



# Systèmes MIMO précodés optimisant la distance minimale : étude des performances et extension du nombre de voies

Baptiste Vrigneau

## ► To cite this version:

Baptiste Vrigneau. Systèmes MIMO précodés optimisant la distance minimale : étude des performances et extension du nombre de voies. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université de Bretagne occidentale - Brest, 2006. Français. NNT : . tel-00481141

**HAL Id: tel-00481141**

**<https://theses.hal.science/tel-00481141>**

Submitted on 6 May 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT

présentée devant

**l'Université de Bretagne Occidentale**

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE  
Mention SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION  
ET DE LA COMMUNICATION  
Spécialité COMMUNICATIONS NUMÉRIQUES

par

Baptiste VRIGNEAU

Laboratoire d'accueil : LEST - UMR CNRS 6165  
École doctorale : SMIS

Titre de la thèse :

**Systèmes MIMO précodés optimisant la distance  
minimale : étude des performances et extension du  
nombre de voies**

Soutenue le 23 novembre 2006 devant la commission d'examen composée de :

M. :	Christian	JUTTEN	Président
MM. :	Jean-Pierre	CANCES	Rapporteurs
	Benoît	GELLER	
MM. :	Ludovic	COLLIN	Examineurs
	Philippe	ROSTAING	
	Gilles	BUREL	<i>Directeur de thèse</i>
M. :	Marc	CHENU-TOURNIER	Invité



*«Bande à part, sacrebleu ! c'est ma règle et j'y tiens.»*

Georges Brassens (1921-1981)



# Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été mené au sein du Laboratoire d'Électronique et des Systèmes de Télécommunications (LEST) dans l'équipe Traitement du Signal pour les Télécommunications (TST) sur le site de l'Université de Bretagne Occidentale (UBO).

Mes premiers remerciements s'adressent à Monsieur Gilles Burel, professeur à l'UBO, qui m'a permis de débiter mes travaux de recherche tout d'abord en DEA puis en thèse.

Je remercie vivement Monsieur Jean-Pierre Cances, professeur à l'ENSIL de Limoges, et Monsieur Benoît Geller, maître de conférences au SATIE de l'ENS de Cachan, d'avoir accepté de rapporter ce mémoire.

Je tiens à remercier Monsieur Christian Jutten, professeur à l'INPG de Grenoble, d'avoir assuré la présidence du jury.

Je remercie sincèrement Monsieur Marc Chenu-Tournier, docteur chez Thales à Colombes, qui a apporté la vision et les remarques constructives du point de vue industriel.

Encadrant depuis le début du stage de DEA puis de la thèse, je remercie Monsieur Philippe Rostaing, Maître de conférences à l'UBO, pour ses remarques constructives et ses conversations à l'accent chantant.

Je remercie également Monsieur Ludovic Collin, maître de conférences à l'UBO, d'être venu renforcer mon encadrement avec ses remarques pertinentes et sa vision toujours différente.

Un merci spécial pour Monsieur Koffi Yao, maître de conférences à l'UBO, qui fût mon tuteur de monitorat et avec qui j'ai collaboré pour des enseignements.

Un remerciement particulier également à Monsieur Roland Gautier, maître de conférences à l'UBO, partenaire de voyage sur le sol américain et pour les diverses discussions que nous avons eues.

Je tiens également à remercier toutes les autres personnes du laboratoire qui ont contribué à instaurer une bonne ambiance de travail voire hors travail. J'y suis très sensible. Je leur souhaite une bonne continuation avec cette même bonne humeur même si certains doivent encore progresser au badminton, si certains peuvent ne pas être de bonne humeur en arpentant les couloirs, si certains n'aiment pas être dérangés en TP,

si certains sont contents d'être faits, si certains fument encore. Je m'excuse auprès de toutes ces personnes d'avoir mis à l'épreuve leur susceptibilité.

Je ne pourrais pas ne pas remercier toute ma famille de Kérénoc, de l'Île-Grande, de Rennes et de Toulouse avec une pensée toute particulière pour mon grand-père.

Enfin mes derniers remerciements s'adressent à Sandrine qui m'a apporté son soutien et qui m'a supporté avec tous mes défauts durant ces années de travail.

# Table des matières

<b>Liste des acronymes et abréviations</b>	<b>vii</b>
<b>Notations</b>	<b>ix</b>
<b>Table des figures</b>	<b>xi</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xvii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Les communications numériques et les systèmes MIMO</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Chaîne de transmission numérique . . . . .	6
1.3 Le canal d'un système mono-antennaire (SISO) . . . . .	8
1.3.1 Le bruit radio-électrique . . . . .	8
1.3.2 Atténuation du canal . . . . .	9
1.3.3 Quelques rappels sur la théorie de l'information . . . . .	13
1.4 Notion de diversité . . . . .	15
1.4.1 Diversité temporelle . . . . .	16
1.4.2 Diversité fréquentielle . . . . .	16
1.4.3 Diversité de polarisation . . . . .	17
1.4.4 Diversité spatiale . . . . .	17
1.4.5 Ordre de diversité et gain de codage . . . . .	17
1.5 Extension aux systèmes multi-antennaires (MIMO) . . . . .	18
1.5.1 Intérêt des systèmes MIMO . . . . .	18
1.5.2 Modèle du canal . . . . .	19
1.5.3 Capacité des systèmes MIMO . . . . .	20
1.5.4 Récepteurs . . . . .	21
1.6 Conclusion . . . . .	23



<b>2</b>	<b>Les techniques MIMO à diversité en émission</b>	<b>25</b>
2.1	Les Codes Spatio-temporels ou Space-Time Block Code (STBC) . . . . .	25
2.1.1	Les codes en bloc orthogonaux . . . . .	26
2.1.2	Les codes en treillis . . . . .	30
2.1.3	Les codes quasi-orthogonaux . . . . .	30
2.2	Les précodeurs linéaires . . . . .	32
2.2.1	Principe . . . . .	32
2.2.2	Transformation en canal virtuel . . . . .	33
2.2.3	Notion de canal virtuel . . . . .	35
2.3	Les précodeurs diagonaux . . . . .	36
2.3.1	Présentation . . . . .	36
2.3.2	Les solutions existantes . . . . .	36
2.4	Le précodeur max- $d_{\min}$ . . . . .	42
2.4.1	Présentation . . . . .	42
2.4.2	Changement de variables . . . . .	43
2.4.3	Solution pour une MAQ-4 . . . . .	44
2.5	Solutions des précodeurs diagonaux pour 2 voies . . . . .	47
2.6	Comparaison des précodeurs linéaires . . . . .	48
2.6.1	Systèmes avec deux sous-canaux . . . . .	48
2.6.2	Augmentation du nombre de voies : limitation du max- $d_{\min}$ . . . . .	51
2.7	Conclusion . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Statistiques du canal virtuel en coordonnées polaires</b>	<b>55</b>
3.1	Point de départ : le canal virtuel . . . . .	55
3.1.1	Cas d'un bruit blanc gaussien <i>iid</i> . . . . .	55
3.1.2	Loi conjointe des valeurs propres . . . . .	56
3.1.3	Loi conjointe de $\lambda_1$ et $\lambda_2$ . . . . .	57
3.1.4	Loi marginale . . . . .	57
3.2	Étude des statistiques de $\gamma$ et $\rho$ pour $\min(n_T, n_R) = 2$ . . . . .	58
3.2.1	La loi conjointe de $\rho$ et $\gamma$ . . . . .	58
3.2.2	La densité de probabilité de l'angle $\gamma$ . . . . .	59
3.2.3	La densité de probabilité du gain $\rho$ . . . . .	60
3.2.4	Indépendance . . . . .	64
3.3	La loi marginale de $\gamma$ pour $\min(n_T, n_R) = 3$ . . . . .	64
3.4	Comparaison théorique pour $\min(n_T, n_R) = \{2, 3\}$ . . . . .	69
3.4.1	Moyenne et variance de $\gamma$ pour $\min(n_T, n_R) = \{2, 3\}$ . . . . .	69

3.4.2	Influence sur les performances : cas de 6 antennes . . . . .	72
3.4.3	Observations dans le repère $(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2})$ . . . . .	73
3.5	Conclusions . . . . .	74
3.6	Résumé des formules . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Étude des performances du précodeur max-<math>d_{\min}</math></b>	<b>79</b>
4.1	Expressions de deux critères importants : le RSB post-traitement et la distance minimale . .	79
4.1.1	Définitions des deux paramètres . . . . .	79
4.1.2	Application aux précodeurs . . . . .	81
4.1.3	Comparaison graphique . . . . .	85
4.2	Démonstration de l'ordre de diversité maximal du précodeur max- $d_{\min}$ . . . . .	87
4.3	Étude qualitative des performances à l'aide de $d_{\min}$ et de $\gamma$ . . . . .	90
4.3.1	Introduction : outils de comparaison . . . . .	90
4.3.2	Etude des rapports des distances minimales et des RSB post-traitement en fonction des statistiques de $\gamma$ . . . . .	91
4.4	Approximation du TEB du précodeur max- $d_{\min}$ . . . . .	96
4.4.1	Première approximation de la probabilité . . . . .	96
4.4.2	Approximation de la fonction erfc . . . . .	97
4.4.3	Résultats . . . . .	99
4.4.4	Exploitation de cette approximation . . . . .	101
4.5	Conclusion . . . . .	103
<b>5</b>	<b>À propos des précodeurs diagonaux</b>	<b>105</b>
5.1	Modulations différentes sur les voies . . . . .	105
5.1.1	Amélioration du précodeur TEBM . . . . .	105
5.1.2	Précodeur QdS utilisé pour obtenir une distance minimale égale . . . . .	107
5.1.3	Simulations . . . . .	107
5.2	Ordre de diversité des précodeurs diagonaux . . . . .	108
5.2.1	Préliminaire : condition suffisante de pleine diversité . . . . .	108
5.2.2	Borne supérieure de l'ordre de diversité . . . . .	110
5.3	Solution simple des précodeurs diagonaux pour obtenir l'ordre de diversité maximal . . . .	115
5.3.1	Une solution mixte avec un ordre de diversité maximal . . . . .	115
5.3.2	Résultats des simulations . . . . .	117
5.4	Conclusion . . . . .	118

<b>6</b>	<b>Précodeur <math>E d_{\min}</math> et diversité de polarisation</b>	<b>121</b>
6.1	Introduction . . . . .	121
6.2	L'extension du précodeur max- $d_{\min}$ . . . . .	122
6.2.1	Rappel du problème . . . . .	122
6.2.2	Solution proposée : décomposition du canal virtuel en sous-systèmes $2 \times 2$ . . . . .	122
6.3	Association des couples de sous-canaux . . . . .	126
6.3.1	Comparaison des distances de deux sous-systèmes max- $d_{\min}$ . . . . .	126
6.3.2	Détermination des couples de $\lambda_i$ . . . . .	127
6.3.3	Solution de l'extension . . . . .	130
6.4	Remarque sur les nombres de voisins . . . . .	132
6.5	Applications : $b = 4$ pour différentes configurations matérielles . . . . .	133
6.5.1	Présentation . . . . .	133
6.5.2	Système (4,4) . . . . .	134
6.5.3	Système (6,6) . . . . .	136
6.6	Utilisation de la diversité de polarisation . . . . .	138
6.6.1	Modèle du canal . . . . .	138
6.6.2	Comparaison du max- $d_{\min}$ avec le max-SNR et le code d'Alamouti . . . . .	141
6.7	Extension du précodeur max- $d_{\min}$ avec de la diversité de polarisation . . . . .	145
6.7.1	Influence de la polarisation sur les statistiques du canal . . . . .	145
6.7.2	Les performances des précodeurs diagonaux et $E d_{\min}$ . . . . .	147
6.8	Conclusion . . . . .	148
	<b>Conclusion</b>	<b>151</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>155</b>
	<b>Liste de publications</b>	<b>163</b>

# Liste des acronymes et abréviations

ADSL	Asymmetric Digital Subscriber Line
ASI	Annulation Successive d'Interférences
BBAG	Bruit Blanc Additif Gaussien
BdB	Bande de Base
BLAST	Bell Labs Layered Space-Time
CSI	Channel State Information
<i>ddp</i>	Densité de Probabilité
DSP	Densité Spectrale de Puissance
DVP	Décomposition en Valeurs Propres
DVS	Décomposition en Valeurs Singulières
EE	Erreur Egale
EQMM	Erreur Quadratique Moyenne Minimale
IES	Interférence Entre Symboles
<i>iid</i>	indépendant et identiquement distribué
LOS	Line Of Sight
MAQ	Modulation d'Amplitude en Quadrature
MDA	Modulation à Déplacement d'Amplitude
MDF	Modulation à Déplacement de Fréquence
MDP	Modulation à Déplacement de Phase
MIMO	Multiple-Input Multiple-Output
MV	Maximum de Vraisemblance
NLOS	Non Line Of Sight
QdS	Qualité de Service
OFDM	Multiplexage à Division de Fréquences Orthogonales
PEB	Probabilité d'Erreur Binaire
PES	Probabilité d'Erreur Symbole
RSB	Rapport Signal sur Bruit

STBC	Space-Time Block Code
TEB	Taux d'Erreur Binaire
TNT	Télévision Numérique Terrestre
WF	Water-Filling
Wi-Fi	Wireless Fidelity
ZF	Zero-Forcing

# Notations

$n_T$		nombre d'antennes à l'émission
$n_R$		nombre d'antennes à la réception
$m = \min(n_T, n_R)$		nombre minimal d'antennes des deux côtés
$n_S =  n_T - n_R $		coefficient d'asymétrie
$\mathbf{s}$	$[b \times 1]$	vecteurs de symboles
$\mathbf{H}$	$[n_R \times n_T]$	matrice de canal
$\mathbf{F}$	$[n_T \times b]$	matrice de précodage
$\mathbf{G}$	$[b \times n_R]$	matrice de décodage
$b$		nombre de flux de données
$\mathbf{H}_v$	$[b \times b]$	matrice de canal virtuel
$\mathbf{F}_v$	$[n_T \times b]$	matrice de diagonalisation côté émetteur
$\mathbf{G}_v$	$[b \times n_R]$	matrice de diagonalisation côté récepteur
$\mathbf{F}_d$	$[b \times b]$	matrice de précodage dans le canal virtuel
$\mathbf{G}_d$	$[b \times b]$	matrice de décodage dans le canal virtuel
$\cdot^*$		transposé conjugué d'une matrice
$\cdot^T$		transposé d'une matrice
$\text{conj}(\mathbf{x})$		conjugaison des éléments d'une matrice
$\ \cdot\ _F$		norme de Frobenius
$\mathbf{I}_n$	$[n \times n]$	matrice identité de taille $n$
$\text{diag}(\cdot)$		matrice définie par sa diagonale principale
$\text{antidiag}(\cdot)$		matrice définie par son antidiagonale principale
$P_0$		puissance moyenne totale émise sur les $n_T$ antennes
$\sigma_n^2$		variance du bruit sur une antenne de réception
$\text{RSB} = \frac{P_0}{\sigma_n^2}$		Rapport signal sur bruit
$C$		Capacité du canal
$\mathcal{C}$		ensemble des symboles complexes de la constellation

---

$\alpha_M$	constante relative au nombre de bits différents entre deux symboles voisins d'une constellation à $M$ états
$\beta_M$	constante relative à la distance minimale d'une constellation à $M$ états
$d_{\min}$	distance minimale de la constellation de réception
$\gamma$	angle du canal virtuel pour deux voies
$\rho$	gain du canal virtuel pour deux voies
$\bar{d}_{\min}$	distance minimale normalisée par rapport à $\sqrt{P_0}\rho$
$\Theta$	RSB post-traitement
$\Phi = \text{RSB}\rho^2$	paramètre égal au produit du RSB et de la puissance du canal

# Table des figures

1.1	Synoptique d'une transmission numérique . . . . .	7
1.2	Principe de la modulation en quadrature : les impacts sont répartis dans le plan complexe et les plus proches sont à distance égale . . . . .	9
1.3	Influence de la distance sur la puissance reçue du signal : influence des évanouissements aux différentes échelles . . . . .	11
1.4	Exemple de système SISO urbain à multi-trajet . . . . .	12
1.5	Capacité théorique ou borne de Shannon et capacité dans un canal de Rayleigh . . . . .	14
1.6	Exemples de probabilités d'erreur binaire dans un canal gaussien pour différentes modulations : MAQ-4, MAQ-16 et MAQ-64 . . . . .	15
1.7	Principe de la diversité temporelle : répétition du signal avec un intervalle au moins égal à $T_c$ . . . . .	16
1.8	Principe de la diversité fréquentielle : répétition du signal sur des fréquences distantes au moins de $B_c$ . . . . .	16
1.9	Exemples de probabilités d'erreur binaire (arbitraire) dans un canal gaussien pour différents ordres de diversité (1, 2 et 6) avec l'approximation (1.13) à fort RSB en pointillés . . . . .	18
1.10	Schéma général d'une transmission sans fils multi-antennaires . . . . .	19
1.11	Schéma d'un système MIMO à bande étroite . . . . .	19
1.12	Capacités de différents systèmes MIMO comparées à celle d'un SISO et la borne théorique de Shannon . . . . .	21
2.1	Schéma de la transmission MIMO utilisant des OSTBC. L'orthogonalité du code permet une estimation indépendante de chaque symboles $s_i$ avec le signal $\tilde{s}_i$ . . . . .	29
2.2	Schéma équivalent SISO d'un système utilisant des OSTBC avec un même gain pour chaque voie . . . . .	29
2.3	Schéma bloc des précodeurs linéaires dans le canal virtuel . . . . .	33
2.4	Schéma équivalent des précodeurs diagonaux : découplage des décisions pour le maximum de vraisemblance . . . . .	37
2.5	Algorithme d'implantation du précodeur Water-Filling . . . . .	39
2.6	Constellation obtenue sur le récepteur 1 correspondant au sous-canal 1 pour le précodeur $\mathbf{F}_{r1}$ . . . . .	45



2.7	Constellation obtenue sur le récepteur 1 (sous-canal 1) pour le précodeur $\mathbf{F}_{octa}$ . . . . .	46
2.8	Constellation obtenue sur le récepteur 2 (sous-canal 2) pour le précodeur $\mathbf{F}_{octa}$ . Les points (A,N) sont des voisins proches dans cette constellation alors qu'ils sont éloignés sur l'autre constellation. . . . .	46
2.9	Comparaison des précodeurs diagonaux pour un système MIMO (2,2), $b = 2$ et 4 bit/s/Hz pour $10^5$ matrices $\mathbf{H}$ suivant une loi de Rayleigh . . . . .	49
2.10	Comparaison des précodeurs et du code d'Alamouti (MAQ-16) pour un système MIMO (2,2) et $b = 2$ . . . . .	50
2.11	Comparaison des précodeurs pour un système MIMO (4,4), $b = 2$ et 4 bit/s/Hz . . . . .	52
2.12	Comparaison des précodeurs TEBM, EE ( $b = 4$ voies en MAQ-4) et max-SNR ( $b = 1$ voie en MAQ-256) pour un système MIMO (4,4) et 8 bit/s/Hz . . . . .	53
3.1	Exemples de densités de probabilité de l'angle $\gamma$ , systèmes $(2, 2 + n_S)$ . . . . .	61
3.2	Exemples de fonctions de répartition de l'angle $\gamma$ , systèmes $(2, 2 + n_S)$ . . . . .	61
3.3	Exemples de densités de probabilité du gain $\rho$ , systèmes $(2, 2 + n_S)$ . . . . .	63
3.4	Exemples de fonctions de répartition du gain $\rho$ , systèmes $(2, 2 + n_S)$ . . . . .	63
3.5	Valeur moyenne de $\rho$ théorique, simulée sur $10^5$ matrices $\mathbf{H}$ et approximée en fonction de $n_S$ . . . . .	65
3.6	Variance du gain $\rho$ en fonction de $n_S$ obtenue par intégration numérique de la loi théorique . . . . .	65
3.7	Vérification de la ddp de $\gamma$ pour $m = 3$ en comparant les résultats théoriques avec ceux simulés avec $10^5$ matrices $\mathbf{H}$ . Les résultats simulés apparaissent par points et la ddp théorique est tracée en trait plein. . . . .	67
3.8	Comparaison des ddp de $\gamma$ pour $m = 3$ (trait continu) et $m = 2$ (trait pointillé) : un décalage vers la droite est visible pour $m = 3$ . . . . .	69
3.9	Moyenne de $\gamma$ en fonction de $n_S$ pour $\min(n_T, n_R) = \{2, 3\}$ . La courbe en pointillés correspond à un système avec $m = 2$ et un même nombre d'antennes total que pour $m = 3$ . . . . .	71
3.10	Ecart type de $\gamma$ en fonction de $n_S$ pour $\min(n_T, n_R) = \{2, 3\}$ . La courbe en pointillés correspond à un système avec $m = 2$ et un même nombre d'antennes total que pour $m = 3$ . . . . .	71
3.11	Moyenne de $\rho$ en fonction du coefficient d'asymétrie $n_S$ pour $\min(n_T, n_R) = \{2, 3\}$ et pour un même nombre d'antennes total (pointillés) . . . . .	72
3.12	Comparaison des systèmes (2,4) et (3,3) soit un total de 6 antennes. A gauche, les ddp de $\gamma$ et $\rho$ pour $m = 3$ (continu) et $m = 2$ (pointillé). A droite, les TEB simulés du précodeur max- $d_{\min}$ pour les deux systèmes. . . . .	73
3.13	Visualisation des deux zones déterminant à 45% et 92% les deux plus grandes valeurs propres pour $n_S = 0$ , $m = 2$ soit un système (2,2) . . . . .	75
3.14	Visualisation des deux zones déterminant à 45% et 92% les deux plus grandes valeurs propres pour $n_S = 4$ , $m = 2$ soit un système (2,6) . . . . .	75

4.1	Nombre de voies utilisées par les précodeurs WF et EQMM en fonction de la variable $\Phi$ . La frontière est définie par les angles $\gamma_{WF}$ et $\gamma_{EQMM}$ . . . . .	83
4.2	Distance euclidienne minimale normalisée (4.23) pour les précodeurs diagonaux en fonction de $\gamma$ . La modulation est une MAQ-4 sur deux voies ou une MAQ-16 sur une voie. . . . .	85
4.3	Distance euclidienne minimale normalisée pour les précodeurs WF et EQMM en fonction de $\gamma$ pour $\Phi = 3\text{dB}$ et $\Phi \rightarrow \infty$ . La modulation est une MAQ-4 sur deux voies ou une MAQ-16 sur une voie. . . . .	86
4.4	Distance minimale normalisée pour le précodeur max- $d_{\min}$ en fonction de $\gamma$ . . . . .	88
4.5	Distance minimale normalisée pour les précodeurs max- $d_{\min}$ , max-SNR, EE (meilleur des précodeurs diagonaux, cf. figure 4.2) en fonction de $\gamma$ . . . . .	88
4.6	Distances minimales des précodeurs max-SNR, EQMM et EE normalisées par rapport à la distance minimale de max- $d_{\min}$ . Les $ddp$ de l'angle $\gamma$ pour les systèmes (2,2), (3,3) et (4,4) sont superposées. . . . .	91
4.7	RSB post-traitement des précodeurs max-SNR, EQMM et EE normalisés par rapport au RSB post-traitement de max- $d_{\min}$ . Les $ddp$ de l'angle $\gamma$ pour les systèmes (2,2), (3,3) et (4,4) sont superposées. . . . .	92
4.8	TEB pour les précodeurs max- $d_{\min}$ , max-SNR et EQMM pour un système MIMO (2,2) . . .	95
4.9	TEB pour les précodeurs max- $d_{\min}$ , max-SNR et EQMM pour un système MIMO (4,4) . . .	95
4.10	La fonction $\text{erfc}()$ comparée aux approximations du premier et second ordre ( $N = \{1, 2\}$ ) . .	98
4.11	Erreur relative des approximations du premier et second ordre . . . . .	98
4.12	Approximations et simulations des TEB du max- $d_{\min}$ et du max-SNR pour $n_S = 0$ et $N = 2$ .	100
4.13	Approximations et simulations des TEB du max- $d_{\min}$ et du max-SNR pour $n_S = 8$ et $N = 2$ .	100
4.14	Approximation de la différence de RSB entre les précodeurs max- $d_{\min}$ et max-SNR pour des forts RSB en fonction de $n_S$ . . . . .	102
4.15	Utilisation de l'approximation du TEB afin d'estimer le rapport des TEB des précodeurs max- $d_{\min}$ et max-SNR pour différents RSB (8, 12 et 16 dB) en fonction de $n_S$ pour $m = 2$ . Ce rapport est également simulé pour un RSB de 8 dB. . . . .	102
5.1	PARTIE 1 : Comparaison des TEB des précodeurs TEBM et QdS pour un système MIMO (6,6) utilisant 3 ou 4 sous-canaux et différentes modulations transmettant un total de 14 b/s/Hz	109
5.2	PARTIE 2 : Comparaison des TEB des précodeurs TEBM et QdS pour un système MIMO (6,6) utilisant 5 ou 6 sous-canaux et différentes modulations transmettant un total de 14 b/s/Hz . . . . .	109
5.3	Comparaison des ordres de diversité pour un système $\min(n_T, n_R) = 4$ : méthode théorique (Andersen) en trait plein et la borne supérieure en pointillés. . . . .	115
5.4	Distance euclidienne minimale en fonction de $\gamma$ pour les précodeurs max-SNR, EE, et EEDM.	117

5.5	Le précodeur EEDM : association du max-SNR et de l'erreur égale maximisant la distance minimale. Simulations des TEB pour un système (3,3) avec 4 bits/s/Hz. . . . .	118
6.1	Comparaison des distances minimales en fonction de la plus petite valeur propre et pour différentes valeurs associées. $\lambda_a$ et $\lambda_b$ sont deux constantes arbitraires respectant $\lambda_a > \lambda_b$ (ici $\lambda_a = 4$ et $\lambda_b = 2$ ). Le basculement entre les deux précodeurs $\mathbf{F}_{r1}$ ou $\mathbf{F}_{octa}$ est visible en pointillés. . . . .	127
6.2	Synoptique de l'«Equal $d_{\min}$ » ou $Ed_{\min}$ avec les différents principes : création des sous-systèmes $2 \times 2$ avec la combinaison des valeurs propres maximisant la distance minimale, l'optimisation des sous-précodeurs $\tilde{\mathbf{F}}_{di}$ avec la méthode max- $d_{\min}$ et l'allocation de puissance sur les sous-systèmes ( $\Upsilon_i$ ). . . . .	131
6.3	Simulations des précodeurs max-SNR et $\mathbf{F}_{r1}$ pour un système (2,2) pour un canal de Rayleigh et 4 bis/s/Hz . . . . .	133
6.4	Densités de probabilité des angles $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ pour une configuration matérielle (4,4) obtenues par simulation de $10^5 \mathbf{H}$ . . . . .	135
6.5	Comparaison des précodeurs $Ed_{\min}$ avec les précodeurs QdS et TEBM pour un système (4,4). Tous les précodeurs utilisent 4 voies avec une MAQ-4. . . . .	136
6.6	Comparaison des précodeurs $Ed_{\min}$ avec les précodeurs QdS et TEBM pour un système (4,4). Le $Ed_{\min}$ utilise 4 voies alors que les QdS et TEBM n'emploient que trois voies ( $1 \times \text{MAQ-16}$ et $2 \times \text{MAQ-4}$ ). . . . .	137
6.7	Densités de probabilité des angles $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ pour une configuration matérielle (6,6) . . . . .	138
6.8	Comparaison des précodeurs $Ed_{\min}$ avec les précodeurs QdS et TEBM pour un système (6,6). Tous les précodeurs utilisent 4 voies avec une MAQ-4. . . . .	139
6.9	Comparaison des précodeurs $Ed_{\min}$ avec les précodeurs QdS et TEBM pour un système (6,6). Le $Ed_{\min}$ utilise 4 voies alors que les QdS et TEBM n'emploient que trois voies ( $1 \times \text{MAQ-16}$ et $2 \times \text{MAQ-4}$ ). . . . .	139
6.10	Schéma MIMO équivalent à un système réel avec des antennes à double polarisation orthogonale . . . . .	140
6.11	Lois marginales de $\gamma$ et $p$ pour un système SISO à diversité de polarisation équivalent à un MIMO (2,2) avec $t = 0,5$ , $r = 0.3$ et $\alpha = 0,4$ (trait continu). Les $ddp$ théoriques pour un canal de Rayleigh décorrélé sont tracées en pointillés. . . . .	142
6.12	Simulation d'un système SISO à diversité de polarisation équivalent à un système (2,2) avec $t = 0,5$ , $r = 0.3$ et $\alpha = 0,4$ . . . . .	143
6.13	Simulation d'un système SIMO (1,3) à diversité de polarisation équivalent à un système (2,6) avec $t = 0,5$ , $r = 0.3$ et $\alpha = 0,4$ . . . . .	144

6.14	Densités de probabilités simulées de $\gamma$ pour chaque sous-système de l' $E_{d_{\min}}$ pour des systèmes (2,2) et (3,3) à diversité de polarisation soient des systèmes MIMO équivalents (4,4) et (6,6). Les $ddp$ des sous-systèmes pour un canal de Rayleigh décorrélé sont également disponibles (en pointillés). Les différences de probabilités pour les deux cas sont visibles dans le tableau ci-dessous. . . . .	146
6.15	Simulations des TEB pour un système (2,2) à diversité de polarisation ou un système réaliste (4,4) corrélé avec $t = 0,5$ , $r = 0,3$ et $\alpha = 0,4$ . . . . .	147
6.16	Simulations des TEB pour un système (3,3) à diversité de polarisation ou un système réaliste (6,6) corrélé avec $t = 0,5$ , $r = 0,3$ et $\alpha = 0,4$ . . . . .	148



# Liste des tableaux

2.1	Résumé des étapes permettant d'obtenir le canal virtuel . . . . .	35
2.2	Solutions des précodeurs diagonaux en fonction de $\rho$ et $\gamma$ pour un système à deux sous-canaux, $b = 2$ . . . . .	48
3.1	Exemple de polynômes intervenant dans la loi conjointe de $\lambda_1$ . . . . .	58
3.2	Coefficients du polynôme permettant d'obtenir la $ddp$ de $\gamma$ pour $m = 3$ à partir de $f_{\gamma}^{(2)}(\gamma)$ en fonction de $n_S$ . . . . .	68
4.1	Probabilité de se situer dans une zone en pourcentage . . . . .	94
4.2	Nombres moyens des plus proches voisins et des bits faux sur les 4 émis . . . . .	96
6.1	Nombre de combinaisons à la réception en fonction du nombre de flux de données $b$ utilisant chacune une MAQ-4 . . . . .	124
6.2	Les trois combinaisons de couples possibles pour $b = 4$ avec la distance minimale des deux sous-systèmes $\max-d_{\min}$ . L'association Combi3 garantie la plus grande distance minimale. .	128
6.3	Exemple d'optimisation des combinaisons pour $b = 6$ . Les deux couples sélectionnés par une accolade à l'étape $i$ sont optimisés à l'étape $i + 1$ . La dernière colonne permet de vérifier que la distance est soit égale, soit améliorée. . . . .	129
6.4	Probabilité d'utilisation du précodeur $\mathbf{F}_{r1}$ ( $P(\gamma \leq \gamma_0)$ ) pour les deux sous-systèmes de l' $Ed_{\min}$ . Les probabilités d'utilisation du nombre de voies sont également disponibles. Ces résultats sont obtenus par simulation sur $10^5$ matrices. . . . .	146



# Introduction

De nos jours, les communications numériques ont totalement intégré la société et influencent même son comportement à différents niveaux : linguistique avec le terme de «baladodiffusion» par exemple, légal avec le débat parlementaire sur les droits d'auteurs, pédagogique avec le «e-learning», ou commercial avec le développement exponentiel des achats sur Internet. Ces applications diverses et variées ont toutes le point commun de solliciter des débits <sup>1</sup> de transmission de plus en plus importants. Cette demande n'a cessé de croître depuis maintenant plus de 3 siècles et les grands scientifiques participant à l'évolution des communications sont restés connus. Citons Chappe, Morse, Meucci, Marconi, Siemens ou Shannon qui ont tous permis avec leurs inventions de franchir différentes difficultés. Historiquement, les transmissions en espace libre et celles avec support (guide d'ondes ou conducteur) se sont développées en parallèle et voici quelques étapes importantes :

- développement des transmissions hertziennes après la seconde guerre mondiale (téléphone, télex, télévision...),
- mise en place de la liaison téléphonique transatlantique en 1956 (36 communications simultanées),
- apparition du satellite en 1962 avec la première transmission télévisuelle entre les États-unis, Andover, et une petite ville en Bretagne, Pleumeur-Bodou,
- numérisation du téléphone avec la première liaison numérique MIC (Modulation par Impulsion et Codage) en 1966 et permettra aux usagers de disposer d'un débit de 64 kbit/s,
- pose du premier câble transatlantique à fibres optiques, le TAT 8, en 1988 offrant une capacité de 40 000 voies téléphoniques simultanées.

Ce bref historique illustre l'accroissement du débit disponible et la rivalité ondes-câbles. Actuellement, cette dualité existe encore et se retrouve dans deux technologies phares du début du XXI<sup>e</sup> siècle inventées dans les années 90 : l'ADSL (Asymmetric Digital Subscriber Line) et le Wi-Fi (Wireless Fidelity). Les connexions internet se sont généralisées dans les habitats et offrent des débits de plus en plus importants : 6 à 8 Mbits à l'origine et 28 Mbit/s de nos jours (débits théoriques de l'ADSL2+). Avec ces connexions, l'ordinateur doit se relier physiquement au modem avec un câble. Pour offrir plus de souplesse, les fournisseurs d'accès proposent tous des modems capable de réaliser une liaison Wi-Fi : plusieurs ordinateurs d'une maison

---

<sup>1</sup>le débit représente la quantité d'information transmise par seconde. L'information binaire est représentée par le «bit» (contraction de binary digit) et le débit binaire s'exprime en bit/s.



peuvent se connecter sans pour autant installer de câbles.

Les débits assurés par le réseau local sans fil formé par le Wi-Fi doivent suivre ceux de l'ADSL pour un fonctionnement optimal. Deux normes ont été définies par l'IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) pour l'Europe : les normes 802.11b et 802.11g offrant théoriquement 11 et 54 Mbit/s respectivement. Toujours dans le but d'améliorer le débit, la prochaine version 802.11n intégrera la technologie MIMO (Multiple Input-Multiple Output) dont le principe de base consiste à employer plusieurs antennes au niveau du récepteur et de l'émetteur. Alors que dans les modes de transmission «traditionnels», les réflexions sont considérées comme perturbatrices, elles sont mises ici à profit : la technique MIMO utilise les réflexions des signaux sur les murs, le sol, le plafond, les meubles... Les systèmes multi-antennaires au cœur de l'étude de cette thèse, sont bien adaptés à des environnements riches en échos comme les réseaux sans fil intérieurs.

L'enjeu de cette thèse est de participer à l'amélioration des performances des systèmes multi-antennaires présentés ci-dessus en considérant une évolution possible des systèmes MIMO : la connaissance du canal à l'émission. Cette information supplémentaire permet d'anticiper les atténuations ou effets néfastes du canal. Le contexte d'étude considère les solutions basées sur des précodeurs linéaires à l'émission dont le but est d'optimiser des critères importants lors de la transmission. Nous allons étudier leurs performances en terme de Taux d'Erreur binaire et le mémoire sera structuré comme suit.

## Organisation du document

### **Le premier chapitre**

Il présente rapidement les résultats importants d'une chaîne de communication numérique d'un système mono-antennaire. Ils seront ensuite étendus aux systèmes multi-antennaires MIMO avec la présentation du modèle équivalent en bande de base et les récepteurs couramment utilisés.

### **Le second chapitre**

Les travaux  $\max-d_{\min}$  présentés dans ce mémoire portent principalement sur les précodeurs linéaires avec la connaissance du canal à l'émission. Ce chapitre décrit les principaux précodeurs existants ainsi que d'autres méthodes se différenciant par cette connaissance du canal à l'émission.

### **Le troisième chapitre**

Le précodeur  $\max-d_{\min}$  introduit dans le chapitre précédent optimise la distance minimale. Pour simplifier sa description, il utilise un changement de variables  $\rho$  et  $\gamma$  qui déterminent entièrement le canal de transmission diagonalisé. Le modèle de canal choisi est basé sur une loi de Rayleigh et ces deux variables

sont aléatoires. Dans ce chapitre, nous calculerons les lois de ces deux variables pour différentes configurations matérielles qui déterminent les performances du précodeurs.

### **Le quatrième chapitre**

Les distributions définies dans le troisième chapitre vont nous permettre d'étudier qualitativement le comportement du précodeur  $\max-d_{\min}$  puis de le comparer avec d'autres précodeurs. Nous donnerons ensuite une approximation du taux d'erreur binaire permettant d'avoir une idée du comportement du précodeur pour une configuration matérielle donnée.

### **Le cinquième chapitre**

Ce chapitre s'intéresse plus particulièrement aux précodeurs diagonaux. Nous proposerons une amélioration du précodeur TEBM minimisant le taux d'erreur (Taux d'Erreur Binaire minimal) afin d'utiliser des modulations différentes sur chaque voie. Nous donnerons ensuite une borne supérieure de l'ordre de diversité des précodeurs diagonaux qui ne peut être maximal ainsi qu'une condition suffisante de pleine diversité. A partir de ce résultat, nous proposerons une amélioration simple permettant d'assurer l'ordre de diversité maximum qui est égal au produit du nombre d'antennes à l'émission et à la réception.

### **Le sixième chapitre**

Le précodeur  $\max-d_{\min}$  propose un nombre de solutions limité à deux flux de données pour deux sous-canaux. Dans ce dernier chapitre, nous proposons une extension non-optimale du précodeur pour un nombre pair de flux supérieur à deux. Nous verrons que la solution se distingue des précodeurs diagonaux avec une structure en «croix». La solution à quatre voies est étudiée et comparée avec les précodeurs diagonaux qui ne présentent pas cette limitation. Afin de mettre en œuvre des systèmes MIMO plus important, nous utiliserons de la diversité de polarisation permettant de diviser le nombre d'antennes par deux : un système  $(1,1)^2$  physique est équivalent à un système  $(2,2)$ . Le modèle de canal doit alors être révisé afin de prendre en compte de la corrélation.

La conclusion et les perspectives clôtureront le document.

---

<sup>2</sup>un système comprenant  $n_T$  antennes à l'émission et  $n_R$  antennes à la réception est noté  $(n_T, n_R)$ .



# Chapitre 1

## Les communications numériques et les systèmes MIMO

### 1.1 Introduction

Cela fait maintenant plus de deux siècles que les communications évoluent pour répondre à un besoin de plus en plus important en terme de distance entre l'émetteur et le récepteur, de performances ou de fiabilité. Les communications étaient entièrement analogiques à l'époque de la TSF (Télégraphie sans fil) ou du téléphone mais depuis quelques décennies maintenant, le numérique est apparu et a supplanté l'analogique dans bien des domaines. Citons des exemples emblématiques déjà totalement intégrés dans la vie de tous les jours : l'appareil photographique de type argentique est sur le déclin remplacé par son homologue numérique et les cassettes vidéo appartiennent déjà à un autre monde cédant leurs places aux DVD. Cette numérisation est aussi très importante dans les télécommunications : les téléphones portables ont dépassé en nombre les téléphones fixes et un nombre important de foyers est maintenant équipé d'un ordinateur et d'une connexion internet ADSL. Tous ces modes de communications aussi variés que le Wi-Fi, l'ADSL, la télévision par satellite ou la TNT (Télévision Numérique Terrestre), les téléphones portables et à plus petite échelle, les baladeurs numériques MP3, Bluetooth, peuvent être représentés par un même schéma de principe. Le but est de transmettre des données binaires en utilisant diverses techniques : c'est le rôle de l'émetteur. Celui-ci émet des signaux en utilisant un support physique (fibre optique, espace libre, guide d'onde, paire torsadée. ...). La dernière tâche revient au récepteur qui essaie de retrouver les données émises en exploitant les signaux reçus.

Prenons l'exemple de l'ADSL. Il est possible de combiner une communication sur paire torsadée avec la liaison ADSL classique avec une transmission sans fil Wi-Fi permettant de relier les ordinateurs entre eux et avec le modem. Les débits ont tendance à augmenter significativement avec des propositions des opérateurs passant de 512 Kbit/s à quelques 16 Mbit/s (en théorie) voire 50 Mbit/s en 2007. La configuration présentée ci-dessus et en particulier la liaison sans fil doit pouvoir garantir de tels débits tout en assurant

la couverture de toute une maison par exemple. Pour répondre à ces besoins, le Wi-Fi a évolué avec les normes 802.11b et 802.11g mais certains constructeurs proposent d'ores-et-déjà une solution basée sur un modem multi-antennaire. A ce jour, trois routeurs Wi-Fi équipés d'antennes multiples sont disponibles sur le marché : Pre-N chez Belkin, SRX chez Linksys et MIMO chez Netgear. Seulement, chaque marque propose sa technologie propriétaire et son appellation marketing. Dans un soucis de normalisation de l'utilisation, le standard 802.11n permettra d'intégrer les systèmes multi-antennaires et les débits fournis dépasseront ceux d'une connexion Ethernet tout en doublant la portée.

Notre étude met en avant les intérêts de ces systèmes multi-antennaires ou multiple-input multiple-output (MIMO) et ce mémoire porte plus particulièrement sur l'utilisation de précodeurs linéaires avec la connaissance du canal à l'émission. Tous les domaines de l'électronique sont sollicités tout au long de la transmission : hyperfréquence, propagation, conversion numérique-analogique et analogique-numérique, traitement du signal... Vu le large spectre de connaissances, ce chapitre se limitera à recadrer l'étude avec notamment l'introduction aux systèmes MIMO et à présenter des points nécessaires à la bonne compréhension du mémoire.

La prochaine partie de ce chapitre rappellera le principe et les caractéristiques d'une chaîne de communication numérique classique et le paragraphe 1.3 présentera le canal de transmission avec une seule antenne à l'émission et à la réception. La partie suivante introduira la notion de diversité et les solutions envisageables permettant de la créer. Le dernier paragraphe étendra tous ces principes aux systèmes multi-antennaires (MIMO).

## 1.2 Chaîne de transmission numérique

### Principe général

Le but d'une transmission numérique est de transmettre une information d'un point à un autre en utilisant un canal de transmission. L'information à transmettre est numérique c'est-à-dire qu'elle est codée par des séquences de 0 et de 1. L'analogique n'a cependant pas disparu car les signaux numériques n'existent pas dans un sens physique. Ce paragraphe rappelle succinctement les bases des communications numériques et plus de détails sont disponibles dans [1, 2]. Les différents éléments de base d'une chaîne de transmission sont rappelés dans la figure 1.1 :

- la source : l'information à transmettre est générée (train de 0 et 1),
- le codage de source : les redondances du message sont supprimées,
- le codage de canal : la qualité de transmission est améliorée par des techniques basées sur des manipulations d'éléments binaires (codage de Hamming [3], entrelaceur, turbo codes [4]. . .),
- le modulateur : permet de créer un signal pouvant être transmis,
- l'émission : c'est la création d'un signal physique qui pourra se propager,

- le canal de transmission : support permettant la propagation du signal et perturbant le signal,
- la réception : permet de capter du signal utile,
- le démodulateur : retraduit le signal reçu en message binaire,
- le décodeur de canal : détecte et/ou corrige les erreurs de bit éventuelles grâce à des bits ajoutés,
- le décodeur de source : restitue le message d'origine avec des erreurs éventuelles.

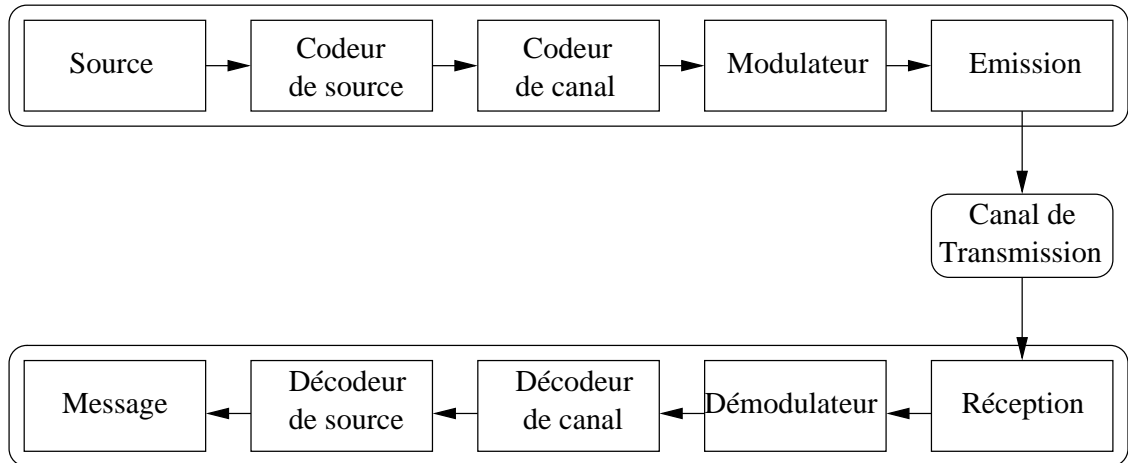


FIG. 1.1 – Synoptique d'une transmission numérique

### L'émetteur et le récepteur

Dans ce chapitre puis tout au long du document, nous considérerons les données binaires à transmettre en sortie du codeur de canal : les éléments binaires sont équiprobables et forment un train continu ou des paquets. Le souci de la chaîne est de transmettre les bits au récepteur avant le décodage de canal avec le moins d'erreurs possible. Les bits sont regroupés pour former les symboles d'une modulation.

### Signal en bande de base

Après la modulation, les signaux émis ont leur énergie concentrée sur les basses fréquences. La mise sur porteuse permet alors de centrer l'énergie du signal autour de la fréquence porteuse ou centrale. Cette technique est souvent utilisée pour adapter la bande utile du signal à la bande passante du canal de transmission. Le signal en bande de base est un outil mathématique permettant de simplifier l'étude de la transmission en restant sur le domaine fréquentiel de la modulation [5, chap.2]. Cependant, le canal dépend de cette fréquence centrale et celui-ci doit subir une transformation afin de présenter un canal équivalent en bande de base. De plus, nous considérons une synchronisation et un échantillonnage parfaits. Ainsi, la chaîne de transmission décrite plus haut est étudiée grâce à un signal en bande de base discret associé à un canal équivalent en bande de base discret.

## Les modulations numériques

Il existe différentes modulations permettant de transmettre des informations numériques et citons en quelques unes : modulation à déplacement d'amplitude (MDA), de phase (MDP) ou de fréquence (MDF), et la modulation d'amplitude en quadrature (MAQ). Nous utiliserons principalement la MAQ dans les transmissions étudiées. La figure 1.2 représente les impacts de la modulation dans le plan complexe : les points forment des carrés de côtés  $2\sqrt{\beta_M}$  et sont équirépartis sur le plan. Le désavantage de la MAQ est que la puissance instantanée fluctue selon le symbole émis. Nous ne considérerons comme contrainte que la puissance moyenne des symboles disponibles et celle-ci doit être unitaire :

$$E[|s_i|^2] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |s_i|^2 = 1 \quad s_i \in C \quad (1.1)$$

où  $E[\cdot]$  est l'espérance mathématique,  $M$  représentent le nombre de symboles de la constellation,  $s_i$  est un symbole et  $C$  est l'ensemble complexe des symboles disponibles. Par exemple, le terme  $\beta_M$  est donné pour une modulation MAQ- $M$  par :

$$\beta_M = \frac{3}{2(M-1)} \quad \text{pour } M = 2^n \quad \text{avec } n = 2, 3, 4, \dots \quad (1.2)$$

## Le canal

L'émission utilise un élément transducteur qui permet de créer un signal physique adapté au support de transmission : une onde électromagnétique pour une transmission en espace libre ou un signal lumineux pour la fibre optique. Il est en général associé à un amplificateur de puissance et à d'autres traitements comme le filtre de mise en forme, la mise sur porteuse, la conversion analogique-numérique. Au sens des communications numériques, le canal correspond au milieu physique associé à quelques organes de l'émetteur et du récepteur comme ceux évoqués précédemment [6]. Nous ne traiterons pas tous ces problèmes et ils seront englobés dans un modèle de canal qui sera présenté dans la suite.

## 1.3 Le canal d'un système mono-antennaire (SISO)

### 1.3.1 Le bruit radio-électrique

Le bruit [7] est l'élément perturbateur majeur d'une communication numérique. Rappelons que le but d'une chaîne de transmission est de transmettre une information précise en utilisant un signal ayant traversé un canal. Celui-ci peut subir diverses déformations et notamment des signaux qui se superposent au signal initial. Ainsi, le bruit se définit comme tout signal ne contenant pas d'information utile pour retrouver le message d'origine. Ce bruit possède une puissance et permet d'introduire un paramètre de référence : le rap-

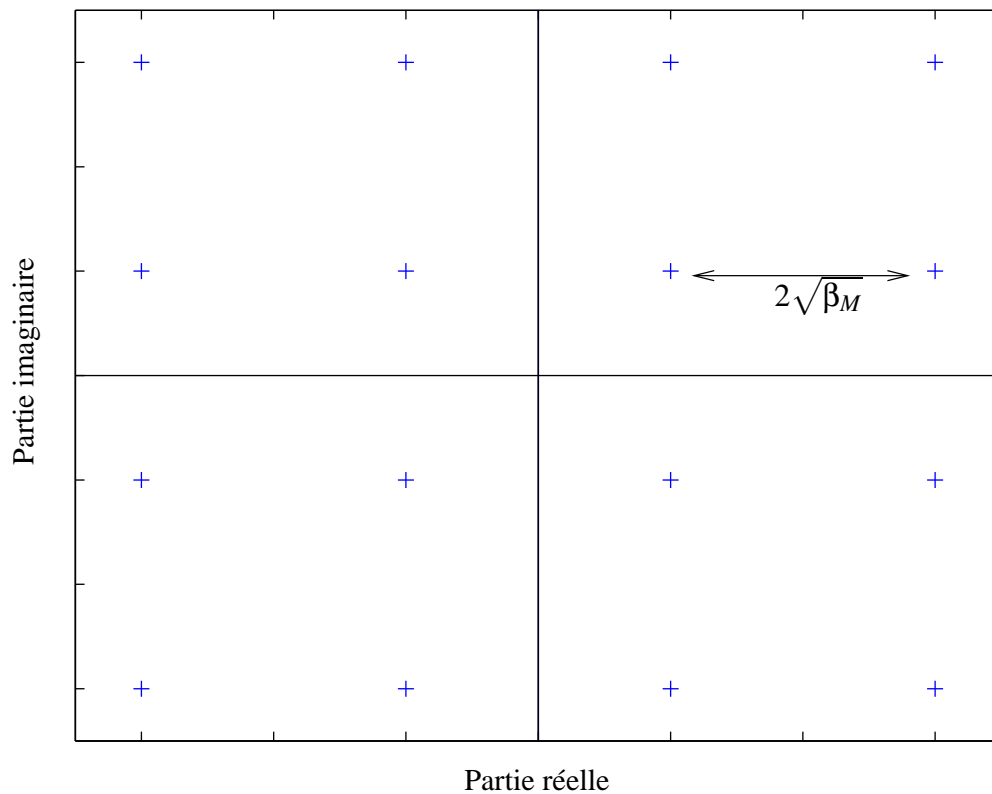


FIG. 1.2 – Principe de la modulation en quadrature : les impacts sont répartis dans le plan complexe et les plus proches sont à distance égale

port signal sur bruit (RSB) défini comme le rapport de la puissance du signal utile sur la puissance du bruit. Un des intérêts des communications numériques est de proposer une sensibilité au bruit inférieure à celle des communications analogiques. Les sources de bruit sont multiples dont voici une liste non exhaustive :

- bruit interne des composants (bruit thermique dû à l'activité des électrons dans les semi-conducteurs),
- le rayonnement cosmique,
- l'activité humaine comme l'émission d'autres signaux,
- etc..

Le bruit est donc une valeur stochastique que ni l'émetteur ni le récepteur ne peuvent contrôler. Il est nécessaire d'attribuer un modèle statistique au bruit et celui classiquement utilisé est de considérer un bruit (noté  $n$ ) blanc additif gaussien (BBAG) de valeur moyenne nulle et de variance  $\sigma_n^2$ .

### 1.3.2 Atténuation du canal

Outre le bruit ajouté lors de la transmission, le canal atténue la puissance du signal émis. Les transmissions sur le canal mobile dans des environnements urbains (présence de nombreux bâtiments) ou intérieurs (murs, meubles, ...) génèrent beaucoup d'échos que la modélisation du canal doit prendre en compte. Ce



paragraphe propose une présentation rapide d'un modèle de canal plus élaboré que celui de Gauss.

### Évanouissement à grande échelle

Cette atténuation correspond à une transmission en espace libre et apparaît classiquement dans le bilan de liaison d'une transmission [8]. L'expression de la puissance reçue dépend de l'inverse de la distance au carré :

$$P_{\text{reçue}} = P_{\text{émise}} \left( \frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2 G_e G_r \quad (1.3)$$

où  $P_{\text{reçue}}$  est la puissance reçue,  $P_{\text{émise}}$  est la puissance émise,  $\lambda$  est la longueur d'onde de la fréquence porteuse,  $d$  est la distance entre les deux antennes et  $G_e$  et  $G_r$  sont respectivement les gains des antennes d'émission et de réception. Cet évanouissement à grande échelle impose la tendance générale et l'atténuation peut être complétée par deux autres fluctuations : les évanouissements à moyenne et petite échelle.

### Évanouissement à moyenne échelle

Les évanouissements à moyenne échelle influent sur la distribution de la puissance moyenne reçue et sont surtout dus aux zones d'ombre. La distribution statistique de la puissance moyenne dépend de la hauteur des antennes, de la fréquence de travail et de l'environnement (immeubles, relief...). Une étude empirique [9] montre cependant que la distribution de la puissance dans une échelle logarithmique (en décibel) suit une loi normale avec comme moyenne la valeur définie par (1.3) et un écart type expérimental de 8 dB.

### Évanouissement à petite échelle

Ces dernières fluctuations déterminent les changements rapides du signal reçu en espace, temps et fréquence. Les principales sources d'évanouissement à petite échelle sont les diffuseurs situés entre l'émetteur et le récepteur créant différentes interactions sur l'onde [10] :

- la réflexion/réfraction,
- la diffraction,
- la diffusion.

Les antennes utilisées pour des transmissions radio-mobile sont peu directives tant à l'émission qu'à la réception et le signal émis peut prendre différents chemins permis par les phénomènes présentés : ce sont les multi-trajets [11]. L'avantage de cette mise en œuvre est de permettre la couverture d'une zone géographique et notamment des zones d'ombres qui ne sont pas visibles directement par l'émetteur. Une distinction peut être faite entre deux communications : une avec une visibilité directe (Line of Sight, LOS) et une sans visibilité directe (Non Line of Sight, NLOS). La première peut être moins sensible aux échos et est caractérisée par le rapport de la puissance de la partie moyenne du canal sur celle de la partie aléatoire.

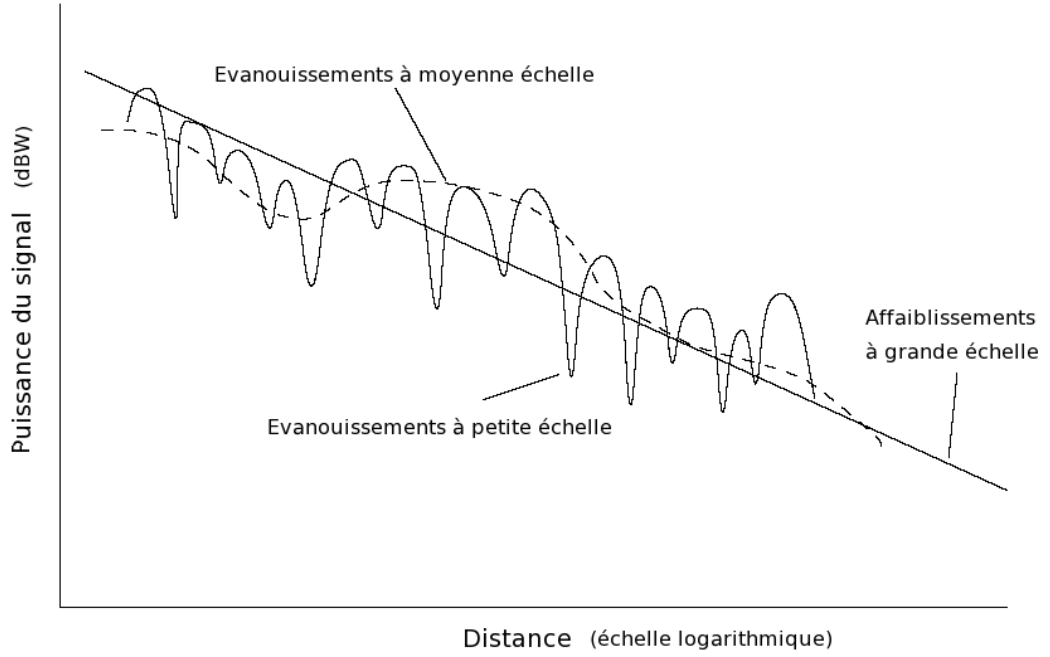


FIG. 1.3 – Influence de la distance sur la puissance reçue du signal : influence des évanouissements aux différentes échelles

Les contributions des différents évanouissements sont illustrées par la figure 1.3. La tendance globale de l'atténuation est fixée par la transmission en espace libre à laquelle vient s'ajouter des fluctuations rapides et, parfois, importantes.

### Les multi-trajets

Le signal émis arrive sur l'antenne du récepteur par un nombre important de chemins différents. Les temps de parcours et les atténuations sont propres à chaque trajet. La relation entre le signal émis et reçu s'écrit :

$$r(t) = \sum_{i=1}^N c_i s(t - \tau_i) + n(t) \quad (1.4)$$

où  $s(t)$  est le signal émis,  $n(t)$  est un bruit additif,  $r(t)$  est le signal reçu,  $c_i$  et  $\tau_i$  sont les gains complexes et les retards du trajet  $i$ . L'étalement temporel est défini par  $T_c = \max_i(\tau_i) - \min_i(\tau_i)$  et permet de caractériser la dispersion temporelle avec notamment l'apparition d'interférence entre symboles (IES). De façon duale, la bande de cohérence  $B_c$  correspond à la gamme de fréquences sur laquelle l'atténuation est considérée constante et on peut estimer que  $B_c \simeq \frac{1}{T_c}$ . Un canal est dit non sélectif en fréquence tant que la bande passante du signal émis  $B_s$  vérifie  $B_s \ll B_c$ .

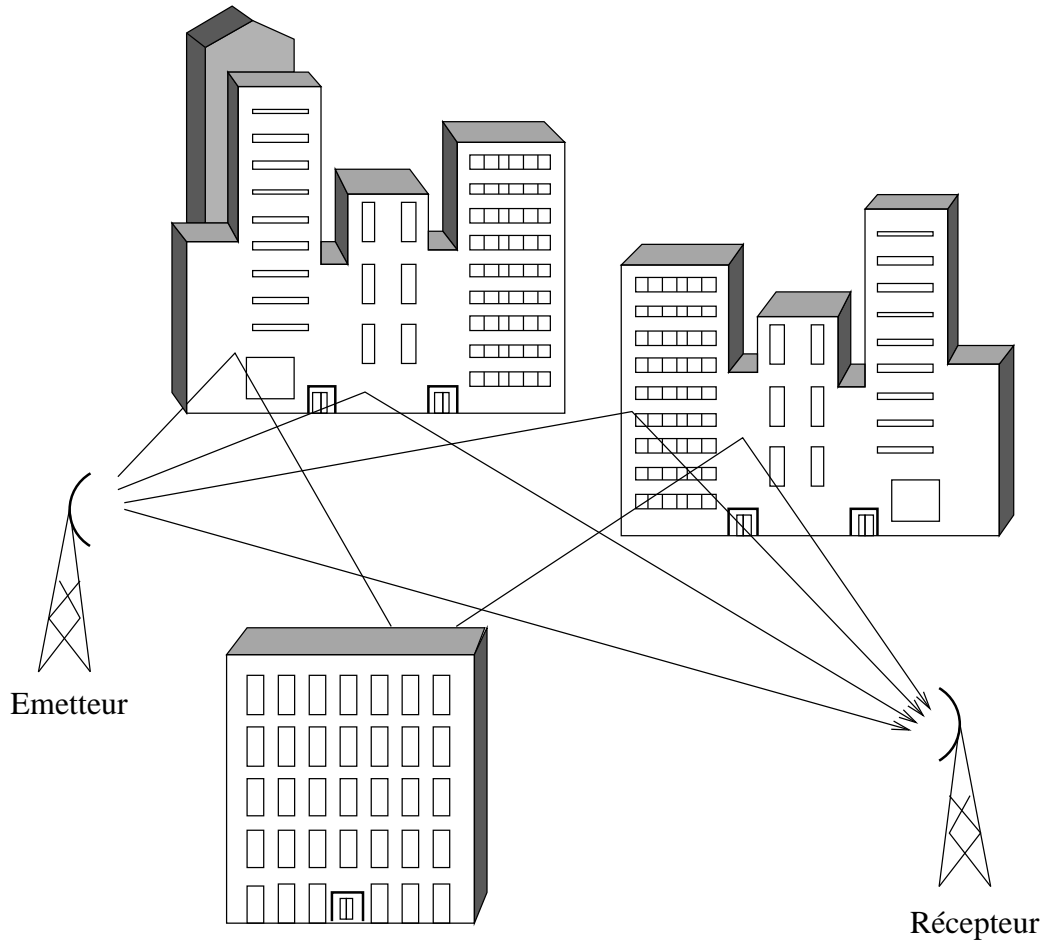


FIG. 1.4 – Exemple de système SISO urbain à multi-trajet

La figure 1.4 illustre les multi-trajets dans un contexte de transmission urbain où tous les immeubles permettent des réflexions et diffractions multiples.

### Canal bande étroite

Nous supposons que la transmission est dite bande étroite : le spectre du canal est considéré constant sur la bande du signal transmis. De plus, la synchronisation et l'échantillonnage sont parfaits. L'échantillon à l'instant  $k$  du signal reçu est :

$$r_k = hs_k + n_k \quad (1.5)$$

où  $h$  est un gain complexe relatif au canal de transmission. Ce terme dépend des  $c_i$  et  $\tau_i$  des multi-trajets et de la fréquence porteuse. Il dépend étroitement de la configuration de la transmission comme l'environnement géographique ou le matériel et il change donc pour chaque transmission. Le gain  $h$  est modélisé par une variable aléatoire qu'il faut définir et nous allons présenter deux modèles de  $h$  les plus utilisés. Le premier

est le modèle de Rayleigh défini par une phase uniforme sur  $[0, 2\pi[$  et un module dont la loi est :

$$f_{|h|}(x) = \frac{2x}{\Omega} e^{-\frac{x^2}{\Omega}} u(x) \quad (1.6)$$

où  $\Omega$  est la puissance moyenne reçue et  $u(x)$  est l'échelon d'Heaviside défini par :

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, x \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{si } x \geq 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}. \quad (1.7)$$

Le second est le modèle de Rice qui peut correspondre à un canal avec une ligne de vue (LOS). La phase est également uniforme sur  $[0, 2\pi[$  et le module suit la loi :

$$f_{|h|}(x) = \frac{2x(K+1)}{\Omega} e^{-\left(K + \frac{(K+1)x^2}{\Omega}\right)} I_0\left(2x\sqrt{\frac{K(K+1)}{\Omega}}\right) u(x) \quad (1.8)$$

où  $K$  représente le rapport de la puissance moyenne du canal sur la puissance des signaux réfléchis,  $\Omega$  est la puissance moyenne reçue et  $I_0(x)$  est la fonction de Bessel d'ordre zéro modifiée.

### Remarque

Le terme  $\Omega$  intervient directement sur le rapport signal sur bruit en réception et se traduira par une translation lors de la visualisation en décibels (échelle logarithmique). Pour simplifier le modèle lors de la simulation, il est d'usage de prendre une atténuation unitaire c'est-à-dire  $\Omega = 1$  pour le modèle de Rayleigh et de Rice.

## 1.3.3 Quelques rappels sur la théorie de l'information

### La capacité

La capacité en bit/s/Hz a été introduite par Shannon [12, 13, 14] pour un canal de gain  $h$  corrompu par un bruit blanc additif gaussien (BBAG). La puissance émise est égale à  $P_0$  et celle du bruit est  $\sigma_n^2$ . La transmission présente un rapport signal sur bruit (cf. paragraphe 1.3.1) noté :

$$\text{RSB} = \frac{P_0}{\sigma_n^2} \quad (1.9)$$

et l'expression de la capacité est :

$$C = E[\log_2(1 + \text{RSB}|h|^2)] \quad (1.10)$$

où  $\text{RSB}|h|^2$  représente le rapport signal sur bruit à la réception. Nous considérons un canal normalisé c'est-à-dire  $E[|h|^2] = 1$ . Ce résultat représente la limite théorique exprimée par Shannon [12]. La figure 1.5 compare la capacité moyenne d'un canal de Rayleigh ( $h$  suit une loi normale  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ ) avec la limite tracée en

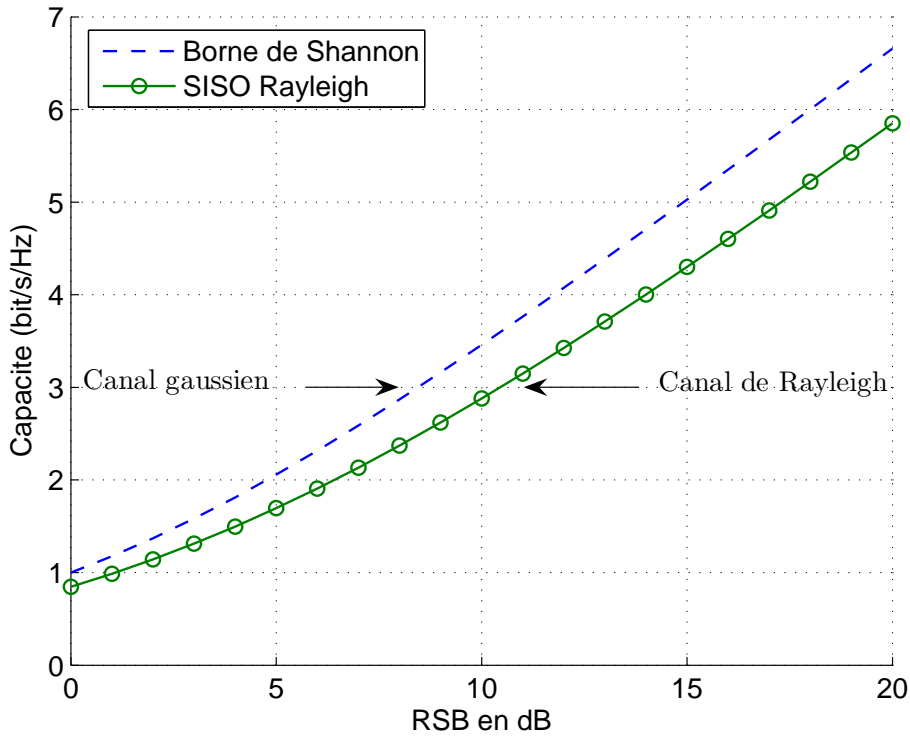


FIG. 1.5 – Capacité théorique ou borne de Shannon et capacité dans un canal de Rayleigh

pointillés pour  $|h| = 1$ . Nous pouvons observer que la capacité du canal de Rayleigh est dégradée.

