



HAL
open science

Prise en compte de la variabilité dans le calcul de structures avec contact

Jérémie Bellec

► **To cite this version:**

Jérémie Bellec. Prise en compte de la variabilité dans le calcul de structures avec contact. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2008. Français. NNT : . tel-00472143

HAL Id: tel-00472143

<https://theses.hal.science/tel-00472143>

Submitted on 9 Apr 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ENSC-2008/110



THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Présentée par

Jérémy Bellec

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Domaine

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Sujet de la thèse

**Prise en compte de la variabilité dans le calcul de
structures avec contact**

Soutenue à Cachan le 20 Juin 2008 devant le jury composé de :

Pierre Alart	Université Montpellier 2	Président
Pedro Diez	UPC	Rapporteur
Nicolas Carrère	ONERA	Rapporteur
Bruno Sudret	EDF	Examineur
Alain Pyre	SAFRAN	Examineur
Pierre Ladevèze	ENS de Cachan	Directeur de thèse
David Néron	ENS de Cachan	Codirecteur de thèse

LMT-Cachan

ENS Cachan / CNRS / UPMC / PRES UniverSud Paris
61 avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex, France

Je voudrais remercier l'ensemble des membres du jury pour leur participation à ma soutenance, et particulièrement P. Diez et N. Carrère pour avoir accepté d'être rapporteurs de mon travail.

Je voudrais remercier Pierre Ladevèze pour son encadrement adapté à mon besoin d'autonomie, et aussi pour son soutien à mes projets futurs de valorisation, ainsi que David Néron pour son accompagnement et sa réactivité durant toute la durée de ces travaux.

Les résultats obtenus dans mes travaux sont dus à des développements logiciels que j'ai pu réaliser grâce à la cellule logiciel du LMT-Cachan, et aux premiers doctorants ayant accepté les challenges et les contraintes liés à la mutualisation des implémentations. Je voudrais remercier particulièrement Hugo Leclerc, David Violeau et Alain Caignot qui sont à l'origine de la base logicielle sur laquelle j'ai « greffer » mes développements.

Un grand merci aussi à l'ensemble des membres du LMT-Cachan qui ont su créer cette ambiance particulièrement conviviale, accueillante et cette entraide qui m'ont permis, pendant ces années de thèse, de m'épanouir tant scientifiquement que socialement. Enfin merci à ma famille, ma femme Audrey et ma fille Sarah qui m'ont toujours soutenu et qui me donnent des raisons d'envisager encore de beaux projets professionnels et personnels.

Table des matières

Table des matières	i
Introduction	1
1 Objectifs et analyse de l'existant	5
1.1 Objectifs et variables sensibles	7
1.1.1 Paramètres matériaux	8
1.1.2 Paramètres géométriques	9
1.1.3 Paramètres de chargements	10
1.2 Modélisation mathématique des paramètres	11
1.2.1 Peu de données	11
1.2.2 Données statistiques	13
1.3 État de l'art sur les méthodes probabilistes	23
1.3.1 Problème de référence	23
1.3.2 Résolution du problème de référence	25
1.3.3 Méthode de Monte Carlo	26
1.3.4 Méthodes non intrusives	27
1.3.5 Méthodes intrusives	31
1.4 Conclusion partielle	35
2 Problème de contact	37
2.1 Modélisation déterministe d'un problème de contact	39
2.1.1 P0 : partitionnement du milieu	40
2.1.2 P1 : séparation des équations du problème	43
2.1.3 P2 : méthode de résolution itérative	43
2.2 Modélisation stochastique d'un problème de contact	44
2.2.1 Formulation du problème stochastique	44
2.2.2 Résolution du problème stochastique de référence	45
2.2.3 Modélisation des paramètres variables dans ce formalisme	46
2.3 Problématique industrielle	49
2.3.1 Description de l'exemple aube-disque	50

2.3.2	Solution approchée	52
2.3.3	Distribution de référence	53
2.3.4	Résultats du calcul probabiliste	53
2.4	Conclusion partielle : estimer la qualité de la solution	55
3	Estimateur d'erreur dans le cadre stochastique	57
3.1	Estimation d'erreur globale dans le cadre déterministe	59
3.1.1	Méthodes relatives aux problèmes linéaires en statique	60
3.1.2	Méthodes relatives aux problèmes de contact en statique	72
3.1.3	L'erreur en relation de comportement pour le contact	76
3.2	Estimateur d'erreur dans le cadre stochastique	79
3.2.1	Modèle stochastique de référence	79
3.2.2	Définition de l'estimateur d'erreur	79
3.2.3	Construction des champs admissibles	80
3.2.4	Contributions par entités géométriques	83
3.3	Résultats numériques	84
3.3.1	Discrétisations géométriques et stochastiques	84
3.3.2	Evolution de l'erreur estimée	86
3.3.3	Indice d'efficacité	88
3.3.4	Comparaison des interpolations	89
3.4	Conclusion partielle : indicateurs spécifiques	90
4	Indicateurs d'erreur spécifiques et calcul adaptatif	91
4.1	Séparation des contributions stochastique et géométrique	93
4.1.1	Principe	93
4.1.2	Définition des indicateurs spécifiques	94
4.1.3	Résultats sur l'exemple aube-disque	97
4.2	Technique adaptative	102
4.2.1	Principe	102
4.2.2	Étude sur l'exemple	105
4.3	Conclusion partielle : mise en œuvre industrielle	109
5	Mise en œuvre sur un exemple industriel	111
5.1	Implémentation des méthodes	113
5.1.1	Implémentation dans la plateforme LMT	113
5.1.2	Outil industriel : calculs paramétriques avec OPTIMUS	114
5.1.3	Outil dédié : LATIN multirésolution	116
5.1.4	Évolution : méthode adaptative	116
5.2	Description du problème	117
5.2.1	Problématique industrielle	117
5.2.2	Objectifs du calcul	120

5.2.3	Première modélisation 2D	120
5.2.4	Résultats	125
5.2.5	Modélisation 3D	130
5.2.6	Résultats	133
5.3	Conclusion partielle	135
	Conclusion	137
	Bibliographie	141

Introduction

Les acteurs du secteur de la construction mécanique, et principalement les constructeurs de l'aéronautique et de l'aérospatiale, ont des défis importants à relever en terme de consommation, de coûts ou encore d'innovation. Ces contraintes de marché imposent aux constructeurs d'optimiser la durée et le coût global de conception, et l'une des clés pour répondre à ces enjeux est d'accorder une place plus importante au « virtual testing » dans cette phase de conception. C'est pourquoi, la tendance actuelle est de remplacer ou d'enrichir progressivement les prototypes par des modèles numériques qui permettent une meilleure compréhension du comportement des structures. Dans le même temps, il est nécessaire de faire évoluer les modèles mathématiques, les modèles de matériaux et les méthodes de calcul pour mieux représenter la complexité de la réalité (matériaux composites, variabilité des propriétés, taille et géométrie des défauts...) afin de mieux répondre aux normes de certification.

Le programme de recherche MAIA, piloté par le groupe SAFRAN en partenariat avec des laboratoires universitaires, illustre bien cette volonté de développement d'outils numériques dans plusieurs domaines de compétence : dynamique, contact, thermique, calcul robuste... Ce travail de thèse s'inscrit dans ce dernier domaine (MAIA MM1 : calcul robuste). Le thème de ce module est issu du constat suivant : alors que la représentation par des valeurs moyennes a permis une industrialisation importante des méthodes de conception et de production, cette dernière ne permet pas de représenter une réalité beaucoup plus complexe, beaucoup plus variable. Cette variabilité est pourtant à l'origine des nombreux modes de fonctionnement, de défaillance et de rupture des structures réelles. L'une des exigences des constructeurs est donc d'introduire et de propager cette variabilité et ces méconnaissances dans le calcul de structures afin d'obtenir un dimensionnement plus juste et des coefficients de sécurité moins importants.

De manière générale, la prise en compte de la variabilité dans le calcul passe par des études de sensibilité et des calculs paramétriques. Ces techniques nécessitent de réaliser un grand nombre de calculs successifs et sont donc très coûteuses en temps CPU. L'évolution permanente des moyens de calcul (matériel informatique, puissance des processeurs, taille de la mémoire...) permet déjà d'utiliser les logiciels et les méthodes usuels sur des problèmes de plus en plus gros, notamment en pa-

rallélisant les calculs. Cependant, l'évolution de ces méthodes reste une condition indispensable pour calculer des modèles de structures à plusieurs millions de degrés de liberté, en non linéaire, sous des chargements complexes et avec des paramètres variables. L'enjeu du calcul robuste englobe donc celui du calcul intensif, c'est pourquoi nous aborderons dans ce travail des thèmes tels que la sous-structuration, le multiéchelle, la réduction de modèle, la multirésolution et le calcul adaptatif. De plus, comme nous ne pouvons dissocier la robustesse d'un modèle, ou d'une méthode, de sa qualité, les thèmes liés au recalage, à la vérification et au calcul d'erreur seront aussi associés à celui du calcul robuste.

Des évolutions méthodologiques sont nécessaires, mais elles sont également soumises à des contraintes. L'utilisation de codes ou de plateformes standards, sur lesquels les ingénieurs ont reçu une formation, qui ont été testées et validées sur de nombreux cas tests, est l'une des conditions nécessaires pour une première implantation réussie des méthodes modernes dans un contexte industriel. Ce constat explique pourquoi nous avons choisi, dans ce travail, de nous intéresser principalement à des méthodes dites « non intrusives » (Sudret et al. [2004, 2005, 2006]). Elles permettent d'introduire un formalisme adapté aux problèmes probabilistes tout en réutilisant des logiciels du commerce.

Pour ce premier pas dans la thématique du calcul robuste, l'objectif choisi pour ce travail de thèse est de prendre en compte la variabilité des paramètres liés au contact. Nous distinguons ici deux difficultés majeures :

- la caractérisation des lois de variation des différents paramètres et des sollicitations ;
- la mise en place de modèles numériques adaptés à la prise en compte de ces variabilités.

Ce travail est essentiellement centré autour de la seconde problématique.

Sur un exemple qui servira de fil conducteur à ce travail, des résultats obtenus à l'aide de méthodes probabilistes classiques (Ghanem and Spanos [1991], Kleiber [1992], Belytschko [1986]) ont montré, par comparaison avec une solution de référence sur le domaine stochastique, que des erreurs significatives peuvent être commises lorsque les problèmes traités sont non linéaires. Nous avons déduit de ces résultats qu'il était nécessaire d'estimer quantitativement la qualité des modèles stochastiques obtenus. Pour répondre à cette exigence, nous avons cherché à définir un estimateur d'erreur dans le cadre stochastique.

Cet estimateur d'erreur, basé sur la notion d'erreur en relation de comportement (Ladevèze and Pelle [2004]), permet d'évaluer la qualité globale d'un modèle approché sur l'espace géométrique (approximation éléments finis) ainsi que sur l'espace stochastique pour un ensemble d'approximations stochastiques de type Galerkin (Deb et al. [2001], Matthies and Keese [2005]). Nous proposerons en outre des indi-

cateurs spécifiques à chaque contribution, géométrique et stochastique, afin de gérer séparément la dépendance sur chacun de ces espaces. La donnée de ces indicateurs nous permettra de déterminer une technique adaptative prédictive sur l'espace stochastique qui, dans le cadre des méthodes non intrusives, conduira au choix du ou des futurs points de collocation permettant de minimiser l'erreur stochastique globale.

Ce mémoire est divisé en cinq parties.

Dans la première partie, nous allons distinguer les différents types de paramètres variables à modéliser et répertorier un certain nombre de moyens permettant d'obtenir des informations statistiques sur ceux-ci. Nous introduirons différentes modélisations mathématiques de ces paramètres incertains, puis nous présenterons des méthodes permettant de traiter ces incertitudes (Moore [1966], Zedeth [1978], Belytschko [1986], Ghanem and Spanos [1991], Kleiber [1992]). Une attention particulière sera portée aux méthodes probabilistes (Ghanem and Spanos [1991, 2003], Matthies [2003], Sudret et al. [2005]).

Dans la deuxième partie, nous analyserons sur l'exemple les résultats obtenus par des méthodes probabilistes classiques en les comparant avec une solution de référence sur le domaine stochastique. Dans cet exemple, nous utiliserons le formalisme sous-structuré de la méthode LATIN (Ladevèze [1999]) pour résoudre chaque calcul déterministe.

Nous introduirons dans la troisième partie l'estimateur d'erreur dans le cadre stochastique (Ladevèze and Pelle [2004], Louf et al. [2003], Ladevèze and Florentin [2006]). Des résultats numériques sur le même exemple permettront de comparer cet estimateur avec une erreur de référence (erreur entre le modèle approché et une solution de référence) et de valider son utilisation. Nous verrons comment nous pourrions obtenir des indicateurs d'erreur globaux sur chacune des entités de la structure à partir du calcul de l'erreur de manière sous-structurée.

Pour affiner ce calcul d'erreur, nous séparerons, dans la quatrième partie, la part de l'erreur due à l'approximation sur l'espace stochastique et celle due à l'approximation sur l'espace géométrique en définissant des indicateurs spécifiques à chacune de ces contributions. Nous utiliserons ces outils pour définir une technique de calcul adaptative spécifique aux problèmes stochastiques. Les premiers résultats, ainsi que le détail de la méthode, seront illustrés sur l'exemple.

Enfin, dans la cinquième partie, nous appliquerons ces techniques sur un problème complexe issu des problématiques SNECMA. L'utilisation de méthodes non intrusives, la minimisation du nombre de calculs et le choix d'une méthode stochastique performante seront indispensables pour obtenir des résultats fiables sur ce problème.

Chapitre 1

Objectifs et analyse de l'existant

Dans ce premier chapitre, nous allons faire le point sur les problématiques proposées par SNECMA dans le cadre du programme MAIA MM1 (calcul robuste) en terme de modélisation et d'étude de la variabilité, avant de répertorier un certain nombre de moyens permettant d'obtenir des informations statistiques sur cette variabilité. Nous introduirons différentes modélisations mathématiques de ces paramètres incertains, puis nous présenterons des méthodes permettant de traiter ces incertitudes.

Sommaire

1.1	Objectifs et variables sensibles	7
1.1.1	Paramètres matériaux	8
1.1.2	Paramètres géométriques	9
1.1.3	Paramètres de chargements	10
1.2	Modélisation mathématique des paramètres	11
1.2.1	Peu de données	11
1.2.2	Données statistiques	13

1.3	État de l'art sur les méthodes probabilistes	23
1.3.1	Problème de référence	23
1.3.2	Résolution du problème de référence	25
1.3.3	Méthode de Monte Carlo	26
1.3.4	Méthodes non intrusives	27
1.3.5	Méthodes intrusives	31
1.4	Conclusion partielle	35

1.1 Objectifs et variables sensibles

Cette thèse s'inscrit dans le cadre du programme de recherche MAIA MM1 « calcul robuste » piloté par SAFRAN. Ce que nous désignons par modélisation robuste est une modélisation qui prend en compte l'influence de l'ensemble des paramètres importants et de leurs variations. Cependant, le nombre des paramètres intervenant dans un modèle de structure complexe peut être très important, et il semble impossible de tous les assimiler dans un calcul probabiliste. Il est donc nécessaire de faire un compromis, un choix parmi les paramètres variables que nous voulons modéliser. Dans cette perspective, nous avons axé notre étude autour des problèmes de contact en estimant que les principales méconnaissances dans l'étude d'assemblages complexes trouvaient leurs sources à ce niveau. Une application concrète pour SNECMA est la modélisation des turbines Haute Pression (figure 1.1).

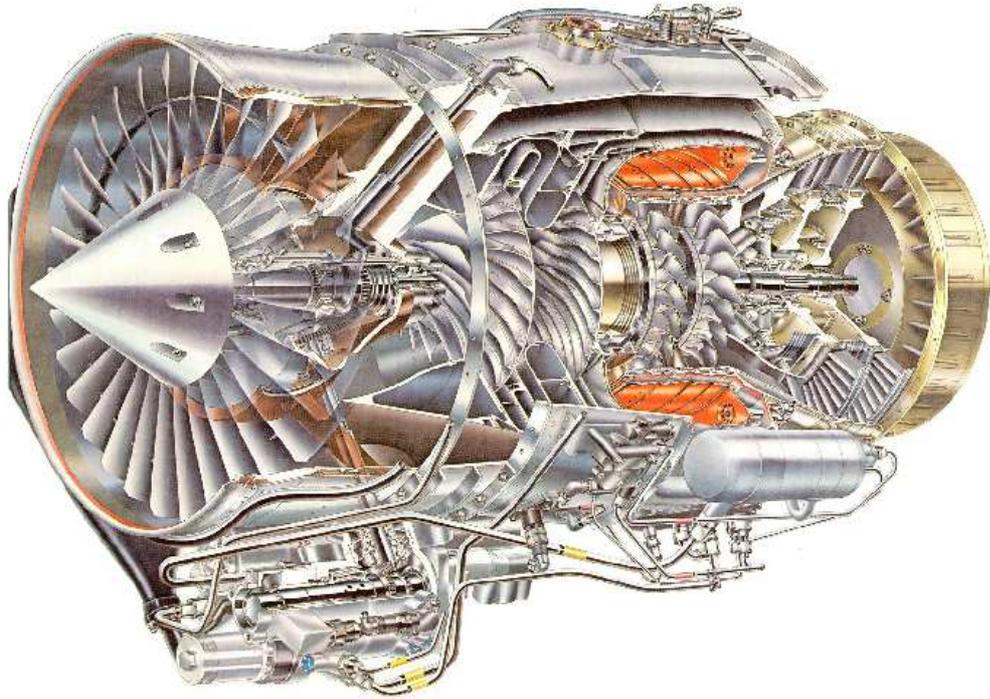


Figure 1.1 – Réacteur

La partie mobile de ces turbines est constituée, entre autre, d'un assemblage entre une multitude d'aubes et un disque lié à l'axe de rotation du moteur. Plusieurs illustrations de géométries possibles pour cet assemblage sont données sur la figure

1.2.



Figure 1.2 – Différents types de pieds de pales

Dans la suite, nous avons séparé l'ensemble des paramètres variables que nous considérons comme influents en trois groupes :

- les paramètres matériaux : coefficient de frottement, module d'Young... ;
- les paramètres géométriques : cotes, défauts de forme, congés... ;
- les chargements extérieurs.

Pour chacun de ces groupes, nous allons discuter des différentes techniques permettant d'obtenir des données sur ces variables.

1.1.1 Paramètres matériaux

1.1.1.1 Exemple

Les variations des propriétés des matériaux d'une pièce à l'autre sont essentiellement dues aux procédés de fabrication tels que le moulage, l'emboutissage... Ils peuvent entraîner des disparités de la porosité du matériau à certains endroits par exemple, et donc une dispersion des propriétés mécaniques de la pièce (module d'Young, contrainte à la rupture, masse volumique). Sur les turbine HP, au niveau des zones de contact entre les aubes et le disque, un lubrifiant solide est déposé en fine couche pour garantir certaines propriétés de frottement (figure 1.3). L'usure de cette couche au cours des cycles de fonctionnement de la structure entraîne une forte variation du coefficient de frottement sur les zones de contact, qui peut prendre des valeurs allant de 0,2 à 0,8.

1.1.1.2 Obtention des données

De manière générale, l'obtention d'informations sur les données matériaux passe par des séries d'essais et de résolutions de problèmes inverses. Ces campagnes sont longues et ont un coût élevé. De plus, les résultats obtenus dépendent fortement de l'environnement extérieur pendant l'essai. Ils ne peuvent donc être exploités que sous le même type de conditions, ce qui rend difficile l'obtention de données statistiques

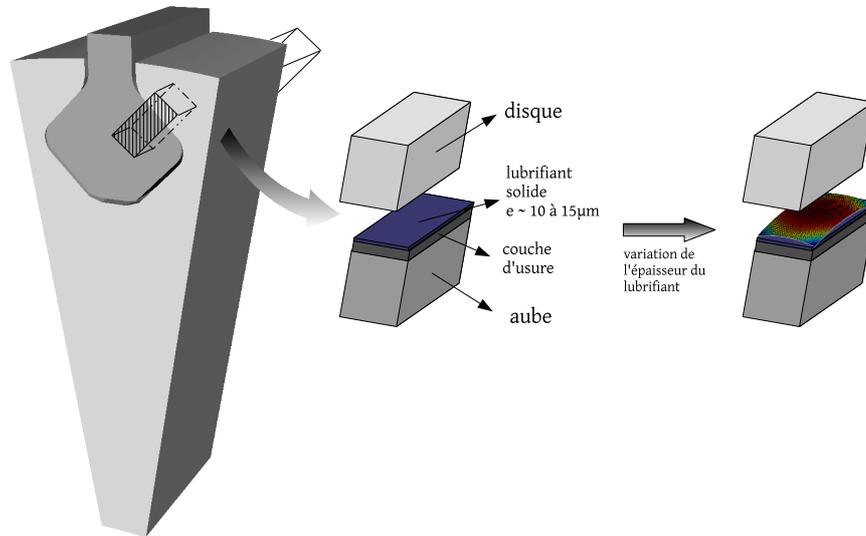


Figure 1.3 – Variations des caractéristiques de la couche de lubrifiant

fiables sur ces paramètres. Il est cependant possible que ces mesures soient facilitées dans l'avenir par l'apparition de nouvelles techniques de mesure de champs, et par la simulation numérique des méthodes de production (moulage, forgeage). Ces simulations permettent déjà à certains fondeurs d'estimer les zones où la porosité sera plus élevée en fonction de la coulée.

1.1.2 Paramètres géométriques

1.1.2.1 Exemple

Lors d'un processus de fabrication, toutes les pièces sortant de la chaîne ne présentent pas exactement les mêmes caractéristiques géométriques. Sur le pied de pale présenté précédemment, la dispersion des paramètres géométriques est essentiellement due à la méthode de fabrication choisie (ici l'usinage). Les causes de cette variabilité peuvent être diverses :

- le positionnement des pièces ;
- l'usure de outils ;
- les réglages de la machine...

Ceci entraîne une dispersion des cotes autour de leur valeur nominale, ou encore des défauts de formes sur les surfaces de contact.

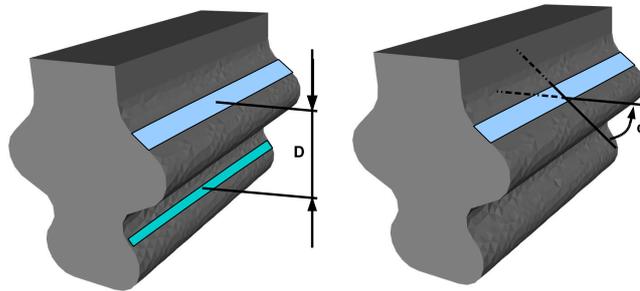


Figure 1.4 – Exemple : variations de l'écart entre les deux portées d'un pied sapin

1.1.2.2 Obtention des données

La connaissance de ces causes peut permettre à un expert d'estimer les variations de certains paramètres. Pour les autres, des mesures sur un grand nombre d'échantillons sont nécessaires. Il est important de remarquer ici que, souvent, ces mesures existent et sont exploitées dans le cadre de la Maîtrise Statistique des Procédés (MSP) pour valider ou non la conformité du processus de fabrication.

Les fabricants ont donc déjà une bonne connaissance des dispersions caractéristiques dues au mode de fabrication choisi, ou à la machine qu'ils utilisent. De plus, les progrès dans la modélisation numérique des procédés de fabrication permet aussi une meilleure compréhension de ces causes de dispersions. Les données obtenues par la MSP sont cependant rarement transmises aux bureaux d'études et donc peu prises en compte dans la phase de conception.

1.1.3 Paramètres de chargements

1.1.3.1 Exemple

Les variations de chargement que nous souhaitons étudier dans les études de fiabilité sont souvent liées à des phénomènes rares :

- rupture d'une aube ;
- choc avec un objet dur ;
- phénomènes vibratoires contraignants (résonnances locales proches de zones sensibles comme les cartes électroniques par exemple)...

1.1.3.2 Obtention des données

Pour obtenir des informations sur les chargements extérieurs, il est courant de se baser sur des retours d'expériences et des mesures *in situ* (mesure en vol) lorsque

c'est possible. Pour les événements rares, les tests en soufflerie ou en laboratoire sont souvent le seul moyen d'obtenir des données assez nombreuses pour les caractériser. Dans le cas des excitations vibratoires il est aussi possible de récupérer des modes d'excitation par des techniques d'analyse modale opérationnelle par exemple, puis de recréer en partie cet environnement vibratoire en laboratoire à l'aide de pots vibrants ou d'excitateurs piézoélectriques. En général, lorsque les mesures en vol ne sont pas possibles ou sont insuffisantes, il est difficile d'obtenir des informations statistiques sur les chargements extérieurs, et c'est un avis d'expert qui permet de choisir la modélisation appropriée.

1.2 Modélisation mathématique des paramètres

La quantité d'informations disponibles sur les paramètres d'intérêt peut donc être obtenues de différentes manières :

- par avis d'experts ;
- par des séries d'essais ;
- par des mesures sur un certains nombre d'échantillons...

Sur chaque paramètre, la qualité de ces informations peut être plus ou moins précises :

- intervalle de variation ;
- intervalle de variation assorti d'un certain degré de confiance (avis d'expert) ;
- lois statistiques sur les variations.

Nous chercherons, le plus souvent, à obtenir des lois statistiques sur les paramètres. Cependant, dans le secteur de la construction aéronautique, les séries ne sont en général pas assez importantes pour déterminer ces lois. Selon la quantité de données obtenues, les modèles mathématiques associés à une variable seront différents. Nous répertorions dans la suite les représentations les plus courantes selon la quantité d'information disponible.

1.2.1 Peu de données

De nombreux problèmes contiennent des informations vagues, imprécises ou qualitatives qui se prêtent mal à une modélisation probabiliste. Les approches par intervalles et par ensembles flous sont une réponse à la prise en compte de telles incertitudes.

1.2.1.1 Arithmétique des intervalles

Dans cette modélisation, nous représentons un paramètre p par son intervalle de variation (figure 1.5). La réponse du système est aussi exprimée sous forme d'inter-

valle (Moore [1966]).



Figure 1.5 – Intervalle de variation

Les avantages du calcul par intervalles apparaissent dès lors que nous sommes confrontés à des données incertaines dont nous ne savons évaluer que les bornes. Pour les problèmes linéaires, cette méthode permet d'encadrer la solution entre des bornes fiables.

Les inconvénients sont malheureusement assez nombreux : la solution obtenue devient de plus en plus pessimiste à mesure que le nombre de paramètres augmente, l'intervalle solution devenant très grand, voire infini, il devient inutilisable.

1.2.1.2 Approche par ensembles flous (*Fuzzy Set Theory*)

L'approche par ensembles flous a été introduite par Z. Lofti en 1965 (et repris plus tard dans Zadeh [1978, 1983]). Cette approche a connu un gros succès dans les années 80-90 au Japon qui commercialisait 80% de la production mondiale des produits de conception « flous ».

a. Définition • Soit une variable x et un univers de référence U . Un sous-ensemble flou A est défini par une fonction d'appartenance $\mu(x)$ qui décrit le degré avec lequel l'élément x appartient à A (figure 1.7).

b. Théorie classique (intervalle de variation) • Nous pouvons faire un lien avec la théorie classique des intervalles. Dans cette théorie, un élément x appartient complètement ou n'appartient pas au sous-ensemble A :

$$\mu(x) : \begin{cases} \mu(x) = 1 & \text{si } x \in A \\ \mu(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.1)$$

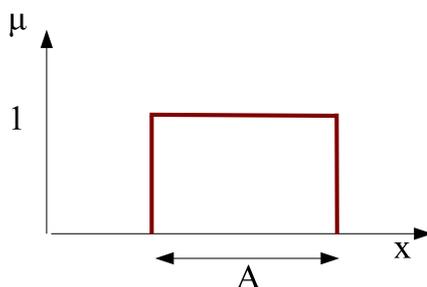


Figure 1.6 – Théorie classique

c. Théorie floue • Dans l'approche par ensembles flous, un élément x peut appartenir partiellement au sous ensemble A :

$$\mu(x) : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1] \\ x \longmapsto \mu(x) \end{cases} \quad (1.2)$$

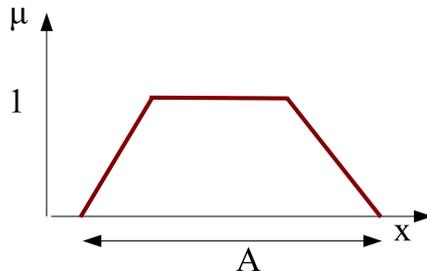


Figure 1.7 – Théorie Floue

La modélisation « floue » est plus complète que la modélisation par intervalles. Elle permet d'ajouter, sur l'intervalle de définition, une information supplémentaire qui représente un degré de confiance ou d'appartenance donné, par exemple, par un avis d'expert (figure 1.7). L'avantage de cette approche est que nous pouvons obtenir des bornes associées à un degré de confiance. Ainsi, la plage de variation de la solution, pour ce degré de confiance, reste plus raisonnable.

1.2.2 Données statistiques

Les paramètres que nous souhaitons décrire sont de trois sortes :

1. les paramètres scalaires (longueur, température...) qui sont modélisés par des variables aléatoires ;
2. les paramètres vectoriels (déplacements...) qui sont modélisés par des vecteurs aléatoires ;
3. les paramètres de type champ (module d'Young dans un solide...) qui sont modélisés par des champs aléatoires.

Nous rappelons ici quelques propriétés de base de ces différentes grandeurs tirées de (Metivier [1989]).

1.2.2.1 Variables aléatoires

Une variable aléatoire continue X peut être définie comme une fonction entre un espace des événements élémentaires Θ et l'ensemble des réels \mathbb{R} . Les éléments images de Θ par X sont appelés réalisations de la variable aléatoire X . À l'espace des événements élémentaires Θ est associé une mesure p appelée loi de probabilité et une σ -algèbre \mathcal{F} qui est l'ensemble de tous les événements « intéressants » obtenus à partir des événements élémentaires θ .

a. Mesure de probabilité • Une mesure de probabilité p sur (Θ, \mathcal{F}) est une fonction $p : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ telle que :

1. $p(\emptyset) = 0, \quad p(\Theta) = 1 ;$
2. si $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ est un ensemble dénombrable d'événements disjoints, c'est-à-dire si $(A_i \cap A_j = \emptyset) \quad \forall i \neq j$, alors :

$$p\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i p(A_i) \quad (1.3)$$

Le triplet (Θ, \mathcal{F}, p) définit alors un espace probabilisé.

Remarques

- L'introduction d'une variable aléatoire permet à tout intervalle, éventuellement réduit à un point, de représenter un événement.
- La définition d'une variable aléatoire permet d'attribuer une probabilité P à tout intervalle A identifié à l'événement dont il est l'image.

$$P(X \in A) = p(\{\theta \in \Theta : X(\theta) \in A\})$$

b. Fonction de répartition • Nous appelons fonction de répartition de X la fonction :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow [0, 1] \\ t & \longmapsto F(t) = P(X < t) = p(\{\theta \in \Theta : X(\theta) < t\}) \end{cases}$$

En pratique, une variable aléatoire est complètement déterminée par la donnée de sa fonction de répartition F . Nous étudierons souvent des variables aléatoires dont la fonction de répartition est donnée sans préciser sur quel espace Θ elle est définie.

c. Densité de probabilité • Une variable aléatoire X est continue s'il existe une fonction densité $f(x)$ (*pdf : probability density function*) telle que :

$$P(X \in A) = \int_A f(x)dx, \quad (\forall A \in \mathcal{R})$$

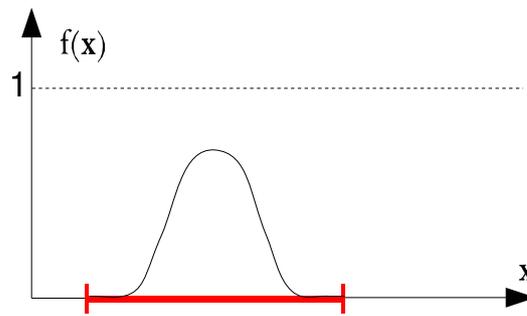


Figure 1.8 – Loi de densité de probabilité

avec \mathcal{R} appelée tribu de Borel de \mathbb{R} contenant tous les intervalles de la forme $[a, b], [a, b[,]a, b],]a, b[\quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons la relation suivante entre fonction de répartition et densité :

$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

d. Mesures d'une variable aléatoire continue •

Espérance :

$$E(X) = \langle X \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$$

Moment d'ordre k :

$$\mu_k = E(X^k)$$

Moment centré d'ordre k :

$$m_k = E((X - \mu_1)^k)$$

Les principales valeurs caractéristiques d'une variable aléatoire X sont :

- sa *moyenne* ou son *espérance* $E(X)$;
- sa *variance* V_X qui correspond au moment centré d'ordre 2 : $V_X = m_2 = E((X - E(X))^2)$;
- son *écart-type* σ_X qui correspond à la racine carrée de la variance ;
- son coefficient de variation $\delta_X = \frac{\sigma_X}{E(X)}$.

1.2.2.2 Vecteurs aléatoires

Généralement, plusieurs variables aléatoires interviennent simultanément. Pour la modélisation, ces variables sont regroupées dans un vecteur aléatoire pour lequel nous allons préciser :

- une fonction densité de probabilité (*joint probability density function*) ;
- une fonction de répartition (*joint cumulative distribution function*).

Notons $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]$ un vecteur de variables aléatoires prenant ses valeurs dans \mathbb{R}^n :

$$(\Theta, \mathcal{F}, p) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n, P_{\mathbf{X}})$$

- \mathcal{R}^n est la tribu de Borel de \mathbb{R}^n , engendrée par les pavés de \mathbb{R}^n de la forme :

$$]-\infty, a_1] \times \dots \times]-\infty, a_n] \quad (a_i \in \mathbb{R})$$

- $P_{\mathbf{X}}$ est une mesure de probabilité de \mathcal{R}^n vers $[0, 1]$.

a. Fonction de répartition • La fonction de répartition de \mathbf{X} définie sur (Θ, \mathcal{F}, p) est la fonction :

$$F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$$

telle que :

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = P_{\mathbf{X}}(\mathbf{X} \leq \mathbf{t}) = p(\{\theta \in \Theta : \mathbf{X}(\theta) \leq \mathbf{t}\}), \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$$

Remarque : L'événement $\{\theta \in \Theta : \mathbf{X}(\theta) \leq \mathbf{t}\}$ sera noté en abrégé : $\{\mathbf{X} \leq \mathbf{t}\}$.

b. Densité de probabilité • La densité de probabilité de ce vecteur aléatoire est définie par :

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^n F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$$

Elle possède les propriétés suivantes :

- $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \geq 0$
- $\int_{\mathbb{R}^n} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$
- $p(a_1 < X_1 < b_1, \dots, a_n < X_n < b_n) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$

Ce qui a pour conséquence que :

$$p(\mathbf{X} \in A) = P_{\mathbf{X}}(A) = \int_A f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall A \text{ domaine de } \mathbb{R}^n$$

b.a. Loi marginale • La loi marginale de X_i est définie par :

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n$$

b.b. Loi conditionnelle • Deux variables aléatoires peuvent être indépendantes ou non. Afin de caractériser cette dépendance, nous définissons la loi conditionnelle qui permet, connaissant les caractéristiques d'une variable aléatoire X_j , de décrire l'évolution de la variable aléatoire X_i compte tenu de ces caractéristiques. La loi conditionnelle correspond donc à la loi de $(X_i | X_j = x_j)$. La densité de probabilité conditionnelle de X_i sachant X_j est donnée par :

$$f_{X_i|X_j}(x_i | x_j) = \frac{f_{X_i, X_j}(x_i, x_j)}{f_{X_j}(x_j)} \quad (1.4)$$

X_i et X_j sont *indépendantes* si leur lois conditionnelles égalent leur lois marginales. Autrement dit, si la connaissance de la valeur prise par la variable aléatoire X_j n'influe pas sur la loi de X_i et réciproquement. Pour les densités de probabilité conditionnelles, ceci conduit à la propriété suivante :

$$f_{X_i, X_j}(x_i, x_j) = f_{X_i}(x_i) f_{X_j}(x_j) \quad \forall (x_i, x_j) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.5)$$

c. Mesures d'un vecteur aléatoire continue •

Moyenne de \mathbf{X} :

$$E(\mathbf{X}) = \langle \mathbf{X} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Matrice de corrélation :

$$R_{\mathbf{X}} = E(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T) = \begin{bmatrix} E(X_1 \cdot X_1) & \cdots & E(X_1 \cdot X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_n \cdot X_1) & \cdots & E(X_n \cdot X_n) \end{bmatrix}$$

Matrice de covariance : Cette matrice correspond à la matrice de corrélation de la variable aléatoire centrée.

$$C_{\mathbf{X}} = E\left([\mathbf{X} - E(\mathbf{X})] \cdot [\mathbf{X} - E(\mathbf{X})]^T\right) = \begin{bmatrix} Cov(X_1, X_1) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & \cdots & Cov(X_n, X_n) \end{bmatrix}$$

Nous pouvons noter :

- $V_{X_i} = Cov(X_i, X_i)$;
- $\sigma_{X_i} = \sqrt{V_{X_i}}$.

Covariance : En développant la formule de définition, nous trouvons :

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_i \cdot X_j) - E(X_i)E(X_j)$$

- si X_i et X_j sont indépendantes, alors :

$$E(X_i \cdot X_j) = E(X_i)E(X_j)$$

donc $Cov(X_i, X_j) = 0$

- mais $Cov(X_i, X_j) = 0$ n'entraîne pas nécessairement que X_i et X_j soient indépendantes.

1.2.2.3 Champs aléatoires

Les champs aléatoires sont moins évidents à appréhender. Pour comprendre à quoi correspond un champ aléatoire, plusieurs descriptions sont possibles :

- soit par un ensemble de variables aléatoires indexées par la variable d'espace $\mathbf{M} \in R$;
 - soit par une superposition de fonctions spatiales aléatoires.
- dans les deux cas, le champ aléatoire k est une fonction telle que :

$$k : \begin{cases} R \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{M}, \theta) \longmapsto k(\mathbf{M}, \theta) \end{cases} \quad (1.6)$$

a. Ensemble de variables aléatoires • Dans cette description des champs aléatoires, le champ k est constitué par un ensemble de variables aléatoires tel que :

$$k(\mathbf{M}) : \begin{cases} \Theta \longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta \longmapsto k(\mathbf{M}, \theta) \end{cases} \quad (1.7)$$

Pour chaque \mathbf{M}_i donné, $k(\mathbf{M}_i)$ est une variable aléatoire dont nous pouvons définir la fonction de répartition $F_k(\mathbf{M}_i)$ et la densité de probabilité $f_k(\mathbf{M}_i)$. Cependant, cette description ne permet pas de prendre en compte facilement le lien fort existant entre deux points voisins dans un matériau. En effet, les variables aléatoires représentant les modules d'élasticité en deux points \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2 peuvent être fortement corrélées si le matériau est homogène, et très peu corrélées si le matériau est fortement hétérogène. Il faut donc prendre en compte pour la description de ces champs un paramètre appelé « longueur de corrélation » qui représente une distance de référence permettant d'évaluer le degré de corrélation entre les variables représentatives du champ aléatoire.

La représentation suivante, correspondant à une superposition de fonctions aléatoires, permet de répondre plus facilement à cette contrainte.

b. Superposition de fonctions aléatoires • Dans cette description, un champ aléatoire k peut être défini comme une fonction ou une superposition de fonctions aléatoires sur toute une région $R \in \mathbb{R}^d$. Chaque événement élémentaire θ conduit à la réalisation de la fonction sur toute la région R .

$$k(\theta) : \begin{cases} R \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{M} \longmapsto k(\mathbf{M}, \theta) \end{cases} \quad (1.8)$$

Pour la simulation numérique, nous utilisons souvent une représentation sous forme de série (équation (1.9)) qui correspond à ce type de représentation.

$$\begin{aligned} k(\mathbf{M}, \theta) &= \sum_{j=1}^m k_j(\mathbf{M}) \Phi_j(\theta) \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m k_{lj} h_l(\mathbf{M}) \Phi_j(\theta) \end{aligned} \quad (1.9)$$

- les $k_j(\mathbf{M})$ sont des fonctions de l'espace que nous pouvons décomposer sur des fonctions de base $h_l(\mathbf{M})$;
- les $\Phi_j(\theta)$ sont des coefficients aléatoires.

c. Décomposition de Karhunen-Loève • Introduite par Karhunen en 1947, et Loève en 1948, cette décomposition est la plus communément utilisée. Elle est décrite dans beaucoup d'ouvrages, notamment dans Ghanem and Spanos [1991, 2003] avec l'introduction d'une approche spectrale des éléments finis stochastiques. L'expression de cette décomposition est la suivante :

$$k(\mathbf{M}, \theta) = E(k(\mathbf{M})) + \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} \xi_j(\theta) g_j(\mathbf{M}) \quad (1.10)$$

avec :

- $E(k(\mathbf{M})) = \langle k(\mathbf{M}, \theta) \rangle$ est l'espérance mathématique de $k(\mathbf{M}, \theta)$;
- λ_j et $g_j(\mathbf{M})$ sont les valeurs propres et les fonctions propres du noyau de l'opérateur de covariance de $k(\mathbf{M}, \theta)$. Plus précisément, ces fonctions $g_j(\mathbf{M})$ sont solutions de l'équation de Fredholm de seconde espèce :

$$\int_R C_K(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) g_j(\mathbf{M}_1) d\mathbf{M}_1 = \lambda_j g_j(\mathbf{M}_2) \quad (1.11)$$

avec

$$C_K(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j g_j(\mathbf{M}_1) g_j(\mathbf{M}_2) \quad (1.12)$$

- $\xi_j(\theta)$ sont des variables aléatoires non corrélées d'espérance nulle et de variance unitaire :

$$\langle \xi_j(\theta) \rangle = 0 \quad \langle \xi_j(\theta), \xi_j(\theta) \rangle = \delta_{ij} \quad (1.13)$$

Nous utiliserons généralement la version tronquée de la décomposition de Karhunen-Loève (équation (1.14)) dont il est montré dans Ghanem and Spanos [1991] qu'elle converge vers $k(\mathbf{M}, \theta)$.

$$k(\mathbf{M}, \theta) = E(k(\mathbf{M})) + \sum_{j=1}^m \sqrt{\lambda_j} \xi_j(\theta) g_j(\mathbf{M}) \quad (1.14)$$

Une propriété intéressante de cette décomposition est que lorsque k est Gaussien, ce qui sera souvent le cas dans les applications que nous serons amenés à traiter, alors les $\xi_j(\theta)$ sont aussi des variables gaussiennes et sont donc indépendantes deux à deux.

