



**HAL**  
open science

# Identification des forces stochastiques appliquées à un système dynamique non linéaire en utilisant un modèle numérique incertain et des réponses expérimentales

Anas Batou

► **To cite this version:**

Anas Batou. Identification des forces stochastiques appliquées à un système dynamique non linéaire en utilisant un modèle numérique incertain et des réponses expérimentales. Autre [cond-mat.other]. Université Paris-Est, 2008. Français. NNT : 2008PEST0222 . tel-00472080

**HAL Id: tel-00472080**

**<https://theses.hal.science/tel-00472080>**

Submitted on 9 Apr 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PARIS-EST

Année 2008

**THÈSE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS-EST**

**Discipline : Mécanique**

présentée et soutenue publiquement

par

**Anas Batou**

le 18 décembre 2008

Titre :

**Identification des forces stochastiques appliquées  
à un système dynamique non linéaire en utilisant  
un modèle numérique incertain et des réponses  
expérimentales**

**Directeur de thèse**

**Professeur Christian Soize**

**JURY**

M. Denis Aubry ,	professeur, <i>président</i>
M. Laurent Billet ,	EDF R&D, <i>examineur</i>
M. Claude Blanzé ,	professeur, <i>rapporteur</i>
M. Claude-Henri Lamarque ,	professeur, <i>rapporteur</i>
M. Christian Soize ,	professeur, <i>directeur de thèse</i>



UNIVERSITE PARIS-EST

Année 2008

**THÈSE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS-EST**

**Discipline : Mécanique**

présentée et soutenue publiquement

par

**Anas Batou**

le 18 décembre 2008

Titre :

**Identification des forces stochastiques appliquées  
à un système dynamique non linéaire en utilisant  
un modèle numérique incertain et des réponses  
expérimentales**

**Directeur de thèse**

**Professeur Christian Soize**

**JURY**

M. Denis Aubry ,	professeur, <i>président</i>
M. Laurent Billet ,	EDF R&D, <i>examineur</i>
M. Claude Blanzé ,	professeur, <i>rapporteur</i>
M. Claude-Henri Lamarque ,	professeur, <i>rapporteur</i>
M. Christian Soize ,	professeur, <i>directeur de thèse</i>



## Remerciements

Je tiens à exprimer ma grande reconnaissance à C. Soize, mon directeur de thèse, pour m'avoir proposé ce sujet de thèse passionnant et très porteur. Son accompagnement, sa disponibilité continue et son enthousiasme ont largement contribué à rendre ces trois années de thèse agréables. Ses nombreux conseils scientifiques et pédagogiques m'ont permis au-delà de l'accomplissement de ces travaux, de compléter ma formation scolaire.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du jury. Je remercie C. Blanzé et C.-H. Lamarque pour avoir accepté de rapporter ma thèse. Je remercie également D. Aubry pour avoir accepté de présider le jury.

Je remercie S. Cambier, I. Zentner et C. Bodel pour leur encadrement scientifique et administratif à EDF R&D. Je remercie également D. Brenot et P. Massin pour leur accompagnement dans le lancement de cette thèse. Je tiens aussi à remercier L. Billet, O. Nicolas, H. Andriambololona, D. Bosselut, E. Boyère, P. Moussou, E. De Rocquigny, M. Corus et l'équipe Aster pour leur aide et leur implication dans ces travaux. Je remercie également C. Quantin qui m'a permis de réaliser les essais sur BECASSINE. Je tiens aussi remercier tous les agents du département AMA, aux (ex-) thésards et post-docs Mohamed, Amine, Frédéric, Benjamin, Thomas, Trinh, Karima, Josselin, Amel, Ophélie, Alexandre, Marion, ..., sans oublier A. Vallée et D. Debut.

Enfin, je tiens à remercier les membres du laboratoire MSME, en particulier, Seddik, Christophe, Evangéline, Moustapha, Charles, Morad, Frédérique, Thiego, Jérémy, Eric, Sandra, Elie, Camille, Isabelle, Chantale, ...

..., et tous ceux que j'aurais oubliés.

# Table des matières

Introduction générale.	7
<b>1 Modèle matriciel réduit du sous-système linéaire pour le modèle de référence.</b>	<b>13</b>
1.1 Description du modèle de référence. . . . .	15
1.2 Construction du modèle matriciel réduit pour le sous-système linéaire $\Omega_{ref}^A$ . . . . .	17
1.2.1 Problème aux limites pour le sous-système linéaire $\Omega_{ref}^A$ . . . . .	17
1.2.2 Formulation variationnelle pour le sous-système linéaire $\Omega_{ref}^A$ . . . . .	18
1.2.3 Discrétisation du problème aux limites pour le sous-système linéaire $\Omega_{ref}^A$ . . . . .	19
1.2.4 Modèle matriciel réduit pour le sous-système linéaire $\Omega_{ref}^A$ . . . . .	20
1.3 Construction d'une observation pour le modèle de référence. . . . .	22
1.4 Conclusion. . . . .	23
<b>2 Modèle matriciel réduit moyen pour le modèle simplifié.</b>	<b>25</b>
2.1 Description du modèle simplifié moyen. . . . .	26
2.2 Problèmes aux limites moyens. . . . .	27
2.2.1 Problème aux limites moyen pour le sous-système linéaire $\Omega^A$ . . . . .	27
2.2.2 Problème aux limites moyen pour le sous-système non linéaire $\Omega^B$ . . . . .	27
2.2.3 Conditions d'interface pour le couplage de $\Omega^A$ avec $\Omega^B$ . . . . .	28
2.3 Modèles éléments finis moyens. . . . .	28

2.3.1	Modèle éléments finis moyen pour le sous-système linéaire $\Omega^A$ .	29
2.3.2	Modèle éléments finis moyens pour le sous-système non linéaire $\Omega^B$ .	29
2.3.3	Conditions d'interface pour le couplage de $\Omega^A$ avec $\Omega^B$ .	30
2.4	Modèle matriciel réduit moyen.	30
2.4.1	Modèle matriciel réduit moyen pour le sous-système linéaire $\Omega^A$ .	30
2.4.2	Modèle matriciel réduit moyen pour le sous-système non linéaire $\Omega^B$ .	31
2.4.3	Réponse dynamique du modèle simplifié réduit non linéaire moyen.	32
2.5	Conclusion.	34
<b>3</b>	<b>Modélisation des incertitudes pour le modèle simplifié.</b>	<b>35</b>
3.1	Modélisation des incertitudes dans le sous-système linéaire $\Omega^A$ .	37
3.1.1	Normalisation des matrices aléatoires, définition du paramètre de dispersion et loi de probabilité.	38
3.1.2	Générateur de réalisations indépendantes des matrices aléatoires normalisées.	40
3.2	Réponse dynamique stochastique du modèle simplifié non linéaire stochastique.	41
3.3	Identification des paramètres de dispersion.	42
3.4	Conclusion.	43
<b>4</b>	<b>Réponse stochastique stationnaire du modèle simplifié non linéaire stochastique à un chargement aléatoire stationnaire.</b>	<b>45</b>
4.1	Construction du modèle du chargement aléatoire.	47
4.2	Génération de réalisations indépendantes du processus stochastique.	48
4.3	Equation stochastique et simulation de réponses stochastiques stationnaires.	50
4.4	Convergence de l'estimateur de la fonction de densité spectrale.	53

---

4.5	Estimations des domaines de confiance. . . . .	53
4.6	Conclusion . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Modélisation paramétrique des incertitudes pour le chargement aléatoire.</b>	<b>55</b>
5.1	Définition du processus stochastique incluant le modèle probabiliste des incertitudes. . . . .	57
5.2	Construction de la fonction aléatoire de densité spectrale. . . . .	57
5.3	Propriétés du processus stochastique incluant le modèle probabiliste des incertitudes. . . . .	59
5.4	Générateur de trajectoires indépendantes. . . . .	62
5.5	Equation stochastique et simulation des réponses stochastiques stationnaires. . . . .	63
5.6	Conclusion . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Identification du chargement stochastique incertain.</b>	<b>67</b>
6.1	Identification de la valeur moyenne de la fonction aléatoire de densité spectrale du chargement stochastique incertain. . . . .	69
6.1.1	Définition de l'observation. . . . .	69
6.1.2	Calcul d'une première approximation pour la valeur moyenne	70
6.1.3	Paramétrage de la valeur moyenne. . . . .	72
6.1.4	Construction de la fonction coût et identification. . . . .	72
6.2	Identification du paramètre de dispersion. . . . .	73
6.2.1	Définition de l'observation. . . . .	73
6.2.2	Construction de la fonction coût et identification. . . . .	74
6.2.3	Prise en compte des erreurs de mesures. . . . .	74
6.3	Conclusion. . . . .	76
<b>7</b>	<b>Validation numérique sur un exemple simple.</b>	<b>77</b>
7.1	Modèle de référence. . . . .	77
7.1.1	Description du modèle de référence. . . . .	78

7.1.2	Description du chargement réel appliqué au modèle de référence et calcul de réponses stationnaires . . . . .	79
7.2	Modèle simplifié. . . . .	81
7.2.1	Description du modèle simplifié moyen. . . . .	81
7.2.2	Comparaisons des réponses stationnaires pour le modèle de référence et pour le modèle simplifié moyen. . . . .	83
7.2.3	Prise en compte des incertitudes et identification du paramètre de dispersion. . . . .	84
7.3	Construction et identification du chargement aléatoire. . . . .	87
7.3.1	Modèle probabiliste des incertitudes pour le chargement aléatoire. . . . .	88
7.3.2	Identification du processus stochastique $\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t)$ . . . . .	90
7.4	Conclusion. . . . .	92
<b>8</b>	<b>Validation expérimentale : identification de forces stochastiques appliquées aux assemblages combustibles.</b>	<b>99</b>
8.1	Banc d'essai BECASSINE. . . . .	101
8.1.1	Description du banc. . . . .	101
8.1.2	Instrumentation. . . . .	102
8.1.3	Acquisition des signaux temporels. . . . .	103
8.1.4	Estimation de la fonction de densité spectrale. . . . .	104
8.1.5	Analyse modale expérimentale. . . . .	104
8.2	Modèle de référence pour les assemblages combustibles. . . . .	106
8.3	Modèle simplifié stochastique. . . . .	111
8.3.1	Présentation du modèle moyen. . . . .	112
8.3.2	Prise en compte des incertitudes de modélisation. . . . .	116
8.4	Identification du chargement fluide turbulent. . . . .	117
8.4.1	Localisation des efforts induits par l'écoulement du fluide turbulent. . . . .	118
8.4.2	Construction d'une première approximation de la DSP par la méthode SVD. . . . .	120

---

8.4.3	Identification robuste . . . . .	121
8.5	Propagation des incertitudes . . . . .	125
8.5.1	Calcul des déformations du crayon isolé . . . . .	125
8.5.2	Calcul de la puissance d'usure . . . . .	126
8.6	Conclusion . . . . .	127
	<b>Conclusion générale et perspectives.</b>	<b>133</b>
<b>A</b>	<b>Méthode de condensation dynamique</b>	<b>137</b>
A.1	Equation du système couplé . . . . .	137
A.2	Exemple de validation . . . . .	140
<b>B</b>	<b>Schéma d'intégration explicite d'Euler</b>	<b>143</b>
<b>C</b>	<b>Non-linéarités localisées de choc et de frottement.</b>	<b>145</b>
C.1	Modélisation des forces normales de contact . . . . .	146
C.2	Loi de frottement de Coulomb . . . . .	146
	<b>Bibliographie</b>	<b>148</b>



# Introduction générale.

## Présentation du sujet et du contexte industriel.

Les travaux de cette thèse concernent l'identification des forces stochastiques appliquées à un système dynamique non linéaire en utilisant un modèle numérique incertain et des réponses expérimentales. La modélisation des systèmes complexes non linéaires pose souvent des problèmes techniques liées d'une part à la taille et à complexité du modèle numérique sous-jacent et d'autre part aux algorithmes utilisés pour l'intégration des équations différentielles matricielles et pour le traitement des non-linéarités. Ces contraintes se traduisent souvent par une allocation de mémoire importante et des temps de calcul prohibitifs, rendant le calcul d'une réponse de ce modèle difficile. L'identification de forces stochastiques par mesure de réponses expérimentales se fait par minimisation d'une fonction coût qui nécessite le calcul de nombreuses réponses de ce modèle, rendant cette identification impossible. Ainsi, une approche possible face à ces difficultés est de simplifier le modèle au détriment de sa précision et donc de sa prédictibilité. Cette simplification entraîne des incertitudes de modélisations qui doivent être prises en compte pour le calcul de la réponse du modèle et donc également dans la processus d'identification du chargement stochastique.

Cette recherche a été motivée par la volonté d'améliorer la modélisation des assemblages combustibles soumis à un écoulement turbulent afin de quantifier l'usure engendrée par les forces stochastiques induites par cet écoulement. Ce type de structures complexes comporte de nombreuses symétries qui rendent sa modélisation délicate. Ainsi, l'objectif est de proposer une modélisation simple des assemblages

combustible et du chargement stochastique, puis de prendre en compte les incertitudes induites par ces simplifications dans le processus d'identification du chargement stochastique.

## Positionnement du sujet.

Pour les applications industrielles, les incertitudes sont en générale de deux sortes : (1) les incertitudes intrinsèques qui sont inhérentes à la grandeur ou au phénomène modélisé. Un exemple connu est le phénomène de turbulence. Ce type d'incertitude est irréductible. (2) les incertitudes épistémiques qui ne sont pas naturelles et sont liées au manque d'informations pour identifier complètement la grandeur ou le phénomène modélisé. Plus la quantité d'information disponible augmente, plus cette incertitude diminue. Les sources d'incertitudes sont elles aussi de plusieurs types. Elles peuvent être liées aux paramètres du modèle (géométrie, matériau, conditions limites,...), à l'entrée du modèle (forces aléatoire) ou à la sortie du modèle (erreur de mesures).

Les incertitudes liées au modèle sont le plus souvent intrinsèques et peuvent être dues aux variabilités introduites lors du processus de fabrication industriel (couple de serrage,...) ou à la variabilité des caractéristiques des composants (module d'Young irrégulier,...). Dans le cas d'incertitudes liées aux paramètres du modèle, l'approche la plus utilisée dans la littérature pour prendre en compte ce type d'incertitudes est l'approche probabiliste paramétrique (voir par exemple [44, 52, 72, 90]). Avec une telle approche, les grandeurs incertaines sont modélisées par des variables aléatoires ou des champs aléatoires. Cette étape de modélisation est très importante et nécessite des données expérimentales ou des avis d'experts. Cette approche paramétrique peut être combinée à la méthode des éléments finis donnant naissance à la méthode des éléments finis stochastiques (voir [14, 29, 69, 74, 108]). Dans cette approche, les équations stochastiques sont résolues par la méthode de simulation de Monte Carlo (voir par exemple [87, 94]), par la méthode LATIN (voir [18, 19]), par des méthodes de perturbation (voir [67, 68, 103]), par des méthodes spectrales

(voir par exemples [43, 44, 42, 45, 18]) ou analytiquement (voir par exemple [49]). Dans notre cas, les incertitudes sont principalement liées aux simplifications introduites dans le modèle, ces incertitudes sont dites incertitudes de modélisation. Si l'approche probabiliste paramétrique est très efficace pour prendre en compte les incertitudes sur les paramètres d'un modèle, elle ne peut pas prendre en compte les incertitudes de modélisation. Une approche probabiliste dite non paramétrique permet de prendre en compte les incertitudes de modélisation. Cette approche a fait l'objet de nombreux travaux récents (voir [98, 99, 101]) et a été validée sur de nombreux cas industriels (voir [25] par exemple). C'est cette approche qui sera retenue dans notre recherche. D'autres approches non probabilistes ont aussi été proposées dans la littérature (voir [34, 71, 73, 77]).

Les fluctuations statistiques sur les forces du modèle sont prises en compte par une approche probabiliste paramétrique en introduisant des variables aléatoires, des processus ou des champs stochastiques (voir [31, 32, 63, 64, 97, 53, 12, 13, 26]). Ces approches sont largement utilisées depuis de très nombreuses décennies pour modéliser le chargement induit par un seisme (voir par exemple [67, 68, 64, 1, 4, 17]), ou un écoulement turbulent par exemple (voir par exemple [28, 20]).

Les incertitudes sur les mesures sont prises en compte par l'introduction d'une erreur de mesure additive sur les variables de sortie. Cette erreur dépend de la qualité du processus d'acquisition des données et est souvent modélisée par avis d'expert. Les travaux de cette thèse (voir [6, 7, 8, 9, 10, 11, 102]) combine ces trois types d'incertitudes en ajoutant une incertitude sur le modèle du processus stochastique modélisant le chargement aléatoire qui est incertain. Le calcul de réponse d'un modèle incertain à des efforts aléatoires a fait l'objet de précédent travaux (voir [27, 48, 54, 60]).

Les lois de probabilité des variables ou champs aléatoires introduits par ces approches probabilistes dépendent en générale de paramètres qui doivent être identifiés. Il s'agit d'un problème stochastique inverse. Les techniques d'assimilation de données (voir [105]) ou d'actualisation Bayésienne (voir [16]) sont bien adaptées pour le recalage de modèles probabilistes lorsque l'on dispose de suffisamment de données.

Les méthodes les plus couramment utilisées pour l'identification des paramètres des modèles probabilistes sont la méthode des moments et la méthode du maximum de vraisemblance (voir [91] et [35] pour une application industrielle). Pour le cas linéaire Gaussien l'algorithme Circe basé sur l'algorithme Expectation-Maximisation (E-M, voir [36]) est proposé dans [33]. Dans notre cas, nous n'avons qu'une seule observation disponible qui est le système réel. Ainsi, pour identifier le modèle probabiliste des incertitudes de modélisation, on utilisera la méthode du maximum de vraisemblance. Pour l'identification du chargement aléatoire, la méthode utilisée combine la méthode des moments (comparaison des fonctions de densité spectrale mesurée et calculée) et la méthode du maximum de vraisemblance.

## Méthodologie adoptée.

La méthodologie proposée pour apporter une solution à la problématique posée se décompose en trois étapes.

1. *Construction d'un modèle simplifié stochastique.* Deux modélisations sont introduites dans cette thèse : un modèle de référence et un modèle simplifié. Le modèle de référence est très précis et représentatif du comportement dynamique de la structure réel. Il est décomposé en deux sous-systèmes : (1) un sous-système linéaire dont le modèle numérique est de très grande taille. (2) un sous-système non linéaire qui est analysé en détail et qui contient quantités d'intérêt. Comme nous le verrons dans le chapitre 1, le modèle de référence est difficilement utilisable pour un calcul de réponse du modèle à des forces aléatoires. Pour cette raison, le modèle de référence est simplifié au niveau du sous-système linéaire, aboutissant ainsi au modèle simplifié. Le sous-système non linéaire du modèle simplifié est identique à celui du modèle de référence (voir Fig. 1, les notations relatives aux deux modèles seront détaillées dans les deux premiers chapitres). Le modèle simplifié ainsi construit comporte des incertitudes de modélisation au niveau de son sous-système linéaire. Ces incertitudes sont prises en compte en utilisant l'approche probabiliste non pa-

ramétrique sur ce sous-système. L'identification des paramètres de dispersion introduits avec cette approche sont identifiés en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance sur une observation construite à partir du sous-système linéaire du modèle de référence.

2. *Construction d'un modèle mathématique des forces aléatoires.* Dans un premier temps, le chargement aléatoire est modélisé par un processus stochastique du second ordre, stationnaire, centré, gaussien discrétisé en quelques points adaptés au problème. Un tel processus est complètement défini par sa fonction de densité spectrale à valeurs matricielles et peut être identifié par la méthode des moments en minimisant par exemple la distance entre la fonction de densité spectrale des déformations mesurées et celle calculée. Cette distance ne peut être ramenée à zéro en raison des simplifications introduites dans le modèle de chargement stochastique. Ces simplifications induisent des incertitudes qui sont prises en compte par l'approche suivante. La fonction de densité spectrale à valeurs matricielles est remplacée par une fonction aléatoire dont la loi de probabilité est contruite en utilisant le principe du maximum d'entropie (voir [59, 61, 92]). Cette construction fait apparaître un nouveau paramètre de dispersion. Le processus ainsi contruit comporte deux niveaux de modélisation probabiliste. Le premier est relatif aux phénomène physique considéré qui est aléatoire (turbulence) et le second qui est relatif aux incertitudes de modélisation du chargement stochastique lui-même.
3. *Identification des forces aléatoires.* Le modèle de forces aléatoires incluant le modèle d'incertitude est complètement défini par sa fonction de densité spectrale et par son paramètre de dispersion. Dans un premier temps, la fonction de densité spectrale est identifiée par la méthode des moments. Puis dans un second temps, le paramètre de dispersion est identifié par la méthode du maximum de vraisemblance en utilisant une observation construite sur les réponses mesurées.

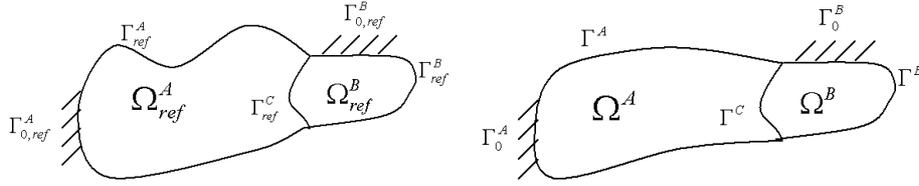


FIG. 1 – Modèle de référence et modèle simplifié.

## Plan de la thèse.

Ce travail de thèse est constitué de huit chapitres et de trois annexes. Les deux premiers chapitres décrivent le modèle de référence et le modèle simplifié moyen. Pour le modèle de référence, la construction du modèle matriciel réduit est détaillée uniquement pour le sous-système linéaire. En effet, c'est ce sous-système linéaire qui le différencie du modèle simplifié. Par contre, pour le modèle simplifié moyen, le modèle matriciel réduit est construit pour les deux sous-systèmes aboutissant à un système matriciel réduit moyen. Dans le chapitre 3, l'approche probabiliste non paramétrique est appliquée sur le sous-système linéaire du modèle simplifié, aboutissant au modèle simplifié stochastique. La méthode d'identification des paramètres de dispersion pour ce modèle est également décrite. Dans le chapitre 4, le modèle simplifié stochastique est utilisé pour construire la réponse stochastique stationnaire dans le cas d'un chargement décrit par un processus stochastique du second ordre, stationnaire, centré, gaussien. Dans le chapitre 5, les incertitudes de modélisation sont prises en compte sur le modèle du chargement aléatoire. Les propriétés de ce nouveau processus sont étudiées. Le chapitre 6 est dédié à l'identification des forces stochastiques incertaines en utilisant des réponses expérimentales. Une validation numérique sur un exemple simple représentatif du type de structure auxquelles nous nous intéressons est présentée au chapitre 7. Dans cet exemple, les réponses expérimentales sont fournies par le modèle de référence. Enfin, le chapitre 8 est dédié à la validation expérimentale sur un banc d'essai nommé BECASSINE. Cette maquette est constituée d'un demi assemblage en écoulement dont un des crayons est instrumenté.

# Chapitre 1

## Modèle matriciel réduit du sous-système linéaire pour le modèle de référence.

Ce chapitre est dédié à la présentation et à la construction du modèle matriciel réduit du système de référence dont le modèle est appelé modèle de référence. Les notations relatives au domaine occupé par ce système sont précisées. Le modèle déterministe de référence doit être très précis et représentatif du comportement dynamique réel de la structure à laquelle nous nous intéressons. Cette contrainte nous conduira à la construction d'un modèle de très grande taille et très complexe rendant le calcul d'une réponse stationnaire difficile. Ce modèle servira cependant à construire dans le domaine fréquentiel une observation qui sera utilisée dans le chapitre 3 lors de l'identification du paramètre de dispersion du modèle simplifié stochastique. Comme nous l'avons vu dans l'introduction, la différence et donc la comparaison entre le modèle de référence et le modèle simplifié ne concerne que le sous-système linéaire. Ainsi, pour le modèle de référence, nous allons nous attacher à construire le modèle matriciel réduit du sous-système linéaire uniquement. Dans un premier paragraphe, le modèle de référence est décrit. Puis, dans un deuxième paragraphe, le modèle matriciel réduit est construit en utilisant la méthode des

éléments finis et la méthode de réduction de Craig & Bampton. Enfin, dans le troisième paragraphe, une observation pour le modèle de référence est construite, celle-ci sera utile pour l'identification des paramètres de dispersion pour le modèle simplifié stochastique qui sera construit dans le chapitre 3.

## 1.1 Description du modèle de référence.

On considère un système dynamique occupant un domaine borné  $\Omega_{ref}$  de  $\mathbb{R}^3$  constitué d'un matériau linéaire viscoélastique à mémoire instantanée. Ce système a un comportement non linéaire dû à la présence de butées élastiques de choc localisées en plusieurs points de  $\Omega_{ref}$ . Ce domaine  $\Omega_{ref}$  est décomposé en deux sous-domaines (voir Fig. 1.1) :

1. Un sous-domaine  $\Omega_{ref}^A$ . Ce sous-domaine ne contient pas les quantités d'intérêt mais influence beaucoup celles ci. Ce sous-domaine est constitué d'un matériau linéaire viscoélastique à mémoire instantanée. Le bord du sous-système occupant le sous-domaine  $\Omega_{ref}^A$  noté  $\partial\Omega_{ref}^A$  est fixe sur  $\Gamma_0^{A,ref}$ . La normale sortante du bord  $\partial\Omega_{ref}^A$  est notée  $\mathbf{n}^{A,ref}$ .
2. Un sous-domaine  $\Omega_{ref}^B$  contenant les quantités d'intérêt (déformation, usure relative au sous-domaine  $\Omega_{ref}^B$ ). Ce sous-domaine a un comportement non linéaire dû à la présence de butées de choc élastiques localisées. Le bord du sous-système occupant le sous-domaine  $\Omega_{ref}^B$  noté  $\partial\Omega_{ref}^B$  est fixe sur  $\Gamma_0^{B,ref}$ . La normale sortante du bord  $\partial\Omega_{ref}^B$  est notée  $\mathbf{n}^{B,ref}$ .

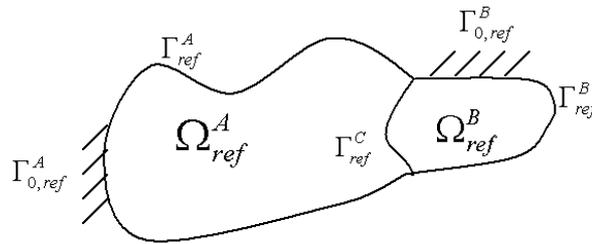


FIG. 1.1 – Modèle de référence.

Ayant chacun un bord fixe, les sous-systèmes  $\Omega_{ref}^A$  et  $\Omega_{ref}^B$  n'ont pas de déplacements de corps rigides. Les deux sous-systèmes  $\Omega_{ref}^A$  et  $\Omega_{ref}^B$  sont couplés sur l'interface de couplage commune  $\Gamma_{ref}^C$ . Ainsi, nous avons  $\partial\Omega_{ref}^A = \Gamma_{0,ref}^A \cup \Gamma_{ref}^A \cup \Gamma_{ref}^C$  et  $\partial\Omega_{ref}^B = \Gamma_{0,ref}^B \cup \Gamma_{ref}^B \cup \Gamma_{ref}^C$ . Le modèle matriciel construit à partir de ce modèle de référence (le paragraphe suivant détaille le modèle matriciel pour le sous-domaine linéaire) est de très grande taille. Il est donc difficilement utilisable pour un calcul de réponse

stochastique stationnaire et doit donc être réduit. La présence de non-linéarités exige que la réponse stochastique stationnaire soit calculée dans le domaine temporel. Dans ce contexte, plusieurs solutions pour la réduction du modèle ont été explorées :

1. *Méthodes de synthèse modale.* Les techniques de réduction usuelles (voir [40], [50], [30], [88], [66], [78], [76], [89], [41] et [85]) principalement basées sur des méthodes de synthèse modale ne sont pas utilisables dans notre cas. En effet, les types de structures auxquelles nous nous intéressons comportent de nombreuses symétries et périodicités, ce qui leur confère une très forte densité modale. Outre les problèmes liés à la présence de modes multiples, la réduction de taille apportée par ces méthodes reste faible.
2. *Approximation par un système périodique.* La possibilité d'approximation du système de référence par un système périodique a aussi été explorée. Ces techniques (voir [23], [75] et [107]) efficaces pour les systèmes mono-périodiques ou bipériodiques infinis sont inutilisables dans notre cas car les systèmes auxquels nous nous intéressons sont finis et pas parfaitement "bi-périodiques".
3. *Condensation dynamique.* Le sous-système linéaire peut être condensé dynamiquement au niveau de l'interface de couplage avec le sous-système non linéaire. A cette fin, nous avons développé une méthode de condensation dynamique dans le domaine temporel que nous présentons dans l'annexe A. Malheureusement, cette méthode nécessite le calcul à chaque pas de temps d'un terme de convolution de plus en plus lourd à calculer, ce qui rend rapidement le temps de calcul prohibitif. Cette méthode a donc été abandonnée.

Ainsi le modèle de référence est difficilement utilisable pour un calcul de réponse stochastique stationnaire. Il sera donc d'autant moins utilisable pour l'identification d'un chargement appliqué à cette structure. Il est donc nécessaire de proposer un modèle plus simple construit à partir du modèle de référence. Cependant, nous présentons ci-après l'étude du modèle de référence qui sera utile pour construire une observation sur celui-ci.

## 1.2 Construction du modèle matriciel réduit pour le sous-système linéaire $\Omega_{ref}^A$ .

La différence entre le modèle de référence et le modèle simplifié ne concerne que le sous-système linéaire. Ainsi, dans ce paragraphe, le modèle matriciel réduit du sous-système linéaire  $\Omega_{ref}^A$  est construit en utilisant la méthode des éléments finis puis le système matriciel ainsi obtenu est réduit en utilisant la méthode de réduction de Craig & Bampton. Il est à noter que la méthode de Craig & Bampton serait très lourde pour calculer la réponse stochastique stationnaire du modèle de référence (calcul de réalisations dans le domaine temporel). Cependant nous allons l'utiliser ici car notre objectif est uniquement de caractériser le sous-système linéaire du modèle de référence dans le domaine fréquentiel afin de pouvoir construire une observation.

### 1.2.1 Problème aux limites pour le sous-système linéaire

$$\Omega_{ref}^A.$$

On désigne par  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  les coordonnées cartésiennes et par  $\mathbf{u}^{A,ref}(\mathbf{x}, t)$  le champs de déplacement du sous-système linéaire  $\Omega_{ref}^A$  à un instant  $t$ . Les champs de forces volumiques et surfaciques appliqués dans le volume  $\Omega_{ref}^A$  et sur le bord  $\Gamma_{ref}^A$  sont noté  $\mathbf{f}_{vol}^{A,ref}(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{f}_{surf}^{A,ref}(\mathbf{x}, t)$ . Le tenseur des contraintes  $\sigma^{A,ref}(\mathbf{x})$  s'écrit

$$\sigma_{ij}^{A,ref}(\mathbf{x}) = a_{ijkh}^{A,ref}(\mathbf{x})\varepsilon_{kh}^{A,ref}(\mathbf{u}^{A,ref}) + b_{ijkh}^{A,ref}(\mathbf{x})\varepsilon_{kh}^{A,ref}(\dot{\mathbf{u}}^{A,ref}) \quad (1.1)$$

où  $\dot{\mathbf{u}} = \partial\mathbf{u}/\partial t$  et où  $\varepsilon_{kh}^{A,ref}(\mathbf{u}^{A,ref}) = (\partial u_k^{A,ref}/\partial x_h + \partial u_h^{A,ref}/\partial x_k)/2$  est le tenseur linéarisé des déformations. Les tenseurs du quatrième ordre  $a^{A,ref}(\mathbf{x})$  and  $b^{A,ref}(\mathbf{x})$  vérifient les propriétés usuelles de symétries et de positivité ([78]). Le champs de

déplacement  $\mathbf{u}^{A,ref}(\mathbf{x}, t)$  vérifie pour  $t \in \mathbb{R}$  et pour  $i = 1, 2, 3$  le problème aux limites

$$\begin{aligned}
 \rho^{A,ref} \ddot{u}_i^{A,ref} - \partial \sigma_{ij}^{A,ref} / \partial x_j &= f_{vol,i}^{A,ref} && \text{dans } \Omega^{A,ref} , \\
 \sigma_{ij}^{A,ref} n_j^{A,ref} &= f_{surf,i}^{A,ref} && \text{sur } \Gamma_{ref}^A , \\
 \sigma_{ij}^{A,ref} n_j^{A,ref} &= f_{coupl,i}^{A,ref} && \text{sur } \Gamma_{ref}^C , \\
 u_i^{A,ref} &= 0 && \text{sur } \Gamma_{0,ref}^A ,
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

où  $\ddot{\mathbf{u}} = \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$  et où  $\mathbf{f}_{coupl}^{A,ref}$  désigne les forces induites par le sous-système  $\Omega_{ref}^B$  sur  $\Omega_{ref}^A$  via l'interface de couplage  $\Gamma_{ref}^C$ . Le paramètre  $\rho^{A,ref}(\mathbf{x})$  est la masse volumique pour le sous-système  $\Omega_{ref}^A$ . La convention classique de sommation des indices Latins répétés est utilisée.

### 1.2.2 Formulation variationnelle pour le sous-système linéaire $\Omega_{ref}^A$ .

On commence par introduire l'espace des fonction réelles  $\mathcal{C} = \{\mathbf{u}^{A,ref} = (u_1^{A,ref}, u_2^{A,ref}, u_3^{A,ref}), u_j \in L^2(\Omega_{ref}^A) \text{ et suffisamment régulière}\}$ , où  $L^2(\Omega_{ref}^A)$  désigne l'ensemble des fonctions de carré intégrable de  $\Omega_{ref}^A$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Alors l'espace des champs de déplacement admissibles  $\mathcal{C}_0$  est défini par  $\mathcal{C}_0 = \{\mathbf{u}^{A,ref} \in \mathcal{C}, \mathbf{u}^{A,ref} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_{0,ref}^A\}$ . Nous supposons qu'à chaque instant  $t$ , les fonctions  $\mathbf{f}_{vol}^{A,ref}(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{f}_{surf}^{A,ref}(\mathbf{x}, t)$  sont de carrés sommables sur  $\Omega_{ref}^A$  et  $\Gamma_{0,ref}^A$  respectivement. Alors la formulation variationnelle du problème aux limites défini par l'équation (1.2) consiste à chercher la fonction  $t \mapsto \mathbf{u}^{A,ref}(t)$  à valeurs dans  $\mathcal{C}_0$  telle que  $\forall \mathbf{v}^{A,ref} \in \mathcal{C}_0, \forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
 m(\ddot{\mathbf{u}}^{A,ref}, \mathbf{v}^{A,ref}) + d(\dot{\mathbf{u}}^{A,ref}, \mathbf{v}^{A,ref}) + k(\mathbf{u}^{A,ref}, \mathbf{v}^{A,ref}) \\
 = f^{A,ref}(\mathbf{v}^{A,ref}) + f_{coupl}^{A,ref}(\mathbf{v}^{A,ref}).
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

La forme linéaire  $f^{A,ref}(\mathbf{v}^{A,ref})$  est définie par

$$\begin{aligned} f^{A,ref}(\mathbf{v}^{A,ref}) &= \int_{\Gamma_{ref}^A} \mathbf{f}_{surf}^{A,ref}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}^{A,ref}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \\ &\quad + \int_{\Omega_{ref}^A} \mathbf{f}_{vol}^{A,ref}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}^{A,ref}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad . \end{aligned} \quad (1.4)$$

La forme linéaire  $f_{coupl}^{A,ref}(\mathbf{v}^{A,ref})$  est définie par

$$f_{coupl}^{A,ref}(\mathbf{v}^{A,ref}) = \int_{\Gamma_{ref}^C} \mathbf{f}_{coupl}^{A,ref}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}^{A,ref}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \quad (1.5)$$

La forme bilinéaire de masse  $m(\mathbf{u}^{A,ref}, \mathbf{v}^{A,ref})$  est définie par

$$m(\mathbf{u}^{A,ref}, \mathbf{v}^{A,ref}) = \int_{\Omega_{ref}^A} \rho^{A,ref}(\mathbf{x}) \mathbf{u}^{A,ref} \cdot \mathbf{v}^{A,ref} d\mathbf{x} \quad , \quad (1.6)$$

et est symétrique définie positive. La forme bilinéaire de raideur  $k(\mathbf{u}^{A,ref}, \mathbf{v}^{A,ref})$  et la forme bilinéaire d'amortissement  $d(\mathbf{u}^{A,ref}, \mathbf{v}^{A,ref})$  sont définies par

$$k(\mathbf{u}^{A,ref}, \mathbf{v}^{A,ref}) = \int_{\Omega_{ref}^A} a_{ijkh}^{A,ref}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kh}^{A,ref}(\mathbf{u}^{A,ref}) \varepsilon_{ij}^{A,ref}(\mathbf{v}^{A,ref}) d\mathbf{x} \quad , \quad (1.7)$$

$$d(\mathbf{u}^{A,ref}, \mathbf{v}^{A,ref}) = \int_{\Omega_{ref}^A} b_{ijkh}^{A,ref}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kh}^{A,ref}(\mathbf{u}^{A,ref}) \varepsilon_{ij}^{A,ref}(\mathbf{v}^{A,ref}) d\mathbf{x} \quad , \quad (1.8)$$

et sont chacune symétriques définies positives sur  $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$ .

### 1.2.3 Discrétisation du problème aux limites pour le sous-système linéaire $\Omega_{ref}^A$ .

La discrétisation est faite par la méthode des éléments finis [55, 109]. Soit  $\mathbb{U}^{A,ref}(t) = (\mathbb{U}_1^{A,ref}(t), \dots, \mathbb{U}_{n^{A,ref}}^{A,ref}(t))$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n^{A,ref}}$  le vecteur des degrés de liberté (DDLs) du modèle éléments finis pour le sous-système linéaire  $\Omega_{ref}^A$ . Alors,

pour chaque instant  $t$ , la fonction  $\mathbb{U}^{A,ref}(t)$  est solution du système différentiel

$$\begin{aligned} \mathbb{M}^{A,ref}\ddot{\mathbb{U}}^{A,ref}(t) + \mathbb{D}^{A,ref}\dot{\mathbb{U}}^{A,ref}(t) + \mathbb{K}^{A,ref}\mathbb{U}^{A,ref}(t) \\ = \mathbb{F}^{A,ref}(t) + \mathbb{F}_{coupl}^{A,ref}(t), \end{aligned} \quad (1.9)$$

où  $\mathbb{M}^{A,ref}$ ,  $\mathbb{D}^{A,ref}$  et  $\mathbb{K}^{A,ref}$  sont respectivement les matrices de masse, amortissement et raideur, de dimension  $(n^{A,ref} \times n^{A,ref})$ , symétriques définies positives. Le vecteur  $\mathbb{F}^{A,ref}$  de dimension  $n^{A,ref}$  est le vecteur force et le vecteur  $\mathbb{F}_{coupl}^{A,ref}(t)$  est lié à la discrétisation des forces de couplage.

#### 1.2.4 Modèle matriciel réduit pour le sous-système linéaire

$\Omega_{ref}^A$ .

Le modèle matriciel de l'équation (1.9) est réduit en utilisant la méthode de Craig & Bampton (voir [30]). Cette méthode est un cas particulier de la méthode de Ritz utilisant une projection sur une base constituée de modes propres à interface fixe et de modes statiques d'interface. On commence par partitionner le vecteurs des DDLs  $\mathbb{U}^{A,ref}(t)$  du sous-système linéaire  $\Omega_{ref}^A$  en le réécrivant  $\mathbb{U}^{A,ref}(t) = (\mathbb{U}_i^{A,ref}(t), \mathbb{U}_c^{A,ref}(t))$ , où  $\mathbb{U}_i^{A,ref}(t)$  est le vecteur des  $n_i^{A,ref}$  DDLs internes et où  $\mathbb{U}_c^{A,ref}(t)$  est le vecteur des  $n_c^{A,ref}$  DDLs de couplage situés sur l'interface  $\Gamma_{ref}^C$ . On pose  $n^{A,ref} = n_i^{A,ref} + n_c^{A,ref}$ . En utilisant ce partitionnement, les matrices de masse, d'amortissement et de raideur se réécrivent

$$\begin{aligned} \left[ \mathbb{M}^{A,ref} \right] &= \begin{bmatrix} [\mathbb{M}_{ii}^{A,ref}] & [\mathbb{M}_{ic}^{A,ref}] \\ [\mathbb{M}_{ci}^{A,ref}] & [\mathbb{M}_{cc}^{A,ref}] \end{bmatrix}, \\ \left[ \mathbb{D}^{A,ref} \right] &= \begin{bmatrix} [\mathbb{D}_{ii}^{A,ref}] & [\mathbb{D}_{ic}^{A,ref}] \\ [\mathbb{D}_{ci}^{A,ref}] & [\mathbb{D}_{cc}^{A,ref}] \end{bmatrix}, \\ \text{et } \left[ \mathbb{K}^{A,ref} \right] &= \begin{bmatrix} [\mathbb{K}_{ii}^{A,ref}] & [\mathbb{K}_{ic}^{A,ref}] \\ [\mathbb{K}_{ci}^{A,ref}] & [\mathbb{K}_{cc}^{A,ref}] \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

On introduit alors le changement de coordonnées suivant

$$\begin{bmatrix} \mathbb{U}_i^{A,ref}(t) \\ \mathbb{U}_c^{A,ref}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^{A,ref} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{A,ref}(t) \\ \mathbb{U}_c^{A,ref}(t) \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

avec

$$\begin{bmatrix} H^{A,ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi^{A,ref}] & [S^{A,ref}] \\ [0] & [I] \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

où la matrice  $[S^{A,ref}] = [\mathbb{K}_{ii}^{A,ref}]^{-1}[\mathbb{K}_{ic}^{A,ref}]$  est la matrice de relèvement statique de dimension  $(n_i^{A,ref} \times n_c^{A,ref})$ , où  $[I]$  est la matrice unité de dimension  $(n_c^{A,ref} \times n_c^{A,ref})$  et où  $\mathbf{y}^{A,ref}(t)$  est le vecteur des coordonnées généralisées à valeur dans  $\mathbb{R}^{N^{A,ref}}$ . La matrice  $[\Phi^{A,ref}]$  est la matrice réelle de dimension  $(n_i^{A,ref} \times N^{A,ref})$  dont les colonnes sont les  $N^{A,ref}$  premiers modes élastiques pour le sous-système  $\Omega_{ref}^A$  avec interface de couplage fixe. Ces modes  $(\phi_1^{A,ref}, \dots, \phi_{N^{A,ref}}^{A,ref})$  sont associés aux  $N^{A,ref}$  premières pulsations propres  $0 < \omega_1 \leq \dots \leq \omega_{N^{A,ref}}$  telles que

$$[\mathbb{K}_{ii}^{A,ref}] \phi_\alpha^{A,ref} = \omega_\alpha^2 [\mathbb{M}_{ii}^{A,ref}] \phi_\alpha^{A,ref}. \quad (1.13)$$

Soit  $n_q^{A,ref} = N^{A,ref} + n_c^{A,ref}$ . Alors le vecteur  $\mathbf{q}^{A,ref}(t) = (\mathbf{y}^{A,ref}(t), \mathbb{U}_c^{A,ref}(t))$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n_q^{A,ref}}$  est solution du système matriciel réduit

$$\begin{aligned} [M^{A,ref}] \ddot{\mathbf{q}}^{A,ref}(t) + [D^{A,ref}] \dot{\mathbf{q}}^{A,ref}(t) + [K^{A,ref}] \mathbf{q}^{A,ref}(t) \\ = [H^{A,ref}]^T \mathbb{F}^{A,ref}(t) + [H^{A,ref}]^T \mathbb{F}_{coupl}^{A,ref}(t) \end{aligned}, \quad (1.14)$$

où les matrices  $[M^{A,ref}] = [H^{A,ref}]^T [\mathbb{M}^{A,ref}] [H^{A,ref}]$ ,  $[D^{A,ref}] = [H^{A,ref}]^T [\mathbb{D}^{A,ref}] [H^{A,ref}]$  et  $[K^{A,ref}] = [H^{A,ref}]^T [\mathbb{K}^{A,ref}] [H^{A,ref}]$  sont les matrices réduites symétriques, définies positives, de dimension  $(n_q^{A,ref} \times n_q^{A,ref})$ , de masse, d'amortissement et de raideur.

