

# Modélisation et étude numérique d'écoulements de fluides complexes en micro-fluidique

Soutenance de thèse

Julien Dambrine,

Thierry Colin, Mathieu Colin.

**Mc2, INRIA Bordeaux Sud-Ouest**



Quelques exemples d'écoulements de fluides complexes :

- Fluides à plusieurs phases, interfaces (ex : huile-eau)
- Problèmes de mélange (ex : suivi d'un mélange réactif)
- Interaction fluide-structure (ex : particules, parois élastiques)
- Fluides non-Newtoniens, Rhéologie (ex : micelles, polymères)

→ Besoin important en modélisation

→ Besoin important en calcul scientifique

Quelques exemples d'écoulements de fluides complexes :

- Fluides à plusieurs phases, interfaces (ex : huile-eau)
- Problèmes de mélange (ex : suivi d'un mélange réactif)
- Interaction fluide-structure (ex : particules, parois élastiques)
- Fluides non-Newtoniens, Rhéologie (ex : micelles, polymères)

→ Besoin important en modélisation

→ Besoin important en calcul scientifique

Quelques exemples d'écoulements de fluides complexes :

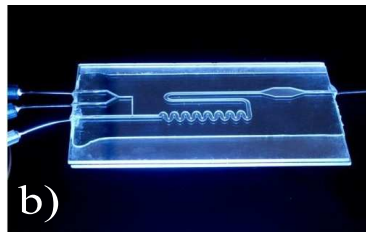
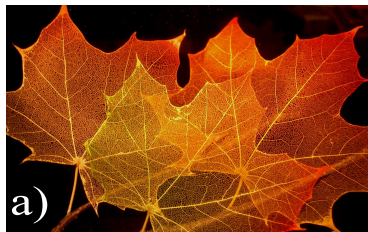
- Fluides à plusieurs phases, interfaces (ex : huile-eau)
- Problèmes de mélange (ex : suivi d'un mélange réactif)
- Interaction fluide-structure (ex : particules, parois élastiques)
- Fluides non-Newtoniens, Rhéologie (ex : micelles, polymères)

→ Besoin important en modélisation

→ Besoin important en calcul scientifique

Une définition simple :

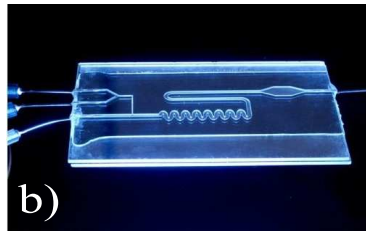
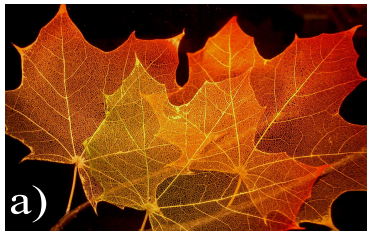
"écoulements dans des canaux dont la taille varie de  $1\ \mu\text{m}$  à  $1\ \text{mm}$ "



- a) Micro-canaux naturels : nervures sur une feuille  
(image : Wikipedia)
- b) Micro-canaux artificiels : puces en verre ou en PDMS  
(image : L.O.F. Rhodia/CNRS/U-Bx1)

Une définition simple :

"écoulements dans des canaux dont la taille varie de  $1\ \mu\text{m}$  à  $1\ \text{mm}$ "



- a) Micro-canaux naturels : nervures sur une feuille  
(image : Wikipedia)
- b) **Micro-canaux artificiels : puces en verre ou en PDMS**  
(image : L.O.F. Rhodia/CNRS/U-Bx1)

# Introduction

Pourquoi utiliser la micro-fluidique pour étudier des écoulements complexes ?

La micro-fluidique est (entre autres) :

- Un outil d'analyse chimique (expériences de co-flow) :

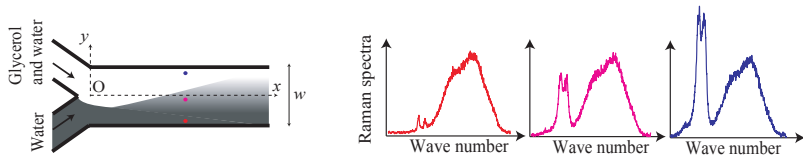


Image : Jean-Baptiste Salmon (LOF)

- Un outil d'analyse rhéologique (rhéomètre sur puce) :

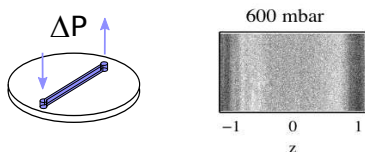


Image : Chloé Masselon (LOF)

- Un "modèle" pour étudier des écoulements en milieu poreux (réseaux micro-fluidiques)

# Introduction

## Caractéristiques des écoulements micro-fluidiques

Caractéristiques des écoulements micro-fluidiques :

- ▶ Prédominance des effets visqueux sur les effets inertiels
- ▶ Régime incompressible

→ Utilisation du modèle de Stokes :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla P, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \end{cases}$$

- ▶ Ecoulements conduits par la pression
- ▶ Ecoulements confinés

→ Grande importance des conditions aux limites

L'expression de la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  change suivant le cas étudié :

Problèmes de mélange (partie I) :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\phi) D[\mathbf{V}],$$

$$\partial_t \phi + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi - \mathcal{D} \Delta \phi = 0.$$

Ecoulements de micelles géantes (partie II) :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta D[\mathbf{V}] + \boldsymbol{\sigma}_p,$$

+ loi de comportement sur  $\boldsymbol{\sigma}_p$ .



# Introduction

## Caractéristiques des écoulements micro-fluidiques

Caractéristiques des écoulements micro-fluidiques :

- ▶ Prédominance des effets visqueux sur les effets inertiels
- ▶ Régime incompressible

→ Utilisation du modèle de Stokes :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla P, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \end{cases}$$

- ▶ Ecoulements conduits par la pression
- ▶ Ecoulements confinés

→ Grande importance des conditions aux limites

L'expression de la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  change suivant le cas étudié :

Problèmes de mélange (partie I) :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\phi) D[\mathbf{V}],$$

$$\partial_t \phi + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi - \mathcal{D} \Delta \phi = 0.$$

Ecoulements de micelles géantes (partie II) :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta D[\mathbf{V}] + \boldsymbol{\sigma}_p,$$

+ loi de comportement sur  $\boldsymbol{\sigma}_p$ .

# Introduction

## Caractéristiques des écoulements micro-fluidiques

Caractéristiques des écoulements micro-fluidiques :

- ▶ Prédominance des effets visqueux sur les effets inertiels
- ▶ Régime incompressible

→ Utilisation du modèle de Stokes :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla P, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \end{cases}$$

- ▶ Ecoulements conduits par la pression
- ▶ Ecoulements confinés

→ Grande importance des conditions aux limites

L'expression de la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  change suivant le cas étudié :

Problèmes de mélange (partie I) :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\phi) D[\mathbf{V}],$$

$$\partial_t \phi + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi - \mathcal{D} \Delta \phi = 0.$$

Ecoulements de micelles géantes (partie II) :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta D[\mathbf{V}] + \boldsymbol{\sigma}_p,$$

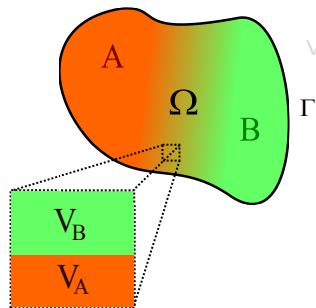
+ loi de comportement sur  $\boldsymbol{\sigma}_p$ .

## Partie I :

Problèmes de mélange en domaines fins

# Problèmes de mélange

Un modèle de mélange



Variable pour suivre le mélange : fraction volumique  $\phi$

$$\partial_t \phi + \nabla \cdot (F_c + F_d) = 0$$

- Flux convectif :  $F_c = \mathbf{V} \phi$
- Flux diffusif, loi de Fick :  $F_d = \mathcal{D} \nabla \phi$

Hydrodynamique : modèle de Stokes :

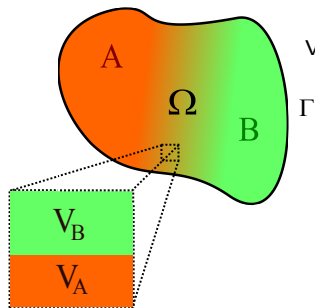
$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla P, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \end{cases}$$

On considère des fluides Newtoniens :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\phi) D[\mathbf{V}]$$

# Problèmes de mélange

Un modèle de mélange



Variable pour suivre le mélange : fraction volumique  $\phi$

$$\partial_t \phi + \nabla \cdot (F_c + F_d) = 0$$

- Flux convectif :  $F_c = \mathbf{V} \phi$
- Flux diffusif, loi de Fick :  $F_d = \mathcal{D} \nabla \phi$

Hydrodynamique : modèle de Stokes :

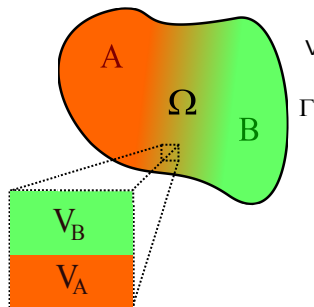
$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla P, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \end{cases}$$

On considère des fluides Newtoniens :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\phi) D[\mathbf{V}]$$

# Problèmes de mélange

Un modèle de mélange



Variable pour suivre le mélange : fraction volumique  $\phi$

$$\partial_t \phi + \nabla \cdot (F_c + F_d) = 0$$

- Flux convectif :  $F_c = \mathbf{V} \phi$
- Flux diffusif, loi de Fick :  $F_d = \mathcal{D} \nabla \phi$

Hydrodynamique : modèle de Stokes :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla P, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \end{cases}$$

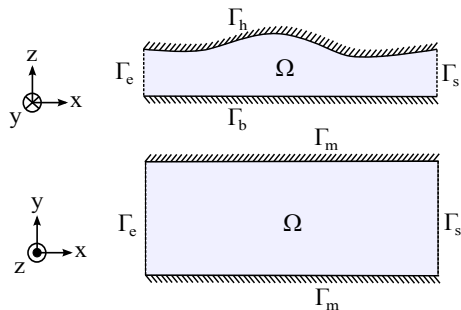
On considère des fluides Newtoniens :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\phi) D[\mathbf{V}]$$

# Problèmes de mélange

## Conditions aux limites

Conditions aux limites pour un écoulement micro-fluidique :



► Sur  $\Gamma_e$  :

- $\mathbf{V} = \mathbf{V}_e(y, z)$
- $\phi = \phi_e(y, z)$

► Sur  $\Gamma_s$  :

- Conditions "libres" pour  $\mathbf{V}$
- $\partial_x \phi = 0$

► Sur  $\Gamma_m$  :

- $\mathbf{V} = 0$
- $\partial_{\bar{n}} \phi = 0$

► Sur  $\Gamma_{h/b}$  :

- Pour  $\mathbf{V}$ , deux possibilités :

Une condition d'adhérence :  $\mathbf{V} = 0$

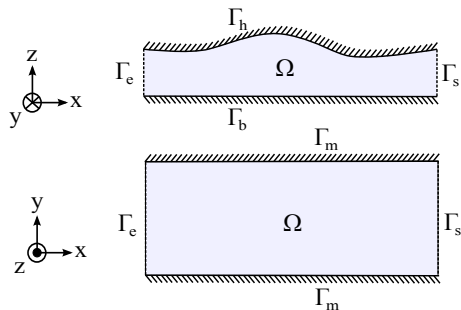
Une condition de glissement :  $\mathbf{V}_n = 0$ ,  $\partial_{\bar{n}} \mathbf{V}_\tau = \pm \frac{1}{L_{h/b}} \mathbf{V}_\tau$

- $\partial_{\bar{n}} \phi = 0$

# Problèmes de mélange

## Conditions aux limites

Conditions aux limites pour un écoulement micro-fluidique :



► Sur  $\Gamma_e$  :

- $\mathbf{V} = \mathbf{V}_e(y, z)$
- $\phi = \phi_e(y, z)$

► Sur  $\Gamma_s$  :

- Conditions "libres" pour  $\mathbf{V}$
- $\partial_x \phi = 0$

► Sur  $\Gamma_m$  :

- $\mathbf{V} = 0$
- $\partial_{\bar{n}} \phi = 0$

► Sur  $\Gamma_{h/b}$  :

- Pour  $\mathbf{V}$ , deux possibilités :

Une condition d'adhérence :  $\mathbf{V} = 0$

Une condition de glissement :  $\mathbf{V}_n = 0$ ,  $\partial_{\bar{n}} \mathbf{V}_\tau = \pm \frac{1}{L_{h/b}} \mathbf{V}_\tau$

