



HAL
open science

Lois de comportement à gradients de variables internes : construction, formulation variationnelle et mise en œuvre numérique

Eric Lorentz

► To cite this version:

Eric Lorentz. Lois de comportement à gradients de variables internes : construction, formulation variationnelle et mise en œuvre numérique. Mécanique [physics.med-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1999. Français. NNT : . tel-00474024

HAL Id: tel-00474024

<https://theses.hal.science/tel-00474024>

Submitted on 18 Apr 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité :

MECANIQUE DES SOLIDES ET DES STRUCTURES

Présentée
à l'Ecole Normale Supérieure de Cachan

par **Eric LORENTZ**

pour obtenir le titre de DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 6

**LOIS DE COMPORTEMENT A GRADIENTS DE VARIABLES INTERNES :
CONSTRUCTION, FORMULATION VARIATIONNELLE
ET MISE EN ŒUVRE NUMERIQUE**

Thèse soutenue le 27 avril 1999 devant le jury composé de :

Monsieur J.-B. LEBLOND	Président
Monsieur J.-J. MARIGO	Rapporteur
Monsieur P. SUQUET	Rapporteur
Monsieur J. WILLIS	Examineur
Monsieur A. BENALLAL	Examineur
Monsieur S. ANDRIEUX	Examineur

Laboratoire de Mécanique et Technologie
ENS Cachan / CNRS / Université Paris 6

61, avenue du président Wilson
94235 Cachan cedex (France)

Electricité de France
Division Recherches et Développement

1, avenue du Général de Gaulle
92141 Clamart cedex (France)

Si cette thèse a pu voir le jour, c'est sans conteste grâce à Stéphane Andrieux. A l'origine du sujet de recherche, il a su me convaincre de me lancer dans cette entreprise et assuré son bon déroulement au sein du département Mécanique et Modèles Numériques à EDF. Par son enthousiasme et à travers les nombreuses discussions que nous avons eues, il m'a guidé jusqu'au bout. Je l'en remercie et j'espère que nous aurons encore l'occasion de travailler ensemble.

Second pilier de l'édifice, Ahmed Benallal, Directeur de thèse au Laboratoire de Mécanique et Technologie de Cachan. Il n'est pas rare que les relations thésard – directeur se dégradent, en particulier à l'approche de la soutenance. Je lui suis reconnaissant de nous avoir évité de tels conflits. Bien plus, il a su élargir la portée du travail non seulement en me faisant part de ses remarques et ses conseils mais aussi en m'introduisant dans la communauté scientifique. Espérons que nos relations ne prendront pas fin avec cette thèse : à bientôt, Ahmed...

Je remercie également Messieurs Jean-Jacques Marigo et Pierre Suquet qui ont accepté la lourde tâche de rédiger les rapports de thèse. Il ne s'agit pas là d'une formule toute faite : tant qu'on n'a pas relu un manuscrit de thèse (surtout le sien), on mesure mal l'ampleur du travail.

Ce fut un grand honneur pour moi que John Willis ait accepté de porter un regard critique sur mes travaux et m'ait consacré un peu de son temps pour participer à mon jury. Enfin, je remercie Jean-Baptiste Leblond pour avoir accepté la présidence de ce jury.

L'aboutissement d'une thèse ne résulte pas uniquement d'un cheminement individuel, loin de là. C'est en partie la concrétisation d'un enseignement. A ce titre, je ne remercierai jamais assez Messieurs Jean-Pierre Bray, Jean Salençon, Yves Bamberger et Jean Lemaitre pour m'avoir donné le goût de la Mécanique. C'est aussi l'enthousiasme des autres, comme Pascal Mialon et François Waeckel qui m'ont toujours assuré de leur soutien. L'ambiance de travail conviviale et sympathique, à MMN comme au LMT, n'y est pas non plus étrangère. Je remercie tous ceux qui y ont contribué, sans doute plus que de simples collègues... Enfin et surtout, je dois à mes amis d'avoir relativisé l'importance de l'activité professionnelle en général, de cette thèse en particulier : merci Chacha, Stef, Linda, Frédo, Isabelle, Jipé et tous les autres, de la banlieue et d'ailleurs, sans oublier bien sûr mes parents et la femme de ma vie, Hélène.

***Lois de comportement à gradients de variables internes :
construction, formulation variationnelle et mise en œuvre numérique***

<i>Introduction</i>	7
<i>Chapitre 1 Limites et extensions des théories locales</i>	13
1. <i>Limites des modèles locaux</i>	15
2. <i>Extension des modèles locaux</i>	24
3. <i>Cahier des charges d'une méthode d'extensions de modèles locaux</i>	34
<i>Chapitre 2 Construction et Formulation variationnelle des modèles à gradients de variables internes</i>	37
1. <i>Construction de modèles à gradients par homogénéisation</i>	39
2. <i>Formulation variationnelle des modèles à gradients</i>	45
3. <i>Interprétation énergétique</i>	51
<i>Chapitre 3 - Résolution numérique des problèmes de structures à gradients de variables internes</i>	55
1. <i>Discrétisation du problème</i>	59
2. <i>Méthode de décomposition – coordination</i>	61
3. <i>Evaluation numérique</i>	70
<i>Chapitre 4 - Quelques aspects mathématiques de la formulation en champs de variables internes</i>	75
1. <i>Le problème d'évolution pour les lois indépendantes du temps</i>	77
2. <i>Condition de cohérence et formulation incrémentale</i>	98
3. <i>Comportement asymptotique des modèles à gradients</i>	108
4. <i>Synthèse des résultats</i>	111

Chapitre 5 - Application à la formulation non locale d'un modèle d'endommagement fragile	113
1. Construction d'un modèle non local d'endommagement fragile	115
2. Intégration locale de la loi de comportement	119
3. Applications	124
4. Annexe	131
Chapitre 6 - Application du cadre variationnel à la plasticité à gradients	139
1. Plasticité à gradients avec seuil en contraintes	142
2. Plasticité à gradients avec seuil en déformations	146
3. Solutions analytiques de problèmes de structures	152
Chapitre 7 - Modélisation de la rupture ductile des aciers	167
1. Modélisation de la croissance des cavités	169
2. Présentation du modèle de Rousselier	174
3. Construction du modèle de Rousselier non local	178
4. Intégration implicite des relations de comportement	184
Conclusion	191
Références bibliographiques	199

Introduction

Electricité de France, exploitant du Parc Nucléaire français, est guidée par deux préoccupations majeures : avant tout la sûreté puis la disponibilité des centrales de production. En phase de maintenance, l'observation de défauts sur certains composants (retassures, fissures), sans incidence en fonctionnement normal de la centrale, impose d'analyser et prédire leur comportement en cas improbable d'accidents, afin de prévenir tout suraccident éventuel. Ces prédictions, fondées sur des règles simplifiées conservatives, peuvent être complétées d'analyses mécaniques plus fines, généralement à la demande des Autorités de Sûreté. Ces dernières reposent sur des calculs par éléments finis en mécanique de la rupture. Après 20 ans de recherche, cette approche est aujourd'hui opérationnelle et bien validée.

En quelques mots, rappelons le principe de cette approche dite « globale » : si une fissure de surface ds apparaît au sein d'une structure, elle dissipe une énergie $G_c ds$, tandis qu'une redistribution des contraintes permet de recouvrer une énergie globale $G ds$; le critère de Griffith stipule alors que la fissure apparaît effectivement dès que le « taux de restitution d'énergie » G est supérieur ou égal à la « ténacité » G_c du matériau. L'approche globale renvoie donc à l'estimation de la ténacité et à celle de la restitution d'énergie. Si la première estimation résulte de mesures expérimentales normalisées, la seconde est en général le fruit d'un calcul par éléments finis. Mais tant le critère de Griffith que l'élaboration des deux grandeurs en jeu nécessitent des hypothèses qui restreignent la validité de l'approche globale :

- présence préalable d'une fissure (on ne prédit pas l'apparition mais seulement l'amorçage de fissures),
- comportement élastique, éventuellement non linéaire,
- un seul mécanisme d'endommagement à l'œuvre, la séparation de deux surfaces,

En outre, l'approche globale dans sa version opérationnelle et validée ne donne pas d'informations sur la propagation des fissures, même si des travaux proposent d'enrichir la méthode pour prendre en compte des comportements dissipatifs tels que la plasticité ou décrire les phases de création et de propagation.

Devant ces limites, modéliser à l'échelle du point matériel la physique des mécanismes de dégradation semble une approche attrayante et prometteuse pour modéliser la réponse de structures sollicitées dans des gammes de chargements accidentels, c'est-à-dire excédant les régimes de fonctionnement nominaux. En effet, cette approche « locale » de la rupture rend compte de l'apparition, l'amorçage et la propagation de zones endommagées jusqu'à instabilité structurale de la pièce, donc concrètement sa destruction brutale. Là aussi, de nombreux travaux sont venus étayer cette démarche : des modélisations satisfaisantes des mécanismes d'endommagement sont

disponibles et conduisent à des prédictions, déterministes ou probabilistes, en bon accord avec les résultats expérimentaux tant que l'endommagement reste confiné. Cependant, à l'heure actuelle, cette approche ne tient pas toutes ses promesses et présente certaines lacunes qui, fondamentalement, ont toutes trait à l'incapacité à rendre compte d'effets d'échelle, cruciaux en présence des forts gradients de champs mécaniques qui règnent dans les zones endommagées. Ces déficiences sont problématiques dans la mesure où elles remettent en cause les prédictions quantitatives de l'étendue des zones détériorées.

L'objet de notre travail a donc consisté à proposer une démarche de modélisation pour étendre les modèles de comportement de manière à prendre en compte les effets liés aux forts gradients des champs mécaniques. Avant de décrire plus en détails le contenu de ce mémoire, quelques précisions préliminaires nous paraissent utiles.

Tout d'abord, la démarche se veut constructive et générique. Partant d'une loi de comportement donnée, nous proposons :

- une méthode d'homogénéisation pour justifier l'introduction de termes en gradients de variables internes et ainsi déduire un modèle de comportement non local,
- une formulation variationnelle qui offre un cadre pour ces nouvelles lois de comportement,
- enfin, un algorithme qui permet la mise en œuvre numérique de cette formulation.

En revanche, nous ne décrivons pas ici un modèle de comportement adapté à tel ou tel matériau précis, même si, à titre d'illustration, nous sommes amenés à introduire une loi de comportement de type élastique fragile, sans aucune prétention en matière de prédiction quantitative de l'endommagement, ou encore à développer un modèle basé sur le critère de Rousselier pour décrire les phénomènes de rupture ductile. Toujours dans cet esprit, il ne sera pas question ici de comparaisons entre résultats numériques et observations expérimentales, bien que nous soyons conscients qu'il s'agit sans conteste d'une étape ultérieure indispensable pour valider, ou peut-être invalider, la démarche.

Partant de l'examen de quelques extensions des modèles locaux issues de la bibliographie, nous avons soulevé certaines questions qui nous semblent autant de critères de qualité que ces formulations se doivent de remplir. Dresser cette liste de questions nous paraît être une étape préliminaire indispensable, qui nécessitera sans doute une confrontation à d'autres opinions. En nous fondant sur cette analyse préalable, nous avons ensuite cherché à apporter une réponse à chacun de ces critères. Mais bien entendu, des difficultés et des lacunes subsistent, dont on fera brièvement état en conclusion.

Plus précisément, le chapitre 1 commence par énumérer certaines des lacunes qui limitent l'emploi des modèles mécaniques usuels. L'étude bibliographique de quelques méthodes visant à

enrichir les modèles usuels soulève alors les questions qui nous amènent à dresser le cahier des charges évoqué précédemment.

Les chapitres 2 à 4 sont consacrés à la démarche de modélisation proprement dite. Au chapitre 2, nous décrivons d'abord une méthode d'homogénéisation afin de prendre en compte d'éventuels forts gradients des champs mécaniques qui apparaissent dans les zones endommagées ou bien au voisinage de singularités géométriques. Ce passage micro-macro introduit de nouveaux termes en gradients de variables internes dans la relation de comportement. Pour respecter la contrainte non locale qui lie valeurs et gradients des variables internes, nous sommes ensuite conduits à exprimer la loi de comportement à l'échelle de la structure, sous forme variationnelle. Après discrétisation temporelle, elle s'interprète finalement comme la minimisation d'une énergie.

Au chapitre 3, le choix d'un algorithme de lagrangien augmenté pour procéder à l'intégration numérique permet de scinder le problème en un traitement global (sur la structure) linéaire et un traitement local (aux points d'intégration) non linéaire, cette dernière opération s'insérant aisément dans l'architecture d'un code de calcul préexistant. Plus précisément, la formulation sera introduite au sein du *Code_Aster*[®], le code de calcul de mécanique des solides développé sous Assurance de la Qualité avec lequel sont réalisées toutes les études de mécanique à Electricité de France.

Au chapitre 4, on aborde des questions de nature mathématique. En effet, en quittant l'échelle du point matériel pour écrire le comportement à l'échelle de la structure, la nature mathématique du problème se complique puisque l'espace des variables internes devient de dimension infinie : on évoque alors le choix d'un espace fonctionnel approprié, la convergence avec la taille des pas de temps ou encore la limite éventuelle du modèle lorsque l'influence des termes en gradients s'estompe (longueurs caractéristiques qui tendent vers zéro).

Finalement, les chapitres 5 à 7 visent à démontrer les potentialités de la démarche par trois exemples. Tout d'abord, au chapitre 5, le choix d'une loi de type élastique fragile permet d'illustrer systématiquement tous les points de la démarche, depuis la méthode d'homogénéisation jusqu'à la réalisation de calculs numériques.

Au chapitre 6 ensuite, nous montrons que notre cadre permet également de traiter des modèles issus de la littérature, de type plasticité à gradients en l'occurrence, pour lesquels il fournit des informations complémentaires sur les conditions aux limites, ou encore sur le choix des éléments finis adéquats.

Enfin, le chapitre 7 est dédié à des modèles de comportement suffisamment réalistes pour envisager des études industrielles. Notre choix porte ainsi sur le modèle de Rousselier pour décrire la rupture ductile des aciers, qui nous confronte à plusieurs difficultés : critère de plasticité complexe, présence de grandes déformations plastiques, traitement des termes en gradients de déformation plastique cumulée. Si, en raison de ces difficultés, certains points de la méthode doivent être simplifiés, certaines propriétés abandonnées, la démarche reste en revanche

opérationnelle et permet d'envisager sereinement dans un futur proche des calculs de rupture ductile à vocation industrielle.

Nous avons donc choisi d'examiner le problème sous différents éclairages : mécanique, numérique et mathématique. S'il est vrai que l'étude de chacun de ces aspects reste alors nécessairement partielle, un tel choix offre en revanche une plus grande richesse à la démarche et permet de lui accorder une confiance accrue pour des applications ultérieures.

Limites et extensions des théories locales

Les théories mécaniques locales ne parviennent pas à décrire quantitativement des situations où les variations des champs mécaniques macroscopiques interagissent avec les micro-structures sous jacentes aux points matériels. En particulier, cette déficience est manifeste lorsqu'on cherche à modéliser, au sein d'une structure, la formation et la propagation de zones endommagées, dont on sait expérimentalement qu'elles tendent à s'organiser sous forme de bandes d'épaisseur mince. En effet, les modèles locaux ne rendent pas compte de l'échelle de ces zones, c'est-à-dire leur épaisseur, et prédisent des réponses globales de la structure qui sont physiquement inadmissibles.

Pour y remédier, de nombreux auteurs ont proposé des formulations qui étendent les théories locales en introduisant une nouvelle échelle dans la modélisation. Qu'il s'agisse de relaxation de l'énergie potentielle, d'introduction d'une cinématique enrichie ou de la prise en compte au niveau du comportement d'interactions dans un voisinage spatial du point matériel, ces formulations rendent toutes compte d'une microstructure sous-jacente au point matériel, via une étape d'homogénéisation formelle ou bien de manière phénoménologique.

L'examen de ces approches nous conduit à soulever un certain nombre de questions qui apparaissent comme autant d'exigences légitimes à leur égard.

Limites et extensions des théories locales

1. Limites des modèles locaux	15
1.1 Aspects physiques	16
1.2 Aspects numériques	18
1.3 Aspects mathématiques	22
2. Extension des modèles locaux	24
2.1 Relaxation de l'énergie potentielle	25
2.2 Introduction d'une cinématique enrichie	26
2.3 Modèles non locaux	29
2.4 Théories à gradients	31
3. Cahier des charges d'une méthode d'extensions de modèles locaux	34

Un certain nombre d'observations expérimentales (effets d'échelle, localisation, ...) mettent en évidence l'existence de longueurs internes intrinsèques aux matériaux, représentatives de microstructures sous-jacentes aux points matériels macroscopiques et dont l'influence s'avère significative aux petites échelles spatiales. Malheureusement, les théories mécaniques locales ne rendent pas compte des phénomènes observés. Numériquement, cela peut se traduire par des prédictions quantitativement en désaccord avec l'expérience ou même, dans le cas des phénomènes de localisation, par des résultats non représentatifs dans la mesure où ils dépendent pathologiquement de la discrétisation spatiale, cette déficience s'expliquant mathématiquement par le caractère mal posé du problème.

Comme les limites des théories locales apparaissent aussi bien au plan physique, numérique ou mathématique, de nombreux auteurs ont cherché à les enrichir en abordant le problème sous un angle microstructural, phénoménologique, numérique ou bien mathématique. Devant la diversité des approches pour construire des modèles non locaux, il nous a semblé utile d'en rappeler les grandes familles, sans pour autant escompter une quelconque exhaustivité. On pourra d'ailleurs en trouver un examen plus approfondi dans Lorentz [1996].

L'analyse croisée de ces approches permet alors d'y porter un regard critique en dégagant un certain nombre de points qui nous paraissent essentiels. Ces différentes remarques et questions nous conduisent à proposer un « cahier des charges » à remplir par de telles formulations non locales.

1. Limites des modèles locaux

Les descriptions locales (usuelles) des matériaux entrent dans la classe des « milieux matériellement simples », c'est-à-dire en reprenant la définition de Truesdell [1974], des matériaux pour lesquels les valeurs en un point x et à un instant t des champs de contraintes, d'entropie spécifique, d'énergie libre spécifique et de courant de chaleur sont déterminées par la connaissance en x seulement de l'histoire jusqu'à l'instant t de la température et du gradient du mouvement, ainsi que la valeur à l'instant t du gradient thermique. De telles modélisations (élasticité, plasticité, viscoplasticité, etc.) sont maintenant couramment employées dans le domaine industriel et donnent des résultats très satisfaisants.

Toutefois, il existe un certain nombre d'observations dont elles ne rendent pas compte ou seulement de manière imparfaite. Nous nous proposons de présenter quelques une de ces limites, en les abordant d'abord sous l'aspect physique, pour ensuite examiner les conséquences qui peuvent en résulter concernant la mise en œuvre numérique de ces modèles et les propriétés mathématiques des formulations correspondantes.

1.1 Aspects physiques

1.1.1 Effets d'échelle

A petite échelle spatiale, les résultats prédits par les théories locales peuvent s'écarter des mesures expérimentales, écarts qui s'estompent à plus grande échelle. Ainsi, Lakes [1995] recense quelques observations :

- la charge limite de plaques trouées en graphite epoxy dépend de la taille des trous,
- la distribution des déformations autour de cavités dans un matériau composite à fibres correspond bien aux prédictions pour de grandes cavités mais s'en écarte pour de petites cavités,
- des expériences de torsion sur de petites poutres à section carrée constituées de matériaux osseux exhibent des contraintes au coin de la section, en contradiction avec les prédictions.

Dans chacun de ces cas, une microstructure sous-jacente au point matériel semble interagir avec les sollicitations qui s'exercent à la même échelle spatiale.

Par ailleurs, pour des matériaux métalliques, Fleck et al. [1994] ont également mis en évidence des effets d'échelle par des essais de torsion sur des fibres de cuivre dont le diamètre varie entre 12 et 170 μm , effets d'échelle que ne laissait pas présager une analyse dimensionnelle du problème. La description du comportement du matériau par une loi de plasticité usuelle ignore l'existence d'une longueur caractéristique, reliée ici aux propriétés géométriques des dislocations.

Ainsi, en présence de variations significatives des champs mécaniques à petite échelle (forts gradients), les théories locales ne suffisent plus à décrire quantitativement la réponse du matériau.

1.1.2 Dégradations mécaniques et localisation des déformations

Sous fortes sollicitations, les propriétés mécaniques d'un matériau peuvent se dégrader. Ces dégradations se manifestent à l'échelle du point matériel sous des formes diverses, comme en témoigne l'essai de traction d'un béton représenté sur la figure 1. En particulier, on peut relever quatre types de phénomènes au cours du chargement :

- perte de rigidité du matériau,
- apparition de déformations irréversibles,
- présence de boucles hystérétiques lors des cycles traction - compression,
- diminution de la limite d'élasticité.

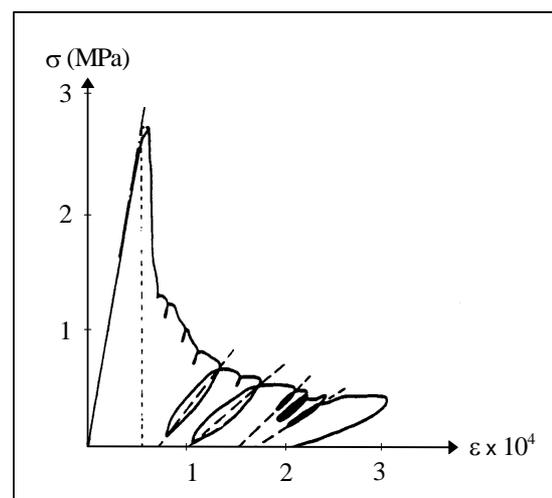


figure 1 - Essai de traction d'un béton, Terrier [1980]

La modélisation de ces phénomènes a fait l'objet d'un grand nombre de publications, voir par exemple Lemaitre et Chaboche [1988] pour une synthèse. De manière générale, la perte de rigidité est modélisée comme une modification des propriétés élastiques, les déformations irréversibles relèvent des théories de plasticité, les boucles hystériques résultent de l'ouverture et la refermeture de microfissures et la diminution de la limite d'élasticité s'exprime comme une réduction du domaine de réversibilité dans l'espace des contraintes (adoucissement du matériau).

Or, lorsqu'on sollicite une éprouvette constituée d'un matériau adoucissant, on observe fréquemment une bifurcation d'un état homogène vers un état hétérogène, au-delà d'une certaine valeur du chargement. Ce nouvel état présente des bandes d'épaisseur faible, appelées bandes de cisaillement ou de localisation, dans lesquelles se concentre la déformation, cf. figure 2. De manière générale, elles sont initiées par la présence de micro-hétérogénéités du matériau ou des conditions aux limites.

Les dimensions des bandes de localisation et les mécanismes physiques qui en sont à l'origine diffèrent d'un matériau à l'autre, cf. Darve et al. [1995]. Pour illustrer cette diversité, on peut citer :

– Les matériaux granulaires (sables, poudres, ...)

C'est un réarrangement des grains qui est à l'origine des bandes de localisation. De nombreux paramètres interviennent dans la formation de ces bandes, parmi lesquels la porosité, la pression de confinement, les tailles des grains et de l'échantillon ainsi que le caractère drainé ou non.

– Les matériaux quasi-fragiles (roches, bétons, ...)

Les bandes de localisation y sont le fait d'une forte concentration de microfissures. Là encore, d'après Berthaud et al. [1994], la largeur des bande dépend de la taille des agrégats (de l'ordre de 2 à 10 diamètres d'agrégats). L'orientation des microfissures mérite d'être mentionnée : si en dehors des bandes de localisation, elles s'orientent en fonction du chargement, en revanche, dans les bandes, on observe une anisotropie des fissures avec tout de même une tendance à se développer dans la direction de la bande.

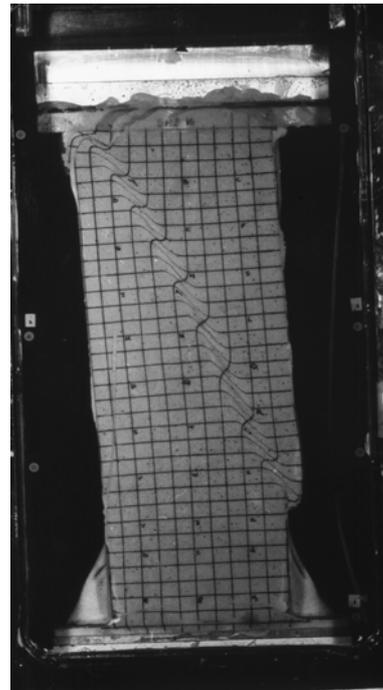


figure 2 - Compression biaxiale sur sable, Desrues et Chambon [1985]

– Les métaux

Dans les polycristaux, les bandes de cisaillement sont le siège d’une déformation plastique importante, concomitante avec une nucléation et une coalescence de cavités très marquées. Même dans un monocristal, voir Rey et Viaris de Lesegno [1994], on assiste à la formation de bandes de localisation à l’échelle macroscopique (épaisseur de l’ordre du millimètre) dans lesquelles le réseau cristallin est nettement déformé et qui résultent en fait de l’accumulation de bandes microscopiques (épaisseur de l’ordre du micron), appelées bandes de Lüders.

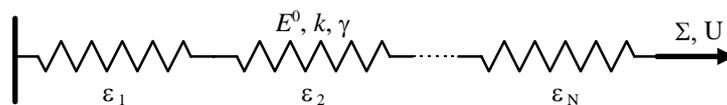
Là encore, la description fine de ces mécanismes nécessite d’introduire dans le modèle une nouvelle échelle dont découle la largeur des bandes de localisation. Comme pour les effets d’échelle, les modèles locaux n’introduisent pas de telles longueurs caractéristiques et ne peuvent donc pas décrire la distribution des champs mécaniques au sein d’une bande de localisation. C’est d’autant plus problématique qu’ils prédisent une énergie dissipée nulle au sein de ces bandes de localisation, voir Bazant et al. [1984], ce qui est physiquement inacceptable : une pièce pourrait se rompre sans consommer d’énergie.

1.2 Aspects numériques

Comme nous venons de le voir, les modèles locaux ne suffisent pas pour décrire un certain nombre de phénomènes physiques. Sur le plan de la mise en œuvre numérique, cela peut avoir des conséquences fâcheuses. Examinons-les dans le cas de la localisation.

1.2.1 Origine intuitive de la localisation

Pour comprendre l’origine du phénomène de localisation, considérons un assemblage de N ressorts montés en série et soumis à une traction (effort Σ ou déplacement U).



Chaque ressort, de longueur l/N , est supposé obéir à une loi de comportement de type élastique fragile sur laquelle on reviendra plus en détails au chapitre 5. Disons simplement que l’état du matériau est décrit par deux variables, les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et l’endommagement caractérisé par une variable scalaire d qui évolue de manière croissante entre 0 (matériau sain) et 1 (matériau totalement endommagé, à la rigidité résiduelle nulle). Les équations du modèles sont :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(d) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{où} \quad \mathbf{E}(d) = \frac{1-d}{1+\gamma d} \mathbf{E}^0 \quad (1)$$

$$Y = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}'(d) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\gamma}{(1+\gamma d)^2} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}^0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

$$f(Y) = Y - k \quad \text{et} \quad f \leq 0 \quad \dot{d} \geq 0 \quad f \dot{d} = 0 \quad (3)$$

- σ tenseur des contraintes
- Y taux de restitution de densité d'énergie
- \mathbf{E}^0 tenseur d'élasticité isotrope initial (caractéristique du matériau)
- γ paramètre d'écroissage ($\gamma > 0$) (caractéristique du matériau)
- k seuil du domaine de réversibilité, égal à la densité d'énergie dissipée par un point matériel totalement endommagé (caractéristique du matériau).

Ce modèle permet de décrire simplement un écroissage négatif linéaire, comme illustré sur la courbe de traction uniaxiale figure 3.

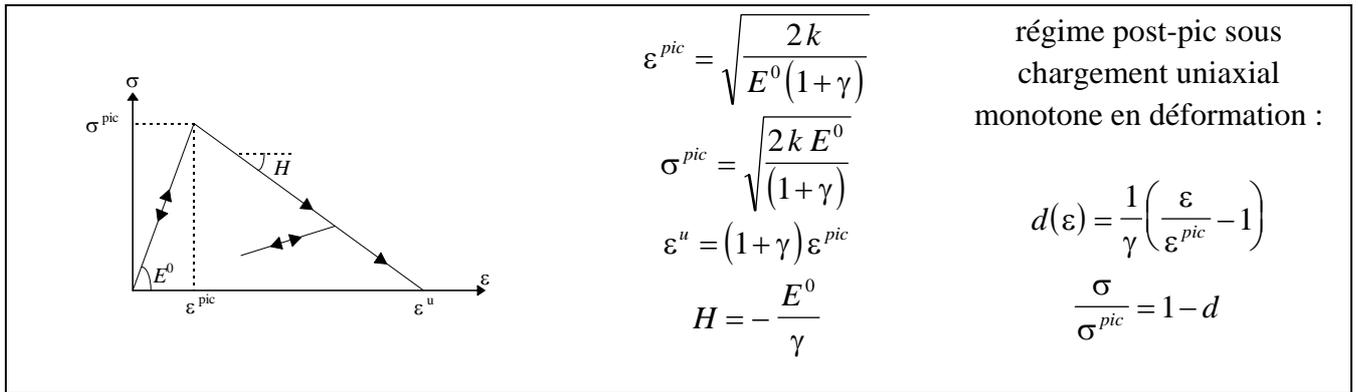


figure 3 - Modélisation d'un comportement adoucissant : traction uniaxiale

A l'échelle d'un ressort, le comportement est bien défini dans la mesure où la connaissance de l'état actuel (déformation et endommagement) et la donnée du taux de déformation fixent sans ambiguïté les taux de contrainte et d'endommagement. A l'échelle de la structure, l'équation d'équilibre vient s'ajouter aux équations de comportement des ressorts ; dans le cas présent, elle exprime simplement l'égalité de la contrainte dans chaque ressort (montage en série) :

$$\sigma_i = \Sigma \tag{4}$$

Examinons maintenant la réponse de cet assemblage. Dans un premier temps, le comportement de tous les ressorts est élastique, si bien que la réponse de la structure existe et est unique : l'endommagement est nul partout et la déformation est la même dans tous les ressorts. La solution est homogène :

$$d_i = 0 \quad \varepsilon_i = \frac{\Sigma}{E^0} \quad \sigma_i = \Sigma \quad U = \sum_{i=1}^N \frac{l}{N} \varepsilon_i = \frac{l\Sigma}{E^0} \tag{5}$$

Cette phase perdure tant que le pic n'est pas atteint, c'est-à-dire $\sigma_i = \Sigma < \sigma^{pic}$. En fait, pour des raisons de micro-hétérogénéités du matériau, la frontière du domaine d'élasticité est atteinte dans l'un des ressorts avant les autres, disons le premier. A partir de ce moment, ce ressort adopte un comportement dissipatif - il s'endommage - si bien que la charge σ_i qu'il supporte diminue. A cause de l'équation d'équilibre, la contrainte diminue aussi dans les autres ressorts qui n'avaient

pas encore atteint le pic. Leur comportement est donc nécessairement une décharge élastique. La solution devient hétérogène¹ :

$$\begin{cases} d_1 = 1 - \frac{\Sigma}{\sigma^{\text{pic}}} & \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon^{\text{pic}}} = 1 + \gamma d_1 \\ d_{i \neq 1} = 0 & \varepsilon_{i \neq 1} = \frac{\Sigma}{E^0} \end{cases} \Rightarrow \frac{U}{l} = \varepsilon^{\text{pic}} \left[\frac{N-1}{N} (1-d_1) + \frac{1}{N} (1+\gamma d_1) \right] \quad (6)$$

Alors que la déformation des ressorts élastiques diminue, elle augmente dans le ressort qui s'endommage. A terme, toute la déformation de la structure s'est localisée dans le ressort endommagé. On comprend le rôle fondamental joué par l'équation d'équilibre, illustré graphiquement figure 4.

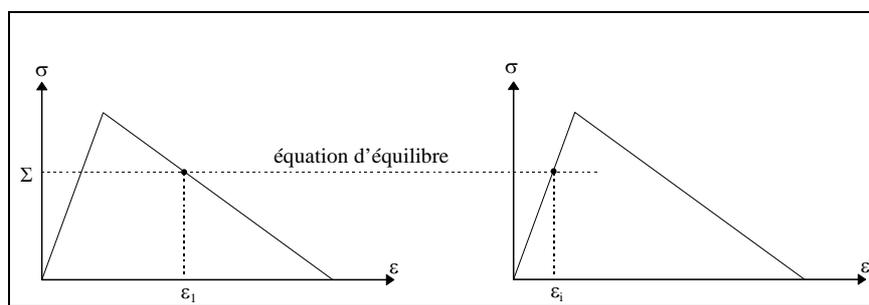


figure 4 - Rôle de l'équation d'équilibre dans le phénomène de localisation

Quant à la réponse globale de la structure, on choisit de la paramétrer non par la contrainte ou le déplacement, mais par l'endommagement du ressort 1, à cause d'un éventuel snap-back (qui apparaît si $\gamma \leq N - 1$). Son évolution est représentée figure 5.

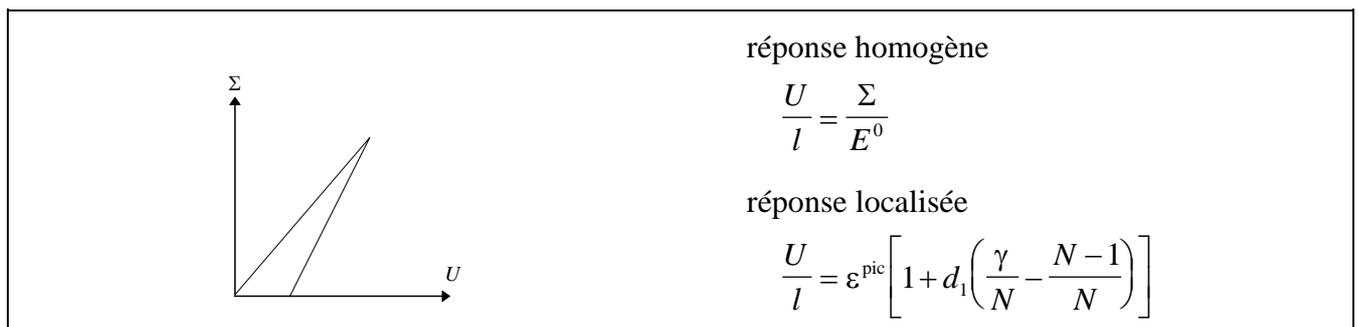


figure 5 - Réponse globale de la structure en présence de localisation

1.2.2 Conséquence numérique de la localisation : dépendance au maillage

La conséquence du phénomène de localisation au plan numérique est immédiate. En effet, les mêmes symptômes que pour le système de ressorts apparaissent lorsqu'on maille une barre par éléments finis, les instabilités numériques et les erreurs d'arrondis jouant un rôle comparable à

¹ L'argument de micro-hétérogénéités est physique. Cela dit, même en son absence, une bifurcation vers une solution localisée apparaît et des arguments de stabilité semblent montrer que seule cette solution localisée est stable.

celui des micro-hétérogénéités du matériau. Ainsi, toute la déformation se localise dans un seul élément. En raffinant le maillage, on modifie la réponse globale de la structure (qui dépend explicitement du nombre d'éléments). En outre, l'énergie dissipée pour rompre la barre s'élève à :

$$E_{\text{rupt}} = k \frac{l}{N} \quad (7)$$

qui tend vers zéro quand on raffine le maillage : à la limite, la barre se rompt sans consommer d'énergie, comme annoncée précédemment. Autant dire que les résultats obtenus numériquement ne sont pas représentatifs de la réponse réelle d'une structure. En fait, la solution du calcul dépend pathologiquement de la taille des éléments, mais aussi plus généralement de leur forme, de leur orientation, du degré d'interpolation, en un mot, de l'espace d'approximation, comme le montrent les résultats figure 6, présentés dans Darve et al. [1995].

En résumé, les solutions dépendent pathologiquement du maillage, c'est-à-dire de la nature des éléments finis, de leur taille, leur orientation et leur distorsion. La largeur de la bande de localisation tend vers zéro quand on raffine le maillage, ce qui conduit à une énergie dissipée à rupture nulle, donc physiquement inacceptable.

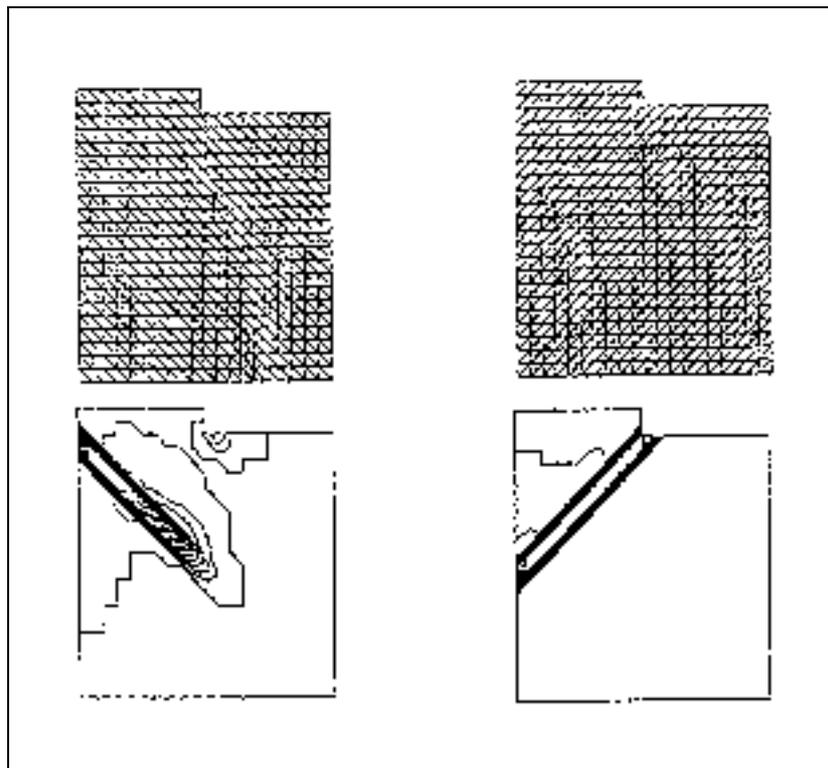


figure 6 - Enfoncement d'une plaque dans un massif, Darve et al. [1995]
Champ de déformation équivalente

1.2.3 Sensibilité à la discrétisation temporelle pour des matériaux adoucissants et visqueux

La présence d'effets visqueux dans une loi de comportement adoucissante a été examinée entre autres par Needleman [1988]. Dans le cas de la loi de type élastique fragile du § 1.2.1, on peut rendre compte de la viscosité en remplaçant par exemple la condition de cohérence (3) par l'équation d'évolution suivante :

$$\dot{d} = \frac{1}{\eta} \langle Y - k \rangle \quad (8)$$

η viscosité (caractéristique du matériau)
 $\langle x \rangle$ partie positive de x (crochets de Macaulay)

Notons que cette forme d'équation d'évolution est similaire à la régularisation mathématique des équations de la plasticité proposée par Duvaut et Lions [1972] : lorsque η tend vers zéro, on retrouve le modèle de comportement non visqueux. Grâce à l'introduction de la viscosité, les résultats sont stables par rapport au maillage, à condition qu'il soit suffisamment raffiné pour décrire convenablement de fines bandes de localisation. Mais c'est alors la question de la discrétisation en temps qui devient cruciale.

Schéma explicite

Dans ce cas, une discrétisation très fine en temps est nécessaire, cf. Pitman [1995]. Plus inquiétant, les travaux de Cherukuri et Shawki [1995] indiquent que la condition nécessaire de stabilité de von Neumann (qui découle d'une analyse linéaire du problème) est loin d'être suffisante : ils ont dû employer des pas de temps 500 fois plus petits que ceux prescrits par la condition de stabilité pour obtenir des résultats convenables.

Schéma implicite

Contrairement aux résultats habituels, la stabilité du schéma n'est pas inconditionnelle mais dépend de la taille des pas de temps. Simo [1988] montre que cette taille doit être inférieure à une valeur critique, indépendante de la discrétisation en espace, mais qui tend vers zéro avec la viscosité.

En outre, l'analyse dimensionnelle du problème quasi-statique montre que la prise en compte de la viscosité du matériau n'introduit pas d'échelle spatiale représentative d'une microstructure sous-jacente au point matériel.

1.3 Aspects mathématiques

L'emploi de modèles locaux pour décrire la formation des bandes de localisation se heurte à des difficultés dans la mise en œuvre numérique qui trouvent leur origine non dans une quelconque déficience de l'approximation par éléments finis mais dans les propriétés mathématiques du

système d'équations qui régit le problème continu lui-même : ce dernier devient mal posé, son analyse s'impose.

En fait, obtenir des conditions pour assurer le caractère bien posé² du problème dans toute sa généralité est difficile. C'est pourquoi on se cantonne à l'examen du problème en vitesse. Une difficulté subsiste : l'incrément de contrainte $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ est une fonction non linéaire de l'incrément de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{u})$, du fait de l'alternative décharge élastique ou décharge dissipative. La théorie de Hill [1958] justifie dans le cadre des modèles associés de remplacer le comportement réel par le comportement tangent à la branche dissipative pour lequel $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{H} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (\mathbf{H} est l'opérateur tangent pour le comportement dissipatif) : on parle alors de solide linéaire de comparaison. Si le problème (9) qui en résulte est bien posé, alors il en est de même du problème réel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}^d = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{H} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla^s \dot{\mathbf{u}} \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^d \quad \text{sur } \partial_T \Omega \\ \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^d \quad \text{sur } \partial_u \Omega \end{array} \right. \quad (9)$$

\mathbf{f}^d et \mathbf{T}^d forces volumiques et surfaciques imposées
 \mathbf{u}^d déplacements imposés

(9) entre dans la catégorie des problèmes variationnels elliptiques, abondamment étudiés dans la littérature ; on renvoie à Benallal et al. [1993] pour une synthèse. Il est bien posé si et seulement si il satisfait à trois conditions :

- (i) une condition d'ellipticité de l'opérateur \mathbf{H} ,
- (ii) une condition complémentaire de bord,
- (iii) une condition complémentaire d'interface.

On laissera les deux dernières conditions dans l'ombre, précisant simplement qu'elles concernent respectivement l'apparition éventuelle d'ondes de surface stationnaires (ondes de Rayleigh) sur les bords (ii) ou les interfaces (iii), c'est-à-dire les surfaces de discontinuité de l'opérateur \mathbf{H} . Quant à la condition d'ellipticité (i), elle s'exprime par :

$$\underline{\text{Ellipticité}} : \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{R}^{3*} \quad \det(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}(x) \cdot \mathbf{n}) \neq 0 \quad (10)$$

Bien que d'origine mathématique, la condition d'ellipticité admet deux interprétations mécaniques, l'une en statique, l'autre en dynamique, voir par exemple Rice [1976]. En statique, la condition d'ellipticité garantit qu'il n'existe pas de solutions pour lesquelles le taux de déformation $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ admettrait une discontinuité spatiale le long du plan de normale \mathbf{n} (qui correspond à l'idée géométrique d'une bande de localisation de normale \mathbf{n}). En dynamique, elle assure que le tenseur acoustique $\mathbf{Q}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}$ est défini positif, donc que la célérité des ondes est non nulle : la propagation des ondes n'est pas stoppée dans une zone donnée. Ces interprétations mécaniques

² Le problème est dit bien posé lorsqu'il admet un nombre fini de solutions, linéairement indépendantes et qui dépendent continûment des données.

confirment bien la condition d'ellipticité comme une condition de non localisation au sein de la matière ; en revanche, elle ne concerne bien sûr ni les bords, ni les interfaces.

Par ailleurs, cette condition d'ellipticité permet également de constater que l'adoucissement n'est pas un phénomène nécessaire à la localisation, mais que des lois de comportement non associées, pour lesquelles l'écoulement des variables internes n'est pas donné par une règle de normalité portant sur la frontière du domaine de réversibilité, peuvent également y conduire, et ce en l'absence d'adoucissement, voir par exemple Benallal et Comi [1994].

Enfinement, si l'on omet les conditions complémentaires de bord et d'interface, la condition d'ellipticité nous garantit que le problème est bien posé, et donc que les résultats numériques obtenus par éléments finis sont représentatifs de la réponse réelle de la structure, à condition de prendre garde à d'éventuelles bifurcations. En revanche, lorsque la condition d'ellipticité n'est plus assurée, des bandes de localisation - mal décrites par le modèle local - peuvent apparaître, remettant en cause la confiance que l'on peut accorder aux résultats numériques.

Notons d'ailleurs que, dans cet esprit, certains auteurs comme Billardon [1989] proposent d'employer cette condition mathématique comme critère d'amorçage, la direction de localisation étant alors censée fournir la direction de fissuration. Une telle approche paraît cependant hasardeuse pour deux raisons : d'une part, des observations expérimentales dans les métaux indiquent que l'orientation des microfissures (qui correspondrait à la direction des bandes de localisation) ne coïncide pas nécessairement avec celle de la fissure macroscopique, et d'autre part, l'initiation d'une bande de localisation microscopique n'est pas nécessairement concomitante à l'amorçage d'une zone endommagée macroscopique, voir par exemple Li et Drucker [1994]. En fait, le développement de ces dernières semble relever davantage d'effets de structures (singularités, redistribution des champs mécaniques, instabilités structurales) que de considérations purement locales ; on en verra un exemple au chapitre 5.

2. Extension des modèles locaux

La motivation première qui justifie les travaux de ce mémoire concerne l'étude de la propagation d'une zone endommagée, dont on a vu précédemment que les modèles locaux ne pouvaient pas rendre compte. C'est pourquoi nous avons commencé par examiner quelques propositions issues de la littérature qui visent à étendre ces modèles locaux. Les angles d'approche sont variés selon les auteurs :

- physique pour certains qui se fondent sur une analyse microstructurale pour introduire, via des techniques d'homogénéisation, des longueurs internes et ainsi étendre les modèles locaux ;
- phénoménologique pour d'autres, qui introduisent directement à l'échelle macroscopique des termes censés rendre compte d'interactions microscopiques ;

- mathématique enfin où l’extension du modèle est guidé par la recherche de propriétés mathématiques favorables.

Cela dit, des justifications différentes peuvent conduire à une même classe de modèles, ce qui nous a conduit à privilégier une classification transverse à ces angles d’approche en quatre groupes : une formulation basée sur la relaxation de l’énergie potentielle, des méthodes basées sur l’introduction de nouveaux degrés de liberté et d’autres qui prennent en compte un effet de voisinage spatial, soit via un opérateur de délocalisation, soit en introduisant des gradients des variables d’état. Cette présentation, loin d’être exhaustive, vise à dégager les justifications, les points forts et les lacunes de chacune, pour esquisser une problématique générale qui guidera les développements ultérieurs proposés dans ce mémoire.

2.1 Relaxation de l’énergie potentielle

Une première classe de modèles, proposée par Francfort et Marigo [1993], se fonde sur un examen des propriétés mathématiques de la formulation énergétique du problème. Succinctement, une solution d’un problème de structures est un point stationnaire de l’énergie potentielle ; elle est stable s’il s’agit d’un minimum. En présence d’un comportement adoucissant, l’énergie peut ne plus être semi-continue inférieure, ce qui remet en cause l’existence de solutions : on peut construire des champs d’énergie toujours plus basse mais qui ne convergent pas vers une solution du problème. Une technique couramment employée par les mathématiciens, voir Dal Maso [1993], consiste alors à relaxer le problème, c’est-à-dire à remplacer l’énergie réelle par son enveloppe semi-continue inférieure : ainsi, les solutions du problème réel subsistent et les suites minimisantes du problème réel convergent vers des solutions du problème relaxé.

En dépit de l’angle d’attaque essentiellement mathématique, cette approche repose également sur des bases physiques. Ainsi, elle définit un critère de sélection des solutions, fondée sur des notions de stabilité : ne seront retenus comme solution que des minima du potentiel (relaxé) et non plus tous les points stationnaires. Par ailleurs, ses auteurs ont su interpréter les solutions du problème relaxé comme l’homogénéisation de mélanges fins de couches saines et endommagées, énergétiquement optimaux.

Finalement, cette démarche assure un problème bien posé ; l’indépendance des solutions par rapport au maillage a été vérifiée par Lorentz [1994]. En outre, lorsque le problème est initialement bien posé, aucune modification ne lui est apportée. En revanche, outre la difficulté du formalisme mathématique qui peut nuire à l’appropriation de cette méthode par la communauté des mécaniciens, on peut noter plusieurs restrictions :

- la loi de comportement locale doit être de type fragile et brutal – partiel, c’est-à-dire que le matériau, à l’échelle microscopique, est soit sain, soit détérioré, et dans ce dernier cas, il doit encore subsister une rigidité résiduelle ;

- la mise en œuvre numérique qui repose sur une quasi-convexification de la densité d'énergie locale (pour construire l'enveloppe semi-continue inférieure de l'énergie potentielle) est réalisable pour des problèmes plans et isotropes, mais son extension à des problèmes tridimensionnels paraît illusoire à court terme au plan opérationnel.

2.2 Introduction d'une cinématique enrichie

Le point commun de ces méthodes réside dans l'introduction de degrés de liberté de « déplacements » supplémentaires, qui peuvent ou non s'appuyer sur des justifications microstructurales. Le principe des puissances virtuelles permet alors de définir les efforts intérieurs associés et construire les équations d'équilibre correspondantes. Dès à présent, plusieurs points méritent d'être mentionnés.

- Comme l'a noté Lakes [1995], ces méthodes conduisent à des effets d'échelle, y compris dans les régimes réversible (élastique) ou à écrouissage positif.
- Des degrés de liberté supplémentaires nécessitent l'introduction de nouvelles conditions aux limites, dont le choix (Dirichlet, Neumann, mixte...), toujours délicat et parfois arbitraire, conduit à des résultats différents.
- L'introduction de nouvelles grandeurs cinématiques, et donc aussi de nouveaux efforts qui en sont les grandeurs duales, impose aussi de postuler de nouvelles relations de comportement, pour lesquelles la part d'arbitraire peut, là encore, être importante.

2.2.1 Modèles à degrés de liberté de porosité

Plusieurs auteurs ont essayé de prendre en compte l'endommagement comme un degré de liberté supplémentaire du milieu continu, Markov [1995], Pijaudier-Cabot et Burlion [1996], Frémond et Nedjar [1993], ces derniers proposant sans doute le cadre le plus constructif. L'endommagement y est représenté comme un déplacement microscopique, isotrope car scalaire, qui s'interprète comme la porosité du matériau (ou plus exactement la respiration des cavités du matériau), ce qui renvoie aux travaux antérieurs de Cowin et Nunziato [1983] sur la modélisation des matériaux élastiques poreux.

En dépit d'une inspiration microstructurale, ces modèles laissent ouverts certains choix. Par exemple, en ce qui concerne le traitement de l'irréversibilité de l'endommagement, il y a autant de formulations que d'auteurs : laissé réversible chez Markov [1995], l'endommagement est décomposé en une part réversible et une autre irréversible chez Pijaudier-Cabot et Burlion [1996] ou bien forcé à être irréversible à travers le potentiel de dissipation chez Frémond et Nedjar [1993]. Cela montre bien que le choix de la loi de comportement reste entier, comme annoncé préalablement dans une remarque générale. De ce choix découle d'ailleurs les propriétés du modèle ; ainsi, une étude de localisation menée sur leur modèle par Pijaudier-Cabot et Burlion [1996] semble indiquer que les solutions sont instables dans le régime d'écrouissage positif, fait étonnant qui soulève des questions.

Autre point laissé dans l'ombre : les conditions aux limites pour cette nouvelle variable cinématique. Seuls Pijaudier-Cabot et Burlion [1996] semblent les préciser, optant *a priori* pour des conditions de type Neumann.

Enfin, il est important de remarquer que l'introduction d'une nouvelle inconnue cinématique découplée³ des déplacements est équivalente à l'introduction d'une nouvelle variable interne, comme le montrent Lorentz et Andrieux [1999], pour peu qu'on puisse négliger la puissance virtuelle d'accélération associée à cette inconnue pseudo-cinématique⁴. Pourquoi ces modèles seraient-ils alors bien posés ? Tout simplement parce que des termes en gradient d'endommagement, ou même visqueux, sont simultanément introduits dans la formulation.

2.2.2 Modèles de Cosserat ou micropolaires

La théorie des milieux micropolaires, due aux frères Cosserat, prend en compte, outre les degrés de liberté de déplacements, des degrés de liberté de rotations, indépendants des déplacements, qui décrivent la rotation de la microstructure sous-jacente au point matériel. La cinématique d'un tel milieu continu est décrite par un tenseur de déformation et un tenseur de courbure :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u} - \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\kappa} = \nabla \boldsymbol{\omega} \quad (11)$$

- \mathbf{u} vecteur déplacement
- $\boldsymbol{\omega}$ vecteur rotation ($\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})$ est le tenseur antisymétrique associé à $\boldsymbol{\omega}$)
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ tenseur de déformation (non symétrique)
- $\boldsymbol{\kappa}$ tenseur de courbure

Remarque

Bien qu'indépendantes des déplacements, les rotations ne sont pas découplées au sens du § 2.2.1, car un mouvement de corps rigide est défini par :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^0 + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} \quad (12)$$

Introduire des rotations dans la formulation n'est donc pas équivalent à introduire de nouvelles variables internes, contrairement aux modèles à cinématique de type porosité.

Les efforts intérieurs sont alors modélisés par un tenseur de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ non symétrique, dual des déformations, et un tenseur moment de contraintes \mathbf{m} , dual de la courbure.

Plusieurs auteurs, comme de Borst [1991] ont adopté cette démarche pour traiter des comportements adoucissants, essentiellement dans le contexte de la plasticité à écrouissage négatif. Dans ce cadre, Steinmann [1995] a réalisé des calculs qui reflètent une bonne indépendance par rapport au maillage. Cependant, une analyse menée par Iordache et al. [1995] indique que certains

³ Par découplée, on entend, d'une part, indépendante, et d'autre part, nulle dans tout mouvement rigidifiant.

⁴ Dans le cas présent, on n'imagine pas la respiration des cavités contribuer de manière significative à l'énergie cinétique de la structure.

modes de bifurcation localisée peuvent subsister : ce sont des modes d'ouverture (mode I), pour lesquels les rotations ne paraissent pas activées.

Sur le plan phénoménologique, Fleck et Hutchinson [1993] justifient l'introduction de ces termes en rotation dans la mesure où ils jouent un rôle sur l'écroutissage plastique. Quant à Forest [1996], il étaye l'introduction de ces nouvelles grandeurs cinématiques en se fondant sur une analyse microstructurale des monocristaux. Pour ces matériaux, on observe en effet de fortes courbures du réseau cristallin au voisinage de la bande de localisation, qui engendrent des dislocations d'accommodation géométrique, ignorées par les modèles de plasticité classiques. Ce n'est qu'après avoir précisé la nature physique des rotations qu'il peut raisonnablement exprimer les lois de comportement complémentaires, indispensables à la fermeture des équations du modèle.

2.2.3 Modélisation par des surfaces de discontinuité

A la différence des autres méthodes présentées dans cette étude bibliographique, cette approche ne cherche pas à décrire finement le comportement interne des bandes de localisation mais les modélise comme des surfaces de discontinuité des déplacements, pour prédire la réponse globale d'une structure, cf. figure 7.

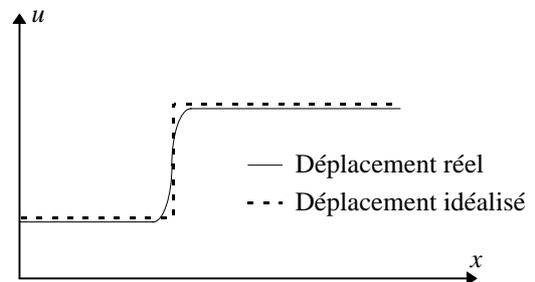


figure 7 - localisation des déformations 1D

En ce sens, il s'agit bien d'une démarche qui enrichit la cinématique traditionnelle des milieux continus puisque le champ de déplacements s'exprime dorénavant comme la somme d'un champ de déplacements régulier (continu) et des termes de saut le long de surfaces de discontinuité (*a priori* inconnues). Fréquemment employée d'une façon purement technologique, en lien direct avec le développement d'éléments finis *ad hoc*, cf. Foreau et Millard [1994], cette modélisation a fait l'objet d'une théorie précise de la part de Simo et Oliver [1993], puis Oliver [1997a] et [1997b], qui couvre à la fois l'écriture du comportement, la formulation variationnelle et l'écriture d'éléments finis mixtes appropriés, voir à ce sujet Simo et Rifaï [1990].

Le point essentiel de l'analyse consiste à remarquer qu'une loi de comportement adoucissante n'autorise pas *a priori* de discontinuités des déplacements tout en maintenant les contraintes bornées, la plasticité parfaite mise à part. Pour y parvenir, il est nécessaire de modifier la loi de comportement en introduisant un module d'écroutissage dont l'inverse s'écrit comme une distribution de Dirac, localisée sur les surfaces de discontinuité. Dans ce cas, toute la dissipation est confinée sur ces surfaces de discontinuité (sans pour autant que la dissipation globale soit nulle car la dissipation n'est plus volumique mais surfacique) ; le comportement est élastique dans tout le reste de la pièce. En prescrivant la continuité de la contrainte normale, Simo et Oliver [1993] montrent alors que l'intensité du saut de déplacements est fixée par la partie régulière des déplacements et le module d'écroutissage.

Cette méthode paraît attrayante car elle s'intègre aisément dans un code de calcul préexistant et ne nécessite pas de maillages particulièrement fins puisqu'on ne cherche pas à décrire les champs à l'intérieur des bandes de localisation. C'est pourquoi nous l'avons examiné de manière plus approfondie dans Amoussou [1997], Rousseau [1997] et Lorentz [1997a] : le constat est moins optimiste. Toute la difficulté, aussi bien théorique qu'algorithmique, réside dans la détermination des lieux géométriques des surfaces de discontinuité. Pour commencer, il ne s'agit pas d'un problème bien posé : des réseaux de fissures parallèles les unes aux autres peuvent apparaître dans la structure, où le nombre de fissures est directement lié à la finesse du maillage, et conduisent à des réponses globales différentes, justement fonction du nombre de fissures. Cela dit, même si on considère que la solution la plus stable sera celle où ce nombre de fissures est minimal, l'obtenir par éléments finis est apparu délicat, la difficulté consistant à construire des surfaces de discontinuité géométriquement continues d'une maille à l'autre.

Sans entrer plus avant dans le détail, il est certain que l'emploi de cette méthode requiert un savoir-faire technologique plus important que ne le laissent entendre les différents articles déjà cités. En outre, son extension à des situations tridimensionnelles paraît sinon insurmontable du moins particulièrement ardue.

2.3 Modèles non locaux

L'idée sous-jacente aux modèles non locaux consiste à prendre en compte un effet de voisinage spatial pour décrire le comportement d'un point matériel : il y a interaction à distance entre les points de la structure. Ces interactions ont lieu *a minima* dans un voisinage de taille fixée du point matériel considéré et généralement sur toute la structure, avec une influence d'un point sur un autre d'autant plus faible qu'ils sont éloignés. De telles approches, initialement développées pour rendre compte de l'interaction entre microfissures dans les bétons, cf. Bazant et Pijaudier-Cabot [1988], ont trouvé un écho dans le domaine des métaux, cf. Leblond et al. [1994].

Plus précisément, certaines grandeurs locales de la loi de comportement sont remplacées par leurs pendants non locaux qui résultent de l'application d'opérateurs de délocalisation donnés. Ainsi, dans le cas de la loi élastique fragile du § 1.2.1, on peut par exemple laisser inchangées les équations d'état (1) et (2) pour ne modifier que l'équation d'évolution (3) en faisant dépendre le seuil f non plus du taux de restitution de densité d'énergie local Y mais de son extension non locale \bar{Y} :

$$f(Y) = \bar{Y} - k \quad \text{et} \quad f \leq 0 \quad \dot{d} \geq 0 \quad f \dot{d} = 0 \quad \text{avec} \quad \bar{Y} = \mathbf{R}(Y) \quad (13)$$

\mathbf{R} opérateur fonctionnel de délocalisation

Il reste à préciser le choix de l'opérateur \mathbf{R} . Pijaudier-Cabot [1995] propose un opérateur de convolution par une distribution gaussienne isotrope :

$$\mathbf{R}(Y)(x) = \bar{Y}(x) = \int_{\Omega} Y(s) \omega(x-s; x) ds \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega(u; x) = \omega^0(x) \exp\left(-\frac{\|u\|^2}{2L_c^2}\right) \\ \omega^0(x) \text{ tel que } \int_{\Omega} \omega(x-s; x) ds = 1 \end{array} \right. \quad (14)$$

L_c longueur caractéristique

tandis que Peerlings et al. [1995] suggèrent l'emploi d'une délocalisation par moindres carrés et pénalisation du gradient⁵ :

$$\mathbf{R}(Y) = \bar{Y} \quad \text{réalise} \quad \text{Min}_{\bar{Y}} \int_{\Omega} \frac{1}{2} (L_c \nabla \bar{Y})^2 + \frac{1}{2} (\bar{Y} - Y)^2 \quad (15)$$

L_c longueur caractéristique

Ces approches permettent effectivement d'éliminer la dépendance pathologique au maillage, Huerta et Pijaudier-Cabot [1994] ayant même précisé le raffinement requis pour décrire convenablement les bandes de localisation.

En revanche, le choix d'un opérateur de délocalisation \mathbf{R} est totalement arbitraire. A ce propos, Lorentz [1996] a montré que si on omet les conditions aux limites, alors le choix des moindres carrés (15) peut aussi s'interpréter comme une fonction de convolution particulière dans (14) (ω n'est plus une gaussienne dans ce cas). Le problème se résume donc à choisir une fonction de pondération ω , sachant que Planas et al. [1993] ont montré que les résultats y sont très sensibles. Une analyse microscopique simplifiée menée sur un réseau régulier de microfissures par Pijaudier-Cabot [1995] indique d'ailleurs que la fonction de pondération devrait dépendre de l'état actuel de la structure, ce qui remet totalement en cause le caractère opérationnel de la démarche. En fait, le choix d'un opérateur \mathbf{R} ne semble avoir été pleinement justifié par une étape d'homogénéisation que dans le cas d'un matériau composite élastique à distribution aléatoire des deux composants, voir Drugan et Willis [1996], et ce loin des bords de la structure.

Une autre difficulté de ces modèles concerne le caractère fini du voisinage sur lequel a lieu les interactions entre points matériels. Ce voisinage peut ainsi « déborder » d'une partie de la structure sur une autre, alors qu'on ne s'attend pas à une quelconque interaction physique ; de telles pathologies sont représentées figure 8. Si à la rigueur, on peut préciser l'extension de ce voisinage sur la structure initiale afin qu'il ne « déborde » pas (c'est-à-dire qu'aucun segment contenu dans le voisinage ne traverse un bord de la structure), il paraît illusoire de vouloir s'en assurer tout au long de l'histoire du chargement, quand les fissures ne sont pas posées *a priori* mais résultent d'une évolution de la zone endommagée.

⁵ En réalité, leur formulation n'est pas présentée ainsi mais est introduite moyennant le développement de Taylor tronqué d'un opérateur intégral du type (14), sachant que Huerta et Pijaudier-Cabot [1994] ont de toute façon montré que les termes tronqués n'étaient pas négligeables.

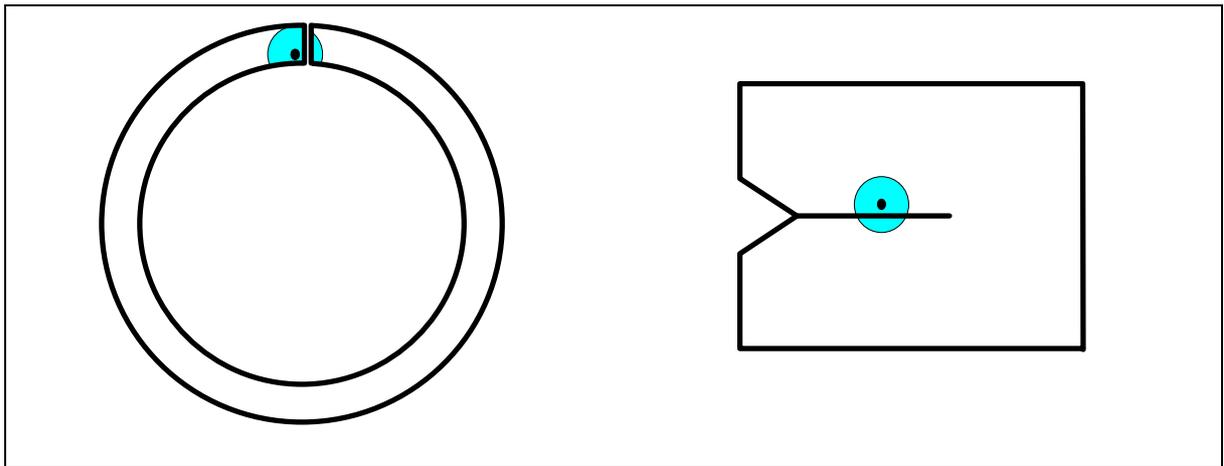


figure 8 - Exemples de structures où le voisinage d'un point matériel « déborde » sur des zones indépendantes

Enfin, sur le plan algorithmique, le choix de l'opérateur \mathbf{R} n'est pas non plus sans conséquences. Ainsi, la formulation (15) se prête bien à une introduction dans un code préexistant, à condition de traiter \bar{Y} comme une nouvelle inconnue nodale, à laquelle est associée une pseudo équation d'équilibre, l'équation d'Euler du problème de minimisation. Ce n'est pas le cas du modèle intégral (14) qui peut remettre en cause l'architecture d'un code puisqu'il nécessite d'évaluer l'interaction d'un point d'intégration sur un autre : on perd le découplage entre les éléments finis du maillage au niveau de l'intégration des relations de comportement. Ce point est particulièrement apparent dans la prise en compte de conditions aux limites de type symétrie (les points d'intégration de la partie de la structure qui n'est pas représentée interagissent avec les autres).

2.4 Théories à gradients

Les théories à gradients consistent à prendre en compte des effets de voisinage spatial à travers des gradients d'ordre supérieur des déformations et des variables internes. En pratique, aucune théorie n'agit simultanément sur les inconnues cinématiques et les variables internes, pour des raisons de simplicité. C'est pourquoi nous distinguons maintenant les deux cas.

2.4.1 Théorie du second gradient

Certaines méthodes enrichissent la description cinématique en optant pour une densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs qui dépend linéairement non seulement du taux de déformation mais aussi du second gradient de la vitesse :

$$p_i(\mathbf{v}) = -[\boldsymbol{\sigma}_\bullet \cdot \nabla \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma}_\nabla \cdot \nabla \nabla \mathbf{v}] \quad (16)$$

- $\boldsymbol{\sigma}_\bullet$ tenseur des contraintes usuel
- $\boldsymbol{\sigma}_\nabla$ tenseur des contraintes complémentaire (tenseur d'ordre 3)

On parle alors de théorie du second gradient et on pourra se reporter à Germain [1973] pour une présentation détaillée. Comme pour les modèles à cinématique enrichie § 2.2, la description des

efforts intérieurs fait appel à de nouvelles grandeurs. En revanche, comme aucune nouvelle inconnue cinématique indépendante n'est introduite, il n'y a pas d'équation d'équilibre supplémentaire, même si l'équation d'équilibre fait maintenant intervenir σ_{∇} puisqu'elle s'écrit (en notations indicielles) :

$$\sigma_{ij,j} - \sigma_{\nabla ij,k,jk} + f_i = 0 \quad (17)$$

f_i forces extérieures volumiques

Certains auteurs, se fondant sur la perspective du contrôle de la localisation via le gradient de la déformation, ont adopté cette théorie du second gradient pour traiter les problèmes avec adoucissement. Une telle démarche a initialement été proposée par Triantafyllidis et Aifantis [1986], Triantafyllidis et Bardenhagen [1993] et Bardenhagen et Triantafyllidis [1994] pour des lois de comportement hyperélastiques (donc non dissipatives). En étudiant des systèmes de ressorts, ils proposent d'introduire dans l'énergie un terme quadratique en gradients des déformations.

De leur côté, Fleck et Hutchinson [1996] introduisent des termes en gradient des déformations pour expliquer les effets d'échelle observés par torsion d'une mince fibre de cuivre, en s'inspirant des observations concernant la dépendance de l'érouissage plastique par rapport aux gradients des déformations.

Enfin, Gologanu et al. [1998] ont étendu cette approche à des lois dissipatives, et plus particulièrement à la plasticité des milieux poreux (endommagement ductile, évoqué au chapitre 7). Ils commencent par enrichir la méthode d'homogénéisation à déplacements homogènes aux bords pour tenir compte des variations des déformations macroscopiques à l'échelle de la microstructure. Moyennant l'hypothèse d'un comportement microscopique rigide plastique, ils peuvent ainsi construire un potentiel de dissipation macroscopique qui dépend à la fois de la déformation et de son gradient, et en déduire un seuil d'écoulement qui dépend des deux tenseurs de contraintes $f(\sigma_{\bullet}, \sigma_{\nabla})$. A ce stade, l'introduction de déformations élastiques macroscopiques est délicate. Ils sont contraints de postuler, par analogie, une décomposition additive des déformations, en lien avec une relation élastique entre les contraintes et les déformations élastiques, d'une part, et une loi d'écoulement plastique associée au seuil f , d'autre part :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\bullet}^e + \boldsymbol{\varepsilon}_{\bullet}^p \\ \nabla \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \boldsymbol{\varepsilon}_{\nabla}^e + \nabla \boldsymbol{\varepsilon}_{\nabla}^p \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{\bullet} = \mathbf{E}_{\bullet} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\bullet}^e \\ \boldsymbol{\sigma}_{\nabla} = \mathbf{E}_{\nabla} \cdot \nabla \boldsymbol{\varepsilon}_{\nabla}^e \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\bullet}^p = \lambda \partial_{\boldsymbol{\sigma}_{\bullet}} f \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\nabla}^p = \lambda \partial_{\boldsymbol{\sigma}_{\nabla}} f \end{cases} \quad f \leq 0 \quad \lambda \geq 0 \quad \lambda f = 0 \quad (18)$$

En dépit de l'introduction quelque peu arbitraire de l'élasticité, cette approche demeure élégante car elle associe un cadre formel à un réel souci de justification microstructurale des termes en gradients de déformations. Sur le plan numérique, elle nécessite l'emploi soit d'éléments finis de Hermite C^1 (qui rendraient les simulations tridimensionnelles délicates), soit d'éléments finis spécifiques où le lien entre $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\nabla \boldsymbol{\varepsilon}$ est traité de manière faible, comme pour les coques épaisses (ce qui implique 9 degrés de liberté par noeuds en 3D).

2.4.2 Modèles à gradients de variables internes

La seconde approche pour prendre en compte un effet de voisinage via des gradients consiste à introduire les gradients des variables internes dans les relations de comportement. A la différence de l'introduction du gradient des déformations, il n'y a pas ici de nouvelle description des efforts intérieurs. En outre, contrairement aux modèles non locaux du § 2.3, le voisinage spatial n'a pas ici une taille fixée : en effet, si deux champs coïncident au voisinage d'un point (quelle que soit la taille du voisinage en question), alors toutes leurs dérivées sont égales en ce point.

Cette approche, introduite par Aifantis [1987] dans le cadre de la plasticité des métaux, est fondée sur l'interaction entre les dislocations (mesurée par le gradient de la déformation plastique). Elle a été popularisée sur le plan numérique par Mühlhaus et Aifantis [1991] ainsi que de Borst et Mühlhaus [1992], toujours dans le cas de la plasticité à gradients, ou bien encore de Borst et al [1995] pour un modèle d'endommagement à gradients.

Ce modèle de plasticité à gradients est analysé au chapitre 6 et transposé ici au modèle élastique fragile du § 1.2.1, afin d'en apprécier les points clés. Une fois de plus, les équations d'état (1) et (2) restent inchangées, tandis qu'on introduit le laplacien de l'endommagement dans l'écriture du seuil (3), un laplacien correspondant en fait au choix de l'opérateur différentiel de plus bas degré qui soit à la fois linéaire et isotrope :

$$f(Y; \Delta d) = Y + k L_c^2 \Delta d - k \quad \text{et} \quad f \leq 0 \quad \dot{d} \geq 0 \quad f \dot{d} = 0 \quad (19)$$

L_c longueur caractéristique

Intuitivement, on comprend comment apparaît une échelle propre aux bandes de localisation : dans les zones de localisation, le seuil est augmenté si bien qu'elles s'endommagent moins, tandis qu'au voisinage de ces zones, le seuil est abaissé de sorte que l'endommagement s'y développe quand même un peu, pour conduire finalement à un étalement des zones localisées.

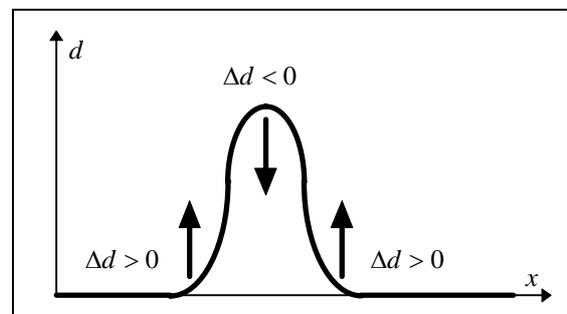


figure 9 - étalement des bandes de localisation

En revanche, sur le plan mathématique, le modèle devient tout de suite complexe. En effet, l'introduction de termes en gradients dans l'expression du seuil d'endommagement transforme la condition de cohérence (19) en une inéquation variationnelle, ce qui pose en particulier les questions délicates de la détermination de la frontière entre zone élastique et zone endommagée et des conditions d'interface correspondantes.