### La probabilité d'erreur

La capacité permet de comparer différents systèmes de communications en terme de débit maximal que le canal peut supporter mais il existe un autre critère : la probabilité d'erreur. En effet, une information est transmise à travers un canal qui n'est pas maîtrisé et le récepteur ne pourra pas assurer l'intégrité du message reçu. Il s'agit alors de prédire la probabilité que le symbole ou le bit émis soit faux. Plus cette probabilité est faible et plus le système est bon. Pour obtenir les performances d'une technique, il existe deux solutions. La première consiste à étudier et déterminer théoriquement la probabilité d'erreur. Par exemple, la probabilité d'erreur binaire (PEB) est donnée dans [15] pour un canal gaussien et une modulation  $M$  aires MAQ, PSK ou MDA :

$$\text{PEB} = \alpha_M \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\beta_M \text{RSB}} \right) \quad (1.11)$$

où  $\alpha_M$  et  $\beta_M$  sont des constantes dépendantes de la modulation utilisée. La seconde solution est la simulation à l'aide d'un ordinateur. Si le nombre de tirages est important, alors le taux d'erreur binaire (TEB) d'une simulation de type Monte Carlo tend vers la PEB. Cette solution a l'avantage d'être simple à programmer en comparaison aux calculs théoriques de la précédente qui peuvent s'avérer difficiles. En contre-partie, la puissance de calcul nécessaire peut devenir très importante en fonction de la complexité du système et du

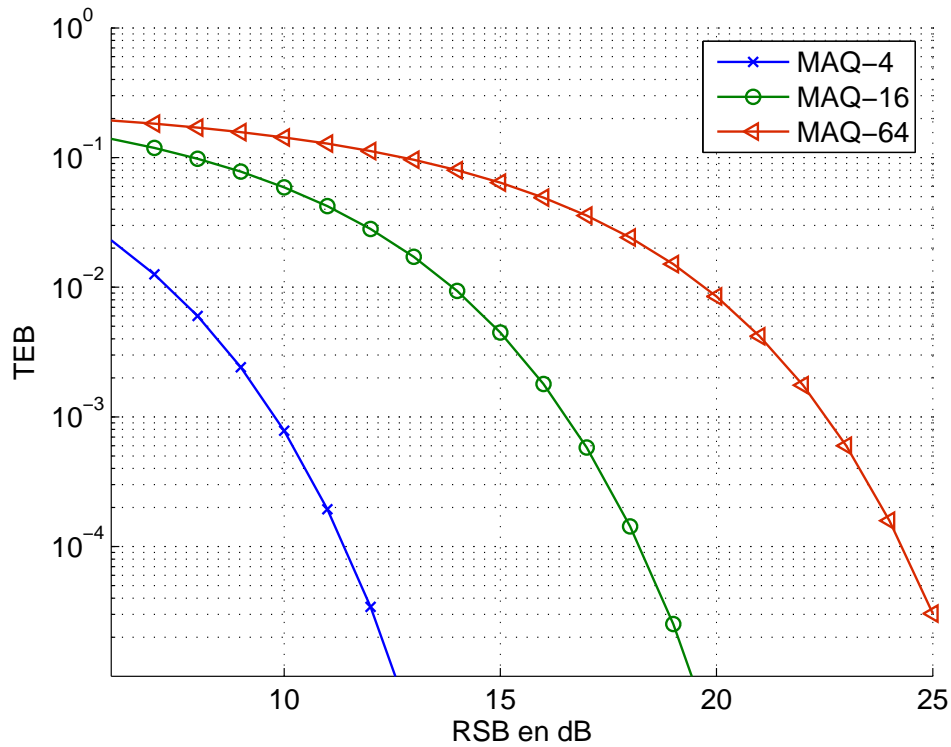


FIG. 1.6 – Exemples de probabilités d’erreur binaire dans un canal gaussien pour différentes modulations : MAQ-4, MAQ-16 et MAQ-64

nombre de tirages.

La figure 1.6 montre les performances d’un canal gaussien (gain unitaire et bruit BBAG) pour différentes modulations d’amplitude en quadrature (MAQ-4, MAQ-16 et MAQ-64). La PEB est tracée dans un repère semi-logarithmique en fonction du RSB. Cette représentation offre une lecture plus aisée.

## 1.4 Notion de diversité

Les canaux considérés dans la présentation précédente prennent en compte les multi-trajets engendrant des évanouissements à faible échelle. Pour combattre ces fluctuations rapides d’un endroit à un autre et par conséquent très gênantes pour une communication numérique, une solution possible est d’introduire de la diversité. Plusieurs moyens sont disponibles pour créer cette diversité [16] qui améliorera les performances en la rendant plus robuste au canal (diminution du TEB) ou en augmentant la couverture de la communication. Une transmission SISO classique utilise un seul canal pour transmettre une information et le principe de la diversité est de transmettre des répliques de l’information en utilisant plusieurs signaux en même temps sur différents trajets. Si ces derniers sont indépendants, même si un trajet atténue fortement le signal, les autres trajets n’altéreront pas les autres signaux et le récepteur captera quand même du signal exploitable. Les différentes solutions permettant d’obtenir de la diversité sont présentées ci-après.

### 1.4.1 Diversité temporelle

La diversité temporelle est obtenue en émettant plusieurs fois le signal ou des versions redondantes de durée symbole  $T_s$  à des intervalles supérieurs ou égaux au temps de cohérence du canal  $T_c$  (figure 1.7). Le récepteur disposera de deux signaux sans interférences pour estimer l'information. Comme il doit attendre le dernier envoi de signal, l'estimation de l'information initiale sera retardée.

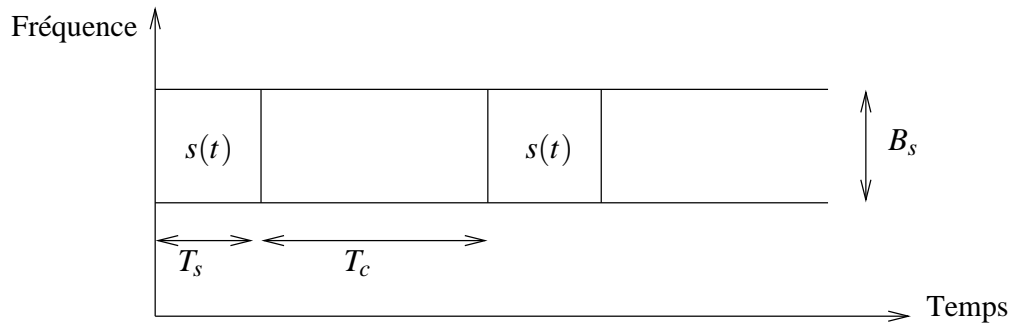


FIG. 1.7 – Principe de la diversité temporelle : répétition du signal avec un intervalle au moins égal à  $T_c$

### 1.4.2 Diversité fréquentielle

Lorsque le canal est sélectif en fréquence, la diversité fréquentielle s'adapte bien à ce problème. Le principe est d'émettre le même signal ou des versions redondantes sur des porteuses dont les fréquences sont différentes et écartées d'au moins la bande de cohérence du canal (figure 1.8). Les solutions sont multiples et citons entre autres : utilisation d'une modulation multiporteuse conjointement avec un entrelaceur et un codage [17], étalement de spectre par séquence directe [18] ou par saut de fréquence [19].

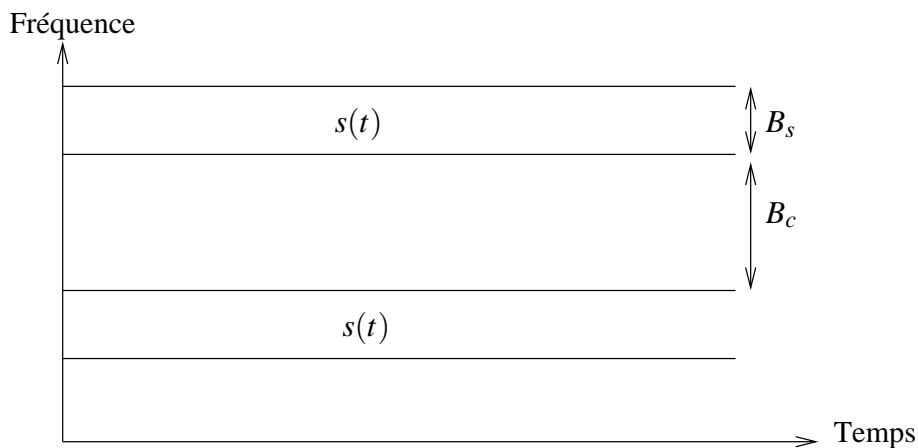


FIG. 1.8 – Principe de la diversité fréquentielle : répétition du signal sur des fréquences distantes au moins de  $B_c$

### 1.4.3 Diversité de polarisation

Le principe est similaire aux précédentes : un même signal ou une réplique redondante est émis en utilisant des ondes polarisées différemment [20, 21, 22]. La solution la plus courante est l'utilisation de deux polarisations orthogonales comme verticale et horizontale par exemple. Il faut néanmoins que les caractéristiques de propagation des deux ondes soient différentes.

### 1.4.4 Diversité spatiale

Cette dernière diversité est obtenue en utilisant plusieurs antennes pour émettre un signal ou des versions redondantes ou/et plusieurs antennes pour recevoir les différents signaux. Il s'agit d'avoir des trajets à évanouissement indépendants et, pour ce faire, les antennes ne doivent pas être trop proches pour que les signaux ne soient pas corrélés. Une distance appelée distance de cohérence est déterminée et permet d'assurer la diversité spatiale. Celle-ci est liée à la hauteur de l'antenne d'une station de base par exemple [23]. Elle dépend de la longueur d'onde et diffère entre les antennes émettrices ( $10\lambda$ ) et réceptrices ( $0,4\lambda$  à  $0,6\lambda$ ). Les systèmes MIMO associent ces deux solutions permettant de créer une diversité spatiale très importante.

### 1.4.5 Ordre de diversité et gain de codage

D'une façon très générale, la probabilité d'erreur peut être approximée pour les forts RSB par l'expression suivante :

$$Pe \simeq \mathcal{G}^{-1} \text{RSB}^{-o} \quad \text{pour} \quad \text{RSB} \gg 1 \quad (1.12)$$

où  $\mathcal{G}$  est le gain de codage et  $o$  est l'ordre de diversité. Les courbes de PEB ou TEB sont représentées dans un repère semi-logarithmique en fonction du RSB en décibels. L'approximation devient alors :

$$\log_{10}(Pe) \simeq -\log_{10}(\mathcal{G}) - \frac{o}{10} \text{RSB}|_{\text{dB}} \quad \text{pour} \quad \text{RSB} \gg 1. \quad (1.13)$$

L'asymptote de la probabilité d'erreur est une droite dont la pente et le point à l'origine sont liés, respectivement, à l'ordre de diversité et au gain de codage. Ainsi, plus l'ordre de diversité est grand et plus la pente (en valeur absolue) est importante entraînant une chute de la probabilité d'erreur plus importante quand le RSB augmente. De plus, un gain de codage important décale la courbe vers la gauche diminuant encore la probabilité d'erreur. La figure 1.9 illustre ces relations pour différents ordres de diversité (1, 2 et 6). On voit nettement que les probabilités d'erreur diminuent de façon importante quand l'ordre  $o$  augmente. Une quatrième courbe permet de comparer deux probabilités d'erreur avec un même ordre de diversité mais avec une différence de gain de codage de 3 dB. Cette différence de gain est visible à fort RSB : elle se traduit par une différence de RSB de 3 dB pour obtenir la même valeur de probabilité d'erreur.



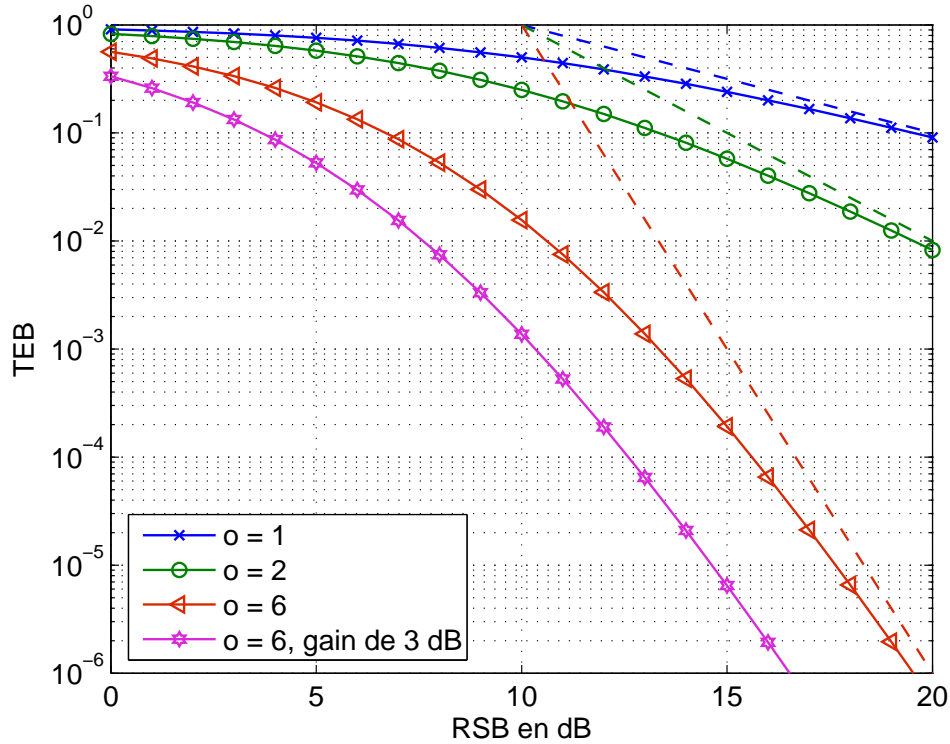


FIG. 1.9 – Exemples de probabilités d’erreur binaire (arbitraire) dans un canal gaussien pour différents ordres de diversité (1, 2 et 6) avec l’approximation (1.13) à fort RSB en pointillés

## 1.5 Extension aux systèmes multi-antennaires (MIMO)

### 1.5.1 Intérêt des systèmes MIMO

Les systèmes de communication utilisant le canal radio-mobile se sont développés rapidement ces dernières années. Le téléphone portable ou les réseaux Wi-Fi déjà cités voient leur débit et leur nombre d’utilisateurs augmenter régulièrement. D’autre part, nous avons vu que de telles transmissions doivent faire face à des canaux à évanouissement. Les systèmes MIMO permettent d’introduire de la diversité spatiale présentée précédemment [24]. L’idée d’utiliser plusieurs capteurs ou plusieurs émetteurs était déjà présente dans [9, 25] (systèmes MISO et SIMO) et dans d’autres domaines comme la séparation de source [26]. La nouveauté était d’utiliser les deux en même temps avec deux réseaux d’antennes coopératives à l’émission et à la réception. Les premiers travaux ont été menés dans les laboratoires Bell [27, 28] et depuis, les systèmes MIMO ont suscité un intérêt particulier pour la communauté scientifique. En effet, ils permettent de lutter contre les évanouissements du signal et d’atteindre des efficacités spectrales importantes. En utilisant un multiplexage spatial, l’efficacité spectrale des systèmes MIMO peut augmenter tout en utilisant la même modulation pour les symboles émis et la même bande de fréquence. Ainsi, la bande passante reste inchangée et l’efficacité spectrale est augmentée. Le traitement des données tant à l’émission qu’à la réception est plus lourd à cause de l’augmentation des dimensions mais cet obstacle devient plus facile à franchir grâce à l’avancée des tech-

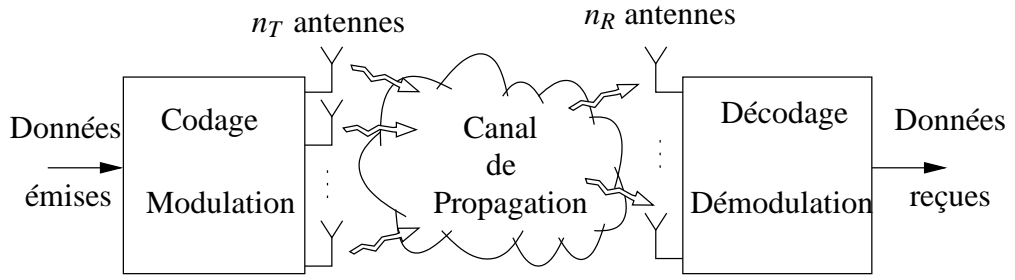


FIG. 1.10 – Schéma général d'une transmission sans fils multi-antennaires

nologies des composants (puissance de calcul embarquée, autonomie, fréquence d'utilisation, technologie des antennes ...).

La figure 1.10 résume le principe des systèmes MIMO. Dans la suite du mémoire, nous noterons  $n_T$  le nombre d'antennes à l'émission et  $n_R$  celui à la réception. La seule inconnue restante est le canal de transmission auquel un modèle doit être associé.

### 1.5.2 Modèle du canal

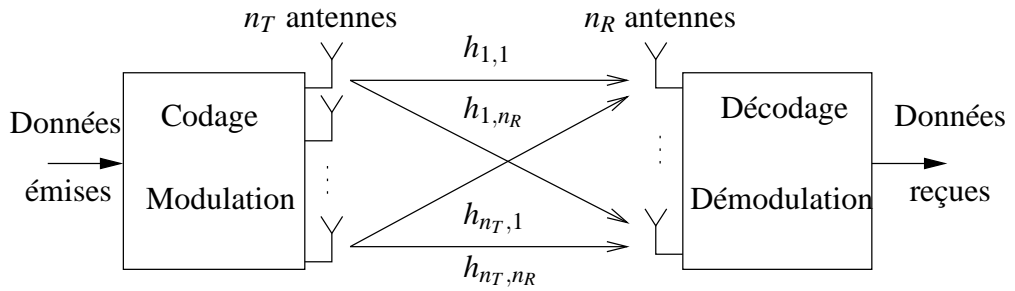


FIG. 1.11 – Schéma d'un système MIMO à bande étroite

Le modèle de canal que nous utiliserons par la suite est une extension du modèle SISO présenté dans le paragraphe 1.3. Il considère le cas d'un seul utilisateur associé à une transmission bande étroite ( $T_s \gg T_c$ ) donc un canal non sélectif en fréquence. De plus, en considérant une synchronisation et un échantillonnage parfaits, les trajets discrets multiples se traduisent par un gain complexe en bande de base. Celui-ci est noté  $h_{i,j}$  pour un trajet entre l'antenne d'émission  $i$  et l'antenne de réception  $j$ . Ce modèle de canal est représenté par la figure 1.11. Chaque antenne de réception reçoit la somme de toutes les contributions des antennes d'émission ayant subi un gain complexe à laquelle s'ajoute un bruit. La linéarité du modèle considéré permet d'écrire la relation d'entrée-sortie matriciellement :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (1.14)$$

où  $\mathbf{H}$  est la matrice de canal représentant les trajets à évanouissement,  $\mathbf{y}$  est le vecteur d'échantillons reçus,  $\mathbf{x}$  est le signal émis sur les  $n_T$  antennes avec la contrainte de puissance  $E[\mathbf{x}^*\mathbf{x}] = P_0$  et  $\mathbf{n}$  est le vecteur de

bruit. La matrice de canal  $\mathbf{H}[n_R \times n_T]$  est définie par :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{1,1} & \cdots & h_{1,n_T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1,n_R} & \cdots & h_{n_R,n_T} \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Tout comme le cas SISO, les éléments de la matrice de canal sont aléatoires et il convient de choisir un modèle statistique [29, 30, 31]. Les plus connus sont ceux de Rayleigh, Rice ou Nakagami [32]. D'autres travaux portent sur des estimations empiriques [33, 34] ou en utilisant des simulations permettant de reprendre la propagation de l'onde et de ses multi-trajets [35]. Pour la suite de l'étude nous considérerons le modèle de Rayleigh définissant les éléments de  $\mathbf{H}$  comme des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (*iid*) de loi normale de valeur moyenne nulle et de variance unitaire notée  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ .

Notons également que les systèmes MIMO peuvent être associés à l'OFDM. Une première approche permet de considérer plusieurs systèmes MIMO en parallèle dont les fréquences centrales sont différentes. La bande est élargie et le canal devient un filtre dont le nombre de coefficients dépend de la largeur de la bande considérée. Naturellement, la complexité du système (en particulier le récepteur) augmente [36, 37]. Ce sujet ne sera pas abordé dans ce mémoire.

### 1.5.3 Capacité des systèmes MIMO

Considérons maintenant la capacité des systèmes MIMO et intéressons nous aux points-clés sans reprendre toute l'étude sur la capacité. La capacité des systèmes multi-antennaires est définie par [16, 38] :

$$C = E \left[ \log_2 \left( \det(\mathbf{I}_{n_R} + \frac{\text{RSB}}{n_T} \mathbf{H} \mathbf{H}^*) \right) \right] \quad (1.16)$$

où  $\mathbf{I}_{n_R}$  est la matrice identité de dimension  $n_R$ . Comme dans le cas SISO, la matrice de canal est considérée normalisée c'est-à-dire que les éléments de  $\mathbf{H}$  ont une variance unitaire. A fort RSB, la capacité d'un canal de Rayleigh peut être approximée de la sorte :

$$C \simeq \min(n_T, n_R) \log_2 \left( \frac{\text{RSB}}{n_T} \right). \quad (1.17)$$

Ainsi, la capacité est améliorée car le système MIMO est équivalent à  $\min(n_T, n_R)$  systèmes SISO. La capacité augmente en fonction du nombre d'antennes. La figure 1.12 illustre les capacités de systèmes avec un canal de Rayleigh pour différentes configurations matérielles. La capacité d'un système SISO et la borne théorique de Shannon sont aussi présentes. Pour une même bande spectrale utilisée, les systèmes MIMO permettent de dépasser la borne de Shannon. De plus, les configurations matérielles n'ont pas le même comportement en fonction du RSB : le système (1,3) est le meilleur à faible RSB mais se fait largement

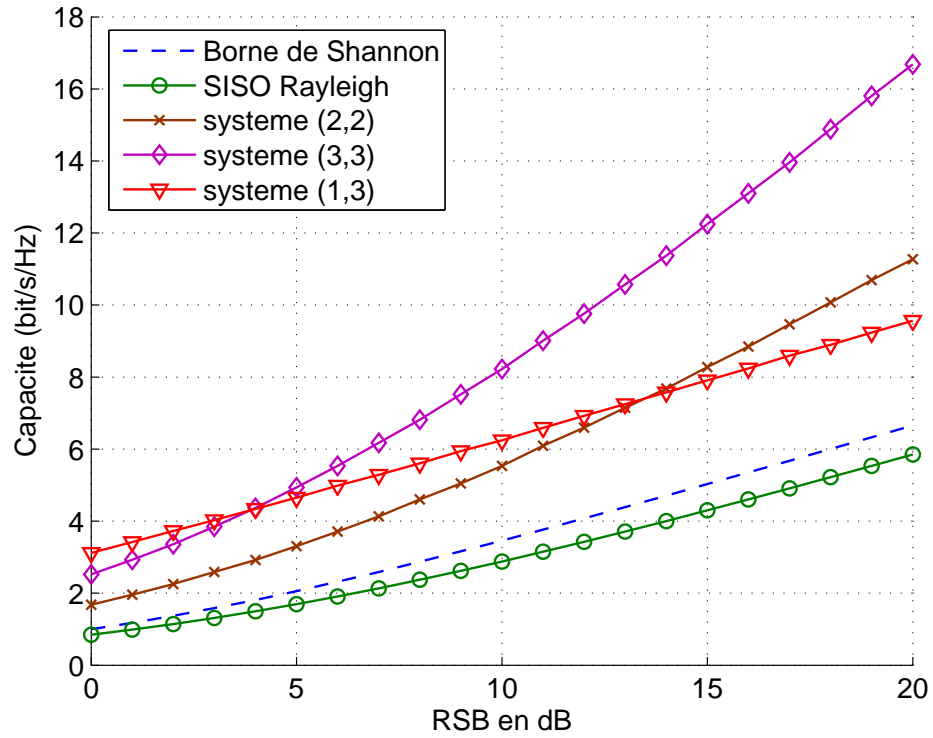


FIG. 1.12 – Capacités de différents systèmes MIMO comparées à celle d'un SISO et la borne théorique de Shannon

dépasser par les systèmes (2,2) et (3,3) lorsque le RSB devient important (*cf.* Eq. 1.17).

### 1.5.4 Récepteurs

Si les multi-trajets ont été modélisés par un gain global, il n'en reste pas moins que chaque antenne de réception récupère la contribution de tous les signaux émis sur les  $n_T$  antennes d'émission. Le récepteur doit trouver une méthode permettant de reconnaître les symboles transmis à l'aide de la somme des signaux.

#### Forçage à zéro (ZF)

Ce récepteur est le plus simple et il propose d'inverser la matrice de canal  $\mathbf{H}$  pour annuler toutes les contributions des émetteurs sur chaque symbole. Quand la matrice n'est pas inversible, la pseudo-inverse est utilisée :

$$\hat{\mathbf{s}} = (\mathbf{H}^* \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{y}. \quad (1.18)$$

Cette solution reste cependant sensible au bruit car lorsque la matrice  $\mathbf{H}$  est mal conditionnée, le bruit est favorisé. Ainsi, les performances à faible RSB de ce récepteur sont fortement dégradées.

### Erreur Quadratique Moyenne Minimale (EQMM)

Le but de récepteur est de minimiser l'erreur quadratique moyenne due au bruit et aux interférences entre symboles. La solution proposée est :

$$\hat{\mathbf{s}} = (\mathbf{H}^* \mathbf{H} + \frac{n_T}{\text{RSB}})^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{y}. \quad (1.19)$$

Contrairement au ZF, le RSB intervient dans l'estimation des symboles. Grâce à la prise en compte de ce paramètre, ce récepteur améliore les performances pour les faibles RSB. Cependant, le terme  $\frac{n_T}{\text{RSB}}$  tend vers zéro à haut RSB et les récepteurs ZF et EQMM deviennent alors équivalents.

### Maximum de Vraisemblance (MV)

Le codeur de canal a pour but principal de diminuer les erreurs mais son action permet également de supposer que les bits fournis sont équiprobables et, par conséquent, que les symboles  $s_i$  sont aussi équiprobables. Les meilleures performances en terme de TEB seront disponibles par le récepteur MV. L'estimation des symboles est définie classiquement par :

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2. \quad (1.20)$$

La mise en place de cette solution demande un test de chaque vecteur  $\mathbf{s}$  possible. Elle est par conséquent très gourmande en calculs dont l'augmentation est exponentielle avec le nombre d'antenne à l'émission ( $M^{n_T}$  vecteurs possibles). Pour pallier au coût calculatoire trop important, l'algorithme de décodage par sphère permet d'obtenir des performances semblables en diminuant la charge de calculs [39, 40].

### Annulations successives d'interférences ordonnées (V-BLAST)

Les trois récepteurs présentés jusqu'à présent présentent des avantages et des inconvénients : le MV est performant mais demande des calculs, le ZF est simple mais est sensible au bruit, et l'EQMM simple résiste mieux que le ZF au bruit mais n'élimine pas complètement les IES. C'est dans ce contexte que les laboratoires Bell ont développé l'algorithme Vertical-Bell Laboratories Layered Space-Time (V-BLAST) [41, 42]. Ce récepteur contrairement aux précédents n'est pas linéaire. Il se base sur une égalisation (ZF ou EQMM) associée à un retour de décision dont le principe général est le suivant. Le récepteur considère dans un premier temps le symbole sur l'antenne émettrice ayant le meilleur RSB puis procède à son estimation selon le critère choisi (MV, EQMM...) : la probabilité de se tromper sur ce symbole est a priori la plus faible. Sa contribution est ensuite estimée puis retranchée du vecteur  $\mathbf{y}$  : les RSB des symboles restants sont alors améliorés. Cette manipulation est répétée jusqu'au dernier symbole. En résumé, voici les étapes de cet algorithme aussi appelé Ordered Successive Interference Cancellation (OSIC) :

1. Choix du symbole  $s_i$  possédant le meilleur RSB.
2. Estimation du symbole  $s_i$  pour obtenir  $\hat{s}_i$ .
3. Calcul de la contribution de  $s_i$  en utilisant la colonne  $i$  de  $\mathbf{H}$  et  $\hat{s}_i$ .
4. Soustraction de la contribution estimée.
5. La contribution du symbole étant supposée annulée, la colonne  $i$  de  $\mathbf{H}$  est annulée.
6. Les étapes précédentes sont répétées jusqu'à ce que les  $n_T$  symboles soient estimés.

Le point faible de cette solution est la propagation des erreurs. En effet, si l'estimation d'un symbole est erronée alors celle de sa contribution est également fautive. Le prochain symbole ne voit pas son RSB amélioré et risque d'être faux aussi : l'erreur se propage aux symboles suivants. Cependant, les performances sont globalement améliorées sans nécessiter une charge importante de calculs.

## 1.6 Conclusion

Les communications numériques permettent de transmettre des informations se présentant en paquets ou flux de données binaires (0 ou 1) d'un point vers un autre. Nous avons rappelé les éléments importants de la chaîne de communication avec l'émetteur, le canal et le récepteur. Notre contexte d'étude considère les données en sortie du codeur de canal et, grâce à son action, elles sont supposées équiprobables. Il s'agit alors de restituer les bits en entrée du décodeur de canal avec le moins d'erreurs possible. Les erreurs sont générées par le canal qui présente une partie aléatoire de la transmission. En effet, un bruit stochastique est ajouté et le signal subit une déformation à cause de l'atténuation et des multi-trajets. Nous avons vu les modèles de Rayleigh ou Rice permettant de considérer un canal à évanouissements pour des systèmes Single Input - Single Output (SISO). Ce modèle est ensuite étendu aux systèmes multi-antennaires ou MIMO : chaque trajet subit un gain complexe aléatoire puis chaque antenne de réception récupère un mélange de tous ces signaux avec un bruit BAG. Nous avons vu que le système échantillonné en bande de base possède une écriture matricielle avec la matrice aléatoire de canal suivant un modèle précis. Les principaux récepteurs ont ensuite été présentés.

Après avoir posé le modèle des systèmes MIMO, le prochain chapitre introduit les techniques exploitant la diversité spatiale dont les précodeurs linéaires. Nous pouvons raisonnablement supposer que le récepteur estime le canal et que cette information peut ensuite remonter à l'émetteur. Cette connaissance à l'émission ou Channel State Information (CSI) permet aux précodeurs d'optimiser les signaux émis.



## Chapitre 2

# Les techniques MIMO à diversité en émission

Le chapitre précédent a introduit les systèmes MIMO avec  $n_T$  antennes à l'émission et  $n_R$  à la réception dont le modèle considéré se résume à une matrice aléatoire représentant les gains de chaque trajet dans le canal. Il existe des méthodes permettant d'estimer le canal à la réception avec plus ou moins de précision [43, 44] mais nous écarterons le problème d'estimation en considérant une connaissance parfaite du canal ou Channel State Information (CSI) à la réception (Rx-CSI) ou un modèle d'erreur d'estimation. Néanmoins, la capacité du système à renvoyer l'information à l'émetteur (Tx-CSI) est une notion importante et constitue les deux grandes familles de solutions présentées dans la suite de ce chapitre. La liste dressée ici n'est pas complète et rapporte seulement les techniques qui seront étudiées dans ce mémoire. Rappelons également que pour faciliter la comparaison, la puissance totale moyenne émise sur les  $n_T$  antennes est imposée à  $P_0$  et que le rapport signal sur bruit est défini par  $\text{RSB} = \frac{P_0}{\sigma_n^2}$  où  $\sigma_n^2$  est la puissance moyenne du bruit sur chaque antenne réceptrice.

Nous présenterons notamment les précodeurs linéaires et en particulier le max- $d_{\min}$  qui est le précodeur le plus récent. Lors de ce chapitre, nous verrons que le précodeur max- $d_{\min}$  propose des performances intéressantes en comparaison aux autres techniques. Ce dernier est basé sur la maximisation de la distance minimale dont la résolution n'est pas triviale limitant ainsi les solutions disponibles à deux voies de données. Ce précodeur sera le sujet d'une partie importante de cette thèse avec l'étude de ses performances (chapitre 4) et l'extension à plus de deux voies (chapitre 6).

### 2.1 Les Codes Spatio-temporels ou Space-Time Block Code (STBC)

Cette première famille nécessite seulement la connaissance du canal à la réception (Rx-CSI) et l'émetteur ne connaît pas le canal. Nous allons voir différentes solutions utilisant le principe des codes spatio-temporels en blocs ou Space-Time Block Code (STBC) [45] dont le plus connu est le code d'Alamouti pour



deux antennes à l'émission.

### 2.1.1 Les codes en bloc orthogonaux

#### Le premier code proposé par Alamouti

Le code proposé par Alamouti [46] est basé sur une succession d'émission sur deux périodes symbole et sur deux antennes : il apparaît alors les deux dimensions spatiale et temporelle. Les signaux émis sont basés sur des symboles complexes issus d'une modulation (conjugués ou opposés). Le code est défini par :

$$\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} s_1 & -s_2^* \\ s_2 & s_1^* \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

où  $s_1$  et  $s_2$  sont les symboles à transmettre. Ce code a la particularité d'être orthogonal :

$$\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2^* = \mathbf{C}_2^* \mathbf{C}_2 = (|s_1|^2 + |s_2|^2) \mathbf{I}_2 \quad (2.2)$$

et en moyenne :

$$E[\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2^*] = E[\mathbf{C}_2^* \mathbf{C}_2] = 2\mathbf{I}_2 \quad \text{avec} \quad E[|s_i|^2] = 1. \quad (2.3)$$

Afin de respecter la contrainte de puissance totale moyenne émise  $P_0$  sur toutes les antennes pendant un temps symbole, il est nécessaire de multiplier le code par la constante  $\sqrt{P_0/2}$ . La relation d'entrée-sortie sous forme matricielle est :

$$\mathbf{Y} = \sqrt{\frac{P_0}{2}} \mathbf{H} \mathbf{C}_2 + \mathbf{N} \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{Y}$ ,  $[n_R \times 2]$ , est la matrice des échantillons reçus et  $\mathbf{N}$ ,  $[n_R \times 2]$  est la matrice de bruit. Le récepteur estime les éléments de la matrice de canal et recombine les échantillons reçus. Il forme alors deux signaux particuliers définis par :

$$\begin{cases} \tilde{y}_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n_R} h_{1,j}^* y_1^j + h_{2,j} (y_2^j)^*}{\|\mathbf{H}\|_F} \\ \tilde{y}_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_R} -h_{1,j} (y_2^j)^* + h_{2,j}^* y_1^j}{\|\mathbf{H}\|_F} \end{cases} \quad (2.5)$$

où  $h_{i,j}$  représente le gain complexe entre l'antenne d'émission  $i$  et l'antenne de réception  $j$ ,  $y_t^j$  est le signal utile de l'antenne de réception  $j$  à la période symbole  $t$ . De plus,  $\|\mathbf{H}\|_F$  représente la norme de Frobenius de la matrice  $\mathbf{H}$  définie par :

$$\|\mathbf{H}\|_F^2 = \text{trace}(\mathbf{H} \mathbf{H}^*) = \text{trace}(\mathbf{H}^* \mathbf{H}) = \sum_i^{n_T} \sum_j^{n_R} |h_{i,j}|^2. \quad (2.6)$$

Le signal utile est défini par :

$$\begin{cases} y_1^j &= \sqrt{\frac{P_0}{2}}(h_{1,j}s_1 + h_{2,j}s_2) + n_1^j \\ y_2^j &= \sqrt{\frac{P_0}{2}}(-h_{1,j}s_2^* + h_{2,j}s_1^*) + n_2^j \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $n_t^j$  est le bruit additif de l'antenne de réception  $j$  à la période symbole  $t$ . Les expressions de (2.5) peuvent être développées et donnent le résultat suivant :

$$\begin{cases} \tilde{y}_1 = \sqrt{\frac{P_0}{2}} \frac{\sum_{j=1}^{n_R} ||h_{1,j}||^2 + ||h_{2,j}||^2}{||\mathbf{H}||_F} s_1 + \frac{\sum_{j=1}^{n_R} h_{1,j}^* n_1^j + h_{2,j} (n_2^j)^*}{||\mathbf{H}||_F} \\ \tilde{y}_2 = \sqrt{\frac{P_0}{2}} \frac{\sum_{j=1}^{n_R} ||h_{1,j}||^2 + ||h_{2,j}||^2}{||\mathbf{H}||_F} s_2 + \frac{\sum_{j=1}^{n_R} h_{2,j}^* n_1^j - h_{1,j} (n_2^j)^*}{||\mathbf{H}||_F} \end{cases} \quad (2.8)$$

Les deux signaux recombinaés prennent une forme très simple :

$$\begin{cases} \tilde{y}_1 = \sqrt{\frac{P_0}{2}} ||\mathbf{H}||_F s_1 + \tilde{n}_1 \\ \tilde{y}_2 = \sqrt{\frac{P_0}{2}} ||\mathbf{H}||_F s_2 + \tilde{n}_2 \end{cases} \quad (2.9)$$

où  $\tilde{n}_1$  et  $\tilde{n}_2$  sont des combinaisons du bruit additif et sont des BBAG si  $\mathbf{N}$  est un BBAG : pour un bruit *iid*  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma_n^2)$  alors  $\tilde{n}_1$  et  $\tilde{n}_2$  sont indépendants et de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma_n^2)$ . Chaque signal  $\tilde{y}_i$  ne dépend que d'un symbole  $s_i$  et peut ainsi servir à son estimation. Le code d'Alamouti découple donc les symboles et permet de diminuer les tests de décision. Le système peut être vu de façon équivalente comme deux systèmes SISO en parallèle. De plus, sans connaître le canal a priori, le code assure un même gain  $\sqrt{\frac{P_0}{2}} ||\mathbf{H}||_F$ . Cette particularité permet au code d'être robuste vis à vis du canal et d'assurer également un ordre de diversité maximal égal au produit des antennes à l'émission et à la réception  $n_T \times n_R$  [47], ici  $2 \times n_R$  pour un canal de Rayleigh.

D'autre part, le système peut utiliser une autre écriture matricielle :

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{G} \tilde{\mathbf{H}}_2 \mathbf{s} + \mathbf{G} \tilde{\mathbf{n}} \quad (2.10)$$

avec la nouvelle matrice de canal,

$$\text{si } \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \end{pmatrix} \text{ alors } \tilde{\mathbf{H}}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \\ -\text{conj}(\mathbf{h}_2) & \text{conj}(\mathbf{h}_1) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

où  $\text{conj}$  est l'opération de conjugaison des éléments de la matrice ( $\text{conj}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^*)^T = (\mathbf{x}^T)^*$ ), et le bruit défini par :

$$\text{si } \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2 \end{pmatrix} \text{ alors } \tilde{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \\ -\text{conj}(\mathbf{n}_2) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

La nouvelle matrice de canal ainsi définie a alors la propriété suivante :

$$\tilde{\mathbf{H}}_2^* \tilde{\mathbf{H}}_2 = \|\mathbf{H}\|_F^2 \mathbf{I}_2 \quad (2.13)$$

Il suffit alors de choisir  $\mathbf{G}$  comme le filtre adapté :

$$\mathbf{G} = \frac{\tilde{\mathbf{H}}_2^*}{\|\mathbf{H}\|_F}. \quad (2.14)$$

Le bruit  $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{G}\mathbf{n}$  est un bruit gaussien de variance  $\sigma_n^2$  si le bruit  $\mathbf{N}$  est aussi un bruit additif gaussien de même variance.

En considérant soit une recombinaison linéaire des échantillons reçus, soit une nouvelle matrice de canal associée à un filtrage adapté, le code d'Alamouti permet d'utiliser l'orthogonalité pour diagonaliser le canal. Les deux symboles sont découplés et voient le même canal, c'est-à-dire, le même gain et un bruit de mêmes statistiques.

Cependant, l'utilisation du code induit deux inconvénients majeurs. Le premier est la perte de débit. En effet, un code d'Alamouti a le même débit qu'un système SISO mais deux fois moins qu'un multiplexage spatial [27]. Nous noterons le rendement du code  $\mathcal{R}$  comme le nombre de symboles émis sur le nombre de périodes symboles nécessaires pour la transmission. Nous avons  $\mathcal{R} = 1$  pour le code d'Alamouti et  $\mathcal{R} = n_T$  pour le multiplexage spatial.

De plus, si on veut contrôler la puissance d'émission, le coefficient  $\sqrt{\frac{P_0}{2}}$  est nécessaire. Par conséquent, il apparaît un coefficient pénalisant de 1/2 ou -3dB sur la puissance reçue du schéma équivalent par rapport à un système SISO [46].

### Généralisation des codes

Le code d'Alamouti n'est adapté qu'aux systèmes possédant deux antennes à l'émission et Tarokh et al. [47, 48] ont généralisé les STBC orthogonaux (OSTBC) et ce quel que soit  $n_T$ . Le principe est de considérer un train de  $N_S$  symboles à transmettre que le code transmettra par salves successives sur  $N_p$  périodes symboles. Le rendement du débit se note :

$$\mathcal{R} = \frac{N_S}{N_p}. \quad (2.15)$$

Les salves émises seront les symboles ou leurs conjugués pondérés par 1 ou  $-1$  et les vecteurs émis doivent être orthogonaux. Le code généré est une matrice dont les deux dimensions sont l'espace et le temps,  $[n_T \times N_p]$ . Ensuite, le récepteur associé recombine les échantillons reçus après estimation du canal et obtient des signaux ne dépendant que d'un seul symbole émis. Ainsi, les estimations des symboles sont découplées. La figure 2.1 représente le synopsis des OSTBC. Le principe proposé est simple et est très facile à mettre en

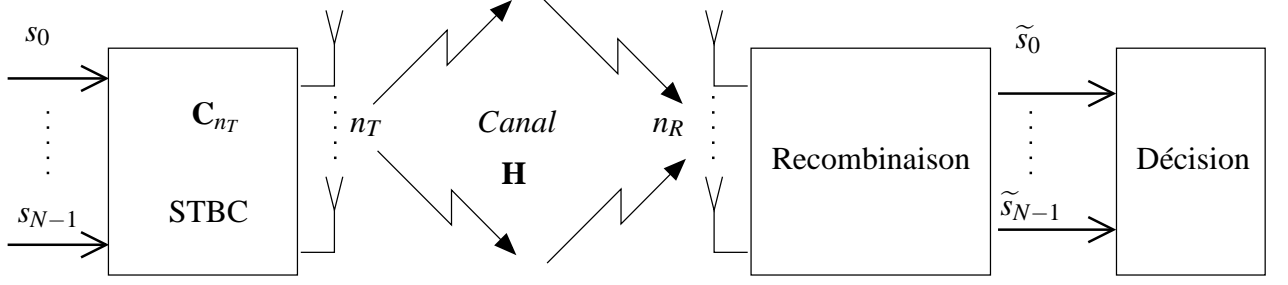


FIG. 2.1 – Schéma de la transmission MIMO utilisant des OSTBC. L'orthogonalité du code permet une estimation indépendante de chaque symboles  $s_i$  avec le signal  $\tilde{s}_i$ .

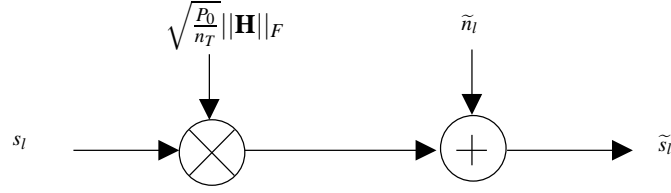


FIG. 2.2 – Schéma équivalent SISO d'un système utilisant des OSTBC avec un même gain pour chaque voie

place : le compromis entre les performances (TEB et débit) et la complexité (CSI à la réception seulement) est intéressant. Il s'agit, dans le meilleur des cas, d'obtenir un code avec un rendement le plus grand possible.

Par exemple,  $\mathcal{R} = 1$  pour le code d'Alamouti. Les solutions sont limitées et sont les suivantes :

- la solution proposée par Alamouti (2.1) qui est la seule à obtenir  $\mathcal{R} = 1$ .
- OSTBC pour des modulations complexes et pour n'importe quelle valeur de  $n_T$  mais avec  $\mathcal{R} = \frac{1}{2}$  [48],
- solutions pour  $n_T = \{3, 4\}$  mais avec  $\mathcal{R} = 3/4$ ,

$$\mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} s_1 & -s_2^* & \frac{s_3^*}{\sqrt{2}} & \frac{s_3^*}{\sqrt{2}} \\ s_2 & s_1^* & \frac{s_3^*}{\sqrt{2}} & -\frac{s_3^*}{\sqrt{2}} \\ \frac{s_3}{\sqrt{2}} & \frac{s_3}{\sqrt{2}} & \frac{-s_1 - s_1^* + s_2 - s_2^*}{2} & \frac{s_1 - s_1^* + s_2 + s_2^*}{2} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} s_1 & -s_2^* & \frac{s_3^*}{\sqrt{2}} & \frac{s_3^*}{\sqrt{2}} \\ s_2 & s_1^* & \frac{s_3^*}{\sqrt{2}} & -\frac{s_3^*}{\sqrt{2}} \\ \frac{s_3}{\sqrt{2}} & \frac{s_3}{\sqrt{2}} & \frac{-s_1 - s_1^* + s_2 - s_2^*}{2} & \frac{s_1 - s_1^* + s_2 + s_2^*}{2} \\ \frac{s_3}{\sqrt{2}} & -\frac{s_3}{\sqrt{2}} & \frac{s_1 - s_1^* - s_2 - s_2^*}{2} & \frac{-s_1 - s_1^* - s_2 + s_2^*}{2} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

L'orthogonalité requise associée à une recombinaison adéquate permet d'obtenir des signaux  $\tilde{s}_i$  ne dépendant que du symbole  $s_i$ . Ce résultat peut être vu, à l'instar du code d'Alamouti, comme une diagonalisation du canal. De plus, le coefficient  $\sqrt{\frac{P_0}{n_T}}$  permet de contrôler la puissance émise. Un système utilisant des OSTBC est équivalent à  $N_S$  transmissions SISO indépendantes représentées par la figure 2.2. La force du code est d'obtenir un gain constant proportionnel à  $\|\mathbf{H}\|_F$  sans connaissance a priori et d'assurer un ordre de

diversité maximal  $n_T \times n_R$ . Le prix à payer est une baisse du débit avec un rendement  $\mathcal{R} \leq 1$  correspondant à une efficacité spectrale de  $\mathcal{R} \log_2 M$ .

### 2.1.2 Les codes en treillis

Les codes spatio-temporels en Treillis ou Space-Time Trellis Code (STTC) ont été introduits par Tarokh et al. [47] et sont l'extension des codes en treillis classiques [49] aux systèmes MIMO. En effet, ils combinent le codage de canal avec la modulation sur les antennes émettrices. Un code STTC bien construit permet d'obtenir l'ordre de diversité maximal comme les OSTBC mais permet également d'améliorer le gain de codage. Le principe des STTC est de créer des relations entre les signaux à la fois dans l'espace (utilisation des  $n_T$  antennes) et dans le temps (paquets de symboles).

Tout comme le cas des OSTBC, le récepteur estime la matrice de canal  $\mathbf{H}$  puis applique une extension de l'algorithme de Viterbi [50] permettant de prendre en compte la dépendance temporelle des éléments du code. La structure orthogonale a laissé la place à une structure en treillis et ce changement ne permet plus de simplifier la transmission : la complexité de décodage augmente alors très rapidement.

Les codes spatio-temporels proposés sont proches des codes correcteurs d'erreur et c'est pourquoi Stevanov et Dumen ont comparé les codes en treillis avec des turbo codes convolutifs [51][52, chap.5]. Les gains étaient importants (de l'ordre de 6 dB). Cependant, nous verrons dans la suite de l'étude que les turbo-codes peuvent être ajoutés à la fin de la chaîne dans le cas des précodeurs linéaires. La thèse [53] porte sur la comparaison de récepteurs itératifs, etc..

### 2.1.3 Les codes quasi-orthogonaux

L'orthogonalité des codes en blocs n'est pas triviale à obtenir et c'est pourquoi certains travaux ont porté sur un assouplissement de la propriété en quasi-orthogonalité. La matrice  $\mathbf{C}\mathbf{C}^*$  n'est plus diagonale et il s'agit alors de minimiser les termes non-diagonaux. Le rendement de ces codes est unitaire.

#### Codes orthogonaux avec variation du canal

Le premier exemple est tout simplement le code d'Alamouti dans un canal qui n'est pas constant sur les deux périodes symbole. En effet, les termes qui doivent s'annuler lors de la recombinaison ne correspondent plus au même gain du canal : le découplage n'est plus effectif se traduisant par de l'IES. Il est nécessaire d'appliquer une matrice d'égalisation  $\mathbf{G}$  selon un critère (ZF ou EQMM) ou un récepteur MV. Il s'agit, en effet, de pallier la détérioration de l'orthogonalité qui ne peut être rétablie par un simple filtre adapté. Cette évolution rapide du canal sur deux périodes symboles dégrade les performances du code.

### Code de Jafarkhani

Ce code et les suivants sont adaptés à des systèmes utilisant quatre antennes émettrices. Le code proposé dans [54] suppose que le canal est constant sur quatre périodes symbole. Il permet de transmettre quatre symboles et d'assurer un rendement  $\mathcal{R}$  unitaire. Il utilise le code d'Alamouti  $\mathbf{C}_2$  comme brique de base :

$$\mathbf{C}_{\text{Jafarkhani}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_2^1 & -\text{conj}(\mathbf{C}_2^2) \\ \mathbf{C}_2^2 & \text{conj}(\mathbf{C}_2^1) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

avec  $\mathbf{C}_2^1$  et  $\mathbf{C}_2^2$  le codes d'Alamouti utilisant les symboles  $s_1$  et  $s_2$  ou  $s_3$  et  $s_4$  respectivement. La matrice de codage est alors :

$$\mathbf{C}_{\text{Jafarkhani}} = \begin{pmatrix} s_1 & -s_2^* & -s_3^* & s_4 \\ s_2 & s_1^* & -s_4^* & -s_3 \\ s_3 & -s_4^* & s_1^* & -s_2 \\ s_4 & s_3^* & s_2^* & s_1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

La réception effectue le filtrage adapté et le canal équivalent du code n'est plus orthogonal :

$$\mathbf{H}_{eq}^* \mathbf{H}_{eq} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

où  $a = \|\mathbf{H}\|_F^2$  et  $b$  est une constante réelle dépendante des éléments de  $\mathbf{H}$ . La matrice  $\mathbf{H}_{eq}$  permet de faire apparaître le vecteur des symboles émis :

$$\mathbf{y} = \sqrt{\frac{P_0}{n_T}} \mathbf{H}_{eq}^* \mathbf{H}_{eq} \mathbf{s} + \tilde{\mathbf{n}} \quad (2.21)$$

où  $\tilde{\mathbf{n}}$  est un bruit équivalent.

### Code de Tirkkonen

Le code proposé par Tirkkonen [55] a un principe semblable au code de Jafarkhani dans le sens où il utilise également le code d'Alamouti comme base :

$$\mathbf{C}_{\text{Tirkkonen}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_2^1 & \mathbf{C}_2^2 \\ \mathbf{C}_2^2 & \mathbf{C}_2^1 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

avec les  $\mathbf{C}_2^1$  et  $\mathbf{C}_2^2$  définis précédemment. Le code en fonction des symboles à transmettre est :

$$\mathbf{C}_{\text{Tirkkonen}} = \begin{pmatrix} s_1 & -s_2^* & s_3 & -s_4^* \\ s_2 & s_1^* & s_4 & s_3^* \\ s_3 & -s_4^* & s_1 & -s_2^* \\ s_4 & s_3^* & s_2 & s_1^* \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

La matrice équivalente de canal a alors la propriété suivante :

$$\mathbf{H}_{eq}^* \mathbf{H}_{eq} = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

où  $a = \|\mathbf{H}\|_F^2$  et  $b$  est une constante réelle dépendante des éléments de  $\mathbf{H}$ .

Il existe d'autres codes quasi-orthogonaux comme les codes de Damen [56] basés sur des matrices de Hadamard. Pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter à la thèse [57].

## 2.2 Les précodeurs linéaires

Cette seconde famille regroupe les précodeurs linéaires dont la différence avec les codes présentés jusqu'à présent est la nécessité de la connaissance du canal à l'émission.

### 2.2.1 Principe

À l'émission, un précodeur linéaire sous forme de matrice permet de combiner les symboles à émettre et de répartir la puissance sur les antennes selon une stratégie bien précise. À la réception, un décodeur linéaire traite les échantillons reçus. En général, le couple précodeur-décodeur optimise un critère pertinent comme maximiser la capacité, maximiser le RSB post-traitement ou maximiser la distance euclidienne minimale. Chaque optimisation donne un résultat qui lui est propre mais ces techniques possèdent toutes un point commun qui est de diagonaliser le canal [58]. Rappelons l'équation matricielle du modèle :

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{s} + \mathbf{G}\mathbf{n} \quad (2.25)$$

avec  $\mathbf{s}[b \times 1]$  le vecteur de symboles à émettre,  $\mathbf{F}[n_T \times b]$  la matrice de précodage, et  $\mathbf{G}[b \times n_R]$  la matrice de décodage. La première étape du raisonnement consiste à décomposer les matrices de précodage et décodage sous la forme :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_v \mathbf{F}_d \quad \text{et} \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}_d \mathbf{G}_v. \quad (2.26)$$

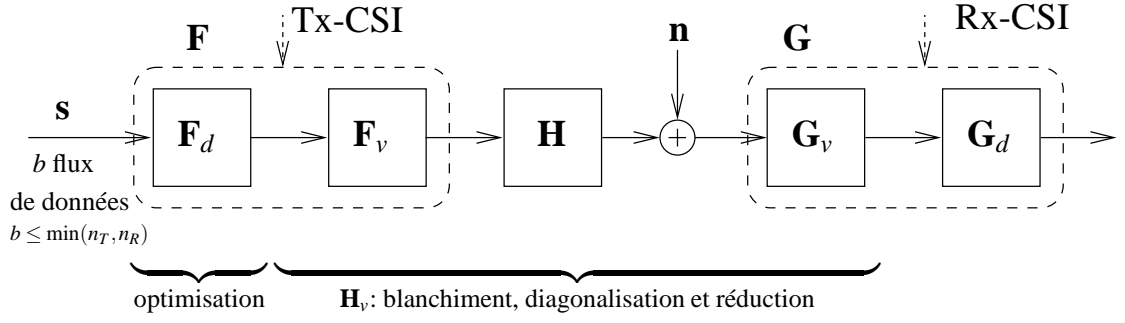


FIG. 2.3 – Schéma bloc des précodeurs linéaires dans le canal virtuel

Rappelons que les matrices  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}$  sont les solutions de l'optimisation selon un critère. Le problème se découpe maintenant en deux : le couple  $(\mathbf{F}_v, \mathbf{G}_v)$  permet d'obtenir un canal virtuel diagonal  $\mathbf{H}_v$  pendant que le couple  $(\mathbf{F}_d, \mathbf{G}_d)$  optimise le critère voulu mais en considérant un canal diagonal de dimension contrôlée correspondant à  $b$  voies avec un bruit blanc. Nous verrons dans la suite, que l'optimisation est alors simplifiée. Cette approche est illustrée par le synoptique de la figure 2.3.

### 2.2.2 Transformation en canal virtuel

L'obtention du canal virtuel (ou diagonalisation du canal par abus de langage) se décompose en trois étapes : traitement du bruit afin de le rendre *iid* (blanchiment) et de variance unitaire, diagonalisation proprement dite de la matrice  $\mathbf{H}$ , réduction de dimension à  $b$  correspondant au nombre de flux de symboles. Ces opérations se traduisent par une nouvelle décomposition de la matrice  $\mathbf{F}_v$  en produit de trois matrices :

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_3 \quad \text{et} \quad \mathbf{G}_v = \mathbf{G}_3 \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1 \quad (2.27)$$

où chaque couple  $(\mathbf{F}_i, \mathbf{G}_i)$  réalise une opération particulière. Ces méthodes vont maintenant être présentées plus dans le détail.

#### Blanchiment du bruit

Considérons la décomposition en valeurs propres (DVP) de la matrice de corrélation du bruit :

$$\mathbf{R}_n = E[\mathbf{nn}^*] = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^* \quad (2.28)$$

où  $\mathbf{Q}$  est une matrice unitaire et  $\mathbf{\Lambda}$  est une matrice diagonale. Le but est d'obtenir une matrice de corrélation  $\mathbf{R}_{v1} = E[\mathbf{G}_1 \mathbf{nn}^* \mathbf{G}_1^*] = \mathbf{G}_1 \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^* \mathbf{G}_1^*$  égale à la matrice identité. Ce résultat est obtenu par la solution suivante :

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{I}_{n_T} \quad \text{et} \quad \mathbf{G}_1 = \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^*. \quad (2.29)$$



De même, le canal intermédiaire résultant de cette opération est :

$$\mathbf{H}_{v1} = \mathbf{G}_1 \mathbf{H} \mathbf{F}_1. \quad (2.30)$$

### Diagonalisation du canal

La décomposition en valeurs singulières (DVS) de la matrice intermédiaire  $\mathbf{H}_{v1}$  est un outil intéressant pour diagonaliser les matrices. Elle donne :

$$\mathbf{H}_{v1} = \mathbf{A} \mathbf{\Sigma} \mathbf{B}^* \quad (2.31)$$

où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont des matrices unitaires, et  $\mathbf{\Sigma}$  est une matrice diagonale dont les éléments sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{H}_{v1} \mathbf{H}_{v1}^*$ . Cette dernière est une matrice hermitienne donnant des valeurs propres réelles et positives. Le nombre de valeurs propres non-nulles  $k$  dépend du rang de la matrice  $\mathbf{H}_{v1}$  avec :

$$k = \text{rank}(\mathbf{H}_{v1}) \leq \min(n_T, n_R). \quad (2.32)$$

La matrice diagonale  $\mathbf{\Sigma}$  peut alors s'écrire en fonction des valeurs propres non nulles :

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

avec  $\mathbf{\Sigma}_k$  une matrice diagonale regroupant les valeurs propres non nulles.

Le but de cette seconde opération est de diagonaliser la matrice de canal intermédiaire  $\mathbf{H}_{v1}$  et la solution proposée est :

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{B} \quad \text{et} \quad \mathbf{G}_2 = \mathbf{A}^*. \quad (2.34)$$

La seconde matrice de canal intermédiaire est alors diagonale et est définie par :

$$\mathbf{H}_{v2} = \mathbf{G}_2 \mathbf{H}_{v1} \mathbf{F}_2 = \mathbf{\Sigma} \quad (2.35)$$

De plus, la matrice de corrélation du bruit reste égale à la matrice identité car les matrices  $\mathbf{F}_2$  et  $\mathbf{G}_2$  sont unitaires :

$$\mathbf{R}_{v2} = \mathbf{G}_2 \mathbf{R}_{v1} \mathbf{G}_2^* = \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_2^* = \mathbf{I}_{n_R}. \quad (2.36)$$

### Réduction de dimension

La forme diagonale de  $\mathbf{H}_{v2}$  correspond à plusieurs canaux indépendants avec des gains ou de façon équivalente des RSB différents et rangés par ordre décroissant. Le nombre de sous canaux disponibles correspond au nombre de valeurs propres non nulles  $k$ . Le but de cette dernière étape est d'obtenir la dimension

1	Blanchiment du bruit	DVP $\mathbf{R}_n = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^*$	$\mathbf{F}_1 = \mathbf{I}_{n_T}$	$\mathbf{G}_1 = \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^*$	$\mathbf{H}_{v1} = \mathbf{G}_1\mathbf{H}\mathbf{F}_1$	$\mathbf{R}_{v1} = \mathbf{G}_1\mathbf{R}_n\mathbf{G}_1^* = \mathbf{I}_{n_R}$
2	Diagonalisation du canal	DVS $\mathbf{H}_{v1} = \mathbf{A}\mathbf{\Sigma}\mathbf{B}^*$	$\mathbf{F}_2 = \mathbf{B}$	$\mathbf{G}_2 = \mathbf{A}^*$	$\mathbf{H}_{v1} = \mathbf{G}_1\mathbf{H}\mathbf{F}_1$	$\mathbf{R}_{v2} = \mathbf{G}_2\mathbf{R}_{v1}\mathbf{G}_2^*$
3	Réduction de dimensions		$\mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_b \\ 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{G}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_b & 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{H}_v = \mathbf{\Sigma}_b$	$\mathbf{R}_{n_v} = \mathbf{I}_b$

TAB. 2.1 – Résumé des étapes permettant d'obtenir le canal virtuel

correspondant au nombre de voies  $b$  désirées. Les matrices correspondant à cette opération sont :

$$\mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{G}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_b & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Cette écriture est vraie si  $b \leq k$ . Pour la suite nous considérerons que la matrice canal est de rang plein et que  $b \leq k = \min(n_T, n_R)$ . La matrice résultante est notée  $\mathbf{H}_v$  et est définie par :

$$\mathbf{H}_v = \mathbf{G}_3\mathbf{H}_{v2}\mathbf{F}_3 = \mathbf{\Sigma}_b \quad (2.38)$$

où  $\mathbf{\Sigma}_b$  représente les  $b$  plus grandes valeurs singulières de  $\mathbf{R}_{v1}$ . La matrice de corrélation du bruit est toujours l'identité mais de dimension différente :

$$\mathbf{R}_{n_v} = \mathbf{I}_b. \quad (2.39)$$

### 2.2.3 Notion de canal virtuel

Nous avons présenté une transformation basée sur trois opérations mathématiques simples permettant d'obtenir des canaux indépendants (tableau 2.1). Dans la suite du mémoire, nous noterons cette matrice résultante  $\mathbf{H}_v$  comme la matrice de canal virtuel ou encore :

$$\mathbf{H}_v = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_b) \quad (2.40)$$

où les  $\sigma_i$  représentent les gains de chaque sous-canal. Le bruit additif résultant de la transformation est blanc et de variance unitaire. Le RSB équivalent de la voie  $i$  est donc  $\sigma_i^2$ . Il est à noter, cependant, que s'il n'apparaît que  $b$  voies, les  $n_T$  antennes émettent toutes du signal.

## 2.3 Les précodeurs diagonaux

### 2.3.1 Présentation

Les précodeurs diagonaux sont des précodeurs linéaires utilisant la connaissance du canal à l'émission pouvant appliquer la transformation en canal virtuel présentée précédemment. En effet, les optimisations comme dans [59] sont basées sur le canal réel  $\mathbf{H}$  et donnent une solution globale équivalente reprenant les transformations. C'est pour cela que les précodeurs sont présentés ici avec un raisonnement sur le canal virtuel.

Les précodeurs diagonaux sont appelés ainsi car leur principe est de donner une solution du couple  $\mathbf{F}_d$  et  $\mathbf{G}_d$  diagonales. La conséquence de ces matrices diagonales est de conserver une structure de voies parallèles et indépendantes. Dans le cas d'un récepteur basé sur le maximum de vraisemblance (MV), le décodeur  $\mathbf{G}_d$  n'influe pas sur la décision et la décision est prise par voie de données simplifiant les tests (figure 2.4). Seul le précodeur  $\mathbf{F}_d = \text{diag}(f_1, \dots, f_b)$  est donné dans les solutions proposées. Le principe général est présenté par la figure 2.4. Le problème revient à trouver la répartition de la puissance grâce aux coefficients  $f_i^2$  en optimisant un critère précis et pertinent. Nous présenterons les précodeurs optimisant le rapport signal sur bruit en réception (max-SNR), la capacité globale du canal résultant de l'ajout de la matrice de précodage (WF), l'erreur quadratique moyenne (EQMM), la qualité de service (QdS), l'erreur égale (EE) ou la probabilité d'erreur binaire (PEBM). De plus la puissance totale doit être contrôlée et égale à  $P_0$ .

### 2.3.2 Les solutions existantes

#### Précodeur max-SNR ou beamforming

Le but de ce précodeur est de maximiser le RSB à la réception. La solution optimale consiste à n'utiliser que la voie la plus favorable correspondant au RSB  $\sigma_1^2$  [60, 61, 62]. Ce précodeur concentre toute la puissance émise dans la direction la plus favorable représentée par les vecteurs singuliers de  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{w}_T$  et  $\mathbf{w}_R$ , associé à la plus forte valeur singulière  $\sqrt{\lambda_1}$  [63]. L'expression du signal reçu est alors :

$$y = \sqrt{P_0} \mathbf{w}_R^* \mathbf{H} \mathbf{w}_T s + \mathbf{w}_R^* \mathbf{n} \quad (2.41)$$

Ce précodeur est un cas particulier puisqu'il diagonalise le canal en un seul sous-canal mais sans blanchir le bruit. Il est présenté dans le canal virtuel avec un bruit blanchi mais n'est pas la définition rigoureuse du précodeur max-SNR. La solution est exacte si le bruit  $\mathbf{n}$  est iid ( $E[\mathbf{n}\mathbf{n}^*] = \sigma_n^2 \mathbf{I}_{n_T}$ ). Ainsi, en tenant compte de cette remarque, la solution du max-SNR est dans le cas BBAG :

$$b = 1 \quad \text{et} \quad f_1^2 = 1. \quad (2.42)$$

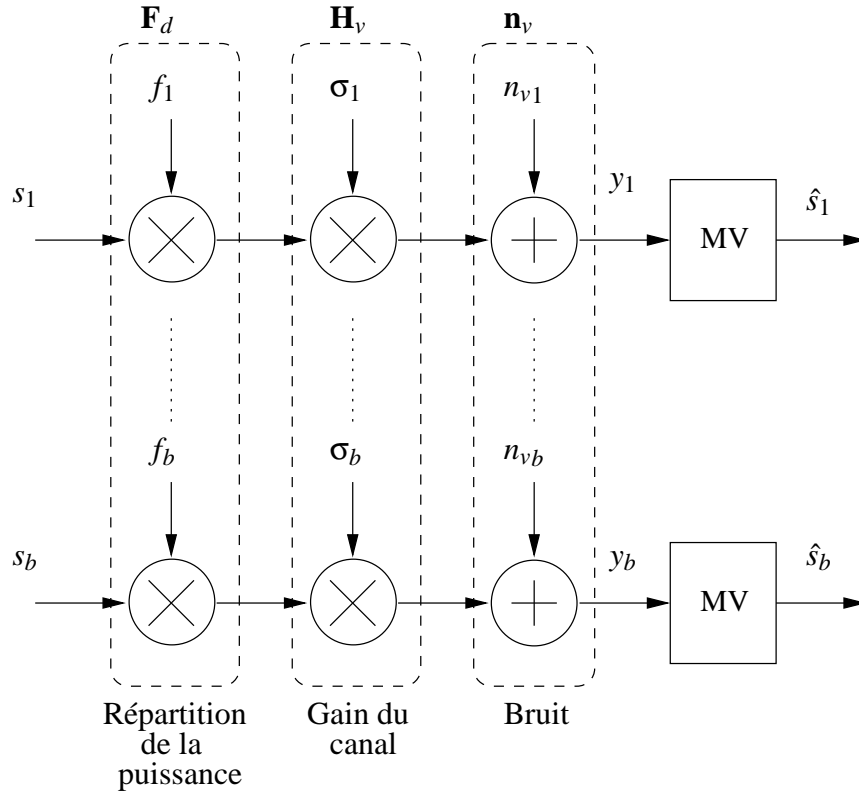


FIG. 2.4 – Schéma équivalent des précodeurs diagonaux : découplage des décisions pour le maximum de vraisemblance

Le signal reçu peut être réécrit dans le domaine virtuel :

$$y = \sqrt{P_0 \lambda_1} s + n \quad (2.43)$$

où  $n = \mathbf{w}_R^* \mathbf{n}$  est un bruit ayant les mêmes caractéristiques que  $\mathbf{n}$  ( $E[\mathbf{n}\mathbf{n}^*] = \sigma_n^2$ ) car  $\mathbf{w}_R$  est un vecteur unitaire. Il est à noter que ce précodeur est scalaire dans le sens où il ne transmet qu'un seul symbole  $s$ . La structure du précodeur est relativement simple mais présente un débit limité à la modulation choisie. Son ordre de diversité est maximal [64] et égal à  $n_T \times n_R$  dans un canal de Rayleigh.

### Précodeur Water-Filing (WF)

Le critère optimisé par ce précodeur est la maximisation de la capacité du système MIMO. En utilisant (1.16) et la diagonalisation du canal, la capacité s'écrit plus simplement :

$$C = \sum_{i=1}^b \log_2 (1 + f_i^2 \sigma_i^2) \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^b f_i^2 = P_0. \quad (2.44)$$

La solution optimisant le critère (2.44) est donnée par :

$$f_i^2 = \begin{cases} \Psi - \frac{1}{\sigma_i^2} & \text{si } \Psi > \frac{1}{\sigma_i^2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } i = 1, \dots, b \quad (2.45)$$

où le seuil  $\Psi$  dépend du canal virtuel et est défini par :

$$\Psi = \frac{P_0 + \gamma_\Psi}{b_\Psi} \quad \text{avec} \quad \gamma_\Psi = \sum_{i=1}^{b_\Psi} \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (2.46)$$

où  $b_\Psi$  est le nombre de voies utilisées par le précodeur.