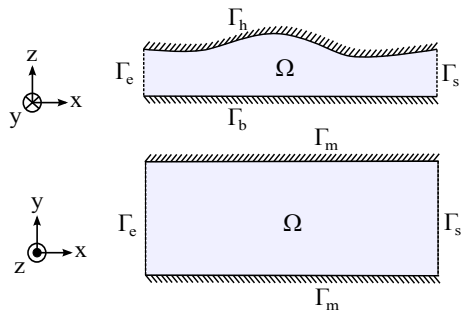
- $\partial_{\bar{n}} \phi = 0$



# Problèmes de mélange

## Conditions aux limites

Conditions aux limites pour un écoulement micro-fluidique :



► Sur  $\Gamma_e$  :

- $\mathbf{V} = \mathbf{V}_e(y, z)$
- $\phi = \phi_e(y, z)$

► Sur  $\Gamma_s$  :

- Conditions "libres" pour  $\mathbf{V}$
- $\partial_x \phi = 0$

► Sur  $\Gamma_m$  :

- $\mathbf{V} = 0$
- $\partial_{\bar{n}} \phi = 0$

► Sur  $\Gamma_{h/b}$  :

- Pour  $\mathbf{V}$ , deux possibilités :

Une condition d'adhérence :  $\mathbf{V} = 0$

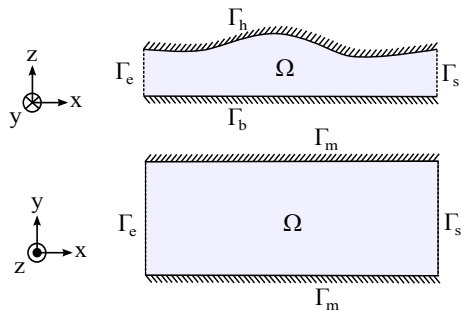
Une condition de glissement :  $\mathbf{V}_n = 0$ ,  $\partial_{\bar{n}} \mathbf{V}_\tau = \pm \frac{1}{L_{h/b}} \mathbf{V}_\tau$

- $\partial_{\bar{n}} \phi = 0$

# Problèmes de mélange

## Conditions aux limites

Conditions aux limites pour un écoulement micro-fluidique :



► Sur  $\Gamma_e$  :

- $\mathbf{V} = \mathbf{V}_e(y, z)$
- $\phi = \phi_e(y, z)$

► Sur  $\Gamma_s$  :

- Conditions "libres" pour  $\mathbf{V}$
- $\partial_x \phi = 0$

► Sur  $\Gamma_m$  :

- $\mathbf{V} = 0$
- $\partial_{\bar{n}} \phi = 0$

► Sur  $\Gamma_{h/b}$  :

- Pour  $\mathbf{V}$ , deux possibilités :

Une condition d'adhérence :  $\mathbf{V} = 0$

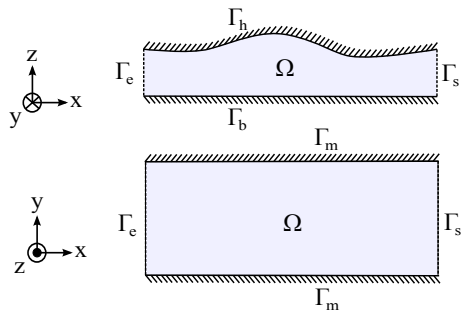
Une condition de glissement :  $\mathbf{V}_n = 0$ ,  $\partial_{\bar{n}} \mathbf{V}_\tau = \pm \frac{1}{L_{h/b}} \mathbf{V}_\tau$

- $\partial_{\bar{n}} \phi = 0$

# Problèmes de mélange

## Conditions aux limites

Conditions aux limites pour un écoulement micro-fluidique :



► Sur  $\Gamma_e$  :

- $\mathbf{V} = \mathbf{V}_e(y, z)$

- $\phi = \phi_e(y, z)$

► Sur  $\Gamma_s$  :

- Conditions "libres" pour  $\mathbf{V}$

- $\partial_x \phi = 0$

► Sur  $\Gamma_m$  :

- $\mathbf{V} = 0$

- $\partial_{\bar{n}} \phi = 0$

► Sur  $\Gamma_{h/b}$  :

- Pour  $\mathbf{V}$ , deux possibilités :

  - Une condition d'adhérence :  $\mathbf{V} = 0$

  - Une condition de glissement :  $\mathbf{V}_n = 0$ ,  $\partial_{\bar{n}} \mathbf{V}_\tau = \pm \frac{1}{L_{h/b}} \mathbf{V}_\tau$

- $\partial_{\bar{n}} \phi = 0$

# Modèle de Reynolds

Hypothèses ( $\varepsilon \ll 1$ ) :

- 1) Domaine fin :  $\frac{h}{l} = o(\varepsilon)$ ,  $\frac{h}{L} = o(\varepsilon)$
- 2) Incompressibilité :  $\frac{w_0}{u_0} = o(\varepsilon)$ ,  $\frac{w_0}{v_0} = o(\varepsilon)$
- 3) Ecoulement conduit par la pression :  $\frac{\eta_0 u_0}{P_0 l} = o(\varepsilon^2)$

On obtient deux types de modèles :

Modèles 2D

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{xy} \cdot [K_1(x, y, \phi) \nabla_{xy} P] = 0 \\ \left( \begin{array}{c} \bar{u} \\ \bar{v} \end{array} \right) (x, y) = \bar{K}_2(x, y, \phi) \nabla_{xy} P \\ \partial_t \phi + \left( \begin{array}{c} \bar{u} \\ \bar{v} \end{array} \right) \cdot \nabla_{xy} \phi = \nabla_{xy} \cdot (\mathcal{D}(\phi) \nabla_{xy} \phi) \end{array} \right.$$

Modèles 2.5D

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{xy} \cdot [K_1(x, y, \bar{\phi}) \nabla_{xy} P] = 0 \\ \left( \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right) (x, y, z) = K_2(x, y, z, \phi) \nabla_{xy} P \\ \mathbf{w} = -\nabla_{xy} \cdot \left[ \nabla_{xy} P \int_0^z K_2(x, y, s, \phi) ds \right] \\ \partial_t \phi + \left( \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \right) \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot (\mathcal{D}(\phi) \nabla \phi) \end{array} \right.$$

# Modèle de Reynolds

Hypothèses ( $\varepsilon \ll 1$ ) :

- 1) Domaine fin :  $\frac{h}{l} = o(\varepsilon)$ ,  $\frac{h}{L} = o(\varepsilon)$
- 2) Incompressibilité :  $\frac{w_0}{u_0} = o(\varepsilon)$ ,  $\frac{w_0}{v_0} = o(\varepsilon)$
- 3) Ecoulement conduit par la pression :  $\frac{\eta_0 u_0}{P_0 l} = o(\varepsilon^2)$

On obtient deux types de modèles :

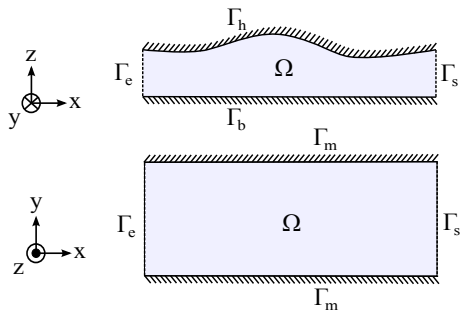
Modèles 2D

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{xy} \cdot [K_1(x, y, \phi) \nabla_{xy} \mathbf{P}] = 0 \\ \left( \begin{array}{c} \bar{u} \\ \bar{v} \end{array} \right) (x, y) = \bar{K}_2(x, y, \phi) \nabla_{xy} \mathbf{P} \\ \partial_t \phi + \left( \begin{array}{c} \bar{u} \\ \bar{v} \end{array} \right) \cdot \nabla_{xy} \phi = \nabla_{xy} \cdot (\mathcal{D}(\phi) \nabla_{xy} \phi) \end{array} \right.$$

Modèles 2.5D

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{xy} \cdot [K_1(x, y, \bar{\phi}) \nabla_{xy} \mathbf{P}] = 0 \\ \left( \begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{array} \right) (x, y, z) = K_2(x, y, z, \phi) \nabla_{xy} \mathbf{P} \\ \mathbf{w} = -\nabla_{xy} \cdot \left[ \nabla_{xy} \mathbf{P} \int_0^z K_2(x, y, s, \phi) ds \right] \\ \partial_t \phi + \left( \begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{array} \right) \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot (\mathcal{D}(\phi) \nabla \phi) \end{array} \right.$$

Conditions aux limites pour un écoulement micro-fluidique :



► Sur  $\Gamma_e$  :

$$\begin{aligned} - \partial_x \mathbf{P} &= \frac{V_e(y, z)}{K_2(0, y, z, \phi_e)} \\ - \phi &= \phi_e(y, z) \end{aligned}$$

► Sur  $\Gamma_s$  :

$$\begin{aligned} - \mathbf{P} &= 0 \\ - \partial_x \phi &= 0 \end{aligned}$$

► Sur  $\Gamma_m$  :

$$\begin{aligned} - \partial_y \mathbf{P} &= 0 \\ - \partial_y \phi &= 0 \end{aligned}$$

► Sur  $\Gamma_{h/b}$  :

- Pour  $\mathbf{P}$ , pas de conditions sur  $\Gamma_{h/b}$ 
  - le glissement ou l'adhérence apparaissent dans les coefficients du modèle réduit
- $\partial_{\vec{n}} \phi = 0$

## Avantages :

- ▶ Pour l'hydrodynamique :

problème 3D sur  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \rightarrow$  problème 2D sur  $\mathbf{P}$

- ▶ On peut récupérer des vitesses 3D pour le modèle de Reynolds
- ▶ Les conditions aux limites sur  $\Gamma_{h/b}$  sont prises en compte dans  $K_1$  et  $K_2$
- ▶ Temps de calcul pour les simulations numériques :

Canal à reliefs,  $N_x \times N_y \times N_z = 400 \times 100 \times 100$ , calcul des vitesses :

Modèle de Stokes : 4h | Modèle de Reynolds 2.5D : 10min

Equations :

$$\begin{cases} \nabla_{xy} \cdot [K_1(x, y, \phi) \nabla_{xy} \mathbf{P}] = 0 \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})(x, y, z) = K_2(x, y, z, \phi) \nabla_{xy} \mathbf{P} \\ \mathbf{w} = -\nabla_{xy} \cdot \left[ \nabla_{xy} \mathbf{P} \int_0^z K_2(x, y, s, \phi) ds \right] \\ \partial_t \phi + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot (\mathcal{D}(\phi) \nabla \phi) \end{cases}$$

On note  $t^n = n \delta t$  et :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})^n(X) \sim (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})(t^n, X), \quad \mathbf{P}^n(X) \sim \mathbf{P}(t^n, X), \quad \phi^n(X) \sim \phi(t^n, X)$$

Etales de calcul (on connaît  $\phi^n$ ) :

- ▶ **Etape 1** : On résout l'équation elliptique sur la pression

$$\nabla_{xy} \cdot [K_1(x, y, \phi^n) \nabla_{xy} \mathbf{P}^n] = 0$$

- ▶ **Etape 2** : On calcule les vitesses

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n)(x, y, z) &= K_2(x, y, z, \phi^n) \nabla_{xy} \mathbf{P}^n \\ \mathbf{w}^n &= -\nabla_{xy} \cdot \left[ \nabla_{xy} \mathbf{P}^n \int_0^z K_2(x, y, s, \phi^n) ds \right] \end{aligned}$$

- ▶ **Etape 3** : On résout l'équation sur  $\phi$

$$\phi^{n+1} - \delta t \mathcal{D} \Delta \phi^{n+1} = \phi^n - \delta t \mathbf{V} \cdot \nabla \phi^n$$



Equations :

$$\begin{cases} \nabla_{xy} \cdot [K_1(x, y, \phi) \nabla_{xy} \mathbf{P}] = 0 \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})(x, y, z) = K_2(x, y, z, \phi) \nabla_{xy} \mathbf{P} \\ \mathbf{w} = -\nabla_{xy} \cdot \left[ \nabla_{xy} \mathbf{P} \int_0^z K_2(x, y, s, \phi) ds \right] \\ \partial_t \phi + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot (\mathcal{D}(\phi) \nabla \phi) \end{cases}$$

On note  $t^n = n \delta t$  et :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})^n(X) \sim (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})(t^n, X), \quad \mathbf{P}^n(X) \sim \mathbf{P}(t^n, X), \quad \phi^n(X) \sim \phi(t^n, X)$$

Etales de calcul (on connaît  $\phi^n$ ) :

- ▶ **Etape 1** : On résout l'équation elliptique sur la pression

$$\nabla_{xy} \cdot [K_1(x, y, \phi^n) \nabla_{xy} \mathbf{P}^n] = 0$$

- ▶ **Etape 2** : On calcule les vitesses

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n)(x, y, z) &= K_2(x, y, z, \phi^n) \nabla_{xy} \mathbf{P}^n \\ \mathbf{w}^n &= -\nabla_{xy} \cdot \left[ \nabla_{xy} \mathbf{P}^n \int_0^z K_2(x, y, s, \phi^n) ds \right] \end{aligned}$$

