

**Ecoulement confiné d'un matériau granulaire
en interaction avec un gaz, application à la
relocalisation du combustible nucléaire.**

A. Martin,

F. Dubois, Y. Monerie et F. Radjaï

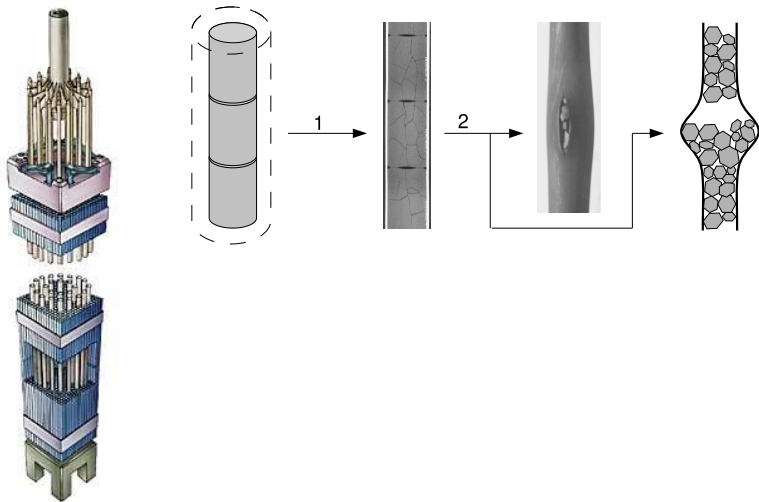
dans le cadre du **laboratoire commun MIST (CNRS-UM2-IRSN)**

Laboratoire de Mécanique et Génie Civil

25/02/2010

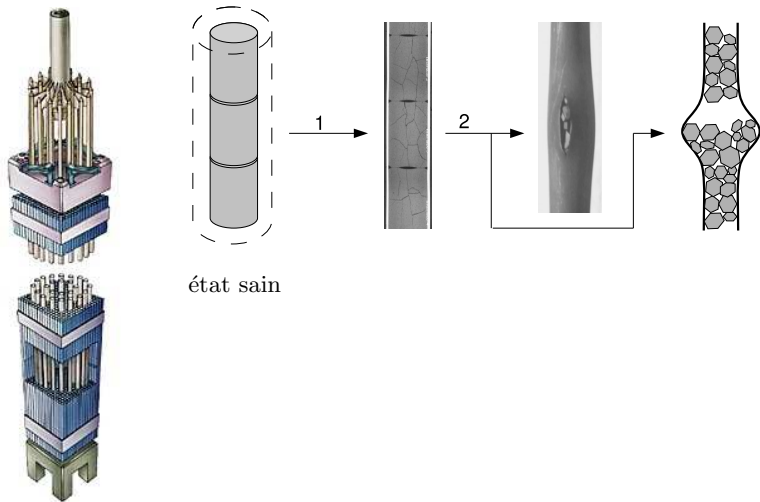
Contexte

- Conception d'outils numériques d'analyse de situations accidentelles



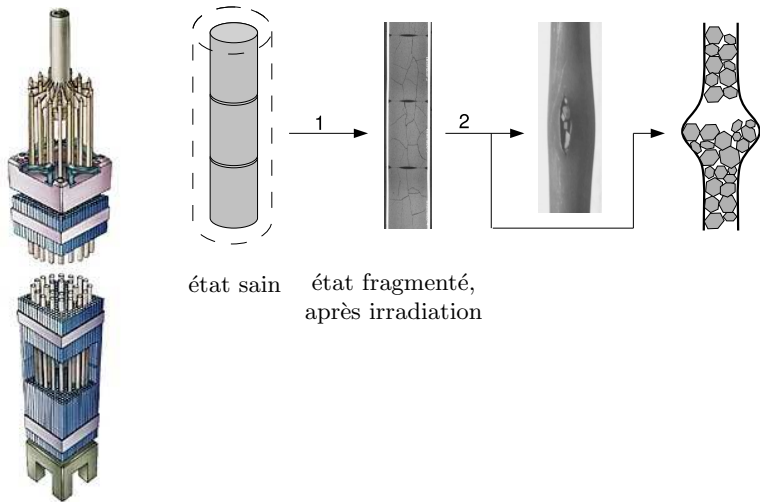
Contexte

- Conception d'outils numériques d'analyse de situations accidentelles



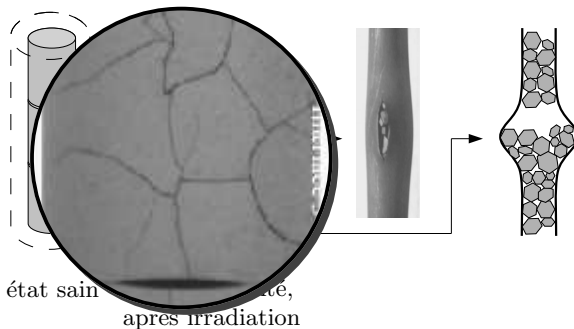
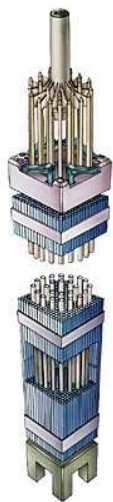
Contexte

- Conception d'outils numériques d'analyse de situations accidentelles



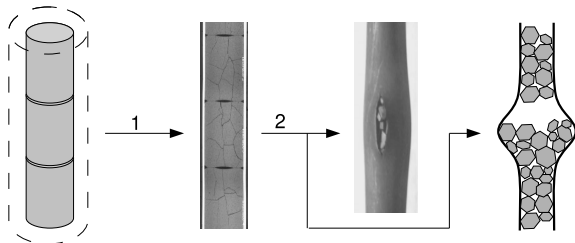
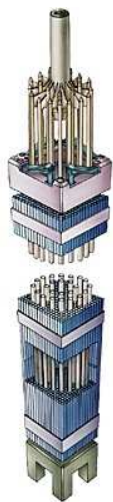
Contexte

- Conception d'outils numériques d'analyse de situations accidentelles



Contexte

- Conception d'outils numériques d'analyse de situations accidentelles



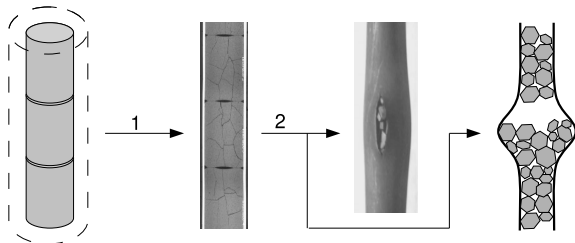
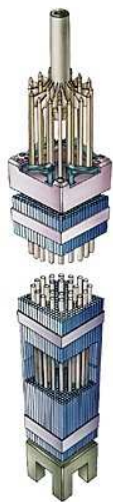
état sain

état fragmenté,
après irradiation

situations accidentelles (gaine)

Contexte

- Conception d'outils numériques d'analyse de situations accidentelles



état sain

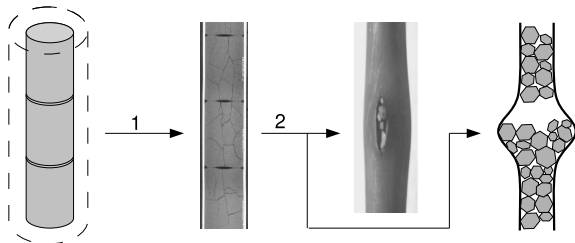
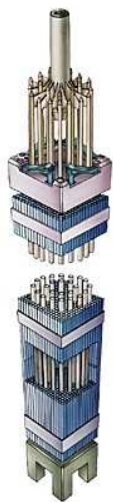
état fragmenté,
après irradiation

situations accidentelles (gaine)

rupture (RIA)

Contexte

- Conception d'outils numériques d'analyse de situations accidentelles



état sain

état fragmenté,
après irradiation

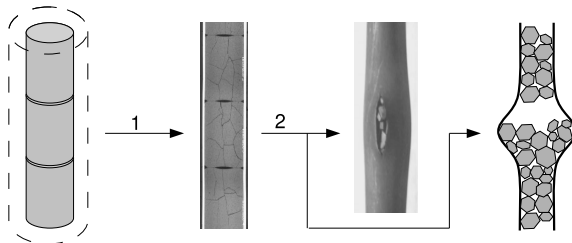
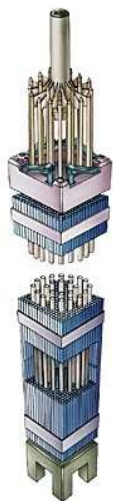
situations accidentelles (gaine)

rupture (RIA)

ballonnement (APRP)

Contexte

- Conception d'outils numériques d'analyse de situations accidentelles



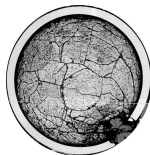
état sain

état fragmenté,
après irradiation

situations accidentelles (gaine)

rupture (RIA)

ballonnement (APRP)

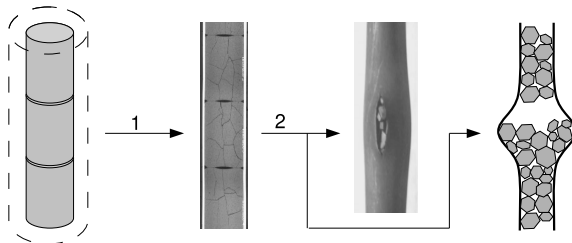
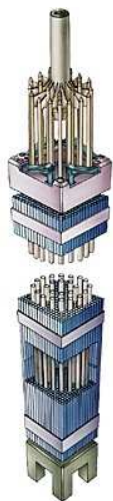


interaction combustible-eau

⇒ onde de pression ?

