



HAL
open science

Une approche problèmes inverses pour la reconstruction de données multi-dimensionnelles par méthodes d'optimisation.

Ferréol Soulez

► **To cite this version:**

Ferréol Soulez. Une approche problèmes inverses pour la reconstruction de données multi-dimensionnelles par méthodes d'optimisation.. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Jean Monnet - Saint-Etienne, 2008. Français. NNT: . tel-00379735v2

HAL Id: tel-00379735

<https://theses.hal.science/tel-00379735v2>

Submitted on 27 Apr 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Présentée à

l'Université Jean Monnet de Saint-Etienne

pour obtenir

le grade de : DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE SAINT-ETIENNE

Spécialité : IMAGE

par

Ferréol SOULEZ

et intitulée

**Une approche “problèmes inverses” pour
la reconstruction de données
multi-dimensionnelles par méthodes
d'optimisation**

soutenue le 11 décembre 2008 devant le jury composé de:

Rapporteurs:	L. Blanc-Feraud	Directrice de recherche, INRIA, Sophia Antipolis
	J.F. Giovanelli	Professeur, Université Bordeaux 1
Examineurs:	C. Fournier	Maître de conférence, Université Jean Monnet, St-Etienne
	L. Desbat	Professeur, Université Joseph Fourier, Grenoble
	C. Pichon	Chargé de Recherche, Institut d'Astrophysique de Paris
	Y. Tourneur	Chargé de Recherche, Université Claude Bernard, Lyon
Directeur:	J.M. Becker	Enseignant chercheur, École de Chimie Physique Électronique de Lyon
Co-directeur:	E. Thiébaud	Astronome Adjoint, Centre de Recherche Astronomique, Lyon

Table des matières

Table des matières	i
Principales notations	v
Contexte	1
Introduction	3
1 Une Introduction aux Problèmes Inverses	7
1.1 Préambule	7
1.2 Description	8
1.2.1 Le système	8
1.2.2 Les observables	9
1.2.3 Les données	9
1.2.4 Les paramètres	9
1.2.5 Le problème Direct	10
1.2.6 Le problème Inverse	10
1.2.7 Les Problèmes <i>mal-posés</i>	10
1.2.8 Le conditionnement	11
1.3 Formalisme probabiliste	12
1.3.1 Espaces probabilisés	13
1.3.2 Densités de probabilité	13
1.3.3 Densités de probabilité <i>a priori</i>	14
1.3.4 Densité de probabilité théorique	15
1.3.5 Densité de probabilité <i>a posteriori</i>	15
1.3.6 Liens avec la théorie de Bayes	16
1.3.7 Maximum de vraisemblance, Maximum <i>a posteriori</i>	17
1.3.8 Fonctions d'adéquation	17
1.4 La résolution du problème inverse	17
1.4.1 Un exemple de problème inverse : la déconvolution	17
1.4.2 Inversion directe	19
1.4.3 Maximum de Vraisemblance	21
1.4.4 Maximum de Vraisemblance Contraint : Restriction de l'espace des paramètres	23
1.4.5 Le filtre de Wiener	29
1.4.6 Maximum <i>a posteriori</i>	31
1.4.7 Réglage des hyper paramètres	37
1.4.8 Une densité de probabilité comme solution d'un problème inverse	40
1.5 Optimisation	41
1.5.1 Description	41

1.5.2	Newton	42
1.5.3	Quasi-Newton	42
1.5.4	Recherche de la taille du pas	45
1.5.5	Critère d'arrêt	47
1.6	Origines des incertitudes	47
1.6.1	Incertitudes de mesure	47
1.6.2	Incertitudes de modélisation	48
1.6.3	ANNEXE : Type de distribution de bruit	48
2	Déconvolution de données multidimensionnelles	51
2.1	Description	51
2.1.1	Formation des données	51
2.1.2	Hypothèses simplificatrices	52
2.2	La déconvolution : un problème inverse	53
2.2.1	Une régularisation séparable	54
2.3	Cas 2D : La déconvolution d'images	55
2.3.1	Forme générale de la régularisation	55
2.3.2	La norme quadratique : Régularisation de Tikhonov	55
2.3.3	La norme ℓ_1	57
2.3.4	Autres normes/métriques	58
2.3.5	La parcimonie	60
2.3.6	Autres formes de régularisations	61
2.3.7	Conclusion	62
2.4	Déconvolution de données multi-spectrales	65
2.4.1	Contexte : l'imagerie multi-spectrale en astronomie	65
2.4.2	La reconstruction des données SNIFS	71
2.4.3	Résultats	74
2.4.4	Perspectives	76
2.5	Déconvolution et démosaïçage	79
2.5.1	Contexte : l'imagerie couleur avec le filtre de Bayer	79
2.5.2	Formation des données	83
2.5.3	La déconvolution d'images mosaïquées	84
2.5.4	Résultats : données simulées	87
2.5.5	Résultats : Données réelles	96
2.5.6	Perspectives	96
3	Déconvolution aveugle de données multidimensionnelles	99
3.1	Description	99
3.2	Origine du flou	100
3.2.1	PSF 2D	100
3.2.2	PSFs multidimensionnelles	102
3.3	<i>A priori</i> sur la PSF	103
3.3.1	Normalisation	103
3.3.2	Positivité	103
3.3.3	Support spatial	104
3.3.4	Support spectral	104
3.3.5	PSF lisse	104

3.3.6	PSF uni-modale	104
3.3.7	Symétrie de révolution	104
3.4	Méthodes de déconvolution aveugle	105
3.4.1	Identification de la PSF	105
3.4.2	Estimation du reconstituteur optimal	107
3.4.3	Estimation conjointe de l'objet et de la PSF	110
3.4.4	Approches inverses	112
3.5	Approche proposée	114
3.6	Contraintes strictes	115
3.6.1	Taxonomie des contraintes	116
3.6.2	Application des contraintes strictes	116
3.6.3	Solution proposée	117
3.7	Régularisation spatiale de la PSF	118
3.7.1	Norme quadratique appliquée aux gradients	118
3.7.2	Norme $\ell_2\text{-}\ell_1$ appliquée aux gradients / Variation totale	119
3.7.3	Contrainte de forme, déconvolution myope	120
3.8	Régularisation temporelle de la PSF	121
3.9	Conditions initiales	122
3.9.1	PSF initiale	122
3.9.2	Objet initial	122
3.10	Résultat expérimentaux	125
3.10.1	Coronarographie	125
3.10.2	Microscopie confocale	129
3.10.3	Microscopie	134
3.11	Conclusions et perspectives	138
4	Approche inverse pour l'holographie numérique de micro-particules	141
4.1	Contexte : L'holographie numérique de micro-particules	141
4.1.1	Les enjeux de l'étude des micro-objets	141
4.1.2	Principe de l'holographie	142
4.1.3	L'holographie numérique	142
4.1.4	Application à la vélocimétrie	143
4.1.5	L'holographie en ligne : le montage de Gabor	144
4.1.6	Les paramètres du montage de Gabor	144
4.2	Modèle de formation d'un hologramme	146
4.2.1	Expression de l'onde reçue dans le plan du capteur	146
4.2.2	Acquisition	148
4.2.3	Description des erreurs	149
4.3	Interprétation du modèle	153
4.4	Dépouillement et restitution d'un hologramme numérique	154
4.4.1	Restitution optique	155
4.4.2	Modèle de la restitution	155
4.4.3	Restitution numérique	156
4.4.4	Approche globale	156
4.5	Les limites de l'approche classique	157
4.6	Une formulation "problèmes inverses"	157
4.6.1	Restitution au sens du maximum de vraisemblance	157

4.6.2	Maximum de Vraisemblance Contraint : Limitation de l'espace des paramètres	159
4.6.3	Principe général de l'algorithme	160
4.6.4	Étape de Détection	162
4.6.5	Étape de positionnement fin	165
4.6.6	Validation des paramètres estimés de la particule et convergence de l'algorithme	167
4.7	Résultats	168
4.7.1	Analyse d'hogrammes simulés	169
4.7.2	Analyse d'hogrammes expérimentaux d'un jet rectiligne	173
4.8	Conclusion et perspectives	177
4.8.1	Caractérisation	177
4.8.2	Amélioration et accélération de l'algorithme	178
	Bibliographie	185
	Bibliographie personnelle	199

Principales notations

Dans tout ce document nous avons utilisé autant que possible une notation unifiée. En voici la forme générale qui sera utilisée sauf mentions contraires :

une lettre capitale grasse	\mathbf{M}	indique une matrice,
une lettre minuscule grasse	\mathbf{x}	indique un vecteur,
une lettre grecque minuscule	α	indique un scalaire,
une lettre minuscule	f	indique une fonction,
une lettre caligraphiée capitale	\mathcal{D}	indique un espace,
\times	$\mathbf{x} \times \mathbf{y}$	indique la multiplication terme à terme,
\cdot	$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$	indique la multiplication matricielle,
$*$	$\mathbf{x} * \mathbf{y}$	indique la convolution,
\hat{x}		transformée de Fourier de \mathbf{x} ,
$\text{Re}(x)$		partie réelle de x ,
F		transformée de Fourier,
$J_1()$		fonction de Bessel de première espèce.

Problèmes inverses

\mathbf{p}	vecteur des paramètres,
\mathbf{d}	vecteur des données,
\mathbf{o}	vecteur des observables,
\mathbf{b}	vecteur du bruit,
$m()$	modèle,
f^{prior}	densité de probabilité <i>a priori</i> ,
$f_{\mathcal{G}}^{\text{theo}}(\mathbf{p}, \mathbf{o})$	densité de probabilité théorique,
$f_{\mathcal{G}}^{\text{post}}(\mathbf{p}, \mathbf{o})$	densité de probabilité jointe <i>a posteriori</i> ,
$L(\mathbf{d} \mathbf{p})$	densité de probabilité de vraisemblance,

Déconvolution

\mathbf{x}	objet,
\mathbf{y}	données,
\mathbf{h}	PSF,
\mathbf{W}	matrice de poids,
$\mathbf{x}^{(\text{MV})}$	solution au sens du maximum de vraisemblance,
$\mathbf{x}^{(\text{MAP})}$	solution au sens du maximum <i>a posteriori</i> ,
Φ_{MV}	fonction d'attache aux données,
Φ_{Regul}	fonction de régularisation,

Θ	régularisation sur l'objet,
Ψ	régularisation sur la PSF,
α	hyper-paramètre sur l'objet,
β	hyper-paramètre sur la PSF,
Ω	fonction de régularisation,

L'indice indique la dimension sur laquelle est appliquée la régularisation, *e.g.* :

Θ_S	régularisation spatiale pour l'objet
Θ_Λ	régularisation spectrale pour l'objet
Θ_{Color}	régularisation "couleur" pour l'objet
Θ_Z	régularisation longitudinale pour l'objet
Θ_T	régularisation temporelle pour l'objet

Holographie

\underline{t} ou t	transmittance,
ϑ	ouverture réelle d'un objet,
\underline{A}	amplitude complexe,
I	intensité de l'hologramme,
d	hologramme mesuré (données),
$\underline{h_z}$	fonction de Fresnel de paramètre z ,
x et y	coordonnées spatiales transversales dans le plan diffractant,
X et Y	coordonnées spatiales transversales dans le plan du capteur,
z	coordonnée spatiale longitudinale (i.e. distance à l'hologramme),
r_i	rayon de la i^{e} particule,
$f()$	figure de diffraction,
$g()$	figure de diffraction centré sur le pixel (1,1),
α_i	facteur multiplicatif de la figure de diffraction de la i^{e} particule,
\underline{p}^i	paramètres de la i^{e} particule,
I_{bg}	niveau moyen du détecteur,
Δ	taille du pixel
j	imaginaire pur unité
ψ	phase d'une amplitude complexe
λ	longueur d'onde

Contexte

Ce travail de thèse a été réalisé au laboratoire Hubert Curien (LaHC) de St Etienne et au Centre de Recherche en Astrophysique de Lyon (CRAL). Deux parties peuvent y être distinguées : (i) la déconvolution aveugle ou non de données multidimensionnelles et (ii) la détection de micro-particules en holographie numérique.

La partie sur la déconvolution aveugle a principalement été développée dans l'équipe AIRI du CRAL, unité mixte de recherche entre le CNRS, l'Université Lyon 1 et l'ENS-Lyon. Le travail de l'équipe AIRI (Astrophysique et Imagerie aux Résolutions Interférométriques) dirigée par Renaud Foy est axée sur la haute résolution angulaire et son application en astrophysique. Ses principaux thèmes de recherche sont l'optique adaptative multi-conjuguée, l'étoile laser poly-chromatique pour l'optique adaptative, l'imagerie interférométrique courte pose et la reconstruction de données (en interférométrie, déconvolution aveugle ...). L'objectif primordial de cette thèse était d'étendre à d'autres domaines, et en particulier à l'imagerie biomédicale, les outils développés pour l'astrophysique au sein de cette équipe. La collaboration entre l'équipe AIRI et le Centre Commun de Quantimétrie de Lyon (CCQ) a ainsi commencé autour du développement d'une caméra à comptage de photons pour l'acquisition d'images à très bas flux, et s'est par la suite poursuivie avec le "portage" en imagerie biologique des méthodes de reconstruction développées par Eric Thiébaud. C'est dans le cadre de cette collaboration avec le CCQ, ainsi qu'avec le service de cardiologie de l'hôpital de la Croix Rousse à Lyon, qu'a eu lieu ce travail sur la déconvolution aveugle. Les progrès réalisés pour la déconvolution de données biomédicales ont par la suite bénéficié aussi au traitement de données astronomiques, démontrant l'apport mutuel que peuvent apporter de telles collaborations trans-disciplinaires. Bien que surtout effectuée au CRAL, le travail sur la déconvolution aveugle s'inscrit aussi dans la thématique "méthodes et techniques de reconstruction d'images" du laboratoire Hubert Curien.

Le laboratoire Hubert Curien, issu de la fusion des laboratoires LTSI, EURISE et LIGIV, est une unité mixte de recherche entre le CNRS et l'université Jean Monnet de St Etienne. L'activité de ce laboratoire est déclinée en deux axes principaux (i) optique et photonique et (ii) informatique et image. Au sein de ce dernier axe, les travaux de la thématique "méthodes et techniques de reconstruction d'images" animée par Rolf Clackdoyle portent en particulier sur la reconstruction en tomographie et l'holographie numérique. C'est dans cette thématique que s'inscrit aussi la deuxième partie de mon travail sur la détection de micro-particules en holographie numérique. L'imagerie pour la métrologie et la visualisation d'écoulement en mécanique des fluides est, de longue date, une des activités importantes du laboratoire Hubert Curien par le biais de nombreuses contributions en vélocimétrie par image de particules (PIV). Au cours de la dernière décennie, avec les thèses de Corinne Fournier (2003) et de Loïc Denis (2006), s'y est développée une expertise en holographie numérique pour la vélocimétrie par image de particules (DHPIV) au travers notamment de la collaboration avec le laboratoire de mécanique des fluides et d'acoustique (LMFA) pour les aspects expérimentaux.

Enfin, la direction de cette thèse assurée par Jean Marie Becker, enseignant en mathéma-

tique à CPE-Lyon et chercheur au LaHC, a accentué encore l'aspect trans-disciplinaire de ce travail en y ajoutant le point de vue et la démarche du mathématicien.

Signalons que l'intégralité des développements informatiques effectués durant cette thèse, a été écrit en Yorick, un langage libre développé par David Munro¹, et plus précisément avec son extension Yeti² écrite par Eric Thiébaud.

¹<http://yorick.sourceforge.net/>

²<http://www-obs.univ-lyon1.fr/labo/perso/eric.thiebaut/yorick.html>

Introduction

Avant-propos

Élaborer un texte introduisant la totalité de cette thèse effectuée dans des domaines (la déconvolution et l'holographie numérique) à première vue forts différents peut sembler une gageure. Pourtant si les problèmes (restauration et détection) semblent très différents, tous deux ont été abordés, comme cela est décrit dans le corps de ce document, suivant la même approche : l'approche *problèmes inverses*. Une brève description chronologique de ce travail de thèse peut apporter un éclairage intéressant sur l'unité de ce travail.

Cette thèse a commencé en octobre 2004 dans le cadre d'une collaboration entre Catherine Mennessier et Jean Marie Becker, tous deux enseignants chercheurs à CPE-Lyon et Eric Thiébaud, astronome adjoint au CRAL. Le but de cette thèse était, dès l'origine, d'étendre à d'autres domaines d'application les méthodes de reconstruction et de déconvolution aveugle mises au point pour l'astronomie par Eric Thiébaud. Le laboratoire de traitement d'image de CPE-Lyon étant une "antenne" du LTSI de St Etienne (ancêtre du LaHC), cette collaboration était, en un certain sens, aussi une collaboration entre le CRAL et le futur LaHC³. Par le biais de cette thèse, il y a ainsi eu de nombreux échanges entre Eric Thiébaud, spécialisé dans la reconstruction au CRAL, Loïc Denis et Corinne Fournier travaillant en holographie numérique, Rolf Clackdoyle et Catherine Mennessier travaillant en tomographie, Jean Marie Becker et moi-même. Au cours de ces échanges, il est rapidement apparu de nombreux liens entre les problèmes de détection de micro-particules en holographie et ceux de détection d'exoplanètes en astronomie. L'approche inverse utilisée pour la détection d'exoplanètes comme pour la déconvolution, a ainsi été transposée pour la détection de micro-particules en holographie classiquement effectuée auparavant en mimant numériquement la restitution optique. La mise en œuvre, effectuée par Loïc Denis et moi-même, a depuis démontré la pertinence de l'approche inverse pour traiter les problèmes de détection de micro-particules sphériques en holographie numérique. Partageant la même approche, les deux sujets, l'holographie numérique et la déconvolution aveugle, ont ainsi pu être traités de front.

Introduction

Depuis l'invention de la lunette astronomique, de nouveaux instruments ont sans cesse permis à l'homme d'observer des objets de plus en plus lointains ou de plus en plus petits. Pour mieux comprendre le monde qui nous entoure, nous avons cherché à observer des objets en 3D, à différents intervalles de temps, différentes longueurs d'onde... Les limites des instruments ont toujours été dépassées par la génération suivante d'instruments employant qui de meilleurs composants, qui de nouvelles techniques plus précises ; la barrière due à la limite de diffraction dans le visible des microscopes optiques a ainsi été contournée par

³Le laboratoire de traitement du signal et instrumentation (LTSI) est devenu laboratoire Hubert Curien (LaHC) le 1^{er} janvier 2007

la microscopie électronique permettant d'observer des objets toujours plus petits, l'acquisition de mesures tridimensionnelles de petits objets a été rendue possible par la microscopie confocale ou holographique. Jusqu'à présent, la recherche de davantage d'informations sur un objet passait souvent par le développement d'instruments plus puissants. Toutefois, depuis une quinzaine d'années, avec l'augmentation exponentielle des moyens de calcul, il est devenu possible d'extraire davantage d'informations que celles immédiatement appréhendables dans les données. En effet, en combinant des informations *a priori* sur l'objet et/ou sur la formation des données avec un ou plusieurs jeux de données du même objet, il est possible de restaurer de l'information très atténuée. Par exemple, il est aujourd'hui possible, sous certaines conditions, d'obtenir des résolutions dépassant la limite de Shannon de l'instrument utilisé pour l'acquisition. On voit aussi se développer maintenant des systèmes d'acquisition tels que des caméras pour téléphones mobiles par exemple, peu chères mais peu efficaces et dont les défauts sont compensés par des algorithmes.

La méthodologie développée dans l'approche "problèmes inverses" est tout à fait adaptée pour ces problèmes de restauration d'information. Cette approche consiste à rechercher les causes étant donnés les effets et leurs liens de causalité. Cela permet d'utiliser un modèle direct décrivant la formation des données, cela permet aussi d'introduire rigoureusement des *a priori* sur l'objet et enfin cela peut fournir une distribution de probabilité *a posteriori* sur l'objet reconstruit, permettant de définir un degré de confiance dans la solution. L'utilisation d'un modèle direct de formation des données permet de prendre rigoureusement en compte les défauts du système et même dans certain cas d'utiliser ces défauts pour mesurer de l'information inaccessible autrement. Par exemple, nous montrerons dans ce travail qu'il est possible d'utiliser le flou pour estimer l'objet dans des zones non mesurées. Cette approche a été appliquée ici à deux problèmes différents : la déconvolution aveugle et la détection de micro-particules en holographie numérique.

La déconvolution est une opération de restauration permettant d'augmenter la résolution de données perturbées par un flou de convolution lié au système d'acquisition ou au milieu de propagation. Nous nous intéressons plus particulièrement à la déconvolution de données multidimensionnelles hétérogènes. Par données multidimensionnelles hétérogènes, nous entendons : des données dont les différentes dimensions ne sont pas dans la même unité ou sont acquises avec des modalités différentes comme par exemple des images couleurs, des images multi-spectrales, des séquences vidéo, ou encore des volumes dont la profondeur est échantillonnée de manière différente des dimensions latérales. Nous tenterons d'utiliser les redondances entre les différentes dimensions pour élaborer des *a priori* pertinents et permettre une restauration aussi bonne que possible. L'approche utilisée en déconvolution sera ensuite étendue à la déconvolution aveugle, c'est-à-dire la déconvolution avec peu de connaissance sur le flou.

L'holographie numérique est une technique qui, en enregistrant les interférences entre une onde perturbée par un objet et une onde de référence, permet d'accéder en une seule image à l'information tridimensionnelle. Cette technique est donc particulièrement adaptée à la détection de micro-objets en mouvement rapide. Cependant l'hologramme n'est en général pas exploitable directement et nécessite préalablement une restitution pour pouvoir isoler les objets. Plutôt que d'élaborer des méthodes de détection dans l'hologramme restitué numériquement, nous proposons d'utiliser l'approche inverse en prenant en compte un modèle de formation de l'hologramme pour détecter les micro-particules sans passer par une étape de restitution génératrice d'erreurs supplémentaires. Cela a permis en particulier la détec-

tion d'objets situés hors-champs (c'est-à-dire dont la projection dans le plan du capteur est à l'extérieur de celui-ci) et dont la figure de diffraction mesurée est très fortement tronquée.

Plan de la thèse

Le premier chapitre présentera les principaux concepts en jeu dans l'approche *problèmes inverses* et les différentes façons de résoudre un problème inverse. Bien qu'illustrée par le problème de la déconvolution d'image, cette introduction aux problèmes inverses présentera de manière très générale les concepts qui seront par la suite utilisés pour la déconvolution comme pour l'holographie numérique de micro-particules. Elle comprend aussi une description des principales méthodes d'optimisation continue utilisées dans ce travail.

Le second chapitre reprendra l'exemple de la déconvolution utilisé au premier chapitre pour l'étendre à la déconvolution de données multidimensionnelles hétérogènes. Au travers des tests effectués en imagerie couleur et en imagerie multi-spectrale pour l'astronomie, nous mettrons en évidence le gain qu'il est possible d'obtenir en considérant le cube de données dans son ensemble plutôt que comme une succession d'images à déconvoluer indépendamment.

La déconvolution multidimensionnelle sera ensuite elle-même étendue, au chapitre suivant, pour permettre la déconvolution aveugle. Après avoir détaillé les diverses causes de flou, nous ferons un état de l'art décrivant les différentes méthodes déjà proposées et leurs applications. Nous présenterons ensuite notre méthode qui sera testée en déconvoluant trois séquences vidéo réelles utilisant trois types différents d'imagerie : microscopie classique, microscopie confocale et coronarographie (radiographie du cœur).

Enfin le quatrième et dernier chapitre présentera l'algorithme utilisant l'approche inverse, proposé pour dépasser les limites actuelles de la détection de micro-particules en holographie. Après avoir présenté l'intérêt de l'holographie numérique pour l'étude de micro-objets en mouvement, nous décrirons la formation d'un hologramme d'où nous tirerons le modèle direct utilisé dans l'algorithme. Cet algorithme sera validé sur des données simulées et réelles et, dans tous les cas, nous verrons ses performances sont très satisfaisantes comparées à celles de méthodes classiquement employées en permettant, pour la première fois, la détection de particules hors-champs et multipliant ainsi par 16 la surface sur laquelle les particules peuvent être mesurées.

Une Introduction aux Problèmes Inverses

Dans ce chapitre sont présentés les principaux concepts de l'approche "problèmes inverses". Il contient l'essentiel de la base théorique de ce travail de thèse. Après avoir décrit ce qu'est cette approche "problèmes inverses", nous l'exprimons dans un formalisme probabiliste qui en permettra la résolution. Pour illustrer les différentes solutions envisageables dans la résolution d'un problème inverse, nous utiliserons l'exemple de la déconvolution d'image. Enfin nous décrirons les méthodes d'optimisation utilisées dans la résolution du problème inverse en s'attardant surtout sur les méthodes utilisées en pratique dans les différentes parties de ce travail. Dans tout ce chapitre, la formulation restera toujours aussi générale que possible pour pouvoir s'appliquer dans les deux problèmes principaux traités ici : la déconvolution aveugle ou non de données multidimensionnelles et la détection de micro-particules en holographie numérique.

*Ce chapitre se base principalement sur (DEMOMENT *et al.*, 2001; TARANTOLA, 2005; THIÉBAUT, 2005)*

1.1 Préambule

Résoudre un problème inverse en physique signifie retrouver les causes à partir de l'observation des effets. Les premières formalisations dans ce sens remontent à la fin du XVIII^e siècle avec les travaux de Laplace, Legendre et Gauss. L'un de leurs buts était en particulier d'estimer les trajectoires des planètes et des comètes d'après les observations astronomiques faites depuis la Terre. Avec la théorie de la gravitation, établie un siècle plus tôt par Newton, on disposait d'un modèle dont il fallait estimer les paramètres d'après les données. Pour cela, ces scientifiques ont été amenés à développer des techniques d'optimisation pour ajuster ces paramètres de sorte que l'erreur entre le modèle et les données soit minimum. Deux définitions différentes de cette erreur ont conduit à deux méthodes différentes. Si Laplace minimisait la valeur absolue des erreurs entre le modèle et les données, Gauss et Legendre utilisaient la norme quadratique. A cause de leur simplicité, les méthodes issues des moindres carrés de Gauss ont été ensuite popularisées : cependant, les méthodes de moindres valeurs absolues connaissent actuellement un renouveau avec le développement des moyens de calcul, car elles sont bien moins perturbées par des données aberrantes.

C'est aussi Pierre-Simon Laplace qui, en utilisant la théorie des probabilités développées

auparavant, redécouvert et généralisa le théorème de Bayes¹ sans connaître les travaux de celui-ci. Dans un mémoire écrit à l'âge de 25 ans, LAPLACE (1774) introduit la notion de probabilité *a posteriori* permettant pour la première fois d'introduire un *a priori* de manière rigoureuse. Les méthodes développées par Laplace pour l'analyse de ces distributions de probabilité *a posteriori* sont, plus de deux cent ans après, toujours utilisées.

Actuellement, d'un point de vue méthodologique, on peut distinguer deux "écoles" dans la communauté scientifique s'intéressant aux problèmes inverses :

- L'une, l'**approche analytique**, adopte un point de vue de physique mathématique. Elle repose sur une modélisation continue du système de manière à obtenir des formules d'inversion analytiques qui seront appliquées numériquement. Toutes les questions d'existence, d'unicité et de stabilité se posent alors en dimension infinie et deviennent très compliquées pour des modèles non linéaires. "Inverse Problem" en est une revue représentative.
- L'autre, l'**approche probabiliste**, aborde les problèmes inverses d'un point de vue analyse statistique de données. Dans cette approche, les données, le modèle et l'objet à estimer sont déjà discrétisés ; elle utilise des outils probabilistes, permettant d'introduire au besoin une information *a priori* pour déterminer la solution la plus probable ou plus généralement la densité de probabilité des solutions. Dans le domaine du traitement d'image, "IEEE Transactions on Image Processing" est une revue représentative de ce courant.

L'approche adoptée dans tout ce travail de thèse est l'approche probabiliste. Elle est décrite en particulier dans ce chapitre qui en présente les principaux concepts. Pour cela, nous utilisons le formalisme développé par TARANTOLA (2005) qui s'éloigne légèrement du formalisme purement bayésien utilisé le plus souvent.

1.2 Description

Dans cette section sont décrits les principaux concepts en jeu dans la formulation du problème direct et par conséquent dans celle du problème inverse puis nous détaillons les principaux obstacles théoriques à la résolution de celui-ci. Pour illustrer cette section, considérons que l'on observe une galaxie avec un capteur plan placé au foyer d'un télescope.

1.2.1 Le système

Un système physique \mathcal{S} (par exemple une galaxie, un écoulement, voire l'univers dans son ensemble...) est susceptible d'être décrit par un certain nombre de variables définissant son état. Ces variables "d'état" peuvent être selon les cas en nombre fini ou infini, être des scalaires ou des fonctions, (booléennes, discrètes ou continues). Un même système peut avoir de nombreuses paramétrisations différentes. Deux paramétrisations sont considérées comme équivalentes si elles sont reliées entre elles par une bijection (par exemple $\mathbf{p}_2 = \exp(\mathbf{p}_1)$). L'ensemble des variables d'état imaginables de ce système définit l'espace des variables d'état \mathcal{E} .

Dans notre exemple, le système considéré est la galaxie observée mais aussi le télescope et tout phénomène ayant une influence sur les mesures (turbulence atmosphérique, matière sur

¹Du nom du mathématicien BAYES (1763) qui l'établi le premier (pour des distributions uniformes) dans un écrit paru en 1763, 3 ans après sa mort.

le trajet de la lumière, intégration sur le pixel. . .). Les variables d'état de ce système sont toutes celles qui permettraient de modéliser de la manière la plus précise possible l'émission de la lumière et son trajet jusqu'au télescope ; potentiellement il y en a une infinité, vue l'extrême complexité du système total.

1.2.2 Les observables

Pour "connaître" un système, il faut en mesurer quantitativement, par différents instruments, les paramètres observables appelés aussi *observables* et définissant un vecteur d'observation $\boldsymbol{o} = \{o^1, o^2, \dots\}$. Ces observables sont, par définition, en nombre fini, mais peuvent être continus. Ils peuvent être tout ou partie des variables d'état du système \mathcal{S} mais plus généralement sont une projection (ou transformation injective) de l'espace des variables d'état \mathcal{E} dans celui des observables. L'observation par des mesures finies d'un nombre infini de variables d'état implique une perte d'information sur le système \mathcal{S} . Le concepteur d'un instrument doit donc considérer une connaissance complète *a priori* sur les observables et leur formation pour élaborer le dispositif permettant de recueillir les observables les plus informatifs.

Dans l'exemple présenté, il y a autant d'observables que de pixels du capteur. Un observable donné est une combinaison de toutes les variables d'état ayant une influence sur la lumière arrivant sur le pixel correspondant. L'instrumentateur a veillé à ce que l'échantillonnage spatial de l'instrument soit *a priori* suffisant pour accéder à l'information désirée.

1.2.3 Les données

Le résultat de la mesure de ces observables par un instrument est toujours entaché d'erreurs (à commencer par celles liées à la précision finie de l'instrument de mesure). Ce résultat en sortie d'instrument est représenté par le vecteur d'observation $\boldsymbol{d} = \{d^1, d^2, \dots\}$ appelé *les mesures* ou plus généralement *les données*. Ces données sont en même nombre que les observables mais sont par définition une discrétisation de ceux-ci. L'espace des données \mathcal{D} est défini par l'ensemble des observations imaginables du système.

1.2.4 Les paramètres

Un examen du système \mathcal{S} , permet de déterminer les paramètres $\boldsymbol{p} = \{p^1, p^2, \dots\}$ ayant un effet sur ce système, ou du moins sur les observables. Comme pour les observables, ces paramètres sont une projection de l'espace des variables d'état. La paramétrisation dépend beaucoup du but scientifique de l'observation, et de nombreuses hypothèses *a priori* sur le système sont faites lors du choix des paramètres.

De même que dans le cas des variables d'état et d'observation, un même système peut avoir de nombreuses paramétrisations équivalentes. Le choix de la paramétrisation peut être guidé par des considérations *a priori* liées au but de l'observation, au mode d'acquisition des données, à la rapidité de calcul numérique sur ces paramètres. . . Cette caractérisation entraîne implicitement une forme *a priori* sur le système. Par ailleurs, ces paramètres peuvent être discrets ou continus, en nombre fini ou infini. Par exemple une surface peut être décrite sur une base infinie de fonctions ou sur une grille finie de pixels. Mais en pratique on se ramène le plus souvent à un nombre fini de paramètres. L'ensemble des valeurs que peuvent prendre ces paramètres est appelé l'espace des paramètres et noté \mathcal{P} .

Dans notre exemple, si l'on vise à obtenir l'image la plus résolue de la galaxie observée, les paramètres seront d'un côté l'image idéale de la galaxie sans l'influence de l'atmosphère et d'un autre les paramètres de la déformation liée à la turbulence. Dans ce cas il peut y avoir plusieurs paramétrisations possibles : les paramètres de l'image peuvent être de manière équivalente dans l'espace de Fourier ou dans l'espace image. De plus, mais ici de manière non équivalente, la déformation peut être caractérisée par un modèle physique ou statistique de la turbulence atmosphérique, ou simplement par une réponse impulsionnelle quelconque, appelée dans le cas 2D une *fonction d'étalement de point* et abrégée en PSF pour *Point Spread Function*.

1.2.5 Le problème Direct

Une fois le système caractérisé, il est possible de découvrir les lois permettant de prédire ensuite les observables \mathbf{o} , d'après les paramètres \mathbf{p} . Par exemple dans le cas de l'expérience des trous d'Young, une loi déterministe de la physique lie la distribution d'intensité sur l'écran avec les paramètres décrivant la source et la géométrie des trous.

Ces lois définissent le modèle direct \mathcal{M} associant les observables \mathbf{o} à des paramètres \mathbf{p} :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \mathcal{P} &\mapsto \mathcal{O} \\ \mathbf{p} &\longrightarrow \mathbf{o} = m(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (1.1)$$

où m est l'*opérateur direct* exprimant le modèle mathématique du système \mathcal{S} . Cet opérateur, qui peut être non linéaire, définit une application de l'espace des paramètres \mathcal{P} dans l'espace des observables \mathcal{O} , c'est-à-dire qu'un vecteur de paramètres \mathbf{p} ne donne qu'un seul \mathbf{o} .

Dans le cas de vecteurs de paramètres et de données définis dans des espaces de Hilbert de dimension finie et reliés entre eux par un opérateur linéaire \mathbf{M} , \mathbf{o} devient le résultat du produit de \mathbf{p} par la matrice \mathbf{M} et l'équation 1.1 s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \mathcal{P} &\mapsto \mathcal{O} \\ \mathbf{p} &\longrightarrow \mathbf{o} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.2.6 Le problème Inverse

Le problème inverse consiste à estimer les paramètres \mathbf{p} d'après les données \mathbf{d} . Si \mathcal{M} est une application permettant d'associer un seul observable \mathbf{o} à chaque vecteur de paramètres \mathbf{p} , l'inverse est rarement vrai. c'est-à-dire que différents paramètres \mathbf{p} peuvent conduire aux mêmes observables \mathbf{o} .

1.2.7 Les Problèmes *mal-posés*

En étudiant la résolution d'équations aux dérivées partielles, le mathématicien Jacques Hadamard (HADAMARD, 1902) a exprimé le concept de problème bien-posé. Nous allons en voir une définition précise ci-dessous sous la forme de trois conditions. Ces conditions reflètent les contraintes pour qu'un modèle en physique mathématique ait un sens et conduise à une résolution de la question initiale. En reprenant le modèle \mathcal{M} défini à l'Eq. (1.1), ces conditions sont :

Existence : Pour tout paramètre \mathbf{p} de \mathcal{P} , il existe une solution \mathbf{o} dans \mathcal{O} .

Unicité : Cette solution est unique dans \mathcal{O} .

Continuité : La dépendance de \mathbf{o} par rapport à \mathbf{p} est continue. c'est-à-dire qu'il existe un espace de représentation (une topologie) où lorsque l'erreur $\delta\mathbf{p}$ sur le vecteur de paramètres \mathbf{p} tend vers zéro, l'erreur $\delta\mathbf{o}$ sur les observables \mathbf{o} tend aussi vers zéro.

Si la grande majorité des problèmes directs en physique sont *bien-posés*, leurs problèmes inverses (consistant à déterminer \mathbf{p} d'après \mathbf{o} tel que $\mathbf{o} = m(\mathbf{p})$) ne le sont pas. On dit alors qu'ils sont *mal posés*. En effet, pour que le problème inverse soit bien posé, les conditions sur \mathcal{M} peuvent se réécrire :

Existence : L'ensemble des \mathbf{o} de \mathcal{O} sont des images par m de \mathbf{p} de \mathcal{P} , soit $\mathcal{O} = \text{Im}(\mathcal{M})$,

Unicité : Le noyau de \mathcal{M} est réduit au vecteur nul $\mathbf{p} = 0$, c'est-à-dire que l'unique solution de l'équation $m(\mathbf{p}) = 0$, est $\text{Ker}(m) = \{0\}$,

Continuité : L'image de \mathcal{M} (\mathcal{O} si la première condition est vérifiée) est fermée, $\overline{\text{Im}(\mathcal{M})} = \text{Im}(\mathcal{M})$, c'est-à-dire que toute limite de suites dans $\text{Im}(\mathcal{M})$ reste dans $\text{Im}(\mathcal{M})$.

Dans le cas linéaire de dimension finie présenté à la section 1.2.5, la condition de continuité est toujours vérifiée mais pas forcément celle d'unicité et d'existence (NASHED, 1981). En effet, soit \mathbf{M} un opérateur linéaire de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^M , si le nombre S de valeurs singulières non nulles de \mathbf{M} est inférieur à N , le noyau de l'opérateur $\text{Ker}(\mathbf{M})$ et son image $\text{Im}(\mathbf{M})$ seront respectivement de dimensions $(N - S)$ et S , détruisant la condition d'unicité. De plus, si S est inférieur à N , alors l'existence de la solution n'est pas assurée.

Pour pouvoir résoudre un problème inverse, on passe donc par une étape d'élaboration d'hypothèses permettant de transformer ce problème *mal-posé* en problème *bien-posé*, comme nous le verrons à la section 1.4.

1.2.8 Le conditionnement

La condition de continuité est une condition nécessaire mais en pratique non suffisante de stabilité numérique de la solution. En effet, l'opérateur linéaire discret \mathbf{M} décrit à l'équation 1.2 est par définition compact et \mathcal{M} est *bien-posé*. Même si \mathbf{M} est de dimension infinie, elle possède des valeurs singulières σ_n pour $n = 1, 2, \dots$ positives de sorte que :

$$\mathbf{M}\mathbf{u}_n = \sigma_n \mathbf{v}_n \quad (1.3)$$

$$\mathbf{M}^* \mathbf{v}_n = \sigma_n \mathbf{u}_n, \quad (1.4)$$

où les \mathbf{u}_n (resp. les \mathbf{v}_n), appelés vecteurs singuliers à droite (resp. à gauche), définissent une base orthonormée de l'espace d'entrée \mathcal{P} (resp. de sortie \mathcal{O}). \mathbf{M}^* est l'adjoint de \mathbf{M}^2 . On convient le plus souvent d'ordonner ces valeurs singulières de façon décroissante ($\sigma_0 \geq \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$). Si $\sigma_n = 0$ pour $n \geq n_0$, l'opérateur est dégénéré et $\text{Ker}(\mathbf{M}) \neq \{0\}$ et la condition d'unicité n'est pas respectée. Dans le cas contraire le problème est bien posé : la solution existe mais elle peut être instable.

² défini par : $\langle \mathbf{M}\mathbf{p}, \mathbf{o} \rangle_{\mathcal{O}} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{M}^* \mathbf{o} \rangle_{\mathcal{P}}, \forall \mathbf{p} \in \mathcal{P}$ et $\forall \mathbf{o} \in \mathcal{O}$.

En effet, une perturbation additive $\delta\mathbf{o} = \varepsilon\mathbf{v}_n$ sur les observables \mathbf{o} entraîne une perturbation additive $\delta\mathbf{p}$ sur les paramètres \mathbf{p} telle que :

$$\mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{p} = \delta\mathbf{o}, \quad (1.5)$$

$$= \varepsilon\mathbf{v}_n, \quad (1.6)$$

$$= \varepsilon\sigma_n^{-1}\sigma_n\mathbf{v}_n, \quad (1.7)$$

$$= \varepsilon\sigma_n^{-1}\mathbf{M} \cdot \mathbf{u}_n, \quad (1.8)$$

$$\delta\mathbf{p} = \varepsilon\sigma_n^{-1}\mathbf{u}_n. \quad (1.9)$$

Aussi petite que soit la perturbation $\varepsilon\mathbf{v}_n$, le rapport $\frac{\|\delta\mathbf{p}\|}{\|\delta\mathbf{o}\|} = \sigma_n^{-1}$ est d'autant plus grand que σ_n est petit. Ceci signifie que dans le problème inverse une petite variation sur les observables $\delta\mathbf{o}$ peut entraîner une forte variation des paramètres $\delta\mathbf{p}$. Lorsque σ_n est proche de zéro, le système se comporte numériquement comme si la condition de continuité n'était pas satisfaite, mettant à mal la stabilité (ou robustesse) de la solution. Un problème pourtant *bien-posé* peut donc se comporter en pratique comme un problème *mal-posé* ; on dit que ce problème est *mal-conditionné*.

Si \mathbf{M} n'est pas dégénérée, ce phénomène peut être quantifié par le nombre de condition du système, défini comme :

$$K(\mathbf{M}) = \frac{\|\mathbf{M}^{-1}\|}{\|\mathbf{M}\|}, \quad (1.10)$$

$$\text{ou bien : } K(\mathbf{M}) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad (1.11)$$

où $\|\cdot\|$ est n'importe quelle norme matricielle. Si $K(\mathbf{M})$ est proche de l'unité, on dit que le problème est *bien conditionné*, à l'inverse plus $K(\mathbf{M})$ est grand devant 1, plus le problème est dit *mal conditionné*.

L'effet d'un mauvais conditionnement peut aussi être montré d'une autre façon : si on considère les mesures \mathbf{d} bruitées des observables \mathbf{o} , le modèle décrit à l'équation 1.2 devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \mathcal{P} &\mapsto \mathcal{D} \\ \mathbf{p} &\longrightarrow \mathbf{d} = \mathbf{M}\mathbf{p} + \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

où \mathbf{b} est le vecteur de bruit. On peut définir un sous-espace \mathcal{P}_ε de \mathcal{P} tel que :

$$\forall \mathbf{p} \in \mathcal{P}_\varepsilon, \|\mathbf{M}\mathbf{p}\| < \|\varepsilon\|. \quad (1.13)$$

Pour tout vecteur ε de petite norme devant celle du bruit \mathbf{b} , il devient quasi-impossible de séparer les variations sur les observables dues à l'ajout d'un vecteur $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_\varepsilon$ de celles dues au bruit. Le système se comporte alors comme si le noyau de \mathbf{M} n'était pas réduit à zéros ($\text{Ker } \mathbf{M} = \mathcal{P}_\varepsilon$), brisant ainsi la condition d'unicité.

1.3 Formalisme probabiliste

On a présenté à la section 1.2.5 le modèle direct établissant un lien entre les paramètres et les observables défini par l'équation 1.1. Cependant, pour un jeu de paramètres fixé, les observables prédits par ce modèle déterministe sont rarement identiques aux mesures \mathbf{d} ($\mathbf{d} \neq \mathbf{o}$).

Il y a deux raisons à cela : (i) les données sont toujours entachées d'un bruit de mesure, (ii) le modèle \mathcal{M} proposé présente toujours des imperfections. De plus, de nombreuses hypothèses simplificatrices peuvent avoir été faites sur le modèle pour accélérer (ou tout simplement rendre possibles) les calculs numériques, augmentant ainsi les incertitudes sur ce modèle.

L'effet, présenté à la section 1.2.8, de ce bruit sur un problème mal-conditionné montre l'importance de la prise en compte de la nature fluctuante du système étudié dans la résolution d'un problème inverse. Ainsi, l'utilisation d'un formalisme probabiliste semble tout indiqué pour l'étude et la résolution d'un problème inverse. En effet, l'utilisation des outils probabilistes permet de rendre compte rigoureusement des fluctuations naturelles et inévitables de l'ensemble du système. De plus, ce formalisme permet d'utiliser des modèles directs définis de manière statistique.

Dans ce contexte, après avoir décrit les outils probabilistes utilisés, nous exprimerons toute les informations connues sur le système dans une densité jointe *a posteriori*; densité jointe *a posteriori* composée de deux termes : la densité de probabilité théorique rassemblant les liens entre les paramètres et les observables, et la densité de probabilité *a priori* rassemblant les informations que l'on peut avoir de manière indépendante sur les paramètres et les observables.

1.3.1 Espaces probabilisés

Pour traduire le caractère aléatoire du système physique \mathcal{S} étudié on introduit une distribution de probabilité $\text{Pr}_{\mathcal{E}}$ sur l'espace de ses variables d'état \mathcal{E} . La probabilité associée à un vecteur quelconque \boldsymbol{e} de \mathcal{E} est fondée sur l'interprétation fréquentielle des probabilités, à savoir, si on peut la calculer, le nombre normalisé d'occurrences de ce vecteur pour un très grand nombre d'observations. Si on prend pour \mathcal{S} un système tel que celui décrit en Sec. 1.2.1, il est impossible d'observer ses variables d'état et donc de décrire $\text{Pr}_{\mathcal{E}}$. Par contre il est possible d'introduire et de décrire des probabilités sur les observables $\text{Pr}_{\mathcal{O}}$ et les paramètres $\text{Pr}_{\mathcal{P}}$ dans les espaces probabilisés respectifs \mathcal{O} et \mathcal{P} .

1.3.2 Densités de probabilité

Aux probabilités $\text{Pr}_{\mathcal{P}}$ et $\text{Pr}_{\mathcal{O}}$, on associe les densités de probabilité $f_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{d})$ et $f_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{o})$. Ces densités sont des fonctions positives définies par :

$$\text{Pr}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} f_{\mathcal{X}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}, \quad \forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}, \quad (1.14)$$

avec la normalisation $\text{Pr}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = 1$. Une densité de probabilité $f_{\mathcal{X}}(\boldsymbol{x})$ dépend de la définition de \boldsymbol{x} . En effet, pour un même état dans deux représentations équivalentes \boldsymbol{x} et \boldsymbol{x}' , les densités de probabilité respectives $f(\boldsymbol{x})$ et $f'(\boldsymbol{x}')$ sont reliées par le jacobien de la transformation de \boldsymbol{x} en \boldsymbol{x}' :

$$f'(\boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x}) \left| \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}'} \right|. \quad (1.15)$$

Le passage de f à f' n'est pas neutre : f peut par exemple être mono-modale et f' bi-modale.

Afin de normaliser en quelques sorte les densités, on introduit une densité de probabilité volumétrique (TARANTOLA, 2005) $\phi(\boldsymbol{x})$ invariante par changement de repère de la façon suivante :

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{f(\boldsymbol{x})}{\mu(\boldsymbol{x})}, \quad (1.16)$$

où $\mu(\mathbf{x})$ est la densité homogène de probabilité qui est proportionnelle au volume défini par la base de \mathbf{x} . C'est la probabilité de \mathbf{x} en l'absence d'informations (probabilité par unité du volume d'étude constant).

Par exemple, définissons $\mathbf{x} = \{\theta, \varphi\}$, la position en coordonnées sphériques d'un objet sur une sphère. En l'absence d'autre information sur cet objet, il pourrait être logique de choisir une densité de probabilité uniforme $f(\theta, \varphi) = \text{cste}$. Or avec cette densité, un point aurait une probabilité beaucoup plus grande d'être dans les régions polaires. Pour corriger cette erreur, il faut normaliser $f(\theta, \varphi)$ par la densité homogène de probabilité : $\mu(\theta, \varphi)$.

Pour alléger les notations, à partir de la section 1.4 on considérera que les paramètres appartiennent à un espace vectoriel fini ; le volume élémentaire dV sera défini à partir des vecteurs élémentaires de cet espace vectoriel, de sorte que cette densité homogène soit constante.

1.3.3 Densités de probabilité *a priori*

1.3.3.1 Densité de probabilité *a priori* sur les paramètres

Dans de nombreux problèmes, il est possible d'accéder à une information *a priori* sur la distribution de probabilité des paramètres \mathbf{p} , d'après leur définition, leur signification physique ou une connaissance statistique de leur valeur pour une classe précise de problèmes. Par exemple, la distribution des valeurs des pixels d'une image naturelle suit une certaine statistique ; le spectre de ces images a la forme d'une loi de puissance. Même si l'on ne dispose pas d'informations aussi précises pour estimer la densité de probabilité *a priori* des paramètres $f_{\mathcal{P}}^{\text{prior}}(\mathbf{p})$, il est possible de la décrire, au moins en partie, d'après des considérations physiques ou mathématiques. Par exemple, certains paramètres physiques sont toujours positifs (la température, la masse, la luminance...); par suite la probabilité qu'ils aient une valeur négative est toujours nulle ce qui est un *a priori* important.

1.3.3.2 La mesure / densité de probabilité sur les observables

Toute mesure de quantités physiques est entachée d'un bruit de mesure. Du coup, la mesure ne détermine pas exactement la valeur du vecteur des observables mais plutôt donne une réalisation d'une loi de probabilité attachée à celui-ci. Idéalement le concepteur de l'instrument de mesure a effectué une analyse statistique des incertitudes de l'instrument dont il est possible de déduire cette loi. Une manière générale de décrire ces incertitudes consiste à définir une densité de probabilité conditionnelle $\nu(\mathbf{d} | \mathbf{o})$ des mesures \mathbf{d} sachant la valeur des observables \mathbf{o} .

A l'inverse, effectuer la mesure de \mathbf{d} conduit à définir une densité de probabilité sur les observables $f_{\mathcal{O}}(\mathbf{o})$ qui est en réalité la densité de probabilité conjointe $f(\mathbf{o}, \mathbf{d})$ des observables et des données une fois celles-ci fixées. D'après TARANTOLA (2005), sans autre *a priori* sur les observables, on a :

$$f_{\mathcal{O}}(\mathbf{o}) = f_{\mathcal{O}}(\mathbf{o}, \mathbf{d}) = \nu(\mathbf{d} | \mathbf{o}) \mu_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}). \quad (1.17)$$

1.3.3.3 Densité de probabilité conjointe *a priori*

On considère indépendamment les paramètres et les observables. Par conséquent on définit, dans l'espace $\mathcal{G} = \mathcal{P} \times \mathcal{O}$, une densité de probabilité conjointe *a priori* :

$$f_{\mathcal{G}}^{\text{prior}}(\mathbf{p}, \mathbf{o}) = f_{\mathcal{P}}^{\text{prior}}(\mathbf{p}) \times f_{\mathcal{O}}(\mathbf{o}), \quad (1.18)$$

avec une densité de probabilité homogène correspondante :

$$\mu_{\mathcal{G}}(\mathbf{o}, \mathbf{p}) = \mu_{\mathcal{O}}(\mathbf{o}) \times \mu_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}), \quad (1.19)$$

1.3.4 Densité de probabilité théorique

Pour décrire les liens entre les paramètres et les observables exprimés à la section 1.2.5, on définit une densité de probabilité jointe théorique $f_{\mathcal{G}}^{\text{theo}}(\mathbf{p}, \mathbf{o})$, plus adaptée que l'équation 1.1 pour décrire les corrélations liées à la théorie physique et ses incertitudes (TARANTOLA, 2005) :

$$f_{\mathcal{G}}^{\text{theo}}(\mathbf{p}, \mathbf{o}) = g_{\mathcal{O}}(\mathbf{o} | \mathbf{p}) \mu_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}). \quad (1.20)$$

La densité de probabilité $g_{\mathcal{O}}(\mathbf{o} | \mathbf{p})$ est définie sur \mathcal{O} et correspond à la densité de probabilité des observables \mathbf{o} étant donné le jeu de paramètres \mathbf{p} . Lorsque le modèle est décrit de manière déterministe ($\mathbf{o} \approx m(\mathbf{p})$), la largeur de cette densité autour de la valeur prédite $m(\mathbf{p})$ représente les erreurs de modélisation de \mathcal{M} . Dans le cas où ces incertitudes sont indépendantes de la valeur des paramètres, on a :

$$g_{\mathcal{O}}(\mathbf{o} | \mathbf{p}) = g_{\mathcal{O}}(\mathbf{o} | m(\mathbf{p})). \quad (1.21)$$

Si, de plus, ces incertitudes sont également indépendantes de la valeur des observables on a :

$$g_{\mathcal{O}}(\mathbf{o} | \mathbf{p}) = g_{\mathcal{O}}(\mathbf{o} - m(\mathbf{p})). \quad (1.22)$$

Cette formulation est particulièrement adaptée aux cas où les liens entre les paramètres et les observations ne sont connus que de manière empirique, c'est-à-dire établis statistiquement sur de nombreuses observations. Par exemple, les géologues ne peuvent relier que statistiquement les observations effectuées sur un volcan (contraintes, sismicité...) des paramètres d'une éventuelle éruption (période, magnitude...), les lois en cause leurs étant inaccessibles. Les observations d'un grand nombre d'éruptions leur permettent cependant d'échantillonner $f_{\mathcal{G}}^{\text{theo}}(\mathbf{p}, \mathbf{o})$ (d'après TARANTOLA, 2005).

1.3.5 Densité de probabilité *a posteriori*

En combinant les informations théoriques et *a priori*, on définit, à une constante k près, une densité de probabilité jointe *a posteriori* :

$$f_{\mathcal{G}}^{\text{post}}(\mathbf{p}, \mathbf{o}) = k \frac{f_{\mathcal{G}}^{\text{prior}}(\mathbf{p}, \mathbf{o}) f_{\mathcal{G}}^{\text{theo}}(\mathbf{p}, \mathbf{o})}{\mu_{\mathcal{G}}(\mathbf{p}, \mathbf{o})}. \quad (1.23)$$

On peut constater ici que cette densité de probabilité jointe *a posteriori* décrit un *a priori* "global" sur \mathbf{p} et \mathbf{o} , séparé en deux termes, l'un $f_{\mathcal{G}}^{\text{theo}}$ où \mathbf{p} et \mathbf{o} sont dépendants, l'autre $f_{\mathcal{G}}^{\text{prior}}$ où ils sont indépendants. Or le but de la résolution du problème est d'exprimer dans l'espace des paramètres \mathcal{P} l'information mesurée dans l'espace des données \mathcal{D} . Cela est obtenu en exprimant la distribution de probabilité des observables sous forme de densité marginale. En

fonction des mesures \mathbf{d} effectuées, on a :

$$\begin{aligned}
 f_{\mathcal{G}}^{\text{post}}(\mathbf{p}|\mathbf{d}) &= \int_{\mathcal{O}} f_{\mathcal{G}}^{\text{post}}(\mathbf{p}, \mathbf{o}) \, d\mathbf{o}, & (1.24) \\
 &= k f^{\text{prior}}(\mathbf{p}) \int_{\mathcal{O}} \frac{f_{\mathcal{O}}(\mathbf{o}) g_{\mathcal{O}}(\mathbf{o}|\mathbf{p})}{\mu_{\mathcal{O}}(\mathbf{o})} \, d\mathbf{o}, \\
 &= k f^{\text{prior}}(\mathbf{p}) \int_{\mathcal{O}} \frac{\nu(\mathbf{d}|\mathbf{o}) g_{\mathcal{O}}(\mathbf{o}|\mathbf{p})}{\mu_{\mathcal{O}}(\mathbf{o})} \, d\mathbf{o}, \\
 &= k f^{\text{prior}}(\mathbf{p}) L(\mathbf{d}|\mathbf{p}), & (1.25)
 \end{aligned}$$

où k est un coefficient de normalisation. $L(\mathbf{d}|\mathbf{p}) = \int_{\mathcal{O}} \frac{\nu(\mathbf{d}|\mathbf{o}) g_{\mathcal{O}}(\mathbf{o}|\mathbf{p})}{\mu_{\mathcal{O}}(\mathbf{o})} \, d\mathbf{o}$ est une densité de probabilité appelée terme de vraisemblance ou d'attache aux données. Ce terme peut être vu comme une densité de probabilité des paramètres \mathbf{p} en l'absence d'*a priori* sur les paramètres ($f^{\text{prior}}(\mathbf{p}) = \mu_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$).

Notons que, si l'on assimile l'erreur de mesure à une erreur de modélisation, ce terme de vraisemblance apparaît comme une nouvelle densité de probabilité théorique $g'_{\mathcal{D}}(\mathbf{o}|\mathbf{p})$ résultant de la convolution de $\nu(\mathbf{d}|\mathbf{o})$ et de $g_{\mathcal{O}}(\mathbf{o}|\mathbf{p})$ (normalisée par $\mu_{\mathcal{O}}(\mathbf{o})$).

1.3.6 Liens avec la théorie de Bayes

Le théorème de BAYES (1763) exprime la probabilité conditionnelle de deux événements A et B :

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A) \Pr(B)}{\Pr(A)}. \quad (1.26)$$

Ce théorème généralisé et popularisé en 1774 par Pierre-Simon Laplace peut être réécrit pour des densités de probabilité $f_{\mathcal{A}}(a)$ et $f_{\mathcal{B}}(b)$:

$$f_{\mathcal{A}}(a|b) = \frac{f_{\mathcal{B}}(b|a) f_{\mathcal{B}}(b)}{f_{\mathcal{A}}(a)}, \quad (1.27)$$

En utilisant ce théorème il est possible, si l'on considère les mesures comme une réalisation d'un processus aléatoire, d'exprimer la densité de probabilité conditionnelle *a posteriori* des paramètres \mathbf{p} sachant les mesures \mathbf{d} :

$$f_{\mathcal{D}}^{\text{post}}(\mathbf{p}|\mathbf{d}) = \frac{f_{\mathcal{P}}^{\text{prior}}(\mathbf{p}) f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}|\mathbf{p})}{f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})}. \quad (1.28)$$

Cette équation peut être identifiée à l'équation (1.25) où la densité de probabilité $f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}|\mathbf{p})$ peut être identifiée avec le terme de vraisemblance $L(\mathbf{d}|\mathbf{p})$ et la densité de probabilité $f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$ qui, une fois les mesures faites, est une constante, avec $\frac{1}{k}$.

Il y donc deux façons proches d'évaluer cette densité de probabilité : l'inférence bayésienne et l'approche maximum *a posteriori*. Bien que le terme maximum *a posteriori* (MAP) désigne le maximum de la densité de probabilité *a posteriori* et donc convienne aux deux méthodes, comme le suggère TZIKAS *et al.* (a paraître) nous utiliserons ici cette dénomination uniquement pour désigner les approches assimilables aux méthodes inverses décrites au premier chapitre. On distingue donc ces approches MAP où l'on estime la densité de probabilité *a posteriori* $f_{\mathcal{D}}^{\text{post}}(\mathbf{p}|\mathbf{d})$ à une constante près des approches dites d'"inférence bayésienne" où l'on calcul aussi $f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$ de manière à obtenir une estimation absolue de cette densité de probabilité *a*

posteriori. Ces approches purement bayésiennes permettent de s'affranchir de l'estimation de paramètres supplémentaires (hyper-paramètres) au prix cependant du calcul extrêmement ardu de $f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \int f_{\mathcal{P}}^{\text{prior}}(\mathbf{p}) f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d} | \mathbf{p}) d\mathbf{p}$.

1.3.7 Maximum de vraisemblance, Maximum *a posteriori*

Une fois la mesure effectuée, cette densité de probabilité *a posteriori* est uniquement fonction des paramètres. Son maximum, ou plus exactement le maximum de $\frac{f_{\mathcal{G}}^{\text{post}}(\mathbf{p} | \mathbf{d})}{\mu_{\mathcal{G}}(\mathbf{p})}$, est la valeur la plus probable des paramètres étant donné les mesures. S'il existe, ce maximum est appelé **maximum a posteriori**. Sans *a priori* sur les paramètres ($f_{\mathcal{P}}^{\text{prior}}(\mathbf{p}) = \text{cste}$), ce maximum il est appelé **maximum de vraisemblance**.

Notons que, dans la littérature, la signification du terme **maximum de vraisemblance**, est assez ambiguë et peut revêtir plusieurs significations. Pour certains (TARANTOLA, 2005), ce point est le maximum de la densité de probabilité *a posteriori* avec ou sans *a priori*; pour d'autres c'est uniquement le maximum de la fonction de vraisemblance. Cette dernière, qui est la définition que nous utilisons, est l'acceptation la plus utilisée.

Dans le cas général, il n'y a aucune raison pour que la fonction de vraisemblance comme la densité de probabilité *a posteriori* soit uni-modale — c'est-à-dire ne possède qu'un seul maximum. Il n'y a aucun moyen de savoir *a priori* si un point est un maximum local ou absolu, ni même si un tel point existe. Le seul moyen de le déterminer serait d'effectuer une exploration complète du volume d'étude. Malheureusement, dans la plupart des cas, le nombre très élevé de dimensions empêche une telle exploration.

1.3.8 Fonctions d'adéquation

Plutôt que de chercher le maximum de ces densités de probabilité $f_{\mathcal{G}}(\mathbf{p})$, on cherche de manière équivalente le minimum de :

$$f'_{\mathcal{G}}(\mathbf{p}) = -\log(f_{\mathcal{G}}(\mathbf{p})). \quad (1.29)$$

Si mathématiquement cette transformation bijective ne change en rien le résultat, elle permet, en particulier dans le cas d'incertitudes gaussiennes, de faciliter le calcul analytique de la solution et d'accélérer les calculs numériques d'optimisation.

1.4 La résolution du problème inverse

Après avoir défini le problème inverse, décrit les différentes difficultés auxquelles nous risquons d'être confrontés, nous étudions dans cette partie, différentes stratégies pour le résoudre. Une bonne partie de ces méthodes peut être décrite en utilisant le formalisme probabiliste développé à la section précédente.

1.4.1 Un exemple de problème inverse : la déconvolution

Pour illustrer ce propos, la déconvolution d'une image (2D) sera utilisée comme exemple. La formation d'une image floue sera détaillée plus loin 2.1.1 et en conséquence le modèle de formation présenté ici ne sera pas justifié. Cette image, montrée figure 1.1, est celle du "Cameraman", célèbre dans la communauté des traiteurs d'images. Il s'agit d'une image 256×256



FIG. 1.1 — Image d'origine.

FIG. 1.2 — Image floue + un bruit gaussien centré de variance $\sigma^2 = 1$ niveau sur 8 bits.

dont les niveaux de gris sont des entiers compris entre 0 et 255, et représentée par le vecteur \mathbf{x} . Elle est observée au travers d'un instrument de mesure imparfait modélisé par une réponse impulsionnelle (ou PSF pour Point Spread Function) \mathbf{h} qui correspond à l'image d'une source ponctuelle observée au travers de cet instrument. Cette PSF simulée représentée figure 1.3, est un disque de 7 pixels de rayon. Les données floues \mathbf{y} sont générées par la convolution de \mathbf{x} et de \mathbf{h} d'après le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \mathbb{R}^{256 \times 256} &\longmapsto \mathbb{R}^{256 \times 256} \\ \mathbf{x} &\longrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

où \mathbf{b} est un vecteur aléatoire simulant le bruit du détecteur, pris ici blanc gaussien centré de variance $\sigma_b^2 = 1$ niveau de quantification sur 8 bits. \mathbf{H} est l'opérateur linéaire de la convolution ; elle est approché par la matrice circulante générée par le noyau de convolution \mathbf{h} de la PSF. En effet, dans l'approximation circulante, \mathbf{H} est une matrice de Toeplitz qui possède la propriété intéressante d'être diagonalisable dans l'espace de Fourier de sorte que la liste de ses valeurs propres constitue la transformée de Fourier discrète du noyau de convolution \mathbf{h} (GRAY, 2006). On a donc, en utilisant la transformée de Fourier discrète :

$$\hat{y}_u = \hat{h}_u \hat{x}_u + \hat{b}_u, \quad \forall u, \quad (1.31)$$

L'image floue ainsi obtenue est représentée figure 1.2. On peut constater que si les grandes structures de l'image restent discernables, tous les détails, en particulier ceux de la caméra et du visage, ont disparu. Ceci est intuitivement compréhensible car le modèle fréquentiel présenté à l'équation 1.31 montre que l'image d'origine est filtrée par \hat{h} qui est un filtre passe-bas dont la fonction de transfert est représentée à la figure 1.4. Ce filtrage atténue les hautes fréquences de l'image qui contiennent l'information sur les détails de celle-ci.

La restauration ou la déconvolution de cette image floue est le problème inverse de la convolution par le modèle \mathcal{M} . Il s'agit de déterminer le vecteur solution de l'équation :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}, \quad (1.32)$$

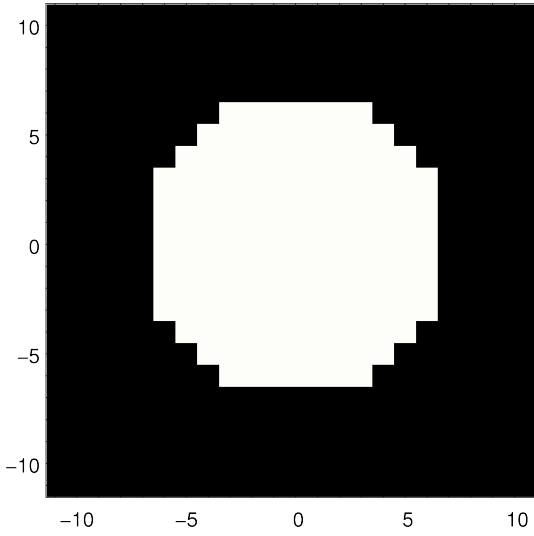
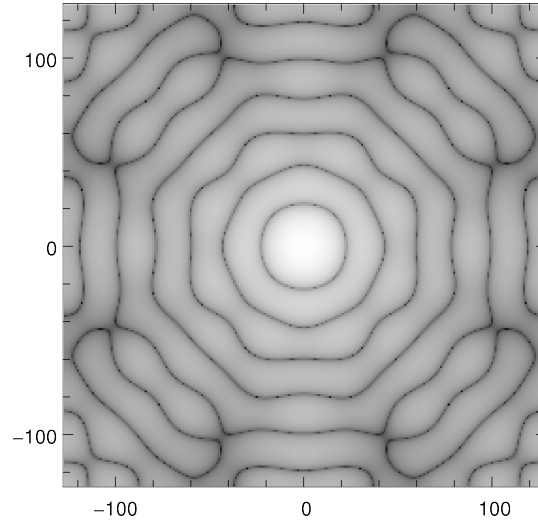


FIG. 1.3 — Fonction d'étalement de point.

FIG. 1.4 — Module de la fonction de transfert $|\hat{h}_u|$ (échelle log).

avec \mathbf{x} et \mathbf{y} appartenant à $\mathbb{R}^{256 \times 256}$. Le module de la fonction de transfert $|\hat{h}|^2$ n'est jamais nul. La matrice \mathbf{H} est donc de rang plein (elle ne possède aucune valeur propre nulle). En tant qu'opération linéaire discrète de rang 256×256 et de $\mathbb{R}^{256 \times 256}$ dans lui-même, le problème inverse est un problème *bien-posé*.

Pour évaluer quantitativement les différentes méthodes exposées, on définit l'erreur quadratique moyenne (EQM) mesurant en dB l'erreur moyenne d'estimation entre la reconstruction \mathbf{x}^{rec} et la vérité \mathbf{x}^{vrai} :

$$\text{EQM} = 10 \log_{10} \left(\text{Avg} \left((\mathbf{x}^{\text{rec}} - \mathbf{x}^{\text{vrai}})^2 \right) \right). \quad (1.33)$$

Plus cette erreur est élevée, plus le résultat de la déconvolution est éloigné de la vérité.

1.4.2 Inversion directe

En observant l'équation 1.31, le problème étant bien posé, la première méthode venant à l'esprit pour restaurer l'image est, en négligeant le bruit, de résoudre l'équation 1.30 en appliquant dans l'espace de Fourier l'inverse de \mathbf{H} aux données floues \mathbf{y} :

$$\hat{x}_u^{\text{direct}} = \frac{\hat{y}_u}{\hat{h}_u}. \quad (1.34)$$

Le résultat de cette inversion présenté à la figure 1.5, n'est clairement pas satisfaisant ! Aucune structure spatiale ne semble visible et l'image restaurée est bien plus dégradée que l'image floue : même les structures basse-fréquences présentes dans les données floues semblent avoir disparu. De plus, si la moyenne de l'image restaurée est la même que celle de l'image floue, la valeur de ses pixels varie entre -7000 et $+7000$ environ, près de trente fois la valeur maximale de l'image d'origine (255). Ceci s'explique par le fait que l'on a négligé le bruit. En effet, la Transformée de Fourier de la solution de l'inversion directe $\hat{x}_u^{\text{direct}}$ s'écrit en réalité comme suit :

$$\hat{x}_u^{\text{direct}} = \frac{\hat{y}_u}{\hat{h}_u} + \frac{\hat{b}_u}{\hat{h}_u}. \quad (1.35)$$

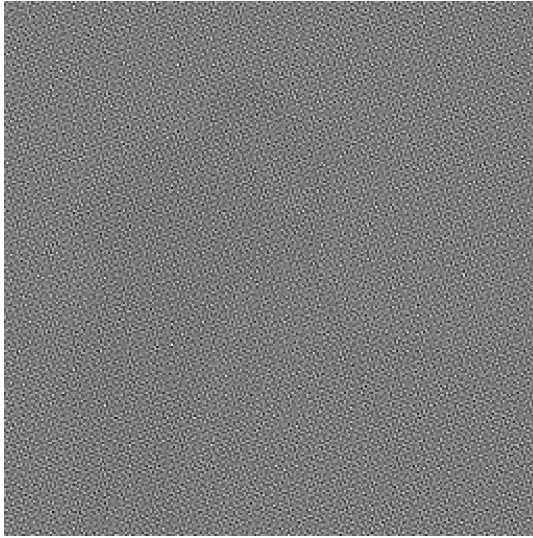


FIG. 1.5 — Résultat de l'inversion directe (EQM = 68.1 dB).

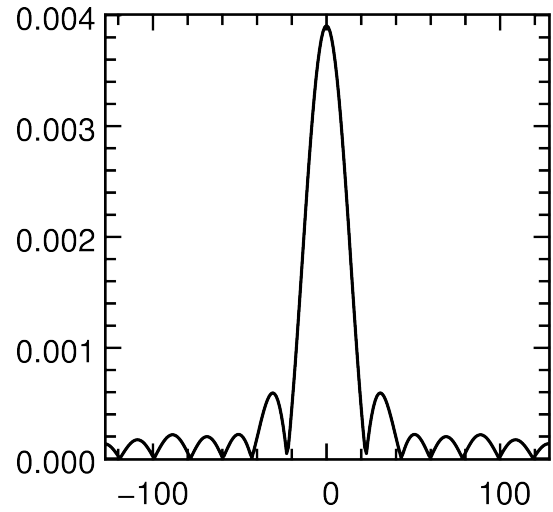


FIG. 1.6 — Coupe en $u_x = 0$ du module de la fonction de transfert (un sinus cardinal).

Or comme on peut le voir à la figure 1.6, la fonction de transfert de h est un sinus cardinal présentant des valeurs proches de zéro pour certaines fréquences spatiales élevées. L'opérateur de reconstruction $\frac{1}{\hat{h}_u}$ (Fig. 1.7) amplifie donc fortement le bruit à ces hautes fréquences. En conséquence, cette amplification du bruit corrompt fortement la reconstruction et masque la solution "idéale". Ceci est confirmé par la texture visible sur l'image reconstruite qui est plutôt régulière (Fig. 1.5) car dominée seulement par quelques fréquences.

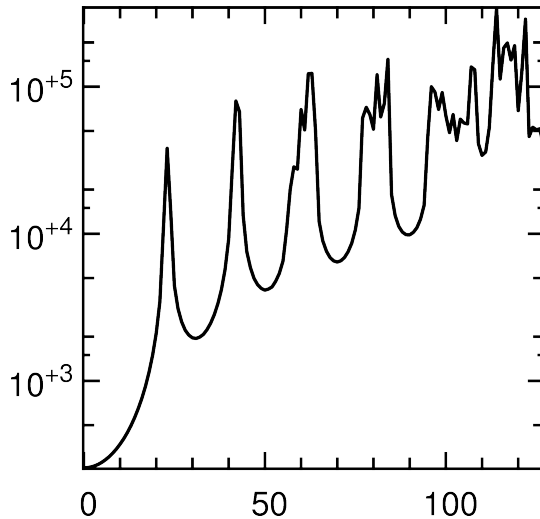


FIG. 1.7 — Profil radial du module de la fonction de transfert de l'opérateur de reconstruction $\frac{1}{\hat{h}_u}$.

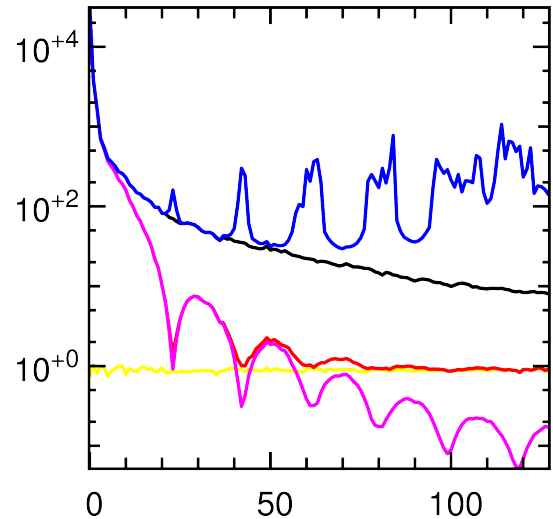


FIG. 1.8 — Profils radiaux des spectres des différents vecteurs en jeu dans l'inversion directe. En noir : l'image originale, en rouge l'image floue sans bruit, en jaune le bruit, en magenta l'image floue bruitée et en bleu l'image reconstruite par inversion directe.

Ceci est une illustration caractéristique de l'effet d'un mauvais conditionnement (voir Sec. 1.2.8). \mathbf{H} étant circulante, son nombre de condition est défini comme le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur du module de sa fonction de transfert. Dans notre exemple il est égal à $K(\mathbf{H}) \approx 1 \times 10^5$ ce qui est très supérieur à l'unité. Notre problème de déconvolution est donc très mal conditionné, et en conséquence la solution est très instable car très sensible au bruit. Ceci est illustré à la figure 1.8. Sur cette figure sont tracés les profils radiaux des spectres de Fourier des différents vecteurs (2D) en jeu dans la formation de l'image et de sa reconstruction. Le spectre de l'image d'origine est représenté par la courbe noire. La convolution par la PSF h étant, comme on peut le constater à la figure 1.7, un filtrage basse fréquence, le spectre de l'image floue, tracé en magenta, est de plus en plus atténué avec l'augmentation de la fréquence spatiale. Les ondulations visibles sur ce spectre correspondent aux différents lobes du sinus cardinal de la fonction de transfert de la PSF. A cette image floue, est ajoutée un bruit blanc gaussien, dont le spectre plat est représenté en jaune, pour former les données observées. Sur le spectre de ces données observées, tracé en rouge, on constate que, pour des fréquences spatiales supérieures à une fréquence de coupure d'environ 50 frequels, le bruit domine complètement le signal. Il est donc vain d'essayer de reconstruire ces hautes fréquences alors que le signal a été complètement noyé dans le bruit lors de la mesure. Passée cette fréquence spatiale de coupure, le filtre inverse dont le spectre est présenté à la figure 1.7 aura pour seul effet d'amplifier le bruit. C'est pourquoi le spectre de l'image reconstruite, représenté en bleu dans la figure 1.8, devient très éloigné de l'image idéale pour les fréquences élevées.

Inversion généralisée Dans le paragraphe précédent, \mathbf{H} étant une matrice carrée ne possédant pas de valeurs propres nulles, était inversible. Dans le cas contraire, il n'est pas possible d'inverser directement \mathbf{H} et le problème devient *mal-posé* car, soit la condition d'unicité (indétermination), soit celle d'existence (surdétermination) ne sont pas respectées. Il est cependant possible de déterminer une solution à l'équation 1.32, en redéfinissant les espaces de paramètres \mathcal{X} (ou \mathcal{P}) et des données \mathcal{Y} (ou \mathcal{D}) comme suit :

$$\mathcal{X}' = (\text{Ker}(\mathbf{H}))^\perp \quad \text{et} \quad \mathcal{Y}' = \text{Im}(\mathbf{H})$$

En se plaçant dans ces espaces, il est possible de définir, pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}'$, un unique $\mathbf{x}^\dagger \in \mathcal{X}'$ qui soit solution de l'équation :

$$\mathbf{x}^\dagger = \mathbf{H}^\dagger \mathbf{y}, \quad (1.36)$$

où l'opérateur \mathbf{H}^\dagger est appelé l'inverse généralisée de \mathbf{H} qui est toujours continue (NASHED, 1976). Dans le cas linéaire et discret, le calcul de l'inverse généralisée est toujours *bien-posé* (DEMOMENT *et al.*, 2001) car la condition de continuité est toujours respectée. Il y a plusieurs façons de définir une inverse généralisée; la plus connue est la pseudo-inverse de Moore-Penrose découverte par R. Moore en 1920 puis redécouverte par Penrose en 1955 (MOORE, 1920; PENROSE, 1955). Elle s'écrit, si $(\mathbf{H}^* \mathbf{H})^{-1}$ existe :

$$\mathbf{H}^\dagger \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{H}^* \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^*, \quad (1.37)$$

où \mathbf{H}^* est la matrice conjuguée transposée de \mathbf{H} .

1.4.3 Maximum de Vraisemblance

Pour améliorer ces résultats décevants, on décide de prendre en compte la nature aléatoire du bruit en utilisant les outils probabilistes développés à la section 1.3. Sans *a priori* sur

les paramètres, nous cherchons la solution au sens du maximum de vraisemblance ($\mathbf{x}^{(MV)}$). C'est la solution qui maximise la probabilité des données \mathbf{y} sachant le modèle parmi tous les paramètres \mathbf{x} possibles :

$$\mathbf{x}^{(MV)} = \arg \max_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x} | \mathbf{d}) = \arg \min_{\mathbf{x}} (-\log(L(\mathbf{x} | \mathbf{d}))) \quad (1.38)$$

On définit une fonction d'adéquation $\Phi_{MV}(\mathbf{x})$ telle que :

$$\Phi_{MV}(\mathbf{x}) = -\log(L(\mathbf{x} | \mathbf{d})) + \text{cste} . \quad (1.39)$$

Cette fonction $\Phi_{MV}(\mathbf{x})$ dépend de la forme du bruit. Dans le cas additif on a :

$$\Phi_{MV}(\mathbf{x}) = \sum_k \mathcal{N}((\mathbf{H} \cdot \mathbf{x})_k - y_k) , \quad (1.40)$$

où \mathcal{N} dépend de la distribution du bruit ; s'il est blanc et gaussien \mathcal{N} est la norme ℓ_2 et $\Phi_{MV}(\mathbf{x})$ correspond au critère des moindres carrés ; dans le cas d'une distribution de Laplace (utilisée en présence d'outlier), \mathcal{N} est la norme ℓ_1 et $\Phi_{MV}(\mathbf{x})$ correspond au critère des moindres valeurs absolues.

Dans notre exemple, en présence d'un bruit additif gaussien centré, on a :

$$\Phi_{MV}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y})^T \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y}) + \text{constante} , \quad (1.41)$$

où \mathbf{W} est une matrice de poids inverse de la matrice de covariance des données. Comme le bruit est blanc gaussien centré de variance σ_b , on a, où \mathbf{I} est la matrice identité.

$$\mathbf{W} = \text{Cov}(\mathbf{y})^{-1} = \sigma_b^{-2} \mathbf{I} . \quad (1.42)$$

Or le minimum de $\Phi_{MV}(\mathbf{x})$ satisfait à :

$$\left. \frac{\partial \Phi_{MV}(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right|_{\mathbf{x}^{(MV)}} = 0, \quad \forall k . \quad (1.43)$$

Par suite, $\mathbf{x}^{(MV)}$ est la solution de l'équation :

$$\nabla \Phi_{MV}(\mathbf{x}^{(MV)}) = \sigma_b^{-2} \mathbf{H}^T \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x}^{(MV)} - \mathbf{y}) = 0 . \quad (1.44)$$

qui ne possède qu'un unique minimum à condition que la matrice $\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H}$ soit définie positive (elle est positive par construction mais pas nécessairement définie). Si comme dans notre exemple, tel est le cas, la solution au sens du maximum de vraisemblance $\mathbf{x}^{(MV)}$ est :

$$\mathbf{x}^{(MV)} = (\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H})^{-1} \cdot \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{y} . \quad (1.45)$$

La transformée de Fourier discrète de la solution $\mathbf{x}^{(MV)}$ s'écrit :

$$\hat{x}_u^{(MV)} = \frac{\hat{h}_u^* \hat{y}_u}{|\hat{h}_u|^2} = \frac{\hat{y}_u}{\hat{h}_u} , \quad (1.46)$$

où \hat{h}^* est le complexe conjugué de \hat{h} . On reconnaît la solution de l'inversion directe (Eq. (1.34)). Malheureusement, comme nous l'avons vu, cette solution où le bruit est amplifié est inacceptable. C'est d'autant plus décevant que dans notre exemple, le maximum de vraisemblance

à beaucoup d'intérêt puisqu'il est tout à la fois la solution au sens des moindres carrés et l'estimateur non biaisé à variance minimale.

Bien qu'illustré dans un cas particulier, cette constatation peut être généralisée : l'approche "maximum de vraisemblance" n'est pas adaptée pour résoudre les problèmes mal conditionnés. Il conduit à un estimateur de variance trop élevée (amplification du bruit). Il conduit à un estimateur de variance trop forte (amplification du bruit). Il faut donc construire un estimateur de variance plus faible (et donc exploitable) qui sera forcément biaisé.

1.4.4 Maximum de Vraisemblance Contraint : Restriction de l'espace des paramètres

Il est donc nécessaire de sélectionner une solution satisfaisante parmi les solutions possibles du problème inverse. En réduisant la taille de l'espace des solutions (l'espace des paramètres), il redevient possible de trouver une solution au sens du maximum de vraisemblance. En effet, si l'on considère, comme on a vu à la section 1.2.8, que le mauvais conditionnement a pour effet de briser la condition d'unicité en incluant les solutions masquées par le bruit dans le noyau de \mathbf{H} (Sec. 1.2.8 $\text{Ker } \mathbf{M} = \mathcal{P}_\varepsilon$), il est possible de retrouver un problème bien-posé et bien conditionné en définissant un nouvel espace des paramètres \mathcal{P}' orthogonal à ce noyau $\mathcal{P}' = (\mathcal{P}_\varepsilon)^\perp$.

Ceci peut être fait explicitement en tronquant le nombre de dimensions de \mathcal{P} ou en travaillant dans un hyper-plan bien choisi de \mathcal{P} . Mais cela peut être aussi fait de manière implicite en utilisant des algorithmes itératifs et en limitant le nombre d'itérations.

1.4.4.1 Limitation des dimensions de l'espace des paramètres

En observant les spectres affichés à la figure 1.8, l'idée naturelle pour corriger la solution du maximum de vraisemblance, est de ne reconstruire que les modes qui dominent sur le bruit. Une manière brutale consiste à définir une fréquence de coupure u_{coupure} au dessus de laquelle les fréquences de la solution sont annulées :

$$\hat{x}_u^{(\text{tronq})} = \begin{cases} \frac{\hat{y}_u}{\hat{h}_u} & \text{si } |u| \leq u_{\text{coupure}} , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.47)$$

La figure 1.9 donne l'exemple de la reconstruction pour une fréquence de coupure $u_{\text{coupure}} = 20$ frequels correspondant au frequel précédant le premier zéro de la fonction de transfert du noyau de la convolution. Si les structures basse-fréquences sont visibles, cette reconstruction est à peine mieux résolue que l'image floue. Si l'on place la fréquence de coupure à $u_{\text{coupure}} = 40$ frequels, juste avant le deuxième zéro, davantage de détails sont visibles sur la reconstruction présentée à la figure 1.10 : les yeux, les pieds de la caméra... Mais cette reconstruction est perturbée par un motif régulier, déjà légèrement présent sur la reconstruction à $u_{\text{coupure}} = 20$ frequels, qui correspond à la fréquence des zéros de la fonction de transfert du noyau de la convolution. De plus, la coupure abrupte des fréquences est responsable des rebonds, appelé aussi effet de Gibbs, visibles sur les bords des objets. En effet, ces bords francs ont un support très large en fréquence ; couper leurs hautes fréquences conduit à l'élargissement de leurs support/taille dans l'espace image ; il en résulte un flou de ces bords et ces artefacts de rebond.

Notons que cette fréquence de coupure correspond à la fréquence spatiale à partir de laquelle on estime ne pas avoir pu mesurer les fréquences de l'objet flou. Annuler ainsi ces



FIG. 1.9 — Reconstruction tronquée avec une fréquence de coupure $u_{\text{coupure}} = 20$ frequels (EQM = 27.0 dB).



FIG. 1.10 — Reconstruction tronquée avec une fréquence de coupure $u_{\text{coupure}} = 40$ frequels (EQM = 26.2 dB).

fréquences non mesurées signifie qu'on les suppose *a priori* nulles dans l'image "vraie" ce qui est un très mauvais *a priori*. Ce constat peut être étendu à tous les problèmes inverses : *remplacer les valeurs non mesurées par zéro conduit à une estimation sous-optimale des paramètres.*

1.4.4.2 Contrainte stricte dans l'espace des paramètres

Une autre façon de restreindre l'espace des paramètres \mathcal{P}' est de sélectionner les solutions de sorte que chaque paramètre évolue dans une plage donnée de valeurs. En considérant la signification physique de chaque paramètre il est possible de déterminer des bornes pour certains d'entre eux. Ainsi, lors de l'estimation du maximum de vraisemblance, il sera impossible à la solution d'enfreindre ces contraintes strictes. La positivité des paramètres est la contrainte de ce type la plus utilisée, elle permet d'éviter d'obtenir des solutions sans sens physique, par exemple des luminance, des tailles ou des nombres d'objets négatives. Suivant le problème étudié un *a priori* supplémentaire peut être "injecté" par ces contraintes strictes avec par exemple des plages de valeurs connues *a priori* pour chaque paramètre.

Dans notre exemple, les valeurs des pixels de l'image étant proportionnelles au nombre de photons reçus par le capteur, ses niveaux sont forcément positifs. Cette contrainte de positivité permet de définir une nouvelle solution $\mathbf{x}^{(\text{MVC})}$ au sens du maximum de vraisemblance :

$$\mathbf{x}^{(\text{MVC})} = \arg \min_{\mathbf{x}} (\Phi_{\text{MV}}(\mathbf{x})), \quad \text{sous la contrainte : } x_k \geq 0, \forall k. \quad (1.48)$$

De telles contraintes, malheureusement, empêchent de calculer directement la solution de façon analytique. Il est donc nécessaire d'utiliser des méthodes itératives acceptant les contraintes de type bornes comme les gradients conjugués ou les algorithmes à métrique variable (comme BFGS). Dans notre cas, les données floues ont été déconvoluées en utilisant l'algorithme VMLM-B (THIÉBAUT, 2002) (pour le détail voir Sec. 1.5.3.2) avec la contrainte de positivité. Les données sont utilisées comme point de départ et après 1350 itérations (≈ 30 s) l'algorithme a convergé et le résultats est affiché à la figure 1.11 (EQM = 38.8 dB). Si de nombreux



FIG. 1.11 — Reconstruction avec VMLM-B avec contraintes de positivité (EQM = 38.8 dB).

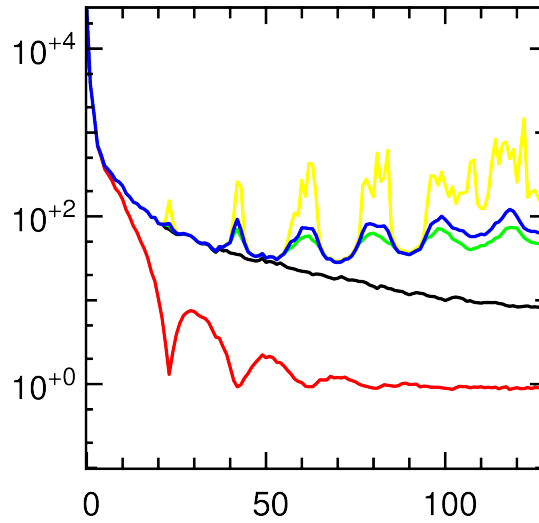


FIG. 1.12 — Profils radiaux des spectres des images déconvoluées avec contraintes de positivité : VMLM-B (en bleu) et ISRA (en vert) comparées avec les spectres de l'image originale (en noir), des données (en rouge) et de la solution de l'inversion directe (en jaune).

détails fins de l'image sont visibles sans rebond le long des bords francs, on constate un bruit très important dans la reconstruction rendant celle-ci inacceptable. En effet, l'étude de son spectre présenté figure 1.12 montre que si les basses fréquences sont bien estimées, du bruit a été amplifié à hautes fréquences (moins cependant que pour la solution sans contraintes).

Méthodes Multiplicatives Une façon d'assurer la positivité est d'utiliser des algorithmes multiplicatifs. Dans ces algorithmes, à chaque itération, la solution est obtenue par une multiplication de la solution de l'itération précédente par un vecteur de mise à jour positif. Parmi ces algorithmes, les plus connus sont l'algorithme de Landweber (LANDWEBER, 1951), l'algorithme ISRA (Image Space Reconstruction Algorithm) (DAUBE-WITHERSPOON et MUEHLEHNER, 1986) pour le bruit Gaussien, et RLA (Richardson-Lucy Algorithm) (LUCY, 1974; RICHARDSON, 1972) pour un bruit poissonnien. L'algorithme RLA découvert indépendamment par Richardson en 1972 et Lucy en 1974 est aussi connu comme dérivant de l'algorithme EM (Expectation Maximization) (DEMPSTER *et al.*, 1977). L'appellation RLA est plus connue en astronomie alors que EM l'est en imagerie médicale. Ces algorithmes sont surtout utiles lorsque l'image est composée d'un objet sur fond noir, comme les images astronomiques. En effet, à cause de la multiplication, une fois un pixel mis à zéro il reste inchangé pour toutes les itérations suivantes.

Richardson-Lucy / Expectation Maximisation : L'algorithme RLA maximise la probabilité conditionnelle $\Pr(\mathbf{y} | \mathbf{x})$ en présence d'un bruit de Poisson :

$$\Pr(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = \prod_k \frac{(\mathbf{H} \cdot \mathbf{x})_k^{y_k} \exp(-(\mathbf{H} \cdot \mathbf{x})_k)}{y_k}. \quad (1.49)$$

Or ce maximum est le point qui satisfait en tout point k :

$$\frac{\partial \log(\Pr(\mathbf{y} | \mathbf{x}))}{\partial x_k} = 0, \quad (1.50)$$

soit, si l'on considère la PSF normalisée à l'unité :

$$\left(\mathbf{H} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{H} \cdot \mathbf{x}} \right)_k = 1, \quad \forall k, \quad (1.51)$$

où la division est élément par élément. En multipliant cette expression de chaque coté par \mathbf{x} , cela conduit à définir l'itération $j + 1$:

$$\mathbf{x}_k^{(j+1)} = \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{H} \cdot \mathbf{x}} \right)_k \mathbf{x}_k^{(j)}, \quad (1.52)$$

qui est l'itération de l'algorithme multiplicatif de Richardson-Lucy.

Il est possible d'introduire dans cet algorithme des contraintes supplémentaires par l'intermédiaire d'une fonction f_c les appliquant à chaque itération :

$$\mathbf{x}_k^{(j+1)} = f_c \left[\left(\mathbf{H} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{H} \cdot \mathbf{x}} \right)_k \mathbf{x}_k^{(j)} \right], \quad (1.53)$$

Depuis l'algorithme EM a été reformulé en introduisant des *a priori* sur les densités de probabilité par l'intermédiaire de variables cachées.

ISRA : L'algorithme "Image Space Reconstruction Algorithm" (ISRA) est un algorithme similaire adapté au bruit gaussien. Une reconstruction de notre exemple a donc été effectuée avec cet algorithme. La mise à jour à l'itération $k + 1$ du pixel j est effectuée par :

$$x_k^{(j+1)} = x_k^{(j)} \frac{(\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{y})_k}{(\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}^{(j)})_k}. \quad (1.54)$$

L'algorithme tend vers le même résultat que VMLM-B mais il a été arrêté après 40 000 itérations (plusieurs dizaines de minutes) avec un résultat (EQM = 35.4 dB) visuellement peu différent de la solution de VMLM-B. Son spectre est présenté en vert sur la figure 1.12.

En résumé, si les premières itérations sont efficaces, les algorithmes avec des contraintes de positivité ne donnent pas dans notre exemple de solutions satisfaisantes. Ceci s'explique car ces algorithmes sont plus adaptés à des images d'objets sur fond noirs (ou au moins sur fond homogène d'un niveau plus faible que tous les objets). En effet, à l'inverse de notre exemple, dans ces images un grand nombre de pixels sont proches de zéro, les contraintes de positivité sont donc beaucoup plus souvent actives et donc contraignent plus fortement la solution. Ces contraintes sont encore plus efficaces si l'on connaît le support des objets et donc les zones de l'image où les pixels doivent être proche de zéro.

1.4.4.3 Limitation du nombre d'itérations

Si l'on utilise un algorithme itératif, une façon de restreindre l'espace des paramètres est de limiter le nombre d'itérations. Ceci permet, plus finement qu'une troncature brutale, de contrôler la reconstruction et de l'arrêter lorsque le signal reconstruit disparaît sous le bruit. En effet, les algorithmes itératifs reconstruisent à chaque itération les modes les plus significatifs encore présent dans les résidus. Grossièrement, pour une image, les premières itérations reconstruiront les basses fréquences correspondant aux valeurs propres élevées de la fonction de transfert de l'opérateur de convolution (voir Fig. 1.6). Puis, au fur et à mesure des itérations, des fréquences de plus en plus hautes (c'est-à-dire les valeurs propres les plus faibles) sont reconstruites. Les reconstructions moins bien conditionnées nécessiteront donc plus d'itérations. Ainsi, intuitivement, on comprend qu'il est possible de trouver un compromis entre reconstruction des hautes fréquences et amplification du bruit, en limitant le nombre d'itérations.

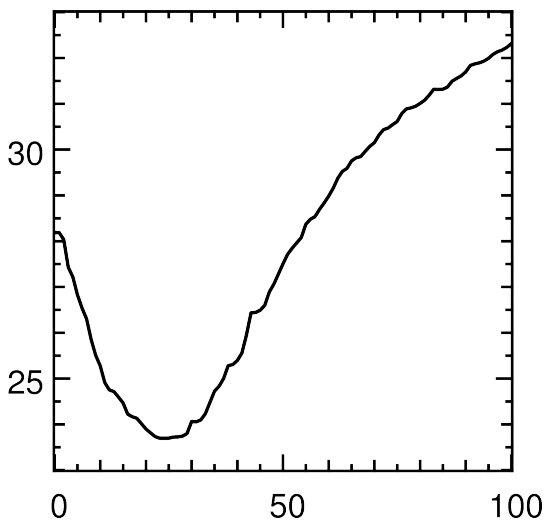


FIG. 1.13 — Évolution de l'erreur quadratique moyenne en dB en fonction du nombre d'itérations (algorithme VMLM).



FIG. 1.14 — Meilleure reconstruction avec VMLM (24^e itération) (EQM = 23.7 dB).

Si l'on trace, comme à la figure 1.13, l'évolution de l'erreur quadratique moyenne en fonction du nombre d'itérations, on constate que pendant les premières itérations la reconstruction est efficace et l'erreur décroît. Mais après quelques dizaines d'itérations, cette erreur remonte car le bruit commence à être amplifié. Il existe donc un nombre d'itérations optimal avec le meilleur compromis entre la reconstruction et l'amplification du bruit. Dans notre exemple l'erreur quadratique moyenne est minimale pour à la 24^e itération, et le résultat est montré à la figure 1.14. Sur cette reconstruction, on peut voir de nombreux détails invisibles dans les données floues avec un bruit nettement inférieur aux résultats précédents. Cependant, de nombreux artefacts sont présents et les rebonds autour des bords francs sont particulièrement gênants. Ces rebonds sont les symptômes d'une sous-estimation des hautes fréquences de l'objet comme on peut le voir sur le spectre présenté à la figure 1.15.

Cette limitation du nombre d'itérations peut être employée conjointement avec la positivité. En observant l'évolution de l'erreur quadratique moyenne dans les algorithmes présen-

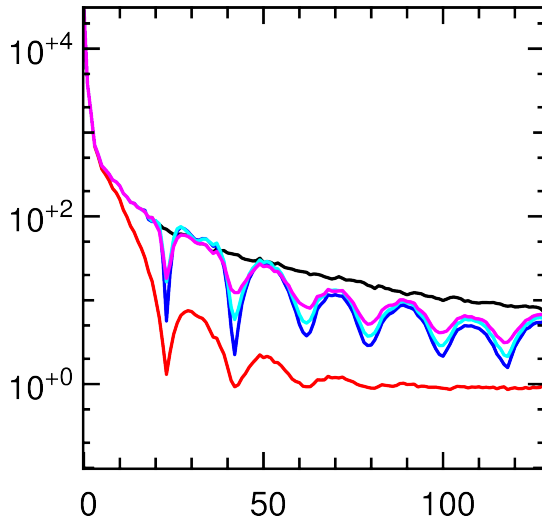


FIG. 1.15 — Profils radiaux des spectres des meilleures reconstructions pour les algorithmes : VMLM-B avec (en magenta) et sans (en bleu), contraintes de positivité (en magenta) et ISRA (en cyan) comparées aux spectres de l'image originale (en noir) et des données (en rouge).