- ▶ **Etape 3** : On résout l'équation sur  $\phi$

$$\phi^{n+1} - \delta t \mathcal{D} \Delta \phi^{n+1} = \phi^n - \delta t \mathbf{V}^n \cdot \nabla \phi^n$$

Equations :

$$\begin{cases} \nabla_{xy} \cdot [K_1(x, y, \phi) \nabla_{xy} \mathbf{P}] = 0 \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})(x, y, z) = K_2(x, y, z, \phi) \nabla_{xy} \mathbf{P} \\ \mathbf{w} = -\nabla_{xy} \cdot \left[ \nabla_{xy} \mathbf{P} \int_0^z K_2(x, y, s, \phi) ds \right] \\ \partial_t \phi + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot (\mathcal{D}(\phi) \nabla \phi) \end{cases}$$

On note  $t^n = n \delta t$  et :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})^n(X) \sim (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})(t^n, X), \quad \mathbf{P}^n(X) \sim \mathbf{P}(t^n, X), \quad \phi^n(X) \sim \phi(t^n, X)$$

Etales de calcul (on connaît  $\phi^n$ ) :

- ▶ **Etape 1** : On résout l'équation elliptique sur la pression

$$\nabla_{xy} \cdot [K_1(x, y, \phi^n) \nabla_{xy} \mathbf{P}^n] = 0$$

- ▶ **Etape 2** : On calcule les vitesses

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n)(x, y, z) &= K_2(x, y, z, \phi^n) \nabla_{xy} \mathbf{P}^n \\ \mathbf{w}^n &= -\nabla_{xy} \cdot \left[ \nabla_{xy} \mathbf{P}^n \int_0^z K_2(x, y, s, \phi^n) ds \right] \end{aligned}$$

- ▶ **Etape 3** : On résout l'équation sur  $\phi$

$$\phi^{n+1} - \delta t \mathcal{D} \Delta \phi^{n+1} = \phi^n - \delta t \mathbf{V}^n \cdot \nabla \phi^n$$

Equations :

$$\begin{cases} \nabla_{xy} \cdot [K_1(x, y, \phi) \nabla_{xy} \mathbf{P}] = 0 \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})(x, y, z) = K_2(x, y, z, \phi) \nabla_{xy} \mathbf{P} \\ \mathbf{w} = -\nabla_{xy} \cdot \left[ \nabla_{xy} \mathbf{P} \int_0^z K_2(x, y, s, \phi) ds \right] \\ \partial_t \phi + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot (\mathcal{D}(\phi) \nabla \phi) \end{cases}$$

On note  $t^n = n \delta t$  et :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})^n(X) \sim (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})(t^n, X), \quad \mathbf{P}^n(X) \sim \mathbf{P}(t^n, X), \quad \phi^n(X) \sim \phi(t^n, X)$$

Etales de calcul (on connaît  $\phi^n$ ) :

- ▶ **Etape 1** : On résout l'équation elliptique sur la pression

$$\nabla_{xy} \cdot [K_1(x, y, \phi^n) \nabla_{xy} \mathbf{P}^n] = 0$$

- ▶ **Etape 2** : On calcule les vitesses

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n)(x, y, z) &= K_2(x, y, z, \phi^n) \nabla_{xy} \mathbf{P}^n \\ \mathbf{w}^n &= -\nabla_{xy} \cdot \left[ \nabla_{xy} \mathbf{P}^n \int_0^z K_2(x, y, s, \phi^n) ds \right] \end{aligned}$$

- ▶ **Etape 3** : On résout l'équation sur  $\phi$

$$\phi^{n+1} - \delta t \mathcal{D} \Delta \phi^{n+1} = \phi^n - \delta t \mathbf{V}^n \cdot \nabla \phi^n$$

# Méthodes numériques

## Discrétisation en espace

On note :  $x_i = i \delta x$ ,  $y_j = j \delta y$ ,  $z_k = k \delta z$ .

On place les variables de la manière suivante (grille MAC) :

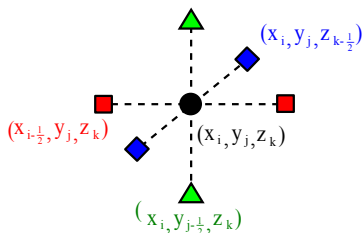
$$\mathbf{u}_{ijk} \sim \mathbf{u}(x_{i-1/2}, y_j, z_k)$$

$$\mathbf{v}_{ijk} \sim \mathbf{v}(x_i, y_{j-1/2}, z_k)$$

$$\mathbf{w}_{ijk} \sim \mathbf{w}(x_i, y_j, z_{k-1/2})$$

$$P_{ijk} \sim P(x_i, y_j, z_k)$$

$$\phi_{ijk} \sim \phi(x_i, y_j, z_k)$$



Discrétisation :

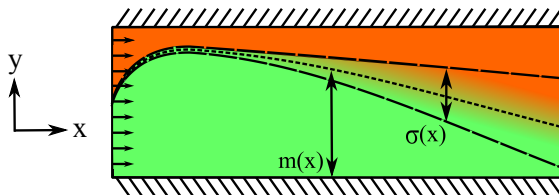
- ▶ **Etape 1** : Schéma de volumes finis à 5 points pour l'équation en pression
- ▶ **Etape 2** : Calcul de  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  par volumes finis, intégration numérique pour  $\mathbf{w}$
- ▶ **Etape 3** : Equation en  $\phi$  :  
Schéma de volumes finis à 5 (2D) ou 7 (2.5D) points pour la diffusion  
Schéma WENO5 pour le transport.

Le schéma est stable sous la condition C.F.L.

$$\delta t < \frac{1}{\frac{\|\mathbf{u}\|_\infty}{\delta x} + \frac{\|\mathbf{v}\|_\infty}{\delta y} + \frac{\|\mathbf{w}\|_\infty}{\delta z}}$$

## Applications et résultats : expériences de co-flow

**Contexte :** deux fluides miscibles injectés parallèlement dans un canal



**Constatations :**

- Déplacement transverse très rapide de l'interface à cause du gradient de viscosité
- Inter-diffusion des deux fluides sur des échelles de temps longues
- Déplacement transverse de la zone de mélange sur de grandes longueurs

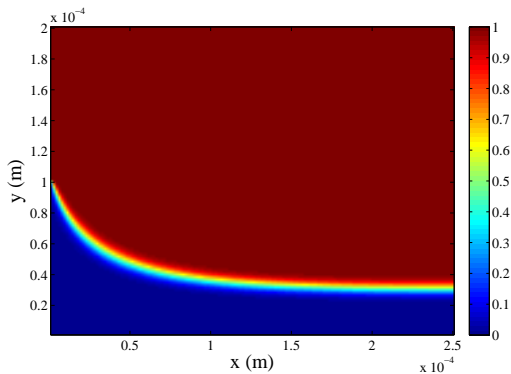
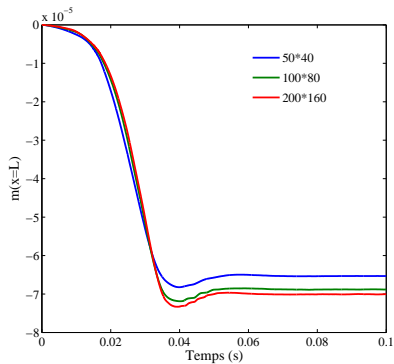
**Modèle :** Reynolds 2D, canal plat, adhérence :

$$\begin{cases} \nabla_{xy} \cdot [K_1(x, y, \phi) \nabla_{xy} \mathbf{P}] = 0 \\ \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} (x, y) = \bar{K}_2(x, y, \phi) \nabla_{xy} \mathbf{P} \\ \partial_t \phi + \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} \cdot \nabla_{xy} \phi = \nabla_{xy} \cdot (\mathcal{D}(\phi) \nabla_{xy} \phi) \end{cases}$$

*J. Dambrine, B. Geraud, J.-B. Salmon, "Interdiffusion of liquids with different viscosities in a microchannel", NJP, 2009*

Echelles courtes ( $L \sim l$ ), déplacement lié au gradient de viscosité :

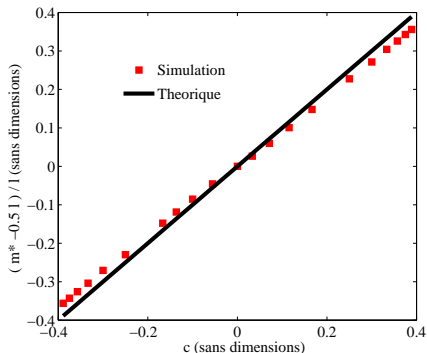
- Convergence en maillage du déplacement de l'interface  $m(x)$  :



## Applications et résultats : expériences de co-flow

Echelles courtes ( $L \sim l$ ), déplacement lié au gradient de viscosité :

- Validation de la position de l'interface à l'équilibre  $m^*$  en fonction du contraste de viscosité  $c$  dans les deux phases :



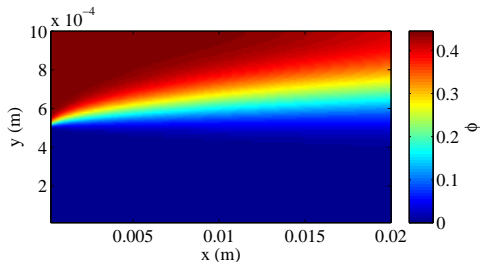
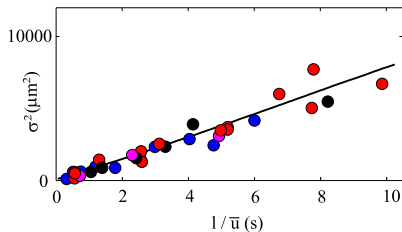
Valeurs "théoriques" données grâce à un argument d'égalité des débits dans chaque phase :

$$\frac{m^*}{l} - \frac{1}{2} = c$$

Echelles longues ( $L \gg l$ ), inter-diffusion, comparaisons avec les expériences.

► Choix des paramètres :

- Viscosité de mélange  $\eta(\phi)$  → littérature (mélange glycérol/eau)
- Coefficient de diffusion → comparaison entre simulations et expériences

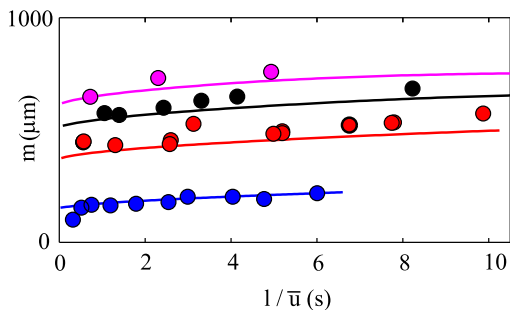


Meilleur accord avec l'expérience pour  $\mathcal{D} = 5.10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .



Echelles longues ( $L \gg l$ ), inter-diffusion, comparaisons avec les expériences.

- Déplacement de la zone de mélange



On retrouve des tendances similaires entre l'expérience et les simulations.