Contexte

- Conception d'outils numériques d'analyse de situations accidentelles



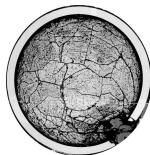
état sain

état fragmenté,
après irradiation

situations accidentelles (gaine)

rupture (RIA)

ballonnement (APRP)



interaction combustible-eau
⇒ onde de pression ?

relocalisation du
combustible
⇒ masse limite ?

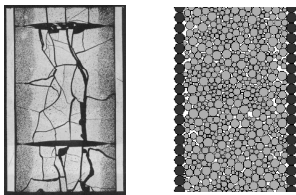
Contexte

- analyse de la relocalisation du combustible (APRP)
- taille relative des fragments par rapport au diamètre de la gaine
⇒ effets de taille finie :
 - régime de *jamming*
 - approche statistique
- simplification de la forme des fragments
- prise en compte des gaz de fission

Sommaire

- 1 Etude d'un problème modèle
- 2 Application au cas concret de la relocalisation
- 3 Méthode de couplage gaz-grains
- 4 Prise en compte des gaz de fission

Un problème modèle pour la relocalisation



- modélisation du combustible en 2D, par un échantillon polydisperse de disques :
 - les disques modélisent les fragments de combustible
 - les parois latérales modélisent la gaine
 - la rugosité des parois modélise de petits fragments adhérents à la gaine (fort taux de combustion)
- polyèdres rugueux représentés par des disques
⇒ utilisation d'un coefficient de frottement élevé ($\mu_C = 0,5$)

Un problème modèle pour la relocalisation

- hypothèses :
 - fragments caractérisés par leur diamètre moyen $\langle d \rangle$
 - présence de fragments entravant l'écoulement
 - ballon "triangulaire" (2D axisymétrique)
- taux de relocalisation (fraction relocalisable) :

$$y = \frac{V_r}{V}, \quad (1)$$

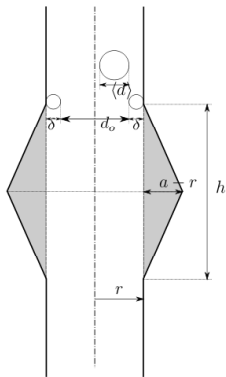
avec :

- V : volume disponible pour la relocalisation (tronc de cône évidé et symétrie verticale) :

$$V = h\pi(a^2 + r^2 + ar)/3 - h\pi r^2 \quad (2)$$

- V_r : volume de matière relocalisable (sphères) :

$$V_r = \langle N \rangle \times 4\pi(\langle d \rangle/2)^3/3 \quad (3)$$



Un problème modèle pour la relocalisation

- hypothèses :
 - fragments caractérisés par leur diamètre moyen $\langle d \rangle$
 - présence de fragments entravant l'écoulement
 - ballon "triangulaire" (2D axisymétrique)
- taux de relocalisation (fraction relocalisable) :

$$y = \frac{V_r}{V}, \quad (1)$$

avec :

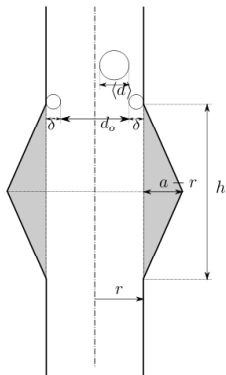
- V : volume disponible pour la relocalisation (tronc de cône évidé et symétrie verticale) :

$$V = h\pi(a^2 + r^2 + ar)/3 - h\pi r^2 \quad (2)$$

- V_r : volume de matière relocalisable (sphères) :

$$V_r = \langle N \rangle \times 4\pi(\langle d \rangle/2)^3/3 \quad (3)$$

- $\langle N \rangle$ est inconnu, en absence ou en présence de gaz



Un problème modèle pour la relocalisation

- hypothèses :

- fragments caractérisés par leur diamètre moyen $\langle d \rangle$
- présence de fragments entravant l'écoulement
- ballon "triangulaire" (2D axisymétrique)

- taux de relocalisation (fraction relocalisable) :

$$y = \frac{V_r}{V}, \quad (1)$$

avec :

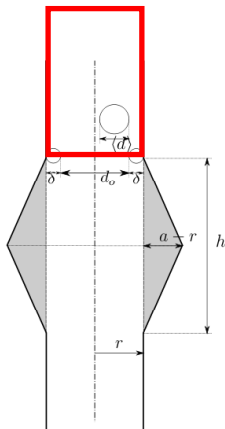
- V : volume disponible pour la relocalisation (tronc de cône évidé et symétrie verticale) :

$$V = h\pi(a^2 + r^2 + ar)/3 - h\pi r^2 \quad (2)$$

- V_r : volume de matière relocalisable (sphères) :

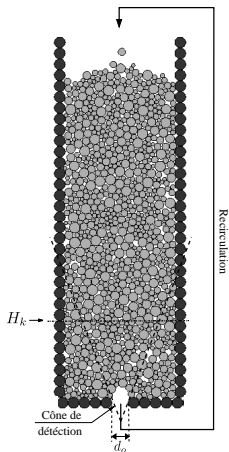
$$V_r = \langle N \rangle \times 4\pi(\langle d \rangle/2)^3/3 \quad (3)$$

- $\langle N \rangle$ est inconnu, en absence ou en présence de gaz



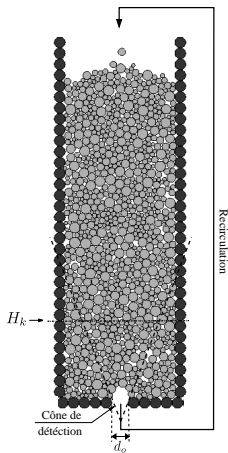
Un problème modèle pour la relocalisation

- modélisation du combustible situé au-dessus du ballonnement
- écoulements dans une géométrie de silo :
 - le fond modélise des fragments collés à la gaine, entravant l'écoulement
 - l'ouverture représente la section efficace d'écoulement

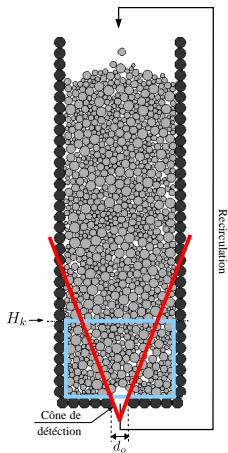


Un problème modèle pour la relocalisation

- modélisation du combustible situé au-dessus du ballonnement
- écoulements dans une géométrie de silo :
 - le fond modélise des fragments collés à la gaine, entravant l'écoulement
 - l'ouverture représente la section efficace d'écoulement
- simulations réalisées à l'aide de la méthode de dynamique des contacts (Moreau 1994 et Jean 1999) et d'une loi de choc inélastique (logiciel LMGC90)
 - dynamique non régulière, mesures différentielles
 - traitement implicite des interactions multicorps
 - choix de l'échelle de temps plus grande que le temps de choc



Un problème modèle pour la relocalisation



- modélisation du combustible situé au-dessus du ballonnement
- écoulements dans une géométrie de silo :
 - le fond modélise des fragments collés à la gaine, entravant l'écoulement
 - l'ouverture représente la section efficace d'écoulement
- simulations réalisées à l'aide de la méthode de dynamique des contacts (Moreau 1994 et Jean 1999) et d'une loi de choc inélastique (logiciel LMGC90)
 - dynamique non régulière, mesures différentielles
 - traitement implicite des interactions multicorps
 - choix de l'échelle de temps plus grande que le temps de choc
- critère de détection du blocage : moyenne quadratique normalisée des vitesses des particules
- méthode de déblocage adaptée
- variation d'un seul paramètre : l'ouverture d_o

Normalisation

- trois grandeurs naturelles du système : $\langle d \rangle$, m et g
- paramètre pertinent : l'ouverture normalisée

$$R = \frac{d_o}{\langle d \rangle} \quad (4)$$

- normalisations utilisées dans la suite :
 - normalisation des temps :

$$\sqrt{\frac{\langle d \rangle}{g}} \quad (5)$$

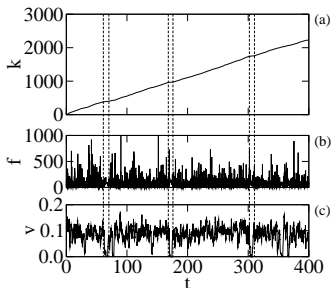
- normalisation des forces :

$$mg \quad (6)$$

- normalisation des vitesses :

$$\sqrt{g \langle d \rangle} \quad (7)$$

Séries temporelles



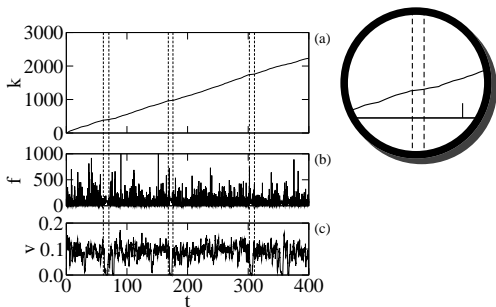
- le processus est constitué de la succession de deux types de phases :
 - une phase d'écoulement avec un débit (nombre de particules par unité de temps normalisé) presque constant :

$$Q = \frac{\Delta k}{\Delta t}, \quad (8)$$

avec k le nombre cumulé de particules sorties par l'orifice, dont la durée de vie T_e est aléatoire

