



HAL
open science

Réduction de modèles, techniques d'homogénéisation et méthodes probabilistes : application à l'effet de l'interaction sol-structure sur la réponse dynamique des bâtiments

Frédéric Laudarin

► To cite this version:

Frédéric Laudarin. Réduction de modèles, techniques d'homogénéisation et méthodes probabilistes : application à l'effet de l'interaction sol-structure sur la réponse dynamique des bâtiments. Modélisation et simulation. Université Paris-Est, 2008. Français. NNT : 2008PEST0267 . tel-00468618

HAL Id: tel-00468618

<https://theses.hal.science/tel-00468618>

Submitted on 31 Mar 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-EST

Année 2007

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS-EST

Discipline : Mécanique

présentée par

Frédéric Laudarin

Titre :

**Réduction de modèles, techniques d'homogénéisation
et méthodes probabilistes**

**Application à l'effet de l'interaction sol-structure sur
la réponse dynamique des bâtiments**

« Je passe le plus clair de mon temps à l'obscurcir parce que la lumière me gêne. »

, Boris Vian

A mon frère Olivier.

REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont au Pr Guy Bonnet, d'une part pour m'avoir accueilli, en tant que directeur, au Laboratoire de Mécanique de l'Université Marne-la-Vallée aujourd'hui intégré au sein du Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle de l'Université Paris Est, et pour d'autre part avoir choisi de m'encadrer sur ce sujet de thèse. Je tiens particulièrement à souligner la grande disponibilité dont il a fait preuve à mon égard, et ce malgré sa lourde tâche de direction. Je tiens également à remercier Pierre Argoul pour son co-encadrement dont la sympathie et la rigueur scientifique m'ont été d'une grande aide.

Les travaux de recherche à caractère numérique tels que ceux présentés dans ce manuscrit ne sont réalisables qu'à condition d'avoir à disposition des moyens informatiques performants. A ce titre, j'exprime ma profonde gratitude à Christophe Desceliers qui effectue bénévolement un travail de maintenance informatique de grande qualité au laboratoire, et ce depuis plusieurs années. Merci aussi Christophe pour les heures hilares que nous avons partagées et pour tout ce que tu m'as enseigné.

Quand on tourne les pages d'une thèse, on a une petite idée du travail d'investigation qu'elle a pu nécessiter. Néanmoins, le plus important reste invisible, à savoir les tranches de vie qui s'y accrochent, les moments de doute et de désespoir qui pavent le quotidien, mais aussi l'amitié des gens qu'on a pu rencontrer au sein de la petite famille itinérante qu'est un laboratoire. Alors, j'ai une pensée pour tous ceux qui sont déjà partis vers d'autres horizons et les quelques uns qui sont restés. Tous ces gens qui lors de leur escale, ont donné à mes journées une saveur et ont apposé quelques touches de couleur sur la sombre toile qui dépeignait ma vie d'alors.

Une dernière chose qu'il me tient à cœur d'exprimer: le bureau D11 n'est pas un hall de gare, à bon entendeur salut !

SOMMAIRE

PREMIÈRE PARTIE : RÉDUCTION DE MODÈLE MÉCANIQUE PAR HOMOGENÉISATION

I	Introduction	3
II	Contexte théorique.....	9
II.1	Description du problème périodique	9
II.2	Milieux élancés à symétrie orthotrope.....	12
II.2.1	<i>Déformation par traction-compression</i>	15
II.2.2	<i>Déformation par flexion pure</i>	15
II.2.3	<i>Milieu mis en flexion par une force transverse</i>	16
II.2.4	<i>Milieu cisailé par torsion</i>	22
II.3	Commentaires sur les méthodes asymptotiques	23
II.4	Homogénéisation de milieux à périodicité unidirectionnelle	35
II.4.1	<i>Milieu périodique en déformation longitudinale</i>	41
II.4.2	<i>Milieu périodique mis en flexion</i>	43
II.4.3	<i>Milieu périodique cisailé par une force transverse</i>	44
II.4.4	<i>Milieu périodique cisailé par torsion</i>	47
II.5	Modélisation mécanique réduite.....	48
II.5.1	<i>Déformations macroscopiques</i>	48
II.5.2	<i>Unicité de la solution</i>	50
II.5.3	<i>Comportement macroscopique</i>	51
II.6	Remarques sur les effets de bord.....	54
II.7	Remarques sur les forces de volume.....	56
II.8	Conclusions	59
III	Homogénéisation numérique et applications.....	61

III.1	Exemple introductif.....	61
III.2	Structures complexes.....	63
III.2.1	<i>Déplacement macroscopique nodal</i>	64
III.2.2	<i>Calcul des perturbations périodiques</i>	66
III.3	Calcul des propriétés effectives de raideur.....	66
III.4	Algorithme d'homogénéisation.....	68
III.4.1	<i>Description de l'algorithme d'homogénéisation</i>	70
III.4.2	<i>Remarques sur les ressources de calcul</i>	74
III.4.3	<i>Illustration du processus algorithmique</i>	75
III.5	Application à un bâtiment.....	81
III.5.1	<i>Caractéristiques structurales</i>	81
III.5.2	<i>Algorithme de validation des données de localisation</i>	89
III.5.3	<i>Affichage des tests de validité</i>	90
III.6	Conclusions.....	95

SECONDE PARTIE :

DYNAMIQUE DU BÂTIMENT AVEC INTERACTION SOL-STRUCTURE

IV	Introduction.....	143
V	Impédance d'interaction sol -structure.....	149
V.1	Paramètres du modèle d'impédance.....	151
V.2	Raideurs et amortissements d'impédance.....	153
V.2.1	<i>Fondation de surface</i>	156
V.2.2	<i>Fondation enfouie</i>	157
V.3	Modélisation stochastique de l'impédance de sol.....	160
V.3.1	<i>Information sur les matrices aléatoires</i>	160
V.3.2	<i>Normalisation des matrices aléatoires</i>	162
V.3.3	<i>Modèles probabilistes et générateurs aléatoires</i>	164
V.4	Estimation du paramètre de dispersion.....	167
V.4.1	<i>Estimation probabiliste du facteur de dispersion</i>	167

V.4.2	<i>Calcul numérique du facteur de dispersion</i>	169
V.5	Conclusions	172
VI	Modélisation mécanique des bâtiments soumis aux séismes.....	173
VI.1	Bilan énergétique	174
VI.2	Modèle brochette	177
VI.2.1	<i>Equation dynamique de la structure moyenne</i>	178
VI.2.2	<i>Réduction du système dynamique</i>	186
VI.2.3	<i>Equation dynamique stochastique</i>	188
VI.3	Modèle avec répartition de masse homogène.....	189
VI.3.1	<i>Équation des ondes dans une poutre de Timoshenko</i>	191
VI.3.2	<i>Modes de vibration de poutre</i>	193
VI.3.3	<i>Equation dynamique du bâtiment sous séisme</i>	198
VI.3.4	<i>Equation dynamique réduite</i>	199
VI.3.5	<i>Equation dynamique stochastique</i>	202
VI.4	Conclusions	202
VII	Étude numérique d'un problème sismique	204
VII.1	Caractéristiques sismiques et propriétés mécaniques de sol..	204
VII.1.1	<i>Présentation du signal sismique</i>	206
VII.1.2	<i>Impédance moyenne d'interaction sol fondation</i>	210
VII.2	Etude dynamique déterministe	214
VII.2.1	<i>Analyse modale du bâtiment</i>	214
VII.2.2	<i>Analyse modale avec interaction sol fondation</i>	222
VII.3	Etude dynamique stochastique	229
VII.3.1	<i>Calcul des paramètres de dispersion</i>	229
VII.3.2	<i>Évolution de l'énergie mécanique du système</i>	230
VII.3.3	<i>Forces et moments internes macroscopiques</i>	233
VII.3.4	<i>Dimensionnement du bâtiment</i>	241
VII.4	Conclusions	244
VIII	Décollement de fondation	245

VIII.1	Modélisation mécanique du décollement	246
VIII.1.1	<i>Profil d'écrasement du sol</i>	246
VIII.1.2	<i>Approximation des ressorts périphériques</i>	249
VIII.1.3	<i>Situation de décollement</i>	250
VIII.2	Dynamique du bâtiment avec décollement	252
VIII.3	Etude numérique du décollement.....	255
VIII.3.1	<i>Oscillations libres</i>	257
VIII.3.2	<i>Réponse à un séisme</i>	260
VIII.4	Conclusions.....	264
CONCLUSION		265

ANNEXE A

A.1	Correction de cisaillement pour poutres rectangulaires	270
A.2	Algorithme de maillage périodique	273
A.3	Milieu périodique mis en flexion par une force transverse	275

ANNEXE B

B.1	Opérateurs de masse et rigidité pour la poutre de Timoshenko ..	286
B.2	Schéma de Newmark	290
B.3	Spectres élastiques	292

NOTATIONS

$\mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$	L'espace des fonctions bornées définies sur \mathcal{E} à valeur dans \mathcal{F} pour une métrique donnée.
$\mathcal{C}^0(\mathcal{E})$	Espace des fonctions continues définies sur \mathcal{E} à valeur dans \mathcal{E} .
$\mathcal{C}^1(\mathcal{E})$	Espace des fonctions différentiables sur \mathcal{E} à valeur dans \mathcal{E} .
$\mathcal{C}^n(\mathcal{E})$	Espace des fonctions n fois différentiables sur \mathcal{E} à valeur dans \mathcal{E} .
$\mathcal{C}^\infty(\mathcal{E})$	Espace des fonctions infiniment différentiables sur \mathcal{E} à valeur dans \mathcal{E} .
\mathbf{grad}^S	Opérateur gradient symétrisé. $\mathbf{grad}^S(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{grad}(\mathbf{u}) + \mathbf{grad}^T(\mathbf{u}))$.
$L^2(\mathcal{E}, \mathcal{F})$	espace des fonctions de carré intégrable pour une métrique sur \mathcal{E} et un produit scalaire donnés sur \mathcal{F} .
$\mathbb{M}_n^S(\mathbb{R})$	Espace des matrices réelles symétriques carrées d'ordre n .
$\mathbb{M}_n^{S0}(\mathbb{R})$	Espace des matrices réelles symétriques non définies d'ordre n .
$\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$	Ensemble des matrices réelles symétriques définies positives d'ordre n .
$\mathbb{M}_n^{+0}(\mathbb{R})$	Ensemble des matrices réelles symétriques définies semi-positives d'ordre n . Ces matrices ont des valeurs propres positives ou nulles.
SE_n^+	Ensemble de matrices aléatoires défini en V.3.1.
SE_n^{+0}	Ensemble de matrices aléatoires défini en V.3.2.
SG_n^+	Ensemble de matrices aléatoires défini en V.3.2. matrice identité.
$\text{Sp}([\mathbf{M}])$	Spectre de la matrice $[\mathbf{M}]$, c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs propres.
$\mathbb{T}_n(\mathbb{R})$	Espace des tenseurs réels d'ordre n .
$\mathbb{T}_n^S(\mathbb{R})$	Espace des tenseurs réels symétriques d'ordre n .
$\mathbb{T}_n^+(\mathbb{R})$	Ensemble des tenseurs réels symétriques définis positifs d'ordre n .

Sauf mention contraire, la covention de sommation d'*Einstein* sera systématiquement utilisée pour les expressions impliquant des notations indicielles d'objets tensoriels ou matriciels.

Les matrices sont différenciées des tenseurs par des crochets, *e.g.* $[\mathbf{A}]$ représente "la matrice \mathbf{A} ". Le terme d'indices $i, j \in \mathbb{N}$ d'une matrice \mathbf{A} est noté $[\mathbf{A}]_{ij}$. La matrice transposée d'une matrice $[\mathbf{A}]$ se note $[\mathbf{A}]^T$, son inverse $[\mathbf{A}]^{-1}$ et la transposée de sa matrice inverse $[\mathbf{A}]^{-T}$.

La notation $\mathbf{diag}()$ désigne les matrices diagonales ou diagonales par blocs. La matrice $\mathbf{diag}(a_1, \dots, a_N)$ représente la matrice diagonale d'ordre N dont les termes diagonaux sont les a_1, \dots, a_N . La matrice $\mathbf{diag}([\mathbf{M}_1], \dots, [\mathbf{M}_N])$ est la matrice diagonale par blocs dont les N blocs sont les matrices carrées $[\mathbf{M}_1]$ à $[\mathbf{M}_N]$.

Pour désigner un bloc matriciel de dimension $(m \times n)$ remplis de 0, on utilise la notation $[\mathbf{0}_{m,n}]$. Pour un bloc rempli de 1, on utilise $[\mathbf{1}_{m,n}]$.

Les vecteurs \mathbf{e}_i avec $i \leq N$ sont les vecteurs de \mathbb{R}^N dont la composante i vaut 1 et les autres 0.

Les grandeurs aléatoires seront notées du symbole " \sim ", *e.g.* \tilde{A} .

ACRONYMES

DDL	Degré de liberté
CMM	<i>Continuous Mass Model</i> (voir VI.3)
FDP	Fonction de densité de probabilité
LMM	<i>Lumped Mass Model</i> (voir VI.2)
p.s.	presque sûrement, <i>i.e.</i> probabilité dont l'espérance est égale à 1
PA	Pic d'accélération défini en (VII.6)
PV	Pic de vitesse défini en (VII.6)
PD	Pic de déplacement défini en (VII.6)

PRÉFACE

L'analyse sismique des bâtiments a pour finalité de mesurer l'ampleur des conséquences de l'activité sismique sur le milieu urbain en terme de pertes humaines et économiques et de mettre en œuvre des stratégies permettant de les atténuer. De nombreuses disciplines telles que la mécanique des sols, la sismologie, la résistance des matériaux ou la dynamique des structures sont mises en jeu.

La sismologie et la mécanique des sols donnent l'information sur le mouvement sismique du sol mesuré à l'aide de sismographes ainsi que sur la nature physique du terrain. Cette dernière information est capitale pour la prise en compte de l'interaction sol structure. L'observation sismologique est une science ancienne dont on trouve des traces dans l'antiquité et qui n'a cessé de faire l'objet de théories au cours des siècles. Les premières bases de la théorie actuelle sont dues au géologue irlandais Robert Mallet qui, dans les années 1850, réalisa les premières mesures de vitesses de propagation d'ondes dans les sols. Les théories actuellement utilisées en sismologie se développèrent en grande partie durant la première moitié du XX^{ème} siècle et l'étude et la mesure des séismes commencent à se développer en France en 1918 avec la construction du bureau central sismologique français.

Les règles de construction sismiques sont quant à elles beaucoup plus récentes. Il faudra attendre les années 1960 pour voir les premières constructions renforcées contre l'activité sismique. La prise en compte des effets dynamiques sur la construction fait son apparition dans les années 1940 sur la côte ouest des USA. Les premières règles françaises font leur apparition dans les années 1950 avec les règles A.S. 55 qui firent suite au tremblement de terre de 1954 à Orléans-ville en Algérie. Suivirent les règles PS62 qui firent suite au séisme d'Agadir de 1962 puis les règles PS69 et finalement les règles PS92. Cependant l'application des règles est récente (1994) si bien que la majeure partie du parc immobilier n'est pas construite suivant ces normes et leur généralisation ne se fera à priori qu'à long terme.

Cette branche du génie civil qui s'est depuis beaucoup développée, tout particulièrement au Japon, est un domaine technologiquement très ouvert et à grande portée humaine et économique. La conception de constructions parasismiques à faible coût de construction destinées aux zones sismiques les plus déshéritées du globe est un enjeu concernant la vie de centaines de millions d'individus. Dans nos régions moins durement touchées, on estime cependant que l'activité sismique répétée de faible magnitude, par exemple en Suisse, va entraîner à terme des milliards d'euros de réhabilitation.

L'établissement de règles de construction parasismiques nécessite des méthodes rendant possible l'estimation des sollicitations au sein d'une structure soumise à un séisme donné. Les travaux présentés ici ont ainsi pour objectif de mettre au point des outils numériques simulant le comportement dynamique d'un bâtiment en prenant en compte l'effet de l'interaction entre le sol et la fondation de la construction.

Au cours de la conception et du développement de ces outils, il est constamment question

d'accorder au mieux la fiabilité et la simplicité d'utilisation ainsi que la légèreté des modèles en termes de ressources de calcul.

La première partie de ce document propose ainsi une méthode déterminant un modèle mécanique simplifié pour les bâtiments à étages multiples. L'architecture de ce type de construction emploie des étages aux géométries similaires, si bien qu'une périodicité peut s'observer dans l'ensemble. C'est à partir de cette redondance que la représentation du bâtiment est réduite tout en conservant une fiabilité correcte quant aux propriétés de la structure.

La dynamique du bâtiment avec prise en compte des déformations du sol autour de la fondation fait l'objet de la seconde partie. L'expérience de l'ingénierie sismique montre que ces déformations jouent un rôle important, mais les représentations mécaniques utilisées pour le sol de fondation donnent des résultats de faible fiabilité. Ce manque de précision est dû d'une part au manque d'information sur les propriétés physiques locales du sol au voisinage direct du bâtiment et d'autre part à la simplicité de la modélisation mécanique. Pour pallier à ces manques, on introduit des aléas au sein du modèle mécanique de sol. Les prédictions de la réponse dynamique d'un bâtiment à un séisme donné obtenues par simulation numérique sont alors munies d'une probabilité mesurant leur niveau de fiabilité. Grâce à la modélisation simplifiée du bâtiment, ces méthodes probabilistes restent en outre accessibles à des machines aux ressources numériques raisonnables.

En fin de seconde partie, on s'intéresse au décollement de fondations sous l'effet d'un mouvement sismique. Cette étude permet entre autres de prédire l'intensité sismique qui est susceptible d'entraîner un renversement de la construction.

PREMIÈRE PARTIE :
**RÉDUCTION DE MODÈLE MÉCANIQUE
PAR HOMOGENÉISATION**

CHAPITRE I

INTRODUCTION

Les constructions en génie civil sont des structures comportant souvent un grand nombre d'éléments structuraux, surtout lorsqu'il s'agit de bâtiments à plusieurs étages. Des calculs numériques coûteux sont alors nécessaires pour estimer avec précision la réponse mécanique de telles structures à des sollicitations extérieures. L'option usuelle consiste alors à résoudre ces calculs à l'aide de la méthode des éléments finis [147]. Les systèmes d'équations à résoudre sont dans ce cas de taille importante, surtout si on souhaite utiliser une description fine des composants de la structure. Les simulations de réponse dynamique d'un bâtiment, telles qu'on peut en rencontrer dans le cadre des études sismiques, multiplient les besoins en ressources numériques par rapport aux calculs statiques qui s'avèrent déjà numériquement coûteux. Si en outre, comme on le fera dans le *chapitre V*, on introduit des incertitudes dans le modèle mécanique de la structure étudiée, les estimations probabilistes à l'aide de la méthode de *Monte Carlo* [113] impliquent l'exécution d'un nombre important de calculs dynamiques.

Pour remédier à cet état de fait, il est impératif d'utiliser des modèles mécaniques plus "légers". Il existe divers procédés visant à "réduire" la complexité des modèles mécaniques. Dans le cadre plus général des algorithmes de compression de l'information, il existe principalement deux stratégies: supprimer les redondances et ne conserver que l'information la plus pertinente. La première mène à une compression sans perte d'information. La seconde permet d'obtenir une meilleure compression mais entraîne une perte. Ces algorithmes sont profondément ancrés dans notre quotidien, notamment dans le multimédia avec les très populaires formats *MPEG layer 3* (mp3) pour l'information audio et *JPEG* et *MPEG* pour la photographie et la vidéo. Les méthodes de réduction de modèles mécaniques utilisent uniquement la deuxième stratégie dans la mesure où un modèle mécanique bien posé ne contient pas d'information redondante.

Les secteurs aérospatial et aéronautique furent les premiers à développer de telles méthodes. Ces secteurs de l'ingénierie étaient parmi ceux réclamant un niveau de sûreté des plus importants, la nécessité d'avoir des outils de simulation prédictifs s'est donc vite imposée, notamment dans le secteur spatial où il est impossible de tester les structures dans leurs conditions réelles d'utilisation. Des modèles mécaniques simples représentant au mieux la réalité ont dû être développés afin d'être utilisables avec les moyens numériques de l'époque.

Nombre des méthodes employées reposent sur la discrétisation de *Galerkin* appliquée à la forme faible sur un espace de *Hilbert* \mathcal{H} du problème différentiel mécanique à résoudre. La réduction du problème consiste alors à projeter la solution du problème sur un sous espace $\mathcal{H}_r \subset \mathcal{H}$. D'un point de vue pratique, on choisit un espace \mathcal{H}_r de dimension finie suffisamment grande pour atteindre le niveau de précision escompté pour la description de la solution. La réduction modale (description du champ de déplacement d'un corps élastique par ses déformées modales) et les méthodes de sous-structuration qui en dérivent: méthode de Craig-Bampton [37], Benfield-Hruda [10] sont de parfaits exemples de cette approche dans le cas des problèmes linéaires. La discrétisation de problèmes continus par la méthode de *Galerkin* est, outre la méthode des éléments finis déjà évoquée, à l'origine de nombreuses méthodes numériques impliquant une réduction de modèle mécanique.

Une autre branche de méthodes de "compression" de modèles mécaniques concernant les structures complexes où les milieux hétérogènes, consiste à les décrire par un milieu continu équivalent présentant des résolutions analytiques accessibles. De tels procédés sont qualifiés de méthodes d'homogénéisation. Lorsqu'on homogénéise un milieu hétérogène, on donne une description du milieu à une échelle d'observation grande devant "la taille des hétérogénéités" tel que le milieu puisse être vu comme homogène (voir par exemple [146]). Bien qu'homogène, le comportement du milieu à cette échelle dite macroscopique prend implicitement en compte la nature de la microstructure du matériau sans en faire apparaître le détail. Ces méthodes nécessitent de dégager trois échelles, chacune étant identifiée par une dimension caractéristique. L'échelle macroscopique dont on a déjà parlé a pour dimension caractéristique la plus petite distance séparant deux points de son bord. L'échelle dite mésoscopique est donnée par la plus petite dimension à laquelle on observe encore un comportement homogène du milieu. Cette dimension permet de définir les volumes élémentaires sur lesquels reposent la théorie de la mécanique des milieux continus. L'échelle microscopique est propre aux hétérogénéités du milieu et sa dimension caractéristique est celle des variations spatiales de la microstructure. Pour que l'homogénéisation soit possible, il faut par conséquent que ces trois échelles soient distinctes. Dans le cas particulier où la microstructure est périodique dans le milieu, le volume élémentaire de référence est défini par une période, il n'y a plus que deux échelles: une échelle macroscopique grande devant les dimensions de la période et une échelle locale propre à l'hétérogénéité de la cellule périodique. L'hypothèse de périodicité mène à une approche et une méthodologie différentes du cadre général d'étude des matériaux à microstructure (voir [114] et chapitre IV de [104]). Les méthodes d'homogénéisation des milieux périodiques s'appliquent à de nombreux cas industriels tels les matériaux composites à fibres (voir par exemple [14]). La réduction de modèle mécanique de structures par homogénéisation s'applique en outre presque systématiquement au cas d'assemblages périodiques. De nombreuses études ont ainsi été menées à propos des treillis périodiques de grande dimension ([105],[86],[135],[101],) souvent utilisés dans le domaine aérospatial pour les stations spatiales et les satellites de tailles importantes. On peut également citer de nombreuses études concernant les plaques périodiques [25] et notamment l'étude des murs en maçonnerie [3],[30],[31]. L'idée a récemment été proposée par Boutin et al. [19] et Hans [66] d'appliquer des méthodes d'homogénéisation périodique aux structures de génie civil multi-étagées dont l'architecture des étages se répète identiquement. Ce type

de structure concerne aussi bien les gratte-ciel que les tours d'habitation de taille plus modeste.

En outre, cette démarche vient étayer l'utilisation du *modèle brochette* (*lumped mass model*) en ingénierie parasismique. Ce modèle mécanique est utilisé pour décrire de façon simple le comportement dynamique des bâtiments à étages multiples. Il est constitué de segments de poutre ayant pour longueur la hauteur d'un étage et étant connectés entre eux par des masses ayant les caractéristiques inertielles d'un étage. Les caractéristiques des éléments de poutre sont calculées à partir d'une section constituée de la réunion de sections transverses des murs d'un étage. La cinématique est décrite par les 6 degrés de liberté des corps rigides contenant la masse des étages donnant un nombre total d'inconnues égal à 6 fois le nombre d'étages du bâtiment. Ces modèles donnent de bons résultats dans les basses fréquences (en dessous de 50 Hz) ce qui est cohérent du point de vue de l'homogénéisation car il est montré dans [6] et [115] que lorsque les longueurs d'ondes des vibrations dans l'ouvrage deviennent de l'ordre de grandeur de la dimension d'une cellule, le comportement dynamique d'une structure périodique n'est plus homogénéisable. L'approche utilisée pour l'élaboration d'un *modèle brochette* consiste à décrire de manière directe la cinématique à l'échelle locale par une cinématique de poutre. On peut citer à ce titre les travaux de Lee [86] et Noor [105] relatifs aux treillis de grande dimension.

Les méthodes d'homogénéisation apportent une justification physique au modèle mécanique réduit équivalent en le caractérisant comme un modèle du comportement macroscopique de la structure. La méthodologie générale d'étude du comportement global d'un milieu périodique consiste à considérer un domaine contenant un grand nombre de périodes, il apparaît alors comme on l'a dit deux échelles: une échelle macroscopique caractérisée par la dimension L du domaine et une échelle microscopique caractérisée par la dimension l de la cellule. On introduit alors un petit paramètre sans dimension $\varepsilon = l/L$ qui est le rapport d'échelles. Les champs inconnus du problème (le champ de déplacement par exemple) peuvent être cherchés sous la forme d'un développement asymptotique de ε . C'est la démarche adoptée dans ce travail de thèse et dans [6],[101] [135], [22], [19], [66], [28]. Cette méthode dite des échelles multiples repose sur des développements asymptotiques dont les séquences sont constituées de monômes en puissance de ε :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \sum_{n=1}^N \mathbf{u}^{(n)} \varepsilon^{q_n} + o(\varepsilon^{q_{N+1}})$$

où $(q_n)_{n \geq 1}$ est une suite strictement positive et strictement croissante. Pour un domaine infiniment vaste, les fonctions $\mathbf{u}^{(n)}$ sont périodiques. Quel que soit le choix du développement asymptotique, il doit permettre d'identifier les comportement macroscopique du milieu et conduire à l'obtention des propriétés effectives. En outre, la méthode asymptotique montre qu'au premier ordre (ordre 1), le déplacement $\mathbf{u}^{(0)}$ est constant à l'échelle de la cellule suivant les coordonnées concernées par la périodicité. Il est donc courant de décomposer le champ \mathbf{u} en une partie $\mathbf{u}^{(0)}$ dont les variations tendent vers 0 quand ε tend vers 0 et une partie \mathbf{u}_{per} dont les variations sont périodiques d'une cellule à l'autre, cette dernière correspondant à la somme des $\mathbf{u}^{(n)}$ pour $n \geq 1$.

Boutin et al. [19] et Hans [66], en appliquant ces méthodes au cas des bâtiments multi-étagés, ont montré que le comportement global de ce type d'ouvrage correspondait à des modèles de poutre de cisaillement, de poutre de flexion ou plus généralement de poutre de Timoshenko. Ces résultats ont été obtenus à partir d'une méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets également mise en œuvre dans [101] et [135]. Il s'agit de structures composées d'assemblage de poutres pour lesquelles les équations d'équilibre sont écrites sous la forme d'équations aux différences finies à l'aide d'un opérateur aux différences appliqué au champ de déplacement entre nœuds adjacents de la cellule. Cette étape fonctionne d'autant mieux que dans le cas des milieux périodiques discrets, la microstructure est décrite par des éléments de type poutre ou plaque dont les équations d'équilibre statique s'écrivent directement en fonction des déplacement des nœuds. Ces termes sont ensuite développés à l'aide de séries de Taylor. Ainsi une composante U_{N+1} du déplacement au nœuds $N+1$ peut s'écrire en fonction de celle du déplacement au nœud N :

$$U_{N+1}(x_{n+1}) = U_N(x_n + \varepsilon L) = U_N(x) + \varepsilon L \frac{dU_N}{dx} + \varepsilon^2 \frac{L^2}{2} \frac{d^2U_N}{dx^2} + \dots$$

En utilisant un développement asymptotique de U_N en puissances de ε

$$U_N(x_n) = U^{(0)} + \varepsilon U^{(1)} + \varepsilon^2 U^{(2)} + \dots$$

on exprime ainsi les déplacements U_{N+1} et U_{N-1} des nœuds adjacents au nœud N en fonction du déplacement U_N et de ses dérivées:

$$U_{N+1} = U^{(0)}(x_n) + \varepsilon \left(U^{(1)}(x_n) + L \frac{dU^{(0)}}{dx} \right) + \varepsilon^2 \left(U^{(2)}(x_n) + L \frac{dU^{(1)}}{dx} + \frac{L^2}{2} \frac{d^2U^{(0)}}{dx^2} \right) + \dots$$

$$U_{N-1} = U^{(0)}(x_n) + \varepsilon \left(U^{(1)}(x_n) - L \frac{dU^{(0)}}{dx} \right) + \varepsilon^2 \left(U^{(2)}(x_n) - L \frac{dU^{(1)}}{dx} + \frac{L^2}{2} \frac{d^2U^{(0)}}{dx^2} \right) + \dots$$

En introduisant ces expressions dans les équations aux différences issues des équations d'équilibre dans la cellule, on aboutit à un système d'équations différentielles entre les composantes du déplacement au nœud N dont on peut isoler les groupes de termes par puissances de ε . La séparation des échelles expose ainsi les équations d'équilibre nodales aux différents ordres de grandeur. Les équations de comportement macroscopiques étant obtenues, les paramètres du modèle mécanique équivalent sont directement exprimés en fonction des propriétés des éléments discrets constituant une cellule du milieu.

Des méthodes basées sur le développement asymptotique de l'énergie de déformation élastique ont également été élaborées. On peut citer à ce titre les travaux de Volovoi *et al.* [139] sur le comportement asymptotique de structures prismatiques à parois minces. La section du prisme est un assemblage de plaque minces, trois échelles sont dégagées: celle de l'épaisseur des parois faible devant l'échelle des dimensions de la section du prisme qui est elle même faible devant la hauteur du prisme. Après avoir écrit l'énergie de déformation élastique en fonction des déformations et courbures dans les plaques minces, une perturbation est appliquée à leurs champs de déplacement. Le développement de l'expression de l'énergie de déformation en fonction de cette perturbation caractérisée par le petit rapport d'échelle entre la section du prisme et sa longueur permet d'identifier différents

ordre de grandeur parmi les termes contribuant à l'expression de l'énergie de déformation. Les termes énergétiques indépendants de la perturbation (les plus élevés) correspondent à l'énergie du comportement macroscopique (*zeroth approximation*), les raideurs effectives sont alors facilement identifiables. Cette méthode est appliquée au calcul de raideur de torsion pour des structures de type poutre en I.

Les méthodes asymptotiques présentent l'avantage de ne pas supposer le modèle mécanique équivalent au préalable et donnent une relation algébrique des paramètres des propriétés effectives en fonctions des paramètres des propriétés des éléments constituant la cellule.

Cependant, les méthodes asymptotiques ne permettent pas toujours, sur le plan pratique, une évaluation aisée des propriétés effectives. Pour des milieux périodiques dont les cellules ont une géométrie complexe, il est difficile d'obtenir une expression algébrique des propriétés effectives en fonction de la géométrie locale et des propriétés physiques des périodes. Il est alors nécessaire d'utiliser une approche différente du problème mécanique à l'échelle de la cellule. A cette fin, on utilise le principe d'équivalence énergétique ([24], [30], [31]) qui exprime que l'énergie de déformation élastique \mathcal{E}_{loc} d'une cellule obtenue par sa description locale doit être égale à l'énergie de déformation élastique $\mathcal{E}_{\text{macro}}$ obtenue par le modèle mécanique équivalent:

$$\mathcal{E}_{\text{loc}} = \mathcal{E}_{\text{macro}}$$

Ce principe se fonde entre autre sur le fait que chaque cellule périodique est un volume élémentaire de référence pour la description macroscopique du milieu. Cette approche que l'on mettra en œuvre dans ce mémoire est très utile lorsqu'on est capable d'écrire une relation algébrique \mathcal{R} bijective entre les paramètres q_k à identifier dans le modèle équivalent et son énergie de déformation élastique:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{loc}} &= \int \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e} \, dv & \mathcal{E}_{\text{macro}} &= \mathcal{R}(q_k, k = 1, 2, \dots) \\ \implies & & (q_k, k = 1, 2, \dots) &= \mathcal{R}^{-1}(\mathcal{E}_{\text{loc}}) \end{aligned}$$

En homogénéisation appliquée à la mécanique des milieux continus on utilise l'opérateur de moyenne reliant les grandeurs macroscopiques aux grandeurs locales, *e.g.* la déformation et la contrainte locales $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{e} et leur homologues macroscopiques $\boldsymbol{\Sigma}$ et \mathbf{E} .

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{e} \rangle \quad \boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$$

Cet opérateur qui est une moyenne sur le milieu est appliqué aux équations du problème local dans le but d'identifier la loi de comportement effective:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a} \mathbf{e} \quad \implies \quad \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}_{\text{hom}} \mathbf{E}$$

Cette approche est développée dans [94], [3] et [81].

L'une des premières missions de l'ingénierie parasismique est de prédire l'endommagement d'un bâtiment face à une excitation de nature sismique. Il est donc primordial de pouvoir

évaluer les efforts au sein de la structure des ouvrages. Un modèle mécanique réduit de bâtiment doit donc pouvoir fournir cette information. Les cellules des structures périodiques étant explicitement définies, la procédure d'homogénéisation permet alors de localiser les efforts dans les cellules pour un état donné du modèle équivalent. Il s'agit d'une amélioration en matière de précision vis-à-vis du *modèle brochette* dont la localisation des efforts est directement donnée par la théorie des poutres.

Tout en restant dans l'esprit du *modèle brochette*, on souhaite construire un modèle mécanique réduit permettant d'obtenir les paramètres de raideur effectifs des segments de poutre prenant en compte l'ensemble de l'étage (y compris les planchers) et donnant accès à des tables de localisation. Les calculs sur la cellule périodique décrivant la constitution d'un étage sont menés par la méthode des éléments finis. Les données de localisation sont alors des cartes qui donnent les efforts internes dans les éléments du modèle pour un état donné du modèle équivalent.

Le *chapitre II* présente les bases théoriques sur lesquelles repose la méthode d'homogénéisation mise en œuvre au cours de ce mémoire. On pose en II.1 le cadre général d'étude des milieux à périodicité unidimensionnelle. La modélisation mécanique des poutres élastiques à symétrie orthotrope qui sert par la suite de modélisation équivalente pour les matériaux périodiques est exposée en II.2. Quelques résultats et commentaires sur le comportement asymptotique des milieux périodiques sont donnés en II.3. On élabore en II.4 une méthode d'homogénéisation pour les milieux à périodicité unidimensionnelle en la replaçant dans le contexte général des méthodes existantes. Quelques considérations algébriques concernant la cinématique de poutre équivalente sont exposées en II.5. Le problème des effets de bord est commenté en II.6. La question de l'homogénéisation dynamique et des forces de volume est abordée en II.7.