1.2.2.4 Décomposition spectrale d'une variable aléatoire

Pour étudier et caractériser une fonction, nous préférons de manière générale la décomposer sur une série de fonctions plus simples dont les caractéristiques sont soit connues, soit faciles à identifier. Par exemple, pour les fonctions géométriques de carré intégrable $L^2(\mathbb{R})$ nous utilisons une modélisation de type Galerkin :

$$f(\mathbf{M}) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l h_l(\mathbf{M})$$

où les α_l sont des constantes, et $h_l(\mathbf{M})$ sont des fonctions de base sur l'espace géométrique. Ces fonctions peuvent être polynomiales ou polynomiales par morceaux... Les principales méthodes d'approximations géométriques s'appuient sur ce type de décomposition (méthode des éléments finis, partitions de l'unité...)

Nous pouvons appliquer le même raisonnement sur l'espace des fonctions L^2 stochastiques, et décomposer $X(\theta)$ de la manière suivante :

$$X(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \Psi_j(\theta)$$

où les a_j sont des constantes, et $\Psi_j(\theta)$ sont des fonctions de base sur l'espace stochastique. La technique la plus classiquement utilisée est la décomposition sur le chaos polynomial que nous allons décrire.

a. Décomposition sur le chaos polynomial • Appellons Θ_f l'ensemble des variables aléatoires de variance finie. Nous pouvons définir sur cet espace un produit scalaire analogue à celui défini sur $L^2(\mathbb{R})$:

$$\langle \bullet, \bullet \rangle = \mathbf{E}(\bullet \bullet) = \int_{\Theta} \bullet \bullet dP \quad (1.15)$$

avec dP une mesure de probabilité. Soit $\{\xi_j(\theta)\}_{j=1}^{\infty}$ un ensemble de variables aléatoires gaussiennes, orthonormales vis-à-vis de ce produit scalaire, constituant une base de l'espace Θ_f .

Considérons l'espace $\hat{\Gamma}_p$ de tous les polynômes de $\{\xi_j(\theta)\}_{j=1}^{\infty}$ de degré inférieur ou égal à p , et appelons Γ_p l'ensemble de tous les polynômes de $\hat{\Gamma}_p$ orthogonaux à $\hat{\Gamma}_{p-1}$.

Enfin, considérons le sous-ensemble $\bar{\Gamma}_p$ de Θ_f , engendré par Γ_p . Ce sous ensemble est appelé *chaos homogène* d'ordre p , et Γ_p est le *chaos polynomial* de degré p . Toute variable aléatoire $X(\theta) \in \Theta_f$ peut alors se décomposer de la manière suivante :

$$X(\theta) = a_0\Gamma_0 + \sum_{j_1=1}^{\infty} a_{j_1}\Gamma_1(\xi_{j_1}(\theta)) + \sum_{j_1=1}^{\infty} \sum_{j_2=1}^{j_1} a_{j_1j_2}\Gamma_2(\xi_{j_1}(\theta), \xi_{j_2}(\theta)) + \dots \quad (1.16)$$

Dans l'équation (1.16), nous préférons caractériser la dépendance stochastique θ non pas directement, mais par une dépendance en un certain nombre de variables aléatoires $\{\xi_j(\theta)\}_{j=1}^{\infty} = \boldsymbol{\xi}(\theta)$, gaussiennes, orthonormales, dont les propriétés sont connues. Si bien que nous pouvons réécrire l'équation (1.16) de manière plus simple :

$$X(\boldsymbol{\xi}(\theta)) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{a}_j \Psi_j(\boldsymbol{\xi}(\theta)) \quad (1.17)$$

Dans la suite, $\boldsymbol{\xi}(\theta)$ sera simplement noté $\boldsymbol{\xi}$.

Les méthodes d'approximation basées sur cette décomposition consistent donc à décrire X_p , une approximation de X , sur un espace Θ_p , de dimension finie n , construit à partir d'un ensemble fini de n variables aléatoires indépendantes $\{\xi_j\}_{j=1}^n$. À titre d'illustration, le développement de X sur le chaos polynomial de dimension 2 est :

$$\begin{aligned} X(\xi_1, \xi_2) &\approx a_0\Gamma_0 + a_1\Gamma_1(\xi_1) + a_2\Gamma_1(\xi_2) \\ &+ a_{11}\Gamma_2(\xi_1, \xi_1) + a_{12}\tilde{\Gamma}_2(\xi_2, \xi_1) + a_{22}\Gamma_2(\xi_2, \xi_2) \\ &+ a_{111}\Gamma_3(\xi_1, \xi_1, \xi_1) + a_{211}\tilde{\Gamma}_3(\xi_2, \xi_1, \xi_1) + a_{221}\tilde{\Gamma}_3(\xi_2, \xi_2, \xi_1) \\ &+ a_{222}\Gamma_3(\xi_2, \xi_2, \xi_2) \dots \end{aligned}$$

Le mode d'obtention pratique des Γ_j est explicité dans Ghanem and Spanos [1991, 2003]. Nous pouvons réécrire ce développement avec les notations de l'équation (1.17) :

$$X(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=0}^P \hat{a}_j \Psi_j(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.18)$$

avec :

$$P + 1 = \sum_{i=0}^p (i + 1) \sum_{j=0}^{n-i} (j + 1)$$

où n et p sont respectivement la dimension et l'ordre du chaos polynomial (par exemple, pour $n = 2$ et $p = 4$: $P = 34$).

Remarque : Lorsque les paramètres aléatoires sont gaussiens, les polynômes Γ_j correspondent aux polynômes d'Hermite. Ils ont la propriété d'être orthogonaux vis-à-vis du produit scalaire considéré.

b. Généralisation • Si nous continuons l'analogie avec les méthodes d'approximation géométriques de type Galerkin, alors les fonctions $\Psi_j(\boldsymbol{\xi})$ peuvent être considérées comme des fonctions de base sur l'espace stochastique. Nous pouvons donc qualifier l'approximation sur le chaos polynomial de *p-version* de la méthode d'approximation sur l'espace stochastique (Deb et al. [2001], Matthies and Keese [2005]).

Nous pouvons ainsi imaginer une *h-version* de cette méthode d'approximation où les fonctions $\Psi_j(\boldsymbol{\xi})$ ne seront plus polynomiales, mais linéaires par morceaux ou polynomiales par morceaux, sur le même principe que la méthode des éléments finis. Partant de cette base, nous pouvons transcrire un certain nombre de méthodes et d'outils largement utilisés, dans le cadre des approximations géométriques, au cadre stochastique. Par exemple :

- les estimateurs d'erreur ;
- les techniques adaptatives ;
- l'enrichissement des fonctions de base...

Nous utiliserons ce formalisme plus général dans la suite de ce mémoire.

1.3 État de l'art sur les méthodes probabilistes

1.3.1 Problème de référence

Pour une présentation simple de ces méthodes, nous nous plaçons dans le cadre d'un problème de statique. La structure considérée occupe un espace Ω . Sur une partie $\partial_1\Omega$ du bord $\partial\Omega$, nous imposons le déplacement \mathbf{u}_d . Sur la partie complémentaire $\partial_2\Omega$ nous imposons la densité surfacique d'effort \mathbf{F}_d . nous imposons aussi une densité volumique d'effort \mathbf{f}_d , et nous supposons un comportement élastique du matériaux. La dépendance en espace est caractérisée par la variable \mathbf{M} , et la dépendance stochastique par la variable $\boldsymbol{\xi}$. Le problème de référence se formule de la

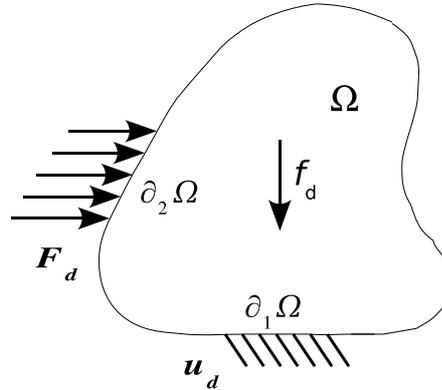


Figure 1.9 – Problème de référence

manière suivante :

Trouver le déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ et la contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ qui vérifient les équations suivantes :

– $\mathbf{u}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{U}_{ad}$ *espace des champs cinématiquement admissibles* :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) &\text{ régulier} \\ \mathbf{u}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) &= \mathbf{u}_d \text{ sur } \partial_1 \Omega \end{aligned} \quad (1.19)$$

L'espace $\mathcal{U}_{ad,0}$ est l'espace homogène associé à \mathcal{U}_{ad} .

– $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{S}_{ad}$ *espace des champs statiquement admissibles* :

$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ régulier et $\forall \mathbf{u}^*(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{U}_{ad,0}$:

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{\xi}} \int_{\Omega} \text{Tr}[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}))] \Phi(\boldsymbol{\xi}) dM d\boldsymbol{\xi} = \\ \int_{\boldsymbol{\xi}} \left[\int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{F}_d(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}^*(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) dS + \int_{\Omega} \mathbf{f}_d(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}^*(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) dM \right] \Phi(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \end{aligned} \quad (1.20)$$

– *Relation de comportement*

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{K}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})) \quad (1.21)$$

Remarque : Il arrive aussi que les bords $\delta\Omega$ du domaine soient des paramètres variables. Les techniques permettant de prendre en compte ces variations géométrique sont souvent basées sur une modification du maillage ou même un remaillage

complet. Elles sont en général longues et coûteuses à mettre en œuvre. Nous verrons, dans le second chapitre, comment prendre en compte des petits défauts de forme dans le cadre du formalisme sous structuré de la méthode LATIN.

1.3.2 Résolution du problème de référence

Mise à part la méthode de Monte Carlo, l'objectif de toutes les méthodes numériques pour résoudre des problèmes stochastiques est dans un premier temps de construire une approximation en déplacement de la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^P a_{ij} h_i(\mathbf{M}) \Psi_j(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.22)$$

avec :

- n : nombre de degrés de liberté de la discrétisation géométrique ;
- P : nombre de fonctions de base sur l'espace stochastique ;
- a_{ij} : inconnues du problèmes ;
- $h_i(\mathbf{M})$: fonctions de base sur l'espace géométrique ;
- $\Psi_j(\boldsymbol{\xi})$: fonctions de base sur l'espace stochastique ;

Le traitement statistique de la solution se fait dans un second temps. La technique la plus courante est de prendre la solution analytique approchée (1.22) comme modèle de référence pour une étude de Monte Carlo.

Dans cette revue, nous distinguons deux groupes de méthodes permettant de trouver la solution approchée (1.22) :

1. **les méthodes non intrusives** : la résolution des problèmes géométrique et stochastique est découplée. La résolution du problème stochastique est un post traitement d'une série de calculs déterministes. Ces calculs déterministes peuvent donc être effectués par un code éléments finis standard ;

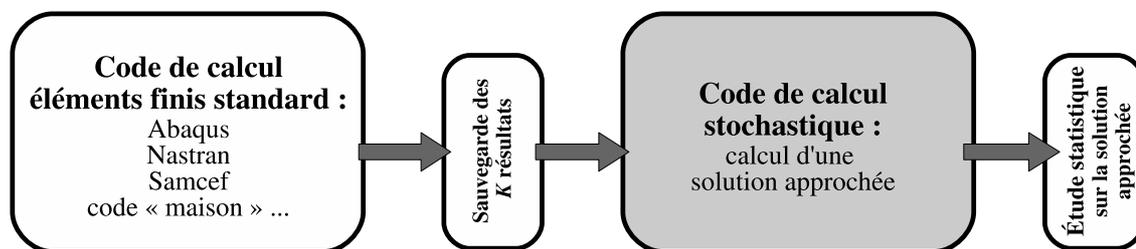


Figure 1.10 – méthode non intrusive

2. **les méthodes intrusives** : elles permettent de résoudre l'ensemble du problème (géométrique et stochastique) dans un calcul. Elles sont dites *intrusives* car elles nécessitent un code spécifique dédié à ce type de problème.

1.3.3 Méthode de Monte Carlo

1.3.3.1 Description de la méthode

Compte tenu du classement fait précédemment, la méthode de Monte Carlo rentre dans l'ensemble des méthodes non intrusives. Nous avons cependant tenu à la présenter à part, car elle n'est pas basée sur la construction d'une solution approchée.

Cette méthode est la plus classique pour traiter des problèmes probabilistes. Elle consiste à générer numériquement un grand nombre K de réalisations caractéristiques des paramètres variables \mathbf{p} , puis à calculer, de manière déterministe, les K réponses correspondantes pour la quantité d'intérêt \mathbf{q} . Une étude statistique de ces K résultats permet enfin de caractériser la distribution de la quantité \mathbf{q} et d'estimer sa fonction densité de probabilité. Le schéma 1.11 résume cette méthode.

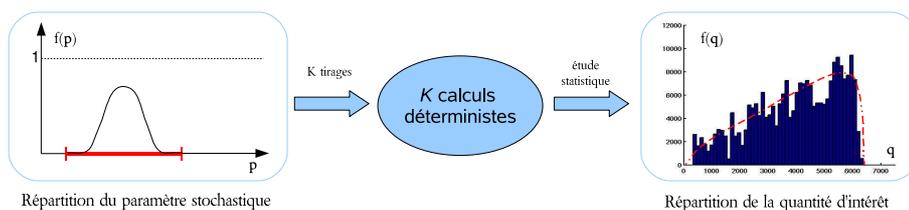


Figure 1.11 – Principe de la méthode de Monte Carlo

1.3.3.2 Qualités et limites

Cette méthode est avantageuse à plusieurs titres :

- simple à mettre en œuvre, elle permet d'utiliser les outils déjà à disposition (codes éléments finis standards) ;
- elle permet de conduire tout type de simulation, linéaire ou non ;
- pour un grand nombre de tirages, les résultats obtenus sont fiables et permettent d'obtenir des solutions de référence.

Cependant, pour obtenir une bonne précision, il est nécessaire de procéder à un grand nombre de tirages et le temps de calcul pour arriver à ce résultat devient vite prohibitif dans le cadre de calculs sur des systèmes complexes.

En général, la méthode de Monte Carlo est utilisée en association avec des représentations par surfaces de réponse, des techniques du type « latin hypercube » et

des techniques de multirésolution, qui permettent d'accélérer nettement la réalisation de telles études (Champaney [2004], Champaney et al. [2007], Helton and Davis [2003]).

1.3.4 Méthodes non intrusives

Ce groupe de méthodes permet de construire une solution approchée (1.22) en découplant la résolution du problème géométrique et la résolution du problème stochastique. Ce principe est résumé sur la figure 1.12.

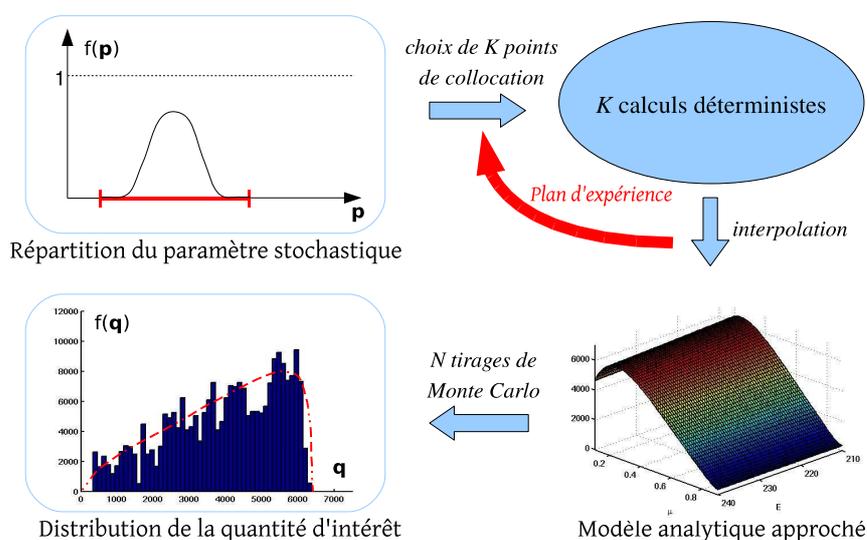


Figure 1.12 – Principe de la méthode

Les étapes de résolution sont les suivantes :

1. **réduction du modèle**, cette étape consiste à construire une solution analytique approchée sur l'espace stochastique à partir d'une série de calculs déterministes :
 - les K valeurs des paramètres variables utiles pour ces calculs déterministes sont souvent choisies à l'aide de plans d'expériences, en prenant en compte le type d'interpolation choisi ;
 - les K résultats sont ensuite interpolés sur la base de fonction $\Psi_k(\xi)$ pour former la surface de réponse.
2. **calcul de la distribution de la quantité d'intérêt**, cette distribution est reconstruite grâce à une étude de Monte Carlo prenant comme référence le modèle analytique approché.

Le point clé de ce type de méthodes est le choix de la forme des fonctions de base sur l'espace stochastique (choix de la surface de réponse). Les valeurs des paramètres

pour chaque calcul déterministe dépendent de ce choix. Les surfaces de réponses que nous rencontrons généralement sont basées sur des interpolations polynomiales. Dans un contexte industriel, ce choix s'oriente souvent vers une interpolation polynomiale standard, car il existe énormément de techniques de plans d'expériences permettant de sélectionner des points de collocation appropriés. La technique que nous présentons dans la suite, basée sur la décomposition sur le chaos polynomial, est une représentation alternative mieux adaptée aux problèmes stochastiques, mais encore peu utilisée dans les bureaux d'études.

1.3.4.1 Méthode non intrusive utilisant le chaos polynomial

Cette méthode permet de créer une solution analytique approchée polynomiale en prenant en compte l'ensemble des propriétés stochastiques des paramètres variables. Ceci permet de représenter au mieux la réponse de la quantité d'intérêt au voisinage des zones de plus forte densité de probabilité. La solution analytique approchée obtenue est appelée surface de réponse stochastique.

a. Description de la méthode • Supposons un ensemble de paramètres variables représenté par un vecteur aléatoire \mathbf{X} . Sous certaines conditions, nous avons vu qu'il est possible d'exprimer ce vecteur en fonction d'un ensemble de variables gaussiennes indépendantes $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^m = \boldsymbol{\xi}(\omega)$, sur la base du chaos polynomial :

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{P_x} \mathbf{x}_j \Psi_j(\boldsymbol{\xi})$$

Toute fonction S appartenant à $L^2(\mathbb{R})$ de ce vecteur aléatoire peut être représentée par une variable aléatoire. Nous pouvons donc la décomposer sur le chaos polynomial :

$$S(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{P_s} s_j \Psi_j(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.23)$$

Cette décomposition servira de point de départ pour la modélisation de la « surface de réponse stochastique ». Les polynômes $\Psi_j(\boldsymbol{\xi})$ étant des données, l'objectif est de déterminer les coefficients scalaires déterministes s_j . Nous procédons de la même manière que pour une interpolation polynomiale standard :

- un nombre K de réalisations des variables aléatoires $\{\xi_i\}_{i=1}^m$ est généré ;
- nous en déduisons les K réalisations des paramètres d'entrées $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^K$;
- les K réponses correspondantes $\{S_k\}_{k=1}^K$ sont calculées ;
- enfin, les s_j sont déterminés en minimisant, au sens des moindres carrés, l'écart entre les solutions exactes calculées S_k et leur représentation sur le chaos polynomial :

$$Err_{(k)} = S_k - \sum_{j=1}^{P_s} s_j \Psi_j(\boldsymbol{\xi}_k) \quad (1.24)$$

Nous pouvons représenter ce système d'équations sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} Err_{(1)} \\ \vdots \\ Err_{(K)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Psi_1(\boldsymbol{\xi}_1) & \cdots & \Psi_{P_s}(\boldsymbol{\xi}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_1(\boldsymbol{\xi}_K) & \cdots & \Psi_{P_s}(\boldsymbol{\xi}_K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_{P_s} \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} [Err_{(k)}] &= [S_k] - [\Psi_{kj}][s_j] \\ [Err_{(k)}]^2 &= [[S_k] - [\Psi_{kj}][s_j]]^T [[S_k] - [\Psi_{kj}][s_j]] \end{aligned} \quad (1.26)$$

Il faut ensuite minimiser cette erreur pour accéder aux s_j . Nous pouvons citer deux techniques permettant calculer ces coefficients :

Par projection :

Chaque s_j correspond à la projection orthogonale de la quantité S sur le polynôme Ψ_j . Le produit scalaire utile dans cet espace probabiliste étant l'espérance mathématique définie dans l'équation (1.15) :

$$\langle \bullet, \bullet \rangle = \mathbf{E}(\bullet\bullet) = \int_{\Theta} \bullet\bullet dP$$

Nous obtenons le résultat suivant :

$$s_j = \frac{\langle S, \Psi_j \rangle}{\langle \Psi_j, \Psi_j \rangle} = \frac{\int_{\boldsymbol{\xi}} S(\boldsymbol{\xi}) \Psi_j(\boldsymbol{\xi}) \phi(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}}{\int_{\boldsymbol{\xi}} \Psi_j(\boldsymbol{\xi}) \Psi_j(\boldsymbol{\xi}) \phi(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}} \quad (1.27)$$

où $\phi(\boldsymbol{\xi})$ représente la densité de probabilité associée au vecteur $\boldsymbol{\xi}$. Comme nous ne connaissons la fonction $S(\boldsymbol{\xi})$ qu'en certains points, cette intégrale sera évaluée numériquement de la manière suivante :

$$\langle S, \Psi_j \rangle \approx \sum_{k=1}^K \beta_k S(\boldsymbol{\xi}_k) \Psi_j(\boldsymbol{\xi}_k) \quad (1.28)$$

avec :

- K : nombre d'évaluations de la quantité S ;
- β_k : poids associé au vecteur ξ_k d'après la mesure gaussienne.

Pour obtenir une estimation correcte des intégrales qui interviennent dans le calcul des s_j , cette technique requière l'utilisation de nombreux points, donc de nombreux calculs déterministes.

Par points de collocation :

La minimisation du carré de l'erreur (1.26) conduit au système matricielle (1.29) :

$$[s_j] = ([\Psi_{kj}]^T [\Psi_{kj}])^{-1} [\Psi_{kj}]^T [S_k] \quad (1.29)$$

Dans ce système, la matrice $([\Psi_{kj}]^T [\Psi_{kj}])^{-1} [\Psi_{kj}]^T$ est indépendante du problème mécanique. Elle ne dépend que du type d'interpolation choisie et des valeurs des paramètres aux points de calcul (points de collocation). De la même manière que dans les techniques de plans d'expériences, nous pouvons étudier cette matrice afin d'optimiser le nombre de points à calculer pour trouver les $[s_j]$ (Sudret et al. [2005]).

Remarque : La principale différence entre cette méthode et les méthodes paramétriques standards réside dans le choix du produit scalaire utilisé pour la minimisation. Pour une technique de résolution par points de collocation, ceci se traduit seulement par une différence des points de collocation permettant de générer la solution analytique approchée.

b. Qualités et limites • Une qualité essentielle de cette méthode est qu'elle est non intrusive. Elle permet l'utilisation de codes de calcul standards pour résoudre les problèmes déterministes (Abaqus, Samcef, Nastran, code maison...). Elle permet aussi de construire une solution analytique approchée en prenant en compte l'ensemble des informations stochastiques disponibles sur les paramètres variables. La surface de réponse est donc plus riche qu'une surface de réponse standard (basée sur une interpolation polynomiale standard), et les études statistiques conduites à partir de cette surface de réponse sont de meilleure qualité.

De manière analogue aux méthodes paramétriques standards, la matrice $[\Psi_{kj}]$ ne dépend que du type d'interpolation choisi et des K valeurs de paramètres variables $\{\xi_k\}_{k=1}^K$, mais pas de la mécanique. Elle n'est donc calculée qu'une seule fois. De plus, il est possible de travailler sur cette matrice pour identifier les K meilleures valeur des paramètres ξ permettant d'optimiser le nombre de calcul déterministes (cf. plan d'expériences).

Le fait que la matrice $[\Psi_{kj}]$ ne dépende pas de la mécanique constitue aussi une des limites de cette méthode. En effet pour les problèmes non linéaires, le choix des points de calcul permettant de représenter correctement la solution ne peut se faire sans information sur la mécanique du problème. De plus, l'approximation polynomiale utilisée n'est pas toujours adaptée pour représenter correctement une solution non linéaire. Pour des problèmes de contact par exemple, nous préférons choisir des fonctions de base linéaires par morceaux ou polynomiales par morceaux qui nous permettront de représenter les discontinuité éventuelles.

1.3.5 Méthodes intrusives

1.3.5.1 Méthode de perturbation

a. Description de la méthode • La méthode de perturbation, appliquée à un milieu stochastique que nous allons décrire, est une extension des méthodes utilisées en analyse non linéaire. Pour une description plus complète de cette méthode, nous pouvons nous reporter à Kleiber [1992], Belytschko [1986], Haldar and Mahadevan [2000].

Sous certaines conditions de régularité, les fonctions et les opérateurs peuvent s'exprimer par une série de Taylor autour de leur valeur moyenne. Supposons, par exemple, un problème où le second membre est déterministe, et où tous les paramètres aléatoires peuvent être représentés par un vecteur aléatoire $\boldsymbol{\xi}$ de dimension m . A partir des équations du problème de référence associées à une représentation éléments finis, nous arrivons à l'équation caractéristique du système :

$$\mathbf{K}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})\mathbf{u}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}(\mathbf{M}) \quad (1.30)$$

que nous pouvons écrire de la manière suivante :

$$[\mathbf{L}(\mathbf{M}) + \mathbf{A}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})] \mathbf{u}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}(\mathbf{M}) \quad (1.31)$$

avec :

- $\mathbf{L}(\mathbf{M})$ espérance ou moyenne de $\mathbf{K}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$
- $\mathbf{A}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ partie aléatoire de $\mathbf{K}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$

La décomposition de $\mathbf{A}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ et de $\mathbf{u}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ autour de leur valeur moyenne conduit à :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \mathbf{A}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i \xi_j \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \mathbf{A}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) + \dots \end{aligned} \quad (1.32)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = & \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{M}) + \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \mathbf{u}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i \xi_j \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \mathbf{u}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) + \dots \end{aligned} \quad (1.33)$$

En supposant de petites variations des variables ξ_i autour de leur valeur moyenne, et en introduisant les équations (1.32) et (1.33) dans (1.31), nous obtenons un polynôme en ξ_k . En égalisant les polynômes de même ordre de part et d'autre de l'équation (1.31), nous obtenons une série d'équations à résoudre successivement selon l'ordre des polynômes en ξ_k . Les deux premiers termes de cette suite s'écrivent :

$$\mathbf{L}(\mathbf{M}) [\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{M})] = f(\mathbf{M}) \quad (1.34)$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{M}) \left[\frac{\partial}{\partial \xi_i} \mathbf{u}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_i} \mathbf{A}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) [\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{M})] = 0 \quad (1.35)$$

b. Qualités et limites • Cette méthode a été utilisée de façon intensive ces dernières années dans des problèmes aléatoires, et pour les études de fiabilité en particulier avec les méthodes FORM et SORM. Il existe donc déjà des codes industriels qui exploitent cette technique. De bons résultats ont été obtenus pour des fluctuations des paramètres incertains contenues dans des bandes étroites. Par contre, ce développement autour de la valeur moyenne ne permet pas de prendre en compte de fortes variations.

Cette technique sera souvent préférée à celle de Monte Carlo pour des faibles variations des paramètres car elle est moins coûteuse. Cependant son utilisation étant tout de même restreinte, nous chercherons une alternative plus générale qui permettra de traiter un nombre plus important de problèmes.

1.3.5.2 Éléments finis spectraux

L'essentiel de cette méthode consiste en une projection sur le chaos polynomial de la partie aléatoire de la réponse du système $\mathbf{u}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$, couplée avec une décomposition de Karhunen-Loève des opérateurs structuraux incertains $\mathbf{K}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ et une représentation spatiale de type éléments finis (Ghanem and Spanos [2003], Keese [2003]). Dans cette partie nous allons donner un résumé de cette approche. La description de la décomposition de Karhunen-Loève est donnée au paragraphe 1.2.2.3. Des

exemples d'applications de cette méthode sont présentés dans Ghanem and Spanos [2003].

a. Description de la méthode • L'objectif est de déterminer une approximation de la solution de la forme suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^P a_{ij} h_i(\mathbf{M}) \Psi_j(\boldsymbol{\xi})$$

En posant

$$u_i(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=0}^P a_{ij} \Psi_j(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.36)$$

Nous pouvons réécrire cette approximation de la manière suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^n h_i(\mathbf{M}) u_i(\boldsymbol{\xi}) = [\mathbf{h}^t(\mathbf{M})][\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})] \quad (1.37)$$

De la même manière, le champ stochastique $\mathbf{K}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ peut s'exprimer comme le produit de fonctions dépendantes des variables aléatoires $\boldsymbol{\xi}$ et de fonctions dépendantes des variables d'espace \mathbf{M} . La décomposition de Karhunen-Loève en est un exemple :

$$\mathbf{K}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{E}(\mathbf{K}(\mathbf{M})) + \sum_{i=1}^L \sqrt{\lambda_i} \xi_i g_i(\mathbf{M})$$

où les fonctions d'espace $g_i(\mathbf{M})$ peuvent être exprimées sur une base éléments finis :

$$g_i(\mathbf{M}) = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} h_j(\mathbf{M})$$

En utilisant la formulation variationnelle de l'équation d'équilibre (1.20) puis la relation de comportement (1.21), nous obtenons, après minimisation, une équation matricielle de la forme :

$$\left[\int_{\Omega} \mathbf{K}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \nabla \mathbf{h}(\mathbf{M}) \nabla \mathbf{h}^t(\mathbf{M}) dM \right] [\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})] = \int_{\Omega} [\mathbf{h}^t(\mathbf{M})] \mathbf{f}(\mathbf{M}) dM \quad (1.38)$$

En remplaçant $\mathbf{K}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ par sa décomposition de Karhunen-Loève dans l'équation (1.38), nous obtenons :

$$\left[\mathbf{H}^{(0)} + \sum_{k=1}^L \mathbf{H}^{(k)} \xi_k \right] [\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})] = \mathbf{F} \quad (1.39)$$

où L est l'ordre de la décomposition de Karhunen-Loève. $\mathbf{H}^{(0)}$, $\mathbf{H}^{(k)}$ et \mathbf{F} sont donnés par :

$$\mathbf{H}^{(0)} = \left[\int_{\Omega} \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{M}) \nabla \mathbf{h}(\mathbf{M}) \nabla \mathbf{h}^t(\mathbf{M}) dM \right] \quad (1.40)$$

$$\mathbf{H}^{(k)} = \left[\int_{\Omega} \sqrt{\lambda_k} g_k(\mathbf{M}) \nabla \mathbf{h}(\mathbf{M}) \nabla \mathbf{h}^t(\mathbf{M}) dM \right] \quad (1.41)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} [\mathbf{h}^t(\mathbf{M})] \mathbf{f}(\mathbf{M}) dM \quad (1.42)$$

En utilisant la décomposition de $[\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})]$ sur le chaos polynomial (équation (1.36)), et en multipliant l'équation (1.38) de part et d'autre par $\Psi_i(\boldsymbol{\xi})$, nous obtenons l'équation :

$$\sum_{j=0}^P \left[\mathbf{H}^{(0)} \Psi_i(\boldsymbol{\xi}) \Psi_j(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{k=1}^L \mathbf{H}^{(k)} \xi_k \Psi_i(\boldsymbol{\xi}) \Psi_j(\boldsymbol{\xi}) \right] \mathbf{a}_j = \mathbf{F} \Psi_i(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.43)$$

où \mathbf{a}_j représentent les colonnes de la matrice des a_{ij} . Nous pouvons calculer l'espérance de cette relation et en posant $\xi_0 = 1$. Nous obtenons la relation suivante :

$$\sum_{j=0}^P \left[\sum_{k=0}^L \mathbf{H}^{(k)} \langle \xi_k \Psi_i(\boldsymbol{\xi}) \Psi_j(\boldsymbol{\xi}) \rangle \right] \mathbf{a}_j = \mathbf{F} \langle \Psi_i(\boldsymbol{\xi}) \rangle \quad (1.44)$$

soit :

$$\sum_{j=0}^P \mathbf{H}^{(ij)} \mathbf{a}_j = \mathbf{r}_i \quad i = 1, \dots, P \quad (1.45)$$

La représentation matricielle du système est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{00} & \mathbf{H}_{01} & \cdots & \mathbf{H}_{0P} \\ \mathbf{H}_{10} & \mathbf{H}_{11} & \cdots & \mathbf{H}_{1P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{P0} & \mathbf{H}_{P1} & \cdots & \mathbf{H}_{P-1P-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{P-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{P-1} \end{bmatrix}$$

Remarque : lorsque le second membre n'est pas aléatoire, seul le vecteur \mathbf{r}_0 est non nul.

b. Qualités et limites • Ce système linéaire de taille $n \times P$ permet, après résolution, d'obtenir les P vecteurs $[\mathbf{a}_j]$ de dimension n . Nous obtenons donc en un calcul l'ensemble des caractéristiques stochastiques de la réponse du système, et ceci pour une large plage de variation des paramètres. Cependant, ce calcul peut être très coûteux lorsque le nombre de paramètres variables ou le degré P de troncature de la projection sur le chaos polynomial est élevé.

Cette méthode semble plus générale que la précédente, utilisant les séries de Taylor, car elle permet de prendre en compte une large variation des paramètres. Par contre, pour de faibles variations, les méthodes de perturbation sont tout de même privilégiées car elles restent plus rapides et plus facilement exploitables.

1.4 Conclusion partielle

Notre objectif est de caractériser et de propager la variabilité dans un calcul numérique. Dans un premier temps, nous avons donc tenté d'identifier l'ensemble des paramètres variables que nous avons séparés en trois groupes :

- les paramètres matériaux ;
- les paramètres géométriques ;
- les chargements extérieurs.

Pour chacun de ces groupes, nous avons donné un aperçu de différents moyens permettant de récolter des informations sur les paramètres. Nous avons ensuite présenté les modélisations mathématiques les plus couramment associées à ces paramètres variables en fonction de la quantité d'information obtenue.

Nous supposons, dans ce mémoire, que les informations dont nous disposons sont assez nombreuses pour conduire des études probabilistes. Dans ce cadre nous avons répertorié un certain nombre de méthodes probabilistes permettant de propager les incertitudes dans un calcul de structures en distinguant deux familles :

1. **les méthodes non intrusives** pour lesquelles la résolution des problèmes géométrique et stochastique est découplée ;
2. **les méthodes intrusives** qui permettent de résoudre l'ensemble du problème (géométrique et stochastique) dans un calcul.

Dans la suite de ce mémoire, nous nous intéresserons particulièrement aux problèmes de structures avec contact, car nous estimons que les principales incertitudes

viennent des méconnaissances sur les paramètres de contact. De plus, parmi l'ensemble des méthodes probabilistes présentées, nous nous concentrerons sur les méthodes non intrusives qui sont plus rapides à mettre en oeuvre dans un contexte industriel, et qui nous permettent d'utiliser des outils standards. Pour caractériser ce type de méthodes sur des problèmes de contact, nous commencerons par tester, sur un exemple simple, les techniques basées sur la construction d'une solution approchée polynomiale, que nous avons appelée *p-version* de l'approximation de type Galerkin sur l'espace stochastique. Ce test nous permettra de mettre en relief les points suivants :

- le choix d'une *p-version* est-il judicieux pour représenter la solution d'un problème de contact ;
- le choix des points de collocation est-il correct pour des problèmes non linéaires ;
- comment évaluer la qualité de la solution approchée ?
- comment améliorer la qualité de cette solution approchée ?

Chapitre 2

Problème de contact

Dans ce chapitre nous allons comparer différentes méthodes probabilistes non intrusives sur un exemple simple de structure avec contact en statique. Nous montrerons aussi qu'une mesure quantitative de l'erreur dans le cadre probabiliste est nécessaire pour obtenir des modèles fiables.

Sommaire

2.1	Modélisation déterministe d'un problème de contact	39
2.1.1	P0 : partitionnement du milieu	40
2.1.2	P1 : séparation des équations du problème	43
2.1.3	P2 : méthode de résolution itérative	43
2.2	Modélisation stochastique d'un problème de contact	44
2.2.1	Formulation du problème stochastique	44
2.2.2	Résolution du problème stochastique de référence	45
2.2.3	Modélisation des paramètres variables dans ce formalisme	46
2.3	Problématique industrielle	49
2.3.1	Description de l'exemple aube-disque	50
2.3.2	Solution approchée	52

2.3.3	Distribution de référence	53
2.3.4	Résultats du calcul probabiliste	53
2.4	Conclusion partielle : estimer la qualité de la solution . . .	55

2.1 Modélisation déterministe d'un problème de contact

Pour caractériser les problèmes de contact, nous nous plaçons dans le cadre simple d'un assemblage composé de deux solides en contact selon une ligne (figure 2.1). Nous pourrions trouver un aperçu des différentes techniques permettant de traiter le contact dans (Wriggers [1995], Alart and Curnier [1991], Alart [1997]).

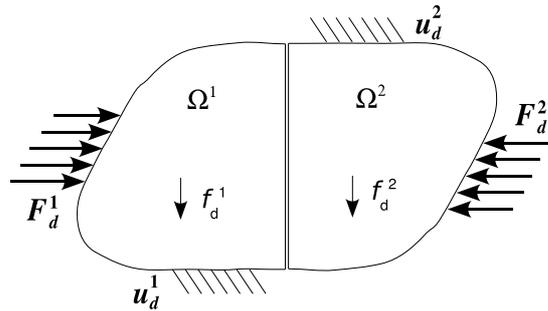


Figure 2.1 – Assemblage de deux solides en contact

Pour modéliser et calculer ce problème, nous utilisons la méthode LATIN (Ladevèze [1999]), qui repose essentiellement sur les points suivants :

- un formalisme sous structuré sans recouvrement (point P0) ;
- la séparation des équations en deux groupes (point P1) ;
- une méthode de résolution itérative (point P2) ;
- une approximation temps-espace des inconnues du problème (point P3).

Le point P1 consiste à former deux groupes d'équations à partir du problème de référence, ceci de manière à séparer les difficultés :

- un groupe d'équations locales en variables d'espace (éventuellement non linéaires) ;
- un groupe d'équations linéaires éventuellement globales.

Le point P2 consiste à construire alternativement une solution du premier groupe puis du second en utilisant des directions de recherche pour mettre en relation les deux groupes de solutions.

Le point P3 apporte des approximations temps-espace permettant d'accroître les performances de l'algorithme. Ce point ne sera pas abordé dans ce mémoire car nous nous plaçons dans un cadre simplifié statique. Il est cependant intéressant de remarquer que le principe de séparation des dépendances en espace et en temps proposé

est le même que celui utilisé pour séparer les dépendances spatiale et stochastique dans le cadre de la solution stochastique approché (Nouy [2007]).

2.1.1 P0 : partitionnement du milieu

2.1.1.1 Principe

La première étape de la méthode consiste à faire une partition du domaine. Pour cela, plusieurs techniques ont été développées (Farhat and Roux [1991], Tallec [1994], Barbotteu et al. [2001]), celle que nous utilisons consiste à découper le problème en sous structures et interfaces (Ladevèze [1999]). Par conséquent, la structure initiale complète correspond à l'assemblage de ces deux types d'entités, les sous structures et les interfaces. Une sous structure ne voit que les interfaces voisines, et de la même manière une interface ne communique qu'avec les sous structures voisines. Chacune de ces entités possède ses propres variables, équations et relations de comportement.

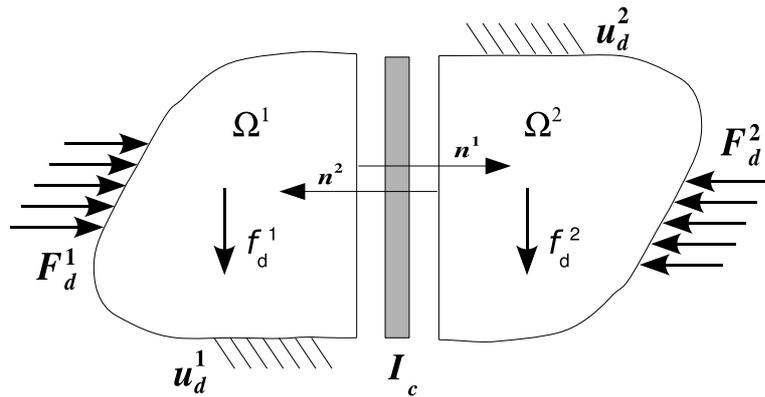


Figure 2.2 – Modèle de référence pour le contact

Le modèle de référence (figure 2.2) est constitué de deux solides élastiques Ω^1 et Ω^2 en contact unilatéral sur une interface I^c . Nous appelons $(\mathbf{u}^\ell, \sigma^\ell)$ les déplacements et les contraintes sur chaque solide.