Ce précodeur dispose de  $b$  voies virtuelles avec des RSB différents obtenus par la transformation en canal virtuel. La particularité de ce précodeur est de comparer les RSB, et notamment les plus faibles, afin d'estimer si cette voie permet d'améliorer le critère ou de le dégrader. Ainsi, il peut sacrifier les voies qu'il considère trop mauvaises et n'utiliser que les  $b_\Psi$  meilleures. A ce moment, il existe deux points de vue. Le premier consiste à garder les symboles dans l'état et à considérer définitivement perdus les symboles sacrifiés. Le second compense le sacrifice en changeant la modulation des symboles émis afin de maintenir le débit. Sauf précision, le second raisonnement est considéré dans la suite de ce mémoire et est appliqué à tous les précodeurs présentant cette singularité. Cette structure particulière est plus compliquée à mettre en œuvre que le max-SNR. En effet, il est nécessaire de déterminer le nombre de voies  $b_\Psi$  utilisées et plusieurs tests doivent être réalisés. L'algorithme est illustré par la figure 2.5.

### Erreur Quadratique Moyenne Minimale (EQMM)

Ce précodeur minimise l'erreur quadratique moyenne [59] et l'équation de l'optimisation est définie par :

$$\min_{\mathbf{F}_d, \mathbf{G}_d} E[||\mathbf{y} - \hat{\mathbf{s}}||^2] \quad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{s}} \in \mathcal{C}^b \quad (2.47)$$

où  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des symboles définis par la modulation. En utilisant le schéma virtuel et plus précisément la structure diagonale du schéma global, l'optimisation peut être mise sous la forme suivante :

$$\min_{\mathbf{F}_d, \mathbf{G}_d} \sum_{i=1}^b E[|g_i \sigma_i f_i s_i + g_i n_{vi} - \hat{s}_i|^2] \quad \text{sous la contrainte} \quad \sum_{i=1}^b f_i^2 = P_0. \quad (2.48)$$

L'optimisation donne un résultat de la même forme que (2.45) pour le WF :

$$f_i^2 = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i^2} \left( \Psi_{\text{EQMM}} - \frac{1}{\sigma_i^2} \right) & \text{si } \Psi_{\text{EQMM}} > \frac{1}{\sigma_i^2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } i = 1, \dots, b \quad (2.49)$$

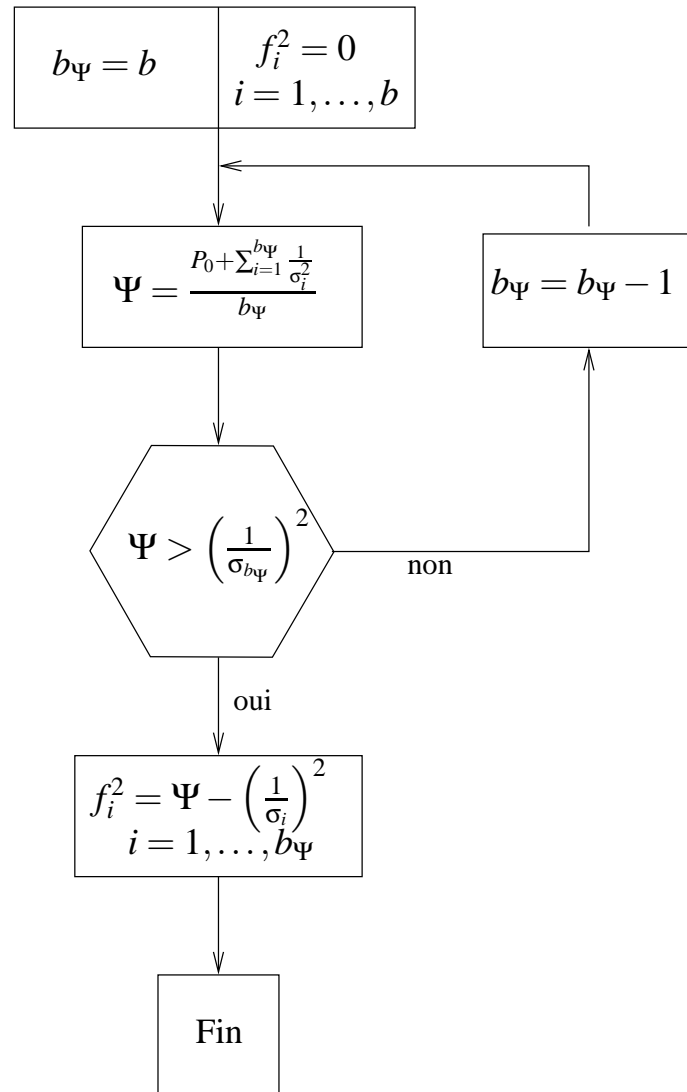


FIG. 2.5 – Algorithme d'implantation du précodeur Water-Filling

où  $b_{\Psi_{\text{EQMM}}}$  est le nombre de voies utilisés respectant  $\Psi_{\text{EQMM}} > 1/\sigma_i$  pour  $i = 1, \dots, b$  avec comme définitions :

$$\Psi_{\text{EQMM}} = \frac{P_0 + \gamma_{\Psi_{\text{EQMM}}}}{\sum_{i=1}^{b_{\Psi_{\text{EQMM}}}} \frac{1}{\sigma_i}} \quad \text{et} \quad \gamma_{\Psi_{\text{EQMM}}} \text{ a la même définition que dans (2.46).} \quad (2.50)$$

Le précodeur peut supprimer des voies comme le Water-Filling mais le critère de suppression n'est pas le même. Ainsi, le nombre de voies utilisées par les deux précodeurs n'est pas nécessairement le même. Les prochains précodeurs utiliseront, quand à eux, un nombre constant de voies quel que soit le canal.

### Qualité de Service (QdS)

Le principe de ce précodeur est d'assurer (ou de fixer) les rapports des RSB reçus entre chaque voie [58]. Par exemple, un flux de données représente de la vidéo pendant que le second transmet de la musique : la vidéo demande un débit plus important et le taux d'erreur ne doit pas descendre en dessous d'un seuil. Par conséquence, le premier sous-canal nécessite 3 dB de mieux que le deuxième (valeur arbitraire). Pour la présentation de ce précodeur dans le mémoire, le RSB de référence sera celui de la voie  $b$ . Ainsi, les RSB de chaque voie sont notés :

$$f_i^2 \sigma_i^2 = \omega_i f_b^2 \sigma_b^2 \quad \text{avec} \quad i = 1, \dots, b \quad (2.51)$$

où  $\omega_i$  représente le rapport du RSB de la voie  $i$  par rapport à la voie  $b$ .

Les gains des sous-canaux sont ordonnés et il est plus intéressant que la voie 1 corresponde au RSB le plus important. Dans le cas contraire, le précodeur dégraderait cette voie présentant un gain important au profit d'une autre avec un gain inférieur. Par conséquent, les  $\omega_i$  sont ordonnés et  $\omega_b$  est toujours égal à 1 :

$$\omega_1 \geq \omega_2 \geq \dots \geq 1. \quad (2.52)$$

Les coefficients du précodeurs sont alors donnés par :

$$f_i^2 = \frac{P_0 \omega_i}{\sigma_i^2 \sum_{k=1}^b \frac{\omega_k}{\sigma_k^2}}. \quad (2.53)$$

Il est alors aisé de vérifier que les RSB à la réception ont les rapports désirés :

$$f_i^2 \sigma_i^2 = \omega_i \frac{P_0}{\sum_{k=1}^b \frac{\omega_k}{\sigma_k^2}} = \omega_i \times cste. \quad (2.54)$$

Le précodeur QdS utilise toujours le même nombre de voie tout en assurant les rapports des RSB. Ceux-ci restent à déterminer et nous verrons un exemple de critère de choix des  $\omega_i$  dans le chapitre 5.

### Précodeur Erreur Egale (EE)

Ce précodeur est un cas particulier du précédent QdS quand les rapports de RSB sont tous égaux et que les modulations utilisées sur toutes les voies sont identiques. Il est également la solution qui maximise une borne inférieure de la distance minimale [59, eq.(33)]. Le précodeur est alors défini par :

$$f_i^2 = \frac{P_0}{\sigma_i^2 \sum_{k=1}^b \frac{1}{\sigma_k^2}}. \quad (2.55)$$

Il en résulte bien que le RSB à la réception est le même sur toutes les voies :

$$f_i^2 \sigma_i^2 = \frac{P_0}{\sum_{k=1}^b \frac{1}{\sigma_k^2}} = cste \quad \forall i = 1, \dots, b. \quad (2.56)$$

Le taux d'erreur moyen de chaque voie est identique et, tout comme le QdS, le nombre de voies utilisées est constant.

### Précodeur Taux d'Erreur Binaire Minimal (TEBM)

Ce précodeur se propose de minimiser le critère final du TEB [65] sous réserve de quelques hypothèses :

- le bruit  $\mathbf{n}$  est additif blanc gaussien *iid* et par conséquent le bruit virtuel  $\mathbf{n}_v$  est également gaussien,
- le précodeur est diagonal.

La probabilité d'erreur de la voie  $i$  connaissant le canal  $\mathbf{H}$  peut être établie théoriquement pour un bruit BAG par [15] :

$$P_{ei} = \alpha_M \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\beta_M f_i^2 \sigma_i^2} \right) \quad (2.57)$$

avec  $\alpha_M$  et  $\beta_M$  des constantes dépendantes de la modulation. Pour des modulations MAQ- $M$ , les valeurs sont :

$$\alpha_M = \frac{2}{\log_2 M} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \quad \text{et} \quad \beta_M = \frac{3}{2(M-1)}. \quad (2.58)$$

Le critère à minimiser est la probabilité totale du système définie comme la moyenne des PEB de chaque voie :

$$P_e = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b P_{ei}. \quad (2.59)$$

Rappelons que le précodeur doit respecter la contrainte de puissance. Pour mener à bien l'optimisation, le terme  $\mathcal{L}_{TEB}$  est défini et prend en compte la contrainte de puissance :

$$\mathcal{L}_{TEB} = \frac{\alpha_M}{b} \sum_{i=1}^b \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\beta_M f_i^2 \sigma_i^2} \right) + \mu \left( \left( \sum_{i=1}^b f_i^2 \right) - P_0 \right) \quad (2.60)$$



L'optimisation revient à annuler la dérivée partielle  $\frac{\partial \mathcal{L}_{TEB}}{\partial f_i}$ . La solution est alors :

$$f_i^2 = \frac{1}{2\beta_M \sigma_i^2} W_0 \left( \frac{2\sigma_i^4 \alpha_M^2 \beta_M^2}{\mu^2 \pi b^2} \right) \quad (2.61)$$

où  $W_0$  est la fonction de Lambert d'index 0 [66]. Cette fonction  $W_0(y)$  est la fonction réciproque de la fonction  $y = xe^x$ . Il reste cependant le paramètre  $\mu$  à déterminer. Ce paramètre a pour but de respecter la contrainte de puissance  $\sum_{i=1}^b f_i^2 = P_0$  et, connaissant à présent la forme des  $f_i^2$ , il est possible de déterminer sa valeur avec une méthode d'optimisation.

D'autre part, une approximation de la fonction de Lambert est disponible [67] :

$$W_0(x) \simeq \ln(x) - \ln(\ln(x)) \quad \text{pour} \quad x \gg 1. \quad (2.62)$$

Le précodeur utilisant cette approximation est noté TEB Minimal Approché (TEBMA) et est défini par :

$$f_i^2 = \frac{a_i (1 - \sum_k A_k) + A_i \sum_k a_k}{\sum_k a_k} \quad (2.63)$$

où

$$a_i = \frac{1}{\beta_M \sigma_i^2} \quad (2.64)$$

$$A_i = a_i (\ln(b_i) - \ln(\ln(b_i))) \quad \text{avec} \quad b_i = \frac{2\sigma_i^4 \alpha_M^2 \beta_M^2}{\pi b^2}. \quad (2.65)$$

La solution proposée n'est plus valable pour les faibles RSB. En effet,  $\ln(b_i)$  peut être négatif et le terme  $A_i$  n'est pas défini. Dans ce cas, les sous-canaux concernés sont considérés trop défavorables et sont négligés ( $f_i^2 = 0$ ). La solution TEBMA se comporte comme les précodeurs WF et EQMM. Elle présente, néanmoins, l'avantage d'être plus rapide que la solution exacte car le terme  $\mu$  n'apparaît plus et l'étape de la détermination de sa valeur (méthode d'optimisation) n'est plus nécessaire.

## 2.4 Le précodeur max- $d_{\min}$

### 2.4.1 Présentation

Ce précodeur se différencie des précédents par sa structure qui n'est plus diagonale. Les autres précodeurs sont basés sur la répartition de puissance : les coefficients  $f_i^2$  sont définis et correspondent à la puissance émise sur les antennes. Le précodeur max- $d_{\min}$  n'est plus diagonal et c'est le signal complexe qui est important et non plus le module. La non diagonalité donne un degré de liberté de plus au précodeur qui peut désormais modifier les géométries des constellations de réception.

La distance euclidienne minimale a un rôle déterminant lorsque le récepteur est basé sur le MV [68] agissant directement sur la probabilité d'erreur : plus deux impacts de la constellation de réception sont

proches, plus la probabilité de se tromper entre eux est grande. Le principe de ce précodeur est de maximiser la distance minimale de la constellation de réception [69, 70]. Cette valeur est notée  $d_{\min}$  et est définie par :

$$d_{\min} = \min_{\mathbf{s}, \mathbf{x} \in C^b, \mathbf{x} \neq \mathbf{s}} \|\mathbf{H}_v \mathbf{F}_d (\mathbf{s} - \mathbf{x})\|. \quad (2.66)$$

L'optimisation du précodeur est alors définie par :

$$\mathbf{F}_d = \arg \max_{\mathbf{F}'_d} \min_{\mathbf{s}_k, \mathbf{s}_l \in C^b, \mathbf{s}_k \neq \mathbf{s}_l} \|\mathbf{H}_v \mathbf{F}'_d (\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_l)\|^2 \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{F}_d\|_F^2 = P_0. \quad (2.67)$$

L'optimisation prend en compte  $d_{\min}$  dont l'expression est rigoureuse contrairement à d'autres études où des approximations permettent des simplifications [59].

## 2.4.2 Changement de variables

L'optimisation d'un tel précodeur est difficile. En effet, l'expression de la distance est exacte et elle dépend de plusieurs paramètres : la modulation utilisée, le nombre de voies  $b$  et le canal  $\mathbf{H}$  ou de façon équivalent  $\mathbf{H}_v$ . Cette résolution difficile de (2.67) explique le nombre limité de solutions trouvées. Pour l'instant, le nombre de voies est limité à 2 et aux modulations BPSK et MAQ-4. La solution proposée dans [69] est obtenue à l'aide d'un changement de variables des deux valeurs propres du canal. Le principe est analogue à un changement de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires. Les deux nouvelles variables sont définies par :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \rho \cos \gamma \\ \sigma_2 = \rho \sin \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \\ \gamma = \arctan \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \end{cases}. \quad (2.68)$$

Le canal virtuel peut alors s'écrire :

$$\mathbf{H}_v = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 \\ 0 & \sin \gamma \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

où  $\rho \in \mathbb{R}^+$  et  $\gamma \in [0, \frac{\pi}{4}]$ . Le terme  $\rho$  agit comme un gain sur toute la chaîne ou encore  $\rho^2$  représente le RSB du canal virtuel car le bruit est *iid* de variance unitaire. L'angle  $\gamma$  est une image du rapport des RSB des sous-canaux et permet de savoir si les sous-canaux sont équilibrés ou non. En effet, une valeur proche de 0 indique que la voie 1 est fortement privilégiée (la matrice est mal conditionnée) tandis qu'une valeur proche de  $\pi/4$  signifie que les deux voies sont quasiment équivalentes (la matrice est bien conditionnée).

D'autre part, cette notation fait apparaître  $\rho$  comme un facteur d'échelle de la distance minimale et n'intervient en rien dans l'optimisation (2.67). Cette dernière ne dépend alors que de l'unique paramètre  $\gamma$  permettant une simplification notable dans la détermination de la solution.

### 2.4.3 Solution pour une MAQ-4

La solution est disponible pour deux modulations : la BPSK et la MAQ-4. Seule la modulation d'amplitude en quadrature est présentée car elle propose le débit le plus grand. Cette solution est relativement simple avec deux formes de précodeur :

$$\text{Si } 0 \leq \gamma \leq \gamma_0, \quad \mathbf{F}_d = \mathbf{F}_{r1} = \sqrt{E_T} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} & \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.70a)$$

$$\text{Si } \gamma_0 \leq \gamma \leq \pi/4, \quad \mathbf{F}_d = \mathbf{F}_{octa} = \sqrt{\frac{E_T}{2}} \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 \\ 0 & \sin \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\frac{\pi}{4}} \\ -1 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \quad (2.70b)$$

$$\text{où } \begin{cases} \psi = \arctan \frac{\sqrt{2}-1}{\cos \gamma} \\ \gamma_0 = \arctan \sqrt{\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{6}+2\sqrt{2}-3}{3\sqrt{3}-2\sqrt{6}+1}} \simeq 17,28^\circ \end{cases} \quad (2.70c)$$

Les constellations obtenues à la réception pour les deux formes de précodeurs méritent quelques commentaires (figures 2.6, 2.7 et 2.8).

Le précodeur max- $d_{\min}$  prend la forme  $\mathbf{F}_{r1}$  pour des valeurs de  $\gamma$  inférieures à  $17,28^\circ$ . Le canal virtuel voit sa première voie favorisée par rapport à la seconde. Le précodeur choisit alors de mélanger les deux symboles et de les transmettre uniquement sur la meilleure voie. A l'instar des précodeurs WF et EQMM, le précodeur max- $d_{\min}$  peut choisir de supprimer un sous-canal. La constellation obtenue sur cette voie (aucun signal sur la seconde) est présente sur la figure 2.6. Elle ressemble à une MAQ-16 ayant subi une rotation (au codage de Gray près).

Il y a trois grandes remarques à formuler :

- La distance minimale est optimisée mais cette solution maximise également le nombre des plus proches voisins à cette distance. Or ce dernier a une influence non négligeable sur la probabilité d'erreur pour des faibles RSB.
- Une seconde conséquence est l'absence de codage de Gray. Prenons par exemple l'impact G de la figure 2.6. Celui-ci présente cinq voisins à  $d_{\min}$  dont deux correspondent à des combinaisons de bits dont au moins 2 sont différents du symbole G.
- La troisième remarque est que le précodeur  $\mathbf{F}_{r1}$  appartient à la famille des précodeurs qui optimisent le RSB en réception comme le max-SNR définie par :

$$\mathbf{F}_d = \sqrt{P_0} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (2.71)$$

Le précodeur max-SNR est le cas particulier où un seul symbole est transmis et la différence notable avec le  $\mathbf{F}_{r1}$  est le nombre de symboles transmis se traduisant par une modulation différente.

Pour les valeurs plus importantes de  $\gamma$  ( $\gamma > \gamma_0$ ), les deux voies ont des RSB plus proches. Le précodeur

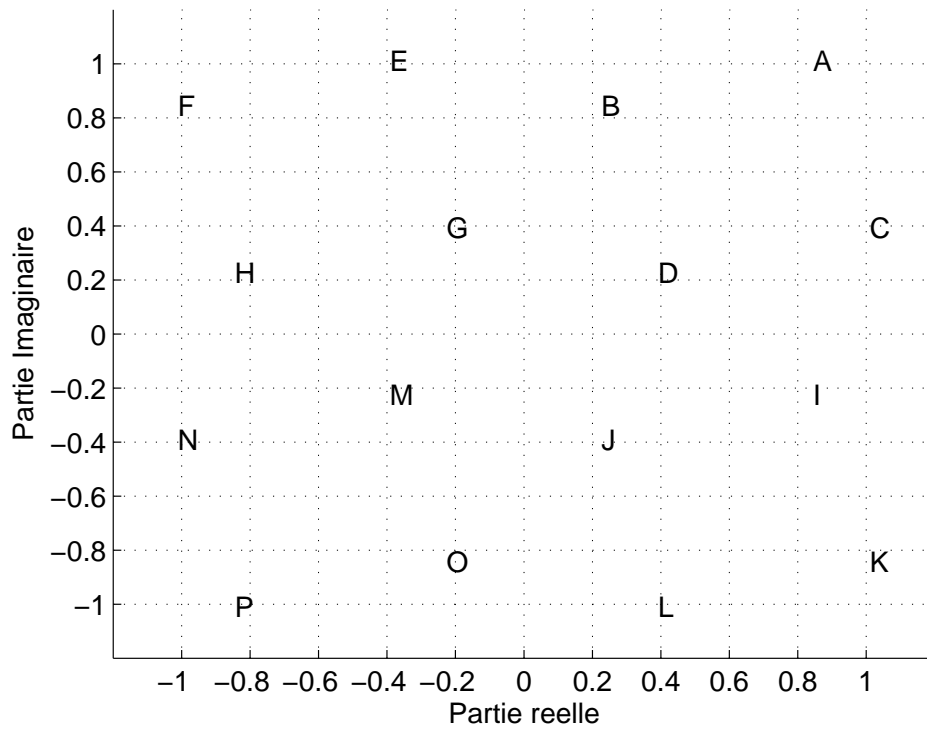


FIG. 2.6 – Constellation obtenue sur le récepteur 1 correspondant au sous-canal 1 pour le précodeur  $\mathbf{F}_{r1}$

$\max-d_{\min}$  considère que la seconde voie peut être utile. Il prend la forme du  $\mathbf{F}_{octa}$  et émet alors deux mélanges des deux symboles sur chaque voie. Il y a deux constellations sur chaque récepteur (figures 2.7 et 2.8) dont la forme ressemble à deux octogones concentriques. Les impacts proches sur une constellation sont éloignés sur la seconde (exemple des points A et N). Le récepteur basé sur le maximum de vraisemblance peut alors utiliser les deux constellations pour estimer le couple de symboles émis.

### Remarque sur le maximum de vraisemblance

Le précodeur  $\max-d_{\min}$  optimise la distance minimale entre deux couples de symboles à la réception. Ce critère est très important pour le récepteur basé sur le maximum de vraisemblance. Cependant, la décision au sens du MV peut se prendre de manière équivalente avant  $\mathbf{G}_v$  (la matrice de décodage peut être omise). En effet, l'optimisation de  $d_{\min}$  conduit à mélanger les deux symboles et à «détruire» la diagonalisation du canal. Le nombre de tests du MV est  $M^2$  au lieu de  $2 \times M$  pour les précodeurs diagonaux ou le code d'Alamouti. Cependant, le canal virtuel avec la prise en compte de  $\mathbf{G}_v$  propose une forme plus simple pour l'optimisation et pour la compréhension du lecteur (visualisation des constellations).

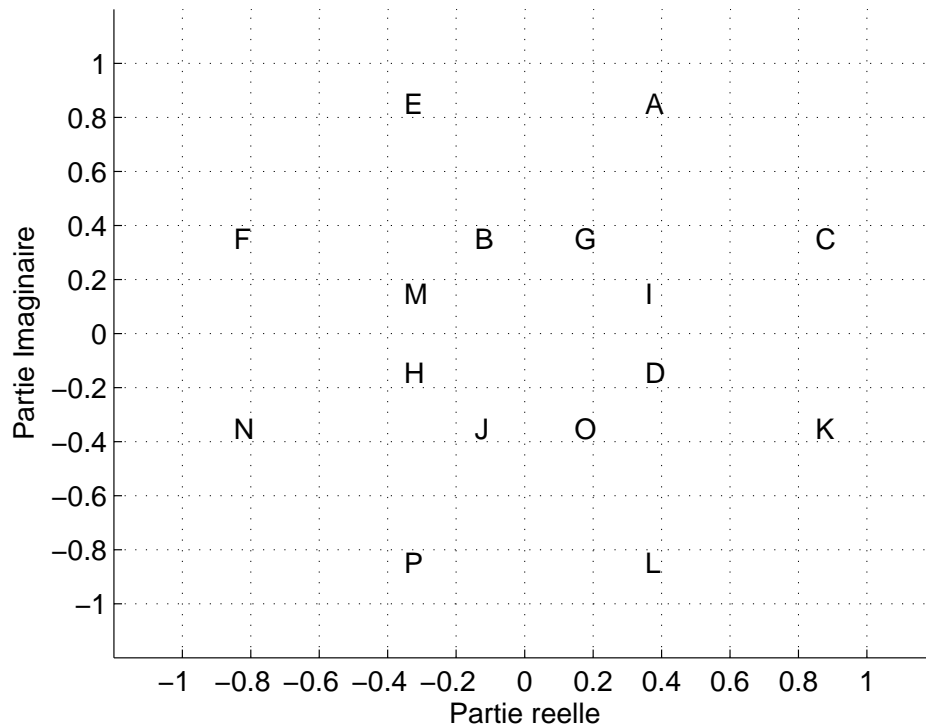


FIG. 2.7 – Constellation obtenue sur le récepteur 1 (sous-canal 1) pour le précodeur  $\mathbf{F}_{octa}$

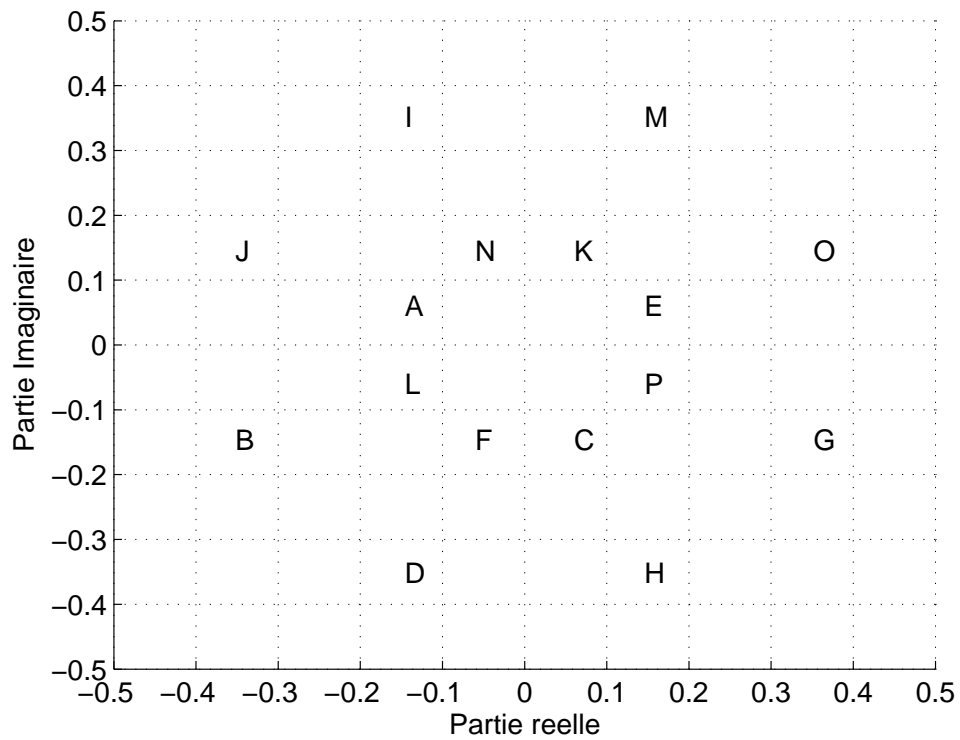


FIG. 2.8 – Constellation obtenue sur le récepteur 2 (sous-canal 2) pour le précodeur  $\mathbf{F}_{octa}$ . Les points (A,N) sont des voisins proches dans cette constellation alors qu'ils sont éloignés sur l'autre constellation.

## 2.5 Solutions des précodeurs diagonaux pour 2 voies

Les précodeurs diagonaux ont été présentés de manière générale dans les paragraphes précédents. Cependant, le précodeur max- $d_{\min}$  étant limité à deux voies, les solutions des précodeurs diagonaux peuvent être données pour la même limitation [71]. Le but est de permettre une étude et une comparaison de tous les précodeurs en utilisant les mêmes paramètres  $\gamma$  et  $\rho$ . Les solutions sont données par le tableau 2.2.

De par sa simplicité (2.42), le précodeur max-SNR ne dépend pas de ces paramètres et n'est donc plus présent dans ce paragraphe. De plus, le précodeur TEBM a une solution difficile à étudier à cause de la fonction de Lambert et ce précodeur est également absent du tableau.

Nous avons vu que le précodeur WF pouvait supprimer une voie en fonction des RSB équivalents de chaque voie. Les possibilités sont maintenant limitées et le précodeur peut choisir d'utiliser soit une seule voie, soit les deux. Ce choix se traduit par un seuil  $\gamma_{WF}$  défini par :

$$\gamma_{WF}(\Phi) = \arcsin \sqrt{\frac{\Phi + 2 - \sqrt{\Phi^2 + 4}}{2\Phi}} \quad (2.72)$$

où  $\Phi = P_0 \rho^2$  est homogène à un RSB de réception. Cela signifie que le seuil évolue selon le canal et la puissance émise contrairement au précodeur max- $d_{\min}$  où  $\gamma_0$  est fixe. Pour éviter d'avoir un seuil variable, nous allons regarder le comportement du précodeur à fort RSB en réception ( $\Phi \rightarrow \infty$ ). Tout d'abord, regardons la limite de l'angle  $\gamma_{WF}(\Phi)$  :

$$\lim_{\Phi \rightarrow \infty} \gamma_{WF}(\Phi) = 0. \quad (2.73)$$

Le précodeur WF utilise donc toujours les deux voies à fort RSB et la solution est indiquée également dans la colonne de droite du tableau 2.2. Les remarques portant sur le précodeur WF sont encore valables pour le précodeur EQMM à la différence du seuil  $\gamma_{EQMM}(\Phi)$  défini par :

$$\gamma_{EQMM}(\Phi) = \arctan(x_0) \quad \text{avec } x_0 \text{ l'unique zéro réel de } x^3 - x^2 + (1 + \Phi)x - 1. \quad (2.74)$$

Nous avons également  $\lim_{\Phi \rightarrow \infty} \gamma_{EQMM}(\Phi) = 0$  et la conclusion est la même que pour le précodeur WF à savoir que le précodeur EQMM utilise toujours deux voies à fort RSB (remarque :  $f_2^2 > f_1^2$ ). La limite du précodeur quand  $\Phi \rightarrow \infty$  apparaît également dans le tableau 2.2. Cependant, l'allocation de puissance est différente. Le précodeur WF émet autant de puissance sur les deux voies sans discrimination. Au contraire, l'EQMM privilégie la voie ayant le plus faible gain au risque de détériorer fortement la première voie : lorsque  $\gamma \rightarrow 0$  c'est-à-dire que la seconde voie devient très mauvaise relativement à la première, toute la puissance est émise sur cette plus mauvaise voie. La conséquence est une dégradation des performances du précodeur EQMM. Cette remarque est également valable pour les précodeurs QdS et EE.

MÉTHODE	PRÉCODEUR $\mathbf{F}_d$	$\lim_{\Phi \rightarrow \infty} \mathbf{F}_d$
max-SNR	$\begin{cases} f_1 = \sqrt{P_0} \\ f_2 = 0 \end{cases}$	
WF	$\begin{cases} f_1 = \sqrt{P_0} \\ f_2 = 0 \end{cases} \quad \text{si } \gamma \leq \gamma_{WF}(\Phi)$ $\begin{cases} f_1^2 = \frac{P_0}{\Phi} \frac{\Phi \tan^2 \gamma - (\tan^2 \gamma - 1)(1 + \tan^2 \gamma)}{2 \tan^2 \gamma} \\ f_2^2 = \frac{P_0}{\Phi} \frac{\Phi \tan^2 \gamma + (\tan^2 \gamma - 1)(1 + \tan^2 \gamma)}{2 \tan^2 \gamma} \end{cases} \quad \text{sinon}$	$\begin{cases} f_1^2 = \frac{P_0}{2} \\ f_2^2 = \frac{P_0}{2} \end{cases}$
EQMM	$\begin{cases} f_1 = \sqrt{P_0} \\ f_2 = 0 \end{cases} \quad \text{si } \gamma \leq \gamma_{EQMM}(\Phi)$ $\begin{cases} f_1^2 = \frac{P_0}{\Phi} \frac{\Phi \tan^2 \gamma - (\tan \gamma - 1)(1 + \tan^2 \gamma)}{\tan \gamma (1 + \tan \gamma)} \\ f_2^2 = \frac{P_0}{\Phi} \frac{\Phi \tan \gamma + (\tan^2 \gamma - 1)(1 + \tan^2 \gamma)}{\tan \gamma (1 + \tan \gamma)} \end{cases} \quad \text{sinon}$	$\begin{cases} f_1^2 = P_0 \frac{\tan \gamma}{1 + \tan \gamma} \\ f_2^2 = P_0 \frac{1}{1 + \tan \gamma} \end{cases}$
QdS	$\begin{cases} f_1^2 = \frac{\omega_1 P_0 \tan^2 \gamma}{\omega_1 \tan^2 \gamma + 1} \\ f_2^2 = \frac{P_0}{\omega_1 \tan^2 \gamma + 1} \end{cases}$	
EE	$\begin{cases} f_1^2 = P_0 \sin^2 \gamma \\ f_2^2 = P_0 \cos^2 \gamma \end{cases}$	

TAB. 2.2 – Solutions des précodeurs diagonaux en fonction de  $\rho$  et  $\gamma$  pour un système à deux sous-canaux,  $b = 2$

## 2.6 Comparaison des précodeurs linéaires

### 2.6.1 Systèmes avec deux sous-canaux

Les taux d'erreur des précodeurs sont présentés par les figures 2.9, 2.10 et 2.11 pour les systèmes MIMO (2,2) et (4,4) dans un canal de Rayleigh avec seulement deux voies. L'efficacité spectrale est fixée à 4 bit/s/Hz et les précodeurs ajustent les modulations MAQ- $M$  :

- **deux voies** : le précodeur max- $d_{\min}$ , l'EE et le TEBM utilisent deux MAQ-4,
- **une ou deux voies** : le WF et l'EQMM basculent entre deux MAQ-4 (deux sous-canaux utilisés) et une MAQ-16,
- **une voie** : le max-SNR emploie une MAQ-16,
- **rendement SISO** : le code d'Alamouti adopte une MAQ-16.

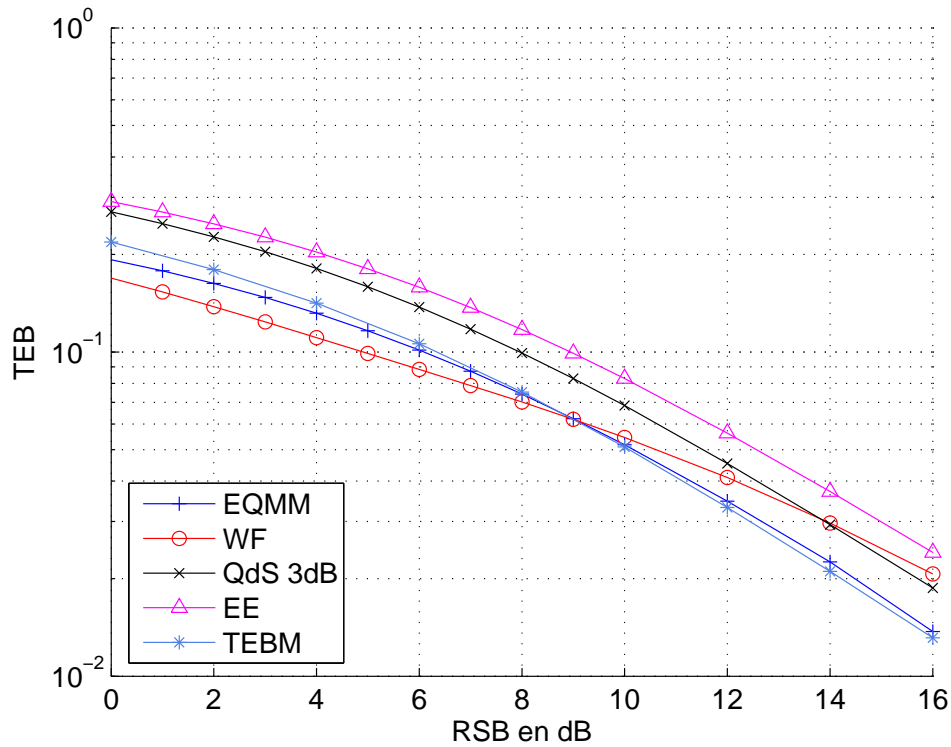


FIG. 2.9 – Comparaison des précodeurs diagonaux pour un système MIMO (2,2),  $b = 2$  et 4 bit/s/Hz pour  $10^5$  matrices  $\mathbf{H}$  suivant une loi de Rayleigh

#### MIMO (2,2) avec $b = 2$ (figures 2.9 et 2.10)

Les précodeurs diagonaux sont d'abord comparés entre eux puis les meilleurs seront comparés au max- $d_{\min}$ , max-SNR (cas particulier des structures diagonales) et le code d'Alamouti.

La figure 2.9 illustre les TEB moyens des précodeurs EQMM, WF, QdS 3dB, EE et TEBM avec deux voies de données pour un système avec deux antennes émettrices et deux antennes réceptrices. A faible RSB, le précodeur WF est plus performant que les autres et notamment que le TEBM sensé optimiser ce critère. La différence réside dans le degré supplémentaire autorisé aux précodeurs WF et EQMM lors du choix des modulations. Au contraire, le précodeur TEBM par définition est obligé d'utiliser les deux voies même si la plus médiocre supprimée par les autres précodeurs détériore les performances. Ceci dit, le précodeur TEBM présente les meilleures performances à fort RSB. Notons que toutes les courbes ont la même pente asymptotique à fort RSB traduisant un ordre de diversité égal. Ce sont les précodeurs WF et TEBM qui proposent les plus faibles TEB à faible et fort RSB, respectivement, pour un système MIMO (2,2).

Comparons ces deux précodeurs diagonaux avec les autres techniques (max- $d_{\min}$ , max-SNR et le code d'Alamouti) à l'aide de la figure 2.10. La première remarque concerne les ordres de diversité : les trois nouvelles techniques ont un ordre de diversité maximal plus important que les précodeurs diagonaux. Cette différence est nettement visible grâce aux pentes des TEB à fort RSB.



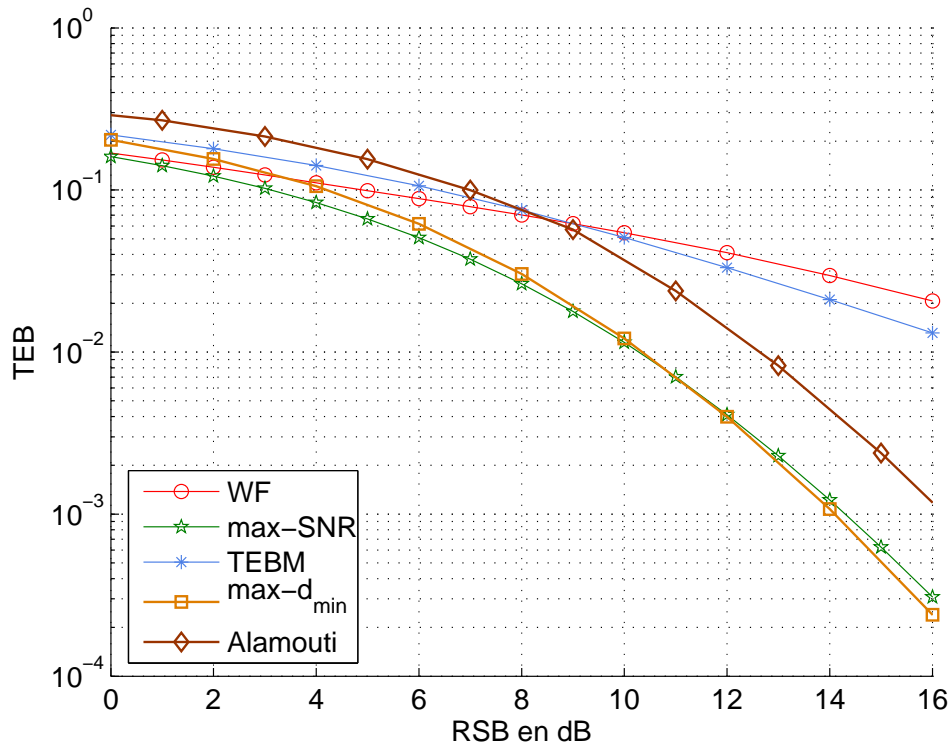


FIG. 2.10 – Comparaison des précodeurs et du code d’Alamouti (MAQ-16) pour un système MIMO (2,2) et  $b = 2$

Le meilleur précodeur en terme de TEB est globalement le max-SNR bien que le max- $d_{\min}$  soit très proche : si le max-SNR est légèrement meilleur à faible RSB, le max- $d_{\min}$  présente un TEB plus faible à fort RSB avec un léger gain (0,2 dB). La différence entre les deux précodeurs est l’utilisation du second sous-canal et les TEB permettent de conclure grossièrement qu’elle n’améliore pas les performances pour un système (2,2).

Le code d’Alamouti assure également un ordre de diversité maximal mais accuse une perte de l’ordre de 2 dB sur les deux précodeurs. Rappelons que le code d’Alamouti n’a pas la connaissance du canal à l’émission contrairement aux précodeurs et si les deux précodeurs sus-cités sont meilleurs, le STBC reste supérieur aux structures diagonales (WF et EQMM). A faible RSB, le manque d’information est ressenti et le WF et le TEBM sont meilleurs que le code d’Alamouti. La force de ce dernier apparaît pour les fortes valeurs de RSB : l’ordre de diversité est maximal et la courbe de TEB «plonge» en comparaison avec celles des précodeurs diagonaux. Malgré l’ignorance du canal, le code d’Alamouti peut être plus performant en terme de TEB que les précodeurs diagonaux. Cependant, d’autres précodeurs comme le max- $d_{\min}$  et max-SNR semblent mieux exploiter la diversité spatiale. Nous allons maintenant augmenter le nombre d’antennes.

### MIMO (4,4) avec $b = 2$ (figure 2.11)

Nous avons vu que le seul STBC proposant un rendement unitaire était celui d'Alamouti. Ce dernier n'est applicable que pour un système avec  $n_T = 2$ . Le code adapté à la configuration (4,4) a un rendement de  $3/4$  que nous avons jugé trop pénalisant : les STBC ne sont pas comparés dans cette étude. De plus, comme dans la figure 2.10, seuls les meilleurs précodeurs diagonaux sont représentés, sautant la première étape de comparaison. Ainsi, la figure 2.11 présente les TEB des précodeurs max- $d_{\min}$ , max-SNR, EE et TEBM.

Les comportements des précodeurs ne sont pas les mêmes quand la configuration matérielle augmente et le classement change. Si le TEBM offrait déjà de bonnes performances, l'EE s'améliore nettement. En effet, ce dernier est la structure diagonale qui exploite le mieux l'augmentation de  $n_T$  et  $n_R$  : pour un système (2,2), il présente les plus mauvaises performances alors que pour un système (4,4), il propose le second plus faible TEB des précodeurs diagonaux, talonnant de près le précodeur TEBM. Comparons maintenant les ordres de diversité. La différence n'est plus aussi prononcée que dans la figure 2.10 et le gain de codage a un rôle prépondérant. Le précodeur max-SNR illustre cette remarque : il est moins performant que les précodeurs EE, EQMM et QdS malgré la différence d'ordre de diversité. Le max-SNR reprendra l'avantage mais pour des valeurs élevées du RSB. Le précodeur max- $d_{\min}$  assure le plus faible TEB avec un gain important sur le TEBM (presque 1 dB à  $10^{-6}$ ) et le max-SNR (plus de 2 dB). Contrairement à ce dernier, le max- $d_{\min}$  conserve l'ordre de diversité maximal tout en améliorant le gain de codage. Son gain sur le TEBM et l'EE augmente avec le RSB.

Les meilleures performances sont proposées par les solutions utilisant toujours deux sous-canaux (max- $d_{\min}$ , EE et TEBM) avec un gain important sur le max-SNR utilisant une seule voie : pour un système (4,4), l'utilisation de la seconde voie est bénéfique. Toutefois, quatre sous-canaux sont disponibles pour cette configuration matérielle et le nombre de voies utilisées  $b$  a aussi une influence sur les performances.

#### 2.6.2 Augmentation du nombre de voies : limitation du max- $d_{\min}$

Le précodeur max- $d_{\min}$  propose des performances intéressantes quand le système MIMO devient important. Cependant, nous avons vu que la solution optimale n'est disponible que pour deux voies ( $b = 2$ ) et pour deux modulations (BPSK et MAQ-4). Cette limitation n'existe pas pour les précodeurs diagonaux. Si les performances changent pour deux voies et des configurations matérielles différentes, elles dépendent également du nombre de voies utilisées. La figure 2.12 donne l'exemple des deux précodeurs diagonaux TEBM et EE pour un système (4,4) avec 4 voies ( $b = 4$ ). Le précodeur max-SNR est également présent avec une efficacité spectrale égale (utilisation d'une MAQ-256 soient 8 bit/s/Hz). Les performances de ce précodeur sont nettement plus mauvaises que celles des précodeurs diagonaux et confirment la tendance décrite précédemment. Le TEBM se détache de l'EE avec un gain de 1 dB. Dans les cas précédents, le TEBM était trop proche des autres précodeurs pour visualiser la solution approchée TEBMA. L'apparition du gain permet de tracer également les performances de TEBMA. Cette solution plus simple est équivalente à l'opti-

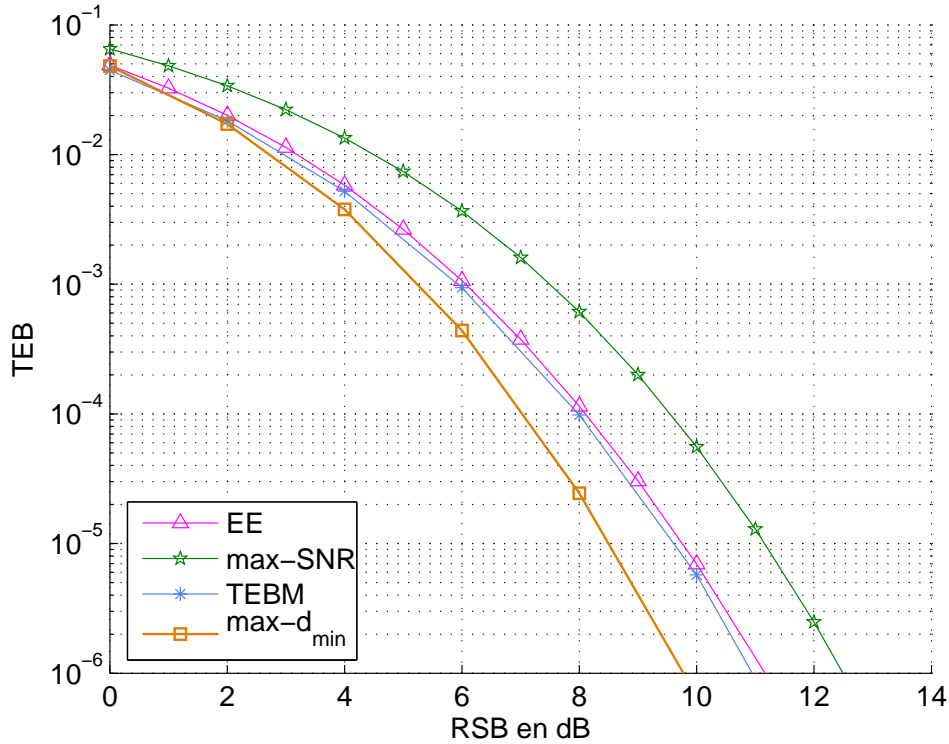


FIG. 2.11 – Comparaison des précodeurs pour un système MIMO (4,4),  $b = 2$  et 4 bit/s/Hz

male pour les forts RSB et l'approximation est ressentie pour les faibles RSB. Il serait également intéressant d'étudier le comportement du max- $d_{\min}$  et c'est pourquoi nous proposons une extension de ce précodeur dans le chapitre 6.

## 2.7 Conclusion

Ce chapitre a présenté les techniques de base introduisant de la diversité à l'émission et à la réception avec les systèmes MIMO. La liste n'est pas exhaustive et se limite aux techniques qui vont être étudiées dans ce mémoire. Nous avons divisé les solutions en deux parties dont la différence est la connaissance ou non du canal à l'émission. D'un côté, sans cette information, les codes spatio-temporels (STBC) offrent un bon compromis complexité/performances avec notamment un ordre de diversité maximal  $n_T \times n_R$ . Toutefois, il existe un rendement  $1/2 \leq \mathcal{R} \leq 1$  du débit et le nombre de codes proposant  $1/2 \leq \mathcal{R}$  est limité. Par exemple, le code d'Alamouti est valable pour  $n_T = 2$  avec  $\mathcal{R} = 1$ . De l'autre côté, les précodeurs linéaires optimisent un critère particulier à l'aide de la connaissance du canal. Nous avons vu les solutions à structure diagonale ou précodeurs diagonaux optimisant la capacité ou le taux d'erreur, le max-SNR qui est une solution particulière des précodeurs diagonaux et le précodeur max- $d_{\min}$  optimisant la distance minimale.

En comparant les TEB pour des configurations matérielles représentatives ( $n_T, n_R$ ) utilisant un nombre de voies  $b$ , nous avons montré que les comportements des précodeurs évoluaient. Le lecteur intéressé trou-

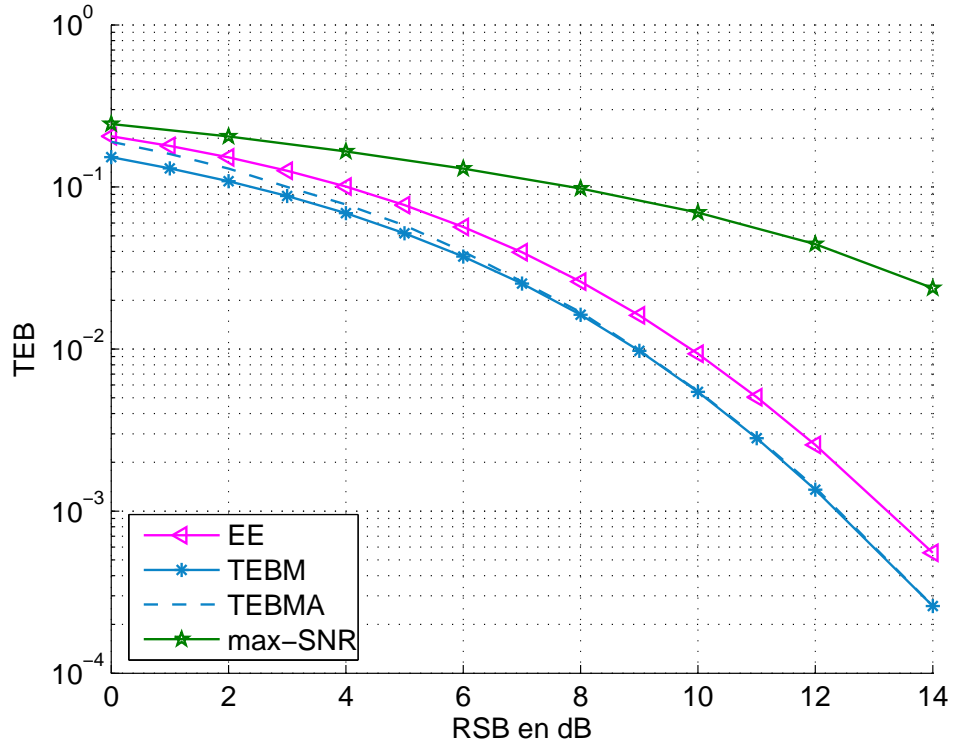


FIG. 2.12 – Comparaison des précodeurs TEBM, EE ( $b = 4$  voies en MAQ-4) et max-SNR ( $b = 1$  voie en MAQ-256) pour un système MIMO (4,4) et 8 bit/s/Hz

vera des études plus approfondies dans [67, 69, 71]. Le précodeur max- $d_{\min}$  montrait des performances intéressantes avec un gain non négligeable sur les autres précodeurs. Le chapitre 3 s'intéressera aux distributions des deux paramètres  $\rho$  et  $\gamma$  pour un canal de Rayleigh et permettra au chapitre 4 d'expliquer l'évolution du TEB de ce précodeur. De plus, la comparaison était limitée à  $b = 2$  et c'est pourquoi le chapitre 6 propose une extension du précodeur max- $d_{\min}$  à plus de deux voies.



## Chapitre 3

# Statistiques du canal virtuel en coordonnées polaires

Nous avons vu que le canal virtuel pour deux voies est entièrement caractérisé par les variables  $\rho$  et  $\gamma$  représentant, respectivement, le gain du canal et le rapport entre les deux plus grandes valeurs propres. Le paramètre  $\rho$  intervient comme un gain global sur la chaîne de transmission et certains précodeurs (EQMM, WF et TEBM) le prennent en compte lors de l'allocation de puissance. Au contraire, l'angle  $\gamma$  a toujours un rôle clé dans le comportement des précodeurs intervenant dans le choix du nombre de voies. C'est notamment le cas pour le nouveau précodeur  $\max\text{-}d_{\min}$  :  $\gamma$  permet de choisir entre deux formes de précodeurs permettant d'optimiser la distance minimale de la constellation de réception.

Nous avons choisi un modèle de canal aléatoire dont la loi est bien définie comme le canal de Rayleigh. Ces deux paramètres, influant sur les comportements et les performances des précodeurs, sont également des variables aléatoires dont les lois dépendent de celle du canal. Le but de ce chapitre est de s'intéresser aux lois théoriques de ces deux variables aléatoires et plus particulièrement  $\gamma$  dont les densités de probabilités ( $ddp$ ) dépendent directement de la distribution de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Des travaux ont déjà été menés sur les statistiques des  $\lambda_i$  et ont débouché sur certains résultats que nous allons rappeler. Les calculs étant fastidieux, nous nous sommes limités aux cas  $m = \min(n_T, n_R) \in \{2, 3\}$ . Une fois les  $ddp$  déterminées, nous essaierons de comparer différents paramètres comme la moyenne et la variance pour les deux cas de configurations matérielles : systèmes  $(2, n_S + 2)$  et  $(3, n_S + 3)$  où  $n_S$  est le coefficient d'asymétrie défini par  $|n_T - n_R|$ .

### 3.1 Point de départ : le canal virtuel

#### 3.1.1 Cas d'un bruit blanc gaussien *iid*

Tout au long de ce chapitre, nous considérerons que le bruit additif dans le canal réel  $\mathbf{n}$  est blanc gaussien indépendant et identiquement distribué de variance  $\sigma_n^2$ . Le terme  $\sigma_i^2$  est alors égal à  $\frac{\lambda_i}{\sigma_n^2}$ . Si on reprend la

transformation telle qu'elle est définie précédemment dans ce cas particulier, la matrice du canal virtuel est :

$$\mathbf{H}_v = \text{diag} \left( \sqrt{\frac{\lambda_1}{\sigma_n^2}}, \dots, \sqrt{\frac{\lambda_b}{\sigma_n^2}} \right) \quad (3.1)$$

avec  $\lambda_i$  les valeurs propres réelles de  $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$  rangées par ordre décroissant,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_b$ . Le canal virtuel est bruité par un bruit virtuel  $\mathbf{n}_v$  blanc et de variance unitaire. Le schéma équivalent peut être remanié et être vu comme des sous-canaux indépendants de gain  $\sqrt{\lambda_i}$  corrompu par un bruit blanc additif gaussien de variance  $\sigma_n^2$ . Le nouveau canal est alors :

$$\mathbf{H}_v = \text{diag} \left( \sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_b} \right). \quad (3.2)$$

avec un bruit  $\mathbf{n}_v$  blanc additif gaussien *iid* de variance  $\sigma_n^2$ .

### 3.1.2 Loi conjointe des valeurs propres

Le modèle du bruit étant précisé, il nous reste maintenant à définir celui du canal imposant les lois des  $\lambda_i$ . Nous considérerons un canal de Rayleigh décorrélé et le canal virtuel équivalent se met sous la forme :

$$\mathbf{H}_v = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 \\ 0 & \sin \gamma \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

avec  $\lambda_1 > \lambda_2$  les deux plus grandes valeurs propres de  $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ . Le schéma équivalent obtenu correspond à deux voies SISO parallèles avec un bruit gaussien *iid* et des gains différents qui se trouvent être des variables aléatoires dépendantes. En effet, elle sont au moins reliées par l'inégalité  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ . Pour pouvoir déterminer les performances des précodeurs, il est indispensable de connaître les lois de ces deux variables [71]. La loi conjointe des  $m$  valeurs propres est disponible dans la littérature et a fait l'objet de nombreuses recherches. Pour la suite des calculs, nous définissons le coefficient d'asymétrie  $n_S$  caractérisant la différence entre les nombres d'antennes à l'émission et à la réception :

$$n_S = |n_T - n_R| = \max(n_T, n_R) - \min(n_T, n_R). \quad (3.4)$$

Rappelons que nous notons également  $m = \min(n_T, n_R)$  le minimum des antennes disponibles des deux côtés. Cette valeur a son importance car elle définit le nombre de valeurs propres non nulles de  $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ . Dans le cas d'un canal de Rayleigh, les éléments de  $\mathbf{H}$  sont *iid*  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$  et la matrice  $\mathbf{W} = \mathbf{H}\mathbf{H}^*$  est dite de Wishart [72]. La théorie des matrices aléatoires fournit la loi conjointe des valeurs propres non nulles et

ordonnées d'une matrice de Wishart [73, 74, 75] :

$$f_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m}^{(m)}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \kappa_m \prod_{i=1}^m e^{-\lambda_i} \lambda_i^{n_S} \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i)^2 \quad (3.5)$$

où  $\kappa_m$  est le coefficient de normalisation défini par :

$$\kappa_m = \frac{1}{\prod_{i=1}^m (n_T - i)!(n_R - i)!}. \quad (3.6)$$

### 3.1.3 Loi conjointe de $\lambda_1$ et $\lambda_2$

La loi conjointe (3.5) dépend de toutes les valeurs propres. Or le système virtuel ne dépend que des deux plus fortes valeurs propres. Afin de pouvoir étudier le système, il est nécessaire d'obtenir la loi conjointe de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Celle-ci est obtenue par intégrales successives de la loi conjointe de toutes les valeurs propres par rapport aux valeurs propres inférieures à  $\lambda_2$  :

$$f_{\lambda_1, \lambda_2}^{(m)}(\lambda_1, \lambda_2) = \int_0^{\lambda_2} \int_0^{\lambda_3} \dots \int_0^{\lambda_{m-1}} f_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) d\lambda_3 d\lambda_4 \dots \lambda_m \quad (3.7)$$

où  $f_{x_1, \dots, x_N}^{(m)}(x_1, \dots, x_N)$  représente une loi conjointe ou marginale obtenue à partir de la loi de Wishart et qui dépend de la variable  $m$ . Ainsi,  $(m-2)$  intégrales sont nécessaires pour obtenir la loi conjointe des deux plus grandes valeurs propres : plus la configuration matérielle est importante se traduisant par une augmentation de  $m$ , plus les calculs sont importants. De plus, en se remémorant la forme de la loi conjointe à intégrer (3.5), nous pouvons supposer que les calculs sont fastidieux et le résultat difficile à généraliser.

### 3.1.4 Loi marginale

D'une manière analogue, le calcul de la loi marginale de chaque valeur propre est défini comme suit :

$$f_{\lambda_k}^{(m)}(\lambda_k) = \int_{\lambda_k}^{\infty} d\lambda_{k-1} \dots \int_{\lambda_3}^{\infty} d\lambda_2 \int_{\lambda_2}^{\infty} d\lambda_1 \int_0^{\lambda_k} d\lambda_{k+1} \dots \int_0^{\lambda_{m-1}} d\lambda_m f_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m). \quad (3.8)$$

Des travaux ont été menés pour des cas précis comme la plus grande valeur propre. En effet, le précodeur max-SNR ou «beamforming» n'utilise que  $\lambda_1$  dans le canal virtuel. Ce précodeur est un des plus anciens mais aussi un des plus simples. Les résultats concernant la loi marginale de la plus grande valeur propre  $\lambda_1$  ont tous la même forme [60] :

$$f_{\lambda_1}^{(m)}(\lambda_1) = \sum_{k=1}^m \phi_k^m(\lambda_1) e^{-k\lambda_1} \quad (3.9)$$

où les  $\phi_k^m(\lambda_1)$  sont des polynômes. Wenstrom [76] indique que ces polynômes sont de degré maximum  $n_T + n_R - 2$  et quelques polynômes sont donnés pour l'exemple dans le tableau 3.1. Les coefficients des polynômes n'ont pas d'expressions exactes en fonction de  $m$  et  $n_S$  et doivent être calculés pour chaque cas.



	$n_S = 0$	$n_S = 1$
$m = 2$	$\varphi_1^2(x) = 2 - 2x + x^2$ $\varphi_2^2(x) = -2$	$\varphi_1^2(x) = 3x - 2x^2 + x^3/2$ $\varphi_2^2(x) = -3x - x^2$
$m = 3$	$\varphi_1^3(x) = 3 - 6x + 6x^2 - 2x^3 + x^4/4$ $\varphi_2^3(x) = -6 + 6x - 3x^2 - x^3 - x^4/2$ $\varphi_3^3(x) = 3$	$\varphi_1^3(x) = 6x - 8x^2 + 9/2x^3 - x^4 + x^5/12$ $\varphi_2^3(x) = -12x + 4x^2 + x^3 - x^4 - x^5/12 - x^6/12$ $\varphi_3^3(x) = 6x + 4x^2 + x^3/2$

TAB. 3.1 – Exemple de polynômes intervenant dans la loi conjointe de  $\lambda_1$ 

Les résultats semblent relativement simples mais les calculs sont compliqués et notamment la gestion de simplifications importantes permettant d'annuler un grand nombre de coefficients des polynômes [71, 77]. La loi de la plus petite valeur propre est également étudiée dans [78]. C'est en effet cette valeur propre qui impose le gain le plus faible et pénalise les précodeurs qui l'utilisent.

### 3.2 Étude des statistiques de $\gamma$ et $\rho$ pour $\min(n_T, n_R) = 2$

Les paramètres  $\rho$  et  $\gamma$  sont définis en fonction de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  par (2.68). Ce chapitre calcule les lois en appliquant le changement de variables sur les distributions des valeurs propres.

#### 3.2.1 La loi conjointe de $\rho$ et $\gamma$

Nous avons vu que la loi conjointe de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  est disponible (3.5) et est déterminée pour  $m = 2$  par :

$$f_{\lambda_1, \lambda_2}^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{n_S!(n_S + 1)!} (\lambda_1 \lambda_2)^{n_S} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} (\lambda_1 - \lambda_2)^2. \quad (3.10)$$

Pour appliquer le changement de variable, le jacobien doit être calculé :

$$\begin{cases} \lambda_1 &= \rho^2 \cos^2 \gamma \\ \lambda_2 &= \rho^2 \sin^2 \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \rho} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial \rho} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\rho \cos^2 \gamma & -2\rho^2 \sin \gamma \cos \gamma \\ 2\rho \sin^2 \gamma & 2\rho^2 \sin \gamma \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

La loi conjointe de  $\rho$  et  $\gamma$  est donnée pour toutes les valeurs de  $m$  en fonction du déterminant du jacobien et de la loi conjointe des deux plus grandes valeurs propres :

$$f_{\rho, \gamma}^{(m)}(\rho, \gamma) = f_{\lambda_1, \lambda_2}^{(m)}(\rho^2 \cos^2 \gamma, \rho^2 \sin^2 \gamma) |\mathbf{J}|. \quad (3.12)$$

Le déterminant du jacobien est toujours le même et est donné par :

$$|\mathbf{J}| = 4\rho^3 \sin \gamma \cos \gamma (\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) = 2\rho^3 \sin 2\gamma. \quad (3.13)$$

Il ne reste plus qu'à remplacer tous les éléments de (3.12) pour  $m = 2$  et à trouver la loi conjointe de  $\gamma$  et  $\rho$  :

$$f_{\rho, \gamma}^{(2)}(\rho, \gamma) = \frac{2^{-2n_S+1}}{n_S!(n_S+1)!} \cos^2 2\gamma (\sin 2\gamma)^{2n_S+1} \rho^{7+4n_S} e^{-\rho^2}. \quad (3.14)$$

Ce résultat permet d'obtenir les lois marginales de  $\gamma$  et  $\rho$ .

### 3.2.2 La densité de probabilité de l'angle $\gamma$

#### Loi marginale

La loi marginale de  $\gamma$  est obtenue en intégrant la loi conjointe sur le domaine de  $\rho$  :

$$f_{\gamma}^{(m)}(\gamma) = \int_0^{+\infty} f_{\rho, \gamma}^{(m)}(\rho, \gamma) d\rho \quad (3.15)$$

Le résultat est obtenu en utilisant la fonction gamma. Celle-ci est définie par :

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt. \quad (3.16)$$

Lorsque  $p$  est un entier, nous avons  $\Gamma(p) = (p-1)!$ . Nous pouvons en déduire le résultat suivant permettant de calculer la loi marginale :

$$\int_0^{+\infty} X^{2k+1} e^{-X^2} dX = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} Y^k e^{-Y} dY = \Gamma(k+1) = \frac{k!}{2}, \quad (3.17)$$

la loi marginale de  $\gamma$  est obtenue pour  $m = 2$  :

$$f_{\gamma}^{(2)}(\gamma) = \frac{2^{-2n_S}(2n_S+3)!}{n_S!(n_S+1)!} \cos^2 2\gamma (\sin 2\gamma)^{2n_S+1}. \quad (3.18)$$

La figure 3.1 illustre cette loi pour  $m = 2$  avec différentes valeurs de  $n_S$ . On observe un déplacement de la courbe vers la droite quand le nombre d'antennes augmente. La valeur moyenne s'accroît pour atteindre asymptotiquement  $45^\circ$  pendant que sa variance diminue et se concentre autour de la valeur moyenne. Si le raisonnement considère  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , cela signifie que les deux variables prennent des valeurs de plus en plus proches quand  $n_S$  devient important. Notons  $\gamma_{\max}$  l'angle permettant d'obtenir la valeur maximale de la densité de probabilité. Son expression est obtenue en annulant la dérivée (autre valeur que 0 et  $\pi/4$ ) :

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{2} \arcsin \left( \sqrt{\frac{2n_S+1}{2n_S+3}} \right), \quad (3.19)$$

et par conséquent :

$$\lim_{n_S \rightarrow \infty} \gamma_{\max} = \frac{\pi}{4}. \quad (3.20)$$

En outre,  $f_\gamma(\gamma)$  présente une aire unitaire : la loi tend vers une impulsion de Dirac quand  $n_S$  tend vers l'infini. Dans ce cas, les deux valeurs propres tendent à être égales.

La figure 3.2 donne les fonctions de répartitions de  $\gamma$  obtenues par intégration numérique de la  $ddp$  théorique. Ces courbes permettent de visualiser rapidement la probabilité que l'angle soit inférieur à une valeur. Par exemple, les probabilités que  $\gamma < 30^\circ$  sont respectivement 0,87, 0,6, 0,39, 0,24 et 0,20 pour  $n_S = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ . Cette probabilité  $P(\gamma < 30^\circ)$  évolue avec le nombre d'antennes. Rappelons que le précodeur  $\text{max-}d_{\min}$  base son choix de stratégie sur la valeur de  $\gamma$ . Ce résultat permettra d'étudier le comportement du précodeur  $\text{max-}d_{\min}$  avec la probabilité  $P(\gamma < \gamma_0)$  ( $\gamma_0 = 17,28^\circ$ ).

### Moyenne et variance

L'expression exacte de la distribution de  $\gamma$  n'a pas une forme facilitant le calcul de la moyenne et de la variance. Cependant, voici le résultat de la valeur moyenne dont l'expression n'est pas très conviviale :

$$m_\gamma = E[\gamma] = \sum_{i=0}^{n_S} (-1)^i \frac{C_{n_S}^i}{2i+3} \frac{(i+1)!}{n_S!} \frac{\Gamma(n_S + 2 + \frac{1}{2})}{\Gamma(i + 2 + \frac{1}{2})} \quad (3.21)$$

où  $C_n^k$  est le coefficient binomial  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$  et la fonction gamma définie pour les multiples de  $\frac{1}{2}$  :

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}. \quad (3.22)$$

Il est intéressant de noter que le résultat donnera un nombre rationnel.