La mise en œuvre numérique de la méthode élaborée en II.4 fait l'objet du *chapitre III*. La résolution numérique du problème de localisation est exposée en III.2 et le calcul des raideurs effectives de la poutre équivalente en III.3. Des considérations algorithmiques sont exposées et illustrées en III.4. La procédure d'homogénéisation est ensuite appliquée en III.5 à un bâtiment.

CHAPITRE II

CONTEXTE THÉORIQUE

II.1 Description du problème périodique

La teneur de cette section est la description du cadre d'étude mécanique des milieux à périodicité unidimensionnelle abordés dans cette section. Ces milieux ont une topologie et des propriétés physiques qui varient périodiquement dans une direction de l'espace dite direction de périodicité ou direction longitudinale. Si le milieu est borné, il est alors constitué d'une file ou d'une pile de cellules ou motifs identiques connectés entre eux par des interfaces identiques (*Figure II.1*). Les deux interfaces d'une cellule sont alors l'image l'une de l'autre par une translation de vecteur périodique τ . Par souci de simplicité, on choisira des interfaces planes et orthogonales à la direction longitudinale.

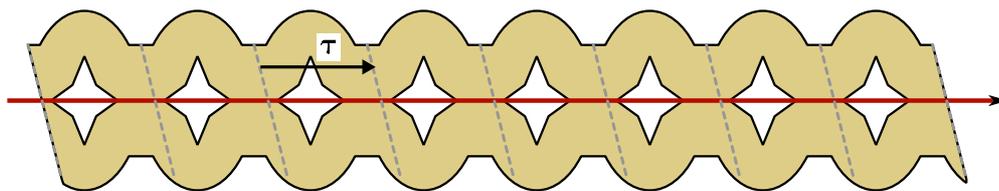


Figure II.1 Exemple de milieu à périodicité unidimensionnelle.

Comme annoncé au *chapitre I*, un milieu borné avec un grand nombre de cellules périodiques, *i.e.* la dimension $\|\tau\|$ de sa période est faible devant sa longueur totale, présente un comportement multi-échelle. L'identification du comportement macroscopique, *i.e.* le comportement d'ensemble du milieu, à l'aide de méthodes d'homogénéisation fait l'objet de cette première partie.

Lorsqu'on passe d'une observation locale du milieu à une observation à l'échelle macroscopique, les détails de la microstructure du milieu ne sont plus visibles. Seul un comporte-

ment d'ensemble moyen est visible. Ce changement d'échelle s'exprime mathématiquement par une opération de moyenne qui permet de déterminer le comportement macroscopiquement homogène d'une cellule périodique du milieu (voir par exemple [94] chapitre 1 ou [146] chapitre 1). Le milieu périodique est macroscopiquement homogène et continu et ses volumes élémentaires de référence sont donnés par les cellules périodiques "moyennées".

Bien que l'opération de moyenne appliquée aux milieux à périodicité unidimensionnelle pour en déduire leur comportement macroscopique coïncide avec celle qui mène aux efforts de réduction (forces et moments internes) des poutres en résistance des matériaux, Buannic et Cartraud [22], et Sankar et Marrey [117] montrent que l'homogénéisation d'un tel milieu mène à un milieu ne pouvant *a priori* pas être modélisé par une poutre homogène ayant une section et un matériau défini.

Les propriétés de symétrie du milieu macroscopiquement équivalent dépendent d'une part des propriétés de symétrie des matériaux constituants et d'autre part de la distribution des hétérogénéités. Un milieu périodique hétérogène constitué de matériaux ayant un comportement élastique linéaire isotrope peut *a priori* présenter un comportement élastique macroscopique à symétrie triclinique qui est la plus "large" des 8 classes de symétrie existantes pour la *loi de Hooke* [71]. A titre d'exemple, les matériaux utilisés en génie civil tels que les béton armés et les cloisons, présentent généralement un comportement mécanique à symétrie orthotrope. On peut citer à ce titre les travaux de Silvestre et Camotim [121] et [122] à propos des assemblages de panneaux composites stratifiés à symétrie orthotrope.

Les milieux à périodicité unidimensionnelle qui sont sujets aux approches par homogénéisation dans cette *première partie* sont sollicités de manière statique par leur extrémités. Quelques remarques sur l'homogénéisation des milieux périodiques soumis à des forces de volume sont exposées en II.7. La propriété de périodicité n'étant plus vérifiée aux abords des extrémités, on observe des effets de bord dont on dira quelques mots en II.6. Les milieux étudiés sont donc supposés contenir un nombre suffisant de périodes pour qu'un comportement macroscopique soit observable loin de ces effets.

On considère un milieu Ω_0 ayant un comportement élastique linéaire et dont les propriétés physiques sont périodiques de période $h\mathbf{e}_1$ avec \mathbf{e}_1 unitaire. On note \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 deux vecteurs tels que $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ forme une base orthonormée. Le milieu Ω_0 est borné dans les directions transverses \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 . On considère maintenant le milieu borné Ω obtenu par troncature de Ω_0 suivant deux plans parallèles et perpendiculaires à la direction \mathbf{e}_1 et dont une représentation arbitraire est donnée à la *Figure II.2*. Ce milieu est constitué d'un nombre fini $N \in \mathbb{N}$, $N \gg 1$ de périodes. Soit $\mathcal{P}(\Omega)$ le parallélépipède de plus faible volume contenant Ω (parallélépipède circonscrit). La direction \mathbf{e}_1 se trouve alors être parallèle à l'un des axes de $\mathcal{P}(\Omega)$, et on précise la définition des vecteurs \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 de manière à ce que leurs directions soient parallèles aux deux autres axes du parallélogramme. La position $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ est définie par rapport au repère $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ dont le centre O est l'isobarycentre de Ω . Les dimensions de $\mathcal{P}(\Omega)$ sont H dans la direction longitudinale \mathbf{e}_1 et L_2, L_3 dans les directions transverses \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 . On note \mathcal{C} le domaine matériel occupé par une cellule périodique du milieu. La longueur d'une période suivant la direction de périodicité \mathbf{e}_1 est notée h . Le parallélépipède $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ circonscrit à une cellule \mathcal{C} du milieu a pour dimensions $h \times L_2 \times L_3$.

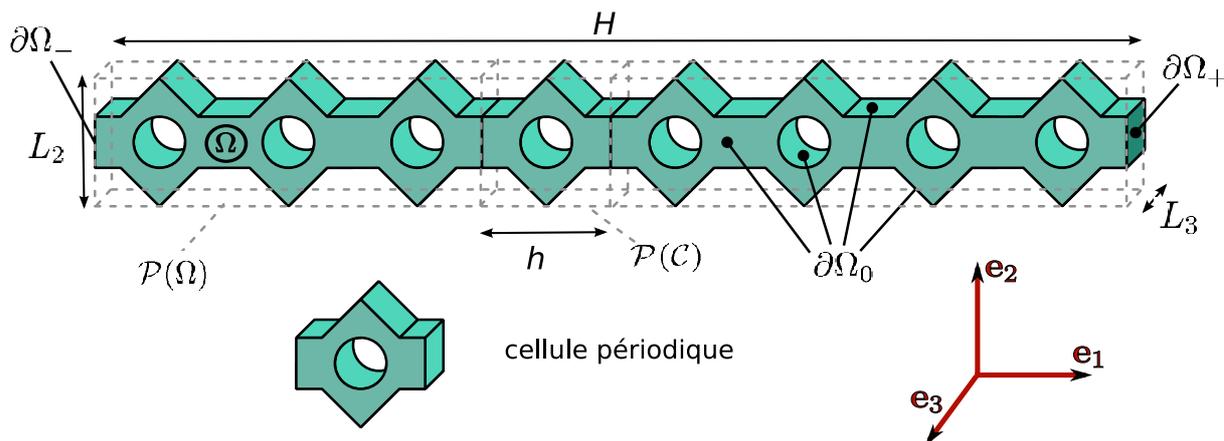


Figure II.2 Exemple de troncature de milieu à périodicité unidimensionnelle. Le bord du milieu borné Ω se décompose en trois sous domaines $\partial\Omega = \partial\Omega_- \cup \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_+$.

On subdivise le bord $\partial\Omega$ du milieu en 3 sous domaines: $\partial\Omega = \partial\Omega_- \cup \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_+$. Les bords $\partial\Omega_-$ et $\partial\Omega_+$ correspondent à l'intersection des faces de $\mathcal{P}(\Omega)$ de normales extérieures $-\mathbf{e}_1$ et \mathbf{e}_1 avec $\partial\Omega$. On peut dire que ce sont les "extrémités" du milieu. Ces bords sont soumis à des forces de surface $\mathbf{g}_\pm(M)$ telles que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}_-(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_- \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}_+(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_+ \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

avec une force et un moment résultant nuls:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_-} \mathbf{g}_-(\mathbf{x}) dS + \int_{\partial\Omega_+} \mathbf{g}_+(\mathbf{x}) dS &= \mathbf{0} \\ \int_{\partial\Omega_-} \mathbf{x} \times \mathbf{g}_-(\mathbf{x}) dS + \int_{\partial\Omega_+} \mathbf{x} \times \mathbf{g}_+(\mathbf{x}) dS &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Le bord latéral $\partial\Omega_0$ est défini par $\partial\Omega_0 = \partial\Omega \setminus \{\partial\Omega_- \cup \partial\Omega_+\}$. Ce bord est libre d'efforts extérieurs, le vecteur des contraintes de surface y est donc nul:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_0 \quad (\text{II.3})$$

Le comportement élastique linéaire (petites déformations) du milieu Ω est caractérisé par son tenseur de rigidité $\mathbf{a}(\mathbf{x})$. Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ et le tenseur des déformations $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ sont liés par la loi de Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{e}(\mathbf{x})$$

Le champ tensoriel $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ est à valeur dans $\mathbb{T}_4^S(\mathbb{R})$ l'espace des tenseurs d'ordre 4 symétriques:

$$a_{ijkl}(\mathbf{x}) = a_{jikl}(\mathbf{x}) = a_{klij}(\mathbf{x}) \quad , \quad i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{II.4})$$

il est périodique suivant x_1 de période h :

$$\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{a}(x_1 + n h, x_2, x_3) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (\text{II.5})$$

défini positif de sorte que pour tout tenseur $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{T}_2^S(\mathbb{R})$ symétrique réel d'ordre 2 :

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) \in \mathbb{T}_4^+(\mathbb{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists m > 0 \text{ tel que } m \tau_{ij} \tau_{ij} \leq a_{ijkl}(\mathbf{x}) \tau_{ij} \tau_{kl} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{II.6})$$

borné dans Ω :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } M = \sup a_{ijkl}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{II.7})$$

et de support Ω :

$$\text{Supp}(\mathbf{a}) = \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \in \mathbb{T}_4^+(\mathbb{R}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases}$$

Les propriétés du milieu Ω étant définies et les conditions à son bord posées, on peut énoncer le problème mécanique auquel il est soumis:

$$\begin{aligned} \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{e}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{e}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) &= \mathbf{grad}^s(\mathbf{u})(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}_{\pm}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_{\pm} \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

où $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est le vecteur unitaire de la direction normale extérieure sur $\partial\Omega$ et où

$\{\mathbf{grad}_x^s(\mathbf{u})\}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ est le gradient symétrisé. La solution du problème (II.8) est définie à un mouvement de corps rigide près dans la mesure où les conditions de bord sur le bord du milieu sont des forces surfaciques ou absence de forces. Les mouvements de corps rigide constituent le noyau du gradient symétrisé, on cherche alors des champs de déplacement dans un espace $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ dont l'intersection avec se noyau est réduite à $\mathbf{0}$ et tel qu'en un point $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ le milieu reste fixe et n'ait pas de rotation:

$$\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0} = \{ \mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^3, \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}, \mathbf{rot}(\mathbf{u})(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \}$$

L'espace $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ est un sous espace de l'espace de Sobolev $(H^1(\Omega))^3$, ce qui garantit que l'énergie de déformation élastique du milieu est finie. La condition $\mathbf{rot}(\mathbf{u})(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ implique une rotation locale nulle en \mathbf{x}_0 . L'espace $\mathcal{U}_{\mathbf{x}_0}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{grad}_x^s(\mathbf{u})(\mathbf{x}) : \mathbf{a}(\mathbf{x}) : \mathbf{grad}_x^s(\mathbf{v})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et peut être qualifié d'espace énergétique (voir par exemple [84]) pour la norme associée $\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{U}} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$.

II.2 Milieux élancés à symétrie orthotrope

Les poutres droites forment la famille de milieux à périodicité unidimensionnelle dont les caractéristiques géométriques sont les plus "simples", à l'instar des fonctions réelles constantes qui sont de fait périodiques. La théorie de la résistance des matériaux permet de décrire de manière réduite le comportement de tels milieux. Comme on le verra en II.3, il est physiquement cohérent d'utiliser un modèle de poutre pour décrire le comportement d'ensemble ou comportement macroscopique des milieux à périodicité unidimensionnelle. Le modèle de poutre équivalent approxime le comportement macroscopique du milieu au même titre que la théorie des poutres est une approximation des résultats de l'élasticité tridimensionnelle. Les structures périodiques étudiées au *chapitre III* ont des propriétés de symétrie telles que leurs modèles de poutre équivalents soient à symétrie orthotrope. Cette section a pour objectif d'exposer quelques résultats concernant les problèmes d'élasticité liés à la résistance des matériaux pour les poutres élastiques à symétrie orthotrope. Certains problèmes concernant les plaques et les poutres constituées de matériaux anisotropes sont traités dans les travaux de Lekhnitskii [88].

On considère un milieu Ω défini par l'extrusion d'une surface plane compacte \mathcal{S} le long d'une droite perpendiculaire à cette dernière (*Figure II.3*). On note O le centre de masse d'une des deux sections aux extrémités du milieu et \mathbf{e}_1 la vecteur unitaire longitudinal du milieu. L'axe $(O\mathbf{e}_1)$ est l'axe neutre du milieu et les vecteurs $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ donnent les directions transverses et sont tels que $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ forment une base orthonormée. On utilise un système de coordonnées cartésiennes (O, x_1, x_2, x_3) orienté par la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Le milieu a une longueur L et l'axe neutre qui passe par l'ensemble des centres de masse des sections $G \in (O\mathbf{e}_1)$, est paramétré par l'abscisse $x_1 \in [0, L]$ tel que $G(x_1) \in [O, G(L)]$. On note $\partial\Omega_O$ et $\partial\Omega_L$ les bords correspondant aux sections extrêmes de centres O et $G(L)$. Le bord latéral $\partial\Omega_{lat} = \partial\Omega \setminus (\partial\Omega_O \cup \partial\Omega_L)$ est libre d'efforts. La surface \mathcal{S} est la section droite du milieu on note $S = |\mathcal{S}|$ son aire et I_1, I_2, I_3 ses moments d'inertie.

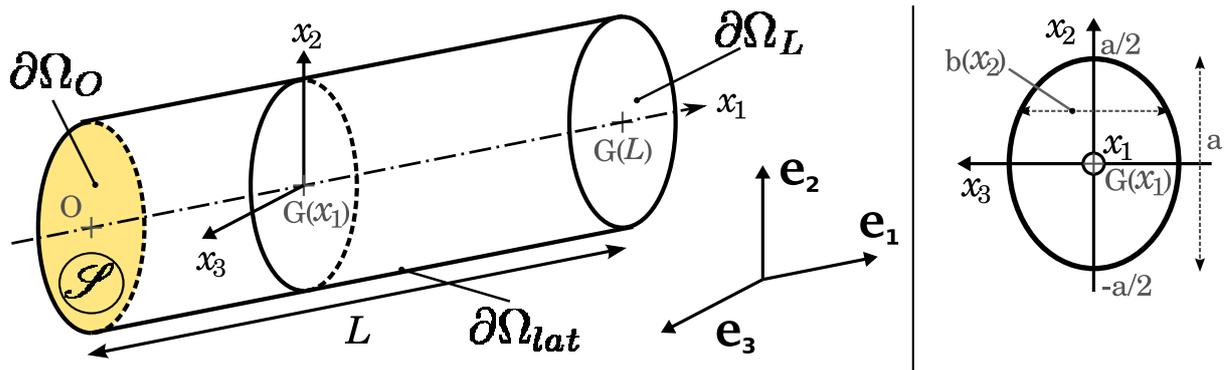


Figure II.3 Orientation d'une poutre prismatique. Les dimensions de la section sont données par la hauteur a et la corde $b(x_2)$.

Le matériau constituant le milieu est élastique à symétrie orthotrope et ses axes d'orthotropie coïncident avec les directions de la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. La loi de Hooke donne la relation $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{e}(\mathbf{x})$ entre le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{T}_2^+(\mathbb{R})$ et le tenseur des

petites déformations $\mathbf{e} \in \mathbb{T}_2^+(\mathbb{R})$, le tenseur $\mathbf{a} \in \mathbb{T}_4^+(\mathbb{R})$ étant le tenseur de rigidité. En utilisant le système d'indices contractés de *Mandel*, cette relation s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1111} & a_{1122} & a_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & a_{2222} & a_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2a_{2323} & 0 & 0 \\ & \text{Sym} & & & 2a_{1313} & 0 \\ & & & & & 2a_{1212} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ \sqrt{2}e_{23} \\ \sqrt{2}e_{13} \\ \sqrt{2}e_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

La relation inverse est donnée par le tenseur de souplesse ou compliance \mathbf{b} inverse du tenseur de rigidité \mathbf{a} . Le tenseur de souplesses peut s'exprimer en fonction des modules d'Young E_1, E_2, E_3 , des modules de cisaillement G_{23}, G_{13}, G_{12} et des coefficients de Poisson $\nu_{21}, \nu_{12}, \nu_{31}, \nu_{12}, \nu_{32}, \nu_{13}, \nu_{23}$. Ces coefficients sont définis par rapports aux axes d'orthotropie $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ et \mathbf{e}_3 . La relation $\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x})\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ s'écrit:

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ \sqrt{2}e_{23} \\ \sqrt{2}e_{13} \\ \sqrt{2}e_{12} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & & & \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & & & \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & & & \\ & & & \frac{1}{2G_{23}} & & 0 \\ & & & & \frac{1}{2G_{13}} & \\ & & & & & \frac{1}{2G_{12}} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

Ce tenseur étant symétrique, on a les relations suivantes entre les modules d'Young et les coefficients de Poisson:

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1} \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1} \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}$$

L'état de contrainte du milieu est dû à des distributions de forces $\mathbf{g}_0(\mathbf{x})$ et $\mathbf{g}_L(\mathbf{x})$ appliquées aux extrémités longitudinales du milieu, *i.e.* sur les sections $G(0)$ et $G(L)$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) dx_2 dx_3 + \int_{\partial\Omega_L} \mathbf{g}_L(\mathbf{x}) dx_2 dx_3 &= \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_L = \mathbf{0} \\ \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{x} \times \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) dx_2 dx_3 + \int_{\partial\Omega_L} \mathbf{x} \times \mathbf{g}_L(\mathbf{x}) dx_2 dx_3 &= \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_L = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Les conditions aux limites sur $\partial\Omega_0$ et $\partial\Omega_L$ sont:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_0 \quad , \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_L(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_L$$

Le champ de déplacement \mathbf{u} dans Ω étant alors défini à un déplacement de corps rigide près, on impose la condition de déplacement nul au point O ($\mathbf{u}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$) et de rotation nulle autour de ce point ($\mathbf{rot}(\mathbf{u})(\mathbf{0})=\mathbf{0}$). On se place dans le cadre du *principe de St Venant* en considérant des états de contrainte régularisés loin des extrémités. On donne en outre les relations de comportement des efforts de réduction du torseur des forces et moments internes:

$$\{\mathbf{V} | \mathbf{M}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} V_1 & M_1 \\ V_2 & M_2 \\ V_3 & M_3 \end{array} \right\}$$

II.2.1 Déformation par traction-compression

Lorsque le milieu élastique est comprimé ou mis en allongement suivant son axe longitudinal ($O\mathbf{e}_1$), la distribution de forces aux extrémités est telle que la force et le moment résultant sont $\mathbf{F}_L = F \mathbf{e}_1$ et $\mathbf{M}_L = \mathbf{0}$. On applique le principe de *St Venant*, qui permet d'affirmer que loin du bord $\partial\Omega_L$ l'état de contrainte est régularisé de telle sorte que l'on ait la condition de bord équivalente:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{F}{S} \mathbf{e}_1 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_L$$

L'état de contrainte vérifiant les équations de l'élasticité et les conditions de bord est:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 = \frac{F}{S} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$$

La *loi de Hooke* (II.10) faisant intervenir le tenseur de compliancance donne l'expression du tenseur des déformations:

$$\mathbf{e} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \nu_{12} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \nu_{13} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)$$

Le champ de déplacement sans mouvement de corps rigide est:

$$\mathbf{u} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} x_1 \mathbf{e}_1 - \nu_{12} \frac{\sigma_{11}}{E_1} x_2 \mathbf{e}_2 - \nu_{13} \frac{\sigma_{11}}{E_1} x_3 \mathbf{e}_3 \quad (\text{II.11})$$

La force de réduction caractérisant les forces de traction-compression est l'effort normal V_1 défini par:

$$V_1 = \int_{\mathcal{S}} \sigma_{11} dx_2 dx_3 = F = E_1 S \mathbf{e}_{11} \quad (\text{II.12})$$

La raideur de traction du milieu est $E_1 S$.

II.2.2 Déformation par flexion pure

La flexion pure intervient lorsqu'à l'extrémité $G(L)$, le torseur est donné par :

$$\{\mathbf{F}_L \mid \mathbf{M}_L\} = \{\mathbf{0} \mid M_0 \mathbf{n}_0\} \quad \text{avec} \quad \mathbf{n}_0 = \cos(\theta) \mathbf{e}_2 + \sin(\theta) \mathbf{e}_3$$

La distribution de forces régularisées sur le bord $\partial\Omega_L$ est $\mathbf{g}_L(\mathbf{x}) = M_0/I_\theta(x_3 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta))$ avec

$$I_\theta = \int_{\mathcal{S}} (x_3 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta))^2 dx_2 dx_3 = I_2 \cos^2(\theta) - 2 I_{23} \cos(\theta) \sin(\theta) + I_3 \sin^2(\theta)$$

l'inertie de section (moment quadratique) de la surface \mathcal{S} par rapport à l'axe $(O\mathbf{n}_0)$. L'état de contrainte vérifiant les équations de l'élasticité et les conditions de bord est:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{M_0}{I_\theta} (x_3 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta)) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$$

La loi de Hooke (II.10) donne les états de déformations correspondants:

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \frac{M_0}{E_1 I_\theta} (x_3 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta)) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \nu_{12} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \nu_{13} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)$$

La courbure de flexion du milieu est $\chi = M_0/(E_1 I_\theta)$. En intégrant la déformation et en appliquant la condition de mouvement de corps rigide nul, le champ de déplacement s'écrit:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = & \chi (x_3 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta)) x_1 \mathbf{e}_1 \\ & + \chi \left(-\cos(\theta) \nu_{12} x_2 x_3 + \frac{1}{2} \sin(\theta) (x_1^2 + \nu_{12} x_2^2 - \nu_{13} x_3^2) \right) \mathbf{e}_2 \\ & + \chi \left(\sin(\theta) \nu_{13} x_2 x_3 + \frac{1}{2} \cos(\theta) (x_1^2 + \nu_{12} x_2^2 - \nu_{13} x_3^2) \right) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

Le moment de réduction caractérisant le moment transmis le long du milieu Ω est le moment fléchissant $\mathbf{M} = M_2 \mathbf{e}_2 + M_3 \mathbf{e}_3 = M_0 \mathbf{n}_0$ défini par:

$$M_0 = \int_{\mathcal{S}} (x_3 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta)) \sigma_{11} dx_2 dx_3 = E I_\theta \chi \quad (\text{II.14})$$

La raideur de flexion autour de l'axe \mathbf{n}_0 est $E_1 I_\theta$.

II.2.3 Milieu mis en flexion par une force transverse

■ Milieu mis en flexion par une force de cisaillement

L'état de contrainte généré par un effort tranchant dans un corps prismatique vérifiant les conditions de bord libre et les équations de compatibilité fait intervenir toutes les composantes $\sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes^s \mathbf{e}_j$ du tenseur des contraintes (Muskhelishvili [103] §137). Ainsi, bien que le problème permettant de déterminer cet état de contrainte soit bien posé avec des conditions *ad hoc*, les équations d'équilibre couplent toutes les dérivées partielles de tous les termes de contraintes rendant la résolution analytique du problème difficile. La théorie des poutres considère alors un état de contrainte plane dont la variation suivant la direction normale à la force de cisaillement est négligée dans chaque section droite. Cette suppression des effets de bord correspond au cas d'une plaque infiniment large. Du fait des bords libres, on voit apparaître un effet de gradient longitudinal de contrainte axiale le long du milieu.

Pour clarifier les choses, on va présenter le cas du milieu mis en flexion par une force transverse $\mathbf{F}_L = F \mathbf{e}_2$ appliquée sur l'extrémité $\partial\Omega_L$, l'autre extrémité étant encastree dans un bâti fixe. Les distributions de force régularisées aux extrémités $\partial\Omega_O$ et $\partial\Omega_L$ correspondant à l'application du principe de *St Venant* sont:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_L : \quad \mathbf{g}_L(\mathbf{x}) &= \frac{F}{S} \mathbf{e}_2 \\ \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_O : \quad \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) &= -\frac{F}{S} \mathbf{e}_2 + \frac{FL}{I_3} x_2 \mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Lorsque la section est **rectangulaire pleine**, on fait l'hypothèse que **le problème est bidimensionnel**, *i.e.* indépendant de x_3 , et que **la composante en cisaillement de la contrainte est obtenue projection de la force transverse** si bien que:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \sigma_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 2\sigma_{12} \mathbf{e}_1 \otimes^s \mathbf{e}_2$$

Les équations d'équilibre élastique s'écrivent:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0$$

La contrainte de cisaillement σ_{12} est constante le long du milieu et la contrainte axiale est de la forme:

$$\sigma_{11} = -\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} x_1 + \varsigma(x_2) \quad (\text{II.16})$$

La contrainte $\varsigma(x_2)$ est donnée par la condition de bord (II.15) à l'extrémité $\partial\Omega_O$:

$$\varsigma(x_2) = \sigma_{11}(x_1 = 0, x_2) = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \cdot (-\mathbf{e}_1) = -\frac{FL}{I_3} x_2 = -\frac{12FL}{a^3 b} x_2$$

La contrainte de cisaillement doit être nulle sur $\partial\Omega_0$ cependant, on a en moyenne:

$$\int_{\mathcal{S}} \sigma_{12}(x_2) dS = F$$

Pour obtenir les variations moyennées de la contrainte de cisaillement σ_{12} suivant x_2 , la méthode classique consiste à faire un bilan des forces appliquées à la surface d'un segment de poutre de longueur dx_1 tronqué par un plan horizontal de coordonnée x_2 constante donnée (voir par exemple [133] §26). L'expression obtenue donne une variation quadratique de la contrainte:

$$\sigma_{12}(x_2) = \frac{3}{2} \frac{F}{a^3 b} (a^2 - 4x_2^2) = \frac{1}{8} \frac{F}{I_3} (a^2 - 4x_2^2) \quad (\text{II.17})$$

Étant donnée (II.16), la contrainte axiale s'écrit:

$$\sigma_{11} = \frac{12F}{a^3 b} (L - x_1) x_2 = \frac{F}{I_3} (L - x_1) x_2 \quad (\text{II.18})$$

L'état de contrainte donné par (II.17) et (II.18) est proche de la solution exacte pour une section rectangulaire plate $b \gg a$.

Les termes de déformation correspondants sont déduits de la loi de Hooke (II.10):

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E_1} = \frac{F}{E_1 I_3} (L - x_1) x_2 \quad , \quad e_{22} = -\nu_{12} \frac{\sigma_{11}}{E_1} = -\nu_{12} \frac{F}{E_1 I_3} (L - x_1) x_2 \\ \gamma_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{G_{12}} = \frac{1}{8} \frac{F}{G_{12} I_3} (a^2 - 4x_2^2) \end{aligned}$$

La déformation e_{33} n'est pas estimable compte tenu de l'hypothèse simplificatrice consistant à considérer que le problème est bidimensionnel. En intégrant les termes de déformation, les champs de déplacement correspondant à l'état de déformation sont de la forme:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \frac{F}{E_1 I_3} (Lx_1 - \frac{1}{2}x_1^2) x_2 + \frac{1}{6} \left(\frac{F}{G_{12} I_3} + \nu_{12} \frac{F}{E_1 I_3} \right) x_2^3 + C_1 x_2 + D_2 \\ u_2(x_1, x_2) &= -\nu_{12} \frac{F}{2E_1 I_3} (L - x_1) x_2^2 + \frac{F}{6E_1 I_3} x_1^3 - \frac{FL}{2E_1 I_3} x_1^2 + C_1 x_1 + D_1 \end{aligned}$$

avec :

$$C_1 + C_2 = -\frac{Fa^2}{8G_{12} I_3}$$

Les hypothèses simplificatrices sur l'état de contrainte empêchent de prendre en compte un encastrement sur l'ensemble du bord $\partial\Omega_0$; on choisit les conditions de bord $u_1(0, 0) = 0$, $u_2(0, 0) = 0$ et $\partial u_1 / \partial x_2(0, 0) = 0$, le champ de déplacement est alors de la forme:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \frac{F}{2E_1 I_3} (2L - x_1) x_1 x_2 + \frac{1}{6} \left(\frac{F}{G_{12} I_3} + \nu_{12} \frac{F}{E_1 I_3} \right) x_2^3 \\ u_2(x_1, x_2) &= -\nu_{12} \frac{F}{2E_1 I_3} (L - x_1) x_2^2 + \frac{F}{6E_1 I_3} x_1^3 - \frac{FL}{2E_1 I_3} x_1^2 - \frac{Fa^2}{8G_{12} I_3} x_1 \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

Le taux de courbure de la fibre moyenne est $\chi' = \frac{F}{E_1 I_3}$, sa déflexion et son champ de rotation sont:

$$\begin{aligned}\theta_3(x_1) &= \frac{1}{2}\chi'(2L - x_1)x_1 \\ U_2(x_1) &= \chi' \left(\frac{1}{6}x_1^3 - \frac{1}{2}Lx_1^2 - \frac{1}{8}\frac{a^2E_1}{G_{12}}x_1 \right)\end{aligned}\tag{II.20}$$

La raideur de poutre à l'effort tranchant $V_2 = F$ est obtenue par équivalence énergétique entre l'énergie de déformation calculée à partir du modèle mécanique de poutre et l'énergie élastique obtenue par l'élasticité tridimensionnelle:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int \sigma_{12}\gamma_{12} dV = \frac{1}{2} \frac{V_2^2}{G_{12}kS}L$$

On exprime l'énergie \mathcal{E} à l'aide de l'expression (II.17) de la contrainte σ_{12} , la section réduite kS intervenant dans la raideur $G_{12}kS$ est déterminée par identification à l'énergie de poutre

$$kS = \left(\frac{9}{4a^3b} \int_{-a/2}^{a/2} (a^2 - 4x_2^2)^2 dx_2 \right)^{-1} = \frac{5}{6}ab$$

Lorsque la section est **non rectangulaire**, il n'est plus acceptable de prendre un état de contrainte bidimensionnel, on doit au moins considérer **un état de contrainte plan**:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \sigma_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 2\sigma_{12} \mathbf{e}_1 \otimes^s \mathbf{e}_2 + 2\sigma_{13} \mathbf{e}_1 \otimes^s \mathbf{e}_3$$

Les contraintes de cisaillement sont tangentes aux bords libres. A titre d'exemple, une poutre de section circulaire soumise à une force transverse, voit sa contrainte de cisaillement s'orienter de manière orthoradiale sur les bords de section ([133] §27). Les équations d'équilibre élastique s'écrivent:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} = 0$$

Les conditions de bord $\sigma_{11} = \mathbf{g}_O \cdot (-\mathbf{e}_1)$ sur $\partial\Omega_O$ et $\sigma_{11} = \mathbf{g}_L \cdot \mathbf{e}_1$ sur $\partial\Omega_L$ appliquées aux équations d'équilibre impliquent que l'expression (II.18) de la contrainte σ_{11} est toujours valable. La démarche présentée par Muskhelishvili dans [103] §137 permet de donner une solution du problème à l'aide de fonctions harmoniques. Tout d'abord, on écrit les équations d'équilibre sous la forme:

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\sigma_{13} + \frac{F}{I_3} x_2 x_3 \right) = 0$$

Les contraintes σ_{12} et σ_{13} solutions de cette équation s'écrivent à l'aide d'une fonction de contrainte $(x_2, x_3) \mapsto \Psi(x_2, x_3)$ telle que:

$$\sigma_{12} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \quad \text{et} \quad \sigma_{13} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} - \frac{F}{I_3} x_2 x_3\tag{II.21}$$

Les équations de compatibilité de *St Venant* peuvent être écrites en terme de contraintes à l'aide de la loi de comportement (II.10). En y injectant l'expression (II.21) des contraintes de cisaillement, on obtient les équations vérifiées par la fonction de contrainte $\Psi(x_2, x_3)$:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (\Delta_G \Psi) = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_3} (\Delta_G \Psi) = -\frac{F}{I_3} \left(1 + 2\nu_{13} \frac{G_{13}}{E_1} \right)$$

avec

$$\Delta_G \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + \frac{G_{13}}{G_{12}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2}$$

La fonction Δ_G est par conséquent de la forme:

$$\Delta_G \Psi = -\frac{F}{I_3} \left(1 + 2\nu_{13} \frac{G_{13}}{E_1} \right) x_3 + C \quad (\text{II.22})$$

On pose les changements de variables suivants:

$$\xi_2 = x_2 \quad , \quad \xi_3 = \sqrt{\frac{G_{13}}{G_{12}}} x_3 = \vartheta x_3 \quad (\text{II.23})$$

qui ramènent l'opérateur Δ_G à un simple Laplacien des variables ξ_2 et ξ_3 :

$$\Delta_G \Psi(x_2, x_3) = \Delta_\xi \Psi(\xi_2, \xi_3) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_3^2}$$

et on reformule la relation (II.22) en fonction de ces variables:

$$\Delta_\xi \Psi = -\frac{F}{I_3} \left(1 + 2\nu_{13} \frac{G_{13}}{E_1} \right) \frac{\xi_3}{\vartheta} + C \quad (\text{II.24})$$

La fonction de contrainte Ψ est donc la somme d'une fonction harmonique $\psi(\xi_2, \xi_3)$ et de la solution particulière qui incombe au second membre de (II.24):

$$\Psi(\xi_2, \xi_3) = -\frac{F}{2I_3} \left(1 + 2\nu_{13} \frac{G_{13}}{E_1} \right) \frac{1}{\vartheta} \left(\psi(\xi_2, \xi_3) + \frac{1}{2} \xi_2^2 \xi_3 + \frac{1}{6} \xi_3^3 \right) + \frac{C}{2} (\xi_2^2 + \xi_3^2)$$

avec

$$\psi(\xi_2, \xi_3) = \sum_{n=0}^{+\infty} (A_n \cos(p_n \xi_2) + B_n \sin(p_n \xi_2)) (C_n \cosh(q_n \xi_3) + D_n \sinh(q_n \xi_3))$$

et $p^2 - q^2 = 0$.

