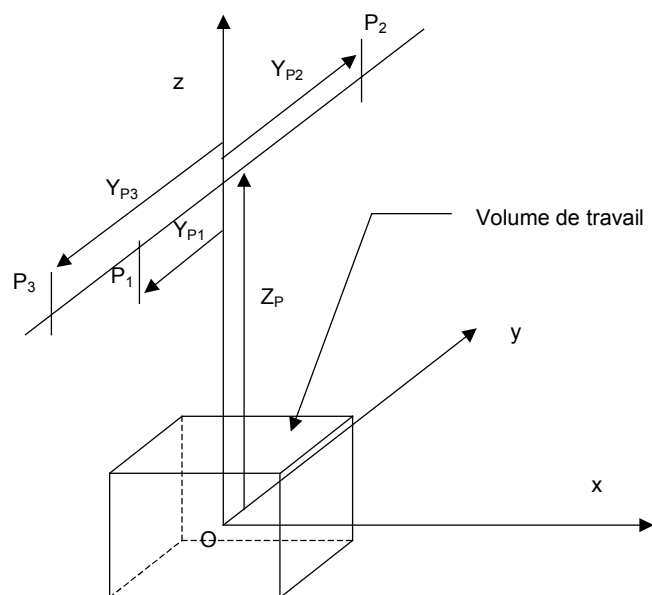


Figure C- 12 : Paramétrage d'une machine TRIAGLIDE à glissières coplanaires.

La Figure C- 13 représente la position des points  $P_i$  correspondant au maximum du conditionnement inférieur à 2,65, le meilleur conditionnement obtenu étant de 2,41. La solution que nous avons retenue est voisine de l'ensemble de points 8. Elle est caractérisée par  $z_p = 1$ ,  $y_p = [-0,8 \ 0 \ 0,8]$  et  $L = 1,7$  m. Cette machine est représentée Figure C- 14. Son conditionnement vaut 2,65. Elle ne répond pas aux critères d'encombrement (encombrement de 1.6 m pour le modèle contracté) car, pour une réalisation pratique, il faut ajouter les dimensions de la nacelle aux dimensions ci-dessus. Si nous réduisons les dimensions de cette machine, le conditionnement devient alors trop mauvais. Ce type d'agencement ne sera donc pas retenu.

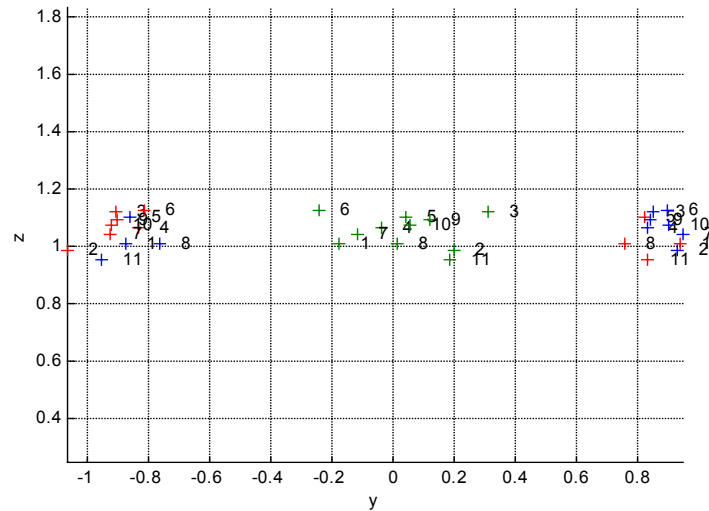


Figure C- 13 : Position des points  $P_i$  dans le plan  $(y, z)$  .

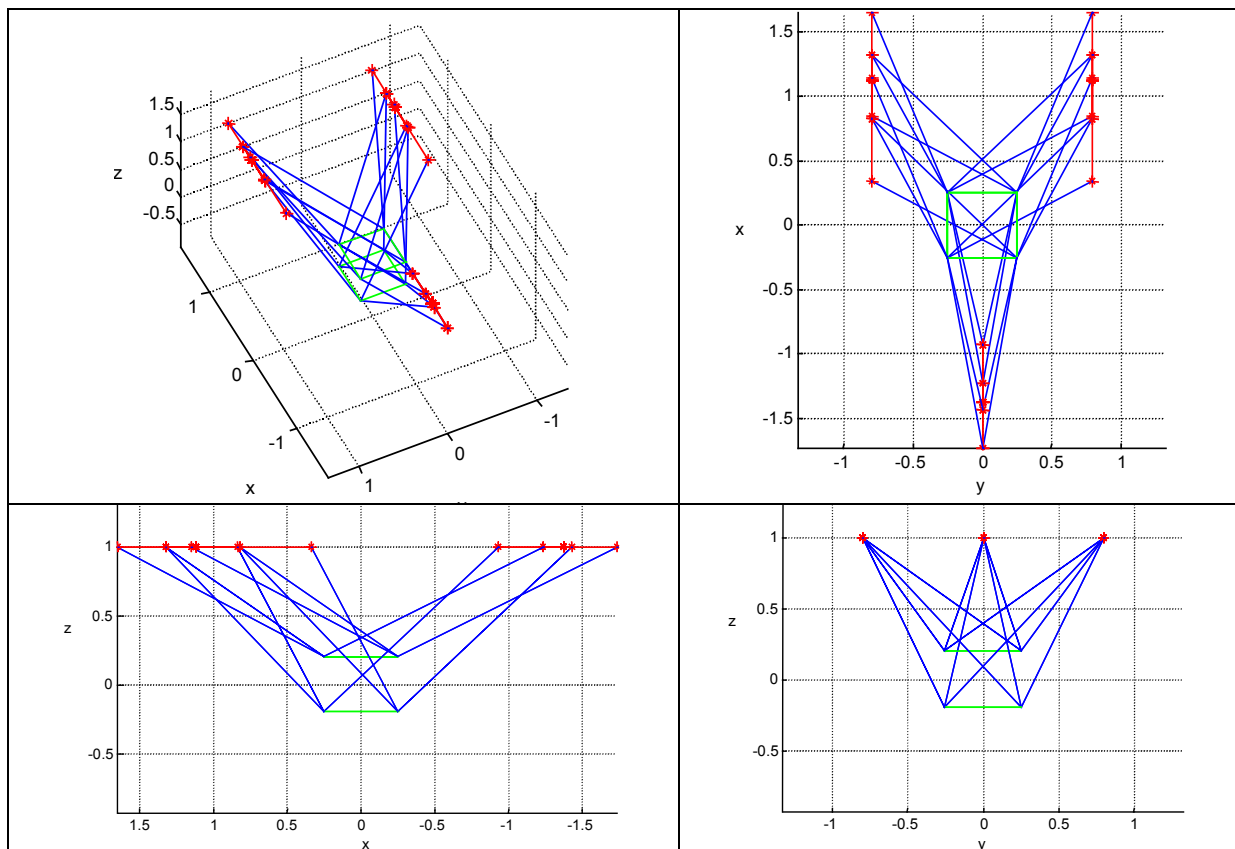
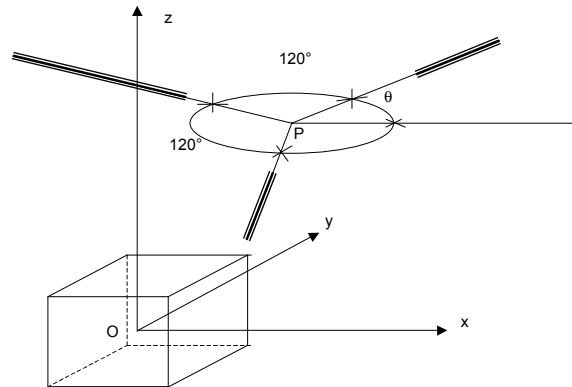


Figure C- 14 :Solution retenue.

### C.2.2. Glissières concourantes.

L'étude de ce cas est limitée à des glissières parallèles au plan  $(O, x, y)$  et concourantes en un point  $P_i$ . Pour limiter le nombre de paramètres, nous considérerons que les glissières sont espacées angulairement de  $120^\circ$ . Ce type de machine correspond à la disposition du robot STAR dont une partie du paramétrage géométrique est représenté sur la Figure C- 15.

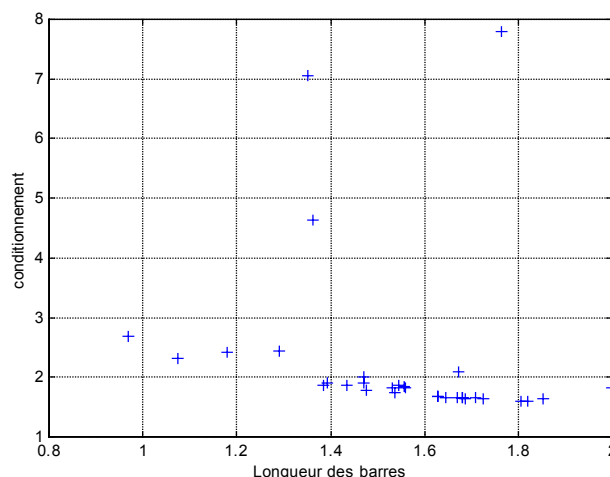


**Figure C- 15 : Paramétrage d'une architecture de type robot STAR.**

L'évolution du conditionnement en fonction de la longueur des barres est représentée sur la Figure C- 16. Cette figure montre qu'il est possible d'obtenir un conditionnement inférieur à 2 pour une longueur de barres supérieure à 1.4 m. Figure C- 17 montre qu'il n'existe pas de corrélation entre  $\theta$  et le conditionnement. Nous avons donc choisi  $\theta = 0$ . D'après le nuage des points  $P_i$  représenté sur la Figure C- 18, nous constatons que la plupart de ces points vers lesquels l'algorithme a convergé sont situés sur l'axe  $(O, z)$  à une altitude comprise entre 0,75 m et 1,05 m. La solution que nous avons retenue est caractérisée par

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,85 \end{bmatrix}, L = 1,5 \text{ mètre et } \theta = 0.$$

Ces valeurs nous donnent la machine schématisée sur la Figure C- 19. Son conditionnement est de 1,80. Il est clair que une machine de ce type, bien que très performante, ne pourra pas répondre aux critères d'encombrement proposés (2,5 m pour le modèle contracté).



**Figure C- 16 : Evolution du conditionnement en fonction de la longueur des barres.**

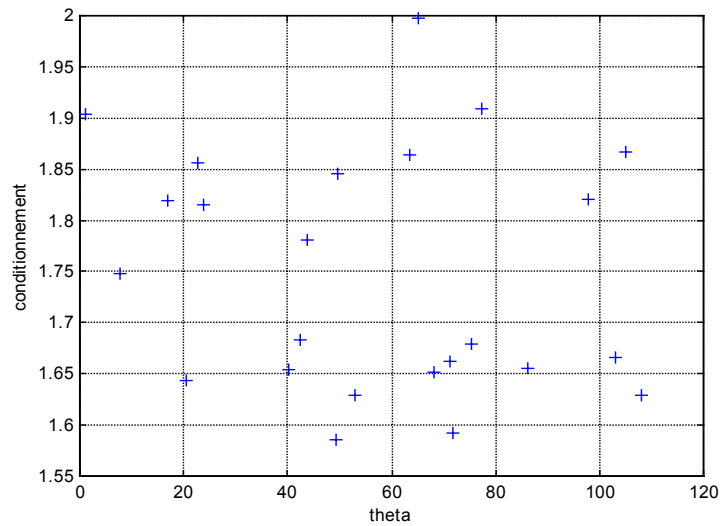


Figure C- 17 : Conditionnement en fonction de  $\theta$ .

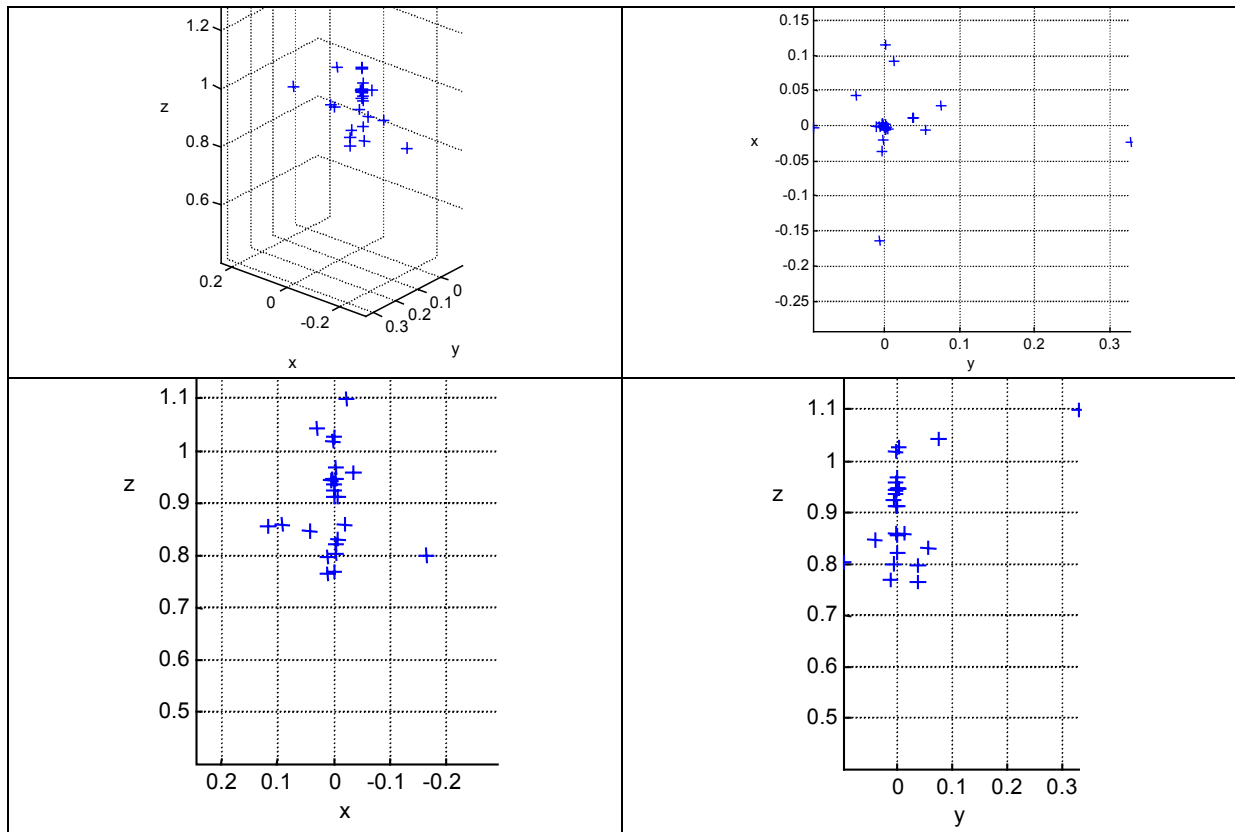


Figure C- 18 : Position des points  $P_i$  dans l'espace.

### C.3. Glissières perpendiculaires.

Les liaisons glissière des mécanismes explorés dans cette partie sont disposées suivant chacun des axes du repère  $R_b$ . Nous avons envisagé deux types d'agencements, l'un avec des glissières non concourantes, l'autre avec des glissières concourantes.

Dans les deux cas, l'algorithme d'optimisation tend à augmenter la longueur des barres au maximum autorisé (2 mètres). Par conséquent, l'encombrement de la machine devient très important (au moins 2 mètres quelle que soit la direction).



Si, pour réduire cet encombrement, nous réduisons la longueur des barres, le conditionnement devient mauvais. Nous ne pouvons donc pas déterminer de mécanisme qui corresponde au cahier des charges pour ce type d'agencement.

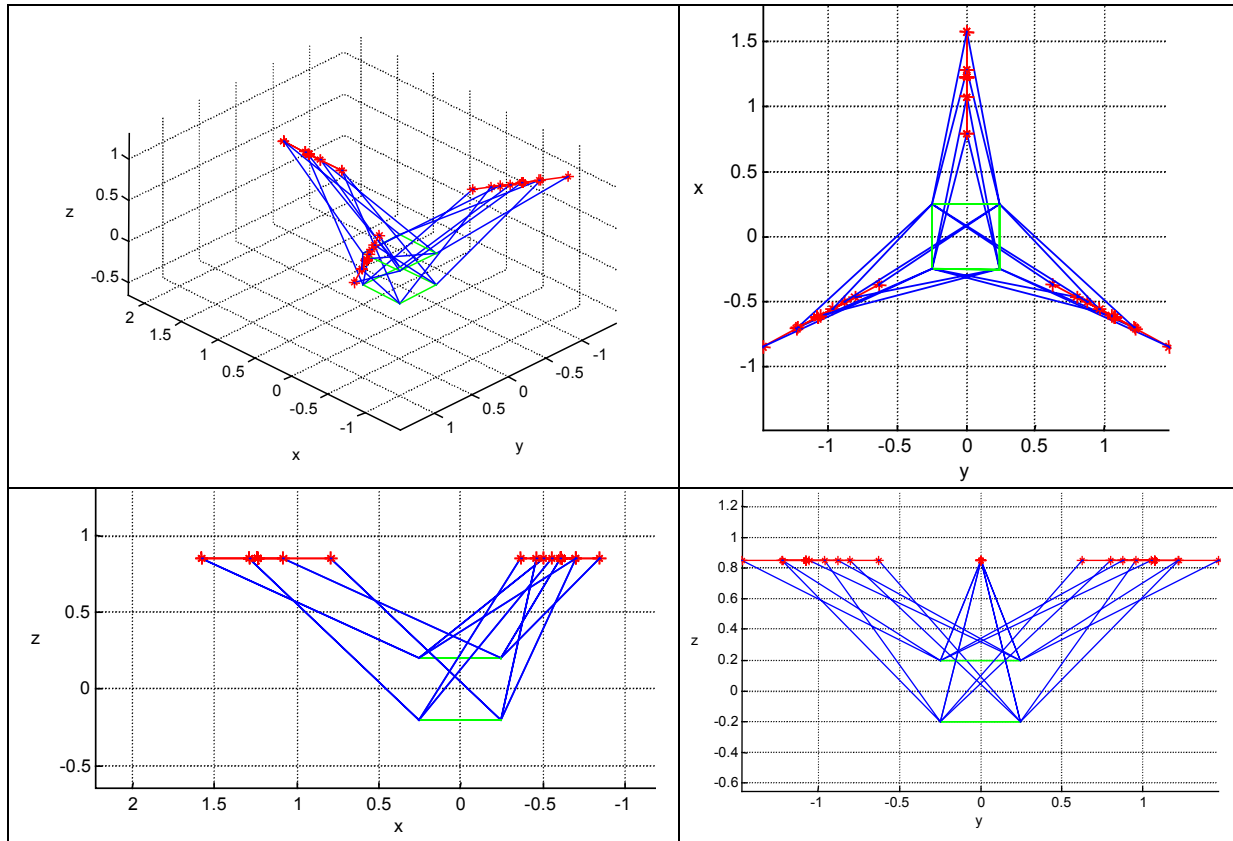


Figure C- 19 : Solution retenue.

#### C.4. Agencement hybride.

Cet agencement des liaisons glissière est caractérisé par :

- Deux liaisons glissière ont pour direction l'axe  $x$ . Elles sont situées du même côté du volume de travail par rapport au plan  $(O, y, z)$ .
- La troisième liaison glissière a pour direction l'axe  $z$ . Elle est disposée de l'autre côté du volume de travail par rapport aux deux liaisons glissière précédentes.

A priori, cet agencement semble offrir des performances voisines de celles du TRIAGLIDE tout en ayant un encombrement plus réduit. Le paramétrage de ce mécanisme est représenté sur la Figure C- 20. Afin de réduire le nombre de paramètres de la recherche,

nous avons considéré que les points  $P$  sont de la forme  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -c \\ -a & a & 0 \\ b & b & 0 \end{bmatrix}$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont

des réels positifs. La procédure d'optimisation sous contrainte d'encombrement de 1,2 m a donné comme valeurs optimales  $a = 0,6$  m,  $b = 0,35$  m,  $c = 0,45$  m et  $L = 1,2$  m.

Le conditionnement correspondant à ces dimensions vaut 2,41. Le mécanisme contracté est dessiné sur la Figure C- 21.

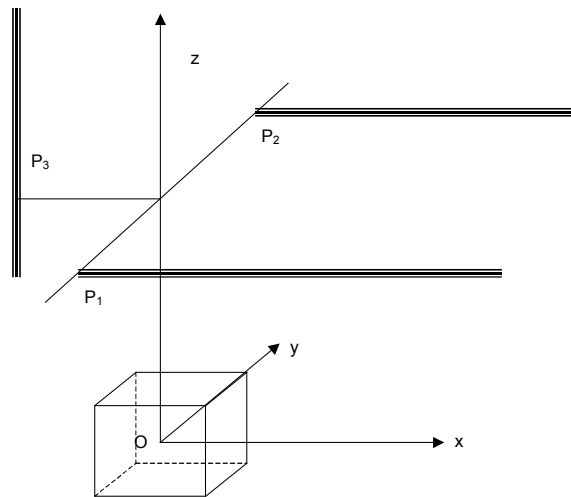


Figure C- 20 : Paramétrage.