# Applications et résultats : motifs de glissement

**Contexte** : micro-canaux glissant alternativement pour le fluide A et pour le fluide B



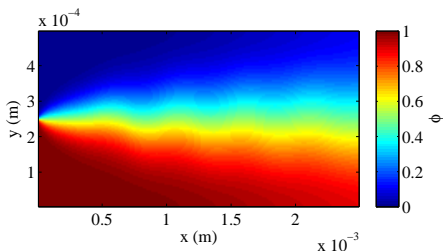
Longueurs de glissement :

$$L_g \phi$$

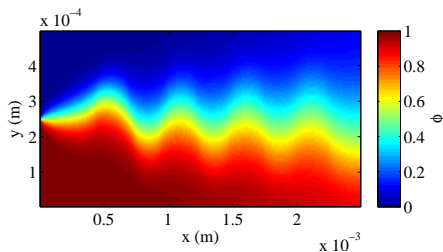
$$L_g (1 - \phi)$$

**Modèle** : Reynolds 2D, adapté aux conditions de glissement

**Simulations numériques** :



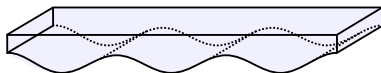
$$L_g = 8 \mu m$$



$$L_g = 24 \mu m$$

# Applications et résultats : limitations du modèle

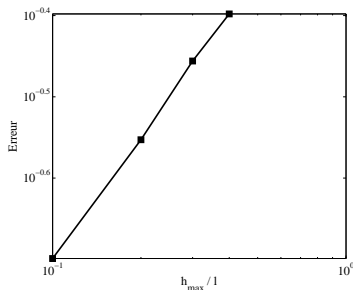
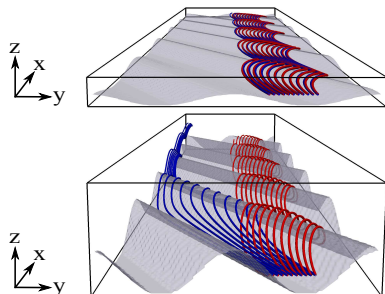
**Contexte** : micro-canaux à reliefs



**Modèles** :

- ▶ Reynolds 2.5D, adapté à des reliefs
- ▶ Stokes 3D, conditions d'adhérence

**Simulations numériques** : comparaisons entre les modèles de Stokes de Reynolds



→ convergence entre les deux modèles lorsque  $h \rightarrow 0$ , mais perte du confinement

T. Colin, M. Colin, J. Dambriane, "Validity of the Reynolds model for microfluidic flows", soumis

### **Dans cette étude, nous avons :**

- ▶ Développé des modèles de Reynolds (2D et 2.5D) adaptés à des écoulements micro-fluidiques (reliefs, motifs de glissement, mélanges)
- ▶ Validé le modèle pour des expériences de co-flow (canal plat)
- ▶ Fourni un outil de mesure du coefficient d'inter-diffusion entre deux fluides

### **Perspectives :**

- ▶ Etude de mélanges réactifs dans les expériences de co-flow
- ▶ Comparaison avec l'expérience pour les canaux à motifs de glissement

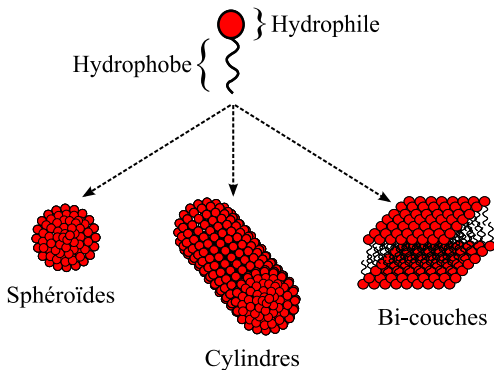
## Partie II :

Ecoulements de micelles géantes

# Micelles géantes

Agrégats

Agrégats de molécules bi-polaires (savon) dans un solvant (eau) :



Structures capables de se rompre et de se recombinaer en permanence

# Micelles géantes

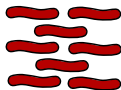
## Micelles cylindriques

Sous cisaillement, deux états possibles :

- a) Etat enchevêtré (visco-élastique)
- b) Etat aligné (fluide)



a)



b)

→ Formation de bandes de cisaillement dans l'écoulement.

# Micelles géantes

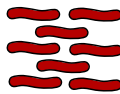
## Micelles cylindriques

Sous cisaillement, deux états possibles :

- a) Etat enchevêtré (visco-élastique)
- b) Etat aligné (fluide)

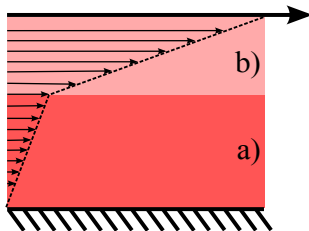


a)



b)

→ Formation de bandes de cisaillement dans l'écoulement.

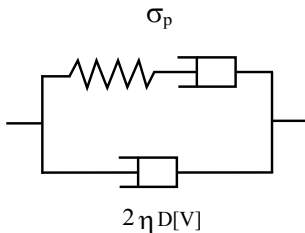




# Modélisation des écoulements de micelles géantes

Loi de comportement de Johnson-Segalman

- Modèle mécanique : cellule de Jeffrey



$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla P \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta D[\mathbf{V}] + \boldsymbol{\sigma}_p$$

- $\boldsymbol{\sigma}_p$  suit une loi de comportement visco-élastique linéaire :

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_p + \frac{1}{\tau} \boldsymbol{\sigma}_p = 2G D[\mathbf{V}]$$

- Dérivée objective  $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_p$  : dérivée de Gordon-Schowalter

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_p = \partial_t \boldsymbol{\sigma}_p + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma}_p - (\boldsymbol{\Omega}[\mathbf{V}] \boldsymbol{\sigma}_p - \boldsymbol{\sigma}_p \boldsymbol{\Omega}[\mathbf{V}]) - a(D[\mathbf{V}] \boldsymbol{\sigma}_p + \boldsymbol{\sigma}_p D[\mathbf{V}])$$

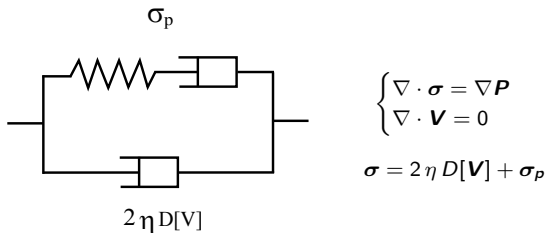
où :

$$D[\mathbf{V}] = \frac{\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^t}{2}, \quad \boldsymbol{\Omega}[\mathbf{V}] = \frac{\nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}^t}{2}$$

# Modélisation des écoulements de micelles géantes

Loi de comportement de Johnson-Segalman

- ▶ Modèle mécanique : cellule de Jeffrey



$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla P \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta D[\mathbf{V}] + \boldsymbol{\sigma}_p$$

- ▶  $\boldsymbol{\sigma}_p$  suit une loi de comportement visco-élastique linéaire :

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_p + \frac{1}{\tau} \boldsymbol{\sigma}_p = 2G D[\mathbf{V}]$$

- ▶ Dérivée objective  $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_p$  : dérivée de Gordon-Schowalter

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_p = \partial_t \boldsymbol{\sigma}_p + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma}_p - (\boldsymbol{\Omega}[\mathbf{V}] \boldsymbol{\sigma}_p - \boldsymbol{\sigma}_p \boldsymbol{\Omega}[\mathbf{V}]) - a(D[\mathbf{V}] \boldsymbol{\sigma}_p + \boldsymbol{\sigma}_p D[\mathbf{V}])$$

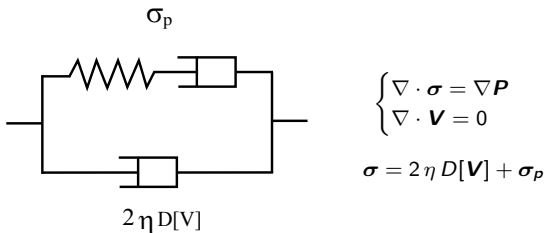
où :

$$D[\mathbf{V}] = \frac{\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^t}{2}, \quad \boldsymbol{\Omega}[\mathbf{V}] = \frac{\nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}^t}{2}$$

# Modélisation des écoulements de micelles géantes

Loi de comportement de Johnson-Segalman

- Modèle mécanique : cellule de Jeffrey



- $\boldsymbol{\sigma}_p$  suit une loi de comportement visco-élastique linéaire :

$$\overset{\diamond}{\boldsymbol{\sigma}}_p + \frac{1}{\tau} \boldsymbol{\sigma}_p = 2G D[\mathbf{V}]$$

- Dérivée objective  $\overset{\diamond}{\boldsymbol{\sigma}}_p$  : dérivée de Gordon-Schowalter

$$\overset{\diamond}{\boldsymbol{\sigma}}_p = \partial_t \boldsymbol{\sigma}_p + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma}_p - (\Omega[\mathbf{V}] \boldsymbol{\sigma}_p - \boldsymbol{\sigma}_p \Omega[\mathbf{V}]) - a(D[\mathbf{V}] \boldsymbol{\sigma}_p + \boldsymbol{\sigma}_p D[\mathbf{V}])$$

où :

$$D[\mathbf{V}] = \frac{\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^t}{2}, \quad \Omega[\mathbf{V}] = \frac{\nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}^t}{2}$$

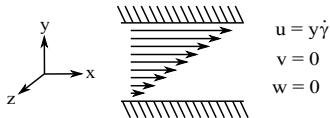
# Modélisation des écoulements de micelles géantes

## Comportement sous cisaillement

Etude préliminaire "0D" d'un cas particulier classique :

- On suppose  $\sigma$  homogène en espace
- On fixe  $\nabla \mathbf{V}$  :

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



- On cherche les états stationnaires sur  $\sigma(\dot{\gamma})$
- On vérifie la stabilité de ces états stationnaires

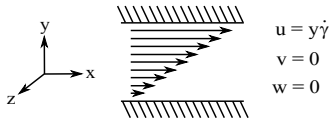
# Modélisation des écoulements de micelles géantes

## Comportement sous cisaillement

Etude préliminaire "0D" d'un cas particulier classique :

- On suppose  $\sigma$  homogène en espace
- On fixe  $\nabla \mathbf{V}$  :

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



- On cherche les états stationnaires sur  $\sigma(\dot{\gamma})$
- On vérifie la stabilité de ces états stationnaires

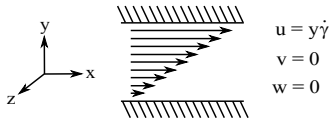
# Modélisation des écoulements de micelles géantes

## Comportement sous cisaillement

Etude préliminaire "0D" d'un cas particulier classique :

- On suppose  $\sigma$  homogène en espace
- On fixe  $\nabla \mathbf{V}$  :

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



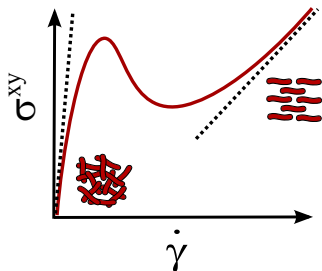
- On cherche les états stationnaires sur  $\sigma(\dot{\gamma})$
- On vérifie la stabilité de ces états stationnaires

$$\sigma^{xy}(\dot{\gamma}) = 2\eta\dot{\gamma} + 2G\tau \frac{\dot{\gamma}}{1 + 4\tau^2(1-a^2)\dot{\gamma}^2}$$

$$\sigma_p^{xx}(\dot{\gamma}) = 4\tau^2 G\dot{\gamma}(a+1) \frac{\dot{\gamma}}{1 + 4\tau^2(1-a^2)\dot{\gamma}^2}$$

$$\sigma_p^{yy}(\dot{\gamma}) = 4\tau^2 G\dot{\gamma}(a-1) \frac{\dot{\gamma}}{1 + 4\tau^2(1-a^2)\dot{\gamma}^2}$$

$$\sigma_p^{xz}(\dot{\gamma}) = \sigma_p^{yz}(\dot{\gamma}) = \sigma_p^{zz}(\dot{\gamma}) = 0$$



Stable pour tout  $\dot{\gamma} \in \mathbb{R}$

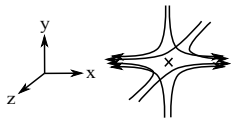
# Modélisation des écoulements de micelles géantes

Comportement en élongation, modification du modèle

Etude préliminaire "0D" d'un cas particulier classique :

- On suppose  $\sigma$  homogène en espace
- On fixe  $\nabla \mathbf{V}$  :

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 2\dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\epsilon} \end{pmatrix}$$



$$\partial_x u = 2\dot{\epsilon}$$

$$\partial_y v = -\dot{\epsilon}$$

$$\partial_z w = -\dot{\epsilon}$$

- On cherche les états stationnaires sur  $\sigma(\dot{\epsilon})$
- On vérifie la stabilité de ces états stationnaires

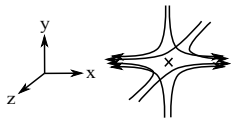
# Modélisation des écoulements de micelles géantes

Comportement en élongation, modification du modèle

Etude préliminaire "0D" d'un cas particulier classique :

- On suppose  $\sigma$  homogène en espace
- On fixe  $\nabla \mathbf{V}$  :

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 2\dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\epsilon} \end{pmatrix}$$



$$\partial_x u = 2\dot{\epsilon}$$

$$\partial_y v = -\dot{\epsilon}$$

$$\partial_z w = -\dot{\epsilon}$$

- On cherche les états stationnaires sur  $\sigma(\dot{\epsilon})$
- On vérifie la stabilité de ces états stationnaires



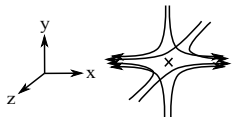
# Modélisation des écoulements de micelles géantes

Comportement en élongation, modification du modèle

Etude préliminaire "0D" d'un cas particulier classique :

- On suppose  $\sigma$  homogène en espace
- On fixe  $\nabla \mathbf{V}$  :

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 2\dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\epsilon} \end{pmatrix}$$



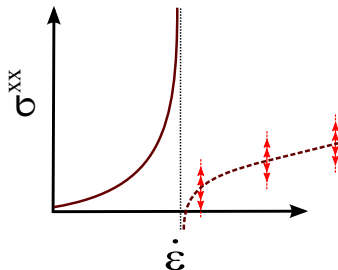
$$\begin{aligned} \partial_x u &= 2\dot{\epsilon} \\ \partial_y v &= -\dot{\epsilon} \\ \partial_z w &= -\dot{\epsilon} \end{aligned}$$