L'expression (II.21) permet de déterminer l'expression des contraintes de cisaillement:

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= -\frac{F}{4I_3} \left(1 + 2\nu_{13} \frac{G_{13}}{E_1} \right) \left(2 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} (x_2, \vartheta x_3) + \xi_2^2 + \vartheta^2 x_3^2 \right) + C \vartheta x_3 \\ \sigma_{13} &= \frac{F}{2I_3} \left(-1 + 2\nu_{13} \frac{G_{13}}{E_1} \right) \left(\frac{1}{\vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} (x_2, \vartheta x_3) + x_2 x_3 \right) + C x_2 \end{aligned}$$

La constante C caractérise un couple de torsion appliqué aux extrémités du milieu, dans le cas présent $C = 0$. On peut facilement montrer en appliquant la condition de bord

libre $\sigma_{12} n_2(x_2, x_3) + \sigma_{13} n_3(x_2, x_3) = 0$ avec $\mathbf{n}(x_2, x_3) = n_2(x_2, x_3)\mathbf{e}_2 + n_3(x_2, x_3)\mathbf{e}_3$ le vecteur de normale extérieure sur $\partial\Omega_{\text{lat}}$, que la fonction harmonique ψ vérifie un problème de Neumann sur le contour de la section \mathcal{S} dans le système de coordonnées (ξ_2, ξ_3) :

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}_\xi} ds = \int_{\partial\mathcal{S}} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi_2} n_2(\xi_2, \xi_3) + \frac{\partial\psi}{\partial\xi_3} n_3(\xi_2, \xi_3) \right) ds = 0$$

Pour la résolution de ce problème, le lecteur peut par exemple se reporter à [102]. Les termes de déformation s'obtiennent par la loi de comportement élastique (II.10):

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{F}{E_1 I_3} (L - x_1) x_2, \quad e_{22} = -\nu_{12} \frac{F}{E_1 I_3} (L - x_1) x_2, \quad e_{33} = -\nu_{13} \frac{F}{E_1 I_3} (L - x_1) x_2 \\ e_{12} &= -\frac{F}{8G_{12} I_3} \left(1 + 2\nu_{13} \frac{G_{13}}{E_1} \right) \left(2 \frac{\partial\psi}{\partial x_3} (x_2, \vartheta x_3) + x_2^2 + \vartheta^2 x_3^2 \right) \\ e_{13} &= \frac{F}{4G_{13} I_3} \left(-1 + 2\nu_{13} \frac{G_{13}}{E_1} \right) \left(\frac{1}{\vartheta} \frac{\partial\psi}{\partial x_2} (x_2, \vartheta x_3) + x_2 x_3 \right) \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

La section réduite kS du milieu est déterminée par équivalence énergétique:

$$kS = \left[\int_{\mathcal{S}} \left(\frac{1}{8I_3} \left(1 + 2\nu_{13} \frac{G_{13}}{E_1} \right) \left(2 \frac{\partial\psi}{\partial x_3} (x_2, \vartheta x_3) + x_2^2 + \vartheta^2 x_3^2 \right) \right)^2 dx_2 dx_3 \right]^{-1}$$

L'effort tranchant s'exprime à partir de la distorsion de section droite Γ_{12} ou du taux de courbure $\chi' = F/(E_1 I_3)$:

$$V_2 = F = G_{12} kS \Gamma_{12} = E_1 I_3 \chi' \quad (\text{II.26})$$

■ Poutre encastree mise en flexion par une flèche imposée

On reprend le cas de la poutre de *section rectangulaire*. Cette fois, au lieu d'imposer une force répartie sur l'extrémité Ω_L , on impose une flèche $u_2(x_1 = L, x_2 = 0, x_3 = 0) = U_0$. A la force appliquée F dans l'expression du champ de déplacement donnée en (II.19) est substitué le taux de courbure χ' :

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \chi' \left(\frac{1}{2} (2L - x_1) x_1 x_2 + \frac{1}{6} \left(\frac{E_1}{G_{12}} + \nu_{12} \right) x_2^3 \right) \\ u_2(x_1, x_2) &= \chi' \left(-\frac{1}{2} \nu_{12} (L - x_1) x_2^2 + \frac{1}{6} x_1^3 - \frac{1}{2} L x_1^2 - \frac{1}{8} \frac{a^2 E_1}{G_{12}} x_1 \right) \end{aligned}$$

La condition de flèche imposée en $\mathbf{x} = (L, 0, 0)$ permet de déterminer le taux de courbure

$$\chi' = -\frac{3U_0}{L \left(L^2 + \frac{3}{8} \frac{a^2 E_1}{G_{12}} \right)} = -\frac{3U_0}{L \left(L^2 + 3 \frac{5}{4} \frac{E_1 I_3}{G_{12} kS} \right)} \quad (\text{II.27})$$

A titre comparatif, on résout le même problème à partir de la théorie des poutres:

$$\begin{cases} G_{12}kS \left(\frac{d^2U_2}{dx_1^2} - \frac{d\theta_3}{dx_1} \right) = 0 \\ G_{12}kS \left(\frac{dU_2}{dx_1} - \theta_3 \right) + E_1I_3 \frac{d^2\theta_3}{dx_1^2} = 0 \end{cases}$$

$$U_2(0) = 0, \quad \theta_3(0) = 0, \quad U_2(L) = U_0$$

on obtient les champs de déflexion de la fibre neutre et de rotation de section:

$$\begin{aligned} U_2(x_1) &= \chi' \left(\frac{1}{6}x_1^3 + \frac{1}{2}Lx_1^2 - \frac{E_1I_3}{G_{12}kS}x_1 \right) \\ \theta_3(x_1) &= \chi' \left(\frac{1}{2}x_1 + L \right) x_1 \end{aligned}$$

avec le taux de courbure:

$$\chi' = -\frac{3U_0}{L \left(L^2 + 3\frac{E_1I_3}{G_{12}kS} \right)} \quad (\text{II.28})$$

Le taux de courbure donné ici est différent de l'expression (II.27) et ce principalement à cause des prises en compte de la condition d'encastrement qui ne sont pas équivalentes. Dans l'une, l'encastrement n'a lieu qu'en un point de la section alors que dans l'autre, la section entière est encastree.

II.2.4 Milieu cisailé par torsion

Le milieu Ω est soumis à des couples de torsion opposés à ses extrémités si bien que les torseurs des efforts en $\partial\Omega_O$ et $\partial\Omega_L$ sont respectivement $\{\mathbf{0} \mid -M_0 \mathbf{e}_1\}$ et $\{\mathbf{0} \mid M_0 \mathbf{e}_1\}$. Les distributions de forces correspondantes sont:

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{x}) = -\frac{M_0}{I_1} (-x_3 \mathbf{e}_2 + x_2 \mathbf{e}_3) \quad , \quad \mathbf{g}_L(\mathbf{x}) = \frac{M_0}{I_1} (-x_3 \mathbf{e}_2 + x_2 \mathbf{e}_3) \quad (\text{II.29})$$

L'état de contrainte est de la forme:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\sigma_{12}\mathbf{e}_1 \otimes^s \mathbf{e}_2 + 2\sigma_{13}\mathbf{e}_1 \otimes^s \mathbf{e}_3$$

La théorie de *St Venant* pose un champ de déplacement de la forme:

$$u_1 = \chi \psi(x_2, x_3) \quad u_2 = -\chi x_1 x_3 \quad u_3 = \chi x_1 x_2 \quad (\text{II.30})$$

où χ est la courbure du milieu et $\psi(x_2, x_3)$ la fonction de gauchissement. Les termes non nuls du tenseur de déformation sont:

$$e_{12} = \frac{1}{2}\chi \left(-x_3 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \right) \quad e_{13} = \frac{1}{2}\chi \left(x_2 + \frac{\partial\psi}{\partial x_3} \right) \quad (\text{II.31})$$

et les contraintes correspondantes sont:

$$\sigma_{12} = G_{12}\chi \left(-x_3 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \right) \quad \sigma_{13} = G_{13}\chi \left(x_2 + \frac{\partial\psi}{\partial x_3} \right)$$

En introduisant ces deux expressions dans les équations d'équilibre et en faisant appel au changement de variables (II.23), la fonction de gauchissement vérifie:

$$\Delta_\xi \psi(\xi_2, \xi_3) = 0$$

La condition de bord libre sur $\partial\Omega_{\text{lat}}$ implique que la fonction de gauchissement $\psi(\xi_2, \xi_3)$ vérifie un problème de *Neumann*:

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{n}_\xi} ds = \int_{\partial\mathcal{S}} \left(\frac{\partial\psi}{\partial \xi_2} n_2(\xi_2, \xi_3) + \frac{\partial\psi}{\partial \xi_3} n_3(\xi_2, \xi_3) \right) ds = 0$$

Voir par exemple [102] pour la résolution de ce problème. Étant donnée la distribution de forces (II.29) aux extrémités du milieu Ω , le bilan de moment conduit à la relation suivante entre le couple de torsion $M_1 = M_0$ et la courbure χ :

$$M_1 = \left[(G_{13}I_3 + G_{12}I_2) + \int_{\mathcal{S}} \left(G_{13}x_2 \frac{\partial\psi}{\partial x_3} - G_{12}x_3 \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \right) dx_2 dx_3 \right] \chi \quad (\text{II.32})$$

Lorsque la section est circulaire, on a directement $M_1 = (G_{13}I_3 + G_{12}I_2) \chi$, on introduit alors des facteurs de correction α_1 et α_2 dans l'expression (II.32):

$$M_1 = (G_{12}\alpha_2 I_2 + G_{13}\alpha_3 I_3) \chi \quad (\text{II.33})$$

II.3 Commentaires sur les méthodes asymptotiques

Les méthodes asymptotiques appliquées aux problèmes physiques reposent sur la disparité des ordres de grandeur des différents termes d'équations d'équilibre ou équations de bilan. Ces termes caractérisent des comportements physiques différents qui se produisent à différentes échelles, certains prédominant sur d'autres. Ces méthodes ont par

exemple permis à *Prandtl* de développer le modèle de couche limite dans un écoulement fluide en contact avec un solide. En l'occurrence, le modèle repose sur le fait que les termes de viscosité sont prépondérants au voisinage du solide et négligeables au loin. En mécanique des matériaux hétérogènes, ces techniques permettent d'identifier le comportement mécanique prépondérant que l'on qualifie de macroscopique et celui lié à la microstructure du matériau. L'utilisation des méthodes asymptotiques dédiées à l'homogénéisation des matériaux hétérogènes fut largement développée par les travaux de Sanchez-Hubert et Sanchez-Palencia [114]. Caillerie [25] les a mises en œuvre pour l'étude du comportement asymptotique homogène de plaques périodiques dans leur plan (périodicité bidimensionnelle). Kolpakov [80] et plus récemment Buannic [21] et Buannic et Cartraud [23] ont appliqué des méthodes asymptotiques dans le cadre de l'homogénéisation de milieux à périodicité unidimensionnelle.

Pour dégager les différentes échelles des phénomènes physiques ayant lieu dans un milieu, il est souhaitable de déterminer l'ordre de grandeur de tous les paramètres du modèle physique, puis adimensionner les équations d'équilibre afin de faire apparaître les ordres de grandeur relatifs des différents termes. La méthode d'adimensionnement consiste à écrire les paramètres physiques comme le produit d'une grandeur physique constante caractérisant leur ordre de grandeur par une fonction adimensionnelle dont l'amplitude des variations est de l'ordre de l'unité. Ainsi pour un tenseur $\boldsymbol{\tau}$ d'ordre quelconque et d'ordre de grandeur T , l'adimensionnement s'écrit:

$$\boldsymbol{\tau} = T \times \overline{\boldsymbol{\tau}} \quad \text{avec} \quad \overline{\boldsymbol{\tau}} = \mathcal{O}(1)$$

Par la suite, les grandeurs adimensionnées sont marquées d'un surlignage " $\overline{}$ ". Cette procédure permet de réécrire les équations sous forme adimensionnelle avec des coefficients sans dimension faisant apparaître l'ordre de grandeur des différents termes. On peut citer les très connus nombres de *Reynolds*, de *Froude* ou de *Biot* issus du domaine de la mécanique des fluides et de la thermodynamique du XIX^e siècle. Toute la modélisation physique repose sur l'ordre de grandeur relatif des différents termes du problème. Les études asymptotiques [23], [25] et [80] citées plus haut dans cette section posent le problème de façon différente. Au lieu d'adimensionner les équations, les ordres de grandeur des forces appliquées à la surface du milieu et des densités de forces sont directement fixés. Les contraintes étant directement liées à ces forces par les équations d'équilibre et les conditions aux limites, on en déduit la forme du développement asymptotique des termes de contraintes puis des termes de déformation à l'aide de la loi de comportement et finalement du champ de déplacement. Auriault présente dans [6] et [7] des études asymptotiques du comportement mécanique de matériaux à hétérogénéité périodique reposant sur l'adimensionnement des équations d'équilibre mécanique. Comme le montre l'auteur, l'approche par adimensionnement permet de déterminer quelles sont les conditions que doivent vérifier les ordres de grandeur des paramètres physiques d'un problème pour qu'il soit homogénéisable.

La dimension du milieu Ω et de la cellule sont données par celles des parallélépipèdes circonscrits $\mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ définis en II.1. La cellule périodique est supposée d'épaisseur faible devant la longueur du milieu, *i.e.* $h \ll H$. Lorsqu'on modélise un bâtiment par

une structure périodique, cela revient à supposer qu'un étage est de petite taille devant la hauteur totale du bâtiment ou encore que le bâtiment comporte un grand nombre d'étages. On introduit le nombre sans dimension $\varepsilon = h/H \ll 1$ qui caractérise le rapport d'échelle longitudinal entre la cellule \mathcal{C} et le milieu Ω . C'est ce petit paramètre ε qui permet dans la suite de cet exposé de mettre en lumière l'aspect multi-échelle du problème.

Les variations du champ de déplacement ont un ordre de grandeur U très petit devant la longueur h de manière à ce que l'hypothèse des petites déformations soit valable aux échelles locale et macroscopique. L'ordre de grandeur des déformations à l'échelle macroscopique est U/H . Le tenseur de rigidité $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ a un ordre de grandeur \mathbf{a}_0 qui doit caractériser au mieux l'ordre de grandeur de l'ensemble des variations des termes de ce champ tensoriel. Un moyen d'estimer a_0 peut être d'utiliser une norme. Les composantes du champ $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ étant des fonctions bornées sur le domaine \mathcal{C} et $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ étant un tenseur symétrique, on peut composer la norme $\|\cdot\|_2$ de la représentation matricielle de Mandel du tenseur avec la norme $\|\cdot\|_{L^2(\mathcal{C})}$ de l'espace $L^2(\mathcal{C})$. On énonce l'adimensionnement des grandeurs physiques inconnues du problème:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= U \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) &= \frac{U}{H} \mathbf{e}(\bar{\mathbf{u}}) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \sigma_0 \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{a_0 U}{H} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

Les champs de déplacement, déformation et contrainte sont recherchés sous forme de développements asymptotiques en puissance de ε :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= \bar{\mathbf{u}}^{(0)} + \varepsilon \bar{\mathbf{u}}^{(1)} + \varepsilon^2 \bar{\mathbf{u}}^{(2)} + o(\varepsilon^2) \\ \bar{\mathbf{e}}(\bar{\mathbf{u}}) &= \bar{\mathbf{e}}^{(0)}(\bar{\mathbf{u}}) + \varepsilon \bar{\mathbf{e}}^{(1)}(\bar{\mathbf{u}}) + \varepsilon^2 \bar{\mathbf{e}}^{(2)}(\bar{\mathbf{u}}) + o(\varepsilon^2) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)} + \varepsilon \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} + \varepsilon^2 \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)} + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

Cette méthode dite des *échelles multiples* pose la décomposition multi-échelle du problème. Bien évidemment, la contrainte adimensionnelle $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ s'exprime en fonction de la déformation $\mathbf{e}(\bar{\mathbf{u}})$ grâce à la loi de comportement du milieu, en l'occurrence la *loi de Hooke* et la déformation s'exprime elle-même en fonction du champ de déplacement adimensionnel $\bar{\mathbf{u}}$. Les champs tensoriels $\bar{\mathbf{e}}^{(n)}$ et $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(n)}$ sont symétriques et les champs $\bar{\mathbf{u}}^{(n)}$ sont de carré intégrable. La procédure d'homogénéisation consiste dans les étapes suivantes:

- (1) Écrire les problèmes mécaniques aux différents ordres de grandeurs. Le problème \mathcal{P}_n à l'ordre ε^n , $n \geq -1$ a pour solution le champ de déplacement $\bar{\mathbf{u}}^{(n)}$ pour un champ $\bar{\mathbf{u}}^{(n-1)}$ donné.
- (2) Localiser le problème, c'est-à-dire exprimer les champs $\bar{\mathbf{u}}^{(n)}$ en fonction du champ macroscopique $\bar{\mathbf{u}}^{(0)}$.
- (3) Application d'un opérateur de moyenne pour obtenir les propriétés effectives du milieu équivalent.

La direction longitudinale \mathbf{e}_1 est caractérisée par deux échelles: l'échelle du milieu qu'on a appelée échelle macroscopique caractérisée par la longueur H du milieu dans cette direction, *i.e.* longueur suivant \mathbf{e}_1 du parallélépipède $\mathcal{P}(\Omega)$, et l'échelle de la cellule périodique

\mathcal{C} ou encore échelle locale caractérisée par la longueur h , *i.e.* longueur suivant \mathbf{e}_1 du parallélépipède $\mathcal{P}(\mathcal{C})$. On définit deux coordonnées adimensionnelles de position longitudinale pour décrire la physique du problème à chaque échelle. La variable \bar{Y}_1 dite coordonnée lente varie peu à l'échelle d'une période et décrit les phénomènes propres à l'échelle macroscopique:

$$\bar{Y}_1 = \frac{x_1}{H} \quad \text{variable lente (échelle macroscopique)} \quad (\text{II.36})$$

La variable \bar{z}_1 dite coordonnée rapide permet la description des phénomènes à l'échelle des cellules périodiques:

$$\bar{z}_1 = \frac{1}{H} \frac{x_1}{\varepsilon} \quad \text{variable rapide (échelle locale)} \quad (\text{II.37})$$

Plusieurs situations sont possibles pour la représentation des variations transverses des propriétés physiques du milieu. Celle étudiée par Buannic et Cartraud dans [23] correspond à un milieu dont les variations transverses sont de l'ordre de grandeur de la période, *i.e.* faibles devant la longueur H du milieu et dont les dimensions transverses sont faibles devant cette même dimension. On va reprendre et commenter les raisonnements des auteurs qui donnent un parfait exemple d'application des méthodes asymptotiques pour les milieux à périodicité unidimensionnelle. On commence donc par énoncer l'adimensionnement des variables d'espace transverses correspondant à la modélisation asymptotique adoptée.

Un milieu dont la morphologie a des variations transverses rapides en comparaison des variations longitudinales implique l'adimensionnement suivant:

$$\bar{z}_\alpha = \frac{1}{H} \frac{x_\alpha}{\varepsilon} \quad \text{avec } \alpha \in \{2, 3\} \quad (\text{II.38})$$

La méthode asymptotique mise en œuvre est celle des *échelles multiples*, le champ de déplacement est cherché sous la forme d'un développement asymptotique en puissances du petit paramètre ε :

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}^{(0)}(\bar{Y}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) + \varepsilon \bar{\mathbf{u}}^{(1)}(\bar{Y}_1, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) + \varepsilon^2 \bar{\mathbf{u}}^{(2)}(\bar{Y}_1, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) + o(\varepsilon^2)$$

Le tenseur de rigidité adimensionnel caractérise la morphologie de la cellule et est par conséquent indépendant de la variable macroscopique \bar{Y}_1 :

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = a_0 \bar{\mathbf{a}}(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) \quad (\text{II.39})$$

Les dérivées partielles par rapport aux variables spatiales s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{U}{H} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{Y}_1} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} &= \frac{U}{H} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} \quad \text{avec } \alpha \in \{2, 3\} \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

La divergence d'un tenseur adimensionnel $\bar{\boldsymbol{\tau}}(\bar{Y}_1, \bar{\mathbf{z}}) \in \mathbb{T}_2^S(\mathbb{R})$ s'écrit:

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial \bar{z}_j} + \frac{\partial \bar{\tau}_{1i}}{\partial \bar{Y}_1} = 0$$

Comme le font remarquer Buannic et Cartraud, le modèle homogénéisé va dépendre de l'ordre de l'intensité des forces appliquées. Caillerie explique dans [25] que si toutes les composantes des forces extérieures sont prises aux mêmes ordres de grandeur, certaines forces ou moment internes seront écartés du comportement macroscopique du milieu. Comme il le fait remarquer, il est plus "aisé" de faire fléchir une plaque en lui appliquant une force normale à son plan plutôt que des moments sur ses bords. Il faut prendre des distributions de force similaires à celles de [22] aux extrémités $\partial\Omega_-$ et $\partial\Omega_+$ dont l'ordre de grandeur est:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_-(\mathbf{x}) &= \sigma_0 \left(\varepsilon \bar{g}_{1-}^{(1)}(\bar{z}_2, \bar{z}_3) + \varepsilon^2 \bar{g}_{\alpha-}^{(2)}(\bar{z}_2, \bar{z}_3) \right) & \alpha = 2, 3 \\ \mathbf{g}_+(\mathbf{x}) &= \sigma_0 \left(\varepsilon \bar{g}_{1+}^{(1)}(\bar{z}_2, \bar{z}_3) + \varepsilon^2 \bar{g}_{\alpha+}^{(2)}(\bar{z}_2, \bar{z}_3) \right) & \alpha = 2, 3 \end{aligned}$$

Les conditions de bord aux extrémités fixent la valeur du vecteur contrainte $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_{\pm}(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in \partial\Omega_{\pm}$ et se développent en puissance de ε :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}(\bar{Y}_1 = \pm \frac{1}{2}, \bar{z}_2, \bar{z}_3) &= \varepsilon \bar{g}_{1\pm}^{(1)}(\bar{z}_2, \bar{z}_3) \\ \bar{\sigma}_{1\alpha}(\bar{Y}_1 = \pm \frac{1}{2}, \bar{z}_2, \bar{z}_3) &= \varepsilon^2 \bar{g}_{\alpha\pm}^{(2)}(\bar{z}_2, \bar{z}_3) \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

Comme on l'a rappelé plus haut, cette différence d'ordre de grandeur entre les composantes des forces de surface \mathbf{g}_- et \mathbf{g}_+ est nécessaire pour que l'ensemble des déformations soient observables à l'échelle macroscopique. Pour ce type de chargement, Trabuco et Viaño [137] montrent que le développement asymptotique du champ de déplacement est de la forme:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= \bar{\mathbf{u}}_2^{(0)}(\bar{Y}_1) \mathbf{e}_2 + \bar{\mathbf{u}}_3^{(0)}(\bar{Y}_1) \mathbf{e}_3 \\ &+ \varepsilon \bar{\mathbf{u}}^{(1)}(\bar{Y}_1, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) + \varepsilon^2 \bar{\mathbf{u}}^{(2)}(\bar{Y}_1, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

A l'échelle macroscopique, les variations de l'ordre de grandeur de la période ne sont plus observables. Il ne reste par conséquent que les variations longitudinales caractérisées par la variable \bar{Y}_1 . D'un certain point de vue, on peut dire que pour cette modélisation asymptotique, la représentation équivalente du milieu se réduit à sa fibre neutre.

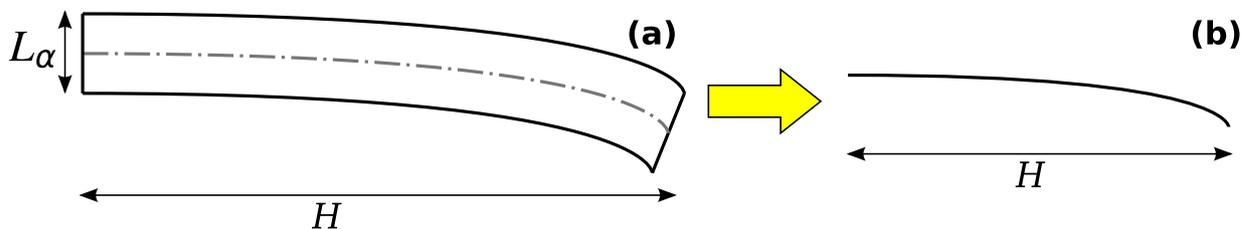


Figure II.4 (a) Description locale tridimensionnelle – (b) A l'échelle macroscopique, la seule dimension non négligeable est la longueur H du milieu qui se réduit à sa fibre neutre.

L'absence de composante longitudinale à l'ordre 1 traduit le fait que les déplacements de flèche sont d'un ordre de grandeur supérieur à ceux d'élongation. Les variations transverses suivant \bar{z}_2 et \bar{z}_3 étant de l'ordre de grandeur h de la période, elles deviennent négligeables à l'échelle macroscopique dont l'ordre de grandeur est la longueur H du milieu.

La première étape du processus d'homogénéisation consiste à localiser l'état macroscopique, c'est-à-dire à exprimer le champ de déplacement aux ordres ε^n pour $n > 0$ en fonction de $\bar{\mathbf{u}}^{(0)}$. A cette fin, on va résoudre successivement les problèmes \mathcal{P}_n pour une cellule périodique \mathcal{C} donnée. Cette résolution itérative démarre au problème \mathcal{P}_{-1} qui s'énonce de la manière suivante:

$$(\mathcal{P}_{-1}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}^{(0)}}{\partial \bar{z}_j} = 0 \\ \bar{\sigma}_{ij}^{(0)} = \bar{a}_{ijkl} \bar{e}_{kl}^{(0)} \left(\bar{u}^{(0)}, \bar{u}^{(1)} \right) \\ \bar{u}_k^{(1)}(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) = \bar{u}_k^{(1)}(\bar{z}_1 + h, \bar{z}_2, \bar{z}_3) \quad \forall \bar{z}_k \in \partial \mathcal{C}_- \\ \bar{\sigma}_{ij}^{(0)} n_j = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{C}_0 \end{array} \right.$$

D'après (II.41) et les conditions de bord libres, le tenseur de contrainte $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)}$ est nul et le tenseur de déformation à l'ordre ε^0 est $\bar{\mathbf{e}}^{(0)} = \mathbf{grad}_{\bar{\mathbf{z}}}^s(\mathbf{u}^{(1)}) + \mathbf{grad}_{\bar{Y}_1}^s(\mathbf{u}^{(0)}) = \mathbf{0}$ avec $\mathbf{grad}_{\bar{\mathbf{z}}}^s$ le gradient symétrisé usuel pour les variables spatiales \bar{z}_i et:

$$\mathbf{grad}_{\bar{Y}_1}^s(\mathbf{u}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} d_{\bar{Y}_1} \bar{u}_2^{(0)} & \frac{1}{2} d_{\bar{Y}_1} \bar{u}_3^{(0)} \\ \frac{1}{2} d_{\bar{Y}_1} \bar{u}_2^{(0)} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} d_{\bar{Y}_1} \bar{u}_3^{(0)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.42})$$

où $d_{\bar{Y}_1}$ signifie la dérivée par rapport à \bar{Y}_1 . Le champ de déplacement $\bar{\mathbf{u}}^{(1)}$ solution du problème (\mathcal{P}_{-1}) s'écrit comme un mouvement de corps rigide de section droite:

$$\bar{\mathbf{u}}^{(1)} = \bar{\mathbf{U}}^{(1)}(\bar{Y}_1) + \varphi^{(1)}(\bar{Y}_1) (\bar{z}_2 \mathbf{e}_3 - \bar{z}_3 \mathbf{e}_2) - \bar{z}_\alpha d_{\bar{Y}_1} \bar{u}_\alpha^{(0)} \mathbf{e}_1$$

où $\bar{\mathbf{U}}^{(1)}(\bar{Y}_1)$ est un mouvement de centre de masse de section dont $\bar{U}_1^{(1)}$ est l'élongation du milieu à son ordre prédominant, $\varphi^{(1)}(\bar{Y}_1)$, $d_{\bar{Y}_1} \bar{u}_2^{(0)}$ et $d_{\bar{Y}_1} \bar{u}_3^{(0)}$ sont des rotations de section droite. On considère maintenant le problème à l'ordre $\varepsilon^0 = 1$:

$$(\mathcal{P}_0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}^{(1)}}{\partial \bar{z}_j} = 0 \\ \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} = \bar{a}_{ijkl} \bar{e}_{kl}^{(1)} \left(\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)} \right) \\ \bar{u}_k^{(2)}(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) = \bar{u}_k^{(2)}(\bar{z}_1 + h, \bar{z}_2, \bar{z}_3) \quad \forall \bar{z}_k \in \partial \mathcal{C}_- \\ \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} n_j = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{C}_0 \end{array} \right.$$

Les contraintes $\bar{\sigma}_{1\alpha}$ étant de l'ordre ε^2 et la contrainte axiale $\bar{\sigma}_{11}$ étant indépendante de \bar{Y}_1 , on a de façon similaire au problème (\mathcal{P}_{-1}) , le tenseur de déformation à l'ordre ε qui est $\bar{\mathbf{e}}^{(1)} = \mathbf{grad}_{\bar{z}}^s(\mathbf{u}^{(2)}) + \mathbf{grad}_{\bar{Y}_1}^s(\mathbf{u}^{(1)})$ avec:

$$\mathbf{grad}_{\bar{Y}_1}^s(\mathbf{u}^{(1)}) = \begin{pmatrix} d_{\bar{Y}_1} \bar{U}_1^{(1)}(\bar{Y}_1) - \bar{z}_\alpha d_{\bar{Y}_1}^2 \bar{u}_\alpha^{(0)} & \text{Sym} \\ -\frac{1}{2} \left(\bar{z}_3 d_{\bar{Y}_1} \varphi^{(1)}(\bar{Y}_1) + d_{\bar{Y}_1} \bar{u}_2^{(1)} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\bar{z}_2 d_{\bar{Y}_1} \varphi^{(1)}(\bar{Y}_1) - d_{\bar{Y}_1} \bar{u}_3^{(1)} \right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.43})$$

Ce gradient étant dépendant des variables (\bar{z}_2, \bar{z}_3) , le champ solution n'est plus un mouvement de section droite comme à l'ordre précédent. Le champ $\bar{\mathbf{u}}^{(2)}$ solution du problème (\mathcal{P}_0) fait intervenir des opérateurs de localisation $\mathbf{\Lambda}_{E_{11}}$, $\mathbf{\Lambda}_{\chi_1}$, $\mathbf{\Lambda}_{\chi_2}$ et $\mathbf{\Lambda}_{\chi_3}$ qui s'appliquent respectivement à la déformation d'extension longitudinale $E_{11} = d_{\bar{Y}_1} \bar{U}_1^{(1)}(\bar{Y}_1)$, aux courbures de flexion $\chi_\alpha = d_{\bar{Y}_1}^2 \bar{u}_\alpha^{(0)}$ et au taux angulaire de torsion $\chi_1 = d_{\bar{Y}_1} \varphi^{(1)}(\bar{Y}_1)$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}^{(2)}(\bar{Y}_1, \bar{\mathbf{z}}) &= \mathbf{U}^{(2)}(\bar{Y}_1) + \varphi^{(2)}(\bar{Y}_1) (\bar{z}_2 \mathbf{e}_3 - \bar{z}_3 \mathbf{e}_2) + \bar{z}_\alpha d_{\bar{Y}_1} \bar{u}_\alpha^{(1)} \mathbf{e}_1 \\ &\quad + \mathbf{\Lambda}_{E_{11}}(\bar{\mathbf{z}}) d_{\bar{Y}_1} \bar{U}_1^{(1)}(\bar{Y}_1) + \mathbf{\Lambda}_{\chi_1}(\bar{\mathbf{z}}) d_{\bar{Y}_1} \varphi^{(1)}(\bar{Y}_1) + \mathbf{\Lambda}_{\chi_\alpha}(\bar{\mathbf{z}}) d_{\bar{Y}_1}^2 \bar{u}_\alpha^{(0)} \end{aligned}$$

Les opérateurs de localisation sont à valeurs dans \mathbb{R}^3 . Le tenseur des contraintes à l'ordre ε s'obtient par la loi de Hooke:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}(\bar{Y}_1, \bar{\mathbf{z}}) &= \bar{\mathbf{a}}(\bar{\mathbf{z}}) \bar{\mathbf{e}}^{(1)}(\bar{Y}_1, \bar{\mathbf{z}}) \\ &= \mathbf{K}_{E_{11}}(\bar{\mathbf{z}}) d_{\bar{Y}_1} \bar{U}_1^{(1)}(\bar{Y}_1) + \mathbf{K}_{\chi_1}(\bar{\mathbf{z}}) d_{\bar{Y}_1} \varphi^{(1)}(\bar{Y}_1) + \mathbf{K}_{\chi_\alpha}(\bar{\mathbf{z}}) d_{\bar{Y}_1}^2 \bar{u}_\alpha^{(0)} \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

avec les opérateurs de localisation de la contrainte à valeur dans $\mathbb{T}_2^S(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{K}_{E_{11}}\}_{ij}(\bar{\mathbf{z}}) &= \bar{a}_{ij11}(\bar{\mathbf{z}}) + \bar{a}_{ijkl}(\bar{\mathbf{z}}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} \{\mathbf{\Lambda}_{E_{11}}\}_k(\bar{\mathbf{z}}) \\ \{\mathbf{K}_{\chi_1}\}_{ij}(\bar{\mathbf{z}}) &= \bar{a}_{ij13}(\bar{\mathbf{z}}) \bar{z}_2 - \bar{a}_{ij12}(\bar{\mathbf{z}}) \bar{z}_3 + \bar{a}_{ijkl}(\bar{\mathbf{z}}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} \{\mathbf{\Lambda}_{\chi_1}\}_k(\bar{\mathbf{z}}) \\ \{\mathbf{K}_{\chi_\alpha}\}_{ij}(\bar{\mathbf{z}}) &= -\bar{a}_{ij11}(\bar{\mathbf{z}}) + \bar{a}_{ijkl}(\bar{\mathbf{z}}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} \{\mathbf{\Lambda}_{\chi_\alpha}\}_k(\bar{\mathbf{z}}) \end{aligned}$$

Buannic et Cartraud [23] mènent la résolution du problème aux deux ordres suivants de manière similaire. Ils obtiennent alors des expressions du déplacement $\bar{\mathbf{u}}^{(3)}$ et de la contrainte $\bar{\mathbf{u}}^{(2)}$ faisant intervenir les variables cinématiques macroscopiques $d_{\bar{Y}_1} \bar{U}_1^{(1)}(\bar{Y}_1)$, $d_{\bar{Y}_1}^2 \bar{u}_\alpha^{(0)}$ et $d_{\bar{Y}_1} \varphi^{(1)}(\bar{Y}_1)$ et celles à l'ordre suivant. Les forces et moments de réduction, *i.e.* l'effort normal V_1 , les efforts tranchants \bar{V}_α , le couple de torsion \bar{M}_1 et les moments fléchissants \bar{M}_α sont calculés par l'opération de moyenne:

$$\begin{aligned} \langle \cdot \rangle_{\mathcal{C}} &= \int_{\mathcal{C}} \cdot d\bar{z}_1 d\bar{z}_2 d\bar{z}_3 \\ \bar{V}_1 &= \langle \bar{\sigma}_{11} \rangle_{\mathcal{C}} \quad , \quad \bar{V}_\alpha = \langle \bar{\sigma}_{1\alpha} \rangle_{\mathcal{C}} \\ \bar{M}_1 &= \langle \bar{z}_2 \bar{\sigma}_{13} - \bar{z}_3 \bar{\sigma}_{12} \rangle_{\mathcal{C}} \quad , \quad \bar{M}_2 = \langle \bar{z}_3 \bar{\sigma}_{11} \rangle_{\mathcal{C}} \quad , \quad \bar{M}_3 = \langle -\bar{z}_2 \bar{\sigma}_{11} \rangle_{\mathcal{C}} \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

et leurs équations d'équilibre s'obtiennent par l'application de cet opérateur à la forme faible des équations d'équilibre mécanique pour des fonctions tests dépendant de \bar{Y}_1 (équations d'équilibres des forces V_i) et de la forme $C_\alpha \bar{z}_\alpha$ (équations faisant intervenir les moments M_i).