La frontière $\partial\Omega^\ell - I^c$ de chaque solide Ω^ℓ est composée d'une partie $\partial_1\Omega^\ell$, où nous imposons le champ de déplacement \mathbf{u}_d^ℓ , et d'une partie $\partial_2\Omega^\ell$, où nous imposons les efforts \mathbf{F}_d^ℓ . Nous imposons aussi une densité volumique de force \mathbf{f}_d^ℓ sur chaque solide.

L'opérateur de Hooke associé au solide Ω^ℓ est noté \mathbf{K}^ℓ . Nous supposons que le contact entre les deux solides est du type frottement sec, et qu'il est décrit par la loi de Coulomb.

2.1.1.2 Modélisation du contact

L'interface I^c assure la transmission des déplacements et des efforts d'une sous structure à l'autre. Elle est munie de sa propre relation de comportement. Orientons I^c par le choix du vecteur normal unité, par exemple : $\mathbf{n}^c = \mathbf{n}^1$, où \mathbf{n}^1 est la normale extérieure matière du solide Ω^1 , et introduisons sur l'interface les grandeurs mécaniques $\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \mathbf{F}^1$ et \mathbf{F}^2 représentant respectivement les champs de déplacements de part et d'autre de l'interface et les champs de densité surfacique d'efforts transmis à Ω^1 et à Ω^2 . L'équilibre de l'interface se traduira par :

$$\mathbf{F}^1 + \mathbf{F}^2 = \mathbf{0}$$

Afin de simplifier l'écriture des équations sur l'interface, nous introduisons les notations \mathbf{w}^c et \mathbf{F}^c qui représentent respectivement le saut de déplacement et la densité surfacique de force :

$$\mathbf{w}^c = \mathbf{w}^2 - \mathbf{w}^1 \text{ et } \mathbf{F}^c = \mathbf{F}^2 = -\mathbf{F}^1$$

Pour tout vecteur \mathbf{v} , nous posons en outre :

$$v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^c \text{ et } \mathbf{v}_t = \mathbf{v} - v_n \mathbf{n}^c \text{ de telle sorte que } \mathbf{v} = \mathbf{v}_t + v_n \mathbf{n}^c$$

Dans le cas statique, la relation de comportement de type frottement sec peut être formulée en force-déplacement de la façon suivante :

$$\begin{aligned} w_n^c \geq 0 \quad F_n^c \geq 0 \quad F_n^c w_n^c = 0 \\ \|\mathbf{F}_t^c\| \leq \mu F_n^c \quad \mathbf{w}_t^c \wedge \mathbf{F}_t^c = 0 \quad \mathbf{w}_t^c \cdot \mathbf{F}_t^c \leq 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

où μ désigne le coefficient de frottement.

Utilisons la démarche proposée dans Saxcé [1992] et introduisons la fonction :

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{F}) = \chi_B(\mathbf{v}) + \chi_{C(\mu)}(\mathbf{F}) + \mu F_n \|\mathbf{v}_t\|$$

où χ_B et $\chi_{C(\mu)}$ sont les fonctions indicatrices des convexes :

$$\begin{aligned} B &= \{\mathbf{v} / v_n \leq 0\} \\ C(\mu) &= \{\mathbf{F} / F_n \geq 0 \text{ et } \|\mathbf{F}_t\| \leq \mu F_n\} \end{aligned}$$

Nous pouvons trouver dans Saxcé [1992] la démonstration détaillée des propriétés de b et notamment que $b(\mathbf{v}, \mathbf{F})$ est un bipotentiel, c'est-à-dire que :

- pour \mathbf{v} fixé, $b(\mathbf{v}, \mathbf{F})$ est convexe en \mathbf{F} ,
- pour \mathbf{F} fixé, $b(\mathbf{v}, \mathbf{F})$ est convexe en \mathbf{v} ,
- pour tout \mathbf{v} et pour tout \mathbf{F} :

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{F}) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \geq 0 \quad (2.2)$$

- avec cette représentation, la relation de comportement (2.1) est équivalente à la condition :

$$b(-\mathbf{w}^c, \mathbf{F}^c) + \mathbf{w}^c \cdot \mathbf{F}^c = 0$$

2.1.1.3 Formulation du problème de référence déterministe

Dans la suite, les champs cinématiquement admissibles seront notés CA, et les champs statiquement admissibles seront notés SA.

Trouver $S = \{\mathbf{u}^\ell(\mathbf{M}), \sigma^\ell(\mathbf{M}), \mathbf{w}^\ell(\mathbf{M}), \mathbf{F}^\ell(\mathbf{M})\}_{\ell=1}^2$ telle que :

– $\{\mathbf{u}^\ell(\mathbf{M}), \mathbf{w}^\ell(\mathbf{M})\}_{\ell=1,2} \in \mathcal{U}_{ad}$, *espace des champs CA* :

$\mathbf{u}^\ell(\mathbf{M})$ et $\mathbf{w}^\ell(\mathbf{M})$ sont réguliers

$$\mathbf{u}^\ell_{|\partial_1\Omega^\ell}(\mathbf{M}) = \mathbf{u}_d^\ell(\mathbf{M}) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{u}^\ell_{|I_c}(\mathbf{M}) = \mathbf{w}^\ell(\mathbf{M}) \quad (2.4)$$

L'espace $\mathcal{U}_{ad,0}$ est l'espace homogène associé à \mathcal{U}_{ad} .

– $\{\sigma^\ell(\mathbf{M}), \mathbf{F}^\ell(\mathbf{M})\}_{\ell=1,2} \in \mathcal{S}_{ad}$, *espace des champs SA* :

$\sigma^\ell(\mathbf{M})$ et $\mathbf{F}^\ell(\mathbf{M})$ sont réguliers et $\forall \mathbf{u}^*(\mathbf{M}) \in \mathcal{U}_{ad,0}$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\ell} Tr[\sigma^\ell(\mathbf{M})\varepsilon(\mathbf{u}^*(\mathbf{M}))]dM = \\ \int_{\Omega^\ell} \mathbf{f}_d^\ell(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{u}^*(\mathbf{M})dM + \int_{\partial_2\Omega^\ell} \mathbf{F}_d^\ell(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{u}^*(\mathbf{M})ds + \\ \int_{I_c} \mathbf{F}^\ell(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{u}^*(\mathbf{M})ds \quad (2.5) \end{aligned}$$

sur I_c :

$$\mathbf{F}^c(\mathbf{M}) = -\mathbf{F}^1(\mathbf{M}) = \mathbf{F}^2(\mathbf{M}) \quad (2.6)$$

– *Relations de comportement*

$$\text{dans } \Omega^\ell \quad \sigma^\ell(\mathbf{M}) = \mathbf{K}^\ell(\mathbf{M})\varepsilon(\mathbf{u}^\ell(\mathbf{M})) \quad (2.7)$$

$$\text{sur } I_c \quad b(-\mathbf{w}^c(\mathbf{M}), \mathbf{F}^c(\mathbf{M})) + \mathbf{w}^c(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{F}^c(\mathbf{M}) = 0 \quad (2.8)$$

2.1.2 P1 : séparation des équations du problème

Dans l'approche proposée par Ladevèze [1999], nous séparons les équations du problème de référence en considérant d'une part celles qui concernent les sous structures (équations linéaires) et d'autre part, celles qui concernent les interfaces (équations non linéaires). Nous obtenons ainsi :

l'ensemble Γ , constitué des équations de comportement des interfaces :

- équation (2.8) ;
- équation (2.6) ;

l'ensemble A_d , constitué des équations linéaires éventuellement globales :

- les équations d'admissibilité cinématique (2.3) et (2.4) ;
- les équations d'admissibilité statique dans les sous structures (2.5) ;
- les relations de comportement dans les sous structures (2.7).

La solution du problème de référence se situe à l'intersection de ces deux ensembles.

2.1.3 P2 : méthode de résolution itérative

L'algorithme LATIN détermine des approximations de la solution en recherchant successivement des éléments de Γ et de A_d . Chaque groupe possédant plus d'inconnues que d'équations, nous introduisons pour chaque étape de résolution des directions de recherche \mathbf{E}^+ et \mathbf{E}^- . La figure 2.3 résume de manière simplifiée la recherche de cette solution.

A l'itération n , partant d'une solution S_n appartenant à A_d , nous cherchons un point de Γ vérifiant aussi la direction de recherche $\hat{S}_n - S_n \in \mathbf{E}^+$. Pour une direction de recherche vérifiant certaines propriétés, de positivité notamment, nous obtenons une solution unique \hat{S}_n .

Dans un second temps nous déterminons la solution S_{n+1} qui appartient à A_d et à la direction de descente $S_{n+1} - \hat{S}_n \in \mathbf{E}^-$.

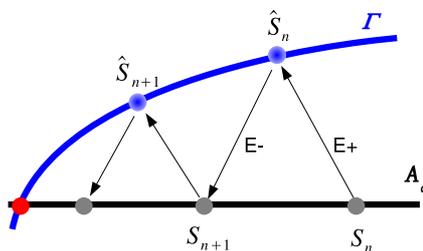


Figure 2.3 – Stratégie de résolution

2.2 Modélisation stochastique d'un problème de contact

Pour décrire le problème de contact dans le cadre stochastique, nous nous basons sur la description précédente. Toutes les grandeurs mises en jeu s'expriment maintenant en fonction d'un ensemble de variables aléatoires notées $\boldsymbol{\xi}$ dont la densité de probabilité est notée $\phi(\boldsymbol{\xi})$.

2.2.1 Formulation du problème stochastique

Trouver $S = \{\mathbf{u}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}), \sigma^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}), \mathbf{w}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}), \mathbf{F}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})\}_{\ell=1}^2$ tel que :

– $\{\mathbf{u}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}), \mathbf{w}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})\}_{\ell=1,2} \in \mathcal{U}_{ad}$, *espace des champs CA* :

$\mathbf{u}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ et $\mathbf{w}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ sont réguliers

$$\mathbf{u}^\ell_{|\partial_1\Omega^\ell}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}_d^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{u}^\ell_{|I_c}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{w}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.10)$$

L'espace $\mathcal{U}_{ad,0}$ est l'espace homogène associé à \mathcal{U}_{ad} .

– $\{\sigma^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}), \mathbf{F}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})\}_{\ell=1,2} \in \mathcal{S}_{ad}$, *espace des champs SA* :

$\sigma^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ et $\mathbf{F}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ sont réguliers et $\forall \mathbf{u}^*(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{U}_{ad,0}$:

$$\begin{aligned} & \int_{\boldsymbol{\xi}} \int_{\Omega^\ell} Tr[\sigma^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}))] \phi(\boldsymbol{\xi}) dM d\boldsymbol{\xi} = \\ & \int_{\boldsymbol{\xi}} \int_{\Omega^\ell} \mathbf{f}_d^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{u}^*(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) dM \phi(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} + \int_{\boldsymbol{\xi}} \int_{\partial_2\Omega^\ell} \mathbf{F}_d^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{u}^*(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) dS \phi(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} + \\ & \int_{\boldsymbol{\xi}} \int_{I_c} \mathbf{F}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{u}^*(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) dS \phi(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (2.11) \end{aligned}$$

sur I_c :

$$\mathbf{F}^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = -\mathbf{F}^1(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{F}^2(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.12)$$

– *Relations de comportement*

$$\text{dans } \Omega^i \quad \sigma^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{K}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})) \quad (2.13)$$

$$\text{sur } I_c \quad b(-\mathbf{w}^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}), \mathbf{F}^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})) + \mathbf{w}^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{F}^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = 0 \quad (2.14)$$

Cette formulation faible permet de résoudre le problème de manière approchée sur des sous espace des champs admissibles géométriques et stochastiques (e.g Méthode des élément finis stochastiques Ghanem and Spanos [2003]).

2.2.2 Résolution du problème stochastique de référence

Pour résoudre numériquement ce problème mécanique stochastique, nous cherchons une solution analytique approchée en déplacement de la forme :

$$\mathbf{u}_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^P a_{ij}^\ell h_i(\mathbf{M}) \Psi_j(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.15)$$

où :

- les fonctions $h_i(\mathbf{M})$ correspondent aux fonctions de base de l'approximation géométrique ;
- les fonctions $\psi_j(\boldsymbol{\xi})$ correspondent aux fonctions de base de l'approximation stochastique.

Les méthodes non intrusives que nous utilisons permettent de dissocier l'étude géométrique (déterministe) et l'étude stochastique (figure 2.4).

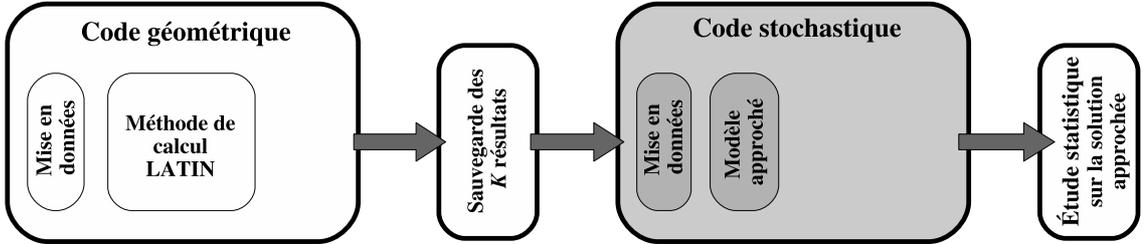


Figure 2.4 – Découplage entre l'étude géométrique et l'étude stochastique

La résolution du problème stochastique de référence 2.2.1 se fait donc à partir d'une série de K résolutions du problème déterministe de référence 2.1.1.3 dont les solutions sont :

$$\{S(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k)\}_{k=1}^K = \{ \{ \mathbf{u}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k), \sigma^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k), \mathbf{w}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k), \mathbf{F}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k) \}_{\ell=1}^2 \}_{k=1}^K$$

où les $\{\boldsymbol{\xi}_k\}_{k=1}^K$ représentent les valeurs des paramètres variables pour chaque calcul déterministe.

2.2.3 Modélisation des paramètres variables dans ce formalisme

2.2.3.1 Paramètres matériaux et chargement

L'introduction de paramètres matériaux variables ou de chargements variables dans ce formalisme n'introduit pas de difficulté supplémentaire. Dans le cadre des méthodes non intrusives, la dépendance stochastique du coefficient de frottement, par exemple, conduira à lancer une série de calculs déterministes en changeant directement, dans la relation de comportement de l'interface, la valeur de ce coefficient.

2.2.3.2 Paramètres géométriques (défauts de formes)

La prise en compte de variations de la géométrie, dans le cadre d'études paramétriques ou probabilistes, amène par contre une difficulté supplémentaire. Dans les équations du modèle, cette variation n'entraîne pas de variations d'un paramètre, mais du domaine d'intégration. Plusieurs techniques permettent de prendre en compte cette variabilité :

- le remaillage de toute ou partie de la structure pour chaque variation de la géométrie ;
- le morphing : les points du maillage de base sont paramétrés et déplacés pour représenter la variation de géométrie ;
- l'utilisation de la XFEM : la géométrie est décrite par une fonction Level-set, il n'y a pas de remaillage (Nouy et al. [2007]).

Les techniques de remaillage et de morphing sont en générale longues, et nécessitent un dialogue entre les logiciels de CAO, de maillage et de calcul pour qu'une étude paramétrique puisse être lancée de manière automatique. Ce genre de techniques impose donc des contraintes d'interfaçage de codes énormes, ce qui constitue un frein pour leur développement et leur implantation. L'utilisation récente de la XFEM, qui permet de décrire de façon analytique la géométrie par une fonction Level-set, semble judicieuse car elle évite ce remaillage. Nous proposons ici une technique permettant aussi de prendre en compte, de manière analytique, des petites variations de la géométrie.

a. Principe • Pour les faibles variations de la géométrie au regard de la taille de la structure (défauts de formes au niveau des interfaces de contact ou variations de l'épaisseur d'une couche de lubrifiant par exemple) l'utilisation des techniques précédentes semble inadaptée. La démarche que nous proposons ici se base sur une description analytique des irrégularités de la géométrie au niveau des interfaces (figure 2.5) par l'introduction, dans la relation de comportement des interfaces, d'une fonction « défaut de forme ».

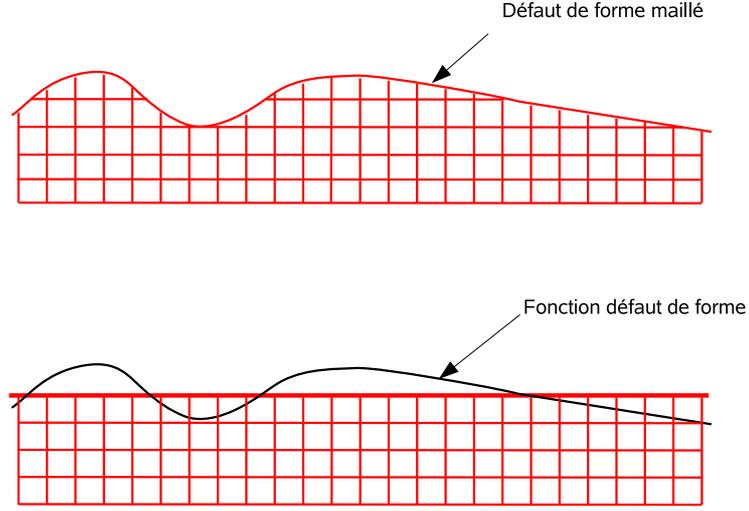


Figure 2.5 – fonction défaut de forme

b. Modélisation • Pour introduire cette fonction « défauts de forme », nous créons un comportement d'interface calqué sur le comportement des interfaces de contact. Les fonctions « défauts de forme » de chaque coté de l'interface I^c seront notées $DF^1(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ et $DF^2(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$. Ces fonctions sont introduites dans les équations caractérisant l'admissibilité cinématique de l'interface.

– $\{(\mathbf{u}^\ell, \mathbf{w}_{DF}^\ell)\}_{\ell=1,2} \in \mathcal{U}_{ad}$, espace des champs CA avec défauts de forme :

$$\mathbf{u}_{|\partial_1 \Omega^\ell}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}_d^\ell \quad (2.16)$$

$$\mathbf{u}_{|I^c}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{w}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) + DF^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{w}_{DF}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.17)$$

L'introduction de ces fonctions à une influence directe sur la relation de comportement de l'interface : le saut de déplacement \mathbf{w}_{DF}^c avec défauts de forme s'écrira :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{DF}^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) &= \mathbf{w}_{DF}^2(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) - \mathbf{w}_{DF}^1(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \\ &= \mathbf{w}^2(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) + DF^2(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) - (\mathbf{w}^1(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) + DF^1(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})) \\ &= \mathbf{w}^2(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) - \mathbf{w}^1(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) + DF(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \end{aligned}$$

L'équation (2.1) devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{nDF}^c \geq 0 \quad F_n^c \geq 0 \quad F_n^c \mathbf{w}_{nDF}^c = 0 \quad (2.18) \\ \|\mathbf{F}_t^c\| \leq \mu F_n^c \quad \mathbf{w}_{tDF}^c \wedge \mathbf{F}_t^c = 0 \quad \mathbf{w}_{tDF}^c \cdot \mathbf{F}_t^c \leq 0 \end{aligned}$$

Au final, nous remplaçons simplement \mathbf{w}^c par \mathbf{w}_{DF}^c dans la relation de comportement écrite sous la forme d'un bipotentiel.

$$b(-\mathbf{w}_{DF}^c, \mathbf{F}^c) + \mathbf{w}_{DF}^c \cdot \mathbf{F}^c = 0 \quad (2.19)$$

$$\mathbf{F}^c = -\mathbf{F}^1 = \mathbf{F}^2 \quad (2.20)$$

Ce formalisme permet, lors de la modélisation des problèmes de contact, de représenter simplement les surfaces de contact dans leur configuration nominale ou parfaite, ce qui facilite la phase de modélisation géométrique et la phase de maillage. De cette manière, nous transformons la variabilité géométrique en une variabilité du comportement de l'interface, et les variables représentatives des défauts de forme (épaisseur, rugosité...) peuvent être prises en compte de la même manière que les variables matériaux.

c. Quelques exemples • Pour illustrer cette démarche, nous avons introduit ce comportement d'interface dans l'exemple que nous allons traiter. Les défauts de forme sont introduits de manière symétrique sur les deux interfaces de contact. Les figures 2.6 et 2.7 représentent les contraintes de Von Mises pour deux défauts de formes différents. Le premier correspond à une surface bombée (défaut de forme en x^2) et le second correspond à des irrégularités périodiques (défaut de forme en $\cos(x)$).

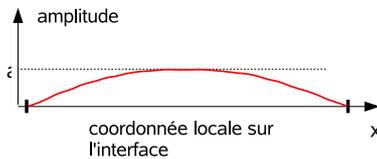
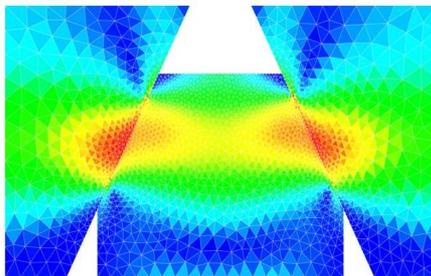


Figure 2.6 – Surfaces bombée

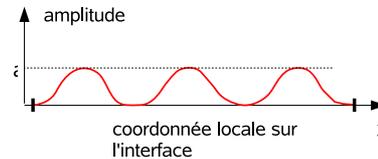
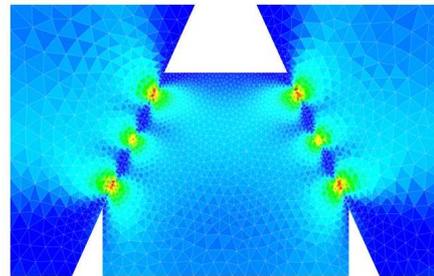


Figure 2.7 – Défaut de forme périodique

d. Evolutions possibles • Une évolution possible pour ce comportement d'interface est de rendre la fonction « défauts de forme » dépendante du temps ou

du chargement, notamment en ajoutant un comportement plastique. Ceci pourrait permettre de modéliser des zones de microplasticité au niveau du contact, ou des phénomènes d'usure et de rodage sans pour autant introduire des comportements non-linéaires sur toute la structure.

2.3 Problématique industrielle

Nous avons décrit la méthode de calcul qui va nous permettre de résoudre la série de problèmes géométriques déterministes qui servira de base pour le calcul de la solution stochastique approchée. Nous allons maintenant conduire une étude stochastique complète sur un exemple simple issue d'une problématique industrielle.

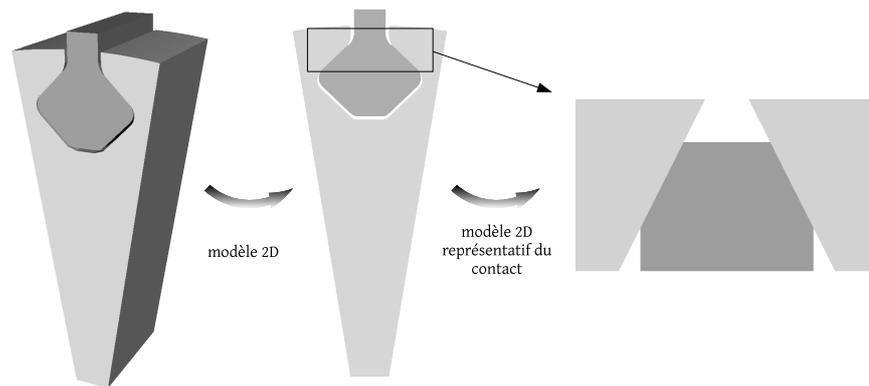


Figure 2.8 – Exemple : modèle 2D simple, zoom sur les zones de contact

Un problème rencontré par les constructeurs de moteurs d'avions est la modélisation de l'assemblage entre les aubes de turbine Haute Pression et le disque central lié à l'axe de rotation du moteur. Sur la figure 2.8, nous donnons, à titre d'exemple, la représentation d'un secteur angulaire de l'assemblage entre le pied d'une aube et le disque. Les parties qui nous intéressent dans cette représentation sont les zones de contact entre le pied de l'aube et le disque. C'est en effet au niveau de ces zones de contact que les incertitudes sont les plus grandes (variation du coefficient de frottement, érosion des couches de lubrifiant...). Pour simplifier le problème, nous créons un petit exemple 2D représentatif des phénomènes de frottement au niveau de ces zones de contact. Ce modèle, nous servira de fil conducteur dans la suite de ce mémoire pour valider les outils et les méthodes proposés.

2.3.1 Description de l'exemple aube-disque

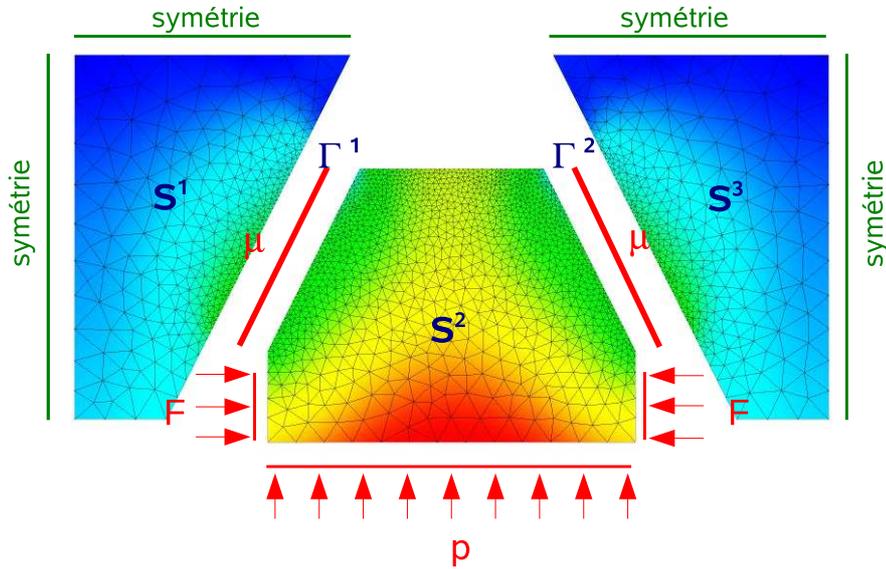


Figure 2.9 – Exemple : sous structuration

Pour modéliser et calculer cet assemblage, nous le représentons de manière sous structurée (figure 2.9). Sur cette figure, la pièce centrale notée S^2 représente le pied de l'aube, et les deux pièces, S^1 et S^3 , de part et d'autre du pied, représentent le disque.

Les interfaces de contact $S^1 - S^2$ et $S^2 - S^3$ sont notées respectivement Γ^1 et Γ^2 . Nous utilisons une loi de Coulomb pour représenter le comportement de contact avec frottement au niveau de ces interfaces. Dans cet exemple, nous introduisons deux variables aléatoires : le coefficient de frottement μ au niveau des deux interfaces de contact, et le module d'Young de E^2 l'aube S^2 .

Constantes matériaux :

Les trois sous structures ont un comportement élastique linéaire isotrope. Leur coefficient de Poisson est identique et vaut 0,3, et leur module d'Young valent respectivement :

- pour le disque (S^1 et S^3) : $E^1 = E^3 = 210 \cdot 10^3$ MPa ;
- pour l'aube S^2 : le module d'Young E^2 est représenté par une variable aléatoire gaussienne tronquée d'espérance égale à $240 \cdot 10^3$ MPa et d'écart type égale à $10 \cdot 10^3$ MPa. Son intervalle de variation est $[210 \cdot 10^3, 270 \cdot 10^3]$.

Conditions géométriques :

- des conditions de symétrie sont imposées sur les surfaces verticales et horizontales des pièces S^1 et S^3 .

Efforts imposés :

- une pression $\mathbf{p} = 1000$ Pa est appliquée sur la face inférieure du pied S^2 ;
- deux pressions \mathbf{F} et $-\mathbf{F}$ opposées sont appliquées sur les surfaces latérales verticales du pied S^2 , avec $\mathbf{F} = 500$ Pa.

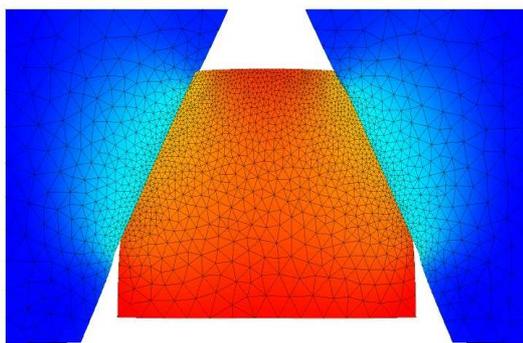
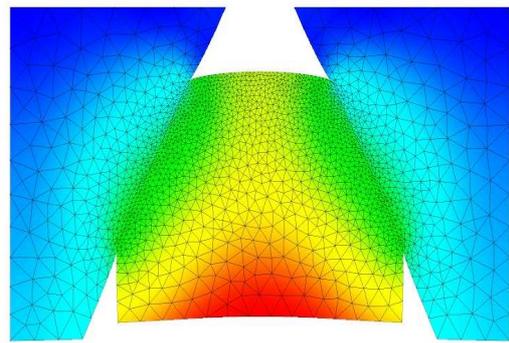
Conditions de contact :

Le contact avec frottement est représenté par une loi de Coulomb. Le coefficient de frottement μ sur chaque interface est défini par une variable aléatoire gaussienne tronquée avec une espérance de 0,5, un écart type de 0,2 et un intervalle de variation compris entre 0,1 et 0,9 (soit plus ou moins 2 écarts types).

Quantité d'intérêt :

La quantité dont nous souhaitons connaître la loi de répartition est le travail des efforts de frottement T_{Γ^2} sur l'interface Γ^2 .

Lorsque le coefficient de frottement est élevé, il y a adhérence entre le pied S^2 et le disque (S^1 et S^3). Au dessous d'une certaine valeur du coefficient de frottement, il y a glissement avec frottement, et la translation du pied est retenue par la géométrie de l'assemblage. Les contraintes de Von Mises pour les deux cas extrêmes ($\mu = 0,2$ et $\mu = 0,8$) sont représentées sur les figures 2.10 et 2.11.

Figure 2.10 – $\mu = 0,2$: glissementFigure 2.11 – $\mu = 0,8$: adhérence

2.3.2 Solution approchée

L'objectif de ce calcul est de construire la loi de répartition de la quantité d'intérêt T_{Γ^2} :

$$T_{\Gamma^2}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma^2} \mathbf{w}^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{F}^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) dM$$

où les champs solutions $\mathbf{w}^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ et $\mathbf{F}^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ sont exprimés sur la base d'approximation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^P w_{ij} h_i(\mathbf{M}) \Psi_j(\boldsymbol{\xi}) \\ \mathbf{F}^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^P F_{ij} h_i(\mathbf{M}) \Psi_j(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned}$$

Comme nous utilisons des méthodes non intrusives, ces approximations sont construites à partir d'une série de K résolutions de problèmes déterministes dont les solutions sont :

$$\{S(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k)\}_{k=1}^K = \{\{\mathbf{u}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k), \sigma^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k), \mathbf{w}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k), \mathbf{F}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k)\}_{\ell=1}^3\}_{k=1}^K \quad (2.21)$$

où les $\{\boldsymbol{\xi}_k\}_{k=1}^K$ représentent les valeurs des paramètres variables pour chaque calcul déterministe.

La complexité des problèmes que nous traitons ne permet généralement pas de faire un grand nombre de calculs déterministes pour construire la solution approchée. Dans ce cas, le nombre K de calculs correspond au minimum nécessaire pour obtenir une solution avec une précision souhaitée. Il est alors absolument nécessaire, pour obtenir une étude de qualité, de choisir une interpolation adaptée au problème traité ainsi que les points de collocation appropriés. Les réponses approchées que nous comparons ici sont basées sur les approximations suivantes :

- l'approximation spatiale à chaque calcul déterministe est obtenue par la méthode des éléments finis associée à la méthode LATIN. Les fonction $h_i(\mathbf{M})$ de l'approximation sont donc des fonctions de base éléments finis ;
- l'approximation stochastique est réalisée en utilisant pour les fonction $\Psi_j(\boldsymbol{\xi})$:
 - soit une représentation polynomiale standard d'ordre 2 ;
 - soit une représentation sur le chaos polynomial d'ordre 2 ;

Les étapes du calcul sont présentés sur la figure 2.12. Nous avons choisi de comparer ces représentations car l'approximation polynomiale standard est la plus utilisée dans les bureaux d'études, alors que la représentation sur le chaos polynomial est une alternative adaptée aux problèmes stochastiques mais qui est encore peu, voir pas utilisée dans un cadre industriel.

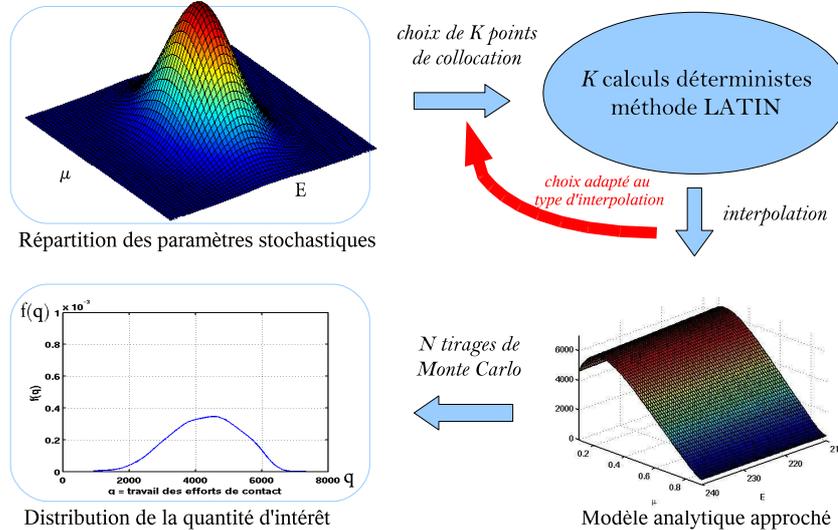


Figure 2.12 – Méthode non intrusive

2.3.3 Distribution de référence

Cet exemple est assez simple pour nous permettre de réaliser un grand nombre de calculs déterministes. Ceci nous permet de construire une solution de référence, sur l'espace stochastique, qui correspond à une interpolation polynomiale riche construite sur une base de 121 calculs déterministes. Les valeurs des paramètres variables E^2 et μ , issues d'un plan d'expérience orthogonal, sont réparties de manière régulière.

Cette solution de référence nous permet de construire la distribution de référence du travail des efforts de frottement T_{Γ^2} sur l'interface Γ^2 que nous allons comparer aux distributions issues des solutions approchées.

2.3.4 Résultats du calcul probabiliste

La figure 2.13 représente la surface de réponse correspondant à la solution de référence. La figure 2.14 représente la distribution de référence pour T_{Γ^2} . Cette distribution a été reconstruite à partir d'une étude de Monte Carlo sur la solution de référence (250 000 tirages). À partir de cette distributions, nous estimons la densité de probabilité de référence (figure 2.15) grâce à la méthode du noyau (Kernel estimation ou Kernel smoothing) avec un noyau gaussien (Wand and Jones [1995]).

Les figures 2.17 et 2.16 représentent respectivement les densité de probabilité approchées obtenues et pour l'approximation polynomiale standard et pour l'approximation sur le chaos polynomial. Elles ont été reconstruites à partir d'un tirage de Monte Carlo utilisant les solutions approchées (250 000 tirages).

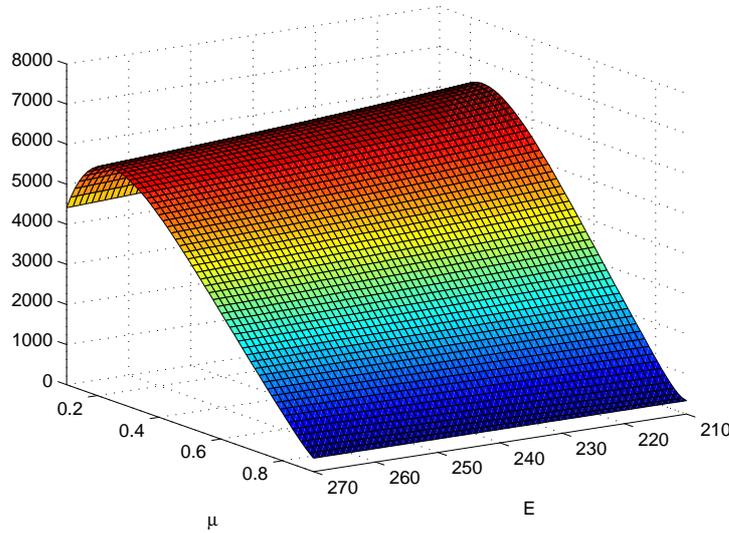


Figure 2.13 – Solution de référence

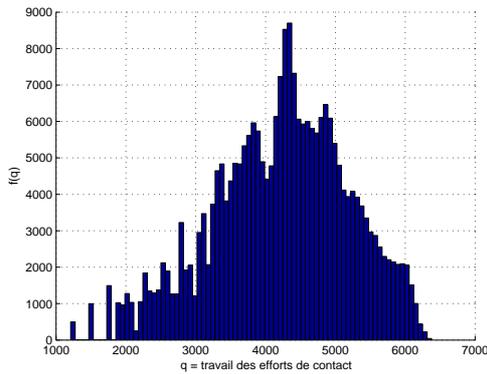


Figure 2.14 – Distribution obtenue pour la référence

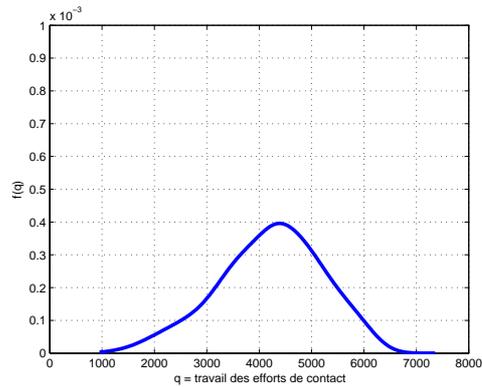


Figure 2.15 – Densité de probabilité obtenue pour la référence

Une comparaison rapide des différentes distributions obtenues figures 2.15, 2.16 et 2.17 permet d'estimer visuellement la qualité de chaque surfaces de réponses (modèle approché). En effet, la distribution obtenue par la surface de réponse polynomiale standard donne un résultat très éloigné de la distribution de référence, alors que la distribution obtenue par l'interpolation sur le chaos polynomial est beaucoup plus proche.

Le tableau 2.1 permet de comparer les espérances et écart types obtenus pour

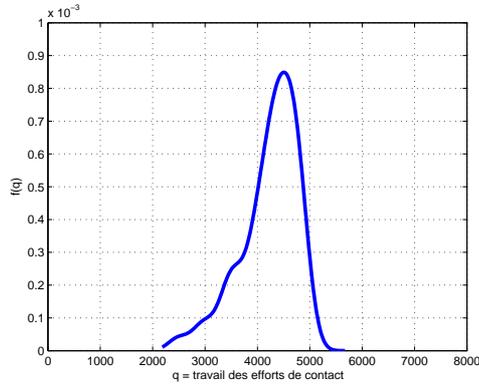


Figure 2.16 – Densité de probabilité obtenue pour une interpolation polynomiale standard

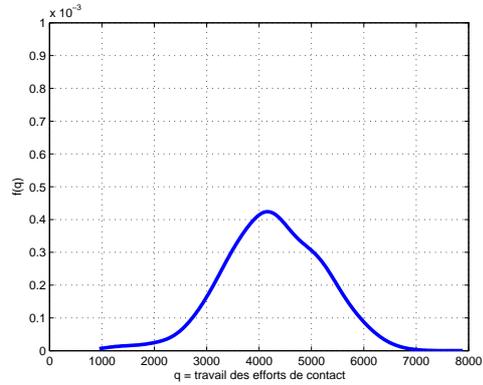


Figure 2.17 – Densité de probabilité obtenue pour une interpolation chaos polynomiale

chaque solution approchée. Il confirme la qualité de l'approximation sur le chaos polynomial qui donne une moyenne et un écart type proche de la moyenne et de l'écart type de la référence.

	espérance	écart type
standard	$4,22 \cdot 10^3$	$5,49 \cdot 10^2$
chaos	$4,25 \cdot 10^3$	$9,14 \cdot 10^2$
référence	$4,28 \cdot 10^3$	$10,0 \cdot 10^2$

Tableau 2.1 – Résultats

2.4 Conclusion partielle : estimer la qualité de la solution

Ces résultats nous ont permis de comparer qualitativement une interpolation sur le chaos polynomial avec une interpolation polynomiale standard. Les résultats que nous avons obtenus montrent, par comparaison avec une solution de référence, la qualité de l'approximation sur le chaos polynomial, et surtout les erreurs importantes générées par l'utilisation d'une approximation polynomiale standard. Pour des problèmes complexes, la construction d'une solution de référence est généralement impossible, et l'estimation de la qualité du modèle stochastique approché nous semble donc essentielle pour utiliser les résultats obtenus en toute confiance

(Carrère et al. [2007]). Nous allons donc proposer, dans la suite, un estimateur d'erreur globale, basé sur la notion d'erreur en relation de comportement, pour les problèmes de contact dans le cadre stochastique.