### 1.3 Construction d'une observation pour le modèle de référence.

Nous rappelons que le modèle de référence servira à recalculer le modèle simplifié stochastique qui sera construit au chapitre suivant. Comme nous l'avons vu dans l'introduction, la différence entre le modèle de référence et le modèle simplifié moyen se situe uniquement au niveau de leur sous-système linéaire. Pour comparer les deux modèles, nous allons donc caractériser l'effet dynamique du sous-système linéaire  $\Omega_{ref}^A$  sur le sous-système non linéaire  $\Omega_{ref}^B$  au niveau de l'interface. Dans un premier temps, le modèle éléments finis réduit du sous-système linéaire  $\Omega_{ref}^A$  construit au paragraphe 1.2.4 est analysé dans le domaine fréquentiel, pour la bande d'analyse  $\mathcal{B} = [-\omega_{max}, \omega_{max}]$ . On introduit ainsi la matrice de raideur dynamique du sous-système linéaire  $\Omega_{ref}^A$  avec interface de couplage libre, de dimension  $(n_q^{A,ref} \times n_q^{A,ref})$  s'écrivant

$$[A^{A,ref}(\omega)] = -\omega^2[M^{A,ref}] + i\omega[D^{A,ref}] + [K^{A,ref}] \quad , \quad (1.15)$$

qui se décompose suivant les coordonnées généralisées  $\mathbf{y}^{A,ref}(t)$  et les DDLs de couplage  $\mathbb{U}_c^{A,ref}(t)$  de la manière suivante

$$[A^{A,ref}(\omega)] = \begin{bmatrix} A_{qq}^{A,ref}(\omega) & A_{qc}^{A,ref}(\omega) \\ A_{cq}^{A,ref}(\omega) & A_{cc}^{A,ref}(\omega) \end{bmatrix} \quad . \quad (1.16)$$

Dans un second temps, la matrice de rigidité dynamique  $[A^{A,ref}(\omega)]$  du sous-système linéaire  $\Omega_{ref}^A$  est condensée au niveau de l'interface de couplage  $\Gamma_{ref}^C$  en introduisant la matrice complexe  $[Z^{A,ref}(\omega)]$  de dimension  $(n_c^{A,ref} \times n_c^{A,ref})$  telle que

$$[Z^{A,ref}(\omega)] = [A_{cc}^{A,ref}(\omega)] - [A_{cq}^{A,ref}(\omega)][A_{qq}^{A,ref}(\omega)]^{-1}[A_{qc}^{A,ref}(\omega)] \quad . \quad (1.17)$$

Comme les matrices  $[M^{A,ref}]$ ,  $[D^{A,ref}]$  et  $[K^{A,ref}]$  sont définies positives, la matrice  $[Z^{A,ref}(\omega)]$  est inversible. Finalement, l'effet dynamique du sous-système linéaire

$\Omega_{ref}^A$  est caractérisé dans la bande  $\mathcal{B}$  par la variable  $J^{ref}$  appelée "observation" et définie par

$$J^{ref} = \int_{\mathcal{B}} \|[Z^{A,ref}(\omega)]^{-1}\|_F^2 d\omega \quad , \quad (1.18)$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme de Frobenius telle que  $\|A\|_F^2 = tr\{[A]^*[A]\}$ , où  $[A]^* = [\bar{A}]^T$ ,  $[\bar{A}]$  est le conjugué de  $[A]$  et  $tr$  est l'opérateur trace pour les matrices. L'observation ainsi construite sera utilisée au chapitre 3 pour identifier le paramètre de dispersion du modèle simplifié stochastique. La précision de l'observation peut être améliorée en découpant la bande  $\mathcal{B}$  en  $N$  intervalles  $\mathcal{B}_i$ ,  $i \in 1..N$  et en introduisant  $N$  observations  $J_i^{ref}$  relatives à chacun de ces intervalles.

## 1.4 Conclusion.

Dans ce chapitre, le modèle de référence a été présenté. Celui ci n'est pas directement utilisable pour calculer des réponses stochastiques stationnaires comme nous l'avons expliqué, et ne sera donc pas utilisable pour l'identification d'un chargement aléatoire. L'introduction d'un modèle plus simple s'avère donc nécessaire. Ce modèle simplifié servira à calculer les réponses stochastiques stationnaires mais aussi à identifier le chargement stochastique appliqué à la structure. Toutefois, le modèle matriciel réduit du sous-système linéaire du modèle de référence que nous avons construit servira pour l'identification du modèle simplifié stochastique qui sera introduit par la suite.



## Chapitre 2

# Modèle matriciel réduit moyen pour le modèle simplifié.

Ce chapitre est consacré à la construction d'un modèle simplifié. Comme son nom l'indique, le modèle simplifié moyen est une simplification du modèle de référence. Le sous-système linéaire de ce modèle est dérivé du sous-système linéaire du modèle de référence dont la description a été détaillée au chapitre 1. Dans un premier temps, le modèle non linéaire moyen sera construit en utilisant la méthode des éléments finis et la méthode de réduction de Craig & Bampton. Dans les paragraphes 2.2 et 2.3, les différentes étapes de la construction du modèle matriciel du modèle simplifié moyen sont présentées. Dans le paragraphe 2.4, on construit le modèle matriciel réduit moyen pour le modèle simplifié.

## 2.1 Description du modèle simplifié moyen.

Le modèle simplifié moyen est, comme le modèle de référence constitué d'un système dynamique occupant un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  constitué d'un matériau linéaire viscoélastique à mémoire instantanée. Ce domaine est lui aussi décomposé en deux sous-domaines (voir Fig. 2.1) :

1. Un sous-domaine  $\Omega^A$  qui est une simplification du sous-domaine linéaire  $\Omega_{ref}^A$  du modèle de référence (décrit au paragraphe 1.1). Ce sous-domaine est constitué d'un matériau linéaire viscoélastique à mémoire instantanée. Le bord du sous-système occupant le sous-domaine domaine  $\Omega^A$  noté  $\partial\Omega^A$  est fixe sur  $\Gamma_0^A$ . La normale sortante du bord  $\partial\Omega^A$  est notée  $\mathbf{n}^A$ .
2. Un sous-domaine  $\Omega^B$  qui est identique au sous-domaine non linéaire  $\Omega_{ref}^B$  du modèle de référence. Ce sous-domaine a donc un comportement non linéaire dû à la présence de butées de choc élastiques localisées. Le bord du sous-système occupant le sous-domaine  $\Omega^B$  noté  $\partial\Omega^B$  est fixe sur  $\Gamma_0^B$ . La normale sortante du bord  $\partial\Omega^B$  est notée  $\mathbf{n}^B$ .

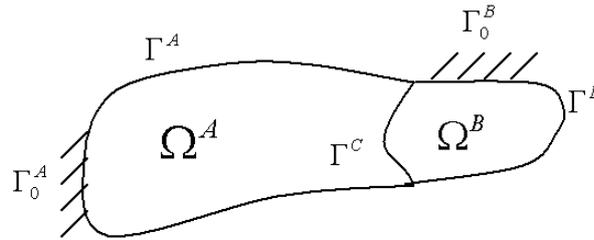


FIG. 2.1 – Modèle simplifié moyen.

Les deux sous-systèmes  $\Omega^A$  et  $\Omega^B$  sont couplés sur l'interface de couplage commune  $\Gamma^C$ . Ainsi, nous avons  $\partial\Omega^A = \Gamma_0^A \cup \Gamma^A \cup \Gamma^C$  et  $\partial\Omega^B = \Gamma_0^B \cup \Gamma^B \cup \Gamma^C$ . Le modèle simplifié ainsi défini permet de garder une précision raisonnable au niveau de la localisation des quantités d'intérêt mais les simplifications apportées induisent des incertitudes de modélisation qui seront prises en compte au chapitre 3.

## 2.2 Problèmes aux limites moyens.

### 2.2.1 Problème aux limites moyen pour le sous-système linéaire $\Omega^A$ .

On désigne par  $\mathbf{u}^A(\mathbf{x}, t)$  le champs de déplacement du sous-système linéaire  $\Omega^A$  à un instant  $t$ . Les champs de forces volumiques et surfaciques appliqués dans le volume  $\Omega^A$  et sur le bord  $\Gamma^A$  sont notés  $\mathbf{f}_{vol}^A(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{f}_{surf}^A(\mathbf{x}, t)$ . Comme précédemment, le tenseur des contraintes  $\sigma^A(\mathbf{x})$  s'écrit  $\sigma_{ij}^A(\mathbf{x}) = a_{ijkh}^A(\mathbf{x})\varepsilon_{kh}^A(\mathbf{u}^A) + b_{ijkh}^A(\mathbf{x})\varepsilon_{kh}^A(\dot{\mathbf{u}}^A)$  où  $\varepsilon_{kh}^A(\mathbf{u}^A) = (\partial u_k^A / \partial x_h + \partial u_h^A / \partial x_k) / 2$  est le tenseur linéarisé des déformations. Les tenseurs du quatrième ordre  $a^A(\mathbf{x})$  and  $b^A(\mathbf{x})$  vérifient les propriétés usuelles de symétries et de positivité. Alors le champs de déplacement  $\mathbf{u}^A(\mathbf{x}, t)$  vérifie pour  $t \in \mathbb{R}$  et pour  $i = 1, 2, 3$  le problème aux limites

$$\begin{aligned}
 \rho^A \ddot{u}_i^A - \partial \sigma_{ij}^A / \partial x_j &= f_{vol,i}^A & \text{dans } \Omega^A, \\
 \sigma_{ij}^A n_j^A &= f_{surf,i}^A & \text{sur } \Gamma^A, \\
 \sigma_{ij}^A n_j^A &= f_{coupl,i}^A & \text{sur } \Gamma^C, \\
 u_i^A &= 0 & \text{sur } \Gamma_0^A,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

où  $\mathbf{f}_{coupl}^A$  désigne les forces induites par le sous-système  $\Omega^B$  sur  $\Omega^A$  via l'interface de couplage  $\Gamma^C$ . Le paramètre  $\rho^A(\mathbf{x})$  est la masse volumique pour le sous-système  $\Omega^A$ .

### 2.2.2 Problème aux limites moyen pour le sous-système non linéaire $\Omega^B$ .

On désigne par  $\mathbf{u}^B(\mathbf{x}, t)$  le champs de déplacement du sous-système non linéaire  $\Omega^B$  à un instant  $t$ . Les champs de forces volumiques et surfaciques appliqués dans le volume  $\Omega^B$  et sur le bord  $\Gamma^B$  sont noté  $\mathbf{f}_{vol}^B(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{f}_{surf}^B(\mathbf{x}, t)$ . Le tenseur des contraintes  $\sigma^B(\mathbf{x})$  s'écrit  $\sigma_{ij}^B(\mathbf{x}) = a_{ijkh}^B(\mathbf{x})\varepsilon_{kh}^B(\mathbf{u}^B) + b_{ijkh}^B(\mathbf{x})\varepsilon_{kh}^B(\dot{\mathbf{u}}^B)$  où  $\varepsilon_{kh}^B(\mathbf{u}^B) = (\partial u_k^B / \partial x_h + \partial u_h^B / \partial x_k) / 2$  est le tenseur linéarisé des déformations. Les tenseurs du

quatrième ordre  $a^B(\mathbf{x})$  and  $b^B(\mathbf{x})$  vérifient les propriétés usuelles de symétries et de positivité. Alors le champs de déplacement  $\mathbf{u}^B(\mathbf{x}, t)$  vérifie pour  $t \in \mathbb{R}$  et pour  $i = 1, 2, 3$  le problème aux limites

$$\begin{aligned}
\rho^B \ddot{u}_i^B - \partial \sigma_{ij}^B / \partial x_j &= f_{vol,i}^B && \text{dans } \Omega^B , \\
\sigma_{ij}^B n_j^B &= f_{surf,i}^A - \sum_{k=1}^{\kappa} f_i^{\text{NL},k}(\mathbf{u}^B(\mathbf{x}^k)), \dot{\mathbf{u}}^B(\mathbf{x}^k) \delta_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) && \text{sur } \Gamma^B , \\
\sigma_{ij}^B n_j^B &= f_{coupl,i}^B && \text{sur } \Gamma^C , \\
u_i^B &= 0 && \text{sur } \Gamma_0^B ,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

où  $\mathbf{f}_{coupl}^B$  désigne les forces induites par le sous-système  $\Omega^A$  sur  $\Omega^B$  via l'interface de couplage  $\Gamma^C$ . Les forces  $-\mathbf{f}^{\text{NL},k}(\mathbf{u}^B(\mathbf{x}^k, t))$  représentent les actions exercées par la butée élastique localisée au point  $\mathbf{x}^k$  au niveau du sous-système  $\Omega^B$  et  $\delta_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)$  est la mesure surfacique de Dirac telle que, pour toute fonction continue  $\mathbf{g}$  définie sur  $\Gamma^B$ , on ait  $\int_{\Gamma^B} \delta_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \mathbf{g}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$ . Le paramètre  $\rho^B(\mathbf{x})$  est la masse volumique pour le sous-système  $\Omega^B$ .

### 2.2.3 Conditions d'interface pour le couplage de $\Omega^A$ avec $\Omega^B$ .

Les conditions de couplage sur  $\Gamma^C$  sont la continuité du déplacement et l'équilibre des efforts au niveau de l'interface de couplage, i.e.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^A &= \mathbf{u}^B && \text{sur } \Gamma^C , \\
\mathbf{f}_{coupl}^A + \mathbf{f}_{coupl}^B &= 0 && \text{sur } \Gamma^C .
\end{aligned} \tag{2.3}$$

## 2.3 Modèles éléments finis moyens.

Comme pour le modèle de référence (voir le paragraphe 1.2.3), la méthode des éléments finis est utilisée pour discrétiser chacun des sous-systèmes constituant le modèle simplifié.

### 2.3.1 Modèle éléments finis moyen pour le sous-système linéaire $\Omega^A$ .

Le vecteur  $\underline{\mathbf{U}}^A(t)$  à valeur dans  $\mathbb{R}^{n^A}$  des  $n^A$  DDLs du sous-système linéaire  $\Omega^A$  peut se réécrire  $\underline{\mathbf{U}}^A(t) = (\underline{\mathbf{U}}_i^A(t), \underline{\mathbf{U}}_c^A(t))$ , où  $\underline{\mathbf{U}}_i^A(t)$  est le vecteur à valeur dans  $\mathbb{R}^{n_i^A}$  des  $n_i^A$  DDLs internes et où  $\underline{\mathbf{U}}_c^A(t)$  est le vecteur à valeur dans  $\mathbb{R}^{n_c^A}$  des  $n_c^A$  DDLs de couplage sur l'interface. La discrétisation du problème aux limites moyen défini par l'équation (2.1) donne le modèle numérique moyen suivant du sous-système  $\Omega^A$ ,

$$[\underline{\mathbf{M}}^A]\ddot{\underline{\mathbf{U}}}^A(t) + [\underline{\mathbf{D}}^A]\dot{\underline{\mathbf{U}}}^A(t) + [\underline{\mathbf{K}}^A]\underline{\mathbf{U}}^A(t) = \mathbb{F}^A(t) + \mathbb{F}_{coupl}^A(t) \quad , \quad (2.4)$$

où  $[\underline{\mathbf{M}}^A]$ ,  $[\underline{\mathbf{D}}^A]$  et  $[\underline{\mathbf{K}}^A]$  sont respectivement les matrices réelles symétriques définies positives de dimension  $(n^A \times n^A)$  de masse, amortissement et raideur. Le vecteur  $\mathbb{F}^A(t)$  des forces extérieures et le vecteur  $\mathbb{F}_{coupl}^A(t)$  des forces de couplage, tous deux à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n^A}$ , se réécrivent respectivement  $\mathbb{F}^A(t) = (\mathbb{F}_i^A(t), 0)$  et  $\mathbb{F}_{coupl}^A(t) = (0, \mathbb{F}_c^A(t))$ .

### 2.3.2 Modèle éléments finis moyens pour le sous-système non linéaire $\Omega^B$ .

Le vecteur  $\underline{\mathbf{U}}^B(t)$  à valeur dans  $\mathbb{R}^{n^B}$  des  $n^B$  DDLs du sous-système non linéaire  $\Omega^B$  est écrit  $\underline{\mathbf{U}}^B(t) = (\underline{\mathbf{U}}_i^B(t), \underline{\mathbf{U}}_c^B(t))$ , où  $\underline{\mathbf{U}}_i^B(t)$  est le vecteur à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n_i^B}$  des  $n_i^B$  DDLs internes et où  $\underline{\mathbf{U}}_c^B(t)$  est le vecteur à valeur dans  $\mathbb{R}^{n_c^B}$  des  $n_c^B$  DDLs de couplage sur l'interface. La discrétisation par la méthode des éléments finis du problème aux limites défini par l'équation (2.2) donne le modèle numérique moyen suivant du sous-système  $\Omega^B$ ,

$$\begin{aligned} [\underline{\mathbf{M}}^B]\ddot{\underline{\mathbf{U}}}^B(t) + [\underline{\mathbf{D}}^B]\dot{\underline{\mathbf{U}}}^B(t) + [\underline{\mathbf{K}}^B]\underline{\mathbf{U}}^B(t) + \mathbb{F}^{NL}(\underline{\mathbf{U}}^B(t), \dot{\underline{\mathbf{U}}}^B(t)) \\ = \mathbb{F}^B(t) + \mathbb{F}_{coupl}^B(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

où  $[\underline{\mathbf{M}}^B]$ ,  $[\underline{\mathbf{D}}^B]$  et  $[\underline{\mathbf{K}}^B]$  sont respectivement les matrices réelles symétriques définies positives de dimension  $(n^B \times n^B)$  de masse, amortissement et raideur. Le vec-

teur  $\mathbb{F}^B(t)$  des forces extérieures, le vecteur  $\mathbb{F}_{coupl}^B(t)$  des forces de couplage et le vecteur  $\mathbb{F}^{NL}(\underline{\mathbb{U}}^B(t), \dot{\underline{\mathbb{U}}}^B(t))$  des forces non linéaires, tous trois à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n^B}$ , se réécrivent respectivement  $\mathbb{F}^B(t) = (\mathbb{F}_i^B(t), 0)$ ,  $\mathbb{F}_{coupl}^B(t) = (0, \mathbb{F}_c^B(t))$  et  $\mathbb{F}^{NL}(\underline{\mathbb{U}}^B(t), \dot{\underline{\mathbb{U}}}^B(t)) = (\mathbb{F}_i^{NL}(\underline{\mathbb{U}}^B(t), \dot{\underline{\mathbb{U}}}^B(t)), 0)$ .

### 2.3.3 Conditions d'interface pour le couplage de $\Omega^A$ avec $\Omega^B$ .

Le discrétisation des conditions d'interface définies par l'équation (2.3) conduit aux conditions

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{U}}_c^A(t) &= \underline{\mathbb{U}}_c^B(t) \quad , \\ \mathbb{F}_c^A(t) + \mathbb{F}_c^B(t) &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{2.6}$$

## 2.4 Modèle matriciel réduit moyen.

Comme pour le modèle de référence, nous utilisons la méthode de Craig & Bampton afin de réduire chacun des modèles éléments finis des sous-systèmes  $\Omega^A$  et  $\Omega^B$ .

### 2.4.1 Modèle matriciel réduit moyen pour le sous-système linéaire $\Omega^A$ .

On introduit le changement de coordonnées suivant

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbb{U}}_i^A(t) \\ \underline{\mathbb{U}}_c^A(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{y}}^A(t) \\ \underline{\mathbb{U}}_c^A(t) \end{bmatrix} \quad , \tag{2.7}$$

avec

$$\begin{bmatrix} H^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi^A] & [\underline{\mathcal{S}}^A] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \quad , \tag{2.8}$$

où la matrice  $[S^A] = [\underline{\mathbb{K}}_{ii}^A]^{-1}[\underline{\mathbb{K}}_{ic}^A]$  est la matrice de relèvement statique de dimension  $(n^A \times n_c^A)$ , où  $[I]$  est la matrice unité de dimension  $(n_c^A \times n_c^A)$  et où  $\underline{\mathbf{y}}^A(t)$  est le vecteur des coordonnées généralisées à valeur dans  $\mathbb{R}^{N^A}$ . La matrice  $[\Phi^A]$  est la matrice réelle de dimension  $(n_i^A \times N^A)$  dont les colonnes sont les  $N^A$  premiers modes élastiques pour le sous-système  $\Omega_{ref}^A$  avec interface de couplage fixe. Ces modes  $(\phi_1^A, \dots, \phi_{N^A}^A)$  sont associés aux  $N^A$  premières pulsations propres  $0 < \omega_1 \leq \dots \leq \omega_{N^A}$ . Soit  $n_q^A = N^A + n_c^A$ . Alors le vecteur  $\underline{\mathbf{q}}^A(t) = (\underline{\mathbf{y}}^A(t), \underline{\mathbf{u}}_c^A(t))$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n_q^A}$  est solution du système matriciel réduit

$$\begin{aligned} [\underline{M}^A]\underline{\ddot{\mathbf{q}}}^A(t) + [\underline{D}^A]\underline{\dot{\mathbf{q}}}^A(t) + [\underline{K}^A]\underline{\mathbf{q}}^A(t) &= [H^A]^T \mathbb{F}^A(t) \\ &+ [H^A]^T \mathbb{F}_{coupl}^A(t) \quad , \end{aligned} \quad (2.9)$$

où les matrices  $[\underline{M}^A] = [H^A]^T [\underline{\mathbb{M}}^A] [H^A]$ ,  $[\underline{D}^A] = [H^A]^T [\underline{\mathbb{D}}^A] [H^A]$  et  $[\underline{K}^A] = [H^A]^T [\underline{\mathbb{K}}^A] [H^A]$  sont les matrices réduites symétriques définies positives de dimension  $(n_q^A \times n_q^A)$  de masse, d'amortissement et de raideur du sous-système linéaire  $\Omega^A$  du modèle simplifié moyen.

### 2.4.2 Modèle matriciel réduit moyen pour le sous-système non linéaire $\Omega^B$ .

Soit  $\underline{\mathbf{y}}^B(t)$ , le vecteur des coordonnées généralisées à valeur dans  $\mathbb{R}^{N^B}$  associées aux premiers modes élastiques pour le sous-système  $\Omega^B$  linéarisé avec interface de couplage fixe (sans les butées élastiques). Alors le vecteur  $\underline{\mathbf{q}}^B(t) = (\underline{\mathbf{y}}^B(t), \underline{\mathbf{u}}_c^B(t))$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n_q^B}$  est solution du système matriciel réduit non linéaire

$$\begin{aligned} [\underline{M}^B]\underline{\ddot{\mathbf{q}}}^B(t) + [\underline{D}^B]\underline{\dot{\mathbf{q}}}^B(t) + [\underline{K}^B]\underline{\mathbf{q}}^B(t) \\ + [H^B]^T \mathbb{F}^{NL}([H^B]\underline{\mathbf{q}}^B(t), [H^B]\underline{\dot{\mathbf{q}}}^B(t)) \\ = [H^B]^T \mathbb{F}^B(t) + [H^B]^T \mathbb{F}_{coupl}^B(t) \quad , \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\text{où } \begin{bmatrix} H^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi^B] & [\underline{S}^B] \\ [0] & [I] \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

avec  $[\underline{S}^B] = [\underline{\mathbb{K}}_{ii}^B]^{-1}[\underline{\mathbb{K}}_{ic}^B]$  et où les matrices  $[\underline{M}^B] = [H^B]^T[\underline{\mathbb{M}}^B][H^B]$ ,  $[\underline{D}^B] = [H^B]^T[\underline{\mathbb{D}}^B][H^B]$  et  $[\underline{K}^B] = [H^B]^T[\underline{\mathbb{K}}^B][H^B]$  sont les matrices réduites symétriques définies positives de dimension  $(n_q^B \times n_q^B)$  de masse, d'amortissement et de raideur du sous-système  $\Omega^B$  linéarisé du modèle simplifié moyen.

### 2.4.3 Réponse dynamique du modèle simplifié réduit non linéaire moyen.

On désigne par  $n_{\underline{u}} = n_i^A + n_i^B + n_c$  le nombre total de DDLs pour le modèle numérique non linéaire simplifié et par  $n_q = N^A + N^B + n_c$  le nombre total de DDLs pour le modèle éléments finis réduit non linéaire simplifié. Alors le vecteur  $\underline{u}(t) = (\underline{u}_i^A(t), \underline{u}_i^B(t), \underline{u}_c(t))$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n_{\underline{u}}}$  et le vecteur  $\underline{q}(t) = (\underline{y}^A(t), \underline{y}^B(t), \underline{u}_c(t))$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n_q}$  sont liés par la relation

$$\begin{bmatrix} \underline{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

où la matrice  $[H]$  construite par assemblage de  $[H^A]$  et  $[H^B]$  a pour expression

$$\begin{bmatrix} H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi^A] & [0] & [\underline{S}^A] \\ [0] & [\Phi^B] & [\underline{S}^B] \\ [0] & [0] & [I] \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Alors, en utilisant les conditions de couplage à l'interface définies par l'équation (2.6), le vecteur  $\underline{q}(t)$  est solution du système dynamique non linéaire réduit

$$[\underline{M}]\ddot{\underline{q}}(t) + [\underline{D}]\dot{\underline{q}}(t) + [\underline{K}]\underline{q}(t) + \mathcal{F}^{NL}(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t)) = \mathcal{F}(t), \quad (2.14)$$

avec

$$[\underline{M}] = \begin{bmatrix} \underline{M}_{yy}^A & 0 & \underline{M}_{yc}^A \\ 0 & \underline{M}_{yy}^B & \underline{M}_{yc}^B \\ \underline{M}_{cy}^A & \underline{M}_{cy}^B & \underline{M}_{cc}^A + \underline{M}_{cc}^B \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

$$[\underline{D}] = \begin{bmatrix} \underline{D}_{yy}^A & 0 & \underline{D}_{yc}^A \\ 0 & \underline{D}_{yy}^B & \underline{D}_{yc}^B \\ \underline{D}_{cy}^A & \underline{D}_{cy}^B & \underline{D}_{cc}^A + \underline{D}_{cc}^B \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

$$[\underline{K}] = \begin{bmatrix} \underline{K}_{yy}^A & 0 & \underline{K}_{yc}^A \\ 0 & \underline{K}_{yy}^B & \underline{K}_{yc}^B \\ \underline{K}_{cy}^A & \underline{K}_{cy}^B & \underline{K}_{cc}^A + \underline{K}_{cc}^B \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

$$\mathcal{F}^{NL}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \begin{bmatrix} [\Phi^A]^T \mathbb{F}_i^{NL}([H^A]\mathbf{q}(t), [H^A]\dot{\mathbf{q}}(t)) \\ 0 \\ [\underline{S}^A]^T \mathbb{F}_i^{NL}([H^A]\mathbf{q}(t), [H^A]\dot{\mathbf{q}}(t)) \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

$$(2.19)$$

et

$$\mathcal{F}(t) = \begin{bmatrix} [\Phi^A]^T \mathbb{F}_i^A(t) \\ [\Phi^B]^T \mathbb{F}_i^B(t) \\ [\underline{S}^A]^T \mathbb{F}_i^A(t) + [\underline{S}^B]^T \mathbb{F}_i^B(t) \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

## 2.5 Conclusion.

Nous avons construit un modèle matriciel réduit pour le modèle simplifié moyen non linéaire. Ainsi, on peut utiliser l'équation (2.14) pour calculer des réponses stochastiques stationnaires pour un chargement stochastique. Cependant, les simplifications introduites pour la modélisation du sous-système linéaire du modèle simplifié induit des incertitudes de modélisation non négligeables qui doivent être prises en compte. De la même façon que pour le modèle de référence (voir le paragraphe 1.3), on peut construire une observation du modèle simplifié moyen en introduisant la matrice de raideur dynamique  $[\underline{A}^A(\omega)]$  du sous-système linéaire  $\Omega^A$  condensée au niveau de l'interface de couplage  $\Gamma^C$  et en introduisant la matrice complexe  $[\underline{Z}^A(\omega)]$  de dimension  $(n_c^A \times n_c^A)$  telle que

$$[\underline{Z}^A(\omega)] = [\underline{A}_{cc}^A(\omega)] - [\underline{A}_{cy}^A(\omega)][\underline{A}_{yy}^A(\omega)]^{-1}[\underline{A}_{yc}^A(\omega)] \quad . \quad (2.21)$$

Ainsi, l'effet dynamique du sous-système linéaire  $\Omega^A$  est caractérisé dans la bande  $\mathcal{B}$  par la variable  $J^{moy}$  définie par

$$J^{moy} = \int_{\mathcal{B}} \|[\underline{Z}^A(\omega)]^{-1}\|_F^2 d\omega \quad . \quad (2.22)$$

En présence d'incertitude sur la partie linéaire du modèle simplifié, la variable  $J^{moy}$  diffère de  $J^{ref}$  construite pour le modèle de référence. Cette différence caractérise la différence entre le sous-système linéaire du modèle de référence et celui du modèle simplifié après recalage. Cette différence dépasse souvent les quelques pourcents et est irréductible. Dans le chapitre suivant, nous introduisons une méthodologie pour prendre en compte les incertitudes de modèle afin d'intégrer la valeur  $J^{ref}$  dans le champs d'observations du modèle simplifié.

# Chapitre 3

## Modélisation des incertitudes pour le modèle simplifié.

Ce chapitre est dédié à la prise en compte des incertitudes de modélisation (dites incertitudes de modèle) et des incertitudes sur les paramètres du système (dites incertitudes de paramètres) pour le sous-système linéaire  $\Omega^A$  du modèle simplifié. Pour cela, l'approche probabiliste non paramétrique est utilisée. Cette approche, qui modélise les incertitudes de modèle et de paramètres, consiste à remplacer les matrices de masse, d'amortissement et de raideur du sous-système linéaire  $\Omega^A$  par des matrices aléatoires pour lesquelles la densité de probabilité est donnée explicitement par la théorie et pour lesquelles il existe un générateur de réalisations indépendantes. Une telle approche a été validée sur de nombreux cas. Pour une description complète de l'approche probabiliste non paramétrique, le lecteur peut se référer, par exemple, aux références ([98, 99, 101, 100]). Dans une telle approche, le niveau d'incertitude des matrices aléatoires de masse, d'amortissement et de raideur est quantifié par les paramètres de dispersion qui seront définis. Dans un premier temps, le modèle simplifié stochastique est construit. Puis les paramètres de dispersion sont identifiés en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance. Il est à noter que seul le sous-système  $\Omega^A$  est supposé être incertain et que le modèle

du sous-système non linéaire  $\Omega^B$  est suffisamment représentatif pour que les incertitudes de paramètres et de modèle soient négligeables. Si cette hypothèse n'était pas vérifiée, l'approche non paramétrique pourrait tout de même être implantée sans difficultés pour ce sous-système (voir par exemple [37, 89]).

### 3.1 Modélisation des incertitudes dans le sous-système linéaire $\Omega^A$ .

L'utilisation de l'approche probabiliste non paramétrique consiste, pour le sous-système linéaire  $\Omega^A$ , à remplacer les matrices déterministes  $[\underline{M}^A]$ ,  $[\underline{D}^A]$  et  $[\underline{K}^A]$  définies au paragraphe 2.4.1 par des matrices aléatoires  $[\mathbf{M}^A]$ ,  $[\mathbf{D}^A]$  et  $[\mathbf{K}^A]$  définies sur un espace probabilisé  $(\Theta, \mathcal{T}, \mathcal{P})$  et dont la loi de probabilité, construite par le principe du maximum d'entropie ([59], [61]) sera explicitée ci-après. Cette loi de probabilité utilise l'information disponible pour les matrices aléatoires  $[\mathbf{M}^A]$ ,  $[\mathbf{D}^A]$  et  $[\mathbf{K}^A]$  :

1. Leurs espérances mathématiques sont telles que

$$\begin{aligned} E\{[\mathbf{M}^A]\} &= [\underline{M}^A] \quad , \\ E\{[\mathbf{D}^A]\} &= [\underline{D}^A] \quad , \\ E\{[\mathbf{K}^A]\} &= [\underline{K}^A] \quad , \end{aligned} \tag{3.1}$$

où  $E\{.\}$  = désigne l'espérance mathématique.

2. Elles sont définies positives, i.e

$$[\mathbf{M}^A], [\mathbf{D}^A], [\mathbf{K}^A] \in \mathbb{M}_{n_q^A}^+(\mathbb{R}) \quad , \quad p.s. \tag{3.2}$$

3. Leurs inverses sont du second ordre, i.e

$$\begin{aligned} E\{\|[\mathbf{M}^A]^{-1}\|_F^2\} &< +\infty \quad , \\ E\{\|[\mathbf{D}^A]^{-1}\|_F^2\} &< +\infty \quad , \\ E\{\|[\mathbf{K}^A]^{-1}\|_F^2\} &< +\infty \quad . \end{aligned} \tag{3.3}$$

### 3.1.1 Normalisation des matrices aléatoires, définition du paramètre de dispersion et loi de probabilité.

Afin de faciliter la construction de la représentation algébrique des matrices aléatoires  $[\mathbf{M}^A]$ ,  $[\mathbf{D}^A]$  et  $[\mathbf{K}^A]$ , celles ci sont normalisées. La première étape consiste à factoriser les matrices  $[\underline{M}^A]$ ,  $[\underline{D}^A]$  et  $[\underline{K}^A]$  en utilisant la factorisation de Cholesky. En effet, ces matrices étant toutes trois symétriques définies positives, elles peuvent se réécrire

$$\begin{aligned} [\underline{M}^A] &= [\underline{L}_{MA}]^T [\underline{L}_{MA}] \quad , \\ [\underline{D}^A] &= [\underline{L}_{DA}]^T [\underline{L}_{DA}] \quad , \\ [\underline{K}^A] &= [\underline{L}_{KA}]^T [\underline{L}_{KA}] \quad , \end{aligned} \tag{3.4}$$

où  $[\underline{L}_{MA}]$ ,  $[\underline{L}_{DA}]$  et  $[\underline{L}_{KA}]$  sont des matrices triangulaires supérieures de dimension  $(n_q^A \times n_q^A)$ . Les matrices aléatoires  $[\mathbf{M}^A]$ ,  $[\mathbf{D}^A]$  et  $[\mathbf{K}^A]$  peuvent donc se réécrire

$$\begin{aligned} [\underline{M}^A] &= [\underline{L}_{MA}]^T [\mathbf{G}_{MA}] [\underline{L}_{MA}] \quad , \\ [\underline{D}^A] &= [\underline{L}_{DA}]^T [\mathbf{G}_{DA}] [\underline{L}_{DA}] \quad , \\ [\underline{K}^A] &= [\underline{L}_{KA}]^T [\mathbf{G}_{KA}] [\underline{L}_{KA}] \quad , \end{aligned} \tag{3.5}$$

où les matrices aléatoires  $[\mathbf{G}_{MA}]$ ,  $[\mathbf{G}_{DA}]$  et  $[\mathbf{G}_{KA}]$  sont du second ordre, définies positives et telles que

$$E\{[\mathbf{G}_{MA}]\} = E\{[\mathbf{G}_{DA}]\} = E\{[\mathbf{G}_{KA}]\} = [I_{n_q^A}] \quad , \tag{3.6}$$

où  $[I_{n_q^A}]$  est la matrice unité  $(n_q^A \times n_q^A)$ . Les matrices aléatoires sont dans *l'ensemble des matrices aléatoires définies positives normalisées*, noté  $SG^+$  et introduit dans [101]. On démontre que les matrices aléatoires  $[\mathbf{M}^A]$ ,  $[\mathbf{D}^A]$  et  $[\mathbf{K}^A]$  ainsi réécrites vérifient toujours les relations (3.1), (3.2) et (3.3). Soit  $[\mathbf{P}^A]$  la matrice aléatoire désignant soit  $[\mathbf{M}^A]$ ,  $[\mathbf{D}^A]$  ou  $[\mathbf{K}^A]$ . Alors la dispersion de la matrice aléatoire  $[\mathbf{G}_{PA}]$

est contrôlée par le paramètre de dispersion  $\delta_P^A$  défini par

$$\delta_P^A = \left\{ \frac{1}{n_q^A} E \{ \| [\mathbf{G}_{PA}] - [I_{n_q^A}] \|_F^2 \} \right\}^{1/2} . \quad (3.7)$$

La densité de probabilité de la matrice aléatoire  $[\mathbf{G}_{PA}]$  est construite en utilisant le principe du maximum d'entropie en utilisant l'information disponible définie par les propriétés que doit vérifier  $[\mathbf{G}_{PA}]$  (définie positive, du second ordre, de moyenne  $[I_{n_q^A}]$  et dont l'inverse est du second ordre). Il est démontré alors (voir [98, 99, 101]) que la fonction de densité de probabilité de la matrice  $[\mathbf{G}_{PA}]$  dépend de la dimension  $n_q^A$  et du paramètre de dispersion  $\delta_P^A$  et est définie par

$$p_{[\mathbf{G}_{PA}]}([\mathbf{G}]) = \mathbb{1}_{\mathbb{M}_{n_q^A}^+(\mathbb{R})}([\mathbf{G}]) \times C_{\mathbf{G}_{PA}} \times (\det[\mathbf{G}])^{(n_q^A+1)\frac{1-\delta_P^{A2}}{2\delta_P^{A2}}} \times \exp\left\{-\frac{(n_q^A+1)}{2\delta_P^{A2}} \text{tr}[\mathbf{G}]\right\} , \quad (3.8)$$

où  $\mathbb{1}_{\mathbb{M}_{n_q^A}^+(\mathbb{R})}([\mathbf{G}])$  est égale à 1 si  $[\mathbf{G}]$  est définie positive et 0 sinon et où  $C_{\mathbf{G}_{PA}}$  est une constante positive définie par

$$C_{\mathbf{G}_{PA}} = \frac{(2\pi)^{-n_q^A(n_q^A-1)/4} \left(\frac{n_q^A+1}{2\delta_P^{A2}}\right)^{n_q^A(n_q^A+1)/2\delta_P^{A2}}}{\prod_{j=1}^{n_q^A} \Gamma\left(\frac{n_q^A+1}{2\delta_P^{A2}} + \frac{1-j}{2}\right)} , \quad (3.9)$$

où  $\Gamma(z)$  est la fonction gamma définie pour  $z > 0$  par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt . \quad (3.10)$$

Dans la construction de cette densité de probabilité, on montre que le paramètre de dispersion  $\delta_P^A$  doit vérifier la relation

$$0 < \delta_P^A < \sqrt{(n_q^A+1)/(n_q^A+5)} . \quad (3.11)$$

### 3.1.2 Générateur de réalisations indépendantes des matrices aléatoires normalisées.

La représentation algébrique des matrices aléatoires normalisées permet de générer des réalisations indépendantes de ces matrices afin d'utiliser la méthode de simulation de Monte Carlo pour résoudre les équations stochastiques. La simulation de réalisations indépendantes des matrices aléatoires  $[\mathbf{M}^A]$ ,  $[\mathbf{D}^A]$  et  $[\mathbf{K}^A]$  utilise la factorisation (3.5) et la représentation algébrique de la matrice aléatoire  $[\mathbf{G}_{PA}]$  (voir [101]) qu'on va rappeler brièvement. Pour chacune de ces matrices aléatoires, le générateur ne dépend que de la valeur moyenne, de la dimension et du paramètre de dispersion. La matrice aléatoire  $[\mathbf{G}_{PA}]$  peut se réécrire

$$[\mathbf{G}_{PA}] = [\mathbf{L}_{PA}]^T [\mathbf{L}_{PA}] \quad , \quad (3.12)$$

où  $[\mathbf{L}_{PA}]$  est une matrice aléatoire triangulaire supérieure réelle de dimension  $(n_q^A \times n_q^A)$  telle que

1. les variables aléatoires  $\{[\mathbf{L}_{PA}]_{jj'}, j \leq j'\}$  sont indépendantes ;
2. pour  $j \leq j'$ , les variables aléatoires à valeurs réelles  $[\mathbf{L}_{PA}]_{jj'}$  s'écrivent  $[\mathbf{L}_{PA}]_{jj'} = \sigma_{n_q^A} U_{jj'}$  où  $\sigma_{n_q^A} = \delta_P^A (n_q^A + 1)^{-1/2}$  et où  $U_{jj'}$  est une variable aléatoire à valeurs réelles Gaussienne centrée et de variance unité ;
3. pour  $j = j'$ , les variables aléatoires à valeurs positive  $[\mathbf{L}_{PA}]_{jj}$  s'écrivent  $[\mathbf{L}_{PA}]_{jj} = \sigma_{n_q^A} \sqrt{2V_j}$  où  $\sigma_{n_q^A} = \delta_P^A (n_q^A + 1)^{-1/2}$  et où  $V_j$  est une variable aléatoire à valeurs positives dont la fonction de densité de probabilité  $p_{V_j}(v)$  par rapport à  $dv$  s'écrit

$$p_{V_j}(v) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(v) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n_q^A + 1}{2\delta_P^A} + \frac{1-j}{2}\right)} v^{\frac{n_q^A + 1}{2\delta_P^A} - \frac{1+j}{2}} e^{-v} \quad , \quad (3.13)$$

où  $\delta_P^A$  est le paramètre de dispersion défini dans l'équation (3.7).