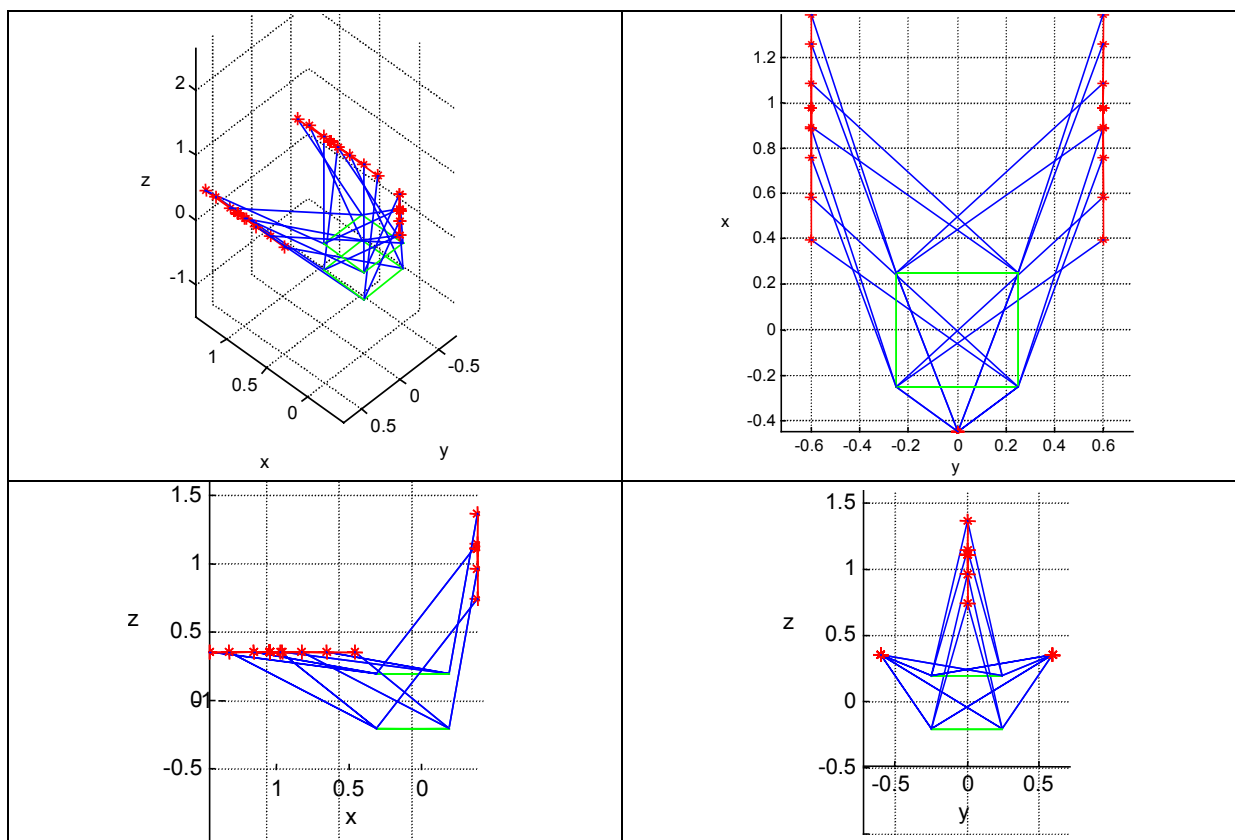


Figure C- 21 : Solution retenue.

### C.5. Glissières disposées sur un cône.

Cette partie s'intéresse au cas des glissières disposées sur un cône d'axe  $z$  dont le sommet est situé sur l'axe  $(O, z)$ . Ces glissières sont espacées angulairement de  $120^\circ$ . La Figure C- 22 présente la géométrie et le paramétrage de ce type de machine. Les glissières coupent le plan  $(O, x, y)$  en trois points. Ces points sont situés sur un cercle centré sur l'origine. Nous appellerons  $R$  le rayon de ce cercle.

Un premier essai de recherche de solution a été mené. La Figure C- 23 montre l'évolution du conditionnement en fonction de  $\theta$  et de  $\varphi$ . Nous constatons que le conditionnement est peu sensible à  $\theta$  (on prendra par la suite  $\theta = 0$ ) et qu'il existe des valeurs privilégiées pour  $\varphi$ . Ces valeurs sont  $60^\circ$ ,  $180^\circ$  et  $300^\circ$ .

Nous allons maintenant approfondir chacun des agencements correspondants.

### C.5.1. Agencement $\varphi = 60^\circ$ .

Les solutions sont du type  $R = 0,9\text{ m}$  et  $L = 1,9\text{ m}$ . Cependant, la solution qui est présentée ici est un bon compromis entre la longueur des barres et le conditionnement. Pour cette solution, nous avons  $R = 0,65\text{ m}$  et  $L = 1,55\text{ m}$ . Le conditionnement correspondant à ces valeurs est 1,38. La machine correspondante est dessinée sur la Figure C- 24.

### C.5.2. Agencement $\varphi = 180^\circ$ .

Le cas de l'agencement avec  $\varphi = 180^\circ$  ne sera pas étudié dans cette partie car il a déjà été traité dans la partie concernant les « Glissières coplanaires du type Robot STAR ».

### C.5.3. Agencement $\varphi = 300^\circ$ .

Cet agencement est identique à celui correspondant à  $\varphi = 60^\circ$  lorsque l'on effectue une symétrie du mécanisme par rapport au plan  $(O, x, y)$  ( $z$  vers en bas).

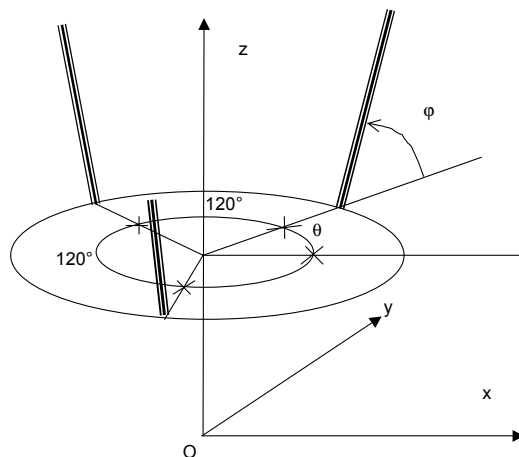


Figure C- 22 : Géométrie et paramétrage de la famille de structures.

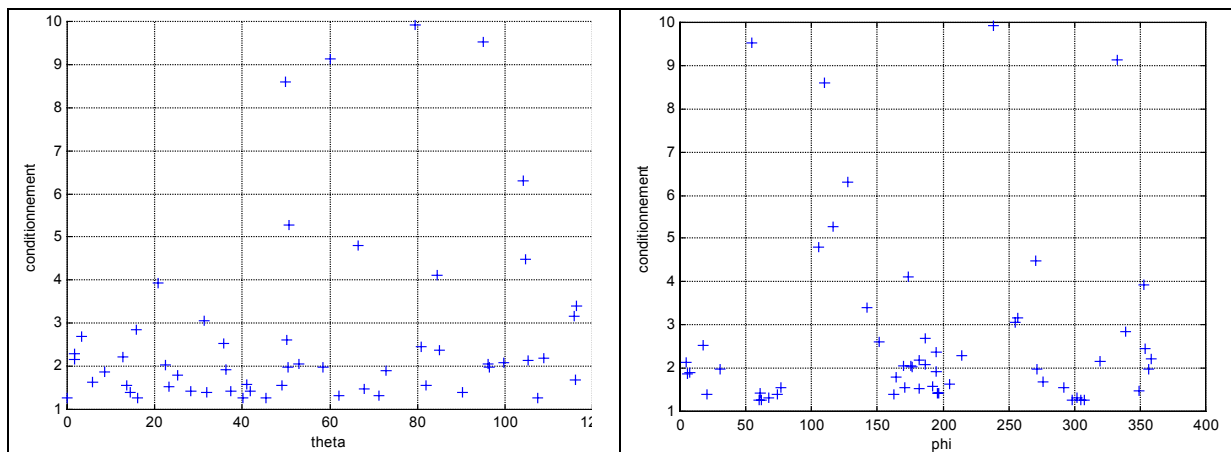


Figure C- 23 : Evolution du conditionnement en fonction de  $\theta$  et de  $\varphi$ .

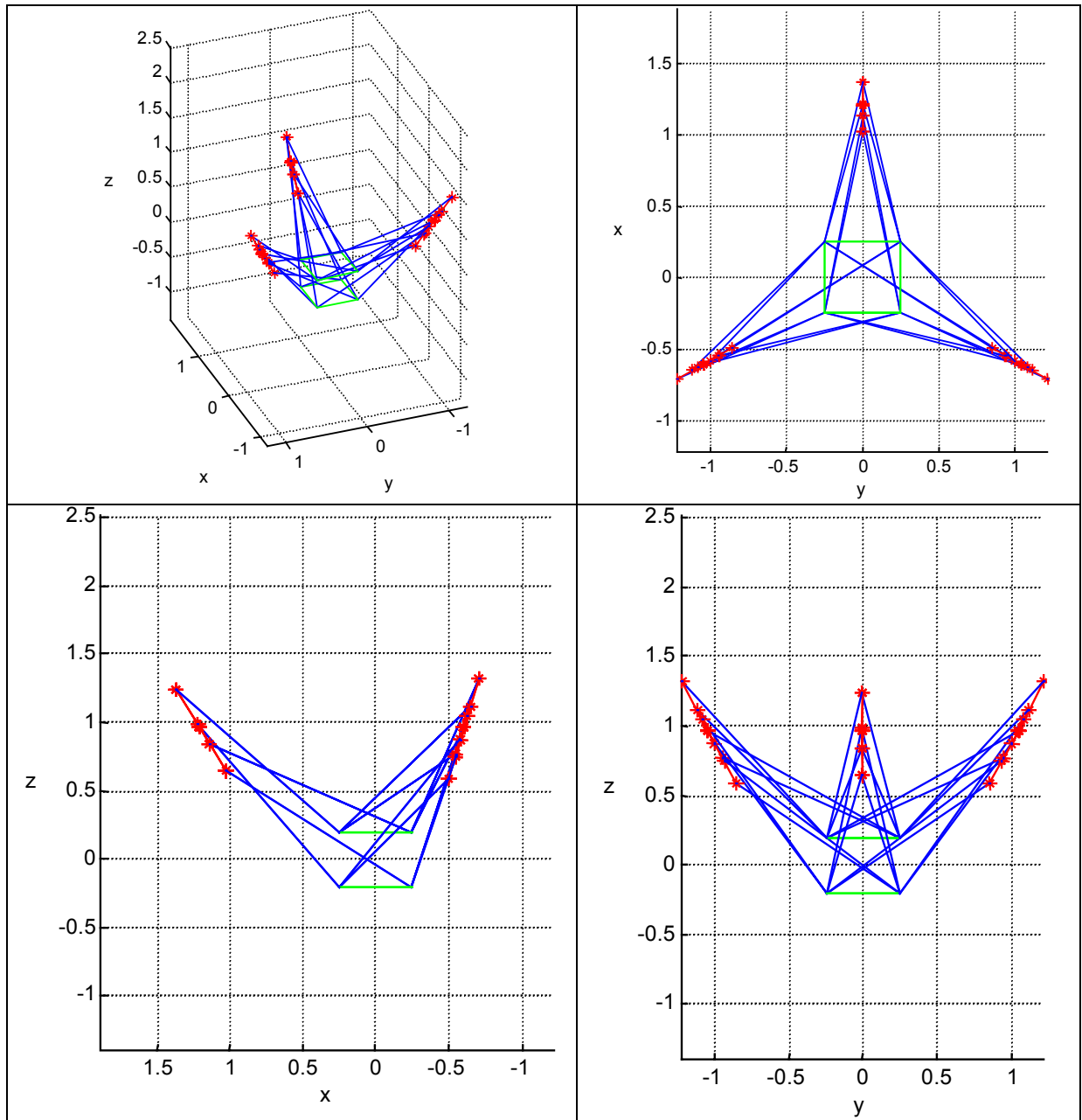


Figure C- 24 : Solution retenue.

## Annexe D : Application de la méthode de recherche de singularités à la machine INGERSOLL.

---

Dans cette annexe, nous allons exposer la méthode présentée par Koekkebaker dans [KOE98]. Cette méthode permet de déterminer si le volume de travail d'une machine parallèle de type hexapode (plate-forme de Gough-Stewart) contient des singularités. Dans un premier temps, nous allons présenter et justifier cette méthode. Nous l'appliquerons dans un deuxième temps à une machine de type hexapode : la machine Ingersoll.

### D.1. Méthode de détection des singularités.

Pour une machine donnée, la recherche d'éventuelles singularités nécessite deux étapes. Premièrement, nous devons calculer le volume accessible pour une machine donnée ou alors connaître son volume de travail. Deuxièmement, nous devons prouver que ce volume ne comporte pas de singularité.

Pour la première étape, nous disposons du volume de travail de la machine donné par le constructeur dans le cas d'une machine existante, ou alors du volume de travail désiré dans le cas d'une machine à concevoir.

Pour la deuxième étape des méthodes reposant sur la géométrie de Grassman (familles de droites, voir [VEBL\_10]) ont déjà été proposées. La méthode exposée ici repose sur un balayage du volume de travail avec un pas « bien choisi ». C'est la détermination de ce pas que nous allons maintenant détailler.

#### D.1.1. Paramétrage.

La Figure D- 1 présente le paramétrage utilisé où  $C$  est le point piloté de la nacelle (il est également l'origine du repère mobile),  $l_i$  est la longueur de l'actionneur (vérin) numéro  $i$ , les points  $B_i$  sont les centres des liaisons rotule entre les actionneurs et la base, et les points  $A_i$  centres des liaisons rotule entre les actionneurs et la nacelle.

Les grandeurs suivantes seront utilisées :

- $\mathbf{l}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i$
- $\mathbf{l}_{ni} = \frac{\mathbf{l}_i}{\|\mathbf{l}_i\|}$  est un vecteur unitaire caractérisant la direction de la barre numéro  $i$ .
- $\mathbf{L}_n$  est la matrice (3x6) composée des coordonnées des 6 vecteurs unitaires  $\mathbf{l}_{ni}$ .
- $\mathbf{T}$  est la matrice de rotation caractérisant la position de la nacelle (repère mobile) dans le repère fixe lié à la base.
- $\mathbf{a}_i^m$  est le vecteur composé des coordonnées des points  $A_i$  dans le repère mobile.
- $\mathbf{A}^m$  est la matrice (3x6) composée des coordonnées des 6 vecteurs  $\mathbf{a}_i^m$ .

- $s = \sqrt{2} \cdot \max(\|\mathbf{a}_i^m\|)$  est un facteur d'échelle qui homogénéise les composantes de la matrice jacobienne.
- $q_i = l_i$  est l'élongation de l'actionneur numéro  $i$ .
- $\mathbf{q}$  est le vecteur composé par les six  $q_i$ .
- La représentation angulaire que nous avons choisie est Roulis-Tangage-Lacet décrite classiquement par le triplet d'angles  $(\varphi, \theta, \psi)$ . Notre objectif étant d'étudier une machine d'usinage 5 axes, la rotation autour de l'axe de la broche autour de son axe ne sera pas considérée. Autrement dit, nous prendrons  $\varphi = 0$ .

Le vecteur, dont les coordonnées sont toutes homogènes à des distances, caractérisant la position de la nacelle dans le repère fixe est donc :  $\mathbf{x} = {}^t [x_c \ y_c \ z_c \ 0 \ s \cdot \theta \ s \cdot \psi]$ .

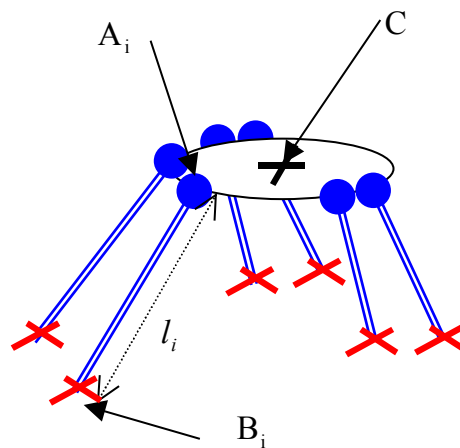


Figure D- 1 : Paramétrage d'une plate-forme de Stewart

### D.1.2. Démonstration.

La cinématique d'une plate-forme de Stewart est du type :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}} \quad (\text{D-1})$$

En considérant la description de la position de la nacelle caractérisée par le vecteur  $\mathbf{x}$  du chapitre précédent, la matrice jacobienne  $\mathbf{J}_x$  s'écrit :

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_n \\ \frac{\sqrt{2}(\mathbf{T}\mathbf{A}^m \times \mathbf{L}_n)}{s} \end{bmatrix} \quad (\text{D-2})$$

#### Démonstration préliminaire.

Le but de cette démonstration préliminaire est, connaissant un point non singulier  $\mathbf{x}_0$  du volume accessible de la machine, de déterminer un minorant du voisinage de ce point, ce voisinage étant caractérisé par l'absence de singularités.

#### Remarque :

Pour un robot parallèle de type plate-forme de Stewart, les propositions suivantes sont équivalentes :

- La position caractérisée par le vecteur  $\mathbf{x}$  est singulière

- $\mathbf{J}_x$  est singulière
- $\mathbf{J}_x$  n'est pas inversible
- $|\mathbf{J}_x| = 0$
- $\sigma_1(\mathbf{J}_x) = 0$

Dans la démonstration, nous utiliserons l'équivalence entre la première et la dernière proposition. D'après le théorème sur la variation des valeurs singulières d'une matrice, nous pouvons écrire :

$$|\sigma_1(\mathbf{J}_{x_0}) - \sigma_1(\mathbf{J}_x)| \leq \|\mathbf{J}_{x_0} - \mathbf{J}_x\| \leq \|\mathbf{J}_{x_0} - \mathbf{J}_x\|_F \quad (D-3)$$

Or :

$$\mathbf{J}_{x_0} - \mathbf{J}_x = \mathbf{dJ} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{n_0} - \mathbf{L}_n \\ \frac{\sqrt{2}(\mathbf{T}_0 \mathbf{A} \times \mathbf{L}_{n_0} - \mathbf{T} \mathbf{A} \times \mathbf{L}_n)}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{dL}_n \\ \frac{\sqrt{2}}{s} \cdot d(\mathbf{T} \mathbf{A} \times \mathbf{L}_n) \end{bmatrix} \quad (D-4)$$

Nous voyons donc que  $\mathbf{dJ}$  peut être décomposé en deux parties :  $\mathbf{dL}_n$  et  $\mathbf{d}(\mathbf{T} \mathbf{A} \times \mathbf{L}_n)$ . La recherche d'un majorant de  $\|\mathbf{dJ}\|_F$  peut donc se faire en deux parties :

- Recherche d'un majorant de  $\|\mathbf{dL}_n\|$ .

Les coordonnées des points  $A_i$  dans le repère fixe sont données par la formule :

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_c + \mathbf{T} \mathbf{a}^m \quad (D-5)$$

Par majoration, nous obtenons :

$$\|\mathbf{dx}_a\| \leq \|\mathbf{dx}_c\| + \|\mathbf{dT} \mathbf{a}^m\| \quad (D-7)$$

avec :

$$\|\mathbf{dT} \mathbf{a}^m\| \leq \|\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}\| \cdot \|\mathbf{a}^m\| \quad (D-9)$$

Avec la représentation angulaire RTL :

$$\|\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}\| \leq \|\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}\|_F = \sqrt{6 - 2 * (\cos(d\theta) + \cos(d\psi) + \cos(d\theta) * \cos(d\psi))} \quad (D-10)$$

Soit finalement :

$$\|\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}\| \leq \sqrt{6 - 2 * \left( \left(1 - \frac{d\theta^2}{2}\right) + \left(1 - \frac{d\psi^2}{2}\right) + \left(1 - \frac{d\theta^2}{2} - \frac{d\psi^2}{2}\right) \right)} = \sqrt{2(d\theta^2 + d\psi^2)} \quad (D-12)$$

avec :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [0 \quad \theta \quad \psi]$$

Nous avons :

$$\|\mathbf{dT} \mathbf{a}^m\| \leq \sqrt{2} \cdot \|\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\| \|\mathbf{a}^m\| \leq \sqrt{2} \cdot \|\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\| \cdot \max(\|\mathbf{a}^m\|) = s \cdot \|\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\| \quad (D-13)$$

En remplaçant :

$$\mathbf{0} \leq (\|\mathbf{dx}_c\| - s \cdot \|\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\|)^2 = \|\mathbf{dx}_c\|^2 + (s \cdot \|\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\|)^2 - 2s \cdot \|\mathbf{dx}_c\| \|\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\| \quad (D-16)$$

D'après les deux équations ci-dessus, nous pouvons écrire :

$$\|\mathbf{dx}_a\|^2 \leq 2 \cdot \left[ \|\mathbf{dx}_c\|^2 + (s \cdot \|\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\|)^2 \right] \quad (D-17)$$

Le résultat intermédiaire recherché est :

$$\|\mathbf{dx}_a\| \leq \sqrt{2} \cdot \|\mathbf{dx}\| \quad (D-19)$$

Remarque:

Les vecteurs  $\mathbf{l}_n$  sont des vecteurs unitaires, leur longueur ne change donc pas. Nous pouvons voir sur la Figure D- 2 que  $\|\mathbf{dl}_n\|$  est maximum quand  $|\alpha|$  est maximum. La formule suivante nous permet donc de majorer  $\|\mathbf{dl}_n\|$ .

$$\|\mathbf{dl}_n\| \leq \sqrt{2} \cdot \frac{\|\mathbf{dx}_a\|}{\|\mathbf{l}\|} \leq 2 \cdot \frac{\|\mathbf{dx}\|}{\|\mathbf{l}\|} \quad (D-20)$$

Le résultat final sur la majoration de  $\|\mathbf{dL}_n\|$  est :

$$\|\mathbf{dl}_n\| \leq 2 \cdot \frac{\|\mathbf{dx}\|}{\|\mathbf{l}\|_{\min}} \quad (D-21)$$

où  $\|\mathbf{l}\|_{\min}$  est la valeur minimale de l'élongation des actionneurs.