Vis-à-vis des méthodes non intrusives que nous utilisons, la différence entre les deux solutions approchées est uniquement le choix des « points de collocation » (valeurs des paramètres variables pour chaque calcul déterministe). Ce choix est donc essentiel pour obtenir une solution de qualité. Dans Sudret et al. [2005], la technique permettant de choisir ces points est indépendante de la mécanique du problème. Ceci nous semble mal adapté pour la résolution de problèmes non linéaires, c'est pourquoi, dans les chapitres suivants, nous nous orientons vers une technique adaptative utilisant les résultats d'un calcul d'erreur dans le cadre stochastique.

Enfin, les approximations polynomiales ne nous semblent pas toujours les plus adaptées. Pour les problèmes de contact par exemple, la solution peut présenter des discontinuités, et une représentation éléments finis pour les fonctions de base $\Psi_j(\boldsymbol{\xi})$ peut donner des résultats de meilleur qualité. Ce choix permet aussi de retranscrire, dans le cadre probabiliste, les outils développés pour les méthodes éléments finis géométriques. Par analogie, nous introduirons donc, dans les chapitres suivants, les termes de maillage stochastique, de fonctions de base stochastiques ou d'adaptation du maillage stochastique...

Chapitre 3

Estimateur d'erreur dans le cadre stochastique

Dans ce chapitre nous allons introduire un estimateur d'erreur, basé sur la notion d'erreur en relation de comportement étendue au cadre stochastique. Nous validerons son utilisation sur l'exemple aube-disque.

Sommaire

3.1	Estimation d'erreur globale dans le cadre déterministe . . .	59
3.1.1	Méthodes relatives aux problèmes linéaires en statique	60
3.1.2	Méthodes relatives aux problèmes de contact en statique . . .	72
3.1.3	L'erreur en relation de comportement pour le contact	76
3.2	Estimateur d'erreur dans le cadre stochastique	79
3.2.1	Modèle stochastique de référence	79
3.2.2	Définition de l'estimateur d'erreur	79
3.2.3	Construction des champs admissibles	80
3.2.4	Contributions par entités géométriques	83
3.3	Résultats numériques	84
3.3.1	Discretisations géométriques et stochastiques	84

3.3.2	Evolution de l'erreur estimée	86
3.3.3	Indice d'efficacité	88
3.3.4	Comparaison des interpolations	89
3.4	Conclusion partielle : indicateurs spécifiques	90

3.1 Estimation d'erreur globale dans le cadre déterministe

Pour estimer la qualité de la solution d'un problème de contact dans le cadre stochastique, nous allons nous inspirer des techniques d'estimation de l'erreur dans le cadre déterministe. Nous avons fait le choix d'utiliser une méthode non intrusive pour construire la solution approchée sur l'espace stochastique. Pour garder le même esprit, nous allons nous servir des résultats d'une série de calculs d'erreur sur des problèmes déterministes pour calculer l'erreur globale sur le modèle stochastique approché (figure 3.1).

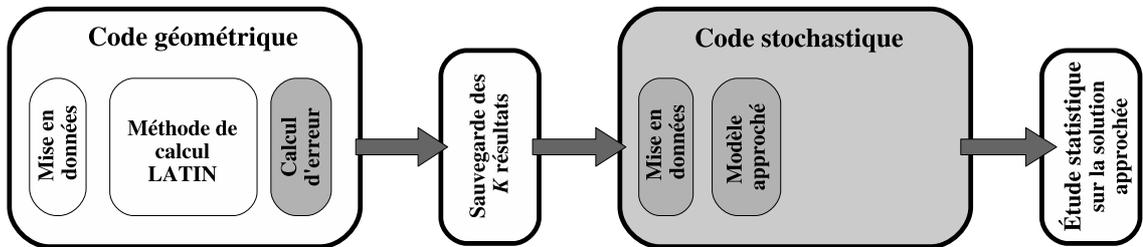


Figure 3.1 – Calcul de l'erreur stochastique à partir d'une série de calculs déterministes

Les sources d'erreur auxquelles nous nous intéressons dans ce mémoire sont liées à la discrétisation. La littérature relative à l'estimation d'erreur de discrétisation, dans le cadre des méthodes éléments finis géométriques, est très vaste, et nous ne citerons dans ce chapitre que les thèmes et les références essentiels qui permettront d'introduire le calcul d'erreur pour des problèmes de contact dans le cadre stochastique. La démarche que nous proposons dans ce mémoire constitue une première étape dans l'estimation de l'erreur liée aux problèmes stochastiques avec contact, nous n'aborderons donc pas le sujet de l'estimation d'erreur locale (erreur liée à une quantité d'intérêt) qui sera sûrement l'objet de travaux futurs.

Nous allons, dans un premier temps, donner un aperçu des différentes méthodes permettant d'estimer l'erreur pour les problèmes d'élasticité linéaire en statique. Dans un second temps, nous présenterons des développements de ces méthodes pour les problèmes de contact en statique en accordant une place plus importante à l'estimation de l'erreur en relation de comportement.

3.1.1 Méthodes relatives aux problèmes linéaires en statique

Ce sont, historiquement, les premières méthodes à être apparues dans le domaine de la vérification des calculs éléments finis. Plusieurs outils numériques développés à partir de ces méthodes sont aujourd'hui reconnus et largement utilisés. Une revue de ces différents outils peut être trouvée dans Ladevèze and Pelle [2004], Babuška and Strouboulis [2001], Ainsworth and Oden [1997], Stein [2003].

3.1.1.1 Principe

Considérons une structure qui occupe un espace Ω . Sur une partie $\partial_1\Omega$ du bord $\partial\Omega$, nous imposons le déplacement \mathbf{u}_d . Sur la partie complémentaire $\partial_2\Omega$ nous imposons la densité surfacique d'effort \mathbf{F}_d . nous imposons aussi une densité volumique d'effort \mathbf{f}_d , et nous supposons un comportement élastique du matériaux.

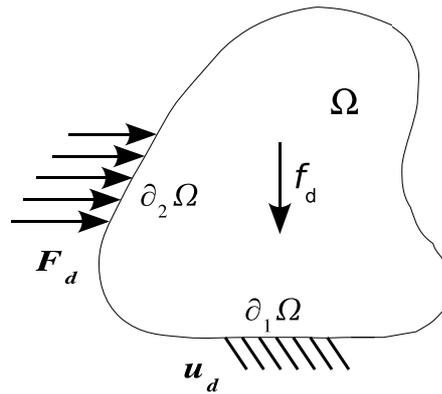


Figure 3.2 – Problème de référence

Le problème de référence se formule de la manière suivante :

Trouver le déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{M})$ et la contrainte $\sigma(\mathbf{M})$ tels que :

– $\mathbf{u}(\mathbf{M}) \in \mathcal{U}_{ad}$, *espace des champs CA* :

$\mathbf{u}(\mathbf{M})$ est régulier

$$\mathbf{u}(\mathbf{M}) = \mathbf{u}_d \quad \text{sur} \quad \partial_1\Omega \quad (3.1)$$

L'espace $\mathcal{U}_{ad,0}$ correspond à l'espace des champs $\mathbf{u}(\mathbf{M})$ avec des conditions homogènes.

– $\sigma(\mathbf{M}) \in \mathcal{S}_{ad}$, espace des champs SA :

$\sigma(\mathbf{M})$ régulier, et $\forall \mathbf{u}^*(\mathbf{M}) \in \mathcal{U}_{ad,0}$:

$$\int_{\Omega} Tr[\sigma(\mathbf{M})\varepsilon(\mathbf{u}^*(\mathbf{M}))]dM = \int_{\partial_2\Omega} \mathbf{F}_d(\mathbf{M})\mathbf{u}^*(\mathbf{M})dS + \int_{\Omega} \mathbf{f}_d(\mathbf{M})\mathbf{u}^*(\mathbf{M})dM \quad (3.2)$$

– Relation de comportement

$$\sigma(\mathbf{M}) = \mathbf{K}(\mathbf{M})\varepsilon(\mathbf{u}(\mathbf{M})) \quad (3.3)$$

La solution exacte $(\mathbf{u}_{ex}, \sigma_{ex})$ de ce problème est rarement accessible, et nous utilisons des méthodes d'approximation pour trouver une solution numérique (\mathbf{u}_h, σ_h) . Dans ce cadre, l'erreur que nous souhaitons estimer est :

$$\mathbf{e} = \mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_h \quad (3.4)$$

Une manière directe de calculer cette erreur est d'introduire ce terme \mathbf{e} dans l'équation d'équilibre (3.2). Nous obtenons ainsi l'équation des résidus :

$$\int_{\Omega} Tr[\mathbf{K}\varepsilon(\mathbf{e})\varepsilon(\mathbf{u}^*)]dM = - \int_{\Omega} Tr[\mathbf{K}\varepsilon(\mathbf{u}_h)\varepsilon(\mathbf{u}^*)]dM + \int_{\partial_2\Omega} \mathbf{F}_d\mathbf{u}^*dS + \int_{\Omega} \mathbf{f}_d\mathbf{u}^*dM \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_{ad,0} \quad (3.5)$$

L'évaluation de l'équation (3.5) est complexe et souvent plus coûteuse que le problème initial. Dans le cadre du calcul d'erreur globale, nous ne calculons donc pas directement \mathbf{e} , mais une mesure de \mathbf{e} sur tout le domaine Ω . Une mesure communément utilisée est la norme énergétique qui a un sens physique fort :

$$\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{K},\Omega} = \|\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{K},\Omega} = \|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\mathbf{K}^{-1},\Omega} \quad (3.6)$$

où nous introduisons :

$$\begin{aligned} (\bullet, \bullet)_{\mathbf{K},\Omega} &= \int_{\Omega} Tr[\varepsilon(\bullet)\mathbf{K}\varepsilon(\bullet)]dM \\ (\bullet, \bullet)_{\mathbf{K}^{-1},\Omega} &= \int_{\Omega} Tr[\bullet\mathbf{K}^{-1}\bullet]dM \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \| \bullet \|_{\mathbf{K},\Omega}^2 = (\bullet, \bullet)_{\mathbf{K},\Omega} \\ & \| \bullet \|_{\mathbf{K}^{-1},\Omega}^2 = (\bullet, \bullet)_{\mathbf{K}^{-1},\Omega} \end{aligned}$$

L'objectif des méthodes d'estimation d'erreur est de donner un encadrement pour cette norme énergétique de l'erreur exacte $\| \mathbf{e} \|_{\mathbf{K},\Omega}$ tel que :

$$\| \mathbf{e} \|_{\mathbf{K},\Omega} \leq \theta^2 \quad (3.7)$$

Parmi l'ensemble des méthodes proposées pour calculer cette mesure de l'erreur $\| \mathbf{e} \|_{\mathbf{K},\Omega}$, nous pouvons faire une première distinction entre les méthodes d'estimation *a priori* et les méthodes d'estimation *a posteriori*.

a. Estimation *a priori* de l'erreur • Dans cette méthode, développée dans les années 70, nous n'utilisons pas la solution du problème éléments finis \mathbf{u}_h pour estimer l'erreur, mais seulement les données du problème (géométrie, maillage...) et la régularité de la solution exacte inconnue. Il est démontré qu'asymptotiquement, l'encadrement de la norme énergétique de l'erreur sur toute la structure Ω se met sous la forme :

$$\| \mathbf{e} \|_{\mathbf{K},\Omega} \leq \theta^2 = Ch^q \quad (3.8)$$

avec :

- h : taille caractéristique du maillage spatial ;
- q : coefficient positif dépendant de la régularité de la solution exacte ;
- C : constante dépendant de la forme des éléments du maillage, mais indépendante de h et q .

Cet estimateur est à la base de plusieurs techniques d'optimisation de maillages. Il n'est cependant pas assez précis pour faire une estimation fine de l'erreur de discrétisation.

b. Estimation *a posteriori* de l'erreur • Ce type de méthodes utilise la solution approchée (\mathbf{u}_h, σ_h) du problème pour estimer l'erreur de discrétisation. Il s'agit donc d'un post-traitement du problème éléments finis, et nous cherchons un encadrement pour la norme énergétique de l'erreur exacte $\| \mathbf{e} \|_{\mathbf{K},\Omega}$ tel que :

$$\| \mathbf{e} \|_{\mathbf{K},\Omega} \leq \theta^2 = \| \mathbf{e}_h \|_{\mathbf{K},\Omega} \quad (3.9)$$

où la fonction $\| \mathbf{e}_h \|_{\mathbf{K},\Omega}$ est une fonction qui dépend de la solution approchée et qui caractérise l'estimateur d'erreur. Nous pouvons distinguer trois familles de méthodes permettant de calculer cet estimateur :

- les méthodes basées sur le défaut d'équilibre (Babuška and Rheinboldt [1978a]);
- les méthodes basées sur le lissage des contraintes (Zienkiewicz and Zhu [1987]);
- les méthodes basées sur l'erreur de comportement (Ladevèze [1995]).

3.1.1.2 Méthodes basées sur les défauts d'équilibre

Cette famille d'estimateurs d'erreur a été initiée par Babuška et Rheinboldt en 1978 (Babuška and Rheinboldt [1978a,b], Ainsworth and Oden [1997], Verfürth [1996]). Elle est basée sur l'équation des résidus (3.5) qui traduit le non respect de l'équilibre par la solution approchée (\mathbf{u}_h, σ_h) . Nous pouvons écrire l'équation (3.5) de la manière suivante :

$$\int_{\Omega} Tr[\mathbf{K}\varepsilon(\mathbf{e})\varepsilon(\mathbf{u}^*)]dM = \mathbb{R}(\mathbf{u}^*) \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_{ad,0} \quad (3.10)$$

avec

$$\mathbb{R}(\mathbf{u}^*) = \sum_E \int_E \mathbf{r}_E \cdot \mathbf{u}^* dE - \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} \mathbf{t}_{\Gamma} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma$$

où E et Γ désignent respectivement l'ensemble des éléments et des peaux (arêtes en 2D) du maillage éléments finis utilisé. Les termes \mathbf{r}_E et \mathbf{t}_{Γ} sont définis par :

$$\mathbf{r}_E = (\mathbf{div}\sigma_h + \mathbf{f}_d)|_E \quad (3.11)$$

$$\mathbf{t}_{\Gamma} = \begin{cases} \sigma_{h|E_i} \mathbf{n}_{E_i} + \sigma_{h|E_j} \mathbf{n}_{E_j} & \text{si } \Gamma \text{ se trouve entre deux éléments } E_i \text{ et } E_j \\ \sigma_{h|E_i} \mathbf{n}_{E_i} - \mathbf{F}_d & \text{si } \Gamma \text{ se trouve sur le bord} \end{cases} \quad (3.12)$$

Remarque : Une propriété importante est que :

$$\mathbb{R}(\mathbf{u}_h^*) = 0 \quad \forall \mathbf{u}_h^* \in \mathcal{U}_{h,0} \quad (3.13)$$

où $\mathcal{U}_{h,0}$ est l'espace vectoriel associé à \mathcal{U}_h .

Nous pouvons distinguer deux sous familles d'estimateurs basées sur l'évaluation des défauts d'équilibre :

- les estimateurs explicites;
- les estimateurs implicites.

a. Estimateurs explicites • (« Global Explicit Residual Based Error Estimator » Babuška and Rheinboldt [1978a]) : Cette estimation de l'erreur est dite explicite car elle utilise directement l'équation des résidus (3.10). La première étape

du raisonnement est d'écrire l'équation des résidus en choisissant \mathbf{e} comme champ virtuel ($\mathbf{u}^* = \mathbf{e}$) :

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}, \mathbf{e})_{\mathbf{K}, \Omega} &= \sum_E \int_E \mathbf{r}_E \cdot \mathbf{e} dE - \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} \mathbf{t}_{\Gamma} \cdot \mathbf{e} d\Gamma \\ &= \sum_E \int_E \mathbf{r}_E \cdot (\mathbf{e} - \Pi \mathbf{e}) dE - \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} \mathbf{t}_{\Gamma} \cdot (\mathbf{e} - \Pi \mathbf{e}) d\Gamma \end{aligned}$$

où $\Pi \mathbf{e}$ est la projection de \mathbf{e} sur l'espace éléments finis. L'inégalité de Cauchy-Schwartz nous donne alors :

$$(\mathbf{e}, \mathbf{e})_{\mathbf{K}, \Omega} \leq \sum_E \|\mathbf{r}_E\|_{E} \|\mathbf{e} - \Pi \mathbf{e}\|_E + \sum_{\Gamma} \|\mathbf{t}_{\Gamma}\|_{\Gamma} \|\mathbf{e} - \Pi \mathbf{e}\|_{\Gamma}$$

où nous avons introduit les normes suivantes :

$$\|\bullet\|_E^2 = \int_E \bullet \cdot \bullet dE ; \|\bullet\|_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \bullet \cdot \bullet d\Gamma$$

À l'aide des inégalités de Poincaré de la forme :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e} - \Pi \mathbf{e}\|_E &\leq C_1 h_E \|\mathbf{e}\|_{\mathbf{K}, E} \\ \|\mathbf{e} - \Pi \mathbf{e}\|_{\Gamma} &\leq C_2 l_{\Gamma} \|\mathbf{e}\|_{\mathbf{K}, \Gamma} \end{aligned}$$

nous aboutissons finalement à l'estimation suivante pour l'erreur :

$$\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{K}, \Omega}^2 \leq \theta^2 = \sum_E \|C_1 h_E \mathbf{r}_E\|_E^2 + \sum_{\Gamma} \|C_2 l_{\Gamma} \mathbf{t}_{\Gamma}\|_{\Gamma}^2 \quad (3.14)$$

où h_E et l_{Γ} sont respectivement des mesures de E et Γ . Les constantes C_1 et C_2 dépendent du problème de référence (de sa stabilité notamment), de la forme des éléments et des fonctions d'interpolation. Leur évaluation précise n'est pas toujours possible. Les études menées montrent que cet estimateur tend à être assez pessimiste sur l'évaluation de l'erreur réelle. Des détails complets sur la méthode des résidus explicite peuvent être trouvés, par exemple, dans Verfürth [1996].

b. Estimateurs implicites • Ces méthodes sont plus coûteuses que les méthodes explicites, mais elles donnent de meilleurs résultats. Elles se basent à nouveau sur l'équation (3.10) en essayant cette fois d'approximer l'erreur \mathbf{e} localement en résolvant des problèmes locaux par élément ou par groupe d'éléments (patches).

b.a. Problèmes locaux par patch d'éléments • La première méthode des résidus implicite a été présentée par Babuška sous le nom de « Subdomain Residual Method » (Babuška and Rheinboldt [1978b], Babuška and Miller [1987]). L'approximation de \mathbf{e} y est faite sur des ensembles d'éléments ou patches, avec des conditions limites de Dirichlet homogènes. Chaque patch D_i est constitué par l'ensemble des éléments connectés au nœud i du maillage.

Les problèmes locaux associés consistent à chercher \mathbf{v}_i nul sur $\partial_0 D_i$ (partie de ∂D_i non incluse dans $\partial_2 \Omega$) tel que $\forall \mathbf{u}^*$ nul sur $\partial_0 D_i$:

$$\int_{D_i} Tr[\mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_i)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)]dM = \sum_{E \subset D_i} \int_E \mathbf{r}_E \cdot \mathbf{u}^* dE - \sum_{\Gamma \subset D_i} \int_{\Gamma} \mathbf{t}_{\Gamma} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma$$

Nous définissons alors l'estimateur d'erreur globale θ par l'expression :

$$\theta^2 = \sum_i \int_{D_i} Tr[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_i)\mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_i)]dM$$

Cette méthode donne généralement une sous-estimation de la norme de l'erreur réelle $\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{K},\Omega}$. Elle a donc été revisitée par la suite pour obtenir des estimateurs qui soient des majorants de $\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{K},\Omega}$ (Carstensen and Funken [2000], Morin et al. [2001], Prudhomme et al. [2004]).

b.b. Problèmes locaux par élément • En 1984, Demkowicz & al ont introduit la « Element Residual Method (ERM) » (Demkowicz et al. [1984]), basée sur la résolution de problèmes locaux définis par élément avec des conditions limites de Neumann. Les problèmes locaux consistent à chercher, sur chaque élément E un champ \mathbf{v}_E nul sur $\partial_1 E = \partial E \cap \partial_1 \Omega$ tel que $\forall \mathbf{u}^*$ nul sur $\partial_1 E$:

$$\int_E Tr[\mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_E)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)]dE = \int_E \mathbf{r}_E \cdot \mathbf{u}^* dE + \int_{\partial E - \partial_1 E} \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma$$

où \mathbf{R} est une densité d'effort donnée. L'estimateur d'erreur utilisé s'écrit alors :

$$\theta^2 = \sum_E \theta_E^2 = \sum_E \int_E Tr[\mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_E)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_E)]dE$$

La qualité de cette méthode repose essentiellement sur le choix des densités \mathbf{R} qui doivent respecter l'équilibre global de chaque élément. Une première façon de faire

est de contourner cette difficulté en recherchant une solution \mathbf{v}_E dans un sous-espace régularisant (Ainsworth and Oden [1997]). Une autre consiste à construire les densités \mathbf{R} de façon à assurer l'équilibre des efforts appliqués sur chaque élément (méthode EqRM, Bank and Weiser [1985], Ainsworth and Oden [1993], Babuška et al. [1994]).

3.1.1.3 Méthodes basées sur les défauts de régularité

Également appelées méthodes de lissage, ces méthodes sont dues aux travaux de Zienkiewicz & Zhu [Zienkiewicz and Zhu, 1987, 1992]. Elles consistent à construire une solution en contraintes σ^* plus régulière que celle obtenue par la méthode des éléments finis. Cette démarche est légitime car la solution approchée σ_h présente des discontinuités et ne converge pas en tout point avec le même taux vers la solution exacte σ_{ex} . Si la solution lissée σ^* est de meilleure qualité que la solution calculée σ_h , i.e. :

$$\|\sigma_{ex} - \sigma^*\|_{\mathbf{K}^{-1},\Omega} \leq A \|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\mathbf{K}^{-1},\Omega} \quad ; \quad 0 \leq A \leq 1$$

alors nous obtenons :

$$\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{K},\Omega} = \|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\mathbf{K}^{-1},\Omega} \leq C \|\sigma^* - \sigma_h\|_{\mathbf{K}^{-1},\Omega} \quad \text{avec} \quad C = \frac{1}{1-A} \geq 1$$

et la quantité calculable $\|\sigma^* - \sigma_h\|_{\mathbf{K}^{-1},\Omega}$ peut alors être prise comme estimateur de l'erreur globale. Cet estimateur est d'autant meilleur que la constante A est petite ; néanmoins, nous n'obtenons souvent qu'un indicateur d'erreur avec cette méthode, car la valeur de A est rarement connue de façon précise.

Nous voyons donc que la pertinence des méthodes de lissage repose sur la façon de construire la solution lissée. Deux versions successives ont été proposées pour calculer le champs de contrainte lissé σ^* .

a. Version ZZ1 • Dans cette première version (Zienkiewicz and Zhu [1987]), nous cherchons σ^* sous la forme :

$$\sigma^*(\mathbf{M}) = \sum_i \mathbb{A}_i h_i(\mathbf{M})$$

où les termes \mathbb{A}_i sont des tenseurs constants, symétriques, associés au nœud i , et interpolés sur les fonctions de base éléments finis $h_i(\mathbf{M})$ pour former la solution lissée $\sigma^*(\mathbf{M})$. Différentes techniques ont été employées pour déterminer les \mathbb{A}_i :

- par projection globale, avec minimisation de la fonctionnelle aux moindres carrés $\|\sigma^* - \sigma_h\|_{\mathbf{K}^{-1}, \Omega}^2$. Cette minimisation conduit à la résolution d'un système linéaire global qui peut être assez coûteux ;
- par une moyenne locale aux nœuds du maillage, en prenant en compte les contributions du champ de contraintes σ_h sur les éléments qui entourent le nœud considéré.

Ces méthodes simples ne sont malheureusement pas très performantes, en particulier lorsque le maillage est assez grossier ou lorsque les éléments sont d'ordre élevé. Elles sont pourtant très répandues et populaires dans l'ingénierie, car le coût de calcul qu'elles engendrent est très faible.

b. Version ZZ2 • Dans cette seconde version (Zienkiewicz and Zhu [1992]), des améliorations ont été apportées pour le calcul des termes \mathbb{A}_i . Nous recherchons sur des patchs d'éléments D_j , une fonction $\sigma_{|D_j}$ appartenant à un espace de fonctions polynômiales Π , qui minimise l'écart énergétique avec la solution éléments finis σ_h sur un ensemble de points de contrôle P :

$$\min_{\tilde{\sigma}_{|D_j} \in \Pi} \sum_P Tr[(\tilde{\sigma}_{|D_j}(P) - \sigma_h(P))\mathbf{K}^{-1}(\tilde{\sigma}_{|D_j}(P) - \sigma_h(P))] \quad (3.15)$$

Les points P sont confondus avec les points de superconvergence du maillage lorsque ceux-ci sont connus (points de Gauss en 1D).

Nous reconstruisons ensuite, par extrapolation de $\sigma_{|D_j}$, les termes $\mathbb{A}_{i|D_j}$ sur chaque nœud d'évaluation du patch D_j . Les tenseurs \mathbb{A}_i sont finalement déterminés en moyennant les contributions des différents patchs :

$$\mathbb{A}_i = \frac{1}{m} \sum_{D_j} \mathbb{A}_{i|D_j}$$

avec m le nombre de patchs contenant le nœud i .

Cette dernière méthode est notée « Superconvergence Patch Recovery » (SPR). Elle est plus performante que la méthode « ZZ1 », mais aussi plus coûteuse. Son principal défaut réside dans le fait que les propriétés de superconvergence sont souvent dépendantes du problème.

3.1.1.4 Méthodes basées sur l'erreur en relation de comportement

Ces méthodes ont été initiées par Ladevèze et utilisées dans un premier temps pour les problèmes de thermique et d'élasticité linéaire en 2D (Ladevèze et al. [1991],

Ladevèze [1995]) avant d'être étendues à l'élasticité 3D (Coorevits et al. [1997]) et incompressible (Gastine et al. [1992]). Le principe de l'erreur en relation de comportement repose sur le partitionnement des équations du problème de référence en deux groupes :

- les conditions d'admissibilité;
- les relations de comportement.

En pratique, les relations de comportement sont souvent les moins fiables de toutes les équations du modèle de référence. Aussi, pour mesurer l'erreur, l'idée est de déterminer, à partir de la solution approchée (\mathbf{u}_h, σ_h) du problème de référence, une nouvelle solution $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\sigma})$ pour laquelle $\hat{\mathbf{u}}$ est un champ de déplacements cinématiquement admissible (CA) et $\hat{\sigma}$ est un champ de contraintes statiquement admissible (SA). L'erreur que nous mesurons ensuite correspond à la non vérification de la relation de comportement (équation (3.3)) entre $\hat{\mathbf{u}}$ et $\hat{\sigma}$.

a. Définition et propriétés •

a.a. Première définition • La mesure globale de l'erreur en relation de comportement $e_{rdc}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\sigma})$ s'écrit :

$$e_{rdc}^2 = \frac{1}{2} \|\hat{\sigma} - \mathbf{K}_{\mathcal{E}}(\hat{\mathbf{u}})\|_{\mathbf{K}^{-1}, \Omega}^2 \quad (3.16)$$

a.b. Définition plus générale • Nous pouvons utiliser une définition plus générale de e_{rdc} en faisant intervenir les potentiels thermodynamiques duaux φ et φ^* :

$$e_{rdc}^2 = \int_{\Omega} \left[\varphi(\mathcal{E}(\hat{\mathbf{u}})) + \varphi^*(\hat{\sigma}) - Tr[\hat{\sigma}\mathcal{E}(\hat{\mathbf{u}})] \right] dM$$

avec :

$$\begin{aligned} \varphi(\bullet) &= \frac{1}{2} Tr[\mathbf{K} \bullet \bullet] \\ \varphi^*(\bullet) &= \frac{1}{2} Tr[\mathbf{K}^{-1} \bullet \bullet] \end{aligned}$$

Cette écriture nous permet d'interpréter l'erreur de manière énergétique puisqu'en développant la relation précédente, nous obtenons :

$$e_{rdc}^2(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\sigma}) = J_1(\hat{\mathbf{u}}) + J_2(\hat{\sigma}) \quad (3.17)$$

où J_1 et J_2 sont respectivement l'énergie potentielle et l'énergie complémentaire globale de la structure. Ces énergies s'écrivent :

$$\begin{aligned} J_1(\hat{\mathbf{u}}) &= \Phi(\varepsilon(\hat{\mathbf{u}})) - \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \hat{\mathbf{u}} dM - \int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \hat{\mathbf{u}} dS \\ J_2(\hat{\sigma}) &= \Phi^*(\hat{\sigma}) - \int_{\partial_1 \Omega} (\hat{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}_d dS \end{aligned}$$

avec $\Phi(\bullet) = \int_{\Omega} \varphi(\bullet) dM$ et $\Phi^*(\bullet) = \int_{\Omega} \varphi^*(\bullet) dM$.

a.c. Propriétés • Cette dernière définition de l'erreur en relation de comportement nous permet de retrouver les théorèmes classiques de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire dont nous déduisons les propriétés suivantes :

$$e_{rdc}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\sigma}) = 0 \Leftrightarrow (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\sigma}) = (\mathbf{u}_{ex}, \sigma_{ex}) \quad (3.18)$$

et

$$\|\mathbf{u}_{ex} - \hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{K}, \Omega}^2 + \|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}\|_{\mathbf{K}^{-1}, \Omega}^2 = 2e_{rdc}^2(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\sigma}) \quad (3.19)$$

Cette deuxième relation est connue sous le nom de théorème de Prager-Synge (Prager and Synge [1947]). C'est la relation fondamentale de cette méthode car elle permet d'obtenir une majoration directe de $\|\mathbf{u}_{ex} - \hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{K}, \Omega}$ et $\|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}\|_{\mathbf{K}^{-1}, \Omega}$.

b. Construction des champs admissibles • La construction de la solution admissible $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\sigma})$ est le point clé de cette méthode. Sa qualité va définir la performance de l'estimation d'erreur associée. L'idée suivie est de reconstruire une solution admissible $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\sigma})$ le plus simplement possible, à partir de la solution approchée (\mathbf{u}_h, σ_h) , et des données du problème. Le fait de travailler avec la méthode des éléments finis en déplacement permet de prendre $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_h$. La qualité de cet estimateur repose donc sur la construction du champ de contraintes admissible $\hat{\sigma}$.

Deux techniques différentes permettent de calculer $\hat{\sigma}$:

- la technique « standard » est basée sur la solution approchée σ_h et sur une condition de prolongement (Ladevèze [1995], Ladevèze and Leguillon [1983], Ladevèze and Pelle [2004]) ;
- la technique « améliorée » est basée sur la minimisation de l'énergie complémentaire (Ladevèze and Pelle [2004], Ladevèze and Florentin [2006]).

La seconde technique de construction des champs $\hat{\sigma}$ est plus coûteuse, mais elle est aussi beaucoup plus performante pour l'évaluation des contributions locales de

l'erreur, en particulier en présence de singularités ou dans le cas de maillages anisotropes.

Dans le cas que nous traitons dans ce mémoire, à savoir la mesure de l'erreur globale pour des problèmes stochastiques avec contact, nous utilisons la technique « standard » comme base pour la construction des champs de contraintes admissibles. Nous allons donc décrire de manière plus précise cette technique « standard » qui se fait en deux phases :

Première phase : Nous construisons des densités d'efforts $\widehat{\mathbf{F}}$, définies sur les arêtes des éléments du maillage, qui respectent l'équilibre global de chaque élément, et qui sont destinées à traduire la continuité du vecteur contraintes à la traversée des interfaces entre ces éléments.

$$\int_{E_i} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{u}_s dE + \int_{\partial E_i} \eta_{E_i} \widehat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{u}_s dS = 0 \quad (3.20)$$

où :

- \mathbf{u}_s désigne tout champ de déplacement de solide rigide ;
- η_{E_i} prend les valeurs $+1$ ou -1 selon la direction arbitraire donnée à la normale $\boldsymbol{\eta}_k$ de l'arête Γ_k entre les éléments E_i et E_j .

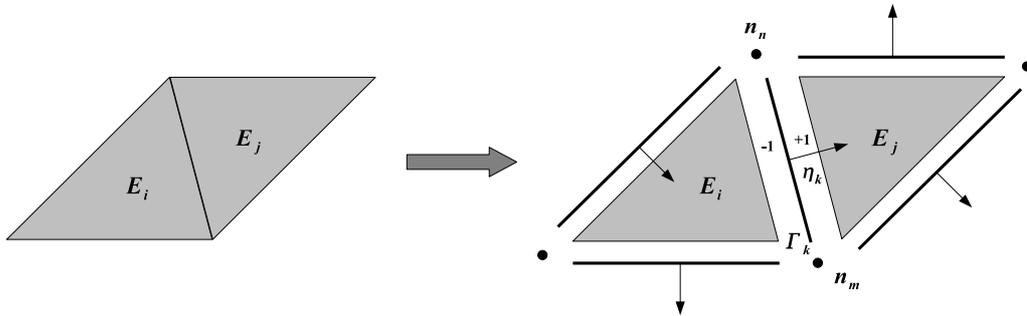


Figure 3.3 – Première phase du calcul des champs admissibles

Pour les arêtes incluses dans $\partial_2\Omega$, ces densités sont égales aux efforts imposés \mathbf{F}_d . Le lien entre la solution éléments finis σ_h et la solution admissible $\widehat{\sigma}$ se fait via la condition de prolongement :

$$\int_E Tr[(\widehat{\sigma} - \sigma_h)\boldsymbol{\varepsilon}(h_i)]dE = 0 \quad \forall E \in \Omega \quad \forall i \quad (3.21)$$

avec :

- E : un élément quelconque du maillage ;

– h_i : fonction de forme éléments finis associée au nœud i .

En travaillant sur les deux équations précédentes, nous arrivons aux relations (3.22), définies en chaque nœud du maillage, qui permettent de déterminer localement les projections des densités $\widehat{\mathbf{F}}$ sur les fonctions de base h_l :

$$\int_{\partial E} \eta_E \widehat{\mathbf{F}} \cdot h_l \, dS = \int_{\partial E} (\sigma_h \boldsymbol{\eta}) \cdot h_l \, dS - \int_E \mathbf{f}_d \cdot h_l \, dE \quad \forall l \quad (3.22)$$

Ces relations conduisent à résoudre en chaque nœud l un petit système d'équations dont le nombre d'inconnues $b_{lj} = \int_{\Gamma_j} \widehat{\mathbf{F}} \cdot h_l \, dS$ correspond au nombre d'arêtes Γ_j touchant le nœud l , et le nombre d'équations correspond au nombre d'éléments E_i touchant le nœud l .

Seconde phase : Une fois les densités $\widehat{\mathbf{F}}$ déterminées, nous calculons le champ de contraintes $\widehat{\sigma}$ en résolvant, sur chaque élément E_i du maillage, un problème d'équilibre pour lequel les densités $\widehat{\mathbf{F}}$ constituent le chargement de bord :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \widehat{\sigma}|_{E_i} + \mathbf{f}_d|_{E_i} &= \mathbf{0} \quad \text{dans } E_i \\ \widehat{\sigma}|_{E_i} \mathbf{n} &= \eta_{E_i} \widehat{\mathbf{F}}|_{E_i} \quad \text{sur } \partial E_i \end{aligned} \quad (3.23)$$

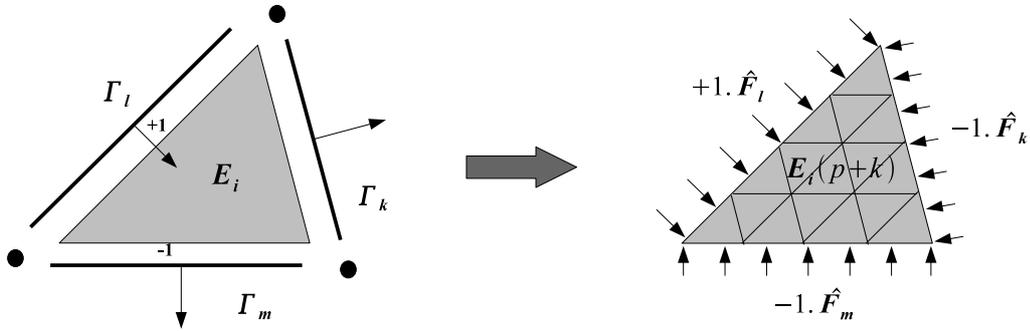


Figure 3.4 – Problème à résoudre par élément

Il existe plusieurs façons de calculer ce champ $\widehat{\sigma}|_{E_i}$. Nous pouvons par exemple faire une résolution analytique du problèmes (3.23) en cherchant $\widehat{\sigma}|_{E_i}$ sous forme polynômiale (Ladevèze and Maunder [1996]). Mais de manière générale, nous préférons une résolution numérique de ces problèmes à l'aide d'une méthode éléments finis en déplacement. Nous cherchons donc une solution approchée $\widehat{\sigma}_h|_{E_i}$ sur un maillage à un seul élément qui est E_i lui-même, mais en utilisant des fonctions de forme de degré élevé (degré $p + k$).

Cette *p-version* de l'enrichissement de l'espace d'approximation éléments finis initial est préférée à une *h-version* car elle présente un taux de convergence plus grand (des études menées dans Babuška et al. [1994] montrent que nous obtenons de très bons résultats à partir de $k = 3$). De plus, elle évite de générer un nouveau maillage.

Une étude sur des cas tests (Ladevèze and Pelle [2004]) montre que la reconstruction numérique de $\widehat{\sigma}_{h|E_i}$ s'avère être plus efficace que celle faite analytiquement, principalement lorsque les éléments sont distordus ou aplatis (Ladevèze and Florentin [2006]).

Remarque : Signalons que, bien que le champ $\widehat{\sigma}_{h|E_i}$ obtenu numériquement ne soit pas rigoureusement en équilibre, la comparaison avec une solution théorique $\widehat{\sigma}_{|E_i}^{theo}$ (utilisant la solution exacte du problème dual sur E_i) montre que l'erreur commise est faible, i.e. que les contraintes $\widehat{\sigma}_{h|E_i}$ et $\widehat{\sigma}_{|E_i}^{theo}$, bien qu'*a priori* différentes, ont des normes semblables.

c. Estimateur associé • Une erreur en relation de comportement peut être calculée à partir de la solution admissible $(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\sigma})$ construite précédemment. D'après (3.19), nous pouvons prendre comme estimateur de l'erreur globale :

$$\theta = \sqrt{2}e_{rdc}(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\sigma})$$

Cet estimateur est un majorant garanti de l'erreur vraie et peut aisément se diviser en contributions élémentaires, sous la forme $\theta^2 = \sum_E \theta_E^2$ avec :

$$\theta_E^2 = 2\|\widehat{\sigma} - \mathbf{K}\varepsilon(\widehat{\mathbf{u}})\|_{\mathbf{K}^{-1}, E}^2$$

Nous pouvons par ailleurs montrer qu'il existe un réel C tel que :

$$e_{rdc}(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\sigma}) \leq C\|\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{K}, \Omega}$$

où C est une constante indépendante du maillage (Ladevèze and Pelle [2004]). Ceci donne une borne inférieure de l'erreur et montre que l'erreur en relation de comportement converge comme l'erreur vraie.

3.1.2 Méthodes relatives aux problèmes de contact en statique

3.1.2.1 Modèle de référence avec contact

Nous reprenons les notations du problème de contact défini au chapitre 2.1.1. Le problème de contact unilatéral, dans le cadre déterministe, peut être formulé de la

façon suivante :

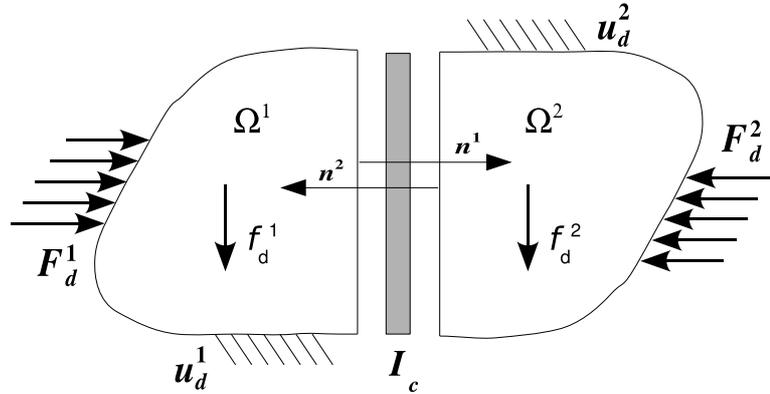


Figure 3.5 – Modèle de référence pour le contact

trouver $S = \{\mathbf{u}^\ell(\mathbf{M}), \sigma^\ell(\mathbf{M}), \mathbf{w}^\ell(\mathbf{M}), \mathbf{F}^\ell(\mathbf{M})\}_{\ell=1}^2$ tel que :

- $(\mathbf{u}^\ell(\mathbf{M}), \mathbf{w}^\ell(\mathbf{M}))$ vérifient l'admissibilité cinématique : équations (2.3) et (2.4) ;
- $(\sigma^\ell(\mathbf{M}), \mathbf{F}^\ell(\mathbf{M}))$ vérifient l'admissibilité statique : équations (2.5) et (2.6) ;
- $(\mathbf{u}^\ell(\mathbf{M}), \sigma^\ell(\mathbf{M}))$ vérifient les relations de comportement dans les sous structures Ω^ℓ : équations (2.7) ;
- $(\mathbf{w}^\ell(\mathbf{M}), \mathbf{F}^\ell(\mathbf{M}))$ vérifient les relations de comportement sur l'interface I_c : équation (2.8).