- une phase de blocage caractérisée par un débit nul

Séries temporelles



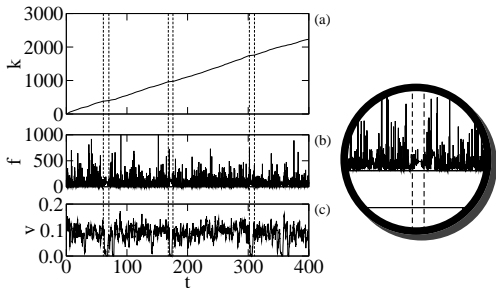
- le processus est constitué de la succession de deux types de phases :
 - une phase d'écoulement avec un débit (nombre de particules par unité de temps normalisé) presque constant :

$$Q = \frac{\Delta k}{\Delta t}, \quad (8)$$

avec k le nombre cumulé de particules sorties par l'orifice, dont la durée de vie T_e est aléatoire

- une phase de blocage caractérisée par un débit nul

Séries temporelles



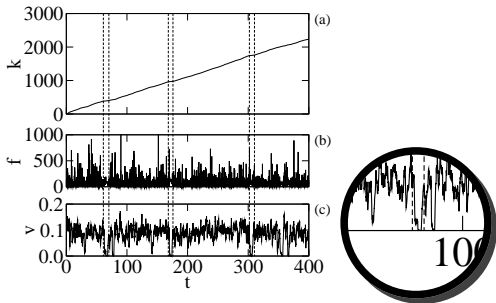
- le processus est constitué de la succession de deux types de phases :
 - une phase d'écoulement avec un débit (nombre de particules par unité de temps normalisé) presque constant :

$$Q = \frac{\Delta k}{\Delta t}, \quad (8)$$

avec k le nombre cumulé de particules sorties par l'orifice, dont la durée de vie T_e est aléatoire

- une phase de blocage caractérisée par un débit nul

Séries temporelles



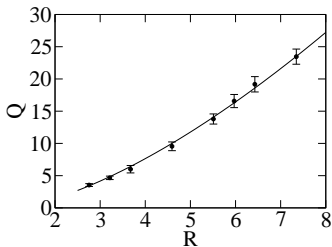
- le processus est constitué de la succession de deux types de phases :
 - une phase d'écoulement avec un débit (nombre de particules par unité de temps normalisé) presque constant :

$$Q = \frac{\Delta k}{\Delta t}, \quad (8)$$

avec k le nombre cumulé de particules sorties par l'orifice, dont la durée de vie T_e est aléatoire

- une phase de blocage caractérisée par un débit nul

Analyse des débits



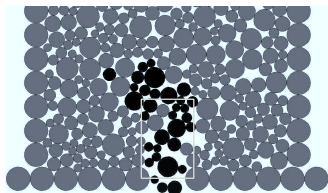
- la loi de Beverloo fournit une estimation du débit à la sortie d'un silo :

$$Q = C(R - R_e)^{3/2}, \quad (9)$$

avec : $R_e = 1$ et $C \simeq 1,47$

- les hypothèses de la loi de Beverloo sont-elles vérifiées dans cette configuration ?

Hypothèses de la loi de Beverloo



- zone fluidisée au-dessus de l'ouverture :
 - $R - R_e$: largeur
 - s : rapport d'aspect (classiquement $s = 1$) $\Rightarrow s(R - R_e)$: hauteur
 - régime **balistique**
- le débit s'exprime sous la forme :

$$Q = n_p v_{out} (R - R_e), \quad (10)$$

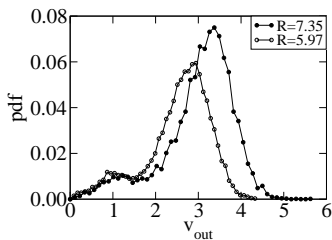
avec :

- v_{out} : la vitesse des particules à la sortie du silo (chute libre)

$$v_{out} = \sqrt{2s(R - R_e)}, \quad (11)$$

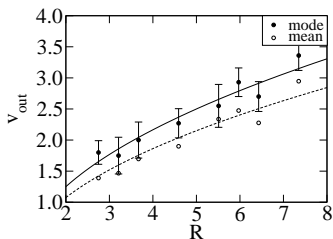
- n_p : la densité numérique des particules dans la zone fluidisée, supposée indépendante de R

Vitesses de chute



- les densités de probabilité des vitesses (composante verticale) à la sortie du silo présentent :
 - un pic marqué correspondant au régime balistique
 - un pic plus diffus montrant que toutes les particules ne suivent pas une trajectoire balistique
- \Rightarrow la vitesse au pic associé au régime balistique doit être considérée pour respecter les hypothèses de la loi de Beverloo

Vitesses de chute

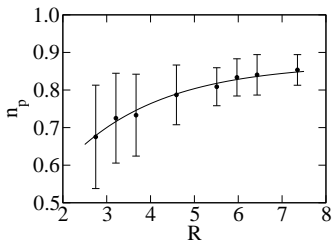


- les vitesses aux pics correspondants au régime balistique sont approchées par :

$$v_{out} = C_v \sqrt{s(R - R_e)}, \quad (12)$$

avec $C_v \sqrt{s} \simeq 1,25$

Densité numérique des particules



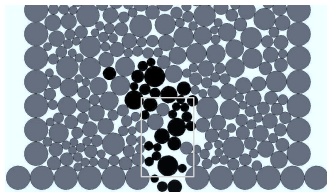
- les densités numériques des particules sont approchées par une exponentielle (Mankoc *et al.* 2007) :

$$n_p = C_n \underbrace{[1 - A_1 \exp(-A_2(R - R_e))]}_{\neq \text{Beverloo}}, \quad (13)$$

avec $C_n \simeq 0,87$, $A_1 \simeq 0,5$ et $A_2 \simeq 0,47$

- n_p semble quasi-constante pour $R \geq 4$ et présente une grande incertitude pour $R < 4$
- \Rightarrow écart à la loi de Beverloo négligé : $n_p \simeq C_n$

Zone fluidisée



- l'injection (??) et (??) dans (??) donne :

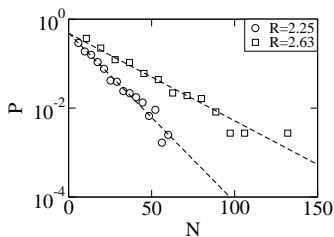
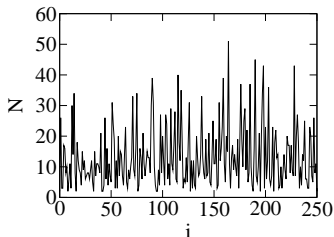
$$Q = C_n C_v \sqrt{s} (R - R_e)^{3/2}, \quad (14)$$

soit $C = C_n C_v \sqrt{s}$, où $C_n \simeq 0,87$ et $C_v \sqrt{s} \simeq 1,25$

- $C = 1,47 \Rightarrow C_v = 1,25$ et $s \simeq 1,7$
- résultat en accord avec la forme de la zone fluidisée observée

Statistiques d'avalanche

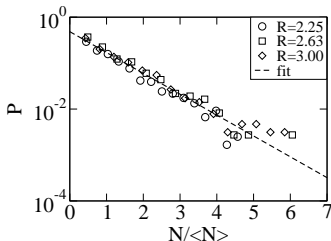
- taille d'avalanche : le nombre N de particules tombant entre deux blocages
- le débit étant presque constant, on a : $N = T_e Q$
- 8 séries de simulations, dont seulement 3 ($R = 2,25, 2,63$ et 3) fournissent des statistiques suffisantes (1000 événements, soit 3000 s de temps physique, pour $R = 2,25$)



- processus sans mémoire (diagramme de corrélation)
- les densités de probabilité $P(N)$ sont bien approchées par une exponentielle :

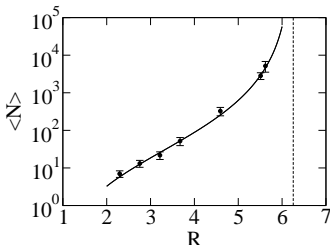
$$P(N) = 1/(\langle N \rangle + 1) \exp[-N/(\langle N \rangle + 1)] \quad (15)$$

Statistiques d'avalanche



- superposition des densités de probabilités pour plusieurs valeurs de R
 \Rightarrow le nombre de particules entraînées dans l'avalanche varie avec R
tandis que la dynamique de blocage reste identique