Les auteurs montrent que l'effort tranchant \bar{V}_α est d'ordre ε^2 , *i.e.* $\bar{V}_\alpha^{(1)} = 0$. Ce résultat est une conséquence directe de la modélisation asymptotique adoptée, à savoir le choix de variations transverses dont l'ordre de grandeur est celui de la période.

À l'ordre ε , la force \bar{V}_1 et les moments \bar{M}_i s'expriment linéairement en fonction des 4 grandeurs cinématiques macroscopiques qui caractérisent la cinématique d'une poutre mince de type *Euler-Bernoulli*. Les efforts tranchants \bar{V}_α se déduisent des moments fléchissants M_α à travers les équations d'équilibre qui les relient. La loi de comportement reliant l'effort tranchant \bar{V}_α au mouvement macroscopique de déflexion doit être cherchée aux ordres supérieurs.

La matrice de raideur $[\mathbf{K}_b]$ exprime la modélisation du comportement macroscopique du milieu par un modèle de poutre de type *Euler-Bernoulli*.

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{M}_3 \end{pmatrix} = [\mathbf{K}_b] \begin{pmatrix} \bar{U}_1^{(1)}(\bar{Y}_1) \\ \varphi^{(1)}(\bar{Y}_1) \\ d_{\bar{Y}_1}^2 \bar{u}_2^{(0)} \\ d_{\bar{Y}_1}^2 \bar{u}_3^{(0)} \end{pmatrix} = [\mathbf{K}_b] \bar{\mathcal{S}} \quad (\text{II.46})$$

On définit l'opérateur de localisation $\mathbf{K}(\bar{\mathbf{z}})$:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{K}(\bar{\mathbf{z}}_k)\}_{ij1} &= \{\mathbf{K}_{E11}\}_{ij} & , & & \{\mathbf{K}(\bar{\mathbf{z}}_k)\}_{ij2} &= \{\mathbf{K}_{\chi_1}\}_{ij} \\ \{\mathbf{K}(\bar{\mathbf{z}}_k)\}_{ij3} &= \{\mathbf{K}_{\chi_2}\}_{ij} & , & & \{\mathbf{K}(\bar{\mathbf{z}}_k)\}_{ij4} &= \{\mathbf{K}_{\chi_3}\}_{ij} \end{aligned}$$

Les termes de la matrice de comportement sont directement obtenus par application de l'opérateur de moyenne aux opérateurs de localisation de contrainte:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_b]_{1q} &= \langle \{\mathbf{K}(\bar{\mathbf{z}}_k)\}_{11q} \rangle_C \\ [\mathbf{K}_b]_{2q} &= \langle \bar{z}_2 \{\mathbf{K}(\bar{\mathbf{z}}_k)\}_{13q} - \bar{z}_3 \{\mathbf{K}(\bar{\mathbf{z}}_k)\}_{13q} \rangle_C \\ [\mathbf{K}_b]_{3q} &= \langle \bar{z}_3 \{\mathbf{K}(\bar{\mathbf{z}}_k)\}_{11q} \rangle_C \\ [\mathbf{K}_b]_{4q} &= \langle -\bar{z}_2 \{\mathbf{K}(\bar{\mathbf{z}}_k)\}_{11q} \rangle_C \end{aligned}$$

Sanchez-Hubert et Sanchez-Palencia ont montré pour des poutres hétérogènes dans leur direction transverse (milieu prismatique hétérogène) que la matrice $[\mathbf{K}_b]$ est symétrique définie positive. On peut supposer que pour un milieu à périodicité unidimensionnelle, il en va de même dans la mesure où cette matrice de comportement définit l'énergie de déformation macroscopique:

$$\mathcal{E}_{EB}^{(1)} = \varepsilon^4 a_0 U^2 H \frac{1}{2} \int_0^1 \bar{\mathcal{S}}^T [\mathbf{K}_b] \bar{\mathcal{S}} d\bar{Y}_1$$

On remarquera en outre que le modèle mécanique de poutre (même dans le cas de la théorie de *Timoshenko*) ne rend *a priori* pas compte du comportement macroscopique d'une manière exhaustive. Les contraintes $\bar{\sigma}_{22}^{(1)}$, $\bar{\sigma}_{33}^{(1)}$ et $\bar{\sigma}_{23}^{(1)}$ peuvent suivant la morphologie du milieu ne pas être nulles en moyenne, l'énergie de déformation $\bar{\mathcal{E}}_{EB}^{(1)}$ peut donc largement sous-estimer l'énergie de déformation macroscopique (énergie à l'ordre ε^2) totale:

$$\mathcal{E}^{(1)} = \varepsilon^4 a_0 U^2 H \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} : \bar{\mathbf{e}}^{(1)} \rangle_c d\bar{Y}_1 > \mathcal{E}_{EB}^{(1)}$$

La contrainte $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}$ est donnée par l'expression (II.44), la déformation $\bar{\mathbf{e}}^{(1)}$ s'écrit:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}^{(1)} = & \mathbf{grad}_{\bar{z}}^s(\boldsymbol{\Lambda}_{E_{11}})(\bar{\mathbf{z}}) d_{\bar{Y}_1} \bar{U}_1^{(1)}(\bar{Y}_1) + \mathbf{grad}_{\bar{z}}^s(\boldsymbol{\Lambda}_{\chi_\alpha})(\bar{\mathbf{z}}) d_{\bar{Y}_1}^2 \bar{u}_\alpha^{(0)}(\bar{Y}_1) \\ & + (\mathbf{grad}_{\bar{z}}^s(\boldsymbol{\Lambda}_{\chi_1})(\bar{\mathbf{z}}) + \bar{z}_2 \mathbf{e}_1 \otimes^s \mathbf{e}_3 - \bar{z}_3 \mathbf{e}_1 \otimes^s \mathbf{e}_2) d_{\bar{Y}_1} \varphi^{(1)}(\bar{Y}_1) \end{aligned}$$

Si bien que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(1)} = & \varepsilon^4 a_0 U^2 H \frac{1}{2} \int_0^1 \left\langle \mathbf{K}_{E_{11}} : \mathbf{grad}_{\bar{z}}^s(\boldsymbol{\Lambda}_{E_{11}}) (d_{\bar{Y}_1} \bar{U}_1^{(1)})^2 \right. \\ & + \mathbf{K}_{\chi_1} : (\mathbf{grad}_{\bar{z}}^s(\boldsymbol{\Lambda}_{\chi_1})(\bar{\mathbf{z}}) + \bar{z}_2 \mathbf{e}_1 \otimes^s \mathbf{e}_3 - \bar{z}_3 \mathbf{e}_1 \otimes^s \mathbf{e}_2) (d_{\bar{Y}_1} \varphi^{(1)})^2 \\ & + \mathbf{K}_{\chi_\alpha} : \mathbf{grad}_{\bar{z}}^s(\boldsymbol{\Lambda}_{\chi_\alpha}) (d_{\bar{Y}_1}^2 \bar{u}_\alpha^{(0)})^2 \\ & + \left(\mathbf{K}_{E_{11}} : (\mathbf{grad}_{\bar{z}}^s(\boldsymbol{\Lambda}_{\chi_1}) + \bar{z}_2 \mathbf{e}_1 \otimes^s \mathbf{e}_3 - \bar{z}_3 \mathbf{e}_1 \otimes^s \mathbf{e}_2) \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{K}_{\chi_1} : \mathbf{grad}_{\bar{z}}^s(\boldsymbol{\Lambda}_{E_{11}}) \right) d_{\bar{Y}_1} \bar{U}_1^{(1)} d_{\bar{Y}_1} \varphi^{(1)} \\ & + \left(\mathbf{K}_{E_{11}} : \mathbf{grad}_{\bar{z}}^s(\boldsymbol{\Lambda}_{\chi_\alpha}) + \mathbf{K}_{\chi_\alpha} : \mathbf{grad}_{\bar{z}}^s(\boldsymbol{\Lambda}_{E_{11}}) \right) d_{\bar{Y}_1} \bar{U}_1^{(1)} d_{\bar{Y}_1}^2 \bar{u}_\alpha^{(0)} \\ & + \left(\mathbf{K}_{\chi_1} : \mathbf{grad}_{\bar{z}}^s(\boldsymbol{\Lambda}_{\chi_\alpha}) \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{K}_{\chi_\alpha} : (\mathbf{grad}_{\bar{z}}^s(\boldsymbol{\Lambda}_{\chi_1}) + \bar{z}_2 \mathbf{e}_1 \otimes^s \mathbf{e}_3 - \bar{z}_3 \mathbf{e}_1 \otimes^s \mathbf{e}_2) \right) d_{\bar{Y}_1}^2 \bar{u}_\alpha^{(0)} d_{\bar{Y}_1} \varphi^{(1)} \\ & \left. + \left(\mathbf{K}_{\chi_2} : \mathbf{grad}_{\bar{z}}^s(\boldsymbol{\Lambda}_{\chi_3}) + \mathbf{K}_{\chi_3} : \mathbf{grad}_{\bar{z}}^s(\boldsymbol{\Lambda}_{\chi_2}) \right) d_{\bar{Y}_1}^2 \bar{u}_2^{(0)} d_{\bar{Y}_1}^2 \bar{u}_3^{(0)} \right\rangle_c d\bar{Y}_1 \end{aligned}$$

On peut *a priori* penser que les termes de raideur de la matrice $[\mathbf{K}_b]$ déterminée par la relation (II.46) doivent faire l'objet de facteurs correctifs destinés à prendre en compte la totalité de l'énergie de déformation élastique $\mathcal{E}^{(1)}$. La méthode numérique présentée dans le *chapitre III* prend en compte l'intégralité de l'énergie de déformation à l'échelle, approchant ainsi au mieux les raideurs effectives de la matrice $[\mathbf{K}_b]$.

Les aspects limitatifs de la théorie des poutres vis-à-vis de la modélisation de tels milieux est qu'elle est construite pour des milieux curvilignes. Or, les termes de couplage de la matrice $[\mathbf{K}_b]$ trouvent leur origine physique dans une combinaison entre l'anisotropie des

matériaux constituant le milieu et l'asymétrie de la distribution des hétérogénéités et en particulier la variation longitudinale de de l'asymétrie transverse que les milieux curvilignes ne sont pas en mesure de représenter. Le couplage intervient dans le modèle mathématique au niveau des opérateurs de localisation $\mathbf{\Lambda}_{E_{11}}(\bar{\mathbf{z}})$, $\mathbf{\Lambda}_{\chi_1}(\bar{\mathbf{z}})$, $\mathbf{\Lambda}_{\chi_2}(\bar{\mathbf{z}})$ et $\mathbf{\Lambda}_{\chi_3}(\bar{\mathbf{z}})$ qui dépendent entièrement du tenseur de rigidité $\bar{\mathbf{a}}(\bar{\mathbf{z}})$ qui définit la morphologie du milieu.

Les hypothèses (II.38) sont physiquement cohérentes avec un milieu à périodicité unidimensionnelle élané. Ce qui est le cas par exemple de structures périodiques telles que les antennes de satellites développées dans l'industrie aérospatiale ou encore de constructions élanées comme certaines cheminées d'usine. Cependant pour la plupart des bâtiments multi étagés qui font l'objet de la première partie de ce mémoire de thèse, l'hypothèse (II.38) n'est pas clairement valable. Hans [66] et Boutin et Hans [19] montrent d'ailleurs par des approches asymptotiques conjuguées à l'auscultation *in situ* de bâtiments réels que de nombreuses structures de génie civil multi-étagées ont un comportement mécanique du type poutre de *Timoshenko*.

On peut envisager différentes alternatives à l'hypothèse (II.38). On peut par exemple considérer un milieu à périodicité unidimensionnelle dont l'ordre de grandeur des variations et des dimensions transverses est grand devant la période h . Les dimensions transverses de la cellule sont notées L_α et les dimensions des hétérogénéités sont notées δ_i .

Un milieu dont la morphologie a des variations transverses "lentes" en comparaison des variations longitudinales implique:

$$\begin{aligned} \delta_1 \sim h \ll H, \quad \delta_\alpha \sim L_\alpha \sim H \\ \bar{Y}_\alpha = \frac{x_\alpha}{H} \quad \text{avec } \alpha \in \{2, 3\} \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

Pour un tel milieu, la contrainte adimensionnelle $\bar{\sigma}$ vérifie des équations d'équilibre qui découpent totalement les variations longitudinales des variations transverses:

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{\sigma}_{1i}}{\partial z_1} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \bar{Y}_j} = 0$$

Le comportement macroscopique obtenu par homogénéisation donne un milieu équivalent dont les fibres longitudinales sont indépendantes, *i.e.* elles glissent librement les unes sur les autres. Les propriétés du milieu équivalent sont obtenues par une moyenne longitudinale sur chaque fibre. Une des caractéristiques de cette modélisation est que si la fibre rencontre un pore sa contribution au comportement mécanique du milieu est nulle. Cette modélisation convient à des milieux constitués de cellules "très plates" dont la morphologie varie peu dans la direction transverse comme représenté sur la *Figure II.5*.

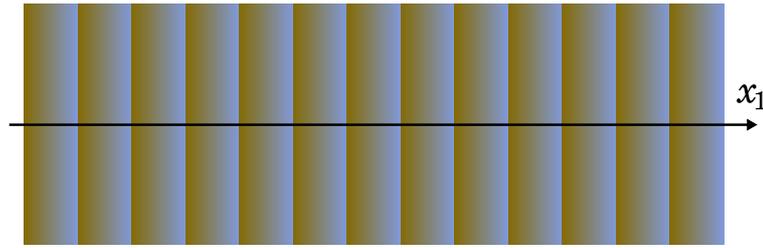


Figure II.5 Milieu périodique à cellules "plates" dont la morphologie a des variations transverses faibles – Hypothèse (II.47)

Les propriétés équivalentes étant déterminées par une moyenne sur chaque fibre indépendamment, on conçoit immédiatement que ce type de modélisation est inadapté à un milieu fortement hétérogène ou ayant une distribution de porosité uniforme (Figure II.6). L'utilisation d'une telle modélisation pour un immeuble reviendrait à supprimer les planchers pour ne garder que les murs sans fenêtres !

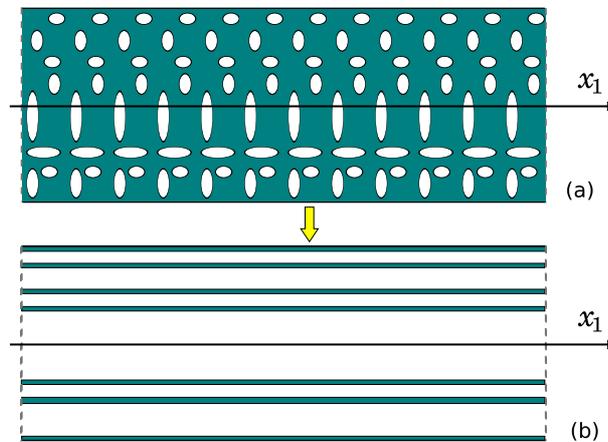


Figure II.6 (a) Milieu périodique – (b) Milieu équivalent.

Si on considère cette fois un milieu dont les hétérogénéités sont petites devant toutes les dimensions de la cellule, on définit une double échelle dans toutes les directions de l'espace. Cette configuration permet une homogénéisation tridimensionnelle, c'est-à-dire que le milieu continu équivalent déterminé à partir d'une cellule du milieu peut être utilisé pour construire le modèle de poutre équivalent.

$$\delta_i \ll H, L_\alpha$$

$$\bar{Y}_i = \frac{x_i}{H} \quad , \quad \bar{z}_i = \frac{x_i}{h} \tag{II.48}$$

Cependant, comme le montrent Sankar et Marrey [117], lorsque les dimensions des hétérogénéités ne sont plus faibles devant celles de la cellule le milieu tridimensionnel équivalent ne permet plus de construire le modèle de poutre équivalent. Lorsque les ordres de grandeur du problème vérifient:

$$\delta_i \sim h, L_\alpha \ll H \tag{II.49}$$

on est dans le cadre des hypothèses (II.36), (II.37) et (II.38). On a une double échelle pour décrire les variations longitudinales et une simple échelle pour chaque direction transverse.

Certains milieux périodiques ont des profils de poutre épaisse:

$$\delta_1 \sim h, \quad \frac{\delta_\alpha}{H} \sim \varepsilon^{1/2}, \quad L_\alpha \sim H \quad (\text{II.50})$$

Les fibres ne sont cependant pas indépendantes comme en (II.47).

Du point de vue asymptotique, le cas des bâtiment est assez particulier. Les différentes échelles intervenant dans la constitution d'un bâtiment sont par ordre de grandeur croissant:

- (1) Échelle des hétérogénéités du béton
- (2) Épaisseur des murs et du plancher, échelle des ferrailages
- (3) Hauteur d'un étage
- (4) Hauteur du bâtiment

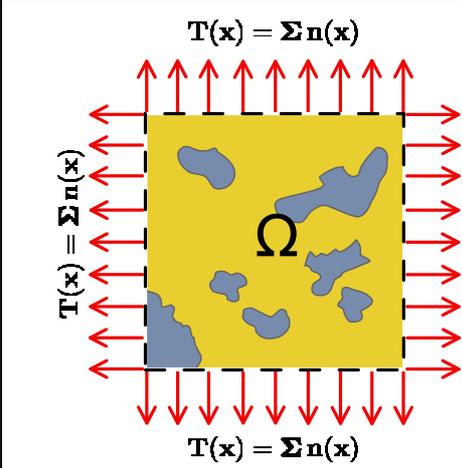
Suivant l'architecture adoptée, la dimension des salles varie entre les échelles (3) et (4). Les structures de génie civil sont donc généralement des milieux très creux dont la morphologie a des variations transverses ponctuelles au niveau des murs. A l'échelle (3), les planchers sont homogènes dans les directions transverses, la morphologie du milieu est donc discrète dans toutes directions de l'espace. Ces remarques sont d'ailleurs valables pour la plupart des structures périodiques.

Il s'agit d'une situation intermédiaire entre (II.49) et (II.47) sans être non plus représentable par l'hypothèse (II.50). Les contraintes de cisaillement de membrane dans les murs cisailés entre deux planchers ne sont pas d'un ordre inférieur aux contraintes de membrane axiales, ce que l'on peut vérifier dans les résultats de simulation des *Table VIII.2* et *Table III.13*. Ceux-ci sont obtenus pour une modélisation à l'échelle (3), les murs et les planchers étant représentés par des plaques homogènes. Étant donné l'ordre de grandeur des contraintes de cisaillement de membrane des murs, la poutre macroscopiquement équivalente au bâtiment est décrite à l'aide de la théorie de *Timoshenko* faisant intervenir 6 déformations macroscopiques. Le bâtiment étudié en III.5 est volontairement choisi avec une symétrie orthotrope afin d'éviter les couplages entre les déformations macroscopiques de poutre car un des objectifs de la seconde partie de ce document est de caractériser les couplages introduits par le comportement mécanique du sol. La section suivante donne les résultats généraux sur le comportement des milieux prismatiques homogènes élastiques à symétrie orthotrope permettant de caractériser le comportement macroscopique du bâtiment.

II.4 Homogénéisation de milieux à périodicité unidirectionnelle

Comme on l'a rappelé dans les chapitres précédents, lorsqu'un milieu est hétérogène, on peut en se plaçant à une échelle grande devant la dimension de ces dernières, observer un comportement homogène du milieu. Le volume élémentaire de référence (VER) est alors défini comme étant le plus petit volume d'échantillonnage du milieu pour lequel ce comportement macroscopique est observable. C'est donc le VER qui fait l'objet des méthodologies d'homogénéisation. L'approche à mettre en œuvre diffère suivant l'information que l'on possède sur la microstructure du milieu: matériaux constituants, géométrie, interfaces, *etc.*

On considère le cas d'un VER de microstructure quelconque que l'on notera Ω , il est constitué de matériaux à comportement élastique linéaire et est sollicité en petites déformations. Apprécier le comportement global apparent du VER nécessite de connaître sa réponse mécanique pour divers types de sollicitations. On peut par exemple appliquer une contrainte homogène Σ sur les bords de Ω dont le champ de déplacement vérifie le problème suivant:



$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= \mathbf{0} \\
 \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{a}(\mathbf{x})\mathbf{e}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) \\
 \mathbf{e}(\mathbf{u}) &= \operatorname{grad}^s(\mathbf{u}) \\
 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \Sigma \mathbf{n}(\mathbf{x}) \text{ sur le bord } \partial\Omega
 \end{aligned}
 \tag{II.51}$$

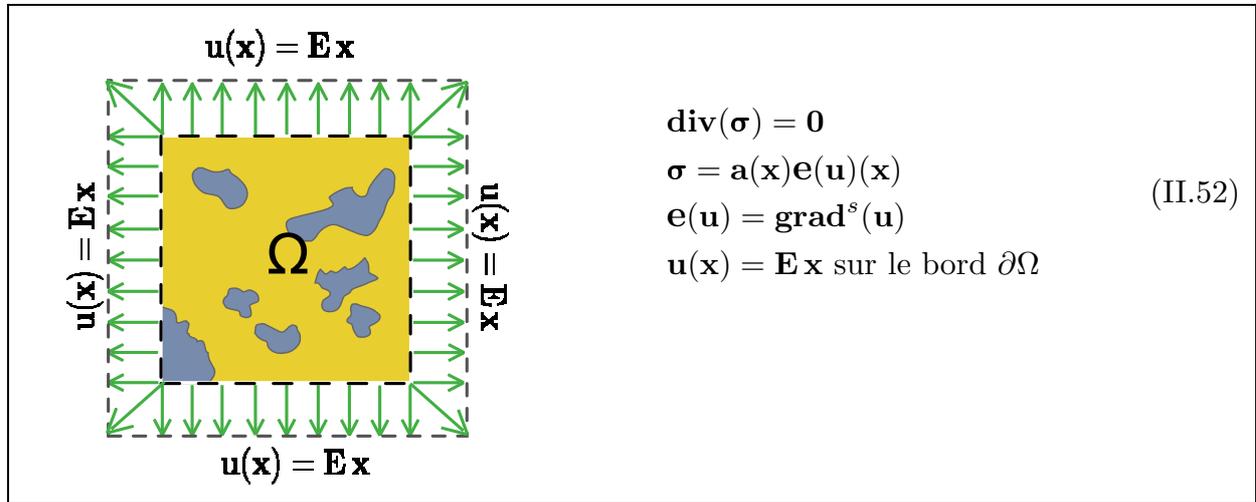
La contrainte macroscopique est la moyenne de la contrainte sur le VER Ω . On montre aisément (voir par exemple [146]) que dans le cas du problème (II.51), elle est égale à la contrainte homogène Σ imposée sur le bord:

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \Sigma$$

Le volume du domaine Ω est noté $|\Omega|$. Une fois la solution $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ du problème (II.51) déterminée, on connaît le champ de déformation $\mathbf{e}(\mathbf{u})(\mathbf{x})$ dans Ω en fonction de Σ . Cette étape de localisation étant effectuée, on calcule le champ de déformation moyen sur le VER:

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{e}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \mathbf{E} = \mathbf{B}(\Sigma) = \mathbf{B}_{\text{eff}} \Sigma$$

L'opérateur linéaire \mathbf{B}_{eff} est le tenseur de souplesse (ou compliance) effectif du milieu macroscopique. Pour un échantillon réel d'un matériau hétérogène, ce type d'essai correspond à un essai triaxial. Au lieu d'imposer la contrainte sur le bord du VER, on peut lui imposer une déformation homogène \mathbf{E} en imposant sur son bord le champ de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \mathbf{x}$:



Cette fois-ci, c'est la déformation moyenne qui est égale à la déformation homogène \mathbf{E} :

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{e}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \mathbf{E}$$

La localisation du problème d'homogénéisation est donnée par la solution $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ de (II.52). Celle-ci dépend linéairement de \mathbf{E} . Le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a}(\mathbf{x})\mathbf{e}(\mathbf{u})(\mathbf{x})$ dépend donc linéairement de \mathbf{E} . On peut donc relier la contrainte moyenne $\boldsymbol{\Sigma}$ à la déformation \mathbf{E} à l'aide du tenseur de rigidité effectif \mathbf{A}_{eff} du milieu macroscopique:

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A} \mathbf{E}$$

Lorsque le matériau a une microstructure périodique, l'ensemble de l'information sur les propriétés du milieu est contenu dans n'importe quel échantillon dont les dimensions sont celles d'une période. C'est pour cette raison que pour homogénéiser un milieu périodique, on choisit comme VER un domaine Ω ayant la dimension d'une période. La réalisation d'un test mécanique réel sur une période du milieu est en général difficilement réalisable, cependant la composition de la période est générale relativement bien connue dans la mesure où elle est observable et est souvent le produit d'un processus de fabrication industriel, on peut par conséquent substituer au test réel un calcul analytique ou numérique.

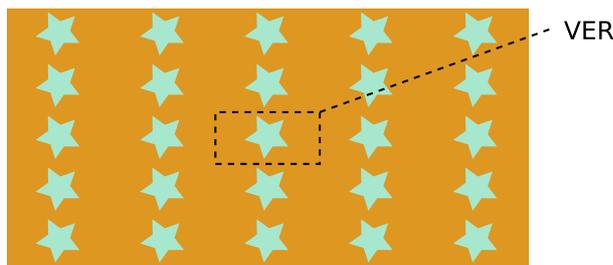


Figure II.7 Le VER d'un milieu périodique est donné par sa période.

Un domaine Ω contenant un grand nombre de périodes (ou cellules) \mathcal{C} et soumis à un chargement sur ses bords voit son champ de déplacement en un point \mathbf{x} être la somme d'un champ de déplacement macroscopique $\mathbf{U}_M(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \mathbf{x}$ issu d'un état de déformation homogène, et d'un champ de déplacement périodique $\mathbf{u}_{\text{per}}(\mathbf{x})$ (voir par exemple [94]). Cette décomposition est asymptotiquement valable pour des cellules suffisamment loin des bords du milieu périodique. L'état de déformation macroscopique \mathbf{E} peut être imposé au milieu Ω de manière similaire au problème (II.52). De part la périodicité du milieu, l'étape de localisation dans le processus d'homogénéisation se ramène à un problème périodique sur une cellule \mathcal{C} :

périodicité du déplacement

périodicité du déplacement

$$\begin{aligned} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f}_E &= \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_E &= \text{div}(\mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{E}) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) \text{grad}^s(\mathbf{u}_{\text{per}})(\mathbf{x}) \\ \mathbf{u}_{\text{per}}(\mathbf{x}) &\text{ périodique sur } \partial\mathcal{C} \end{aligned} \quad (\text{II.53})$$

Le champ de déplacement périodique solution dépend linéairement du champ de déformation homogène macroscopique \mathbf{E} si bien que le champ de déplacement dans le milieu s'écrit: $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \mathbf{x} + \mathbf{u}_{\text{per}}(\mathbf{E})(\mathbf{x})$. A partir de cette relation, on en déduit le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a}(\mathbf{E} + \text{grad}^s(\mathbf{u}_{\text{per}})(\mathbf{E}))$ en fonction de \mathbf{E} , on le moyenne et on récupère le tenseur de rigidité effectif \mathbf{A}_{eff} du milieu.

$$\frac{1}{|\mathcal{C}|} \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}_{\text{eff}} \mathbf{E}$$

La résolution de ce problème par la méthode des éléments finis peut être menée par différentes approches. Gusev [65] a par exemple développé un code basé sur des éléments de volume tétraédriques dotés de degrés de liberté permettant d'incrémenter la déformation des éléments par une déformation homogène. Ce code est combiné à un solveur permettant d'obtenir le champ de déplacement périodique \mathbf{u}_{per} par un algorithme qui à partir d'un état de déformation homogène cherche de manière itérative la perturbation périodique du champ de déplacement nodal minimisant l'énergie libre d'une cellule périodique. Plus

récemment, Lusti *et al.* [92] ont appliqué cette technique numérique à l'homogénéisation de composites à fibres.

J.-C. Michel *et al.* [16], [97] ont développé une procédure permettant de calculer la force nodale correspondant à la densité de force \mathbf{f}_E pour une cellule périodique représentée à l'aide d'éléments de volume. La matrice de raideur élémentaire $[\mathbf{k}_e]$ d'un élément V_e de volume $|V_e|$ s'écrit:

$$[\mathbf{k}_e] = \frac{1}{|V_e|} \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{a}] [\mathbf{B}] dx$$

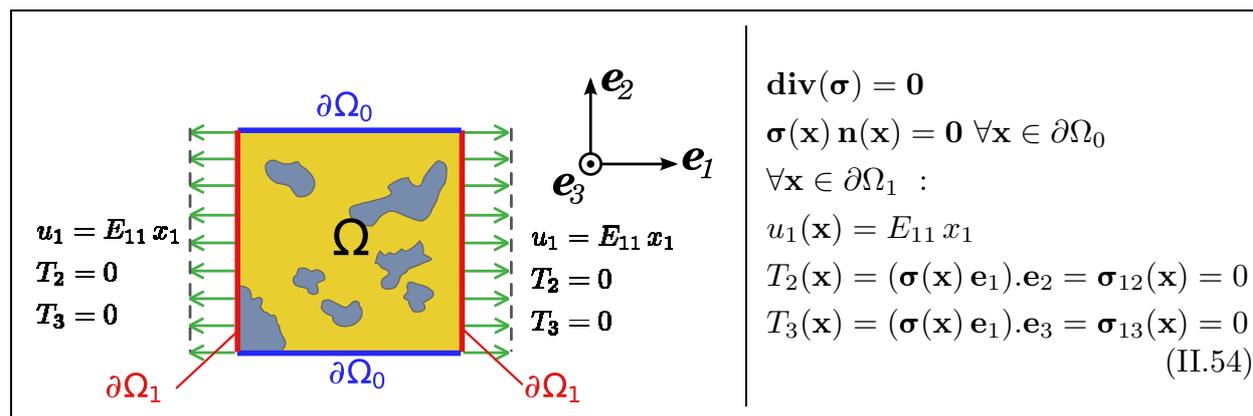
où $[\mathbf{a}]$ est la représentation matricielle du tenseur de rigidité \mathbf{a} (*e.g.* représentation de Mandel) et $[\mathbf{B}]$ la matrice permettant d'exprimer la représentation vectorielle $\boldsymbol{\epsilon}_e$ du tenseur de déformation homogène dans l'élément en fonction du vecteur des coordonnées nodales élémentaire $\mathbf{u}_e = [\mathbf{B}] \boldsymbol{\epsilon}_e$ correspondant au champ de déplacement \mathbf{u}_{per} . Le champ de déplacement correspondant à la déformation homogène macroscopique est $[\mathbf{B}] \mathbf{E}_e$ avec \mathbf{E}_e la représentation matricielle du champ de déformation macroscopique. La matrice de raideur élémentaire correspondant aux degrés de liberté de \mathbf{E}_e s'écrit donc:

$$[\bar{\mathbf{k}}_e] = \frac{1}{|V_e|} \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{a}] dx$$

Le vecteur force élémentaire correspondant à \mathbf{f}_E s'écrit donc $\mathbf{f} = [\bar{\mathbf{k}}_e] \mathbf{E}_e$.

Toutes ces méthodes sont intrusives dans la mesure où la structure interne du code du solveur par éléments finis doit être adaptée.

On introduit maintenant le cas d'un milieu Ω non périodique dont les bords sont soumis à des conditions mixtes de bord libre sur un bord $\partial\Omega_0$ et de déplacement partiellement imposé (une partie des composantes seulement) sur un bord $\partial\Omega_1$ tels que $\partial\Omega_1 = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_0$. Ce type de sollicitation correspond par exemple au cas d'un essai de traction uniaxial à déplacement imposé décrit par le problème mécanique suivant:



Les conditions $T_2 = 0$ et $T_3 = 0$ sur les composantes transverses du vecteur contrainte doivent être vérifiées pour que la condition de bord libre soit satisfaite sur $\partial\Omega_0$. Cette condition est d'ailleurs difficile à réaliser en pratique à cause de la friction des mors des machines de traction. De manière similaire au problème (II.52), on peut montrer que la

déformation moyenne d'extension dans la direction de traction est égale à la déformation imposée \mathbf{E}_{11} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} e_{ij} dv &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega} (u_i n_j + u_j n_i) dS \\ \Rightarrow \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} e_{11} dv &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_1 dS = \frac{E_{11}}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega_1} x_1 dx_2 dx_3 = E_{11} \end{aligned}$$

On peut aisément montrer que la contraintes transverses moyennes Σ_{22} et Σ_{33} sont nulles:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{ij} dv &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (\sigma_{ik} x_j)_{,k} dv = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ik} x_j n_k dS \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega_0} \sigma_{i\alpha} x_j n_{\alpha} dS + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega_1} \sigma_{i1} x_j n_1 dx_2 dx_3 \quad \alpha = 2, 3 \end{aligned}$$

Le terme de bord sur $\partial\Omega_0$ s'annule. Pour $(i, j) = (2, 2), (2, 3)$ on a alors:

$$\begin{aligned} \Sigma_{22} &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega_1} \sigma_{12} x_2 dx_2 dx_3 = 0 \\ \Sigma_{33} &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega_1} \sigma_{13} x_3 dx_2 dx_3 = 0 \end{aligned}$$

Le champ de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ solution du problème (II.54) dépend linéairement de E_{11} , les contraintes moyennes transverses Σ_{22} et Σ_{33} étant nulles le calcul de la contrainte axiale moyenne Σ_{11} fait donc apparaître la rigidité axiale effective du milieu:

$$\Sigma_{11} = A_{1111}^{\text{eff}} E_{11}$$

Le problème d'homogénéisation faisant l'objet de cette première partie du mémoire est similaire au problème (II.54) sauf que cette fois, le milieu Ω présente une propriété de périodicité dans une direction donnée de l'espace. La (Figure II.8) expose le cas où ce milieu est soumis à une traction par élongation imposée dans sa direction de périodicité.