- On cherche les états stationnaires sur  $\sigma(\dot{\epsilon})$
- On vérifie la stabilité de ces états stationnaires

$$\sigma^{xx}(\dot{\epsilon}) = 2\eta\dot{\epsilon} - G\tau \frac{2\dot{\epsilon}}{4a\dot{\epsilon} - \frac{1}{\tau}}$$

$$\sigma^{yy}(\dot{\epsilon}) = \sigma^{zz}(\dot{\epsilon}) = -\eta\dot{\epsilon} - G\tau \frac{\dot{\epsilon}}{2a\dot{\epsilon} + \frac{1}{\tau}}$$

$$\sigma_p^{xz}(\dot{\gamma}) = \sigma_p^{yz}(\dot{\gamma}) = \sigma_p^{xy}(\dot{\gamma}) = 0$$



Stable pour  $\dot{\epsilon} < \frac{1}{4a\tau}$

# Modélisation des écoulements de micelles géantes

Comportement en élongation, modification du modèle

Il faut modifier le modèle car :

- Le comportement instable n'est pas physiquement raisonnable
- On veut traiter des cas où  $\dot{\epsilon}$  peut être grand (par ex : des jonctions)

Proposition :

Loi de comportement non linéaire : Modèle de Giesekus :

$$\dot{\sigma}_p + \frac{1}{\tau} \sigma_p + \frac{\kappa}{G \tau} (\sigma_p)^2 = 2 G D[\mathbf{V}]$$

# Modélisation des écoulements de micelles géantes

Comportement en élongation, modification du modèle

Il faut modifier le modèle car :

- Le comportement instable n'est pas physiquement raisonnable
- On veut traiter des cas où  $\dot{\epsilon}$  peut être grand (par ex : des jonctions)

Proposition :

Loi de comportement non linéaire : Modèle de Giesekus :

$$\dot{\sigma}_p + \frac{1}{\tau} \sigma_p + \frac{\kappa}{G \tau} (\sigma_p)^2 = 2 G D[\mathbf{V}]$$

# Modélisation des écoulements de micelles géantes

Comportement en élongation, modification du modèle

Il faut modifier le modèle car :

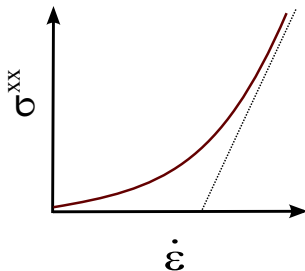
- Le comportement instable n'est pas physiquement raisonnable
- On veut traiter des cas où  $\dot{\varepsilon}$  peut être grand (par ex : des jonctions)

Proposition :

Loi de comportement non linéaire : Modèle de Giesekus :

$$\dot{\sigma}_p + \frac{1}{\tau} \sigma_p + \frac{\kappa}{G \tau} (\sigma_p)^2 = 2 G D[\mathbf{V}]$$

Comportement en élongation :



Remarque : il existe un grand nombre de lois rhéologiques non-linéaires

# Modélisation des écoulements de micelles géantes

Ajout d'un terme de diffusion

Les effet non-locaux ne sont pas négligeables pour les écoulements formant des bandes de cisaillement.

Proposition (El Kareh, Leal 1989) :

Ajout d'un terme de diffusion dans la loi de comportement :

$$\overset{\diamond}{\sigma}_p + \frac{1}{\tau} \sigma_p + \frac{\kappa}{G \tau} (\sigma_p)^2 = 2 G D[\mathbf{V}] + \mathcal{D} \Delta \sigma_p$$

Question : quelles conditions aux limites ?

# Modélisation des écoulements de micelles géantes

Modèle complet, modèles réduits

Modèle complet, conditions aux limites :

- Dans  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \eta \Delta \mathbf{V} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_p = \nabla P, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \\ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_p + \frac{1}{\tau} \boldsymbol{\sigma}_p + \frac{\kappa}{G\tau} (\boldsymbol{\sigma}_p)^2 = 2GD[\mathbf{V}] + D\Delta \boldsymbol{\sigma}_p. \end{cases}$$

- Sur  $\Gamma_e$  :

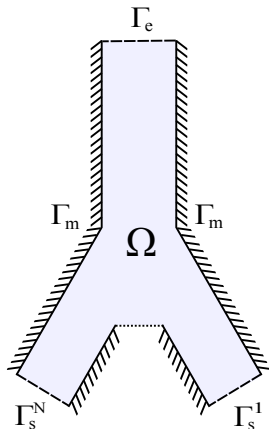
$$\begin{cases} \mathbf{V}|_{\Gamma_e} = V^e, \\ \boldsymbol{\sigma}_p|_{\Gamma_e} = \boldsymbol{\sigma}_p^e. \end{cases}$$

- Sur  $\Gamma_s^i$  :

$$\begin{cases} \partial_{\vec{n}} \mathbf{V}|_{\Gamma_s} = 0, \\ \partial_{\vec{n}} \boldsymbol{\sigma}_p|_{\Gamma_s} = 0. \end{cases}$$

- Sur  $\Gamma_m$  :

$$\begin{cases} \mathbf{V}|_{\Gamma_m} = 0, \\ \boldsymbol{\sigma}_p|_{\Gamma_m} = \boldsymbol{\sigma}_p^{loc}(\dot{\gamma}), \quad \partial_{\vec{n}} \boldsymbol{\sigma}_p|_{\Gamma_m} = 0 \end{cases}$$



Problème : détermination des conditions  $V^e$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_p^e$ .

# Modélisation des écoulements de micelles géantes

Modèle complet, modèles réduits

Modèle complet, conditions aux limites :

- Dans  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \eta \Delta \mathbf{V} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_p = \nabla P, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \\ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_p + \frac{1}{\tau} \boldsymbol{\sigma}_p + \frac{\kappa}{G\tau} (\boldsymbol{\sigma}_p)^2 = 2GD[\mathbf{V}] + D\Delta \boldsymbol{\sigma}_p. \end{cases}$$

- Sur  $\Gamma_e$  :

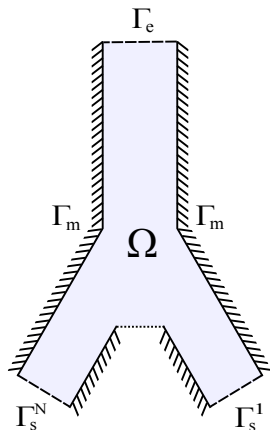
$$\begin{cases} \mathbf{V}|_{\Gamma_e} = V^e, \\ \boldsymbol{\sigma}_p|_{\Gamma_e} = \boldsymbol{\sigma}_p^e. \end{cases}$$

- Sur  $\Gamma_s^i$  :

$$\begin{cases} \partial_{\vec{n}} \mathbf{V}|_{\Gamma_s} = 0, \\ \partial_{\vec{n}} \boldsymbol{\sigma}_p|_{\Gamma_s} = 0. \end{cases}$$

- Sur  $\Gamma_m$  :

$$\begin{cases} \mathbf{V}|_{\Gamma_m} = 0, \\ \boldsymbol{\sigma}_p|_{\Gamma_m} = \boldsymbol{\sigma}_p^{loc}(\dot{\gamma}), \quad \partial_{\vec{n}} \boldsymbol{\sigma}_p|_{\Gamma_m} = 0 \end{cases}$$



Problème : détermination des conditions  $V^e$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_p^e$ .

# Modélisation des écoulements de micelles géantes

Modèle complet, modèles réduits

Modèle complet, conditions aux limites :

- Dans  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \eta \Delta \mathbf{V} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_p = \nabla P, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \\ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_p + \frac{1}{\tau} \boldsymbol{\sigma}_p + \frac{\kappa}{G\tau} (\boldsymbol{\sigma}_p)^2 = 2GD[\mathbf{V}] + D\Delta \boldsymbol{\sigma}_p. \end{cases}$$

- Sur  $\Gamma_e$  :

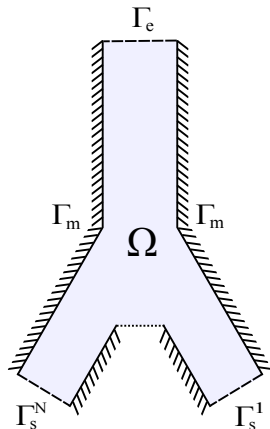
$$\begin{cases} \mathbf{V}|_{\Gamma_e} = V^e, \\ \boldsymbol{\sigma}_p|_{\Gamma_e} = \boldsymbol{\sigma}_p^e. \end{cases}$$

- Sur  $\Gamma_s^i$  :

$$\begin{cases} \partial_{\vec{n}} \mathbf{V}|_{\Gamma_s} = 0, \\ \partial_{\vec{n}} \boldsymbol{\sigma}_p|_{\Gamma_s} = 0. \end{cases}$$

- Sur  $\Gamma_m$  :

$$\begin{cases} \mathbf{V}|_{\Gamma_m} = 0, \\ \boldsymbol{\sigma}_p|_{\Gamma_m} = \boldsymbol{\sigma}_p^{loc}(\dot{\gamma}), \quad \partial_{\vec{n}} \boldsymbol{\sigma}_p|_{\Gamma_m} = 0 \end{cases}$$



Problème : détermination des conditions  $V^e$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_p^e$ .



# Modélisation des écoulements de micelles géantes

Modèle complet, modèles réduits

Modèle complet, conditions aux limites :

- Dans  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \eta \Delta \mathbf{V} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_p = \nabla P, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \\ \overset{\diamond}{\boldsymbol{\sigma}}_p + \frac{1}{\tau} \boldsymbol{\sigma}_p + \frac{\kappa}{G \tau} (\boldsymbol{\sigma}_p)^2 = 2 G D[\mathbf{V}] + \mathcal{D} \Delta \boldsymbol{\sigma}_p. \end{cases}$$

- Sur  $\Gamma_e$  :

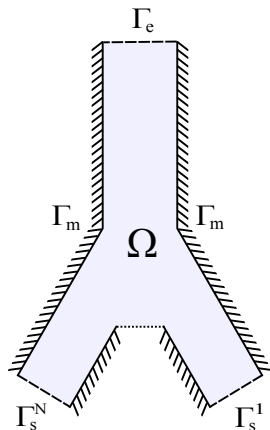
$$\begin{cases} \mathbf{V}|_{\Gamma_e} = V^e, \\ \boldsymbol{\sigma}_p|_{\Gamma_e} = \boldsymbol{\sigma}_p^e. \end{cases}$$

- Sur  $\Gamma_s^i$  :

$$\begin{cases} \partial_{\vec{n}} \mathbf{V}|_{\Gamma_s} = 0, \\ \partial_{\vec{n}} \boldsymbol{\sigma}_p|_{\Gamma_s} = 0. \end{cases}$$

- Sur  $\Gamma_m$  :

$$\begin{cases} \mathbf{V}|_{\Gamma_m} = 0, \\ \boldsymbol{\sigma}_p|_{\Gamma_m} = \boldsymbol{\sigma}_p^{loc}(\dot{\gamma}), \quad \partial_{\vec{n}} \boldsymbol{\sigma}_p|_{\Gamma_m} = 0 \end{cases}$$



Problème : détermination des conditions  $V^e$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_p^e$ .

# Modélisation des écoulements de micelles géantes

Modèle complet, modèles réduits

Modèle complet, conditions aux limites :

- Dans  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \eta \Delta \mathbf{V} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_p = \nabla P, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \\ \diamond \boldsymbol{\sigma}_p + \frac{1}{\tau} \boldsymbol{\sigma}_p + \frac{\kappa}{G \tau} (\boldsymbol{\sigma}_p)^2 = 2 G D[\mathbf{V}] + D \Delta \boldsymbol{\sigma}_p. \end{cases}$$

- Sur  $\Gamma_e$  :

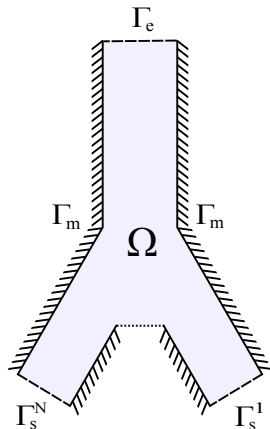
$$\begin{cases} \mathbf{V}|_{\Gamma_e} = V^e, \\ \boldsymbol{\sigma}_p|_{\Gamma_e} = \boldsymbol{\sigma}_p^e. \end{cases}$$

- Sur  $\Gamma_s^i$  :

$$\begin{cases} \partial_{\vec{n}} \mathbf{V}|_{\Gamma_s} = 0, \\ \partial_{\vec{n}} \boldsymbol{\sigma}_p|_{\Gamma_s} = 0. \end{cases}$$

- Sur  $\Gamma_m$  :

$$\begin{cases} \mathbf{V}|_{\Gamma_m} = 0, \\ \boldsymbol{\sigma}_p|_{\Gamma_m} = \boldsymbol{\sigma}_p^{loc}(\dot{\gamma}), \quad \partial_{\vec{n}} \boldsymbol{\sigma}_p|_{\Gamma_m} = 0 \end{cases}$$



Problème : détermination des conditions  $V^e$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_p^e$ .