Taille moyenne d'avalanche

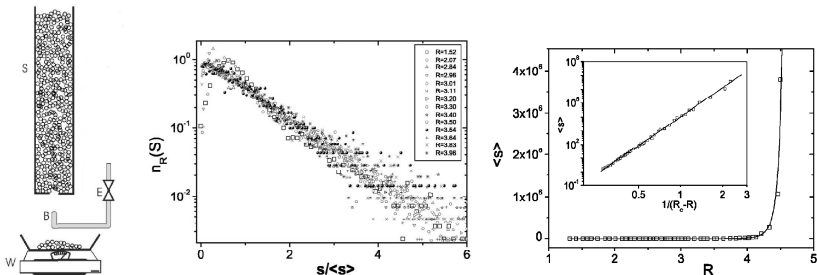


- $\langle N \rangle$ augmente avec R et diverge à l'approche de l'écoulement permanent, pour un rapport critique R_f
- $N = T_e Q$ et $Q \propto (R - R_e)^{3/2} \Rightarrow T_e$ diverge
- divergence en loi de puissance :

$$\langle N \rangle = C_N \underbrace{(R_f - R)^{-\gamma}}_{\propto T_e} \underbrace{(R - R_e)^{\frac{3}{2}}}_{\propto Q}, \quad (16)$$

avec $C_N \simeq 140$, $R_f \simeq 6,25$ et $\gamma \simeq 2,6$

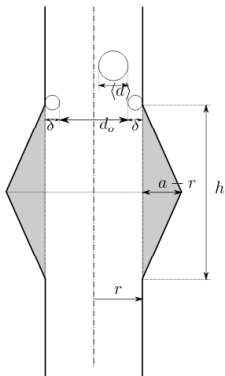
Comparaison avec des données expérimentales



- accord simulation/expérience Zuriguel *et al.* (2005) :
 - loi exponentielle
 - existence d'une ouverture critique
- différences sur les paramètres : $R_f = 4,94 \pm 0,03$ et $\gamma = 6,9 \pm 0,2$
 - géométrie (3D, monodisperse, parois lisses)
 - $\langle N \rangle \propto (R_f - R)^{-\gamma}$

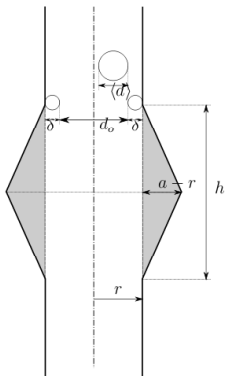
Application au cas de la relocalisation

Application au cas de la relocalisation



- hypothèses (2D axisymétrique) :
 - $\langle N \rangle = C_N (R_f - R)^{-\gamma} (R - R_e)^{3/2}$
 - résultat transposable au cas 3D

Application au cas de la relocalisation



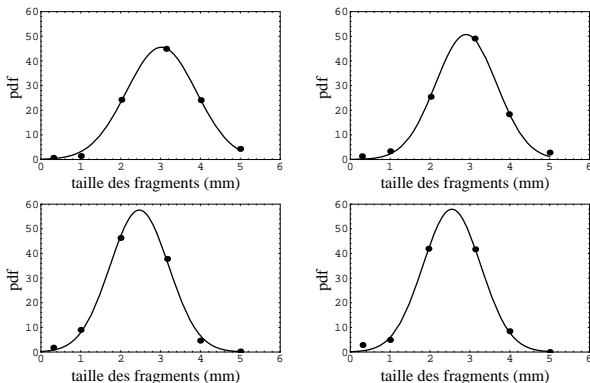
- hypothèses (2D axisymétrique) :
 - $\langle N \rangle = C_N (R_f - R)^{-\gamma} (R - R_e)^{3/2}$
 - résultat transposable au cas 3D

- \Rightarrow estimation du taux de relocalisation :

$$y = \frac{V_r}{V} = \frac{C_N \langle d \rangle^3}{2h(a^2 - 2r^2 + ar)} \left(R_f - \frac{d_o}{\langle d \rangle} \right)^{-\gamma} \left(\frac{d_o}{\langle d \rangle} - R_e \right)^{3/2} \quad (17)$$

- relier $\langle d \rangle$ à une quantité accessible en réacteur (taux de combustion)

Evolution de la taille des fragments



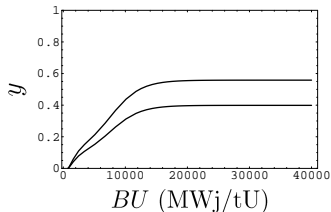
- densités de probabilité de la taille des fragments pour quatre taux de combustion : 2500, 8000, 20000 et 35000 MWj/tU (Coindreau 2009)
- données bien approchées par des gaussiennes
- \Rightarrow la valeur au pic donne une estimation de $\langle d \rangle$ pour chaque cas
- évolution de $\langle d \rangle$ approchée par une exponentielle décroissante :

$$\langle d \rangle = A_3 (1 + [(\langle d_v \rangle / A_3) - 1] \exp[-BU/A_4]) \quad (18)$$

Estimation du taux de relocalisation

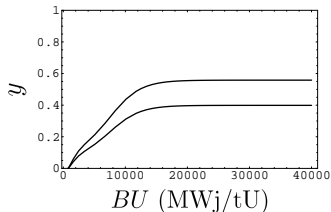
- cas d'un ballonnement APRP typique : déformation de 50%
- hypothèse de sphéricité ne permet pas d'atteindre la compaction maximale
- les sphères sont remplacées par des cubes, l'arête d'un cube étant égale au diamètre de la sphère qu'il remplace $\Rightarrow y$ est multiplié par $6/\pi$ (approche "conservative")
- hypothèse géométrique actuelle plutôt majorante : le ballon "triangulaire" minore les tailles de ballons mesurées expérimentalement
- nouvelle hypothèse plutôt minorante : un ballon "rectangulaire" (cylindre en 2D axisymétrique) majorant les tailles de ballons mesurées (estimation)

Estimation du taux de relocalisation



- à fort taux de combustion ($BU \geq 25000$ MWj/tU), un taux de relocalisation entre 40% et 60% peut-être attendu (en accord avec des résultats expérimentaux très récents, confidentiels)

Estimation du taux de relocalisation



- à fort taux de combustion ($BU \geq 25000$ MWj/tU), un taux de relocalisation entre 40% et 60% peut-être attendu (en accord avec des résultats expérimentaux très récents, confidentiels)
- quelle est l'influence de la présence des gaz de fission ?

Méthode de couplage gaz-grains

Principe de la méthode de couplage gaz-grains

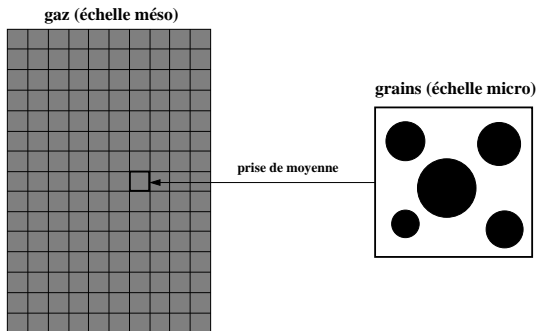
- méthode type Euler(gaz)-Lagrange(particules) :
 - méthode dérivée des travaux de McNamara *et al.* (2000)
 - écoulement du gaz entre les grains modélisé comme un écoulement dans un milieu poreux (échelle mésoscopique)
 - équation d'évolution de la pression, *e.g.* pour un gaz parfait :

$$\phi \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \underbrace{\vec{u}_s \cdot \vec{\nabla} p}_{\text{terme convectif}} \right) = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left(p \frac{\kappa(\phi)}{\mu} \vec{\nabla} p \right)}_{\text{terme diffusif}} - \underbrace{p \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s}_{\text{terme de Biot}} \quad (19)$$

- où apparaissent :
 - un terme convectif : entraînement du fluide par la matrice granulaire.
 - un terme diffusif : diffusion du fluide dans les pores de la matrice.
 - un terme de Biot : évolution de la pression due au changement de taille des pores.