FIG. 1.16 — Meilleure reconstruction (25^e itération) avec VMLM-B avec contraintes de positivité (EQM = 23.5 dB).

tés à la section précédente, il a été possible de déterminer le nombre d'itérations minimisant cette erreur. Il a fallu 25 itérations pour VMLM-B (résultat présenté Fig. 1.16) et 375 pour ISRA. Dans notre cas l'ajout de la positivité n'améliore pas beaucoup le résultat quantitatif (EQM = 23.5 dB pour VMLM-B et EQM = 23.6 dB pour ISRA).

Limiter ainsi le nombre d'itérations permet d'obtenir un bon compromis entre la restitution des hautes fréquences de l'image et l'amplification du bruit. Mais cette méthode se heurte à un nouveau problème : comment déterminer *a priori* le nombre optimal d'itérations. Il existe de nombreux travaux sur les critères d'arrêts de ces algorithmes d'après l'étude à chaque itération de la reconstruction et de son évolution (HEBERT, 1990; LANTÉRI *et al.*, 2002).

1.4.4.4 Reparamétrisation

Les problèmes liés à mauvais conditionnement peuvent être amplifiés par la façon dont est défini l'espace des paramètres. L'espace des paramètres découle souvent de la façon dont sont acquises les données et n'est pas forcément l'espace de représentation le plus adapté ; par exemple, en déconvolution, l'espace des paramètres qui est une matrice de pixels est identique à l'espace des données. Or la façon dont va se faire la résolution dépend de cet espace, en particulier dans le cas de la troncature : l'échantillonnage possible de la fréquence de coupure dépend de l'échantillonnage de l'espace des paramètres. Il est donc raisonnable de penser que l'on peut améliorer la solution en changeant l'espace des paramètres. Plus ce nouvel espace permettra de séparer le signal du bruit, meilleure sera la solution car il permettra de séparer finement $\text{Ker}(\mathbf{H})$ et $\mathcal{P} = (\text{Ker}(\mathbf{H}))^\perp$.

En traitement d'image, la reparamétrisation la plus populaire est la décomposition sur une

base d'ondelettes. En effet cette représentation est dite *parcimonieuse*, c'est-à-dire que, dans la plupart des cas, une grande partie des coefficients de la décomposition en ondelettes sont très proches de zéros, et donc que la majorité de l'information est contenue dans un petit nombre de coefficients. Il est donc possible de reconstruire que ces coefficients prépondérants et seuiliser ceux qui sont trop faibles pour éliminer plus finement les composantes bruitées que dans l'espace de Fourier (KALIFA *et al.*, 2003; MURTAGH *et al.*, 1995). De nombreux autres espaces de représentation ont par ailleurs été proposés (DONOHO, 1995; KRIM *et al.*, 1999).

Il est aussi possible d'utiliser des connaissances *a priori* sur le problème étudié pour déterminer un espace des paramètres bien adapté à ce problème particulier. De plus avec ces *a priori*, cet espace peut être plus petit que l'espace initial des paramètres contraignant fortement la solution. Par exemple l'algorithme CLEAN (HÖGBOM, 1974) permet d'effectuer une déconvolution en définissant les paramètres comme un ensemble de sources ponctuelles. De plus, une telle représentation permet de traiter ces sources ponctuelles itérativement ; en effet, à chaque itération, on n'a, comme paramètres, que la position de la source courante ce qui contraint très fortement la résolution du problème. Depuis cette approche à été étendue (Wavelet CLEAN) et plusieurs auteurs ont proposé une décomposition de l'image deux partie une comprenant les sources ponctuelles une autre un fond relativement lisse (GIOVANNELLI et COULAIS, 2005; MAGAIN *et al.*, 1998; PIRZKAL *et al.*, 2000).

1.4.5 Le filtre de Wiener

La mesure quantitative de la qualité de la reconstruction par l'erreur quadratique moyenne définie à l'équation 1.33 conduit à imaginer un filtre reconstituteur optimal minimisant cette erreur. Cette idée a abouti à la construction du *filtre de Wiener* proposé par WIENER (1949). Bien qu'il ne soit pas élaboré dans une approche problème inverse, il est très important en reconstruction et mérite d'être discuté ici. Ce filtre inverse linéaire $f^{(\text{Wiener})}$ qui reconstruit la solution la plus proche possible de l'image vraie au sens de l'erreur quadratique moyenne, est dérivé de deux critères :

Un filtre linéaire : C'est le filtre linéaire définissant la solution $\mathbf{x}^{(\text{Wiener})}$:

$$\mathbf{x}^{(\text{Wiener})} = \mathbf{f}^{(\text{Wiener})} * \mathbf{y}, \quad (1.55)$$

Minimisant l'erreur quadratique moyenne :

$$\mathbf{f}^{(\text{Wiener})} = \arg \min_f E \left\{ \left\| \mathbf{x}^{(\text{Wiener})} - \mathbf{x}^{(\text{vrai})} \right\|^2 \right\}, \quad (1.56)$$

$$= \arg \min_f E \left\{ \sum_k \left((\mathbf{f} * \mathbf{y})_k - x_k^{\text{vrai}} \right)^2 \right\} \quad (1.57)$$

Sous l'hypothèse d'un bruit décorrélé et centré, ce filtre s'écrit, dans l'espace de Fourier (THIÉBAUT, 2005) :

$$\hat{f}_u^{(\text{Wiener})} = \frac{\hat{h}_u^*}{|\hat{h}_u|^2 + \frac{E\{|\hat{b}_u|^2\}}{E\{|\hat{x}_u^{(\text{vrai})}|^2\}}}. \quad (1.58)$$

Cette équation et la figure 1.17 montrent que le filtre de Wiener correspond au filtre inverse direct (Eq. (1.34)) pondéré par le rapport signal sur bruit. En effet ce filtre est très proche du

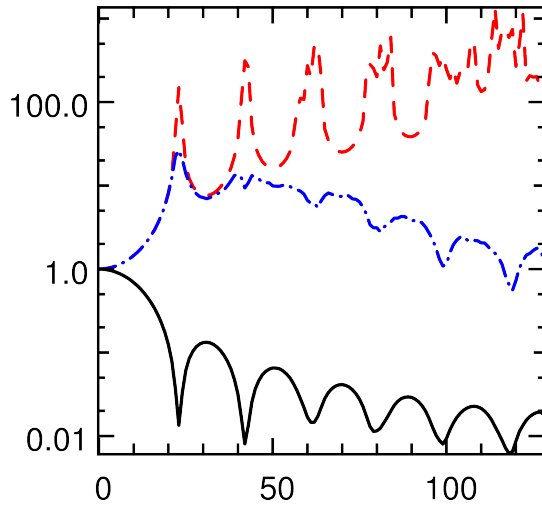


FIG. 1.17 — Profils radiaux des fonctions de transfert du filtre de Wiener (en bleu), du reconstructor des moindres carrés (en rouge) et du noyau de convolution (en noir)



FIG. 1.18 — Reconstruction avec le filtre de Wiener (EQM = 22.2 dB).

filtre inverse quand le rapport signal sur bruit (RSB) est fort mais il est atténué lorsque le RSB est faible :

$$\hat{f}_u^{(\text{Wiener})} \approx \begin{cases} \frac{1}{\hat{h}_u} & \text{si } \text{RSB} \gg 1 \\ 0 & \text{si } \text{RSB} \ll 1. \end{cases} \quad (1.59)$$

avec :

$$\text{RSB} = \sqrt{\frac{|\hat{h}_u|^2 \text{E}\{|\hat{x}_u^{(\text{vrai})}|^2\}}{\text{E}\{|\hat{b}_u|^2\}}}. \quad (1.60)$$

Le résultat est illustré sur la figure 1.18 et présente une erreur de EQM = 22.2 dB. Il représente le meilleur résultat possible au sens de l'erreur quadratique moyenne pour un filtre linéaire. Sur ce résultat de nombreux détails invisibles dans l'image floue sont bien résolus (les détails de la caméra, le toit et les piliers au fond...). Il reste cependant un bruit résiduel, coloré par les zéros de la fonction de transfert, et des artefacts de rebonds autour des bords francs. N'ayant pas de contraintes, le résultat peut présenter des valeurs impossibles physiquement comme des pixels négatifs.

L'inconvénient majeur du filtre de Wiener est que l'on connaît rarement les densités spectrales du bruit et du signal et celles-ci doivent être estimées d'après les données. Cependant, le spectre des images naturelles suit généralement une loi de puissance assez simple (Voir Fig. 1.8) qui peut être paramétrée de la façon suivante :

$$\text{E}\{|\hat{x}_u^{(\text{vrai})}|^2\} \approx \alpha \|u\|^{-\beta}. \quad (1.61)$$

où α et β sont des hyper-paramètres et doivent être estimés séparément. Sous l'approximation d'un bruit blanc décorréolé et centré ($\text{E}\{|\hat{b}_u|^2\} = \text{cst}$), le filtre de reconstruction se présente sous

la forme :

$$\hat{f}_u = \frac{\hat{h}_u^*}{|\hat{h}_u|^2 + \alpha' \|u\|^\beta}. \quad (1.62)$$

Il reste néanmoins à estimer les des hyper-paramètres α' et β , ce qui sera traité à la section 1.4.7. En les déterminant par Validation Croisée Généralisée (GCV), on a $\alpha = 0.0066$ et $\beta = 2.20$, et la reconstruction correspondante présente une erreur de EQM = 23.0 dB à peine plus importante que celle produite par le filtre de Wiener en connaissant les spectres.

1.4.6 Maximum a posteriori

Au cours de la section précédente nous avons vu que l'ajout d'*a priori* (positivité, reparamétrisation) permet d'améliorer la solution au sens du maximum de vraisemblance. En utilisant le formalisme développé à la section 1.3, il est possible d'utiliser des *a priori* plus précis sous forme de densités de probabilité et de définir une solution dite *solution au sens du maximum a posteriori* (MAP).

A la section 1.3.5, l'équation 1.25 définit une densité de probabilité *a posteriori*. Cette densité de probabilité définit en quelque sorte toutes les solutions, chacune associée à une probabilité, du problème inverse, étant données les mesures \mathbf{y} . La solution au sens du maximum a posteriori $\mathbf{x}^{(\text{MAP})}$ est, si il existe, le maximum de cette densité de probabilité :

$$\mathbf{x}^{(\text{MAP})} = \arg \max_{\mathbf{x}} f_{\mathcal{G}}^{\text{post}}(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \arg \min_{\mathbf{x}} \Phi_{\text{MAP}}(\mathbf{x}) \quad (1.63)$$

où $\Phi_{\text{MAP}}(\mathbf{x})$ est une fonction d'adéquation définie par :

$$\Phi_{\text{MAP}}(\mathbf{x}) = -\log(f_{\mathcal{G}}^{\text{post}}(\mathbf{x} | \mathbf{y})). \quad (1.64)$$

D'après l'équation 1.25 on a :

$$\Phi_{\text{MAP}}(\mathbf{x}) = -\left(\log(k) + \log(f^{\text{prior}}(\mathbf{x})) + \log(L(\mathbf{x} | \mathbf{y}))\right). \quad (1.65)$$

Si l'on supprime la constante k qui n'a aucun effet lors de la minimisation, la fonction $\Phi_{\text{MAP}}(\mathbf{x})$ se décompose en deux termes :

$$\Phi_{\text{MAP}}(\mathbf{x}) = \Phi_{\text{MV}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \Phi_{\text{Regul}}(\mathbf{x}), \quad (1.66)$$

avec

$$\Phi_{\text{MV}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\log(L(\mathbf{x} | \mathbf{y})) + \text{cste}, \quad (1.67)$$

$$\Phi_{\text{Regul}}(\mathbf{x}) = -\log(f^{\text{prior}}(\mathbf{x})) + \text{cste}. \quad (1.68)$$

Φ_{MV} est le terme de vraisemblance (ou d'attache au données) défini à la section 1.4.3 et Φ_{Regul} est un terme d'*a priori* appelé terme de régularisation.

1.4.6.1 Cas stationnaire et gaussien

Dans le cas où les fluctuations des observables et du modèle sont gaussiennes et centrées, respectivement de matrices de covariance \mathbf{C}_{obs} et \mathbf{C}_{mod} , on montre (TARANTOLA, 2005) que

celles-ci s'additionnent en une matrice rendant compte de toutes ces erreurs : $\mathbf{C}_{\text{bruit}} = \mathbf{C}_{\text{obs}} + \mathbf{C}_{\text{mod}}$. Le terme de vraisemblance s'écrit donc :

$$\Phi_{\text{MV}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y})^T \cdot \mathbf{C}_{\text{bruit}}^{-1} \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (1.69)$$

Si l'*a priori* sur l'objet est lui aussi gaussien centré autour de la solution *a priori* $\mathbf{x}_{\text{prior}}$ et de matrice de covariance $\mathbf{C}_{\text{prior}}$, le terme d'*a priori* est :

$$\Phi_{\text{Regul}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{\text{prior}} - \mathbf{x})^T \cdot \mathbf{C}_{\text{prior}}^{-1} \cdot (\mathbf{x}_{\text{prior}} - \mathbf{x}). \quad (1.70)$$

On obtient ainsi, analytiquement, la fonction d'adéquation *a posteriori*

$$2 \Phi_{\text{MAP}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y})^T \cdot \mathbf{C}_{\text{bruit}}^{-1} \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_{\text{prior}} - \mathbf{x})^T \cdot \mathbf{C}_{\text{prior}}^{-1} \cdot (\mathbf{x}_{\text{prior}} - \mathbf{x}), \quad (1.71)$$

qui n'accepte qu'un seul maximum (le maximum *a posteriori*). Cette solution au sens du maximum *a posteriori* est (TARANTOLA, 2005) :

$$\mathbf{x}^{(\text{post})} = \mathbf{x}_{\text{prior}} + (\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{C}_{\text{bruit}}^{-1} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{C}_{\text{prior}}^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{C}_{\text{bruit}}^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}_{\text{prior}}), \quad (1.72)$$

$$= \mathbf{x}_{\text{prior}} + \mathbf{C}_{\text{prior}} \cdot \mathbf{H}^T \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{C}_{\text{prior}} \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{C}_{\text{bruit}})^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}_{\text{prior}}), \quad (1.73)$$

$$= (\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{C}_{\text{bruit}}^{-1} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{C}_{\text{prior}}^{-1})^{-1} \cdot (\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{C}_{\text{bruit}}^{-1} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{C}_{\text{prior}}^{-1} \cdot \mathbf{x}_{\text{prior}}). \quad (1.74)$$

L'utilisation de l'une de ces trois formulations équivalentes est basée sur des critères de facilité du calcul numérique ; la taille des matrices à inverser est différentes suivant la formulation.

De même, la covariance *a posteriori* de la solution est :

$$\mathbf{C}_{\text{post}} = (\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{C}_{\text{bruit}}^{-1} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{C}_{\text{prior}}^{-1})^{-1}. \quad (1.75)$$

On peut constater que $\mathbf{C}_{\text{post}} \leq \mathbf{C}_{\text{prior}}$, ce qui signifie que l'estimateur *a posteriori* présente une variance plus petite que l'*a priori*, traduisant ainsi le gain apporté par l'information issue de l'expérience.

Les matrices de covariance $\mathbf{C}_{\text{bruit}}$ et $\mathbf{C}_{\text{prior}}$ sont par définition symétriques semi-définies positives, et sous l'approximation circulante (stationnaire) il est possible de les diagonaliser dans l'espace de Fourier :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \text{diag}(\hat{\mathbf{c}}) \cdot \mathbf{F}, \quad (1.76)$$

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{c}_{-,1}, \quad (1.77)$$

où $\mathbf{c}_{-,1}$ est la première colonne de \mathbf{C} et \mathbf{F} l'opérateur matriciel de la transformée de Fourier discrète dont les coefficients sont définis par :

$$F_{k,m} = \exp\left(\frac{-i 2 \pi k m}{N}\right). \quad (1.78)$$

Son inverse est définie par

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{F}^*. \quad (1.79)$$

En utilisant le théorème de Parseval, on peut réécrire la fonction d'adéquation $\Phi_{\text{MAP}}(\mathbf{x})$ dans l'espace de Fourier :

$$\widehat{\Phi}_{\text{MAP}}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2N_{\text{pixel}}} \sum_u \left(\frac{1}{\hat{c}_u^{\text{bruit}}} \|\hat{h}_u \hat{x}_u - \hat{y}_u\|^2 + \frac{1}{\hat{c}_u^{\text{prior}}} \|\hat{x}_u^{\text{prior}} - \hat{x}_u\|^2 \right). \quad (1.80)$$

Le minimum de $\widehat{\Phi}_{\text{MAP}}(\hat{\mathbf{x}})$ est atteint au point $\mathbf{x}^{(\text{post})}$ tel que :

$$\frac{\partial \widehat{\Phi}_{\text{MAP}}(\widehat{\mathbf{x}}^{(\text{post})}_u)}{\partial \text{Re}(\widehat{\mathbf{x}}^{(\text{post})}_u)} + i \frac{\partial \widehat{\Phi}_{\text{MAP}}(\widehat{\mathbf{x}}^{(\text{post})}_u)}{\partial \text{Im}(\widehat{\mathbf{x}}^{(\text{post})}_u)} = 0, \quad \forall u. \quad (1.81)$$

Donc

$$\hat{x}_u^{\text{post}} = \frac{\hat{h}_u^* \hat{y}_u + \frac{\hat{c}_u^{\text{bruit}}}{\hat{c}_u^{\text{prior}}} \hat{x}_u^{\text{prior}}}{|\hat{h}_u|^2 + \frac{\hat{c}_u^{\text{bruit}}}{\hat{c}_u^{\text{prior}}}}. \quad (1.82)$$

Ce qui est la solution du filtre de Wiener montré à la figure 1.18 (pour construire le filtre de Wiener on a supposé que $\hat{x}_u^{\text{prior}} = 0$). La solution du filtre de Wiener est donc un cas particulier de l'approche au sens du maximum *a posteriori*.

1.4.6.2 *a priori* de type lissage

Malheureusement, dans la plupart des cas, on ne dispose pas d'*a priori* aussi précis sur \mathbf{x} , et on ne connaît pas $\mathbf{x}_{\text{prior}}$ et $\mathbf{C}_{\text{prior}}$. L'*a priori* le plus utilisé consiste à considérer que l'objet d'origine est relativement lisse. On définit donc un *a priori* de type lissage minimisant l'écart quadratique entre deux voisins :

$$\Phi_{\text{Regul}}(\mathbf{x}) = \mu \|\mathbf{D} \cdot \mathbf{x}\|_2^2, \quad (1.83)$$

où \mathbf{D} est un opérateur différentiel généré par exemple en voisinage V_8 par le noyau :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{(4 + 2\sqrt{2})} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -4 - 2\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (1.84)$$

où μ est un paramètre positif permettant de régler le niveau de lissage voulu.

Cette fonction de lissage peut aussi s'écrire

$$\Phi_{\text{Regul}}(\mathbf{x}) = \mu \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}. \quad (1.85)$$

C'est en quelques sorte une décomposition de Cholesky de l'inverse de la matrice de covariance $\mathbf{C}_{\text{prior}}^{-1}$. C'est une approximation gaussienne de $\mathbf{C}_{\text{prior}}^{-1}$. Dans ce cas, le paramètre μ correspond à l'inverse de la variance σ_d^2 de la loi (gaussienne) de distribution des écarts entre deux pixels voisins :

$$\mu = \frac{1}{2\sigma_d^2},$$

l'approximation $\mathbf{W}_{\text{prior}}$ de $\mathbf{C}_{\text{prior}}^{-1}$ s'écrivant donc :

$$\mathbf{W}_{\text{prior}} = \frac{1}{2\sigma_d^2} \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D}. \quad (1.86)$$

Dans l'espace de Fourier cet *a priori* de lissage s'écrit :

$$\Phi_{\text{Regul}}(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{N_{\text{pixel}}} \sum_u |u \hat{x}_u|^2. \quad (1.87)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\text{prior}}^{-1} = \frac{1}{2 N_{\text{pixel}} \sigma_d^2} \text{diag}(|u|^2), \quad (1.88)$$

avec $\hat{x}_u^{\text{prior}} = 0$.



FIG. 1.19 — Meilleure reconstruction ($\alpha = 3.6e^{-4}$) avec une régularisation de type gradient quadratique. (EQM = 23.1 dB).

Si les bruits de modélisation et du capteur sont blancs gaussiens centrés et de variance totale σ_b^2 , on montre que la solution au sens du maximum a posteriori s'écrit :

$$\hat{x}_u^{\text{post}} = \frac{\hat{h}_u^* \hat{y}_u}{|\hat{h}_u|^2 + \frac{\sigma_d^2}{\sigma_b^2} |u|^2}. \quad (1.89)$$

On peut aussi constater que le rapport $\alpha = \frac{\sigma_d^2}{\sigma_b^2}$ règle l'apport de l'*a priori*. Si l'on ne connaît ni σ_d^2 ni σ_b^2 (ce qui est le cas en général), cet α devient un hyper-paramètre que l'on aura à déterminer pour trouver la solution qui minimise :

$$\Phi_{\text{MAP}}(\mathbf{x}) = \Phi_{\text{MV}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha \Phi_{\text{Regul}}(\mathbf{x}), \quad (1.90)$$

en normalisant $\Phi_{MV}(x, y)$ et $\Phi_{Regul}(x)$ de sorte que $2\sigma_d^2 = 2\sigma_b^2 = 1$. L'équation 1.89 se réécrit alors :

$$\hat{x}_u^{post} = \frac{\hat{h}_u^* \hat{y}_u}{|\hat{h}_u|^2 + \alpha |u|^2}. \quad (1.91)$$

Cette équation correspond à l'utilisation du filtre de reconstruction de Wiener défini à l'équation 1.58 avec $\beta = 2$. Le résultat pour α optimal, est affiché à la figure 1.19. Notons qu'à la fréquence nulle, l'inverse de la covariance a priori est nulle ; cet *a priori* conserve ainsi l'énergie de l'image et ne biaise donc pas la moyenne de la reconstruction.

1.4.6.3 Cas non stationnaire

Jusqu'à présent, seul le cas stationnaire et circulant a été considéré, c'est-à-dire que l'on a considéré outre que le bruit est stationnaire mais aussi l'image en supposant que la statistique de l'image était la même en tout point de celle-ci. Intuitivement, on peut constater que cette approximation est fautive car une image possède généralement plusieurs zones de textures (et donc de statistiques) différentes. De plus, on s'est toujours placé dans l'approximation circulante qui permet d'effectuer l'opération de convolution en utilisant la transformée de Fourier. Dans cette approximation on considère que l'image est répétée à l'infini, et donc que la première ligne (resp. colonne) de l'image est contiguë à la dernière.

L'image floue présentée à la figure 1.2 ayant été créée par transformée de Fourier, nous proposons d'étudier la déconvolution d'une nouvelle image pour étudier l'effet de ce cas particulier de données non stationnaire. Cette nouvelle image est donc formée à partir l'image floue du Cameraman présentée à la figure 1.2 à laquelle on a supprimé un cadre épais comme la largeur de la PSF de sorte que la dernière ligne (resp. colonne) soit indépendante de la première.



FIG. 1.20 — Reconstruction avec le filtre de Wiener dans le cas non stationnaire (EQM = 38.0 dB)

Cette image y^{crop} de taille 248×248 est ensuite déconvoluée par le filtre de Wiener décrit à la section 1.4.5. Le résultat est présenté sur la figure 1.20. Ce résultat est décevant et très différent

de celui présenté à la figure 1.17. On constate sur l'image de nombreuses oscillations parallèles aux bords empêchant de discerner les détails. Ce phénomène est appelé repliement de champ. Il est dû à l'utilisation de l'approximation circulante, liée à la FFT, pour la reconstruction alors qu'elle n'a pas été utilisée pour synthétiser l'image floue. En effet, l'image floue a été construite de manière à ce que le flou de la première ligne (resp. colonne) n'ait pas d'influence sur la dernière ligne (resp. colonne). Il peut donc y avoir une différence arbitrairement grande entre les valeurs des pixels de la première ligne (resp. colonne) et de la dernière ligne (resp. colonne). Cette différence engendre des hautes fréquences verticales et horizontales dans le spectre de l'image floue ; et ces hautes fréquences sont fortement amplifiées par le filtre de Wiener.



FIG. 1.21 — Meilleure reconstruction MAP ($\alpha = 3.6e^{-4}$) avec une régularisation de type gradient quadratique dans le cas non stationnaire (EQM = 23.1 dB).

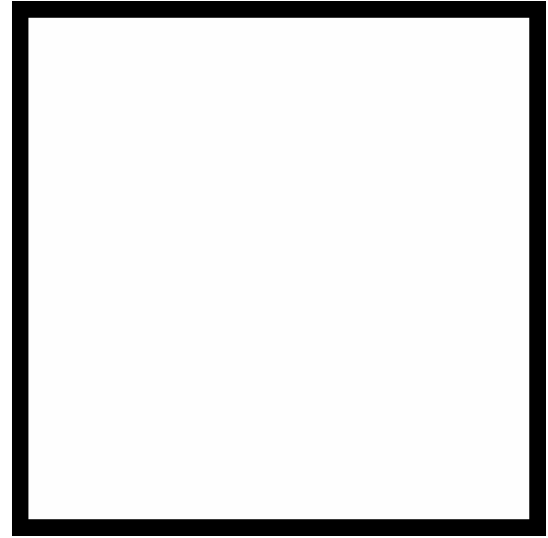


FIG. 1.22 — Carte des poids utilisés dans la fonction de vraisemblance.

Pour résoudre ce problème il est nécessaire d'estimer la valeur des pixels hors de l'image dans un cadre de la largeur de la PSF. En effet, ces pixels non mesurés, transmettent une partie de leur énergie via l'opération de flou aux pixels mesurés. On cherche donc à reconstruire l'image \mathbf{x} de taille 256×256 pixels d'après les données \mathbf{y} définies par :

$$y_k = \begin{cases} y_{k'}^{\text{crop}} & \text{si } y_k \text{ est mesuré,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.92)$$

où la différence entre k et k' est choisie de sorte que l'image \mathbf{y}^{crop} soit au centre de \mathbf{y} .

Cela amène à modifier le terme de vraisemblance pour prendre en compte que la valeur des pixels non mesurés est inconnue :

$$\Phi_{\text{MV}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y})^T \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (1.93)$$

où la matrice de poids \mathbf{W} est définie par :

$$w_{i,j} = \begin{cases} [\mathbf{C}_{\text{bruit}}^{-1}]_{i',j'} & \text{si } y_i \text{ et } y_j \text{ sont mesurés,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.94)$$

dans le cas d'un bruit gaussien décorélé \mathbf{W} devient diagonale avec :

$$w_{i,i} = \begin{cases} \text{Var}(y_i)^{-1} & \text{si } y_i \text{ est mesuré,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.95)$$

La diagonale de \mathbf{W} est affichée à la figure 1.22. Notons que dire que $w_{i,i} = 0$ revient à considérer que la variance σ_i de la mesure y_i est infinie, ce qui signifie que l'on a aucune idée *a priori* sur la valeur de ce pixel et que toutes les valeurs de \mathbb{R} sont équiprobable.

Malheureusement, dans ce cas, il est impossible d'obtenir la solution de manière analytique et l'on doit utiliser une méthode itérative. Le résultat obtenu avec VMLM est montré à la figure 1.21. Ce résultat est équivalent à celui obtenu dans le cas stationnaire. Notons que les valeurs non mesurées ont été extrapolées de manière réaliste.

1.4.7 Réglage des hyper paramètres

Une fois la régularisation bien définie, une solution existe au sens du maximum *a posteriori*. Cependant, en l'absence d'information complète sur la nature du bruit et sur la statistique *a priori* de l'objet, cette solution dépend des hyper-paramètres.



FIG. 1.23 — Meilleure reconstruction ($\alpha = 3.6e^{-4}$) avec une régularisation de type gradient quadratique (EQM = 23.1 dB).

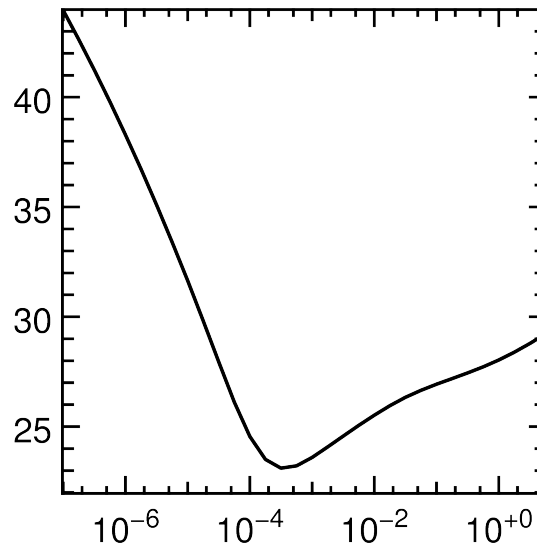


FIG. 1.24 — Évolution de l'erreur quadratique moyenne en fonction de la valeur de l'hyper-paramètre.

Prenons le cas du problème de déconvolution posé plus haut où l'on utilise une régularisation de type gradient avec une norme quadratique comme à l'équation 1.91. Cette solution calculée analytiquement dépend de l'hyper-paramètre α . Il faut donc maintenant, pour effectuer une bonne reconstruction, estimer α . Dans ce cas, la solution étant analytique, la reconstruction pour une valeur donnée de α est très rapide. Il a donc été possible de procéder de manière supervisée en modifiant manuellement α pour obtenir la meilleure reconstruction. Cette reconstruction est affichée sur la figure 1.23.

Puisque l'on connaît l'image d'origine, il a aussi été possible de tracer l'évolution de l'erreur quadratique moyenne en fonction de la valeur de l'hyper-paramètre α comme le montre



FIG. 1.25 — Reconstruction sous-régularisée ($\alpha = 3e^{-5}$) avec une régularisation de type gradient quadratique (EQM = 29.4 dB).



FIG. 1.26 — Reconstruction sur-régularisée ($\alpha = 3e^{-3}$) avec une régularisation de type gradient quadratique (EQM = 24.1 dB).

la figure 1.24. Sur cette figure, on peut voir que l'erreur varie de manière logarithmique et que de petites variations de l'hyper-paramètre aboutissent à des erreurs de reconstruction similaires. Ceci signifie qu'il n'est pas utile de chercher l'hyper-paramètre optimal mais plutôt un bon ordre de grandeur de celui-ci. L'effet de l'hyper-paramètre sur la reconstruction est présenté sur les figures 1.25 et 1.26. Si l'hyper-paramètre est trop petit, on parle de sous-régularisation, les détails sont bien reconstruits mais l'image est noyée dans le bruit. A l'inverse, s'il est trop grand, on parle alors de sur-régularisation, l'image est trop lisse, les détails peu visibles et les artefacts (effets de Gibbs) plus présents.

Cependant, pour une utilisation régulière de ces algorithmes, il est nécessaire de trouver une façon de régler automatiquement ces hyper-paramètres. Pour ce faire, les deux méthodes les plus usitées sont la validation croisée généralisée (GCV) et la méthode de la courbe en L (L-curve).

1.4.7.1 La validation croisée

La validation croisée est fondée sur la possibilité de prédire des mesures manquantes lors de l'estimation de la solution du problème inverse. En effet, pour chaque valeur de l'hyper-paramètre α , il est possible de déterminer une solution $\mathbf{x}(\alpha, k)$ de $\Phi_{\text{MAP}}(\alpha, \mathbf{y} \setminus y_k)$ en prenant en compte toutes les mesures sauf la k^{e} . La validation croisée est alors définie comme la somme pondérée des différences entre la valeur prédite et la mesure :

$$\text{CV}(\alpha) = \sum_k \frac{1}{\sigma_k^2} (\tilde{y}_k(\alpha, k) - y_k)^2, \quad (1.96)$$

où σ_k^2 est la variance de la k^{e} mesure et $\tilde{y}(\alpha, k)$ est le modèle issu de la solution $\mathbf{x}(\alpha, k)$: $\tilde{y}(\alpha, k) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}(\alpha, k)$. Pour un hyper-paramètre donné α , la validation croisée $\text{CV}(\alpha)$ mesure la capacité de la solution à estimer correctement des mesures manquantes. Le choix de l'hyper-paramètre

qui minimise $CV(\alpha)$ apparaît comme un bon choix car il donne la solution la plus stable par rapport aux données manquantes. Pour un calcul plus rapide, l'équation 1.96 peut se réécrire :

$$CV(\alpha) = \sum_k \frac{(\tilde{y}_k(\alpha) - y_k)^2}{\sigma_k^2 (1 - a_{k,k}(\alpha))}, \quad (1.97)$$

où $\tilde{\mathbf{y}}(\alpha) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}(\alpha)$ avec $\mathbf{x}(\alpha)$ l'objet reconstruit à hyper-paramètre α fixé, et où $a_{k,k}(\alpha)$ est la diagonale de la matrice d'influence $\mathbf{a}(\alpha)$:

$$a_{j,k}(\alpha) = \frac{\partial \tilde{y}_j(\alpha)}{\partial y_k}. \quad (1.98)$$

En 1979 Golub *et al.* (GOLUB *et al.*, 1979) ont proposé une version pondéré de la validation croisée : la validation croisée généralisée (GCV) :

$$GCV(\alpha) = \frac{\sum_k \sigma_k^{-2} (\tilde{y}_k(\alpha) - y_k)^2}{1 - \frac{1}{N_{\text{pixel}}} \sum_k a_{k,k}(\alpha)}. \quad (1.99)$$

Dans notre exemple sur la déconvolution en présence de bruit gaussien et avec une régularisation de type gradient muni de la norme quadratique, le critère de GCV est (THIÉBAUT, 2005) :

$$GCV(\alpha) = \frac{\sum_u (1 - \hat{f}_u(\alpha))^2 |\hat{y}_u(\alpha)|^2}{1 - \frac{1}{N_{\text{pixel}}} \sum_u \hat{f}_u(\alpha)}, \quad (1.100)$$

où $f(\alpha)$ est le filtre reconstruteur convolué par la PSF, c'est-à-dire le filtre qui permet de passer des données \mathbf{y} au modèle $\tilde{\mathbf{y}}(\alpha)$ de celles-ci :

$$\hat{f}_u = \frac{|\hat{h}_u|^2}{|\hat{h}_u|^2 + \alpha |u|^2}. \quad (1.101)$$

Dans notre exemple, ce critère de GCV est minimum pour $\alpha = 3.8e^{-4}$ conduisant à une erreur de reconstruction EQM = 23.2 dB à comparer avec l'erreur pour α optimal EQM = 23.1 dB

1.4.7.2 Méthode de la courbe en L (L-curve)

La deuxième méthode populaire pour déterminer l'hyper-paramètre est la méthode dite de la courbe en L (L-curve) proposée par Hansen (HANSEN, 1992). L'idée de cette méthode est de tracer la valeur du terme de régularisation $\Phi_{\text{Regul}}(\mathbf{x}(\alpha))$ en fonction du terme d'attache aux données $\Phi_{\text{MV}}(\mathbf{x}(\alpha), \mathbf{y})$ une fois la solution atteinte, en faisant varier l'hyper-paramètre α . Comme on peut le voir à la figure 1.27, cette courbe paramétrique est en forme de L. Ceci s'explique car lorsque α est faible, la solution est sous-régularisée (et proche de la solution au sens du maximum de vraisemblance) et Φ_{MAP} est dominée par Φ_{MV} qui tend vers son minimum ($N_{\text{Pixels}}/2$) quelle que soit la valeur de Φ_{Regul} , à l'inverse si α est grand alors la solution est sur-régularisée et Φ_{Regul} domine, l'objet reconstruit étant très proche de l'objet *a priori*. On peut légitimement que penser lorsque l'on est à l'hyper-paramètre optimal les valeurs de Φ_{MV} et Φ_{Regul} sont équilibrées, c'est-à-dire lorsque leurs variations par rapport à l'hyper-paramètre est du même ordre de grandeur. Ceci est confirmé par la courbe en bleu de la figure 1.27 représentant la variation de l'erreur quadratique moyenne en fonction du terme Φ_{MV} de vraisemblance. Cette courbe présente en effet un minimum à peu près au niveau du coin de la

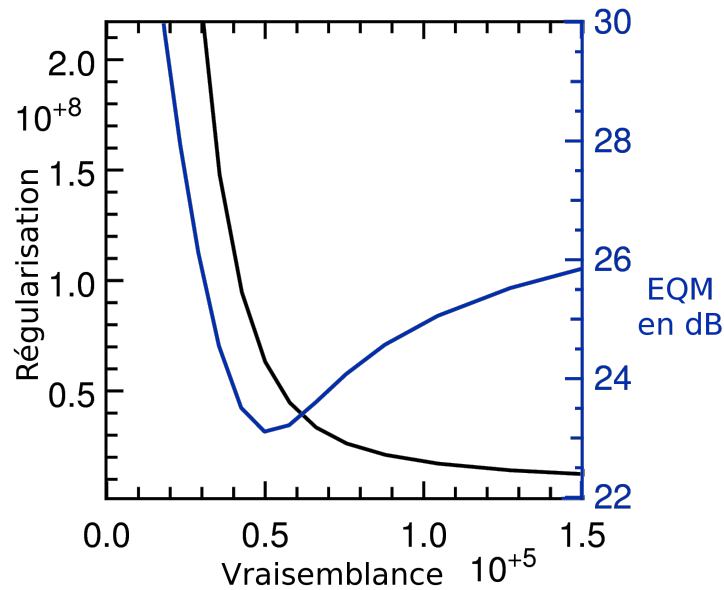


FIG. 1.27 — Exemple d'une L-curve, valeur à la convergence du terme de régularisation en fonction de la valeur du terme de vraisemblance (en noir) superposée à la courbe bleu de l'erreur quadratique moyenne de reconstruction (EQM) en fonction de la valeur du terme de vraisemblance.

courbe en L. Trouver l'ordre de grandeur optimal de l'hyper-paramètre correspondra donc à trouver l'hyper-paramètre, à la limite entre la zone verticale et la zone plate de la courbe. Ceci est fait en général en déterminant l'hyper-paramètre qui maximise la courbure de cette courbe.

D'une manière générale ces méthodes, GCV comme L-curve, ne sont pas toujours satisfaisantes et ont tendance, dans de nombreux cas, à sur-régulariser la solution. Ces défauts semblent amplifiés lorsque l'objet présente différentes parties avec des covariances très différentes. L'automatisation du réglage des hyper-paramètres est une question encore largement ouverte et de nombreuses recherches sont encore à effectuer dans ce domaine. De plus, il est difficile de définir ce qu'est une *bonne solution*, et cette définition dépend clairement de l'application sous-jacente au problème inverse. Par exemple une bonne solution est-elle la solution la plus satisfaisante visuellement, celle qui minimise l'erreur quadratique moyenne ou n'importe quelle autre métrique pouvant mesurer des erreurs ? dans quelle mesure quelques pixels aberrants rendent difficile l'interprétation ? Vaut-il mieux avoir une solution avec le minimum de bruit résiduel, ou une solution bruitée mais moins biaisée par les *a priori* ?

1.4.8 Une densité de probabilité comme solution d'un problème inverse

Au travers des paragraphes précédents, nous avons défini une densité de probabilité f (que ce soit de vraisemblance ou a posteriori) solution du problème inverse. Il semble en effet comme le suggère Tarantola (TARANTOLA, 2006), que donner une collection de solutions assorties de leur probabilités respectives plutôt qu'une seule solution est une réponse rigoureuse à des problèmes *mal-posés*. Malheureusement, une densité de probabilité, surtout lorsqu'elle a beaucoup de dimensions, est difficile à représenter et à manipuler et, dans la grande majorité des problèmes, on préférera connaître son maximum. La solution au sens d'Hadamard est en

fait ce maximum.

Dans ce cadre les conditions d'Hadamard sur f deviennent :

- **Existence** : la densité de probabilité $f(\mathbf{p}|\mathcal{D})$ est non nulle dans tout l'espace des données \mathcal{D} ,
- **Unicité** : f n'admet qu'un seul maximum dans \mathcal{P} ,
- **Continuité** : f est continue dans \mathcal{P} .

1.5 Optimisation

Une fois que l'on a défini la densité de probabilité f (*a posteriori* ou de vraisemblance) solution du problème inverse, on souhaite généralement connaître son maximum. A moins que les paramètres et les données soit reliées linéairement et que leurs fluctuations soient gaussiennes, il est difficile de trouver ce maximum analytiquement. Lorsque f est de grande dimension et/ou qu'elle est très rugueuse (obligeant à un échantillonnage très fin), il est totalement impossible d'échantillonner régulièrement f à la recherche de son maximum. On procède donc de manière itérative pour trouver le jeu de paramètres \mathbf{x} qui maximise cette fonction.

Il y a deux grandes familles d'algorithmes pour trouver ce maximum : ceux qui exploitent la continuité et la courbure de cette densité de probabilité pour trouver petit à petit son maximum à l'aide d'algorithmes d'optimisation continue, et ceux qui, si cette fonction n'est pas assez continue, échantillonnent de façon pseudo-aléatoire cette densité de probabilité à la recherche de son maximum en utilisant des algorithmes de type Monte-Carlo. Si la densité de probabilité est continue mais présente de nombreux extrema locaux, il est possible de coupler ces deux types d'approches (RONDEAU, 2007).

1.5.1 Description

Comme on l'a vu à la section 1.3.8, il est plus facile de rechercher le minimum d'une fonction d'adéquation f' que le maximum de la densité de probabilité f . On choisit donc de minimiser $f'_G(\mathbf{p}) = -\log(f_G(\mathbf{p}))$, ce est équivalent à maximiser $f_G(\mathbf{p})$. Dans la suite de cette section, pour alléger la notation (et éviter la confusion avec une dérivée) le prime sera omis de sorte que la notation f fera référence à f' . Cette section décrivant brièvement la théorie de l'optimisation continue est largement inspirée par le livre de ? dans lequel le lecteur pourra trouver des approfondissement.

Les méthodes d'optimisation permettent de trouver le minimum de f en utilisant la continuité de $f(\mathbf{x})$. Ce sont des méthodes itératives où à chaque itération $k + 1$, on met à jour les paramètres \mathbf{x}_{k+1} tel que :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \delta\mathbf{x}_k. \quad (1.102)$$

Elles utilisent le développement de Taylor à l'ordre 2 de f :

$$f(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{g}^T \cdot \delta\mathbf{x} + \frac{1}{2} \delta\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{x} + o(\|\delta\mathbf{x}\|^2), \quad (1.103)$$

où $\mathbf{g} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_k)$ et $\mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x}_k)$ sont respectivement le gradient et la hessienne de f pris en

\mathbf{x} :

$$[\mathbf{g}]_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \quad (1.104)$$

$$[\mathbf{B}]_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}). \quad (1.105)$$

1.5.2 Newton

Minimiser $f(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})$ (Eq. (1.103)), à l'itération k est équivalent à minimiser la forme quadratique $q(\delta\mathbf{x})$ définie par :

$$q(\delta\mathbf{x}) = \mathbf{g}^T \cdot \delta\mathbf{x} + \frac{1}{2} \delta\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{x}. \quad (1.106)$$

Il est démontré que si \mathbf{B} est définie positive, alors cette fonction accepte un minimum au point $\delta\mathbf{x}^+$ tel que :

$$\mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{x}^+ = -\mathbf{g}. \quad (1.107)$$

Ce minimum $\delta\mathbf{x}^+$ est appelé *pas de Newton* ($\delta\mathbf{x}^{(\text{Newton})}$). Il est démontré que l'algorithme de Newton qui, à chaque itération, réalise le pas de Newton converge pour toute fonction f Lipschitz-continue (*i.e.* $\forall(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \exists C \in \mathbb{R}$ tel que $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < C|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$).

Malheureusement cette méthode a peu d'intérêt pratique car elle souffre de deux inconvénients importants :

- Tout d'abord, le calcul de \mathbf{B}^{-1} est lourd et doit être effectué à chaque itération pour les problèmes non-linéaires. Cela pose non seulement des problèmes de temps de calcul, mais surtout, comme la taille de \mathbf{B}^{-1} est égale au carré du nombre de paramètres, il devient impossible de la stocker lorsqu'il y a un grand nombre de paramètres.
- Davantage encore, si \mathbf{B} est mal conditionnée (Voir Sec. 1.2.8) et possède des valeurs propres proches de zéro, le calcul numérique de \mathbf{B}^{-1} devient instable (une petite erreur sur \mathbf{B} entraîne une large erreur sur \mathbf{B}^{-1} et donc sur le pas). De plus ce calcul devient carrément impossible si \mathbf{B} n'est que semi-définie positive.

1.5.3 Quasi-Newton

Pour contourner ces problèmes, les algorithmes dit de quasi-Newton effectuent la minimisation de $f(\mathbf{x})$ avec une suite de pas Newton en utilisant une approximation \mathbf{A} de l'inverse de la hessienne \mathbf{B}^{-1} . Le pas de quasi-Newton $\delta\mathbf{x}^{(\text{QN})}_k$ est donc :

$$\delta\mathbf{x}^{(\text{QN})}_k = -\mathbf{A}_k \cdot \mathbf{g}_k. \quad (1.108)$$

où \mathbf{A}_k est choisie définie positive. C'est en quelque sorte un algorithme de descente le long du gradient pré-conditionné. Il est démontré (PRESS *et al.*, 1986) que cet algorithme converge linéairement vers un minimum local \mathbf{x}^+ . C'est-à-dire, qu'au voisinage de la solution :

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^+\| = \gamma \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^+\|, \quad (1.109)$$

avec

$$\gamma = \frac{K(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - 1}{K(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + 1}. \quad (1.110)$$

On constate donc que, plus le conditionnement de $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ sera faible, plus l'algorithme convergera rapidement. Le meilleur choix pour \mathbf{A} est donc le choix trivial $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$, ce qui signifie, pour un problème linéaire, que le problème est déjà résolu. Mais on voit ainsi que \mathbf{A} doit être une bonne approximation de \mathbf{B}^{-1} pour assurer une convergence efficace.

Il y a de nombreuses façons de définir \mathbf{A} . Nous ne présenterons que les méthodes qui seront utilisées effectivement dans les chapitres suivants.

1.5.3.1 Algorithme du gradient / de plus grande pente

L'approximation la plus fruste de \mathbf{B}_k^{-1} est l'identité $\mathbf{A}_k \propto \mathbf{I}$: c'est l'algorithme de plus grande pente où la direction du pas est en définitive dans le sens opposé au gradient. Le nouveau pas s'écrit alors :

$$\delta \mathbf{x}^{(\text{PGP})}_k = -\beta_k \cdot \mathbf{g}_k, \quad (1.111)$$

où β est un scalaire contrôlant la longueur du pas. Cette approximation est cependant trop brutale pour assurer une convergence rapide vers un minimum local.

1.5.3.2 Algorithmes à métrique variable

On peut appliquer à la matrice \mathbf{A} une décomposition de Cholesky et celle-ci peut s'écrire sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T$ où \mathbf{C} est une matrice inversible de changement de variable telle que $\mathbf{x} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}'$ (PRESS *et al.*, 1986). Si l'on applique la méthode du gradient pour minimiser la nouvelle fonction $f'(\mathbf{x}') = f(\mathbf{C} \cdot \mathbf{x})$, on a :

$$\mathbf{x}'_{k+1} = \mathbf{x}'_k - \beta'_k \cdot \mathbf{g}'_k. \quad (1.112)$$

Soit en ré-appliquant le changement de variable :

$$\mathbf{g}'_k = \mathbf{C}_k^T \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \cdot f(\mathbf{C}_k \cdot \mathbf{x}_k) \quad (1.113)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{C}_k^T \cdot \mathbf{g}_k \quad (1.114)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{g}_k. \quad (1.115)$$

On peut donc constater que trouver la matrice \mathbf{A}_k optimale revient à effectuer le changement de variable optimal tel que l'algorithme soit bien conditionné, d'où le nom d'*algorithmes à métrique variable*.

N'ayant pas *a priori* de bons pré-conditionneurs (et donc pas de matrice \mathbf{A} optimale), il faut donc partir avec une approximation très fruste de \mathbf{B}^{-1} comme par exemple $\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}$ et essayer d'affiner l'approximation au fur et à mesure des itérations par des mises à jour Δ_k :

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k + \Delta_k. \quad (1.116)$$

Pour cela, on ne dispose que des valeurs de \mathbf{x} , de la fonction $f(\mathbf{x})$ et de son gradient \mathbf{g} pris à toutes les itérations déjà effectuées.

L'idée est donc, ici, de collecter les informations sur la courbure au fil des k premières itérations pour mettre à jour \mathbf{A}_{k+1} . En effet, dans l'approximation quadratique les variations du gradient sont reliées à la hessienne par :

$$\mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k \approx \mathbf{B}_{k+1} \cdot (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k). \quad (1.117)$$

Il faut donc définir la correction Δ_k symétrique assurant que \mathbf{A}_{k+1} soit définie positive et que l'équation dite de la sécante soit respectée :

$$\mathbf{A}_{k+1} \cdot \mathbf{y}_k = \mathbf{s}_k, \quad (1.118)$$

avec

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k, \quad (1.119)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k. \quad (1.120)$$

Selon que Δ_k est de rang 1 ou 2, on parle de correction de rang 1 ou 2.

L'algorithme BFGS est l'algorithme à métrique variable le plus populaire. Il a été proposé par les chercheurs Broyden, Fletcher, Goldfarb et Schano, d'où son nom. Ils ont proposé la mise à jour de rang 2 suivante pour la hessienne approchée :

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k + \frac{\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{y}_k^T}{\mathbf{y}_k^T \cdot \mathbf{s}_k} - \frac{\mathbf{B}_k \cdot \mathbf{s}_k \cdot \mathbf{s}_k^T \cdot \mathbf{B}_k}{\mathbf{s}_k^T \cdot \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{s}_k}. \quad (1.121)$$

Cette correction assure que si \mathbf{B}_k est définie positive alors \mathbf{B}_{k+1} l'est aussi. Le pas est donc :

$$\delta \mathbf{x}^{(\text{BFGS})}_k = -\mathbf{B}_k^{-1} \cdot \mathbf{g}_k, \quad (1.122)$$

Notons qu'en pratique la mise à jour de \mathbf{B}_k est faite sur son facteur de Cholesky \mathbf{C} ($\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T = \mathbf{B}$) rendant la résolution à l'équation 1.122 plus rapide.

Algorithme à Mémoire limitée : VMLM / L-BFGS Dans le cas de problèmes à grand nombre de paramètres, la hessienne \mathbf{B}_k trop volumineuse n'est non seulement jamais stockée mais même non explicitement calculée. Le calcul de $(\mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{g}_k)$ est fait uniquement en utilisant les vecteurs $\{\mathbf{y}_k, \mathbf{s}_k\}$ des dernières itérations (en général de l'ordre de 5) et d'une matrice \mathbf{B}_0 creuse. Cette technique est utilisée par l'algorithme L-BFGS (??) appelé aussi VMLM pour Variable Metric Limited Memory (??).

Prise en compte des contraintes : VMLM-B En présence de contraintes explicites sur les paramètres, comme par exemple la positivité, les algorithmes précédemment décrits ne sont plus utilisables. L'optimisation sous-contraintes est un sujet de recherche en soit(?) où beaucoup de méthodes ont été proposées (points intérieurs, lagrangien...), et ici nous ne décrivons que la méthode utilisée dans cette thèse : à savoir VMLM-B une variante avec contraintes de l'algorithme VMLM. Cette méthode avec une implémentation légèrement différente de L-BFGS-B (?), utilise la technique des "active set". Schématiquement, avec cette technique lors d'une évaluation un paramètre x_k dépasse la borne (e.g. devient négatif), il est replacé sur la borne (dans notre exemple $x_k = 0$). Si ce pas est accepté (i.e. la fonction f décroît suffisamment, voir section??), alors l'itération va commencer avec ce paramètre sur la borne. Dans le cas où il y a des paramètres x_k sur les bornes et que leurs anti-gradients $-\mathbf{g}_k$ pointent à l'extérieur de ces bornes alors on dit que les contraintes sont actives en k . L'ensemble des paramètres x_k ayant des contraintes actives sont alors exclus du jeu de paramètres libres pour le calcul de la direction de recherche. A l'itération suivante, ces paramètres seront remis dans le jeu de paramètres libre si leurs contraintes deviennent inactives (c'est-à-dire que l'anti-gradient pointe vers l'intérieur).

1.5.3.3 Algorithme de Levenberg-Marquardt

Lorsque la fonctionnelle à minimiser est de type “moindres carrés” comme à l’équation 1.41, elle s’écrit :

$$f(\mathbf{x}_k) = \frac{1}{2} \mathbf{r}(\mathbf{x}_k)^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{r}(\mathbf{x}_k) + \text{constante}, \quad (1.123)$$

où $\mathbf{r}(\mathbf{x}_k)$ est un résidu (comme par exemple $\mathbf{r}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x}_k)$) et \mathbf{W} est une matrice de poids symétrique souvent égale à l’inverse de la matrice de covariance des fluctuations.

Dans ce cas, la matrice hessienne de f se décompose en deux termes :

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{J}_k^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_k + \mathbf{S}_k, \quad (1.124)$$

où \mathbf{J}_k est la matrice jacobienne :

$$[\mathbf{J}_k]_{i,j} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_k) \quad (1.125)$$

$$[\mathbf{S}_k]_{i,j} = \sum_{m,n} r_m W_{m,n} \frac{\partial^2 r_n}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_k). \quad (1.126)$$

Lorsqu’on est proche de l’optimum, $\mathbf{r}(\mathbf{x}_k)$ est petit et centré sur zéro, \mathbf{S}_k peut être négligé et on a l’approximation :

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{J}_k^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_k, \quad (1.127)$$

qui est semi-définie positive par construction. Cette approximation est appelée *approximation de Gauss-Newton*. Elle donne, à chaque itération, le pas :

$$\delta \mathbf{x}^{(\text{GN})} = -(\mathbf{J}_k^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_k)^{-1} \mathbf{g}_k. \quad (1.128)$$

Malheureusement cette approximation n’assure pas que \mathbf{B}_k soit strictement définie positive à chaque itération. C’est pourquoi on fait appel à une méthode modifiée appelée *algorithme de Levenberg-Marquardt* (d’après LEVENBERG, 1944) où on ajoute à l’approximation de la hessienne un terme proportionnel à l’identité :

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{J}_k^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_k + \lambda_k \mathbf{I}, \quad (1.129)$$

où λ_k est un réel positif assurant que \mathbf{B}_k est strictement définie positive. Lorsque λ est grand, le pas tend à être identique au pas de l’algorithme du gradient. Ainsi quand on est loin du minimum local le plus proche alors $\mathbf{J}_k^T \mathbf{W} \mathbf{J}_k$ est peu significatif et λ_k doit être grand ; à l’inverse si on est proche de ce minimum ($\mathbf{J}_k^T \mathbf{W} \mathbf{J}_k$) est une bonne approximation de la Hessienne est λ_k doit être petit. Ce paramètre λ est en général réglé avec une méthode similaire à celle de la région de confiance (voir section 1.5.4.2) ou une méthode de lagrangiens (voir section 3.6.2).

1.5.4 Recherche de la taille du pas

Les algorithmes de la familles “quasi-Newton” donnent en théorie immédiatement la direction de descente et la longueur du pas à effectuer pour minimiser f . Cependant pour assurer la convergence il peut être nécessaire d’ajuster la longueur de ce pas. En effet, faire des pas plus grands peut accélérer la convergence mais en même temps peut faire sortir de la

zone où l'approximation quadratique est justifiée. On doit donc faire une recherche linéaire du paramètre β_k tel que :

$$\delta \mathbf{x}^{(\text{opt})} = \beta_k \cdot \delta \mathbf{x}^{(\text{QN})}_k, \quad (1.130)$$

vérifiant la condition

$$f(\mathbf{x}_k + \delta \mathbf{x}^{(\text{opt})}_k) < f(\mathbf{x}_k). \quad (1.131)$$

Pour cela, on définit la fonction 1D à minimiser $\varphi(\beta_k)$

$$\varphi(\beta_k) = f(\mathbf{x}_k + \beta_k \delta \mathbf{x}^{(\text{QN})}_k). \quad (1.132)$$

Si f est différentiable, il existe un minimum β_k^+ est tel que :

$$\begin{cases} \varphi'(\beta_k^+) = 0, \\ \varphi(\beta_k^+) \leq \varphi(\beta_k) \text{ pour } 0 \leq \beta_k \leq \beta_k^+. \end{cases} \quad (1.133)$$

Cependant, chercher cet optimum peut signifier calculer un grand nombre de fois $\varphi(\beta_k)$ pour chaque itération ce qui peut être très long. En pratique les algorithmes d'optimisation se contentent de trouver la valeur de β_k qui assure une décroissance suffisante de f . On cherche donc la valeur de β_k dans un intervalle $[a, b]$ qui assure la décroissance de f . Il y a plusieurs méthodes pour déterminer et corriger cet intervalle ; la plus utilisée est la règle de Wolfe.

1.5.4.1 Règles de Wolfe

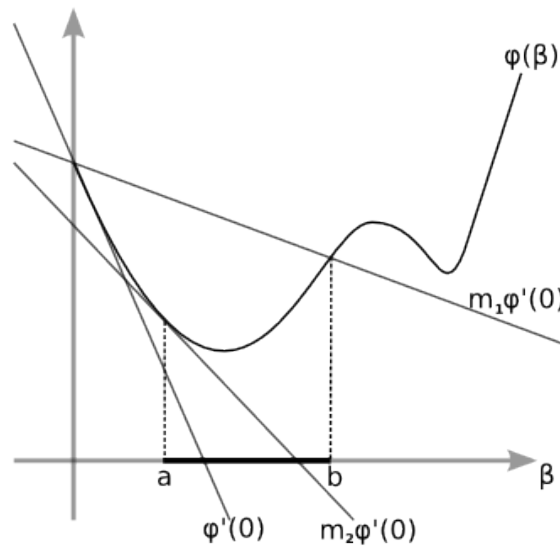


FIG. 1.28 — Illustration des conditions de Wolfe.

Phillip Wolfe a exprimé (WOLFE, 1969, 1971) deux conditions sur β définissant l'intervalle $[a, b]$ en utilisant le gradient $\varphi'(\beta)$ de $\varphi(\beta)$ comme illustré sur la figure 1.28 :

$$\varphi(\beta) \leq \varphi(0) + m_1 \varphi'(\beta), \quad (1.134)$$

$$\varphi'(\beta) \geq m_2 \varphi'(0), \quad (1.135)$$

avec $0 < m_1 < m_2 < 1$ et $m_1 < \frac{1}{2}$. Cela signifie qualitativement que l'on fait un pas pas trop grand pour décroître suffisamment en évitant toutefois de faire un pas trop court. Il peut sembler que ces conditions impliquent un temps de calcul plus long que des règles sans calcul des gradients, mais en pratique les gradients ainsi calculés sont utilisés pour faire une interpolation cubique de $\varphi(\beta)$ dans l'intervalle $[a, b]$ et ainsi trouver le nouveau β lors de la réduction de l'intervalle.

En pratique, on utilise $m_1 \propto 10^{-3}$ et $m_2 \propto 0.9$. Ces conditions assurent à la fois une réduction et une longueur de pas suffisantes. Lorsque ces conditions de Wolfe sont respectées, il est montré que la convergence des algorithmes de quasi-Newton est garantie.

1.5.4.2 Région de confiance

L'intervalle $[a, b]$ peut être aussi défini comme l'intervalle dans lequel l'approximation quadratique est valide. En effet, plus le pas est grand, plus on risque que l'approximation quadratique de f ayant servi à définir $\delta \mathbf{x}^{(\text{QN})}_k$ soit éloignée de la réalité. Il est donc possible de définir une région de confiance (MORÉ et SORENSSEN, 1983) dans laquelle l'approximation quadratique est valide. Cette région de confiance imposera la borne Δ_k fixant la longueur maximale du pas permettant de rester dans l'accord quadratique, c'est-à-dire dans une zone où $f(\mathbf{x}_{k+1})$ n'est pas trop éloignée de son approximation quadratique $q(\mathbf{x}_{k+1})$. Le problème est donc trouver le pas $\delta \mathbf{x}^{(\text{TR})}_k$:

$$\delta \mathbf{x}^{(\text{TR})}_k = -\mathbf{A}_k \mathbf{g}_k \quad \text{sous la contrainte : } \|\delta \mathbf{x}^{(\text{TR})}_k\|^2 < \Delta_k. \quad (1.136)$$

La contrainte $\|\delta \mathbf{x}^{(\text{TR})}_k\|^2 < \Delta_k$ est assurée en utilisant un multiplicateur de Lagrange (voir section 3.6.2). Il faut ensuite déterminer l'accord quadratique r_k entre f et son approximation : $q_k(\delta \mathbf{x}_k) + f(\mathbf{x}_k)$

$$r_k = \frac{f(\mathbf{x}_k + \delta \mathbf{x}^{(\text{TR})}_k) - f(\mathbf{x}_k)}{q_k(\delta \mathbf{x}^{(\text{TR})}) - q_k(0)} \quad (1.137)$$

Suivant la valeur de r_k le pas est ou non accepté ou non et la région de confiance est ou non modifiée :

- Si $r_k < \eta_1$, l'approximation quadratique n'est pas valide, le pas est rejeté : $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$, et la région rétrécie : par exemple $\Delta_{k+1} = \frac{\Delta_k}{2}$,
- si $\eta_1 \leq r_k < \eta_2$, l'approximation quadratique est correcte et le pas est accepté : $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \delta \mathbf{x}_k$, et la région ne change pas : $\Delta_{k+1} = \Delta_k$,
- Si $\eta_2 \leq r_k$, l'approximation quadratique est quasi parfaite, le pas est accepté : $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \delta \mathbf{x}_k$, et si la contrainte est active la région élargie $\Delta_k = 2 \Delta_{k+1}$.

Cette méthode de région de confiance est particulièrement adaptée pour les algorithmes de quasi-Newton car ceux-ci sont basés sur l'approximation quadratique de la fonction f à minimiser. De plus, sa mise en oeuvre est particulièrement simple.

1.5.5 Critère d'arrêt

Théoriquement, l'algorithme a atteint un minimum global quand la norme du gradient est nul. En pratique, ce critère n'est pas utilisable pour deux raisons. La première plus fondamentale est qu'en raison des erreurs d'arrondi des machines, il est difficile d'avoir numériquement des gradients exactement nuls ; il faut donc établir un seuil en dessous duquel les gradients

sont considérés comme étant nuls. La deuxième raison est que lorsque l'on s'approche de la solution, les algorithmes font des pas de plus en plus petits autour de celle-ci. Même dans le cas d'un algorithme convergeant rapidement, les dernières itérations servent souvent uniquement à raffiner une solution déjà acceptable en modifiant les valeurs des pixels de quelques centièmes de niveau de quantification. Il est donc intéressant de gagner du temps en arrêtant l'algorithme avant la convergence. Déterminer le critère de d'arrêt dans ce cas est un problème complexe et dépend souvent de la forme du critère minimisé et donc du problème considéré. C'est pourquoi, nous nous contentons à l'heure actuelle de seuils sur le gradient, la variation du critère et la longueur du pas.

1.6 Origines des incertitudes

1.6.1 Incertitudes de mesure

La densité de probabilité sur les observables définie à la section 1.3.3.2 est due aux bruits lors de la mesure de ceux-ci. Dans le cas des caméras, ces bruits sont principalement liés à quatre processus différents présents lors de la formation des données :

Le bruit de photon est lié à la nature quantique de la lumière. Il est dû au fait que l'énergie de l'onde électromagnétique est transmise par une quantité discrète de photons d'énergie donnée. Du coup, à flux moyen constant, dans deux intervalles de temps égaux, le nombre de photons arrivant sur le détecteur, et donc l'énergie mesurée peuvent être différents. Le nombre de photons détectés suit une loi de Poisson de paramètre N_{ph} , le nombre moyen de photons. La variance et le rapport signal sur bruit associés à ce bruit sont respectivement $\sigma_{ph}^2 = N_{ph}$ et $RSB = \sqrt{N_{ph}}$. Cette variance augmente avec le nombre de photons mais comme l'énergie moyenne mesurée varie comme son carré, ce bruit est d'autant plus important que le nombre de photons est faible.

Le bruit thermique ou bruit de Johnson-Nyquist, est dû aux électrons générés spontanément durant la pose et la lecture. Il dépend fortement de la température, et varie proportionnellement au temps de pose pour une température donnée. Ce bruit est à peu près blanc et sa densité de probabilité est très proche d'une densité de probabilité gaussienne.

Le bruit de lecture se produit lors de la mesure du nombre de charges de chaque pixel. Il est dû d'une part à l'efficacité du transfert de charges, d'autre part à la précision de l'amplification analogique. Ces deux quantités diminuent quand la vitesse de lecture augmente. Dans la plupart des cas, le bruit de lecture est supposé gaussien avec un écart type d'une dizaine d'électrons par pixel et il intervient de façon indépendante une fois lors de chaque mesure.

Le bruit de quantification est dû à la quantification d'une valeur continue sur un nombre fini de niveaux lors de la conversion analogique/numérique en vue d'un stockage et d'un traitement par ordinateur. Ce bruit de quantification correspond à la différence entre l'intensité reçue par le pixel et le niveau discret affecté à ce pixel lors de la conversion analogique-numérique. C'est donc un bruit uniforme d'une largeur d'un niveau de quantification.

1.6.2 Incertitudes de modélisation

Les incertitudes sur les observables liées à la modélisation, définie à la section 1.3.4 sont les plus compliquées à caractériser. Elles peuvent cependant être séparées en trois catégories :

Le bruit de montage désigne toutes les incertitudes liées aux différents éléments de l'appareillage (lentilles, miroirs, diaphragmes...) et à la façon dont ceux-ci sont ajustés. Certains paramètres de ces composants (focale, ouverture...) peuvent être fixés une fois pour toutes dans le modèle, d'autres doivent être étalonnés avant la mesure. Cependant, il arrive qu'ils ne soient connus qu'approximativement, et ces incertitudes ont des répercussions sur le modèle pas toujours faciles à établir. De même, des objets parasites (poussières, vitre, supports...) totalement négligés dans le modèle, peuvent avoir un impact sur celui-ci.

Le bruit de caméra qui peut être vu comme une partie des incertitudes de montage correspond aux incertitudes liées à la nature du capteur. Il est essentiellement dû à l'intégration sur le capteur. En effet, la taille et le taux de remplissage des pixels produisent un filtrage passe-bas d'autant plus important que le taux de remplissage est élevé. Si ce filtrage n'est pas inclus dans le modèle il peut être considéré comme un bruit. On peut y ajouter les incertitudes dues à l'échantillonnage spatial. En effet, si le signal enregistré présente des fréquences supérieures à la fréquence d'échantillonnage, alors le moiré résultant peut être modélisé par un bruit.

Le bruit de modèle contient toutes les incertitudes dues aux termes négligés et aux hypothèses faites pour venir à bout de son calcul ou simplement l'accélérer (comme l'approximation circulante). Ces incertitudes contiennent en particulier les erreurs liées aux approximations faites sur la formation des données ; comme par exemple, le fait de considérer que le flou est isotrope alors qu'il est faiblement anisotrope...

1.6.3 ANNEXE : Type de distribution de bruit

Nous présentons les densités de probabilité les plus utilisées pour décrire des bruits. Toutefois la densité de probabilité gaussienne ou normale est de loin la plus utilisée car elle rend les calculs analytiques possibles. De plus, lorsque l'on ne connaît pas la statistique de plusieurs bruits additifs, il est possible d'approcher leur somme par une distribution gaussienne (LANE, 1996).

1.6.3.1 Distribution Gaussienne

La distribution Gaussienne aussi appelée distribution Normale est définie dans un espace de dimension N par :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\mathbf{C})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\right), \quad (1.138)$$

où \mathbf{x}_0 est la moyenne et \mathbf{C} la matrice de covariance. Elle est notée $\mathcal{N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{C})$. Elle est centrale dans les méthodes de type "moindres carrés".

1.6.3.2 Distribution de Laplace

La distribution de Laplace correspond à une distribution normale avec une norme ℓ_1 au lieu de ℓ_2 . En dimension 1 on a :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\sigma} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}{\sigma}\right), \quad (1.139)$$

où \mathbf{x}_0 est la moyenne et σ la dispersion moyenne. Elle présente un lien avec les moindres valeurs absolues.

1.6.3.3 Distribution Gaussienne Généralisée

Les distributions de Gauss et de Laplace peuvent être vues comme des cas particuliers d'une même distribution utilisant respectivement les normes ℓ_2 et ℓ_1 . La distribution gaussienne généralisée, les généralise aux normes ℓ_p (TARANTOLA, 2005) :

$$f_p(\mathbf{x}) = \frac{p^{1-1/p}}{2\sigma\Gamma(1/p)} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^p}{p(\sigma)^p}\right), \quad (1.140)$$

où Γ est la fonction gamma, \mathbf{x}_0 la moyenne et σ la dispersion moyenne.

1.6.3.4 Distribution Cauchy-Lorentzienne

Cette distribution connue sous le nom de distribution de Cauchy, de Lorentz ou encore Breit-Wigner. Elle s'écrit :

$$\frac{1}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]} \quad (1.141)$$

où γ est son facteur d'échelle et x_0 son mode. Cette distribution possède la particularité de ne pas avoir de moments statistiques, en particulier ni moyenne ni variance. Par contre son mode et sa médiane sont égales.

1.6.3.5 Distribution de Poisson

La distribution de Poisson concerne la distribution d'événements rares comme par exemple le nombre de photons reçus par un pixel par intervalle de temps. Elle est définie pour des entiers positifs k :

$$p(k; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad (1.142)$$

où λ est un paramètre positif (dans notre exemple le nombre moyen de photons). Lorsque celui-ci est grand (> 10), cette loi est très proche d'une distribution gaussienne de variance et de moyenne λ . La distribution de Poisson a eu lieu simultanément à la distribution des pains avec un rapport d'un poisson pour trois pains.

1.6.3.6 Distribution Uniforme

Dans cette distribution, x est équiprobable à l'intérieur d'un support de largeur L et de centre x_0 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{L} & \text{si } x_0 - \frac{1}{2}L \leq x \leq x_0 + \frac{1}{2}L, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.143)$$

Déconvolution de données multidimensionnelles

Après avoir illustré l'introduction aux problèmes inverses avec le cas de la déconvolution d'image, nous exposons dans ce chapitre la déconvolution de données multidimensionnelles hétérogènes, c'est-à-dire de données à plusieurs dimensions dont les dimensions ont des significations, des unités physiques différentes. Pour cela nous utilisons l'approche problèmes inverses décrits au chapitre 1. Nous introduisons une régularisation séparable où chaque dimension est régularisée de manière indépendante. Enfin, cette approche sera illustrée par deux applications différentes : (i) la déconvolution de données multi-spectrales pour l'astronomie et (ii) la déconvolution d'images couleurs acquises avec un seul capteur.

*Cette méthode et ses résultats ont fait l'objet d'une communication dans deux conférences internationales (SOULEZ *et al.*, 2008b,c).*

2.1 Description

L'observation d'un objet est généralement perturbée et conduit à des données déformées. Ces perturbations sont d'une part un flou et d'autre part du bruit intrinsèque à toute mesure. Le flou peut être de plusieurs natures, il peut être lié à l'instrument (*e.g.* diffraction, aberrations optiques...), aux mouvements relatifs de l'instrument et de l'objet pendant le temps de pose (flou de bougé) et à l'environnement entre l'objet et l'instrument (*e.g.* turbulence atmosphérique, absorption et diffusion dans le milieu de propagation...).

2.1.1 Formation des données

Le lien entre les données et l'objet observé est donné par la relation :

$$y(s) = \int h(s|s') x(s') ds' + b(s), \quad (2.1)$$

où sont définis :

L'objet : L'objet ou plus généralement la scène x que l'on observe est multidimensionnel, c'est-à-dire qu'en plus de ses dimensions latérales, il est susceptible d'être observé à dif-

férentes profondeurs, longueurs d'onde, intervalles de temps... Cette objet est continu et en tout point de coordonnées $s = \{r, z, \lambda, t\}$ il présente une intensité $x(s)$. Dans ce système de coordonnées, $r = \{x, y\}$ représente les deux dimensions latérales, z la profondeur, λ la longueur d'onde et t le temps. Cet objet peut encore présenter des dimensions supplémentaires (e.g. la polarisation) suivant les grandeurs physiques que l'on observe.

Les données : Les données $y(s)$ résultent de l'observation de cet objet suivant toutes ses dimensions. Dans de nombreux cas, elle peuvent être décrites dans le même système de coordonnées s que les données.

La fonction d'étalement de point (PSF) : Cette fonction $h(s|s')$ d'étalement de point, abrégée en PSF (pour Point Spread Function), donne la distribution d'intensité observée en s pour une source ponctuelle placée en s' . Cette PSF caractérise complètement le flou présent dans les données.

Le bruit : L'observation est polluée par un bruit $b(s)$ dont l'origine a été décrite à la section 1.6 du chapitre précédent (page 47).

2.1.2 Hypothèses simplificatrices

Dans ce travail nous nous attachons à résoudre un sous-problème de ce problème de reconstruction. En effet, plusieurs hypothèses simplificatrices sont posées de manière à en faciliter la résolution :

2.1.2.1 Discrétisation

Les données sont, par définition, échantillonnées sur un nombre fini de pixels ; il est raisonnable d'estimer l'objet dans ce même espace des pixels. Lorsque les données y sont échantillonnées suivant une grille rectangulaire de N_y pixels, à Z_y profondeurs, L_y longueurs d'onde et T_y trames temporelles, l'équation (2.1) peut se réécrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (2.2)$$

où l'objet x et les données y sont des vecteurs pouvant être de tailles différentes et b un vecteur de même taille que y correspondant au bruit additif. x est un vecteur de taille $(N_x \cdot Z_x \cdot L_x \cdot T_x)$, où toutes les dimensions sont "empilées" au sens où $x = [x(1, 1, 1, 1), x(2, 1, 1, 1), \dots, x(N, 1, 1, 1), x(1, 2, 1, 1), \dots, x(N_x, Z_x, L_x, T_x)]^T$. Les vecteurs y et b sont de taille $(N_y \cdot Z_y \cdot L_y \cdot T_y)$. H est une matrice de taille $((N_x \cdot Z_x \cdot L_x \cdot T_x) \times (N_y \cdot Z_y \cdot L_y \cdot T_y))$.

2.1.2.2 Invariance par translation

Seules les déformations isoplanétiques seront considérées, c'est-à-dire qu'on supposera la PSF invariante par translation de sorte que la fonction $h(s|s')$ ne dépend que de la distance entre s et s' :

$$h(s|s') = h(s - s'). \quad (2.3)$$

Dans ce cas la déformation est plus précisément décrite par un *produit de convolution* noté " $*_s$ " et défini par :

$$(x *_s y)(s) = \int x(s') h(s - s') ds'. \quad (2.4)$$

L'équation (2.1) devient donc :

$$y(\mathbf{s}) = (\mathbf{x} *_s \mathbf{h})(\mathbf{s}) + b(\mathbf{s}). \quad (2.5)$$

Dans le cas discret, sous l'approximation circulante déjà décrite à la section 1.4.1 (page 17), ce produit de convolution peut être vu comme une multiplication dans l'espace de Fourier :

$$\hat{y}(\mathbf{u}) = \hat{h}(\mathbf{u}) \hat{x}(\mathbf{u}) + \hat{b}(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u}. \quad (2.6)$$

Cette hypothèse est très restrictive car elle écarte une partie importante des flous rencontrés en imagerie et en particulier les flous liés aux mouvements indépendants des différentes parties de la scène observée et aux rotations. De plus, si la PSF varie lentement dans le champ (comme dans le cas de la turbulence par exemple), cela contraint à considérer une partie seulement du champ où le flou est approximativement constant. Cette hypothèse d'isoplanétisme jumelée à l'approximation circulante permet de simplifier grandement les calculs et de n'avoir à estimer la PSF qu'en un seul point.

Cependant, pour des données multidimensionnelles, l'échantillonnage latéral (selon \mathbf{r}) est souvent bien plus important que celui selon les autres dimensions. Il est dans ce cas possible d'augmenter légèrement la complexité du problème en relaxant cette hypothèse d'invariance de la PSF suivant ces autres dimensions. On considère alors la PSF invariante uniquement par translation latérale suivant \mathbf{r} et pouvant varier suivant les autres dimensions. On aura alors :

$$y(\mathbf{s}) = \iiint \left(x(\mathbf{s}') *_r h(\mathbf{s} | z', \lambda', t') \right) dz d\lambda dt + b(\mathbf{s}), \quad (2.7)$$

Sous cette hypothèse, l'opération de reconstruction permettant d'estimer $x(\mathbf{s})$ d'après $y(\mathbf{s})$ et $h(\mathbf{s}|\mathbf{s}')$ est aussi appelée *déconvolution*. La matrice \mathbf{H} étant toujours de forme *Block Toeplitz with Toeplitz Block (BTTB)*, l'application rapide de cette matrice peut être effectuée par bloc dans l'espace de Fourier.

Sans cette hypothèse d'isoplanétisme, il serait toutefois possible de reconstruire l'objet en utilisant les outils décrits dans ce chapitre mais au prix de calculs numériques bien plus longs et surtout à condition d'avoir estimé préalablement \mathbf{h} en tout point.

2.2 La déconvolution : un problème inverse

L'équation (2.1) exprime le problème direct ; l'opération de reconstruction permettant de retrouver l'objet d'origine est typiquement un problème inverse, c'est-à-dire que l'on doit estimer l'objet $\mathbf{x}(\mathbf{s}')$ d'après les données $\mathbf{y}(\mathbf{s}')$ et la PSF $\mathbf{h}(\mathbf{s}|\mathbf{s}')$. En utilisant les hypothèses faites à la section précédente, le problème de reconstruction devient un problème de déconvolution. Il consiste à estimer le vecteur \mathbf{x} d'après le vecteur \mathbf{y} et la matrice \mathbf{H} comme cela a déjà été évoqué, dans le cas à deux dimensions, à la section 1.4.1 du chapitre précédent (page 17). Nous proposons donc de résoudre ce problème inverse en utilisant les outils présentés au chapitre précédent. Cette résolution se fera plus précisément au sens du *maximum a posteriori*, estimant la densité de probabilité *a posteriori* présentée à la section 1.3.5 du chapitre précédent (page 15) et dont un exemple est donné à la section 1.4.6.

La solution au sens du *maximum a posteriori* est le vecteur $\mathbf{x}^{(\text{MAP})}$ qui minimise l'expression (1.66) :

$$\mathbf{x}^{(\text{MAP})} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left(\Phi_{\text{MV}}(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \mathbf{H}) + \Phi_{\text{Regul}}(\mathbf{x}) \right), \quad (2.8)$$

où Φ_{MV} est le terme de vraisemblance (ou d'attache aux données) défini à la section 1.4.3 (page 21). Son expression dépend de la statistique du bruit. Φ_{Regul} est le terme de régularisation qui permet d'introduire un certain *a priori* dans la solution.

2.2.1 Une régularisation séparable

Dans le cas multidimensionnel étudié ici, la régularisation doit tenir compte de la nature non homogène des différentes dimensions. C'est pourquoi nous avons décidé de définir ce terme de régularisation Φ_{Regul} de manière séparable suivant chaque dimension. On a donc :

$$\Phi_{Regul}(\mathbf{x}) = \Theta_S(\mathbf{x}) + \Theta_Z(\mathbf{x}) + \Theta_\Lambda(\mathbf{x}) + \Theta_T(\mathbf{x}), \quad (2.9)$$

avec un terme de régularisation spécifique le long de chaque dimension :

- Θ_S la régularisation spatiale ou latérale,
- Θ_Z la régularisation longitudinale (en profondeur),
- Θ_Λ la régularisation spectrale,
- Θ_T la régularisation temporelle.

Notons ici que la dimension longitudinale, bien qu'exprimée dans la même unité, est séparée des dimensions latérales. En effet, d'une part l'échantillonnage diffère souvent beaucoup les dimensions latérales et longitudinale et d'autre part la dimension longitudinale est affectée par des phénomènes comme la diffraction et l'occultation par des parties moins profondes de la scène. Elle nécessite donc un traitement particulier.

Ces termes de régularisation s'appliquent chacun selon une seule dimension (ou 2 dimensions homogènes dans le cas de la coordonnées latérale r) de l'objet comme suit :

$$\Theta_S(\mathbf{x}) = \sum_{z,\lambda,t} \alpha_{z,\lambda,t}^S \Omega_S(\mathbf{x}_{z,\lambda,t}), \quad (2.10)$$

$$\Theta_Z(\mathbf{x}) = \sum_{r,\lambda,t} \alpha_{r,\lambda,t}^Z \Omega_Z(\mathbf{x}_{r,\lambda,t}), \quad (2.11)$$

$$\Theta_\Lambda(\mathbf{x}) = \sum_{r,z,t} \alpha_{r,z,t}^\Lambda \Omega_\Lambda(\mathbf{x}_{r,z,t}), \quad (2.12)$$

$$\Theta_T(\mathbf{x}) = \sum_{r,z,\lambda} \alpha_{r,z,\lambda}^T \Omega_T(\mathbf{x}_{r,z,\lambda}). \quad (2.13)$$

Ainsi chaque terme de régularisation Θ est décomposé en une somme de fonctions Ω appliquées sur chaque plan orthogonal à la dimension considérée, chacun muni de son propre hyper-paramètre α . Selon cette notation, les dimensions en indice correspondent aux dimensions "spectatrices". Par exemple, $\mathbf{x}_{z,\lambda,t}$ correspond à l'image 2D prise à $\{z, \lambda, t\}$ fixés et la mesure des propriétés spatiales de cette coupe $\Omega_S(\mathbf{x}_{z,\lambda,t})$ correspond à un hyper-paramètre $\alpha_{z,\lambda,t}^S$.

Chaque hyper-paramètre doit être fixé avant l'estimation de $\mathbf{x}^{(MAP)}$. Paradoxalement, formulé ainsi, il y a d'avantage d'hyper-paramètres que de paramètres de l'objet à reconstruire. On verra toutefois dans la suite de ce chapitre, comment il est possible de réduire leur nombre. De même, les différentes métriques adaptées à chaque dimension seront introduites successivement.

2.3 Cas 2D : La déconvolution d'images

Si l'on considère simplement un objet à deux dimensions $r = \{x, y\}$, le terme de régularisation s'écrit alors $\Phi_{\text{Regul}}(\mathbf{x}) = \Theta_S(\mathbf{x}) = \alpha^S \Omega_S(\mathbf{x})$ et le problème devient le problème de déconvolution d'image déjà évoqué à la section 1.4.1 du chapitre précédent (page 17). Dans cette section nous nous attacherons seulement à détailler la résolution au sens du *maximum a posteriori* et étudierons les différentes normes adaptées aux dimensions latérales. Puis la solution au sens du *maximum a posteriori* $\mathbf{x}^{(\text{MAP})}$ sera estimée, dans le cas d'un bruit gaussien — c'est-à-dire avec un terme d'attache aux données quadratique — en minimisant $\Phi_{\text{MAP}}(\mathbf{x})$ avec l'algorithme VMLM. Pour illustrer ces différentes normes, nous utiliserons l'image floue simulée du cameraman utilisée au chapitre précédent (PSF : disque de 7 pixels de rayon, bruit gaussien de variance $\sigma_b = 1$ niveau de quantification).

2.3.1 Forme générale de la régularisation

D'une manière générale la plupart des régularisations s'écrivent sous la forme :

$$\Omega_S(\mathbf{x}) = \|\mathbf{D} \cdot \mathbf{x}\|, \quad (2.14)$$

où $\|\cdot\|$ symbolise une mesure du résultat de l'application de l'opérateur linéaire \mathbf{D} sur \mathbf{x} .

2.3.2 La norme quadratique : Régularisation de Tikhonov

La norme quadratique ou euclidienne a été utilisée dès les premiers travaux sur la régularisation. Elle a été introduite par le mathématicien russe A.N. Tikhonov en 1943 (TIKHONOV, 1943; TIKHONOV *et al.*, 1977). Elle est toujours employée en raison de ses bonnes propriétés qui permettent un calcul analytique de la solution et une estimation facile des hyper-paramètres par GCV (voir Sec. 1.4.7.1). Dans ce cas, l'équation (2.14) peut aussi s'écrire :

$$\Omega_S(\mathbf{x}) = \sum_k (\mathbf{D} \cdot \mathbf{x})_k^2. \quad (2.15)$$

On peut donner une interprétation de cette régularisation : la supposition *a priori* que $(\mathbf{D} \cdot \mathbf{x})$ suit une distribution normale multivariée.

Régularisation simple Tikhonov a proposé cette régularisation avec $\mathbf{D} = \mathbf{I}$, l'identité. Cela signifie que l'on considère que les valeurs des pixels de l'objet sont indépendantes et distribuées de manière gaussienne autour de zéro. Cela a pour effet d'empêcher un bruit trop important dans la reconstruction mais comme cet *a priori* n'est pas réaliste, on peut constater de nombreux artefacts dans la reconstruction présentée à la figure 2.1, en particulier, des "rebonds" autour des bords francs.

Gradient : Comme on l'a déjà mentionné à la section 1.4.6.2 du chapitre précédent, un meilleur *a priori* sur l'objet est de le considérer comme relativement lisse. Dans ce cas \mathbf{D} doit être un opérateur différentiel permettant d'effectuer la régularisation uniquement sur les hautes fréquences de l'objet. La régularisation la plus utilisée est la régularisation sur le gradient, déjà décrite au chapitre précédent (pour un voisinage V8), et dont le résultat est affiché sur la figure 2.2. Dans ce cas, la régularisation est appliquée séparément sur chacun des



FIG. 2.1 — Meilleure reconstruction ($\alpha^S = 2.1 \times 10^{-3}$) avec $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ et la norme quadratique (EQM = 23.8 dB).



FIG. 2.2 — Meilleure reconstruction ($\alpha^S = 3.6 \times 10^{-4}$) avec une régularisation de type gradient quadratique. (EQM = 23.1 dB).

gradients (verticaux ∇_N , horizontaux ∇_E et les deux gradients diagonaux ∇_{NE} et ∇_{SE}) :

$$\Omega_S(\mathbf{x}) = \left\| \frac{\nabla_N \mathbf{x}}{d_N} \right\|_2^2 + \left\| \frac{\nabla_E \mathbf{x}}{d_E} \right\|_2^2 + \left\| \frac{\nabla_{NE} \mathbf{x}}{d_{NE}} \right\|_2^2 + \left\| \frac{\nabla_{SE} \mathbf{x}}{d_{SE}} \right\|_2^2, \quad (2.16)$$

où d représente la distance entre deux pixels dans le sens considéré. On peut écrire cela de manière plus générale :

$$\Omega_S(\mathbf{x}) = \sum_r \sum_{r' \in C_r} \left\| \frac{x_r - x_{r'}}{d(r, r')} \right\|_2^2, \quad (2.17)$$

où C_r est la clique du pixel x_r , c'est-à-dire l'ensemble des voisins de x_r qui sont aussi voisins entre eux suivant le voisinage considéré (ici V8). Cette régularisation suppose implicitement que l'histogramme des gradients est gaussien.

Autres opérateurs : Dans le cas du traitement d'image, d'autres opérateurs \mathbf{D} ont été proposés. Le bruit corrompant plus fortement les hautes fréquences, ce filtre doit être un passe-haut et peut être défini pour la bande de fréquences spatiales adaptées au problème traité. On trouvera par exemple, sur la figure 2.3 présenté le résultat de la reconstruction avec un opérateur dit de "rugosité" (variante du Laplacien) utilisé parfois en raison de ses propriétés facilitant le calcul numérique et généré par le noyau :

$$\mathbf{K}_{\text{rough}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & -\frac{4}{1} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$



FIG. 2.3 — Meilleure reconstruction ($\alpha^S = 9.7 \times 10^{-3}$) avec une régularisation de type “rugosité” avec la norme quadratique (EQM = 23.1 dB).

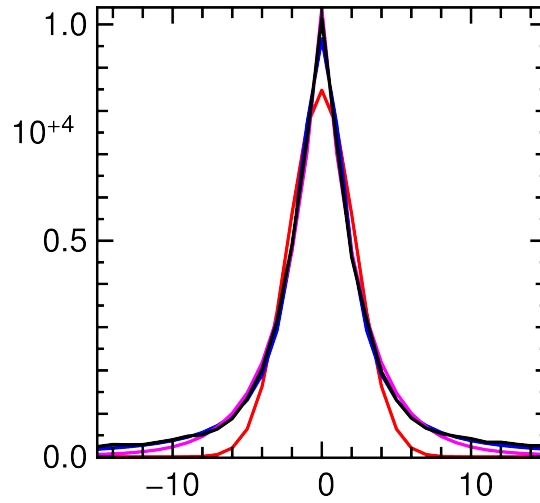


FIG. 2.4 — Histogramme (en noir) des différences dans le sens horizontal (∇_E) de l'image originale du Cameraman (1.1), et ses modélisations par différents types de fonctions de distribution : gaussienne en rouge, laplacienne en bleu et lorentzienne en magenta.

2.3.3 La norme ℓ_1

L'utilisation de l'opérateur “gradient” avec la norme quadratique définie à la section précédente fait l'hypothèse que l'histogramme des différences entre pixels voisins est gaussien. En pratique, à l'instar de celui présenté à la figure 2.4, l'histogramme des gradients d'une image naturelle est rarement gaussien. S'il possède un cœur d'allure gaussienne centré autour de zéro, il y a aussi un nombre significatif de valeurs correspondant à des différences entre pixels voisins élevées. En effet, le cœur correspond aux petites variations liées au bruit et à la texture et les grandes variations correspondent aux frontières abruptes entre des zones différentes. Si l'on tente d'ajuster, en rouge sur la figure 2.4, un modèle gaussien (voir 1.6.3.1) à cet histogramme, on peut constater que les valeurs aux extrémités sont sous-estimées. Le fait que ces valeurs soient sous-estimées par un *a priori* gaussien, explique pourquoi l'utilisation de la norme quadratique ne permet pas de reconstruire correctement les bords francs de l'image ; voir sur les figures 2.1, 2.2 et 2.3 les rebonds autour de ces bords francs.

D'autres modèles peuvent être ajustés à cet histogramme. Par exemple, la distribution de Laplace (voir 1.6.3.2) représentée en bleu sur la figure 2.4, semble mieux modéliser cet histogramme. Cette distribution de Laplace correspond aux moindres valeurs absolues. Appliquer cet *a priori* consiste à utiliser une norme “valeur absolue” (ℓ_1) dans l'équation (2.14). Dans le cas où la régularisation s'applique sur les gradients, cela consiste à remplacer la norme quadratique (ℓ_2) par la norme ℓ_1 dans l'équation (2.17). On a alors :

$$\Omega_S(x) = \sum_r \sum_{r' \in C_r} \left| \frac{x_r - x_{r'}}{d(r, r')} \right|, \quad (2.19)$$



FIG. 2.5 — Meilleure reconstruction ($\alpha^S = 8 \times 10^{-3}$) avec une régularisation de type gradient et la norme ℓ_1 (EQM = 20.9 dB).

Dans ce cas, la régularisation n'est plus quadratique et la reconstruction doit être faite de manière itérative. Par contre cette norme est convexe et cette reconstruction converge toujours vers le même minimum global de la fonction de coût. Le résultat est présenté à la figure 2.5. On peut y voir que, comme on s'y attendait, les bords francs ne sont plus lissés par la régularisation. L'erreur de reconstruction (EQM = 20.9 dB) est inférieure à celle du filtre de Wiener (EQM = 22.2 dB) qui est la meilleure reconstruction par un filtre linéaire. Cela démontre l'intérêt des régularisations non linéaires.

2.3.4 Autres normes/métriques

De nombreuses autres lois de distribution peuvent être ajustées sur l'histogramme, comme la lorentzienne par exemple, tracée en magenta sur la figure 2.4. On peut en particulier remplacer la norme dans l'équation (2.14) par une distance particulière $\varphi(x_{r,t,\lambda} - x_{r',t,\lambda})$ mesurant de l'écart entre deux pixels $x_{r,t,\lambda}$ et $x_{r',t,\lambda}$ dans le cas du gradient.

$$\Omega_S(\mathbf{x}) = \sum_r \sum_{r' \in C_r} \varphi \left(\frac{x_{r,t,\lambda} - x_{r',t,\lambda}}{d(r, r')} \right), \quad (2.20)$$

De nombreuses métriques ou fonctions de potentiel ont été proposées (voir [CHARBONNIER et al. , 1997](#); [NIKOLOVA, 1996](#)). Pour être une norme cette fonction $\varphi(t)$ ($t = x_{r,t,\lambda} - x_{r',t,\lambda}$) doit vérifier les propriétés suivantes :

- **Positive** : $\varphi(t) \geq 0$,
- **Définie** : $\varphi(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$,
- **Symétrique** : $\varphi(-t) = \varphi(t)$, $\forall t$,
- **Croissante monotone** : $t > t' \Rightarrow \varphi(t) > \varphi(t')$,

Quelques unes d'entre elles sont tracées sur la figure 2.6. Outre les normes ℓ_1 , et ℓ_2 , on y trouve les normes :

- $\ell_2-\ell_1$, approximée par :

$$\varphi_{\ell_2-\ell_1}(t) = 2\eta^2 \left(\frac{|t|}{\eta} - \log \left(1 + \frac{|t|}{\eta} \right) \right), \quad (2.21)$$

- **lorentzienne**, approximée par :

$$\varphi_{\text{Lorentz}}(t) = \eta^2 \log \left(1 + \frac{t^2}{2\eta^2} \right), \quad (2.22)$$

- **Geman-McClure**, proposée par [GEMAN et McCLURE \(1985\)](#) :

$$\varphi_{\text{GM}}(t) = \eta^2 \frac{t^2}{\eta^2 + t^2}, \quad (2.23)$$

- $\ell_2-\ell_0$, approximée par :

$$\varphi_{\ell_2-\ell_0}(t) = \eta^2 \arctan \left(\frac{t^2}{\eta^2} \right), \quad (2.24)$$

où η est un paramètre positif d'échelle.

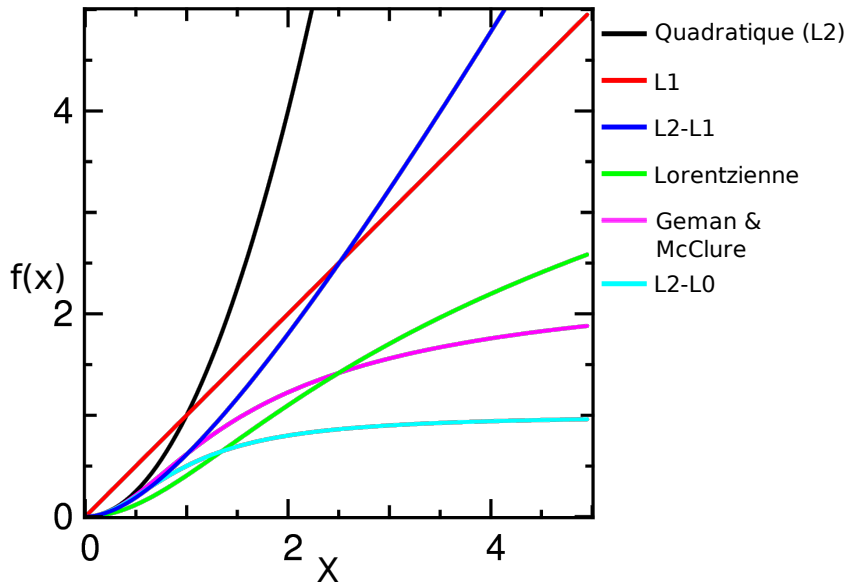


FIG. 2.6 — Présentation des différentes métriques : Quadratique, ℓ_1 , $\ell_2-\ell_1$, Lorentzienne, Geman-McClure et $\ell_2-\ell_0$ (dans tout les cas $\eta = 1$).

Suivant le problème considéré, plusieurs critères peuvent guider le choix de ces fonctions :

- **Être dérivable continûment** : Cette propriété est essentielle pour faciliter la convergence des algorithmes d'optimisation continue car l'optimisation est très perturbée au voisinage d'une discontinuité. En particulier, cela est vrai des normes ℓ_p avec $p \leq 1$ telle que ℓ_1 ne sont pas dérivables en 0.
- **Convexité** : Associée à un critère d'attache aux données convexe (e.g. moindres carrés), cette propriété assure que la fonction de coût minimisée ne possède qu'un seul minimum. La convexité permet de prouver la convergence vers la même solution quelles que soient les conditions initiales. Les normes ℓ_p sont convexes si $1 \leq p < \infty$ à la différence des fonctions Lorentzienne et Geman-McClure.

- **Comportement quadratique** : Plus la fonction a un comportement proche d'une fonction quadratique, plus la convergence sera rapide car les approximations faites par l'optimiseur sont fondées sur des approximations quadratiques. En particulier les fonctions dont la dérivée seconde n'est pas strictement positive comme les normes ℓ_p avec $p \leq 1$ ont des comportements très éloignés d'une fonction quadratique. Par exemple si la fonction à minimiser est la norme ℓ_1 , sa dérivée première est constante et la longueur du pas de l'optimisation sera très difficile à contrôler, augmentant fortement le temps de convergence.
- **Comportement à l'infini** : Certaines de ces fonctions comme Geman-McClure et $\ell_2-\ell_0$, ont une asymptote horizontale finie à l'infini. Des auteurs (en particulier GEMAN, 1987; GEMAN et REYNOLDS, 1992) ont suggéré que cette asymptote horizontale était nécessaire à la préservation des bords. Comme nous le verrons à la section suivante, cela ne semble pas nécessaire en pratique.