# Modélisation des écoulements de micelles géantes

Modèle complet, modèles réduits

Problème : détermination des conditions d'injection et/ou de sortie  $V^{e/s}, \sigma_p^{e/s}$ .

Proposition : utilisation d'un sous-modèle type "Poiseuille".

Hypothèses :

- Ecoulement parallèle :

$$\mathbf{V} = u \vec{e}_x$$

- Ecoulement invariant en  $x$  :

$$\partial_x \mathbf{u} = 0$$

$$\partial_x P = 0$$

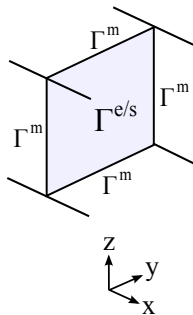
- Le gradient de pression devient une donnée :

$$\nabla P = \delta P \vec{e}_x$$

Modèle 2D résultant :

$$\begin{cases} \eta \Delta_{yz} \mathbf{u} + \partial_y \sigma_p^{xy} + \partial_z \sigma_p^{xz} = \delta P, \\ \dot{\sigma}_p + \frac{1}{\tau} \sigma_p + \frac{\kappa}{G \tau} (\sigma_p)^2 = 2 G D[\mathbf{V}] + D \Delta \sigma_p. \end{cases}$$

dans  $\Gamma^{e/s}$  + CL sur  $\Gamma^m$



# Modélisation des écoulements de micelles géantes

Modèle complet, modèles réduits

Problème : détermination des conditions d'injection et/ou de sortie  $V^{e/s}, \sigma_p^{e/s}$ .

Proposition : utilisation d'un sous-modèle type "Poiseuille".

Hypothèses :

- Ecoulement parallèle :

$$\mathbf{V} = u \vec{e}_x$$

- Ecoulement invariant en  $x$  :

$$\partial_x u = 0$$

$$\partial_x P = 0$$

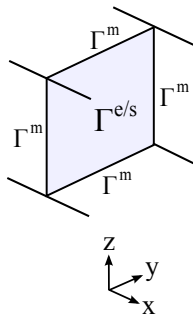
- Le gradient de pression devient une donnée :

$$\nabla P = \delta P \vec{e}_x$$

Modèle 2D résultant :

$$\begin{cases} \eta \Delta_{yz} \mathbf{u} + \partial_y \sigma_p^{xy} + \partial_z \sigma_p^{xz} = \delta P, \\ \dot{\sigma}_p + \frac{1}{\tau} \sigma_p + \frac{\kappa}{G \tau} (\sigma_p)^2 = 2 G D[\mathbf{V}] + D \Delta \sigma_p. \end{cases}$$

dans  $\Gamma^{e/s}$  + CL sur  $\Gamma^m$



# Modélisation des écoulements de micelles géantes

Modèle complet, modèles réduits

Problème : détermination des conditions d'injection et/ou de sortie  $V^{e/s}, \sigma_p^{e/s}$ .

Proposition : utilisation d'un sous-modèle type "Poiseuille".

Hypothèses :

- Ecoulement parallèle :

$$\mathbf{V} = u \vec{e}_x$$

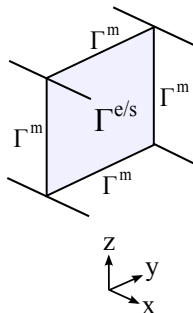
- Ecoulement invariant en  $x$  :

$$\partial_x \mathbf{u} = 0$$

$$\partial_x \mathbf{P} = 0$$

- Le gradient de pression devient une donnée :

$$\nabla \mathbf{P} = \delta P \vec{e}_x$$



Modèle 2D résultant :

$$\begin{cases} \eta \Delta_{yz} \mathbf{u} + \partial_y \sigma_p^{xy} + \partial_z \sigma_p^{xz} = \delta P, \\ \dot{\sigma}_p + \frac{1}{\tau} \sigma_p + \frac{\kappa}{G \tau} (\sigma_p)^2 = 2 G D[\mathbf{V}] + D \Delta \sigma_p. \end{cases}$$

dans  $\Gamma^{e/s}$  + CL sur  $\Gamma^m$

# Modélisation des écoulements de micelles géantes

Modèle complet, modèles réduits

Problème : détermination des conditions d'injection et/ou de sortie  $V^{e/s}, \sigma_p^{e/s}$ .

Proposition : utilisation d'un sous-modèle type "Poiseuille".

Hypothèses :

- Ecoulement parallèle :

$$\mathbf{V} = u \vec{e}_x$$

- Ecoulement invariant en  $x$  :

$$\partial_x \mathbf{u} = 0$$

$$\partial_x \mathbf{P} = 0$$

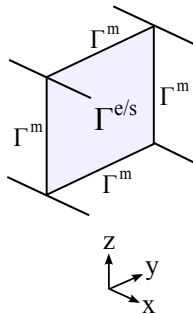
- Le gradient de pression devient une donnée :

$$\nabla \mathbf{P} = \delta P \vec{e}_x$$

Modèle 2D résultant :

$$\begin{cases} \eta \Delta_{yz} \mathbf{u} + \partial_y \sigma_p^{xy} + \partial_z \sigma_p^{xz} = \delta P, \\ \overset{\circ}{\sigma}_p + \frac{1}{\tau} \sigma_p + \frac{\kappa}{G \tau} (\sigma_p)^2 = 2 G D[\mathbf{V}] + \mathcal{D} \Delta \sigma_p. \end{cases}$$

dans  $\Gamma^{e/s}$  + CL sur  $\Gamma^m$



Equations :

$$\begin{cases} \eta \Delta \mathbf{V} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_p = \nabla P, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \\ \partial_t \boldsymbol{\sigma}_p + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma}_p + M_a[\mathbf{V}] \boldsymbol{\sigma}_p + \frac{1}{\tau} \boldsymbol{\sigma}_p + \frac{\kappa}{G \tau} (\boldsymbol{\sigma}_p)^2 = 2 G D[\mathbf{V}] + \mathcal{D} \Delta \boldsymbol{\sigma}_p. \end{cases}$$

On note  $t^n = n \delta t$  et :

$$\mathbf{V}^n(X) \sim \mathbf{V}(t^n, X), \quad P^n(X) \sim P(t^n, X), \quad \boldsymbol{\sigma}_p^n(X) \sim \boldsymbol{\sigma}_p(t^n, X)$$

Etapes de calcul (on connaît  $\boldsymbol{\sigma}_p^n$ ) :

- **Etape 1** : On résout Stokes (méthode de Lagrangien augmenté pour l'incompressibilité)

$$\begin{aligned} \eta \Delta \mathbf{V}^{n,k+1} + \delta r \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}^{n,k+1}) &= -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_p^n + \nabla P^{n,k} \\ P^{n,k+1} &= P^{n,k+1} - \delta r \nabla \cdot \mathbf{V}^{n,k+1} \end{aligned}$$

- **Etape 2** : On résout la partie locale dans la loi de comportement

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}_p^{n+1/2} - \boldsymbol{\sigma}_p^n}{\delta t} + \left( \frac{ld}{\tau} + M_a[\mathbf{V}^n] \right) \left( \frac{\boldsymbol{\sigma}_p^{n+1} + \boldsymbol{\sigma}_p^n}{2} \right) + \delta t \frac{\kappa}{G \tau} (\boldsymbol{\sigma}_p^n)^2 = 2 G D[\mathbf{V}^n]$$

- **Etape 3** : On résout la partie non-locale dans la loi de comportement

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}_p^{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_p^{n+1/2}}{\delta t} + \mathbf{V}^n \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma}_p^{n+1/2} = \mathcal{D} \Delta \boldsymbol{\sigma}_p^{n+1}$$

Equations :

$$\begin{cases} \eta \Delta \mathbf{V} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_p = \nabla P, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \\ \partial_t \boldsymbol{\sigma}_p + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma}_p + M_a[\mathbf{V}] \boldsymbol{\sigma}_p + \frac{1}{\tau} \boldsymbol{\sigma}_p + \frac{\kappa}{G \tau} (\boldsymbol{\sigma}_p)^2 = 2 G D[\mathbf{V}] + \mathcal{D} \Delta \boldsymbol{\sigma}_p. \end{cases}$$

On note  $t^n = n \delta t$  et :

$$\mathbf{V}^n(X) \sim \mathbf{V}(t^n, X), \quad P^n(X) \sim P(t^n, X), \quad \boldsymbol{\sigma}_p^n(X) \sim \boldsymbol{\sigma}_p(t^n, X)$$

Etapes de calcul (on connaît  $\boldsymbol{\sigma}_p^n$ ) :

- **Etape 1** : On résout Stokes (méthode de Lagrangien augmenté pour l'incompressibilité)

$$\begin{aligned} \eta \Delta \mathbf{V}^{n,k+1} + \delta r \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}^{n,k+1}) &= -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_p^n + \nabla P^{n,k} \\ P^{n,k+1} &= P^{n,k+1} - \delta r \nabla \cdot \mathbf{V}^{n,k+1} \end{aligned}$$

- **Etape 2** : On résout la partie locale dans la loi de comportement

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}_p^{n+1/2} - \boldsymbol{\sigma}_p^n}{\delta t} + \left( \frac{ld}{\tau} + M_a[\mathbf{V}^n] \right) \left( \frac{\boldsymbol{\sigma}_p^{n+1} + \boldsymbol{\sigma}_p^n}{2} \right) + \delta t \frac{\kappa}{G \tau} (\boldsymbol{\sigma}_p^n)^2 = 2 G D[\mathbf{V}^n]$$

- **Etape 3** : On résout la partie non-locale dans la loi de comportement

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}_p^{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_p^{n+1/2}}{\delta t} + \mathbf{V}^n \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma}_p^{n+1/2} = \mathcal{D} \Delta \boldsymbol{\sigma}_p^{n+1}$$



Equations :

$$\begin{cases} \eta \Delta \mathbf{V} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_p = \nabla P, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \\ \partial_t \boldsymbol{\sigma}_p + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma}_p + M_a[\mathbf{V}] \boldsymbol{\sigma}_p + \frac{1}{\tau} \boldsymbol{\sigma}_p + \frac{\kappa}{G \tau} (\boldsymbol{\sigma}_p)^2 = 2 G D[\mathbf{V}] + \mathcal{D} \Delta \boldsymbol{\sigma}_p. \end{cases}$$

On note  $t^n = n \delta t$  et :

$$\mathbf{V}^n(X) \sim \mathbf{V}(t^n, X), \quad P^n(X) \sim P(t^n, X), \quad \boldsymbol{\sigma}_p^n(X) \sim \boldsymbol{\sigma}_p(t^n, X)$$

Etapes de calcul (on connaît  $\boldsymbol{\sigma}_p^n$ ) :

- **Etape 1** : On résout Stokes (méthode de Lagrangien augmenté pour l'incompressibilité)

$$\begin{aligned} \eta \Delta \mathbf{V}^{n,k+1} + \delta r \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}^{n,k+1}) &= -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_p^n + \nabla P^{n,k} \\ P^{n,k+1} &= P^{n,k+1} - \delta r \nabla \cdot \mathbf{V}^{n,k+1} \end{aligned}$$

- **Etape 2** : On résout la partie locale dans la loi de comportement

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}_p^{n+1/2} - \boldsymbol{\sigma}_p^n}{\delta t} + \left( \frac{ld}{\tau} + M_a[\mathbf{V}^n] \right) \left( \frac{\boldsymbol{\sigma}_p^{n+1} + \boldsymbol{\sigma}_p^n}{2} \right) + \delta t \frac{\kappa}{G \tau} (\boldsymbol{\sigma}_p^n)^2 = 2 G D[\mathbf{V}^n]$$

- **Etape 3** : On résout la partie non-locale dans la loi de comportement

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}_p^{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_p^{n+1/2}}{\delta t} + \mathbf{V}^n \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma}_p^{n+1/2} = \mathcal{D} \Delta \boldsymbol{\sigma}_p^{n+1}$$

Equations :

$$\begin{cases} \eta \Delta \mathbf{V} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_p = \nabla P, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \\ \partial_t \boldsymbol{\sigma}_p + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma}_p + M_a[\mathbf{V}] \boldsymbol{\sigma}_p + \frac{1}{\tau} \boldsymbol{\sigma}_p + \frac{\kappa}{G \tau} (\boldsymbol{\sigma}_p)^2 = 2 G D[\mathbf{V}] + \mathcal{D} \Delta \boldsymbol{\sigma}_p. \end{cases}$$

On note  $t^n = n \delta t$  et :

$$\mathbf{V}^n(X) \sim \mathbf{V}(t^n, X), \quad P^n(X) \sim P(t^n, X), \quad \boldsymbol{\sigma}_p^n(X) \sim \boldsymbol{\sigma}_p(t^n, X)$$

Etapes de calcul (on connaît  $\boldsymbol{\sigma}_p^n$ ) :

- **Etape 1** : On résout Stokes (méthode de Lagrangien augmenté pour l'incompressibilité)

$$\begin{aligned} \eta \Delta \mathbf{V}^{n,k+1} + \delta r \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}^{n,k+1}) &= -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_p^n + \nabla P^{n,k} \\ P^{n,k+1} &= P^{n,k+1} - \delta r \nabla \cdot \mathbf{V}^{n,k+1} \end{aligned}$$

- **Etape 2** : On résout la partie locale dans la loi de comportement

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}_p^{n+1/2} - \boldsymbol{\sigma}_p^n}{\delta t} + \left( \frac{ld}{\tau} + M_a[\mathbf{V}^n] \right) \left( \frac{\boldsymbol{\sigma}_p^{n+1} + \boldsymbol{\sigma}_p^n}{2} \right) + \delta t \frac{\kappa}{G \tau} (\boldsymbol{\sigma}_p^n)^2 = 2 G D[\mathbf{V}^n]$$

- **Etape 3** : On résout la partie non-locale dans la loi de comportement

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}_p^{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_p^{n+1/2}}{\delta t} + \mathbf{V}^n \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma}_p^{n+1/2} = \mathcal{D} \Delta \boldsymbol{\sigma}_p^{n+1}$$

On note :  $x_i = i \delta x$ ,  $y_j = j \delta y$ ,  $z_k = k \delta z$ .