## 3.2 Réponse dynamique stochastique du modèle simplifié non linéaire stochastique.

L'utilisation du modèle probabiliste défini au paragraphe 3.1 et des équations déterministes (2.14) à (2.20) fournit le modèle simplifié non linéaire stochastique suivant

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(t) \end{bmatrix} \quad , \quad (3.14)$$

où, à chaque instant  $t$ , la variable aléatoire  $\mathbf{Q}(t)$  à valeur dans  $\mathbb{R}^{n_q}$  vérifie

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{Q}}(t) + [\mathbf{D}]\dot{\mathbf{Q}}(t) + [\mathbf{K}]\mathbf{Q}(t) + \mathcal{F}^{NL}(\mathbf{Q}(t), \dot{\mathbf{Q}}(t)) = \mathcal{F}(t) \quad , \quad (3.15)$$

et où les matrices aléatoires  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{D}]$  and  $[\mathbf{K}]$  s'écrivent

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} \underline{M}_{yy}^B & 0 & \underline{M}_{yc}^B \\ 0 & \mathbf{M}_{yy}^A & \mathbf{M}_{yc}^A \\ \underline{M}_{cy}^B & \mathbf{M}_{cy}^A & \underline{M}_{cc}^B + \mathbf{M}_{cc}^A \end{bmatrix} \quad , \quad (3.16)$$

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \underline{D}_{yy}^B & 0 & \underline{D}_{yc}^B \\ 0 & \mathbf{D}_{yy}^A & \mathbf{D}_{yc}^A \\ \underline{D}_{cy}^B & \mathbf{D}_{cy}^A & \underline{D}_{cc}^B + \mathbf{D}_{cc}^A \end{bmatrix} \quad , \quad (3.17)$$

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \underline{K}_{yy}^B & 0 & \underline{K}_{yc}^B \\ 0 & \mathbf{K}_{yy}^A & \mathbf{K}_{yc}^A \\ \underline{K}_{cy}^B & \mathbf{K}_{cy}^A & \underline{K}_{cc}^B + \mathbf{K}_{cc}^A \end{bmatrix} \quad . \quad (3.18)$$

L'équation (3.15) sera utilisée au chapitre suivant afin de calculer la réponse stochastique stationnaire du modèle simplifié stochastique à un chargement aléatoire stationnaire.

### 3.3 Identification des paramètres de dispersion.

La fonction de densité de probabilité des matrices aléatoires  $[\mathbf{M}^A]$ ,  $[\mathbf{D}^A]$  et  $[\mathbf{K}^A]$  (et donc de leur générateur de réalisations indépendantes) dépend des paramètres de dispersion  $\delta_M^A$ ,  $\delta_D^A$  et  $\delta_K^A$  (voir paragraphe 3.1). On introduit le vecteur  $\boldsymbol{\delta} = (\delta_M^A, \delta_D^A, \delta_K^A)$  qui va être identifié en utilisant le modèle de référence introduit au chapitre 1 pour lequel l'observation  $J^{ref}$  a été définie (voir équation (1.18)). D'une manière similaire, l'observation pour le modèle simplifié stochastique est définie en introduisant la matrice aléatoire complexe de rigidité dynamique pour le sous-système linéaire  $\Omega^A$  qui s'écrit

$$[\mathbf{A}^A(\omega)] = -\omega^2[\mathbf{M}^A] + i\omega[\mathbf{D}^A] + [\mathbf{K}^A] \quad . \quad (3.19)$$

Alors, la matrice aléatoire de raideur dynamique condensée sur l'interface de couplage du sous-système linéaire  $\Omega^A$  notée  $[\mathbf{Z}^A(\omega)]$  est telle que

$$[\mathbf{Z}^A(\omega)] = [\mathbf{A}_{cc}^A(\omega)] - [\mathbf{A}_{cy}^A(\omega)][\mathbf{A}_{yy}^A(\omega)]^{-1}[\mathbf{A}_{yc}^A(\omega)] \quad . \quad (3.20)$$

Alors, étant donnée que les matrices aléatoires  $[\mathbf{M}^A]$ ,  $[\mathbf{D}^A]$  et  $[\mathbf{K}^A]$  sont définies positives, la matrice aléatoire  $[\mathbf{Z}^A(\omega)]$  est inversible presque sûrement pour chaque pulsation  $\omega$  de  $\mathcal{B}$ , et on peut démontrer que la variable aléatoire  $J(\boldsymbol{\delta})$  définie par

$$J(\boldsymbol{\delta}) = \int_{\mathcal{B}} \|[\mathbf{Z}^A(\omega)]^{-1}\|_F^2 d\omega \quad , \quad (3.21)$$

existe et a une moyenne finie. Tout comme pour le modèle de référence, cette variable aléatoire donne une mesure, dans la bande de fréquence  $\mathcal{B}$ , de l'effet dynamique du sous-système  $\Omega^A$  sur le sous-système  $\Omega^B$  au niveau de l'interface de couplage. La variable aléatoire  $J(\boldsymbol{\delta})$  ainsi définie dépend de  $\boldsymbol{\delta}$  parce que les distributions de probabilité des matrices aléatoires  $[\mathbf{M}^A]$ ,  $[\mathbf{D}^A]$  et  $[\mathbf{K}^A]$  dépendent de  $\boldsymbol{\delta}$ . La fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire  $J(\boldsymbol{\delta})$  par rapport à  $dx$  est notée

$$x \mapsto p_J(x, \boldsymbol{\delta}) \quad . \quad (3.22)$$

Les inégalités fournies par l'équation (3.11) définissent le domaine admissible  $\mathcal{C}_{ad}$  pour le vecteur  $\boldsymbol{\delta}$ . Alors pour chaque  $x$  dans  $[0, +\infty[$  et pour chaque valeur du vecteur  $\boldsymbol{\delta}$  appartenant à  $\mathcal{C}_{ad}$ , la valeur  $p_J(x, \boldsymbol{\delta})$  de la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire  $J(\boldsymbol{\delta})$  est estimée en utilisant le modèle simplifié probabiliste et la méthode de simulation de Monte Carlo (voir [87]). Le vecteur  $\boldsymbol{\delta}$  est identifié en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance (voir par exemple [91]) pour la variable aléatoire  $J(\boldsymbol{\delta})$  pour laquelle  $J^{ref}$  est une réalisation. On a donc à résoudre le problème d'optimisation suivant

$$\boldsymbol{\delta}^{opt} = \arg \max_{\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{C}_{ad}} (p_J(J^{ref}; \boldsymbol{\delta})) \quad , \quad (3.23)$$

où  $\boldsymbol{\delta}^{opt}$  est la valeur identifiée de  $\boldsymbol{\delta}$ . L'observation  $J^{ref}$  a été construite à l'aide du modèle numérique de référence. Mais celle ci pourrait aussi bien être obtenue par un modèle expérimentale du sous-système linéaire pour lequel on peut identifier la matrice de raideur dynamique au niveau de l'interface pour chaque fréquence et donc identifier la valeur de l'observation  $J^{ref}$ .

### 3.4 Conclusion.

Dans le chapitre précédent nous avons conclu que la différence entre l'observation  $J^{moy}$  pour le modèle simplifié moyen et  $J^{ref}$  pour le modèle de référence était non nulle et irréductible. En tenant compte des incertitudes de modèle et de paramètres par l'approche probabiliste non paramétrique, on peut attribuer à l'intervalle  $J^{ref} - \alpha < J \leq J^{ref} + \alpha$ , où  $\alpha$  est un réel positif, une probabilité  $P_\alpha$  non nulle telle que

$$\begin{aligned} P_\alpha &= P(J^{ref} - \alpha \leq J \leq J^{ref} + \alpha) \\ &= \int_{J^{ref} - \alpha}^{J^{ref} + \alpha} p_J(x, \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}^{opt}) dx \quad . \end{aligned} \quad (3.24)$$



## Chapitre 4

# Réponse stochastique stationnaire du modèle simplifié non linéaire stochastique à un chargement aléatoire stationnaire.

Dans le chapitre précédent, le modèle simplifié stochastique non linéaire a été construit mais la nature du chargement appliqué sur ce modèle n'a pas encore été évoquée. Ce chapitre a donc pour objectif de construire la réponse stochastique stationnaire d'un système dynamique stochastique non linéaire pour le cas d'un chargement aléatoire stationnaire dû à un fluide turbulent. Classiquement, plusieurs méthodes permettent de résoudre les équations différentielles stochastiques non linéaires. La méthode de l'équation de Fokker-Planck permet de résoudre directement ces équations soit analytiquement pour certain cas particulier (voir [84], [97]) soit numériquement (voir par exemple [95]). Mais dans tout les cas, cette méthode n'est applicable que pour les systèmes dynamiques possédant peu de DDLs. La méthode de linéarisation stochastique équivalente (voir [39], [24], [83], [104]) permet de se ramener à une équation différentielle stochastique linéaire dont la distance à l'équation différentielle stochastique non linéaire est minimale. Cependant, cette

distance ne pouvant être ramenée à zéro, la solution obtenue est approximative avec une difficulté pour quantifier l'erreur d'approximation. Dans notre cas, aucune de ces méthodes n'est applicable car le système étudié comporte quelques milliers de DDLs. De plus, la présence d'un modèle probabiliste non paramétrique dans le modèle rend les coefficient matriciels aléatoires, on sort ainsi du cadre classique des équations différentielles stochastiques. Nous utiliserons donc la méthode de simulation de Monte Carlo pour construire la réponse stochastique stationnaire. La convergence de la méthode de Monte Carlo est étudiée. Dans les deux premiers paragraphes, nous décrivons le chargement stochastique et sa représentation algébrique. Dans le paragraphe 4.3, nous construisons des réalisations de la réponse stochastique du modèle simplifié stochastique. Dans le paragraphe 4.4, nous analysons la convergence des estimateurs de densité spectrale. Enfin, le paragraphe 4.5 décrit la construction des domaines de confiance.

## 4.1 Construction du modèle du chargement aléatoire.

Le vecteur force  $\mathbf{F}(t)$  défini par  $\mathbf{F}(t) = (\mathbb{F}_i^A(t), \mathbb{F}_i^B(t), 0)$  correspondant à la variable aléatoire  $\mathbf{U}(t) = (\mathbf{U}_i^A(t), \mathbf{U}_i^B(t), \mathbf{U}_c^B(t))$  introduit dans le paragraphe 3.2 est, par exemple, dû aux fluctuations d'un fluide turbulent, générant un chargement aléatoire. Ce chargement aléatoire est modélisé par un processus stochastique  $\{\mathbf{F}(t), t \in \mathbb{R}\}$ . Etant donné que certains DDLs du modèle simplifié stochastique ne sont pas excités par le chargement aléatoire, l'opérateur de projection Proj est introduit dans le but d'extraire le vecteur

$$\tilde{\mathbf{F}}(t) = \text{Proj}(\mathbf{F}(t)) \quad . \quad (4.1)$$

des  $m$  composantes aléatoires non nulles du vecteur aléatoire  $\mathbf{F}(t)$ . Cette relation s'inverse facilement, en introduisant l'opérateur d'expansion Lift tel que

$$\mathbf{F}(t) = \text{Lift}(\tilde{\mathbf{F}}(t)) \quad . \quad (4.2)$$

Le chargement stochastique  $\tilde{\mathbf{F}}(t)$  est modélisé par un processus stochastique défini sur l'espace probabilisé  $(\Theta', \mathcal{T}', \mathcal{P}')$  différent de l'espace probabilisé  $(\Theta, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ , du second ordre, i.e.

$$E\{\|\tilde{\mathbf{F}}(t)\|^2\} < +\infty \quad , \quad (4.3)$$

centré, i.e.

$$E\{\tilde{\mathbf{F}}(t)\} = 0 \quad , \quad (4.4)$$

stationnaire, i.e., pour chaque ensemble  $\{t_1, \dots, t_p\}$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$  et pour tout réel  $u$ ,

$$\begin{aligned} P_{\tilde{\mathbf{F}}(t_1) \dots \tilde{\mathbf{F}}(t_p)}(d\tilde{\mathbf{f}}_1, t_1; \dots; d\tilde{\mathbf{f}}_p, t_p) \\ = P_{\tilde{\mathbf{F}}(t_1+u) \dots \tilde{\mathbf{F}}(t_p+u)}(d\tilde{\mathbf{f}}_1, t_1 + u; \dots; d\tilde{\mathbf{f}}_p, t_p + u) \quad , \end{aligned} \quad (4.5)$$

gaussien (chacune des lois marginales est une loi Gaussienne), à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  et noté  $\{\tilde{\mathbf{F}}(t), t \in \mathbb{R}\}$ . De plus, on suppose que ce processus stochastique est continu en moyenne d'ordre deux sur  $\mathbb{R}$ , i.e., à chaque instant  $t$ ,

$$\lim_{t' \rightarrow t} E\{\|\tilde{\mathbf{F}}(t') - \tilde{\mathbf{F}}(t)\|^2\} = 0, \quad (4.6)$$

physiquement réalisable (causal) et pour lequel la fonction d'autocorrelation à valeurs matricielles  $\tau \mapsto [R_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tau)]$  définie par

$$[R_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tau)] = E\{\tilde{\mathbf{F}}(t + \tau) \tilde{\mathbf{F}}(t)^T\} \quad (4.7)$$

est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Un tel processus stochastique est alors complètement défini par sa fonction de densité spectrale de puissance  $[\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)]$  défini par

$$[\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)] = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega\tau} [R_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tau)] d\tau \quad , \quad (4.8)$$

qui est une fonction continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$  et qui est à valeurs dans l'ensemble des matrices hermitiennes positives de dimension  $(m \times m)$ . De plus, on suppose que pour chaque  $\omega$  dans  $\mathbb{R}$ , la matrice  $[\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)]$  est à valeurs dans l'ensemble  $\mathbb{M}_m^+(\mathbb{C})$  de toutes les matrices hermitiennes définies positives de dimension  $(m \times m)$ . Comme ce processus est supposé être physiquement réalisable, sa fonction de densité spectrale à valeurs matricielles doit satisfaire l'inéquation ([86, 97])

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log(\det[\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)])}{1 + \omega^2} > -\infty \quad . \quad (4.9)$$

## 4.2 Génération de réalisations indépendantes du processus stochastique.

La simulation numérique de réalisations indépendantes de processus ou de champs aléatoires a été introduites par Shinozuka (voir [93]). Les propriétés mathématiques de convergence de ces simulations sont quand à elle étudiées dans

[82]. Ces méthodes de simulation utilisent des suites approxinant ces processus. On rapelle brièvement dans ce paragraphe, la méthode de construction d'une telle suite pour le cas d'un processus Gaussien stationnaire. Dans le paragraphe 4.1, on a supposé que pour chaque  $\omega$  dans  $\mathbb{R}$ , la matrice  $[S_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)]$  est hermitienne définie positive. Elle admet donc la factorisation de Cholesky suivante

$$[S_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)] = [L_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)]^* [L_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)] \quad . \quad (4.10)$$

où  $[L_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)]$  est une matrice triangulaire inférieure de dimension  $(m \times m)$ . On considère l'intervalle  $[-\omega_{max}, \omega_{max}] \subset \mathbb{R}$ ,  $\omega_{max} > 0$  partitionné en  $N_i$  intervalles de longueur  $\Delta$  centrés aux instants

$$k_j = -\omega_{max} + (j + \frac{1}{2})\Delta \quad , \quad j = 0, \dots, N_i - 1 \quad . \quad (4.11)$$

Alors l'approximation  $\tilde{\mathbf{F}}^{N_i}(t)$  du processus stochastique  $\tilde{\mathbf{F}}(t)$  est telle que pour tout  $p \in \{1, \dots, m\}$ ,

$$\tilde{F}_p^{N_i}(t) = \sqrt{2\Delta} \sum_{q=1}^m \sum_{j=0}^{N_i-1} L_{\tilde{\mathbf{F}},pq}(k_j) Z_{q,j} \cos(\phi_{q,j} + k_j t) \quad , \quad (4.12)$$

où  $\phi_{q,j}$ ,  $q = 1, \dots, m$ ,  $j = 0, \dots, N_i - 1$  sont des variables aléatoires indépendantes définies sur  $(\Theta', \mathcal{T}', \mathcal{P}')$  uniformes sur  $[0, 2\pi]$  et où les variables  $Z_{q,j}$ ,  $q = 1, \dots, m$ ,  $j = 0, \dots, N_i - 1$  sont soit égales à 1, soit telles que

$$Z_{q,j} = \sqrt{-\ln \psi_{q,j}} \quad , \quad (4.13)$$

où  $\psi_{q,j}$ ,  $q = 1, \dots, m$ ,  $j = 0, \dots, N_i - 1$  sont des variables aléatoires indépendantes définies sur  $(\Theta', \mathcal{T}', \mathcal{P}')$  uniformes sur  $[0, 1]$  et indépendantes des  $\phi_{q,j}$ . Si les  $Z_{q,j}$  sont pris égaux à 1, alors le processus  $\tilde{\mathbf{F}}^{N_i}(t)$  approxinant le processus stochastique  $\tilde{\mathbf{F}}(t)$  est asymptotiquement Gaussien lorsque  $N_i$  tend vers l'infini, sinon il est Gaussien pour tout  $N_i$ . De plus, la fonction d'autocorrelation  $[R_{\tilde{\mathbf{F}}^{N_i}}(\tau)]$  du processus stochastique  $\tilde{\mathbf{F}}^{N_i}(t)$  tend vers la fonction d'autocorrelation  $[R_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tau)]$  du processus sto-

chastique  $\tilde{\mathbf{F}}(t)$  lorsque  $N_i$  tend vers l'infini et pour tout  $t \in [-T, T]$ , avec  $T = 1/\Delta$ , la suite  $\{\tilde{\mathbf{F}}^{N_i}\}_{N_i}$  converge en loi vers le processus stochastique  $\tilde{\mathbf{F}}(t)$ . Dans la suite de ce mémoire, nous considérerons le nombre d'intervalles  $N_i$  est suffisamment grand pour confondre le processus stochastique  $\tilde{\mathbf{F}}(t)$  avec son approximation  $\tilde{\mathbf{F}}^{N_i}(t)$ . On peut ainsi construire  $\nu_{\theta'}$  trajectoires indépendantes  $\tilde{\mathbf{F}}(t, \theta')$ ,  $\theta' \in \{\theta'_1, \dots, \theta'_{\nu_{\theta'}}\}$  du processus stochastique  $\tilde{\mathbf{F}}(t)$ .

### 4.3 Equation stochastique et simulation de réponses stochastiques stationnaires.

La réponse stochastique stationnaire du modèle simplifié stochastique non linéaire au chargement aléatoire  $\tilde{\mathbf{F}}(t)$  se déduit directement des équations (3.14) et (3.15) dans laquelle le chargement déterministe  $\mathbf{F}(t)$  est remplacé par le processus stochastique  $\mathbf{F}(t) = \text{Lift}(\tilde{\mathbf{F}}(t))$  décrit ci-dessus. Ainsi, la solution stationnaire  $\mathbf{U}_s(t) = (\mathbf{U}_{p,s}^A(t), \mathbf{U}_{p,s}^B(t), \mathbf{U}_{c,s}^B(t))$  (correspondant à  $\mathbf{U}(t)$ ) définies sur  $(\Theta', \mathcal{T}', \mathcal{P}')$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n_{\mathbf{U}}}$  s'écrit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_s(t) \end{bmatrix} \quad , \quad (4.14)$$

où le processus stochastique  $\{\mathbf{Q}_s(t), t \in \mathbb{R}\}$  satisfait l'équation stochastique

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{Q}}_s(t) + [\mathbf{D}]\dot{\mathbf{Q}}_s(t) + [\mathbf{K}]\mathbf{Q}_s(t) + \mathcal{F}^{NL}(\mathbf{Q}_s(t), \dot{\mathbf{Q}}_s(t)) = [\mathbf{H}]^T \mathbf{F}(t) \quad , \quad (4.15)$$

où  $\dot{\mathbf{Q}}_s(t)$  and  $\ddot{\mathbf{Q}}_s(t)$  sont les dérivées première et seconde en moyenne d'ordre deux du processus stochastique  $\mathbf{Q}_s(t)$ . On introduit le processus stochastique

$$\mathbf{Z}_s(t) = (Z_{s,1}(t), \dots, Z_{s,\mu}(t)) \quad , \quad (4.16)$$

à valeurs dans  $\mathbb{R}^{\mu}$  et qui contient  $\mu$  composantes non nulles de la réponse aléatoire  $\mathbf{U}_s(t)$  du modèle simplifié stochastique. Ainsi, il existe une projection  $\text{Proj}'$  de  $\mathbb{R}^{n_{\mathbf{U}}}$

dans  $\mathbb{R}^\mu$  telle que

$$\mathbf{Z}_s(t) = \text{Proj}'(\mathbf{U}_s(t)) \quad . \quad (4.17)$$

On suppose que le processus stochastique  $\mathbf{Z}_s(t)$  défini sur l'espace probabilisé  $(\Theta, \mathcal{T}, \mathcal{P}) \times (\Theta', \mathcal{T}', \mathcal{P}')$  est du second ordre, stationnaire, centré et continu en m.o.d.. Pour tout  $(\theta, \theta') \in \Theta \times \Theta'$ , la trajectoire  $\{\mathbf{Z}_s(t, \theta, \theta'), t \in \mathbb{R}\}$  du processus stochastique stationnaire  $\{\mathbf{Z}_s(t), t \in \mathbb{R}\}$  est tel que  $\mathbf{Z}_s(t, \theta, \theta') = \text{Proj}'([H]\mathbf{Q}_s(t, \theta, \theta'))$ , où la trajectoire  $\{\mathbf{Q}_s(t, \theta, \theta'), t \in \mathbb{R}\}$  du processus stochastique stationnaire  $\{\mathbf{Q}_s(t), t \in \mathbb{R}\}$  est tel que, pour chaque instant  $t$  dans  $\mathbb{R}$ , on ait

$$\begin{aligned} & [\mathbf{M}(\theta)]\ddot{\mathbf{Q}}_s(t, \theta, \theta') + [\mathbf{D}(\theta)]\dot{\mathbf{Q}}_s(t, \theta, \theta') + [\mathbf{K}(\theta)]\mathbf{Q}_s(t, \theta, \theta') \\ & + \mathbf{f}^{NL}(\mathbf{Q}_s(t, \theta, \theta'), \dot{\mathbf{Q}}_s(t, \theta, \theta')) = [H]^T \mathbf{F}(t, \theta') \quad . \end{aligned} \quad (4.18)$$

La présence de forces non linéaires dans cette l'équation impose une résolution de cette équation dans le domaine temporel en utilisant un schéma d'intégration adapté (implicite ou explicite). Pour tout  $\theta \in \Theta$ , générant  $\nu_{\theta'}$  trajectoires indépendantes du processus stochastique  $\tilde{\mathbf{F}}(t)$ ,  $\nu_{\theta'}$  trajectoires indépendantes du processus stochastique  $\{\mathbf{Z}_s(t), t \in \mathbb{R}\}$  peuvent alors être calculées. Ces trajectoires indépendantes peuvent être assimilées à des trajectoires de versions indépendantes  $\{\mathbf{Z}_s^{\theta'}(t, \theta), t \in \mathbb{R}\}$  du processus stochastique  $\{\mathbf{Z}_s(t, \theta), t \in \mathbb{R}\}$ , telles que, pour tout  $\theta' \in \{\theta'_1, \dots, \theta'_{\nu_{\theta'}}\}$ , on ait

$$\mathbf{Z}_s^{\theta'}(t, \theta) = \mathbf{Z}_s(t, \theta, \theta') \quad . \quad (4.19)$$

Alors, pour tout  $\theta \in \Theta$ , la fonction à valeur matricielle de densité spectrale  $\{[\mathbf{S}_{\mathbf{Z}_s}(\omega, \theta)], \omega \in \mathbb{R}\}$  peut être estimée par deux méthodes :

1. *Méthode du corrélogramme.* Dans cette méthode la fonction d'autocorrelation à valeur matricielle  $\tau \mapsto [\mathbf{R}_{\mathbf{Z}_s}(\tau, \theta)] = E\{\mathbf{Z}_s(t + \tau, \theta) \mathbf{Z}_s(t, \theta)^T\}$  est estimée. Puis la fonction aléatoire de densité spectrale  $\{[S_{\mathbf{Z}_s}(\omega, \theta)], \omega \in \mathbb{R}\}$  est calculée par transformée de Fourier. Cette méthode fournit un estimateur non-biaisé de la fonction de densité spectrale de puissance, cependant, elle n'est pas efficace

numériquement.

2. *Méthode du périodogramme.* Cette méthode est efficace numériquement et bien adaptée aux signaux échantillonnés. Dans cette méthode, pour tout  $\theta \in \Theta$ , on considère  $\nu_{\theta'}$  versions indépendantes  $\mathbf{Z}_s(t, \theta, \theta')$ ,  $\theta' \in \{\theta_1, \dots, \theta_{\nu_{\theta'}}\}$  du processus stochastique  $\mathbf{Z}_s(t, \theta)$ . Pour chacune de ces versions, une trajectoire est connue sur un intervalle  $[0, T]$ . Alors, pour tout  $\theta' \in \{\theta_1, \dots, \theta_{\nu_{\theta'}}\}$ , on peut introduire la variable aléatoire  $\widehat{\mathbf{Z}}_s^T(\omega, \theta, \theta')$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^\mu$  telle que pour tout  $\omega \in [-\omega_{max}, \omega_{max}]$ , avec  $\omega_{max} = N_i \times \pi/T$  d'après le théorème de Shannon ([15, 96]), on a

$$\widehat{\mathbf{Z}}_s^T(\omega, \theta, \theta') = \int_0^T W_T(t) \mathbf{Z}_s(t, \theta, \theta') e^{-i\omega t} dt \quad , \quad (4.20)$$

où  $W_T$  est la fenêtre temporelle. Alors pour tout  $\omega \in [-\omega_{max}, \omega_{max}]$ , l'estimateur  $[S_{\mathbf{Z}_s}^{T, \nu_{\theta'}}(\omega, \theta)]$  de la fonction de densité spectrale  $[\mathbf{S}_{\mathbf{Z}_s}(\omega, \theta)]$  est tel que

$$[S_{\mathbf{Z}_s}^{T, \nu_{\theta'}}(\omega, \theta)] = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\nu_{\theta'}} \sum_{j=1}^{\nu_{\theta'}} \widehat{\mathbf{Z}}_s^T(\omega, \theta, \theta_j) \widehat{\mathbf{Z}}_s^T(\omega, \theta, \theta_j)^* \quad . \quad (4.21)$$

Cet estimateur est asymptotiquement non-biaisé ([96]), i.e., pour tout  $\omega \in [-\omega_{max}, \omega_{max}]$ ,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} (E\{[S_{\mathbf{Z}_s}^{T, \nu_{\theta'}}(\omega, \theta)]\} - [\mathbf{S}_{\mathbf{Z}_s}(\omega, \theta)]) = [0] \quad , \quad (4.22)$$

et sa variance décroît avec le nombre de versions indépendantes ([96]), i.e., pour tout  $j$  et  $k$  dans  $\{1, \dots, \mu\}$ , pour tout  $\omega \in [-\omega_{max}, \omega_{max}]$ ,

$$\lim_{\nu_{\theta'} \rightarrow +\infty} (E\{|S_{\mathbf{Z}_s, jk}^{T, \nu_{\theta'}}(\omega, \theta)|^2\} - |E\{S_{\mathbf{Z}_s, jk}^{T, \nu_{\theta'}}(\omega, \theta)\}|^2) = 0 \quad . \quad (4.23)$$

On peut alors, pour tout  $\theta \in \Theta$ , contrôler la convergence en m.o.d. de l'estimateur statistique  $[S_{\mathbf{Z}_s}^{T, \nu_{\theta'}}(\omega, \theta)]$  en introduisant, la fonction

$$\nu_{\theta'} \mapsto \text{conv}_1(\nu_{\theta'}) = \int_{\mathcal{B}} \|[S_{\mathbf{Z}_s}^{T, \nu_{\theta'}}(\omega, \theta)]\|_F^2 d\omega \quad (4.24)$$

Généralant  $\nu_\theta$  réalisations indépendantes des matrices aléatoires  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{D}]$  et  $[\mathbf{K}]$ , la fonction de densité spectrale  $[S_{\mathbf{Z}_s}]$  est estimée, pour tout  $\omega \in \mathcal{B} = [-\omega_{max}, \omega_{max}]$ , par

$$[S_{\mathbf{Z}_s}^{T, \nu_{\theta'}, \nu_\theta}(\omega)] = \frac{1}{\nu_\theta} \sum_{i=1}^{\nu_\theta} [\mathbf{S}_{\mathbf{Z}_s}^{T, \nu_{\theta'}}(\omega, \theta_i)] \quad . \quad (4.25)$$

En utilisant l'équation (4.20), on obtient pour tout  $\omega \in [-\omega_{max}, \omega_{max}]$ ,

$$[S_{\mathbf{Z}_s}^{T, \nu_{\theta'}, \nu_\theta}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\nu_\theta} \frac{1}{\nu_{\theta'}} \sum_{i=1}^{\nu_\theta} \sum_{j=1}^{\nu_{\theta'}} \widehat{\mathbf{Z}}_s^T(\omega, \theta_i, \theta'_j) \widehat{\mathbf{Z}}_s^T(\omega, \theta_i, \theta'_j)^* \quad . \quad (4.26)$$

## 4.4 Convergence de l'estimateur de la fonction de densité spectrale.

La fonction de densité spectrale  $[S_{\mathbf{Z}_s}]$  est estimée par l'équation (4.26). La variance de cet estimateur diminue en fonction du nombre  $\nu_\theta$  de réalisations indépendantes des matrices aléatoires  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{D}]$  et  $[\mathbf{K}]$ . Pour tout  $\theta \in \{\theta_1, \dots, \theta_{\nu_\theta}\}$ , on suppose que l'horizon temporelle  $T$  est suffisamment grand pour considérer l'estimateur  $[S_{\mathbf{Z}_s}^{T, \nu_\theta}(\omega, \theta)]$  non biaisé et on suppose que cet estimateur est convergé vis à vis du nombre  $\nu_{\theta'}$  de versions indépendantes calculées. Ainsi, on peut contrôler la convergence en m.o.d. de l'estimateur statistique  $[S_{\mathbf{Z}_s}^{T, \nu_{\theta'}, \nu_\theta}(\omega)]$  vis à vis du nombre  $\nu_\theta$  de réalisations indépendantes des matrices aléatoires  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{D}]$  et  $[\mathbf{K}]$  en introduisant la fonction

$$\nu_\theta \mapsto \text{conv}_2(\nu_\theta) = \frac{1}{\nu_\theta} \sum_{i=1}^{\nu_\theta} \int_{\mathcal{B}} \|\mathbf{S}_{\mathbf{Z}_s}^{T, \nu_{\theta'}}(\omega, \theta_i)\|_F^2 d\omega \quad . \quad (4.27)$$

## 4.5 Estimations des domaines de confiance.

Le domaine de confiance est un outil statistique très utilisé en dynamique stochastique pour représenter la variabilité de fonctions aléatoires données ou calculées. Le domaine de confiance est construit en utilisant la méthode des quantiles

(voir [91] par exemple). On introduit pour tout  $\omega \in \mathcal{B}$  la fonction de répartition  $F_{\mathbf{W}(\omega)} = P(\mathbf{W}(\omega) \leq w)$  de la variable aléatoire  $\mathbf{W}(\omega)$ . Alors pour tout  $p \in ]0, 1[$ , le  $p$ -ème quantile est défini par

$$\zeta(p) = \inf\{w : F_{\mathbf{W}(\omega)} \geq p\} \quad . \quad (4.28)$$

On peut alors définir l'enveloppe supérieure  $w^+(\omega)$  et l'enveloppe inférieure  $w^-(\omega)$  du domaine de confiance à un niveau de probabilité  $P_c$  par

$$w^+(\omega) = \zeta\left(\frac{1 + P_c}{2}\right) \quad , \quad w^-(\omega) = \zeta\left(\frac{1 - P_c}{2}\right) \quad . \quad (4.29)$$

L'estimation des enveloppes  $w^+(\omega)$  et  $w^-(\omega)$  s'effectue en calculant et en ordonnant  $\nu_\theta$  réalisations indépendantes de la variable aléatoire  $\mathbf{W}(\omega)$  telles que  $\tilde{w}_1(\omega) < \dots < \tilde{w}_{\nu_\theta}(\omega)$ . On a alors

$$w^+(\omega) \simeq \tilde{w}_{j^+}(\omega) \quad , \quad j^+ = \text{fix}(\nu_\theta(1 + P_c)/2) \quad , \quad (4.30)$$

$$w^-(\omega) \simeq \tilde{w}_{j^-}(\omega) \quad , \quad j^- = \text{fix}(\nu_\theta(1 - P_c)/2) \quad , \quad (4.31)$$

où  $\text{fix}(z)$  est la partie entière du nombre réel  $z$ . Cette estimation est réalisée pour chaque terme de la fonction de densité spectrale  $[\mathbf{S}_{\mathbf{z}_s}]$  à valeur matricielle en utilisant la méthode de simulation de Monte Carlo. Comme pour l'estimation de la valeur moyenne  $[S_{\mathbf{z}_s}^{T, \nu_{\theta'}, \nu_\theta}(\omega)]$ , on peut introduire une fonction pour contrôler la convergence de ces estimateurs vis à vis du nombre  $\nu_\theta$  de réalisations indépendantes des matrices aléatoires  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{D}]$  and  $[\mathbf{K}]$ .

## 4.6 Conclusion

Ce chapitre a fourni une méthodologie pour construire des statistiques sur la réponse stochastique stationnaire du modèle simplifié stochastique. Cette méthodologie est non-intrusive vis-à-vis des code de calcul éléments finis et permet d'analyser la convergence des estimateurs construits.

# Chapitre 5

## Modélisation paramétrique des incertitudes pour le chargement aléatoire.

Dans le chapitre précédent, le chargement aléatoire  $\tilde{\mathbf{F}}(t)$  est modélisé par un processus stochastique, du second ordre, centré, stationnaire, Gaussien. Ce chargement est appliqué en  $m$  DDLs judicieusement choisis afin de représenter au mieux le vrai chargement turbulent avec un minimum de paramètres. Cela facilitera l'identification de ce chargement. Cependant, cette discrétisation spatiale grossière du chargement entraîne des incertitudes sur le modèle du chargement. Ainsi, même avec un modèle numérique très prédictif, ces incertitudes peuvent entraîner des écarts irréductibles importants entre les observations calculées et celles mesurées. Ces incertitudes doivent être prises en compte dans le processus d'identification du chargement aléatoire et dans le calcul de réponses stationnaires. Ainsi, le processus stochastique  $\{\tilde{\mathbf{F}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  est remplacé par le processus stochastique  $\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  incluant un modèle probabiliste des incertitudes. L'objectif de ce chapitre est de construire ce processus  $\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t), t \in \mathbb{R}\}$ . Les paragraphes 5.1 à 5.4 décrivent les propriétés du processus stochastique  $\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  et présentent un générateur

de trajectoires indépendantes pour ce processus. Dans le paragraphe 5.5, on étudie la réponse stationnaire à ce chargement stochastique.

## 5.1 Définition du processus stochastique incluant le modèle probabiliste des incertitudes.

Etant donné que le processus stochastique  $\{\tilde{\mathbf{F}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  introduit au chapitre précédent est complètement défini par sa fonction de densité spectrale de puissance  $[\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)]$ , le processus stochastique  $\{\tilde{\mathbf{F}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  peut se réécrire

$$\{\tilde{\mathbf{F}}(t; [\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}], t \in \mathbb{R}\} \quad . \quad (5.1)$$

Le modèle d'incertitudes est construit en utilisant une approche probabiliste paramétrique qui consiste à modéliser la fonction déterministe  $[\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}] = \{[\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)], \omega \in \mathbb{R}\}$  par une fonction aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{M}_m^+(\mathbb{C})$ , notée  $[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}] = \{[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)], \omega \in \mathbb{R}\}$ , et définie sur l'espace probabilisé  $(\Theta'', \mathcal{T}'', \mathcal{P}'')$ . Chacune des réalisations  $[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}] (\theta'')$  pour  $\theta'' \in \Theta''$  de la fonction aléatoire  $[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}]$  est telle que

$$[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}] (\theta'') = \{[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega, \theta'')], \omega \in \mathbb{R}\} \quad . \quad (5.2)$$

Par conséquent, le processus stochastique  $\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  indexé dans  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ , défini sur l'espace probabilisé  $(\Theta', \mathcal{T}', \mathcal{P}') \times (\Theta'', \mathcal{T}'', \mathcal{P}'')$ , est tel que, pour tout  $\theta' \in \Theta'$  et  $\theta'' \in \Theta''$ ,

$$\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t, \theta', \theta'') = \tilde{\mathbf{F}}(t, \theta'; [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}] (\theta'')) \quad . \quad (5.3)$$

## 5.2 Construction de la fonction aléatoire de densité spectrale.

L'objectif de ce paragraphe est de construire la fonction aléatoire  $[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}]$  en utilisant la théorie de l'information qui consiste en l'utilisation du principe de maximum d'entropie (voir [92] pour la méthode). Ce type de construction nécessite de définir au préalable l'information disponible, puis d'appliquer le principe du maximum d'entropie. Cette information disponible au sujet de  $[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)], \omega \in \mathbb{R}$  est la suivante :

1. Pour chaque  $\omega$  dans  $\mathbb{R}$ , l'espérance mathématique de la matrice aléatoire  $[\mathbf{S}_{\mathbf{F}}(\omega)]$  est telle que

$$E\{[\mathbf{S}_{\mathbf{F}}(\omega)]\} = [\underline{\mathbf{S}}_{\mathbf{F}}(\omega)] \quad , \quad \omega \in \mathbb{R} \quad . \quad (5.4)$$

2. Pour chaque  $\omega$  dans  $\mathbb{R}$ , la matrice aléatoire  $[\mathbf{S}_{\mathbf{F}}(\omega)]$  est hermitienne définie positive, i.e,

$$[\mathbf{S}_{\mathbf{F}}(\omega)] \in \mathbb{M}_m^+(\mathbb{C}) \quad , \quad p.s. \quad (5.5)$$

En conséquence, pour chaque  $\omega$  dans  $\mathbb{R}$ , la matrice aléatoire  $[\mathbf{S}_{\mathbf{F}}(\omega)]$  est inversible presque sûrement, ce qui signifie que pour  $\mathcal{P}''$ -presque tout  $\theta''$  dans  $\Theta''$ , la matrice  $[\mathbf{S}_{\mathbf{F}}(\omega, \theta'')]^{-1}$  existe. Par construction, nous ajoutons l'information suivante :

3. Pour chaque  $\omega$  dans  $\mathbb{R}$ , la matrice aléatoire  $[\mathbf{S}_{\mathbf{F}}(\omega)]^{-1}$  est une variable du second ordre, ce qui signifie que

$$E\{\|[\mathbf{S}_{\mathbf{F}}(\omega)]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad . \quad (5.6)$$

4. Le germe stochastique est indépendant de  $\omega$ .

Pour chaque  $\omega$  dans  $\mathbb{R}$ , la matrice  $[\underline{\mathbf{S}}_{\mathbf{F}}(\omega)]$  étant Hermitienne définie positive, admet la factorisation de Cholesky suivante

$$[\underline{\mathbf{S}}_{\mathbf{F}}(\omega)] = [\underline{\mathbf{L}}_{\mathbf{F}}(\omega)]^* [\underline{\mathbf{L}}_{\mathbf{F}}(\omega)] \quad . \quad (5.7)$$

Ainsi, pour chaque  $\omega$  dans  $\mathbb{R}$ , la matrice aléatoire  $[\mathbf{S}_{\mathbf{F}}(\omega)]$  est normalisée de la façon suivante :

$$[\mathbf{S}_{\mathbf{F}}(\omega)] = [\underline{\mathbf{L}}_{\mathbf{F}}(\omega)]^* [\mathbf{G}_m] [\underline{\mathbf{L}}_{\mathbf{F}}(\omega)] \quad , \quad (5.8)$$

où la matrice aléatoire  $[\mathbf{G}_m]$ , définie sur l'espace probabilisé  $(\Theta'', \mathcal{T}'', \mathcal{P}'')$ , appartient à l'ensemble  $SG^+$  (voir paragraphe 3.1), est indépendante de  $\omega$  et est donc telle que

$$[\mathbf{G}_m] \in \mathbb{M}_m^+(\mathbb{R}) \quad , \quad E\{[\mathbf{G}_m]\} = [I_m] \quad , \quad E\{\|[\mathbf{G}_m]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad . \quad (5.9)$$

Le paramètre de dispersion  $\delta_F$  qui contrôle la fluctuation de la matrice aléatoire  $[\mathbf{G}_m]$  est tel que

$$\delta_F = \left\{ \frac{1}{m} E\{\|[\mathbf{G}_m] - [I_m]\|_F^2\} \right\}^{1/2} \quad , \quad (5.10)$$

et doit être choisi de sorte que

$$0 < \delta_F < \sqrt{(m+1)(m+5)^{-1}} \quad . \quad (5.11)$$

Les équations (5.7), (5.8) et (5.9), montrent que l'équation (5.4) est vérifiée. De plus, l'équation (5.8), permet de déduire que pour chaque  $\omega$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\|[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)]^{-1}\| < c(\omega)\|[\mathbf{G}_m]^{-1}\| \quad , \quad (5.12)$$

par conséquent,  $E\{\|[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)]^{-1}\|^2\} \leq c(\omega)^2 E\{\|[\mathbf{G}_m]^{-1}\|^2\} \leq c(\omega)^2 E\{\|[\mathbf{G}_m]^{-1}\|_F^2\}$ . Comme  $E\{\|[\mathbf{G}_m]^{-1}\|_F^2\} < +\infty$ , on déduit que  $E\{\|[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)]^{-1}\|^2\} < +\infty$ . Donc l'équation (5.6) est vérifiée.