### 3.2.3 La densité de probabilité du gain $\rho$

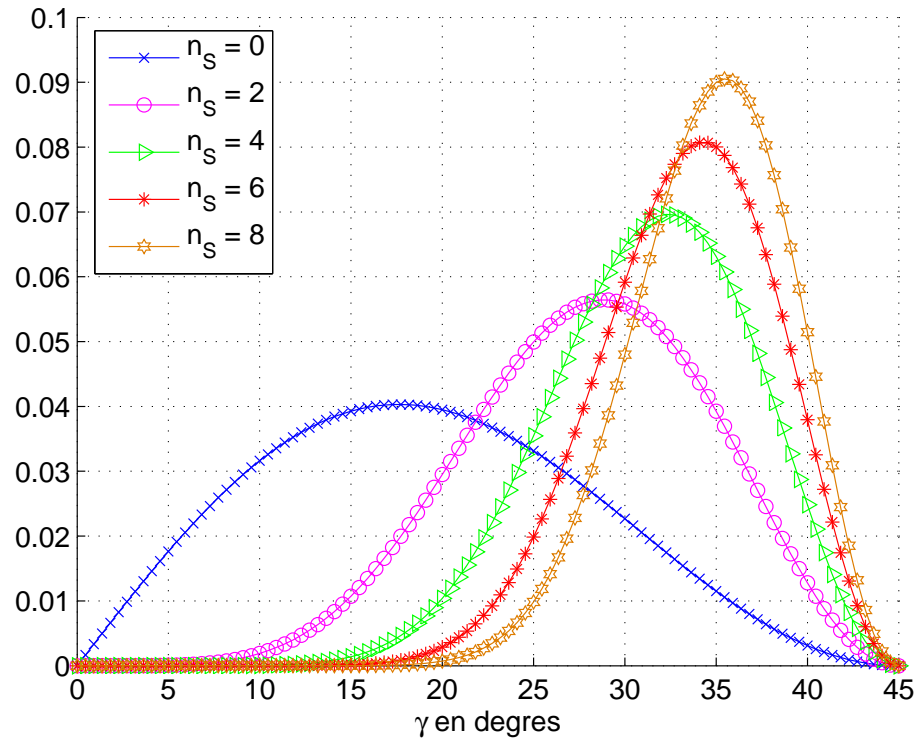
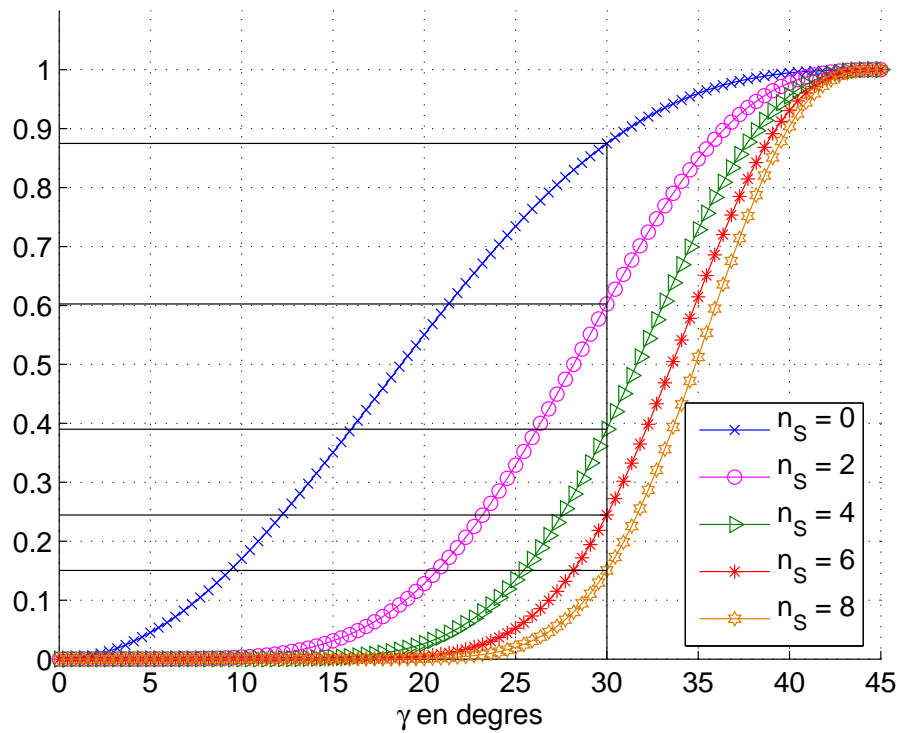
#### Loi marginale

La méthode de calcul de la loi marginale de  $\rho$  est la même que pour  $\gamma$ . Le point de départ est l'intégrale suivante :

$$f_\rho^{(m)}(\rho) = \int_0^{\pi/4} f_{\rho,\gamma}^{(m)}(\rho, \gamma) d\gamma. \quad (3.23)$$

Reprenons le cas  $m = 2$  :

$$\begin{aligned} f_\rho^{(2)}(\rho) &= \int_0^{\pi/4} f_{\rho,\gamma}^{(2)}(\rho, \gamma) d\gamma \\ &= \frac{2^{-2n_S+1}}{n_S!(n_S+1)!} \rho^{7+4n_S} e^{-\rho^2} \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\gamma (\sin 2\gamma)^{2n_S+1} d\gamma. \end{aligned}$$

FIG. 3.1 – Exemples de densités de probabilité de l'angle  $\gamma$ , systèmes  $(2, 2 + n_S)$ FIG. 3.2 – Exemples de fonctions de répartition de l'angle  $\gamma$ , systèmes  $(2, 2 + n_S)$

L'intégrale par rapport à  $\gamma$  est connue sous le nom de fonction  $\beta$  et donne :

$$\int_0^{\pi/4} \cos^2 2\gamma (\sin 2\gamma)^{2n_S+1} d\gamma = \frac{\beta(n_S+1, 3/2)}{4} = \frac{1}{4} \frac{\Gamma(n_S+1)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n_S+2+\frac{1}{2})} = \frac{2^{2n_S} n_S! (n_S+1)!}{(2n_S+3)!}. \quad (3.24)$$

La  $ddp$  de  $\rho$  peut en être déduite :

$$f_{\rho}^{(2)}(\rho) = \frac{2}{(2n_S+3)!} \rho^{7+4n_S} e^{-\rho^2}. \quad (3.25)$$

La figure 3.3 montre plusieurs  $ddp$  de  $\rho$  pour des configurations matérielles différentes et  $m = 2$ . Tout comme les  $ddp$  de  $\gamma$ , les courbes se déplacent vers la droite c'est-à-dire vers des valeurs plus fortes. Cependant, la loi de  $\rho$  est différente de celle de  $\gamma$ . En effet, elle ressemble à une impulsion dont la largeur liée à la variance est constante et dont la valeur moyenne croît quand  $n_S$  augmente.

De plus, la figure 3.4 représente les fonctions de répartition (intégration numérique de (3.25)) pour la variable  $\rho$ . Elle permettent d'obtenir rapidement les probabilités que  $\rho$  soit inférieur à une certaine valeur. Les variations en fonction de  $n_S$  sont importantes. Par exemple,  $P(\rho < 4) = \{1, 0, 99, 0, 88, 0, 56, 0, 21\}$  pour  $n_S = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ . Le terme  $\rho$  intervient comme un gain sur la chaîne globale et cette probabilité permet de donner une borne inférieure de la distance minimale et donc une borne inférieure de la probabilité d'erreur.

### Moyenne et variance

L'expression littérale de la distribution de  $\rho$  présente une forme mieux adaptée aux calculs des moments de la variable en comparaison à celle de l'angle  $\gamma$ . En particulier, la valeur moyenne et la variance sont relativement simples à calculer. Commençons par la valeur moyenne :

$$m_{\rho} = E[\rho] = \int_0^{+\infty} \rho f_{\rho}^{(2)}(\rho) d\rho = \frac{2}{(2n_S+3)!} \Gamma(2n_S+4+\frac{1}{2}).$$

La valeur moyenne de  $\rho$  est alors :

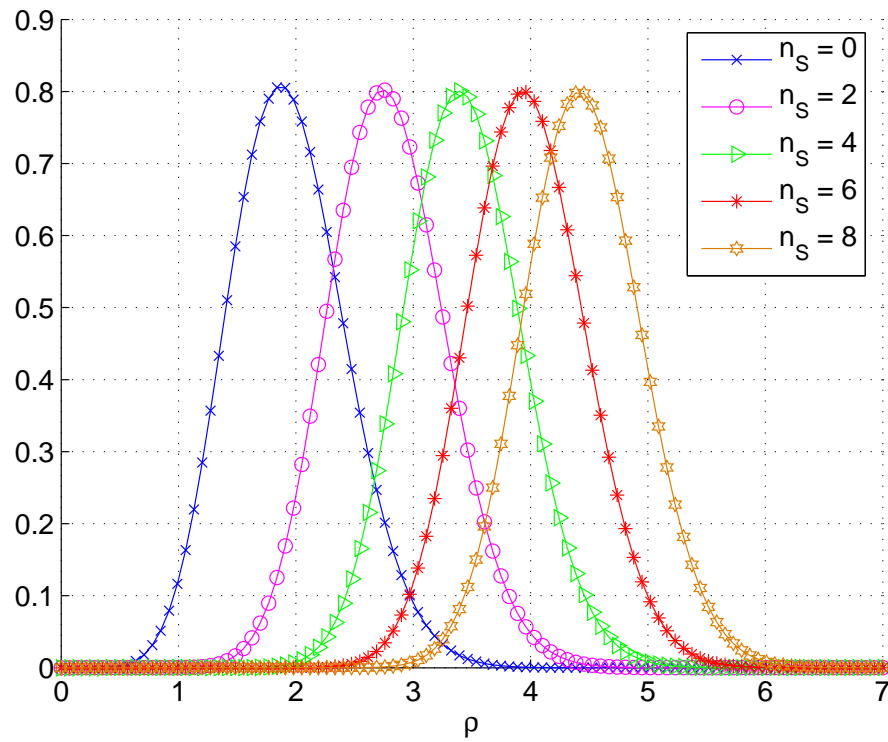
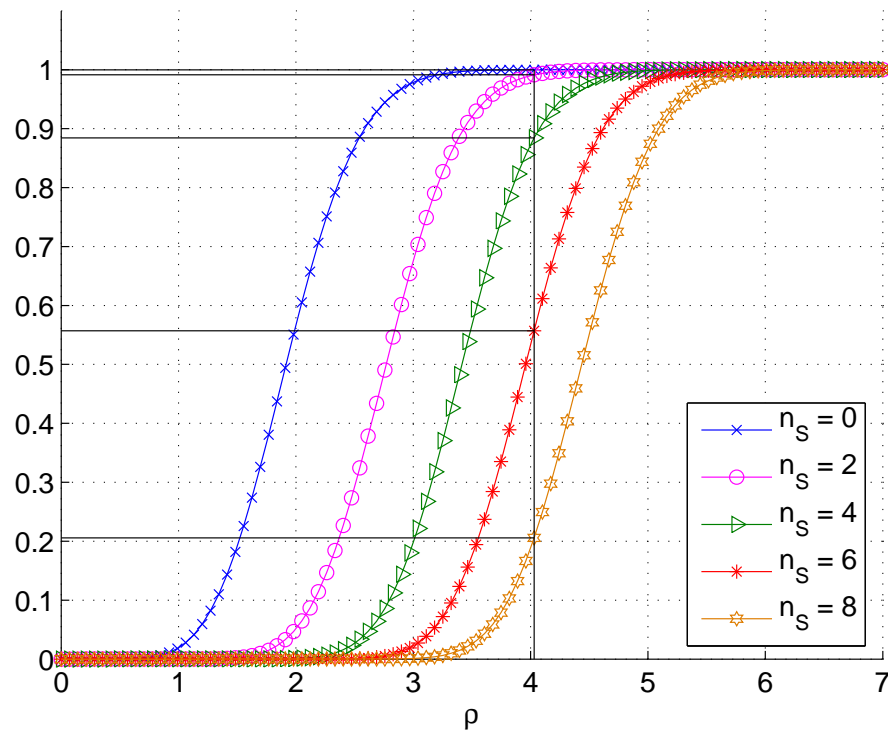
$$m_{\rho} = \frac{(n_S+2)\sqrt{\pi}}{2^{4n_S+7}} C_{4n_S+8}^{2n_S+4}. \quad (3.26)$$

La formule de Stirling,  $C_{2n}^n = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$ , permet d'approximer la moyenne :

$$m_{\rho} \simeq \sqrt{2n_S+4}. \quad (3.27)$$

Rappelons que  $\sigma_{\rho}^2 = E[\rho^2] - m_{\rho}^2$ . La valeur moyenne quadratique de  $\rho$  est rapidement obtenue en utilisant le résultat (3.17) :

$$E[\rho^2] = \int_0^{\infty} \frac{2}{(2n_S+3)!} \rho^{4n_S+9} e^{-\rho^2} d\rho = 2n_S+4 \quad (3.28)$$

FIG. 3.3 – Exemples de densités de probabilité du gain  $\rho$ , systèmes  $(2, 2 + n_S)$ FIG. 3.4 – Exemples de fonctions de répartition du gain  $\rho$ , systèmes  $(2, 2 + n_S)$

Ce résultat permet d'établir la valeur exacte de la variance de  $\rho$  :

$$\sigma_{\rho}^2 = (2n_S + 4) \left( 1 - \frac{(n_S + 2)\pi}{2^{2n_S+15}} \left( C_{4n_S+8}^{2n_S+4} \right)^2 \right). \quad (3.29)$$

La figure 3.5 permet de comparer les différents résultats obtenus pour la valeur moyenne de  $\rho$  : la valeur théorique (3.27), la valeur simulée et la valeur approximée. Les différentes valeurs sont exprimées en fonction de  $n_S$ . Les valeurs théoriques et simulées concordent alors que l'approximation avec une expression simple est une borne supérieure et accuse une erreur faible presque négligeable.

En outre, les observations de la figure 3.6 montre une quasi-constance de la variance de  $\rho$  comprise entre 0,2417 et 0,2484. La valeur asymptotique de la variance est 0,25. Nous pouvons considérer que la *ddp* de  $\rho$  est une impulsion de même largeur qui se déplace autour de la valeur moyenne. En résumé, les résultats approximatés sont alors simples :

$$\begin{cases} m_{\rho} \approx \sqrt{2n_S + 4} \\ \sigma_{\rho}^2 \approx 0,247 \end{cases}. \quad (3.30)$$

### 3.2.4 Indépendance

Possédant maintenant les *ddp* de  $\rho$  et  $\gamma$  pour  $m = 2$ , nous pouvons nous intéresser à l'indépendance de ces deux variables en comparant la loi conjointe et le produit des lois marginales. Le résultat est obtenu immédiatement en reprenant (3.18) et (3.25) :

$$f_{\rho,\gamma}^{(2)}(\rho, \gamma) = f_{\rho}^{(2)}(\rho) f_{\gamma}^{(2)}(\gamma). \quad (3.31)$$

La loi conjointe de  $\rho$  et  $\gamma$  est égale au produit des lois marginales démontrant que ces variables aléatoires sont indépendantes. Cette propriété est intéressante et sera utilisée pour calculer une approximation de la probabilité d'erreur dans la suite où l'indépendance permettra de séparer les calculs d'intégrales.

## 3.3 La loi marginale de $\gamma$ pour $\min(n_T, n_R) = 3$

Cette partie présente seulement les calculs pour trouver la loi de  $\gamma$  pour  $m = \min(n_T, n_R) = 3$ . La matrice de canal propose alors trois valeurs propres mais les précodeurs considérés n'utilisent que les deux plus fortes. Il est nécessaire de déterminer la loi conjointe de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  à partir de la loi de Wishart. Les calculs sont alors fastidieux et n'ont été menés que pour l'angle  $\gamma$ . Lors des comparaisons du paragraphe suivant, les lois du gain  $\rho$  seront estimées par simulation avec  $10^5$  matrices  $\mathbf{H}$ . Reprenons la loi conjointe des valeurs propres (3.5) avec maintenant trois valeurs propres ( $m = 3$ ) :

$$f_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \kappa_3(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{n_S} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} (\lambda_1 - \lambda_2)^2 (\lambda_1 - \lambda_3)^2 (\lambda_2 - \lambda_3)^2. \quad (3.32)$$

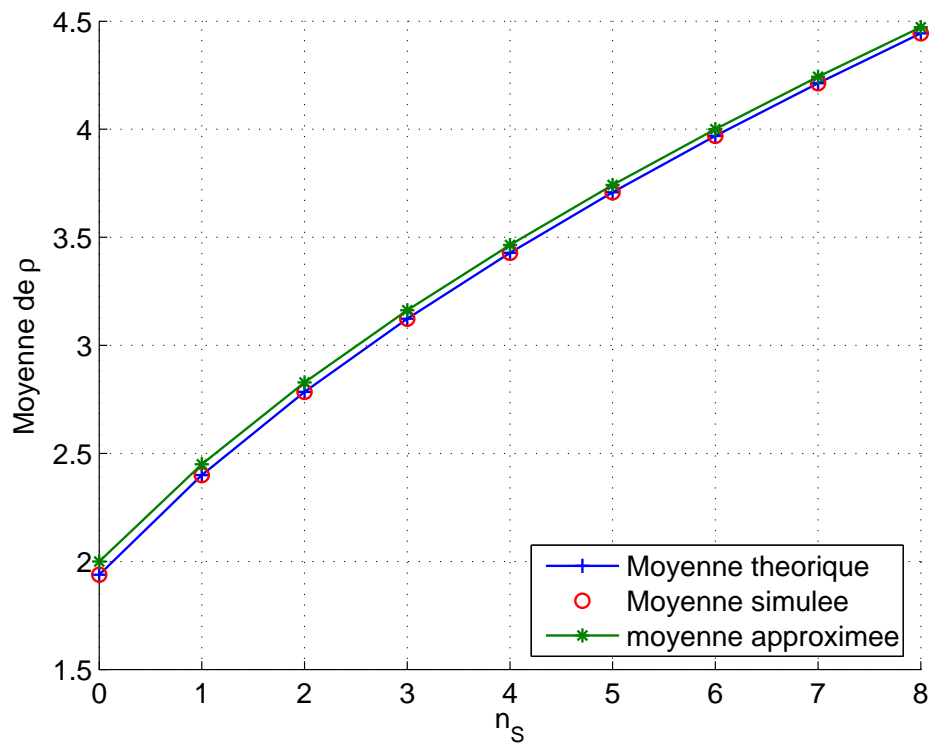


FIG. 3.5 – Valeur moyenne de  $\rho$  théorique, simulée sur  $10^5$  matrices  $\mathbf{H}$  et approximée en fonction de  $n_s$

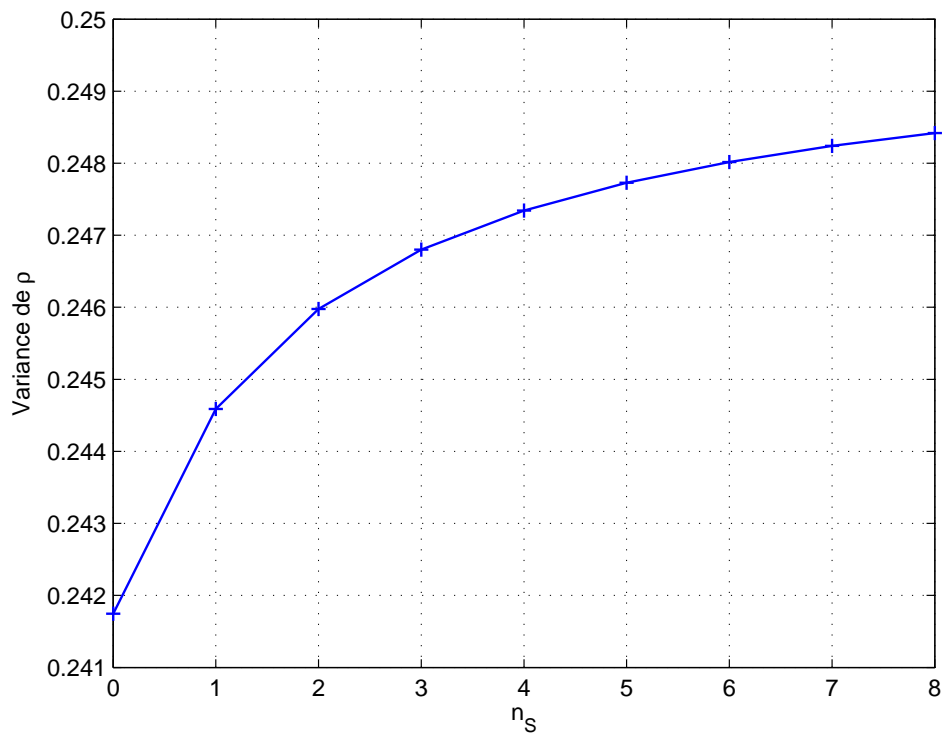


FIG. 3.6 – Variance du gain  $\rho$  en fonction de  $n_s$  obtenue par intégration numérique de la loi théorique



Il est intéressant de remarquer que cette loi peut se mettre en fonction de la loi  $m = 2$  :

$$f_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{\kappa_3}{\kappa_2} f_{\lambda_1, \lambda_2}^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) \times e^{-\lambda_3} \lambda_3^{n_S} (\lambda_1 - \lambda_3)^2 (\lambda_2 - \lambda_3)^2 \quad (3.33)$$

avec  $\kappa_2$  et  $\kappa_3$  les constantes de normalisation définies par (3.6). Pour obtenir la loi conjointe de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , une seule intégrale est nécessaire :

$$f_{\lambda_1, \lambda_2}^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2) = \int_0^{\lambda_2} f_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_3 \quad (3.34)$$

ou encore en faisant apparaître la loi pour  $m = 2$  :

$$f_{\lambda_1, \lambda_2}^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\kappa_3}{\kappa_2} f_{\lambda_1, \lambda_2}^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) \int_0^{\lambda_2} e^{-\lambda_3} \lambda_3^{n_S} (\lambda_1 - \lambda_3)^2 (\lambda_2 - \lambda_3)^2 d\lambda_3. \quad (3.35)$$

L'étape suivante consiste à appliquer le changement de variable vu précédemment. La loi conjointe de  $\rho$  et  $\gamma$  devient :

$$f_{\rho, \gamma}^{(3)}(\rho, \gamma) = f_{\lambda_1, \lambda_2}^{(3)}(\rho^2 \cos^2 \gamma, \rho^2 \sin^2 \gamma) |\mathbf{J}| = \frac{\kappa_3}{\kappa_2} f_{\rho, \gamma}^{(2)}(\rho, \gamma) I(\rho, \gamma) \quad (3.36)$$

avec

$$I(\rho, \gamma) = \int_0^{\lambda_2} e^{-\lambda_3} \lambda_3^{n_S} (\lambda_1 - \lambda_3)^2 (\lambda_2 - \lambda_3)^2 d\lambda_3 \Big|_{\lambda_1 = \rho^2 \cos^2 \gamma, \lambda_2 = \rho^2 \sin^2 \gamma}. \quad (3.37)$$

L'équation (3.36) permet de réutiliser les résultats précédents et limite les calculs à  $I(\rho, \gamma)$ . Il s'agit alors de calculer une intégrale et d'effectuer un changement de variables. Le résultat est composé de deux polynômes correspondants aux deux bornes de l'intégrale. La loi de  $\gamma$  pour  $\min(n_T, n_R) = 3$  est donnée par :

$$f_{\gamma}^{(3)}(\gamma) = \frac{f_{\gamma}^{(2)}(\gamma)}{2(n_S + 1)(n_S + 2)} \left( \sum_{i=0}^2 a_i \sin^{2i} 2\gamma - (1 - \chi)^{2n_S + 4} \sum_{j=0}^{n_S + 2} b_j \chi^j \right) \quad (3.38)$$

où  $\chi = \frac{\sin^2 \gamma}{1 + \sin^2 \gamma}$ ,  $a_i$  et  $b_j$  sont des coefficients dépendants de  $n_S$ . Les coefficients  $a_i$  sont définis par :

$$\begin{cases} a_0 &= (n_S + 1)(n_S + 2)(n_S^2 + 5n_S + 8) \\ a_1 &= -(n_S + 1)(n_S + 2)(n_S + 4)(2n_S + 5) \\ a_2 &= (n_S + 2)(n_S + 3)(2n_S + 5)(2n_S + 7)/4 \end{cases} \quad (3.39)$$

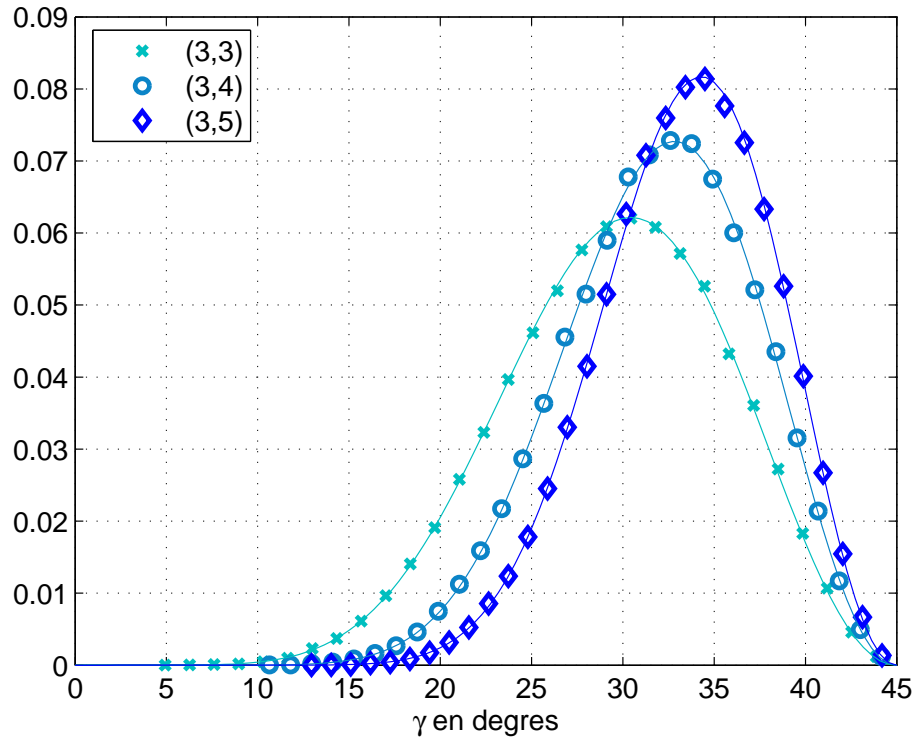


FIG. 3.7 – Vérification de la ddp de  $\gamma$  pour  $m = 3$  en comparant les résultats théoriques avec ceux simulés avec  $10^5$  matrices  $\mathbf{H}$ . Les résultats simulés apparaissent par points et la ddp théorique est tracée en trait plein.

Les coefficients  $b_i$  du polynôme en  $\chi$  de degré  $n_S + 2$  sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{n_S+2} = 18(n_S+1)(n_S+2)C_{3n_S+5}^{n_S+2} \\ b_{n_S+1} = 2(n_S+1)(9n_S-12)C_{3n_S+4}^{n_S+1} \\ b_k = (k^4 - 4(n_S+5)k^3 + (6n_S^2 + 48n_S + 103)k^2 \\ \quad - (4n_S^3 + 36n_S^2 + 110n_S + 124)k \\ \quad + (n_S+1)(n_S+2)(n_S^2 + 5n_S + 8))C_{2n_S+3+k}^k \end{array} \right. \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, n_S \quad (3.40)$$

Une intégration numérique de  $f_\gamma^{(3)}(\gamma)$  sur le domaine  $[0, \pi/4]$  permet de vérifier qu'elle est unitaire. De plus, des tirages de canaux permettent de comparer le résultat théorique obtenu avec la pratique. La figure 3.7 illustre la comparaison des ddp théoriques avec les simulations pour les systèmes (3,3), (3,4) et (3,5). La figure montre bien une cohérence entre les simulations et les résultats théoriques. Comme dans le cas  $m = 2$ , la répartition de l'angle ressemble à une impulsion se déplaçant vers la droite lorsque  $n_S$  augmente. Elle tend vers une impulsion de Dirac centrée sur  $\pi/4$ . Une comparaison rapide entre les figures 3.1 et 3.7 montre que pour  $m = 3$ ,  $f_\gamma(\gamma)$  tend plus vite vers l'impulsion (également visible sur la figure 3.8).

$n_S$	$p_f$	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$	$p_9$	$p_{10}$	$p_{11}$
0	2	280	-1610	3472	-3878	2872	-1358	372	-45	—	—	—	—
1	7	330	-2508	8052	-14916	18249	-15290	8734	-3266	723	-72	—	—
2	1	12012	-114114	482196	-1221363	2088944	-2538536	2234232	-1421693	639884	-193722	35460	-2970

TAB. 3.2 – Coefficients du polynôme permettant d’obtenir la  $ddp$  de  $\gamma$  pour  $m = 3$  à partir de  $f_\gamma^{(2)}(\gamma)$  en fonction de  $n_S$

**Remarque : expression de la  $ddp$  en fonction de  $\chi$**

Le terme  $\chi$  est une fonction de  $\sin^2 \gamma$  et le premier polynôme avec les coefficients  $a_i$  peut être exprimé non plus en utilisant  $\sin^2 \gamma$  mais  $\chi$  :

$$\begin{cases} \sin^2 2\gamma = 4(\sin \gamma \cos \gamma)^2 = 4 \sin^2 \gamma (1 - \sin^2 \gamma) = \frac{4\chi(1-2\chi)}{(1-\chi)^2} \\ \sin^4 2\gamma = \frac{16\chi^2(1-2\chi)^2}{(1-\chi)^4} \end{cases} \quad (3.41)$$

Par conséquent, la  $ddp$  de l’angle  $\gamma$  pour  $m = 3$  peut s’exprimer en fonction d’une seule variable. En utilisant ces résultats, la loi (3.38) peut se mettre sous la forme :

$$f_\gamma^{(3)}(\gamma) = f_\gamma^{(2)}(\gamma) \frac{\sum_{i=0}^{3n_S+10} c_i \chi^i}{(1-\chi)^4} \quad (3.42)$$

avec  $c_i$  des coefficients dépendant de  $n_S$  et de  $i$ . Il est possible de démontrer que  $c_i = 0$  pour  $5 \leq i \leq n_S + 2$  en utilisant :

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i i^m C_n^i = 0 \quad \text{avec} \quad m < n,$$

et de vérifier que  $c_i = 0$  pour  $0 \leq i \leq 4$ . Le terme  $\chi^{n_S+3}$  peut alors être mis en facteur :

$$f_\gamma^{(3)}(\gamma) = f_\gamma^{(2)}(\gamma) \frac{p_f \chi^{n_S+3}}{(1-\chi)^4} \sum_{i=0}^{2n_S+7} p_i \chi^i. \quad (3.43)$$

**Remarque :** la fonction  $f_\gamma^{(2)}(\gamma)$  dépend de  $n_S$  et doit être calculée pour chaque valeur.

Les expressions des coefficients  $p_i$  restent à être déterminées mais les calculs sont fastidieux. Il est possible d’utiliser un logiciel de calculs symboliques pour obtenir les polynômes. Les résultats sont disponibles dans le tableau 3.2 pour quelques valeurs de  $n_S$ .

La figure 3.8 trace les  $ddp$  théoriques de l’angle pour  $m = \{2, 3\}$  et pour  $n_S = \{0, 1, 2, 3\}$ . Comme remarqué précédemment, les deux  $ddp$  se décalent vers la droite lorsque  $n_S$  augmente. Cependant, le cas  $m = 3$  est toujours centré sur des plus fortes valeurs se situant le plus à droite : la pondération de  $f_\gamma^{(2)}(\gamma)$  produit un décalage vers la droite. L’impact direct sur le précodeur max- $d_{\min}$  est l’utilisation d’une seule voie ou des deux : la répartition d’usage des matrices  $\mathbf{F}_{r1}$  et  $\mathbf{F}_{octa}$  n’est pas la même pour  $m = 2$  que pour  $m = 3$ .

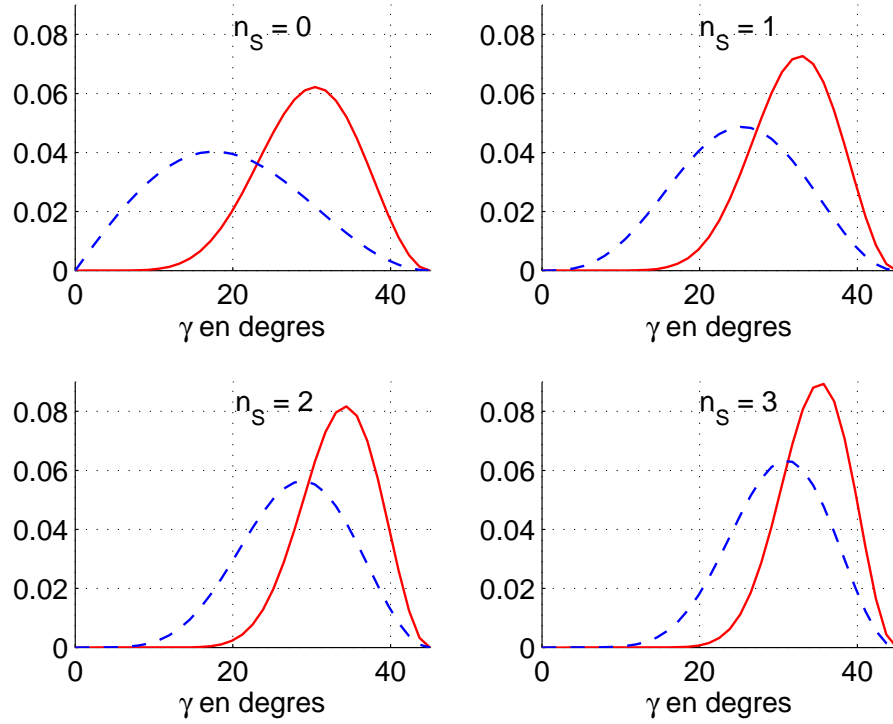


FIG. 3.8 – Comparaison des  $ddp$  de  $\gamma$  pour  $m = 3$  (trait continu) et  $m = 2$  (trait pointillé) : un décalage vers la droite est visible pour  $m = 3$ .

### 3.4 Comparaison théorique pour $\min(n_T, n_R) = \{2, 3\}$

Les résultats obtenus précédemment vont nous permettre de comparer théoriquement les statistiques de l'angle  $\gamma$  et du gain  $\rho$  et d'estimer leurs impacts sur les performances en terme de TEB. La valeur moyenne de  $\rho$  pour  $m = 3$  sera simulée avec une étude sur  $10^5$  matrices  $\mathbf{H}$ .

#### 3.4.1 Moyenne et variance de $\gamma$ pour $\min(n_T, n_R) = \{2, 3\}$

Les valeurs moyennes et écarts types sont obtenus par intégration numérique des  $ddp$  déterminées théoriquement lorsqu'ils ne sont pas exprimés directement en fonction de  $n_s$ ,  $\rho$  ou  $\gamma$ .

Les figures 3.9 et 3.10 présentent la moyenne et la variance de  $\gamma$  pour les deux cas  $m = 2$  et  $m = 3$  en fonction de la variable  $n_s$ . Il s'agit d'étudier l'influence de l'asymétrie correspondant à l'écart du nombre d'antennes à l'émission et à la réception du système pour  $m = \{2, 3\}$  : la moyenne et l'écart type sont tracés en fonction de  $n_s$  pour des valeurs exagérément importantes afin de pouvoir observer les comportements asymptotiques. Une troisième courbe en pointillés représente le cas  $m = 2$  mais pour un nombre d'antennes total égal pour les deux configurations matérielles. En effet,  $n_s$  étant défini par  $|n_T - n_R|$ , le cas  $m = 3$  présente deux antennes supplémentaires.

Les valeurs moyennes sur la figure 3.9 sont croissantes pour les deux configurations matérielles et un effet de saturation apparaît quand  $n_S$  tend vers l'infini. Les deux valeurs tendent vers  $\pi/4$  mais avec une vitesse de convergence différente : le système avec  $m = 3$  présente la plus grande valeur moyenne de  $\gamma$ . Si on considère des configurations avec le même nombre d'antennes, l'écart diminue avec une baisse plus sensible pour les faibles  $n_S$ . D'autre part, les écarts types des deux configurations matérielles illustrées par la figure 3.10 diminuent quand l'asymétrie est importante. Nous avons vu précédemment que la  $ddp$  de  $\gamma$  ressemblait à une impulsion et cette réduction de la variance indique que la répartition de l'angle se concentre autour de la valeur moyenne. De la même façon que pour la moyenne, l'écart type tend vers la valeur limite 0 avec une convergence plus rapide pour  $m = 3$ . Pour deux systèmes avec le même nombre d'antennes total, la différence d'écart type est moins importante mais le cas  $m = 3$  présente l'écart type le plus faible donc la  $ddp$  la plus étroite.

De façon analogue, la figure 3.11 présente la valeur moyenne de  $\rho$  en fonction de  $n_S$  pour  $m = 2$  et  $m = 3$  avec également le cas où le nombre d'antennes total est égal. La variance de cette variable est constante pour  $m = 2$  ( $\sigma_\rho^2 \simeq 0,247$ ) et une étude numérique indique qu'elle est aussi constante pour  $m = 3$  ( $\sigma_\rho^2 \simeq 0,23$ ) : la  $ddp$  de  $\rho$  est une impulsion dont la caractéristique principale est la valeur moyenne. Cette valeur moyenne est plus importante pour  $m = 3$  que pour  $m = 2$  avec un écart qui semble constant. Cependant, en observant la configuration à même nombre d'antennes, les deux courbes ont pratiquement le même point à l'origine mais divergent quand  $n_S$  augmente : la valeur moyenne de  $\rho$  augmente plus vite pour  $m = 3$  que pour  $m = 2$ .

Globalement, la configuration matérielle avec  $m = 3$  offre les meilleures performances en fonction de l'asymétrie  $n_S$  si le critère est le couple  $(\lambda_1, \lambda_2)$  : l'angle  $\gamma$  a une valeur moyenne plus importante et sa variance diminue plus vite pendant que le gain  $\rho$  augmente plus vite. Dans le cas  $m = 3$ , la seconde valeur propre est moins négligeable devant la première que dans le cas  $m = 2$ . La prochaine partie s'intéresse aux TEB du précodeur max- $d_{\min}$  et permettra de visualiser l'impact des variations de la moyenne et de la variance sur les TEB pour un cas concret.

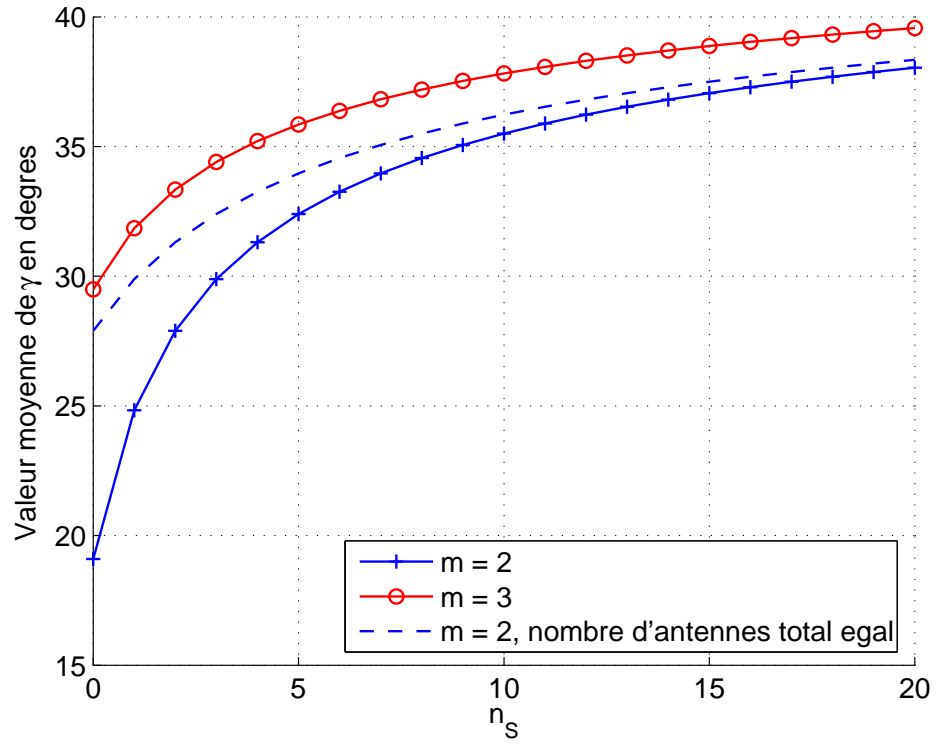


FIG. 3.9 – Moyenne de  $\gamma$  en fonction de  $n_S$  pour  $\min(n_T, n_R) = \{2, 3\}$ . La courbe en pointillés correspond à un système avec  $m = 2$  et un même nombre d'antennes total que pour  $m = 3$ .

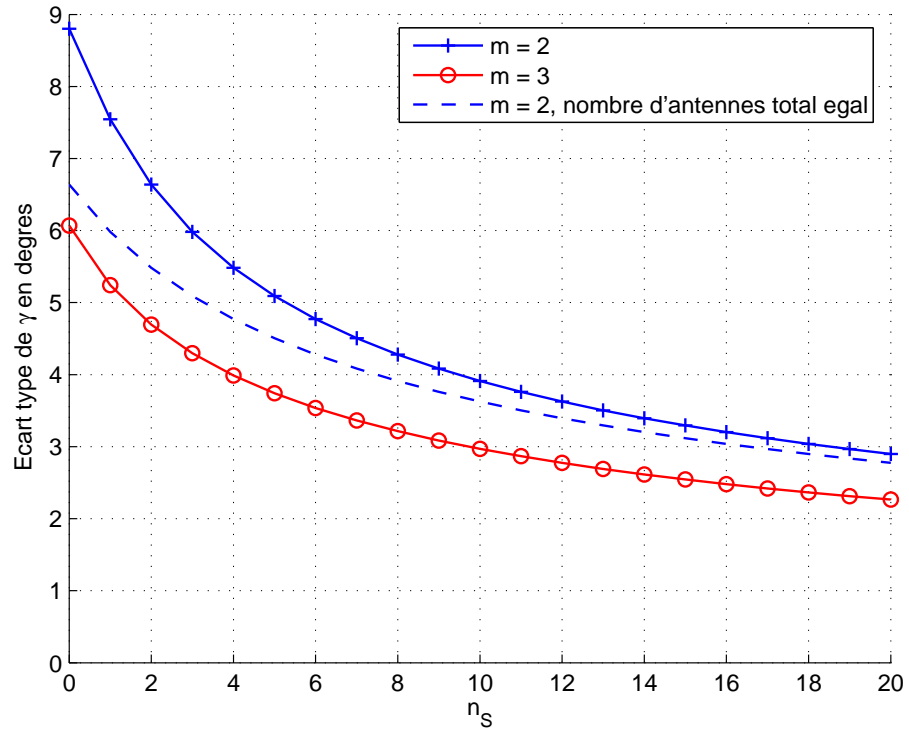


FIG. 3.10 – Ecart type de  $\gamma$  en fonction de  $n_S$  pour  $\min(n_T, n_R) = \{2, 3\}$ . La courbe en pointillés correspond à un système avec  $m = 2$  et un même nombre d'antennes total que pour  $m = 3$ .

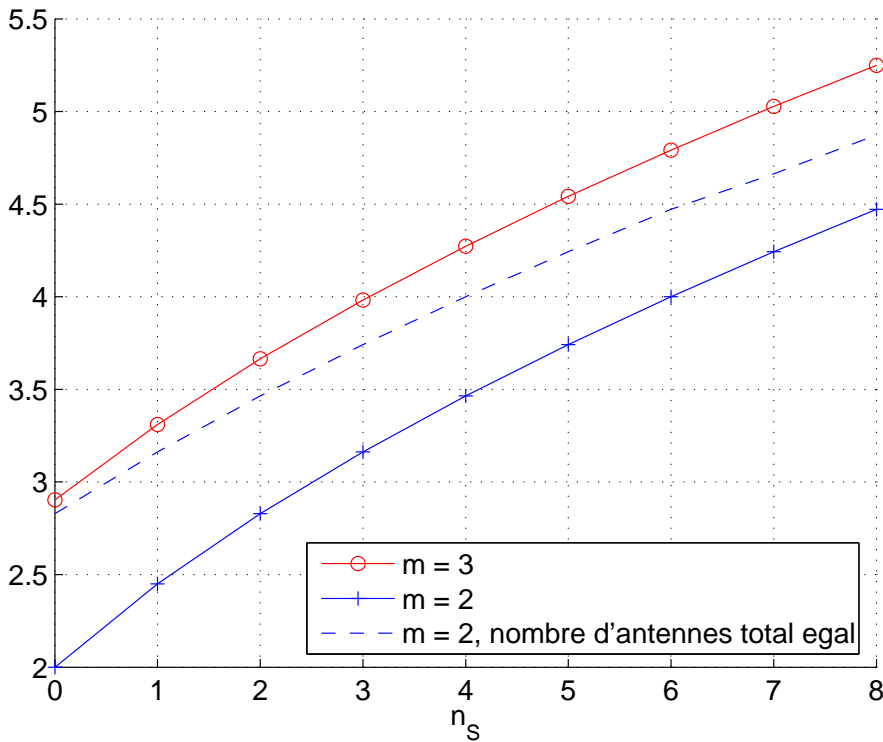


FIG. 3.11 – Moyenne de  $\rho$  en fonction du coefficient d'asymétrie  $n_S$  pour  $\min(n_T, n_R) = \{2, 3\}$  et pour un même nombre d'antennes total (pointillés)

### 3.4.2 Influence sur les performances : cas de 6 antennes

Le but de ce chapitre n'est pas une étude approfondie des performances du précodeurs max- $d_{\min}$  : celle-ci sera menée dans le chapitre suivant. Il s'agit ici seulement d'établir un premier lien entre les statistiques du canal virtuel établies précédemment et les performances en terme de TEB. La comparaison considère les deux systèmes MIMO (2,4) et (3,3) comprenant un nombre d'antennes total égal à 6 mais avec  $m = \{2, 3\}$ . La figure 3.12 regroupe les différentes  $ddp$  de  $\gamma$  et de  $\rho$  ainsi que les TEB des deux configurations matérielles. A première vue, les répartitions des deux variables sont très proches. En effet, les valeurs numériques des moyennes sont ( $m_\gamma = 27,9^\circ$ ,  $m_\rho = 2,8$ ) pour  $m = 2$  et ( $m_\gamma = 29,5^\circ$ ,  $m_\rho = 2,9$ ) pour  $m = 3$ . Celles-ci sont proches. Pourtant, les TEB des deux systèmes MIMO sont différents et le cas  $m = 3$  présente des meilleures performances avec un gain de 1 dB pour un TEB de  $10^{-5}$ . Ce gain augmente avec le RSB car une différence d'ordre de diversité est présente. Cela se traduit par des pentes différentes des asymptotes à fort RSB et les deux courbes divergent. Rappelons que les observations des simulations laissent supposer que le précodeur max- $d_{\min}$  assure l'ordre diversité maximal  $n_T \times n_R$  soit 8 pour le (2,4) et 9 pour le (3,3) (démonstration dans le chapitre suivant).

Un début d'explication vient du principe du précodeur max- $d_{\min}$  : sa stratégie dépend directement de la valeur de  $\gamma$  imposant le choix de la matrice  $\mathbf{F}_{r1}$  ou  $\mathbf{F}_{octa}$ . Ainsi, le système (2,4) a la probabilité  $P(\mathbf{F}_{r1}) = 6\%$  alors que le (3,3) a  $P(\mathbf{F}_{r1}) = 2\%$  (à titre de référence le système (2,2) soit 4 antennes a  $P(\mathbf{F}_{r1}) = 44\%$ ). Cette

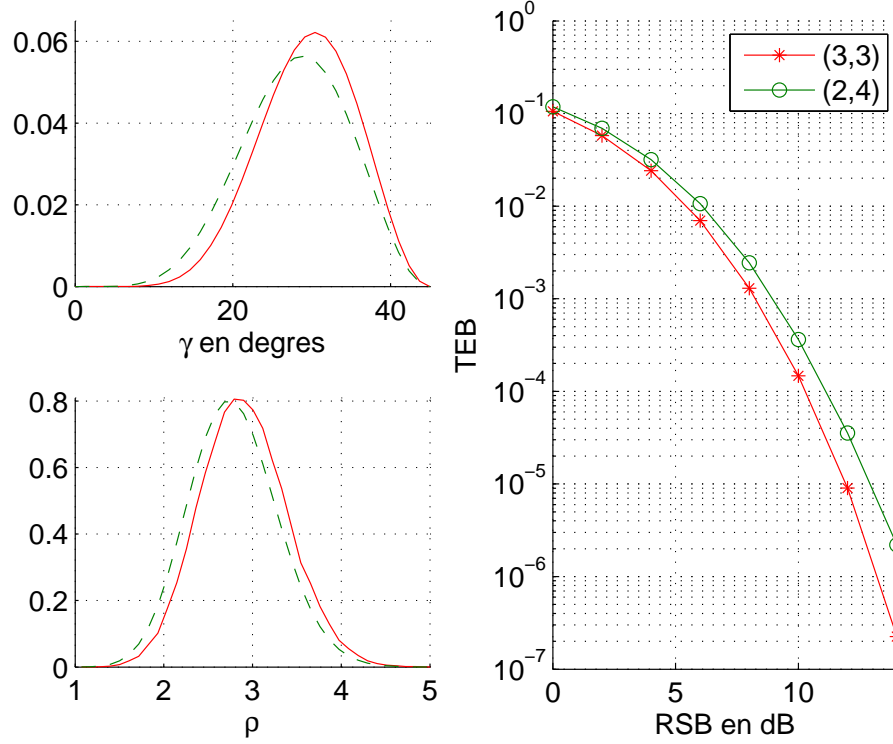


FIG. 3.12 – Comparaison des systèmes (2,4) et (3,3) soit un total de 6 antennes. A gauche, les  $ddp$  de  $\gamma$  et  $\rho$  pour  $m = 3$  (continu) et  $m = 2$  (pointillé). A droite, les TEB simulés du précodeur  $\max-d_{\min}$  pour les deux systèmes.

différence de comportement associé à un gain  $\rho$  légèrement plus important permet à la configuration (3,3) d'obtenir un meilleur TEB que le (2,4).

### 3.4.3 Observations dans le repère $(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2})$

Une représentation intéressante pour un canal virtuel avec deux sous-canaux est l'impact caractérisé par le point de coordonnées  $(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2})$ . Ce point est aléatoire et appartient à la surface définie par  $\sqrt{\lambda_1} \geq \sqrt{\lambda_2} \geq 0$ . La droite  $\sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\lambda_1}$  et l'axe des abscisses pour  $\sqrt{\lambda_1} \geq 0$  forment les frontières de cette surface. Pourtant, la superposition d'un grand nombre de points aura plus de chance de se trouver dans une zone plus restreinte et une application possible des résultats théoriques est de décrire cette zone d'impact avec une probabilité importante (plus de 90% par exemple). Les points ayant pour coordonnées  $(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2})$  sont également caractérisés par les coordonnées polaires  $(\rho, \gamma)$ . Ainsi, en utilisant les coordonnées  $(\rho, \gamma)$  équivalentes aux  $(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2})$  associées aux résultats théoriques pour  $m = 2$ , la zone  $S_a$  est définie :

$$S_a = \rho \cos \gamma \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m_\rho - a\sigma_\rho \leq \rho \leq m_\rho + a\sigma_\rho \\ m_\gamma - a\sigma_\gamma \leq \gamma \leq m_\gamma + a\sigma_\gamma \end{cases} \quad (3.44)$$



où  $a$  est une constante,  $m_p$  et  $\sigma_p$  sont les moyenne et variance de  $\rho$  et  $m_\gamma$  et  $\sigma_\gamma$  sont également les moyenne et variance de  $\gamma$ . La zone  $S_a$  dont la définition utilise les moyennes et variances de  $\gamma$  et  $\rho$ , est une portion d'an-neau permettant de couvrir une partie des impacts, avec par exemple :  $S_1$  représente 45%,  $P((\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) \in S_1) = 0,45$ , et  $S_2$  92%,  $P((\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) \in S_2) = 0,92$ . Cette valeur est une estimation obtenue par intégration numérique des lois théoriques sur les domaines définis par (3.44).

Les figures 3.13 et 3.14 représentent les zones  $S_1$  et  $S_2$  pour les cas  $m = 2$  et  $n_S = 0,4$  avec un millier d'impacts tirés aléatoirement. Nous pouvons remarquer que la zone est de plus en plus concentrée et se rapproche de la droite  $\sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\lambda_1}$  lorsque  $n_S$  augmente. En effet, la valeur moyenne de  $\gamma$  augmente pendant que sa variance diminue : nous avons vu que la *ddp* de l'angle tend vers une impulsion de Dirac centrée sur  $\pi/4$  et la portion d'an-neau tend vers la droite. D'un autre côté, nous avons vu que les valeurs de  $\rho$  se situent autour de la valeur moyenne avec la même variance. La valeur moyenne  $m_p \simeq \sqrt{2n_S + 4}$  tend vers l'infini pour des  $n_S$  importants et la variance devient de plus en plus petite devant la valeur moyenne. Ainsi, la zone se concentre de plus en plus loin de l'origine et se rapproche de la droite frontière d'équation  $\sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\lambda_1}$  : les deux plus grandes valeurs propres de  $\mathbf{HH}^*$  sont de plus en plus importantes et de plus en plus proches.

### 3.5 Conclusions

Ce chapitre a permis de déterminer les lois statistiques des paramètres  $\gamma$  et  $\rho$  pour  $m = 2$  et partiellement pour  $m = 3$ . Le cas  $m = 2$  présente des résultats ayant une forme simple et permettant de démontrer l'indépendance des deux variables. Le cas  $m = 3$  est nettement plus compliqué et seule la loi de  $\gamma$  est disponible. Une généralisation des lois s'avère très difficile. Cependant, l'intérêt de ces lois et surtout celle de  $\gamma$  est de permettre la comparaison dans un premier temps de quelques paramètres importants (moyenne et variance) en fonction de  $n_S$  et  $m$ . Nous avons vu que le choix de répartition des antennes permet de modifier ces paramètres du canal. Dans un second temps, nous avons regardé rapidement l'influence des *ddp* sur le TEB. Les variations ne sont pas importantes mais permettent au précodeur max- $d_{\min}$  d'offrir de meilleures performances pour  $m = 3$  avec notamment un ordre de diversité plus important. Nous avons alors évoqué l'influence de l'angle  $\gamma$  sur le comportement de ce précodeur (utilisation ou non du second sous-canal). Le prochain chapitre développe l'analyse des performances de max- $d_{\min}$  à l'aide des lois de  $\gamma$ .

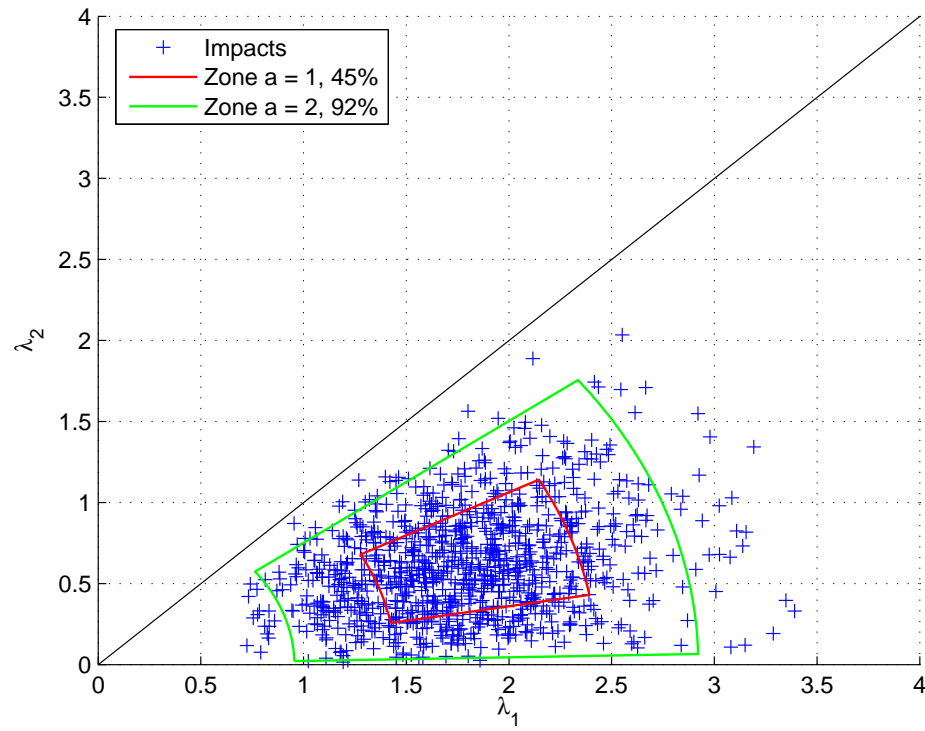


FIG. 3.13 – Visualisation des deux zones déterminant à 45% et 92% les deux plus grandes valeurs propres pour  $n_S = 0$ ,  $m = 2$  soit un système  $(2, 2)$

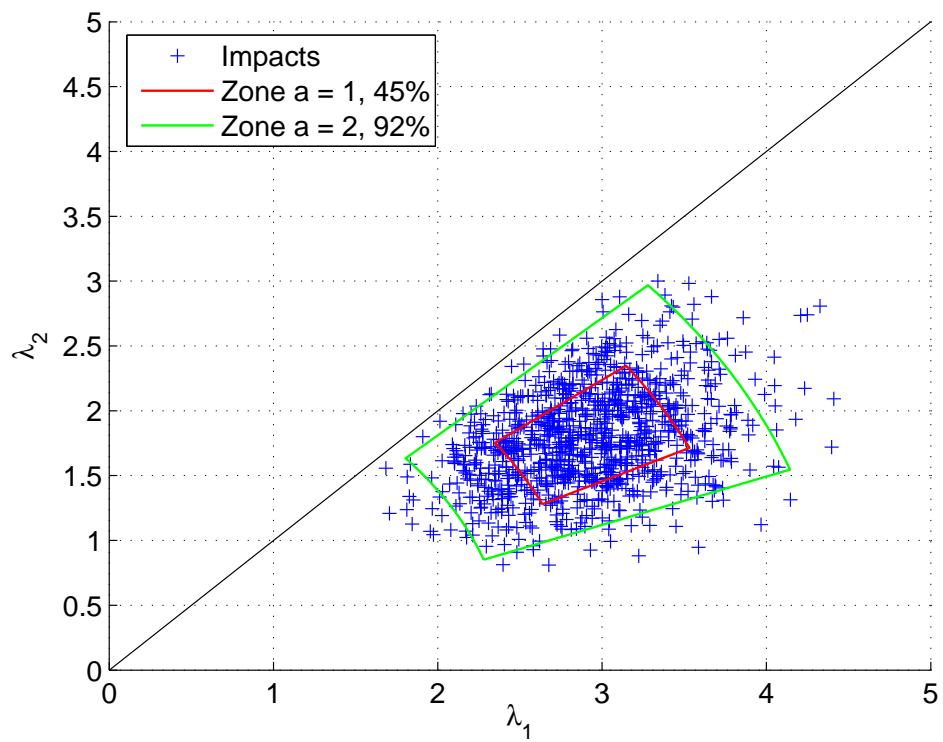


FIG. 3.14 – Visualisation des deux zones déterminant à 45% et 92% les deux plus grandes valeurs propres pour  $n_S = 4$ ,  $m = 2$  soit un système  $(2, 6)$



### 3.6 Résumé des formules

- La loi conjointe des valeurs propres d'une matrice de Wishart

$$f_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \kappa_m \prod_{i=1}^m e^{\lambda_i} \lambda_i^{n_S} \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i)^2$$

où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres ordonnées de  $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ ,  $m = \min(n_T, n_R)$ ,  $n_S = |n_T - n_R|$  et  $\kappa_m$  est le coefficient de normalisation défini par :

$$\kappa_m = \frac{1}{\prod_{i=1}^m (n_T - i)!(n_R - i)!}$$

- La loi marginale de  $\gamma$  pour  $m = 2$

$$f_{\gamma}^{(2)}(\gamma) = \frac{2^{-2n_S} (2n_S + 3)!}{n_S! (n_S + 1)!} \cos^2 2\gamma (\sin 2\gamma)^{2n_S + 1}$$

- La loi marginale de  $\rho$  pour  $m = 2$

$$f_{\rho}^{(2)}(\rho) = \frac{2}{(2n_S + 3)!} \rho^{7 + 4n_S} e^{-\rho^2}$$

- La loi marginale de  $\gamma$  pour  $m = 3$

$$f_{\gamma}^{(3)}(\gamma) = \frac{f_{\gamma}^{(2)}(\gamma)}{2(n_S + 1)(n_S + 2)} \left( \sum_{i=0}^2 a_i \sin^{2i} 2\gamma - (1 - \chi)^{2n_S + 4} \sum_{j=0}^{n_S + 2} b_j \chi^j \right)$$

où  $\chi = \frac{\sin^2 \gamma}{1 + \sin^2 \gamma}$ , et

$$\begin{cases} a_0 = (n_S + 1)(n_S + 2)(n_S^2 + 5n_S + 8) \\ a_1 = -(n_S + 1)(n_S + 2)(n_S + 4)(2n_S + 5) \\ a_2 = (n_S + 2)(n_S + 3)(2n_S + 5)(2n_S + 7)/4 \\ b_{n_S + 2} = 18(n_S + 1)(n_S + 2)C_{3n_S + 5}^{n_S + 2} \\ b_{n_S + 1} = 2(n_S + 1)(9n_S - 12)C_{3n_S + 4}^{n_S + 1} \\ b_k = (k^4 - 4(n_S + 5)k^3 + (6n_S^2 + 48n_S + 103)k^2 - (4n_S^3 + 36n_S^2 + 110n_S + 124)k \\ \quad + (n_S + 1)(n_S + 2)(n_S^2 + 5n_S + 8))C_{2n_S + 3 + k}^k \end{cases}$$



## Chapitre 4

# Étude des performances du précodeur

## max- $d_{\min}$

Lors de la détermination de la solution maximisant la distance minimale, nous avons vu que la solution n'était pas triviale et a été établie pour  $b = 2$  voies et une MAQ-4. De plus, un changement de variables définissant  $\rho$  et  $\gamma$  permettait de simplifier la solution : selon la valeur de l'angle par rapport à un seuil  $\gamma_0$ , le précodeur utilise une ou deux voies. Ce chapitre a pour objectif principal d'étudier les performances du précodeur max- $d_{\min}$  puis de le comparer avec les autres techniques de transmission limitées également à deux flux de données et à une efficacité spectrale de 4 bit/s/Hz. Pour commencer, les expressions des deux critères importants que sont la distance minimale et le rapport signal sur bruit (RSB) à la réception seront données pour les différents précodeurs en fonction des deux variables  $\rho$  et  $\gamma$ . Ces résultats permettront de démontrer que l'ordre de diversité du précodeur max- $d_{\min}$  est maximal et égal à  $n_T \times n_R$  comme le max-SNR. L'observation conjointe des deux critères et des densités de probabilité ( $ddp$ ) obtenues dans le chapitre précédent permettra de mener une étude qualitative des performances des différents précodeurs. Nous verrons que la variable  $\gamma$  joue un rôle-clé dans les comportements des précodeurs. Ensuite, une approximation de la PEB du précodeur max- $d_{\min}$  sera déterminée mais restera limitée aux cas  $\min(n_T, n_R) = 2$ .

### 4.1 Expressions de deux critères importants : le RSB post-traitement et la distance minimale

#### 4.1.1 Définitions des deux paramètres

Ce paragraphe précise les expressions de deux critères importants pour chaque précodeur. Ces deux critères sont le rapport signal sur bruit post-traitement et la distance euclidienne minimale. Ces deux paramètres sont d'ailleurs optimisés par les précodeurs max-SNR et max- $d_{\min}$ .

### Le rapport signal sur bruit post-traitement

Le RSB post-traitement est défini dans [59] par :

$$\Theta = \text{trace} \left( \mathbf{GHFs}(\mathbf{GHFs})^* (\mathbf{GR}_n \mathbf{G}^*)^{-1} \right) \quad (4.1)$$

avec  $\mathbf{H}$  la matrice de canal,  $\mathbf{s}$  le vecteur de symboles émis,  $\mathbf{R}_n$  la matrice d'autocorrélation du bruit,  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}$  les matrices de précodage et décodage. Rappelons que nous avons posé comme hypothèse que l'énergie des symboles est normalisée ( $E[\mathbf{ss}^*] = \mathbf{I}_b$ ). De plus, la transformation en canal virtuel blanchit le bruit, ceci se traduisant par une matrice de corrélation du bruit virtuel égale à l'identité. Cela permet de simplifier l'expression (4.1) dans le canal virtuel :

$$\Theta = \text{trace} \left( \mathbf{G}_d \mathbf{H}_v \mathbf{F}_d (\mathbf{G}_d \mathbf{H}_v \mathbf{F}_d)^* (\mathbf{G}_d \mathbf{G}_d^*)^{-1} \right) \quad (4.2)$$

où toutes les matrices sont carrées de dimension  $2 \times 2$ . La matrice  $\mathbf{G}_d$  est inversible et l'opérateur trace vérifie  $\text{trace}(\mathbf{AB}) = \text{trace}(\mathbf{BA})$ . La matrice  $\mathbf{G}_d$  n'intervient plus dans l'expression (4.2) :

$$\Theta = \text{trace} \left( \mathbf{H}_v \mathbf{F}_d \mathbf{F}_d^* \mathbf{H}_v^* \right). \quad (4.3)$$

Une dernière simplification est encore possible si on considère un précodeur diagonal. Le RSB post-traitement devient alors :

$$\Theta = \sum_{i=1}^b \sigma_i^2 f_i^2 \quad (4.4)$$

avec  $\mathbf{F}_v = \text{diag}(f_1, \dots, f_b)$  et  $\mathbf{H}_v = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_b)$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_b$  les valeurs singulières ordonnées. Dans la suite du chapitre, le bruit additif réel est supposé *iid*  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma_n^2)$  et l'étape de blanchiment du bruit (*cf.* paragraphe 2.2.2) n'est pas nécessaire. Le système virtuel par voie peut être réécrit :

$$y_i = \sqrt{P_0} g_i \sqrt{\lambda_i} f_i s_i + g_i n_i \quad (4.5)$$

où  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_b$  sont les valeurs propres ordonnées de  $\mathbf{HH}^*$  et  $n_i$  est BBAG *iid* de variance  $\sigma_n^2$ . Il est possible de mettre le terme  $\sqrt{P_0}$  en facteur en imposant une contrainte de puissance unitaire à  $\mathbf{F}_d$ . La nouvelle notation du RSB post-traitement est donnée par :

$$\Theta = \sum_{i=1}^b P_0 \frac{\lambda_i}{\sigma_n^2} f_i^2 = \text{RSB} \sum_{i=1}^b \lambda_i f_i^2 \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^b f_i^2 = 1. \quad (4.6)$$

### La distance minimale euclidienne

La distance minimale est définie précédemment par (2.66) mais reste une expression générale. Tout comme le RSB post-traitement, l'hypothèse de la structure particulière des précodeurs diagonaux permet de simplifier cette expression. Reprenons la définition de la distance minimale au carré :

$$d_{\min}^2 = \min_{\mathbf{s}, \mathbf{x} \in C^b, \mathbf{x} \neq \mathbf{s}} \|\sqrt{P_0} \mathbf{H}_v \mathbf{F}_d (\mathbf{s} - \mathbf{x})\|^2 = \min_{\mathbf{s}, \mathbf{x} \in C^b, \mathbf{x} \neq \mathbf{s}} P_0 \sum_{i=1}^b \lambda_i f_i^2 |s_i - x_i|^2 \quad (4.7)$$

avec  $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_b]^T$ ,  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_b]^T$  et  $\|\mathbf{F}_d\|_F^2 = 1$ . Le résultat est la somme des distances au carré de chaque sous-canal. Cette somme est formée de termes positifs qui peuvent s'annuler mais qui ne sont jamais nuls tous ensemble : la distance minimale correspond au cas où les vecteurs  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{x}$  ne diffèrent que d'un symbole. La distance minimale des précodeurs diagonaux avec la même modulation est :

$$d_{\min}^2 = P_0 \min_{i=1, \dots, b} \lambda_i f_i^2 \min_{s, x \in C, s \neq x} |s - x|^2 = 4P_0 \beta_M \min_{i=1, \dots, b} \lambda_i f_i^2 \quad (4.8)$$

où  $4\beta_M$  est la distance minimale au carré de la constellation définie précédemment pour la MAQ- $M$  (cf. équation 2.58).