3.1.2.2 Estimateur basé sur les résidus d'équilibre

Les estimateurs d'erreur basés sur les résidus d'équilibre ont été étendus au cas du contact sans frottement par Carstensen et al. [1999] puis au cas du frottement, et des grandes déformations élastiques dans (Wriggers and Scherf [1998], Wriggers et al. [2003]).

Les auteurs de ces travaux proposent de contrôler des problèmes où la loi de contact est pénalisée. Une raideur de peau ε est donc introduite et permet de lier linéairement les efforts de contact à l'interpénétration des deux corps. L'erreur en solution que nous cherchons à estimer est donc :

$$\mathbf{e}_\varepsilon = \mathbf{u}_{ex,\varepsilon} - \mathbf{u}_h \quad (3.24)$$

où ε désigne le paramètre de pénalisation, et $\mathbf{u}_{ex,\varepsilon}$ désigne la solution exacte du problème pénalisé. Dans la mesure d'erreur proposée pour le cas du contact, nous retrouvons les deux termes proposée pour les problèmes linéaires :

$$\sum_E \|C_1 h_E \mathbf{r}_E\|_E^2 \qquad \sum_{\Gamma} \|C_2 l_{\Gamma} \mathbf{t}_{\Gamma}\|_{\Gamma}^2$$

auxquels sont ajoutés deux autres termes :

- un premier dû à l'erreur de la composante normale du contact dans lequel le paramètre de pénalisation ε apparaît :

$$\sum_{I_c} C_3^2 l_{I_c}^2 \underbrace{\int_{\Gamma \in I_c} \|\varepsilon \langle u_{hn} \rangle^- \mathbf{n}_{\Gamma} - \sigma_h \mathbf{n}_{\Gamma}\|_{\Gamma}^2 d\Gamma}_{\|\mathbf{t}_{3\Gamma}\|_{\Gamma}^2}$$

où $u_{hn} = \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}$ et $\varepsilon \langle u_{hn} \rangle^-$ représentent les forces de contact projetés sur la normale au contact.

- un second dû à la friction qui fait apparaître les paramètres de frottement :

$$\sum_{I_c} C_4^2 l_{I_c}^2 \underbrace{\int_{\Gamma \in I_c} \|\mu \sigma_h \mathbf{n}_{\Gamma} - \sigma_h \mathbf{t}_{\Gamma}\|_{\Gamma}^2 d\Gamma}_{\|\mathbf{t}_{4\Gamma}\|_{\Gamma}^2}$$

Nous aboutissons finalement à l'estimation suivante pour l'erreur :

$$\|\mathbf{e}_{\varepsilon}\|_{\mathbf{K},\Omega}^2 \leq \sum_E \|C_1 h_E \mathbf{r}_E\|_E^2 + \sum_{\Gamma \notin I_c} \|C_2 l_{\Gamma} \mathbf{t}_{\Gamma}\|_{\Gamma}^2 + \sum_{\Gamma \in I_c} \|C_3 l_{\Gamma} \mathbf{t}_{3\Gamma}\|_{\Gamma}^2 + \sum_{\Gamma \in I_c} \|C_4 l_{\Gamma} \mathbf{t}_{4\Gamma}\|_{\Gamma}^2 \quad (3.25)$$

Les constantes C_1 , C_2 , C_3 et C_4 dépendent du problème de référence. Le principale défaut de cet estimateur d'erreur est qu'il conduit à une mesure de l'écart entre la solution éléments finis et la solution exacte du problème pénalisé $(\mathbf{u}_{ex,\varepsilon}, \sigma_{ex,\varepsilon})$, et non pas la solution exacte du problème initial $(\mathbf{u}_{ex}, \sigma_{ex})$.

3.1.2.3 Estimateur basé sur le lissage des contraintes

Dans Rieger and Wriggers [2001], les auteurs montrent qu'il est possible d'étendre les estimateurs basés sur le lissage des contraintes aux problèmes de contact sans frottement.

La nouvelle procédure de lissage des contraintes nécessite certaines précautions particulières au voisinage de l'interface de contact. En effet, la pression de contact,

c'est à dire $\mathbf{n}^c \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}^c$, ne doit pas subir de saut à la traversée de l'interface de contact I^c . De plus, nous devons nous assurer que les efforts tangentiels, $\mathbf{t}^c \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}^c$, sont nuls dans le cas du contact sans frottement.

Ces contraintes doivent être utilisées dans la procédure de lissage afin de considérer implicitement les conditions de contact. La notion de patches est conservée afin de minimiser le coût de la méthode, mais adaptée afin de prendre en compte la spécificité du problème. Pour chaque nœud i de la zone de contact, nous définissons :

- un patch dit « standard » contenant tous les éléments connectés au nœud i ,
- une « extension » de ce patch contenant tous les éléments connectés au nœud j , nœud le plus proche du nœud i appartenant à l'autre corps.

Ensuite, la minimisation au sens des moindres carrés de l'écart entre le champ de contraintes éléments finis, non régulier, et le champ de contraintes lissé, polynomial par patch, est effectuée sous les contraintes de vérification des conditions spécifiques au contact. La prise en compte des conditions sur I^c se fait par exemple par une méthode de pénalisation.

Ce type d'estimateur a été comparé à celui basé sur les résidus d'équilibre présenté au paragraphe précédent dans Wriggers and Scherf [1998]. Les auteurs considèrent un exemple de remaillage et étudient l'évolution, en fonction du nombre d'éléments, de la pression de contact en un point précis où la valeur théorique est connue. Il apparaît alors que seul l'estimateur basé sur les résidus d'équilibre conduit à une pression de contact convergeant correctement vers la valeur théorique lorsque le maillage est raffiné.

Une autre méthode consiste à lisser le champ de contraintes sans tenir compte des spécificités liées au contact, et à ajouter un terme à l'erreur :

$$\theta^2 = \|\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\Omega}^2 + \int_{\Gamma \in I^c} \|\varepsilon \langle u_{hn} \rangle^- \mathbf{n}_{\Gamma} - \boldsymbol{\sigma}_h \mathbf{n}_{\Gamma}\|_{\Gamma}^2 d\Gamma$$

où $\varepsilon \langle u_{hn} \rangle^- \mathbf{n}_{\Gamma}$ représente les forces de contact projetées sur la normale au contact et où $\boldsymbol{\sigma}_h \mathbf{n}_{\Gamma}$ représente les efforts normaux issus du calcul éléments finis.

Cette écriture de l'erreur fait de nouveau apparaître le paramètre de pénalisation ε , ce qui signifie que cette dernière technique est de nouveau associée à un problème de référence où la loi de contact est pénalisée.

3.1.3 L'erreur en relation de comportement pour le contact

Le principe repose toujours sur le partitionnement des équations du problème de référence en deux groupes :

- les conditions d'admissibilité : équations (2.3), (2.4), (2.5) et (2.6) ;
- les relations de comportement : équations (2.7) et (2.8).

Nous construisons d'abord une solution $S_{ad} = \{\hat{\mathbf{u}}^\ell, \hat{\sigma}^\ell, \hat{\mathbf{w}}^\ell, \hat{\mathbf{F}}^\ell\}_{\ell=1}^2$ qui vérifie exactement les conditions d'admissibilité, puis nous quantifions sa qualité par la façon dont les relations de comportement sont vérifiées. Nous pouvons alors définir une mesure d'erreur en relation de comportement pour les problèmes de contact par :

$$e_{rdc}^2(S_{ad}) = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^2 \|\hat{\sigma}^\ell - \mathbf{K}^\ell \mathcal{E}(\hat{\mathbf{u}}^\ell)\|_{\mathbf{K}^{\ell-1}, \Omega^\ell}^2 + \int_{I^c} [b(-\hat{\mathbf{w}}^c, \hat{\mathbf{F}}^c) + \hat{\mathbf{w}}^c \cdot \hat{\mathbf{F}}^c] dS \quad (3.26)$$

Dans le cas particulier du frottement, le bipotentiel $b(-\hat{\mathbf{w}}^c, \hat{\mathbf{F}}^c)$ fait intervenir les fonctions indicatrices $\chi_B(-\hat{\mathbf{w}}^c)$ et $\chi_{C(\mu)}(\hat{\mathbf{F}}^c)$, qui peuvent prendre des valeurs infinies. Pour éviter d'avoir une erreur estimée infinie, nous introduisons, en plus de l'admissibilité classique définie par les équations (2.3), (2.4), (2.5) et (2.6), la notion d'admissibilité au sens strict.

3.1.3.1 Définition de l'admissibilité stricte

Les champs $\{\hat{\mathbf{u}}^\ell, \hat{\sigma}^\ell, \hat{\mathbf{w}}^\ell, \hat{\mathbf{F}}^\ell\}_{\ell=1}^2$ sont admissibles au sens strict s'ils vérifient les équations d'admissibilité (2.3), (2.4), (2.5) et (2.6) ainsi que :

$$\hat{\mathbf{F}}^c \in C(\mu) \text{ et } -\hat{\mathbf{w}}^c \in B \quad (3.27)$$

ce qui permet d'assurer que la mesure de l'erreur reste finie.

3.1.3.2 Construction des champs admissibles

La construction des champs admissibles pour des problèmes de contact est explicitée dans Louf et al. [2003]. La structure que nous étudions est composée de deux types d'entités : les sous structures Ω^ℓ et l'interface I^c . L'estimateur d'erreur proposé est donc composé de deux termes :

- un terme d'erreur sur les sous structures :

$$e_{rdc|sst}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^2 \|\hat{\sigma}^\ell - \mathbf{K}^\ell \mathcal{E}(\hat{\mathbf{u}}^\ell)\|_{\mathbf{K}^{\ell-1}, \Omega^\ell}^2$$

– un terme d'erreur sur l'interface :

$$e_{rdc|inter}^2 = \int_{I_c} [b(-\widehat{\mathbf{w}}^c, \widehat{\mathbf{F}}^c) + \widehat{\mathbf{w}}^c \cdot \widehat{\mathbf{F}}^c] dS$$

Nous avons donc deux étapes distinctes pour le calcul des champs admissibles : un calcul des champs admissibles $\widehat{\mathbf{u}}^\ell$ et $\widehat{\sigma}^\ell$ sur les sous structures, et un calcul des champs admissibles $\widehat{\mathbf{w}}^\ell$ et $\widehat{\mathbf{F}}^\ell$ sur l'interface.

a. Champs admissibles sur les sous structures • Le calcul des champs admissibles se fait en trois phases.

Première phase : Dans cette première phase, nous isolons chaque sous structure Ω^ℓ . Chaque sous structure est soumise à des déplacements imposés \mathbf{u}_d^ℓ sur son bord $\partial_1\Omega^\ell$, à des efforts imposés \mathbf{F}_d^ℓ sur son bord $\partial_2\Omega^\ell$, et est en relation avec l'interface I_c . Pour ce calcul d'erreur, nous supposons que la surface de contact de la sous structure Ω^ℓ qui touche I_c est un bord à efforts imposés \mathbf{F}^c (figure 3.6).

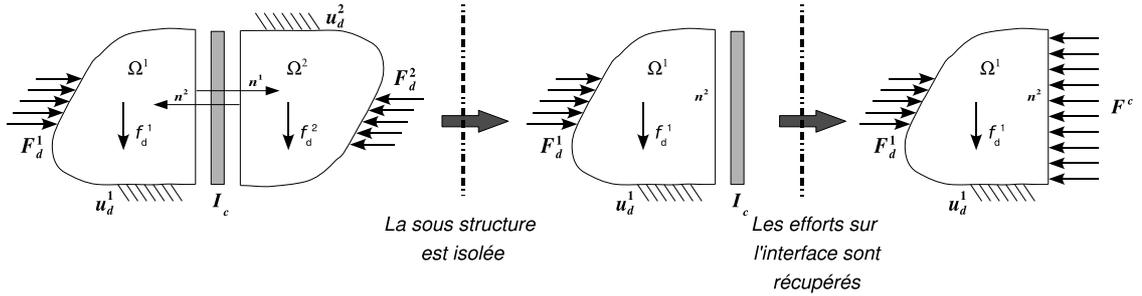


Figure 3.6 – Première phase : la sous structure est isolée

Une fois cette sous structure isolée, le calcul des champs admissibles est le même que celui décrit au paragraphe 3.1.1.4. Le champ de déplacements admissible $\widehat{\mathbf{u}}^\ell$ est égal au champ de déplacements approché \mathbf{u}_h^ℓ , et nous construisons un champ de contraintes admissible $\widehat{\sigma}^\ell$ grâce à la technique « standard » détaillée précédemment.

Deuxième phase : Nous construisons des densités d'efforts $\widehat{\mathbf{F}}^\ell$, définies sur les arêtes des éléments du maillage de Ω^ℓ , qui respectent l'équilibre globale de chaque élément (figure 3.3).

Troisième phase : Nous calculons le champ de contraintes $\hat{\sigma}^\ell$ en résolvant sur chaque élément E_i du maillage un problème d'équilibre pour lequel les densités $\hat{\mathbf{F}}^\ell$ constituent le chargement de bord (figure 3.4).

Remarque : La contribution de l'erreur associée à la sous structure Ω^ℓ peut être interprétée comme une estimation de l'erreur globale sur la sous structure Ω^ℓ soumise aux chargements \mathbf{F}_d^ℓ et \mathbf{F}^c . Cette manière de calculer les champs admissibles permet aussi de paralléliser les calculs d'erreur. Ainsi, le processeur qui aura fait le calcul éléments finis sur la sous structure Ω^ℓ se chargera aussi du calcul de la contribution à l'erreur associée à cette sous structure.

b. Champs admissibles sur l'interface • Dans le cadre de la méthode LATIN (figure 2.3), les champs admissibles $\hat{\mathbf{w}}^c$ et $\hat{\mathbf{F}}^c$ sur l'interface sont calculés en respectant le schéma suivant :

1. plaçons nous à l'itération n de la méthode LATIN ;
2. dans un premier temps, à l'étape linéaire, nous cherchons

$$S_{(n)} = \{\mathbf{u}_{(n)}^\ell, \sigma_{(n)}^\ell, \mathbf{w}_{(n)}^\ell, \mathbf{F}_{(n)}^\ell\}_{\ell=1}^2$$

à partir de la solution

$$\hat{S}_{(n-1)} = \{\hat{\mathbf{u}}_{(n-1)}^\ell, \hat{\sigma}_{(n-1)}^\ell, \hat{\mathbf{w}}_{(n-1)}^\ell, \hat{\mathbf{F}}_{(n-1)}^\ell\}_{\ell=1}^2$$

de l'étape locale $(n-1)$;

3. dans un second temps, à l'étape locale, nous calculons

$$\hat{S}_{(n)} = \{\hat{\mathbf{u}}_{(n)}^\ell, \hat{\sigma}_{(n)}^\ell, \hat{\mathbf{w}}_{(n)}^\ell, \hat{\mathbf{F}}_{(n)}^\ell\}_{\ell=1}^2$$

à partir de la solution $S_{(n)}$ de l'étape linéaire (n) .

Vis-à-vis de la solution $S_{(n)}$, les champs $\hat{\mathbf{w}}_{(n-1)}^\ell$ sont des champs de déplacements d'interface strictement admissibles car ils vérifient les équations (2.4) et (3.27). Nous prendrons donc $\hat{\mathbf{w}}^\ell = \hat{\mathbf{w}}_{(n-1)}^\ell$.

Vis-à-vis de la solution $S_{(n)}$, les champs $\hat{\mathbf{F}}_{(n)}^\ell$ sont des champs d'efforts d'interface strictement admissibles car ils vérifient les équations (2.5), (2.6) et (3.27). Nous prendrons donc $\hat{\mathbf{F}}^\ell = \hat{\mathbf{F}}_{(n)}^\ell$.

3.2 Estimateur d'erreur dans le cadre stochastique

3.2.1 Modèle stochastique de référence

Pour présenter l'erreur en relation de comportement dans le cadre stochastique, nous reprenons les notations du problème de contact défini au chapitre 2.2.1 sur la figure 2.2.

Le problème de contact unilatéral, dans le cadre stochastique, peut être formulé de la façon suivante :

Trouver $S(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \{\mathbf{u}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}), \sigma^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}), \mathbf{w}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}), \mathbf{F}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})\}_{\ell=1}^2$ tel que :

- $(\mathbf{u}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}), \mathbf{w}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}))$ vérifient l'admissibilité cinématique : équations (2.9) et (2.10) ;
- $(\sigma^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}), \mathbf{F}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}))$ vérifient l'admissibilité statique : équations (2.11) et (2.12) ;
- $(\mathbf{u}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}), \sigma^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}))$ vérifient les relations de comportement dans les sous structures Ω^i : équations (2.13) ;
- $(\mathbf{w}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}), \mathbf{F}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}))$ vérifient les relations de comportement sur l'interface I_c : équations (2.14).

La résolution numérique de ce problème consiste à calculer, par une méthode en déplacement, une solution approchée de la forme suivante :

$$\mathbf{u}_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^P a_{ij}^\ell h_i(\mathbf{M}) \Psi_j(\boldsymbol{\xi})$$

3.2.2 Définition de l'estimateur d'erreur

La définition de l'erreur en relation de comportement, dans le cadre stochastique, est un prolongement naturel de l'erreur en relation de comportement déterministe définie au paragraphe 3.1.3. Nous procédons donc de la même manière :

1. d'abord nous calculons une solution admissible dans le cadre stochastique $\tilde{S}_{ad} = \{\tilde{\mathbf{u}}^\ell, \tilde{\sigma}^\ell, \tilde{\mathbf{w}}^\ell, \tilde{\mathbf{F}}^\ell\}_{\ell=1}^2$. La notation $\tilde{\bullet}$ désigne les grandeurs stochastiques admissibles ;
2. ensuite nous évaluons la non vérification de la relation de comportement entre ces champs $\tilde{e}_{rdc}(\tilde{S}_{ad})$.

Nous pouvons définir une mesure d'erreur en relation de comportement, pour les problèmes de contact, dans le cadre stochastique, sur la base de l'espérance mathématique de l'estimateur déterministe (Ladevèze [2003]) :

$$\tilde{e}_{rdc}^2(\tilde{S}_{ad}) = \int_{\boldsymbol{\xi}} \underbrace{\left[\frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^2 \|\tilde{\sigma}^\ell - \mathbf{K}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^\ell)\|_{\mathbf{K}^{\ell-1}, \Omega^\ell}^2 + \int_{I_c} [b(-\tilde{\mathbf{w}}^c, \tilde{\mathbf{F}}^c) + \tilde{\mathbf{w}}^c \cdot \tilde{\mathbf{F}}^c] dS \right]}_{e_{rdc}^2(S_{ad}(\boldsymbol{\xi}))} \phi(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (3.28)$$

Compte tenu des propriétés de l'estimateur d'erreur déterministe (défini positif), cette mesure d'erreur $\tilde{e}_{rdc}(\tilde{S}_{ad})$ est nulle si et seulement si $e_{rdc}(S_{ad}(\boldsymbol{\xi}))$ est nulle pour tout $\boldsymbol{\xi}$, donc si $S_{ad}(\boldsymbol{\xi})$ vérifie les relations de comportement pour tout $\boldsymbol{\xi}$.

3.2.3 Construction des champs admissibles

Nous nous inspirons de la méthode « standard » en déterministe pour calculer les champs admissibles dans le cadre stochastique. Nous allons donc construire la solution admissible $\tilde{S}_{ad}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \{\tilde{\mathbf{u}}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}), \tilde{\sigma}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}), \tilde{\mathbf{w}}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}), \tilde{\mathbf{F}}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})\}_{\ell=1}^2$ à partir de la solution approchée $S_h(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \{\mathbf{u}_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}), \sigma_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}), \mathbf{w}_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}), \mathbf{F}_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})\}_{\ell=1}^2$ grâce à la définition d'une condition de prolongement.

Nous retrouvons, dans le cadre stochastique, les mêmes propriétés que dans le cadre déterministe : les champs de déplacements $\mathbf{u}_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ issus d'une approximation en déplacement sont admissibles. Donc $\tilde{\mathbf{u}}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ et le point clé de ce calcul d'erreur est la construction des champs de contraintes admissibles $\tilde{\sigma}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$.

3.2.3.1 Condition de prolongement

Pour calculer les champs statiquement admissibles $\tilde{\sigma}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ à partir des champs approchés $\sigma_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$, nous définissons la condition de prolongement suivante :

$$\int_{\boldsymbol{\xi}} \int_{\Omega^\ell} Tr[(\sigma_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) - \tilde{\sigma}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})) \mathbf{grad}(h_i(\mathbf{M}))] \phi(\boldsymbol{\xi}) dM d\boldsymbol{\xi} = 0 \quad \forall E \in \Omega \quad \forall i \quad (3.29)$$

Cette condition traduit la propriété suivante : l'espérance du travail des contraintes admissibles sur le support des fonctions de base $h_i(\mathbf{M})$ doit être égale à l'espérance du travail des contraintes approchées sur ce même support. Cette condition est l'équivalent, dans le cadre stochastique, de la condition de prolongement déterministe.

3.2.3.2 Calcul des champs admissibles

a. Technique générale • La solution approchée en contraintes peut s'écrire de la manière suivante :

$$\sigma_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=0}^P \sigma_{h_j}^\ell(\mathbf{M}) \Psi_j(\boldsymbol{\xi})$$

où les $\sigma_{h_j}^\ell(\mathbf{M})$ sont des champs de contraintes déterministes de base associés aux fonctions de base stochastiques $\Psi_j(\boldsymbol{\xi})$, ou encore champs modaux déterministes associés aux modes stochastiques $\Psi_j(\boldsymbol{\xi})$. Ces champs $\sigma_{h_j}^\ell(\mathbf{M})$ sont définis sur le maillage géométrique et peuvent s'écrire en fonction du gradient des fonctions de base géométriques $h_i(\mathbf{M})$.

Une technique simple pour calculer les champs de contraintes admissibles $\tilde{\sigma}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ est de construire :

$$\tilde{\sigma}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=0}^P \hat{\sigma}_j^\ell(\mathbf{M}) \Psi_j(\boldsymbol{\xi})$$

tel que les champs $\hat{\sigma}_j^\ell(\mathbf{M})$ correspondent à des champs déterministes admissibles. Nous pouvons les calculer à partir des champs de base approchés $\sigma_{h_j}^\ell(\mathbf{M})$ de la même manière que pour un calcul déterministe. Ces champs de base admissibles $\hat{\sigma}_j^\ell(\mathbf{M})$ vérifient alors les équations suivantes :

- la condition de prolongement dans le cadre déterministe (équation (3.21)) :

$$\int_E Tr[(\hat{\sigma}_j^\ell - \sigma_{h_j}^\ell) \boldsymbol{\varepsilon}(h_i)] dE = 0 \quad \forall E \in \Omega \quad \forall i$$

- l'admissibilité statique dans le cadre déterministe (équation (2.5)) : $\forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_{ad,0}$:

$$\int_{\Omega^\ell} Tr[\hat{\sigma}_j^\ell(\mathbf{M}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*(\mathbf{M}))] dM = \int_{\Omega^\ell} \mathbf{f}_{d_j}^\ell(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{u}^*(\mathbf{M}) dM + \int_{\partial_2 \Omega^\ell} \mathbf{F}_{d_j}^\ell(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{u}^*(\mathbf{M}) dS + \int_{I_c} \mathbf{F}_j^\ell(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{u}^*(\mathbf{M}) dS$$

où $\mathbf{F}_{d_j}^\ell(\mathbf{M})$, $\mathbf{F}_j^\ell(\mathbf{M})$ et $\mathbf{f}_{d_j}^\ell(\mathbf{M})$ désignent les champs d'efforts de base associés aux fonctions de base stochastiques $\Psi_j(\boldsymbol{\xi})$.

Les champs de contraintes admissibles calculés de cette manière vérifient bien :

- l'admissibilité statique dans le cadre stochastique (équation (2.11)) ;
- la condition de prolongement dans le cadre stochastique (équation (3.29)).

b. Technique associée aux méthodes non intrusives • La construction des champs admissibles $\tilde{\sigma}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ est simplifiée lorsque nous utilisons une méthode de calcul non intrusive. Nous pouvons en effet calculer $\tilde{\sigma}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ aussi de manière non intrusive, c'est-à-dire à partir d'une série de calculs d'erreur déterministes.

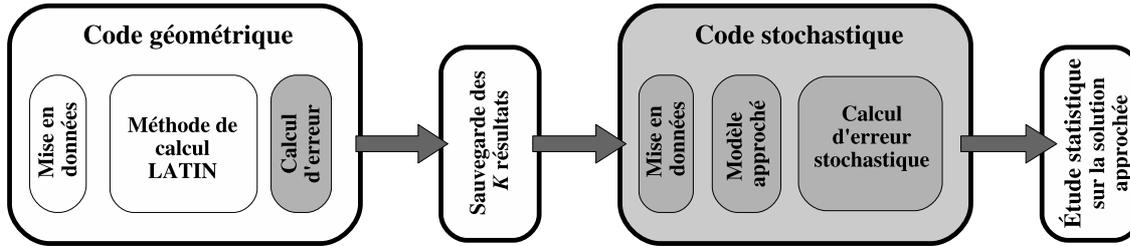


Figure 3.7 – Calcul de l'erreur stochastique à partir d'une série de calculs déterministes

Notons $\{S_{hk}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k)\}_{k=1}^K$ les K solutions approchées déterministes permettant de calculer la solution approchée du problème stochastique. Les $\{\boldsymbol{\xi}_k\}_{k=1}^K$ sont associés aux K valeurs que prennent les paramètres variables pour les calculs déterministes. Dans le cadre d'une interpolation de type éléments finis ou Lagrange sur l'espace stochastique, chacune de ces solutions constitue un nœud du maillage stochastique. Les fonctions $\Psi_k(\boldsymbol{\xi})$ sont les fonctions de base associées à chacun de ces nœuds, et la solution approchée du problème stochastique peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{k=1}^K \mathbf{u}_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k) \Psi_k(\boldsymbol{\xi}) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^K a_{ik}^\ell h_i^\ell(\mathbf{M}) \Psi_k(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned}$$

Un calcul d'erreur déterministe pour chaque résolution k donne donc la série de champs déterministes admissibles $\{\hat{\mathbf{u}}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k)\}_{k=1}^K$ et $\{\hat{\sigma}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k)\}_{k=1}^K$ associés aux fonctions de base stochastiques $\Psi_k(\boldsymbol{\xi})$. Les champs :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{k=1}^K \hat{\mathbf{u}}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k) \Psi_k(\boldsymbol{\xi}) \\ \tilde{\sigma}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{k=1}^K \hat{\sigma}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k) \Psi_k(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned}$$

sont donc admissibles au sens stochastique.

3.2.4 Contributions par entités géométriques

La structure que nous étudions est toujours composée de deux types d'entités : les sous structures Ω^ℓ , et l'interface I^c , et nous retrouvons dans l'estimateur d'erreur proposé :

- un terme d'erreur stochastique sur les sous structures :

$$\begin{aligned}\tilde{e}_{rdc|sst}^2 &= \frac{1}{2} \int_{\xi} \sum_{\ell=1}^2 \|\tilde{\sigma}^\ell - \mathbf{K}^\ell \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{u}}^\ell)\|_{\mathbf{K}^{\ell-1}, \Omega^\ell}^2 \phi(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \sum_{\ell=1}^2 \|\tilde{\sigma}^\ell - \mathbf{K}^\ell \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{u}}^\ell)\|_{\mathbf{K}^{\ell-1}, \Omega^\ell}^2 \right\rangle\end{aligned}\quad (3.30)$$

- un terme d'erreur sur l'interface :

$$\begin{aligned}\tilde{e}_{rdc|inter}^2 &= \int_{\xi} \int_{I_c} [b(-\tilde{\mathbf{w}}^c, \tilde{\mathbf{F}}^c) + \tilde{\mathbf{w}}^c \cdot \tilde{\mathbf{F}}^c] ds \phi(\xi) d\xi \\ &= \left\langle \int_{I_c} [b(-\tilde{\mathbf{w}}^c, \tilde{\mathbf{F}}^c) + \tilde{\mathbf{w}}^c \cdot \tilde{\mathbf{F}}^c] ds \right\rangle\end{aligned}\quad (3.31)$$

Nous retrouvons les deux étapes du calcul des champs admissibles : un calcul de $\tilde{\mathbf{u}}^\ell$ et $\tilde{\sigma}^\ell$ sur les sous structures, et un calcul de $\tilde{\mathbf{w}}^\ell$ et $\tilde{\mathbf{F}}^\ell$ sur l'interface.

3.2.4.1 Contribution des sous structures :

Pour chaque calcul déterministe, nous reprenons les trois phases de construction des champs de contraintes admissibles (paragraphe 3.1.3.2) :

- **Première phase** : nous isolons chaque sous structure Ω^ℓ ;
- **Deuxième phase** : nous construisons des densités d'efforts $\hat{\mathbf{F}}^\ell$, définies sur les arêtes des éléments du maillage de la sous structure Ω^ℓ , qui respectent l'équilibre globale de chaque élément ;
- **Troisième phase** : nous calculons le champ de contrainte $\hat{\sigma}^\ell$ en résolvant sur chaque élément E du maillage un problème d'équilibre pour lequel les densités $\hat{\mathbf{F}}^\ell$ constituent le chargement de bord.
- **Quatrième phase** : les K champs admissibles déterministes sont interpolés sur la base de fonctions $\Psi_k(\xi)$:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}^\ell(\mathbf{M}, \xi) &= \sum_{k=1}^K \hat{\mathbf{u}}^\ell(\mathbf{M}, \xi_k) \Psi_k(\xi) \\ \tilde{\sigma}^\ell(\mathbf{M}, \xi) &= \sum_{k=1}^K \hat{\sigma}^\ell(\mathbf{M}, \xi_k) \Psi_k(\xi)\end{aligned}$$

Propriétés sur la moyenne et l'écart type : la contribution de l'erreur sur la sous structure Ω^ℓ peut se réécrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \tilde{e}_{rdc|\Omega^\ell}^2 &= \frac{1}{2} \langle \| \tilde{\sigma}^\ell - \mathbf{K}^\ell_{\mathcal{E}}(\tilde{\mathbf{u}}^\ell) \|_{\mathbf{K}^{\ell-1}, \Omega^\ell}^2 \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \langle \| (\tilde{\sigma}^\ell - \langle \tilde{\sigma}^\ell \rangle) + \langle \tilde{\sigma}^\ell \rangle - (\mathbf{K}^\ell_{\mathcal{E}}(\tilde{\mathbf{u}}^\ell) - \langle \mathbf{K}^\ell_{\mathcal{E}}(\tilde{\mathbf{u}}^\ell) \rangle) - \langle \mathbf{K}^\ell_{\mathcal{E}}(\tilde{\mathbf{u}}^\ell) \rangle \|_{\mathbf{K}^{\ell-1}, \Omega^\ell}^2 \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \langle \| \underbrace{(\tilde{\sigma}^\ell - \langle \tilde{\sigma}^\ell \rangle) - (\mathbf{K}^\ell_{\mathcal{E}}(\tilde{\mathbf{u}}^\ell) - \langle \mathbf{K}^\ell_{\mathcal{E}}(\tilde{\mathbf{u}}^\ell) \rangle)}_{\text{erreur sur les écart types}} + \underbrace{\langle \tilde{\sigma}^\ell \rangle - \langle \mathbf{K}^\ell_{\mathcal{E}}(\tilde{\mathbf{u}}^\ell) \rangle}_{\text{erreur sur les moyennes}} \|_{\mathbf{K}^{\ell-1}, \Omega^\ell}^2 \rangle
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Cette contribution de l'erreur peut donc être « séparée » en deux termes :

- un terme correspondant à une erreur en moyenne ;
- un terme correspondant à une erreur en écart type.

3.2.4.2 Contribution de l'interface :

Les champs admissibles sur l'interface sont calculés de la manière suivante :

- pour les K calculs déterministes, nous reprenons la méthode décrite dans le paragraphe b. ;
- les K champs admissibles déterministes sont ensuite interpolés sur la base de fonction $\Psi_k(\boldsymbol{\xi})$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{F}}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{k=1}^K \hat{\mathbf{F}}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k) \Psi_k(\boldsymbol{\xi}) \\
 \tilde{\mathbf{w}}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{k=1}^K \hat{\mathbf{w}}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k) \Psi_k(\boldsymbol{\xi})
 \end{aligned}$$

3.3 Résultats numériques

Les calculs sont conduits sur l'exemple aube-disque du chapitre 2 (figure 2.9). L'objectif de ces calculs est d'abord de vérifier, sur cet exemple, certaines propriétés de l'estimateur d'erreur, puis d'estimer la qualité des modèles stochastiques et des fonctions de répartition calculées au chapitre 2 (figures 2.17 et 2.16).

3.3.1 Discrétisations géométriques et stochastiques

Pour mettre en évidence les propriétés de l'estimateur d'erreur, nous faisons une série d'études avec des approximations géométriques et stochastiques différentes.

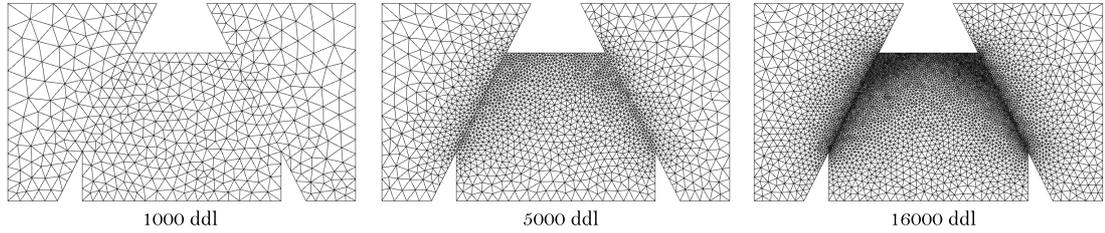


Figure 3.8 – Maillages géométriques tests

Le nombre de degrés de liberté (ddl) associés aux maillages géométriques proposés (figure 3.8) est, du plus grossier au plus fin : 1 000 ddl, 5 000 ddl et 16 000 ddl.

Rappelons que nous regardons l'influence des variations du coefficient de frottement μ au niveau des deux interfaces de contact et du module d'Young E de la sous structure centrale. Pour tester l'estimateur sur l'espace stochastique, nous proposons des approximations basées sur ces séries régulières de $K = 4, 9, 16$ et 25 calculs déterministes. Les maillages stochastiques correspondants (valeurs des couples (μ, E)) sont présentés sur la figure 3.9.

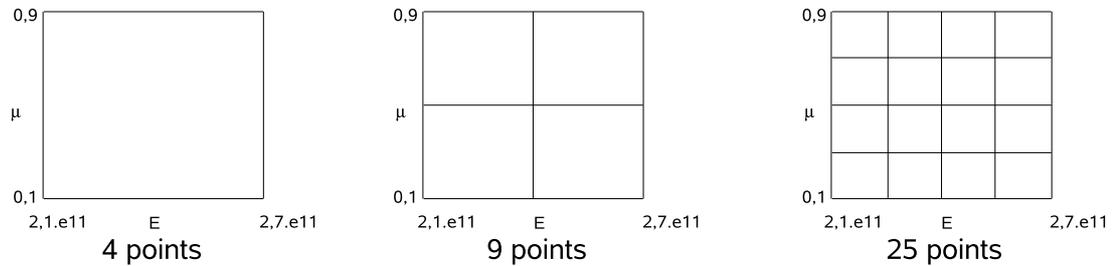


Figure 3.9 – Maillages stochastiques tests

Nous avons choisi, pour les fonctions de base stochastique $\Psi_k(\xi)$, une représentation linéaire par morceaux, ce qui revient à prendre une approximation de type éléments finis sur l'espace stochastique.

Une illustration des différentes phases du calcul de l'erreur sur chaque sous structure décrite au paragraphe 3.1.3.2 est donnée sur la figure 3.10.

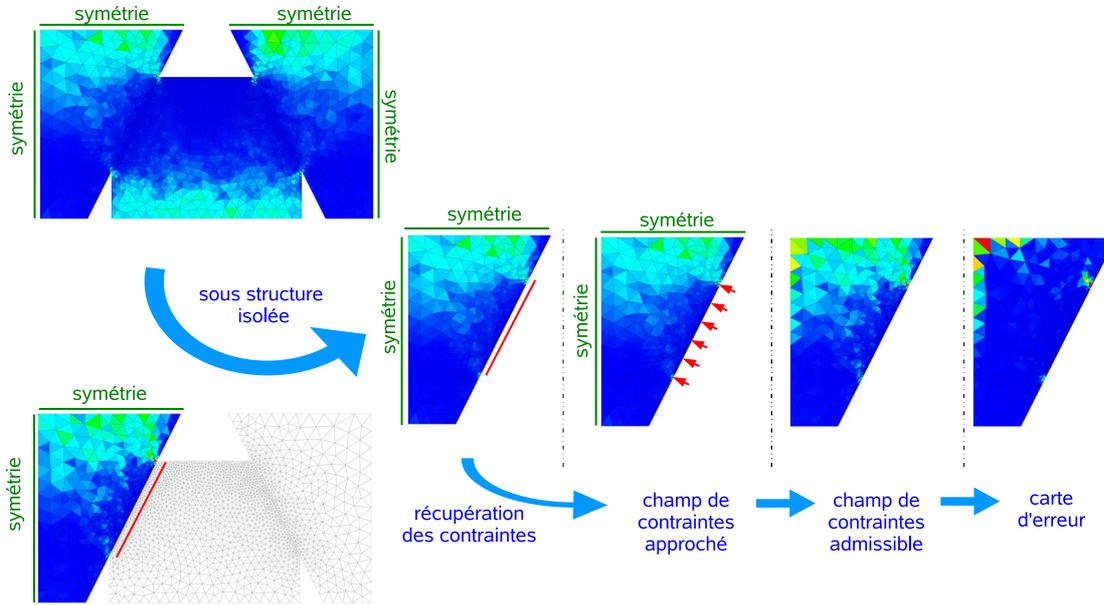


Figure 3.10 – Etapes du calcul de l'erreur

3.3.2 Evolution de l'erreur estimée

Nous observons, en premier lieu, le comportement de l'estimateur en fonction de la qualité des approximations géométriques et stochastiques. Les résultats sont présentés de la manière suivante :

- une courbe est tracée pour chaque approximation géométrique ;
- chaque courbe représente la variation de l'erreur en fonction de la discrétisation sur l'espace stochastique.

Cette première étude nous permet de vérifier les propriétés de base de l'estimateur, à savoir la diminution de l'erreur avec l'augmentation de la précision sur l'espace géométrique et sur l'espace stochastique. Pour une meilleure interprétation des courbes, nous introduisons l'estimateur d'erreur relatif $i(\tilde{S}_{ad})$ qui permet de présenter les résultats sous la forme d'un pourcentage d'erreur sur la figure 3.11 :

$$i(\tilde{S}_{ad}) = \frac{\tilde{e}_{rdc}(\tilde{S}_{ad})}{\sqrt{\langle \sum_{\ell=1}^3 \|\tilde{\sigma}^{\ell}\|_{\mathbf{K}^{\ell-1}, S^{\ell}}^2 \rangle}}$$

Cette figure 3.11 nous permet d'identifier deux propriétés importantes :

- lorsque la discrétisation sur l'espace géométrique est affinée, l'erreur estimée

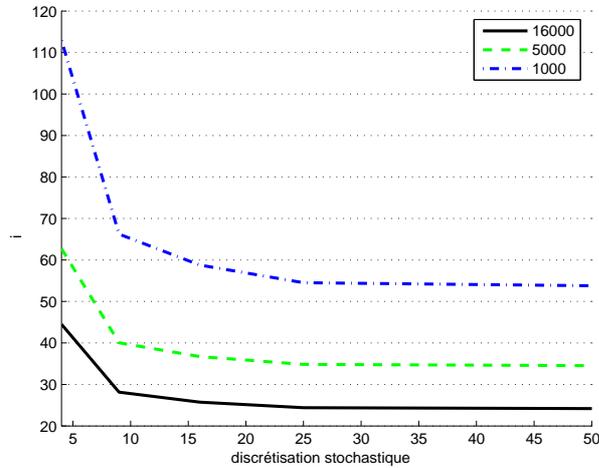


Figure 3.11 – Comportement de l’estimateur d’erreur relatif $i(\tilde{S}_{ad})$

diminue. Cette propriété est directement issue des propriétés de l’estimateur déterministe.

- lorsque la discrétisation sur l’espace stochastique est affinée, l’erreur estimée diminue.

Une autre remarque importante est que, pour une discrétisation géométrique fixée, l’erreur estimée semble converger vers une valeur asymptotique non négligeable lorsque la discrétisation stochastique augmente. Ce comportement de l’estimateur s’explique par le fait que l’erreur mesurée correspond à la somme de plusieurs termes :

- une contribution liée à l’approximation géométrique ;
- une contribution liée à l’approximation stochastique.