Par ailleurs, tel qu'il est présenté là, ce modèle peut paraître artificiel dans la mesure où aucun argument ne vient justifier la forme des termes en gradients, ni même leur introduction. La situation paraît donc comparable à celle des modèles de comportement dissipatifs non locaux du § 2.3.

En réalité, une différence essentielle subsiste entre les modèles non locaux et les modèles à gradients : le caractère fini ou non du voisinage dans lequel ont lieu les interactions entre points matériels. Dans la pratique, une formulation variationnelle qui permet de mettre en œuvre les modèles à gradients, telle que celle présentée au chapitre 2, couple le comportement de tous les points de la structure entre eux, si bien qu'on emploie dorénavant le vocable de modèles non locaux y compris pour les modèles à gradients. On pourrait alors croire que les modèles à gradients présentent la même pathologie que les modèles non locaux du § 2.3 en ce qui concerne les interactions non physiques illustrées sur la figure 8. Il n'en est rien, pour peu que les conditions aux limites naturelles qui apparaissent à la frontière d'une zone totalement endommagée correspondent aux conditions de bord libre : la propagation d'une zone totalement endommagée est alors bien équivalente à l'apparition d'un trou dans la structure.

3. Cahier des charges d'une méthode d'extension des modèles locaux

Comme on l'a vu, plusieurs méthodes ont été avancées par la communauté scientifique pour pallier les lacunes des modèles locaux, et permettre en particulier de modéliser la propagation de zones endommagées au sein d'une structure. L'examen de ces différentes approches a permis de soulever un certain nombre de points.

Fondements physiques

Pour être crédible, il est souhaitable que la méthode s'appuie sur des justifications d'ordre microstructural afin d'expliquer la forme des termes introduits. De cette manière, on doit notamment pouvoir assurer l'admissibilité thermodynamique de la loi de comportement (dissipation positive).

Effets sur les problèmes bien posés

Tant que le modèle local conduit à un problème bien posé aux résultats quantitativement satisfaisants, le modèle non local correspondant doit prédire des résultats voisins. Cela sous-entend en particulier qu'il est bien posé, lui aussi.

Conditions aux limites

Les éventuelles conditions aux limites supplémentaires nécessaires à l'écriture du problème non local doivent pouvoir être déduites par des arguments de modélisation d'ordre énergétique ou bien microstructural. Quant aux conditions d'interface, au franchissement de la frontière entre zone endommagée et zone élastique par exemple, il est préférable qu'elles découlent naturellement de la formulation.

Propagation des zones endommagées

Les conditions aux limites qui apparaissent naturellement au bord d'une zone totalement endommagée doivent correspondre aux conditions de bord libre : du point de vue de la structure,

la zone endommagée est interprétée comme une entaille. Cette propriété permet de garantir que l'information mécanique ne transite pas à travers cette zone, pas plus qu'à travers un espace initialement vide comme sur la figure 8.

Intégration dans l'architecture d'un code préexistant

Pour atteindre un statut opérationnel, la méthode employée doit pouvoir s'intégrer dans un code de calcul industriel préexistant. Il est donc impératif qu'elle ne remette pas en cause de manière radicale l'architecture traditionnelle des algorithmes de résolution des problèmes de structures non linéaires. De plus, l'application de la démarche d'extension à différentes lois de comportement locales ne doit pas nécessiter une réécriture de l'algorithme à chaque fois ; elle doit donc être relativement indépendante du comportement.

Conditions d'emploi

Pour généraliser l'emploi de la démarche en question, il est nécessaire qu'elle demeure de compréhension et d'utilisation raisonnablement simples. De compréhension d'abord, pour que d'autres développeurs l'adoptent pour étendre des modèles de comportement locaux divers. D'utilisation ensuite, pour que l'utilisateur potentiel ne soit pas découragé au premier abord ; en particulier le nombre de paramètres supplémentaires à identifier doit rester réduit et, dans le cas idéal, ceux-ci doivent pouvoir être déduits d'observations microstructurales. Alors seulement peut-on espérer l'appropriation de la démarche par d'autres.

C'est guidés par ces différentes questions que nous avons proposé une démarche d'extension des lois de comportement locales par introduction de termes en gradients de variables internes dans les relations de comportement. Les chapitres suivants de ce mémoire s'efforcent de montrer dans quelle mesure nous sommes parvenus à remplir ce « cahier des charges ».

Construction et formulation variationnelle des modèles à gradients de variables internes

Sous sollicitations mécaniques, des zones à forts gradients de variables d'état (déformations, déformations plastiques, endommagement, ...) peuvent se développer au sein d'une structure pour plusieurs raisons : forts gradients du chargement lui-même, présence de singularités géométriques (fissures, coins), ou encore localisation des déformations dans un matériau adoucissant. Ces forts gradients remettent en cause la forme des lois de comportement traditionnelles, dont les variables ne suffisent plus à décrire un comportement homogénéisé.

On présente ici une démarche constructive pour prendre en compte de tels gradients au niveau de la loi de comportement en introduisant les gradients des variables internes dans la liste des variables représentatives de l'état macroscopique du matériau. En restreignant notre étude à la classe des matériaux standard généralisés, on obtient ainsi les expressions de l'énergie libre et du potentiel de dissipation macroscopiques. On montre alors qu'une telle loi de comportement ne peut plus être traitée à l'échelle du point matériel mais impose une formulation globale du comportement, à l'échelle de la structure, qui abandonne l'hypothèse de normalité de l'écoulement à l'échelle locale.

Cette approche globale repose sur une formulation variationnelle dont les arguments sont les champs de variables internes. Entre autres avantages, elle permet d'assurer le second principe de la thermodynamique à l'échelle de la structure (taux d'entropie interne globale positif). Après discrétisation en temps, elle s'apparente à certaines approches énergétiques car le problème s'écrit alors comme la minimisation d'une énergie par rapport aux champs de variables internes ; une telle interprétation énergétique fournit de manière naturelle une caractérisation de la stabilité des solutions.

***Construction et formulation variationnelle
des modèles à gradients de variables internes***

1. Construction de modèles à gradients par homogénéisation	39
1.1 Description de la méthode.....	40
1.2 Microstructures isotropes	42
1.3 Limite de la méthodologie	44
2. Formulation variationnelle des modèles à gradients.....	45
2.1 Evolutions incompatibles des champs de variables internes dans une formulation locale	45
2.2 Formulation globale	47
2.3 Admissibilité thermodynamique à l'échelle globale.....	49
3. Interprétation énergétique	51
3.1 Discrétisation implicite des équations.....	51
3.2 Approches énergétiques et stabilité pour des comportements indépendants du temps.....	52

Les descriptions locales des matériaux ne parviennent pas à rendre compte des interactions entre les variations des champs mécaniques macroscopiques et des phénomènes se déroulant à une échelle inférieure à celle du point matériel. C'est vrai en particulier des bandes de localisation des déformations qui peuvent apparaître en présence d'un comportement adoucissant : les forts gradients des champs mécaniques macroscopiques dans ces zones remettent en cause l'hypothèse de grandeurs macroscopiques constantes à l'échelle de la microstructure sous-jacente au point matériel. Cet état de fait a initié nombre de travaux visant à surmonter cette déficience en enrichissant les lois locales. Comme on l'a vu au chapitre précédent, il en résulte de multiples formulations aux hypothèses disparates et aux fondements physiques parfois peu précisés, sinon obscurs, qui nous ont conduit à proposer un cahier des charges pour clarifier les attentes à leur égard.

Dans cet esprit, on propose une méthodologie qui s'étend de la construction de modèles non locaux jusqu'à leur formulation numérique, en se restreignant à des problèmes isothermes pour simplifier. On commence par présenter une méthode d'homogénéisation qui permet de construire un modèle à gradients de variables internes en partant d'une loi de comportement microscopique de type standard généralisé. On définit ensuite une formulation variationnelle qui constitue un cadre pour ces lois à gradients de variables internes qui s'inscrivent dans la classe des matériaux standard généralisés. Les objectifs qui ont guidé la démarche sont :

- préciser et étayer les hypothèses de l'approche, pour en limiter le caractère arbitraire,
- assurer le respect du second principe de la thermodynamique,
- analyser la stabilité mécanique des solutions obtenues,
- autoriser un traitement numérique systématique et robuste de ces modèles (chapitre 3),
- permettre l'examen des propriétés mathématiques du problème de structure (chapitre 4).

1. Construction de modèles à gradients par homogénéisation

L'introduction de termes en gradients des variables internes dans un modèle de comportement peut s'avérer délicate ou arbitraire si l'on n'a pas d'idées *a priori* sur la forme de ces termes. Certes, des considérations d'objectivité restreignent les choix possibles. On peut les énoncer comme suit :

Une loi de comportement ne doit faire intervenir que des quantités tensorielles, afin de respecter les opérations de changement de repère, Fung [1969].

De même, les symétries du matériau (isotropie, orthotropie, etc.) conduisent elles aussi à des restrictions sur la forme des termes en gradients. Par exemple, une relation de comportement de la

forme $\sigma = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha, \nabla\alpha)$ où α est une variable interne scalaire doit vérifier la relation suivante, dans laquelle \mathbf{Q} parcourt le groupe des symétries du matériau :

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha, \nabla\alpha) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{F}(\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{Q}^T, \alpha, \mathbf{Q} \cdot \nabla\alpha) \quad (1)$$

Cependant, le choix reste large. Les propositions de formes de lois à gradients doivent alors s'appuyer sur l'expérience phénoménologique ou sur des considérations microstructurales. Nous avons adopté ce dernier point de vue pour construire des formes de lois de comportement à gradients grâce à une méthode d'homogénéisation. Cette approche est fondée sur une représentation énergétique du comportement, en terme d'énergie libre et de potentiel de dissipation, et donc limitée à la classe des matériaux standard généralisés, voir Halphen et Nguyen [1975], Mandel [1978]. En revanche, elle permet de construire systématiquement la loi de comportement à gradients, pour laquelle on peut d'ores et déjà noter deux caractéristiques essentielles :

- les termes en gradients apparaissent dans les potentiels sous forme quadratique ;
- la morphologie de la microstructure intervient explicitement dans la loi via un tenseur symétrique du second ordre, dont on peut déduire trois distances caractéristiques.

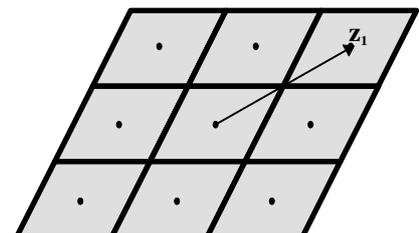
1.1 Description de la méthode

L'idée de départ de cette méthode d'homogénéisation consiste à s'interroger sur l'emploi d'une loi de comportement en présence de forts gradients. En effet, une loi de comportement exprime des relations entre grandeurs macroscopiques qui tiennent compte, en moyenne, des phénomènes microscopiques à l'œuvre. Cependant, pour être représentatives, ces méthodes de moyenne nécessitent une hypothèse dite de quasi-périodicité :

hypothèse de quasi-périodicité : les variations des champs macroscopiques doivent être négligeables à l'échelle microscopique. Cette hypothèse n'est pas vérifiée dans les zones où les gradients sont élevés, suite, par exemple, à des phénomènes de localisation.

C'est pourquoi une échelle intermédiaire a été introduite. Ainsi, la loi de comportement usuelle, qui ne prend pas en compte les variations macroscopiques, est acceptable à l'échelle microscopique mais pas à l'échelle macroscopique du point matériel. Une étape d'homogénéisation micro - macro qui prend en compte les variations des champs macroscopiques est nécessaire. On pourra trouver le détail de la démarche dans Andrieux et al. [1996], dont on rappelle ici succinctement les étapes clés.

On commence par définir un volume élémentaire représentatif de l'échelle macroscopique constitué par un ensemble de cellules microscopiques (on parlera de voisinage de cellules), dans lesquelles la loi de comportement microscopique est supposée acceptable. On reviendra ultérieurement sur le choix de ce voisinage.



On appelle \mathbf{z}_i les positions de chacune de ces N cellules, comme représenté sur la figure ci-dessus, pour N=9. Notons que la définition d'un voisinage impose notamment :

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{z}_i = \mathbf{0} \quad (2)$$

On adopte alors la loi de localisation suivante dans le voisinage de cellules :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon} \quad \forall i \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\alpha}_\bullet + \mathbf{z}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_\nabla \quad \forall i \quad (4)$$

- $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ déformation dans chaque cellule microscopique
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ déformation moyenne du voisinage de cellule
- $\boldsymbol{\alpha}_i$ variables internes dans chaque cellule microscopique
- $\boldsymbol{\alpha}_\bullet$ valeur moyenne des variables internes sur le voisinage de cellule
- $\boldsymbol{\alpha}_\nabla$ mesure des variations des variables internes sur le voisinage de cellule

L'étape suivante consiste à définir des potentiels macroscopiques. Sous l'hypothèse de matériaux standards généralisés, le comportement microscopique est décrit par deux potentiels, l'énergie libre microscopique Φ_μ et le potentiel de dissipation microscopique Δ_μ :

$$\Phi_i = \Phi_\mu(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\alpha}_i) \quad (5)$$

$$\Delta_i = \Delta_\mu(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i) \quad (6)$$

- Φ_i énergie libre de la $i^{\text{ème}}$ cellule
- Δ_i potentiel de dissipation de la $i^{\text{ème}}$ cellule

Il apparaît qu'une définition satisfaisante, on verra ultérieurement pourquoi, consiste à écrire l'énergie libre macroscopique Φ comme une moyenne linéaire des énergies libres microscopiques et le potentiel de dissipation macroscopique Δ comme une moyenne quadratique des potentiels de dissipation microscopiques (tout au moins quand Δ_μ est positivement homogène de degré 1) :

$$\Phi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi_i \quad (7)$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta_i^2} \quad (8)$$

En se fondant sur les équations (3) à (8), on peut exprimer les potentiels macroscopiques comme des fonctions des variables d'état macroscopiques $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\alpha}_\bullet$ et $\boldsymbol{\alpha}_\nabla$. A ce stade, le comportement homogénéisé est défini. Toutefois, pour simplifier les expressions et faire apparaître les termes prépondérants, on effectue un développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}_\bullet, \boldsymbol{\alpha}_\nabla) = \Phi_\mu(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}_\bullet) + \frac{\partial^2 \Phi_\mu}{\partial \alpha^2}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}_\bullet) \boldsymbol{\alpha}_\nabla \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\alpha}_\nabla \quad (9)$$

$$\Delta(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_\bullet, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_\nabla) = \sqrt{\Delta_\mu^2(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_\bullet) + \frac{\partial^2 \Delta_\mu^2}{\partial \dot{\alpha}^2}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_\bullet) \dot{\boldsymbol{\alpha}}_\nabla \cdot \mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_\nabla} \quad (10)$$

Le tenseur du second ordre symétrique \mathbf{J} , formellement un tenseur d'inertie, contient les informations géométriques microstructurales prises en compte par le modèle, en particulier, trois distances caractéristiques, racines carrées de ses valeurs propres. Il s'exprime :

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i \otimes \mathbf{z}_i \quad (11)$$

Il est important de remarquer qu'avec les définitions (7) et (8), on obtient au premier ordre une évolution des variables internes de chaque cellule en accord aussi bien avec la règle de normalité de l'écoulement qu'avec la règle de localisation (4) :

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial \{\alpha_i\}} \in \partial \Delta(\{\dot{\alpha}_i\}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\alpha}_i = \dot{\alpha}_\bullet + \mathbf{z}_i \cdot \dot{\alpha}_\nabla \\ -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_\bullet}, \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_\nabla}\right) \in \partial \Delta(\dot{\alpha}_\bullet, \dot{\alpha}_\nabla) \end{cases} \quad (12)$$

à l'ordre 1
en $\|\mathbf{z}_i, \alpha_\nabla\|$

Cette propriété, dont la démonstration est fournie dans Joussemet [1997] assure la cohérence de la méthode et justifie *a posteriori* les définitions (7) et (8).

A ce stade, il ne manque plus qu'une dernière étape, qui établit le lien entre le champ de variables internes a et les variables internes macroscopiques. On suppose que α_∇ qui est censé représenter les variations locales du champ a s'identifie au gradient de ce dernier, tandis que α_\bullet est donné par sa valeur, si bien qu'au point matériel macroscopique \mathbf{x} , on a :

$$\begin{cases} \alpha_\bullet = a(\mathbf{x}) \\ \alpha_\nabla = \nabla a(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (13)$$

1.2 Microstructures isotropes

Comme nous venons de le voir, le tenseur \mathbf{J} synthétise les informations géométriques de la microstructure. On peut alors se poser la question suivante : existe-t-il des microstructures qui conduisent à un modèle isotrope ? Pour y répondre, on peut commencer par remarquer que l'isotropie impose un tenseur \mathbf{J} sphérique. En effet :

$$\forall \mathbf{Q} \in O_3 \quad \forall \alpha_\nabla \quad (\mathbf{Q} \cdot \alpha_\nabla) \cdot \mathbf{J} \cdot (\mathbf{Q} \cdot \alpha_\nabla) = \alpha_\nabla \cdot \mathbf{J} \cdot \alpha_\nabla \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mathbf{Q} \in O_3 \quad \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{J} \quad (14)$$

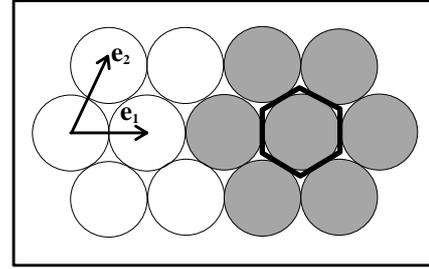
Pour les problèmes plans, Joussemet [1997] a répondu par l'affirmative à la question précédente. Elle a montré que si les cellules assurent un pavage du plan invariant par rotation de 60° , alors \mathbf{J} est un tenseur sphérique. En adoptant la méthodologie des réseaux de Bravais, cf. Quéré [1991], ce pavage est engendré par une base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ dont les vecteurs sont les côtés d'un triangle équilatéral. Ainsi, une cellule quelconque peut-être repérée par ses coordonnées entières (n_1, n_2) telles que la position de la cellule soit :

$$\mathbf{z} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 \quad (15)$$

Les cellules d'un tel pavage sont de forme hexagonale et ont chacune 6 voisines. Ainsi, un voisinage est constitué des cellules :

$$\{(n_1, n_2); (n_1 + n_2)^2 - n_1 n_2 \leq 1\} = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,-1), (-1,0), (0,-1), (-1,1)\} \quad (16)$$

On peut représenter graphiquement ce pavage, en marquant les cellules comme des disques tangents, centrés sur les positions des cellules. On représente en gris un voisinage de cellules et on exhibe leur forme hexagonale.



Si on appelle L_b la distance entre deux cellules voisines (qui correspond aussi au diamètre d'une cellule) alors le tenseur \mathbf{J} vaut :

$$\mathbf{J} = \frac{3L_b^2}{14} \mathbf{Id} \quad \text{avec} \quad L_b = \|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| \quad (17)$$

Si on considère maintenant un problème tridimensionnel, existe-t-il encore un pavage de l'espace qui conduit à un tenseur \mathbf{J} sphérique ? L'idée la plus simple consiste à étendre la base précédente de sorte que les trois vecteurs $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ soient les côtés d'un tétraèdre régulier. Un voisinage de cellules est alors engendré par :

$$\{(n_1, n_2, n_3); (n_1 + n_2 + n_3)^2 - n_1 n_2 - n_1 n_3 - n_2 n_3 \leq 1\} \quad (18)$$

On donne ci-dessous une représentation géométrique d'un voisinage pour un tel pavage, où les cellules sont schématisées par des boules tangentes. On constate que chaque cellule a 12 voisines. On dessine également la forme réelle de la cellule (celle qui permet un pavage de l'espace par translations), c'est-à-dire la cellule de Wigner-Seitz centrée sur un des points du réseau de Bravais. C'est un polyèdre dont les douze faces sont des losanges.

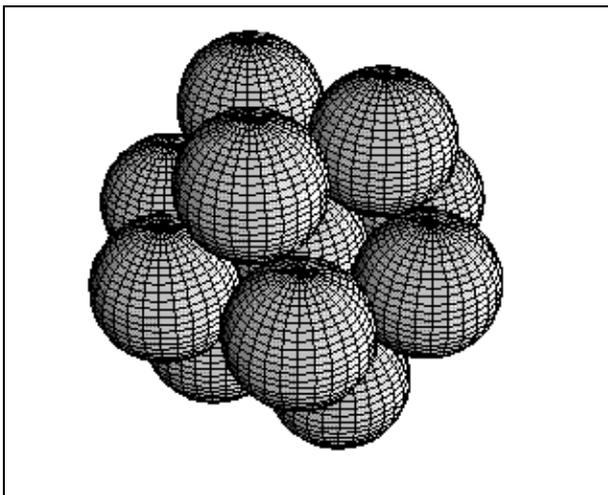


figure 1 - voisinage de cellules en 3D

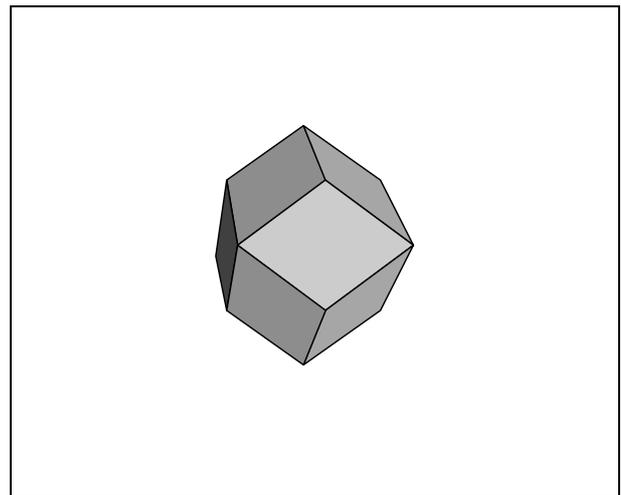


figure 2 - forme de la cellule élémentaire

Quant au tenseur \mathbf{J} , si L_b représente à nouveau la distance entre deux cellules voisines, on constate qu'il est bien sphérique :

$$\mathbf{J} = \frac{2L_b^2}{13} \mathbf{Id} \quad (19)$$

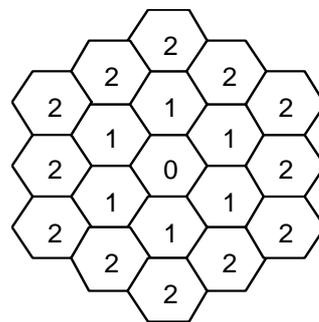
En se basant sur une remarque de Quéré [1991], on peut noter que le réseau de Bravais ainsi obtenu est cubique à faces centrées (CFC)¹.

Une répartition des cellules selon un réseau de Bravais cubique à faces centrées (CFC) conduit à un tenseur J sphérique, donc à un modèle isotrope par rapport aux termes en gradients.

1.3 Limite de la méthodologie

La difficulté principale de la démarche réside dans une définition objective d'un voisinage de cellules, car les échelles microscopique et macroscopique ne sont pas nettement séparées. On peut alors se heurter à des difficultés similaires à celles rencontrées pour décrire les phénomènes de transport turbulent en mécanique des fluides, voir Guyon et Hulin [1997]. Dans le cas du modèle de Prandtl, l'introduction d'une longueur de mélange, supposée être la taille des tourbillons qui assurent le transport, fournit une condition de fermeture pour les équations qui gouvernent les champs macroscopiques (écoulement moyen). Mais comme les échelles ne sont pas séparées car la distribution de tailles de tourbillons est continue de l'échelle macroscopique jusqu'aux petits tourbillons, la forme des champs macroscopiques vient à son tour influencer la taille des petits tourbillons, c'est-à-dire l'échelle microscopique. On n'a donc pas une définition de la longueur de Prandtl qui soit intrinsèque au fluide. Cela n'enlève pas nécessairement ses qualités prédictives au modèle, à condition de considérer cette longueur comme un paramètre *ad hoc*, c'est-à-dire identifiée pour une géométrie d'écoulements donnée. Toutefois, pour nos problèmes, les positions des cellules sont généralement connues *a priori* ; c'est le cas des phénomènes de rupture ductile où les cavités s'initient aux inclusions du matériau (voir chapitre 7). Des longueurs intrinsèques au matériau existent effectivement et le seul arbitraire reste le choix des cellules appartenant au voisinage.

Ainsi, pour une répartition isotrope des cellules, représentées sur la figure ci-contre, on peut s'interroger sur le nombre de couches de cellules à prendre en compte (couches 1, 2 ou plus), sachant que pour chacun de ces choix, les tenseurs \mathbf{J} sont bien entendu différents.

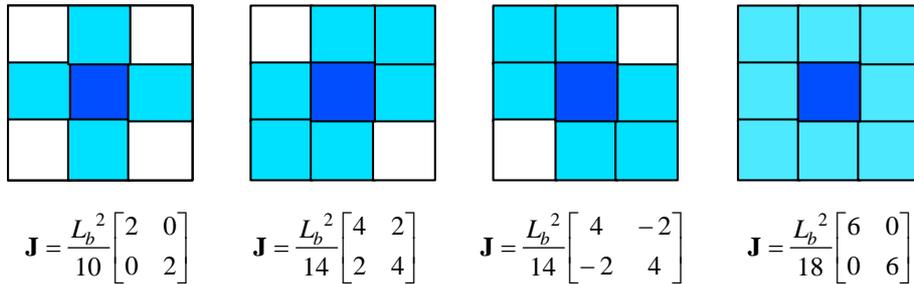


En fait, l'étendue du voisinage représentatif devrait être fixée par l'échelle à laquelle on peut supposer une distribution affine de la variable α . Elle dépend donc du choix de paramétrage du

¹ Pour s'en persuader, deux options : une solide vision dans l'espace ou bien une construction à l'aide de balles de ping-pong, très convaincante.

modèle, car les distributions des variables α , α^2 ou encore e^a , par exemple, ne peuvent pas être considérées comme affines aux mêmes échelles. C'est d'ailleurs pourquoi des paramétrages équivalents du comportement microscopique (même réponse contrainte - déformation sous toute sollicitation) conduisent à des modèles macroscopiques différents si on conserve le même voisinage.

La situation se complique encore dans le cas d'une distribution anisotrope de cellules. Ainsi, quel est le voisinage représentatif (en couleur clair) dans l'exemple ci-dessous, sachant qu'à nouveau, les tenseurs \mathbf{J} correspondants ne sont pas identiques (en particulier, une direction de polarisation est artificiellement introduite dans les deuxième et troisième cas) ?



Remarquons d'ailleurs qu'une définition du voisinage basée sur les vecteurs de Bravais ne saurait être objective car il n'y a pas unicité de la base pour décrire un réseau donné. Plus précisément, on montre que si (\mathbf{e}_i) est une base de Bravais, alors toute base (\mathbf{e}'_i) , où $\mathbf{e}'_i = \mathbf{M}_{ij}\mathbf{e}_j$ avec \mathbf{M} une matrice à coefficients entiers et déterminant égal à 1, est encore une base de Bravais du même réseau.

En définitive, l'ambiguïté de la définition d'un voisinage subsiste. Il ne faut pas pour autant rejeter cette construction par homogénéisation, qui, rappelons-le, a pour objectif la construction d'une forme de lois de comportement à gradients.

2. Formulation variationnelle des modèles à gradients

2.1 Evolutions incompatibles des champs de variables internes dans une formulation locale

Grâce à la méthode d'homogénéisation que l'on vient de décrire, on peut construire des modèles à gradients de variables internes, dès lors que le comportement microscopique est standard généralisé. Malheureusement, à cause de la présence des termes en gradients, le comportement d'un point matériel dépend maintenant du comportement des autres points de la structure, ce qui remet en cause les méthodes traditionnelles d'analyse mécanique. Une nouvelle formulation de la loi de comportement s'impose, à l'échelle de la structure.

Pour s'en convaincre, on considère une loi de comportement de type standard généralisé pour laquelle les variables internes sont α_\bullet et son gradient α_∇ . La relation de comportement est alors

définie par deux potentiels, l'énergie libre $\Phi(\varepsilon, \alpha_\bullet, \alpha_\nabla)$ et le potentiel de dissipation convexe $\Delta(\dot{\alpha}_\bullet, \dot{\alpha}_\nabla)$. Le premier fixe les équations d'état :

$$\sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \quad A_\bullet = -\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_\bullet} \quad A_\nabla = -\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_\nabla} \quad (20)$$

tandis que le second détermine les équations d'évolution :

$$(A_\bullet, A_\nabla) \in \partial \Delta(\dot{\alpha}_\bullet, \dot{\alpha}_\nabla) \quad (21)$$

ε	tenseur des déformations
σ	tenseur des contraintes
A_\bullet	force thermodynamique associée à α_\bullet
A_∇	force thermodynamique associée à α_∇

Remarque :

Le potentiel de dissipation n'est pas toujours dérivable : lorsqu'il décrit un comportement indépendant du temps, tel que la plasticité par exemple, ce potentiel est positivement homogène de degré 1, et donc non dérivable au point $(\dot{\alpha}_\bullet, \dot{\alpha}_\nabla) = (0,0)$. C'est pourquoi on étend la notion de dérivée par l'emploi du sous-différentiel $\partial \Delta$, en tirant profit de la convexité de Δ , voir Ekeland et Temam [1974]. Cette notion permet d'englober dans un même cadre des comportements visqueux ou indépendants du temps. (21) s'interprète alors par :

$$\begin{aligned} (A_\bullet, A_\nabla) &\in \partial \Delta(\dot{\alpha}_\bullet, \dot{\alpha}_\nabla) \\ &\Downarrow \\ \forall \hat{\alpha}_\bullet, \hat{\alpha}_\nabla \quad \Delta(\dot{\alpha}_\bullet, \dot{\alpha}_\nabla) - A_\bullet \dot{\alpha}_\bullet - A_\nabla \dot{\alpha}_\nabla &\leq \Delta(\hat{\alpha}_\bullet, \hat{\alpha}_\nabla) - A_\bullet \hat{\alpha}_\bullet - A_\nabla \hat{\alpha}_\nabla \end{aligned} \quad (22)$$

Alors que le comportement est bien défini à l'échelle du point matériel par les équations (20) et (21), le problème d'évolution posé sur la structure n'admet généralement pas de solution. En effet, à cette échelle, les variables α_\bullet et α_∇ ne sont plus indépendantes car elles sont liées par une relation non locale, l'une devant être le gradient de l'autre :

$$\begin{cases} \alpha_\bullet = a(x) \\ \alpha_\nabla = \nabla a(x) \end{cases} \quad (23)$$

Pourtant l'indépendance des variables internes est une exigence essentielle dans la construction des matériaux standard généralisés. Aucune contrainte ne pèse *a priori* sur l'évolution des variables internes, fixée par la propriété de normalité, si bien qu'une éventuelle relation entre elles n'est généralement pas préservée. Cela signifie que $\dot{\alpha}_\bullet$ et $\dot{\alpha}_\nabla$ sont fixés point par point, et rien ne permet de garantir que $\dot{\alpha}_\nabla = \nabla \dot{\alpha}_\bullet$, en contradiction avec la dérivée en temps de (23).

Par exemple, dans le cas d'une loi de comportement à seuil avec une variable interne α_\bullet scalaire, on peut exhiber une condition nécessaire portant sur l'état de la structure pour autoriser des évolutions compatibles avec (23). En effet, l'équation d'évolution peut s'inverser en :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_\bullet = \lambda \frac{\partial f}{\partial A_\bullet}(A_\bullet, A_\nabla) \\ \dot{\alpha}_\nabla = \lambda \frac{\partial f}{\partial A_\nabla}(A_\bullet, A_\nabla) \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \geq 0 \quad f \leq 0 \quad \lambda f = 0 \quad (24)$$

$f(A_\bullet, A_\nabla) \leq 0$ domaine de réversibilité dans l'espace des forces thermodynamiques

A l'intérieur de toute zone où la structure dissipe, on peut alors en déduire, en accord avec (23) :

$$\nabla(\ln \dot{a}) = \frac{\nabla \dot{a}}{\dot{a}} = \frac{\dot{\alpha}_\nabla}{\dot{\alpha}_\bullet} = \left(\frac{\partial f}{\partial A_\bullet} \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial A_\nabla} \quad \Rightarrow \quad \text{rot} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial A_\bullet} \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial A_\nabla} \right] = 0 \quad (25)$$

Cette condition qui porte sur l'état du matériau n'est *a priori* pas vérifiée. Notons cependant dès maintenant que si l'évolution fournie par (24) était quand même compatible avec (23), alors la formulation globale que nous allons maintenant exposer coïnciderait dans ce cas avec (24).

2.2 Formulation globale

Au vu de ce qui précède, une écriture du comportement à l'échelle du point matériel n'est pas cohérente avec l'existence d'une contrainte non locale portant sur les variables internes.

Nous proposons d'abandonner l'hypothèse d'écoulement normal en chaque point de la structure, trop contraignante, tout en préservant le formalisme des matériaux standard généralisés à l'échelle de la structure.

Cela nous impose tout d'abord d'étendre la définition des variables internes, voir Germain et al. [1983] : elles deviennent maintenant des champs définis sur toute la structure, de telle sorte que l'ensemble des variables d'état est réduit aux champs ε et a . Les anciennes variables α_\bullet et α_∇ résultent alors d'opérations fonctionnelles portant sur le seul champ a par (23).

On définit ensuite de nouveaux potentiels thermodynamiques qui sont des fonctionnelles portant sur les champs de variables d'état, où Ω est le domaine occupé par la structure :

$$F(\varepsilon, a) = \int_{\Omega} \Phi(\varepsilon(x), a(x), \nabla a(x)) \, dx \quad (26)$$

$$D(\dot{a}) = \int_{\Omega} \Delta(\dot{a}(x), \nabla \dot{a}(x)) \, dx \quad (27)$$

Si on suit maintenant le formalisme des matériaux standard généralisés, on est amené à construire la relation de comportement par dérivation (au sens de Gâteaux) et sous-différentiation de ces potentiels, dans laquelle les variables d'état sont des champs et les forces thermodynamiques, dont le tenseur des contraintes, sont des formes linéaires agissant sur ces champs (grandeurs duales) :

$$\sigma = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \quad A = - \frac{\partial F}{\partial a} \quad (28)$$

$$A \in \partial D(\dot{a}) \quad (29)$$

Si la construction du potentiel énergie libre globale par (26) semble naturelle, on peut en revanche s'interroger quant au choix (27) du potentiel de dissipation global, d'autant plus qu'il n'est pas similaire à celui adopté lors de la procédure d'homogénéisation (8), moyenne linéaire dans (27) et moyenne quadratique dans (8). En fait, on peut noter que dans les cas homogènes de degré n , le potentiel de dissipation mesure la dissipation au facteur n près, en vertu de l'identité d'Euler :

$$\forall \dot{a} \quad \forall \lambda \geq 0 \quad D(\lambda \dot{a}) = \lambda^n D(\dot{a}) \quad \Rightarrow \quad \langle A | \dot{a} \rangle = n D(\dot{a}) \quad (30)$$

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ produit de dualité

Il est donc souhaitable que l'éventuel caractère « positivement homogène de degré n » du potentiel macroscopique Δ soit préservé lors de la construction du potentiel global D . C'est le cas avec (27). Mais il est encore plus important de vérifier la condition suivante :

Lorsque les potentiels macroscopiques ne dépendent pas de a_∇ , les lois de comportement locales (20) et (21) doivent devenir un cas particulier de la formulation globale (28) et (29).

Et en effet, on peut montrer que cette condition est remplie par la construction (28)-(29) sous des hypothèses très faibles portant sur les espaces fonctionnels des variables d'état, voir Ekeland et Temam [1974]. Sans entrer dans les détails techniques, il suffit de constater que les formulations coïncident lorsque on peut commuter l'opérateur « minimum » et l'intégrale dans l'interprétation (34) de l'équation d'évolution (29).

Une autre question importante concerne l'interprétation physique des forces thermodynamiques globales définies en (28). Un calcul immédiat montre qu'elles sont liées aux forces thermodynamiques locales, telles que définies en (20). Ainsi, si on appelle $\hat{\varepsilon}$ et \hat{a} des champs de variables d'état virtuelles, on obtient :

$$\langle \sigma | \hat{\varepsilon} \rangle = \int_{\Omega} \sigma(x) \cdot \hat{\varepsilon}(x) \, dx \quad (31)$$

$$\langle A | \hat{a} \rangle = \int_{\Omega} \left(A_\bullet(x) \cdot \hat{a}(x) + A_\nabla(x) \cdot \nabla \hat{a}(x) \right) dx \quad (32)$$

En particulier, on remarque que la signification usuelle du tenseur des contraintes est préservée : c'est la grandeur duale du tenseur des déformations pour exprimer l'énergie de déformation virtuelle. C'est un avantage à porter au crédit des méthodes de délocalisation des variables internes, qu'on ne retrouve pas si on procède en enrichissant la description cinématique du matériau.

Par ailleurs, l'interprétation (32) des forces thermodynamiques permet d'exprimer l'équation d'évolution (29) comme un problème de minimisation, qu'on appellera « problème en vitesse ». En effet, l'appartenance au sous-différentiel dans (32) s'écrit :

$$A \in \partial D(\dot{a}) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \hat{a} \in \mathbf{H} \quad D(\dot{a}) - \langle A | \dot{a} \rangle \leq D(\hat{a}) - \langle A | \hat{a} \rangle \quad (33)$$

où \mathbf{H} est un espace fonctionnel approprié ; on verra comment le choisir au chapitre 4. Ainsi, (29), (32) et (33) permettent d'exprimer le problème en vitesse comme le problème de minimisation (22) qui traduit l'évolution locale (21) mais sous la contrainte non locale (23) : A_{\bullet} et A_{∇} étant données par (20), trouver \hat{a} appartenant à l'espace fonctionnel \mathbf{H} qui réalise le minimum :

$$\text{Min}_{\hat{a} \in \mathbf{H}} \int_{\Omega} [\Delta(\hat{a}(x), \nabla \hat{a}(x)) - A_{\bullet}(x) \hat{a}(x) - A_{\nabla}(x) \nabla \hat{a}(x)] dx \quad (34)$$

Remarquons à ce propos qu'aucune condition aux limites spécifique n'est fixée *a priori* pour le champ de variables internes a . Ce sont donc les conditions aux limites naturelles qui découlent de la minimisation (34) ; elles ne sont d'ailleurs pas nécessairement linéaires. Cela dit, si des phénomènes physiques significatifs se déroulent en surface (corrosion, tension superficielle, ...) et altèrent l'évolution des variables internes, il est nécessaire de les inclure dans les potentiels sous forme d'énergies surfaciques. Ces termes supplémentaires viendraient alors modifier la forme des conditions aux limites naturelles qui resteraient obtenus par exploitation du principe variationnel (28) et (29).

Un autre point qu'on a déjà évoqué mérite d'être mentionné à propos de la formulation (34). Si $\hat{\alpha}_{\bullet}$ et $\hat{\alpha}_{\nabla}$ vérifient le système d'équations d'évolutions locales (21) en tout point de la structure et sont liés par la dérivée en temps de l'équation de compatibilité (23) à un champ \hat{a} , alors ce champ réalise bien la minimisation (34) : dans les cas où la formulation locale (20), (21) et (23) admet des solutions, celles-ci sont aussi solutions de la formulation globale.

2.3 Admissibilité thermodynamique à l'échelle globale

Après avoir éclairci la nature des forces thermodynamiques globales, on peut s'interroger quant à l'admissibilité thermodynamique de cette formulation. Autrement dit, la dissipation est-elle positive ? A l'échelle de la structure, l'inégalité de Clausius - Duhem (pour une situation isotherme) est satisfaite grâce à l'emploi du formalisme des matériaux standard généralisés. En effet, si le potentiel de dissipation macroscopique Δ est convexe et minimal en zéro, la dissipation sur la structure s'exprime :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \dot{\varepsilon} dx - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Phi(\varepsilon, a, \nabla a) dx &= \langle \sigma | \dot{\varepsilon} \rangle - \dot{F}(\varepsilon, a) \\ &= \langle A | \dot{a} \rangle \geq D(\dot{a}) - D(0) \geq 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Le second principe de la thermodynamique exprimé à l'échelle de la structure, hypothèse fondamentale usuelle, est donc bien vérifié. En revanche, nous pensons qu'il n'est pas nécessaire d'imposer la positivité de la dissipation sur tout sous-domaine de la structure, postulat de la méthode de l'état local, dès qu'une relation non locale est introduite.

En effet, si la démarche de Coleman et Noll [1963] s'applique à l'échelle microscopique où les points matériels satisfont les hypothèses de l'état local, il n'en va plus de même à l'échelle macroscopique, où l'on a introduit une nouvelle forme d'interaction entre les cellules via le processus d'homogénéisation. Ainsi, pour des problèmes thermo-élastiques à forts gradients de température, Andrieux et de Bonnières [1994] ont obtenu par homogénéisation des lois de comportement où intervient le gradient de température ; ils ont alors montré que l'inégalité de Clausius - Duhem à l'échelle macroscopique fait intervenir des termes correctifs. Dans le même esprit, Maugin [1990] ainsi que Pollizotto et Borino [1998] ont introduit un flux d'entropie P (aussi appelé résidu non local) pour assurer une dissipation positive en tout point lorsque des lois de comportement non locales sont employées :

$$\forall x \in \Omega \quad A_{\bullet}(x) \hat{a}(x) + A_{\nabla}(x) \nabla \hat{a}(x) + P(x) \geq 0 \quad \text{avec} \quad \int_{\Omega} P \, dx = 0 \quad (36)$$

Par ailleurs, on peut montrer que vouloir imposer une dissipation positive pour tout sous-domaine de la structure restreint trop fortement les lois d'évolution licites. En effet, considérons un sous-domaine $B \subset \Omega$. Alors, imposer une dissipation positive sur B s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall B \subset \Omega \quad \int_B \left[\left(\sigma - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \right) \cdot \dot{\varepsilon} + A_{\bullet} \cdot \dot{a} + A_{\nabla} \cdot \nabla \dot{a} \right] dx &\geq 0 \\ \Downarrow & \\ \forall B \subset \Omega \quad \int_B \left(\sigma - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \right) \cdot \dot{\varepsilon} \, dx + \int_B \left(A_{\bullet} - \operatorname{div} A_{\nabla} \right) \cdot \dot{a} \, dx + \int_{S_B} \left(A_{\nabla} \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \dot{a} \, ds &\geq 0 \end{aligned} \quad (37)$$

S_B frontière de B
 \mathbf{n} normale extérieure à B

L'argument classique de trajet non dissipatif à l'intérieur du domaine de réversibilité et l'extension par continuité de la relation contrainte - déformation sur la frontière de celui-ci, voir par exemple Acharya et Shawki [1996], permet d'obtenir :

$$\forall x \in \Omega \quad \sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \quad (38)$$

et l'inégalité suivante doit donc être vérifiée pour toute évolution admissible :

$$\forall B \subset \Omega \quad \int_B \left(A_{\bullet} - \operatorname{div} A_{\nabla} \right) \cdot \dot{a} \, dx + \int_{S_B} \left(A_{\nabla} \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \dot{a} \, ds \geq 0 \quad (39)$$

Sous cette forme, cette inéquation est difficilement exploitable à cause du terme de bord mais paraît déjà très restrictive. Valanis [1996] propose alors des conditions suffisantes (donc encore plus restrictives) qui permettent de la garantir :

$$\forall x \in \Omega \quad \left(A_{\bullet} - \operatorname{div} A_{\nabla} \right) \cdot \dot{a} \geq 0 \quad (40)$$

$$\forall B \subset \Omega \quad \forall x \in S_B \quad \left(A_{\nabla} \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \dot{a} = 0 \quad (41)$$

Malheureusement, pour tout point x intérieur à Ω et pour toute normale \mathbf{n} , on peut trouver un sous-domaine B dont la frontière contient x avec normale \mathbf{n} en ce point. (41) conduit alors à :

$$\begin{aligned} & \forall x \in \overset{\circ}{\Omega} \quad \forall \mathbf{n} \quad \exists B \subset \Omega \quad \text{tel que} \quad x \in S_B \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_B(x) = \mathbf{n} \\ \Rightarrow & \forall x \in \overset{\circ}{\Omega} \quad \forall \mathbf{n} \quad (A_{\nabla} \cdot \mathbf{n}) \cdot \dot{a} = 0 \\ \Rightarrow & \forall x \in \overset{\circ}{\Omega} \quad A_{\nabla} \cdot \dot{a} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (42)$$

Nous trouvons qu'une telle condition est trop restrictive. En particulier, dans le cas d'une seule variable interne scalaire, cela signifie que a n'évolue pas ($\dot{a} = 0$) en tout point où l'état du système est tel que $A_{\nabla} \neq 0$. C'est pourquoi on choisit d'imposer une dissipation globale positive (indispensable) sans se préoccuper du signe de la dissipation sur des sous-domaines de la structure.

3. Interprétation énergétique

La formulation globale des relations de comportement (28) et (29) définit l'évolution des champs de variables internes de manière continue en temps : on peut parler d'approche en temps continu. On peut aussi procéder en adoptant une démarche en temps discret. Cela signifie qu'on ne cherche à vérifier les lois de comportement qu'en certains instants. Quel intérêt ? Tout d'abord, cela donne lieu à une formulation discrétisée en temps, indispensable à la mise en œuvre numérique, abordée au chapitre 3. Ensuite, cette approche se révèle fructueuse pour étudier les propriétés des champs de variables internes par passage à la limite quand le pas de temps tend vers zéro, cf. chapitre 4. Enfin, pour des comportements indépendants du temps, nous pouvons exprimer le problème incrémental comme la minimisation d'une énergie, autorisant ainsi l'examen de la stabilité des solutions.

3.1 Discrétisation implicite des équations

Commençons par rappeler que la formulation globale du comportement n'entraîne pas de changement concernant les équations d'équilibre du problème puisque les contraintes conservent leur signification usuelle. Elles s'écrivent :

$$\langle \sigma | \varepsilon(\hat{u}) \rangle = W_{ext}(\hat{u}) \quad \forall \hat{u} \in V_{CA}^{\circ} \quad (43)$$

W_{ext} travail virtuel des efforts extérieurs

V_{CA}° ensemble des déplacements virtuels cinématiquement admissibles (à zéro)

En ce qui concerne les équations qui régissent le comportement, on procède maintenant à leur discrétisation temporelle. Pour cela, on considère que l'état (ε^-, a^-) au temps t^- est connu et on cherche à définir l'état (ε, a) au temps t en se basant sur un schéma implicite d'ordre 1 :

$$\sigma = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, a) \quad A = - \frac{\partial F}{\partial a}(\varepsilon, a) \quad (44)$$

$$A \in \partial D\left(\frac{\Delta a}{\Delta t}\right) \quad \text{où} \quad \Delta a = a - a^- \quad (45)$$

A ce stade, il est intéressant d'exploiter une hypothèse de convexité des potentiels pour exprimer ces équations sous forme d'un principe variationnel qui contient à la fois les équations d'équilibre et le comportement incrémental. Ainsi, on appelle E l'énergie potentielle incrémentale (qui dépend du pas de temps) :

$$E(\Delta u, \Delta a) = F(\varepsilon(u^- + \Delta u), a^- + \Delta a) + \Delta t D\left(\frac{\Delta a}{\Delta t}\right) - W_{\text{ext}}(\Delta u) \quad (46)$$

Les incréments de déplacements et de variables internes sont alors obtenus par minimisation de l'énergie, c'est-à-dire la résolution des deux problèmes de minimisation couplés suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u \text{ réalise} \\ \text{Min}_{\Delta \hat{u}} E(\Delta \hat{u}, \Delta a) \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta a \text{ réalise} \\ \text{Min}_{\Delta \hat{a}} E(\Delta u, \Delta \hat{a}) \end{array} \right\} \quad (47)$$

3.2 Approches énergétiques et stabilité pour des comportements indépendants du temps

Les lois de comportement de type standard généralisé qui ne dépendent pas du temps sont caractérisées par un potentiel de dissipation positivement homogène de degré 1. En quelques mots, cette propriété tient au fait que :

$$\forall \dot{a} \quad \forall \lambda > 0 \quad D(\lambda \dot{a}) = \lambda D(\dot{a}) \quad \Rightarrow \quad \partial D(\lambda \dot{a}) = \partial D(\dot{a}) \quad (48)$$

Par conséquent, si \dot{a} désigne une solution de l'équation d'évolution (29), toute évolution \dot{a}' obtenue par changement d'échelle de temps $t \mapsto t' = \varphi(t)$ (avec φ un difféomorphisme croissant) est encore une solution de l'équation d'évolution (29) :

$$\text{Si } a'(t') = a(t) \text{ alors } \left[A \in \partial D(\dot{a}) \Leftrightarrow A \in \partial D(\dot{a}') \right] \quad \text{car } \dot{a}' = \underbrace{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^{-1}}_{\lambda > 0} \dot{a} \quad (49)$$

Ainsi, les solutions de l'équation d'évolution (29) sont définies à un changement d'échelle en temps près. On dit qu'elles sont indépendantes du temps physique. En revanche, on impose que l'équation d'évolution (29) soit vérifiée tout au long de l'histoire de chargement : on parle alors de condition de cohérence. Celle-ci permet de fixer la solution \dot{a} , qui ne dépend donc pas du temps physique mais de la chronologie du chargement.

Revenons à la formulation incrémentale (47). Comme l'échelle de temps physique n'intervient pas dans la formulation continue, la longueur du pas de temps ne doit pas intervenir dans la formulation incrémentale. Et en effet, par application de (48), on constate que l'énergie potentielle incrémentale définie par (46) s'écrit encore :

$$E(\Delta u, \Delta a) = F(\varepsilon(u^- + \Delta u), a^- + \Delta a) + D(\Delta a) - W_{\text{ext}}^+(\Delta u) \quad (50)$$

On peut remarquer que cette formulation s'apparente alors aux approches énergétiques à temps discret, comme celle proposée par Francfort et Marigo [1993] pour des matériaux fragiles, même si ces auteurs ne cherchent pas à identifier les différents termes de l'énergie comme une énergie libre et un potentiel de dissipation (la notion de matériaux standard généralisés n'y est pas employée).

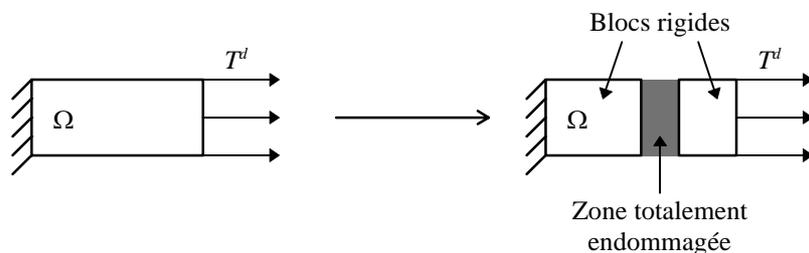
Bien entendu, on peut s'attendre à des propriétés similaires. Ainsi, dans le cas des matériaux adoucissants, E n'est généralement ni convexe ni coercive par rapport au couple $(\Delta u, \Delta a)$: l'existence et l'unicité des solutions ne sont pas assurées, autorisant ainsi bifurcations et charges limites en accord avec les résultats expérimentaux. On verra d'ailleurs au chapitre 4 qu'au delà de simples similitudes, ces modèles sont nettement apparentés car l'approche de Francfort et Marigo [1993] avec relaxation par quasi-convexification s'interprète comme la limite de (50) quand les longueurs caractéristiques tendent vers zéro.

On peut d'ailleurs tirer profit de la parenté des formulations. En effet, quand E n'est pas convexe, une solution du problème incrémental (47) n'est pas nécessairement un minimum de l'énergie. On s'inspirera alors avantageusement² d'un critère proposé par Francfort et Marigo [1993] pour sélectionner les solutions :

les solutions stables sont celles qui minimisent l'énergie potentielle incrémentale E :

$$(\Delta u, \Delta a) = \underset{\Delta \hat{u}, \Delta \hat{a}}{\text{ArgMin}} E(\Delta \hat{u}, \Delta \hat{a}) \quad (51)$$

Minimum local ou global ? Cette question mérite qu'on s'y arrête quelques instants. En effet, se limiter aux minima globaux peut s'avérer physiquement peu réaliste. Considérons le cas déjà rencontré au chapitre 1 d'un matériau élastique fragile dont la rigidité s'annule lorsqu'il est totalement endommagé (c'est un cas où l'énergie E n'est pas coercive !). Une sollicitation en efforts imposés, aussi faible soit elle, conduit alors à casser immédiatement la structure :



Dans ce cas en effet, l'énergie libre est nulle (déformation nulle ou rigidité nulle) et la dissipation est bornée (le volume de la zone endommagée est fini dans la configuration de référence) quel que soit le déplacement du morceau de structure devenu libre (bloc rigide de droite). Si on emmène alors ce morceau à l'infini, le travail des efforts imposés T^d est infini, donc l'énergie potentielle infiniment négative : c'est un minimum global.

C'est pourquoi on préfère définir les solutions stables comme des minima locaux de l'énergie, plus en accord avec l'intuition physique. On retrouve ainsi les notions bien connues de barrières de potentiel, à franchir pour passer d'une solution stable à une autre. En outre, cette caractérisation de

² Avantagusement parce que ce critère paraît sain sur le plan physique, mais aussi parce que numériquement, un algorithme de minimisation ne permettra de trouver que ces solutions là !

la stabilité comme un minimum³ local (strict) de l'énergie potentielle incrémentale rejoint les propositions de Nguyen [1994], ainsi que Fedelich et Ehrlacher [1997], basées sur la notion de réponse dynamique à une perturbation de la solution : une position d'équilibre y est dite stable si pour toute perturbation suffisamment petite, l'évolution dynamique qui en résulte demeure au voisinage de la position d'équilibre.

A l'issue de ce chapitre, nous sommes parvenus à définir une formulation qui remplit les objectifs que l'on s'était initialement fixés. En particulier, puisque les effets de forts gradients des champs mécaniques sont maintenant pris en compte, nous nous attendons à pouvoir décrire de manière quantitativement satisfaisante la formation et la propagation de zones endommagées, motivation initiale de notre étude. Nous nous proposons maintenant d'aborder les aspects algorithmiques et mathématiques associés à cette formulation.

³ En fait, une condition un peu plus forte que la stricte minimalité est requise pour assurer la stabilité lorsqu'on travaille avec des champs (espaces de dimension infinie).

Résolution numérique des problèmes de structures à gradients de variables internes

L'intégration de lois de comportement dans lesquelles interviennent à la fois les valeurs et les gradients des variables internes peut s'exprimer comme la minimisation d'une fonctionnelle dépendant des champs de variables internes, pour peu qu'on adopte un schéma d'Euler implicite. Cependant, le grand nombre potentiel d'inconnues après discrétisation spatiale et les fortes non linéarités en font un problème délicat à résoudre numériquement. Parmi plusieurs algorithmes ayant déjà fait leurs preuves pour d'autres applications, seul une méthode de lagrangien augmenté s'est révélée suffisamment robuste.

Une démarche de décomposition - coordination permet en effet de transférer toutes les non linéarités au niveau des points d'intégration, en « oubliant » la dépendance non locale entre les valeurs et les gradients des variables internes, la condition de compatibilité, moyennant l'introduction de multiplicateurs de Lagrange, qui s'interprètent comme des forces thermodynamiques d'origine non locale. Il reste alors à assurer cette condition de compatibilité, en résolvant un problème linéaire posé sur toute la structure, puis à réactualiser les multiplicateurs. Ces étapes sont répétées jusqu'à convergence.

Non seulement cette méthode s'intègre aisément dans un code de calcul préexistant, basé sur une résolution itérative des équations d'équilibre, mais elle offre en outre une grande souplesse dans l'introduction de nouvelles lois à gradients puisque seule l'intégration locale doit être développée, indépendamment de l'algorithme proprement dit. On retrouve ainsi la même souplesse que pour l'introduction de lois de comportement traditionnelles, c'est-à-dire sans gradient.

Résolution numérique des problèmes de structures à gradients de variables internes

1. Discrétisation du problème	59
1.1 Discrétisation en temps : schéma implicite d'ordre 1	59
1.2 Discrétisation spatiale par éléments finis.....	60
2. Méthode de décomposition - coordination.....	61
2.1 Philosophie de la méthode	61
2.2 Algorithme d'Uzawa.....	62
2.3 Conditions de convergence de l'algorithme.....	64
2.4 Intégration dans le Code_Aster.....	66
3. Evaluation numérique	70
3.1 Cylindre sous pression externe.....	70
3.2 Poutre entaillée en flexion trois points.....	72

Pour modéliser des structures soumises à de forts gradients des champs mécaniques macroscopiques, nous avons vu au chapitre précédent qu'une approche possible consiste à décrire le comportement du matériau par des lois à gradients de variables internes. Le problème s'exprime alors nécessairement à l'échelle de la structure. Le choix d'un schéma incrémental implicite d'ordre 1 pour réaliser l'intégration en temps du comportement conduit ainsi à un problème de minimisation par rapport aux champs de variables internes. Sa résolution nécessite encore une étape de discrétisation spatiale par éléments finis, pour finalement aboutir à la minimisation d'une fonction à plusieurs variables dont voici quelques caractéristiques :

- (i) le nombre de variables peut être important (supérieur à 10 000 pour des applications industrielles 3D),
- (ii) le problème est non linéaire,
- (iii) suivant la loi de comportement, des contraintes non linéaires portant sur les champs de variables internes peuvent exister (par exemple pour traduire la croissance de l'endommagement au cours du temps)
- (iv) la fonction à minimiser n'est pas dérivable mais seulement sous-différentiable.

Chacune de ces caractéristiques apparaît comme une difficulté supplémentaire qui restreint d'autant le choix d'un algorithme approprié, dont on espérait (rêvait) initialement qu'il soit à la fois robuste et efficace. Comme nous avons finalement opté pour un algorithme de lagrangien augmenté, plus par défaut que réellement par choix, il nous semble bon de retracer l'historique qui nous y a conduit, en rappelant succinctement les raisons qui nous ont amené à rejeter d'autres algorithmes, plus réputés.

Souhaitant tout d'abord exploiter au mieux l'existant du *Code_Aster*[®], qui constitue impérativement la structure d'accueil des développements en question afin d'assurer le caractère industriel de la démarche, une première idée a consisté à employer une méthode de Newton, cf. Vautier et al. [1996], avec pour degrés de liberté les déplacements et les variables internes, et quelques aménagements dans la recherche linéaire pour prendre en compte les contraintes (iii). Résultat : pas de convergence, un traitement aussi simple des contraintes semblait totalement inapproprié car conduisant à des pas dans la direction de descente ridiculement petits. C'est pourquoi on s'est alors tourné vers un algorithme de points intérieurs, développé à l'INRIA par Herskovits [1986] et réputé traiter efficacement les contraintes, comme ce fut le cas pour des problèmes de structures avec contact, voir Vautier [1994]. L'idée consiste à résoudre simultanément les équations d'Euler et de Kuhn et Tucker par une méthode de type quasi-Newton (BFGS) dont la

direction de descente est déviée afin que les itérés successifs restent en permanence à l'intérieur du domaine réalisable. Là encore, la méthode ne convergeait pas. En fait, l'absence de dérivabilité (iv) entraîne des courbures très fortes au voisinage de certains points de la fonction (penser par exemple à la fonction $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, dont la courbure tend vers l'infini au voisinage de 0, dès que la dimension est supérieure à 1), ce qui limite l'emploi des méthodes basées sur le calcul ou l'estimation de la dérivée seconde, type Newton.

Une large classe d'algorithmes ayant ainsi été éliminée, on s'est orienté vers des méthodes spécifiques aux problèmes non différentiables. Ainsi, on a cherché à employer le logiciel *Centaure* développé à EDF-DER par Socroun [1996], bien adapté à la minimisation sous contraintes de fonctions « relativement sauvages » mais à nombre de variables limité (inférieur à la centaine). Ce logiciel avait déjà prouvé sa robustesse dans plusieurs domaines, par exemple l'optimisation des plans de rechargement du combustible dans les centrales nucléaires, voir Fourcade et al. [1995]. Malheureusement le grand nombre de variables de notre problème (i) conduit à des temps de calcul et des tailles mémoire irréalistes (matrices pleines), tandis qu'une simplification de l'algorithme (matrice lumpée) n'a plus permis d'obtenir la convergence.

Parallèlement à ces essais, on a également noté l'émergence récente des algorithmes évolutionnaires ou génétiques dans le domaine de la mécanique. Leur aptitude à résoudre des problèmes réputés difficiles est attractive, mais ils présentent également des inconvénients, leur caractère heuristique et non déterministe n'étant pas des moindres. Devant les enjeux industriels, on leur a préféré un algorithme déterministe, abondant ainsi dans le sens d'une remarque de Sebag [1998] qui ne recommande leur emploi « que lorsque toutes les autres méthodes ont échoué ».

Finalement, c'est vers une méthode de lagrangien augmenté déjà ancienne que l'on s'est tourné, présentée dans Fortin et Glowinski [1983] et baptisée décomposition - coordination ; elle permet de traiter les non linéarités et les contraintes de manière locale (c'est-à-dire point par point). Employée dans le code de calcul *Alibaba*, Mialon [1986], elle avait alors conduit à des résultats mitigés pour des problèmes de plasticité, s'avérant moins robuste qu'une méthode de Newton. Cependant, pour nos problèmes, elle a permis d'obtenir pour la première fois des solutions convergées : à défaut d'efficacité - la méthode de lagrangien augmenté n'est pas réputée rapide - elle semble robuste.

Ce chapitre a pour objectif de décrire cet algorithme et son introduction dans le *Code_Aster*[®]. Après avoir précisé la discrétisation temporelle et spatiale du problème, permettant ainsi de fixer les notations employées, on décrit la méthode de décomposition - coordination, dont on rappelle les conditions de convergence. On peut alors remarquer qu'elle s'intègre aisément dans l'architecture du code, sans remettre en cause la structure de l'algorithme de résolution statique non linéaire. Enfin, on examine les performances de cette méthode à travers deux exemples.

1. Discrétisation du problème

1.1 Discrétisation en temps : schéma implicite d'ordre 1

En pratique, les comportements dissipatifs sont décrits par des relations différentielles en temps entre les taux de variables internes et l'état actuel du matériau, qu'il s'agisse de lois à gradients ou pas. Comme l'intégration directe du problème continu en temps est généralement impossible, on opte pour une discrétisation des équations : connaissant les variables internes a^- et les déformations ε^- au début du pas de temps (instant t^-), ainsi que l'incrément des déformations durant le pas de temps $\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon^-$, on cherche la valeur des variables internes a à la fin du pas de temps (instant $t = t^- + \Delta t$). Ayant à faire à des matériaux standard généralisés, on adopte un schéma d'Euler implicite, et ce pour trois raisons :

- ce schéma est devenu traditionnel pour intégrer les relations de comportement des matériaux dissipatifs car il est inconditionnellement stable et permet de vérifier exactement la condition de cohérence lorsque le comportement est indépendant du temps ;
- toute méthode explicite risque de se heurter à de sévères difficultés dans la mesure où le champ de vitesse de variables internes \dot{a} peut devenir « relativement sauvage en espace » et en particulier être discontinu (voir chapitre 4), ce qui est toujours problématique dans le cadre d'un traitement par éléments finis ;
- ce schéma permet d'exprimer l'intégration incrémentale de la loi de comportement comme un problème de minimisation par rapport aux champs de variables internes, de sorte que nous bénéficions de tout le travail réalisé dans le domaine de l'optimisation mathématique.

Plus précisément, on rappelle le problème de minimisation en question, déjà exposé au chapitre 2 :

$$\text{Min}_a \underbrace{\int_{\Omega} \Phi(\varepsilon, a, \nabla a)}_{F(\varepsilon, a)} + \Delta t \underbrace{\int_{\Omega} \Delta \left(\frac{a - a^-}{\Delta t}, \frac{\nabla a - \nabla a^-}{\Delta t} \right)}_{D\left(\frac{a - a^-}{\Delta t}\right)} \quad (1)$$

- Φ énergie libre macroscopique
- Δ potentiel de dissipation macroscopique
- F énergie libre globale
- D potentiel de dissipation global

Pour alléger les expressions ultérieures, on introduit dès maintenant la densité d'énergie incrémentale Π , ce qui nous conduit à récrire le problème de minimisation (1) :

$$\text{Min}_a \int_{\Omega} \Pi(\varepsilon, a, \nabla a) dx$$

avec $\Pi \left(\varepsilon, \alpha_{\bullet}, \alpha_{\nabla}; \underbrace{\alpha_{\bullet}^-, \alpha_{\nabla}^-}_{\text{non précisés}}, \Delta t \right) = \Phi(\varepsilon, \alpha_{\bullet}, \alpha_{\nabla}) + \Delta t \Delta \left(\frac{\alpha_{\bullet} - \alpha_{\bullet}^-}{\Delta t}, \frac{\alpha_{\nabla} - \alpha_{\nabla}^-}{\Delta t} \right)$ (2)

1.2 Discrétisation spatiale par éléments finis

Concernant la discrétisation spatiale des équations de comportement, on décide d'approcher les champs de variables internes par éléments finis. Le choix des fonctions de forme dépend de l'espace fonctionnel auquel appartiennent les variables internes et ne peut donc pas être précisé de manière générale. Toutefois, on verra au chapitre suivant que la forme des potentiels macroscopiques conduit en général à l'espace $H^1(\Omega)$ et autorise donc l'emploi d'éléments finis de Lagrange usuels :

$$a(x) = \sum_k A_k N_k(x) \quad (3)$$

N_k fonction de forme associée au noeud k
 $\mathbf{A} = \{A_k\}$ vecteur des inconnues nodales de type variables internes

Introduisons maintenant la matrice $\vec{\mathbf{B}}(x)$ ¹ :

$$\vec{\mathbf{B}}(x) \cdot \mathbf{A} = (a(x), \nabla a(x)) = \sum_k A_k (N_k(x), \nabla N_k(x)) \quad (4)$$

On approche alors le problème continu en espace (2) par le problème discret suivant, où la minimisation est réalisée par rapport au vecteur nodal \mathbf{A} tel que :

$$\text{Min}_{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^K} \int_{\Omega} \Pi(\varepsilon, \vec{\mathbf{B}}(x) \cdot \mathbf{A}) \quad (5)$$

K nombre de nœuds (dimension des vecteurs nodaux)

Enfin, l'évaluation de l'intégrale sera à son tour approchée par une formule de quadrature :

$$\text{Min}_{\mathbf{A}} \sum_g \omega_g \Pi(\varepsilon_g, \vec{\mathbf{B}}_g \cdot \mathbf{A}) \quad (6)$$

ω_g poids du point de Gauss situé en x_g
 \bullet_g quantité évaluée en x_g

En dépit d'une présentation simple, il faut noter que le choix des fonctions de forme et des points de Gauss n'est pas anodin. En effet, seuls des éléments linéaires triangles P1 à un point de Hammer et quadrangles Q1 à quatre points de Gauss ont été utilisés pour les diverses applications de ce mémoire. On peut à juste titre s'interroger sur l'intérêt d'employer des fonctions de forme quadratiques en lien avec l'interpolation des déplacements, ou encore sur les conséquences d'une famille appauvrie de points de Gauss qui entraînerait une sous-intégration de (5). Les conditions de convergence de l'algorithme exposées au § 2.3 permettent de répondre partiellement à ces questions, mais un travail d'expérimentation numérique reste à faire, pour lequel on pourra remarquer l'analogie entre notre problème (équations faisant intervenir les déformations, les valeurs et les gradients de variables internes) et un problème thermo-mécanique couplé (qui fait intervenir les déformations, les températures et leurs gradients).

¹ La petite flèche symbolise un couple valeur - gradient. Ainsi, $\vec{\alpha} = (\alpha \bullet, \alpha_{\nabla})$

2. Méthode de décomposition - coordination

2.1 Philosophie de la méthode

Comme on l'a dit, cette méthode est censée transférer les non linéarités au niveau local, c'est-à-dire au niveau des points d'intégration, ce qui en permet un traitement numérique plus aisé. Elle procède par l'introduction d'un nouveau champ d'inconnues $\vec{\alpha}$ qui représente les valeurs et les gradients des variables internes aux points d'intégration. Il faut alors vérifier la condition de compatibilité :

$$\forall g \quad \vec{\alpha}_g = (\alpha_{\bullet}, \alpha_{\nabla})_g = \vec{\mathbf{B}}_g \cdot \mathbf{A} \quad (7)$$

On construit ainsi un problème de minimisation strictement équivalent à (6) dans la mesure où les poids d'intégration ω_g sont non nuls :

$$\underset{\substack{\mathbf{A}, \vec{\alpha} \\ \forall g \quad \omega_g (\vec{\mathbf{B}}_g \cdot \mathbf{A} - \vec{\alpha}_g) = 0}}{\text{Min}} \sum_g \omega_g \Pi(\varepsilon_g, \vec{\alpha}_g) \quad (8)$$

L'intérêt ne paraît pas évident au premier abord : on obtient un problème équivalent mais avec des inconnues supplémentaires... C'est vrai, mais ces inconnues supplémentaires sont locales et pourront donc être traitées au niveau local, c'est-à-dire celui des points d'intégration, comme pour une loi de comportement classique. Pour cela, on introduit maintenant le lagrangien associé au problème (8) :

$$\mathbf{L}(\mathbf{A}, \vec{\alpha}, \vec{\mu}) = \sum_g \omega_g \Pi(\varepsilon_g, \vec{\alpha}_g) + \sum_g \omega_g \vec{\mu}_g \cdot (\vec{\mathbf{B}}_g \cdot \mathbf{A} - \vec{\alpha}_g) \quad (9)$$

$\vec{\mu}$ multiplicateurs de Lagrange associés à la contrainte (7)

Fortin et Glowinski [1983] ont montré que le point selle de ce lagrangien coïncide avec le point selle de ce même lagrangien mais augmenté d'un terme de pénalisation quadratique des contraintes :

$$\mathbf{L}'(\mathbf{A}, \vec{\alpha}, \vec{\mu}) = \mathbf{L}(\mathbf{A}, \vec{\alpha}, \vec{\mu}) + \frac{r}{2} \sum_g \omega_g \left\| \vec{\mathbf{B}}_g \cdot \mathbf{A} - \vec{\alpha}_g \right\|_{\vec{\mathbf{N}}_g}^2 \quad (10)$$

$r > 0$ coefficient de pénalisation

$\vec{\mathbf{N}}_g$ matrices définies positives de pondération des contraintes, avec $\|\vec{\alpha}\|_{\vec{\mathbf{N}}}^2 = \vec{\alpha} \cdot \vec{\mathbf{N}} \cdot \vec{\alpha}$

Si r doit mesurer l'intensité relative de la pénalisation, c'est-à-dire son poids par rapport au premier terme dans (10), il paraît raisonnable de choisir comme matrices de pondération une estimation des courbures locales du problème (diagonale pour simplifier l'étape ultérieure d'intégration locale) :

$$\vec{\mathbf{N}}_g \approx \text{Diag} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \vec{\alpha} \partial \vec{\alpha}} \Big|_{(\varepsilon_g, \vec{\alpha}_g)} \right) \quad (11)$$

$\text{Diag}(\mathbf{M})$ matrice diagonale de \mathbf{M} : $(\text{Diag} \mathbf{M})_{ij} = \begin{cases} M_{ii} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Avec un tel choix, le coefficient r devient effectivement un paramètre adimensionnel qui mesure le poids relatif des deux termes de (10). Finalement, le problème de point selle (10) est traité par un algorithme d'Uzawa.

2.2 Algorithme d'Uzawa

La recherche d'un point selle par un algorithme d'Uzawa, voir par exemple Faure [1991], consiste essentiellement à enchaîner jusqu'à convergence :

- une minimisation du lagrangien par rapport aux variables primales à multiplicateurs de Lagrange fixés,
- une réactualisation des multiplicateurs de Lagrange par une méthode de gradient, ici à pas constant.

Dans le cas présent, la phase de minimisation par rapport aux variables primales sera effectuée par relaxation, ce qui nous conduit aux trois étapes suivantes :

Minimisation locale de problèmes non linéaires pour obtenir $\bar{\alpha}^{n+1}$

$$\bar{\alpha}^{n+1} \text{ fourni par } \underset{\bar{\alpha}}{\text{Min}} L^r(\mathbf{A}^n, \bar{\alpha}, \bar{\mu}^n) \quad (12)$$

Résolution d'un problème global linéaire pour obtenir \mathbf{A}^{n+1}

$$\mathbf{A}^{n+1} \text{ fourni par } \underset{\mathbf{A}}{\text{Min}} L^r(\mathbf{A}, \bar{\alpha}^{n+1}, \bar{\mu}^n) \quad (13)$$

Réactualisation des multiplicateurs de Lagrange pour obtenir $\bar{\mu}^{n+1}$

$$\bar{\mu}_g^{n+1} = \bar{\mu}_g^n + r \bar{\mathbf{N}}_g \cdot \left(\bar{\mathbf{B}}_g \cdot \mathbf{A}^{n+1} - \bar{\alpha}_g^{n+1} \right) \quad (14)$$

- ⁿ quantité à l'itération n de l'algorithme

En fait, avant de passer à l'étape de réactualisation (14), les étapes (12) et (13) peuvent être renouvelées plusieurs fois, puisqu'elles traduisent la minimisation du problème sans contraintes par relaxation. On examinera ultérieurement l'influence du nombre de ces itérations internes sur la vitesse de convergence. Revenons maintenant plus précisément sur chacune de ces étapes, puis sur les critères de convergence.