Reprenons maintenant les différents précodeurs et déterminons les expressions de  $d_{\min}$  et  $\Theta$ . Le précodeur max- $d_{\min}$  limite le nombre de voies à deux et les deux critères seront exprimés pour  $b = 2$  en fonction de  $\rho$  et  $\gamma$ .

#### 4.1.2 Application aux précodeurs

Tous les précodeurs à l'exception du TEBM ont l'allocation de puissance définie par des fractions rationnelles de  $\sin \gamma$ ,  $\cos \gamma$  ou  $\tan \gamma$  (cf. le tableau 2.2). La détermination de la distance est alors tout à fait possible. La solution proposée par le TEBM utilise la fonction de Lambert  $W_0$  et présente une expression de la distance minimale en fonction de  $\rho$  et  $\gamma$  plus compliquée. Pour cette raison, ce précodeur n'apparaît pas dans cette étude.

##### max-SNR

Le précodeur n'utilise que la voie ayant le plus grand gain  $\sqrt{\lambda_1}$ . Il est alors équivalent à un système SISO et la distance minimale est directement donnée par :

$$d_{\min}^2(\text{max-SNR}) = 4P_0 \beta_M \lambda_1 = 4P_0 \beta_M \rho^2 \cos^2 \gamma. \quad (4.9)$$



Le RSB post-traitement est alors :

$$\Theta(\text{max-SNR}) = \text{RSB}\rho^2 \cos^2 \gamma = \Phi \cos^2 \gamma \quad (4.10)$$

où  $\Phi = \text{RSB}\rho^2$  est homogène à un RSB de réception. Les deux termes varient en  $\cos^2 \gamma$  et nous pouvons dire que ces deux fonctions sont décroissantes et non nulles sur  $[0, \pi/4]$ . La constante  $\beta_M$  dépend de la modulation et prend les valeurs 1/2 pour la MAQ-4 et 1/10 pour la MAQ-16.

### Précodeur WF

Ce précodeur peut utiliser une ou deux voies avec un choix basé sur la valeur de l'angle  $\gamma$  par rapport à un seuil  $\gamma_{WF}$  dépendant de  $\Phi$  (cf. tableau 2.2). Lorsque la seconde voie est supprimée, le précodeur WF est équivalent au max-SNR. Pour simplifier l'expression des deux paramètres, nous considérons la limite du précodeur  $\mathbf{F}_d$  quand  $\Phi$  tend vers l'infini. Il utilise alors les deux voies et la distance est :

$$d_{\min}^2(\text{WF}) = 2P_0\beta_M\rho^2 \sin^2 \gamma \quad (4.11)$$

et le RSB post-traitement :

$$\Theta(\text{WF}) = \frac{\Phi}{2}. \quad (4.12)$$

Les expressions des deux paramètres sont totalement différentes de celles du max-SNR : la distance minimale est croissante et s'annule pour  $\gamma_0$  alors que le RSB post-traitement est proportionnel à  $\Phi$ . Ceci s'explique par le fait que le précodeur émet la même puissance sur les deux voies. Lorsque le second gain est mauvais ( $\gamma \rightarrow 0$ ), le signal reçu sur cette voie est très faible et la distance tend vers zéro. La puissance totale reçue correspond alors à la première voie.

### Erreur Quadratique Moyenne Minimale

Le cas de l'EQMM est semblable au WF dans le sens où il choisit d'utiliser une ou deux voies en fonction de la valeur de  $\gamma$ . La valeur du seuil  $\gamma_{\text{EQMM}}(\Phi)$  n'est pas la même et la figure 4.1 illustre cette différence. Le précodeur EQMM a tendance à utiliser plus souvent les deux sous-canaux mis à disposition. De la même façon que pour le WF, nous utiliserons la limite du précodeur quand  $\Phi$  tend vers l'infini. Les deux critères pour la limite du précodeur sont :

$$d_{\min}^2(\text{EQMM}) = 4P_0\beta_M\rho^2 \frac{\sin^2 \gamma}{1 + \tan \gamma} \quad (4.13)$$

et

$$\Theta(\text{EQMM}) = \Phi \cos \gamma \sin \gamma = \frac{\Phi}{2} \sin 2\gamma. \quad (4.14)$$

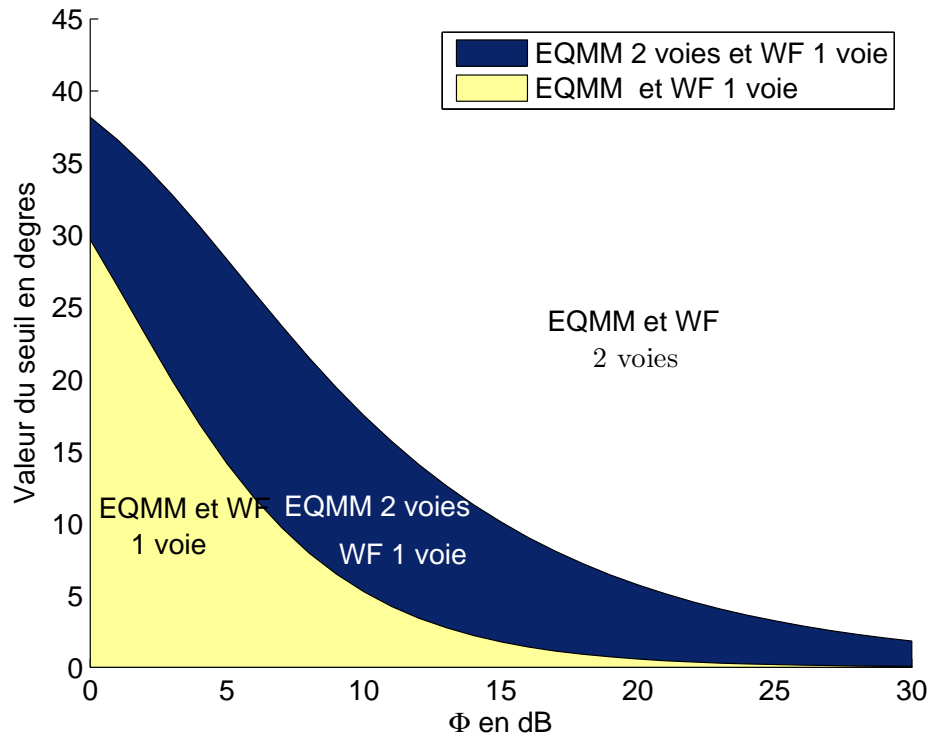


FIG. 4.1 – Nombre de voies utilisées par les précodeurs WF et EQMM en fonction de la variable  $\Phi$ . La frontière est définie par les angles  $\gamma_{WF}$  et  $\gamma_{EQMM}$ .

Les deux résultats sont des fonctions croissantes s'annulant pour  $\gamma = 0$ . Nous avons vu que ce précodeur tente de compenser la plus mauvaise voie allant même jusqu'à supprimer la puissance émise sur la plus forte. Cela se traduit par une distance qui s'annule lorsque  $\gamma$  tend vers 0 et une puissance de signal reçu nulle.

### Qualité de Service

La solution privilégie la première voie en assurant le rapport des RSB  $\omega_1$  désiré. C'est donc la distance de la seconde voie qui détermine  $d_{\min}$  :

$$d_{\min}^2(\text{QdS}) = 4P_0\beta_M\rho^2 \frac{\sin^2\gamma}{\omega_1 \tan^2\gamma + 1} \quad \text{avec} \quad \omega_1 \geq 1. \quad (4.15)$$

Le RSB post-traitement est exprimé par :

$$\Theta(\text{QdS}) = \Phi \frac{2 \sin^2\gamma}{\omega_1 \tan^2\gamma + 1}. \quad (4.16)$$

Les deux termes varient en  $\frac{\sin^2\gamma}{1+\omega_1 \tan^2\gamma}$  dont les variations sont une partie croissante puis décroissante (l'angle donnant le maximum dépend de  $\omega_1$ ). Ils s'annulent lorsque  $\gamma = 0$ .

### Erreur Egale

La distance minimale de ce précodeur peut être facilement généralisée en fonction du nombre de voies. En effet, avoir le même gain global sur tous les sous-canaux a pour conséquence de donner la même distance minimale si toutes les modulations sont les mêmes :

$$d_{\min}^2(\text{EE}) = \frac{4P_0\beta_M}{\sum_{k=1}^b \frac{1}{\lambda_k}} \quad (4.17)$$

et

$$\Theta(\text{EE}) = \Phi \frac{b}{\sum_{k=1}^b \frac{1}{\lambda_k}}. \quad (4.18)$$

Ces expressions deviennent dans le cas de deux voies en fonction de  $\gamma$  et  $\rho$  :

$$d_{\min}^2(\text{EE}) = 4P_0\beta_M\rho^2 \cos^2\gamma \sin^2\gamma = P_0\beta_M\rho^2 \sin^2 2\gamma \quad (4.19)$$

et

$$\Theta(\text{EE}) = 2\Phi \cos^2\gamma \sin^2\gamma = \frac{\Phi}{2} \sin^2 2\gamma. \quad (4.20)$$

Les deux termes varient en  $\sin^2\gamma$  : ils s'annulent pour  $\gamma = 0$  puis croît lorsque  $\gamma$  augmente. Il est à noter que les distances minimales des trois précodeurs EE, WF et EQMM sont égales pour  $\gamma = \pi/4$ .

### Précodeur max- $d_{\min}$

Ce précodeur a une solution analogue aux précodeurs WF et EQMM : l'utilisation d'une ou deux voies dépend de la valeur de  $\gamma$ . La différence notoire est la valeur du seuil  $\gamma_0$  qui reste constante quels que soient le canal et le RSB. Si  $\gamma \leq \gamma_0$ , le précodeur max- $d_{\min}$  choisit la matrice  $\mathbf{F}_{r1}$  qui n'utilise qu'une seule voie et dans le cas contraire  $\mathbf{F}_{octa}$  qui mélange les deux symboles sur les deux voies. Ces deux matrices ne sont pas diagonales. Seul l'angle  $\gamma$  est déterminant quelle que soit la valeur de  $\Phi$ . L'expression de la distance minimale doit prendre en compte les deux possibilités contrairement aux WF et EQMM lorsque  $\Phi$  tendait vers l'infini. L'expression de la distance minimale pour des symboles en MAQ-4 est [69] :

$$d_{\min}^2(\text{max-}d_{\min}) = \begin{cases} (1 - \frac{1}{\sqrt{3}})\Phi \cos^2\gamma & \text{si } 0 < \gamma \leq \gamma_0 \text{ (utilisation du } \mathbf{F}_{r1}) \\ \frac{(4 - 2\sqrt{2})\Phi \cos^2\gamma \sin^2\gamma}{1 + (2 - 2\sqrt{2})\cos^2\gamma} & \text{sinon (utilisation du } \mathbf{F}_{octa}) \end{cases}, \quad (4.21)$$

$$\Theta(\text{max-}d_{\min}) = \begin{cases} \Phi \cos^2\gamma & \text{si } 0 < \gamma \leq \gamma_0 \\ \Phi \frac{(3 + 2\sqrt{2})\cos^4\gamma + \sin^2\gamma}{1 + (3 + 2\sqrt{2})\cos^2\gamma} & \text{sinon} \end{cases}. \quad (4.22)$$

Les paramètres ont deux comportements distincts. Pour  $\gamma \leq \gamma_0$ , la distance et le RSB post-traitement sont semblables à ceux du max-SNR : c'est une fonction décroissante qui ne s'annule pas. Pour  $\gamma \geq \gamma_0$ , le

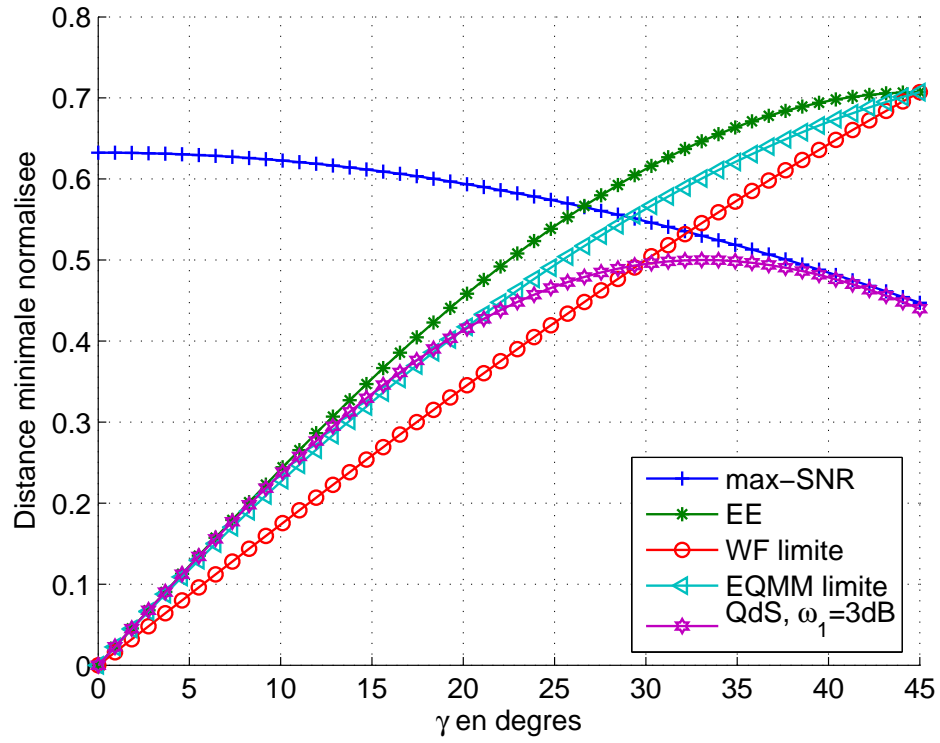


FIG. 4.2 – Distance euclidienne minimale normalisée (4.23) pour les précodeurs diagonaux en fonction de  $\gamma$ . La modulation est une MAQ-4 sur deux voies ou une MAQ-16 sur une voie.

$\max-d_{\min}$  ressemble alors aux précodeurs diagonaux :  $d_{\min}$  et  $\Theta$  augmentent quand  $\gamma$  croît.

### 4.1.3 Comparaison graphique

#### Normalisation de la distance

La comparaison de toutes les distances minimales définies précédemment permet de mettre en évidence le terme  $\sqrt{P_0\rho}$  intervenant comme un même facteur d'échelle pour tous les précodeurs. Par conséquent, le comportement des distances est qualitativement défini par l'angle  $\gamma$  et c'est pourquoi nous nous intéresserons à la distance minimale normalisée définie par :

$$\bar{d}_{\min} = \frac{d_{\min}}{\sqrt{P_0\rho}} \quad (4.23)$$

dont l'expression ne dépend que de l'angle  $\gamma$ .

#### Distance minimale normalisée des précodeurs diagonaux

La figure 4.2 représente les distances minimales pour les précodeurs diagonaux seuls dans un premier temps. Les  $\bar{d}_{\min}$  des précodeurs WF, EQMM et EE ont des comportements semblables : la distance est nulle lorsque  $\gamma = 0$  puis augmente pour atteindre un maximum pour  $\gamma = \pi/4$ . Le précodeur QdS 3dB a

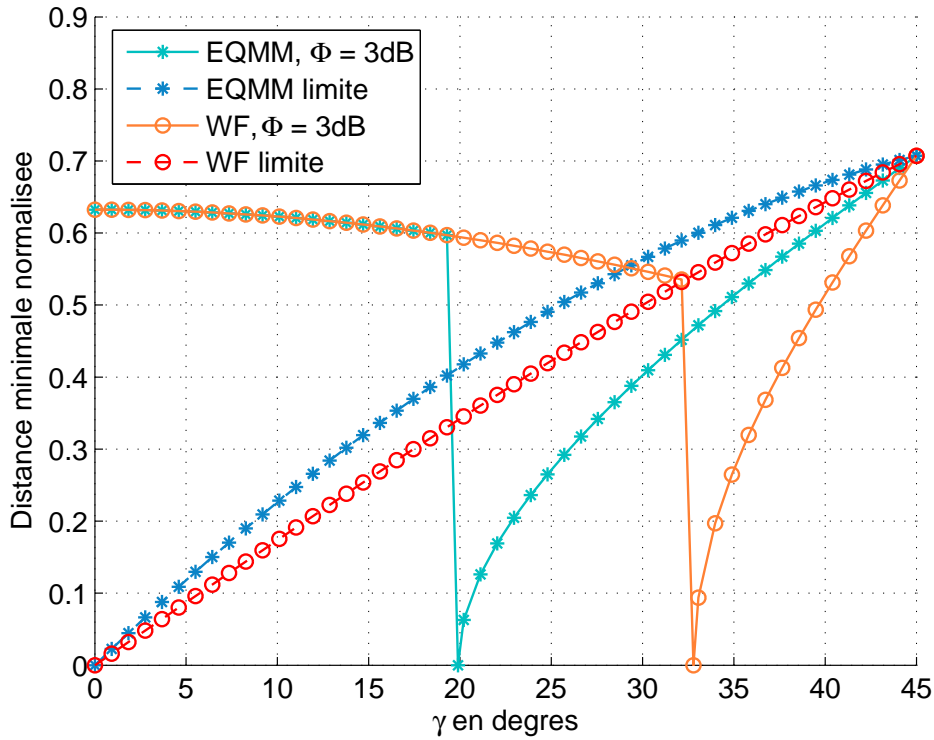


FIG. 4.3 – Distance euclidienne minimale normalisée pour les précodeurs WF et EQMM en fonction de  $\gamma$  pour  $\Phi = 3\text{dB}$  et  $\Phi \rightarrow \infty$ . La modulation est une MAQ-4 sur deux voies ou une MAQ-16 sur une voie.

une distance minimale dont l'évolution se différencie lorsque  $\gamma$  est proche de  $\pi/4$ . Ces observations des distances montrent clairement que des valeurs faibles de  $\gamma$  ne sont pas favorables aux précodeurs cités. Contrairement à eux, la distance minimale du max-SNR ne s'annule jamais et est décroissante lorsque  $\gamma$  augmente. Le précodeur max-SNR présente une exception et est l'opposé des précodeurs diagonaux dans le sens où il présente une distance minimale maximale pour des faibles valeurs de  $\gamma$ . L'augmentation de l'angle désavantage le max-SNR qui finit par présenter une des plus petites distances avec le QdS.

D'autre part, les distances présentées pour le WF et le EQMM sont valables pour de fortes valeurs de  $\Phi$  où les précodeurs utilisent les deux sous-canaux. Lorsque  $\Phi$  est plus faible, ils suppriment la seconde voie et se comportent alors comme le max-SNR. La figure 4.3 trace les distances des précodeurs WF et EQMM pour un cas intermédiaire  $\Phi = 3\text{dB}$  et pour  $\Phi \rightarrow \infty$ . Il apparaît une discontinuité dans la fonction avec d'un côté le comportement du max-SNR avec une variation en  $\cos \gamma$  et de l'autre côté une fonction croissante qui démarre de 0. Comme nous l'avons vu avec la figure 4.1, le seuil de basculement d'une à deux voies n'est pas le même pour les deux précodeurs : le WF utilise plus souvent un seul sous-canal. Les probabilités d'utilisation d'une ou deux voies sont disponibles dans [71]. Par exemple, pour un système (2,2) suivant une loi de Rayleigh, nous avons :

$$\begin{cases} P_{\text{WF}}(1 \text{ voie})|_{\text{RSB}=12\text{dB}} & \simeq 0.11 \\ P_{\text{EQMM}}(1 \text{ voie})|_{\text{RSB}=12\text{dB}} & \simeq 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

Les précodeurs WF et EQMM utilisent une seule voie pour des faibles RSB mais la probabilité de ce cas diminue rapidement lorsque le RSB augmente. Par conséquent, nous considérerons que ces précodeurs utilisent les deux sous-canaux. De plus, la forme limite de ces précodeurs lorsque  $\Phi$  tend vers l'infini fournit une borne supérieure de la distance. C'est pourquoi l'étude suivante comparera les formes simplifiées du précodeur.

#### Distance minimale normalisée du max- $d_{\min}$

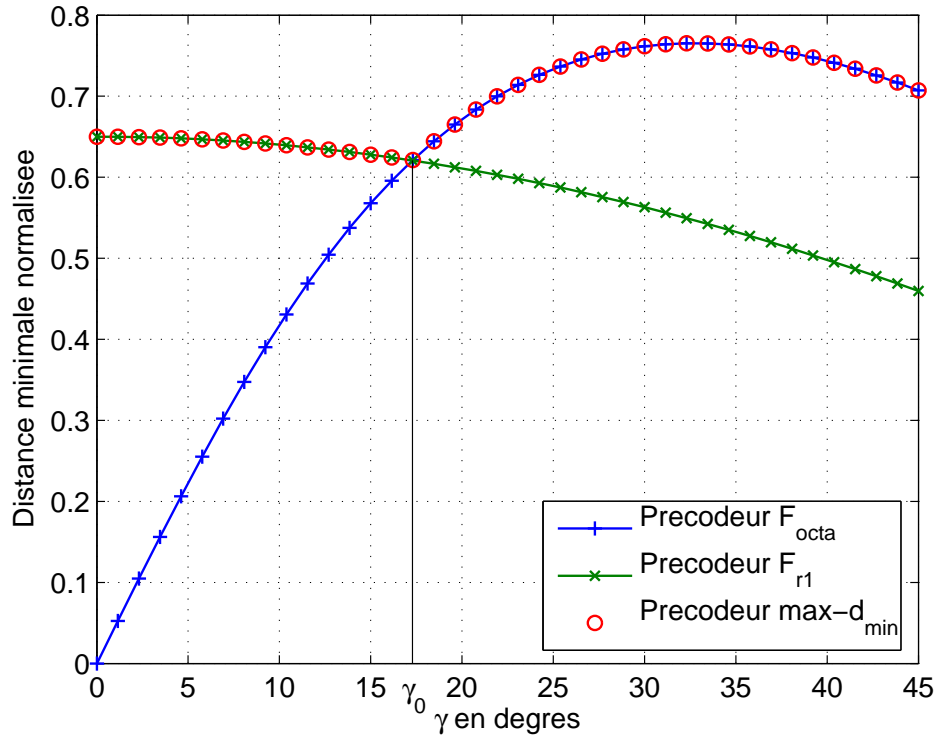
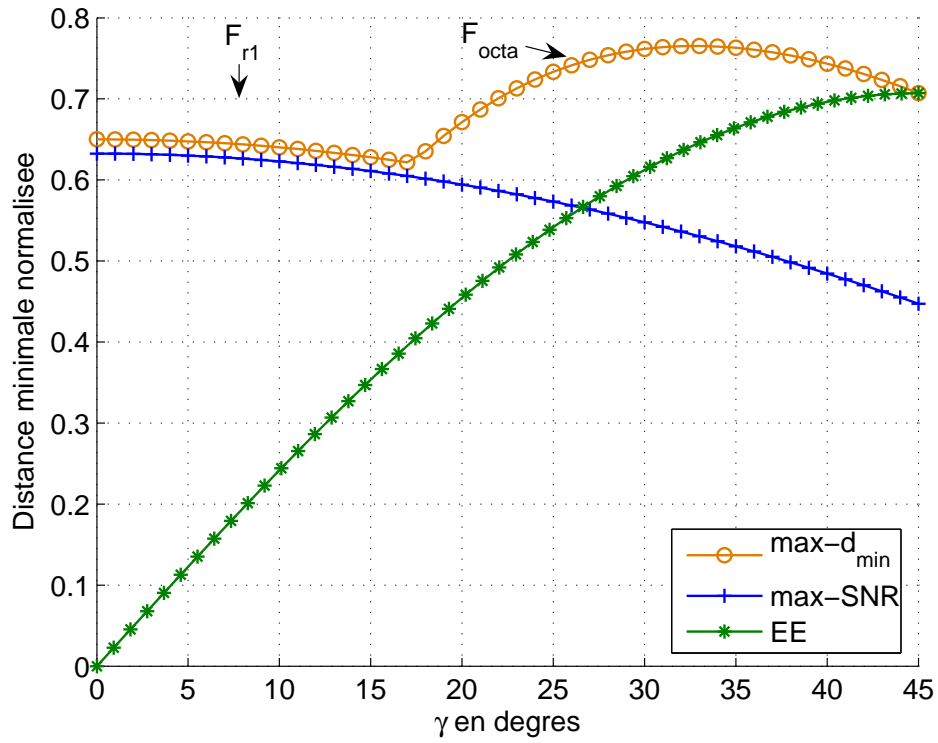
Lors de la détermination de la distance minimale (4.21), nous avons évoqué la possibilité d'utiliser deux formes de précodeurs,  $\mathbf{F}_{r1}$  ou  $\mathbf{F}_{octa}$ , avec deux comportements différents. La figure 4.4 représente les distances minimales normalisées des précodeurs  $\mathbf{F}_{r1}$ ,  $\mathbf{F}_{octa}$  et max- $d_{\min}$  en fonction de  $\gamma$ . Dans un premier temps, considérons les distances de  $\mathbf{F}_{r1}$  et  $\mathbf{F}_{octa}$ . Leur observation montre des comportements similaires avec les précodeurs diagonaux et le max-SNR :

- le  $\mathbf{F}_{r1}$  ressemble au max-SNR avec une variation en  $\cos \gamma$ . Celui-ci propose un  $d_{\min}$  élevé pour des faibles  $\gamma$  mais n'est plus aussi performant quand l'angle est important.
- $\mathbf{F}_{octa}$  est semblable aux précodeurs diagonaux avec une distance nulle pour  $\gamma = 0$  puis croissante quand l'angle augmente (avec une légère chute sur la fin).

Le choix du max- $d_{\min}$  revient à choisir le précodeur qui propose la plus grande distance. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter la thèse [69]. Cette sélection permet de garder les avantages de chacun : la distance ne tend pas vers 0 lorsque l'angle s'annule et la distance augmente lorsque  $\gamma$  est supérieur à  $\gamma_0$ . Ce résultat est visible sur la figure 4.5 qui permet la comparaison des distances normalisées du précodeur max- $d_{\min}$  avec le EE présentant la plus grande distance des précodeurs diagonaux et le max-SNR. Comme prévu, la distance minimale  $\bar{d}_{\min}$  du précodeur max- $d_{\min}$  est toujours la plus grande. Toutefois, deux zones peuvent être séparées : lorsque  $\gamma \leq \gamma_0$ , les précodeurs max- $d_{\min}$  et max-SNR ont des distances très proches puis quand  $\gamma > \gamma_0$ , la distance du précodeur max- $d_{\min}$  augmente significativement grâce à sa structure non diagonale.

## 4.2 Démonstration de l'ordre de diversité maximal du précodeur max- $d_{\min}$

Lors de la détermination du précodeur max- $d_{\min}$  dans [69], les simulations laissaient deviner que l'ordre de diversité était maximal. Ce paragraphe démontre théoriquement que le précodeur obtient l'ordre de diversité  $n_T \times n_R$  avec la modulation MAQ-4. Cette démonstration est analogue à celle du max-SNR rapportée dans [79, pp. 99–100]. En effet, l'ordre de diversité du max-SNR est théoriquement reconnu pour être maximal pour un canal de Rayleigh. Considérons d'abord l'approximation de la probabilité d'erreur symbole

FIG. 4.4 – Distance minimale normalisée pour le précodeur max- $d_{\min}$  en fonction de  $\gamma$ FIG. 4.5 – Distance minimale normalisée pour les précodeurs max- $d_{\min}$ , max-SNR, EE (meilleur des précodeurs diagonaux, cf. figure 4.2) en fonction de  $\gamma$

basée sur la méthode des plus proches voisins. L'expression de l'approximation est :

$$\text{PES} \leq \frac{\bar{N}_e}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{d_{\min}^2 (\max-d_{\min})}{4\sigma_n^2}} \right) \quad (4.25)$$

où  $\bar{N}_e$  est le nombre moyen des plus proches voisins par vecteur symbole [5]. À cause de l'optimisation du critère  $d_{\min}$ , les plus proches voisins sont tous à la même distance optimisée  $d_{\min}(\max-d_{\min})$ . Alors, la constante  $\bar{N}_e$  correspond exactement au nombre moyen de vecteurs symbole à cette distance minimale, et (4.25) peut être considérée comme une bonne approximation de la vraie PES. Les expressions des différentes distances des précodeur  $\mathbf{F}_{r1}$  et  $\mathbf{F}_{octa}$  (4.21) vont nous permettre d'encadrer la distance avec deux bornes ne dépendant que de  $\lambda_1$ . Tout d'abord, il est aisé de vérifier que la distance minimale du précodeur max- $d_{\min}$  est minorée par celle du  $\mathbf{F}_{r1}$  (visible également sur la figure 4.4). Ensuite, considérons l'inégalité suivante permettant de trouver la borne supérieure :

$$\frac{(4 - 2\sqrt{2}) \sin^2 \gamma}{1 + (2 - 2\sqrt{2}) \cos^2 \gamma} \leq 1. \quad (4.26)$$

Le résultat est l'encadrement de  $d_{\min}$  du max- $d_{\min}$  :

$$P_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \rho^2 \cos^2 \gamma \leq d_{\min}^2 (\max-d_{\min}) \leq P_0 \rho^2 \cos^2 \gamma, \quad (4.27)$$

et comme  $\lambda_1 = \rho^2 \cos^2 \gamma$  :

$$P_0 \xi \lambda_1 \leq d_{\min}^2 (\max-d_{\min}) \leq P_0 \lambda_1 \quad (4.28)$$

où  $\xi$  est une constante égale à  $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ . En reprenant ensuite l'encadrement de la plus grande valeur propre [79] en fonction de  $\|\mathbf{H}\|_F^2$  :

$$\frac{\|\mathbf{H}\|_F^2}{m} \leq \lambda_1 \leq \|\mathbf{H}\|_F^2 \quad \text{avec} \quad m = \min(n_T, n_R) \quad (4.29)$$

nous avons :

$$\frac{P_0 \xi \|\mathbf{H}\|_F^2}{m} \leq d_{\min}^2 (\max-d_{\min}) \leq P_0 \|\mathbf{H}\|_F^2. \quad (4.30)$$

La probabilité d'erreur symbole définie par (4.25) donne l'encadrement :

$$\frac{\bar{N}_e}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{P_0 \|\mathbf{H}\|_F^2}{4\sigma_n^2}} \right) \leq \text{PES} \leq \frac{\bar{N}_e}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{P_0 \xi \|\mathbf{H}\|_F^2}{4m\sigma_n^2}} \right). \quad (4.31)$$

L'étape suivante de la démonstration est d'utiliser la borne de Chernoff définie par :

$$\operatorname{erfc}(x) \simeq e^{-x^2} \quad \text{pour} \quad x \gg 1. \quad (4.32)$$



Ce résultat donne une borne supérieure de la PES mais il peut être considéré comme une bonne approximation pour des forts RSB. Elle peut servir à étudier l'ordre de diversité puisque celui-ci est défini à fort RSB. L'inégalité (4.30) reste donc vraie avec la borne de Chernoff et devient :

$$\frac{\bar{N}_e}{2} e^{-\frac{P_0 \|\mathbf{H}\|_F^2}{4\sigma_n^2}} \leq \text{PES} \leq \frac{\bar{N}_e}{2} e^{-\frac{P_0 \xi \|\mathbf{H}\|_F^2}{4m\sigma_n^2}}. \quad (4.33)$$

Il reste maintenant à moyenner la PES selon la loi du canal  $\mathbf{H}$  en utilisant le résultat sur la loi de Rayleigh [79] (les éléments de  $\mathbf{H}$  sont  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$  iid) :

$$E[e^{-x \|\mathbf{H}\|_F^2}] = (1+x)^{-n_T n_R}. \quad (4.34)$$

Pour les hauts RSB (avec  $\text{RSB} = P_0/\sigma_n^2$ ), les bornes supérieures et inférieures de la PES sont :

$$\frac{\bar{N}_e}{2} \left( \frac{\text{RSB}}{4} \right)^{-n_T n_R} \leq \overline{\text{PES}} \leq \frac{\bar{N}_e}{2} \left( \frac{\text{RSB} \xi}{4m} \right)^{-n_T n_R}. \quad (4.35)$$

La PES moyenne est encadrée par deux termes qui varient en  $\text{RSB}^{-n_T \times n_R}$ . L'ordre de diversité de max- $d_{\min}$  est par conséquent égal à  $n_T \times n_R$ . Parmi les autres méthodes présentées dans ce mémoire, seuls le max-SNR et les codes spatio-temporels vérifient cette propriété. Dans le chapitre 5, nous vérifierons que les précodeurs diagonaux ont un ordre de diversité plus faible.

### 4.3 Étude qualitative des performances à l'aide de $d_{\min}$ et de $\gamma$

#### 4.3.1 Introduction : outils de comparaison

Ce paragraphe propose d'étudier les performances du précodeur max- $d_{\min}$  avec pour but une comparaison qualitative et non quantitative du TEB [80]. Pour ce faire, les deux critères présentés précédemment ( $d_{\min}$  et  $\Theta$ ) seront normalisés par rapport à ceux du max- $d_{\min}$ . L'étude portera sur les différents rapports de  $d_{\min}$  et  $\Theta$  définis par :

$$R_{d_{\min}}(\text{Précodeur}) = \frac{d_{\min}(\text{Précodeur})}{d_{\min}(\text{max-}d_{\min})} = \frac{\bar{d}_{\min}(\text{Précodeur})}{\bar{d}_{\min}(\text{max-}d_{\min})}, \quad (4.36)$$

$$R_{\Theta}(\text{Précodeur}) = \frac{\Theta(\text{Précodeur})}{\Theta(\text{max-}d_{\min})}. \quad (4.37)$$

Le précodeur max- $d_{\min}$  est la solution optimale maximisant  $d_{\min}$  et par conséquent  $R_{d_{\min}}(\text{Précodeur}) \leq 1$ . De la même façon rappelons également que le précodeur max-SNR maximise le critère  $\Theta$  et nous avons donc  $R_{\Theta}(\text{max-SNR}) \geq 1$ . Il s'agit alors d'étudier les différences de comportement des précodeurs en fonction du canal. Par exemple, nous avons déjà vu que certains canaux présentant une matrice mal conditionnée avantagent le max-SNR tandis qu'ils pénalisent les précodeurs diagonaux. Les deux paramètres que nous

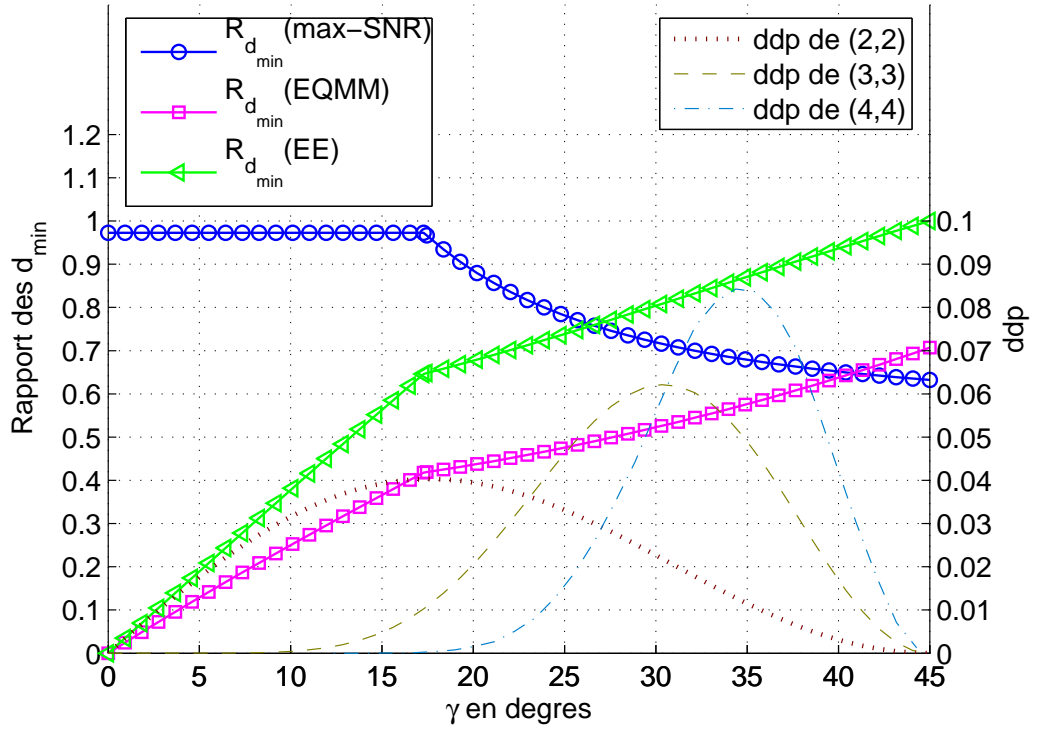


FIG. 4.6 – Distances minimales des précodeurs max-SNR, EQMM et EE normalisées par rapport à la distance minimale de max- $d_{\min}$ . Les  $ddp$  de l'angle  $\gamma$  pour les systèmes (2,2), (3,3) et (4,4) sont superposées.

venons de définir prennent le précodeur max- $d_{\min}$  comme référence et permettront ainsi une comparaison plus facile. Cette comparaison est d'autant plus facile qu'elle ne dépend que d'un seul paramètre : les termes  $\Phi = \text{RSB}\rho^2$  et  $P_O\rho^2$  peuvent être mis en facteur soit dans la distance minimale (cf.  $\bar{d}_{\min}$  eq. (4.23)) ou le RSB post-traitement. Ainsi, ces termes se simplifient dans les rapports et ces derniers ne dépendent plus que de la modulation via la constante  $\beta_M$  (1/2 pour la MAQ-4 et 1/10 pour la MAQ-16) et de l'angle  $\gamma$  : l'étude de  $R_{d_{\min}}$  (Précodeur) et  $R_{\Theta}$  (Précodeur) peut être menée à l'aide de  $\gamma$ .

#### 4.3.2 Etude des rapports des distances minimales et des RSB post-traitement en fonction des statistiques de $\gamma$

Les figures 4.6 et 4.7 représentent respectivement  $R_{d_{\min}}$  (Précodeur) et  $R_{\Theta}$  (Précodeur) pour les précodeurs max-SNR, EE et EQMM. De plus, les densités de probabilités de l'angle  $\gamma$  sont représentées pour les systèmes (2,2), (3,3) et (4,4) ( $n_S = 0$  et  $m \in \{2,3,4\}$ ). Les résultats théoriques sont disponibles pour  $m \in \{2,3\}$  dans le chapitre 3 et la  $ddp$  pour  $m = 4$  est simulée avec un tirage de  $10^5$  matrices  $\mathbf{H}$ . Comme pour les courbes de  $\bar{d}_{\min}$  du précodeur max- $d_{\min}$  et pour les mêmes raisons, une discontinuité apparaît pour  $\gamma = \gamma_0$  et nous distinguons trois zones.

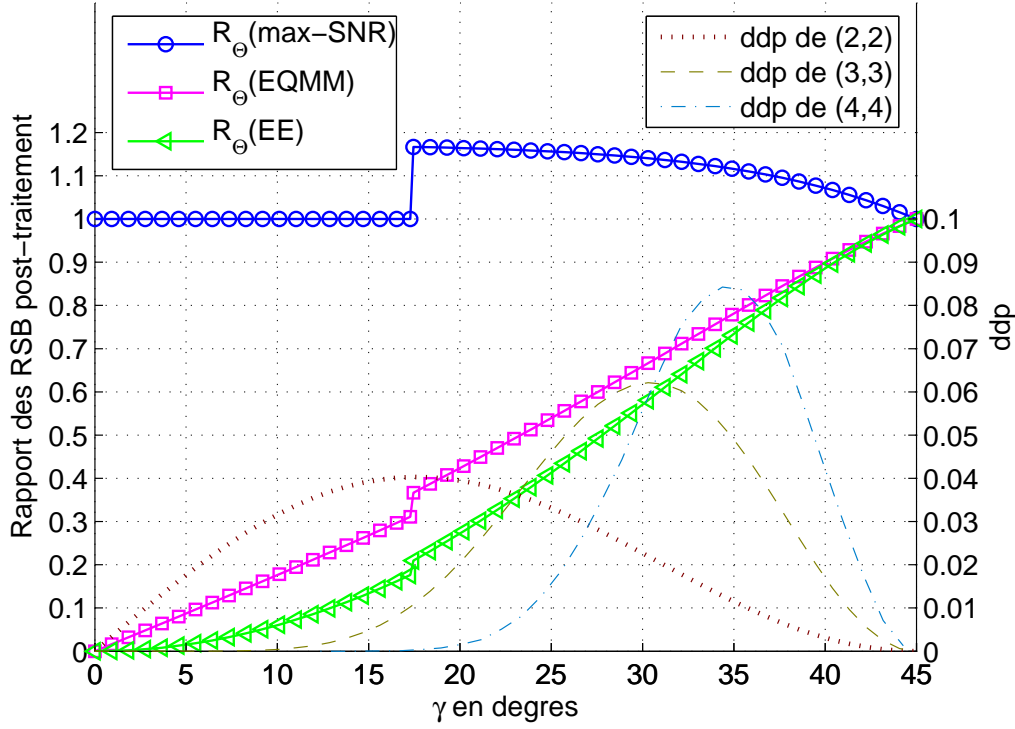


FIG. 4.7 – RSB post-traitement des précodeurs max-SNR, EQMM et EE normalisés par rapport au RSB post-traitement de max- $d_{\min}$ . Les ddp de l'angle  $\gamma$  pour les systèmes (2,2), (3,3) et (4,4) sont superposées.

#### Zone 1 : $0 \leq \gamma \leq \gamma_0$

Cette première zone correspond à la solution  $\mathbf{F}_{r1}$  du précodeur max- $d_{\min}$  qui n'utilise que le premier sous-canal. Nous avons vu que le précodeur max-SNR maximise le RSB post-traitement  $\Phi$  et revenons sur cette optimisation. En effet, la solution générale qui maximise ce paramètre est :

$$\mathbf{F}_d = \sqrt{P_0} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (4.38)$$

La solution est un ensemble de matrices et le précodeur max-SNR est le cas particulier correspondant à la transmission d'un seul symbole ( $a = 1$  et  $b = 0$ ). Il est alors intéressant de remarquer que le précodeur  $\mathbf{F}_{r1}$  appartient à la famille de solutions définie par (4.38). Dans cette zone, le RSB post-traitement des précodeurs max-SNR et max- $d_{\min}$  sont égaux et optimaux : le rapport  $R_{\Theta}(\text{max-SNR})$  est unitaire. D'autre part, les distances minimales des deux précodeurs sont très proches :  $R_{d_{\min}}(\text{max-SNR}) \simeq 0.97$ . En conclusion, les deux précodeurs sont équivalents sur la zone 1.

Les deux paramètres  $\Phi$  et  $\bar{d}_{\min}$  des précodeurs diagonaux sont nettement moins performants. En effet, les rapports  $R_{\Theta}(\text{Précodeur})$  et  $R_{d_{\min}}(\text{Précodeur})$  pour le EQMM et EE sont des fonctions croissantes passant par l'origine : les deux rapports s'annulent pour  $\gamma = 0$ . Les précodeurs diagonaux ne sont pas performants

sur cette zone 1.

### Zone 2 : $\gamma_0 \leq \gamma \leq 31^\circ$

Le passage de la zone 1 à la zone 2 est marqué par le changement de stratégie du max- $d_{\min}$  qui préfère la matrice  $\mathbf{F}_{octa}$  au  $\mathbf{F}_{r1}$ . Ce changement affecte les rapports de distances et de RSB post-traitement du max-SNR mais de deux manières différentes. Le précodeur max- $d_{\min}$  augmente sa distance contrairement au max-SNR et le rapport  $R_{d_{\min}}(\text{max-SNR})$  diminue. La figure 4.7 montre que cette optimisation se paye par une diminution du RSB post-traitement : le rapport  $R_{\Theta}(\text{max-SNR})$  subit un saut important, atteignant 1,17 pour  $\gamma_0$ . Le précodeur max- $d_{\min}$  parvient ensuite à rectifier cette perte tout en continuant d'optimiser la distance : les deux rapports sont décroissants. Pour des angles correspondant à la zone 2, le max- $d_{\min}$  commence seulement à prendre l'ascendant sur le max-SNR en terme de distance mais au prix d'une perte importante de RSB post-traitement : le précodeur max- $d_{\min}$  est désavantagé.

En parallèle, les précodeurs présentent toujours la même tendance que pour la zone 1 : les rapports augmentent presque linéairement quand  $\gamma$  augmente et le changement du max- $d_{\min}$  se traduit par une pente moins importante. Si leurs distances deviennent nettement plus grandes que dans la zone 1 (l'EE rattrape le max-SNR), leurs faibles RSB post-traitement ne leur permettent toujours pas de rivaliser avec le max-SNR et le max- $d_{\min}$ .

### Zone 3 : $31^\circ \leq \gamma \leq 45^\circ$

Cette dernière zone est définie pour les fortes valeurs de  $\gamma$ . Le précodeur max- $d_{\min}$  est devenu prépondérant sur le max-SNR : le rapport des distances est alors minimal ( $R_{d_{\min}}(\text{max-SNR}) \simeq 0,64$ ) et le rapport des RSB post-traitement devient proche de 1 (compris entre 1 et 1,12).

De leurs côtés les précodeurs diagonaux deviennent plus performants lorsque la valeur de l'angle devient proche de  $\frac{\pi}{4}$  : le rapport des distances est maximal et est devenu supérieur à  $R_{d_{\min}}(\text{max-SNR})$  pendant que les rapports des  $\Phi$  se rapprochent de 1.

### Pondération avec la densité de probabilité

La probabilité d'erreur symbole pour un canal  $\mathbf{H}$  donné a été définie par (4.25). Il reste à la moyenner sur la loi du canal ou de façon équivalente, sur les lois de  $\rho$  et  $\gamma$ . Seulement, l'influence de  $\rho$  est la même pour tous les systèmes comparés. Ainsi, une étude qualitative peut être menée à l'aide de  $\gamma$  seul et c'est pourquoi les  $ddp$  de  $\gamma$  pour  $m \in \{2, 3, 4\}$  sont également disponibles sur les figures 4.6 et 4.7. Rappelons que les  $ddp$  ont une forme d'impulsion. Ainsi, à l'instar d'une impulsion de Dirac, l'intégration de la PES pondérée par cette fonction permet de favoriser une certaine zone et d'éliminer d'autres. Il s'agit maintenant de regarder en fonction de  $m$ , quelles zones sont favorisées sur les trois décrites précédemment (zone 1, zone 2 et zone

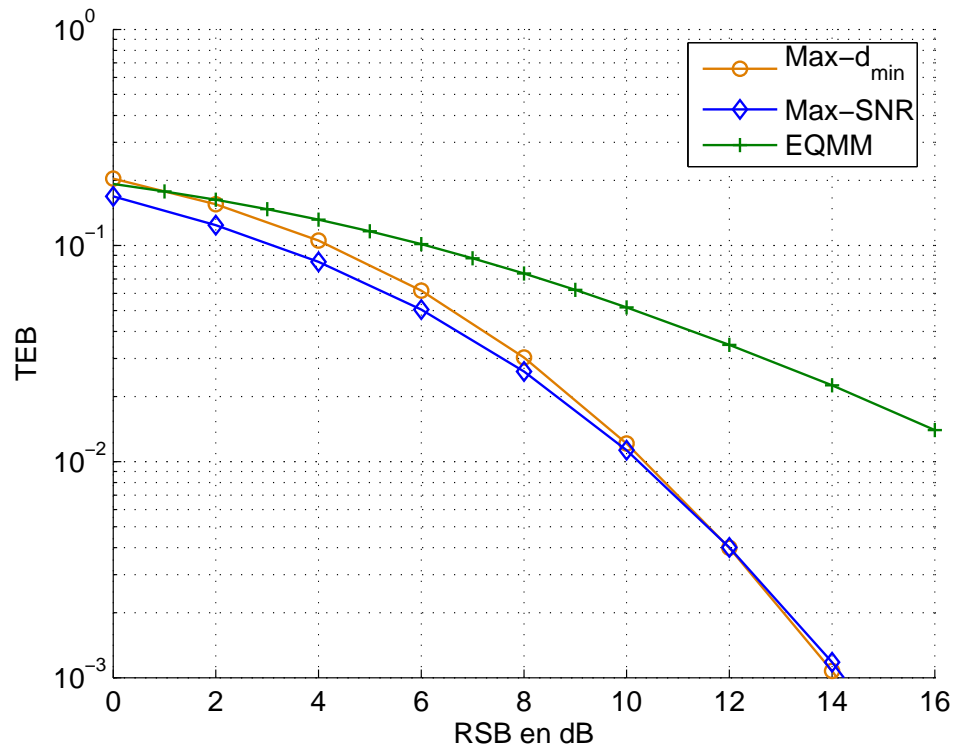
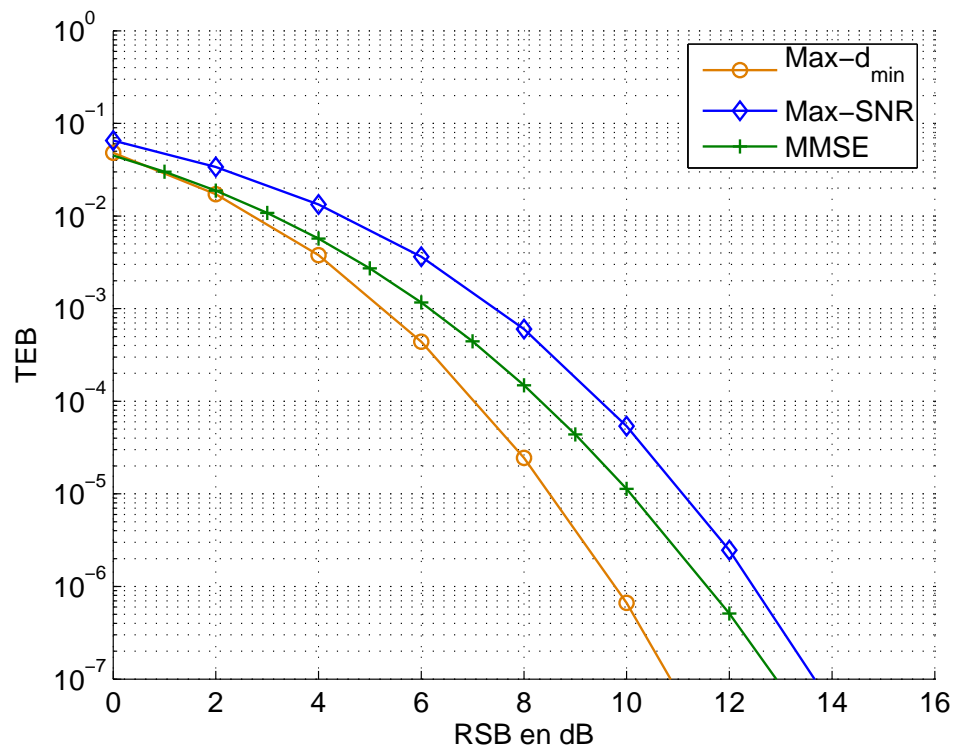
$m$	ZONE 1 $P(0 \leq \gamma \leq 17,24^\circ)$	ZONE 2 $P(17,24^\circ \leq \gamma \leq 31^\circ)$	ZONE 3 $P(31^\circ \leq \gamma \leq 45^\circ)$
2	44	44,7	10,3
3	2,7	54,9	42,4
4	0	26,2	74,8

TAB. 4.1 – Probabilité de se situer dans une zone en pourcentage

3). Le tableau 4.1 présente les probabilités de se situer dans une zone précise en fonction de  $m$  qui serviront pour les commentaires suivants :

- $m = 2$  : la  $ddp$  de  $\gamma$  est presque centrée sur  $\gamma_0$  donnant une quasi équiprobabilité d'être dans la zone 1 ou dans la zone 2. Les remarques précédentes concluaient que le max- $d_{\min}$  et le max-SNR sont équivalents dans la zone 1 et que le max- $d_{\min}$  accusait une perte de RSB post-traitement dans la zone 2 : les performances des deux précodeurs seront semblables avec un avantage pour le max-SNR profitant de son  $\Phi$  plus important. Dans les deux cas, les précodeurs diagonaux sont moins performants et donc proposeront les moins bons TEB.
- $m = 3$  : la densité de probabilité se décale vers la droite. La probabilité de se situer dans la zone 1 diminue de façon importante jusqu'à négliger son influence. Les zones privilégiées sont les zones 2 et 3 avec une légère préférence pour la zone 2. Si le max- $d_{\min}$  pêche par son  $\Phi$  dans la zone 2, il se distingue nettement dans la zone 3 : le rapport des distances est faible alors que le rapport des  $\Phi$  tend vers 1. Ainsi, le précodeur max- $d_{\min}$  se distingue plus du max-SNR. D'autre part, les précodeurs diagonaux rattrapent (zone 2) et dépassent (zone 3) le précodeur max-SNR et, par conséquent, proposeront des performances en terme de TEB qui seront meilleures.
- $m = 4$  : la  $ddp$  de  $\gamma$  se décale encore vers la droite privilégiant principalement la zone 3. Le précodeur max- $d_{\min}$  devient franchement meilleur que le max-SNR. De plus, les précodeurs fournissent leurs meilleures performances dans cette zone et les TEB seront meilleurs que celui du max-SNR.

Afin de vérifier les remarques précédentes, les figures 4.8 et 4.9 présentent les TEB des précodeurs max- $d_{\min}$ , max-SNR et EQMM pour des systèmes MIMO (2,2) et (4,4). Pour le système (2,2), nous pouvons remarquer que le précodeur EQMM présente les plus mauvaises performances et que les précodeurs max- $d_{\min}$  et max-SNR sont équivalents avec un léger avantage pour le max-SNR à faible RSB. Pour le système (4,4), le précodeur max- $d_{\min}$  offre le plus faible TEB avec un gain de 2 et 2,5 dB à  $10^{-7}$  sur le EQMM et max-SNR respectivement. Il est à noter que le précodeur EQMM est meilleur que le max-SNR sur la plage de RSB présentée malgré l'écart d'ordre de diversité se traduisant par des pentes de l'asymptote différentes.

FIG. 4.8 – TEB pour les précodeurs max- $d_{\min}$ , max-SNR et EQMM pour un système MIMO (2,2)FIG. 4.9 – TEB pour les précodeurs max- $d_{\min}$ , max-SNR et EQMM pour un système MIMO (4,4)

## 4.4 Approximation du TEB du précodeur max- $d_{\min}$

Cette partie propose une approximation du TEB du précodeur max- $d_{\min}$  pour le cas où  $m = 2$  et quel que soit  $n_S$ . Les calculs profitent de l'indépendance des deux variables  $\rho$  et  $\gamma$  avec la séparation de la loi conjointe en produit des deux lois marginales.

### 4.4.1 Première approximation de la probabilité

Le point de départ de l'approximation est le résultat classique d'une probabilité d'erreur binaire avec un BBAG. Elle utilise la fonction  $\text{erfc}()$  et la distance exprimée en fonction de  $\rho$  et  $\gamma$  moyennée selon les deux lois des variables aléatoires :

$$\bar{P}_e = \int_0^{\pi/4} \int_0^{+\infty} \frac{N(\gamma)}{2} \text{erfc} \left( \bar{d}_{\min}(\gamma) \rho \sqrt{\frac{\text{RSB}}{4}} \right) f_\rho(\rho) f_\gamma(\gamma) d\gamma d\rho \quad (4.39)$$

où  $\text{RSB} = P_0/\sigma_n^2$  représente la puissance totale moyenne émise sur la puissance du bruit ajouté sur une antenne,  $\bar{d}_{\min}(\gamma)$  est la distance minimale normalisée,  $N(\gamma)$  représente le nombre de voisins séparés de la distance  $\bar{d}_{\min}(\gamma)$  ramené en éléments binaires. Ce dernier paramètre  $N(\gamma)$  dépend de la modulation et du précodeur choisi. Or, le précodeur peut avoir un comportement dépendant de l'angle  $\gamma$  comme le max- $d_{\min}$  ou le WF et la notation  $N(\gamma)$  reste générale englobant toutes les solutions présentées jusqu'à présent. Nous décomposons la valeur de  $N(\gamma)$  en un produit de deux autres paramètres :

$$N(\gamma) = \frac{N_e(\gamma) N_b(\gamma)}{b \log_2(M)} \quad (4.40)$$

où  $N_e(\gamma)$  représente le nombre moyen des plus proches voisins à  $d_{\min}$  et  $N_b(\gamma)$  est le nombre moyen de bits faux parmi les  $b$  émis par symbole. Ces deux valeurs peuvent être obtenues à l'aide des constellations reçues en réception (il s'agit alors de comptabiliser les deux quantités). Le tableau 4.2 présente les résultats dans le cas particulier où  $b = 2$  et 4 bits sont transmis à l'aide de modulations MAQ- $M$ . Les constantes  $N_e$  et  $N_b$  sont données pour le précodeur max-SNR et le précodeur max- $d_{\min}$  scindé en  $\mathbf{F}_{r1}$  et  $\mathbf{F}_{octa}$ . Le précodeur max-SNR conserve la structure carrée de la modulation MAQ-16 présentant 3 voisins proches en moyenne. Dans ce cas, le terme  $N$  est directement lié à  $\alpha_M$  ( $N = \frac{\alpha_M}{2}$ ). De plus, il préserve également le codage de Gray : il ne peut se tromper que d'un seul bit (les symboles distants de plus de  $d_{\min}$  sont négligés). De son

	$\mathbf{F}_{\text{max-SNR}}$ 1 $\times$ MAQ-16	$\mathbf{F}_{r1}$ 2 $\times$ MAQ-4	$\mathbf{F}_{octa}$ 2 $\times$ MAQ-4
$\bar{N}_e$	3	7/2	7
$\bar{N}_b$	1	1.471	1.488

TAB. 4.2 – Nombres moyens des plus proches voisins et des bits faux sur les 4 émis

côté, le précodeur max- $d_{\min}$  augmente le nombre de voisins proches en optimisant  $d_{\min}$ . Ceci est visible sur les constellations (figures 2.6, 2.7 et 2.8). La conséquence est la disparition du codage de Gray : le nombre moyen de bits faux augmente. Ces résultats montrent une dégradation lors de l'utilisation du précodeur max- $d_{\min}$ . La première difficulté de l'intégrale est la présence de la fonction  $\text{erfc}()$  et le prochain paragraphe expose une solution pour approximer l'intégrale.

#### 4.4.2 Approximation de la fonction $\text{erfc}$

Dans [81], Chiani et al. proposent une approximation de la fonction  $\text{erfc}()$  basée sur une somme d'exponentielle du type :

$$\text{erfc}(x) \simeq \sum_{i=1}^N a_i e^{-b_i x^2} \quad (4.41)$$

où  $N$  est le degré de développement de l'approximation,  $a_i$  et  $b_i$  sont des constantes. La méthode proposée pour déterminer ces coefficients est la minimisation de l'erreur quadratique sur un intervalle donné de  $x$ . Par exemple, pour  $N = 2$ , l'approximation ainsi obtenue est :

$$\text{erfc}(x) \simeq \frac{1}{6}e^{-x^2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{4}{3}x^2}. \quad (4.42)$$

De plus, le cas  $N = 1$  correspond à  $a_1 = b_1 = 1$  c'est à dire la borne de Chernoff. Nous allons dans un premier temps nous intéresser à la précision de cette approximation. La figure 4.10 représente la fonction  $\text{erfc}()$  et les approximations du premier et second ordre. Nous pouvons constater que l'augmentation de l'ordre  $N$  (1 à 2) diminue considérablement l'erreur. Cette observation est confirmée par la figure 4.11 qui représente l'erreur relative des deux approximations. Le choix de  $N = 2$  permet d'obtenir une erreur relative inférieure à 12%. De plus, les auteurs indiquent que la précision ne diminue plus aussi significativement quand  $N$  est grand. Ainsi, pour le reste de l'étude, nous utiliserons l'approximation (4.42). Reprenons le calcul pour un  $N$  quelconque :

$$\bar{P}_e = \int_0^{\pi/4} \int_0^{+\infty} \frac{N(\gamma)}{2} \text{erfc}\left(\sqrt{\eta(\gamma)\rho^2}\right) f_\rho(\rho) f_\gamma(\gamma) d\gamma d\rho \quad (4.43)$$

en posant  $\eta(\gamma) = \bar{d}_{\min}^2(\gamma)\text{RSB}/4$ . L'introduction de l'approximation de la fonction  $\text{erfc}()$  par une somme d'exponentielles donne :

$$\bar{P}_e = \int_0^{\pi/4} \int_0^{+\infty} \frac{N(\gamma)}{2} \sum_{i=1}^N a_i e^{-b_i \eta(\gamma)\rho^2} f_\rho(\rho) f_\gamma(\gamma) d\gamma d\rho \quad (4.44)$$

$$= \sum_{i=1}^N a_i \int_0^{\pi/4} \frac{N(\gamma)}{2} f_\gamma(\gamma) \int_0^{+\infty} e^{-b_i \eta(\gamma)\rho^2} f_\rho(\rho) d\rho d\gamma. \quad (4.45)$$



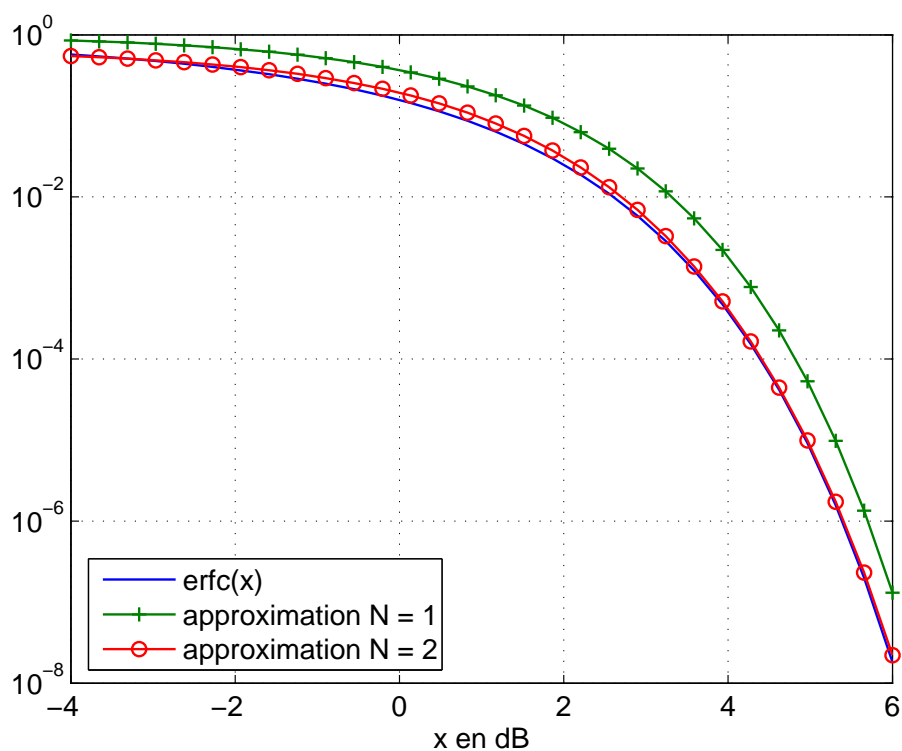


FIG. 4.10 – La fonction  $\text{erfc}()$  comparée aux approximations du premier et second ordre ( $N = \{1, 2\}$ )

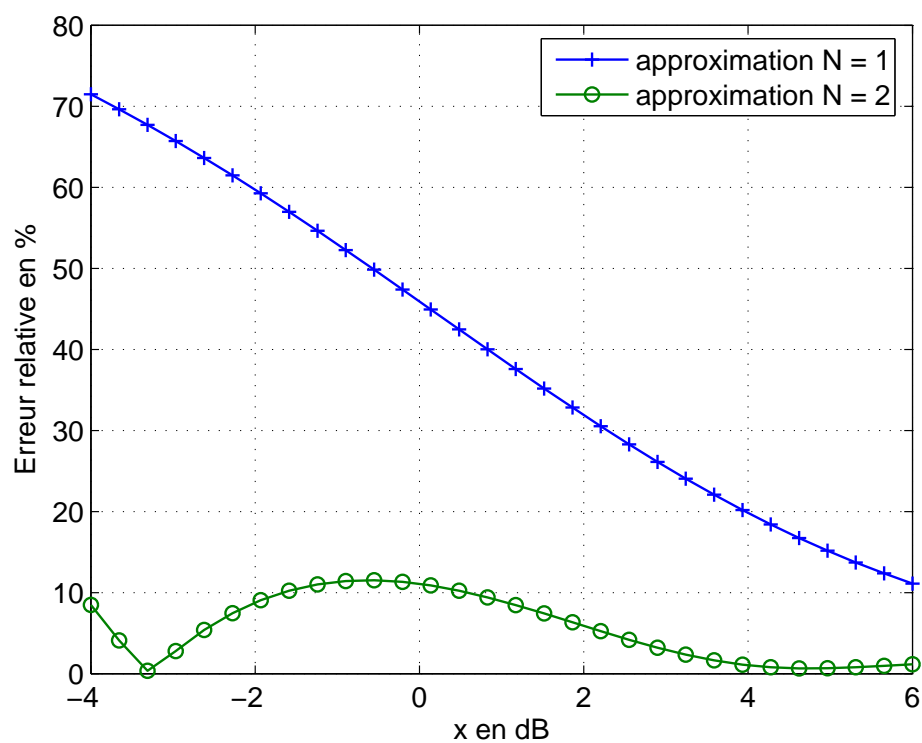


FIG. 4.11 – Erreur relative des approximations du premier et second ordre

L'indépendance des deux variables aléatoires  $\rho$  et  $\gamma$  permet de séparer les deux intégrales. L'intégrale par rapport à  $\rho$  peut être calculée et donne un résultat simple dépendant de  $\gamma$  :

$$\bar{P}_e = \sum_{i=1}^N a_i \int_0^{\pi/4} \frac{N(\gamma)}{2} f_\gamma(\gamma) \left( 1 + b_i \bar{d}_{\min}^2(\gamma) \frac{\text{RSB}}{4} \right)^{-(2n_s+4)} d\gamma. \quad (4.46)$$

La dernière intégrale est plus compliquée et nous ne présenterons pas de résultat analytique. Cependant, tous les éléments de l'intégrale permettent d'affirmer que celle-ci est finie. Sa résolution est plus difficile que la première et elle est obtenue numériquement pour les prochaines courbes. Sa résolution n'est pas nécessaire pour vérifier l'ordre de diversité. Considérons que  $b_i \bar{d}_{\min}^2(\gamma) \frac{\text{RSB}}{4} \gg 1$  et l'expression (4.46) à fort RSB prend la forme suivante :

$$\bar{P}_e \simeq \text{SNR}^{-(2n_s+4)} \mathcal{G}_N^{-1}(n_s). \quad (4.47)$$

Ce résultat a la même forme définissant l'ordre de diversité et le gain de codage (1.12). Il permet de vérifier que l'ordre de diversité de max- $d_{\min}$  est égal à  $2n_s + 4 = n_T \times n_R$  (avec  $\min(n_T, n_R) = 2$ ). Tous les éléments sont connus et permettent de définir le gain de codage  $\mathcal{G}_N^{-1}(n_s)$  dépendant de  $n_s$  et de  $N$  l'ordre d'approximation de la fonction  $\text{erfc}()$  :

$$\mathcal{G}_N^{-1}(n_s) = \sum_{i=0}^N \int_0^{\pi/4} \frac{\bar{N}_e}{2} f_\gamma(\gamma) \left( \frac{b_i \bar{d}_{\min}^2(\gamma)}{4} \right)^{-(2n_s+4)} d\gamma. \quad (4.48)$$

Le prochain paragraphe compare les performances et l'approximation obtenue afin d'en estimer la précision et la validité.

#### 4.4.3 Résultats

Le résultat de l'approximation (4.46) est facilement programmable à l'aide de Matlab et la dernière intégrale par rapport à  $\gamma$  est approximée numériquement. De plus, les paramètres  $\bar{N}_e$  et  $\bar{d}_{\min}$  sont disponibles pour les précodeurs max- $d_{\min}$  et max-SNR. Les figures 4.12 et 4.13 comparent les approximations de ces deux précodeurs avec les simulations de TEB pour  $n_s = \{0, 8\}$ . Il est à noter que l'approximation du max-SNR n'est pas intéressante en soi. En effet, les performances théoriques sont disponibles [77, 82]. Elle permettra de servir de témoin quant à la précision de l'approximation.