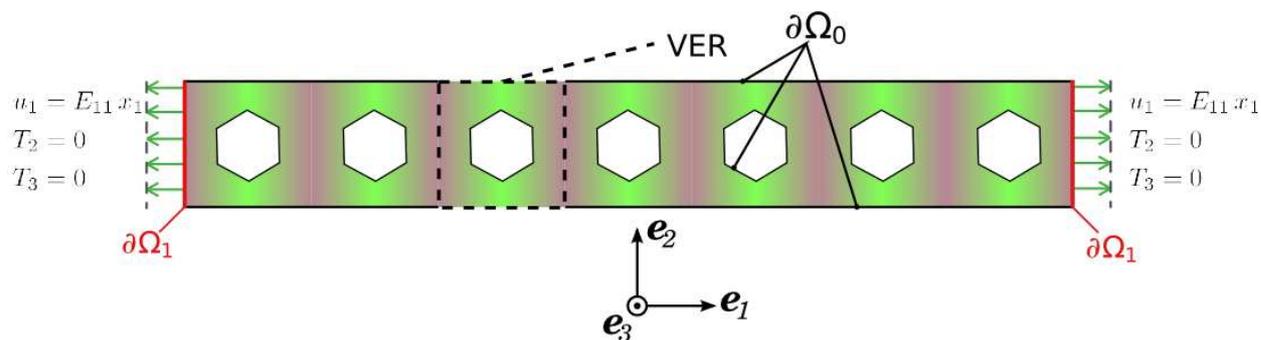


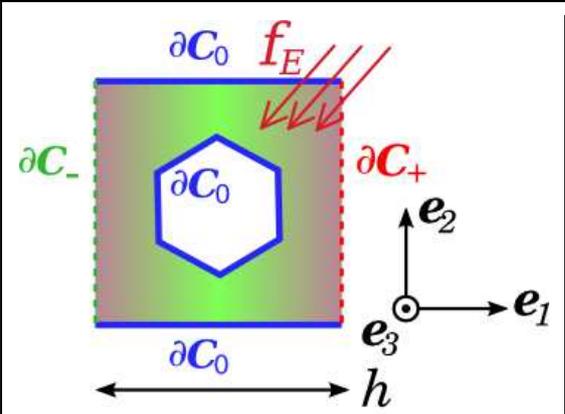
Figure II.8 Milieu à périodicité unidirectionnelle soumis à une traction suivant sa direction de périodicité.

Comme pour le problème d'homogénéisation périodique (II.53), on ramène le domaine du test mécanique de localisation à une cellule périodique qui définit un VER pour le

milieu. La cellule \mathcal{C} considérée est supposée suffisamment éloignée du bord $\partial\Omega_1$ pour que le problème soit considéré comme périodique dans la direction \mathbf{e}_1 . Le bord de la période \mathcal{C} se scinde en une partie libre d'efforts extérieurs $\partial\mathcal{C}_0 = \partial\Omega_0 \cap \partial\mathcal{C}$ et deux parties $\partial\mathcal{C}_-$ et $\partial\mathcal{C}_+$ correspondant aux interfaces de la cellule avec ses voisines. Le champ de déplacement est somme du champ de déplacement macroscopique $\mathbf{u}_M(x)$ correspondant à la déformation moyenne imposée sur le bord $\partial\Omega_1$ de Ω et d'un champ de déplacement $\mathbf{u}_{\text{per}}(\mathbf{x})$ périodique par rapport à x_1 :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_M(x) + \mathbf{u}_{\text{per}}(\mathbf{x})$$

Les cellules sont supposées d'une épaisseur h dans la direction de périodicité \mathbf{e}_1 si bien que le vecteur de périodicité du milieu est $h\mathbf{e}_1$. Le problème mécanique sur la cellule \mathcal{C} se pose de la façon suivante:

	$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{a} \operatorname{grad}^s(\mathbf{u}_{\text{per}})) + \mathbf{f}_E &= \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_E &= \operatorname{div}(\mathbf{a} \operatorname{grad}^s(\mathbf{u}_M)) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{C}_0 \\ \forall (\mathbf{x}_-, \mathbf{x}_+) &\in \partial\mathcal{C}_- \times \partial\mathcal{C}_+ \\ \mathbf{x}_+ &= \mathbf{x}_- + h\mathbf{e}_1 : \\ \mathbf{u}_{\text{per}}(\mathbf{x}_+) &= \mathbf{u}_{\text{per}}(\mathbf{x}_-) \end{aligned} \tag{II.55}$
--	---

Cecchi et Sab [30], [31] et [32] dont les travaux concernent l'homogénéisation des murs de maçonnerie posent le problème de façon similaire. Les cellules périodiques mises en jeu possédant des propriétés de symétrie, le calcul du champ de déplacement ne fait intervenir qu'implicitement la décomposition $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M + \mathbf{u}_{\text{per}}$ car les conditions de périodicité sont ramenées à des conditions de bord classiques. Pour une cellule dissymétrique, il faut néanmoins résoudre explicitement le problème (II.55). La résolution de ce problème par la méthode des éléments finis implique comme on l'a dit plus haut le développement d'un algorithme spécifique pour le calcul de la projection nodale de la force \mathbf{f}_E . En outre, les codes réalisant de tels calculs pour les problèmes d'homogénéisation des milieux à périodicité tridimensionnelle sont conçus pour des cellules modélisées à partir d'éléments de volume alors que dans le cas de l'homogénéisation des bâtiments, les cellules sont constituées d'éléments non volumiques tels que des poutres, plaques ou coques. L'algorithme dans ce cas serait d'autant plus lourd à construire qu'il faudrait tenir compte de l'orientation locale de chacun des éléments.

L'approche mise en place dans ce travail de recherche peut être appliquée à l'aide de n'importe quel code élément fini du commerce sans avoir à en modifier la structure. Au lieu de chercher à résoudre directement le problème (II.55) en calculant explicitement la force \mathbf{f}_E comme dans les travaux de J.-C. Michel *et al.* [97], on le résout en deux étapes. La première étape consiste à imposer dans la cellule les composantes du champ de déplacement prescrites par l'état de déformation macroscopique, les autres composantes du champ de

déplacement étant assujetties par des conditions de périodicité entre les interfaces de la cellule avec ses voisines. Ce champ de déplacement correspond *a priori* à un état d'équilibre élastique pour un milieu homogène. Cependant en présence d'hétérogénéités, ce champ va engendrer une densité de forces de réaction au sein de la cellule. Ces forces de réaction permettent dans un second temps de déterminer la déformation périodique (et donc un champ de déplacement périodique associé) caractérisant l'écart par rapport à l'état d'équilibre élastique solution du problème (II.55). Cette méthode est proche de celle développée par Sankar et Marrey [117] qui imposent sur les interfaces de connexion de la cellule les composantes du déplacement correspondant à l'état de déformation macroscopique, les autres composantes étant soumises à des conditions de périodicité entre ces mêmes interfaces. La méthode présentée ici permet de déterminer le champ de déplacement périodique complet, y compris les composantes superposées à celles du champ de déplacement macroscopique. L'espace des champs de déformation macroscopiques admissibles est *a priori* de dimension infinie. Néanmoins, il est usuel en ingénierie d'utiliser des modèles mécaniques de poutre pour les corps élancés. L'espace des champs de déformation de poutre est de dimension 6 (extension-compression, 2 flexions, torsion, 2 cas de cisaillement par force transverse), ces six types de déformation sont étudiés dans la section II.2. On présente dans les paragraphes qui suivent l'application du procédé d'homogénéisation pour chaque cas de déformation macroscopique issu du modèle mécanique de poutre. Bien que la microstructure ne soit pas précisée, on conserve l'orientation de la figure du problème (II.55). Le milieu ω est supposé contenir un nombre suffisant de cellules pour que dans une cellule loin d'une de ses extrémités (bord $\partial\Omega_1$) les effets de bords libres soient essentiellement des déformations locales dues aux hétérogénéités de la cellule. Ces déformations de bord libre sont donc périodiques et comprises dans le champ de déplacement \mathbf{u}_{per} . Le champ de déplacement dans la cellule est défini à un mouvement de corps rigide près. On va choisir un espace de champs de déplacements admissibles excluant les mouvements de corps rigide. On choisit donc de fixer le centre de section $\mathbf{O}(\mathbf{x} = \mathbf{0})$ ($\mathbf{u}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$) et d'exclure les mouvements de rotation autour de ce point $\mathbf{rot}(\mathbf{u})(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. On définit l'espace des champs de déplacements admissibles:

$$\mathcal{U} = \{ \mathbf{u} \in (H^1(\mathcal{C}))^3, \mathbf{u}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \mathbf{rot}(\mathbf{u})(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \} \quad (\text{II.56})$$

Pour que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M + \mathbf{u}_{\text{per}}$ soit dans l'espace \mathcal{U} , on doit avoir $\mathbf{u}_M \in \mathcal{U}$ et d'autre part \mathbf{u}_{per} dans l'espace:

$$\mathcal{U}_{\text{per}} = \left\{ \mathbf{u} \in (H^1(\mathcal{C}))^3, \mathbf{u}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \right. \\ \left. \forall (\mathbf{x}_-, \mathbf{x}_+) \in \partial\mathcal{C}_- \times \partial\mathcal{C}_+ \setminus \mathbf{x}_+ = \mathbf{x}_- + h\mathbf{e}_1 : \mathbf{u}_{\text{per}}(\mathbf{x}_+) = \mathbf{u}_{\text{per}}(\mathbf{x}_-) \right\} \quad (\text{II.57})$$

les mouvements de rotation étant incompatibles avec les conditions de périodicité.

II.4.1 Milieu périodique en déformation longitudinale

Lorsque le milieu est en traction sous une déformation d'élongation E le champ de déplacement $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ s'écrit sous la forme:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = E x_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_{\text{per}} = (E x_1 + u_{\text{per}1}) \mathbf{e}_1 + u_{\text{per}2} \mathbf{e}_2 + u_{\text{per}3} \mathbf{e}_3$$

avec $\mathbf{x} \mapsto E x_1 \mathbf{e}_1$ dans \mathcal{U} et $\mathbf{u}_{\text{per}} \in \mathcal{U}_{\text{per}}$. Le modèle mécanique de poutre ne définit pas explicitement le tenseur de déformation macroscopique, il ne fait que préciser sa composante suivant $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$. On va donc résoudre un premier problème où seule la composante longitudinale du champ de déplacement est imposée. On note $\mathbf{u}^{(1)} = E x_1 \mathbf{e}_1 + u_{\text{per} 2}^{(1)} \mathbf{e}_2 + u_{\text{per} 3}^{(1)} \mathbf{e}_3$ la solution de ce problème:

$$\begin{aligned}
\mathbf{div}(\mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{grad}^s(\mathbf{u}^{(1)})(\mathbf{x})) + \mathbf{f}_r^{(1)}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\
\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{C}_0 \\
u_1^{(1)}(\mathbf{x}) &= E x_1 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C} \\
\forall (\mathbf{x}_-, \mathbf{x}_+) \in \partial\mathcal{C}_- \times \partial\mathcal{C}_+ \setminus \mathbf{x}_+ = \mathbf{x}_- + h\mathbf{e}_1 : & \\
u_2^{(1)}(\mathbf{x}_+) &= u_2^{(1)}(\mathbf{x}_-) \\
u_3^{(1)}(\mathbf{x}_+) &= u_3^{(1)}(\mathbf{x}_-)
\end{aligned} \tag{A1}$$

La densité de force de réaction \mathbf{f}_r intervient pour rétablir l'équilibre qui n'est pas réalisé pour le champ de déplacement $u_1^{(1)} = E x_1$. L'équation d'équilibre s'écrit en notations indicielles:

$$(a_{ij11} E_{11} + a_{ij13} \partial_1 u_3^{(1)} + a_{ij12} \partial_1 u_2^{(1)} + a_{ij\alpha\beta} \partial_\beta u_\alpha^{(1)})_{,j} + f_{ri}^{(1)} = 0$$

où ∂_k désigne la dérivation partielle par rapport à x_k et les indices grecs α, β prennent les valeurs 2 et 3. La seconde étape réalisée par la résolution du problème (A2) ci-dessus permet de calculer l'écart entre le champ de déplacement $\mathbf{u}^{(1)}$ solution du problème (A1) et le champ solution de II.55. On applique à la cellule l'opposé de la densité de force de réaction \mathbf{f}_r et on impose des conditions de périodicité entre les bords \mathcal{C}_- et \mathcal{C}_+ . On note $\mathbf{u}^{(2)}$ le champ de déplacement solution du problème:

$$\begin{aligned}
\mathbf{div}(\mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{grad}^s(\mathbf{u}^{(2)})(\mathbf{x})) - \mathbf{f}_r^{(1)}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\
\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{C}_0 \\
\forall (\mathbf{x}_-, \mathbf{x}_+) \in \partial\mathcal{C}_- \times \partial\mathcal{C}_+ \setminus \mathbf{x}_+ = \mathbf{x}_- + h\mathbf{e}_1 : & \\
\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}_+) &= \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}_-)
\end{aligned} \tag{A2}$$

La superposition $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)}$ est par conséquent solution du problème (II.55) pour $\mathbf{u}_M = E x_1 \mathbf{e}_1$. La superposition des équations d'équilibre des problèmes (A1) et (A2) donne bien

$$\mathbf{div}(\mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{grad}^s(\mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)})(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$$

Les champs $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)}$ et $\mathbf{u}^{(2)}$ impliquent:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{grad}^s(\mathbf{u}^{(1)})(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{C}_0 \\
\boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{grad}^s(\mathbf{u}^{(2)})(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{C}_0
\end{aligned}$$

Le déplacement périodique \mathbf{u}_{per} se compose des contributions périodiques des deux étapes:

$$\mathbf{u}_{\text{per}} = u_1^{(2)} \mathbf{e}_1 + (u_2^{(1)} + u_2^{(2)}) \mathbf{e}_2 + (u_3^{(1)} + u_3^{(2)}) \mathbf{e}_3$$

Le champ $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)}$ est l'unique solution du problème élastique (II.55).

II.4.2 Milieu périodique mis en flexion

Le milieu est mis en flexion avec une courbure constante χ , pour une flexion autour d'un axe $(O \mathbf{n}_0)$ avec $\mathbf{n}_0 = \cos(\theta) \mathbf{e}_2 + \sin(\theta) \mathbf{e}_3$, θ étant l'angle de que fait l'axe de flexion par rapport à l'axe $(O \mathbf{e}_2)$. En s'appuyant sur l'expression (II.13), le champ de déplacement est recherché sous la forme:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \chi x_1 (-x_2 \sin(\theta) + x_3 \cos(\theta)) \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_{\text{per}} \\ &= \chi x_1 (-x_2 \sin(\theta) + x_3 \cos(\theta) + u_{\text{per } 1}) \mathbf{e}_1 + u_{\text{per } 2} \mathbf{e}_2 + u_{\text{per } 3} \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Les effets de bord libre dépendant des propriétés du milieu sont intégrés dans le champ de déplacement périodique. Le déplacement macroscopique de flexion $\mathbf{x} \mapsto \chi x_1 (-x_2 \sin(\theta) + x_3 \cos(\theta)) \mathbf{e}_1$ est dans l'espace \mathcal{U} et $\mathbf{u}_{\text{per}} \in \mathcal{U}_{\text{per}}$. On va procéder en deux étapes comme dans le cas de l'extension présenté en (II.4.1). La procédure est menée pour $\mathbf{n}_0 = \mathbf{e}_2$ ($\theta = 0$) et $\mathbf{n}_0 = \mathbf{e}_3$ ($\theta = \pi/2$), le cas d'une direction $\mathbf{n}_0 \in (O, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ quelconque s'obtient ensuite par simple combinaison linéaire. L'étape 1 formulée par le problème (B1) a pour solution le champ $\mathbf{u}^{(1)} = \chi x_1 (-x_2 \sin(\theta) + x_3 \cos(\theta)) \mathbf{e}_1 + u_{\text{per } 2}^{(1)} \mathbf{e}_2 + u_{\text{per } 3}^{(1)} \mathbf{e}_3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{div}(\mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{grad}^s(\mathbf{u}^{(1)})(\mathbf{x})) + \mathbf{f}_r^{(1)}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{C}_0 \\ u_1^{(1)}(\mathbf{x}) &= \chi x_1 (-x_2 \sin(\theta) + x_3 \cos(\theta)) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C} \\ \forall (\mathbf{x}_-, \mathbf{x}_+) \in \partial \mathcal{C}_- \times \partial \mathcal{C}_+ \setminus \mathbf{x}_+ = \mathbf{x}_- + h \mathbf{e}_1 &: \\ u_2^{(1)}(\mathbf{x}_+) &= u_2^{(1)}(\mathbf{x}_-) \\ u_3^{(1)}(\mathbf{x}_+) &= u_3^{(1)}(\mathbf{x}_-) \end{aligned} \tag{B1}$$

L'écriture indicielle de l'équation d'équilibre permet de voir explicitement la contribution des termes de déformations macroscopiques:

$$\begin{aligned} &\left(a_{ij11} \chi (-x_2 \sin(\theta) + x_3 \cos(\theta)) + a_{ij13} (\chi x_1 \cos(\theta) + \partial_1 u_3^{(1)}) \right. \\ &\quad \left. + a_{ij12} (-\chi x_2 \sin(\theta) + \partial_1 u_3^{(1)}) + a_{ij\alpha\beta} \partial_\beta u_\alpha^{(1)} \right)_{,j} + f_{ri}^{(1)} = 0 \end{aligned}$$

où ∂_k est la dérivation partielle par rapport à x_k et les indices grecs α, β prennent les valeurs 2 et 3. La seconde étape de la procédure est exprimée par le problème (B2). On note $\mathbf{u}^{(2)}$ le champ de déplacement solution de ce problème:

$$\begin{aligned} \mathbf{div}(\mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{grad}^s(\mathbf{u}^{(2)})(\mathbf{x})) - \mathbf{f}_r^{(1)}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{C}_0 \\ \forall (\mathbf{x}_-, \mathbf{x}_+) \in \partial \mathcal{C}_- \times \partial \mathcal{C}_+ \setminus \mathbf{x}_+ = \mathbf{x}_- + h \mathbf{e}_1 &: \\ \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}_+) &= \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}_-) \end{aligned} \tag{B2}$$

On a appliqué à la cellule, l'opposé de la densité de force de réaction \mathbf{f}_r obtenue à l'issue de la résolution du problème (B1) tout en imposant des conditions de périodicité entre les

bords \mathcal{C}_- et \mathcal{C}_+ . La superposition $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)}$ est l'unique solution du problème (II.55) pour $\mathbf{u}_M = \chi x_1 (-x_2 \sin(\theta) + x_3 \cos(\theta)) \mathbf{e}_1$.

II.4.3 Milieu périodique cisailé par une force transverse

Dans un milieu homogène isotrope s'étendant dans toutes les directions de l'espace, la contrainte de cisaillement est homogène et le vecteur contrainte est antipériodique sur les bords de chaque sous-domaine du milieu (figure *Figure II.9*); les contraintes de cisaillement suffisant à maintenir l'équilibre de la cellule.

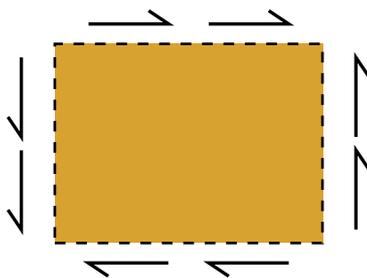


Figure II.9

Plusieurs difficultés se posent concernant l'homogénéisation des milieux à périodicité unidimensionnelle déformés par une force transverse. La *Figure II.10* illustre le fait que l'absence de contraintes sur les bords latéraux du milieu implique la création de contraintes longitudinales venues équilibrer les contraintes de cisaillement. Ces contraintes longitudinales sont réparties en un moment fléchissant et évoluent le long du milieu. C'est l'effet de gradient de contraintes dont on appelle communément la résultante: "bras de levier".

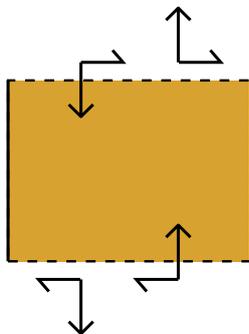


Figure II.10

L'état macroscopique évoluant d'une cellule à l'autre, le principe d'homogénéisation est *a priori* mis en défaut. Pour s'affranchir de la superposition des déformations dues au cisaillement à celles dues à la flexion, on considérera une cellule avec une déformation macroscopique de flexion nulle en son centre. Du point de vue de la poutre équivalente, cela correspond à un moment fléchissant nul en moyenne dans la cellule.

Une autre difficulté consiste à définir le champ de déplacement macroscopique pour cette sollicitation en cisaillement. Comme on le rappelle au paragraphe II.2.3, l'état de déforma-

tion d'une poutre cisailée par une force transverse est totalement tridimensionnel. Les expressions (II.25) mettent en lumière l'anisotropie de la déformation de la poutre équivalente et sa forte dépendance vis-à-vis de la répartition des hétérogénéités. Sankar et Marrey [117] montrent en outre que le milieu à périodicité tridimensionnelle construit à partir d'une cellule périodique du milieu à périodicité unidimensionnelle mène à des propriétés effectives (*e.g.* module de cisaillement et coefficient de *Poisson*) qui ne permettent en général pas de retrouver les propriétés effectives de poutre sauf pour certaines morphologies particulières du matériau (voir (II.48)). Il est donc sans espoir d'appliquer une cinématique macroscopique faisant intervenir les propriétés physiques d'un quelconque matériau homogène. D'ailleurs comme on peut l'observer dans le cas du bâtiment étudié en III.5.1, les propriétés effectives de poutre pour un milieu à périodicité unidimensionnelle ne correspondent *a priori* à aucune modélisation de milieu curviligne constitué d'un matériau homogène.

Pour toutes ces raisons, il est incohérent d'appliquer une déformation macroscopique dépendant explicitement des propriétés d'un milieu élastique homogène. Seules les déformations ne faisant pas explicitement intervenir les propriétés du milieu sont utilisables et c'est le cas du champ de rotation qui s'exprime en fonction d'un taux de courbure constant χ' . C'est ce paramètre qui va jouer le rôle de variable d'état macroscopique et le champ de déplacement macroscopique $\mathbf{u}_M \in \mathcal{U}$ est le mouvement de rotation de section droite correspondant donné en (II.20). Pour un cisaillement avec un effort tranchant orienté suivant les directions transverses \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 , on a respectivement:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_M(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2}\chi' x_2 x_1^2 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{u}_M(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}\chi' x_3 x_1^2 \mathbf{e}_1\end{aligned}\tag{II.58}$$

On applique de nouveau la stratégie en deux étapes pour résoudre le problème (II.55). A l'étape 1 exprimée par le problème (C1), on impose la composante $u_1^{(1)}$ du champ de déplacement solution $\mathbf{u}^{(1)}$ conformément au champs macroscopiques (II.58). Contrairement à l'étape 1 de la procédure pour les déformations longitudinale et de flexion en II.4.1 et II.4.2, les composantes transverses $u_2^{(1)}$ et $u_3^{(1)}$ ne peuvent pas faire ici l'objet de conditions de périodicité. L'expression (II.20) de la déformée de fibre neutre de poutre montre que dans le cas d'une cellule périodique homogène à élasticité orthotrope, le déplacement transverse est antisymétrique. Cependant, dans le cas d'une cellule non curviligne on prend comme référence la cellule homogène à symétrie orthotrope, ce qui conduit à appliquer des conditions d'antipériodicité sur les composantes $u_2^{(1)}$ et $u_3^{(1)}$. Le problème mécanique de

l'étape 1 s'écrit alors:

$$\begin{array}{l}
 \text{Effort tranchant suivant } \mathbf{e}_2 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \mathbf{div}(\mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{grad}^s(\mathbf{u}^{(1)})(\mathbf{x})) + \mathbf{f}_r^{(1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\
 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{C}_0 \\
 u_1^{(1)}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\chi' x_2 x_1^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C} \\
 \forall(\mathbf{x}_-, \mathbf{x}_+) \in \partial\mathcal{C}_- \times \partial\mathcal{C}_+ \setminus \mathbf{x}_+ = \mathbf{x}_- + h\mathbf{e}_1 : \\
 u_2^{(1)}(\mathbf{x}_+) = -u_2^{(1)}(\mathbf{x}_-)
 \end{array} \right. \tag{C1}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Effort tranchant suivant } \mathbf{e}_3 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \mathbf{div}(\mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{grad}^s(\mathbf{u}^{(1)})(\mathbf{x})) + \mathbf{f}_r^{(1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\
 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{C}_0 \\
 u_1^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\chi' x_3 x_1^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C} \\
 \forall(\mathbf{x}_-, \mathbf{x}_+) \in \partial\mathcal{C}_- \times \partial\mathcal{C}_+ \setminus \mathbf{x}_+ = \mathbf{x}_- + h\mathbf{e}_1 : \\
 u_3^{(1)}(\mathbf{x}_+) = -u_3^{(1)}(\mathbf{x}_-)
 \end{array} \right.$$

L'écriture indicielle de l'équation d'équilibre pour l'effort tranchant suivant \mathbf{e}_2 s'écrit:

$$\left(-a_{ij11} \chi' x_2 x_1 + a_{ij12} \left(-\frac{1}{2}\chi' x_1^2 + \partial_1 u_2^{(1)} \right) + a_{ij\alpha\beta} \partial_\beta u_\alpha^{(1)} \right)_{,j} + f_{ri}^{(1)} = 0$$

L'écriture indicielle de l'équation d'équilibre pour l'effort tranchant suivant \mathbf{e}_3 s'écrit:

$$\left(a_{ij11} \chi' x_3 x_1 + a_{ij13} \left(\frac{1}{2}\chi' x_1^2 + \partial_1 u_3^{(1)} \right) + a_{ij\alpha\beta} \partial_\beta u_\alpha^{(1)} \right)_{,j} + f_{ri}^{(1)} = 0$$

On peut remarquer qu'à la suite de cette première étape, le gauchissement est négligé, il sera apporté par la composante $u_1^{(2)}$ du champ déplacement $\mathbf{u}^{(2)}$ solution du problème:

$$\begin{array}{l}
 \text{Effort tranchant suivant } \mathbf{e}_2 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \mathbf{div}(\mathbf{a} \mathbf{grad}^s(\mathbf{u}^{(2)})) - \mathbf{f}_r^{(1)} = \mathbf{0} \\
 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{C}_0 \\
 \forall(\mathbf{x}_-, \mathbf{x}_+) \in \partial\mathcal{C}_- \times \partial\mathcal{C}_+ \setminus \mathbf{x}_+ = \mathbf{x}_- + h\mathbf{e}_1 : \\
 \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}_+) = \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}_-)
 \end{array} \right. \tag{C2}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Effort tranchant suivant } \mathbf{e}_3 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \mathbf{div}(\mathbf{a} \mathbf{grad}^s(\mathbf{u}^{(2)})) - \mathbf{f}_r^{(1)} = \mathbf{0} \\
 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{C}_0 \\
 \forall(\mathbf{x}_-, \mathbf{x}_+) \in \partial\mathcal{C}_- \times \partial\mathcal{C}_+ \setminus \mathbf{x}_+ = \mathbf{x}_- + h\mathbf{e}_1 : \\
 \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}_+) = \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}_-)
 \end{array} \right.$$

Les expressions du champ de déplacement (II.19) montrent que la composante longitudinale du champ de déplacement est la somme d'un mouvement rigide de flexion et d'un champ de gauchissement indépendant de la coordonnée longitudinale x_1 donc périodique. On en déduit par unicité de la solution du problème élastique que la procédure présentée ici donne une solution proche de la solution exacte pour une cellule homogène. Comme on l'observera en III.5.3, l'écart du champ $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)}$ par rapport au champ de déplacement de la cellule lorsque le milieu périodique est soumis à une force transverse, augmente lorsque la cellule présente un niveau élevé d'hétérogénéité et en particulier de porosité.

II.4.4 Milieu périodique cisailé par torsion

Le cisaillement du milieu périodique Ω par des couples de torsion appliqués à ses extrémités est un cisaillement du plan transverse tout comme le cisaillement par force transverse. *Coulomb* a montré qu'un milieu prismatique de section circulaire soumis à des couples de torsion se déforme en conservant la planéité des sections avec des rotations de sections d'axe longitudinal. Ce n'est en outre plus le cas lorsque la section est de géométrie différente. La théorie de *St Venant* décrit alors la déformation comme la somme du mouvement de section plane précédent plus d'une déformation de gauchissement constant le long de la poutre (voir par exemple [134] chapitre 11). Le mouvement de torsion au sein de la cellule est beaucoup plus complexe. Pour une cellule prismatique entrecoupée de domaines plans horizontaux (*e.g.* planchers), le mouvement s'apparente aux phénomènes de torsion gênée décrits par la théorie de Vlasov [138]. Comme expliqué en II.4.3, la poutre équivalente n'a pas de géométrie définie, on n'a donc aucune information sur la fonction de gauchissement ψ intervenant dans le champ de déplacement (II.30). Le champ de déplacement macroscopique est alors décrit par un mouvement de section circulaire indépendant des propriétés élastiques du milieu. Le gauchissement est une déformation périodique et est récupéré par le champ \mathbf{u}_{per} du problème (II.55). Les déformations locales dues à l'écart entre la géométrie de la cellule vis-à-vis d'un prisme à section circulaire sont des perturbations périodiques prises en compte par \mathbf{u}_{per} . La courbure de torsion macroscopique χ est constante et le champ de déplacement macroscopique est une rotation de section droite en petits déplacements:

$$\mathbf{u}_M(\mathbf{x}) = \chi x_1 (-x_3 \mathbf{e}_2 + x_2 \mathbf{e}_3) \in \mathcal{U}$$

En reprenant la procédure utilisée dans les paragraphes précédents, on effectue la première étape consistant à résoudre le problème ci-dessous dont la solution est de la forme $\mathbf{u}^{(1)} = u_{\text{per}1}^{(1)} \mathbf{e}_1 + \chi x_1 (-x_3 \mathbf{e}_2 + x_2 \mathbf{e}_3)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{div}(\mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{grad}^s(\mathbf{u}^{(1)})(\mathbf{x})) + \mathbf{f}_r^{(1)}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{C}_0 \\ u_2^{(1)}(\mathbf{x}) &= -\chi x_1 x_3 \quad \text{et} \quad u_3^{(1)}(\mathbf{x}) = \chi x_1 x_2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C} \\ \forall (\mathbf{x}_-, \mathbf{x}_+) \in \partial\mathcal{C}_- \times \partial\mathcal{C}_+ \setminus \mathbf{x}_+ = \mathbf{x}_- + h\mathbf{e}_1 &: \\ u_1^{(1)}(\mathbf{x}_+) &= u_1^{(1)}(\mathbf{x}_-) \end{aligned} \tag{D1}$$

L'écriture indicielle de l'équation d'équilibre est:

$$(a_{ij11} \partial_1 u_1^{(1)} + a_{ij12}(-\chi x_3 + \partial_2 u_1^{(1)}) + a_{ij13}(\chi x_2 + \partial_3 u_1^{(1)}))_{,j} + f_{ri}^{(1)} = 0$$

On obtient une partie du déplacement longitudinal de gauchissement suite de cette première étape. Le reste de ce déplacement ainsi que la prise en compte de la non axisymétrie de la cellule est obtenu dans la seconde étape formalisée par le problème (D2). On note $\mathbf{u}^{(2)}$ le champ de déplacement solution de ce problème:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{a}(\mathbf{x}) \operatorname{grad}^s(\mathbf{u}^{(2)})(\mathbf{x})) - \mathbf{f}_r^{(1)}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{C}_0 \\ \forall (\mathbf{x}_-, \mathbf{x}_+) \in \partial\mathcal{C}_- \times \partial\mathcal{C}_+ \setminus \mathbf{x}_+ = \mathbf{x}_- + h\mathbf{e}_1 &: \\ \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}_+) &= \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}_-) \end{aligned} \tag{D2}$$

La solution du problème (II.55) s'exprime comme précédemment par la somme:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)} = (u_1^{(1)} + u_1^{(2)}) \mathbf{e}_1 + (u_2^{(2)} - \chi x_1 x_3) \mathbf{e}_2 + (u_3^{(2)} + \chi x_1 x_2) \mathbf{e}_3$$

La fonction de gauchissement décrite par la théorie de *St Venant* est donc donnée par:

$$(x_2, x_3) \mapsto \psi(x_2, x_3) = \frac{1}{\chi} (u_1^{(1)} + u_1^{(2)})$$

II.5 Modélisation mécanique réduite

L'état de déformation de la poutre macroscopiquement équivalente au milieu est construite à partir de 6 déformations élémentaires. Les champs de déplacements solutions du problème (II.55) pour ces 6 déformations de poutre épaisse sont obtenus par les méthodes en deux étapes décrites de II.4.1 à II.4.4 et sont les localisations de ces déformations macroscopiques. La description locale du milieu à partir d'un calcul macroscopique restreint les champs de déplacement admissibles à une combinaison linéaire de ces 6 solutions.

II.5.1 Déformations macroscopiques

Les champs de déplacement macroscopique \mathbf{u}_M utilisés en II.4.1, II.4.2, II.4.3 et II.4.4 sont incomplets dans la mesure où ils ne décrivent pas l'ensemble des déformations macroscopiques et en particulier les effets de bord libre. Ces termes de déformation manquants

sont périodiques car invariants dans la direction de périodicité et sont intégrés dans le champ de déplacement \mathbf{u}_{per} car ne pouvant être *a priori* explicités. A titre de référence, la section II.2 donne les champs de déformation et de déplacement pour un milieu prismatique élastique à symétrie orthotrope. Les termes faisant intervenir les coefficients de Poisson sont les pendants des termes macroscopiques non explicités. Les champs de déformations macroscopiques forment un espace \mathcal{U}_E de dimension 6 dont une base \mathcal{B}_E est:

$$\mathcal{B}_E = \left(\check{\mathbf{E}}_1(\mathbf{x}), \check{\mathbf{E}}_2(\mathbf{x}), \check{\mathbf{E}}_3(\mathbf{x}), \check{\mathbf{E}}_4(\mathbf{x}), \check{\mathbf{E}}_5(\mathbf{x}), \check{\mathbf{E}}_6(\mathbf{x}) \right) \quad (\text{II.59})$$

avec

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{E}}_1(\mathbf{x}) &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{E}_0^{(1)} \\ \check{\mathbf{E}}_2(\mathbf{x}) &= -\chi'_0 x_1 x_2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \chi'_0 \mathcal{B}_2 \mathbf{e}_1 \otimes^s \mathbf{e}_2 + \mathbf{E}_0^{(2)} \\ \check{\mathbf{E}}_3(\mathbf{x}) &= \chi'_0 x_1 x_3 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \chi'_0 \mathcal{B}_3 \mathbf{e}_1 \otimes^s \mathbf{e}_3 + \mathbf{E}_0^{(3)} \\ \check{\mathbf{E}}_4(\mathbf{x}) &= -\chi_0 x_3 \mathbf{e}_1 \otimes^s \mathbf{e}_2 + \chi_0 x_2 \mathbf{e}_1 \otimes^s \mathbf{e}_3 + \mathbf{E}_0^{(4)} \\ \check{\mathbf{E}}_5(\mathbf{x}) &= \chi_0 x_3 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{E}_0^{(5)} \\ \check{\mathbf{E}}_6(\mathbf{x}) &= -\chi_0 x_2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{E}_0^{(6)} \end{aligned} \quad (\text{II.60})$$

Les tenseurs $\mathbf{E}_0^{(m)}$, $m = 1 \dots 6$ correspondent aux déformations macroscopiques non explicitées dues aux bords libres. Les coefficients χ_0 et χ'_0 désignent une courbure unitaire et un taux de courbure unitaire. Les coefficients \mathcal{B}_2 et \mathcal{B}_3 homogènes à des surfaces sont définis plus loin en (II.67).