2.2.1 Le problème local : un algorithme de « return-mapping » classique

La première étape de l'algorithme consiste à minimiser par rapport aux champs locaux $\bar{\alpha}$ pour obtenir $\bar{\alpha}^{n+1}$. Elle peut être réalisée indépendamment en chaque point de Gauss, comme on le voit ci-dessous :

$$\begin{aligned} & \underset{\bar{\alpha}}{\text{Min}} L^r(\mathbf{A}^n, \bar{\alpha}, \bar{\mu}^n) \\ & = \sum_g \omega_g \underset{\bar{\alpha}_g}{\text{Min}} \left[\Pi(\varepsilon_g, \bar{\alpha}_g) + \bar{\mu}_g^n \cdot \left(\bar{\mathbf{B}}_g \cdot \mathbf{A}^n - \bar{\alpha}_g \right) + \frac{r}{2} \left\| \bar{\mathbf{B}}_g \cdot \mathbf{A}^n - \bar{\alpha}_g \right\|_{\bar{\mathbf{N}}_g}^2 \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Si on revient maintenant à la définition de Π , on peut donner une caractérisation du minimum :

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\alpha}}(\boldsymbol{\varepsilon}_g, \bar{\alpha}_g^{n+1}) + \bar{\mu}_g^n + r \bar{\bar{\mathbf{N}}}_g \cdot (\bar{\mathbf{B}}_g \cdot \mathbf{A}^n - \bar{\alpha}_g^{n+1}) \in \partial \Delta \left(\frac{\bar{\alpha}_g^{n+1} - \bar{\alpha}_g^-}{\Delta t} \right) \quad (16)$$

Cette étape de minimisation locale s'exprime donc comme l'appartenance de « forces thermodynamiques corrigées » au sous-différentiel du potentiel de dissipation. Les algorithmes classiques de type return-mapping, voir par exemple Simo et Taylor [1985], sont donc à même de traiter convenablement cette étape de minimisation, comme on le verra ultérieurement.

Cette expression nous fournit une interprétation physiques des multiplicateurs de Lagrange. En effet, à convergence, le troisième terme dans le membre de gauche de (16) devient nul (la contrainte est réalisée). Le multiplicateur $\bar{\mu}_g$ apparaît comme une « force thermodynamique complémentaire » résultant de la condition non locale (7).

2.2.2 Le problème global : lissage de la solution locale

Cette étape pour obtenir \mathbf{A}^{n+1} s'écrit comme la minimisation sans contrainte d'une fonction quadratique, dans laquelle n'intervient pas du tout le comportement :

$$\text{Min}_{\mathbf{A}} \sum_g \omega_g \left[\bar{\mu}_g^n \cdot (\bar{\mathbf{B}}_g \cdot \mathbf{A} - \bar{\alpha}_g^{n+1}) + \frac{r}{2} \left\| \bar{\mathbf{B}}_g \cdot \mathbf{A} - \bar{\alpha}_g^{n+1} \right\|_{\bar{\bar{\mathbf{N}}}_g}^2 \right] \quad (17)$$

On verra ci-dessous que le premier des deux termes n'intervient pas dans le processus de minimisation, car nul dès la deuxième itération, si bien que cette étape s'interprète comme une opération de lissage du champ local (au sens des moindres carrés) portant à la fois sur la valeur et le gradient du champ. Le minimum est donc caractérisé par la résolution d'un système linéaire, comme on le voit sur l'expression ci-dessous :

$$\underbrace{\left[r \sum_g \omega_g {}^t \bar{\mathbf{B}}_g \cdot \bar{\bar{\mathbf{N}}}_g \cdot \bar{\mathbf{B}}_g \right]}_{\mathbf{P}^r} \cdot \mathbf{A}^{n+1} = \underbrace{r \sum_g \omega_g \left({}^t \bar{\mathbf{B}}_g \cdot \bar{\bar{\mathbf{N}}}_g \cdot \bar{\alpha}_g^{n+1} \right)}_{\mathbf{R}_{\bar{\alpha}}^{n+1}} - \underbrace{\sum_g \omega_g {}^t \bar{\mathbf{B}}_g \cdot \bar{\mu}_g^n}_{\mathbf{R}_{\bar{\mu}}^n = 0 \text{ dès que } n > 0} \quad (18)$$

\mathbf{P}^r matrice de projection

$\mathbf{R}_{\bar{\alpha}}^{n+1}$ contribution des variables internes au second membre

$\mathbf{R}_{\bar{\mu}}^n$ contribution des multiplicateurs de Lagrange au second membre

Dans l'optique d'une résolution par méthode directe, on peut remarquer que la matrice de projection \mathbf{P}^r est constante durant les itérations de l'algorithme, pour peu qu'on ne change pas les matrices de pondération $\bar{\bar{\mathbf{N}}}_g$. On peut donc effectuer la phase de factorisation une fois pour toute, la résolution du système se limitant alors aux étapes de descente et remontée.

2.2.3 Réactualisation des multiplicateurs de Lagrange

L'étape de réactualisation des multiplicateurs de Lagrange (14) est elle aussi une opération locale. Elle entraîne peu de commentaires. On peut toutefois chercher à évaluer le second membre

qui résulte des multiplicateurs de Lagrange dans le système (18), pour s'apercevoir qu'il est nul, justement en vertu de (18) :

$$\mathbf{R}_{\bar{\mu}}^{n+1} = \sum_g \omega_g \bar{\mathbf{B}}_g \cdot \underbrace{\left(\bar{\mu}_g^n + r \bar{\mathbf{N}}_g \cdot \left(\bar{\mathbf{B}}_g \cdot \bar{\mathbf{A}}^{n+1} - \bar{\alpha}_g^{n+1} \right) \right)}_{\bar{\mu}_g^{n+1}} = \mathbf{R}_{\bar{\mu}}^n + \mathbf{P}^r \cdot \mathbf{A}^{n+1} - \mathbf{R}_{\bar{\alpha}}^{n+1} = \mathbf{0} \quad (19)$$

Dans la méthode du gradient pour réactualiser les multiplicateurs de Lagrange, on a choisi une longueur de pas qui coïncide avec le coefficient de pénalisation pour les contraintes (même coefficient r pour la pénalisation et la réactualisation). C'est un choix qui, d'après Fortin et Glowinski [1983], est « quasi optimal » dans le cadre d'un algorithme de lagrangien augmenté.

2.2.4 critères d'arrêt

Pour estimer la convergence de l'algorithme, deux critères d'arrêt ont été introduits. Le premier mesure l'écart entre deux itérés successifs du vecteur nodal \mathbf{A} :

$$\text{Max}_k \left| A_k^{n+1} - A_k^n \right| \leq \eta_1 \quad (20)$$

C'est sans doute l'estimateur de convergence le plus simple, mais il n'est pas nécessairement fiable, comme l'illustre les deux exemples de base suivants :

$$u_n = \ln n \quad \text{donc} \quad u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{n} \quad \text{mais} \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty \quad (21)$$

$$v_n = \sin(\ln n) \quad \text{donc} \quad v_{n+1} - v_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{mais} \quad (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée non convergente} \quad (22)$$

On lui préférera donc l'usage d'un second estimateur de convergence, basé sur la qualité de réalisation de la contrainte :

$$\text{Max}_g \left\| \bar{\alpha}_g - \bar{\mathbf{B}}_g \cdot \mathbf{A} \right\|_{\bar{\mathbf{D}}} \leq \eta_2 \quad \text{où} \quad \bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & L_b^2 & & \\ & & L_b^2 & \\ & & & L_b^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

L_b longueur caractéristique du problème

On peut noter que l'emploi de cette matrice $\bar{\mathbf{D}}$ pour pondérer la norme permet à nouveau d'obtenir un critère homogène sur le plan dimensionnel, c'est-à-dire qu'un changement d'unité pour les longueurs ne modifie pas la valeur de ce critère.

2.3 Conditions de convergence de l'algorithme

La convergence de l'algorithme a été étudiée par Fortin et Glowinski [1983] et peut se démontrer en dimension finie grâce à leur théorème (5.2). Appelons :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbb{R}^K && \text{espace des vecteurs nodaux, où } K \text{ est le nombre de noeuds,} \\ \mathbf{H} &= (\mathbb{R}^4)^G && \text{espace des champs locaux, où } G \text{ est le nombre total de points de Gauss,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &\in L(\mathbf{V}, \mathbf{H}) \quad \text{opérateur linéaire :} \\
 \mathbf{B} &: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{H} \\
 \mathbf{A} &\mapsto \left\{ \tilde{\mathbf{B}}_g \cdot \mathbf{A} \right\}_{g=1, \dots, G}
 \end{aligned} \tag{24}$$

On peut alors particulariser ce théorème à notre problème, où, rappelons-le, le coefficient de pénalisation est égal au pas de réactualisation.

proposition 1

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- (i) l'opérateur \mathbf{B} est injectif,
- (ii) $\Pi = \Pi^0 + \Pi^1$, avec Π^0 strictement convexe et C^1 sur \mathbf{H} , Π^1 convexe et semi-continue inférieure sur \mathbf{H} ,
- (iii) le problème de minimisation (6) admet une solution \mathbf{A} dans \mathbf{V} ,

alors \mathbf{A} est l'unique solution de (6) et les suites des itérés de l'algorithme vérifient :

$$\mathbf{A}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{A} \quad \vec{\alpha}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \vec{\alpha} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (\vec{\mu}^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}$$

En outre, si $\vec{\mu}$ est un point d'adhérence de $(\vec{\mu}^n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors $(\mathbf{A}, \vec{\alpha}, \vec{\mu})$ est un point selle du lagrangien .

En fait, on peut montrer que sous les hypothèses (i) et (ii), la coercivité de Π suffit à assurer l'hypothèse (iii), si bien qu'on peut énoncer la proposition suivante :

proposition 2

Sous les hypothèses suivantes :

- (i) l'opérateur \mathbf{B} est injectif,
- (ii) $\Pi = \Pi^0 + \Pi^1$, avec Π^0 strictement convexe et C^1 sur \mathbf{H} , Π^1 convexe et semi-continue inférieure sur \mathbf{H} ,
- (iii) la fonction Π est coercive, c'est-à-dire $\Pi(\varepsilon_g, \vec{\alpha}_g) \rightarrow +\infty$ quand $\|\vec{\alpha}_g\|_{\mathbb{R}^4} \rightarrow \infty$,

il existe une unique solution \mathbf{A} au problème (6) et les conclusions de la proposition 1 subsistent.

Démonstration

Comme \mathbf{B} est un opérateur linéaire en dimension finie, il est continue. En outre, Π est semi-continue inférieure et convexe en vertu de (ii). Donc, l'application

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J} &: \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R} \\
 \mathbf{A} &\mapsto \sum_g \omega_g \Pi(\varepsilon_g, \tilde{\mathbf{B}}_g \cdot \mathbf{A})
 \end{aligned}$$

est elle aussi semi-continue inférieure et convexe.

Par ailleurs, en dimension finie, l'injectivité de \mathbf{B} implique :

$$\|\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}\|_{\|\mathbf{A}\| \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$$

De plus, les poids des points de Gauss sont strictement positifs. La coercivité de Π suffit alors pour entraîner celle de l'application J . Toutes les conditions requises sont assurées pour garantir l'existence d'au moins une solution au problème de minimisation (10) et on peut alors appliquer la proposition 1 pour conclure.

Si les conditions (ii) et (iii) dépendent de la fonction Π , donc de la loi de comportement, la condition (i) en revanche ne dépend que du maillage et du choix des éléments finis. En fait, on peut donner une condition suffisante pour assurer (i) : il suffit que les restrictions de l'opérateur \mathbf{B} aux éléments de référence des différents types d'éléments finis utilisés soient injectives. Par exemple, on peut examiner ce qu'il en est concernant les éléments finis de Lagrange bidimensionnels linéaires.

proposition 3 - Les éléments finis triangle P1 à un point de Hammer et quadrangle Q1 à quatre points de Gauss assurent la condition (i). En revanche, ce n'est pas nécessairement vrai pour l'élément quadrangle Q1 sous-intégré par un point de Gauss.

Démonstration

Appelons φ_k la fonction de forme de l'élément de référence associée au nœud k et K le nombre de nœuds de l'élément, ξ_g les coordonnées des points d'intégration de l'élément de référence et G le nombre de points d'intégration de l'élément. En 2D, la restriction de l'opérateur \mathbf{B} à un élément de référence est :

$$\hat{\mathbf{B}}: \quad \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^{3G}$$

$$(A_1, \dots, A_K) \mapsto \left(\dots, \sum_k A_k \varphi_k(\xi_g), \sum_k A_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_1}(\xi_g), \sum_k A_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_2}(\xi_g), \dots \right)$$

L'opérateur $\hat{\mathbf{B}}$ est injectif si et seulement si $\text{rg } \hat{\mathbf{B}} = K$, ce qui exclut l'élément à 4 nœuds et un point d'intégration, car dans ce cas $\text{rg } \hat{\mathbf{B}} \leq 3G = 3 < K$. En revanche, dans le cas du triangle à un point de Hammer, la matrice représentative de $\hat{\mathbf{B}}$ vaut :

$$\text{Mat } \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad \det \hat{\mathbf{B}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{rg } \hat{\mathbf{B}} = 3$$

ce qui assure l'injectivité de $\hat{\mathbf{B}}$. De même, pour le quadrangle à 4 points d'intégration, la matrice de $\hat{\mathbf{B}}$ vaut :

$$\text{Mat } \hat{\mathbf{B}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+w)^2 & 1-w^2 & (1-w)^2 & 1-w^2 \\ -1-w & -1+w & 1-w & 1+w \\ 1+w & -1-w & -1+w & 1-w \\ 1-w^2 & (1+w)^2 & 1-w^2 & (1-w)^2 \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \quad \text{avec } w = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (25)$$

On peut en extraire une sous-matrice 4x4 inversible, donc $\text{rg } \hat{\mathbf{B}} = 4$, ce qui assure l'injectivité.

2.4 Intégration dans le Code Aster[©]

2.4.1 Démarche de résolution standard

De manière générale, la résolution d'un problème d'évolution quasi-statique nécessite le traitement couplé de deux sous-problèmes : d'une part, assurer l'équilibre de la structure, et d'autre

part, intégrer les équations de comportement. La démarche adoptée dans le *Code_Aster*[®], voir Vautier et al. [1996], privilégie comme inconnues les déplacements (et non les variables internes). Grossièrement, après discrétisation en temps, on est conduit à résoudre le système suivant :

$$\underbrace{\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})}_{\mathbf{F}_{\text{int}}} = \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{f}^{\text{d}} \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial_r \Omega} \mathbf{T}^{\text{d}} \cdot \mathbf{v}}_{\mathbf{F}_{\text{ext}}} \quad \forall v \in V_0^{\text{ad}} \quad (26)$$

V_0^{ad} ensemble des vitesses cinématiquement admissibles

$\boldsymbol{\sigma}$ champ de contrainte inconnu

$\mathbf{f}^{\text{d}}, \mathbf{T}^{\text{d}}$ forces imposées volumiques et surfaciques

$\mathbf{F}_{\text{int}}, \mathbf{F}_{\text{ext}}$ Forces intérieures et extérieures

L'intégration des relations de comportement est exprimée implicitement dans ce système à travers la relation $\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\Delta \mathbf{u}; \dots)$, où $\Delta \mathbf{u}$ est l'incrément de déplacement inconnu. Cette relation confère au système (26) son caractère non linéaire. La résolution de (26) est effectuée par une méthode itérative de Newton (ou une de ses variantes), les itérations prenant fin lorsqu'on considère que l'équilibre est atteint. Elle est détaillée dans le tableau 1, page 68.

2.4.2 Intégration de l'algorithme de lagrangien augmenté

Concernant l'intégration de relations de comportement à gradients, il est tout à fait possible d'insérer l'algorithme de lagrangien augmenté au niveau (2) « intégration des lois de comportement » de la méthode de Newton, voir tableau 1, page 68. On profite ainsi pleinement de l'architecture existante du *Code_Aster*[®], tout en encapsulant l'algorithme en question. Toutefois, exiger une précision importante pour la convergence du lagrangien augmenté tant que l'équilibre est loin d'être atteint serait trop pénalisant. C'est pourquoi on a opté pour une « convergence en parallèle » des algorithmes de lagrangien augmenté et de Newton. On autorise un nombre donné d'itérations de lagrangien augmenté au-delà desquelles on rend la main à la méthode de Newton, qu'il y ait eu convergence ou pas. Par contre, on ne quitte la méthode de Newton que lorsque l'équilibre et la loi de comportement sont résolus avec la précision requise. Un tel algorithme est illustré dans le tableau 2, page 69 ; il permet un gain de temps appréciable en évitant des itérations inutiles du lagrangien augmenté.

2.4.3 Remarques concernant l'intégration de l'algorithme

Si l'intégration de l'algorithme de lagrangien augmenté préserve la structure générale de l'algorithme de Newton pour traiter les équations d'équilibre, en revanche, l'obtention d'une matrice tangente est perdue, car il paraît bien difficile d'estimer la variation des variables internes par rapport aux déplacements. A l'heure actuelle, c'est la matrice d'élasticité qui est utilisée comme opérateur pseudo-tangent pour la phase (7) de « correction des déplacements », voir tableau 2, page 69. Une autre alternative réside dans la méthode BFGS, voir par exemple Bathe [1982], où l'inverse d'un opérateur pseudo-tangent est construit en se basant sur les itérés successifs des déplacements.

L'accélération de convergence que l'on pourrait ainsi escompter reste cependant à évaluer par des essais numériques.

Un autre point important et indéniablement un avantage de la méthode concerne la relative facilité d'intégration de nouvelles lois de comportement. La description du comportement est en effet cantonnée dans les points (3.5) et (4) de l'algorithme du tableau 2.

A ce niveau, le caractère non local du problème n'apparaît pas. Autrement dit, une maîtrise complète de la formulation n'est pas nécessaire pour implanter d'autres modèles de comportement, ce qui devrait encourager d'autres développeurs à utiliser ce cadre algorithmique pour y introduire leurs propres lois à gradients.

On en verra deux illustrations lors de la description d'une loi de comportement élastique fragile au chapitre 5 et plastique ductile au chapitre 7. En fait, dans ce dernier cas, on ne peut même plus écrire le problème comme la minimisation d'une fonctionnelle (en raison de la non linéarité géométrique introduite par les grandes déformations plastiques), ce qui n'empêche pas d'introduire le modèle sans s'en préoccuper. Seule la convergence de l'algorithme pourrait être remise en cause.

(1)	$\Delta \mathbf{u}^1 = \dots$	prédiction initiale du déplacement
(2)	BOUCLE $n = 1$ A ITERATIONS_EQUILIBRE	boucle sur les itérations d'équilibre
(3)	$a^n = \hat{a}(\Delta \mathbf{u}^n ; \mathbf{u}^-, a^-, \Delta t)$	intégration des lois de comportement
(4)	$\boldsymbol{\sigma}^n = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(a^n, \mathbf{u}^n)$ et $\mathbf{F}_{\text{int}}^n = \hat{\mathbf{F}}_{\text{int}}(\boldsymbol{\sigma}^n)$	contraintes et forces intérieures
(5)	$R^n = \frac{\ \mathbf{F}_{\text{int}}^n - \mathbf{F}_{\text{ext}}\ }{\ \mathbf{F}_{\text{ext}}\ }$	estimation du résidu relatif
(6)	SI $R^n < \text{ARRET_EQUILIBRE}$ ALLER EN (9)	critère d'arrêt
(7)	$\Delta \mathbf{u}^{n+1} = \Delta \mathbf{u}^n - \mathbf{K}_{\mathbf{T}}^{-1} \cdot (\mathbf{F}_{\text{int}}^n - \mathbf{F}_{\text{ext}})$ où $\mathbf{K}_{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \Delta \mathbf{u}}$	correction du déplacement
	FIN BOUCLE n	
(8)	ECHEC	algorithme non convergent
(9)	$\mathbf{u} = \mathbf{u}^- + \Delta \mathbf{u}^n$ et $a = a^n$	mise à jour et fin du pas de temps

tableau 1 - Méthode de Newton

(0)	$\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}^-$ et $\bar{\mu}^1 = \bar{\mu}^-$	initialisation
(1)	$\Delta \mathbf{u}^1 = \dots$	prédiction initiale du déplacement
(2)	BOUCLE $n = 1$ A ITERATIONS_EQUILIBRE	boucle sur les itérations d'équilibre
(3.1)	$\mathbf{A}^{n,1} = \mathbf{A}^n$ et $\bar{\mu}^{n,1} = \bar{\mu}^n$	initialisation pour itérations lagrangien
(3.2)	BOUCLE $l = 1$ A ITERATIONS_LAGRANGIEN	boucle sur les itérations de lagrangien
(3.3)	$\mathbf{A}^{n,l,1} = \mathbf{A}^{n,l}$	initialisation pour itérations internes
(3.4)	BOUCLE $i = 1$ A ITERATIONS_INTERNES	itérations internes du lagrangien (relaxation)
(3.5)	$\bar{\alpha}^{n,l,i+1} = \hat{\alpha}(\Delta \mathbf{u}^n, \mathbf{A}^{n,l,i}, \bar{\mu}^{n,l}; \mathbf{u}^-, \bar{\alpha}^-, \Delta t)$	intégration locale du comportement
(3.7)	$\mathbf{A}^{n,l,i+1} = \hat{\mathbf{A}}(\Delta \mathbf{u}^n, \bar{\alpha}^{n,l,i+1}, \bar{\mu}^{n,l})$	lissage des champs locaux
	FIN BOUCLE i	
(3.8)	$\bar{\alpha}^{n,l+1} = \bar{\alpha}^{n,l,i+1}$ et $\mathbf{A}^{n,l+1} = \mathbf{A}^{n,l,i+1}$	mise à jour après itérations internes
(3.9)	$\bar{\mu}^{n,l+1} = \hat{\mu}(\bar{\mu}^{n,l}, \bar{\alpha}^{n,l+1}, \mathbf{A}^{n,l+1})$	réactualisation des multiplicateurs de Lagrange
(3.10)	$E^{n,l+1} = \ \bar{\alpha}^{n,l+1} - \bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{A}^{n,l+1}\ _{\bar{\mathbf{D}}}$	écart sur la condition de compatibilité
(3.11)	SI $E^{n,l+1} < \text{ARRET_LAGRANGIEN}$ ALLER EN (3.12)	critère de convergence
	FIN BOUCLE l	
(3.12)	$\bar{\alpha}^n = \bar{\alpha}^{n,l+1}$, $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{n,l+1}$, $\bar{\mu}^n = \bar{\mu}^{n,l+1}$ et $E^n = E^{n,l+1}$	mise à jour après itérations lagrangien
(4)	$\boldsymbol{\sigma}^n = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\alpha}^n, \mathbf{u}^n)$ et $\mathbf{F}_{\text{int}}^n = \hat{\mathbf{F}}_{\text{int}}(\boldsymbol{\sigma}^n)$	contraintes et forces intérieures
(5)	$R^n = \frac{\ \mathbf{F}_{\text{int}}^n - \mathbf{F}_{\text{ext}}\ }{\ \mathbf{F}_{\text{ext}}\ }$	estimation du résidu relatif
(6)	SI $R^n < \text{ARRET_EQUILIBRE}$ ET $E^n < \text{ARRET_LAGRANGIEN}$ ALLER EN (9)	critère d'arrêt
(7)	$\Delta \mathbf{u}^{n+1} = \Delta \mathbf{u}^n - \mathbf{K}_E^{-1} \cdot (\mathbf{F}_{\text{int}}^n - \mathbf{F}_{\text{ext}})$	correction du déplacement
	FIN BOUCLE n	
(8)	ECHEC	algorithme non convergent
(9)	$\mathbf{u} = \mathbf{u}^- + \Delta \mathbf{u}^n$, $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}^n$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^n$ et $\bar{\mu} = \bar{\mu}^n$	mise à jour et fin du pas de temps

tableau 2 - Algorithme de lagrangien augmenté et méthode de Newton combinés

3. Evaluation numérique

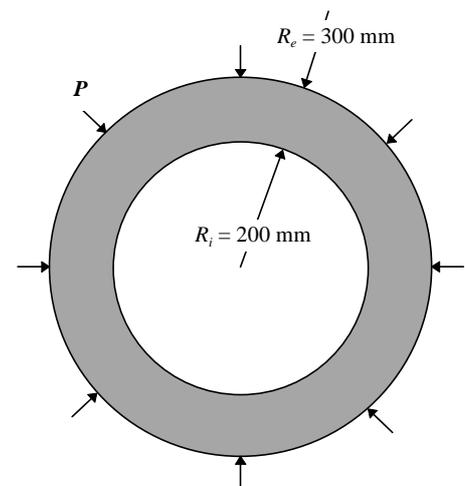
Dans cette dernière partie, on se propose d'employer l'algorithme de lagrangien augmenté pour traiter deux problèmes bidimensionnels : un cylindre sous pression externe et une poutre entaillée en flexion trois points. On étudie plus attentivement l'influence des différents paramètres de l'algorithme sur le temps calcul lors de l'intégration d'un pas de temps particulier.

3.1 Cylindre sous pression externe

3.1.1 Nature du problème

Le problème étudié est un cylindre sous pression externe, composé d'un matériau fragile qui obéit à la loi de comportement décrite au chapitre 5, avec les caractéristiques suivantes :

Module de Young	$E = 10\,000$ MPa
Coefficient de Poisson	$\nu = 0$
Contrainte limite locale	$\sigma^y = 10$ MPa
Ratio d'écrouissage	$\gamma = 5$
Longueur caractéristique	$L_b = 5$ mm $= (R_e - R_i)/20$



La géométrie et le chargement sont représentés sur la figure ci-dessus. Etant donnée la symétrie de révolution, on se contente de traiter le problème de manière axisymétrique (ce qui exclut l'observation d'éventuelles bifurcations avec perte de symétrie). De plus, comme le coefficient de Poisson est nul, on n'a pas d'effet de compatibilité géométrique axiale, si bien qu'on se contente d'examiner une tranche du cylindre (ce qui exclut maintenant l'observation de bifurcations axiales, qui de toute manière nécessiteraient sans doute l'emploi de cinématiques non linéaires). On se ramène ainsi à l'étude d'un problème unidimensionnel.

Pour pouvoir déterminer la réponse de la structure au-delà de la charge limite en pression, on pilote l'intensité du chargement (la pression) par le déplacement externe du cylindre ; cette réponse globale est illustrée figure 1, ainsi que le profil du champ d'endommagement au dernier instant calculé.

3.1.2 Sensibilité de l'algorithme

Pour ce problème, le maillage employé est composé de 1 006 éléments quadrangles linéaires Q1 en déplacement et en endommagement, ce qui correspond à 2 014 degrés de liberté d'endommagement et 8060 degrés de libertés mécaniques (dont les multiplicateurs de Lagrange

associés aux conditions aux limites). Le temps calcul² total pour déterminer la réponse de la structure s'élève à environ 1 heure.

Le tableau 3 indique pour un pas de temps donné (qui correspond à un incrément du déplacement externe de 0,50 à 0,55 mm) la sensibilité de l'algorithme aux différents paramètres que sont :

- le coefficient de pénalisation r ,
- le nombre d'itérations internes du lagrangien augmenté (boucle sur les étapes 2.2.1 et 2.2.2),
- le nombre maximum d'itérations du lagrangien augmenté entre chaque résolution des équations d'équilibre.

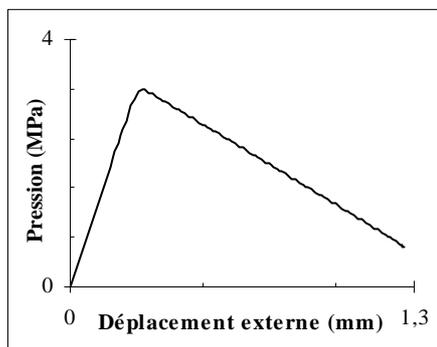


figure 1 - réponse globale de la structure

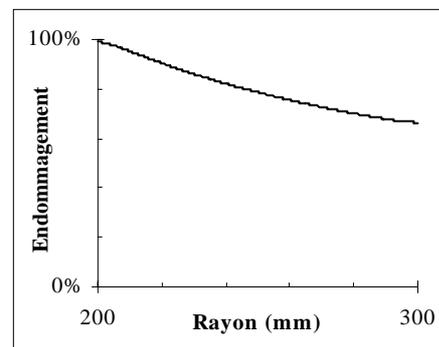


figure 2 - endommagement avant instabilité

Pénalisation r	Boucles internes ITERATIONS_INTERNES	Boucles externes ITERATIONS_LAGRANGIEN	Temps CPU (s)	itérations du lagrangien	itérations pour l'équilibre
0.1	2	2	74	107	56
0.25	2	2	48	51	26
1	2	2	51	54	36
4	2	2	60	63	52
20	2	2	118	163	161
1	5	2	68	41	34
1	2	2	51	54	36
1	1	2	46	57	40
1	2	5	60	84	36
1	2	2	51	54	36
1	2	1	46	36	36

tableau 3 - Sensibilité de l'algorithme pour le problème du cylindre sous pression

² Le calcul est réalisé sur une station de travail Silicon Graphics Origin 2000, utilisée en mode monoprocesseur (cadencé à 250 MHz).

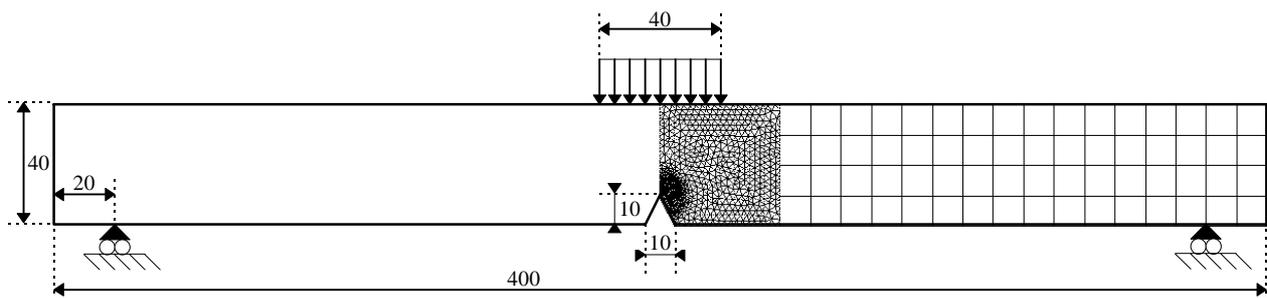
Il ressort de cette analyse paramétrique qu'un bon jeu de valeur est sans doute dans le cas présent $r = 0,25$, une seule itération interne et une seule itération de lagrangien augmenté par résolution des équations d'équilibre. En fait, il apparaît que dans ce problème, l'équation d'équilibre est plus délicate à résoudre que l'intégration non locale du comportement, sans doute dans la mesure où les effets de gradients sont assez faibles. C'est pourquoi il n'est pas utile de consacrer du temps à résoudre le problème de comportement.

3.2 Poutre entaillée en flexion trois points

Pour mieux discriminer l'influence des paramètres dans l'algorithme de lagrangien augmenté, on s'intéresse maintenant à un problème pour lequel on peut escompter des effets de gradients plus marqués que dans le cas du cylindre en raison de la présence d'une singularité géométrique : une poutre entaillée sollicitée en flexion trois points.

3.2.1 Nature du problème

La géométrie de la poutre, son maillage, les conditions de liaisons et le chargement sont représentés sur le graphique ci-dessous, où les dimensions sont portées en millimètres.



A nouveau, la poutre est composée du même matériau fragile qu'au § 3, mais avec les caractéristiques suivantes, où en particulier, le coefficient de Poisson n'est plus nul :

Module de Young	$E = 10\,000$ MPa
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,2$
Contrainte limite locale	$\sigma^y = 10$ MPa
Ratio d'écroutissage	$\gamma = 5$
Longueur caractéristique	$L_b = 3$ mm

Des difficultés de pilotage du chargement, évoquées en détail au chapitre 5, nous contraignent à interrompre le calcul pour une valeur d'enfoncement de 0,6 mm, voir figure 4. Les zones endommagées sont encore très confinées, l'une en pointe d'entaille, sollicitée en traction, l'autre sur la fibre supérieure, sollicitée en compression, cf. figure 3.

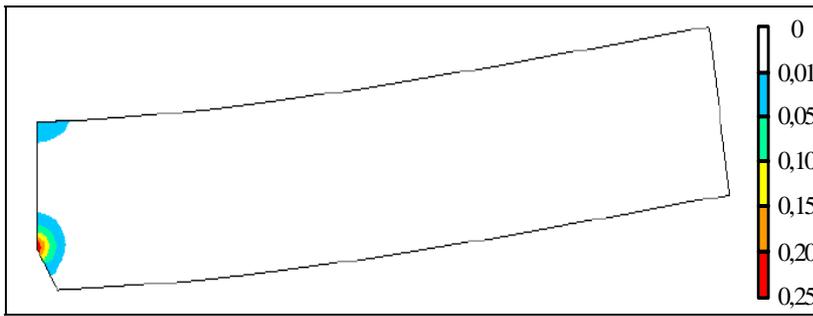


figure 3 - Répartition de l'endommagement à l'instabilité

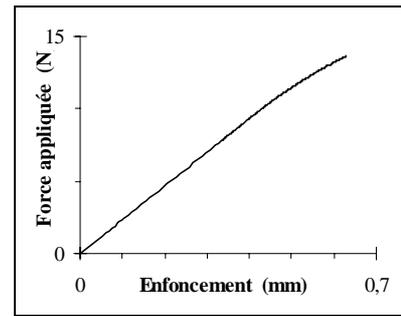


figure 4 - réponse de la poutre

3.2.2 Sensibilité de l'algorithme

En exploitant la symétrie du problème, on n'étudiera que la moitié de la structure, modélisée en contraintes planes, ce qui nous conduit à un problème d'environ 1 500 mailles linéaires, triangles et quadrangles (soit 836 degrés de liberté d'endommagement et 1814 degrés de liberté de déplacements et multiplicateurs de Lagrange associés aux conditions de liaison). Le temps calcul s'élève ici à 6 heures, sachant que le choix des paramètres de l'algorithme est loin d'être optimal, comme on va le voir ci-dessous ($r = 1, 2$ itérations internes et 2 itérations globales).

Comme précédemment, on s'intéresse à la sensibilité de l'algorithme pour l'intégration d'un pas de temps en faisant varier le paramètre de pénalisation ainsi que les nombres d'itérations internes et globales du lagrangien augmenté. Les résultats sont présentés dans le tableau 4. A la différence du problème du cylindre, l'intégration de la loi de comportement devient plus difficile à résoudre que les équations d'équilibre. Malgré tout, autoriser des itérations internes (ITERATIONS_INTERNES) n'apporte rien. En revanche, il est préférable d'autoriser plusieurs itérations globales de lagrangien augmenté (ITERATIONS_LAGRANGIEN) pour une itération d'équilibre. Enfin, un paramètre de pénalisation $r = 5$ semble un choix optimal.

Pénalisation r	Boucles internes ITERATIONS_INTERNES	Boucles externes ITERATIONS_LAGRANGIEN	Temps CPU (s)	itérations du lagrangien	itérations pour l'équilibre
1	1	10	233	226	24
5	1	10	105	43	7
10	1	10	113	49	22
1	1	2	270	230	115
1	2	2	373	230	115
1	5	2	672	230	115
1	1	2	270	230	115
1	1	5	243	228	46
1	1	10	233	226	24

tableau 4 - Sensibilité de l'algorithme pour le problème d'une poutre en flexion trois points

Pour cet exemple de structure, l'intégration de la loi de comportement est suffisamment délicate pour rendre significative une étude de la vitesse de convergence de l'algorithme. Les résultats sont portés sur la figure 5 pour deux valeurs de r : la convergence est géométrique.

$$R_N \sim R^0 e^{-aN}$$

N nombre d'itérations

R_N résidu après N itérations

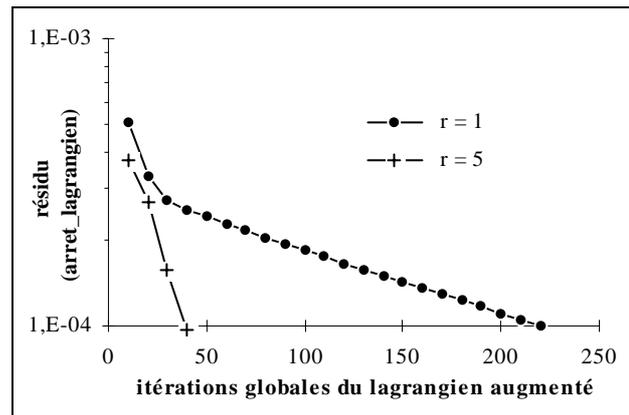


figure 5 - convergence du lagrangien augmenté

En définitive, adopter un algorithme de lagrangien augmenté apparaît comme un compromis acceptable pour traiter l'intégration de lois de comportement à gradients. Certes, on peut regretter sa faible vitesse de convergence, encore accentuée par l'emploi de la rigidité élastique comme opérateur pour corriger les déplacements, l'opérateur tangent n'étant pas accessible. En outre, les paramètres de l'algorithme conditionnent sensiblement ses performances, alors qu'il n'existe pas un jeu de valeurs optimal, le « bon choix » dépendant de la nature du problème traité.

Malgré tout, ces problèmes de performances ne sont pas cruciaux. En effet, l'emploi de pas de temps suffisamment petits, éventuellement en lien avec une technique de pas de temps adaptatifs, permet de réaliser des calculs de structures industrielles, objectif qui n'avait pu être atteint avec des algorithmes réputés plus performants. Quant aux temps calculs, ils restent malgré tout raisonnables et permettent d'envisager à terme des calculs tridimensionnels. L'autre attrait de cet algorithme réside dans la relative aisance avec laquelle il peut être encapsulé dans un code préexistant fondé sur une méthode de Newton pour traiter les équations d'équilibre et dans la souplesse qu'il offre pour implanter de nouvelles lois de comportement à gradients, même lorsqu'elles échappent au cadre variationnel du chapitre 2 : celles-ci sont en effet introduites d'une manière similaire aux lois locales, l'adhérence à l'algorithme restant faible (prise en compte des multiplicateurs de Lagrange dans le comportement).

Avant d'observer plus avant les possibilités de cet algorithme de lagrangien augmenté à travers diverses applications, il nous reste à examiner les propriétés mathématiques de la formulation à gradients de variables internes, pour en déduire quelques pistes pour construire de « bons » potentiels, ou encore adopter des types d'éléments finis adéquats. Cette étude mathématique fait l'objet du prochain chapitre.

Quelques aspects mathématiques de la formulation en champs de variables internes

L'extension du cadre des matériaux standard généralisés aux lois de comportement à champs de variables internes se présente comme un problème variationnel et soulève un certain nombre de questions d'ordre mathématique, en lien direct avec le choix des espaces fonctionnels et des topologies associées pour ces champs de variables. Ce chapitre a pour objectif de les examiner et d'y apporter des réponses partielles.

Tout d'abord, dans le cas de lois de comportement indépendantes de la vitesse de chargement, pour lesquelles le potentiel de dissipation est positivement homogène de degré 1, convexe, semi-continu inférieur et minimal en zéro, on montre comme en dimension finie que les forces thermodynamiques appartiennent à un domaine convexe, le domaine de réversibilité, et que l'évolution des champs de variables internes obéit à la règle de normalité. Toutefois, en l'absence d'une hypothèse supplémentaire de coercivité du potentiel de dissipation, il peut ne pas exister de directions d'écoulement normal dans l'espace fonctionnel choisi, remettant en cause l'existence de solutions régulières en temps.

Outre l'équation d'écoulement, l'évolution des variables internes doit également vérifier la condition de cohérence. On montre alors qu'une approche incrémentale implicite en temps semble permettre de construire des solutions approchées qui vérifient simultanément ces deux équations.

Enfin, on examine les limites des solutions obtenues lorsque les longueurs caractéristiques du matériau tendent vers zéro. Selon les choix de potentiels, on peut ainsi retrouver des propositions antérieures de la littérature, telles que les modèles d'endommagement relaxés ou bien encore des modèles de mécanique de la rupture.

Quelques aspects mathématiques de la formulation en champs de variables internes

1. Le problème d'évolution pour les lois indépendantes du temps	77
1.1 Formulation des lois à seuil indépendantes de la vitesse de chargement.....	78
1.2 Lois locales : domaine de réversibilité, normalité et potentiel de dissipation	79
1.3 Formulation en champs : choix d'un espace fonctionnel approprié	83
1.4 Etude d'un exemple : un modèle d'endommagement fragile	89
1.5 contraintes et coercivité.....	92
2. Condition de cohérence et formulation incrémentale	98
2.1 Condition de cohérence	98
2.2 Existence de solutions à l'équation d'évolution	99
2.3 Approche de l'équation d'évolution par discrétisation implicite.....	101
2.4 Passage à la limite pour de petits pas de temps.....	103
3. Comportement asymptotique des modèles à gradients	108
3.1 Formulation de la question.....	108
3.2 Les modèles relaxés comme limite des modèles à gradients	109
3.3 Similitude avec les formulations énergétiques en mécanique de la rupture	110
4. Synthèse des résultats.....	111

Sur le plan formel, la modélisation des lois de comportement à gradients de variables internes telle qu'elle a été présentée au chapitre 2 est totalement apparentée aux modèles locaux standard généralisés traditionnels. Cependant, travailler avec des champs, donc des espaces de dimension infinie, introduit en pratique des difficultés qui n'existaient pas avec un nombre fini de variables internes. Dans ce sens, ce chapitre soulève un certain nombre de difficultés mathématiques qu'on est amené à rencontrer avec ces modèles non locaux. Précisons dès à présent que plutôt que d'apporter des réponses définitives à ces questions¹, nous avons pris le parti de chercher à exposer clairement les problèmes et fournir des pistes de réflexions à travers quelques réponses partielles.

Ces questions portent essentiellement sur trois points :

- l'analyse de l'équation d'écoulement du modèle non local, en caractérisant le sous-différentiel du potentiel de dissipation global, objet du § 1,
- le bien-fondé de la formulation incrémentale implicite pour traiter à la fois l'équation d'écoulement et la condition de cohérence, examiné au § 2
- les solutions obtenues par passage à la limite lorsque les longueurs internes de ces modèles non locaux tendent vers zéro, évoquées au § 3.

Les différents résultats obtenus sont rassemblés sous forme résumée dans la dernière partie du chapitre.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, un dernier mot quant à l'aspect bibliographique. Trois ouvrages généraux ont été abondamment employés tout au long de ce chapitre. Il s'agit de l'ouvrage d'Adams [1975] pour les définitions et propriétés relatives aux espaces de Sobolev, de la présentation des problèmes d'analyse convexe due à Ekeland et Temam [1974] et enfin des travaux de Dal Maso [1993] pour tout ce qui concerne les questions de relaxation et de Γ - convergence ou convergence en énergie.

1. Le problème d'évolution pour les lois indépendantes du temps

Cette partie a pour objectif la caractérisation du sous-différentiel du potentiel de dissipation qui fixe l'évolution des variables internes. Une telle étude a déjà été menée par Attouch et Damlamian [1977] pour des fonctionnelles de la forme :

$$D(\dot{a}) = \int_{\Omega} \Delta(\dot{a}, \nabla \dot{a}) \, dx \quad (1)$$

¹ ce qui dépasse d'ailleurs largement la compétence de l'auteur.

sous les conditions que \dot{a} appartienne à $L^2 \cap W_0^{1,1}$, Δ soit convexe et vérifie l'hypothèse de coercivité suivante :

$$\forall \rho \geq 0 \quad \exists C_\rho^1, C_\rho \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (a_\bullet, a_\nabla) \in \mathbb{R}^{d+1} \quad \Delta(a_\bullet, a_\nabla) + C_\rho^1 |a_\bullet| + C_\rho \geq \rho \|a_\nabla\| \quad (2)$$

Dans ce cas, ces auteurs montrent que le sous-différentiel de D est caractérisé par :

$$A \in \partial D(\dot{a}) \Leftrightarrow \begin{cases} A \in L^2(\Omega) & \dot{a} \in L^2(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega) \\ \exists g \in L^1(\Omega)^d & \operatorname{div} g \in L^1(\Omega) \quad \text{tq} \\ (A + \operatorname{div} g, g) \in \partial \Delta(\dot{a}, \nabla \dot{a}) & \text{p.p. } x \in \Omega \end{cases} \quad (3)$$

Cela signifie que pour une large classe de matériaux visqueux à gradients, définis par un potentiel de dissipation de la forme (1) qui vérifie la condition de coercivité (2), l'interprétation « naïve » du sous-différentiel comme un ensemble de points stationnaires ainsi que les intégrations par parties où les conditions aux bords sont exploitées de manière forte ($\dot{a} = 0$ sur $\partial\Omega$) sont justifiées :

$$\begin{aligned} \delta \int_{\Omega} A_\bullet \dot{a} + A_\nabla \nabla \dot{a} - \Delta(\dot{a}, \nabla \dot{a}) &= \int_{\Omega} \left[(A_\bullet - \operatorname{div} A_\nabla) + \operatorname{div} \frac{\partial \Delta}{\partial \dot{a}_\nabla} - \frac{\partial \Delta}{\partial \dot{a}_\bullet} \right] \delta \dot{a} = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} A + \operatorname{div} g = \frac{\partial \Delta}{\partial \dot{a}_\bullet}(\dot{a}, \nabla \dot{a}) \\ g = \frac{\partial \Delta}{\partial \dot{a}_\nabla}(\dot{a}, \nabla \dot{a}) \end{cases} &\text{ où } A = A_\bullet - \operatorname{div} A_\nabla \quad \text{tq} \quad \int_{\Omega} A_\bullet \dot{a} + A_\nabla \nabla \dot{a} = \int_{\Omega} A \dot{a} \end{cases} \quad (4) \end{aligned}$$

En revanche, outre la condition au bord portant sur le champ \dot{a} qu'il faudrait relâcher, la condition de coercivité (2) est problématique dans la mesure où elle n'est pas vérifiée lorsque D est positivement homogène de degré 1, une caractéristique des problèmes indépendants de la vitesse de chargement. C'est dorénavant ce type de problème que l'on examine.

1.1 Problématique des lois à seuil indépendantes de la vitesse de chargement

Considérons un matériau décrit par une loi de comportement locale :

- indépendante de la vitesse de chargement,
- régie par un seuil.

On choisit de décrire son état par sa déformation et un nombre fini de variables internes α , auxquelles on peut associer les forces thermodynamiques A_α , de telle sorte que la dissipation (proportionnelle au taux d'entropie interne) s'écrit :

$$D = A_\alpha \cdot \dot{\alpha} \quad (5)$$

Le second principe de la thermodynamique requiert que la dissipation soit positive. Un cadre qui permet d'assurer cette condition est celui des lois de comportement « normales associées », voir par exemple Halphen et Nguyen [1975]. Le qualificatif « normal » fait référence à la normalité de

l'écoulement par rapport à une surface dite d'écoulement, tandis que « associé » signifie que la surface d'écoulement marque aussi la frontière du domaine de réversibilité.

Plus précisément, le domaine de réversibilité K est défini via une fonction f qui dépend des forces thermodynamiques et qui est convexe et négative en zéro :

$$K = \{A_\alpha \text{ tel que } f(A_\alpha) \leq 0\} \quad (6)$$

Lorsque les forces thermodynamiques A_α appartiennent à l'intérieur de K , le comportement est non dissipatif, c'est-à-dire que les variables internes α n'évoluent pas. En revanche, elles peuvent évoluer lorsque A_α appartient à la frontière de K , selon la règle de normalité :

$$\dot{\alpha} \in C_K(A_\alpha) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } A_\alpha \in \overset{\circ}{K} \\ \{\tilde{\alpha} ; \forall \tilde{A}_\alpha \in K \quad (\tilde{A}_\alpha - A_\alpha) \cdot \tilde{\alpha} \leq 0\} & \text{si } A_\alpha \in \text{Fr}(K) \end{cases} \quad (7)$$

$C_K(A_\alpha)$ cône normal extérieur à K en A_α

Il est aussi possible d'exprimer la loi d'évolution (7) en introduisant un potentiel de dissipation Δ , fonction des vitesses d'évolution des variables internes $\dot{\alpha}$ et positivement homogène de degré 1, comme au chapitre 2. La loi d'écoulement s'écrit alors de façon équivalente :

$$A_\alpha \in \partial\Delta(\dot{\alpha}) \quad (8)$$

On peut à juste titre s'interroger si une telle équivalence entre la formulation par une loi de normalité ou bien par un potentiel de dissipation perdure lorsque le nombre de variables internes devient infini, c'est-à-dire typiquement quand les variables internes sont des champs. On cherche à répondre à cette question en commençant par rappeler les démonstrations usuelles dans le cas d'un nombre fini de variables internes. On examine alors la situation pour des champs de variables internes, en notant le rôle prépondérant que joue la coercivité du potentiel de dissipation : elle conditionne le choix de l'espace fonctionnel, dont dépend l'existence de solution au problème d'évolution, comme l'illustre un problème d'endommagement unidimensionnel. Enfin, on étudie ce qu'il advient de cette propriété de coercivité en présence de contraintes portant sur l'évolution des variables internes.

1.2 Lois locales : domaine de réversibilité, normalité et potentiel de dissipation

On s'intéresse momentanément à des lois de comportement locales, pour lesquelles les variables internes sont en nombre fini. On se propose de montrer que sous certaines hypothèses portant sur le potentiel de dissipation, les formulations en terme de loi d'écoulement normal comme en (7) ou bien en terme de potentiel de dissipation comme en (8) sont équivalentes. C'est l'objet des propositions suivantes².

² Pour distinguer les résultats mécaniques des démonstrations purement mathématiques, des notations différentes ont été adoptées. Ainsi, x et y désignent respectivement un vecteur et une forme linéaire (isomorphe à un vecteur) en dimension finie, u et G désignent un champ et une forme linéaire pour les dimensions infinies et H est une fonction à valeurs

proposition 1

Soit une fonction $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ positivement homogène de degré 1, convexe, semi-continue inférieure et minimale en zéro. Alors H^* , la transformée de Legendre - Fenchel de H , est l'indicatrice d'un convexe fermé non vide K de \mathbb{R}^n .

$$H^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in K \\ +\infty & \text{si } y \notin K \end{cases} \quad (9)$$

Démonstration

a) Détermination du problème de minimisation sous-jacent

On rappelle la définition de la transformée de Legendre - Fenchel de H :

$$H^*(y) = - \underset{\tilde{x}}{\text{Min}} [H(\tilde{x}) - y \cdot \tilde{x}]$$

En choisissant une norme de \mathbb{R}^n (elles sont toutes équivalentes), on introduit la sphère unité S :

$$S = \{x^\circ \in \mathbb{R}^n ; \|x^\circ\| = 1\}$$

Le problème de minimisation précédent peut encore s'écrire, en cherchant x sous la forme λx° et en exploitant le caractère positivement homogène de degré 1 de H :

$$\underset{(\tilde{\lambda}, \tilde{x}^\circ) \in \mathbb{R}^+ \times S}{\text{Min}} [H(\tilde{\lambda} \tilde{x}^\circ) - y \cdot \tilde{\lambda} \tilde{x}^\circ] = \underset{\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^+}{\text{Min}} \tilde{\lambda} \left[\underset{\tilde{x}^\circ \in S}{\text{Min}} (H(\tilde{x}^\circ) - y \cdot \tilde{x}^\circ) \right]$$

Comme la sphère unité **en dimension finie** est compacte et que H est semi-continue inférieure, le minimum sur S est atteint (en x°), ce qui permet de définir la fonction J^- :

$$J^- : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y \mapsto J^-(y) = \underset{\tilde{x}^\circ \in S}{\text{Min}} [H(\tilde{x}^\circ) - y \cdot \tilde{x}^\circ] = H(x^\circ) - y \cdot x^\circ \quad (10)$$

b) Définition et propriétés du domaine K

On définit alors K comme l'image réciproque de \mathbb{R}^+ par J^- :

$$K \stackrel{\text{déf}}{=} J^-(\mathbb{R}^+) = \{y \in \mathbb{R}^n ; J^-(y) \geq 0\}$$

On note que K est non vide. En effet, comme H est minimale en zéro et $H(0)=0$ car positivement homogène :

$$J^-(0) = \underset{\tilde{x}^\circ \in S}{\text{Min}} H(\tilde{x}^\circ) \geq H(0) = 0 \Rightarrow 0 \in K$$

D'autre part, on montre aisément que J^- est (uniformément) continue. En effet, soient y_1 et y_2 tels que (sans restreindre la généralité) $J^-(y_1) \leq J^-(y_2)$. Alors :

$$\begin{aligned} J^-(y_2) - J^-(y_1) &= [H(x_2^\circ) - y_2 \cdot x_2^\circ] - [H(x_1^\circ) - y_1 \cdot x_1^\circ] \\ &\leq [H(x_2^\circ) - y_2 \cdot x_2^\circ] - [H(x_1^\circ) - y_1 \cdot x_1^\circ] + [H(x_1^\circ) - y_2 \cdot x_1^\circ] - [H(x_2^\circ) - y_2 \cdot x_2^\circ] \\ &\leq (y_1 - y_2) \cdot x_1^\circ \\ &\leq \|y_1 - y_2\| \quad \text{car } \|x_1^\circ\| = 1 \end{aligned}$$

réelles de ces vecteurs ou de ces champs. C'est-à-dire que x et u sont les homologues mathématiques des variables internes α et a , y et G représentent les forces thermodynamiques associées A_α et A et H est le potentiel de dissipation Δ ou D .

Par conséquent, K , image réciproque d'un fermé par une application continue, est fermé.

Enfin, la convexité de K se démontre directement. Soient y_1 et y_2 appartenant à K , c'est-à-dire $J^-(y_1) \geq 0$ et $J^-(y_2) \geq 0$, et $0 \leq \gamma \leq 1$ un réel. On prouve que $\gamma y_1 + (1-\gamma) y_2 \in K$ car :

$$\begin{aligned} J^-(\gamma y_1 + (1-\gamma) y_2) &= \underset{\tilde{x}^\circ \in S}{\text{Min}} \left[\gamma \left(H(\tilde{x}^\circ) - y_1 \cdot \tilde{x}^\circ \right) + (1-\gamma) \left(H(\tilde{x}^\circ) - y_2 \cdot \tilde{x}^\circ \right) \right] \\ &\geq \gamma \underset{\tilde{x}^\circ \in S}{\text{Min}} \left[H(\tilde{x}^\circ) - y_1 \cdot \tilde{x}^\circ \right] + (1-\gamma) \underset{\tilde{x}^\circ \in S}{\text{Min}} \left[H(\tilde{x}^\circ) - y_2 \cdot \tilde{x}^\circ \right] \\ &\geq \gamma J^-(y_1) + (1-\gamma) J^-(y_2) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

c) Expression de H^*

Soit x° un des points de S qui réalise le minimum (10), il ne reste plus qu'à déterminer la norme de x , c'est-à-dire le multiplicateur λ . Celui-ci est donné par le problème de minimisation :

$$H^*(y) = - \underset{\lambda \geq 0}{\text{Min}} \lambda J^-(y^\circ) = \begin{cases} 0 & \text{si } J^-(y) > 0 \text{ avec } \lambda = 0 \\ 0 & \text{si } J^-(y) = 0 \text{ avec } \lambda \text{ quelconque dans } \mathbb{R}^+ \\ +\infty & \text{si } J^-(y) < 0 \text{ avec } \lambda = +\infty \end{cases}$$

H^* est donc bien l'indicatrice du convexe fermé K .

proposition 2

Soit une fonction $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ positivement homogène de degré 1, convexe, semi-continue inférieure et minimale en zéro. Alors :

$$\forall y \in K \quad x \in \partial H^*(y) \Leftrightarrow y \in \partial H(x) \Leftrightarrow H(x) = x \cdot y \quad (11)$$

En particulier, le sous-différentiel de H^* en $y = 0$ est réduit à $\{0\}$ si et seulement si H est strictement minimale en zéro.

Démonstration

Comme H est convexe et semi-continue inférieure, on a les équivalences classiques :

$$x \in \partial H^*(y) \Leftrightarrow y \in \partial H(x) \Leftrightarrow x \cdot y = H(x) + H^*(y)$$

Si en outre, y appartient à K , comme H^* est l'indicatrice de K , $H^*(y) = 0$ et on a donc bien le résultat attendu.

Par ailleurs, on en déduit que $\partial H^*(0) = \{x; H(x) = 0\}$, ce qui permet de conclure pour la stricte minimalité de H en zéro.

proposition 3

Soit une fonction $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ positivement homogène de degré 1, convexe, semi-continue inférieure et minimale en zéro. Alors il existe un convexe fermé K de \mathbb{R}^n tel que :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \quad \partial H^*(y) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } y \notin K \\ C_K(y) & \text{si } y \in K \end{cases} \quad (12)$$

$$C_K(y) \quad \text{cône normal extérieur à } K \text{ en } y : C_K(y) = \{x \in \mathbb{R}^n ; \forall \tilde{y} \in K \quad (\tilde{y} - y) \cdot x \leq 0\}$$

En outre, le cône normal :

- se réduit à $\{0\}$ quand y appartient à l'intérieur de K ,
- ne se réduit pas à $\{0\}$ quand y appartient à la frontière de K .

Démonstration

Ce résultat découle de la proposition 1. En effet, par définition du sous-différentiel :

$$\partial H^*(y) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ; \forall \tilde{y} \quad H^*(\tilde{y}) \geq H^*(y) + (\tilde{y} - y) \cdot x \right\}$$

Comme H^* est la fonction indicatrice de K non vide, si $y \notin K$ alors le sous-différentiel est vide. Et si $y \in K$, on en déduit :

$$\partial H^*(y) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ; \forall \tilde{y} \in K \quad 0 \geq (\tilde{y} - y) \cdot x \right\} = C_K(y)$$

En outre, la frontière de K , désignée par $\text{Fr}(K)$, est caractérisée par :

$$\text{Fr}(K) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n ; J^-(y) = 0 \right\} = J^-(\{0\})$$

En effet, si y appartient à la frontière de K , on peut approcher y par l'extérieur de K , et en exploitant la continuité de J^- , on en déduit que $J^-(y) \leq 0$, donc nul. Réciproquement, si $J^-(y) = 0$, alors on peut construire y' n'appartenant pas à K aussi proche de y qu'on veut, ce qui prouve que y appartient à la frontière de K . En effet, en appelant x^0 un point de S (donc non nul) qui réalise le minimum (10) pour y , on pose :

$$y' = y + \underset{\rightarrow 0^+}{\gamma} x^0 \quad \text{et} \quad J^-(y') \leq H(x^0) - y' \cdot x^0 = \underbrace{H(x^0) - y \cdot x^0}_{= J^-(y) = 0} - \underbrace{\gamma x^0 \cdot x^0}_{= \gamma > 0} < 0$$

On notera en particulier que, d'après la proposition 2, x^0 appartient alors au sous-différentiel de H^* en y , ce qui montre que celui-ci n'est pas réduit à $\{0\}$ quand y appartient à la frontière de K .

L'intérieur de K , complémentaire dans K de la frontière $\text{Fr}(K)$, est caractérisé par :

$$\overset{\circ}{K} = \left\{ y \in \mathbb{R}^n ; J^-(y) > 0 \right\} = J^-(\overset{\circ}{\mathbb{R}^{**}})$$

Du coup, quand y appartient à l'intérieur de K , alors $J^-(y) > 0$ et donc $\lambda = 0$. Le sous-différentiel se réduit à $\{0\}$.

L'application de ces résultats mathématiques aux lois d'écoulement à nombre fini de variables internes est maintenant immédiate. En effet, si le potentiel de dissipation Δ est :

- semi-continu inférieur,
- convexe,
- minimal en zéro,
- positivement homogène de degré 1,

alors exprimer l'appartenance au sous-différentiel, comme en (8) est équivalent à se donner un domaine de réversibilité convexe K et exprimer la normalité de l'écoulement comme en (7) :

$$A_\alpha \in \partial \Delta(\dot{\alpha}) \Leftrightarrow \dot{\alpha} \in \partial \Delta^*(A_\alpha) = C_K(A_\alpha)$$

$$\text{avec} \quad C_K(A_\alpha) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } A_\alpha \in \overset{\circ}{K} \\ \left\{ \tilde{\alpha} ; \forall \tilde{A}_\alpha \in K \quad (\tilde{A}_\alpha - A_\alpha) \cdot \tilde{\alpha} \leq 0 \right\} \neq \{0\} & \text{si } A_\alpha \in \text{Fr}(K) \end{cases} \quad (13)$$

En outre :

- A_α appartient nécessairement au convexe K ;
- le potentiel de dissipation mesure la dissipation : $A_\alpha \in \partial\Delta(\dot{\alpha}) \Rightarrow D = A_\alpha \cdot \dot{\alpha} = \Delta(\dot{\alpha})$
- si on souhaite interdire toute dissipation lorsque les forces thermodynamiques sont nulles, c'est-à-dire que $A_\alpha = 0$ appartient à l'intérieur de K , alors il faut choisir un potentiel de dissipation strictement minimal en zéro ;
- un choix de critère f possible pour (6) est fourni par la fonction J^- définie en (10) :

$$f(A_\alpha) = -J^-(A_\alpha)$$

1.3 Formulation en champs : choix d'un espace fonctionnel approprié

Que reste-t-il des résultats précédents lorsque les variables internes ne sont plus en nombre fini mais appartiennent à des espaces fonctionnels ? En fait, la proposition 1, à l'origine des résultats en dimension finie, repose sur une décomposition du problème de minimisation entre l'intensité de l'écoulement, c'est-à-dire le multiplicateur λ , et la direction d'écoulement, qui appartient à la sphère unité. Ce problème est bien posé car la sphère unité est compacte en dimension finie. On se propose maintenant de montrer qu'un tel résultat ne s'étend pas aux espaces fonctionnels, ce qui nous conduit à formuler le problème d'une manière différente. On cherche ensuite à dégager un certain nombre de propriétés pour la loi d'écoulement.

1.3.1 Détermination du sous-différentiel d'une fonction positivement homogène de degré 1

Pour des espaces vectoriels normés de dimension infinie, la sphère unité ne constitue plus un « bon ensemble » sur lequel poser des problèmes de minimisation. En effet, elle n'est ni compacte, ni même fermée pour la topologie faible, comme illustré dans l'exemple suivant.

Exemple

On considère l'espace de Sobolev $E = H^1(]0, 2\pi[)$ muni de sa norme usuelle et on examine la suite de fonctions u_n appartenant à la sphère unité de E :

$$u_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi(1+n^2)}} \tag{14}$$

On montre que cette suite de fonctions converge faiblement dans E vers zéro. La sphère unité n'est donc ni compacte, ni même faiblement fermée, puisque son adhérence pour la topologie faible contient zéro (qui n'est pas de norme 1 !).

Démonstration

On peut commencer par s'assurer que u_n est bien de norme 1 :

$$\|u_n\|_{H^1}^2 = \frac{1}{\pi(1+n^2)} \left[\int_0^{2\pi} \sin^2 nx \, dx + \int_0^{2\pi} n^2 \cos^2 nx \, dx \right] = \frac{\pi + \pi n^2}{\pi(1+n^2)} = 1$$

En particulier, les valeurs des fonctions sont de plus en plus faibles (avec n) parce qu'il est nécessaire de contrôler leurs gradients.

Quant à la convergence faible vers zéro, elle résulte des propriétés de convergence des coefficients de Fourier dans L^2 . En effet, soit v^* une forme linéaire appartenant au dual E^* de E . D'après le théorème de représentation de Riesz, on peut lui associer une fonction v de E telle que le produit de dualité de u_n par v^* soit égal au produit scalaire de u_n par v :

$$\forall v^* \in E^* \quad \langle v^* | u_n \rangle = v \cdot u_n = \frac{1}{\sqrt{\pi(1+n^2)}} \left[\underbrace{\int_0^{2\pi} v \sin nx}_{\xrightarrow{n \rightarrow 0} 0} + n \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{dv}{dx} \cos nx}_{\xrightarrow{n \rightarrow 0} 0} \right] \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_n \xrightarrow{E\text{-faible}} 0$$

Visiblement, la sphère unité ne possède pas les bonnes propriétés pour une démonstration analogue à celle en dimension finie. Il ne faut pas rejeter pour autant la partition entre intensité et direction de l'écoulement. Une idée relativement naturelle consiste à remplacer la sphère unité par la boule unité qui, elle, a les bonnes propriétés (convexe et fermée donc faiblement fermée), comme en témoigne la proposition suivante :

proposition 4

Soit E un espace de Banach réflexif et $J: E \rightarrow \mathbb{R}$ une application propre, convexe, semi-continue inférieure. La minimisation de J sur la boule unité de E est un problème bien posé. Plus précisément, il existe un ensemble C convexe fermé non vide de points qui réalisent le minimum de J sur la boule unité.

Démonstration

Il s'agit d'une application directe du théorème fondamental d'optimisation dans un espace de Banach réflexif : minimisation sur un convexe fermé borné d'une fonction propre convexe semi-continue inférieure pour la topologie faible. Il suffit de rappeler en outre que comme J est semi-continue inférieure et convexe, elle est donc bien semi-continue inférieure pour la topologie faible.

A présent, on dispose de tous les ingrédients pour écrire la proposition centrale de cette partie, qui caractérise la transformée de Legendre - Fenchel H^* de H , ainsi que les deux suivantes, qui précisent le sous-différentiel de H^* .

proposition 5

Soient E un espace de Banach réflexif et $H: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positivement homogène de degré 1, convexe, semi-continue inférieure et minimale en zéro. Alors H^* , la transformée de Legendre - Fenchel de H , est l'indicatrice d'un convexe fermé non vide K de E^* :

$$H^*(G) = \begin{cases} 0 & \text{si } G \in K \\ +\infty & \text{si } G \notin K \end{cases} \quad K \neq \emptyset \quad K \text{ convexe fermé} \quad (15)$$

Démonstration

La démonstration de ce théorème est calquée sur celle en dimension finie. En particulier, on exploite à nouveau une décomposition intensité / direction. Toutefois, la différence essentielle consiste à repérer la direction non plus comme un point de la **sphère unité** mais comme un point de la **boule unité**.

a) Détermination du problème de minimisation sous-jacent

On commence par définir la fonction J paramétrée par une forme linéaire G de E^* :

$$J(u; G) = H(u) - \langle G | u \rangle \quad (16)$$

Cette fonction est nulle en zéro, convexe, positivement homogène de degré 1 et semi-continue inférieure. Elle permet d'écrire la transformée de Legendre - Fenchel de H :

$$H^*(G) = - \underset{\tilde{u} \in E}{\text{Min}} J(\tilde{u}; G)$$

En décomposant u sous une forme λu° où $\lambda \geq 0$ et $u^\circ \in B(0,1)$ puis en exploitant le caractère positivement homogène de degré 1 de J , le problème de minimisation précédent peut encore s'écrire :

$$\underset{\tilde{u} \in E}{\text{Min}} J(\tilde{u}; G) = \underset{\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^+}{\text{Min}} \tilde{\lambda} \left[\underset{\tilde{u}^\circ \in B(0,1)}{\text{Min}} J(\tilde{u}^\circ; G) \right]$$

En vertu de la proposition 4, les propriétés de J permettent d'assurer le caractère bien posé du problème en direction. On peut à nouveau poser :

$$J^- : E^* \rightarrow \mathbb{R} \\ G \mapsto \underset{\tilde{u} \in B(0,1)}{\text{Min}} J(\tilde{u}; G) = \underset{\tilde{u} \in B(0,1)}{\text{Min}} H(\tilde{u}) - \langle G | \tilde{u} \rangle \quad (17)$$

En exploitant la nullité de J en zéro, on peut cependant remarquer une différence importante par rapport au problème en dimension finie : l'application J^- est **partout négative ou nulle** :

$$\forall G \in E^* \quad J^-(G) \leq J(0; G) = 0$$

En revanche, elle reste (uniformément) continue. En effet, soient G_1, G_2 deux formes linéaires de E^* et u_1°, u_2° deux points de E qui réalisent respectivement les problèmes de minimisation (17) pour G_1 et G_2 . Sans restreindre la généralité, on suppose que $J^-(G_1) \leq J^-(G_2)$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} J^-(G_2) - J^-(G_1) &= \left[H(u_2^\circ) - \langle G_2 | u_2^\circ \rangle \right] - \left[H(u_1^\circ) - \langle G_1 | u_1^\circ \rangle \right] \\ &\leq \left[H(u_2^\circ) - \langle G_2 | u_2^\circ \rangle \right] - \left[H(u_1^\circ) - \langle G_1 | u_1^\circ \rangle \right] + \left[H(u_1^\circ) - \langle G_2 | u_1^\circ \rangle \right] - \left[H(u_2^\circ) - \langle G_2 | u_2^\circ \rangle \right] \\ &\leq \|G_1 - G_2\|_{E^*} \end{aligned}$$

b) Définition et propriétés du domaine K

On définit K comme l'image réciproque de 0, domaine inclus dans E^* :

$$K = \left\{ G \in E^* ; J^-(G) = 0 \right\} = J^- (\{0\}) \quad (18)$$

A nouveau, on peut remarquer que K est non vide. En effet, comme H est minimale et nulle en zéro :

$$J^-(0) = \underset{\tilde{u}^\circ \in B(0,1)}{\text{Min}} H(\tilde{u}^\circ) = H(0) = 0 \Rightarrow 0 \in K$$

D'autre part, comme J^- est continue, K est fermé car c'est l'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Enfin, la convexité de K se démontre directement, comme en dimension finie. Soient G_1 et G_2 appartenant à K , c'est-à-dire $J^-(G_1) = 0$ et $J^-(G_2) = 0$, et $0 \leq \gamma \leq 1$ un réel :

$$\begin{aligned}
 0 &\geq J^-(\gamma G_1 + (1-\gamma)G_2) = \underset{\tilde{u}^\circ \in B(0,1)}{\text{Min}} \left[\gamma J(\tilde{u}^\circ; G_1) + (1-\gamma) J(\tilde{u}^\circ; G_2) \right] \\
 &\geq \gamma \underset{\tilde{u}^\circ \in B(0,1)}{\text{Min}} J(\tilde{u}^\circ; G_1) + (1-\gamma) \underset{\tilde{u}^\circ \in B(0,1)}{\text{Min}} J(\tilde{u}^\circ; G_2) \\
 &\geq \gamma J^-(G_1) + (1-\gamma) J^-(G_2) = 0
 \end{aligned}$$

c) Expression de H^*

u° étant fixé, il ne reste plus qu'à déterminer la norme de u , c'est-à-dire le multiplicateur λ . Celui-ci est donné par le problème de minimisation :

$$H^*(G) = -\underset{\lambda \geq 0}{\text{Min}} \lambda J^-(G) = \begin{cases} 0 & \text{si } J^-(G) = 0 \text{ avec } \lambda \text{ quelconque dans } \mathbb{R}^+ \\ +\infty & \text{si } J^-(G) < 0 \text{ avec } \lambda = +\infty \end{cases}$$

H^* est donc bien l'indicatrice de K .

proposition 6

Soient E un espace de Banach réflexif et $H: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positivement homogène de degré 1, convexe, semi-continue inférieure et minimale en zéro. Alors :

$$\forall G \in K \quad u \in \partial H^*(G) \Leftrightarrow G \in \partial H(u) \Leftrightarrow H(u) = \langle G|u \rangle \quad (19)$$

En particulier, le sous-différentiel de H^* en $G = 0$ est réduit à $\{0\}$ si et seulement si H est strictement minimale en zéro.

Démonstration

Comme H est convexe et semi-continue inférieure, on a les équivalences classiques :

$$G \in \partial H(u) \Leftrightarrow u \in \partial H^*(G) \Leftrightarrow \langle G|u \rangle = H(u) + H^*(G)$$

Si en outre, G appartient à K , comme H^* est l'indicatrice de K , $H^*(G) = 0$ et on a donc bien le résultat attendu.

Par ailleurs, on en déduit que $\partial H^*(0) = \{u; H(u) = 0\}$, ce qui permet de conclure pour la stricte minimalité de H en zéro.

proposition 7

Soient E un espace de Banach réflexif et $H: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positivement homogène de degré 1, convexe, semi-continue inférieure et minimale en zéro. Alors il existe un convexe fermé K de E^* tel que :

$$\forall G \in E^* \quad \partial H^*(G) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } G \notin K \\ C_K(G) & \text{si } G \in K \end{cases} \quad (20)$$

$$C_K(G) \text{ cône normal extérieur à } K \text{ en } G : C_K(G) = \left\{ u \in E; \forall \tilde{G} \in K \quad \langle \tilde{G} - G|u \rangle \leq 0 \right\}$$

En outre, le cône normal se réduit à $\{0\}$ quand G appartient à l'intérieur de K .