Notre exemple du cameraman a été déconvolué en utilisant une régularisation de type gradient avec la norme $\ell_2-\ell_1$. Cette norme $\varphi_{\ell_2-\ell_1}(t)$ a un comportement proche de ℓ_2 quand $\frac{|t|}{\eta}$ est petit devant 1 et, à l'inverse, tend vers la norme ℓ_1 quand $\frac{|t|}{\eta} \gg 1$. Sachant que les petites valeurs de l'histogramme des différences correspondent au bruit et les valeurs élevées aux bords francs, on peut donner une interprétation à cette norme. Le paramètre η peut être vu comme proportionnel à un niveau en dessous duquel la différence entre deux pixels voisins est considérée comme étant due au bruit et doit en conséquence être lissée. C'est le rôle de la partie ℓ_2 de $\varphi_{\ell_2-\ell_1}$. A l'inverse, une différence importante devant ce seuil η est considérée comme liée à la présence d'un bord franc et doit donc être préservée. C'est le rôle de la partie ℓ_1 . Cette interprétation peut être étendue à la norme $\ell_2-\ell_0$ et aux autres normes présentées dans cette section, la norme $\ell_2-\ell_1$ ayant l'intérêt principal d'être convexe.

Le résultat est présenté à la figure 2.7. On constate que ce résultat est très proche de celui où la norme ℓ_1 est seule. De plus lors de l'estimation des paramètres optimaux, il a été possible d'estimer qualitativement l'influence de η . J'ai pu donc constater qu'en dessous d'un certain seuil (autour de l'unité), lorsque l'on avait quitté le régime ℓ_2 ; la valeur de η n'avait alors presque plus d'influence sur la solution finale qui est toujours très proche de la solution avec ℓ_1 seule. Par contre, la vitesse de convergence diminuait au fur et à mesure que l'on diminuait η .

2.3.5 La parcimonie

Depuis la fin des années 1990, un nouveau type *d'a priori* est devenu très usité dans le traitement d'image et même dans le traitement du signal en général. Cet *a priori*, selon le principe du rasoir d'Occam¹, est de favoriser les solutions les plus simples, c'est-à-dire de favoriser les solutions décrites par un nombre de coefficients minimal dans une représentation particulière appelée *représentation parcimonieuse*. Comme déjà mentionné à la section 1.4.4.4, les ondelettes sont une des représentations parcimonieuses les plus utilisées. Cette approche a donc d'abord été développée par la communauté travaillant sur les ondelettes, en particulier dans le cas de la compression et de l'élaboration du standard de compression d'image JPEG2000. Cette approche connaît un développement spectaculaire depuis le début des années 2000 et de nom-

¹du nom du frère franciscain ayant énoncé au XIV^e siècle le principe de raisonnement selon lequel la solution la plus simple est toujours la meilleure.



FIG. 2.7 — Meilleure reconstruction ($\alpha^S = 9.7 \times 10^{-3}$, $\eta = 1$) avec une régularisation de type gradient avec la norme $\ell_2 - \ell_1$ (EQM = 20.8 dB).



FIG. 2.8 — Meilleure reconstruction ($\alpha^S = 5.7 \times 10^{-2}$) avec une régularisation de type variation totale. (EQM = 21.0 dB).

breux résultats théoriques et applications se sont développés, en particulier dans le cadre du *Compressed Sensing* théorisé entre autre par [DONOHO \(2006\)](#) et [CANDES et WAKIN \(2008\)](#)².

En termes de régularisation, favoriser la parcimonie, c'est utiliser une norme qui "compte" le nombre de coefficients non nuls. La norme la plus simple pour cela est la norme ℓ_0 . Malheureusement, cette norme présente de très mauvaises propriétés; elle ne possède presque aucune des propriétés décrites à la section 2.3.4 (convexité, croissance monotone, dérivabilité en zéro...). Pour éviter les problèmes dus à la norme ℓ_0 lors de la résolution numérique, la majorité des auteurs utilise la norme ℓ_p convexe la plus proche c'est-à-dire la norme ℓ_1 . En pratique, on peut s'apercevoir que la solution fournie avec la norme ℓ_1 est très proche de celle fournie par ℓ_0 et donc que la norme ℓ_1 est une norme qui favorise la parcimonie bien qu'elle n'ait pas d'asymptote à l'infini.

En dehors de la décomposition sur une base d'ondelettes ou une base dérivée (noiselet, ridgelet...), une bonne représentation parcimonieuse est l'espace des gradients l'image. En effet, minimiser le nombre de coefficient dans l'espace des gradients permet de favoriser l'image la plus lisse sans pénaliser les bords francs. Ainsi, appliquer une régularisation de type gradient avec la norme ℓ_1 comme présenté à la section 2.3.3 revient à favoriser la parcimonie comme la théorie du *Compress Sensing*.

2.3.6 Autres formes de régularisations

De nombreuses autres formes de régularisation ont été proposées; parmi celles-ci on peut distinguer :

- **Variation Totale** : Toujours dans l'esprit de favoriser les solutions les plus lisses, [RUDIN et al. \(1992\)](#) ont proposé la régularisation dite de Variation Totale pour le dé-bruitage.

²le site <http://www.dsp.ece.rice.edu/cs/> regroupe de très nombreux travaux sur le "compressed sensing" et ses applications.

Dans le cas de la déconvolution, cette régularisation a été popularisée par [CHAN et WONG \(1998\)](#) :

$$\Omega_S(\mathbf{x}) = \sum_k \sqrt{(\nabla_E \cdot \mathbf{x})_k^2 + (\nabla_N \cdot \mathbf{x})_k^2}, \quad (2.25)$$

où ∇_E et ∇_N désignent les gradients verticaux et horizontaux. Comme son nom l'indique, cette régularisation favorise les solutions dont la variation totale est minimale. La meilleure reconstruction avec une régularisation "Total Variation" est présentée à la figure 2.8. Elle est très proche de la régularisation de type gradient avec une norme ℓ_1 .

- **Maximum d'entropie** : une régularisation couramment utilisée est la régularisation dite nég-entropie dérivée de la méthode proposée par [SKILLING et BRYAN \(1984\)](#) :

$$\Omega_S(\mathbf{x}) = \sum_k \left[p_k - x_k + x_k \log \left(\frac{x_k}{p_k} \right) \right], \quad (2.26)$$

où \mathbf{p} est une distribution *a priori*.

- **Mumford-Shah** : [MUMFORD et SHAH \(1989\)](#) ont proposé de modéliser une image en tant qu'union de régions stationnaires R_i séparées par des contours Γ . La fonction de régularisation associée est ainsi :

$$\Omega_S(\mathbf{x}; \nu) = \sum_i \sum_{k \in R_i} \left((\nabla_E \cdot \mathbf{x})_k^2 + (\nabla_N \cdot \mathbf{x})_k^2 \right) + \nu |\Gamma|, \quad (2.27)$$

où ν est un hyper-paramètre. Cette régularisation renforce les solutions les plus lisses par morceaux avec les contours les plus courts.

Enfin de nombreux autres types de régularisations existent et sont souvent adaptés à des problèmes spécifiques. De plus, il est tout à fait possible d'en utiliser plusieurs au prix d'une augmentation aussi le nombre d'hyper-paramètres.

2.3.7 Les méthodes par seuillages d'ondellettes

L'inconvénient majeur des algorithmes itératifs est que, suivant les cas, le temps de calcul peut être difficile à évaluer *a priori* car il dépend du nombre d'itération. Des algorithmes non-itératifs ont donc été proposés pour la déconvolution. Ils sont principalement basés sur une déconvolution par un filtre de Wiener suivi par un filtrage du bruit coloré présent dans la solution. Ce filtrage est effectué dans l'espace des ondellettes(?) avec seuillage adaptatif ([KALIFA et al. , 2003; ?](#)).



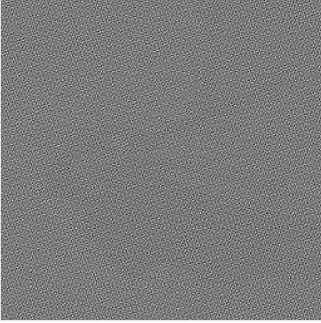
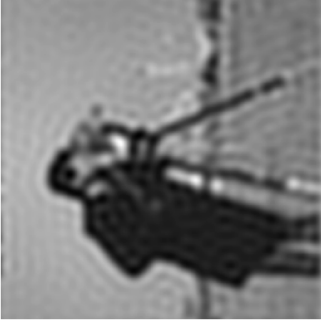


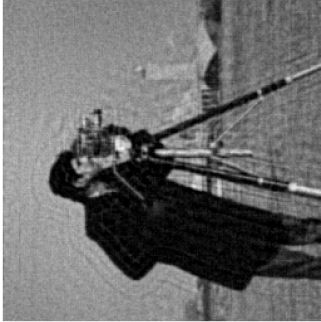
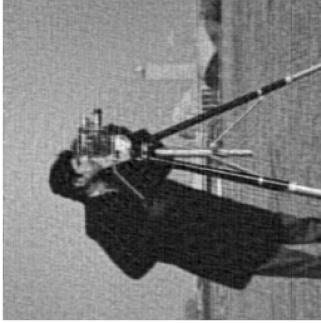

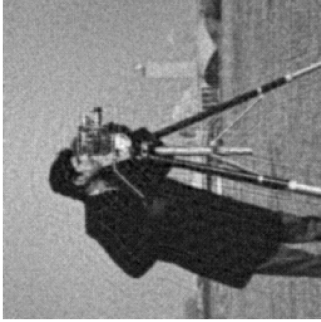
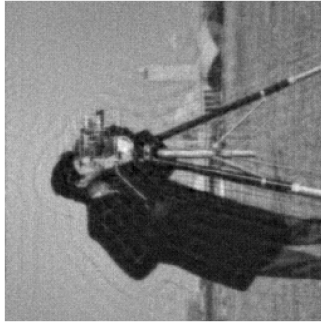
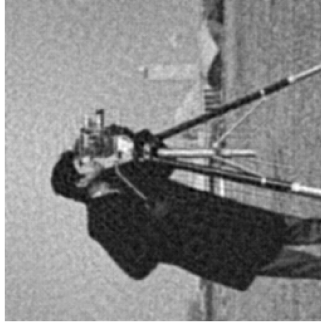



2.3.8 Conclusion

Dans cette section ainsi que dans la section 1.4 au chapitre précédent, nous avons décrit les différentes manières de résoudre le problème inverse de la déconvolution d'image. Les tableaux 2.1 et 2.2 donnent une synthèse des différentes méthodes exposées dans ce travail et de leurs résultats. Ces tableaux ne donnent qu'un aperçu de l'efficacité de ces méthodes et dans le cas du MAP, il est difficile de départager les méthodes présentées au vu de ces résultats. Pour cela, il faudrait les tester sur un important corpus d'images et pour différents types et niveaux de bruit mais ceci est en dehors du cadre de ce travail. On peut cependant constater que l'approche *maximum a posteriori* fournit les meilleurs résultats. C'est pourquoi la plupart des recherches actuelles utilisent ce critère. Bien sûr nous ne prétendons pas à l'exhaustivité

et il existe encore d'autres méthodes. Parmi celles-ci signalons en particulier les approches MAP basées sur des champs de Markov plus élaborés que ceux qui sont très proches des méthodes décrites ici (Markov cachés, Markov triplet ...). Notons aussi l'existence d'approches déconvolution et de segmentation conjointe comme celle proposée par [MIGNOTTE \(2006\)](#).

méthode	nombre d'itérations	temps de calcul (en s)	EQM en dB	N° de figure	Remarques
Inversion directe	1		68.1	Fig. 1.5	identique à inversion directe
Maximum de Vraisemblance	1		68.1	Fig. 1.5	$u_c = 20$
Coupure en fréquence	1		27.0	Fig. 1.9	$u_c = 40$
Coupure en fréquence	1		26.2	Fig. 1.10	algorithme VMLMB
Positivité	1350	20	38.8	Fig. 1.11	résultat très proche de Fig. 1.11
ISRA	+40000		38.8		
Limitation du nombre d'itérations	24		23.7	Fig. 1.14	
ISRA	375		23.6		résultat très proche de Fig. 1.16
Limitation du nombre d'itérations et positivité	25		23.5	Fig. 1.16	
Wiener	1		22.2	Fig. 1.18	Spectres du bruit et de l'objet connus
Wiener avec spectre de type $\alpha \ u\ ^\beta$	1		23.0		$\alpha = 0.0066$ et $\beta = 2.20$ déterminés par GCV
Wiener cas non stationnaire	1		38.	Fig. 1.20	Spectres du bruit et de l'objet connus
MAP : Gradient + ℓ_2	185	4.7	23.1	Fig. 1.19	$\mu = 3.6 \times 10^{-4}$
MAP : Gradient + ℓ_2			23.1	Fig. 1.21	Cas non stationnaire $\mu = 3.6 \times 10^{-4}$
MAP : Identité + ℓ_2	85	1.7	23.8	Fig. 2.1	$\alpha^S = 2.1 \times 10^{-3}$
MAP : Rugosité + ℓ_2	353	7.3	23.1	Fig. 2.3	$\alpha^S = 9.7 \times 10^{-3}$
MAP : Gradient + ℓ_1	1948	77	20.9	Fig. 2.5	$\alpha^S = 8 \times 10^{-3}$
MAP : Gradient + $\ell_2 - \ell_1$	223	9.2	20.8	Fig. 2.7	$\alpha^S = 9.7 \times 10^{-3}, \eta = 1$
MAP : Gradient + $\ell_2 - \ell_0$	2001	98	20.9		$\alpha^S = 200, \eta = 1$
MAP : Variation Totale	226	7.6	21.0	Fig. 2.8	$\alpha^S = 5.7 \times 10^{-2}$

TAB. 2.1 — Tableau récapitulatif des différentes méthodes de déconvolution d'image présentées. .

				
vérité	floue	Fig. 1.5 : Inversion directe	Fig. 1.9 : Coupure en fréquence (20)	Fig. 1.10 : Coupure en fréquence (40)
				
Fig. 1.11 : Positivité	Fig. 1.16 : Limitation du nombre d'itérations	Fig. 1.18 : Wiener	Fig. 1.20 : Wiener (Cas non stationnaire)	Fig. 1.19 : MAP : Gradient + ℓ_2
				
Fig. 2.1 : MAP : Identité + ℓ_2	Fig. 2.3 : MAP : Rugosité + ℓ_2	Fig. 2.5 : MAP : Gradient + ℓ_1	Fig. 2.7 : MAP : Gradient + $\ell_2 - \ell_1$	Fig. 2.8 : MAP : Variation Totale

Tab. 2.2 — Rappel des différents résultats des méthodes présentées pour la déconvolution d'image.

2.4 Déconvolution de données multi-spectrales

Après avoir décrit les régularisations spatiales dans le cadre de la déconvolution d'image, nous présentons dans cette section un exemple de déconvolution de données multidimensionnelles hétérogènes, à savoir la déconvolution de données multi-spectrales en astronomie.

A notre connaissance, peu de travaux ont été effectués dans le domaine de la déconvolution de données multi-spectrales. Notons cependant [AGUILERA *et al.* \(2003\)](#) qui ont utilisé une méthode de déconvolution de données multi-spectrales dans le cadre de l'étude des plasmas. Cependant cette méthode utilise un modèle de formation des données utilisant la physique des plasmas et n'est pas vraiment transposable à d'autres domaines. [COURBIN *et al.* \(2000\)](#); [LUCY et WALSH \(2003\)](#) ont développé une méthode de déconvolution spatiale de spectres obtenus avec un spectrographe à fente longue, dans le cas d'une distribution de sources ponctuelles proche de CLEAN. Ils traitent des données astronomiques pour l'étude des quasars avec des problématiques très proches de celles que nous avons rencontrées dans le cadre de SNIF et qui seront décrites dans cette partie. Cependant les données issues de spectrographes à fente n'ont que deux dimensions, l'une spatiale et l'autre spectrale ce qui induit des traitements assez différents.

2.4.1 Contexte : l'imagerie multi-spectrale en astronomie

La spectroscopie est utilisée depuis longtemps en astronomie pour étudier la composition chimique des objets célestes via la caractérisation de leur raies d'émission et d'absorption. Depuis une vingtaine d'années, des spectrographes à intégral de champ ont été développés pour connaître la distribution spatiale d'intensité à différentes longueurs d'onde pour des objets étendus (*e.g.* galaxies, nuage de poussière ...). Ces instruments fournissent une série d'images du même objet à différentes longueurs d'onde.

2.4.1.1 Le projet Supernova Factory

SuperNova Factory ([ALDERING *et al.*, 2002](#)) est une collaboration franco-américaine dont le but est la découverte et le suivi de supernovæ. Ce projet étudie les supernovæ relativement proches dont le décalage vers le rouge (redshift)³ est située entre 0.02 et 0.08; ceci dans la perspective d'estimer les paramètres cosmologiques Ω_m et Ω_Λ .

Les chandelles standard : un outil pour mesurer les constantes cosmologiques

La cosmologie est la science qui cherche à connaître à la fois le passé et l'avenir de l'univers à grande échelle. L'estimation des paramètres cosmologiques est crucial pour établir la validité des théories en cosmologie. En particulier, estimer la densité de masse de l'univers Ω_m , sa courbure Ω_k et sa densité de matière noire Ω_Λ (proportionnelle à la constante cosmologique Λ introduite par Einstein dans les équations de la relativité générale) permettrait de déterminer si l'univers est plat, fermé ou ouvert et si son expansion va se poursuivre indéfiniment ou non. C'est pourquoi de nombreux projets s'attachent à utiliser diverses observations astrophysiques pour déterminer ces paramètres. Parmi les projets ayant déjà produit des résultats,

³le décalage spectral z est égal au rapport entre la vitesse v de la source par rapport à l'observateur et la vitesse c de la lumière : $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$.

citons le Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) pour l'étude du fond cosmologique diffus, le Sloan Digital Sky Survey (SDSS) pour l'étude de la répartition des galaxies dans l'univers et l'estimation du pic acoustique baryonique et, le Supernova Cosmological Project (SCP) et le SuperNova Legacy Survey (SNLS) pour l'étude des supernovæ. Le résultat de certains de ces projets visant à mieux cerner ces paramètres cosmologiques sont représentés sur le diagramme de la figure 2.9.

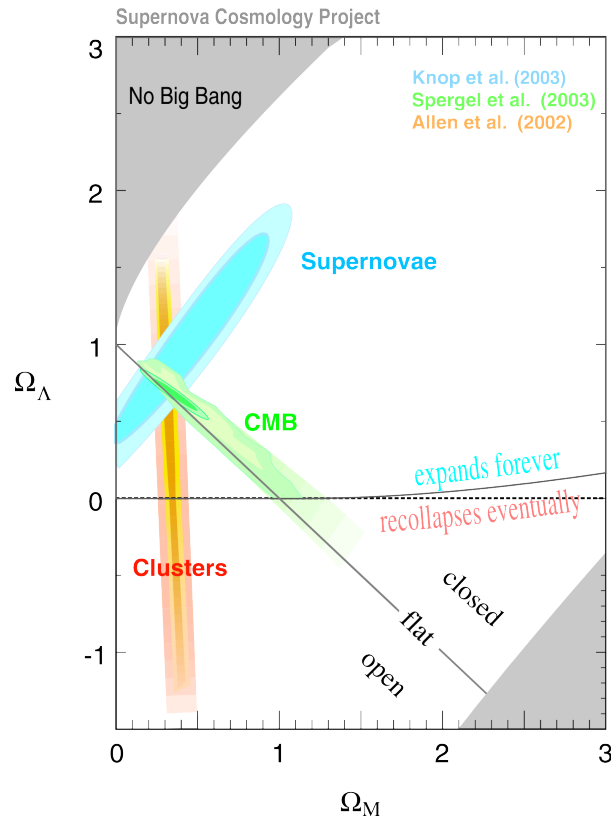


FIG. 2.9 — Contour des valeurs possibles des paramètres cosmologiques décrits d'après différentes méthodes : Supernovae représente les résultats de SCP, CMB : le fond cosmologique micro-onde et cluster : l'étude de la répartition des galaxies par le SDSS. (d'après BONGARD, 2005; GILLES, 2006).

En cosmologie, on définit la distance de luminosité d'un objet comme proportionnelle à la racine carrée du rapport entre la luminosité intrinsèque (ou absolue) de cet objet et sa luminosité apparente sur terre. Or, cette distance de luminosité est aussi une fonction du redshift, de la constante de Hubble et des paramètres cosmologiques Ω_m , Ω_Λ et Ω_k . La mesure relativement précise de la distance de luminosité et du redshift d'un objet permettrait donc de contraindre fortement les valeurs possibles de ces paramètres cosmologiques⁴. Malheureusement, il semble impossible de mesurer la luminosité intrinsèque d'un objet un peu éloigné. Cependant, disposer d'objets dont on pourrait établir indirectement cette luminosité intrinsèque permettrait de résoudre ce problème. De tels objets sont appelés *chandelles standards*. À l'heure actuelle deux objets semblent pouvoir être utilisés comme tels : les céphéides et les

⁴De plus ces paramètres sont contraints par l'équation de Friedman qui permet d'établir la relation : $\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$.

supernovæ de type Ia (notées SNIa). Les céphéides sont des étoiles variables massives très lumineuses (de l'ordre de quelques milliers de fois la luminosité du Soleil) dont une relation empirique permet de déduire la luminosité intrinsèque de leur période et leur couleur. Malheureusement, aussi brillantes soit-elles, le flux de ces étoiles n'est pas suffisant pour les observer à des distances importantes. Seuls des phénomènes très brillants peuvent être visibles à des redshifts importants. Parmi ceux-là, l'autre type de chandelles standards susceptibles d'être utilisées sont les supernovæ de type Ia.

Les supernovæ de type Ia

Avec les sursauts gamma, les supernovæ sont les phénomènes les plus violents de l'univers. Comme sa racine latine l'indique, une supernova est un objet nouveau apparaissant dans le ciel. Ces phénomènes se caractérisent par une augmentation brutale de l'intensité (leur intensité est du même ordre que l'intensité de toute la galaxie hôte) suivie d'une décroissance rapide. Typiquement elles sont observées sur deux ou trois mois. De tels objets ont été recensés très tôt (la première attestée date du deuxième siècle de notre ère) mais il faut attendre la fin des années 90 avec l'utilisation de certaines d'entre elles pour la cosmologie et le développement de programmes d'observation spécifiques pour en étudier un nombre important. L'étude de ces objets a montré que l'appellation supernova recouvre des phénomènes très différents. En 1941, Minkowski introduit la première classification distinguant deux types (I et II) suivant la présence (supernova de type II) ou l'absence de raies de l'hydrogène dans leur spectre. Par la suite, des différences notables au sein des supernovæ de type I ont conduit à une nouvelle classification de celles-ci : avec une raie du silicium (type Ia), sans silicium et avec peu d'hélium (SNIb) et sans silicium et avec beaucoup d'hélium (SNIc). Cependant, cette classification ne reflète pas leurs origines astrophysiques : les supernovæ de type Ib, Ic et II semblent issues d'effondrement gravitationnel d'étoiles massives alors que les supernovæ de type Ia ont une origine radicalement différente et résultent d'une explosion thermonucléaire.

L'origine exacte des supernovæ de type Ia est encore mal connue mais tous les modèles mettent en jeu une naine blanche. Une naine blanche est le destin des étoiles relativement peu massives (moins de 8 masses solaires). Après plusieurs milliards d'années, lorsqu'une étoile comme notre soleil a consommé l'essentiel de son hydrogène puis de son hélium (au stade géante rouge), après que son enveloppe ait été éjectée et se soit diluée dans l'espace interstellaire, les réactions de fusion s'arrêtent et la pression de radiation n'est plus suffisante pour compenser la gravitation. L'étoile alors se contracte jusqu'à atteindre un rayon de quelques kilomètres et forme ainsi une naine blanche. Le modèle le plus répandu pour expliquer les supernovæ de type Ia est l'accrétion par une naine blanche de la matière du compagnon dans un système binaire. Lorsque la masse critique de Chandrasekhar est atteinte, la naine blanche s'effondre et sa température augmente jusqu'à permettre la fusion du carbone provoquant l'explosion thermonucléaire visible dans la supernova de type Ia.

Le projet SuperNova Factory

SN factory est un programme ambitieux qui vise à étudier un grand nombre de supernovæ Ia (en théorie 300) et à suivre leur évolution. Les supernovæ recherchées sont celles dont le redshift est dans l'intervalle $0.02 < z < 0.08$, intervalle où l'influence des paramètres cosmologiques est discriminante. Le principal objectif de ce programme est d'utiliser les SNIa comme des chandelles standards pour l'estimation des paramètres cosmologiques. Les autres buts sont : (i) d'avoir un échantillon important de SNIa pour pouvoir ajuster les modèles de

standardisation des SNIa et (ii) comprendre les phénomènes qui se produisent au cœur de ces objets.

Ce programme est divisé en deux parties : (i) la détection de supernovæ et leur caractérisation pour en extraire les SNIa ; (ii) le suivi de la photométrie et du spectre des SNIa détectées. Le programme de détection des supernovæ utilise les données collectées par d'autres programmes : NEAT pour la recherche d'astéroïdes et une observation de tout le ciel avec plusieurs filtres QUEST. Une fois qu'une supernova Ia est découverte, celle-ci est observée par un instrument dédié (SNIFS) installé sur le télescope de 2.2m de l'université d'Hawaï au sommet du Mauna Kea qui suivra son évolution pendant plusieurs semaines.

2.4.1.2 L'instrument SNIFS

L'instrument utilisé pour suivre l'évolution des SNIa est appelé SNIFS pour SuperNova Integral Field Spectrometer. Il a été construit au CRAL et fonctionne depuis 2005. Son schéma optique est décrit à la figure 2.10.

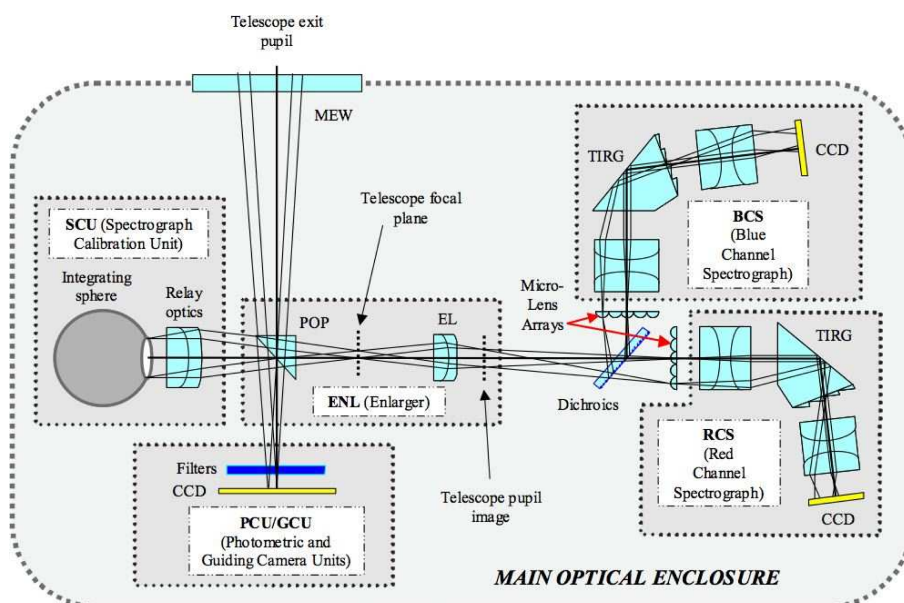


FIG. 2.10 — Schéma optique de l'instrument SNIFS (d'après GILLES, 2006).

Cet instrument comprend deux voies principales : la voie photométrique et la voie spectrométrique. La voie photométrique observe un champ relativement étendu dans plusieurs bandes. Son but est de contrôler la qualité du ciel et de pouvoir donner une estimation de la PSF liée à la turbulence. Elle permet aussi le guidage du télescope. Entre la pupille du télescope et cette voie photométrique un prisme mobile (Pick Off Prism) dévie la lumière provenant de la zone où est située la supernova, vers la voie spectrométrique.

La voie spectrométrique, décrite à la figure 2.11, est composée de deux unités intégrales de champ quasi identiques dans le principe, une pour le canal bleu de 3200Å à 5400Å et l'autre pour la voie rouge de 5200Å à 10000Å. Chaque canal est composé d'une trame de micro-lentilles qui disperse le spectre de différentes parties du champ sur un CCD. On a donc dans chaque voie 225 spectres correspondant à un champ de 15 × 15 pixels de taille 0''42 (soit un champ de 6''3 × 6''3).

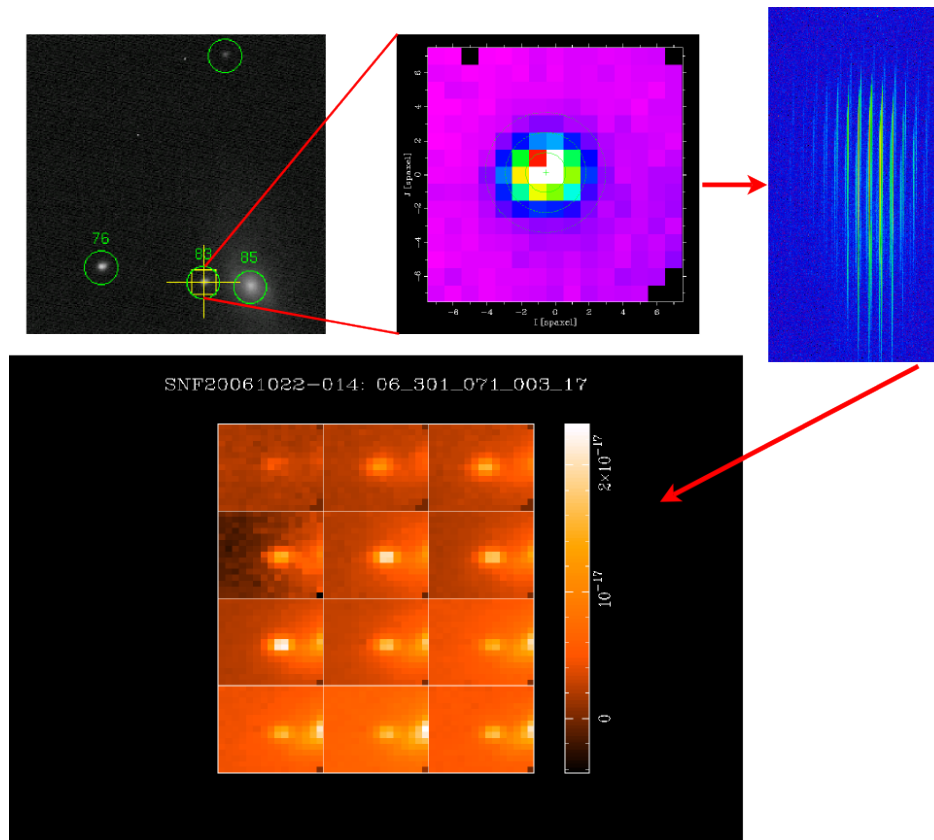


FIG. 2.11 — Synoptique de la voie spectrométrique de l'instrument SNIFS, (d'après BONGARD, 2005). D'abord le prisme (POP) représenté par la croix jaune recueille la lumière de la partie du champ contenant la supernova (image 1). Cette lumière est déviée sur la trame de micro-lentilles (image 2) qui la disperse en 225 spectres (image 3). Ces spectres sont rassemblés pour former un cube d'images prises à différentes longueurs d'onde.

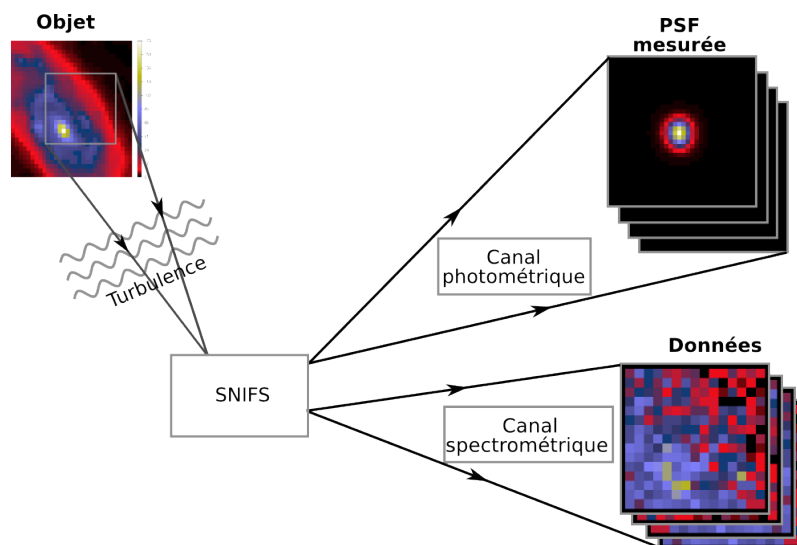


FIG. 2.12 — Principe de l'instrument SNIFS.

2.4.1.3 Les données issue de SNIFS

Comme décrit à la section précédente et illustré par la figure 2.12, le spectrographe intégral de champs SNIFS fournit deux type de données : des données photométriques avec un grand champ pour quelques longueurs d'onde et des données spectrométriques correspondant à une image d'un champ très petit pour un grand nombre de longueurs d'onde. La voie photométrique est une voie de calibration permettant en particulier de fournir une bonne estimation de la PSF. Le traitement des données issues de cette voie est en dehors de ce travail et nous ne nous intéressons ici qu'aux données issues de la voie spectrométrique qui contiennent les informations scientifiques utiles pour le projet SuperNovae Factory. Nous négligeons aussi le fait que les données spectrométriques proviennent de deux voies séparées (Bleu et Rouge) et nous les considérons comme un seul cube de données (x,y,λ) . Nous représenterons donc ici les données fournies par l'instrument comme deux cubes (x,y,λ) : l'un contenant les données, l'autre les PSF estimées par la voie photométrique. De plus, nous n'utiliserons pas les différentes poses du même objet prises à plusieurs jours d'intervalle pour suivre l'évolution de la supernova.

Dans tout ce travail, nous n'avons traité, à l'heure actuelle, que des données simulées réalistes fournies par Emmanuel Pécontal de l'équipe GALPAC du CRAL. Pour l'instant, la seule pose qui ait été utilisée est la pose de référence (c'est-à-dire la pose prise une fois que la supernova n'est plus visible) pour des raisons qui seront détaillées par la suite. En examinant ces données, plusieurs constatations peuvent être faites :

- Le champ spatial des données est très étroit (15 pixels). Ceci implique qu'en général l'objet observé ne sera pas en totalité dans le champ et donc que nous n'aurons qu'une image tronquée de celui-ci. En conséquence, *à priori* souvent utilisé en astronomie, à savoir que l'on observe des objets se détachant d'un fond noir — permettant d'imposer des contraintes fortes de positivité et/ou de support — ne pourra pas être utilisé.
- Le taille de la PSF, estimée sur 32 pixels, est supérieure à la largeur spatiale des données. D'où un très mauvais conditionnement du problème. Davantage encore, cela implique qu'aucun pixel de l'image ne peut être reconstruit sans estimer correctement les parties de l'objet hors du champ de l'instrument.
- L'instrument fournit des images et les PSF correspondantes à 798 longueurs d'onde différentes et la largeur spectrale est assez étroite.
- Comme les bandes spectrales sont très étroites, peu de flux lumineux est mesuré, le bruit présent dans les données est donc un bruit poissonnien auquel est ajouté un bruit gaussien lié au détecteur (*e.g.* bruit de lecture, bruit thermique...).

Une tranche du cube de données, pris à $\lambda = 3673.62\text{\AA}$ est présenté à la figure 2.13. On y voit un bruit très important et la structure de l'objet présent est difficile à déterminer. En particulier, si l'on peut déceler l'inclinaison de la galaxie imagée, il est difficile de déterminer la position de son cœur (la structure de l'image nette que l'on observe est peu différente de celle de l'image présentée à la figure 2.19). Si l'on intègre sur toutes les longueurs d'onde, comme sur la figure 2.14, le bruit est atténué sur l'image moyenne ainsi créée et le cœur de la galaxie est mieux visible mais le flou est important et l'on perd toute information spectrale.

La PSF estimée à $\lambda = 3200\text{\AA}$, c'est-à-dire la première du cube de PSF donnée par la voie photométrique, est affichée sur la figure 2.15. Comme l'indice de réfraction de l'air dépend de la longueur d'onde, la PSF varie continûment avec la longueur d'onde. Ce phénomène n'est cependant pas très important et les PSF ont à peu près la même forme. Sur la figure 2.16 sont présentés les profils des PSF de la voie "bleu" les plus dissemblables, c'est-à-dire de la

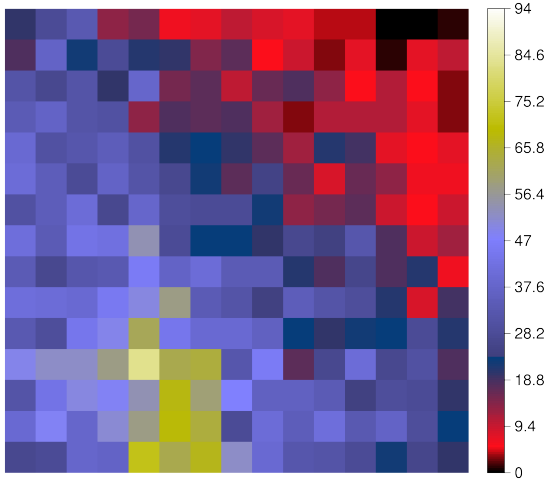


FIG. 2.13 — Image prise à $\lambda = 3673.62\text{\AA}$.

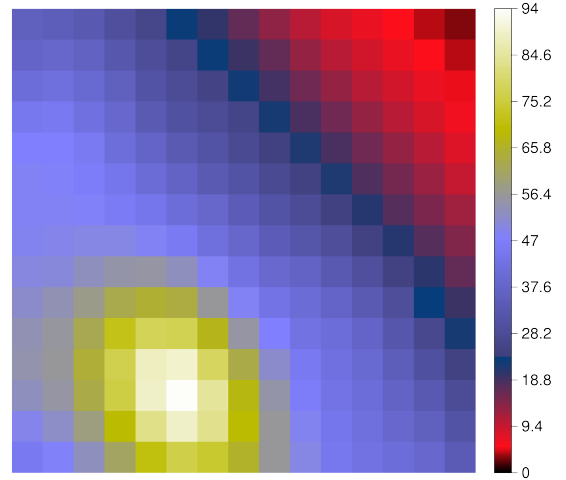


FIG. 2.14 — Image moyenne (pour toute les longueurs d'onde) de la pose de référence.

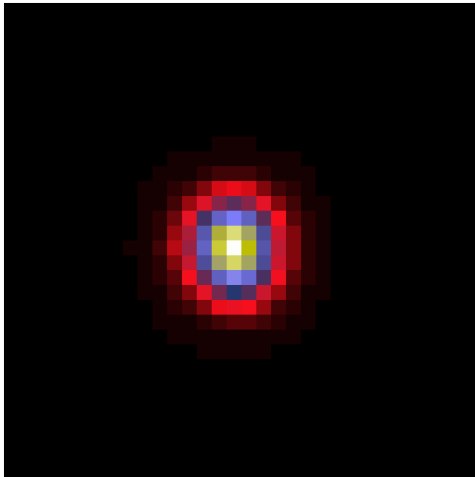


FIG. 2.15 — PSF estimée à $\lambda = 3200\text{\AA}$.

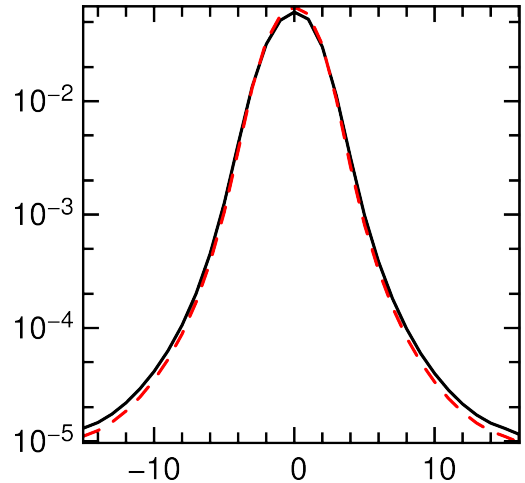


FIG. 2.16 — Coupe en échelle log à $x = 0$ de la PSF estimée aux deux extrémités du cube d'image ($\lambda = 3200\text{\AA}$ (ligne continue noire) et $\lambda = 5096.86$ (ligne tiretée rouge)).

première ($\lambda = 3200\text{\AA}$, en continu noir) et de la dernière ($\lambda = 5096\text{\AA}$, en tirets rouges). On peut y voir que ces PSF sont très proches et leur forme est plutôt gaussienne avec des “ailes” assez importantes.

2.4.2 La reconstruction des données SNIFS

Pour reconstruire les données SNIFS, c'est-à-dire pour estimer l'objet $\mathbf{x}^{(\text{MAP})}$ à chaque longueur d'onde d'après les mesures \mathbf{y} et les PSF estimées \mathbf{h} , nous utiliserons le formalisme développé dans le premier chapitre et dans la première partie de ce chapitre. Ce formalisme

consiste à estimer $\mathbf{x}^{(\text{MAP})}$ qui minimise la somme d'un terme d'attache aux données (ou de vraisemblance) et d'une régularisation séparable spatiale et spectrale :

$$\mathbf{x}^{(\text{MAP})} = \arg \min_{\mathbf{x}} (\Phi_{\text{MV}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \mathbf{H}) + \Theta_{\text{S}}(\mathbf{x}) + \Theta_{\Lambda}(\mathbf{x})) . \quad (2.28)$$

Cela signifie tout d'abord l'élaboration d'un terme d'attache aux données prenant en compte le bruit particulier présent dans les données, puis choisir une régularisation spatiale parmi celles présentées dans les tableaux 2.1 et 2.2 et enfin élaborer une régularisation spectrale adaptée au problème à traiter.

2.4.2.1 Le terme d'attache aux données

Mis à part les cas où le bruit de détecteur est très faible ($<$ quelques e^- par pixel), il est possible d'approximer le bruit total (bruit de détecteur gaussien plus bruit de photons poissonien) par un bruit gaussien non stationnaire comme le propose aussi MUGNIER *et al.* (2004) dans la méthode MISTRAL. Le terme d'attache aux données devient donc :

$$\Phi_{\text{MV}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \mathbf{H}) = \frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y})^{\text{T}} \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y}) . \quad (2.29)$$

où la matrice de poids \mathbf{W} est diagonale de diagonale w définie par :

$$w_{r,\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (\gamma^{-1} \max(y_{r,\lambda}, 0) + \sigma_{r,\lambda}^2)^{-1} & \text{si } y_{r,\lambda} \text{ est mesuré,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.30)$$

où γ est le facteur de quantification du détecteur (*i.e.* le nombre de photons par niveau de quantification) et $\sigma_{r,\lambda}^2$ est la variance du bruit gaussien du détecteur. Dans cette définition de \mathbf{W} , une approximation supplémentaire a été faite : la variance σ_p^2 du bruit de photons poissonien est proportionnelle au nombre de photons reçus par le capteur ($\sigma_p^2 = \gamma (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x})_{r,\lambda}$). L'estimation de cette variance n'est pas triviale et rend la minimisation complexe car elle dépend de \mathbf{x} . C'est pourquoi elle est approximée par ($\sigma_p^2 \approx \gamma \max(y_{r,\lambda}, 0)$).

Les PSF estimées étant très larges, il est nécessaire de reconstruire un objet bien plus étendu que le champ. En effet pour éviter le phénomène de repliement de champ décrit à la section 1.4.6.3, il faut élargir le champ d'au moins la moitié de la largeur de la PSF. Il est donc nécessaire d'estimer des objets \mathbf{x} de taille supérieure à $31 \times 31 \times 798$. En pratique, on estimera des objets de tailles $32 \times 32 \times 798$ ou $48 \times 48 \times 798$. On a donc au moins 4 fois plus d'inconnues que de données dans ce problème inverse. Ceci rend ce problème très mal posé.

2.4.2.2 La régularisation spatiale

Parmi toutes les régularisations spatiales déjà décrites, celle qui a été retenue est la régularisation de type gradient avec la norme quadratique. Bien que d'autres normes, en particulier $\ell_2\text{-}\ell_1$, pourraient fournir probablement de meilleures reconstructions, la norme quadratique a été choisie pour deux raisons principales. D'abord la norme quadratique est la seule qui permette d'utiliser facilement GCV (voir 1.4.7.1) pour un réglage automatique de l'hyperparamètre. Mais surtout, la norme quadratique produit une fonction de régularisation bien mieux conditionnée, ce qui va accélérer ce problème très mal conditionné. Il est cependant envisageable d'utiliser une norme $\ell_2\text{-}\ell_1$ dans un deuxième temps.

2.4.2.3 La régularisation spectrale

L'hypothèse principale sur le spectre des données est que l'objet imagé est à peu près identique à chaque longueur d'onde, à un facteur près. En d'autres termes, cette hypothèse peut être reformulée comme une hypothèse sur le spectre de chaque pixel : "le spectre de chaque pixel est similaire à une constante multiplicative près". Cette hypothèse se justifie en partie car les raies d'absorption dues à la matière dans l'espace entre l'objet et l'observateur ont un effet identique sur chaque spectre. Par contre, les raies d'émission peuvent être différentes. C'est particulièrement vrai pour la supernova dont le spectre est radicalement différent de celui de la galaxie hôte. C'est pourquoi, dans un premier temps, nous ne traiterons que les données issues de la pose de référence (*i.e.* la pose sans supernova). Par contre, les galaxies observées étant relativement éloignées (redshift dans l'intervalle $0.03 < z < 0.08$), des milliers d'étoiles contribuent à l'intensité mesurée pour un pixel ; c'est pourquoi, par moyennage, on peut considérer les spectres des différents pixels comme étant assez similaires. Appliquer cet *a priori* par le biais d'une fonction de régularisation permet d'autoriser des petites différences entre les spectres comme par exemple entre les pixels du centre de la galaxie, où sont les étoiles plus vieilles et les plus massives, et les pixels de ses bras peuplés d'étoiles plus jeunes.

Cet *a priori* sur les spectres des différents pixels est introduit par la régularisation suivante :

$$\Omega_{\Lambda}(\mathbf{x}_r) = \left(\frac{x_{r,\lambda+\Delta\lambda}}{p_{\lambda+\Delta\lambda}} - \frac{x_{r,\lambda}}{p_{\lambda}} \right)^2, \quad (2.31)$$

où p_{λ} est le spectre *a priori*, ici le spectre moyen. Cette régularisation tend à rendre spectralement plat le rapport $\frac{x}{p}$ des spectres reconstruits et *a priori* et donc tend à rendre le spectre reconstruit identique au spectre *a priori* à un facteur multiplicatif près.

2.4.2.4 Choix des hyper-paramètres

Une fois les régularisations spectrales et spatiales fixées, l'équation (2.9) peut se réécrire :

$$\Phi_{\text{Regul}}(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda}^S \Omega_S(\mathbf{x}_{\lambda}) + \sum_r \alpha_r^{\Lambda} \Omega_{\Lambda}(\mathbf{x}_r). \quad (2.32)$$

On a ici un nombre important d'hyper-paramètres ; 798 pour la régularisation spatiale (le nombre de canaux spectraux) et 225 pour la régularisation spectrale (le nombre de pixels). C'est pourquoi nous allons faire quelques approximations qui vont nous permettre de n'avoir plus qu'un petit nombre facilement manipulable de ces hyper-paramètres.

- Comme le flux moyen est très différent à chaque longueur d'onde, les hyper-paramètres α_{λ}^S doivent être différents pour chaque image. Pour n'avoir plus qu'un seul hyper-paramètre α^S global, nous proposons la normalisation suivante des hyper-paramètres α_{λ}^S de chaque image par la variance $\text{Var}(y)_{\lambda}$ mesurée dans cette image :

$$\alpha_{\lambda}^S = \frac{\alpha^S}{\text{Var}(y)_{\lambda}}, \quad \forall \lambda, \quad (2.33)$$

- Comme notre *a priori* est que tous les spectres suivent approximativement la même densité spectrale d'énergie, ils doivent être régularisés avec le même poids. On a donc :

$$\alpha_r^{\Lambda} = \alpha^{\Lambda}, \quad \forall r. \quad (2.34)$$

On a ainsi seulement deux hyper-paramètres à déterminer. Dans ce travail, ils seront estimés manuellement d'après une inspection visuelle des résultats.

2.4.3 Résultats

Les données simulées pour le projet SNIF ont été traitées par notre algorithme avec les régularisations décrites à la section précédente. L'image reconstruite $\mathbf{x}^{(\text{MAP})}$ a été estimée en résolvant l'équation (2.28) avec l'algorithme VMLM. Une seule pose, la voie "bleu" de la pose de référence sans supernova, a été traitée et nous avons déterminé les hyper-paramètres $\alpha^S = 800$ et $\alpha^\Lambda = 1 \times 10^{-3}$.

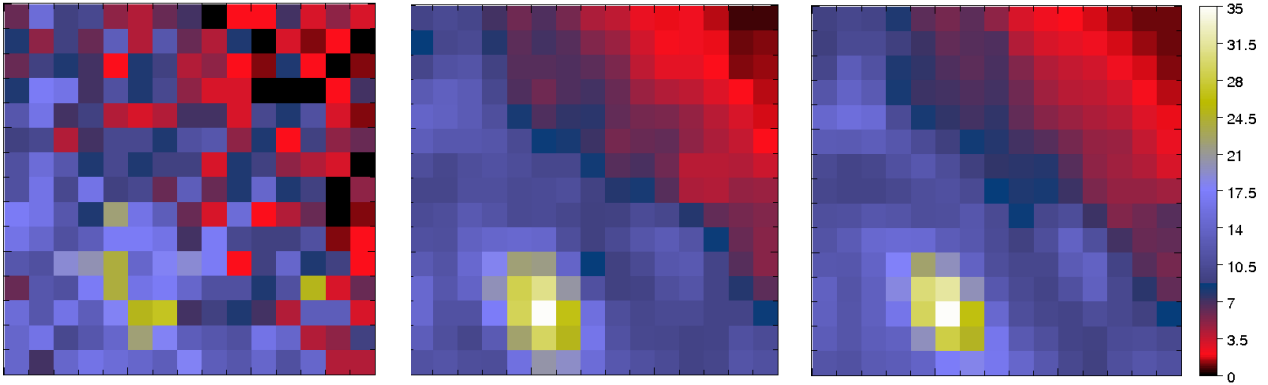


FIG. 2.17 — Image issue de la pose de référence à $\lambda = 3968.74\text{\AA}$.
 FIG. 2.18 — Reconstruction correspondante ($\lambda = 3968.74\text{\AA}$).
 FIG. 2.19 — Objet vrai observé à $\lambda = 3968.74\text{\AA}$.

Comme nous travaillons ici avec des données simulées, il est possible de comparer les résultats avec l'objet réel. L'erreur quadratique moyenne de la reconstruction est $\text{EQM} = 35$ dB à comparer avec $\text{EQM} \approx 60$ dB pour l'erreur entre les données et l'objet réel. Une image prise à la longueur d'onde $\lambda = 3968.74\text{\AA}$ de la reconstruction est présentée sur la figure 2.17 et peut être comparée avec les données (Fig. 2.18) et la réalité (Fig. 2.19). Sur ces figures, on peut constater que le cœur de la galaxie invisible dans les données est bien reconstruit ainsi que les différentes structures de celle-ci. De même, sont présentés sur la figure 2.20 les spectres du pixel central des données (en pointillé bleu), de l'objet (en continu noir) et de la reconstruction (en tireté rouge). Le spectre reconstruit a une variance bien plus faible que le spectre des données et il est très proche du spectre réel.

De plus, comme on l'a vu à la section 2.4.2.1, la largeur très importante de la PSF nous a obligés à reconstruire les données sur un champ 32×32 quatre fois plus grand que les données car le flou a pu introduire dans le champ une certaine quantité de flux provenant de régions proches mais non visibles. Lors de la reconstruction, l'algorithme a donc extrapolé le champ observé. Le résultat de la reconstruction montrant l'extrapolation est affiché sur la figure 2.21 et peut être comparé avec l'objet (Fig. 2.22). On peut constater que l'orientation générale de la galaxie est bien reconstruite même hors du champ ; plus précisément un cadre d'environ trois pixels de large entourant le champ est relativement bien estimé.

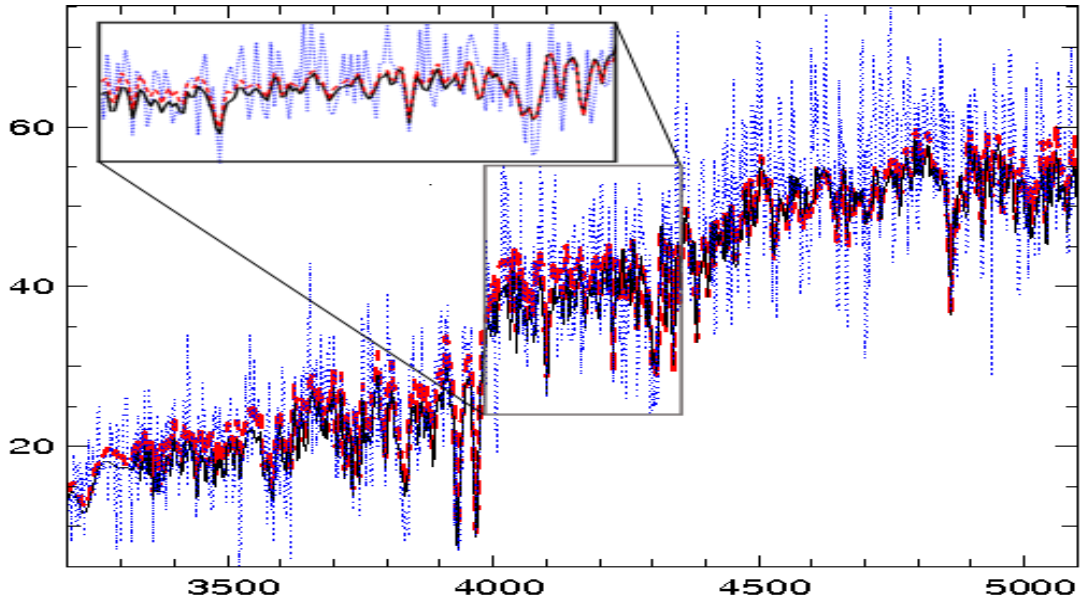


FIG. 2.20 — Spectres (entre 3200Å et 5400Å) du pixel central des données (en pointillé bleu), de l'objet (en continu noir) et de la reconstruction (en tireté rouge).

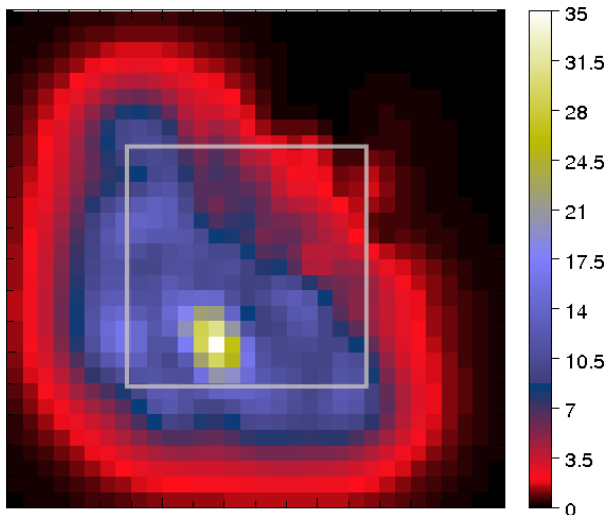


FIG. 2.21 — Image de l'objet reconstruit à $\lambda = 3968.74\text{\AA}$. Le champ du spectrographe est représenté par le carré gris.

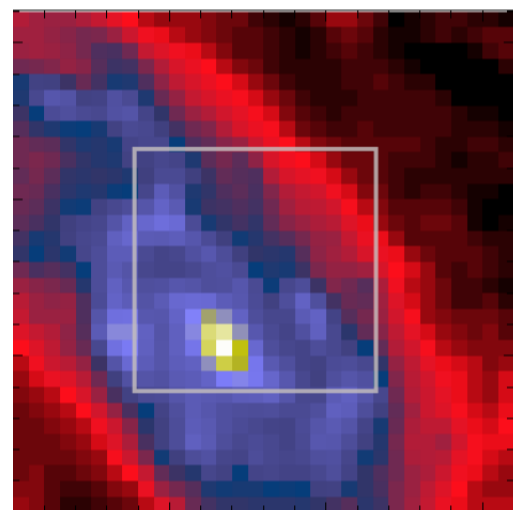


FIG. 2.22 — Objet observé $\lambda = 3968.74\text{\AA}$. Le champ du spectrographe est représenté par le carré gris.

2.4.4 Perspectives

Le traitement et l'élaboration de cet algorithme de déconvolution des données SNIFS ayant été commencé il y a quelque mois seulement, il y a encore de nombreuses améliorations à effectuer. En particulier, (i) pouvoir reconstruire les données contenant des supernovæ, (ii) prendre en compte les erreurs d'estimation de la PSF et (iii) comparer avec d'autres techniques en particulier avec les techniques de séparation de composantes.

2.4.4.1 Reconstruction de la supernova

Le projet Supernova Factory ayant pour but d'étudier les supernovæ, il est indispensable de pouvoir traiter les données contenant celles-ci. Dans l'algorithme présenté ici deux phénomènes empêchent ce traitement : (i) la régularisation spatiale considère l'objet lisse ; or la supernova est une source ponctuelle extrêmement brillante. Comme on peut le voir sur la figure 2.23, elle est bien plus brillante que sa galaxie hôte. (ii) l'hypothèse que tous les spectres reconstruits sont similaires est mise en défaut car le spectre d'une supernova est radicalement différent de celui de sa galaxie hôte. De plus, le flux issu de la supernova étant prépondérant, il risque de biaiser l'estimation du spectre moyen de la galaxie utilisé pour la régularisation.

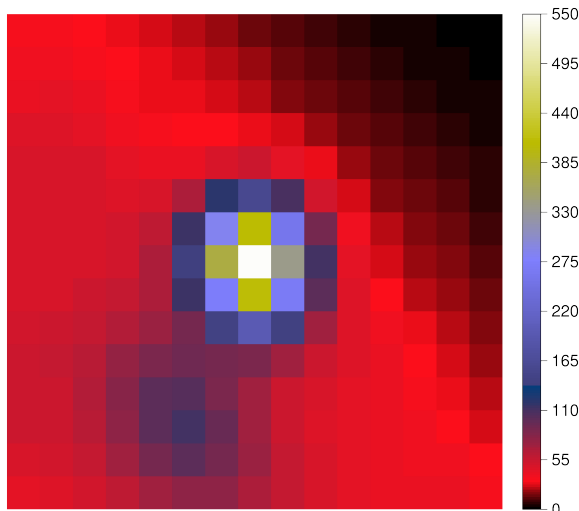


FIG. 2.23 — Image moyenne de la pose prise 5 jours après le maximum de la supernova.

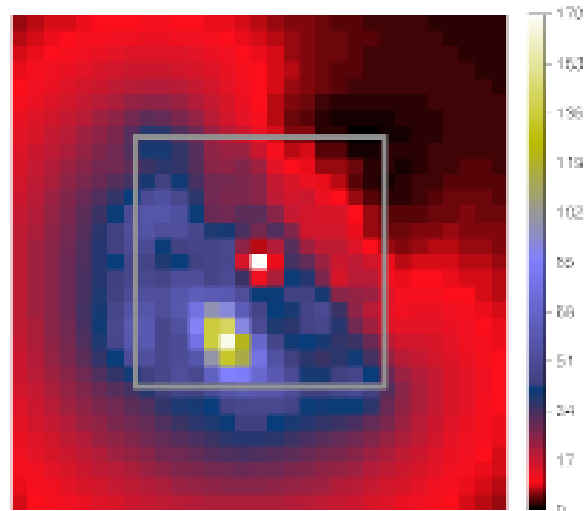


FIG. 2.24 — Image moyenne de la reconstruction de la pose prise 5 jours après le maximum de la supernova.

Un travail préliminaire a déjà été conduit pour corriger ces problèmes. Une solution consiste à ne pas régulariser le pixel contenant la supernova. Sa position est en général connue mais il serait toutefois aisé de la déterminer sur la pose. Il est donc possible de masquer ce point aux fonctions de régularisation ou, dans le cas de la régularisation spectrale, d'annuler l'hyper-paramètre correspondant à ce pixel ($\alpha_{r=SN}^{\Lambda} = 0$). Pour déterminer le spectre caractéristique de l'objet, il est possible de l'estimer sur les bords du champ, ou mieux encore sur la pose de référence sans supernova. C'est ce qui a été fait et cela a conduit aux résultats présentés sur les figures 2.24 et 2.25. On peut y constater que des structures totalement masquées par la supernova ont pu être reconstruites même hors du champ de l'instrument. Ceci prouve la robustesse de notre méthode. Le spectre reconstruit pour la supernova est bien plus proche

du spectre réel et les différentes raies sont bien reconstruites. On peut toutefois observer que le spectre reconstruit est toujours légèrement surestimé. Ce biais est dû à la sous-estimation des pixels voisins de la supernova et à l'injection par l'algorithme de leur flux dans celui de la supernova. Ce biais est très gênant pour l'exploitation scientifique des données car il fausse la mesure du flux.

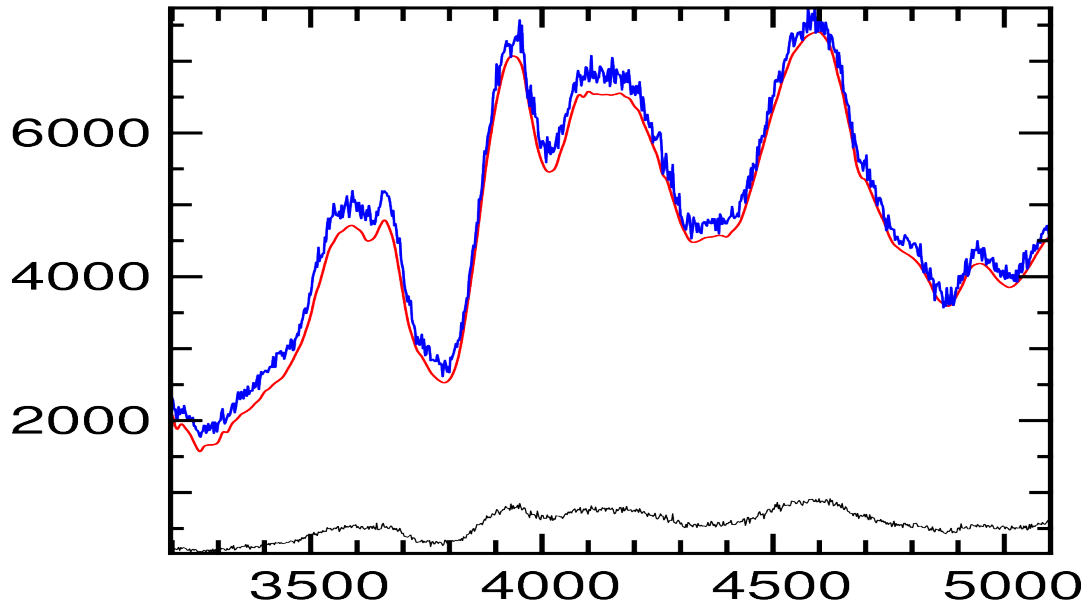


FIG. 2.25 — Spectres de la supernova (pixel central) dans la pose prise 5 jours après le maximum (en noir), sa reconstruction (en bleu) comparés avec le spectre réel (en rouge).

2.4.4.2 Déconvolution Aveugle

Les PSF utilisées pour la déconvolution sont estimées sur la voie photométrique. Pour ne pas propager des erreurs d'estimation de la PSF, il pourrait être intéressant d'ajuster ces PSF aux données spectrométriques, dans une perspective de déconvolution aveugle ou myope. De plus, comme l'indice de réfraction de l'air dépend de la longueur d'onde, la déformation liée à la turbulence, et donc la PSF, varie continûment avec la longueur d'onde. Ce phénomène, exploité notamment dans le cadre de la diversité de phase polychromatique (RONDEAU, 2007) est aussi utilisé dans l'estimation de la PSF. Cela peut aussi justifier l'utilisation de contraintes spectrales sur la PSF lors d'une déconvolution aveugle.

2.4.4.3 Séparation de composantes

Dans la méthode présentée, il n'est pas possible d'exploiter le fait que le même objet ait été observé à différentes époques. Si l'on considère toute les poses, y compris la pose de référence d'une même supernova il est possible de faire quelques commentaires :

- La galaxie est un fond structuré spatialement et constant dans le temps.
- La supernova est une source ponctuelle située approximativement au centre de l'image et qui varie avec le temps. Elle est absente de la pose de référence.

- Le fond de ciel ajoute un niveau constant spatialement mais variant spectralement et temporellement.
- La PSF est isoplanétique et varie lentement spectralement. Elle est différente à chaque époque.

A partir de ces considérations, il est possible d'élaborer des algorithmes permettant de séparer le fond de ciel, la galaxie et la supernova et d'ajuster éventuellement la PSF.

Cette méthode de séparation de composantes est actuellement développée principalement par Sébastien Bongard avec qui nous avons beaucoup d'échanges. Cette algorithmes est très proche de l'algorithme de déconvolution et utilise la même approche inverse et le même code d'optimisation (VMLM-B). Lorsque nos algorithmes effectifs, il serait être intéressant de comparer leurs résultats sachant que la séparation de composantes devrait être plus efficace.

2.5 Déconvolution et démosaïçage

Dans la section précédente nous avons constaté l'efficacité de l'approche présentée pour extrapoler le champ observé. Dans cette section, nous nous intéresserons à ses propriétés d'interpolation dans le cadre de la déconvolution d'images couleurs acquises avec un filtre de Bayer.

2.5.1 Contexte : l'imagerie couleur avec le filtre de Bayer

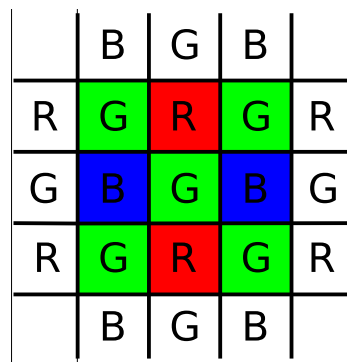


FIG. 2.26 — Le filtre de Bayer.

La plupart des appareils photo et des caméras grand public n'utilisent qu'un seul capteur monochrome (CCD ou CMOS). Pour permettre l'acquisition d'images couleurs, ils utilisent une matrice de filtre de couleur appelée filtre de Bayer. Ce filtre élaboré par BAYER (1976) de la compagnie Kodak, est présenté sur la figure 2.26. Il est apposé devant le capteur de sorte que chaque pixel ne mesure qu'une seule couleur : Rouge, Vert ou Bleu. Il est composé d'une alternance d'éléments rouges et verts une ligne sur deux et d'une alternance d'éléments verts et bleu sur les autres lignes, les éléments sensibles au vert étant disposés en quinconce. Il y a donc deux fois plus de vert que de bleu ou de rouge ; ceci est justifié par Bayer car le vert est la couleur à laquelle l'œil est le plus sensible. Sur-échantillonner cette couleur permettrait donc de mieux estimer la luminance. Bien que d'autres filtres aient été proposés (DILLON, 1977) ce choix ne sera pas remis en question par la suite. Dans l'image acquise par l'appareil, il manque donc deux couleurs par pixel soit les deux tiers de l'information.

Dans cette section, nous utiliserons comme illustration l'image du phare présenté à la figure 2.27 et dont un détail est donné Fig. 2.29. Cette image extraite de la base de données Kodak⁵ est très utilisée pour illustrer la plupart des travaux sur le filtre de Bayer. Elle est bien adaptée aux tests des algorithmes de reconstruction car elle présente des couleurs pures (rouge, vert, bleu) et des hautes fréquences spatiales créées par la barrière. Cette image de taille 512×768 a été acquise avec un dispositif à trois CCD permettant de mesurer l'intégralité des valeurs RVB en chaque pixel. Celle-ci servira de point de comparaison et permettra de mesurer qualitativement la qualité de la reconstruction. A partir de celle-ci, une image *mosaïquée* est générée par application du filtre de Bayer. Elle est présentée à la figure 2.28 (détail Fig. 2.30).

⁵Cette base de donnée est disponible à l'adresse : <http://www.cipr.rpi.edu/resource/stills/kodak.html>



FIG. 2.27 — Image “lighthouse” utilisée pour la simulation.



FIG. 2.28 — Image vue par le capteur. Cette image a été générée en annulant la valeur des pixels filtrés par le filtre de Bayer dans l’image RVB présenté Fig. 2.27.



FIG. 2.29 — Détail de la figure 2.27.

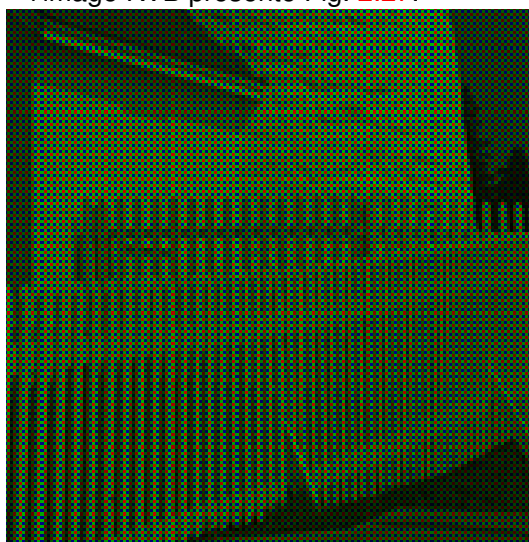


FIG. 2.30 — Détail de la figure 2.28.

2.5.1.1 Le démosaïçage

L’opération consistant à reconstruire l’image couleur à partir de cette image en mosaïque s’appelle le démosaïçage (en anglais demosaicking ou demosaicing). Le filtre de Bayer ayant été mis au point pour le standard de télévision américain NTSC, fournissant directement les

informations de luminance et chrominance dans des bandes de fréquences adaptées, il n'était pas nécessaire de faire de démosaïçage. Ce n'est que lorsque ce filtre a été utilisé dans les premiers capteurs numériques que le problème du démosaïçage est devenu crucial.



FIG. 2.31 — Résultat de la reconstruction par copie de pixel.



FIG. 2.32 — Résultats de la reconstruction par interpolation.

Les premières techniques de démosaïçage apparues à la fin des années 70 étaient assez frustes et consistaient à copier sur la valeur manquante la dernière valeur lue (résultat figure 2.31), ou alors sous-échantillonner l'image dans un rapport 1 :2. Puis vers le milieu des années 80, alors que les processeurs commençaient à être embarqués dans les caméras, apparurent les premiers algorithmes d'interpolation (COK, 1986). Seulement, ces méthodes génèrent de nombreux artefacts, en particulier des fausses couleurs comme on peut le voir sur les figures 2.31 et 2.32.

Ces artefacts sont dûs au repliement de spectre lié au mauvais échantillonnage de chaque canal. En effet, lorsque l'on mesure un signal contenant des fréquences supérieures à la fréquence d'échantillonnage, ces fréquences viennent polluer la mesure des basses fréquences. Ceci est illustré sur la figure 2.33 représentant le spectre du canal rouge de l'image mosaïquée (montrée Fig. 2.28) et que l'on peut comparer avec le spectre du canal rouge de l'image non mosaïquée présenté à la figure 2.34. Le cadre central indique la fréquence de Nyquist du filtre de Bayer dans le canal rouge. Il indique la fréquence maximale que l'on peut mesurer en respectant le théorème de Shannon. Remplacer les valeurs non mesurées par zéro revient à répliquer une partie du spectre dans l'espace des fréquences non-mesurées (à l'intérieur des rectangles en pointillé). Malheureusement, comme on peut le constater figure 2.34, la scène observée contient des fréquences supérieures à cette fréquence de Shannon. Le support des fréquence étant plus grand que la fréquence de Shannon, il y aura superposition des fréquences répliquées : c'est le repliement de fréquence qui crée des hautes fréquences parasites (comme celle entourée en rouge Fig. 2.33). Lors de la reconstruction, il faudra donc tenter de dé-mélanger ces fréquences. Comme ce phénomène se produit différemment dans chaque canal RVB, et à cause du décalage des couleurs, il produit les artefacts de fausses couleurs dans les zones comprenant des hautes fréquences (e.g. les bords). ALLEYSSON *et al.* (2005) montre

que la matrice de Bayer peut être interprétée comme un système de partage de l'espace de Fourier entre la luminance et la chrominance. Il montre que, compte tenu des corrélations plus fréquentes entre le canal rouge et vert qu'entre ceux-ci et le canal bleu, inverser les rôles des pixels bleu et vert permettrait de minimiser le repliement et donc de réaliser de meilleures reconstructions.

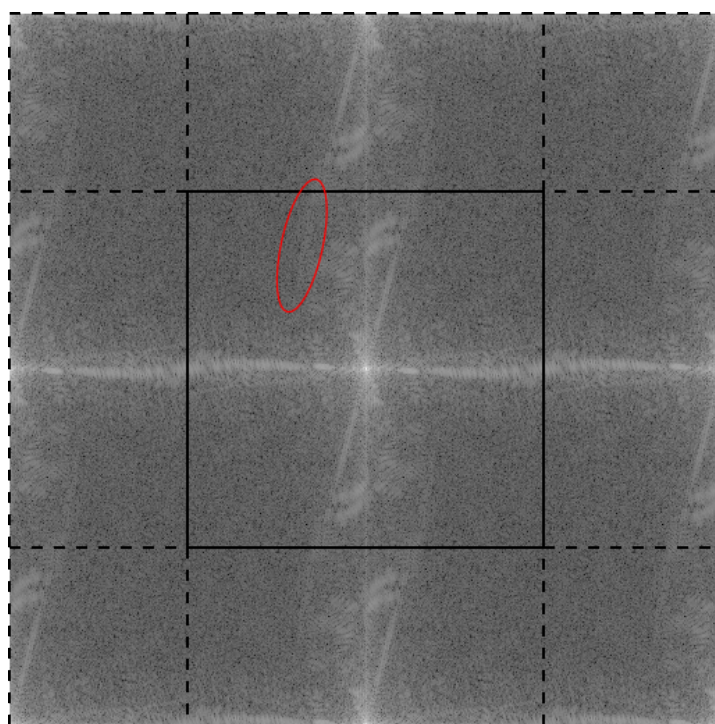


FIG. 2.33 — Spectre du canal rouge de l'image mosaïquée ; la zone entouré en rouge indique un repliement de fréquence. (Fig. 2.28).

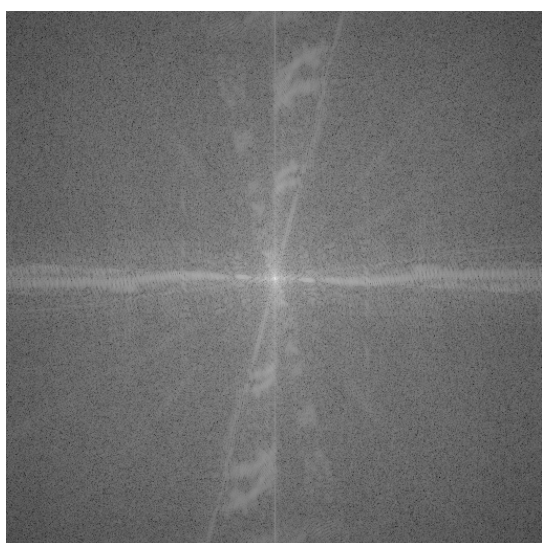


FIG. 2.34 — Spectre de l'image non mosaïquée (Fig. 2.27).

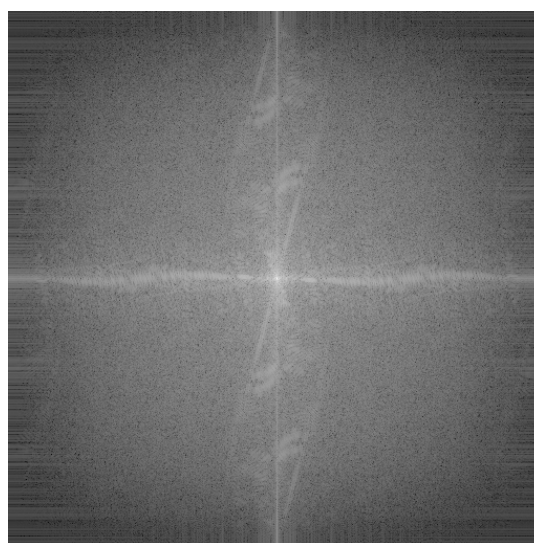


FIG. 2.35 — Spectre de la reconstruction par interpolation (Fig. 2.32).

Pour réduire ces artefacts, les puissances de calcul augmentant, de nombreux algorithmes ont été proposés. Les décrire tous est hors du cadre de notre travail ; ALLEYSSON (2004) et CHANG et TAN (2006) proposent chacun une revue assez complète de ces différentes méthodes et de leurs performances. Ils détaillent aussi les principaux artefacts que peuvent produire ces méthodes qui sont, outre les fausses couleurs, un effet de fermeture éclair sur les bords francs des objets, des couleurs délavées et un flou excessif.

2.5.2 Formation des données

On considère un objet en couleur \mathbf{x} . Dans l'espace RVB, cet objet possède trois dimensions : les deux dimensions spatiales et la dimension colorimétrique. Il est donc composé de trois distributions spatiales d'intensité : la rouge x_R , la verte x_V et la bleu x_B . Comme aux sections précédentes, \mathbf{x} est un vecteur dont toutes les composantes sont bout à bout : $\mathbf{x} = [x_R^T, x_V^T, x_B^T]^T$.

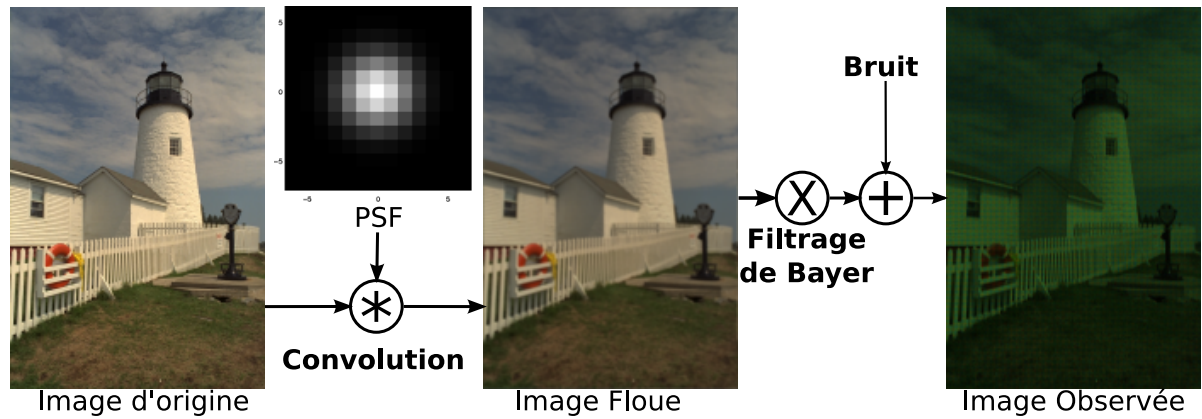


FIG. 2.36 — Formation des images floues.

La formation des données \mathbf{y} à partir de cet objet \mathbf{x} est décrite sur la figure 2.36. Elle peut être décomposée en trois phases :

- Tout d'abord, la lumière provenant de l'objet observé, va parvenir jusqu'au capteur en traversant l'air et les différents dispositifs optiques (*e.g.* vitres et lentilles...). La turbulence et les défauts de l'optique peuvent donc avoir déformé l'image de l'objet. Cette déformation se traduit par un flou qui peut être différent pour chaque couleur. Dans l'espace RVB l'image floue $\mathbf{x}^{\text{floue}}$ déformée par la PSF \mathbf{H} s'écrit :

$$\mathbf{x}^{\text{floue}} = \mathbf{H}\mathbf{x} \quad (2.35)$$

où dans l'hypothèse où les déformations des couleurs sont indépendantes les unes des autres, c'est-à-dire si une déformation dans une bande de couleur n'a pas d'influence sur les mesures dans les autres canaux, \mathbf{H} est composée des PSF pour chaque couleur :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_R & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_V & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H}_B \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Notons, que la PSF peut varier avec la couleur. En effet, à cause de la variation de l'indice de réfraction de l'air avec la longueur d'onde et de la chromaticité de l'optique, la

PSF dans le bleu peut être un peu plus étroite que la PSF dans le rouge ; Notons cependant que ces variations sont minimales (TRIMECHE *et al.*, 2005).

- Ensuite l'image floue va être échantillonnée par le filtre de Bayer. Ce filtrage peut être vu comme la projection de l'espace RVB dans l'espace monochrome par un opérateur \mathbf{B} qui va sélectionner pour chaque pixel la couleur traversant le filtre de Bayer.
- Enfin la lumière va être mesurée par le capteur avec, inévitablement, du bruit \mathbf{b} . Dans ce travail, nous considérons ce bruit gaussien centré. Cependant, HIRAKAWA et PARKS (2006) ont étudié le bruit pour des capteurs CMOS commerciaux et ont estimé la variance du bruit au pixel k égale à :

$$\sigma_k^2 = \alpha + \beta x_k, \quad (2.37)$$

avec comme valeurs typiques $\alpha = 3$ et $\beta = \frac{1}{40}$. Ce bruit est donc la somme d'un bruit gaussien et d'un bruit poissonnien.

En résumé, la formation des données s'écrit :

$$\mathbf{y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (2.38)$$

où, si N est le nombre de pixels, les données \mathbf{y} et le bruit \mathbf{b} sont des vecteurs de taille N et l'objet \mathbf{x} un vecteur $3N$; \mathbf{H} est une matrice carrée $3N \times 3N$; \mathbf{B} est une matrice rectangulaire $N \times 3N$.

2.5.3 La déconvolution d'images mosaïquées

A notre connaissance, les premiers travaux sur la restauration et le démosaïçage ont été effectués par NA *et al.* (1995). A partir d'une image filtrée par un filtre à quatre couleurs, différent donc de celui de Bayer, ils proposent un dispositif électronique permettant une restauration en deux étapes (i) l'estimation de canaux décorélés (luminance - chrominance) (ii) restauration de chaque canal par un filtre proche de celui de Wiener. TAUBMAN (2000) a, lui, proposé une méthode proche de celle de Wiener, c'est-à-dire l'approche qui consiste à estimer le filtre linéaire optimal minimisant l'erreur quadratique moyenne de la reconstruction, pour effectuer le démosaïçage et la déconvolution. Il propose d'approximer le filtre de Wiener par un filtre à réponse impulsionnelle finie plus étroit qu'il applique à des super-pixels regroupant les pixels de Bayer par quatre, puis estimant ceux-ci à partir d'invariances d'échelle. Ce travail a, par la suite, été prolongé par TRUSSELL (2001). Taubman et Trussel ont cependant réalisé un travail surtout théorique et proposent peu de résultats permettant d'établir l'efficacité de leurs approches.

Plus récemment, TRIMECHE *et al.* (2005) ont proposé une méthode de déconvolution utilisée comme prétraitement de canal avant un démosaïçage classique. Ils proposent d'utiliser une méthode itérative de Landweber (LANDWEBER, 1951) avec un système de contrainte adaptative sur la taille du pas pour contrôler la saturation et éviter l'apparition de fausses couleurs. Ce sont les premiers à prendre en compte explicitement la variation de la PSF avec la longueur d'onde.

Enfin VEGA et MOLINA (2006) ont proposé une méthode bayésienne. Ils considèrent les données comme la somme de quatre images floues basse résolution et s'inspirent des méthodes de super-résolution pour résoudre ce problème. En effet, la problématique du démosaïçage est très proche de celle de la super-résolution (*i.e.* la reconstruction d'une image haute résolution à partir d'une série d'images basse résolution de la même scène. FARSIU *et al.* (2006)

a en particulier considéré le problème de la reconstruction d'une image couleur haute résolution à partir d'une série d'images mosaïquées basse résolution et floues. Pour résoudre ce problème, il a développé une approche bayésienne très proche de celle que nous proposons dans la suite de cette section.

Pour reconstruire les données mosaïquées, c'est-à-dire pour déconvoluer et estimer les couleurs manquantes, nous utilisons toujours l'approche MAP déjà décrite. Il s'agit donc d'estimer l'objet \mathbf{x} , les données \mathbf{y} et leur formation étant décrites par l'équation (2.38). Comme il y a trois fois plus d'inconnues que de données l'*a priori* introduit sera déterminant.

En utilisant l'approche développée jusqu'ici, l'objet reconstruit $\mathbf{x}^{(\text{MAP})}$ sera l'objet qui minimise une fonction de coût, somme d'un terme d'attache aux données et de fonctions de régularisations séparables :

$$\mathbf{x}^{(\text{MAP})} = \arg \min_{\mathbf{x}} (\Phi_{\text{MV}}(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \mathbf{H}) + \Theta_{\text{S}}(\mathbf{x}) + \Theta_{\text{Color}}(\mathbf{x})), \quad (2.39)$$

où Θ_{S} est la régularisation spatiale et Θ_{Color} la régularisation spectrale.

2.5.3.1 Le terme d'attache aux données

Dans l'hypothèse d'un bruit gaussien uniforme de variance σ_b^2 , le terme d'attache aux données induit par le modèle de formation des données décrit par l'équation (2.38) est :

$$\Phi_{\text{MV}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \mathbf{H}) = \frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y})^T \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.40)$$

$$w_{r,c} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sigma_b^{-2} & \text{si } y_{r,c} \text{ est mesuré,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.41)$$

2.5.3.2 Régularisation spatiale

La régularisation spatiale s'écrit

$$\Theta_{\text{S}}(\mathbf{x}) = \sum_{c \in \text{RVB}} \alpha_c^{\text{S}} \Omega_{\text{S}}(\mathbf{x}_c), \quad (2.42)$$

où $\Omega_{\text{S}}(\mathbf{x}_c)$ est une régularisation sur les gradients spatiaux avec la norme ℓ_2 - ℓ_1 définie Eq. (2.21).

La dynamique étant identique dans chaque canal, les hyper-paramètres spatiaux seront pris identiques :

$$\alpha_R^{\text{S}} = \alpha_V^{\text{S}} = \alpha_B^{\text{S}} = \alpha^{\text{S}}. \quad (2.43)$$

2.5.3.3 Régularisation RVB

Sur chacun des trois canaux RVB d'une image naturelle comme ceux de l'image "lighthouse" présentés figures 2.37, 2.38 et 2.39, on peut reconnaître la scène car des structures spatiales identiques y sont présentes. On peut donc supposer une forte corrélation entre ces différents canaux. C'est ce que l'on peut constater si l'on observe les profils d'une colonne de différents canaux de l'image comme ceux présentés sur la figure 2.40. On observe plus précisément que ces profils sont continus par morceaux et que si les valeurs des différents canaux sont différentes à l'intérieur d'une zone homogène, les discontinuités sont situées aux mêmes endroits.



FIG. 2.37 — Lighthouse : Canal rouge.



FIG. 2.38 — Lighthouse : Canal vert.



FIG. 2.39 — Lighthouse : Canal bleu.

Ceci implique donc que les hautes fréquences de chaque canal sont identiques comme cela est attesté par la figure 2.41. Cette caractéristique a été identifiée très tôt par la communauté travaillant sur le démosaiçage. Elle a plus particulièrement été étudiée par GUNTURK *et al.* (2002) et ZHANG et WU (2005) qui ont mesuré la corrélation entre les hautes fréquences des différents canaux RVB. Ces hautes fréquences ont été extraites en utilisant un filtre Laplacien. Toutes les images de la base de données Kodak présentent des corrélations supérieures à 0.92 entre deux canaux. De plus, ils ont remarqué que la corrélation entre les canaux Rouge et Bleu était toujours plus faible que les corrélations entre les canaux Rouge et Vert ou Bleu et Vert. Cela les a conduit à des algorithmes qui estiment d'abord le canal vert puis contraignent les hautes fréquences des canaux bleu et rouge à être similaires aux hautes fréquences du canal vert. GUNTURK *et al.* (2002) utilisent pour cela une méthode POCS (pour Projection Onto Convex Sets). Ces méthodes sont très performantes pour le démosaiçage seul.

Nous proposons ici d'utiliser la forte corrélation des hautes fréquences dans chaque couleur pour élaborer une régularisation RVB. Elle s'écrit ainsi :

$$\Theta_{\text{Color}}(\mathbf{x}) = \alpha^{\text{C}} \Omega_{\text{Color}}(\mathbf{x}), \quad (2.44)$$

$$\Omega_{\text{Color}} = \|\mathbf{P} \cdot \mathbf{d}_{R,V}\|_2^2 + \|\mathbf{P} \cdot \mathbf{d}_{B,V}\|_2^2, \quad (2.45)$$

où $\mathbf{d}_{c,c'} = \mathbf{x}_c - \mathbf{x}_{c'}$ est la différence pixel à pixel entre les canaux c et c' et \mathbf{P} un filtre passe-haut. Ce filtre est défini par

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{L}, \quad (2.46)$$

où \mathbf{I} est l'identité et \mathbf{L} le filtre passe-bas effectuant une convolution par le noyau séparable

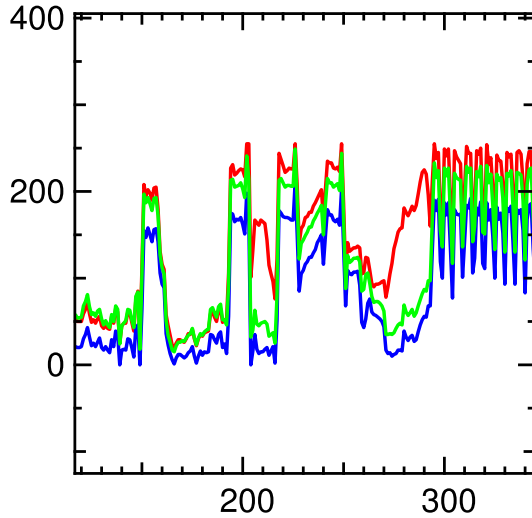


FIG. 2.40 — Profils des trois canaux RVB de la 100^e colonne de l'image Lighthouse (Cette colonne traverse la bouée rouge de part en part).

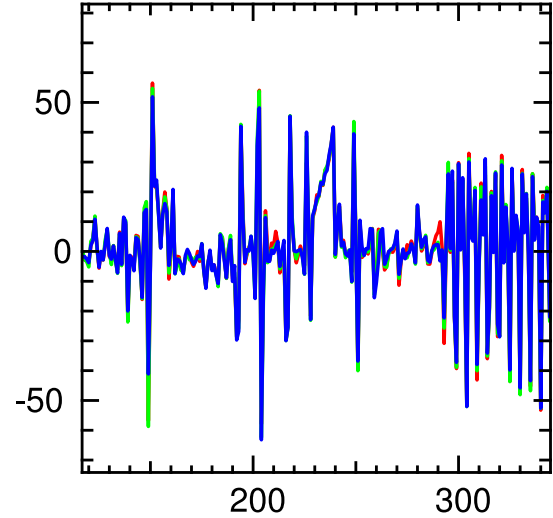


FIG. 2.41 — Profil des trois canaux RVB présentés Fig. 2.40 filtrés passe-haut.

5 × 5 :

$$\mathbf{K} = \frac{1}{256} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Notons que cette opération peut se calculer analytiquement et l'équation (2.45) se réécrire :

$$\Omega_{\text{Color}} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}, \quad (2.48)$$

où \mathbf{C} est un opérateur différentiel entre les canaux RVB et \mathbf{P} un opérateur différentiel spatial intra-canal.

Pour compléter travail, il serait intéressant de comparer cette méthode avec d'autres méthodes de régularisation d'images multi-canaux ou de cartes de vecteurs utilisées dans d'autre domaines, en débruitage et en in-painting notamment, en particulier les méthodes à base d'équations de diffusion aux dérivées partielles développées par ?? et les méthodes de total variation couleur (??).

2.5.4 Résultats : données simulées

Pour vérifier l'efficacité de notre méthode, différents tests ont été conduits sur des données simulées comme réelles. Dans tous ces tests, les hyper-paramètres ont été réglés manuellement d'après une évaluation visuelle du résultat. De plus, bien qu'il soit tout à fait possible d'utiliser des PSF variant selon les canaux avec exactement le même algorithme et sans trop affecter son efficacité, les données seront simulées avec une PSF identique dans chaque canal.



FIG. 2.42 — Jeu de données issue de la base Kodak et utilisées pour nos simulations. De gauche à droite : lighthouse, sail, statue and window.

Toutes les simulations ont été effectuées avec les quatre images extraites de la base Kodak et présentées à la figure 2.42. Toutes ces images sont de taille 512×728 et échantillonnée sur 8 bits (soit 256 niveaux de quantification).

La qualité des reconstructions a été mesurée par le PSNR (pour *Peak Signal to Noise Ratio* qui est classiquement utilisé pour ce type d’algorithmes. Ce critère exprimé en décibel correspond à l’erreur moyenne quadratique normalisée par la valeur maximale M possible pour un pixel (en général $M = 255$) :

$$E_{\text{PSNR}} = -10 \log_{10} \left(\frac{1}{N M^2} \sum_{c,k} (\hat{x}_{c,k} - x_{c,k})^2 \right), \quad (2.49)$$

où K est le nombre de pixels et \hat{x} et x respectivement l’image restaurée et l’image originale. L’erreur de reconstruction est ici assimilée à du bruit mesuré par le PSNR. Ainsi, plus le PSNR est grand, mieux est reconstruite l’image. A cause de l’approximation circulante et comme l’image n’est pas stationnaire, au bord de l’image, une bande de largeur égale à la moitié de la PSF est corrompue par le repliement de champ, et par conséquent, ne doit pas être pris en compte dans la mesure du PSNR.

2.5.4.1 Type de flou

Les trois types de flou considérés lors des simulations sont parmi les flous typiquement rencontrés en imagerie, à savoir :

- le flou gaussien (PSF gaussienne), ici de largeur à mi-hauteur de 4 pixels,
- le flou de défocalisation (ou de defocus) simulé par une PSF en disque, ici de 4 pixels de rayon,
- le flou de bougé dont la PSF est le trajet qu’a effectué la scène relativement à la caméra, ici un bougé vertical de 5 pixels.

Les hyper-paramètres sont fixés manuellement de façon à obtenir le meilleur PSNR. La qualité du résultat de la reconstruction est mesurée par son PSNR estimé avec l’image non floue et non mosaïquée comme référence. Ce PSNR est utilisé pour comparer cette reconstruction avec l’image floue non mosaïquée, l’interpolation de celle-ci et la déconvolution de cette



FIG. 2.43 — Détails de l'image statue avec un flou de bougé vertical de 5 pixels présenté tableau 2.3. De gauche à droite et de haut en bas, on a l'image d'origine, les données (image floue mosaïquée), l'interpolation des données, la déconvolution de cette interpolation et la reconstruction par la méthode proposée. Les différences sont particulièrement visibles sur les rides et la couronne.

interpolation. Cette déconvolution de l'interpolation est réalisée avec le même algorithme en supprimant simplement l'opérateur de mosaïquage dans le calcul de la vraisemblance. La figure 2.43 résume en quelque sorte ces comparaisons.

Les résultats sont présentés le tableau 2.3. Le gain de la méthode proposée est en moyenne de +1.15 dB mais on peut constater des disparités importantes selon le type de flou. Dans le cas d'un flou gaussien et plus encore dans le cas d'un flou de défocalisation, les hautes fréquences sont très atténuées; c'est pourquoi l'image interpolée est très proche de l'image d'origine. Le gain que l'on peut espérer de la méthode présentée par rapport à un démosaïçage suivi d'une déconvolution est donc faible (+1.05 dB dans le cas gaussien, +0.1 dB dans le cas défocalisation). Notons que pour l'image "window", la déconvolution de l'interpolation donne un meilleur PSNR que la méthode de reconstruction conjointe; ceci pour une raison encore inexpliquée. Par contre, dans le cas d'un flou de bougé vertical, le repliement introduit par les hautes fréquences horizontales laissées intactes par le bougé, introduit de nombreux défauts dans l'interpolation, perturbant la déconvolution. C'est sur ce type de données, où le repliement est important, que l'approche proposée est la plus justifiée et fournit les résultat

Image	flou	Image floue	Interpolation bilinéaire	déconvolution de l'interpolation	Méthode présentée
Light-house	Gaussien	24.61	-0.28	+3.99	+5.60
	Defocus	22.97	+0.01	+6.17	+6.90
	Bougé	27.37	-1.42	+0.82	+3.58
Sail	Gaussien	27.96	-0.36	+5.00	+5.93
	Defocus	26.50	-0.05	+6.30	+6.46
	Bougé	30.66	-0.98	+2.03	+4.33
Statue	Gaussien	28.36	-0.29	+4.11	+4.86
	Defocus	27.20	-0.06	+5.60	+5.69
	Bougé	29.83	-0.52	+2.94	+5.57
Window	Gaussien	28.10	-0.46	+5.69	+6.55
	Defocus	26.59	-0.17	+6.81	+6.23
	Bougé	30.10	-0.77	+4.04	+5.65
Moyenne	Gaussien		-0.35	+4.70	+5.74
	Defocus		-0.07	+6.22	+6.33
	Bougé		-0.92	+2.46	+4.78
moyenne			-0.45	+4.46	+5.61

Tab. 2.3 — Amélioration du PSNR (en dB) par rapport à l'image floue non mosaïquée pour l'interpolation bilinéaire, sa déconvolution et l'algorithme présenté.

les plus satisfaisants.

2.5.4.2 Robustesse au bruit

Les résultats précédents ont été produits sur des données sans bruit. Pour évaluer la robustesse au bruit de l'algorithme proposé, des simulations ont été effectuées avec les mêmes flous en y ajoutant un bruit additif blanc gaussien centré. Seule les images "lighthouse" et "sail" ont été utilisées. De même, les hyper-paramètres sont fixés manuellement au mieux. La qualité du résultat de la reconstruction est mesurée par son PSNR et comparée au PSNR de l'interpolation bilinéaire de données. Les figures 2.44 et 2.45 présentent l'interpolation bilinéaire et la reconstruction conjointe pour un flou de bougé avec un bruit très important de variance $\sigma^2 = 100$. Sur l'interpolation, le bruit est responsable de cette mosaïque de fausses couleurs même si les structures peuvent être distinguées. Sur la reconstruction proposée, un effet de lissage permet de retrouver les couleurs d'origine en particulier pour l'herbe. Par contre, grâce à l'utilisation d'une norme $\ell_2\text{-}\ell_1$, les structures on été conservées et de nombreux barreaux de la barrière sont visibles.