On place les variables de la manière suivante (grille MAC) :

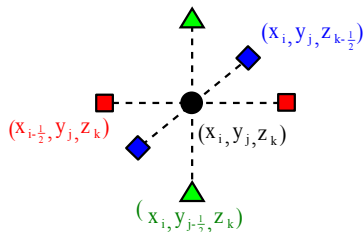
$$u_{ijk} \sim u(x_{i-1/2}, y_j, z_k)$$

$$v_{ijk} \sim v(x_i, y_{j-1/2}, z_k)$$

$$w_{ijk} \sim w(x_i, y_j, z_{k-1/2})$$

$$P_{ijk} \sim P(x_i, y_j, z_k)$$

$$\sigma_{p,ijk} \sim \sigma_p(x_i, y_j, z_k)$$



- ▶ **Etape 1** : Schéma MAC pour Stokes, interpolations pour  $\nabla \cdot \sigma_p$
- ▶ **Etape 2** : Interpolations pour calculer  $D[\mathbf{V}]$
- ▶ **Etape 3** : Schéma à 7 points pour la diffusion, schéma WENO5 pour le transport
- ▶ **Traitement de la géométrie** : Méthode de pénalisation

Quelques conditions nécessaires de stabilité

- Stabilité liée au transport (C.F.L.) :

$$\delta t < \frac{1}{\frac{\|u\|_\infty}{\delta x} + \frac{\|v\|_\infty}{\delta y} + \frac{\|w\|_\infty}{\delta z}}$$

- Stabilité liée à la relaxation du fluide :

$$\delta t < \frac{\tau}{2}$$

- Stabilité liée au couplage Stokes  $\leftrightarrow$  Loi de comportement

$$\delta t < \frac{\tau}{2} \left( \frac{\eta}{G \tau} \right)^2$$

Quelques conditions nécessaires de stabilité

- Stabilité liée au transport (C.F.L.) :

$$\delta t < \frac{1}{\frac{\|u\|_{\infty}}{\delta x} + \frac{\|v\|_{\infty}}{\delta y} + \frac{\|w\|_{\infty}}{\delta z}}$$

- Stabilité liée à la relaxation du fluide :

$$\delta t < \frac{\tau}{2}$$

- Stabilité liée au couplage Stokes  $\leftrightarrow$  Loi de comportement

$$\delta t < \frac{\tau}{2} \left( \frac{\eta}{G \tau} \right)^2$$

Quelques conditions nécessaires de stabilité

- Stabilité liée au transport (C.F.L.) :

$$\delta t < \frac{1}{\frac{\|u\|_{\infty}}{\delta x} + \frac{\|v\|_{\infty}}{\delta y} + \frac{\|w\|_{\infty}}{\delta z}}$$

- Stabilité liée à la relaxation du fluide :

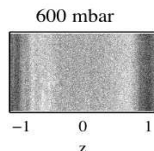
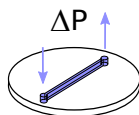
$$\delta t < \frac{\tau}{2}$$

- Stabilité liée au couplage Stokes  $\leftrightarrow$  Loi de comportement

$$\delta t < \frac{\tau}{2} \left( \frac{\eta}{G \tau} \right)^2$$

# Applications et résultats : écoulements dans des canaux droits

**Contexte :** expériences menées par Chloé Masselon



**Constatations :**

- Au delà d'un  $\delta P$  critique, il y a formation de bandes de cisaillement
- Dans certaines conditions, le diagramme cisaillement/contraintes n'est pas unique

**Approche :**

Canaux fins  $\rightarrow$  Modèle "Poiseuille" 1D :

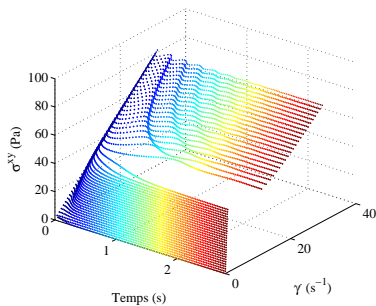
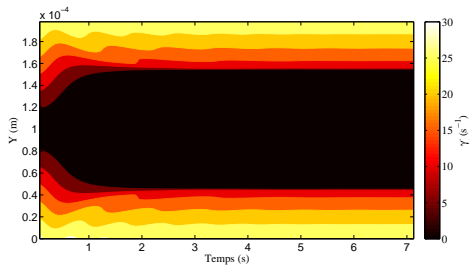
$$\begin{cases} \eta \partial_{yy}^2 \mathbf{u} + \partial_y \sigma_p^{xy} = \delta P, \\ \dot{\sigma}_p + \frac{1}{\tau} \sigma_p + \frac{\kappa}{G \tau} (\sigma_p)^2 = 2 G D[\mathbf{V}] + \mathcal{D} \Delta \sigma_p. \end{cases}$$

Paramètres utilisés :

$$\eta = 2.5 \text{ Pa}\cdot\text{s}, \quad G = 110 \text{ Pa}, \quad \tau = 0.7 \text{ s}, \quad a = 0.9.$$

- Formation de bandes de cisaillement

Simulations numériques pour  $\mathcal{D} = 0 \text{ m}^2/\text{s}$  :

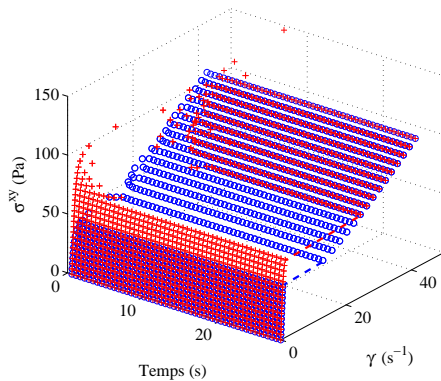


$$\delta P = 990 \text{ mB}/(6\text{cm})$$



- Dépendance à la condition initiale, rôle de la diffusion

Simulations numériques pour  $\delta P = 990 \text{ mB}/(6\text{cm})$ , deux conditions initiales :

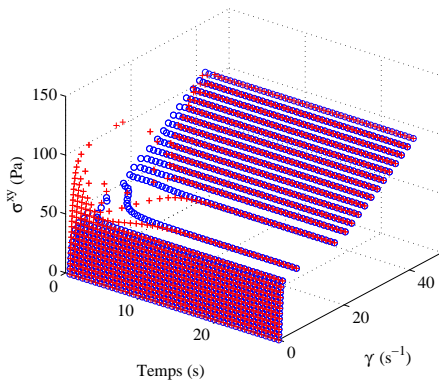


$$\mathcal{D} = 0 \text{ m}^2/\text{s}$$

## Applications et résultats : écoulements dans des canaux droits

- Dépendance à la condition initiale, rôle de la diffusion

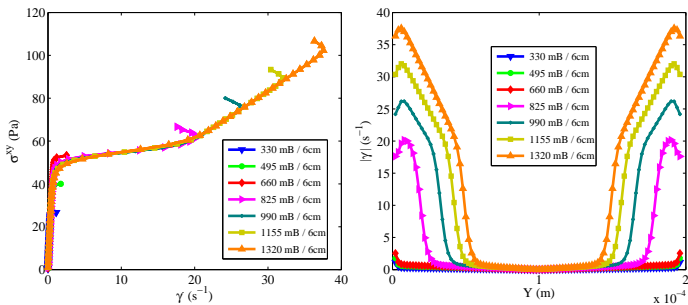
Simulations numériques pour  $\delta P = 990 \text{ mB}/(6\text{cm})$ , deux conditions initiales :



$$D = 8.10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}$$

- Effets non-locaux, perte de la notion de "courbe d'écoulement"

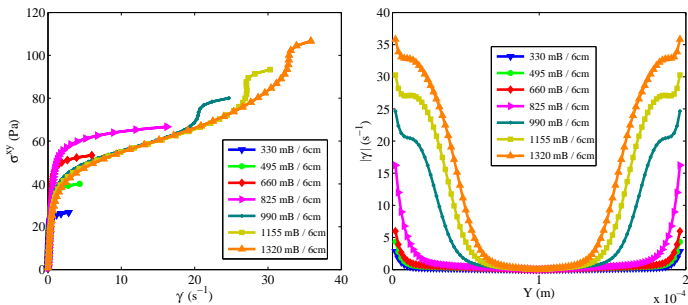
Simulations numériques pour plusieurs  $\delta P$  :



$$D = 8.10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}$$

- Effets non-locaux, perte de la notion de "courbe d'écoulement"

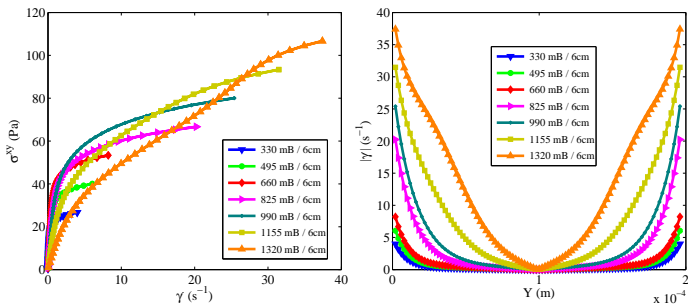
Simulations numériques pour plusieurs  $\delta P$  :



$$D = 16 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}$$

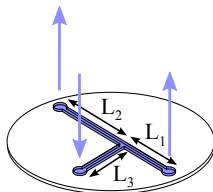
- Effets non-locaux, perte de la notion de "courbe d'écoulement"

Simulations numériques pour plusieurs  $\delta P$  :



$$D = 80 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}$$

**Contexte :** expériences menées par Chloé Masselon



**Constatations :**

- La répartition des débits de sortie n'est pas celle attendue
- Effet de "bouchage" rendant difficile la prédiction de l'écoulement dans une géométrie plus complexe

**Approches :**

Modèle réduit  
Algorithme de recherche de débits  
Utilisation du modèle "Poiseuille" 2D

Modèle complet  
Simulations numériques 3D

Paramètres utilisés :

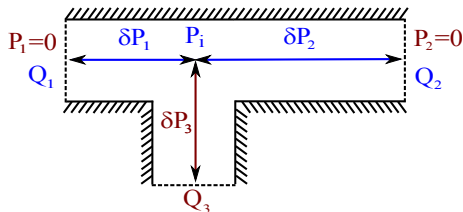
$$\eta = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}, \quad G = 150 \text{ Pa}, \quad \tau = 0.5 \text{ s}, \quad \kappa = 0.3, \quad a = 0.9, \quad \mathcal{D} = 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}.$$

*M. Colin, T. Colin, J. Dambrine, "Numerical study of a flow of wormlike micelles through a microfluidic T-shaped junction", en préparation*

Première approche : modèle réduit

## Hypothèses :

- Pression linéaire dans chaque branche du T
- Pression identique à chaque sortie ( $P_1 = P_2 = 0$ )
- Le modèle "Poiseuille" 2D permet de calculer les débits dans chaque branche de la jonction



**Algorithme de recherche de débits compatibles** (on initialise  $P_i^0$ ) :

- ▶ On calcule  $\delta P_1^n$  et  $\delta P_2^n$  avec :