Démonstration

Ce résultat découle de la définition du sous-différentiel et du théorème précédent. En effet :

$$\partial H^*(G) = \left\{ u \in E; \forall \tilde{G} \in E^* \quad H^*(\tilde{G}) \geq H^*(G) + \langle \tilde{G} - G | u \rangle \right\}$$

Comme H^* est la fonction indicatrice de K non vide, si $G \notin K$ alors le sous-différentiel est vide. Et si $G \in K$, on en déduit :

$$\partial H^*(G) = \left\{ u \in E; \forall \tilde{G} \in K \quad 0 \geq \langle \tilde{G} - G | u \rangle \right\} = C_K(G)$$

Concernant la deuxième partie de la proposition, on considère G appartenant à l'intérieur de K et u appartenant au sous-différentiel de H^* en G (non vide car contenant 0). Alors, en vertu de la proposition 6 :

$$H(u) - \langle G | u \rangle = 0 \quad \text{car } G \in K$$

Par ailleurs, il existe alors un voisinage V de G inclus dans K . En particulier, pour toute forme linéaire G' de E^* , la forme linéaire $G + \gamma G'$ appartient à V (donc à K) pour γ positif suffisamment petit. Soit

$$\underbrace{J^-(G + \gamma G')}_{\substack{=0 \\ \text{car } G + \gamma G' \in K}} \leq J(u; G + \gamma G') = \underbrace{H(u) - \langle G | u \rangle}_{=0} - \underbrace{\gamma \langle G' | u \rangle}_{>0}$$

On en déduit immédiatement :

$$\forall G' \in E^* \quad \langle G' | u \rangle \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$$

Le sous-différentiel de H^* en G , intérieur à K , se réduit donc bien à $\{0\}$.

1.3.2 Espace fonctionnel et coercivité

Les résultats en dimensions finie et infinie sont proches. Toutefois, en dimension infinie, le cône normal peut se réduire à $\{0\}$ lorsque G est sur la frontière du domaine de réversibilité, situation exclue en dimension finie (comparer la proposition 3 à la proposition 7). Il faut bien remarquer qu'il s'agit là d'un problème épineux car il traduit généralement une perte d'existence de solutions régulières en temps, voir § 2.2. C'est pourquoi nous proposons ici un résultat qui permet de garantir l'existence de directions d'écoulement non nulles sur la frontière du domaine de réversibilité, moyennant une hypothèse de coercivité sur le potentiel de dissipation.

proposition 8

Soient E un espace de Banach réflexif et $H: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positivement homogène de degré 1, convexe, semi-continue inférieure et minimale en zéro. Si en outre, H est coercive, c'est-à-dire :

$$H(u) \xrightarrow{\|u\| \rightarrow \infty} +\infty \tag{21}$$

alors le sous-différentiel de la fonction indicatrice H^* en G n'est pas réduit à $\{0\}$ lorsque G appartient à la frontière de K .

Démonstration

On peut commencer par remarquer que la coercivité de H entraîne la **stricte minimalité** de H en 0. En effet, s'il existait u^0 non nul tel que $H(u^0) = 0$, alors la suite $u_n = n u^0$ contredirait l'hypothèse de coercivité car :

$$\|u_n\| = n \|u^0\| \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad H(u_n) = n H(u^0) = 0$$

a) lemme :

Soit (s_n) une suite de la sphère unité qui converge faiblement vers s . Alors, sous les hypothèses de la proposition, on montre que si $H(s_n)$ converge vers $H(s)$, alors s est non nul.

La démonstration est menée par l'absurde. Supposons que s est nul, donc que $H(s_n)$ tend vers 0. On définit alors la suite (u_n) par :

$$u_n = \frac{s_n}{\sqrt{H(s_n)}} \quad \text{licite car } \|s_n\|=1 \Rightarrow s_n \neq 0 \Rightarrow H(s_n) > H(0) = 0$$

Comme $H(s_n)$ tend vers 0, on en déduit immédiatement que :

$$\|u_n\| = \frac{1}{\sqrt{H(s_n)}} \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad H(u_n) = \sqrt{H(s_n)} \rightarrow 0 \quad (22)$$

On a ainsi construit une suite (u_n) qui contredit l'hypothèse de coercivité.

b) approche du sous-différentiel de H^* en G par l'extérieur.

Soit G appartenant à la frontière du domaine de réversibilité K . On peut donc approcher G par l'extérieur de K :

$$G \in \text{Fr}(K) \Rightarrow \exists (G_n) \in (E^*/K)^{\text{IN}} \quad (G_n) \text{ converge vers } G$$

On considère alors la suite (s_n) d'éléments qui réalisent les problèmes de minimisation (17) associés aux formes linéaires G_n :

$$J(s_n; G_n) = J^-(G_n) < 0 \quad (\text{d'où } s_n \neq 0)$$

En particulier, on montre aisément que les s_n appartiennent à la sphère unité :

$$\left. \begin{array}{l} J\left(\frac{s_n}{\|s_n\|}; G_n\right) \geq J(s_n; G_n) = \|s_n\| \underbrace{J\left(\frac{s_n}{\|s_n\|}; G_n\right)}_{< 0} \Rightarrow \|s_n\| \geq 1 \\ s_n \in \text{B}(0,1) \Rightarrow \|s_n\| \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \|s_n\| = 1$$

On peut maintenant montrer que cette suite admet une sous-suite extraite qui converge faiblement vers une solution du problème de minimisation (17) associé à la forme linéaire G . En effet, comme E est réflexif et (s_n) est bornée, cette dernière admet une sous-suite extraite qui converge faiblement, disons vers s . Comme l'application norme est convexe et continue, donc semi-continue inférieure pour la topologie faible, s appartient à la boule unité :

$$\|s\| \leq \liminf \|s_n\| = 1 \Rightarrow s \in \text{B}(0,1)$$

En tenant compte de la semi-continuité inférieure de H , on a :

$$H(s) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} H(s_n) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n^0 \forall n > n^0 \quad H(s) \leq H(s_n) + \varepsilon$$

En outre, étant donnée la définition de la suite G_n :

$$\begin{aligned} \langle G_n | s_n \rangle &= \underbrace{\langle G_n | s_n \rangle - \langle G | s_n \rangle}_{\|\cdot\| \leq \|G_n - G\|_{E^*} \rightarrow 0} + \underbrace{\langle G | s_n \rangle - \langle G | s \rangle}_{\rightarrow 0 \text{ (conv. faible de } s_n)} + \langle G | s \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle G | s \rangle \\ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n^0 \forall n > n^0 \quad & \left| \langle G_n | s_n \rangle - \langle G | s \rangle \right| \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (23)$$

En fait, comme s_n minimise $J(\cdot; G_n)$ sur la boule unité, et en tenant compte des deux inégalités précédentes :

$$\begin{aligned} \forall v \in \text{B}(0,1) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n^0 \forall n > n^0 \quad & H(s) - \langle G | s \rangle \leq H(s_n) - \langle G | s \rangle + \varepsilon \\ & \leq H(s_n) - \langle G_n | s_n \rangle + 2\varepsilon \\ & \leq H(v) - \langle G_n | v \rangle + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Comme v appartient à la boule unité, on a la convergence (uniforme) suivante :

$$\begin{aligned} |\langle G_n | v \rangle - \langle G | v \rangle| &\leq \|G_n - G\|_{E^*} \|v\|_E \leq \|G_n - G\|_{E^*} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \Leftrightarrow \forall v \in B(0,1) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n^0 \quad \forall n > n^0 \quad &|\langle G_n | v \rangle - \langle G | v \rangle| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Finalement, on a l'inégalité suivante :

$$\forall v \in B(0,1) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad H(s) - \langle G | s \rangle \leq H(v) - \langle G | v \rangle + 3\varepsilon$$

Par passage à la limite en ε , on montre ainsi que s est solution du problème de minimisation (17) associé à la forme linéaire G . En vertu de la proposition 6, cela signifie que s appartient au sous-différentiel de H^* en G :

$$\left. \begin{aligned} G \in K \Rightarrow J^-(G) = 0 \\ J^-(G) = H(s) - \langle G | s \rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow H(s) = \langle G | s \rangle \Leftrightarrow s \in \partial H^*(G)$$

C'est aussi vrai de tout élément de la forme λs où $\lambda \geq 0$.

c) La limite par l'extérieur est non nulle

Il reste à montrer que $H(s_n)$ tend vers $H(s)$ pour pouvoir conclure à l'aide du lemme. En fait, en exploitant les problèmes de minimisation associés à G_n et G , on obtient grâce à (23) :

$$\left\{ \begin{aligned} H(s_n) - \langle G_n | s_n \rangle &\leq H(s) - \langle G_n | s \rangle \\ H(s) - \langle G | s \rangle &\leq H(s_n) - \langle G | s_n \rangle \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} H(s_n) - H(s) &\leq \langle G_n | s_n \rangle - \langle G_n | s \rangle \rightarrow 0 \\ H(s) - H(s_n) &\leq \langle G | s \rangle - \langle G | s_n \rangle \rightarrow 0 \end{aligned} \right.$$

Le lemme prouve alors que s est non nul. Le sous-différentiel $\partial H^*(G)$ qui contient les éléments de la forme λs où $\lambda \geq 0$ n'est donc pas réduit à $\{0\}$.

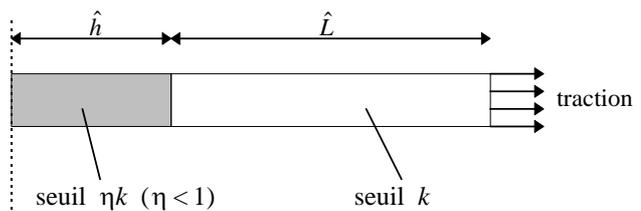
Finalement, moyennant cette condition de coercivité supplémentaire, les résultats obtenus en dimension finie s'étendent aux problèmes formulés en champs de variables internes, comme résumé dans le tableau 1, page 90. En particulier, on peut maintenant définir un cadre fonctionnel approprié comme un espace E réflexif dans lequel le potentiel de dissipation D vérifie l'hypothèse de coercivité (21). Il faut malheureusement noter qu'un tel choix n'est pas toujours possible, comme l'illustre maintenant un problème d'endommagement.

1.4 Etude d'un exemple : un modèle d'endommagement fragile

Pour illustrer l'importance de la condition de coercivité portant sur le potentiel de dissipation, on se propose d'examiner un cas de figure concret, pour lequel on montre que selon l'espace fonctionnel choisi, le cône normal peut se réduire ou non à $\{0\}$ sur la frontière du domaine de réversibilité.

1.4.1 Barreau uniaxial fragile en traction

A cet effet, on considère un barreau uniaxial, de longueur finie, composé d'un matériau qui obéit à une relation de comportement non locale à seuil (endommagement, par exemple).



On considère une loi d'évolution de la forme $A \in \partial D(\dot{a})$. On cherche le taux des variables internes \dot{a} dans un espace de Banach réflexif E et on considère que le potentiel de dissipation D est :

- semi-continu inférieur,
- convexe,
- minimal en zéro,
- positivement homogène de degré 1,

Alors, exprimer la loi d'évolution via le sous-différentiel de D comme ci-dessus est équivalent à se donner un domaine de réversibilité convexe fermé non vide K appartenant à l'espace dual E^* et exprimer la normalité de l'écoulement par :

$$A \in \partial D(\dot{a}) \Leftrightarrow \dot{a} \in \partial D^*(A) = C_K(A)$$

$$\text{avec } C_K(A) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } A \in \overset{\circ}{K} \\ \{\tilde{a} \in E \text{ tel que } \forall \tilde{A} \in K \langle \tilde{A} - A | \tilde{a} \rangle \leq 0\} & \text{si } A \in \text{Fr}(K) \end{cases} \quad (24)$$

En outre :

- A appartient nécessairement au convexe K ;
- le potentiel de dissipation mesure la dissipation : $A \in \partial D(\dot{a}) \Rightarrow D = \langle A | \dot{a} \rangle = D(\dot{a})$;
- si on souhaite interdire toute dissipation lorsque les forces thermodynamiques associées sont nulles, c'est-à-dire que $A = 0$ appartient à l'intérieur de K , alors il faut choisir un potentiel de dissipation strictement minimal en zéro ;
- si le potentiel de dissipation D est coercif, alors le cône normal ne se réduit pas à $\{0\}$ sur la frontière du domaine de réversibilité.

tableau 1 - Le problème d'évolution pour les lois indépendantes du temps

Une portion de cette barre présente un seuil plus faible en proportion η que le reste de la barre, c'est-à-dire qu'elle tendrait à dissiper plus tôt. On exerce alors un effort de traction et l'on cherche la valeur de la force thermodynamique G à partir de laquelle le comportement devient dissipatif, c'est-à-dire la frontière du domaine de réversibilité. En outre, on souhaite déterminer en ce point les directions d'écoulement possibles, autrement dit le cône normal extérieur. Pour des raisons de symétrie, on ne représentera que la moitié du barreau.

La relation de comportement est choisie de manière à correspondre au modèle d'endommagement fragile non local du chapitre 5 (sans ses contraintes portant sur l'écoulement), qui représente les mécanismes de dégradation à l'aide d'une seule variable interne, le champ

d'endommagement d . En particulier, la relation de comportement introduit une longueur caractéristique L_c , qu'on adopte comme échelle de longueur :

$$h = \frac{\hat{h}}{L_c} \quad L = \frac{\hat{L}}{L_c} \quad x = \frac{\hat{x}}{L_c} \quad (25)$$

Avec cette échelle de longueur, le potentiel de dissipation vaut :

$$D(\dot{d}) = \int_{\Omega} k(x) \sqrt{\dot{d}^2 + \nabla \dot{d}^2} = \int_0^h \eta k \sqrt{\dot{d}^2 + \nabla \dot{d}^2} + \int_h^{h+L} k \sqrt{\dot{d}^2 + \nabla \dot{d}^2} \quad (26)$$

tandis que, compte tenu de la géométrie du problème et des conditions de chargement, la force thermodynamique G associée à l'endommagement s'exprime par :

$$\langle G | \dot{d} \rangle = \int_0^{h+L} Y \dot{d} \quad \text{où } Y = \text{cst} \geq 0 \quad (27)$$

Y densité d'énergie de déformation, constante dans le barreau

Grâce à une proposition rappelée ci-dessous et démontrée dans Lorentz [1997], on montre que le potentiel de dissipation possède les bonnes propriétés pour définir l'écoulement par la donnée d'un domaine de réversibilité et une règle de normalité.

proposition 9

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d et $H: W^{1,1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$H(u) = \int_{\Omega} k(x) \sqrt{u^2 + \nabla u^2} \, dx \quad \text{avec } 0 < k_0 \leq k(x) \leq k_1 < +\infty$$

Alors, H est positivement homogène de degré 1, convexe, uniformément continue et strictement minimale en zéro.

Quant à la question de la coercivité de D , on peut montrer que D définit une norme équivalente à la norme usuelle de $W^{1,1}(\Omega)$, donc en particulier, que D est coercif dans $W^{1,1}(\Omega)$ mais pas dans $H^1(\Omega)$. En calculant les directions d'écoulement, on va maintenant mettre en évidence que le cône normal dans $H^1(\Omega)$ peut effectivement se réduire à $\{0\}$ sur la frontière du domaine de réversibilité, tandis que des directions d'écoulement non nulles existent, mais dans l'espace $SBV(\Omega)$.

1.4.2 Calcul de la direction d'écoulement et de la frontière du domaine de réversibilité

Ces calculs ont été détaillés dans Lorentz [1997]. On se contente ici de rappeler la démarche et les principaux résultats obtenus. On commence par chercher à déterminer le sous-différentiel de D^* dans l'espace fonctionnel $H^1(\Omega)$. Plus précisément, on cherche :

$$u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\} \quad \text{tel que } G \in \partial D(u) \Leftrightarrow u = \underset{\tilde{u} \in H^1(\Omega)}{\text{ArgMin}} D(\tilde{u}) - \langle G | \tilde{u} \rangle \quad (28)$$

En examinant ce problème de minimisation avec des fonctions u constantes, on peut déjà noter que G atteint la frontière du domaine de réversibilité pour une valeur de l'énergie de déformation $Y = Y_s$ avec $\eta k \leq Y_s \leq k$. Par ailleurs, on peut remarquer que sur tout intervalle I où u est non nulle, elle vérifie les équations d'Euler associées à ce problème. Sans restreindre la généralité, on suppose que I est inclus dans l'un des deux domaines où k est constant, pour ne traiter qu'ultérieurement les conditions de raccord en $x = h$. Dans ce cas, on peut exhiber une intégrale première des équations d'Euler, voir Cartan [1977] :

$$F(u, \nabla u) - \frac{\partial F}{\partial \nabla u}(u, \nabla u) \cdot \nabla u = cte \quad \text{où} \quad F(u, \nabla u) = k\sqrt{u^2 + \nabla u^2} - Yu \quad (29)$$

Moyennant un changement de variable, on sait alors construire une famille à un paramètre de solutions u dans chacun des intervalles $[0, h[$ et $]h, L]$; elles y sont continues et strictement positives. Il ne reste alors plus qu'à traiter les conditions de raccord en $x = h$ qui sont au nombre de deux : l'une résulte de la minimisation (condition naturelle d'interface) tandis que l'autre dépend explicitement de l'espace fonctionnel choisi. Ainsi, comme on cherche u dans $H^1(]0, h + L[)$, u est nécessairement continu, en particulier en $x = h$. Ces conditions déterminent alors la fonction u sur tout le domaine à un facteur multiplicatif positif près (prévisible car le problème est positivement homogène de degré 1) ainsi que le seuil d'élasticité Y_s .

On constate qu'il existe une solution non nulle à ces conditions de raccord si et seulement si le contraste des seuils locaux η est supérieur à une valeur critique η_{cr} qui dépend de la géométrie. Dans le cas contraire, la seule solution est $u = 0$, et ce pour toute valeur de Y , ce qui montre bien que le cône normal peut être réduit à $\{0\}$ sur la frontière du domaine de réversibilité qui, rappelons le, est atteinte pour $Y = Y_s \leq k$.

Du fait de la coercivité de D dans $W^{1,1}(\Omega)$, on pourrait être tenté d'examiner le problème dans cet espace. En fait, $W^{1,1}(\Omega)$ n'est pas réflexif, si bien que la proposition 8 ne s'applique pas ; on constate que même dans $W^{1,1}(\Omega)$, le cône normal se réduit à $\{0\}$. C'est pourquoi on cherche des solutions discontinues dans l'espace $SBV(\Omega)$. En effet, intuitivement, il semble qu'on puisse approcher un élément du cône normal par une suite de fonctions dont les pentes en $x = h$ sont de plus en plus fortes. Et effectivement, on constate que :

- si $\eta \geq \eta_{cr}$, le minimum est atteint par une fonction u continue strictement positive,
- si $\eta < \eta_{cr}$, le minimum est atteint par une fonction u discontinue en h et nulle sur $]h, h + L]$.

Les solutions sont représentées figure 1, page 93 pour différentes valeurs des paramètres.

1.5 contraintes et coercivité

Les résultats précédents laissent entendre que la coercivité du potentiel de dissipation dans un espace réflexif est une propriété souhaitable. Or, le potentiel de dissipation peut contenir des termes de type fonctions indicatrices qui traduisent la présence de contraintes sur l'écoulement. En particulier, si on suit la procédure d'homogénéisation décrite au chapitre 2, la positivité du taux de

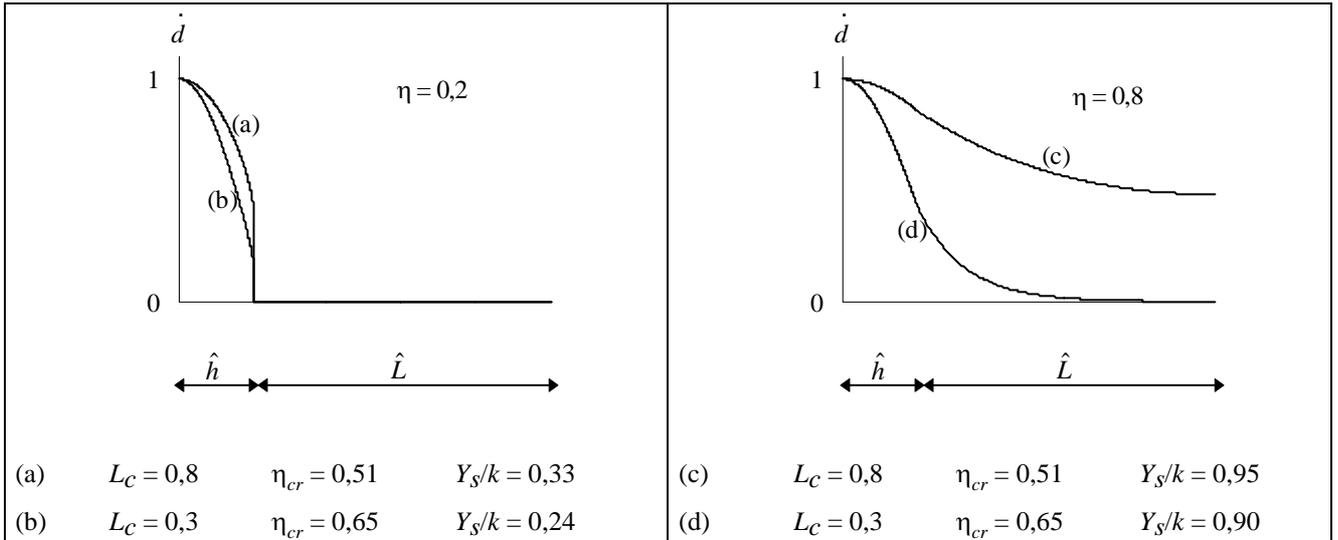


figure 1 - Exemples de fonctions d'écoulement

certaines variables microscopiques s'interprète comme une contrainte non linéaire à l'échelle macroscopique, voir chapitres 5 et 7. De manière générale, ce type de contraintes s'écrit :

$$L_b \|\nabla \dot{a}\| \leq \dot{a} \quad (30)$$

L_b paramètre du modèle

Plusieurs questions se posent. Comment interpréter la contrainte (30) en termes variationnels³ ? Quelles sont les conséquences sur la forme du potentiel de dissipation ? En particulier, quelle incidence sur l'éventuelle coercivité ? Pour élucider ces questions, on commence par étudier les propriétés qui résultent de (30) en se restreignant aux fonctions C^1 , puis on étend ces résultats aux espaces de Sobolev $W^{1,p}$ avant d'en déduire des informations sur la coercivité du potentiel.

proposition 10

Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une application C^1 et L un réel strictement positif. On a alors :

$$\forall t \geq 0 \quad L|f'(t)| \leq f(t) \quad \Rightarrow \quad \forall t \geq 0 \quad 0 \leq f(t) \leq f(0) \exp \frac{t}{L}$$

Démonstration

La minoration de f par 0 est évidente. La démonstration de la seconde inégalité est basée sur une application du lemme de Gronwall, voir par exemple Guckenheimer et Holmes [1990], dont on rappelle ici un des énoncés :

Lemme de Gronwall :

Soit u, v et c trois applications C^1 avec c positive. Alors, on a la relation suivante :

$$v(t) \leq c(t) + \int_0^t u(s)v(s)ds \quad \Rightarrow \quad v(t) \leq c(0)\exp \int_0^t u(s)ds + \int_0^t c'(s) \left[\exp \int_s^t u(\tau) d\tau \right] ds$$

³ Cette question résulte du fait que nous ne sommes pas parvenus à mener les démonstrations dans le cadre de l'interprétation intuitive « $L_b \|\nabla \dot{a}(x)\| \leq \dot{a}(x)$ p.p. $x \in \Omega$ » .

Dans notre cas, étant donnée l'inégalité de l'énoncé, on a :

$$f(t) - f(0) = \int_0^t f'(s) \, ds \leq \int_0^t |f'(s)| \, ds \leq \int_0^t \frac{1}{L} f(s) \, ds$$

Comme $f(0)$ est positif, on peut appliquer le lemme de Gronwall avec $u=1/L$, $v=f$ et $c=f(0)$ pour en déduire :

$$f(t) \leq f(0) \exp \frac{t}{L}$$

proposition 11

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 tel que $\overline{\Omega}$ soit borné, connexe et suffisamment régulier. Soit $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ une application pour laquelle il existe une constante L strictement positive telle que :

$$\forall x \in \overline{\Omega} \quad L \|\nabla \varphi(x)\| \leq \varphi(x)$$

Alors, il existe une constante C positive ne dépendant que de $\overline{\Omega}$ et de L telle que :

$$\forall x \in \overline{\Omega} \quad 0 \leq \varphi(x) \leq C \underset{\tilde{x} \in \overline{\Omega}}{\text{Min}} \varphi(\tilde{x})$$

En particulier, si φ est nulle en un point, alors elle est nulle partout.

Démonstration

Tout d'abord, précisons ce que l'on entend par $\overline{\Omega}$ connexe, borné et « suffisamment régulier ». En fait, on escompte qu'il existe une longueur maximale T telle que tout couple de points de $\overline{\Omega}$ puisse être liés par un arc $M(t) \in C^1$, normal et de longueur inférieure à T :

$$\exists T > 0 \quad \forall (x_0, x_1) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \quad \exists M \in C^1([0, +\infty[, \overline{\Omega}) \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} M(0) = x_0 \\ \exists L_M \in [0, T] \quad M(L_M) = x_1 \\ \forall t \in [0, L_M] \quad \left\| \frac{dM}{dt}(t) \right\| = 1 \end{cases} \quad (31)$$

Cela exclut des domaines bizarres de type coquille d'escargot (qui d'ailleurs posent sans doute des problèmes concernant la régularité de leurs frontières) mais recouvre en revanche l'ensemble des structures usuelles en mécanique.

Par ailleurs, en vertu du théorème de Heinz, comme $\overline{\Omega}$ est un fermé borné de \mathbb{R}^3 donc un compact et φ est continue, elle atteint son minimum dans $\overline{\Omega}$, disons en x_0 . Alors, pour tout point x de $\overline{\Omega}$, on peut construire un arc $M(t)$ qui vérifie les propriétés (31). En exploitant l'hypothèse de l'énoncé, on en déduit l'inégalité suivante portant sur $\varphi \circ M$:

$$L \left| \frac{d(\varphi \circ M)}{dt}(t) \right| = L \left| \nabla \varphi(M(t)) \cdot \frac{dM}{dt}(t) \right| \leq \underbrace{L \|\nabla \varphi(M(t))\|}_{\leq \varphi(M(t))} \underbrace{\left\| \frac{dM}{dt}(t) \right\|}_{=1} \leq \varphi \circ M(t)$$

En appliquant maintenant la proposition 10, on en déduit le résultat attendu :

$$0 \leq \varphi(x) = \varphi \circ M(L_M) \leq \varphi \circ M(0) \exp \frac{L_M}{L} \leq \underbrace{\varphi \circ M(0)}_{\varphi(x_0) = \underset{\tilde{x} \in \overline{\Omega}}{\text{Min}} \varphi(\tilde{x})} \underbrace{\exp \frac{T}{L}}_{C > 0} \leq C \underset{\tilde{x} \in \overline{\Omega}}{\text{Min}} \varphi(\tilde{x})$$

où la constante C ne dépend effectivement que de $\overline{\Omega}$ à travers T et de L .

proposition 12

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 tel que $\overline{\Omega}$ soit borné, connexe et suffisamment régulier. Soit $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ une application pour laquelle il existe une constante L strictement positive telle que :

$$\forall x \in \overline{\Omega} \quad L \|\nabla \varphi(x)\| \leq \varphi(x)$$

Alors, il existe une constante C positive telle que :

$$\forall p \geq 1 \quad \|\varphi(x)\|_{W^{1,p}} \leq C \|\varphi(x)\|_{L^1}$$

où C ne dépend que de p , $\overline{\Omega}$ et L .

Démonstration

C'est une application directe de la proposition 11. En effet, il existe une constante C' positive qui ne dépend que de $\overline{\Omega}$ et de L telle que :

$$0 \leq \varphi(x) \leq C' \underset{\tilde{x} \in \Omega}{\text{Min}} \varphi(\tilde{x})$$

On a alors la chaîne d'inégalités suivante :

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{W^{1,p}} &= \left[\int_{\Omega} |\varphi|^p + \|\nabla \varphi\|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_{\Omega} \left(\varphi^p + \frac{\varphi^p}{L^p} \right) \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{L^p} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\Omega} \left(C' \underset{\tilde{x} \in \Omega}{\text{Min}} \varphi(\tilde{x}) \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} = C' \left(1 + \frac{1}{L^p} \right)^{\frac{1}{p}} \text{Mes}(\Omega)^{\frac{1}{p}} \underset{\tilde{x} \in \Omega}{\text{Min}} |\varphi(\tilde{x})| \\ &\leq \underbrace{C' \left(1 + \frac{1}{L^p} \right)^{\frac{1}{p}} \text{Mes}(\Omega)^{\frac{1}{p}-1}}_C \|\varphi\|_{L^1} \end{aligned}$$

A ce stade, on a obtenu des propositions intéressantes concernant les fonctions C^1 qui vérifient la contrainte (30). Il reste maintenant à proposer une extension de cet ensemble de fonctions dans un espace fonctionnel plus large que $C^1(\overline{\Omega})$. Une démarche naturelle consiste à procéder par fermeture dans l'espace fonctionnel considéré. Il est alors intéressant de remarquer que cette définition reste indépendante de l'espace en question, comme le montre la proposition suivante.

proposition 13

Soit C l'ensemble des fonctions $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ qui vérifient la contrainte (30) :

$$C = \left\{ \varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \quad \text{telle que} \quad L \|\nabla \varphi\| \leq \varphi \right\}$$

Pour tout $p > 1$, on définit $K^{1,p}$ comme l'adhérence de C dans $W^{1,p}$ par rapport à la norme usuelle de cet espace. Alors, $K^{1,p}$ est indépendant de p :

$$\exists K \subset W^{1,\infty} \quad \forall p > 1 \quad K^{1,p} = K$$

Cet ensemble K est un convexe non vide, fermé dans $W^{1,p}$. En outre, les fonctions de K vérifient l'inégalité suivante :

$$\forall p > 1 \quad \exists C > 0 \quad \forall u \in K \quad \|u\|_{W^{1,p}} \leq C \|u\|_{L^1}$$

Démonstration

a) $K^{1,p}$ est un ensemble convexe fermé non vide de $W^{1,p}$

En effet, on peut remarquer que la fonction nulle appartient à C donc à $K^{1,p}$ qui n'est pas vide. Par ailleurs, $K^{1,p}$ est défini comme l'adhérence de C dans $W^{1,p}$, donc fermé. Enfin, C étant convexe car :

$$\varphi_1, \varphi_2 \in C \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \quad \left| \nabla(\gamma \varphi_1 + (1-\gamma) \varphi_2) \right| \leq \gamma |\nabla \varphi_1| + (1-\gamma) |\nabla \varphi_2| \leq \gamma \varphi_1 + (1-\gamma) \varphi_2$$

il découle que $K^{1,p}$ est aussi convexe.

b) $K^{1,p}$ ne dépend pas de $p > 1$

Pour cela, on va montrer que :

$$\forall p > 1 \text{ et } q > 1 \quad u \in K^{1,p} \Rightarrow u \in K^{1,q}$$

Par définition de $K^{1,p}$, on sait qu'il existe une suite de fonctions $\varphi_n \in C$ qui converge vers u pour la topologie forte de $W^{1,p}$. Si $q \leq p$, la conclusion est aisée car on a (Ω étant borné) :

$$u \in W^{1,p} \subset W^{1,q} \quad \text{et} \quad \|u - \varphi_n\|_{1,q} \leq C_\Omega \|u - \varphi_n\|_{1,p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Lorsque $q \geq p$, la démonstration est plus délicate. On commence par remarquer que (φ_n) est bornée dans $W^{1,p}$ car elle converge. Ensuite, en appelant M un majorant de $\|\varphi_n\|_{1,p}$ et en exploitant la majoration de la proposition 12, on peut en déduire que (φ_n) est aussi bornée dans $W^{1,q}$:

$$\|\varphi_n\|_{1,q} \leq C \|\varphi_n\|_{L^1} \leq C \|\varphi_n\|_{1,p} \leq C M$$

Comme $W^{1,q}$ est réflexif ($q > 1$), on en déduit que (φ_n) converge faiblement dans $W^{1,q}$, disons vers v . Du fait, de l'inclusion $W^{1,q} \subset W^{1,p}$, (φ_n) converge également vers v pour la topologie faible de $W^{1,p}$, et par unicité de la limite, on a $u = v$. Par conséquent, u appartient à l'adhérence de C pour la topologie faible de $W^{1,q}$. Mais comme C est convexe, son adhérence pour la topologie faible est égale à son adhérence pour la topologie forte, si bien que u appartient aussi à $K^{1,q}$.

c) Majoration par la norme L^1 .

On peut donc appeler $K = K^{1,p}$ (puisque indépendant de p). Soit u un élément de K , limite d'une suite (φ_n) de fonctions de C pour la norme de $W^{1,p}$. C'est aussi la limite de (φ_n) pour la norme de L^1 . Et, par continuité de la norme, on en déduit :

$$\forall n \quad \|\varphi_n\|_{1,p} \leq C \|\varphi_n\|_{L^1} \Rightarrow \|u\|_{1,p} \leq C \|u\|_{L^1}$$

Ainsi, on interprète la contrainte $L_b \|\nabla \dot{a}\| \leq \dot{a}$ qui résulte de l'analyse mécanique du problème par $\dot{a} \in K$. On peut alors mesurer l'apport de cette contrainte sur la coercivité du potentiel de dissipation grâce à la majoration de la proposition 13 : la coercivité dans L^1 suffit à assurer la coercivité dans $W^{1,p}$, et ce pour tout $p > 1$.

proposition 14

Soit $H: L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction coercive sur L^1 . Alors, la fonction $H + I_K$, où I_K est la fonction indicatrice de K , est coercive dans $W^{1,p}$ pour tout $p > 1$.

Démonstration

Soit u_n une suite de L^1 telle que :

$$\|u_n\|_{1,p} \rightarrow \infty$$

On considère alors deux cas. Le premier

$$\exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n \notin K$$

est trivial, car on a alors immédiatement

$$\forall n \geq n_0 \quad (H + I_K)(u_n) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (H + I_K)(u_n) = +\infty$$

Dans le cas contraire, on extrait alors la sous-suite v_k des points de (u_n) qui appartiennent à K et on a de suite :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (H + I_K)(u_n) = \liminf_{k \rightarrow \infty} H(v_k)$$

Or, d'après la proposition 13 :

$$\|v_k\|_{L^1} \geq \frac{\|v_k\|_{1,p}}{C} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty \tag{32}$$

La coercivité de H dans L^1 permet alors de conclure.

Avant de clore cette étude sur la contrainte $L_b \|\nabla \dot{a}\| \leq \dot{a}$, on peut noter une dernière propriété concernant l'existence d'une frontière libre entre une zone qui dissipe ($\dot{a} \neq 0$) et une autre qui ne dissipe pas ($\dot{a} = 0$). En fait, une telle frontière n'existe pas : s'il y a dissipation, alors tous les points de la structure dissipe.

proposition 15

On considère une fonction $u \in K$ telle qu'il existe un sous-domaine de mesure non nulle $B \subset \Omega$ sur lequel u s'annule. Alors u est nulle sur tout Ω .

Démonstration

Par définition de K , on peut approcher u par des fonctions de C . En particulier, on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi \in C \quad \|u - \varphi\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$$

Par définition de la norme de L^∞ , il existe un point x_0 de B tel que :

$$\varphi(x_0) \leq \varepsilon$$

En appliquant alors la proposition 11, on en déduit que φ est majorée par :

$$\|\varphi\|_{L^\infty} \leq C\varepsilon$$

Finalement, en revenant à l'inégalité initiale, on peut conclure :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \|u\|_{L^\infty} \leq (1+C)\varepsilon \quad \Rightarrow \quad u = 0$$

Finalement, au moins deux questions restent encore ouvertes. D'une part, on peut trouver l'interprétation de la contrainte $L_b \|\nabla \dot{a}\| \leq \dot{a}$ en termes mathématiques quelque peu arbitraire. On aurait préféré l'interpréter comme $L_b \|\nabla \dot{a}(x)\| \leq \dot{a}(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$. En fait, il est probable que ces deux choix conduisent au même ensemble K , mais la démonstration semble a

priori complexe. D'autre part, l'approximation de K par éléments finis est laissée dans l'ombre. En effet, des éléments de Lagrange usuels ne permettent pas de construire des fonctions C^1 , mais seulement C^1 par morceaux (mises à part quelques précisions techniques mineures, cela n'altérerait sans doute pas les démonstrations précédentes). Plus grave, la contrainte n'est généralement assurée qu'en certains points de l'élément. Une piste pour répondre à cette dernière question consisterait à introduire des ensembles C_ε , où ε est destiné à tendre vers zéro avec la taille des éléments finis :

$$C_\varepsilon = \left\{ \varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivables et telles que } |\nabla\varphi(x)| \leq \varphi(x) + \varepsilon \text{ pp } x \in \Omega \right\} \quad (33)$$

Mais là encore, les démonstrations semblent complexes et dépassent le cadre de ce mémoire. Malgré tout, les résultats qui viennent d'être présentés pour une contrainte de la forme $L_b \|\nabla\dot{a}\| \leq \dot{a}$, bien que partiels, restent intéressants :

- la coercivité du potentiel de dissipation (positivement homogène de degré 1) dans L^1 suffit à garantir un problème d'évolution bien posé dans $W^{1,p}$ pour tout $p > 1$, à condition bien sûr de vérifier également les hypothèses de semi-continuité inférieure, de convexité et de minimalité en zéro ;
- si dissipation il y a, alors tous les points de la structure y contribuent (pas de frontière libre entre une zone dissipative et une zone élastique).

En définitive, l'introduction d'une telle contrainte, dont on verra ultérieurement qu'elle a une signification physique liée au caractère croissant de l'évolution d'une variable interne, permet de s'affranchir de l'espace fonctionnel $SBV(\Omega)$ pour travailler avec n'importe quel espace $W^{1,p}$ ($p > 1$).

2. Condition de cohérence et formulation incrémentale

Jusqu'à présent, on s'est intéressé aux directions d'écoulement des variables internes pour un état donné du système. En revanche, on ne s'est pas encore préoccupé de construire effectivement l'histoire de ces variables internes. C'est ainsi que seules certaines évolutions \dot{a} parmi celles appartenant au cône normal extérieur sont licites : ce sont celles qui vérifie la condition dite de cohérence. La prise en compte de cette condition permet d'ailleurs de constater que lorsque le cône normal extérieur se réduit à $\{0\}$, on perd l'existence de solutions, tout au moins celles suffisamment régulières (dérivables à droite en temps). On verra enfin qu'on peut construire de manière approchée l'histoire des variables internes en adoptant une formulation incrémentale implicite du problème qui permet de vérifier à la fois l'équation d'écoulement et la condition de cohérence.

2.1 Condition de cohérence

Pour les comportements indépendants du temps, on a vu que définir une loi d'évolution par l'appartenance des forces thermodynamiques au sous-différentiel du potentiel de dissipation était équivalent à se donner un domaine de réversibilité convexe fermé K , et à écrire la loi d'évolution sous la forme :

$$\dot{a} \in C_K(A) \quad (24)$$

Cela ne permet pas de fixer complètement la vitesse d'évolution des variables internes : si $\dot{a} \in C_K(A)$, alors $\lambda \dot{a} \in C_K(A)$ pour tout $\lambda \geq 0$. Cela dit, l'évolution n'est possible que si le cône $C_K(A)$ n'est pas vide, c'est-à-dire si $A \in K$. On obtient ainsi une condition supplémentaire : tout au long de l'histoire des variables internes $a(t)$, les forces thermodynamiques $A(t)$ restent dans le domaine de réversibilité K , supposé constant tout au long de l'histoire :

$$\forall t \quad A(t) \in K \quad (34)$$

C'est ce qu'on appelle la condition de cohérence (consistency condition en anglais). Il faut bien noter que cette condition de cohérence n'est pas un ingrédient supplémentaire du modèle qu'on aurait caché jusque là, mais traduit seulement le fait que la loi d'évolution (24) est vérifiée en tout instant de l'histoire du matériau. En outre, on peut d'ores et déjà remarquer que (34) fait intervenir la définition des forces thermodynamiques, donc le potentiel énergie libre dans le cas des matériaux standard généralisés.

Prenons l'exemple d'un nombre fini de variables internes et d'un domaine de réversibilité défini par une fonction f continûment dérivable :

$$K = \{A_\alpha \text{ tel que } f(A_\alpha) \leq 0\}$$

Le cône normal est alors défini par :

$$\dot{\alpha} \in C_K(A_\alpha) \Leftrightarrow \forall \tilde{A}_\alpha \in K \quad A_\alpha \cdot \dot{\alpha} \geq \tilde{A}_\alpha \cdot \dot{\alpha} \Leftrightarrow A_\alpha \text{ réalise } \underset{\tilde{A}_\alpha \text{ tq } f(\tilde{A}_\alpha) \leq 0}{\text{Max}} \tilde{A}_\alpha \cdot \dot{\alpha}$$

On peut en préciser l'expression en appliquant le théorème de Kuhn et Tucker :

$$\dot{\alpha} \in C_K(A_\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\alpha} - \lambda \frac{df}{dA_\alpha}(A_\alpha) = 0 \\ \lambda \geq 0 \quad f(A_\alpha) \leq 0 \quad \lambda f(A_\alpha) = 0 \end{cases} \quad (35)$$

Exprimer la condition de cohérence consiste à assurer que la seconde équation de (35) est vraie à tout instant. Si le comportement est dissipatif (λ non nul) sur un intervalle de temps, alors :

$$\frac{d(f \circ A_\alpha)}{dt} = 0 \quad \text{ou encore} \quad \dot{A}_\alpha \cdot \dot{\alpha} = 0 \quad (36)$$

2.2 Existence de solutions à l'équation d'évolution

Revenons maintenant à un problème où les variables internes sont en nombre infini. On a vu qu'il peut exister des points A sur la frontière du domaine de réversibilité K pour lesquels la seule direction d'écoulement \dot{a} possible est nulle, et qu'un moyen de se prémunir d'un tel cas de figure consiste à imposer la coercivité du potentiel de dissipation. On peut néanmoins s'interroger sur les conséquences d'une direction d'écoulement nulle. En fait, un raisonnement intuitif semble indiquer que cette situation traduit généralement une perte d'existence de solutions, car la condition de cohérence ne peut plus être vérifiée. C'est l'objet de la proposition suivante :

proposition 16

On considère une histoire de déformation $\varepsilon(t)$ et de variables internes $a(t)$. On suppose que ces trajectoires sont dérivables à droite en temps. On appelle alors $A(t)$ la trajectoire des forces thermodynamiques associées, définies par :

$$A = -\frac{\partial F}{\partial a}(\varepsilon, a) \quad (37)$$

F énergie libre, fonction C^2 des champs de déformations et de variables internes

Alors, si le trajet de déformation conduit à une situation de charge à la frontière du domaine de réversibilité (voir condition (38) de la démonstration), alors l'évolution des variables internes \dot{a} ne peut être nulle.

Démonstration

On peut alors définir la vitesse d'évolution des forces thermodynamiques :

$$\dot{A} = -\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} \cdot \dot{a} - \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial \varepsilon} \cdot \dot{\varepsilon}$$

Comme on s'intéresse à un point sur la frontière de K , on suppose que A est resté à l'intérieur de K jusqu'à l'instant t_0 , a atteint la frontière de K à l'instant t_0 au point A_0 et que si les variables internes restaient nulles au-delà de t_0 , alors les forces thermodynamiques $A^E(t)$ qui en résulteraient quitteraient le domaine K . Remarquons au passage que :

$$\dot{A}^E(t_0) = -\frac{\partial^2 F}{\partial a \partial \varepsilon} \cdot \dot{\varepsilon}$$

Et, si on admet que l'évolution de variables internes en A_0 est $\dot{a} = 0$ (c'est bien le problème qui nous intéresse), alors on a également :

$$\dot{A}(t_0) = \underbrace{-\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} \cdot \dot{a}}_{=0} - \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial \varepsilon} \cdot \dot{\varepsilon} = \dot{A}^E(t_0)$$

On souhaite maintenant montrer que deux trajectoires, $A^E(t)$ qui quitte K en A_0 et $A(t)$ qui reste dans K , ne peuvent pas avoir même vitesse en A_0 . Pour cela, nous devons proposer une condition sur \dot{A}^E qui exprime le fait que la trajectoire $A^E(t)$ quitte le domaine K . En dimension finie, la stricte positivité du produit scalaire avec un vecteur normal extérieur à K serait approprié, mais malheureusement, dans le cas présent, il n'existe pas de vecteur normal extérieur (non nul)⁴ à K en A_0 . C'est pourquoi on définit un cône normal à ε près :

$$C_K^\varepsilon(A) = \left\{ a \in E \quad \text{tel que} \quad \forall \tilde{A} \in K \quad \langle \tilde{A} - A | a \rangle \leq \varepsilon \|a\|_E \|\tilde{A} - A\|_{E^*} \right\}$$

On admet sans démonstration que ce cône en A_0 n'est pas réduit à $\{0\}$ pour tout $\varepsilon > 0$ et, de manière intuitive, on se place dans un cas où l'évolution élastique $A^E(t)$ vérifie

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall a \in C_K^\varepsilon(A_0) \setminus \{0\} \quad \langle \dot{A}^E(t_0) | a \rangle \geq \varepsilon \|a\|_E \|\dot{A}^E(t_0)\|_{E^*} \quad (38)$$

ce qui exclut le cas d'un chargement neutre pour lequel $A^E(t)$ quitterait le domaine K « de manière tangente ». Moyennant un changement de ε et en ne retenant que des champs a de norme 1, la condition (38) implique :

⁴ Géométriquement (c'est-à-dire en dimension 3), c'est assez difficile à imaginer. Il faut plutôt comprendre qu'on peut approcher un vecteur normal d'aussi près que l'on veut dans l'espace de travail E , mais que les vecteurs normaux n'appartiennent pas à E mais à un espace moins régulier, comme dans le cas de la barre endommagée.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall a \in C_K^\varepsilon(A_0) \cap S(0,1) \quad \langle \dot{A}^E(t_0) | a \rangle \geq 2\varepsilon \|\dot{A}^E(t_0)\|_{E^*} + \varepsilon$$

Il suffit maintenant de substituer $\dot{A}(t_0)$ à \dot{A}^E et de revenir à la définition de $\dot{A}(t_0)$ en terme de dérivée à droite pour obtenir :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists t_1 > t_0 \quad \forall t \in]t_0, t_1[\quad \forall a \in C_K^\varepsilon(A_0) \cap S(0,1) \quad \langle A(t) - A_0 | a \rangle \geq 2\varepsilon \|A(t) - A_0\|_{E^*}$$

Etant donnée la définition du cône normal extérieur à ε près, on déduit de la relation précédente que $A(t)$ n'appartient pas à K , ce qui est faux par hypothèse.

Finalement, cette proposition remet en cause l'existence de solutions : si le cône normal extérieur se réduit à $\{0\}$ en un point de la frontière du domaine de réversibilité, alors il n'y a plus existence de solutions (dérivables à droite) dans l'espace E choisi pour les variables internes.

2.3 Approche de l'équation d'évolution par discrétisation implicite

En suivant Mialon [1986], on peut aussi chercher à approcher le problème d'évolution par une formulation discrète implicite : connaissant l'état du matériau au temps t^- , on cherche l'état au temps $t = t^- + \Delta t$ qui vérifie l'équation

$$A(t) \in \partial D\left(\frac{a - a^-}{\Delta t}\right) = \partial D(a - a^-) \quad (39)$$

où on a exploité le caractère positivement homogène de degré 1 de D pour identifier les deux sous-différentiels. On peut remarquer que les forces thermodynamiques A obtenues appartiennent au domaine de réversibilité, c'est-à-dire qu'on vérifie de manière discrète la condition de cohérence.

Dans le cadre des matériaux standard généralisés, les forces thermodynamiques associées aux variables internes dérivent de l'énergie libre par (37). Si on suppose que l'énergie libre F est sous-différentiable par rapport aux variables internes (convexité et semi-continuité inférieure suffisent à le garantir) et continue en au moins un point de son domaine de définition (ce qui permet d'inclure des fonctions indicatrices dans l'énergie libre), alors l'équation d'évolution (39) est équivalente au problème de minimisation suivant :

$$\text{Min}_{\Delta \tilde{a}} \left[F(\varepsilon^- + \Delta \varepsilon, a^- + \Delta \tilde{a}) + D(\Delta \tilde{a}) \right] \quad (40)$$

Démonstration

A $\Delta \varepsilon$ fixé, le comportement est gouverné par les deux équations suivantes :

$$-A \in \partial F(\Delta a) \quad \text{et} \quad A \in \partial D(\Delta a)$$

Comme F est continue en au moins un point de son domaine de définition, on a la propriété suivante :

$$\forall \Delta a \quad \partial(F+D)(\Delta a) = \partial F(\Delta a) + \partial D(\Delta a)$$

ce qui permet de conclure que

$$0 \in \partial(F+D)(\Delta a) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \Delta \tilde{a} \quad (F+D)(\Delta \tilde{a}) \geq (F+D)(\Delta a)$$

On verra au § 2.4 que lorsque l'incrément de déformation $\Delta \varepsilon$ tend vers zéro, la limite du rapport incrément de variables internes sur pas de temps $\Delta a / \Delta t$ (quand elle existe) est une vitesse d'évolution de variables internes qui vérifie à la fois l'équation d'évolution et la condition de cohérence du problème continu. C'est pourquoi cette formulation incrémentale implicite apparaît comme une méthode pratique pour traiter les problèmes de lois de comportement globales.

Se pose alors la question du caractère bien posé du problème de minimisation (40). En particulier, la somme énergie libre plus potentiel de dissipation $F + D$ est-elle coercive ? Bien sûr, il n'est pas possible de répondre à cette question dans l'absolu, mais pour les modèles à gradient où l'énergie libre contient un terme quadratique en gradient, la proposition suivante permet souvent de conclure dans l'espace $H^1(\Omega)$.

proposition 17

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^3 et $H: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positivement homogène de degré 1, convexe, semi-continue inférieure et strictement minimale en zéro (on peut affaiblir la minimalité stricte par H minimale en zéro, non nulle pour la fonction constante égale à 1). Alors :

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 + H(u) \xrightarrow{\|u\|_{H^1} \rightarrow \infty} +\infty \quad (41)$$

Démonstration

a) lemme

Sous les hypothèses de la proposition, on montre l'inégalité suivante :

$$\exists C > 0 \quad \forall u \in H^1(\Omega) \quad \|u\|_{L^2} \leq C [H(u) + \|\nabla u\|_{L^2}] \quad (42)$$

Pour cela, on raisonne par l'absurde. Supposons qu'on puisse construire une suite (u_n) telle que :

$$\|u_n\|_{L^2} > n [H(u_n) + \|\nabla u_n\|_{L^2}]$$

Comme H est nulle et minimale en zéro, H est une fonction positive. On en déduit en particulier que u_n est non nul, ce qui permet de construire la suite (v_n) telle que :

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2}} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} H(v_n) + \|\nabla v_n\|_{L^2} < \frac{1}{n} \\ \|v_n\|_{L^2} = 1 \end{cases}$$

On en déduit que (v_n) est bornée dans $H^1(\Omega)$ donc converge (suite extraite) faiblement vers un élément v de $H^1(\Omega)$. Examinons maintenant les propriétés de v .

- v est de norme 1 dans $L^2(\Omega)$

En effet, comme (v_n) converge faiblement dans $H^1(\Omega)$, (v_n) converge fortement vers v dans $L^2(\Omega)$, par application du théorème de Rellich, et par continuité de la norme L^2 :

$$\|v\|_{L^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{L^2} = 1$$

- ∇v est nul

Pour cela, on considère l'application :

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto \|\nabla w\|_{L^2} \end{aligned}$$

Cette application est continue dans $H^1(\Omega)$ et convexe, donc semi-continue inférieure pour la topologie faible de $H^1(\Omega)$. Il en résulte que :

$$\|\nabla v\|_{L^2} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\nabla v_n\|_{L^2} = 0$$

- $H(v)$ est nul

Comme H est convexe et semi-continue inférieure dans $H^1(\Omega)$, H est semi-continue inférieure pour la topologie faible de $H^1(\Omega)$. Comme précédemment, on en déduit :

$$0 \leq H(v) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} H(v_n) = 0$$

On peut maintenant conclure. Le gradient de v est nul, donc v est constante (presque partout). De plus, cette constante est non nulle, puisque de norme 1 dans L^2 . Ceci contredit le fait que $H(v)$ est nul.

b) coercivité

Grâce au lemme précédent, on peut maintenant conclure. Soit (u_n) une suite dont la norme dans $H^1(\Omega)$ tend vers l'infini. Alors, on a :

$$\forall M > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \|u_n\|_{L^2} \geq M \quad \text{ou} \quad \|\nabla u_n\|_{L^2} \geq M$$

Examinons successivement les deux cas :

$$\|\nabla u_n\|_{L^2} \geq M \quad \Rightarrow \quad \|\nabla u_n\|_{L^2}^2 + H(u_n) \geq M^2$$

Ou alors, en tenant compte de l'inégalité du lemme :

$$\|u_n\|_{L^2} \geq M \quad \Rightarrow \quad \|\nabla u_n\|_{L^2} + H(u_n) \geq \frac{M}{C} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \|\nabla u_n\|_{L^2}^2 + H(u_n) \geq \frac{M}{C} & \text{si } \|\nabla u_n\|_{L^2} \geq 1 \\ \|\nabla u_n\|_{L^2}^2 + H(u_n) \geq \frac{M}{C} - 1 & \text{si } \|\nabla u_n\|_{L^2} < 1 \end{cases}$$

Finalement, on peut conclure :

$$\forall M > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \|\nabla u_n\|_{L^2}^2 + H(u_n) \geq \text{Min}\left(M^2, \frac{M}{C} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \|\nabla u_n\|_{L^2}^2 + H(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Finalement, il apparaît que l'énergie libre contribue à la coercivité de l'énergie incrémentale totale $F+D$, si bien que le problème incrémental peut être bien posé pour tout pas de temps dans $H^1(\Omega)$, alors que le problème d'évolution continu ne l'est pas (pas de coercivité dans $H^1(\Omega)$ du potentiel de dissipation seul). L'approche incrémentale s'avère donc attrayante sur le plan numérique, mais la question de la limite du rapport incrément de variables internes sur pas de temps $\Delta a/\Delta t$ quand les pas de temps tendent vers zéro reste posée ; c'est l'objet de la partie suivante.

2.4 Passage à la limite pour de petits pas de temps

La formulation incrémentale implicite du problème d'évolution est censée approcher la formulation continue lorsque le pas de temps tend vers zéro. Plusieurs questions se posent. Y a-t-il effectivement convergence vers le problème continu ? Sélectionne-t-on de cette manière une évolution qui vérifie automatiquement la condition de cohérence ? Peut-on ainsi construire des solutions qui échappent à la formulation continue, en particulier lorsque celle-ci est mal posée, auquel cas la formulation incrémentale fournirait une approche régularisée du problème continu ?

Pour tenter de répondre à ces questions, on s'intéresse à un instant particulier de l'histoire du chargement, disons t^- , et on appelle η la longueur du pas de temps, c'est-à-dire que $t = t^- + \eta$. L'histoire des déformations à partir de t^- , $\varepsilon(\eta)$, coïncide évidemment avec l'histoire de déformation réelle, et en particulier :

$$\frac{d\varepsilon}{d\eta}(\eta = 0) = \dot{\varepsilon}^-$$

En résolvant les problèmes implicites (40), on construit alors une histoire virtuelle de variables internes $a(\eta)$ et de forces thermodynamiques $A(\eta)$, paramétrées par η (elles sont qualifiées de virtuelles car elles ne correspondent pas aux histoires réelles, n'intégrant pas du tout les effets d'histoire de t^- à $t = t^- + \eta$) :

$$\Delta a(\eta) = \underset{\Delta \tilde{a}}{\text{ArgMin}} \left[F(\varepsilon(\eta), a^- + \Delta \tilde{a}) + D(\Delta \tilde{a}) \right] \quad \text{et} \quad A(\eta) = -\frac{\partial F}{\partial a}(\varepsilon(\eta), a(\eta)) \quad (43)$$

En exploitant le caractère positivement homogène de degré 1 de D , on peut remarquer que les rapports incrément de variables internes sur pas de temps $\dot{a}_\eta = \Delta a / \eta$ sont solutions du problème de minimisation suivant :

$$\dot{a}_\eta \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\Delta a}{\eta} = \underset{\tilde{a}}{\text{ArgMin}} \underbrace{\frac{F(\varepsilon(\eta), a^- + \eta \tilde{a}) - F(\varepsilon^-, a^-)}{\eta} - \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(\varepsilon^-, a^-) \middle| \dot{\varepsilon}^- \right\rangle + D(\tilde{a})}_{E_\eta(\tilde{a})} \quad (44)$$

Les questions posées au début de cette partie concernent donc l'éventuelle limite de la suite \dot{a}_η . Comme il s'agit d'une suite de minimiseurs, un cadre de convergence approprié est donné par la notion de $\Gamma \square$ -convergence (convergence en énergie). Il permet de déterminer le problème dont est solution la limite des \dot{a}_η .

proposition 18

On suppose que l'énergie libre F est C^1 au sens de Fréchet par rapport au couple de variables (ε, a) et convexe par rapport aux variables internes a . On suppose en outre que le potentiel de dissipation D est convexe, semi-continu inférieur et positivement homogène de degré 1. Alors les énergies E_η définies par (44) $\Gamma \square$ -convergent (pour les topologies forte et faible) vers « l'énergie » du problème d'évolution continu :

$$\Gamma \lim_{\eta \rightarrow 0} E_\eta(\dot{a}) = D(\dot{a}) - \langle A^- | \dot{a} \rangle \quad \text{où} \quad A^- = -\frac{\partial F}{\partial a}(\varepsilon^-, a^-) \quad (45)$$

Démonstration

Commençons par déterminer la limite point par point de la suite E_η . Etant donné le caractère C^1 au sens de Fréchet de l'énergie libre, on obtient de suite :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} E_\eta(\dot{a}) = D(\dot{a}) - \langle A^- | \dot{a} \rangle$$

Une propriété de la Γ -convergence comparée à la convergence point par point permet alors d'affirmer :

$$\Gamma\text{-}\liminf_{\eta \rightarrow 0} E_\eta(\dot{a}) \leq \Gamma\text{-}\limsup_{\eta \rightarrow 0} E_\eta(\dot{a}) \leq D(\dot{a}) - \langle A^- | \dot{a} \rangle$$

Il reste maintenant à minorer $\Gamma\text{-}\liminf_{\eta \rightarrow 0} E_\eta(\dot{a})$. Pour cela, on peut commencer par remarquer que :

$$\Gamma\text{-}\liminf_{\eta \rightarrow 0} E_\eta(\dot{a}) \geq \Gamma\text{-}\liminf_{\eta \rightarrow 0} \frac{F(\varepsilon(\eta), a^- + \eta \dot{a}) - F(\varepsilon^-, a^-)}{\eta} - \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(\varepsilon^-, a^-) \middle| \dot{\varepsilon} \right\rangle + \underbrace{\Gamma\text{-}\liminf_{\eta \rightarrow 0} D(\dot{a})}_{= sc^- D(\dot{a})}$$

Comme D est semi-continue inférieure et convexe, elle est aussi semi-continue inférieure pour la topologie faible, et son enveloppe semi-continue inférieure est égale à elle-même pour la topologie forte et pour la topologie faible : $sc^- D = D$. Quant au premier terme du second membre, on tient compte du fait que l'énergie libre est convexe par rapport à a , si bien qu'on a :

$$\begin{aligned} \frac{F(\varepsilon(\eta), a^- + \eta \dot{a}) - F(\varepsilon^-, a^-)}{\eta} - \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(\varepsilon^-, a^-) \middle| \dot{\varepsilon} \right\rangle &\geq \underbrace{\frac{F(\varepsilon(\eta), a^-) - F(\varepsilon^-, a^-)}{\eta} - \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(\varepsilon^-, a^-) \middle| \dot{\varepsilon} \right\rangle}_{\text{ne dépend pas de } \dot{a}} + \underbrace{\left\langle \frac{\partial F}{\partial a}(\varepsilon(\eta), a^-) \middle| \dot{a} \right\rangle}_{\text{linéaire en } \dot{a}} \\ \Rightarrow \Gamma\text{-}\liminf_{\eta \rightarrow 0}(\dots) &\geq \Gamma\text{-}\liminf_{\eta \rightarrow 0}(\dots) + \Gamma\text{-}\liminf_{\eta \rightarrow 0}(\dots) \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre ne dépend pas de \dot{a} et tend vers zéro car F est C^1 au sens de Fréchet, donc sa Γ -liminf est nulle elle aussi. Quant au second terme, il est convexe (car linéaire) et localement équi-borné aussi bien pour la topologie forte que pour la topologie faible :

$$\frac{\partial F}{\partial a}(\varepsilon(\eta), a^-) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial a}(\varepsilon^-, a^-) \quad \Rightarrow \quad \forall \dot{a} \in E \quad \exists M \quad \forall \eta \quad \left\| \frac{\partial F}{\partial a}(\varepsilon(\eta), a^-) \right\|_{E^*} \leq \frac{M}{\|\dot{a}\|_E + 1}$$

$$\forall \dot{a} \in E \quad \forall \tilde{a} \in B(\dot{a}, 1) \quad \|\tilde{a}\|_E \leq \|\dot{a}\|_E + 1$$

$$\text{donc} \quad \forall \dot{a} \in E \quad \exists M \quad \forall \tilde{a} \in B(\dot{a}, 1) \quad \forall \eta \quad \left\langle \frac{\partial F}{\partial a}(\varepsilon(\eta), a^-) \middle| \tilde{a} \right\rangle \leq \left\| \frac{\partial F}{\partial a}(\varepsilon(\eta), a^-) \right\|_{E^*} \|\tilde{a}\|_E \leq M$$

Etant convexe et équi-borné, ce terme Γ -converge vers sa limite point par point. Finalement, on obtient donc le résultat attendu :

$$D(\dot{a}) - \langle A^- | \dot{a} \rangle \leq \Gamma\text{-}\liminf_{\eta \rightarrow 0} E_\eta(\dot{a}) \leq \Gamma\text{-}\limsup_{\eta \rightarrow 0} E_\eta(\dot{a}) \leq D(\dot{a}) - \langle A^- | \dot{a} \rangle$$

Ce résultat est important : il nous permet en effet d'affirmer que si les solutions du problème incrémental \dot{a}_η convergent, alors elles convergent vers une solution du problème en vitesse. L'approche incrémentale ne fournit donc pas de nouvelles solutions par rapport au problème continu. En revanche, lorsque la limite existe, elle vérifie également la condition de cohérence, comme le montre la proposition suivante.

proposition 19

On suppose que les forces thermodynamiques A sont C^1 au sens de Fréchet par rapport au couple de variables (ε, a) , c'est-à-dire que l'énergie libre est C^2 . Dans ce cas, si la suite \dot{a}_η converge faiblement vers \dot{a}^- dans E , alors \dot{A}_η converge faiblement vers \dot{A}^- dans E^* :

$$\dot{A}_\eta = \frac{A(\varepsilon(\eta), a(\eta)) - A^-}{\eta} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \dot{A}^- = \frac{\partial A}{\partial \varepsilon}(\varepsilon^-, a^-) \cdot \dot{\varepsilon}^- + \frac{\partial A}{\partial a}(\varepsilon^-, a^-) \cdot \dot{a}^- \quad (46)$$

Démonstration

a) lemme

Soient E un espace de Banach réflexif, L une application linéaire continue de E dans E^* et u_n une suite de E qui converge faiblement vers u . Alors $L \cdot u_n$ converge faiblement dans E^* vers $L \cdot u$.

En effet, comme u_n converge faiblement, elle est bornée ; $L \cdot u_n$ aussi, puisque L est continue. Donc $L \cdot u_n$ converge faiblement, disons vers v . Il reste maintenant à montrer que $v = L \cdot u$. A cet effet, on va évaluer la quantité suivante :

$$\forall w \in E \quad \langle L \cdot u - v | w \rangle = \langle L \cdot u - L \cdot u_n | w \rangle + \langle L \cdot u_n - v | w \rangle$$

Dans le second membre, le second terme converge vers 0 car $L \cdot u_n$ converge faiblement dans E^* vers v . Quant au premier terme, il suffit de considérer la forme linéaire continue de E $u \mapsto \langle L \cdot u | w \rangle$. Comme u_n converge faiblement vers u , on a par définition de la topologie faible :

$$\langle L \cdot u_n | w \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle L \cdot u | w \rangle$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\forall w \in E \quad \langle L \cdot u - v | w \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L \cdot u = v$$

b) démonstration de la proposition

Comme A est C^1 au sens de Fréchet en (ε^-, a^-) , on peut écrire un développement limité à l'ordre 1 de A autour de ce point :

$$A(\varepsilon, a) = A^- + \frac{\partial A}{\partial \varepsilon} \Big|_- \cdot (\varepsilon - \varepsilon^-) + \frac{\partial A}{\partial a} \Big|_- \cdot (a - a^-) + o\left(\|\varepsilon - \varepsilon^-\| + \|a - a^-\|_E\right)$$

En exploitant le développement limité précédent pour la suite $(\varepsilon(\eta), a(\eta))$, on obtient alors :

$$\frac{A(\varepsilon(\eta), a(\eta)) - A^-}{\eta} = \frac{\partial A}{\partial \varepsilon} \Big|_- \cdot \frac{\varepsilon(\eta) - \varepsilon^-}{\eta} + \frac{\partial A}{\partial a} \Big|_- \cdot \frac{a(\eta) - a^-}{\eta} + o\left(\left\|\frac{\varepsilon(\eta) - \varepsilon^-}{\eta}\right\| + \left\|\frac{a(\eta) - a^-}{\eta}\right\|_E\right)$$

La dérivée de A par rapport à ε en (ε^-, a^-) est une application linéaire continue. Etant donnée la définition de $\varepsilon(\eta)$, on en déduit :

$$\frac{\varepsilon(\eta) - \varepsilon^-}{\eta} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \dot{\varepsilon}^- \quad \text{donc} \quad \frac{\partial A}{\partial \varepsilon} \Big|_- \cdot \frac{\varepsilon(\eta) - \varepsilon^-}{\eta} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial A}{\partial \varepsilon} \Big|_- \cdot \dot{\varepsilon}^-$$

De même, la dérivée de A par rapport à a en (ε^-, a^-) est une application linéaire continue de E dans E^* . En appliquant le résultat du lemme, on obtient :

$$\frac{a(\eta) - a^-}{\eta} \xrightarrow[\text{faible}]{\eta \rightarrow 0} \dot{a}^- \quad \text{donc} \quad \frac{\partial A}{\partial a} \Big|_- \cdot \frac{a(\eta) - a^-}{\eta} \xrightarrow[\text{faible}]{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial A}{\partial a} \Big|_- \cdot \dot{a}^-$$

Enfin, les deux suites précédemment évoquées étant convergentes donc bornées, le terme en $o(\dots)$ tend vers zéro, si bien qu'on a le résultat attendu.

La succession de problèmes incrémentaux lorsque le pas de temps tend vers zéro permet donc de construire une évolution virtuelle de variables internes telle que :

- d'une part, les forces thermodynamiques associées virtuelles $A(\eta)$ restent dans le domaine de réversibilité, c'est-à-dire vérifient la condition de cohérence,

- et d'autre part, la tangente à la trajectoire de ces forces thermodynamiques virtuelles $\lim \dot{A}_n$ coïncide avec la tangente à la trajectoire des forces thermodynamiques réelles \dot{A}^- .

Cela signifie que le taux de variables internes sélectionné par la suite des problèmes incrémentaux vérifie la condition de cohérence.

En définitive, comme en dimension finie, deux équations décrivent l'évolution des variables internes :

- La direction d'écoulement \dot{a} appartient au cône normal extérieur au domaine de réversibilité en A . Cette équation ne dépend que du domaine de réversibilité, donc du potentiel de dissipation :

$$A \in \partial D(\dot{a})$$

- L'intensité de l'écoulement est fixée par la condition de cohérence qui traduit le fait que les forces thermodynamiques restent dans le domaine de réversibilité. Cette équation dépend quant à elle à la fois du potentiel de dissipation et de l'énergie libre :

$$\forall t \quad A(t) \in K$$

C'est d'ailleurs cette condition de cohérence qui remet en question l'existence de solutions (dérivables à droite) lorsque le cône normal se réduit à $\{0\}$ pour des forces thermodynamiques sur la frontière du domaine de réversibilité.

Une manière de déterminer des évolutions \dot{a} qui vérifient à la fois l'équation d'écoulement et la condition de cohérence consiste à traiter le problème de manière incrémentale en temps, en adoptant une formulation implicite. Le problème de minimisation qui en découle peut s'avérer plus facile à résoudre sur un plan pratique pour deux raisons : d'une part, il est souvent bien posé dans des espaces fonctionnels plus réguliers que pour le problème en vitesse ; d'autre part, moyennant une hypothèse de stricte convexité par rapport aux variables internes, il admet une solution unique, ce qui n'est bien sûr pas le cas du problème en vitesse en raison de son caractère positivement homogène de degré 1. On peut alors montrer que si les solutions du problème incrémental convergent avec le raffinement des pas de temps, leur limite vérifie à la fois l'équation d'écoulement et la condition de cohérence.

En revanche, deux questions restent posées :

- A quelle condition peut-on garantir que les solutions du problème incrémental convergent avec le raffinement des pas de temps. En particulier, la coercivité du potentiel de dissipation suffit-elle à assurer cette propriété ?
- On a cherché à construire des histoires de variables internes dérivables (à droite) en temps. En fait, on peut introduire un cadre plus général où la régularité en temps est moindre, du type $W^{1,p}([0, T]; E)$ où E fixe la régularité spatiale des solutions, comme chez Suquet [1982] pour la régularité en temps des solutions du problème viscoplastique. Dans un tel espace, l'existence de solutions n'est pas nécessairement remise en cause lorsque le cône normal se réduit à $\{0\}$ sur la

frontière du domaine de réversibilité ; un tel événement correspond plutôt à un point où la solution n'est pas dérivable et il faut donc comprendre l'équation d'évolution au sens « presque partout » :

$$A(t) \in \partial D(\dot{a}(t)) \quad \text{p.p.} \quad t \in]0, T[$$

Avec une telle acceptation de l'équation d'évolution, il est possible que le problème incrémental fournisse encore une solution sur tout le domaine $]0, T[\times \Omega$, mais cela reste à démontrer.

3. Comportement asymptotique des modèles à gradients

Dans les parties précédentes, on a toujours considéré les potentiels énergie libre et dissipation comme étant fixés. Ainsi, pour le cas des modèles à gradients de variables internes, les longueurs caractéristiques qui interviennent dans le modèle sont supposées être données. Cette courte partie a pour objet de proposer quelques orientations pour explorer la dépendance des solutions à ces longueurs caractéristiques lorsqu'elles tendent vers zéro. Une telle question peut s'avérer intéressante même lorsque ces longueurs reflètent la microstructure du matériau ; en effet, ces grandeurs sont généralement petites et il est donc bon de savoir à quel comportement s'attendre par passage à la limite.

3.1 Formulation de la question

L'expression « passage à la limite » est assez vague. En effet, les longueurs caractéristiques, qu'on appellera génériquement L_c , ne décrivent pas à elles seules la microstructure du matériau. D'autres paramètres, tels que seuils ou caractéristiques d'écrouissage, sont autant d'informations complémentaires sur le comportement de la microstructure. Par conséquent, il n'est pas nécessairement légitime de faire tendre L_c vers zéro indépendamment des autres grandeurs matériaux. Ainsi, Simo et al. [1993] ont proposé un modèle d'endommagement pour lequel les bandes de localisation ont une largeur nulle (ce qui correspond à $L_c = 0$) mais dans lesquelles le module d'écrouissage est un Dirac. Si on veut interpréter ce modèle comme la limite d'un modèle à gradients, il est nécessaire que L_c et le module d'écrouissage dépendent l'un de l'autre lors du passage à la limite. Néanmoins, cet aspect n'a pas été examiné et on se contente de faire varier uniquement L_c dans ce qui suit en gardant fixe les autres caractéristiques du matériau.

Pour simplifier encore davantage la question, on n'examine pas le problème continu en temps mais uniquement le problème incrémental, à pas de temps fixés (indépendamment de L_c). En revanche, on considère le problème complet, c'est-à-dire non seulement les équations d'évolution mais aussi les équations d'équilibre qui s'interprètent comme la minimisation de l'énergie potentielle (incrémentale) par rapport à l'incrément de déplacement, comme on l'a vu au chapitre 2. Si en outre on ne s'intéresse qu'aux solutions stables, au sens donné au chapitre 2, alors les incréments de déplacement et de variables internes sont des minima locaux de l'énergie potentielle :

$$(\Delta u, \Delta a)_{L_c} = \underset{(\Delta \tilde{u}, \Delta \tilde{a})}{\text{ArgMin}} \left[F_{L_c}(\Delta u, \Delta a) + D_{L_c}(\Delta u, \Delta a) - W_{\text{ext}}(\Delta u) \right] \quad (47)$$

On s'intéresse à la limite de ces minima quand L_c tend vers zéro. A nouveau, la bonne notion est celle de Γ -convergence, à la difficulté près qu'il s'agit ici de minima locaux uniquement, difficulté sur laquelle on ne s'étendra pas. Deux cas de figure permettent alors de se rattacher aux résultats de la littérature.