L'espace \mathcal{U}_E est isomorphe à \mathbb{R}^6 et on note Φ cet isomorphisme d'espaces. A chaque champ tensoriel $\mathbf{E} \in \mathcal{U}_E$ correspond un unique sextuplet $S_E \in \mathbb{R}^6$ dont les composantes sont les variables d'état macroscopiques:

$$\Phi(\mathbf{E}) = \mathbf{S}_E = (E_{11}, \chi'_3, \chi'_2, \chi_1, \chi_{20} + \chi'_2 x_1, \chi_{30} + \chi'_3 x_1) \quad (\text{II.61})$$

le champ macroscopique \mathbf{E} se décomposant sur \mathcal{B}_E :

$$\mathbf{E} = E_{11} \check{\mathbf{E}}_1 + \frac{\chi'_3}{\chi'_0} \check{\mathbf{E}}_2 + \frac{\chi'_2}{\chi'_0} \check{\mathbf{E}}_3 + \frac{\chi_1}{\chi_0} \check{\mathbf{E}}_4 + \frac{\chi_{20}}{\chi_0} \check{\mathbf{E}}_5 + \frac{\chi_{30}}{\chi_0} \check{\mathbf{E}}_6 \quad (\text{II.62})$$

Les coordonnées du sextuplet sont:

E_{11}	Déformation longitudinale du milieu.
χ'_2	Taux de courbure dû au cisaillement par force transverse suivant \mathbf{e}_3
χ'_3	Taux de courbure dû au cisaillement par force transverse suivant \mathbf{e}_2
χ_1	Courbure de torsion
χ_{20}	Courbure de flexion pure autour de la direction \mathbf{e}_2
χ_{30}	Courbure de flexion pure autour de la direction \mathbf{e}_3

Soit (\cdot, \cdot) le produit scalaire euclidien usuel sur \mathbb{R}^6 tel que pour $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^6$, $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_i X_i Y_i$. On définit le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ sur \mathcal{U}_E par:

$$\mathbf{E}, \mathbf{F} \in \mathcal{U}_E \quad \langle \mathbf{E}, \mathbf{F} \rangle_E = (\Phi(\mathbf{E}), \Phi(\mathbf{F}))$$

ainsi que sa norme associée:

$$\|\mathbf{E}(x)\|_E = \langle \mathbf{E}, \mathbf{E} \rangle_E$$

La base \mathcal{B}_E est orthonormée pour ce produit scalaire et sa norme et \mathcal{U}_E est un espace de Hilbert.

II.5.2 Unicité de la solution

Ce paragraphe a pour objet de prouver l'unicité de la solution $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M + \mathbf{u}_{\text{per}}$ du problème périodique (II.55) avec $\mathbf{u}_M \in \mathcal{U}$ et $\mathbf{u}_{\text{per}} \in \mathcal{U}_{\text{per}}$ (les espaces \mathcal{U} et \mathcal{U}_{per} sont définis en (II.56) et (II.57)). En d'autres termes, on souhaite montrer que l'application qui au champ de déplacement $\mathbf{u}_M \in \mathcal{U}$ tel que $\mathbf{E} = \mathbf{grad}^s(\mathbf{u}_M) \in \mathcal{U}_E$, donne le champ de déplacement \mathbf{u} est un isomorphisme.

L'opérateur $\mathbf{grad}^s(\cdot)$ a pour noyau les champs de déplacement de corps rigide. Or, l'espace \mathcal{U} exclue ces champs de déplacement, par conséquent $\mathbf{grad}^s(\cdot)$ est bijectif de \mathcal{U} dans $\mathbb{T}_2^S(\mathbb{R})$ et \mathbf{u}_M est unique pour un \mathbf{E} donné.

Les champs tensoriels $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ sont bornés sur \mathcal{C} . Le champ tensoriel de rigidité $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ est *a priori* dérivable par morceaux, le champ $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x})$ est dérivable au sens des distributions. La densité de force $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}_E(\mathbf{x}) = \mathbf{div}(\mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}))$ est bornée presque partout et est de carré intégrable au sens de Lebesgue car son travail est fini. Pour un champ de force \mathbf{f}_E donné dans $(L^2(\mathcal{C}))^3$, la solution du problème périodique (II.55) est unique.

■ Preuve :

On écrit la formulation faible des équations d'équilibre statique dans cet espace:

$$\int_{\mathcal{C}} \sigma_{ij,j} u_i^* d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{C}} f_{Ei} u_i^* d\mathbf{x} = 0 \quad \forall u_i^* \in \mathcal{U}_{\text{per}} \quad (\text{II.63})$$

avec la mesure $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3$. On intègre par parties en utilisant les propriétés de symétrie (II.4) du tenseur \mathbf{a} :

$$\int_{\mathcal{C}} a_{ijkl} u_{i,j}^* u_{k,l} d\mathbf{x} = \int_{\partial\mathcal{C}} \sigma_{ij} n_j u_i^* dS + \int_{\mathcal{C}} f_{Ei} u_i^* d\mathbf{x} \quad (\text{II.64})$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire de normale extérieure à $\partial\mathcal{C}$. L'intégrale de bord est nulle sur $\partial\mathcal{C}_0$ qui est une surface libre ($\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$). La contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$, tout comme le déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ est $h \mathbf{e}_1$ périodique, le vecteur contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x})$ est lui antipériodique dans la mesure où les interfaces $\partial\mathcal{C}^-$ et $\partial\mathcal{C}^+$ ont pour normales $-\mathbf{e}_1$ et \mathbf{e}_1 . Le déplacement virtuel $\mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_{\text{per}}$ étant $h \mathbf{e}_1$ périodique alors l'intégrale de bord sur $\partial\mathcal{C}_{\text{per}}^-$ est l'opposée de celle sur $\partial\mathcal{C}_{\text{per}}^+$. L'intégrale de bord sur $\partial\mathcal{C}$ est nulle, la formulation (II.64) s'écrit alors sous la forme:

$$\mathbb{b}(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}) = l(\mathbf{u}^*) \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_{\text{per}} \quad (\text{II.65})$$

où

$$\mathfrak{b}(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{grad}^s(\mathbf{u}^*) \mathbf{a} \mathbf{grad}^s(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$l(\mathbf{u}^*) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}_E \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x}$$

De par les propriétés (II.6) et (II.7) de \mathbf{a} , l'opérateur \mathfrak{b} est une forme bilinéaire continue et coercive sur \mathcal{U}_{per} . La forme linéaire $l(\cdot)$ est bornée sur \mathcal{U}_{per} car $\mathbf{f}_E \in (L^2(\mathcal{C}))^3$ est de carré intégrable sur \mathcal{C} et \mathcal{U}_{per} est un sous espace de $L^2(\mathcal{C})$. La forme linéaire $l(\cdot)$ est par conséquent continue sur \mathcal{U}_{per} .

Le théorème de *Lax-Milgram* indique alors qu'il existe une unique solution $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{\text{per}}$ au problème (II.65), qui est la solution au sens faible du problème (II.55). ■

Il reste maintenant à étudier l'application \mathcal{F} qui à un tenseur de déformation macroscopique \mathbf{E} donne la densité de force \mathbf{f}_E :

$$\mathcal{F} : \begin{cases} \mathcal{U}_E & \longrightarrow & (L^2(\mathcal{C}))^3 \\ \mathbf{E} & \longmapsto & \mathbf{div}(\mathbf{a} \mathbf{E}) = \mathbf{f}_E \end{cases}$$

La remarque que l'on peut faire est que le noyau de \mathcal{F} , *i.e.* $\text{Ker}(\mathcal{F})$, n'est pas réduit à $\mathbf{0}$ dans l'espace $\mathbb{T}_2^S(\mathbb{R})$ et est constitué par l'ensemble des déformations élastiques de \mathcal{C} en l'absence de densité volumique de forces. L'application \mathcal{F} est nulle sur $\text{Ker}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{U}_E$ et bijective sur $\mathcal{U}_E \setminus (\text{Ker}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{U}_E)$. Comme expliqué plus haut, on sait d'une part qu'à chaque $\mathbf{E} \in \mathcal{U}_E$ correspond un unique champ de déplacement $\mathbf{u}_M \in \mathcal{U}$ et on a montré d'autre part que pour une densité de force \mathbf{f}_E donnée, le problème (II.55) avait une unique solution \mathbf{u}_{per} . Par conséquent:

Pour une déformation macroscopique $\mathbf{E} \in \mathcal{U}_E$ donnée du milieu Ω , il existe un unique champ de déplacement:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_M + \mathbf{u}_{\text{per}} \tag{II.66}$$

dans la cellule \mathcal{C} vérifiant les conditions de bord libre sur $\partial\mathcal{C}_0$.

II.5.3 Comportement macroscopique

Le comportement mécanique de la poutre équivalente est caractérisé par la matrice de raideur effective $[\mathbf{K}_b]$ introduite en (II.46) dans le cadre des approches asymptotiques. Cette matrice exprime la relation linéaire entre les variables d'état de déformation de poutre et les forces et moments internes \mathcal{F}_I pour le jeu de variables d'état $S_E^T \in \mathbb{R}^6$ tel que

la relation $\mathcal{F}_I = [\mathbf{K}_b] \mathbf{S}_E^\Gamma$ s'écrit:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ \Gamma_{12} \\ \Gamma_{13} \\ \chi_1 \\ \chi_2(x_1) \\ \chi_3(x_1) \end{pmatrix} \quad (\text{II.67})$$

La loi de comportement (II.67) et les équations d'équilibre statique impliquent que les courbures χ_2 et χ_3 sont des fonctions affines:

$$\chi_2(x_1) = \chi_{20} + \mathcal{B}_3^{-1} \Gamma_{13} x_1 = \chi_{20} + \chi'_2 x_1 \quad , \quad \chi_3(x_1) = \chi_{30} + \mathcal{B}_2^{-1} \Gamma_{12} x_1 = \chi_{30} + \chi'_3 x_1$$

avec les coefficients $\mathcal{B}_2 = -K_{66}/K_{22}$ et $\mathcal{B}_3 = K_{55}/K_{33}$ introduits en (II.60) qui relient les distorsions moyennes Γ_{12} et Γ_{13} aux taux de courbures χ'_3 et χ'_2 liés au cisaillement par force transverse.

Conformément aux relations de comportement de poutre (II.12), (II.14), (II.26) et (II.33) présentés en II.2 pour les milieux prismatiques élastiques à symétrie orthotrope, l'énergie de déformation élastique d'un tel milieu est donnée par l'expression:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} & \left(E_1 S E_{11}^2 + G_{12} k_2 S \Gamma_{12}^2 + G_{13} k_3 S \Gamma_{13}^2 + (G_{12} \alpha_2 I_2 + G_{13} \alpha_3 I_3) \chi_1^2 \right. \\ & \left. + E_1 I_2 \chi_2^2(x_1) + E_1 I_3 \chi_3^2(x_1) \right) dx_1 \end{aligned} \quad (\text{II.68})$$

Le modèle de poutre équivalent au milieu à périodicité unidimensionnelle Ω ne pouvant pas être caractérisé par une poutre homogène ayant une géométrie et un matériau donné, son énergie de déformation s'exprime à l'aide des termes de raideur de la matrice $[\mathbf{K}_b]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} & \left(K_{11} E_{11}^2 + K_{22} \Gamma_2^2 + K_{22} \Gamma_3^2 + K_{44} \chi_1^2 \right. \\ & \left. + K_{55} (\chi_{20} + \mathcal{B}_3 \Gamma_{13} x_1)^2 + K_{66} (\chi_{30} + \mathcal{B}_2 \Gamma_{12} x_1)^2 \right) dx_1 \quad (\text{II.69}) \\ = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} & \mathbf{S}_E^{\Gamma T} [\mathbf{K}_b] \mathbf{S}_E^\Gamma dx_1 \end{aligned}$$

Il est montré en II.4.3 que le problème d'homogénéisation est bien posé pour les variables macroscopiques du vecteur S_E défini en (II.61) qui fait intervenir les taux de courbure au lieu des distorsions Γ_{12} et Γ_{13} . On définit alors une matrice de passage:

$$[\mathcal{P}] = \mathbf{diag}(1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, 1, 1, 1)$$

qui est une matrice diagonale telle que $\mathbf{S}_E^\Gamma = [\mathcal{P}] \mathbf{S}_E$. L'expression (II.69) peut être reformulée en fonction du vecteur d'état \mathbf{S}_E et également en fonction du tenseur de déformation \mathbf{E} grâce à l'isomorphisme Φ introduit en II.61:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{S}_E^T [\mathcal{P}]^T [\mathbf{K}_b] [\mathcal{P}] \mathbf{S}_E dx_1 = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \Phi^T(\mathbf{E}) [\mathcal{P}]^T [\mathbf{K}_b] [\mathcal{P}] \Phi(\mathbf{E}) dx_1 \quad (\text{II.70})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} & \left(K_{11} E_{11}^2 + \frac{K_{66}^2}{K_{22}} \chi_3'^2 + \frac{K_{55}^2}{K_{33}} \chi_2'^2 \right. \\ & \left. + K_{44} \chi_1^2 + K_{55} (\chi_2 + \chi_2' x_1)^2 + K_{66} (\chi_3 + \chi_3' x_1)^2 \right) dx_1 \quad (\text{II.71}) \end{aligned}$$

La matrice $[\mathbf{K}_b]$ est dans l'ensemble $M_6^+(\mathbb{R})$ des matrices symétriques définies positives d'ordre 6 ce qui garantit d'une part la stabilité du système (définie positive) et assure d'autre part que le troisième principe de *Newton* est respecté (symétrie). La matrice $[\mathbf{K}_b^\chi] = [\mathcal{P}]^T [\mathbf{K}_b] [\mathcal{P}]$ qui intervenant dans l'expression (II.70) est une matrice symétrique définie positive. Elle est symétrique car $[\mathcal{P}]$ est une matrice diagonale et que le produit à gauche et à droite de la matrice $[\mathbf{K}_b]$ par une matrice diagonale est une matrice symétrique, et définie positive car son déterminant est strictement positif:

$$\det([\mathbf{K}_b^\chi]) = \det([\mathbf{K}_b]) \det([\mathcal{P}])^2 > 0$$

A partir de l'expression (II.70), on définit le produit scalaire et la norme sur \mathcal{U}_E associée qui pour $\mathbf{E}, \mathbf{F} \in \mathcal{U}_E$ s'expriment par:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}, \mathbf{F} \rangle_{\mathcal{E}} &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \Phi^T(\mathbf{E}) [\mathcal{P}]^T [\mathbf{K}_b] [\mathcal{P}] \Phi(\mathbf{F}) dx_1 \\ \|\mathbf{E}\|_{\mathcal{E}} &= \langle \mathbf{E}, \mathbf{E} \rangle_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \Phi^T(\mathbf{E}) [\mathcal{P}]^T [\mathbf{K}_b] [\mathcal{P}] \Phi(\mathbf{E}) dx_1 \end{aligned} \quad (\text{II.72})$$

Muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$, l'espace \mathcal{U}_E est un espace de *Hilbert*. La base \mathcal{B}_E est en outre orthogonale pour ce produit scalaire car le produit scalaire entre une déformation de flexion simple et de flexion par cisaillement s'annule par intégration, *e.g.* :

$$\left\langle \frac{\chi_3}{\chi_0} \check{\mathbf{E}}_6, \frac{\chi_3'}{\chi_0'} \check{\mathbf{E}}_2 \right\rangle_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \chi_3 \chi_3' x_1 dx_1 = 0$$

C'est grâce à cette orthogonalité que l'on détermine numériquement les coefficients de $[\mathbf{K}_b]$ en (III.3).

La propriété d'unicité (II.66) permet de construire l'espace réduit \mathcal{U}_{red} des champs de déplacement de cellule \mathcal{C} . Cet espace est isomorphe à \mathcal{U}_E et est donc de dimension 6. L'espace des champs de déplacement compatibles avec les conditions de bord libre sur $\partial\mathcal{C}_0$ est de dimension infinie. L'espace \mathcal{U}_{red} est un sous espace de dimension 6 et correspond donc dans ce sens à une description réduite des champs de déplacement admissibles. On définit une base de l'espace \mathcal{U}_{red} :

$$\mathcal{B}_{\text{red}} = (\check{\mathbf{u}}_1, \check{\mathbf{u}}_2, \check{\mathbf{u}}_3, \check{\mathbf{u}}_4, \check{\mathbf{u}}_5, \check{\mathbf{u}}_6) \quad (\text{II.73})$$

On note Φ_u l'isomorphisme entre les espaces \mathcal{U}_E et \mathcal{U}_{red} . La base \mathcal{B}_{red} est construite à partir de la base \mathcal{B}_E :

$$\mathcal{B}_{\text{red}} = \left(\Phi_u(\check{\mathbf{E}}_1), \Phi_u(\check{\mathbf{E}}_2), \Phi_u(\check{\mathbf{E}}_3), \Phi_u(\check{\mathbf{E}}_4), \Phi_u(\check{\mathbf{E}}_5), \Phi_u(\check{\mathbf{E}}_6) \right) \quad (\text{II.74})$$

L'étape de localisation de la méthode numérique présentée au *chapitre III* consiste à déterminer numériquement les champs de la base \mathcal{B}_{red} correspondant à chacun des tenseurs de déformation de la base \mathcal{B}_E .

II.6 Remarques sur les effets de bord

Que ce soit par voie analytique ou numérique, les méthodes d'homogénéisation passent par une localisation du champ de déplacement ou de contrainte loin des bords du milieu, c'est-à-dire là où les conditions de périodicité s'appliquent au mieux. Cette solution est dite intérieure et n'est en général pas compatible avec n'importe quelles conditions de bord aux extrémités du milieu (conditions (II.1)). Cette incompatibilité se traduit par un champ de déplacement et de contrainte issus de la superposition de la solution intérieure périodique avec un champ résultant des conditions aux bords. Pour que les forces \mathbf{g}_{\pm} du problème (II.8) impliquent une solution sans effet de bord, il faut que le champ de déplacement soit de la forme $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M + \mathbf{u}_{\text{per}}$ avec $\mathbf{u}_M = \mathbf{grad}^s(\mathbf{E})$ et $\mathbf{E} \in \mathbb{T}_2^S(\mathbb{R})$ tels que \mathbf{u}_{per} soit solution de:

$$\begin{aligned} \mathbf{div}(\mathbf{a} \mathbf{grad}^s(\mathbf{u}_{\text{per}})) &= -\mathbf{div}(\mathbf{a} \mathbf{E}) \\ (\mathbf{a}(\mathbf{x}) (\mathbf{grad}^s(\mathbf{u}_{\text{per}}) + \mathbf{E})) \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_0 \\ (\mathbf{a}(\mathbf{grad}^s(\mathbf{u}_{\text{per}}) + \mathbf{E}))(\mathbf{x}) &= (\mathbf{a}(\mathbf{grad}^s(\mathbf{u}_{\text{per}}) + \mathbf{E}))(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_1) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_- \\ \text{avec } \mathbf{a}(\mathbf{grad}^s(\mathbf{u}_{\text{per}}) + \mathbf{E})(\mathbf{x}) &= \pm \mathbf{g}_{\pm}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_{\pm} \end{aligned} \quad (\text{II.75})$$

L'effet de bord également appelé solution extérieure est composé d'un champ de couche limite localisé au voisinage des extrémités et d'une perturbation périodique dû à la périodicité du milieu. L'effet de couche limite décroît rapidement, on dit que les effets de bord se

régularisent. Diverses approches ont été développées dans la littérature pour prendre en compte l'effet local de couche limite et les perturbations dans les milieux périodiques.

Une méthode permettant de déterminer le champ de couche limite consiste à étudier l'effet de bord à l'échelle locale, la condition aux limites est alors prise en compte de façon exacte. Cette description locale de l'effet de bord est ensuite reliée au modèle macroscopique du milieu. Une telle technique est décrite par Ben Dhia [9] où est traité un problème d'élasticité 2D homogène par un modèle de poutre de Timoshenko et par une modélisation 2D près de ses bords.

La perturbation périodique peut être obtenue par une approche menant à déterminer un développement asymptotique extérieur satisfaisant les conditions aux limites du problème mécanique local. Ce problème de "développement de couche limite" a été abordé pour des bords libres de milieux périodiques stratifiés dans les travaux de Auriault et Bonnet [8] et ceux de Dumontet [42]. Des effets de bords en contrainte à l'ordre macroscopique sont mis en lumière, la contrainte au bord est alors estimée par la somme du développement asymptotique intérieur en contrainte et du développement extérieur. Des développements asymptotiques de correction pour les effets de bord dans les plaques sont donnés dans [39]. Lefik et Schrefler [87] montrent comment estimer numériquement par la méthode des éléments finis les correcteurs de couche limite en contrainte dans le cas de matériaux composites. Le développement asymptotique extérieur peut aussi faire l'objet d'un raccord avec le développement asymptotique intérieur comme le montre Sanchez-Palencia [116]. Le comportement du milieu est alors décrit par 3 développements suivant que l'on se situe dans la couche limite, à l'intérieur du milieu ou dans la zone intermédiaire.

Il est en outre possible de ne pas prendre en compte la configuration locale des conditions de bord. Le problème est alors entièrement décrit à l'échelle macroscopique, on utilise des conditions de bord macroscopiques qui sont des moyennes des conditions à l'échelle locale. Une méthode présentée exposée par Gregory et Wan [63] conduit à la condition aux limites macroscopique vérifiant en moyenne la condition de bord locale et assure une vitesse de décroissance optimale de ses effets. Cette méthode a été appliquée à des poutres feuilletées par Duva et Simmonds [43] et au cas des milieux longilignes cellulaires par Buannic [21], Cartraud [27] et Buannic et Cartraud [23].

Dans le cadre de ce travail de recherche, on appliquera les conditions de bord macroscopiques les plus naturelles. Trois types de conditions aux limites sont appliqués aux modèles de poutre équivalents utilisés pour modéliser le bâtiment faisant l'objet de l'étude sismique dans la seconde partie de ce mémoire: encastrement, bord libre et interaction élastique. Concernant l'encastrement, on exprimera simplement une condition de déplacement de fibre moyenne nul et de rotation de section nulle, ce qui coïncide avec les résultats donnés dans ([27], 5.3) au premier ordre. Le bâtiment reposant sur une fondation rigide, la condition d'interaction élastique porte sur la fondation et le bâtiment à proprement parlé est encasté avec la fondation. Concernant le bord libre, on est dans le cas d'une contrainte imposée nulle, la condition de décroissance optimale implique un mouvement de corps rigide de l'extrémité (ce qui est toujours vérifié dans le cas de la cinématique de poutre) et des forces et moments de réduction nuls. Le principe de *St Venant* est donc a priori bien vérifié pour ces conditions. On vérifiera numériquement la distance de régularisation des efforts. Les méthodes numériques mises en œuvre dans le

chapitre *chapitre III* donnent la localisation de l'état macroscopique du milieu. Les applications numériques présentées montrent pour des cellules choisies creuses (type génie civil), une décroissance sur une distance inférieure à la dimension longitudinale d'une cellule. Les efforts étant régularisés à partir de la seconde cellule, on connaît le système de force appliqué à la partie supérieure de l'étage inférieur concerné par l'encastrement au sol (ou avec la fondation). Pour localiser l'état macroscopique au niveau de la couche limite, il suffit de faire un simple calcul statique sur une cellule encastree avec le système de force *ad hoc*.

II.7 Remarques sur les forces de volume

L'étude du comportement macroscopique des milieux à périodicité unidimensionnelle menée dans ce chapitre et dans le suivant, décrit le comportement mécanique statique du milieu. Lorsque le milieu est sollicité dynamiquement, il apparaît une densité volumique de forces inertielles dans le milieu. C'est le cas des bâtiments multi étagés sous séisme. L'homogénéisation des milieux périodiques soumis à des forces de volume dont la fluctuation dépend de la microstructure, comme c'est le cas pour les forces d'inertie ou de gravité, ne sera pas développée dans ce travail. On se contentera d'évoquer les problématiques liées à ce sujet faisant à l'heure actuelle l'objet d'études théoriques. On peut citer à ce titre les travaux de Milton et Willis [99] concernant les propriétés inertielles effectives des matériaux hétérogènes.

Pour mettre en lumière certains aspects de l'homogénéisation en présence de forces de volume de nature inertielle, on regarde le cas très simple d'un assemblage de deux poutres en série de section constante S , de longueurs L_1 et L_2 avec $L = L_1 + L_2$, et de module d'élasticité E_1 et E_2 . Les poutres ne travaillent qu'en traction-compression si bien que le problème mécanique est à une dimension et que la position des points est donnée par la coordonnée cartésienne x . On note $\sigma(x)$ et $e(x)$ la contrainte et la déformation axiale dans les poutres et $\langle \sigma \rangle$, $\langle e \rangle$ leurs moyenne d'ensemble telles que pour une grandeur $\phi(x)$:

$$\langle \phi \rangle = \int_0^L \phi(x) dx$$

Dans un premier temps, on cherche à déterminer par une approche statique le module d'élasticité équivalent E_{eq} de l'ensemble tel que $\langle \sigma \rangle = E_{\text{eq}} \langle e \rangle$ (*Figure II.11.a*). L'équation d'équilibre statique dans l'assemblage implique que la contrainte est constante et donc $\langle \sigma \rangle = \sigma$. On a en outre: $\sigma = E_1 e(x)$ pour $0 < x < L_1$ et $\sigma = E_2 e(x)$ pour $L_1 < x < L_2$. On note les rapports de dimension, $\alpha = L_1/L$ et $1 - \alpha = L_2/L$, il s'ensuit des deux relations précédentes sur la déformation que le module d'élasticité équivalent est:

$$E_{\text{eq}} = \frac{E_1 E_2}{\alpha E_2 + (1 - \alpha) E_1}$$

Le coefficient α caractérise l'influence de la géométrie interne de l'assemblage vis-à-vis de l'hétérogénéité de comportement élastique introduite par la différence des modules E_1 et E_2 .

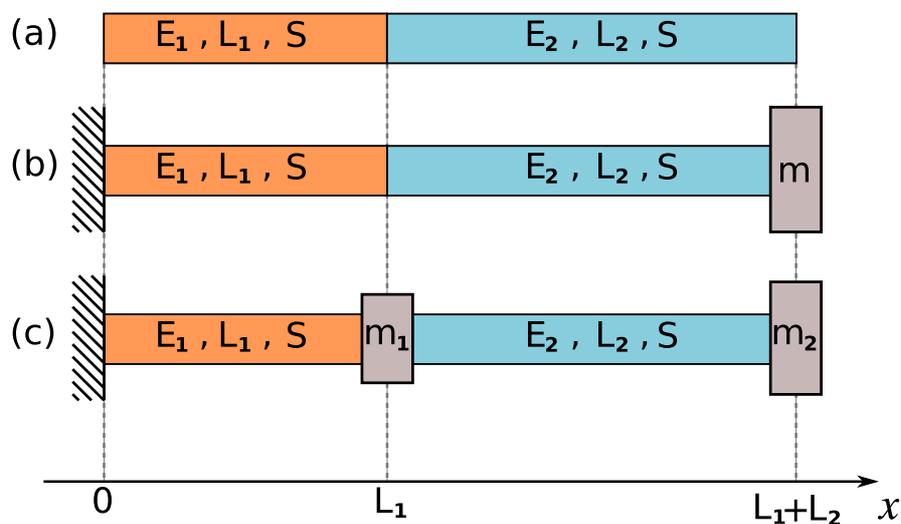


Figure II.11

On considère maintenant le problème dynamique (*Figure II.11.b*) où une masse m est située à l'extrémité $x = L$ de l'assemblage et l'extrémité $x = 0$ est encastree. On note $u(t)$ le déplacement en $x = L$ et $u_i(t)$ le déplacement en $x = L_1$, dépendant du temps t . Si l'assemblage est soumis à une force F à son extrémité $x = L$, on définit la raideur équivalente k_{eq} de l'assemblage telle que $F = k_{\text{eq}} u$, on a alors $k_{\text{eq}} = S/L E_{\text{eq}}$. De même, on note $k_1 = S/L_1 E_1$ et $k_2 = S/L_2 E_2$ les raideurs respectives deux barres telles que $k_{\text{eq}} = k_1 k_2 / (k_1 + k_2)$. On se place maintenant dans la situation où l'assemblage de la *Figure II.11.b* est soumis à une force inertielle d'entraînement d'accélération $a(t)$. En appliquant une transformée de Fourier au problème, la réponse du déplacement $\hat{u}(\omega)$ fonction de la fréquence ω est:

$$\hat{u}(\omega) = -\frac{m\hat{a}(\omega)}{k_{\text{eq}} - \omega^2 m}$$

À fréquence nulle, on trouve que le rapport d'impédance $-m\hat{a}(\omega)/\hat{u}(\omega)$ est égal à la raideur équivalente statique k_{eq} de l'assemblage.

Afin d'observer l'effet de la répartition d'inertie sur l'impédance statique équivalente, la masse m de l'assemblage de la *Figure II.11.b* est remplacée par une masse m_1 en $x = L_1$ et une masse m_2 en $x = L_2$. Ce nouvel assemblage est représenté *Figure II.11.c*. La masse totale $m = m_1 + m_2$ est la même que précédemment et on note les rapports inertiels $\eta = m_1/m$ et $1 - \eta = m_2/m$. La réponse fréquentielle de l'ensemble à une force inertielle d'accélération $a(t)$ est:

$$\hat{u}(\omega) = \frac{k_2 m_1 + (k_2 + k_1) m_2 - \omega^2 m_1 m_2}{\omega^4 m_1 m_2 - \omega^2 ((k_2 + k_1) m_2 + k_2 m_1) + k_1 k_2} \hat{a}(\omega)$$

A fréquence nulle, le rapport d'impédance est:

$$-\frac{m\hat{a}(\omega)}{\hat{u}(\omega)} = \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)(1 - \eta) + k_2 \eta} = \frac{S}{L} \frac{E_1 E_2}{((1 - \alpha)E_1 + \alpha E_2)(1 - \eta) + \eta \alpha E_2}$$

La raideur équivalente de l'assemblage dépend du facteur de répartition inertiel η . Pour $\eta = 0$, on retrouve la configuration de la *Figure II.11.b* et pour $\eta = 1$ la raideur de la poutre extrême n'intervient plus: elle a un mouvement de corps rigide. Cette dépendance du comportement mécanique vis-à-vis de la configuration interne d'un milieu continu soumis à des forces de volume est plus difficile à formuler. Le cas des milieux continus périodiques soumis à des forces de volume dépendant de la configuration spatiale du milieu est abordé par Boutin [18] qui met en lumière le caractère non local du problème. Luciano et Willis [90] ont proposé une modélisation non locale des propriétés effectives pour les matériaux hétérogènes soumis à des forces de volume qui à l'instar de la force gravitationnelle dépendent de la microstructure.

La périodicité rendant possible l'analyse par échelles multiples, la dépendance entre les échelles y est établie. L'équation d'équilibre vérifiée à l'échelle macroscopique est de forme similaire à l'équation générale du problème mais avec la force de volume dont la dépendance par rapport à la microstructure a été moyennée:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{f} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{div}(\mathbf{a}^0 : \mathbf{e}(\mathbf{U}^0)) + \langle \rho \rangle \mathbf{f} = 0$$

Le champ ρ est la densité de la matière dans le milieu, \mathbf{f} est un champ de force intrinsèque à la configuration, \mathbf{a}^0 est le tenseur de rigidité effectif du milieu, \mathbf{U}^0 le champ de déplacement macroscopique et $\langle \rho \rangle$ la densité moyenne dans le milieu (moyenne sur une période à l'échelle locale). Le champ de déplacement aux ordres inférieurs vérifient des équations différentielles linéaires dont les termes sources sont des champs faisant appel en chaque point à l'ensemble du champ de déplacement d'ordre supérieur. Il est en outre montré que plus l'hétérogénéité du milieu (de sa densité et de ses propriétés élastiques) est forte, plus l'effet non local entre les différents ordres est important. Les propriétés élastiques effectives d'un milieu à microstructure aléatoire soumis à des forces de volume dépendantes et indépendantes de la microstructure sont formulées dans [90] à l'aide d'un opérateur non local. Un tel opérateur a été introduit dans [11] pour un milieu à microstructure aléatoire Ω . On y montre que la relation entre l'espérance de la contrainte en un point du milieu et l'espérance du champ de déformation sur le milieu entier s'exprime à l'aide d'un opérateur non local de la forme:

$$E\{\boldsymbol{\sigma}\}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) E\{\mathbf{e}\} d\boldsymbol{\xi}$$

Les vecteurs \mathbf{x} et $\boldsymbol{\xi}$ désignent la position dans l'espace, $E\{ \}$ est l'espérance mathématique et $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ est un champ tensoriel d'ordre 4 défini sur $\Omega \times \Omega$.

II.8 Conclusions

Une modélisation de poutre homogène élastique à symétrie orthotrope basée sur l'approche de la résistance des matériaux est construite en II.2. Elle intègre ce mémoire de thèse à deux titres:

- en tant que modélisation de référence pour les poutres homogènes élastiques faisant l'objet des applications de ce travail
- pour permettre une comparaison entre la modélisation de poutre équivalente homogène d'un milieu périodique et celle d'une poutre réellement homogène constituée d'un matériau donné avec une géométrie donnée.

Les commentaires menés en II.3 sur l'homogénéisation des milieux à périodicité unidimensionnelle par une approche asymptotique rappellent l'état de l'art sur le sujet. Ce dernier montre que le choix d'une modélisation macroscopique de ces milieux par un modèle de poutre homogène est physiquement pertinent. Il est en outre montré que ces travaux rencontrent tous une difficulté de principe vis-à-vis de la modélisation du cisaillement par force transverse qui introduit un gradient de contraintes à l'échelle macroscopique. La plupart d'entre eux aboutissent à des modèles mécaniques dont les ordres de grandeur correspondent à des poutres et des plaques minces.