Principe de la méthode de couplage gaz-grains

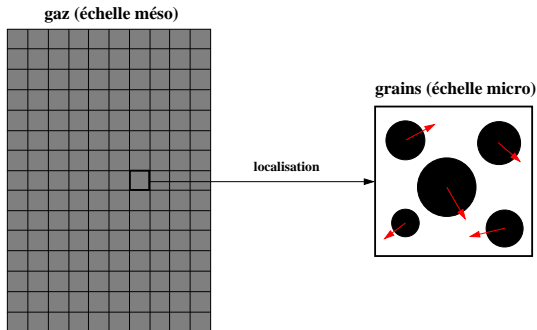
- méthode type Euler(gaz)-Lagrange(particules) :
 - méthode dérivée des travaux de McNamara *et al.* (2000)
 - écoulement du gaz entre les grains modélisé comme un écoulement dans un milieu poreux (échelle mésoscopique)
 - fluide influencé par des grandeurs évaluées à l'échelle d'un EV (taille de maille : $h^e = 2,5d$)



$$1 - \phi = c = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \sum_j \delta(\vec{x} - \vec{x}^j) V^j dV \quad (20)$$

Principe de la méthode de couplage gaz-grains

- méthode type Euler(gaz)-Lagrange(particules) :
 - méthode dérivée des travaux de McNamara *et al.* (2000)
 - écoulement du gaz entre les grains modélisé comme un écoulement dans un milieu poreux (échelle mésoscopique)
 - fluide influencé par des grandeurs évaluées à l'échelle d'un EV
 - chaque grain est influencé par l'état du fluide moyen

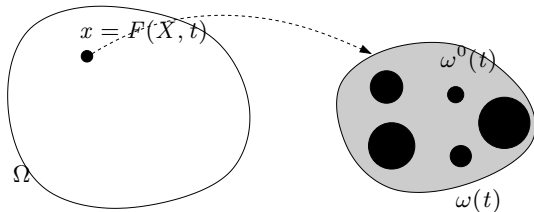


$$\vec{F}_{f \rightarrow s}^j = -\frac{V^j}{1 - \phi} \vec{\nabla} p \quad \text{et} \quad \vec{M}_{f \rightarrow s}^j = \vec{0} \quad (21)$$

Principe de la méthode de couplage gaz-grains

- méthode type Euler(gaz)-Lagrange(particules) :
 - méthode dérivée des travaux de McNamara *et al.* (2000)
 - écoulement du gaz entre les grains modélisé comme un écoulement dans un milieu poreux (échelle mésoscopique)
 - fluide influencé par des grandeurs évaluées à l'échelle d'un EV
 - chaque grain est influencé par l'état du fluide moyen
 - couplage entre les deux résolutions par une méthode de point fixe
- méthode numérique : couplage FEM-DEM
- méthode implémentée dans le logiciel LMGC90
- la nouvelle écriture du modèle gère en plus :
 - la polydispersité
 - les domaines de géométrie quelconque
 - les lois d'interactions complexes (contact frottant, ...)
- le modèle a été étendu au cas d'un fluide incompressible

Conservation de la masse



- en chaque point \vec{x} du mélange fluide-particules, un EV $\omega(t)$ peut être exhibé
- conservation de la masse pour la phase solide :

$$\frac{\partial(c\rho_s)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (c\rho_s \vec{u}_s) = 0 \quad (19)$$

- conservation de la masse pour la phase fluide :

$$\frac{\partial(\phi\rho_f)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\phi\rho_f \vec{u}_f) = 0 \quad (20)$$

Hypothèses de travail

- cadre isotherme
- le fluide est un gaz :
 - poids négligeable
 - inertie négligeable : $Re < 1$
 - viscosité négligeable :

$$\vec{\sigma}' = -p' \vec{I} \quad (21)$$

- décomposition de la vitesse de la phase fluide :

$$\phi \vec{u}_f = \phi \vec{u}_s + \vec{U}_{f/s} \quad (22)$$

- loi de Darcy valide :

$$\vec{U}_{f/s}(\vec{x}) = -\frac{\kappa(\phi(\vec{x}))}{\mu} \vec{\nabla} p(\vec{x}) \quad (23)$$

- perméabilité fournie par la loi de Kozeny-Carman :

$$\kappa = \frac{d^2}{180} \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2} \quad (24)$$

Cas du gaz parfait

- loi d'état :

$$p V_f = n_f R_m T_f \quad (25)$$

- ρ_f dépend linéairement de p :

$$\rho_f = \frac{M_f}{R_m T_f} p \quad (26)$$

⇒ le fluide est barotrope et la loi de Darcy est valide

- équation d'évolution de la pression :

$$\phi \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u}_s \cdot \vec{\nabla} p \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(p \frac{\kappa(\phi)}{\mu} \vec{\nabla} p \right) - p \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s \quad (27)$$

- formulation adaptée pour un gaz
- la gestion de la non-linéarité nécessite des choix dans l'écriture du schéma d'intégration (semi-implicite)

Cas du gaz parfait : équation linéarisée

- décomposition de p en pression moyenne (p_0) et fluctuation (\tilde{p}) :

$$p(\vec{x}) = p_0 + \tilde{p}(\vec{x}) \quad (28)$$

- hypothèse : $\tilde{p} \ll p_0$
- équation d'évolution de la pression linéarisée :

$$\phi \frac{\partial p}{\partial t} = p_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\kappa(\phi)}{\mu} \vec{\nabla} p \right) - p_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s \quad (29)$$

- échelle de temps fixée par le temps caractéristique : $\tau_c = \mu/p_0$
- introduction d'un paramètre supplémentaire : p_0
- l'écriture du schéma d'intégration requiert moins de choix

Cas du fluide incompressible

- loi d'état :

$$\rho_f = \text{constante} \quad (30)$$

- condition d'incompressibilité classique, à l'échelle mésoscopique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_f = 0 \quad (31)$$

- le champ de pression ne dépend que de la configuration :

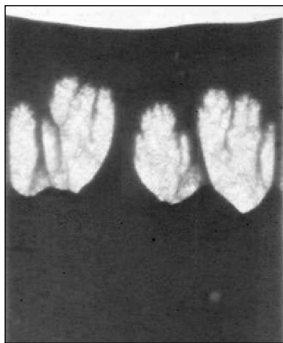
$$-\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\kappa(\phi)}{\mu} \vec{\nabla} p \right) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s \quad (32)$$

- écriture naturelle du schéma d'intégration
- perte de solution unique dans le cas où on impose $\vec{\nabla} p = \vec{0}$ sur tout le bord du domaine (boîte fermée)
- surcoût en termes de temps de calcul pour obtenir une solution unique, en imposant la valeur moyenne de la pression $\int_{\Omega} p dV = |\Omega| \langle p \rangle$

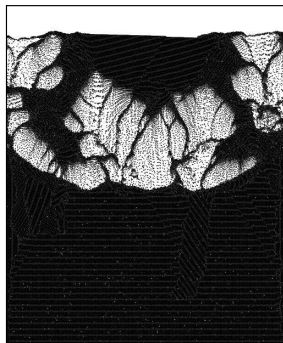
Vers la validation

- sédimentation de 160000 grains ($d = 140\mu\text{m}$) dans une cellule de Hele-Shaw (quasi 2D) de dimensions $5,6 \times 8,6$ cm, saturée d'air
- modèle choisi : gaz parfait avec équation linéarisée, qui propose un schéma d'intégration naturel, et n'induit pas de surcoût

expérience (Vinningland *et al.* 2007) : simulation :

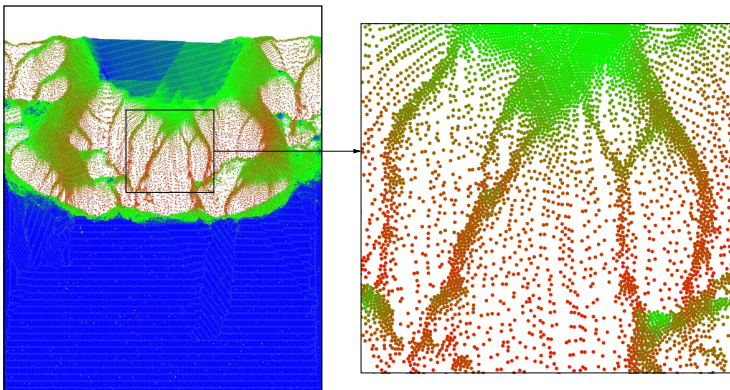


billes de polystyrène



billes de verre

Formation de l'instabilité



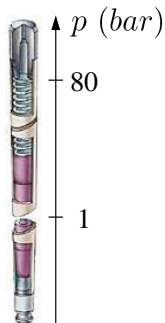
- les particules chutant le plus vite sont situées dans les colonnes
- estimation de la vitesse de chute d'un EV de mélange gaz-grains :

$$u_v = \frac{d^2}{180} \frac{\rho_s g \phi^2}{\mu} \quad (33)$$

- u_v augmente avec ϕ

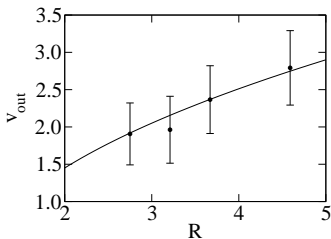
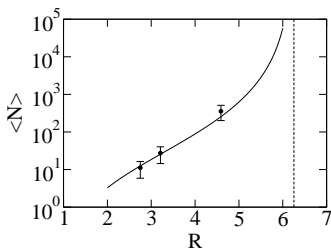
Prise en compte des gaz de fission

Application au cas de la relocalisation



- prise en compte de la présence du gaz dans l'étude de la statistique d'avalanche
- présence du gaz réduite à la présence d'un gradient de pression
- $\Delta p_f / \Delta z$ inconnu au voisinage du ballonnement
- choix arbitraire : $\Delta p_f / \Delta z \simeq 2 \text{ bar.m}^{-1}$

Simulation couplant gaz et particules



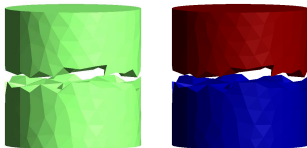
- gradient de pression pris en compte en imposant la pression en haut et à la sortie du silo
- l'estimation obtenue dans le cas sec est encore pertinente
- même forme pour les vitesses à la sortie du silo : $v_{out} = C_v \sqrt{s(R - R_e)}$, avec une valeur de $C_v \sqrt{s}$ plus élevée : 1,45 au lieu de 1,25
- \Rightarrow loi de Beverloo est toujours valide et le gaz accélère les particules, sans modifier la statistique d'avalanche