La figure 4.12 permet de vérifier que l'approximation est correcte pour le précodeur max-SNR avec une légère erreur de gain à fort RSB (de l'ordre de 0,3 dB). Les résultats pour le précodeur max- $d_{\min}$  sont plus mitigés. En effet, si le comportement pour des valeurs de RSB supérieures à 10 dB est bien représenté par l'approximation (erreur de 0,5 dB), une erreur importante apparaît à faible RSB. Toutefois, la figure 4.13 montre que l'approximation est meilleure quand  $n_s$  augmente : l'erreur à fort RSB est négligeable pour les deux précodeurs et le comportement est bien illustré pour le max- $d_{\min}$  à partir de 2 dB.

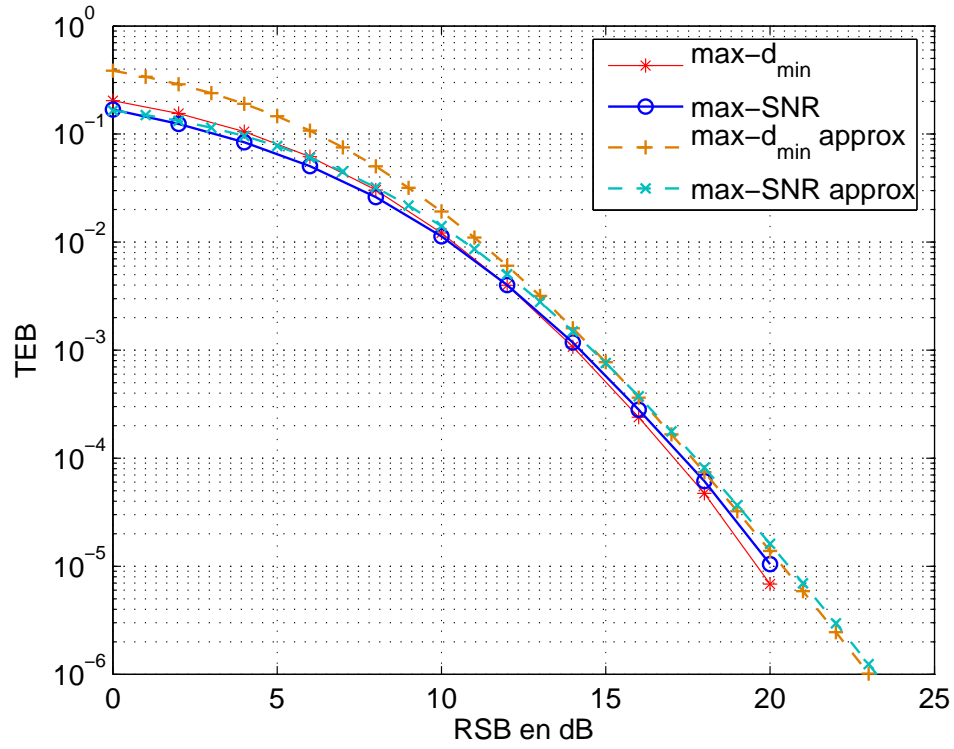


FIG. 4.12 – Approximations et simulations des TEB du max- $d_{\min}$  et du max-SNR pour  $n_S = 0$  et  $N = 2$

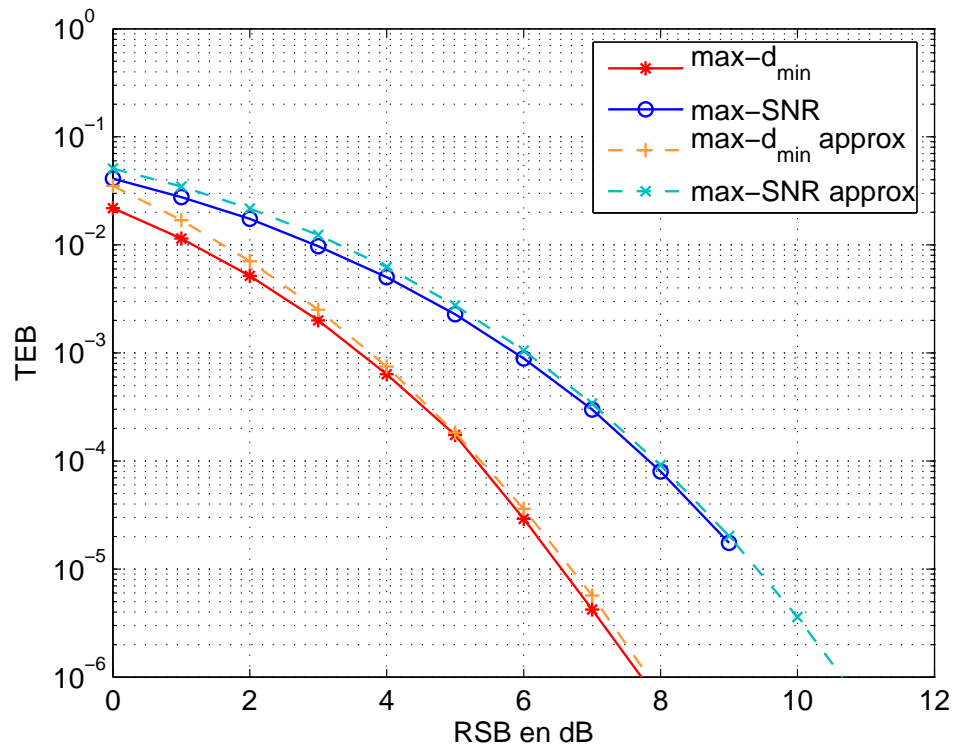


FIG. 4.13 – Approximations et simulations des TEB du max- $d_{\min}$  et du max-SNR pour  $n_S = 8$  et  $N = 2$

Dans tous les cas, nous pouvons considérer que la PEB est bien approximée par (4.46) à fort RSB permettant d'estimer le gain de codage du précodeur max- $d_{\min}$  et de le comparer avec celui du max-SNR. Il faut cependant se méfier des résultats de l'approximation à faible RSB.

#### 4.4.4 Exploitation de cette approximation

L'approximation définie précédemment permet d'obtenir une estimation du gain de codage des deux précodeurs max- $d_{\min}$  et max-SNR avec (4.46) ou (4.48). Ainsi, la figure 4.14 représente la différence de RSB entre les deux précodeurs permettant d'obtenir le même taux d'erreur binaire en fonction du paramètre  $n_S$ . Le précodeur max- $d_{\min}$  étant meilleur que le max-SNR, cette différence représente le gain de puissance à l'émission. Le gain augmente fortement pour les faibles valeurs de  $n_S$  passant de 0,25 à 2,75 dB avec l'ajout de 5 antennes. Le paramètre  $n_S$  atteint des valeurs importantes et ne correspond pas à des systèmes réalisables ( $n_S = 20$  correspond à un système MIMO (2,22) soient 24 antennes). Néanmoins, cette gamme de valeur permet de visualiser la tendance du gain et il apparaît une saturation pour des valeurs importantes de  $n_S$ . Ainsi, en fonction du cahier des charges d'une communication MIMO, il peut être intéressant de passer  $m = \min(n_T, n_R)$  de 2 à 3.

D'autre part, à l'instar du gain, l'ordre de diversité augmente avec  $n_S$  et il est intéressant de visualiser directement l'impact sur le TEB. La figure 4.15 trace le rapport des TEB des deux précodeurs défini par  $\frac{\text{TEB}(\text{max-SNR})}{\text{TEB}(\text{max-}d_{\min})}$  pour différents RSB (8, 12 et 16 dB). Tout d'abord, le rapport des TEB est comparé avec les simulations pour 8 dB : les deux courbes correspondent avec une légère erreur pour les faibles  $n_S$ . Cette erreur s'explique par les remarques précédentes. Nous avons vu que l'approximation devient plus précise lorsque le RSB augmente et les bons résultats du rapports des TEB pour 8 dB (cas le plus défavorable des trois RSB étudiés) nous permettent d'utiliser l'approximation pour 12 et 16 dB. Les TEB peuvent être approximés par une fonction affine dans un repère semi-logarithmique en fonction de  $n_S$  et la pente des droites dépend du RSB considéré. Ainsi, il est facile de prévoir l'amélioration du max- $d_{\min}$  par rapport au max-SNR pour une configuration matérielle donnée. Le gain de TEB n'est pas bon pour  $n_S = 0,1$  c'est-à-dire qu'il est proche de 1 mais commence à être intéressant lorsque le nombre d'antennes augmente. Le précodeur max- $d_{\min}$  utilise mieux la diversité spatiale mise à disposition que le max-SNR. Par exemple, ajouter 3 antennes avec un système MIMO (2,5) permet de diminuer le nombre d'erreur par 10 pour un RSB de 8 dB.

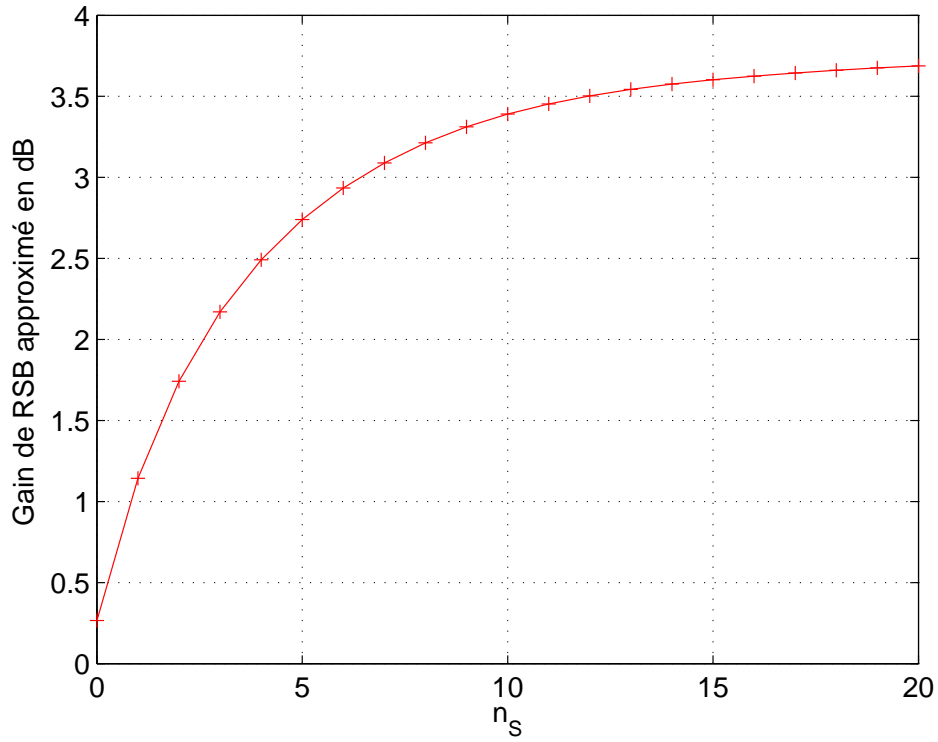


FIG. 4.14 – Approximation de la différence de RSB entre les précodeurs max- $d_{\min}$  et max-SNR pour des forts RSB en fonction de  $n_s$

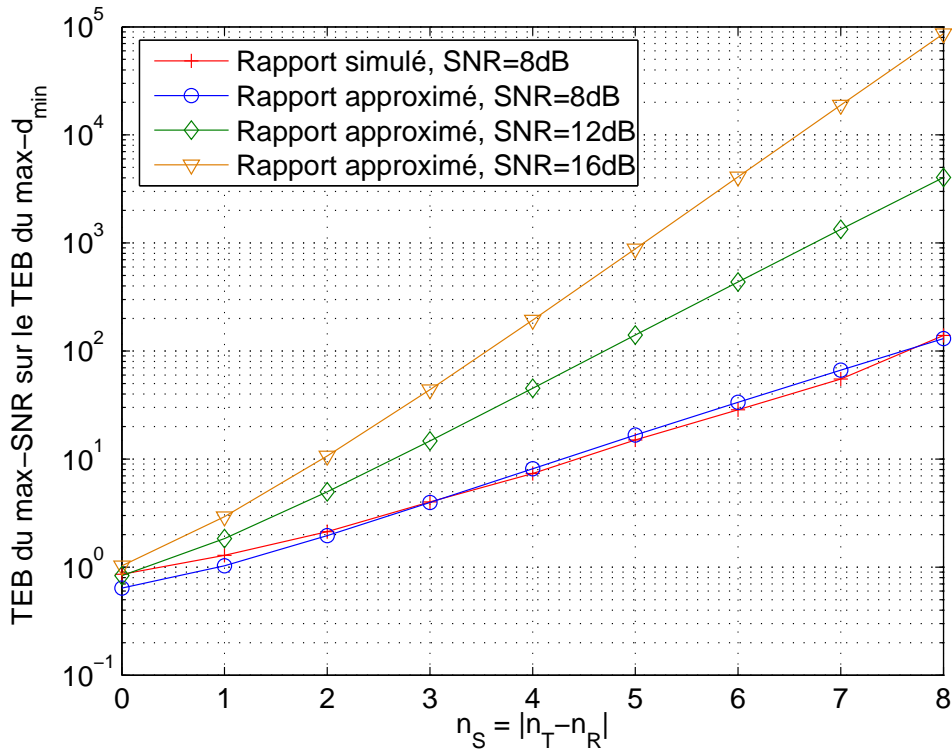


FIG. 4.15 – Utilisation de l'approximation du TEB afin d'estimer le rapport des TEB des précodeurs max- $d_{\min}$  et max-SNR pour différents RSB (8, 12 et 16 dB) en fonction de  $n_s$  pour  $m = 2$ . Ce rapport est également simulé pour un RSB de 8 dB.

## 4.5 Conclusion

Ce chapitre avait pour but principal d'étudier les performances du précodeur max- $d_{\min}$  et de les comparer à d'autres solutions que sont le max-SNR ou les précodeurs diagonaux. Tout d'abord, deux critères ont été définis pour tous les précodeurs avec l'utilisation de deux sous-canaux : la distance minimale et le RSB post-traitement. Ces deux paramètres sont exprimés en fonction de  $\rho$  et  $\gamma$ . Nous avons démontré que l'ordre de diversité du max- $d_{\min}$  était maximal pour une MAQ-4 et égal à  $n_T \times n_R$ . Ensuite, en remarquant que le gain  $\rho$  avait la même influence se traduisant par un gain global sur les chaînes de transmission des solutions, nous avons étudié qualitativement les performances des précodeurs. En effet, à l'aide des densités de probabilité de  $\gamma$ , nous avons expliqué le comportement des performances des précodeurs pour différentes configurations matérielles. Nous avons ensuite déterminé une approximation du TEB du précodeur max- $d_{\min}$  pour  $m = 2$  avec une précision correcte pour les moyens et forts RSB. Cette approximation est très rapide à obtenir et nous a permis de comparer les précodeurs max- $d_{\min}$  et max-SNR en estimant la différence de RSB pour un même TEB et les rapports des TEB en fonction de  $n_S$  pour des RSB donnés. Nous avons observé que le précodeur max-SNR est efficace pour des systèmes (2,2) et (2,3) et que le max- $d_{\min}$  devient plus performant quand le nombre d'antennes augmente.



## Chapitre 5

# À propos des précodeurs diagonaux

Ce chapitre s'intéresse plus précisément aux précodeurs diagonaux et notamment au précodeur TEBM. En effet, nous allons le modifier pour permettre d'utiliser des modulations différentes sur les voies. Le précodeur obtenu sera comparé au précodeur QdS particulier qui compense les modulations afin d'obtenir la même distance minimale sur toutes les voies. Lors du chapitre 4, nous avons démontré que le max- $d_{\min}$  assurait l'ordre de diversité maximal comme le max-SNR. Une partie de ce chapitre traitera l'ordre de diversité des précodeurs diagonaux de manière générale. Nous verrons une démonstration simple et rapide d'une borne supérieure de l'ordre de diversité permettant de vérifier que celui-ci n'est pas maximal. En nous inspirant ensuite de la structure du précodeur max- $d_{\min}$ , nous proposerons une solution simple de précodeur diagonal basé sur un ordre de diversité maximal.

### 5.1 Modulations différentes sur les voies

#### 5.1.1 Amélioration du précodeur TEBM

Le précodeur TEBM présenté précédemment minimisait le taux d'erreur binaire pour un système diagonal avec  $b$  voies utilisant la même modulation. Cette modulation unique se traduisait dans l'expression de la solution par les constantes  $\alpha_M$  et  $\beta_M$  (cf. eq.(2.61)). L'amélioration proposée dans ce chapitre est la possibilité de choisir différentes modulations sur chaque voie en employant des constantes différentes entre les voies avec  $\alpha_{Mi}$  et  $\beta_{Mi}$ . Les symboles des modulations considérées ont une énergie moyenne unitaire.

La première étape est d'attribuer les modulations sur les sous-canaux. L'augmentation du nombre d'états  $M$  d'une modulation respectant  $E[|s_i|^2] = 1$  se traduit par une baisse de  $\beta_M$  et une augmentation du TEB. Le but de ce précodeur est d'obtenir la plus faible probabilité de se tromper et il serait malvenu d'associer la modulation la plus importante en nombre d'états avec le sous-canal ayant le plus faible gain. A l'instar des gains du canal virtuel qui sont rangés par ordre décroissant, les modulations seront rangées par ordre décroissant du nombre d'états : la modulation ayant le plus de symboles sera émise sur le sous-canal avec le plus grand gain.



L'optimisation de la probabilité d'erreur doit alors être reprise. La probabilité d'erreur binaire totale peut être écrite comme suit :

$$P_e = \sum_{i=1}^b P(\text{bit} \rightarrow \text{voie } i) P_{e_i} \quad (5.1)$$

où  $P(\text{bit} \rightarrow \text{voie } i)$  est la probabilité que le bit soit émis sur la voie  $i$ . Si la modulation est la même sur toutes les voies, les événements sont équiprobables,  $P(\text{bit} \rightarrow \text{voie } i) = 1/b$ , et l'expression de la PEB totale est la moyenne de toutes les voies. Lorsque les modulations sont différentes, un bit a plus de chance de prendre la voie qui utilise la plus grande modulation. Le bit concerné est obligatoirement émis sur une des voies et les événements  $\text{bit} \rightarrow \text{voie } i$  sont mutuellement exclusifs. Les probabilités  $P(\text{bit} \rightarrow \text{voie } i)$  forment un système complet. L'expression des probabilités dépend des modulations choisies et du nombre de symboles ou de bits qu'elles représentent. Le nombre d'états de la modulation de la voie  $i$  est noté  $M_i$ . La probabilité d'émettre le bit sur la voie  $i$  correspond au nombre de bits pris en charge par cette voie sur le nombre total de bits transmis :

$$P(\text{bit} \rightarrow \text{voie } i) = \frac{\log_2(M_i)}{\sum_{i=1}^b \log_2(M_i)} = \tau_i. \quad (5.2)$$

Dans le cas particulier où  $M_i = M \forall i$ , nous retrouvons bien  $\tau_i = 1/b$ . La PEB totale donnée dans (5.1) peut alors être développée en prenant en compte l'expression des probabilités  $P(\text{bit} \rightarrow \text{voie } i)$  et celle de la  $P_{e_i}$  de chaque voie :

$$P_e = \sum_{i=1}^b \tau_i \alpha_{M_i} \text{erfc} \left( \sqrt{\beta_{M_i} \sigma_i^2 f_i^2} \right) \quad (5.3)$$

où  $\alpha_{M_i}$  et  $\beta_{M_i}$  sont les deux constantes habituelles qui dépendent de la modulation utilisée sur la voie  $i$ .

Reprenons le critère à minimiser [67] prenant en compte la nouvelle probabilité d'erreur binaire totale et la contrainte de puissance :

$$\mathcal{L}_{PEB} = \sum_{i=1}^b \tau_i \alpha_{M_i} \text{erfc} \left( \sqrt{\beta_{M_i} \sigma_i^2 f_i^2} \right) + \mu \left( \left( \sum_{i=1}^b f_i^2 \right) - P_0 \right). \quad (5.4)$$

L'optimisation se résume à annuler les dérivées partielles  $\frac{\partial \mathcal{L}_{PEB}}{\partial f_i}$ . La solution obtenue est :

$$f_i^2 = \frac{1}{2\beta_{M_i} \sigma_i^2} W_0 \left( \frac{2(\tau_i \alpha_{M_i} \beta_{M_i} \sigma_i^2)^2}{\pi \mu^2} \right) \quad (5.5)$$

où  $\mu$  est choisi tel que  $\sum_{i=1}^b f_i^2 = P_0$  et  $W_0$  est la fonction de Lambert définie comme l'inverse de  $y = e^x$ .

Cette solution est proche de l'originale donnée par (2.61) mais diffère par la prise en compte des modulations  $(\alpha_{M_i}, \beta_{M_i})$  et la probabilité  $\tau_i$  d'utiliser la voie  $i$ . Les performances de notre nouveau précodeur seront comparées au QdS dont les pondérations de RSB sont définies précisément dans le prochain paragraphe.

### 5.1.2 Précodeur QdS utilisé pour obtenir une distance minimale égale

Nous avons vu que le précodeur QdS permettait de privilégier certaines voies en assurant un gain entre les RSB de chaque voie (*cf.* eq.(2.53)). Ces gains sont notés  $\omega_i$  et sont référencés par rapport à la voie  $b$ . Ce paragraphe présente la solution particulière où les différents  $\omega_i$  sont choisis afin d'obtenir la même distance minimale sur toutes les voies. Rappelons que ces coefficients sont définis par

$$\omega_i = \frac{f_i^2 \sigma_i^2}{f_b^2 \sigma_b^2} \geq 1.$$

La distance minimale de chaque voie dépend de la modulation utilisée, du RSB et de la répartition de la puissance :

$$d_{\min i}^2 = 4\beta_{M_i} f_i^2 \sigma_i^2 \quad (5.6)$$

où  $\beta_{M_i}$  dépend de la modulation de la voie  $i$ . Il s'agit de déterminer les coefficients de façon à obtenir toutes les distances égales. Afin de faire apparaître les  $\omega_i$  définis précédemment, prenons la distance  $d_{\min i}^2$  normalisée par rapport à  $d_{\min b}^2$  :

$$\frac{d_{\min i}^2}{d_{\min b}^2} = \frac{4\beta_{M_i} f_i^2 \sigma_i^2}{4\beta_{M_b} f_b^2 \sigma_b^2} = \frac{\beta_{M_i}}{\beta_{M_b}} \omega_i = 1. \quad (5.7)$$

La solution est facile à déterminer et ne dépend que des paramètres  $\beta_{M_i}$  :

$$\omega_i = \frac{\beta_{M_b}}{\beta_{M_i}}. \quad (5.8)$$

Lorsque toutes les modulations sont identiques, les  $\omega_i$  sont tous égaux à un et on retrouve le précodeur EE. Il est rapide de vérifier que les  $\omega_i$  sont ordonnés. Comme les modulations sont associées par  $M_i$  décroissants, les  $\beta_{M_i}$  sont croissants :  $\beta_{M_b} \geq \dots \geq \beta_{M_1}$  et donc  $\omega_1 \geq \dots \geq \omega_b$  avec  $\omega_b = 1$ .

### 5.1.3 Simulations

Les figures 5.1 et 5.2 présentent les taux d'erreurs binaires des deux systèmes pour une configuration matérielle (6,6) avec l'utilisation de 3 à 6 sous-canaux. Le débit total est fixé à 14 bits/s/Hz et les modulations adaptent le nombre de symboles parmi les MAQ- $M$ . Les combinaisons présentées dans ces deux figures sont celles qui proposent les meilleures performances pour un nombre donné de sous-canaux utilisés.

La notation du précodeur permettra de savoir combien de voies il utilise et comment il répartit les bits sur chacune d'entre elles. Par exemple, «TEBM 4222» représente un précodeur TEBM utilisant une MAQ-16 et trois MAQ-4 soient quatre voies au total. Le «QdS 4400» est un précodeur QdS utilisant deux MAQ-16 soient deux voies : le zéro, signifiant que la voie n'est pas utilisée, permet une comparaison avec une notation à même nombre de voies.

Le système MIMO considéré est relativement important avec 6 antennes à l'émission et 6 antennes à la réception. Le canal virtuel propose 6 sous-canaux avec des gains différents. Cependant, les trois plus grandes valeurs propres deviennent importantes et statistiquement ne prennent pas des valeurs critiques qui pourraient dégrader le TEB. Ainsi, la figure 5.1 montre les TEB des systèmes utilisant 3 ou 4 voies de données correspondant à des sous-canaux performants. Les deux précodeurs sont alors équivalents voire presque confondus (cas  $b = 3$ ).

Les deux plus faibles valeurs propres de  $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$  correspondent aux sous-canaux qui présenteront des difficultés. Une disparité apparaît alors dans les RSB de chaque voie. La figure 5.2 illustrent les performances des précodeurs utilisant ces deux sous-canaux avec  $b = 5$  et  $b = 6$ . Les performances des deux précodeurs sont dégradées mais le TEBM gère mieux les différences des gains  $\lambda_i$  des sous-canaux que le QdS. En effet, le précodeur QdS essaie de compenser le sous-canal défaillant au détriment des autres. Si le gain pour  $b = 5$  reste raisonnable (de l'ordre de 0,6 dB), celui pour  $b = 6$  est important (presque 7 dB).

Nous pouvons conclure que le nouveau précodeur TEBM amélioré est surtout intéressant quand les gains des sous-canaux sont disparates. C'est le cas lorsque le système utilise presque toutes les valeurs propres ou que  $b$  est proche de  $m = \min(n_T, n_R)$ . Dans le cas  $b \ll m$ , les précodeurs TEBM et QdS sont équivalents mais la qualité de service peut être préférée car ses éléments sont définis plus simplement.

## 5.2 Ordre de diversité des précodeurs diagonaux

### 5.2.1 Préliminaire : condition suffisante de pleine diversité

Le but de ce paragraphe est d'obtenir une condition suffisante pour assurer l'ordre de diversité maximal. Comme pour le précodeur max- $d_{\min}$  dans la partie (4.2), le point de départ est la démonstration de l'ordre de diversité maximal du précodeur max-SNR. En effet, nous avons noté que celui-ci assure la diversité spatiale maximale se traduisant par un ordre de diversité  $n_T \times n_R$  [64]. Cette démonstration est disponible dans l'ouvrage [79, pp. 99-100]. Le raisonnement est basé sur une approximation de la probabilité d'erreur puis sur un encadrement de la distance minimale. Tout d'abord, rappelons l'expression de l'approximation des plus proches voisins :

$$\text{PES} \leq \frac{\overline{N}_e}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{d_{\min}^2}{4\sigma_n^2}} \right) \quad (5.9)$$

où  $d_{\min}$  est la distance minimale entre deux impacts de la constellation de réception,  $\overline{N}_e$  est le nombre moyen de voisins proches [5]. Maintenant, considérons un canal de Rayleigh et un bruit BBAG et supposons que la distance minimale peut être encadrée par :

$$P_0 \delta \lambda_1 \leq d_{\min}^2 \leq P_0 \Delta \lambda_1 \quad (5.10)$$

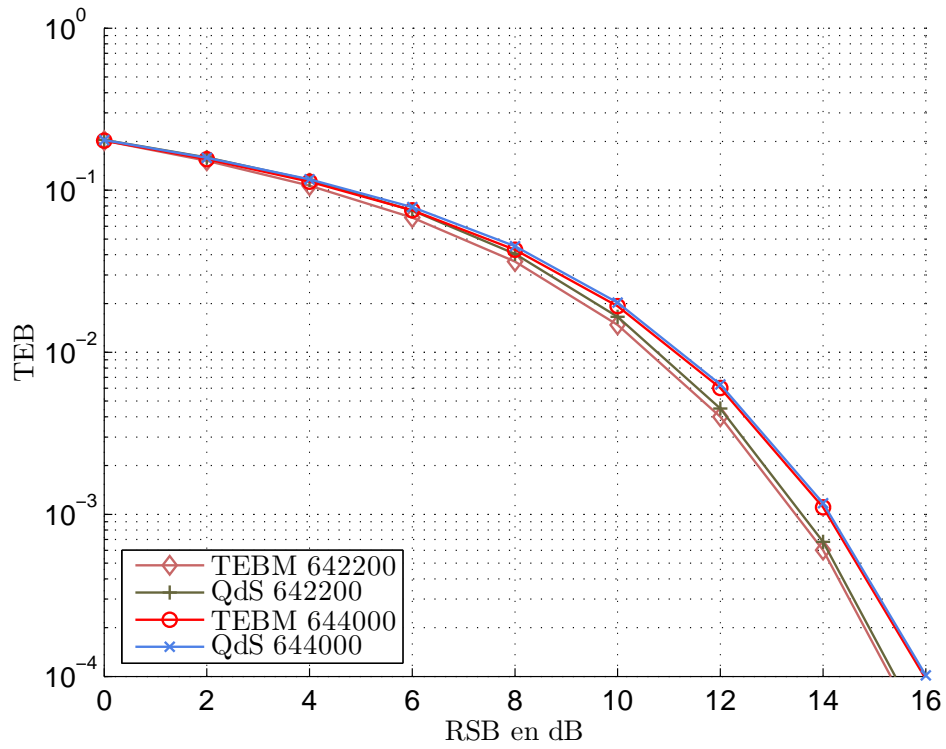


FIG. 5.1 – PARTIE 1 : Comparaison des TEB des précodeurs TEBM et QdS pour un système MIMO (6,6) utilisant 3 ou 4 sous-canaux et différentes modulations transmettant un total de 14 b/s/Hz

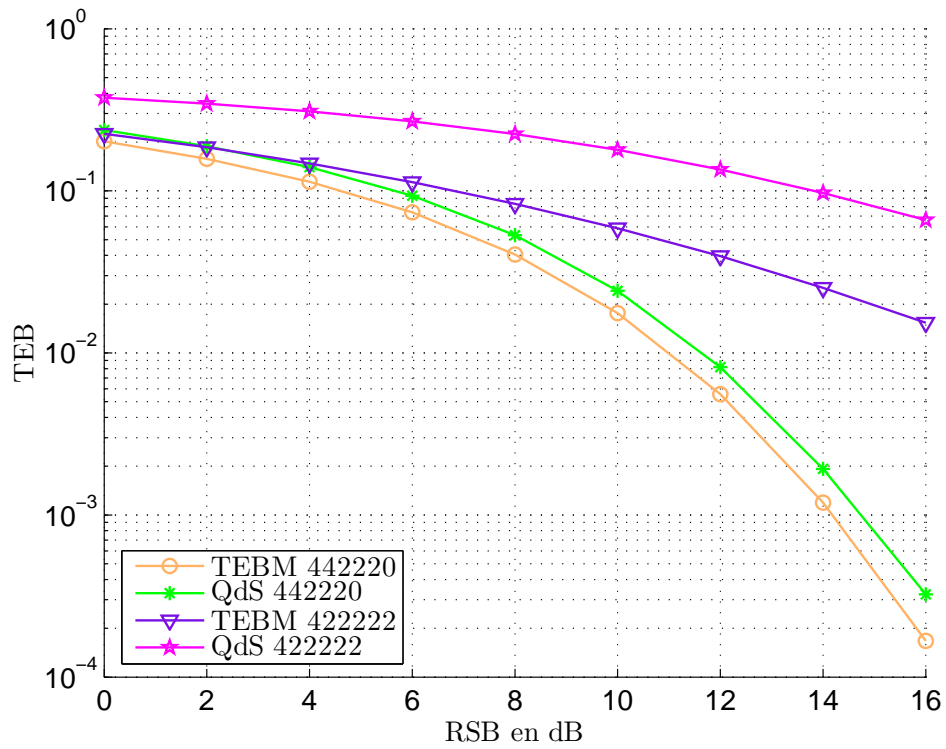


FIG. 5.2 – PARTIE 2 : Comparaison des TEB des précodeurs TEBM et QdS pour un système MIMO (6,6) utilisant 5 ou 6 sous-canaux et différentes modulations transmettant un total de 14 b/s/Hz

où  $\delta$  et  $\Delta$  sont deux constantes réelles positives vérifiant  $\delta \leq \Delta$ . Le raisonnement étant similaire à la démonstration de l'ordre de diversité de ce précodeur, le lecteur pourra y trouver plus de détails. Dans le cas du précodeur max- $d_{\min}$ , nous avons les constantes  $\delta = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $\Delta = 1$ . L'encadrement (5.10) peut être élargi en fonction de la norme de Frobenius de la matrice de canal :

$$P_0 \delta \frac{\|\mathbf{H}\|_F^2}{m} \leq d_{\min}^2 \leq P_0 \Delta \|\mathbf{H}\|_F^2. \quad (5.11)$$

L'étape suivante est l'utilisation de la borne de Chernoff considérée comme une bonne approximation à fort RSB (*i.e.*  $\text{erfc}(x) \simeq e^{-x^2}$ ). Cette approximation est alors moyennée selon la loi de Rayleigh. Le résultat est un encadrement de la probabilité d'erreur symbole moyenne et les expressions à fort RSB donnent :

$$\frac{\bar{N}_e}{2} \left( \frac{\text{RSB } \Delta}{4} \right)^{-n_T n_R} \leq \overline{\text{PES}} \leq \frac{\bar{N}_e}{2} \left( \frac{\text{RSB } \delta}{4m} \right)^{-n_T n_R}. \quad (5.12)$$

Cette dernière équation montre que l'ordre de diversité est maximal si la distance minimale peut être encadrée (5.10). La constante  $\delta$  détermine la borne inférieure de la PES et  $\Delta$  la supérieure. La condition suffisante de l'ordre de diversité maximal est alors valable pour des constantes strictement positives ( $\Delta \geq \delta > 0$ ).

### 5.2.2 Borne supérieure de l'ordre de diversité

Lors des précédentes simulations, nous avons observé que les précodeurs diagonaux avaient un ordre de diversité inférieur au maximum  $n_T \times n_R$ . Les auteurs dans [83] ont démontré que le gain de codage et l'ordre de diversité sont antagonistes et doivent faire l'objet d'un compromis. Dans ce paragraphe, nous proposons une démonstration simple d'une borne supérieure de l'ordre de diversité permettant de conclure que l'ordre de diversité n'est pas maximal contrairement aux précodeurs max- $d_{\min}$  et max-SNR.

Considérons un précodeur diagonal utilisant  $b$  voies avec la répartition de puissance  $f_i^2$ . Les précodeurs présentés dans ce mémoire (WF, EQMM, QdS, EE, TEBM) utilisent toutes les  $b$  voies disponibles à fort RSB. Chaque voie a sa probabilité d'erreur binaire moyenne qui peut être approximée à fort RSB par :

$$P_{ei} \simeq \mathcal{G}_i^{-1} \text{RSB}^{-o_i} \quad (5.13)$$

où  $\mathcal{G}_i$  est le gain de codage et  $o_i$  est l'ordre de diversité du sous-canal  $i$ .

Le but de la démarche est de trouver un encadrement de la valeur propre  $\lambda_k$  et notamment une borne supérieure. En effet, si cette borne supérieure entraîne un ordre de diversité inférieur à  $n_T \times n_R$  alors elle limitera celui du précodeur diagonal. L'idée est d'utiliser des «matrices réduites» de  $\mathbf{H}$ . Dans un premier temps, définissons les vecteurs de la matrice de canal :

$$\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_m] \quad (5.14)$$

avec l'hypothèse  $m = n_T \leq n_R$ . A partir de là, en considérant les matrices réduites de  $r$  colonnes  $\mathbf{H}^{(r)}$  pour  $0 \leq r \leq m - 1$ , nous obtenons :

$$\mathbf{H}^{(r)} = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_{m-r}]. \quad (5.15)$$

Les éléments de  $\mathbf{H}$  étant *iid*  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$  les vecteurs  $\mathbf{h}_i$  sont statistiquement indépendants. Par conséquent, le choix des  $r$  vecteurs à supprimer parmi les  $m$  ne changera pas les statistiques de la matrice réduite  $\mathbf{H}^{(r)}$  et il peut être arbitraire. À présent, notons  $\lambda_i^{(r)}$  les valeurs propres non nulles de  $\mathbf{H}^{(r)}\mathbf{H}^{(r)*}$  rangées par ordre décroissant avec  $i = 1, \dots, m - r$ .

**Remarques :** quand  $n_T > n_R$ , comme  $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$  et  $\mathbf{H}^*\mathbf{H}$  ont les mêmes valeurs propres non nulles, la démonstration suivante est valide en considérant  $\mathbf{H}^*$  à la place de  $\mathbf{H}$ . Précisons également que  $\mathbf{H}^{(0)}$  est identique à la matrice  $\mathbf{H}$  et que les  $\lambda_i^{(0)}$  sont égaux aux  $\lambda_i$  et par soucis de simplification, cette notation ne sera pas utilisée.

Le théorème dans [84, p 449] considère de telles matrices et permet d'ordonner les valeurs propres  $\lambda_i^{(r)}$  et, en particulier, d'écrire

$$\lambda_{i-1}^{(r)} \geq \lambda_{i-1}^{(r+1)} \geq \lambda_i^{(r)} \quad \text{pour } r = \{0, 1, \dots, k - 2\} \text{ et } i = k - r. \quad (5.16)$$

Cette première relation permet d'écrire un système d'inégalités de triplets de valeurs propres de matrices réduites dont le point de départ est  $\lambda_k$  une valeur propre quelconque de  $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$  :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \lambda_{k-1} & \geq & \lambda_{k-1}^{(1)} & \geq & \lambda_k \\ & & & & \lambda_{k-2}^{(1)} & \geq & \lambda_{k-2}^{(2)} & \geq & \lambda_{k-1}^{(1)} \\ & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \\ \lambda_1^{(k-1)} & \geq & \lambda_2^{(k-2)} & & & & & & \end{array} \quad (5.17)$$

Le point d'arrivée est une valeur propre maximale d'une matrice réduite de  $k - 1$  colonnes et l'inégalité suivante peut en être directement déduite :

$$\lambda_1^{(k-1)} \geq \lambda_k, \quad \forall k \in \{1, \dots, b\}. \quad (5.18)$$

Rappelons qu'un système MIMO utilisant un précodeur diagonal est équivalent à plusieurs systèmes SISO indépendants et parallèles avec pour gain respectif  $f_i \sqrt{\lambda_i}$ . De plus, la contrainte de puissance concernant le précodeur  $\mathbf{F}_d$  permet d'écrire que :

$$0 \leq f_i^2 \leq P_0. \quad (5.19)$$

Cela signifie avec l'inégalité (5.18) que le sous-canal  $k$  a un gain  $f_k \sqrt{\lambda_k}$  inférieur à  $P_0 \sqrt{\lambda_1^{(k-1)}}$ . Par conséquent, les performances de ce sous-canal  $k$  en terme de TEB sont minorées par un système SISO de gain

$P_0 \sqrt{\lambda_1^{(k-1)}}$ . Or une telle solution correspond à l'utilisation d'un max-SNR avec un canal réduit de  $k - 1$  antennes. L'ordre de diversité d'un tel système est égal au nombre de trajets multiples soit  $\max(n_T, n_R) \times (m - k + 1)$ . On peut donc dire que l'ordre de diversité du sous-canal  $k$  a un ordre de diversité inférieur ou égal à :

$$\max(n_T, n_R) \times (m - k + 1). \quad (5.20)$$

Pour déterminer l'ordre de diversité global du précodeur diagonal, reprenons l'expression de la probabilité d'erreur binaire et utilisons l'approximation à fort RSB (5.13) avec le gain de codage et l'ordre de diversité :

$$P_e = \sum_{i=1}^b \tau_i P_{ei} \simeq \sum_{i=1}^b \tau_i \mathcal{G}_i^{-1} \text{RSB}^{-o_i} \quad (5.21)$$

De plus, nous venons de voir que les  $o_i$  sont ordonnés  $o_1 \geq o_2 \geq \dots \geq o_b$ . Il vient alors :

$$P_e \simeq \tau_b \mathcal{G}_b^{-1} \text{RSB}^{-o_b} \left( 1 + \sum_{i=1}^{b-1} \frac{\tau_i \mathcal{G}_i^{-1}}{\tau_b \mathcal{G}_b^{-1}} \text{RSB}^{-(o_i - o_b)} \right) \simeq \tau_b \mathcal{G}_b^{-1} \text{RSB}^{-o_b}. \quad (5.22)$$

Le sous-canal présentant la plus mauvaise PEB pénalise la PEB globale. Ainsi, l'ordre de diversité global du système a comme borne supérieure :

$$n_T \times n_R - (b - 1) \max(n_T, n_R). \quad (5.23)$$

Cette borne supérieure démontre que l'ordre de diversité d'un précodeur diagonal n'est pas maximal et diminue avec le nombre de sous-canaux utilisés. L'inégalité devient égalité quand  $b = 1$  et le précodeur correspondant de la liste que nous avons dressée est le max-SNR. Un exemple de résultat est nettement visible sur la figure 5.2 : les précodeurs TEBM et QdS utilisant 5 voies ont un ordre de diversité plus important que lorsqu'ils en emploient 6. Cette démonstration a l'avantage d'être simple et rapide par rapport aux résultats théoriques connus des lois des valeurs propres auxquelles il faut appliquer les stratégies d'allocation des précodeurs, des STBC ou d'autres méthodes [77, 85].

D'autres méthodes permettent de déterminer exactement l'ordre de diversité et notamment celle présentée dans [86]. Nous allons présenter cette méthode rapidement pour mettre en avant la simplicité de notre borne supérieure pouvant s'appliquer à n'importe quelle configuration matérielle.

Considérons la chaîne équivalente SISO de chaque sous-canal. Le rapport signal sur bruit en réception de la voie  $i$  est  $f_i^2 \frac{P_0}{\sigma_n^2} = f_i^2 \text{RSB}$  (le terme  $P_0$  a été mis en facteur modifiant la contrainte de puissance en  $\sum_{i=1}^b f_i^2 = 1$ ). Zheng et al. dans [83] ont démontré que la probabilité d'erreur binaire et que la «*outage capacity*» ont le même ordre de diversité. Le problème revient donc à trouver l'ordre de diversité de cette probabilité notée  $P_{out}$  et définie par :

$$P_{out}(R) = P(I \leq R) \quad (5.24)$$

où  $I = \log_2(1 + f_i^2 \lambda_i \text{RSB})$  est l'information mutuelle du canal et  $R$  représente l'information binaire par symbole (bit/symbole). A fort RSB, la probabilité  $P_{out}(R)$  devient :

$$P_{out}(R) \simeq P(\log_2(f_i^2 \lambda_i \text{RSB}) \leq R) \simeq P\left(\lambda_i \leq 2^R \frac{1}{f_i^2 \text{RSB}}\right). \quad (5.25)$$

Les précodeurs diagonaux de la littérature que nous avons présentés précédemment émettent de la puissance sur toutes les voies à fort RSB : le terme  $f_i^2$  est non nul et inférieur à 1.

$$P\left(\lambda_i \leq 2^R \frac{1}{\text{RSB}}\right) \leq P\left(\lambda_i \leq 2^R \frac{1}{f_i^2 \text{RSB}}\right) \leq P\left(\lambda_i \leq 2^R \frac{1}{\mathfrak{v} \text{RSB}}\right) \quad (5.26)$$

où  $\mathfrak{v}$  représente un minorant non nul de  $f_i^2$ . Les deux bornes de la «*outage capacity*» donne le même ordre de diversité définissant ainsi l'ordre de diversité de la probabilité d'erreur de la voie  $i$ . Étudions la borne inférieure en posant  $x = 2^R \frac{1}{\text{RSB}}$ . Lorsque le RSB devient important, le terme  $x$  tend vers zéro. À partir de ce résultat, la méthode propose de déterminer la fonction de répartition de la variable  $\lambda_i$  puis d'effectuer un développement limité en zéro en considérant la variable  $x$ . Le résultat obtenu est un polynôme en  $x$  de forme générale :

$$P_e \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (5.27)$$

L'ordre de diversité est défini pour les forts RSB et comme la variable  $x$  varie en  $\frac{1}{\text{RSB}}$ , les termes du polynôme avec les puissances élevées seront négligeables. De plus, les coefficients  $a_k$  peuvent être nuls et considérons  $a_N$  le premier terme non nul ( $a_k = 0$  pour  $k = 0, \dots, N-1$ ). Pour les hauts RSB, le polynôme se réduit à ce terme :

$$P_e \leq a_N x^N = \alpha \text{RSB}^{-N}. \quad (5.28)$$

Ce dernier résultat définit l'ordre de diversité à  $N$ . Cette solution nécessite les lois marginales des  $\lambda_i$  et n'est pas généralisée : elle s'applique à une configuration matérielle donnée. Appliquons cette méthode avec un exemple simple correspondant à un système (2,2). La loi conjointe est définie par l'équation (3.5) et le cas du système considéré a déjà été vu :

$$f_{\lambda_1, \lambda_2}^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} (\lambda_1 - \lambda_2)^2. \quad (5.29)$$

Les lois marginales ont été définies par (3.8) et peuvent être calculées :

$$\begin{cases} f_{\lambda_1}(\lambda_1) &= e^{-\lambda_1} (\lambda_1 - 2\lambda_1 + 2) - 2e^{-2\lambda_1} \\ f_{\lambda_2}(\lambda_2) &= 2e^{-2\lambda_2} \end{cases}. \quad (5.30)$$



Ces résultats permettent de déterminer les fonctions de répartition :

$$\begin{cases} P(\lambda_1 < x) = 1 - e^{-x(x^2 + 2)} + e^{-2x} \\ P(\lambda_2 < x) = 1 - e^{-2x} \end{cases} \quad (5.31)$$

Il reste maintenant à utiliser le développement limité des fonctions de répartition :

$$\begin{cases} P(\lambda_1 < x) \simeq \frac{x^4}{12} \\ P(\lambda_2 < x) \simeq 2x \end{cases} \quad \text{si } x \ll 1. \quad (5.32)$$

L'ordre de diversité du sous-canal utilisant  $\lambda_1$  est égal à 4 et celui associé à  $\lambda_2$  est 1. Dans le cas d'un précodeur diagonal utilisant ces deux sous-canaux, l'ordre de diversité sera 1 (5.22).

Les points difficiles de cette méthode sont les déterminations des lois marginales car comme nous l'avons vu dans le chapitre 3 les expressions se compliquent rapidement. Cependant, une solution possible est l'utilisation d'un logiciel de calcul symbolique comme Maple. L'algorithme de la méthode peut alors se résumer par :

#### Détermination de l'ordre de diversité pour chaque sous-canaux des systèmes diagonaux

1. détermination de la loi conjointe des valeurs propres de  $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$  en fonction de  $n_T$  et  $n_R$ ,
2. calculs des lois marginales  $f_{\lambda_i}(\lambda_i)$ ,
3. détermination des fonctions de répartitions  $P(\lambda_i < x)$ ,
4. développement limité pour  $x \ll 1$  pour obtenir un polynôme en  $x$ ,
5. détermination de la puissance de  $x$  correspondant au premier coefficient non nul.

La figure 5.3 donne les ordres de diversité de chaque voie pour un système  $(4, \max(n_T, n_R))$  en fonction de  $\max(n_T, n_R)$ . Ceux-ci sont obtenus à l'aide de Maple et la borne supérieure que nous avons définie est aussi présente en pointillés. Les résultats sont des fonctions affines dont la pente change pour chaque voie et les coefficients directeurs sont ordonnés de la même façon que les  $\lambda_i$ . À l'exception de la voie 1, notre borne supérieure commet une erreur se traduisant par un décalage mais donne néanmoins la bonne pente. Cette borne ne donne pas la valeur de l'ordre de diversité mais permet de donner sa tendance en fonction de la configuration matérielle  $(m - b + 1)$  et de conclure que l'ordre de diversité n'est pas maximal. En outre, notre résultat est défini pour n'importe quelle configuration matérielle  $(n_T, n_R)$  alors que l'autre méthode présentée est adaptée au cas pas cas.

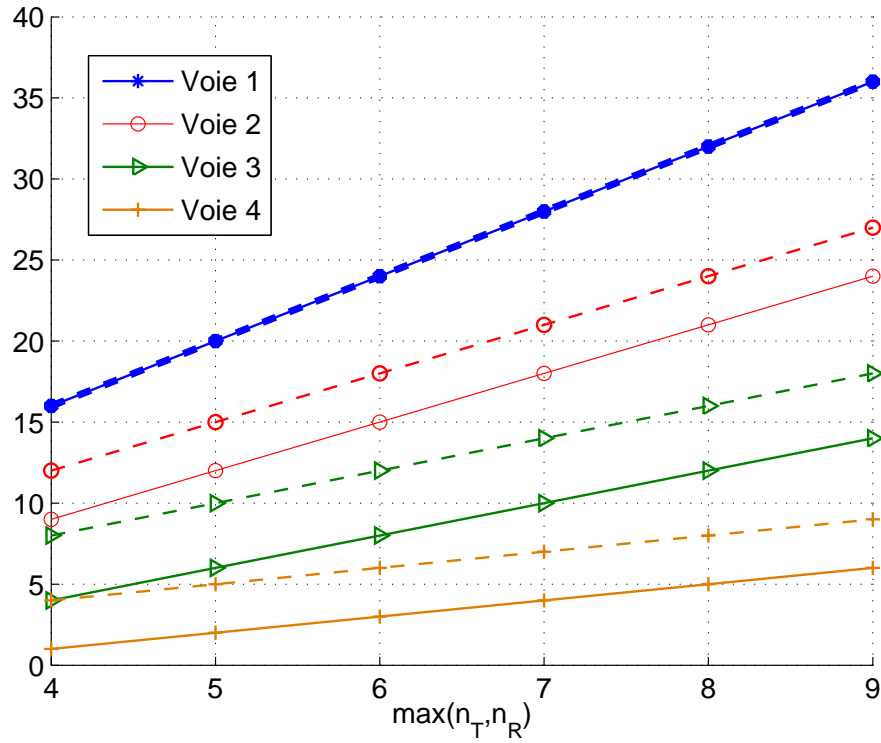


FIG. 5.3 – Comparaison des ordres de diversité pour un système  $\min(n_T, n_R) = 4$  : méthode théorique (Andersen) en trait plein et la borne supérieure en pointillés.

### 5.3 Solution simple des précodeurs diagonaux pour obtenir l'ordre de diversité maximal

#### 5.3.1 Une solution mixte avec un ordre de diversité maximal

##### Principe

Après avoir démontré que l'ordre de diversité d'un précodeur diagonal n'est pas maximal, nous proposons une solution simple basée sur l'association d'un précodeur diagonal et du max-SNR. Le but principal est de choisir l'un ou l'autre précodeur afin d'obtenir l'ordre de diversité maximal. Pour y parvenir, une solution rapide est de vérifier la condition (5.10). De plus, comme indiqué dans la paragraphe 5.2.1, la distance minimale euclidienne est un critère important et servira de critère de choix : le nouveau précodeur choisira la solution entre le max-SNR et le précodeur diagonal obtenant le plus grand  $d_{\min}$ . Cette définition est semblable à la solution du max- $d_{\min}$  qui sélectionne la matrice  $\mathbf{F}_{r1}$  (1 voie) ou  $\mathbf{F}_{octa}$  (2 voies) pour maximiser la distance minimale. L'exemple étudié dans ce chapitre sera équivalent au précodeur max- $d_{\min}$  dont le cahier des charges sera précisé plus loin. Nous avons vu que les distances des précodeurs avaient des expressions différentes et certaines étaient plus compliquées que d'autres (par exemple le terme  $\Phi = \text{RSB}p^2$  intervenait dans les solutions). Pour une raison de simplicité, le choix se porte sur le précodeur EE : le nombre de sous-canaux utilisés est constant (indépendant du RSB). En outre, celui-ci permet de maximiser une borne

inférieure du critère de choix  $d_{\min}$  [59]. De façon générale, la distance minimale est alors :

$$d_{\min}^2 = \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{H}_v \mathbf{F}_d \mathbf{x}\|_F^2 = \frac{4P_0 \beta_M}{\sum_{i=1}^b \lambda_i^{-1}} \quad (5.33)$$

où  $\mathbf{x}$  représente tous les vecteurs différences possibles et  $\beta_M$  est une constante dépendant de la modulation.

Le cahier des charges de l'exemple proposé est défini par :

- une efficacité spectrale de 4 bit/s/Hz,
- le précodeur max-SNR utilise une MAQ-16 ( $\beta_M = 1/10$ ),
- le précodeur EE avec 2 sous-canaux est associé à une MAQ-4 ( $\beta_M = 1/2$ ).

Le précodeur défini ainsi est nommé Erreur Egale avec Diversité Maximale (EEDM).

### Règle de choix (exemple pour $b = 2$ )

Nous avons vu précédemment que le terme  $\rho$  est un facteur d'échelle qui aura la même influence sur les distances des deux précodeurs. Ainsi, nous pouvons utiliser la distance minimale normalisée ( $\bar{d}_{\min} = d_{\min}/(\rho\sqrt{P_0})$ ) comme critère de choix. Nous avons vu que ce paramètre ne dépend plus que de  $\gamma$  et la figure 5.4 présente les  $\bar{d}_{\min}$  des précodeurs max-SNR et EE en fonction de l'angle. Le choix est similaire à celui du max- $d_{\min}$  dans le sens où un seuil fixe permet de choisir le précodeur avec la plus grande distance.

Parmi tous les précodeurs, seuls le max-SNR et le max- $d_{\min}$  assurent un ordre de diversité maximal avec le point commun que leurs distances minimales ne s'annulent jamais. Au contraire, les précodeurs diagonaux ont des distances qui s'annulent et nous avons vu que leur ordre de diversité est inférieur. Pourtant, certains précodeurs, comme le EQMM, ont une structure semblable à celle du max- $d_{\min}$  : un seuil de  $\gamma$  permet de choisir entre l'utilisation d'un ou deux sous-canaux. Seulement, ce basculement correspond à l'annulation de la distance. La conséquence de cette distance nulle se traduit par une borne inférieure de l'encadrement (5.10) qui est également nulle :  $\delta = 0$ . Notre but est de respecter cette condition suffisante et la solution EEDM doit juste choisir le max-SNR quand  $d_{\min}$  du EE s'annule pour obtenir l'ordre de diversité  $n_T \times n_R$ . Le critère classique de maximiser  $d_{\min}$  grâce à un basculement de précodeur [87] permet de répondre à cette contrainte et de remplir la condition suffisante. Le précodeur EEDM est alors défini pour une matrice de canal  $\mathbf{H}$  donnée par :

$$\mathbf{F}_{\text{EEDM}} = \arg \max_{\mathbf{F}=\mathbf{F}_{\text{EE}}, \mathbf{F}_{\text{max-SNR}}} d_{\min}(\mathbf{F}), \quad (5.34)$$

ou encore dans le domaine virtuel :

$$\mathbf{F}_{d\text{EEDM}} = \arg \max_{\mathbf{F}_d=\mathbf{F}_{d\text{EE}}, \mathbf{F}_{d\text{max-SNR}}} d_{\min}(\mathbf{F}_d). \quad (5.35)$$

Attention, les changements de modulations n'apparaissent pas sous cette forme et sont implicites dans le choix de la matrice de précodage. Pour  $b = 2$ , les distances normalisées  $\bar{d}_{\min}$  sont des fonctions connues de

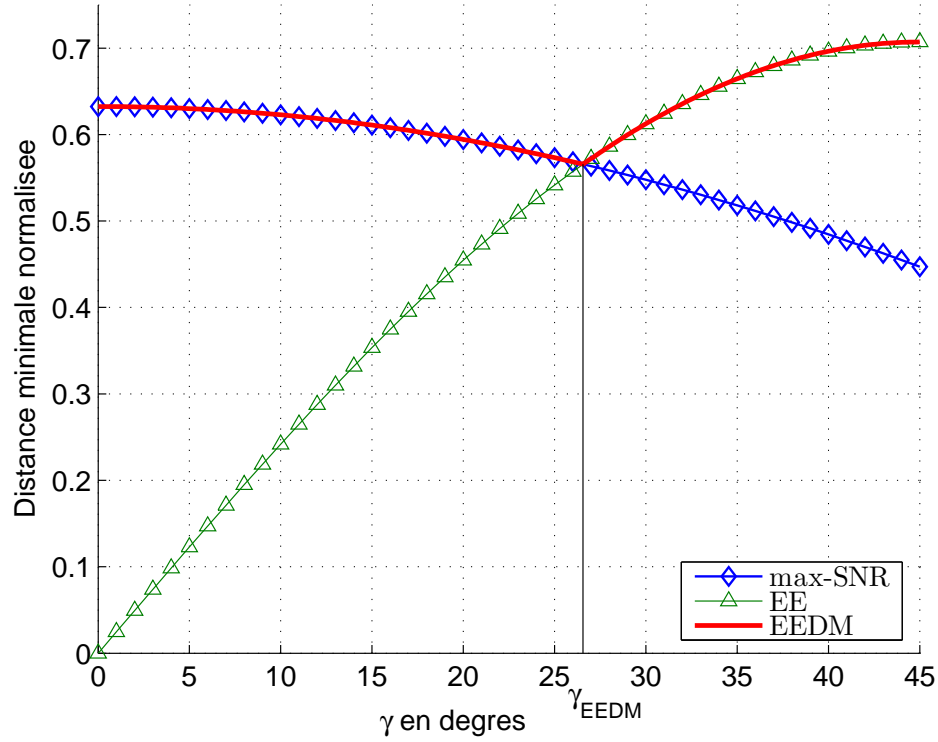


FIG. 5.4 – Distance euclidienne minimale en fonction de  $\gamma$  pour les précodeurs max-SNR, EE, et EEDM.

$\gamma$  et le résultat est visible sur la figure 5.4 : la distance minimale ne s'annule plus et il apparaît un seuil fixe pour  $\gamma$  déterminant le choix entre les deux précodeurs. La solution EEDM peut être réécrite comme suit :

$$\mathbf{F}_{d_{\text{EEDM}}} = \begin{cases} \mathbf{F}_{d_{\text{max-SNR}}} & \text{si } 0 \leq \gamma \leq \gamma_{\text{EEDM}} \\ \mathbf{F}_{d_{\text{EE}}} & \text{si } \gamma_{\text{EEDM}} < \gamma \leq \pi/4 \end{cases} \quad (5.36)$$

avec  $\gamma_{\text{EEDM}} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \simeq 26,56^\circ$ . Cette solution a une forme simple et l'amélioration de l'EE ne demande pas une mise en œuvre plus compliquée.

### 5.3.2 Résultats des simulations

La figure 5.5 montre les simulations de TEB pour les précodeurs max-SNR, EE et EEDM pour un système (3,3) avec le cahier des charges précisé. Les courbes des précodeurs max-SNR et EEDM deviennent parallèles pour des forts RSB tandis que celle de l'EE diverge. Nous pouvons donc vérifier que les précodeurs EEDM et max-SNR ont le même ordre de diversité et est maximum, alors que l'ordre de diversité du précodeur EE est inférieur. Le but de l'amélioration est atteint. De plus, le précodeur EEDM est le meilleur précodeur assurant un gain de 1 dB sur le max-SNR. Le précodeur EEDM s'avère plus performant que le max-SNR et l'EE mais il convient de relativiser les performances. D'une part, les simulations pour un système (2,2) montrent que le max-SNR et l'EEDM sont équivalents. D'autre part, lorsque le système a des

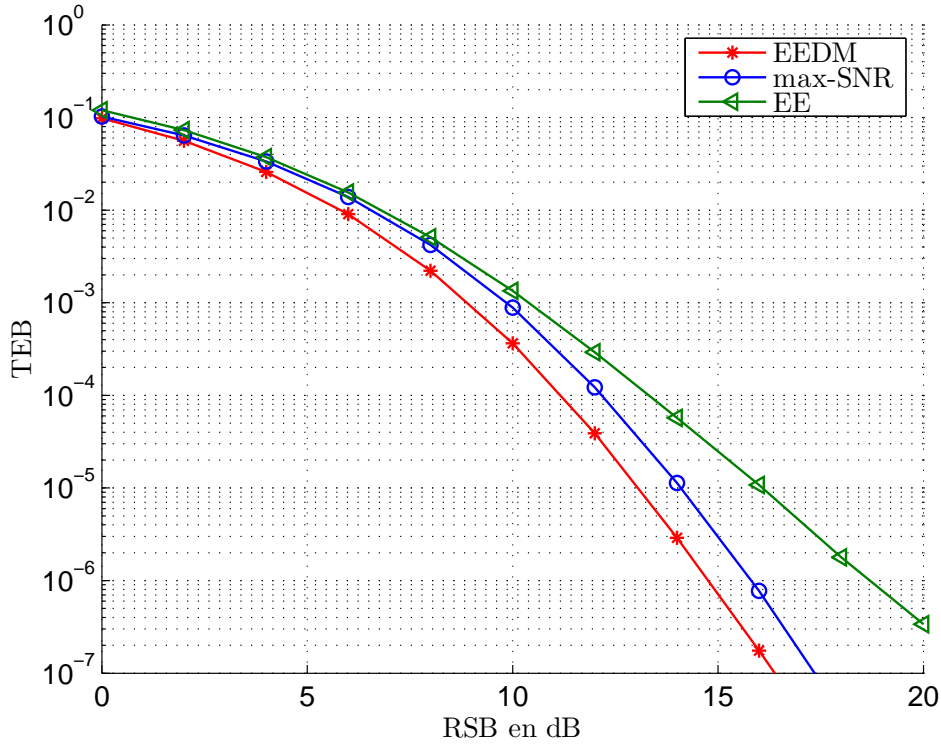


FIG. 5.5 – Le précodeur EEDM : association du max-SNR et de l’erreur égale maximisant la distance minimale. Simulations des TEB pour un système (3,3) avec 4 bits/s/Hz.

dimensions spatiales importantes, la différence d’ordre de diversité de l’EE s’amenuise et le gain de codage devient prépondérant. Cependant, la différence d’ordre de diversité apparaît pour les forts RSB et le EEDM se distingue alors. La solution que nous proposons améliore la transmission pour des systèmes moyens, comme celui présenté (3,3), sans augmenter la complexité de la transmission (retour d’information, calculs du précodeur...).

## 5.4 Conclusion

Les précodeurs optimaux tels que le MMSE, l’EE, le TEBM, la QdS ou le WF, conduisent à une matrice diagonale  $\mathbf{F}_d$ . Nous avons vu qu’une telle structure est incapable d’assurer l’ordre de diversité maximum  $n_T \times n_R$ . En effet nous avons déterminé, avec une démonstration simple, une borne supérieure de l’ordre de diversité de chaque sous-canal et alors déduit une borne supérieure de l’ordre de diversité global égale à  $n_T \times n_R - (b-1)\max(n_T, n_R)$ . A partir de ce résultat, nous avons donné une solution simple mais non optimale pour améliorer le précodeur EE afin d’obtenir l’ordre de diversité maximal. Le nouveau précodeur Erreur Egale avec Diversité Maximale (EEDM) choisit entre le max-SNR et le précodeur EE selon le critère de la plus grande distance minimale. Nous avons vérifié que les TEB de ce nouveau précodeur étaient plus faibles que le max-SNR et l’EE mais cette amélioration doit être relativisée : le max-SNR offre les mêmes

performances pour un système (2,2) et pour des systèmes plus grands, les TEB de l'EE et de l'EEDM restent proches jusqu'à une valeur de RSB où la différence d'ordre de diversité sépare les deux courbes. Néanmoins, le précodeur EEDM s'avère intéressant pour des systèmes moyens, comme celui présenté avec  $n_T = n_R = 3$ . Il assure un gain de 1 dB pour une complexité équivalente : la CSI est déjà disponible, la détermination de la matrice  $\mathbf{F}_d$  ne nécessite pas de calculs plus importants et le nombre de tests du maximum de vraisemblance reste égal à  $2M$ .



## Chapitre 6

# Précodeur $E d_{\min}$ et diversité de polarisation

### 6.1 Introduction

Les systèmes MIMO permettent d'améliorer les performances des transmissions sans fil en diminuant le taux d'erreur ou en limitant les évanouissements. Pour répondre à la demande de débit de plus en plus importante, nous pourrions être tentés d'augmenter le nombre d'antennes à l'émission et à la réception. Il apparaît alors un problème de mise en œuvre : l'encombrement. Les antennes possèdent un volume utile en tant qu'objet lors de la mise en place de la transmission et il est nécessaire de les espacer suffisamment pour éviter la corrélation spatiale. De plus, la multiplication du matériel associé avec notamment les amplificateurs de puissance augmente le coût de l'installation. Une solution possible pour diminuer ces inconvénients est de combiner la diversité spatiale avec la diversité de polarisation : l'onde se propage avec une polarisation selon deux axes orthogonaux [20, 21, 22]. Cette solution est déjà mise en place dans les liaisons par satellite pour transmettre des données en parallèle. L'idée est maintenant d'utiliser la polarisation pour créer de la diversité. Ainsi, le nombre d'antennes est diminué par deux : un système utilisant physiquement une antenne à l'émission et une autre à la réception associées à une double polarisation est équivalent à un système MIMO (2,2). De la même façon, un système (2,2) avec de la diversité de polarisation peut être vu comme un système MIMO (4,4). Cette solution permet un gain de place important et une diminution du coût mais le modèle de canal MIMO doit tenir compte de l'apparition de corrélation. L'apparition de cette corrélation se révèle être un défaut important car elle diminue la diversité spatiale et détériore le TEB [88].

D'autre part, si les systèmes MIMO possèdent des dimensions spatiales importantes, il est dommage que le précodeur  $\max-d_{\min}$  ne permette pas de transmettre plus de deux voies de données contrairement aux précodeurs diagonaux. C'est pourquoi nous présentons une extension du précodeur  $\max-d_{\min}$  basée sur la maximisation de la distance minimale mais non optimale. La solution est simple avec une forme particulière en «croix» et nous allons voir qu'elle propose un bon compromis entre les performances (TEB) et la complexité.

La première partie de ce chapitre présente l'extension du précodeur  $\max-d_{\min}$  pour un nombre de voies



de données pair et supérieur à deux. Nous présenterons le principe basé sur l'égalisation des distances (d'où le nom «Equal  $d_{\min}$ » ou  $Ed_{\min}$ ) et les performances pour des systèmes MIMO (4,4), et (6,6) car nous avons vu qu'une répartition symétrique propose les meilleures performances pour un nombre donné d'antennes.

La seconde partie introduira le modèle de canal MIMO utilisant de la diversité de polarisation aboutissant à un canal de Rayleigh corrélé. Dans un premier temps, nous verrons l'impact de cette corrélation sur les TEB des précodeurs permettant d'assurer un ordre de diversité maximal à savoir le max- $d_{\min}$ , max-SNR et le code d'Alamouti. Nous nous intéresserons ensuite aux configurations matérielles physiques réelles raisonnables à mettre en œuvre que sont les systèmes MIMO (2,2) et (3,3) mais permettant d'obtenir des systèmes équivalents (4,4) et (6,6). Nous comparerons alors les performances de notre extension du précodeur max- $d_{\min}$  avec les précodeurs diagonaux de la littérature.

## 6.2 L'extension du précodeur max- $d_{\min}$

### 6.2.1 Rappel du problème

Le précodeur max- $d_{\min}$  présenté et étudié précédemment optimise la distance minimale de la constellation de réception. L'expression exacte de ce critère dépend de plusieurs paramètres : du nombre de voies  $b$ , de la modulation utilisée avec un nombre de symboles  $M$ , du canal virtuel et de la contrainte de puissance  $P_0$ . L'optimisation est alors difficile et le nombre de solutions est limité (*cf.* chapitre 2). Le résultat pour  $b = 2$  flux de symboles utilisant une MAQ-4 est disponible : le précodeur linéaire mélange les deux symboles émis et n'hésite pas à supprimer la voie la plus faible si nécessaire. La distance  $d_{\min}$  et les performances sont meilleures que les autres méthodes comme le code d'Alamouti ou les précodeurs diagonaux mais au prix d'un nombre plus important de combinaisons à tester pour le maximum de vraisemblance (point développé dans le paragraphe suivant). Les évolutions logiques du précodeur seraient d'augmenter les dimensions comme le nombre d'états de la modulation ou le nombre de flux de données  $b$ . Dans un premier temps, la modulation restera inchangée (MAQ-4) et le but principal est de pouvoir transmettre plus de deux symboles par période. Nous avons vu que pour  $b = 2$ , le précodeur max- $d_{\min}$  mélange les symboles puis utilise un seul ou les deux canaux. On peut supposer que la solution pour  $b > 2$  reprend ce principe en utilisant de 1 à  $b$  sous-canaux pour émettre les symboles mélangés afin d'optimiser la distance minimale. Le nombre de possibilités pour le récepteur augmente alors exponentiellement ( $M^b$  combinaisons). La solution que nous proposons n'est pas optimale au sens de  $d_{\min}$  mais la complexité du récepteur MV n'est plus une fonction exponentielle de  $b$ .