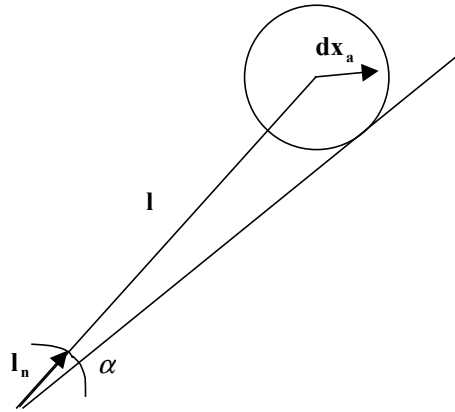


Figure D- 2 : Déplacement du point A en fonction de  $\alpha$

- Recherche d'un majorant de  $\|\mathbf{d(TA \times l_n)}\|$ .

En développant  $\mathbf{d(TA \times l_n)}$ , nous obtenons :

$$\mathbf{d(Ta^m \times l_n)} = -T_0 \mathbf{a}^m \times \mathbf{dl}_n - \mathbf{dT a}^m \times \mathbf{l}_{n_0} - \mathbf{dT a}^m \times \mathbf{dl}_n \quad (D-24)$$

La norme de cette expression est majorée par ( $T_0$  est une matrice de rotation) :

$$\|\mathbf{d(Ta^m \times l_n)}\| \leq \sqrt{2} \cdot \frac{\|\mathbf{dx}\|}{\|\mathbf{l}\|_{\min}} s + s \cdot \|\mathbf{d\epsilon}\| + 2 \cdot \frac{\|\mathbf{dx}\|}{\|\mathbf{l}\|_{\min}} s \cdot \|\mathbf{d\epsilon}\| \quad (D-29)$$

Ce qui nous permet de conclure sur la recherche d'un majorant de  $\|\mathbf{d(TA \times l_n)}\|$

$$\|\mathbf{d(Ta^m \times l_n)}\| \leq \|\mathbf{dx}\| \left[ \frac{s}{\|\mathbf{l}\|_{\min}} + 1 + 2 \cdot \frac{\|\mathbf{dx}\|}{\|\mathbf{l}\|_{\min}} \right] \quad (D-30)$$

- En conclusion, si nous synthétisons les résultats de la recherche de majorants des deux composantes de  $\|\mathbf{dJ}\|_F$ , nous pouvons écrire :

$$\|\mathbf{dJ}\|_F = \sqrt{\sum \|\mathbf{dl}_n\|^2 + \sum \left( \frac{\sqrt{2}}{s} \|\mathbf{d(Ta^m \times l_n)}\| \right)^2} \quad (D-31)$$



En supposant que  $\|\mathbf{dx}\| \leq \alpha$ , nous obtenons :

$$\|\mathbf{dJ}\|_F \leq M \|\mathbf{dx}\|$$

$$\text{avec } M = \sqrt{6 \cdot \left( \frac{2}{\|\mathbf{l}\|_{\min}} \right)^2 + 6 \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{s} \left[ \frac{s}{\|\mathbf{l}\|_{\min}} + 1 + \frac{2\alpha}{\|\mathbf{l}\|_{\min}} \right] \right)^2} \quad (\text{D-33})$$

Le calcul du majorant  $M$  dépend de manière évidente de la géométrie de la plateforme de Stewart considérée.

### Démonstration principale.

D'après la démonstration préliminaire, nous pouvons conclure que:

$$\left| \sigma_{\min}(\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0}) - \sigma_{\min}(\mathbf{J}_{\mathbf{x}}) \right| \leq M \|\mathbf{dx}\| \quad (\text{D-34})$$

Cette relation décrit l'uniforme continuité de la fonction  $f(\mathbf{x}) = \sigma_{\min}(\mathbf{J}_{\mathbf{x}})$ . Etant donné la matrice  $\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0}$  correspondant à la matrice  $\mathbf{J}_{\mathbf{x}}$  exprimée au point  $\mathbf{x}_0$ , nous venons de prouver que la matrice  $\mathbf{J}_{\mathbf{x}}$  au point  $\mathbf{x}$  ne changera pas plus que  $M \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ . Cette constatation est illustrée sur la Figure D- 3. Ceci nous amène à considérer deux cas :

- Premier cas :  $\sigma_{\min}(\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0}) - \sigma_{\min}(\mathbf{J}_{\mathbf{x}}) \leq 0$ . Nous avons  $\sigma_{\min}(\mathbf{J}_{\mathbf{x}}) \geq \sigma_{\min}(\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0})$ . Dans ce cas, il n'y a pas de problème puisque la plus petite valeur singulière ne risque pas de s'annuler.
- Deuxième cas:  $\sigma_{\min}(\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0}) - \sigma_{\min}(\mathbf{J}_{\mathbf{x}}) \geq 0$ . Dans ce cas, l'équation devient :  $\sigma_{\min}(\mathbf{J}_{\mathbf{x}}) \geq \sigma_{\min}(\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0}) - M \|\mathbf{dx}\|$ . Si nous voulons avoir  $\sigma_{\min}(\mathbf{J}_{\mathbf{x}}) > 0$ , il faut vérifier la condition :  $\sigma_{\min}(\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0}) - M \|\mathbf{dx}\| > 0$ , donc avoir  $\|\mathbf{dx}\| < \frac{1}{M} \cdot \sigma_{\min}(\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0})$ .

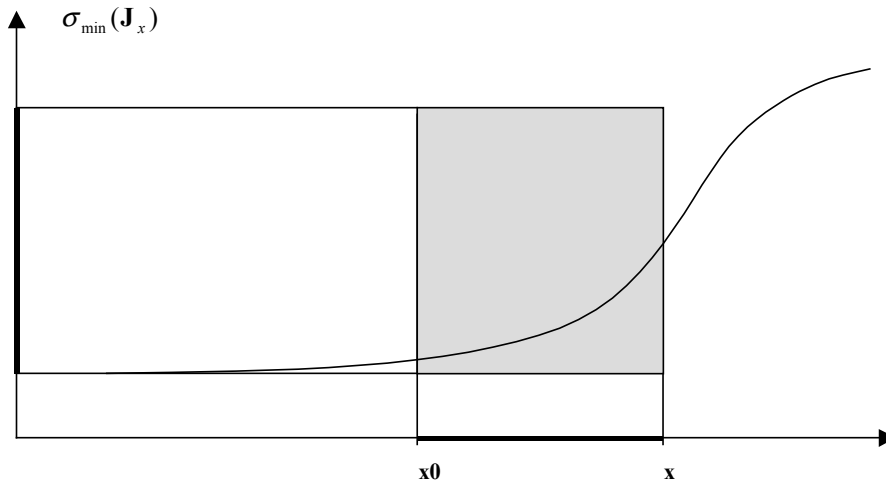


Figure D- 3 : La fonction « plus petite valeur singulière » de  $\mathbf{J}_{\mathbf{x}}$  est lipchitszienne

### D.1.3.Algorithme.

#### Remarque préliminaire:

D'après les conventions utilisées dans les démonstrations, le voisinage du point  $\mathbf{x}_0$  est une sphère de dimension 5 car nous avons utilisé la norme 2. Dans la suite, nous ne prendrons en compte qu'une sous partie de cette sphère à savoir le cube qui lui est inscrit. Ce cube

correspond à l'utilisation de la norme infinie. D'après la Figure D- 4 représentée en dimension 2 pour plus de compréhension, mais étant dans la pratique de dimension 5, nous pouvons trouver une relation entre  $\|\mathbf{dx}\|$  et le pas de la grille.

En prenant en compte les remarques précédentes, l'algorithme que nous proposons d'utiliser est le suivant :

1. Choisir une machine de type plate-forme de Stewart
2. Calculer le volume accessible ou une sous partie de ce volume accessible
3. Choisir un pas pour la grille
4. Si, pour chaque point  $\mathbf{x}_0$  de la grille, la condition  $step = 2 \cdot \|\mathbf{dx}\|_{\infty} < \frac{2}{M\sqrt{5}} \sigma_{\min}(\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0})$  est vérifiée, il n'y a alors aucune singularité dans le volume de travail sélectionné.
5. Si cette condition n'est pas vérifiée, recommencer à partir de l'étape 3 en choisissant un pas de grille plus petit.

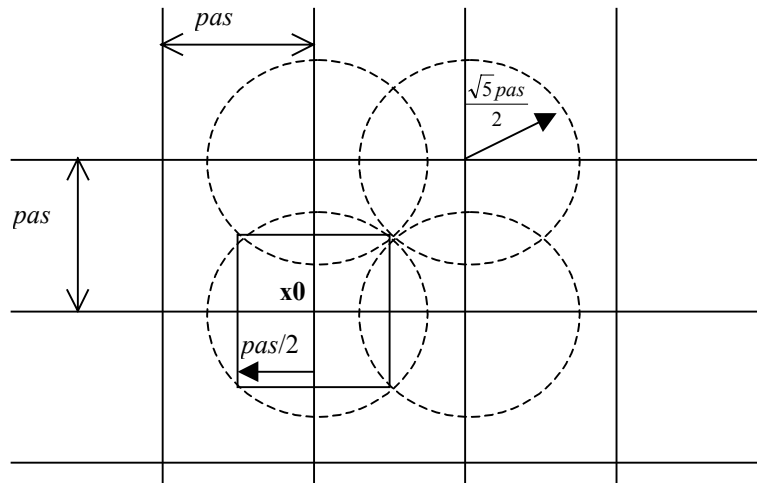


Figure D- 4 : Choix du pas de la grille.

## D.2. Application à la machine INGERSOLL.

Si nous considérons la géométrie de la machine INGERSOLL avec  $\alpha = 100mm$ , la valeur du majorant se calcule par :

$$\|\mathbf{dJ}\|_F \leq 9 \cdot 10^{-3} \|\mathbf{dx}\| \quad (D-37)$$

Nous obtenons donc  $M = 9 \cdot 10^{-3}$ .

A partir de là, un premier balayage (avec un pas arbitraire) nous permet de calculer la plus petite valeur singulière et de déterminer un nouveau pas. Si le volume de travail ne présente pas de singularités (ce qui est le cas de la machine INGERSOLL) l'algorithme s'arrête au bout de quelques itérations.

Nous avons également testé cet algorithme sur la machine Hexact dont le volume de travail contient des singularités en son centre. Dans ce cas, l'algorithme n'a pas réussi à trouver une valeur convenable pour le pas de balayage. En fait, à chaque itération, il diminue le pas et boucle en permanence si une valeur de seuil minimale n'a pas été choisie pour le pas.

## Annexe E : Etude de sensibilité de la machine UraneSX.

Pour les variations de position nous considérons des variations par rapport aux valeurs nominales. Etant donné que nous recherchons une écriture matricielle reliant les erreurs de position de la nacelle aux erreurs de fabrication des éléments de la machine, nous supposons implicitement une linéarisation des équations au premier ordre (hypothèse des petits déplacements et principe de superposition). Dans la suite de cette étude, nous linéarisons toutes les équations au premier ordre pour obtenir une écriture matricielle. Compte tenu de la modélisation de la géométrie des pièces que nous avons présentée, les positions réelles des différents points peuvent être déterminées. La position réelle des points  $P_i$  est :

$$\mathbf{P} = R \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx_{P_1} & dx_{P_2} & dx_{P_3} \\ dy_{P_1} & dy_{P_2} & dy_{P_3} \\ dz_{P_1} & dz_{P_2} & dz_{P_3} \end{bmatrix} \quad (\text{E-1})$$

$$\text{avec : } \theta = [0 \quad 120 \quad -120] \frac{\pi}{180}$$

La position réelle des points  $A_i$  sur les glissières dans le repère absolu est :

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{P}_i + q_i \begin{bmatrix} 1 & -drz_{g_i} & dry_{g_i} \\ drz_{g_i} & 1 & -drx_{g_i} \\ -dry_{g_i} & drx_{g_i} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_i + q_i \begin{bmatrix} dry_{g_i} \\ -drx_{g_i} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E-2})$$

La position réelle des points  $A_{ij}$  sur les platines (secondaire des moteurs) dans un repère lié aux surfaces de guidage des liaisons glissière est :

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} h & h \\ d & -d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx_{A_{i1}} & dx_{A_{i2}} \\ dy_{A_{i1}} & dy_{A_{i2}} \\ dz_{A_{i1}} & dz_{A_{i2}} \end{bmatrix} \quad (\text{E-3})$$

La position des points  $A_{ij}$  dans le repère absolu est, au premier ordre :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ij} &= [\mathbf{A}_i \quad \mathbf{A}_j] \\ &+ \begin{bmatrix} -h \cos(\theta_i) + d \sin(\theta_i) + drz_{g_i} (h \sin(\theta_i) + d \cos(\theta_i)) & -h \cos(\theta_i) - d \sin(\theta_i) + drz_{g_i} (h \sin(\theta_i) + d \cos(\theta_i)) \\ drz_{g_i} (-h \cos(\theta_i) + d \sin(\theta_i)) - h \sin(\theta_i) - d \cos(\theta_i) & -drz_{g_i} (h \cos(\theta_i) + d \sin(\theta_i)) - h \sin(\theta_i) - d \cos(\theta_i) \\ dry_{g_i} (h \cos(\theta_i) - d \sin(\theta_i)) - drx_{g_i} (h \sin(\theta_i) + d \cos(\theta_i)) & dry_{g_i} (h \cos(\theta_i) + d \sin(\theta_i)) - drx_{g_i} (h \sin(\theta_i) + d \cos(\theta_i)) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -dx_{A_{i1}} \cos(\theta_i) + dy_{A_{i1}} \sin(\theta_i) & -dx_{A_{i2}} \cos(\theta_i) + dy_{A_{i2}} \sin(\theta_i) \\ -dx_{A_{i1}} \sin(\theta_i) - dy_{A_{i1}} \cos(\theta_i) & -dx_{A_{i2}} \sin(\theta_i) - dy_{A_{i2}} \cos(\theta_i) \\ dz_{A_{i1}} & dz_{A_{i2}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E-5})$$

Soit  $dX$  et  $dR$  les erreurs de position de la nacelle résultant des erreurs de fabrication des différents organes de la machine. Nous posons  $dX = \begin{bmatrix} dx_n \\ dy_n \\ dz_n \end{bmatrix}$  et  $dR = \begin{bmatrix} drx_n \\ dry_n \\ drz_n \end{bmatrix}$ . La position

des points  $B_{ij}$  dans le repère de référence est :

$$\mathbf{B}_{ij} = \begin{bmatrix} x & x \\ y & y \\ z & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx_n & dx_n \\ dy_n & dy_n \\ dz_n & dz_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -drz_n & dry_n \\ drz_n & 1 & -drx_n \\ -dry_n & drx_n & 1 \end{bmatrix} \mathbf{B}_{ij,nacelle} \quad (E-7)$$

Ce qui donne, au premier ordre :

$$\mathbf{B}_{ij} = \begin{bmatrix} x & x \\ y & y \\ z & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx & dx \\ dy & dy \\ dz & dz \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \cos(\theta_i) + d \sin(\theta_i) & r \cos(\theta_i) - d \sin(\theta_i) \\ r \sin(\theta_i) - d \cos(\theta_i) & r \sin(\theta_i) + d \cos(\theta_i) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx_{B_{i1}} - drz_n (r \sin(\theta_i) - d \cos(\theta_i)) & dx_{B_{i2}} - drz_n (r \sin(\theta_i) + d \cos(\theta_i)) \\ dy_{B_{i1}} + drz_n (r \cos(\theta_i) + d \sin(\theta_i)) & dy_{B_{i2}} + drz_n (r \cos(\theta_i) - d \sin(\theta_i)) \\ dz_{B_{i1}} - dry_n (r \cos(\theta_i) + d \sin(\theta_i)) + drx_n (r \sin(\theta_i) - d \cos(\theta_i)) & dz_{B_{i2}} - dry_n (r \cos(\theta_i) - d \sin(\theta_i)) + drx_n (r \sin(\theta_i) + d \cos(\theta_i)) \end{bmatrix} \quad (E-8)$$

Pour trouver la relation entre  $(dX, dR)$  et les erreurs de fabrication, il faut résoudre le système composé des 6 équations :

$$\{\mathbf{B}_{ij} \mathbf{C}_{ij}^2 - (L + dl_{ij})^2 = 0 \quad (E-9)$$

Au premier ordre, ce système devient :

$$\{[\mathbf{A}_{ij} \mathbf{B}_{ij}]_{\text{nominal}} d\mathbf{A}_{ij} \mathbf{B}_{ij} - L dl_{ij} = 0 \quad (E-10)$$

Ce qui donne :

$$d\mathbf{A} \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} dx_{P_i} + q_i dry_{g_i} + drz_{g_i} (h \sin(\theta_i) + d \cos(\theta_i)) - dx_{A_2} \cos(\theta_i) + dy_{A_2} \sin(\theta_i) - dx_n - dx_{B_{i2}} + drz_n (r \sin(\theta_i) + d \cos(\theta_i)) \\ dy_{P_i} - q_i drx_{g_i} - drz_{g_i} (h \cos(\theta_i) + d \sin(\theta_i)) - dx_{A_2} \sin(\theta_i) - dy_{A_2} \cos(\theta_i) - dy_n - dy_{B_{i2}} - drz_n (r \cos(\theta_i) - d \sin(\theta_i)) \\ dz_{P_i} + q_i + dry_{g_i} (h \cos(\theta_i) + d \sin(\theta_i)) - drx_{g_i} (h \sin(\theta_i) + d \cos(\theta_i)) + dz_{A_2} - dz_n - dz_{B_{i2}} + dry_n (r \cos(\theta_i) - d \sin(\theta_i)) - drx_n (r \sin(\theta_i) + d \cos(\theta_i)) \end{bmatrix} \quad (E-13)$$

Soit le vecteur d'erreur :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{1,9} &= {}^t [dx_{P_1} \quad dy_{P_1} \quad dz_{P_1} \quad dx_{P_2} \quad dy_{P_2} \quad dz_{P_2} \quad dx_{P_3} \quad dy_{P_3} \quad dz_{P_3}] \\ \mathbf{E}_{10,18} &= {}^t [drx_{g_1} \quad dry_{g_1} \quad drz_{g_1} \quad drx_{g_2} \quad dry_{g_2} \quad drz_{g_2} \quad drx_{g_3} \quad dry_{g_3} \quad drz_{g_3}] \\ \mathbf{E}_{19,27} &= {}^t [dx_{A_1} \quad dy_{A_1} \quad dz_{A_1} \quad dx_{A_2} \quad dy_{A_2} \quad dz_{A_2} \quad dx_{A_{21}} \quad dy_{A_{21}} \quad dz_{A_{21}}] \\ \mathbf{E}_{28,36} &= {}^t [dx_{A_{22}} \quad dy_{A_{22}} \quad dz_{A_{22}} \quad dx_{A_{31}} \quad dy_{A_{31}} \quad dz_{A_{31}} \quad dx_{A_{32}} \quad dy_{A_{32}} \quad dz_{A_{32}}] \\ \mathbf{E}_{37,45} &= {}^t [dx_{B_{11}} \quad dy_{B_{11}} \quad dz_{B_{11}} \quad dx_{B_{12}} \quad dy_{B_{12}} \quad dz_{B_{12}} \quad dx_{B_{21}} \quad dy_{B_{21}} \quad dz_{B_{21}}] \\ \mathbf{E}_{46,54} &= {}^t [dx_{B_{22}} \quad dy_{B_{22}} \quad dz_{B_{22}} \quad dx_{B_{31}} \quad dy_{B_{31}} \quad dz_{B_{31}} \quad dx_{B_{32}} \quad dy_{B_{32}} \quad dz_{B_{32}}] \\ \mathbf{E}_{55,60} &= {}^t [dl_{11} \quad dl_{12} \quad dl_{21} \quad dl_{22} \quad dl_{31} \quad dl_{32}] \end{aligned} \quad (E-14)$$