Conclusion

- un ensemble d'outils génériques (simulation + post-traitement) pour l'étude des écoulements dans le régime de blocage et en présence de gaz a été développé
- application à la relocalisation :
 - modélisation :
 - écoulements dans une géométrie de silo
 - fragments caractérisés par leur diamètre moyen
 - combustible modélisé par un ensemble polydisperse de disques
 - résultats :
 - débit suit la loi de Beverloo
 - estimation de la taille moyenne d'avalanche
 - \Rightarrow estimation du taux de relocalisation
- résultats remarquables :
 - simulation de la sédimentation de 160000 grains dans un gaz d'une durée acceptable (2 mois)
 - la présence du gaz accélère la vidange (débits plus élevés), sans modifier les statistiques d'avalanches (durées de vie d'écoulement plus courtes)

Perspectives

- à court terme : procéder à des simulations supplémentaires pour affiner la description de la transition vers l'écoulement stationnaire
- à moyen terme : étendre les développements réalisés successivement aux polygones, au cas 3D et aux polyèdres
- à long terme :
 - reprendre l'étude de stabilité avec un échantillon de fragments réalistes : simulation de fragmentation d'un milieu continu (CZM ou LEM), puis reconnaissance des fragments



- simuler le processus d'éjection du combustible : l'éjection des fragments avec les outils développés et leur sédimentation dans le fluide caloporteur par une méthode de type DNS.

Merci.

Un modèle pour le blocage

- hypothèse : les particules sortent une par une
- le processus peut se voir comme une séquence de passages de particules séparés par des instances de blocage :
111011011110...
- $P(1)$: probabilité qu'une particule sorte du silo
- $P(0)$: probabilité de blocage dans le processus entier
- forme exponentielle de la densité de probabilité suggère que les évènements successifs sont décorrelés
- la probabilité d'avoir N passages successifs est donc :

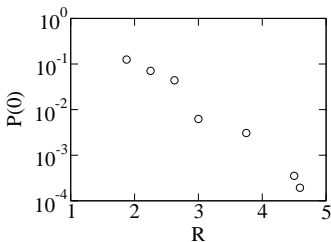
$$P(N) = P(0)P(1)^N \quad (34)$$

Un modèle pour le blocage

- la probabilité de blocage peut s'écrire en fonction de la taille moyenne d'avalanche :

$$P(0) = \frac{1}{\langle N \rangle + 1} \quad (35)$$

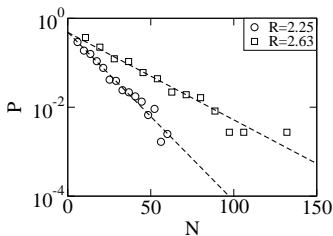
- relation simple compatible avec les deux cas limites :
 - $\langle N \rangle = 0 : P(0) = 1$, état stable où tout est bloqué
 - $\langle N \rangle = \infty : P(0) = 0$, état instable où les particules s'écoulent en permanence



Un modèle pour le blocage

- la condition de normalisation ($\int_0^\infty P(N) dN = 1$) et l'expression de $P(0)$ donnent :

$$P(N) = \frac{1}{\langle N \rangle + 1} \exp \left[-\frac{N}{\langle N \rangle + 1} \right] \quad (36)$$



Calcul de la probabilité de blocage

- soit M le nombre total d'événements, comportant S blocages et $M - S$ passages
- par définition :

$$P(0) = \frac{S}{M} \quad (37)$$

- chaque séquence s'arrêtant par un blocage :

$$\langle N \rangle = \frac{M - S}{S} \quad (38)$$

- finalement :

$$P(0) = \frac{1}{\langle N \rangle + 1} \quad (39)$$

Données géométriques d'un ballonnement

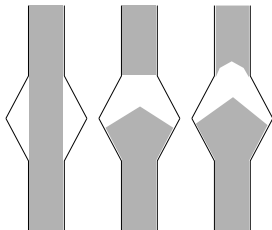
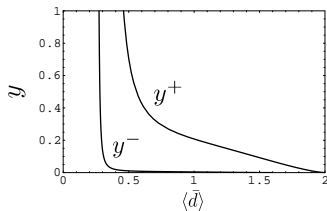
- plage typique :

a	h	δ	r
5,80 mm-9,3 mm	60 mm-200 mm	0 mm-1 mm	4,9 mm

- valeurs typiques :

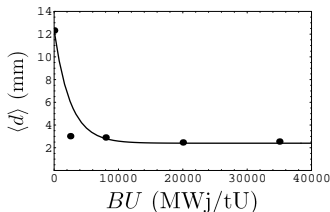
a	h	δ	r
7,35 mm	100 mm	0 mm	4,9 mm

Bornes pour le taux de relocalisation



- borne supérieure y^+ : a et h minimaux, d_o maximal
- borne inférieure y^- : a et h maximaux, d_o minimal
- taille de fragment normalisée : $\langle \bar{d} \rangle = \langle d \rangle / r$
- y diminue quand $\langle \bar{d} \rangle$ augmente :
 - $y^- \simeq 0$ pour $\langle \bar{d} \rangle \simeq 0,7$
 - $y^+ = 0$ pour $\langle \bar{d} \rangle \simeq 2$
- $\Rightarrow y$ est négligeable quand $\langle d \rangle$ est de l'ordre du rayon de la gaine
- $y \simeq 100\%$ pour $\langle \bar{d} \rangle \leq 0,3$

Evolution de la taille des fragments



- $\langle d_v \rangle$: taille des fragments pour le combustible vierge
- $\langle d_v \rangle$ est le rayon de la sphère équivalente de même volume que la pastille initiale :

$$\frac{4}{3}\pi \left(\frac{\langle d_v \rangle}{2} \right)^3 = \pi r^2 L,$$

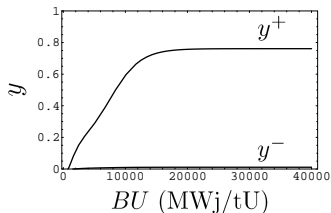
avec L la hauteur de la pastille cylindrique

- la taille des fragments est approchée par une exponentielle décroissante

$$\langle d \rangle = A_3 \left(1 + \left[\frac{\langle d_v \rangle}{A_3} - 1 \right] \exp \left[-\frac{BU}{A_4} \right] \right), \quad (40)$$

avec $A_3 \simeq 2,4$ mm et $A_4 \simeq 2500$ MWj/tU

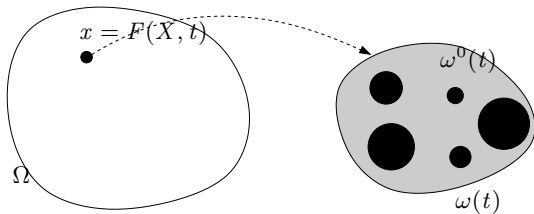
Evolution du taux de relocalisation



- y augmente avec BU
- y n'évolue presque plus pour $BU \geq 20000$ MWj/tU
- y ne dépasse pas 80%
- la borne inférieure sur y n'est pas pertinente dans ce cas : $y \geq 2\%$

Conservation de la masse

- Ω volume de mélange fluide/grains
- en chaque point \vec{x} de Ω , un EV $\omega(t)$ peut être exhibé
- microstructure constitué :
 - d'un fluide occupant un domaine $\omega^0(t)$
 - d'une collection de phases solides (grains) occupant un domaine ω^α ($\alpha = 1, \dots, N_b$)



- partition de $\omega(t)$:

$$\omega(t) = \bigcup_{\alpha=0}^{N_b} \omega^\alpha$$

Conservation de la masse

- notations :

- $|\omega^\alpha|$ le volume de ω^α et m^α sa masse
- $\rho^\alpha = \frac{m^\alpha}{\omega^\alpha}$ la masse volumique de chaque constituant
- \vec{u}^α la vitesse de chaque constituant au point \vec{x}
- $c^\alpha = \frac{|\omega^\alpha|}{|\omega|}$ la fraction volumique de chaque constituant au point \vec{x}

- soit ϕ la fraction volumique du fluide

$$\phi = \frac{|\omega_f|}{|\omega|} = \frac{|\omega^0|}{|\omega|}, \quad c = \frac{|\omega_s|}{|\omega|} = \frac{\sum_1^{N_b} |\omega^\alpha|}{|\omega|} = 1 - \phi. \quad (41)$$

- pour chaque domaine ω^α ($\alpha = 1, \dots, N_b$), la loi de conservation de la masse s'écrit (lemme de transport) :

$$\frac{dm^\alpha}{dt}(\vec{x}) = \int_\omega \frac{\partial(c^\alpha \rho^\alpha)}{\partial t}(\vec{x}) + \vec{\nabla} \cdot (c^\alpha \rho^\alpha \vec{u}^\alpha)(\vec{x}) dV = 0, \quad (42)$$

soit par conséquent :

$$\frac{\partial(c^\alpha \rho^\alpha)}{\partial t}(\vec{x}) + \vec{\nabla} \cdot (c^\alpha \rho^\alpha \vec{u}^\alpha)(\vec{x}) = 0 \quad (43)$$