3.2 Les modèles relaxés comme limite des modèles à gradients

Lorsque l'énergie potentielle est une fonction décroissante de L_c (à incréments $(\Delta u, \Delta a)$ fixés), alors un théorème permet d'affirmer que cette énergie Γ -converge vers l'enveloppe semi-continue inférieure de la limite point par point. En particulier, la méthode d'homogénéisation présentée au chapitre 2 conduit à des fonctionnelles énergie potentielle dont la forme est la suivante :

$$E_{L_c}(\Delta u, \Delta a) = \int_{\Omega} \varphi(\varepsilon(u), a) + L_c^2(\dots) + \sqrt{\Delta^2(\Delta a) + L_c^2(\dots)} - W_{\text{ext}}(\Delta u) \quad (48)$$

L'énergie est donc bien décroissante avec L_c et en appliquant le résultat énoncé, on en conclut :

$$\Gamma\text{-}\lim_{L_c \rightarrow 0} E_{L_c}(\Delta u, \Delta a) = \text{sc}^- \left[\underbrace{\int_{\Omega} \varphi(\varepsilon(u), a) + \Delta(\Delta a)}_{\text{énergie potentielle locale}} - W_{\text{ext}}(\Delta u) \right] \quad (49)$$

Ainsi, lorsque L_c tend vers 0, le modèle à gradient Γ -converge vers le modèle relaxé de Francfort et Marigo [1993], voir chapitre 1, où ces derniers construisent l'enveloppe semi-continue inférieure de l'énergie par quasi-convexification des potentiels locaux. Dans le cas d'un comportement élastique fragile, ce choix mathématique de relaxation s'interprète physiquement comme un mélange fin de matière saine et endommagée. Il ne conduit à des solutions raisonnables que lorsque l'énergie est coercive : cela signifie que le matériau totalement endommagé dispose encore d'une rigidité élastique résiduelle. Dans ce cas, la suite des énergies E_{L_c} est équi-coercive (supérieure à une fonction coercive), ce qui entraîne que la suite des minima convergent (pour la topologie faible) vers un minimum du problème relaxé :

$$(\Delta u, \Delta a)_{L_c} = \underset{(\Delta \tilde{u}, \Delta \tilde{a})}{\text{ArgMin}} E_{L_c}(\Delta \tilde{u}, \Delta \tilde{a}) \xrightarrow{\text{faible}} (\Delta u, \Delta a)_{\infty} = \underset{(\Delta \tilde{u}, \Delta \tilde{a})}{\text{ArgMin}} \text{sc}^- E_{\text{loc}}(\Delta \tilde{u}, \Delta \tilde{a}) \quad (50)$$

En particulier, en présence d'une densité d'énergie strictement convexe et coercive, le problème local (qui coïncide alors avec le problème relaxé) admet une solution unique vers laquelle converge les solutions des problèmes non locaux (47) lorsque la longueur caractéristique tend vers zéro.

3.3 Similitude avec les formulations énergétiques en mécanique de la rupture

Francfort et Marigo [1998] ont également proposé une formulation en mécanique de la rupture qui permet de décrire l'apparition, l'amorçage et la propagation de fissures dans un matériau élastique fragile pour des problèmes plans. L'énergie libre est alors égale à l'énergie de déformation élastique, tandis que la dissipation est proportionnelle à la longueur de fissures nouvellement créées, le coefficient de proportionnalité en question étant la ténacité du matériau :

$$\text{Min}_{\substack{u \in V_{CA}(S) \\ S \supset S^-}} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(u) \cdot \mathbf{E} \cdot \varepsilon(u) + G_c \text{Longueur}(\Delta S) - W_{\text{ext}}(u) \right] \quad (51)$$

\mathbf{E} rigidité élastique

G_c ténacité

$V_{CA}(S)$ déplacements cinématiquement admissibles (domaine Ω et fissures S)

La difficulté technique majeure de cette formulation réside dans la dépendance de l'ensemble des champs de déplacements cinématiquement admissibles par rapport aux fissures. Elle nécessite d'introduire l'ensemble $BD(\Omega)$, qui autorise les discontinuités des déplacements, et d'évaluer ensuite la longueur de ces lignes de discontinuités. En fait, pour résoudre de manière pratique ce problème difficile, ces auteurs s'inspirent des méthodes employées en analyse d'images et régularisent le problème au moyen d'un petit paramètre, si bien que les déplacements approchés ne présentent plus de lignes de discontinuités et les fissures sont approchées par une densité de fissure α , à valeurs entre zéro et un. Ce problème approché relève donc à nouveau de la mécanique des milieux continus. La fonctionnelle énergétique qui le caractérise est la suivante, voir Bourdin [1998] :

$$E(u, \alpha) = \int_{\Omega} \left[(1 - \alpha)^2 + k_{L_c} \right] \varepsilon(u) \cdot \mathbf{E} \cdot \varepsilon(u) + G_c \int_{\tilde{\Omega}} L_c \|\nabla \alpha\|^2 + \frac{\alpha^2}{4L_c} \quad (52)$$

k_{L_c} paramètre strictement positif et petit devant L_c

$\tilde{\Omega}$ ouvert « suffisamment grand » et qui contient $\bar{\Omega}$

Elle Γ -converge vers l'énergie du problème initial, c'est-à-dire celui avec fissures. Si les bases physiques à l'origine de ce problème approché sont différentes, on peut en revanche noter les similitudes évidentes avec les formulations à gradients que l'on a présentées jusqu'à maintenant. Dans ce cas, la « densité de fissures » α peut s'interpréter comme un champ de variables internes.

En fonction de la forme de l'énergie potentielle incrémentale, le passage à la limite quand L_c tend vers zéro peut donc également conduire à un problème de mécanique de la rupture avec fissures.

4. Synthèse des résultats

Finalement, ce chapitre soulève plus de questions qu'il n'en résout. En raison de sa longueur et de sa densité, nous avons choisi d'en rappeler ici la démarche et les résultats essentiels.

Tout d'abord, dans le cadre des lois de comportement non locales, l'évolution des champs de variables internes a été définie en introduisant le sous-différentiel du potentiel de dissipation. D'où la question naturelle de la caractérisation de ce sous-différentiel. Si Attouch et Dambrin [1977] ont fourni une réponse pour les lois visqueuses, les lois de comportement indépendantes du temps, caractérisées par un potentiel de dissipation positivement homogène de degré 1, échappent quant à elles aux hypothèses de ces auteurs. C'est pourquoi nous avons cherché à montrer que les résultats classiques pour un nombre fini de variables internes subsistent dans une certaine mesure lorsqu'il s'agit de champs de variables internes, cf. tableau 1, page 90. Plus précisément, lorsque les variables internes a appartiennent à un espace de Banach réflexif E et que le potentiel de dissipation D est positivement homogène de degré 1, convexe, semi-continu inférieur et minimal en zéro, alors les forces thermodynamiques A appartiennent nécessairement à un domaine convexe fermé non vide K de E^* et la vitesse d'évolution des variables internes \dot{a} appartient au cône normal extérieur à K en A : c'est l'équation d'écoulement. Seule différence, mais de taille, avec le même problème en dimension finie, le cône normal peut se réduire au seul vecteur nul sur la frontière du domaine K , c'est-à-dire qu'il n'y a pas de direction normale à K en A qui appartienne à E . On a alors montré, d'une part, que cette situation peu intuitive existe, comme illustrée par un problème d'endommagement d'une barre § 1.4, et d'autre part, que la coercivité dans E du potentiel de dissipation permet de s'en prémunir, propriété qui permet de choisir quand c'est possible un espace fonctionnel approprié, cf. proposition 8, page 87. On a d'ailleurs vu que lorsque l'évolution des variables internes est restreinte par une contrainte de la forme $L\|\nabla\dot{a}\| \leq \dot{a}$, alors des espaces fonctionnels très réguliers, tels que $W^{1,\infty}$, permettent d'assurer cette condition de coercivité pour peu que D soit coercive dans L^1 seulement, voir § 1.5.

Cela dit, en un instant de l'histoire des variables internes, l'équation d'écoulement ne définit pas totalement leur évolution. En effet, une condition supplémentaire, dite de cohérence, exprime le fait que les forces thermodynamiques appartiennent à K en tout instant. D'ailleurs, à cause de cette condition, on n'a plus existence de solutions régulières (champs de variables internes dérivables à droite en temps) quand le cône normal se réduit à $\{0\}$ sur la frontière de K . Construire une solution nécessite donc de satisfaire à la fois l'équation d'écoulement et la condition de cohérence. Une manière élégante et pratique d'y parvenir consiste à approcher le problème continu en temps par discrétisation implicite d'ordre 1 : le problème incrémental qui en résulte s'exprime comme un problème de minimisation d'une énergie, qui, en outre, peut être bien posé dans un espace plus régulier que E , selon la forme de l'énergie libre, cf. § 2.3. Nous n'avons pas su montrer que lorsque les pas de temps tendent vers zéro, les solutions du problème incrémental convergent. En revanche, lorsque c'est le cas, elles convergent nécessairement vers une solution \dot{a} qui vérifie à la fois les

équations d'écoulement et de cohérence, voir § 2.4. Cela fait du problème incrémental une formulation opérationnelle pour résoudre ces problèmes à champs de variables internes.

Enfin, dernier volet du chapitre, le passage à la limite de cette formulation lorsque la longueur caractéristique (qui pondère les termes en gradients) tend vers zéro. En fait, tout dépend de la forme des potentiels énergie libre et dissipation, rien d'étonnant à cela. Si l'on se base sur la technique d'homogénéisation présentée au chapitre 2 pour construire ces potentiels, alors on a Γ -convergence vers les problèmes relaxés d'endommagement, déjà présentés au chapitre 1, et qui traduisent un mélange fin de matière saine et endommagée. En outre, pour des modèles locaux où la densité d'énergie est coercive et convexe, les solutions du modèle non local convergent vers la solution du modèle local, un point mis en avant dans le cahier des charges du chapitre 1. Pour d'autres formes d'énergie, on peut également tendre vers un modèle de mécanique de la rupture, où des discontinuités de déplacements (des fissures) apparaissent au sein de la structure. Bien sûr, on peut aussi ne pas converger du tout...

A ce stade, plusieurs questions restent ouvertes, parmi lesquelles la régularité des solutions en temps (imposer la dérivabilité à droite est sans doute trop restrictif) et dans ce cas l'alternative offerte par l'approche incrémentale pour franchir les points singuliers, l'étude du problème couplé comportement - équilibre ou encore l'approximation par éléments finis de ces problèmes et les questions de convergence sous-jacentes. Plutôt que de chercher à résoudre ces problèmes, d'ailleurs sans doute trop difficiles, nous avons préféré opter pour l'expérimentation numérique, gage du caractère opérationnel d'un modèle, tout en gardant présent à l'esprit les points d'ombre qui orienteront les analyses *a posteriori* de convergence.

Application à la formulation non locale d'un modèle d'endommagement fragile

Afin d'illustrer ses potentialités, on se propose d'appliquer la démarche développée lors des chapitres précédents à une loi de comportement de type élastique fragile, très simple à l'échelle microscopique mais entraînant néanmoins des phénomènes de localisation. Cela nous amène à examiner systématiquement toutes les étapes de la méthode.

Dans un premier temps, on construit les termes en gradients d'endommagement par homogénéisation de la loi de comportement microscopique. Dès ce stade apparaissent deux contraintes non linéaires qui portent sur l'endommagement et son gradient et résultent du caractère croissant et borné de l'endommagement à l'échelle microscopique.

Adoptant ensuite l'algorithme de lagrangien augmenté, on procède à l'intégration numérique de la loi de comportement non locale en résolvant un problème de minimisation à quatre variables, la valeur de l'endommagement et les trois composantes de son gradient. A cause des deux contraintes précédemment mentionnées, ce problème s'avère délicat mais un traitement systématique le réduit néanmoins à la résolution d'équations scalaires.

Enfin, moment de vérité, les premières études... Un cas uniaxial permet d'abord de s'assurer que la dépendance pathologique au maillage est bien levée. Ensuite, la simulation numérique de la réponse d'une éprouvette entaillée sollicitée en mode d'ouverture (1 300 mailles) illustre le caractère instable de la propagation de la zone endommagée, inhérent à la nature fragile du comportement, et prouve surtout que la démarche peut s'appliquer dans un contexte industriel. Toutefois, ces études soulèvent également la question des performances de l'algorithme de lagrangien augmenté, parfois décevantes en présence de mailles trop grandes par rapport à la longueur caractéristique du modèle.

Application à la formulation non locale d'un modèle d'endommagement fragile

1. Construction d'un modèle non local d'endommagement fragile	115
1.1 Relations de comportement du modèle microscopique.....	115
1.2 Formalisme standard généralisé du modèle microscopique.....	116
1.3 Introduction des termes en gradients par homogénéisation	117
2. Intégration locale de la loi de comportement.....	119
2.1 Définition du problème	119
2.2 Démarche de résolution.....	122
3. Applications	124
3.1 Traction uniaxiale d'un barreau	125
3.2 Entaille sollicitée en mode d'ouverture.....	126
4. Annexe : résolution du problème de minimisation	131
4.1 Cas des contraintes non qualifiées	131
4.2 Cas des contraintes non dérivables	132
4.3 Solution régulière du problème sans contrainte : P^{00}	134
4.4 Résolution du problème avec activation de la contrainte g_1 : P^{10}	135
4.5 Résolution du problème avec activation de la contrainte g_2 : P^{01}	135
4.6 Résolution du problème avec activation des contraintes g_1 et g_2 : P^{11}	136

La démarche de modélisation pour étendre des modèles de comportement de sorte qu'ils prennent en compte des effets non locaux, telle qu'elle a été présentée lors des chapitres précédents, peut paraître formelle. On se propose maintenant de dissiper ce sentiment en illustrant chacune des étapes de la démarche et en démontrant ses potentialités constructives.

Le point de départ est un modèle d'endommagement fragile raisonnablement simple, celui-là même qui a déjà servi de fil rouge au cours du chapitre 1. Comme tout modèle local, il ne permet pas de décrire quantitativement les phénomènes de localisation qu'entraîne le caractère adoucissant du comportement. Pour y remédier, nous enrichissons ce modèle pour prendre en compte des effets non locaux, en suivant la méthode d'homogénéisation décrite au chapitre 2 qui conduit à introduire des termes en gradients d'endommagement. Souhaitant exploiter l'algorithme de résolution par lagrangien augmenté du chapitre 3, nous sommes alors amenés à préciser l'intégration locale du comportement, la seule brique de l'algorithme qui dépend explicitement du comportement. Celle-ci, bien que similaire aux méthodes habituelles d'intégration de type return-mapping, voir Simo et Taylor [1985], demeure complexe du fait des deux contraintes non linéaires qui traduisent respectivement la croissance de l'endommagement et son caractère borné.

Finalement, deux applications numériques permettent de s'assurer que toute la démarche est effectivement opérationnelle. D'une part, sur un essai de traction uniaxiale, on vérifie que le modèle permet de décrire effectivement la formation de bandes de localisation, de manière stable par rapport à la discrétisation spatiale. D'autre part, l'analyse d'une structure entaillée sollicitée en mode d'ouverture illustre plusieurs caractéristiques saillantes du modèle, telles que l'inadéquation des interprétations locales des grandeurs mécaniques (en terme de dépassement de seuil, par exemple) et la brutalité des instabilités structurales résultant de la fragilité du matériau.

1. Construction d'un modèle non local d'endommagement fragile

1.1 Relations de comportement du modèle microscopique

Commençons par rappeler les équations du modèle de comportement élastique fragile isotrope qu'on se propose d'étudier, qui ont déjà été décrites au chapitre 1. A l'échelle microscopique, les variables qui caractérisent l'état du matériau se réduisent à la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ et l'endommagement d qui croît de manière progressive de 0 (matériau sain) à 1 (matériau totalement endommagé, à la rigidité résiduelle nulle). Ainsi, les contraintes obéissent à la loi :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(d) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{où} \quad \mathbf{E}(d) = \frac{1-d}{1+\gamma d} \mathbf{E}^0 \quad (1)$$

\mathbf{E}^0 tenseur d'élasticité isotrope initial (caractéristique du matériau)
 $\gamma > 0$ paramètre d'écroûissage (caractéristique du matériau)

Quant à l'évolution de l'endommagement, elle est gouvernée par le taux de restitution de densité d'énergie Y :

$$Y = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}'(d) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\gamma}{(1+\gamma d)^2} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}^0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

qui est astreint à demeurer dans le domaine de réversibilité défini par $Y \leq k$, ce qui nous conduit à la condition de cohérence suivante :

$$f \leq 0 \quad \dot{d} \geq 0 \quad f \dot{d} = 0 \quad \text{où} \quad f(Y) = Y - k \quad (3)$$

k seuil du domaine de réversibilité, égal à la densité d'énergie dissipée par un point matériel totalement endommagé (caractéristique du matériau).

Ce choix d'évolution de l'endommagement permet de décrire simplement un écroûissage négatif linéaire, comme illustré sur la courbe de traction uniaxiale ci-dessous.

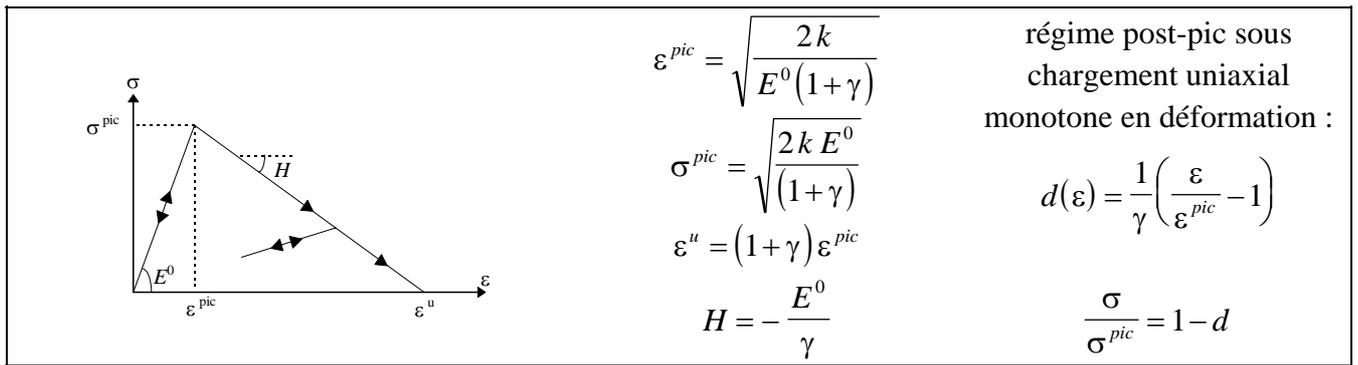


figure 1 - Modélisation d'un comportement adoucissant : traction uniaxiale

1.2 Formalisme standard généralisé du modèle microscopique

Pour introduire ce modèle d'endommagement fragile dans le cadre variationnel du chapitre 2, il faut au préalable l'exprimer dans le formalisme des matériaux standard généralisés, c'est-à-dire construire une énergie libre et un potentiel de dissipation qui conduisent aux équations (1) à (3).

La caractérisation de l'état du matériau à travers la déformation et l'endommagement nous conduit tout naturellement à adopter ces variables comme variables d'état, les forces thermodynamiques qui leur sont associées étant la contrainte et le taux de restitution de densité d'énergie. L'énergie libre se réduit alors à la seule énergie de déformation, choix légitime pour un matériau élastique fragile, et vaut :

$$\Phi_{\mu}(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}(d) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4)$$

Φ_{μ} énergie libre microscopique

Ce choix permet bien de retrouver les équations d'état (1) et (2) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Phi_{\mu}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{E}(d) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{et} \quad Y = -\frac{\partial \Phi_{\mu}}{\partial d} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}'(d) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5)$$

Quant à l'évolution de l'endommagement, elle est gouvernée par un seuil portant sur Y , c'est-à-dire la force thermodynamique associée. On sait alors que le potentiel de dissipation est une fonction positivement homogène de degré 1 qui s'exprime comme la transformée de Legendre - Fenchel de la fonction indicatrice du domaine de réversibilité, voir chapitre 4 :

$$\Delta_{\mu}(\dot{d}) = \sup_{Y \text{ tq } f(Y) \leq 0} Y \dot{d} = k \dot{d} + \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(\dot{d}) \quad (6)$$

Δ_{μ} potentiel de dissipation microscopique

On peut noter que la présence de la fonction indicatrice de \mathbb{R}^+ portant sur \dot{d} assure que l'endommagement est une variable croissante dans le temps. Par ailleurs, comme le potentiel de dissipation est positivement homogène de degré 1, il est égal à la dissipation, si bien que l'énergie dissipée pour endommager totalement un point matériel vaut :

$$E_{\text{dissipée}} = \int_{t(\text{sain})}^{t(\text{rompu})} Y \dot{d} dt = \int_{t(\text{sain})}^{t(\text{rompu})} \Delta_{\mu}(\dot{d}) dt = \int_0^1 k dd = k \quad (7)$$

Conformément à ce que l'on avait annoncé au § 1.1, k mesure effectivement la densité d'énergie dissipée par un point matériel totalement endommagé.

A ce stade, il reste encore une condition que nous n'avons pas prise en compte : l'endommagement est majoré par 1. Il est également minoré par 0, mais comme il est croissant et initialement nul, cette dernière condition est automatiquement satisfaite. Si on souhaite décrire entièrement le comportement dans le formalisme standard généralisé, il suffit d'introduire une fonction indicatrice du domaine admissible dans l'énergie libre pour prendre en compte cette contrainte :

$$\Phi_{\mu}(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}(d) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{I}_{] - \infty, 1]}(d) \quad (8)$$

1.3 Introduction des termes en gradients par homogénéisation

Maintenant que le modèle élastique fragile est décrit dans le formalisme des matériaux standard généralisés, on peut suivre la méthode d'homogénéisation du chapitre 2 pour introduire les termes en gradients d'endommagement.

Concernant le réseau des cellules, qui conditionne le voisinage de cellules sur lequel on homogénéise, on opte pour une distribution qui conduit à un voisinage isotrope, en accord avec le caractère isotrope de l'élasticité et de l'endommagement. On obtient ainsi un modèle à gradients lui

aussi isotrope. D'après les résultats concernant les voisinages isotropes (en 3D), le tenseur \mathbf{J} caractéristique du voisinage vaut :

$$\mathbf{J} = \frac{2}{13} L_b^2 \mathbf{Id} = \frac{1}{2} L_c^2 \mathbf{Id} \quad \text{avec} \quad L_c = \frac{2 L_b}{\sqrt{13}} \quad (9)$$

où L_b mesure la distance entre les sites potentiels d'amorçage de l'endommagement : il peut s'agir de la distance moyenne entre les défauts initiaux du matériau (micro-hétérogénéités, inclusions,...). En pratique, c'est un paramètre supplémentaire identifié via la réponse globale de la structure, même si l'interprétation physique précédente peut s'avérer satisfaisante lorsque le modèle microscopique repose lui-même sur des bases physiques, comme on le verra au chapitre 7 pour un mécanisme d'endommagement ductile.

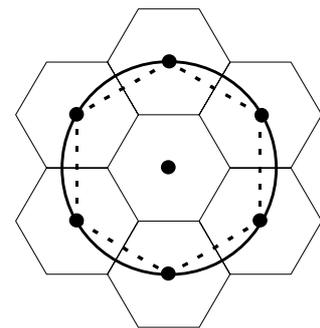
Avant de donner l'expression des potentiels macroscopiques, il nous paraît utile de revenir sur le traitement des fonctions indicatrices qui interviennent dans (6) et (8) et traduisent respectivement la croissance de l'endommagement et sa majoration par 1. Une application systématique des résultats du chapitre 2 nous conduit aux termes suivants :

$$\sum_i \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(\dot{d}_i + \mathbf{z}_i \cdot \dot{\mathbf{d}}_\nabla) \quad \text{et} \quad \sum_i \mathbf{I}_{]1-\infty, 1]}(d_i + \mathbf{z}_i \cdot \mathbf{d}_\nabla) \quad (10)$$

où i parcourt l'ensemble des cellules du voisinage. Ils signifient que l'endommagement de chaque cellule, au sens des conditions de localisation, est croissant et majoré par 1. Plutôt que de conserver chacune de ces contraintes linéaires (autant de contraintes que de cellules pour chaque terme), on préfère les approcher par une seule contrainte non linéaire pour chaque terme en tenant compte du caractère isotrope du voisinage :

$$\begin{cases} \forall i \quad \dot{d}_i + \mathbf{z}_i \cdot \dot{\mathbf{d}}_\nabla \geq 0 & \Leftrightarrow_{\text{appr.}} \quad \dot{d}_i - L_b \|\dot{\mathbf{d}}_\nabla\| \geq 0 \\ \forall i \quad d_i + \mathbf{z}_i \cdot \mathbf{d}_\nabla \leq 1 & \Leftrightarrow_{\text{appr.}} \quad d_i + L_b \|\mathbf{d}_\nabla\| \leq 1 \end{cases} \quad (11)$$

On peut donner une interprétation graphique (en 2D) de cette approximation. En théorie, on ne devrait vérifier les inégalités qu'au centre de chaque cellule (points noirs). Étant donné leur caractère linéaire, cela revient à les vérifier en chaque point de l'hexagone en pointillés. En pratique, on les vérifie en tout point du cercle (introduction de la norme) : certes plus restrictif, cela reste néanmoins proche du problème initial et assure l'isotropie du modèle à gradients.



Finalement, en suivant les résultats de la méthode d'homogénéisation, on peut construire l'énergie libre et le potentiel de dissipation macroscopiques qui dépendent de la déformation, de l'endommagement et de son gradient :

$$\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, d_{\bullet}, \mathbf{d}_{\nabla}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-d_{\bullet}}{1+\gamma d_{\bullet}} + \frac{\gamma(1+\gamma)}{(1+\gamma d_{\bullet})^3} L_c^2 \mathbf{d}_{\nabla}^2 \right) \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}^0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{I}_{]-\infty, 1]}(d_{\bullet} + L_b \|\mathbf{d}_{\nabla}\|) \quad (12)$$

$$\Delta(\dot{d}_{\bullet}, \dot{\mathbf{d}}_{\nabla}) = k \sqrt{\dot{d}_{\bullet}^2 + L_c^2 \dot{\mathbf{d}}_{\nabla}^2} + \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(\dot{d}_{\bullet} - L_b \|\dot{\mathbf{d}}_{\nabla}\|) \quad (13)$$

Grâce à la présence de la contrainte non linéaire portant sur la majoration de l'endommagement dans l'énergie libre, l'endommagement ultime $d_{\bullet} = 1$ n'est atteint que si $\mathbf{d}_{\nabla} = \mathbf{0}$, ce qui conduit bien à une rigidité résiduelle macroscopique nulle¹ (le voisinage de cellules est rompu). Ce ne serait pas le cas en l'absence de cette contrainte : l'endommagement ultime pourrait être atteint alors que le matériau dispose encore d'une réserve de rigidité. On peut ainsi mesurer dès à présent l'intérêt d'une approche microstructurale pour construire la loi de comportement à gradients, qui seule nous a permis d'introduire la contrainte en question.

2. Intégration locale de la loi de comportement

Le modèle non local d'endommagement fragile ayant été précisé, on peut désormais bénéficier du cadre variationnel du chapitre 2 ainsi que de l'algorithme de lagrangien augmenté du chapitre 3. L'interaction de ce dernier avec la loi de comportement se cantonne à une étape d'intégration locale, qui s'exprime comme un problème de minimisation non linéaire dans \mathbb{R}^4 , où les variables sont d_{\bullet} et \mathbf{d}_{∇} . Après avoir précisé ce problème au § 2.1, on présente l'ossature de la méthode de résolution au § 2.2 qui permet de déterminer quelles sont les contraintes actives. Quant au traitement numérique proprement dit, il peut se ramener dans chacun des cas envisagés à la résolution d'une équation scalaire. Toutefois, en raison de la lourdeur des équations, les détails de résolution sont reportés dans l'annexe du chapitre. Précisons aussi que la complexité de l'intégration numérique de ce modèle, bien réelle, ne relève pas spécifiquement du caractère non local de la loi de comportement : pour des lois locales compliquées (pour décrire la plasticité cyclique, par exemple), elle peut également devenir longue et difficile.

2.1 Définition du problème

Comme on l'a vu au chapitre 3, on choisit un schéma d'Euler implicite pour l'intégration des équations de comportement en temps, associé à un algorithme de lagrangien augmenté pour traiter la condition de compatibilité (non locale) :

$$\begin{cases} d_{\bullet} = D(x_g) \\ \mathbf{d}_{\nabla} = \nabla D(x_g) \end{cases} \quad \text{qui s'écrit aussi après discrétisation spatiale} \quad \bar{d} = \bar{\mathbf{B}}(x_g) \cdot \mathbf{D} \quad (14)$$

¹ Il faut aussi noter que $\mathbf{d}_{\nabla} = \mathbf{0}$ implique un gradient normal nul sur le bord de la zone totalement endommagée, ce qui semble correspondre à une condition aux limites de type bord libre (en pratique, il est difficile de les déterminer explicitement depuis la formulation variationnelle en raison du caractère non différentiable du potentiel de dissipation). La zone détruite est donc bien perçue comme une cavité par le reste de la structure.

D champ nodal d'endommagement (connu à cette étape de l'algorithme)
 $\vec{d} = (d_{\bullet}, \mathbf{d}_{\nabla})$ champs locaux de valeur et de gradient d'endommagement (inconnus)
 $\vec{\mathbf{B}}$ valeurs et gradients des fonctions de forme

Ce choix d'algorithme, dont les étapes sont rappelées figure 2, conduit à résoudre un problème de minimisation en chaque point de Gauss, ce qui permet de parler d'étape d'intégration locale. L'énergie libre macroscopique se voit ainsi « corrigée » d'une contribution algorithmique composée de deux termes : le premier, lié au traitement par dualisation de la contrainte linéaire (14), fait intervenir les multiplicateurs de Lagrange $\vec{\mu}$ correspondants (connus à ce stade), tandis que le second résulte d'une pénalisation de cette même contrainte.

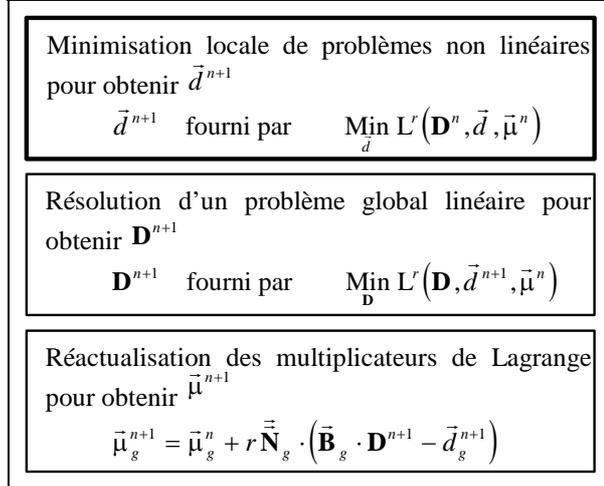


figure 2 - Etapes de l'algorithme de lagrangien augmenté

En omettant dorénavant toute référence explicite au point de Gauss traité, « l'énergie libre algorithmique » s'écrit :

$$\Phi^r(\vec{d}) = \Phi(\varepsilon, d_{\bullet}, \mathbf{d}_{\nabla}) + \vec{\mu} \cdot (\vec{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{D} - \vec{d}) + \frac{r}{2} (\vec{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{D} - \vec{d}) \cdot \vec{\mathbf{N}} \cdot (\vec{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{D} - \vec{d}) \quad (15)$$

où la métrique $\vec{\mathbf{N}}$ est censée être représentative de la courbure locale du problème et rendre adimensionnel le coefficient de pénalisation r . Rappelons à ce propos que $\vec{\mathbf{N}}$ conditionne la vitesse de convergence mais pas la solution. Nous avons opté pour un compromis qui consiste à choisir pour $\vec{\mathbf{N}}$ les termes diagonaux de la matrice hessienne de l'énergie libre macroscopique au début du pas de temps (c'est-à-dire en \vec{d}^-) :

$$\vec{\mathbf{N}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}^0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \frac{2\gamma(1+\gamma)}{(1+\gamma d_{\bullet}^-)^3} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & L_c^2 & & \\ & & L_c^2 & \\ & & & L_c^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Remarquons que l'emploi de cette métrique pondérée conduit à pénaliser différemment les termes de valeur et les termes de gradient, ce qui est nécessaire pour être dimensionnellement homogène (dans le cas contraire, un changement d'unité de longueur conduirait à un changement de pénalisation). En particulier, il en résulte les deux coefficients de pénalisation suivants :

$$r_{\bullet} = r N_{\bullet\bullet} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}^0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \frac{2\gamma(1+\gamma)}{(1+\gamma d_{\bullet}^-)^3} r \quad \text{et} \quad r_{\nabla} = r N_{\nabla\nabla} = r_{\bullet} L_c^2 \quad (17)$$

Moyennant l'introduction de cette énergie libre algorithmique, l'étape d'intégration locale s'exprime comme le problème de minimisation suivant :

$$\text{Min}_{\vec{d}} \Phi^r(\vec{d}) + \Delta(\vec{d} - \vec{d}^-) \quad (18)$$

En dépit du faible nombre de variables dans ce problème, 4 en l'occurrence, sa résolution demeure délicate, en particulier à cause des deux contraintes non linéaires qui apparaissent via les fonctions indicatrices dans l'énergie libre et le potentiel de dissipation. C'est pourquoi on choisit de simplifier cette résolution en relaxant le couplage entre d_\bullet et \mathbf{d}_∇ : la valeur de Φ intervenant dans l'expression (15) est évaluée de la manière suivante, où l'on remarquera bien que c'est la valeur de d_\bullet à l'itération précédente de l'algorithme, soit d_\bullet^n , qui est employée dans le second terme :

$$\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, d_\bullet, \mathbf{d}_\nabla) \underset{\text{calcul}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1-d_\bullet}{1+\gamma d_\bullet} + \frac{\gamma(1+\gamma)}{(1+\gamma d_\bullet^n)^3} L_c^2 \mathbf{d}_\nabla^2 \right) \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}^0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \text{I}_{]-\infty, 1]}(d_\bullet - L_b \|\mathbf{d}_\nabla\|) \quad (19)$$

Finalement, tous les éléments ont été précisés pour débiter la résolution du problème de minimisation (18). Cela dit, pour simplifier les équations (du moins l'espère-t-on), nous avons choisi de rendre explicite les deux contraintes non linéaires par l'introduction des deux fonctions seuil suivantes :

$$\begin{cases} g_1(\vec{d}) = L_b \|\Delta \mathbf{d}_\nabla\| - \Delta d_\bullet \leq 0 \\ g_2(\vec{d}) = L_b \|\mathbf{d}_\nabla\| + d_\bullet - 1 \leq 0 \end{cases} \quad \text{avec } D = \left\{ \vec{d} \mid g_1(\vec{d}) \leq 0 \text{ et } g_2(\vec{d}) \leq 0 \right\} \quad (20)$$

D domaine admissible

ce qui implique que les fonctions indicatrices sont dorénavant omises dans les expressions de l'énergie libre et du potentiel de dissipation. Ainsi, on peut récrire le problème (18) :

$$\text{Min}_{\vec{d} \text{ tq } \begin{cases} g_1 \leq 0 \\ g_2 \leq 0 \end{cases}} \left[\frac{c_1}{1+\gamma} \frac{1-d_\bullet}{1+\gamma d_\bullet} + \frac{r_\bullet}{2} d_\bullet^2 - c_2 d_\bullet + \frac{c_3}{2} \mathbf{d}_\nabla^2 - \mathbf{c}_4 \cdot \mathbf{d}_\nabla + k \sqrt{\Delta d_\bullet^2 + L_c^2 \Delta \mathbf{d}_\nabla^2} \right] \quad (21)$$

avec les notations suivantes :

$$w = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}^0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad c_1 = w(1+\gamma) > 0 \quad c_2 = r_\bullet (\vec{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{D})_\bullet + \mu_\bullet$$

$$c_3 = w L_c^2 \frac{2\gamma(1+\gamma)}{(1+\gamma d_\bullet^n)^3} + r_\nabla > 0 \quad \mathbf{c}_4 = r_\nabla (\vec{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{D})_\nabla + \mu_\nabla$$

On introduit également les dérivées de l'énergie libre algorithmique qui nous seront utiles par la suite :

$$\mathbf{A}_\bullet^r = - \frac{\partial \Phi^r}{\partial d_\bullet} = \frac{c_1}{(1+\gamma d_\bullet)^2} - r_\bullet d_\bullet + c_2 \quad (22)$$

$$\mathbf{A}_\nabla^r = - \frac{\partial \Phi_r}{\partial \mathbf{d}_\nabla} = -c_3 \mathbf{d}_\nabla + \mathbf{c}_4 \quad (23)$$

2.2 Démarche de résolution

Tout d'abord, le problème (21) est-il bien posé ? La réponse est oui, grâce à l'hypothèse (19), et se fonde sur les théorèmes généraux d'optimisation, cf. Ekeland et Temam [1974].

L'espace est de dimension finie, égale à 4. Les contraintes définissent un domaine non vide (démonstration par récurrence), fermé et convexe. La fonction à minimiser est propre, strictement convexe et continue (donc semi-continue inférieure) dans ce domaine. Par conséquent, le problème (21) admet une solution unique.

Malgré tout, la résolution de ce problème reste complexe. En effet, on peut noter que Δ n'est pas dérivable partout, de même que les contraintes g_1 et g_2 . En outre, ces contraintes peuvent ne pas être qualifiées. Rappelons que les contraintes sont dites qualifiées si et seulement si :

$$\exists \vec{d} \in D \quad \text{tq} \quad g_1 < 0 \quad \text{et} \quad g_2 < 0 \quad (24)$$

Etant données les propriétés de la fonction à minimiser et du domaine D , on pourra adopter la caractérisation générale suivante du minimum, en suivant Ekeland et Temam [1974] :

proposition 1

\vec{d} est le minimum du problème (21) si et seulement si

$$\begin{aligned} \exists \vec{N} \in C_D(\vec{d}) \quad \text{tq} \quad \vec{A}^r(\vec{d}) - \vec{N} \in \partial\Delta(\Delta\vec{d}) \\ C_D(\vec{d}) \quad \text{cône normal extérieur au domaine } D \text{ en } \vec{d} \end{aligned} \quad (25)$$

Démonstration :

Le problème (21) est équivalent au problème sans contrainte suivant, où I_D est la fonction indicatrice du domaine D :

$$\text{Min}_{\vec{d}} (\Phi^r + \Delta + I_D)$$

Le minimum est alors caractérisé par :

$$\vec{d} \in D \quad \underbrace{-\frac{\partial\Phi^r}{\partial\vec{d}}(\vec{d})}_{\vec{A}^r} \in \partial(\Delta + I_D)(\Delta\vec{d})$$

Or, comme Δ est continue en au moins un point de D , on sait que :

$$\forall \vec{d} \in D \quad \partial(\Delta + I_D)(\Delta\vec{d}) = \partial\Delta(\Delta\vec{d}) + \partial I_D(\Delta\vec{d})$$

D'autre part, le sous-différentiel de I_D est le cône normal extérieur à D , car :

$$\partial I_D(\vec{d}) = \left\{ \vec{A} \quad \forall \vec{a} \quad I_D(\vec{a}) \geq I_D(\vec{d}) + \vec{A} \cdot (\vec{a} - \vec{d}) \right\} = \left\{ \vec{A} \quad \forall \vec{a} \in D \quad 0 \geq \vec{A} \cdot (\vec{a} - \vec{d}) \right\} = C_D(\vec{d})$$

Donc, la caractérisation s'écrit encore :

$$\exists \vec{N} \in C_D(\vec{d}) \quad \text{tq} \quad \vec{A}^r(\vec{d}) - \vec{N} \in \partial\Delta(\Delta\vec{d})$$

En se fondant sur cette caractérisation, on adopte la démarche de résolution suivante. On commence par traiter le cas où les contraintes ne sont pas qualifiées. Puis, en supposant que les

contraintes sont qualifiées, on examine si le minimum est l'un des points où les contraintes et Δ sont dérivables. Si tel est le cas, on peut alors appliquer le théorème de Kuhn et Tucker, qui explicite le cône normal extérieur à D et fournit ainsi une caractérisation du minimum pour des contraintes régulières qualifiées et une fonction objectif dérivable :

$$\vec{d} \text{ minimum dans } D \quad \Leftrightarrow \quad \exists (\lambda_1 \quad \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tq}$$

$$\begin{cases} \bar{A}^r(\vec{d}) - \lambda_1 \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \vec{d}}(\vec{d}) - \lambda_2 \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \vec{d}}(\vec{d}) = \frac{\partial \Delta}{\partial \Delta \vec{d}}(\Delta \vec{d}) \\ \lambda_1 \geq 0 \quad \mathbf{g}_1(\vec{d}) \leq 0 \quad \lambda_1 \mathbf{g}_1(\vec{d}) = 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \quad \mathbf{g}_2(\vec{d}) \leq 0 \quad \lambda_2 \mathbf{g}_2(\vec{d}) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Ce théorème est effectivement employé pour déterminer le minimum si aucune ou l'une seulement des deux contraintes est active. En revanche, si les deux contraintes sont actives ($\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2 = 0$), on préfère directement traiter le problème sur la surface en question :

$$\text{Min}_{\vec{d} \text{ tq } \begin{cases} \mathbf{g}_1=0 \\ \mathbf{g}_2=0 \end{cases}} \left[\frac{c_1}{1+\gamma} \frac{1-d_\bullet}{1+\gamma d_\bullet} + \frac{r_\bullet}{2} d_\bullet^2 - c_2 d_\bullet + \frac{c_3}{2} \mathbf{d}_\nabla^2 - \mathbf{c}_4 \cdot \mathbf{d}_\nabla + k \sqrt{\Delta d_\bullet^2 + L_c^2 \Delta \mathbf{d}_\nabla^2} \right] \quad (27)$$

Enfin, pour déterminer s'il faut ou non activer les contraintes, on tire profit de la proposition suivante, dont la généralisation au-delà de deux contraintes ne paraît malheureusement pas possible.

proposition 2

Soit J une fonction propre, coercive, semi-continue inférieure et strictement convexe, \mathbf{g}_1 et \mathbf{g}_2 deux fonctions contraintes continues et convexes. Si lors de la minimisation du problème sans contrainte, une seule des deux contraintes est violée, alors celle-ci sera active pour la résolution du problème sous contraintes.

Démonstration :

Les propriétés des fonctions J , \mathbf{g}_1 et \mathbf{g}_2 assurent que les problèmes avec et sans contraintes sont bien posés ; on appelle respectivement x^c et x^l leurs solutions. D'après les hypothèses de la proposition, elles vérifient :

$$x^c = \underset{\begin{cases} \mathbf{g}_1(\hat{x}) \leq 0 \\ \mathbf{g}_2(\hat{x}) \leq 0 \end{cases}}{\text{ArgMin}} J(\hat{x}) \quad \text{et} \quad x^l = \underset{\hat{x}}{\text{ArgMin}} J(\hat{x}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{g}_1(x^l) > 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{g}_2(x^l) \leq 0$$

En particulier, $J(x^l) < J(x^c)$. Remarquons de suite qu'étant donnée la stricte convexité de J , on a :

$$\forall x \in]x^l, x^c[\quad J(x) < J(x^c)$$

Par ailleurs, comme \mathbf{g}_2 est convexe :

$$\mathbf{g}_2(x^c) \leq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{g}_2(x^l) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in]x^c, x^l[\quad \mathbf{g}_2(x) \leq 0$$

Raisonnons maintenant par l'absurde en supposant que $\mathbf{g}_1(x^c) < 0$. Alors, comme \mathbf{g}_1 est continue, il existe un voisinage V de x^c tel que :

$$\forall x \in V \quad \mathbf{g}_1(x) < 0$$

En appelant

$$I =]x^c, x^l[\cap V \neq \emptyset$$

il vient :

$$\forall x \in I \quad g_1(x) < 0 \quad g_2(x) \leq 0 \quad J(x) < J(x^c)$$

ce qui contredit que x^c est le minimum sous contraintes. L'hypothèse de départ est donc fautive, c'est-à-dire :

$$g_1(x^c) = 0$$

Cette proposition permet de restreindre les choix possibles. Plus précisément, on peut adopter l'arbre de décision figure 3 pour résoudre le problème sous contraintes inégalités. Quant aux détails de résolution propres à chaque étape de l'intégration locale, ils sont donnés en annexe § 4.

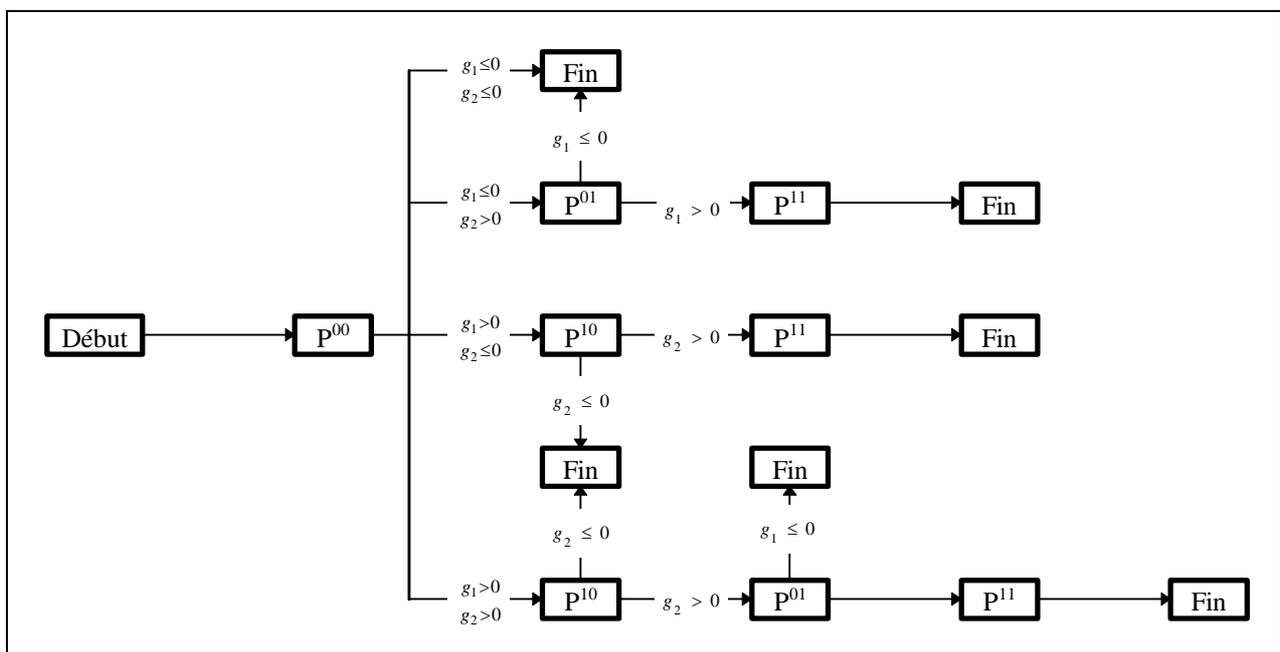


figure 3 - Arbre de décision pour le problème sous contraintes inégalités

- P^{00} problème sans contraintes
- P^{10} problème avec contrainte g_1 activée ($g_1 = 0$)
- P^{01} problème avec contrainte g_2 activée ($g_2 = 0$)
- P^{11} problème avec contraintes g_1 et g_2 activées ($g_1 = 0$ et $g_2 = 0$)

3. Applications

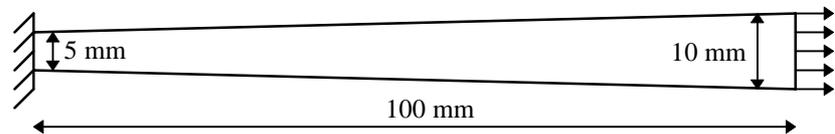
Dans cette partie, on se propose de mettre en œuvre ce modèle d'endommagement fragile dans deux situations. La première correspond à un problème simple, une traction uniaxiale d'un barreau dont la section est d'aire variable, pour lequel il n'existe apparemment déjà plus de solution analytique. Cet exemple est l'occasion d'examiner l'influence de la discrétisation spatiale sur les résultats obtenus. Dans un deuxième temps, on traite un problème de caractère plus industriel, la sollicitation d'une entaille en mode d'ouverture, même si la structure n'est modélisée qu'en

contraintes planes. Précisons bien que l'objet de ces applications n'est pas une confrontation avec l'expérience, le modèle d'endommagement étant trop pauvre pour cela, mais une estimation des potentialités du modèle : il s'agit donc uniquement d'expérimentation numérique.

3.1 Traction uniaxiale d'un barreau

Le chargement et la géométrie du problème sont représentés ci-dessous. Le problème est modélisé en contraintes planes ; le caractère uniaxial résulte de la présence d'une seule couche de mailles linéaires dans la section du barreau, si bien que les contraintes sont purement uniaxiales, l'équation d'équilibre étant alors celle d'une poutre en traction. Quant au matériau, il obéit bien sûr à la loi de comportement élastique fragile du § 1.3, avec comme caractéristiques :

$$\begin{aligned} E &= 10\,000 \text{ Mpa} \\ \nu &= 0 \\ \sigma^{pic} &= 10 \text{ Mpa} \\ H &= -1\,000 \text{ Mpa} \\ L_b &= 10 \text{ mm} \end{aligned}$$



Pour évaluer la dépendance des résultats au maillage, deux discrétisations spatiales ont été successivement employées : d'abord 120 mailles, d'autant plus raffinées que la section est petite, puis 200 mailles réparties de la même manière, la plus petite maille y étant deux fois plus petite que dans le maillage précédent. La comparaison des résultats est représentée sur les figure 4, figure 5 et figure 6. La conclusion est apparente sur ces graphiques : il n'y a pas de dépendance pathologique au maillage (le modèle permet d'obtenir des résultats qui convergent avec la finesse de la discrétisation spatiale), comme on pouvait s'y attendre dès lors qu'on introduit des termes en gradients d'endommagement. Quant aux oscillations observées sur la courbe force - déplacement, on peut penser qu'elles ne sont dues qu'à un critère d'arrêt insuffisamment sévère (résidu relatif inférieur à 10^{-4}) pour décider de la qualité de résolution des équations d'équilibre.

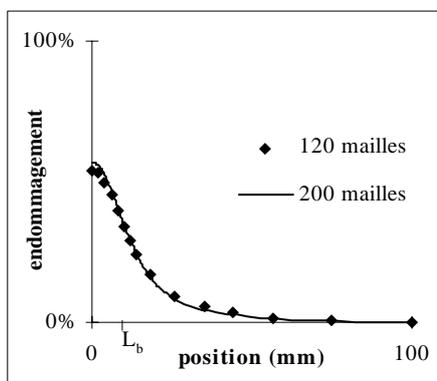


figure 4 - Profil d'endommagement

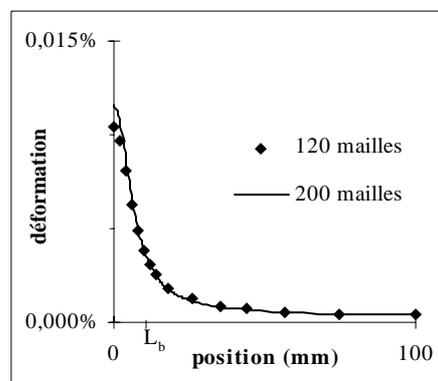


figure 5 - Profil de déformation

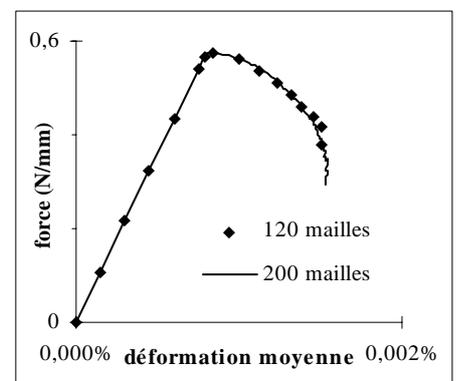


figure 6 - Réponse force - déplacement

Ce calcul pourtant simple *a priori* puisqu'uniaxial permet néanmoins de relever dès à présent deux difficultés.

- D'une part, contrôler la force ou le déplacement ne permet pas de mener ce calcul à bien car la structure exhibe une instabilité. Bien qu'un pilotage par longueur d'arc, voir par exemple Bonet et Wood [1997], aurait pu se révéler utilisable ici car il n'y a pas de snap-back brutal², on a préféré contrôler la déformation au sein de la première maille (celle qui s'endommage le plus), car elle y est toujours croissante. Pour des géométries plus complexes, ce point se révélera crucial.
- D'autre part, il s'est avéré que l'algorithme de lagrangien augmenté, utilisé pour réaliser l'intégration numérique de la loi de comportement, n'assure pas toujours une convergence en loi puissance comme annoncé au chapitre 3. C'est d'ailleurs pour cette raison que l'on a interrompu prématurément le calcul sur le maillage grossier. En effet, si l'algorithme converge effectivement, la vitesse de convergence peut devenir extrêmement faible. Des investigations complémentaires qui ne sont pas détaillées ici semblent indiquer que ce sont les éléments finis situés au voisinage de la frontière zone élastique / zone endommagée qui en sont responsables : ils sollicitent la forte non linéarité de la fonctionnelle due au caractère positivement homogène de degré 1. Ce fait doit encore être vérifié pour proposer le cas échéant des accélérateurs de convergence (changer le coefficient de pénalisation pour ces éléments, par exemple). Il semble toutefois que raffiner la taille de ces éléments permet d'assurer plus facilement la convergence de l'algorithme (à nouveau en loi puissance).

3.2 Entaille sollicitée en mode d'ouverture

La seconde application de ce chapitre a pour but de démontrer la faisabilité de calculs industriels. Il s'agit là d'une éprouvette mince entaillée, sollicitée en mode d'ouverture. Le matériau obéit à nouveau à la loi de comportement non locale élastique fragile décrite au § 1.3, avec des caractéristiques représentatives d'un calcaire dans le régime élastique, cf. Krajcinovic [1996]. La géométrie, le chargement et les caractéristiques du matériau sont donnés sur la figure 7.

Les calculs ont été menés dans le cadre d'une modélisation en contraintes planes (éprouvette mince) et la symétrie du problème a été exploitée pour réduire de moitié la taille de la pièce calculée (ce qui exclut de ce fait l'analyse de bifurcations avec perte de symétrie), nous conduisant ainsi à 1300 éléments finis, linéaires en déplacements et en endommagement.

A titre de comparaison, on commence par donner figure 8, page 128, le champ d'endommagement qui résulte d'un calcul avec le même modèle d'endommagement, mais sans les termes en gradients (modèle local). La dépendance au maillage est manifeste puisque

² En effet, en présence d'un snap-back brutal, la branche de solution dissipative (l'endommagement croît) et celle de décharge élastique sont quasiment confondues ; comme le contrôle par longueur d'arc ne permet pas de distinguer ces deux branches, l'algorithme a tôt fait de bifurquer sur la branche de décharge élastique qui ne nous intéresse pas.

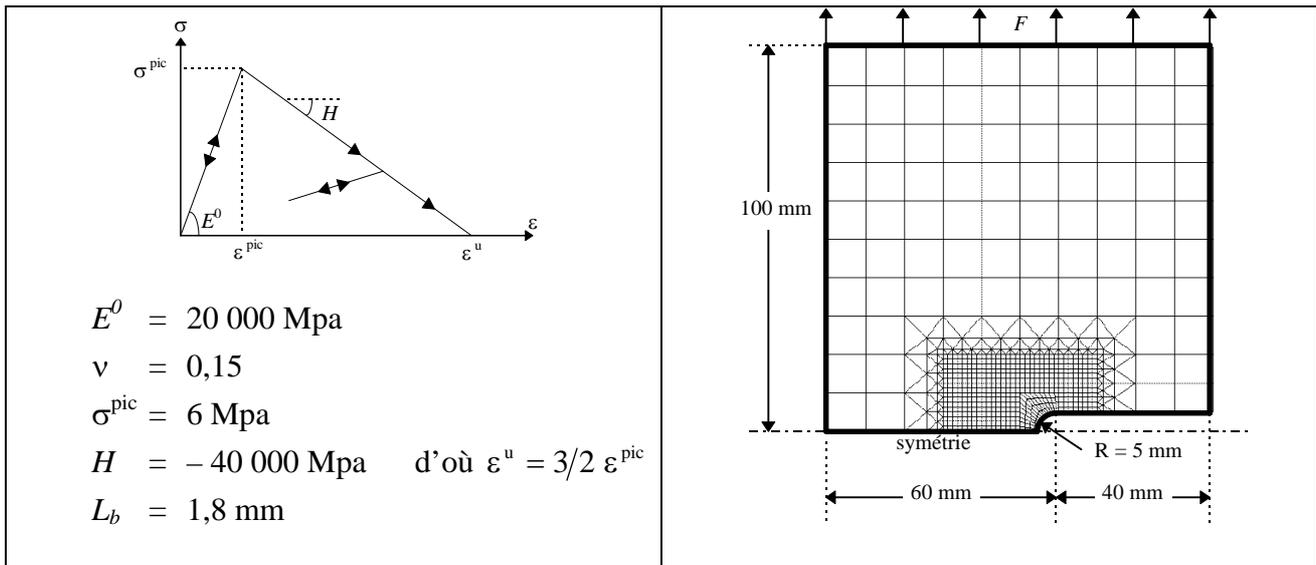


figure 7 - Caractéristiques matériau, géométrie et chargement pour l'éprouvette entaillée

l'endommagement se concentre dans une seule bande d'éléments (deux rangées de points d'intégration).

On présente ensuite figure 9, page 128, le champ d'endommagement à la charge limite puis ultérieurement lors de la propagation instable de la zone endommagée (zooms sur la zone endommagée), ainsi que la réponse globale de la structure sur la figure 10, page 128. On peut noter plusieurs points.

- La réponse de la structure est éminemment instable puisque un snap-back très brutal apparaît sur la courbe force – déplacement. En fait, le chargement limite pour un pilotage en force coïncide quasiment avec celui pour un chargement en déplacement. Cela résulte du caractère très fragile du modèle (module d'adoucissement H double du module élastique initial), ainsi que de la faible longueur caractéristique L_b par rapport à l'échelle de la structure : la zone endommagée est donc de taille réduite, si bien qu'une zone bien plus étendue de la structure décharge élastiquement après le franchissement de la charge limite, ce qui explique que la courbe force – déplacement après le snap-back soit pratiquement confondue avec la courbe de décharge élastique.
- En raison de cette instabilité, on est à nouveau confronté à la difficulté de piloter le chargement pour mener à bien le calcul numérique. Etant donnée la brutalité du snap-back, le pilotage par longueur d'arc est exclu. On a ainsi été contraint à contrôler la déformation en pointe de zone endommagée via le déplacement vertical du nœud en aval de la zone endommagée (ce n'est pas le même nœud tout au long de la propagation). Ce mode de pilotage est particulièrement fastidieux puisqu'il impose de changer de nœud au cours de la propagation ; l'introduction d'une nouvelle fonctionnalité dans le *Code_Aster*® est en cours pour contrôler le chargement par la quantité $\text{Max}_{\Omega} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$, à l'évolution monotone lors de la propagation.

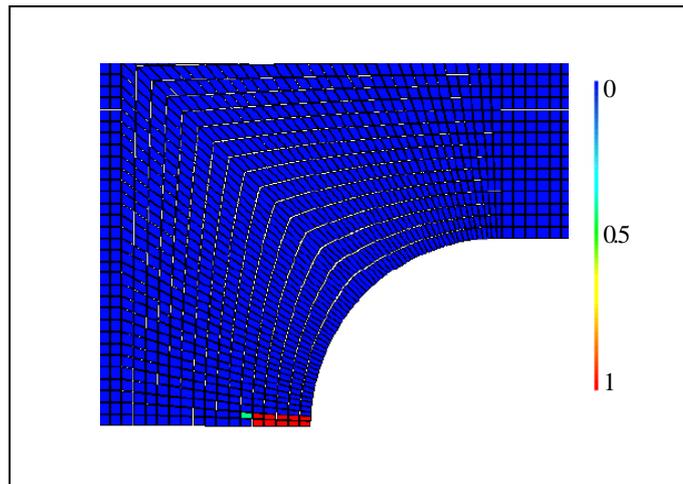


figure 8 - modèle local : dépendance au maillage

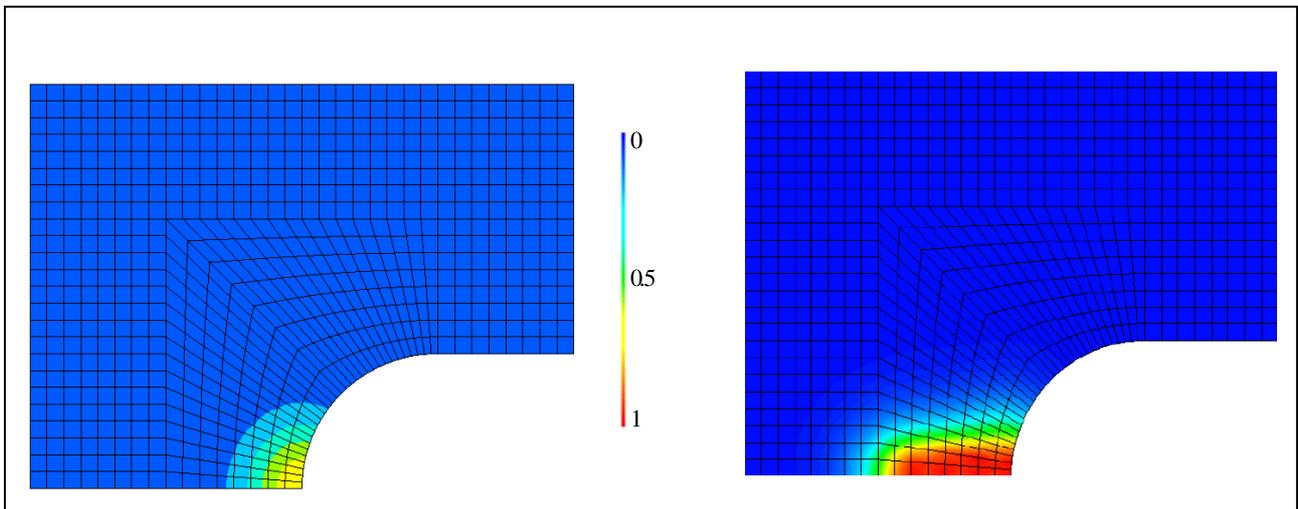


figure 9 - Champ d'endommagement au point de snap-back (L) puis durant le régime instable (I)

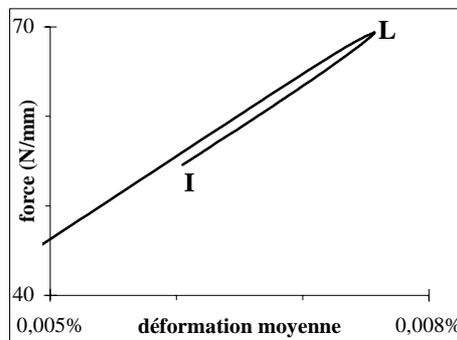


figure 10 - Réponse globale (zoom)

- Les deux points précédents ne sont pas propres à l'introduction de termes en gradients d'endommagement dans la loi de comportement. En revanche, par comparaison avec la figure 8, on observe parfaitement l'apport de la délocalisation puisque la zone endommagée s'étend maintenant sur plusieurs mailles, sa largeur dépendant de la longueur caractéristique et non plus du maillage.
- Enfin, l'emploi d'un modèle non local interdit dorénavant toute interprétation locale des résultats. C'est particulièrement flagrant en ce qui concerne la charge limite. En effet, avec le modèle local, la contrainte ne peut dépasser $\sigma^{pic} = 6$ MPa, au sens de la norme équivalente d'endommagement³ σ_{eq}^* introduite par Lemaitre et Chaboche [1988]. En revanche, avec le modèle non local, la valeur de σ_{eq}^* atteinte au pic de la courbe force-déplacement vaut 10,1 MPa. La présence des termes en gradients retarde l'évolution de l'endommagement et autorise ainsi un dépassement du pic de contrainte du modèle local dans une mesure qui dépend de la géométrie de la structure et des conditions aux limites.

Ce chapitre nous permet de tirer un premier enseignement de la formulation à gradients de variables internes. En se plaçant dans le contexte strict d'une loi de comportement de type standard généralisé, donc en particulier une évolution normale associée des variables internes, le cadre que l'on propose permet successivement de :

- construire par homogénéisation une loi de comportement à gradients de variables internes,
- développer un module d'intégration numérique de cette loi, spécifique à celle-ci mais similaire dans sa problématique à l'intégration de lois de comportement locales,
- réaliser des calculs pré-industriels (de l'ordre de 1000 mailles).

La faisabilité de l'ensemble de la chaîne, depuis la modélisation jusqu'aux calculs, a ainsi été démontrée. En particulier, on observe que l'échelle d'une bande de localisation est prédite, objectif à l'origine de l'ensemble de la démarche. En contrepartie, on affaiblit la notion d'interprétation ou d'analyse locales, comme l'illustre le cas de la charge limite évoquée au § 3.2.

Un autre résultat découle de la nature élastique fragile du comportement, indépendamment du caractère non local : il s'agit de l'instabilité de la propagation de la zone endommagée. Notons à ce propos que la valeur maximale de l'endommagement lorsque l'amorçage a lieu, soit 43 %, est différente de 100 % et nous semble résulter d'un effet de structure : elle ne saurait être prédite par une analyse locale mais nécessite un calcul complet. Quant à la phase de propagation, son étude numérique requiert des techniques fines de pilotage du chargement, plus complexes que les

³ Cette norme permet une équivalence énergétique avec un problème unidimensionnel :

$$\frac{1}{2E^0} \sigma_{eq}^{*2} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}^{0-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

traditionnelles méthodes de continuation par longueur d'arc, mieux adaptées aux problèmes de flambage.

Enfin, cette application met en lumière deux difficultés. La première concerne la complexité de l'intégration numérique de la loi de comportement, en dépit du fait qu'il s'agit seulement d'un problème de minimisation à 4 variables. En fait, la présence de la seconde contrainte (20) portant sur une valeur ultime d'endommagement en est responsable : elle impose ainsi les lourds développements analytiques exposés aux paragraphes 4.1, 4.5 et 4.6. On aurait pu s'en affranchir en préférant un modèle microscopique sans valeur ultime de l'endommagement (rigidité à décroissance exponentielle avec l'endommagement, par exemple), mais en prenant alors le risque de manipuler des valeurs élevées d'endommagement. Ce n'est pas le choix qui a été fait, dans la mesure où nous pensons mieux représenter des zones de matière totalement détruites (rigidité résiduelle nulle). La seconde difficulté, plus cruciale, réside dans la très faible vitesse de convergence de l'algorithme de lagrangien augmenté dans certaines situations. A ce sujet, des éclaircissements complémentaires s'imposent, même si une première solution semble être un raffinement du maillage sur le front d'endommagement.

4. Annexe : résolution du problème de minimisation

4.1 Cas des contraintes non qualifiées

A ce niveau, il est intéressant d'énoncer la proposition suivante, qui fournit une caractérisation pratique de la qualification des contraintes, basée sur l'état au début du pas de temps :

proposition 3

Les contraintes sont qualifiées si et seulement si $g_2^- = g_2(\bar{d}^-) < 0$.

Démonstration :

Commençons par remarquer que :

$$\underbrace{L_b \|\mathbf{d}_\nabla\| + d_\bullet - 1}_{g_2} \geq \underbrace{L_b \|d_\nabla^-\| + d_\bullet - 1}_{g_2^-} - \underbrace{(L_b \|d_\nabla - d_\nabla^-\| - d_\bullet + d_\bullet^-)}_{g_1}$$

On peut alors distinguer deux cas.

a) si $g_2^- = 0$

Alors, du fait de l'inégalité précédente :

$$\forall (d_\bullet, \mathbf{d}_\nabla) \in D \quad g_1 = 0 \quad \text{et} \quad g_2 = 0$$

c'est-à-dire que les contraintes ne sont pas qualifiées.

b) si $g_2^- < 0$

On peut alors trouver un point de D tel que :

$$\left(d_\bullet = d_\bullet^- - \frac{g_2^-}{2}, \mathbf{d}_\nabla = \mathbf{d}_\nabla^- \right) \Rightarrow \begin{cases} g_1 = \frac{g_2^-}{2} < 0 \\ g_2 = \frac{g_2^-}{2} < 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire que les contraintes sont qualifiées.

En présence de contraintes non qualifiées, c'est-à-dire quand $g_2^- = 0$ d'après la proposition précédente, on montre aisément que \mathbf{d}_∇^- et $\Delta \mathbf{d}_\nabla$ sont colinéaires et de sens opposé (inégalité triangulaire qui devient une égalité dans le cas présent) :

$$g_2 = \underbrace{1 - d_\bullet^-}_{L_b \|\mathbf{d}_\nabla^-\| \text{ car } g_2^- = 0} - \underbrace{\Delta d_\bullet}_{L_b \|\Delta \mathbf{d}_\nabla\| \text{ car } g_1 = 0} - L_b \|\mathbf{d}_\nabla^- + \Delta \mathbf{d}_\nabla\| = 0 \Rightarrow \|\mathbf{d}_\nabla^- + \Delta \mathbf{d}_\nabla\| = \|\mathbf{d}_\nabla^-\| - \|\Delta \mathbf{d}_\nabla\| \quad (28)$$

Le cas $\mathbf{d}_\nabla^- = 0$ est immédiatement traité puisque, dans ce cas, le domaine admissible D est réduit au point $(d_\bullet = 1 \quad \mathbf{d}_\nabla = 0)$ et il n'y a donc pas d'évolution. En revanche, si $\mathbf{d}_\nabla^- \neq 0$, on peut se ramener à la seule inconnue Δd_\bullet en vertu de la remarque précédente, car :

$$\Delta \mathbf{d}_\nabla = - \frac{\Delta d_\bullet}{L_b} \frac{\mathbf{d}_\nabla^-}{\|\mathbf{d}_\nabla^-\|} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \Delta d_\bullet \leq 1 - d_\bullet^- \quad (29)$$

Dans ce cas, le problème de minimisation devient beaucoup plus simple. Il s'écrit :

$$\text{Min}_{d_{\bullet}^{-} \leq d_{\bullet} \leq 1} \left[\frac{c_1}{1+\gamma} \frac{1-d_{\bullet}}{1+\gamma d_{\bullet}} + \frac{r}{2} d_{\bullet}^2 - c_2 d_{\bullet} + \frac{c_3}{2} \left(\frac{\Delta d_{\bullet}}{L_b} - \|\mathbf{d}_{\nabla}^{-}\| \right)^2 + \frac{\mathbf{c}_4 \cdot \mathbf{d}_{\nabla}^{-}}{\|\mathbf{d}_{\nabla}^{-}\|} \frac{\Delta d_{\bullet}}{L_b} + k \Delta d_{\bullet} \sqrt{1 + \frac{L_c^2}{L_b^2}} \right] \quad (30)$$

Compte tenu de la convexité de la fonction objectif, il ne reste qu'à étudier le signe de sa dérivée aux bornes de l'intervalle, et chercher un zéro de celle-ci, le cas échéant. La dérivée vaut :

$$-\underbrace{\frac{c_1}{(1+\gamma d_{\bullet})^2} + r d_{\bullet} - c_2 + c_3 \frac{\Delta d_{\bullet}}{L_b^2}}_{-\tilde{A}(d_{\bullet})} + \underbrace{\frac{\mathbf{c}_4 \cdot \mathbf{d}_{\nabla}^{-}}{L_b \|\mathbf{d}_{\nabla}^{-}\|} - \frac{c_3 \|\mathbf{d}_{\nabla}^{-}\|}{L_b} + k \sqrt{1 + \left(\frac{L_c}{L_b} \right)^2}}_{\tilde{k}} \quad (31)$$

Les trois cas possibles sont donc :

$$\begin{cases} \text{si } \tilde{A}(\Delta d_{\bullet} = 0) \leq \tilde{k} & \text{alors } \Delta d_{\bullet} = 0 \\ \text{si } \tilde{A}(d_{\bullet} = 1) \geq \tilde{k} & \text{alors } d_{\bullet} = 1 \\ \text{sinon} & \text{résoudre } \tilde{A}(d_{\bullet}) = \tilde{k} \quad \text{avec } d_{\bullet}^{-} \leq d_{\bullet} \leq 1 \end{cases} \quad (32)$$

4.2 Cas des contraintes non dérivables

Comme les deux fonctions contraintes g_1 et g_2 font intervenir une norme, elles ne sont pas dérivables aux points où la norme s'annule :

$$\begin{aligned} g_1 &= L_b \|\Delta \mathbf{d}_{\nabla}\| - \Delta d_{\bullet} && \text{non dérivable en } (\Delta d_{\bullet} \quad \Delta \mathbf{d}_{\nabla} = \mathbf{0}) \\ g_2 &= L_b \|\mathbf{d}_{\nabla}\| + d_{\bullet} - 1 && \text{non dérivable en } (d_{\bullet} \quad \mathbf{d}_{\nabla} = \mathbf{0}) \end{aligned} \quad (33)$$

La question qui se pose est alors la suivante : un point où l'une des fonctions contraintes n'est pas dérivable est-il solution du problème (21) ? En fait, seuls les points où en outre la contrainte en question s'annule méritent une attention particulière, puisque sinon, elle n'intervient pas explicitement dans les équations du problème, le cône normal extérieur étant réduit à $\{(0 \quad \mathbf{0})\}$. Ces points sont respectivement $(\Delta d_{\bullet} = 0 \quad \Delta \mathbf{d}_{\nabla} = \mathbf{0})$ pour g_1 et $(d_{\bullet} = 1 \quad \mathbf{d}_{\nabla} = \mathbf{0})$ pour g_2 . On peut noter que comme les contraintes sont qualifiées, donc que $g_2^{-} < 0$, ces deux points ne sont pas confondus. De plus, le premier de ces points est également le seul point où Δ n'est pas dérivable.