Les résultats sont présentés sur le tableau 2.4. Dans l'attente d'une confirmation par des tests plus importants, il semble que deux régimes différents puissent être dégagés de ces résultats :

- Un régime de **déconvolution en présence de bruit**, où la déconvolution permet de retrouver les hautes fréquences de l'image. Plus le bruit augmente moins les hautes fréquences sont reconstruites ; c'est pourquoi le gain en PSNR diminue car, de plus, le filtrage passe-bas lié à l'interpolation atténue correctement le bruit. Lorsque le bruit atteint



FIG. 2.44 — Interpolation bilinéaire de l'image "lighthouse" avec un flou de bougé et un bruit additif gaussien de variance $\sigma^2 = 100$.



FIG. 2.45 — Reconstruction de l'image "lighthouse" avec un flou de bougé et un bruit additif gaussien de variance $\sigma^2 = 100$.

un niveau où très peu de hautes fréquences peuvent être reconstruites par déconvolution, alors qu'il reste correctement filtré par l'interpolation, le gain de la méthode atteint un minimum. Ce minimum est atteint pour un niveau de bruit proche de $\sigma^2 = 10$.

- Passé ce seuil, l'algorithme semble entrer dans un régime de **débruitage pur**. Un bruit très important perturbe des fréquences de plus en plus basses et ne va plus être filtré par l'effet passe bas de l'interpolation et le PSNR de l'image interpolée chute. Cela conduit à de très nombreuses fausses couleurs comme on peut le voir à la figure 2.44. Les hautes fréquences atténuées par le flou ne sont plus reconstruites par la déconvolution, mais la régularisation impose une contrainte de lissage avec préservation des bords qui permet de filtrer une grande partie de ce bruit, restituant ainsi le contenu basse fréquence de l'image.

2.5.4.3 Cas d'un flou étroit

Lors de l'étude de l'algorithme, nous avons relevé que, plus le flou est important, plus le résultat de la déconvolution de l'interpolation est proche de la méthode proposée. De plus, nous avons constaté que la déconvolution permet de retrouver les hautes fréquences de l'image sans produire les fausses couleurs dues au repliement. Notre algorithme permet en quelque sorte d'estimer les valeurs manquantes en utilisant la partie ayant "bavé" sur les pixels voisins à cause du flou.

Nous proposons de vérifier si l'introduction d'un flou étroit dans la formation de l'image peut améliorer le démosaïçage. Nous avons à cet effet convolué les quatre images de test par une PSF gaussienne de largeur à mi-hauteur de deux pixels.

Image	Flou	Bruit en dB			
		$\sigma^2 = 0$		$\sigma^2 = 1$	
		Interpolation bilinéaire	Δ PSNR reconstruction	Interpolation bilinéaire	Δ PSNR reconstruction
Light-house	Gaussien	24.3	+5.9	24.1	+3.1
	Defocus	23.0	+6.9	22.6	+5.0
	Bougé	25.9	+5.0	25.9	+4.6
Sail	Gaussien	27.6	+6.3	27.8	+3.4
	Defocus	26.4	+6.5	26.5	+5.4
	Bougé	29.7	+5.3	29.6	+4.7
moyenne			+5.8		+4.4
		$\sigma^2 = 10$		$\sigma^2 = 100$	
Light-house	Gaussien	23.2	+1.9	10.3	+11.3
	Defocus	22.5	+1.2	15.9	+5.3
	Bougé	24.6	+2.7	10.3	+11.3
Sail	Gaussien	27.3	+0.8	16.6	+7.1
	Defocus	25.0	+2.8	10.4	+12.8
	Bougé	27.0	+3.2	10.4	+13.3
moyenne			+2.1		+10.2

Tab. 2.4 — PSNR de la reconstruction bilinéaire et sa différence avec la reconstruction d’après la méthode proposée en dB pour différents types de flou et différents niveaux de bruit.

Nous comparons dans le tableau 2.5 les résultats de cette reconstruction avec les résultats de l’interpolation des données floues mais aussi des données non-floutées. Sur les quatre images testées, la méthode proposée permet une reconstruction avec un gain moyen de 5.64 dB par rapport à l’interpolation de l’image non floutée. Les résultats de l’utilisation de plusieurs méthodes de démosaïçage existantes sur les même images, extraits de (CHANG et TAN, 2006), sont données dans le tableau 2.6 et peuvent être comparés aux résultats de la méthode proposée. Les légères différences de PSNR peuvent être expliquées par le fait que l’on ne prend pas en compte un cadre de quelques pixels autour de l’image et par l’ordre des couleurs dans le filtre de Bayer (pour nos expérimentations, le filtre rouge est appliqué sur le coin en haut à gauche). La méthode proposée ici semble être moins efficace que presque toutes les méthodes de démosaïçage testées.

Cependant, la mesure du PSNR correspond à une mesure quantitative du bruit de reconstruction, mais des reconstructions donnant le même PSNR peuvent contenir des artefacts perceptuellement très différents. En effet, sur la figure 2.49 est reproduite une figure de l’article (CHANG et TAN, 2006) présentant un détail de l’image lighthouse reconstruite par les diverses méthodes étudiées. Presque toutes ces méthodes présentent des fausses couleurs sur la barrière qui ne sont pas présentes dans la reconstruction par notre méthode présentée figure 2.51. De plus, le fait d’avoir à réestimer tous les pixels et non les deux tiers seulement peut expliquer la différence de PSNR entre la méthode proposée et des méthodes visuellement moins satisfaisantes comme FREEMAN (1988), PEI et TAM (2003) et HAMILTON et ADAMS (1997). Uti-



FIG. 2.46 — Image floutée avec une PSF gaussienne étroite (largeur à mi hauteur de 2 pixels).



FIG. 2.47 — Démosaïçage de l'image floutée avec une PSF étroite par interpolation bilinéaire.



FIG. 2.48 — Démosaïçage et déconvolution de l'image floutée avec une PSF étroite par la méthode proposée.

Image	Interpolation sans flou	Interpolation avec flou	Méthode présentée
lighthouse	28.17	26.72	35.000
sail	32.44	30.70	37.72
statue	32.10	30.64	37.27
window	33.51	31.29	38.76
moyenne	31.55	29.84	37.19

TAB. 2.5 — Amélioration du PSNR (en dB) par rapport à l'image floue non mosaïquée pour l'interpolation bilinéaire, sa déconvolution et l'algorithme présenté.

liser un PSNR ne mesurant que les erreurs par pixel estimé, revient à soustraire 1.72 dB aux résultats de chaque méthode. De plus, en ayant à réestimer tous les pixels, la méthode proposée minimise les erreurs haute fréquences responsables des fausses couleurs, au prix toutefois d'un lissage générant des erreurs plus importantes pour des fréquences plus basses. Cependant ces erreurs plus basses fréquences sont moins pénalisantes perceptuellement. Il faudrait donc utiliser un estimateur plus "perceptuel".

Une autre source d'erreur de la méthode proposée est la présence d'un artefact particulier dit "*effet fermeture éclair*" (en anglais *zipper effect*) au niveau des bords francs entre zones de couleurs pures (e.g. rouge, vert, bleu, noir, blanc, jaune ...). Cet effet, illustré sur la figure 2.54, est également présent dans les méthodes de démosaïçage évoluées telles que celles de [LI et ORCHARD \(2001\)](#), [GUNTURK et al. \(2002\)](#), [WU et ZHANG \(2004\)](#), [HIRAKAWA et PARKS \(2005\)](#) et [CHANG et TAN \(2006\)](#).

Méthode	lighthouse	sail	statue	window	moyenne
Bilinéaire	28.49	32.89	32.34	33.87	31.90
COK (1986)	+0.82	+0.52	+0.05	+0.25	+0.41
FREEMAN (1988)	+5.87	+6.12	+6.72	+6.83	+6.38
LI et ORCHARD (2001)	+9.00	+7.54	+5.18	+5.64	+6.84
PEI et TAM (2003)	+7.02	+6.89	+7.02	+6.85	+6.94
HIRAKAWA et PARKS (2005)	+9.63	+7.86	+6.73	+6.59	+7.70
WU et ZHANG (2004)	+9.66	+8.21	+7.19	+7.15	+8.05
GUNTURK <i>et al.</i> (2002)	+11.88	+9.17	+9.41	+7.7	+9.67
CHANG et TAN (2006)	+12.41	+10.42	+9.22	+8.92	+10.24

TAB. 2.6 — PSNR (en dB) de obtenus pour les quatre images qui nous intéressent, avec méthodes de démosaïçage parmi les plus usitées ; Données extraites du tableau 2 de l'article de [CHANG et TAN \(2006\)](#).

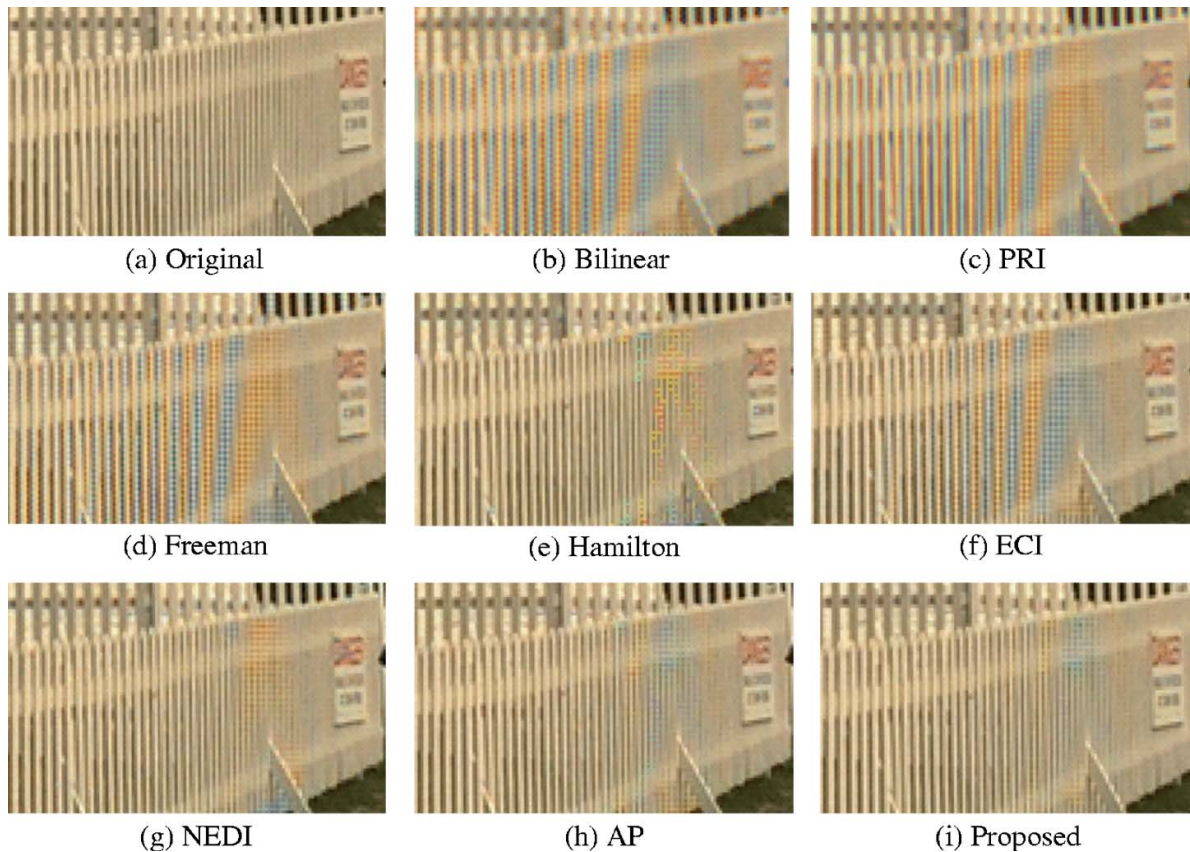


FIG. 2.49 — Extrait de la figure 16 de l'article de [CHANG et TAN \(2006\)](#) présentant un détail de la reconstruction de l'image Lighthouse avec les différentes méthodes décrites dans le tableau 2.6 (Bilinear est pour interpolation bilinéaire, PRI : [COK \(1986\)](#), Freeman : [FREEMAN \(1988\)](#), ECI : [PEI et TAM \(2003\)](#), Hamilton : [HAMILTON et ADAMS \(1997\)](#), NEDI : [LI et ORCHARD \(2001\)](#), AP : [GUNTURK *et al.* \(2002\)](#), PCSD : [WU et ZHANG \(2004\)](#), AHD : [HIRAKAWA et PARKS \(2005\)](#)). La dernière ("proposed") est pour [CHANG et TAN \(2006\)](#).



FIG. 2.50 — Détail de l'image floue interpolée Fig. 2.47.



FIG. 2.51 — Détail de la déconvolution et démosaïçage conjointe Fig. 2.51.



FIG. 2.52 — Détail de l'image originale.

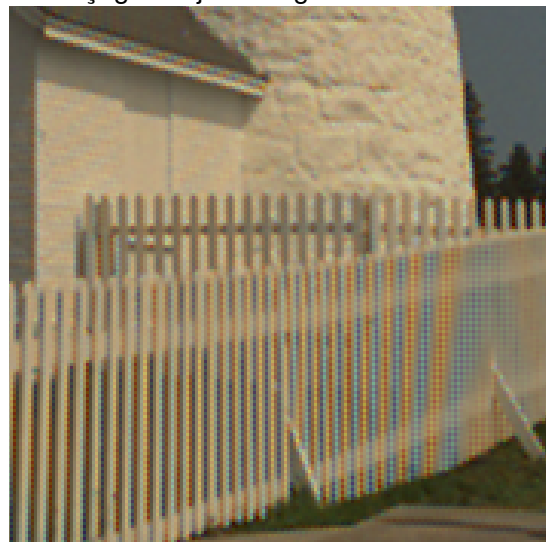


FIG. 2.53 — Détail de la reconstruction par interpolation de l'image sans flou.



FIG. 2.54 — Illustration de l'effet de fermeture éclair sur un détail de la reconstruction de l'image sail.

2.5.5 Résultats : Données réelles

Utiliser des données réelles permet de valider la robustesse des algorithmes. C'est pourquoi nous avons testé la méthode proposée sur une photo défocalisée manuellement. Nous avons utilisé un appareil photo Canon EOS 350D reflex fournissant les données au format *.raw* non traitées par l'appareil. Plusieurs photographies de la même scène ont été prises avec différents niveaux de défocalisation. La PSF a été estimée par une méthode de déconvolution aveugle ad-hoc à partir d'une PSF prototype en forme de disque. Elle est présentée figure 2.57. Les hyper-paramètres fournissant la meilleure reconstruction sont estimées d'après l'inspection visuelle du résultat. Elle est affichée figure 2.56 et peut être comparée avec la reconstruction par interpolation bilinéaire Fig. 2.55 et la photographie de la même scène la focalisation réglée par l'auto-focus ainsi que la balance des couleurs. Bien que des artefacts comme des rebonds autour des bords francs soient présents, la reconstruction de la photographie est visuellement satisfaisante : les couleurs sont respectées et la résolution est améliorée comme l'atteste le fait qu'il est maintenant possible de lire le texte sur le panneau.

2.5.6 Perspectives

Au travers des différents tests présentés, l'algorithme de démosaïçage et de déconvolution conjointe a montré ses capacités et sa robustesse. Malheureusement, l'absence de méthodes automatiques et rapides de réglage des hyper-paramètres limite pour le moment ses applications. Il faudrait, si l'on voulait continuer ce travail, faire sauter ce verrou. Par contre, l'expérience avec un faible flou montre que même si les résultats quantitatifs sont moins bons, cette approche atteint au moins perceptuellement des résultats proches de certaines méthodes de démosaïçage de l'image sans flou. Les puissances de calcul allant en grandissant, il est préférable et probablement moins coûteux d'avoir une optique médiocre avec un bon algorithme



FIG. 2.55 — Reconstruction par interpolation bilinéaire de la photographie.



FIG. 2.56 — Reconstruction par la méthode proposée de la photographie.

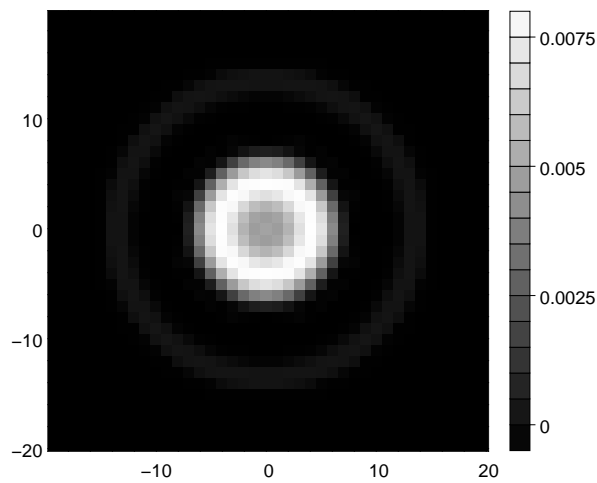


FIG. 2.57 — PSF utilisée pour la déconvolution.



FIG. 2.58 — Photographie correctement focalisée de la même scène. Le démosaïçage et la balance des couleurs ont été faites automatiquement par l'appareil photo.

qu'une très bonne optique avec un algorithme médiocre. A plus long terme, sachant que le filtrage par un filtre de Bayer revient à disposer les spectres des trois composantes RVB dans un seul espace de Fourier, il serait intéressant d'étudier des flous variant avec la couleur qui permettraient de reconstruire au mieux les hautes fréquences de la luminance tout en prévenant le chevauchement des spectres des différents canaux.

Déconvolution aveugle de données multidimensionnelles

Dans ce chapitre nous étendons l'algorithme de déconvolution multidimensionnelle à la déconvolution aveugle, c'est-à-dire sans connaître la réponse impulsionnelle (la PSF) du système. La variété des origines physiques du flou implique des a priori différents suivant les applications. Après une description de ces différentes origines nous dresserons un panorama des diverses méthodes de déconvolution aveugle proposées au cours des trente dernières années en précisant les a priori qu'elles utilisent. Ensuite nous proposerons notre méthode issue d'une approche problèmes inverse. Enfin celle-ci sera validé par des tests sur des données réelles dans trois applications différentes : la coronarographie, la microscopie confocale et la microscopie classique.

Ce chapitre se base en partie sur un état de l'art des méthodes de déconvolution aveugle édité par [CAMPISI et al. \(2007\)](#). La méthode proposée et ses résultats ont fait l'objet d'une communication dans une conférence internationale ([SOULEZ et al. , 2008c](#)).

3.1 Description

Au chapitre précédent, nous avons toujours considéré que la PSF était parfaitement connue. En pratique cependant cela est rarement le cas. Reconstruire les données (*i.e.* l'image nette dans le cas 2D) nécessite donc l'estimation de la PSF. On parle alors de déconvolution aveugle. Dans le cas où l'on possède une bonne estimation de la PSF on parle souvent de déconvolution myope. Cependant il est difficile de définir ce qu'est une *bonne estimation* et, à cause de cela, la frontière entre déconvolution myope et aveugle est très ténue. C'est pourquoi dans la suite de ce chapitre ces deux variantes seront comprises dans l'expression *déconvolution aveugle*.

Le modèle discret de formation des données reste le même que celui décrit au chapitre précédent :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}. \quad (3.1)$$

Seulement, dans la déconvolution aveugle, la matrice \mathbf{H}^+ comme le vecteur \mathbf{x}^+ doivent être

estimés d'après les données \mathbf{y} . Il y a donc beaucoup plus d'inconnues que de données et le problème est très mal-posé.

Le nombre de coefficients nécessaires pour définir la matrice \mathbf{H}^+ peut être réduit en utilisant l'hypothèse d'isoplanétisme décrite au chapitre précédent (Sec. 2.1.2). Dans ce cas \mathbf{H}^+ est *Block Toeplitz with Toeplitz Block* et peut être diagonalisée dans l'espace de Fourier réduisant ainsi fortement le nombre de coefficients à estimer. Cependant même dans le cas où la matrice $\hat{\mathbf{H}}^+ = \text{diag } \hat{\mathbf{h}}^+$ est totalement diagonalisable dans l'espace de Fourier, il y a encore deux fois plus d'inconnues que de données. Cela donne lieu à de nombreuses dégénérescences : les couples $\{\mathbf{x}^+, \mathbf{h}^+\} = \{\mathbf{h}, \mathbf{x}\}$, $\{\mathbf{x}^+, \mathbf{h}^+\} = \{\mathbf{y}, \delta\}$, $\{\mathbf{x}^+, \mathbf{h}^+\} = \{\alpha \mathbf{x}, \delta \mathbf{h} / \alpha\}$ et $\{\mathbf{x}^+, \mathbf{h}^+\} = \{\delta, \mathbf{y}\}$ où δ représente un dirac, sont toutes de (mauvaises) solutions au sens du maximum de vraisemblance de l'équation $\mathbf{y} = \mathbf{H}^+ \cdot \mathbf{x}^+$. Cela illustre bien le caractère mal-posé de la déconvolution aveugle. Il est donc nécessaire d'introduire des *a priori* sur la PSF comme sur l'objet de manière à retrouver un problème bien-posé et bien-conditionné.

Établir des *a priori* sur la PSF impose une bonne connaissance de celle-ci. Or l'origine physique de la déformation peut différer fortement d'une application à l'autre. C'est pourquoi une grande variété de PSFs peut être rencontrée en déconvolution. L'*a priori* à injecter dans le problème peut donc être différent d'une application à l'autre. Nous allons donc décrire les PSF les plus courantes, en extraire des *a priori* et définir des régularisations susceptibles d'être appliquées dans le cadre de la déconvolution aveugle.

3.2 Origine du flou

Dans cette section seront énumérés et décrits les types de PSFs rencontrés couramment dans différents dispositifs d'imagerie. Seuls les flous isoplanétiques seront considérés ici. Cette taxonomie permettra de définir des modèles paramétriques et de définir quels *a priori* peuvent être utilisés suivant les applications. D'abord seront décrits les flous rencontrés dans l'acquisition d'image en deux dimensions puis ensuite les PSFs liées à l'acquisition de données multidimensionnelles.

3.2.1 PSF 2D

3.2.1.1 Flou de bougé

Le mouvement relatif de la caméra et de la scène pendant la durée d'exposition conduit à un flou dit "de bougé". La PSF résultante représente l'intégration temporelle suivant le parcours de l'axe optique à travers la scène. Cette PSF est représentée par une ligne plus ou moins chahutée suivant l'origine du mouvement (objet rapide, vibration du dispositif optique...). La structure de cette PSF comprend en général des bords francs se détachant d'un fond nul. Cependant si le temps de pose est assez court devant le mouvement relatif, on peut définir un modèle de flou de "bougé" linéaire comme par exemple le bougé horizontal de longueur L (L est un entier pair) donné par :

$$h(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{L+1} & \text{si } -\frac{L}{2} \leq r_1 \leq \frac{L}{2} \text{ et } r_2 = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Une telle définition du flou de bougé n'est valide que pour les mouvements de translation et exclue les flous de bougé dus à des rotations relatives de la scène et de la caméra comme les mouvements relatifs de différents objets présents dans la scène observée.

3.2.1.2 Flou de défocalisation

L'autre cause très courante de flou rencontrée en photographie est le flou dû à une mauvaise mise au point. Ce flou dit "de défocus" est provoqué par la profondeur de champ étroite du dispositif optique due à la taille finie de son ouverture. Ce flou peut-être complètement caractérisé (voir LEE (1990)) si l'on connaît la taille et la forme de l'ouverture, la focale, la distance entre l'objet et la caméra, la longueur d'onde... Malheureusement ces paramètres sont rarement connus précisément. Dans le cas où le flou de défocus est très important, la plupart des auteurs (par exemple : LEE (1990), GOUDAIL *et al.* (2000), VEGA et MOLINA (2006)...) approchent la PSF de défocus par un disque de rayon R proportionnel à celui de l'ouverture du dispositif optique :

$$h(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} & \text{si } r_1^2 + r_2^2 \leq R^2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.3)$$

CLAXTON et STAUNTON (2008) ont cependant montré qu'une gaussienne généralisée (voir section 1.6.3.3) modélise plus efficacement la PSF d'un flou de défocus dans un système bruité.

3.2.1.3 Flou lié à la turbulence atmosphérique

En astronomie, sur les images acquises avec des durées d'exposition longues, le flou causé par la turbulence a été étudié par de nombreux auteurs (MOFFAT, 1969; MOLINA et RIPLEY, 1989). Ce flou est en général approché par la PSF :

$$h(\mathbf{r}) \approx \left(1 + \frac{r_1^2 + r_2^2}{R^2} \right)^{-\beta}, \quad (3.4)$$

où R et β sont des paramètres inconnus à déterminer.

Dans les cas d'images acquises avec un système comportant une optique adaptative, DRUMMOND (1998) a trouvé empiriquement que la PSF d'image longue pose pouvait être modélisée par une lorentzienne ($\beta = 1$). Une telle PSF lorentzienne est quelques fois utilisée pour modéliser la PSF du flou dû à un milieu diffusant, en imagerie X en particulier.

Dans le cas des images courtes poses, les PSFs sont très perturbées, elle sont appelée "speckle" (SCHULZ, 1993; THIÉBAUT et CONAN, 1995).

3.2.1.4 Flou de diffraction

Lorsqu'aucun des flous précédemment décrits n'est présent et que le dispositif optique est parfait, la résolution de l'instrument n'est limitée que par la diffraction. Cette limite ($\propto \lambda/D$) ne dépend que de la longueur d'onde observée λ et de la largeur D de la surface sur laquelle est collectée la lumière (e.g. le diamètre du télescope). Cette limite de résolution se traduit, en l'absence d'obstruction centrale, par la convolution de l'image observée par une PSF égale à la fonction d'Airy :

$$h(r) = \left(\frac{2 J_1(r)}{r} \right)^2, \quad (3.5)$$

où J_1 est la fonction de Bessel de première espèce.

3.2.1.5 Flou gaussien

Si plusieurs types de flou concourent à la formation des données, la PSF résultante est égale au produit de convolution des différentes PSFs en jeu. Si ces flous sont importants et nombreux, ou si l'on a un flou de bougé dû à un mouvement aléatoire très rapide devant la durée d'exposition alors, d'après la loi des grands nombres, la PSF résultante est très proche d'une gaussienne de variance σ :

$$h(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{r}^T \Sigma^{-1} \mathbf{r}\right), \quad (3.6)$$

où Σ est la matrice de covariance.

3.2.2 PSFs multidimensionnelles

Dans le cas où les données considérées sont multidimensionnelles, en plus d'un flou spatial sur chaque image, on peut avoir à prendre en compte des distorsions transversales le long des autres dimensions. Ces distorsions peuvent être modélisées par une convolution entre les différentes trames du volume de données. Dans certains cas, cette convolution est séparable et il est possible de définir la PSF multidimensionnelle globale du système comme la convolution des PSFs suivant les différentes dimensions.

3.2.2.1 Rémanence temporelle

Si les données à traiter sont des séquences vidéo où chaque trame est acquise avec la même caméra, on peut observer un phénomène de rémanence temporelle du détecteur ; observé par exemple sur certains détecteurs en infrarouge. Cela signifie que la valeur mesurée sur un pixel correspond à la combinaison d'une mesure de l'énergie reçu par ce pixel pendant l'exposition et de la valeur de ce pixel à la trame précédente. Cela peut être modélisé par une PSF 1-D séparable décroissante sur quelques trames de long. Évidemment ce phénomène est causal — la valeur mesurée ne dépend pas des valeurs futures — et cette PSF n'est pas symétrique.

3.2.2.2 Mauvaise sélectivité spectrale

En imagerie couleur comme en imagerie multi-spectrale, il est difficile de créer des filtres spectraux très sélectifs mais atténuant peu la bande spectrale désirée. C'est pourquoi en général, les bandes spectrales issues des bancs de filtres d'un dispositif multi-spectral se chevauchent. Cela peut donc être modélisé par une PSF 1-D séparable généralement symétrique de quelques canaux spectraux de largeur.

3.2.2.3 Variation spectrale du flou spatial

La limite de diffraction est fonction de la longueur d'onde. La PSF 2-D (tache d'Airy) modélisant le flou de diffraction varie donc continûment avec la longueur d'onde. De la même façon l'indice de réfraction d'un milieu optique (l'air, le verre ...) varie avec la longueur d'onde et c'est pourquoi, en imagerie à travers la turbulence atmosphérique, la PSF varie continûment avec la longueur d'onde. De plus la variation d'indice des lentilles d'un objectif vont aussi faire varier sa distance focale avec la longueur d'onde. C'est pourquoi si l'image obtenue à une certaine longueur d'onde est au point, l'image obtenue dans un autre canal spectral

va être légèrement défocalisée, ceci d'autant plus qu'il sera spectralement éloigné du canal correctement mis au point.

3.2.2.4 Objets défocalisés

Dans les techniques comme la microscopie confocale permettant de faire des coupes optiques d'un même objet à différentes profondeurs, les images obtenues sont perturbées par la présence d'objets défocalisés en avant et en arrière de la scène observée. Les images prises à des profondeurs voisines apparaissent donc à la profondeur observée, de plus en plus défocalisée à mesure qu'elles sont éloignées de la profondeur observée. La PSF résultante est une PSF 3-D (non séparable) pouvant même dans certain cas varier en fonction de la profondeur.

3.3 *A priori* sur la PSF

Au vu des différents types de PSF décrits dans la section précédente, il est possible de dégager des *a priori* utiles pour contraindre la PSF dans le cadre de la déconvolution. Les origines physiques du flou pouvant être très différentes, certains de ces *a priori* ne sont valides que dans certaines applications.

Les *a priori* décrits ci-après concernent en majorité uniquement la partie spatiale (2-D) de la PSF. De plus, la façon concrète d'appliquer ces *a priori* ne sera décrite que dans les sections suivantes.

3.3.1 Normalisation

La premier *a priori* utilisable quelque soit le type de flou est la normalisation de la PSF. En effet, il est raisonnable de considérer que le flux moyen mesuré (c'est-à-dire la valeur moyenne des données floues) est identique au flux moyen émis ou réfléchi par la scène observée (l'objet net). Cela signifie donc que la PSF est normalisée à 1 et donne la contrainte :

$$\int h(s) ds = 1 . \quad (3.7)$$

Cette contrainte est le seul moyen de lever la dégénérescence du type $\{\mathbf{x}^+, \mathbf{h}^+\} = \{\alpha \mathbf{x}, \delta \mathbf{h} / \alpha\}$. En appliquant cet *a priori* on considère qu'il n'y a eu aucune atténuation de la lumière issue de l'objet lors de sa transmission jusqu'au détecteur. Sans mesure additionnelle, il n'est de toutes façons pas possible d'estimer une telle atténuation. Dans le cas où la lumière a été atténuée, un tel *a priori* équivaut à supposer cette atténuation constante dans le champ. L'objet reconstruit est alors égal, à une constante multiplicative près, à l'objet qui aurait été reconstruit sans atténuation.

3.3.2 Positivité

En lumière non-cohérente la PSF est toujours positive.

$$h(s) \geq 0 \quad \forall s . \quad (3.8)$$

Associée à la normalisation cette contrainte très forte est, comme nous le verrons, utilisée dans la plupart des méthodes de déconvolution aveugle.

3.3.3 Support spatial

Les flous de bougé, de défocus, ont toujours un support spatial assez étroit. Un tel support spatial étroit, c'est-à-dire un nombre faible de pixels significatifs est très souvent utilisé en pratique. En effet, si le flou est estimé dans l'espace image (c'est-à-dire qu'on estime la PSF proprement dite et non son expression dans un autre espace), cet *a priori* diminue fortement le nombre de paramètres à estimer, diminuant le caractère mal-posé et améliorant le conditionnement du problème. De plus, dans le cas où l'objet est étendu, il écarte la solution dégénérée où la PSF reconstruite est l'objet vrai et inversement ($\{\mathbf{x}^+, \mathbf{h}^+\} = \{\mathbf{h}, \mathbf{x}\}$).

3.3.4 Support spectral

Le même *a priori* peut être utilisé dans le cas des flous dont la fonction de transfert (MTF) est compacte dans l'espace de Fourier comme notamment la MTF d'un flou de diffraction. En effet, la fonction de transfert d'un télescope correspond à l'autocorrélation de sa fonction pupille, c'est-à-dire la forme du miroir principal occulté par le miroir secondaire et les bras de fixation de celui-ci. Cette contrainte écarte la dégénérescence où la PSF est un dirac ($\{\mathbf{x}^+, \mathbf{h}^+\} = \{\mathbf{y}, \delta\}$). Dans ce cas il peut être plus intéressant d'estimer la fonction de transfert (MTF) plutôt que la réponse impulsionnelle (PSF). Utiliser un support spectral permet de diminuer le nombre de paramètres à optimiser en estimant uniquement les frequels en dessous de la fréquence de coupure de l'instrument. Notons que supports spectral et spatial sont antagonistes.

3.3.5 PSF lisse

Imposer des contraintes de support spectral est équivalent à une contrainte de lissage de la PSF. On peut donc imaginer d'utiliser les mêmes contraintes de lissage que celles appliquées sur l'objet. Les flous de bougé et de défocus présentant des PSFs avec des bords francs, les régularisations avec préservation des bords pourraient être utilisées. A la différence des autres *a priori* présentés dans cette section, cette contrainte n'est pas applicable strictement et doit l'être par le biais d'une fonction de régularisation.

3.3.6 PSF uni-modale

Considérer les PSFs comme ayant un seul maximum à partir duquel elles tendent à décroître est un *a priori* valide dans de nombreux cas en particulier dans le cas d'un flou lié à la turbulence. Placé ce maximum au centre de la PSF, permet d'écarté la dégénérescence où l'objet estimé et les données sont décalés.

3.3.7 Symétrie de révolution

Il peut être aussi envisagé de réduire encore davantage le nombre de paramètres d'une PSF centro-symétrique en n'estimant que le profil de celle-ci. Un tel *a priori* pourrait être utilisé aussi si l'on estimait la MTF plutôt que la PSF. D'autres types de symétrie peuvent être envisagés mais avec cependant moins d'applications potentielles.

3.4 Méthodes de déconvolution aveugle

Le problème de la déconvolution aveugle est un problème important en traitement du signal. C'est un domaine très actif où, en particulier dans la déconvolution aveugle d'images, de très nombreuses méthodes ont été proposées pour un nombre d'applications encore plus grand comme en témoigne les articles de revues qui y sont consacrés (comme [KATSAGGELOS \(1991\)](#), [KUNDUR et HATZINAKOS \(1996a,b\)](#) et [BANHAM et KATSAGGELOS \(1997\)](#)) et la récente publication d'un livre dédié à ce problème édité par [CAMPISI *et al.* \(2007\)](#). Sans prétendre à l'exhaustivité, nous présentons dans cette section une partie de ces méthodes. Pour faire face à la grande diversité ces algorithmes nous en proposons une classification en trois grandes familles : (i) les méthodes d'identification de la PSF suivies d'une déconvolution classique, (ii) les méthodes d'estimations du reconstituteur optimal (le plus souvent au sens de Wiener) et (iii) les méthodes d'estimations conjointes de la PSF et de l'objet. Parmi ces dernières approches d'estimations conjointes nous distinguerons (iv) les méthodes basées sur l'approche inverse (ou bayésienne) introduite au premier chapitre.

3.4.1 Identification de la PSF

Lorsque l'on se trouve devant un problème de déconvolution aveugle, la première idée est souvent de tenter d'estimer la PSF pour utiliser ensuite une méthode de déconvolution classique. Même si ce ne sont pas vraiment des méthodes de déconvolution aveugle à proprement parler, ces méthodes peuvent être utilisées dans des algorithmes de déconvolution aveugle soit pour une première estimation de la PSF soit dans une perspective de déconvolution myope.

Il y a globalement deux approches pour estimer la PSF, l'une, la calibration, analyse les mesures d'objets connus ou fait appel à des mesures supplémentaires, l'autre, l'auto-calibration, estime la PSF seulement d'après les données.

3.4.1.1 La calibration

Mesure d'objets connus Dans certaines applications, il est possible d'estimer la PSF grâce à des méthodes de calibration en utilisant l'image d'un objet parfaitement connu, comme par exemple des billes de métal en microscopie, des bords francs connus en rayon X ([CHALMOND, 1991](#)), une étoile connue voire une étoile laser en astronomie . . . Dans le cas d'un objet ponctuel comme une étoile l'estimation de la PSF est directe. Dans d'autres cas, cette estimation peut être vue comme la déconvolution des données par l'objet en question.

L'estimation du front d'onde En l'absence d'atténuation et de diffusion, une façon équivalente d'exprimer la déformation liée au flou est de caractériser les variations du front d'onde de la lumière arrivant sur le capteur. Celles-ci peuvent s'exprimer sous la forme d'une carte de phase dans le plan pupille de l'instrument dont l'autocorrélation est la fonction de transfert du flou.

L'utilisation d'un senseur de front d'onde, comme par exemple un analyseur de Shack-Hartman ([PLATT et SHACK, 1971](#)), peut donc permettre une estimation de la PSF et par la suite une déconvolution comme le propose [PRIMOT *et al.* \(1990\)](#). Malheureusement l'ajout d'un tel dispositif optique rend cette option peu séduisante en pratique. Par contre, les systèmes d'optiques adaptatives utilisent des mesures du front d'onde pour calculer les compensations

à appliquer au miroir déformable. Or les corrections apportées par de tels dispositifs ne sont que partielles et une déconvolution des images ainsi acquises peut être nécessaire, en particulier pour les images longue pose. Ces systèmes fonctionnant en boucle fermée, c'est-à-dire que le front d'onde est estimé après la compensation, les mesures d'erreur de correction permettent d'estimer des quantités statistiques liées à la PSF caractérisant le flou présent sur une image longue pose (VÉLAN *et al.*, 1997).

Une autre technique utilisée pour estimer le front d'onde est "la diversité de phase". La diversité focale de phase (GONSALVES, 1982) utilise plusieurs images séparées par des défocalisations connues pour reconstruire la phase (voir MUGNIER *et al.*, 2006). VOGEL *et al.* (1998) utilisent cette diversité de phase dans un but de déconvolution aveugle dans le cadre d'une approche *maximum a posteriori* avec une régularisation par "total variation". Comme le propose CHENEGROS *et al.* (2007), cette méthode est tout à fait adaptée pour la déconvolution aveugle de données multidimensionnelles comprenant une dimension longitudinale (profondeur). Une autre méthode de "diversité de phase" est la "diversité de phase polychromatique" (RONDEAU, 2007; VAILLANT *et al.*, 2000) qui exploite quant à elle les différences entre images prises à différentes longueurs d'onde. A notre connaissance aucune utilisation de cette diversité de phase polychromatique n'a été proposée pour la déconvolution aveugle de données multi-spectrales.

3.4.1.2 L'auto-calibration

Les méthodes spectrales et cepstrales Lorsque l'on connaît l'origine physique du flou il est possible d'utiliser des modèles paramétriques de la PSF. En particulier, si la fonction de transfert contient des zéros comme dans le cas d'un bougé ou d'un défocus, l'identification des zéros permet d'en estimer les paramètres.

Parmi les premières employées, ces méthodes spectrales (STOCKHAM *et al.*, 1975) sont basées sur l'hypothèse que la partie du spectre des données liée à la PSF ne varie pas dans l'image à la différence de la partie du spectre due à l'objet original. Ces méthodes tentent donc d'extraire la partie commune des spectres d'une série d'images de la même image. Elle utilise pour cela le logarithme du spectre. En effet, pour chaque image y_i on a :

$$y_i = \mathbf{h} * x_i + n_i \quad (3.9)$$

$$\hat{y}_i = \hat{\mathbf{h}} \times \hat{x}_i + \hat{n}_i \quad (3.10)$$

$$\log(\hat{y}_i) \approx \log(\hat{\mathbf{h}}) + \log(\hat{x}_i), \quad (3.11)$$

où \times correspond à la multiplication terme à terme. En moyennant le terme $\log(\hat{y})$ sur toutes les images, le terme $\log(\hat{\mathbf{h}})$ devrait devenir prépondérant car il est supposé être constant sur toutes les images contrairement au spectre de l'objet. Cela devrait permettre de reconstruire la PSF. Cette approche souffre de multiples problèmes comme la présence d'une partie constante dans le spectre de l'objet, les effets du découpage en images, les effets de l'enroulement de la phase...

Une variante de cette méthode (CANNON, 1976) utilise le cepstre. Le cepstre est la transformée de Fourier du logarithme du spectre de puissance. Il permet de mettre en évidence les périodicités présentes dans le spectre en particulier la périodicité des zéros. Cette méthode, utilisant aussi un moyennage sur des images, est plus robuste que le spectre de puissance pour estimer la position des zéros et y ajuster un modèle paramétrique de PSF. Il a depuis été proposé d'utiliser plutôt le bicespre de puissance pour un résultat plus robuste (CHANG *et al.*

, 1991). Ces méthodes sont cependant peu utilisées pour la déconvolution aveugle des images mais restent très usitées dans le domaine de l'imagerie ultra-sonore et pour l'analyse des signaux sismiques car la nature des données, en particulier le fait qu'elles soient des processus aléatoires de moyenne nulle, les rend moins sensibles aux défauts des méthodes spectrales (MICHAILOVICH et ADAM, 2007).

Méthodes spécifiques à certaines classes d'image Récemment plusieurs méthodes d'estimation de la PSF ont été proposées pour la déconvolution de certaines classes d'images floues où l'objet et la PSF ont des propriétés particulières. Bien que limitées à certain types de flous et d'images, ces méthodes présentent l'avantage d'être très rapides en temps de calcul ; il pourrait être envisagé de les utiliser pour fournir de bons points de départ pour des algorithmes de déconvolution aveugle plus évolués.

En restreignant le domaine d'application aux images dont le spectre de puissance est globalement monotone, CARASSO (2001) propose une méthode spectrale permettant d'estimer les paramètres de PSF de type "Levy stable" (dont les gaussiennes et les lorentziennes). Ce type de PSF ne présentant pas de zéro dans son spectre de puissance n'est pas estimable par les méthodes spectrales.

Dans le domaine de l'imagerie radar, JALOBÉANU *et al.* (2007) proposent d'utiliser des *a priori* sur la nature fractale des images naturelles et sur la forme des PSF en imagerie aérienne pour estimer la fonction de transfert. Enfin des méthodes avec apprentissage comme les réseaux neuronaux (DELVIT *et al.*, 2003; HE *et al.*, 2005) ou utilisant une base d'images avec une approche "Vector Quantizer" (PANCHAPAKESAN *et al.*, 2001) ont été proposées pour ce problème.

3.4.2 Estimation du reconstructeur optimal

Dans la plupart des applications, seule l'image déconvoluée est intéressante pour l'utilisateur et la PSF n'est en réalité qu'une variable cachée de l'algorithme (on dit aussi une variable de nuisance). C'est pourquoi plusieurs auteurs proposent plutôt d'estimer seulement le filtre de reconstruction qui, appliqué aux données, donnera la meilleure reconstruction. Par conséquent, sans post-traitement, ces algorithmes ne peuvent donner de meilleurs résultats en terme d'erreur quadratique moyenne que le filtre de Wiener à PSF connue ; or on a vu au chapitre précédent que des méthodes non-linéaires permettaient de meilleures reconstructions. De plus l'utilisation d'un filtre inverse ne permet pas de prendre en compte correctement les non-stationnarités du bruit (en particulier les pixels morts ou saturés).

NAS-RIF : Le plus connu des algorithmes de ce type a été proposé par KUNDUR et HATZINAKOS (1998b). Cet algorithme estime de manière itérative un filtre de reconstruction à réponse impulsionnelle finie reconstruisant l'objet satisfaisant des contraintes non strictes de positivité et support d'où son nom NAS-RIF pour "Non-negativity And Support constraints Recursive Inverse Filtering". Comme le montre la figure 3.1, cet algorithme utilise une méthode d'optimisation (les gradients conjugués dans ce cas) pour estimer les coefficients $u(x, y)$ de la réponse impulsionnelle du filtre de reconstruction minimisant l'erreur quadratique entre l'objet reconstruit \hat{f} et sa correction par un filtre non linéaire \hat{f}_{NL} par lequel sont appliquées les contraintes (en utilisant la notation de KUNDUR et HATZINAKOS (1998b)). L'hypothèse principale est que l'image contient un ou plusieurs objets de support connu se détachant d'un

fond uniforme ; les contraintes appliquées sont donc que tous les pixels sont positifs et que tout pixel en dehors du support appartient au fond. Comme ce filtre inverse est à réponse impulsionnelle finie, seul un petit nombre de coefficients compris dans un support de l'ordre de quelques pixels de diamètre ont à être estimés. De plus, ce filtre inverse est normalisé. En reprenant la notation employée dans la figure 3.1, la fonction minimisée est donc :

$$J(\mathbf{u}) = \sum_{x,y} \hat{f}^2(x,y) \left(\frac{1 - \text{sign}(\hat{f}(x,y))}{2} \right) + \sum_{(x,y) \notin S} (\hat{f}(x,y) - L_{Bg})^2 + \gamma \left(\sum_{x,y} u(x,y) - 1 \right)^2 \quad (3.12)$$

où $\hat{f}(x,y) = (\mathbf{g} * \mathbf{u})(x,y)$ est la valeur du pixel (x,y) de l'objet reconstruit et \mathbf{u} le filtre inverse. $\text{sign}(x)$ est l'opérateur égal à -1 ou $+1$ suivant le signe de x (0 est considéré ici positif), S est le support de l'objet net, L_{Bg} le niveau du fond et γ un hyper-paramètre.

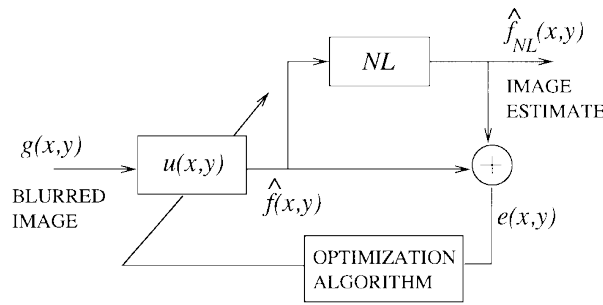


FIG. 3.1 — Schéma de principe de l'algorithme NAS-RIF (d'après KUNDUR et HATZINAKOS (1998b)).

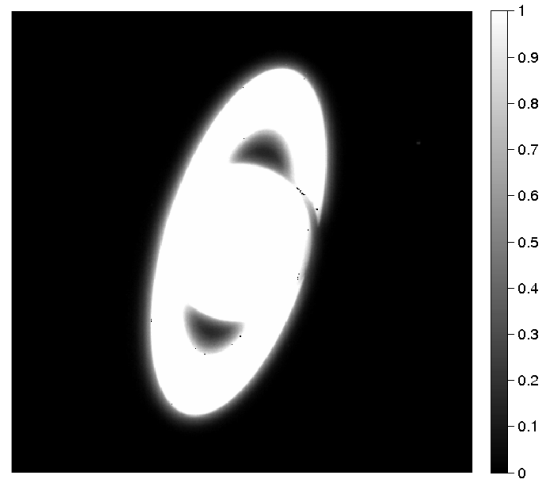


FIG. 3.2 — Support obtenu pour notre variante de NAS-RIF lors de la déconvolution aveugle de l'image présentée figure 3.3

Dans le cas des images où sur un fond constant se détachent, comme en astronomie par exemple, des objets dont le support est parfaitement connu, cet algorithme converge vers une solution acceptable en quelques itérations. De plus d'après KUNDUR et HATZINAKOS (1998a) le critère minimisé est convexe, ce qui assure la convergence vers une solution unique. Malheureusement, un tel support est rarement disponible en pratique en particulier car le support de l'objet flou est toujours plus grand que celui de l'objet net. C'est pourquoi KUNDUR et HATZINAKOS (1998b) proposent de l'estimer grâce à une méthode de validation croisée.

Nous avons développé une variante de cet algorithme où le support $S(x,y)$ n'est plus un booléen mais la probabilité que le point (x,y) appartienne à ce support. Cela permet de mieux prendre en compte d'éventuelles erreurs d'estimation du support. Dans cette variante le fond et la dérive d'éclairement (une pente) sont estimés par moindres valeurs absolues et supprimés des données. En effet un piston et une pente sont insensibles à une convolution. Le niveau moyen du fond est alors nul. L'ajustement d'une gaussienne sur l'histogramme des valeurs négatives permet donc d'estimer la variance σ_b du bruit de fond. Le fond (où le support $S(x,y)$ est nul) est donc défini comme l'ensemble des pixels inférieurs à un seuil $\eta_{\min} = 3\sigma_b$. Une segmentation par maximisation de la variance interclasse permet de donner un deuxième seuil η_{\max} au dessus duquel tous les pixels (x,y) appartiennent au support

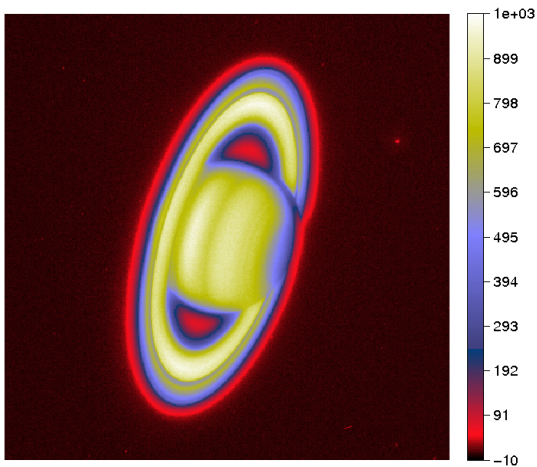


FIG. 3.3 — Image floue de Saturne prise par Hubble avant la correction de son optique.

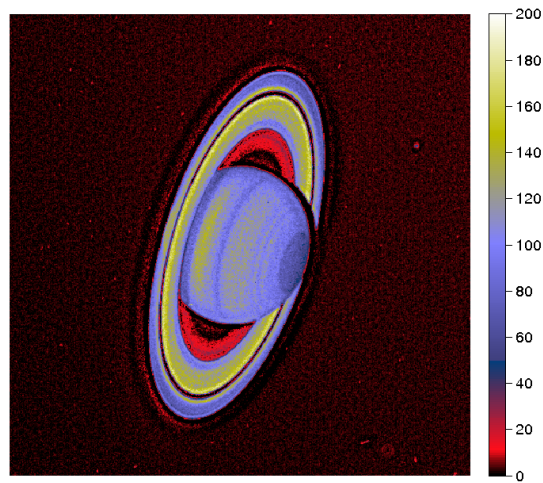


FIG. 3.4 — Déconvolution aveugle par notre variante de NAS-RIF de l'image présentée figure 3.3

($S(x, y) = 1$). La valeur du support des pixels (x, y) compris entre ces deux seuils est donnée par : $S(x, y) = (g(x, y) - \eta_{\min}) / \eta_{\max}$. Le support ainsi créé est affiché figures 3.2. Enfin l'optimisation est faite avec l'algorithme VMLM-B plutôt qu'avec les gradients conjugués. Cette méthode a été utilisée pour restaurer une floue 512×512 (montrée Fig. 3.3) de Saturne prise par Hubble avant la correction de son optique. Le résultat, montré sur la figure 3.4, est obtenu après convergence (7 itérations). Si le résultat est visuellement très satisfaisant (en particulier aux pôles). La dynamique de l'image déconvoluée est très différente car la contrainte de normalisation du filtre n'est pas stricte et la photométrie n'est donc absolument pas respectée. Il est ainsi impossible de faire des mesures quantitatives sur les déconvolutions issues de cet algorithme.

Les méthodes Bussgang L'algorithme NAS-RIF est inspiré des méthodes à statistiques d'ordre élevé (HOS pour High Order Statistics) appelée aussi méthodes Bussgang. Ces techniques supposent que l'objet est un processus de type Bussgang, c'est-à-dire un processus stochastique qui placé en entrée d'un filtre non linéaire sans mémoire présente une autocorrélation proportionnelle à son inter-corrélation avec la sortie de ce filtre (BUSSGANG, 1952).

Proposée la première fois par WIGGINS (1978) pour l'algorithme de "Minimum Entropy Deconvolution" (MED), ces techniques utilisent cette propriété "Bussgang" pour approcher l'inter-corrélation de l'objet et des données nécessaire pour estimer les coefficients du filtre inverse de reconstruction minimisant l'erreur quadratique moyenne (filtre de Wiener). Cette technique est décrite en détails par CAMPISI *et al.* (2007). Le filtre non-linéaire permet d'introduire les *a priori* en imposant à l'objet estimé des contraintes sur sa statistique (d'où le nom HOS), en particulier sur la nature non-gaussienne de l'objet. Cela permet d'introduire rigoureusement des contraintes fortes sur l'objet comme par exemple présenter une fonction de distribution (histogramme) précise (JACOVITTI et NERI, 1990) ou ne posséder qu'un certain nombre de niveau de gris (WU, 1990). Ces méthodes sont donc très adaptées pour la déconvolution aveugle d'objets présentant une texture connue.

BRONSTEIN *et al.* (2005b) proposent une méthode où le filtre inverse de reconstruction

est composé d'une cascade de filtres inverses à support très étroit obtenus par cette méthode. Le filtre non-linéaire est un filtre fournissant une représentation parcimonieuse dans une base optimale obtenue par un apprentissage sur des images de même classe (*e.g.* astronomique, aérienne. . .). Ils proposent en sus d'utiliser pour l'optimisation une méthode de Newton adaptée (préconditionnée) à ce problème (BRONSTEIN *et al.*, 2005a).

3.4.3 Estimation conjointe de l'objet et de la PSF

Le principal inconvénient des méthodes où la PSF est estimée d'après les données préalablement à la déconvolution est qu'une erreur d'estimation de la PSF entraîne irrémédiablement une erreur sur l'objet reconstruit. Il est donc intéressant de pouvoir estimer la PSF en fonction de l'objet qu'elle permet de reconstruire. Cela conduit donc à estimer simultanément la PSF et l'objet. Cette approche est la plus populaire et de nombreuses méthodes pour le faire ont été proposées. Nous avons classé celles-ci suivant quatre catégories :

- la séparation de composantes,
- les méthodes où des contraintes strictes sont appliquées itérativement sur l'objet et sur la PSF
- et les méthodes le plus souvent bayésiennes de minimisation de fonctionnelles.

3.4.3.1 Séparation de composantes

Une manière de reconstruire simultanément la PSF et l'objet est de représenter les données dans un espace où ceux-ci sont séparés. En effet il est possible d'exprimer des *a priori* sur la PSF et sur l'objet en situant leurs coefficients dans des zones séparées d'un espace de représentation. Si l'on représente les données dans cet espace alors ses coefficients seront supposés décrire la PSF ou l'objet suivant la position dans cet espace. Dans certains espaces de représentation ces zones ne seront pas clairement délimitées et le but de l'algorithme sera d'en tracer les frontières.

Estimation des paramètres ARMA Une des techniques de séparation est de représenter les données comme un processus auto-régressif à moyenne mobile (Auto-Regressive Moving Average ARMA). Les données sont alors considérées comme le résultat du filtrage d'un bruit blanc gaussien par un filtre composé d'une partie auto-régressive ou "tout pôle" et d'une partie à moyenne mobile ou "tout zéro".

Dans cette représentation l'objet original est modélisé comme un processus auto-régressif et la PSF comme un processus à moyenne mobile. L'identification des coefficients du filtre ARMA produisant les données à partir d'un bruit blanc gaussien permet donc, en séparant les pôles des zéros, d'estimer l'objet et la PSF. L'estimation de ces coefficients ARMA peut être faite par des méthodes de maximum de vraisemblance (TEKALP *et al.*, 1986), validation croisée généralisée (GCV) (REEVES et MERSEREAU, 1992) ou encore par des réseaux de neurones (CHO et DON, 1991).

Cependant si une telle représentation auto-régressive de l'objet d'origine peut être valide pour les textures, cette modélisation n'est pas adaptée aux scènes présentant différentes textures séparée par des bords francs.

La méthode "zeros sheet" LANE et BATES (1987) ont montré qu'un signal à support compact issu de multiples convolutions était "automatiquement" déconvoluable pourvu que sa di-

mension soit strictement supérieure à un. Cette méthode se base sur le résultat théorique que la transformée en z d'un signal compact à N -dimensions est nulle sur une hyper-surface de $(2N - 2)$ dimensions dans un espace à $2N$ dimensions. En l'absence de bruit, dans la transformée en z des données, ces hyper-surfaces (les "zero sheet") de l'objet et de la PSF sont supposées ne se croiser qu'en des points discrets. Retrouver ces intersections permet de séparer les transformées en z de l'objet et de la PSF et donc d'effectuer la déconvolution aveugle. Malheureusement ce résultat théorique n'est pas exploitable en pratique à cause de sa sensibilité au bruit et de sa complexité en calcul.

3.4.3.2 Méthodes itératives par application de contraintes strictes

Une partie de l'*a priori* que l'on possède sur l'objet et la PSF sont stricts ; par exemple la positivité, le support spatial ou spectral... Ces contraintes strictes permettent de restreindre les objets et les PSF possibles. Plusieurs méthodes proposent donc de trouver les couples objet et PSF ayant produit les données satisfaisant ces contraintes.

L'*itérative blind deconvolution* (IBD) proposé par [AYERS et DAINTY \(1988\)](#) est un algorithme itératif où à chaque itération sont estimés d'abord la PSF puis l'objet en utilisant un filtre de Wiener. Il s'inspire des méthodes de reconstruction de phase proposées par [FIENUP \(1982\)](#); [GERCHBERG et SAXTON \(1972\)](#) qui applique les contraintes brutalement dans chaque espace de représentation. Il se déroule comme suit :

1. Itération $k = 0$: initialisation d'objet satisfaisant les contraintes sur l'objet (par exemple les données filtrées par un filtre non-linéaire appliquant des contraintes comme la positivité, le support dans l'espace de Fourier),
2. $k = k + 1$, calcul de la PSF en déconvoluant les données par l'objet avec un filtre de Wiener,
3. application des contraintes (positivité, support) sur la PSF,
4. calcul de l'objet en déconvoluant les données par la PSF avec un filtre de Wiener,
5. application des contraintes sur l'objet,
6. retour à l'étape 2 jusqu'à une certaine convergence.

En général, l'algorithme effectue un nombre prédéfini d'itérations. Les contraintes sont appliquées brutalement en mettant à zéro les pixels négatifs ou situés hors du support (dans l'espace image ou de Fourier). Cet algorithme a été populaire au début des années 90 et de nombreuses variantes ont été proposées mais il n'est plus utilisé en raison de ses mauvaises propriétés de convergence et sa sensibilité au point de départ. En effet la convergence vers une solution unique semble loin d'être prouvée.

Une autre manière de faire est d'estimer le couple PSF et objet satisfaisant des contraintes strictes et minimisant la fonction :

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \sum_k ((\mathbf{x} * \mathbf{h})_k - y_k)^2 \quad (3.13)$$

Malheureusement cette fonction est très dégénérée et il n'est pas possible d'utiliser un algorithme d'optimisation continue pour cela. Il faut donc utiliser une exploration discontinue de cette fonction. [MC CALLUM \(1990\)](#) propose d'utiliser un algorithme de recuit simulé ([KIRKPATRICK et al. , 1983](#)) pour cela. Bien qu'en théorie elle converge vers le minimum absolu, cette méthode est trop lente pour pouvoir être utilisée en pratique sur des images de taille importante.

3.4.4 Approches inverses

Si l'on se place dans le cadre probabiliste tel qu'il est décrit au chapitre 1, on peut définir en toute généralité la solution du problème de déconvolution aveugle comme la densité de probabilité *a posteriori* $f^{\text{post}}(\mathbf{x}, \mathbf{h} | \mathbf{y})$ dont on utilisera, en général, que le maximum. Comme nous l'avons abordé brièvement à la section 1.3.6, il y a deux façons d'estimer cette densité de probabilité *a posteriori* : l'inférence bayésienne et l'approche maximum *a posteriori*.

3.4.4.1 Méthodes dérivées de Richardson-Lucy

S'inspirant de la méthode itérative proposée par AYERS et DAINTY (1988), HOLMES (1992) et indépendamment TSUMURAYA *et al.* (1994) proposent d'utiliser l'algorithme de Richardson-Lucy (désigné sous le nom d'EM par Holmes en imagerie médicale, voir section 1.4.4.2), pour estimer l'objet puis la PSF itérativement. Ceci présente l'avantage de garantir la positivité de la solution. Par contre cela ne permet pas d'exclure la solution où la PSF est un Dirac. TSUMURAYA *et al.* (1994) contrôle ce phénomène en limitant le nombre d'itérations, HOLMES (1992) en imposant une contrainte stricte de bande limitée de la MTF.

3.4.4.2 Méthodes purement bayésiennes : Inférence bayésienne

Les méthodes d'inférence bayésienne estiment exactement la densité de probabilité jointe de l'objet sachant les données. Pour permettre ce calcul elles utilisent des variables aléatoires cachées θ dont la probabilité conditionnelle $f(\theta | \mathbf{p}, \mathbf{d})$ est supposée connue. Avec ces variables, le théorème de Bayes utilisé pour le calcul la densité de probabilité conditionnelle *a posteriori* des paramètres \mathbf{p} sachant les mesures \mathbf{d} (Eq. (1.28)) devient :

$$f_{\mathcal{D}}^{\text{post}}(\mathbf{p} | \mathbf{d}, \theta) = \frac{f_{\mathcal{P}}^{\text{prior}}(\mathbf{p}, \theta) f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d} | \mathbf{p}, \theta)}{f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \theta)}. \quad (3.14)$$

Ces variables cachées sont ensuite marginalisées pour le calcul de la densité de probabilité *a posteriori* :

$$f_{\mathcal{D}}^{\text{post}}(\mathbf{p} | \mathbf{d}) = \int f_{\mathcal{D}}^{\text{post}}(\mathbf{p} | \mathbf{d}, \theta) d\theta. \quad (3.15)$$

Elles utilisent pour cela en général l'algorithme EM déterminant l'objet \mathbf{x} maximisant $f_{\mathcal{D}}^{\text{post}}(\mathbf{p} | \mathbf{d})$ sans jamais la calculer explicitement (NEAL et HINTON, 1999). Ces méthodes remplacent le problème d'estimation préalable des hyper-paramètres par un problème (quasi-identique) d'estimation préalable de la densité de probabilité $f(\theta | \mathbf{p}, \mathbf{d})$.

Approximation variationnelle Pour contourner ce problème d'estimation de $f(\theta | \mathbf{p}, \mathbf{d})$, l'approximation variationnelle (TZIKAS *et al.*, à paraître) décomposent cette densité en un produit de distributions de probabilité plus simples (e.g. gaussiennes...). Puis utilisent un étage supplémentaire de variables aléatoires cachées décrivant les différents moments de ces distributions. Les densités de probabilité de ces nouvelles variables cachées sont définies de manière à ce que toutes les variables cachées puissent être marginalisées facilement et le calcul de $f_{\mathcal{D}}^{\text{post}}(\mathbf{p} | \mathbf{d})$ (ou au moins d'une borne inférieure) devienne possible.

TZIKAS *et al.* (2007), CHANTAS *et al.* (to appear) et LIKAS et GALATSANOS (2007) utilisent une telle approximation variationnelle dans le cas de la déconvolution aveugle. Ils décrivent la

PSF comme étant elle aussi une combinaison de noyaux gaussiens dont les poids sont des variables aléatoires cachées gaussiennes de moyennes nulles et dont les variances elles-mêmes sont des variables aléatoires de loi Gamma. Ils s'affranchissent ainsi de l'estimation explicite de la PSF mais, comme on le voit, au prix d'une complexification du modèle de formation des données. Notons que le terme "approche variationnelle" est assez ambiguë en reconstruction car il désigne aussi bien l'utilisation de l'approximation variationnelle en inférence bayésienne que les méthodes dérivées de la résolution d'équations de diffusion aux dérivées partielles.

3.4.4.3 Approches MAP

Comme dans le cas de la déconvolution simple, le problème de la déconvolution aveugle peut être écrit comme un problème de minimisation de fonctionnelle $\Phi(\mathbf{h}, \mathbf{x})$:

$$\Phi(\mathbf{h}, \mathbf{x}) = \Phi_{\text{MV}}(\mathbf{h}, \mathbf{x} | \mathbf{y}) + \Phi_{\text{regul}}(\mathbf{h}, \mathbf{x}), \quad (3.16)$$

où $\Phi_{\text{MV}}(\mathbf{h}, \mathbf{x} | \mathbf{y})$ est un terme d'attache aux données \mathbf{y} et $\Phi_{\text{regul}}(\mathbf{h}, \mathbf{x})$ est un terme de régularisation introduisant les *a priori* sur l'objet \mathbf{x} et la PSF \mathbf{h} . Cette fonction peut être dérivée d'une approche bayésienne où la fonction de régularisation peut être définie simplement comme une pénalité imposant de manière "douce" certains caractères à la solution.

Minimisation de fonctionnelles Dans le domaine de l'imagerie de speckles, [LANE \(1992\)](#) propose une telle approche pour imposer plus "doucement" les contraintes utilisées par [AYERS et DAINTY \(1988\)](#) dans IBD. Cette approche a été développée dans le cas multi-trames par [JEFFERIES et CHRISTOU \(1993\)](#) qui utilisent une fonction décomposée en quatre termes :

$$\Phi(\mathbf{h}, \mathbf{x}) = E_{\text{im}} + E_{\text{conv}} + E_{\text{bl}} + E_{\text{Fm}} \quad (3.17)$$

où :

- E_{conv} est le terme d'attache aux données calculé dans l'espace de Fourier,
- E_{im} pénalise les pixels négatif dans l'espace image pour l'objet et la PSF,
- E_{bl} pénalise les fréquences spatiales de la PSF supérieure à un seuil proportionnel à la fréquence de coupure de l'instrument,
- E_{Fm} pénalise les objets dont le module de Fourier est trop éloigné d'un *a priori* calculé d'après toutes les trames.

Cette méthode appelée IDAC (Iterative Deconvolution Algorithm in C) utilise, tout comme [LANE \(1992\)](#), une méthode à gradients conjugués pour la minimisation.

Par la suite, [THIÉBAUT et CONAN \(1995\)](#) ont montré que ces algorithmes étaient plus performants si les contraintes comme la positivité et la normalisation de la PSF étaient imposées de manière stricte. Cela est fait en utilisant une reparamétrisation du problème de sorte que les nouvelles variables optimisées ψ_x et ψ_h ne puissent en aucun cas fournir une solution enfreignant ces contraintes :

- La positivité de l'objet est assurée par le changement de variable :

$$\mathbf{x} = \psi_x^2, \quad (3.18)$$

- La normalisation et la positivité de la PSF sont assurées par :

$$\mathbf{h} = \frac{\psi_h^2}{\sum_{\text{pixel}} \psi_h^2}. \quad (3.19)$$

Cependant, THIEBAUT (2002) a montré que, dans le cas de la déconvolution aveugle, ces paramétrisations sont moins efficaces en terme de vitesse de convergence et d'introduction de minima locaux, par rapport à des contraintes strictes introduites dans les routines d'optimisation par des gradients projetés ou des lagrangiens.

Minimisation alternée Depuis le début des années 90, de nombreuses méthodes se sont confrontées au problème de minimisation de la fonction $\Phi(\mathbf{h}, \mathbf{x})$. \mathbf{x} et \mathbf{h} sont en général indépendant et la fonction de régularisation peut être séparée en une régularisation $\Theta_{\text{regul}}(\mathbf{x})$ pour l'objet et une autre $\Psi_{\text{regul}}(\mathbf{h})$ pour la PSF :

$$\Phi(\mathbf{h}, \mathbf{x}) = \Phi_{\text{MV}}(\mathbf{h}, \mathbf{x} | \mathbf{y}) + \Theta_{\text{regul}}(\mathbf{x}) + \Psi_{\text{regul}}(\mathbf{h}). \quad (3.20)$$

Cependant l'estimation simultanée du couple $\{\mathbf{x}, \mathbf{h}\}^{\text{MAP}}$ qui minimise cette fonction est un problème majeur en raison des non-linéarités présentes dans $\Phi_{\text{MV}}(\mathbf{h}, \mathbf{x} | \mathbf{y})$. C'est pourquoi la plupart des auteurs (BESAG, 1986; CHAN et WONG, 1998; CHEN et YAP, 2005; YOU et KAVEH, 1996) utilisent une technique de minimisation alternée en résolvant itérativement $\Phi(\mathbf{h}, \mathbf{x})$ par rapport à \mathbf{x} uniquement puis par rapport à \mathbf{h} :

1. A PSF fixée $\mathbf{h}^{(j)}$, estimer l'objet optimal $\mathbf{x}^{(j+1)}$:

$$\mathbf{x}^{(j+1)} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left(\Phi_{\text{MV}}(\mathbf{h}^{(j)}, \mathbf{x} | \mathbf{y}) + \Theta_{\text{regul}}(\mathbf{x}) \right), \quad (3.21)$$

2. A objet fixé $\mathbf{x}^{(j+1)}$, estimer la PSF optimale $\mathbf{h}^{(j+1)}$:

$$\mathbf{h}^{(j+1)} = \arg \min_{\mathbf{h}} \left(\Phi_{\text{MV}}(\mathbf{h}, \mathbf{x}^{(j+1)} | \mathbf{y}) + \Psi_{\text{regul}}(\mathbf{h}) \right), \quad (3.22)$$

3. Si un certain critère de convergence n'est pas respecté : $j = j + 1$ et retour en (1).

La première itération peut concerner indifféremment l'objet ou la PSF suivant les informations initiales disponibles.

Si les fonctions de régularisation sont convexes, ces deux minimisations le sont aussi. Dans le cas général du point de vue de l'optimisation, un tel découpage de la fonction de coût est sous-optimal et peut empêcher la convergence des algorithmes vers un minimum en un nombre d'itération fini. Cependant CHAN et WONG (2000) prouvent que dans le cas où les fonctions de régularisation sur \mathbf{x} et \mathbf{h} sont de type "norme quadratique appliquée aux gradients spatiaux" alors les algorithmes convergent toujours vers un minimum (local). Ils ont de plus montré que ce comportement est le même que l'on commence par l'estimation de la PSF \mathbf{h} ou par l'objet \mathbf{x} . Il faut cependant noter que même si les fonctions de coût sont convexes par rapport à la PSF et séparément par rapport à l'objet, le problème global n'est pas convexe et le choix des paramètres initiaux a une influence très importante sur le résultat final.

3.5 Approche proposée

Dans la suite de ce travail, c'est cette approche MAP avec minimisation alternée, décrite au paragraphe précédent, qui sera développée. La première itération de la minimisation alternée, c'est-à-dire, déterminer l'objet optimal à PSF fixée, est identique à un problème de déconvolution simple, nous utiliserons donc pour cette étape la méthode et les fonctions de régularisation décrites au chapitre précédent. Nous nous attacherons donc uniquement au

problème présenté à l'itération (2) du la minimisation alternée, soit :

A objet fixé $\mathbf{x}^{(j+1)}$, estimer la PSF optimale $\mathbf{h}^{(j+1)}$:

$$\mathbf{h}^{(j+1)} = \arg \min_{\mathbf{h}} \left(\Phi_{\text{MV}}(\mathbf{h}, \mathbf{x}^{(j+1)} | \mathbf{y}) + \Psi_{\text{regul}}(\mathbf{h}) \right), \quad (3.23)$$

Il ne faudra cependant pas perdre de vue que cette estimation de la PSF optimale s'effectue dans le cadre d'une minimisation alternée.

Le terme de vraisemblance $\Phi_{\text{MV}}(\mathbf{h}, \mathbf{x}^{(j+1)} | \mathbf{y})$ étant déjà défini à la section 1.4.3 (Eq. (1.41)), seule la fonction de régularisation de la PSF $\Psi_{\text{regul}}(\mathbf{h})$ reste à définir. Pour effectuer une régularisation multidimensionnelle, de même que pour la régularisation de l'objet, nous définissons une régularisation séparable :

$$\Psi_{\text{regul}}(\mathbf{h}) = \Psi_{\text{S}}(\mathbf{h}) + \Psi_{\text{Z}}(\mathbf{h}) + \Psi_{\Lambda}(\mathbf{h}) + \Psi_{\text{T}}(\mathbf{h}), \quad (3.24)$$

avec un terme de régularisation spécifique le long de chaque dimension :

- Ψ_{S} la régularisation spatiale ou latérale,
- Ψ_{Z} la régularisation longitudinale (en profondeur),
- Ψ_{Λ} la régularisation spectrale,
- Ψ_{T} la régularisation temporelle.

En utilisant le formalisme développé à la section 2.2.1 pour la régularisation de l'objet Ces termes de régularisation s'appliquent chacun selon une seule dimension (ou 2 dimensions homogènes dans le cas de \mathbf{r}) de l'objet comme ceci :

$$\Psi_{\text{S}}(\mathbf{h}) = \sum_{z,\lambda,t} \beta_{z,\lambda,t}^{\text{S}} \Omega_{\text{S}}(\mathbf{h}_{z,\lambda,t}), \quad (3.25)$$

$$\Psi_{\text{Z}}(\mathbf{h}) = \sum_{r,\lambda,t} \beta_{r,\lambda,t}^{\text{Z}} \Omega_{\text{Z}}(\mathbf{h}_{r,\lambda,t}), \quad (3.26)$$

$$\Psi_{\Lambda}(\mathbf{h}) = \sum_{r,z,t} \beta_{r,z,t}^{\Lambda} \Omega_{\Lambda}(\mathbf{h}_{r,z,t}), \quad (3.27)$$

$$\Psi_{\text{T}}(\mathbf{h}) = \sum_{r,z,\lambda} \beta_{r,z,\lambda}^{\text{T}} \Omega_{\text{T}}(\mathbf{h}_{r,z,\lambda}), \quad (3.28)$$

où chaque terme de régularisation Ψ est décomposé en une somme de fonctions de régularisations Ω appliquées sur chaque plan orthogonal à la dimension considérée et pondéré chacun par un hyper-paramètre β .

Pour définir les critères choisis pour la régularisation de la PSF, nous utiliserons les différentes origines du flou décrites à la section 3.2 et les *a priori* en découlant donnés à la section 3.3. Deux types d'*a priori* doivent être distingués : les *a priori* stricts qui sont exactement respectés et les *a priori* "doux" donnant lieu à une fonction de coût continue : la fonction de régularisation $\Psi_{\text{regul}}(\mathbf{h})$.

3.6 Contraintes strictes

Parmi les *a priori* sur la PSF certains sont dits "stricts". Ils sont aussi désignés comme étant des contraintes strictes, c'est-à-dire qu'en aucun cas ces contraintes ne peuvent être violées. Dans le cas de la PSF ces contraintes sont en général la positivité, le support spatial ou spectral et la normalisation :

Positivité : Tous les pixels de la PSF sont positifs :

$$h_k \geq 0 \quad \forall k, \quad (3.29)$$

Support spatial : Tous les pixels en dehors du support S sont nuls :

$$h_k = 0 \quad \forall k \notin S \quad (3.30)$$

Support spectral : Tous les frequels en dehors du support \hat{S} sont nuls :

$$\hat{h}_u = 0 \quad \forall u \notin \hat{S}, \quad (3.31)$$

Normalisation : La PSF est toujours normalisée à l'unité :

$$\sum_k h_k = 1, \quad (3.32)$$

ou encore si N est le nombre de frequels (et avec une bonne définition de la transformée de Fourier) :

$$\hat{h}_0 = \frac{1}{N}. \quad (3.33)$$

Il est à noter que les contraintes de support spectral et spatial ne peuvent pas être appliquées simultanément de manière stricte mais il est possible de les combiner dans une fonction de régularisation (on parle d'*a priori* "doux").

3.6.1 Taxonomie des contraintes

Il est possible de donner deux classifications différentes de ces contraintes :

Suivant le type de contrainte De manière générale en optimisation, on distingue deux types de contraintes :

Les contraintes d'égalités comme la normalisation ou le support,

Les contraintes d'inégalité comme la positivité.

Suivant le type des variables contraintes Il est possible de distinguer deux catégories, les contraintes appliquées directement sur des paramètres donnés à l'optimiseur et les contraintes sur des combinaisons de ceux-ci. Par exemple si l'optimisation est réalisée sur les pixels de la PSF, alors des contraintes de positivité et de support spatial sont triviales à réaliser alors que ce n'est pas le cas pour des contraintes de normalisation ou support spectral.

3.6.2 Application des contraintes strictes

Il y a plusieurs façons d'appliquer ces contraintes de manière stricte :

Restriction de l'espace des paramètres Dans le cas où l'optimisation est réalisée dans l'espace des pixels de la PSF, les contraintes d'égalité utilisées pour support sont triviales à réaliser en supprimant les pixels concernés des paramètres présentés à l'optimiseur.

Les gradients projetés L'application des contraintes avec des gradients projetés s'effectue à l'intérieur de l'algorithme d'optimisation. A chaque pas de celui-ci, les contraintes sont testées. Si le pas viole les contraintes, alors on considère seulement la projection de ce pas dans l'espace des paramètres possibles. Par exemple dans le cas de la positivité, si l'optimisation est réalisée dans l'espace des pixels de la PSF, si le pas courant viole les contraintes de positivité, alors les pixels négatifs sont mis à zéros. Si ce pas n'améliore pas suffisamment le critère sa longueur est ajustée. Cette technique est assez simple à réaliser mais peut pénaliser la vitesse de convergence. De plus, pour une utilisation efficace il est nécessaire que les contraintes soit assez rapides à calculer.

La reparamétrisation Une technique pour s'affranchir des contraintes est de re-paramétriser les variables présentées à l'optimiseur de sorte que le problème devienne un problème sans contraintes. Par exemple [THIÉBAUT et CONAN \(1995\)](#) propose la reparamétrisation des variables de la PSF de sorte que la positivité et la normalisation soient assurées :

$$h_k = \frac{q_k^2}{\sum_k q_k^2}. \quad (3.34)$$

Ainsi seul les paramètres \mathbf{q} sont présentés à l'optimiseur. Une reparamétrisation doit pour pouvoir être utilisée présenter de bonnes propriétés (dérivabilité, continuité...). Une reparamétrisation est cependant sous-optimale et peut générer des optima locaux supplémentaires ([THIÉBAUT, 2002](#)).

La dualité Définir un problème sans contraintes à partir d'un problème contraints peut aussi être réalisé par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange. Suivant cette méthode, pour un problème soumis à m contraintes :

$$\begin{cases} \arg \min_x f(x) \\ c_j(x) = 0 \quad j = 1 \dots m \end{cases} \quad (3.35)$$

on définit un nouveau problème non contraint ([LEMARÉCHAL, 1993](#)) :

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m u_j c_j(\mathbf{x}). \quad (3.36)$$

Ce problème non contraint

$$q(\mathbf{u}) = \min_x (L(\mathbf{x}, \mathbf{u})) \quad (3.37)$$

est appelé le problème dual du problème (3.35). Il est montré ([LEMARÉCHAL, 1993](#)) que déterminer le maximum de cette fonction sans contraintes $q(\mathbf{u})$ revient à résoudre le problème contraint (3.35). Ce problème avec contraintes est ainsi remplacé par deux problèmes sans contraintes imbriqués : (1) le problème intérieur : minimiser la fonction de Lagrange (3.36) (2) le problème extérieur : maximiser $q(\mathbf{u})$.

3.6.3 Solution proposée

Dans le travail présenté ici nous utilisons trois contraintes strictes :

1. **Contrainte de positivité** : Tout les pixels de la PSF sont supposés positifs,

2. **Normalisation** La transmission est supposée sans atténuation et la PSF est donc normalisée à l'unité,
3. **Contrainte de support spatial** : La PSF est supposée être centrée avec un support spatial compact.

Il y a de nombreuses façons d'imposer des contraintes strictes sur la PSF. Leur utilisation dépend de la façon dont celle-ci est définie. Nous avons donc choisi de définir la PSF dans l'espace des pixels. Dans cet espace, l'application de la contrainte de support est triviale. La contrainte de positivité est facilement prise en compte par une méthode de projection de gradients. La contrainte de normalisation est appliquée par la reparamétrisation décrite à l'équation (3.34).

3.7 Régularisation spatiale de la PSF

Dans un premier temps nous nous intéressons à la régularisation spatiale de la PSF, c'est-à-dire en réalité à la déconvolution aveugle d'images 2D. La régularisation s'écrit alors :

$$\Psi(\mathbf{h}) = \Psi_S(\mathbf{h}) = \beta^S \Omega_S(\mathbf{h}) \quad (3.38)$$

où la fonction de régularisation spatiale $\Omega_S(\mathbf{h})$ s'écrit sous la forme :

$$\Omega_S(\mathbf{h}) = \|\mathbf{D} \cdot \mathbf{h}\|, \quad (3.39)$$

où $\|\cdot\|$ définit une mesure du résultat de l'application de l'opérateur linéaire \mathbf{D} sur \mathbf{h} . Il est donc possible d'utiliser les définitions de $\Omega_S(\mathbf{h})$ définis à la section 2.3.

3.7.1 Norme quadratique appliquée aux gradients

La fonction de régularisation la plus classique appliquée aux images est la norme quadratique appliquée aux gradients de l'image comme défini à l'équation (2.16). Elle suppose comme *a priori* que l'image est relativement lisse. Cet *a priori* est aussi valide pour la PSF (en particulier dans les cas de flous gaussiens ou de turbulence) et de plus, elle pénalise fortement la solution dégénérée où la PSF reconstruite est un dirac et l'objet reconstruit les données ($\mathbf{x}^+ = \mathbf{y}$, $\mathbf{h}^+ = \delta$). Cette fonction de régularisation peut donc être utilisée pour la PSF :

$$\Omega_S(\mathbf{h}) = \sum_r \sum_{r' \in C_r} \left\| \frac{h_r - h_{r'}}{d(r, r')} \right\|_2^2, \quad (3.40)$$

où C_r est la clique du pixel h_r , c'est-à-dire l'ensemble des voisins de h_r qui sont aussi voisins entre eux suivant le voisinage considéré (ici V8).

CHAN et WONG (2000) ont étudié le cas de la minimisation alternée où cette régularisation est appliquée sur l'objet et la PSF sans autres contraintes, en particulier sans positivité et support spatial de la PSF. Ils démontrent tout d'abord que dans ce cas si la PSF initiale est normalisée, alors la contrainte de normalisation est inutile. Ceci peut être compris intuitivement car cette régularisation ne biaise pas la valeur moyenne. La valeur moyenne de l'image comme celle de la PSF est donc conservée. Ils démontrent de plus qu'en l'absence d'autres contraintes, cette régularisation ne peut pas fournir de solutions satisfaisantes au problème de la déconvolution aveugle car elle ne lève pas les ambiguïtés sur les phases de l'objet et de

la PSF. Ce résultat peut être généralisé à toutes les régularisations conduisant aux reconstructions de la PSF h et de l'objet x du type :

$$\hat{x}_u = \frac{\hat{h}_u^* \hat{g}_u}{|\hat{h}_u|^2 + \alpha(u)}, \quad (3.41)$$

$$\hat{h}_u = \frac{\hat{x}_u^* \hat{g}_u}{|\hat{x}_u|^2 + \beta(u)}, \quad (3.42)$$

où $\alpha(u)$ et $\beta(u)$ sont des fonctions de régularisation à valeurs réelles. Ce type de filtre correspond à un filtre de reconstruction obtenu pour une forme de régularisation comme celle décrite à l'équation (3.39) où la norme utilisée est la norme quadratique et \mathbf{D} est un opérateur linéaire. Si l'on réécrit ces équations sous forme $\hat{x}_u = |\hat{x}_u| e^{i\phi(\hat{x}_u)}$, $\hat{h}_u = |\hat{h}_u| e^{i\phi(\hat{h}_u)}$ et $\hat{g}_u = |\hat{g}_u| e^{i\phi(\hat{g}_u)}$ on obtient les relations suivantes :

$$|\hat{x}_u| = \frac{|\hat{h}| |\hat{g}_u|}{|\hat{h}_u|^2 + \alpha(u)^2}, \quad (3.43)$$

$$|\hat{h}_u| = \frac{|\hat{x}| |\hat{g}_u|}{|\hat{x}_u|^2 + \beta(u)^2}, \quad (3.44)$$

$$\phi(\hat{g}_u) = \phi(\hat{x}_u) + \phi(\hat{h}_u). \quad (3.45)$$

On peut donc constater la présence d'une indétermination quant aux valeurs de la phase de la PSF et de l'objet reconstruits. La valeur initiale de la phase de l'objet (ou la PSF) fournie à la première itération n'est donc pas changée au cours de la minimisation. Pour lever cette indétermination, il est donc nécessaire d'introduire une régularisation qui contraigne la phase. Cela peut être une contrainte de support et/ou de positivité (en particulier sur la PSF), une régularisation non-linéaire (utilisation d'une norme non quadratique) ou encore une régularisation de l'objet faite par l'intermédiaire d'un filtrage anisotrope et/ou variant dans le champ (ELAD, 2002; KATKOVNIK *et al.*, 2005; YOU et KAVEH, 1999).

De plus, dans le cas où des contraintes de positivité, de normalisation et de support sont appliquées sur la PSF, une telle régularisation quadratique possède un autre inconvénient important. Si l'on sur-régularise très fortement la PSF, c'est-à-dire dans le cas où seule la régularisation fixe la forme de la PSF, on obtient la PSF *a priori* vers laquelle fait tendre la régularisation. Cette PSF dont une coupe est affichée à la figure 3.5, a une forme en cloche très éloignée des PSF décrites à la section 3.2 (gaussiennes, lorentziennes...) que l'on peut observer en pratique. Dans ces conditions, cette régularisation n'est donc pas parfaitement adaptée à la reconstruction de la PSF. Cependant, son comportement est différent si l'on utilise une contrainte plus douce pour imposer le support spatial.

3.7.2 Norme ℓ_2 - ℓ_1 appliquée aux gradients / Variation totale

La "variation totale" (voir Sec. 2.3.4) et la norme ℓ_2 - ℓ_1 appliquée aux gradients (voir Sec. 2.3.3) sont deux régularisations similaires déjà appliquées pour la régularisation de l'objet. Ces deux régularisations favorisent les solutions compactes et peuvent être appliquées indifféremment pour les flous gaussiens, lorentziens, de défocus ou de bougé simple (translation). Seulement, sans autres contraintes, elles ne pénalisent pas la solution triviale où la PSF reconstruite est un dirac. Par contre si l'on ajoute la normalisation, alors la PSF par défaut est une constante dans l'espace image (un dirac dans l'espace de Fourier). Dans le cas de la "variation totale", en ajoutant une contrainte de symétrie de révolution (qui a comme principale

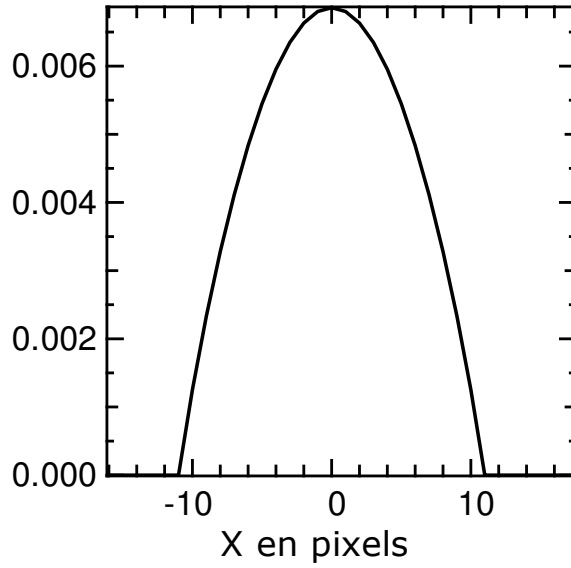


FIG. 3.5 — Coupe en $y=0$ de la PSF *a priori* générée par une régularisation quadratique sur les gradients avec contraintes de support de positivité et de normalisation. Le support est un disque de 10 pixels de rayons.

influence de centrer la PSF), CHAN et WONG (1998) observent que la définition d’un support spatial est alors inutile, la valeur de l’hyper-paramètre permettant de régler le “piqué” de la PSF.

3.7.3 Contrainte de forme, déconvolution myope

Dans de nombreuses applications, on connaît l’origine du flou et il est donc possible de déterminer une forme *a priori* de la PSF. Dans ce cas, une régularisation naturellement envisageable est d’imposer à la PSF estimée de n’être pas trop éloigné de cette PSF *a priori* $\mathbf{h}_{\text{prior}}$. Cette contrainte de forme peut s’écrire en toute généralité dans l’espace de Fourier avec une MTF *a priori* $\hat{\mathbf{h}}_{\text{prior}}$:

$$\Omega_S(\mathbf{h}) = (\hat{\mathbf{h}} - \hat{\mathbf{h}}_{\text{prior}})^H \cdot \hat{\mathbf{W}} \cdot (\hat{\mathbf{h}} - \hat{\mathbf{h}}_{\text{prior}}), \quad (3.46)$$

où \mathbf{x}^H désigne le conjugué transpose de \mathbf{x} et $\hat{\mathbf{W}}$ est une matrice complexe de poids.

Par exemple, comme nous l’avons déjà mentionné à la section 3.4.1.1, dans le cas des images longue pose en optique adaptative il est possible d’avoir une estimation la PSF (VÉRAN *et al.*, 1997). Cette estimation pouvant être entachées d’erreurs, l’utiliser dans le cadre d’une déconvolution “classique” n’est pas optimal. Pour une meilleure reconstruction il est intéressant de ne l’utiliser qu’a titre de PSF *a priori*. La méthode MISTRAL proposée par MUGNIER *et al.* (2004) utilise une telle régularisation sur la MTF proposée par CONAN *et al.* (1998) avec une matrice $\hat{\mathbf{W}}$ diagonale dans l’espace de Fourier :

$$\Omega_S(\mathbf{h}) = (\hat{\mathbf{h}} - \hat{\mathbf{h}}_{\text{prior}})^T \hat{\mathbf{W}} (\hat{\mathbf{h}} - \hat{\mathbf{h}}_{\text{prior}}), \quad (3.47)$$

La matrice diagonale $\hat{\mathbf{W}}$ est calculée d’après la variance du spectre de puissance de toutes images courtes poses, c’est-à-dire $\hat{w}_u^{-1} = \langle |\hat{h}_u^{\text{prior}} - \hat{h}_u|^2 \rangle$. A cette régularisation est ajouté une

contrainte de support spectral assurant que la PSF reconstruite est nulle au delà de la fréquence de coupure de l'instrument. Une légère amélioration de cette méthode a été proposée par [HOM et al. \(2007\)](#).

Si, par contre la matrice $\hat{\mathbf{W}}$ est diagonale dans l'espace image, l'équation (3.46) peut être réécrite dans l'espace image comme une contrainte sur la PSF :

$$\Omega_S(\mathbf{h}) = (\mathbf{h} - \mathbf{h}_{\text{prior}})^T \mathbf{W}(\mathbf{h} - \mathbf{h}_{\text{prior}}), \quad (3.48)$$

Dans ce cas la matrice de poids \mathbf{W} modulent spatialement la régularisation, mais toute généralité il est possible d'imaginer un matrice \mathbf{W} avec une structure différente pour imposer certaines symétries par exemple.

Dans de nombreux cas, il n'est cependant pas possible d'avoir une estimation aussi précise de la PSF même si l'on en connaît toutefois la forme générale $\mathbf{h}_{\text{prior}}(\boldsymbol{\theta})$ décrite par peu de paramètres $\boldsymbol{\theta}$. Par exemple, dans le cas d'un flou dû à la diffusion, la PSF *a priori* peut être modélisée par une PSF lorentzienne dont le paramètre serait la largeur à mi-hauteur qu'il faudrait préalablement estimer. De même, en général on ne connaît que rarement la variance des erreurs *a priori* et il est délicat de déterminer la matrice de poids. En pratique, on constate cependant que les pixels de la PSF sont d'autant moins bien estimés qu'ils sont éloignés de son centre et la régularisation doit être plus d'autant plus forte pour éviter les artefacts (en particulier les anneaux se formant en bordure du support). C'est pourquoi nous proposons de choisir une matrice de poids \mathbf{W} dont les poids augmentent à mesure que l'on s'éloigne du centre de la PSF, par exemple suivant une loi de puissance $w(x, y) = (x^2 + y^2)^\beta$.

Pour estimer les paramètres $\boldsymbol{\theta}$ de la PSF, nous proposons d'effectuer une déconvolution aveugle préalable en utilisant une régularisation sur la PSF de type $\ell_2\text{-}\ell_1$ ou variation totale puis d'estimer les paramètres $\boldsymbol{\theta}$ en ajustant la PSF paramétrique $\mathbf{h}_{\text{prior}}(\boldsymbol{\theta})$ sur la PSF reconstruite, puis enfin de refaire une déconvolution aveugle avec une régularisation utilisant cette PSF *a priori* $\mathbf{h}_{\text{prior}}(\boldsymbol{\theta})$.

3.8 Régularisation temporelle de la PSF

Jusqu'à présent nous avons seulement déconvolué en aveugle des vidéos. Nous n'avons donc pas développé de régularisation suivant la profondeur ou la longueur d'onde permettant de compenser les flous présentés à la section 3.2.2. De plus dans les applications rencontrées, la rémanence temporelle des capteurs est nulle et ainsi seules des PSFs 2D ont été envisagées. Par contre, si dans le modèle de formation de l'image (Sec. 2.1.1), nous supposons que le flou est invariant par translation, il peut varier suivant les autres dimensions et en particulier suivant le temps. La PSF à reconstruire est donc une pile de PSF 2D \mathbf{h}_t associée au modèle de formation des données :

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{h}_t * \mathbf{x}_t + \mathbf{b}_t \quad \forall t. \quad (3.49)$$

Étant donné que les conditions d'observation varient souvent lentement par rapport à la vitesse d'échantillonnage, un *a priori* pertinent est de lisser l'évolution temporelle de la PSF. Ceci se traduit par la régularisation quadratique suivante :

$$\Omega_T(\mathbf{h}) = \sum_{t=2}^{T-1} (2\mathbf{h}_t - \mathbf{h}_{t-1} - \mathbf{h}_{t+1})^2. \quad (3.50)$$

3.9 Conditions initiales

Le critère minimisé pour réaliser la déconvolution et défini à l'équation (3.20) n'est pas convexe. Sa minimisation étant réalisée par une méthode d'optimisation continue (VMLM-B), l'objet et la PSF reconstruits dépendent des conditions initiales. Comme on utilise une minimisation alternée, si chacun des critères est convexe alors il y a deux cas de figure : soit on commence par estimer l'objet et alors seule la PSF initiale a un rôle, soit on commence par estimer la PSF et alors seul l'objet initial importe. La déconvolution aveugle étant très dégénérée il est crucial d'estimer lors de cette première itération une solution qui permettra à la fin des minimisations alternées de trouver une solution satisfaisante. En effet, dans le cas d'un flou gaussien en particulier, la PSF peut souvent être décomposée comme la convolution de noyaux plus petits. Le risque est alors lors de la première estimation de la PSF de ne trouver qu'un de ces noyaux. Si cela se produit, la minimisation alternée restera autour de cette solution sous-optimale et les données ne seront pas suffisamment déconvoluées. Il est donc important de définir la PSF ou l'objet initial de manière à éviter les solutions sous-optimales.

3.9.1 PSF initiale

Dans le cas où l'on commence par estimer l'objet, si le critère est convexe la solution $\mathbf{x}^{(1)}$ ne dépend que de la PSF initiale $\mathbf{h}^{(0)}$ et des données \mathbf{y} . Si l'on dispose d'une PSF *a priori* $\mathbf{h}_{\text{prior}}$ il est raisonnable de penser que cet *a priori* constitue une bonne PSF initiale. Certains auteurs comme CHAN et WONG (1998) utilisent un Dirac comme PSF initiale mais cela risque d'aboutir à un objet reconstruit trop proche de l'objet flou.

3.9.2 Objet initial

De même, si le critère est convexe et que l'on commence par estimer la PSF alors seul l'objet initial $\mathbf{x}^{(0)}$ compte. Malheureusement on ne dispose pas en général d'objets *a priori* que l'on pourrait utiliser. Cependant si l'objet initial ne doit pas conduire à des solutions sous-optimales, il ne doit pas obligatoirement être un objet *a priori*. C'est dans cet esprit que nous proposons une manière d'obtenir un objet initial satisfaisant.

L'idée proposée se base sur le fait que certaines zones des données portent plus d'information sur la PSF que d'autres. En effet, le flou sera quasiment sans conséquence sur les zones de structure plutôt basse-fréquences comme les zones uniformes ; à l'inverse les zones de l'objet comprenant des haute-fréquences seront bien plus affectées. Parmi ces zones haute-fréquences, c'est en particulier autour des bords francs de l'image que l'effet du flou sera le plus visible. Caractériser leurs dégradations permettrait donc de caractériser la PSF. C'est pourquoi nous proposons d'effectuer un traitement non linéaire sur les données faisant ressortir les bords les plus francs pour fournir l'objet initial. Ainsi lors de la première minimisation alternée, l'algorithme "calibrera" la PSF comme étant la déformation qui permettant de passer de ces bords très marqués aux bords flous des données. Cette PSF sera donc plus proche de la PSF "vrai" et évitera ainsi ces solutions sous-optimales.

L'objet obtenu par un traitement non-linéaire doit avoir plusieurs caractéristique : (i) pour respecter la normalisation de la PSF, il doit présenter la même moyenne que les données, (ii) les textures susceptibles de brouiller la PSF doivent être supprimées, (iii) seul les bords francs entre des zones très contrastées de la scène doivent être gardés. Cet objet doit donc être composé uniquement de quelques zones uniformes très contrastée. De nombreuses méthodes de

segmentation permettent d'accomplir ce traitement, en particulier les segmentation utilisant des méthodes de "graph-cut" semblent être très adaptées à ce travail de décomposition de la scène floue en quelques zones uniformes.