### 5.3 Propriétés du processus stochastique incluant le modèle probabiliste des incertitudes.

En utilisant les propriétés du processus stochastique  $\{\tilde{\mathbf{F}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  décrit au chapitre précédent, on déduit que pour  $\mathcal{P}''$ -presque tout  $\theta''$  dans  $\Theta''$ , la fonction moyenne du processus stochastique centré  $\{\tilde{\mathbf{F}}(t, [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}] (\theta'')), t \in \mathbb{R}\}$  est telle que

$$E\{\tilde{\mathbf{F}}(t, [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}] (\theta''))\} = \int_{\Theta'} \tilde{\mathbf{F}}(t, \theta', [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}] (\theta'')) d\mathcal{P}'(\theta') = 0 \quad , \quad (5.13)$$

et sa fonction d'autocorellation est définie par

$$[R_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tau, [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}] (\theta''))] = \int_{\Theta'} \tilde{\mathbf{F}}(t + \tau, \theta', [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}] (\theta'')) \tilde{\mathbf{F}}(t, \theta', [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}] (\theta''))^T d\mathcal{P}'(\theta') \quad . \quad (5.14)$$

Dés lors, en prenant en compte les équations (5.7) et (5.8) et le fait que la fonction  $[\underline{\mathbf{S}}_{\tilde{\mathbf{F}}}]$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$ , on déduit que la fonction de densité spectrale  $[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}] (\theta'') = \{\omega \mapsto [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega, \theta'')]\}$  qui est telle que

$$[R_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tau, [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}] (\theta''))] = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega\tau} [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega, \theta'')] d\omega \quad , \quad (5.15)$$

est une fonction continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$ . En utilisant la transformé de Fourier inverse pour des fonctions intégrables, on déduit que

$$[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega, \theta'')] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega\tau} [R_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tau, [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}] (\theta''))] d\tau \quad . \quad (5.16)$$

A présent, on peut caractériser le processus stochastique  $\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  pour lequel le modèle d'incertitude a été implémenté :

1. *Fonction moyenne.* La fonction moyenne du processus  $\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  est telle que, pour chaque instant  $t$  fixé dans  $\mathbb{R}$ ,

$$E\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t)\} = \int_{\Theta'} \int_{\Theta''} \tilde{\mathbf{F}}(t, \theta', [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}] (\theta'')) d\mathcal{P}'(\theta') d\mathcal{P}''(\theta'') \quad . \quad (5.17)$$

En prenant en compte l'équation (5.13), il peut être déduit que

$$E\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t)\} = 0 \quad . \quad (5.18)$$

et par conséquent, le processus stochastique  $\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t)$  est centré.

2. *Fonction d'autocorellation.* La fonction d'autocorellation du processus stochastique  $\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  est telle que, pour chaque instant  $t$  et  $\tau$  fixé dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} R_{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}}(t + \tau, t) &= E\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t + \tau) \tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t)^T\} \\ &= \int_{\Theta'} \int_{\Theta''} \tilde{\mathbf{F}}(t + \tau, \theta', [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}] (\theta'')) \tilde{\mathbf{F}}(t, \theta', [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}] (\theta''))^T d\mathcal{P}'(\theta') d\mathcal{P}''(\theta'') \quad . \end{aligned} \quad (5.19)$$

En prenant en compte l'équation (5.14), on déduit que

$$R_{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}}(t + \tau, t) = \int_{\Theta''} [R_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tau, [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}] (\theta''))] d\mathcal{P}''(\theta'') \quad . \quad (5.20)$$

Par conséquent, pour chaque  $\tau$  dans  $\mathbb{R}$ , on a

$$R_{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}}(\tau) = E\{[R_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tau, [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}})]\} \quad . \quad (5.21)$$

3. *Stationarité.* Etant donné que la fonction moyenne du processus du second ordre  $\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  est indépendant de  $t$  (processus centré) et que sa fonction d'autocorrelation ne dépend que de  $\tau$ , on peut conclure que le processus stochastique  $\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  est stationnaire en moyenne d'ordre deux. Mais le processus stochastique n'étant pas Gaussien, sa stationarité en moyenne d'ordre deux n'entraîne pas sa stationarité. Cependant, étant donné que la fonction de densité de probabilité de la matrice aléatoire  $[\mathbf{G}_m]$  de l'équation (5.8) ne dépend pas du temps, le processus stochastique  $\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  est stationnaire.

4. *Fonction de densité spectrale.* La fonction de densité spectrale à valeur matricielle  $[S_{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}}]$  du processus stochastique  $\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  est telle que, pour chaque  $\tau$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$R_{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega\tau} [S_{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}}(\omega)] d\omega \quad . \quad (5.22)$$

En utilisant les équations (5.20) et (5.15), on obtient

$$R_{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}}(\tau) = \int_{\Theta''} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega\tau} [S_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega, \theta'')] d\omega d\mathcal{P}''(\theta'') = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega\tau} E\{[S_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)]\} d\omega \quad (5.23)$$

Enfin, en utilisant l'équations (5.4), on obtient

$$R_{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega\tau} [S_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)] d\omega \quad , \quad (5.24)$$

ce qui prouve que

$$[S_{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}}(\omega)] = E\{[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)]\} = [\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)] \quad . \quad (5.25)$$

Cette dernière équation montre que pour chaque  $\omega \in \mathbb{R}$ , la matrice  $[S_{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}}(\omega)]$  est hermitienne définie positive. En prenant en compte les équations (5.21) et (5.25) et le fait que  $[\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}]$  soit une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$ , on peut déduire que

$$E\{\|\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t)\|^2\} = tr \int_{\mathbb{R}} [\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)] d\omega < +\infty \quad . \quad (5.26)$$

ce qui montre bien que  $\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  est un processus stochastique du second ordre.

5. *Causalité, densité de probabilité.* A partir des équations (4.9) et (5.25), on peut déduire que le processus stochastique  $\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  est physiquement réalisable (causal). Pour  $\mathcal{P}''$ -presque tout  $\theta''$  dans  $\Theta''$ , le processus stochastique  $\{\tilde{\mathbf{F}}(t, [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}] (\theta'')), t \in \mathbb{R}\}$  est gaussien mais le processus stochastique  $\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  n'a aucune raison d'être gaussien.

## 5.4 Générateur de trajectoires indépendantes.

Le problème stochastique défini au paragraphe 4.3 va être résolu par la méthode de simulation de Monte Carlo. Par conséquent, on a besoin de construire un générateur de trajectoires indépendantes du processus stochastique  $\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t), t \in \mathbb{R}\}$ , c'est-à-dire construire pour tout  $(\theta', \theta'') \in \Theta' \times \Theta''$ , la trajectoire  $\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t, \theta', \theta''), t \in \mathbb{R}\}$  qui peut, en prenant en compte l'équation (5.3), se réécrire  $\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t, \theta', \theta'') = \tilde{\mathbf{F}}(t, \theta'; [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}] (\theta''))$ . Cette dernière équation montre que la génération de trajectoires indépendantes se fait en deux temps :

1. *Construction de réalisations indépendantes de la fonction aléatoire  $[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}]$ .*  
Les réalisations indépendantes de la fonction aléatoire  $[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}]$  sont construites en utilisant l'équation (5.8) et la représentation algébrique de la matrice

aléatoire  $[\mathbf{G}_m]$  appartenant à l'ensemble  $SG^+$  et qui est indépendante de  $\omega$ . Sa représentation algébrique est identique à celle rapellée au paragraphe 3.1, il suffit juste d'adapter la dimension ( $m$  au lieu  $n_q^A$ ) et le paramètre de dispersion est cette fois noté  $\delta_F$ . Ce paramètre de dispersion est défini dans l'équation (5.10).

2. *Construction de réalisations indépendantes de trajectoires du processus stochastique*  $\{\tilde{\mathbf{F}}(t; [S]), t \in \mathbb{R}\}$ . Pour une fonction de densité spectrale  $\omega \mapsto [S(\omega)] = [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega, \theta'')]$  donnée, nous devons construire des trajectoires indépendantes  $\{\tilde{\mathbf{F}}(t, \theta'; [S]), t \in \mathbb{R}\}$  du processus stochastique du second ordre stationnaire centré Gaussien  $\{\tilde{\mathbf{F}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  pour lequel la fonction de densité spectrale de puissance est  $\{[S(\omega)], \omega \in \mathbb{R}\}$ . La simulation numérique de réalisations indépendantes  $\{\tilde{\mathbf{F}}(t, \theta'; [S]), t \in \mathbb{R}\}$  pour  $\theta' \in \Theta'$  peut facilement être réalisée en utilisant les mêmes algorithmes que ceux expliqués au paragraphe 4.2.

## 5.5 Equation stochastique et simulation des réponses stochastiques stationnaires.

Dans les équations (4.2), (4.14), (4.16) et (4.17), le processus stochastique  $\tilde{\mathbf{F}}(t)$  est remplacé par le processus stochastique  $\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t)$  incluant la prise en compte des incertitudes. Alors, pour tout  $(\theta, \theta', \theta'') \in \Theta \times \Theta' \times \Theta''$ , le processus stochastique stationnaire  $\{\mathbf{Z}_s(t, \theta, \theta', \theta''), t \in \mathbb{R}\}$  est tel que  $\mathbf{Z}_s(t, \theta, \theta', \theta'') = \text{Proj}'([H]\mathbf{Q}_s(t, \theta, \theta', \theta''))$ , où le processus stochastique stationnaire  $\{\mathbf{Q}_s(t, \theta, \theta', \theta''), t \in \mathbb{R}\}$  est tel que, pour chaque instant  $t$  dans  $\mathbb{R}$ , on ait

$$\begin{aligned} & [\mathbf{M}(\theta)]\ddot{\mathbf{Q}}_s(t, \theta, \theta', \theta'') + [\mathbf{D}(\theta)]\dot{\mathbf{Q}}_s(t, \theta, \theta', \theta'') + [\mathbf{K}(\theta)]\mathbf{Q}_s(t, \theta, \theta', \theta'') \\ & + \mathbf{f}^{NL}(\mathbf{Q}_s(t, \theta, \theta', \theta''), \dot{\mathbf{Q}}_s(t, \theta, \theta', \theta'')) = [H]^T \text{Lift}(\tilde{\mathbf{F}}(t, \theta'; [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}] (\theta''))) \quad . \end{aligned} \quad (5.27)$$

On suppose que le processus stochastique  $\{\mathbf{Z}_s(t, \theta, \theta', \theta''), t \in \mathbb{R}\}$  défini sur l'espace probabilisé  $(\Theta', \mathcal{T}', \mathcal{P}')$  est du second ordre, stationnaire, centré et continu en m.o.d..

Pour tout  $\theta \in \Theta$  et tout  $\theta'' \in \Theta''$ , générant  $\nu_{\theta'}$  trajectoires indépendantes du processus stochastique  $\{\tilde{\mathbf{F}}(t, \cdot; [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}] (\theta'')), t \in \mathbb{R}\}$  trajectoires indépendantes du processus stochastique  $\{\mathbf{Z}_s(t, \theta, \theta''), t \in \mathbb{R}\}$  peuvent alors être calculées et la fonction à valeur matricielle de densité spectrale  $\{[\mathbf{S}_{\mathbf{Z}_s}(\omega, \theta, \theta'')], \omega \in \mathbb{R}\}$  peut alors être estimée par la méthode du périodogramme (voir le paragraphe 4.3). Générant  $\nu_{\theta, \theta''}$  réalisations indépendantes des matrices aléatoires  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{D}]$  et  $[\mathbf{K}]$  et de la fonction aléatoire de densité spectrale  $[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}]$ , la fonction de densité spectrale  $[\mathbf{S}_{\mathbf{Z}_s}]$  est estimée, pour tout  $\omega \in \mathcal{B} = [-\omega_{max}, \omega_{max}]$ , par

$$[\mathbf{S}_{\mathbf{Z}_s}^{T, \nu_{\theta, \theta''}, \nu_{\theta'}}(\omega)] = \frac{1}{\nu_{\theta, \theta''}} \sum_{i=1}^{\nu_{\theta, \theta''}} [\mathbf{S}_{\mathbf{Z}_s}^{T, \nu_{\theta'}}(\omega, \theta_i, \theta'')] \quad , \quad (5.28)$$

où la variable aléatoire  $[\mathbf{S}_{\mathbf{Z}_s}^{T, \nu_{\theta'}}(\omega, \theta, \theta'')]$  est telle que pour tout  $\omega \in [-\omega_{max}, \omega_{max}]$ ,

$$[\mathbf{S}_{\mathbf{Z}_s}^{T, \nu_{\theta'}}(\omega, \theta, \theta'')] = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\nu_{\theta'}} \sum_{i=1}^{\nu_{\theta'}} \widehat{\mathbf{Z}}_s^T(\omega, \theta, \theta'_i, \theta'') \widehat{\mathbf{Z}}_s^T(\omega, \theta, \theta'_i, \theta'')^* \quad . \quad (5.29)$$

La variable aléatoire  $\theta' \mapsto \widehat{\mathbf{Z}}_s^T(\omega, \theta, \theta', \theta'')$  est définie, pour  $\theta' \in \Theta'$ , par

$$\widehat{\mathbf{Z}}_s^T(\omega, \theta, \theta', \theta'') = \int_0^T W_T(t) \mathbf{Z}_s(t, \theta, \theta', \theta'') e^{-i\omega t} dt \quad , \quad (5.30)$$

où  $W_T$  est la fenêtre temporelle. La convergence en m.o.d. de l'estimateur statistique  $[\mathbf{S}_{\mathbf{Z}_s}^{T, \nu_{\theta, \theta''}, \nu_{\theta'}}(\omega)]$  est contrôlée vis à vis du nombre  $\nu_{\theta, \theta''}$  de réalisations indépendantes des matrices aléatoires  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{D}]$  et  $[\mathbf{K}]$  et de la fonction aléatoire de densité spectrale  $[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}]$ , en introduisant la fonction

$$\nu_{\theta, \theta''} \mapsto \text{conv}_3(\nu_{\theta, \theta''}) = \frac{1}{\nu_{\theta, \theta''}} \sum_{i=1}^{\nu_{\theta, \theta''}} \int_{\mathcal{B}} \|[\mathbf{S}_{\mathbf{Z}_s}^{T, \nu_{\theta'}}(\omega, \theta_i, \theta'')]\|_F^2 d\omega \quad . \quad (5.31)$$

Dans la suite, nous considérons que les nombres de réalisations  $\nu_{\theta, \theta''}$  et  $\nu_{\theta'}$  ainsi que l'horizon temporelle  $T$  sont suffisamment grands pour négliger le biais et la variance de cet estimateur. Nous confondrons donc la fonction de densité spectrale  $[\mathbf{S}_{\mathbf{Z}_s}(\omega)]$  et son estimateur  $[\mathbf{S}_{\mathbf{Z}_s}^{T, \nu_{\theta, \theta''}, \nu_{\theta'}}(\omega)]$ .

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a introduit un processus stochastique non gaussien construit à partir d'un processus stochastique du second ordre, centré, stationnaire, gaussien. Ce processus introduit un espace probabilisé complémentaire et permet, comme nous le verrons dans la chapitre suivant, de prendre en compte les incertitudes de modélisation sur le chargement aléatoire améliorant ainsi la vraisemblance des mesures expérimentales. Sa mise en oeuvre est très simple et des trajectoires indépendantes de ce nouveau processus peuvent facilement être générée. Le chapitre suivant est consacré à l'identification du chargement aléatoire modélisé ici en utilisant des mesures expérimentales et le modèle simplifié stochastique.



# Chapitre 6

## Identification du chargement stochastique incertain.

Ce chapitre est dédié à l'identification du chargement stochastique incertain  $\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  défini et étudié au chapitre 5. Cette identification utilise les réponses aléatoires du modèle simplifié stochastique défini dans le chapitre 3 excité par le chargement stochastique incertain  $\{\mathbf{F}^{\text{unc}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  qui est défini par

$$\mathbf{F}^{\text{unc}}(t) = \text{Lift}\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t) \quad , \quad (6.1)$$

où Lift est l'opérateur défini au paragraphe 4.1. Ce chargement stochastique incertain  $\mathbf{F}^{\text{unc}}(t)$  doit être identifié en présence d'incertitudes sur le sous-système linéaire  $\Omega^A$ . Le chargement stochastique  $\mathbf{F}^{\text{unc}}(t)$  ne dépend que de la valeur moyenne  $[\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)]$  de la fonction aléatoire de densité spectrale et du paramètre  $\delta_F$  qui contrôle le niveau d'incertitude du chargement stochastique. La méthode d'identification utilisée combine la méthode des moments (ordre 1 et ordre 2) et la méthode du maximum de vraisemblance. Dans un premier temps, on identifie la valeur moyenne  $[\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)]$  de la fonction aléatoire de densité spectrale, ce qui revient à identifier le chargement stochastique  $\mathbf{F}(t)$  défini au chapitre 4. Puis dans un second temps, on identifie le paramètre de dispersion  $\delta_F$  par la méthode du maximum de vraisemblance. Cha-

cune de ces deux étapes d'identification nécessite la construction de fonctions coût appropriées pour lesquels il faut à chaque fois définir l'observation.

## 6.1 Identification de la valeur moyenne de la fonction aléatoire de densité spectrale du chargement stochastique incertain.

La valeur moyenne  $[\underline{S}_{\mathbf{F}}]$  de la fonction aléatoire de densité spectrale  $[\mathbf{S}_{\mathbf{F}}]$  est identifiée indépendamment du paramètre de dispersion  $\delta_F$ . Il faut donc construire une fonction coût qui varie pas ou très peu en fonction de la valeur du paramètre de dispersion  $\delta_F$ , ce qui est possible, comme nous le verrons, en utilisant la propriété (5.4).

### 6.1.1 Définition de l'observation.

Pour identifier la valeur moyenne  $[\underline{S}_{\mathbf{F}}]$  de la fonction aléatoire de densité spectrale  $[\mathbf{S}_{\mathbf{F}}]$ , on utilise l'équation (5.27). L'observation permettant l'identification de la fonction  $[\underline{S}_{\mathbf{F}}(\omega)]$  est la fonction de densité spectrale  $[S_{\mathbf{Z}_s}]$  qui est estimée en utilisant l'équation (5.28). Afin de justifier ce choix pour l'observation, considérons le modèle simplifié stochastique linéarisé (par exemple, en remplaçant des butées élastiques par des ressorts équivalents). Considérons alors le filtre linéaire associé à l'équation (5.27) linéarisée d'entrée  $\mathbf{f}$  et de sortie  $\mathbf{q}$  tel que les transformées de Fourier  $\widehat{\mathbf{f}}(\omega)$  et  $\widehat{\mathbf{q}}(\omega)$ , vérifient, pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} (-\omega^2[\mathbf{M}^l(\theta)] + i\omega[\mathbf{D}^l(\theta)] + [\mathbf{K}^l(\theta)])\widehat{\mathbf{q}}(\omega) \\ = [\mathbf{A}^l(\omega, \theta)]\widehat{\mathbf{q}}(\omega) = [H^l]^T \text{Lift}(\widehat{\mathbf{f}}(\omega)) \quad , \end{aligned} \tag{6.2}$$

où matrices  $[\mathbf{M}^l(\theta)]$ ,  $[\mathbf{D}^l(\theta)]$  et  $[\mathbf{K}^l(\theta)]$  sont des réalisations des matrices de masse, d'amortissement et de raideur du modèle simplifié stochastique linéarisé. La matrice  $[H^l]$  est la matrice des déformées modales pour le modèle simplifié stochastique linéarisé. En prenant en compte les équations (4.14) et (4.17), la transformée de

Fourier  $\widehat{\mathbf{z}}(\omega) = \text{Proj}'(\widehat{\mathbf{u}}(\omega)) = \text{Proj}'([H^l]\widehat{\mathbf{q}}(\omega))$  s'écrit, pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{z}}(\omega) &= (\text{Proj}'[H^l][\mathbf{A}^l(\omega, \theta)]^{-1}[H^l]^T \text{Lift}(\widehat{\mathbf{f}}(\omega))) \\ &= [\mathbf{O}(\omega, \theta)]\widehat{\mathbf{f}}(\omega) \quad .\end{aligned}\tag{6.3}$$

où  $[\mathbf{O}(\omega, \theta)]$  est la fonction de réponse en fréquence à valeurs matricielles de dimension  $(\mu, m)$ . La fonction  $[\mathbf{O}(\omega, \theta)]$  étant de carré intégrable, la fonction à valeur matricielle de densité spectrale  $\{[\mathbf{S}]_{\mathbf{Z}_s^l}(\omega, \theta, \theta''), \omega \in \mathbb{R}\}$  est donnée par la relation linéaire (voir [96])

$$[\mathbf{S}]_{\mathbf{Z}_s^l}(\omega, \theta, \theta'') = [\mathbf{O}(\omega, \theta)][\mathbf{S}_{\widehat{\mathbf{F}}}(\omega, \theta'')][\mathbf{O}(\omega, \theta)]^* \quad , \forall \omega \in \mathbb{R} \quad .\tag{6.4}$$

La moyenne  $[S_{\mathbf{Z}_s^l}(\omega)]$  est donnée par

$$[S_{\mathbf{Z}_s^l}(\omega)] = E\{[\widehat{\mathbf{S}}]_{\mathbf{Z}_s}(\omega)\} = \int_{\Theta} \int_{\Theta''} [\mathbf{S}]_{\mathbf{Z}_s^l}(\omega, \theta, \theta'') d\mathcal{P}(\theta) d\mathcal{P}''(\theta'') \quad , \forall \omega \in \mathbb{R} .\tag{6.5}$$

En prenant en compte l'équation (5.4), on obtient

$$[S_{\mathbf{Z}_s^l}(\omega)] = \int_{\Theta} [\mathbf{O}(\omega, \theta)][\underline{S}_{\widehat{\mathbf{F}}}(\omega)][\mathbf{O}(\omega, \theta)]^* d\mathcal{P}(\theta) \quad , \forall \omega \in \mathbb{R} \quad .\tag{6.6}$$

L'équation (6.6) montre que la fonction  $\{[S_{\mathbf{Z}_s^l}(\omega)], \omega \in \mathbb{R}\}$  ne dépend pas de la valeur du paramètre de dispersion  $\delta_F$ . L'introduction de forces non linéaires entraîne donc une dépendance faible de la fonction  $[S_{\mathbf{Z}_s}(\omega)]$  vis-à-vis de  $\delta_F$ . Cette propriété justifie le choix de l'observation.

### 6.1.2 Calcul d'une première approximation pour la valeur moyenne

La première étape de l'identification permet d'obtenir une approximation de la valeur moyenne  $[\underline{S}_{\widehat{\mathbf{F}}}]$  de la fonction aléatoire de densité spectrale  $[\mathbf{S}_{\widehat{\mathbf{F}}}]$ . Cette étape a deux objectifs. Le premier est d'obtenir l'allure de la fonction de densité spectrale du chargement aléatoire afin d'obtenir une représentation paramétrée de celle-ci.

Le deuxième objectif est de construire une approximation du niveau d'excitation afin, lors de la phase d'identification finale, de partir d'une valeur pas trop éloignée de la valeur optimale. Afin d'obtenir cette première approximation, le modèle simplifié stochastique non linéaire est linéarisé et nous nous basons sur la technique d'inversion linéaire utilisé par Granger dans [47]. Des mesures expérimentales sont disponibles. Elles peuvent être de plusieurs natures : déplacement, accélération, déformation, pression... Afin d'être le plus général possible, nous considérons le cas de mesures de déplacement. Soit  $\{\mathbf{Z}_s^{exp}(t) = (Z_{s,1}^{exp}(t), \dots, Z_{s,\mu}^{exp}(t)), t \in \mathbb{R}\}$  le processus stochastique stationnaire à valeurs dans  $\mathbb{R}^\mu$  qui est mesuré expérimentalement sur le système réel et correspondant à l'observation  $\{\mathbf{Z}_s(t), t \in \mathbb{R}\}$ . La fonction de densité spectrale à valeurs matricielle  $\{[S_{\mathbf{Z}_s^{exp}}(\omega)], \omega \in \mathbb{R}\}$  de ce processus stochastique peut alors être estimé par la méthode du périodogramme (voir le paragraphe 4.3). Reprenons, sans tenir compte des incertitudes sur le modèle du chargement stochastique, le modèle simplifié stochastique linéarisé dont la fonction de densité spectrale a été construit au paragraphe précédent. On a alors

$$[\mathbf{S}]_{\mathbf{Z}_s^l}(\omega, \theta) = [\mathbf{O}(\omega, \theta)][\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)][\mathbf{O}(\omega, \theta)]^* \quad , \forall \omega \in \mathbb{R} \quad . \quad (6.7)$$

Pour chaque  $\omega \in \mathbb{R}$ , on note  $[\mathbf{O}(\omega, \theta)]^{-1}$  l'inverse généralisé de la matrice  $[\mathbf{O}(\omega, \theta)]$  définie dans l'équation (6.3). Celui-ci est calculé via une décomposition en valeurs singulières (SVD, voir [46]). Alors, pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$  et tout  $\theta \in \Theta$ , l'équation (6.7) peut inversée au sens indiqué. On introduit alors la fonction aléatoire de densité spectrale à valeur matricielle  $[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)]$  qui est telle que, pour tout  $\theta \in \Theta$ , on a

$$[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega, \theta)] = [\mathbf{O}(\omega, \theta)]^{-1}[S_{\mathbf{Z}_s^{exp}}(\omega)][(\mathbf{O}(\omega, \theta))^{-1}]^* \quad , \forall \omega \in \mathbb{R} \quad . \quad (6.8)$$

Cette relation n'est pas "l'inversion" de la relation (6.7). Générant  $\nu_\theta$  réalisations indépendantes des matrices aléatoires  $[\mathbf{M}^l]$ ,  $[\mathbf{D}^l]$  et  $[\mathbf{K}^l]$ , une première approximation de la fonction de densité spectrale  $[S_{\tilde{\mathbf{F}}}^{eb}(\omega)]$  est obtenue pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , par

$$[S_{\tilde{\mathbf{F}}}^{eb}(\omega)] = \frac{1}{\nu_\theta} \sum_{i=1}^{\nu_\theta} [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega, \theta_i)] \quad . \quad (6.9)$$

Cette méthode est simple à mettre en oeuvre mais est très approximative et pose des problèmes numériques. En effet, une erreur constante sur l'estimation de la fonction de densité spectrale des déplacements mesurés entraîne une erreur sur la fonction de densité spectrale des efforts qui croit en  $\omega^4$ . Pour palier ce problème, on pourrait utiliser des techniques de régularisation (voir [106]). Mais dans notre cas, on cherche juste à obtenir une première approximation du spectre des efforts; on peut donc utiliser cette méthode telle quelle.

### 6.1.3 Paramétrage de la valeur moyenne.

En pratique, l'identification de la fonction  $\omega \mapsto [\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)]$  est réalisée en introduisant une représentation paramétrée de cette fonction est donc réécrite

$$[\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)] = [S(\omega, \mathbf{r})] \quad , \quad \omega \in \mathbb{R} \quad , \quad \mathbf{r} \in \mathcal{C}_r \quad , \quad (6.10)$$

où  $\mathcal{C}_r \subset \mathbb{R}^{\nu_r}$  est le domaine admissible pour le paramètre  $\mathbf{r}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{\nu_r}$  avec  $\nu_r$  le nombre de paramètres scalaires à identifier et où  $(\omega, \mathbf{r}) \mapsto [S(\omega, \mathbf{r})]$  est une fonction donnée de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\nu_r}$  à valeurs dans  $\mathbb{M}_m^+(\mathbb{C})$ . Ce paramétrage peut être obtenue à partir de l'ébauche construite au paragraphe précédant. Ainsi, l'identification du chargement stochastique  $\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  consiste en l'identification du vecteur  $\mathbf{r}$ .

### 6.1.4 Construction de la fonction coût et identification.

Le paramètre  $\mathbf{r}$  est estimé en minimisant la distance entre l'observation fournie par le modèle simplifié stochastique et l'observation expérimentale par l'intermédiaire de la distance

$$D(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{B}} \|[S_{\mathbf{Z}_s}(\omega, \mathbf{r})] - [S_{\mathbf{Z}_s}^{\text{exp}}(\omega)]\|_F^2 d\omega \quad , \quad (6.11)$$

entre la fonction de densité spectrale calculée avec le modèle simplifié stochastique et celle estimée expérimentalement. Nous avons alors à résoudre le problème d'op-

timisation suivant

$$\mathbf{r}_{opt} = \arg \min_{\mathbf{r} \in \mathcal{C}_r} D(\mathbf{r}) \quad , \quad (6.12)$$

où  $\mathbf{r}_{opt}$  est la valeur optimale du vecteur  $\mathbf{r}$ . Le résultat de la construction d'une première approximation au paragraphe précédent est utilisé pour initialiser l'algorithme de minimisation de cette fonction coût. A cause des incertitudes de modélisation sur la chargement, même si le modèle simplifié était très bon et même après optimisation, cette fonction coût ne serait pas nulle. Il reste un écart irréductible entre les mesures et les prévisions du modèle simplifié dû à ces incertitudes. Ainsi, l'introduction d'un modèle d'incertitude sur le chargement permet de diminuer cet écart.

## 6.2 Identification du paramètre de dispersion.

### 6.2.1 Définition de l'observation.

Pour identifier le paramètre de dispersion  $\delta_F$ , on part de l'équation (5.27). On définit la variable aléatoire observation  $J_s$  telle que pour tout  $(\theta, \theta'') \in \Theta \times \Theta''$ , on ait

$$J_s(\theta, \theta'') = \int_{\mathcal{B}} \|\mathbf{S}_{\mathbf{Z}_s}^{\nu_{\theta'}}(\omega, \theta, \theta'')\|_F^2 d\omega \quad , \quad (6.13)$$

où la variable aléatoire  $[\mathbf{S}_{\mathbf{Z}_s}^{T, \nu_{\theta'}}(\omega, \theta, \theta'')]$  est définie par l'équation (5.29). Générant  $\nu_{\theta}$  réalisations indépendantes des matrices aléatoires  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{D}]$  et  $[\mathbf{K}]$  et  $\nu_{\theta''}$  trajectoires indépendantes du processus stochastique  $\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t; [\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}]$ ), la densité de probabilité  $x \mapsto p_{J_s}(x; \delta_F)$  de la variable aléatoire  $J_s$  par rapport à  $dx$  est estimée par la méthode de simulation de Monte Carlo (méthode de l'histogramme).

### 6.2.2 Construction de la fonction coût et identification.

Le paramètre de dispersion  $\delta_F$  est estimé en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance relative à la variable aléatoire  $J_s$  pour laquelle la valeur expérimentale  $J_s^{\text{exp}}$  telle que

$$J_s^{\text{exp}} = \int_{\mathcal{B}} \|[S_{\mathbf{Z}_s^{\text{exp}}}(\omega)]\|_F^2 d\omega \quad , \quad (6.14)$$

est calculée à partir de la mesure expérimentale  $\{\mathbf{Z}_s^{\text{exp}}(t), t \in \mathbb{R}\}$ . Nous avons ainsi à résoudre le problème d'optimisation suivant

$$\delta_F^{\text{opt}} = \arg \max_{\delta_F \in \mathcal{C}_{\delta_F}} (p_{J_s}(J_s^{\text{exp}}; \delta_F)) \quad , \quad (6.15)$$

où  $\delta_F^{\text{opt}}$  est la valeur optimale de la variable  $\delta_F$  et où  $\mathcal{C}_{\delta_F}$  est le domaine admissible pour le paramètre de dispersion  $\delta_F$ . On rappelle qu'une partie de la variabilité de l'observation  $J_s$  est due aux incertitudes dans le sous-système linéaire du modèle simplifié. La prise en compte des incertitudes de modèle pour le chargement augmente encore le domaine de variation de l'observation  $J_s$  permettant de rendre l'observation expérimentale la plus vraisemblable possible.

### 6.2.3 Prise en compte des erreurs de mesures.

Les mesures expérimentales sont souvent entachées d'erreurs liées notamment à la précision des instruments de mesures. Nous allons donc prendre en compte ces erreurs dans l'identification du paramètre de dispersion  $\delta_F$  en introduisant la variable aléatoire  $J_s^{\text{er}}$  qui est telle que

$$J_s^{\text{er}} = J_s + \mathcal{E} \quad , \quad (6.16)$$

où  $\mathcal{E}$  est une variable aléatoire scalaire de densité de probabilité  $e \mapsto p_{\mathcal{E}}(e)$  donnée et où  $J_s$  est la variable aléatoire observation définie dans l'équation (6.13). La densité

de probabilité  $y \mapsto p_{J_s^{\text{er}}}(y)$  de la variable aléatoire  $J_s^{\text{er}}$  est alors définie par

$$p_{J_s^{\text{er}}}(y; \delta_F) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{J_s^{\text{er}}|\mathcal{E}=e}(y|e; \delta_F) p_{\mathcal{E}}(e) de \quad , \quad (6.17)$$

où  $x \mapsto p_{J_s^{\text{er}}|\mathcal{E}=e}(y|e)$  est la densité de probabilité de la variable  $J_s^{\text{er}}$  sachant  $\mathcal{E} = e$ . En utilisant l'équation (6.16) cette densité de probabilité s'écrit

$$p_{J_s^{\text{er}}|\mathcal{E}=e}(y|e) = p_{J_s}(y - e) \quad , \quad (6.18)$$

où  $x \mapsto p_{J_s}(x)$  est la densité de probabilité de la variable aléatoire  $J_s$  introduite au paragraphe 6.2.1 et estimée par la méthode de simulation de Monte Carlo en utilisant le modèle simplifié stochastique. La densité de probabilité  $y \mapsto p_{J_s^{\text{er}}}(y)$  de la variable aléatoire  $J_s^{\text{er}}$  dépend ainsi du paramètre de dispersion  $\delta_F$  et se réécrit donc

$$p_{J_s^{\text{er}}}(y; \delta_F) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{J_s}(y - e; \delta_F) p_{\mathcal{E}}(e) de \quad . \quad (6.19)$$

En utilisant l'équation (6.15) on obtient le problème d'optimisation suivant

$$\delta_F^{\text{opt}} = \arg \max_{\delta_F \in \mathcal{C}_{\delta_F}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} p_{J_s}(J_s^{\text{exp}} - e; \delta_F) p_{\mathcal{E}}(e) de \right) \quad , \quad (6.20)$$

où  $\delta_F^{\text{opt}}$  est la valeur optimale de la variable  $\delta_F$ . L'intégrale présente dans cette fonction coût peut être estimée par la méthode de simulation de Monte Carlo. La coût numérique de cette estimation est très faible car la densité de probabilité de la variable aléatoire  $\mathcal{E}$  modélisant l'erreur est donnée. Pour  $\nu_e$  tirages de la variable aléatoire  $\mathcal{E}$ , le problème d'optimisation s'écrit donc

$$\delta_F^{\text{opt}} = \arg \max_{\delta_F \in \mathcal{C}_{\delta_F}} \left( \frac{1}{\nu_e} \sum_{i=1}^{\nu_e} p_{J_s}(J_s^{\text{exp}} - e_i; \delta_F) \right) \quad . \quad (6.21)$$

La variable aléatoire modélisant l'erreur est souvent modélisé par une variable Gaussienne centrée dont la variance est estimée par l'expérimentateur en fonction de la précision de la chaîne d'acquisition.

### 6.3 Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthodologie pour identifier complètement le chargement stochastique  $\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  incluant un modèle d'incertitude. Ce chapitre inclut également l'identification d'un processus stochastique du second ordre, stationnaire, Gaussien, centré sans modèle d'incertitude. En effet, la fonction de densité spectrale d'un tel processus peut être identifiée en utilisant la méthode présentée au paragraphe 6.2. Le chargement identifié dans ce chapitre sert de donnée d'entrée au modèle simplifié stochastique construit au chapitre 3 pour estimer de façon robuste les quantités d'intérêt.

# Chapitre 7

## Validation numérique sur un exemple simple.

Dans ce chapitre, la simulation numérique d'un exemple simple représentatif des systèmes industriels auxquels nous nous intéressons est présenté. Cette étude a pour but de valider les développements théoriques présentés dans les chapitres précédents. Les deux premiers paragraphes seront ainsi consacrés à la description du modèle de référence et du modèle simplifié stochastique pour cet exemple simple. Pour cet exemple, le modèle de référence correspond au modèle réel. Le modèle de référence permet donc de fournir des réponses expérimentales. La troisième partie est quand à elle consacrée à l'identification du chargement aléatoire.

### 7.1 Modèle de référence.

Pour cet exemple, la construction du modèle de référence a deux objectifs. Il sert d'abord de modèle expérimental et fournit donc des mesures expérimentales qui serviront d'observation pour l'identification du chargement stochastique. De plus, ce modèle sert à identifier le paramètre de dispersion qui sera introduit lors de la description du modèle simplifié stochastique.

### 7.1.1 Description du modèle de référence.

Le modèle de référence est un modèle filaire composée d'un sous-système linéaire et d'un sous-système non linéaire (voir Fig. 7.1). Le sous-système linéaire est composé de quatre poutres d'Euler parallèles et encastrés à leurs deux extrémités. Le sous-système non linéaire est composé d'une poutre d'Euler encadrée à ses extrémités et parallèle aux poutres du sous-système linéaire. De plus, le comportement de ce sous-système est rendu non linéaire par la présence de deux butées élastiques. Les cinq poutres du modèle de référence sont reliées entre elles par 3 grilles transversales, chacune de ces grilles étant modélisées par quatre ressorts transversaux. Ces grilles appartiennent au sous-système linéaire. Ainsi, l'interface

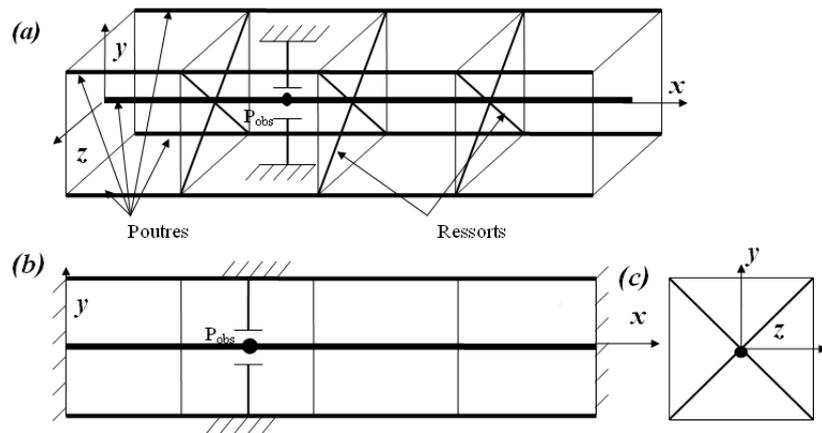


FIG. 7.1 – (a) Modèle de référence : Vue 3D. (b) Vue transversale. (c) Vue transversale dans le plan d'une grille : les 6 lignes diagonales représentent 12 ressorts.

de couplage entre le sous-système linéaire et le sous-système non linéaire est composé de trois points situés sur la fibre neutre du sous-système non linéaire. Chaque des poutres a une section circulaire constante de rayon  $0.5\text{ m}$ , d'épaisseur  $0.2\text{ m}$ , de longueur  $16\text{ m}$ , de masse volumique  $250\text{ kg/m}^3$ , de module d'Young  $450\text{ N/mm}^2$  et de taux de dissipation  $0.02$ . Le module d'Young de la poutre du sous-système non linéaire vaut  $750\text{ N/mm}^2$ . Les butées élastiques sont situées à  $6\text{ m}$  de l'extrémité gauche et pour chacune des butées, le jeu est de  $1.5 \times 10^{-6}\text{ m}$  et

la raideur de choc vaut  $10^8 N/m$  (voir Annexe C). La raideur de chaque ressort des grilles transversales vaut  $4 \times 10^7 N/m$ . Chacune des poutres est modélisée par huit éléments finis de poutres Euler de longueurs égales et par neuf noeuds. Les DDLs des noeuds d'extrémités de poutres sont bloqués. Les 12 ressorts des grilles transversales sont modélisés par 12 éléments ressorts. Nous nous intéressons uniquement au déplacement suivant la direction  $y$  pour le plan  $xy$  de la poutre du sous-système non linéaire (voir Fig. 7.1). Par conséquent, chaque poutre a 14 DDLs de translation suivant  $y$  et de rotation suivant  $z$ . La bande d'analyse fréquentielle pour notre étude est  $\mathcal{B} = [-100, 100] Hz$ . Dans cette bande  $\mathcal{B}$ , le modèle référence (sans les butées élastiques) possède 21 fréquences propres. Les trois premières fréquences propres sont  $5.78 Hz$ ,  $15.9 Hz$  et  $31.1 Hz$  et correspondent à des modes pour lesquels les déplacements transversaux des cinq poutres sont en phase (modes d'ensemble).

### 7.1.2 Description du chargement réel appliqué au modèle de référence et calcul de réponses stationnaires

Le modèle de référence considéré ici comme le modèle réel est excité par un chargement considéré comme le chargement réel. Ce chargement consiste en 7 forces transversales de direction  $y$  appliquées sur les 7 noeuds libres du sous-système non linéaire. Le vecteur  $\mathbf{f}^{\text{ref}}$  représentant le chargement appliqué au modèle de référence contient ces 7 forces. Alors le chargement  $\{\mathbf{f}^{\text{ref}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  est modélisé par un processus stationnaire, du second ordre, centré, Gaussien pour lequel la fonction de densité spectrale à valeurs matricielles  $[S_{\mathbf{f}^{\text{ref}}}(\omega)]$  est telle que

1. pour tout  $i \in \{1, \dots, 7\}$ ,  $[S_{\mathbf{f}^{\text{ref}}}(\omega)]_{ii}$  est une fonction constante égale à  $1.3 N^2/Hz$  sur la bande d'analyse  $\mathcal{B} = [-100, 100] Hz$  et est nulle ailleurs.
2. pour tout  $i$  et  $j$  dans  $\{1, \dots, 7\}$ ,  $|[S_{\mathbf{f}^{\text{ref}}}(\omega)]_{ij}|^2 = \gamma_{ij}(\omega)[S_{\mathbf{f}^{\text{ref}}}(\omega)]_{ii}[S_{\mathbf{f}^{\text{ref}}}(\omega)]_{jj}$  où  $\gamma_{ij}(\omega) = \exp(-|x_i - x_j|/\lambda)$  où  $|x_i - x_j|$  est la distance séparant deux points excités et où  $\lambda = 4 m$  est la longueur de référence liée à longueur de corrélation.