La matrice de sensibilité relie les erreurs de fabrication des organes de la machine au défaut de positionnement de l'organe terminal par rapport à sa position nominale.

$$\mathbf{T} \begin{bmatrix} d\mathbf{X} \\ d\mathbf{R} \end{bmatrix} = \mathbf{S} \mathbf{E} \quad (E-15)$$

La matrice  $\mathbf{T}$  s'écrit :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{AB}_{i1} & \mathbf{AB}_{i1} \times \mathbf{B}_{i1} \mathbf{D} \\ \mathbf{AB}_{i2} & \mathbf{AB}_{i2} \times \mathbf{B}_{i2} \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (\text{E-16})$$

Et  $\mathbf{S}$  s'écrit :

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1 \quad \mathbf{S}_2 \quad \mathbf{S}_3 \quad \mathbf{S}_4 \quad \mathbf{S}_5 \quad \mathbf{S}_6 \quad \mathbf{S}_7 \quad \mathbf{S}_8 \quad \mathbf{S}_9 \quad \mathbf{S}_{10} \quad \mathbf{S}_{11} \quad \mathbf{S}_{12} \quad \mathbf{S}_{13} \quad \mathbf{S}_{14}] \quad (\text{E-17})$$

avec :

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1)_x & 0 & 0 & (\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2)_x & 0 & 0 & (\mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3)_x & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1)_y & 0 & 0 & (\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2)_y & 0 & 0 & (\mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3)_y & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1)_z & 0 & 0 & (\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2)_z & 0 & 0 & (\mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3)_z \\ (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1)_x & 0 & 0 & (\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2)_x & 0 & 0 & (\mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3)_x & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1)_y & 0 & 0 & (\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2)_y & 0 & 0 & (\mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3)_y & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1)_z & 0 & 0 & (\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2)_z & 0 & 0 & (\mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3)_z \end{bmatrix} \quad (\text{E-18})$$

$$\mathbf{S}_{i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{diag}(\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \times \mathbf{B}_i \mathbf{B}_{i1}) \\ \mathbf{diag}(\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \times \mathbf{B}_i \mathbf{B}_{i2}) \end{bmatrix} \text{ pour } 1 \leq i \leq 3 \quad (\text{E-19})$$

$$\mathbf{S}_5 = \begin{bmatrix} -(\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1)_x \cos \theta_1 - (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1)_y \sin \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1)_x \sin \theta_1 - (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1)_y \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1)_z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E-22})$$

$$\mathbf{S}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -(\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1)_x \cos \theta_1 - (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1)_y \sin \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1)_x \sin \theta_1 - (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1)_y \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1)_z \end{bmatrix} \quad (\text{E-23})$$

$$\mathbf{S}_7 = \begin{bmatrix} -(\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2)_x \cos \theta_2 - (\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2)_y \sin \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2)_x \sin \theta_2 - (\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2)_y \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2)_z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E-24})$$

$$\mathbf{S}_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -(\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2)_x \cos \theta_2 - (\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2)_y \sin \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2)_x \sin \theta_2 - (\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2)_y \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2)_z \end{bmatrix} \quad (\text{E-25})$$

$$\mathbf{S}_9 = \begin{bmatrix} -(\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3)_x \cos \theta_3 - (\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3)_y \sin \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3)_x \sin \theta_3 - (\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3)_y \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3)_z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E-26})$$

$$\mathbf{S}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -(\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3)_x \cos \theta_3 - (\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3)_y \sin \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3)_x \sin \theta_3 - (\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3)_y \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3)_z \end{bmatrix} \quad (\text{E-27})$$

$$\mathbf{S}_{10+i} = - \begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}(\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i) \end{bmatrix} \text{ pour } 1 \leq i \leq 3 \quad (\text{E-28})$$

$$\mathbf{S}_{14} = -L\mathbf{I}_6 \quad (\text{E-31})$$

## Annexe F : Etude de sensibilité d'une machine de type P-U-S.

Nous étudions dans cette annexe l'influence des erreurs de fabrication d'une structure de type P-U-S semblable à celle dimensionnée dans le chapitre IV.

### F.1. Ecriture du modèle d'erreurs.

Pour une architecture P-U-S, nous rappelons l'écriture du modèle d'erreurs présenté au second chapitre :

$$\mathbf{TdX} = \mathbf{VE} \quad (\text{F-1})$$

où :

- $\mathbf{T}$  est une matrice 6x6 de pré-multiplication des erreurs de position de la nacelle
- $\mathbf{dX}$  est le vecteur défini précédemment contenant les erreurs de position de la nacelle
- $\mathbf{V}$  est une matrice de pré-multiplication des écarts entre les cotes nominales et réelles des éléments du robot
- $\mathbf{E}$  est le vecteur composé des écarts entre les cotes nominales et réelles des éléments du dispositif de positionnement

Le vecteur  $\mathbf{E}$  est défini par :

$$\mathbf{E} = {}^t[\mathbf{E}_P \quad \mathbf{E}_{\Omega G} \quad \mathbf{E}_A \quad \mathbf{E}_B \quad \mathbf{E}_L]$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_P &= [{}^t\mathbf{dx}_{P_1} \quad {}^t\mathbf{dx}_{P_2} \quad {}^t\mathbf{dx}_{P_3} \quad {}^t\mathbf{dx}_{P_4} \quad {}^t\mathbf{dx}_{P_5} \quad {}^t\mathbf{dx}_{P_6}] \\ \mathbf{E}_{\Omega G} &= [{}^t\mathbf{d}\Omega_{g_1} \quad {}^t\mathbf{d}\Omega_{g_2} \quad {}^t\mathbf{d}\Omega_{g_3} \quad {}^t\mathbf{d}\Omega_{g_4} \quad {}^t\mathbf{d}\Omega_{g_5} \quad {}^t\mathbf{d}\Omega_{g_6}] \\ \mathbf{E}_A &= [{}^t\mathbf{dx}_{A_1} \quad {}^t\mathbf{dx}_{A_2} \quad {}^t\mathbf{dx}_{A_3} \quad {}^t\mathbf{dx}_{A_4} \quad {}^t\mathbf{dx}_{A_5} \quad {}^t\mathbf{dx}_{A_6}] \\ \mathbf{E}_B &= [{}^t\mathbf{dx}_{B_1} \quad {}^t\mathbf{dx}_{B_2} \quad {}^t\mathbf{dx}_{B_3} \quad {}^t\mathbf{dx}_{B_4} \quad {}^t\mathbf{dx}_{B_5} \quad {}^t\mathbf{dx}_{B_6}] \\ \mathbf{E}_L &= [dL_1 \quad dL_2 \quad dL_3 \quad dL_4 \quad dL_5 \quad dL_6] \end{aligned} \quad (\text{F-2})$$

La dimension du vecteur  $\mathbf{E}$  est donc 78. Nous explicitons maintenant les matrices  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{V}$  (toutes les éléments intervenant dans la constitution de ces matrices sont les valeurs nominales). L'expression de la matrice  $\mathbf{T}$  est :

$$\mathbf{T} = [{}^t\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i \quad {}^t(\mathbf{O}_m\mathbf{B}_{i,R_i} \times \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i)] \quad (\text{F-4})$$

Nous décomposons la matrice  $\mathbf{V}$  en sous matrices :

$$\mathbf{V} = [\mathbf{V}_P \quad \mathbf{V}_{\Omega G} \quad \mathbf{V}_A \quad \mathbf{V}_B \quad \mathbf{V}_L] \quad (\text{F-5})$$

Les expressions de ces sous matrices sont :

$$\mathbf{V}_P = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^t\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^t\mathbf{A}_4\mathbf{B}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t\mathbf{A}_5\mathbf{B}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t\mathbf{A}_6\mathbf{B}_6 \end{bmatrix} \quad (\text{F-6})$$

$$\mathbf{V}_{OG} = \begin{bmatrix} {}^t(\mathbf{P}_1\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^t(\mathbf{P}_2\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t(\mathbf{P}_3\mathbf{A}_3 \times \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^t(\mathbf{P}_4\mathbf{A}_4 \times \mathbf{A}_4\mathbf{B}_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t(\mathbf{P}_5\mathbf{A}_5 \times \mathbf{A}_5\mathbf{B}_5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t(\mathbf{P}_6\mathbf{A}_6 \times \mathbf{A}_6\mathbf{B}_6) \end{bmatrix} \quad (\text{F-7})$$

$$\mathbf{V}_A = \begin{bmatrix} {}^t(\mathbf{M}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^t(\mathbf{M}_2^{-1} \cdot \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t(\mathbf{M}_3^{-1} \cdot \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^t(\mathbf{M}_4^{-1} \cdot \mathbf{A}_4\mathbf{B}_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t(\mathbf{M}_5^{-1} \cdot \mathbf{A}_5\mathbf{B}_5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t(\mathbf{M}_6^{-1} \cdot \mathbf{A}_6\mathbf{B}_6) \end{bmatrix} \quad (\text{F-9})$$

$$\mathbf{V}_B = \begin{bmatrix} {}^t(\mathbf{RTL}_{nom}^{-1} \cdot \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^t(\mathbf{RTL}_{nom}^{-1} \cdot \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t(\mathbf{RTL}_{nom}^{-1} \cdot \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^t(\mathbf{RTL}_{nom}^{-1} \cdot \mathbf{A}_4\mathbf{B}_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t(\mathbf{RTL}_{nom}^{-1} \cdot \mathbf{A}_5\mathbf{B}_5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t(\mathbf{RTL}_{nom}^{-1} \cdot \mathbf{A}_6\mathbf{B}_6) \end{bmatrix} \quad (\text{F-10})$$

$$\mathbf{V}_L = \text{diag}([L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4 \quad L_5 \quad L_6]) \quad (\text{F-11})$$

La matrice  $\mathbf{S}$  de sensibilité aux erreurs de fabrication s'écrit :

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{V} \quad (\text{F-13})$$

La matrice  $\mathbf{S}$  permet de mesurer l'influence des erreurs de fabrication des pièces sur le positionnement final de la nacelle. Cependant, il faut remarquer que l'influence de tous les défauts que nous avons mentionnés précédemment n'est pas la même. Nous allons maintenant examiner l'influence de chacun des défauts.

## F.2. Calculs préliminaires.

### F.2.1. Dimensions nominales.

Les dimensions nominales (exprimées en mètres) retenues pour l'architecture P-U-S étudiée sont (voir Figure F- 1)  $R = 0.279$  m,  $r = 0.107$  m,  $h = 0.100$  m,  $L = 0.348$  et  $\mathbf{A}_i\mathbf{B}_{i,R_i} = {}^t[0 \quad -0.050 \quad 0.100]$ . Les paires de glissières sont espacées angulairement de  $120^\circ$ .



### F.2.2.Méthode utilisée.

La méthode que nous utiliserons dans la suite de cette annexe est une technique de balayage du volume de travail en position et en orientation en n'activant à chaque fois qu'un seul défaut, ce défaut étant soit un des 78 défauts envisagés précédemment, soit le défaut de position d'un point. Pour ce défaut, nous recherchons le coefficient d'amplification des erreurs sur la nacelle que ce soit en position ou en orientation. Il est évident que cette méthode ne fait pas apparaître les effets de couplage sur le résultat entre les défauts puisque chacun d'entre eux est considéré séparément des autres.

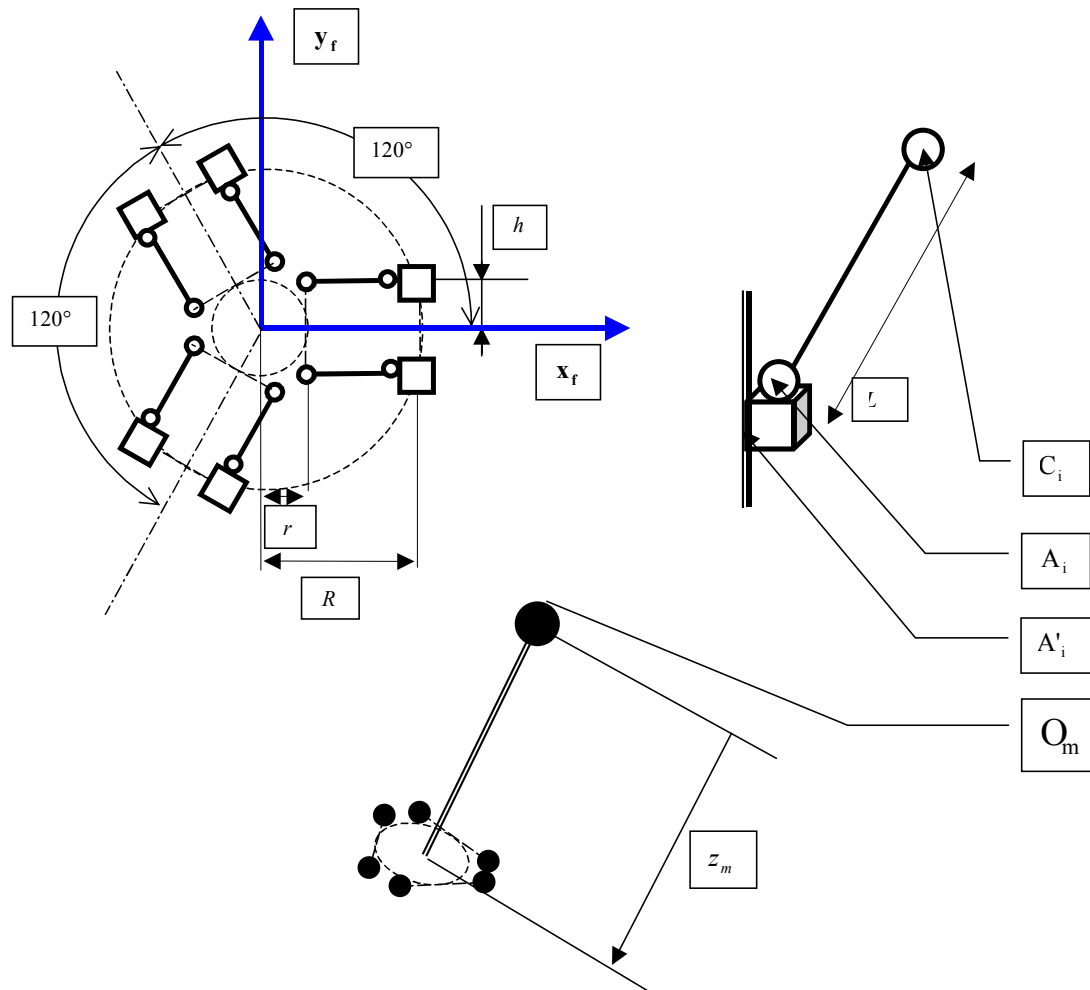


Figure F- 1 : Dimensions nominales.

### F.3. Analyse numérique.

#### F.3.1.Résultats par défaut.

Le tableau suivant indique l'influence maximale de chacune des erreurs de réalisation sur le positionnement de la nacelle pour le volume de travail considéré (position et orientation). La première colonne du tableau indique le défaut considéré, la deuxième, la variable lui correspondant et la troisième colonne, l'unité de mesure du défaut. Pour un défaut unitaire (en fait  $1\mu\text{m}$  ou  $1\mu\text{rad}$ ), la répercussion sur l'erreur de positionnement (en  $\mu\text{m}$ ) et l'erreur en orientation (en  $\mu\text{rad}$ ) de la nacelle mesurée au point  $O_m$  est donnée dans les deux

colonnes suivantes. Enfin, les deux dernières colonnes donnent le défaut résultant en positionnement et en orientation non pas en  $O_m$ , mais au centre de la nacelle (barycentre des points B).

Nom du défaut	Variable	Unité du défaut	Ecart de position (unité $\mu\text{m}$ )	Ecart de position (unité $\mu\text{rad}$ )	Ecart de position (unité $\mu\text{m}$ )	Ecart de position (unité $\mu\text{rad}$ )
Position de $P_1$ suivant $\mathbf{x}_f$ dans $R_f$	$dx_{P_1}$	$\mu\text{m}$	2,4812	3,9264	0,9997	3,9264
Position de $P_1$ suivant $\mathbf{y}_f$ dans $R_f$	$dy_{P_1}$	$\mu\text{m}$	1,7646	2,1175	0,5078	2,1175
Position de $P_1$ suivant $\mathbf{z}_f$ dans $R_f$	$dz_{P_1}$	$\mu\text{m}$	5,2422	6,3577	1,5140	6,3577
Position de $P_2$ suivant $\mathbf{x}_f$ dans $R_f$	$dx_{P_2}$	$\mu\text{m}$	2,4812	3,9264	0,9997	3,9264
Position de $P_2$ suivant $\mathbf{y}_f$ dans $R_f$	$dy_{P_2}$	$\mu\text{m}$	1,7646	2,1175	0,5078	2,1175
Position de $P_2$ suivant $\mathbf{z}_f$ dans $R_f$	$dz_{P_2}$	$\mu\text{m}$	5,2422	6,3577	1,5140	6,3577
Position de $P_3$ suivant $\mathbf{x}_f$ dans $R_f$	$dx_{P_3}$	$\mu\text{m}$	2,0383	3,3077	0,8372	3,3077
Position de $P_3$ suivant $\mathbf{y}_f$ dans $R_f$	$dy_{P_3}$	$\mu\text{m}$	3,1639	4,0376	0,8992	4,0376
Position de $P_3$ suivant $\mathbf{z}_f$ dans $R_f$	$dz_{P_3}$	$\mu\text{m}$	5,1673	6,4084	1,4768	6,4084
Position de $P_4$ suivant $\mathbf{x}_f$ dans $R_f$	$dx_{P_4}$	$\mu\text{m}$	2,7423	3,3007	0,7151	3,3007
Position de $P_4$ suivant $\mathbf{y}_f$ dans $R_f$	$dy_{P_4}$	$\mu\text{m}$	2,2323	4,0527	0,9753	4,0527
Position de $P_4$ suivant $\mathbf{z}_f$ dans $R_f$	$dz_{P_4}$	$\mu\text{m}$	4,9582	6,4086	1,4531	6,4086
Position de $P_5$ suivant $\mathbf{x}_f$ dans $R_f$	$dx_{P_5}$	$\mu\text{m}$	2,7423	3,3007	0,7151	3,3007
Position de $P_5$ suivant $\mathbf{y}_f$ dans $R_f$	$dy_{P_5}$	$\mu\text{m}$	2,2323	4,0527	0,9753	4,0527
Position de $P_5$ suivant $\mathbf{z}_f$ dans $R_f$	$dz_{P_5}$	$\mu\text{m}$	4,9582	6,4086	1,4531	6,4086
Position de $P_6$ suivant $\mathbf{x}_f$ dans $R_f$	$dx_{P_6}$	$\mu\text{m}$	2,0383	3,3077	0,8372	3,3077
Position de $P_6$ suivant $\mathbf{y}_f$ dans $R_f$	$dy_{P_6}$	$\mu\text{m}$	3,1639	4,0376	0,8992	4,0376
Position de $P_6$ suivant $\mathbf{z}_f$ dans $R_f$	$dz_{P_6}$	$\mu\text{m}$	5,1673	6,4084	1,4768	6,4084
Orientation de la glissière 1 suivant $\mathbf{x}_f$ dans $R_f$	$d\Omega_{g_1}$	$\mu\text{rad}$	0,7425	0,8910	0,2035	0,8910
Orientation de la glissière 1 suivant $\mathbf{y}_f$ dans $R_f$	$d\Omega_{y_{g_1}}$	$\mu\text{rad}$	1,2346	1,7634	0,4493	1,7634
Orientation de la glissière 1 suivant $\mathbf{z}_f$ dans $R_f$	$d\Omega_{z_{g_1}}$	$\mu\text{rad}$	0,3765	0,7987	0,1898	0,7987
Orientation de la glissière 2 suivant $\mathbf{x}_f$ dans $R_f$	$d\Omega_{g_2}$	$\mu\text{rad}$	0,7425	0,8910	0,2035	0,8910
Orientation de la glissière 2 suivant $\mathbf{y}_f$ dans $R_f$	$d\Omega_{y_{g_2}}$	$\mu\text{rad}$	1,2346	1,7634	0,4493	1,7634
Orientation de la glissière 2 suivant $\mathbf{z}_f$ dans $R_f$	$d\Omega_{z_{g_2}}$	$\mu\text{rad}$	0,3765	0,7987	0,1898	0,7987
Orientation de la glissière 3 suivant $\mathbf{x}_f$ dans $R_f$	$d\Omega_{g_3}$	$\mu\text{rad}$	1,5649	1,9970	0,4429	1,9970
Orientation de la glissière 3 suivant $\mathbf{y}_f$ dans $R_f$	$d\Omega_{y_{g_3}}$	$\mu\text{rad}$	0,4255	0,6905	0,1748	0,6905
Orientation de la glissière 3 suivant $\mathbf{z}_f$ dans $R_f$	$d\Omega_{z_{g_3}}$	$\mu\text{rad}$	0,5035	0,8170	0,2068	0,8170
Orientation de la glissière 4 suivant $\mathbf{x}_f$ dans $R_f$	$d\Omega_{g_4}$	$\mu\text{rad}$	0,8305	1,5078	0,3629	1,5078
Orientation de la glissière 4 suivant $\mathbf{y}_f$ dans $R_f$	$d\Omega_{y_{g_4}}$	$\mu\text{rad}$	1,3896	1,6725	0,3579	1,6725
Orientation de la glissière 4 suivant $\mathbf{z}_f$ dans $R_f$	$d\Omega_{z_{g_4}}$	$\mu\text{rad}$	0,5103	0,9264	0,2229	0,9264
Orientation de la glissière 5 suivant $\mathbf{x}_f$ dans $R_f$	$d\Omega_{g_5}$	$\mu\text{rad}$	0,8305	1,5078	0,3629	1,5078