Commençons par examiner le point $(\Delta d_{\bullet} = 0 \quad \Delta \mathbf{d}_{\nabla} = \mathbf{0})$. Il s'agit du minimum s'il vérifie la caractérisation (25) dont on donne maintenant une interprétation géométrique. Deux ingrédients sont présents dans cette caractérisation. D'une part, l'appartenance au sous-différentiel de Δ : des résultats d'analyse convexe, voir chapitre 4, permettent d'affirmer que \vec{A} appartient au volume délimité par l'ellipsoïde d'équation $f(\vec{A}) = 0$:

$$\vec{A} \in \partial \Delta(\vec{0}) \Leftrightarrow f(\vec{A}) = A_{\bullet}^2 + \frac{\mathbf{A}_{\nabla}^2}{L_c^2} - k^2 \leq 0 \quad (34)$$

D'autre part, l'appartenance de \vec{N} au cône normal à D : en exploitant la forme de D au voisinage de $\Delta \vec{d} = 0$ (un cône), on obtient immédiatement que

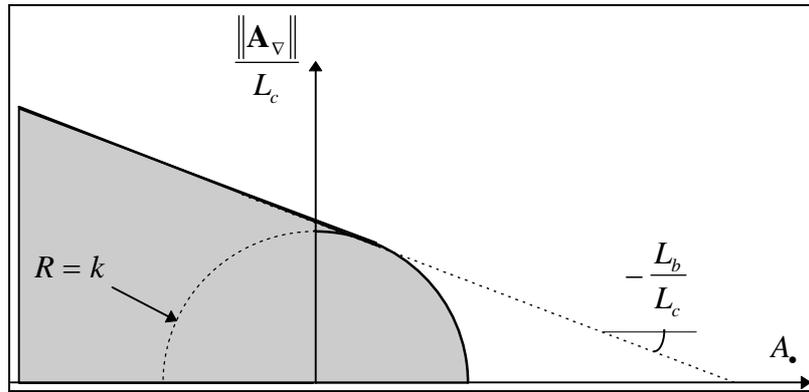
$$\vec{N} \in C^D(\vec{0}) \Leftrightarrow \left[\forall \vec{a} \quad a_{\bullet} \geq L_b \|\mathbf{a}_{\nabla}\| \Rightarrow \vec{N} \cdot \vec{a} \leq 0 \right] \Leftrightarrow N_{\bullet} \leq -\frac{\|\mathbf{N}_{\nabla}\|}{L_b} \quad (35)$$

\vec{N} appartient donc à un cône de sommet l'origine. Finalement, le critère (25) peut encore s'écrire sous la forme :

$$\exists \vec{N} \quad \text{tq} \quad N_{\bullet} \leq -\frac{\|\mathbf{N}_{\nabla}\|}{L_b} \quad \text{et} \quad f(\vec{A}^E - \vec{N}) \leq 0 \quad (36)$$

$$\vec{A}^E = \vec{A}^r(\Delta \vec{d} = 0) \quad \text{forces thermodynamiques pour une évolution élastique } \Delta \vec{d} = 0$$

Géométriquement, cela signifie qu'il existe un vecteur \vec{N} dans le cône (35) tel que \vec{A}^E appartienne au translaté de l'ellipsoïde (34) par le vecteur \vec{N} .



A des fins pratiques, on donne les expressions analytiques qui traduisent l'appartenance au translaté de l'ellipsoïde en question, c'est-à-dire la zone grisée sur le dessin, ce qui, rappelons-le, implique que $\Delta \vec{d} = \vec{0}$ est solution du problème (21) :

$$\vec{A}^E \text{ vérifie } \begin{cases} A_{\bullet}^{E2} + \frac{\mathbf{A}_{\nabla}^{E2}}{L_c^2} - k^2 \leq 0 \\ A_{\bullet}^E \leq \frac{L_b}{L_c} \frac{\|\mathbf{A}_{\nabla}^E\|}{L_c} \quad \text{et} \quad A_{\bullet}^E + \frac{\|\mathbf{A}_{\nabla}^E\|}{L_b} \leq k \sqrt{1 + \frac{L_c^2}{L_b^2}} \end{cases} \quad (37)$$

L'examen du second point où les contraintes ne sont pas dérivables, ($d_{\bullet} = 1 \quad \mathbf{d}_{\nabla} = \mathbf{0}$), est similaire. A nouveau, la caractérisation (25) du minimum est employée, à ceci près que le sous-différentiel de Δ est maintenant réduit à un point, Δ étant dérivable :

$$\vec{A} \in \partial \Delta(\vec{1}) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_{\bullet} \\ \mathbf{A}_{\nabla} \end{bmatrix} = \frac{k}{\sqrt{(1-d_{\bullet}^-)^2 + L_c^2 \mathbf{d}_{\nabla}^{-2}}} \begin{bmatrix} 1-d_{\bullet}^- \\ -L_c^2 \mathbf{d}_{\nabla}^- \end{bmatrix} \quad (38)$$

Quant au cône normal, comme à nouveau D a localement la forme d'un cône, on en déduit que :

$$\vec{N} \in C^D(\vec{1}) \Leftrightarrow \left[\forall \vec{a} \quad a_{\bullet} + L_b \|\mathbf{a}_{\nabla}\| \leq 0 \Rightarrow \vec{N} \cdot \vec{a} \leq 0 \right] \Leftrightarrow N_{\bullet} \geq \frac{\|\mathbf{N}_{\nabla}\|}{L_b} \quad (39)$$

Finalement, ($d_{\bullet} = 1 \quad \mathbf{d}_{\nabla} = \mathbf{0}$) est solution du problème (25) si et seulement si :

$$\begin{aligned} \bar{A}^s - \frac{\partial \Delta}{\partial \Delta \bar{d}}(\bar{\mathbf{1}}) &\in C^D(\bar{\mathbf{1}}) \\ \Leftrightarrow \left[A_{\bullet}^s - \frac{k(1-d_{\bullet}^-)}{\sqrt{(1-d_{\bullet}^-)^2 + L_c^2 \mathbf{d}_{\nabla}^{-2}}} \right] &\geq \frac{L_c}{L_b} \left\| \frac{\mathbf{A}_{\nabla}^s}{L_c} - \frac{k L_c (-\mathbf{d}_{\nabla}^-)}{\sqrt{(1-d_{\bullet}^-)^2 + L_c^2 \mathbf{d}_{\nabla}^{-2}}} \right\| \\ \bar{A}^s = \bar{A}^r(\bar{\mathbf{1}}) &\text{ forces thermodynamiques pour une évolution saturée } (d_{\bullet} = 1 \quad \mathbf{d}_{\nabla} = \mathbf{0}) \end{aligned} \quad (40)$$

4.3 Solution régulière du problème sans contrainte : P^{00}

On s'intéresse ici à une solution de (21) sans se préoccuper des contraintes. Dans ce cas, la caractérisation (26) s'écrit simplement :

$$\bar{d} \text{ minimum} \Leftrightarrow \bar{A}^r(\bar{d}) = \frac{d\Delta}{d\Delta \bar{d}}(\Delta \bar{d}) \quad (41)$$

A ce stade, il est nécessaire de développer les expressions. En tenant compte de (22) et (23), on aboutit au système non linéaire suivant :

$$\left[\begin{array}{c} \frac{c_1}{(1+\gamma d_{\bullet})^2} - r_{\bullet} d_{\bullet} + c_2 \\ -c_3 \mathbf{d}_{\nabla} + \mathbf{c}_4 \end{array} \right] = \kappa \left[\begin{array}{c} \Delta d_{\bullet} \\ L_c^2 \Delta \mathbf{d}_{\nabla} \end{array} \right] \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{k}{\sqrt{\Delta d_{\bullet}^2 + L_c^2 \Delta \mathbf{d}_{\nabla}^2}} \geq 0 \quad (42)$$

En fait, en dépit de la dérivabilité de Δ , il sera plus pratique de déterminer κ par l'équation de cohérence, ce qui reste bien sûr équivalent à (42) :

$$\left[\begin{array}{c} A_{\bullet}^r(d_{\bullet}) = \frac{c_1}{(1+\gamma d_{\bullet})^2} - r_{\bullet} d_{\bullet} + c_2 \\ \mathbf{A}_{\nabla}^r(\mathbf{d}_{\nabla}) = -c_3 \mathbf{d}_{\nabla} + \mathbf{c}_4 \end{array} \right] = \kappa \left[\begin{array}{c} \Delta d_{\bullet} \\ L_c^2 \Delta \mathbf{d}_{\nabla} \end{array} \right] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \kappa \geq 0 \\ f = A_{\bullet}^{r^2} + \frac{\mathbf{A}_{\nabla}^{r^2}}{L_c^2} - k^2 = 0 \end{cases} \quad (43)$$

On se ramène aisément à un problème scalaire, ne dépendant que de Δd_{\bullet} , car le système est équivalent à :

$$\Delta \mathbf{d}_{\nabla} = \frac{\mathbf{A}_{\nabla}^E}{c_3 + L_c^2 \kappa} \quad \text{et} \quad \kappa = \frac{A_{\bullet}^r(\Delta d_{\bullet})}{\Delta d_{\bullet}} \quad (44)$$

Compte tenu du caractère décroissant de la fonction A_{\bullet}^r , assurer la positivité de κ revient à restreindre Δd_{\bullet} dans l'intervalle de recherche suivant :

$$\kappa \geq 0 \Leftrightarrow \Delta d_{\bullet} \in \begin{cases} [0 \quad \Delta d^B] & \text{si } A_{\bullet}^E \geq 0 \\ [\Delta d^B \quad 0] & \text{si } A_{\bullet}^E < 0 \end{cases} \quad \text{où } \Delta d^B \text{ unique solution de } A_{\bullet}^r(\Delta d) = 0 \quad (45)$$

Pour déterminer la valeur de Δd_{\bullet} , il ne reste plus alors qu'à employer la condition de cohérence :

$$f = A_{\bullet}^{r^2}(\Delta d_{\bullet}) + \left(1 - \frac{c_3}{c_3 + L_c^2 \kappa(\Delta d_{\bullet})} \right) \frac{\mathbf{A}_{\nabla}^{E^2}}{L_c^2} - k^2 = 0 \quad (46)$$

La résolution numérique de cette équation est aisée car les valeurs aux bornes de l'intervalle de recherche défini par (45) sont de signes opposés et elle y admet une solution unique (sinon, par continuité, on aurait un nombre pair de solutions) :

$$f(\Delta d_{\bullet} = 0) = f(\bar{A}^E) > 0 \quad \text{et} \quad f(\Delta d_{\bullet} = \Delta d^B) = -k^2 < 0 \quad (47)$$

4.4 Résolution du problème avec activation de la contrainte g_1 : P^{10}

Après avoir examiné la solution sans contrainte, nous nous intéressons maintenant au problème de minimisation sous la contrainte $g_1 \leq 0$. Etant donné l'arbre de décision figure 3, nous sommes assurés que la solution est atteinte sur la frontière $g_1 = 0$. Le système qui caractérise cette solution s'écrit d'après (26) :

$$\begin{cases} A_{\bullet}^r + \lambda \Delta d_{\bullet} = \kappa \Delta d_{\bullet} \\ \mathbf{A}_{\nabla}^r - \lambda L_b^2 \Delta \mathbf{d}_{\nabla} = \kappa L_c^2 \Delta \mathbf{d}_{\nabla} \\ \left(A_{\bullet}^r + \lambda \Delta d_{\bullet} \right)^2 + \frac{1}{L_c^2} \left(\mathbf{A}_{\nabla}^r - \lambda L_b^2 \Delta \mathbf{d}_{\nabla} \right)^2 = k^2 \\ L_b \|\Delta \mathbf{d}_{\nabla}\| = \Delta d_{\bullet} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \kappa \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\lambda_1}{\Delta d_{\bullet}} \geq 0 \quad (48)$$

Comme précédemment, l'équation vectorielle (48) s'élimine aisément et conduit à :

$$\Delta \mathbf{d}_{\nabla} = \frac{\mathbf{A}_{\nabla}^E}{c_3 + L_c^2 \kappa + L_b^2 \lambda} \quad (49)$$

On peut alors déduire l'expression du multiplicateur plastique κ et du multiplicateur de Lagrange λ :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{L_b^2 + L_c^2} \left[\frac{L_b}{\Delta d_{\bullet}} \|\mathbf{A}_{\nabla}^E\| - c_3 - L_c^2 \frac{A_{\bullet}^r}{\Delta d_{\bullet}} \right] \\ \kappa = \frac{1}{L_b^2 + L_c^2} \left[\frac{L_b}{\Delta d_{\bullet}} \|\mathbf{A}_{\nabla}^E\| - c_3 + L_b^2 \frac{A_{\bullet}^r}{\Delta d_{\bullet}} \right] \end{cases} \quad (50)$$

Par substitution, on peut finalement ramener le système (48) à une seule équation scalaire en Δd_{\bullet} :

$$\kappa(\Delta d_{\bullet}) \Delta d_{\bullet} = k \sqrt{\frac{L_b^2}{L_b^2 + L_c^2}} \Leftrightarrow L_b \|\mathbf{A}_{\nabla}^E\| - c_3 \Delta d_{\bullet} + L_b^2 A_{\bullet}^r(\Delta d_{\bullet}) = k L_b \sqrt{L_b^2 + L_c^2} \quad (51)$$

Le premier membre de cette équation étant strictement décroissant, la solution est unique. Comme par ailleurs, on sait qu'il existe une solution car le problème est bien posé, alors il s'agit de la solution, qui assure la positivité de κ et de λ . Il n'y a rien à vérifier.

4.5 Résolution du problème avec activation de la contrainte g_2 : P^{01}

Le cas $g_1 = 0$ ayant été traité, il nous faut maintenant examiner le cas où le minimum est atteint sur la surface $g_2 = 0$. Dans ce cas, le système qui le caractérise s'écrit, toujours d'après (26) :

$$\begin{cases} A_{\bullet}^r - \lambda(1 - d_{\bullet}) = \kappa \Delta d_{\bullet} \\ \mathbf{A}_{\nabla}^r - \lambda L_b^2 \mathbf{d}_{\nabla} = \kappa L_c^2 \Delta \mathbf{d}_{\nabla} \\ \left(\kappa \Delta d_{\bullet} \right)^2 + \frac{1}{L_c^2} \left(\kappa L_c^2 \Delta \mathbf{d}_{\nabla} \right)^2 = k^2 \\ L_b \|\mathbf{d}_{\nabla}\| = 1 - d_{\bullet} \end{cases} \quad \text{avec } \kappa \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\lambda_2}{1 - d_{\bullet}} \geq 0 \quad (52)$$

Une fois de plus, l'équation vectorielle s'élimine aisément pour conduire à :

$$\Delta \mathbf{d}_{\nabla} = \frac{\mathbf{A}_{\nabla}^E - L_b^2 \lambda \mathbf{d}_{\nabla}^-}{c_3 + L_c^2 \kappa + L_b^2 \lambda} \quad \mathbf{d}_{\nabla} = \frac{\mathbf{A}_{\nabla}^S + L_c^2 \kappa \mathbf{d}_{\nabla}^-}{c_3 + L_c^2 \kappa + L_b^2 \lambda} \quad (53)$$

On élimine alors λ du système d'équation grâce à l'équation (52)-d :

$$L_b^2 \lambda = \frac{L_b \|\mathbf{A}_{\nabla}^S + \kappa L_c^2 \mathbf{d}_{\nabla}^-\| - (c_3 + \kappa L_c^2)(1 - d_{\bullet})}{1 - d_{\bullet}} \quad (54)$$

Enfin, la substitution de λ par (54) dans l'équation d'écoulement (52)-a permet de déterminer $d_{\bullet}(\kappa)$, unique solution de :

$$\underbrace{L_b^2 (A_{\bullet} - \kappa \Delta d_{\bullet})}_{\text{décroissant en } d_{\bullet}} = \underbrace{L_b \|\mathbf{A}_{\nabla}^S + \kappa L_c^2 \mathbf{d}_{\nabla}^-\| - (c_3 + \kappa L_c^2)(1 - d_{\bullet})}_{\text{strictement croissant en } d_{\bullet}} \quad (55)$$

On peut donc réduire le problème à la résolution d'une seule équation scalaire, (52)-c, fonction de l'inconnue κ :

$$F(\kappa) = \sqrt{\left(\kappa \Delta d_{\bullet}(\kappa) \right)^2 + \frac{1}{L_c^2} \left(\kappa L_c^2 \Delta \mathbf{d}_{\nabla}(\kappa) \right)^2} - k = 0 \quad \text{avec } \kappa \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda(\kappa) \geq 0 \quad (56)$$

Par ailleurs, on sait qu'il existe une solution unique dans le domaine $\kappa \geq 0$ et $\lambda \geq 0$. Toute la difficulté réside dans le fait que des solutions réalisant $\lambda < 0$ peuvent aussi exister, ce qui impose de commencer par déterminer grâce à (54) et (55) l'ensemble des κ qui assurent $\lambda \geq 0$, avant d'entamer une résolution numérique de l'équation scalaire. C'est un problème délicat qu'on ne détaille pas dans ce mémoire.

4.6 Résolution du problème avec activation des contraintes g_1 et g_2 : P^{II}

Pour chercher la solution du problème lorsqu'elle active les deux critères, on pourrait employer à nouveau l'équation (26) en prenant en compte les deux multiplicateurs de Lagrange. Une telle démarche ne conduit cependant pas à la résolution d'une équation scalaire et peut donc s'avérer délicate. C'est pourquoi on préfère directement minimiser la fonction sur la surface S intersection des deux critères dans l'espace de dimension 4 :

$$S = \left\{ (d_{\bullet}, \mathbf{d}_{\nabla}) \quad \text{tel que} \quad g_1(d_{\bullet}, \mathbf{d}_{\nabla}) = g_2(d_{\bullet}, \mathbf{d}_{\nabla}) = 0 \right\} \quad (57)$$

Il faut toutefois remarquer dès à présent que cette surface n'est pas un ensemble convexe (pas plus qu'une sphère dans l'espace), l'unicité de la solution n'étant donc pas garantie. Malgré tout, on sait que la fonction (continue) à minimiser atteint ses bornes sur la surface (compacte car fermée

bornée) en vertu du théorème de Heinz. En outre, si la solution du problème complet (21) active effectivement les deux critères, alors la solution du problème de minimisation réduit à la surface S sera effectivement unique.

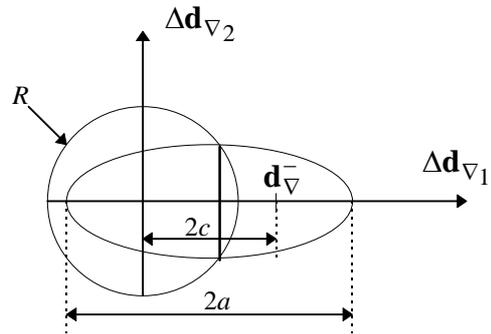
Commençons par caractériser la trace de la surface S dans l'espace de \mathbf{d}_{∇} (dimension 3), en remarquant que (57) est équivalent à :

$$\|\Delta \mathbf{d}_{\nabla}\| = \frac{\Delta d_{\bullet}}{L_b} \quad (58)$$

$$\|\Delta \mathbf{d}_{\nabla}\| + \|\mathbf{d}_{\nabla}^{-} + \Delta \mathbf{d}_{\nabla}\| = \frac{1 - d_{\bullet}^{-}}{L_b} \quad (59)$$

On peut ainsi remarquer que $\Delta \mathbf{d}_{\nabla}$ est confiné sur l'intersection de la sphère (58) de centre $\mathbf{0}$ et de rayon R avec l'ellipse (59) de foyers $\mathbf{0}$ et \mathbf{d}_{∇}^{-} , de distance focale $2c$ et de grand axe $2a$, où :

$$R = \frac{\Delta d_{\bullet}}{L_b} \quad 2a = \frac{1 - d_{\bullet}^{-}}{L_b} \quad 2c = \|\mathbf{d}_{\nabla}^{-}\|$$



Si $\mathbf{d}_{\nabla}^{-} = 0$ l'ellipse devient une sphère ; l'intersection est non vide si et seulement si $R = a$ et c'est alors la sphère de centre $\mathbf{0}$ et de rayon R . Le problème de minimisation (21) nous permet alors de conclure :

$$\mathbf{d}_{\nabla}^{-} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta d_{\bullet} = \frac{1 - d_{\bullet}^{-}}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{d}_{\nabla} = \Delta \mathbf{d}_{\nabla} = \frac{1 - d_{\bullet}^{-}}{2L_b} \frac{\mathbf{c}_4}{\|\mathbf{c}_4\|} \quad (60)$$

En revanche, si $\mathbf{d}_{\nabla}^{-} \neq 0$, l'intersection est un cercle (en gras sur le dessin) qu'on appelle C . Quelques calculs nous permettent alors d'obtenir son équation :

$$C(\Delta d_{\bullet}) = \left\{ \Delta \mathbf{d}_{\nabla} = x \frac{\mathbf{d}_{\nabla}^{-}}{\|\mathbf{d}_{\nabla}^{-}\|} + y \mathbf{e}_{\nabla} \right\} \quad \text{où} \quad \mathbf{e}_{\nabla} \cdot \mathbf{d}_{\nabla}^{-} = 0 \quad \text{et} \quad \|\mathbf{e}_{\nabla}\| = 1 \quad (61)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} x = \frac{a}{c}(R - a) \\ y = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2} [c^2 - (R - a)^2]} \end{cases}$$

La positivité du radical dans l'expression de y entraîne une condition sur Δd_{\bullet} , si bien que la surface S peut encore s'écrire :

$$S = \left\{ (d_{\bullet}, \mathbf{d}_{\nabla}) \text{ tel que } \Delta d_{\bullet}^I \leq \Delta d_{\bullet} \leq \Delta d_{\bullet}^S \text{ et } \Delta \mathbf{d}_{\nabla} \in C(\Delta d_{\bullet}) \right\}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \Delta d_{\bullet}^I = \frac{1}{2} (1 - d_{\bullet}^- - L_b \|\mathbf{d}_{\nabla}^-\|) \\ \Delta d_{\bullet}^S = \frac{1}{2} (1 - d_{\bullet}^- + L_b \|\mathbf{d}_{\nabla}^-\|) \end{cases} \quad (62)$$

Revenons maintenant au problème de minimisation, c'est-à-dire à (27), qui s'écrit aussi en tenant compte de (57) :

$$\text{Min}_S \left[\frac{c_1}{1+\gamma} \frac{1-d_{\circ}}{1+\gamma d_{\circ}} + \frac{r}{2} d_{\circ}^2 - c_2 d_{\circ} + \frac{c_3}{2} \left(\frac{1-d_{\circ}}{L_b} \right)^2 + k \frac{\Delta d_{\circ}}{L_b} \sqrt{L_c^2 + L_b^2} - \mathbf{c}_4 \cdot \Delta \mathbf{d}_{\nabla} \right] \quad (63)$$

Le dernier terme de (63) va nous permettre de déterminer \mathbf{e}_{∇} , le rayon vecteur du cercle C , car :

$$\text{Min}_S \left[\dots - \mathbf{c}_4 \cdot \Delta \mathbf{d}_{\nabla} \right] = \text{Min}_{\Delta d_{\bullet}^I \leq \Delta d_{\bullet} \leq \Delta d_{\bullet}^S} \left[\dots - x(\Delta d_{\bullet}) \mathbf{c}_4 \cdot \frac{\mathbf{d}_{\nabla}^-}{\|\mathbf{d}_{\nabla}^-\|} - y(\Delta d_{\bullet}) \text{Max}_{\substack{\mathbf{e}_{\nabla} \cdot \mathbf{d}_{\nabla}^- = 0 \\ \|\mathbf{e}_{\nabla}\| = 1}} (\mathbf{c}_4 \cdot \mathbf{e}_{\nabla}) \right] \quad (64)$$

Un calcul immédiat permet d'obtenir :

$$\text{Max}_{\substack{\mathbf{e}_{\nabla} \cdot \mathbf{d}_{\nabla}^- = 0 \\ \|\mathbf{e}_{\nabla}\| = 1}} (\mathbf{c}_4 \cdot \mathbf{e}_{\nabla}) = c_4^{\perp} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_{\nabla} = \frac{\mathbf{c}_4 - c_4'' \mathbf{d}_{\nabla}^- / \|\mathbf{d}_{\nabla}^-\|}{c_4^{\perp}}$$

$$\text{avec } c_4'' = \frac{\mathbf{c}_4 \cdot \mathbf{d}_{\nabla}^-}{\|\mathbf{d}_{\nabla}^-\|} \quad \text{et} \quad c_4^{\perp} = \sqrt{\|\mathbf{c}_4\|^2 - c_4''^2} \quad (65)$$

Il ne reste plus qu'à minimiser (64) par rapport à Δd_{\bullet} , en remarquant qu'il s'agit d'une fonction strictement convexe, de dérivée infiniment négative en Δd_{\bullet}^I et infiniment positive en Δd_{\bullet}^S , ce qui reste aisé sur le plan numérique.

Application du cadre variationnel à la plasticité à gradients

Pour modéliser les phénomènes de localisation qui surviennent dans le cas d'un comportement élastoplastique à écrouissage négatif, certains auteurs ont introduit des termes en gradients de déformation plastique cumulée dans l'expression du seuil de plasticité. L'emploi de ces modèles soulève des questions déjà évoquées de manière générale et qui concernent les conditions aux limites, la détermination de la frontière libre entre zone élastique et zone dissipative, la régularité des champs ou encore le choix d'un algorithme de résolution numérique.

Pour y répondre, on montre que les modèles de plasticité à gradients s'inscrivent dans le cadre variationnelle que nous avons présenté, moyennant un choix d'énergie libre globale particulier. La régularité des champs, les conditions aux limites et les conditions d'interface sont alors naturellement contenues dans la formulation. En les explicitant, on obtient en particulier la loi de propagation de la frontière libre. On remarque également que l'énergie libre globale n'est pas convexe, ce qui nous conduit à proposer un autre modèle de plasticité à gradients, fondé sur un seuil de plasticité portant sur les déformations et indiscernable du modèle précédent pour des chargements proportionnels.

Fort également de l'approche incrémentale qui complète le cadre variationnel, on résout analytiquement deux problèmes de structures, une barre en traction et une poutre en flexion, pour illustrer les effets non locaux qu'introduisent ces modèles.

Application du cadre variationnel à la plasticité à gradients

1. Plasticité à gradients avec seuil en contraintes	142
1.1 Description du modèle	142
1.2 Formulation variationnelle du modèle de plasticité à gradients	143
1.3 Propriétés issues de la formulation variationnelle	145
2. Plasticité à gradients avec seuil en déformations.....	146
2.1 Description du modèle local.....	147
2.2 Formulation variationnelle pour le modèle non local	148
2.3 Réponses des modèles locaux à des sollicitations uniaxiale et biaxiale	149
3. Solutions analytiques de problèmes de structures.....	152
3.1 Traction d'un barreau unidimensionnel	152
3.2 Poutre en flexion pure	156

Lors du chapitre précédent, nous avons démontré les qualités constructives de la démarche présentée aux chapitres 2 à 4 : partant d'un modèle microscopique simple (de type élastique fragile), chacune des étapes de la méthode a été examinée, pour finalement aboutir aux applications numériques. L'objectif qu'on se fixe ici est différent ; il s'agit de montrer qu'un modèle non local couramment employé dans la littérature, la plasticité à gradients, s'insère dans notre cadre variationnel.

La théorie de plasticité à gradients a initialement été suggérée par Aifantis [1987] pour modéliser le caractère fortement hétérogène de la distribution des dislocations dans un métal et rendre ainsi compte de l'apparition des bandes de déformation de Portevin - Le Chatelier, même si Jeanclaude et Fressengeas [1993] ont montré ultérieurement que ce modèle ne suffisait pas pour retrouver quantitativement les résultats expérimentaux. Dans le courant des années 90, l'emploi de cette théorie s'est développé dans le domaine du Génie Civil car elle se fonde sur des lois de comportement élastoplastiques, largement employées pour rendre compte de déformations irréversibles, tout en introduisant un terme additionnel (en gradients) dans le seuil de plasticité pour traiter les problèmes liés à l'adoucissement du béton. Généralement, ce terme se résume au laplacien de la déformation plastique cumulée, c'est-à-dire le terme en gradients de plus bas degré qui soit à la fois linéaire et isotrope. La simplicité de l'introduction de ce nouveau terme dans un modèle local éventuellement sophistiqué et déjà éprouvé rend cette approche attractive mais s'affranchit totalement des justifications physiques originelles (gradients de dislocations) et cache un certain nombre de difficultés abordées dans ce chapitre.

Dans ce contexte, il nous semble intéressant de montrer que la théorie de plasticité à gradients s'insère dans le cadre variationnel du chapitre 2, une démarche comparable à celle menée par Svedberg et Runesson [1997] qui proposent une formulation thermodynamique de ces modèles. En remplaçant cette théorie dans un cadre plus large, nous levons ainsi certaines difficultés, parmi lesquelles la résolution numérique n'est pas des moindres, et obtenons plusieurs nouvelles propriétés. L'absence de convexité de l'énergie libre nous amène alors à modifier quelque peu la formulation initiale de la plasticité à gradients, en introduisant un seuil de plasticité en déformations et non plus en contraintes, formulation équivalente à la précédente en présence de chargements proportionnels. Enfin, deux exemples analytiques qui tirent profit des propriétés du cadre variationnel mettent en lumière certaines caractéristiques de ces modèles non locaux (localisation, propagation de la zone plastique, bifurcations).

1. Plasticité à gradients avec seuil en contraintes

1.1 Description du modèle

Dans le cadre d'une théorie de plasticité avec seuil de von Mises en contraintes et écrouissage isotrope linéaire, la construction du modèle de plasticité à gradients consiste simplement à prendre en compte le laplacien de la déformation plastique cumulée dans le seuil. Les équations du comportement sont alors fort semblables à celles du modèle sans gradient.

Relation contraintes - déformations

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (1)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ tenseur des contraintes
 $\boldsymbol{\varepsilon}$ tenseur des déformations
 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ tenseur des déformations plastiques

Critère de plasticité

$$f = \sigma_{eq} - h p + \underbrace{c \Delta p}_{\text{terme non local}} - \sigma^y \leq 0 \quad \text{avec} \quad \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\sigma}^D} \quad (2)$$

$\boldsymbol{\sigma}^D$ déviateur des contraintes
 σ_{eq} contrainte équivalente de von Mises
 p déformation plastique cumulée
 $h < 0$ module d'écrouissage (négatif en présence d'adoucissement)
 $c > 0$ paramètre de délocalisation

Loi d'écoulement

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2} \lambda \frac{\boldsymbol{\sigma}^D}{\sigma_{eq}} \\ \dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \end{cases} \quad \text{avec} \quad \lambda \geq 0 \quad f \leq 0 \quad \lambda f = 0 \quad (3)$$

Comme on peut le voir, le seul terme non local de ce modèle est bien le laplacien de la déformation plastique cumulée dans le critère de plasticité. C'est le choix le plus simple pour obtenir une relation de comportement objective et isotrope où le terme non local reste linéaire ; il a en outre l'avantage de n'introduire qu'un paramètre supplémentaire c . Des formulations plus complexes qui introduisent des opérateurs différentiels d'ordre plus élevé (bilaplacien par exemple) ont également été étudiées, voir Mühlhaus et Aifantis [1991], mais semblent moins employées au vu de la bibliographie. Cela dit, ce seul terme non local fait de l'équation de cohérence $\dot{f} = 0$ une équation aux dérivées partielles en \dot{p} posée sur tout le domaine Ω ; sa résolution se heurte à plusieurs difficultés.

- La condition de cohérence est en fait une inéquation différentielle, qui se réduit à une équation à l'intérieur de la zone de charge plastique P , *a priori* inconnue. Du coup, la détermination de

cette zone passe par la résolution toujours délicate d'un problème de frontière libre dont l'inconnue est la frontière ∂P .

- De nouvelles conditions aux limites doivent être introduites ; elles viennent s'ajouter à celles des équations d'équilibre. Aucun choix n'est à exclure d'emblée, même si une proposition couramment admise est :

$$\frac{\partial \dot{p}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (4)$$

$$\dot{p} = 0 \quad \text{sur } \partial P \setminus \partial\Omega \quad (\text{frontière inconnue}) \quad (5)$$

- Aucune équation ne permet de déterminer la frontière libre ∂P . Étonnamment, ce fait n'a jamais été mentionné dans la littérature¹, bien qu'il paraisse douteux de vouloir réaliser un calcul en s'en passant. On verra au § 1.3 comment obtenir une telle équation.

En raison de ces difficultés, on peut s'attendre à des algorithmes de résolution numérique assez complexes. Et en effet, même si de Borst et Mühlhaus [1992] ainsi que de Borst et Pamin [1996] ont décrit un tel algorithme (où subsistent d'ailleurs quelques questions concernant la régularité des fonctions de forme pour l'interpolation par éléments finis de p), des expériences numériques menées par Meftah [1997] semblent révéler des problèmes pour ajuster l'algorithme, en particulier des oscillations au voisinage de la frontière plastique. C'est pourquoi il nous a semblé pertinent de replacer ce modèle de plasticité à gradients dans le cadre de la formulation variationnelle pour lois de comportement à gradients de variables internes présentée au chapitre 2.

1.2 Formulation variationnelle du modèle de plasticité à gradients

La formulation variationnelle du chapitre 2 repose avant tout sur le caractère standard généralisé de la loi de comportement à l'échelle du point matériel. Si l'on sait depuis Halphen et Nguyen [1975] que le modèle local (c'est-à-dire sans le terme en laplacien) s'inscrit dans le cadre des matériaux standard généralisés, qu'en est-il en revanche du modèle à gradients défini par les équations (1) à (3) ? Pour y répondre, nous allons proposer une énergie libre et un potentiel de dissipation et constater *a posteriori* que le formalisme à l'échelle de la structure permet alors de retrouver les équations du modèle à gradients et d'obtenir un certain nombre de propriétés supplémentaires.

On décrit l'état du matériau à l'échelle du point matériel par les variables d'état suivantes : les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$, les déformations plastiques $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, la déformation plastique cumulée p_\bullet et son gradient \mathbf{p}_∇ . On propose alors le potentiel énergie libre suivant qui s'exprime comme la somme de l'énergie élastique de déformation et d'une énergie bloquée d'écrouissage :

$$\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, p_\bullet, \mathbf{p}_\nabla) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \cdot \mathbf{E} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \frac{1}{2} h p_\bullet^2 + \frac{1}{2} c \mathbf{p}_\nabla^2 \quad (6)$$

¹ Tout au moins à la connaissance de l'auteur.

Quant au potentiel de dissipation, on adopte celui du modèle local, qui ne fait pas intervenir de termes en gradients. Pour le déterminer, on rappelle d'abord que le seuil de plasticité vaut :

$$f_{\mu}(\boldsymbol{\sigma}, A_{\mu}) = \sigma_{eq} + A_{\mu} - \sigma^y \quad (7)$$

En suivant les résultats du chapitre 4, on calcule alors le potentiel de dissipation local par transformée de Legendre-Fenchel de la fonction indicatrice du domaine de réversibilité :

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}) &= \text{Sup}_{\substack{\boldsymbol{\sigma}, A_{\mu} \\ f_{\mu}(\boldsymbol{\sigma}, A_{\mu}) = \sigma_{eq} + A_{\mu} - \sigma^y \leq 0}} [\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + A_{\mu} \dot{p}] \\ &= \sigma^y \dot{p} + \underbrace{I_{\{0\}}(\text{Tr } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)}_{\text{assure tr } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = 0} + \underbrace{I_{\text{ir}^+}(\dot{p} - \frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^p)}_{\text{assure } \dot{p} = \frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^p} \quad \text{avec } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^p = \sqrt{\frac{3}{2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \end{aligned} \quad (8)$$

I_K fonction indicatrice d'un convexe K (elle vaut 0 dans K et $+\infty$ hors de K)

Maintenant, en adoptant les définitions du chapitre 2, on peut construire la loi de comportement généralisée à l'échelle de la structure connaissant les potentiels macroscopiques :

Energie libre globale et potentiel de dissipation global :

$$F(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, p) = \int_{\Omega} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(x), \boldsymbol{\varepsilon}^p(x), p(x), \nabla p(x)) dx \quad (9)$$

$$D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}) = \int_{\Omega} \Delta_{\mu}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x), \dot{p}(x)) dx \quad (10)$$

Equations d'état :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad \langle \boldsymbol{\sigma} | \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \cdot \mathbf{E} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dx \quad \forall \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (11)$$

$$A_{\varepsilon^p} = -\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \quad \langle A_{\varepsilon^p} | \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \rangle = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \cdot \mathbf{E} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dx = \langle \boldsymbol{\sigma} | \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \rangle \quad \forall \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (12)$$

$$A_p = -\frac{\partial F}{\partial p} \quad \langle A_p | \hat{p} \rangle = -\int_{\Omega} [h p \hat{p} + c \nabla p \nabla \hat{p}] dx \quad \forall \hat{p} \quad (13)$$

Equation d'évolution :

$$(A_{\varepsilon^p}, A_p) \in \partial D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}) \quad (14)$$

Il ne reste plus maintenant qu'à interpréter les équations (12) à (14) en terme de critère de plasticité et de loi d'écoulement pour montrer qu'on retrouve bien les lois d'évolution du modèle à gradients tel qu'il a été défini en (2) et (3). Pour cela, on commence par intégrer par partie l'équation (13) :

$$\langle A_p | \hat{p} \rangle = -\int_{\Omega} [h p - c \Delta p] \hat{p} dx - \int_{\partial \Omega} c \frac{\partial p}{\partial n} \hat{p} ds + \int_{\partial I} [c \nabla p] \cdot \mathbf{n} \hat{p} ds \quad \forall \hat{p} \quad (15)$$

∂I réunion des éventuelles surfaces de discontinuité de $c \nabla p \cdot \mathbf{n}$

Alors, en suivant Ekeland et Temam [1974] pour interpréter l'appartenance au sous-différentiel (14), on déduit l'équation d'évolution point par point suivante pour les termes de volume² :

$$\left(\underbrace{\mathbf{E} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(x) - \boldsymbol{\varepsilon}^p(x))}_{\boldsymbol{\sigma}(x)}, -[h p(x) - c \Delta p(x)] \right) \in \partial \Delta_\mu(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x), \dot{p}(x)) \quad \text{p.p. } x \in \Omega \quad (16)$$

Etant donnée la définition (8) de Δ_μ , cela signifie qu'on a presque partout :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \frac{\partial f_\mu}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, c \Delta p - h p) = \frac{3}{2} \lambda \frac{\boldsymbol{\sigma}^D}{\sigma_{eq}} & \text{avec } f_\mu \leq 0 \quad \lambda \geq 0 \quad \lambda f_\mu = 0 \\ \dot{p} = \lambda \frac{\partial f_\mu}{\partial A_\mu}(\boldsymbol{\sigma}, c \Delta p - h p) = \lambda & \text{où } f_\mu = \sigma_{eq} + (c \Delta p - h p) - \sigma^y = f(\boldsymbol{\sigma}, p, \Delta p) \end{cases} \quad (17)$$

C'est-à-dire qu'on retrouve bien le modèle de plasticité à gradients tel qu'il a été défini initialement, tout en précisant les hypothèses de modélisation :

- c est un paramètre de l'énergie libre (et non du seuil de plasticité),
- le potentiel de dissipation (donc le seuil et les lois d'écoulement) reste local,
- la loi de comportement est définie à l'échelle de la structure via la formulation variationnelle du chapitre 2.

1.3 Propriétés issues de la formulation variationnelle

Avec les potentiels (6) et (8) qui ont été choisis, la formulation variationnelle coïncide avec le modèle à gradients défini point par point. En outre, elle permet de dégager un certain nombre de propriétés supplémentaires en ce qui concerne la régularité des champs et les conditions aux limites.

Ainsi, nous n'avons pas encore exploité les termes surfaciques (15) de l'équation d'évolution globale (14). En fait, comme le potentiel de dissipation n'inclut pas de contributions surfaciques, on en déduit que les termes en question sont nécessairement nuls, ce qui implique (pour un paramètre c continu en espace) :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega \quad (18)$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial n} \right] = 0 \quad \text{sur } \partial I \quad (19)$$

On obtient ainsi une condition aux limites et une condition d'interface naturelles. On peut d'ailleurs remarquer qu'elles portent sur p et non sur \dot{p} . Par dérivation, on peut alors chercher des conditions sur \dot{p} ; cela n'est pas indispensable pour la formulation mais permet de comparer avec les expressions avancées en (4) et (5).

² En fait, ce sont des conditions suffisantes, c'est-à-dire que les solutions du modèle à gradients (1) à (3) sont aussi des solutions du modèle global. Il semble que ce sont aussi des conditions nécessaires, mais la démonstration mathématique paraît délicate.

Sous l'hypothèse des petites perturbations, le domaine est considéré géométriquement fixe et on peut donc directement dériver la condition aux limites (18) pour obtenir effectivement (4) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right) = \frac{\partial \dot{p}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

En ce qui concerne la condition de continuité sur la frontière de la zone plastique, elle résulte de (19) mais également de la régularité du champ p . En effet, pour préserver une énergie libre finie, il est nécessaire que le champ de déformation plastique cumulée p appartienne à $H^1(\Omega)$. Cela implique en particulier que le saut de p à travers toute surface ∂I est nul :

$$[[p]] = 0 \quad \text{sur } \partial I \quad (20)$$

En suivant alors Hadamard [1903], au moins formellement, et en utilisant les conditions d'interface naturelle (19) et essentielle (20) sur la frontière ∂P de la zone de charge plastique :

$$[[p]] = 0 \Rightarrow [[\dot{p}]] + w \underbrace{\left[\frac{\partial p}{\partial n} \right]}_0 = 0 \Rightarrow \dot{p} = [[\dot{p}]] = 0 \quad \text{sur } \partial P \setminus \partial\Omega \quad (21)$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial n} \right] = 0 \Rightarrow [[\nabla \dot{p}]] \cdot \mathbf{n} + w \mathbf{n} \cdot [[\nabla^2 p]] \cdot \mathbf{n} = 0 \Rightarrow w = - \frac{[[\nabla \dot{p}]] \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot [[\nabla^2 p]] \cdot \mathbf{n}} \quad (22)$$

w célérité normale de propagation de la zone de charge plastique

Ces conditions d'interface permettent donc de retrouver la condition (5) mais fournissent aussi une équation supplémentaire pour déterminer la propagation de la frontière de la zone plastique.

La formulation globale permet ainsi de replacer le modèle de plasticité à gradients dans un cadre variationnel précis. Néanmoins, sur le plan numérique, la formulation incrémentale implicite ne saurait être employée sans précautions car l'énergie libre n'est pas convexe par rapport à la déformation plastique cumulée lorsque l'écroutissage est négatif ($h < 0$) : elle s'exprime comme la différence de deux fonctions convexes³. Toutefois, en se rattachant à l'interprétation des multiplicateurs de Lagrange comme des forces thermodynamiques non locales, on peut continuer d'appliquer tel quel l'algorithme du chapitre 3, mais sans garantie de convergence. On peut aussi proposer un autre modèle de plasticité à gradients qui permet d'obtenir une énergie libre convexe par rapport aux variables internes : c'est l'objet de la partie suivante.

2. Plasticité à gradients avec seuil en déformations

Dans le domaine du Génie Civil, la plasticité à écroutissage négatif est employée pour rendre compte du comportement adoucissant du béton en compression ou de sa fissuration en traction. Etant donnée la phénoménologie pour le moins complexe de ce matériau, on peut penser que ce

³ Notons à ce propos que de tels problèmes ont déjà été étudiés par Auchmuty [1989], mais ses hypothèses de travail et donc l'algorithme qu'il suggère ne s'appliquent pas dans le cas présent.

modèle n'est réaliste que pour des chargements simples, c'est-à-dire proportionnels et monotones. On propose maintenant de remplacer le modèle de plasticité à gradients tel qu'il a été présenté au § 1 par un autre modèle, toujours plastique avec gradients, mais où le seuil de plasticité porte non plus sur les contraintes mais sur les déformations. Ce modèle est :

- équivalent au modèle en contraintes pour des chargements monotones et proportionnels,
- construit à partir d'une énergie libre convexe par rapport aux variables internes.

Ainsi, un tel modèle est préférable sur le plan numérique et permet de retrouver les résultats du modèle en contraintes dans les gammes de chargement où il paraît réaliste.

2.1 Description du modèle local

Dans un premier temps, on décrit le modèle local, c'est-à-dire sans terme en gradients. Il s'inspire des propositions de Khan et Huang [1995] concernant une théorie de plasticité dans l'espace des déformations, mais ne remet pas aussi radicalement en cause la définition des variables internes, qui demeurent la déformation plastique et la déformation plastique cumulée. Les différences majeures avec le modèle à seuil en contraintes résident dans :

- le critère de plasticité qui dépend de la contrainte élastique ($\sigma^{el} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$),
- la loi d'écoulement qui repose elle aussi sur la partie déviatorique de la contrainte élastique.

Plus précisément, les équations de comportement sont les suivantes :

Relation contraintes - déformations :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (23)$$

Critère de plasticité :

$$f_\mu = (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})_{eq} - h p - \sigma^y \leq 0 \quad (24)$$

Loi d'écoulement (normale associée)

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2} \lambda \frac{(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})^D}{(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})_{eq}} \\ \dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \geq 0 \quad f_\mu \leq 0 \quad \lambda f_\mu = 0 \quad (25)$$

La différence intéressante avec le modèle de plasticité à seuil en contraintes tient au fait que la distinction entre écrouissage positif et négatif n'est plus conditionnée par le signe de h . En effet, en suivant l'analyse désormais classique de Nguyen et Bui [1974], le module tangent et son inverse valent quand l'élasticité est isotrope :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{H} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{H} = \mathbf{E} - \frac{9\mu^2}{\varepsilon_{eq}^2} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^D \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^D}{h} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{E}^{-1} + \frac{9}{4\varepsilon_{eq}^2} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^D \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^D}{h - 3\mu} \quad (26)$$

μ module de cisaillement

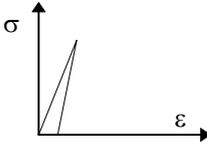
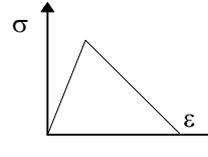
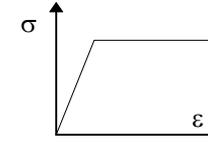
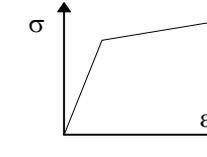
snap-back	écrouissage négatif	plasticité parfaite	écrouissage positif
$h < 0$	$0 < h < 3\mu$	$3\mu = h$	$3\mu < h$
			

figure 1 - Nature de l'écrouissage du modèle à seuil en déformations

Ainsi, si on interdit des comportements locaux de type snap-back, alors les valeurs de h sont positives, que l'écrouissage soit positif ou négatif.

2.2 Formulation variationnelle pour le modèle non local

Pour construire un modèle à gradients à partir de cette loi de comportement avec seuil en déformations, on procède comme au § 1.1, c'est-à-dire qu'on conserve la relation contrainte - déformation (23) et les lois d'écoulement (25) du modèle local tandis qu'on introduit le laplacien de la déformation plastique cumulée dans le critère de plasticité pour obtenir :

$$f = (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})_{eq} - h p + c \Delta p - \sigma^y \leq 0 \quad h > 0 \quad c > 0 \quad (27)$$

A nouveau, on peut replacer ce modèle dans un cadre standard généralisé global, en adoptant comme énergie libre et potentiel de dissipation macroscopiques :

$$\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, p, \mathbf{p}_\nabla) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \cdot \mathbf{E} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) - \underbrace{\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^p \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p}_{\text{énergie libre bloquée supplémentaire}} + \frac{1}{2} h p^2 + \frac{1}{2} c \mathbf{p}_\nabla^2 \quad (28)$$

$$\Delta(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}) = \sigma^y \dot{p} + \mathbf{I}_{\{0\}}(\text{Tr } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) + \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+} \left(\dot{p} - \frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^p \right) \quad (29)$$

En fait, seule l'énergie libre diffère du modèle à seuil en contraintes, du fait de la présence du terme supplémentaire dans l'énergie libre bloquée, quadratique en déformation plastique. Toute la démarche des § 1.2 et § 1.3 reste applicable, en remarquant simplement que la force thermodynamique associée à la déformation plastique n'est plus la contrainte mais la contrainte élastique, ce qui permet bien de retrouver le critère de plasticité formulé en seuil de déformation, et la loi d'écoulement associée :

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (30)$$

A la différence du modèle de plasticité à seuil en contraintes, l'énergie libre (28) est maintenant convexe par rapport aux variables internes car elle est linéaire par rapport à la déformation plastique et quadratique positive par rapport à la déformation plastique cumulée (h est positif, y compris en

régime d'érouissage négatif). La formulation incrémentale implicite s'exprime alors comme un problème de minimisation, décrit au chapitre 2 :

$$\text{Min}_{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \Delta p} \left[F(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{p^-} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, p^- + \Delta p) + D(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \Delta p) \right] \quad (31)$$

F énergie libre globale, définie par intégration comme en (9)

D potentiel de dissipation global, défini par intégration comme en (10)

La résolution de ce problème par rapport à la déformation plastique conduit à la loi d'écoulement incrémentale :

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} \Delta p \frac{(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})^D}{(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})_{eq}} \quad (32)$$

où l'incrément de déformation plastique cumulée est fourni par la résolution d'un problème de minimisation quadratique sous contrainte linéaire, qui exprime la condition de cohérence incrémentale :

$$\text{Min}_{\Delta p \geq 0} \int_{\Omega} \frac{1}{2} h(p^- + \Delta p)^2 + \frac{1}{2} c (\nabla p^- + \nabla \Delta p)^2 - (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})_{eq} \Delta p + \sigma^y \Delta p \quad (33)$$

2.3 Réponses des modèles locaux à des sollicitations uniaxiale et biaxiale

Le modèle de plasticité avec seuil en déformations semble être une alternative intéressante dans la mesure où son intégration numérique s'exprime comme un problème de minimisation quadratique sous contrainte linéaire. C'est en effet une classe de problèmes pour laquelle nombre d'algorithmes ont été proposés, la méthode du lagrangien augmenté présentée au chapitre 3 n'étant sans doute pas la plus performante (on pourrait lui préférer un algorithme de contraintes actives).

Toutefois, ces modèles à seuil en contraintes ou en déformations ne sont pas équivalents. Comme dans le domaine du Génie Civil leur construction ne repose pas sur une modélisation des mécanismes physiques à l'œuvre, d'autres critères devraient intervenir pour en choisir un plutôt que l'autre. En fait, en revenant aux modèles locaux, on se propose de montrer que leurs réponses sont identiques dans le cas d'un chargement radial monotone, et peu satisfaisantes dans le cas d'un trajet de chargement non proportionnel, en supposant que l'élasticité est isotrope.

2.3.1 Sollicitation radiale monotone

Dans un premier temps, on considère un chargement monotone proportionnel. La partie hydrostatique du comportement est purement élastique et gouvernée par le même module de compressibilité pour les deux modèles : la réponse hydrostatique est identique (que le chargement soit radial ou non). Quant à la partie déviatorique, si le chargement en un point matériel s'écrit $\boldsymbol{\varepsilon}^D(t) = \varepsilon(t) \mathbf{D}$ où ε est une fonction positive et croissante du temps et \mathbf{D} un tenseur déviatorique tel que $D_{eq} = 1$, la réponse en terme de contraintes pour ces modèles est la suivante :

Modèle à seuil en contraintes :

$$\begin{cases} \text{si } \varepsilon \leq \varepsilon^y & p = 0 & \boldsymbol{\varepsilon}^p = 0 & \boldsymbol{\sigma}^D = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{D} \\ \text{si } \varepsilon > \varepsilon^y & p = \frac{2\mu}{3\mu + h_\sigma} (\varepsilon - \varepsilon^y) & \boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{3p}{2} \mathbf{D} & \boldsymbol{\sigma}^D = \left[\sigma^y + 2\mu \left(1 - \frac{3\mu}{3\mu + h_\sigma} \right) (\varepsilon - \varepsilon^y) \right] \mathbf{D} \end{cases} \quad (34)$$

$\varepsilon^y = \sigma^y / 2\mu$ limite d'élasticité en déformation

h_σ paramètre d'écrouissage du modèle en contraintes

Modèle à seuil en déformations :

$$\begin{cases} \text{si } \varepsilon \leq \varepsilon^y & p = 0 & \boldsymbol{\varepsilon}^p = 0 & \boldsymbol{\sigma}^D = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{D} \\ \text{si } \varepsilon > \varepsilon^y & p = \frac{2\mu}{h_\varepsilon} (\varepsilon - \varepsilon^y) & \boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{3p}{2} \mathbf{D} & \boldsymbol{\sigma}^D = \left[\sigma^y + 2\mu \left(1 - \frac{3\mu}{h_\varepsilon} \right) (\varepsilon - \varepsilon^y) \right] \mathbf{D} \end{cases} \quad (35)$$

h_ε paramètre d'écrouissage du modèle en déformations

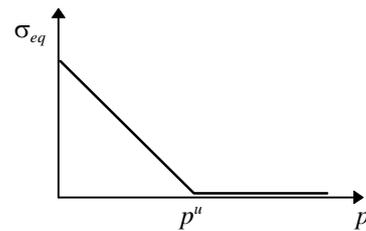
On constate ainsi que les modèles de plasticité à seuil en contraintes et en déformations conduisent aux mêmes résultats en présence d'un chargement monotone proportionnel, lorsque l'élasticité est isotrope, à condition d'ajuster le paramètre d'écrouissage h :

$$h_\varepsilon = h_\sigma + 3\mu \quad (36)$$

A ce propos, on peut d'ailleurs remarquer qu'en présence d'écrouissage négatif, il est nécessaire d'imposer un changement de pente pour l'écrouissage lorsque la déformation ultime ε'' qui correspond à une contrainte nulle dans les équations (34) ou (35) est atteinte. Dans le cas contraire, une sollicitation par une déformation imposée de compression conduirait à une contrainte de traction.

$$\text{si } p > p'' = \frac{\sigma^y}{-h_\sigma} = \frac{\sigma^y}{3\mu - h_\varepsilon} \quad \text{alors } \begin{cases} h_\sigma = 0 \\ h_\varepsilon = 3\mu \end{cases} \quad (37)$$

Ces changements de pente sont illustrés ci-contre sur la réponse du matériau sous forme de courbe contrainte équivalente - déformation plastique cumulée.



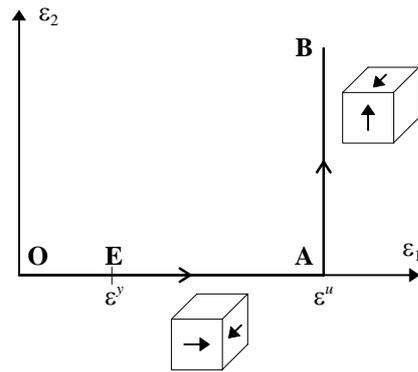
2.3.2 Chargement biaxial

On s'intéresse maintenant à une sollicitation biaxiale à déformation imposée. Pour bien décomposer les effets hydrostatique et déviatorique, on choisit une sollicitation en glissement imposé, donc purement déviatorique. Ainsi, on appelle \mathbf{D}_1 et \mathbf{D}_2 les deux directions de sollicitations et on fixe maintenant le trajet de chargement dans ce plan.

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_1 \mathbf{D}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{D}_2$$



Le trajet [O A] est radial monotone ; son étude a déjà fait l'objet du § 2.3.1. Une fois la déformation ultime ε'' atteinte, la contrainte est nulle. Pour le modèle en contraintes, le domaine de réversibilité est alors réduit à la seule contrainte nulle si bien que tout le trajet [A B] se fait à contrainte nulle, donc de manière purement plastique (pas de déformation élastique). Ce n'est pas le cas du modèle en déformations, pour lequel l'intégration de la loi de comportement conduit aux résultats suivants, où θ est un paramètre du trajet [A B] et où les quantités tensorielles sont écrites dans le plan $(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon'' \begin{bmatrix} 1 \\ \tan \theta \end{bmatrix} \quad p = \frac{2}{3} \left(\frac{\varepsilon''}{\cos \theta} - \varepsilon^y \right) \quad \boldsymbol{\varepsilon}^p = \varepsilon'' \begin{bmatrix} 1 - \ln \cos \theta \\ \tan \theta - \theta \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = 2\mu \varepsilon'' \begin{bmatrix} \ln \cos \theta \\ \theta \end{bmatrix} \quad (38)$$

On peut alors tracer la réponse des deux modèles en terme de trajet de contraintes dans le plan $(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$ ainsi que la courbe déformation équivalente - contrainte équivalente, dont la pente permet d'estimer la rigidité résiduelle du matériau dans la direction de sollicitation :

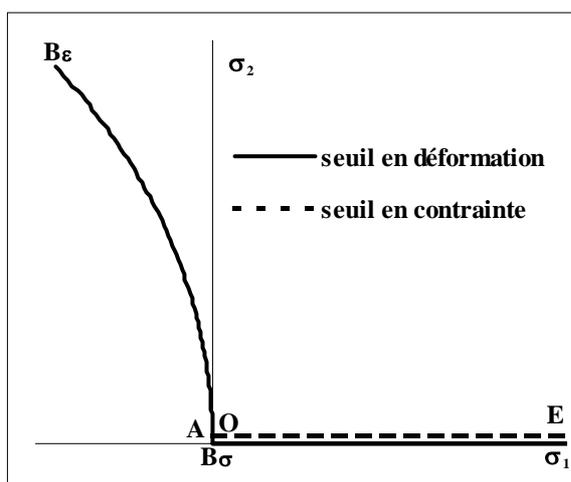


figure 2 - Trajet de contraintes dans le plan $(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$

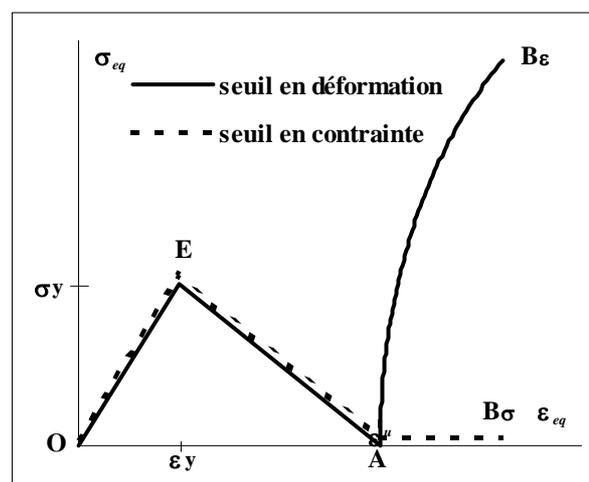


figure 3 - Courbe contrainte - déformation

Sur cette exemple de sollicitation non radiale, il semble que le modèle à seuil en contraintes soit trop conservatif, dans la mesure où la zone endommagée qui résulte du cisaillement dans la direction \mathbf{D}_1 condamne également toute rigidité du matériau par rapport à un cisaillement dans la

direction \mathbf{D}_2 . La réponse du modèle à seuil en déformations n'est pas plus enviable, puisqu'il y a effectivement une rigidité dans la direction \mathbf{D}_2 , mais elle est supérieure à celle qu'on observerait pour le matériau sain et surtout, le modèle n'exhibe plus d'adoucissement pour la nouvelle sollicitation (ce qui est cohérent avec le fait d'avoir posé $h_\varepsilon = 3\mu$ selon (37), ce qui correspond à un modèle plastique parfait).

Finalement, il est manifeste qu'en dehors des chargements proportionnels, les modèles de plasticité traduisent assez mal la microfissuration d'un béton.

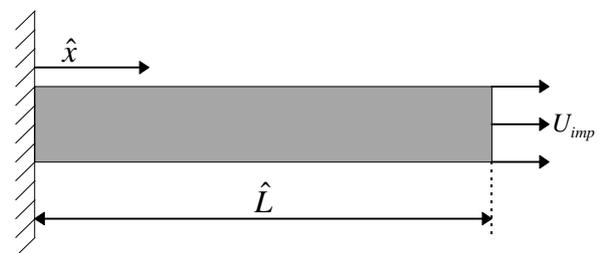
3. Solutions analytiques de problèmes de structures

Pour illustrer les différents ingrédients du modèle de plasticité à gradients du § 1, nous avons choisi de détailler le calcul de deux structures raisonnablement simples : d'une part, un barreau uniaxial en traction, qui a déjà fait l'objet d'un certain nombre de travaux, et d'autre part, une poutre sollicitée en flexion pure, pour examiner le couplage entre les fibres de la poutre qui résulte du terme non local. Pour ces deux problèmes, le chargement est proportionnel si bien que les résultats qu'on obtiendrait avec le modèle de plasticité en déformations du § 2 seraient identiques.

3.1 Traction d'un barreau unidimensionnel

Le problème 1D de traction d'un barreau a déjà été traité à multiples reprises, par exemple par de Borst et Mühlhaus [1992], car c'est sans doute le problème de structure le plus simple. Cependant, comme on l'a souligné au § 1.1, aucune condition d'interface n'a été prise en compte pour déterminer l'évolution de la zone plastique, ce qui laisse subsister un doute quant à la justesse de la solution. Nous nous proposons de traiter ici l'intégralité des équations du modèle, mais de manière incrémentale en temps pour ensuite faire tendre le pas de temps vers zéro. Pourquoi procéder ainsi plutôt que directement de manière continue en temps ? En fait, il est délicat de traiter explicitement la condition d'interface (22), alors que la formulation incrémentale la garantit automatiquement. En outre, la régularité des champs pour le problème incrémental est supérieure à celle des champs du problème en vitesse.

La géométrie de la structure et le chargement sont représentés sur la figure ci-contre. Remarquons que c'est le déplacement qui est imposé, même si le raisonnement est mené en contrainte, constante dans le barreau.



Notons aussi dès à présent que la modélisation introduit en fait une longueur caractéristique via le paramètre c , à savoir en présence d'écrouissage négatif :

$$L_c = \sqrt{-\frac{c}{h}} \quad (39)$$

Cette longueur caractéristique nous sert dorénavant comme unité de longueur pour adimensionner les équations en espace ; on pose ainsi :

$$L = \frac{\hat{L}}{L_c} \quad x = \frac{\hat{x}}{L_c} \quad (40)$$

Moyennant ces choix, les équations incrémentales⁴ de comportement 1D s'écrivent alors :

relation contrainte – déformation

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + p \quad (41)$$

critère de plasticité

$$f = \sigma - \sigma^y - h \left(p + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) = f^- + \Delta\sigma - h \left(\Delta p + \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2} \right) \leq 0 \quad (42)$$

condition de cohérence

$$\Delta p \geq 0 \quad f \leq 0 \quad \Delta p f = 0 \quad (43)$$

conditions aux limites, d'après (18)

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial x}(0) = \frac{\partial \Delta p}{\partial x}(L) = 0 \quad (44)$$

Quant à l'équation d'équilibre, elle se réduit à :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \quad (45)$$

Le champ de contrainte est en fait une constante inconnue, que l'on continue d'appeler σ .

Remarquons qu'il n'y a pas unicité de la solution incrémentale : même tant que la contrainte n'a pas atteint la limite d'élasticité, une solution dissipative existe. Pour notre part, nous nous contentons de chercher ici une évolution continue par rapport au paramètre de chargement : on est donc sûr qu'avant que la contrainte σ n'atteigne la limite d'élasticité σ^y , le comportement demeure élastique.

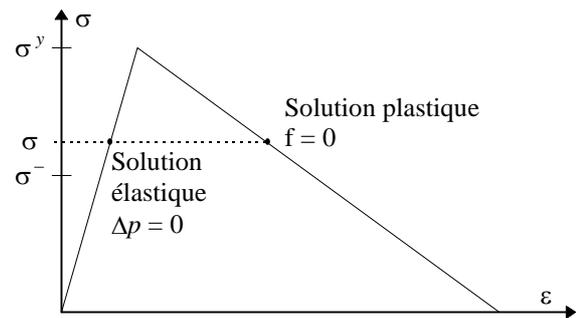


figure 4 - Réponse incrémentale en régime élastique

Une autre remarque préalable concerne la régularité du champ Δp : dans le cadre d'une formulation en temps discret, les propriétés de régularité de Δp se déduisent directement de celle de p (ce qui n'est pas le cas des propriétés de \dot{p} dans une formulation en temps continu). Ainsi, en vertu de (19) et (20), Δp est C^1 .

⁴ On adopte une fois de plus les notations q^- , q et Δq pour représenter une quantité q aux instants t^- , t et durant l'incrément de temps $\Delta t = t - t^-$, où on ne confondra pas Δq avec le laplacien de q qui se réduit ici à $\partial^2 / \partial x^2$.

On peut maintenant aborder la résolution du problème incrémental. Jusqu'à ce que la contrainte σ^- atteigne la limite d'élasticité σ^y , le comportement est resté élastique et homogène, si bien que $p^- = 0$ et $f^- = 0$. Au-delà, certaines zones de la barre vont nécessairement plastifier. Pour caractériser ces zones, on peut remarquer que pour vérifier à la fois la positivité et la dérivabilité de Δp , on a nécessairement :

$$\forall x \in]0 L[\quad \Delta p(x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Delta p}{\partial x}(x) = 0 \quad (46)$$

Du fait des conditions aux limites (44), ce résultat s'étend bien sûr à $x = 0$ et $x = L$. Examinons maintenant le support de Δp , c'est-à-dire les zones de charge plastique. Comme Δp est un champ continu, son support est la réunion d'intervalles I ouverts de $[0 L]$ (ce qui inclut des intervalles pouvant contenir 0 ou L). Sur chacun de ces intervalles I , il faut alors résoudre l'équation différentielle $f = 0$, dont la solution générale est :

$$\Delta p = \frac{\Delta \sigma}{h} + P \cos(x + \varphi) \quad (47)$$

Les constantes d'intégration P et φ sont obtenues en tenant compte en outre des éventuelles conditions aux limites (44) et des conditions de continuité et de dérivabilité aux bornes de I . En fait, on peut rencontrer trois cas de figure pour ces intervalles.

- $I = [0 L]$: si L n'est pas un multiple de π , alors l'unique solution est homogène et vaut :

$$\Delta p = \frac{\Delta \sigma}{h} \quad (48)$$

En revanche, si L est effectivement un multiple de π , alors tous les champs de la forme

$$\Delta p = \frac{\Delta \sigma}{h} (1 + A \cos x) \quad \text{avec } |A| \leq 1 \quad (49)$$

sont solutions. Cependant, nous excluons dorénavant ce cas.

- $I = [0 x_d[$ ou $I =]x_g L]$: ces deux cas sont symétriques et on se contente d'examiner le premier. Outre l'équation différentielle $f = 0$, le champ Δp doit vérifier la condition à la limite (44) en $x = 0$ et être nul en x_d , ainsi que sa dérivée en vertu de (46). La seule solution est alors :

$$\Delta p = \frac{\Delta \sigma}{h} (1 + \cos x) \quad \text{et} \quad x_d = \pi \quad (50)$$

- $I =]x_g x_d[$: dans ce cas, seul intervient l'équation $f = 0$, ainsi que la nullité de Δp et de sa dérivée en x_g et x_d . L'unique solution est alors :

$$\Delta p = \frac{\Delta \sigma}{h} \left[1 + \cos \left(x - \frac{x_g + x_d}{2} \right) \right] \quad \text{et} \quad x_d - x_g = 2\pi \quad (51)$$

On peut noter que la positivité de Δp impose pour chacune de ces solutions que l'incrément de contrainte $\Delta \sigma$ soit négatif.

Etudions maintenant le comportement ultérieur de la barre. En dehors des zones de charge plastique initiales, la barre décharge élastiquement et la contrainte devient strictement inférieure à la

limite d'élasticité, si bien qu'en accord avec l'hypothèse de continuité en temps de la solution, ces zones resteront dorénavant élastiques. Il en est de même pour toute zone initialement plastique qui cesserait de plastifier pour décharger élastiquement car la contrainte y deviendrait alors strictement inférieure au seuil de plasticité courant. Enfin, pour les zones qui continuent de plastifier, et il y en a au moins une pour pouvoir respecter en même temps un déplacement imposé croissant et une diminution de la contrainte, on est encore dans la situation $f^- = 0$, de sorte que l'analyse précédente reste applicable telle quelle, avec transition possible à tout moment de la solution homogène (48) vers les solutions localisées au bord (50) ou à cœur (51). On peut d'ailleurs remarquer pour ce problème qu'une fois les zones plastiques (localisées) installées, leurs frontières n'évoluent plus.

Finalement, si on omet la solution homogène (48) et les zones localisées aux bords (50), la plasticité se développe dans un nombre fini de zones localisées, chacune de largeur $2\pi L_c$ (en dimension réelle), sortes de macro-points aux comportements indépendants les uns des autres. Après passage à la limite en temps, on exprime le champ de déformation plastique dans ces zones :

$$p(\hat{x}) = \frac{\sigma - \sigma^y}{h} \left(1 - \cos \frac{\hat{x} - \hat{x}_0}{L_c} \right) \quad \text{où} \quad \hat{x}_0 = L_c \frac{x_d + x_g}{2} \quad (52)$$

\hat{x}_0 centre de la zone plastique

On retrouve les résultats obtenus par de Borst et Mühlhaus [1992]. Mais en ayant tenu compte de toutes les équations du problème, y compris la condition d'interface, nous n'avons pas eu besoin d'introduire une hypothèse de plus forte pente pour fixer la taille de la zone plastique, contrairement à ces auteurs. Par ailleurs, la condition d'interface a été traitée implicitement à travers la régularité du champ incrémental mais on peut constater que son expression (22) pour le problème continu est également vérifiée et conduit à une vitesse de propagation de la zone plastique nulle : $w = 0$.

On peut également s'intéresser au comportement moyen de ces macro-points, en terme de déformation plastique et de déformation totale :

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2\pi L_c} \int_{-\pi L_c}^{\pi L_c} p(\hat{s} + \hat{x}_0) d\hat{s} = \frac{\sigma - \sigma^y}{h} \quad (53)$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \left\langle \frac{\sigma}{E} - p \right\rangle = \frac{\sigma}{E} - \langle p \rangle \quad (54)$$

Il est remarquable qu'en moyenne, c'est-à-dire l'effet perçu par le reste de la structure, chaque macro-point se comporte en accord avec le modèle de plasticité locale. Du coup, les bifurcations qui pouvaient se produire pour n'importe quel point matériel pour le modèle local peuvent maintenant survenir pour n'importe quel macro-point. La réponse globale de la barre dépend ainsi du nombre de macro-points sollicités, mais comme ce nombre est fini (car ils ont une taille fixée non nulle), le problème admet un nombre fini de solutions, donc est bien posé.

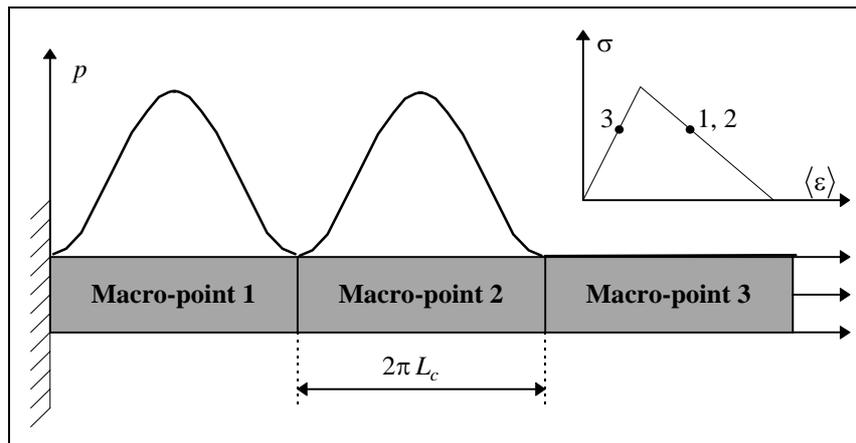


figure 5 - Plasticité à gradients : interprétation en termes de macro-points

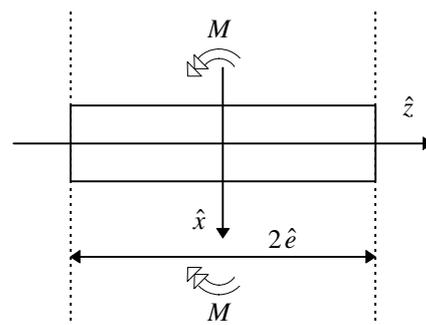
3.2 Poutre en flexion pure

On s'intéresse ici à la réponse d'une section de poutre droite soumise à un effort de flexion pure. C'est à nouveau un problème 1D. En particulier, on détermine les expressions analytiques des distributions de déformation plastique et de contrainte dans l'épaisseur de la poutre pour une loi de comportement élastoplastique locale et pour une loi à gradients. On peut ainsi quantifier l'importance du couplage entre fibres de la poutre par les termes en gradients, et ainsi mesurer la validité des hypothèses de Meftah [1997] qui a négligé cette interaction dans l'épaisseur. En revanche, on se restreint à des solutions homogènes le long de la poutre (composante longitudinale du gradient nulle), ce qui exclut toute localisation de la courbure. Enfin, au § 3.2.5, on examine les bifurcations éventuelles qui restent possibles en dépit de l'introduction de termes en gradients.