La réponse stationnaire est calculée en utilisant un schéma d'intégration explicite d'Euler (voir Annexe B) avec un pas de  $0.65 \times 10^{-3} s$  (cette valeur, en relation avec

la plus grande fréquence propre pour le modèle de référence, assure la stabilité du schéma). On veut une résolution fréquentielle de  $0.5 \text{ Hz}$  donc l'horizon temporelle  $T$  doit être supérieure à  $1/0.5 = 2 \text{ s}$ . On choisit  $T = 2.2 \text{ s}$ . Le calcul est réalisé pour 100 trajectoires indépendantes du processus stochastique  $\{\mathbf{f}^{\text{ref}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  (paragraphe 4.2). Ce qui revient à effectuer le calcul sur l'intervalle temporel  $[0, 220] \text{ s}$  (en procédant ainsi, les trajectoires obtenues par découpage de la longue trajectoire ne sont pas indépendantes mais on peut montrer que l'erreur affectant ainsi l'estimation des moments d'ordre deux est négligeable [96]). Le point  $P_{obs}$  désigne le point d'impact du sous-système non linéaire. La fonction de densité spectrale de puissance (DSP) du déplacement transversal stochastique et de la rotation stochastique au point  $P_{obs}$  est estimée en utilisant la méthode du périodogramme (voir Fig. 7.2 et Fig. 7.3). Sur ces figures, les trois premiers pics correspondent aux modes

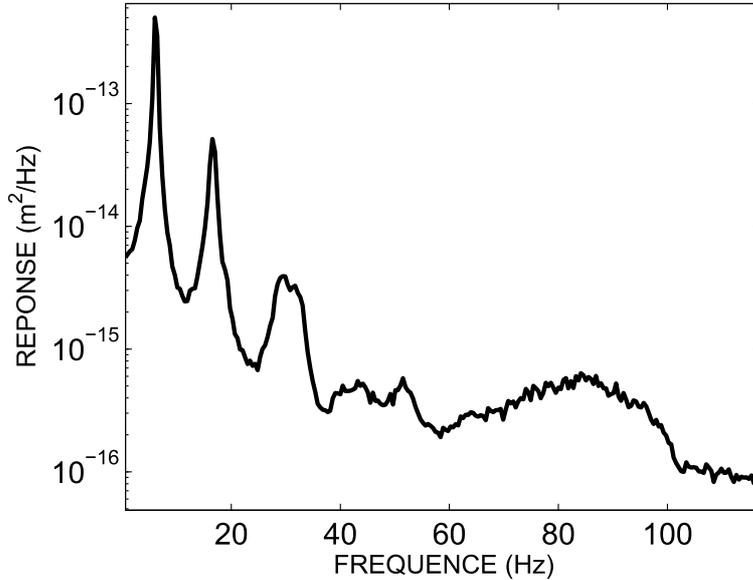


FIG. 7.2 – Fonction de densité spectrale de puissance du déplacement transversal stochastique au point  $P_{obs}$  pour le modèle de référence.

d'ensemble. Sur la courbe correspondant au déplacement transversal, la bande  $\mathcal{B}$  n'est pas clairement démarquée. Ce transport d'énergie en dehors de la bande  $\mathcal{B}$  est dû aux non-linéarités localisées. La convergence de l'estimation de la DSP pour le déplacement transversal stochastique  $\{S_{Z_{choc}}^{\nu_{ref}}(\omega), \omega \in \mathcal{B}\}$  au point  $P_{obs}$  en fonction

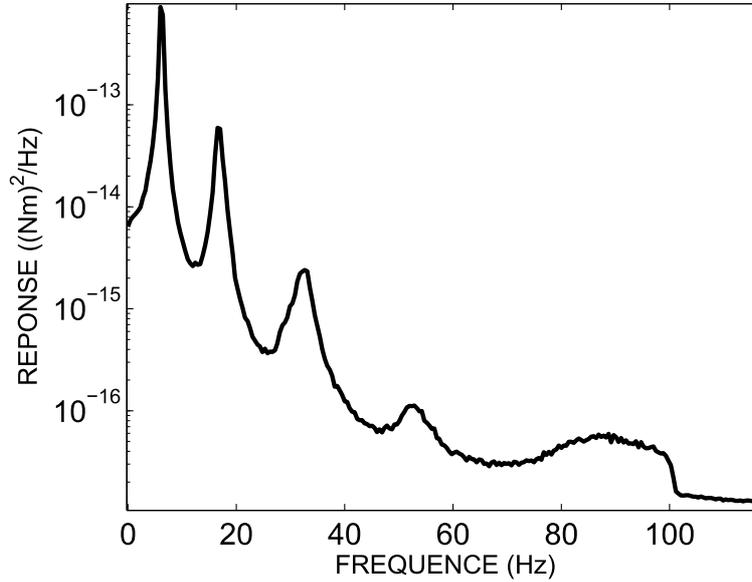


FIG. 7.3 – Fonction de densité spectrale de puissance de la rotation stochastique au point  $P_{obs}$  pour le modèle de référence.

du nombre  $\nu_{ref}$  de trajectoires calculées est représentée sur la Fig. 7.4. Cette figure représente la fonction  $\{\nu_{ref} \mapsto \int_{\mathcal{B}} |S_{Z_{choc}}^{\nu_{ref}}(\omega)|\}$ . Une bonne convergence est atteinte pour 50 réalisations.

## 7.2 Modèle simplifié.

Le modèle de référence est remplacé par un modèle simplifié qui permet de prédire le comportement dynamique de la structure étudiée. Ce modèle simplifié sera aussi utilisé pour identifier le chargement appliqué.

### 7.2.1 Description du modèle simplifié moyen.

Le modèle simplifié moyen est dérivé du modèle de référence. Pour les deux modèles, la partie non linéaire est la même. C'est à dire que le sous-système non linéaire du modèle simplifié moyen est composé d'une poutre d'Euler encastée à ses extrémités dont le comportement est rendu non linéaire par la

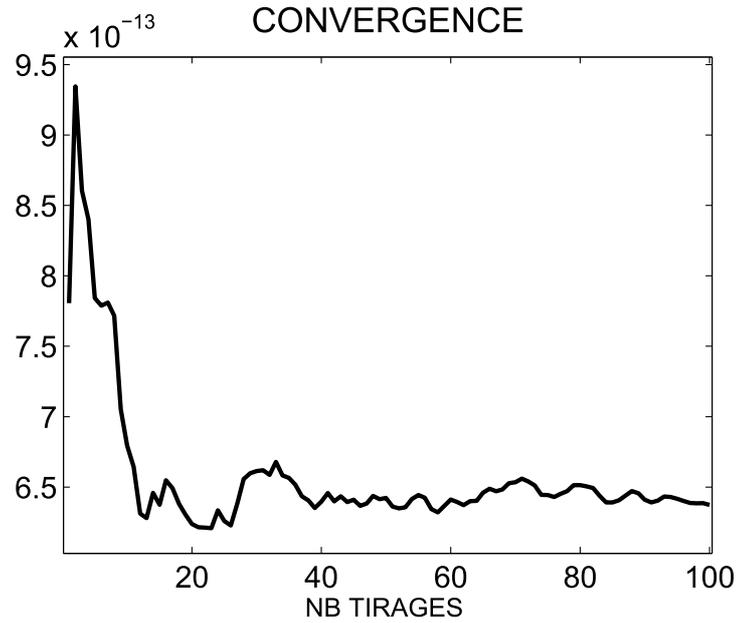


FIG. 7.4 – Convergence de l'estimation de la DSP du déplacement transversal stochastique au point  $P_{obs}$  en fonction du nombre de réalisations pour le modèle de référence.

présence de deux butées élastiques. En ce qui concerne le sous-système linéaire, les quatre poutres d'Euler du sous-système linéaire du modèle de référence sont remplacées par une poutre d'Euler équivalente (voir Fig. 7.5). La section de la

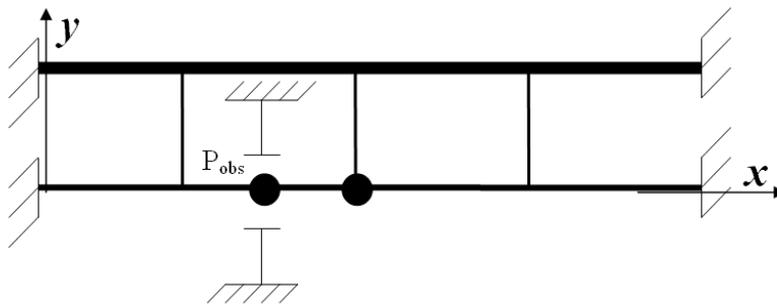


FIG. 7.5 – Modèle simplifié.

poutre équivalente est définie de façon arbitraire et est choisie circulaire à rayon constant valant  $0.5\text{ m}$ , d'épaisseur  $0.2\text{ m}$ , de longueur  $16\text{ m}$ . Son module d'Young vaut  $4 * 450 = 1800\text{ N/mm}^2$  et sa masse volumique vaut  $4 * 250 = 1000\text{ kg/m}^3$ .

Comme les grilles ne tournent pas, les valeurs choisies pour le module d'Young et la masse volumique sont telles que l'énergie de déformation et l'énergie cinétique du sous-système linéaire pour le modèle de référence et pour le modèle simplifié moyen sont les mêmes. Dans cette bande d'analyse  $\mathcal{B}$ , le modèle simplifié moyen (sans les butées élastiques) possède 10 fréquences propres. Les trois premières fréquences propres (modes d'ensemble) pour le modèle simplifié sont 5.74 Hz , 15.3 Hz et 30.8 Hz qui sont à comparer avec les valeurs 5.78 Hz , 15.9 Hz et 31.1 Hz calculées pour le modèle de référence. Il est à noter que le recalage du modèle simplifié peut se faire uniquement sur les modes d'ensembles, ce qui entraîne des incertitudes de modélisation qui doivent être prises en compte. Bien entendu, on aurait pu construire un modèle plus sophistiqué rendant mieux compte du comportement dynamique du modèle de référence (par exemple un modèle où le sous-système linéaire serait condensé dynamiquement au niveau de son interface avec le sous-système non linéaire, voir Annexe A) mais l'objectif ici est de partir d'un modèle simple et de prendre en compte les incertitudes introduites lors de la simplification.

### 7.2.2 Comparaisons des réponses stationnaires pour le modèle de référence et pour le modèle simplifié moyen.

Le modèle de chargement utilisé pour le modèle de référence est repris et appliqué sur le sous-système non linéaire du modèle simplifié moyen. La réponse stationnaire est calculée en utilisant les mêmes paramètres de calcul que ceux utilisés pour le modèle de référence. La fonction de densité spectrale de puissance (DSP) du déplacement transversal stochastique et de la rotation stochastique au point  $P_{obs}$  est estimée en utilisant la méthode du périodogramme. La figure 7.6 montre la convergence de l'estimation de la DSP pour le déplacement transversal stochastique au point  $P_{obs}$  en fonction du nombre de trajectoires calculées. Cette figure représente la fonction  $\{\nu_{\theta'} \mapsto \text{conv}_1(\nu_{\theta'})\}$  de l'équation (4.24). Une bonne convergence est atteinte pour 50 réalisations. Les fonctions de densité spectrale de puissance (DSP) du déplacement transversal stochastique et de la rotation stochastique au point  $P_{obs}$

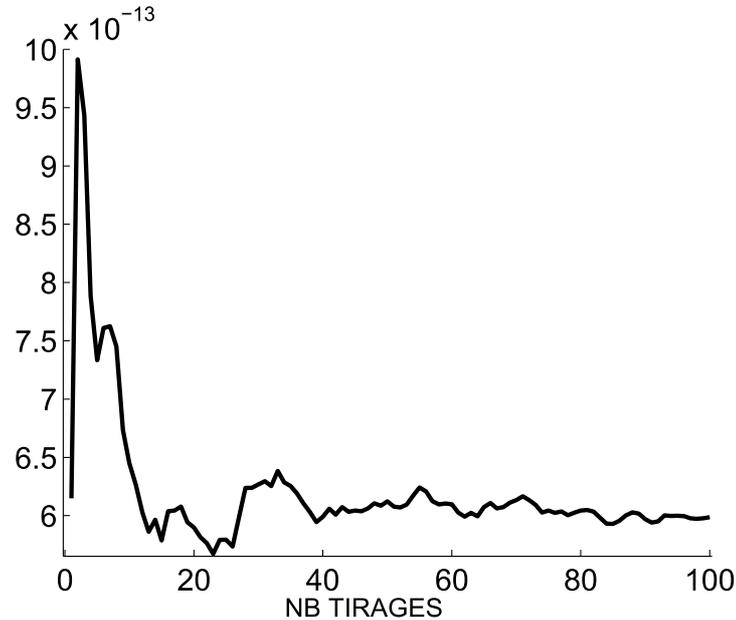


FIG. 7.6 – Convergence de l’estimation de la DSP du déplacement transversal stochastique au point  $P_{obs}$  en fonction du nombre de réalisations pour le modèle simplifié.

pour le modèle simplifié sont comparés à celles calculées pour le modèle de référence (voir Fig. 7.7 et Fig. 7.8). Sur ces figures, on peut voir que la prévision donnée par le modèle simplifié est bonne sur la bande de fréquence  $[0, 30]$   $Hz$  correspondant aux réponses des modes d’ensemble. Cependant, il y a des différences significatives sur la bande de fréquence  $[30, 100]$   $Hz$  induites par les incertitudes de modélisation. Ces incertitudes doivent être prises en compte afin d’étendre le domaine de validité du modèle simplifié sur la bande de fréquence  $[30, 100]$   $Hz$ .

### 7.2.3 Prise en compte des incertitudes et identification du paramètre de dispersion.

Le modèle probabiliste non paramétrique introduit dans le chapitre 3 pour la prise en compte des incertitudes de modèle est utilisé pour la matrice de raideur du sous-système linéaire du modèle simplifié. Ainsi, la dispersion introduite dans le modèle simplifié stochastique est contrôlée par le paramètre de dispersion  $\delta = (\delta_K^A)$ .

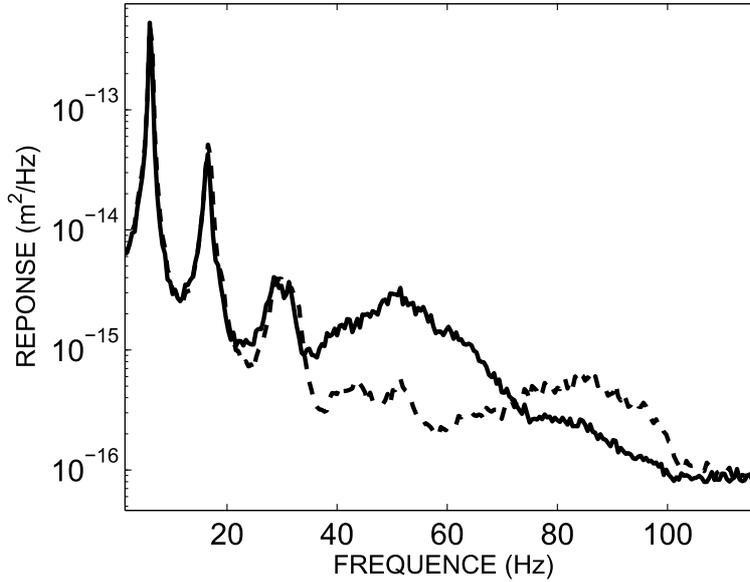


FIG. 7.7 – Fonction de densité spectrale de puissance du déplacement transversal stochastique au point  $P_{obs}$  : comparaison entre la réponse donnée par le modèle de référence (traits pointillés) et celle donnée par le modèle simplifié (traits pleins).

1. *Etude de sensibilité.* La sensibilité du déplacement transversal stochastique et de la rotation stochastique au point  $P_{obs}$  est étudiée vis à vis du paramètre de dispersion  $\delta$ . Les figures 7.9, 7.10 et 7.11 représentent les domaines de confiance à  $P_c = 0.95$  du déplacement transversal stochastique et de la rotation stochastique pour plusieurs valeurs de  $\delta$ . Ces domaines sont estimés pour 100 trajectoires calculées. On constate, comme on pouvait s'y attendre, que plus le paramètre de dispersion est grand, plus le domaine les domaines de confiance à  $P_c = 0.95$  est large. La convergence de l'estimation de la DSP pour le déplacement transversal stochastique  $\{S_{Z_{choc}}^{\nu_{\theta'}}(\omega), \omega \in \mathcal{B}\}$  au point  $P_{obs}$  en fonction du nombre  $\nu_{\theta}$  pour  $\nu_{\theta'}$  fixé à 50 et  $\delta_K^A = 0.3$  est représentée Fig. 7.12. Cette figure représente la fonction  $\{\nu_{\theta} \mapsto \text{conv}_2(\nu_{\theta})\}$  de l'équation (4.27). Une bonne convergence est atteinte pour 60 réalisations.
2. *Identification du paramètre de dispersion.* Le paramètre de dispersion  $\delta = (\delta_K^B)$  est identifié par la méthode du maximum de vraisemblance. Chaque fonction de densité de probabilité de l'équation (3.22) est estimée avec 200 réalisations

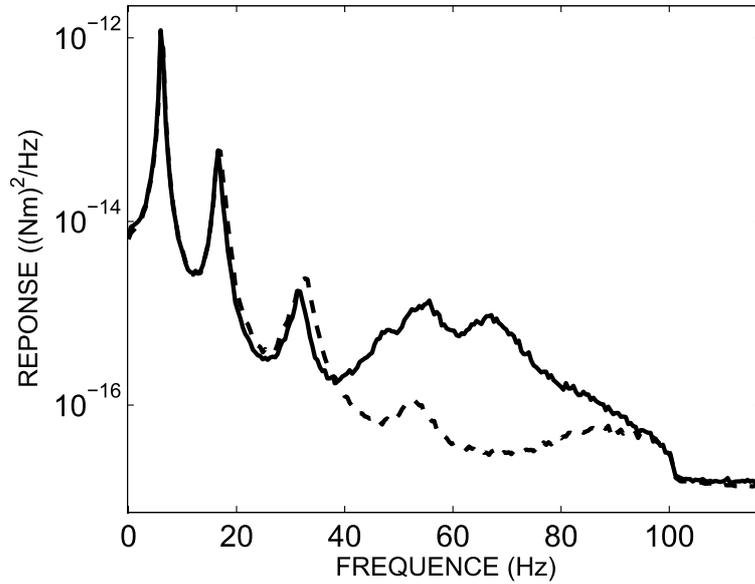


FIG. 7.8 – Fonction de densité spectrale de puissance de la rotation stochastique au point  $P_{obs}$  : comparaison entre la réponse donnée par le modèle de référence (traits pointillés) et celle donnée par le modèle simplifié (traits pleins).

de la variable aléatoire  $J$  calculées avec le modèle simplifié stochastique. La valeur  $J^{ref} = 7.57 \times 10^{-15}$  correspondante pour le modèle de référence est calculée en utilisant l'équation (1.18). La figure 7.13 représente la fonction de vraisemblance optimisée dans l'équation (3.23) avec  $C_{ad} = ]0, \sqrt{12/16}[$ . Le maximum est atteint pour  $\delta^{opt} = (0.2)$ . La fonction de densité de probabilité  $p_J(x, \delta = (0.2))$  de la variable aléatoire  $J$  est représentée sur la figure 7.14. Le niveau de densité de probabilité atteint pour  $J = J^{ref}$  est de  $1.5 \times 10^{14}$ . Pour estimer la qualité de l'identification, on peut par exemple calculer la probabilité  $P(J^{ref} \pm 5\%)$  qui est telle que  $P(J^{ref} \pm 5\%) = P(0.95 \times J^{ref} \leq J \leq 1.05 \times J^{ref}) = 0.14$ . L'observation pour le modèle simplifié moyen notée  $J^{moy}$  vaut  $11.92 \times 10^{-15}$ . On voit alors l'intérêt de la prise en compte des incertitudes de modèle pour le modèle simplifié. En effet, la prise en compte des incertitudes de modèle a permis d'augmenter l'espace des solutions et d'englober l'observation de référence  $J^{ref}$ . Ainsi, la probabilité  $P(J^{ref} \pm 5\%)$  est passée de 0 à 0.14. La fonction de répartition est représentée sur la figure

7.15. La figure 7.16 représente le domaine de confiance avec un niveau de probabilité  $P_c = 0.95$  de la fonction  $\{\omega \mapsto \|[\mathbf{Z}^A(\omega)]^{-1}\|_F^2\}$ . Le calcul est mené avec 200 réalisation indépendantes de la matrice aléatoire de raideur.

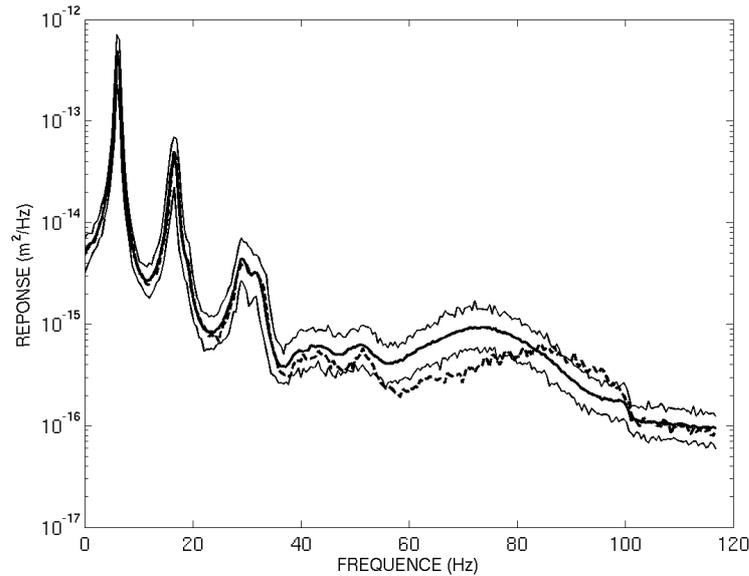


FIG. 7.9 – Fonction de densité spectrale de puissance du déplacement transversal stochastique au point  $P_{obs}$  : comparaison entre la réponse donnée par le modèle de référence (traits pointillés) et celle donnée par le modèle simplifié stochastique pour  $\delta_K^A = 0.1$  (traits pleins).

### 7.3 Construction et identification du chargement aléatoire.

On considère à présent que le chargement qui nous a permis de contruire les réponses expérimentales au paragraphe 7.1.2 est inconnu. Celui ci doit être identifié en utilisant le modèle simplifié stochastique ainsi que les réponses expérimentales fournies par le modèle de référence.

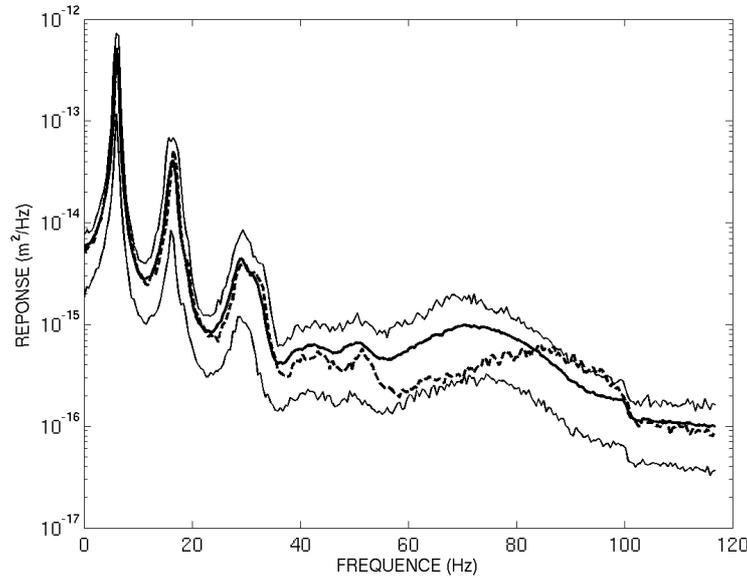


FIG. 7.10 – Fonction de densité spectrale de puissance du déplacement transversal stochastique au point  $P_{obs}$  : comparaison entre la réponse donnée par le modèle de référence (traits pointillés) et celle donnée par le modèle simplifié stochastique pour  $\delta_K^A = 0.2$  (traits pleins).

### 7.3.1 Modèle probabiliste des incertitudes pour le chargement aléatoire.

La première étape consiste en la construction d'un modèle mathématique pour la valeur moyenne  $[\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}]$  de la fonction aléatoire de densité spectrale  $[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}]$  introduite au chapitre 5. Afin d'en faciliter l'identification, celui-ci doit être choisi le plus simple possible. On a ainsi choisit de modéliser le chargement  $\tilde{\mathbf{F}}(t)$  par

$$\{\tilde{\mathbf{F}}(t) = (T(t), M(t)) \quad , \quad t \in \mathbb{R}\} \quad , \quad (7.1)$$

où  $T(t)$  est un effort transversal et  $M(t)$  est un moment appliqué au milieu de la poutre non linéaire (voir Fig. 7.17). Cette force et ce moment sont des processus stochastiques indépendants, stationnaires, du second-ordre, centrés, Gaussiens. Donc, ils sont complètement définis par leur fonction de densité spectrale de puissance  $[\underline{S}_{\mathbf{T}}(\omega)]$  et  $[\underline{S}_{\mathbf{M}}(\omega)]$ . La fonction de densité spectrale à valeurs matricielles pour le

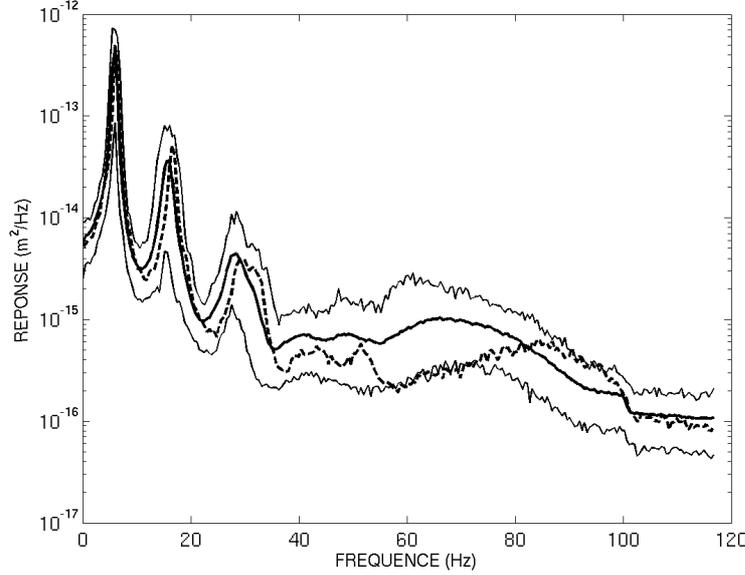


FIG. 7.11 – Fonction de densité spectrale de puissance du déplacement transversal stochastique au point  $P_{obs}$  : comparaison entre la réponse donnée par le modèle de référence (traits pointillés) et celle donnée par le modèle simplifié stochastique pour  $\delta_K^A = 0.3$  (traits pleins).

processus stochastique  $\{\tilde{\mathbf{F}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  est alors définie par

$$[\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)] = \begin{bmatrix} \underline{S}_{\mathbf{T}}(\omega) & 0 \\ 0 & \underline{S}_{\mathbf{M}}(\omega) \end{bmatrix}, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (7.2)$$

On suppose que la fonction  $\omega \mapsto [\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)]$  est constante dans la bande fréquentielle d'analyse  $\mathcal{B}$  et est telle que l'équation (4.7) est vérifiée. La seconde étape consiste, comme expliqué au chapitre 5, en la construction du processus stochastique  $\{\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  incluant le modèle probabiliste des incertitudes à partir du processus stochastique  $\{\tilde{\mathbf{F}}(t), t \in \mathbb{R}\}$ . Le processus stochastique "expérimental"  $\{\mathbf{Z}_s^{\text{exp}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  défini au paragraphe 6.1.3 est composé de  $\mu = 7$  déplacements stochastiques transversaux.

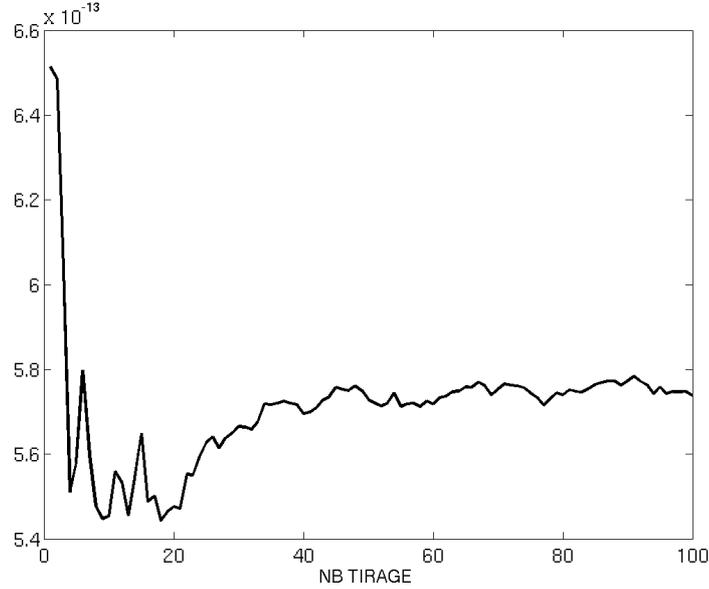


FIG. 7.12 – Convergence de l’estimation de la DSP pour le déplacement transversal stochastique au point  $P_{obs}$  en fonction du nombre  $\nu_\theta$ .

### 7.3.2 Identification du processus stochastique $\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t)$ .

Comme nous l’avons expliqué dans le chapitre 6, l’identification du processus stochastique  $\tilde{\mathbf{F}}^{\text{unc}}(t)$  s’effectue en deux étapes :

1. *Identification de la valeur moyenne  $[\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}]$  de la fonction aléatoire de densité spectrale  $[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}]$ .* Le paramétrage de la valeur moyenne s’effectue en utilisant l’équation (6.10). Ainsi la fonction  $\omega \mapsto [\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)]$  qui est constante dans la bande d’analyse  $\mathcal{B}$  peut se réécrire

$$[\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\omega)] = [S(\omega, \mathbf{r})] = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}, \quad \omega \in \mathcal{B}, \quad \mathbf{r} \in \mathcal{C}_r, \quad (7.3)$$

où l’on a définie l’intervalle admissible  $\mathcal{C}_r = \{\mathbf{r} = (r_1, r_2); r_1 > 0, r_2 > 0\}$ .

Le vecteur  $\mathbf{r}$  est identifié en utilisant la méthode Trial qui consiste à calculer la fonction coût  $D(\mathbf{r})$  introduite dans l’équation (6.11) pour 100 valeurs du vecteur  $\mathbf{r}$ . La figure 7.18 représente la fonction  $\mathbf{r} \mapsto D(\mathbf{r})$ . Sur

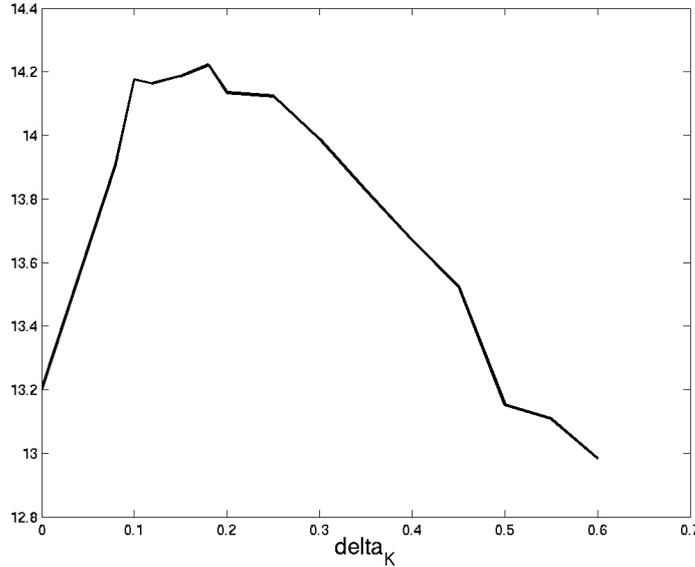


FIG. 7.13 – Graphe de la fonction  $\{\delta \mapsto p_J(J^{ref}; \delta)\}$ .

cette figure, on peut voir que la valeur optimale  $\mathbf{r}_{opt}$  est atteinte pour  $\mathbf{r}_{opt} = (18 N^2/Hz, 20 (N/m)^2/Hz)$ .

2. *Identification du paramètre de dispersion  $\delta_F$* . La figure 7.19 représente la fonction de vraisemblance optimisée dans l'équation (6.15) avec  $\mathcal{C}_{\delta_F} = ]0, \sqrt{3/7}[$ . Le maximum de la fonction de vraisemblance  $\delta_F \mapsto p_{J_s}(J_s^{exp}; \delta_F)$  est atteint pour  $\delta_F^{opt} = 0.07$ . La valeur non nulle pour les petites valeurs du paramètre de dispersion  $\delta_F$  correspond à la variabilité induite par les incertitudes présentes dans le modèle simplifié stochastique et modélisées par une approche probabiliste non paramétrique des incertitudes. La fonction de densité de probabilité  $p_{J_s}(x, \delta_F = (0.07))$  de la variable aléatoire  $J_s$  est représentée sur la figure 7.20. L'observation expérimentale  $J_s^{exp}$  est calculée en utilisant l'équation (6.14) et vaut  $J_s^{exp} = 8.5 \times 10^{-23}$ . Pour estimer la qualité de l'identification, on peut calculer la probabilité  $P(J_s^{exp} \pm 5\%)$  qui est telle que  $P(J_s^{exp} \pm 5\%) = P(0.95 \times J_s^{exp} \leq J \leq 1.05 \times J_s^{exp}) = 0.18$ . En l'absence de modèle d'incertitude pour le chargement, la probabilité  $P(J_s^{exp} \pm 5\%)$  vaut 0.13. La prise en compte des incertitudes de modèle sur le chargement a aug-

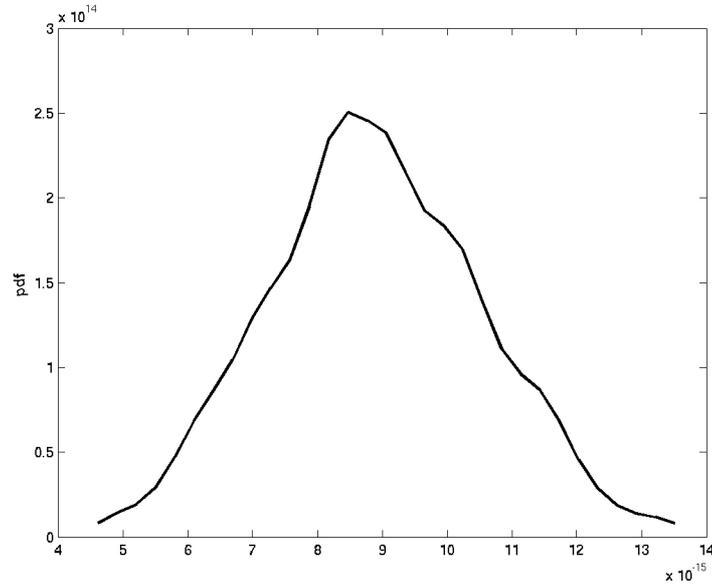


FIG. 7.14 – Graphe de la fonction de densité de probabilité  $\{x \mapsto p_J(x, \boldsymbol{\delta} = (0.2))\}$ .

menté la vraisemblance des mesures, faisant passer la probabilité  $P(J_s^{\text{exp}} \pm 5\%)$  de 0.13 à 0.18. La figure 7.21 compare la réponse ”expérimentale” fournit par le modèle de référence à celle construite avec le modèle simplifié stochastique sur lequel le chargement stochastique identifié est appliqué. La figure 7.22 contrôle la convergence de la réponse stochastique par l’intermédiaire de la fonction  $\{\nu_{\theta, \theta''} \mapsto \text{conv}_3(\nu_{\theta, \theta''})\}$  de l’équation (5.31). Une bonne convergence est atteinte pour  $\nu_{\theta, \theta''} = 40$  tirages de la matrice aléatoire de raideur et de la fonction aléatoire  $[\mathbf{S}_{\mathbf{F}}]$ .

## 7.4 Conclusion.

Dans ce chapitre la méthodologie proposée précédemment a été validée sur un exemple simple où l’allure de la fonction de densité spectrale du chargement stochastique est elle aussi simple. L’étude de cet exemple montre clairement que la prise en compte des incertitudes de modélisation sur le système et sur le chargement stochastique permet d’améliorer la vraisemblance des données expérimentales

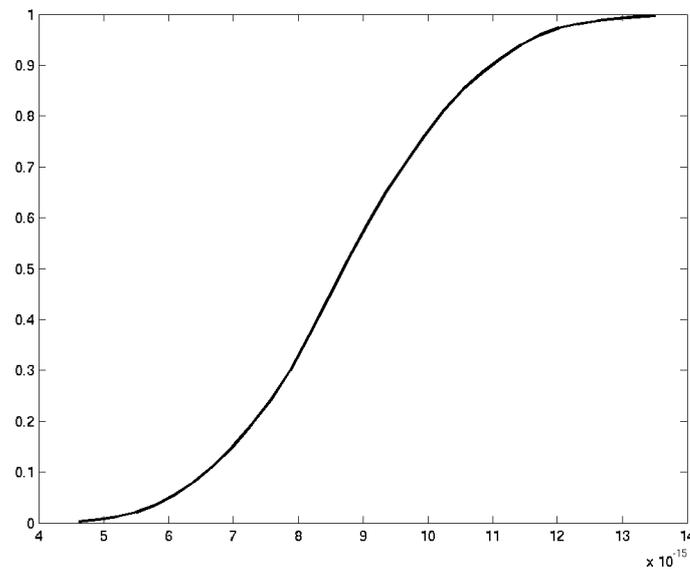


FIG. 7.15 – Graphe de la fonction de répartition  $\{j \mapsto Prob(J \leq j)\}$ .

et ainsi fournir un modèle dont les prévisions sont plus robustes vis-à-vis de ces incertitudes. Dans le chapitre suivant, un système industriel avec toute sa complexité sera étudié.

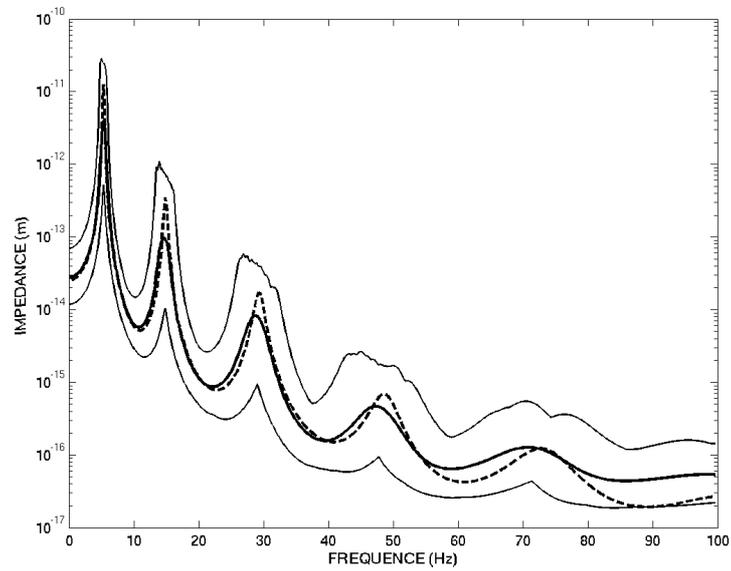


FIG. 7.16 – Domaine de confiance avec un niveau de probabilité  $P_c = 0.95$  de la fonction  $\{\omega \mapsto \|[\mathbf{Z}^A(\omega)]^{-1}\|_F^2\}$ .

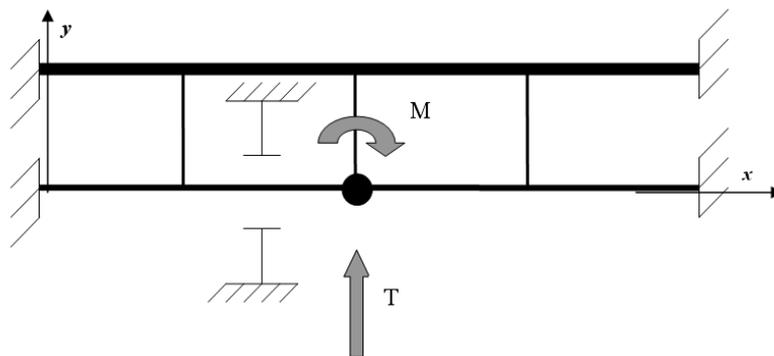
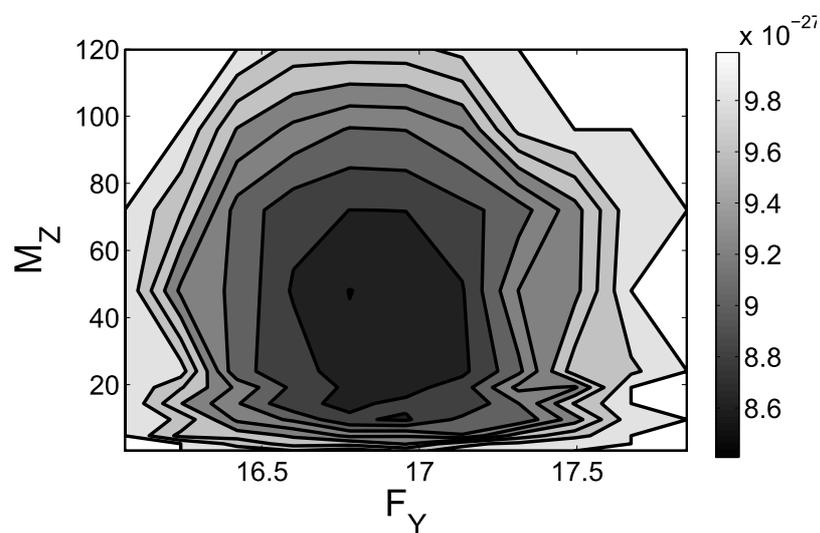
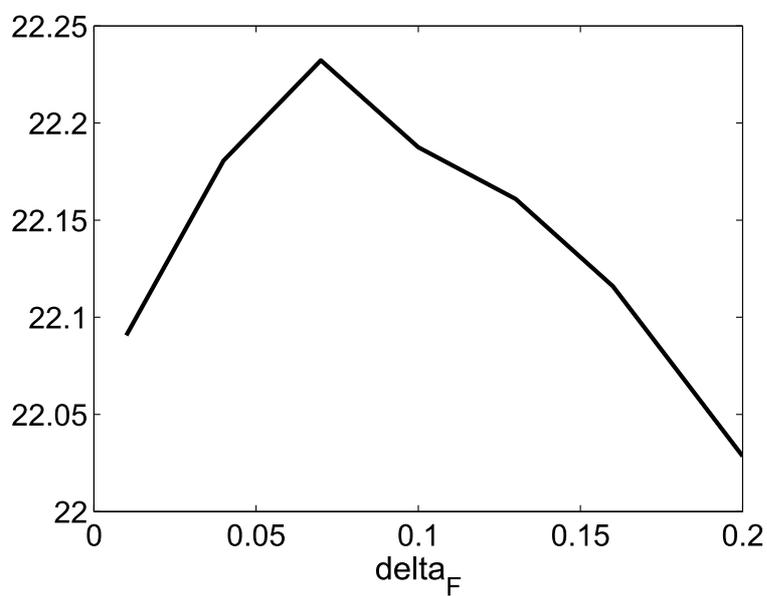


FIG. 7.17 – Définition du chargement aléatoire.

FIG. 7.18 – Graphe de la fonction coût  $(r_1, r_2) \mapsto D(r_1, r_2)$ .FIG. 7.19 – Graphe de la fonction  $\{\delta_F \mapsto p_{J_s}(J_s^{\text{exp}}; \delta_F)\}$ .