Pour un maillage géométrique donné, il est légitime de penser que la valeur atteinte par l’estimateur d’erreur pour une discrétisation stochastique riche est une bonne indication de la contribution géométrique de l’erreur.

Sur la figure 3.12, ce résultat est montré pour le maillage géométrique à 16 000 ddl. Nous avons calculé l’erreur pour des discrétisations stochastiques régulières allant de 4 calculs déterministes (2×2 , 2 valeurs pour chaque variable aléatoire) à 121 calculs déterministes (11×11 , 11 valeurs pour chaque variable aléatoire).

La contribution géométrique de l’erreur calculée de cette manière nous donne $i_{geo} = 22\%$.

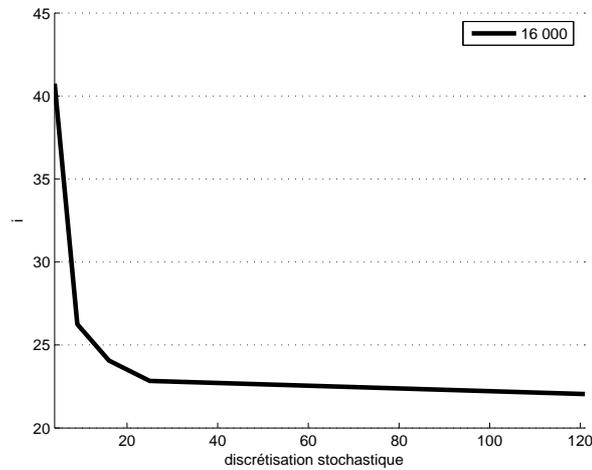


Figure 3.12 – Erreur estimée sur le maillage à 16 000 ddl

3.3.3 Indice d'efficacité

Afin de valider les résultats, nous construisons une solution très raffinée qui pourra servir de référence pour le maillage géométrique à 1 000 ddl et qui est basée, pour l'approximation géométrique, sur un modèle éléments finis de 200 000 ddl, et pour l'approximation stochastique, sur une série régulière de $K = 121$ calculs déterministes. Cette référence est présentée sur la figure 3.13.

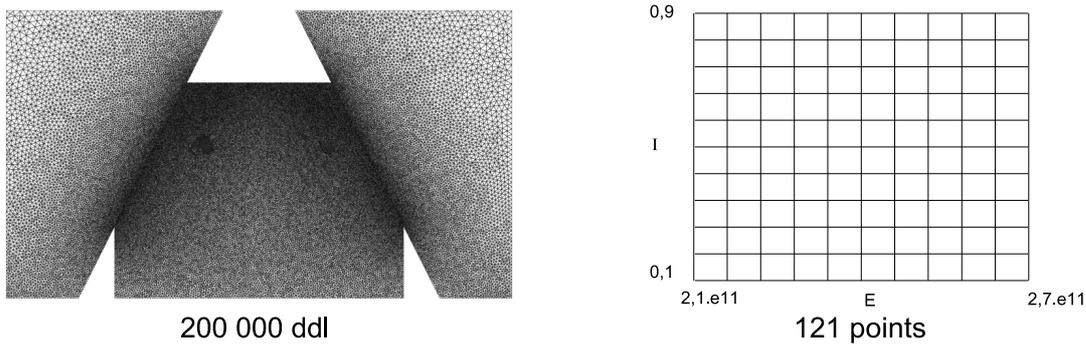


Figure 3.13 – Référence

La comparaison entre le modèle à 1 000 ddl et ce modèle de référence nous permet

de calculer un indice d'efficacité.

$$\nu = \sqrt{\frac{\tilde{e}_{rdc}^2(\tilde{S}_{ad})}{\langle \sum_{\ell=1}^3 \|\sigma_{ref}^\ell - \sigma_h^\ell\|_{\mathbf{K}^{\ell-1}, S^\ell}^2 \rangle}}$$

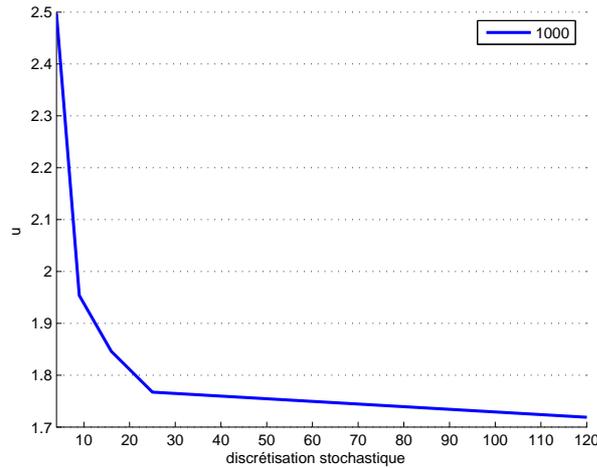


Figure 3.14 – Indice d'efficacité de l'estimateur

Sur cet exemple, la figure 3.14 montre deux résultats importants. Le premier est que l'indice d'efficacité est compris entre 1,7 et 2,4, ce qui veut dire que l'estimateur proposé est assez précis. Le second est que l'indice d'efficacité est toujours supérieur à 1, ce qui veut dire que l'erreur estimée majore l'erreur de référence sur cet exemple.

3.3.4 Comparaison des interpolations

Les résultats précédents nous ont permis, pour une interpolation du type éléments finis donnée sur l'espace stochastique, de vérifier que l'erreur estimée diminue lorsque la discrétisation sur chaque espace est affinée. Nous pouvons aussi utiliser l'estimateur d'erreur \tilde{e}_{rdc} pour comparer plusieurs types d'approximations. Dans l'exemple présenté au chapitre 2, nous avons comparé de manière qualitative une approximation polynomiale standard à une approximation sur le chaos polynomial. La comparaison avec une solution de référence sur l'espace stochastique nous a permis d'évaluer la qualité de chacune de ces interpolations, et d'affirmer que l'interpolation sur le chaos polynomial était meilleure pour ce problème. Nous avons maintenant un outil qui nous permet de faire quantitativement cette comparaison.

Les résultats obtenus sur l'exemple sont résumés dans le tableau 3.1 et doivent être comparés aux résultats du tableau 2.1 . Nous y avons ajouté une comparaison avec une interpolation linéaire par morceaux (éléments finis) basée sur un maillage stochastique régulier. Sur ce tableau, nous remarquons que lorsque l'erreur diminue, l'espérance et l'écart type des modèles approchés se rapprochent de l'espérance et de l'écart type de la référence.

	erreur relative	espérance	écart type
éléments finis	30%	$3,86 \cdot 10^3$	$6,28 \cdot 10^2$
standard	25%	$4,22 \cdot 10^3$	$5,49 \cdot 10^2$
chaos	22,5%	$4,25 \cdot 10^3$	$9,14 \cdot 10^2$
référence	22%	$4,28 \cdot 10^3$	$10,0 \cdot 10^2$

Tableau 3.1 – Résultats

3.4 Conclusion partielle : indicateurs spécifiques

Dans ce chapitre, nous avons défini un estimateur d'erreur sur l'espace stochastique. Ceci représente une étape importante vers la validation de modèles stochastiques, surtout pour des problèmes fortement non linéaires pour lesquels des erreurs importantes peuvent être commises si nous n'accordons pas une attention particulière à la qualité de l'approximation. Les résultats numériques ont permis de mettre en relief certaines propriétés de l'estimateur d'erreur proposé. Ils ont aussi mis en évidence le rapport parfois disproportionné entre une contribution stochastique qui ne semble pas significative face à la contribution géométrique, et l'influence pourtant grande sur les résultats d'une étude statistique.

Dans le chapitre suivant, nous allons donc définir des indicateurs spécifiques permettant de séparer ces contributions géométriques et stochastiques de l'erreur. La définition de critères spécifiques associés à chacun de ces indicateurs nous permettra d'évaluer la qualité des approximations sur chaque espace, et dans un second temps, d'améliorer séparément ces approximations par des études adaptatives spécifiques.

Chapitre 4

Indicateurs d'erreur spécifiques et calcul adaptatif

Dans ce chapitre, nous allons définir des indicateurs spécifiques permettant de séparer la contribution de l'erreur due à l'approximation sur l'espace géométrique de celle due à l'approximation sur l'espace stochastique. Nous les utiliserons ensuite pour définir une technique adaptative permettant de construire la meilleure approximation sur l'espace stochastique.

Sommaire

4.1	Séparation des contributions stochastique et géométrique .	93
4.1.1	Principe	93
4.1.2	Définition des indicateurs spécifiques	94
4.1.3	Résultats sur l'exemple aube-disque	97
4.2	Technique adaptative	102
4.2.1	Principe	102
4.2.2	Étude sur l'exemple	105
4.3	Conclusion partielle : mise en œuvre industrielle	109

4.1 Séparation des contributions stochastique et géométrique

4.1.1 Principe

Dans l'approximation que nous utilisons pour calculer le champ de déplacements approché :

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^P a_{ij} h_i(\mathbf{M}) \Psi_j(\boldsymbol{\xi})$$

nous avons séparé les dépendances géométrique et stochastique. Cette écriture nous permet de définir deux espaces d'approximation de dimensions finies. La figure 4.1 présente, de manière schématique, chacun de ces espaces d'approximation, ainsi que l'écart entre la solution exacte et la solution approchée.

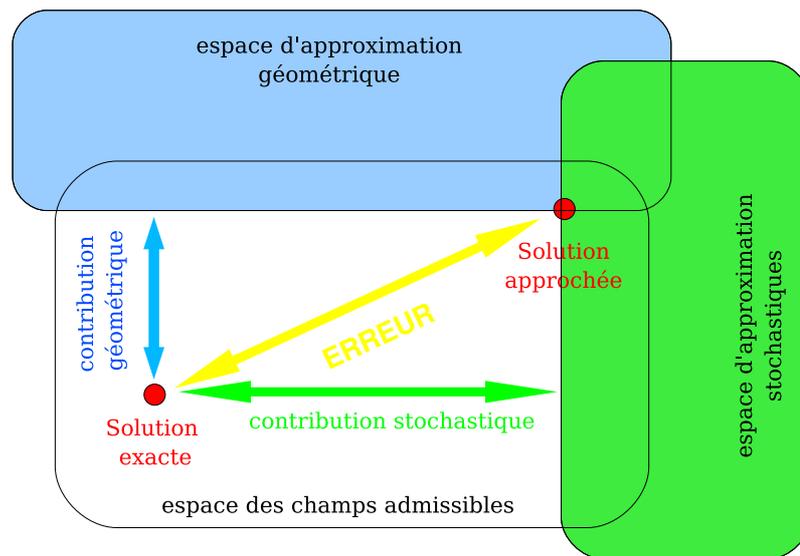


Figure 4.1 – Principe

A priori, cet écart peut être interprété comme la somme de deux contributions :

- la contribution géométrique, représentée par l'écart entre la solution exacte et l'espace des champs géométriques approchés ;
- la contribution stochastique, représentée par l'écart entre la solution exacte et l'espace des champs stochastiques approchés.

Nous allons donc décomposer l'estimateur d'erreur $\tilde{e}_{rdc}(\tilde{S}_{ad})$ pour faire apparaître ces deux termes. Nous rappelons dans un premier temps que les notations employées sont les suivantes (les exemples sont donnés sur le champ de déplacement) :

- les champs stochastiques approchés sont notés : $\mathbf{u}_h(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$;
- les champs déterministes approchés pour chaque calcul k sont notés : $\mathbf{u}_h(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k)$;
- les champs stochastiques admissibles sont notés : $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$;
- les champs déterministes admissibles pour chaque calcul k sont notés : $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k)$;

La démarche que nous proposons, liée à l'utilisation d'une méthode non intrusive, est illustrée sur la figure 4.2.

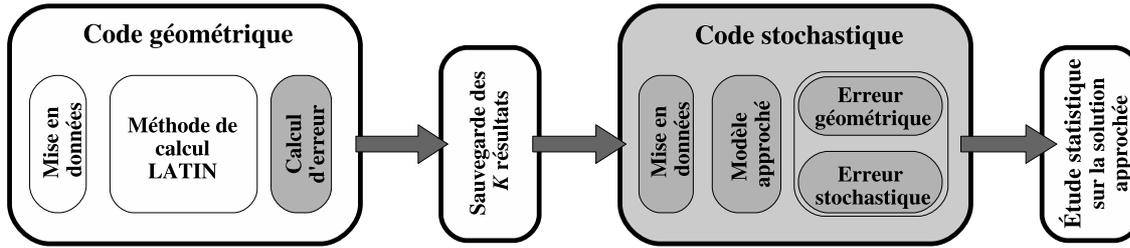


Figure 4.2 – Séparation des contributions stochastique et géométrique de l'erreur

4.1.2 Définition des indicateurs spécifiques

Pour plus de clarté dans la construction des indicateurs d'erreur spécifiques, nous reprenons le modèle de référence avec contact dans le cadre stochastique présenté au paragraphe 2.2.1, et nous travaillons séparément sur les sous structures et sur l'interface.

4.1.2.1 Sur les sous structures

Dans le cadre des méthodes non intrusives, la construction des approximations sur l'espace stochastique est réalisée à partir de l'interpolation d'une série de K calculs déterministes. Le champ de contraintes approché $\sigma_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})$ de la sous structure Ω^ℓ peut se calculer de deux manières :

- soit à partir de l'interpolation des K champs de déplacements approchés $\{\mathbf{u}_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k)\}_{k=1}^K$ et de la relation de comportement :

$$\mathbf{u}_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=1}^K \mathbf{u}_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k) \Psi_k(\boldsymbol{\xi})$$

$$\sigma_{h,1}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{K}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}))$$

- soit à partir de l'interpolation des K champs de contraintes approchés

$\{\sigma_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k)\}_{k=1}^K$:

$$\sigma_{h2}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=1}^K \sigma_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k) \Psi_k(\boldsymbol{\xi})$$

Pour faire apparaître les contributions géométrique et stochastique de l'erreur, nous travaillons avec ces deux constructions différentes du champ de contraintes approché que nous introduisons dans l'équation (3.30) :

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{rdc|\Omega^\ell}^2(\tilde{S}_{ad}) &= \frac{1}{2} \langle \|\tilde{\sigma}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) - \mathbf{K}^\ell \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}))\|_{\mathbf{K}^{\ell-1}, \Omega^\ell}^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \|\tilde{\sigma}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) - \sigma_{h1}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})\|_{\mathbf{K}^{\ell-1}, \Omega^\ell}^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \underbrace{\|\tilde{\sigma}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) - \sigma_{h2}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})\|_{\mathbf{K}^{\ell-1}, \Omega^\ell}^2}_{I_{geo|\Omega^\ell}} + \underbrace{\|\sigma_{h2}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) - \sigma_{h1}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})\|_{\mathbf{K}^{\ell-1}, \Omega^\ell}^2}_{I_{sto|\Omega^\ell}} \rangle \quad (4.1) \end{aligned}$$

Cette équation fait apparaître deux termes :

- $(\tilde{\sigma}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) - \sigma_{h2}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}))$, si nous développons ce terme sur les fonctions de base stochastiques, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) - \sigma_{h2}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{k=1}^K (\tilde{\sigma}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k) - \sigma_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k)) \Psi_k(\boldsymbol{\xi}) \\ &= \sum_{k=1}^K (e_{rdc|\Omega^\ell}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k)) \Psi_k(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned}$$

Ce terme correspond donc à l'interpolation de l'erreur déterministe. Sa norme énergétique peut être interprétée comme l'espérance mathématique de l'erreur géométrique, et peut donc servir d'indicateur de la contribution géométrique de l'erreur sur la sous structure Ω^ℓ :

$$I_{geo|\Omega^\ell}^2(\tilde{S}_{ad}) = \langle \|\tilde{\sigma}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) - \sigma_{h2}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi})\|_{\mathbf{K}^{\ell-1}, \Omega^\ell}^2 \rangle \quad (4.2)$$

- $\tilde{e}_{rdc|\Omega^\ell}^2(\tilde{S}_{ad}) - I_{geo|\Omega^\ell}^2(\tilde{S}_{ad})$, ce terme dépend de la norme de la grandeur $(\sigma_{h2}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) - \sigma_{h1}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}))$ et de son produit avec $(\tilde{\sigma}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) - \sigma_{h2}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}))$. Or $(\sigma_{h2}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) - \sigma_{h1}^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}))$ peut s'interpréter comme la non vérification de la relation de comportement due à l'approximation sur l'espace stochastique. Pour une discrétisation géométrique donnée, lorsqu'il n'y a pas d'approximation stochastique, cette grandeur est donc nulle. Nous pouvons donc utiliser $\tilde{e}_{rdc|\Omega^\ell}^2(\tilde{S}_{ad}) -$

$I_{geo|\Omega^\ell}^2(\tilde{S}_{ad})$ comme indicateur de la contribution stochastique de l'erreur sur la sous structure Ω^ℓ :

$$I_{sto|\Omega^\ell}^2(\tilde{S}_{ad}) = \tilde{e}_{rdc|\Omega^\ell}^2(\tilde{S}_{ad}) - I_{geo|\Omega^\ell}^2(\tilde{S}_{ad}) \quad (4.3)$$

4.1.2.2 Sur l'interface

Nous procédons de la même manière que pour les sous structures, la construction, à partir des K calculs déterministes, de l'approximation sur l'espace stochastique de la composante tangentielle du champ d'efforts d'interface $\tilde{\mathbf{F}}_t^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \tilde{F}_t^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{t}$ (composante qui intervient dans la relation de comportement des interfaces) peut se faire de deux manières :

- soit à partir de l'interpolation des K champs d'efforts normaux $\{\widehat{\mathbf{F}}_n^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k)\}_{k=1}^K$ et de la relation de comportement qui fait intervenir le coefficient de frottement au niveau de l'interface :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_n^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{k=1}^K \widehat{\mathbf{F}}_n^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k) \Psi_k(\boldsymbol{\xi}) \\ \tilde{\mathbf{F}}_{t1}^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) &= \tilde{F}_{t1}^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{t} = \mu(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \cdot (\tilde{\mathbf{F}}_n^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n}^i) \cdot \mathbf{t} \\ \tilde{\mathbf{F}}_1^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) &= \tilde{\mathbf{F}}_{t1}^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) + \tilde{\mathbf{F}}_n^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \end{aligned}$$

- soit à partir de l'interpolation des K champs d'efforts tangentiels $\{\widehat{\mathbf{F}}_t^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k)\}_{k=1}^K$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_{t2}^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{k=1}^K \widehat{\mathbf{F}}_t^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k) \Psi_k(\boldsymbol{\xi}) \\ \tilde{\mathbf{F}}_2^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) &= \tilde{\mathbf{F}}_{t2}^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) + \tilde{\mathbf{F}}_n^c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) \end{aligned}$$

Introduisons ces deux écritures du champ d'efforts tangentiels dans l'équation (3.31) correspondant au terme d'interface de l'estimateur d'erreur :

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{rdc|I_c}^2(\tilde{S}_{ad}) &= \left\langle \int_{I_c} [b(-\tilde{\mathbf{w}}^c, \tilde{\mathbf{F}}_1^c) + \tilde{\mathbf{w}}^c \cdot \tilde{\mathbf{F}}_1^c] dS \right\rangle \\ &= \left\langle \int_{I_c} [b(-\tilde{\mathbf{w}}^c, (\tilde{\mathbf{F}}_1^c - \tilde{\mathbf{F}}_2^c + \tilde{\mathbf{F}}_2^c)) + \tilde{\mathbf{w}}^c \cdot (\tilde{\mathbf{F}}_1^c - \tilde{\mathbf{F}}_2^c + \tilde{\mathbf{F}}_2^c)] dS \right\rangle \\ &= \left\langle \int_{I_c} \underbrace{[b(-\tilde{\mathbf{w}}^c, \tilde{\mathbf{F}}_2^c) + \tilde{\mathbf{w}}^c \cdot \tilde{\mathbf{F}}_2^c]}_{I_{geo|I_c}} + \underbrace{[b(-\tilde{\mathbf{w}}^c, (\tilde{\mathbf{F}}_1^c - \tilde{\mathbf{F}}_2^c)) + \tilde{\mathbf{w}}^c \cdot (\tilde{\mathbf{F}}_1^c - \tilde{\mathbf{F}}_2^c)]}_{I_{sto|I_c}} dS \right\rangle \end{aligned}$$

Cette équation fait apparaître deux termes :

$b(-\tilde{\mathbf{w}}^c, \tilde{\mathbf{F}}_2^c) + \tilde{\mathbf{w}}^c \cdot \tilde{\mathbf{F}}_2^c$, la norme énergétique de ce terme peut être interprétée comme l'espérance mathématique de l'erreur géométrique sur l'interface I_c . Elle peut servir d'indicateur de la contribution géométrique de l'erreur sur l'interface :

$$I_{geo|I_c}^2(\tilde{S}_{ad}) = \left\langle \int_{I_c} [b(-\tilde{\mathbf{w}}^c, \tilde{\mathbf{F}}_2^c) + \tilde{\mathbf{w}}^c \cdot \tilde{\mathbf{F}}_2^c] dS \right\rangle \quad (4.4)$$

$b(-\tilde{\mathbf{w}}^c, (\tilde{\mathbf{F}}_1^c - \tilde{\mathbf{F}}_2^c)) + \tilde{\mathbf{w}}^c \cdot (\tilde{\mathbf{F}}_1^c - \tilde{\mathbf{F}}_2^c)$, ce terme peut s'interpréter comme la non vérification de la relation de comportement due à l'approximation sur l'espace stochastique. Sa norme énergétique peut donc servir d'indicateur de la contribution stochastique de l'erreur sur l'interface I_c :

$$I_{sto|I_c}^2(\tilde{S}_{ad}) = \left\langle \int_{I_c} [b(-\tilde{\mathbf{w}}^c, (\tilde{\mathbf{F}}_1^c - \tilde{\mathbf{F}}_2^c)) + \tilde{\mathbf{w}}^c \cdot (\tilde{\mathbf{F}}_1^c - \tilde{\mathbf{F}}_2^c)] dS \right\rangle \quad (4.5)$$

4.1.2.3 Indicateurs spécifiques globaux

Sur le modèle de référence (figure 2.2), les indicateurs spécifiques globaux se construisent de la manière suivante :

$$I_{sto}^2(\tilde{S}_{ad}) = \sum_{\ell=1}^2 I_{sto|\Omega^\ell}^2(\tilde{S}_{ad}) + I_{sto|I_c}^2(\tilde{S}_{ad}) \quad (4.6)$$

$$I_{geo}^2(\tilde{S}_{ad}) = \sum_{\ell=1}^2 I_{geo|\Omega^\ell}^2(\tilde{S}_{ad}) + I_{geo|I_c}^2(\tilde{S}_{ad}) \quad (4.7)$$

4.1.3 Résultats sur l'exemple aube-disque

Les calculs sont toujours conduits sur l'exemple aube-disque du chapitre 2 (figure 2.9) sur lequel nous regardons l'influence des variations du coefficient de frottement μ au niveau des deux interfaces de contact et du module d'Young E de la sous structure centrale.

4.1.3.1 Discrétisations géométrique et stochastique

Pour mettre en évidence les propriétés des indicateurs spécifiques, nous faisons une série d'études avec des approximations géométriques et stochastiques différentes sur les mêmes maillages que ceux présentés au paragraphe 3.3.

Nous observons le comportement de chaque indicateur spécifique en fonction de la qualité des approximations géométriques et stochastiques. Pour cette étude, nous avons choisi une approximation éléments finis pour représenter les grandeurs sur l'espace stochastique. Les résultats sont présentés de la manière suivante :

- une courbe est tracée pour chaque approximation géométrique ;
- chaque courbe représente la variation de l'erreur en fonction de la discrétisation sur l'espace stochastique.

4.1.3.2 Contributions stochastique et géométrique

Pour une meilleur interprétation des résultats, nous définissons des indicateurs d'erreur relatifs en comparant les indicateurs spécifiques à l'espérance de l'énergie de déformation de la structure :

$$i_{geo} = \frac{I_{geo}}{\sqrt{\langle \sum_{\ell=1}^3 \|\tilde{\sigma}^{\ell}\|_{\mathbf{K}^{\ell-1}, S^{\ell}}^2 \rangle}} \quad (4.8)$$

$$i_{sto} = \frac{I_{sto}}{\sqrt{\langle \sum_{\ell=1}^3 \|\tilde{\sigma}^{\ell}\|_{\mathbf{K}^{\ell-1}, S^{\ell}}^2 \rangle}} \quad (4.9)$$

Les résultats de l'étude (figures 4.4 et 4.3) sont donc présentés comme un taux d'erreur relativement à l'énergie globale de déformation. La courbe 4.3 montre que l'indicateur d'erreur géométrique i_{geo} est relativement indépendant de l'approximation stochastique et diminue fortement lorsque la discrétisation géométrique est affinée. L'indicateur d'erreur stochastique i_{sto} (figure 4.4) diminue lorsque la discrétisation stochastique est affinée. Il n'est cependant pas complètement indépendant de la discrétisation géométrique choisie, ce qui est cohérent avec sa définition puisqu'il dépend de $(\tilde{\sigma}^{\ell}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) - \sigma_{h2}^{\ell}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}))$. Nous en déduisons que le choix du critère d'erreur stochastique ne pourra se faire indépendamment du choix du critère d'erreur géométrique.

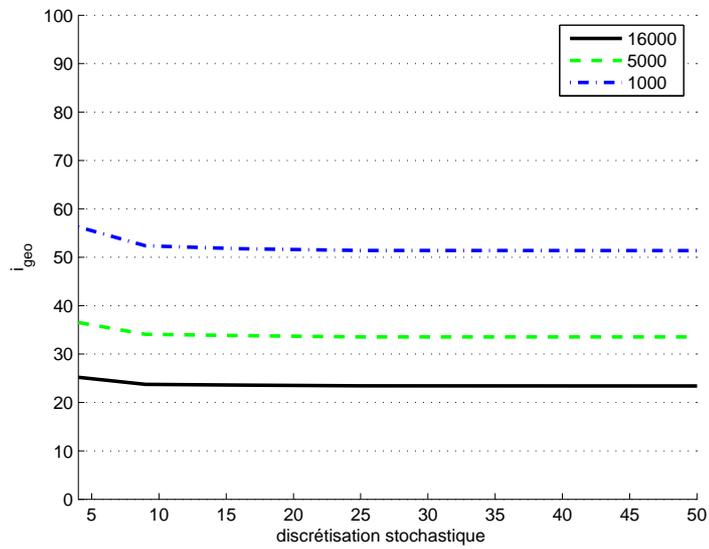


Figure 4.3 – Contribution géométrique de l'erreur

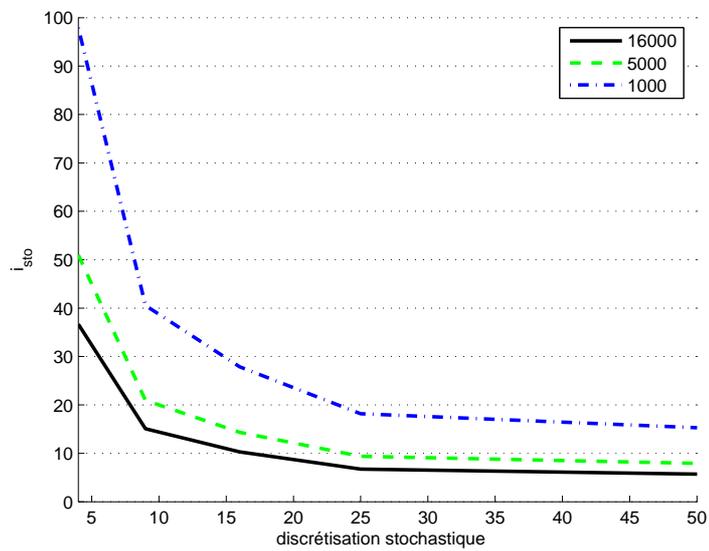


Figure 4.4 – Contribution stochastique de l'erreur

Le tableau 4.1 résume ces résultats :

	i_{geo}	i_{sto} 4	i_{sto} 9	i_{sto} 25
1 000 ddl	50,5%	97,9%	40,5%	18,2%
5 000 ddl	33,3%	51%	21%	9,4%
16 000 ddl	22,5%	36,6%	15%	6,75%

Tableau 4.1 – Résultats

4.1.3.3 Comparaison de différentes approximations

Nous souhaitons aussi comparer quantitativement la qualité des approximations utilisées au paragraphe 2.3.2 à l'aide de ces indicateurs. Les résultats sont résumés dans le tableau 4.2 pour les approximations suivantes :

- une approximation polynomiale standard ;
- une approximation éléments finis basée sur la même série de calcul ;
- une approximation sur le chaos polynomial.

	erreur	i_{sto}	i_{geo}	espérance	écart type
éléments finis	30%	20,9%	23%	$3,86 \cdot 10^3$	$6,28 \cdot 10^2$
standard	25%	14,4%	22,1%	$4,22 \cdot 10^3$	$5,49 \cdot 10^2$
chaos	22,5%	6,3%	22%	$4,25 \cdot 10^3$	$9,14 \cdot 10^2$
référence	22%	0,3%	22%	$4,28 \cdot 10^3$	$10,0 \cdot 10^2$

Tableau 4.2 – Comparaison de plusieurs approximations

Remarques :

Ce tableau doit être comparé au tableau 3.1. Il montre que l'indicateur géométrique I_{geo} donne une valeur relativement proche de la valeur de l'erreur géométrique estimée par une étude de convergence sur l'espace stochastique (paragraphe 3.3.2). De plus, cette valeur est peu dépendante du type d'approximation choisie sur l'espace stochastique (variation maximale de 3,5% entre 2 types d'approximation).

L'indicateur d'erreur stochastique I_{sto} confirme la qualité de l'approximation sur le chaos polynomial par rapport aux autres approximations testées. Ce résultat n'est pas forcément évident pour tous les problèmes de contact, qui sont

par nature discontinus, et qui peuvent donc être mieux représentés par une approximation discontinue. Cependant, dans cet exemple, la géométrie et le chargement font que la perte d'adhérence entre l'aube et le disque est progressive sur les zones de contact et que le comportement global est continu.

Enfin, l'indicateur d'erreur stochastique n'est pas négligeable devant l'erreur globale et devant l'indicateur d'erreur géométrique.

4.2 Technique adaptative

4.2.1 Principe

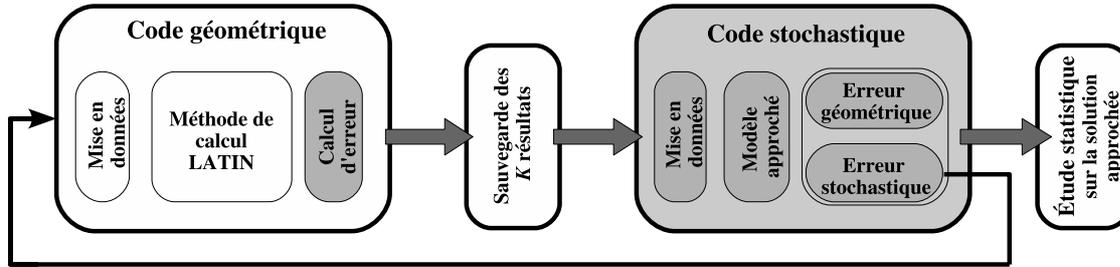


Figure 4.5 – Calcul adaptatif à partir d'une méthode non intrusive

Notre point de départ est la solution approchée construite à partir d'une méthode non intrusive :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{k=1}^K \mathbf{u}_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}_k) \Psi_k(\boldsymbol{\xi}) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^K a_{ik}^\ell h_i(\mathbf{M}) \Psi_k(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned}$$

- les fonctions $h_i(\mathbf{M})$ sont les fonctions de base de l'espace d'approximation géométrique (déterministes) ;
- les fonctions $\Psi_k(\boldsymbol{\xi})$ sont les fonctions de base de l'espace d'approximation stochastique.

L'objectif de cette étude est maintenant de trouver l'approximation optimale, c'est-à-dire le nombre minimal de termes géométriques n et stochastiques K permettant d'atteindre une qualité donnée de l'approximation globale. Les maillages géométrique et stochastique ne sont donc plus fixées *a priori*, mais nous les adaptions pour minimiser une fonction coût représentative de la qualité du modèle approché.

Dans ce cadre, le choix de l'estimateur d'erreur globale comme fonction coût pour cette étude semble judicieux car il est représentatif des contenus mécanique et stochastique du problème. De plus, nous avons identifié, dans la section précédente, deux indicateurs d'erreur spécifiques I_{sto} et I_{geo} permettant de séparer les contributions stochastique et géométrique de cette erreur. Grâce à ces indicateurs, nous pouvons décomposer cette étude en deux finalités indépendantes :

finalité 1 : construire la meilleure base $\{h_i(\mathbf{M})\}_{i=0}^n$ qui minimise l'indicateur d'erreur géométrique I_{geo} ;

finalité 2 : construire la meilleure base $\{\Psi_k(\boldsymbol{\xi})\}_{k=1}^K$ qui minimise l'indicateur d'erreur stochastique I_{sto} ;

4.2.1.1 Étude adaptative géométrique

Les techniques d'adaptation de maillage géométrique permettent d'adapter le maillage aux particularités géométriques, ou encore de remailler une structure en tenant compte des zones de concentration de contraintes.

Les fonctions coût à minimiser pour ces approches sont généralement des indicateurs ou des estimateurs d'erreur déterministes dont certains sont présentés au chapitre 3.1. Il est important de noter que l'adaptation du maillage géométrique, à partir de l'indicateur d'erreur géométrique I_{geo} , conduit à des résultats différents de ceux obtenus par des études adaptatives à partir de ces fonctions coût standards. En effet, nous n'optimisons pas le maillage pour un seul cas de chargement, mais pour une série de cas de chargement en tenant compte de leur loi de probabilité. Le maillage ainsi obtenu pourra être considéré comme « robuste » vis-à-vis des paramètres variables du problème.

Les techniques d'adaptation de maillage géométrique ont déjà fait l'objet de nombreux travaux. Cette partie du calcul adaptatif ne sera donc pas traitée dans cette thèse, et nous supposons, pour la suite, que l'approximation géométrique a déjà suivi une première optimisation et reste fixe. Nous allons nous intéresser principalement à l'amélioration de l'approximation stochastique.

4.2.1.2 Étude adaptative stochastique

Dans le cadre des méthodes « intrusives », l'amélioration de la base d'approximation stochastique peut se faire grâce à des techniques itératives inspirées du point P3 de la méthode LATIN (Nouy [2007]). Ces techniques nécessitent un gros effort de programmation et ne peuvent pas être implantées rapidement dans un cadre industriel.

Dans le cadre des méthodes « non intrusives », l'adaptation du maillage stochastique consiste essentiellement à compléter la série de calculs déterministes, et donc à enrichir le maillage stochastique en ajoutant des nouveaux nœuds.

a. Étapes du calcul • Le principe de cette méthode est résumé sur la figure 4.6 qui reprend les différentes étapes d'une méthode stochastique non intrusive (figure

1.12). Les étapes sont les suivantes :

- nous faisons, tout d'abord, le choix du type d'interpolation sur l'espace stochastique (polynomiale, éléments finis...);
- nous faisons ensuite un choix des K_1 premiers points de collocations (plan d'expérience, méthode spécifique au chaos polynomial...). Ces points constituent la base du maillage stochastique;
- à partir de ces K_1 calculs déterministes, nous construisons une première approximation stochastique;
- nous calculons ensuite l'indicateur d'erreur stochastique I_{sto} lié à cette première approximation;
- enfin, à l'aide d'un critère que nous allons définir, nous choisissons les valeurs des paramètres pour le ou les futurs calculs déterministes qui viendront enrichir la base.

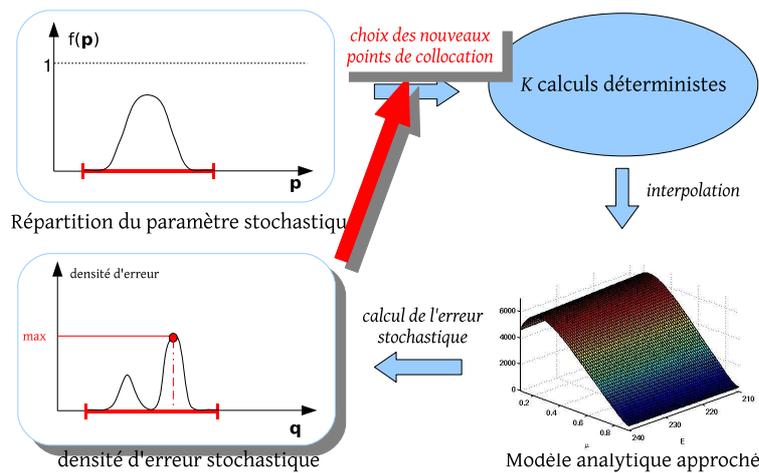


Figure 4.6 – Etapes d'un calcul adaptatif

b. Implantation numérique • Pour calculer effectivement toutes les grandeurs utiles, nous distinguons trois niveaux de discrétisation sur l'espace stochastique :

1. la série de calculs déterministes;
2. le maillage stochastique;
3. la grille d'intégration.

Sur la figure 4.7, nous représentons ces différents niveaux de discrétisation sur un exemple avec deux variables aléatoires notées v.a.1 et v.a.2.

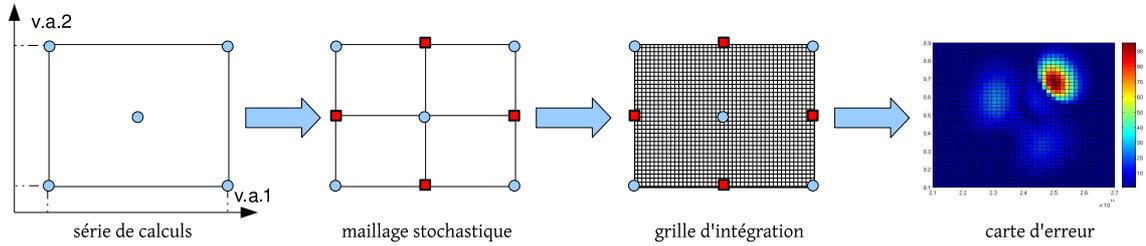


Figure 4.7 – Maillage stochastique et grille d'intégration

Les étapes du calcul sont les suivantes (figure 4.7) :

- nous partons d'une série de calculs déterministes (points ronds) ;
- nous formons un maillage stochastique structuré à partir de cette série, les points supplémentaires pour construire ce maillage sont interpolés (points carrés) ;
- pour calculer l'indicateur d'erreur I_{sto} , nous devons intégrer les champs admissibles sur chaque élément du maillage stochastique. Nous définissons pour cela une grille d'intégration plus fine que le maillage ;
- les valeurs de l'indicateur I_{sto} sont calculées sur les points de cette grille fine. Nous obtenons finalement une cartographie des contributions locales de l'erreur stochastique que nous appellerons densité d'erreur stochastique.

4.2.2 Étude sur l'exemple

Pour conduire cette étude, nous avons choisi de travailler sur l'exemple aube-disque (figure 2.9) et v.a.1 et v.a.2 sont donc respectivement le module d'Young E de la sous structure centrale et le coefficient de frottement μ au niveau des deux interfaces de contact. L'approximation géométrique correspond à une interpolation éléments finis basée sur un maillage de 5 000 ddl, et nous avons aussi choisi de travailler avec une interpolation éléments finis sur l'espace stochastique. Nous allons présenter ici plusieurs critères permettant de choisir les futurs points de collocation.

4.2.2.1 Critère du maximum de l'erreur

Ce critère est le plus simple, il permet de choisir un point de collocation après chaque calcul d'erreur. Nous pouvons résumer ces étapes de la manière suivante (figure 4.8) :

1. nous partons d'une série de calculs déterministes ;
2. nous formons un maillage stochastique ;

3. nous calculons la densité d'erreur stochastique sur le maillage;
4. enfin, nous déterminons le point ayant la plus forte densité d'erreur stochastique. Il nous permettra de définir les valeurs des paramètres variables pour le futur calcul déterministe.

Ces étapes sont répétées jusqu'à ce que nous obtenions un niveau d'erreur suffisamment bas.

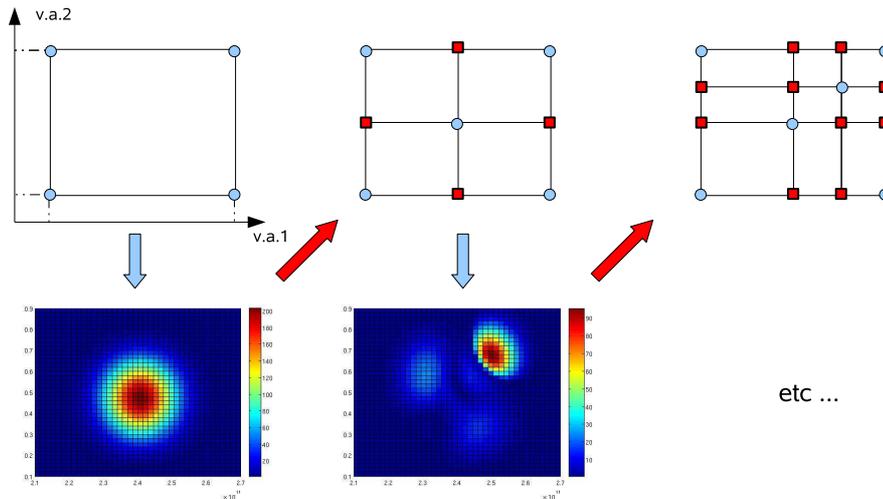


Figure 4.8 – Principe : critère de la contribution maximale

Ce critère nous donne la valeurs des paramètres stochastiques pour laquelle la densité d'erreur stochastique est maximale. Il permet donc de ne choisir qu'un seul point de collocation pour chaque calcul d'erreur. Cette méthode est longue, mais c'est celle qui nous donne *a priori* les meilleurs résultats. Nous nous en servons donc de référence pour valider la méthode améliorée. La figure 4.9 montre les résultats obtenus par comparaison avec des maillages stochastiques réguliers issus de plan d'expériences orthogonaux. Sur cet exemple, l'utilisation de la technique adaptative permet de diminuer par plus de deux le nombre de calculs nécessaires pour atteindre un niveau d'erreur stochastique de 10%.