*Annexe F : Etude de sensibilité d'une machine de type Hexa linéaire.*

Orientation de la glissière 5 suivant $\mathbf{y}_f$ dans $R_f$	$d\Omega_{y_{g_5}}$	$\mu\text{rad}$	1,3896	1,6725	0,3579	1,6725
Orientation de la glissière 5 suivant $\mathbf{z}_f$ dans $R_f$	$d\Omega_{z_{g_5}}$	$\mu\text{rad}$	0,5103	0,9264	0,2229	0,9264
Orientation de la glissière 6 suivant $\mathbf{x}_f$ dans $R_f$	$d\Omega_{x_{g_6}}$	$\mu\text{rad}$	1,5649	1,9970	0,4429	1,9970
Orientation de la glissière 6 suivant $\mathbf{y}_f$ dans $R_f$	$d\Omega_{y_{g_6}}$	$\mu\text{rad}$	0,4255	0,6905	0,1748	0,6905
Orientation de la glissière 6 suivant $\mathbf{z}_f$ dans $R_f$	$d\Omega_{z_{g_6}}$	$\mu\text{rad}$	0,5035	0,8170	0,2068	0,8170
Position de $A_1$ suivant $\mathbf{x}_1$ dans $R_1$	$dx_{A_1}$	$\mu\text{m}$	1,7646	2,1175	0,5078	2,1175
Position de $A_1$ suivant $\mathbf{y}_1$ dans $R_1$	$dy_{A_1}$	$\mu\text{m}$	2,4812	3,9264	0,9997	3,9264
Position de $A_1$ suivant $\mathbf{z}_1$ dans $R_1$	$dz_{A_1}$	$\mu\text{m}$	5,2422	6,3577	1,5140	6,3577
Position de $A_2$ suivant $\mathbf{x}_2$ dans $R_2$	$dx_{A_2}$	$\mu\text{m}$	1,7646	2,1175	0,5078	2,1175
Position de $A_2$ suivant $\mathbf{y}_2$ dans $R_2$	$dy_{A_2}$	$\mu\text{m}$	2,4812	3,9264	0,9997	3,9264
Position de $A_2$ suivant $\mathbf{z}_2$ dans $R_2$	$dz_{A_2}$	$\mu\text{m}$	5,2422	6,3577	1,5140	6,3577
Position de $A_3$ suivant $\mathbf{x}_3$ dans $R_3$	$dx_{A_3}$	$\mu\text{m}$	2,1892	2,7937	0,7051	2,7937
Position de $A_3$ suivant $\mathbf{y}_3$ dans $R_3$	$dy_{A_3}$	$\mu\text{m}$	2,3895	4,1403	1,0476	4,1403
Position de $A_3$ suivant $\mathbf{z}_3$ dans $R_3$	$dz_{A_3}$	$\mu\text{m}$	5,1673	6,4084	1,4768	6,4084
Position de $A_4$ suivant $\mathbf{x}_4$ dans $R_4$	$dx_{A_4}$	$\mu\text{m}$	2,3838	2,8691	0,6442	2,8691
Position de $A_4$ suivant $\mathbf{y}_4$ dans $R_4$	$dy_{A_4}$	$\mu\text{m}$	2,0147	4,1696	1,1132	4,1696
Position de $A_4$ suivant $\mathbf{z}_4$ dans $R_4$	$dz_{A_4}$	$\mu\text{m}$	4,9582	6,4086	1,4531	6,4086
Position de $A_5$ suivant $\mathbf{x}_5$ dans $R_5$	$dx_{A_5}$	$\mu\text{m}$	2,3838	2,8691	0,6442	2,8691
Position de $A_5$ suivant $\mathbf{y}_5$ dans $R_5$	$dy_{A_5}$	$\mu\text{m}$	2,0147	4,1696	1,1132	4,1696
Position de $A_5$ suivant $\mathbf{z}_5$ dans $R_5$	$dz_{A_5}$	$\mu\text{m}$	4,9582	6,4086	1,4531	6,4086
Position de $A_6$ suivant $\mathbf{x}_6$ dans $R_6$	$dx_{A_6}$	$\mu\text{m}$	2,1892	2,7937	0,7051	2,7937
Position de $A_6$ suivant $\mathbf{y}_6$ dans $R_6$	$dy_{A_6}$	$\mu\text{m}$	2,3895	4,1403	1,0476	4,1403
Position de $A_6$ suivant $\mathbf{z}_6$ dans $R_6$	$dz_{A_6}$	$\mu\text{m}$	5,1673	6,4084	1,4768	6,4084
Position de $B_1$ suivant $\mathbf{x}_m$ dans $R_m$	$dx_{B_1}$	$\mu\text{m}$	2,5568	4,0696	1,0698	4,0696
Position de $B_1$ suivant $\mathbf{y}_m$ dans $R_m$	$dy_{B_1}$	$\mu\text{m}$	2,0486	2,4722	0,5947	2,4722
Position de $B_1$ suivant $\mathbf{z}_m$ dans $R_m$	$dz_{B_1}$	$\mu\text{m}$	5,1444	6,3349	1,4884	6,3349
Position de $B_2$ suivant $\mathbf{x}_m$ dans $R_m$	$dx_{B_2}$	$\mu\text{m}$	2,5568	4,0696	1,0698	4,0696
Position de $B_2$ suivant $\mathbf{y}_m$ dans $R_m$	$dy_{B_2}$	$\mu\text{m}$	2,0486	2,4722	0,5947	2,4722
Position de $B_2$ suivant $\mathbf{z}_m$ dans $R_m$	$dz_{B_2}$	$\mu\text{m}$	5,1444	6,3349	1,4884	6,3349
Position de $B_3$ suivant $\mathbf{x}_m$ dans $R_m$	$dx_{B_3}$	$\mu\text{m}$	2,2241	3,6092	0,9135	3,6092
Position de $B_3$ suivant $\mathbf{y}_m$ dans $R_m$	$dy_{B_3}$	$\mu\text{m}$	3,3328	4,2531	0,9645	4,2531
Position de $B_3$ suivant $\mathbf{z}_m$ dans $R_m$	$dz_{B_3}$	$\mu\text{m}$	5,1145	6,3750	1,4464	6,3750
Position de $B_4$ suivant $\mathbf{x}_m$ dans $R_m$	$dx_{B_4}$	$\mu\text{m}$	2,9934	3,6029	0,8073	3,6029
Position de $B_4$ suivant $\mathbf{y}_m$ dans $R_m$	$dy_{B_4}$	$\mu\text{m}$	2,3466	4,2601	1,0252	4,2601
Position de $B_4$ suivant $\mathbf{z}_m$ dans $R_m$	$dz_{B_4}$	$\mu\text{m}$	4,7976	6,3736	1,4335	6,3736
Position de $B_5$ suivant $\mathbf{x}_m$ dans $R_m$	$dx_{B_5}$	$\mu\text{m}$	2,9934	3,6029	0,8073	3,6029
Position de $B_5$ suivant $\mathbf{y}_m$ dans $R_m$	$dy_{B_5}$	$\mu\text{m}$	2,3466	4,2601	1,0252	4,2601

Position de $B_5$ suivant $\mathbf{z}_m$ dans $R_m$	$dz_{B_5}$	$\mu\text{m}$	4,7976	6,3736	1,4335	6,3736
Position de $B_6$ suivant $\mathbf{x}_m$ dans $R_m$	$dx_{B_6}$	$\mu\text{m}$	2,2241	3,6092	0,9135	3,6092
Position de $B_6$ suivant $\mathbf{y}_m$ dans $R_m$	$dy_{B_6}$	$\mu\text{m}$	3,3328	4,2531	0,9645	4,2531
Position de $B_6$ suivant $\mathbf{z}_m$ dans $R_m$	$dz_{B_6}$	$\mu\text{m}$	5,1145	6,3750	1,4464	6,3750
Longueur de la barre 1	$dL_1$	$\mu\text{m}$	5,5381	6,6458	1,6022	6,6458
Longueur de la barre 2	$dL_2$	$\mu\text{m}$	5,5381	6,6458	1,6022	6,6458
Longueur de la barre 3	$dL_3$	$\mu\text{m}$	5,2598	6,7300	1,6849	6,7300
Longueur de la barre 4	$dL_4$	$\mu\text{m}$	5,6661	6,8198	1,5748	6,8198
Longueur de la barre 5	$dL_5$	$\mu\text{m}$	5,6661	6,8198	1,5748	6,8198
Longueur de la barre 6	$dL_6$	$\mu\text{m}$	5,2598	6,7300	1,6849	6,7300

**Figure F- 2 : Propagation des erreurs par défaut.**

L'analyse de la Figure F- 2 nous permet de retenir les conclusions suivantes :

- Nous remarquons que l'erreur d'orientation de la nacelle est indépendante du point dont nous mesurons le défaut de positionnement ( $O_m$  ou barycentre des points  $C$ ), ce qui est logique.
- Par contre, les erreurs de positionnement dépendent fortement du point de mesure. On note qu'il existe environ un rapport de 3 entre les erreurs mesurées en  $O_m$  (le point  $O_m$  est situé à 1 mètre du centre de la nacelle) et les erreurs mesurées au barycentre des points  $B$ . Cette grande différence résulte de l'éloignement du point  $C$  par rapport au centre de la nacelle. Cet éloignement, du fait de l'erreur en orientation, fait augmenter l'erreur cartésienne au point  $O_m$ . Ce type d'amplification des erreurs n'est pas propre aux robots parallèles.
- Nous notons que, en première approximation d'après ces résultats, les défauts les plus influents sur la position de la nacelle sont les erreurs de position en  $\mathbf{z}$  et les écarts sur la longueur des barres.

Ces résultats bruts, déjà intéressants sont pessimistes. En effet, par exemple, pour la position d'un point, la direction la plus pénalisante pour un défaut de position suivant  $\mathbf{x}$  n'est pas la même que celle pour un défaut suivant  $\mathbf{z}$ . Nous devons donc procéder à une analyse plus fine.

### F.3.2. Résultats par points.

Le tableau que nous avons dressé dans le paragraphe précédent est donné pour chacune des composantes cartésiennes des défauts. Cette analyse ne met pas en évidence l'influence du défaut de position d'un point.

Nous allons maintenant envisager le cas où les points sont positionnés par rapport à un repère de référence, les défauts de position de ces points étant situés à l'intérieur d'une sphère. Cette analyse est destinée à mettre en évidence les directions les plus pénalisantes des défauts pour chacun des points. Les résultats sont présentés dans les Figure F-5 à F-14.

La Figure F- 4 donne les explications sur les représentations des figures présentées :

- En trait fins sont représentés les six segments du dispositif de positionnement à leur position cartésienne nominale. Pour une meilleure lisibilité, la machine est représentée au centre du volume de travail à orientation nulle avec  $z_{centre} = 1.6m$ .
- Les graphiques de chaque figure représentent les directions des défauts les plus pénalisantes pour le positionnement de la nacelle ou pour son orientation.
- Les défauts sont représentés par types : défaut de positionnement des points P, défaut d'orientation des glissières, défauts de positionnement des points A et défaut de positionnement des points B.
- Pour une bonne lisibilité, ces défauts sont amplifiés (voir coefficients Figure F- 3). Ils sont centrés sur la position du point auquel ils se rapportent.

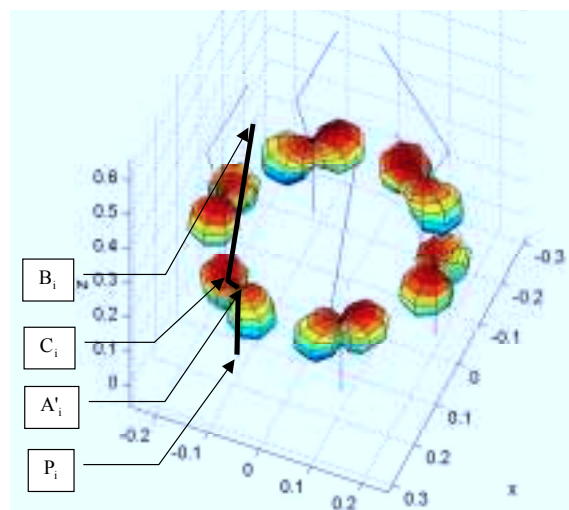
En conclusion, nous avons considéré que le défaut de position de chaque point était de  $1\mu m$  et celui d'orientation de chaque glissière de  $1\mu rad$ . Pour chaque point du volume de travail et pour toutes les orientations du cahier des charges, nous avons recherché la norme des erreurs en position et en orientation de la nacelle. Pour chaque direction potentielle des défauts, nous avons représenté la norme défaut maximum. En d'autres termes, les volumes représentés sur les figures suivantes sont inversement proportionnels aux intervalles de tolérance à appliquer lors de la cotation des pièces.

Remarque :

Les défauts concernant la longueur des barres ne sont pas représentés sur les figures suivantes car unidimensionnels.

Défaut	Erreur considérée	Numéro de la figure	Facteur d'échelle
Position des points P	position	Figure F- 5	x30 000
Position des points P	orientation	Figure F- 6	x20 000
Défaut d'orientation des glissières	position	Figure F- 7	x60 000
Défaut d'orientation des glissières	orientation	Figure F- 8	x40 000
Position des points B	position	Figure F- 9	x30 000
Position des points B	orientation	Figure F- 10	x20 000
Position des points C	position	Figure F- 11	x30 000
Position des points C	orientation	Figure F- 12	x20 000
Tous les défauts	position	Figure F- 13	x20 000
Tous les défauts	orientation	Figure F- 14	x10 000

**Figure F- 3 : Facteurs d'échelle.**



**Figure F- 4 : Interprétation des figures.**

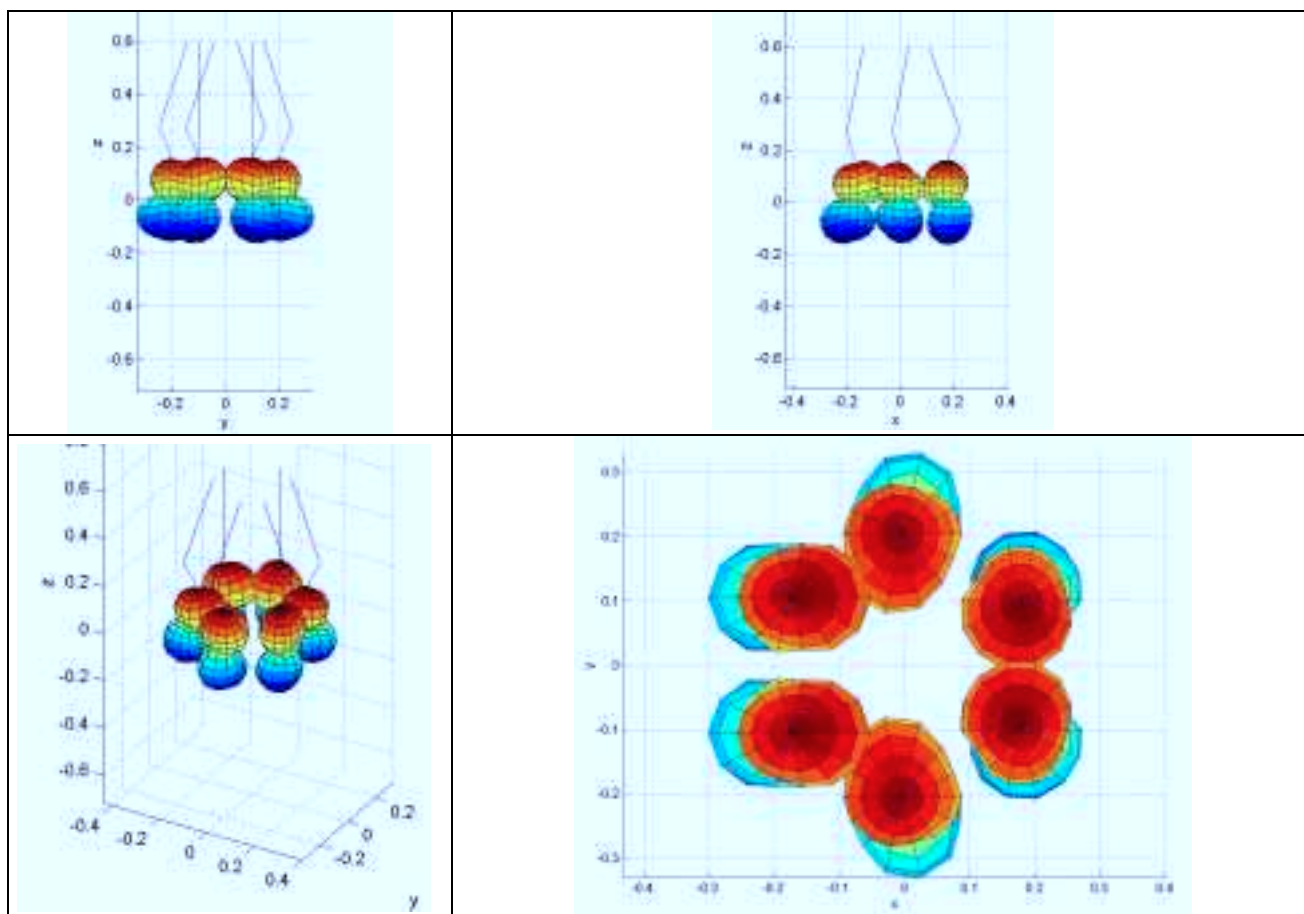


Figure F- 5 : Influence d'un défaut de position des points P sur la position de la nacelle.

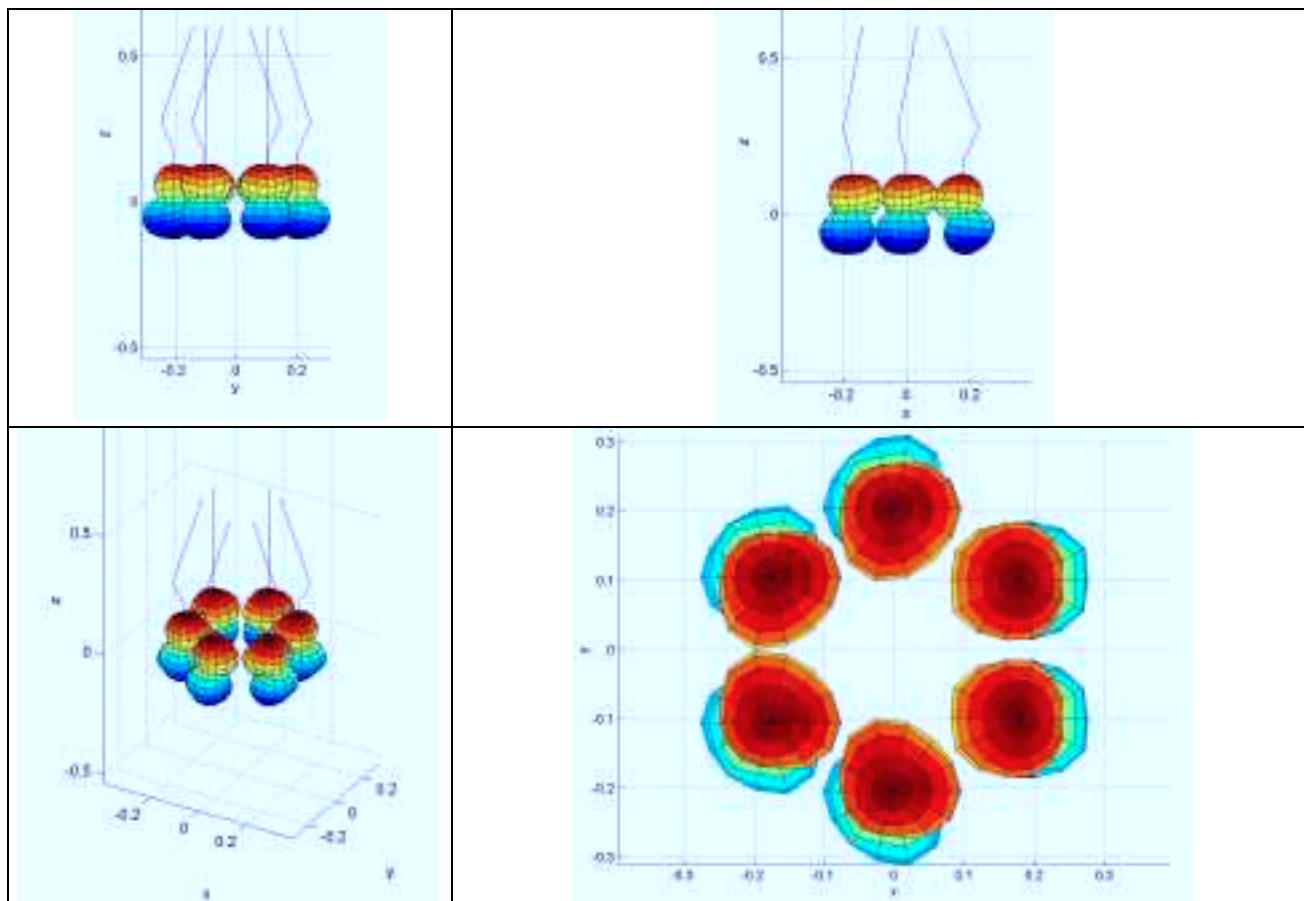


Figure F- 6 : Influence d'un défaut de position de P sur l'orientation de la nacelle.