FIG. 3.6 — Image d'origine.



FIG. 3.7 — Image floutée par un disque de 7 pixels de rayon + un bruit gaussien centré de variance $\sigma^2 = 1$ niveau sur 8 bits.



FIG. 3.8 — Objet initial obtenu par un traitement non-linéaire des données.

Nous avons appliqué cette technique dans le cas de la déconvolution aveugle de l'image du cameraman déjà utilisée aux chapitres précédents (Fig. 1.2). Ces données ont été produites par la convolution de l'image nette par une PSF en forme de disque de 7 pixels de rayon à laquelle a été ajouté un bruit blanc gaussien de variance $\sigma^2 = 1$ niveau de quantification sur 8 bits. Elle est affichée figure 3.7. L'objet initial formé par le traitement non-linéaire de ces données est affiché à la figure 3.8. Pour ne pas pénaliser les bords francs de la PSF, la régularisation de la PSF est effectuée par la norme $\ell_2-\ell_1$ appliquée aux gradients avec l'hyper-paramètre $\beta^S = 10^{10}$; pour favoriser partout un comportement ℓ_1 sans pénaliser la convergence, le seuil a été arbitrairement fixé à $\eta = 10^{-5}$. Un disque de 20 pixels de rayon a été utilisé comme support afin de diminuer le nombre de paramètres à estimer sans biaiser la reconstruction. Sur la figure 3.12 est affichée une coupe à $y = 1$ des PSFs vraie (Fig. 3.9), obtenue à la première itération (Fig. 3.10) et à la fin de la minimisation alternée (Fig. 3.11). On y observe qu'un tel objet initial permet d'obtenir dès la première itération, une PSF très proche de la vérité. L'objet reconstruit à la convergence de la minimisation alternée en utilisant la norme $\ell_2-\ell_1$ appliquée aux gradients avec les hyper-paramètres $\alpha^S = 1.2 \times 10^{-2}$ et $\eta = 1$, est présenté figure 3.13. Il donne une erreur quadratique moyenne de EQM = 22.5 dB à comparer avec l'erreur obtenue lorsque la PSF est connue : EQM = 20.8 dB. En comparant avec les résultats présentés sur le tableau 2.1 page 63, on peut constater que ce résultat est équivalent en terme d'erreur quadratique moyenne avec une déconvolution à PSF connue utilisant le filtre de Wiener.

Pour confirmer la pertinence de ce traitement non linéaire pour générer l'objet initial, nous avons utilisé cette technique lors de la déconvolution aveugle dans le cas d'un flou gaussien. L'image du cameraman a donc été dégradée par un flou gaussien de largeur à mi-hauteur de 7 pixels et un bruit blanc gaussien additif de variance $\sigma^2 = 1$ niveau de quantification sur 8 bits. L'image floue est présentée figure 3.14. L'objet initial fourni est très proche de celui présenté à la figure 3.8 dans le cas d'un flou "disque". La régularisation utilisée est une simple norme quadratique appliquée aux gradients avec l'hyper-paramètre $\beta^S = 1 \times 10^7$. Les coupes (à $y = 0$) des PSFs originale, à la première itération et à la convergence sont présentées sur la

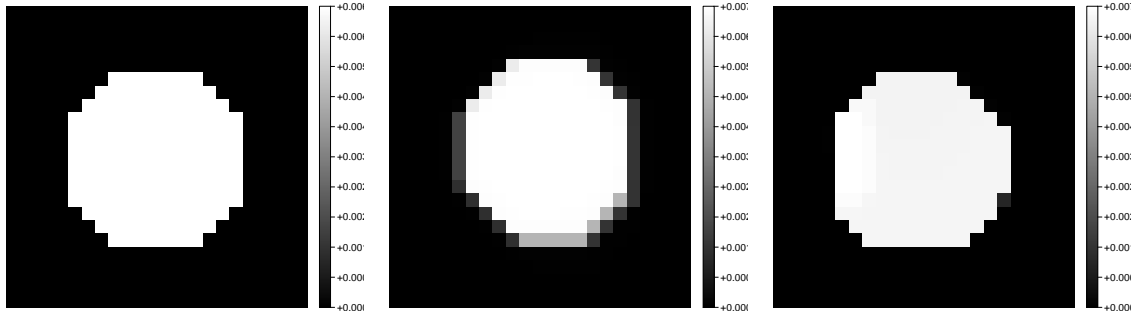


FIG. 3.9 — PSF originale.

FIG. 3.10 — PSF reconstruite d'après l'objet initial (Fig. 3.8).

FIG. 3.11 — PSF reconstruite d'après la convergence de la minimisation alternée.

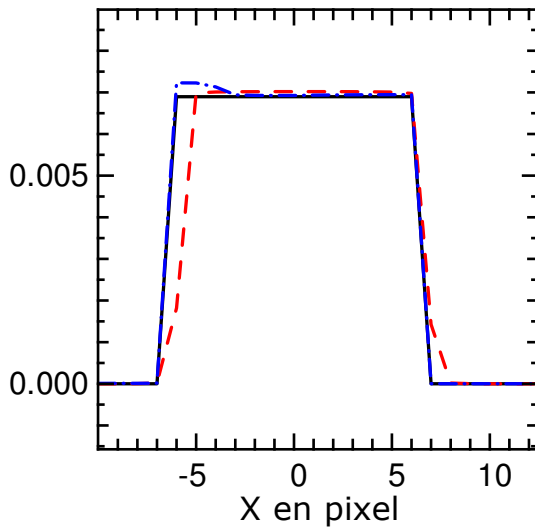


FIG. 3.12 — Coupe horizontale, au centre (à $y = 1$) de la PSF originale (ligne continue noire) et des PSFs reconstruites à la première itération à partir de l'objet initial (ligne tiretée rouge) et à la fin de la minimisation alternée (tiret-point bleu).



FIG. 3.13 — Objet reconstruit en fin à la convergence de la minimisation alternée (EQM = 22.5 dB).

figure 3.15. Comme dans le cas où la PSF est un disque, on peut constater que dès la première itération, la PSF est assez proche de la vérité. On peut observer que les PSFs reconstruites sont légèrement décentrées, ce décalage est l'effet de la dégénérescence suivant une translation dans deux sens opposés du couple PSF/objet reconstruits. Il est sans effet réel sur la qualité du résultat peut être corriger *a posteriori*.

L'objet est reconstruit avec une régularisation utilisant la norme $\ell_2-\ell_1$ appliquée aux gradients avec les hyper-paramètres (fixés de façon optimale) $\alpha^S = 1.8 \times 10^{-2}$ et $\eta = 1$. Le résultat à la convergence de la minimisation alternée est affiché sur la figure 3.16. La qualité de la reconstruction (EQM = 25.2 dB) doit être comparée avec la reconstruction lorsque la PSF est connue. Cette déconvolution simple est effectuée avec la même régularisation sur l'objet avec l'hyper-paramètre $\alpha^S = 4 \times 10^{-3}$. L'objet déconvolué, montré figure 3.17, présente une erreur



FIG. 3.14 — Image dégradée par un flou gaussien de largeur à mi-hauteur de 7 pixels et par un bruit blanc gaussien additif de variance $\sigma^2 = 1$ niveau de quantification sur 8 bits.

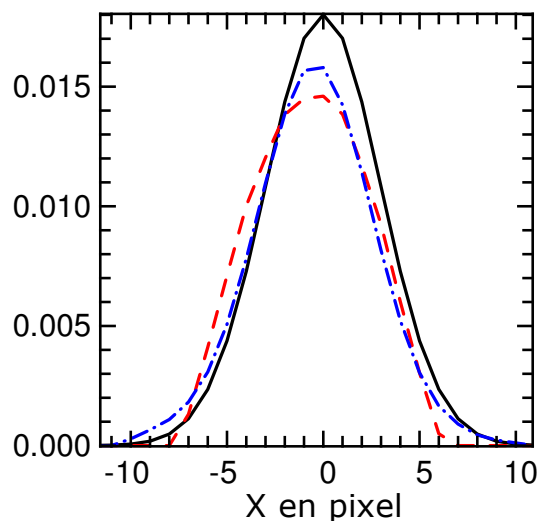


FIG. 3.15 — Coupe à $y = 1$ de la PSF originale (ligne continue noire) et des PSFs reconstruites à partir de Fig. 3.8 à la première itération (ligne tiretée rouge) et à la fin de la minimisation alternée (tiret-point bleu).

quadratique moyenne de EQM = 23.8 dB. Visuellement les mêmes détails peuvent être distingués sur ces résultats même si le résultat de la déconvolution aveugle présente une sorte de granulosité sur dans les zones uniformes. Bien que visuellement les images dégradées par un disque (Fig. 3.7) ou par une gaussienne (Fig. 3.14) semblent de résolutions équivalentes, le flou gaussien atténue bien plus fortement les hautes fréquences, ce qui explique la différence de qualité de reconstruction (à PSF connue en particulier) entre ces deux cas.

3.10 Résultat expérimentaux

La méthode de déconvolution aveugle présentée dans ce chapitre a été appliquée à des données biomédicales. Les trois applications présentés ici concernent des séquences vidéos. Elles ont été acquises dans le cadre de collaborations avec le service de cardiologie de l'hôpital de la Croix-Rousse à Lyon et avec le Centre Commun de Quantimétrie (CCQ) de l'Université Lyon 1. Elles mettent chacune en œuvre des dispositifs radicalement différents : la radiographie, la microscopie conventionnelle et la microscopie confocale. Le succès de la déconvolution aveugle dans ces trois cas montre la pertinence et la robustesse de la méthode décrite dans ce travail.

3.10.1 Coronarographie

3.10.1.1 Contexte

La coronarographie est un examen radiologique des artères du cœur (les coronaires). Cela consiste à filmer l'écoulement dans ces coronaires d'un liquide iodé opaque aux rayons X. L'examen dure quelques secondes, le temps que le bolus de produit de contraste parcoure



FIG. 3.16 — Résultat de la déconvolution aveugle de image flouté par une PSF gaussienne (Fig. 3.14) après la convergence de la minimisation alternée (EQM = 25.2 dB).



FIG. 3.17 — Déconvolution de image flouté par une PSF gaussienne (Fig. 3.14) avec la PSF exactement connue (EQM = 23.8 dB).

tout l'arbre coronaire. L'opération peut être répétée successivement pour plusieurs angles d'incidence mais à chaque acquisition le dispositif est immobile. L'examen de ces courtes séquences vidéo permet aux cardiologues de localiser un obstacle dans les artères pouvant être responsable d'infarctus.

La diffusion des rayons X au cours de la traversée du corps du patient provoque un flou sur ces données. De plus, pour éviter une irradiation trop intense du patient et des soignants, la puissance de l'émission est très limitée et donc le contraste des données est très faible. Dans ce cadre, une méthode de déconvolution aveugle permettrait une résolution plus fine ainsi qu'une meilleure perception des mouvements et de l'écoulement du produit de contraste. Cela permettrait de plus, à résolution égale, de diminuer la puissance des rayons X émis. Il y a donc, pour les cardiologues des améliorations directes et concrètes à attendre de la déconvolution aveugle de ces vidéos. C'est pourquoi une collaboration est née entre le service de cardiologie et l'équipe AIRI du CRAL pour étendre à la coronarographie, les applications des algorithmes de déconvolution aveugle créés initialement pour l'astronomie.

3.10.1.2 Les données

Dix séquences nous ont été fournies par les cardiologues A. Gressard et R. Dauphin. Chaque séquence contient plusieurs dizaines d'images (environ 70) de taille 512×512 . Elles ont été acquises par le même système et seront donc traitées de manière identique. Une image de la première séquence est présentée sur la figure 3.18. Une observation préalable de ces données permet déjà de faire quelques constats :

1. Le mouvement du cœur entre deux images successives est trop important pour pouvoir exploiter une quelconque continuité temporelle. C'est pourquoi, nous n'utilisons pas de contrainte temporelle sur l'objet et l'hyper-paramètre temporel sur l'objet est donc $\alpha^T = 0$.

2. En l'absence d'information, le bruit est supposé blanc gaussien centré.
3. La surface active du capteur est tronquée et n'est pas carrée. Cette surface est toutefois identique sur toutes les images de toutes les séquences. Cela est pris en compte dans la définition de la matrice de poids représentée sur la figure 3.20 :

$$w_{r,t} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si le } r\text{-ième pixel est mesuré,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.51)$$

4. La dynamique de l'image est très faible ; bien qu'il y ait 128 niveaux possibles, la différence de niveaux entre un pixel situé dans une coronaire et un pixel du fond est de quelques niveaux (< 10). Cela empêche d'utiliser le traitement non-linéaire proposé à la section précédente pour générer l'objet initial.



FIG. 3.18 — Trame numéro 38 de la séquence coronarographique numéro 1.

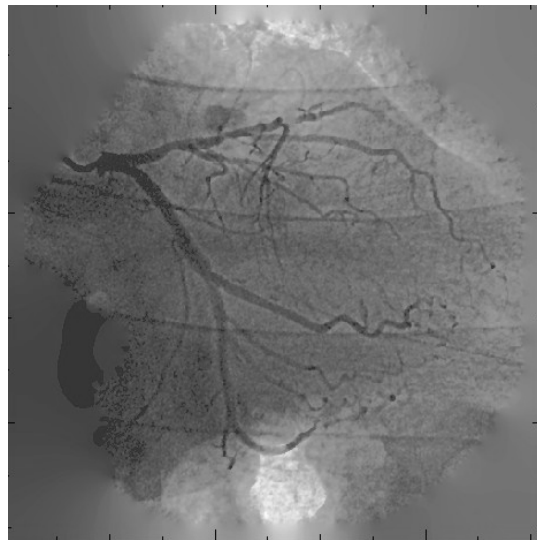


FIG. 3.19 — Déconvolution correspondante.

3.10.1.3 Hypothèses, réglages des hyper-paramètres

Pour effectuer cette déconvolution aveugle, plusieurs hypothèses vont être faites sur la PSF.

1. Le flou est lié à la diffusion. Dans ce cas, la forme de la PSF est très proche d'une lorentzienne. Nous utiliserons la régularisation avec contrainte de forme dans l'espace image telle qu'elle est formulée à l'équation 3.46. Cette régularisation ajoute cependant un paramètre supplémentaire à régler : la largeur à mi-hauteur de la lorentzienne θ .
2. Le flou est dû principalement à l'appareillage et aux tissus immobiles du patient et, comme ni le patient ni le dispositif ne bougent, le flou ne semble pas varier au cours de l'acquisition. La PSF ne varie donc pas au cours du temps et cela revient à considérer l'hyper-paramètre temporel sur la PSF infini $\beta^T = \infty$, ou de manière équivalente $\mathbf{h}_t = \mathbf{h}_0 \forall t$. Cette dernière formulation permet de réduire très fortement le nombre de paramètres à estimer pour la PSF, contraignant fortement le problème.

La régularisation est appliquée à l'objet par le biais d'une norme $\ell_2\text{-}\ell_1$ appliquée aux gradients.

Finalement quatre hyper-paramètres sont à déterminer pour effectuer cette déconvolution aveugle : β^S , α^S , η et θ . La largeur à mi-hauteur de la lorentzienne θ peut être évaluée par essai/erreur mais une façon plus efficace est de procéder en deux déconvolutions aveugles. Une première déconvolution aveugle utilise une régularisation quadratique et la PSF ainsi reconstruite servira à estimer la largeur à mi-hauteur θ qui sera utilisée dans une deuxième déconvolution aveugle. Si la forme *a priori* est justifiée, cette deuxième déconvolution aveugle sera plus précise. Comme il n'y a pas de régularisation temporelle entre des images successives, la déconvolution aveugle est composée d'une estimation de la PSF en prenant en compte toutes les données suivie d'une déconvolution pour chaque image de la séquence et ce de manière alternée jusqu'à convergence.

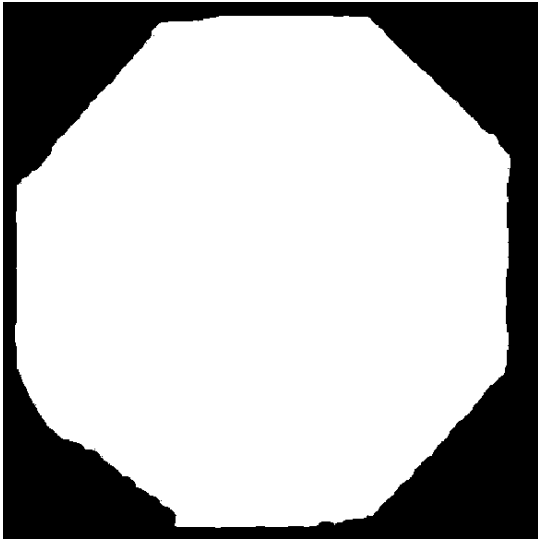


FIG. 3.20 — Carte de poids W_t

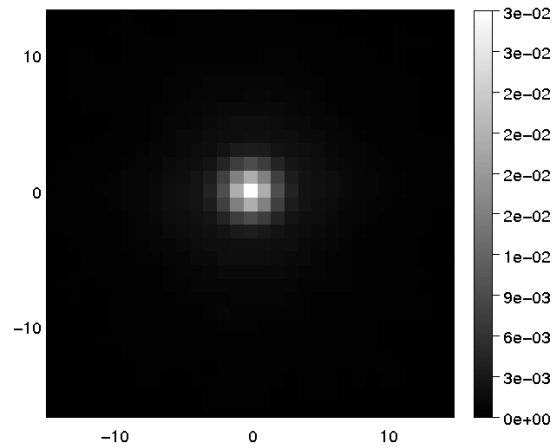


FIG. 3.21 — PSF reconstruite pour la première séquence.

3.10.1.4 Résultats

Une fois les hyper-paramètres fixés, chaque séquence vidéo a été déconvoluée en environ 80 secondes par image. L'hypothèse d'une PSF invariante temporellement a permis de contraindre très fortement le problème en multipliant les données utilisables pour son estimation. De ce fait, la PSF reconstruite est peu sensible à des variations peu importantes (de l'ordre d'un facteur 10) de l'hyper-paramètre β^S . La PSF reconstruite pour la première séquence est affichée figure 3.21. Cette hypothèse d'une PSF invariante temporellement a été validée *a posteriori* par un relâchement de cette contrainte : considérer les PSF indépendantes n'a pas conduit à une amélioration du résultat ; cela a, de plus, allongé le temps de calcul.

Une image de la reconstruction de la première séquence est affichée sur la figure 3.19. Bien que la quantification utile soit faible, une inspection visuelle permet de constater l'efficacité de la méthode proposée. Comme la séparation des artères coronaires et du fond est plus nette, la perception du mouvement sur la séquence vidéo est très largement améliorée. La justesse de cette amélioration a été confirmée par les cardiologues à qui ces résultats ont été présentés.

Notons que les zones tronquées ne perturbent aucunement la reconstruction, même des pixels bordant celles-ci. Cette zone est juste remplie par un fond lisse en accord avec notre *a priori*. Toutefois, cette large zone non-informative à combler dégrade le conditionnement et ainsi ralentit la convergence de l'algorithme.

Si elle était validée, les bénéfices de cette méthode seraient de permettre une meilleure visualisation de la micro-vascularisation et réduction de la puissance du faisceau X et donc de l'irradiation des soignants comme des patients.

3.10.2 Microscopie confocale

3.10.2.1 La microscopie confocale en fluorescence

La microscopie à fluorescence est une technique optique permettant la mise en évidence d'objets particuliers en tirant profit du phénomène de fluorescence de certains composés. La fluorescence est la propriété de certaines molécules d'émettre un photon après avoir absorbé un photon de plus haute énergie. Lorsqu'on illumine un composé fluorescent (excitation) celui-ci ré-émet pendant une certaine durée de la lumière à une longueur d'onde égale ou plus faible. En sélectionnant une substance avec un marqueur fluorescent (les fluorophores), on peut donc déterminer la distribution de cette substance dans l'échantillon observé. Cette méthode est très utilisée en imagerie biologique. En biologie cellulaire, elle permet en particulier de mettre en évidence les différentes structures cellulaires et organites présentes à l'intérieur d'une cellule.

En microscopie classique, dite aussi à champ large, cette technique souffre d'une résolution trop faible pour bien distinguer certaines organites ainsi marquées. En effet, en microscopie classique, pour que l'image soit nette, il faut que l'objet soit dans le plan focal de l'objectif du microscope. Or si l'objet est un peu épais, seule une partie sera dans ce plan focal et donc seule une partie de l'image sera nette. Cela pose donc problème pour réaliser des observations d'objets étendus ou allongés. Cet inconvénient est d'autant plus fort que le grandissement est important, car la profondeur de champ diminue avec celui-ci. De plus, en microscopie de fluorescence, l'illumination excite les fluorophores sur toute la profondeur de l'échantillon. La fluorescence émise dans le plan focal, donc nette, va être noyée par la fluorescence émise dans les plans adjacents au plan focal qui par définition sont flous.

Pour contourner ce problème on peut utiliser un microscope confocal. Il s'agit d'un microscope optique permettant de réaliser des images avec une très faible profondeur de champ. Cela permet d'effectuer des images d'un même objet à différentes profondeurs (des coupes optiques) à partir desquelles il est possible de reconstruire une image en trois dimensions de cet objet. Un microscope confocal utilise un pinceau laser qui va venir exciter un point précis de l'échantillon. La lumière ré-émise vers le capteur contient la lumière ré-émise dans toute la profondeur de l'échantillon. Pour sélectionner uniquement la lumière issue du plan focal, on utilise un trou d'aiguille (ou sténopé) placé dans le plan focal conjugué de l'objectif (le plan confocal). En effet, seule la lumière émise dans le plan focal de l'objectif va former un point dans le plan confocal, la lumière émise par les autres plans ne sera pas focalisée dans le plan confocal et y formera un tache plus étendue. Le trou d'aiguille permet donc de sélectionner en majorité la lumière venant du plan focal. On a ainsi observé un petit volume en trois dimensions dans l'échantillon où l'on a mesuré la concentration en fluorophores ; la position du pinceau laser fixe ses coordonnées latérales (x, y) et la position du plan focal dans l'objet sa profondeur (z). En balayant l'échantillon, il est ainsi possible de reconstruire la distribution

3D de fluorophores. Ce balayage augmente malheureusement le temps d'acquisition et, pour ne pas l'augmenter exagérément, le temps de pose est très court. De plus, comme le flux émit par la fluorescence est relativement faible, peu de photons arrivent au détecteur. C'est pourquoi celui-ci est précédé d'un photo-multiplificateur.

3.10.2.2 Contexte

Le Centre Commun de Quantimétrie (CCQ) de l'Université Lyon 1, dirigé par Yves Tournier est une plate-forme d'imagerie et de microscopie à destination principalement des laboratoires de biologie. Il propose un ensemble de matériels, de logiciels ainsi qu'une expertise technique en microscopie. Depuis plusieurs années, l'équipe AIRI du CRAL et le CCQ ont travaillé conjointement à la réalisation d'une caméra à comptage de photons pour la microscopie à fluorescence (BLAZIT *et al.*, 2008). Cette collaboration s'est aussi développée autour du traitement d'image et en particulier de la déconvolution aveugle de données.

Dans ce cadre, nous avons testé la méthode de déconvolution aveugle présentée sur une séquence vidéo acquise en microscopie confocale. Cette séquence est issue d'une partie des données utilisées dans le cadre de l'expérience menée par PELLOUX *et al.* (2006) qui étudie les mitochondries de cellules cardiaques nommées "non-beating HL-1". Ces données ont été acquises en microscopie confocale à fluorescence. On observe la fluorescence du *Tetramethyl Rhodamine Methyl Ester* (TMRM). C'est un composé amphiphile (qui traverse les lipides) et cationique qui s'accumule donc dans les régions des cellules chargées négativement. La différence de potentiel entre l'intérieur du cytoplasme cellulaire et la mitochondrie est de l'ordre de -150 à -200 mV. Le TMRM va donc traverser la membrane et s'y accumuler. Les longueurs d'onde d'excitation et d'émission sont 535 nm et aux alentours de 612 nm respectivement. Le microscope est un LEICA TCS SP2 avec un sténopé de diamètre optimal et équipé d'un objectif plongeant à eau $\times 63$ dont l'ouverture numérique est de $NA = 0.9$. Les images sont de taille 512×512 et couvrent une surface de $60 \mu\text{m}$ de côté. Les pixels de l'image ont donc une largeur de $0.12 \mu\text{m}$. Les résolutions données dans PELLOUX *et al.* (2006) sont de $\Delta x = \Delta y = 0.46 \lambda / NA = 0.31 \mu\text{m}$ et $\Delta z = 1.4 \lambda / NA^2 = 1.06 \mu\text{m}$. Ce dispositif collecte la fluorescence émise entre 565 et 640 nm. Le microscope est utilisé en mode "time-lapse" permettant de prendre une image toutes les 15 secondes, où chaque image est la moyenne de 4 acquisitions.

3.10.2.3 Les données

La séquence traitée est une séquence de 94 images, soit 23'30" en tout. La première image de cette séquence est affichée figure 3.22. A la fin de la séquence l'ajout d'une substance (la FCCP) dépolarisant les mitochondries provoque l'éparpillement des fluorophores dans le cytoplasme. La perte de résolution visible (comme dans la dernière image Fig. 3.23) correspond bien à un phénomène dans la préparation et non à un défaut du système d'acquisition. Pour éviter que ce phénomène ne perturbe l'estimation de la PSF, seules les 64 premières images (avant l'adjonction de FCCP) seront utilisées dans les itérations de reconstruction de la PSF.

On constate un très fort bruit lié surtout au bruit de fond du photo-multiplificateur et dans une bien moindre mesure aux fluctuations de la source laser et de son asservissement. Le bruit de fond du photo-multiplificateur est surtout du bruit de grenaille ou "shot noise" dû au comptage de photons. L'histogramme d'une région contenant uniquement le fond est donné à la figure 3.24. On peut constater que le niveau du fond est de 12 niveaux de quantification et que la distribution du bruit n'est absolument pas gaussienne. Un étude de son spectre de

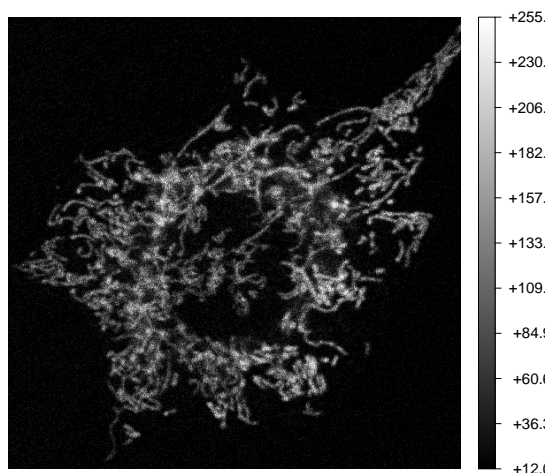


FIG. 3.22 — Première image de la séquence sur les mitochondries.

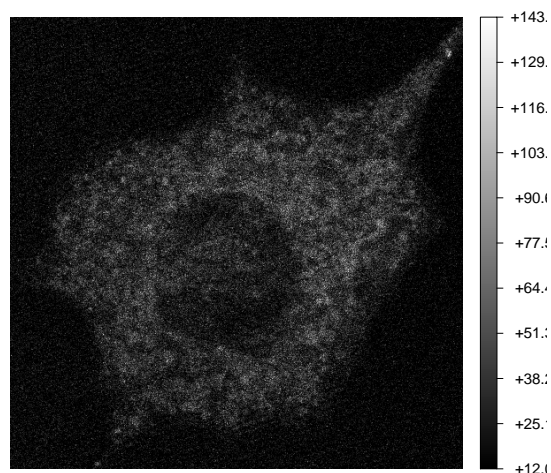


FIG. 3.23 — Dernière image de la séquence sur les mitochondries.

puissance montre que ce bruit est à peu près blanc hormis autour de la fréquence spatiale $(-6, 12)$ frequel.

De ce fond bruité, se détache nettement les mitochondries. Comme pour les données coronarographiques, leur mouvement est cependant trop important pour pouvoir utiliser une régularisation temporelle sur l'objet. L'hyper-paramètre temporel sur l'objet sera donc $\alpha^T = 0$.

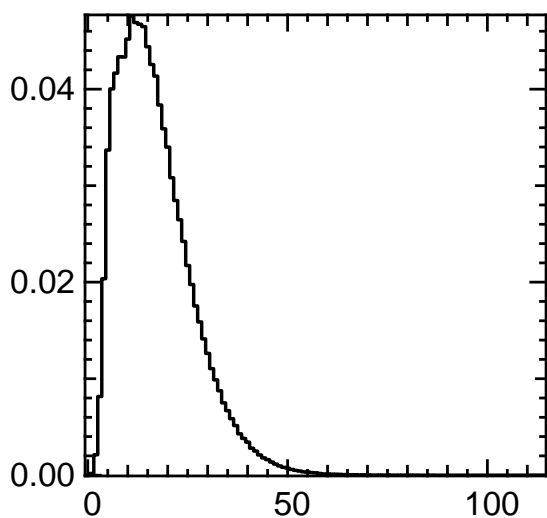


FIG. 3.24 — Histogramme normalisé d'une zone de l'image contenant uniquement du fond (le carré de 100 pixels de côté en haut à gauche).

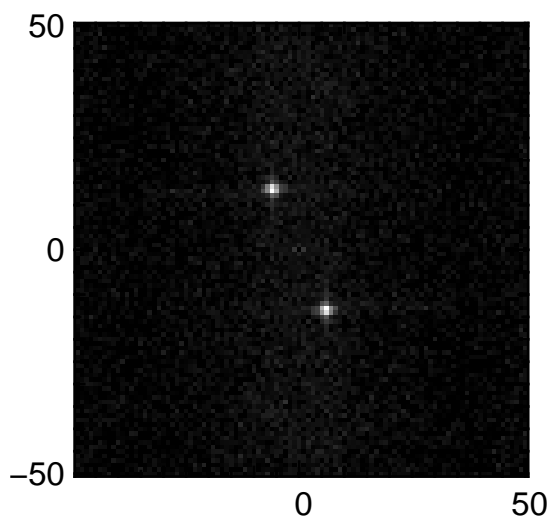


FIG. 3.25 — Spectre de puissance du bruit.

3.10.2.4 Hypothèses, réglages des hyper-paramètres

Nous ne connaissons pas précisément la cause du flou et il n'est pas possible d'avoir une forme *a priori* de la PSF. Pour favoriser une PSF lisse, la régularisation spatiale choisie est une

simple régularisation de type norme quadratique appliquée aux gradients. Comme dans le cas de la coronarographie, nous supposons que la PSF est constante au cours du temps. Cela permet de contraindre très fortement le problème et donc accélérer l'estimation de la PSF.



FIG. 3.26 — Première image (à deux niveaux de gris) de l'objet utilisé comme objet initial dans la minimisation alternée.

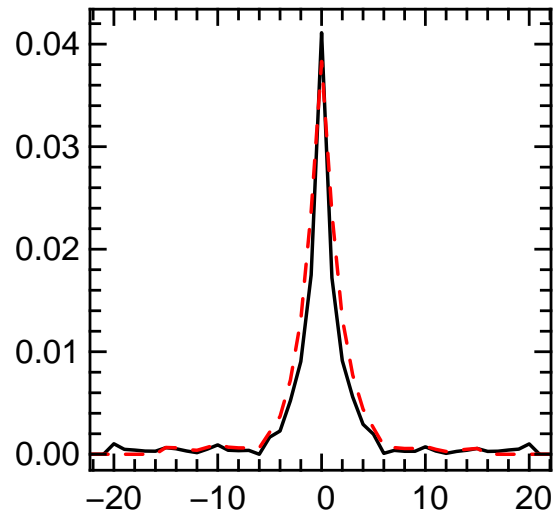


FIG. 3.27 — Coupe en $y = 1$ de la PSF reconstruite à la première itération (ligne continue noire) et de celle reconstruite après convergence de la minimisation alternée.

La nature des données, avec des structures se détachant nettement d'un fond permet d'effectuer la minimisation alternée en commençant par l'estimation de l'objet et en créant l'objet initial d'après la méthode proposée à la section 3.9.2. La transformation non-linéaire utilisée pour générer cet objet initial est un simple filtre passe bas (avec un filtre gaussien) pour atténuer le bruit suivi d'un seuillage. Les images binaires ainsi produites sont multipliées chacune par un facteur leur permettant de présenter la même moyenne que les données. La première image de l'objet initial ainsi créé est affichée à la figure 3.26. Sur cette figure, on peut constater que l'objet initial peut être relativement éloigné des données et de l'objet à reconstruire et qu'il peut y manquer beaucoup de structures.

L'hyper-paramètre pour la PSF est fixé à $\beta^S = 1 \times 10^{11}$. La PSF est reconstruite sous les contraintes de positivité et de normalisation. Pour accélérer le calcul, une contrainte de support en forme de disque d'un rayon de 20 pixels est fixée. Comme on peut le constater à la figure 3.27, la PSF reconstruite à la première itération de la minimisation alternée, c'est-à-dire d'après l'objet initial est déjà très proche de la PSF qui sera reconstruite à la convergence de l'algorithme de déconvolution aveugle.

La régularisation utilisée pour l'objet est une régularisation de type norme $\ell_2-\ell_1$ appliquée aux gradients avec l'hyper-paramètres $\alpha^S = 0.06$ pour toutes les images et le seuil fixé à la variance du bruit estimé : $\eta = 8$. Comme les mitochondries sont sur un fond constant de moyenne 12 niveaux de quantification, cela fournit une contrainte supplémentaire sur la valeur des pixels de l'objet : $x \geq 12$.

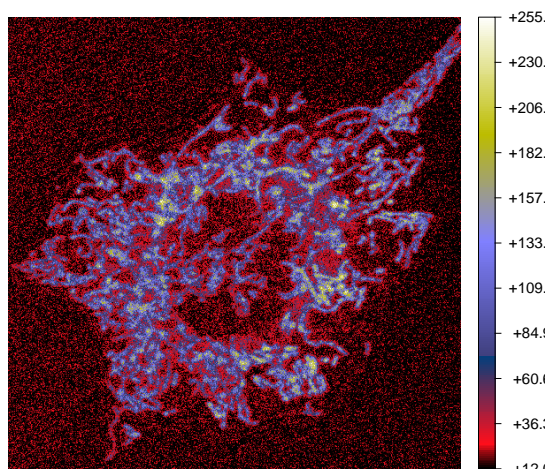


FIG. 3.28 — Première image de la séquence sur les mitochondries.

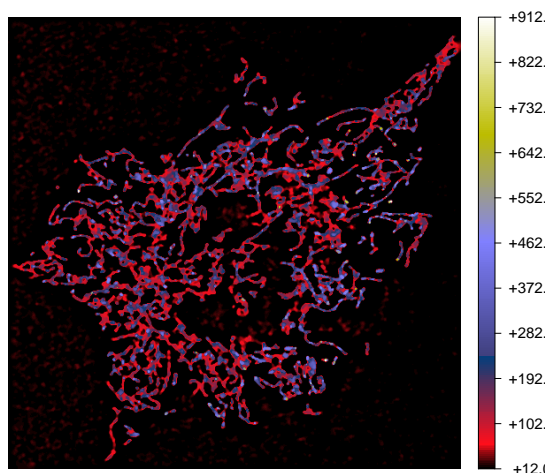


FIG. 3.29 — Première image de la séquence déconvoluée en aveugle ($\alpha^S = 0.06$).

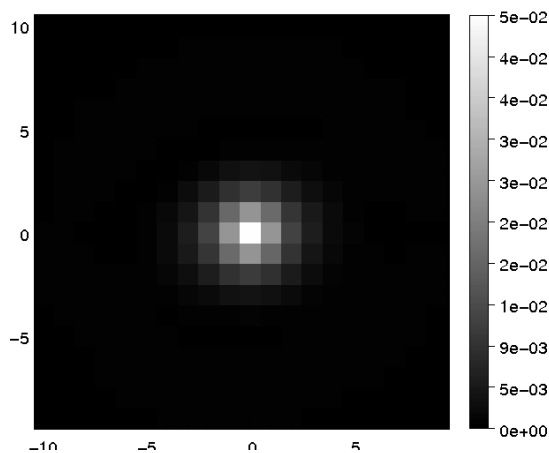


FIG. 3.30 — PSF reconstruite.

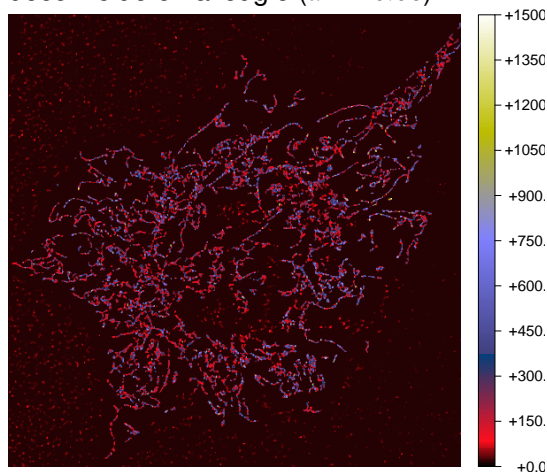


FIG. 3.31 — Première image de la séquence déconvoluée en aveugle avec un hyper-paramètre de régularisation spatiale plus petit ($\alpha^S = 0.01$) que pour le résultat affiché à la figure 3.29.

3.10.2.5 Résultats

Seulement deux itérations de minimisation alternée ont été suffisantes pour aboutir à un résultat satisfaisant. La déconvolution aveugle des 64 premières images a été effectuée en 24 minutes soit 22 secondes par image. La PSF reconstruite est affichée à la figure 3.30. Le résultat de cette déconvolution aveugle est affichée sur la figure 3.29 et est à comparer avec les données affichées avec la même palette de couleurs Fig. 3.28. Si peu de détails supplémentaires ont été restaurés, on peut constater que le bruit a été largement supprimé. Cela prouve la robustesse de notre méthode même lorsque le modèle de bruit utilisé est différent de la réalité (le bruit n'est ni blanc ni gaussien).

Une fois la déconvolution aveugle effectuée, un relâchement de la contrainte temporelle

sur la PSF n'a pas conduit à des PSFs très différentes. Cette hypothèse d'une PSF invariante temporellement contraint très fortement la reconstruction et celle-ci n'est pas très affectée par les inconvénient d'une régularisation spatiale de type norme quadratique appliquée aux gradients. Une nouvelle déconvolution aveugle utilisant la norme $\ell_2-\ell_1$ pour la PSF a conduit à la reconstruction d'une PSF très similaire.

Il faut toutefois noter que dans cette application, il y a une ambiguïté sur la résolution atteinte en fin de déconvolution. En effet, les fluorophores sont distribués dans la cellule en structures relativement lisses avec plus de fluorophores au centre des mitochondries qu'en périphérie. Cette distribution peut être interprétée comme le résultat d'un flou appliqué à une distribution sous-jacente n'ayant pas toujours un sens physique. Il y a donc une ambiguïté entre le flou lié au dispositif optique et la distribution des fluorophores. Cela peut être mis en évidence en diminuant le niveau de régularisation. Pour un niveau de régularisation plus faible (comme $\alpha^S = 0.01$ Fig. 3.31), le nombre de pixels présentant une valeur importante va diminuer et l'on va reconstruire le squelette du réseau de mitochondries. Plus on va baisser cette régularisation plus on va séparer les différentes branches de ce squelette. Les images reconstruites ainsi seront plus contrastées mais n'auront pas forcément de sens. C'est pourquoi l'hyper-paramètre α^S a été ajusté de sorte que la résolution de l'image reconstruite corresponde avec la résolution théorique de l'instrument ; dans notre cas 3 pixels.

Il faut toutefois remarquer que cet effet de squeletisation peut être intéressant pour le traitement ultérieur des données. En effet, dans l'article de PELLOUX *et al.* (2006), les données que l'on a traitées ici sont utilisées pour estimer le déplacement moyen des mitochondries. Pour cela, ils utilisent le squelette du réseau de mitochondries et mesurent sa déformation locale comme cela est expliqué à la figure 3.32. Pour atténuer le bruit qui pourrait perturber la squeletisation, les données sont préalablement lissées avec un filtre gaussien 3×3 , diminuant encore plus la résolution des images. Pour ces traitement, il serait intéressant de déterminer dans quelle mesure utiliser le squelette créé par "sur-déconvolution" permettrait ou non d'améliorer la précision et la robustesse de l'estimation des déplacements.

3.10.3 Microscopie

3.10.3.1 Contexte

Lors de la même collaboration avec le centre commun de quantimétrie (CCQ), nous avons aussi testé notre méthode sur des données prises en microscopie classique. Ces données sont des séquences d'images de cellules ciliées épithéliales prises au microscope à transmission. Les cellules ciliées épithéliales sont des cellules de la paroi des bronches qui, par les mouvements coordonnés de leurs cils, permettent d'évacuer le mucus encombrant celles-ci. Le but des biologistes est ici de caractériser le mouvement de ces cils pour étudier les dysfonctionnements de ces mouvements dans certaines maladies génétiques. Pour cela ils utilisent des séquences d'images prise au microscope à transmission avec un fort grossissement pour distinguer ces cils d'environ 70 nm de diamètre. Brigitte Chhin a préparé ces cellules épithéliales et acquis la séquence que nous avons traitée.

3.10.3.2 Les données

Pour ce test nous n'avons traité qu'une seule séquence de 400 images de taille 253×178 pixels. Une image de cette séquence est présentée à la figure 3.35. Comme le grandissement

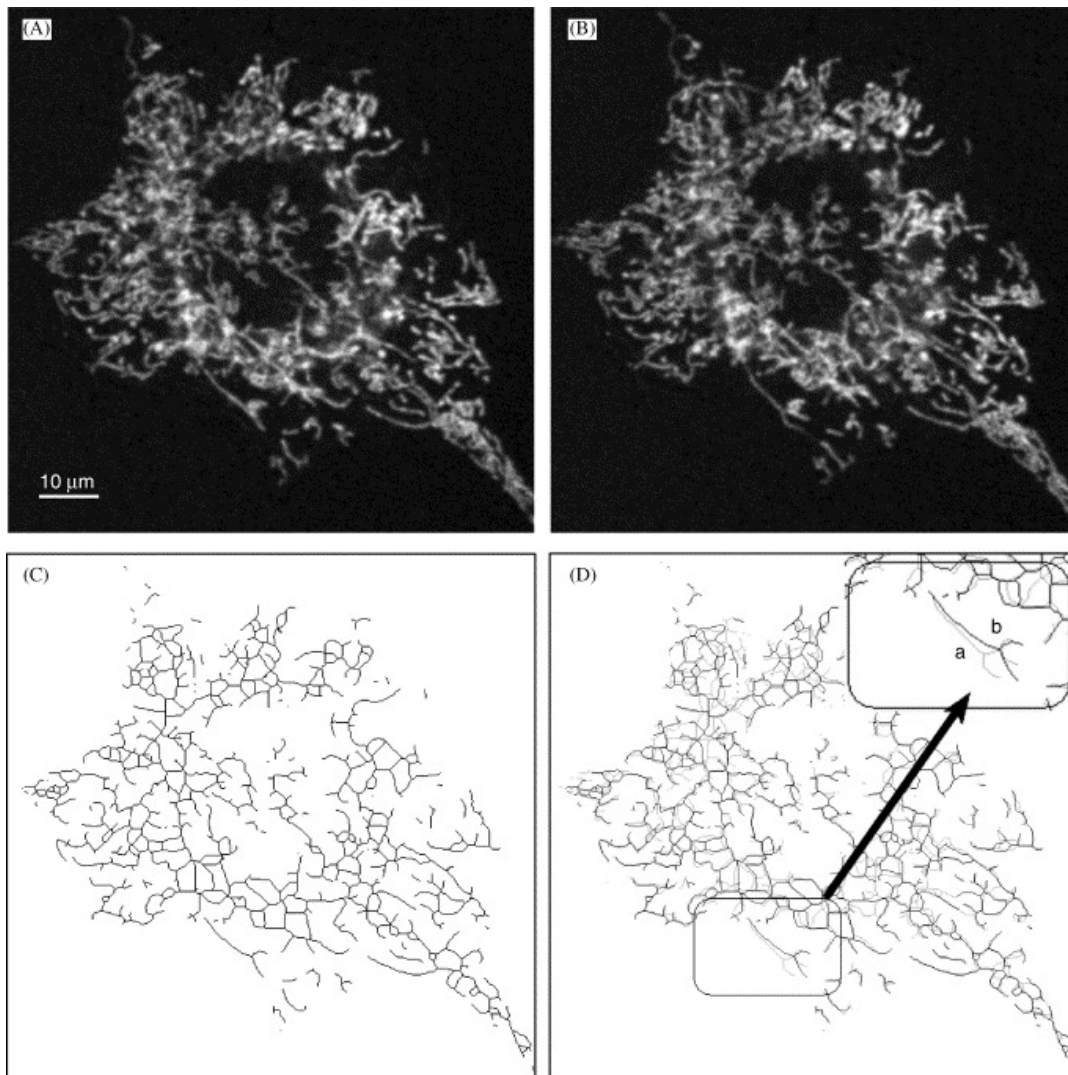


FIG. 3.32 — Figures issue de [PELLoux *et al.* \(2006\)](#) (fig 12). Les figures A et B représente deux images successives de la séquence. L'image C représente le squelette du réseau de mitochondries déterminé à partir de l'image A. Ce squelette est superposé, image D, avec celui calculé à partir de l'image B, mettant ainsi en évidence les déplacements.

est très important, la profondeur de champ est relativement fine et nous n'observons qu'une coupe de la cellule ciliée. Cependant, comme les cils bougent dans les trois dimensions, au cours de la séquence nous observons leurs focalisations et défocalisations successives. Or comme chaque cil bouge indépendamment, le flou de défocus est différent pour chacun d'entre eux et n'est donc par conséquent absolument pas isoplanétique. Comme la méthode proposée ne permet pas de prendre en compte un flou non-isoplanétique, nous proposons de décomposer le flou total comme étant la convolution d'un flou dû au dispositif optique et qui est isoplanétique et d'un flou non-isoplanétique lié aux défocalisations. Nous proposons ici de ne corriger que le flou isoplanétique lié à l'appareillage.

Les images elles-mêmes peuvent être décomposées en deux parties, une partie comprenant les cils dont le mouvement est rapide d'une image à l'autre et une autre partie comprenant le

corps de la cellule et le fond uniquement sujet à de légères translations dues aux vibrations du dispositif.

De plus, sur toutes les images nous constatons la présence de taches de diffraction dues à des poussières dans le dispositif. Ces poussières ne sont pas dans le même plan que la préparation et sont immobiles à la différence de l'objet observé. Une estimation de la variance temporelle des pixels permet d'identifier les pixels appartenant à ces taches. Ceux-ci sont par la suite considérés comme ne portant pas d'information et leur poids est annulé ($w_r = 0$) comme on peut le voir sur la figure 3.34.

Enfin, en examinant les données on peut observer la présence de lignes verticales très atténuées dans les parties uniformes des images. Ceci semble traduire le fait que le bruit n'est pas blanc.

3.10.3.3 Hypothèses, réglages des hyper-paramètres

Concernant l'estimation de la PSF, plusieurs problèmes rendent le choix de la régularisation difficile. Tout d'abord nous ne connaissons pas exactement la cause du flou car ces causes peuvent être du bougé, de la défocalisation, de la diffusion, ou vraisemblablement un mélange de ces causes. Il est donc difficile d'établir une forme *a priori* de la PSF. De plus, nous avons constaté que la PSF variait dans le champ et que, comme notre méthode ne permet pas à l'heure actuelle le prendre en compte, nous tenterons juste d'estimer la partie isoplanétique de ce flou. Nous ne pouvons donc pas prendre en compte pour l'estimation de la PSF, les parties de l'images où les cils se défocalisent. Enfin, sans *a priori* particuliers sur la PSF, il semble intéressant d'utiliser la méthode d'estimation de l'objet initial proposée à la section 3.9.2. Cependant, pour pouvoir utiliser la méthode, il faut que l'image présente des bords francs ; or ces bords francs sont surtout dans la partie des images où sont aussi présents les cils et donc où le flou n'est pas isoplanétique. Face à tous ces problèmes, nous avons choisi d'utiliser tout de même une régularisation avec une forme *a priori* pour la PSF en supposant cette PSF constante au cours du temps. C'est une PSF lorentzienne de largeur à mi-hauteur de 2.5 pixels qui a semblé la plus adaptée.

Pour ne pas être perturbée par les défocalisations des cils, l'étape d'estimation de la PSF ne considère que les parties de l'image sans cils. On définit donc une matrice de poids \mathbf{W}^{psf} utilisée pour cette étape d'estimation de la PSF dont les coefficients sont nuls pour les pixels appartenant à des cils :

$$w_{r,t}^{\text{psf}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{si le } r\text{-ième pixel appartient à un cil ou s'il n'est pas mesuré,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.52)$$

Les parties des images contenant les cils sont estimées comme étant les parties des données avec la plus grande variance temporelle. Cela conduit à la matrice de poids affichée à la figure 3.33

Pour l'étape d'estimation de l'objet, une autre matrice de poids \mathbf{W}^{obj} est définie. Les coefficients de cette matrice sont nuls uniquement pour le pixel non mesuré, en particulier les pixels appartenant aux taches de diffraction :

$$w_{r,t}^{\text{obj}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si le } r\text{-ième pixel est mesuré,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.53)$$

Cela conduit à la matrice de poids affichée à la figure 3.34



FIG. 3.33 — Carte de poids (la diagonale de W^{psf}) utilisée dans les itérations d'estimation de la PSF ; en noir 0, en blanc 1.

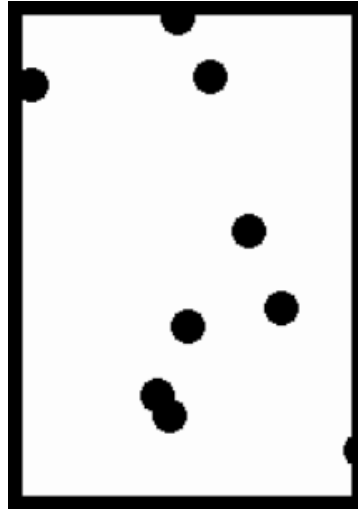


FIG. 3.34 — Carte de poids utilisée dans les itérations d'estimation de l'objet.

Les cils de la cellules ont des mouvements trop rapides pour pouvoir appliquer une régularisation temporelle sur ces pixels. De plus, les parties sans cils subissent des mouvements de translation vraisemblablement dûs à des vibrations du dispositif. Malheureusement, il n'est actuellement pas possible de mettre en place une compensation de ces vibrations dans l'algorithme proposé. C'est pourquoi, il n'est pas non plus possible de mettre en place une régularisation temporelle sur les parties sans cils de l'objet.

La régularisation spatiale appliquée à l'objet est, comme aux expériences précédentes, appliquée à l'objet par le biais d'une norme $\ell_2\text{-}\ell_1$ appliquée aux gradients. L'hyper-paramètre spatial et le seuil pour l'objet sont fixés à $\alpha^S = 0.05$ et $\eta = 2$.

3.10.3.4 Résultats

La première image de la séquence déconvoluée est affichée sur la figure 3.36. La PSF reconstruite et une coupe de celle-ci sont présentées sur les figures 3.37 et 3.38.

La déconvolution aveugle a été effectuée en plusieurs heures (environ une minute par image). On peut constater sur cette reconstruction que dans même ce cas "limite" avec tous les problèmes évoqués, l'algorithme permet une amélioration de la résolution et, par exemple, permet de mieux séparer certains cils. Toutefois de meilleurs résultats seraient à attendre d'un algorithme modifié prenant en compte la physique de formation des données, c'est-à-dire la couleur du bruit, le recalage des vibrations, le fait que la PSF ne soit pas isoplanétique. Dans ce cas, il faudrait examiner avec les biologistes, ce qui n'a pas été fait ici, quels sont les éléments qu'ils veulent mettre en évidence. Si le but est de modéliser le mouvement 3D des cils, la microscopie classique 2D n'est peut être pas l'outil optimal. Comme nous le verrons au chapitre suivant l'holographie numérique semble être une technique plus adaptée pour étudier le mouvement en 3D de petits objets.

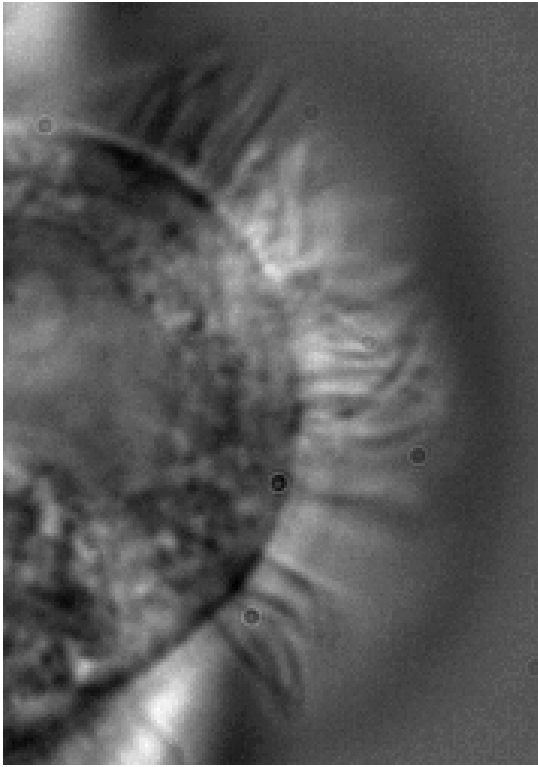


FIG. 3.35 — Première image de la séquence sur la cellule ciliée.

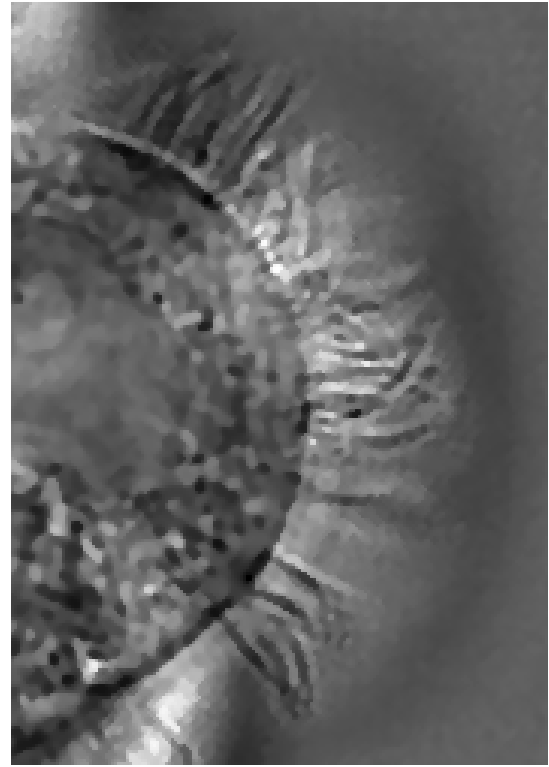


FIG. 3.36 — Première image de la séquence déconvolué en aveugle.

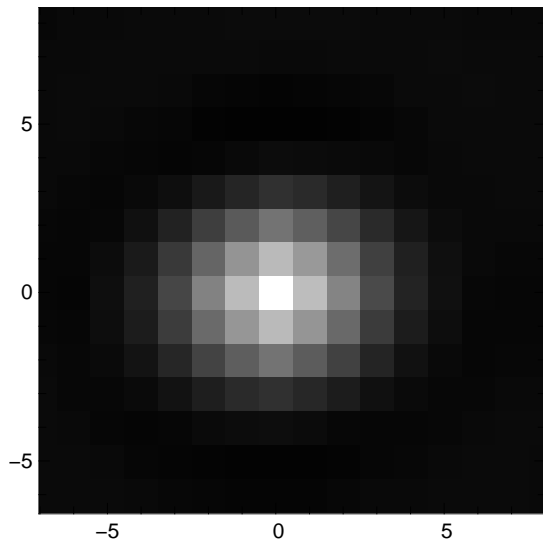


FIG. 3.37 — PSF reconstruite.

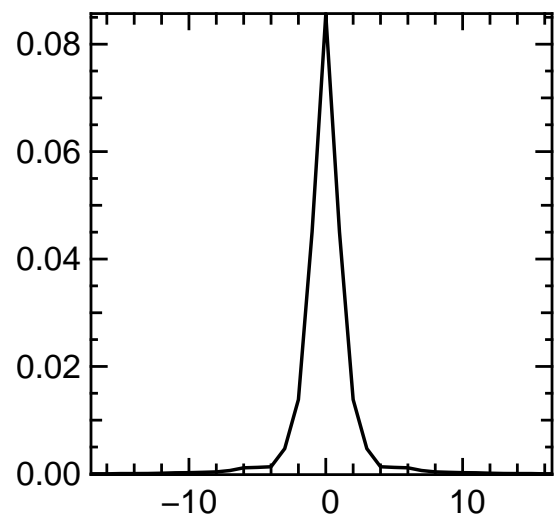


FIG. 3.38 — Coupe en $y = 1$ de la PSF reconstruite présentée à la figure 3.37.

3.11 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons développé l'approche inverse appliquée à la déconvolution aveugle. Dans la méthode proposée, nous utilisons une minimisation alternée régularisée

pour estimer itérativement la PSF et l'objet. Dans cette minimisation alternée, l'optimum atteint dépend du point de départ fourni à l'algorithme. Une méthode non-linéaire est donc proposée pour générer un objet initial qui permet d'éviter certaines dégénérescences dans l'estimation de la PSF et d'accélérer le calcul.

Cette méthode a été testée avec succès dans différentes applications : la coronarographie, la microscopie confocale et la microscopie classique. Dans ces trois applications, les données étaient des séquences vidéo et la déconvolution aveugle d'autres types de données multidimensionnelles hétérogènes reste à valider dans des expériences réelles. De plus, dans ces trois cas, les données ne se prêtaient pas à la mise en place de régularisation temporelle sur l'objet. Par contre, nous avons constaté que la régularisation temporelle mise en œuvre pour l'estimation de la PSF permettait de bien contraindre ce problème et fournissait à la fois une accélération de la convergence, et une estimation précise et stable de la PSF. Bien que les bénéfices d'une régularisation temporelle sur la PSF soient manifestes sur les différentes données testées, une étude plus approfondie serait nécessaire pour l'établir quantitativement.

Devant la grande diversité des formes de PSF possibles, nous avons décrit plusieurs façons d'introduire des *a priori*. Le choix de ces *a priori* dépend des phénomènes physiques en jeu dans la formation des données. C'est pourquoi, pour un résultat satisfaisant il est très important de connaître comment ont été acquises ces données. De plus, comme nous l'avons noté dans l'expérience en microscopie confocale (Sec. 3.10.2), différents réglages des hyper-paramètres peuvent conduire à des résultats différents mais tout aussi acceptables visuellement pour une personne qui ne connaît pas le but de l'expérience. Seule l'expertise des utilisateurs finaux permettra de trancher. Par conséquent, il est important lors de définir avec ceux-ci les caractères recherchés dans les données qui conditionneront les réglages de l'algorithme.

Au vu des résultats présentés dans ce chapitre, les possibilités de notre algorithme semblent très prometteuses. Toutefois, avant d'envisager une utilisation quasi-routinière plusieurs problèmes fondamentaux devront être résolus. Tout d'abord, il est nécessaire de déterminer une façon simple de régler les hyper-paramètres. L'estimation des hyper-paramètres est un sujet complexe qui est l'objet actuellement de nombreuses recherches dans la communauté de la reconstruction de données, car de nombreux algorithmes achoppent sur ce point. Jusqu'à présent, aucune des méthodes proposées (L-Curve, GCV, méthodes bayésiennes...) ne fait actuellement l'unanimité dans cette communauté. Définir un "bon" hyper-paramètre nécessite de définir ce qu'est une "bonne" reconstruction. Or comme nous l'avons constaté dans l'expérience en microscopie confocale (Sec. 3.10.2), il est difficile de définir une "bonne" reconstruction sans connaissance de la finalité de l'expérience. Le réglage doit donc être, en partie au moins, confié à l'utilisateur final. Pour lui faciliter la tâche, il faut donner un sens physique à ces paramètres de contrôle comme par exemple le niveau de bruit ou la résolution effective de la reconstruction. De même, une étude est à faire pour déterminer comment varient les hyper-paramètres avec la taille des données (nombre d'images, taille des images) ou avec le niveau du bruit dans les données.

L'autre problème est l'accélération du temps de calcul. Ce problème est encore plus crucial si l'on permet à l'utilisateur d'effectuer plusieurs reconstructions avec des réglages différents des paramètres. C'est aussi le point qui permettrait une utilisation plus étendue en imagerie médicale. En effet, le temps de calcul d'environ une heure, par exemple, pour la déconvolution aveugle des données coronarographiques est bien trop long pour permettre aux cardiologues d'effectuer un éventuel geste médical alors que le patient est encore sur la table

d'opération. Deux points permettraient cette accélération : de manière pratique, permettre le calcul vectorisé sur des cartes graphiques¹, et de manière plus fondamentale de définir des pré-conditionneurs efficaces. En effet, dans l'algorithme proposé ici, lors de l'optimisation, l'information fournie par chaque pixel se propage de proche en proche à chaque itération. Grossièrement, il faut donc attendre que l'information contenue par chaque mesure se propage à travers tout l'objet pour atteindre l'équilibre (la convergence). Ce phénomène est le principal responsable de la différence de temps de calcul, pour des images de même taille, entre l'expérience de coronarographie (1 minute par image) et l'expérience en microscopie confocale (20s par image). La présence de large surfaces non-mesurées en coronarographie augmentent le nombre d'itération car la régularisation propage, à chaque itération, l'information de lissage qu'entre pixels voisins au travers de cette surface. Un préconditionneur bien choisi permettrait d'accélérer la propagation de l'information à travers l'objet et ainsi diminuer notablement le nombre d'itérations.

Enfin, de nombreuses améliorations de cette méthode sont possibles. En effet, l'aspect modulaire celle-ci, comme du code correspondant, rend aisée l'extension de cet algorithme à de données et des *a priori* différents comme par exemple les cas d'une PSF variable dans le champ, dans le temps, en profondeur, en longueur d'onde...

¹les différents travaux publiés mentionnés sur <http://www.gpgpu.org/> présentent des algorithmes plusieurs dizaines de fois plus rapide que leur équivalent sur processeurs normaux

Approche inverse pour l'holographie numérique de micro-particules

Dans ce chapitre nous présentons une méthode “problèmes inverses” pour l'estimation de la position et du rayon de micro-particules en holographie numérique. Nous présentons tout d'abord les fondements de l'holographie numérique en ligne et leur interprétation en terme de traitement du signal. Après avoir présenté brièvement les méthodes utilisées classiquement et leurs limites, nous développons une approche inverse permettant de s'affranchir de ces limites. Cette méthode est ensuite validée sur des hologrammes simulés et sur des hologrammes réels.

La présentation de l'holographie numérique et son modèle de formation est issue de (GOODMAN, 1996), (FOURNIER, 2003) et surtout de la thèse de DENIS (2006) à laquelle le lecteur pourra se référer pour connaître plus précisément la technique d'holographie numérique de micro-objets. La méthode présentée a donné lieu à la publication de (SOULEZ et al. , 2007b) et (SOULEZ et al. , 2007a)

4.1 Contexte : L'holographie numérique de micro-particules

4.1.1 Les enjeux de l'étude des micro-objets

Les micro-objets tels que les poudres ou les fibres sont utilisés dans de nombreux procédés industriels que ce soit comme réactifs ou comme catalyseurs. Leurs caractéristiques (forme, taille, orientation...) et leurs répartitions dans le réacteur sont déterminantes pour la qualité du résultat. De même, de tels micro-objets sont utilisés pour la visualisation des écoulements en mécanique des fluides. Ces traceurs, naturellement présents (bulles, gouttelettes...) ou ajoutés au fluide (particules opaques), sont suivis par des dispositifs d'imagerie pour mesurer les caractéristiques de l'écoulement .

L'étude de ces objets microscopiques (entre 10 et 500 μm) en mouvement dans un volume représente donc un enjeu applicatif important. Imager de tels objets pose un réel problème soumis à deux contraintes en apparence contradictoires :

- acquisition rapide du volume,
- bonne résolution des objets.

La première contrainte est fondamentale pour permettre l'étude d'objets en mouvement. Un balayage du volume d'étude (3-D) ne peut donc pas être envisagé pour ce type d'application. Si l'on veut utiliser une technique d'imagerie pour acquérir l'ensemble du volume étudié, celle-ci doit présenter une profondeur de champ adaptée à ce volume. Cette contrainte de profondeur de champ élevée se traduit en imagerie classique par une résolution spatiale amoindrie, ce qui va à l'encontre de la seconde contrainte.

C'est la raison pour laquelle, l'holographie, par sa capacité à imager de petits objets, a été très tôt utilisée en granulométrie (THOMPSON, 1965), puis pour des mesures de champs de vitesse (ROYER, 1977).

4.1.2 Principe de l'holographie

L'holographie est une technique permettant d'estimer à la fois l'amplitude et la phase d'une onde électromagnétique. Son principe a été proposé par GABOR (1948). Il a d'ailleurs obtenu le prix Nobel de physique en 1971 pour cette découverte. L'absence de capteurs permettant de mesurer la phase d'une onde lumineuse est contournée en enregistrant les interférences de cette onde avec une onde de référence sur un capteur sensible uniquement à l'intensité. L'holographie permet en particulier d'enregistrer l'information tridimensionnelle d'une scène en permettant de retrouver la phase de l'onde diffractée par celle-ci. L'onde ainsi enregistrée peut être ensuite restituée par diffraction de l'onde de référence sur l'hologramme. Pour cela il faut disposer de sources lumineuses ayant une cohérence spatiale et temporelle suffisantes pour obtenir de façon correcte les interférences résultant de la superposition de l'onde de référence et de l'onde étudiée. C'est pourquoi il a fallu attendre l'apparition du laser au début des années 1960 pour réaliser le premier enregistrement d'un hologramme dans le visible par LEITH et UPATNIEKS (1962) aux USA et au même moment en URSS par DENISYUK (1962).

Plusieurs montages sont possibles pour enregistrer un hologramme (KREIS, 2005; RASTOGI et SHARMA, 2003). On distingue ainsi :

- suivant la nature de l'onde de référence :
 - pour une onde plane (ou quasi-plane) : l'holographie de Fresnel ; pour une onde sphérique : l'holographie de Fourier ;
- suivant le parcours des ondes objet et de référence :
 - pour un parcours identique : l'holographie de Gabor ; pour un parcours différent (montage à deux bras), on distingue les configurations en réflexion [configuration de] (DENISYUK, 1962) et en transmission ;
- suivant l'angle entre les deux ondes incidentes sur le capteur :
 - pour un angle nul : l'holographie en ligne ; pour un angle non nul : l'holographie hors axe (configuration de LEITH et UPATNIEKS, 1962).

4.1.3 L'holographie numérique

Le principe d'une restitution numérique d'un hologramme est proposé dès les années 70 par KRONROD *et al.* (1972), l'un des précurseurs de la synthèse d'hologrammes (le calcul d'un hologramme numérique, ensuite restitué optiquement pour la visualisation tridimensionnelle). De nouveaux algorithmes et des approches originales sont proposées à la fin des années 80 pour le traitement numérique et l'amélioration d'hologrammes numérisés (ONURAL et SCOTT, 1987). Les progrès technologiques réalisés dans le domaine des caméras nu-

mériques (résolution, dynamique) ont permis dans les années 90 l'enregistrement direct des hologrammes sur une caméra numérique (SCHNARS et JUPTNER, 1994). Il est devenu alors possible d'acquérir et de traiter numériquement les hologrammes. Le développement chimique des plaques holographiques ainsi que l'analyse au moyen d'un montage optique des hologrammes ne s'imposèrent plus, la voie numérique permettant de réduire considérablement les contraintes expérimentales de la technique holographique. Depuis les années 2000, l'holographie numérique est un domaine de recherche très actif comme en témoignent les récents numéros spéciaux d'*Applied Optics* (POON *et al.*, 2006) et (POON *et al.*, 2008). D'après POON *et al.* (2008) les publications dans ce domaine ont augmenté de 15% par rapport à l'année dernière. Ces récents développements en font une technique désormais utilisable hors des laboratoires d'optique.

Cependant l'holographie numérique présente encore quelques contraintes :

- **Le temps** de resynthèse numérique peut être important comparé au caractère instantané d'une restitution optique.
- **Le champ** des caméras numériques est bien plus étroit.
- **La résolution spatiale** est bien plus réduite ; les plaques photographiques permettent d'enregistrer de très fines franges (> 5000 franges par mm) alors que les capteurs CCD ont un échantillonnage plus faible (100 franges par mm pour un CCD avec des pixels de 5 μm).
- **Les aberrations** dues aux caractéristiques optiques du montage (*i.e.* la propagation, la présence de lentilles et autres imperfections optiques) doivent être modélisées finement ; ce qui n'est pas nécessaire dans une reconstruction optique étant donné que ces aberrations peuvent être corrigées par l'ajout d'éléments optiques dans le dispositif de reconstruction (voir Sec. 4.4.1).

4.1.4 Application à la vélocimétrie

L'utilisation de traceurs, naturels ou injectés, pour l'étude des écoulements est classique en mécanique des fluides. Le suivi de ces traceurs est réalisé par imagerie. Deux types d'approches sont possibles. Une analyse statistique du déplacement d'un sous-ensemble des traceurs (hypothèse de champ de déplacement localement uniforme) peut être réalisée par corrélation : c'est la technique de Particle Image Velocimetry (PIV) introduite par SCHON *et al.* (1979). Pour une population de traceurs moins importante, ou dans le cas d'une turbulence importante, une approche statistique n'est plus possible et on opère alors un suivi de chaque traceur dans le temps : c'est la technique de Particle Tracking Velocimetry (PTV) (NISHINO *et al.*, 1989)).

La contrainte d'imagerie posée par la profondeur des volumes d'étude que nous avons évoquée a longtemps été contournée en limitant l'étude à une tranche (laser) du volume. Des techniques classiques d'imagerie, ou d'imagerie stéréoscopique peuvent alors être mises en œuvre. Elles ne livrent l'information tridimensionnelle que dans une tranche de l'écoulement. Le développement de l'Holographic Particle Image Velocimetry (HPIV) (ROYER, 1977), puis de sa version numérique, la Digital Holographic Particle Image Velocimetry (DHPIV) (FOURNIER, 2003; KREIS, 2005; MALEK *et al.*, 2004; MURATA et YASUDA, 2000; PAN et MENG, 2003) donne accès aux trois composantes des vecteurs vitesse.

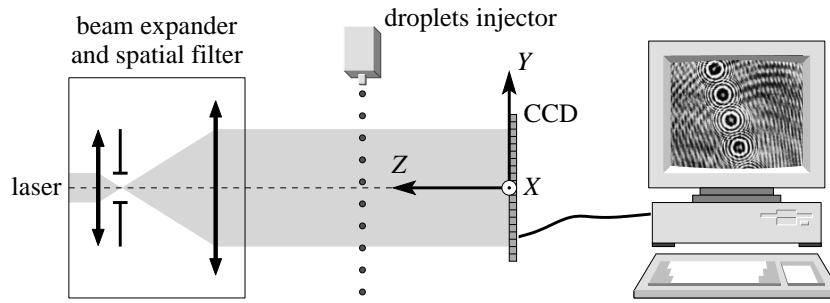


FIG. 4.1 — Montage de l'holographie en ligne (d'après [Soulez et al. , 2007b](#)).

4.1.5 L'holographie en ligne : le montage de Gabor

Parmi les différents montages décrits à la section 4.1.2, le montage de Gabor est le plus utilisé pour la métrologie en mécanique des fluides. Dans le montage de Gabor, tout le dispositif optique est aligné comme le montre la figure (4.1). Ce montage (le plus simple des montages en holographie) est utilisé en optique mais aussi en microscopie et en cristallographie. L'onde de référence est aussi l'onde qui éclaire l'objet et est diffractée par celui-ci pour former l'onde objet. L'hologramme enregistré qui est la figure d'interférence de l'onde de référence avec l'onde diffractée par l'objet peut être aussi vu simplement comme la figure de diffraction de Fresnel de l'objet.

Un montage à deux bras permettrait de bien régler le rapport d'intensité entre l'onde objet et l'onde de référence et donc d'améliorer le contraste des franges d'interférence. Cependant, s'il est adapté à l'étude de surface ou d'objet quasi plan, la profondeur de champ nécessaire pour l'étude de micro-objets répartis dans un volume introduirait des fréquences spatialement trop élevées, impossibles à échantillonner sur une caméra numérique. De plus il réduirait la taille du champ effectif par la présence des ordres 0 et -1. Il faut ajouter que dans le montage en ligne, la plus grande partie de la lumière diffractée l'est dans l'axe du faisceau incident. La quantité de lumière ainsi reçue sur le détecteur permet d'atteindre de très faibles temps d'intégration et donc d'acquérir des phénomènes très rapides.

Du point de vue de la mise en œuvre, la simplicité du montage en ligne (peu d'appareillage, peu de calibration) et sa stabilité (en particulier vis-à-vis des vibrations) permettent une utilisation en milieu industriel par des non-opticiens.

4.1.6 Les paramètres du montage de Gabor

Les caractéristiques de chacune des composantes du montage de Gabor doivent être ajustées pour l'étude des objets microscopiques. La modélisation de la formation d'un hologramme développée en section 4.2 permettra de justifier quantitativement l'approche descriptive donnée ici. Ces aspects ont été étudiés dans les références [FOURNIER \(2003\)](#); [KREIS \(2005\)](#); [STERN et JAVIDI \(2004\)](#).

Source La source utilisée doit être cohérente spatialement et temporellement. La cohérence temporelle est liée à sa monochromaticité. Elle doit être suffisante pour que les figures d'interférence des différentes longueurs d'onde ne se brouillent pas. Avoir une bonne cohérence

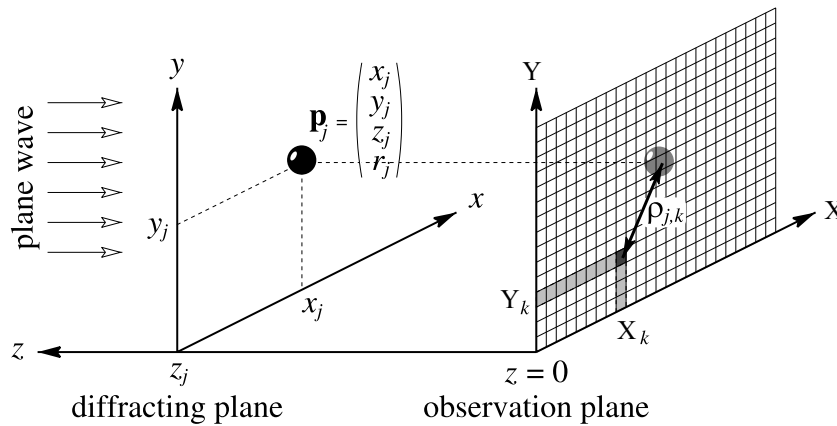


FIG. 4.2 — Notations utilisées dans le modèle de formation de l'hologramme. Les paramètres $\mathbf{p}_j = \{x_j, y_j, z_j, r_j\}$ correspondent à la position et au rayon de la j -ème particule, (X_k, Y_k) est la position du k -ème pixel et $\rho_{j,k}$ est la distance entre la projection sur le détecteur de la j -ième particule et le k -ème pixel [SOULEZ et al.](#) (d'après 2007b).

spatiale signifie avoir une source la plus ponctuelle possible. Le montage en ligne est le plus tolérant vis-à-vis de la cohérence spatiale. L'onde issue de la source doit être quasi-plane mais en pratique, une onde légèrement divergente permet d'obtenir un grossissement des objets. L'utilisation de lasers pulsés délivrant des impulsions très courtes (environ 10ns) permet de figer le mouvement des particules et d'éviter ainsi tout "filé" dégradant les hautes fréquences spatiales.

Objets Les objets étudiés doivent avoir une taille très supérieure à la longueur d'onde pour permettre un modélisation dans le cadre de la théorie scalaire de la diffraction ([GOODMAN, 1996](#)). L'expression de la relation entre la transmittance des objets et l'hologramme n'est linéaire que si ceux-ci sont de taille très inférieure à la taille du capteur (Sec. 4.2). La gamme des micro-objets étudiée [10 μm , 500 μm] est compatible avec ces deux contraintes.

Capteur La figure de diffraction de Fresnel d'un objet enregistrée dans l'hologramme dépend de la distance d'enregistrement. Plus celle-ci est importante, plus le lobe central de la figure de diffraction est large. La distance d'enregistrement doit donc être ajustée afin de permettre l'acquisition sur le support du capteur des objets contenus dans la zone d'étude.

La reconstruction numérique du volume d'étude introduit une contrainte supplémentaire liée à l'échantillonnage des franges d'interférence de l'hologramme. La distance d'enregistrement doit être supérieure à une limite fixée par le théorème d'échantillonnage de Shannon pour que les franges produites par les objets ne créent pas de repliement spectral dans l'hologramme discrétisé.

Pour permettre de mesurer le mouvement, le capteur doit permettre de prendre une série d'images (au moins deux) très rapprochées.

4.2 Modèle de formation d'un hologramme

4.2.1 Expression de l'onde reçue dans le plan du capteur

4.2.1.1 Diffraction par un micro-objet dans l'approximation de Fresnel

La théorie scalaire de la diffraction donne l'expression analytique de l'onde diffractée par un plan de transmittance connu (FOURNIER, 2003; GOODMAN, 1996). Considérons une onde plane d'amplitude complexe A_0 éclairant un plan de transmittance $t(x, y)$. D'après le principe d'Huygens-Fresnel, un plan éclairé par une source lumineuse se comporte comme une infinité de sources secondaires dont les amplitudes complexes sont pondérées par la transmittance de ce plan. L'amplitude complexe reçue en un point du plan d'observation est alors la somme des amplitudes complexes produites par toutes ces sources secondaires. En un point (X, Y) du plan d'observation distant de z , l'amplitude complexe $A_z(X, Y)$ peut être modélisée par l'intégrale de Rayleigh-Sommerfeld (GOODMAN, 1996, p. 52) :

$$\underline{A}_z(X, Y) = \frac{A_0}{j\lambda} \iint t(x, y) \frac{e^{jkd}}{d} \cos(\theta) dx dy, \quad (4.1)$$

où $d = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}$ désigne la distance entre la source secondaire située en (x, y, z) et le point d'observation de coordonnées $(X, Y, 0)$ et $\cos \theta$ représente le facteur d'obliquité ($\tan \theta = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2}/z$). L'onde incidente est caractérisée par son amplitude complexe A_0 et sa longueur d'onde λ (ou son nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$). Ceci n'est valable que si la distance d est très supérieure à la longueur d'onde λ , ce qui est toujours vérifié en holographie.

Dans le cadre de l'holographie en ligne, la distance z (> 10 cm) entre les objets et le plan d'observation est très supérieure à l'étendue du capteur (≈ 1 cm de côté) qui est perpendiculaire à l'axe du montage. Ceci permet plusieurs simplifications de l'équation (4.1) :

- Le facteur d'obliquité est proche de 1 ($\cos \theta = 1$). D'après GOODMAN (1972), cette approximation reste acceptable tant que θ est inférieur à 18 degrés (erreur $< 5\%$).
- Comme $z^2 \gg (X-x)^2 + (Y-y)^2$, la variable d au dénominateur de l'équation (4.1) peut être approchée par z . Ceci revient à négliger les variations d'amplitudes des sources secondaires liées à la variation de leurs positions latérales (x, y) vis-à-vis du point d'observation (X, Y) .
- Par contre la distance d dans l'exponentielle complexe ne peut être approximée de la même manière. En effet cette variable intervient dans la phase. Une variation de d d'une quantité de l'ordre de la longueur d'onde (quelques centaines de nanomètres) représente un changement de la phase de l'ordre de 2π . Il est cependant possible d'approcher d par son développement limité au premier ordre :

$$d \approx z \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{X-x}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{Y-y}{z} \right)^2 \right).$$

Cette approximation, valable dans le cas où le terme du second ordre du développement limité est négligeable, est appelée **approximation de Fresnel**. Elle est valable si

$$z^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda} (L_\xi^2 + L_\eta^2), \quad (4.2)$$

où L_ξ et L_η représente la plus grande largeur respectivement de la zone diffractante et de la zone d'observation. En pratique cette condition est rarement vérifiée et il suffit

que les termes du second ordre ne perturbent pas l'intégrale de diffraction pour que l'approximation de Fresnel reste valable (GOODMAN, 1996). Ceci est vérifié si :

$$z^3 \gg \frac{\pi \Phi^4}{4\lambda}, \quad (4.3)$$

où Φ est la plus grande largeur des objets diffractants. Cette condition est plus aisément satisfaite en pratique.

Dans ces conditions, l'équation (4.1) peut être approchée par :

$$\underline{A}_z(X, Y) = \frac{A_0 e^{jkz}}{j\lambda z} \iint \underline{t}(x, y) \exp\left(j \frac{\pi \left((X-x)^2 + (Y-y)^2\right)}{\lambda z}\right) dx dy. \quad (4.4)$$

Cette équation peut donc être vue comme le produit de convolution 2D suivant (FOURNIER, 2003; GOODMAN, 1996) :

$$\underline{A}_z(X, Y) = \underline{A}_0 e^{jkz} \underline{t}_{(X,Y)} * \underline{h}_z, \quad (4.5)$$

où le symbole $*(X,Y)$ désigne le produit de convolution entre les fonctions \underline{t} et \underline{h}_z évalué en (X, Y) . Le noyau de convolution \underline{h}_z est appelé *fonction de Fresnel* :

$$\underline{h}_z(x, y) = \frac{1}{j\lambda z} \exp\left(j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z}\right). \quad (4.6)$$

En prenant l'origine des phases de l'onde incidente sur le plan du capteur, l'équation (4.5) se réduit à :

$$\underline{A}_z(X, Y) = \underline{A}_0 \underline{t}_{(X,Y)} * \underline{h}_z. \quad (4.7)$$

Les micro-objets étudiés sont considérés comme opaques. Leurs dimensions transversales sont du même ordre que leurs dimensions longitudinales et ces dimensions (entre 10 μ m et 500 μ m) très petites devant leur distance au capteur (> 10 cm). Dans ces conditions, l'objet peut être approximé par une transmittance réelle dans un plan. Cette transmittance sera la projection orthogonale de l'objet sur son plan médian. La transmittance d'une particule P_i , dont la projection dans le plan médian z_i est l'ouverture ϑ_i centrée en (x_i, y_i) , sera $\underline{t} = 1 - \eta_i \delta_{x_i, y_i} * \vartheta_i$. L'expression de l'amplitude diffractée dans le plan de l'hologramme devient donc :

$$\underline{A}_i(X, Y) = \underline{A}_0 \left(1 - \eta_i \delta_{x_i, y_i} * \vartheta_i * \underline{h}_z\right), \quad (4.8)$$

où δ_{x_i, y_i} représente la distribution de Dirac centrée en (x_i, y_i) et ϑ_i est la fonction d'appartenance à l'objet définie par :

$$\vartheta_i(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si le point } (x - x_i, y - y_i) \text{ appartient à l'objet} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.9)$$

Dans l'équation (4.8), nous avons introduit un facteur réel η_i permettant de prendre en compte des possibles petites variations de l'énergie reçue par la particule dues à une illumination non homogène (voir section 4.2.3.1).

4.2.1.2 Hologramme d'une seule particule sphérique

Les micro-objets utilisés en PIV permettant de visualiser les écoulements en mécanique des fluides sont principalement des particules sphériques (gouttelettes, bulles...). L'ouverture binaire ϑ_i d'une particule sphérique P_i de rayon r_i devient donc :

$$\vartheta_i(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \leq r_i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.10)$$

Pour une particule sphérique de rayon r_i , placée à une profondeur z_i , tel que $z_i \gg 4 r_i^2 / \lambda$, ϑ_i peut être approchée par une ouverture gaussienne de largeur à mi-hauteur $2 r_i$ le produit de convolution $\vartheta_i * \underline{h_{z_i}}$ peut alors être approché par (TAYLER et THOMPSON, 1976) :

$$(\vartheta_i *_{(x,y)} \underline{h_{z_i}})(x, y) \simeq \underline{f'_i}(x, y) = \frac{r_i \lambda z_i}{2 \sqrt{x^2 + y^2}} J_1 \left(\frac{2 \pi r_i \sqrt{x^2 + y^2}}{\lambda z_i} \right) \underline{h_{z_i}}(x, y), \quad (4.11)$$

où J_1 est la fonction de Bessel de première espèce.

L'équation (4.8) devient alors :

$$\underline{A_i}(x, y) = \underline{A_0} \left(1 - \eta_i \delta_{x_i, y_i} *_{(X,Y)} \underline{f'_i} \right). \quad (4.12)$$

Elle peut être réécrite sous la forme :

$$\underline{A_i}(X, Y) = \underline{A_0} \left(1 - \eta_i \underline{f_i}(X, Y) \right), \quad (4.13)$$

avec $\underline{f_i}(X, Y) = \delta_{x_i, y_i} *_{X,Y} \underline{f'_i}$ soit :

$$\underline{f_i}(X, Y) = \underline{f'_i}(X - x_i, Y - y_i). \quad (4.14)$$

4.2.1.3 Hologramme de plusieurs particules

Dans un volume d'étude peu concentré et pas trop profond, la déformation du front d'onde induite par les particules peut être négligée et l'onde incidente sur chaque objet considérée comme étant plane. Dans ce cas, l'équation (4.13) peut être généralisée à N particules. L'amplitude de l'onde diffractée reçue par le capteur devenant :

$$\underline{A}(X, Y) = \underline{A_0} \left(1 - \sum_{i=1}^N \eta_i \underline{f_i}(X, Y) \right). \quad (4.15)$$

par d'additivité des amplitudes complexes en optique cohérente.

4.2.2 Acquisition

Le capteur n'est sensible qu'à l'intensité de l'onde diffractée dans le plan de l'hologramme. L'image enregistrée sur le capteur est proportionnelle au module au carré de l'amplitude complexe (GOODMAN, 1996) :

$$I(x, y) \propto |\underline{A}(X, Y)|^2.$$

En introduisant l'équation (4.15), l'intensité de l'hologramme devient :

$$\begin{aligned}
 I(X, Y) &= \gamma \left| \underline{A}(X, Y) \right|^2 + I_{\text{bg}}(X, Y) \\
 &= \gamma \left| \underline{A}_0 \right|^2 + I_{\text{bg}}(X, Y) - 2\gamma \left| \underline{A}_0 \right|^2 \sum_{j=1}^n \eta_j \operatorname{Re}(\underline{f}_j(X, Y)) \\
 &\quad + \gamma \left| \underline{A}_0 \right|^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \underline{f}_i(X, Y) \eta_j \underline{f}_j^*(X, Y),
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

où γ traduit le rendement quantique et le facteur de conversion du détecteur tandis que $I_{\text{bg}}(X, Y)$ représente le niveau de fond dû au détecteur et à d'autres sources d'émissions parasites. Dans la suite nous considérerons que ce fond est uniforme : $I_{\text{bg}}(X, Y) = I_{\text{bg}}$.

L'intensité de l'hologramme se compose ainsi de trois termes par construction tous réels :

- un terme constant ($\gamma \left| \underline{A}_0 \right|^2 + I_{\text{bg}}$);
- la somme (incohérente) des intensités des figures de diffraction de chaque objet;
- un terme représentant les interférences entre les figures de diffraction ($i \neq j$) ainsi que la partie non-linéaire de la figure de diffraction de chaque particule ($i = j$);

Dans l'équation (4.13), η_j et f_j sont sans dimension avec $0 < \eta_j \leq 1$. De plus dans les conditions de l'holographie en ligne, on a :

$$2 \sum_{j=1}^n \eta_j \operatorname{Re}(\underline{f}_j(X, Y)) \gg \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \underline{f}_i(X, Y) \eta_j \underline{f}_j^*(X, Y), \tag{4.17}$$

pour la plupart des positions (x, y) . Les termes de second ordre de l'équation (4.16) peuvent donc être négligés et l'intensité mesurée par le capteur se simplifie en :

$$I(X, Y) = I_0 - \sum_{j=1}^n \alpha_j \operatorname{Re}(\underline{f}_j(X, Y)), \tag{4.18}$$

où $\alpha_j = 2\gamma \left| \underline{A}_0 \right|^2 \eta_j$ et $I_0 = \gamma \left| \underline{A}_0 \right|^2 + I_{\text{bg}}$ est le niveau moyen du détecteur illuminé par le laser mais sans particules.

4.2.3 Description des erreurs

En pratique l'hologramme numérique visualisé en sortie de la caméra ne correspond pas tout-à-fait au modèle décrit par l'équation (4.18). La différence entre un hologramme numérique et son modèle est décrite en chaque point (x, y) de l'hologramme par un bruit $b(x, y)$. Ce bruit correspond aux bruits physiques dûs aux différentes parties du montage (source, lentilles, capteur...) auxquels il faut ajouter le "bruit de modèle" lié aux approximations faites lors de l'élaboration du modèle. Le modèle s'écrit alors :

$$I(X, Y) = I_0 - \sum_{j=1}^n \alpha_j \operatorname{Re}(\underline{f}_j(X, Y)) + b(X, Y) \tag{4.19}$$

Parmi les bruits décrits à la section 1.6, les bruits de montage et de modèle et leurs conséquences peuvent être plus finement décrits dans le cas de l'holographie numérique, en s'appuyant en partie sur DENIS (2006); FOURNIER (2003). De plus, en raison du contenu haute

fréquences des hologrammes, les caractéristiques du capteur numérique utilisé (dimension, taille des pixels, taux de remplissage, quantification...) ont une très forte influence sur la reconstruction.

4.2.3.1 Bruit de montage

En pratique, les différents composants optiques du montage de Gabor, bien que peu nombreux, diffèrent de leur modèle idéal utilisé dans la section 4.2.1. Ceci peut être à l'origine de différents bruits au sens de l'écart au modèle (4.19) sur l'hologramme final :

Source laser Dans la section 4.2.1, l'onde incidente est considérée comme plane et homogène dans toute la zone d'étude. En réalité, une source laser présente toujours des défauts d'homogénéité d'amplitude. L'amplitude de l'onde émise par un faisceau laser est souvent représentée comme gaussienne – c'est-à-dire que l'amplitude est plus faible sur les bords qu'au centre du faisceau. L'onde de référence n'illumine donc pas tous les objets ni tout le capteur avec la même amplitude. Il en résulte des distorsions de l'intensité des figures de diffraction mesurées par le capteur. Ces variations de l'amplitude de l'onde sont partiellement prises en compte dans le modèle par le facteur multiplicatif η_j de l'équation (4.8). De plus, en pratique, ce phénomène peut être en partie contourné en élargissant le faisceau d'un laser puissant de manière à ce que tous les objets se trouvent au centre du faisceau.

L'onde de référence présente aussi généralement des défauts de planéité. En effet, un objectif est souvent inséré dans le montage pour grossir les figures de diffraction des particules (FOURNIER, 2003). Si la zone d'étude est étendue, l'approximation de planéité à grande distance de cette onde divergente devient de moins en moins pertinente au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'axe optique. Notons aussi que dans le cas l'utilisation d'une onde divergente, la précision absolue de mesure des particules peut être limitée par la précision de l'étalement mesurant l'angle de divergence.

Objets parasites Chaque objet (poussière, support, lame de verre, polariseur, lentilles, etc...) présent entre la source et le capteur induit une différence de chemin optique et génère de ce fait une figure d'interférence parasite. Ces objets sont d'autant plus gênants qu'ils sont situés près du capteur. La plaque de verre protégeant souvent le capteur des caméras numériques produit par exemple des franges d'interférence parasites et les poussières collées créent des figures de diffraction parasites. Ce bruit peut être quasiment supprimé par soustraction d'une "image de fond", c'est à dire d'un hologramme sans les objets d'intérêt. Ce biais est en partie pris en compte par le terme I_{bg} introduit dans l'équation (4.16).

Caméra Si le plan du capteur de la caméra n'est pas parfaitement orthogonal à l'axe optique, alors les figures de diffraction des objets seront déformées. L'hologramme d'une particule sphérique deviendra un système d'ellipses au lieu du système d'anneaux concentriques attendu. DENIS (2006) montre que le défaut d'orthogonalité doit être inférieur à $5 \cdot 10^{-5}$ rad pour une matrice 1024×1024 avec une largeur de pixels de $\Delta = 6.7 \mu\text{m}$. Cet effet est d'autant plus gênant que le capteur est grand et que l'onde incidente présente des défauts de planéité.

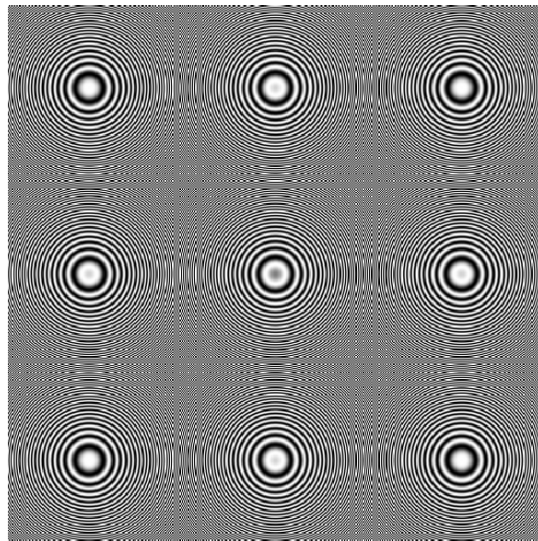


FIG. 4.3 — Illustration de l'effet de moiré sur la partie réelle de la fonction de Fresnel ($z = 1.5$ cm, $\lambda = 523$ nm) simulée pour un capteur avec un taux de remplissage nul (pas d'intégration sur le pixel). Le signal enregistré ne contient qu'un seul système d'anneaux concentriques centré dans le capteur. Les autres systèmes d'anneaux ont été créés par le repliement spectral dû au dépassement du critère de Shannon.

4.2.3.2 Bruit de caméra

L'acquisition numérique de l'hologramme par une caméra numérique se produit en trois opérations : l'échantillonnage sur la matrice de pixels, la mesure de l'intensité reçue par chaque pixel et la quantification de cette mesure. L'image numérique résultante est donc perturbée par des erreurs issues de ces trois étapes.

Échantillonnage La mesure d'une intensité continue par un capteur numérique dépend de trois facteurs :

- **L'intégration sur le pixel** de taille $\Delta X \times \Delta Y$ et de taux de remplissage (α, β) . L'effet dû au taux de remplissage se traduit par un filtrage passe-bas d'autant plus important que le taux de remplissage est élevé. Dans le cas où des fréquences plus importantes que la fréquence de Shannon sont présentes dans le signal, un taux de remplissage proche de 1 limite le repliement spectral (JACQUOT et SANDOZ, 2004).
- **L'échantillonnage spatial** Un échantillonnage en deçà de la fréquence de Shannon du signal conduit à l'apparition d'objets fantômes par un effet de moiré comme cela est illustré sur la figure 4.3. Les conséquences d'un tel phénomène sont dramatiques dans un problème de détection ou de suivi de micro-objets dans les images restituées.
- **Le fenêtrage** par le support physique du capteur. La taille finie du capteur est actuellement une limite pour l'holographie numérique. Les capteurs numériques sont de taille très inférieure (de l'ordre du centimètre) aux plaques photosensibles (de l'ordre de la dizaine de centimètres).

La réponse impulsionnelle globale de ce système est décrite par FOURNIER (2003).

Quantification La quantification du signal sur un nombre fini de niveaux est source de bruit. Le bruit de quantification correspond à la différence entre l'intensité reçue par le pixel et le niveau discret affecté à ce pixel lors de la conversion analogique-numérique. D'après FOURNIER (2003), la figure de diffraction d'une particule sphérique de diamètre D enregistrée sur une caméra située à la distance z est codée sur approximativement $\frac{\pi D^2}{2\lambda z} 2^{N_{bits}}$ niveaux différents. Ce bruit est donc plus important quand les objets sont petits et placés loin du capteur.

4.2.3.3 Bruit de modèle

Le bruit de modèle est le bruit le plus important en holographie numérique. Il est dû à l'écart entre le modèle approché utilisé et le phénomènes physique réel. Il découle directement des différentes approximations faite aux sections 4.2.1 et 4.2.2.

Approximation linéaire Pour obtenir le modèle linéaire décrit par l'équation (4.18), plusieurs approximations ont été faites (en particulier aux équations (4.15) et (4.17)). Ces approximations sont responsables d'une part très importante du bruit de modèle.

- La première approximation (Eq. (4.15)) revient à négliger la déformation du front d'onde de l'onde de référence par les objets lors de la traversée du volume d'étude. Cette déformation est très délicate à caractériser mais, d'après FOURNIER (2003), son effet est faible devant les termes linéaires.
- Dans l'équation (4.17), le terme représentant les interférences entre les figures de diffraction ($i \neq j$) ainsi que la partie non-linéaire de la figure de diffraction de chaque particule ($i = j$) sont négligées. Les interférences entre les figures de diffraction ($i \neq j$) sont d'autant plus importantes que les particules sont proches mais restent plus faibles que la partie non-linéaire de la figure de diffraction de chaque particule. La figure 4.4 montre que cette partie non-linéaire de la figure de diffraction est maximum au centre de la figure de diffraction. DENIS (2006) montre que le rapport signal sur bruit de cet effet reste bon tant que la densité de particules n'est pas trop importante (< 1000 sur un capteur 1024×1024).