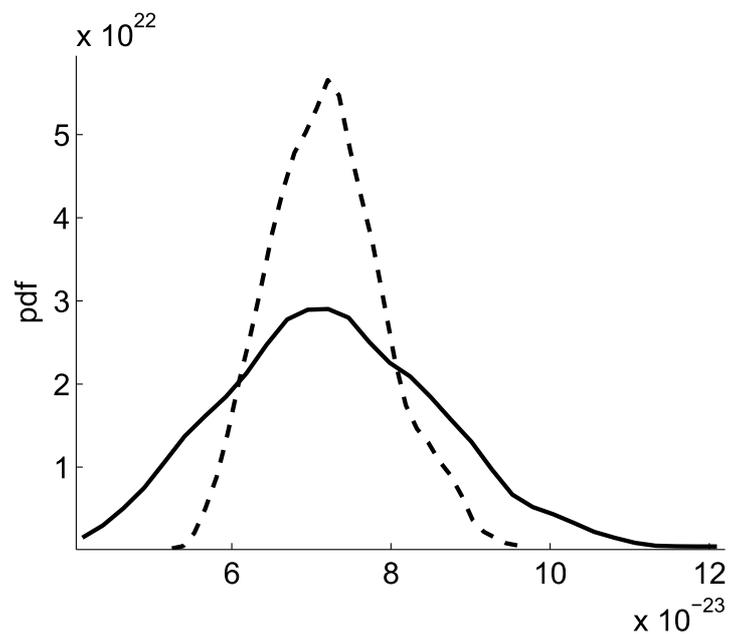


FIG. 7.20 – Graphe de la fonction de répartition  $\{j \mapsto Prob(J_s \leq j)\}$  : avec (traits pleins) et sans (traits pointillés) modélisation des incertitudes sur le chargement.

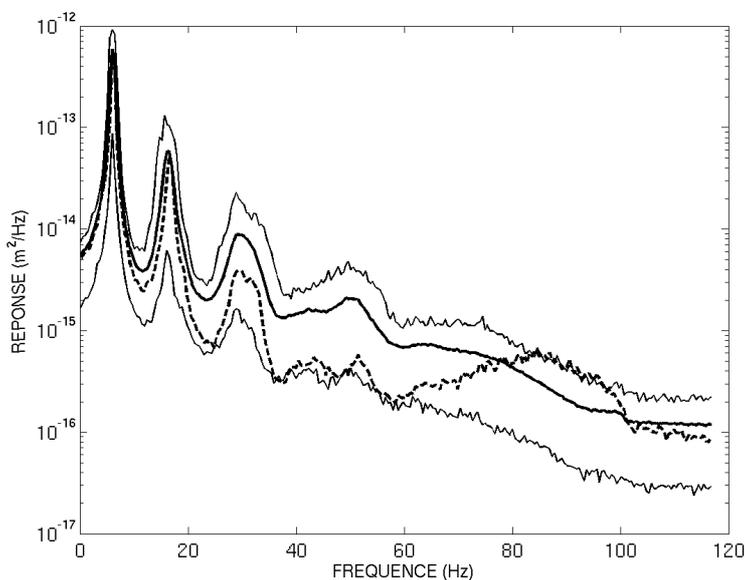


FIG. 7.21 – Fonction de densité spectrale de puissance du déplacement transversal stochastique au point  $P_{obs}$  : comparaison entre la réponse donnée par le modèle de référence (traits pointillés) et celle donnée par le modèle simplifié stochastique pour  $\delta_K^A = 0.2$  et  $\delta_F = 0.07$ .

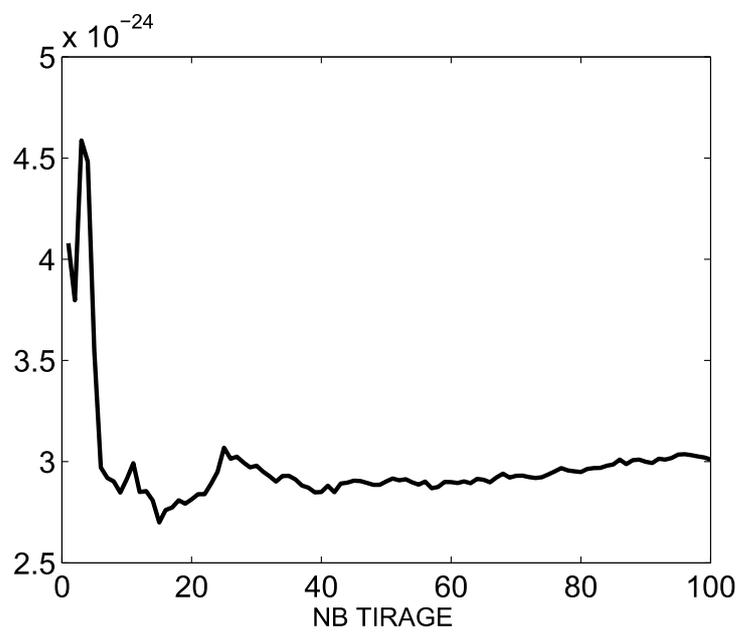


FIG. 7.22 – Convergence de l'estimation de la DSP pour le déplacement transversal stochastique au point  $P_{obs}$  en fonction du nombre  $\nu_{\theta,0''}$ .



# Chapitre 8

## Validation expérimentale : identification de forces stochastiques appliquées aux assemblages combustibles.

Ce chapitre est dédié à l'étude d'un système industriel : les assemblages combustibles (voir figure 8.1). Ce type de structure est un composant de coeur de réacteur nucléaire composé de centaines de tubes reliés entre eux par l'intermédiaire de grilles (10 ou 8 suivant le type d'assemblage). Depuis plusieurs années, EDF R&D s'intéresse au comportement dynamique des assemblages combustibles afin de mieux maîtriser l'usure de la gaine des crayons qui la compose. Cependant, la modélisation de ce type de structure est très délicate en raison de sa grande complexité. En effet, les assemblages combustibles sont composés de centaines de crayons maintenus en positions par des précontraintes et dont la dynamique est couplée à celle du fluide caloporteur en écoulement. De plus l'écoulement du fluide autour de ces assemblages induit une excitation turbulente dont la modélisation et l'identification s'avèrent eux aussi délicats. Afin de mieux maîtriser la modélisation des assemblages combustibles et la modélisation des forces induites par le fluide en écoulement, EDF

R&D a conçu un banc d'essai nommé BECASSINE qui est un demi assemblage combustible baignant dans un fluide en écoulement. Dans le cadre de cette thèse, on s'intéresse uniquement à l'étude de la maquette BECASSINE. Ainsi ce chapitre est dédié à la modélisation de la maquette BECASSINE et à l'identification du chargement stochastique induit par le fluide en écoulement. Le paragraphe 8.1 est consacré à la description du banc d'essai BECASSINE. Dans les paragraphes 8.2 et 8.3, un modèle de référence et un modèle simplifié stochastique sont construits et étudiés. Dans le paragraphe 8.4, le chargement turbulent induit par le fluide en écoulement est modélisé puis identifié. Enfin, dans le paragraphe 8.5, on s'intéresse aux statistiques sur les quantités d'intérêt construites à l'aide du modèle simplifié stochastique et du chargement stochastique identifié.

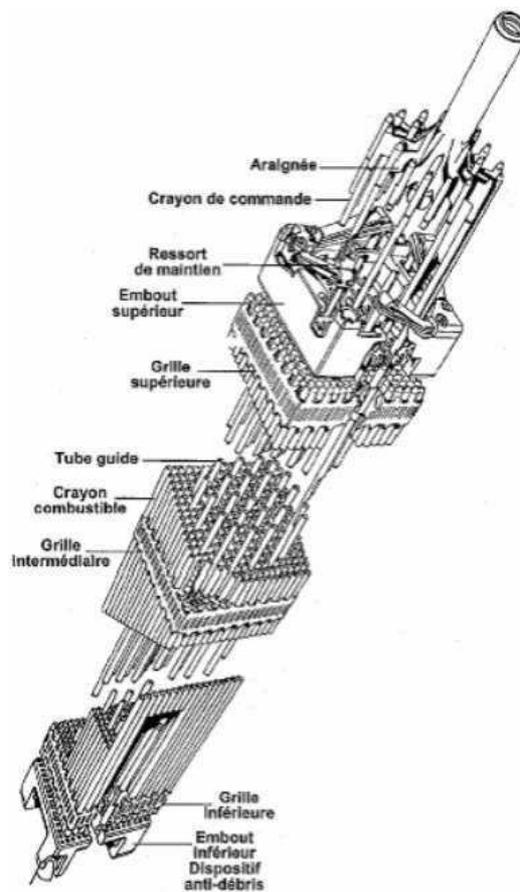


FIG. 8.1 – Assemblage combustible.

## 8.1 Banc d'essai BECASSINE.

### 8.1.1 Description du banc.

La maquette BECASSINE (voir Fig. 8.2) a été conçue afin de mieux comprendre le comportement dynamique des assemblages combustible. Elle est composée d'un demi assemblage combustibles constitués de plusieurs éléments :

1. *Grilles.* Les grilles servent à maintenir les crayons en position. Elles sont de deux types : les grilles de mélanges qui sont les deux grilles supérieure et inférieure. Elles sont en zircaloy (module d'Young  $E = 9.84 \times 10^{10} Pa$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , masse volumique  $\rho_{zr} = 6526 kg/m^3$ ). Les deux grilles intermédiaires sont des grilles de maintien. Toutes les grilles sont constituées de plaquettes minces entrecroisées et soudées entre elles (voir Fig. 8.3) formant un réseau de  $17 \times 17$  cellules (voir figure 8.4) de pas  $12.6 mm$ . Chacune des plaquette a une hauteur de  $21.71 mm$  et une épaisseur moyenne de  $0.48 mm$ .
2. *Tubes guides.* Les tubes guides assurent le positionnement axial des assemblages et sont au nombre de 25. Ils sont constitués de tubes creux en zircaloy également et sont soudés aux grilles. Ils sont encastrés à leurs extrémités par l'intermédiaire de soufflets. Leur diamètre externe est égal à  $12.05 mm$ , leur diamètre interne est égale à  $11.25 mm$  et leur longueur est égale à  $2.25 m$ .
3. *Crayons combustibles.* Les crayons combustibles sont nombre de 264. Ils sont constitués d'une gaine en zircaloy qui est un tube creux de diamètre externe  $9.5 mm$ , de diamètre interne  $8.36 mm$  et de longueur  $1.91 m$ . Cette gaine contient des pastilles de combustibles empilées (remplacé sur BECASSINE par du plomb). La masse volumique équivalente des crayons combustible est de  $\rho_{eq} = 37950 kg/m^3$ . Ils sont libres à leurs extrémités. Les crayons combustibles sont maintenus en position grâce aux précontraintes exercées radialement de part et d'autre par des bossettes et des ressorts. (voir Fig. 8.3).

La structure est confinée dans une enceinte en plexiglas où de l'eau s'écoule à un débit réglable (entre 0 et  $700 m^3/h$ ).



FIG. 8.2 – Maquette BECASSINE.

### 8.1.2 Instrumentation.

Afin d'identifier les caractéristiques dynamiques de la maquette BECASSINE et d'identifier le chargement appliqué à cette structure, celle-ci est instrumentée de manière à pouvoir réaliser des mesures en écoulement. Les déformations sont mesurées par des jauges de déformation réparties le long d'un crayon combustible. Ce crayon est situé en position J-10 sur la figure 8.4 (ce crayon peut être déplacé et plusieurs crayons peuvent être instrumentés) et ne contient pas de plomb. La direction  $y$  désigne la direction longitudinale. Les déformations sont mesurées suivant les deux directions transverses  $x$  et  $z$ . En partant du bas du crayons instrumenté, les jauges sont localisées à  $0.06\text{ m}$ ,  $0.43\text{ m}$ ,  $0.69\text{ m}$ ,  $1.0\text{ m}$ ,  $1.37\text{ m}$  et  $1.62\text{ m}$ . Ces jauges sont respectivement dénommées  $J1x$ ,  $J2x$ ,  $J3x$ ,  $J4x$ ,  $J5x$  et  $J6x$  pour la direction  $x$  et  $J1z$ ,  $J2z$ ,  $J3z$ ,  $J4z$ ,  $J5z$  et  $J6z$  pour la direction  $z$ . De plus, un vibromètre laser est placé en face de la grille inférieure afin de mesurer la vitesse de celle-ci (voir Fig. 8.5). Dans notre étude, nous utiliserons uniquement les mesures fournies par les jauges de déformations.

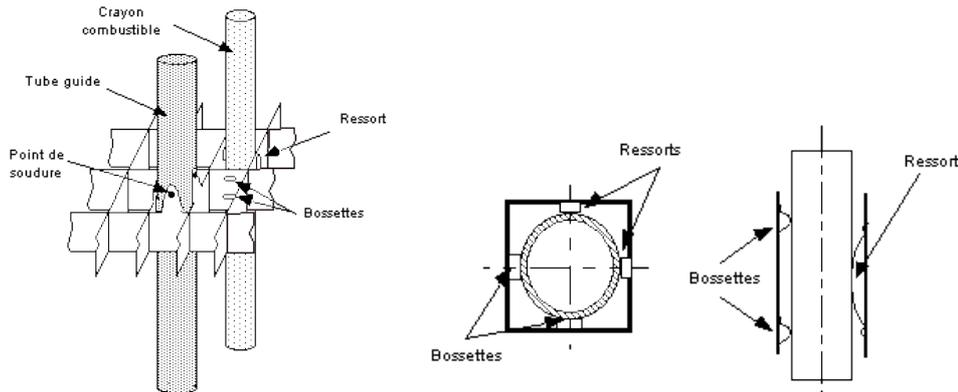


FIG. 8.3 – Grille et système de maintien.

### 8.1.3 Acquisition des signaux temporels.

Dans le cadre de cette recherche, des essais en écoulement sur la maquette BECASSINE ont été réalisés le 13 Décembre 2007. Nous avons pu assister à ces essais. Les mesures par jauges de déformation ont été recueillies pour plusieurs vitesses d'écoulement, allant de 100 à 600  $m^3/h$ . On présentera ici uniquement les résultats obtenus pour une vitesse d'écoulement de 300  $m^3/h$ . Sur les 12 jauges, seules les jauges  $J1x$ ,  $J5x$ ,  $J6x$ ,  $J1z$ ,  $J2z$ ,  $J4z$  et  $J6z$  ont correctement fonctionné. La figure 8.6 représente la mesure de déformation pour la jauge  $J1x$ . Elle correspond au signal de sortie qu'on a multiplié par le coefficient  $1.575 \times 10^{-3}$  (lié au facteur de jauge et au gain du conditionneur) sur l'intervalle  $[0, 1]$  s. Concernant les données d'acquisition, nous avons choisit  $f_{max} = 640$  Hz et une résolution fréquentielle  $\Delta f = 0.325$  Hz (4096 points); ce qui correspond d'après le théorème de Shannon à un pas d'acquisition de  $\Delta t = 0.78 \times 10^{-3}$  s et à une durée d'acquisition  $t_{max} = 3.20$  s. Afin de caractériser la réponse stationnaire de la maquette par la méthode du périodogramme, 100 acquisitions sont nécessaires. Ces 100 acquisitions sont réalisés de façon continues sur une acquisition de  $t_{tot} = 320$  s (les copies de processus ainsi obtenues ne sont pas complètement indépendantes, mais pour l'estimation des moments du second ordre, les erreurs introduites sont négligeables, (voir [96])).

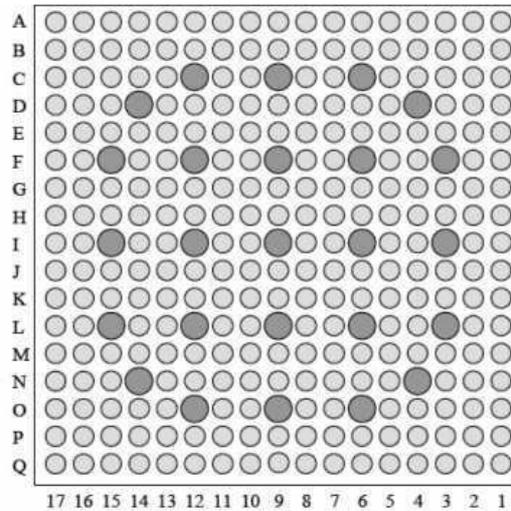


FIG. 8.4 – Grille vue de dessus.

#### 8.1.4 Estimation de la fonction de densité spectrale.

On note  $\Xi_s^{exp}(t)$  le vecteur des déformations mesurées. Alors la fonction de densité spectrale à valeur matricielle  $[S_{\Xi_s^{exp}}(\omega)]$  est estimée par la méthode du périodogramme (paragraphe 4.3). La fenêtre d'analyse est la fenêtre naturelle (rectangulaire). La figure 8.7 représente la DSP sur la bande de fréquence  $[0, 100] Hz$  de la déformation pour les trois jauges ayant fonctionné suivant la direction  $x$ . Sur cette figure, on constate une brisure à la fréquence  $20 Hz$ . La figure 8.8 représente la fonction de densité interspectrale entre les déformations des jauges  $J1x$  et  $J5x$ . Sur les autospectres et interspectres on distingue deux zones de pics, une avant  $30 Hz$  et l'autre après  $30 Hz$ .

#### 8.1.5 Analyse modale expérimentale.

L'analyse modale expérimentale de la maquette BECASSINE a été réalisé avec le logiciel LMS (voir [38], [51], [70], [80] pour les techniques d'analyse modale). Il est à noter que cette analyse se fait en écoulement dont le chargement n'est pas connu. Ainsi, l'analyse modale expérimentale ne peut être complète. Seules les fréquences propres, les amortissements modaux et les déformations modales peuvent



FIG. 8.5 – Vibromètre laser.

être identifiés. Les masses modales ne peuvent pas être identifiées et il faut un modèle numérique. Etant donné les symétries de la maquette BECASSINE, tous les modes sont doubles. Ainsi, l'analyse des modes suivant la directions  $x$  se fera séparément de celle suivant la direction  $z$ . La figure 8.9 représente le diagramme de stabilisation pour la bande de fréquence  $[0, 80]$   $Hz$  estimé avec les quatre déformations mesurées suivant la direction  $z$ . Les quatres premiers pics correspondent à des modes d'ensemble, c'est-à-dire des modes pour lesquels tous les crayons et tubes vibrent en phase. La tableau 8.1 regroupe les quatres premiers modes d'ensemble. On remarquera le fort taux de dissipation pour le premier mode. Les modes au delà de  $30 Hz$  correspondent à des modes du crayon instrumenté, des modes d'autres crayons ou de tubes guides et à d'autres modes d'ensemble.

	mode 1	mode 2	mode 3	mode 4
fréquence propre (Hz)	4.4	11,3	17.8	22.9
amortissement modal (%)	10.1	5.3	5.3	3.9

TAB. 8.1 – Modes d'ensemble expérimentaux sur  $[0, 30]$   $Hz$ .

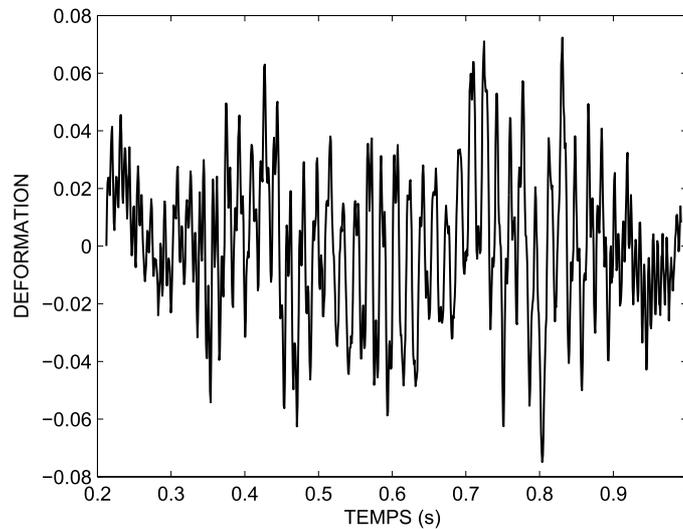


FIG. 8.6 – Déformation pour la jauge  $J1x$ .

## 8.2 Modèle de référence pour les assemblages combustibles.

Dans ce paragraphe, le modèle de référence est présenté. Celui-ci servira par la suite à identifier la paramètre de dispersion relatif au modèle probabiliste non paramétrique implémenté dans le modèle simplifié stochastique. Le modèle de référence est un modèle représentant au mieux les assemblages combustibles. Dans ce modèle, tous les crayons combustibles et tous les tubes guides sont modélisés. Parmi les 264 crayons combustibles, un crayon est isolé afin de modéliser le crayon instrumenté. Nous décrivons chacun des éléments constituant le modèle de référence :

1. *Tubes guides.* Chaque tube guide est modélisé par une poutre de Timoshenko. Chacune des poutres a une section circulaire constante de rayon  $6.05 \times 10^{-3} m$ , d'épaisseur  $0.4 \times 10^{-3} m$ , de longueur  $1.91 m$ , de masse volumique  $6526 kg/m^3$ , de module d'Young  $9.84 \times 10^{10} Pa$  et de coefficient de poisson  $0.3$ . Les extrémités de chacune des poutres sont encastées. Chacune des poutres est modélisée par 27 éléments finis de poutre Timoshenko dont de DDL de torsion est bloqué. Par conséquent, chaque poutre a 125 DDLs. Les soufflets sont

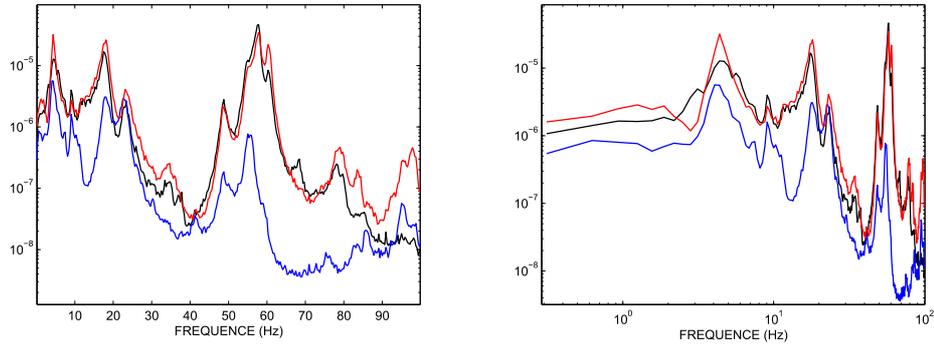


FIG. 8.7 – DSP de la déformation pour les jauges  $J1x$  (noir),  $J5x$  (bleu) et  $J6x$  (rouge).

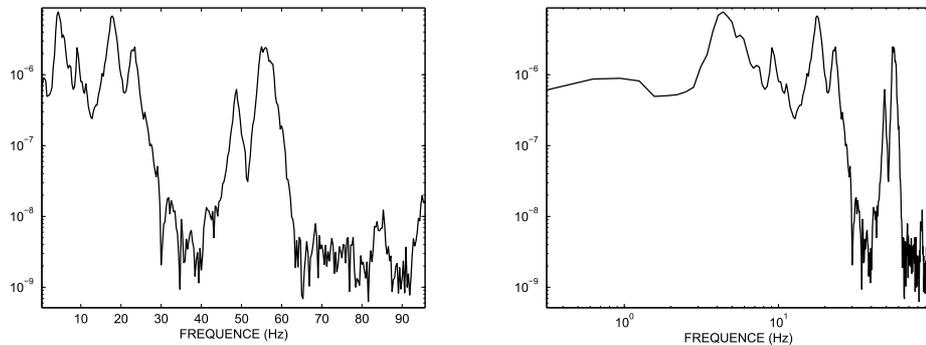


FIG. 8.8 – Fonction de densité interspectrale entre la déformation  $J1x$  et  $J5x$ .

modélisés par des éléments ressorts dont les raideurs selon les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  valent respectivement  $10^5 N/m$ ,  $4500 N/m$  et  $10^5 N/m$ .

2. *Crayons combustibles*. Chaque crayon est modélisé par une poutre de Timoshenko. Chacune des poutres a une section circulaire constante de rayon  $4.75 \times 10^{-3} m$ , d'épaisseur  $0.57 \times 10^{-3} m$ , de longueur  $1.91 m$ , de masse volumique  $37950 kg/m^3$  (supérieur à celle du zircaloy pour tenir compte de la masse ajoutée par le plomb), de module d'Young  $9.84 \times 10^{10} Pa$  (le plomb ne rigidifie pas les crayons) et de coefficient de poisson 0.3. Chacune des poutres est modélisée par 24 éléments finis de poutre Timoshenko. Par conséquent, chaque poutre a 120 DDLs .

3. *Grilles*. Les grilles sont elles aussi modélisées par des poutres de Timoshenko

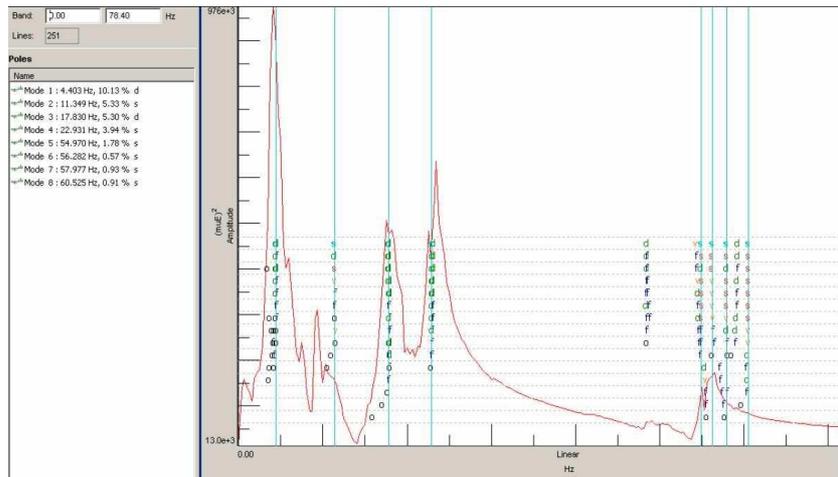


FIG. 8.9 – Diagramme de stabilisation.

de section rectangulaire de hauteur  $21.71 \times 10^{-3} m$ , d'épaisseur  $0.48 \times 10^{-3} m$ , de masse volumique  $12444 kg/m^3$  (valeur ajustée afin que chaque grille ait une masse de  $1 kg$ ), de module d'Young  $9.84 \times 10^{10} Pa$  et de coefficient de poisson 0.3.

4. *Liaison grille/tube guide.* Les soudures grilles/tube guide sont modélisées par des ressorts très rigides de raideur  $5 \times 10^9 N/m$  en translation suivant les trois directions  $x, y, z$ . Ceux ci lient les fibres neutres des poutres des grilles aux fibres neutres des tubes guides afin de modéliser les liaisons tube guide/ grille.
5. *Liaison grille/crayon combustible.* Les ressorts et bossettes (voir Fig. 8.3) sont modélisés par des ressorts dont les raideurs équivalentes en translation selon les directions  $x, y$  et  $z$  valent respectivement  $185 \times 10^{93} N/m$ ,  $278 \times 10^3 N/m$  et  $185 \times 10^3 N/m$ .
6. *Crayon isolé.* Le crayon isolé est représentatif du crayon instrumenté. Ce crayon instrumenté est plus léger que les autres crayons afin de découpler sa réponse dynamique de celle des autres crayons. Ce crayon doit être représenté plus finement. Ainsi le crayon isolé est modélisé par une poutre de Timoshenko de section circulaire constante de rayon  $4.75 \times 10^3 m$ , d'épaisseur  $0.57 \times 10^3 m$ , de longueur  $1.91 m$ , de masse volumique  $15810 kg/m^3$ , de module d'Young  $9.84 \times 10^{10} Pa$  et de coefficient de poisson 0.3. La poutre modélisant le

crayon isolé a 620 DDLs. La liaison crayon isolé/grille est elle même modélisée de façon plus réaliste. Ainsi, les ressorts et les bossettes sont modélisés par des non-linéarités localisées (voir Fig. 8.10). Les raideurs de chocs (voir Annexe C) des ressorts sont de  $1.98 \times 10^6 \text{ N/m}$  et celles des bossettes sont de  $17.2 \times 10^6 \text{ N/m}$ . Les non-linéarités modélisent également le frottement au niveau du contact crayon isolé/grilles (afin d'évaluer des critères d'usure). Le coefficient de frottement de Coulomb vaut 0.5. La crayon est maintenu avec une précontrainte de  $35 \text{ N}$ ; ce qui correspond à un enfoncement initial de  $17 \times 10^{-6} \text{ m}$  pour les ressorts et  $1.02 \times 10^{-6} \text{ m}$  pour les bossettes.

7. *Fluide*. Le fluide en écoulement autour de la structure modifie le comportement dynamique de cette structure qui elle même modifie le comportement dynamique du fluide. Cette interaction fluide-structure doit être prise en compte et se traduit par l'ajout de masse, d'amortissement et de raideur à la structure. En supposant que la masse ajoutée ne dépend pas de la vitesse du fluide, celle-ci est déterminée analytiquement en fonction du confinement des tubes. Pour un tube seul plongé dans un fluide non borné, la masse ajoutée vaut le poids du volume d'eau déplacé, i.e.  $m_a = \rho_{eau} l_{tube} \pi r_{tube}^2$ , où  $l_{tube}$  et  $r_{tube}$  sont respectivement la longueur et le diamètre externe du tube. En considérant un confinement de 1.3 (rapport entre le pas du réseau et le diamètre des tubes), la masse ajoutée par le fluide vaut alors (voir [21])  $m_a = 1,6 \rho_{eau} l_{tube} \pi r_{tube}^2$ . La prise en compte de cette masse ajoutée est effectuée en modifiant les masses volumiques des crayons et des tubes guide (+12 % pour les crayons et +16 % pour les tubes guides). Les termes de raideur et d'amortissement ajoutés dépendent de la vitesse du fluide. Ces termes seront directement pris en compte en recalant les raideurs du modèle de référence par rapport à l'analyse modale expérimentale effectuée en écoulement et en affectant les amortissements modaux en écoulement au modèle de référence réduit.

Le modèle éléments finis ainsi construit est représenté de façon schématique sur la figure 8.11 et comporte au total 45307 DDLs. Le modèle de référence comporte au total 46232 DDLs. L'analyse de ses modes propres dans la bande de fréquence

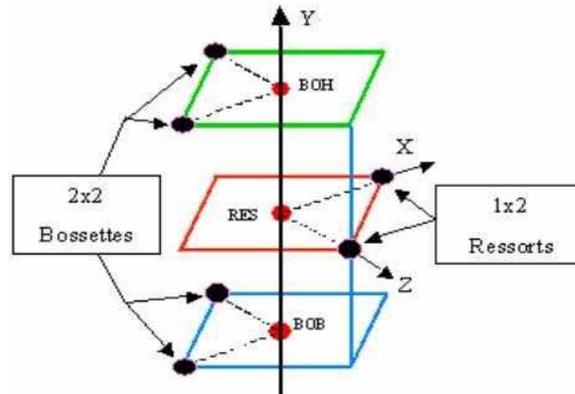


FIG. 8.10 – Non-linéarités localisées.

$\mathcal{B} = [0, 100]$  Hz fait apparaître deux types de modes. Dans la bande de fréquence  $[0, 30]$  Hz, les modes du modèle de référence sont des modes d'ensemble. La figure 8.12 représente les déformées modales de ces modes. Sur cette figure, le crayon fixe représente le crayon isolé. Les déformations modales sont également calculées. Le tableau 8.2 compare les fréquences propres et déformations modales du modèle de référence après recalage à celles déterminées expérimentalement (le MAC correspond au produit scalaire normalisé du mode numérique avec le mode expérimentale correspondant et correspond ainsi à une mesure de la colinéarité entre ces deux quantités). Le modèle de référence est donc raisonnablement recalé par rapport aux modes d'ensemble expérimentaux. Sur la bande  $[30, 100]$  Hz, apparaissent des modes locaux regroupés dans des bandes de fréquences étroites. Sur cette bande de fréquence la comparaison expérimentale n'est pas possible car les modes du crayon isolé sont très influencés par les non-linéarités localisées qui maintiennent le crayon en position. Or le calcul de modes propres se fait sans les non-linéarités. Ainsi, on se contentera de la validation expérimentale dans la bande de fréquence  $[0, 30]$  Hz. La figure 8.13 représente la densité modale sur la bande  $\mathcal{B} = [0, 100]$  Hz qui contient en tous 2502 modes. Les modes sont regroupés par paquets de modes locaux. Une telle densité modale rend difficile l'utilisation des techniques usuelles de réduction de modèle pour le calcul de réponses stationnaires (voir Section 1.1). Il sera donc

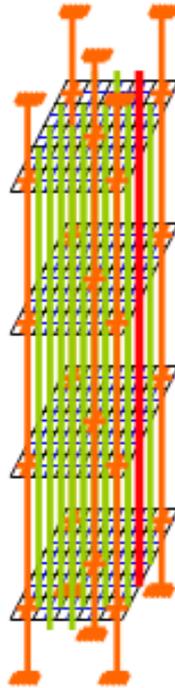


FIG. 8.11 – Modèle de référence. Sur les 264 crayons combustibles (en vert), le crayon instrumenté (en rouge) est isolé.

d'autant moins utilisable pour l'identification d'un chargement appliqué à cette structure. Il est donc nécessaire de proposer un modèle plus simple mais tout de même représentatif de la maquette BECASSINE.

	mode 1	mode 2	mode 3	mode 4
fréquence propre expérimentale (Hz)	4.4	11.3	17.8	22.9
fréquence propre m. référence (Hz)	4.35	10.9	15.8	22.3
MAC ref/exp (%)	0.96	0.74	0.95	0.91

TAB. 8.2 – Comparaison modèle de référence/essais.

### 8.3 Modèle simplifié stochastique.

Ce paragraphe est dédié à la construction du modèle simplifié stochastique. Le modèle simplifié moyen est un modèle qui se base sur le modèle 2 poutres proposé

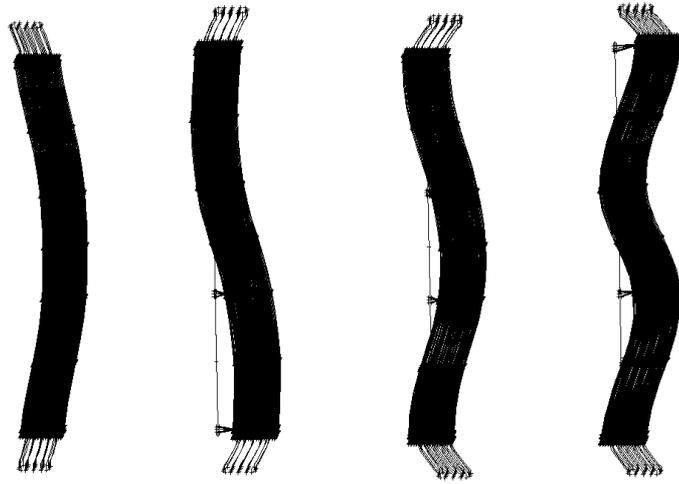


FIG. 8.12 – Déformées modales pour les modes d'ensemble du modèle de référence.

par Jacquart [58] en 1994 dans le cadre d'une étude de tenue aux séisme et le modèle 3 poutres proposé par Bosselut [22] en 1999. Ce modèle est une représentation très simplifiée d'un vrai assemblage combustible. C'est pour cette raison qu'il doit être complété par un modèle d'incertitudes.

### 8.3.1 Présentation du modèle moyen.

Le modèle de référence est composé de deux sous-systèmes : un sous-système non linéaire contenant uniquement le crayon isolé et son système de maintien, et un autre sous-système linéaire contenant le reste du modèle. Le modèle simplifié moyen est dérivé du modèle de référence. Ainsi le sous-système non linéaire du modèle simplifié moyen est identique au sous-système non linéaire du modèle de référence (voir Fig. 8.14). Par contre le sous-système linéaire du modèle simplifié moyen diffère de celui du modèle de référence. Les 263 crayons combustibles sont remplacés par un unique crayon équivalent, les 25 tubes guides sont remplacés par un unique tube équivalent et les grilles sont remplacées par des rigidités reliant le crayon équivalent au tube équivalent. La modélisation des différents éléments du sous-système linéaire est la suivante :

1. *Tube équivalent.* Le tube équivalent est modélisé par une poutre de Timo-

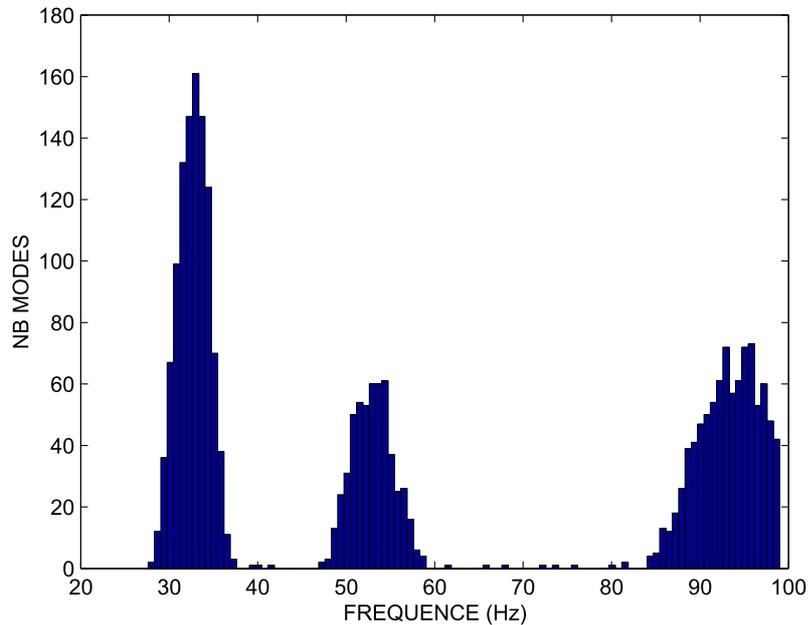


FIG. 8.13 – Densité modale pour le modèle de référence.

shenko, dont l'aire de la section et les moments d'inertie valent 25 fois ceux d'un tube guide. Ainsi l'aire de la section vaut  $4.69 \times 10^{-4} m^2$ , les moments d'inertie suivant  $x$  et suivant  $z$  valent  $8.38 \times 10^{-9} m^4$ . La masse volumique vaut toujours  $6526 kg/m^3$ , le module d'Young  $9.84 \times 10^{10} Pa$  et de coefficient de poisson 0.3. Les extrémités de cette poutre sont encastées. Cette poutre est modélisée par 34 éléments finis de poutres Timoshenko et a ainsi 160 DDLs

2. *Crayon équivalent.* Le crayon équivalent est modélisé par une poutre de Timoshenko dont l'aire de la section et les moments d'inertie valent 263 fois ceux d'un crayon combustible. Ainsi l'aire de la section vaut  $4.20 \times 10^{-3} m^2$ , les moments d'inertie suivant  $x$  et suivant  $z$  valent  $4.21 \times 10^{-8} m^4$ . La masse volumique vaut toujours  $37950 kg/m^3$ , le module d'Young  $9.84 \times 10^{10} Pa$  et de coefficient de poisson 0.3. Cette poutre est modélisée par 31 éléments finis de poutres Timoshenko et a ainsi 155 DDLs .
3. *Grilles.* Concernant le crayon isolé, la morceau grille assurant son maintien est

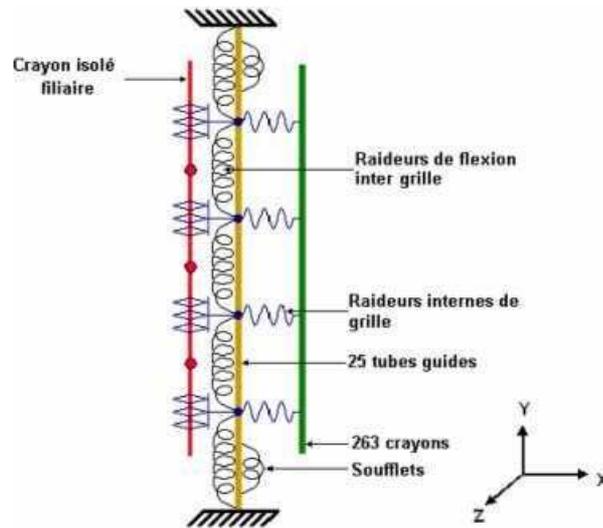


FIG. 8.14 – Modèle simplifié.

comme pour le modèle de référence modélisé de façon précise. Pour le reste de la structure, la grille est modélisée par des ressorts en translation de raideur  $6 \times 10^8 \text{ N/m}$  reliant le tube guide équivalent au crayon équivalent et par des ressort en rotation inter-étage de raideur  $1.7 \times 10^5 \text{ N.m/rad}$  pour modéliser la rigidité en flexion due aux grilles.

Comme pour le modèle de référence, les masses, raideurs et amortissements ajoutés sont pris en compte en modifiant les masses volumiques et raideurs du modèle simplifié moyen. Le modèle simplifié moyen comporte au total 2157 DDLs. L'analyse de ses modes propres dans la bande de fréquence  $\mathcal{B} = [0, 100] \text{ Hz}$  fait bien apparaître deux types de modes : des modes d'ensemble et des modes locaux. La figure 8.15 représente les déformées modales des modes d'ensemble. Le tableau 8.3 compare les fréquences propres et déformations modales du modèle simplifié après recalage à celles déterminées expérimentalement. Au vu des fréquences propres, le modèle simplifié moyen semble meilleur que le modèle de référence. Cependant, au vu des indices MAC, les déformées modales fournies par le modèle de référence sont bien meilleures que celles fournies par le modèle simplifié moyen. Sur la bande  $[30, 100] \text{ Hz}$ , apparaissent des modes locaux dont la densité est plus faible que celle

observée pour le modèle de référence. En effet, sur la bande  $\mathcal{B} = [0, 100] \text{ Hz}$ , le modèle simplifié moyen possède 27 modes. L'avantage de ce modèle, mise à part sa faible dimension, est de ne pas posséder de modes multiples dans une même direction. Ainsi ce modèle est bien adapté à l'étude du comportement dynamique de la maquette BECASSINE et à l'identification le chargement subit par cette structure. Il n'est pas possible de comparer la réponse stationnaire fournie par le modèle sim-

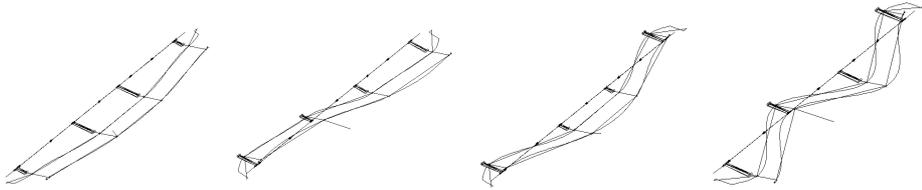


FIG. 8.15 – Déformées modales pour les modes d'ensemble du modèle simplifié.

	mode 1	mode 2	mode 3	mode 4
fréquence propre expérimentale (Hz)	4.4	11.3	17.8	22.9
fréquence propre m. référence (Hz)	4.35	10.9	15.8	22.3
MAC ref/exp (%)	0.96	0.74	0.95	0.91
fréquence propre m. simplifié (Hz)	4.34	10.5	16.3	23.7
MAC simpl/exp (%)	0.95	0.62	0.82	0.81

TAB. 8.3 – Comparaison modèle simplifié/essais.

plifié moyen à celle fournie par le modèle de référence car d'une part le modèle de référence est très complexe et d'autre part le chargement aléatoire n'est pas connu et doit être identifié. Cependant l'influence dynamique du sous-système linéaire sur le sous-système non linéaire peut être caractérisée par condensation en utilisant la fonction  $\{\omega \mapsto \|[Z^{A,ref}(\omega)]^{-1}\|_F^2\}$  introduite dans l'équation (1.18) pour le modèle de référence et la fonction  $\{\omega \mapsto \|[Z^A(\omega)]^{-1}\|_F^2\}$  introduite dans l'équation (2.22) pour le modèle simplifié moyen. La figure 8.16 compare ces deux fonctions. Sur la bande de fréquence  $[30, 100] \text{ Hz}$ , le modèle simplifié moyen diffère complètement du modèle de référence à cause des modes locaux. Cependant, l'influence de ces modes sur le crayon isolé non linéaire reste relativement faible.