On montre en outre que les raideurs équivalentes de poutre calculées peuvent être sous-estimées. Ces dernières sont déterminées par identification en calculant les efforts de réduction macroscopiques par une opération de moyenne sur les termes de contrainte. Néanmoins, les contraintes considérées sont celles correspondant à l'état de contrainte plane sur lequel repose la théorie classique de la résistance des matériaux. Or, pour un milieu périodique quelconque cet état de contrainte fait *a priori* intervenir un champ de contrainte tridimensionnel. Ce qui implique que pour prendre en compte l'état local dans son intégralité, il est nécessaire d'utiliser une équivalence énergétique pour passer à l'échelle macroscopique. Cette idée est d'ailleurs inhérente à la théorie de la résistance des matériaux de Timoshenko qui introduit un facteur de correction de cisaillement pour prendre en compte la répartition locale de contrainte liée au gauchissement. Même dans le cas d'une poutre homogène cette estimation de l'état local reste analytiquement difficile. La question est abordée en II.2.3 où d'une part est présentée l'approche classique de la théorie de la résistance des matériaux qui consiste à négliger l'effet des bords libres dans la direction transverse au chargement et d'autre part une approche plus fine mais toujours simplifiée.

On établit en II.4 les principes d'une méthode originale d'homogénéisation dont le calcul de localisation s'effectue en deux étapes. L'idée centrale est d'appliquer à une période du milieu un champ de déplacement correspondant à un état de déformation macroscopique de ce dernier et de déterminer dans un second temps l'écart par rapport à ce champ dû à l'hétérogénéité de la microstructure périodique du milieu. Cet écart est caractérisé par une densité de force de réaction dans le milieu qui est due au déséquilibre élastique du champ de déplacement macroscopique au regard de la présence d'une microstructure périodique. Le problème de localisation est résolu à l'issue de ce processus.

Il est montré en II.5 que le modèle mécanique équivalent de poutre homogène et son état local associé forment une structure algébrique d'espace linéaire de dimension finie.

La section II.6 rappelle les limitations de la représentation macroscopique du milieu vis-à-vis des perturbations dues à la présence de bords brisant sa périodicité. Ces perturbations se trouvent être de deux natures: l'une est limitée à un domaine adjacent au bord et est qualifiée de couche limite, l'autre est distribuée périodiquement dans le milieu.

Quelques commentaires sont faits en II.7 à propos de l'influence des forces de volume et en particulier des forces d'inertie sur le comportement macroscopique équivalent des matériaux. On montre que la raideur dynamique équivalente du milieu est *a priori* différente de sa raideur équivalente statique.

CHAPITRE III

HOMOGENÉISATION NUMÉRIQUE ET APPLICATIONS

La plupart des milieux ou structures périodiques rencontrées dans les problèmes d'ingénierie sont trop complexes pour qu'on puisse les homogénéiser par des méthodes analytiques. La difficulté se situe principalement au niveau de la localisation de l'état macroscopique du milieu. On constate ainsi que l'application des méthodes asymptotiques à l'homogénéisation est confrontée à une difficulté mathématique concernant la détermination des opérateurs de localisation intervenant dans la solution du problème (\mathcal{P}_0) décrit en II.3. Il est en général impossible de donner une expression algébrique de ces opérateurs en fonction des paramètres géométriques et physiques définissant le milieu. De même, le problème périodique (II.55) et ses problèmes dérivés décrits de II.4.1 à II.4.4 ne sont généralement pas résolubles par des méthodes analytiques. Ce chapitre présente une méthode numérique pour résoudre ces problèmes. Les grandes lignes de la méthode sont exposées à l'aide d'un cas simple en III.1. La résolution du problème de localisation pour les structures périodiques complexes à l'aide la méthode des éléments finis fait l'objet de la section II.3. Le calcul numérique des propriétés effectives de raideur de poutre est présenté en III.3. Les aspects algorithmiques liés au processus d'homogénéisation sont détaillés en III.4. Les caractéristiques du modèle mécanique réduit du bâtiment utilisé pour illustrer l'étude dynamique en seconde partie de ce document sont données en III.5. La validité des résultats du processus y fait également l'objet d'un contrôle numérique.

III.1 Exemple introductif

L'objet de cette section est l'étude d'un problème unidimensionnel d'un milieu périodique représenté sur la FIG dont les cellules périodiques sont constituées de poutres élastiques homogènes isotropes mises en série. Les poutres sont constituées de matériaux

de modules d'élasticité E_1 et E_2 . Les longueurs des poutres sont notées L_1 , L_2 et leurs sections S_1 , S_2 . Le milieu est mis en élongation avec une déformation d'ensemble e_{11} . On considère une cellule périodique dont le point M_0 est supposé fixe. On note $U_0 = 0$, U_1 et U_2 les déplacements des points M_0 , M_1 et M_2 . On cherche en premier lieu à localiser la déformation moyenne e_{11} dans le milieu, *i.e.* déterminer les déplacements U_1 et U_2 . On détermine ensuite la raideur effective en élongation du milieu. Le problème étant simple, une résolution directe est accessible.

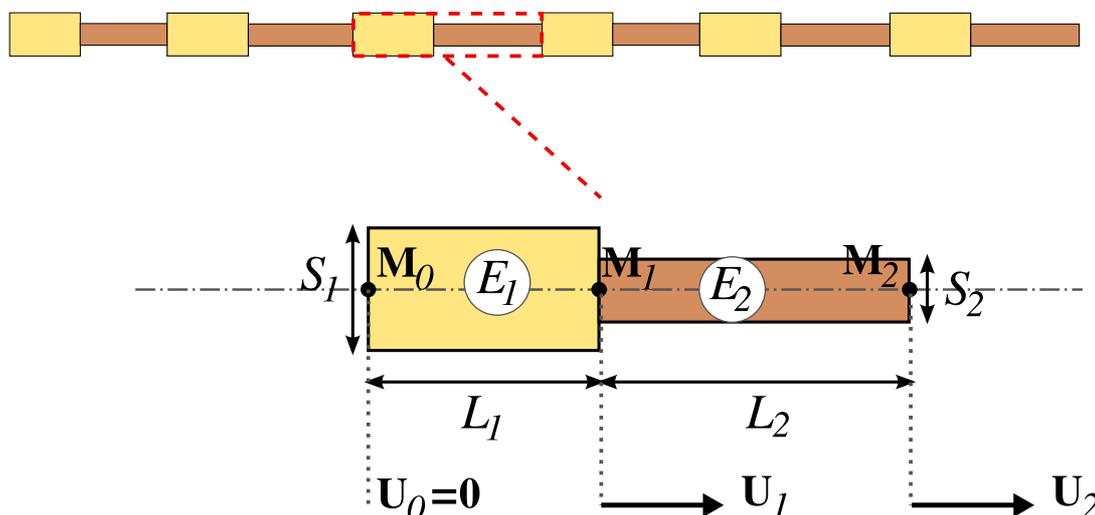


Figure III.1

Résolution directe

La déformation moyenne de l'ensemble est:

$$e_{11} = \frac{U_2}{L_1 + L_2}$$

L'effort normal est constant le long de la cellule:

$$V_1 = E_1 \frac{S_1}{L_1} U_1 = E_2 \frac{S_2}{L_2} (U_2 - U_1)$$

Les déplacements U_1 et U_2 sont donc solutions du système d'équations:

$$\begin{cases} U_2 = e_{11}(L_1 + L_2) \\ (E_1 S_1 L_2 + E_2 S_2 L_1) U_1 - E_2 S_2 L_1 U_2 = 0 \end{cases}$$

dont la solution est:

$$U_1 = \frac{E_2 S_2 L_1 (L_1 + L_2)}{L_2 E_1 S_1 + L_1 E_2 S_2} e_{11} = \Lambda_1 e_{11} \quad , \quad U_2 = (L_1 + L_2) e_{11} = \Lambda_2 e_{11} \quad (\text{III.1})$$

Les facteurs Λ_1 et Λ_2 homogènes à une distance sont les coefficients de localisation de la déformation moyenne e_{11} .

Résolution par décomposition

On souhaite maintenant retrouver la solution (III.1) par la méthode en deux étapes décrite en II.4.1.

Etape 1: Application de l'état macroscopique

On impose une déformation homogène e_{11} dans l'ensemble de la cellule à l'aide des déplacements macroscopiques $U_1^{(1)} = e_{11}L_1$ et $U_2^{(1)} = e_{11}(L_1 + L_2)$. On récupère des forces de réaction en M_0 , M_1 et M_2 :

$$F_{M_0}^{(r)} = -E_1S_1 e_{11} \quad , \quad F_{M_1}^{(r)} = (E_1S_1 - E_2S_2)e_{11} \quad , \quad F_{M_2}^{(r)} = E_2S_2e_{11}$$

Etape 2: Problème avec condition de bord périodique

On cherche maintenant les déplacements périodiques, *i.e.* $U_0^{(2)} = U_2^{(2)} = 0$ et $U_1^{(2)}$ à déterminer, tels que superposés à ceux de l'étape 1, on ait des déplacements totaux $U_n = U_n^{(1)} + U_n^{(2)}$ correspondant à une déformation moyenne e_{11} et un système de forces extérieures $F_{M_0} = -F_{M_2}$ et $F_{M_2} = 0$ appliquées aux extrémités de la cellule périodique. Pour déterminer $U_1^{(2)}$, on considère le problème périodique $U_0^{(2)} = U_2^{(2)} = 0$ avec la force intérieure $F_{M_1}^{(2)} = -F_{M_1}^{(r)}$ appliquée au point intérieur M_1 . Le bilan des forces appliquées au point M_1 est égal à la somme des forces appliquées par chacune des barres plus la force $F_{M_1}^{(2)}$:

$$-E_1 \frac{S_1}{L_1} U_1^{(2)} - E_2 \frac{S_2}{L_2} U_1^{(2)} + (E_2S_2 - E_1S_1) e_{11} = 0 \quad \implies \quad U_1^{(2)} = \frac{L_1L_2(E_2S_2 - E_1S_1)}{E_1S_1L_2 + E_2S_2L_1} e_{11}$$

On somme finalement les déplacements de l'étape 1 et de l'étape 2 pour retrouver la solution (III.1):

$$U_1 = U_1^{(1)} + U_1^{(2)} = \Lambda_1 e_{11} \quad , \quad U_2 = U_2^{(1)} + U_2^{(2)} = \Lambda_2 e_{11}$$

III.2 Structures complexes

Les milieux ou structures à périodicité unidimensionnelle présentent généralement des structures complexes dont la représentation et la résolution des problèmes mécaniques associés nécessitent des moyens numériques. Un maillage d'une cellule périodique doit être construit et les calculs mécaniques des deux étapes exposées en III.1 sont effectués à l'aide de la méthode des éléments finis. Cette section a pour but de poser le formalisme propre à

cette méthode dans le cadre de la résolution du problème de localisation des déformations macroscopiques de la base \mathcal{B}_E de l'espace \mathcal{U}_E défini en II.59. A ce titre, il s'agit en quelque sorte d'une traduction numérique des procédures II.4.1 à II.4.4.

Soit \mathbf{U} un vecteur obtenu par l'interpolation du champ de déplacement sur les nœuds du maillage $\mathcal{C}^{\text{mesh}}$ d'une cellule \mathcal{C} du milieu périodique. En un nœud donné, l'interpolation du champ est définie par 6 composantes classées en 3 composantes de translation T_1, T_2, T_3 et 3 composantes de rotation R_1, R_2, R_3 .

$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$	Vecteurs des coordonnées nodales pour les composantes $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$
$T_1(\mathbf{U}), T_2(\mathbf{U}), T_3(\mathbf{U})$	Vecteurs des composantes de translation de \mathbf{U} suivant $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.
$R_1(\mathbf{U}), R_2(\mathbf{U}), R_3(\mathbf{U})$	Vecteurs des composantes de rotation de \mathbf{U} suivant $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.
$\mathbf{X}_n \cdot * \mathbf{X}_p$	Produit de vecteurs terme à terme.
$\mathbf{X}_n \cdot \hat{k}$	Vecteur dont les composantes sont élevées à la puissance k .
$\mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+$	Composantes du vecteur \mathbf{U} pour les nœuds homologues correspondant aux interfaces périodiques $\partial\mathcal{C}_-$ et $\partial\mathcal{C}_+$ (voir (II.55)).

III.2.1 Déplacement macroscopique nodal

Ce sont les vecteurs des déplacements nodaux associés aux champs de déplacements imposés dans la première étape de la méthode de localisation qui sont présentés ici. Ces vecteurs notés $\mathbf{U}^{(1)}$ introduisent la déformation macroscopique et contiennent en partie les déplacements nodaux de la partie périodique du champ de déplacement.

Déformation de traction

La déformation macroscopique d'élongation longitudinale $\mathbf{E} = E_{11} \check{\mathbf{E}}_1$, avec $\check{\mathbf{E}}_1 \in \mathcal{B}_E$, est introduite par le champ $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = E_{11} x_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_{\text{per}}$ donné en II.4.1. Les composantes imposées du vecteur des déplacements nodaux sont les suivantes:

$$T_1(\mathbf{U}^{(1)}) = E_{11} \mathbf{X}_1$$

$$R_2(\mathbf{U}^{(1)}) = \mathbf{0}$$

$$R_3(\mathbf{U}^{(1)}) = \mathbf{0}$$

La condition de périodicité entre les autres composantes du vecteur des déplacements nodaux est appliquées à l'aide de contraintes linéaires ("Multi Point Constraint" = MPC) entre les composantes des nœuds homologues:

$$T_2(\mathbf{U}^{(1)})^+ - T_2(\mathbf{U}^{(1)})^- = 0$$

$$T_3(\mathbf{U}^{(1)})^+ - T_3(\mathbf{U}^{(1)})^- = 0$$

$$R_1(\mathbf{U}^{(1)})^+ - R_1(\mathbf{U}^{(1)})^- = 0$$

Déformation de flexion

Les déformations macroscopiques de flexion sont $\mathbf{E} = \chi_2/\chi_0 \check{\mathbf{E}}_5$ et $\mathbf{E} = \chi_3/\chi_0 \check{\mathbf{E}}_6$ avec $\check{\mathbf{E}}_5, \check{\mathbf{E}}_6 \in \mathcal{B}_E$. χ_2, χ_3 sont les courbures de flexion sans effort tranchant et χ_0 une courbure unitaire. Ces déformations sont introduites par les champs $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \chi_2 x_1 x_3 \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_{\text{per}}$ et $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\chi_3 x_1 x_2 \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_{\text{per}}$ donnés en II.4.2. Les composantes imposées du vecteur des déplacements nodaux sont les suivantes:

$$\left| \begin{array}{l} T_1(\mathbf{U}^{(1)}) = \chi_2 (\mathbf{X}_1 \cdot * \mathbf{X}_3) \\ R_2(\mathbf{U}^{(1)}) = \chi_2 \mathbf{X}_1 \\ R_3(\mathbf{U}^{(1)}) = \mathbf{0} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} T_1(\mathbf{U}^{(1)}) = -\chi_3 (\mathbf{X}_1 \cdot * \mathbf{X}_2) \\ R_2(\mathbf{U}^{(1)}) = \mathbf{0} \\ R_3(\mathbf{U}^{(1)}) = -\chi_3 \mathbf{X}_1 \end{array} \right|$$

Comme pour la cellule en élongation longitudinale, la condition de périodicité entre les composantes du vecteur des déplacements nodaux associées aux nœuds homologues est:

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{U}^{(1)})^+ - T_2(\mathbf{U}^{(1)})^- &= 0 \\ T_3(\mathbf{U}^{(1)})^+ - T_3(\mathbf{U}^{(1)})^- &= 0 \\ R_1(\mathbf{U}^{(1)})^+ - R_1(\mathbf{U}^{(1)})^- &= 0 \end{aligned}$$

Cisaillement par force transverse

Les déformations macroscopiques de flexion par force transverse sont $\mathbf{E} = \chi'_3/\chi'_0 \check{\mathbf{E}}_2$ et $\mathbf{E} = \chi'_2/\chi'_0 \check{\mathbf{E}}_3$ avec $\check{\mathbf{E}}_2, \check{\mathbf{E}}_3 \in \mathcal{B}_E$, χ'_2, χ'_3 les taux de courbure constants et χ'_0 un taux de courbure unitaire. Ces déformations sont introduites par les champs $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -1/2 \chi'_3 x_1^2 x_2 \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_{\text{per}}$ et $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 1/2 \chi'_2 x_1^2 x_3 \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_{\text{per}}$ donnés en II.4.3. Les composantes imposées du vecteur des déplacements nodaux sont les suivantes:

$$\left| \begin{array}{l} T_1(\mathbf{U}^{(1)}) = -1/2 \chi'_3 (\mathbf{X}_1 \cdot \wedge 2\mathbf{X}_2) \\ R_2(\mathbf{U}^{(1)}) = \mathbf{0} \\ R_3(\mathbf{U}^{(1)}) = -1/2 \chi'_3 \mathbf{X}_1 \cdot \wedge 2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} T_1(\mathbf{U}^{(1)}) = 1/2 \chi'_2 (\mathbf{X}_1 \cdot \wedge 2\mathbf{X}_3) \\ R_2(\mathbf{U}^{(1)}) = 1/2 \chi'_2 \mathbf{X}_1 \cdot \wedge 2 \\ R_3(\mathbf{U}^{(1)}) = \mathbf{0} \end{array} \right|$$

En raison de l'effet de gradient, les composantes $T_2(\mathbf{U}^{(1)})$, $T_3(\mathbf{U}^{(1)})$ et $R_1(\mathbf{U}^{(1)})$ du vecteur de déplacements nodaux ne peuvent pas faire l'objet de conditions de périodicité entre les nœuds homologues. Il est montré en II.2.3 que pour une cellule homogène cisillée avec un moment fléchissant nul en son centre, la composante du déplacement est antisymétrique dans la direction de l'effort tranchant. Une cellule périodique quelconque présentant *a priori* une asymétrie longitudinale ne vérifie néanmoins pas cette propriété d'antisymétrie (voir II.4.3). Les composantes $T_2(\mathbf{U}^{(1)})$, $T_3(\mathbf{U}^{(1)})$ et $R_1(\mathbf{U}^{(1)})$ sont donc laissées libres de toute relation contrainte (MPC).

Déformation de torsion

La déformation macroscopique de torsion $\mathbf{E} = \chi_1 \check{\mathbf{E}}_4$, avec $\check{\mathbf{E}}_4 \in \mathcal{B}_E$, est introduite par le champ $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \chi x_1 (-x_3 \mathbf{e}_2 + x_2 \mathbf{e}_3) + \mathbf{u}_{\text{per}}$ donné en II.4.4. Les composantes imposées du vecteur des déplacements nodaux sont les suivantes:

$$T_2(\mathbf{U}^{(1)}) = -\chi_1 \mathbf{X}_1 \cdot * \mathbf{X}_3$$

$$T_3(\mathbf{U}^{(1)}) = \chi_1 \mathbf{X}_1 \cdot * \mathbf{X}_2$$

$$R_1(\mathbf{U}^{(1)}) = \chi_1 \mathbf{X}_1$$

Une condition de périodicité entre les composantes longitudinales du vecteur des déplacements nodaux associées aux nœuds homologues est imposée:

$$T_1(\mathbf{U}^{(1)})^+ - T_1(\mathbf{U}^{(1)})^- = 0$$

$$R_2(\mathbf{U}^{(1)})^+ - R_2(\mathbf{U}^{(1)})^- = 0$$

$$R_3(\mathbf{U}^{(1)})^+ - R_3(\mathbf{U}^{(1)})^- = 0$$

III.2.2 Calcul des perturbations périodiques

Les conditions exposées en III.2.1 mènent à des systèmes d'équations linéaires réduits. Le vecteur des déplacements nodaux $\mathbf{U}^{(1)}$ de l'étape 1 est donc composé pour une part de termes imposés et de termes contraints par des conditions de périodicité (ou d'anti-périodicité dans le cas du cisaillement) introduites par des MPCs (*MPC=Multi Point Constraint*) qui sont des relations linéaires entre degrés de liberté. Les composantes non nulles du vecteur des forces nodales $\mathbf{F}^{(1)}$ sont générées par les forces de réactions dues au degrés de liberté imposés ne réalisant pas l'équilibre élastique. Parmi ces composantes, celles associées aux nœuds situés aux interfaces $\partial\mathcal{C}_-$ et $\partial\mathcal{C}_+$ (voir (II.55)) avec les autres cellules correspondent aux forces appliquées par les cellules adjacentes. La densité de force de réaction \mathbf{f}_r associée à $\mathbf{F}^{(1)}$ (définie à l'issue de l'étape 1 des problèmes de localisation exposés en II.4) a pour support l'ouvert $\mathcal{C} \setminus \partial\mathcal{C}$. Un maillage ayant une topologie fermée, la densité de force de réaction est approchée en ne conservant que les composantes non nulles de $\mathbf{F}^{(1)}$ n'étant pas associées à des nœuds d'interfaces. En faisant cette troncature, on néglige *a priori* une partie de la densité de force de réaction au voisinage du bord. On note $\mathbf{F}_{\text{ins}}^{(1)}$ la troncature du vecteur $\mathbf{F}^{(1)}$. Le vecteur des déplacements nodaux $\mathbf{U}^{(2)}$ est solution du problème consistant à appliquer le vecteur de forces nodales $\mathbf{F}^{(2)} = -\mathbf{F}_{\text{ins}}^{(1)}$ aux nœuds de la cellule en bloquant les 6 degrés de liberté d'un nœud. Le vecteur des déplacements nodaux associé à la solution du problème (II.55) est obtenu par la somme $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{(1)} + \mathbf{U}^{(2)}$.

III.3 Calcul des propriétés effectives de raideur

La résolution numérique des problèmes (II.4.1), (II.4.2), (II.4.3) et (II.4.4) permet d'obtenir une localisation approchée des champs de déformation macroscopiques de la base \mathcal{B}_E . Les champs de déplacement de la base $\mathcal{B}_{\text{red}} = (\check{\mathbf{u}}_1, \check{\mathbf{u}}_2, \check{\mathbf{u}}_3, \check{\mathbf{u}}_4, \check{\mathbf{u}}_5, \check{\mathbf{u}}_6)$ de l'espace réduit \mathcal{U}_{red} défini en (II.74) sont approchés par leurs interpolations aux nœuds du maillage de la cellule périodique. On note $\check{\mathbf{U}}_1, \check{\mathbf{U}}_2, \check{\mathbf{U}}_3, \check{\mathbf{U}}_4, \check{\mathbf{U}}_5, \check{\mathbf{U}}_6$ les approximations nodales des champs de \mathcal{B}_{red} .

La procédure d'homogénéisation s'achève par le calcul des propriétés effectives du milieu équivalent. Dans le cas d'un milieu à périodicité unidimensionnelle, il s'agit comme on l'a vu en (II.46), de déterminer la matrice de raideur de poutre $[\mathbf{K}_b]$. Au lieu d'utiliser un opérateur de moyenne spatiale, on utilise l'énergie de déformation élastique via le principe d'équivalence énergétique entre les descriptions du milieu à ses différentes échelles.

Le **principe d'équivalence énergétique** entre le milieu périodique et son modèle de poutre équivalent implique que pour un état de déformation macroscopique de poutre \mathbf{E} l'énergie de déformation élastique est la même que celle du milieu périodique déformé par le champ de déplacement $\mathbf{u} = \Phi_u(\mathbf{E})$.

L'opérateur linéaire Φ_u défini en (II.74) est l'isomorphisme induit par le problème (II.55) entre les espaces \mathcal{U}_E et \mathcal{U}_{red} . Le principe d'équivalence énergétique va permettre de déterminer par identification les termes de raideur effectifs de poutre.

Pour un état de déformation macroscopique $\mathbf{E} = \lambda_n \check{\mathbf{E}}_n$, $n \in \mathbb{N}^* \leq 6$, le champ de déplacement dans la cellule est $\mathbf{u} = \Phi_u(\mathbf{E}) = \lambda_n \Phi_u(\check{\mathbf{E}}_n) = \lambda_n \check{\mathbf{u}}_n$ et l'état de déformation associé est $\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \lambda_n \mathbf{e}(\check{\mathbf{u}}_n)$. L'énergie de déformation élastique dans la cellule se décompose sur la base \mathcal{B}_{red} :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{loc}} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^6 \lambda_n^2 \int_{\mathcal{C}} \mathbf{e}^T(\check{\mathbf{u}}_n)(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{e}(\check{\mathbf{u}}_n)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &+ \sum_{1 \leq p < q \leq 6} \lambda_p \lambda_q \int_{\mathcal{C}} \mathbf{e}^T(\check{\mathbf{u}}_p)(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{e}(\check{\mathbf{u}}_q)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Les termes croisés d'indices (p, q) avec $p \neq q$ sont des termes d'énergie de couplage qui s'annulent lorsque le milieu est à symétrie orthotrope. Les calculs à l'échelle locale menés par la méthode des éléments finis sont décrits en III.2. L'énergie de déformation approchée est calculée par les produits matriciels suivants:

$$\mathcal{E}_{\text{loc}}^{\text{EF}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^6 \lambda_n^2 \check{\mathbf{U}}_n^T [\mathbf{K}_{\text{EF}}] \check{\mathbf{U}}_n + \sum_{1 \leq p < q \leq 6} \lambda_p \lambda_q \check{\mathbf{U}}_p^T [\mathbf{K}_{\text{EF}}] \check{\mathbf{U}}_q \quad (\text{III.3})$$

L'énergie de déformation \mathcal{E}_{eq} de la poutre équivalente est donnée par la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ définie sur l'espace \mathcal{U}_E en (II.72):

$$\mathcal{E}_{\text{eq}} = \|\mathbf{E}\|_{\mathcal{E}} = \sum_{n=1}^6 \lambda_n^2 \|\check{\mathbf{E}}_n\|_{\mathcal{E}} + 2 \sum_{1 \leq p < q \leq 6} \lambda_p \lambda_q \langle \check{\mathbf{E}}_p, \check{\mathbf{E}}_q \rangle_{\mathcal{E}} \quad (\text{III.4})$$

Le principe d'équivalence énergétique implique que $\mathcal{E}_{\text{eq}} = \mathcal{E}_{\text{loc}}$ ou $\mathcal{E}_{\text{eq}} = \mathcal{E}_{\text{loc}}^{\text{EF}}$. Les expressions (III.2), (III.3) et (III.4) ont en outre des structures algébriques identiques correspondant aux relations bi-univoques liant les différents éléments des bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_{red} . On identifie les termes énergétiques diagonaux entre eux $\forall 1 \leq p \leq 6$:

$$\|\check{\mathbf{E}}_p\|_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{e}^T(\check{\mathbf{u}}_p)(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{e}(\check{\mathbf{u}}_p)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \check{\mathbf{U}}_p^T [\mathbf{K}_{\text{EF}}] \check{\mathbf{U}}_p \quad (\text{III.5})$$

les indices p ne faisant pas l'objet de sommations implicites. Les énergies de couplage vérifient $\forall 1 \leq p \neq q \leq 6$:

$$2\langle \check{\mathbf{E}}_p, \check{\mathbf{E}}_q \rangle_{\mathcal{E}} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{e}^T(\check{\mathbf{u}}_p)(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{e}(\check{\mathbf{u}}_q)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \check{\mathbf{U}}_p^T [\mathbf{K}_{\text{EF}}] \check{\mathbf{U}}_q \quad (\text{III.6})$$

Sur le plan pratique, les raideurs effectives $[\mathbf{K}_b]_{pp}$ sont déterminées à l'aide de 6 calculs de localisation pour des déformations macroscopiques colinéaires à chacun des champs tensoriels de \mathcal{B}_E . Si bien que

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = E_{11} \check{\mathbf{E}}_1 &\implies K_{11} = \frac{2\mathcal{E}_{\text{loc}}^{\text{EF}}}{hE_{11}^2} \\ \mathbf{E} = \chi'_3 \check{\mathbf{E}}_2 &\implies K_{22} = \frac{K_{66}^2 \chi_3'^2 h}{2\mathcal{E}_{\text{loc}}^{\text{EF}} - K_{66} \chi_3'^2 h^3 / 12} \\ \mathbf{E} = \chi'_2 \check{\mathbf{E}}_3 &\implies K_{33} = \frac{K_{55}^2 \chi_2'^2 h}{2\mathcal{E}_{\text{loc}}^{\text{EF}} - K_{55} \chi_2'^2 h^3 / 12} \\ \mathbf{E} = \chi_1 \check{\mathbf{E}}_4 &\implies K_{44} = \frac{2\mathcal{E}_{\text{loc}}^{\text{EF}}}{h\chi_1^2} \\ \mathbf{E} = \chi_2 \check{\mathbf{E}}_5 &\implies K_{55} = \frac{2\mathcal{E}_{\text{loc}}^{\text{EF}}}{h\chi_2^2} \\ \mathbf{E} = \chi_3 \check{\mathbf{E}}_6 &\implies K_{66} = \frac{2\mathcal{E}_{\text{loc}}^{\text{EF}}}{h\chi_3^2} \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Les énergies de couplage sont *a priori* difficilement identifiables dans la mesure où un calcul couplé superpose l'énergie de couplage avec deux autres énergies de déformation. Un calcul direct de $\check{\mathbf{U}}_p^T [\mathbf{K}_{\text{EF}}] \check{\mathbf{U}}_q$ à partir des vecteurs nodaux $\check{\mathbf{U}}_p$ et $\check{\mathbf{U}}_q$ nécessite l'extraction de la matrice de raideur du système. Cependant, les codes de calcul par éléments finis sont munis d'un algorithme de post-traitement fournissant le vecteur des forces nodales $\mathbf{F} = [\mathbf{K}_{\text{EF}}] \check{\mathbf{U}}$ pour un vecteur des degrés de liberté nodaux \mathbf{U} . Il n'est donc pas nécessaire d'extraire la matrice de raideur $[\mathbf{K}_{\text{EF}}]$ pour déterminer les énergies de couplage car

$$\check{\mathcal{E}}_{\text{loc},pq}^{\text{EF}} = \check{\mathbf{U}}_p^T [\mathbf{K}_{\text{EF}}] \check{\mathbf{U}}_q = \check{\mathbf{U}}_p^T \check{\mathbf{F}}_q \quad (\text{III.8})$$

III.4 Algorithme d'homogénéisation

La méthodologie numérique dédiée à l'homogénéisation des milieux à périodicité unidimensionnelle faisant l'objet des premières sections de ce chapitre est mise en œuvre par un processus dont la structure algorithmique est présentée ci-dessous.

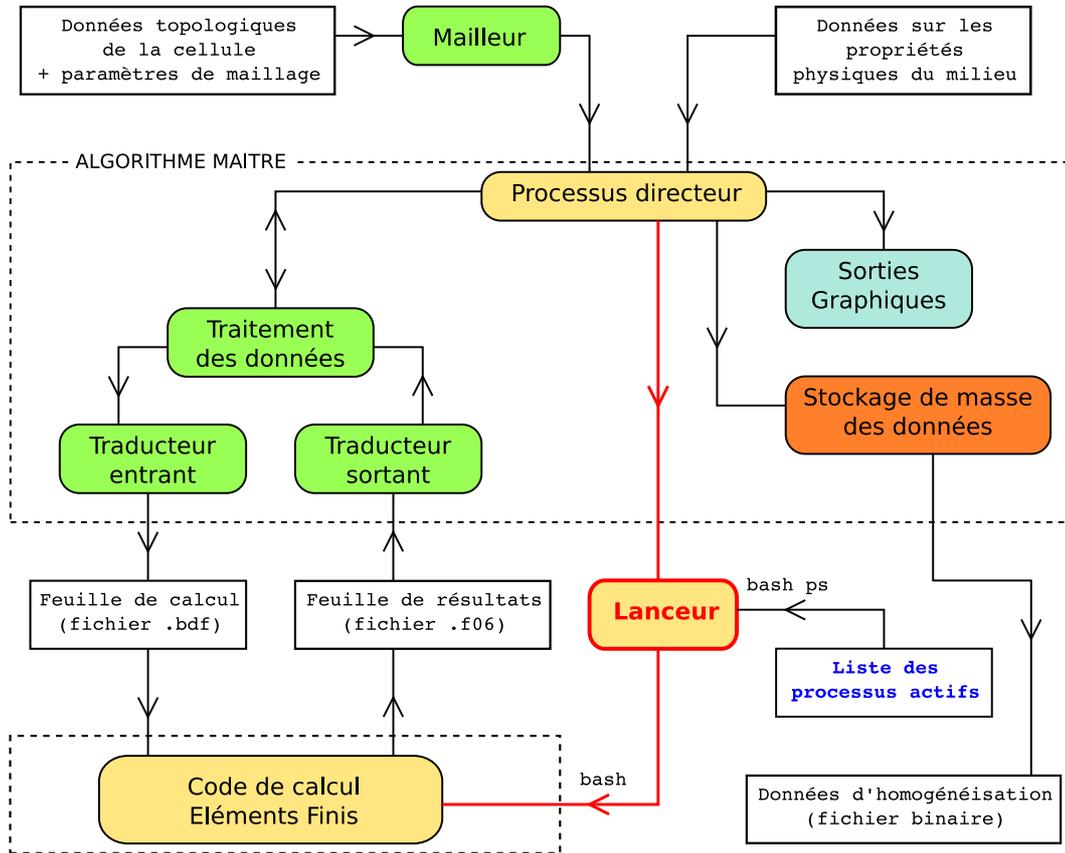


Figure III.2 Diagramme algorithmique général du processus d'homogénéisation – Les boîtes aux bords arrondis sont des algorithmes. Les boîtes à fond blanc sont des données stockées au format ASCII.

Le code lié à cet algorithme est constitué de deux parties communicantes mais disjointes. Un algorithme maître dirige l'ensemble du processus et fait appel à un code de calcul par éléments finis. Ce dernier est un code devant vérifier les fonctionnalités standards disponibles dans le commerce. Il doit entre autre pouvoir communiquer avec l'algorithme maître par le biais de fichiers de données de calcul et de résultats en caractères (format ASCII). De manière plus générale, ce code doit pouvoir prendre en compte l'ensemble des opérations matricielles liées aux conditions de bord des problèmes mécaniques à résoudre: degrés de liberté imposés, relations linéaires supplémentaires (MPC), etc. MSC Nastran 2005 est le code adopté pour ce travail de recherche et est mis en œuvre pour chaque résolution de problème mécanique. L'algorithme maître est l'algorithme d'homogénéisation à proprement parler. Son code est "non intrusif" vis-à-vis du code de calcul par éléments

finis et dans le cas présent, a été développé pour MatLab développé par The Mathworks. L'algorithme maître communique avec le code éléments finis commercial en générant les feuilles de calcul de ce dernier sous forme d'un fichier de caractère, en lui donnant l'ordre d'exécuter ce fichier et en rapatriant les données du fichier de résultat au format texte. Ce type d'approche présente un intérêt évident du point de vue la portabilité du code de l'algorithme maître qui peut s'adapter à n'importe quel code de calcul par éléments finis en modifiant simplement ses modules de traduction entrant et sortant. Le pilotage de l'exécution du code de calcul est réalisé assez aisément sous un système d'exploitation de type Linux. Le lanceur est développé à l'aide de scripts MatLab et d'un interpréteur de commandes de type `shell`, *e.g.* `bash`. Il scanne régulièrement (à l'aide du programme `ps` via `bash`) la liste des processus actifs pour contrôler que le code de calcul a bien terminé sa tâche avant de redonner la main à l'algorithme maître qui pourra alors rapatrier les résultats de calcul.