Influence des autres objets La figure de diffraction d'une particule présente la particularité d'être spatialement très étendue. Lorsque le nombre de particules augmente, leurs figures de diffraction se superposent au point qu'il devient vite difficile de distinguer visuellement une figure de diffraction particulière. L'hologramme prend alors un aspect granuleux comme on le voit à la figure 4.5. Lorsque l'on veut isoler la figure de diffraction d'une particule donnée, les contributions des autres particules forment un bruit de fond appelé *bruit de speckle* (MENG *et al.*, 1993). Ce bruit est particulièrement gênant pour la détection de particules car il présente les mêmes caractéristiques spectrales que la figure de diffraction recherchée. Aucune distinction ne peut alors être faite entre le signal recherché (*i.e.* la figure de diffraction d'un objet particulier) et ce bruit de fond granuleux. GIRE *et al.* (2008) présentent une étude de l'influence de ce bruit sur la méthode que nous présentons ici. Plusieurs auteurs proposent des montages différents pour s'affranchir en partie des erreurs liées aux autres particules (récemment DE JONG *et* MENG, 2007).

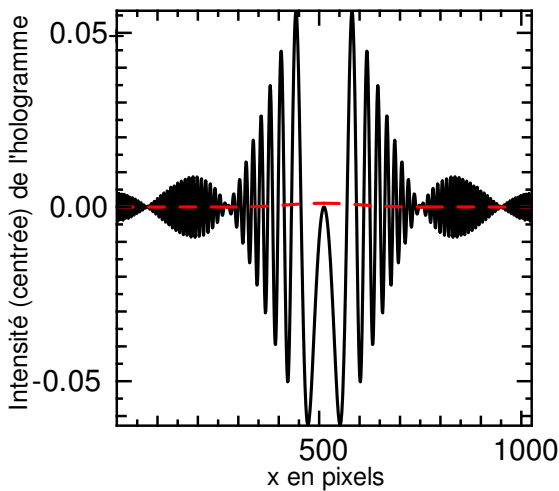


FIG. 4.4 — Profil des termes linéaire (en continu noir) et non linéaire (en tiret rouge) d'une figure de diffraction d'une particule centrée sur le pixel 512 ($r = 55 \mu\text{m}$ et $z = 0.27 \text{ m}$).

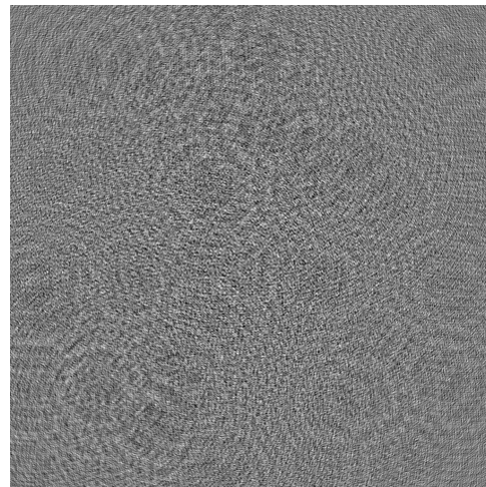


FIG. 4.5 — Hologramme de 100 particules ($r \approx 5 \mu\text{m}$ et $z = 0.1 \text{ m}$).

4.3 Interprétation du modèle

La figure de diffraction d'une particule sphérique (Fig. 4.6) donne sur le capteur un système d'anneaux concentriques. Le centre de ces anneaux correspond à la position transversale de la particule. Observer un tel système d'anneaux permet d'avoir une précision largement sous-pixel sur la mesure de son centre. L'hologramme contient donc suffisamment d'information pour estimer très précisément la position transversale de la particule.

De plus, on constate que ces anneaux ne sont pas régulièrement espacés autour de leur centre. Dans le profil en ligne de la figure de diffraction d'une particule (Fig. 4.7), on observe deux modulations. Il est intéressant de se pencher sur le modèle décrit par l'équation (4.18) pour retrouver l'information sur les particules à travers ces modulations. Dans cette équation on peut distinguer deux termes de modulation :

- **Une modulation d'amplitude**, codant la forme de l'ouverture de l'objet. Dans le cas d'une particule sphérique cette modulation est un terme en Bessel cardinal :

$$\frac{r_i \lambda z_i}{2 \sqrt{x^2 + y^2}} J_1 \left(\frac{2 \pi r_i \sqrt{x^2 + y^2}}{\lambda z_i} \right).$$

L'estimation du rayon sera d'autant plus précise que les zéros de cette fonction seront précisément déterminés et qu'un nombre important de ces zéros seront échantillonnés par le capteur.

- **Une modulation linéaire de fréquence** (*chirp linéaire*), $\text{Re}(h_{z_i}(x, y))$, codant la distance axiale z_i entre l'objet et l'hologramme. Estimer z_i revient donc à estimer la pente de cette modulation de fréquence. Cette estimation sera d'autant plus précise qu'il sera possible d'estimer la fréquence des anneaux de diffraction loin du centre des anneaux.

Sur le profil de la figure 4.7, on observe que l'information est très répartie sur tout le capteur. Ceci a deux conséquences principales :

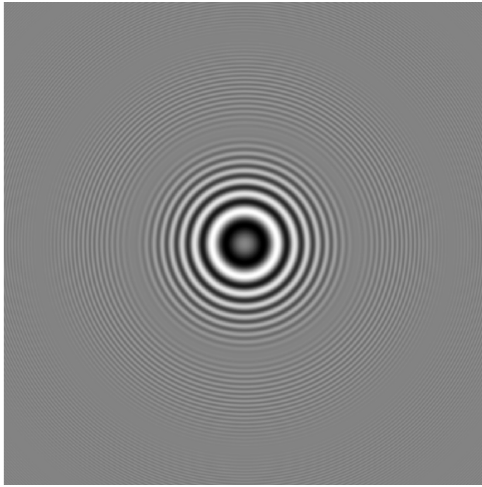


FIG. 4.6 — Hologramme d'une particule (figure de diffraction) centrée sur le capteur ($r = 55 \mu\text{m}$ et $z = 0.27\text{m}$).

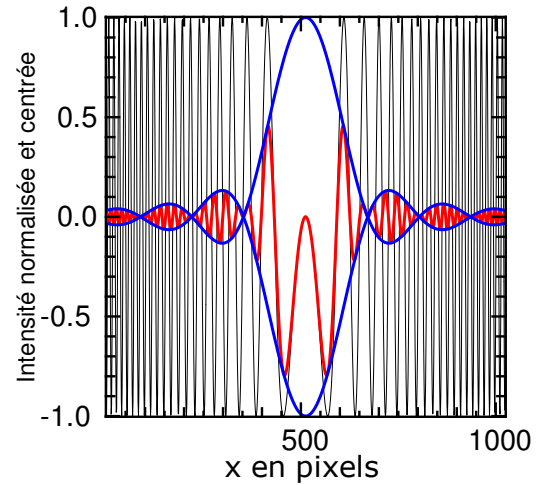


FIG. 4.7 — Profil normalisé (en rouge) de la figure de diffraction d'une particule centrée sur le pixel 512. Cette figure de diffraction est composée d'une modulation de fréquence par la fonction de Fresnel (en noir) et d'une modulation d'amplitude liée au terme en Bessel cardinal (en bleu).

- d'un côté, les motifs de diffraction des différentes particules se superposent et se brouillent, rendant leur détection et leur caractérisation plus délicate (voir section 4.2.3).
- D'un autre côté, une particule hors du champ du capteur peut présenter une figure de diffraction partiellement visible sur le capteur. Il est donc possible d'envisager une détection des particules hors champ. En effet, même si le contraste d'un anneau est faible, peu discernable à l'oeil nu, sa prise en compte sur tout le capteur permet de le détecter par des traitements numériques comme nous le montrerons plus loin.

En conclusion, l'hologramme est une image 2D contenant toute l'information sur les micro-particules (position 3D et rayon). L'holographie numérique permet donc d'acquérir très rapidement, en une seule image, l'information sur les objets contenus dans tout un volume. Cependant ce type d'image n'est pas directement interprétable et nécessite une démodulation (en amplitude et en fréquence) et une localisation des motifs.

4.4 Dépouillement et restitution d'un hologramme numérique

Lors de l'enregistrement de l'hologramme, il a été possible de conserver une information sur la phase de l'onde objet en enregistrant ses interférences avec l'onde de référence. Si l'on fait diffracter l'onde de référence par l'hologramme, d'après le principe d'Huygens-Fresnel, le plan de l'hologramme se comporte comme une infinité de sources secondaires dont les amplitudes et les phases sont pondérées par la transmittance de ce plan. On reconstruit alors une onde de même amplitude et de même phase que l'onde objet. C'est le principe de la restitution.

4.4.1 Restitution optique

La restitution optique dans le cas du montage de Gabor consiste donc à ré-éclairer l'hologramme avec l'onde de référence. Les plaques photographiques doivent être préalablement développées avant d'être restituées. On considère que cette étape est linéaire de sorte que la transmittance de l'hologramme développé est proportionnelle à l'intensité mesurée. La diffraction de l'onde incidente par l'hologramme forme deux images de l'objet, une "réelle" en aval de l'hologramme et une autre "virtuelle", identique, en amont. Cette image "jumelle" peut être expliquée par le fait que seule l'intensité des figures de diffraction est enregistrée et non son amplitude complexe (voir Sec. 4.4.2).

4.4.2 Modèle de la restitution

Sous les hypothèses de la théorie scalaire de la diffraction et de l'approximation de Fresnel, à la profondeur z_R , l'onde diffractée $\underline{A}_{z_R}(X, Y)$ par l'hologramme de transmittance $\underline{t}(X, Y)$ est :

$$\underline{A}_{z_R}(X, Y) = \underline{A}_0 e^{jkz_R} \underline{t}_{(X,Y)} * \underline{h}_{z_R}, \quad (4.20)$$

où $\underline{A}_0 e^{jkz_R}$ est l'amplitude complexe de l'onde incidente (onde de référence) dont l'origine des phases est dans le plan de l'hologramme et \underline{h}_{z_R} la fonction de Fresnel définie par l'équation (4.6).

En remplaçant la transmittance de l'hologramme par son modèle défini par l'équation (4.18), on obtient :

$$\underline{A}_{z_R}(x, y) = \underline{A}_0 e^{jkz_R} \left(I_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \operatorname{Re}(\underline{f}_i) \right)_{(x,y)} * \underline{h}_{z_R}. \quad (4.21)$$

En remplaçant \underline{f}_i par sa définition (Eq. (4.14) et Eq. (4.11)) :

$$\underline{A}_{z_R}(x, y) = \underline{A}_0 e^{jkz_R} \left(I_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \operatorname{Re}(\delta_{x_i, y_i} * \vartheta_i * \underline{h}_{z_i}) \right)_{(x,y)} * \underline{h}_{z_R}, \quad (4.22)$$

soit :

$$\underline{A}_{z_R}(x, y) = \underline{A}_0 e^{jkz_R} \underline{h}_{z_R} * I_0 - \underline{A}_0 e^{jkz_R} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \delta_{x_i, y_i} * \vartheta_i * (\underline{h}_{z_i} + \underline{h}_{z_i}^*) * \underline{h}_{z_R} \right). \quad (4.23)$$

Or la fonction de Fresnel présente les propriétés suivantes (GOODMAN, 1996) :

$$\underline{h}_{z_1} * \underline{h}_{z_2} = \underline{h}_{z_1+z_2}, \quad (4.24)$$

$$\underline{h}_z * \underline{h}_z^* = \underline{h}_z * \underline{h}_{-z} = \delta, \quad (4.25)$$

$$\underline{h}_z * I_0 = I_0 \quad (I_0 \text{ constante}). \quad (4.26)$$

On a donc :

$$\underline{A}_{z_R}(x, y) = \underline{A}_0 e^{jkz_R} \left(I_0 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i, y_i} * \vartheta_i * (\underline{h}_{z_i+z_R} + \underline{h}_{z_i-z_R}) \right). \quad (4.27)$$

Dans le cas d'une unique particule P_i , l'expression de l'image restituée dans le plan de cette particule $z_R = z_i$:

$$\underline{A_{z_R}}(x, y) = \underline{A_0} e^{jkz_i} \left(I_0 + \frac{1}{2} \delta_{x_i, y_i} *_{(x, y)} \vartheta_i + \frac{1}{2} \delta_{x_i, y_i} *_{(x, y)} \vartheta_i *_{(x, y)} \underline{h_{2z_i}} \right). \quad (4.28)$$

On relève trois termes :

- le premier est un fond constant proportionnel à l'onde de référence,
- le second correspond à la projection de la particule sur son plan médian,
- et un troisième correspondant à la figure de diffraction d'une particule située à $z = 2z_i$ — c'est le terme responsable de "l'image jumelle".

4.4.3 Restitution numérique

Largement influencés par le processus optique, la plupart des auteurs (POON *et al.*, 2006) analysent l'hologramme en simulant la restitution optique. D'après la section 4.4.2, on constate que la restitution numérique d'un plan donné peut s'effectuer par une simple convolution par la fonction de Fresnel (KREIS *et al.*, 1997). Cette opération est appelée aussi *transformée de Fresnel*. Cette convolution peut être réalisée rapidement dans l'espace de Fourier grâce aux algorithmes de FFT. Le noyau de convolution étant circulant, il est nécessaire d'augmenter le support de l'hologramme (0-padding). Pour éviter des discontinuités trop fortes, la valeur moyenne de l'hologramme est affectée aux pixels en dehors du support. Ceci conduit à une moins bonne définition du plan restitué à proximité des bords du support. Deux autres artefacts sont caractéristiques de la restitution numérique. (i) un bruit particulier dit "bruit d'image jumelle" apparaît dans les plans restitués. Ce bruit est dû au fait que c'est l'intensité et non l'amplitude complexe qui ait été enregistrée dans le plan du capteur. Il se traduit par l'addition dans le plan restitué d'une onde diffractée par ce même plan mais située deux fois plus loin du capteur. (ii) FOURNIER *et al.* (2004) montrent la présence de plusieurs maxima de focalisation (en z) pour un même objet. Ces défauts, dûs à la reconstruction numérique, s'ajoutent à ceux décrits en section 4.1.3 (page 142) (résolution spatiale réduite, champ étroit...).

La restitution numérique présente néanmoins de nombreux avantages par rapport à la restitution optique. En plus de la facilité d'utilisation d'une mise au point numérique par rapport à une mise au point optique, l'holographie numérique permet d'utiliser des méthodes de traitement d'images permettant d'améliorer la restitution : correction de la dérive d'éclairément, correction numérique du front d'onde, soustraction du fond (*i.e.* les franges liées aux composants optiques du montage) ...

De nombreuses alternatives à la transformée de Fresnel ont été proposées pour restituer numériquement un hologramme (transformée fractionnaire (ZHANG *et al.*, 2004), transformée en ondelettes (BURAGA-LEFEBVRE *et al.*, 2000; LIEBLING *et al.*, 2003)). Elles présentent, en général, les mêmes artefacts que la restitution par transformée de Fresnel. Elles font l'objet d'une étude exhaustive par DENIS (2006).

4.4.4 Approche globale

La restitution plan par plan du volume d'étude étant coûteuse en termes de temps de calcul et de mémoire, plusieurs auteurs ont proposé des méthodes d'analyse globale de l'hologramme (DENIS *et al.*, 2006; MURATA et TAKEUCHI, 1996). Notons en particulier qu'à travers

une approche basée sur l'holographie au sens d'une projection, Loïc Denis a proposé une méthode permettant de remonter rapidement aux informations statistiques de taille et/ou d'orientation des micro-objets à partir de autocorrélation de l'hologramme (DENIS, 2006; DENIS *et al.*, 2006, 2007).

4.5 Les limites de l'approche classique

Dans le cas de la vélocimétrie par images de particules, l'holographie en ligne est utilisée pour accéder à la position en 3D et au rayon des particules. Son utilisation industrielle marque cependant le pas pour trois raisons principales :

Une résolution limitée : La résolution en profondeur est donnée par $\delta z \geq \lambda/\Omega^2$ où Ω est l'ouverture numérique du système d'acquisition (VIKRAM, 1992). La résolution latérale quant à elle, est donnée par $\delta x = \delta y = \lambda/\Omega$ et est meilleure que la résolution longitudinale. Généralement $\Omega \leq 0.1$, ce qui donne une résolution de $\delta x \geq 10 \lambda$ et $\delta z \geq 100 \lambda$.

Un champ étroit : Dans le montage de l'holographie en ligne classiquement utilisé pour la PIV, la surface utile est limitée par la taille du capteur mesurant typiquement 1 cm \times 1 cm. De plus dans la pratique, seule la partie centrale du détecteur est utilisée car de nombreuses erreurs sont faites dans l'estimation des paramètres des particules situées près des bords du capteur.

Un temps de calcul élevé : A l'heure actuelle le temps de calcul des algorithmes existants est trop élevé pour permettre une utilisation temps réel (environ 15 mn par hologramme).

Dans le cadre de l'approche "classique" avec une restitution numérique, comme celles mentionnées à la section 4.4.3, une fois l'hologramme enregistré, la chaîne de traitement est décrite comme suit :

1. restitution numérique du volume d'étude (par transformée de Fresnel par exemple) ;
2. segmentation du volume d'étude pour la détection des particules ;
3. étiquetage des particules restituées et filtrage des artefacts,
4. mesure des paramètres des particules.

Dans cette approche séquentielle, toute erreur effectuée en amont est répercutée (voire amplifiée) au cours des traitements suivants. En particulier les artefacts de reconstruction mentionnés à la section 4.4.3 (troncature des figures de diffraction, image jumelle et focalisations multiples) perturbent notablement la segmentation et donc la détermination des paramètres des particules. C'est pourquoi des méthodes ont été proposées pour atténuer ou filtrer ces artefacts ; nombre d'entre elles sont décrites au chapitre 2 de la thèse de DENIS (2006).

4.6 Une formulation "problèmes inverses"

Pour dépasser les limites de l'approche classique, nous avons montré qu'il était intéressant d'utiliser l'approche "problèmes inverses" et ses outils décrits dans le chapitre 1.

4.6.1 Restitution au sens du maximum de vraisemblance

La plus simple façon d'introduire une approche "problèmes inverses" est de reconstruire le volume d'étude au sens du maximum de vraisemblance pour ensuite, comme dans l'ap-

proche classique, en extraire les particules par segmentation. Dans les conditions de l'holographie numérique en ligne d'un milieu dilué, on peut considérer le volume d'étude comme étant composé de plans de transmittance réelle $t_z(x, y)$. D'après l'équation (4.7), l'amplitude complexe $\underline{A}(X, Y)$ diffractée dans le plan du capteur ($z = 0$) par un plan de transmittance réelle $t_z(x, y)$ à une profondeur z est :

$$\underline{A}(X, Y) = \underline{A}_0 t_z \underset{(X,Y)}{*} \underline{h}_z. \quad (4.29)$$

Si l'on suppose qu'un seul plan z est de transmittance non nulle, l'intensité $I(X, Y)$ mesurée par le capteur est donc :

$$I(X, Y) = |\underline{A}_0|^2 |t_z \underset{(X,Y)}{*} \underline{h}_z|^2. \quad (4.30)$$

Dans l'hypothèse d'un milieu dilué, les termes du second ordre peuvent être négligés (cf Eq. (4.17)). On a donc le modèle direct suivant :

$$I(X, Y) = |\underline{A}_0|^2 - 2 |\underline{A}_0|^2 \left(t_z \underset{(X,Y)}{*} \operatorname{Re}(\underline{h}_z) \right). \quad (4.31)$$

En présence de bruit \mathbf{b} , en définissant les vecteurs \mathbf{y} et \mathbf{t} tels que $y_k = |\underline{A}_0|^2 - I(k_x, k_y)$ et $t_k = t_z(k_x, k_y)$.

La discrétisation de cette équation peut s'écrire sous une forme matricielle :

$$\mathbf{y} = 2 \mathbf{R}_z \cdot \mathbf{t} + \mathbf{b}. \quad (4.32)$$

où \mathbf{R}_z est la forme matricielle de la partie réelle de la fonction de Fresnel de paramètre de profondeur z .

Dans l'hypothèse d'un bruit gaussien centré de variance σ_b , pour reconstruire une profondeur z donnée, d'après la section 1.4.3, la solution du problème inverse au sens du maximum de vraisemblance est que :

$$\mathbf{t}^{\text{MV}} = \arg \min_{\mathbf{t}} \left(\frac{1}{2\sigma_b} (2 \mathbf{R}_z \cdot \mathbf{t} - \mathbf{y})^T \cdot (2 \mathbf{R}_z \cdot \mathbf{t} - \mathbf{y}) \right). \quad (4.33)$$

D'après l'équation (1.45) :

$$\left(\mathbf{R}_z^T \cdot \mathbf{R}_z \right) \cdot \mathbf{t}^{\text{MV}} = \frac{1}{2} \mathbf{R}_z^T \cdot \mathbf{y}. \quad (4.34)$$

Comme $\operatorname{Re}(\underline{h}_z) = \frac{1}{2}(\underline{h}_z + \underline{h}_z^*)$, on peut écrire :

$$\mathbf{R}_z = \frac{1}{2} \left(\mathbf{H}_z + \mathbf{H}_z^* \right), \quad (4.35)$$

où \mathbf{H} est la forme matricielle de la transformée de Fresnel. Dans ce cas l'équation (4.34) devient :

$$\left((\mathbf{H}_z + \mathbf{H}_z^*)^T \cdot (\mathbf{H}_z + \mathbf{H}_z^*) \right) \cdot \mathbf{t}^{\text{MV}} = (\mathbf{H}_z + \mathbf{H}_z^*)^T \cdot \mathbf{y}. \quad (4.36)$$

En utilisant les propriétés de la fonction de Fresnel présentées aux équations (4.24–4.26), la solution au sens du maximum de vraisemblance \mathbf{t}^{MV} est la solution de l'équation :

$$4 (\mathbf{I} + \mathbf{R}_{2z}) \cdot \mathbf{t}^{\text{MV}} = \mathbf{R}_z \cdot \mathbf{y}. \quad (4.37)$$

où \mathbf{R}_{2z} est la partie réelle de la fonction de Fresnel de paramètre $2z$. Malheureusement, cet opérateur de reconstruction n'est pas de rang plein (le terme $(\mathbf{I} + \mathbf{R}_{2z})$ possède des valeurs propres nulles) ce qui fait que l'équation (4.37) n'est pas utilisable. Différentes méthodes ont été proposées pour l'approximer par un opérateur de rang plein (voir DENIS (2006)). En général, c'est l'opérateur de Fresnel \mathbf{H}_z qui est utilisé comme opérateur de reconstruction comme dans le cas de l'approche mimant la restitution optique.

4.6.2 Maximum de Vraisemblance Contraint : Limitation de l’espace des paramètres

Pour dépasser les limitations de la restitution classique, il faut donc ajouter une certaine dose *d’a priori*. Dans le cadre de l’holographie numérique de micro-particules, on recherche dans le volume d’étude des particules opaques et sphériques de faible diamètre. Savoir que l’on recherche ces objets particuliers permet de changer d’espace des paramètres de l’espace 3D du volume d’étude en un espace plus petit et plus adapté à notre problématique. On suppose que l’on a un nombre de particules N ; N ne doit pas être trop grand pour rester dans l’hypothèse d’un milieu dilué (typiquement $N < 1000$ pour un capteur 1024×1024). En utilisant le modèle de formation de l’hologramme décrit à l’équation (4.18), chaque particule n est décrite par cinq paramètres : les coordonnées spatiales de son centre (x_n, y_n, z_n) , son rayon r_n auquel il faut ajouter un coefficient multiplicatif α_n . On définit donc l’ensemble des paramètres \mathcal{P} tel que $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N)$ avec les paramètres $\mathbf{p}_n = (x_n, y_n, z_n, r_n, \alpha_n)$. Dans l’hypothèse où l’on doit estimer le niveau moyen du détecteur illuminé par le laser I_0 , il faut ajouter ce terme dans l’espace de paramètres. En se restreignant à l’holographie de micro-particules sphériques, on a donc réduit considérablement le nombre de paramètres à estimer qui passent d’un nombre égal au nombre de pixels fois le nombre de plans en z (plusieurs millions) à $5N + 1$ (moins de 5000). Notons de plus, qu’en posant ainsi le problème, il n’y a pas d’étapes de segmentation et d’estimation des paramètres à proprement parler et ces sources potentielles d’erreur sont supprimées.

Sous l’hypothèse d’un bruit additif gaussien, étant donné l’hologramme mesuré \mathbf{d} , le problème de l’estimation au sens du maximum de vraisemblance des paramètres des particules devient : estimer \mathbf{p}^+ minimisant une fonction de coût $\mathcal{C}(\mathbf{p})$:

$$\mathbf{p}^+ = \arg \min_{\mathbf{p}} \mathcal{C}(\mathbf{p}), \quad (4.38)$$

avec :

$$\mathcal{C}(\mathbf{p}) = (\mathbf{m}(\mathbf{p}) - \mathbf{d})^T \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{m}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}), \quad (4.39)$$

où \mathbf{W} est une matrice de poids proportionnelle à l’inverse de la covariance du bruit et $\mathbf{m}(\mathbf{p})$ est le modèle de formation de l’hologramme.

Pour simplifier les équations et améliorer le conditionnement du problème, nous définissons une reparamétrisation telle que que les paramètres \mathbf{p}_n de la particule n deviennent sans dimension :

$$x' = x/\omega, \quad y' = y/\omega, \quad z' = \lambda z/\omega^2, \quad \text{et} \quad r' = r/\omega$$

où ω est la largeur et la hauteur d’un pixel. La figure de diffraction \mathbf{g}^n de la $n^{\text{ième}}$ particule échantillonnée sur le capteur et mesurée au pixel k de coordonnées (X'_k, Y'_k) est définie à l’équation (4.11) et devient alors :

$$g_k^n = \frac{r'_n}{2\rho_k^n} J_1\left(\frac{2\pi r'_n \rho_k^n}{z'_n}\right) \times \sin\left(\frac{\pi (\rho_k^n)^2}{z'_n}\right). \quad (4.40)$$

(X'_k, Y'_k) et $(x'_n - y'_n)$ sont les positions latérales exprimées en nombre de pixels, du pixel mesuré et de la particule respectivement et $\rho_k^n = \sqrt{(X'_k - x'_n)^2 + (Y'_k - y'_n)^2}$.

Le modèle défini à l’équation (4.18) devient alors :

$$\mathbf{m}(\mathbf{p}) = I_0 - \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbf{g}^n, \quad (4.41)$$

Pour simplifier le calcul de la fonction de coût, on suppose le bruit décorrélé. Dans ce cas la matrice de poids est diagonale de diagonale w ; le critère à minimiser devient alors :

$$\mathcal{C}(\mathbf{p}) = \sum_k w_k \left(I_0 - \sum_{n=1}^N \alpha_n g_k^n - d_k \right)^2. \quad (4.42)$$

Les poids w sont définis par :

$$w_k = \begin{cases} \frac{1}{\text{Var}(d_k)} & \text{si le } k^{\text{ième}} \text{ pixel est mesuré,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.43)$$

Bien que l'on ait fortement réduit le nombre de paramètres à estimer, le modèle de formation n'étant pas linéaire, il n'est pas convexe et il n'est pas envisageable numériquement de minimiser la fonction de coût en estimant l'ensemble de ces paramètres \mathbf{p} en même temps. Nous avons adopté une stratégie itérative. Cette stratégie, proche de celles utilisées dans les méthodes de déconvolution CLEAN (HÖGBOM, 1974) et MCS (MAGAIN *et al.*, 1998) s'apparente à un algorithme glouton appelé aussi *matching pursuit*. Une approche itérative similaire à été proposée par THIÉBAUT et MUGNIER (2006) pour la détection d'exoplanètes en interférométrie à franges noires.

4.6.3 Principe général de l'algorithme

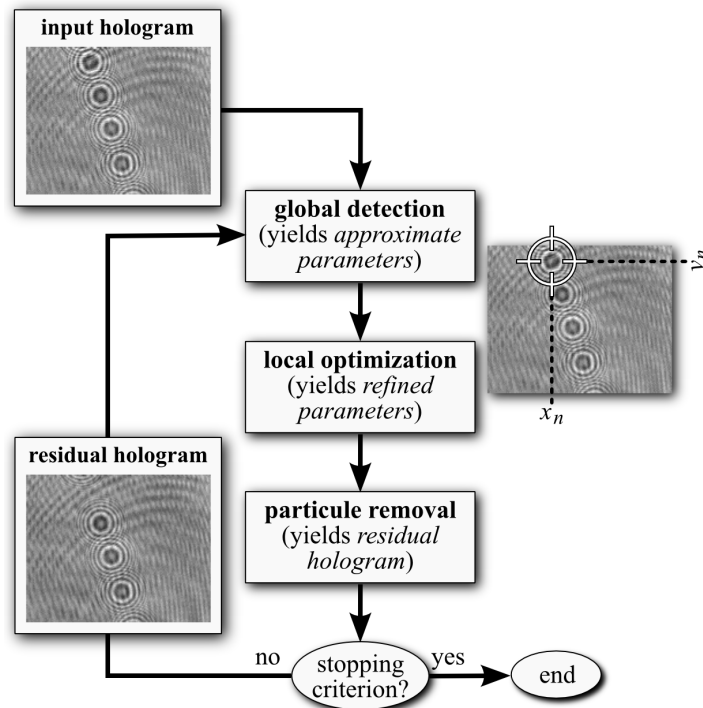


FIG. 4.8 — Schéma de principe de l'algorithme proposé pour la détection de micro-particules (d'après SOULEZ *et al.*, 2007b)

L’algorithme est décrit par la figure 4.8. A chaque itération, on considère qu’une seule particule est présente et on vise l’estimation des paramètres de cette particule. Ceci est fait en deux étapes, une **étape de détection** de la particule dans le volume d’étude, puis une **étape d’estimation précise** de ses paramètres. Enfin, une fois les paramètres de la particule courante précisément estimés, une **étape supplémentaire de nettoyage** est effectuée, il s’agit de soustraire de l’hologramme la figure de diffraction de la particule détectée et calculer ainsi le résidu y^n pour permettre la détection des particules suivantes. Chaque itération est donc composée de trois étapes qui vont être tout à tour décrites dans les sections suivantes.

Nous proposons ici de résoudre le problème d’optimisation globale de minimisation $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ par une succession d’optimisations locales sur un sous-ensemble de l’espace des paramètres. Dans cette démarche, grâce à l’aspect additif du modèle, seuls les paramètres d’une seule particule sont estimés à chaque itération. Pour N particules, la solution \mathbf{p}^+ du problème d’optimisation global donnée par notre algorithme est donc composée de l’ensemble des solutions \mathbf{p}_n^+ des N sous-problèmes d’optimisation locale étudiés à chaque itération n :

$$\mathbf{p}^+ = (\mathbf{p}_1^+, \mathbf{p}_2^+, \dots, \mathbf{p}_N^+), \quad (4.44)$$

où chacune des solutions \mathbf{p}_n^+ minimise la fonction de coût \mathcal{C}_n donnée par :

$$\mathbf{p}_n^+ = \arg \min_{\mathbf{p}_n} \mathcal{C}_n(\mathbf{p}_n), \quad (4.45)$$

où la fonction \mathcal{C}_n exprime l’accord entre le modèle de figure de diffraction de la particule n et les données :

$$\mathcal{C}_n(\mathbf{p}_n) = \sum_k w_k \left(y_k^{n-1} - I_n + \alpha_n g_k^n \right)^2. \quad (4.46)$$

où I_n est une constante additive et y_k^{n-1} est un terme de résidu indépendant de \mathbf{p}_n prenant en compte les données et les $n - 1$ particules déjà détectées :

$$y_k = \begin{cases} d_k + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j g_k^j - c_{n-1}, & \text{si le } k^{\text{ième}} \text{ pixel est mesuré,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.47)$$

avec $y^0 = \mathbf{d} - c_0$ et où c_{n-1} est une constante additive introduite pour simplifier les calculs ultérieurs et représentant la valeur moyenne des résidus à l’itération $n - 1$:

$$c_{n-1} = \sum_k w_k \left(d_k + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j g_k^j \right), \quad (4.48)$$

et donc $c_0 = \sum_k w_k d_k$. En d’autres termes, c_{n-1} est défini de sorte que $\sum_k w_k y_k^{n-1} = 0$. Pour préserver notre modèle de formation des données, la constante I_n est $I_n = I_0 - c_{n-1}$.

Il est important de noter que, si l’hypothèse d’un bruit additif blanc gaussien est valable lorsque l’on minimise le critère multi-particules de l’équation (4.42), cette hypothèse n’est plus vérifiée lorsque l’on minimise le critère pour une seule particule défini à l’équation (4.46) lorsque d’autres particules restent à détecter. En effet, pour élaborer ce critère on a supposé le bruit blanc de manière à avoir une matrice de poids \mathbf{W} diagonale de diagonale \mathbf{w} plus facile à manipuler. Or, lorsque l’on traite un hologramme de plusieurs particules, le bruit le plus important contenu dans \mathbf{y} est dû à la somme des figures de diffraction des particules non encore détectées et soustraites. Ce bruit n’est en réalité pas blanc car les figures de diffraction sont

très étendues spatialement et ont des caractéristiques spectrales très fortes. Cependant, en pratique et comme il sera détaillé par la suite, la détection des particules dont la contribution est importante est tout de même possible malgré cette erreur dans la définition de notre critère. C'est pourquoi l'étape de nettoyage est extrêmement importante, car plus le nombre de particules détectées (et dont la figure de diffraction est soustraite à l'hologramme mesuré) est important, moins le bruit lié aux particules est fort et donc plus l'hypothèse d'un bruit blanc est valide. Cela permet donc à chaque itération d'avoir un critère de plus en plus pertinent permettant une détections plus sensible des particules ayant les figures les moins contrastées. De plus au cours de l'algorithme les paramètres des particules déjà détectées peuvent être raffiner une nouvelle fois pour nettoyer plus encore l'hologramme.

Une fois le critère \mathcal{C}_n du sous-problème de détection défini, il reste à déterminer la stratégie pour obtenir les paramètres \mathbf{p}_n optimaux. Ceci sera fait au cours des sections suivantes dans lesquelles nous détaillons les étapes de détection et de positionnement fin.

4.6.4 Étape de Détection

Le critère n'est pas convexe et il n'est donc pas possible d'utiliser des méthodes d'optimisation non linéaires. Il est donc nécessaire d'échantillonner ce critère pour en déterminer son minimum. C'est le rôle de cette étape de détection. Ce travail a donné lieu à la publication (SOULEZ *et al.*, 2007a).

4.6.4.1 Estimation optimale des paramètres α_n et I_n

Si l'on développe le critère défini à l'équation (4.46), on a :

$$\mathcal{C}_n = \sigma_w y^2 - 2 I_0 \sigma_w y + 2 \alpha_n \sigma_w y g - 2 \alpha_n I_n \sigma_w g + I_n^2 \sigma_w + \alpha_n^2 \sigma_w g^2 \quad (4.49)$$

avec

$$\sigma_w = \sum_k w_k, \quad (4.50)$$

$$\sigma_w y = \sum_k w_k y_k^{n-1}, \quad (4.51)$$

$$\sigma_w y^2 = \sum_k w_k (y_k^{n-1})^2, \quad (4.52)$$

$$\sigma_w y g = \sum_k w_k y_k^{n-1} g_k^n, \quad (4.53)$$

$$\sigma_w g = \sum_k w_k g_k^n, \quad (4.54)$$

$$\sigma_w g^2 = \sum_k w_k (g_k^n)^2. \quad (4.55)$$

Soit sous une forme matricielle (\mathbf{W} étant diagonale) :

$$\sigma_w = \mathbf{l}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{l}, \quad (4.56)$$

$$\sigma_{wy} = \mathbf{l}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{y}^{n-1}, \quad (4.57)$$

$$\sigma_{wy^2} = (\mathbf{y}^{n-1})^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{y}^{n-1}, \quad (4.58)$$

$$\sigma_{wyg} = (\mathbf{y}^{n-1})^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{g}^n, \quad (4.59)$$

$$\sigma_{wg} = \mathbf{l}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{g}^n, \quad (4.60)$$

$$\sigma_{wg^2} = (\mathbf{g}^n)^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{g}^n. \quad (4.61)$$

avec $\mathbf{l} = (1, 1, \dots, 1)^T$.

Par définition de c_{n-1} , $\sigma_{wy} = 0$. Étant donnés les paramètres \mathbf{p}_n de la particule, le critère étant quadratique en α_n et I_n , les coefficients optimaux α_n^+ et I_n^+ peuvent être déterminés en résolvant le système linéaire :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \mathcal{C}_n}{\partial I_n} \right|_{I_n=I_n^+, \alpha_n=\alpha_n^+} = 0 \\ \left. \frac{\partial \mathcal{C}_n}{\partial \alpha_n} \right|_{I_n=I_n^+, \alpha_n=\alpha_n^+} = 0 \end{cases}$$

Cela conduit à :

$$I_n^+ = \frac{-\sigma_{wg} \sigma_{wyg}}{\sigma_w \sigma_{wg^2} - \sigma_{wg}^2} = \alpha_n^+ \frac{\sigma_{wg}}{\sigma_w}, \quad (4.62)$$

$$\alpha_n^+ = \frac{-\sigma_w \sigma_{wyg}}{\sigma_w \sigma_{wg^2} - \sigma_{wg}^2}, \quad (4.63)$$

En remplaçant dans l'équation (4.49), α_n et I_n par leurs valeurs optimales I_n^+ et α_n^+ , on obtient :

$$\mathcal{C}_n^+ \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}_n|_{I_n=I_n^+, \alpha_n=\alpha_n^+} = \sigma_{wy^2} - \frac{\sigma_w (\sigma_{wyg})^2}{\sigma_w \sigma_{wg^2} - \sigma_{wg}^2}. \quad (4.64)$$

Minimiser ce critère par rapport aux autres paramètres \mathbf{p}_n est équivalent à maximiser le critère \mathcal{Q}_n défini par :

$$\mathcal{Q}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_w (\sigma_{wyg})^2}{\sigma_w \sigma_{wg^2} - \sigma_{wg}^2} \quad (4.65)$$

Comme par définition, $\alpha_j = 2\gamma \left| A_0 \right|^2 \eta_j > 0$, ce critère est maximisé sous la contrainte de positivité des α_n :

$$\alpha_n^+ = \frac{-\sigma_w \sigma_{wyg}}{\sigma_w \sigma_{wg^2} - \sigma_{wg}^2} > 0. \quad (4.66)$$

4.6.4.2 Calcul rapide de \mathcal{Q}_n

Ce critère \mathcal{Q}_n n'étant pas convexe, pour trouver son maximum il faut l'évaluer pour chaque valeur possible de \mathbf{p}_n , ou au moins pour un certain nombre d'échantillons. Cela peut être numériquement très long. Une astuce peut cependant être utilisée pour accélérer ce calcul.

On considère les paramètres z'_n et r'_n fixés et l'on cherche à déterminer le maximum du critère dans le plan en (x_n, y_n) ainsi défini. Si l'on échantillonne x_n et y_n sur la grille des pixels

on peut décrire la figure de diffraction $g_k^{(n,j)}$ mesurée au pixel k , d'une particule centrée sur le pixel j par :

$$g_k^{(n,j)} = g_{k-j}^{(n,1)}, \quad (4.67)$$

où $g^{n,1}$ est la figure de diffraction d'une particule centrée sur le premier pixel. Cette figure de diffraction est symétrique donc $g_{k-j}^{n,1} = g_{j-k}^{n,1}$.

Le terme σ_{wyg} , par exemple, peut donc être évalué pour une particule située en j :

$$[\sigma_{wyg}]_j = \sum_k w_k y_k^{(n-1)} g_{j-k}^{(n,1)}. \quad (4.68)$$

On reconnaît dans cette équation, une opération de convolution entre $(w_k y_k^{(n-1)})$ et $(g_{j-k}^{(n,1)})$. Dans l'approximation circulante, celle-ci peut donc s'estimer en utilisant la transformée de Fourier discrète :

$$\sigma_{wyg} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \text{diag}(\mathbf{F} \cdot \text{diag}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{y}^{(n-1)}) \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{g}, \quad (4.69)$$

où \mathbf{F} est l'opérateur 2D de transformée de Fourier discrète. $\text{diag}(\mathbf{u})$ définit une matrice diagonale carrée avec le vecteur \mathbf{u} sur sa diagonale, de sorte que le résultat de $(\text{diag}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v})$ soit la multiplication terme à terme de \mathbf{u} et \mathbf{v} . De façon identique, σ_{wg} et σ_{wg^2} peuvent aussi être calculés très rapidement pour toute les positions possibles par transformée de Fourier rapide (FFT) :

$$\sigma_{wg} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \text{diag}(\mathbf{F} \cdot \text{diag}(\mathbf{w})) \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{g}, \quad (4.70)$$

$$\sigma_{wg^2} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \text{diag}(\mathbf{F} \cdot \text{diag}(\mathbf{w})) \cdot \mathbf{F} \cdot \text{diag}(\mathbf{g}) \cdot \mathbf{g}. \quad (4.71)$$

Le calcul de \mathcal{Q}_n et de α_n peut donc se faire dans un plan (x, y) par seulement 7 FFTs (4 FFTs directe et 3 FFTs inverses). De plus, la FFT de \mathbf{w} peut être faite une fois pour toutes et celle de $\mathbf{y}^{(n-1)}$ une seule fois à chaque itération de l'algorithme. Ainsi, seulement 5 FFTs par couple (z'_n, r'_n) seront effectuées pour calculer \mathcal{Q}_n sur une grille de tout le domaine d'intérêt.

La maximisation de ce critère correspond exactement à la détection optimale d'une figure de diffraction. Notons toutefois qu'il n'est pas possible dans le calcul de critère d'utiliser une matrice \mathbf{W} calculée d'après le vrai spectre du bruit. En effet, le bruit principalement lié aux particules non détectées présente le même spectre que le signal à détecter ; blanchir ce bruit reviendrait donc à blanchir le signal, le rendant indétectable.

4.6.4.3 Conséquence de l'approximation circulante : extension du champ

Pour éviter le repliement de champ (ou repliement spatial) dû à l'approximation circulante, il faut effectuer les transformées de Fourier sur une zone deux fois plus large et deux fois plus longue que le capteur. Cet élargissement a une conséquence importante. En effet la figure de diffraction d'une particule étant très étendue, une partie de la figure de diffraction d'une particule dont la position latérale est éloignée du champ du capteur peut tout de même être mesurée par celui-ci. Les pixels non mesurés étant correctement pris en compte dans la définition de \mathbf{w} , il est alors possible de détecter des particules hors du champ du capteur. On décompose le plan du capteur en trois régions concentriques décrites à la figure 4.9. la région de travail (notée T sur cette figure), est la zone à l'intérieur de laquelle sont situées les particules dont les figures de diffraction peuvent être mesurées par le capteur. Pour éviter le repliement de champ, la région sur laquelle sont effectuées les transformées de Fourier, appelée région de calcul (notée R) devra être de largeur et de longueur supérieures à celles de la

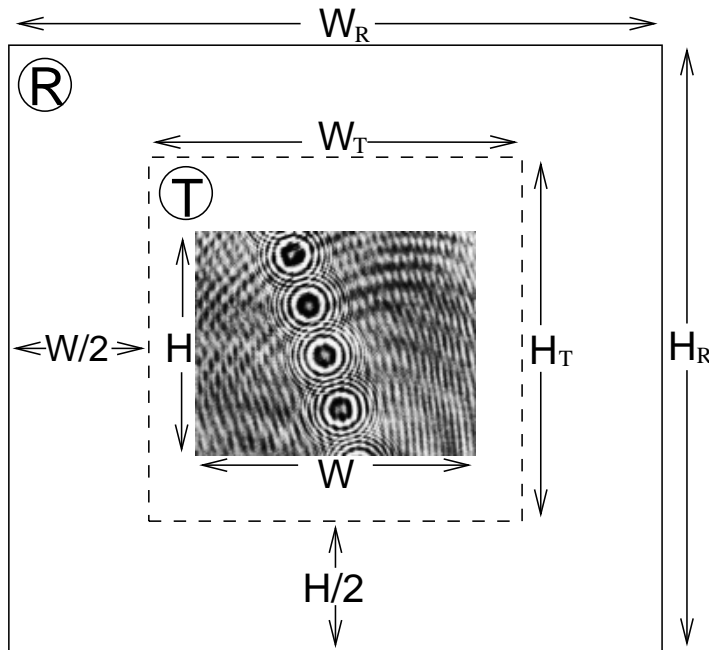


FIG. 4.9 — Dimensions des régions de calcul (R) et de travail (T) comparées à la surface du capteur ($W \times H$).

région de calcul plus celles du capteur. La taille maximale de la région de travail dépend du rayon et de la profondeur des particules ainsi que des paramètres du capteur (dynamique, taille des pixels, taux de remplissage...).

La figure 4.10 est un montage réalisé avec plusieurs cartes du critère \mathcal{Q}_n calculées sur des hologrammes réels. On peut y constater que ce critère présente des maxima indiquant la présence d’une particule dans une région de taille bien supérieure à celle du capteur CCD. Le volume utilisable pour les mesures du champ de vitesse des particules est agrandi d’autant (multiplié par 16 dans ce cas).

4.6.5 Étape de positionnement fin

Lors de l’étape de détection le critère \mathcal{Q}_n est suffisamment échantillonné de manière à permettre une détection, mais pas trop finement pour avoir un calcul relativement léger. Malheureusement, les paramètres \mathbf{p}_n d’une particule ainsi détectée sont trop grossièrement estimés pour que sa figure de diffraction soit totalement soustraite des résidus. Par conséquent, une estimation plus fine de ces paramètres est nécessaire pour détecter correctement la particule suivante. Ceci est accompli par l’étape de positionnement fin.

Cette étape est une étape d’optimisation locale des paramètres $\mathbf{p}_n = \{x'_n, y'_n, z'_n, r'_n\}$ de la $n^{\text{ième}}$ particule détectée lors de l’étape de détection. Pour cela, le critère \mathcal{C}_n défini à l’équation (4.46) est minimisé par une variante avec région de confiance de l’algorithme de Levenberg-Marquardt décrite par MORÉ et SORENSEN (1983) (voir sections 1.5.3.3 et 1.5.4.2). Cette méthode suppose de connaître la matrice Jacobienne \mathbf{J}^n de \mathcal{C}_n . Elle est définie par

$$\mathbf{J}^n = \frac{\partial(y_k^{n-1} - I_n + \alpha_n g_k^n)}{\partial \mathbf{p}}. \quad (4.72)$$

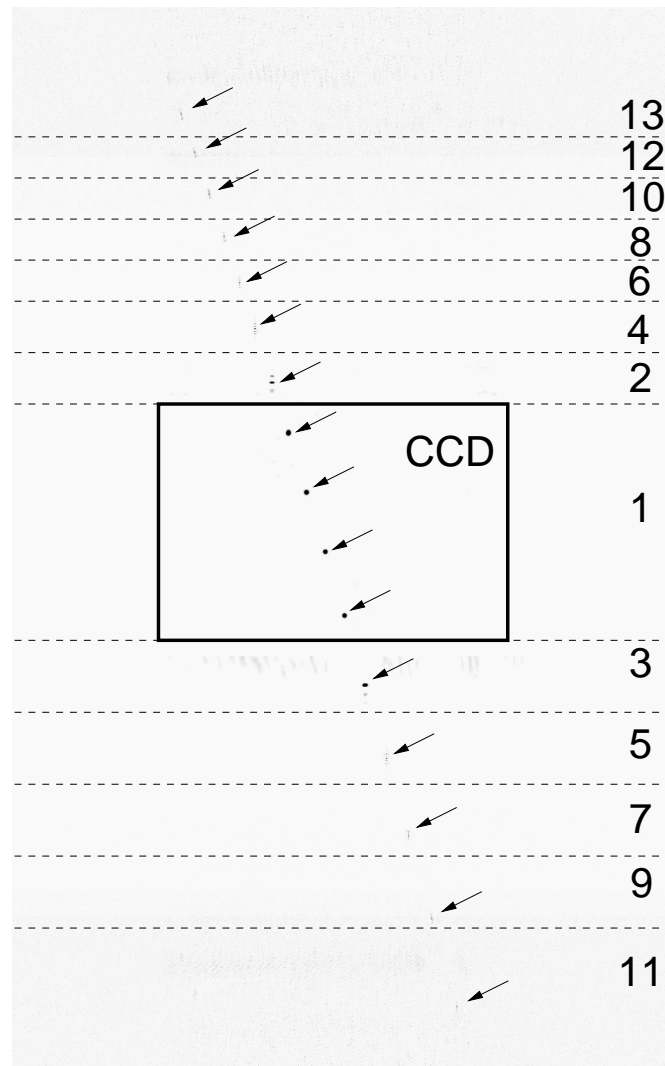


FIG. 4.10 — Montage représentant la carte du critère \mathcal{Q} mesuré d'après un hologramme expérimental (Voir Sec. 4.7.2). Il est composé de 13 images (numéroté de 1 à 13) calculé sur les résidus après la suppression des figures de diffraction des particules (pointées par les flèches) détectées dans les résidus précédents.

Or on peut écrire :

$$\frac{\partial \mathcal{C}_n}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \mathcal{C}_n}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{\substack{I_n=I_n^+ \\ \alpha_n=\alpha_n^+}} + \frac{\partial \alpha_n^+}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathcal{C}_n}{\partial \alpha_n} \Big|_{\substack{I_n=I_n^+ \\ \alpha_n=\alpha_n^+}} + \frac{\partial I_n^+}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathcal{C}_n}{\partial I_n} \Big|_{\substack{I_n=I_n^+ \\ \alpha_n=\alpha_n^+}} . \quad (4.73)$$

Or, I_n^+ α_n^+ sont estimés de manière optimale à chaque itération comme d'après la section 4.6.4.1 ou en utilisant une méthode de moindres carrés donc les deux derniers termes sont nuls et

l’expression de ce jacobien devient donc :

$$\frac{\partial \mathcal{C}_n}{\partial \mathbf{p}} = \left. \frac{\partial \mathcal{C}_n}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\substack{I_n=I_n^+ \\ \alpha_n=\alpha_n^+}}, \quad (4.74)$$

$$= 2 \alpha_n^+ \sum_{k=1}^{N_{\text{pixel}}} w_k \left[y_k^{n-1} - I_n^+ + \alpha_n^+ g_k^n \right] \frac{\partial g_k^n}{\partial \mathbf{p}} \quad (4.75)$$

Les dérivées partielles du modèle de la figure de diffraction g^n par rapport aux paramètres \mathbf{p} peuvent être calculées analytiquement :

$$\frac{\partial g_k^n}{\partial x'_n} = \frac{(x'_n - X'_k) r'_n}{2 (\rho_k^n)^3} \left[\phi_k^n J_0(\phi_k^n) \sin \theta_k^n - 2 J_1(\phi_k^n) (\sin \theta_k^n - \theta_k^n \cos \theta_k^n) \right] \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial g_k^n}{\partial y'_n} = \frac{(y'_n - Y'_k) r'_n}{2 (\rho_k^n)^3} \left[\phi_k^n J_0(\phi_k^n) \sin \theta_k^n - 2 J_1(\phi_k^n) (\sin \theta_k^n - \theta_k^n \cos \theta_k^n) \right] \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial g_k^n}{\partial z'_n} = \frac{r'_n}{2 \rho_k^n z'_n} \left[J_1(\phi_k^n) (\sin \theta_k^n - \theta_k^n \cos \theta_k^n) - \phi_k^n J_0(\phi_k^n) \sin \theta_k^n \right] \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial g_k^n}{\partial r'_n} = \frac{\pi r'_n}{z'_n} J_0(\phi_k^n) \sin \theta_k^n \quad (4.79)$$

avec :

$$\theta_k^n = \frac{\pi \rho_k^{n2}}{z'_n} \quad (4.80)$$

$$\phi_k^n = \frac{2 \pi r'_n \rho_k^n}{z'_n} \quad (4.81)$$

$$\rho_k^n = \sqrt{(x'_n - X'_k)^2 + (y'_n - Y'_k)^2}. \quad (4.82)$$

L’optimisation étant effectuée de manière continue, pour ne pas tomber dans un optimum local, cette méthode suppose que les valeurs initiales des paramètres de la particule (ceux donnés par l’étape de détection) soient suffisamment proches de l’optimum global de façon à être dans la région où le critère \mathcal{C}_n est convexe autour de cet optimum global. En particulier, une fausse détection lors de la première étape, conduit à un optimum local lors de l’étape de positionnement fin et à l’estimation de paramètres aberrants. Il est donc nécessaire de valider les paramètres estimés de manière à déterminer s’il correspondent à une particule réellement présente dans le volume d’étude.

L’algorithme présenté dans cette étape de positionnement fin a été publié dans JOSA-A (SOULEZ *et al.*, 2007b). Notons que peu de temps après, une méthode quasi identique a été proposé par LEE *et al.* (2007) pour le suivi d’une unique particule en mouvement dans l’eau.

4.6.6 Validation des paramètres estimés de la particule et convergence de l’algorithme

L’estimation de paramètres aberrants suite à une fausse détection conduit à la soustraction aux résidus, d’une figure de diffraction aberrante. Ceci risque d’empêcher la détection des particules suivantes. Il est donc crucial pour les itérations suivantes d’identifier ces fausses détections. Ceci est fait par une étape de validation des paramètres qui a lieu après la convergence de l’algorithme de positionnement fin.

Pour estimer s'il y a eu ou non une fausse détection, nous ne pouvons utiliser que les paramètres optimaux p_n^+ de la particule ainsi que les paramètres α_n^+ et I_n^+ estimés après le positionnement fin. Ces paramètres sont donc comparés avec nos connaissances *a priori* de leur valeur. Tout d'abord il est possible de considérer comme fausse détection, toute particule ayant des paramètres physiquement impossibles (en particulier une valeur négative pour la profondeur, le rayon ou la contribution α_n). De plus, en connaissant le montage, il est possible d'établir des bornes sur les paramètres des particules. En particulier, nous savons la profondeur du volume d'étude dans lequel on a injecté la particule et sa distance par rapport à la caméra, ce qui nous donne un intervalle sur z_n . De même, les spécifications de l'injecteur sont connues et un intervalle sur les rayons des particules peut être fixé. Enfin, le paramètre α_n qui permet de prendre en compte une illumination non uniforme, varie peu dans un même hologramme, il est donc possible de considérer comme fausse détection, toute particule dont α_n est inférieur à un certain pourcentage de la valeur maximale des facteurs α des particules déjà détectées (en général de l'ordre de 50%).

Effectuer cette validation après l'étape de positionnement fin, implique d'attendre la fin de celui-ci. Dans le cas d'une fausse détection, le temps de calcul d'une itération complète (détection + optimisation) peut être perdu. De plus, l'optimisation du critère \mathcal{C}_n hors de la zone convexe autour d'une particule est très mal conditionné et peut prendre beaucoup de temps avant d'atteindre une convergence vers un optimum local. Il est donc intéressant en terme de temps de calcul d'effectuer la validation des particules le plus tôt possible. C'est pourquoi, dans la pratique, elle intervient à chaque itération de l'algorithme de positionnement fin, interrompant l'optimisation locale dès que les paramètres deviennent aberrants. Dans la pratique, cette validation en cours d'optimisation rejette les mêmes particules qu'une validation après la convergence de l'algorithme. De plus, si la particule détectée n'est pas aberrante, les pas de l'algorithme d'optimisation ne sont en général pas plus grands que le pas d'échantillonnage utilisé dans l'étape de détection ; ainsi, des pas trop grand de l'algorithme d'optimisation, impliquent très probablement que la particule courante est aberrante qui peut être alors invalidée.

Une fois que l'étape de positionnement fin a convergée et que la particule a été validée, alors les nouveaux résidus sont calculés et l'algorithme global passe à l'itération suivante pour détecter une nouvelle particule. Si la particule courante n'est pas validé, alors les résidus restent inchangés et l'itération globale recommence. Pour éviter la détection d'une particule conduisant aux mêmes paramètres aberrants, un masque est créé empêchant une nouvelle détection dans la même région du volume d'étude. Cette sorte de liste taboue est supprimée dès qu'une nouvelle particule est détectée.

Lorsque plusieurs particules aberrantes sont détectées à la suite, alors une nouvelle étape de positionnement fin est réalisée pour toute les particules déjà détectées de manière à affiner les paramètres de celles-ci et à calculer plus précisément les résidus. Ensuite une nouvelle itération globale de l'algorithme est effectuée pour détecter les particules avec une signature très faible. Si une nouvelle fois cela conduit à une fausse détection alors on considère que toutes les particules ont été détectées et que l'algorithme a convergé.

4.7 Résultats

Dans cette section nous présentons des résultats sur des données simulées comme sur des données réelles. Cela permettra de valider la méthode proposée et d'étudier la précision des

résultats fournis.

4.7.1 Analyse d'hologrammes simulés

Pour démontrer l'efficacité de la méthode proposée, nous l'avons d'abord testée sur des données simulées. Ces données ont été simulées en utilisant l'équation (4.16), c'est-à-dire avec les termes non linéaires des figures de diffraction et avec les termes d'interférences entre les différentes figures de diffraction mais sans simuler la déformation du front d'onde lors du passage à travers le volume d'étude. De plus, l'effet d'intégration sur le pixel est négligé et aucun bruit n'a été ajouté aux simulations. Ces simulations nous permettent d'étudier la précision de cette méthode dans différentes configurations, c'est-à-dire avec différents paramètres moyens (en particulier différentes tailles de particules) et différentes concentrations.

4.7.1.1 Influence de la taille et de la concentration

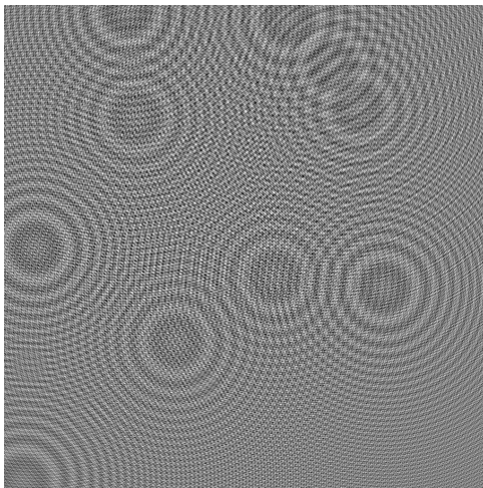


FIG. 4.11 — Hologramme de 10 petites particules.

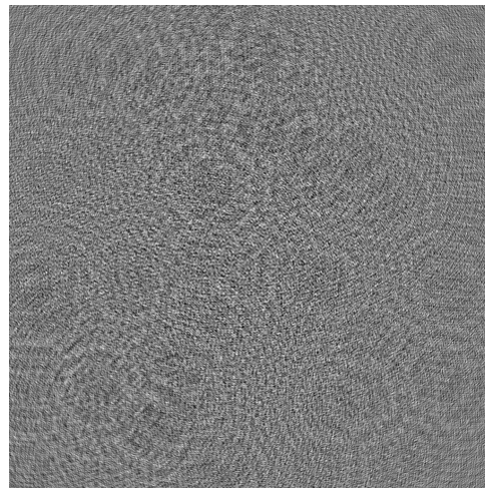


FIG. 4.12 — Hologramme de 100 petites particules.

Tout d'abord nous avons fait varier le nombre de particules et leur taille afin d'étudier leur influence sur la précision des résultats donnés par la méthode. Les simulations ont été effectuées en considérant un laser de longueur d'onde 632.8 nm diffracté par des particules situées aléatoirement dans un volume d'étude de taille 8 mm × 8 mm × 30 mm. Les hologrammes ainsi simulés sont discrétisés sur 8 bits et 1024 × 1024 pixels carrés de 6.70 μm × 6.70 μm, ce qui signifie que toutes les particules sont dans le champ du capteur. Deux tailles moyennes (rayons compris entre 35 μm et 50 μm d'une part et entre 3.5 μm et 5 μm d'autre part) et deux concentrations différentes (10 et 100 particules) ont été testées. Afin de rester dans les conditions dans lesquelles on peut décrire les figures de diffraction sous la forme analytique définie à l'équation (4.11), le volume d'étude est placé à 250 mm pour les particules de rayons faibles et à 100 mm pour les grosses particules. Deux hologrammes générés avec des particules de petits rayons sont présentés sur les figures 4.11 et 4.12.

Une fois les particules toutes détectées, nous avons calculé l'écart-type des erreurs d'estimation sur chacun des paramètres. Ces résultats sont présentés sur le tableau 4.1. Tout d'abord on peut constater une très bonne précision, toujours inférieure à 0.3 μm ($(\frac{1}{20})^{\text{ième}}$ de

nombre de particules	rayon des particules	Δx	Δy	Δz	Δr	
		($\mu\text{m rms}$)	($\mu\text{m rms}$)	($\mu\text{m rms}$)	($\mu\text{m rms}$)	%
10	$35 \mu\text{m} \leq r \leq 50 \mu\text{m}$	0.27	0.26	0.74	0.06	($\approx 0.14\%$)
100	$35 \mu\text{m} \leq r \leq 50 \mu\text{m}$	0.30	0.30	2.37	0.12	($\approx 0.28\%$)
10	$3.5 \mu\text{m} \leq r \leq 5 \mu\text{m}$	0.28	0.28	0.26	0.15	($\approx 3.5\%$)
100	$3.5 \mu\text{m} \leq r \leq 5 \mu\text{m}$	0.28	0.29	0.85	0.51	($\approx 12\%$)

TAB. 4.1 — Ecart-type des erreurs d'estimation des paramètres des particules pour différentes configurations simulées.

pixel) latéralement, à $3\mu\text{m}$ ($(\frac{1}{2})^{\text{ième}}$ de pixel) en profondeur et à $0.6\mu\text{m}$ ($(\frac{1}{10})^{\text{ième}}$ de pixel) sur le rayon. De plus, la concentration, comme la taille des particules, semblent avoir peu d'influence sur l'erreur latérale d'estimation. Par contre, plus les particules sont petites, plus il y a d'anneaux de diffraction enregistrés sur l'hologramme et donc plus l'estimation de z est précise. A l'inverse, plus les particules sont grosses plus il y a de lobes de la figure de diffraction qui sont enregistrés et donc plus l'estimation (relativement à sa taille) du rayon est précise. On peut aussi constater que la précision sur z et r diminue lorsque la concentration augmente. Ceci peut s'expliquer par deux phénomènes : (i) plus il y a de particules, plus les hautes fréquences et donc plus les anneaux éloignés du centre de la particule sont brouillés, diminuant le nombre d'anneaux de diffraction sur lesquels peut se faire l'estimation de z et r ; (ii) plus il y a de particules et plus les termes d'interférences entre leurs figures de diffraction sont importants et perturbent le modèle et donc l'estimation de z et r . Il semblerait en pratique que la première cause (brouillage des hautes fréquences) prévale sur la seconde en ce qui concerne la précision sur la profondeur z .

4.7.1.2 Influence de la taille du champ

Comme nous l'avons affirmé dans la section 4.6.4, l'étape de détection permet de détecter des particules hors du champ du capteur. Pour étudier cette caractéristique, nous avons appliqué cet algorithme deux fois sur le même hologramme : une fois sur la totalité de l'hologramme (1024×1024 pixels) dans lequel toute les particules sont dans le champ, une autre fois uniquement en considérant le quart central (512×512 pixels) de celui-ci soit avec les trois quarts des particules situées hors-champ du capteur. Trois hologrammes différents ont été simulés avec trois tailles différentes de particules : de $3.5 \mu\text{m}$ à $5 \mu\text{m}$, de $15 \mu\text{m}$ à $20 \mu\text{m}$ et de $30 \mu\text{m}$ à $40 \mu\text{m}$. Dans tous les hologrammes 100 particules ont été aléatoirement distribuées dans un volume de taille $8 \text{ mm} \times 8 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}$ situé à 250 mm du capteur. La longueur d'onde du laser est 632.8 nm et la taille des pixels est $6.70 \mu\text{m} \times 6.70 \mu\text{m}$.

L'écart-type des erreurs d'estimation sur chacun des paramètres est présenté sur le tableau 4.2. Comme l'estimation de z et de r est d'autant plus précise que le nombre d'anneaux de diffraction enregistré est grand, cette précision diminue avec la taille du champ. Comme à la section précédente, on peut constater que plus les particules sont petites, plus l'estimation de la profondeur est précise car les anneaux de diffraction situés loin du centre de la particule sont d'autant moins atténués que la particule est petite. C'est pour la même raison que la précision latérale diminue avec la taille du champ pour des particules de gros diamètres.

Les différences avec les résultats de la section précédentes peuvent s'expliquer par le fait que l'on n'ait simulé qu'un seul hologramme. Or nous avons observé que l'estimation des

taille du capteur	rayon des particules	Δx	Δy	Δz	Δr	
		($\mu\text{m rms}$)	($\mu\text{m rms}$)	($\mu\text{m rms}$)	($\mu\text{m rms}$)	%
1024	$3.5 \mu\text{m} \leq r \leq 5 \mu\text{m}$	0.28	0.28	1.38	0.46	($\approx 11\%$)
512	$3.5 \mu\text{m} \leq r \leq 5 \mu\text{m}$	0.28	0.28	6.38	0.72	($\approx 17\%$)
1024	$15 \mu\text{m} \leq r \leq 20 \mu\text{m}$	0.28	0.28	2.53	0.03	($\approx 0.17\%$)
512	$15 \mu\text{m} \leq r \leq 20 \mu\text{m}$	0.28	0.28	11.8	0.09	($\approx 0.51\%$)
1024	$30 \mu\text{m} \leq r \leq 40 \mu\text{m}$	0.28	0.28	14.3	0.14	($\approx 0.4\%$)
512	$30 \mu\text{m} \leq r \leq 40 \mu\text{m}$	0.39	0.39	46.85	0.17	($\approx 0.48\%$)

TAB. 4.2 — Ecart-type des erreurs d'estimation des paramètres des particules suivant la taille du champ pour différentes tailles de particules.

paramètres d'un petit nombre de particules présente des erreurs très fortes par rapport aux autres. En effet, lorsque la concentration augmente la probabilité que deux particules soient alignées longitudinalement augmente. Deux particules ainsi alignées vont brouiller mutuellement leurs hautes fréquences et la précision de l'estimation de leur profondeur et de leur rayon en est dégradée.

4.7.1.3 Influence de la position latérale des particules

La possibilité d'estimer les paramètres d'une particule dans un volume dans la largeur est supérieure à celle du capteur est une caractéristique très importante pour les applications de la méthode proposée. Il est donc nécessaire d'étudier la précision de cette méthode en fonction de la position latérale des particules en particulier pour les particules hors-champ. Pour cela nous avons simulé 32 hologrammes avec les mêmes conditions. Pour chacun des hologrammes, 20 particules de rayon compris entre 40 et 50 μm ont été aléatoirement distribuées dans un volume de taille $13.72 \times 13.72 \times 50.00 \text{ mm}^3$ illuminé par un laser de longueur d'onde 532 nm. Le capteur, placé à 250 mm du volume d'étude, comporte 1024×1024 pixels carrés de 6.7 μm . Sa surface correspond au quart central de la surface latérale de la zone d'étude. Les hologrammes ainsi simulés sont quantifiés sur 8 bits. Ces hologrammes ont été traités d'une part par la méthode proposée ici et d'autre part par la méthode dite "classique" c'est-à-dire une reconstruction du volume par transformée de Fresnel suivie d'une segmentation.

La méthode proposée a pu détecter quasiment toutes les particules : seules 20 particules sur 640 n'ont pas été détectées (taux de détection de 97 %) et seulement deux particules ont été faussement détectées (taux de fausse détection de 0.3 %). Comme on pouvait s'y attendre, la méthode classique a été quasiment incapable de détecter des particules hors du champ : elle présente un taux de détection de 100 % dans le champ et de 6 % hors du champ soit 32 % en tout (631 particules détectées).

Les résultats des deux méthodes sont détaillés par les figures 4.13, 4.14 et 4.15. Ces figures représentent les erreurs sur chacun des paramètres de toutes les particules détectées sur les 32 hologrammes en fonction de la distance de ces particules par rapport au bord du capteur ; la partie négative de l'abscisse représente l'intérieur du capteur, 0 correspond au bord du capteur et la partie positive compte pour les particules hors du champ du capteur.

- La figure 4.13 présente les erreurs transversales des deux méthodes. On peut constater que les deux méthodes permettent d'atteindre une précision sous-pixel. Cependant la nouvelle méthode présentée ici est bien plus précise et sans biais. Sa préci-

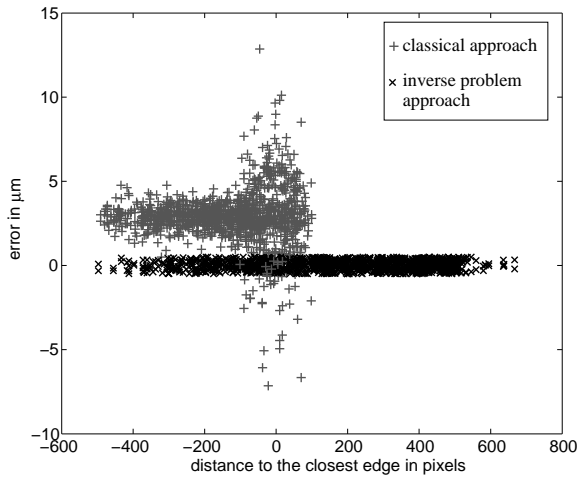


FIG. 4.13 — Comparaison des erreurs latérales (en x et y) de la méthode proposée et de la méthode “classique” en fonction de la distance au bord du capteur.

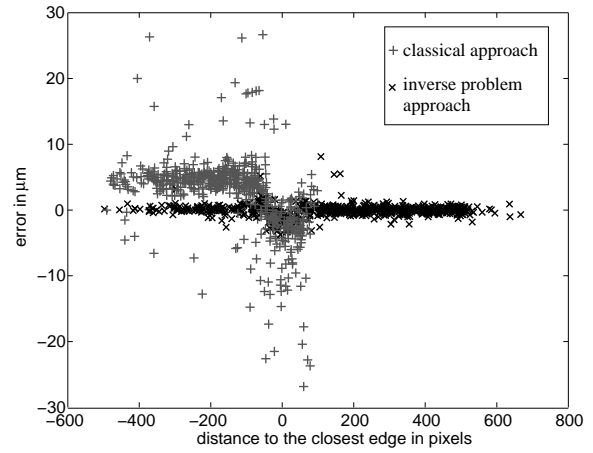


FIG. 4.14 — Comparaison des erreurs longitudinales (en z) de la méthode proposée et de la méthode “classique” en fonction de la distance au bord du capteur.

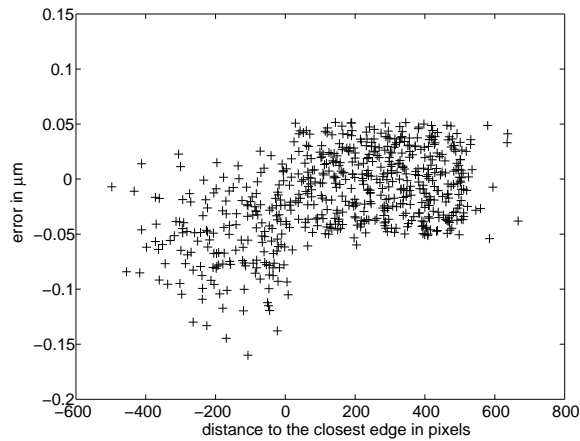


FIG. 4.15 — Erreurs sur le rayon (r) de la méthode proposée en fonction de la distance au bord du capteur.

sion est constante quelque soit la position latérale de la particule et son écart-type est $\Delta x \approx \Delta y \approx 0.3 \mu\text{m}$ soit $1/20$ pixel.

- La figure 4.14 présente les erreurs longitudinales pour les deux méthodes. Là encore, notre méthode améliore grandement la précision des résultats. Son biais est négligeable et son écart-type est de $\Delta z \approx 0.9 \mu\text{m}$ soit $1/7$ pixel. Cette précision est bien supérieure à la résolution optique dans les mêmes conditions ($\delta z \geq \lambda/\Omega^2 = 2.6 \text{ mm}$). Cet écart-type est à peu près constant quelque soit la position latérale de la particule. Sur cette figure, l’oscillation visible au niveau du bord du capteur (abscisse 0), présente pour les deux méthodes, n’a pas encore reçu d’explication satisfaisante.
- Sur la figure 4.15, seules les erreurs de notre méthode sont présentées car les erreurs

de la méthode classique sont trop importantes. En effet cette méthode présente un biais de $-8.8\mu\text{m}$ et un écart-type de $\Delta r \approx 1.8\mu\text{m}$. Contrairement à cette méthode classique, notre méthode permet d'estimer le rayon des particules avec une très grande précision ; son écart type $\Delta r \approx 0.04\mu\text{m}$. Curieusement, alors qu'il n'y a aucun biais pour les particules hors champ, un biais négatif peut être observé pour les particules dans le champ. Ce biais peut être expliqué par une simplification faite dans le modèle : le terme non-linéaire de la figure de diffraction n'est pas tout à fait négligeable dans le calcul du centre de la figure de diffraction, cela provoque une surestimation de la taille du premier lobe de la figure de diffraction et donc une sous estimation du rayon de la particule.

Notre méthode a donc prouvé sur ces simulations sa précision et sa faculté à estimer avec une faible erreur les paramètres des particules hors-champ. Ces caractéristiques doivent donc maintenant être validées sur des données expérimentales.

4.7.2 Analyse d'hogrammes expérimentaux d'un jet rectiligne

Des hologrammes réels ont été obtenus en utilisant un montage d'holographie en ligne comme celui décrit à la figure 4.1. Les caractéristiques de ce montage sont :

Le laser est un laser YAG à double cavité de longueur d'onde 532 nm. Il est capable de générer des impulsions de 7 ns permettant de geler le mouvement des particules lors de l'acquisition. Ce laser est synchronisé avec la caméra de sorte qu'il est possible d'enregistrer des paires d'hogrammes séparés de 100 μs permettant ainsi l'estimation de la vitesse instantanée des particules.

Les particules sont des gouttelettes d'eau injectées à 1 kHz par un injecteur piézoélectrique conçu par l'université de Brème. Il est utilisé en mode mono-disperse, c'est-à-dire pouvant générer des particules de taille constante ajustable entre 50 et 100 μm .

Le capteur est une caméra CCD 12 bits PCO sensicam de 1280×1024 pixels de taille 6.7 μm . Elle est placée à 25 cm de l'injecteur de manière à ne pas perturber l'écoulement. Cela conduit à une ouverture numérique de $\Omega = 0.014$.

Ce montage, installé au laboratoire de mécanique des fluides et acoustique (LMFA) de l'école centrale de Lyon, est prévu pour l'étude de la turbulence homogène isotrope. Pour être capable mieux séparer les effets la turbulence des défauts de notre algorithme, les hologrammes traités ici ont été enregistrés sans turbulence ; les gouttelettes suivant une trajectoire rectiligne accélérant sous l'effet de leur poids.

Le jeu de données expérimentales est composé de 100 paires d'hogrammes comprenant chacun quatre ou cinq figures de diffraction de gouttelettes. Une paire de ces hologrammes est présentée à la figure 4.16. En plus des figures de diffraction, on peut y voir des franges parasites dues aux autres composants du montage et en particulier la vitre sur la caméra. Une partie de ces franges est cependant atténuée en soustrayant un hologramme réalisé sans particule. L'efficacité du gommage des figures de diffraction des particules déjà détectées prouve le bon accord de notre modèle de formation avec la réalité.

Les positions 3D des particules ainsi que leur rayon ont été estimés par notre algorithme. Les six premières itérations de celui-ci sont présentées sur la figure 4.17. Bien que seulement quatre ou cinq particules soient présentes dans le champ du capteur, notre méthode a permis d'estimer les paramètres de 18 particules ! La figure 4.18 est un montage dans lequel l'un des hologrammes traité est superposé avec un hologramme synthétique généré à partir des 18 particules détectées. Ainsi, même sur des données réelles et malgré la présence de franges

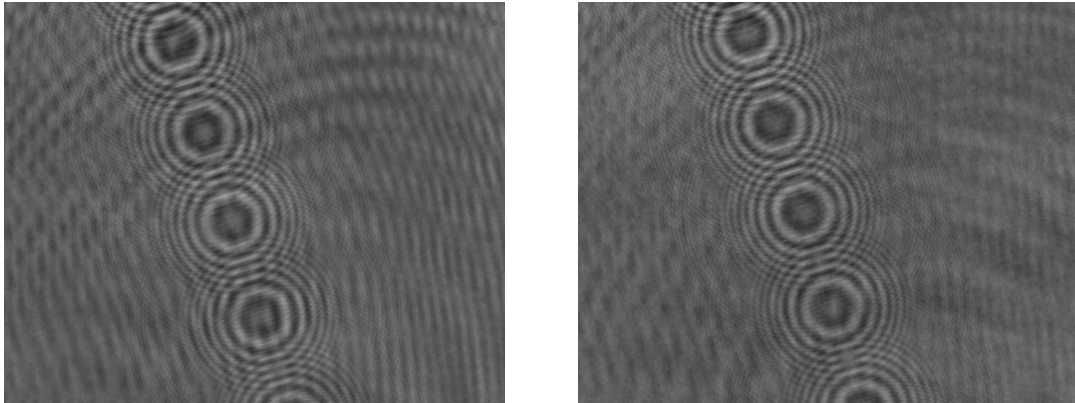


Fig. 4.16 — Paire d'hologrammes expérimentaux pris à $100 \mu\text{s}$ d'intervalle.

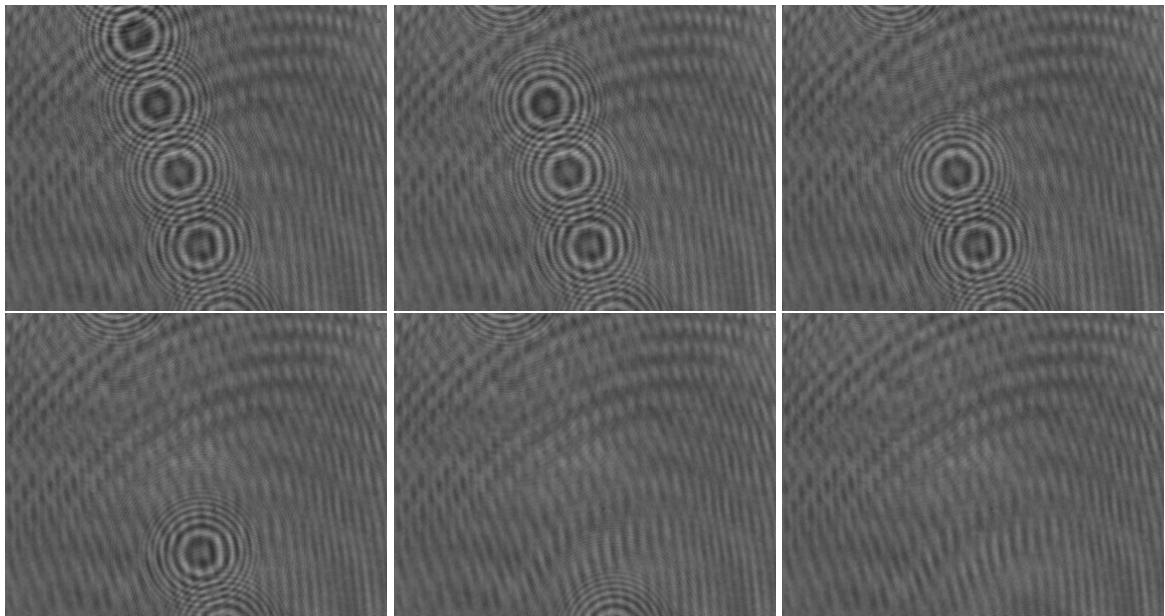


Fig. 4.17 — Résidu calculé au début des 6 premières itérations de l'algorithme.

parasites, notre méthode permet de multiplier par 16 la surface de travail. Cependant, l'extension de cette surface de travail implique de faire des calculs sur des matrices étendues elles aussi à au minimum 4096×3072 pixels, augmentant le temps de calcul. L'exécution de notre algorithme avec un code non optimisé est plutôt longue. Sur un Pentium IV à 3.60 GHz, une itération complète (détection, positionnement fin et calcul des résidus) prend environ 7 minutes par particule détectée. Cependant quelques améliorations pourront permettre de diminuer substantiellement ce temps de calcul.

Toutes les particules détectées sont placées dans la figure en 3-D 4.19. On peut constater que la trajectoire du jet ainsi matérialisé est très proche d'une ligne droite, comme attendu d'après les conditions expérimentales. La position des particules et leur espacement, y compris hors-champ, suit leur trajectoire balistique. On peut observer un élargissement du jet à ses extrémités. Cela s'explique par deux phénomènes (i) une divergence du jet peut être ob-

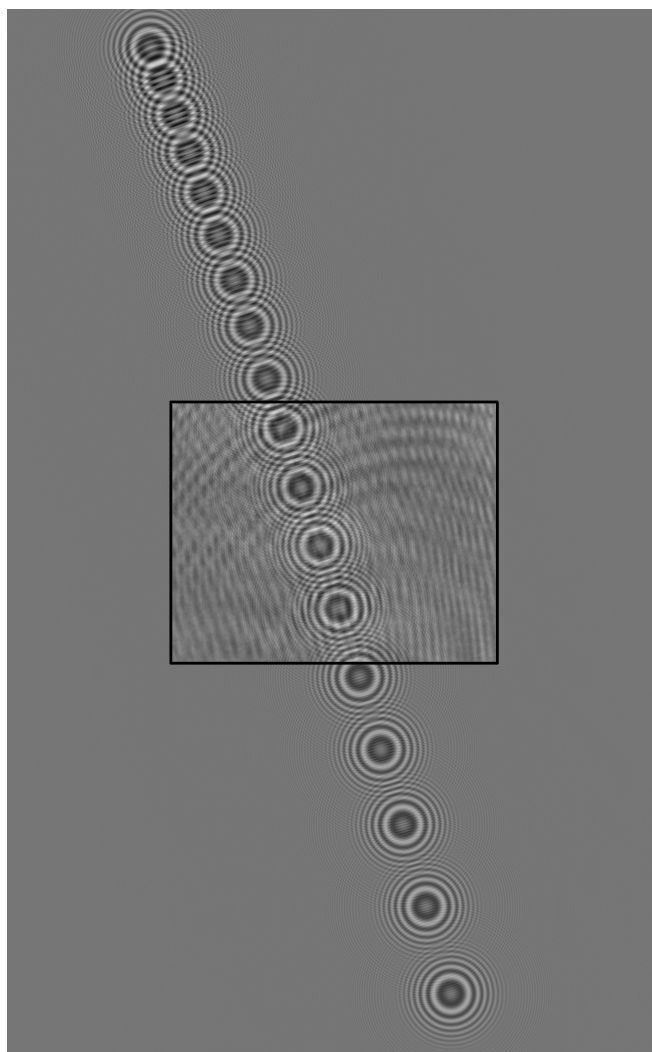


FIG. 4.18 — Superposition d'un hologramme expérimental (à l'intérieur du cadre noir) et d'un hologramme synthétisé à partir des 18 particules détectées dans celui-ci.

servée et semble être due à des vibrations de l'injecteur ; (ii) le rapport signal sur bruit est plus faible pour les particules éloignées des bords du capteur et donc l'estimation de leurs paramètres (en particulier z) est moins précise. Ces imprécisions aux extrémités du jet sont aussi probablement dues au fait qu'à mesure que l'on s'éloigne du centre du capteur les hypothèses effectuées dans le modèle de formation de l'hologramme sont de moins en moins vérifiées. En effet, le faisceau laser est légèrement divergent et les figures de diffraction deviennent de plus en plus elliptiques à mesure que la particule est éloignée de l'axe optique du montage.

L'histogramme des diamètres estimés des particules est présenté sur la figure 4.20. Il possède une belle forme en cloche avec un diamètre moyen de $94.1 \mu\text{m}$ et un écart type de $0.3 \mu\text{m}$ en accord avec les spécifications de l'injecteur. Cet histogramme peut être comparé avec l'histogramme donné par une mesure PDA (pour *Phase Doppler Anemometry*) effectuée par FOURNIER *et al.* (2006) juste avant l'acquisition des hologrammes.

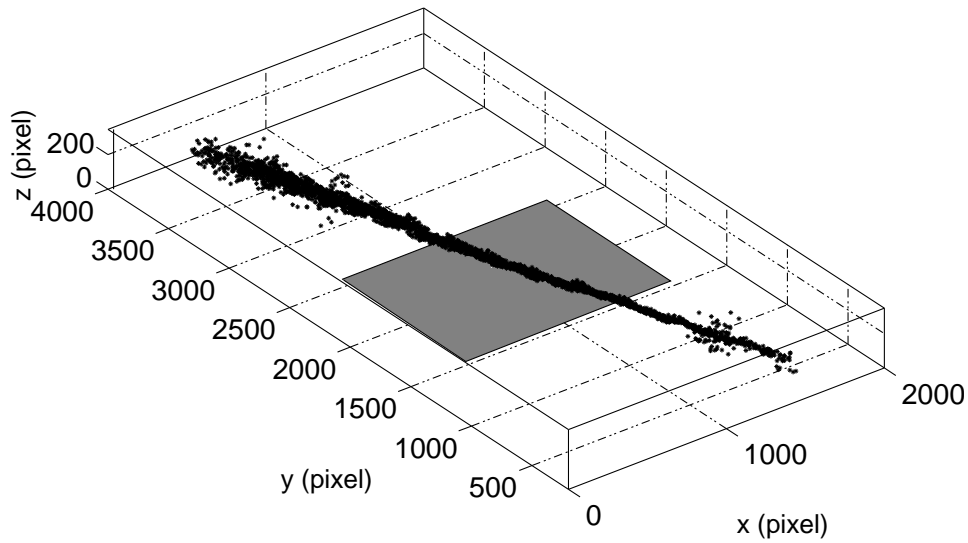


FIG. 4.19 — Représentation en trois dimensions du jet de gouttelettes, obtenue à partir de la position estimée des particules sur les 200 hologrammes.

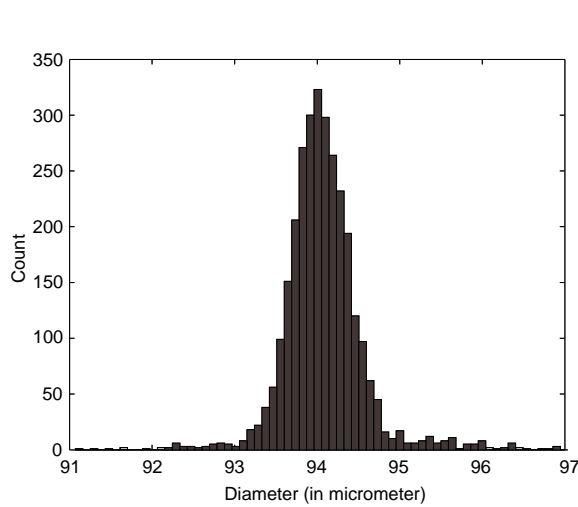


FIG. 4.20 — Histogramme des diamètres estimés à partir de la méthode proposée.

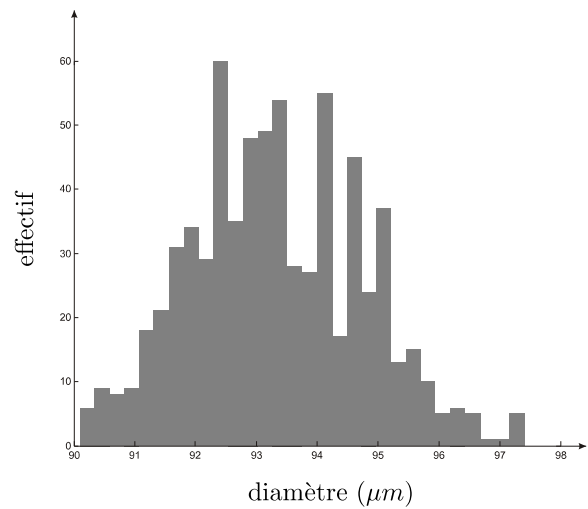


FIG. 4.21 — Histogramme des diamètres estimés par *Phase Doppler Anemometry* lors de la même expérience (d'après FOURNIER *et al.*, 2006).

Il faut toutefois noter que la précision des estimations données par notre algorithme dépend de la précision de la calibration du montage. En effet, on utilise souvent un faisceau laser légèrement divergent pour grossir les figures de diffraction sur le capteur. La précision absolue de la mesure des paramètres de ces particules dépend donc de la précision d'estimation de ce grossissement.

4.8 Conclusion et perspectives

Nous avons présenté dans ce chapitre une méthode pour la mesure de la position et du rayon de particules sphériques. Les paramètres des particules détectées sont ceux qui maximisent l'adéquation entre l'hologramme mesuré et un modèle de formation de celui-ci. Dans ce cadre, nous proposons une méthode itérative utilisant cette approche inverse pour estimer les paramètres de chaque particule. Le fait de mesurer l'adéquation entre le modèle et les données dans le plan de l'hologramme permet de s'affranchir des problèmes de double pic, d'images jumelles et de troncature du champ, inhérents aux méthodes classiquement utilisées. De plus, cela a comme conséquence la possibilité d'utiliser le caractère non localisé de la fonction de Fresnel pour détecter et estimer les paramètres de particules hors du champ du capteur tout en ayant une très bonne précision. Nous avons validé cette caractéristique sur des données expérimentales en détectant des particules sur une surface seize fois plus grande que celle du capteur. Cette caractéristique ouvre de grandes perspectives pour l'utilisation de cette méthode en mécanique des fluides, les phénomènes étudiés nécessitant souvent des champs d'observation étendus. De plus on a pu estimer très précisément la taille de ces particules, ce qui pourra être utilisé pour étudier l'évaporation des gouttelettes lors de leur déplacement dans la turbulence.

Toutefois avant d'envisager une utilisation régulière de cette méthode par des non-spécialistes de l'holographie numérique, des recherches doivent être conduites en particulier suivant deux axes principaux : la caractérisation de cette méthode et l'amélioration et l'accélération des calculs numériques. Naturellement une avancée suivant un de ces axes entraînerait probablement une avancée dans l'autre.

4.8.1 Caractérisation

Étude du modèle de formation des images

Pour élaborer un modèle analytique de formation des images et pour être capable de calculer rapidement plusieurs hypothèses simplificatrices ont été faites. Il serait intéressant d'étudier l'effet de ces simplifications sur la précision de la mesure. En particulier, trois hypothèses majeures ont été faites : les particules sont approximées par des disques parfaits, le front d'onde est supposé plan alors qu'en réalité le faisceau laser est divergent et surtout on a négligé les termes non linéaires des figures de diffraction et leurs interférences.

L'approximation sur la forme des particules semble valide dans le cas de gouttelettes d'eau mais il serait intéressant d'étudier la précision de la méthode dans le cas de traceurs solides comme du pollen par exemple. De plus, il serait intéressant de généraliser cette approche pour d'autres formes de micro-objets comme des fibres par exemple. Dans ce cas cela augmenterait le nombre de paramètres à estimer à 7 paramètres : la position 3D, la largeur, la longueur et l'orientation 3D. L'exploration de l'espace des paramètres sera donc plus compliquée et ne sera pas possible avant une accélération de l'algorithme.

L'utilisation d'un objectif, permet de grossir les figures de diffraction et ainsi d'améliorer la détection des particules, cependant il conduit à un front d'onde sphérique alors que dans l'élaboration de la méthode, nous l'avons considéré plat. Cette approximation peut être responsable d'erreurs dans l'estimation de la profondeur des particules situées loin de l'axe optique.

En effet, si l'on regarde précisément le jet reconstruit sur la figure 4.19 on peut observer un léger biais positif sur l'estimation des profondeurs des particules éloignées du centre du

capteur rendant le jet légèrement incurvé. De plus un tel faisceau divergent peut déformer les figures de diffraction qui ne seront plus des cercles concentriques comme dans notre modèle. Toutefois estimer la déformation de ces figures de diffraction et l'introduire dans le modèle pourrait permettre de corriger ce biais.

Il y a principalement deux termes non-linéaires négligés dans la formation de l'hologramme (Eq. (4.17)). D'abord le terme non-linéaire de la figure de diffraction d'une seule particule et ensuite celui lié aux interférences entre les figures de diffraction des différentes particules. Le premier est toujours supérieur au second et a donc plus d'effet sur l'estimation des paramètres des particules. Ils sont tous les deux relativement basse fréquence et seront dans la pratique probablement indiscernable des franges parasites de l'hologramme. Toutefois leurs impacts sur la précision ne sont pas pour autant négligeables surtout pour le premier terme. En effet, sur les simulations nous avons constaté que ce terme provoque un biais négatif sur l'estimation du rayon des particules dans le champ. Il serait donc intéressant de caractériser son effet sur l'estimation des autres paramètres x, y, z ainsi que α et I_0 . De plus, il serait intéressant d'étudier ce que recouvre exactement le facteur multiplicatif α_n pour voir s'il prend en compte uniquement la variation dans le champ de l'illumination du laser ou si d'autres phénomènes physiques y sont intégrés.

Étude de l'influence des paramètres du montage et des limites de l'approche inverse

L'approche inverse proposée ici est radicalement différente des méthodes classiquement utilisées dans ce domaine. Dans les tests que nous avons effectués pour valider cette approche, l'étape de détection a presque toujours été davantage limitée par les ressources et le temps nécessaire pour le calcul du critère que par des limites liées à la physique et aux paramètres du montage. C'est pourquoi il reste à caractériser l'influence des conditions expérimentales (facteur de quantification, taux de remplissage des pixels, niveau de bruit. . .) sur la précision et les limites de l'algorithme. Ceci est étudié par Jérôme Gire dans le cadre de sa thèse au LaHC. Il a en particulier étudié les performances de l'algorithme en fonction du rapport signal sur bruit publiées dans (GIRE *et al.*, 2008).

Par la suite, cette étude de l'influence des conditions expérimentales pourra conduire à modifier les paramètres classiquement utilisés (la distance entre le volume d'étude et le capteur, le grossissement. . .) pour améliorer la taille du champ ou la précision de notre méthode ; en particulier, le taux de remplissage et le niveau de quantification, par leur effet de lissage, ont un impact beaucoup plus important sur notre approche que sur les approches classiques.

4.8.2 Amélioration et accélération de l'algorithme

Accélération de l'algorithme : détections multiples Actuellement le principal point faible de la méthode proposée est la durée nécessaire au calcul (7 minutes par particule dans l'expérience décrite Sec. 4.7.2). Cependant le temps de calcul n'ayant pas été pris en compte dans l'élaboration de la méthode, celui-ci devrait pouvoir être drastiquement réduit. Outre l'adaptation du code pour une exécution parallélisée et les astuces numériques envisageables comme le pré-calcul et la tabulation de certaines fonctions utilisées à de très nombreuses reprises (en particulier les fonctions de Bessel), une amélioration évidente pourrait être de détecter plusieurs particules à chaque itération. Ceci peut être fait en segmentant la carte du critère obtenu à l'étape de détection. En effet, on peut constater à la figure 4.10 que plusieurs maxima locaux sont visibles sur la même carte du critère. Par le biais d'une segmentation adaptée à ce critère il devrait être possible à chaque étape de détection de localiser plusieurs particules à la fois.

Il est même probable que par ce biais, quelques étapes de détection pourraient permettre de détecter toutes les particules dans le champ.

Approche MAP Pour détecter un maximum de particules à chaque passe avec un minimum de fausses détections, il sera nécessaire d'adapter cette segmentation à notre problème. Or, on sait que d'après les équations (4.63) et (4.65) l'expression de ce critère et celle du facteur multiplicatif optimal α^+ sont très proches. Il est donc possible d'élaborer une segmentation du critère en prenant en compte des *a priori* sur ce facteur. Cela pourra se faire dans une approche *maximum a posteriori* en utilisant un terme d'*a priori* sur, par exemple, la variation spatiale du facteur α . En effet, on constate expérimentalement, que ce facteur est maximum au centre du capteur et décroît continuellement à mesure que l'on s'en éloigne.

Conclusion

Dans ce manuscrit nous avons présenté l'approche inverse appliquée à la déconvolution aveugle et à l'holographie numérique. Dans ces deux cas nous avons montré les avantages à utiliser la totalité des données disponibles et leur modèle de formation dans un cadre unifié. L'utilisation de modèles réalistes de formation des données et la prise en compte des redondances entre les différentes dimensions de l'objet, a permis de contraindre le problème de reconstruction et de minimiser le biais introduit par les *a priori*. Il a même été possible d'extraire des informations invisibles à première vue en utilisant, par exemple, des modèles de formation (le flou ou la diffraction) pour estimer l'objet à des endroits non mesurés (cas du démosaïçage) ou même en dehors du champ du capteur (imagerie multi-spectrale pour SNIFS et holographie numérique).

La méthode proposée pour la déconvolution, aveugle ou non, de données multidimensionnelles hétérogènes a été utilisée avec succès dans plusieurs applications différentes. La déconvolution d'images multi-spectrales acquises pour l'étude des supernovæ a mis en évidence l'intérêt de traiter en une seule fois le cube des données en utilisant les redondances dans les différentes dimensions pour permettre une bonne restauration de ces données très dégradées (flou très large et bruit important). Dans ce cas, la largeur importante de la PSF a donné lieu à une extrapolation très correcte de l'objet hors du champ du capteur. Cette possibilité d'utiliser le flou pour estimer les zones non mesurées des données a aussi été utilisée pour l'interpolation des canaux RGB en imagerie couleur de Bayer, montrant l'intérêt de procéder conjointement à la déconvolution et au démosaïçage plutôt que séquentiellement. Enfin, dans le cas de la déconvolution aveugle de séquences vidéo, l'hypothèse d'invariance temporelle de la PSF, a conduit à une estimation pertinente de celle-ci en multipliant les données accessibles pour cette estimation. La variété des domaines d'application testés (imagerie multi-spectrale, imagerie de Bayer, microscopie, microscopie confocale, coronarographie), avec leurs propres défauts (bruit de nature et de niveau différent, présence de lacune dans les données...) a mis en évidence la pertinence et la robustesse de notre démarche.

Cette approche adaptée à la détection de micro-particules en holographie numérique, en s'affranchissant des étapes intermédiaires de restitution et de segmentation, a conduit à des mesures de position 3D et de diamètre des gouttelettes avec des précisions bien supérieures à celles obtenues avec les méthodes classiquement utilisées. De plus pour la première fois, cet algorithme a permis de détecter des particules bien au delà des limites latérale du capteur, multipliant, dans notre expérience, par 16 le volume utile pour la mesure des écoulements.