Conservation de la masse

- pour la phase fluide :

$$\frac{\partial(\phi\rho_f)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\phi\rho_f\vec{u}_f) = 0 \quad (44)$$

- pour la phase solide, la sommation sur $\alpha = 1 \dots N_b$ de l'équation (??) donne :

$$\frac{\partial(c\rho_s)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (c\rho_s\vec{u}_s) = 0, \quad (45)$$

avec :

- ρ_s la masse volumique du solide :

$$\rho_s = \frac{\sum_1^{N_b} \rho^\alpha |\omega^\alpha|}{|\omega_s|} = \frac{\sum_1^{N_b} m^\alpha}{\sum_1^{N_b} |\omega^\alpha|} \quad (46)$$

- \vec{u}_s la vitesse du solide (vitesse barycentrique des grains) :

$$\vec{u}_s = \frac{1}{c\rho_s} \sum_1^{N_b} c^\alpha \rho^\alpha \vec{u}^\alpha = \frac{1}{\sum_1^{N_b} m^\beta} \sum_1^{N_b} m^\alpha \vec{u}^\alpha \quad (47)$$

Vitesse du fluide

- hypothèse : même masse volumique ρ_s pour tous les grains
- l'équation (??) donne alors :

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot ((1 - \phi) \vec{u}_s) = 0 \quad (48)$$

- soit $\vec{u}_{f/s}$ la vitesse relative du fluide par rapport au solide à l'échelle mésoscopique :

$$\vec{u}_{f/s} = \vec{u}_f - \vec{u}_s \quad (49)$$

- $\vec{u}_{f/s}$ étant constant dans la phase fluide, la vitesse relative de l'écoulement à l'échelle de l'EV vaut ainsi :

$$\vec{U}_{f/s} = \phi \vec{u}_{f/s} \quad (50)$$

- en combinant (??) et (??), l'équation de conservation de la masse (??) devient :

$$\frac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[\rho_f \left(\phi \vec{u}_s + \vec{U}_{f/s} \right) \right] = 0 \quad (51)$$

Relation de Kozeny-Carman

- forme générale :

$$\kappa = \frac{1}{6\mathcal{T}} \frac{\phi^3}{S_v^2}, \quad (52)$$

où \mathcal{T} et S_v sont la tortuosité et l'aire spécifique du milieu poreux

- pour un réseau de sphères monodisperse :

$$S_v = \frac{6(1-\phi)}{d} \quad \text{et} \quad \mathcal{T} = \frac{5}{6} \quad (53)$$

- d'où :

$$\kappa = \frac{d^2}{180} \frac{\phi^3}{(1-\phi)^2} \quad (54)$$

- cas polydisperse : d remplacé par le diamètre moyen

$$\frac{\int_{d_{min}}^{d_{max}} \lambda^3 P(\lambda) d\lambda}{\int_{d_{min}}^{d_{max}} \lambda^2 P(\lambda) d\lambda}$$

Validité de la loi de Darcy

- la vitesse du fluide dans les pores doit être assez faible, ce qui se traduit par :

$$Re = \frac{\rho_f \|\vec{u}_{f/s}\| d_H}{\mu} < 1, \quad (55)$$

où d_H désigne le rayon hydraulique des pores.

- par analogie avec un réseau de capillaire, un diamètre hydraulique pour un milieu quelconque peut être défini :

$$d_H = \frac{4\phi}{S_v} \quad (56)$$

- ce qui donne pour les sphères :

$$Re = \frac{2}{3} \frac{\rho_f \phi \|\vec{u}_{f/s}\| d}{\mu(1-\phi)} = \frac{2}{3} \frac{\rho_f \|\vec{U}\| d}{\mu(1-\phi)} = \frac{2}{3} \frac{Re_p}{(1-\phi)}, \quad (57)$$

où Re_p est le nombre de Reynolds particulaire

- condition de validité proposée par Dullien (1979) : $\frac{Re_p}{1-\phi} < 1$

Estimation du nombre de Reynolds

- la vitesse $\vec{U}_{f/s}$ peut-être évaluée grâce à la relation de Richardson-Zaki :

$$\|\vec{U}_{f/s}\| = \|\vec{U}_t\| \phi^{n_{RZ}}, \quad (58)$$

où :

- \vec{U}_t est la vitesse terminale atteinte par une sphère de rayon r tombant en chute libre dans un fluide visqueux (vitesse de Stokes) :

$$\vec{U}_t = \frac{2}{9} \frac{r^2(\rho_s - \rho_f)}{\mu} \vec{g} \quad (59)$$

- $n_{RZ} > 1$ est un exposant qui dépend du nombre de Reynolds terminal :

$$Re_t = \frac{\rho_f \|\vec{U}_t\| d}{\mu} \quad (60)$$

Action du fluide sur les phases solides

- conservation de la quantité de mouvement dans le fluide :

$$\frac{d}{dt} (\rho_f \vec{u}'_f) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}' + \rho_f \vec{g} + \vec{f}_{s \rightarrow f} \quad (61)$$

- inertie, masse du fluide et viscosité négligeables :

$$\int_{\omega} \vec{\nabla} p' dV = \int_{\omega} \vec{f}_{s \rightarrow f} = - \sum_1^{N_b} \vec{F}_{f \rightarrow s}^{\alpha} \quad (62)$$

- le gradient de pression est supposé constant dans l'EV :

$$\int_{\omega} \vec{\nabla} p' (\vec{X}) dV = \int_{\omega} \vec{\nabla} p (\vec{x}) dV = |\omega| \vec{\nabla} p (\vec{x}) \quad (63)$$

- finalement :

$$\sum_1^{N_b} \vec{F}_{f \rightarrow s}^{\alpha} = -|\omega| \vec{\nabla} p (\vec{x}) \quad (64)$$

- hypothèse : les forces exercées sur les phases sont proportionnelles à leur volume
- d'où :

$$\vec{F}_{f \rightarrow s}^{\alpha} = -\frac{|\omega^{\alpha}|}{1 - \phi} \vec{\nabla} p \quad (65)$$

Gaz parfait : formulation variationnelle

- équation d'évolution de la pression pour un gaz parfait :

$$\phi \frac{\partial p}{\partial t} + \phi \vec{u}_s \cdot \vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \cdot \left(p \frac{\kappa(\phi)}{\mu} \vec{\nabla} p \right) + p \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s = 0, \text{ dans } \Omega \quad (66)$$

- conditions aux limites :

$$p = \bar{p}, \text{ sur } \Gamma_D \quad (67)$$

$$\vec{\nabla} p = \vec{0}, \text{ sur } \Gamma_N \quad (68)$$

- formulation variationnelle :

$$\int_{\Omega} \phi q \frac{\partial p}{\partial t} dV + \int_{\Omega} p \frac{\kappa(\phi)}{\mu} \vec{\nabla} q \cdot \vec{\nabla} p dV + \int_{\Omega} q \left(\phi \vec{u}_s \cdot \vec{\nabla} p + p \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s \right) dV = 0, \quad (69)$$

où $q \in \mathcal{D}(\Omega)$ est une fonction test nulle sur Γ_D

Gaz parfait : discrétisation en espace

- discrétisation par la méthode des éléments finis :

$$[C] \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} \right\} + [K] (\{p\}) \{p\} - \{f\} (\{p\}) = 0, \quad (70)$$

où $\{p\}$ est le vecteur des pressions nodales et :

$$[C] = \int_{\Omega} \phi [N]^T [N] dV, \quad (71)$$

$$[K] (\{p\}) = \int_{\Omega} p \frac{\kappa(\phi)}{\mu} [B]^T [B] dV, \quad (72)$$

$$\{f\} (\{p\}) = \int_{\Omega} [N]^T \left(\phi \vec{u}_s \cdot \vec{\nabla} p + p \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s \right) dV, \quad (73)$$

où $[N]$ est la matrice d'interpolation et $[B]$ la matrice des gradients.