Une remarque préliminaire concerne le régime de sollicitation étudié. Le modèle est censé représenter un mécanisme de dégradation du matériau : ainsi lorsque le seuil d'élasticité dans une fibre de la poutre atteint zéro du fait de l'écroutissage négatif, on peut considérer que cette fibre se rompt. On peut alors s'attendre à un changement de régime des équations (nouvelles conditions aux limites) ou tout au moins à un changement de relation de comportement pour décrire la réponse de la fibre brisée (écoulement plastique à contrainte nulle). C'est pourquoi nous n'étudions pas la réponse de la poutre au-delà de la première rupture de fibre.

3.2.1 Géométrie, cinématique et équilibre

On considère une poutre à section droite rectangulaire, d'épaisseur $2\hat{e}$ dans la direction où on impose le chargement de flexion pure. On adopte une cinématique de Navier-Bernoulli, de sorte que la déformation est purement longitudinale. En prenant \hat{e} comme échelle des longueurs, la déformation s'exprime par :



$$\varepsilon = \gamma z + \varepsilon^0 \quad \text{avec} \quad z = \frac{\hat{z}}{\hat{e}} \quad \text{et} \quad \gamma = \hat{\gamma} \hat{e} \quad (55)$$

$\hat{\gamma}$ courbure
 ε^0 extension moyenne

Quant aux équations d'équilibre, elles traduisent l'application d'un moment :

$$\int_{-1}^1 \frac{\sigma}{E} dz = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 \frac{\sigma}{E} z dz = M \quad \text{avec} \quad M = \frac{\hat{M}}{E \hat{e}} \quad (56)$$

\hat{M} moment de flexion appliqué à la poutre

Par ailleurs, en vertu de l'hypothèse d'homogénéité le long de l'axe de la poutre, on a :

$$\frac{\partial \cdot}{\partial \hat{x}} = 0 \quad (57)$$

Finalement, la réponse des différentes fibres est couplée à la fois par le terme en laplacien de la déformation plastique cumulée et par la condition de compatibilité cinématique globale (55). Par ailleurs, étant donnée la symétrie du problème, on commence par chercher des solutions symétriques, donc en particulier $\varepsilon^0 = 0$ et $0 \leq z \leq 1$, et on examinera au § 3.2.5 l'existence d'éventuelles bifurcations vers des solutions non symétriques.

3.2.2 Solution pour le modèle local

Le calcul du développement d'une zone plastique dans une section de poutre est classique ; on se contente de rappeler ici les principaux résultats. Grâce à la cinématique de Navier-Bernoulli et à l'hypothèse de symétrie de la solution, le champ de déformation est fixé par un unique scalaire, la courbure, dont l'évolution est croissante. La réponse en terme de contrainte est alors unique en dépit de l'écroutissage négatif. Elle est fixée par la loi de comportement intégrée sous chargement radial monotone qui distingue deux zones : l'une à cœur $[0, z_P]$ dans laquelle le comportement est élastique, et l'autre au bord $[z_P, 1]$ où le comportement est plastique.

Quantitativement, on introduit deux nouvelles variables pour alléger les différentes expressions :

$$\kappa = \frac{E}{E+h} \gamma \quad \text{et} \quad s = \frac{E}{E+h} \frac{\sigma^y}{E} \quad (58)$$

κ quantité adimensionnelle représentative de la courbure
 s quantité adimensionnelle représentative de la limite d'élasticité

La position de la frontière entre les zones élastique et plastique est alors donnée par :

$$z_P = \frac{\sigma^y}{E \gamma} = \frac{s}{\kappa} \quad (59)$$

Quant aux champs de déformation plastique et de contrainte, ils valent dans chacune de ces zones :

$$\begin{cases} \text{domaine élastique } (z \leq z_p) & \begin{cases} p = 0 \\ \frac{\sigma}{E} = \gamma z \end{cases} \\ \text{domaine plastique } (z \geq z_p) & \begin{cases} p = \kappa z - s \\ \frac{\sigma}{E} = s + \frac{h}{E} \kappa z \end{cases} \end{cases} \quad (60)$$

Des profils de ces champs ainsi que la réponse globale moment – courbure sont donnés de la figure 6 à la figure 11, page 156.

3.2.3 Solution pour le modèle de plasticité non local

Dans le cas du modèle de plasticité à gradients, le critère de plasticité est maintenant donné par (2). En tenant compte du caractère unidimensionnel de la contrainte ($\sigma_{eq} = \sigma$ car $0 \leq z \leq 1$ est une zone en traction) et de l'hypothèse d'homogénéité longitudinale (57), il s'écrit encore :

$$f = \sigma - h p - \sigma^y + \frac{c}{\hat{e}^2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (61)$$

Dans la mesure où c'est la déformation qui pilote le comportement du matériau pour le chargement qui nous intéresse, on a intérêt à exprimer le critère de plasticité en terme de déformation, grâce à la relation contrainte - déformation (1), ce qui permet d'exhiber une longueur caractéristique du comportement :

$$\frac{f}{E+h} = \frac{E}{E+h} \varepsilon - s - \left(p - L_c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) \quad \text{où} \quad L_c = \frac{1}{\hat{e}} \sqrt{\frac{c}{E+h}} \quad (62)$$

A ce propos, on peut remarquer que pour un même paramètre c la longueur L_c que l'on a introduite ici n'est pas la même que pour le problème d'une barre en traction, non pas que les modèles soient différents, mais simplement parce que des pilotages en contrainte ou en déformation n'ont pas le même effet sur la répartition spatiale du champ de déformation plastique.

A nouveau, on se propose de raisonner de manière incrémentale en temps, pour bénéficier du traitement implicite de la condition d'interface et de la régularité C^1 du champ Δp . La solution du problème continu en temps sera obtenue par passage à la limite puis intégration. La condition de cohérence incrémentale et les conditions aux limites et de symétrie sont alors :

$$\frac{f}{E+h} = \frac{f^-}{E+h} + \Delta \kappa z + L_c^2 \frac{d^2 \Delta p}{dz^2} - \Delta p \quad \text{avec} \quad f \leq 0 \quad \Delta p \geq 0 \quad f \Delta p = 0 \quad (63)$$

$$\frac{d\Delta p}{dz}(0) = \frac{d\Delta p}{dz}(1) = 0 \quad (64)$$

Pour résoudre cette inéquation différentielle, on s'inspire des résultats du modèle local : on suppose qu'une zone plastique se propage du bord de la poutre vers son cœur et on appelle à nouveau z_p la frontière entre ces deux zones. Sur le plan incrémental, on est alors conduit à distinguer trois zones :

$$\begin{array}{lll}
 \text{élastique} & (0 \leq z \leq z_p) & f^- < 0 \quad \text{et} \quad f < 0 \quad \Delta p = 0 \\
 \text{élaboration} & (z_p \leq z \leq z_p^-) & f^- < 0 \quad \text{et} \quad f = 0 \quad \Delta p = \kappa z - s + A \operatorname{ch} \frac{z}{L_c} + B \operatorname{sh} \frac{z}{L_c} \\
 \text{plastique} & (z_p^- \leq z \leq 1) & f^- = 0 \quad \text{et} \quad f = 0 \quad \Delta p = \Delta \kappa z + C \operatorname{ch} \frac{z}{L_c} + D \operatorname{sh} \frac{z}{L_c}
 \end{array} \quad (65)$$

Grâce à la régularité C^1 du champ de déformation plastique en $z = z_p$ et $z = z_p^-$, on peut exprimer les constantes d'intégration A, B, C et D en fonction de la seule inconnue z_p :

$$\begin{array}{ll}
 A = -(\kappa z_p - s) \operatorname{ch} \frac{z_p}{L_c} + L_c \kappa \operatorname{sh} \frac{z_p}{L_c} & C = A - A^- \\
 B = (\kappa z_p - s) \operatorname{sh} \frac{z_p}{L_c} - L_c \kappa \operatorname{ch} \frac{z_p}{L_c} & D = B - B^-
 \end{array} \quad (66)$$

Comme la condition de symétrie est automatiquement réalisée (car dans le régime qu'on étudie le champ Δp est nul au voisinage de $z = 0$, donc son gradient aussi), il ne reste qu'à vérifier la condition aux limites en $z = 1$ qui fournit ainsi une équation implicite pour déterminer la position de la frontière entre les zones élastique et plastique :

$$\Gamma(\kappa, z_p) = \Gamma(\kappa^-, z_p^-) + L_c \Delta \kappa \quad \text{avec} \quad \Gamma(\kappa, z_p) = (\kappa z_p - s) \operatorname{sh} \frac{1 - z_p}{L_c} + L_c \kappa \operatorname{ch} \frac{1 - z_p}{L_c} \quad (67)$$

Une brève analyse de cette équation montre qu'il existe une unique solution $z_p(\kappa) < z_p^-$ lorsque la courbure est croissante, c'est-à-dire $\Delta \kappa > 0$. Ainsi, l'hypothèse d'une zone plastique qui se propage du bord de la poutre vers le cœur est bien cohérente.

Pour obtenir la solution du problème continu, on procède maintenant par passage à la limite. En faisant tendre $\Delta \kappa$ vers zéro dans l'équation discrète (67), on obtient l'équation que doit vérifier z_p pour le modèle continu en temps :

$$L_c = \frac{\Gamma(\kappa, z_p(\kappa)) - \Gamma(\kappa^-, z_p^-(\kappa^-))}{\Delta \kappa} \xrightarrow{\Delta \kappa \rightarrow 0} \frac{d\Gamma}{d\kappa}(\kappa^-, z_p^-(\kappa^-)) \quad (68)$$

Cette équation s'intègre aisément ; la constante d'intégration est obtenue en se rappelant que la propagation de la zone plastique débute lorsque un premier point de la poutre atteint la limite d'élasticité ($z_p = 1$ quand $\kappa = s$). Finalement z_p est solution de l'équation implicite suivante :

$$\Gamma(\kappa, z_p(\kappa)) - L_c \kappa = \Gamma(s, 1) - L_c s = 0 \quad (69)$$

Il ne semble pas possible d'extraire de cette équation une expression analytique de z_p . En revanche, si on paramètre la solution non plus par la courbure mais par la position de la zone plastique, alors on peut exprimer la courbure correspondante :

$$\kappa(z_p) = s \frac{\operatorname{sh} \frac{1 - z_p}{L_c}}{z_p \operatorname{sh} \frac{1 - z_p}{L_c} + L_c \operatorname{ch} \frac{1 - z_p}{L_c} - L_c} \quad (70)$$

Quant à l'expression du champ de déformation plastique dans la zone plastique, elle s'obtient par passage à la limite dans (65) puis intégration en temps. Finalement, les champs de déformation plastique et de contrainte valent :

$$\begin{cases} \text{domaine élastique } (z \leq z_p) & \begin{cases} p = 0 \\ \frac{\sigma}{E} = \gamma z \end{cases} \\ \text{domaine plastique } (z \geq z_p) & \begin{cases} p = \kappa z - s - (\kappa z_p - s) \operatorname{ch} \frac{z - z_p}{L_c} - \kappa L_c \operatorname{sh} \frac{z - z_p}{L_c} \\ \frac{\sigma}{E} = s + \frac{h}{E} \kappa z + (\kappa z_p - s) \operatorname{ch} \frac{z - z_p}{L_c} + \kappa L_c \operatorname{sh} \frac{z - z_p}{L_c} \end{cases} \end{cases} \quad (71)$$

Remarquons que lorsque toute la section a plastifié ($z_p = 0$), la fibre neutre se rompt (sinon la contrainte équivalente deviendrait négative). En accord avec ce qu'on a précisé au début de cette partie, on ne poursuit pas l'étude au-delà de ce stade. Cela n'exclut d'ailleurs pas la possibilité qu'une autre fibre se rompt avant que toute la section soit plastifiée.

3.2.4 Comparaison du modèle local et du modèle non local

Disposant des expressions analytiques des solutions à la fois pour le modèle local et pour le modèle non local, on peut comparer quantitativement :

- la frontière de la zone plastique z_p ,
- les champs de déformation plastique et de contrainte p et σ/E ,
- le moment fléchissant M ,

en fonction de la courbure κ pour deux jeux de caractéristiques matériau. Tous les deux sont représentatifs d'un béton sollicité en traction, Meftah [1997]. En fait, les caractéristiques locales sont identiques :

$$\begin{aligned} \text{Module de Young :} & \quad E = 30000 \text{ MPa} \\ \text{Limite d'élasticité :} & \quad \sigma^y = 3 \text{ MPa} \\ \text{module d'écroutissage :} & \quad h = -1000 \text{ MPa} \quad (\varepsilon^u = 3.10^{-3}) \end{aligned}$$

Seule diffère la longueur caractéristique. L'une est déduite par Meftah [1997] de la taille des granulats, tandis que l'autre résulte de mesures par sollicitation dynamique du béton, Sluys [1994] :

$$\begin{aligned} \text{taille des agrégats :} & \quad l = 8 \text{ mm} \quad \hat{L}_c = 0,03 \text{ mm} \\ \text{mesure dynamique :} & \quad l = 96 \text{ mm} \quad \hat{L}_c = 0,36 \text{ mm} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad l = \sqrt{-\frac{c}{h}}$$

Enfin, concernant la géométrie de la poutre, on adopte une épaisseur $2\hat{e} = 100 \text{ mm}$. Les résultats sont tracés de la figure 6 à la figure 11. Plusieurs remarques méritent d'être mentionnées.

- Les résultats entre modèles local et non local sont d'autant plus proches que la longueur caractéristique est petite. Cela dit, même pour la longueur $l = 8 \text{ mm}$, la différence entre les deux modèles n'est pas négligeable : le couplage entre fibre par les termes en gradients a une

influence, même si une analyse mathématique des différentes expressions indique que les résultats du modèle non local tendent vers les résultats du modèle local quand l tend vers 0.

- La distribution de contrainte obtenue avec le modèle non local montre que le minimum des contraintes en zone plastique (fibre la plus endommagée) n'est pas atteint sur le bord, à la différence du modèle local : la première fibre qui se rompt est à l'intérieur de la poutre.
- Lorsque la longueur caractéristique est grande, c'est même la fibre neutre qui se rompt la première, sans pour autant que la distribution de contrainte préalable à la rupture laisse présager de cette éventualité : « la poutre se casse sans prévenir ». C'est une situation assez différente du modèle local, pour lequel il subsiste toujours une zone élastique au cœur de la poutre.

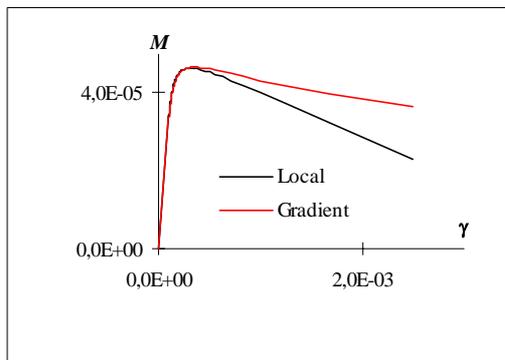


figure 6 - Réponse courbure moment ($l = 8$ mm)

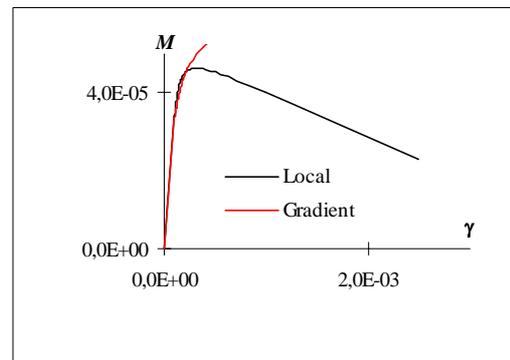


figure 7 - Réponse courbure moment ($l = 96$ mm)

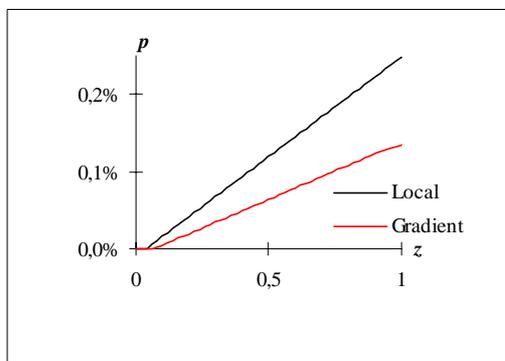


figure 8 - Champ de déformation plastique ($l = 8$ mm)

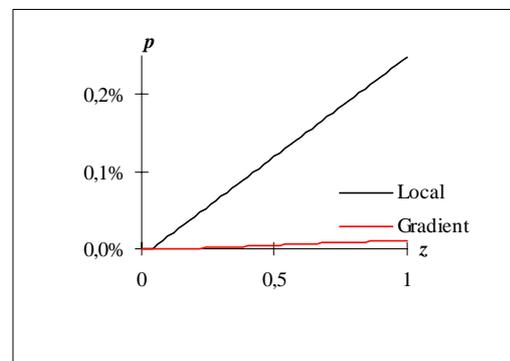


figure 9 - Champ de déformation plastique ($l = 96$ mm)

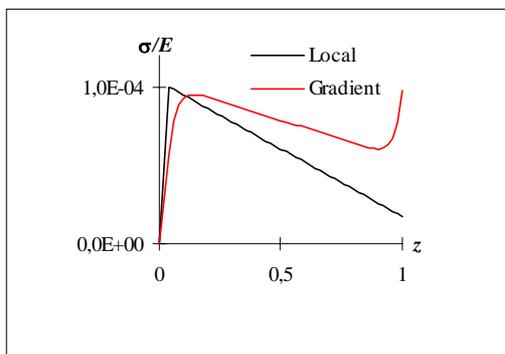


figure 10 - Champ de contrainte ($l = 8$ mm)

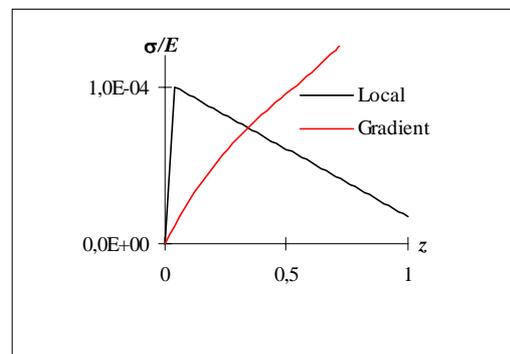


figure 11 - Champ de contrainte ($l = 96$ mm)

3.2.5 Analyse de bifurcation et perte de symétrie

Lors des calculs précédents, on a cherché des solutions symétriques par rapport à z , dans la mesure où la géométrie et le chargement sont symétriques. Nous examinons maintenant si une bifurcation avec perte de symétrie est possible. Pour cela, on appelle « branche de solutions » une histoire $(\gamma(t), \varepsilon^0(t))$, la branche fondamentale étant celle des solutions symétriques $(\gamma(t), 0)$. En vertu de l'équation d'équilibre (56), l'effort normal $N(t)$ est nul :

$$N(t) = \int_{-1}^1 \frac{\sigma(z, t)}{E} dz = 0 \quad (72)$$

Si on exclut les bifurcations tangentes⁵, on peut se contenter de chercher des conditions d'unicité portant sur $(\dot{\gamma}, \dot{\varepsilon}^0)$. Pour cela, on introduit l'opérateur (non linéaire en plasticité) qui dépend de l'état actuel et exprime la variation de l'effort normal dans la direction $(\dot{\gamma}, \dot{\varepsilon}^0)$ via le comportement tangent :

$$\begin{aligned} N_t^{(1)}: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\dot{\gamma}, \dot{\varepsilon}^0) &\mapsto \int_{-1}^1 \frac{\dot{\sigma}(\dot{\gamma}, \dot{\varepsilon}^0)}{E} dz \end{aligned} \quad (73)$$

Une condition nécessaire de bifurcation en un point de la branche fondamentale s'exprime alors comme l'existence de plusieurs solutions $(\dot{\gamma}, \dot{\varepsilon}^0)$ linéairement indépendantes à l'équation d'équilibre en vitesses :

$$N_t^{(1)}(\dot{\gamma}, \dot{\varepsilon}^0) = \frac{dN}{dt}(t) = 0 \quad (74)$$

Si on paramètre la branche fondamentale par $t = z_p$, le problème consiste à trouver une solution de (74) pour laquelle $\dot{\varepsilon}^0 \neq 0$. Toute la difficulté réside dans la construction de l'opérateur $N_{z_p}^{(1)}$.

C'est pourquoi on commence par étudier le solide linéaire de comparaison pour lequel la loi de comportement ne prend pas en compte les condition de charge - décharge. Le taux de déformation plastique cumulée \dot{p} est alors nul en dehors de la zone plastique et vérifie la condition de cohérence $\dot{f} = 0$ assortie des conditions aux limites adéquates dans la zone plastique :

$$\begin{cases} \forall z \in [z_p, 1] & \dot{p} - L_c^2 \frac{d^2 \dot{p}}{dz^2} - \frac{E}{E+h} \dot{\varepsilon} = 0 & \dot{p}(z_p) = 0 & \frac{d\dot{p}}{dz}(1) = 0 \\ \forall z \in [-1, -z_p] & \dot{p} - L_c^2 \frac{d^2 \dot{p}}{dz^2} + \frac{E}{E+h} \dot{\varepsilon} = 0 & \dot{p}(-z_p) = 0 & \frac{d\dot{p}}{dz}(-1) = 0 \end{cases} \quad (75)$$

Comme ces équations différentielles sont linéaires, on appelle respectivement p_S et p_A les solutions qui correspondent à $(\dot{\gamma} = 1, \dot{\varepsilon}^0 = 0)$ et $(\dot{\gamma} = 0, \dot{\varepsilon}^0 = 1)$, définies dans $[z_p, 1]$ uniquement. En tenant compte de la linéarité et de la symétrie du problème, les solutions de (75) s'écrivent :

⁵ où la branche bifurquée a même tangente que la branche fondamentale.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall z \in [z_P, 1] \\ \forall z \in [-1, -z_P] \end{array} \right. \quad \dot{p} = \frac{E}{E+h} \left[\dot{\gamma} p_S(z) + \dot{\varepsilon}^0 p_A(z) \right] \quad \text{où} \quad p_A(z) = 1 - \frac{\text{ch} \frac{1-z}{L_c}}{\text{ch} \frac{1-z_P}{L_c}} \quad (76)$$

Cette expression nous permet alors d'exprimer $N_{z_P}^{(1)}$ dans le cas du solide linéaire de comparaison :

$$N_{z_P}^{(1)}(\dot{\gamma}, \dot{\varepsilon}^0) = \int_{-1}^1 \dot{\varepsilon} - \dot{p} \text{sgn} \sigma = 2\dot{\varepsilon}^0 \left[1 - \frac{E}{E+h} \left(1 - z_P - L_c \text{th} \frac{1-z_P}{L_c} \right) \right] \quad (77)$$

La condition de bifurcation (74) se réduit alors à trouver une valeur de z_P qui vérifie :

$$\frac{1-z_P}{L_c} - \text{th} \frac{1-z_P}{L_c} = \frac{E+h}{EL_c} \quad (78)$$

Dans la mesure où le solide linéaire de comparaison autorise des bifurcations non symétriques, il devient raisonnable d'étudier le solide réel, pour lequel la condition de charge - décharge doit être prise en compte. Bien entendu, les calculs sont plus complexes puisque la zone de charge plastique, incluse dans la zone plastique, devient une inconnue du problème.

Pour commencer, on remarque qu'on peut se restreindre à $\dot{\varepsilon}^0 \geq 0$ car les champs \dot{p} pour les cas $\dot{\varepsilon}^0 \leq 0$ s'en déduisent par symétrie. En outre, deux propriétés méritent d'être mentionnées. Si on appelle respectivement C et D les parties de la zone plastique en charge et en décharge :

$$\left. \begin{array}{l} C = \left\{ z \in [-1, 1] \quad \text{tq} \quad f(z) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\varepsilon_{eq}}{dt} \geq 0 \right\} \\ D = \left\{ z \in [-1, 1] \quad \text{tq} \quad f(z) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\varepsilon_{eq}}{dt} \leq 0 \right\} \end{array} \right\} \quad (79)$$

Alors, d'une part, tout point de C est en charge plastique :

$$\forall x \in C \quad \dot{f}(x) = 0 \quad (80)$$

car sinon, on aurait une décharge élastique, et donc $\dot{f} = E \dot{\varepsilon}_{eq} > 0$. D'autre part, il n'existe pas de zone de charge plastique incluse dans D :

$$\forall [a, b] \subset D \quad \dot{p}(a) = \dot{p}(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in [a, b] \quad \dot{p}(x) = 0 \quad (81)$$

En effet, dans le cas contraire ($z \geq 0$ pour les signes) on pourrait construire $[a, b]$ dans D tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}(a) = \dot{p}(b) = 0 \\ \forall z \in]a, b[\quad \dot{f}(z) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{p}(z) > 0 \end{array} \right. \quad (82)$$

ce qui impliquerait en particulier :

$$\frac{dp}{dz}(a) \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{dp}{dz}(b) \leq 0 \quad \text{et donc} \quad \int_a^b \dot{p} = \underbrace{\int_a^b \dot{\varepsilon}}_{\leq 0} + L_c^2 \underbrace{\int_a^b \frac{d^2 \dot{p}}{dz^2}}_{= \frac{dp}{dz}(b) - \frac{dp}{dz}(a) \leq 0} \leq 0 \quad (83)$$

et contredirait alors $\dot{p} > 0$. A l'aide de ces deux propriétés, on relève 6 cas de figure concernant la zone de charge plastique, en fonction du ratio $\dot{\varepsilon}^0/\dot{\gamma}$. Ils sont représentés sur la figure 12, où la zone plastique est matérialisée par des traits gras et la zone de charge plastique par des flèches, et sont référencés par un groupe de lettre (C pour charge, D pour décharge et le slash pour séparer la zone plastique de gauche de la zone plastique de droite). En particulier, on reconnaît le cas d'une décharge purement élastique (D / D), ou encore le solide linéaire de comparaison (C / C) qui représente donc une réponse possible du matériau réelle.

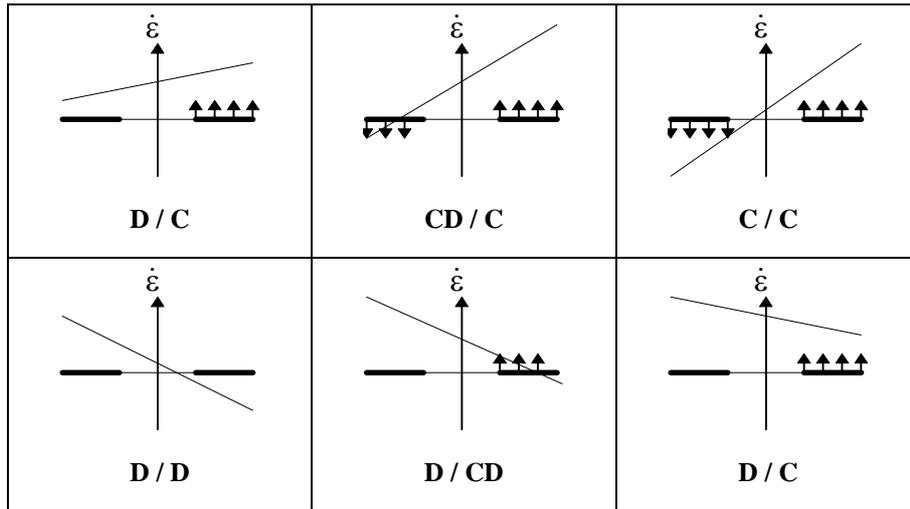


figure 12 - Topologie de la zone de charge plastique selon le taux de déformation

L'étude de ces différentes situations (qu'on ne détaillera pas) conduit à la valeur de bifurcation prédite par le solide linéaire de comparaison. Ce n'est pas étonnant dans la mesure où le solide linéaire de comparaison fournit un minorant du chargement à bifurcation, tout en correspondant à une situation possible pour le matériau réel. Toutefois, pour cette valeur de chargement $z_p = z_{\text{bif}}$ solution de (78), il existe tout un cône dans lequel $N_{z_{\text{bif}}}^{(D)}(\dot{\gamma}, \dot{\varepsilon}^0) = 0$: on ne peut pas prédire la tangente à la branche bifurquée. La démarche usuelle consiste alors à étudier le problème d'ordre 2, mais exprimer $\ddot{N}(t)$ requiert des calculs trop complexes. On préférera s'inspirer du modèle local pour lequel la bifurcation se produit lorsque la zone plastique de gauche peut commencer à décharger : c'est la situation limite entre CD/C et C/C. Dans le cas du modèle à gradients, cette situation correspond à :

$$(\dot{\gamma}, \dot{\varepsilon}^0) \text{ tel que } \frac{d\dot{p}}{dz}(-z_{\text{bif}}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\dot{\varepsilon}^0}{\dot{\gamma}} = \frac{s}{\kappa(z_{\text{bif}})} \quad (84)$$

Les champs de taux de déformation plastique cumulée et de taux de contrainte correspondants sont tracés figure 13 et figure 14 dans le cas $l = 8$ mm. Finalement, les termes en gradients n'interdisent pas les bifurcations restent possibles, même si dans le cas présent, elle a lieu peu de temps avant la rupture de la première fibre.

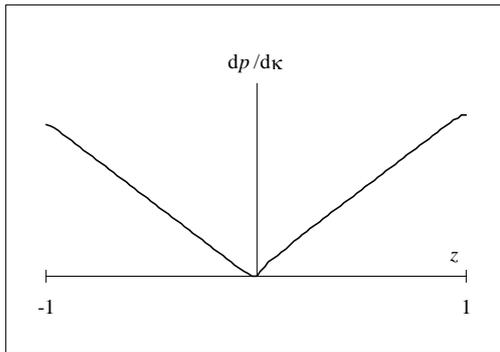


figure 13 - taux de déformation plastique cumulée à la bifurcation

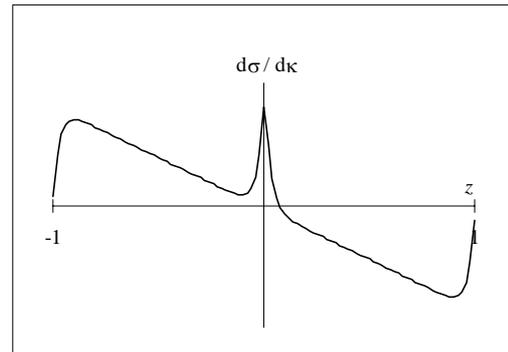


figure 14 - taux de contrainte à la bifurcation

En définitive, les modèles de plasticité à gradients s'insèrent totalement dans le cadre variationnel décrit au chapitre 2, en adoptant une énergie libre quadratique par rapport au gradient de la déformation plastique cumulée, tout en conservant le potentiel de dissipation d'un modèle de plasticité local. En interprétant la formulation variationnelle, on retrouve bien évidemment les équations point par point du modèle, mais on obtient également la régularité du champ de déformation plastique cumulée (H^1), des conditions d'interface (continuité du gradient normal) et des conditions aux limites naturelles (gradient normal nul sur le bord). Rappelons aussi que cette condition d'interface permet de déterminer la propagation de la frontière entre les zones plastique et élastique. Cependant, l'énergie libre du modèle de plasticité à gradients n'est pas convexe, ce qui peut compliquer la résolution numérique de problèmes de structures. C'est pourquoi nous avons proposé une variante du modèle de plasticité à gradients, fondée sur un seuil de plasticité en déformations qui conduit bien à une énergie libre convexe et reste équivalente au modèle à seuil en contraintes pour des chargements proportionnels.

Les exemples d'un barreau en traction et d'une section de poutre en flexion nous ont alors permis d'observer quelques propriétés du modèle non local. D'une part, les solutions localisées persistent mais dans des bandes d'épaisseur finie. D'autre part, on retrouve également les modes de plasticité diffus, la seule différence avec le modèle local résidant dans la présence de couches limites aux bords de la structure ou au voisinage de la frontière plastique. La taille des bandes de localisation et des couches limites est directement liée à la valeur du paramètre de délocalisation introduit. Enfin, d'éventuelles bifurcations des solutions restent possibles. Qualitativement, la modélisation des effets non locaux est satisfaisante. En revanche, elle n'est pas justifiée par une analyse microstructurale ; on peut en effet s'étonner que les termes en gradients n'apparaissent que dans l'énergie libre, le potentiel de dissipation local étant conservé, en désaccord avec les résultats prédits par la méthode d'homogénéisation du chapitre 2.

Modélisation de la rupture ductile des aciers

Le développement de microcavités au sein d'un acier sous l'effet des sollicitations mécaniques est à l'origine de la rupture ductile. La modélisation à l'échelle mésoscopique de ce phénomène se traduit par des lois de comportement poro-plastiques exprimées en grandes déformations et qui autorisent un changement de volume plastique, directement lié à l'évolution de la porosité. Cette interaction entre porosité et déformation plastique peut conduire à des instabilités qui se soldent par une localisation des déformations.

Ayant choisi le critère de Rousselier pour décrire l'écoulement poro-plastique, nous l'avons intégré dans une formulation en grandes déformations plastiques qui se prête bien au cadre variationnel pour modèles à gradients de variables internes. Grâce à la méthode d'homogénéisation déjà décrite, nous avons introduit des termes en gradients de déformation plastique cumulée qui prennent en compte les forts gradients dans les bandes de localisation. La construction géométrique des termes en gradients permet de rendre compte aisément des grandes déformations de la microstructure (extension des longueurs caractéristiques).

Toutefois, devant la complexité du modèle (critère de plasticité sophistiqué, grandes déformations, termes en gradients, ...) nous avons été amené à introduire un certain nombre de simplifications par rapport à la démarche exhaustive présentée au chapitre 2. Ce n'est qu'à ce prix que l'on peut espérer réaliser des calculs opérationnels.

Modélisation de la rupture ductile des aciers

1. Modélisation de la croissance des cavités	169
1.1 Définition de la microstructure	170
1.2 Approches micro-macro	171
1.3 Critère de Rousselier	173
2. Présentation du modèle de Rousselier	174
2.1 Traitement des grandes déformations plastiques	174
2.2 Modèle de Rousselier mésoscopique	177
3. Construction du modèle de Rousselier non local	178
3.1 Microstructure et grandes déformations.....	178
3.2 Introduction du gradient de la déformation plastique cumulée.....	180
3.3 Energie libre	181
3.4 Potentiel de dissipation.....	181
3.5 Seuil de plasticité	183
4. Intégration implicite des relations de comportement	184
4.1 Equations de comportement incrémentales : système non linéaire à résoudre	185
4.2 Equations de comportement incrémentales : termes en déformation plastique	186
4.3 Equations de comportement incrémentales : termes en déformation plastique cumulée.....	188
4.4 Validation numérique	189

Au chapitre 5, nous avons proposé un modèle d'endommagement fragile avec comme objectif essentiel une illustration de l'ensemble de la démarche « homogénéisation - formulation variationnelle - intégration numérique ». Si ce modèle peut sans doute rendre des services pour une étude qualitative d'une structure fragile, il reste cependant pauvre sur le plan de la description phénoménologique du comportement. Le point de vue adopté dans ce chapitre est tout autre puisque nous cherchons à prédire de manière non seulement qualitative mais aussi quantitative la rupture ductile des aciers dont les mécanismes – germination, croissance et coalescence de cavités – ont été abondamment étudiés. L'objectif est donc plus ambitieux puisqu'il s'agit d'étendre une loi de comportement déjà validée et représentative d'un mécanisme physique pour qu'elle prenne en compte des effets non locaux et l'intégrer dans notre formulation variationnelle.

Plus précisément, le point de départ de notre analyse est le critère de Rousselier [1981] qui décrit les premiers stades de la croissance plastique des cavités dans un acier. Le choix de la théorie des grandes déformations plastiques proposée par Simo et Miehe [1992] nous permet d'en déduire un modèle de comportement à même de rendre compte des instabilités poro-plastiques. Ensuite, une étape d'homogénéisation nous conduit à introduire les termes qui prennent en compte les effets non locaux, cruciaux lors de la localisation des déformations. On décrit enfin l'intégration numérique du modèle ainsi obtenu, rendue délicate par la présence simultanée d'un critère de plasticité complexe, de grandes déformations et de termes en gradients de déformation plastique cumulée.

1. Modélisation de la croissance des cavités

Les mécanismes à l'origine de la rupture ductile des aciers sont associés au développement de cavités au sein du matériau. On distingue généralement trois phases :

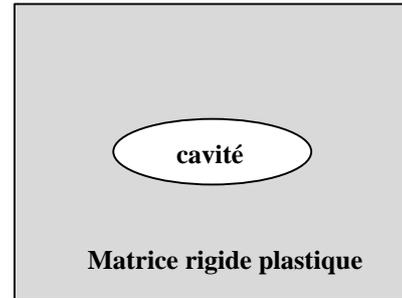
- Germination : il s'agit de l'initiation des cavités, en des sites qui correspondent préférentiellement aux défauts du matériau, tels que les inclusions. On pourra se reporter à Bauvineau [1997] qui a examiné cette phase et proposé un modèle de germination.
- Croissance : c'est la phase qui correspond au développement proprement dit des cavités, piloté essentiellement par l'écoulement plastique de la matrice métallique qui entoure ces cavités. Ces phénomènes sont abondamment étudiés, voir Rice et Tracey [1969], Gurson [1977], Tvergaard [1981], Rousselier [1981], Leblond et al. [1995].
- Coalescence : dernière étape, elle correspond à l'interaction des cavités entre elles pour créer des fissures macroscopiques, voir par exemple Perrin [1992] et Garajeu et al. [1998].

En ce qui nous concerne, nous ne traitons pas les phases de germination et de coalescence, mais axons notre étude sur la phase de croissance des cavités.

Dans un premier temps, on rappelle les hypothèses microstructurales de modélisation¹ couramment adoptées pour construire un comportement poro-plastique mésoscopique. Nous exposons ensuite très brièvement la démarche d'homogénéisation généralement employée pour déduire ces modèles, en soulignant ses limites. Enfin, nous présentons la loi de croissance de Rousselier, qui s'inspire d'éléments microstructuraux mais sans résulter d'un passage micro-macro.

1.1 Définition de la microstructure

Pour modéliser à l'échelle mésoscopique les phénomènes poro-plastiques, on introduit une microstructure sous-jacente au point matériel mésoscopique constituée d'une cavité entourée d'une matrice dont le comportement est supposé rigide plastique.



Une information essentielle pour caractériser la croissance de la cavité est la porosité, c'est-à-dire le volume de la cavité ramené au volume total de la microstructure. Sous l'hypothèse d'une matrice rigide plastique isochore, la porosité f est directement liée à J , l'extension volumique relative du point matériel mésoscopique, et à la porosité initiale f_0 par la relation suivante :

$$\begin{cases} V^M = V - V^C = V(1 - f) \\ V^M = V_0 - V_0^C = V_0(1 - f_0) \end{cases} \Rightarrow J \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V}{V_0} = \frac{1 - f_0}{1 - f} \quad (1)$$

- V volume final de la microstructure
- V_0 volume initial de la microstructure
- V^C volume final de la cavité
- V_0^C volume initial de la cavité
- V_M volume de la matrice (constant)

Une fermeture totale de la cavité ($V^C = 0$) se solde alors par une valeur critique de J :

$$J \geq J^F = \frac{V_0 - V_0^C}{V_0} = 1 - f_0 \quad (2)$$

Notons qu'il est courant d'écrire la relation (1) sous une forme dérivée en temps, faisant ainsi apparaître le taux de déformation eulérien \mathbf{D} :

$$\dot{f} = (1 - f) \text{Tr } \mathbf{D} \quad (3)$$

¹ Jusqu'à présent dans ce mémoire, nous n'avons eu qu'à distinguer deux échelles, qualifiées de microscopique (sans gradients) et macroscopique (avec gradients). Toutefois, nous avons également précisé que la loi de comportement microscopique pouvait elle-même résulter d'une étape d'homogénéisation préalable. Comme cette étape est explicitement évoquée dans ce chapitre, nous sommes conduits à distinguer ces trois échelles de modélisation, que l'on qualifie de microscopique (distinction entre cavités et matrice), mésoscopique (modèle poro-plastique, mais sans gradients) et macroscopiques (modèle poro-plastique avec gradients).

Une description plus fine de la croissance de la cavité nécessite des informations morphologiques complémentaires, telles que l'excentricité si on suppose que la cavité est et reste elliptique. Des méthodes d'homogénéisation sont alors nécessaires pour construire les lois d'évolution de ces variables morphologiques, *a priori* complexes.

1.2 Approches micro-macro

Ces approches micro-macro se proposent de construire une loi de comportement homogénéisée représentative des écoulements plastiques microscopiques au sein de la microstructure, et donc en particulier, de la croissance de la cavité. Généralement, l'homogénéisation de matériaux dissipatifs se heurte à une difficulté sévère : la loi de comportement homogénéisée doit faire intervenir un nombre infini de variables internes, voir Suquet [1982]. Intuitivement, cela tient au fait qu'à un instant donné, le comportement microscopique (incrémental) dépend de l'état microscopique actuel. Or la distribution des variables internes microscopiques ne saurait dépendre de quelques (i.e. un nombre fini de) grandeurs mésoscopiques, sauf à faire des hypothèse *a priori* sur cette distribution (variables internes constantes sur un nombre fini de zones, par exemple), voir Michel [1984]. On ne peut donc pas « fermer » les équations de comportement mésoscopiques sans résoudre le problème d'évolution sur la microstructure.

Dans le cas présent, le fait de négliger l'élasticité et de ne prendre en compte que la déformation plastique comme variable dissipative (en particulier, pas d'écrouissage) permet d'écrire le comportement microscopique comme une relation non linéaire entre la vitesse de déformation et la contrainte (comme pour un fluide) en tout point de la microstructure :

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{micro}} \in \partial \Delta_{\text{micro}}(\mathbf{D}_{\text{micro}}) \quad (4)$$

Δ_{micro} potentiel de dissipation microscopique

$\mathbf{D}_{\text{micro}}$ taux de déformation microscopique

$\boldsymbol{\sigma}_{\text{micro}}$ contrainte microscopique

On peut alors construire un comportement homogénéisé comme en élasticité non linéaire, voir Suquet [1982], le champ de vitesse tenant ici le rôle dévolu au champ de déplacement. Comme pour la loi de comportement microscopique (4), la contrainte mésoscopique dérive d'un potentiel du dissipation mésoscopique Δ_{μ} :

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial \Delta_{\mu}(\mathbf{D}) \quad (5)$$

La manière de construire le potentiel Δ_{μ} dépend de la méthode d'homogénéisation choisie. Dans le cas d'une méthode à conditions aux limites en déplacements homogènes, il vaut :

$$\Delta_{\mu}(\mathbf{D}) = \inf_{\mathbf{v} \in V^{ad}(\mathbf{D})} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \Delta_{\text{micro}}(\nabla^s \mathbf{v}) \quad V^{ad}(\mathbf{D}) = \left\{ \text{vitesse } \mathbf{v} \text{ tq } \mathbf{v}(\mathbf{y}) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in \partial\Omega \right\} \quad (6)$$

Ω domaine occupé par la microstructure (y compris les trous), de volume $|\Omega|$

$\partial\Omega$ frontière de la microstructure (qui ne comprend pas les bords de la cavité)

La difficulté provient du caractère positivement homogène de degré 1 du potentiel de dissipation microscopique, caractéristique d'un comportement à seuil. Il résulte de (6) que le potentiel mésoscopique est lui aussi positivement homogène de degré 1, si bien que la loi homogénéisée décrit à son tour un comportement à seuil avec écoulement normal. Malheureusement, même pour des cavités de forme sphérique, il n'existe pas d'expression analytique du seuil mésoscopique. C'est pourquoi des majorations de Π ont été proposées pour approcher le domaine de réversibilité réel.

La plus connue est due à Gurson [1977] qui suppose que les cavités sont initialement sphériques et le restent au cours de l'évolution. Moyennant une restriction de l'ensemble des champs cinématiquement admissibles V^{ad} , il construit le critère suivant :

$$f_G(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_y^2} + 2f \cosh \frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}}{2\sigma_y} - 1 - f^2 \leq 0 \quad (7)$$

σ_y limite d'élasticité microscopique

On peut trouver deux attrait à ce critère : il est simple et il décrit exactement l'écoulement plastique sous chargement hydrostatique. En revanche, il ne rend pas compte d'un écrouissage et impose une forme sphérique des cavités. Pour y remédier, Perrin [1992] introduit un écrouissage isotrope à deux variables, l'une portant sur les termes déviatoriques et l'autre sur les termes hydrostatiques, tandis que Gologanu et al. [1998] envisagent des cavités elliptiques et proposent une loi d'évolution pour l'excentricité, mais au prix de modèles plus complexes.

Par ailleurs, il faut garder présent à l'esprit que ces modèles mésoscopiques ne rendent plus compte du comportement réel à l'approche de la coalescence. En effet, Garajeu et al. [1998] ont montré dans un cas viscoplastique par des calculs par éléments finis que la croissance d'une cavité peut prendre un tour complexe (changement instable d'orientation de la direction d'élongation de la cavité) que les lois mésoscopiques ne prédisent pas, voir figure 1.

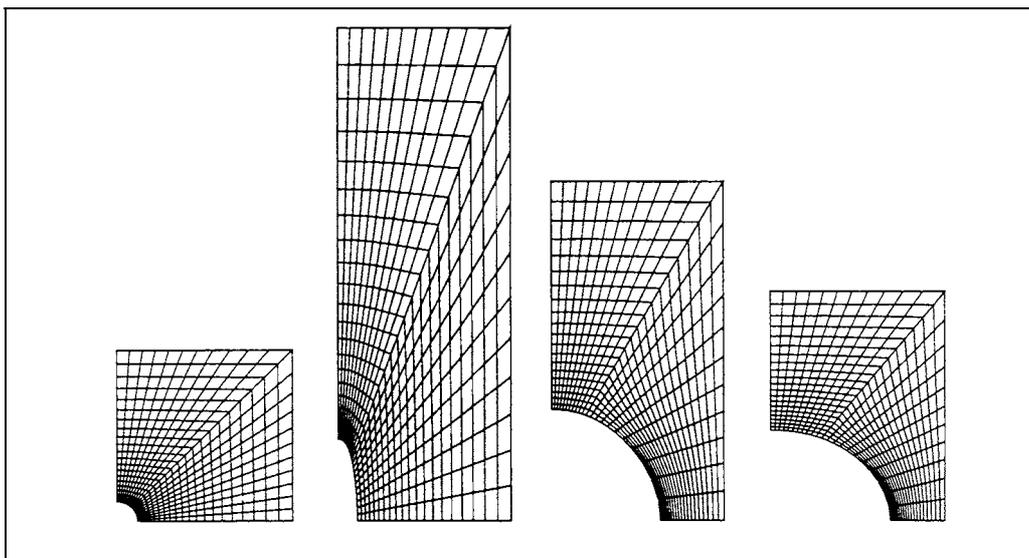


figure 1 - Evolution d'une cavité dans une matrice viscoplastique au cours du chargement (traction verticale), Garajeu et al. [1998]

1.3 Critère de Rousselier

Comme on l'a vu, déduire un modèle exact de croissance de cavités par homogénéisation n'est pas possible. C'est pourquoi Rousselier [1981] cherche à construire un modèle mésoscopique inspiré d'une analyse microstructurale, sans pour autant se fonder sur une méthode d'homogénéisation. Une analyse phénoménologique préliminaire l'amène à introduire les ingrédients suivants :

- grandes déformations plastiques,
- changements de volume irréversibles,
- écrouissage isotrope.

Une approche thermodynamique rationnelle de la plasticité en grandes déformations, voir par exemple Sidoroff [1981], le conduit à chercher un critère de plasticité dépendant de la contrainte de Kirchhoff, l'évolution de la déformation plastique étant fournie par le principe de dissipation maximale (normalité généralisée de l'écoulement). Ce critère, qui doit permettre les changements de volume plastiques, est formulé de sorte que les lois de croissance de cavités de Rice et Tracey [1969] soient retrouvées. Plus précisément, il s'écrit :

$$f(\boldsymbol{\tau}, R; f) = \tau_{eq} + D \sigma^1 f \exp\left(\frac{\text{tr } \boldsymbol{\tau}}{3\sigma^1}\right) - R - \sigma^y \quad \text{avec } \tau_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\tau}^D \cdot \boldsymbol{\tau}^D} \quad (8)$$

- $\boldsymbol{\tau}$ contrainte de Kirchhoff, $\boldsymbol{\tau}^D$ son déviateur
- R surcontrainte d'écrouissage
- f porosité
- σ^y limite d'élasticité
- D, σ^1 paramètres matériau

Enfinement, inspiré d'une analyse microstructurale, le modèle de Rousselier apparaît à l'échelle mésoscopique comme une relation de comportement plastique en grandes déformations où la présence de la contrainte hydrostatique autorise les changements de volume plastiques. Les variables internes se réduisent à la déformation plastique et la déformation plastique cumulée. En particulier, il n'y a pas de variable d'endommagement spécifique car la seule information microstructurale retenue est la porosité, directement liée à la déformation mésoscopique par (1).

Notons cependant qu'en dépit d'un écrouissage durcissant, ce modèle peut entraîner des bandes de localisation de la déformation. En fait, deux régimes de localisation sont possibles, cf. Rousselier [1995], en accord avec des observations expérimentales :

- Un mode de cisaillement dont l'apparition est liée au couplage thermoplastique (couplage entre la chaleur dégagée par dissipation plastique et la diminution du seuil de plasticité avec la température), qui n'est pas décrit ici.

- Un mode d'ouverture qui résulte d'un couplage poro-plastique : intuitivement, à contrainte de Cauchy (équilibre) donnée, la plasticité se développe, donc la porosité augmente entraînant une contrainte de Kirchhoff plus élevée ; si l'élévation de la contrainte de Kirchhoff n'est pas compensée par le durcissement dû à l'écroutissage, l'écoulement plastique se poursuit, un mécanisme instable prend naissance.

2. Présentation du modèle de Rousselier

Jusqu'à présent, nous nous sommes contentés de présenter le critère de Rousselier tel qu'il a été proposé par son auteur pour décrire la croissance ductile de cavités. Il nous faut maintenant décider comment introduire la part élastique du comportement, opération toujours arbitraire, puis comment écrire l'écoulement plastique. Pour cela, nous avons décidé d'abandonner l'habituelle formulation des grandes déformations plastiques via l'introduction d'une dérivée temporelle objective des contraintes, voir encore Sidoroff [1981], pour lui préférer la formulation d'origine thermodynamique avancée par Simo et Miehe [1992]. En effet, cette dernière nous permettra de nous insérer dans le cadre variationnel du chapitre 2 qui, rappelons le une fois de plus, repose sur une écriture du comportement dans le formalisme des matériaux standard généralisés.

Dans un premier temps, nous décrivons cette formulation des grandes déformations plastiques, pour ensuite y introduire le modèle de Rousselier.

2.1 Traitement des grandes déformations plastiques

Cette partie a pour objet une présentation succincte de la formulation des grandes déformations plastiques de Simo et Miehe. Pour plus de détails, on pourra avantageusement se reporter à l'article d'origine Simo et Miehe [1992] ou bien à la note qui décrit son application dans le cas d'une loi de comportement élastoplastique isotrope, Cano et Lorentz [1998].

Fondée sur la thermodynamique rationnelle des processus irréversibles, voir par exemple Lemaitre et Chaboche [1988], cette formulation repose sur plusieurs hypothèses acceptables et bien identifiées, de sorte que la part arbitraire qu'on pouvait trouver lors de l'introduction d'un taux de contraintes objectif est ici totalement absente. L'idée essentielle, commune aux descriptions phénoménologiques de la plasticité, consiste à introduire une configuration relâchée qui résulte point par point d'une décharge élastique de l'état actuel (déformé) jusqu'à un état de contraintes nulles, voir figure 2. Cette configuration n'est que virtuelle car elle ne respecte pas en général les équations de compatibilité cinématique.

On note \mathbf{F} le tenseur gradient de la transformation de la configuration initiale Ω^0 à la configuration actuelle Ω , \mathbf{F}^p celui de la « transformation plastique » de Ω^0 à Ω^R et \mathbf{F}^e celui de la « transformation élastique » de Ω^R à Ω , voir figure 2.

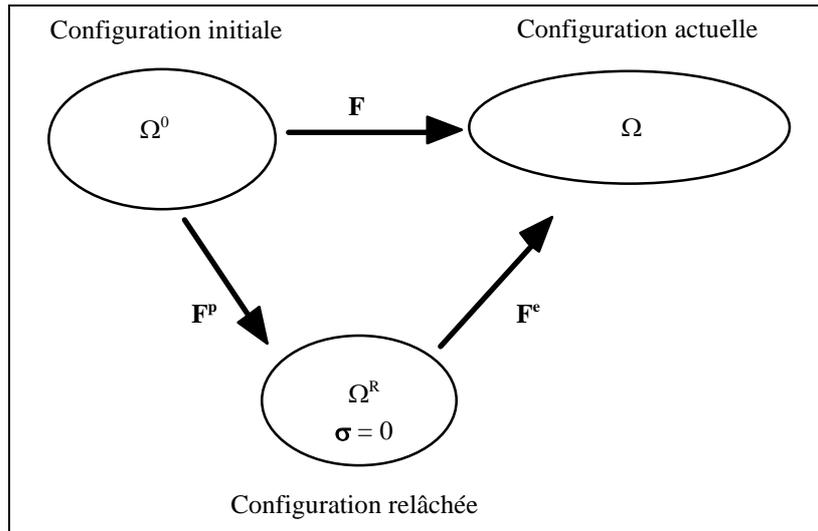


figure 2 - Introduction d'une configuration relâchée

Par composition des mouvements, on obtient la décomposition multiplicative de \mathbf{F} , Lee [1969] :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (9)$$

Les mesures de déformations élastiques et plastiques introduites par Simo et Miehe sont alors :

$$\mathbf{B}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT} \quad \text{et} \quad \mathbf{G}^p = \left(\mathbf{F}^{pT} \mathbf{F}^p \right)^{-1} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{B}^e = \mathbf{F} \mathbf{G}^p \mathbf{F}^T \quad (10)$$

\mathbf{B}^e mesure les déformations élastiques dans la configuration actuelle Ω (tenseur eulérien de Cauchy-Green gauche) et \mathbf{G}^p les déformations plastiques dans la configuration initiale Ω^0 (tenseur lagrangien), avec à l'état vierge $\mathbf{G}^p = \mathbf{Id}$. Notons que ce choix d'un tenseur lagrangien pour mesurer les déformations plastiques permet d'obtenir une formulation objective.

A ce stade, Simo et Miehe formulent le cadre et les hypothèses de leur modélisation.

Hypothèse 0 : isotropie

Le matériau est isotrope (élasticité et écrouissage).

Hypothèse 1 : décomposition de l'énergie

L'énergie libre se décompose en un premier terme fonction des déformations élastiques et un second qui dépend de p , la variable interne liée à l'écrouissage isotrope :

$$\Phi_\mu = \Phi_\mu^{el}(\mathbf{B}^e) + \Phi_\mu^{bl}(p) \quad (11)$$

En introduisant la contrainte de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$, lié à la contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ par $J \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau}$ où $J = \det \mathbf{F}$, l'inégalité de Clausius-Duhem s'écrit

$$\left(\boldsymbol{\tau} - 2\rho_0 \frac{\partial \Phi_\mu^{el}}{\partial \mathbf{B}^e} \mathbf{B}^e \right) \cdot \mathbf{D} - \rho_0 \left(\frac{\partial \Phi_\mu^{el}}{\partial \mathbf{B}^e} \mathbf{B}^e \right) \cdot \left(\mathbf{F} \dot{\mathbf{G}}^p \mathbf{F}^T \mathbf{B}^{e-1} \right) - \rho_0 \frac{\partial \Phi_\mu^{bl}}{\partial p} \dot{p} \geq 0 \quad (12)$$

- ρ_0 masse volumique dans la configuration initiale
- \mathbf{D} taux de déformation eulérien

On en déduit la relation contraintes-déformations et on définit R , (l'opposé de) la force thermodynamique associée à p :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\rho_0 \frac{\partial \Phi_\mu^{\text{el}}}{\partial \mathbf{B}^e} \mathbf{B}^e \quad \text{et} \quad R \stackrel{\text{def}}{=} \rho_0 \frac{\partial \Phi_\mu^{\text{bl}}}{\partial p} \quad (13)$$

Il reste comme dissipation plastique :

$$D^{\text{pl}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \left(-\frac{1}{2} \mathbf{F} \dot{\mathbf{G}}^{\text{p}} \mathbf{F}^{\text{T}} \mathbf{B}^{e-1} \right) - R \dot{p} \geq 0 \quad (14)$$

Hypothèse 2 : principe de dissipation maximale

Etant donné un seuil de plasticité f qui définit le domaine de réversibilité par $f(\boldsymbol{\tau}, R) \leq 0$, le principe de dissipation maximale postule que les taux de variables internes $\dot{\mathbf{G}}^{\text{p}}$ et \dot{p} sont tels que la dissipation plastique soit maximale :

$$D^{\text{pl}}(\dot{\mathbf{G}}^{\text{p}}, \dot{p}, \boldsymbol{\tau}, R) \geq D^{\text{pl}}(\dot{\mathbf{G}}^{\text{p}}, \dot{p}, \hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{R}) \quad \forall (\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{R}) \quad \text{tq} \quad f(\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{R}) \leq 0 \quad (15)$$

Ce principe permet de déduire les lois d'évolution de \mathbf{G}^{p} et p (lois d'écoulement et condition de cohérence) :

$$\mathbf{F} \dot{\mathbf{G}}^{\text{p}} \mathbf{F}^{\text{T}} = -2\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} \mathbf{B}^e \quad \text{et} \quad \dot{p} = \lambda \frac{\partial f}{\partial (-R)} \quad (16)$$

$$f \leq 0 \quad \lambda \geq 0 \quad \lambda f = 0 \quad (17)$$

Ces trois hypothèses suffisent à écrire cette formulation des grandes déformations plastiques. Le tableau 1 résume les analogies entre un modèle de comportement petites déformations et celui-ci.

Petites déformations	Grandes déformations
$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p$	$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad \text{et} \quad \mathbf{B}^e = \mathbf{F} \mathbf{G}^p \mathbf{F}^{\text{T}}$
$\Phi_\mu = \Phi_\mu^{\text{el}}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \Phi_\mu^{\text{bl}}(p)$	$\Phi_\mu = \Phi_\mu^{\text{el}}(\mathbf{B}^e) + \Phi_\mu^{\text{bl}}(p)$
$\boldsymbol{\sigma} = \rho_0 \frac{\partial \Phi_\mu^{\text{el}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad \text{et} \quad R = \rho_0 \frac{\partial \Phi_\mu^{\text{bl}}}{\partial p}$	$\boldsymbol{\tau} = 2\rho_0 \frac{\partial \Phi_\mu^{\text{el}}}{\partial \mathbf{B}^e} \mathbf{B}^e \quad \text{et} \quad R = \rho_0 \frac{\partial \Phi_\mu^{\text{bl}}}{\partial p}$
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^p(t=0) = 0$	$\mathbf{F} \dot{\mathbf{G}}^{\text{p}} \mathbf{F}^{\text{T}} = -2\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} \mathbf{B}^e \quad \mathbf{G}^p(t=0) = \mathbf{Id}$
$\dot{p} = \lambda \frac{\partial f}{\partial (-R)} \quad p(t=0) = 0$	$\dot{p} = \lambda \frac{\partial f}{\partial (-R)} \quad p(t=0) = 0$
$f \leq 0 \quad \lambda \geq 0 \quad \lambda f = 0$	$f \leq 0 \quad \lambda \geq 0 \quad \lambda f = 0$

tableau 1 - Analogies entre un modèle en petites déformations et la formulation de Simo et Miehe

2.2 Modèle de Rousselier mésoscopique

Au § 1.3, nous avons présenté le critère de plasticité de Rousselier : paramétré par la déformation totale (en fait, le volume spécifique), ce critère isotrope admet comme variables les contraintes de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$ et une surcontrainte d'érouissage isotrope R . C'est pourquoi la formulation des grandes déformations plastiques de Simo et Miehe nous semble un bon candidat pour construire le modèle de Rousselier. En effet, il ne nous reste qu'à définir l'énergie libre du matériau, c'est-à-dire en vertu de (11), son énergie élastique Φ_{μ}^{el} et son énergie bloquée Φ_{μ}^{bl} .

Concernant la contribution élastique, on adopte le potentiel polyconvexe suivant, qui tend bien vers la loi élastique de Hooke en présence de petites déformations élastiques :

$$\rho_0 \Phi_{\mu}^{\text{el}}(\mathbf{B}^e) = \frac{K}{2} \left[\frac{1}{2} (J^{e2} - 1) - \ln J^e \right] + \frac{\mu}{2} [\text{tr} \bar{\mathbf{B}}^e - 3] \quad (18)$$

K module de compressibilité
 μ module de cisaillement

où, pour séparer les effets hydrostatiques des effets déviatoriques, on a introduit :

$$J^e = \det \mathbf{F}^e \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{B}}^e = J^{e-2/3} \mathbf{B}^e \quad (19)$$

La relation contrainte - déformation se déduit alors de ce potentiel élastique par (13) :

$$\frac{\text{tr} \boldsymbol{\tau}}{3} = \tau^H = \frac{1}{2} K (J^{e2} - 1) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\tau}^D = \mu \bar{\mathbf{B}}^{eD} \quad (20)$$

Quant au terme d'énergie libre bloquée, on adopte :

$$\rho_0 \Phi_{\mu}^{\text{bl}}(p) = \int_0^p \mathbf{R}(s) ds \quad (21)$$

$\mathbf{R}(\cdot)$ fonction d'érouissage (croissante et identifiée à partir d'une courbe de traction uniaxiale)

ce qui permet d'obtenir, toujours par (13), la relation entre la surcontrainte et la déformation plastique cumulée :

$$R = \mathbf{R}(p) \quad (22)$$

D'après le principe de dissipation maximale, où le domaine admissible est fixé par le critère de Rousselier (8), les lois d'écoulement sont obtenues par (16) :

$$\begin{cases} \mathbf{F} \dot{\mathbf{G}}^p \mathbf{F}^T &= -2 \left[\frac{3}{2} \lambda \frac{\boldsymbol{\tau}^D}{\tau_{eq}} + \frac{\lambda}{3} D f \exp \frac{\tau^H}{\sigma^1} \mathbf{Id} \right] \mathbf{B}^e \\ \dot{p} &= \lambda \end{cases} \quad (23)$$

et le multiplicateur plastique λ est fourni par la condition de cohérence (17) :

$$\lambda \geq 0 \quad f \leq 0 \quad \lambda f = 0 \quad \text{avec} \quad f(\boldsymbol{\tau}, R) = \tau_{eq} + \sigma^1 D f \exp \frac{\tau^H}{\sigma^1} - R - \sigma^y \quad (24)$$

A ce stade, le modèle de Rousselier est entièrement défini à l'échelle mésoscopique. Cependant, des phénomènes de localisation de la déformation peuvent avoir lieu, synonymes de forts gradients des champs mécaniques. C'est pourquoi on cherche maintenant à étendre ce modèle pour prendre en compte les effets de gradients.

3. Construction du modèle de Rousselier non local

On se propose de suivre la procédure d'homogénéisation du chapitre 2 pour construire l'énergie libre et le potentiel de dissipation macroscopiques. Pour cela, on commence par définir le volume élémentaire représentatif choisi, c'est-à-dire le voisinage de cellules, et on examine son extension en grandes déformations. Ensuite, plutôt que d'introduire les gradients de toutes les variables internes, on se contente de prendre en compte celui de la déformation plastique cumulée. Ces choix étant établis, on peut alors construire les potentiels proprement dits. Pour obtenir un modèle opérationnel, on est conduit à simplifier l'expression du potentiel de dissipation, pour obtenir finalement un modèle à deux surfaces seuil.

3.1 Microstructure et grandes déformations

La technique d'homogénéisation présentée au chapitre 2 pour construire des modèles de comportement à gradients de variables internes postule l'existence de cellules dans lesquelles les variables internes mésoscopiques sont considérées constantes et dont la distribution spatiale est fixée. Concernant l'endommagement ductile, cette hypothèse est raisonnable puisque le mécanisme d'endommagement retenu est la croissance de cavités, qui s'initient préférentiellement aux défauts du matériau tels que des inclusions. Le matériau peut donc être pavé par des cellules contenant chacune une inclusion. L'information sur l'état du matériau est synthétisée par les variables d'état mésoscopiques (gradient de la transformation, déformation plastique et déformation plastique cumulée), effectivement constantes à cette échelle ; l'échelle inférieure à laquelle la cavité et la matrice plastique sont précisées n'intervient plus. Quant à la position géométrique des cellules, centrées sur les cavités, il n'est pas question de chercher à la définir précisément (cela paraît impossible). On suppose que les inclusions sont statistiquement distribuées de manière isotrope et homogène. On peut ainsi retenir une répartition cubique à faces centrées des cellules qui conduit bien à un comportement non local isotrope.

Il reste maintenant à examiner la construction du tenseur \mathbf{J} en présence de grandes déformations. En petites déformations, nous avons considéré la déformation constante sur tout le voisinage de cellules. L'extension immédiate de cette hypothèse en présence de grandes déformations concerne le gradient de la transformation :

$$\forall i \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{F} \tag{25}$$

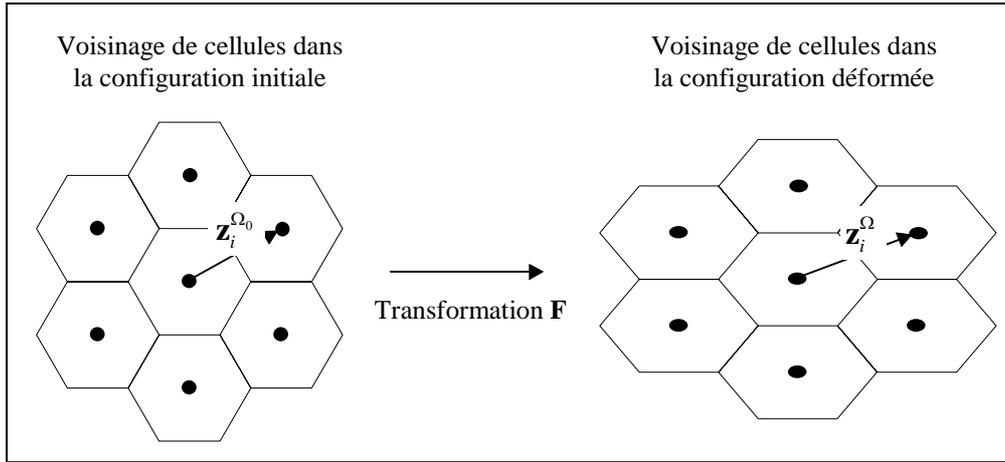


figure 3 - Déformation du voisinage de cellules par la transformation

Maintenant, si on désigne par \mathbf{x}^{Ω_0} la position d'un point matériel dans la configuration initiale et par \mathbf{x}^{Ω} sa position dans la configuration déformée, la loi de localisation affine portant sur les variables internes α_i peut s'écrire indifféremment dans l'une ou l'autre de ces configurations :

$$\alpha_i = \mathbf{a}_{\nabla} \cdot \mathbf{z}_i^{\Omega_0} \cdot \mathbf{a}_{\nabla}^{\Omega_0} = \mathbf{a}_{\nabla} \cdot \mathbf{z}_i^{\Omega} \cdot \mathbf{a}_{\nabla}^{\Omega} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \mathbf{z}_i^{\Omega} = \mathbf{F} \mathbf{z}_i^{\Omega_0} \\ \mathbf{a}_{\nabla}^{\Omega} = \frac{\partial a}{\partial \mathbf{x}^{\Omega}} = \mathbf{F}^{-T} \frac{\partial a}{\partial \mathbf{x}^{\Omega_0}} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{a}_{\nabla}^{\Omega_0} \end{cases} \quad (26)$$

Par conséquent, le tenseur \mathbf{J} peut lui aussi être défini dans l'une ou l'autre configuration :

$$\mathbf{J}^{\Omega} = \frac{1}{2N} \sum_i \mathbf{z}_i^{\Omega} \otimes \mathbf{z}_i^{\Omega} = \frac{1}{2N} \sum_i (\mathbf{F} \mathbf{z}_i^{\Omega_0}) \otimes (\mathbf{F} \mathbf{z}_i^{\Omega_0}) = \mathbf{F} \mathbf{J}^{\Omega_0} \mathbf{F}^T \quad (27)$$

L'avantage de la construction géométrique et tensorielle de \mathbf{J} est maintenant apparent : les termes quadratiques qui interviennent dans le modèle à gradients peuvent aussi bien être évalués sur la configuration initiale que sur celle déformée :

$$\mathbf{a}_{\nabla}^{\Omega} \cdot \mathbf{J}^{\Omega} \cdot \mathbf{a}_{\nabla}^{\Omega} = \mathbf{a}_{\nabla}^{\Omega_0} \cdot \mathbf{J}^{\Omega_0} \cdot \mathbf{a}_{\nabla}^{\Omega_0} \quad (28)$$

Nous avons choisi d'adopter une formulation lagrangienne des gradients de variables internes (i.e. dans la configuration initiale). La référence explicite à la configuration sera donc désormais omise.

En résumé, l'anisotropie induite par une variation des longueurs caractéristiques dues aux déformations est prise en compte dans le modèle non local. De plus, le choix d'une formulation lagrangienne des gradients de variables internes (évaluation des gradients dans la configuration initiale) nous affranchit d'une réactualisation explicite de \mathbf{J} .

Finalement, en reprenant les résultats du chapitre 2 en choisissant une répartition CFC des cellules, on obtient :

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} L_c^2 \mathbf{Id} \quad \text{où} \quad L_c = \frac{2}{\sqrt{13}} L_b \quad (29)$$

L_b distance moyenne entre les inclusions (taille des cellules)

3.2 Introduction du gradient de la déformation plastique cumulée

En toute rigueur, la démarche d'homogénéisation telle qu'elle a été décrite au chapitre 2 entraîne l'introduction des gradients de toutes les variables internes. Pour le modèle de Rousselier, on serait ainsi conduit à 28 variables internes (6 valeurs de déformations plastiques, 1 valeur de déformation plastique cumulée et les trois composantes des gradients correspondants). Ce nombre paraît trop élevé pour conserver un modèle un tant soit peu opérationnel ; on préfère ne faire porter l'introduction de termes en gradients que sur une seule variable scalaire. Mais laquelle ? A priori, un choix judicieux pour contrôler les modes de localisation poro-plastiques évoqués au § 1.3 concernerait le gonflement plastique, soit $J^p = \det \mathbf{F}^p$. Mais l'interaction entre les termes en gradients qui en résulteraient avec les non linéarités d'origine géométrique remet en question un tel choix, car elle interdit vraisemblablement l'obtention d'expressions analytiques simples.

C'est pourquoi on a préféré ne prendre en compte que les variations spatiales de la déformation plastique cumulée, tout en conservant une déformation plastique constante dans la microstructure. Reste à savoir si ce choix suffit pour contrôler les modes de localisation poro-plastiques, c'est-à-dire l'intensité du gonflement plastique. Pour y répondre, revenons sur l'équation d'évolution (23) qui s'exprime encore :

$$\mathbf{F} \dot{\mathbf{G}}^p \mathbf{F}^T = -\dot{p} \left[3 \frac{\boldsymbol{\tau}^D}{\tau_{eq}} + \frac{2}{3} Df \exp \frac{\tau^H}{\sigma^1} \mathbf{Id} \right] \mathbf{B}^e \quad (30)$$

En supposant que les déformations élastiques restent petites, quelques calculs indiquent que l'intensité de l'incrément de déformations plastiques \mathbf{D}^p est de l'ordre de :

$$\|\mathbf{D}^p\| \approx \dot{p} \left\| \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\tau}^D}{\tau_{eq}} + \frac{1}{3} Df \exp \frac{\tau^H}{\sigma^1} \mathbf{Id} \right\| \quad (31)$$

Le terme en exponentielle peut être borné grâce à la condition de cohérence (24) :

$$Df \exp \frac{\tau^H}{\sigma^1} \leq \frac{R(p) + \sigma^y}{\sigma^1} \quad (32)$$

Si bien que l'incrément de déformation plastique est majoré par :

$$\|\mathbf{D}^p\| \leq \dot{p} \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{3} \frac{R(p) + \sigma^y}{\sigma^1}} \sim \dot{p} \quad (33)$$

Finalement, il apparaît que contrôler la déformation plastique cumulée suffit à contrôler l'intensité de la déformation plastique toute entière. L'introduction du gradient de la déformation plastique cumulée devrait donc suffire à contrôler les modes de localisation poro-plastiques. On construit ainsi un modèle de plasticité à gradients, comparable à celui présenté au chapitre 6².

² Dans le cas présent, la fonction d'écroutissage $R(p)$ est croissante, ce qui assure la convexité de l'énergie libre, contrairement au modèle de plasticité à écroutissage négatif du chapitre 6.