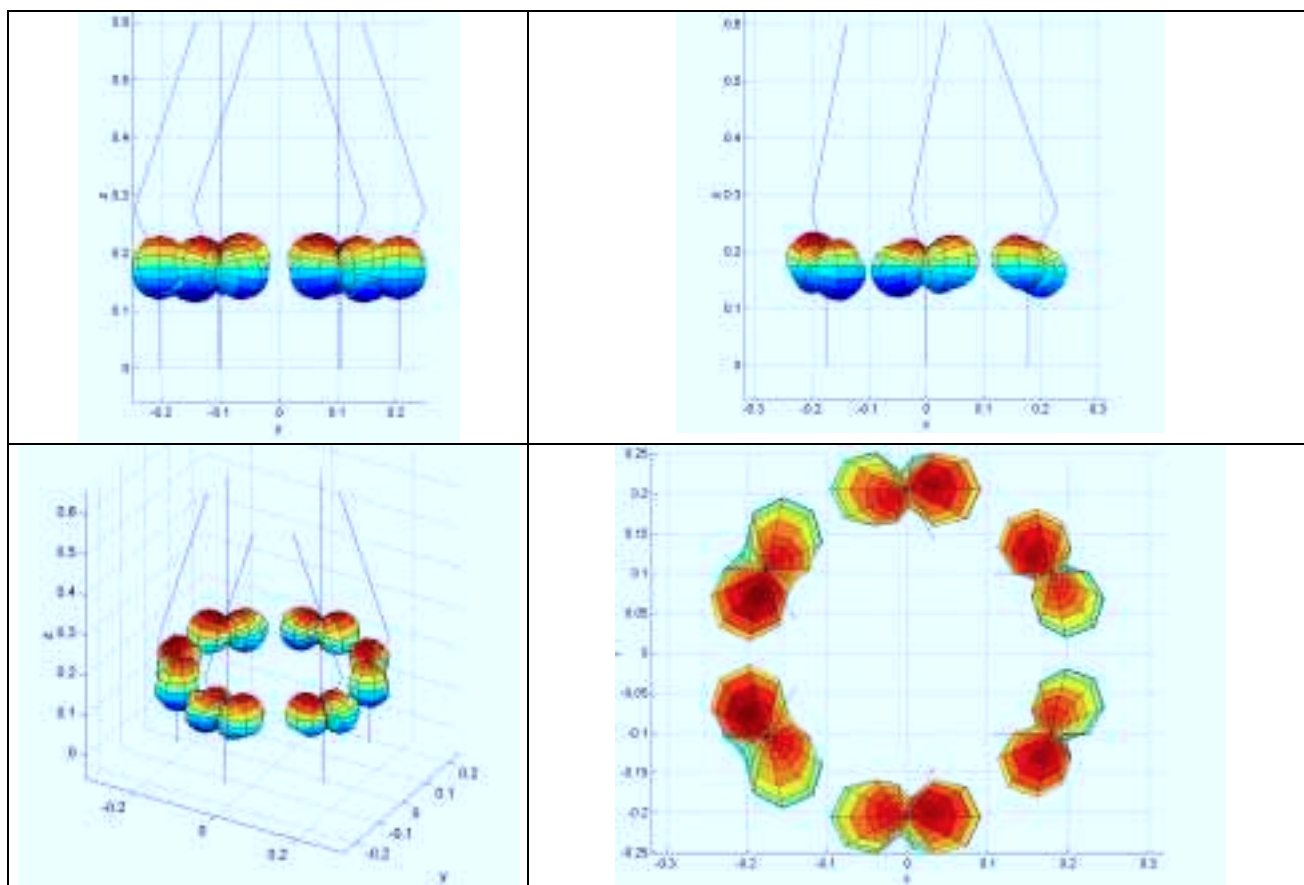


Figure F- 7 : Influence d'un défaut d'orientation des glissière sur la position.

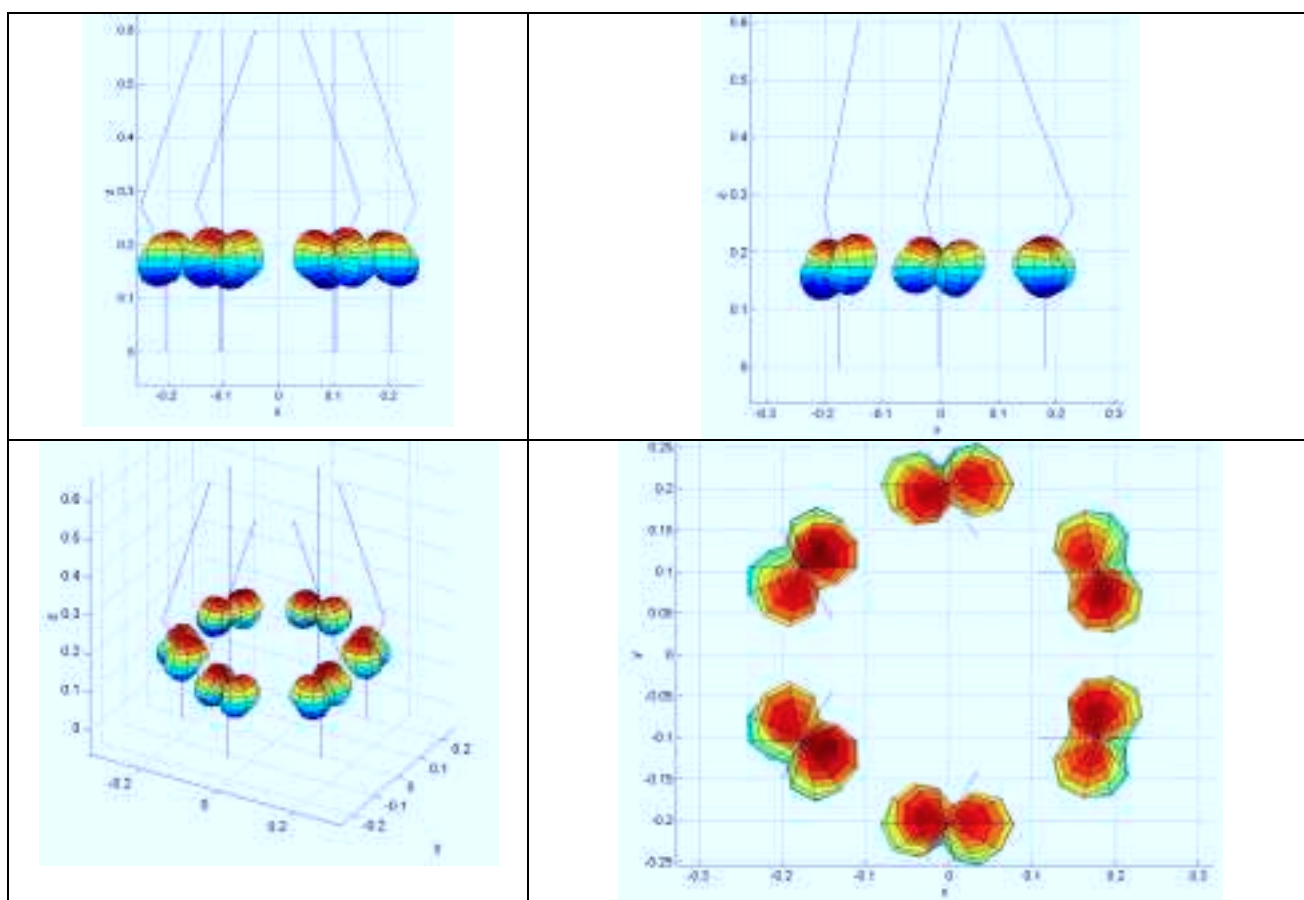


Figure F- 8 : Influence d'un défaut d'orientation des glissière sur l'orientation de la nacelle.



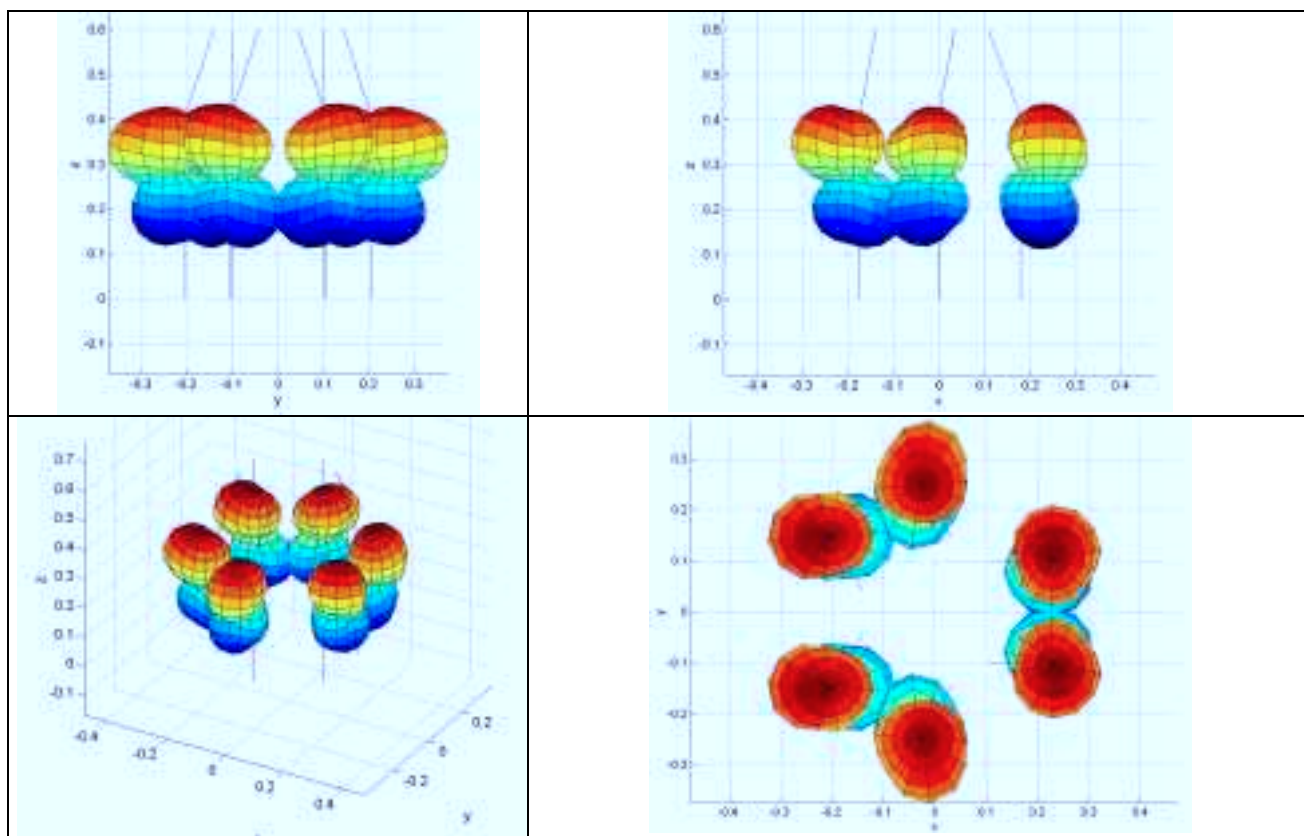


Figure F- 9 : Influence d'un défaut de position des points A sur la position de la nacelle.

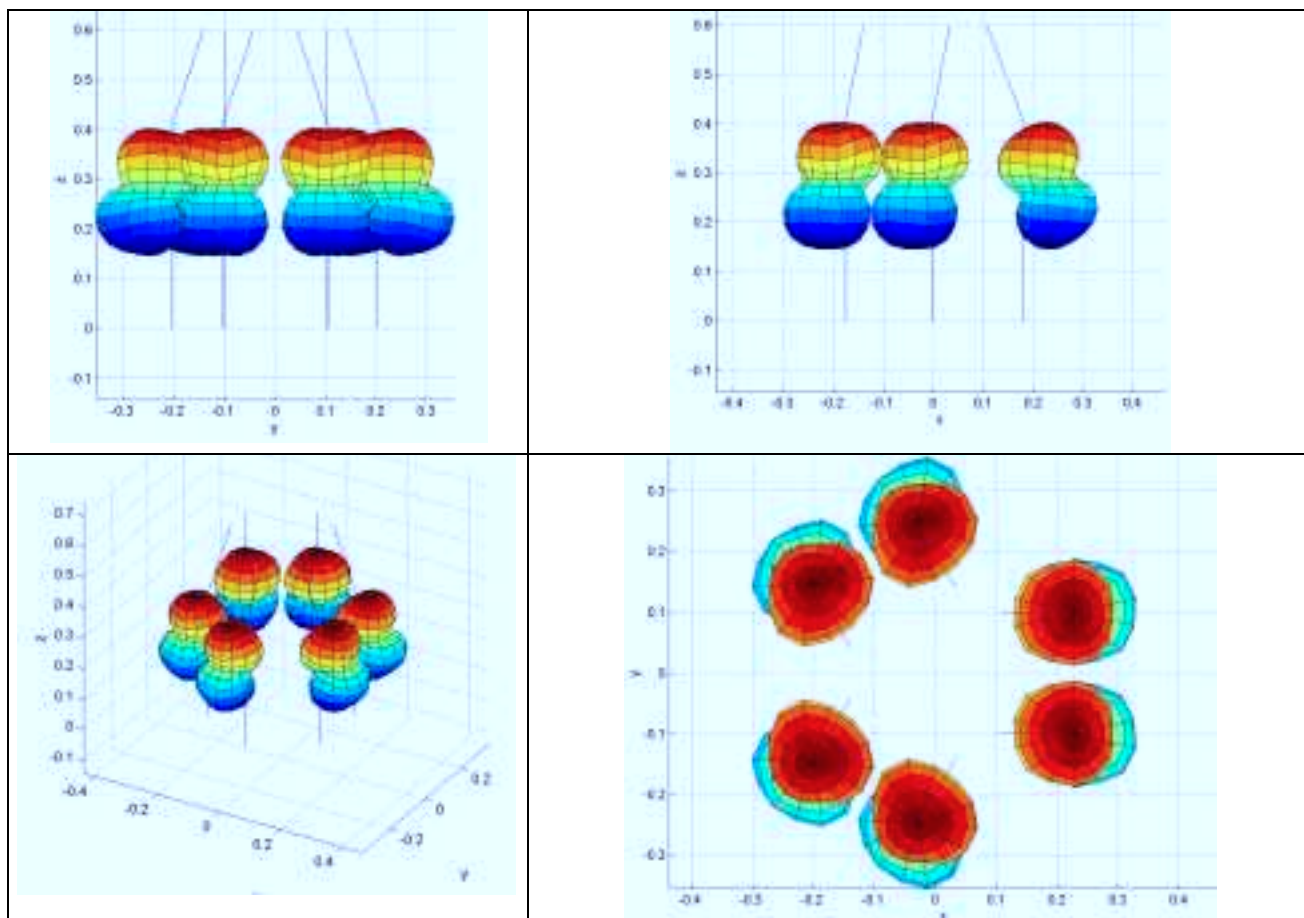


Figure F- 10 : Influence d'un défaut de position des points A sur l'orientation de la nacelle.



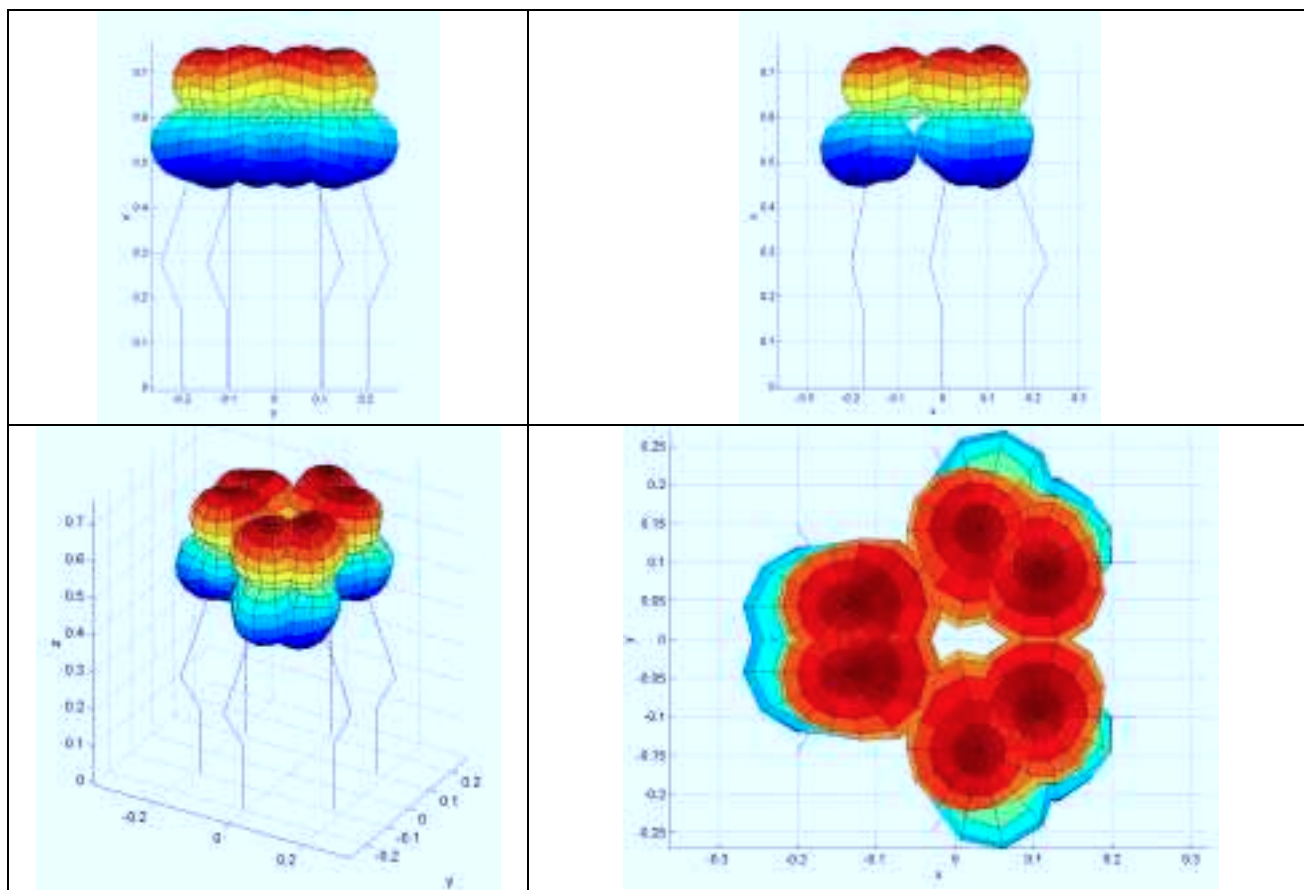


Figure F- 11 : Influence d'un défaut de position des points B sur la position.