Maintenant que ces méthodes ont montré leur intérêt, se pose la question de leur mise en œuvre pratique pour les différentes applications évoquées. Devant le volume de données très important qu'il est actuellement possible d'acquérir, ces méthodes achoppent sur deux problèmes principaux : l'automatisation des réglages et l'accélération des calculs.

L'accélération des calculs numériques de ces méthodes itératives passe par deux axes : la diminution du temps de calcul d'une itération et la diminution du nombre total d'itérations. D'un point de vue technique le premier est possible par la parallélisation permettant l'exécution des calculs sur des architectures distribuées et surtout sur des processeurs de cartes graphiques dont le récent boum laisse entrevoir des gains importants. L'autre axe, plus fondamental, est l'élaboration de préconditionneurs permettant de diminuer le nombre d'itérations nécessaire avant la convergence. A la différence de la parallélisation, le préconditionnement est spécifique à chaque problème et nécessite une compréhension fine du modèle direct et des *a priori* utilisés.

En revanche, l'automatisation des réglages des hyper-paramètres, semble à l'heure actuelle plus difficile à entrevoir. Même si les méthodes proposées sont pour l'instant loin de faire l'unanimité, la recherche de méthodes de réglages automatique est un domaine très actif et, à moyen terme, des avancées sont à attendre dans ce domaine. A court terme, il est plus facile d'envisager de réaliser une méthode de réglage supervisée dont les paramètres auront des grandeurs physiques intelligibles par l'utilisateur final (*e.g.* résolution effective). L'utilisateur sera ainsi guidé dans le réglage et ne devra faire que quelques essais avant d'avoir une reconstruction satisfaisante. Notons que pour faire quelques essais de reconstruction, l'algorithme devra être suffisamment rapide. Une autre voie possible pour accélérer le calcul serait de relaxer progressivement les hyper-paramètres jusqu'à leur optimum pour accélérer la minimisation de la fonction de coût.

Une fois ces limites en partie dépassées, ces méthodes pourraient être adaptées à de nombreuses applications comme par exemple la tomographie CT ou PET, la microscopie holographique... De nombreuses autres améliorations des algorithmes présentés sont envisageables, elles sont principalement la définition d'*a priori* plus pertinents et une augmentation de la précision des modèles directs telle que, par exemple, la prise en compte des termes non linéaires en holographie numérique, ou de l'anisoplanétisme en déconvolution aveugle.

D'une manière plus générale, nous retirerons de ces quatre années de thèse deux enseignements principaux :

Tout d'abord, sur le plan technique, ce travail montre l'intérêt qu'il y a à effectuer le moins de tâches séquentielles possibles et d'établir à la place, un schéma unifié ayant pour but la mesure des paramètres d'intérêt. En effet les erreurs des différents étages risquent d'être accumulées et même multipliées par les étages suivants sans pouvoir être compensées *a posteriori*. Dans tous les cas présentés dans ce manuscrit, en nous contraignant à définir un modèle direct établissant les liens de causalité entre les paramètres recherchés avec les mesures, l'approche inverse nous a conduit à ne pas trop recourir à des pré-traitements des mesures ou des post-traitements des paramètres estimés. Cela peut particulièrement être remarqué dans le cas de la déconvolution et du démosaïçage conjoint en imagerie de Bayer et plus encore en holographie numérique. Un travail (non détaillé dans ce document) réalisé récemment avec Eric Thiébaud et Sébastien Bongard pour l'extraction des spectres de supernovæ dans le cadre de SNIF est venu dernièrement confirmer ce fait.

L'autre enseignement, plus personnel, que j'ai pu, retirer de cette thèse concerne le plan humain de la vie scientifique. Au cours de ces quatre années, ma position entre deux (voir trois si l'on inclut CPE-Lyon) laboratoires, l'acquisition des données présentées ici et les communications sur mes travaux, m'ont conduit à rencontrer des personnes travaillant dans des domaines scientifiques très différents : des astrophysiciens au CRAL et à la conférence ADA

V, des opticiens au LaHC et aux journées du GdR ISIS, des biologistes au CCQ, des cardiologues à l'Hôpital de la Croix-Rousse, et bien évidemment des spécialistes du traitement du signal et des images au GdR, à EUSIPCO et à ICIP. Si ce brassage est surtout dû à l'aspect central des problèmes de traitement du signal pour toute personne effectuant des mesures, il a pour conséquence un passage de concepts d'un domaine à un autre. En effet dans ces échanges trans-disciplinaires, il est souvent apparu que les problèmes traités par chacun de nous étaient très proches et qu'un vocabulaire et un formalisme différent recouvraient souvent des concepts similaires ayant conduit à découvrir plusieurs fois des méthodes quasi-identiques ; l'algorithme RLA / EM en est l'exemple typique. La mise en commun des problématiques permet donc, par une sorte d'ensemencement croisé, de progresser plus vite dans la résolution des problèmes propres aux différents domaines. Par exemple, les algorithmes venant de l'astronomie utilisés pour la déconvolution aveugle de séquences biomédicales ont par la suite servis de base pour la méthode de déconvolution multi-spectrale en astronomie.

Bibliographie

- J.A. Aguilera, C. Aragón et J. Bengoechea. Spatial characterization of laser-induced plasmas by deconvolution of spatially resolved spectra. *Appl. Opt.*, 42(30) :5938–5946, 2003.
- G. Aldering, G. Adam, P. Antilogus, P. Astier, R. Bacon, S. Bongard, C. Bonnaud, Y. Copin, D. Hardin, F. Henault, D. A. Howell, J.-P. Lemonnier, J.-M. Levy, S. C. Loken, P. E. Nugent, R. Pain, A. Pecontal, E. Pecontal, S. Perlmutter, R. M. Quimby, K. Schahmaneche, G. Smadja et W. M. Wood-Vasey. Overview of the nearby supernova factory. In J. A. Tyson et S. Wolff, editors, *Survey and Other Telescope Technologies and Discoveries. Edited by Tyson, J. Anthony; Wolff, Sidney. Proceedings of the SPIE, Volume 4836, pp. 61-72 (2002).*, volume 4836 of *Presented at the Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference*, pages 61–72, December 2002.
- D. Alleysson. 30 ans de démosaïcage – 30 years of demosaicing. *Trait. signal*, 21(6) :561–581, 2004.
- D. Alleysson, S. Susstrunk et J. Herault. Linear demosaicing inspired by the human visual system. *IEEE Trans. Image Process.*, 14(4) :439–449, 2005. ISSN 1057-7149.
- GR Ayers et J.C. Dainty. Iterative blind deconvolution method and its applications. *Opt. Lett.*, 13(7) :547–549, 1988.
- MR Banham et AK Katsaggelos. Digital image restoration. *IEEE signal processing magazine*, 14(2) :24–41, 1997.
- B.E. Bayer. Color imaging array. United States Patent 3,971,065, 1976.
- T Bayes. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 53(-1) :370–418, 1763.
- J. Besag. On the statistical analysis of dirty pictures. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 48(3) :259–302, 1986.
- A. Blazit, X. Rondeau, É. Thiébaud, L. Abe, J.C. Bernengo, J.L. Chevassut, J.M. Clause, J.P. Dubois, R. Foy et D. Mourard. New generation photon-counting cameras : algol and cpng. *Applied Optics*, 47(8) :1141–1151, 2008.
- P. Blomgren et TF Chan. Color TV : total variation methods for restoration of vector-valued images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3) :304–309, 1998.
- Sébastien Bongard. *Transfert radiatif et étude spectrale des SNeIa dans le cadre de la Supernovae factory*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard - Lyon and University of Oklahoma, 4 oct. 2005.

- X. Bresson et T.F. Chan. Fast dual minimization of the vectorial total variation norm and applications to color image processing. *Inverse Problems and Imaging*, 2(4) :455–484, 2008.
- A.M. Bronstein, M.M. Bronstein et M. Zibulevsky. Relative optimization for blind deconvolution. *IEEE Trans. Signal Process.*, 53(6) :2018–2026, 2005a. ISSN 1053-587X.
- M.M. Bronstein, A.M. Bronstein, M. Zibulevsky et Y.Y. Zeevi. Blind deconvolution of images using optimal sparse representations. *IEEE Trans. Image Process.*, 14(6) :726–736, 2005b. ISSN 1057-7149.
- C. Buraga-Lefebvre, S. Coëtmellec, D. Lebrun et C. Özkul. Application of wavelet transform to hologram analysis : three-dimensional location of particles. *Optics and Lasers in Engineering*, 33(6) :409–421, 2000.
- J.J. Bussgang. Crosscorrelation functions of amplitude-distorted gaussian signals. Technical report, Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology, 1952.
- Richard H. Byrd, Jorge Nocedal et Robert B. Schnabel. Representations of quasi-newton matrices and their use in limited memory methods. *Math. Program.*, 63(2) :129–156, 1994. ISSN 0025-5610.
- Richard H. Byrd, Peihuang Lu, Jorge Nocedal et Ci You Zhu. A limited memory algorithm for bound constrained optimization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 16(6) :1190–1208, 1995.
- P. Campisi, A. Neri, S. Colonnese, G. Panci et G. Scarano. Blind image deconvolution using bussgang techniques : Applications to image deblurring and texture synthesis. In P. Campisi et K. Egiazarian, editors, *Blind image deconvolution : theory and application*, chapter 2, pages 43–93. CRC, 2007.
- E.J. Candes et M.B. Wakin. An introduction to compressive sampling [a sensing/sampling paradigm that goes against the common knowledge in data acquisition]. *IEEE Signal Process. Mag.*, 25(2) :21–30, 2008. ISSN 1053-5888.
- M. Cannon. Blind deconvolution of spatially invariant image blurs with phase. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 24(1) :58–63, 1976. ISSN 0096-3518.
- A.S. Carasso. Direct blind deconvolution. *SIAM J. Appl. Math.*, 61(6) :1980–2007, 2001.
- B. Chalmond. Psf estimation for image deblurring. *CVGIP : Graphical Models and Image Processing*, 53(4) :364–372, 1991.
- T.F. Chan et Chiu-Kwong Wong. Total variation blind deconvolution. *IEEE Trans. Image Process.*, 7(3) :370–375, 1998. ISSN 1057-7149.
- Tony F. Chan et C.K. Wong. Convergence of the alternating minimization algorithm for blind deconvolution. *Linear Algebra and its Applications*, 316 :259–285, apr 2000.
- Lanlan Chang et Yap-Peng Tan. Hybrid color filter array demosaicking for effective artifact suppression. *Journal of Electronic Imaging*, 15(1) :3003–+, Jan-Mar 2006.

- M.M. Chang, A.M. Tekalp et A.T. Erdem. Blur identification using the bispectrum. *IEEE Trans. Signal Process.*, 39(10) :2323–2325, 1991. ISSN 1053-587X.
- G Chantas, N Galatsanos, A Likas et M Saunders. Variational bayesian image restoration based on a product of t-distributions image priors. *IEEE Trans. Image Process.*, to appear.
- P. Charbonnier, L. Blanc-Feraud, G. Aubert et M. Barlaud. Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 6(2) :298–311, 1997.
- Li Chen et Kim-Hui Yap. A soft double regularization approach to parametric blind image deconvolution. *IEEE Trans. Image Process.*, 14(5) :624–633, 2005. ISSN 1057-7149.
- G. Chenegros, L.M. Mugnier, F. Lacombe et M. Glanc. 3d phase diversity : a myopic deconvolution method for short-exposure images : application to retinal imaging. *Journal of the Optical Society of America A*, 24(5) :1349–1357, 2007.
- C.-M. Cho et H.-S. Don. Blur identification and image restoration using a multilayer neural network. In *Proc. IEEE International Joint Conference on Neural Networks*, pages 2558–2563 vol.3, 1991. doi : 10.1109/IJCNN.1991.170774.
- Christopher D. Claxton et Richard C. Staunton. Measurement of the point-spread function of a noisy imaging system. *J. Opt. Soc. Am. A*, 25(1) :159–170, 2008.
- D.R. Cok. Signal processing method and apparatus for sampled image signals. US Patent 4,630,307, December 16 1986.
- Jean-Marc Conan, Laurent M. Mugnier, Thierry Fusco, Vincent Michau et Gérard Rousset. Myopic deconvolution of adaptive optics images by use of object and point-spread function power spectra. *Appl. Opt.*, 37(21) :4614–4622, 1998.
- F. Courbin, P. Magain, M. Kirkove et S. Sohy. A method for spatial deconvolution of spectra. *The Astrophysical Journal*, 529 :1136–1144, February 2000.
- M. E. Daube-Witherspoon et G. Muehllehner. An iterative image space reconstruction algorithm suitable for volume ECT. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 5(2) :61–66, 1986.
- Jeremy de Jong et Hui Meng. Digital holographic particle validation via complex wave. *Appl. Opt.*, 46(31) :7652–7661, 2007.
- J.M. Delvit, D. Leger, S. Roques et C. Valorge. Modulation transfer function and noise measurement using neural networks. In *Proc. NNSP'03 Neural Networks for Signal Processing 2003 IEEE 13th Workshop on*, pages 131–140, 2003.
- G. Demoment, J. Idier, J.F. Giovannelli et A. Mohammad-Djafari. Problèmes inverses en traitement du signal et de l'image. *Techniques de l'ingénieur. Télécoms*, 5(TE 5235) :235–1–235–25, 2001.
- A.P. Dempster, N.M. Laird et D.B. Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 39(1) :1–38, 1977.

- L. Denis. *Traitement et analyse quantitative d'hologrammes numériques*. Thèse de doctorat, Université Jean Monnet, 2006.
- L. Denis, C. Fournier, T. Fournel, C. Ducottet et D. Jeulin. Direct extraction of mean particle size from a digital hologram. *Applied Optics*, 45(5) :944–952, 2006.
- L. Denis, T. Fournel, C. Fournier et D. Jeulin. Reconstruction of the rose of directions from a digital microhologram of fibres. *Journal of Microscopy*, 225(10) :283–292, March 2007.
- Yu. N. Denisyuk. Photographic reconstruction of the optical properties of an object in its own scattered radiation field. *Sov. Phys.-Dokl.*, 7 :543, 1962.
- P.L.P. Dillon. Color imaging array, September 6 1977.
- D. L. Donoho. De-noising by soft-thresholding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 41 : 613–627, 1995.
- D.L. Donoho. Compressed sensing. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 52(4) :1289–1306, 2006.
- J.D. Drummond. Adaptive optics lorentzian point spread function. *Proceedings of SPIE*, 3353 : 1030, 1998.
- M. Elad. On the origin of the bilateral filter and ways to improve it. *IEEE Trans. Image Process.*, 11(10) :1141–1151, 2002. ISSN 1057-7149.
- S. Farsiu, M. Elad et P. Milanfar. A practical approach to superresolution. *Proceedings of SPIE*, 6077 :24–38, 2006.
- J.R. Fienup. Phase retrieval algorithms : a comparison. *Applied Optics*, 21(15) :2758–2769, 1982.
- C. Fournier. *Holographie Numérique pour la Vélocimétrie par Images de Particules : extraction des 3 composantes du champ de vitesse dans un volume*. Thèse de doctorat, Université Jean Monnet, 2003.
- C. Fournier, C. Ducottet et T. Fournel. Digital in-line holography : influence of the reconstruction function on the axial profile of a reconstructed particle image. *Measurement Science and Technology*, 15 :686–693, 2004.
- C. Fournier, C. Goepfert, Marié J.L., L. Denis, F. Soulez, M. Lance et J.P. Schon. Digital holography compared to phase doppler anemometry : Study of an experimental droplet flow. In *12th International Symposium on Flow Visualization*, Göttingen, Germany, 2006.
- Corinne Fournier, Loïc Denis, Ferreol Soulez et Eric Thiebaut. Holographie Numérique de microparticules : amélioration du positionnement grâce à une approche problèmes inverses. In *7ème colloque francophone "Méthodes et techniques optiques pour l'industrie"*, Mulhouse France, 11 2006a.
- Corinne Fournier, Charles Goepfert, Jean-Louis Marié, Loïc Denis, Ferréol Soulez, Michel Lance et Jean-Paul Schon. Digital Holography compared to Phase Doppler Anemometry : study of an experimental droplet flow. In Optimage Ltd, editor, *Proceedings of the 12th International Symposium on Flow Visualization 12th International Symposium on Flow Visualization*, pages ISBN 0–9533991–8–4, Göttingen Allemagne, 09 2006b.

- Corinne Fournier, Jérôme Gire, Loïc Denis, Eric Thiebaut, Ferreol Soulez et Christophe Ducottet. "Inverse problems" approach for digital in-line holography : influence of experimental parameters and benefits. In *Workshop on Digital Holographic Reconstruction and Optical Tomography for Engineering Applications* Workshop on Digital Holographic Reconstruction and Optical Tomography for Engineering Applications, page ISBN 978 0 947974 56 5, Loughborough Royaume-Uni, 04 2007. Loughborough University.
- W.T. Freeman. Median filter for reconstructing missing color samples. US Patent 4,724,395, February 9 1988.
- D. Gabor. A new microscope principle. *Nature*, 161 :777, 1948.
- D. Geman. Stochastic model for boundary detection. *Image Vision Comput.*, 5(2) :61–65, 1987. ISSN 0262-8856.
- D. Geman et G. Reynolds. Constrained restoration and the recovery of discontinuities. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(3) :367–383, 1992.
- S. Geman et D.E. McClure. Bayesian image analysis : an application to single photon emission tomography. *Proc. Statist. Comput. sect. Amer. Stat. Assoc.*, pages 12–18, 1985.
- R.W. Gerchberg et W.O. Saxton. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures. *Optik Vol.*, 35(2) :237–246, 1972.
- Sebastien Gilles. *Spectrophotometrie des supernovae de type Ia : extraction des donnees de SNIFS et premiers resultats*. Thèse de doctorat, Université Denis Diderot - Paris VII, dec. 2006.
- J.F. Giovannelli et A. Coulais. Positive deconvolution for superimposed extended source and point sources. *Astronomy and Astrophysics*, 439(1) :401–412, 2005.
- Jérôme Gire, Loïc Denis, Corinne Fournier, Eric Thiebaut, Ferreol Soulez et Christophe Ducottet. Digital holography of particles : benefits of the "inverse problem" approach. *Measurement Science & Technology*, 19 :074005, 05 2008.
- Gene H. Golub, Michael Heath et Grace Wahba. Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 21 :215–223, 1979.
- RA Gonsalves. Phase retrieval and diversity in adaptive optics. *Optical Engineering*, 21 :829–832, 1982.
- J.W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. Mc Graw-Hill, 1996.
- J.W. Goodman. *Introduction à l'optique de Fourier et à l'holographie*. Masson, Paris, 1972.
- F. Goudail, O. Ruch et P. Refregier. Deconvolution of several versions of a scene perturbed by different defocus blurs : influence of kernel diameters on restoration quality and on robustness to kernel estimation. *APPLIED OPTICS*, 39(35) :6602–6612, 2000.
- R.M. Gray. *Toeplitz and Circulant Matrices : A Review*. Now Publishers Inc, 2006.
- B.K. Gunturk, Y. Altunbasak et R.M. Mersereau. Color plane interpolation using alternating projections. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 11(9) :997–1013, Sept. 2002.

- J. Hadamard. Sur les problemes aux derivees partielles et leur signification physique. *Bull. Univ. Princeton*, 13 :49–52, 1902.
- JF Hamilton et JE Adams. Adaptive color plane interpolation in single sensor color electronic camera. US Patent 5,629,734, May 13 1997.
- P. C. Hansen. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the l-curve. *SIAM Rev.*, 34 (4) :561–580, 1992. ISSN 0036-1445.
- Wei-Guo He, Shao-Fa Li et Gui-Wu Hu. Blur identification using an adaptive adaline network. In *Proc. International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, volume 9, pages 5314–5317 Vol. 9, 2005. doi : 10.1109/ICMLC.2005.1527882.
- T.J. Hebert. Statistical stopping criteria for iterative maximum likelihood reconstruction of emission images. *Phys. Med. Biol*, 35(9) :1221–32, 1990.
- K. Hirakawa et T.W. Parks. Adaptive homogeneity-directed demosaicing algorithm. *IEEE Trans. Image Process.*, 14(3) :360–369, 2005. ISSN 1057-7149.
- Keigo Hirakawa et Thomas W Parks. Joint demosaicing and denoising. *IEEE Trans Image Process*, 15(8) :2146–2157, Aug 2006.
- Timothy J. Holmes. Blind deconvolution of quantum-limited incoherent imagery : maximum-likelihood approachgi. *J. Opt. Soc. Am. A*, 9(7) :1052, 1992.
- Erik F. Y. Hom, Franck Marchis, Timothy K. Lee, Sebastian Haase, David A. Agard et John W. Sedat. Aida : an adaptive image deconvolution algorithm with application to multi-frame and three-dimensional data. *J. Opt. Soc. Am. A*, 24(6) :1580–1600, 2007.
- J. Högbom. Aperture synthesis with a non-regular distribution of interferometer baselines. *A&AS*, 15 :417–426, 1974.
- G. Jacovitti et A. Neri. A bayesian approach to 2d non minimum phase ar identification. In *Proc. Fifth ASSP Workshop on Spectrum Estimation and Modeling*, pages 79–83, 1990. doi : 10.1109/SPECT.1990.205550.
- M. Jacquot et P. Sandoz. Sampling of 2D images : keep free from spectrum overlapping and ghost detection. *Optical Engineering*, 43(1) :214–223, 2004.
- A. Jalobeanu, J. Zerubia et L. Blanc-Feraud. Bayesian estimation of blur and noise in remote sensing imaging. In P. Campizi et K. Egiazarian, editors, *Blind image deconvolution : theory and application*, chapter 6, pages 239–275. CRC, 2007.
- S.M Jefferies et J.C Christou. Restoration of astronomical images by iterative blind deconvolution. *Astrophysical Journal*, 415 :862–874, oct 1993.
- J. Kalifa, S. Mallat et B. Rouge. Deconvolution by thresholding in mirror wavelet bases. *IEEE Trans. on Image Processing*, 12(4) :446–457, apr 2003.
- V. Katkovnik, K. Egiazarian et J. Astola. A spatially adaptive nonparametric regression image deblurring. *IEEE Trans. Image Process.*, 14(10) :1469–1478, 2005. ISSN 1057-7149.

- A.K. Katsaggelos. *Digital image restoration*. Lecture Notes in Mathematics 1832, 1991.
- S. Kirkpatrick, CD Gelatt et MP Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220 (4598) :671–680, 1983.
- T.M. Kreis. *Handbook of Holographic Interferometry*. Wiley-Vch, 2005.
- T.M. Kreis, M. Adams et W. Juptner. Methods of digital holography : A comparison. In *SPIE97*, volume 3098, pages 224–233, Munich, Germany, 1997.
- H. Krim, D. Tucker, S. Mallat et D. Donoho. On denoising and best signal representation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 45(7) :2225–2238, 1999.
- M. A. Kronrod, N. S. Merzlyakov et L. Yaroslavskii. Reconstruction of a hologram with a computer. *Sov. Phys. Tech. Phys.*, 17 :333–334, 1972.
- D. Kundur et D. Hatzinakos. Blind image deconvolution revisited. *IEEE Signal Process. Mag.*, 13(6) :61–63, 1996a. ISSN 1053-5888.
- D. Kundur et D. Hatzinakos. Blind image deconvolution. *IEEE Signal Process. Mag.*, 13(3) : 43–64, 1996b. ISSN 1053-5888.
- D. Kundur et D. Hatzinakos. On the use of lyapunov criteria to analyze the convergence of blind deconvolution algorithms. *IEEE Transactions on Image Processing*, 46(11) :2918–2925, nov 1998a.
- Deepa Kundur et Dimitrios Hatzinakos. A novel blind deconvolution scheme for image restoration using recursive filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46(2) :375–390, 1998b.
- L. Landweber. An iteration formula for fredholm integral equations of the first kind. *American Journal of Mathematics*, 73(3) :615–624, 1951.
- R. G. Lane. Blind deconvolution of speckle images. *J. Opt. Soc. Am. A*, 9(9) :1508, 1992.
- R. G. Lane. Methods for maximum-likelihood deconvolution. *J. Opt. Soc. Am. A*, 13(10) : 1992–1998, 1996.
- R. G. Lane et R. H. T. Bates. Automatic multidimensional deconvolution. *J. Opt. Soc. Am. A*, 4 (1) :180–188, 1987.
- H. Lantéri, M. Roche et C. Aime. Penalized maximum likelihood image restoration with positivity constraints : multiplicative algorithms. *Inverse Problems*, 18 :1397–1419, 2002.
- P. S. Laplace. Mémoire sur la probabilité des causes par les événements. Mémoires de mathématique et de physique présentés à l'Académie royale des sciences par divers savants et lus dans ses assemblées, 1774.
- H.C. Lee. Review of image-blur models in a photographic system using the principles of optics. *Optical Engineering*, 29 :405, 1990.
- S.H. Lee, Y. Roichman, G.R. Yi, S.H. Kim, S.M. Yang, A. van Blaaderen, P. van Oostrum et D.G. Grier. Characterizing and tracking single colloidal particles with video holographic microscopy. *Optics Express*, 15(26) :18275–18282, 2007.

- E.N. Leith et J. Upatnieks. Reconstructed wavefronts and communication theory. *J. Opt. Soc. Am.*, 52(10) :1123–1130, 1962.
- Claude Lemaréchal. *Maximum Entropy and Bayesian Methods*, chapter Duality without tears, pages 127–132. Kluwers Academic, 1993.
- K. Levenberg. A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares. *Q. Appl. Math.*, 2 :164–168, 1944.
- Xin Li et M.T. Orchard. New edge-directed interpolation. *IEEE Trans. Image Process.*, 10(10) : 1521–1527, 2001. ISSN 1057-7149.
- M. Liebling, T. Blu et M. Unser. Fresnelets : New multiresolution wavelet bases for digital holography. *IEEE Transactions on image processing*, 12(1) :29–43, 2003.
- A. Likas et N. P. Galatsanos. Bayesian methods based on variational approximation for blind image deconvolution. In P. Campizi et K. Egiazarian, editors, *Blind image deconvolution : theory and application*, chapter 4, pages 141–169. CRC, 2007.
- Dong C. Liu et Jorge Nocedal. On the limited memory bfgs method for large scale optimization. *Math. Programming*, 45(3) :503–528, 1989.
- L. B. Lucy. An iterative technique for the rectification of observed distributions. *Astron. J.*, 79 : 745–754, 1974.
- LB Lucy et JR Walsh. Iterative techniques for the decomposition of long-slit spectra. *The Astronomical Journal*, 125(4) :2266–2275, 2003.
- P. Magain, F. Courbin et S. Sohy. Deconvolution with correct sampling. *The Astrophysical Journal*, 494(1) :472–477, Feb. 1998.
- M. Malek, D. Allano, S. Coetmellec et D. Lebrun. Digital in-line holography : influence of the shadow density on particle field extraction. *Optics Express*, 12(10) :2270–2279, 2004.
- B.C. Mc Callum. Blind deconvolution by simulated annealing. *Optics Communications*, 75(2) : 101–105, 1990.
- H. Meng, W.L. Anderson, F. Hussain et D.D. Liu. Intrinsic speckle noise in in-line particle holography. *J. Opt. Soc. Am. A*, 10(9) :2046–2058, 1993.
- O.V. Michailovich et D.R. Adam. Deconvolution of medical images from microscopic to whole body images. In P. Campizi et K. Egiazarian, editors, *Blind image deconvolution : theory and application*, chapter 5, pages 169–237. CRC, 2007.
- M. Mignotte. A segmentation-based regularization term for image deconvolution. *IEEE Trans. Image Process.*, 15(7) :1973–1984, 2006. ISSN 1057-7149.
- A.F.J. Moffat. A theoretical investigation of focal stellar images in the photographic emulsion and application to photographic photometry. *Astronomy and Astrophysics*, 3, 1969.
- R. Molina et BD Ripley. Using spatial models as priors in astronomical image analysis. *Journal of Applied Statistics*, 16(2) :193–206, 1989.

- E.H. Moore. On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bull. Amer. Math. Soc*, 26 : 394–395, 1920.
- J.J. Moré et D.C. Sorensen. Computing a trust region step. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 4 :553–572, 1983.
- Laurent M. Mugnier, Thierry Fusco et Jean-Marc Conan. Mistral : a myopic edge-preserving image restoration method, with application to astronomical adaptive-optics-corrected long-exposure images. *J. Opt. Soc. Am. A*, 21(10) :1841–1854, 2004.
- L.M. Mugnier, A. Blanc et J. Idier. Phase diversity : A technique for wave-front sensing and for diffraction-limited imaging. *ADVANCES IN IMAGING AND ELECTRON PHYSICS*, 141 :3, 2006.
- D. Mumford et J. Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure Appl. Math*, 42(5) :577–685, 1989.
- S. Murata et N. Takeuchi. A neural network approach to the detection of the depth of tracer particles from in-line hologram patterns. In *IMEchE*, 1996.
- S. Murata et N. Yasuda. Potential of digital holography in particle measurement. *Optics and Laser Technology*, 32(7 8) :567–574, 2000.
- F. Murtagh, J.L. Starck et A. Bijaoui. Image restoration with noise suppression using a multi-resolution support. *Astronomy and Astrophysics*, 112 :179, 1995.
- W. Na, J.K. Paik et C.H. Lee. An image restoration system for a single-ccd color camcorder. *Consumer Electronics, IEEE Transactions on*, 41(3) :563–572, 1995.
- M. Nashed. Operator-theoretic and computational approaches to ill-posed problems with applications to antenna theory. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on [legacy, pre-1988]*, 29(2) :220–231, 1981.
- M.Z. Nashed. *Generalized inverses and applications*. Academic Press New York, 1976.
- R.M. Neal et G.E. Hinton. A view of the em algorithm that justifies incremental, sparse, and other variants. *Learning in Graphical Models*, 89 :355–368, 1999.
- R. Neelamani, Hyeokho Choi et R. Baraniuk. Forward : Fourier-wavelet regularized deconvolution for ill-conditioned systems. *IEEE Trans. Signal Process.*, 52(2) :418–433, 2004. ISSN 1053-587X.
- M. Nikolova. Regularisation functions and estimators. In *International Conference on Image Processing*, volume 1, pages 457–460, 1996.
- K. Nishino, N. Kasagi et M. Hirata. Three-dimensional particle tracking velocimetry based on automated digital image processing. *Journal of Fluids Engineering*, 111 :384–391, 1989.
- J. Nocedal. Updating quasi-newton matrices with limited storage. *Mathematics of computation*, 35 :773–782, 1980.
- J. Nocedal et S.J. Wright. *Numerical optimization*. Springer, 1999.

- Jorge Nocedal. Theory of algorithms for unconstrained optimization. *Acta Numerica*, 1 :199–242, 1992.
- L. Onural et P.D. Scott. Digital decoding of in-line holograms. *Optical Engineering*, 26(11) : 1124–1132, 1987.
- G. Pan et H. Meng. Digital holography of particle fields : reconstruction by use of complex amplitude. *Applied Optics*, 42 :827–833, 2003.
- K. Panchapakesan, D.G. Sheppard, M.W. Marcellin et B.R. Hunt. Blur identification from vector quantizer encoder distortion. *IEEE Trans. Image Process.*, 10(3) :465–470, 2001. ISSN 1057-7149.
- Soo-Chang Pei et Io-Kuong Tam. Effective color interpolation in ccd color filter arrays using signal correlation. *IEEE Trans. Circuits Syst. Video Technol.*, 13(6) :503–513, 2003. ISSN 1558-2205.
- S. Pelloux, J. Robillard, R. Ferrera, A. Bilbaut, C. Ojeda, V. Saks, M. Ovize et Y. Tourneur. Non-beating hl-1 cells for confocal microscopy : Application to mitochondrial functions during cardiac preconditioning. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, 90(1-3) :270–298, 2006.
- R. Penrose. A generalized inverse for matrices. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 51(1955) :406–413, 1955.
- N. Pirzkal, RN Hook et LB Lucy. Gira-two channel photometric restoration. In N Manset, C Veillet et Dennis Crabtree, editors, *Astronomical Data Analysis Software and Systems IX, ASP Conference Proceedings*, volume 216. Astronomical Society of the Pacific, 2000.
- B. Platt et R.V. Shack. Lenticular hartmann screen. *Opt. Sci. Center Newsl.(University of Arizona)*, 5 :15–16, 1971.
- T.C. Poon, T. Yatagai et W. Jptner. Digital holography – Coherent optics of the 21st century : introduction. *Applied Optics*, 45(5) :821, 2006.
- Ting-Chung Poon, ByoungHo Lee, Hiroshi Yoshikawa et Wolfgang Osten. Digital holography and 3d imaging : introduction to the feature issue. *Appl. Opt.*, 47(19) :DH1–DH1, 2008.
- W.H. Press, B. Flannery, S.A. Teukolsky et W.T. Vetterling. *Numerical recipes*. Cambridge University Press New York, 1986.
- J. Primot, G. RoussetT et JC Fontanella. Deconvolution from wave-front sensing- a new technique for compensating turbulence-degraded images. *Optical Society of America, Journal, A : Optics and Image Science*, 7 :1598–1608, 1990.
- P. Rastogi et A. Sharma. Systematic approach to image formation in digital holography. *Optical Engineering*, 42(5) :1208–1214, 2003.
- S.J. Reeves et R.M. Mersereau. Blur identification by the method of generalized cross-validation. *IEEE Trans. Image Process.*, 1(3) :301–311, 1992. ISSN 1057-7149.
- W. H. Richardson. Bayesian-based iterative method of image restoration. *J. Opt. Soc. Am.*, 62 : 55–59, 1972.

- X. Rondeau. *Imagerie à travers la turbulence : mesure inverse du front d'onde et centrage optimal*. Thèse de doctorat, Université Lyon 1 - Claude Bernard, 2007.
- H. Royer. Holographic velocimetry of submicron particles. *Optics Communications*, 20(1) : 73–75, 1977.
- L.I. Rudin, S. Osher et E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60(1-4) :259–268, 1992.
- U. Schnars et W. Juptner. Direct recording of holograms by a CCD target and numerical reconstruction. *Applied Optics*, 33(2) :179–181, 1994.
- J. P. Schon, F. Danel, J. P. Melinand, C. Rey et G. Charnay. Measurement of lagrangian velocity by means of a rotating laser beam. In *Sixth biannual symposium on turbulence*, La Rolla, Missouri, 1979.
- T. J. Schulz. Multiframe blind deconvolution of astronomical images. *JOSA-A*, 10(5) :1064–1073, may 1993.
- J. Skilling et RK Bryan. Maximum entropy image reconstruction : general algorithm. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 211(1) :111–124, 1984.
- Ferréol Soulez, Xavier Rodet et Diemo Schwarz. Improving polyphonic and poly-instrumental music to score alignment. In *Proceedings of International Conference on Music Information Retrieval International Conference on Music Information Retrieval (ISMIR)*, page 6, Baltimore États-Unis d'Amérique, 10 2003.
- Ferréol Soulez, Loïc Denis, Éric Thiébaud, Corinne Fournier et Charles Goepfert. Inverse problem approach in particle digital holography : out-of-field particle detection made possible. *J. Opt. Soc. Am. A*, 24(12) :3708–3716, 2007a.
- Ferréol Soulez, Loïc Denis, Corinne Fournier, Éric Thiébaud et Charles Goepfert. Inverse-problem approach for particle digital holography : accurate location based on local optimization. *J. Opt. Soc. Am. A*, 24(4) :1164–1171, 2007b.
- Ferreol Soulez, Loïc Denis, Corinne Fournier, Eric Thiebaut et Charles Goepfert. Inverse problem approach for particle digital holography : accurate location based on local optimisation. *Journal of the Optical Society of America A*, 24(4) :1164–1171, 03 2007a.
- Ferreol Soulez, Eric Thiebaut, Loïc Denis et Corinne Fournier. Une approche problèmes inverses pour la détection de micro-particules en holographie numérique. In *Actes du 12 ème colloque GRETSI Traitement du Signal et des Images 12 ème colloque GRETSI Traitement du Signal et des Images*, pages 151–154, Troyes France, 09 2007b.
- Ferreol Soulez, Eric Thiebaut, Loïc Denis et Corinne Fournier. Inverse Problem Approach for Particle Digital Holography : Field of View Extrapolation and Accurate Location. In *Adaptive Optics : Analysis and Methods/Computational Optical Sensing and Imaging/Information Photonics/Signal Recovery and Synthesis Topical Meetings on CD-ROM Adaptive Optics : Analysis and Methods /Computational Optical Sensing and Imaging/Information Photonics/Signal Recovery and Synthesis Topical Meetings*, page DWC3, Vancouver Canada, 06 2007c. OSA Technical Digest (Optical Society of America).

- Ferréol Soulez, Eric Thiébaud et Sébastien Bongard. Deconvolution of $(x, y, \text{wavelength})$ images. In *Astronomical Data Analysis V Astronomical Data Analysis V*, page 14, Heraklion Grèce, 05 2008a.
- Ferréol Soulez, Eric Thiébaud, Alain Gressard, Raphaël Dauphin et Sébastien Bongard. Heterogeneous Multidimensional Data Deblurring. In *Proceeding of the 16th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2008) 16th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2008)*, page 0, Lausanne Suisse, 08 2008b.
- Ferréol Soulez, Eric Thiébaud, Yves Tourneur, Alain Gressard et Raphaël Dauphin. Blind deconvolution of video sequences. In *Proceedings of 15th International Conférence on Image Processing 15th International Conférence on Image Processing*, page 0, San Diego États-Unis d'Amérique, 10 2008c.
- J.L. Starck et F. Murtagh. Image restoration with noise suppression using the wavelet transform. *Astronomy and Astrophysics (ISSN 0004-6361)*, 288(1), 1994.
- A. Stern et B. Javidi. Analysis of practical sampling and reconstruction from Fresnel fields. *Optical Engineering*, 43(1) :239–250, 2004.
- Jr. Stockham, T.G., T.M. Cannon et R.B. Ingebreetsen. Blind deconvolution through digital signal processing. *Proc. IEEE*, 63(4) :678–692, 1975. ISSN 0018-9219.
- A. Tarantola. *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Society for Industrial Mathematics, 2005.
- A. Tarantola. Popper, bayes and the inverse problem. *Nature Physics*, 2(8) :492–494, 2006.
- D. Taubman. Generalized wiener reconstruction of images from colour sensor data using a scale invariant prior. In *Image Processing, 2000. Proceedings. 2000 International Conference on*, volume 3, pages 801–804vol.3, 10-13 Sept. 2000. doi : 10.1109/ICIP.2000.899577.
- G. A. Tayler et B. J. Thompson. Fraunhofer holography applied to particle size analysis : a reassessment. *Opt. Acta.*, 23 :261–304, 1976.
- A. Tekalp, H. Kaufman et J. Woods. Identification of image and blur parameters for the restoration of noncausal blurs. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 34 (4) :963–972, 1986. ISSN 0096-3518.
- E. Thiébaud. Optimization issues in blind deconvolution algorithms. In Jean-Luc Starck, editor, *Astronomical Data Analysis II.*, volume 4847, pages 174–183, dec 2002.
- E. Thiébaud. Introduction to image reconstruction and inverse problems. *Optics in Astrophysics*, 2005.
- E. Thiébaud et L. Mugnier. Maximum a posteriori planet detection and characterization with a nulling interferometer. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 1(C200) :547–552, 2006.
- E. Thiébaud et J.-M. Conan. Strict a priori constraints for maximum likelihood blind deconvolution. *JOSA-A*, 12(3) :485–492, March 1995.

- B. J. Thompson. A new method of measuring particle size by diffraction techniques. *Japanese Journal of Applied Physics*, 4 :302–307, 1965.
- AN Tikhonov. On the stability of inverse problems. *CR (Dokl.) Acad. Sci. URSS, n. Ser.*, 39 : 176–179, 1943.
- A.N. Tikhonov *et al.* . *Solutions of Ill-Posed Problems*. Winston Publishing, 1977.
- M. Trimeche, D. Paliy, M. Vehvilainen et V. Katkovic. Multichannel image deblurring of raw color components. *Proc. SPIE*, 5674 :169–178, 2005.
- H.J. Trussell. A mmse estimate for demosaicking. In *Proc. International Conference on Image Processing*, volume 3, pages 358–361 vol.3, 2001. doi : 10.1109/ICIP.2001.958125.
- D. Tschumperlé. *Régularisation d'Images Multivaluées par EDP et Applications*. PhD thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, 2002.
- D. Tschumperlé et R. Deriche. *Anisotropic Diffusion Partial Differential Equations for Multichannel Image Regularization : Framework and Applications*, volume 145, pages 150–210. San Diego : Academic Press, c1995-, 2007.
- F. Tsumuraya, N. Miura et N.Baba. Iterative blind deconvolution method using lucy's algorithm. *Astronomy and Astrophysics*, 282 :699–708, feb 1994.
- D. Tzikas, A. Likas et N. Galatsanos. Variational bayesian blind image deconvolution with student-t priors. In *Proc. IEEE International Conference on Image Processing ICIP 2007*, volume 1, pages I – 109–I – 112, 2007. doi : 10.1109/ICIP.2007.4378903.
- D. Tzikas, A. Likas et N. Galatsanos. Life after the em algorithm : The variational approximation for bayesian inference. *IEEE Signal Process. Mag.*, a paraitre. ISSN 1522-4880.
- J. Vaillant, E. Thiebaut et M. Tallon. Elpoa : data processing of chromatic differences of the tilt measured with a polychromatic laser guide star. *Proceedings of SPIE*, 4007 :308, 2000.
- M. Vega et A.K. Molina, R.and Katsaggelos. A bayesian super-resolution approach to demosaicing of blurred images. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, 2006 :1–12, 2006.
- J.P. Véran, F. Rigaut, H. Maître et D. Rouan. Estimation of the adaptive optics long-exposure point-spread function using control loop data. *Journal of the Optical Society of America A*, 14 (11) :3057–3069, 1997.
- C. S. Vikram. *Particle field holography*. Cambridge University Press, 1992.
- C.R. Vogel, T.F. Chan et R.J. Plemmons. Fast algorithms for phase-diversity-based blind deconvolution. *Proc. SPIE*, 3353 :994–1005, 1998.
- N. Wiener. *The Interpolation, Extrapolation and Smoothing of Stationary Time Series*. J Wiley & Sons, New York, 1949.
- R. Wiggins. Minimum entropy deconvolution. *Computer-aided Seismic Analysis and Discrimination*, 1978.
- Philip Wolfe. Convergence conditions for ascent methods. *SIAM Review*, 11(2) :226–235, 1969.

- Philip Wolfe. Convergence conditions for ascent methods. ii : Some corrections. *SIAM Review*, 13(2) :185–188, 1971.
- H.-S. Wu. Minimum entropy deconvolution for restoration of blurred two-tone images. *Electronics Letters*, 26(15) :1183–1184, 1990. ISSN 0013-5194.
- Xiaolin Wu et Ning Zhang. Primary-consistent soft-decision color demosaicking for digital cameras (patent pending). *IEEE Trans. Image Process.*, 13(9) :1263–1274, 2004. ISSN 1057-7149.
- Y.L. You et M. Kaveh. A regularization approach to joint blur identification and image restoration. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 5(3) :416–428, 1996.
- Yu-Li You et M. Kaveh. Blind image restoration by anisotropic regularization. *IEEE Trans. Image Process.*, 8(3) :396–407, 1999. ISSN 1057-7149.
- Lei Zhang et Xiaolin Wu. Color demosaicking via directional linear minimum mean square-error estimation. *IEEE Trans. Image Process.*, 14(12) :2167–2178, 2005. ISSN 1057-7149.
- Y. Zhang, G. Pedrini, W. Osten et H.J. Tiziani. Applications of fractional transforms to object reconstruction from in-line holograms. *Optics Letters*, 29(15) :1793–1795, 2004.

Bibliographie personnelle

Reuves internationales à comité de lecture

Ferreol Soulez, Loïc Denis, Corinne Fournier, Eric Thiebaut et Charles Goepfert. Inverse problem approach for particle digital holography : accurate location based on local optimisation. *Journal of the Optical Society of America A*, 24(4) :1164–1171, 03 2007a

Ferréol Soulez, Loïc Denis, Éric Thiébaud, Corinne Fournier et Charles Goepfert. Inverse problem approach in particle digital holography : out-of-field particle detection made possible. *J. Opt. Soc. Am. A*, 24(12) :3708–3716, 2007a

Jérôme Gire, Loïc Denis, Corinne Fournier, Eric Thiebaut, Ferreol Soulez et Christophe Ducottet. Digital holography of particles : benefits of the "inverse problem" approach. *Measurement Science & Technology*, 19 :074005, 05 2008

Congrès internationaux avec actes

Ferréol Soulez, Eric Thiébaud, Yves Tourneur, Alain Gressard et Raphaël Dauphin. Blind deconvolution of video sequences. In *Proceedings of 15th International Conférence on Image Processing 15th International Conférence on Image Processing*, page 0, San Diego États-Unis d'Amérique, 10 2008c

Ferréol Soulez, Eric Thiébaud, Alain Gressard, Raphaël Dauphin et Sébastien Bongard. Heterogeneous Multidimensional Data Deblurring. In *Proceeding of the 16th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2008) 16th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2008)*, page 0, Lausanne Suisse, 08 2008b

Ferréol Soulez, Eric Thiébaud et Sébastien Bongard. Deconvolution of (x ,y, wavelength) images. In *Astronomical Data Analysis V Astronomical Data Analysis V*, page 14, Heraklion Grèce, 05 2008a

Ferreol Soulez, Eric Thiebaut, Loïc Denis et Corinne Fournier. Inverse Problem Approach for Particle Digital Holography : Field of View Extrapolation and Accurate Location. In *Adaptive Optics : Analysis and Methods/Computational Optical Sensing and Imaging/Information Photonics/Signal Recovery and Synthesis Topical Meetings on CD-ROM Adaptive Optics : Analysis and Methods /Computational Optical Sensing and Imaging/Information Photonics/Signal Recovery and Synthesis Topical Meetings*, page DWC3, Vancouver Canada, 06 2007c. OSA Technical Digest (Optical Society of America)

Ferréol Soulez, Loïc Denis, Corinne Fournier, Éric Thiébaud et Charles Goepfert. Inverse-problem approach for particle digital holography : accurate location based on local optimization. *J. Opt. Soc. Am. A*, 24(4) :1164–1171, 2007b

Corinne Fournier, Jérôme Gire, Loïc Denis, Eric Thiebaut, Ferreol Soulez et Christophe Ducottet. "Inverse problems" approach for digital in-line holography : influence of experimental parameters and benefits. In *Workshop on Digital Holographic Reconstruction and Optical Tomography for Engineering Applications Workshop on Digital Holographic Reconstruction and Optical Tomography for Engineering Applications*, page ISBN 978 0 947974 56 5, Loughborough Royaume-Uni, 04 2007. Loughborough Unviversity

Corinne Fournier, Charles Goepfert, Jean-Louis Marié, Loïc Denis, Ferréol Soulez, Michel Lance et Jean-Paul Schon. Digital Holography compared to Phase Doppler Anemometry : study of an experimental droplet flow. In Optimage Ltd, editor, *Proceedings of the 12th International Symposium on Flow Visualization 12th International Symposium on Flow Visualization*, pages ISBN 0-9533991-8-4, Göttingen Allemagne, 09 2006b

Ferréol Soulez, Xavier Rodet et Diemo Schwarz. Improving polyphonic and poly-instrumental music to score alignment. In *Proceedings of International Conference on Music Information Retrieval International Conference on Music Information Retrieval (ISMIR)*, page 6, Baltimore États-Unis d'Amérique, 10 2003

Congrès nationaux avec actes

Ferreol Soulez, Eric Thiebaut, Loïc Denis et Corinne Fournier. Une approche problèmes inverses pour la détection de micro-particules en holographie numérique. In *Actes du 12 ème colloque GRETSI Traitement du Signal et des Images 12 ème colloque GRETSI Traitement du Signal et des Images*, pages 151–154, Troyes France, 09 2007b

Corinne Fournier, Loïc Denis, Ferreol Soulez et Eric Thiebaut. Holographie Numérique de microparticules : amélioration du positionnement grâce à une approche problèmes inverses. In *7ème colloque francophone "Méthodes et techniques optiques pour l'industrie"*, Mulhouse France, 11 2006a

Inverse-problem approach for particle digital holography: accurate location based on local optimization

Ferréol Soulez

Université de Lyon, Lyon, F-69000, France; Université Lyon 1, Villeurbanne, F-69622, France; Centre de Recherche Astronomique de Lyon, Observatoire de Lyon, 9 avenue Charles André, Saint-Genis Laval cedex, F-69561, France; CNRS, UMR 5574, Ecole Normale Supérieure de Lyon, Lyon, France; and Laboratoire Hubert Curien (ex-LTSA), CNRS, UMR 5516, Université Jean Monnet, 18 rue Pr Benoît Lauras, F-42000 Saint-Etienne, France

Loïc Denis and Corinne Fournier

Laboratoire Hubert Curien (ex-LTSA), CNRS, UMR 5516, Université Jean Monnet, 18 rue Pr Benoît Lauras, F-42000 Saint-Etienne, France

Éric Thiébaud

Université de Lyon, Lyon, F-69000, France; Université Lyon 1, Villeurbanne, F-69622, France; Centre de Recherche Astronomique de Lyon, Observatoire de Lyon, 9 avenue Charles André, Saint-Genis Laval cedex, F-69561, France; CNRS, UMR 5574, Ecole Normale Supérieure de Lyon, Lyon, France

Charles Goepfert

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, CNRS, UMR 5509, Ecole Centrale de Lyon, Université Lyon 1, INSA Lyon, 36 avenue Guy-de-Collongue F-69134 Ecully cedex, France

Received July 14, 2006; revised October 13, 2006; accepted October 13, 2006;
posted October 24, 2006 (Doc. ID 72722); published March 14, 2007

We propose a microparticle localization scheme in digital holography. Most conventional digital holography methods are based on Fresnel transform and present several problems such as twin-image noise, border effects, and other effects. To avoid these difficulties, we propose an inverse-problem approach, which yields the optimal particle set that best models the observed hologram image. We resolve this global optimization problem by conventional particle detection followed by a local refinement for each particle. Results for both simulated and real digital holograms show strong improvement in the localization of the particles, particularly along the depth dimension. In our simulations, the position precision is $\geq 1 \mu\text{m}$ rms. Our results also show that the localization precision does not deteriorate for particles near the edge of the field of view. © 2007 Optical Society of America

OCIS codes: 090.1760, 100.3190, 100.5010, 100.6640, 100.2000.

1. INTRODUCTION

The potential of in-line holography to analyze flow by means of particles has been noted since its very beginnings.¹ The development of optical holography applications in fluid mechanics^{2,3} established the capability of holography to provide both particle size and tridimensional position. In-line holography is a technique that stores a three-dimensional (3D) image of micro-objects on a bidimensional (2D) detector. The digital version of holography suppresses the wet chemical processing step by recording the hologram directly on a numerical sensor. Numerical processing makes it possible to acquire volume objects within a short time. This is particularly interesting for high-speed phenomena analysis, as in fluid mechanics.

Over the past decade, many contributions have been made in the field of digital hologram processing in order

to improve the measurement accuracy of the localization of micro-objects. The two main steps of the numerical processing are a numerical reconstruction step to obtain a synthesized 3D image with focused particles, and a segmentation step to extract locations and sizes of the particles from this 3D distribution.

The reconstruction step is classically done by numerical simulation of the hologram diffraction consisting of a Fresnel transform of the hologram at different distances z from the hologram. This approach has been well described by Kreis *et al.*⁴ and expressed as a discrete wavelet transform by Liebling *et al.*⁵ Improved reconstruction schemes by means of filtering have also been introduced to suppress artifacts, e.g., the double-peak phenomenon,⁶ to improve depth precision,⁷ or to reduce twin-image noise.⁸

The segmentation step consists of finding the location

of each particle in the reconstructed 3D distribution. The segmentation can be obtained by analyzing the gray levels in the volume (thresholding).^{9,10} Some authors also build their analysis on the reconstructed complex amplitude.¹¹

Let us note that the reconstruction step is time-consuming and generates a huge volume of data to process. Consequently, several processing schemes based on a direct analysis of the hologram have been proposed.^{12,13}

To summarize, the most important issues in digital holography are:

1. Limited depth resolution: The depth resolution is given by¹⁴ $\delta z \geq \lambda/\Omega^2$, where λ is the wavelength and Ω is the numerical aperture of the imaging setup, which may be limited by the size of the sensor. Usually Ω is less than 0.1; hence $\delta z \geq 100\lambda$. The lateral resolution is given by $\delta x = \lambda/\Omega$ and is therefore better than the depth resolution, e.g., for $\Omega \leq 0.1$, $\delta x \geq 10\lambda$.

2. Field of view limitations: With the classical in-line holography setup, i.e., with a collimated reference wave, the field of view is limited transversely by the detector size, typically $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$. The accuracy of the measurements for particles whose transverse position lies near the edges of the detector is much worse than for particles near the center of the detector. In practice, this limits the transverse field of view to the central part of the detector.

3. Processing time: Existing algorithms are too slow (about 15 min to process a single hologram) for real-time processing of hologram images. Unless the processing time is significantly reduced, this slowness can also severely restrain the postprocessing of data from the high-frame-rate cameras required for tracking particles.

In this paper, we propose a method allowing a fine location of the particles and improvement of the transverse field of view. Our processing is based on an inverse-problem approach. In the field of digital holography, Sotthivirat and Fessler¹⁵ have also followed an inverse-problem scheme, but that was to estimate a 3D surface, not for particle detection.

In this approach we search for the set of particle sizes and positions yielding a hologram model that best fits the real hologram image. Stated like this, the problem requires global optimization over the space of particle parameters. We effectively solve this global optimization problem by an iterative algorithm that alternates coarse location of the particles and local optimization. Since the signature of a given particle is severely disturbed by the patterns due to the other particles, we achieve an improved sensitivity to the detection and location of faint particle signatures by repeating our processing over the residual images. Our new algorithm gives an improved precision of particle location, in particular along the depth dimension, and increases the size of the effective transverse field of view.

The paper is organized as follows. First, we recall the model of the hologram formation and introduce the mathematical notation used throughout the paper. Then we detail the principle of the proposed algorithm. Finally, we apply our method to the reconstruction of holograms using both simulated and real world data.

2. MODEL OF THE HOLOGRAM IMAGE

In-line holography is one of the most classical techniques in holography. In this simple setup (see Fig. 1), every piece of optical apparatus (laser, optics, and camera) is aligned, the particles under study are illuminated with a collimated laser beam, and both the object wave (scattered light) and the reference wave (laser) are interfering and recorded on a digital camera. In this section, we derive the model of the observed holograms under Fresnel's diffraction approximation. This model will be the basis of our fine particle positioning approach in Section 3.B. The resulting hologram expression is a sum of terms depending on the position and size of each diffracting particle. Figure 2 summarizes the notation and coordinate system used in our model.

We consider an incident beam of complex amplitude A_0 that is diffracted by opaque spherical particles of radii r_j and coordinates (x_j, y_j, z_j) . In what follows, underlined symbols denote complex quantities. We work under the Fresnel approximation, i.e., the distance z between a diffracting particle and the observation plane is such that¹⁶ $z^3 \gg 4\pi r_j^4/\lambda$ is achieved for $z \geq 1\text{ mm}$ when $r_j \approx 50\text{ }\mu\text{m}$ is the largest particle's axis and $\lambda = 532\text{ nm}$ is the laser wavelength. In this case, the complex amplitude in the observation plane, i.e., at depth $z=0$, diffracted by a single particle j is¹⁶

$$\underline{A}_j(x, y) = \underline{A}_0[1 - \eta_j(\vartheta_j * \underline{h}_{z_j})(x - x_j, y - y_j)], \quad (1)$$

where $*$ denotes 2D convolution along the x and y dimensions, ϑ_j is the binary aperture of the opaque particle defined by

$$\vartheta_j(x, y) = \begin{cases} 1, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_j \\ 0, & \sqrt{x^2 + y^2} > r_j \end{cases}, \quad (2)$$

and \underline{h}_{z_j} is the Fresnel function

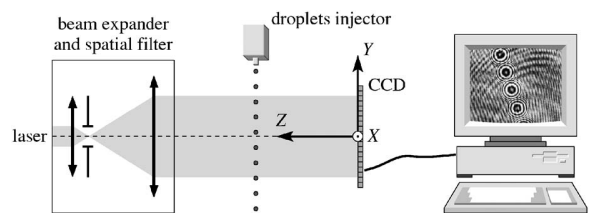


Fig. 1. In-line holography setup.

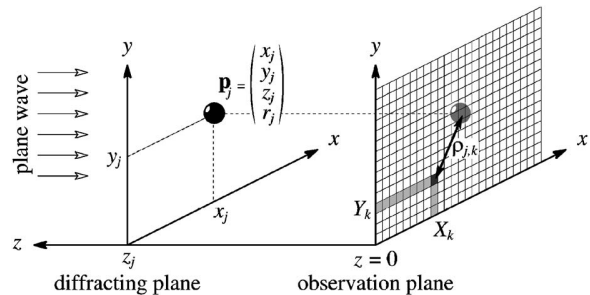


Fig. 2. Notations used in the hologram model.

$$\underline{h}_{z_j}(x,y) = \frac{1}{i\lambda z_j} \exp\left(i \frac{\pi}{\lambda z_j}(x^2 + y^2)\right), \quad (3)$$

where $i = \sqrt{-1}$. In Eq. (1), we introduce the real factor η_j to account for possible variation of incident energy seen by a particle because of nonuniform laser illumination.

Neglecting wavefront distortion due to successive particles, the complex amplitude in the observation plane diffracted by n particles of coordinates (x_j, y_j, z_j) becomes:

$$\underline{A}(x,y) = \underline{A}_0 \left[1 - \sum_{j=1}^n \eta_j (\vartheta_j * \underline{h}_{z_j})(x - x_j, y - y_j) \right]. \quad (4)$$

For spherical particles of radius r_j small enough to have $z_j \gg 4r_j^2/\lambda$, the convolution product $\vartheta_j * \underline{h}_{z_j}$ can be approximated by¹⁷

$$(\vartheta_j * \underline{h}_{z_j})(x,y) \approx \frac{r_j \lambda z_j}{2\sqrt{x^2 + y^2}} J_1\left(\frac{2\pi r_j \sqrt{x^2 + y^2}}{\lambda z_j}\right) \underline{h}_{z_j}(x,y), \quad (5)$$

where J_1 is the first-order Bessel function. Since $z_j \approx 250$ mm in our setup, the approximation is valid for particles such that $r_j \lesssim 60$ μm . The complex amplitude $f_j(x,y)$ of the wave diffracted by a single particle at coordinates (x_j, y_j, z_j) and observed at position $(x, y, z=0)$ therefore becomes

$$\underline{f}_j(x,y) = \frac{r_j}{2i\rho_j(x,y)} J_1\left(\frac{2\pi r_j \rho_j(x,y)}{\lambda z_j}\right) \exp\left(i \frac{\pi \rho_j^2(x,y)}{\lambda z_j}\right), \quad (6)$$

where $\rho_j(x,y) = \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}$ is the distance between the point $(x, y, z=0)$ of the observation plane and the projection $(x_j, y_j, z=0)$ of the position of the j th particle on the detector at $z=0$. Thus, for n particles of parameters $\{x_j, y_j, z_j, r_j; j=1, \dots, n\}$ the complex amplitude at the position (x, y) of the observation plane becomes

$$\underline{A}(x,y) = \underline{A}_0 \left[1 - \sum_{j=1}^n \eta_j \underline{f}_j(x,y) \right]. \quad (7)$$

The intensity measured by the detector at position (x, y) is given by

$$\begin{aligned} I(x,y) &= \gamma |\underline{A}(x,y)|^2 + I_{\text{bg}} \\ &= \gamma |\underline{A}_0|^2 + I_{\text{bg}} - 2\gamma |\underline{A}_0|^2 \sum_{j=1}^n \eta_j \text{Re}[\underline{f}_j(x,y)] \\ &\quad + \gamma |\underline{A}_0|^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \eta_j^* \underline{f}_i(x,y) \underline{f}_j^*(x,y), \end{aligned} \quad (8)$$

where γ accounts for the quantum efficiency and the conversion factor of the detector and I_{bg} accounts for the detector background level and for other spurious emission sources if any.

In Eq. (8), η_j and f_j are adimensional. Moreover, $|\eta_j| \leq 1$, and from Eq. (6) under the condition described above ($z_j \approx 250$ mm and $r_j \lesssim 55$ μm), we find

$$2 \sum_{j=1}^n \eta_j \text{Re}[\underline{f}_j(x,y)] \gg \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \eta_j^* \underline{f}_i(x,y) \underline{f}_j^*(x,y)$$

for most (x, y) . So the second-order terms (interferences) can be neglected and the intensity simplifies to

$$I(x,y) = I_0 - \sum_{j=1}^n \alpha_j \text{Re}[\underline{f}_j(x,y)], \quad (9)$$

where $\alpha_j = 2\gamma |\underline{A}_0|^2 \eta_j$ and $I_0 = \gamma |\underline{A}_0|^2 + I_{\text{bg}}$ is the image level given by the detector under the laser illumination but without diffracting particles. In the following, we will make use of the hologram model given by Eq. (6) and Eq. (9) and use the same approximations that led to these equations.

3. ITERATIVE ALGORITHM

Holograms are classically processed by detecting local maxima in the probed volume reconstructed by an approximate inverse transform (as explained in Subsection 3.A). We suggest here an improved processing which is performed in three steps per particle. First, the particle with maximum contribution is located (using classical coarse localization). Then, the position of this particle is refined by searching for the set of parameters $\{x_j, y_j, z_j, r_j\}$ that minimizes the difference between the observed hologram and the hologram model. Finally, the contribution of the particle to the hologram is subtracted. The same steps can be repeated to detect and localize a new particle in the residual image. These iterations are performed until no significant particle can be detected in the residuals.

A. Particle Detection

This first step consists of finding the approximate location and size of a particle from a (residual) hologram image. This step can be carried out by existing algorithms. For instance, under the Fresnel approximation, the hologram can be numerically convolved with Fresnel kernel \underline{h}_z to approximately reverse the diffraction phenomenon at a given distance.⁴ Indeed, by changing the distance parameter z , the reconstructed volume can be scanned in order to locate particles by digital focusing. Thus, when the reconstruction distance matches the actual distance of the particle, a minimum of amplitude is reached. This so-called maximum of focus can be derived from the reconstructed volume after thresholding by computing the centroid of the segmented 3D particle image. Such a detection procedure is classically performed for particle-hologram processing, but it has a limited accuracy and is prone to artifacts. The next steps of our algorithm are intended to refine the particle location.

B. Fine Particle Positioning

After the coarse detection of a new particle, the parameters $\{\alpha_n, x_n, y_n, z_n, r_n\}$ of the newly detected particle can be refined using a local optimization technique. To that end, we perform a nonlinear fit of the hologram model to the hologram image by minimizing the weighted least-squares penalty:

$$\mathcal{P}_n = \sum_{k=1}^{N_{\text{pixel}}} W_k [M_{n,k} - D_k]^2, \quad (10)$$

where D_k is the k th pixel value of the observed hologram and $W_k = 1/\text{Var}(D_k)$ is its statistical weight. The model $M_{n,k}$ for n particles is directly given by Eq. (9):

$$M_{n,k} = I_0 - \sum_{j=1}^n \alpha_j \text{Re}[f_j(X_k, Y_k)], \quad (11)$$

where (X_k, Y_k) are the coordinates of the k th pixel.

1. Reparametrization

In order to simplify the equations and reduce the condition number of the optimization problem (which should improve the convergence rate of the fit), we introduce the dimensionless variables

$$x' = x/\omega, \quad y' = y/\omega, \quad z' = \lambda z/\omega^2, \quad r' = r/\omega,$$

where ω is the pixel width, and we define

$$g_j(x', y') = \text{Re}[f_j(\omega x', \omega y')] = \frac{r'_j}{2\rho'_j} J_1\left(\frac{2\pi r'_j \rho'_j}{z'_j}\right) \sin\left(\frac{\pi \rho_j'^2}{z'_j}\right), \quad (12)$$

where $\rho'_j = \sqrt{(x'_j - x')^2 + (y'_j - y')^2}$. Our model now reads

$$M_{n,k} = I_0 - \sum_{j=1}^n \alpha_j g_j(X'_k, Y'_k), \quad (13)$$

where $(X'_k, Y'_k) = (X_k/\omega, Y_k/\omega)$ are the coordinates of the k th image pixel in pixel units.

2. Partial Local Optimization

In order to speed up the nonlinear fit, we make use of two special procedures in the local optimization. First, we consider optimizing only on the constant level I_0 and on the parameters of the last particle. In other words, we minimize \mathcal{P}_n with respect to the parameters $\{I_0, \alpha_n, x'_n, y'_n, z'_n, r'_n\}$ and consider the other particle parameters as fixed. This is the same as fitting the parameters $\{I_0, \alpha_n, x'_n, y'_n, z'_n, r'_n\}$ on the residual image $R_{n-1,k}$ after having subtracted the contribution of the previous $n-1$ particles:

$$R_{n-1,k} = D_k + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j g_j(X'_k, Y'_k), \quad (14)$$

where, of course, $R_{0,k} = D_k$. Our misfit criterion then reads

$$\mathcal{P}_n = \sum_{k=1}^{N_{\text{pixel}}} W_k [R_{n-1,k} - I_0 + \alpha_n g_n(X'_k, Y'_k)]^2. \quad (15)$$

Optimizing only on the new particle parameters rather than fitting all parameters for all particles yields a significant speedup in the algorithm. To achieve ultimate detection sensitivity, however, we always perform a local fit with respect to all the parameters whenever no significant particle can be detected in the residuals. In practice, we have observed that this strategy is much faster and yields almost the same results as if I_0 and all the parameters of all the particles were refined at every step.

Second, since the model is linear with respect to I_0 and α_n we can simply derive their optimal values, say I_0^+ and α_n^+ , by simple linear regression given the coordinates (x', y', z') and radius r' of the sought particle. This reduces the number of explicit parameters to adjust to $\{x'_n, y'_n, z'_n, r'_n\}$, and we define

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n^+ &= \mathcal{P}_n \Big|_{I_0=I_0^+, \alpha_n=\alpha_n^+} \\ &= \sum_{k=1}^{N_{\text{pixel}}} W_k [R_{n-1,k} - I_0^+ + \alpha_n^+ g_n(X'_k, Y'_k)]^2, \end{aligned} \quad (16)$$

with

$$\begin{aligned} I_0^+ &= \frac{1}{Q_n} \left(\sum_k W_k G_{n,k}^2 \right) \left(\sum_k W_k R_{n-1,k} \right) \\ &\quad - \frac{1}{Q_n} \left(\sum_k W_k G_{n,k} \right) \left(\sum_k W_k R_{n-1,k} G_{n,k} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \alpha_n^+ &= \frac{1}{Q_n} \left(\sum_k W_k G_{n,k} \right) \left(\sum_k W_k R_{n-1,k} \right) \\ &\quad - \frac{1}{Q_n} \left(\sum_k W_k \right) \left(\sum_k W_k R_{n-1,k} G_{n,k} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

where $G_{n,k} = g_n(X'_k, Y'_k)$ and

$$Q_n = \left(\sum_k W_k \right) \left(\sum_k W_k G_{n,k}^2 \right) - \left(\sum_k W_k G_{n,k} \right)^2. \quad (19)$$

The minimization of \mathcal{P}_n^+ with respect to x'_n, y'_n, z'_n , and r'_n is then performed by a trust-region Newton algorithm.¹⁸ Such an algorithm requires a local quadratic approximation of the penalty function \mathcal{P}_n^+ that is provided by the first- and second-order partial derivatives of the penalty with respect to the parameters. The computation of these partial derivatives and further approximations that can be made in our particular case are detailed in Appendix A.

C. Algorithm Summary

The different stages of our iterative algorithm are summarized in Fig. 3. We expect that the coarse localization step followed by the local optimization step effectively solve the global optimization problem of finding the best size and location of a particle in the (residual) hologram image. A typical run of the algorithm on real data is shown by Fig. 6.

When a hologram image is processed, the patterns due to particles other than the one of interest contribute as a kind of noise, which can bias the localization of the particle of interest. It can even prevent its detection if its own signature is too faint. This can strongly limit the sensitivity of conventional algorithms. By repeating the detection and localization steps after removal of previously detected particles, we expect that our algorithm will be able to find particles with very faint signatures.

Since our algorithm was derived following an inverse-problem approach, it does not require any explicit direct inversion of the observed hologram: All required comparisons are made in the data space. As a result, our algorithm has a number of advantages over other existing methods. For instance, our method is insensitive to the

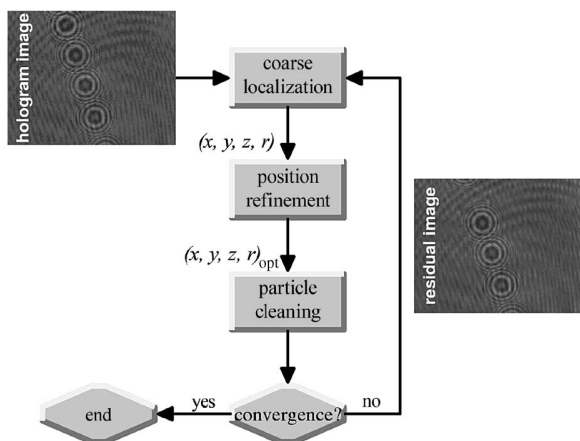


Fig. 3. Synopsis of the method.

twin-image problem inherent in in-line holography. Moreover, our algorithm does not suffer from bias even for particles found close to the borders of the field of view.

4. RESULTS

A. Simulated Data

We first used simulated data to assess the actual performance of our algorithm under various conditions. To check the robustness with respect to particle density, we considered two different concentrations: 10 and 100 particles per hologram. To evaluate the influence of the particle size on the precision of the measured depth and particle diameter, we used two different typical particle sizes: the so-called large ones and the so-called small ones. The first particle configuration consisted of realistic conditions close to those of the experimental test (see Subsection 4.B below) with particles of radius between $35\ \mu\text{m}$ and $50\ \mu\text{m}$ at $\approx 100\ \text{mm}$ from the camera. In the second particle configuration, we simulated smaller particles with radii from $3.5\ \mu\text{m}$ to $5\ \mu\text{m}$ at a distance of about $250\ \text{mm}$ from the camera such that the approximations made in Section 2 remain valid. All simulations were made for a 1024×1024 camera with a $6.70\ \mu\text{m} \times 6.70\ \mu\text{m}$ pixel and a laser of wavelength $632.8\ \text{nm}$. The volume of interest for the detection was a box of $8\ \text{mm} \times 8\ \text{mm} \times 30\ \text{mm}$. Examples of simulated images for the small particle case at two different concentrations are shown in Fig. 4.

Our inverse-problem approach is based on a simplified model of the hologram image formation. To account for the effects of the simplifications on the detection and localization of the particles, we use a more accurate model to simulate the hologram images used in this test. More precisely, we use the image model given by Eq. (8) to simulate the holograms, whereas the simplified model in Eq. (9) is assumed during the detection and localization steps of the algorithm. Hence the interference pattern between waves diffracted by different particles is accounted for in the simulated images, whereas it is neglected by the algorithm. In order to properly simulate quantization by the detector, the simulated hologram images are converted into 8-bit integer values prior to their processing.

In the particle detection step (described in Subsection 3.A), a reconstruction every millimeter in z was sufficient

for a correct coarse detection. The parameters estimated by our algorithm on the simulated images under the various conditions were compared to their actual values. No significant bias was noticed, and the corresponding root-mean-square (RMS) errors are listed in Table 1. These results mainly demonstrate the excellent precision achieved by our algorithm under all the conditions considered. Our method seems to be efficient with densities up to 100 particles per hologram.

Subpixel precision is reached for the transverse position with $\Delta x \approx \Delta y \approx 0.3\ \mu\text{m}$ or $1/20$ pixel. This transverse precision does not significantly depend on the size or density of the particles.

Increasing the number of particles strengthens the interference between diffracted waves, which are neglected in the assumed model. This also increases the occurrence of particles almost aligned along the depth direction. These two effects worsen the precision of the estimated depth and particle radius.

The high-spatial-frequency diffraction rings help to precisely locate the depth of the particle. Since these rings are attenuated as the size of the particles grows, the longitudinal errors are worse for bigger particles. On the other hand, this attenuation enhances the determination of the particle radius.

In Subsection 3.C we argued that the position errors should not be biased for particles near the edges of the field of view. In our simulations, we have measured no differences in the precision of the 3D particle positions, regardless of their actual location.

B. Experimental Data

We carried out an experimental test of our algorithm using real data from an in-line holography setup. The experimental layout is shown by Fig. 1 and the components are as follows:

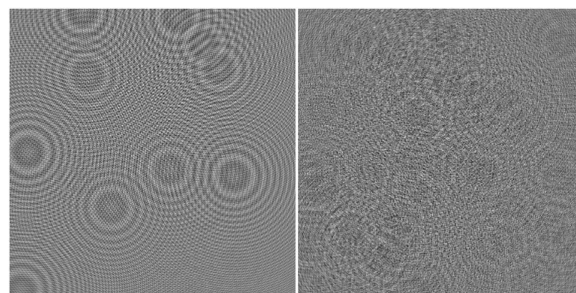


Fig. 4. Small particle simulations. Left, 10 particles; right, 100 particles.

Table 1. Rms Errors for the Estimated Particle Parameters in Several Simulation Configurations

Particle Configuration	Δx ($\mu\text{m rms}$)	Δy ($\mu\text{m rms}$)	Δz ($\mu\text{m rms}$)	Δr ($\mu\text{m rms}$)
10 large ^a	0.27	0.26	0.74	0.06
100 large	0.30	0.30	2.37	0.12
10 small	0.28	0.28	0.26	0.15
100 small	0.28	0.29	0.85	0.51

^aLarge particles are for $35\ \mu\text{m} \leq r \leq 50\ \mu\text{m}$; small particles are for $3.5\ \mu\text{m} \leq r \leq 5\ \mu\text{m}$.

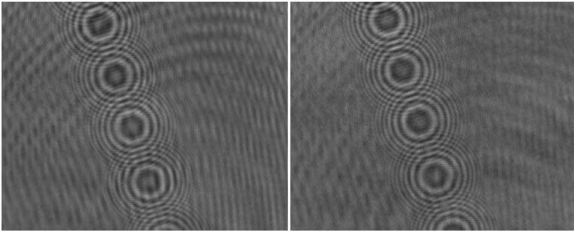


Fig. 5. Pair of experimental holograms separated by a delay of $100 \mu\text{s}$.

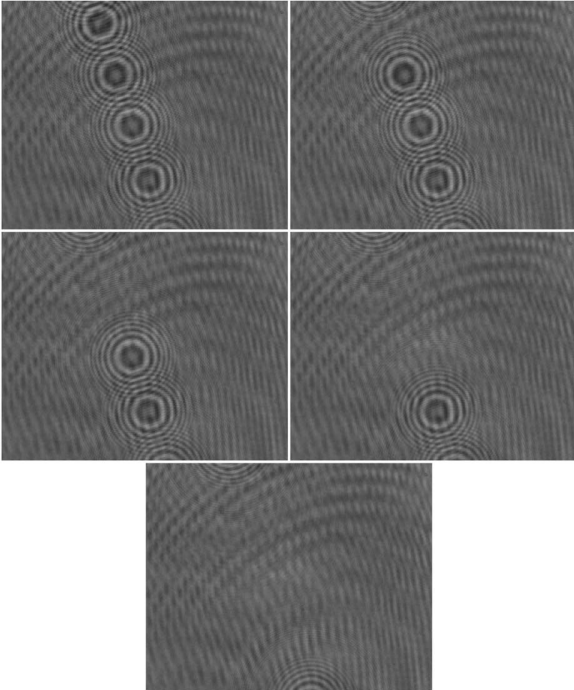


Fig. 6. Iterative particle removal in real hologram image.

1. The laser is a double cavity YAG (ULTRA-PIV 30, Quantel) with a $0.532 \mu\text{m}$ wavelength. It emits pulses of 7 ns, short enough to freeze the droplets' motion. The laser is synchronized with the camera to trigger the acquisition of pairs of hologram images separated by a delay of $100 \mu\text{s}$. This is intended to allow for the measurement of the instantaneous velocity of the particles.

2. The injector is a piezoelectric device that generates monodisperse droplets. The droplet diameter is tunable from $50 \mu\text{m}$ to $100 \mu\text{m}$. The injector can work in droplet-on-demand mode, generating droplets at constant time intervals (1000 Hz in the case of the considered data set).

3. The camera is a 12-bit CCD (PCO Sensicam) with 1280×1024 pixels of size $6.7 \mu\text{m} \times 6.7 \mu\text{m}$. The camera is ≈ 25 cm from the injector in order not to disturb the flow experiment. This leads to a small but realistic numerical aperture of $\Omega = 0.014$.

The experimental test data consist of a set of 100 pairs of holograms with four or five droplets on each image. An example of such a pair is shown in Fig. 5. The 3D positions and diameters of droplets were extracted from this

data set by our algorithm. Figure 6 shows the residual images during the processing of one of the experimental holograms.

The measured particle positions are shown in Fig. 7 under various projections. Clearly the average trajectory of the particles is a straight line as can be expected from the experimental conditions. In Fig. 7, ζ denotes the direction of this line. It is important to note that the trajectory of the droplets is recovered with the same precision in the transverse (x, y) plane as in the longitudinal (ζ, z) plane. These observed deviations from the ideal straight trajectory [$66 \mu\text{m}$ in the (x, y) plane and $58 \mu\text{m}$ in the (ζ, z) plane] are, however, mostly due to real physical effects. Indeed the oscillations and the beam divergence that can be seen in Fig. 7 are due to vibrations of the injector. Hence the effective precision of the measured position is smaller than the variations due to these physical effects.

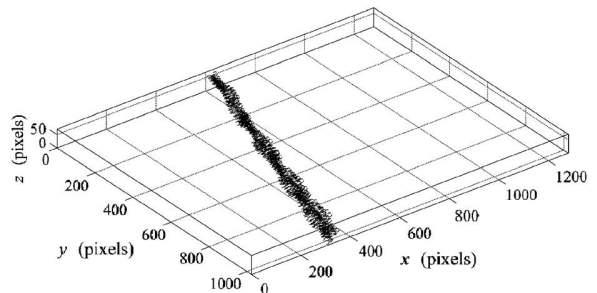
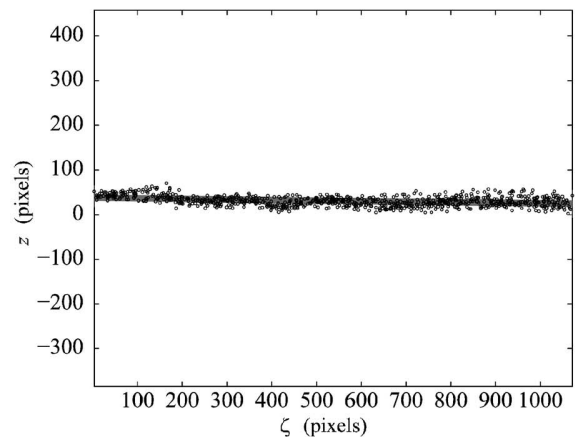
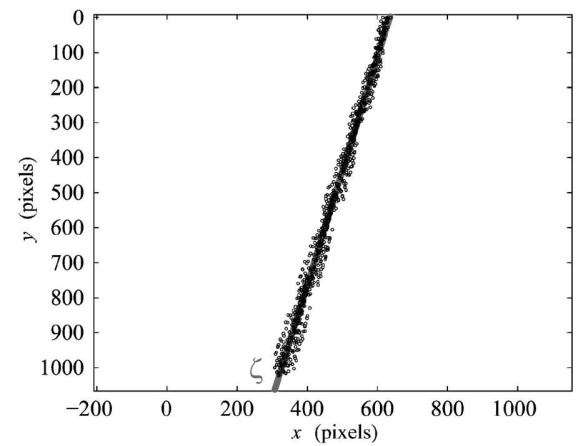


Fig. 7. Droplet jet reconstruction.

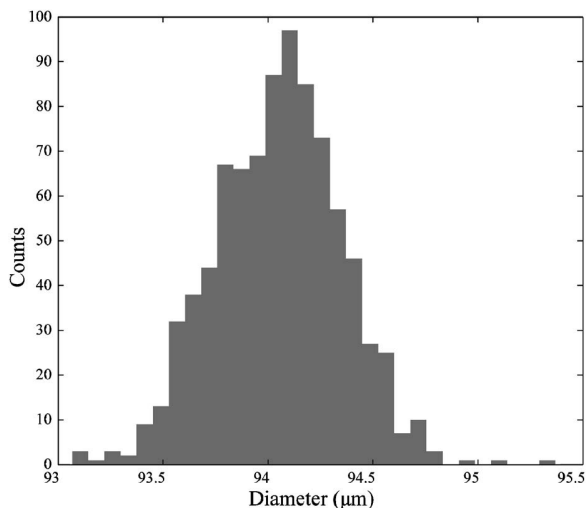


Fig. 8. Measured diameter histogram.

The droplet sizes estimated by our algorithm have a bell-shaped distribution (see Fig. 8) with a mean diameter of $94.1 \mu\text{m}$ and a standard deviation of $0.3 \mu\text{m}$, in agreement with the settings of the droplet injector.

5. DISCUSSION

In this paper we describe an algorithm for the detection and localization of particles in digital holography. The most important difference from existing techniques is that our processing is based on an inverse-problem approach and does not require any direct inversion. In this framework, we introduce a simplified model of the hologram images that depends on the sizes and positions of the diffracting particles. We then solve the problem by seeking the set of particle parameters for which the difference between the model and the data is statistically minimal. Such a criterion turns out to have multiple local minima and thus global optimization is required to properly solve the problem. Our algorithm effectively achieves the global minimum by performing an approximative detection of the particles in the whole parameter space followed by a local refinement of the parameters. By repeating these steps on the residual images, obtained by subtracting the model from the data, our algorithm is able to detect several particles, even those that have a faint signature compared with the diffraction pattern due to the other particles.

We have tested our algorithm on simulated and real data. Our results show that the precision along the depth direction is considerably improved and is much better than the optical resolution in such conditions ($\delta z \approx \lambda/\Omega^2 = 2.6 \text{ mm}$). From our simulations, we get a depth precision as good as $\Delta z = 0.3 \mu\text{m}$ comparable to the transverse precision, for low particle density and small particle size. As expected, the depth precision is degraded as the density and/or the size of the particles increase. In contrast, we found that the transverse precision achieved by our algorithm— $\Delta x = \Delta y = 0.3 \mu\text{m}$ in the conditions of our simulations—does not significantly depend on the particle density, nor on the particle size.

Because it is based on an inverse-problem approach, an important property of our algorithm among the other existing methods is that it has no particular bias for particles near the edge of the field of view (i.e., the ones with the most truncated signatures). Indeed we have found no significant degradation of the precision in the measured positions for the most distant particles from the center of the field of view. As a result, the effective field of view can be extended to account for the whole area of the detector and not just its central part. Similarly, our algorithm can account for bad data or nonrectangular holograms by setting to zero the weights of bad pixels or pixels outside the area covered by the detector.

Not only are the simplifications made in the model assumed by the proposed method not an issue but, when dealing with real data, it appears that our algorithm is also robust with respect to nonhomogeneous illumination and to spurious patterns such as the CCD fringes that can be seen in the last residual image of Fig. 6. In principle, it is possible to use the same algorithm with a different model to account for more complex or more realistic experimental conditions. For instance, we can use a diffraction model for fibers or elongated particles with seven parameters per particle: 3D position, width, length, and orientation angle. This may, however, have a prohibitive impact on the memory and on the processing time required by the method.

The actual sensitivity of the detection is significantly improved by iteratively treating the residual images. This allows us to correctly detect and locate particles with densities as high as 100 hologram. The maximum density achievable by our algorithm has yet to be estimated, e.g., from further simulations. To allow for this study, however, we need to improve the speed of our algorithm. The processing time scales as the number of particles per hologram image. For the present experiments, with a Pentium IV CPU at 3.60 GHz with 2 gigabytes of RAM our algorithm took 7 min per particle: 4 min for the detection and 3 min for particle parameter refinement. We plan to greatly reduce this time by performing multiple detections per pass of our iterative algorithm. We also expect a speedup by a factor of roughly two, thanks to trivial computational optimizations such as using faster numerical routines to compute the Bessel functions. The routine processing of large numbers of holograms would also benefit from these improvements.

APPENDIX A: PARTIAL DERIVATIVES

In this appendix we detail the computation of the partial derivatives of the penalty \mathcal{P}_n^+ with respect to the sought parameters. Such derivatives are required to approximately describe the behavior of the penalty function in the parameter space so that the trust-region Newton algorithm¹⁸ can derive a change of parameter to reduce the penalty.

By applying the chaining rule, the partial derivative of the penalty \mathcal{P}_n^+ with respect to a parameter θ (where θ can be $x'_n, y'_n, z'_n,$ or r'_n) may be written

$$\frac{\partial \mathcal{P}_n^+}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathcal{P}_n}{\partial \theta} \bigg|_{I_0=I_0^+} + \frac{\partial \alpha_n^+}{\partial \theta} \frac{\partial \mathcal{P}_n}{\partial \alpha_n} \bigg|_{I_0=I_0^+} + \frac{\partial I_0^+}{\partial \theta} \frac{\partial \mathcal{P}_n}{\partial I_0} \bigg|_{I_0=I_0^+}.$$

However, since

$$\{\alpha_n^+, I_0^+\} = \arg \min_{\alpha_n, I_0} \mathcal{P}_n,$$

the partial derivatives of \mathcal{P}_n with respect to α_n and I_0 exactly cancel at α_n^+ and I_0^+ . The partial derivative of \mathcal{P}_n^+ therefore simplifies to

$$\frac{\partial \mathcal{P}_n^+}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathcal{P}_n}{\partial \theta} \bigg|_{I_0=I_0^+} = 2\alpha_n^+ \sum_{k=1}^{N_{\text{pixel}}} W_k [R_{n-1,k} - I_0^+ + \alpha_n^+ g_{n,k}] \frac{\partial g_{n,k}}{\partial \theta}, \quad (\text{A1})$$

where $g_{n,k} = g_n(X'_k, Y'_k)$ and for which the partial derivatives are

$$\frac{\partial g_{n,k}}{\partial x'_n} = \frac{(x'_n - X'_k)r'_n}{2\rho_{n,k}'^3} [\phi_{n,k} J_0(\phi_{n,k}) \sin \theta_{n,k} - 2J_1(\phi_{n,k})(\sin \theta_{n,k} - \theta_{n,k} \cos \theta_{n,k})], \quad (\text{A2})$$

$$\frac{\partial g_{n,k}}{\partial y'_n} = \frac{(y'_n - Y'_k)r'_n}{2\rho_{n,k}'^3} [\phi_{n,k} J_0(\phi_{n,k}) \sin \theta_{n,k} - 2J_1(\phi_{n,k})(\sin \theta_{n,k} - \theta_{n,k} \cos \theta_{n,k})], \quad (\text{A3})$$

$$\frac{\partial g_{n,k}}{\partial z'_n} = \frac{r'_n}{2\rho_{n,k}'^2} [J_1(\phi_{n,k})(\sin \theta_{n,k} - \theta_{n,k} \cos \theta_{n,k}) - \phi_{n,k} J_0(\phi_{n,k}) \sin \theta_{n,k}], \quad (\text{A4})$$

$$\frac{\partial g_{n,k}}{\partial r'_n} = \frac{\pi r'_n}{z'_n} J_0(\phi_{n,k}) \sin \theta_{n,k}, \quad (\text{A5})$$

with

$$\theta_{n,k} = \frac{\pi \rho_{n,k}'^2}{z'_n}, \quad (\text{A6})$$

$$\phi_{n,k} = \frac{2\pi r'_n \rho_{n,k}'}{z'_n}, \quad (\text{A7})$$

$$\rho_{n,k}' = \sqrt{(x'_n - X'_k)^2 + (y'_n - Y'_k)^2}. \quad (\text{A8})$$

Exact computation of the second-order partial derivatives would require the partial derivatives of α_n^+ and I_0^+ and the first- and second-order partial derivatives of $g_{n,k}$. A nice property of descent minimization methods such as the trust-region Newton algorithm is that they need only an approximation of the Hessian (matrix of second-order partial derivatives). We make use of this feature to approximate the second-order partial derivatives with respect to parameters θ_1 and θ_2 by

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}_n^+}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \simeq 2\alpha_n^+ \sum_{k=1}^{N_{\text{pixel}}} W_k \frac{\partial g_{n,k}}{\partial \theta_1} \frac{\partial g_{n,k}}{\partial \theta_2}, \quad (\text{A9})$$

which is somewhat reminiscent of the Levenberg–Marquardt approximation in nonlinear least squares. Thanks to our approximation, only the partial derivatives of $g_{n,k}$ with respect to the sought parameters x'_n , y'_n , z'_n , and r'_n are required.

Corresponding author Ferreol Soulez's e-mail address is ferreol.soulez@obs.univ-lyon1.fr.

REFERENCES

1. B. J. Thompson, "A new method of measuring particle size by diffraction techniques," *Jpn. J. Appl. Phys.* **4**, 302–307 (1965).
2. C. S. Vikram, ed., *Selected Papers on Holographic Particle Diagnostics*, SPIE Milestone Series, Vol. MS21 (1990).
3. K. D. Hinsch, "Holographic particle image velocimetry," *Meas. Sci. Technol.* **13**, R61–R72 (2002).
4. T. M. Kreis, M. Adams, and W. Jüptner, *Methods of Digital Holography: A Comparison*, SPIE (Munich, Germany, 1997).
5. M. Liebling, T. Blu, and M. Unser, "Fresnelets: new multiresolution wavelet bases for digital holography," *IEEE Trans. Image Process.* **12**, 29–43 (2003).
6. C. Fournier, C. Ducottet, and T. Fournel, "Digital in-line holography: influence of the reconstruction function on the axial profile of a reconstructed particle image," *Meas. Sci. Technol.* **15**, 686–693 (2004).
7. W. Yang, A. B. Kostinski, and R. A. Shaw, "Depth-of-focus reduction for digital in-line holography of particle fields," *Opt. Lett.* **30**, 1303–1305 (2005).
8. L. Denis, C. Fournier, T. Fournel, and C. Ducottet, "Twin-image noise reduction by phase retrieval in in-line digital holography," *Proc. SPIE* **5914**, 148–161 (2005).
9. S. Murata and N. Yasuda, "Development of full-volume digital holography for particle measurement," in *Optical Methods and Data Processing in Heat and Fluid Flow*, C. Greated, J. Buick, and J. Cosgrove, eds., (Professional Engineering Publishing, 2002), pp. 69–77.
10. M. Malek, D. Allano, S. Coëtmelec, and D. Lebrun, "Digital in-line holography: influence of the shadow density on particle field extraction," *Opt. Express* **12**, 2270–2280 (2004).
11. G. Pan and H. Meng, "Digital holography of particle fields: reconstruction by use of complex amplitude," *Appl. Opt.* **42**, 827–833 (2003).
12. S. Murata and N. Takeuchi, "A neural network approach to the detection of the depth of tracer particles from in-line hologram patterns," *IMEchE Conf. Trans.* **53**, 377–382 (1996).
13. L. Denis, C. Fournier, T. Fournel, C. Ducottet, and D. Jeulin, "Direct extraction of mean particle size from a digital hologram," *Appl. Opt.* **45**, 944–952 (2006).
14. C. S. Vikram, *Particle Field Holography* (Cambridge U. Press, 1992).
15. S. Soththivirat and J. A. Fessler, "Penalized-likelihood image reconstruction for digital holography," *J. Opt. Soc. Am. A* **21**, 737–750 (2004).
16. J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill, 1996).
17. G. A. Tayler and B. J. Thompson, "Fraunhofer holography applied to particle size analysis: a reassessment," *Opt. Acta* **23**, 261–304 (1976).
18. J. J. Moré and D. C. Sorensen, "Computing a trust region step," *SIAM (Soc. Ind. Appl. Math.) J. Sci. Stat. Comput.* **4**, 553–572 (1983).

Inverse problem approach in particle digital holography: out-of-field particle detection made possible

Ferréol Soulez,^{1,2,*} Loïc Denis,^{2,3} Éric Thiébaud,¹ Corinne Fournier,² and Charles Goepfert⁴

¹Centre de Recherche Astronomique de Lyon, CNRS, UMR 5574, Observatoire de Lyon, 9 avenue Charles André, Saint-Genis Laval Cedex, F-69561, France; Université Lyon 1, Villeurbanne, F-69622, France;

Université de Lyon, Lyon, F-69000, France; and Ecole Normale Supérieure de Lyon, F-69000 Lyon, France

²Laboratoire Hubert Curien (ex-LTSl), CNRS UMR 5516, Université Jean Monnet, 18 rue Pr Benoît Lauras, F-42000 Saint-Etienne, France, and Institut Supérieur des Techniques Avancées de Saint-Etienne, F-42000 Lyon, Saint-Etienne, France

³Signal and Image Processing Department, GET-Télécom Paris, CNRS UMR 5141, 46 rue Barrault, 75013 Paris, France

⁴Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, CNRS UMR 5509, Ecole Centrale de Lyon, Université Lyon 1, INSA Lyon, 36 avenue Guy-de-Collongue F-69134 Ecully Cedex, France

*Corresponding author: ferreol.soulez@obs.univ-lyon1.fr

Received February 8, 2007; revised July 19, 2007; accepted September 24, 2007;
posted October 12, 2007 (Doc. ID 79891); published November 15, 2007

We propose a microparticle detection scheme in digital holography. In our inverse problem approach, we estimate the optimal particles set that best models the observed hologram image. Such a method can deal with data that have missing pixels. By considering the camera as a truncated version of a wider sensor, it becomes possible to detect particles even out of the camera field of view. We tested the performance of our algorithm against simulated and experimental data for diluted particle conditions. With real data, our algorithm can detect particles far from the detector edges in a working area as large as 16 times the camera field of view. A study based on simulated data shows that, compared with classical methods, our algorithm greatly improves the precision of the estimated particle positions and radii. This precision does not depend on the particle's size or location (i.e., whether inside or outside the detector field of view). © 2007 Optical Society of America
OCIS codes: 090.1760, 100.3190, 100.5010, 100.6640, 100.2000.

1. INTRODUCTION

Experimental flow has long been studied by imaging particles that are carried by the flow, either naturally present or artificially seeded. The associated techniques are known as particle tracking velocimetry when each particle is tracked from one image to another and as particle image velocimetry when local flow velocity is computed on a correlation criterion basis, suitable only for high particle concentrations. Velocity and size measurements are still often limited to the plane of the light sheet by the lack of accurate truly 3D imaging techniques.

The 3D recording capability of holography makes it suitable for 3D particle imaging, and a lot of work has been done in the field of particle holography [1–6]. Digital holography has greatly improved the processing of holograms by suppressing the wet-chemical processing step and opening new frontiers for automated volume analysis. Hologram analysis still remains largely influenced by traditional optical processing, and most authors describe analysis of 3D reconstructed volume obtained by diffraction simulation (Fresnel transform [1], fractional transforms [7], or wavelets transform [8,9]). We refer to those approaches as “classical” approaches, as they are widely used and accepted.

Classical digital holography is performed in two steps: first, a hologram is recorded with a holographic setup di-

rectly on a digital camera; then, this hologram is processed by reconstructing a 3D volume and analyzing the volume. In the case of particle holograms, the most efficient setup is the Gabor setup (Fig. 7), which requires few optical components: a coherent source, either a continuous laser or a pulsed laser synchronized with the camera, and a beam expander. The particles create a set of diffraction patterns named a Gabor hologram. The use of such a setup limits the particle size and the particle concentration to small particles whose projections on the sensor cover less than 1/100 to 1/10 of its surface [10]. The hologram is then processed in the second step by first reconstructing a volumetric image using diffraction simulation transforms (e.g., volume restitution by Fresnel transform of the zero-padded hologram image), and then the reconstructed volume is segmented and the particle 3D location and size can be deduced from the centroid and mean diameter of each segmented object. Such approaches, however, suffer from various limitations: (i) the depth resolution is about 10 times worse than the transverse resolution; (ii) the field of view is limited and, in practice, must be restricted to the center of the hologram to reduce the border effects; (iii) spurious twin images of the particles get reconstructed; (iv) multiple focusing [11] can occur around the actual depth location of each particle.

In a companion paper [12], we recently suggested an in-

verse problem approach to overcome the issue of accurate location of particles. However, digital holograms today are still technologically limited to a few square centimeters, several times smaller than holographic plates. Digital holograms therefore suffer from truncation, which leads to strong artifacts in the reconstructed volume for particles found close to the borders of the hologram. Out-of-field particles (i.e., particles whose projection is outside the hologram) cannot be recovered by classical techniques unless they are a few tenths of a pixels outside the hologram support.

Our preceding method detects particles in three steps: prelocalization using a classical algorithm, location refinement, and particle cleaning. The limitations of classical algorithms can be partially avoided by expressing the particle detection problem as a global optimization problem that is solved locally. However, the first step, based on classical algorithms, restricts the method to particles in the field of the hologram. This field is smaller in the case of digital holography than in optical holography using a holographic plate and remains a drawback for flow measurements by digital holography. Since our previous algorithm is based on an inverse problem approach, it could be applied to out-of-field particles only if they could be detected in the first step of the method. In the present paper we propose to extend our inverse problem approach to the prelocalization stage of our method so as to achieve detection of out-of-field particles.

The paper is organized as follows. In Section 2, we briefly recall the general principle of our method [12], which detects particles in three steps: prelocalization using a classical algorithm, location refinement, and particle cleaning. In Section 3, we also recall the equations of the model of the hologram used in our simulations and in the inverse problem approach. In Section 4, we derive an alternative technique to perform the volume exploration. In Section 5, we present results obtained with our algorithm on both simulated and experimental data showing that out-of-field particle detection was effectively achieved with almost no loss in precision. The benefits of the new algorithm are summarized in Section 6.