3.3 Energie libre

Les déformations totales et les déformations plastiques sont supposées constantes sur le voisinage de cellules et la distribution de la déformation plastique cumulée y est supposée affine. Les lois de localisation sont donc :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_i = \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^p_i = \mathbf{F}^p \\ p_i = p_\bullet + \mathbf{z}_i \cdot \mathbf{p}_\nabla \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{B}^e_i = \mathbf{B}^e \quad (34)$$

\mathbf{z}_i position de la cellule i au sein du voisinage de cellules, cf. figure 3

Finalement, l'énergie libre macroscopique s'écrit simplement :

$$\rho_0 \Phi(\mathbf{B}^e, p_\bullet, \mathbf{p}_\nabla) = \rho_0 \Phi_\mu^{\text{el}}(\mathbf{B}^e) + \rho_0 \Phi_\mu^{\text{bl}}(p_\bullet) + \frac{\partial R}{\partial p_\bullet}(p_\bullet) \mathbf{p}_\nabla \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{p}_\nabla \quad (35)$$

Etant donnée cette définition de l'énergie libre macroscopique, la définition (20) des contraintes reste inchangée. Quant aux forces thermodynamiques associées à p_\bullet et \mathbf{p}_∇ , elles valent respectivement :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_\bullet = -R(p_\bullet) - \frac{\partial^2 R}{\partial p_\bullet^2}(p_\bullet) \mathbf{p}_\nabla \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{p}_\nabla \\ \mathbf{A}_\nabla = -2 \frac{\partial R}{\partial p_\bullet}(p_\bullet) \mathbf{J} \cdot \mathbf{p}_\nabla \end{cases} \quad (36)$$

3.4 Potentiel de dissipation

Pour construire le potentiel de dissipation macroscopique, il faut commencer par construire le potentiel de dissipation mésoscopique (c'est-à-dire à l'échelle d'une cellule), en calculant la transformée de Legendre-Fenchel de la fonction indicatrice du critère de plasticité. En appelant $A_\mu = -R$ la force thermodynamique associée à la déformation plastique cumulée :

$$\Delta_\mu(\mathbf{D}^p, \dot{p}) = \sup_{f(\boldsymbol{\tau}, A_\mu) \leq 0} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^p + A_\mu \dot{p}) = \inf_{\lambda \geq 0} \sup_{\boldsymbol{\tau}, A_\mu} \left[A_\mu \dot{p} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^p - \lambda f(\boldsymbol{\tau}, A_\mu) \right] \quad (37)$$

On décompose alors le supremum en trois termes, le premier lié à l'écrouissage, le second à la partie déviatorique de la contrainte et le dernier à la partie hydrostatique des contraintes :

$$\Delta_\mu(\mathbf{D}^p, \dot{p}) = \inf_{\lambda \geq 0} \left\{ \lambda \sigma^y + \left[\begin{array}{l} \sup_{A_\mu} (A_\mu \dot{p} - A_\mu \lambda) \\ \sup_{\boldsymbol{\tau}^D} (\boldsymbol{\tau}^D \cdot \mathbf{D}^p - \lambda \tau_{eq}) \\ \sup_{\boldsymbol{\tau}^H} \left(\boldsymbol{\tau}^H \text{tr} \mathbf{D}^p - \lambda D \sigma^1 f \exp \frac{\tau^H}{\sigma^1} \right) \end{array} \right] \right\} \quad (38)$$

En traitant chacun de ces suprema, on est alors conduit à l'expression suivante de Δ_μ :

$$\Delta_{\mu}(\mathbf{D}^p, \dot{p}) = \sigma^y \dot{p} + I_{\mathbb{R}^+} \left(\dot{p} - \frac{2}{3} D_{eq}^p \right) + I_{\mathbb{R}^+} (\text{tr } \mathbf{D}^p) + \sigma^1 \text{tr } \mathbf{D}^p \left(\ln \frac{\text{tr } \mathbf{D}^p}{D f \dot{p}} - 1 \right) \quad (39)$$

C'est une fonction positivement homogène de degré 1, caractéristique des lois de comportement à seuil indépendantes de la vitesse de sollicitation. On peut noter la correspondance des deux premiers termes avec l'expression du potentiel de dissipation pour un critère de von Mises (chapitre 5). On peut également remarquer la similitude avec l'expression de la fonction d'appui du critère de Rousselier en l'absence d'érouissage, obtenue par Voltaire [1995] dans le cas de taux de déformations plastiques à triaxialité élevée.

En suivant la méthode d'homogénéisation du chapitre 2, la construction du potentiel de dissipation macroscopique s'obtient alors par moyenne quadratique du potentiel mésoscopique :

$$\Delta(\mathbf{D}^p, \dot{p}_{\bullet}, \dot{\mathbf{p}}_{\nabla}) = \sigma^y \left\{ \left[\dot{p}_{\bullet} + \frac{\sigma_1}{\sigma^y} \text{tr } \mathbf{D}^p \left(\ln \frac{\text{tr } \mathbf{D}^p}{D f \dot{p}_{\bullet}} - 1 \right) \right]^2 + 2 \dot{\mathbf{p}}_{\nabla} \cdot \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{p}}_{\nabla} \left[1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma^{y2}} \left(\frac{\text{tr } \mathbf{D}^p}{\dot{p}_{\bullet}} \right)^2 \ln \frac{\text{tr } \mathbf{D}^p}{D f \dot{p}_{\bullet}} - \frac{\sigma_1}{\sigma^y} \frac{\text{tr } \mathbf{D}^p}{\dot{p}_{\bullet}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} + I_{\mathbb{R}^+} \left(\dot{p}_{\bullet} - L_b \|\dot{\mathbf{p}}_{\nabla}\| - \frac{2}{3} D_{eq}^p \right) + I_{\mathbb{R}^+} (\text{tr } \mathbf{D}^p) \quad (40)$$

où, comme au chapitre 5, en tirant profit de la relative isotropie du voisinage de cellules, on a adopté l'approximation suivante pour les contraintes portant sur le caractère croissant de la déformation plastique cumulée dans chaque cellule:

$$\forall i \quad \dot{p}_{\bullet} + \mathbf{z}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_{\nabla} \geq \frac{2}{3} D_{eq}^p \quad \stackrel{\text{appr.}}{\Leftrightarrow} \quad \dot{p}_{\bullet} - L_b \|\dot{\mathbf{p}}_{\nabla}\| \geq \frac{2}{3} D_{eq}^p \quad (41)$$

En pratique, l'expression (40) s'avère trop complexe pour une mise en œuvre efficace du modèle de Rousselier car on ne sait pas déterminer un domaine de réversibilité macroscopique (la transformée de Legendre - Fenchel de la fonction (40) n'admet pas d'expression analytique). C'est pourquoi on décide de ne conserver que les termes locaux et la fonction indicatrice portant sur $\dot{\mathbf{p}}_{\nabla}$. En effet, cette dernière traduit le fait que l'incrément de déformation plastique est positif dans chaque cellule et assure la coercivité du potentiel de dissipation global dans $W^{1,\infty}$ par rapport au champ p , voir chapitre 4. Finalement, le potentiel de dissipation macroscopique retenu pour la suite de l'analyse vaut :

$$\Delta(\mathbf{D}^p, \dot{p}_{\bullet}, \dot{\mathbf{p}}_{\nabla}) = \sigma^y \dot{p}_{\bullet} + \sigma_1 \text{tr } \mathbf{D}^p \left(\ln \frac{\text{tr } \mathbf{D}^p}{D f \dot{p}_{\bullet}} - 1 \right) + I_{\mathbb{R}^+} (\text{tr } \mathbf{D}^p) + I_{\mathbb{R}^+} \left(\dot{p}_{\bullet} - L_b \|\dot{\mathbf{p}}_{\nabla}\| - \frac{2}{3} D_{eq}^p \right) \quad (42)$$

3.5 Seuil de plasticité

Avant de passer à l'intégration du comportement proprement dite, il nous faut encore déterminer le seuil de plasticité correspondant au potentiel de dissipation (42). Une fois de plus, on procède par transformée de Legendre - Fenchel :

$$\Delta^*(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{A}_\bullet, \mathbf{A}_\nabla) = \sup_{\mathbf{D}^p, \dot{p}_\bullet, \dot{\mathbf{p}}_\nabla} \left[\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^p + \mathbf{A}_\bullet \dot{p}_\bullet + \mathbf{A}_\nabla \cdot \dot{\mathbf{p}}_\nabla - \Delta(\mathbf{D}^p, \dot{p}_\bullet, \dot{\mathbf{p}}_\nabla) \right] \quad (43)$$

On commence par réaliser le supremum par rapport au taux de déformation plastique, en décomposant suivant les parties sphérique et déviatorique :

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{D}^p} \left[\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^p - \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+} \left(\dot{p}_\bullet - L_b \|\dot{\mathbf{p}}_\nabla\| - \frac{2}{3} D_{eq}^p \right) \right] &= (\dot{p}_\bullet - L_b \|\dot{\mathbf{p}}_\nabla\|) \tau_{eq} \quad \text{avec } \dot{p}_\bullet \geq L_b \|\dot{\mathbf{p}}_\nabla\| \\ \sup_{\text{tr} \mathbf{D}^p} \left[\tau^H \text{tr} \mathbf{D}^p - \sigma_1 \text{tr} \mathbf{D}^p \left(\ln \frac{\text{tr} \mathbf{D}^p}{D f \dot{p}_\bullet} - 1 \right) - \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(\text{tr} \mathbf{D}^p) \right] &= \sigma_1 D f \dot{p}_\bullet \exp \frac{\tau^H}{\sigma_1} \end{aligned} \quad (44)$$

On note également que pour réaliser le suprémum (43), $\dot{\mathbf{p}}_\nabla$ est nécessairement colinéaire et de même sens que \mathbf{A}_∇ , si bien que :

$$\dot{\mathbf{p}}_\nabla = \frac{\kappa}{L_b} \frac{\mathbf{A}_\nabla}{\|\mathbf{A}_\nabla\|} \quad \text{avec } \kappa \geq 0 \quad (45)$$

Finalement, la transformée de Legendre - Fenchel de Δ s'exprime encore :

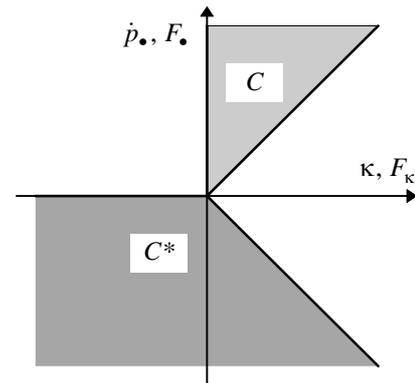
$$\Delta^*(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{A}_\bullet, \mathbf{A}_\nabla) = \sup_{\substack{\dot{p}_\bullet, \kappa \\ \dot{p}_\bullet \geq \kappa \geq 0}} \left[\underbrace{\left(\tau_{eq} + \sigma_1 D f \exp \frac{\tau^H}{\sigma_1} + \mathbf{A}_\bullet - \sigma^y \right)}_{F_\bullet} \dot{p}_\bullet + \underbrace{\left(\frac{\|\mathbf{A}_\nabla\|}{L_b} - \tau_{eq} \right)}_{F_\kappa} \kappa \right] \quad (46)$$

A ce stade, on peut conclure graphiquement. En effet, \dot{p}_\bullet et κ sont astreints à demeurer dans le cône C . On construit alors le cône dual C^* tel que :

$$C^* = \{ F_\kappa, F_\bullet \text{ tels que } \forall \kappa, \dot{p}_\bullet \quad F_\kappa \kappa + F_\bullet \dot{p}_\bullet \leq 0 \}$$

Ce cône dual peut être défini à l'aide de deux critères :

$$\begin{aligned} C^* &= \{ F_\kappa, F_\bullet \text{ tels que } \tilde{f}_1(F_\kappa, F_\bullet) \leq 0 \text{ et } \tilde{f}_2(F_\kappa, F_\bullet) \leq 0 \} \\ &\begin{cases} \tilde{f}_1(F_\kappa, F_\bullet) = F_\bullet \\ \tilde{f}_2(F_\kappa, F_\bullet) = F_\kappa + F_\bullet \end{cases} \end{aligned}$$



Finalement, en vertu de (46), la transformée de Legendre - Fenchel Δ^* est l'indicatrice du cône C^* . Plus précisément, les lois d'évolutions sont fixées par une règle de normalité par rapport à deux critères :

$$\begin{cases} f_1(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{A}_\bullet, \mathbf{A}_\nabla) = \tau_{eq} + \sigma_1 D f \exp \frac{\tau^H}{\sigma_1} + \mathbf{A}_\bullet - \sigma^y \\ f_2(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{A}_\bullet, \mathbf{A}_\nabla) = \frac{\|\mathbf{A}_\nabla\|}{L_b} + \sigma_1 D f \exp \frac{\tau^H}{\sigma_1} + \mathbf{A}_\bullet - \sigma^y \end{cases} \quad (47)$$

Cela conduit aux lois d'écoulement suivantes :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}^p \\ \dot{p}_\bullet \\ \dot{p}_\nabla \end{pmatrix} \in \partial \Delta^* \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{A}_\bullet \\ \mathbf{A}_\nabla \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{D}^p \\ \dot{p}_\bullet \\ \dot{p}_\nabla \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial \boldsymbol{\tau} \\ \partial f_1 / \partial \mathbf{A}_\bullet \\ \partial f_1 / \partial \mathbf{A}_\nabla \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \partial f_2 / \partial \boldsymbol{\tau} \\ \partial f_2 / \partial \mathbf{A}_\bullet \\ \partial f_2 / \partial \mathbf{A}_\nabla \end{pmatrix} \quad (48)$$

où les multiplicateurs plastiques sont donnés par les deux conditions de cohérence :

$$\begin{cases} \lambda_1 \geq 0 & f_1 \leq 0 & \lambda_1 f_1 = 0 \\ \lambda_2 \geq 0 & f_2 \leq 0 & \lambda_2 f_2 = 0 \end{cases} \quad (49)$$

On peut expliciter les lois d'écoulement (48) :

$$\begin{cases} \mathbf{D}^{pD} = \frac{3}{2} \lambda_1 \frac{\boldsymbol{\tau}^D}{\tau_{eq}} \\ \text{tr } \mathbf{D}^p = (\lambda_1 + \lambda_2) D f \exp \frac{\tau^H}{\sigma_1} \\ \dot{p}_\bullet = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \dot{p}_\nabla = \frac{\lambda_2}{L_b} \frac{\mathbf{A}_\nabla}{\|\mathbf{A}_\nabla\|} \end{cases} \quad (50)$$

Remarque

La présence de deux critères de plasticité ne correspond pas à l'émergence d'un second mécanisme microscopique d'écoulement plastique. En fait, le premier critère représente à l'échelle macroscopique le domaine de réversibilité lié au mécanisme mésoscopique de plasticité ductile, tandis que le second tronque ce domaine en rendant compte à l'échelle macroscopique du caractère nécessairement croissant de l'évolution de la déformation plastique cumulée mésoscopique.

4. Intégration implicite des relations de comportement

Pour intégrer numériquement la relation de comportement non locale de Rousselier, nous comptons nous appuyer à nouveau sur l'algorithme de Lagrangien augmenté décrit au chapitre 3. Toutefois, il faut remarquer que l'introduction de non linéarités géométriques ne permet plus d'écrire le problème comme la minimisation d'une fonctionnelle énergie par rapport aux variables internes. On espère malgré tout que l'algorithme nous permet encore d'obtenir des solutions.

D'après l'algorithme, il nous faut intégrer numériquement la loi de comportement aux points d'intégration. En pratique, cela consiste à déterminer les incréments de variables internes, connaissant l'état au début du pas de temps, l'incrément de déformation (donc aussi la porosité qui, rappelons-le, n'est pas une variable interne dans cette formulation) et les multiplicateurs de Lagrange associés à la contrainte non locale $p_v = \nabla p$, exprimée dans la configuration initiale. Le problème est relativement complexe pour plusieurs raisons.

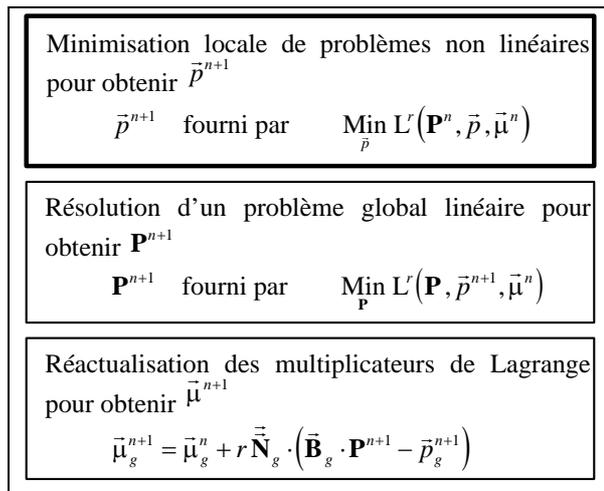


figure 4 - Etapes de l'algorithme de lagrangien augmenté

- Présence de deux critères de plasticité : on pourra se reporter à Simo et al. [1988] pour un exposé détaillé du traitement implicite des lois de comportement multi-critères, l'idée essentielle étant que les critères effectivement activés par la solution incrémentale ne sont pas nécessairement ceux violés par la prédiction élastique.
- Grandes déformations plastiques : la formulation de la loi d'écoulement plastique incrémentale conduit à un problème tensoriel non linéaire qui ne se ramène à un problème scalaire que moyennant certaines approximations.

Toutefois, il est intéressant de remarquer que les équations sur lesquelles portent les difficultés géométriques liées aux grandes déformations ne concernent que la déformation et la déformation plastique, tandis que le caractère non local affecte uniquement les équations portant sur la déformation plastique cumulée et son gradient, ce qui permet dans une certaine mesure de découpler les problèmes.

4.1 Equations de comportement incrémentales : système non linéaire à résoudre

Avant d'analyser la manière de résoudre les équations de comportement incrémentales, commençons par les présenter. En adoptant l'algorithme décrit au chapitre 3, les forces thermodynamiques associées à p et \mathbf{p}_v doivent être corrigées, d'une part, par les multiplicateurs de Lagrange $\vec{\mu}$ associés à la contrainte non locale $p_v = \nabla p$, et d'autre part, par une mesure (pondérée) de l'écart entre les champs aux points de Gauss $\vec{p} = (p, \mathbf{p}_v)$ et le champ nodal \mathbf{P} . En toute rigueur, ces « forces corrigées » valent :

$$\vec{A}^r = \vec{A} + \vec{\mu} + r \vec{\mathbf{N}} \cdot (\vec{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{P} - \vec{p}) \tag{51}$$

r coefficient de pénalisation
 $\vec{\mathbf{N}}$ matrice diagonale de pondération

La matrice de pondération est censée être représentative de la courbure locale de l'énergie. On choisit :

$$\vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} N_{..} & & & \\ & N_{\nabla\nabla} & & \\ & & N_{\nabla\nabla} & \\ & & & N_{\nabla\nabla} \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial p} (p_{.}^{-}) \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & L_c^2 & & \\ & & L_c^2 & \\ & & & L_c^2 \end{bmatrix} \quad (52)$$

$p_{.}^{-}$ valeur de la déformation plastique cumulée locale au début du pas de temps

En pratique, pour simplifier la résolution des problèmes locaux, on approche l'expression (51) en limitant la dépendance en $p_{.}$:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{.}^r &= -\mathbf{R}(p_{.}) & + \mu_{.} + r N_{..} (\mathbf{B}_{.} \cdot \mathbf{P} - p_{.}) &= -\mathbf{R}(p_{.}) - c_1 p_{.} + c_2 \\ \mathbf{A}_{\nabla}^r &= -2 \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial p} (p_{.}^n) \mathbf{J} \cdot \mathbf{p}_{\nabla} & + \mu_{\nabla} + r N_{\nabla\nabla} (\mathbf{B}_{\nabla} \cdot \mathbf{P} - \mathbf{p}_{\nabla}) &= -c_3 \mathbf{p}_{\nabla} + \mathbf{c}_4 \end{cases} \quad (53)$$

$p_{.}^n$ valeur de la déformation plastique cumulée locale lors de l'itération précédente du lagrangien augmenté

$c_1, c_2, c_3, \mathbf{c}_4$ paramètres (pour alléger les écritures) avec $c_1 > 0$ et $c_3 > 0$

On aboutit aux équations incrémentales du modèle de Rousselier non local, voir tableau 2.

Remarque

Le modèle de Rousselier ainsi construit est incrémentalement objectif, c'est-à-dire que les équations de comportement incrémentales restent invariantes par changement de repère spatial. Cette propriété résulte, d'une part, de la formulation des grandes déformations plastiques choisies, puisque l'incrément de déformation plastique $\Delta \mathbf{G}^p$ est exprimé dans la configuration initiale, invariante par un changement de repère spatial, et d'autre part, du choix d'une formulation lagrangienne des termes en gradients, l'incrément du gradient de déformation plastique cumulée $\Delta \mathbf{p}_{\nabla}$ étant exprimé lui aussi dans la configuration initiale.

Nous allons maintenant aborder la résolution du système vectoriel non linéaire (55) à (62), en traitant d'abord l'écoulement plastique dans lequel apparaît les difficultés géométrique associées aux grandes déformations, puis les conditions de cohérence où interviennent les termes en gradients.

4.2 Equations de comportement incrémentales : termes en déformation plastique

Revenons tout d'abord à l'équation (58) qui caractérise l'écoulement plastique, en introduisant la déformation élastique issue d'une prédiction élastique \mathbf{B}^{tr} , c'est-à-dire la solution obtenue en prenant $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$, sans se préoccuper des conditions de cohérence :

$$\underbrace{\mathbf{F} \Delta \mathbf{G}^p \mathbf{F}^T}_{\mathbf{B}^e - \mathbf{B}^{tr}} = -2 \left[\frac{3}{2} \lambda_1 \frac{\boldsymbol{\tau}^D}{\tau_{eq}} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{3} D f \exp \frac{\tau^H}{\sigma_I} \mathbf{Id} \right] \mathbf{B}^e \quad (54)$$

$\mathbf{B}^{tr} = \mathbf{F} \mathbf{G}^p \mathbf{F}^T = \Delta \mathbf{F} \mathbf{B}^e \Delta \mathbf{F}^T$ prédiction élastique

Equations d'état

$$\frac{\text{tr } \boldsymbol{\tau}}{3} = \tau^H = \frac{1}{2} K (J^{e2} - 1) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\tau}^D = \mu \bar{\mathbf{B}}^{eD} \quad \text{avec} \quad \mathbf{B}^e = J^{e2/3} \bar{\mathbf{B}}^e \quad (55)$$

$$\mathbf{A}'_{\bullet} = -R(p_{\bullet}) + \mu_{\bullet} + r N_{\bullet} (\mathbf{B}_{\bullet} \cdot \mathbf{P} - p_{\bullet}) = -R(p_{\bullet}) - c_1 p_{\bullet} + c_2 \quad (56)$$

$$\mathbf{A}'_{\nabla} = -2 \frac{\partial R}{\partial p} (p_{\nabla}^n) \mathbf{J} \cdot \mathbf{p}_{\nabla} + \mu_{\nabla} + r N_{\nabla} (\mathbf{B}_{\nabla} \cdot \mathbf{P} - p_{\nabla}) = -c_3 \mathbf{p}_{\nabla} + \mathbf{c}_4 \quad (57)$$

Equations d'écoulement

$$\mathbf{F} \Delta \mathbf{G}^p \mathbf{F}^T = -2 \left[\frac{3}{2} \lambda_1 \frac{\boldsymbol{\tau}^D}{\tau_{eq}} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{3} D f \exp \frac{\tau^H}{\sigma^1} \mathbf{Id} \right] \mathbf{B}^e \quad (58)$$

$$\Delta p_{\bullet} = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (59)$$

$$\Delta \mathbf{p}_{\nabla} = \frac{\lambda_2}{L_b} \frac{\mathbf{A}'_{\nabla}}{\|\mathbf{A}'_{\nabla}\|} \quad (60)$$

Conditions de cohérence

$$f_1 \leq 0 \quad \lambda_1 \geq 0 \quad f_1 \lambda_1 = 0 \quad \text{où} \quad f_1(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{A}_{\bullet}, \mathbf{A}_{\nabla}) = \tau_{eq} + \sigma_1 D f \exp \frac{\tau^H}{\sigma^1} + A_{\bullet} - \sigma^y \quad (61)$$

$$f_2 \leq 0 \quad \lambda_2 \geq 0 \quad f_2 \lambda_2 = 0 \quad \text{où} \quad f_2(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{A}_{\bullet}, \mathbf{A}_{\nabla}) = \frac{\|\mathbf{A}_{\nabla}\|}{L_b} + \sigma_1 D f \exp \frac{\tau^H}{\sigma^1} + A_{\bullet} - \sigma^y \quad (62)$$

tableau 2 - Equations incrémentales du modèle de Rousselier non local

Il s'agit là de l'équation tensorielle non linéaire que nous avons mentionnée précédemment et que nous allons maintenant chercher à simplifier.

Approximation 1 : seuil de plasticité faible devant le module de cisaillement élastique

Examinons plus attentivement le produit :

$$\frac{\boldsymbol{\tau}^D}{\tau_{eq}} \mathbf{B}^e = J^{e2/3} \left(\underbrace{\frac{\text{tr } \bar{\mathbf{B}}^e}{3}}_{\geq 1/3} \frac{\boldsymbol{\tau}^D}{\tau_{eq}} + \underbrace{\frac{\mu}{\tau_{eq}}}_{\ll 1} \frac{\boldsymbol{\tau}^D}{\tau_{eq}} \right) \quad (63)$$

L'approximation employée par Simo et Miehe [1992] reste légitime : pour les aciers, le rapport τ_{eq}/μ est petit devant 1, ce qui permet de négliger le second terme du produit (63) et donc de simplifier (grandement) la nature de l'équation d'écoulement incrémentale (54). Plus précisément, si on en prend maintenant la partie déviatorique, on obtient :

$$J^{e2/3} \left[3 \lambda_1 \frac{\text{tr } \mathbf{B}^e}{3} + \frac{\tau_{eq}}{3\mu} \left(3 + 2(\lambda_1 + \lambda_2) D f \exp \frac{\tau^H(J^e)}{\sigma^1} \right) \right] \frac{\boldsymbol{\tau}^D}{\tau_{eq}} = \mathbf{B}^{trD} \quad (64)$$

Connaissant $\text{tr} \mathbf{B}^e$, J^e et les multiplicateurs plastiques, on sait alors aisément exprimer le tenseur des contraintes. En particulier, la contrainte équivalente de von Mises vaut :

$$\tau_{eq} = 3\mu \frac{B_{eq}^r / J^{e\frac{2}{3}} - \lambda_1 \text{tr} \mathbf{B}^e}{3 + 2(\lambda_1 + \lambda_2) D f \exp \frac{\tau^H(J^e)}{\sigma^1}} \quad \text{si } \text{tr} \mathbf{B}^e \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{B_{eq}^r}{J^{e\frac{2}{3}}} \geq \lambda_1 \text{tr} \mathbf{B}^e \quad (65)$$

Notons d'ailleurs que la condition portant sur $\text{tr} \mathbf{B}^e$ est assurée dans le cadre de l'approximation suivante, portant sur l'intensité des déformations élastiques.

Approximation 2 : déformations élastiques petites (devant 1)

En tenant compte de l'approximation précédente et en prenant alors la trace de l'équation (54), on obtient une équation qui lie $\text{tr} \mathbf{B}^e$ et J^e :

$$\text{tr} \mathbf{B}^e - \text{tr} \mathbf{B}^{\text{tr}} = -\frac{2}{3}(\lambda_1 + \lambda_2) D f \exp \frac{\tau^H(J^e)}{\sigma^1} \text{tr} \mathbf{B}^e \quad (66)$$

Pour exploiter cette équation et déterminer J^e , il est a priori nécessaire de prendre également en compte la partie déviatorique de (54), même si $\text{tr} \mathbf{B}^e$ et J^e mesurent d'une certaine manière le même effet physique (le gonflement). Toutefois, on peut raisonnablement admettre que les déformations élastiques restent petites, et donc :

$$\mathbf{B}^e = \mathbf{Id} + \eta \mathbf{M} \quad \text{où } \eta \ll 1 \quad \Rightarrow \quad J^e = \sqrt{\det \mathbf{B}^e} \approx 1 + \frac{1}{2} \text{tr} \eta \mathbf{M} = \frac{1}{2} (\text{tr} \mathbf{B}^e - 1) \quad (67)$$

Moyennant cette hypothèse, l'équation scalaire (66), certes non linéaire, suffit néanmoins à déterminer $\text{tr} \mathbf{B}^e$ et J^e , connaissant les multiplicateurs plastiques. Sa résolution numérique est aisée car elle admet une solution unique dès que $\text{tr} \mathbf{B}^{\text{tr}} > 1$ (vrai si l'incrément de déformation reste raisonnable durant le pas de temps).

Finalement, moyennant ces deux approximations, on peut calculer numériquement les déformations élastiques et les contraintes en connaissant les multiplicateurs plastiques. Les conditions de cohérence permettent alors de déterminer ces derniers, comme le montre le paragraphe suivant.

4.3 Equations de comportement incrémentales : termes en déformation plastique cumulée

Examinons d'abord la loi d'écoulement du gradient de déformation plastique cumulée. Bien que vectorielle, elle se réduit aisément à une équation scalaire grâce à la linéarité de \mathbf{A}_∇ par rapport à \mathbf{p}_∇ . En effet :

$$\Delta \mathbf{p}_\nabla = \frac{\lambda_2}{L_b} \frac{\mathbf{A}_\nabla^r}{\|\mathbf{A}_\nabla^r\|} \Rightarrow \left(1 + \frac{c_3 \lambda_2}{L_b \|\mathbf{A}_\nabla^r\|} \right) \Delta \mathbf{p}_\nabla = \frac{\lambda_2}{L_b} \frac{\mathbf{A}_\nabla^r}{\|\mathbf{A}_\nabla^r\|} \underbrace{(-c_3 \mathbf{p}_\nabla^- + \mathbf{c}_4)}_{\mathbf{A}_\nabla^E} \Rightarrow \Delta \mathbf{p}_\nabla = \frac{\lambda_2}{L_b} \frac{\mathbf{A}_\nabla^E}{\|\mathbf{A}_\nabla^E\|} \quad (68)$$

\mathbf{A}_∇^E prédiction élastique de \mathbf{A}_∇

La norme de la force thermodynamique \mathbf{A}_∇ s'exprime alors en fonction de λ_2 :

$$\|A_{\nabla}\| = \left\| \|A_{\nabla}^E\| - \frac{c_3 \lambda_2}{L_b} \right\| = \|A_{\nabla}^E\| - \frac{c_3 \lambda_2}{L_b} \quad \text{si} \quad \frac{c_3 \lambda_2}{L_b} \leq \|A_{\nabla}^E\| \quad (69)$$

Cette condition est généralement assurée quand il s'agit de résoudre $f_2 = 0$, pour peu que le pas de temps soit suffisamment petit (et donc λ_2 aussi).

En adoptant $\Delta p_{\bullet} = \lambda_1 + \lambda_2$ comme inconnue principale, on sait ainsi exprimer λ_2 grâce à la condition de cohérence (62) :

$$\lambda_2 = \frac{c_3}{L_b} \left\langle \left\| A_{\nabla}^E \right\| + \underbrace{\sigma^1 D f \exp \frac{\tau^H}{\sigma^1} + A_{\bullet}^r - \sigma^y}_{\text{fonction de } \Delta p_{\bullet} \text{ seulement}} \right\rangle \quad (70)$$

Finalement, l'intégration de la relation de comportement non locale se ramène à une équation scalaire en Δp_{\bullet} dont la résolution nécessite l'examen des différents cas de figure résultant des conditions de cohérence (choix du ou des critères activés). On ne détaillera pas davantage la résolution.

4.4 Validation numérique

Afin de vérifier de manière minimale l'implantation de la loi de comportement dans le *Code_Aster*[®], on se propose de simuler un essai de traction uniaxiale d'une éprouvette, pour laquelle les champs mécaniques sont homogènes. Comme dans ce cas les termes en gradients ne sont pas activés, on peut comparer les résultats obtenus à ceux du modèle de Rousselier local, et en particulier mesurer la validité des approximations (63) et (67) qui permettent de simplifier la loi d'écoulement plastique.

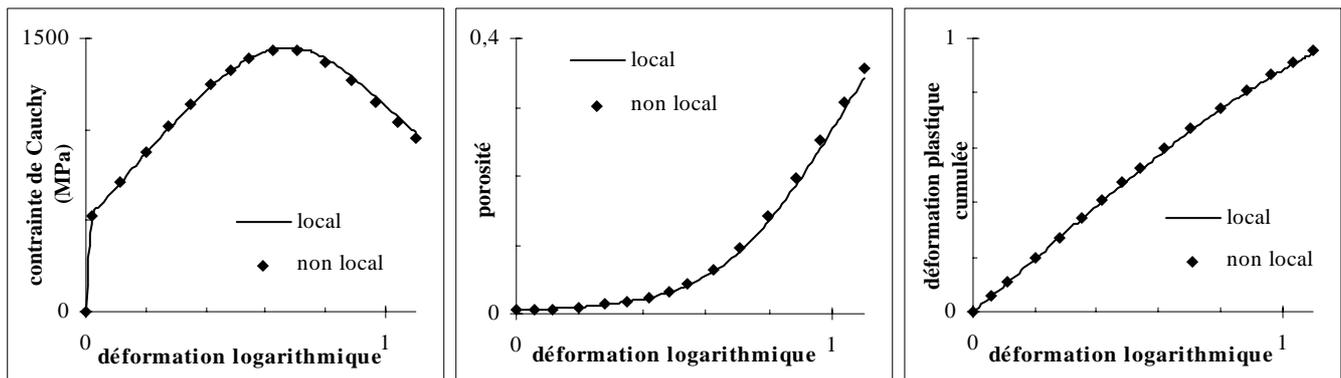


figure 5 - Comparaison des modèles local et non local sur un essai de traction uniaxiale homogène

Au vu des résultats reportés sur la figure 5, il semble que l'intégration de la loi de comportement en l'absence d'effets de gradients et la prise en compte des grandes déformations plastiques sont correctement effectuées. En revanche, comme on ne dispose pas de solutions analytiques pour un problème non homogène où les termes en gradients sont activés, il n'est pas possible de valider effectivement les développements. Toutefois, les premiers essais numériques sur des structures

axisymétriques entaillées semblent indiquer une bonne robustesse du module d'intégration de la loi de comportement.

En conclusion, décrire la rupture ductile des aciers - tout au moins la phase de croissance des cavités - soulève plusieurs difficultés, telle que l'introduction d'un critère de plasticité mésoscopique où intervient non seulement la contrainte de von Mises mais aussi la contrainte hydrostatique, les non linéarités géométriques inhérentes aux grandes déformations plastiques ou encore la formation de bandes de localisation des déformations qui résultent d'un couplage pro-plastique. Malgré ces difficultés, la démarche de modélisation des lois de comportement non locales proposée dans ce mémoire reste applicable, moyennant quelques hypothèses et simplifications pour demeurer opérationnelle :

- plusieurs termes sont négligés lors de la construction du potentiel de dissipation macroscopique, qui coïncide malgré tout avec celui du modèle de Rousselier local en présence de champs homogènes et intègre la contrainte portant sur l'évolution du champ de déformation plastique cumulée ;
- un autre terme est négligé dans la loi d'écoulement plastique (comme pour la plasticité de von Mises en grandes déformations), une hypothèse tout à fait acceptable pour des métaux ;
- on suppose que les déformations élastiques restent petites pour simplifier l'expression des termes de changement de volume élastique ;
- enfin, on conserve un algorithme fondé sur une définition énergétique du problème, alors que les non linéarités géométriques remettent en cause l'existence d'un principe variationnel.

En contrepartie, cette formulation non locale présente des avantages certains. Grâce à l'étape géométrique d'homogénéisation, les grandes déformations de la microstructure sont prises en compte et autorisent la description d'effets d'anisotropie induite sur l'interaction non locale entre points matériels, sans complexité supplémentaire du modèle. En outre, l'homogénéisation nous conduit naturellement à introduire une contrainte sur l'évolution du champ de déformation plastique cumulée qui traduit son caractère croissant à l'échelle mésoscopique. Cette contrainte, dont l'introduction échappe à une approche purement phénoménologique, paraît nécessaire sur le plan physique et conduit à des propriétés mathématiques importantes de la formulation. Enfin, sur un autre plan, l'emploi de l'algorithme de lagrangien augmenté permet de confiner l'étape d'intégration de la loi de comportement, ce qui simplifie grandement son introduction dans le Code_Aster[®].

Ces points forts nous permettent d'envisager les premières études à vocation industrielle, à savoir la simulation numérique d'essais de traction sur éprouvettes axisymétriques entaillées, pour lesquelles des bases de résultats expérimentaux et de calculs avec un modèle local sont déjà disponibles.

Conclusion

1. Une démarche opérationnelle...

A l'issue de ce mémoire, nous pensons être restés fidèles aux deux préceptes que nous nous sommes initialement fixés : expliciter nos choix et offrir un cadre ouvert à une large gamme de comportements, tant sur le plan modélisation qu'algorithmique. Fondée sur une remise en cause des relations de comportement usuelles en présence de forts gradients des champs mécaniques, notre formulation est naturellement dédiée aux comportements adoucissants, motivation première de notre analyse. Toutefois, elle peut également s'étendre à d'autres situations à forts gradients, engendrés, par exemple, par des singularités géométriques telles que des fissures, même si ces aspects n'ont pas été étudiés ici.

Pour asseoir notre démarche de modélisation, nous avons cherché à l'examiner sous plusieurs éclairages. Mécanique d'abord, en nous appuyant, d'une part, sur une méthode d'homogénéisation pour déduire des lois de comportement macroscopiques à gradients de variables internes mieux adaptées en présence de forts gradients, et d'autre part, sur une approche énergétique pour préciser la formulation de ces lois macroscopiques dans le cadre d'un calcul de structure. Numérique ensuite, l'emploi d'un algorithme de lagrangien augmenté permettant d'introduire notre formulation dans un code préexistant tout en offrant une architecture ouverte pour faciliter l'introduction de nouveaux modèles de comportement. Mathématique enfin, pour énoncer les propriétés des fonctionnelles énergétiques introduites, examiner leurs conséquences sur la nature du problème de structure ainsi posé et surtout soulever un certain nombre de questions qui restent ouvertes, en particulier celles concernant la convergence des solutions avec la discrétisation temporelle. Grâce à cette approche pluridisciplinaire, nous pensons avoir rempli les conditions du cahier des charges d'une formulation non locale, proposé à l'issue de l'étude bibliographique préliminaire.

Quant aux applications présentées, elles ont permis de démontrer le caractère opérationnel de toute la chaîne de modélisation dans deux cas : d'une part, un comportement élastique fragile, initialement écrit pour s'insérer parfaitement dans notre cadre variationnel, et d'autre part, un comportement ductile décrit par la loi de Rousselier, plus complexe à traiter car cumulant plusieurs difficultés (non linéarités géométriques, forme du critère de plasticité, termes en gradients). Mais ces applications nous ont aussi donné l'occasion de prendre du recul par rapport à la démarche, pour soulever plusieurs questions que nous allons maintenant aborder.

2. ... qu'il reste à étayer et étoffer

A ce stade, la formulation proposée n'est pas achevée, si tant est qu'elle puisse l'être un jour, et certains aspects du problème ont été ignorés ou méritent des réflexions complémentaires. On se

propose d'énoncer ceux qui nous paraissent les plus importants et qui constituent autant de pistes pour un travail futur.

2.1 Extension à d'autres opérateurs de délocalisation

Le premier point concerne le choix de la technique de délocalisation, c'est-à-dire l'introduction du (premier) gradient des variables internes, comparée à des opérateurs intégraux ou des gradients d'ordre plus élevés.

Lors de l'étude bibliographique, le cas des opérateurs intégraux avait été examiné et nous avait conduit à souligner les limites inhérentes à l'introduction d'un voisinage de délocalisation de taille finie. Malgré tout, si on souhaite employer de tels opérateurs, on peut noter que l'extension énergétique du comportement à l'échelle de la structure se prête également à leur traitement. Ainsi, en désignant par \mathbf{R} cet opérateur (linéaire pour simplifier), on peut définir l'énergie libre globale et le potentiel de dissipation global par :

$$F(\varepsilon, a) = \int_{\Omega} \Phi(\varepsilon(x), (\mathbf{R}a)(x)) \, dx \quad \text{et} \quad D(\dot{a}) = \int_{\Omega} \Delta((\mathbf{R}\dot{a})(x)) \, dx \quad (1)$$

où $\Phi(\varepsilon, \alpha)$ et $\Delta(\dot{\alpha})$ désignent respectivement les potentiels énergie libre et dissipation à l'échelle du point matériel. En particulier, avec une telle définition de l'énergie libre, la force thermodynamique A associée à a vaut :

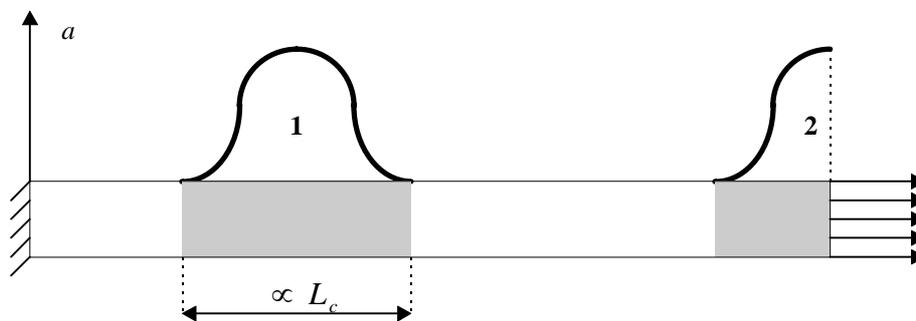
$$\forall \hat{a} \quad \langle A | \hat{a} \rangle = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial a}, \mathbf{R} \hat{a} \right) = \left(-\mathbf{R}' \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}, \hat{a} \right) \quad (2)$$

Le lien avec les formulations à opérateurs intégraux, telles qu'elles ont été présentées lors de l'étude bibliographique, est maintenant apparent : la force thermodynamique locale est délocalisée via l'opérateur adjoint de \mathbf{R} . Toutefois, l'approche énergétique conduit aussi à délocaliser la variable interne a elle-même, ainsi que le potentiel de dissipation, ce qui n'était pas le cas des formulations intégrales. Enfin, l'algorithme basé sur une méthode de décomposition - coordination reste pertinent et peut ainsi offrir une stratégie de résolution de ces problèmes.

Quant au choix de prendre en compte les effets de voisinage via des gradients de variables internes d'ordre plus élevé que 1, il peut s'avérer fertile s'il est guidé par une méthode d'homogénéisation. Nous avons volontairement tronqué la loi de localisation à l'ordre 1, ce qui conduit à ne retenir que les valeurs et les premiers gradients des variables internes, privilégiant ainsi la simplicité (on ne prend en compte les effets non locaux qu'au premier ordre). Cela dit, on aurait pu développer la loi de localisation à un ordre supérieur, conduisant automatiquement à introduire des gradients d'ordre supérieur. Mais l'intégration numérique du modèle en aurait sans doute été grandement compliquée (choix des éléments finis, étape d'intégration locale du comportement...), remettant en cause le caractère opérationnel de la démarche.

2.2 Conditions de bord et d'interface

Un autre point mérite sans conteste une attention particulière : il s'agit des conditions aux limites et des conditions d'interface. Nous avons décidé de ne pas introduire de choix spécifiques, préférant déduire les conditions aux limites naturelles, issues de la formulation énergétique. Toutefois, on peut s'interroger sur la validité de la construction de l'énergie près d'un bord ou d'une interface, puisqu'aucune hypothèse adéquate n'a été formulée lors de l'étape d'homogénéisation. Si dans le cas d'un bord libre, les conditions obtenues (de type gradient normal nul) paraissent quand même raisonnables, la question reste ouverte en présence d'un bord aux conditions imposées. En effet, prenons l'exemple d'un barreau endommageable sollicité en traction, avec L_c une longueur caractéristique du modèle :



Les zones endommagées 1 et 2 ont physiquement le même effet : elles rompent le barreau en deux. Mais créer la zone 2, qui se développe au bord et « bénéficie » de la condition aux limites de type gradient nul, nécessite une énergie deux fois inférieure à celle requise pour créer la zone 1.

Même si ce résultat ne semble pas physique, nous ne développerons pas plus avant le problème, d'autant plus que la modélisation correcte du mode de chargement reste une question toujours délicate. Citons tout de même trois pistes potentielles :

- Dans le cadre de son modèle de rupture fragile, Bourdin [1998] a introduit un domaine $\tilde{\Omega}$ « un peu plus grand » que la structure physique Ω pour poser le problème de lois de comportement : $\tilde{\Omega}$ se déduit de Ω en lui adjoignant une bande d'épaisseur de l'ordre de L_c là où les déplacements sont imposés.
- On peut aussi interpréter le bord sollicité comme une interface entre le solide étudié et un dispositif de transmission des efforts. L'interface elle même peut alors être étudiée, en bénéficiant ainsi des nombreux travaux sur les décohésions d'interface.
- On peut enfin chercher à reprendre la méthode d'homogénéisation en y introduisant explicitement le fait qu'on se situe au voisinage d'une interface.

2.3 Classement des échelles

Un grand nombre de structures du domaine industriel sont modélisées par des poutres, des plaques ou des coques. Étendre l'usage des lois de comportement à gradients de variables internes à ces éléments de structure semble donc attractif, mais n'est pas exempt de difficultés. Il est bien sûr toujours possible d'adopter une cinématique usuelle de poutres ou de coques, tout en injectant la loi de comportement non locale, avec éventuellement des hypothèses simplificatrices sur le couplage entre fibres ou couches. Il nous paraît cependant préférable d'analyser le problème comme une modélisation à deux petits paramètres, l'épaisseur et la longueur caractéristique du modèle. En se fondant alors sur des développements asymptotiques, on pourrait espérer construire des théories de structure à gradients de variables internes, en décidant de la grandeur relative des deux paramètres, qui conditionne entre autres l'ordre dans lequel on effectue les passages à la limite et donc très probablement la nature du modèle final obtenu.

Dans le même ordre d'idée, deux échelles bien différenciées peuvent apparaître au niveau de la microstructure elle-même lorsque celle-ci est fortement anisotrope (très allongée dans une direction, par exemple), une situation qu'on n'a pas envisagée jusqu'à présent. On peut alors s'attendre qu'au cours du chargement, le matériau développe une allure de stratifié. Mais en raison de ces deux échelles, la définition même du voisinage de cellules en tant que volume élémentaire représentatif nécessite un examen complémentaire.

2.4 Vitesse de convergence du lagrangien augmenté et maillage adaptatif

Lors des simulations numériques, nous avons constaté qu'il arrive que la vitesse de convergence de l'algorithme de lagrangien augmenté chute notablement en deçà d'une certaine valeur critique du critère de convergence mais aussi qu'en raffinant le maillage, on abaisse cette valeur critique, rendant ainsi possible des convergences plus précises.

Avant tout, ces observations doivent être confirmées, mais dans l'affirmative, elles justifieraient certainement l'emploi d'un algorithme de maillage adaptatif, puisque les zones endommagées sont *a priori* inconnues. Une autre direction de recherche consiste à mettre au point des accélérateurs de convergence de l'algorithme de lagrangien augmenté. En tout état de cause, il serait préférable d'examiner ces voies dans le cadre d'une loi de comportement non locale qui découle d'un modèle local à écrouissage positif, puisque l'existence et l'unicité de la solution sont alors assurées, tandis que la réponse de la structure demeure stable.

2.5 Remise en cause des interprétations locales

Un frein possible à l'emploi des lois de comportement non locales réside peut-être dans la remise en cause des interprétations locales de la réponse d'une structure. En effet, en théorie, le comportement en un point est influencé par celui de tous les points de la structure. Il est vrai qu'en pratique, l'influence d'un point ne s'étend significativement que sur un voisinage qui dépend des

longueurs caractéristiques du comportement. Cela suffit toutefois à rendre dangereuse sinon erronée une analyse locale.

Ainsi, on a vu que la pratique de l'analyse limite pour déterminer une charge de ruine est remise en question car les effets de gradients - qui dépendent de la géométrie - peuvent conduire à un dépassement significatif des seuils locaux. De même, les analyses 'locales' de localisation et de stabilité, menées à l'aide de critères de perte d'ellipticité et des méthodes de perturbation, ne rendent pas compte des effets de structure en jeu, comme par exemple dans le cas de l'éprouvette entaillée où l'instabilité de la propagation de la zone endommagée est d'origine structurale.

Autre domaine sévèrement perturbé par l'absence d'interprétation locale : l'identification des caractéristiques du matériau. Une éprouvette doit en effet être modélisée comme une structure et non plus un point matériel au comportement homogène, incompatible avec l'apparition des phénomènes de localisation. Cela sous-entend des procédures d'identification fondées sur la résolution de problèmes inverses et nécessitant un certain nombre de simulations numériques.

2.6 Validation de la démarche

Jusqu'à présent, nous avons vérifié le caractère opérationnel de la démarche, depuis la modélisation jusqu'au calcul par éléments finis. En revanche, aucune comparaison résultats / expériences n'a été menée, tout simplement parce qu'une validation numérique préalable nous paraissait indispensable. Toutefois, nous ne perdons pas de vue qu'il s'agit du critère ultime qui permettra de décider du bien-fondé ou non des choix que nous avons faits.

Concernant la rupture ductile des aciers, des bases expérimentales sont disponibles, fruits des années de travail sur le modèle de Rousselier, et une comparaison directe avec l'expérience semble donc envisageable, en conservant néanmoins présent à l'esprit les difficultés d'identification déjà mentionnées. En particulier, on pourra chercher à retrouver les effets d'échelle observés sur éprouvettes. Pour les comportements fragiles, une confrontation directe avec l'expérience est certes envisageable, mais on peut également orienter les recherches en vue d'établir un lien entre l'approche locale qu'on a développée ici et l'approche globale, plus traditionnelle dans le domaine de la rupture fragile et donc bien validée, tant sur le plan expérimental que numérique. Quant à la manière de comparer, elle reste à définir puisque l'approche globale ne donne accès de manière incontestée qu'à l'amorçage d'une fissure, une notion qui n'est pas si intuitive à traduire dans le cadre d'un modèle d'endommagement.

Certes, chacune de ces questions mérite une attention particulière, et d'autres sont, sans aucun doute, passées sous silence. Cependant, fidèles à notre vocation industrielle, nous pensons que les trois derniers points méritent une attention à plus brève échéance dans l'optique d'asseoir davantage la robustesse et la qualité de notre démarche. Toujours au titre de la crédibilité industrielle, il nous semble que bénéficier de ces modélisations novatrices dans un cadre entièrement sous Assurance de

la Qualité représente également un atout important, sinon déterminant. Ainsi, grâce à la disponibilité de ces nouvelles fonctionnalités au sein du *Code_Aster*[®], nous espérons avoir contribué à favoriser l'utilisation de l'approche locale pour étayer les dossiers de sécurité dans le domaine nucléaire.

Références bibliographiques

Acharya A. and Shawki T. G. [1996]

The Clausius-Duhem inequality and the structure of rate-independent plasticity.
Int. J. Plas., **12**, 2, pp. 229-238

Adams R. A. [1975]

Sobolev spaces.
Pure and applied mathematics, Academic Press.

Aifantis E. C. [1987]

The physics of plastic deformation.
Int. J. Plas., **3**, pp. 211-247.

Andrieux S. and de Bonnières P. [1994]

Including thermal gradients into thermoelastic damage constitutive laws : a homogenization approach.
Localized damage, Udine, 6/21/94 - 6/23/94.

Andrieux S., Joussemet M. and Lorentz E. [1996]

A class of constitutive relations with internal variable derivatives : derivation from homogenization.
C. R. Acad. Sci., t. **323**, Série II b, pp. 629-636.

Amoussou Ch. et Rousseau T. [1997]

Modélisation numérique de l'endommagement fragile : 1-Intégration numérique d'une loi de comportement avec discontinuités, 2-Développement d'un élément fini avec discontinuités.
Rapport EDF/DER, stages de DEA, dpt. IMA/MMN.

Attouch H. et Damlamian A. [1977]

Application des méthodes de convexité et monotonie à l'étude de certaines équations quasi-linéaires.
Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **79** A, pp. 107-129.

Auchmuty G. [1989]

Duality algorithms for nonconvex variational principles.
Numer. Funct. Anal. and Optimiz., **10**, pp. 211-264.

BardenHagen S. and Triantafyllidis N. [1994]

Derivation of higher order gradient continuum theories in 2,3-D nonlinear elasticity from periodic lattice models.
J. Mech. Phys. Solids, vol. **42**, n° 1, pp. 111-139.

Bathe K.-J. [1982]

Finite element procedures in engineering analysis.
Ed. Prentice Hall, pp. 492-494.

Bauvineau L. [1997]

Application de l'approche locale à différents mécanismes de rupture.
Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.

Bazant Z. P., Belytschko T. B. and Chang T. P. [1984]

Continuum theory for strain softening.
J ; Eng. Mech. Div., ASCE **110**, pp. 1666-1692.

Bazant Z. P. and Pijaudier-Cabot G. [1988]

Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence.
J. Appl. Mech., **55**, pp. 287-293.

Benallal A., Billardon R. and Geymonat G. [1993]

Bifurcation and localization in rate independent materials. Some general considerations.
In Nguyen Q.S., Bifurcation and stability of dissipative systems, CISM n° **327**, SpringerVerlag, pp. 1-44.

Benallal A. and Comi C. [1994]

Closed form solutions to localization conditions for rate-independent materials.
C.R.A.S., t. 318, Série II, pp. 7-14.

Berthaud Y., Torrenti J.M, Benaija E.H. [1994]

Experimental investigations of the localization zones in quasi-brittle materials.
In Bazant, Fracture and damage in quasibrittle structures, E & FN SPON, pp. 419-426.

Billardon R. [1989]

Étude de la rupture par la mécanique de l'endommagement.
Thèse d'Etat, Université Paris VI.

Bourdin B. [1998]

Une formulation variationnelle en mécanique de la rupture, théorie et mise en œuvre numérique.
Thèse de doctorat, université Paris XIII.

Cano V. et Lorentz E. [1998]

Introduction dans le Code_Aster d'un modèle de comportement en grandes déformations élastoplastique avec écrouissage isotrope.
Note interne EDF/DER, HI-74/98/006.

Cartan H. [1977]

Cours de calcul différentiel.
Hermann, Paris.

Cherukuri H. P. and Shawki T. G. [1995]

An energy-based localization theory : I. Basic framework.
Int. J. Plasticity, vol. **11**, n° 1, pp. 15-40.

Coleman B. D. and Noll W. [1963]

The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity.
Arch. Rat. Mech. Anal., **13**, pp. 167-178.

Cowin S. C. and Nunziato J. W. [1983]

Linear elastic materials with voids.
J. Elasticity, **13**, pp. 125-147.

Dal Maso G. [1993]

An introduction to Γ -convergence.
Progress in nonlinear differential equations and their applications, Birkhäuser.

Darve F., Hicher P.-Y., Reynouard J.-M. [1995]

Mécanique des géomatériaux.
Hermès, Paris, pp. 103-121.

De Borst R. [1991]

Simulation of strain localization : a reappraisal of the Cosserat continuum.
Eng. Comp., **8**, pp. 317-332.

De Borst R., Heeres O. and Benallal A. [1995]

A gradient enhanced damage model : theory and computation.
Computational plasticity, eds. Owen, Onate and Hinton, Pineridge press, pp. 975-986.

De Borst R. and Mühlhaus H. B. [1992]

Gradient dependent plasticity : formulation and algorithmic aspects.
Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. **35**, pp. 521-539.

De Borst R. and Pamin J. [1996]

Some novel developments in finite element procedures for gradient-dependent plasticity.
Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. **39**, pp. 2477-2505.

Desrues J. et Chambon. R. [1985]

Bifurcation par localisation de la déformation : étude expérimentale et théorique à l'essai biaxial sur sable.
Colloque international de CNRS, Déformations finies des agrégats : bases physiques et modélisations.

Drugan W. J. and Willis J. R. [1996]

A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites.
J. Mech. Phys. Solids, vol. **44**, no. 4, pp. 497-524.

Duvaut G. and Lions J.-L. [1972]

Les inéquations en mécanique et en physique.
Dunod, Paris.

Ekeland I. et Temam R. [1974]

Analyse convexe et problèmes variationnels.
Dunod Gauthier-Villars, Paris.

Faure P. [1991]

Analyse, optimisation et filtrage numérique.
Ed. Ecole Polytechnique.

Fedelich B. and Ehrlacher A. [1997]

An analysis of stability of equilibrium and of quasi-static transformations on the basis of the dissipation function.
Eur. J. Mech., A/ Solids, **16**, no 5, pp. 833-855.

Fleck N. A. and Hutchinson J. W. [1993]

A phenomenological theory of strain gradient plasticity.
J. Mech. Phys. Solids, **41**, pp. 1825-1857.

Fleck N. A. and Hutchinson J. W. [1996]

Strain gradient plasticity.
In Advances in Applied Mechanics, vol. **33**, eds. Hutchinson and Wu, Academic Press, New York.

Fleck N. A., Muller G. M., Ashby M. F. and Hutchinson J. W. [1994]

Strain gradient plasticity : theory and experiment.
Acta Metall. Mater., **42**, pp. 475-487.

Foreau S. et Millard A. [1994]

Mise en œuvre d'un élément fini enrichi pour modéliser les bandes de localisation.
Rapport interne CEA/DMT 94-021.

Forest S. [1996]

Description de la déformation hétérogène des monocristaux dans le cadre de la mécanique des milieux continus généralisés.
In Mécanismes et mécanique des grandes déformations, Colloque national Mécamat, Aussois.

Fortin M. and Glowinski R. [1983]

Augmented lagrangian methods : applications to the numerical solution of boundary-value problems.
Studies in mathematics and its applications, **15**, ed. North-Holland.

Fourcade F., Eve T. et Socroun T. [1995]

Optimiser les rechargements des réacteurs nucléaires français.
Note interne EDF-DER, HR-31/95/010.

Francfort G. and Marigo J.-J. [1993]

Stable damage evolution in a brittle continuous medium.
Eur. J. Mech., A/Solids, **12**, no 2, pp. 149-189.

Francfort G. and Marigo J.-J. [1998]

Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem.
J. Mech. Phys. Sol., **46**, no 8, pp. 1319-1342.

Frémond M. and Nedjar B. [1993]

Endommagement et principe des puissances virtuelles.
C.R.A.S., t. 317, Série II, pp. 857-864.

Fung [1969]

Foundations of solid mechanics.
Eds. Prentice Hall.

Garajeu M., Michel J.-C. et Suquet P. [1998]

Croissance des cavités et rupture ductile des matériaux plastiques ou viscoplastiques.
Coll. National MECAMAT Aussois, Mécanismes et mécanique de l'endommagement et de la rupture, 26-29/1/98.

Germain P. [1973]

La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus : 1^è partie, théorie du second gradient.
J. Mécanique, **12**, pp. 235-274.

Germain P., Nguyen Q. S. and Suquet P. [1983]

Continuum thermodynamics.
J. Appl. Mech., **50**, no 12, pp. 1010-1020.

Gologanu M., Leblond J.-B., Perrin G. and Devaux J. [1998]

Recent extensions of Gurson's model for porous ductile metals.
In INRIA, Ecole EDF-CEA-INRIA, Fracture et fatigue, Rocquencourt, France.

Guckenheimer J. and Holmes Ph. [1990]

Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields.
Applied Mathematical Sciences, 42, ed. Springer-Verlag.

Gurson A. L. [1977]

Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : part 1 - yield criteria and flow rules for porous ductile media.
ASME J. Eng. Mat. Tech., **99**, pp. 2-15.

Guyon et Hulin [1998]

Granites et fumées - de l'ordre dans le mélange.
Eds. Odile Jacob.

Hadamard J. [1903]

Leçon sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique.
Eds. Hermann et cie., Paris.

Halphen B. and Nguyen Q. S. [1975]

Sur les matériaux standards généralisés.
J. de Mécanique, **14**, pp. 39-63.

Herskovits J. [1986]

A two-stage feasible direction algorithm for nonlinear constrained optimization.
Mathematical programming, **36**, pp. 19-38.

Iordache M.-M., Willam K. and Carol I. [1995]

Failure modes of plastic degradation processes in Cosserat continua.
In proceedings Computational Plasticity IV, Owen & Oñate eds., pp. 975-986.

Jeanclaude V. and Fressengeas C. [1993]

A nonlocal gradient approach to the propagation of the Portevin - Le Chatelier deformation band.
C. R. Acad. Sci., t. **316**, Série II, pp. 867-872.

Joussemet M. [1997]

Sur la construction de modèles d'endommagement avec gradient.
Thèse de doctorat, université de Poitiers.

Khan A. S. and Huang S. [1995]

Continuum theory of plasticity.
Wiley-interscience.

Lakes R. [1995]

Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua.
In Mühlhaus, Continuum models for materials with microstructure, Wiley, pp. 1-25, 1995.

Leblond J.-B., Perrin G. and Devaux J. [1994]

Bifurcation effects in ductile metals with nonlocal damage.
J. Appl. Mech., vol. **61**, pp. 236-242.

Leblond J.-B., Perrin G. and Devaux J. [1995]

An improved Gurson-type model for hardenable ductile metals.
Eur. J. Mech., A/Solids, **14**, pp. 499-527.

Lee E. H. [1969]

Elastic plastic deformation at finite strain.
J. Appl. Mech., vol. **36**, pp. 1-6.

Lemaitre, J. and Chaboche, J.-L. [1988]

Mécanique des matériaux solides.
Eds. Dunod, Paris.

Li M. and Drucker D. C. [1994]

Instability and bifurcation of a non associated extended Mises model in the hardening regime.
J. Mech. Phys. Solids, vol. **42**, no 12, pp. 1883-1904.

Lorentz E. [1996]

Modélisations opérationnelles de l'endommagement.
Note interne EDF/DER, HI-74/96/012.

Lorentz E. [1997a]

Evaluation d'une modélisation de l'endommagement des structures par lignes de discontinuités des déplacements
Note interne EDF/DER, CR-MMN 97/120.

Lorentz E. [1997b]

Lois de comportement à seuil : formulation en champs de variables internes.
Coll. EDF/DER, production d'énergie (thermique, hydraulique et nucléaire), 97NB00090.

Lorentz E. and Andrieux S. [1999]

A variational formulation for nonlocal damage models.
Int. J. Plas., to appear.

Mandel J. [1978]

Dissipativité normale et variables cachées.
Mech. Research Comm., vol. **5**, pp. 225-229.

Markov K. [1995]

On a microstructural model of damage in solids.
Int. J. Eng. Sci., **33**, no 1, pp. 139-150.

Maugin G. A. [1990]

Internal variables and dissipative structures.
J. non-equilibrium thermodynamics, **15**, pp. 173-192.

Meftah F. [1997]

Contribution à l'étude numérique des modes localisés de rupture dans les structures en béton de type poutres.
Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon.

Mialon P. [1986]

Éléments d'analyse et de résolution numérique des relations de l'élasto-plasticité.
EDF, bulletin de la DER, série C mathématiques informatique, **3**, pp. 57-89.

Michel J.-C. [1984]

Homogénéisation de matériaux élastoplastiques avec cavités.
Thèse de doctorat, université Paris VI.

Mühlhaus H. B. and Aifantis E. C. [1991]

A variational principle for gradient plasticity.
Int. J. Solids Structures, Vol. **28**, No 7, pp. 845-857.

Needleman A. [1988]

Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems.
Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., **67**, pp. 69-85.

Nguyen Q. S. [1994]

Bifurcation and stability in dissipative media (plasticity, friction, fracture).
Appl. Mech. Rev., **47**, no 1, 1-31.

Nguyen Q. S. et Bui H. D. [1974]

Sur les matériaux élastoplastiques à écrouissage positif ou négatif.
Journal de Mécanique, Vol **13**, No 2.

Oliver J. [1996a]

Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations : 1-Fundamentals.
Int. J. Num. Meth. Eng., vol. **39**, pp. 3575-3600.

Oliver J. [1996b]

Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations : 2-Numerical simulations.
Int. J. Num. Meth. Eng., vol. **39**, pp. 3601-3623.

Peerlings R. H. J., de Borst R., Brekelmans W. A. M. and de Vree J. H. P. [1995]

Computational modelling of gradient-enhanced damage for fracture and fatigue problems.
In proceedings Computational Plasticity IV, Owen & Oñate eds., pp. 975-986.

Perrin G. [1992]

Contribution à l'étude théorique et numérique de la rupture ductile des métaux.
Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique.

Pijaudier-Cabot G. [1995]

Nonlocal damage.
In Continuum models for materials with microstructures, H.B. Mühlhaus ed., Wiley.

Pijaudier-Cabot G. and Burlion N. [1996]

Damage and localization in elastic materials with voids.
Mech. Coh. Frict. Mat., **1**, pp. 129-144.

Pijaudier-Cabot G. and Huerta A. [1991]

Finite element analysis of bifurcation in nonlocal strain softening solids.
Comp. meth. appl. mech. eng., **90**, pp. 905-919.

Pitman.E. B. [1995]

Visco-plastic relaxation : convergence and localization.
Eur. J. Mech., A/ Solids, **14**, n° 6, pp. 961-979.

Planas J., Elices M. and Guinea G.V. [1993]

Cohesive cracks versus nonlocal models : closing the gap.
Int. J. Fracture., **63**, pp. 173-187.

Polizzotto C. and Borino G. [1998]

A unifying thermodynamic framework for nonlocal and gradient plasticity.
Comm. in Euromech colloquium 378, nonlocal aspects in solid mechanics, 20-22/4/98.

Quéré Y. [1991]

Physique des matériaux.
Eds. Ecole Polytechnique.

Rey C. et Viaris de Lesegno. P.[1994]

Analyse expérimentale d'un problème de localisation de la déformation plastique.
In Journal Mécamat, n° 14, pp. 11-18.

Rice [1976]

The localization of plastic deformation.
In Theoretical and Applied Mechanics, Koiter, ed. North Holland publishing company.

Rice J. R. and Tracey D. M. [1969]

On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields.
J. Mech. Phys. Sol., **17**, pp. 201-217.

Rousselier G. [1981]

Finite deformation constitutive relations including ductile fracture damage.
In Three dimensional constitutive relations and ductile fracture, Ed. Nemat-Nasser, North Holland publishing company, pp. 331-355.

Rousselier G. [1995]

Stabilité locale et modes de rupture ductile.
Note interne EDF/DER, HT- 26/95/007

Sebag M. [1998]

Algorithmes d'évolution : mise en route.
Ecole Polytechnique, Journée JET 8/4/98.

Sidoroff F. [1981]

Formulations élasto-plastiques en grandes déformations.
Rapport GRECO n° 29/1981.

Simo J.-C. [1988]

Strain softening and dissipation : a unification of approaches.
In Bazant & Mazars, Cracking and damage, Elsevier applied science, pp. 440-461.

Simo J.-C., Kennedy J. G. and Govindjee S. [1988]

Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. Loading/unloading conditions and numerical algorithm.
Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 26, pp. 2161-2185.

Simo J. C. and Miehe C. [1992]

Associative coupled thermoplasticity at finite strains : formulation, numerical analysis and implementation.
Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., **98**, pp. 41-104.

Simo J.-C. and Oliver J. [1993]

An analysis of strong discontinuities induced by strain softening in rate independent inelastic solids.
Comp. Mech., **12**, pp. 277-296.

Simo J. C, Oliver J. and Armero F. [1993]

An analysis of strong discontinuities induced by strain softening in rate-independent inelastic solids.
Comp. Mech., **12**, pp. 277-296.

Simo J.-C. and Rifai S. [1990]

A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes.
Int. J; Num. Meth. Eng., vol. **29**, pp. 1595-1638.

Simo J. C. and Taylor R. L. [1985]

Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity.
Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., **48**, pp. 101-118.

Sluys L. J. [1994]

Gradient theory : discretization principles and application.
Proc. Euro-C 1994 Int. Conf. Comp. Mod. of concrete struct., eds. Mang et al., Swansea : pineridge press, pp. 403-412.

Socroun T. [1996]

Minimisation d'une fonction convexe non nécessairement différentiable : logiciel Centaure [note de principe].
Note interne EDF-DER, HR-32/96/023.

Steinmann P. [1995]

Theory and numerics of ductile micropolar elastoplastic damage.
Int. J. Num. Meth. Eng., vol. **38**, pp. 583-606.

Suquet P. [1982]

Plasticité et homogénéisation.
Thèse de doctorat d'Etat, université Paris VI.

Svedberg T. and Runesson K. [1997]

A thermodynamically consistent theory of gradient-regularized plasticity coupled to damage.
Int. J. Plas., **13**, 669-696.

Terrien M. [1980]

Emission acoustique et comportement mécanique post-critique d'un béton sollicité en traction.
ENPC, Bull. de liaison des Ponts et Chaussées, **105**, réf. 2398.

Triantafyllidis N. and Aifantis. E.C. [1986]

A gradient approach to localization of deformation. I. Hyperelastic materials.
J. Elasticity, **16**, pp. 225-237.

Triantafyllidis N. and Bardenhagen S. [1993]

On higher order gradient continuum theories in 1-D nonlinear elasticity. Derivation from and comparison to the corresponding discrete models.

J. Elasticity, **33**, pp. 259-293.

Truesdell C. [1974]

Introduction à la mécanique rationnelle des milieux continus.

Eds Masson.

Tvergaard V. [1981]

Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions.

Int. J. Fracture, **17**, pp. 389-407.

Valanis K. C. [1996]

A gradient theory of internal variables.

Acta Mech., **116**, pp. 1-14.

Vautier I. [1994]

Influence du contact unilatéral sur le comportement vibratoire de coques soudées par points.

Thèse de doctorat, Institut Aérotechnique [CNAM].

Vautier I., Mialon P. et Lorentz E. [1996]

Algorithme non linéaire quasi statique.

Documentation de référence du *Code_Aster*, R5.03.01.

Voltaire F. [1995]

Analyse limite de structures fissurées et critères de résistance.

Note interne EDF-DER, HI-74/95/026.

**Lois de comportement à gradients de variables internes :
construction, formulation variationnelle et mise en œuvre numérique**

Résumé : Des observations expérimentales montrent que les modélisations locales ne suffisent pas pour décrire le comportement de matériaux sollicités par de forts gradients des champs mécaniques, qui résultent, par exemple, de la localisation des déformations. On propose ici une démarche constructive qui étend les lois locales de type standard généralisé pour rendre compte des effets de gradients. Elle se fonde, d'une part, sur une méthode d'homogénéisation pour construire une loi à gradients de variables internes à l'échelle du point matériel, et d'autre part, sur une formulation de cette loi à l'échelle de la structure, où les variables sont dorénavant les champs de variables internes. Cette formulation variationnelle du comportement offre un cadre adéquat pour examiner des questions telles que l'existence de solutions au problème d'évolution, le choix des espaces fonctionnels pour les variables internes ou encore le lien entre modèles locaux et modèles à gradients. Par ailleurs, après discrétisation temporelle, la loi de comportement s'exprime comme la minimisation d'une énergie, problème d'optimisation qui est résolu ici au moyen d'un algorithme de lagrangien augmenté. Ce choix permet de confiner les fortes non linéarités – dont le caractère non différentiable de l'énergie – au niveau des points d'intégration, ce qui autorise une introduction aisée de ces développements dans un code de calcul préexistant, le Code_Aster® en l'occurrence. Trois applications permettent alors de mettre en lumière les potentialités de la démarche. Tout d'abord, un modèle élastique fragile illustre son caractère constructif et opérationnel, depuis la construction du modèle jusqu'aux simulations numériques. Ensuite, l'insertion dans ce cadre variationnel des modèles de plasticité à gradients, abondamment employés dans la littérature, démontre le degré de généralité de la formulation. Enfin, son application à la loi de Rousselier pour modéliser un mécanisme de rupture ductile des aciers permet d'examiner l'interaction entre grandes déformations plastiques, d'une part, et comportement non local, d'autre part.

Mots-clés : mécanique, comportement, endommagement, localisation, matériaux standard généralisés, modèles non locaux, formulations variationnelles, lagrangien augmenté, analyse convexe, éléments finis.

**Constitutive relations with gradients of internal variables :
derivation, variational formulation and numerical setting**

Abstract : Experimental observations show that local theories fail to describe the behavior of materials submitted to strong gradients of mechanical fields, due to strain localization for instance. In that way, a general framework is proposed to take into account these gradient effects by extending the local generalized standard constitutive relations. It relies on two features : first, a homogenization method to derive constitutive relations with internal variable gradients at the scale of the material point, then a generalization of these constitutive laws at the structural scale, based on the internal variable fields. This variational framework is well-suited to examine such questions as existency conditions for the law of evolution, appropriate functional spaces for the internal variable fields or the relations between local and gradient models. Moreover, a time-discretization leads to express the global constitutive relation as the minimization of an energy. This problem is solved through an augmented lagrangian algorithm, which places the treatment of strong nonlinearities (among which the non differentiability of the energy) at the integration point level, and therefore allows an easy implementation in the software we used, namely the Code_Aster®. Three applications highlight the capabilities of this method. First, its efficiency is shown when applied to a brittle damage model, from the derivation of the constitutive law up to numerical simulations. Then, the widely used theory of gradient plasticity is cast into our framework, thus proving its degree of generality. Finally, its application to Rousselier's law for ductile fracture of steels points out the interaction between large plastic strains and nonlocal behavior.

Key words : mechanics, constitutive relations, damage, localization, generalized standard materials, nonlocal theories, variational formulations, augmented lagrangian, convex analysis, finite elements.