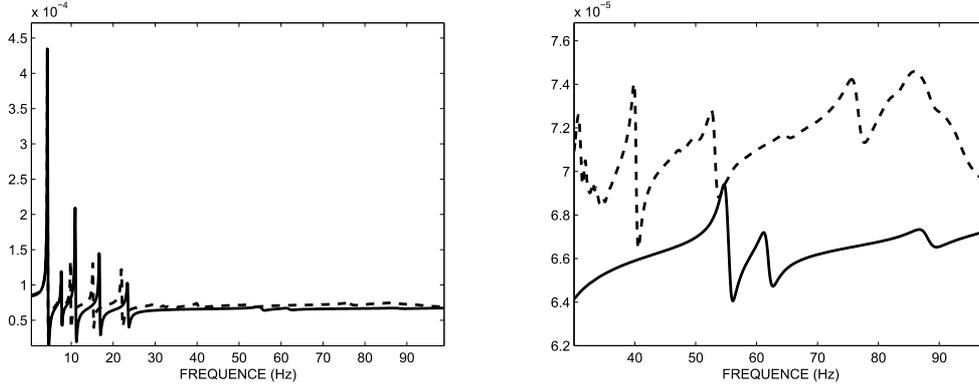


FIG. 8.16 – Graphe des fonctions  $\{f \mapsto \|[Z^{A,ref}(f)]^{-1}\|_F^2\}$  (traits pointillés) et  $\{f \mapsto \|[Z^A(f)]^{-1}\|_F^2\}$  (traits pleins). Figure de droite : zoom sur  $[30, 100]$  Hz.

### 8.3.2 Prise en compte des incertitudes de modélisation.

Le modèle simplifié moyen est bien adapté à l'étude de la maquette BECAS-SINE. Cependant, il a été obtenu en simplifiant le modèle de référence au niveau de son sous-système linéaire. Cette simplification a été faite au détriment de la précision, introduisant des incertitudes de modélisation au niveau du sous-système linéaire. Ces incertitudes sont prises en compte par une approche probabiliste des incertitudes (voir le paragraphe 3) conduisant ainsi au modèle simplifié stochastique. Seules les incertitudes sur les opérateurs de masse et de raideur du sous-système linéaire sont prises en compte. Ainsi, la dispersion introduite dans le modèle simplifié stochastique est contrôlée par le paramètre de dispersion  $\delta = (\delta_M^A, \delta_K^A)$ . Ce paramètre de dispersion est identifié par la méthode du maximum de vraisemblance en résolvant le problème d'optimisation défini par l'équation (3.23). Chaque fonction de densité de probabilité de l'équation (3.22) est estimée avec 200 réalisations de la variable aléatoire  $J$  calculées avec le modèle simplifié stochastique. La valeur déterministe correspondante pour le modèle de référence est  $J^{ref} = 1.53 \times 10^{-9}$ . L'observation pour le modèle simplifié moyen  $J^{moy}$  vaut  $9.58 \times 10^{-10}$ . La figure 8.17 représente la fonction de vraisemblance optimisée dans l'équation (3.23) avec  $\mathcal{C}_{ad} = [0, \sqrt{12/16}] \times [0, \sqrt{32/28}]$ . Le maximum est atteint pour  $\delta^{opt} = (0.13, 0.4)$ . La fonction de densité de probabilité  $p_J(x, \delta = (0.13, 0.4))$  de la variable aléatoire

$J$  est représentée sur la figure 8.18. La probabilité  $P(J^{ref} \pm 5\%)$  qui est telle que  $P(J^{ref} \pm 5\%) = P(0.95 \times J^{ref} \leq J \leq 1.05 \times J^{ref})$  vaut 0.15. La figure 8.19 représente le domaine de confiance à  $P_c = 0.95$  de la fonction aléatoire  $\{\omega \mapsto \|[Z^A(\omega)]^{-1}\|_F^2\}$  relative à l'influence du sous-système linéaire du modèle simplifié stochastique sur le crayon isolé non linéaire. Sur cette figure on voit que le domaine de confiance encadre la fonction de référence  $\{\omega \mapsto \|[Z^{A,ref}(\omega)]^{-1}\|_F^2\}$ . L'introduction d'un modèle

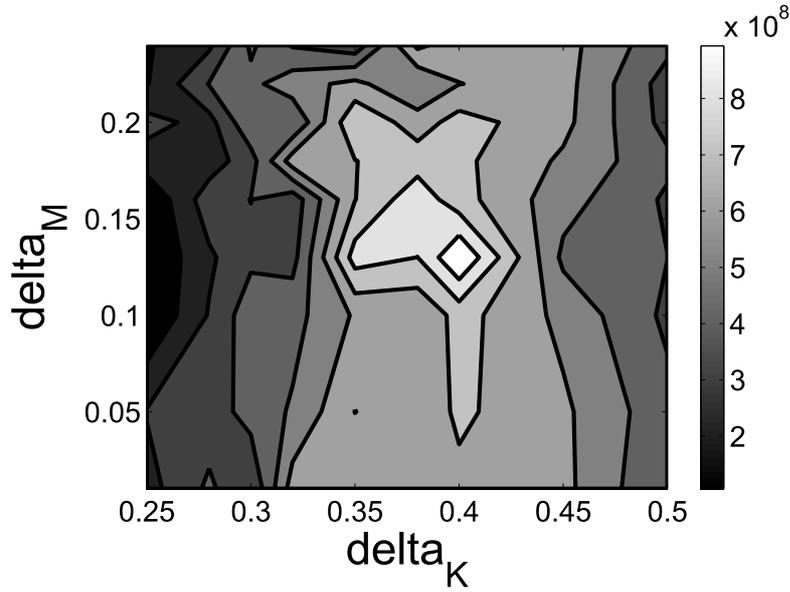


FIG. 8.17 – Graphe de la fonction de vraisemblance  $\{(\delta_M^A, \delta_K^A) \mapsto p_J(J^{ref}; (\delta_M^A, \delta_K^A))\}$ .

probabiliste des incertitudes sur le sous-système linéaire du modèle simplifié permet d'étendre le domaine de validité du modèle simplifié moyen en améliorant la vraisemblance de l'observation construite à partir du modèle de référence.

## 8.4 Identification du chargement fluide turbulent.

Dans ce paragraphe, on fait l'identification du chargement stochastique appliqué à la maquette BECASSINE dû à l'écoulement. Cette identification utilise le modèle simplifié stochastique précédemment construit. Dans un premier temps, nous

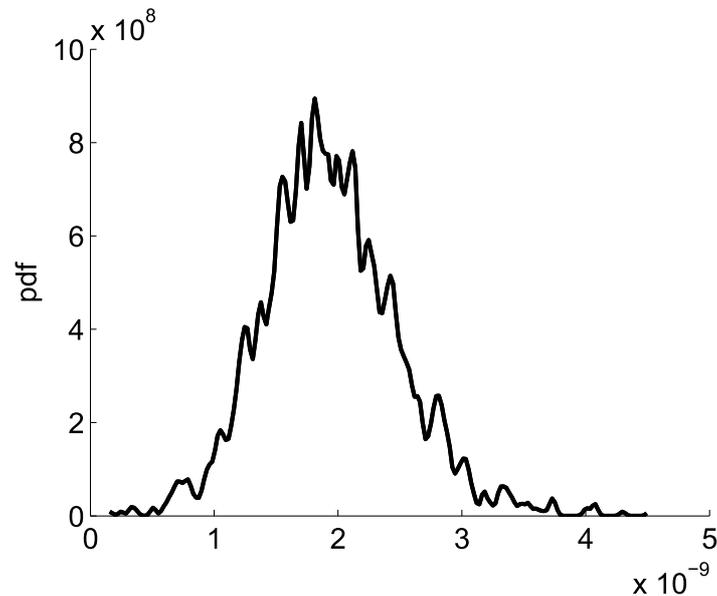


FIG. 8.18 – Graphe de la fonction de densité de probabilité  $\{x \mapsto p_J(x, \delta = (0.13, 0.4))\}$ .

présentons le modèle mathématique du chargement stochastique. Puis, on décrit une méthodologie pour construire une première approximation de la moyenne de la fonction aléatoire de densité spectrale de puissance. Enfin, on identifie complètement et de façon précise le chargement stochastique incertain.

#### 8.4.1 Localisation des efforts induits par l'écoulement du fluide turbulent.

Comme nous l'avons expliqué au paragraphe 5, le modèle de chargement stochastique est construit à partir d'un processus stochastique, du second ordre, centré, stationnaire, gaussien. La localisation spatiale du chargement stochastique doit être judicieusement choisie. L'analyse modale expérimentale de la maquette BECAS-SINE a montré qu'en écoulement, celle-ci répond à des modes d'ensemble en basse fréquence et à des modes du crayon instrumenté pour les fréquences supérieures à 30 Hz.

1. *Chargement grilles.* Ce chargement correspond à des forces appliquées au niveau des jonctions grilles/tubes guides suivant les deux directions transverses

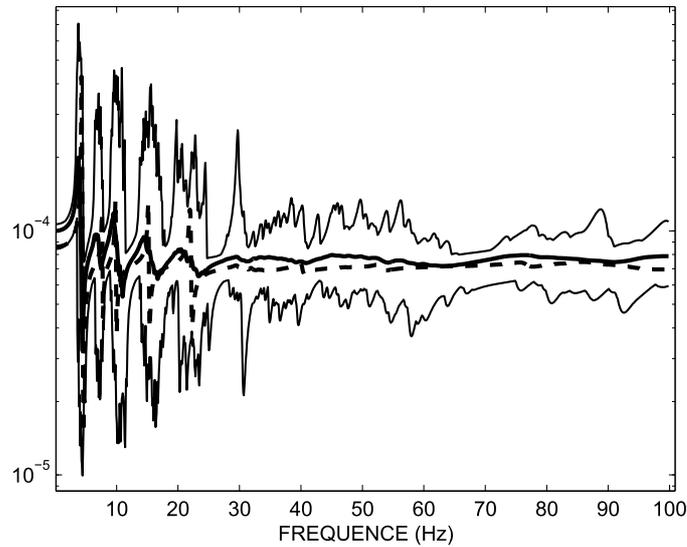


FIG. 8.19 – Domaine de confiance avec un niveau de probabilité  $P_c = 0.95$  de la fonction aléatoire  $\{f \mapsto \|[\mathbf{Z}^A(f)]^{-1}\|_F^2\}$  (traits pleins) et comparaison avec le modèle de référence (traits pointillés).

aux tubes. Ainsi, ce chargement correspond à huit forces et fait travailler les modes d'ensembles. La présence de petites ailettes au niveau des grilles de mélange augmente le niveau de turbulence et accroît la décorrélation du chargement entre les grilles.

2. *Chargement crayon isolé.* Afin de faire travailler les modes du crayon isolé indépendamment des modes d'ensemble, il faudrait, par exemple, exciter ce crayon aux milieux de chacun des trois étages (un étage est l'espace séparant deux grilles consécutives). Cependant, l'énergie transmise par les crayons équivalents au crayon isolé par l'intermédiaire des grilles est prédominante par rapport à celle apportée par le fluide turbulent directement sur le crayon et est suffisante, comme nous le verrons, pour prévoir les spectres mesurés expérimentalement. Ainsi, le crayon isolé ne sera pas directement excité.

Le chargement ainsi constitué est composé de 8 forces stochastiques décorrélées et donc statistiquement indépendantes puisque le processus à valeurs vectorielles modélisant le vecteur des forces appliquées est gaussien. La description spatiale de

ce chargement est bien sûr une représentation très simplifiée du chargement réel continu subit par la structure et dû à l'écoulement turbulent. Ainsi, les incertitudes de modèle liées à cette simplification sont prises en compte comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 5.

### 8.4.2 Construction d'une première approximation de la DSP par la méthode SVD.

On utilise la méthode introduite au paragraphe 6.1.2 pour obtenir une première approximation de la valeur moyenne  $[\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}]$  de la fonction aléatoire de densité spectrale  $[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}]$ . Pour construire cette première approximation, le modèle simplifié stochastique est linéarisé en remplaçant les non-linéarités localisées par des ressorts dont les raideurs sont égales aux raideurs de choc paramétrant les non-linéarités. Cependant, il convient d'adapter cette méthode au cas de mesures par jauge de déformation. Le vecteur des déformations stochastiques  $\Xi_s(\omega)$  s'exprime en fonction du vecteur des déplacements stochastiques physiques mesurés  $\mathbf{Z}_s^{exp}(\omega)$  (dans le cas d'une poutre de Timoshenko) par la relation

$$\Xi_s(\omega) = -R \frac{\partial^2 \mathbf{Z}_s^{exp}(\omega, x)}{\partial x^2} = \text{Proj}'([H^{l'}] \mathbf{Q}_s(\omega)) \quad , \forall \omega \in \mathbb{R} \quad , \quad (8.1)$$

où  $[H^{l'}]$  est la matrices des déformations modales telle que  $[H^{l'}](x) = -R \partial^2 [H^l](x) / \partial x^2$ , où  $[H^l](x)$  est la matrice des déformées modales et où  $R$  est la distance entre la fibre neutre de la poutre et la position de la jauge. Le vecteur  $\mathbf{Q}_s(\omega)$  est le vecteur des coordonnées généralisées stochastiques. Ainsi, dans le cas de mesures par jauges de déformation, le vecteur des  $\mu$  déformations stochastiques  $\Xi_s(\omega)$  est, pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , lié au vecteur des  $m$  forces stochastiques physiques non nulles  $\tilde{\mathbf{F}}(\omega)$  par la relation

$$\Xi_s(\omega) = (\text{Proj}'[H^{l'}][\mathbf{A}^l(\omega)]^{-1}[H^l]^T \text{Lift}) \tilde{\mathbf{F}}(\omega) = [\mathbf{O}^{def}(\omega)] \tilde{\mathbf{F}}(\omega) \quad . \quad (8.2)$$

L'utilisation de cette fonction  $[\mathbf{O}^{def}(\omega)]$  à la place de la fonction  $[\mathbf{O}(\omega)]$  dans les équations (6.8) et (6.9) permet d'obtenir la première approximation souhaitée, i.e, pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ ,

$$[S_{\mathbf{F}}^{eb}(\omega)] = \frac{1}{\nu_\theta} \sum_{i=1}^{\nu_\theta} [\mathbf{O}^{def}(\omega, \theta_i)]^{-1} [S_{\Xi_s^{exp}}(\omega)] ([\mathbf{O}^{def}(\omega, \theta_i)]^{-1})^* \quad . \quad (8.3)$$

La figure 8.20 représente les ébauches des DSP des efforts appliqués sur les différentes grilles suivant la direction  $z$ . On retrouve les mêmes allures suivant la direction  $x$ .

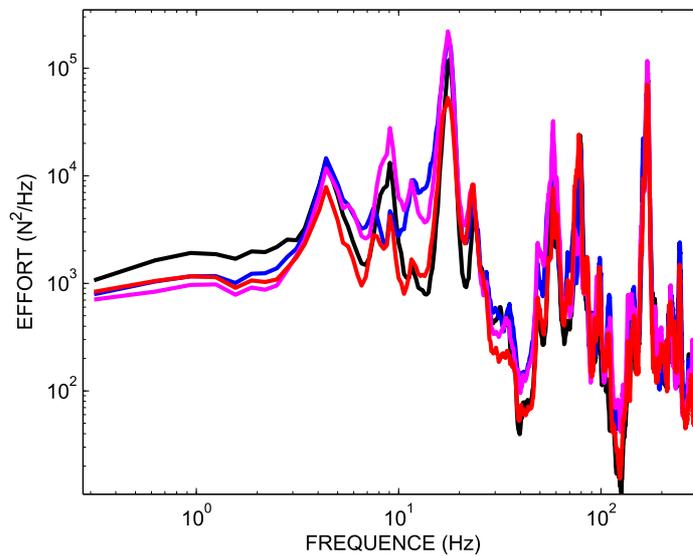


FIG. 8.20 – Première approximation de la DSP des efforts appliqués sur les grille 1 (noir), 2 (bleu), 3 (mauve) et 4 (rouge).

### 8.4.3 Identification robuste

La première étape présentée au paragraphe 8.4.2 donne un point initial pour l'identification de la moyenne de la fonction aléatoire de densité spectrale, et fournit aussi l'allure de cette fonction qui permet ainsi d'en construire une représentation algébrique paramétrée.

**Paramétrage de la valeur moyenne  $[\underline{S}_{\mathbf{F}}]$ .**

La figure 8.21 illustre le paramétrage choisi pour les DSP qui constituent la fonction  $[\underline{S}_{\mathbf{F}}]$ . En représentation log-log, cette fonction est constante dans la bande de fréquence  $[0, 28] \text{ Hz}$  puis décroît linéairement. Cette allure est cohérente avec la théorie de la turbulence de Kolmogorov (voir [62]) qui prévoit une décroissance logarithmique de l'énergie cinétique turbulente du fluide à partir d'une fréquence de coupure. Le modèles algébriques retenus pour les DSP sont donc de la forme  $S(f) = A$  pour  $f \leq f_0$  où  $f_0$  est la fréquence de coupure valant  $f_0 = 28 \text{ Hz}$  et où  $A$  est l'amplitude du plateau basse fréquence et  $S(f) = A(f/f_0)^\alpha$  pour  $f > f_0$ . Ainsi, en prenant la fréquence de coupure  $f_0 = 28 \text{ Hz}$  pour tous les points de la structure et une décroissance logarithmique telle que  $\alpha$  est de 1.4, le chargement dépend de 8 paramètres qui sont les amplitudes des plateaux pour les 8 forces. De plus, nous supposons que ces amplitudes ne varient pas le long de la structure. Ainsi, il ne reste que 2 paramètres à identifier : les amplitudes des forces grilles  $A_X^G$  et  $A_Z^G$  suivant chacune des deux directions transverses.

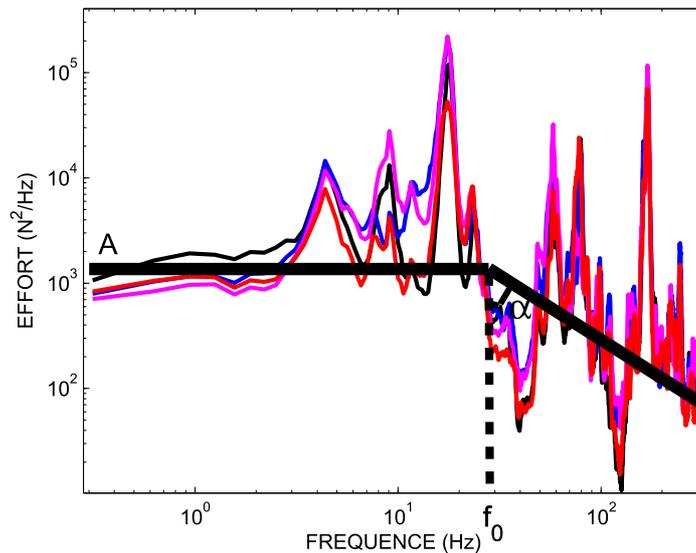


FIG. 8.21 – Paramétrage de la valeur moyenne  $[\underline{S}_{\mathbf{F}}]$ .

**Identification de la valeur moyenne  $[\underline{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}]$ .**

Cette identification se fait en résolvant le problème d'optimisation défini par l'équation (6.12). Il faut donc calculer des réalisations de réponses stationnaires en utilisant le modèle simplifié stochastique. La présence de non-linéarité localisées dans le modèle simplifié moyen conduit à résoudre l'équation (4.18) dans le domaine temporel. Nous utilisons un schéma explicite d'Euler (voir Annexe B) avec un pas de temps de  $0.057 \times 10^{-3}$  s. On utilise la même résolution fréquentielle que celle utilisée durant les essais c'est à dire 0.325 Hz. Donc l'horizon temporel  $T$  doit être supérieure à  $1/0.325 = 3$  s Hz. On choisit  $T = 3.3$  s. Le calcul est réalisé pour  $\nu_{\theta'} = 100$  trajectoires indépendantes du processus stochastique  $\tilde{\mathbf{F}}(t)$  (paragraphe 4.2), ce qui conduit à effectuer le calcul sur l'intervalle temporel  $[0, 330]$  s. Les déformations sont calculées aux emplacements des capteurs qui ont fonctionné suivant les directions  $y$  et  $z$ . La fonction de densité spectrale est estimée par la méthode du périodogramme. Le vecteur  $\mathbf{r}$  à identifier est donc tel que  $\mathbf{r} = (A_X^G, A_Z^G)$ . La première étape permet d'obtenir la valeur initiale  $\mathbf{r} = (10^3, 10^3)$ . La figure 8.22 représente la fonction  $\mathbf{r} \mapsto D(\mathbf{r})$ . Sur cette figure, on peut voir que la valeur optimale  $\mathbf{r}_{opt}$  est atteinte pour  $\mathbf{r}_{opt} = (2.8 \times 10^3 \text{ N}^2/\text{Hz}, 2.0 \times 10^3 \text{ N}^2/\text{Hz})$ . Pour chaque valeur du vecteur  $\mathbf{r}$ , 200 simulations de la réponse stationnaire du modèle simplifié stochastique sont calculées. Sur la figure 8.23, la convergence en moyenne d'ordre deux de la réponse stationnaire est contrôlée vis-à-vis du nombre  $\nu_{\theta, \theta''}$  de tirages des matrices aléatoires et de la fonction aléatoire  $[\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{F}}}]$ .

**Identification du paramètre de dispersion  $\delta_F$ .**

Le paramètre de dispersion  $\delta_F$  est identifié en résolvant le problème d'optimisation défini par l'équation (6.15). La figure 8.24 représente la vraisemblance  $p_{J_s}(J_s^{\text{exp}}; \delta_F)$  de l'observation expérimentale  $J_s^{\text{exp}}$  en fonction du paramètre  $\delta_F$ . On constate un plateau pour les faibles valeurs de  $\delta_F$ . Celui-ci est dû à la variabilité liée au modèle probabiliste non paramétrique introduit sur la partie linéaire du modèle simplifié stochastique. Le maximum est atteint pour  $\delta_F = 0.45$ . Pour estimer la qualité de l'identification, on calcule, par exemple la probabilité  $P(J_s^{\text{exp}} \pm 5\%)$ . En

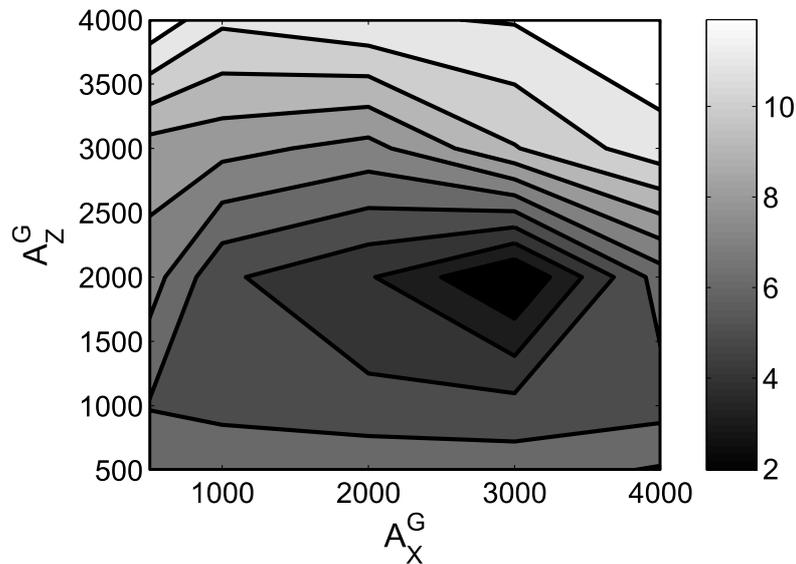


FIG. 8.22 – Graphe de la fonction  $\mathbf{r} \mapsto D(\mathbf{r})$ .

l'absence de modèle d'incertitude pour le chargement, la probabilité  $P(J_s^{\text{exp}} \pm 5\%)$  vaut 0.07. La prise en compte des incertitudes de modèle sur le chargement a augmenté la vraisemblance des mesures, faisant passer la probabilité  $P(J_s^{\text{exp}} \pm 5\%)$  de 0.07 à 0.13.

### Prise en compte des erreurs de mesure.

Le processus d'acquisition des signaux temporels et d'estimation des fonctions de densité spectrale des déformations introduit des erreurs de mesure de l'ordre de 10 % (selon les spécialistes des mesures sur le banc d'essai BECASSINE). Ces erreurs sont à prendre en compte dans l'identification du paramètre de dispersion  $\delta_F$ . Ainsi le bruit additif sur l'observation  $J_s^{\text{exp}}$  est modélisé par une variable aléatoire  $\mathcal{E}$  Gaussienne centrée de variance valant  $J_s^{\text{exp}}/10$ . Le nouveau problème d'optimisation est résolu en utilisant l'équation (6.21) avec, pour chaque valeur de  $\delta_F$ ,  $\nu_e = 500$  tirages de la variable aléatoire  $\mathcal{E}$ . La figure 8.25 représente la nouvelle fonction de vraisemblance tenant compte des erreurs de mesure en fonction du paramètre  $\delta_F$ . On remarque que la valeur optimale du paramètre de dispersion  $\delta_F^{\text{opt}} = 0.35$  en prenant en compte les erreurs de mesure est inférieure à celle obtenue sans prise en

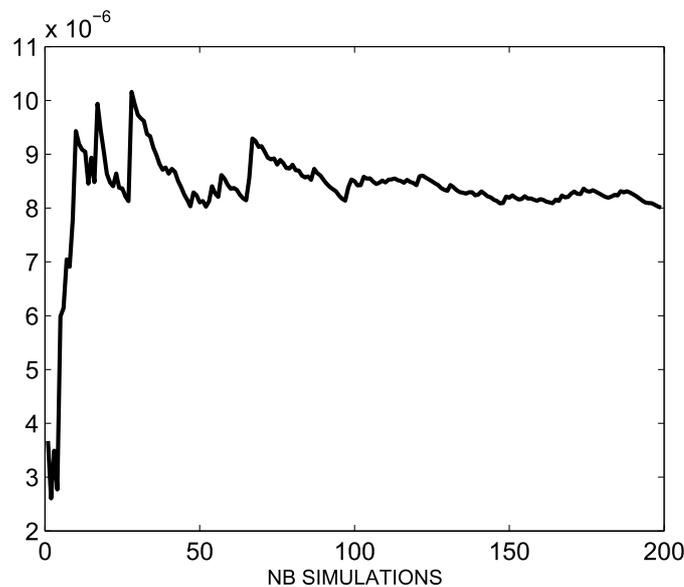


FIG. 8.23 – Graphe de la fonction  $\{\nu_{\theta, \theta''} \mapsto \text{conv}_3(\nu_{\theta, \theta''})\}$ .

compte de ces erreurs. Ceci est conforme à notre attente ; en effet, une partie des causes de la variabilité de la réponse a été transférée aux erreurs de mesure.

## 8.5 Propagation des incertitudes

Ce paragraphe a pour objectif d'utiliser le modèle simplifié stochastique construit au paragraphe 8.3 et le chargement stochastique incertain identifié dans le paragraphe 8.4 pour construire les statistiques des grandeurs d'intérêt.

### 8.5.1 Calcul des déformations du crayon isolé

Dans un premier temps, on vérifie que les déformations estimées par le modèle simplifié stochastique sont proches de celles mesurées expérimentalement. Les figures 8.26 à 8.32 représentent les domaines de confiance avec un niveau de probabilité  $P_c = 0.95$  des DSP des déformations calculées avec le modèle simplifié stochastique. On constate que les déformations calculées avec le modèle simplifié stochastique encadrent bien celles mesurées bien que l'identification des paramètres de dispersion ait été effectuée que de façon conservative sur la bande de fréquence  $[0, 100]$  Hz. Le

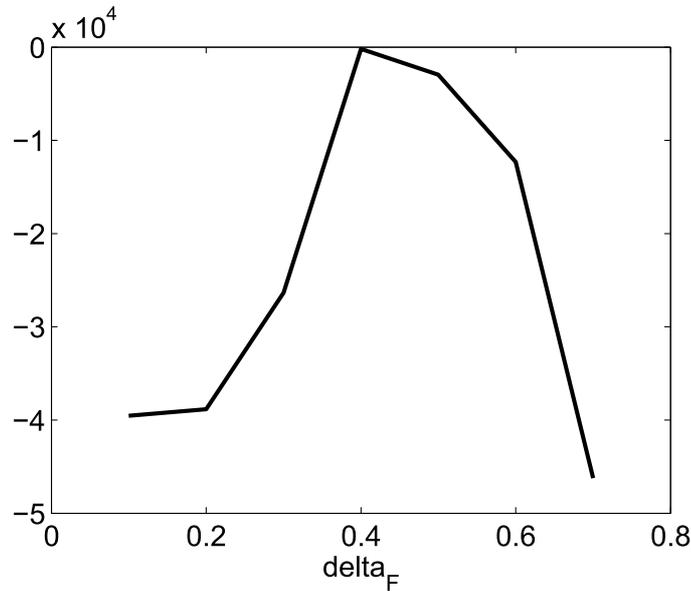


FIG. 8.24 – Graphe de la fonction  $\{\delta_F \mapsto p_{J_s}(J_s^{\text{exp}}; \delta_F)\}$ .

résultat le plus intéressant concerne la dispersion (rapport entre l'écart type et la moyenne) représentée sur la figure 8.33 pour la jauge  $J1x$ . On constate que cette dispersion avoisine les 70 % sur la bande de fréquence  $[0, 100] Hz$  mais augmente fortement pour certaines fréquences atteignant 350 %. Cependant, ces fréquences à forte dispersion ne correspondent pas aux pics des fréquences propres de la structures et correspondent ainsi à des fréquences où l'amplitude de la réponse est faible.

### 8.5.2 Calcul de la puissance d'usure

Le frottement des crayons au niveau des ressorts et des bossettes use la gaine de ces crayons. Cette usure est évaluée pour chaque butée de choc par la puissance moyenne d'usure  $P_{us}$  au sens d'Archard (voir [2]) qui est telle que

$$P_{us}(\theta, \theta'') = \int_{\Theta'} F_N(t, \theta, \theta', \theta'') V_T(t, \theta, \theta', \theta'') d\mathcal{P}(\theta') \quad , \quad (8.4)$$

où  $F_N(t)$  est la force normale (voir Annexe C),  $V_T(t)$  est la norme de la vitesse tangentielle. Pour le cas du modèle simplifié stochastique, les statistiques de la variable aléatoire  $P_{us}$  peuvent être estimées par la méthode de simulation de Monte Carlo.

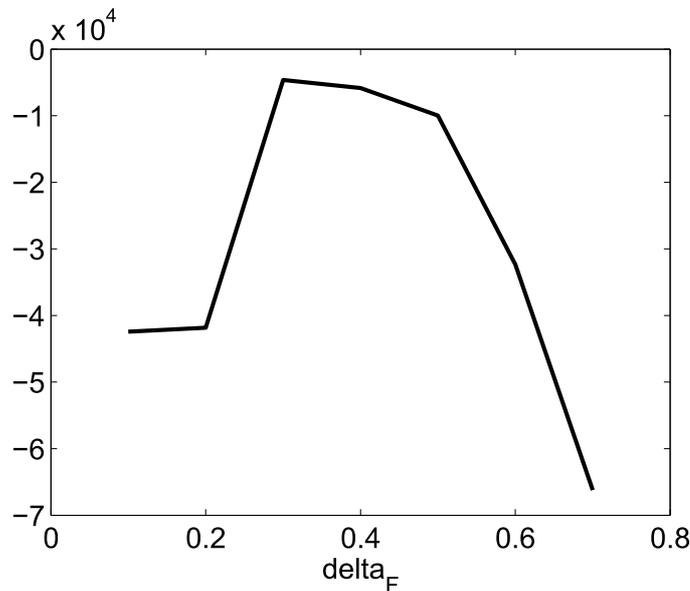


FIG. 8.25 – Graphe de la fonction  $\{\delta_F \mapsto p_{J_s^{er}}(J_s^{\text{exp}}; \delta_F)\}$ .

Le tableau 8.4 regroupe ces statistiques pour les différentes butées de choc élastique (bossettes basses, bossettes hautes, ressorts) des quatre grilles suivant la direction  $x$ . On retrouve des résultats similaires suivant la direction  $z$ . Les dispersions calculées sont inférieures à 65 %. Ainsi, le calcul d'usure est robuste vis-à-vis des incertitudes sur le modèle mécanique et les incertitudes sur le modèle de chargement. Les butées qui usent le plus sont les ressorts des grilles 1 et 4 (grilles de mélanges). Les usures prématurées des gaines de crayons ont toujours été constatées au niveau de la grille 1.

## 8.6 Conclusion

La méthodologie introduite dans les chapitres précédents a été appliquée avec succès sur la maquette BECASSINE. Ainsi, la mesure de déformations le long d'un crayon a permis d'identifier le modèle mécanique stochastique de cette maquette et d'identifier un modèle de chargement stochastique incertain représentatif du chargement turbulent appliqué à la maquette. Ce modèle et ce chargement permettent d'estimer l'usure des crayons au niveau des grilles avec une vraisemblance des me-

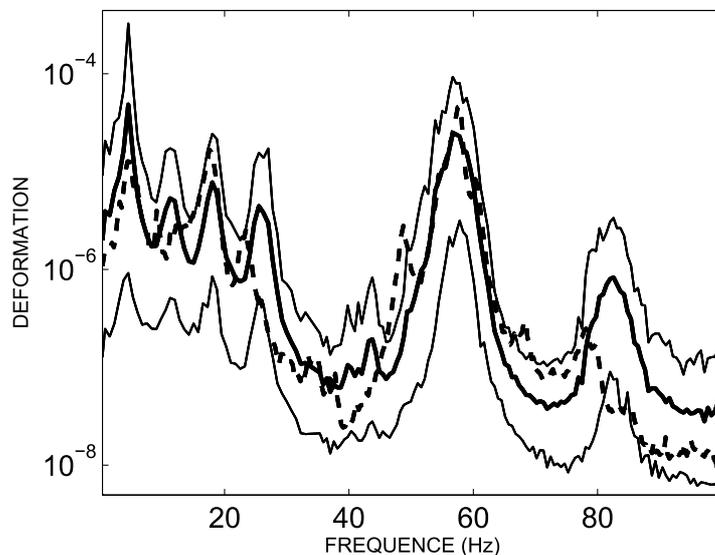


FIG. 8.26 – Fonction de densité spectrale de puissance de la déformation stochastique pour la jauge  $J1x$  : comparaison entre la déformation mesurée (traits pointillés) et celle donnée par le modèle simplifié stochastique (traits pleins).

sures expérimentales optimales. La variabilité liée aux incertitudes de modélisation est élevée mais l'estimation de la puissance d'usure est peu sensible à cette variabilité. Le modèle simplifié stochastique fournit donc une estimation robuste de cette puissance d'usure vis -à-vis des incertitudes de modélisations.

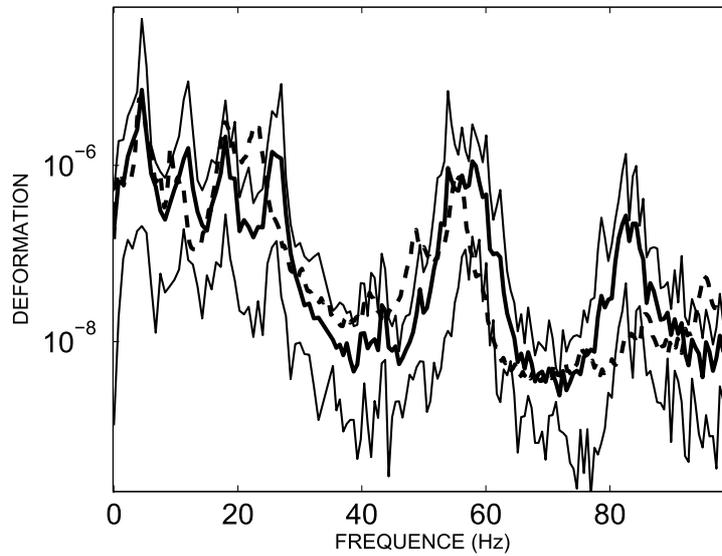


FIG. 8.27 – Fonction de densité spectrale de puissance de la déformation stochastique pour la jauge  $J5x$  : comparaison entre la déformation mesurée (traits pointillés) et celle donnée par le modèle simplifié stochastique (traits pleins).

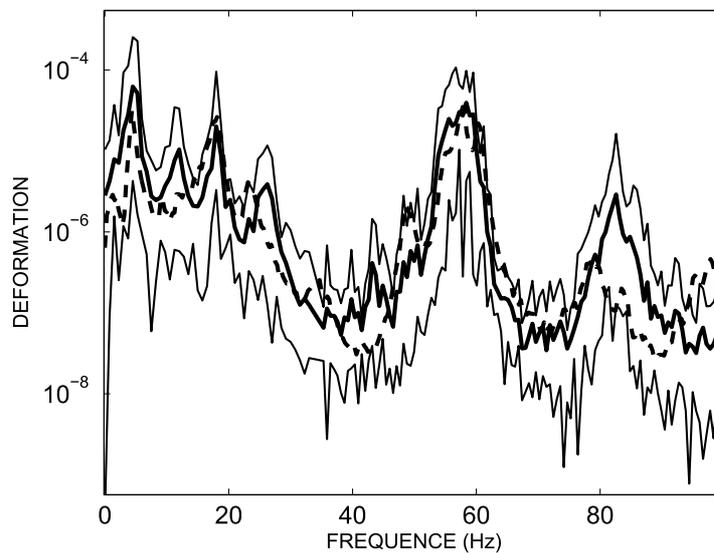


FIG. 8.28 – Fonction de densité spectrale de puissance de la déformation stochastique pour la jauge  $J6x$  : comparaison entre la déformation mesurée (traits pointillés) et celle donnée par le modèle simplifié stochastique (traits pleins).

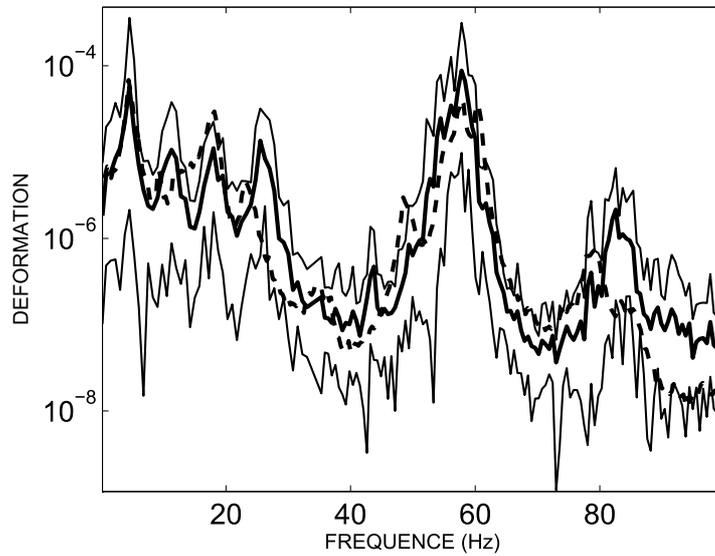


FIG. 8.29 – Fonction de densité spectrale de puissance de la déformation stochastique pour la jauge  $J2z$  : comparaison entre la déformation mesurée (traits pointillés) et celle donnée par le modèle simplifié stochastique (traits pleins).

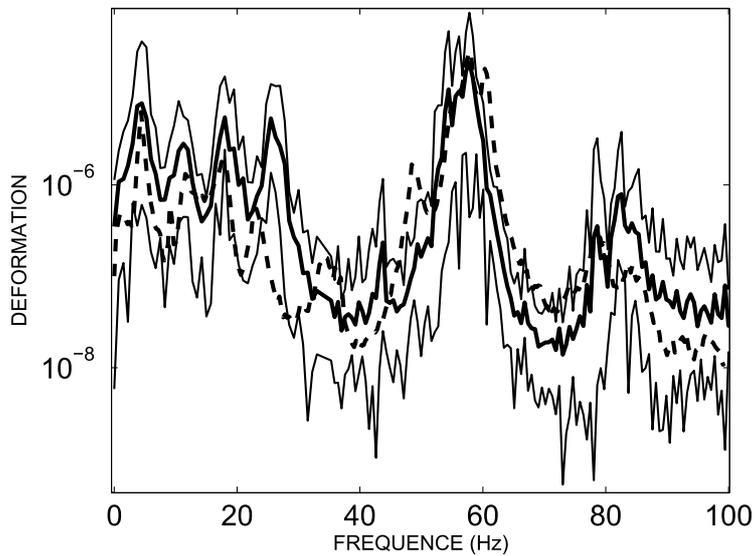


FIG. 8.30 – Fonction de densité spectrale de puissance de la déformation stochastique pour la jauge  $J2z$  : comparaison entre la déformation mesurée (traits pointillés) et celle donnée par le modèle simplifié stochastique (traits pleins).

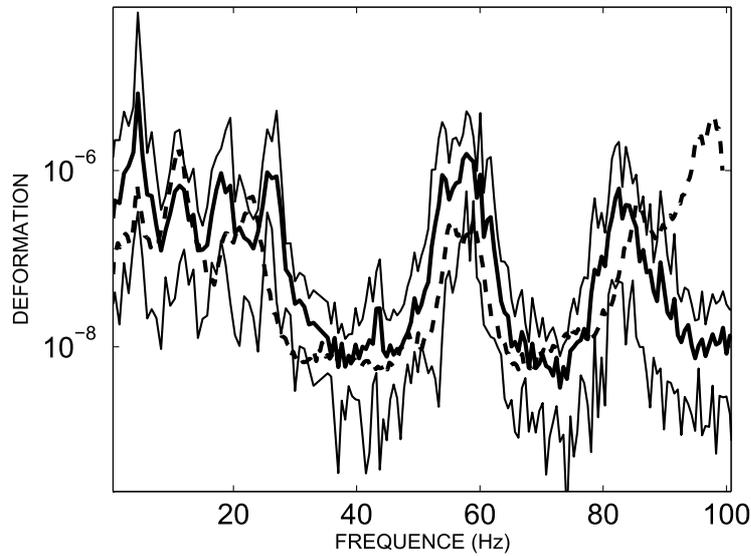


FIG. 8.31 – Fonction de densité spectrale de puissance de la déformation stochastique pour la jauge  $J4z$  : comparaison entre la déformation mesurée (traits pointillés) et celle donnée par le modèle simplifié stochastique (traits pleins).