### 6.2.2 Solution proposée : décomposition du canal virtuel en sous-systèmes $2 \times 2$

Les précodeurs diagonaux sont basés sur une transformation d'un système MIMO en plusieurs sous-systèmes indépendants SISO. Ils optimisent alors un critère qui leur est propre et répartissent la puissance sur

les sous-systèmes. Certains chercheurs comme Belfiore les appellent d'ailleurs «les précodeurs à allocation de puissance». L'idée est ici de décomposer un système MIMO en sous-systèmes de précodeurs max- $d_{\min}$  puis de répartir la puissance sur chacun d'eux. Cette solution est valable pour des nombres pairs de flux. Elle se déroule en deux étapes.

La première consiste à découper le canal virtuel en sous-systèmes de deux voies donnant des sous-canaux  $\tilde{\mathbf{H}}_{vi}$  caractérisés par  $\tilde{\gamma}_i$  et  $\tilde{\rho}_i$ . Prenons un exemple concret pour 4 voies de données et un canal avec  $m \geq 4$  et  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ . Il s'agit alors d'effectuer le remaniement suivant par exemple :

$$\mathbf{H}_v = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_4} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{\mathbf{H}}_{v1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_4} \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbf{H}}_{v2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{pmatrix} \end{cases}. \quad (6.1)$$

La solution du max- $d_{\min}$  utilisant l'angle  $\gamma_i$  peut être appliquée pour obtenir le sous-précodeur  $\tilde{\mathbf{F}}_{di}$  optimisant la distance minimale et transmettant deux symboles. La puissance imposée est alors unitaire ( $\|\tilde{\mathbf{F}}_{di}\|_F^2 = 1$ ).

La seconde étape consiste à pondérer chaque sous-précodeur avec un coefficient  $\Upsilon_i$ . Chaque optimisation d'un sous-canal donne une distance minimale différente et le rôle de la répartition de puissance est de maximiser la distance minimale tout en respectant la contrainte de puissance. Cette seconde optimisation revient à égaliser les distances minimales de chaque sous-système définissant la distance minimale globale : ce précodeur est l'Equal  $d_{\min}$  ou  $Ed_{\min}$ .

Ce principe exposé permet déjà de conclure que la complexité du récepteur est limitée sans connaître  $\tilde{\mathbf{F}}_{di}$  ni  $\tilde{\mathbf{H}}_{vi}$ . Tout d'abord, rappelons que le multiplexage spatial avec un symbole différent sur chaque antenne [27, 38] donne  $M^b$  vecteurs de  $b$  symboles que le récepteur basé sur le maximum de vraisemblance doit tester. De leur côté, les précodeurs diagonaux utilisent le canal virtuel et permettent de transmettre les symboles en parallèle : le récepteur est formé de  $b$  MV indépendants donnant  $b \times M$  tests (fig. 2.4). Les OSTBC permettent également un découplage des symboles et un nombre égal de tests (fig. 2.2). Notre précodeur est un cas intermédiaire : il utilise la diagonalisation pour transmettre non plus un mais deux symboles. Le nombre de combinaisons à tester pour le MV devient  $\frac{b}{2} \times M^2$ . Le tableau 6.1 propose le nombre de combinaisons pour différentes valeurs de  $b$  pour une modulation MAQ-4. La complexité de notre extension reste limitée : la croissance du nombre de tests n'est pas exponentielle mais linéaire. La simplification due à la diagonalisation du canal est utilisée mais n'est pas optimale comme celle des précodeurs diagonaux.

méthode utilisée	Nombre de tests	$b = 2$	$b = 4$	$b = 6$	$b = 8$
Multiplexage spatial (sans précodeur)	$M^b$ vecteurs	16	256	4096	65536
Précodeur diagonal	$b \times M$	8	16	24	32
Extension du max- $d_{\min}$	$\frac{b}{2} \times M^2$	16	32	48	64

TAB. 6.1 – Nombre de combinaisons à la réception en fonction du nombre de flux de données  $b$  utilisant chacune une MAQ-4

Nous pouvons faire deux remarques importantes à propos de la solution proposée.

### Remarque 1

De par sa structure, chaque sous-précodeur peut choisir de supprimer la voie la plus faible de son sous-système (choix du  $\mathbf{F}_{r1}$ ). Ainsi, le précodeur global adaptera le nombre de voies à utiliser pouvant aller de  $\frac{b}{2}$  (que des  $\mathbf{F}_{r1}$ ) à  $b$  (que des  $\mathbf{F}_{octa}$ ).

### Remarque 2

La première étape consiste à définir des sous-canaux  $2 \times 2$  et leur définition n'est pas précisée. Comment optimiser la plus petite distance minimale globale avec pour degré de liberté le choix des combinaisons de couples de  $\lambda_i$  ? En d'autres termes, quelle est la combinaison parmi celles possibles (au nombre de  $\prod_{i=0}^{\frac{b}{2}} (b - 2i + 1)$ ) qui permet de maximiser  $d_{\min}$  ?

### Ecriture matricielle des sous-systèmes

Après avoir décrit le principe, passons outre le choix d'association des couples dans un premier temps et déterminons le précodeur avec la matrice  $\mathbf{F}_d$ . La relation matricielle d'entrée-sortie dans le canal virtuel est :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}_v \mathbf{F}_d \mathbf{s} + \mathbf{n}_v.$$

Notons d'une manière générale la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  après le choix des couples  $\lambda_i$  puis le remaniement des éléments de la matrice initiale  $\mathbf{A}$ . La relation d'entrée-sortie devient alors :

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{H}}_v \tilde{\mathbf{F}}_d \tilde{\mathbf{s}} + \tilde{\mathbf{n}}_v. \quad (6.2)$$

Le sous-précodeur  $\tilde{\mathbf{F}}_{di}$  permet d'optimiser le sous-canal  $\tilde{\mathbf{H}}_{vi}$  au sens de la maximisation de la distance minimale puis les coefficients  $\Upsilon_i$  permettent de répartir la puissance sur chaque sous-système. Le précodeur

associé au canal global remanié  $\tilde{\mathbf{H}}_v$  peut être défini :

$$\tilde{\mathbf{F}}_d = \sqrt{P_0} \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \tilde{\mathbf{F}}_{d1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Upsilon_2 \tilde{\mathbf{F}}_{d2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \Upsilon_{\frac{b}{2}} \tilde{\mathbf{F}}_{d\frac{b}{2}} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

avec comme propriétés permettant de respecter la contrainte de puissance :

$$\sum_{i=1}^{\frac{b}{2}} \Upsilon_i^2 = 1 \quad \text{et} \quad \|\tilde{\mathbf{F}}_{di}\|_F^2 = 1. \quad (6.4)$$

En effet, la puissance du précodeur s'exprime ainsi :

$$\|\tilde{\mathbf{F}}_d\|_F^2 = \|\mathbf{F}_d\|_F^2 = P_0 \sum_{i=1}^{\frac{b}{2}} \Upsilon_i^2 \|\tilde{\mathbf{F}}_{di}\|^2 = P_0. \quad (6.5)$$

### Allocation de puissance

L'allocation de puissance des coefficients  $\Upsilon_i$  est analogue au précodeur EE au critère près. En effet, ce précodeur diagonal détermine les  $f_i^2$  dans le but d'obtenir le même gain sur toutes les voies. Il s'agit maintenant d'obtenir des distances égales sur toutes les voies et par analogie,  $\sigma_i^2$  devient  $d_{\min}^2(\tilde{\mathbf{F}}_{di})$  et  $f_i^2$  devient  $\Upsilon_i^2$  dans la solution (2.55). La solution de la répartition de la puissance entre les différents sous-systèmes est :

$$\Upsilon_i^2 = \frac{1}{d_{\min}^2(\tilde{\mathbf{F}}_{di}) \sum_{k=1}^{\frac{b}{2}} \frac{1}{d_{\min}^2(\tilde{\mathbf{F}}_{dk})}} = \frac{1}{\tilde{\rho}_i^2 \bar{d}_{\min}^2(\tilde{\gamma}_i) \sum_{k=1}^{\frac{b}{2}} \frac{1}{\tilde{\rho}_k^2 \bar{d}_{\min}^2(\tilde{\gamma}_k)}} \quad \text{pour } i = 1, \dots, \frac{b}{2}. \quad (6.6)$$

avec  $d_{\min}(\tilde{\mathbf{F}}_{dk}) = \tilde{\rho}_i \bar{d}_{\min}(\tilde{\gamma}_i)$  la distance minimale obtenue avec le précodeur  $\tilde{\mathbf{F}}_{dk}$  sur le sous-système  $i$  caractérisé par  $\tilde{\gamma}_i$  et  $\tilde{\rho}_i$ . La distance minimale globale du système étendu que nous proposons correspond à la distance minimale d'un sous-système avec la prise en compte de l'allocation de puissance :

$$d_{\min}^2 = \frac{P_0}{\sum_{k=1}^{\frac{b}{2}} \frac{1}{d_{\min}^2(\tilde{\mathbf{F}}_{dk})}}. \quad (6.7)$$

Cette distance minimale dépend des inverses des carrés des distances minimales de chaque sous-système.

**Remarque :** si une distance  $d_{\min}(\tilde{\mathbf{F}}_{dk})$  est très petite devant les autres, son inverse devient prépondérant dans l'expression (6.7) : la distance minimale globale diminue  $d_{\min} \simeq \min_k d_{\min}(\tilde{\mathbf{F}}_{dk})$ .

### 6.3 Association des couples de sous-canaux

#### 6.3.1 Comparaison des distances de deux sous-systèmes $\max\text{-}d_{\min}$

Considérons  $\lambda \leq \lambda_b \leq \lambda_a$  et étudions le comportement des sous-précodeurs  $\max\text{-}d_{\min}$  associés aux couples  $(\lambda_a, \lambda)$  et  $(\lambda_b, \lambda)$  dans le but de déterminer la plus grande distance minimale. Les couples  $(\lambda_a, \lambda)$  et  $(\lambda_b, \lambda)$  n'ont pas les mêmes angles  $\gamma$  définis par :

$$\gamma_a = \arctan \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_a}} \quad \text{et} \quad \gamma_b = \arctan \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_b}}. \quad (6.8)$$

Les distances minimales dépendent du choix de la matrice  $\mathbf{F}_{r1}$  ou  $\mathbf{F}_{octa}$  (cf. eq.4.21). Pour le premier couple  $(\lambda_a, \lambda)$ , cette distance sera égale à la plus grande des deux suivantes (respectivement pour  $\lambda_b$ ) :

$$\begin{cases} d_{\mathbf{F}_{r1}}^a = \sqrt{(1 - 1/\sqrt{3})\lambda_a} & \text{si } \gamma_a \leq \gamma_0 \\ d_{\mathbf{F}_{octa}}^a = \sqrt{(3 + 2\sqrt{2}) \frac{\lambda_a \lambda}{\lambda + (3 - 2\sqrt{2})\lambda_a}} & \text{si } \gamma_a > \gamma_0 \end{cases} \quad (6.9)$$

où  $\gamma_0 \simeq 17,28^\circ$  et la contrainte de puissance moyenne émise est unitaire pour chaque sous-précodeur. Comme  $\lambda_a \geq \lambda_b$ , les angles respectent  $\gamma_b \geq \gamma_a$ . Cette inégalité signifie que si le sous-précodeur associé au couple  $(\lambda_a, \lambda)$  utilise le  $\mathbf{F}_{octa}$ , celui associé à  $(\lambda_b, \lambda)$  emploie également le  $\mathbf{F}_{octa}$  ( $\gamma_b \geq \gamma_a > \gamma_0$ ). La figure 6.1 illustre la comparaison de ces deux distances. Nous devons alors comparer les distances pour trois cas :

- les deux sous-précodeurs utilisent le  $\mathbf{F}_{r1}$ ,
- les deux appliquent le  $\mathbf{F}_{octa}$ ,
- celui associé à  $(\lambda_a, \lambda)$  emploie le  $\mathbf{F}_{r1}$  tandis que l'autre utilise le  $\mathbf{F}_{octa}$ .

Les deux premiers cas se règlent rapidement car il est alors possible de démontrer en regardant les rapports que :

$$\begin{cases} d_{\mathbf{F}_{r1}}^a \geq d_{\mathbf{F}_{r1}}^b & \text{pour } \gamma_a \text{ et } \gamma_b \leq \gamma_0 \\ d_{\mathbf{F}_{octa}}^a \geq d_{\mathbf{F}_{octa}}^b & \text{pour } \gamma_a \text{ et } \gamma_b < \gamma_0 \end{cases}. \quad (6.10)$$

Le troisième cas correspond à des comportements différents des sous-précodeurs (visible sur la figure 6.1). La valeur  $\lambda_e$  de  $\lambda$  permet d'obtenir l'égalité des distances :  $d_{\mathbf{F}_{r1}}^a = d_{\mathbf{F}_{octa}}^b$ . Nous pouvons alors vérifier que l'angle  $\gamma_e = \arctan \sqrt{\frac{\lambda_e}{\lambda_a}}$  est toujours plus grand que  $\gamma_0$  : le précodeur considérant le couple  $(\lambda_a, \lambda)$  aura déjà basculé vers le  $\mathbf{F}_{octa}$  assurant une plus grande distance minimale. Nous avons donc :

$$d_{\mathbf{F}_{r1}}^a \geq d_{\mathbf{F}_{octa}}^b \quad \text{pour } \gamma_a < \gamma_0 < \gamma_b. \quad (6.11)$$

En conclusion, nous pouvons dire à l'aide de (6.10) et (6.11) que :

$$d_{\min}(\lambda_a, \lambda) \geq d_{\min}(\lambda_b, \lambda) \quad \text{si } \lambda \leq \lambda_b \leq \lambda_a \quad (6.12)$$

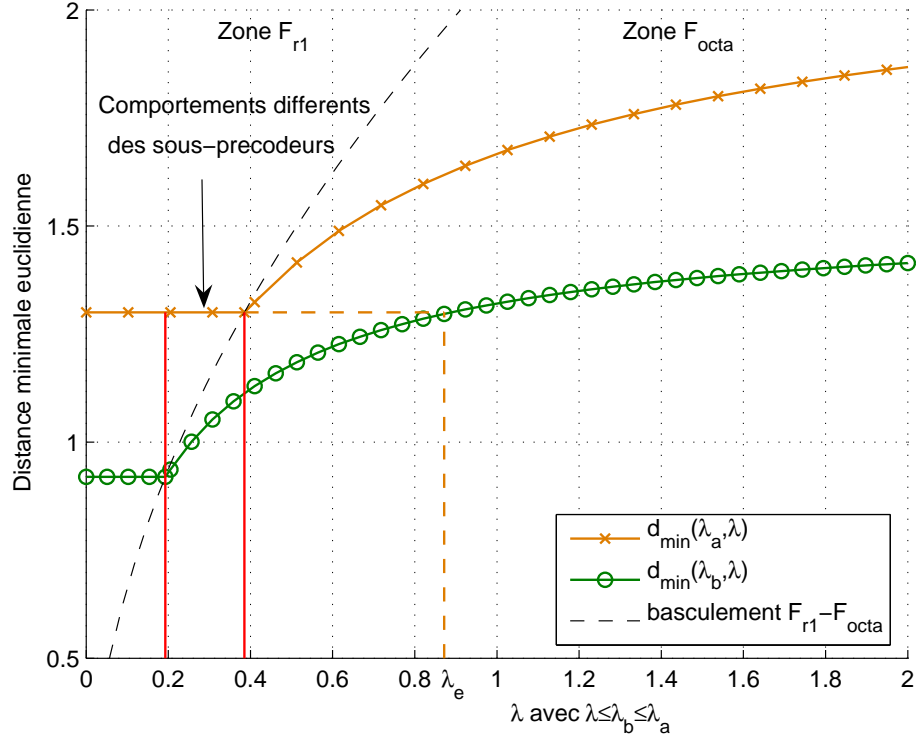


FIG. 6.1 – Comparaison des distances minimales en fonction de la plus petite valeur propre et pour différentes valeurs associées.  $\lambda_a$  et  $\lambda_b$  sont deux constantes arbitraires respectant  $\lambda_a > \lambda_b$  (ici  $\lambda_a = 4$  et  $\lambda_b = 2$ ). Le basculement entre les deux précodeurs  $F_{r1}$  ou  $F_{octa}$  est visible en pointillés.

avec  $d_{\min}(\lambda_i, \lambda_j)$  la distance minimale associée au système  $(\lambda_i, \lambda_j)$  avec  $\lambda_i \geq \lambda_j$ .

De façon analogue, nous pouvons démontrer que :

$$d_{\min}(\lambda, \lambda_a) \geq d_{\min}(\lambda, \lambda_b) \quad \text{si } \lambda \geq \lambda_a \geq \lambda_b. \quad (6.13)$$

Ces deux propriétés sur les distances vont permettre de définir la combinaison des couples de  $\lambda_i$  qui maximise la distance minimale.

### 6.3.2 Détermination des couples de $\lambda_i$

#### Critère d'optimisation

L'optimisation que nous considérons est la maximisation de la distance minimale  $d_{\min}$  (6.7) avec comme degré de liberté la combinaison des couples :

$$\max_{\mathcal{M}} d_{\min}^2 = \max_{\mathcal{M}} \frac{P_0}{\sum_{k=1}^{\frac{b}{2}} \frac{1}{d_{\min}^2(\mathbf{F}_{dk})}} \quad (6.14)$$

Combinaison	Couples		Propriétés pour déterminer $d_{\min}$ de la combinaison	Distance minimale	Propriétés pour déterminer $d_{\min}$ globale
Combi1	$(\lambda_a, \lambda_b)$	$(\lambda_c, \lambda_d)$	$d_{\min}(\lambda_a, \lambda_b) \geq d_{\min}(\lambda_c, \lambda_d)$	$d_{\min}(\lambda_c, \lambda_d)$	—
Combi2	$(\lambda_a, \lambda_c)$	$(\lambda_b, \lambda_d)$	$d_{\min}(\lambda_a, \lambda_c) \geq d_{\min}(\lambda_b, \lambda_d)$	$d_{\min}(\lambda_b, \lambda_d)$	$d_{\min}(\lambda_b, \lambda_d) \geq d_{\min}(\lambda_c, \lambda_d)$
Combi3	$(\lambda_a, \lambda_d)$	$(\lambda_b, \lambda_c)$	INDÉTERMINÉE	INDÉTERMINÉE	$d_{\min}(\lambda_a, \lambda_d) \geq d_{\min}(\lambda_b, \lambda_d)$ $d_{\min}(\lambda_b, \lambda_c) \geq d_{\min}(\lambda_b, \lambda_d)$

TAB. 6.2 – Les trois combinaisons de couples possibles pour  $b = 4$  avec la distance minimale des deux sous-systèmes max- $d_{\min}$ . L’association Combi3 garantie la plus grande distance minimale.

où  $\mathcal{M}$  représente les combinaisons de couples possibles avec  $\text{card } \mathcal{M} = \prod_{i=0}^{\frac{b}{2}} (b - 2i + 1) =$ . En utilisant la majoration suivante :

$$\sum_{k=1}^{\frac{b}{2}} \frac{1}{d_{\min}^2(\tilde{\mathbf{F}}_{dk})} \leq \frac{b}{2} \frac{1}{\min_i d_{\min}^2(\tilde{\mathbf{F}}_{di})}, \quad (6.15)$$

la distance minimale a comme borne inférieure :

$$d_{\min}^2 \geq P_0 \frac{2}{b} \min_i d_{\min}^2(\tilde{\mathbf{F}}_{di}). \quad (6.16)$$

Nous utilisons la conjecture suivante : la solution de l’optimisation de (6.14) correspond à maximiser la borne inférieure (6.16). Nous avons également vérifié numériquement que cette affirmation était vraie pour des tirages aléatoires et pour des cas particuliers de canaux. Le problème revient à cette nouvelle optimisation :

$$\max_{\mathcal{M}} \min_i d_{\min}^2(\tilde{\mathbf{F}}_{di}). \quad (6.17)$$

Nous allons maintenant déterminer la combinaison qui optimise (6.17).

### Raisonnement sur quatre valeurs

Ce paragraphe limite le problème en ne considérant que quatre valeurs  $\lambda_a \geq \lambda_b \geq \lambda_c \geq \lambda_d$ . Dans ce cas, trois combinaisons de couples sont possibles (notées Combi1, Combi2 et Combi3) et la résolution de l’optimisation s’en trouve simplifiée. Le tableau 6.2 résume la démonstration en présentant les trois combinaisons de couples possibles, la plus petite distance correspondante ainsi que les propriétés utiles sur les distances. Le raisonnement consiste à prendre la plus petite distance de chaque combinaison puis de déterminer la plus grande des trois. La comparaison des cas Combi1 et Combi2 découle directement des propriétés (6.12) et (6.13) : dans tous les cas, Combi2 donne la plus grande distance minimale (cf. tableau 6.2). La comparaison avec Combi3 se complique par l’indétermination de la plus petite distance : nous savons que  $\lambda_a \geq \lambda_b$  mais  $\lambda_d \leq \lambda_c$ . Les valeurs numériques sont alors nécessaires pour connaître la distance minimale. Cependant, les deux cas possibles donnent la plus grande distance et nous pouvons conclure que cette combinaison est celle recherchée permettant d’optimiser  $d_{\min}$  (cf. tableau 6.2).

Etape	Combinaisons	Distance minimale	Vérification que la distance est améliorée ou égale
Etape 0	$(\lambda_1, \lambda_4)$ $(\lambda_2, \lambda_3)$ $(\lambda_5, \lambda_6)$	$d_{\min}(\lambda_5, \lambda_6)$	distance égale
Etape 1	$(\lambda_1, \lambda_6)$ $(\lambda_2, \lambda_3)$ $(\lambda_4, \lambda_5)$	INDÉTERMINÉE cas 1 : $d_{\min}(\lambda_1, \lambda_6)$ cas 2 : $d_{\min}(\lambda_4, \lambda_5)$	cas 1 : $d_{\min}(\lambda_1, \lambda_6) \geq d_{\min}(\lambda_5, \lambda_6)$ cas 2 : $d_{\min}(\lambda_4, \lambda_5) \geq d_{\min}(\lambda_5, \lambda_6)$
Etape 2 (fin)	$(\lambda_1, \lambda_6)$ $(\lambda_2, \lambda_5)$ $(\lambda_3, \lambda_4)$	INDÉTERMINÉE cas 1 : $d_{\min}(\lambda_1, \lambda_6)$ cas 2 : $d_{\min}(\lambda_2, \lambda_5)$ cas 3 : $d_{\min}(\lambda_3, \lambda_4)$	cas 1 : si cas 1 dans l'étape 2 alors <u>distance égale</u> si cas 2 dans l'étape 2 alors <u><math>d_{\min}(\lambda_1, \lambda_6) \geq d_{\min}(\lambda_4, \lambda_5)</math></u> cas 2 : dans l'étape 2, seul le cas 2 est possible alors <u><math>d_{\min}(\lambda_2, \lambda_5) \geq d_{\min}(\lambda_4, \lambda_5)</math></u> cas 3 : dans l'étape 2, seul le cas 2 est possible alors <u><math>d_{\min}(\lambda_3, \lambda_4) \geq d_{\min}(\lambda_4, \lambda_5)</math></u>

TAB. 6.3 – Exemple d'optimisation des combinaisons pour  $b = 6$ . Les deux couples sélectionnés par une accolade à l'étape  $i$  sont optimisés à l'étape  $i + 1$ . La dernière colonne permet de vérifier que la distance est soit égale, soit améliorée.

En conclusion, si nous considérons quatre valeurs ordonnées, nous sommes capables de donner la combinaison qui maximise la distance minimale qui est  $(\lambda_a, \lambda_d)$  et  $(\lambda_b, \lambda_c)$ . La plus grande valeur est associée avec la plus petite.

### Généralisation

Notre problème considère  $b$  valeurs  $\lambda_i$  rangées par ordre décroissant :  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_b$ . Ces variables sont associées en  $\frac{b}{2}$  couples et la combinaison initiale n'est pas importante. Considérons le couple contenant  $\lambda_1$  et n'importe quel autre couple :  $\lambda_1$  est associé avec le plus petit des autres  $\lambda_i$  pour maximiser la plus petite distance. Appliquons ce principe à toutes les combinaisons possibles et nous obtenons le couple  $(\lambda_1, \lambda_b)$  : l'association  $\lambda_1$  et  $\lambda_b$  est optimale au sens de (6.17).

L'association de ces deux valeurs reste figée et l'algorithme précédent peut maintenant s'appliquer pour  $\lambda_2$  mais en supprimant  $\lambda_1$  et  $\lambda_b$  des combinaisons possibles. Il est intéressant de noter que le plus faible  $\lambda_i$ , donc celui qui pose problème, est associé à chaque itération. Ce raisonnement est appliqué jusqu'à la détermination de tous les couples. La solution finale est toujours :

$$(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_b}), (\sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_{b-1}}), \dots, (\sqrt{\lambda_i}, \sqrt{\lambda_{b-i+1}}), \dots, \sqrt{\lambda_{\frac{b}{2}}}, \sqrt{\lambda_{\frac{b}{2}+1}}. \quad (6.18)$$

Prenons un exemple pour  $b = 6$  avec le tableau 6.3 : la combinaison de couples est donnée avec la distance minimale associées. À l'étape  $i$ , la paire de couples pour l'optimisation est indiquée par des accolades. À l'étape  $i + 1$ , la plus grande valeur a été associée avec la plus petite et nous vérifions que la distance est améliorée ou reste inchangée. La combinaison finale est toujours l'association de  $\lambda_1$  et  $\lambda_6$  puis  $\lambda_2$  et  $\lambda_5$  et  $\lambda_3$  et  $\lambda_4$  : nous pouvons vérifier que cette solution correspond à (6.18).



### Remarque

Nous avons donné une borne inférieure de la distance minimale avec (6.16) mais un encadrement basé sur le même raisonnement était également possible :

$$P_0 \frac{2}{b} \max_i d_{\min}^2(\tilde{\mathbf{F}}_{di}) \geq d_{\min}^2 \geq P_0 \frac{2}{b} \min_i d_{\min}^2(\tilde{\mathbf{F}}_{di}). \quad (6.19)$$

Les expérimentations numériques nous ont permis d'observer que la solution optimale (6.18) maximisait la borne inférieure mais minimisait également la borne supérieure : cette combinaison permet d'avoir le moins d'écart entre  $\max_i d_{\min}^2(\tilde{\mathbf{F}}_{di})$  et  $\min_i d_{\min}^2(\tilde{\mathbf{F}}_{di})$ .

### Définition des sous-matrices

La combinaison des couples étant définie, nous pouvons écrire les sous-matrices de canal de taille  $2 \times 2$  :

$$\tilde{\mathbf{H}}_{vi} = \text{diag} \left( \sqrt{\lambda_i}, \sqrt{\lambda_{b-i+1}} \right) \quad \text{avec } i = 1, \dots, \frac{b}{2}. \quad (6.20)$$

Cette matrice correspond à un sous-système qui sera optimisé indépendamment des autres. Pour remonter à la structre globale du précodeur  $Ed_{\min}$ , nous définissons la matrice de canal remaniée :

$$\tilde{\mathbf{H}}_v = \text{diag} \left( \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_b}, \dots, \sqrt{\lambda_i}, \sqrt{\lambda_{b-i+1}}, \dots, \sqrt{\lambda_{\frac{b}{2}}}, \sqrt{\lambda_{\frac{b}{2}+1}} \right). \quad (6.21)$$

Le synoptique de la chaîne de transmission recombining est illustré par la figure 6.2.

### 6.3.3 Solution de l'extension

Développons le précodeur  $\tilde{\mathbf{F}}_{di}$  de taille  $2 \times 2$  en notant ses éléments :

$$\tilde{\mathbf{F}}_{di} = \begin{pmatrix} f_1^{(i)} & f_2^{(i)} \\ f_3^{(i)} & f_4^{(i)} \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

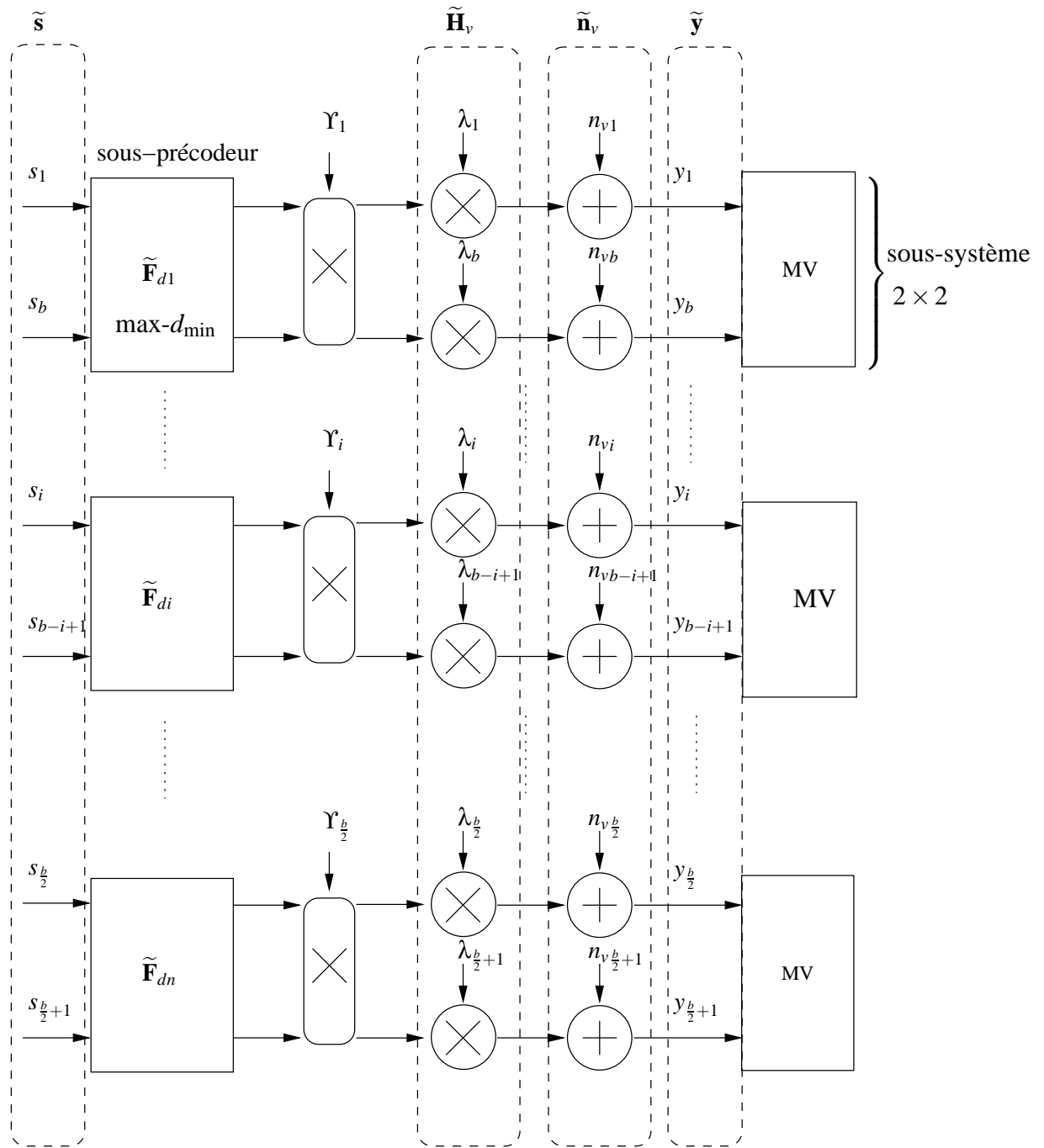


FIG. 6.2 – Synoptique de l'«Equal  $d_{\min}$ » ou  $Ed_{\min}$  avec les différents principes : création des sous-systèmes  $2 \times 2$  avec la combinaison des valeurs propres maximisant la distance minimale, l'optimisation des sous-précodeurs  $\tilde{\mathbf{F}}_{di}$  avec la méthode max- $d_{\min}$  et l'allocation de puissance sur les sous-systèmes ( $\Upsilon_i$ ).

Le précodeur global peut s'écrire facilement dans le canal virtuel et ses éléments, à savoir les coefficients  $\Upsilon_i$  et chaque précodeur  $\tilde{\mathbf{F}}_{di}$  est défini en fonction uniquement des angles de chaque sous-matrice du canal :

$$\mathbf{F}_d = \begin{pmatrix} \Upsilon_1 f_1^{(1)} & & & & & & & \Upsilon_1 f_2^{(1)} \\ & \Upsilon_2 f_1^{(2)} & & & & & & \Upsilon_2 f_2^{(2)} \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \Upsilon_{\frac{b}{2}} f_1^{(\frac{b}{2})} & \Upsilon_{\frac{b}{2}} f_2^{(\frac{b}{2})} & & & \\ & & & \Upsilon_{\frac{b}{2}} f_3^{(\frac{b}{2})} & \Upsilon_{\frac{b}{2}} f_4^{(\frac{b}{2})} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \Upsilon_2 f_3^{(2)} & \\ \Upsilon_1 f_3^{(1)} & & & & & & & \Upsilon_1 f_4^{(1)} \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

La forme du précodeur est singulière : seules la diagonale principale et l'antidiagonale principale présentent des termes non nuls laissant apparaître une forme en croix. Le précodeur n'est pas diagonal comme ceux de la littérature étudiés dans ce mémoire. Nous pouvons utiliser une notation plus compacte :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_d = & \text{diag} \left( \Upsilon_1 f_1^{(1)}, \dots, \Upsilon_{\frac{b}{2}} f_1^{(\frac{b}{2})}, \Upsilon_{\frac{b}{2}} f_2^{(\frac{b}{2})}, \dots, \Upsilon_1 f_4^{(1)} \right) \\ & + \text{antidiag} \left( \Upsilon_1 f_3^{(1)}, \dots, \Upsilon_{\frac{b}{2}} f_3^{(\frac{b}{2})}, \Upsilon_{\frac{b}{2}} f_2^{(\frac{b}{2})}, \dots, \Upsilon_1 f_2^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (6.24)$$

où  $\text{antidiag}(a, b, \dots)$  représente une matrice dont tous les éléments sont nuls sauf l'antidiagonale spécifiée par les paramètres.

Cette solution proposée ressemble à un précodeur diagonal où chaque voie est renforcée par une seconde. Le précodeur maximise la distance minimale mais peut toutefois considérer que l'apport de la seconde voie n'est pas nécessaire, voire pénalisant, et il ne l'utilise pas : le précodeur ajuste automatiquement le nombre de sous-canaux virtuels variant de  $\frac{b}{2}$  à  $b$ . L'apport ponctuel de la voie supplémentaire permet d'obtenir l'ordre de diversité correspondant au plus fort  $\lambda_i$  tout en transmettant deux symboles. En comparaison, un précodeur diagonal aura son ordre de diversité imposé par le plus faible  $\lambda_i$ .

## 6.4 Remarque sur les nombres de voisins

Nous avons vu que maximiser la distance minimale augmente le nombre de voisins proches. Ces deux termes apparaissent dans l'expression de la probabilité d'erreur (4.25) : le premier intervient au travers de la fonction  $\text{erfc}()$  tandis que le second est en facteur. Pour obtenir une PEB minimale, la distance doit être maximisée et le nombre de voisins minimisé : un compromis apparaît. En ce sens, les précodeurs  $\mathbf{F}_{r1}$  et max-SNR proposent deux compromis opposés : dans le premier cas,  $d_{\min}$  est augmentée mais le nombre de voisins aussi alors que dans le second cas, le nombre de voisins est diminué mais au prix d'une distance

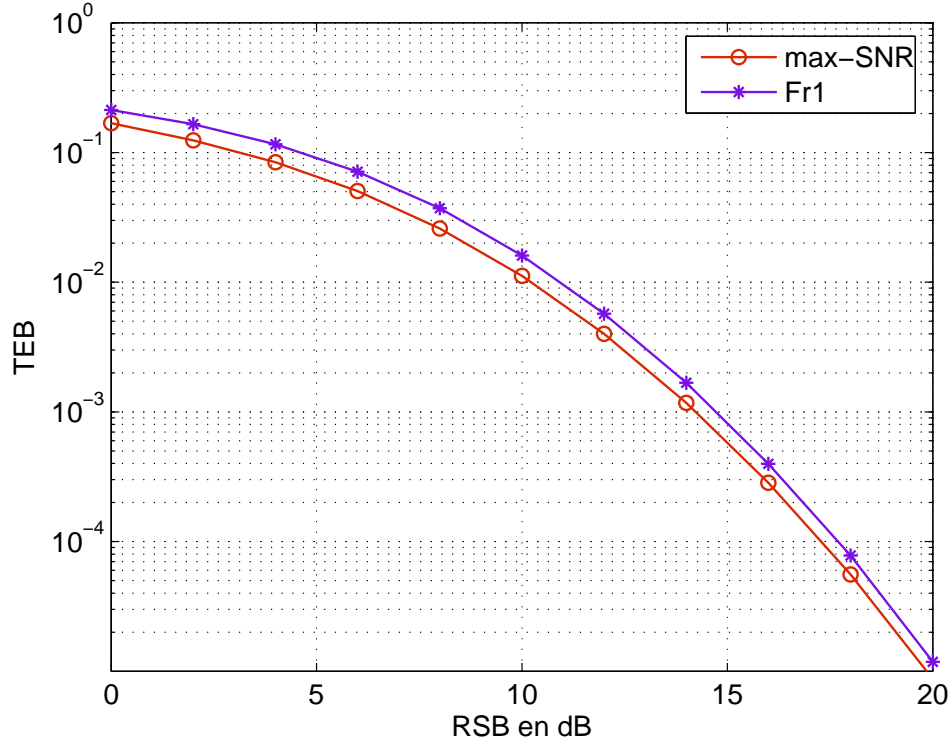


FIG. 6.3 – Simulations des précodeurs max-SNR et  $\mathbf{F}_{r1}$  pour un système (2,2) pour un canal de Rayleigh et 4 bis/s/Hz

plus faible. La figure 6.3 permet de comparer les performances de ces deux précodeurs dans un canal de Rayleigh pour un système MIMO (2,2). Le max-SNR propose des performances meilleures avec un léger gain sur le  $\mathbf{F}_{r1}$ . Celui-ci est plus sensible pour les faibles RSB puis diminue lorsque le RSB augmente. Les TEB du max- $d_{\min}$  peuvent être améliorés si le  $\mathbf{F}_{r1}$  est remplacé par le max-SNR. Ainsi, le précodeur n'est plus optimal au sens de la distance minimale mais le TEB est quand même meilleur.

Dans le reste du chapitre, les précodeurs max- $d_{\min}$  et  $E_{d_{\min}}$  modifieront la solution  $\mathbf{F}_{r1}$  pour la rendre équivalente au max-SNR. L'appellation  $\mathbf{F}_{r1}$  signifiera que le max- $d_{\min}$  utilise seulement le sous-canal avec le plus grand gain mais sans optimiser la distance. L'amélioration des performances dépendra fortement de la probabilité d'utilisation du précodeur  $\mathbf{F}_{r1}$  c'est-à-dire  $P(\gamma \leq \gamma_0)$ .

## 6.5 Applications : $b = 4$ pour différentes configurations matérielles

### 6.5.1 Présentation

Cette partie présente l'extension du précodeur pour quatre flux de données en MAQ-4 soit une efficacité spectrale de 8 bit/s/Hz. L'étude comparera  $E_{d_{\min}}$  avec les précodeurs diagonaux étudiés lors du chapitre précédent à savoir le TEBM, l'EE et le QdS. Ces derniers utiliseront quatre voies avec une modulation MAQ-4 assurant les 8 bits/s/Hz désirés ou la version utilisant des modulations différentes sur trois voies avec une MAQ-16 et 2 MAQ-4. Nous utiliserons la notation «EE 4220» par exemple pour préciser la répartition

des bits sur les quatre voies. Rappelons que les sous-systèmes de l'extension du  $\max-d_{\min}$  que nous avons choisis sont :

$$\begin{cases} \text{sous-système 1} & \tilde{\mathbf{H}}_{v1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_4} \end{pmatrix} \\ \text{sous-système 2} & \tilde{\mathbf{H}}_{v2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (6.25)$$

Les angles et les gains de chaque sous-système sont alors :

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}_1 = \arctan \sqrt{\frac{\lambda_4}{\lambda_1}} \\ \tilde{\gamma}_2 = \arctan \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \tilde{\rho}_1 = \sqrt{\lambda_1 + \lambda_4} \\ \tilde{\rho}_2 = \sqrt{\lambda_2 + \lambda_3} \end{cases}. \quad (6.26)$$

Ce choix permet de maximiser la distance minimale obtenue avant la répartition de puissance  $Y_i$ . Les deux coefficients  $Y_1$  et  $Y_2$  permettent d'obtenir la même distance sur les deux sous-systèmes et sont définis par (6.6) :

$$\begin{cases} Y_1^2 = \frac{d_{\min}^2(\tilde{\gamma}_2)}{d_{\min}^2(\tilde{\gamma}_1) + d_{\min}^2(\tilde{\gamma}_2)} \\ Y_2^2 = \frac{d_{\min}^2(\tilde{\gamma}_1)}{d_{\min}^2(\tilde{\gamma}_1) + d_{\min}^2(\tilde{\gamma}_2)} \end{cases} \quad (6.27)$$

avec  $Y_1^2 + Y_2^2 = 1$ . Rappelons que le terme  $\sqrt{P_0}$  est mis en facteur de la matrice de précodage (6.3) et permet de contrôler la puissance totale moyenne émise.

Nous avons vu dans le chapitre 4 que les performances du précodeur dépendent étroitement de l'angle  $\gamma$  et c'est pourquoi nous regarderons les *ddp* des variables  $\tilde{\gamma}_1$  et  $\tilde{\gamma}_2$  (angles des deux sous-systèmes). Les TEB seront ensuite simulés dans un canal de Rayleigh avec un bruit BBAG de variance  $\sigma_n^2$ .

### 6.5.2 Système (4,4)

Ce paragraphe s'intéresse à un système MIMO avec quatre antennes à l'émission et quatre antennes à la réception correspondant à la configuration minimale pour tester l'extension de  $\max-d_{\min}$  (quatre valeurs propres non nulles sont nécessaires).

#### Les densités de probabilité des angles

La figure 6.4 propose les *ddp* des deux angles  $\tilde{\gamma}_1$  et  $\tilde{\gamma}_2$  obtenues par simulation sur  $10^5$  matrices suivant une loi de Rayleigh décorrélée. Les deux *ddp* sont pratiquement opposées dans les positions. Le premier angle  $\tilde{\gamma}_1$  correspond à l'association de la plus grande valeur propre avec la plus petite. Cela se traduit par une différence importante et un angle faible :  $\tilde{\gamma}_1$  a une moyenne de  $8^\circ$  et un écart type de  $4^\circ$ . Au contraire, l'angle  $\tilde{\gamma}_2$  est une image du rapport des deux valeurs propres intermédiaires. Celles-ci sont plus proches et

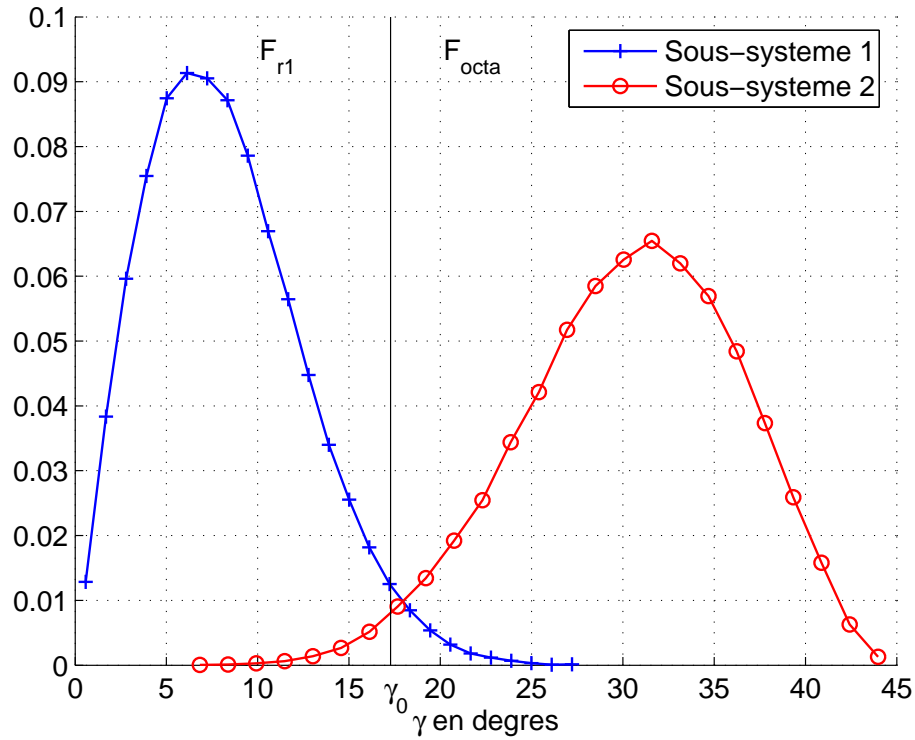


FIG. 6.4 – Densités de probabilité des angles  $\tilde{\gamma}_1$  et  $\tilde{\gamma}_2$  pour une configuration matérielle (4,4) obtenues par simulation de  $10^5$   $\mathbf{H}$

se traduisent par une *ddp* de l'angle située dans les fortes valeurs :  $\tilde{\gamma}_2$  a une moyenne de  $30^\circ$  et un écart type égal à  $6^\circ$ . Ces deux *ddp* influent sur les comportements des deux sous-systèmes avec notamment le choix entre les précodeurs  $\mathbf{F}_{r1}$  et  $\mathbf{F}_{octa}$ . La frontière entre les deux utilisations est aussi visible sur la figure avec le seuil fixe  $\gamma_0$  : si  $\gamma \leq \gamma_0$  le  $\mathbf{F}_{r1}$  est utilisé et dans le cas contraire, le  $\mathbf{F}_{octa}$  est employé. Ainsi, le premier sous-système a une probabilité de 97% d'utiliser le précodeur  $\mathbf{F}_{r1}$  avec une seule voie pendant que le second sous-système l'emploie 2 fois sur cent. Autrement dit, l'extension du précodeur max- $d_{\min}$  supprime souvent la plus mauvaise voie utilisant les trois meilleures. Les TEB présentés par les deux prochaines figures comparent le  $Ed_{\min}$  avec les précodeurs TEBM et EE à quatre voies puis avec les TEBM et QdS à trois voies.

### Simulations des taux d'erreur binaire

En premier lieu, imposons nous le nombre de voies à quatre avec la figure 6.5 où sont visibles les TEB du  $Ed_{\min}$  et des précodeurs EE et TEBM avec 4 MAQ-4. Le précodeur  $Ed_{\min}$  présente des performances nettement meilleures que les deux autres précodeurs avec un ordre de diversité plus important. Dans le cas de notre extension, le max- $d_{\min}$  exploite au mieux les deux gains du sous-canal et l'ordre de diversité est défini par la plus grande valeur propre. Dans le cas de quatre voies,  $\lambda_1$  impose l'ordre de diversité du sous-système 1 et  $\lambda_2$  celui du sous-système 2 : l'ordre de diversité global est défini par le plus faible c'est-à-dire

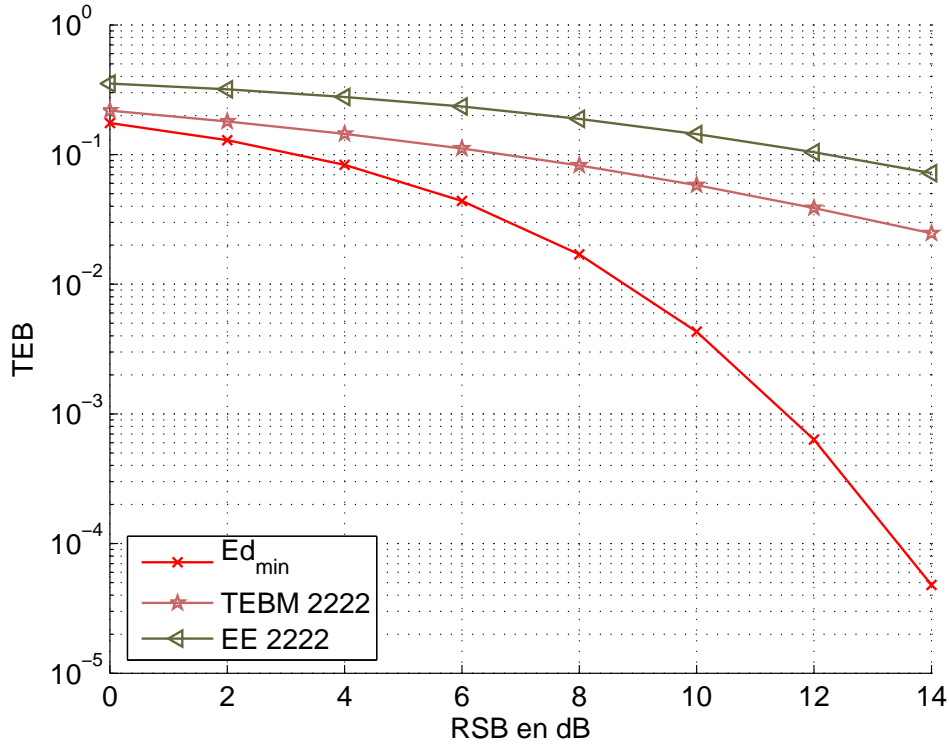


FIG. 6.5 – Comparaison des précodeurs  $Ed_{\min}$  avec les précodeurs QdS et TEBM pour un système (4,4). Tous les précodeurs utilisent 4 voies avec une MAQ-4.

par  $\lambda_2$ . Or nous avons vu que l'ordre de diversité des précodeurs diagonaux est imposé par  $\lambda_b$  et diminue quand  $b$  augmente. Pour ce cas précis,  $b = 4$  et l'ordre de diversité est imposé par  $\lambda_4$  contre  $\lambda_2$  pour le  $Ed_{\min}$ . Le précodeur diagonal utilisant seulement deux voies assurerait le même ordre de diversité et c'est pourquoi le précodeur EE 4400 est étudié dans la suite.

La figure 6.6 montre les précodeurs TEBM et QdS utilisant trois voies et également l'EE en deux voies (deux MAQ-16). Comme nous avons vu dans le chapitre 5, les précodeurs diagonaux sont meilleurs lorsque le nombre de voies est inférieur à  $m$  avec notamment un ordre de diversité plus élevé. Le TEBM et le QdS sont alors quasi-équivalents. Ces deux remarques sont visibles en comparant les figures 6.5 et 6.6. La conséquence de ces comportements différents est que le  $Ed_{\min}$  ne présente plus un gain aussi spectaculaire que dans le cas  $b = 4$  voies. Les précodeurs sont équivalents à faible RSB mais une différence s'accroît quand le RSB augmente : l'ordre de diversité de notre extension est plus grand. En effet, l'ordre des précodeurs diagonaux à trois voies est imposé par  $\lambda_3$  contre  $\lambda_2$  pour le  $Ed_{\min}$ .

### 6.5.3 Système (6,6)

Nous considérons maintenant un système plus important avec six antennes à l'émission et autant à la réception. Comme précédemment, commençons par observer les deux  $ddp$  des angles des sous-systèmes. La figure 6.7 représente les distributions de  $\tilde{\gamma}_1$  et  $\tilde{\gamma}_2$ . Une observation rapide montre un décalage à droite des

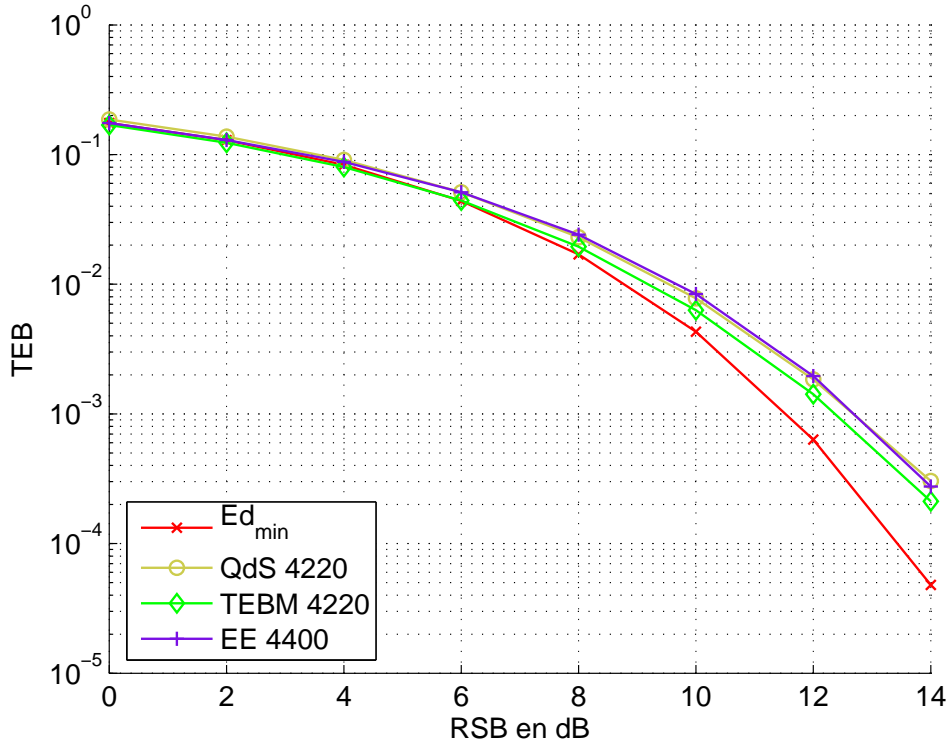


FIG. 6.6 – Comparaison des précodeurs  $Ed_{\min}$  avec les précodeurs QdS et TEBM pour un système (4,4). Le  $Ed_{\min}$  utilise 4 voies alors que les QdS et TEBM n'emploient que trois voies ( $1 \times \text{MAQ-16}$  et  $2 \times \text{MAQ-4}$ ).

deux courbes en comparaison au cas (4,4). L'angle du sous-système 1 subit le déplacement le plus important. La valeur moyenne de  $\tilde{\gamma}_1$  est maintenant  $22^\circ$  pour un écart type de  $4^\circ$ . La distribution de  $\tilde{\gamma}_2$  se concentre autour d'une valeur moyenne plus importante égale à  $37^\circ$  et un écart type de  $3^\circ$ . Ces nouvelles densités ont pour conséquence de changer le comportement des précodeurs. Le sous-système 2 utilise toujours la forme  $\mathbf{F}_{octa}$  et les deux voies mises à disposition. De son côté, le sous-système 1 n'utilise plus que 9 fois sur cent le précodeur  $\mathbf{F}_{r1}$  avec la suppression de la voie  $\lambda_4$ . Ainsi, la probabilité que les quatre sous-canaux soient utilisés est de 91%.

La figure 6.8 présente les TEB du  $Ed_{\min}$  et des systèmes diagonaux avec 4 voies. Comme pour le cas (4,4), les performances de l'extension sont meilleures se distinguant nettement à fort RSB : l'ordre de diversité est plus important pour le  $Ed_{\min}$ . Le précodeur TEBM a perdu du gain sur l'EE en présentant un gain de 0,3 dB contre 5 dB précédemment. Le gain de notre extension est de 2 dB pour un TEB de  $10^{-5}$ .

La comparaison avec les précodeurs diagonaux utilisant trois voies est possible avec la figure 6.9. Le  $Ed_{\min}$  présente l'ordre de diversité le plus important et par conséquent est meilleur que le TEBM et le QdS à fort RSB. Le gain n'est plus aussi important mais grâce à l'ordre de diversité élevé, le rapport des TEB est conséquent (presque 10 fois moins d'erreur à 12 dB). Il apparaît un point faible quand le RSB diminue : les précodeurs diagonaux deviennent meilleurs que le  $Ed_{\min}$ . La non-optimalité de la solution  $Ed_{\min}$  accuse une légère perte de gain lorsque le RSB est inférieur à 4 dB.



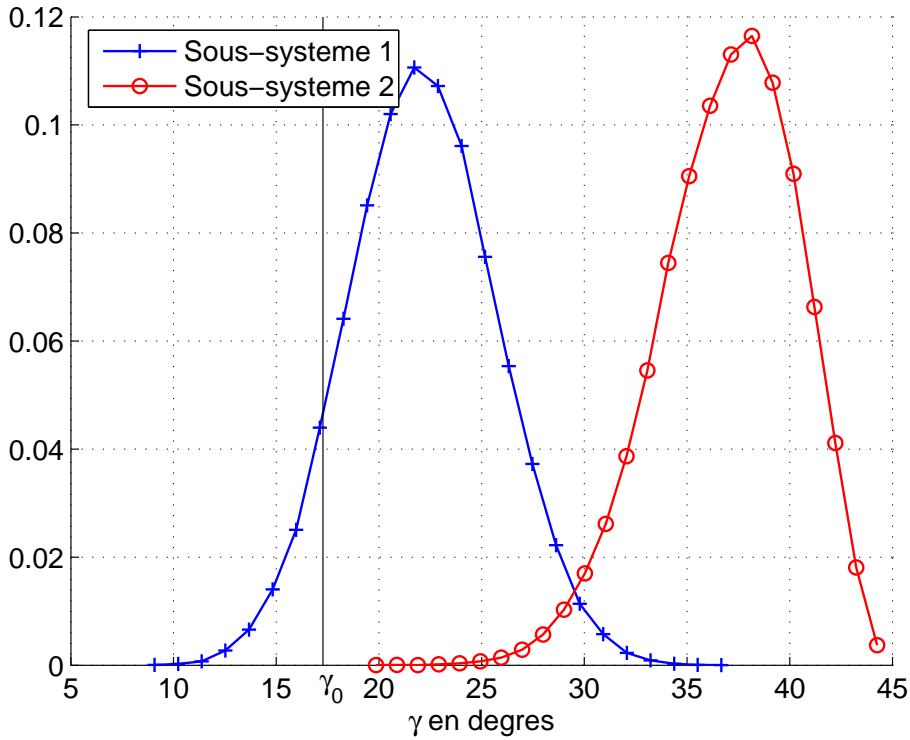


FIG. 6.7 – Densités de probabilité des angles  $\tilde{\gamma}_1$  et  $\tilde{\gamma}_2$  pour une configuration matérielle (6,6)

## 6.6 Utilisation de la diversité de polarisation

Nous avons étudiés les performances pour des systèmes relativement important. Nous allons maintenant voir l'influence d'une mise en œuvre utilisant de la diversité de polarisation. Ce paragraphe présente le nouveau modèle de canal.

### 6.6.1 Modèle du canal

Les antennes polarisées utilisées le plus couramment sont deux polarisations orthogonales ( $0^\circ, 90^\circ$ ) ou ( $45^\circ, -45^\circ$ ) permettant de transmettre deux signaux simultanément. Dans un cas théorique, un découplage total des signaux est possible. Seulement, les antennes ne sont pas parfaites et possèdent un pouvoir discriminant plus ou moins important. Cela se traduit par une corrélation des deux signaux. De plus, les interactions lors de la propagation modifient la polarisation et provoquent un mélange des deux signaux.

Si une telle solution permet de gagner de la place, elle introduit de la corrélation et le modèle de canal nécessite une évolution pour la prendre en compte. Définissons un SISO avec la double polarisation comme système de base. Celui-ci utilise physiquement une antenne émettrice et une antenne réceptrice mais est équivalent à un système MIMO (2,2). Nous proposerons ensuite une extension rapide à des systèmes MIMO

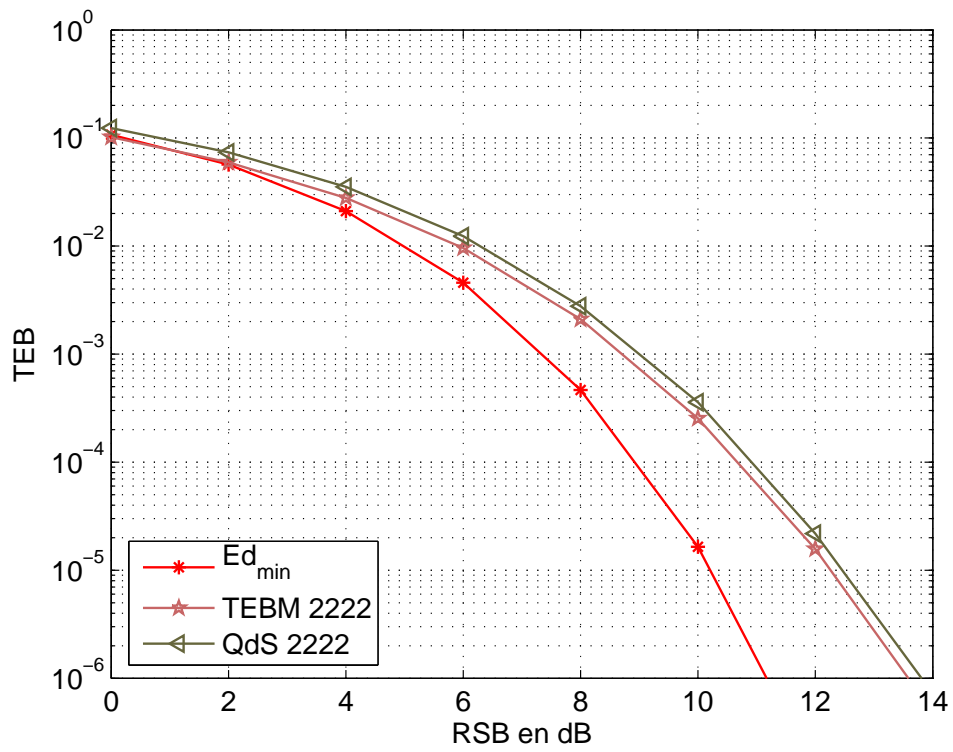


FIG. 6.8 – Comparaison des précodeurs  $Ed_{\min}$  avec les précodeurs QdS et TEBM pour un système (6,6). Tous les précodeurs utilisent 4 voies avec une MAQ-4.

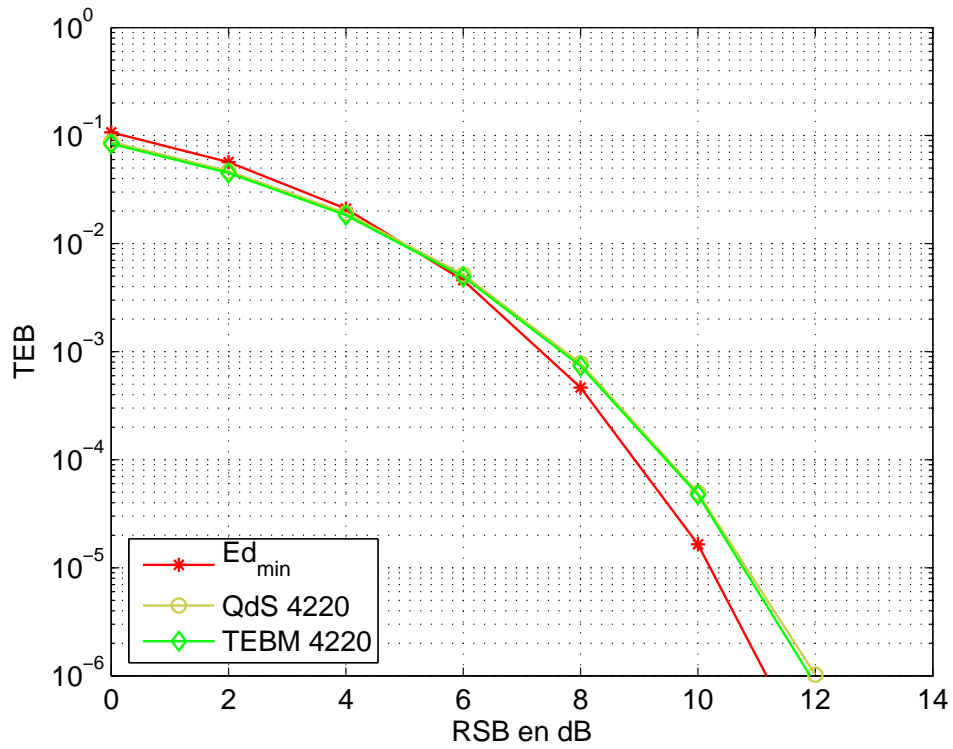


FIG. 6.9 – Comparaison des précodeurs  $Ed_{\min}$  avec les précodeurs QdS et TEBM pour un système (6,6). Le  $Ed_{\min}$  utilise 4 voies alors que les QdS et TEBM n'emploient que trois voies ( $1 \times \text{MAQ-16}$  et  $2 \times \text{MAQ-4}$ ).

plus importants. La notation  $(n_T, n_R)$  définit le système équivalent avec de la corrélation et correspond à un système physique  $(n_T/2, n_R/2)$ .

### Système de base

Le système de base est illustré par la figure 6.10 et a été introduit dans [89]. Le modèle utilisé est un canal de Rayleigh et prend en compte les couplages introduits par les antennes et le canal. Les éléments de la matrice du canal de base notée :

$$\mathbf{H}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

sont des variables aléatoires gaussiennes complexes corrélées avec les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} E\{|h_{1,1}|^2\} &= E\{|h_{2,2}|^2\} = 1 \\ E\{|h_{1,2}|^2\} &= E\{|h_{2,1}|^2\} = \alpha \end{aligned} \quad (6.29)$$

où  $0 \leq \alpha \leq 1$  dépend de la discrimination de polarisation des antennes et du couplage entre les polarisations induit par les réflexions. Quand  $\alpha$  tend vers 0, la discrimination entre les polarisations devient parfaite et le système peut être vu comme deux systèmes SISO (Single Input Single Output). La corrélation des éléments de  $\mathbf{H}_{2 \times 2}$  est définie comme suit :

$$\begin{aligned} t &= \frac{E\{h_{1,1}h_{1,2}^*\}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{E\{h_{2,1}h_{2,2}^*\}}{\sqrt{\alpha}} \\ r &= \frac{E\{h_{1,1}h_{2,1}^*\}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{E\{h_{1,2}h_{2,2}^*\}}{\sqrt{\alpha}} \end{aligned} \quad (6.30)$$

où  $t$  est le coefficient de corrélation induit lors de la transmission et  $r$  celui de la réception. Le modèle suppose que  $E\{h_{1,1}h_{2,2}^*\} = E\{h_{2,1}h_{1,2}^*\} = 0$ . La matrice de corrélation du système de base est définie par

$$\mathbf{R}_{\mathbf{H}_{2 \times 2}} = E\{\text{vect}\{\mathbf{H}_{2 \times 2}\} \text{vect}\{\mathbf{H}_{2 \times 2}\}^*\} \quad (6.31)$$

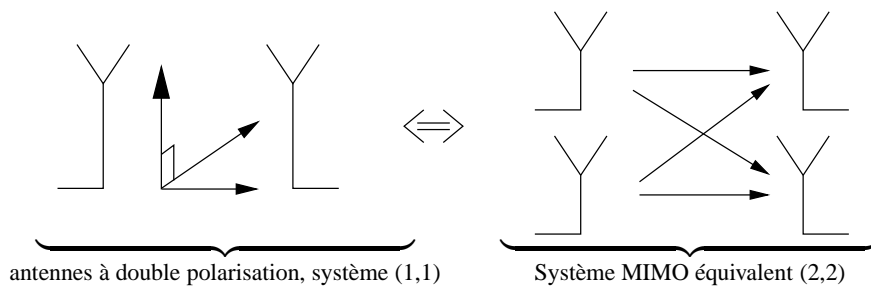


FIG. 6.10 – Schéma MIMO équivalent à un système réel avec des antennes à double polarisation orthogonale

où l'opération  $\text{vect}()$  correspond à :

$$\mathbf{H}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{vect}(\mathbf{H}_{2 \times 2}) = \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix}. \quad (6.32)$$

En considérant toutes ces hypothèses, elle peut être exprimée comme :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{H}_{2 \times 2}} = \begin{pmatrix} 1 & r\sqrt{\alpha} & t\sqrt{\alpha} & 0 \\ r\sqrt{\alpha} & \alpha & 0 & t\sqrt{\alpha} \\ t\sqrt{\alpha} & 0 & \alpha & r\sqrt{\alpha} \\ 0 & t\sqrt{\alpha} & r\sqrt{\alpha} & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.33)$$

### Extension à plusieurs antennes

Par la suite, nous augmentons le nombre d'antennes d'émission et de réception et nous considérons que les antennes à double polarisation sont indépendantes. Ainsi, chaque couple d'antennes physiques forme un système MIMO de base  $\mathbf{H}_{2 \times 2}$ . Les éléments de ces matrices ne sont pas les mêmes et correspondent à des tirages indépendants ayant les caractéristiques  $(\alpha, t \text{ et } r)$  décrites précédemment (6.33). La matrice de canal est alors définie par :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{2 \times 2}^{(1,1)} & \dots & \mathbf{H}_{2 \times 2}^{(1, \frac{n_T}{2})} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{2 \times 2}^{(\frac{n_R}{2}, 1)} & \dots & \mathbf{H}_{2 \times 2}^{(\frac{n_T}{2}, \frac{n_R}{2})} \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

où  $\mathbf{H}_{2 \times 2}^{(i,j)}$  est un tirage d'un système de base défini. Ces tirages sont indépendants.