2. GENERAL ALGORITHM SCHEME

The particle detection method presented here takes place in a general particle localization scheme described in the companion paper [12]. The different stages of this algorithm are depicted in Fig. 1. First, a detection algorithm gets an approximate location of a particle, then this location is refined by using an optimization procedure, and finally the diffraction pattern of the detected particle is subtracted from the hologram. The hologram is iteratively processed by the three steps and is gradually cleaned from all previously detected particles. We stop the iterative method and consider that all particles have been detected when the next most likely particle found by the algorithm has aberrant parameters (negligible or negative contribution, too large or too small radius...).

We have shown with real data that the coarse localization step followed by the local optimization step effectively solves the global optimization problem of finding the best size and location of a particle in the (residual) ho-

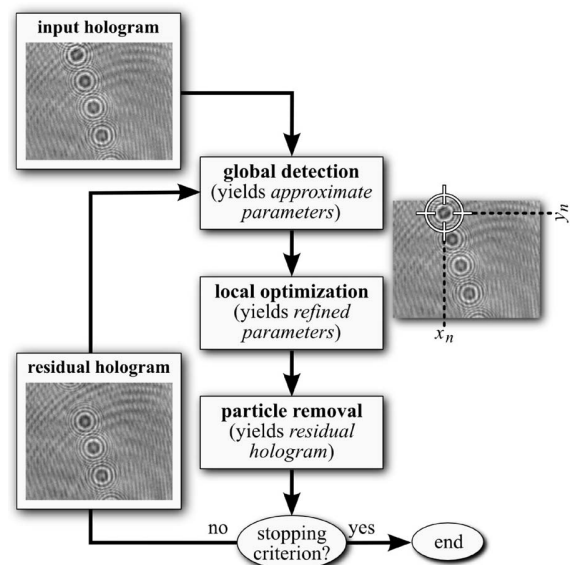


Fig. 1. Synopsis of the method.

logram image, even for particles located near the hologram borders. Repeating the detection and localization steps after removal of previously detected particles allows particles with fainter signatures to be found, in particular particles distant from the camera center.

Since our algorithm is derived by following an inverse problem approach, it does not require any explicit direct inversion of the observed hologram: all estimations are made in the data space. As a result, our algorithm has a number of advantages over other existing methods. For instance, our method is insensitive to the twin-image problem inherent in in-line holography. Moreover, our algorithm is even able to deal with truncated field of view and with holograms with saturated or dead pixels. However, the first detection step (based on a classical approach) must be improved in order to detect out-of-field particles.

3. MODEL OF HOLOGRAM FORMATION

In this section, we recall the model of the observed holograms derived in our previous paper [12]. We consider an in-line holography setup (see Fig. 7 below) where studied particles are illuminated with a collimated laser beam, and the digital camera records both the object wave (scattered light) and the reference wave (laser). We work with small spherical particles and under Fresnel's diffraction approximation [13], that is, for $z_j^3 \gg 4\pi r_j^4/\lambda$, which is verified for the conditions considered in our simulations and experimental results: laser wavelength $\lambda=532$ nm, particle distances to the detector $z_j \approx 250$ mm, and particle radii $r_j \approx 55$ μm .

In our previous paper [12], we showed that, under such conditions and for n particles of radii r_j and 3D positions (x_j, y_j, z_j) , the intensity measured by the detector at position (x, y) is given by

$$I(x,y) = I_{\text{src}} + I_{\text{bg}} - 2I_{\text{src}} \sum_{j=1}^n \eta_j \text{Re}(f_j(x,y)) + I_{\text{src}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \underline{f_i(x,y)} \eta_j \underline{f_j^*(x,y)}, \quad (1)$$

where I_{src} is the image level due to the laser source, I_{bg} is the background level, the real factors $\eta_j \in [0, 1]$ account for possible variation of incident energy seen by a particle due to nonuniform laser illumination, underlines indicate complex quantities, and f_j is the term for amplitude diffraction by the j th particle [12,14]:

$$\underline{f_j(x,y)} = \frac{r_j}{2i\rho_j(x,y)} J_1\left(\frac{2\pi r_j \rho_j(x,y)}{\lambda z_j}\right) \exp\left(i\frac{\pi \rho_j^2(x,y)}{\lambda z_j}\right), \quad (2)$$

where $i = \sqrt{-1}$, J_1 is the first-order Bessel function, and $\rho_j(x,y) = \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}$ is the distance between the point (x,y) in the detector plane (at $z=0$) and the projection (x_j, y_j) of the location of the j th particle on the detector.

Under the considered conditions (low particle density, $z_j \approx 250$ mm, and $r_j \leq 55$ μm), the second-order interference terms in Eq. (1) can be neglected [12] and the model simplifies to

$$I(x,y) \approx I_0 - \sum_{j=1}^n \alpha_j g_j(x-x_j, y-y_j), \quad (3)$$

with $I_0 = I_{\text{src}} + I_{\text{bg}}$, $\alpha_j = 2I_{\text{src}} \eta_j$ and

$$g_j(\Delta x, \Delta y) = \frac{r_j}{2\rho(\Delta x, \Delta y)} J_1\left(\frac{2\pi r_j \rho(\Delta x, \Delta y)}{\lambda z_j}\right) \times \sin\left(\frac{\pi \rho^2(\Delta x, \Delta y)}{\lambda z_j}\right), \quad (4)$$

where $\rho(\Delta x, \Delta y) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ is the projected distance.

The model in Eq. (3) will be the basis of our particle detection approach in Section 4. The resulting hologram expression is a sum of terms depending on the location and size of each diffracting particle. The notation and coordinate system used in our model are summarized in Fig. 2.

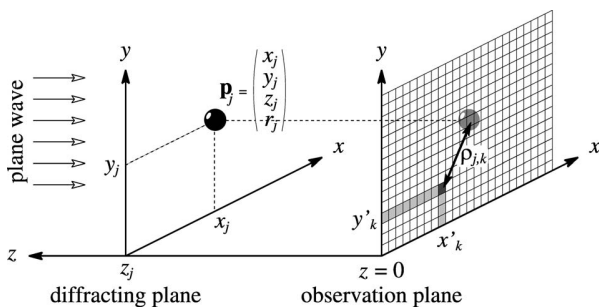


Fig. 2. Notation used in the hologram model. The parameters $\mathbf{p}_j = \{x_j, y_j, z_j, r_j\}$ are the position and radius of the j th particle, (x'_k, y'_k) is the location of the k th pixel, and $\rho_{j,k}$ is the distance between the projection of the j th particle on the detector and the k th pixel.

4. PARTICLE DETECTION

Assuming this model of hologram formation, we suggest in this section a new particle detection scheme achieving detection of out-of-field particles. Determining the optimal set of particles that best models the intensity distribution of the hologram is equivalent to finding the n particle parameters $\{x_j, y_j, z_j, r_j; j=1, \dots, n\}$ that minimize the weighted least-squares penalty:

$$\mathcal{P}_n = \sum_k w(x'_k, y'_k) [m_n(x'_k, y'_k) - d(x'_k, y'_k)]^2, \quad (5)$$

where (x'_k, y'_k) are the coordinates of the k th pixel, m_n is the model, $d(x'_k, y'_k)$ is the k th pixel value in the observed hologram, and $w(x'_k, y'_k)$ is its statistical weight:

$$w(x'_k, y'_k) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Var}(d(x'_k, y'_k))} & \text{if } k\text{th pixel is measured} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (6)$$

where $\text{Var}(d(x'_k, y'_k))$ is the noise variance at pixel (x'_k, y'_k) . The noise considered here is meant to account for the detector noise and for the photon noise, but $\text{Var}(d(x'_k, y'_k))$ can also be set to account for artifacts (such as fringes due to the detector glass window) and for approximation errors (such as digitization and such as speckle noise due to undetected objects at this stage or due to the neglected interferences between particles).

In the case where the noise is assumed to be constant over all known pixels, $1/\text{Var}(d(x'_k, y'_k))$ can be factorized out of Eq. (5). In this case $w(x'_k, y'_k)$ can be viewed as a binary mask on the data:

$$w(x'_k, y'_k) = \begin{cases} 1 & \text{if } k\text{th pixel is measured} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \quad (7)$$

The model $m_n(x'_k, y'_k)$ for n particles is given by Eq. (3):

$$m_n(x'_k, y'_k) = I_0 - \sum_{j=1}^n \alpha_j g_j(x_j - x'_k, y_j - y'_k). \quad (8)$$

As our algorithm proceeds iteratively for each particle (as described in Fig. 1), we consider the previously detected particles' parameters fixed. In our iterative approach, locating the n th particle consists of determining the parameters of the n th particle and the constant level that minimizes \mathcal{P}_n . This is achieved by fitting the parameters $\{\alpha_n, I_0, x_n, y_n, z_n, r_n\}$ on the centered residual image r_{n-1} :

$$r_{n-1}(x'_k, y'_k) = d(x'_k, y'_k) + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j g_j(x_j - x'_k, y_j - y'_k) - c_{n-1}, \quad (9)$$

which is the hologram image minus the contribution of the previous $n-1$ particles and a constant c defined as the mean gray level of the $(n-1)$ th residual image:

$$c_{n-1} = \frac{1}{\sigma_w} \sum_k w(x'_k, y'_k) \left[d(x'_k, y'_k) + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j g_j(x_j - x'_k, y_j - y'_k) \right], \quad (10)$$

with $\sigma_w = \sum_k w(x'_k, y'_k)$ also given in Eq. (14). In other words, the constant c_{n-1} is such that

$$\sigma_{wr} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k w(x'_k, y'_k) r_{n-1}(y'_k, y'_k) = 0, \quad (11)$$

which is used to simplify the equations in what follows.

For the detection and location of the n th particle, our misfit criterion is written as

$$\mathcal{P}_n = \sum_k w(x'_k, y'_k) [I_n - r_{n-1}(x'_k, y'_k) - \alpha_n g_n(x_n - x'_k, y_n - y'_k)]^2 \quad (12)$$

with $I_n = I_0 - c_{n-1}$. For the first particle, we take $r_0(x'_k, y'_k) = d(x'_k, y'_k) - c_0$ with $c_0 = \sum_k w(x'_k, y'_k) d(x'_k, y'_k)$. The expression in Eq. (12) can be expanded as

$$\mathcal{P}_n = \sigma_{wr}^2 + 2\alpha_n \sigma_{wrg} - 2\alpha_n I_n \sigma_{wg} + I_n^2 \sigma_w + \alpha_n^2 \sigma_{wg}^2, \quad (13)$$

where it is accounted for that $\sigma_{wr} = 0$, see Eq. (11), and where

$$\sigma_w = \sum_k w(x'_k, y'_k), \quad (14)$$

$$\sigma_{wr}^2 = \sum_k w(x'_k, y'_k) r_{n-1}^2(x'_k, y'_k), \quad (15)$$

$$\sigma_{wrg} = \sum_k w(x'_k, y'_k) r_{n-1}(x'_k, y'_k) g_n(x_n - x'_k, y_n - y'_k), \quad (16)$$

$$\sigma_{wg} = \sum_k w(x'_k, y'_k) g_n(x_n - x'_k, y_n - y'_k), \quad (17)$$

$$\sigma_{wg}^2 = \sum_k w(x'_k, y'_k) g_n^2(x_n - x'_k, y_n - y'_k). \quad (18)$$

Note that although these sums involve a single pixel index k , terms such as σ_{wrg} in Eq. (16), σ_{wg} in Eq. (17), and σ_{wg}^2 in Eq. (18) are in fact 2D discrete convolutions. Their efficient computation is discussed in Subsection 4.B.

A. Optimal Parameters' Determination

Given x_n, y_n, z_n , and r_n , the optimal offset I_n^+ and factor α_n^+ for such a model are obtained by solving the linear system

$$\left. \frac{\partial \mathcal{P}_n}{\partial I_n} \right|_{I_n=I_n^+, \alpha_n=\alpha_n^+} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{P}_n}{\partial \alpha_n} \right|_{I_n=I_n^+, \alpha_n=\alpha_n^+} = 0,$$

which yields

$$I_n^+ = \frac{-\sigma_{wg} \sigma_{wrg}}{\sigma_w \sigma_{wg}^2 - \sigma_{wg}^2} = \alpha_n^+ \frac{\sigma_{wg}}{\sigma_w}, \quad (19)$$

$$\alpha_n^+ = \frac{-\sigma_w \sigma_{wrg}}{\sigma_w \sigma_{wg}^2 - \sigma_{wg}^2}. \quad (20)$$

Replacing I_n and α_n with their optimal I_n^+ and α_n^+ values in Eq. (13) yields the partially optimized criterion:

$$\mathcal{P}_n^+ \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_n \Big|_{I_n=I_n^+, \alpha_n=\alpha_n^+} = \sigma_{wr}^2 - \frac{\sigma_w (\sigma_{wrg})^2}{\sigma_w \sigma_{wg}^2 - \sigma_{wg}^2}. \quad (21)$$

It remains to optimize \mathcal{P}_n^+ with respect to the other parameters, namely, x_n, y_n, z_n , and r_n . This is equivalent to maximizing

$$\mathcal{Q}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_w (\sigma_{wrg})^2}{\sigma_w \sigma_{wg}^2 - \sigma_{wg}^2} \quad (22)$$

under the condition (by definition $\alpha_j = 2\gamma |A_0|^2 \eta_j > 0$)

$$\alpha_n^+ = \frac{-\sigma_w \sigma_{wrg}}{\sigma_w \sigma_{wg}^2 - \sigma_{wg}^2} > 0. \quad (23)$$

B. Fast Computation

It is possible to achieve fast determination at pixel resolution of the projected coordinates (x'_n, y'_n) of the n th particle given its other parameters z_n and r_n . The terms σ_{wrg} , σ_{wg}^2 , and σ_{wg} [given, respectively, by Eqs. (16)–(18)] are involved in the expression of the criterion \mathcal{Q}_n to be maximized. When z_n and r_n are chosen, these terms are simply 2D discrete convolutions (the term σ_w is a constant that can be computed once for all). Under the circulant approximation (as the CCD is a rectangular grid), it is possible to compute these terms by means of a few fast Fourier transforms (FFTs) for any projected coordinates (x_n, y_n) matching the locations of the CCD pixels. In other words, given the depth z_n and radius r_n of the n th particle, it is possible to quickly compute a 2D map of the criterion \mathcal{Q}_n with respect to the projected coordinates and with a resolution equal to the size of a pixel. The maximum of this map indicates the most likely projected positions of the n th particle if it were located at distance z_n with a radius r_n . In the following, we detail the computation of the 2D map of \mathcal{Q}_n .

We use \mathbf{g} to denote the vector of values of g_n for given depth z_n and radius r_n and sampled at projected coordinates equal to the CCD coordinates:

$$\mathbf{g}_k \stackrel{\text{def}}{=} g_n(x'_k, y'_k). \quad (24)$$

Similarly, \mathbf{r} denotes the 2D map of residuals,

$$\mathbf{r}_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} r_{n-1}(x'_k, y'_k) & d_k \text{ is measured} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (25)$$

and \mathbf{w} the 2D map of nonstationary weights,

$$\dot{w}_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{Var}(d_k)^{-1} & d_k \text{ is measured} \\ 0 & \text{otherwise (mainly outside the field of view)} \end{cases} \quad (26)$$

We purposely defined $\dot{\mathbf{r}}$ and $\dot{\mathbf{w}}$ for a field of view larger than the CCD support. The next subsection explains how support and aliasing issues are solved by using such an extended field of view. Note that the value of $\dot{\mathbf{r}}$ outside the field of view is irrelevant; that is why the weights $\dot{\mathbf{w}}$ must be set to zero outside the field of view (and for any bad pixels).

Under the circulant approximation, the 2D map of σ_{wg} can be approximated by

$$\dot{\mathbf{a}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}^{-1} \cdot \text{diag}(\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{w}}) \cdot \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{g}}, \quad (27)$$

where \mathbf{F} is the 2D discrete Fourier transform (DFT) matrix operator and where $\text{diag}(\mathbf{u})$ is the diagonal matrix with diagonal elements equal to the elements of vector \mathbf{u} ; hence $\text{diag}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$ is simply the elementwise product of vectors \mathbf{u} and \mathbf{v} :

$$[\text{diag}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}]_k = u_k v_k. \quad (28)$$

Under the circulant approximation, $\dot{\mathbf{a}}$ represents the correlation between $\dot{\mathbf{w}}$ and $\dot{\mathbf{g}}$. Likewise, the 2D maps of σ_{wrg} and σ_{wrg^2} can be respectively approximated by

$$\dot{\mathbf{b}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}^{-1} \cdot \text{diag}(\mathbf{F} \cdot \text{diag}(\dot{\mathbf{w}}) \cdot \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{g}}, \quad (29)$$

$$\dot{\mathbf{c}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}^{-1} \cdot \text{diag}(\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{w}}) \cdot \mathbf{F} \cdot \text{diag}(\dot{\mathbf{g}}) \cdot \dot{\mathbf{g}}. \quad (30)$$

Finally, the 2D map of the criterion Q_n is approximated by

$$Q_k \approx \dot{Q}_k = \frac{\sigma_w \dot{b}_k}{\sigma_w \dot{c}_k - \dot{a}_k^2}, \quad (31)$$

which is the value of Q_n for a projected position $(x_n, y_n) = (x'_k, y'_k)$.

For every particle and for every sampled depth and particle radius, a circulant approximation \dot{Q}_n of the 2D

map of Q_n must be computed. This requires seven FFTs (four direct FFTs plus three inverse FFTs). In fact, the DFT of $\dot{\mathbf{w}}$ can be computed once for all, whereas the DFT of $\text{diag}(\dot{\mathbf{w}}) \cdot \dot{\mathbf{r}}$ must be computed for every new particle; hence only five more FFTs are required for every particle and for every sampled depth and particle radius.

C. Reconstruction Outside the Field of View

With such a formulation, it is possible to seek particles outside the field of view in a working area T that is larger than the CCD. However, for fast computation of \dot{Q}_n , we use FFTs that yield spatial aliasing because of the circulant approximation. To limit the aliasing effects, we perform all computations on a region R that is larger than the working area T where particles are to be detected. The width and height of region R are chosen so that $W_R \geq W_T + W$ and $H_R \geq H_T + H$, where $H_T \times W_T$ and $W \times H$ are the dimensions of working area T and of the detector (see Fig. 3). The residuals and statistical weights over region R are set according to Eqs. (25) and (26).

D. Segmentation

Laterally, \dot{Q}_n is sampled with the same size as the pixel width inside and outside of the field of view. \dot{Q}_n is computed for several slices (z_n, r_n) with a coarse sampling (typically every millimeter in depth and every $5 \mu\text{m}$ for radius). This 4D space of solutions is exhaustively explored to extract parameters $\{x_n^+, y_n^+, z_n^+, r_n^+\}$ that maximize \dot{Q}_n . In practice, to reduce computation, only a 3D space of solutions (x', y', z) is evaluated, using an average radius. For improved efficiency, the mean radius can be estimated by using the direct hologram analysis described in [15]. Eventually, at the optimal depth z_n^+ , \dot{Q}_n can be computed for a few r_n values depending on particle radius dispersion (see Section 5).

5. RESULTS

A. Simulated Data

To assess the performance of our algorithm, we first processed simulated data. We compare the results obtained with the new algorithm and the results obtained with a classical approach. A study of the accuracy versus transversal location of the particle was conducted. This data set is composed of 32 holograms simulated with the same experimental conditions. Each hologram records the diffraction pattern of 20 disks with random radii between 40 and $50 \mu\text{m}$ and randomly distributed in a box of dimensions $13.72 \text{ mm} \times 13.72 \text{ mm} \times 50.00 \text{ mm}$. The wavelength of the laser is $0.532 \mu\text{m}$. The camera has 1024×1024 pixels spaced by $6.7 \mu\text{m}$ and is placed at about 250 mm from the studied volume in order to stay in the approximation range defined in Section 3. The field of view of this camera ($6.86 \text{ mm} \times 6.86 \text{ mm}$) represents a quarter of the section of the studied volume and is centered on it.

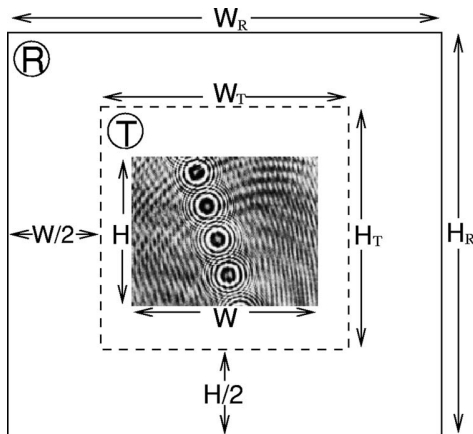


Fig. 3. Computing region R and working area T compared with the CCD size ($W \times H$).

Our inverse problem approach is based on a simplified model of the hologram image formation. To account for the effects of such simplifications on the detection and localization of the particles, we use a more accurate model to simulate the hologram images used in this test. More precisely, we use the image model given by Eq. (1) to simulate the holograms, whereas the simplified model in Eq. (3) is assumed during the detection and localization steps of the algorithm. Hence the interference pattern between waves diffracted by different particles is accounted for in the simulated images, whereas it is neglected by the algorithm. To properly simulate quantization by the detector, the dynamics of the simulated hologram images is converted into 8 bit integer values prior to their processing.

In the particle detection step, a reconstruction every millimeter in z was sufficient for a successful coarse detection. These 50 detections were performed for an average radius of $45 \mu\text{m}$. At the depth z^+ that maximizes \hat{Q}_n , five detections were performed for equally sampled radii between 40 and $50 \mu\text{m}$. This leads to $(55 \times 5 + 2)$ FFT computations per particle.

The results of this inverse problem approach were compared with a classical particle detection algorithm (based on hologram reconstruction followed by 3D segmentation). As such conventional methods can deal with particles only inside (or very close to) the camera's field of view, we conducted the tests on simulated holograms under exactly the same conditions to have approximately the same number of detected particles. To achieve meaningful statistical results, we performed all the tests on 100 simulated holograms.

Our method detected almost every particle: on average, only 20 particles out of 640 were not detected (detection ratio of 97%), and 2 were falsely detected (false positive ratio of 0.3%). The conventional method detects 631 particles out of 2000 (detection ratio of 32%). As expected, we noticed that the conventional method cannot properly deal with out-of-field particles (detection ratio of 100% in the field of view and 6% outside).

Errors in particle parameters (x, y, z, r) are plotted as a function of the distance of the particle to the closest edge

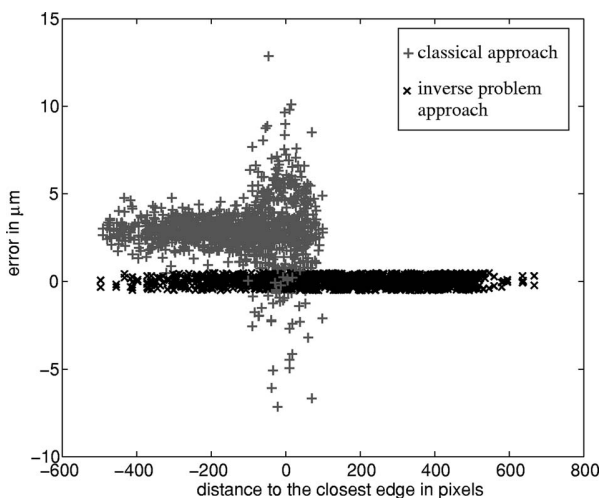


Fig. 4. Comparison of lateral errors (on x and y) for classical and inverse problem approaches. Pixel size, $6.7 \mu\text{m}$.

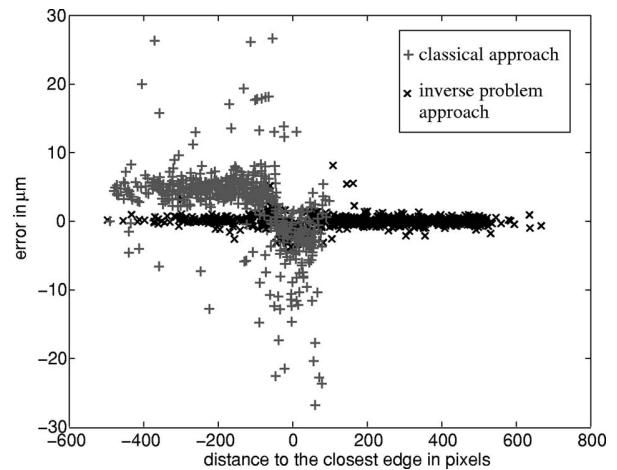


Fig. 5. Comparison of depth error (parameter z) for classical and inverse problem approaches. Pixel size, $6.7 \mu\text{m}$.

of the CCD. This representation seems to emphasize the algorithm artifacts well. Results are shown in Figs. 4–6.

- Transversal errors of both methods are plotted in Fig. 4. Subpixel precision is reached for both methods, but our method is unbiased and more precise. It presents an equal standard deviation on both x and y axes ($\Delta x \approx \Delta y \approx 0.3 \mu\text{m}$ or $1/20$ pixel). This standard deviation does not significantly depend on the size or the location of the particles.

- Figure 5 shows the depth error for both methods. Our method greatly improves the classical one: the bias is negligible, and the subpixel standard deviation ($\Delta z \approx 0.9 \mu\text{m}$ or $1/7$ pixel) is almost constant whatever the particle parameter.

- Only errors in radius for our approach are plotted in Fig. 6, as radius estimation by the classical method presents errors too large to be plotted on the same figure (bias is $-8.8 \mu\text{m}$ and $\Delta r \approx 1.8 \mu\text{m}$ for the classical method). Radius estimation by our method is very precise, with a standard deviation of $\Delta r \approx 0.04 \mu\text{m}$ for an average radius of $45 \mu\text{m}$. Although radius estimation is unbiased for particles outside the field of view, a small negative bias can be noticed for particles inside. This bias is due to

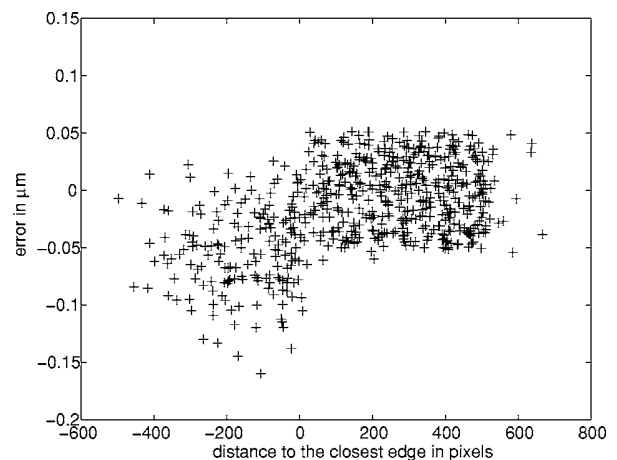


Fig. 6. Error on radius (parameter r) for the inverse problem approach. Pixel size, $6.7 \mu\text{m}$.

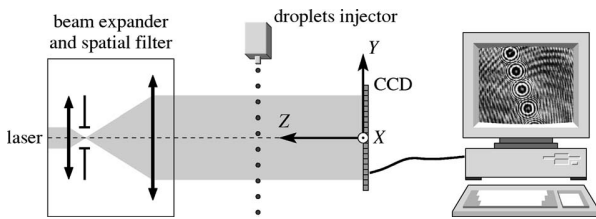


Fig. 7. In-line holography setup.

the simplifications made in our model: the neglected interference term [second term in Eq. (1)] is larger when particles are inside of the field of view.

B. Experimental Data

We carried out an experimental test of our algorithm using real data from an in-line holography setup. The experimental test data are the same as in the companion paper [12]. The experimental layout is shown in Fig. 7. The camera is a 12 bit CCD with 1280×1024 pixels of size $6.7 \mu\text{m} \times 6.7 \mu\text{m}$. It is located at about 25 cm from the injector in order not to disturb the flow experiment. This leads to a small but realistic numerical aperture of $\Omega = 0.014$. The laser wavelength is $0.532 \mu\text{m}$. Studied particles are water droplets injected by a piezoelectric injector (conceived by Bremen University) that generates monodisperse droplets. Their sizes are adjustable between 50 and $100 \mu\text{m}$.

The experimental dataset consists of a set of 100 pairs of holograms with four or five droplets on each image. An example of such holograms can be seen in the central box of Fig. 8. The 3D locations and radii of droplets were extracted from this dataset by our algorithm. Each hologram was processed as described in Section 2. At each iteration, \mathcal{P} is computed to detect the next particle. Pasteup Fig. 9 shows an example of a slice (x, y) with calculated \mathcal{P} at each iteration. Figure 8 illustrates the result of the pro-

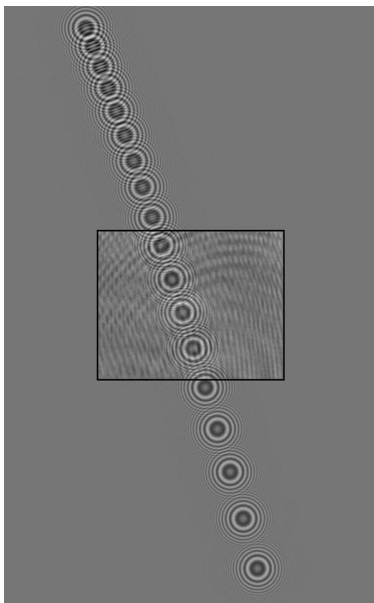


Fig. 8. Superimposition of an experimental hologram (in the box) on a synthesized hologram of 18 reconstructed particles.

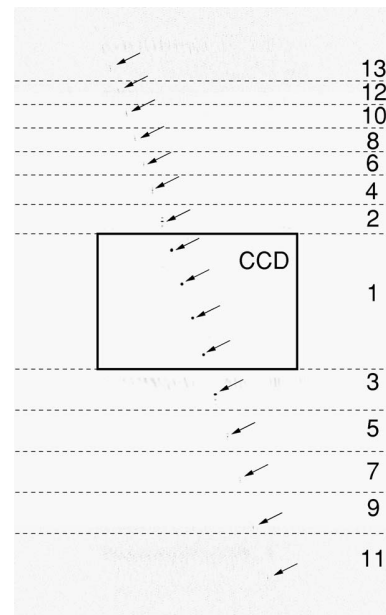


Fig. 9. Montage of slices of the criterion \hat{Q} computed on an experimental hologram as a function of the lateral position (x, y) of the sought particle. The montage is composed of 13 maps numbered in order of their computation from 1 to 13. Each map is computed at optimal depth z for the particle detected at that stage and after the detection and removal of preceding particles. Detected particles are indicated by arrows. To improve readability, the color scale has been inverted: maxima of \hat{Q} appear as dark spots.

cessing of one hologram of the dataset. Let us point out that although 4 particles were in the camera field of view (in the box on the figure), as many as 18 were detected.

The measured particle locations are shown in Fig. 10. The average trajectory clearly is close to the straight line expected from the experimental conditions. Detected out-of-field particle locations and their spacings describe well their ballistic trajectory. At each extremity of the reconstructed jet, the low signal-to-noise ratio increases the observed deviations from the ideal straight trajectory. For particles far from sensor edges, assumptions made in Section 3 become less relevant, and model noise is added to measurement noise. The jet divergence that can be seen in Fig. 10 is due mostly to vibrations of the injector [12]. Hence, the effective precision of the measured locations is smaller than the variations due to these physical effects.

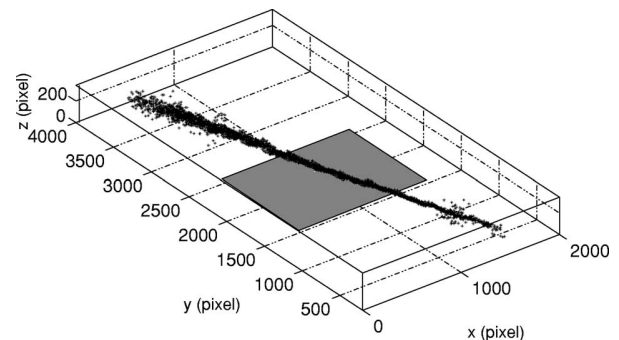


Fig. 10. 3D reconstruction of the droplet jet materialized by the positions of the detected droplets. Gray area, camera field of view.

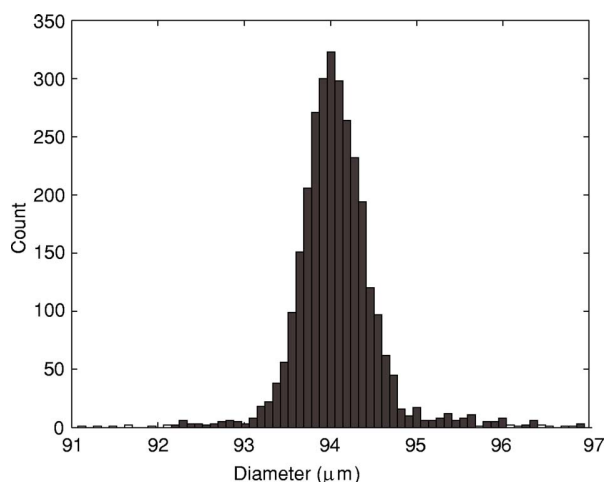


Fig. 11. (Color online) Histogram of measured particle diameters.

The droplet sizes estimated by our algorithm have a bell-shaped distribution (see Fig. 11) with a mean diameter of $94.1 \mu\text{m}$ and a standard deviation of $0.3 \mu\text{m}$, in agreement with the settings of the droplet injector.

6. CONCLUSION

In a companion paper [12], we have introduced a new algorithm that accurately estimates the parameters of particles in digital holography. In this paper, we complete this scheme by describing a new algorithm for the detection of particles outside of the field of view of the sensor. The most important difference from other existing techniques is that our processing is based on an inverse problem approach and thus does not require any direct inversion. In this framework, we introduce a simplified model of the hologram images that directly incorporates the sizes and locations of the diffracting particles. We solve the problem by determining the set of particle parameters for which the difference between the model and the data is minimized. The objective function turns out to have multiple local minima, and thus a global optimization procedure is necessary to properly solve the problem. Our algorithm effectively achieves global minimization by performing an approximate detection of the particles in the whole parameter space followed by a local refinement. By repeating these steps on the residual images, our algorithm is able to detect particles even if their signature is faint compared with the speckle noise due to the other particles in the original hologram.

We have tested our algorithm on both simulated and real data. Our results show that the precision along the depth direction is greatly improved and is much better than the optical resolution under such conditions ($\delta z \geq \lambda/\Omega^2 = 2.6 \text{ mm}$). In simulations our algorithm achieves unbiased localization with constant accuracy even far from the sensor edges. Comparison with classical methods shows very strong improvements (laterally $\Delta x = \Delta y = 0.3 \mu\text{m}$, $\Delta z < 1 \mu\text{m}$ in depth, and $\Delta r < 0.05 \mu\text{m}$ for radius). When dealing with experimental data, it appears that our algorithm is also robust with respect to nonhomogeneous illumination and to spurious patterns due to

experimental noise, as seen in Fig. 9. As the estimation is done in the data space, our algorithm can cope with truncated holograms or bad pixels: it is sufficient to set to zero the weight of unmeasured or bad pixels. Such a formulation allows us to detect particles outside the classical field of view, effectively extending the area of measurement. For instance, Fig. 8 shows that, even though only 6 particles' signatures could be seen on the CCD, our algorithm was able to accurately localize 12 additional particles, using nonlocal information in the detected image.

In its current implementation, the computation burden of our algorithm is quite heavy: for our simulation, the full processing (detection, refinement and cleaning) takes about 7 min/particle on a Pentium IV CPU at 3.60 GHz. For routine use, we plan to accelerate the method. This could be done if we manage to perform multiple-particle detection per pass. This improvement and also a more extensive analysis of performance and possible limitations of our algorithm are currently under study. For instance, as the density of particles increases, one expects that interferences between the waves diffracted by close particles to become more important, which could break the approximation made in the detection step. We have checked [12] that our method works for at least 100 particles over 1000×1000 pixels, but we did not try to push this limit. Nevertheless, in-line digital holography methods are clearly devoted to diluted particle conditions (because they involve the recording of 3D information on a 2D detector with no phase information); the occurrence of pairs of very close particles is very unlikely under these conditions.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors are very grateful to their colleague Christophe Ducottet and to the reviewers, whose fruitful remarks have helped to improve the paper. The algorithms and the simulations presented in this paper have been implemented in Yorick (<http://yorick.sourceforge.net>), a free data processing language written by D. Munro.

REFERENCES

1. T. M. Kreis, M. Adams, and W. Jüptner, "Methods of digital holography: a comparison," *Proc. SPIE* **3098**, 224–233 (1997).
2. S. Murata and N. Yasuda, "Potential of digital holography in particle measurement," *Opt. Laser Technol.* **32**, 567–574 (2000).
3. G. Pan and H. Meng, "Digital holography of particle fields: reconstruction by use of complex amplitude," *Appl. Opt.* **42**, 827–833 (2003).
4. K. D. Hinsch and S. F. Herrmann, eds., "Special issue: holographic particle image velocimetry," *Meas. Sci. Technol.* **15**, 601–769 (2004).
5. F. Sheng, E. Malkiel, and J. Katz, "Digital holographic microscope for measuring three-dimensional particle distributions and motions," *Appl. Opt.* **45**, 3893–3901 (2006).
6. T. Ooms, W. Koek, J. Braat, and J. Westerweel, "Optimizing Fourier filtering for digital holographic particle image velocimetry," *Meas. Sci. Technol.* **17**, 304–312 (2006).
7. Y. Zhang, G. Pedrini, W. Osten, and H. Tiziani, "Applications of fractional transforms to object reconstruction from in-line holograms," *Opt. Lett.* **29**, 1793–1795 (2004).

8. C. Buraga-Lefebvre, S. Coëtmellec, D. Lebrun, and C. Özkul, "Application of wavelet transform to hologram analysis: three-dimensional location of particles," *Opt. Lasers Eng.* **33**, 409–421 (2000).
9. M. Liebling, T. Blu, and M. Unser, "Fresnelets: new multiresolution wavelet bases for digital holography," *IEEE Trans. Image Process.* **12**, 29–43 (2003).
10. H. Royer, "Holographic velocimetry of submicron particles," *Opt. Commun.* **20**, 73–75 (1977).
11. C. Fournier, C. Ducottet, and T. Fournel, "Digital in-line holography: influence of the reconstruction function on the axial profile of a reconstructed particle image," *Meas. Sci. Technol.* **15**, 686–693 (2004).
12. F. Soulez, L. Denis, C. Fournier, E. Thiébaud, and C. Goepfert, "Inverse problem approach for particle digital holography: accurate location based on local optimisation," *J. Opt. Soc. Am. A* **24**, 1164–1171 (2007).
13. J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* (Mc Graw-Hill, 1996).
14. G. A. Taylor and B. J. Thompson, "Fraunhofer holography applied to particle size analysis: a reassessment," *Opt. Acta* **23**, 261–304 (1976).
15. L. Denis, C. Fournier, T. Fournel, C. Ducottet, and D. Jeulin, "Direct extraction of mean particle size from a digital hologram," *Appl. Opt.* **45**, 944–952 (2006).

HETEROGENEOUS MULTIDIMENSIONAL DATA DEBLURRING

Ferréol Soulez^{1,2}, Éric Thiébaud¹, Alain Gressard³, Raphaël Dauphin³, Sbastien Bongard⁴

¹Centre de Recherche
Astrophysique de Lyon,
CNRS-UMR 5574,
Université Lyon 1, Ecole
Normale Supérieure de Lyon
Observatoire de Lyon, 9
avenue Charles André,
Saint-Genis Laval cedex,
F-69561, France.

²Laboratoire Hubert Curien
(ex-LTSI),
CNRS-UMR 5516,
Université Jean Monnet, 18
rue Pr Benoît Lauras,
F-42000 Saint-Etienne,
France.

³Service de Cardiologie de
l'hôpital
de la Croix Rousse, Hospices
Civils de Lyon, France

⁴Lawrence Berkeley
National Laboratory, CA,
USA

ABSTRACT

We present a new scheme for deconvolution of heterogeneous multidimensional data (*e.g.* spatio-temporal or spatio-spectral). It is derived, in a very general way, following an inverse problem approach. This method exploits the continuity of both object and PSF along the different dimensions to elaborate separable constraints. This improves the effectiveness and the robustness of the deconvolution technique. We demonstrate these improvements by processing real X-ray video sequences (x, y, t) and astronomical multi-spectral images (x, y, λ) .

1. INTRODUCTION

Nowadays, blind image deconvolution receives increasing attention from the academic world (see [1] for a review). Most of these works focus on image deconvolution and to our knowledge, excepted in the specific super-resolution field([2]), few of them ([3, 4, 5]) address the problem of deconvolving multidimensional data (*e.g.* series of images of a varying scene taken at different times or wavelengths). In this paper, we propose an algorithm for blind or conventionnal deconvolution of such multidimensional data. It uses correlation along every dimension to elaborate constraints and then perform effective deblurring. First we describe the model of image formation, then we talk about the likelihood and the different separable regularizations used in our approach. After a quick summary of the algorithm, we show two results in two different application fields: (i) a blind deconvolution of medical X-ray video sequences (x, y, t) ; (ii) a deconvolution of astronomical multi-spectral images (x, y, λ) .

2. MODEL DESCRIPTION

In this paper we consider a multidimensional object $f(\mathbf{s})$ with heterogeneous dimensions $\mathbf{s} = (r, t, \lambda)$ with $r = (x, y)$ the spatial position, t the time and λ the wavelength. The data $\mathbf{g}(\mathbf{s})$ are given by:

$$g(\mathbf{s}) = \int h(\mathbf{s}|\mathbf{s}')f(\mathbf{s}')d\mathbf{s}' + n(\mathbf{s}), \quad (1)$$

where $f(\mathbf{s}')$ is the object brightness distribution, $h(\mathbf{s}|\mathbf{s}')$ is the point spread function (PSF), and $n(\mathbf{s})$ accounts for the noise (source and detector). The PSF $h(\mathbf{s}|\mathbf{s}')$ is the observed brightness distribution at \mathbf{s} for a point source located at \mathbf{s}' .

For data sampled on a rectangular grid of N pixels, T time frames and L wavelength channels, Eq. (1) can be written in a matrix form:

$$\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f} + \mathbf{n}, \quad (2)$$

where \mathbf{g} and \mathbf{f} are stacked vectors of size $N \cdot T \cdot L$, \mathbf{n} is a $N \cdot T \cdot L$ random vector and \mathbf{H} is a $(N \cdot T \cdot L) \times (N \cdot T \cdot L)$ matrix. In other words:

$$g_{r,\lambda,t} = \sum_{r',t',\lambda'} H_{r,t,\lambda;r',t',\lambda'} \cdot f_{r',t',\lambda'} + n_{r,\lambda,t}. \quad (3)$$

If there is no spread between time frames or wavelength channels or both (*e.g.* $g_{r,\lambda,t} = \sum_{r'} H_{r,t,\lambda;r',\lambda,t} \cdot f_{r',t,\lambda} + n_{r,\lambda,t}$), \mathbf{H} becomes block diagonal. In addition, if the PSF is shift invariant (isoplanatic), then Eq. (1) can be expressed using $*$ to denote spatial convolution and the first spatial row of \mathbf{H} $\mathbf{h}_{t,\lambda} = [h_{r,t,\lambda}; \forall r]$:

$$\mathbf{g}_{t,\lambda} = \mathbf{h}_{t,\lambda} *_{(r)} \mathbf{f}_{t,\lambda} + \mathbf{n}_{t,\lambda}. \quad (4)$$

Under circulant approximation, this can be evaluated rapidly using FFT's.

3. INVERSE PROBLEM APPROACH

In blind deconvolution the object vector \mathbf{f} and the PSF \mathbf{h} , both of size $N \cdot T \cdot L$, must be estimated from only $N \cdot T \cdot L$ measurements stacked in \mathbf{g} . This is a typical inverse problem, that can be solved in a penalized likelihood or maximum a posteriori (MAP) framework [6].

This is achieved by estimating the couple $\{\mathbf{f}^+, \mathbf{h}^+\}$ that minimizes the cost function $\varepsilon(\mathbf{f}, \mathbf{h})$:

$$\{\mathbf{f}^+, \mathbf{h}^+\} = \underset{\{\mathbf{f}, \mathbf{h}\}}{\operatorname{arg\,min}} \varepsilon(\mathbf{f}, \mathbf{h}), \quad (5)$$

$$\varepsilon(\mathbf{f}, \mathbf{h}) = \Phi_{\text{likl}}(\mathbf{f}, \mathbf{h}, \mathbf{g}) + \Phi_{\text{obj}}(\mathbf{f}) + \Phi_{\text{psf}}(\mathbf{h}), \quad (6)$$

This cost function $\varepsilon(\mathbf{f}, \mathbf{h})$ is the sum of three terms: a *likelihood penalty* $\Phi_{\text{likl}}(\mathbf{f}, \mathbf{h}; \mathbf{g})$ ensuring the agreement between the model $\mathbf{f} * \mathbf{h}$ and the data \mathbf{g} , and two *regularization penalties* $\Phi_{\text{obj}}(\mathbf{f})$ and $\Phi_{\text{psf}}(\mathbf{h})$ introducing subjective *a priori* knowledge about the object and the PSF respectively.

In the case where the PSF is known (simple deconvolution), only the object vector \mathbf{f} must be estimated. The criterion becomes:

$$\varepsilon(\mathbf{f}) = \Phi_{\text{likl}}(\mathbf{f}, \mathbf{h}, \mathbf{g}) + \Phi_{\text{obj}}(\mathbf{f}). \quad (7)$$

3.1 The likelihood penalty term

For Gaussian noise, the likelihood penalty reads:

$$\Phi_{\text{lik}}(\mathbf{f}, \mathbf{h}, \mathbf{g}) = [\mathbf{g} - \mathbf{m}(\mathbf{f}, \mathbf{h})]^T \cdot \mathbf{W} \cdot [\mathbf{g} - \mathbf{m}(\mathbf{f}, \mathbf{h})], \quad (8)$$

where $\mathbf{m}(\mathbf{f}, \mathbf{h})$ is the model and \mathbf{W} is a weighting matrix accounting for the different noises (observation noise, detector noise, model errors...) and is the inverse of its covariance matrix: $\mathbf{W} = \mathbf{C}_{\text{noise}}^{-1}$. Using Eq. (2) the model is defined as:

$$\mathbf{m}(\mathbf{f}, \mathbf{h}) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}, \quad (9)$$

and can be evaluated using Eq. (4) for every (t, λ) . If the noise is uncorrelated, the weighting matrix is diagonal $\mathbf{W} = \text{diag}(\mathbf{w})$ and Eq. (8) simplifies to:

$$\Phi_{\text{lik}}(\mathbf{f}, \mathbf{h}, \mathbf{g}) = \sum_{r,t,\lambda} w_{r,t,\lambda} \left((\mathbf{H}_{t,\lambda} \cdot \mathbf{f}_{t,\lambda})_r - g_{r,t,\lambda} \right)^2, \quad (10)$$

where $1/w_{r,t,\lambda}$ is the noise variance for pixel r of frame t and channel λ . This model can cope with non-stationary noise and can be used to express confidence on measurements on each pixel of the data. Since unmeasured data have infinite variance, we can readily deal with missing (outside the field of view) or bad pixels as follows:

$$w_{r,t,\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{Var}(g_{r,t,\lambda})^{-1} & \text{if } g_{r,t,\lambda} \text{ is measured,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (11)$$

Except for very low detector noise ($< \text{few } e^-$ per pixel), we can approximate the total noise (Gaussian detector noise plus Poissonian signal noise) by a non stationary Gaussian noise:

$$w_{r,t,\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \left(\gamma \max(g_{r,t,\lambda}, 0) + \sigma_{r,t,\lambda}^2 \right)^{-1} & \text{if } g_{r,t,\lambda} \text{ is measured,} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (12)$$

where γ accounts for the quantization factor of the detector and $\sigma_{r,t,\lambda}^2$ is the variance of other approximately Gaussian noise (for example read-out noise) on the pixel (r, t, λ) .

3.2 Separable a priori

As the different dimensions of the object are not homogeneous, we consider a separable regularization term for the object:

$$\Phi_{\text{obj}}(\mathbf{f}) = \Theta_{\text{obj}}(\mathbf{f}) + \Psi_{\text{obj}}(\mathbf{f}) + \Xi_{\text{obj}}(\mathbf{f}), \quad (13)$$

where $\Psi_{\text{obj}}(\mathbf{f})$ is a temporal regularization, $\Theta_{\text{obj}}(\mathbf{f})$ is a spatial regularization and $\Xi_{\text{obj}}(\mathbf{f})$ is the spectral regularization.

In the same way, we define a separable regularization for the PSF:

$$\Phi_{\text{psf}}(\mathbf{h}) = \Theta_{\text{psf}}(\mathbf{h}) + \Psi_{\text{psf}}(\mathbf{h}) + \Xi_{\text{psf}}(\mathbf{h}). \quad (14)$$

In order to be as general as possible, we use:

$$\Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{r,\lambda} \alpha_{r,\lambda} \Omega_{\Psi}(\mathbf{x}; r, \lambda), \quad (15)$$

$$\Theta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta}) = \sum_{t,\lambda} \beta_{t,\lambda} \Omega_{\Theta}(\mathbf{x}; t, \lambda), \quad (16)$$

$$\Xi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}) = \sum_{r,t} \mu_{r,t} \Omega_{\Xi}(\mathbf{x}; r, t), \quad (17)$$

where $\mathbf{x} = \mathbf{f}$ or \mathbf{h} and where the Ω 's are metric functions. For instance, in Eq. (16), $\Omega_{\Theta}(\mathbf{x}; t, \lambda)$ is the spatial regularization for a slice of \mathbf{x} taken at given (t, λ) and $\beta_{t,\lambda}$ is the corresponding weight. The weights $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, and $\boldsymbol{\mu}$ are so-called hyper-parameters that have to be properly tuned. In what follows, we discuss the choice of the metric functions and of the hyper-parameters.

3.3 Regularizations functions

In image reconstruction many different kind of regularisation have been considered. In this section, we describe the particular functions that will be used in our tests.

3.3.1 Quadratic smoothness regularization

As noise mostly contaminates high frequencies, smoothness is the most effective regularization constraint to avoid amplification noise. The regularization function is then defined by:

$$\Omega_{\text{smooth}}(\mathbf{x}; t, \lambda) = \|\mathbf{D} \cdot \mathbf{x}_{t,\lambda}\|_2^2, \quad (18)$$

where \mathbf{D} is a finite difference operator along one or several homogeneous dimensions. This regularization is often used for spatial regularization. Using 1st order finite difference, Eq. (16) can be rewritten as:

$$\Theta_{\text{obj}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta}_{\text{obj}}) = \sum_{t,\lambda} \beta_{t,\lambda}^{\text{obj}} \sum_r \sum_{r' \in V_r} \left\| \frac{x_{r,t,\lambda} - x_{r',t,\lambda}}{d(r, r')} \right\|_2^2, \quad (19)$$

where V_r is the neighborhood of position r and $d(r, r')$ is the distance between position r and r' .

3.3.2 Edge preserving smoothness regularization

To avoid over-smoothing sharp features caused by quadratic regularization an edge preserving regularization can be used. This is achieved by replacing in Eq. (18) the quadratic norm by a norm φ that penalizes large difference less severely than quadratic norm:

$$\Omega_{\text{edge}}(\mathbf{x}; t, \lambda) = \sum_r \varphi \left[\|\mathbf{D} \cdot \mathbf{x}_{t,\lambda}\|_r \right], \quad (20)$$

In this work, we choose a ℓ_1 - ℓ_2 norm. This norm is asymptotically quadratic (resp. linear) for small (resp. large) pixel value differences compared to a given threshold. It is defined by:

$$\varphi(u; \eta) = 2\eta^2 \left[|u|/\eta - \log(1 + |u|/\eta) \right]. \quad (21)$$

where the parameter η is a threshold selecting the level beyond which the difference between a pixel and one of his neighbor is due to an edge, and then must not be smoothed too much. The value of this parameter η is not critical for the reconstruction and can be approximately fixed to the value of one quantization level. In that case, this regularisation is close to a pure ℓ_1 regularization but can be minimized faster by our optimization algorithm.

With such a regularization function, the object spatial regularization $\Theta_{\text{obj}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta}^{\text{obj}})$ defined in Eq. (19) can be rewritten as:

$$\Theta_{\text{obj}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta}^{\text{obj}}, \eta) = \sum_{t,\lambda} \beta_{t,\lambda}^{\text{obj}} \sum_r \sum_{r' \in V_r} \varphi \left(\frac{x_{r,t,\lambda} - x_{r',t,\lambda}}{d(r, r')}; \eta \right). \quad (22)$$

3.3.3 Shape regularization

If the prior on \mathbf{x} can be described by a parametric function $\mathbf{p}(\theta)$ of parameters θ , the deviation between \mathbf{x} and this prior can then be taken as the regularization penalty [7]:

$$\Omega_{\text{shape}}(\mathbf{x}; t, \lambda) = (\mathbf{x}_{t,\lambda} - \mathbf{p}(\theta))^T \mathbf{W}_{\text{shape}} (\mathbf{x}_{t,\lambda} - \mathbf{p}(\theta)), \quad (23)$$

where $\mathbf{W}_{\text{shape}}$ is a weighting matrix. The function $\mathbf{p}(\theta)$, should have few parameters (width, direction of elongation...).

This regularization is well adapted to spatial regularization of the PSF. As there are many different causes of blur (defocus, motion, diffraction, diffusion...), there is a lot of totally different PSF shapes. In this context a parametric function $\mathbf{p}(\theta)$ (Gaussian, generalized Gaussian, Lorentzian...) can be chosen to set the prior shape of the PSF.

3.3.4 Spectral regularization for the object

In the case of a chromatic object $f_{r,\lambda}$, it is possible to let the spatial brightness distribution have a high dynamical range while constraining the spectral distribution to follow approximately the same law p_λ through the following regularization:

$$\Omega_{\Xi}(\mathbf{f}; r, t) = \sum_{\lambda} \left[\frac{f_{r,t,\lambda+\Delta\lambda}}{p_{t,\lambda+\Delta\lambda}} - \frac{f_{r,t,\lambda}}{p_{t,\lambda}} \right]^2, \quad (24)$$

where $p_{\lambda,t} = 1/N \sum_r f_{r,t,\lambda}$ is a characteristic synthetic spectrum (the mean spectrum in Sec. 5.2) at epoch t .

4. ALGORITHM SUMMARY

In our framework, the reconstruction of the the deblurred object corresponds to the determination of the couple $\{\mathbf{f}^+, \mathbf{h}^+\}$ that minimizes the criterion defined in Eq. (6), which writes:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \Phi_{\text{kl}}(\mathbf{f}, \mathbf{h}; \mathbf{g}) \\ & + \Psi_{\text{obj}}(\mathbf{f}; \alpha_{\text{obj}}) + \Theta_{\text{obj}}(\mathbf{f}; \beta_{\text{obj}}) + \Xi_{\text{obj}}(\mathbf{f}; \mu_{\text{obj}}) \\ & + \Psi_{\text{psf}}(\mathbf{h}; \alpha_{\text{psf}}) + \Theta_{\text{psf}}(\mathbf{h}; \beta_{\text{psf}}) + \Xi_{\text{psf}}(\mathbf{h}; \mu_{\text{psf}}). \end{aligned} \quad (25)$$

The optimal reconstructed image \mathbf{f}^+ and PSF \mathbf{h}^+ depend on the particular value of the hyper-parameters α , β , and μ . Choosing the optimal values of the hyper-parameters is cumbersome and difficult. The large number of hyper-parameters defined in this very general scheme can be drastically reduced according to simple rules as explained in Sec. 5.1.1. For the few (2 or 3) remaining tunable parameters, methods such as generalized cross-validation (GCV)[8] or the L-curve are suitable, but deserve an extensive study which is out of the scope of this paper. In the present work, we simply choose hyper-parameters values by visual inspection of the resulting image.

4.1 Minimization Method

In case of blind deconvolution, an alternate minimization scheme is used to minimize the criterion:

1. initialize the PSF its *a priori* shape $\mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{p}(\theta)$,
2. estimate the optimal object $\mathbf{f}^{(k+1)}$ given the PSF $\mathbf{h}^{(k)}$,
3. estimate the optimal PSF $\mathbf{h}^{(k+1)}$ given the object $\mathbf{f}^{(k+1)}$,
4. repeat steps 2 and 3 until convergence or after a defined number (k) of iterations.

In order to determine the optimal image \mathbf{f}^+ and PSF \mathbf{h}^+ in our inverse problem approach, we have to minimize a criterion with respect to a very large number of variables (all the pixel values for every frames). To that end, we use the VMLM-B algorithm [9] which is a limited memory variant of the variable metric method with BFGS updates [10]. This algorithm, can further account for bound constraints on the parameters. We make use of this feature to enforce PSF positivity. This algorithm has proven its effectiveness for image reconstruction and only requires the computation of the penalty function being minimized and its gradient. The memory requirement is a few times the size of the problem.

5. RESULTS

5.1 Coronarography

The coronarography is a radiological exam to observe coronary arteries (heart arteries). This gives short (several seconds) video sequences displaying the motion of an imperVIOUS to X-ray product in the coronary arteries. These sequences are examined by a cardiologist to localize obstruction in the arteries caused by atherosclerosis, possibly responsible of an heart attack. Ten sequences were acquired and, as the blurring process is unknown, the (x, y, t) object is reconstructed using the blind deconvolution scheme. Every sequences were acquired with the same system and were processed under the same assumptions.

5.1.1 Regularization and hyper parameters settings

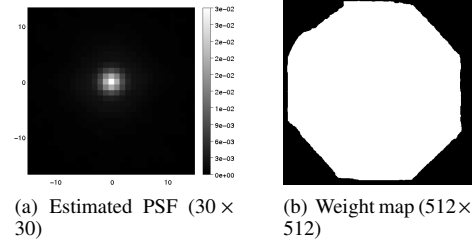


Figure 1: Estimated PSF and weight map used for coronarography sequence shown in Fig. 2

Several specificities can be noticed by a simple observation of the raw data (see Fig. 2(a)) and can be used to define regularization functions and hyper-parameters for both the object and the PSF:

- (i) A shape constraining regularization as defined in Eq. (23) with a Lorentzian prior shape $\mathbf{p}(\theta)$ appears to be a good prior; hence $\Theta_{\text{psf}}(\mathbf{x}; \beta_{\text{psf}}) = \Omega_{\text{shape}}(\mathbf{x})$. The parameter θ is then the full width at half maximum of the Lorentzian.
- (ii) As the blur seems to be caused by tissue in the axis of projection, and as neither the patient nor the acquisition system was moving during the recording, the PSF is supposed to be constant. As a consequence, $\mathbf{h}_{r,t} = \mathbf{h}_r, \forall t$. In that case the number of unknown parameters on the PSF is divided by T , increasing the computation speed and robustness.
- (iii) The frames contain sharp objects (coronaries) on a smooth background. We therefore use an edge preserving spatial regularization as defined in Eq. (22): $\Theta_{\text{obj}}(\mathbf{x}; \beta_{\text{obj}}, \eta) = \Omega_{\text{edge}}(\mathbf{x}, \eta)$. Image dynamic is constant in every frames.

As a consequence, both the object and PSF spatial hyper-parameters and object threshold are constant for each frame:

$$\beta_t^{\text{psf}} = \beta_{\text{psf}}, \beta_t^{\text{obj}} = \beta_{\text{obj}}, \text{ and } \eta_t = \eta, \forall t. \quad (26)$$

(iv) The motion of the heart is too important between successive frames to make use of a temporal continuity on the object. So we didn't use temporal regularization on the object, thus $\Psi_{\text{obj}}(\mathbf{x}) = 0$.

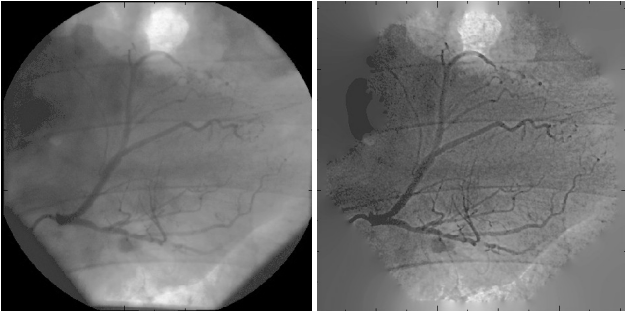
(vi) The noise is assumed to be Gaussian and uncorrelated and we use the likelihood penalty defined in Eq. (10).

(vii) The measured area is not square and is cropped by some parts of the apparatus which remains the same in every frame of every sequence. This is taken into account by simple thresholding and by defining the weight map used in Eq. (10) as:

$$w_{r,t} = \begin{cases} 1 & \text{if } k\text{-th pixel is above threshold,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}, \quad (27)$$

and which is shown in Fig. 1(b). Finally only three hyper-parameters have to be determined to perform this blind deconvolution: $\beta_{\text{psf}}, \beta_{\text{obj}}$ and θ .

5.1.2 Results



(a) Raw image

(b) Reconstruction of 2(a)

Figure 2: One frame of a coronarography sequence

10 sequences of about 75 frames of 512×512 pixels were processed in about 80 seconds per frame. The assumption of an identical PSF in every frames of a same sequence considerably constrains the PSF and leads to a robust estimation of \hat{h}^+ . We also tried relaxing this temporal constraint on the PSF, but it did not show significant improvements, which confirms the validity of our assumption of a constant PSF. A frame out of the studied sequences is shown in Fig. 2(a), along with the corresponding restored frame, the estimated PSF is shown in Fig. 1(a). Although the working quantization interval was very small (at most 10 digital levels between pixels in the arteries and the background), a visual assessment shows the effectiveness of our technique (especially, for micro-arteries reconstruction). Motion perception in the deconvolved video sequences is greatly improved as the separation of the coronaries and the background is enhanced. We point out that the cropped area does not impact the deconvolution, even for pixels close to the border of this area. These unmeasured parts are simply filled with uninformative smooth background in accordance with the smoothing prior. These restored sequences were shown to cardiologists who

confirmed the potential utility of the presented technique. If this method proves efficiency with noisier sequences, cardiologists can consider a decrease of the X-ray beam to reduce irradiation of patients and physicians.

5.2 Integral Field Spectrography

The SuperNova factory is a survey using an integral field spectrograph to observe type Ia supernovae (SNeIa) in the redshift range $0.03 < z < 0.08$ [11]. The observed supernovae are point source objects on top of the structured background of their host galaxy. A PSF can be extracted from photometric exposures taken simultaneously to the spectroscopic exposures.

To assess the performance of our algorithm on (x, y, λ) images cubes, we process simulation made for the SuperNova factory survey. These simulations include realistic PSF and noise. They produce (15×15) pixels images at 798 different wavelengths from 3200\AA to 5097\AA . In this work we achieve reconstruction of the (x, y, λ) data cube using the extracted PSF, by a multi-wavelength regularized deconvolution.

5.2.1 Regularization and hyper parameters settings

As in the coronarography example, observations of the raw data (see Fig. 3(a)) can be used to defined regularization functions and hyper-parameters on the object:

(i) The frames contain a smooth and cropped galaxy contaminated by strong noise. We use the spatial regularization function defined in Eq. (19). Due to strong spectral features (mostly absorption lines and bands), the light flux is highly variable at the different wavelengths. As a consequence, the object spatial hyper-parameters have to be different for each frame. That is why we propose a normalization of these hyper-parameters by the variance $\text{Var}(g)_\lambda$ in each frames λ :

$$\beta_\lambda^{\text{obj}} = \frac{\beta_{\text{obj}}}{\text{Var}(g)_\lambda}, \forall \lambda, \quad (28)$$

hence β_{obj} is the only spatial hyper-parameter to be tuned instead of 798.

(ii) Our prior is that the spectrum of each pixel approximately follows the same law p_λ and we use the regularization defined in Eq. (24) with a single hyper-parameter: $\mu_r^{\text{obj}} = \mu_{\text{obj}}, \forall r$.

(iii) As the noise is Poissonian and uncorrelated, we use the likelihood penalty defined in Eq. (10) with weight defined as in Eq. (12).

(iv) As the PSF is almost as wide as the field of view, the working area is extended to (32×32) pixels per frame. The weights in Eq. (10) of the unmeasured pixels are set to 0. This extension of the working area is necessary to rigorously cope with the extent of the PSF, and allows some level of field of view extrapolation.

Finally only two hyper-parameters have to be determined to perform this deconvolution: $\beta_{\text{obj}}, \mu_{\text{obj}}$.

5.2.2 Results

The data processed by our algorithm was simulated with only the host galaxy at the Supernova minimum. Image taken at $\lambda = 3968\text{\AA}$, its reconstruction and corresponding ground truth are shown on Fig. 3. On this figure the reconstruction and the ground truth are truncated to the field of view of the sensor. A

visual assessment shows the effectiveness of our technique. Although a strong noise is present in the data, the reconstruction presents details that were not visible in the data. For example the bright center of the galaxy which is difficult to localize in the raw data is well resolved in the reconstruction. The reconstructed spectrum (dashed red) of the central pixel is shown on Fig. 3(e) with corresponding spectrum of data (blue dotted) and ground truth (black line).

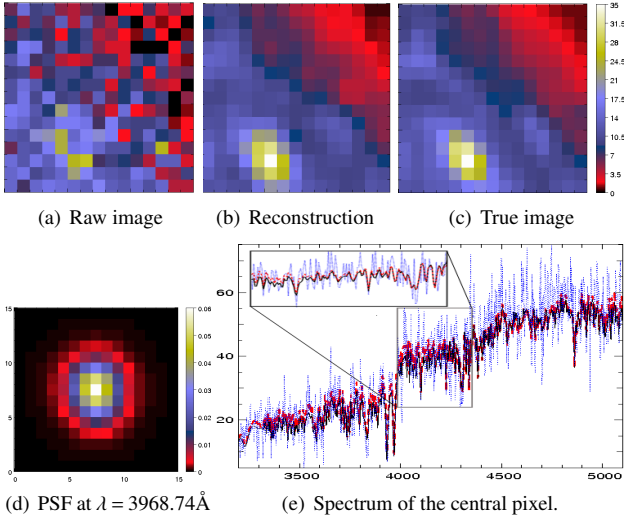


Figure 3: Images (15×15) and PSF at $\lambda = 3968.74\text{\AA}$

To quantify the reconstruction quality, we use the *Peak Signal to Noise Ratio* (PSNR) which is classically used to measure improvements of digital image quality. This criterion corresponds to a mean squared error normalized by the maximum pixel value M :

$$E_{\text{PSNR}}(\hat{\mathbf{x}}) = -10 \log_{10} \left(K^{-1} M^{-2} \sum_{\lambda,r} (\hat{x}_{\lambda,r} - f_{\lambda,r}^{\text{true}})^2 \right), \quad (29)$$

where $K = N \cdot L$ is the number of pixels, $\hat{\mathbf{x}}$ and \mathbf{x} are respectively the restored and the true images. Thus, the larger is the PSNR, the better is the reconstruction. We measured the data distortion $E_{\text{PSNR}}(\mathbf{g}) = 25.9\text{dB}$ and the reconstruction ones (cropped to the data size) $E_{\text{PSNR}}(\mathbf{f}+) = 36.2\text{dB}$.

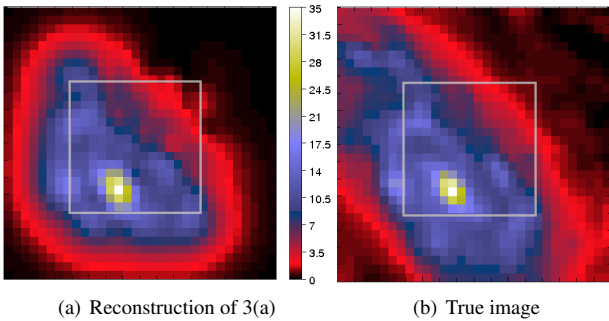


Figure 4: Image (32×32) at $\lambda = 3967\text{\AA}$ with extrapolation

If we compare the true image to the reconstruction outside of the field of view on Fig. 4 (outside of the grey square),

we see that the extrapolation is not uninformative. The general inclined shape of the galaxy is reconstructed and more, the position of its spiral arms can be guessed on the reconstruction (especially on the top left corner). If we consider the extrapolation, the measured PSNR of the reconstruction is $E_{\text{PSNR}}(\mathbf{f}) = 33.6\text{dB}$.

This (x, y, λ) data cube was processed by our algorithm in several hours. This relative slowness can be explained by the bad conditioning of the optimization process, as it must determine the value of (32×32) pixels per frames using (15×15) measurements per frame (4 unknown for 1 data) and propagate information far from the field of view.

6. CONCLUSION

In this paper, we present a new algorithm for deconvolving heterogeneous multidimensional data. We show results on two very different data sets. For each we explain the choice of regularizations according to the data formation. These results show the strength of separable regularizations for each dimension for enhancing the effectiveness and the robustness of both blind and non-blind deconvolution process compared to independent deblurring of successive images.

REFERENCES

- [1] P. Campizi and K. Egiazarian, Eds., *blind image deconvolution: theory and application*, CRC Press, 2007.
- [2] T. J. Schulz, “Multiframe blind deconvolution of astronomical images,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 10, no. 5, pp. 1064–1073, may 1993.
- [3] D. Li *et al.* “New method for suppressing optical turbulence in video,” in *Proc. EUSIPCO*, 2005.
- [4] J.A. Aguilera *et al.* “Spatial characterization of laser-induced plasmas by deconvolution of spatially resolved spectra,” *Appl. Opt.*, vol. 42, no. 30, pp. 5938–5946, 2003.
- [5] F. Courbin *et al.* “A Method for Spatial Deconvolution of Spectra,” *The Astrophysical Journal*, vol. 529, pp. 1136–1144, Feb. 2000.
- [6] E. Thiébaud and J.-M. Conan, “Strict a priori constraints for maximum likelihood blind deconvolution,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 12, no. 3, pp. 485–492, March 1995.
- [7] A. Tarantola, *Inverse Problem Theory - Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation*, Elsevier, 1987.
- [8] Gene H. Golub *et al.* “Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter,” *Technometrics*, vol. 21, pp. 215–223, 1979.
- [9] E. Thiébaud, “Optimization issues in blind deconvolution algorithms,” in *Astronomical Data Analysis II SPIE*, 2002, vol. 4847, pp. 174–183.
- [10] Jorge Nocedal, “Theory of algorithms for unconstrained optimization,” *Acta Numerica*, vol. 1, pp. 199–242, 1992.
- [11] G. Aldering *et al.* “Overview of the Nearby Supernova Factory,” in *Survey and Other Telescope Technologies and Discoveries*, J. A. Tyson and S. Wolff, Eds., Dec. 2002, vol. 4836 of (*SPIE Conference*, pp. 61–72.

BLIND DECONVOLUTION OF VIDEO SEQUENCES

Ferréol Soulez^{1,2}, Éric Thiébaud¹, Yves Tourneur³, Alain Gressard⁴

¹Centre de Recherche
Astrophysique de Lyon,
CNRS-UMR 5574, Université
Lyon 1, Ecole Normale
Supérieure de Lyon, Observatoire
de Lyon, 9 avenue Charles
André, Saint-Genis Laval cedex,
F-69561, France.

²Laboratoire Hubert Curien
(ex-LTSD), CNRS-UMR 5516,
Université Jean Monnet, 18 rue
Pr Benoît Lauras, F-42000
Saint-Etienne, France.

³Centre Commun de
Quantimétrie, Université Lyon
1, 8 avenue Rockefeller - 69373
Lyon cedex 08, France

⁴Service de Cardiologie de
l'hôpital de la Croix Rousse,
Hospices Civiles de Lyon, France

ABSTRACT

We present a new blind deconvolution method for video sequence. It is derived following an inverse problem approach in a Bayesian framework. This method exploits the temporal continuity of both object and PSF. Combined with edge-preserving spatial regularization, a temporal regularization constrains the blind deconvolution problem, improving its effectiveness and its robustness. We demonstrate these improvements by processing various real video sequences obtained by different imaging techniques.

Index Terms— blind deconvolution, denoising, image reconstruction, video signal processing.

1. INTRODUCTION

The problem of reconstructing a signal using observation blurred by unknown process is called blind deconvolution. Nowadays, blind image deconvolution receives increasing attention from the academic world (see [1] for a review). Although, many authors ([2]) use video sequences in a super-resolution framework (a multi-frame blurred observation of the same scene), to our knowledge, few of them ([3]) have studied the specific problem of blind video sequence deconvolution. In this paper, we propose to use the temporal correlations in video sequence to design an effective blind deconvolution algorithm.

2. MODEL DESCRIPTION

The video sequence $g(s, t)$ observed in a direction s is composed of T successive images $g_t(s)$ taken at different instant t between its beginning t_1 and its end t_T . It is given by:

$$g(s, t) = \iint h(s, t|s', t')x(s', t')ds'dt' + n(s, t), \quad (1)$$

where $x(s', t')$ is the object brightness at instant t' , $h(s, t|s', t')$ is the point spread function (PSF), and $n(s, t)$ account for the

noise (source and detector). The PSF $h(s, t|s', t')$ is the observed brightness distribution at instant t in the direction s for a point source located at the instant t' in direction s' .

For data sampled on N pixels, Eq. (1) can be written in a matrix form:

$$\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{n}, \quad (2)$$

where $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_{t_1}^T, \dots, \mathbf{g}_{t_T}^T)^T$ and $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_{t_1}^T, \dots, \mathbf{x}_{t_T}^T)^T$ are vectors of size $N \cdot T$, \mathbf{n} is a $N \cdot T$ random vector and \mathbf{H} is a $N \cdot T \times N \cdot T$ matrix.

In this study, we make two major assumptions. First, there is no temporal spread ($\mathbf{g}_t = \mathbf{H}_t \cdot \mathbf{x}_t + \mathbf{n}_t, \forall t$) and \mathbf{H} becomes block diagonal:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{H}_T \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Then, the PSF is shift invariant (isoplanatic) and then \mathbf{H}_t can be expressed using spatial convolution product $*$ and its first row \mathbf{h}_t :

$$\mathbf{g}_t = \mathbf{h}_t * \mathbf{x}_t + \mathbf{n}_t. \quad (4)$$

Under circulant approximation, this can be evaluated rapidly using FFTs.

3. BAYESIAN APPROACH

In blind deconvolution both the object vector and the PSF one \mathbf{h} (defined by $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1^T, \dots, \mathbf{h}_T^T)^T$), of size $N \cdot T$, must be guessed using $(N \cdot T)$ measurements in \mathbf{g} .

Following [4], the “maximum a posteriori” solution is:

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{h}\}^{\text{MAP}} = \arg \max_{\{\mathbf{x}, \mathbf{h}\}} \Pr\{\mathbf{x}, \mathbf{h}|\mathbf{g}\}. \quad (5)$$

From Bayes theorem, assuming \mathbf{x} and \mathbf{h} are independant:

$$\Pr\{\mathbf{x}, \mathbf{h}|\mathbf{g}\} = \frac{\Pr\{\mathbf{g}|\mathbf{x}, \mathbf{h}\} \Pr\{\mathbf{x}\} \Pr\{\mathbf{h}\}}{\Pr\{\mathbf{g}\}} \quad (6)$$

and since $\Pr\{\mathbf{g}\}$ does not depend on the model, we can write:

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{h}\}^{MAP} = \arg \max_{\{\mathbf{x}, \mathbf{h}\}} (\Pr\{\mathbf{g}|\mathbf{x}, \mathbf{h}\} \Pr\{\mathbf{x}\} \Pr\{\mathbf{h}\}). \quad (7)$$

maximizing $\Pr\{\mathbf{x}, \mathbf{h}|\mathbf{g}\}$ is equivalent to minimizing

$$\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \Phi_{\text{likl}}(\mathbf{x}, \mathbf{h}; \mathbf{g}) + \alpha \Phi_{\text{obj}}(\mathbf{x}) + \beta \Phi_{\text{psf}}(\mathbf{h}), \quad (8)$$

where:

$$\Phi_{\text{likl}}(\mathbf{x}, \mathbf{h}; \mathbf{g}) = -\log \Pr\{\mathbf{g}|\mathbf{x}, \mathbf{h}\} \quad (9)$$

$$\alpha \Phi_{\text{obj}}(\mathbf{x}) = -\log \Pr\{\mathbf{x}\} \quad (10)$$

$$\beta \Phi_{\text{psf}}(\mathbf{h}) = -\log \Pr\{\mathbf{h}\} \quad (11)$$

The penalizing function to minimize defined in Eq. (8) is the sum of three terms : a *likelihood penalty* $\Phi_{\text{likl}}(\mathbf{x}, \mathbf{h}; \mathbf{g})$ ensuring the agreement between the model $\mathbf{x} * \mathbf{h}$ and the data \mathbf{g} , and two *regularization penalty* $\Phi_{\text{obj}}(\mathbf{x})$ and $\Phi_{\text{psf}}(\mathbf{h})$ introducing subjective *a priori* knowledge about the object and the PSF respectively. The level of *a priori* needed to obtain a good solution is tuned using the hyper-parameters α and β .

3.1. The likelihood penalty term

For Gaussian noise, the likelihood penalty reads:

$$\Phi_{\text{likl}}(\mathbf{x}, \mathbf{h}; \mathbf{g}) = [\mathbf{g} - \mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{h})]^T \cdot \mathbf{C}_{\text{noise}}^{-1} \cdot [\mathbf{g} - \mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{h})], \quad (12)$$

where $\mathbf{C}_{\text{noise}}$ is the covariance matrix of the noise and $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ the model. Using Eq. (2) the model is defined as:

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}, \quad (13)$$

and is evaluated using Eq. (4) for all t . For uncorelated noise, $\mathbf{C}_{\text{noise}}$ is diagonal and Eq. (12) simplifies to:

$$\Phi_{\text{likl}}(\mathbf{x}, \mathbf{h}, \mathbf{g}) = \sum_t \sum_k \frac{1}{\sigma_{k,t}^2} ((\mathbf{H}_t \cdot \mathbf{x}_t)_k - g_{t,k})^2, \quad (14)$$

where $\sigma_{k,t}^2$ is the noise variance estimated on pixel k of frame t . This model can cope with non-stationary noise and can be used to express confidence on measurements on each pixel of the data. Thus it can deal with unmeasured pixels on the sensor ($1/\sigma^2 = 0$ for such pixels).

3.2. a priori on the object

As the different dimensions of the object are not homogeneous, we take a separable regularization term:

$$\alpha \Phi_{\text{obj}}(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^T (\mu_t^{\text{obj}} \Psi_{\text{obj}}(\mathbf{x}_t) + \lambda_t^{\text{obj}} \Theta_{\text{obj}}(\mathbf{x}_t)), \quad (15)$$

where $\Psi_{\text{obj}}(\mathbf{x}_t)$ is a temporal regularization and $\Theta_{\text{obj}}(\mathbf{x}_t)$ is a spatial regularization at each instant t .

3.2.1. Spatial regularization on the object

There are many different kinds of spatial regularization used in image reconstruction. As the noise mostly contaminates high frequencies, smoothness is the most effective regularization constraint to avoid amplification of noise. To avoid oversmoothing of sharp features caused by quadratic regularization we choose an edge preserving regularization. This is achieved by taking:

$$\Theta_{\text{obj}}(\mathbf{x}) = \sum_k \sum_{v \in V_k} \frac{\varphi(x_k - x_v)}{d_v}, \quad (16)$$

where x_v is the value of a pixel v in the neighborhood V_k of pixel k (here a V_8 neighborhood) and d_v its distance to this pixel.

In this work, we choose a l_1 - l_2 norm. This norm is asymptotically quadratic (resp. linear) for small (resp. large) pixel differences compared to the threshold η . It is defined by:

$$\varphi(u; \eta) = 2\eta^2 [|u|/\eta - \log(1 + |u|/\eta)], \quad (17)$$

The parameter η corresponds to a threshold selecting the level beyond which the difference between a pixel and one of his neighbor is due to an edge, and then must not be smoothed. This regularization is used to compute spatial regularization at each instant t :

$$\Theta_{\text{obj}}(\eta_t, \mathbf{x}_t) = \sum_k \sum_{x_v \in V_k} \frac{\varphi(x_{t,k} - x_v; \eta_t)}{d_v}. \quad (18)$$

3.2.2. Temporal regularization on the object

If the scene evolution is slow compared to the time sampling, a smoothing temporal regularization identical to the spatial regularization unless for the hyper-parameters value.

3.3. a priori on the PSF

As for the object, our PSF regularization term is split in:

$$\beta \Phi_{\text{psf}}(\mathbf{h}) = \sum_{t=1}^T (\mu_t^{\text{psf}} \Psi_{\text{psf}}(\mathbf{h}_t) + \lambda_t^{\text{psf}} \Theta_{\text{psf}}(\mathbf{h}_t)). \quad (19)$$

3.3.1. Spatial PSF regularization

If the scene evolution is slow compared to the time sampling, a smoothing temporal regularization identical to the spatial regularization unless for the hyper-parameters value. As there is many different cause of blur (defocus, motion, diffraction, diffusion...), there is a lot of totally different shapes of PSF. In this context we choose a parametric function $p(\theta)$ (Gaussian, generalized Gaussian, Lorentzian...) to set the prior shape of the PSF, then the regularization becomes [5]:

$$\Theta_{\text{psf}}(\mathbf{h}) = (\mathbf{h} - \mathbf{p}(\theta))^T \mathbf{W} (\mathbf{h} - \mathbf{p}(\theta)), \quad (20)$$

where \mathbf{W} is a weight matrix. In our work to constraint the PSF to be close to the shape as it is far from the center, we consider a diagonal \mathbf{W} with a power law on the diagonal. The functions $p(\theta)$, chosen according to the experimental conditions shall have few parameters (width, direction).

3.3.2. Temporal PSF regularization

As for the object, if the PSF evolution is slow compared to the time sampling, a quadratic smoothing temporal regularization can be used, *e.g.* :

$$\Psi_{\text{psf}}(\mathbf{h}_t) = \|2\mathbf{h}_t - \mathbf{h}_{t-1} - \mathbf{h}_{t+1}\|_2^2, \quad (21)$$

4. ALGORITHM SUMMARY

In this Bayesian framework, reconstructing the de-blurred video sequence corresponds to determine the couple $\{\mathbf{x}^{\text{MAP}}, \mathbf{h}^{\text{MAP}}\}$ that minimizes the criterion defined in Eq. (8), which writes:

$$\varepsilon = \Phi_{\text{kl}}(\mathbf{x}, \mathbf{h}; \mathbf{y}) + \sum_{t=1}^T (\mu_t^{\text{obj}} \Psi_{\text{obj}}(\mathbf{x}_t) + \lambda_t^{\text{obj}} \Theta_{\text{obj}}(\mathbf{x}_t; \eta_t) + \mu_t^{\text{psf}} \Psi_{\text{psf}}(\mathbf{h}_t) + \lambda_t^{\text{psf}} \Theta_{\text{psf}}(\mathbf{h}_t)), \quad (22)$$

The optimal reconstructed image \mathbf{x}^{MAP} and PSF \mathbf{h}^{MAP} depend on the value of each parameter (four hyper-parameters and one threshold per frame).

4.1. Hyper-parameters Setting

To simplify the determination of hyper-parameters, we have made several simplification hypothesis. We suppose the noise statistical property, the image dynamic and the PSF shape identical in each frame. As a consequence: (i) the object spatial hyper-parameters in each frame are identical:

$$\lambda_t^{\text{obj}} = \lambda_{\text{obj}}, \forall t. \quad (23)$$

(ii) the thresholds used in this spatial regularization are identical too:

$$\eta_t = \eta. \quad (24)$$

(iii) the PSF spatial hyper-parameters in each frame are identical:

$$\lambda_t^{\text{psf}} = \lambda_{\text{psf}}, \forall t, \quad (25)$$

We further assume that temporal evolution of both image and psf remains stable. As a consequence, temporal hyper-parameters of each frame are identical for both the object and the PSF:

$$\mu_t^{\text{obj}} = \mu_{\text{obj}}, \forall t, \quad (26)$$

$$\mu_t^{\text{psf}} = \mu_{\text{psf}}, \forall t, \quad (27)$$

Thus we only have now five hyper-parameters (λ_{obj} , λ_{psf} , μ_{obj} , μ_{psf} and η).

Despite this simplification, choosing the optimal values of the hyper-parameters is cumbersome and difficult. Whether methods such as generalized cross-validation (GCV)[6] or the L-curve [7] are suitable for this task deserves an extensive study which is out of the scope of this paper. In the present work, we simply choose hyper-parameter values by visual inspection of the resulting image.

4.2. Minimization Method

An alternating minimization scheme is used to minimize the criterion.

- An optimal psf \mathbf{h}^{MAP} is guessed using the current \mathbf{x}^{MAP} .
- Then optimal psf \mathbf{x}^{MAP} is guessed using the current \mathbf{h}^{MAP} .

This alternatively until convergence decision or after a defined number of loop. For the first iteration, an optimal object \mathbf{x}^{MAP} is guessed using the *a priori* PSF shape $p(\theta)$ defined in Sec. 3.3.1.

In order to determine the optimal image \mathbf{x}^{MAP} and PSF \mathbf{h}^{MAP} in our inverse problem approach, one has to minimize a criterion with respect to a very large number of variables (all the pixel values for every frames). To that end, we used the VMLM-B algorithm [8] which is a limited memory variant of the variable metric method with BFGS updates [9]. This algorithm, which can further accounts for bound constraints on the parameters. We make use of these bound constraints to enforce PSF positivity. This algorithm has proven effectiveness for image reconstruction and only requires the computation of the penalty function to be minimized and its gradient. The memory requirement is a few times the size of the problem.

5. EXPERIMENTAL RESULTS

This algorithm was used with different experimental data sets from both medical and biological fields, and with different dynamical imaging techniques.

5.1. Coronarography

The coronarography is a radiological exam to observe coronary arteries (heart arteries). This gives short (several seconds) video sequences displaying the motion of an imperVIOUS to X-ray product in the coronary arteries. These sequences are examined by cardiologist to localized obstacle in the arteries, possibly responsible of an heart attack.

Ten sequences were acquired with the same system, and were then process with the same assumptions. Several item can be pointed by a simple observation of the raw data (see Fig. 1(a)). (i) the movement of the heart is too important between successive frames to use a temporal constraint on the object. So we set $\mu_{\text{obj}} = 0$. (ii) As the blur seems to be caused by tissue in the axe of projection, and as neither the patient nor

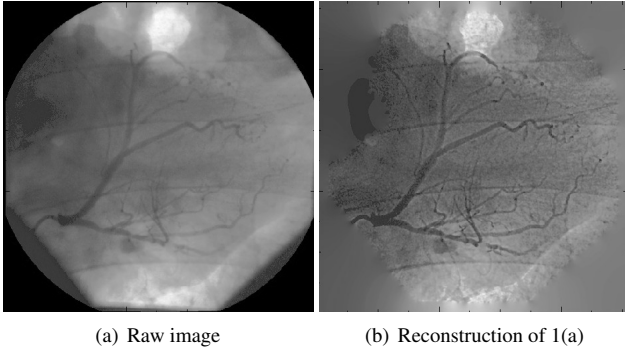


Fig. 1. One frame of a coronarography sequence

the acquisition system was moving during the recording, the PSF is supposed to be constant. As consequence, $\mu_{\text{psf}} = \infty$ or equivalently $\mathbf{h}_t = \mathbf{h}_0 \forall t$. In that case the number of unknown parameters on the PSF is divided by T , increasing the computation speed. (iii) the measured area is not square and is cropped by some parts of the apparatus which remains the same in every frames of every sequences. This is taken in account in the *a priori* noise variance $\sigma_{k,t}^2 = \sigma_k^2$, estimating, by a basic thresholding, a weight map shown in Fig. 2(b) where:

$$\frac{1}{\sigma_k^2} = \frac{1}{\sigma^2} \times \begin{cases} 1 & \text{if } k\text{-th pixel is measured,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (28)$$

The prior PSF $p(\theta)$ has a Lorentzian shape with only one parameters: the full width at half maximum θ . Finally only four hyper-parameters have to be determined to perform this blind deconvolution: λ_{psf} , λ_{obj} , η and θ .

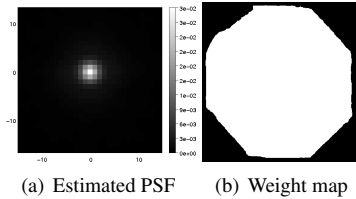


Fig. 2. Estimated PSF and weight map used for coronarography sequence shown in Fig. 1

These sequences of about 75 frames of 512×512 pixels were processed in about 80 seconds per frames. The assumption of an identical PSF in every frames of a same sequence considerably constrains the PSF and improves the convergence of the \mathbf{h}^{MAP} determination stage. A further relaxing of this temporal constraint on the PSF, does not show significant improvements and thus this assumption seems to be verified. A frame of one of the studied sequences is shown Fig. 1(a), along with the corresponding restored frame and the guessed PSF Fig. 2(a). Although the working quantization was very small (at most 10 levels between pixels in the arteries and

the background), a visual assessment shows the effectiveness of our technique. Motion perception in the deconvolved video sequences is greatly improved as the separation of the coronaries and the background is enhanced. Let us point that the cropped area does not disturbed the deconvolution, even for pixels close to the border of this area. These unmeasured parts were just filled with uninformative smooth background in accordance with the smoothing prior. These restored sequences were shown to cardiologists who confirmed the potential utility of the presented technique. If this method proves efficiency with with noisier sequences, they can consider a decrease of the X-ray beam to decrease the irradiation of the patient.

5.2. Confocal Microscopy

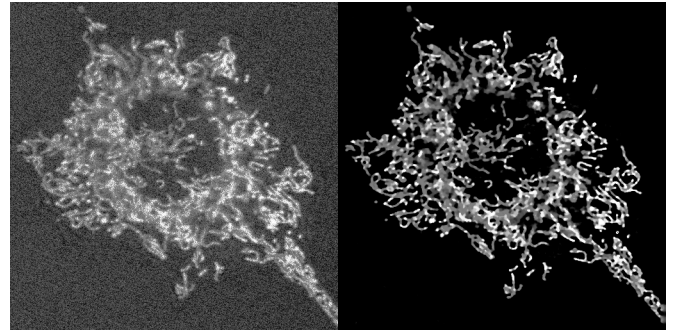


Fig. 3. Raw image (right) and its deconvolution (left) of mitochondria

Confocal microscopy is an optical technique used for imaging with short depth of field, eliminating out of focus images. In this experiment, a fluorescence product was used to mark mitochondria in neurons. Temporal evolution of these mitochondria was observed by confocal microscopy. In this case, for the same reasons, the same assumptions ($\mu_{\text{obj}} = 0$ and $\mu_{\text{psf}} = \infty$) made for the coronarography sequences can be made. Both raw image and its corresponding frame in reconstructed sequence are presented in Fig. 3. The raw sequence is very noisy and the results clearly demonstrates similar ability of regularized blind deconvolution to not only enhance the resolution but also to reduce the noise.

5.3. Conventional Microscopy

A sequence of epithelial hair cells taken with conventional transmission microscope was processed by our method. It is composed of 400 frames of 253×178 square pixels. In this sequences, the depth of field is relatively tick and, as cilia move in the spatial three dimensions, successive focalisations and defocalisations of the same cilium can be observed. The blur on these cilia can be divided in blur due to the apparatus, which is isoplanatic and out of focus blur, which is not

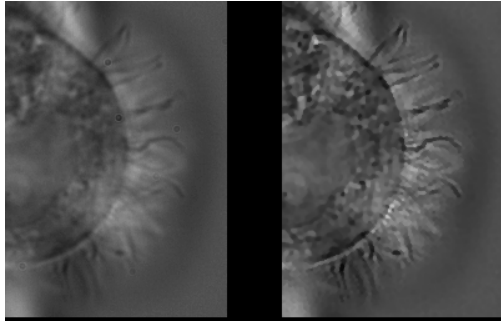


Fig. 4. Epithelial Cell

isoplanatic. As our method cannot cope with none isoplanatic PSF we tried to remove only the blur due to the apparatus which were considered isoplanatic and identical on every frames ($\mu_{\text{psf}} = \infty$). As only the hair are rapidly moving, a segmentation, based of temporal variation of pixels, is made. A temporal constraint μ_{obj} is set for the pixels of the background and the cell, but it is relaxed for pixels near cilia ($\mu_{\text{obj}} = 0$). A frame of both raw and deconvolved sequences are shown in Fig. 4. On several pixels, disturbing diffraction figures due to dust on a glass of the apparatus can be seen. This phenomenon is taken into account by setting the noise variance of these pixels so that $1/\sigma_k^2 = 0$ as in Sec. 5.1. Even in this difficult case, our method achieves to improve resolution of both hairs and inner structures of the cell.

6. CONCLUSION

This paper presents a new method for blind deconvolution of video sequences. We exploit both spatial and temporal continuity to achieve a good characterization of the PSF and then a good video sequence blind deconvolution. This method had proven its capability and robustness with various experimental data.

7. REFERENCES

- [1] P. Campizi and K. Egiazarian, Eds., *blind image deconvolution: theory and application*, CRC Press, 2007.
- [2] T. J. Schulz, "Multiframe blind deconvolution of astronomical images," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 10, no. 5, pp. 1064–1073, may 1993.
- [3] D. Li *et al.*, "New method for suppressing optical turbulence in video," in *Proc. European Signal Processing Conference*, 2005.
- [4] E. Thiébaud and J.-M. Conan, "Strict a priori constraints for maximum likelihood blind deconvolution," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 12, no. 3, pp. 485–492, March 1995.
- [5] A. Tarantola, *Inverse Problem Theory - Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation*, Elsevier, 1987.
- [6] G. H. Golub *et al.*, "Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter," *Technometrics*, vol. 21, pp. 215–223, 1979.
- [7] P. C. Hansen, "Analysis of discrete ill-posed problems by means of the l-curve," *SIAM Rev.*, vol. 34, no. 4, pp. 561–580, 1992.
- [8] E. Thiébaud, "Optimization issues in blind deconvolution algorithms," in *Astronomical Data Analysis II*, Jean-Luc Starck and Fionn D. Murtagh, Eds. SPIE, 2002, vol. 4847, pp. 174–183.
- [9] J. Nocedal, "Theory of algorithms for unconstrained optimization," *Acta Numerica*, vol. 1, pp. 199–242, 1992.

Résumé

L'approche « problèmes inverses » consiste à rechercher les causes à partir des effets ; c'est-à-dire estimer les paramètres décrivant un système d'après son observation. Pour cela, on utilise un modèle physique décrivant les liens de causes à effets entre les paramètres et les observations. Le terme inverse désigne ainsi l'inversion de ce modèle direct. Seulement si, en règle générale, les mêmes causes donnent les mêmes effets, un même effet peut avoir différentes causes et il est souvent nécessaire d'introduire des a priori pour restreindre les ambiguïtés de l'inversion. Dans ce travail, ce problème est résolu en estimant par des méthodes d'optimisations, les paramètres minimisant une fonction de coût regroupant un terme issu du modèle de formation des données et un terme d'a priori.

Nous utilisons cette approche pour traiter le problème de la déconvolution aveugle de données multidimensionnelles hétérogène ; c'est-à-dire de données dont les différentes dimensions ont des significations et des unités différentes. Pour cela nous avons établi un cadre général avec un terme d'a priori séparable, que nous avons adapté avec succès à différentes applications : la déconvolution de données multi-spectrales en astronomie, d'images couleurs en imagerie de Bayer et la déconvolution aveugle de séquences vidéo bio-médicales (coronarographie, microscopie classique et confocale).

Cette même approche a été utilisée en holographie numérique pour la vélocimétrie par image de particules (DH-PIV). Un hologramme de micro-particules sphériques est composé de figures de diffraction contenant l'information sur la position 3D et le rayon de ces particules. En utilisant un modèle physique de formation de l'hologramme, l'approche « problèmes inverses » nous a permis de nous affranchir des problèmes liés à la restitution de l'hologramme (effet de bords, images jumelles...) et d'estimer les positions 3D et le rayon des particules avec une précision améliorée d'au moins un facteur 5 par rapport aux méthodes classiques utilisant la restitution. De plus, nous avons pu avec cette méthode détecter des particules hors du champ du capteur élargissant ainsi le volume d'intérêt d'un facteur 16.

Mots clefs : Traitement du signal, Problèmes inverses, Déconvolution Aveugle, Holographie numérique, Velocimétrie par image de particules, Imagerie bio-médicale, Imagerie Multi-spectrale, Imagerie Couleur.

Abstract

This work presents an "inverse problems" approach for reconstruction in two different fields : digital holography and blind deconvolution.

The "inverse problems" approach consists in investigating the causes from their effects, i.e. estimate the parameters describing a system from its observation. In general, same causes produce same effects, same effects can however have different causes. To remove ambiguities, it is necessary to introduce a priori information. In this work, the parameters are estimated using optimization methods to minimize a cost function which consists of a likelihood term plus some prior terms.

We use this approach to address the problem of heterogeneous multidimensional data blind deconvolution. Heterogeneous means that the different dimensions have different meanings and units (for instance position and wavelength). For that, we have established a general framework with a separable prior which have been successfully adapted to different applications : deconvolution of multi-spectral data in astronomy, of Bayer color images and blind deconvolution of bio-medical video sequences (in coronarography, conventional and confocal microscopy).

We also applied this framework to digital holography for particles image velocimetry (DH-PIV). Using a model of the hologram formation, we use this "inverse problems" approach to circumvent the artifacts produced by the classical hologram restitution methods (distortions close to the image boundaries, multiple focusing, twin-images). The proposed algorithm detects micro-particles in a volume 16 times larger than the camera field of view and with a precision improved by a factor 5 compared with classical techniques.

Key words : Signal processing, Inverse problems, Blind deconvolution, Digital holography, Particle image velocimetry, Bio-medical imaging, Multi-spectral imaging, color imaging.