Le tableau 4.3 résume les résultats obtenus pour arriver à une erreur stochastique estimée de moins de 10%, pour un maillage stochastique régulier, et pour un maillage adaptatif. Le coût de calcul est estimé relativement à la durée d'un calcul déterministe, sachant que l'évaluation de l'erreur prend une fois et demi plus de temps qu'un calcul déterministe. Dans ce tableau, le nombre de calculs déterministes est noté N_d , le nombre d'évaluations de l'erreur est noté N_e et le coût total du calcul est noté CtC .

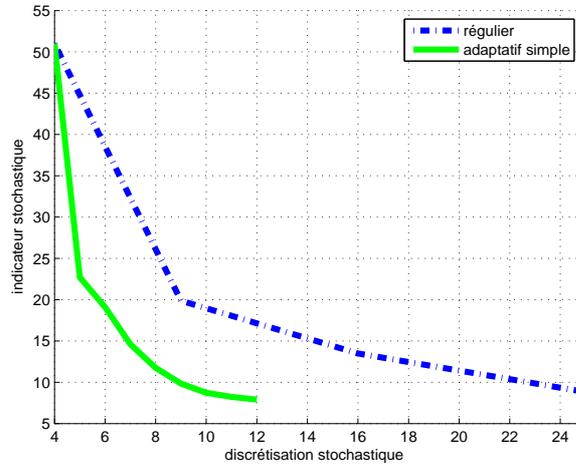


Figure 4.9 – Critère du maximum de l’erreur

	$i_{sto}(\tilde{S}_{ad})$	N_d	N_e	CtC
étude standard	9,4%	25	1	26,5
étude adaptative	10%	9	6	18

Tableau 4.3 – Critère du maximum de l’erreur

4.2.2.2 Critère amélioré

Pour éviter de calculer systématiquement l’erreur pour définir les nouvelles valeurs des paramètres, nous nous donnons un critère permettant de choisir plusieurs valeurs des paramètres après un calcul d’erreur. Nous pouvons résumer ces étapes de la manière suivante (figure 4.10) :

1. nous partons d’une série de calculs déterministes ;
2. nous formons un maillage stochastique ;
3. nous calculons la densité d’erreur stochastique sur le maillage ;
4. nous intégrons cette densité sur chaque élément stochastique pour évaluer leur contribution à l’erreur totale ;
5. enfin, nous déterminons quel élément à la plus forte contribution, puis nous enrichissons tous les éléments qui ont une contribution supérieure à 50% de cette valeur. Plusieurs choix sont possibles pour déterminer le point à enrichir sur chaque élément. Dans un premier temps, nous prenons le point central.

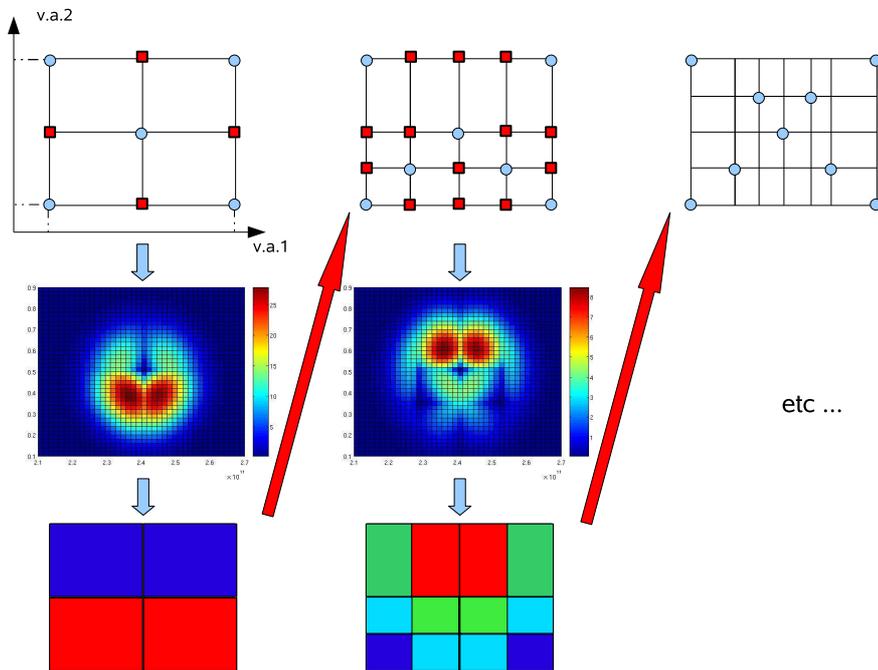


Figure 4.10 – Principe : critère amélioré

Ces étapes sont répétées jusqu'à ce que nous obtenions un niveau d'erreur suffisamment bas. De cette manière, nous diminuons le nombre d'évaluations de l'erreur tout en gardant la précision du calcul adaptatif. Les résultats obtenus par cette technique sont présentés sur la figure 4.11.

Une comparaison avec la technique précédente est résumée dans le tableau 4.4. Dans ce tableau, le nombre de calculs déterministes est noté N_d , le nombre d'évaluations de l'erreur est noté N_e et le coût total de calcul est noté CtC .

	$i_{sto}(\tilde{S}_{ad})$	N_d	N_e	CtC
étude standard	9,4%	25	1	26,5
étude adaptative	10%	9	6	18
étude améliorée	9,8%	12	3	16,5

Tableau 4.4 – Résultats

Ces résultats montrent que la technique utilisant un critère de contribution par élément permet effectivement d'obtenir une qualité équivalente avec un coût de calcul optimisé. Cette comparaison ne tient cependant pas compte de la méthode utilisée pour effectuer les séries de calculs déterministes ni du temps de transfert des données

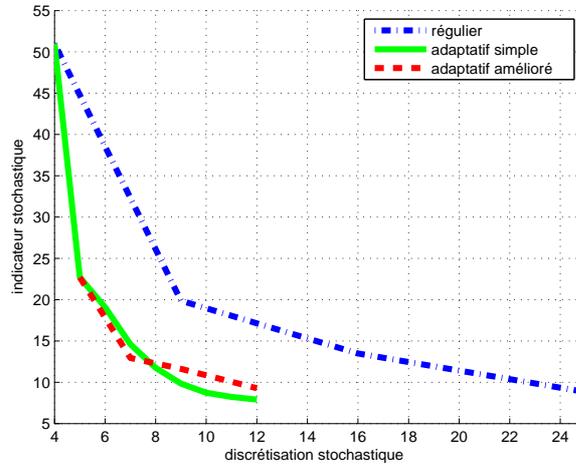


Figure 4.11 – Calcul adaptatif amélioré

qui joue aussi un rôle important dans le coût de calcul. Nous verrons dans la suite qu'il est possible d'utiliser des techniques dédiées à ce type de problèmes (multirésolution...) qui, associées à la technique adaptative présentée, permettent de réduire considérablement le coût des calculs.

4.3 Conclusion partielle : mise en œuvre industrielle

Dans ce chapitre nous avons défini deux indicateurs spécifiques I_{geo} et I_{sto} tels que $\tilde{e}_{rdc}^2 = I_{geo}^2 + I_{sto}^2$ permettant de représenter respectivement la contribution géométrique et la contribution stochastique de l'erreur globale. Le calcul de ces indicateurs est décrit par entité géométrique (sous structures et interfaces).

Ces indicateurs permettent d'évaluer séparément les qualités sur chaque espace d'approximation et donc de les gérer séparément par des méthodes spécifiques. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous avons utilisé l'indicateur d'erreur stochastique I_{sto} pour définir une technique adaptative sur l'espace stochastique permettant, dans le cadre des méthodes non intrusives, de raffiner le maillage stochastique par l'ajout de nouveaux calculs déterministes appropriés.

Les résultats obtenus sur un exemple simple sont prometteurs, mais restent limités compte tenu de la petite taille du problème proposé. Pour mettre en valeur plus clairement l'utilité de cette technique, nous allons, dans le chapitre suivant, l'appliquer sur un exemple industriel de plus grande taille avec un nombre plus élevé

4. Indicateurs d'erreur spécifiques et calcul adaptatif

de variables aléatoires.

Chapitre 5

Mise en œuvre sur un exemple industriel

Dans ce dernier chapitre, nous allons conduire une étude stochastique complète, sur un exemple industriel, à l'aide des outils définis précédemment et implantés sur la plateforme logiciel développée au LMT-Cachan.

Sommaire

5.1	Implémentation des méthodes	113
5.1.1	Implémentation dans la plateforme LMT	113
5.1.2	Outil industriel : calculs paramétriques avec OPTIMUS	114
5.1.3	Outil dédié : LATIN multirésolution	116
5.1.4	Évolution : méthode adaptative	116
5.2	Description du problème	117
5.2.1	Problématique industrielle	117
5.2.2	Objectifs du calcul	120
5.2.3	Première modélisation 2D	120
5.2.4	Résultats	125
5.2.5	Modélisation 3D	130

5.2.6	Résultats	133
5.3	Conclusion partielle	135

5.1 Implémentation des méthodes

Dans ce rapport, nous avons développé de manière approfondie la partie théorique sur les méthodes utilisées ainsi que les résultats obtenus sur des exemples académiques. Au delà de cet aspect théorique, une grande partie du travail effectué pendant ces trois années a été d'implémenter ces méthodes. Plusieurs objectifs ont été fixés pour ce travail de développement :

1. programmer ces méthodes de telle manière qu'elles puissent être réutilisées ;
2. utiliser des moyens de calcul performants (calcul parallèle) ;
3. valider ces méthodes sur un problème industriel complexe ;
4. comparer nos résultats avec ceux obtenus grâce à un outil industriel.

Pour répondre aux trois premiers objectifs, nous avons choisi de travailler sur la plateforme logiciel développée au LMT-Cachan depuis 2004. L'utilisation de cette plateforme permet en effet de réutiliser un code éléments finis performant, ainsi que des méthodes de résolution déjà implémentées (méthode LATIN, modélisation multi-échelle, parallélisation des calculs...). Ceci nous a donné la possibilité de travailler directement sur des problèmes complexes, tout en ayant un accès complet aux sources et donc une grande liberté de programmation. La contrepartie est que ce choix a nécessité de longues phases d'apprentissage des langages de programmation (C++ et Python) et d'adaptation au formalisme utilisé.

Pour répondre au quatrième objectif, nous avons utilisé le logiciel OPTIMUS développé par LMS. Ce logiciel est un outil de chaînage de codes qui permet de coupler plusieurs logiciels, de lancer automatiquement une série de calculs sur ces codes couplés, et qui offre un certain nombre de pré et post-traitements (création de surfaces de réponse polynomiales, étude de Monte Carlo, optimisation...).

5.1.1 Implémentation dans la plateforme LMT

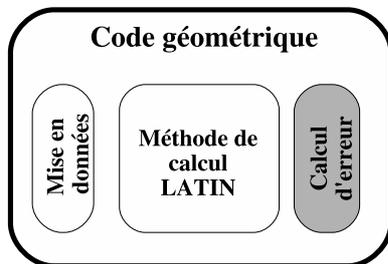


Figure 5.1 – Développements liés au calcul déterministe

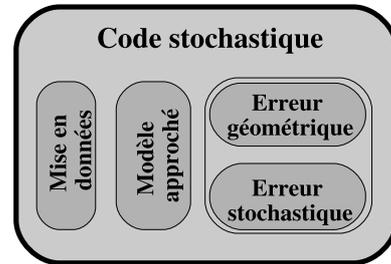


Figure 5.2 – Développements liés au calcul stochastique

Les figures 5.1 et 5.2 représentent, de manière schématique, l'essentiel des méthodes implémentées et des outils existants. Les zones sur fond gris correspondent aux « modules » ajoutés, et les zones sur fond blanc correspondent aux méthodes existantes sur lesquelles nous nous sommes greffés (code de calcul éléments finis, méthode LATIN multiéchelle, parallélisation des calcul). Dans le cadre des méthodes non intrusives, l'outil d'analyse stochastique correspond à un code distinct, c'est pourquoi nous avons séparé les méthodes implémentées en deux groupes :

- le code de calcul déterministe (code géométrique) ;
- le code de calcul stochastique.

Sur la figure 5.3, nous reprenons le schéma construit progressivement dans ce rapport et qui résume tous les outils introduits dans le cadre d'une méthode non intrusive :

1. la première étape est de faire une série de calculs déterministes dont les résultats sont sauvés sur le disque dur ;
2. la deuxième étape est de construire l'approximation stochastique ;
3. la troisième et dernière étape consiste à faire une étude statistique sur la solution approchée, souvent à partir d'une méthode de Monte Carlo.

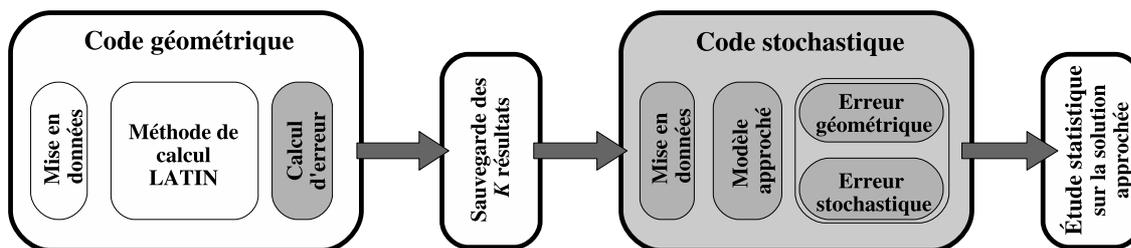


Figure 5.3 – Développements d'une méthode non intrusive

5.1.2 Outil industriel : calculs paramétriques avec OPTIMUS

La première étape de l'étude (série de calculs déterministes) est la plus longue. De manière générale, les industriels utilisent des logiciels de chaînage de codes, tel que OPTIMUS (LMS), BOSS QUATRO (Samtech)... pour conduire ce type de calculs. Ces logiciels ont l'avantage de permettre l'utilisation de la majorité des codes éléments finis standards (Abaqus, Nastran, Samcef...) à condition de pouvoir enregistrer les données dans un format compatible à tous. Souvent, cet interfaçage est réalisé par le logiciel de chaînage de code via un format texte ASCII (figure 5.4), ce qui rend les temps de sauvegarde et de lecture des données très longs.

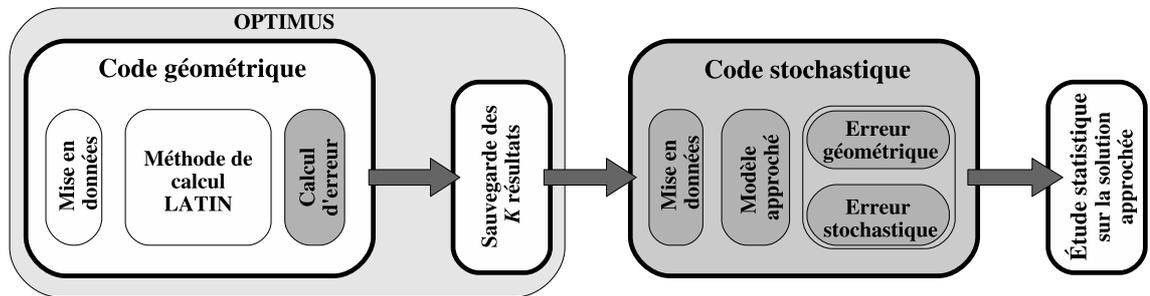


Figure 5.4 – OPTIMUS brut : utilisation d’OPTIMUS pour le calcul paramétrique et pour l’interfaçage

Pour accélérer ce temps de transfert des données, les éditeurs de ces logiciels ainsi que les industriels qui les utilisent s’interrogent sur la mise au point de formats de données compatibles permettant de relier les codes standards de manière plus directe. Cependant, ces codes standards autorisent rarement le changement de leur format de données, et ce travail d’interfaçage peut se révéler très dur.

Dans notre cas, nous avons pu effectuer rapidement ce travail sur la plateforme LMT car toutes les sources nous sont accessibles. Ce que nous appelons « OPTIMUS amélioré », (figure 5.5), correspond donc à la conduite d’une étude stochastique en utilisant le logiciel OPTIMUS seulement pour lancer la série de calculs déterministes. Les données sont enregistrées dans un format commun au code géométrique et stochastique, et nous n’utilisons pas les outils fournis par OPTIMUS pour ce transfert. Nous verrons que cette amélioration permet de diviser par deux le temps de calcul.

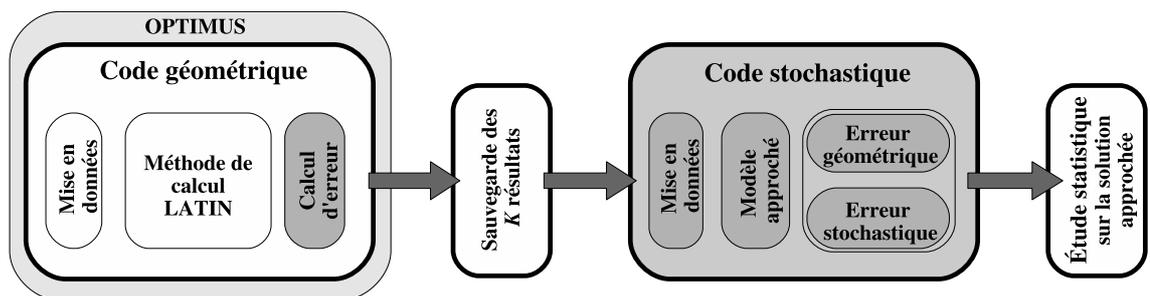


Figure 5.5 – OPTIMUS amélioré : utilisation d’OPTIMUS seulement pour le calcul paramétrique

5.1.3 Outil dédié : LATIN multirésolution

Afin de réduire encore la durée de cette étape, nous nous sommes tournés vers une technique dédiée à la résolution de problèmes paramétriques : La LATIN multirésolution (Champaney [2004], Champaney et al. [2007]). Cette technique est un ingrédient supplémentaire de la méthode LATIN (et plus généralement des méthodes itératives) qui permet d'accélérer les résolutions successives de problèmes similaires. Elle est basée sur les points suivants :

- une seule mise en données pour l'ensemble des calculs ;
- un seul calcul des opérateurs invariants d'un problème à l'autre (matrice de rigidité, d'inertie...);
- la réinitialisation de la méthode de calcul itérative par le résultat du problème précédent ou du problème le plus proche.

Nous avons implémenté ce « module » sur la plateforme LMT (figure 5.6), sachant que les seuls opérateurs qui varient dans les exemples que nous traitons sont les opérateurs d'interface qui sont très rapides à calculer. Les opérateurs liés aux sous structures (rigidité macro et micro...) restent constants. L'utilisation de cette technique sur le problème 2D que nous avons traité a permis de diviser par trois le temps de calcul par rapport à la version « OPTIMUS amélioré ».

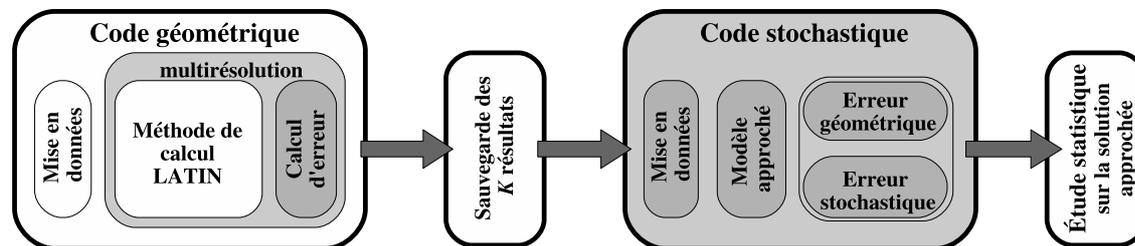


Figure 5.6 – Multirésolution : utilisation de la multirésolution pour le calcul paramétrique

5.1.4 Évolution : méthode adaptative

La dernière évolution que nous proposons correspond à la méthode adaptative que nous avons présentée dans le chapitre précédent (figure 5.7). Cette technique nous permet de choisir les calculs déterministes à effectuer en fonction de l'erreur stochastique calculée, et de minimiser le nombre de ces calculs déterministes pour arriver à une solution de bonne qualité. D'un point de vue algorithmique, des évolutions peuvent encore être envisagées pour accélérer les calculs. Par exemple la

parallélisation de l'étude stochastique, ou encore un couplage plus fort entre la partie déterministe et la partie stochastique qui permettrait de ne pas passer par des étapes d'enregistrement et de chargement des données sur le disque dur.

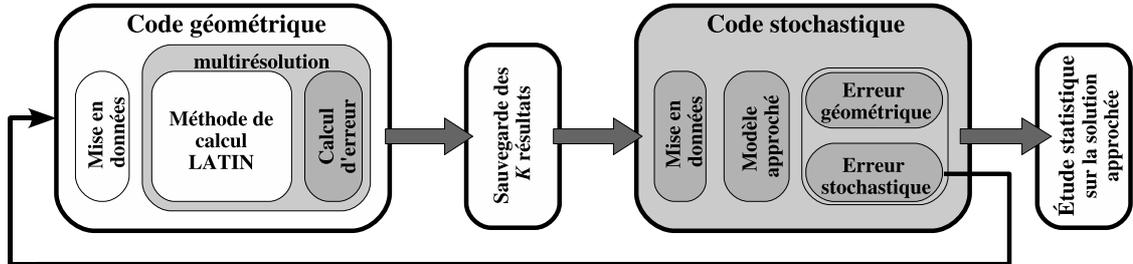


Figure 5.7 – Multirésolution et adaptatif : utilisation de la méthode adaptative

5.2 Description du problème

5.2.1 Problématique industrielle

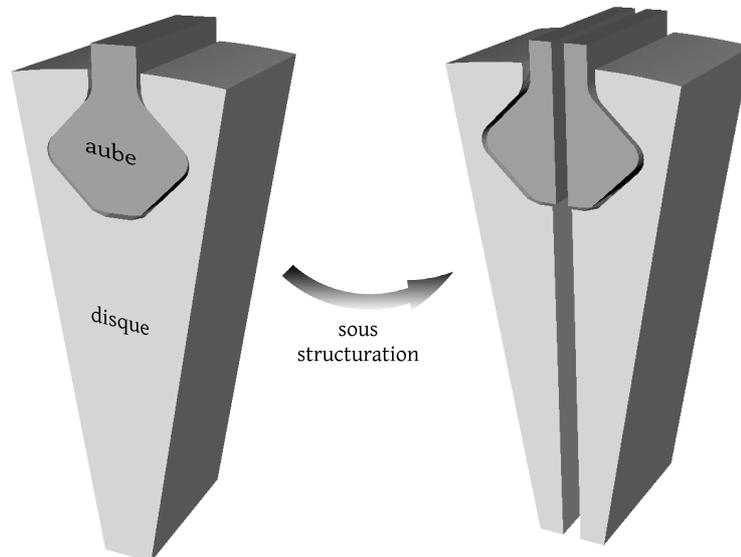


Figure 5.8 – Étude sous structurée

Nous reprenons l'application proposée par SNECMA concernant l'assemblage entre les aubes et le disque dans les turbines hautes pressions. Nous baserons cette fois notre étude sur la géométrie de la figure 5.8 en adoptant un formalisme sous structuré. Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous avons exposé plusieurs problématiques liées à ce type d'assemblages, en essayant de distinguer les causes à l'origine de la variabilité, les moyens pour obtenir des informations sur les paramètres variables, et enfin les modèles mathématiques associés à ces paramètres en fonction de la quantité d'informations obtenue.

Dans ce chapitre, nous allons concentrer nos efforts sur la première problématique qui concerne la variation du coefficient de frottement au niveau de la zone de contact entre l'aube et le disque. La quantité dimensionnante dans ce problème est la contrainte maximale dans le disque (contrainte de Von Mises). Le schéma de la figure 5.9 représente, de manière schématique, un zoom sur une zone de contact, et les différentes couches de matériaux au niveau de cette zone.

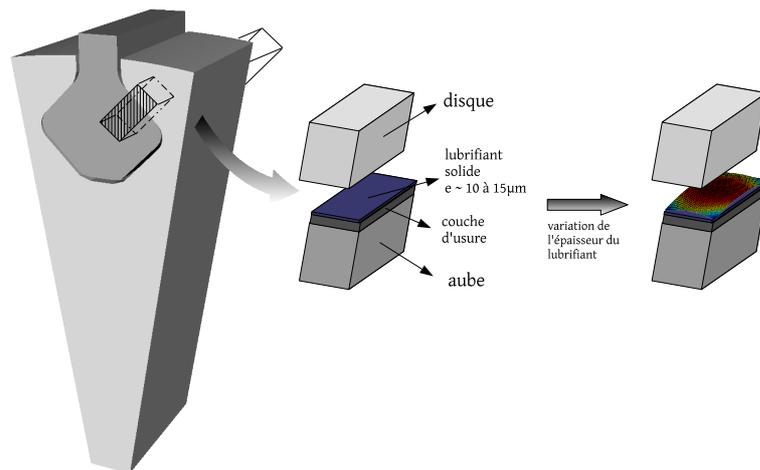


Figure 5.9 – Problématique SNECMA

Le pied de l'aube est recouvert par deux couches de matériaux. La première est un matériau d'usure, la seconde est une couche de lubrifiant solide d'épaisseur $e \approx 10 \mu\text{m}$. Lorsque cette couche de lubrifiant est neuve, le coefficient de frottement entre l'aube et le disque vaut $\mu = 0,2$. Lorsque cette couche est complètement dégradée, le disque est en contact avec la couche d'usure et le coefficient de frottement vaut $\mu = 0,8$. La difficulté principale dans ce problème vient du fait que la dégradation de la couche de lubrifiant n'est pas uniforme sur la zone de contact. Des mesures effectuées sur des échantillons tout au long du cycle de vie de ces pièces montrent que

la dégradation est plus rapide au niveau des extrémités de cette zone. Ces positions correspondent généralement à des pics de contraintes ou de glissements.

Ces mesures ont permis d'estimer un profil de variation pour l'usure des matériaux et pour le coefficient de frottement le long des zones de contact. Ces profils sont illustrés sur la figure 5.10.

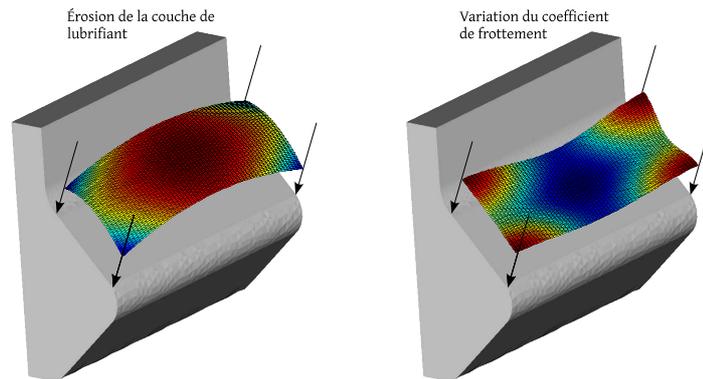


Figure 5.10 – Profils de variation des paramètres de contact

Sur ces profils de variations géométriques, plusieurs incertitudes doivent être prises en compte, les principales étant les amplitudes représentant les valeurs de l'usure de la couche de lubrifiant à chaque extrémité des zones de contact. Les variations de l'usure du lubrifiant et du coefficient de frottement en tout point des zones de contact peuvent s'écrire en fonction de ces amplitudes.

Pour prendre en compte ces profils de variation géométriques et stochastiques dans le calcul, nous avons deux modélisations possibles :

- soit par une série de variables aléatoires indépendantes, définies en plusieurs points des surfaces de contact (méthode utilisée par les ingénieurs de SNECMA) ;
- soit par un champ stochastique sur chaque portée.

La description par champ stochastique sera privilégiée car elle est plus représentative et permet de réduire le nombre de variables aléatoires à prendre en compte à celles qui sont réellement indépendantes. Les variations de l'usure de la couche de lubrifiant seront introduites dans le calcul grâce à la méthode proposée dans le chapitre 2.2.3.2 qui permet de représenter de manière analytique de petits défauts de formes par l'ajout d'une fonction adéquate dans la relation de comportement des interfaces.

5.2.2 Objectifs du calcul

Pour SNECMA, l'objectif d'un tel calcul est de déterminer si la contrainte de Von Mises maximale dans le disque est admissible compte tenu du cahier des charges. Nous allons donc chercher à obtenir des informations précises sur la distribution de cette contrainte afin de déterminer une probabilité de rupture.

Pour cette thèse, en plus de cet objectif, nous nous intéressons à la qualité de la méthode proposée, au temps nécessaire pour faire les calculs et à l'apport vis-à-vis de méthodes standards. Nous utiliserons, pour effectuer ces calculs, l'ensemble des outils et des méthodes décrites dans les chapitres précédents, ainsi que d'autres outils développés depuis plusieurs années au LMT Cachan en particulier.

5.2.3 Première modélisation 2D

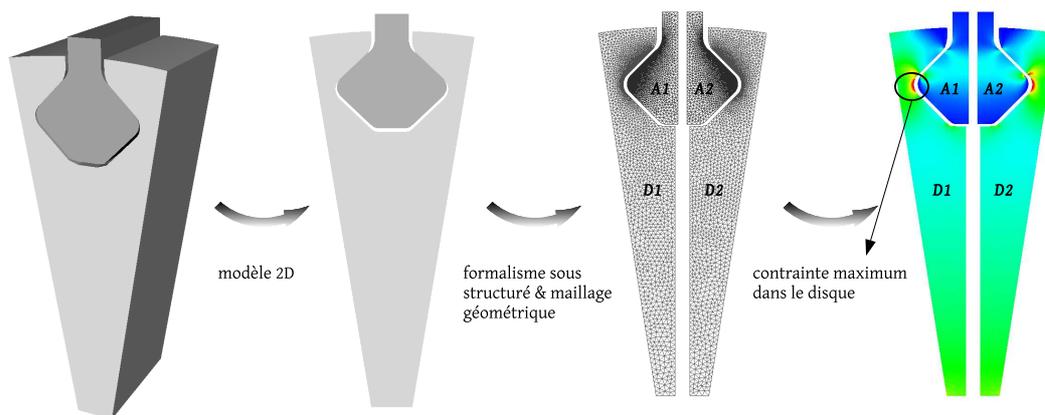


Figure 5.11 – Modèle 2D

Nous commençons par modéliser cette structure en 2 dimensions (figure 5.11). Ce modèle 2D est divisé en 4 sous structures (le disque et le pied de l'aube sont divisés en 2 parties symétriques). Nous appellerons ces sous structures $\{D_1, D_2\}$ pour le disque, et $\{A_1, A_2\}$ pour le pied de l'aube. Nous avons deux interfaces de contact : I_1 , entre D_1 et A_1 , et I_2 , entre D_2 et A_2 . Les autres interfaces ($D_1 - D_2$ et $A_1 - A_2$) sont supposées parfaites.

Nous souhaitons obtenir la contrainte de Von Mises maximale, sur le disque, dans les zones de plus forte courbure (zone entourée sur la figure 5.11)

5.2.3.1 Paramètres du calcul

Constantes matériaux :

Les quatre sous structures ont un comportement élastique linéaire isotrope. Nous avons supposé que le disque et le pied de l'aube sont constitués du même matériau dont les propriétés sont proches de celles du nickel :

- leur coefficient de Poisson vaut $\nu_A = \nu_D = 0,3$;
- leur module d'Young vaut $E_A = E_D = 210 \cdot 10^3$ MPa ;
- leur masse volumique vaut $m_A = m_D = 8 \cdot 10^3$ Kg.m⁻³.

Conditions géométriques :

- les déplacements en bas du disque sont bloqués ;
- des conditions de symétrie sont imposées sur les côtés du disques (représentation des liaisons avec les autres secteurs angulaires).

Efforts imposés :

Nous supposons que le réacteur tourne à vitesse constante, nous étudierons donc cette structure en statique.

- l'ensemble {aube+disque} est soumis à des efforts d'inertie, la vitesse de rotation est de 8000 tr/min ;
- le haut du pied (liaison avec la pale non représentée) est soumis à une densité surfacique d'effort de traction F représentant les efforts d'inertie sur la pale : $F = 2 \cdot 10^5$ N.mm⁻¹.

Conditions de contact :

- le contact avec frottement est représenté par une loi de Coulomb ;
- l'état des surfaces de contact ainsi que le coefficient de frottement sont paramétrés par deux variables a et b représentant les amplitudes de l'usure de la couche de lubrifiant à chaque extrémité d'une ligne de contact.

Les deux paramètres a et b varient de 0 à 1 (0 lorsque la couche de lubrifiant est neuve, 1 lorsqu'elle est complètement dégradée). Compte tenu du profil d'usure en 3D, nous supposons que la variation relative de l'épaisseur de la couche de lubrifiant, dans le plan du modèle 2D, sur la ligne de contact (interface $I_2 = (A_2 - D_2)$) est contenue dans l'intervalle $[0 \mu\text{m}, 3 \mu\text{m}]$, et est donnée par l'équation du second degré suivante :

$$df(x) = 3[a(1,875 x^2 - 5,375 x + 3,8437) + b(1,875 x^2 - 2,875 x + 1,0937) - (3,75 x^2 - 8,25 x + 3,9375)] \quad (5.1)$$

où x représente l'abscisse des points de l'interface I_2 . x varie dans l'intervalle $[L_a; L_b] = [7\text{mm}; 15\text{mm}]$.

Le coefficient de frottement dépend aussi des 2 variables a et b . Son profil est donné par la fonction suivante sur I_2 :

$$\mu(x) = 0,2 + 0,6(a \exp(-(x - L_a)^2/P_a) + b \exp(-(x - L_b)^2/P_b)) \quad (5.2)$$

où les paramètres P_a et P_b sont représentatifs des pentes du profil de variation du coefficient de frottement. Une étude paramétrique rapide a montré que leur influence est petite devant celle des paramètres a et b . Nous supposons donc, en première approximation, qu'ils restent constants et égaux à 0,13.

Les fonctions décrivant les variations géométriques de l'état d'usure et du coefficient de frottement sur I_2 en fonction des paramètres a et b sont représentées sur la figures 5.12.

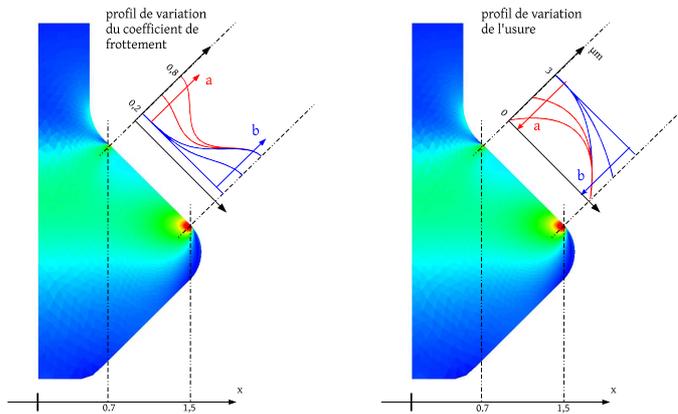


Figure 5.12 – Profils de variation de l'état de surface et du coefficient de frottement

Notons que les deux lignes de contact I_1 et I_2 n'évoluent pas de manière symétrique. Compte tenu des déplacements de corps rigides du pied de l'aube, nous supposons que le haut de la ligne de contact I_1 présente les mêmes variations que le bas de la ligne de contact I_2 . Ceci est illustré sur la figure 5.13.

5.2.3.2 Discrétisation

Nous cherchons, dans chaque sous structure Ω^ℓ , une approximation numérique à partir d'une méthode non intrusive :

$$\mathbf{u}_h^\ell(\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^K a_{ik}^\ell h_i(\mathbf{M}) \Psi_k(\boldsymbol{\xi})$$

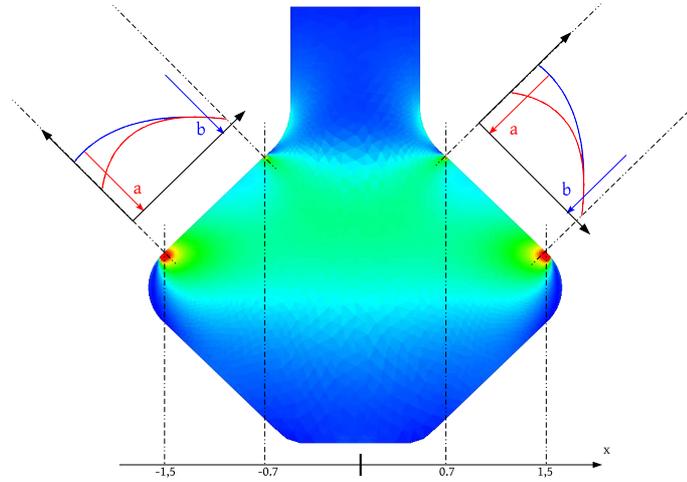


Figure 5.13 – Problème non symétrique

a. Discrétisation géométrique • Le maillage géométrique de chacune des sous structures est sensiblement équivalent : nous comptons 5 400 ddl pour chaque partie du disque D_1 et D_2 , et 5 800 ddl pour chaque partie de l’aube A_1 et A_2 . Soit un nombre total de degrés de liberté géométriques égal à $n = 22\,400$ ddl. Nous avons choisi cette approximation géométrique car elle permet d’obtenir un indicateur d’erreur géométrique donnant une valeur inférieure à 10%.

b. Discrétisation stochastique • Nous avons un espace stochastique à deux dimensions puisque nous pouvons exprimer les variations des deux variables a et b en fonction de deux variables aléatoires indépendantes. Nous choisissons une représentation éléments finis sur l’espace stochastique. Notons K_a et K_b le nombre de valeurs prises respectivement par les variables a et b (nombre de degrés de liberté stochastiques dans chaque direction). La taille du problème global dans le cadre d’une méthode intrusive serait de :

$$n_g = n \times K_a \times K_b$$

Dans le cadre des méthodes non intrusives standards (utilisant un maillage régulier), la résolution de ce problème conduit à faire $K_a \times K_b$ calculs déterministes de taille n . L’étude d’un problème stochastique global peut donc rester très coûteuse, et un compromis entre le nombre de variables aléatoires à prendre en compte, la discrétisation géométrique et la discrétisation stochastique reste indispensable, c’est pourquoi nous avons introduit une méthode adaptative pour laquelle les discrétisations K_a et K_b ne sont pas fixés *a priori*.

5.2.3.3 Étude stochastique

a. Loi de variation des paramètres • Durant la période de fonctionnement de cette structure, la couche de lubrifiant va passer d'un état neuf à un état complètement dégradé, et les paramètres a et b vont décrire toute leur plage de variation de manière certaine. Par contre, les niveaux d'usure de chaque côté de la ligne de contact ne sont pas indépendants car ils sont soumis aux mêmes cycles de fonctionnement. Cette dépendance des deux variables est représentée par la loi de répartition couplée de la figure 5.14.

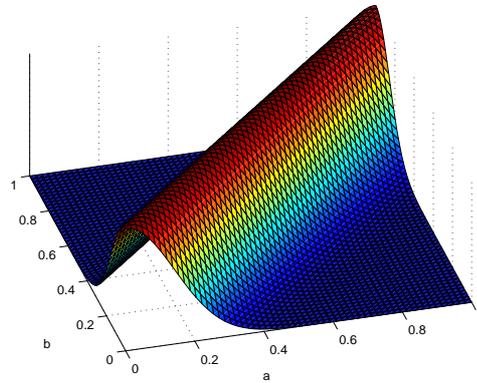


Figure 5.14 – Distribution couplée des deux paramètres a et b

b. Calcul adaptatif • Nous commençons notre calcul par un premier choix de K_1 points de collocation $\{a_k; b_k\}_{k=1}^{K_1}$. Nous allons ensuite enrichir cette série par d'autres points de calcul permettant de minimiser l'indicateur d'erreur stochastique relatif i_{sto} :

$$i_{sto}^2(\tilde{S}_{ad}) = \sum_{\{D_1, D_2, A_1, A_2\}} i_{sto|\Omega^\ell}^2(\tilde{S}_{ad}) + \sum_{\{I_1, I_2\}} i_{sto|I_c^\ell}^2(\tilde{S}_{ad})$$

Nous construisons la première approximation à partir de $K_1 = 5$ calculs déterministes en prenant, dans un premier temps, les valeurs limites $\{(0; 0), (1; 0), (0; 1), (1; 1)\}$ des deux paramètres a et b et le point central $\{(0, 5; 0, 5)\}$. Le calcul adaptatif sera conduit en prenant le critère amélioré. Nous avons vu, dans la présentation des indicateurs spécifiques, que l'indicateur d'erreur stochastique n'était pas indépendant de la discrétisation géométrique. Nous devons donc faire un choix du critère d'erreur stochastique qui soit cohérent avec l'erreur géométrique obtenue. Dans la suite, nous

considérerons que la discrétisation stochastique sera suffisante lorsque la contribution stochastique i_{sto} sera au moins équivalente à la contribution géométrique i_{geo} , et qu'elle aura atteint une valeur stable.