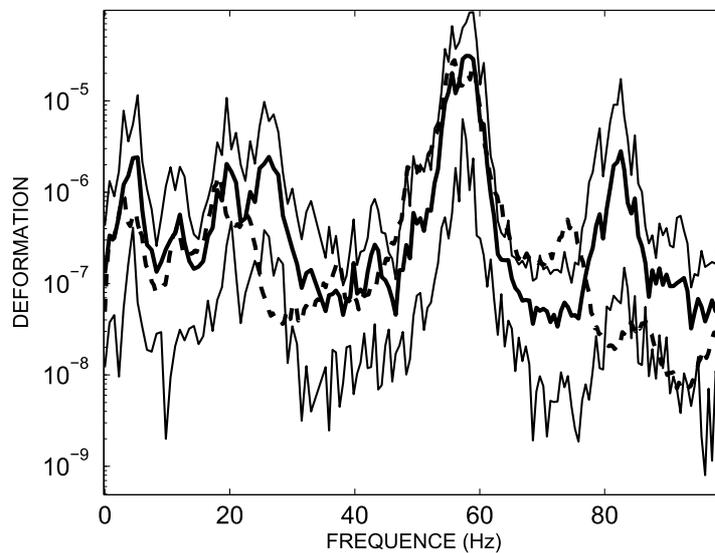


FIG. 8.32 – Fonction de densité spectrale de puissance de la déformation stochastique pour la jauge  $J6z$  : comparaison entre la déformation mesurée (traits pointillés) et celle donnée par le modèle simplifié stochastique (traits pleins).

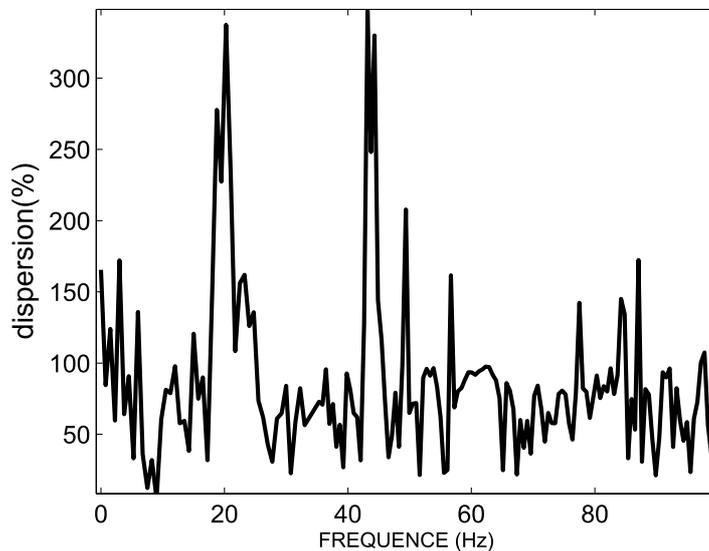


FIG. 8.33 – Dispersion pour la déformation stochastique pour la jauge *J1x*.

butée	moyenne	coef. var.	quantile 5 %	quantile 95 %
bossetteb-gr1	7.68	0.60	4.53	11.3
ressort-gr1	9.41	0.51	7.87	11.4
bossetteh-gr1	4.56	0.55	3.12	6.08
bossetteb-gr2	3.32	0.61	1.87	4.9
ressort-gr2	5.5	0.52	4.53	6.76
bossetteh-gr2	3.23	0.61	1.82	4.78
bossetteb-gr3	3.16	0.65	1.86	4.86
ressort-gr3	5.43	0.51	4.47	6.32
bossetteh-gr3	3.17	0.63	1.77	4.85
bossetteb-gr4	4.63	0.55	2.93	6.13
ressort-gr4	9.48	0.52	7.94	12.2
bossetteh-gr4	7.65	0.61	4.24	11.4

TAB. 8.4 – Statistiques sur la puissance d'usure pour les différentes butées élastiques.

# Conclusion générale et perspectives.

L'objectif de cette recherche était de construire une méthode d'identification des forces stochastiques appliquées à un système dynamique non linéaire en utilisant un modèle numérique incertain et des réponses expérimentales.

Pour réaliser cet objectif, nous avons, dans un premier temps, construit une méthodologie permettant d'utiliser l'approche probabiliste non-paramétrique sur un sous-système linéaire du modèle simplifié afin de prendre en compte les incertitudes de modélisation. Les paramètres de dispersions ont été identifiés en utilisant un modèle de référence numérique ou expérimental et la méthode du maximum de vraisemblance. Cette identification a été réalisée avec succès sur le modèle simplifié représentant le maquette BECASSINE. Les incertitudes de modélisation sur le chargement aléatoire ont été prises en compte par une approche probabiliste paramétrique en remplaçant la fonction de densité spectrale par une fonction aléatoire. Nous avons construit la représentation algébrique de ce nouveau processus permettant ainsi de générer facilement des trajectoires indépendantes afin de calculer des réponses stationnaires d'un système dynamique non linéaire soumis à ce chargement.

L'identification du modèle de forces aléatoires incluant la prise en compte des incertitudes a été réalisée en utilisant le modèle simplifié stochastique et des réponses expérimentales. Les propriétés du modèle de chargement ont permis de faire cette identification en deux étapes. Dans un premier temps, la fonction de densité spectrale de puissance est identifiée par la méthode des moments. Puis dans un second temps, le paramètre de dispersion du chargement est identifié par la méthode du

maximum de vraisemblance. La prise en compte des incertitudes de modélisation sur le chargement a permis, pour la maquette BECASSINE d'améliorer la vraisemblance des déformations mesurées.

La prise en compte des incertitudes de modélisation, aussi bien pour le sous-système linéaire du modèle simplifié que pour le chargement, a permis d'inclure les réponses expérimentales dans le champs des réponses calculées par le modèle simplifié. La contre-partie est que la dispersion des réponses calculées est fortement augmentée, ce qui est normal compte tenu du niveau élevé des incertitudes de modélisation. Evidemment, cette dispersion peut être diminuée en complexifiant le modèle simplifié qui ne serait plus alors "simplifié". Dans le cas de la maquette BECASSINE, la dispersion des puissance d'usure ne dépasse pas 65 %, ce qui est largement suffisant pour des études qualitatives d'usure d'assemblages combustibles.

## Perspectives

Nous nous sommes intéressés à des structures comportant un sous-système linéaire principal incertain, les non-linéarités étant sur l'autre sous-système. Cette situation nous a permis de construire une méthode d'identification des paramètres de dispersion indépendamment du chargement. Cette méthode pourrait être étendue au cas où les deux sous-systèmes ne sont pas linéaires.

Comme le montre les résultats d'identification du chargement stochastique sur la maquette BECASSINE, l'amplitude et l'allure des DSP pour le chargement stochastique varient en fonction de la fréquence (plateau en basse fréquence puis décroissance logarithmique à partir d'une fréquence de coupure). Ainsi, la complexité du modèle de chargement induit par le fluide turbulent varie elle aussi en fonction de la fréquence. Le processus stochastique du chargement incluant le modèle d'incertitude pourrait être amélioré en considérant notamment un paramètre de dispersion variant en fonction de la fréquence. Enfin, le modèle stochastique des forces induites par l'écoulement nécessite une validation à l'aide de mesures de forces obtenues expérimentalement ou à l'aide de simulations numériques de l'écoulement du

fluide turbulent.



# Annexe A

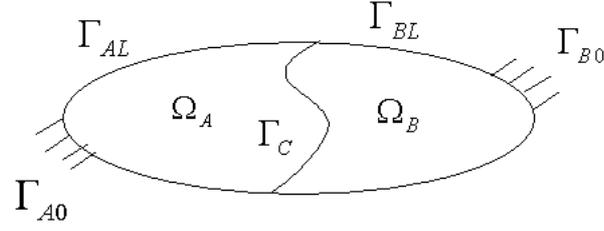
## Méthode de condensation dynamique

On développe dans cette annexe une méthode de condensation dynamique mise au point (voir [6], [7]) afin de tenter de calculer la réponse dynamique de la maquette BECASSINE en modélisant tous les crayons et tubes (modèle de référence). Dans le paragraphe A.1, la méthode est présentée. Le paragraphe A.2 présente un exemple simple validant la méthodologie proposée.

### A.1 Equation du système couplé

On considère une structure tri-dimensionnelle amortie. Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$  composé de deux sous-domaines,  $\Omega_A$  qui correspond à un sous-système non linéaire et  $\Omega_B$  qui correspond à un second sous-système linéaire. Les deux sous-systèmes sont couplés sur l'interface de couplage  $\Gamma_C$ . Le bord  $\Gamma_B$  du domaine  $\Omega_B$  est composé de  $\Gamma_C$ , de la partie fixe  $\Gamma_{B0}$  et de  $\Gamma_{BL}$ . Le modèle éléments finis pour le sous-système linéaire  $\Omega_B$  définie sur la bande de fréquence  $\mathcal{B} = [-\omega_{max}, \omega_{max}]$  s'écrit par rapport aux  $n_p$  DDLs internes  $\mathbf{u}_p^B(\omega)$  et aux  $n_c$  DDLs d'interface  $\mathbf{u}_c^B(\omega)$

$$\begin{bmatrix} A_{pp}^B(\omega) & A_{pc}^B(\omega) \\ A_{cp}^B(\omega) & A_{cc}^B(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_p^B(\omega) \\ \mathbf{u}_c^B(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_p^B(\omega) \\ \mathbf{F}_c^B(\omega) + \mathbf{F}_{coupl}^B(\omega) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

FIG. A.1 – Decomposition du domaine  $\Omega$ .

où  $[A^B(\omega)]$  est la matrice de rigidité dynamique telle que :

$$[A^B(\omega)] = -\omega^2 [M^B] + i\omega [D^B] + [K^B] \quad , \quad (\text{A.2})$$

où  $[M^B]$ ,  $[D^B]$  et  $[K^B]$  sont respectivement les matrices définies positives de masse, amortissement et raideur. Les vecteurs  $\mathbf{F}_c^B(\omega)$  et  $\mathbf{F}_{coupl}^B(\omega)$  représentent respectivement les forces externes appliquées sur l'interface de couplage  $\Gamma_C$  et les forces de couplage. La condensation dynamique du système A.1 par rapport aux DDLs d'interface nous amène à l'équation

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{coupl}^B(\omega) = & [A_{cc}^B(\omega) - A_{cp}^B(\omega)(A_{pp}^B(\omega))^{-1}A_{pc}^B(\omega)] \mathbf{u}_c^B(\omega) \\ & + A_{cp}^B(\omega)(A_{pp}^B(\omega))^{-1}\mathbf{F}_p^B(\omega) - \mathbf{F}_c^B(\omega) \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

La transformée de Fourier inverse de l'équation A.3 et le modèle éléments finis du premier sous-système non linéaire nous amène à l'équation matricielle suivante pour

le système dynamique couplé.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} M_{pp}^A & M_{pc}^A \\ M_{cp}^B & M_{cc}^A + M_{cc}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_p^B(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}_c^B(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{pp}^A & D_{pc}^A \\ D_{cp}^B & D_{cc}^A + D_{cc}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_p^B(t) \\ \dot{\mathbf{u}}_c^B(t) \end{bmatrix} \\
+ & \begin{bmatrix} K_{pp}^A & K_{pc}^A \\ K_{cp}^B & K_{cc}^A + K_{cc}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_p^B(t) \\ \mathbf{u}_c^B(t) \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} \mathbf{F}_p^{NL}(t, \mathbf{u}^A, \dot{\mathbf{u}}^A) + \mathbf{F}_p^A(t) \\ \mathbf{F}_c^{NL}(t, \mathbf{u}^A, \dot{\mathbf{u}}^A) + \mathbf{F}_c^A(t) + \mathbf{F}_c^B(t) + \tilde{\mathbf{F}}(t) \end{bmatrix} \\
+ & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \int_0^t B_U(\tau) \mathbf{u}_c^A(t-\tau) d\tau + \int_0^t B_{\dot{U}}(\tau) \dot{\mathbf{u}}_c^A(t-\tau) d\tau + \int_0^t B_{\ddot{U}}(\tau) \ddot{\mathbf{u}}_c^A(t-\tau) d\tau \end{bmatrix}, \tag{A.4}
\end{aligned}$$

avec les conditions initiales,

$$\mathbf{u}(0) = \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}, \tag{A.5}$$

où  $\mathbf{F}^{NL}(t, \mathbf{u}^A, \dot{\mathbf{u}}^A)$  est le vecteur des forces non linéaires. Les fonctions  $B_U$ ,  $B_{\dot{U}}$  et  $B_{\ddot{U}}$  sont à valeur matriciel de dimension  $(n_c, n_c)$ , où  $n_c$  est le nombre de DDLs d'interface, et sont telles que

$$\begin{aligned}
\widehat{B}_U(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} B_U(t) dt = K_{cp}^B (A_{pp}^B(\omega))^{-1} K_{pc}^B \\
\widehat{B}_{\dot{U}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} B_{\dot{U}}(t) dt = 2\text{sym}(D_{cp}^B (A_{pp}^B(\omega))^{-1} K_{pc}^B) \\
\widehat{B}_{\ddot{U}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} B_{\ddot{U}}(t) dt \\
&= 2\text{sym}(M_{cp}^B (A_{pp}^B(\omega))^{-1} K_{pc}^B) + \omega D_{cp}^B (A_{pp}^B(\omega))^{-1} D_{pc}^B \\
&\quad + 2\omega \text{sym}(M_{cp}^B (A_{pp}^B(\omega))^{-1} D_{pc}^B) + \omega^2 M_{cp}^B (A_{pp}^B(\omega))^{-1} M_{pc}^B.
\end{aligned}$$

Le vecteur  $\tilde{\mathbf{F}}(t)$  de dimension  $n_c$  représente la condensation des efforts externes appliqués sur les DDLs interne du sous-système linéaire et est tel que

$$\tilde{\mathbf{F}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} A_{cp}^B(\omega) (A_{pp}^B(\omega))^{-1} \mathbf{F}_p^B(\omega) d\omega. \tag{A.6}$$

La fonction à valeur matricielle  $[A_{cp}^B(\omega)(A_{pp}^B(\omega))^{-1}A_{pc}^B(\omega)]$  de l'équation A.3 est décomposée en trois termes de manière à obtenir des filtres causaux pour les produits de convolution.

## A.2 Exemple de validation

Le modèle considéré est constitué d'une poutre d'Euler fixée à ses extrémités. Cette poutre à une section circulaire constante de rayon  $0.5\text{ m}$ , d'épaisseur  $0.2\text{ m}$ , de longueur  $20\text{ m}$ , de masse volumique  $500\text{ kg/m}^3$ , de module d'Young  $450\text{ N/mm}^2$  et d'un taux de dissipation de  $0.02$ . Ce système est scindé en deux sous-système. Le premier sous-système non linéaire est la poutre A (voir figure A.2) de longueur  $12\text{ m}$ , libre sur son bord gauche (interface de couplage) et fixe sur son bord droit. Le second sous-système linéaire est la poutre B, fixe sur son bord gauche et libre sur son bord droit. La poutre non linéaire A a une butée élastique située à  $8\text{ m}$  de son bord fixe, avec un jeu de  $10^{-5}\text{ m}$  et une raideur de choc de  $10^8\text{ m}$ . On s'intéresse au calcul de la réponse temporelle du système couplé non linéaire excité par deux forces externe  $\mathbf{F}^A(t)$  et  $\mathbf{F}^B(t)$  localisées à  $4\text{ m}$  de chacun des bords fixes et dont la transformée de Fourier a un module constant de  $1\text{ N/Hz}$  sur la bande de fréquence  $[-150, 150]\text{ Hz}$ . La figure A.3 valide la méthode de condensation dynamique proposée.



FIG. A.2 – Description des deux sous-systèmes de  $\Omega$ .

Cette figure compare de déplacement transversal au niveau du point d'excitation de la poutre A dans le domaine fréquentielle (module de la transformée de Fourier de la réponse temporelle du système couplé non linéaire) par résolution directe sans condensation et en utilisant la méthode de condensation présenté.

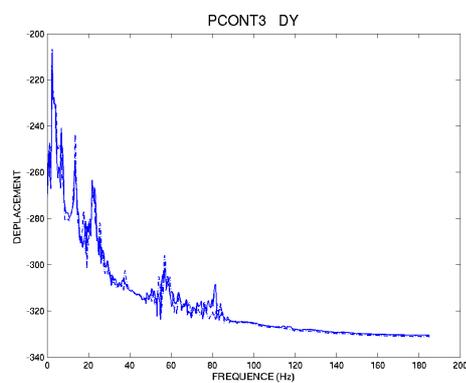


FIG. A.3 – Comparaison de la réponse au poin d’excitation de la poutre A : Résolution directe (traits pointillés) et réponse obtenue par condensation dynamique (traits pleins).



# Annexe B

## Schéma d'intégration explicite d'Euler

Dans cette annexe, on explique brièvement le schéma d'intégration explicite d'Euler. On cherche à calculer le vecteur  $\mathbf{q}(t)$  solution, pour tout  $t \in [0, +\infty[$ , de l'équation différentielle matricielle non linéaire du second ordre suivante

$$[M]\ddot{\mathbf{q}}(t) + [D]\dot{\mathbf{q}}(t) + [K]\mathbf{q}(t) + \mathcal{F}^{NL}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \mathcal{F}(t) \quad , \quad (\text{B.1})$$

avec les conditions initiales,

$$\mathbf{q}(0) = \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0} \quad , \quad (\text{B.2})$$

où les matrices de masse  $[M]$ , d'amortissement  $[D]$  et de raideur  $[K]$  sont symétriques définies positives. Le vecteur  $\mathcal{F}^{NL}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$  représente des forces non linéaires et le vecteur  $\mathcal{F}(t)$  second membre de l'équation différentielle représente les efforts extérieurs subies par la structure à laquelle nous nous intéressons. Ce schéma d'intégration est stable si le pas d'intégration  $\Delta t$  vérifie (en négligeant l'effet de l'amortissement) :

$$\Delta t > \frac{2}{\omega_{max}} \quad , \quad (\text{B.3})$$

où  $\omega_{max}$  est (si on néglige l'amortissement) la fréquence propre la plus élevée pour le problème spectral

$$[K] \phi = \omega^2 [M] \phi \quad . \quad (\text{B.4})$$

Alors, l'état  $(\mathbf{q}(t + \Delta t), \dot{\mathbf{q}}(t + \Delta t))$  à l'instant  $t + \Delta t$  se déduit de l'état  $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$  à l'instant  $t$  par les relations

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}(t + \Delta t) = \mathbf{q}(t) + \Delta t [M]^{-1} (\mathcal{F}(t) - \mathcal{F}^{NL}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \\ - [K] \mathbf{q}_s(t) - [D] \dot{\mathbf{q}}(t)) , \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{q}(t + \Delta t) = \mathbf{q}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{q}}(t + \Delta t) \quad . \quad (\text{B.6})$$

L'avantage de ce schéma est sa facilité de mise en oeuvre. Cependant, le pas de temps déterminé par l'équation B.3 peut conduire à temps de calcul très élevé pour des structures comportant une partie très rigide. Dans ce cas, un schéma implicite sera privilégié.

# Annexe C

## Non-linéarités localisées de choc et de frottement.

Dans cette annexe, on introduit la méthode de traitement du contact avec frottement par pénalisation (pour plus de détails, on peut consulter [79]). On travaille directement sur le modèle discrétisé. On considère deux structures déformables  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . On note  $\mathbf{n}_1$  la normale sortante du bord de  $\Omega_1$  et  $\mathbf{n}_2$  la normale sortante du bord de  $\Omega_2$ . On note  $\mathbf{d}_N^{1/2} = d_N^{1/2} \mathbf{n}_1$  la distance normale entre les deux structures et  $\mathbf{F}_N^{1/2} = F_N^{1/2} \mathbf{n}_1$  la force de réaction normale de la structure  $\Omega_1$  sur la structure  $\Omega_2$  (voir la figure C.1).

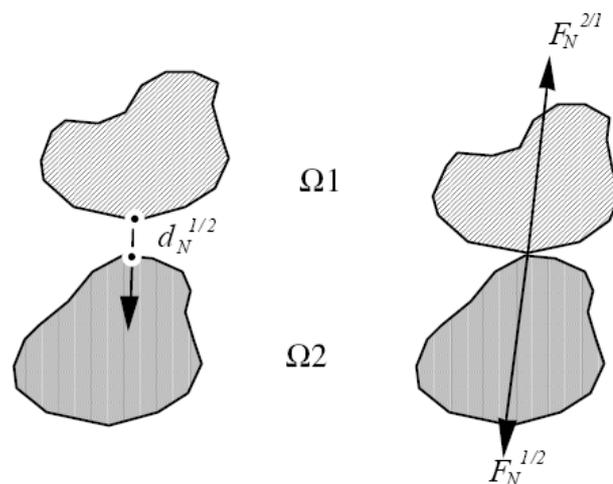


FIG. C.1 – Description du contact.

## C.1 Modélisation des forces normales de contact

On utilise la méthode de pénalisation qui consiste à introduire une raideur de choc  $K_N$  telle que lorsqu'il y a contact, on ait

$$F_N^{1/2} = -K_N d_N^{1/2} \quad . \quad (\text{C.1})$$

Alors la loi de contact entre les structures  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  s'exprime par les relations

$$\begin{aligned} \text{si } d_N^{1/2} \leq 0, \quad \text{alors } F_N^{1/2} &= -K_N d_N^{1/2} \quad , \\ \text{sinon } F_N^{1/2} &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

La figure Fig. C.2 représente cette loi de contact.

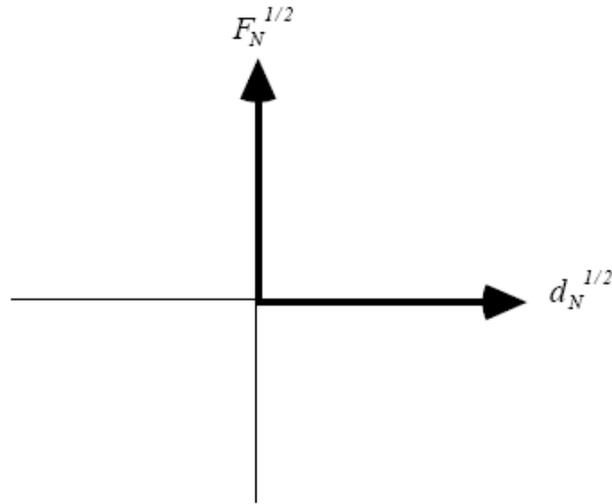


FIG. C.2 – Graphe de la loi de contact.

## C.2 Loi de frottement de Coulomb

On suppose que les structure  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont en contact. On note  $\mathbf{F}_T^{1/2}$  la force de réaction tangentielle de la structure  $\Omega_1$  sur la structure  $\Omega_2$  et  $\dot{\mathbf{u}}^{1/2}$  la vitesse relative de  $\Omega_1$  par rapport à  $\Omega_2$  au niveau d'un point de contact. Soit  $\mu$  le coefficient de

frottement de Coulomb (supposé égal au coefficient d'adhérence), on a alors

$$\begin{aligned} \text{si } \|\mathbf{F}_T^{1/2}\| &= \mu F_N^{1/2}, & \text{alors } \exists \lambda \text{ t.q. } \dot{\mathbf{u}}^{1/2} &= \lambda \dot{\mathbf{u}}^{1/2} \quad , \\ \text{si } \|\mathbf{F}_T^{1/2}\| &< \mu F_N^{1/2}, & \text{alors } \dot{\mathbf{u}}^{1/2} &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{C.3}$$

Cette loi de frottement est non différentiable. Cette difficulté peut être contournée en introduisant une raideur tangentielle. Sur les modèle d'assemblage combustible, le frottement doit être modélisé afin de calculer l'usure au niveau du contact crayon/grille.



# Bibliographie

- [1] N.N. Ambraseys, J.-M. Menu, earthquake-induced ground displacement, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 16(7), 985-1006 (1988).
- [2] J.F. Archard, Elastic deformation and the laws of friction, *Proceeding of the royal society of London*, serie A243, 10-205 (1957).
- [3] L. Arnold, *Stochastic differential equations : Theory and applications*, Wiley, New York, 1974.
- [4] D. Aubry, F. Chapel, J.M. Crepel, calcul sismique des fondations sur pieux, *Génie Parasismique*, chapitre VI-5, Presses ENPC (1985).
- [5] D. Aubry, D. Lucas, B. Tie, Adaptative strategy for transient/coupled problems - Applications to thermoelasticity and elastodynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1-4), 41-50 (1999).
- [6] A. Batou, C. Soize, S. Cambier, Dynamique stochastique non linéaire de deux systèmes dynamiques incertains couplés, *8<sup>eme</sup> Colloque National en Calcul des Structures*, Giens, France, 21-25 mai 2007.
- [7] A. Batou, C. Soize, Nonlinear stochastic dynamics of two coupled uncertain dynamical systems, *COMPADYN2007, Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, Rethymno, Greece, 13-15 June 2007.
- [8] A. Batou, C. Soize, Experimental identification of stochastic processes using uncertain computational non-linear dynamical model, *ICIPE2008, 6<sup>th</sup> Int. Conf. on Inverse Problems in Engineering*, Dourdan, France, 15-19 June 2008.

- 
- [9] A. Batou, C. Soize, I. Zentner, E. De Rocquigny, Uncertain non-linear dynamical system submitted to uncertain stochastic loads, *EURODYN2008, European Conference on Structural Dynamics*, Southampton, England, 6-9 June 2008.
- [10] A. Batou, C. Soize, Experimental identification of stochastic processes using uncertain computational non-linear dynamical model, *Journal of Physics, conference series*, accepted for publication in April 2008.
- [11] A. Batou, C. Soize, Identification of stochastic loads applied to a non-linear dynamical system using an uncertain computational model and experimental responses, *Computational Mechanics*, accepted for publication in August 2008.
- [12] H. Benaroya, M. Rehak, Parametric random excitation.I : Exponentially correlated parameters, *Journal of Engineering Mechanics*, 113(6), 861-873 (1987).
- [13] H. Benaroya, M. Rehak, Parametric random excitation.II : White noise parameters, *Journal of Engineering Mechanics*, 113(6), 875-884 (1987).
- [14] H. Benaroya, M. Rehak, Finite element method in probabilistic structural analysis : A selective review, *Applied Mechanics Reviews*, 41(5) 201-213 (1988).
- [15] J.S. Bendat and A.G. Piersol, *Random Data : Analysis and Measurement Procedures*, Wiley, New York, 1971.
- [16] J.L. Beck, L.S. Katafygiotis, Updating models and their uncertainties, *Journal of Engineering Mechanics*, 124(4) (1998).
- [17] J. Betdeder-Matibet, *Risques et aléas sismiques*, Hermès Science Publications, Paris, 2003.
- [18] C. Blanzé, L. Champaney, A computational strategy for the random response of assemblies of structures, *International Journal of Solids and Structures*, 41, 6383-6405 (2004).
- [19] C. Blanzé, P. Roux, Analyse of structures with stochastic interfaces in the medium-frequency range, *Journal of Computational Acoustics*, 13(4), 711-729 (2005).
- [20] R.D. Blevins, *Flow induced vibration*, Vor Nostrand, New York, 1977.

- 
- [21] R.D. Blevins, *Formulas for natural frequency and mode shape*, Vor Nostrand, New York, 1979.
- [22] D. Bosselut, V. Métivier, Modèle complet d'un assemblage combustible pour le calcul des vibrations/usure, *EDF R&D, Clamart - Note technique*, (1999).
- [23] L. Brillouin, *Propagation of wave in Periodic Structure*, Dover, New York, 1953.
- [24] A. Brückner, Y.K. Lin, Generalization of the equivalent linearization method for non-linear random vibration problems, *Int. J. of Non-Linear Mechanics*, 22(3) (1987) 227-235.
- [25] E. Capiez-Lernout, C. Soize, Nonparametric modeling of random uncertainties for dynamic response of mistuned bladed disks, *Journal of Engineering for Gas Turbine and Power*, 126, 600-618 (2004).
- [26] T.K. Caughey, H.J. Stumpf Transient response of a dynamic system under random excitation, *Journal of Applied Mechanics*, 28(4), 563-566 (1961).
- [27] S.H. Chen, Z.-S. Liu, Z.-F. Zhang, Random vibration analysis for large-scale structures with random parameters, *Computers and Structures*, 43(4), 681-685 (1992).
- [28] S.S. Chen, Flow-induced vibration of a circular cylindrical structure, *Nuclear Engineering Design*, 42, 67-86 (1978).
- [29] H. Contreras, The stochastic finite element method, *Computers and Structures*, 12, 341-348 (1980).
- [30] R.R. Craig, Jr. and M.C.C Bampton, Coupling for substructures for dynamic analysis, *AIAA Journal*, 3 (6), July 1968.
- [31] S.H. Crandall, *Random vibration*, Vol I, Technical Press Cambridge, Massachusetts, 1958.
- [32] S.H. Crandall, *Random vibration*, Vol II, MIT Press, Cambridge, 1963.
- [33] A. De Crécy, CIRCE : the tool for calculating uncertainties of the constitutive relationships of cathare2, 8<sup>th</sup> *International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermo-Hydraulics*, Kyoto (1997).

- 
- [34] H. De Gersem, D. Moens, W. Desmet, D. Vandepitte, A fuzzy finite element procedure for the calculation of uncertain frequency response function of damped structures : Part 2- Numerical case studies, *Journal of Sound and Vibration*, 288(3), 463-486 (2005).
- [35] E. De Rocquigny, S. Cambier, Inverse probabilistic modelling of the sources of uncertainty : a non-parametric simulated-likelihood method with application to an industrial turbine vibration assessment, *Inverse Problems in Science and Engineering*, accepted for publication.
- [36] F. Dempster, N.M. Laird, D.B. Rubin, Maximum likelihood for incomplete data from the EM algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society*, (Ser. B)39 (1977).
- [37] C. Desceliers, C. Soize, S. Cambier, Nonparametric parametric model for random uncertainties in nonlinear structural dynamics. Application to earthquake engineering, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 33(3), 315-327 (2004).
- [38] D.J. Ewins, *Modal Testing : theory and practice*, Research Study Press LTD, John Wiley and Sons, 1984.
- [39] G. Falsone, Stochastic linearization of MDOF systems under parametric excitation, *Int. J. of Non-Linear Mechanics*, 27(6) (1992) 1025-1037.
- [40] C. Farhat, M. Geradin, On a component mode synthesis method and its application to incompatible substructures, *Computers & Structures*, 51(5) (1994) 459-473.
- [41] M. Géradin, D. Rixen, *Théorie des Vibrations - Application à la Dynamique des Structures*, éditions Masson, 1989.
- [42] R.G. Ghanem, P.D. Spanos, *Stochastic finite element : A spectral approach*, Springer Verlag, New York, 1991.
- [43] R.G. Ghanem, R.M. Kruger, Numerical solution of spectral stochastic finite element systems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 129, 289-303 (1996).

- 
- [44] R.G. Ghanem, P.D. Spanos, Polynomial chaos in stochastic finite element, *Journal of Applied Mechanics*, 129, 289-303 (1996).
- [45] R.G. Ghanem, P.D. Spanos, Hybrid stochastic finite elements : coupling of spectral expansions with monte carlo simulations, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 65, (1998).
- [46] G.H. Golub, C.F. Loan, *Matrix Computations*, 2<sup>nd</sup> ed., The John Hopkins University Press, Baltimor, 1989.
- [47] S. Granger, L. Perotin, An inverse method for the identification of distributed random excitation acting on a vibrating structure, Part 1 : Theory, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13(1) 53-65 (1999).
- [48] I.D. Gupta, R.G. Joshi, Response spectrum superposition for structures with uncertain properties, *Journal of Engineering Mechanics*, 127(3) 233-241 (2001).
- [49] C. Heinkelé, S. Pernot, F. Sgart, C.-H. Lamarque, Vibration of an oscillator with random damping : Analytical expression for the probability density function, *Journal of Sound and Vibration*, 296 383-400 (2006).
- [50] W.C. Hurty, Dynamic analysis of structural systems using component modes, *AIAA Journal*, 3 (4), 678-685, 1965.
- [51] S. Ibrahim, E. Mikulcik, A method from the direct identification of vibration parameters from the free response, *The Shock and Vibration Bulletin*, 47(4) 188-198 (1977).
- [52] R.A. Ibrahim, Structural dynamics with parameter uncertainties, *Applied Mechanics Reviews*, 40(3) 309-328 (1987).
- [53] R.A. Ibrahim, *Parametric random vibration*, John Wiley and Sons, New York, 1985.
- [54] T. Igusa, A. Der Kiureghian, Response of uncertain systems to stochastic excitation, *Journal of Engineering Mechanics*, 114(5) 812-832 (1988).
- [55] J.F. Imbert, *Analyse des Structures par Elements Finis*, Cepaudes editions, Sup'Aero, Toulouse, 1979.

- 
- [56] K. Ito, On stochastic differential equation, *Memoir. American Mathematical Society*, 14 (1961).
- [57] W.D. Iwan, A generalization of the concept of equivalent linearization, *Int. J. of Non Linear Mechanics*, 5, 279-287, (1973).
- [58] G. Jacquart, F. Marcel, Modélisation dynamique d'un assemblage combustible REP - Etude de modèles filaires équivalents, *EDF R&D, Clamart - Note technique*, (1994).
- [59] E.T. Jaynes, Information theory and statistical mechanics, *Phys. Rev.*, 106(4), 620-630 (1957), and 108(3), 171-190 (1957).
- [60] H. Jensen, W.D. Iwan, Response of systems with uncertain parameters to stochastic excitation, *Journal of Engineering Mechanics*, 118(5) 1012-1025 (1992).
- [61] J.N. Kapur, H.K. Kesavan, *Entropy Optimization Principles with Applications*, Academic Press, San Diego, 1992.
- [62] A.N. Kolmogorov, The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers, *Proceedings of the USSR Academy of Sciences.*, 30 299-303, 1941.
- [63] P. Kree, C. Soize, *Mécanique aléatoire*, Dunod, Paris, 1983.
- [64] P. Kree, C. Soize, *Mathematics of Random Phenomena*, Reidel, Dordrecht, 1986.
- [65] C.-H. Lamarque, B. Bernardin, J. Bastien, Study of a rheological model with a friction term and a cubic term : deterministic and stochastic cases, *European Journal of Mechanics A-Solids.*, 24(4) 572-592, 2005.
- [66] A.Y.T Leung, Multilevel dynamic substructures, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 28 181-191, 1989.
- [67] Y.K. Lin, *Probabilistic theory of structural dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1967.
- [68] Y.K. Lin, G.Q. Cai, *Probabilistic structural dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1995.

- 
- [69] W.K. Liu, A. Mani, Belytshko T., Finite element methods in probabilistic mechanics, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2(4) 201-213 (1987).
- [70] LMS CADA-X, *The system solution for integrated test laboratory*, Leuven Measurements and systems, Leuven, Belgium, 1990.
- [71] G. Maglaras, E. Nikolaidis, R.T. Haftka, H.H. Cudney, Analytical-experimental comparison of probabilistic methods and fuzzy set based methods for designing under uncertainty, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 119(2), 729-740 (2006).
- [72] C.S. Manohar, R.A. Ibrahim, Progress in structural dynamics with stochastic parameter variations, *Applied Mechanics Reviews*, 52(5) 177-197 (1999).
- [73] G. Manson, Calculating frequency response functions for uncertain systems using complex affine analyses, *Journal of Sounds and Vibrations*, 288(3), 487-521-618 (2005).
- [74] H.G. Matthies, C. Bucher, Finite element for stochastic media problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 168, 3-17 (1999).
- [75] D.J. Mead, Wave propagation and natural modes in periodic systems, *Journal of Sounds and Vibrations*, 40 (1975) 1-39.
- [76] K. Min, T. Igusa and J.D. Achenbach, Frequency window method for forced vibration of structures with connected substructures, *Journal of Acoustical Society of America*, 92(5) (1992) 2726-2733.
- [77] D. Moens, D. Vandepitte, A survey of non-probabilistic uncertainty treatment in finite element analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 288(3), 487-521-618 (2005).
- [78] R. Ohayon, C. Soize, *Structural Acoustics and Vibration*, Academic Press, San Diego, 1998.
- [79] J.T. Oden, J.A.C. Martins, Models and computational methods for dynamic friction phenomena, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 52 (1992) 527-634.

- 
- [80] J. Piranda, *Analyse modale et recalage de modèles*, Thèse d'habilitation. Université de Franche Comté, Juin 1994.
- [81] M.P. Païdoussis, Dynamics of cylindrical structures subjected to axial flow, *Journal of sound and vibration*, 29 (1973) 365-385.
- [82] F. Poirion, C. Soize, Numerical methods and mathematical aspects for simulation of homogeneous and non homogeneous Gaussian vector fields , pp. 17-53, in *Probabilistic Methods in Applied Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [83] C. Proppe, Stochastic linearization of dynamical systems under parametric Poisson white noise excitation, *Int. J. of Non-Linear Mechanics*, 38 (2003) 543-555.
- [84] H. Risken, *The Fokker-Planck equation. Methods of solution and applications*, 2<sup>nd</sup> ed., Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [85] D. Rixen, A dual Craig-Bampton method for dynamic substructuring, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168, 383-391, 2004.
- [86] Y. Rozanov, *Stationary Random Processes*, Holden Day, San Francisco, 1967.
- [87] R.Y. Rubinstein, *Simulation and the Monte Carlo Method*, John Wiley and Sons, 1980.
- [88] S. Rubin, Improved component mode representation for structural dynamic analysis, *AIAA Journal*, 18 (8), 995-1006, 1975.
- [89] R. Sampaio, C. Soize, On measures of nonlinearity effects for uncertain dynamical systems-application to a vibro-impact system, *Journal of Sound and Vibration*, 303(2007) 659-674.
- [90] G.I. Schüller, A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 12(4) 197-321 (1997).
- [91] R.J. Serfling, Approximation Theorems of Mathematical Statistics, *John Wiley & Sons* , New York 1980.
- [92] C. Shannon, A mathematical theory of communication, *Bell System Technology Journal*, 379-423 and 623-659 (1948).

- 
- [93] M. Shinozuka, Simulation of multivariate and multidimensional random processes, *Journal of the Acoustical Society of America*, 49 (1) 357-367 (1971).
- [94] M. Shinozuka, Monte Carlo solution of structural dynamics, *Computers and Structures*, 2, 855-874 (1972).
- [95] F. Schmidt, C.-H. Lamarque, Computation of the solution of the Fokker-Planck equation for one and two DOF systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14, 529-542 (2009).
- [96] C. Soize, *Méthodes Mathématiques en Analyse du Signal*, Masson, Paris, 1993.
- [97] C. Soize, *The Fokker-Planck Equation for Stochastic Dynamical Systems and Explicit Steady State Solutions*, World Scientific, Singapour, 1994.
- [98] C. Soize, A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3) (2000) 277-294.
- [99] C. Soize, Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics, *Journal of Acoustical Society of America*, 109(5) (2001) 1979-1996.
- [100] C. Soize, H. Chebli, Random uncertainties model in dynamic substructuring using a nonparametric probabilistic model, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 129 (4) 449-457.
- [101] C. Soize, Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 (2005) 1333-1366.
- [102] C. Soize, A. Batou, Identification of stochastic loads applied to a non-linear dynamical system using an uncertain computational model, *Mathematical Problems in Engineering*, accepted for publication in May 2008.
- [103] T.T. Soong, *Random differential equation in science and engineering*, Academic press, New York, 1973.
- [104] P.D.T. Spanos, Stochastic linearization in structural dynamics, *Applied Mech. Reviews*, 34(1) (1981).

- [105] O. Talagrand, P. Courtier, Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation, I : theory, *Q.J.R. Meteorological Society*, 113 (1987).
- [106] A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin, *Solutions of Ill-Posed Problems*, 1997, Wiley, New-York.
- [107] N. Turbé, Bloch expansion in generalized thermoelasticity, *International Journal of Engineering and Science*, 27 (1) (1989) 55-62.
- [108] E. Vanmarcke, M. Grigoriu, Stochastic finite element analysis of simple beams, *Journal of Engineering Mechanics*, 109(5), 1203-1214 (1983).
- [109] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, *The Finite Element Method*, (4<sup>th</sup> edition), McGraw-Hill, New York, 1989.





**Résumé :** Ces travaux ont été développés dans le contexte de l'analyse vibratoire des assemblages combustibles. Ce type de structure est très complexe et a, du fait de sa géométrie, une très forte densité modale. Ainsi, afin de calculer la réponse d'une telle structure, une modélisation simplifiée est préférable. L'objectif est d'identifier des forces stochastiques induites par l'écoulement en utilisant un modèle numérique incertain et des réponses expérimentales. Pour ce problème, 4 sources d'incertitudes sont à prendre en considération : (1) Les incertitudes de modèle induites par les simplifications du modèle. (2) Les incertitudes sur les forces induites par les fluctuations statistiques de la pression turbulent. (3) Les incertitudes concernant la modélisation des forces stochastiques. (4) Les incertitudes induites par les erreurs de mesures. Les forces stochastiques ainsi identifiées sont appliquées sur le modèle simplifié stochastique pour calculer des statistiques sur les quantités d'intérêt.

**Mots-Clefs :** Identification, dynamique non linéaire, incertitudes, approche probabiliste non paramétrique, assemblages combustibles.

**Title :** Identification of stochastic forces applied to a non-linear dynamical system using an uncertain computational model and experimental responses.

**Abstract :** The present research has been developed in the context of the dynamical analysis of fuels assemblies which is a very complex nonlinear dynamical systems due to the high modal density of such a structure. Therefore, the computational model has to be simplified. The objective of this research is to identify stochastic forces induced by the turbulent fluid which are applied to the structure, using an uncertain stochastic simplified computational model and experimental responses. In this problem, there are four sources of uncertainties : (1) The model uncertainties induced by the simplifications in the model. (2) The uncertainties on the loads induced by the statistical fluctuations of the applied turbulent pressure. (3) The uncertainties concerning the model of the stochastic loads. (4) The uncertainties induced by measurement. The identified stochastic loads and the stochastic simplified computational model are then used to construct statistics on quantities of interest.

**Keywords :** Identification, non-linear dynamics, uncertainties, nonparametric probabilistic approach, fuels assemblies.

**Discipline :** Mécanique

**Laboratoire :** Laboratoire Modélisation et Simulation Multi-Echelle, Université Paris-Est, 5 Boulevard Descartes, 77454 Marne-La-Vallée Cedex 04