### 6.6.2 Comparaison du $\max\text{-}d_{\min}$ avec le $\max\text{-SNR}$ et le code d'Alamouti

Après avoir défini le modèle de canal corrélé, nous allons regarder les comportements des trois méthodes permettant d'obtenir l'ordre de diversité maximum  $n_T \times n_R$  dans un canal décorrélé.

#### Paramètres de simulation

L'utilisation du code d'Alamouti ne s'applique qu'à des systèmes MIMO avec deux antennes à l'émission soit dans notre cas à une seule antenne physique à double polarisation. Les TEB seront simulés pour des systèmes physiques (1,1) et (1,3) ou des configurations équivalentes (2,2) et (2,6) respectivement. Pour ce faire, nous utiliserons les caractéristiques statistiques d'un canal réaliste donné dans [89]. Celles-ci sont

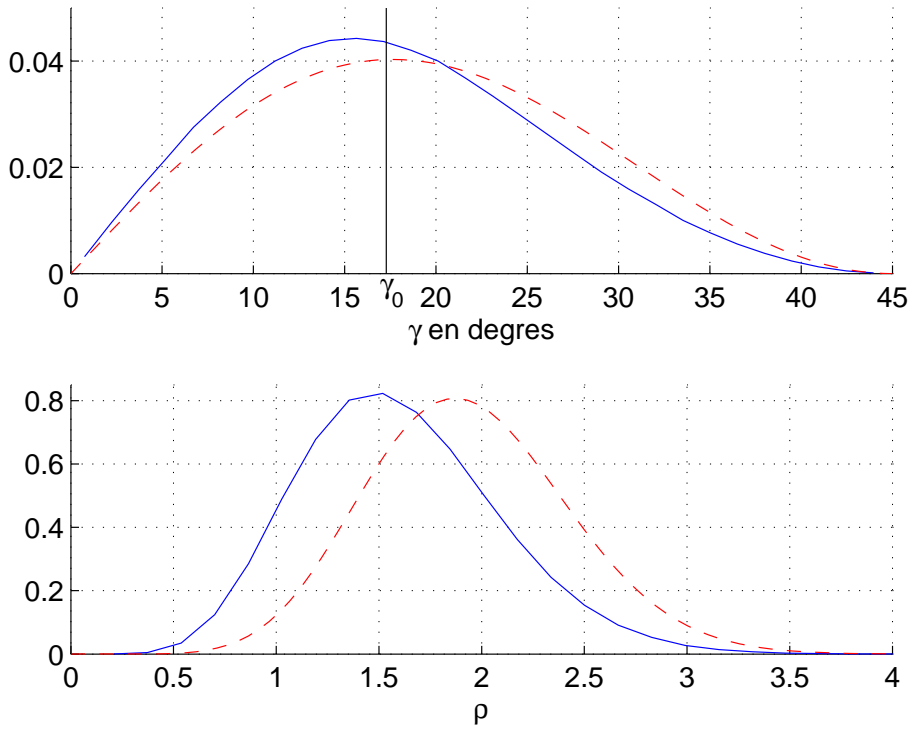


FIG. 6.11 – Lois marginales de  $\gamma$  et  $\rho$  pour un système SISO à diversité de polarisation équivalent à un MIMO (2,2) avec  $t = 0,5$ ,  $r = 0,3$  et  $\alpha = 0,4$  (trait continu). Les  $ddp$  théoriques pour un canal de Rayleigh décorrélé sont tracées en pointillés.

issues d'une campagne de mesures à 2,5GHz. Les valeurs des paramètres définis précédemment sont :

$$\begin{cases} t = 0,5 \\ r = 0,3 \\ \alpha = 0,4 \end{cases} . \quad (6.35)$$

L'efficacité spectrale est la même pour les trois méthodes et égale à 4bit/s/Hz : le précodeur max-SNR et le code d'Alamouti utilisent une MAQ-16 (1 et 2 symboles respectivement) et le précodeur max- $d_{\min}$  est associé à deux MAQ-4. Rappelons également que le précodeur  $\mathbf{F}_{r1}$  n'a plus sa définition originale permettant de maximiser la distance et est remplacé par le max-SNR MAQ-16.

### Influence de la polarisation sur les lois de $\rho$ et $\gamma$

Nous considérons un canal réaliste formé physiquement par une antenne à l'émission et une antenne à la réception utilisant de la diversité de polarisation ou de façon équivalente à un système MIMO (2,2) avec  $t = 0,5$ ,  $r = 0,3$  et  $\alpha = 0,4$ . La figure 6.11 illustre l'influence de la polarisation d'un canal réaliste sur les distributions de  $\gamma$  et  $\rho$ . Les  $ddp$  (en trait continu) sont obtenues par simulation de  $10^5$  matrices. Les résultats théoriques d'un canal décorrélé sont également présents en pointillés. L'influence de la polarisation

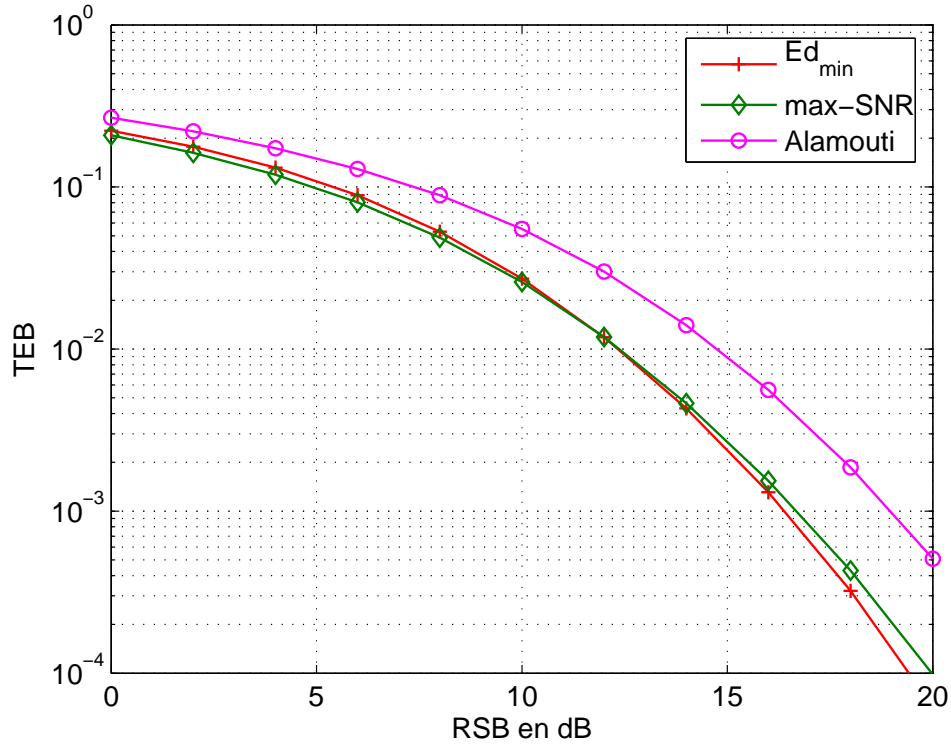


FIG. 6.12 – Simulation d’un système SISO à diversité de polarisation équivalent à un système (2,2) avec  $t = 0,5$ ,  $r = 0.3$  et  $\alpha = 0,4$ .

s’observe par un décalage des courbes vers la gauche : l’angle  $\gamma$  diminue ( $m_\gamma = 18^\circ$  et  $\sigma_\gamma = 8^\circ$  contre  $m_\gamma = 19^\circ$  et  $\sigma_\gamma = 9^\circ$ ) entraînant une différence plus importante entre les valeurs propres rendant la matrice  $\mathbf{H}$  moins bien conditionnée. La polarisation ne modifie que légèrement les moyenne et variance de l’angle mais sa présence se ressent plus sur les probabilités d’utiliser une ou deux voies : la probabilité d’utiliser le  $\mathbf{F}_{r1}$   $P(\gamma \leq \gamma_0) = 51\%$  contre  $P(\gamma \leq \gamma_0) = 44\%$  sans corrélation.

En parallèle,  $\rho$  subit un décalage important :  $m_\rho = 1,6$  et  $\sigma_\rho = 0,48$  contre  $m_\rho = 2$  et  $\sigma_\rho = 0,25$ . La conséquence directe est la baisse des valeurs de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  et donc du RSB post-traitement. Comme le gain  $\rho$  est mis en facteur sur la chaîne globale, cette diminution pénalise les trois méthodes étudiées.

### Simulations des TEB

Nous allons comparer les trois méthodes permettant d’obtenir l’ordre de diversité maximal dans un canal corrélié [90, 91, 92]. La figure 6.12 donne les résultats des TEB des trois systèmes pour  $n_T = 2$  et  $n_R = 2$  correspondant à une configuration physique ne comportant qu’une seule antenne à l’émission et à la réception. Le précodeur  $d_{\min}$  et max-SNR présentent tour à tour les TEB les plus faibles : le max-SNR est meilleur à faible RSB puis le max- $d_{\min}$  prend l’avantage pour des RSB plus grands. La différence entre les précodeurs est l’utilisation du  $\mathbf{F}_{octa}$  : celui-ci maximise la distance minimale mais aussi le nombre de voisins proches (cf. 6.4). Ces deux termes sont antagonistes : le nombre de voisins important détériore le

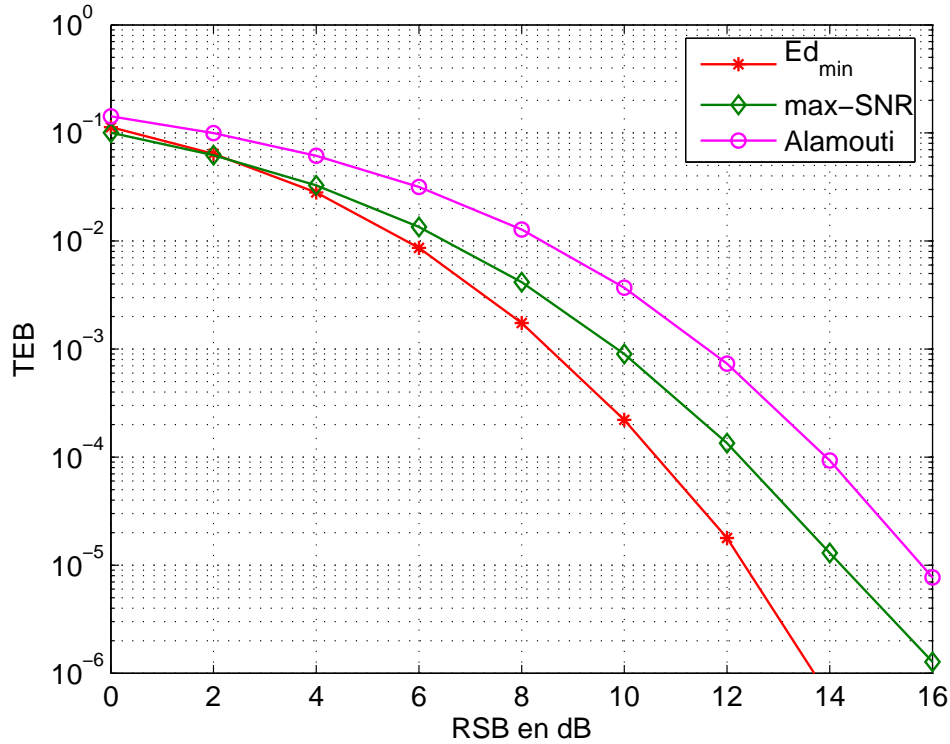


FIG. 6.13 – Simulation d'un système SIMO (1,3) à diversité de polarisation équivalent à un système (2,6) avec  $t = 0,5$ ,  $r = 0.3$  et  $\alpha = 0,4$ .

TEB à faible RSB et la distance maximisée l'améliore plus fortement à RSB élevé. Le code d'Alamouti accuse une perte de gain de 2,5 dB pour un fort RSB.

Rappelons que lorsque  $\alpha = 0$ , les signaux émis sur les deux polarisations peuvent être totalement découplés : la matrice de canal est diagonale. Les termes croisés sont nuls or ils permettaient d'introduire de la diversité spatiale (redondance de l'information). Dans le cas  $\alpha = 1$ , la diversité est maximale et le canal suit une loi de Rayleigh corrélée classique de type «produit de Kronecker» [93]. Malgré la faible valeur de  $\alpha$  ( $\alpha = 0.4$ ), les systèmes peuvent exploiter la diversité de polarisation offerte (une estimation numérique de l'ordre de diversité montre des valeurs proches de 4 correspondant à  $n_T \times n_R$ ).

La valeur de  $n_T$  est fixée à deux mais celle de  $n_R$  peut être changée. Cette dernière est augmentée à 6 correspondant à 3 antennes physiques de réception. Les résultats des TEB sont donnés sur la figure 6.13. Le précodeur max- $d_{\min}$  se distingue nettement du précodeur max-SNR avec un gain de presque 3 dB pour un fort RSB. Ce gain s'explique par l'utilisation de la voie 2 avec le gain  $\lambda_2$  qui prend des valeurs plus importantes que dans le cas précédent. En effet, le précodeur  $\mathbf{F}_{r1}$  est employé seulement 5 fois sur cent pour un système (2,6) contre 44 fois pour un (2,2). La corrélation a également une influence sur cette utilisation :  $P(\gamma \leq \gamma_0) < 1\%$  pour un canal décorrélé.

En supprimant  $\lambda_2$ , le précodeur max-SNR montre alors ses limites et n'utilise pas toute les possibilités du canal. De plus, son gain par rapport au code d'alamouti diminue de 2,5 dB pour  $n_R = 2$  à 1,6 dB pour

$n_R = 6$ . Le code d'Alamouti utilise aussi la valeur propre  $\lambda_2$  au travers du gain sur le RSB  $\|\mathbf{H}\|_F^2/2 = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ . Les méthodes utilisant les deux voies sont avantageées pour le système (2,6). Cependant, le précodeur max- $d_{\min}$  possédant la connaissance parfaite du canal (CSI) exploite mieux les nouvelles antennes disponibles et obtient logiquement les meilleures performances.

## 6.7 Extension du précodeur max- $d_{\min}$ avec de la diversité de polarisation

Nous allons maintenant augmenter le nombre de flux de données à  $b = 4$  symboles émis par périodes. Le nombre d'antennes doit également augmenter et nous considérons les systèmes symétriques réels (2,2) et (3,3) correspondants à des systèmes équivalents (4,4) et (6,6). Le code d'Alamouti n'est plus utilisé ici car il est limité à  $n_T = 2$ . De plus, nous avons vu dans la partie 2.6.2 que le précodeur max-SNR n'est plus compétitif et il ne sera pas étudié non plus. Comme dans le paragraphe précédent pour les systèmes (2,2) et (2,6), nous regarderons l'influence de la polarisation sur les statistiques du paramètre  $\gamma$  et sur le comportement du  $Ed_{\min}$  puis nous verrons les TEB dans les deux configurations matérielles.

### 6.7.1 Influence de la polarisation sur les statistiques du canal

Nous avons vu que pour le système de base (2,2), la prise en compte de la polarisation avec l'introduction de la corrélation décalait les  $ddp$  de  $\gamma$  et  $\rho$  vers la gauche caractérisant une matrice moins bien conditionnée. La figure 6.14 présente les répartitions des angles des deux sous-systèmes  $\tilde{\gamma}_1$  et  $\tilde{\gamma}_2$  pour les configurations matérielles (4,4) et (6,6). Les  $ddp$  sont également disponibles pour des canaux décorrélés (en pointillés). Globalement, l'influence de la polarisation reste la même pour les systèmes (4,4) et (6,6) : l'écart entre les valeurs propres des sous-systèmes est plus important avec la corrélation que sans, évoquant des matrices moins bien conditionnées. La conséquence visible sur la figure 6.14 est le placement des répartitions des angles par rapport à la frontière définie par  $\gamma_0$  : les probabilités d'utiliser une ou deux voies sont modifiées.

Le tableau 6.4 résume les probabilités d'utiliser le précodeur  $\mathbf{F}_{r1}$  ainsi que le nombre total de voies que le précodeur  $Ed_{\min}$  utilise pour différentes configurations matérielles en présence de corrélation ou non. Ce tableau est étroitement lié à la figure 6.14. Pour les deux systèmes considérés, la corrélation ne donne pas les mêmes résultats. Ainsi, pour le système MIMO (4,4) corrélé ou non, le  $Ed_{\min}$  se comporte pratiquement comme un précodeur à trois voies (95% dans les deux cas).

Pour le système (6,6), le canal décorrélé ou corrélé modifie le comportement de l'extension du max- $d_{\min}$ . Si le sous-système 2 reste inchangé (il utilise toujours le  $\mathbf{F}_{octa}$ ), l'influence de la corrélation est plus forte pour le sous-système 1 : l'utilisation du  $\mathbf{F}_{r1}$  passe de 9% à 33%. Le comportement global du précodeur s'en trouve affecté. Pour un canal décorrélé, le précodeur utilise le plus souvent les quatre voies (91%) et avec de la corrélation, le précodeur a tendance à supprimer plus souvent la quatrième voie : la probabilité d'utiliser trois voies est de 33% contre 67% pour l'utilisation de quatre.



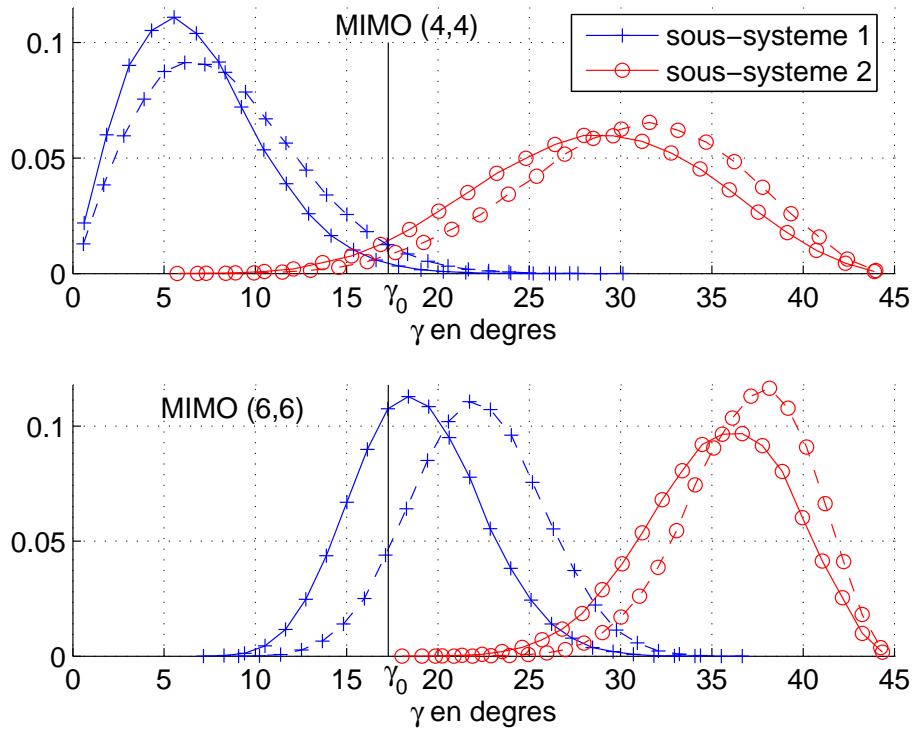


FIG. 6.14 – Densités de probabilités simulées de  $\gamma$  pour chaque sous-système de l' $Ed_{\min}$  pour des systèmes (2,2) et (3,3) à diversité de polarisation soient des systèmes MIMO équivalents (4,4) et (6,6). Les  $ddp$  des sous-systèmes pour un canal de Rayleigh décorrélé sont également disponibles (en pointillés). Les différences de probabilités pour les deux cas sont visibles dans le tableau ci-dessous.

	Précodeur $Ed_{\min}$ 4 voies	(4,4) Rayleigh décorrélé	(6,6) Rayleigh décorrélé	(4,4) équivalent diversité de polarisation	(6,6) équivalent diversité de polarisation
$\mathbf{F}_{r1}$ $P(\gamma \leq \gamma_0)$	Sous-système 1	97%	9%	99%	33%
	Sous-système 2	2%	0%	4%	0%
$2 \mathbf{F}_{r1}$	P(2 voies)	2%	0%	4%	0%
$\mathbf{F}_{r1}$ et $\mathbf{F}_{octa}$	P(3 voies)	95%	9%	95%	33%
$2 \mathbf{F}_{octa}$	P(4 voies)	3%	91%	1%	67%

TAB. 6.4 – Probabilité d'utilisation du précodeur  $\mathbf{F}_{r1}$  ( $P(\gamma \leq \gamma_0)$ ) pour les deux sous-systèmes de l' $Ed_{\min}$ . Les probabilités d'utilisation du nombre de voies sont également disponibles. Ces résultats sont obtenus par simulation sur  $10^5$  matrices.

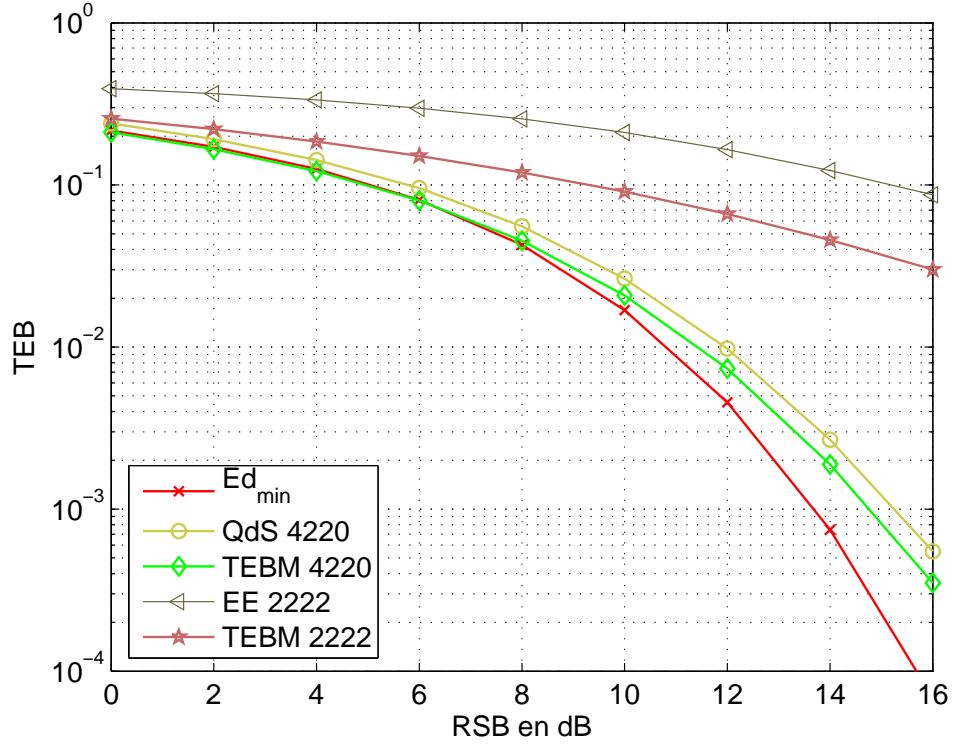


FIG. 6.15 – Simulations des TEB pour un système (2,2) à diversité de polarisation ou un système réaliste (4,4) corrélé avec  $t = 0,5$ ,  $r = 0,3$  et  $\alpha = 0,4$ .

### 6.7.2 Les performances des précodeurs diagonaux et $Ed_{\min}$

La figure 6.15 présente les TEB de l' $Ed_{\min}$  et des précodeurs à trois et quatre voies pour un système (4,4) avec des paramètres réalistes ( $t = 0,5$ ,  $r = 0,3$  et  $\alpha = 0,4$ ). Pour cette configuration matérielle, l' $Ed_{\min}$  supprime souvent  $\lambda_4$  contrairement aux TEBM 2222 et EE 2222 : le gain  $\lambda_4$  est mauvais et donne un TEB élevé. Cela se traduit par une grosse différence de TEB. L'écart important est dû à une différence d'ordre de diversité et les courbes divergent lors de l'augmentation du RSB.

Lorsque les précodeurs diagonaux suppriment la voie la plus pénalisante correspondant à  $\lambda_4$  tout en compensant l'efficacité spectrale avec la modulation, l'écart de TEB entre les TEBM 4220 et QdS 4220 diminue. Cependant l' $Ed_{\min}$  conserve un ordre de diversité plus important et se distingue lorsque le RSB croît. Pour un système (2,2) physique équivalent à un système (4,4) corrélé, notre précodeur  $Ed_{\min}$  permet d'obtenir des plus faibles TEB.

La figure 6.16 montre les TEB pour les mêmes précodeurs mais la configuration matérielle est maintenant (6,6) dans un canal réaliste de mêmes statistiques ( $t = 0,5$ ,  $r = 0,3$  et  $t = 0,4$ ). Nous avons vu que les précodeurs TEBM et QdS ont des performances semblables lorsque le nombre de voies est inférieur au nombre de valeurs propres non nulles ( $b < m$ ). La valeur de  $\lambda_4$  est plus grande (l' $Ed_{\min}$  l'utilise 67 fois sur cent) mais les précodeurs diagonaux qui l'emploient (TEBM 2222 et EE 2222) sont encore pénalisés : ils présentent les plus forts TEB. Le gain de notre précodeur est moins conséquent en terme de RSB mais reste

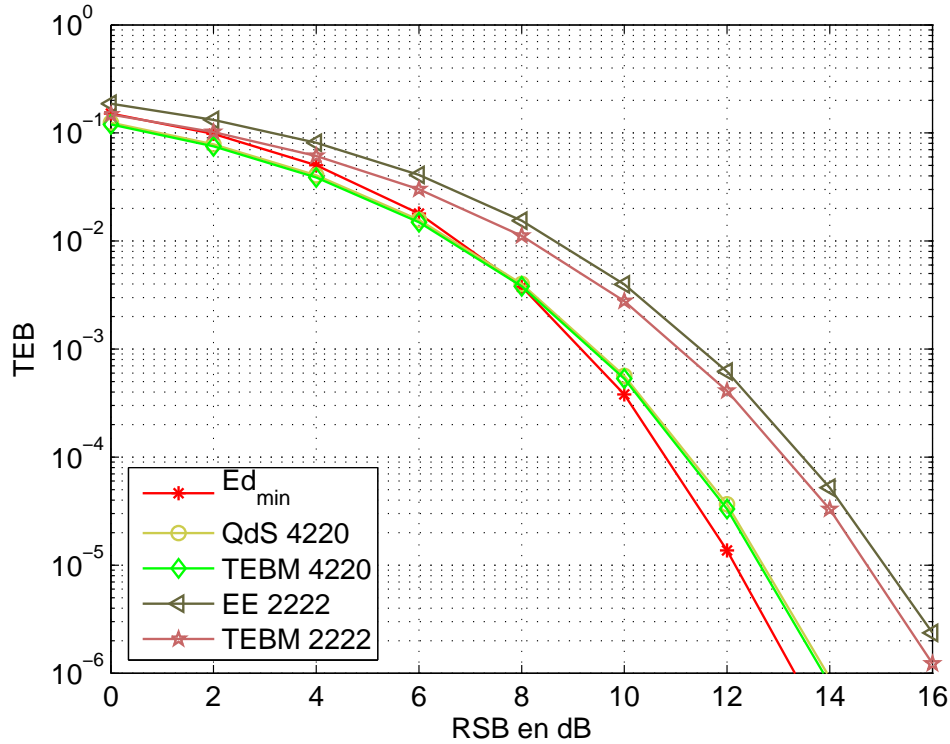


FIG. 6.16 – Simulations des TEB pour un système (3,3) à diversité de polarisation ou un système réaliste (6,6) corrélé avec  $t = 0,5$ ,  $r = 0,3$  et  $\alpha = 0,4$ .

important pour le TEB (presque 30 fois moins d'erreurs à 12 dB).

L'écart entre l' $Ed_{\min}$  et les précodeurs à trois voies (TEBM 4220 et QdS 4220) diminue encore. Les différences d'ordres de diversité du précodeur  $Ed_{\min}$  lui permettent de sortir du lot à fort RSB avec un gain de 0,6 dB. Cependant, il présente des difficultés à faible RSB : le TEBM et le QdS deviennent meilleurs avec un gain léger. Le compromis nombre de voisins proches/distance minimale apparaît de nouveau en pénalisant notre précodeur par rapport aux précodeurs diagonaux.

## 6.8 Conclusion

Nous avons présenté dans ce dernier chapitre une extension non-optimale du précodeur max- $d_{\min}$ . Son principe est basé sur un découpage du canal virtuel à  $b$  sous-canaux en  $\frac{b}{2}$  sous-systèmes  $2 \times 2$ . Chaque sous-système caractérisé par un angle  $\tilde{\gamma}_i$  et un gain  $\tilde{\rho}_i$  est optimisé selon le critère de la distance minimale à l'aide d'un sous-précodeur  $\tilde{\mathbf{F}}_{di}$ . Une allocation de puissance entre chaque sous-système permet d'égaliser toutes les distances minimales. L'analogie avec le précodeur Erreur Égale a donné le nom de «Equal  $d_{\min}$ » à notre extension. Nous avons ensuite réfléchi sur la répartition des gains  $\lambda_i$  en sous-canaux : quelle est la meilleure combinaison permettant de maximiser la distance minimale de notre précodeur ? La solution est d'associer une petite valeur avec une grande :  $\lambda_1$  avec  $\lambda_b$ , ...,  $\lambda_i$  avec  $\lambda_{b-i+1}$ , ...,  $\lambda_{\frac{b}{2}}$  avec  $\lambda_{\frac{b}{2}+1}$ . Notre précodeur non optimal étendant le max- $d_{\min}$  à  $b > 2$  est alors entièrement défini. La forme de la matrice de

précodage  $\mathbf{F}_d$  est non diagonale et a la forme particulière de «croix» : les termes de la diagonale principale et de l'antidiagonale principale sont non nuls. Il présente alors un compromis entre l'optimisation de la distance et la complexité du récepteur (nombre de tests du MV égal à  $\frac{b}{2}M^2$ ).

D'autre part, nous avons mis en avant l'influence du compromis nombre de voisins proches/distance minimale avec la comparaison du max-SNR et du  $\mathbf{F}_{r1}$ . En constatant que le max-SNR présentait un léger gain, nous avons modifié le précodeur max- $d_{\min}$  en changeant la définition du  $\mathbf{F}_{r1}$  : celui-ci sera équivalent au max-SNR (par soucis de simplification de notation, le terme  $\mathbf{F}_{r1}$  est conservé mais signifie l'utilisation d'une seule voie sans être optimal au sens de  $d_{\min}$ ).

Nous avons ensuite comparé les performances du  $Ed_{\min}$  à même efficacité spectrale avec les précodeurs diagonaux utilisant quatre voies (TEBM 2222 et EE 2222) ou trois (TEBM 4220 et QdS 4220). Les configurations matérielles sont des systèmes MIMO (4,4) et (6,6). Le  $Ed_{\min}$  propose un ordre de diversité plus élevé que les autres précodeurs. Les performances obtenues avec notre précodeur sont meilleures que les précodeurs diagonaux disponibles dans la littérature.

D'autres travaux sont disponibles dans la littérature comme la diversité de polarisation permettant d'augmenter virtuellement le nombre d'antennes : un système comportant une antenne à l'émission et à la réception est équivalent à un système MIMO (2,2). Le nombre d'antennes est divisé par deux. Le gain de place se paye par l'introduction de corrélation que le modèle de canal doit prendre en compte. Une campagne de mesures permet d'obtenir des paramètres réalistes. Après avoir étendu le modèle à des systèmes plus importants comme les systèmes polarisés (2,2) et (3,3) correspondant à des systèmes MIMO corrélés (4,4) et (6,6), nous avons comparé l'extension max- $d_{\min}$  avec les précodeurs diagonaux TEBM et QdS précédents dans un canal corrélé réaliste. L'extension non-optimale du précodeur max- $d_{\min}$  proposée dans ce chapitre a la particularité d'assurer un ordre de diversité plus important que les précodeurs diagonaux à trois ou quatre voies. De plus, le compromis complexité/optimisation de  $d_{\min}$  et l'amélioration du TEB font de notre précodeur une solution intéressante.



# Conclusion

Les systèmes MIMO sont, depuis quelques années maintenant, le sujet de nombreuses études car ils présentent une solution intéressante pour répondre aux besoins des communications sans fil dans un environnement riche en échos. Ils proposent des améliorations notables dans les transmissions en terme de débit et de robustesse aux évanouissements. L'étude menée lors de cette thèse portait sur les systèmes où la connaissance du canal (CSI) est disponible à l'émission permettant l'utilisation de précodeurs linéaires et en particulier le précodeur maximisant la distance minimale euclidienne  $\max-d_{\min}$ . Nous avons étudié ses performances en terme de taux d'erreur binaire (TEB) pour différentes configurations matérielles et proposé une approximation du TEB permettant une étude rapide. Nous avons ensuite tenté de pallier les solutions limitées de ce précodeur en proposant une extension non-optimale pour un nombre de voies pair et supérieur à deux.

Après une introduction sur les systèmes multi-antennaires, nous avons présenté les différentes solutions permettant d'exploiter la diversité spatiale à l'émission et à la réception séparées. Celles-ci se divisent en deux catégories se distinguant par la connaissance ou non du canal. D'un côté les codes spatio-temporels (STBC) offrent un bon compromis complexité/performances sans connaître le canal avec notamment un ordre de diversité maximal. L'inconvénient est l'apparition d'un rendement  $\mathcal{R}$  du débit ( $1/2 \leq \mathcal{R} \leq 1$ ). Seul le code d'Alamouti valable pour deux antennes à l'émission assure  $\mathcal{R} = 1$ . De l'autre côté, les précodeurs linéaires disposent de l'information du canal offrant un degré de liberté supplémentaire permettant l'optimisation d'un critère important lors de la transmission. Une famille particulière disponible dans la littérature regroupe les solutions à structure diagonale ou précodeurs diagonaux (WF, EQMM, TEBM, max-SNR). Seul le max-SNR a l'ordre de diversité maximal comme les OSTBC. Il existe également un précodeur non diagonal maximisant la distance minimale euclidienne ( $\max-d_{\min}$ ). Ce dernier montre des performances intéressantes avec un gain pouvant être important sur les autres précodeurs lorsque le nombre d'antennes augmente. Son utilisation est limitée à  $b = 2$  voies.

Les précodeurs linéaires permettent de diagonaliser la matrice de canal aboutissant à un schéma équivalent plus simple (canal virtuel). En plus de cette simplification, l'utilisation de nouvelles variables aléatoires  $\gamma$  et  $\rho$  caractérisant le canal virtuel permet de faciliter la détermination de la solution du précodeur  $\max-d_{\min}$ . Celle-ci dépend directement de la valeur de l'angle  $\gamma$  par rapport à un angle seuil  $\gamma_0$ . Nous avons

alors déterminé théoriquement les densités de probabilités ( $ddp$ ) des paramètres  $\gamma$  et  $\rho$  pour  $m = 2$  et partiellement pour  $m = 3$ . Ces lois statistiques sont essentielles à l'étude des performances. Les résultats nous ont permis de comparer quelques paramètres importants comme les moyennes et les écarts types de  $\rho$  et  $\gamma$  en fonction de  $n_S$  et  $m$ . Le terme  $\rho$  intervient comme un gain global sur la chaîne mais la variable  $\gamma$  influe directement sur le comportement du précodeur. Les observations statistiques nous ont permis d'étudier le comportement du  $\max\text{-}d_{\min}$  avec notamment l'utilisation ou non du second sous-canal.

Les précodeurs  $\max\text{-}d_{\min}$  et  $\max\text{-SNR}$  maximisent tous deux des critères importants. Ainsi, nous avons comparé la distance minimale euclidienne ( $d_{\min}$ ) et le rapport signal sur bruit (RSB) post-traitement de ces différents précodeurs en fonction de  $\rho$  et  $\gamma$ . Dans un premier temps, nous avons démontré que le  $\max\text{-}d_{\min}$  assurait un ordre de diversité maximal pour une MAQ-4 (comme le  $\max\text{-SNR}$  et les OSTBC). Ensuite, nous avons remarqué que le changement de variables utilisant  $\rho$  et  $\gamma$  permettait une étude qualitative des deux critères ( $d_{\min}$  et le RSB post-traitement) en fonction de la seule variable  $\gamma$ . Les lois définies dans le chapitre 3 permettent de déterminer si les précodeurs présentent une distance minimale importante ou un RSB post-traitement élevé pour une configuration matérielle d'un canal. Nous avons conclu que le  $\max\text{-}d_{\min}$  est le précodeur qui profite le mieux de la configuration matérielle offrant les meilleures performances. Au contraire, le  $\max\text{-SNR}$  est le plus pénalisé offrant des TEB moins bons que les précodeurs diagonaux. Nous avons également appliqué ces résultats théoriques à l'approximation du TEB pour  $m = 2$ . Les performances du  $\max\text{-}d_{\min}$  pour les moyens et forts RSB sont rapidement obtenues. Cela a permis de mettre en évidence la supériorité du  $\max\text{-}d_{\min}$  par rapport au  $\max\text{-SNR}$ .

Nous avons poursuivi notre étude en nous intéressant plus particulièrement aux précodeurs diagonaux avec tout d'abord une amélioration du TEBM. Ce dernier était limité à une modulation identique sur les voies et nous avons modifié la solution pour prendre en compte différentes modulations. Nous avons comparé ce précodeur modifié avec la QdS dont les coefficients permettent d'obtenir la même distance sur toutes les voies. Les simulations nous ont permis de conclure que le TEBM est plus efficace que le QdS lorsque les sous-canaux ont des gains disparates (par exemple lorsque  $b = m$  impliquant une valeur faible de la plus petite valeur propre). Dans le cas contraire, les deux précodeurs sont quasi-équivalents. Nous avons ensuite déterminé une borne supérieure de l'ordre de diversité des précodeurs diagonaux permettant de conclure que l'ordre de diversité n'est pas maximum et diminue quand le nombre de voies utilisées augmente. Ensuite, en nous inspirant de la démonstration de l'ordre de diversité du précodeur  $\max\text{-}d_{\min}$ , nous avons donné une condition suffisante pour assurer l'ordre de diversité maximal. Nous avons alors proposé un précodeur diagonal avec pour but le respect de cette condition : le nouveau précodeur Erreur Egale avec Diversité Maximale (EEDM) choisit entre le  $\max\text{-SNR}$  et le précodeur EE selon le critère de la plus grande distance minimale. Ce précodeur EEDM propose des performances intéressantes pour des systèmes moyens (par exemple trois antennes à l'émission et à la réception (3,3)).

Le précodeur  $\text{max-}d_{\min}$  offre de bonnes performances mais le nombre de voies est limité. Dans le dernier chapitre, nous avons présenté une extension non-optimale de ce précodeur pour un nombre de voie pair et supérieur à deux. Son principe est basé sur des sous-systèmes  $2 \times 2$  caractérisés par des angles  $\tilde{\gamma}_i$  et des gains  $\tilde{\rho}_i$  que chaque sous-précodeur  $\tilde{\mathbf{F}}_{di}$  optimise selon le critère de la distance minimale (solution  $\text{max-}d_{\min}$ ). Une allocation de puissance permet d'égaliser toutes les distances. Par analogie avec l'Erreur Egale, nous avons nommé ce précodeur «Equal  $d_{\min}$ » ou  $E d_{\min}$ . Nous avons donné la solution de l'extension pour un nombre pair quelconque et le précodeur présente une forme tout à fait particulière : il est en «croix». Notre précodeur est caractérisé par les éléments de la diagonale principale et de l'antidiagonale principale qui sont non nuls. Il se différencie ainsi des précodeurs diagonaux. Les simulations ont montré que notre précodeur offrait de bonnes prestations avec notamment un ordre de diversité plus élevé que les précodeurs diagonaux. D'autre part, nous avons considéré un système utilisant de la diversité de polarisation divisant le nombre d'antennes par deux mais introduisant de la corrélation. Le modèle réaliste disponible dans la littérature a été étendu à des systèmes plus importants comme les systèmes physiques (2,2) et (3,3) correspondant à des systèmes MIMO corrélés (4,4) et (6,6). Nous avons comparé les performances du  $E d_{\min}$  pour quatre voies avec les précodeurs diagonaux TEBM et QdS sur quatre ou trois voies avec une efficacité spectrale de 8 bit/s/Hz pour des configurations (4,4) et (6,6). L'extension non-optimale du précodeur  $\text{max-}d_{\min}$  proposée dans ce chapitre a la particularité d'assurer un ordre de diversité plus important que les précodeurs diagonaux à trois ou quatre voies tout en respectant un compromis complexité(nombre de tests du récepteur MV)/optimisation de  $d_{\min}$ . Les gains peuvent être élevés à fort RSB.

A court terme, le travail envisagé se scinde en deux parties.

La première serait la poursuite de l'extension du  $\text{max-}d_{\min}$  avec les simulations des TEB pour plus de six voies. Il serait intéressant d'observer le comportement à fort RSB où ce précodeur se démarque. Il faudrait également regarder son point faible qui se situe à faible RSB. Si la différence se fait de plus en plus sensible, une amélioration de l'extension devra être envisagée. Rappelons que la solution proposée n'est pas optimale mais un compromis entre la complexité et l'optimisation de la distance minimale. La solution  $\text{max-}d_{\min}$  est basée sur un nombre pair de voies et elle devra être étudiée pour un nombre impair. Une solution possible est de séparer le système en un  $E d_{\min}$  avec  $b - 1$  voies et une voie seule. La puissance est alors répartie entre chaque sous-système de façon à égaliser les distances. Tout le travail d'optimisation de la distance minimale concernant le choix des couples de valeurs propres doit alors être repris. Les nouvelles expressions des distances et en particulier celle du symbole seul compliquent le problème et l'optimisation n'est pas triviale. Cette solution a également l'avantage d'assouplir l'efficacité spectrale du  $E d_{\min}$ . En effet, jusqu'à présent la modulation est limitée à la MAQ-4 imposant l'efficacité spectrale à  $2b$  bit/s/Hz. La modulation du symbole isolé est facilement changeable et permet de nouvelles valeurs du débit.



La seconde partie porte sur la connaissance du canal à l'émission et plus particulièrement sur le retour d'information. Il serait intéressant de combiner le précodeur  $\text{max-}d_{\min}$  avec une méthode d'estimation de canal. Cette dernière n'est pas parfaite avec un temps de convergence et des erreurs d'estimation. Le comportement du TEB devra être évalué avec ce maillon supplémentaire de la chaîne. De plus, le débit de l'information retournée à l'émetteur peut être limité facilitant la mise en place de la CSI. Outre le problème d'estimation du canal par le récepteur, il s'agit de contrôler et minimiser les erreurs provoquées par la quantification de l'information retournée [94, 95, 96]. Une première idée est d'utiliser un alphabet de matrices permettant de diagonaliser le canal. L'information retournée correspond à l'indice de la matrice et à la valeur de l'angle  $\gamma$  codée sur un certain nombre de bits [97].

A moyen terme, une simulation de la chaîne complète utilisant le  $E d_{\min}$  pourrait être réalisée. Cette mise en œuvre permettrait d'évaluer les différentes difficultés et avantages de ce précodeur. La sensibilité du précodeur aux différentes imperfections (erreurs d'estimations, information quantifiée, variation du canal. . .) et l'apport de nouveaux éléments (codage de canal, codage spatio-temporel, turbo-codes. . .) pourra être étudié. Le précodeur  $\text{max-}d_{\min}$  résistait bien aux erreurs d'estimation du canal et nous avons bon espoir que notre extension résiste également à ces imperfections. De plus, si l'effort d'optimisation est réalisé pour deux voies, l'application de l'extension du  $\text{max-}d_{\min}$  sera simplifiée. Les performances du  $E d_{\min}$  pourront également être évaluées pour une chaîne de communication plus complète.

# Bibliographie

- [1] A. Glavieux and M. Joindot, *Communications numériques : introduction*. Masson, 1997.
- [2] J. Wozencraft and I. Jacobs, *Principles of Communications Engineering*. Wiley, New-York, 1965.
- [3] R. W. Hamming, "Error detecting and error correcting codes," *Bell. Syst. Tech. J.*, vol. 29, pp. 147–169, Apr. 1950.
- [4] C. Berrou and A. Glavieux, "Near shannon limit error correcting coding and decoding : Turbo codes," *IEEE ICC*, vol. 2/3, may 1993.
- [5] J. Cioffi, "Class reader for ee379a - digital communication : Signal processing," *Stanford University*, <http://www.stanford.edu/class/ee379a>, 2002.
- [6] J. Bie, D. Duponteuil, and J. Imbeaux, *Éléments de communication numériques*. Dunod Université, 1986, vol. 1.
- [7] P. Guguen, "Techniques multi-antennes émission - réception - applications aux réseaux domestiques sans fil," Ph.D. dissertation, Institut National des Sciences appliquées de Rennes, 2003.
- [8] J. Lavergnat, *Propagation des ondes radioélectriques : introduction*. Dunod, Ed., 1997.
- [9] W. Jakes, *Microwave Mobile Communications*. New-York, USA : Wiley, 1974.
- [10] L. Boithias, *Radio Wave Propagation*. McGraw-Hill, 1987.
- [11] S. Benedetto and E. Biglieri, *Principles of digital transmission with wireless applications*. Kluwer Academic/Plenum Publishers, 1999.
- [12] C. Shannon, "A mathematical theory of communication," *Bell Systems Technical Journal*, vol. 27, pp. 379–423 and 623–656, July and October 1948.
- [13] C. E. Shannon, *Claude Elwood Shannon : collected papers*. N.J.A. Sloane and A.D. Wyner, Eds, IEEE Computer Society Press, 1993.
- [14] B. Holter, "On the capacity of the MIMO channel : a tutorial introduction." IEEE Norwegian Symposium on Signal Processing (NSSP), oct. 18-20 2001, pp. 167–172.
- [15] J. Proakis, *Digital Communications*, 4th ed., 2000.
- [16] H. Bölcskei and A. Paulraj, *The communications Handbook*. CRC Press, 2002.

- [17] B. Le Floch, M. Alard, and C. Berrou, "Coded orthogonal frequency division multiplex," *IEEE proceedings*, vol. 83, no. 6, pp. 982–996, 1995.
- [18] G. Burel, C. Boudier, and O. Berder, "Detection of direct sequence spread spectrum transmissions without prior knowledge," in *IEEE Global telecommunications conference(Globecom)*, San Antonio(TX) USA, nov. 2001, pp. 236–239.
- [19] O. Berder, C. Boudier, and G. Burel, "Identification of frequency hopping communications," in *WSEAS Conference on circuits systems, communications and computers (CSCC)*, july 2000, pp. 3851–3856.
- [20] R. G. Vaughan, "Polarization diversity in mobile communications," in *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 39, pp. 177–186.
- [21] H. Bölcskei, R. Nabar, V. Erceg, G. Gesberg, and A. Paulraj, "Performance of spatial multiplexing in the presence of polarization diversity," *IEEE ICASSP*, vol. 4, pp. 2437–2440, May 2001.
- [22] R. Nabar, V. Erceg, H. Bölcskei, and A. Paulraj, "Performance of multi-antenna signaling strategies using udal-polarized antennas : measurement results and analysis," *IEEE WPMC*, vol. 1, pp. 175–180, sept 2001.
- [23] V.Erceg, L. Greenstein, S. Tjandra, S. Parkoff, A. Gupta, B. Kulic, A. Julius, and R. .Bianchi, "An empirically based path loss model for wireless channels in suburban environnement," *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 17, no. 7, pp. 1205–1211, jul. 1999.
- [24] B. A. Bjerke and J. G. Proakis, "Multiple-antenna diversity techniques f transmission over fading channels," *Proc. Wireless Communications and Networking Conf.*, vol. 3, pp. 1038–1042, Sep. 1999.
- [25] A. Wittneben, "Basestation modulation diversity for digital simulcast," in *IEEE Vehicular technology conference (VTC'91)*, may 1991, pp. 848–853.
- [26] A. Mansour, C. Jutten, and P. Loubaton, "Adaptative subspace algorithm for blind separation of independant sources in convolutive mixture," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 48, no. 2, pp. 583–586, feb. 2000.
- [27] G. Foschini, "Layered space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multi-element antennas," *Bell Labs. Tech. J.*, pp. 41–59, Autumn 1996.
- [28] G. Foschini and M. Gans, "On limits of wireless communications in fading environment when using multiple antennas," *Wireless Personal Communications*, vol. 6, pp. 331–335, 1998.
- [29] D. Shiu, G. J. Foschini, M. J. Gans, and J. M. Kahn, "Fading correlation and its effect on the capacity of multielement anttean systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 48, pp. 502–513, Mar. 2000.
- [30] M. Stege, J. Jelitto, M. Bronzel, and G. Fettweis, "A multiple input - multiple output channel model for simulation of tx and rx diversity wireless systems," *IEEE Vehicular Technology Conference (VTC-Fall'00)*, Boston, MA, Sep. 2000.

- [31] M. Stege, M. Bronzel, and G. Fettweis, "MIMO-capacities for COST 259 scenarios," *International Zurich Seminar, Zurich, Switzerland*, Feb. 2002.
- [32] M. Nakagami, "The m distribution : a general formula of intensity distribution of rapid fading," W.G. Hoffman ed. Pergamon Press, 1960.
- [33] D. Hawbaker and T. Rappaport, "Indoor wideband radiowave propagation measurements at 1.3 GHz and 4.0 GHz," *Electronics Letters*, vol. 26, no. 21, pp. 1800–1802, 1990.
- [34] P. Hasefi, D. Wedge, M. Beach, and M. Lawton, "Propagation measurements at 5.2 GHz in commercial and domestic environments," in *proceedings of the IEEE Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC)*, sept. 1997, pp. 509–513.
- [35] J. Letessier, Y. Chartois, P. Rostaing, R. Gautier, and R. Vauzelle, "Performances analysis of MIMO transmissions for in-door channels within realistic 3D environment," in *proceedings of the European Conference on Propagation and System (ECPS)*, mar.
- [36] O. Berder, L. Collin, G. Burel, and P. Rostaing, "Digital transmission combining BLAST and OFDM concepts : experimentation on the UHF COST 207 channel," in *IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBECOM)*, november 2001, pp. 25–29.
- [37] H. Sampath, S. Talwar, V. Erceg, and A. Paulraj, "A fourth-generation MIMO-OFDM broadband wireless system : design, performance, and field trial result."
- [38] I. Telatar, "Capacity of multi-antenna Gaussian channels," *Eur. Trans. Telecommun.*, vol. 10, no. 6, pp. 585–595, Nov./Dec. 1999.
- [39] M. Damen, A. Chkeif, and J. Belfiore, "Lattice code decoder for space-time codes," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 4, pp. 166–169, may 2000.
- [40] M. Damen, K. Abed-Meraim, and J. Belfiore, *IEEE Commun. Mag.*, vol. 36, jan. 2000.
- [41] G. D. Golden, G. J. Foschini, P. W. Wolnianski, and R. A. Valenzuela, "V-BLAST : A high capacity space-time architecture for the rich-scattering wireless channel," *Proc. Int. Symp. Advanced Radio Technol.*, Sept. 1998.
- [42] G. D. Golden, G. J. Foschini, R. A. Valenzuela, and P. W. Wolnianski, "Detection algorithm an initial laboratory results using V-BLAST space-time communication architecture," *Electronics Letters*, vol. 1, no. 35, pp. 14–15, jan. 2000.
- [43] T.-L. Tung and K. Yao, "Channel estimation and optimal power allocation for a multiple-antenna OFDM system," *Eurasip journal on Applied Signal Processing*, 2002.
- [44] A. Poon, D. Tse, and R. brodersen, "An adaptative multi-antenna transceiver for slowly flat fading channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, no. 11, pp. 1820–1827, nov. 2003.
- [45] E. Larsson and P. Stoica, *Space-Time Block Coding dor Wireless Communications*. Cambridge university press, 2003.

- [46] S. M. Alamouti, "A simple diversity technique for wireless communications," *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 16, pp. 1451–1458, Oct. 1998.
- [47] V. Tarokh, N. Seshadri, and A. R. Calderbank, "Space-time codes for high data rate wireless communication : Performance criterion and code construction," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, pp. 744–765, Mar. 1998.
- [48] V. Tarokh, H. Jafarkhani, and A. R. Calderbank, "Space-time codes from orthogonal designs," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 45, no. 5, pp. 1456–1467, Jul. 1999.
- [49] G. Ungerboeck, "Channel coding with multilevel/phase signals," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 28, no. 1, pp. 55–67, Jan. 1982.
- [50] A. J. Viterbi, "Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm," *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1967.
- [51] A. Stefanov and T. Duman, "Turbo coded modulation for system with transmit and receive antenna diversity," in *IEEE Globecom'99*, vol. IT-18, Nov.-Dec. 1999.
- [52] B. Vucetic and J. Yuan, *Space-Time coding*. Wiley, 2003.
- [53] P. Bouvet, "Récepteurs itératifs pour systèmes multi-antennaires," Ph.D. dissertation, INSA de Rennes, 2005.
- [54] H. Jafarkhani and A. Calderbank, "A quasi-orthogonal space-time block code," *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2001.
- [55] O. Tirkkonen, A. Boariu, and A. Hottinen, "Minimal non-orthogonal rate one space-time block code for 3+ tx antennas," *IEEE International Symposium on Spread-Spectrum Techniques and Applications, ISSSTA'00*, pp. 429–432, 2000.
- [56] M. Damen, K. Abed-Meraim, and J. Belfiore, "Diagonal algebraic space-time block codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 48, no. 3, pp. 628–636, Mar. 2002.
- [57] V. Le Nir, "Etude et optimisation des systèmes multi-antennes associés à des modulations multipor-teuses," Ph.D. dissertation, Institut National des Sciences Appliquées de Rennes, 2004.
- [58] H. Sampath, P. Stoica, and A. Paulraj, "Generalized linear precoder and decoder design for MIMO channels using the weighted MMSE criterion," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, no. 12, pp. 2198–2206, Dec. 2001.
- [59] A. Scaglione, P. Stoica, S. Barbarossa, G. Giannakis, and H. Sampath, "Optimal designs for space-time linear precoders and decoders," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 50, no. 5, pp. 1051–1064, May 2002.
- [60] M. Wennström, M. Helin, A. Rydberg, and T. Oberg, "On the optimality and performance of transmit and receive space diversity in MIMO channels," in *IEE Technical Seminar on MIMO Communication Systems : From Concept to Implementation*, London, December 12 2001.

- [61] M. Kang and M. Alouini, "Largest eigenvalue of complex wishart matrices and performance analysis of MIMO MRC systems," *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 21, no. 3, pp. 418–426, Apr. 2003.
- [62] P. Dighe, R. Mallik, and S. Jamuar, "Analysis of transmit-receive diversity in rayleigh fading," vol. 51, no. 4, pp. 694–703, apr. 2003.
- [63] P. Stoica and G. Ganesan, "Maximum-SNR spatial-temporal formatting designs for MIMO channels," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 50, no. 12, pp. 3036–3042, Dec. 2002.
- [64] T. K. Lo, "Maximum ratio transmission," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 47, no. 10, pp. 1458–1461, Oct. 1999.
- [65] P. Rostaing, O. Berder, G. Burel, and L. Collin, "Minimum BER diagonal precoder for MIMO digital transmissions," *Signal Processing*, vol. 82, no. 10, pp. 1477–1480, Oct. 2002.
- [66] R. Corless, G. Gonnet, D. Hare, D. Jeffrey, and D. Knuth, "On the lambert w function," *Advances in computational mathematics*, vol. 5, pp. 329–359, 1996.
- [67] O. Berder, "Optimisation et stratégies d'allocation de puissance des systèmes de transmission multi-antennes," Ph.D. dissertation, université de Bretagne Occidentale, 2002.
- [68] X. Zhu and R. Murch, "Performance analysis of maximum likelihood detection in a MIMO antenna system," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 50, pp. 187–191, Feb. 2002.
- [69] L. Collin, "Optimisation de systèmes multi-antennes basée sur la distance minimale," Ph.D. dissertation, Université de Bretagne Occidentale, 2002.
- [70] L. Collin, O. Berder, P. Rostaing, and G. Burel, "Optimal minimum distance-based precoder for MIMO spatial multiplexing systems," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 52, no. 3, pp. 617–627, Mars 2004.
- [71] J. Letessier, "Performances théoriques de systèmes MIMO pré-égalisés et applications avec un simulateur de propagation 3D," Ph.D. dissertation, Université de Bretagne Occidentale, 2005.
- [72] J. Wishart, "The generalized product moment distribution in samples from a normal multivariate population," *Biometrika*, vol. 20, no. A, pp. 32–52, 1928.
- [73] A. James, "Distributions of matrix variates and latent roots derived from normal samples," *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 35, no. 12, pp. 475–501, Dec. 1964.
- [74] R. Muirhead, *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. John Wiley & Sons, New York, 1982.
- [75] A. Edelman, "Eigenvalues and condition numbers of random matrices," Ph.D. dissertation, Cambridge, 1989.
- [76] M. Wennström, "On MIMO systems and adaptative arrays for wireless communication, analysis and practical issues," Ph.D. dissertation, Uppsala University, 2002.
- [77] J. Letessier, P. Rostaing, and G. Burel, "Performances analysis of the maximum-SNR design in rayleigh fading MIMO channels," vol. 3. PIMRC, Sept. 2004, pp. 1583–1587.

- [78] G. Burel, "Statistical analysis of the smallest singular value in MIMO transmission systems," in *WSEAS Int. Conf. on Signal, Speech and Image Processing (ICOSSIP 2002)*, Skiathos Island, Greece, Sept. 25-28 2002.
- [79] A. Paulraj, R. Nabar, and D. Gore, *Introduction to space-time wireless communications*. Cambridge University Press, 2003.
- [80] **B. Vrigneau**, J. Letessier, P. Rostaing, and L. Collin, "Statistical comparison between max- $d_{\min}$ , max-SNR and MMSE precoders," *the 40th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, 2006.
- [81] M. Chiani, D. Dardari, and M. Simon, "New exponential bounds and approximations for the computation of error probability in fading channels," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 2, no. 4, pp. 840–845, Jul. 2003.
- [82] P. A. Dighe, R. K. Mallik, and S. S. Jamuar, "Analysis of transmit-receive diversity in Rayleigh fading," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, no. 4, pp. 694–703, Apr. 2003.
- [83] L. Zheng and D. Tse, "Diversity and multiplexing : a fundamental tradeoff in multiple-antenna channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 49, no. 5, pp. 1073–1096, May 2003.
- [84] G. H. Golub and C. F. V. Loan, *Matrix computations*, 3rd ed. The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [85] P. A. Dighe, R. K. Mallik, and S. S. Jamuar, "Analysis of transmit-receive diversity in Rayleigh fading," vol. 2, Globecom. IT 612 : Wireless Applications, 2001, pp. 1132–1136.
- [86] J. Andersen, "Array gain and capacity for known random channels with multiple element arrays at both ends," *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 18, no. 11, pp. 2172–2178, Nov. 2000.
- [87] R. Heah Jr. and A. Paulraj, "Switching between diversity and multiplexing in MIMO systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 53, no. 6, pp. 962–968, june 2005.
- [88] C. Chuah, J. M. Kahn, and D. Tse, "Capacity of multi-antenna array systems in indoor wireless environment."
- [89] R. Nabar, H. Bölcskei, V. Erceg, D. Gesbert, and A. Paulraj, "Performance of multiantenna signaling techniques in the presence of polarization diversity," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 50, no. 10, pp. 2553 – 2562, Oct 2002.
- [90] **B. Vrigneau**, P. Rostaing, and G. Burel, "Comparison of  $d_{\min}$ -based precoder with OSTBC and maximum-snr-based precoder for MIMO systems," *European Conference on Propagation and Systems (ECPS)*, Brest, France, march 2004.
- [91] **B. Vrigneau**, P. Rostaing, and K. Yao, "Comparaison du précodeur  $d_{\min}$  avec les OSTBC et le précodeur max-SNR pour les systèmes mimo," *Colloque du Groupe sur le Traitement du Signal et des Images (GRETSI)*, Louvain-La-Neuve, Belgique, Septembre 2004.



- [92] **B. Vrineau**, J. Letessier, P. Rostaing, L. Collin, and G. Burel, “max- $d_{\min}$  precoder performances in a polarity diversity MIMO channel,” *the 40th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, 2006.
- [93] G. Dolmans and G. Callados, “Broadband measurement analysis of indoor space-time channels,” in *in proceedings of the union Radio-Scientifique Internationale (URSI) General Assembly*, Maastricht, Nederland, aug. 2002, pp. 17–24.
- [94] D. J. Love and R. W. Heath Jr., “Limited feedback unitary precoding for spatial multiplexing systems,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, no. 8, pp. 2967–2976, aug. 2005.
- [95] D. J. Love, “Duplex distortion models for limited feedback MIMO communication,” *IEEE Trans. Signal Processing*, no. 2, pp. 766–774, Feb. 2006.
- [96] C. K. A. Yeung and D. Love, “Performance analysis of random vector quantization limited feedback beamforming,” *Signals, Systems and Computers, 2005. Conference Record of the Thirty-Ninth Asilomar*, 2005.
- [97] J. Letessier, **B. Vrineau**, P. Rostaing, and G. Burel, “Limited feedback unitary matrix applied to MIMO dmin-based precoder,” *the 40th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, 2006.





# Liste de publications

## Communications dans des conférences internationales à comité de lecture

- **B. Vrigneau**, J. Letessier, P. Rostaing, L. Collin, and G. Burel, “max- $d_{\min}$  precoder performances in a polarity diversity MIMO channel” : in proceedings of the 40th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, Pacific Grove (CA), USA, October 29 - November 1 2006.
- **B. Vrigneau**, J. Letessier, P. Rostaing, and L. Collin, “Statistical comparison between max- $d_{\min}$ , max-SNR and MMSE precoders” : in proceedings of the 40th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, Pacific Grove (CA), USA, October 29 - November 1 2006.
- J. Letessier, **B. Vrigneau**, P. Rostaing, and G. Burel, “Limited Feedback Unitary Matrix applied to MIMO  $d_{\min}$ -based Precoder” : in proceedings of the 40th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, Pacific Grove (CA), USA, October 29 - November 1 2006.
- **B. Vrigneau**, P. Rostaing, and G. Burel, “Comparison of  $d_{\min}$ -based precoder with OSTBC and maximum-SNR-based precoder for MIMO systems” : European Conference on Propagation and Systems (ECPS), Brest, France, march 2004.

## Communications dans des conférences nationales à comité de lecture

- **B. Vrigneau**, P. Rostaing et K. Yao, “Comparaison du précodeur  $d_{\min}$  avec les OSTBC et le précodeur max-SNR pour les systèmes MIMO” : Colloque du Groupe sur le Traitement du Signal et des Images (GRETSI), Louvain-La-Neuve, Belgique, septembre 2004.

## Communications dans des conférences pédagogiques à comité de lecture

- J. Letessier, **B. Vrigneau**, Y. Quéré et A. Guennou, “Une chaîne de communication sans fil”, Nancy, France : Colloque sur l’Enseignement des Technologies et des Sciences de l’Information et des Systèmes (CETIS), 25-27 Octobre 2005.

## Articles soumis dans des revues à comité de lecture

- **B. Vrigneau**, J. Letessier, P. Rostaing, L. Collin, and G. Burel, “Theoretical Results about MIMO Minimal Distance Precoder and Performances Comparison” : the Institute of Electronics, Information and Communication Engineers (IEICE), septembre 2006.
- J. Letessier, **B. Vrigneau**, Ph. Rostaing, G. Burel, «New Closed-Form of the Largest Eigenvalue PDF for Max-SNR System Performances», soumis à IEICE Transactions on fundamentals of electronics, communications and computer sciences, septembre 2006.



# Résumé

**Mots-clés : MIMO, précodeurs linéaires (EQMM, WF, QdS, EE, max-SNR ou max- $d_{\min}$ ), canal de Rayleigh, diagonalisation du canal (DVS), performances théoriques, analyse statistique, diversité de polarisation.**

Les systèmes multi-antennaires (Multiple-Input Multiple-Output ou MIMO) dans le domaine des communications numériques permettent d'améliorer la transmission des données selon deux principaux paramètres souvent antagonistes : le débit d'information et la fiabilité de transmission estimée en terme de probabilité d'erreurs binaire moyenne (PEB). Avec de tels systèmes, la connaissance du canal à l'émission (Channel State Information ou CSI) est un point-clé pour diminuer la PEB grâce à différentes stratégies d'allocations de puissance. Ainsi, un précodeur linéaire à l'émission associé à un décodeur linéaire à la réception peuvent optimiser un critère particulier grâce à cette information. Il en résulte une famille importante de précodeurs dénommée «précodeurs diagonaux» : le système MIMO est équivalent à des sous-canaux SISO indépendants. Les critères optimisés sont par exemple la minimisation de l'erreur quadratique moyenne (EQMM), la maximisation de la capacité (WF), obtenir des PEB égales pour tous les flux de données (EE), la maximisation du RSB post-traitement (max-SNR) ou la qualité de service (QdS). L'équipe TST a récemment élaboré un nouveau précodeur non diagonal basé sur la maximisation de la distance minimale entre symboles de la constellation de réception (max- $d_{\min}$ ). L'enjeu de cette thèse est d'estimer les performances en terme de PEB de ce nouveau précodeur et de les comparer avec les méthodes existantes à savoir le code d'Alamouti et les précodeurs diagonaux. Nous nous sommes intéressés en particulier à la démonstration de l'ordre de diversité maximal du max- $d_{\min}$  puis à la détermination d'une bonne approximation de sa PEB. Le précodeur max- $d_{\min}$  est ensuite associé à de la diversité de polarisation permettant de réduire le coût et l'occupation spatiale d'un système MIMO. Malgré l'introduction de corrélation, les performances proposées par le max- $d_{\min}$  demeurent intéressantes. Nous avons ensuite proposé une extension du précodeur max- $d_{\min}$  permettant de supprimer la limitation à deux sous-canaux : les grands systèmes MIMO sont mieux exploités avec plus de deux sous-canaux.

# Abstract

**Keywords : MIMO, linear precoders (MMSE, WF, QoS, EE, max-SNR or max- $d_{\min}$ ), Rayleigh channel fading, channel diagonalization (SVD), theoretical performances, statistical analysis, polarisation diversity.**

In wireless communications, the Multiple-Input Multiple-Output (MIMO) systems constitute an efficient way to significantly enhance data transmission according to two main, though antagonistic, parameters : the spectral efficiency and reliability assessed from the average binary error probability (BEP). With such systems the knowledge of the channel state information (CSI) at the transmitter side is paramount to lower reduce the BEP through different strategies of power allocation. Indeed, once the CSI has been fully (or perfectly) known, a linear precoder at the transmit side and a linear decoder at the receive side can be designed for subsequent association by optimising one among the following criteria : minimum mean square error (MMSE), equal error (EE), post-processing signal-to-noise ratio maximization (max-SNR) or quality of service (QoS). Their respective optimisations have led to a family of diagonal precoders : the MIMO system is equivalent to independant SISO subchannels. Recently, a new no-diagonal precoder designed within our laboratory optimizes the minimal Euclidean distance between receive symbols. This thesis work was aimed at estimating the BEP of this precoder for comparison with other methods (Alamouti's code and diagonal precoders). We demonstrated the maximal diversity order of the max-dmin, and then gave a tight BEP approximation. Moreover, the spatial dimensions and the final cost of a MIMO device were reduced by associating of the precoder max-dmin with polarity diversity. Despite the correlation induced by this system, the max-dmin performances are still worth being considered. We also proposed an extension of the max-dmin to more than two sub-channels in order to exploit larger MIMO systems.