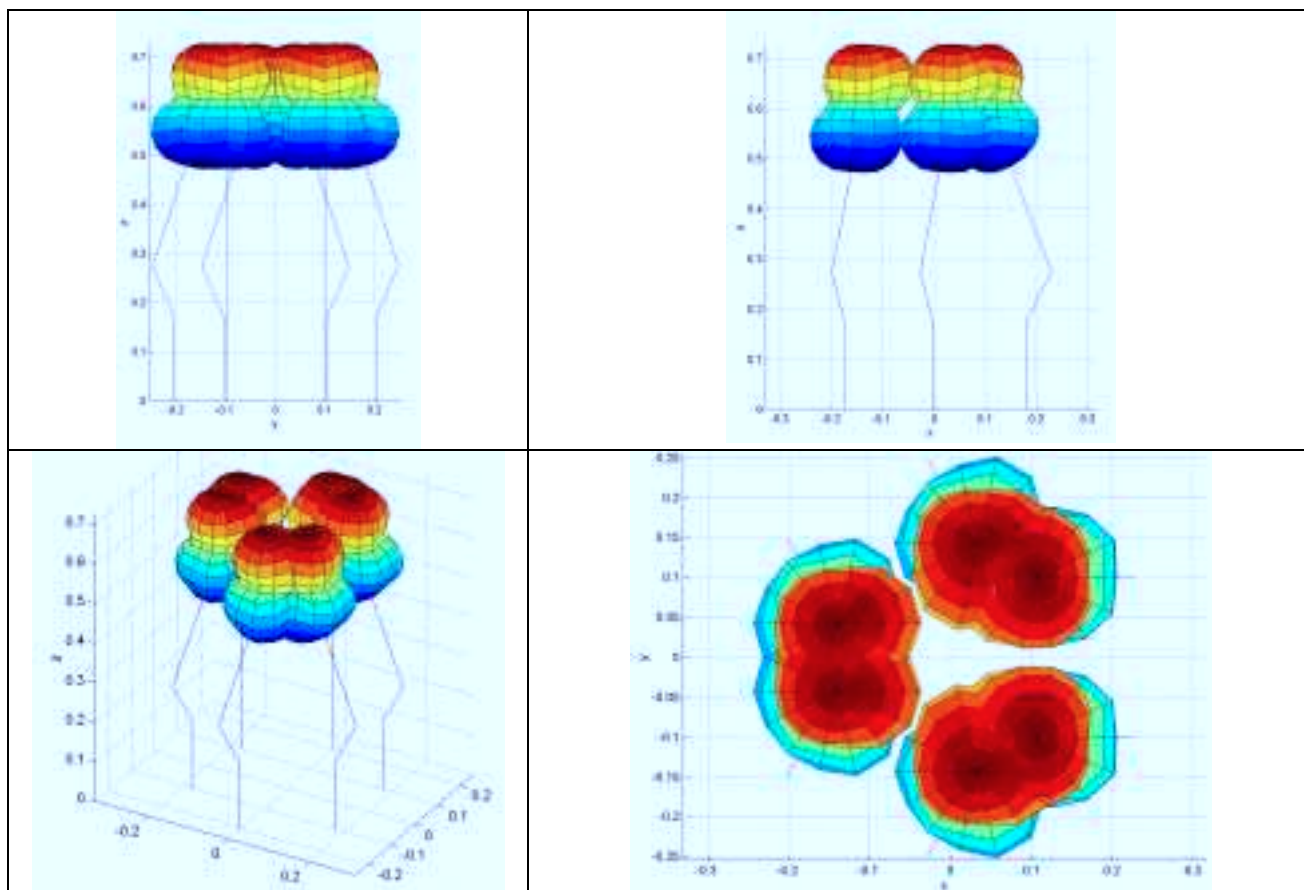


Figure F- 12 : Influence d'un défaut de position des points B sur l'orientation.

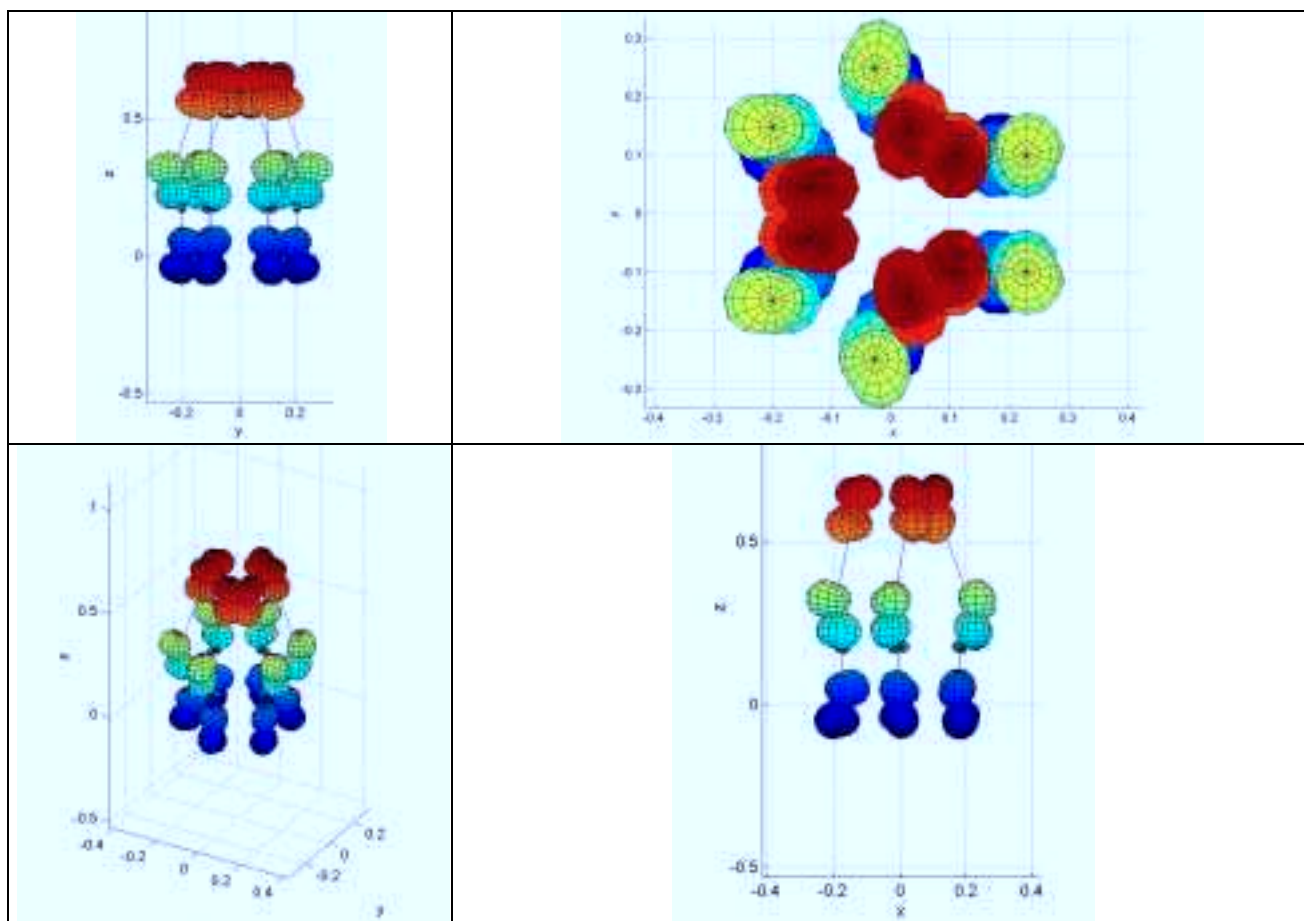


Figure F- 13 : Influence de tous les défauts sur la position de la nacelle.

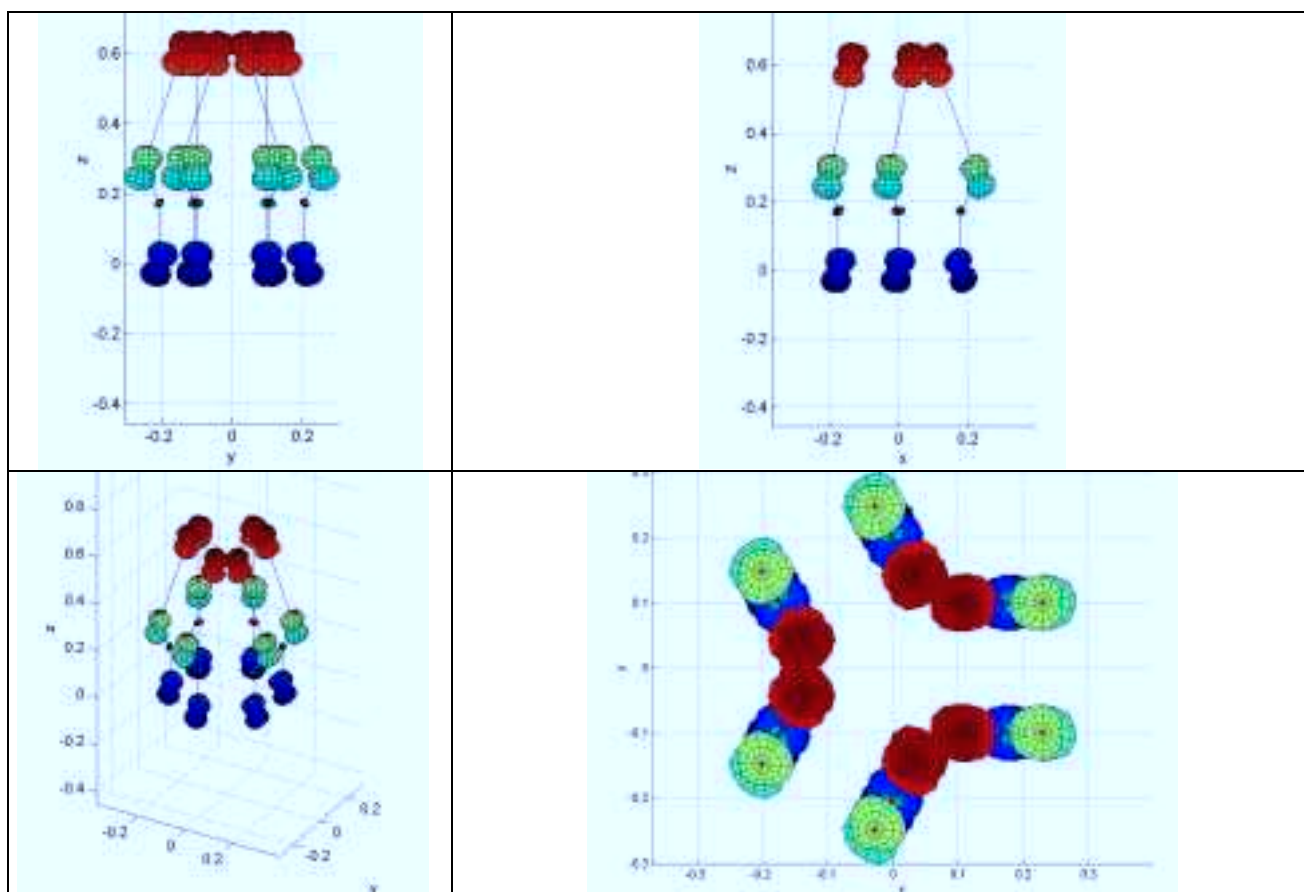


Figure F- 14 : Influence de tous les défauts sur l'orientation de la nacelle.

Nom du défaut	Variable	Unité du défaut	Ecart de position (unité $\mu\text{m}$ )	Ecart de position (unité $\mu\text{rad}$ )
Position de $P_1$ dans $R_f$	$\mathbf{dx}_{P_1}$	$\mu\text{m}$	5,5072	6,6088
Position de $P_2$ dans $R_f$	$\mathbf{dx}_{P_2}$	$\mu\text{m}$	5,5072	6,6088
Position de $P_3$ dans $R_f$	$\mathbf{dx}_{P_3}$	$\mu\text{m}$	5,2595	6,7300
Position de $P_4$ dans $R_f$	$\mathbf{dx}_{P_4}$	$\mu\text{m}$	5,6570	6,8089
Position de $P_5$ dans $R_f$	$\mathbf{dx}_{P_5}$	$\mu\text{m}$	5,6570	6,8089
Position de $P_6$ dans $R_f$	$\mathbf{dx}_{P_6}$	$\mu\text{m}$	5,2595	6,7300
Orientation de la glissière 1 dans $R_f$	$\mathbf{d}\Omega_{g_1}$	$\mu\text{rad}$	1,4762	1,8993
Orientation de la glissière 2 dans $R_f$	$\mathbf{d}\Omega_{g_2}$	$\mu\text{rad}$	1,4762	1,8993
Orientation de la glissière 3 dans $R_f$	$\mathbf{d}\Omega_{g_3}$	$\mu\text{rad}$	1,5840	2,0214
Orientation de la glissière 4 dans $R_f$	$\mathbf{d}\Omega_{g_4}$	$\mu\text{rad}$	1,5959	1,9619
Orientation de la glissière 5 dans $R_f$	$\mathbf{d}\Omega_{g_5}$	$\mu\text{rad}$	1,5959	1,9619
Orientation de la glissière 6 dans $R_f$	$\mathbf{d}\Omega_{g_6}$	$\mu\text{rad}$	1,5840	2,0214
Position de $A_1$ dans $R_1$	$\mathbf{dx}_{A_1}$	$\mu\text{m}$	5,5034	6,6042
Position de $A_2$ dans $R_2$	$\mathbf{dx}_{A_2}$	$\mu\text{m}$	5,5034	6,6042
Position de $A_3$ dans $R_3$	$\mathbf{dx}_{A_3}$	$\mu\text{m}$	5,2548	6,7268
Position de $A_4$ dans $R_4$	$\mathbf{dx}_{A_4}$	$\mu\text{m}$	5,6543	6,8056
Position de $A_5$ dans $R_5$	$\mathbf{dx}_{A_5}$	$\mu\text{m}$	5,6543	6,8056
Position de $A_6$ dans $R_6$	$\mathbf{dx}_{A_6}$	$\mu\text{m}$	5,2548	6,7268
Position de $B_1$ dans $R_m$	$\mathbf{dx}_{B_1}$	$\mu\text{m}$	5,5104	6,6126
Position de $B_2$ dans $R_m$	$\mathbf{dx}_{B_2}$	$\mu\text{m}$	5,5104	6,6126
Position de $B_3$ dans $R_m$	$\mathbf{dx}_{B_3}$	$\mu\text{m}$	5,2428	6,7171
Position de $B_4$ dans $R_m$	$\mathbf{dx}_{B_4}$	$\mu\text{m}$	5,6172	6,7610
Position de $B_5$ dans $R_m$	$\mathbf{dx}_{B_5}$	$\mu\text{m}$	5,6172	6,7610
Position de $B_6$ dans $R_m$	$\mathbf{dx}_{B_6}$	$\mu\text{m}$	5,2428	6,7171

Ces résultats sont plus fins que les résultats précédents. Les valeurs des erreurs sont plus faibles que le cumul des valeurs du paragraphe précédent mais cela est principalement dû au fait que la plage de variation considérée pour la position réelle des pièces est plus petite dans ce paragraphe que dans le paragraphe précédent. En effet, dans le premier tableau, l'espace de variation de points réels était un cube alors que, dans le cas présent, il s'agit de la sphère inscrite à l'intérieur de ce cube.

L'étude qualitative des figures précédentes donne des indications importantes. Nous constatons que, concernant l'influence

- de la position des points sur la position de la nacelle,
- de la position des points sur l'orientation de la nacelle,
- de l'orientation des glissières sur la position de la nacelle,

- de l'orientation des glissières sur l'orientation de la nacelle,  
il existe des directions défavorables dans lesquelles le tolérancement doit être plus serré. Nous allons maintenant déterminer mathématiquement quelles sont ces directions.

### F.3.3. Analyse de la matrice de sensibilité.

Comme nous l'avons vu précédemment, la matrice de sensibilité s'écrit :

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{V} \quad (\text{F-16})$$

En position centrale, la valeur numérique de la matrice  $\mathbf{S}$  est ( ${}^t\mathbf{S}$  pour des commodités de représentation) :

0,3333	-0,8911	-0,0624	1,2478	0,0000	1,6667
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
-0,8905	2,3805	0,1667	-3,3333	0,0000	-4,4524
0,3333	0,8911	-0,0624	-1,2478	0,0000	-1,6667
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
-0,8905	-2,3805	0,1667	3,3333	0,0000	4,4524
-0,3025	-0,3671	0,0312	0,3119	-0,5403	-0,8333
0,5240	0,6359	-0,0540	-0,5403	0,9358	1,4434
-1,6164	-1,9614	0,1667	1,6667	-2,8868	-4,4524
0,4692	0,0784	0,0312	-0,3119	0,5403	0,8333
-0,8127	-0,1359	-0,0540	0,5403	-0,9358	-1,4434
2,5068	0,4191	0,1667	-1,6667	2,8868	4,4524
0,4692	-0,0784	0,0312	0,3119	0,5403	-0,8333
0,8127	-0,1359	0,0540	0,5403	0,9358	-1,4434
2,5068	-0,4191	0,1667	1,6667	2,8868	-4,4524
-0,3025	0,3671	0,0312	-0,3119	-0,5403	0,8333
-0,5240	0,6359	0,0540	-0,5403	-0,9358	1,4434
-1,6164	1,9614	0,1667	-1,6667	-2,8868	4,4524
0,0890	-0,2381	-0,0167	0,3333	0,0000	0,4452
0,2286	-0,6112	-0,0428	0,8558	0,0000	1,1431
0,0333	-0,0891	-0,0062	0,1248	0,0000	0,1667
-0,0890	-0,2381	0,0167	0,3333	0,0000	0,4452
0,2286	0,6112	-0,0428	-0,8558	0,0000	-1,1431
-0,0333	-0,0891	0,0062	0,1248	0,0000	0,1667
-0,4402	-0,5342	0,0454	0,4539	-0,7862	-1,2125
-0,0675	-0,0819	0,0070	0,0696	-0,1206	-0,1859
0,0605	0,0734	-0,0062	-0,0624	0,1081	0,1667
0,4320	0,0722	0,0287	-0,2872	0,4975	0,7673
0,5389	0,0901	0,0358	-0,3583	0,6206	0,9571
0,0938	0,0157	0,0062	-0,0624	0,1081	0,1667
-0,4320	0,0722	-0,0287	-0,2872	-0,4975	0,7673
0,5389	-0,0901	0,0358	0,3583	0,6206	-0,9571
-0,0938	0,0157	-0,0062	-0,0624	-0,1081	0,1667
0,4402	-0,5342	-0,0454	0,4539	0,7862	-1,2125
-0,0675	0,0819	0,0070	-0,0696	-0,1206	0,1859
-0,0605	0,0734	0,0062	-0,0624	-0,1081	0,1667
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
-0,3333	0,8911	0,0624	-1,2478	0,0000	-1,6667
-0,8905	2,3805	0,1667	-3,3333	0,0000	-4,4524
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
-0,3333	-0,8911	0,0624	1,2478	0,0000	1,6667
-0,8905	-2,3805	0,1667	3,3333	0,0000	4,4524
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
-0,6051	-0,7342	0,0624	0,6239	-1,0806	-1,6667
-1,6164	-1,9614	0,1667	1,6667	-2,8868	-4,4524
0	0	0	0	0	0
0,9384	0,1569	0,0624	-0,6239	1,0806	1,6667
2,5068	0,4191	0,1667	-1,6667	2,8868	4,4524
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,9384	-0,1569	0,0624	0,6239	1,0806	-1,6667

2,5068	-0,4191	0,1667	1,6667	2,8868	-4,4524
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
-0,6051	0,7342	0,0624	-0,6239	-1,0806	1,6667
-1,6164	1,9614	0,1667	-1,6667	-2,8868	4,4524
-0,3333	0,8911	0,0624	-1,2478	0,0000	-1,6667
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,8905	-2,3805	-0,1667	3,3333	0,0000	4,4524
-0,3333	-0,8911	0,0624	1,2478	0,0000	1,6667
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,8905	2,3805	-0,1667	-3,3333	0,0000	-4,4524
0,3025	0,3671	-0,0312	-0,3119	0,5403	0,8333
-0,5240	-0,6359	0,0540	0,5403	-0,9358	-1,4434
1,6164	1,9614	-0,1667	-1,6667	2,8868	4,4524
-0,4692	-0,0784	-0,0312	0,3119	-0,5403	-0,8333
0,8127	0,1359	0,0540	-0,5403	0,9358	1,4434
-2,5068	-0,4191	-0,1667	1,6667	-2,8868	-4,4524
-0,4692	0,0784	-0,0312	-0,3119	-0,5403	0,8333
-0,8127	0,1359	-0,0540	-0,5403	-0,9358	1,4434
-2,5068	0,4191	-0,1667	-1,6667	-2,8868	4,4524
0,3025	-0,3671	-0,0312	0,3119	0,5403	-0,8333
0,5240	-0,6359	-0,0540	0,5403	0,9358	-1,4434
1,6164	-1,9614	-0,1667	1,6667	2,8868	-4,4524
-0,9508	2,5418	0,1780	-3,5592	0,0000	-4,7541
-0,9508	-2,5418	0,1780	3,5592	0,0000	4,7541
-1,7259	-2,0944	0,1780	1,7796	-3,0824	-4,7541
2,6767	0,4475	0,1780	-1,7796	3,0824	4,7541
2,6767	-0,4475	0,1780	1,7796	3,0824	-4,7541
-1,7259	2,0944	0,1780	-1,7796	-3,0824	4,7541

L'analyse des matrices, montre que, par exemple, si on considère l'erreur de position du point  $P_i$  lorsque la nacelle est en position centrale, l'influence de l'écart de position du point  $P_i$  suivant  $y_f$  sur les erreurs de position et d'orientation de la nacelle est nulle. Par contre, cette influence n'est plus nulle en dehors de la position centrale.