Dans un second temps, une fois que nous aurons obtenu cette valeur de l'indicateur relatif d'erreur stochastique i_{sto} , nous construirons la surface de réponse associée à la contrainte maximale de Von Mises dans le disque. Cette surface de réponse servira de modèle de référence pour une étude de Monte Carlo visant à déterminer la loi répartition de cette contrainte maximale.

5.2.4 Résultats

5.2.4.1 Qualité du calcul

La courbe de convergence de l'indicateur d'erreur stochastique i_{sto} est donnée sur la figure 5.15.

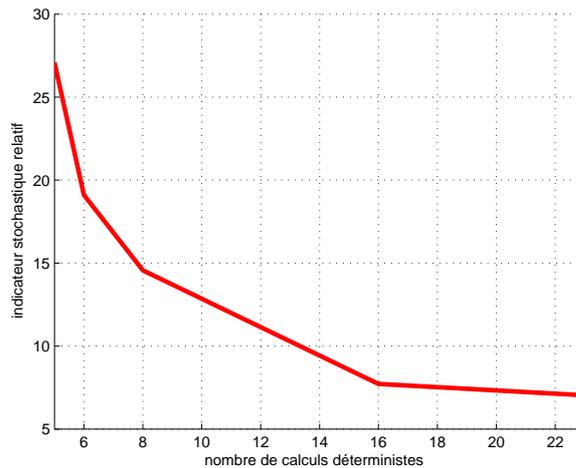


Figure 5.15 – Convergence de l'indicateur stochastique

Nous avons fait, en tout, 23 calculs déterministes pour arriver à un niveau d'erreur inférieur à 7% et construire cette courbe. Pour confirmer ces résultats, nous avons construit une solution de référence sur l'espace stochastique à partir d'une série de 225 calculs déterministes. La surface de réponse obtenue pour cette référence est présentée sur la figure 5.16.

Le schéma 5.17 représente l'évolution de la carte de densité d'erreur en fonction des points de collocation obtenus par la technique adaptative. Il montre que nous avons enrichi en priorité les zones de forte densité de probabilité et celles qui

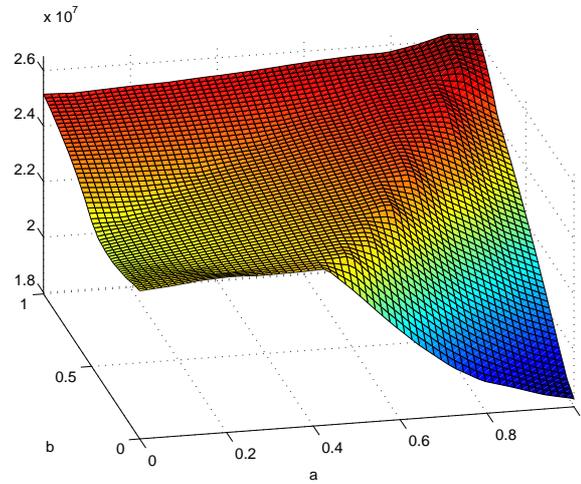


Figure 5.16 – Surface de réponse de référence (225 calculs)

présentent de fortes non linéarités. Ceci est un résultat important car il illustre et confirme, sur un exemple, le fait que l'estimateur que nous avons défini prend en compte les contenus mécanique et stochastique du problème considéré.

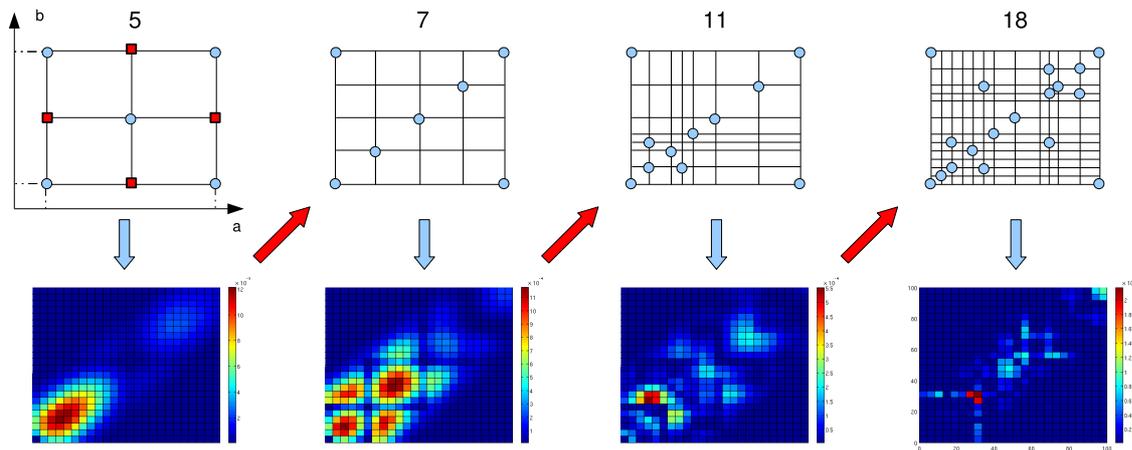


Figure 5.17 – Evolution de la carte de densité d'erreur

5.2.4.2 Distributions approchées

Pour chaque approximation, nous obtenons les distributions approchées par une série de 150 000 tirages de Monte Carlo. À partir de ces distributions nous estimons les densités de probabilité approchées grâce à la méthode du noyau (Kernel smoothing) avec un noyau gaussien (Wand and Jones [1995]). Les figures 5.18 et 5.19 illustrent cette démarche sur l'approximation obtenue pour 5 calculs déterministes. Les figures 5.20, 5.21, 5.22 et 5.23 montrent l'évolution de la forme de la fonction densité de probabilité de la contrainte maximale avec le nombre de calculs déterministes (résultats donnés pour 5, 8, 16, 23 et une référence obtenue avec 225 calculs déterministes).

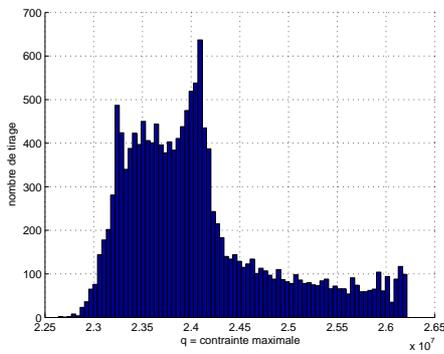


Figure 5.18 – Distribution obtenue pour 5 calculs déterministes

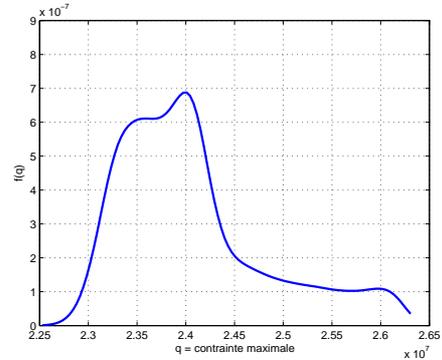


Figure 5.19 – Densité de probabilité obtenue pour 5 calculs

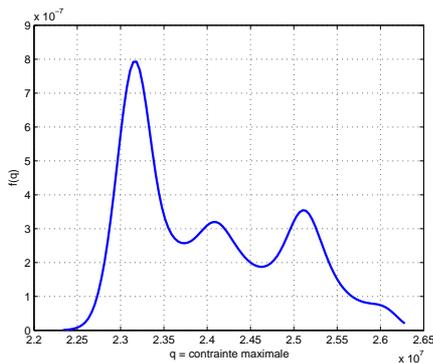


Figure 5.20 – Densité de probabilité obtenue pour 8 calculs

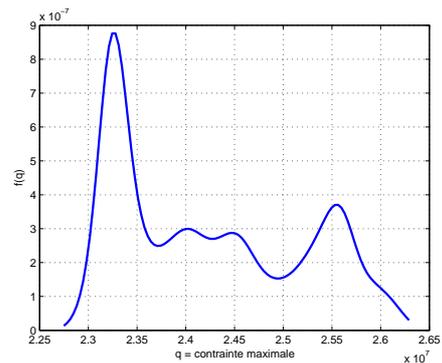


Figure 5.21 – Densité de probabilité obtenue pour 16 calculs

Une première comparaison des distributions approchées avec la distribution de référence (225 calculs) montre une amélioration des résultats obtenus lorsque la

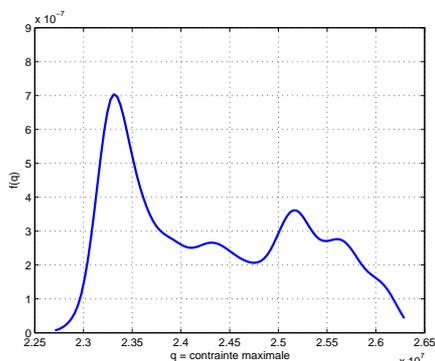


Figure 5.22 – Densité de probabilité obtenue pour 23 calculs

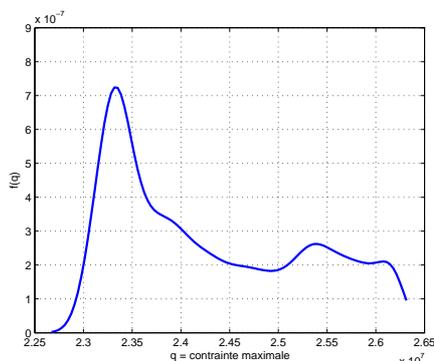


Figure 5.23 – Densité de probabilité obtenue pour la référence, 225 calculs

discrétisation stochastique s’affine. Ces résultats sont résumés dans le tableau 5.1 où nous donnons, à titre indicatif, les valeurs de la moyenne et de l’écart type pour chaque distribution approchée.

	5	8	16	23	ref 225
i_{sto}	27,0%	14,6%	7,7%	7,00%	3,50%
moyenne	$2,41 \cdot 10^7$	$2,41 \cdot 10^7$	$2,43 \cdot 10^7$	$2,42 \cdot 10^7$	$2,42 \cdot 10^7$
écart type	$7,78 \cdot 10^5$	$9,40 \cdot 10^5$	$9,63 \cdot 10^5$	$9,20 \cdot 10^5$	$9,30 \cdot 10^5$

Tableau 5.1 – Résultats

Nous déduisons de ces résultats que la diminution de l’indicateur d’erreur stochastique conduit à une amélioration des premiers moments (moyenne et écart type) de la variable de sortie. Par contre, les courbes donnant les densités de probabilité approchées montrent que les queues de distributions restent mal représentées.

5.2.4.3 Probabilité de rupture

Les distribution approchées calculées nous permettent d’estimer une probabilité de rupture. À titre indicatif, nous donnons dans le tableau 5.2, pour ces cinq discrétisations stochastiques différentes, la probabilité pour que la contrainte maximale soit supérieure à 26 MPa.

Encore une fois, ce tableau montre l’importance d’obtenir une solution de bonne qualité sur l’espace stochastique. Seules les solutions pour lesquelles l’indicateur d’erreur stochastique est faible nous permettent de calculer une probabilité de rupture cohérente. Cependant, les valeurs obtenues restent éloignées de la valeur de référence. Ceci s’explique par le fait que nous nous intéressons à des phénomènes locaux alors

	5	8	16	23	ref 225
$P(\sigma_{VM} > 26 \text{ MPa})$	1,7%	2,55%	3,2%	3,6%	4,3%

Tableau 5.2 – Probabilité de rupture

que l'indicateur stochastique proposé est global. Comme perspectives à ce travail, nous envisageons donc une amélioration de l'estimateur d'erreur stochastique qui nous permettra caractériser ces phénomènes locaux.

5.2.4.4 Coût des calculs

Pour traiter ce problème stochastique avec la discrétisation régulière de référence, nous avons dû faire 225 calculs déterministes ($K_a = 15$ et $K_b = 15$), comptant 22 400 ddl chacun. Cette première modélisation 2D nous permettant encore de traiter ce problème global à partir d'outils standards, nous avons comparé les coûts de calcul pour chacune des configurations décrites dans le paragraphe 5.1 :

- « OPTIMUS brut » : utilisation d'OPTIMUS pour le calcul paramétrique et la récupération des données (figure 5.4) ;
- « OPTIMUS amélioré » : utilisation d'OPTIMUS seulement pour le calcul paramétrique. L'interfaçage entre les deux codes est réalisé par un format de données dédié (figure 5.5) ;
- « multirésolution » : utilisation d'un algorithme de LATIN Multirésolution pour le calcul paramétrique (figure 5.6) ;
- « multirésolution et adaptatif » : utilisation de la technique adaptative proposée (figure 5.7).

Les temps de calculs sont présentés dans le tableau 5.3.

	OPTIMUS brut	OPTIMUS amélioré	multirésolution	multirésolution et adaptatif
nombre de calculs	225	225	225	23
temps de calcul	9 h	4 h 30	1 h 30	20 min

Tableau 5.3 – Temps de calcul

Ces résultats montrent que pour cette modélisation « simple » du problème d'usure de la couche de lubrifiant, les gains en terme de temps de calcul et de qualité de la solution sont déjà très importants. Nous avons, dans cet exemple, un facteur de 13 entre le temps de calcul par une technique adaptative utilisant la multirésolution et une technique standard qui utilise un logiciel du commerce.

Ce résultat nous permet d'envisager une étude plus complexe sur un modèle en trois dimensions pour lequel les techniques standards semblent atteindre leurs limites.

Remarque : Nous avons vu, dans la description de la technique de calcul de l'erreur (paragraphe 3.2.4), que nous calculons séparément des contributions sur les sous structures et sur les interfaces. Ce principe prend toute son importance dans cette étude puisque 99,9% de l'erreur stochastique vient de la contribution des interfaces. Comme le nombre de ddl géométriques sur les interfaces est beaucoup plus faible que celui des sous structures, nous pouvons donc réduire considérablement le coût de calcul en n'évaluant que cette contribution. Ceci sera particulièrement utile pour la résolution sur le modèle 3D.

5.2.5 Modélisation 3D

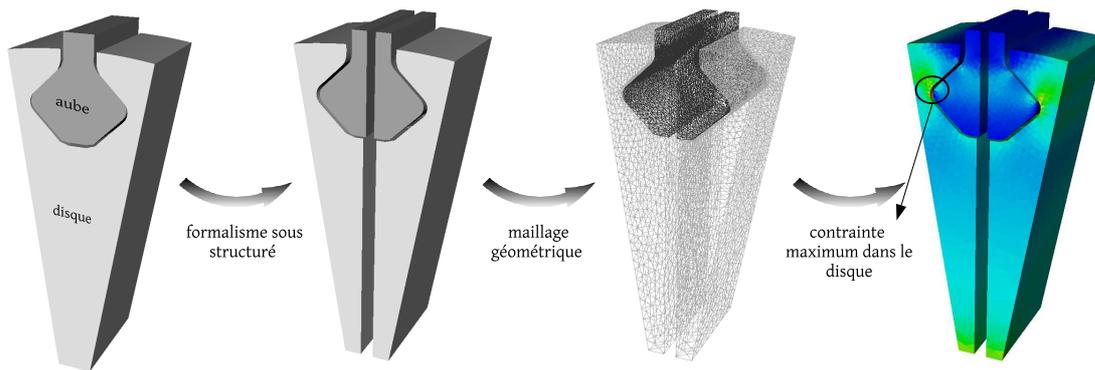


Figure 5.24 – Modèle 3D

5.2.5.1 Paramètres du calcul

Constante matériaux :

Les constantes matériaux sont les mêmes que pour le problème 2D.

Conditions géométriques :

- les déplacements en bas du disque sont bloqués ;
- des conditions de symétrie sont imposées sur les côtés du disques (représentation des liaisons avec les autres secteurs angulaires) ;
- une condition supplémentaire est ajoutée sur la face de devant ($z = 0$) pour bloquer les déplacements hors plan.

Efforts imposés :

Les efforts imposés sont les mêmes qu'en 2D, à savoir :

- l'ensemble {aube+disque} est soumis à des efforts d'inertie : la vitesse de rotation est de 8000 tr/min ;
- le haut du pied (liaison avec la pale non représentée) est soumis à une densité surfacique d'effort de traction F caractérisant les efforts d'inertie sur la pale : $F = 2 \cdot 10^5 \text{ N.mm}^{-1}$.

Conditions de contact :

L'état de chaque surface de contact dépend maintenant de quatre paramètres a, b, c et d , variant de 0 à 1, représentatifs de l'usure de la couche de lubrifiant à chaque extrémité des zones de contact. Les profils de l'usure et du coefficient de frottement, donnés sur la figure 5.10, suivent les équations suivantes sur l'interface $I_2 = (A_2 - D_2)$:

- pour l'usure :

$$df(x, z) = 10 \left[a(1,875 x^2 - 5,375 x + 3,8437) + b(1,875 x^2 - 2,875 x + 1,0937) - (3,75 x^2 - 8,25 x + 3,9375) \right] \left[c(0,075 z^2 - 0,55 z + 1) + d(0,075 z^2 - 0,05 z) - (0,15 z^2 - 0,6 z) \right] \quad (5.3)$$

- pour le coefficient de frottement :

$$\mu(x, z) = 0,2 + 0,6(a \exp(-(x - L_a)^2/P_a) + b \exp(-(x - L_b)^2/P_b)) \times (c \exp(-(z - L_c)^2/P_c) + d \exp(-(z - L_d)^2/P_d)) \quad (5.4)$$

où x et z représentent respectivement la première et la troisième coordonnée des points de l'interface I_2 . Ils varient dans les intervalles $[L_a; L_b] = [7 \text{ mm}; 15 \text{ mm}]$ et $[L_c; L_d] = [0 \text{ mm}; 50 \text{ mm}]$. Les paramètres P_a, P_b, P_c et P_d sont représentatifs de la pente du profil de variation du coefficient de frottement. Nous supposons dans un premier temps qu'ils restent constants et valent : $P_a = P_b = 0,13$ et $P_c = P_d = 2,5$.

Les deux surfaces de contact n'évoluent toujours pas de manière symétrique, et nous faisons la même supposition que pour le problème 2D.

5.2.5.2 Discrétisation

a. Discrétisation géométrique • Le maillage géométrique de chacune des sous structures est sensiblement équivalent, nous comptons environ 21 000 ddl pour chaque sous structure (D_1, D_2, A_1 et A_2), soit un nombre total $n = 84 000$ ddl. Cette approximation géométrique permet d'obtenir un indicateur d'erreur géométrique donnant une valeur inférieure à 25%.

b. Discrétisation stochastique • Nous avons un espace stochastique à quatre dimensions puisque nous pouvons exprimer les variables a , b , c et d en fonction de quatre variables aléatoires indépendentes. Nous choisissons une représentation éléments finis sur l'espace stochastique. Notons K_a , K_b , K_c et K_d le nombre de valeurs prises respectivement par les variables a , b , c , d . Dans ce cas, l'utilisation d'une méthode adaptative devient donc indispensable afin de résoudre le problème.

5.2.5.3 Étude stochastique

a. Loi de variation des paramètres • Pour les mêmes raisons que dans la modélisation 2D, les variables a et b ont une distribution couplée, et les variables c et d aussi (figure 5.25). Par contre les deux jeux de variables (a, b) et (c, d) sont indépendants.

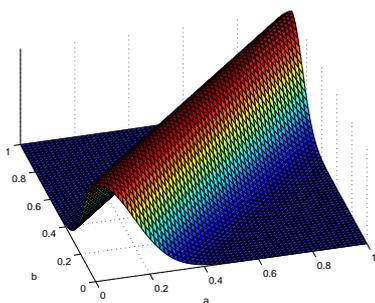


Figure 5.25 – distribution couplée pour a et b

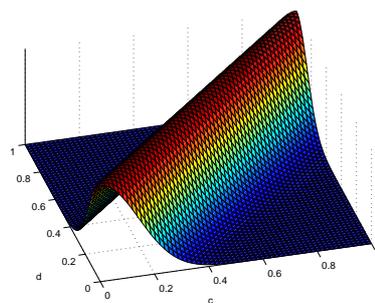


Figure 5.26 – distribution couplée pour c et d

b. Calcul adaptatif • Nous construisons une première approximation à partir de 17 calculs déterministes en prenant comme valeurs pour les paramètres a , b , c et d leurs valeurs limites et le point central $(0, 5; 0, 5; 0, 5; 0, 5)$. Le calcul adaptatif sera conduit en prenant le critère amélioré qui nous permet de choisir plusieurs points de collocation après chaque calcul d'erreur. Compte tenu du niveau d'erreur géométrique (25%), nous considérerons que la discrétisation stochastique est suffisante lorsque i_{sto} sera inférieure à 16%.

Pour réaliser cette étude adaptative, nous ne calculons que la contribution des interfaces $i_{sto|inter}$ car la résolution du problème 2D a montré qu'elle participait à hauteur de 99,9% à l'erreur stochastique globale. Ceci réduit la taille du problème globale $n_g = n_{inter} \times K_a \times K_b \times K_c \times K_d$. Ici le nombre de ddl géométriques sur chaque interface vaut $n_{inter} = 2\,500$ ddl, et la taille du problème à résoudre pour calculer l'erreur est donc divisée à peu près par 15.

5.2.6 Résultats

5.2.6.1 Qualité du calcul

La courbe de convergence de l'indicateur d'erreur stochastique $i_{sto|inter}$ est donnée sur la figure 5.27. Nous avons fait, en tout, 62 calculs déterministes pour arriver à un niveau d'erreur inférieur à 16% et construire cette courbe.

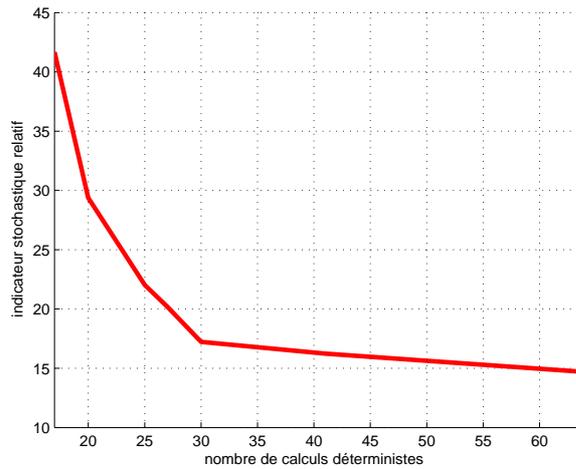


Figure 5.27 – Convergence de l'indicateur stochastique

5.2.6.2 Contrainte de Von Mises

Tout d'abord, nous pouvons observer l'influence de l'usure de la couche de lubrifiant sur la répartition des contraintes au niveau des surfaces de contact. La figure 5.28 montre les résultats obtenus pour les deux cas extrêmes ($(a; b; c; d) = (0; 0; 0; 0)$ et $(a; b; c; d) = (1; 1; 1; 1)$).

Nous observons que pour un état neuf de la couche de lubrifiant, les résultats du calcul éléments finis mettent en évidence l'existence de zones de concentrations de contraintes sur les extrémités de la zone de contact alors que pour un état dégradé, la répartition des contraintes sur la surface de contact est beaucoup plus homogène. Ces résultats de calculs semblent physiquement cohérents, ce qui nous conforte vis-à-vis du choix des profils d'usure que nous avons pris pour ces calculs. La fonction densité de probabilité obtenue à partir de cette étude stochastique est présentée sur la figure 5.29.

Ces résultats donnent des valeurs de la contrainte maximale sensiblement supérieures à celles trouvées par une étude 2D puisque nous obtenons une moyenne

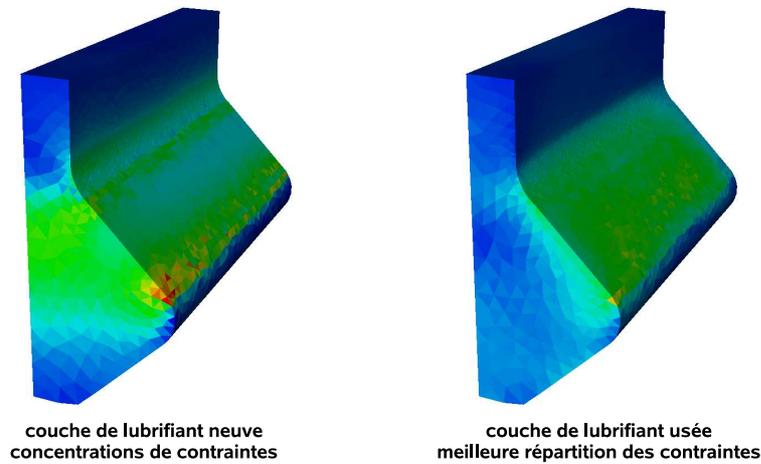


Figure 5.28 – Répartition des contraintes sur la surface de contact I_2

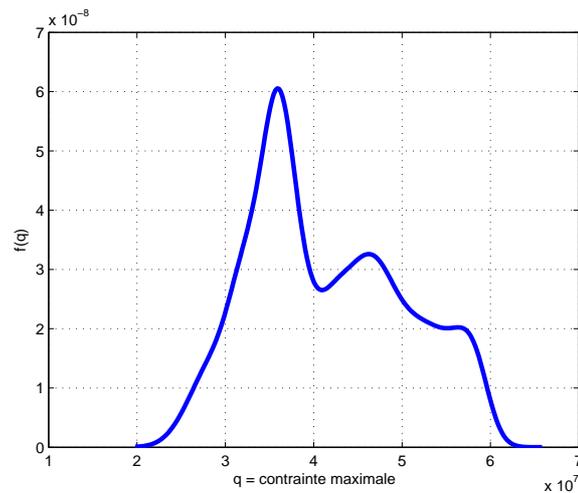


Figure 5.29 – densité de probabilité de la contrainte maximale

de $4,1 \cdot 10^7$ MPa et un écart type de $9,5 \cdot 10^6$ MPa. Sachant que le niveau d'erreur globale est estimé à 14,8%, il est maintenant possible de réaliser des études de fiabilité dont les résultats seront compris et utilisés avec précautions. À terme, une telle étude pourra permettre d'éviter de trop grands surdimensionnements grâce à la diminution des coefficients de sécurité.

5.2.6.3 Coût des calculs

Pour ce modèle 3D, nous n'avons pas de calcul de référence pour faire une comparaison. Nous pouvons cependant estimer le gain de temps en prenant comme référence le temps de mise en données (ici 80 min), le temps d'une résolution déterministe (ici 30 min) et 1 calcul d'erreur globale (ici 10 h).

- méthode standard : 1 000 mises en données, 1 000 calculs déterministes et 1 calcul d'erreur donne approximativement 78 jours ;
- méthode avec multirésolution : 1 mise en données, 1 000 calculs déterministes et 1 calcul d'erreur donne approximativement 22 jours ;
- méthode avec multirésolution et technique adaptative : 7 mises en données, 62 calculs déterministes et 7 calculs d'erreur donne approximativement 4,5 jours.

Nous trouvons un rapport de 17 entre le temps de calcul avec une technique adaptative et le temps de calcul avec une technique standard. Dans le cadre de problème 3D comme celui que nous avons traité, ce gain rend possible une telle étude probabiliste.

5.3 Conclusion partielle

L'utilisation d'une méthode non intrusive nous a permis de réutiliser un certain nombre d'outils performants déjà implémentés sur la plateforme de calcul du LMT-Cachan. Nous avons donc appliqué, dans ce chapitre, l'ensemble des techniques à notre disposition pour conduire une étude stochastique sur un modèle représentatif des problématiques SNECMA pour lequel l'utilisation d'outils standards était difficilement envisageable. Grâce aux indicateurs d'erreur proposés et à la technique adaptative présentée dans la section 4.2, nous avons pu mener cette étude en garantissant la qualité globale des résultats.

Cependant, l'observation sur le modèle 2D des fonctions densité de probabilité approchées a montré que les queues des distributions restaient mal représentées. Ces queues de distribution correspondent souvent aux densités de probabilité liées à des valeurs des paramètres représentant des phénomènes locaux. Or, c'est généralement la probabilité de réalisation de ces phénomènes que les ingénieurs souhaitent caractériser car ils sont importants pour le dimensionnement.

Conclusion

L'objectif de ce travail a été de caractériser et de propager la variabilité dans un calcul de structure avec contact. Dans ce contexte, nous avons répertorié un certain nombre de difficultés caractéristiques de ce type de structures, identifié l'ensemble des paramètres variables et présenté les modélisations mathématiques qui leur sont le plus couramment associées. Nous avons ensuite ciblé notre étude sur les méthodes probabilistes qui permettent d'obtenir des informations riches sur les quantités dimensionnantes à condition d'avoir, à la base, des informations riches sur les variations des paramètres. Notons que pour obtenir une telle quantité d'informations, un effort important doit être fait au niveau industriel en terme de mesures, d'essais ou de communication de données, afin de construire des bases de données suffisamment fournies pour déterminer des lois statistiques fiables.

Parmi l'ensemble des méthodes présentées, nous nous sommes concentrés sur les méthodes non intrusives qui permettent d'utiliser des outils de calcul éléments finis standards. Elles peuvent donc s'intégrer plus facilement dans un contexte industriel. Pour caractériser ce type de méthodes sur des problèmes de contact, nous les avons testées sur un exemple simple. Une comparaison qualitative entre les résultats d'une étude fiabiliste, obtenus à partir de plusieurs types d'approximations, et ceux obtenus à partir d'une solution de référence, a montré que des erreurs importantes peuvent être commises. La définition d'un outil permettant d'estimer la qualité des solutions approchées nous a alors semblé essentielle pour pouvoir les utiliser en toute confiance.

La démarche que nous avons proposée et mise en œuvre dans ce travail a donc été guidée par cet objectif de qualité. C'est pourquoi nous avons introduit un estimateur d'erreur globale pour les problèmes statiques dans le cadre stochastique. Il nous a permis de quantifier la qualité des solutions approchées et donc de valider ou invalider leur utilisation. Nous avons ensuite défini deux indicateurs d'erreur spécifiques afin d'étudier séparément les qualités des approximations géométrique et stochastique, ainsi qu'une technique adaptative basée sur l'indicateur d'erreur stochastique.

Nous sommes maintenant en mesure de gérer directement la qualité de notre solution stochastique et donc de l'améliorer jusqu'à atteindre une qualité optimisée. Grâce à cette technique, associée à d'autres méthodes performantes (méthode LATIN, multirésolution, calcul parallèle...) nous avons pu résoudre un problème industriel complexe, qui n'était pas abordable par des méthodes standards.

Perspectives

Cette étude constitue une première étape dans la validation de modèles stochastiques, elle nous permet aujourd'hui d'envisager :

- la définition d'estimateurs d'erreur pour des problèmes stochastiques en dynamique ;
- la définition d'estimateurs d'erreur pour d'autres problèmes stochastiques non linéaires : plasticité, viscoplasticité...
- la définition d'indicateurs d'erreur locaux permettant d'une part d'évaluer la qualité de la discrétisation relativement à une quantité d'intérêt donnée, et d'autre part, d'évaluer la qualité de la discrétisation stochastique dans un domaine de variation restreint des paramètres (indicateur locaux sur l'espace stochastique).

Pour réaliser ce travail, nous pourrions nous inspirer d'un grand nombre de travaux effectués sur l'estimation de l'erreur dans le cadre déterministe.

Dans cette étude, nous avons utilisé une approximation éléments finis pour décrire la solution sur l'espace stochastique (p-version de l'approximation). Nous avons donc travaillé avec les mêmes outils pour les approximations géométrique et stochastique (adaptation de maillage, fonction de base, enrichissement de la base...), et nous pouvons envisager d'aller plus loin en transposant d'autres outils développés pour les approximations géométriques (XFEM ou plus généralement partition de l'unité, méthodes multiéchelles...). Ceci permettrait d'optimiser réellement la réalisation d'études stochastiques, et rendrait la compréhension des méthodes stochastiques plus rapide tout en rendant leur transfert vers l'industrie plus facile.

Un autre point important concerne la modélisation des paramètres, et particulièrement des paramètres géométriques. Nous avons proposé une technique permettant de prendre en compte analytiquement les petites variations géométriques sur des surfaces de contact. Cette modélisation doit évoluer pour rendre compte de phénomènes plus complexes (plasticité, usure...), mais nous pouvons aussi envisager d'en développer de nouvelles pour représenter d'autres variations géométriques comme par exemple les variations de forme ou d'épaisseur de congés de raccordement, ou de joints de soudure.

Enfin, nous souhaitons que ce travail soit utile aux industriels. Dans ce contexte, il est important que l'implémentation des méthodes soit « robuste ». C'est-à-dire qu'elle soit assez générale pour que nous puissions résoudre un grand nombre de cas différents, et qu'elle permette de gérer l'essentiel des formats de données standards. Ceci implique nécessairement l'amélioration et le développement de la plateforme logiciel sur laquelle nous avons travaillé, dans une optique de pérennisation des outils et de valorisation de la recherche.

Bibliographie

- M. Ainsworth and J. T. Oden. A priori error estimators for second-order elliptic systems. Part 2 : An optimal order process for calculating self-equilibrating fluxes. *Computers and Mathematics with Applications*, 26 :75–87, 1993.
- M. Ainsworth and J. T. Oden. A posteriori error estimation in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 142 :1–88, 1997.
- P. Alart. Méthode de newton généralisée en mécanique du contact. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 76 :83–108, 1997.
- P. Alart and A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92 :353–375, 1991.
- I. Babuška and A. Miller. A feedback finite element method with a posteriori error estimation. Part 1 : The finite element method and some basic properties of the a posteriori error estimator. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 61 :1–40, 1987.
- I. Babuška and W. C. Rheinboldt. Error estimates for adaptive finite element computation. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 15(4) :736–754, 1978a.
- I. Babuška and W. C. Rheinboldt. A posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12 :1597, 1978b.
- I. Babuška and T. Strouboulis. *The finite element method and its reliability*. Oxford University Press, 2001.
- I. Babuška, T. Strouboulis, C. S. Upadhyay, C. S. Gangaraj, and K. Copps. Validation of a posteriori error estimators by numerical approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 :1073–1123, 1994.
- R. E. Bank and A. Weiser. Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations. *Mathematics of Computation*, 44 :283, 1985.
- M. Barboteu, P. Alart, and M. Vidrascu. A domain decomposition strategy for nonclassical frictional multi-contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 37-38 :4785–4803, 2001.

- T. Belytschko. Random field finite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23 :1831–1845, 1986.
- N. Carrère, Y. Rollet, D. Louis, F. H. Leroy, and J. F. Maire. Stratégie de calcul robuste pour la simulation de structures composites sandwichs. *18ème Congrès Français de Mécanique, Grenobles*, 2007.
- C. Carstensen and S. A. Funken. Fully reliable localized error control in the FEM. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21(4) :1465–1484, 2000.
- C. Carstensen, O. Scherf, and P. Wriggers. Adaptive finite elements for elastic bodies in contact. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 20 :1605–1626, 1999.
- L. Champaney. Approche multirésolution pour l’étude paramétrique d’assemblages par contact et frottement. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 13 :437–448, 2004.
- L. Champaney, P. A. Boucard, and S. Guinard. Adaptive multi-analysis strategy for contact problems with friction. *Computational Mechanics*, 42 :305–315, 2007.
- P. Coorevits, J. P. Dumeau, and J. P. Pelle. Error estimator and adaptativity for three-dimensional finite element analyses. *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics, Elsevier*, pages 443–458, 1997.
- M. Deb, I. Babuška, and J. T. Oden. Solution of stochastic partial differential equations using galerkin finite element techniques. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :6359–6372, 2001.
- L. F. Demkowicz, J. T. Oden, and T. Stroubolis. Adaptive finite elements for flow problems with moving boundaries. part 1 : Variational principles and a posteriori estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 46 :217–251, 1984.
- C. Farhat and F. X. Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32, 6 :1205–1227, 1991.
- J. L. Gastine, P. Ladevèze, P. Marin, and J. P. Pelle. Accuracy and optimal meshes in finite element computation for nearly incompressible materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 94(3) :303–314, 1992.
- R. G. Ghanem and P. D. Spanos. *Stochastic finite elements (revised edition)*. Dover, 2003. ISBN 0-486-42818-4.
- R. G. Ghanem and P. D. Spanos. *Stochastic finite elements : a spectral approach*. Springer, Berlin, 1991.
- A. Haldar and S. Mahadevan. *Reliability assessment using stochastic finite element analysis*. John Willey & sons, 2000.

- J. C. Helton and F. J. Davis. Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems. *Reliability Engineering and System Safety*, 2003.
- A. Keese. A review of recent developments in the numerical solution of stochastic partial differential equations (stochastic finite elements). Technical report, Institute of Scientific Computing, Technical University Braunschweig Brunswick, Germany, 2003.
- M. Kleiber. *The stochastic finite element method. Basic perturbation technique and computer implementation*. John Wiley & sons, 1992.
- P. Ladevèze. Les bases de la méthode des erreurs en relation de comportement pour le contrôle adaptatif des calculs éléments finis : les travaux des années 1975. *Rapport n° 163, LMT-Cachan (France)*, 1995.
- P. Ladevèze. Validation et vérification de modèles stochastiques en environnement incertain par la méthode de l'erreur en relation de comportement. Rapport Interne 258, LMT-Cachan, 2003.
- P. Ladevèze. *Nonlinear computational structural mechanics – new approaches and non-incremental methods of calculation*. Springer Verlag (version française 1996), 1999.
- P. Ladevèze and E. Florentin. Verification of stochastic models in uncertain environments using the constitutive relation error method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196 :225–234, 2006.
- P. Ladevèze and D. Leguillon. Error estimate procedure in the finite element method and application. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 20(3) :485–509, 1983.
- P. Ladevèze and E. A. W. Maunder. A general method for recovering equilibrating element tractions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 137 : 111–151, 1996.
- P. Ladevèze and J. P. Pelle. *Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics*. Springer, Mechanical Engineering Series, 2004.
- P. Ladevèze, J. P. Pelle, and P. Rougeot. Error estimation and mesh optimization for classical finite elements. *Engineering Computations*, 8 :69–80, 1991.
- F. Louf, J. P. Combe, and J. P. Pelle. Constitutive error estimator for the control of contact problems involving friction. *Computers & Structures*, 81 :1759–1772, 2003.
- H. G. Matthies. Computational aspects of probability in non-linear mechanics. Technical report, Institute of Scientific Computing, Technical University Braunschweig Brunswick, Germany, 2003.

- H. G. Matthies and A. Keese. Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 :1295–1331, 2005.
- M. Metivier. *Probabilités. Dix leçons d'introduction*. Ellipses, 1989.
- R. Moore. *Interval analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.
- P. Morin, R. H. Nochetto, and K. G. Siebert. Local problems on stars : A posteriori error estimators, convergence, and performance. *Mathematics of Computation*, 72(243) :1067–1097, 2001.
- A. Nouy. A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 :4521–4537, 2007.
- A. Nouy, F. Schoefs, and N. Moës. X-SFEM : a computational technique based on XFEM to deal with random geometry. *European Journal of Computational Mechanics*, 16 n°2 :277–293, 2007.
- W. Prager and J. L. Synge. Approximation in elasticity based on the concept of functions spaces. *Quarterly of Applied Mathematics*, 5 :261–269, 1947.
- S. Prudhomme, F. Nobile, L. Chamoin, and J. T. Oden. Analysis of a subdomain-based error estimator for finite element approximations of elliptic problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 20(2) :165–192, 2004.
- A. Rieger and P. Wriggers. Adaptive methods for frictionless contact. *Computers and Structures*, 79 :2197–2208, 2001.
- G. D. Saxcé. Une généralisation de l'inégalité de Fenchel et ses applications aux lois constitutives. *C. R. Acad. Sci. Paris Série II*, 314 :125–129, 1992.
- E. Stein. *Error controlled adaptive finite elements in solid mechanics*. J. Wiley, 2003.
- B. Sudret, M. Berveiller, and M. Lemaire. Eléments finis stochastiques en élasticité linéaire. *Comptes Rendus Mécaniques*, 332 :531–537, 2004.
- B. Sudret, M. Berveiller, and M. Lemaire. Des éléments finis stochastiques spectraux aux surfaces de réponse stochastiques : une approche unifiée. *17ème Congrès Français de Mécanique, Troyes*, 2005.
- B. Sudret, M. Berveiller, and M. Lemaire. Stochastic finite elements : a non intrusive approach by regression. *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 15 n°1-2-3 :81–92, 2006.
- P. L. Tallec. Domain decomposition methods in computational mechanics. *Computational Mechanics Advances*, 1, 2 :121–220, 1994.
- R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. Wiley-Teubner, Stuttgart, 1996.

- M. P. Wand and M. C. Jone. Kernel smoothing. *Monographs on Statistics and Applied Probability*, 60, 1995.
- P. Wriggers. Finite element algorithms for contact problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2, 4 :1–49, 1995.
- P. Wriggers and O. Scherf. Adaptive finite element techniques for frictional contact problems involving large elastic strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 151,3-4 :593–603, 1998.
- P. Wriggers, K. Fischer, and A. Rieger. Recent new developments in contact mechanics. In *VII International Conference on Computational Plasticity*, Barcelona, Spain, 2003.
- L. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Set and Systems*, 1 :3–28, 1978.
- L. Zadeh. The role of fuzzy logic in the management of uncertainty in expert systems. *Fuzzy Set and Systems*, 11 :199–228, 1983.
- O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. A simple error estimator and adaptative procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24 :337–357, 1987.
- O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 1 : the recovery technique - part 2 : error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33 : 1331–1382, 1992.