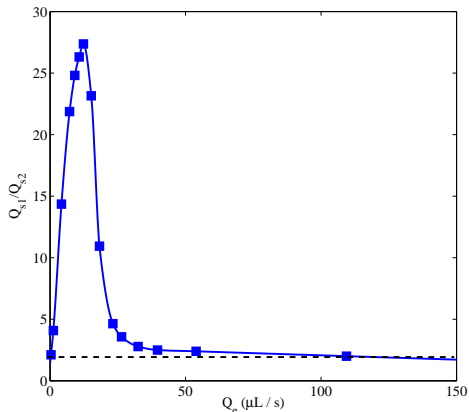
$$\delta P_1^n = -\frac{P_i^n}{L_1}, \quad \delta P_2^n = -\frac{P_i^n}{L_2}$$

- ▶ On calcule  $Q_1^n$  et  $Q_2^n$  grâce au modèle "Poiseuille" 2D
- ▶ On corrige la pression intermédiaire :

$$P_i^{n+1} = P_i^n + \delta r (Q_3 - (Q_1 + Q_2))$$

Première approche : modèle réduit

**Resultat :**  $\frac{L_2}{L_1} = 2$



**Question :** Validité des approximations effectuées ?



Deuxième approche : simulations numériques 3D

Modèle :

$$\begin{cases} \eta \Delta \mathbf{V} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_p = \nabla P, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \\ \hat{\sigma}_p + \frac{1}{\tau} \boldsymbol{\sigma}_p + \frac{\kappa}{G\tau} (\boldsymbol{\sigma}_p)^2 = 2GD[\mathbf{V}] + \mathcal{D}\Delta \boldsymbol{\sigma}_p. \end{cases}$$

Domaine et conditions aux limites :

- Sur  $\Gamma_e$  :

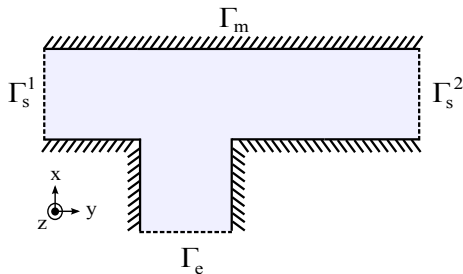
$$\mathbf{V} = V_e(y, z), \boldsymbol{\sigma}_p = V_e(y, z)$$

- Sur  $\Gamma_s^i$  :

$$\partial_{\vec{n}} \mathbf{V} = 0, \partial_{\vec{n}} \boldsymbol{\sigma}_p = 0$$

- Sur  $\Gamma_m$  :

$$\mathbf{V} = 0, \partial_{\vec{n}} \boldsymbol{\sigma}_p = 0$$

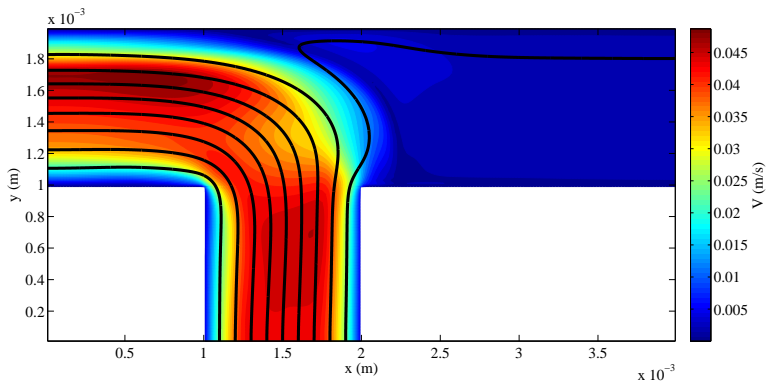


Résolution :  $N_x \times N_y \times N_z = 100 \times 200 \times 50$

Temps de calcul :  $\sim 7$  jours

- ▶ Jonctions fortement asymétriques :  $\frac{L_2}{L_1} = 2$

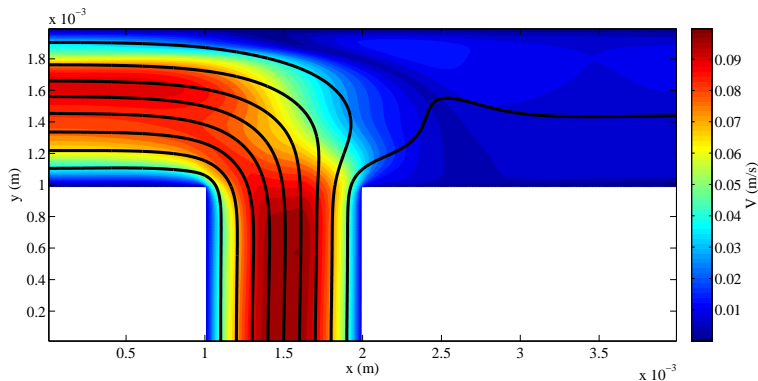
Simulations numériques 3D, effet de bouchage :



$$\delta P = 2 B / (6 \text{ cm})$$

- ▶ Jonctions fortement asymétriques :  $\frac{L_2}{L_1} = 2$

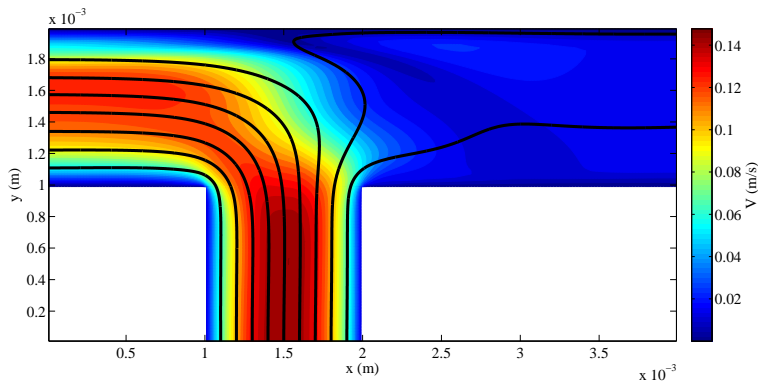
Simulations numériques 3D, effet de bouchage :



$$\delta P = 3.5 B / (6 \text{ cm})$$

- ▶ Jonctions fortement asymétriques :  $\frac{L_2}{L_1} = 2$

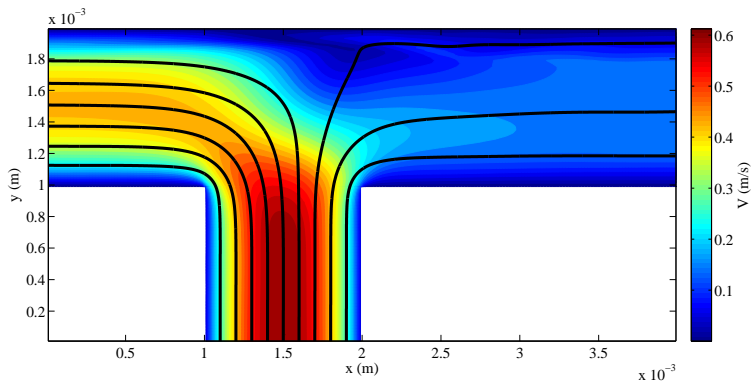
Simulations numériques 3D, effet de bouchage :



$$\delta P = 5 B / (6 \text{ cm})$$

- ▶ Jonctions fortement asymétriques :  $\frac{L_2}{L_1} = 2$

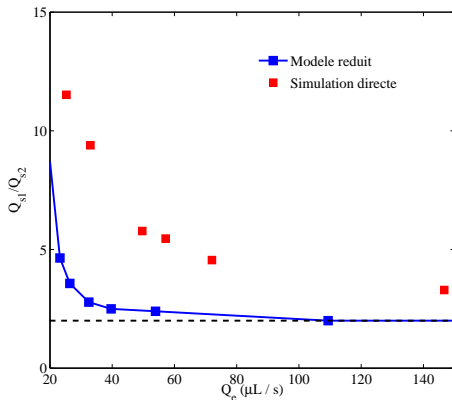
Simulations numériques 3D, effet de bouchage :



$$\delta P = 20 B / (6 \text{ cm})$$

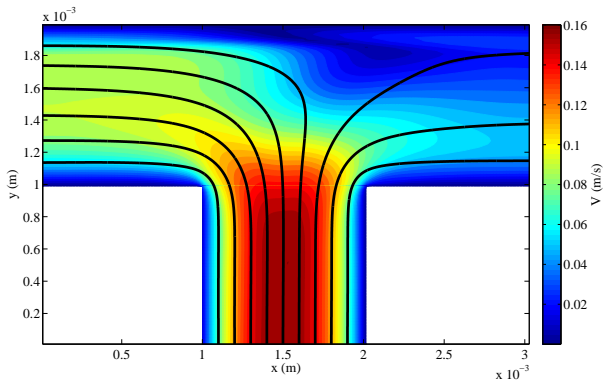
Deuxième approche : simulations numériques 3D

**Résultat :**  $\frac{L_2}{L_1} = 2$



- ▶ Jonctions faiblement asymétriques :  $\frac{L_2}{L_1} = 1 + \varepsilon$

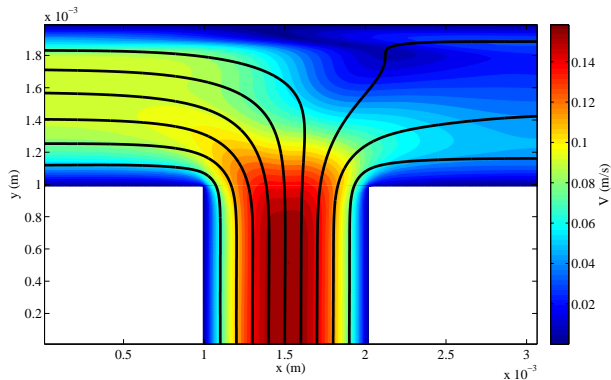
Simulations numériques 3D,  $\delta P = 5 B / (6cm)$ , sensibilité à la géométrie :



$$\varepsilon = 0.025$$

- ▶ Jonctions faiblement asymétriques :  $\frac{L_2}{L_1} = 1 + \varepsilon$

Simulations numériques 3D,  $\delta P = 5 B / (6cm)$ , sensibilité à la géométrie :

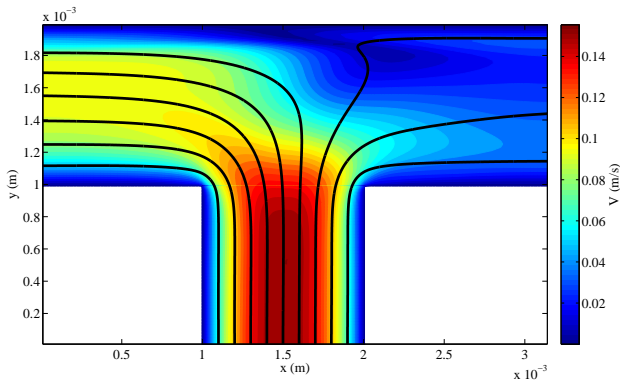


$$\varepsilon = 0.05$$



- ▶ Jonctions faiblement asymétriques :  $\frac{L_2}{L_1} = 1 + \varepsilon$

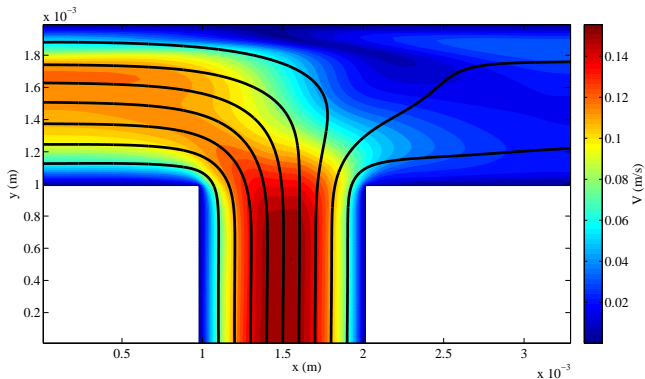
Simulations numériques 3D,  $\delta P = 5 B / (6cm)$ , sensibilité à la géométrie :



$$\varepsilon = 0.1$$

- ▶ Jonctions faiblement asymétriques :  $\frac{L_2}{L_1} = 1 + \varepsilon$

Simulations numériques 3D,  $\delta P = 5 B / (6cm)$ , sensibilité à la géométrie :



$$\varepsilon = 0.20$$

### Travail effectué :

- ▶ Modification du modèle de Johnson-Segalman
- ▶ Caractérisation des effets non-locaux, et du rôle de la diffusion dans le modèle
- ▶ Reproduction des effets de bouchage dans des jonctions micro-fluidiques grâce à des calculs 3D
- ▶ Etude de l'influence de la géométrie

### Perspectives

- ▶ Simulations numériques dans le cas de réseaux micro-fluidiques complexes
- ▶ Ecoulements d'émulsions (C. Picard)
- ▶ Ecoulements diphasiques, Polymère/Polymère, Eau/Polymère (V. Huber)

Merci pour votre attention !