Si nous considérons les erreurs de position du point  $P_i$ , le produit  $\mathbf{VE}$  s'écrit :

$$\mathbf{VE} = {}^t [0 \dots \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{x}_{P_i} \dots 0] \quad (\text{F-17})$$

D'après cette équation il paraît évident que la direction la plus pénalisante pour un défaut de position du point  $P_i$  et celle de la barre  $A_i B_i$  et les directions dont l'influence est nulle sont celles perpendiculaires à la barre  $A_i B_i$ . Comme le vecteur résultant du produit  $\mathbf{VE}$  ne comporte qu'un seul élément non nul à la ligne numéro  $i$ , pour un  $d\mathbf{x}_{P_i}$  et une position donnée de la nacelle, l'erreur de position s'écrit :

$$d\mathbf{x} = (\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{x}_{P_i}) {}^t [T^{-1}_{1,i} \quad T^{-1}_{2,i} \quad T^{-1}_{3,i}] \quad (\text{F-18})$$

et l'erreur d'orientation s'écrit :

$$d\mathbf{x} = (\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{x}_{P_i}) {}^t [T^{-1}_{4,i} \quad T^{-1}_{5,i} \quad T^{-1}_{6,i}] \quad (\text{F-19})$$

D'après les deux écritures ci-dessus, nous voyons que, dans le cas considéré la direction de l'erreur sur la nacelle dépend uniquement de la position et de l'orientation de la nacelle. La norme de l'erreur sur la nacelle dépend de la direction du défaut ainsi que de la position et de l'orientation de la nacelle. La valeur maximale de la norme de l'erreur sur la nacelle pour une position et une orientation de la nacelle données ne dépend que de la norme et de la direction du défaut de positionnement du point  $P_i$ . Sa valeur est :

$$\begin{cases} \mathbf{dx} = L_i \|\mathbf{dx}_{P_i}\| \begin{bmatrix} T^{-1}_{1,i} & T^{-1}_{2,i} & T^{-1}_{3,i} \\ T^{-1}_{4,i} & T^{-1}_{5,i} & T^{-1}_{6,i} \end{bmatrix} \\ \mathbf{d\Omega} = L_i \|\mathbf{dx}_{P_i}\| \begin{bmatrix} T^{-1}_{1,i} & T^{-1}_{2,i} & T^{-1}_{3,i} \\ T^{-1}_{4,i} & T^{-1}_{5,i} & T^{-1}_{6,i} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{F-20})$$

Remarque :

Dans cette remarque, nous allons expliquer la forme des courbes que nous avons obtenues dans la partie 'Résultats par points'. Nous avons considéré que les défauts des points  $P_i$  étaient compris à l'intérieur de sphères. Si ces sphères sont unitaires, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{dx}_{P_i} &= {}^t[\alpha \quad \beta \quad \gamma] \\ \text{avec : } \quad &\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \end{aligned} \quad (\text{F-21})$$

La norme de l'erreur résultant du défaut  $\mathbf{dx}_{P_i}$  est :

$$\begin{cases} \|\mathbf{dx}\| = |\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot {}^t[\alpha \quad \beta \quad \gamma] C_x \\ \|\mathbf{d\Omega}\| = |\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot {}^t[\alpha \quad \beta \quad \gamma] C_o \end{cases} \quad (\text{F-22})$$

$$\text{avec : } C_x = \|T^{-1}_{1,i} \quad T^{-1}_{2,i} \quad T^{-1}_{3,i}\| \text{ et } C_o = \|T^{-1}_{4,i} \quad T^{-1}_{5,i} \quad T^{-1}_{6,i}\|$$

Nous cherchons à tracer la surface telle que la direction des points appartenant à cette surface soit la même que celle du vecteur  $\mathbf{dx}_{P_i}$  et la distance des points à l'origine est proportionnelle à la norme de l'erreur engendrée par  $\mathbf{dx}_{P_i}$ .

Soit  $\mathbf{M} = {}^t[x \quad y \quad z]$  les coordonnées d'un point appartenant à cette surface. Nous avons alors les deux applications suivantes telles que :

$$\mathbf{dx}_{P_i} = {}^t[\alpha \quad \beta \quad \gamma] \mapsto \begin{cases} x = \alpha |\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot {}^t[\alpha \quad \beta \quad \gamma] C_x \\ y = \beta |\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot {}^t[\alpha \quad \beta \quad \gamma] C_x \\ z = \gamma |\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot {}^t[\alpha \quad \beta \quad \gamma] C_x \end{cases} \text{ pour l'erreur en position} \quad (\text{F-23})$$

$$\mathbf{dx}_{P_i} = {}^t[\alpha \quad \beta \quad \gamma] \mapsto \begin{cases} x = \alpha |\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot {}^t[\alpha \quad \beta \quad \gamma] C_o \\ y = \beta |\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot {}^t[\alpha \quad \beta \quad \gamma] C_o \\ z = \gamma |\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot {}^t[\alpha \quad \beta \quad \gamma] C_o \end{cases} \text{ pour l'erreur en orientation} \quad (\text{F-24})$$

Nous recherchons maintenant l'équation cartésienne non paramétrée de cette surface pour l'erreur en position afin de connaître sa nature. Nous calculons  $x^2 + y^2 + z^2$ .

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \varepsilon [x(\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{x}) + y(\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{y}) + z(\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{z})] C_x \\ \text{avec } \varepsilon &= \pm 1 \end{aligned} \quad (\text{F-28})$$

soit, sous forme canonique :

$$\left[ x - \varepsilon \frac{(\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{x})}{2} C_x \right]^2 + \left[ y - \varepsilon \frac{(\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{y})}{2} C_x \right]^2 + \left[ z - \varepsilon \frac{(\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{z})}{2} C_x \right]^2 = C_x^2 L_i^2 \quad (\text{F-29})$$

Nous voyons d'après cette équation, que la surface que nous recherchons est l'union de deux sphères de centre  $\frac{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i}{2} C_x$  et  $-\frac{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i}{2} C_x$  et de même rayon égal à  $C_x L_i$ .

D'après ces informations nous voyons que ces deux sphères sont tangentes à l'origine, et que le vecteur reliant leurs centres est de même direction que le vecteur  $\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i$ .

Des raisonnements analogues peuvent être tenus pour l'influence sur la position et l'orientation des écarts de position. La conclusion est toujours la même à savoir que les défauts dont la direction est celle des barres sont les plus influents alors que les défauts situés dans le plan perpendiculaire à la direction des barres ont une influence nulle, pour une position donnée de la nacelle. Si on considère l'ensemble des positions de la nacelle dans le volume de travail, il faut alors prendre en compte la surface enveloppe de la réunion des volumes situés à l'intérieur des sphères. Dans ce cas, on obtient les surfaces représentées dans le paragraphe précédent.

Remarque :

Sur les figures du paragraphe précédent, nous notons que la position la plus pénalisante pour l'erreur sur l'orientation de la nacelle est la position centrale, alors que la position la plus pénalisante pour l'erreur sur la position de la nacelle est située sur un des sommets du volume de travail.

Nous n'analyserons pas mathématiquement l'influence d'un défaut d'orientation des glissières. Cependant, nous constatons sur les figures du paragraphe précédent que la direction la plus défavorable du défaut est celle de la perpendiculaire commune aux vecteurs directeurs des glissières et aux vecteurs directeurs des barres correspondantes.

Maintenant que nous avons mieux cerné l'influence des défauts en fonction de leur direction, nous proposons d'étudier une méthode de réglage.

#### ***F.3.4. Possibilité de réglages éventuels.***

Nous avons vu que pour une position donnée les défauts les plus influents sont ceux qui ont la même direction que les barres. Nous allons étudier un réglage de la longueur des barres afin d'obtenir une erreur nulle de la position et l'orientation de la nacelle en position centrale. Nous considérerons dans ce chapitre que les défauts d'orientation des glissières sont nuls (réglage spécifique).

Le réglage que nous proposons intègre la correction de la longueur des barres ainsi que celui de tous les autres défauts de position des points qui ont la direction des barres en position nominale. Par conséquent, les dimensions réelles de la machine ne seront pas toujours les dimensions nominales, mais son comportement se rapprochera davantage du comportement nominal.

Si nous calculons les résultats par défaut de la même manière que dans le paragraphe F.3.1, nous obtenons une amélioration de l'erreur de positionnement, mais le gain qui en résulte (de 20 à 30%) n'est pas suffisant pour se passer d'une procédure d'étalonnage dans certain cas.

#### ***F.3.5. Analyse statistique.***

Toutes les analyses numériques que nous venons d'effectuer reposent sur le fait que tous les défauts sur les pièces sont situés dans la direction la plus pénalisante. Effectuer la somme de toutes les erreurs résultantes revient alors à effectuer la somme de la norme des vecteurs de erreurs de position dans chacun des cas, ce qui sous-entend que ces erreurs de

position ont toutes la même direction. Or, cette dernière affirmation n'est pas vraie. Faire la somme de toutes les erreurs de position revient à faire abstraction de leur direction et à occulter le fait que certaines d'entre-elles peuvent se neutraliser. Nous trouvons alors un majorant de l'erreur de position. Cela met en évidence l'intérêt d'une analyse statistique de l'influence des défauts.

Dans un premier temps, nous allons considérer une distribution homogène des défauts, c'est à dire qu'à chacun des 78 défauts répertoriés précédemment, nous affecterons une valeur tirée au hasard, comprise entre  $\pm 1 \mu\text{m}$  ou  $\mu\text{rad}$ . Nous représentons ensuite la fréquence des erreurs résultantes en position et en orientation pour 1000 échantillons sur la Figure F- 15 et la Figure F- 16.

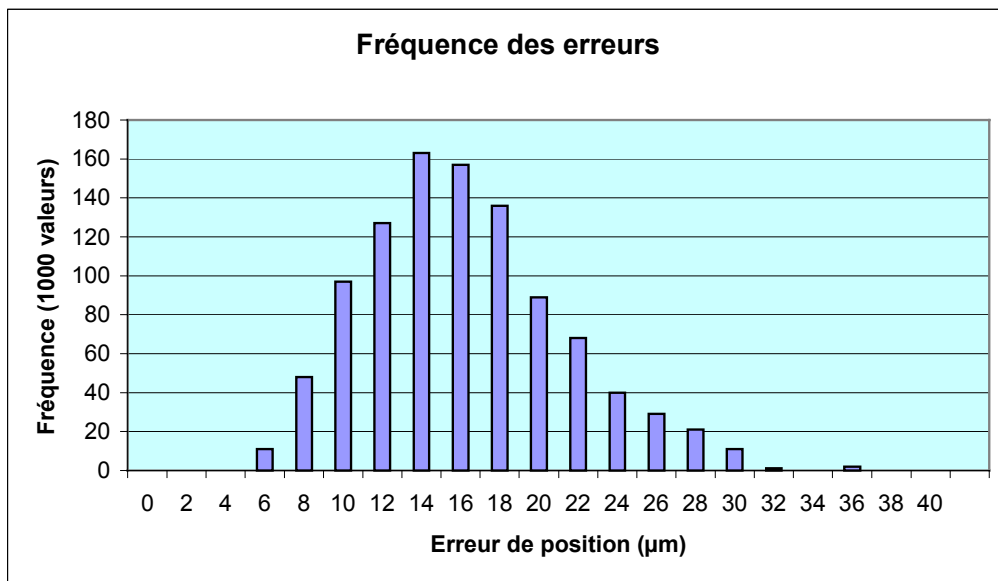


Figure F- 15 : Fréquence des erreurs de position pour une distribution homogène.

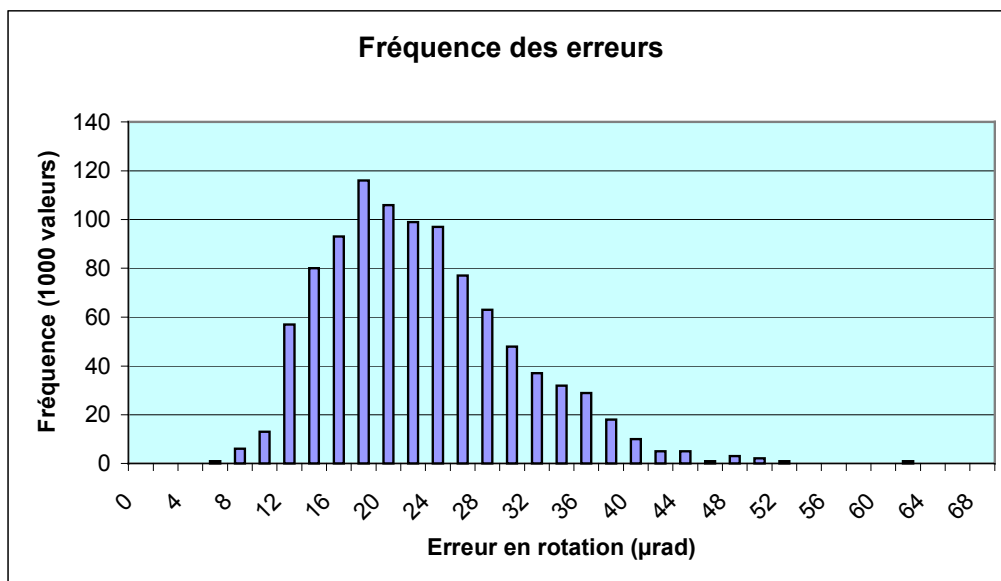


Figure F- 16 : Fréquence des erreurs en orientation pour une distribution homogène.



Nous constatons que les résultats sont plus optimistes que ceux que nous avons obtenus précédemment.

La distribution des défauts que nous venons d'envisager est une distribution homogène. Cette distribution ne reflète pas forcément la réalité de la distribution des défauts rencontrés lors de la fabrication des pièces. Typiquement la répartition des défauts s'apparente plutôt à une distribution normale. Nous allons donc effectuer la même analyse que celle ci-dessus avec une distribution normale des 78 défauts de moyenne nulle et d'écart type de  $1\mu\text{m}$ . Les résultats sont représentés sur la Figure F- 17 et la Figure F- 18.

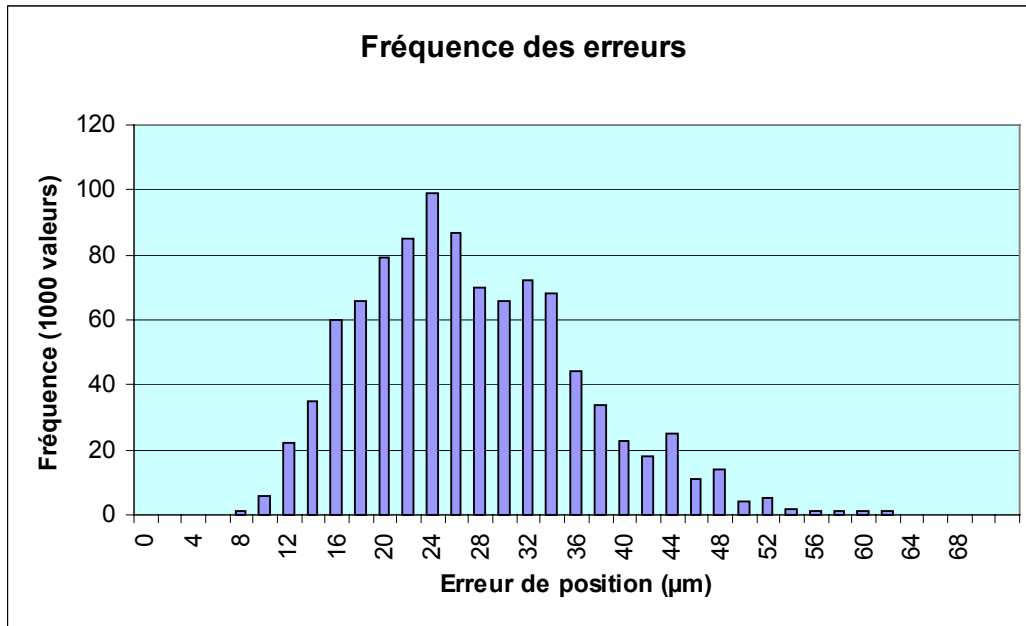


Figure F- 17 : Fréquence des erreurs de position pour une distribution normale.

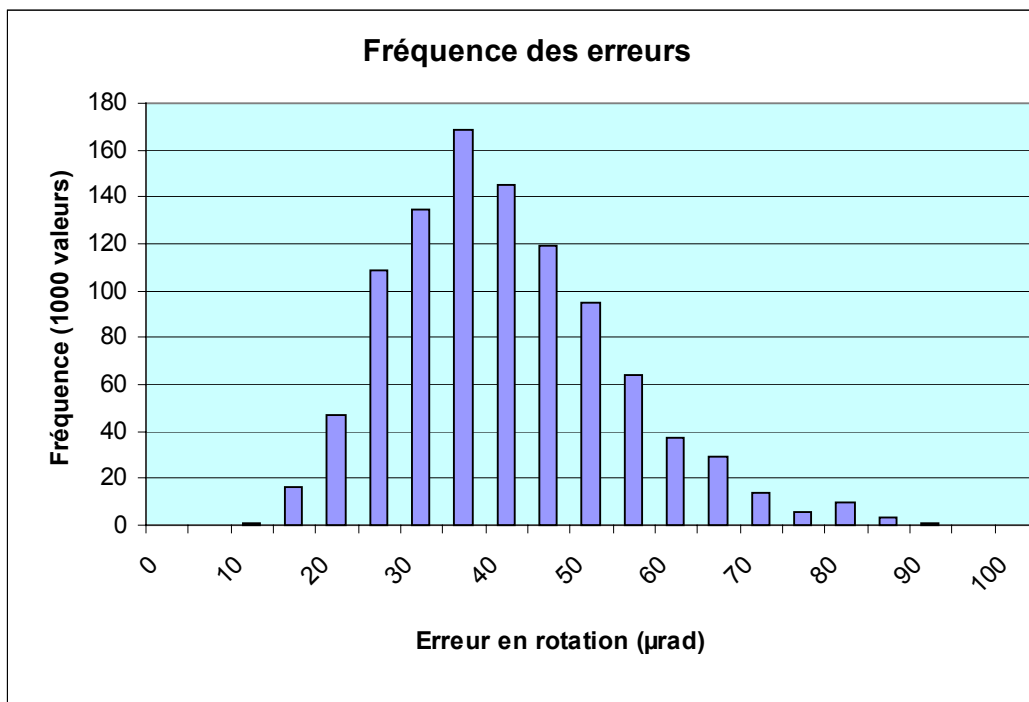


Figure F- 18 : Fréquence des erreurs en orientation pour une distribution homogène.

#### **F.4. Conclusion.**

Ces derniers résultats, plus réalistes, montrent la bonne précision des machines à architecture parallèle. Cependant, la précision atteinte n'est pas encore suffisante pour les tâches d'usinage. Dans ce dernier cas, un étalonnage et/ou une cartographie des erreurs sont indispensables.







**Machines-outils rapides à structure parallèle.  
Méthodologie de conception, applications et nouveaux concepts.**

**Résumé :**

Le monde de la machine-outil est en évolution permanente afin de répondre au marché, très réactif, des pièces usinées. De nos jours, il existe une grande demande de machines rapides à commande numérique, notamment pour l'industrie automobile. Les limites dynamiques des machines cartésiennes à architecture série ayant été atteintes, les premières machines-outils à architecture parallèle ont fait leur apparition sur le marché. Elles sont inspirées des mécanismes et des robots parallèles largement étudiés par les roboticiens au cours de ces 25 dernières années. Cette thèse, qui s'inscrit à la frontière de la robotique et du domaine de la machine-outil, propose une démarche de sélection, de modélisation, d'optimisation et de dimensionnement de machines-outils parallèles rapides. Les outils proposés sont l'établissement des modèles géométrique, cinématique et dynamique, le calcul des efforts dans les barres, de la rigidité et de l'influence des erreurs géométriques sur la précision de la machine. Cette démarche est ensuite appliquée à la résolution des cas concrets relatifs à l'usinage 3 axes et 5 axes. Une nouvelle famille de mécanismes parallèles, intermédiaire entre le robot Delta et l'Hexa, est également présentée. Cette famille possède 4 degrés de liberté, cas peu étudié à ce jour. Elle trouve des applications aussi bien dans le domaine de la robotique de manipulation (tâches *de pick and place* avec orientation) que dans le domaine de l'usinage 5 axes.

**Mots-clés :**

Machine-outil rapide, Robotique parallèle, Modélisation, Optimisation, Nouveau concept

---

**Summary :**

The world of machine tool is always changing to take into account the changes in manufactured parts. Nowadays, there is a growing need of fast machine tools, in particular for the automotive industry. Serial machines have reached their dynamical limits and the first parallel kinematics machines have been released. They are inspired from parallel robots studied by the robotics community during the past 25 years. This work draws a link between the domains of robotics and machine tool. A method for selecting, modelling and optimising parallel kinematics machine tool is proposed. Then this method is applied to solve the problem for fast machine tools with either 3 axis or 5 axis. A new family of fast parallel kinematics is also introduced. This family, whose kinematics lies between Delta and Hexa robots, has 4 degrees of freedom. It can be used in robotics for fast pick and place tasks and also for the design of 5 axis parallel machine tools by putting the workpiece on a rotative plate.

**Keywords :**

High speed machine tool, Parallel robotics, Modelling, Optimising, New concept

---