- par analogie avec un problème de thermique instationnaire :
 - $[C]$ est la matrice de capacité
 - $[K] (\{p\})$ est la matrice de conductivité
 - $\{f\} (\{p\})$ est le vecteur des flux externes

Gaz parfait : discrétisation en temps

- θ -méthode + matrice de capacité et non-linéarité explicitées :

$$[C]^n \frac{1}{\Delta t} (\{p\}^{n+1} - \{p\}^n) + [K]^m (\{p\}^n) ((1 - \theta)\{p\}^n + \theta\{p\}^{n+1}) = \{f\}^m (\{p\}^n), \quad (74)$$

où

$$[C]^n = \int_{\Omega} \phi^n [N]^T [N] dV, \quad (75)$$

$$[K]^m (\{p\}^n) = \int_{\Omega} p^n \frac{\kappa(\phi^m)}{\mu} [B]^T [B] dV, \quad (76)$$

$$\{f\}^m (\{p\}^n) = \int_{\Omega} [N]^T \left(\phi^n \vec{u}_s^m \cdot \vec{\nabla} p^n + p^n \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s^m \right) dV, \quad (77)$$

et n désigne l'instant au début du pas de temps, $n + 1$ l'instant à la fin du pas de temps et m l'instant milieu $t^m = (1 - \theta)t^n + \theta t^{n+1}$

Gaz parfait : discrétisation en temps

- réécriture de (??) sous la forme :

$$([C]^n + \theta \Delta t [K]^m (\{p\}^n)) (\{p\}^{n+1} - \{p\}^n) = \Delta t (\{f\}^m (\{p\}^n) - [K]^m (\{p\}^n) \{p\}^n) \quad (78)$$

- les quantités sont évaluées à l'instant milieu, par la méthode du point milieu :
 - $[K]^m$ est calculé à partir de $\{\phi\}^m = (1 - \theta)\{\phi\}^n + \theta\{\phi\}^{n+1}$
 - $\{f\}^m$ est calculé à partir de $\vec{u}_s^m = (1 - \theta)\vec{u}_s^n + \theta(1 - \theta)\vec{u}_s^{n+1}$

Equation linéarisée : formulation variationnelle

- équation d'évolution de la pression pour un gaz parfait, linéarisée :

$$\phi \frac{\partial p}{\partial t} - p_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\kappa(\phi)}{\mu} \vec{\nabla} p \right) + p_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s = 0, \text{ dans } \Omega \quad (79)$$

- conditions aux limites :

$$p = \bar{p}, \text{ sur } \Gamma_D \quad (80)$$

$$\vec{\nabla} p = \vec{0}, \text{ sur } \Gamma_N \quad (81)$$

- formulation variationnelle :

$$\int_{\Omega} q \phi \frac{\partial p}{\partial t} dV + p_0 \int_{\Omega} \frac{\kappa(\phi)}{\mu} \vec{\nabla} q \cdot \vec{\nabla} p dV + p_0 \int_{\Omega} q \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s dV = 0, \quad (82)$$

où $q \in \mathcal{D}(\Omega)$ est une fonction test nulle sur Γ_D

Equation linarisée : discrétisation en espace

- discrétisation par la méthode des éléments finis :

$$[C] \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} \right\} + [K] \{p\} - \{f\} = 0, \quad (83)$$

où $\{p\}$ est le vecteur des pressions nodales et :

$$[C] = \int_{\Omega} \phi [N]^T [N] dV, \quad (84)$$

$$[K] = p_0 \int_{\Omega} \frac{\kappa(\phi)}{\mu} [B]^T [B] dV, \quad (85)$$

$$\{f\} = -p_0 \int_{\Omega} [N]^T \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s dV, \quad (86)$$

où $[N]$ est la matrice d'interpolation et $[B]$ la matrice des gradients

- par analogie avec un problème de thermique instationnaire :
 - $[C]$ est la matrice de capacité
 - $[K]$ est la matrice de conductivité
 - $\{f\}$ est le vecteur des flux externes

Equation linarisée : discrétisation en temps

- θ -méthode + matrice de capacité explicitée :

$$[C]^n \frac{1}{\Delta t} (\{p\}^{n+1} - \{p\}^n) + [K]^m ((1 - \theta)\{p\}^n + \theta\{p\}^{n+1}) = \{f\}^m, \quad (87)$$

où n désigne l'instant au début du pas de temps, $n + 1$ l'instant à la fin du pas de temps et m l'instant milieu $t^m = (1 - \theta)t^n + \theta t^{n+1}$.

- réécriture de cette équation sous la forme :

$$([C]^n + \theta \Delta t [K]^m) (\{p\}^{n+1} - \{p\}^n) = \Delta t (\{f\}^m - [K]^m \{p\}^n) \quad (88)$$

- les quantités sont évaluées à l'instant milieu, par la méthode du point milieu :
 - $[K]^m$ est calculé à partir de $\{\phi\}^m = (1 - \theta)\{\phi\}^n + \theta\{\phi\}^{n+1}$
 - $\{f\}^m$ est calculé à partir de $\vec{u}_s^m = (1 - \theta)\vec{u}_s^n + \theta(1 - \theta)\vec{u}_s^{n+1}$

Fluide incompressible : formulation variationnelle

- équation d'équilibre de la pression pour un fluide incompressible :

$$-\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\kappa(\phi)}{\mu} \vec{\nabla} p \right) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s = 0, \text{ dans } \Omega \quad (89)$$

- conditions aux limites :

$$p = \bar{p}, \text{ sur } \Gamma_D \quad (90)$$

$$\vec{\nabla} p = \vec{0}, \text{ sur } \Gamma_N \quad (91)$$

- formulation variationnelle :

$$\int_{\Omega} \frac{\kappa(\phi)}{\mu} \vec{\nabla} q \cdot \vec{\nabla} p \, dV = - \int_{\Omega} q \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s \, dV, \quad (92)$$

où $q \in \mathcal{D}(\Omega)$ est une fonction test nulle sur Γ_D

Fluide incompressible : discrétisation en espace

- discrétisation par la méthode des éléments finis :

$$[K]\{p\} = \{f\}, \quad (93)$$

où $\{p\}$ est le vecteur des pressions nodales et :

$$[K] = \int_{\Omega} \frac{\kappa(\phi)}{\mu} [B]^T [B] dV, \quad (94)$$

$$\{f\} = - \int_{\Omega} [N]^T \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s dV, \quad (95)$$

où $[N]$ est la matrice d'interpolation et $[B]$ la matrice des gradients

- par analogie avec un problème de thermique instationnaire :
 - $[K]$ est la matrice de conductivité
 - $\{f\}$ est le vecteur des flux externes

Fluide incompressible : discrétisation en temps

- équilibre à la fin du pas de temps :

$$[K]^{n+1} \{p\}^{n+1} = \{f\}^{n+1}, \quad (96)$$

où $n + 1$ désigne l'instant à la fin du pas de temps

- cas particulier où $\Gamma_D = \emptyset$:

- condition de compatibilité : $\int_{\Gamma} \vec{u}_s \cdot \vec{n} dS = 0$
- perte de solution unique
- contrainte supplémentaire :

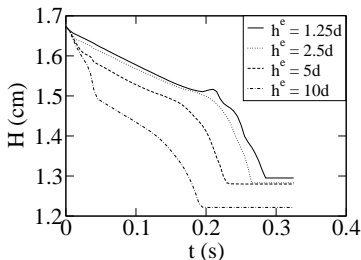
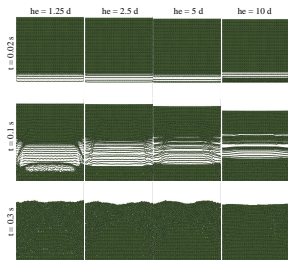
$$\int_{\Omega} p dV = |\Omega| \bar{p}, \quad (97)$$

soit en discret :

$$[N]^T \{p\} = |\Omega| \bar{p} \quad (98)$$

- résolution par la méthode des moindres carrés

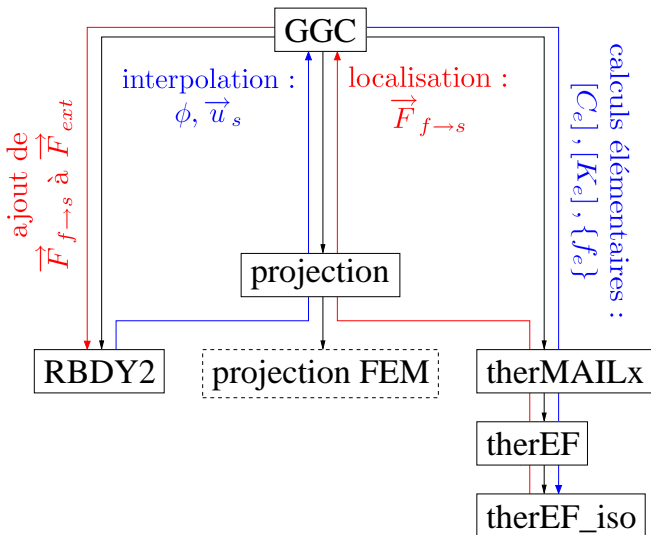
Influence de la taille de maille



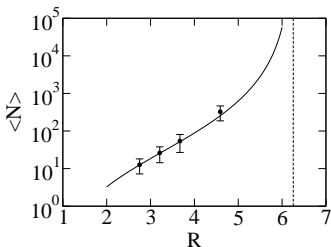
- dans tous les cas après un régime transitoire H , décroît linéairement avec une vitesse constante, jusqu'à ce que la bulle atteigne la surface libre
- plus h^e est petit, mieux les petites oscillations et donc l'apparition des colonnes sont captées
- graphes pour $h^e = 1,25d$ et $h^e = 2,5d$ quasi-identiques \Rightarrow effets de taille finie négligeables pour $h^e < 2,5d$
- choix de h_e proposé par Vinningland pertinent :

$$h^e = 2,5d \quad (99)$$

Architecture



Approche milieu continu



- un gradient de pression constant peut être superposé à l'accélération de gravité :

$$g^* = g + \frac{1}{\rho_s c} \frac{\Delta p_f}{\Delta z} \quad (100)$$

- $\Delta p_f / \Delta z$ choisi correspond à $g^* = 10g$
- les calculs du cas sans gaz sont refaits avec l'intensité de accélération de gravité modifiée g^*
- l'estimation obtenue dans le cas sec est encore pertinente
- conséquence directe de la normalisation