III.4.1 Description de l'algorithme d'homogénéisation

Représentation du milieu périodique

La morphologie de la cellule et ses propriétés physiques sont les données d'entrée du processus d'homogénéisation. Pour une cellule constituée de matériaux linéairement élastiques et isotropes, les paramètres physiques se limitent au *module d'Young* E et au module de cisaillement G (ou tout autre couple équivalent). La topologie de la cellule est définie par son maillage. Les tables de coordonnées des nœuds et de connectivité des éléments sont les données d'entrée topologiques de l'algorithme maître. Le maillage généré doit vérifier les conditions propres aux conditions de périodicité (voir le paragraphe concerné ci-après). N'importe quel mailleur peut être utilisé à condition de lui adjoindre un module de traduction pour données matricielles au format MatLab. Les maillages utilisés dans cette étude sont réalisés à l'aide d'un code développé à partir de l'algorithme présenté en annexe A.2. Ce "mailleur maison" dédié à la représentation d'étages produit un assemblage d'éléments de plaque. N'importe quel type d'éléments est néanmoins admissible. Des cellules périodiques peuvent être obtenues par une infinité de découpages différents. Ce choix est arbitraire, il faut cependant prendre garde à bien respecter les conditions de bord propres au modèle mécanique des éléments employés. Une cellule d'un bâtiment multi étage périodique peut par exemple être obtenue par deux plans de coupe parallèles passant par le milieu de deux planchers successifs. Ce choix respecte bien la dimension de la période mais conduit à une modélisation mécanique erronée lorsque des éléments de plaque sont utilisés pour représenter les demi planchers. Les plaques étant élaborées à partir d'une hypothèse de bord libre sur leurs faces normales au plan neutre, le milieu périodique correspondant aurait des demi planchers susceptibles de glisser les uns sur les autres au lieu de planchers complets (*Figure III.3*).

Les planches graphiques exposées en III.4.3 et III.5.3 décrivent la répartition des forces et moments internes aux plaques. Ces efforts sont définis par rapport à une orientation

locale aux éléments, cependant le mailler utilisé génère des éléments aux orientations similaires pour toutes les cellules ayant la morphologie à laquelle il est dédié. Les éléments de plaques constituant les murs (plaques verticales) et les planchers (plaques horizontales) seront toujours orientés conformément à la *Figure III.4*

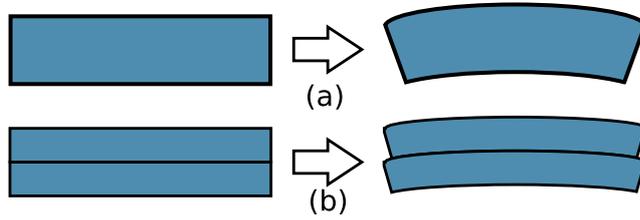


Figure III.3 Deux plaques juxtaposées ne sont pas équivalentes à une plaque de double épaisseur !

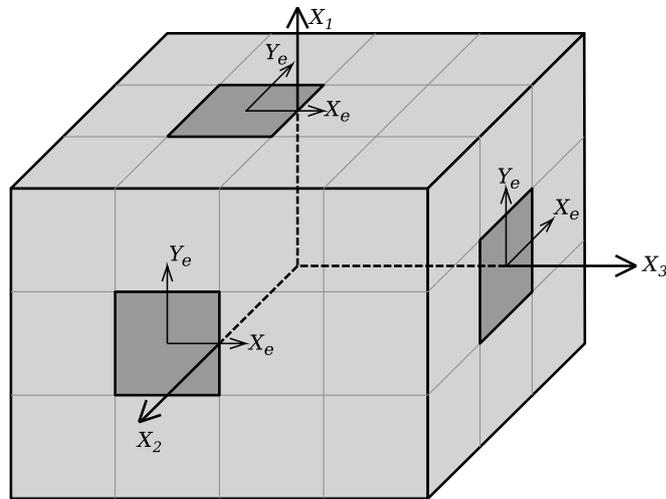


Figure III.4 Orientation des éléments de type plaque dans les maillages mis en œuvre.

La définition des forces et moments internes dans le repère local de plaque est indiquée sur la *Figure III.5*.

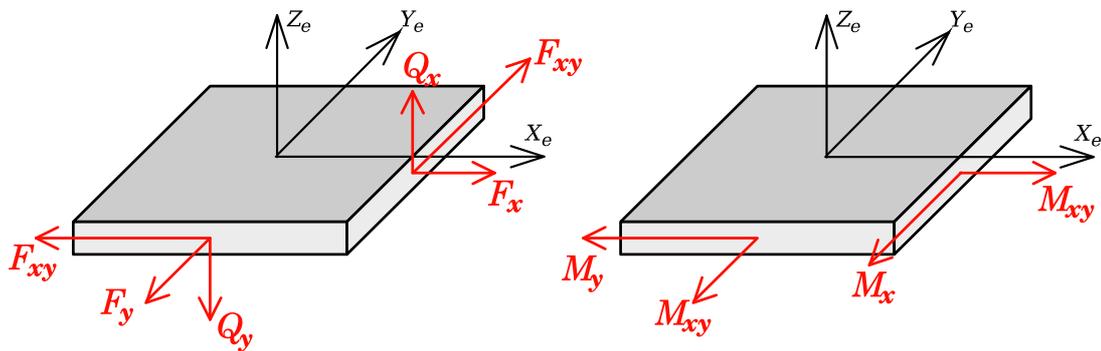


Figure III.5 Orientation des efforts internes dans un élément de type plaque.

Les forces F_x et F_y sont les forces normales de membrane et F_{xy} est la force de cisaillement

de membrane. Les forces Q_x et Q_y sont les efforts tranchants de plaque. Les moments M_x et M_y sont les moments fléchissants et M_{xy} le moment de cisaillement.

Conditions de périodicité

Les conditions de périodicité concernent les nœuds correspondant aux interfaces $\partial\mathcal{C}_-$ et $\partial\mathcal{C}_+$ de la cellule avec ses voisines. Chacune de ses interfaces est donc représentée par deux ensembles de nœuds $\mathcal{N}(\partial\mathcal{C}_-)$ et $\mathcal{N}(\partial\mathcal{C}_+)$ sous ensemble de $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ l'ensemble de tous les nœuds du maillage de la cellule \mathcal{C} . Les interfaces $\partial\mathcal{C}_-$ et $\partial\mathcal{C}_+$ sont l'image l'une de l'autre par une translation de période $h\mathbf{e}_1$, il doit en de même pour les nuages de points associés à $\mathcal{N}(\partial\mathcal{C}_-)$ et $\mathcal{N}(\partial\mathcal{C}_+)$. Tous les maillages étant sujets à des conditions de périodicité entre leurs bords doivent vérifier de telles propriétés topologiques. Les conditions de périodicité telles qu'elles sont présentées en III.2 s'appliquent entre nœuds homologues c'est-à-dire les couples de nœuds images l'un de l'autre par une translation de période comme illustré sur la *Figure III.6*.

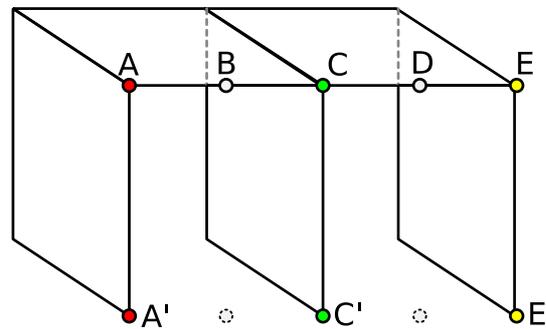


Figure III.6 Les nœuds A, C, E ont des homologues A', C', E' , les conditions de périodicité sont appliqués à ces nœuds dans l'étape 2.

Cette figure met en lumière le cas où la cellule d'un bâtiment périodique est choisie à l'aide de plans de coupes positionnés au pied des murs et juste au dessus des nœuds supérieurs. La *Figure III.7* montre que dans ce cas particulier les interfaces correspondent à une coupe des murs et que donc seuls les nœuds d'attache des murs correspondent aux interfaces $\partial\mathcal{C}_-$ et $\partial\mathcal{C}_+$.

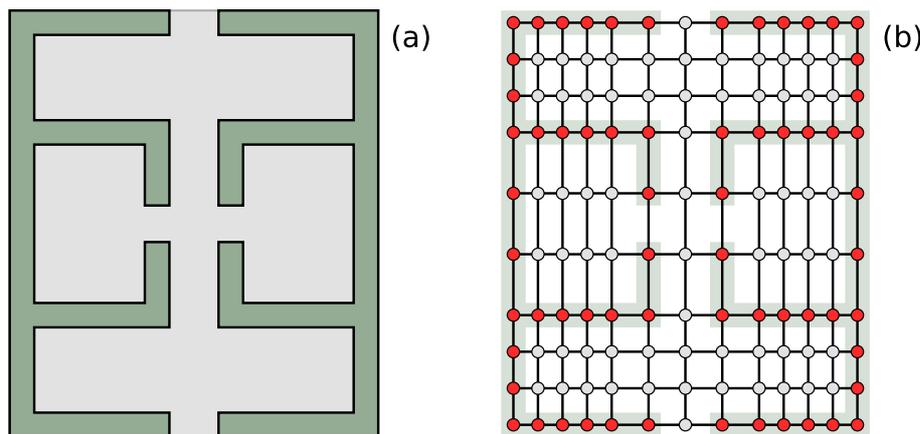


Figure III.7 (a) Exemple de profil de coupe de bâtiment – (b) Maillage du plancher. Les nœuds indiqués en rouge correspondent à la coupe des murs.

L'algorithme doit donc en préliminaire, identifier les nœuds des ensembles $\mathcal{N}(\partial\mathcal{C}_-)$ et $\mathcal{N}(\partial\mathcal{C}_+)$ parmi $\mathcal{N}(\mathcal{C})$. Pour ce faire, la table des coordonnées est scannée à la recherche des nœuds dont la position a une coordonnée longitudinale extrême. Si cette valeur est égale à $\min_{x_1} \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{N}(\mathcal{C})$ alors le nœud est dans $\mathcal{N}(\partial\mathcal{C}_-)$, si elle est égale à $\max_{x_1} \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{N}(\mathcal{C})$ alors le nœud est dans $\mathcal{N}(\partial\mathcal{C}_+)$. Une table de concordance des nœuds homologues est construite en scannant de nouveau la table des coordonnées nodales pour les nœuds de l'ensemble $\mathcal{N}(\partial\mathcal{C}_-)$ en cherchant à détecter pour chacun d'entre eux quel est celui dans $\mathcal{N}(\partial\mathcal{C}_+)$ a les mêmes coordonnées transverses (x_2, x_3) à un rayon de tolérance près. Ce rayon dépend de la structure étudiée, on choisira dans le cas du bâtiment un rayon de l'ordre du centimètre. C'est cette table de concordance qui permet d'appliquer les conditions de périodicité par la suite.

Étape 1 : Déformation macroscopique

Il s'agit de l'étape décrite en III.2.1 qui introduit la déformation macroscopique du milieu. Les données du calcul mécanique à résoudre par la méthode des éléments finis sont écrites dans un feuille de calcul (feuille de calcul **Nastran** avec l'extension **.bdf** ou **.dat**) au format ASCII. Ces données se regroupent de la façon suivante:

- Données de maillage et propriétés physiques. Ces données sont inscrites dans un fichier indépendant.
- Les valeurs imposées des composantes du vecteur des déplacements nodaux.
- Les conditions de périodicités sur les nœuds homologues pour les composantes du vecteur des déplacements nodaux qui n'ont pas été imposées. Il faut également prévoir un nœud où l'on bloque les degrés de libertés de la cellule laissés libres afin d'empêcher ses mouvements de corps rigide.

Le calcul ayant été mené à son terme, le fichier de résultats (fichier **.f06**) au format ASCII est lu et les données sont traduites et mises en mémoire. Trois types de données sont extraites du fichier de résultat:

- Les composantes du vecteur des déplacements nodaux $\mathbf{U}^{(1)}$ défini en III.2.1.
- Les composantes du vecteur des forces de réaction nodales $\mathbf{F}^{(1)}$ dont il est question en III.2.2.
- Les 3 composantes de forces et les 3 composantes de moments internes de l'ensemble des éléments sont rassemblés dans un tableau réel $[\mathbf{Int}^{(1)}]$ de dimension $N_{\text{elt}} \times 6$ avec N_{elt} le nombre d'éléments.

Étape 2 : Calcul des perturbations périodiques locales

Cette étape décrite en III.2.2 utilise la même feuille de calcul de données de maillage qu'à l'étape 1. Le vecteur $\mathbf{F}^{(2)}$ est calculé à partir de $\mathbf{F}^{(1)}$ comme décrit en III.2.2. Les données écrites dans la feuille de calcul sont:

- Les forces et moments imposés par le vecteur $\mathbf{F}^{(2)}$ aux nœuds intérieurs, *i.e.* l'ensemble $\mathcal{N}(\mathcal{C}) - (\mathcal{N}(\partial\mathcal{C}_-) \cup \mathcal{N}(\partial\mathcal{C}_+))$.

- Les conditions de périodicité sur l'ensemble des composantes cinématiques des nœuds homologues.
- Encastrement d'un nœud.

Deux types de données sont extraites du fichier de résultats:

- Les composantes du vecteur des déplacements nodaux $\mathbf{U}^{(2)}$ introduit en III.2.2.
- Les forces et moments internes de l'ensemble des éléments, rassemblés dans un tableau réel $[\mathbf{Int}^{(2)}]$ de dimension $N \times 6$.

Le déplacement complet $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{(1)} + \mathbf{U}^{(2)}$ et les efforts internes $[\mathbf{Int}] = [\mathbf{Int}^{(1)}] + [\mathbf{Int}^{(2)}]$ sont calculés par sommation et constituent les données de localisation du problème.

Etape 3 : Calcul des propriétés effectives

La dernière étape de l'algorithme consiste à calculer les propriétés effectives de la poutre énergétiquement équivalente à partir des données de localisation cinématiques obtenues à l'issue de l'étape 2.

A cette fin, on réalise un essai mécanique qui consiste à imposer en chaque nœud du maillage les composantes du vecteur des déplacements nodaux \mathbf{U} . La structure n'a plus aucun degré de liberté, ce qui peut poser une erreur dans l'algorithme du code de calcul. Pour pallier à ce problème, on crée un élément connecté à n'importe quel nœud du maillage, *e.g.* ressort ou poutre, qui va se contenter de suivre sans déformation les mouvements du nœud auquel il est connecté. On récupère l'énergie de déformation élastique fournie par un algorithme de post-traitement intégré dans tous les codes de calcul standards.

Les 3 étapes de l'algorithme étant exécutées pour 6 déformations colinéaires aux 6 déformations de la base \mathcal{B}_E de l'espace \mathcal{U}_E , l'énergie de déformation associée à chacune d'elles permet de calculer les termes diagonaux de la matrice de raideur de poutre équivalente $[\mathbf{K}_b]$ à l'aide des expressions (III.7).

La dernière tâche consiste à normer les données de localisation pour leur utilisation ultérieure. Le calcul étant linéaire, il suffit de diviser \mathbf{U} et $[\mathbf{Int}]$ par la valeur de la composante associée à l'une des 6 déformations imposée de la base \mathcal{B}_E (voir (II.62)). Les vecteurs des déplacements nodaux obtenus sont notés $(\check{\mathbf{U}}_1, \check{\mathbf{U}}_2, \check{\mathbf{U}}_3, \check{\mathbf{U}}_4, \check{\mathbf{U}}_5, \check{\mathbf{U}}_6)$ et correspondent aux 6 champs de déplacement de la base \mathcal{B}_{rmred} définie en (II.73).

III.4.2 Remarques sur les ressources de calcul

L'essentiel du temps d'utilisation du processeur pour ce processus numérique est consommé par les calculs par éléments finis ($\sim 30\%$). La création et la lecture des fichiers de données prennent aussi un temps important. Les ressources en terme de mémoire vive sont principalement nécessitées par l'inversion matricielle du calcul par éléments finis de l'étape 2.

L'un des défauts des méthodes non intrusives est la quantité de ressources (nombre d'opérations) nécessaire à la traduction entrante et sortante des données de calcul. Les données transitent par des fichiers au lieu de directement transiter par la mémoire vive dont le

temps d'accès est considérablement inférieur. Les données au format ASCII sont en outre considérablement plus volumineuses: un nombre double précision est codé sur 64 bits, *i.e.* 8 octets, avec une *mantisse* de 52 bits correspondant à environ 16 décimales et un codage d'exposant de 11 bits (-1022 à 1023), ce qui se traduit pour un stockage au format ASCII par un nombre de digits pouvant aller jusqu'à 23 soit $23 \times 2 = 46$ octets. Dans le cas du code *Nastran*, le nombre maximum de digits pris en compte par la feuille de calcul et le fichier de résultat est 16 ce qui correspond à un maximum de 10 décimales après la virgule. On remarquera de plus que le besoin de précision augmente avec le raffinement du maillage et donc l'augmentation du nombre de nœuds et d'éléments. Malgré ces défauts numériques, les méthodes non intrusives présentent l'avantage évident de pouvoir étendre le cadre d'utilisation des codes de calculs commerciaux dont le code source est généralement protégé.

III.4.3 Illustration du processus algorithmique

On va maintenant présenter une application du processus d'homogénéisation à une structure périodique simple. Cette structure est constituée de cubes creux formés d'un assemblage de 6 plaques carrées de côté c et d'épaisseur e . La *Figure III.8* représente le maillage d'une cellule périodique constituée du cube privé de sa face inférieure. Les plaques de dimensions: $c \times c \times e = 2m \times 2m \times 0.1m$ sont homogènes et constituées d'un matériau élastique isotrope de module d'Young $E = 10\text{ GPa}$ et de module de cisaillement $G = 3.85\text{ GPa}$.

Dans ce qui suit, est présenté un test de validation numérique des données de localisation dans le cas de la déformation macroscopique de torsion. La validation des données de localisation pour la flexion sous effort tranchant est donnée en annexe A.3. Les propriétés de raideur effectives de la poutre équivalente sont validées à l'aide d'un calcul analytique.

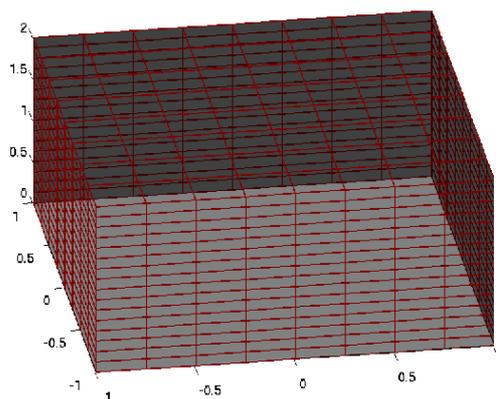


Figure III.8 Maillage de la cellule pour la procédure d'homogénéisation.

Localisation de la déformation macroscopique

La déformation de cellule par le vecteur $\mathbf{U}^{(1)}$ est illustrée par la *Figure III.9*. On peut également observer les forces de réaction aux nœuds. L'essentiel des forces se situe sur les interfaces de connexion aux cellules voisines $\partial\mathcal{C}_-$ et $\partial\mathcal{C}_+$ correspondant aux ensembles de nœuds $\mathcal{N}(\partial\mathcal{C}_-)$ et $\mathcal{N}(\partial\mathcal{C}_+)$. Aux extrémités des arêtes longitudinales, on observe des distributions de forces dues à l'incompatibilité de la géométrie de la cellule (proche d'un tube carré creux) avec le mouvement de section circulaire pleine imposé.

Les données de localisation obtenues à l'issue du processus d'homogénéisation permettent de trouver une répartition approchée des efforts dans une structure périodique à l'aide d'un simple calcul statique mettant en jeu la poutre équivalente. Ainsi on applique une rotation de torsion à l'extrémité d'une structure multi cellulaire encastree à son autre extrémité et on localise le taux de torsion correspondant. Les *Figure III.11* et *Figure III.12* sont des planches graphiques qui comparent simultanément les niveaux d'efforts dans les éléments obtenus à partir des données de localisation du moment de cisaillement M_{xy} et de l'effort tranchant normal Q_x avec ceux obtenus par un calcul numérique sur une structure à plusieurs cellules. Le niveau d'écart des données de localisation par rapport à celles issues de la structure multi cellulaire est également représenté. La construction de ces planches graphiques est détaillée en III.5.3.

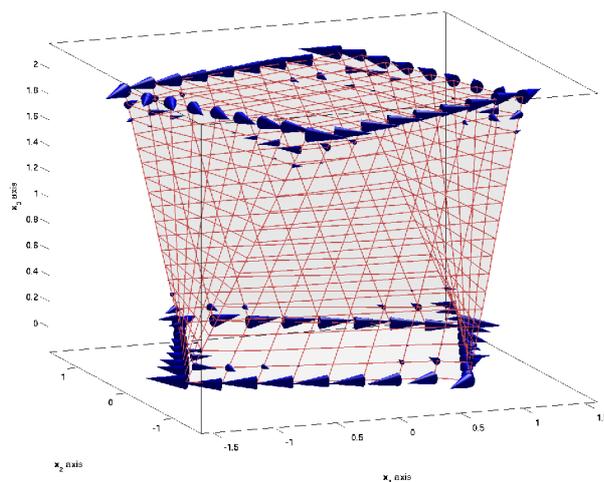


Figure III.9 Déformée du maillage de la cellule et forces de réaction aux nœuds (cônes proportionnels à l'intensité de la force) à l'issue de l'étape 1.

Propriétés effectives de raideur

La théorie classique de la résistance des matériaux est construite pour les milieux curvilignes et, comme on l'a expliqué en II.3, n'est plus valable dans le cadre général des milieux à périodicité unidimensionnelle. Le milieu périodique défini par la cellule de la *Figure III.8* peut être vu comme un tube carré entrecoupé de plaques horizontales. Lorsque

la structure est mise en torsion, le mouvement des segments de tubes creux est gêné par la présence de ces plaques. Le taux de torsion entre deux plaques consécutives n'est pas constant et peut être décrit analytiquement par un modèle de torsion gênée du type de celui conçu par Vlasov [138] ou plus récemment Gjelsvik [61]. Cependant, la démarche n'est pas de chercher à déterminer la variation du taux de torsion au sein des différents segments de la cellule, mais de calculer la raideur de poutre homogène procurant la même énergie de déformation qu'une cellule périodique pour un taux de torsion moyen du milieu. L'état local associé est décrit par les données de localisation.

Les raideurs effectives de poutre du milieu périodique calculées par l'algorithme d'homogénéisation sont données dans la *Table III.2*. La structure multi cellulaire est assez proche du tube carré creux obtenu par suppression des plaques transverses. Ce dernier étant un milieu curviligne, on peut calculer ses raideurs de poutre par la théorie de la résistance des matériaux pour les tubes minces.

Le tube creux en question est donc une poutre dont la section est une bande d'épaisseur $e = 0.1 m$ dont la ligne médiane est un carré de côté $c = 2 m$ représentée par la *Figure III.10*. Les raideurs de cette poutre tubulaire sont calculées d'une part à l'aide de l'algorithme d'homogénéisation et d'autre part par des méthodes analytiques. Les caractéristiques géométriques de cette section, à savoir la surface de section S , le facteur de correction de cisaillement k , les moments d'inertie de section I_2 et I_3 pour les flexions d'axes Ge_2 et Ge_3 et le moment polaire I_1 de torsion sont donnés ci-dessous:

$$\begin{aligned} S &= 4 c e = 0.8 m^2 \\ k &= \frac{5}{12} \left(1 + \frac{e^2}{c^2} \right) \simeq 0.419 \\ I_1 &= c^3 e = 0.8 m^4 \\ I_2 = I_3 &= \frac{1}{12} \left((c + e/2)^4 + (c - e/2)^4 \right) \simeq 0.5347 m^4 \end{aligned}$$

Le calcul détaillé du coefficient de correction de cisaillement k est donné en annexe A.1. En ce qui concerne le moment polaire de torsion pour un tube mince fermé d'épaisseur constante e dont S_m est la surface entourée par la ligne moyenne à mi-épaisseur et $P_m = 4 c$, le périmètre de cette même ligne, son expression est:

$$I_1 = \frac{4 S_m^2 e}{P_m} = c^3 e$$

La valeur de raideur de cisaillement obtenue par calcul analytique est supérieure de 5% à celle obtenue par homogénéisation. Dans le calcul analytique, on fait l'hypothèse que la répartition de contraintes de cisaillement est constante dans l'épaisseur, ce qui est incompatible avec la condition de bord libre à la surface de la paroi; on aboutit donc à une surévaluation de l'énergie de déformation élastique et par conséquent à une raideur plus faible d'où la différence observée. Pour la même raison mais dans une moindre mesure (seulement 0.3%), on observe un écart sur la raideur de torsion.

Les raideurs obtenues pour la structure multi-cellulaire (munie des plaques horizontales) exposées (*Table III.2*) sont très proches de celles obtenues par homogénéisation du tube creux (*Table III.3*). C'est pour les raideurs de traction et de flexion que l'on observe le

plus grand écart qui est de l'ordre de 1%. La présence des éléments horizontaux gêne la réduction de section par effet *Poisson* ce qui entraîne un léger raidissement. Cet effet de raidissement est d'autant plus important que la cellule est massive, ainsi pour une épaisseur de 0.3 m, on aura plus de 2% d'écart. De la même manière, les planchers d'un bâtiment vont peu raidir la structure du bâtiment.

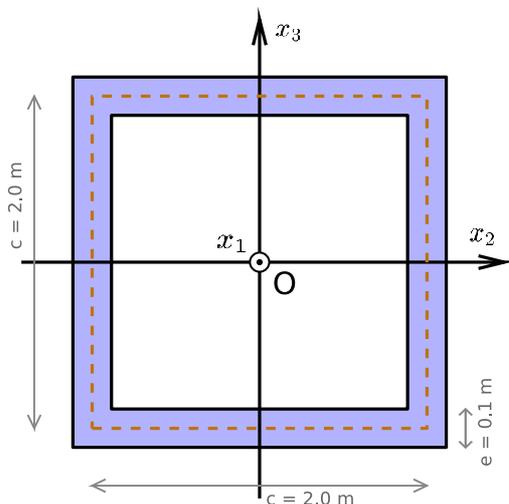


Figure III.10

K_{11}	$8.11.10^9 N$
K_{22}	$1.37.10^9 N$
K_{33}	$1.37.10^9 N$
K_{44}	$3.10.10^9 Nm^2$
K_{55}	$5.38.10^9 Nm^2$
K_{66}	$5.38.10^9 Nm^2$

Homogénéisation		Analytique	
$K_{11} = 8.000.10^9 N$		ES	$8.000.10^9 N$
$K_{22} = 1.355.10^9 N$		Gk_2S	$1.291.10^9 N$
$K_{33} = 1.355.10^9 N$		Gk_3S	$1.291.10^9 N$
$K_{44} = 3.090.10^9 N$		GI_1	$3.080.10^9 Nm^2$
$K_{55} = 5.337.10^9 N$		EI_2	$5.347.10^9 Nm^2$
$K_{66} = 5.337.10^9 N$		EI_3	$5.347.10^9 Nm^2$

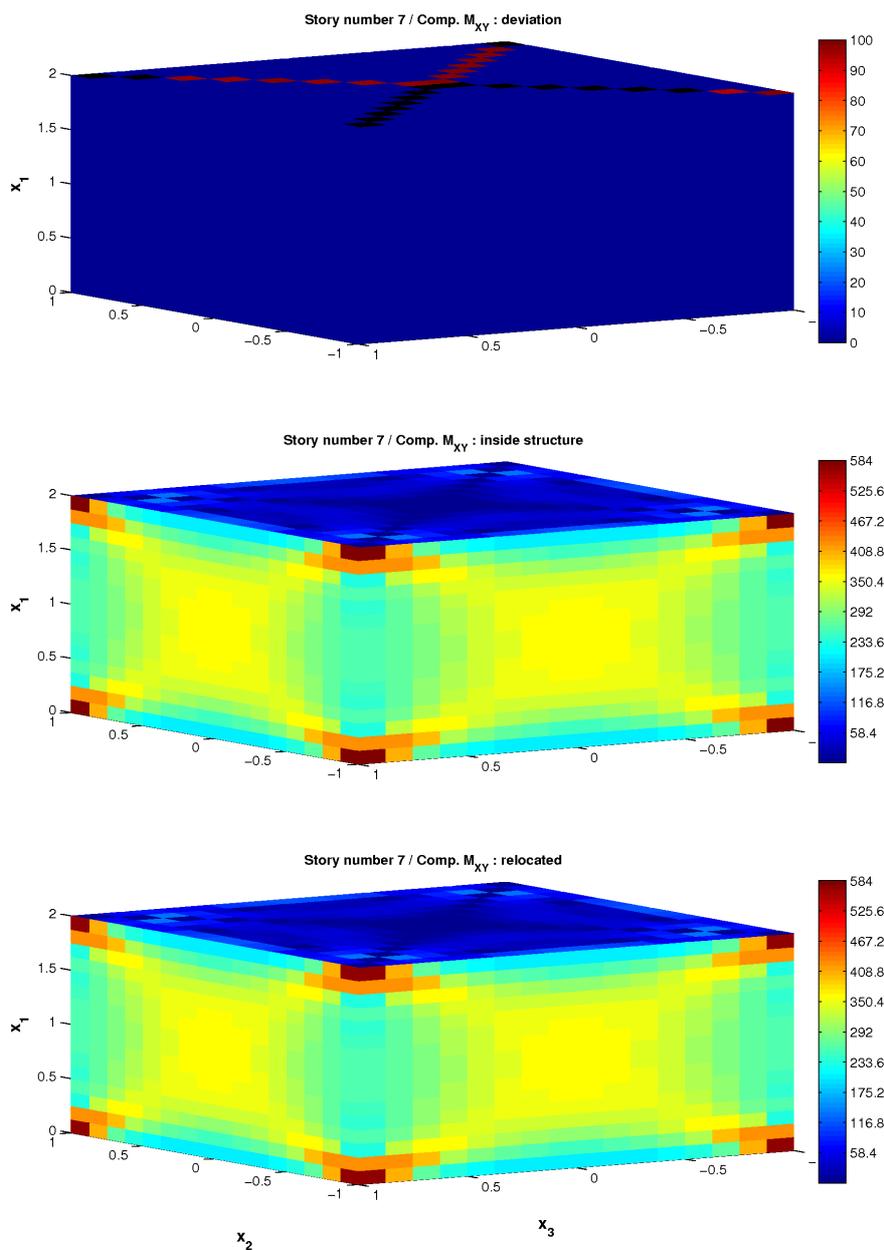


Figure III.11 Planche comparative de la répartition de couple de torsion M_{XY} (voir III.5.3) issue des données de localisation et de celle issue de la 10^{ème} cellule d'une structure à 20 périodes. — (Haut) Niveau d'erreur en pourcentage du bleu (0%) au rouge (100%). La couleur noire signale un niveau d'erreur supérieur à 100%. — (Milieu) Intensité de l'effort dans la structure multi cellulaire. — (Bas) Intensité de l'effort issu des données de localisation.

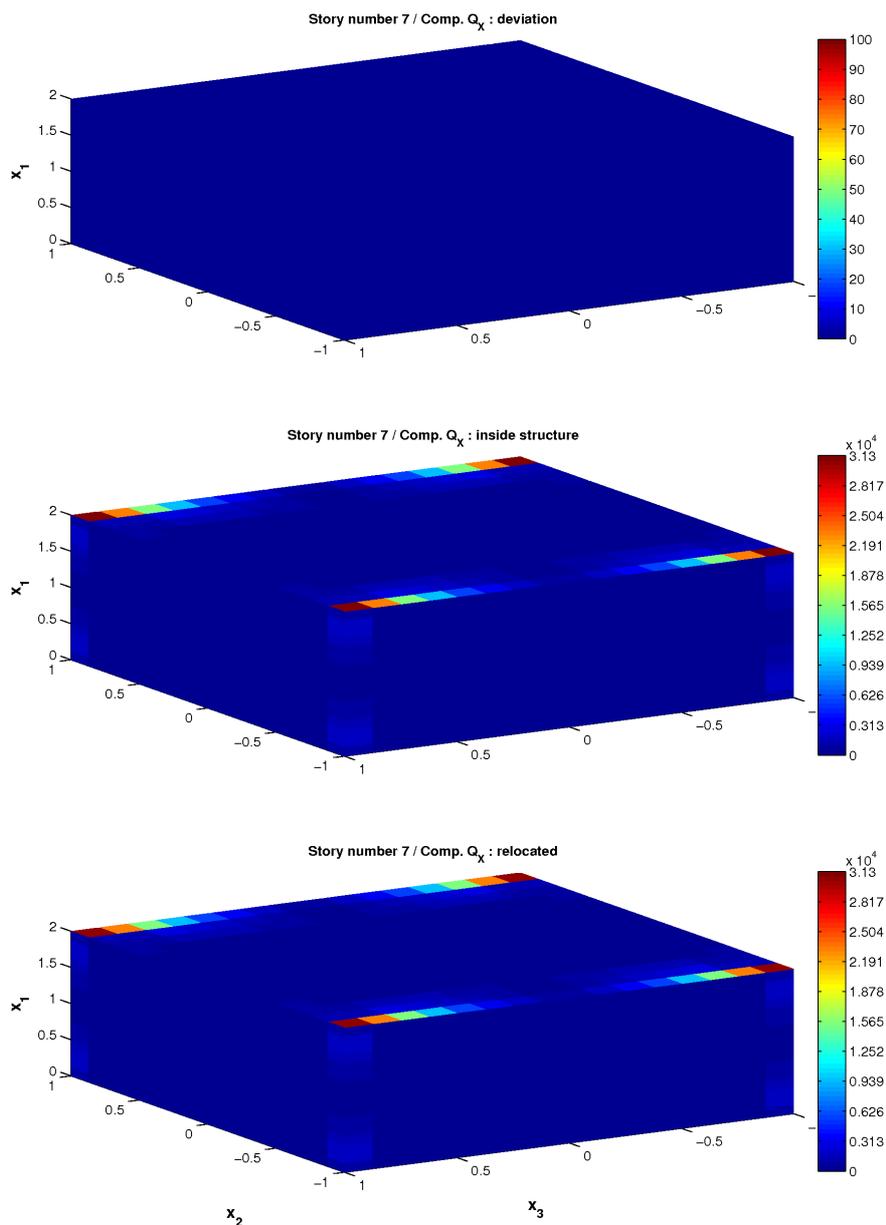


Figure III.12 Planche comparative de la répartition de moment interne de cisaillement Q_X (voir III.5.3) issue des données de localisation et de celle issue de la 10^{ème} cellule d'une structure à 20 périodes. — (Haut) Niveau d'erreur en pourcentage du bleu (0%) au rouge (100%). La couleur noire signale un niveau d'erreur supérieur à 100%. — (Milieu) Intensité de l'effort dans la structure multi cellulaire. — (Bas) Intensité de l'effort issu des données de localisation.

III.5 Application à un bâtiment

Cette section présente l'application du processus d'homogénéisation à un bâtiment multi-étagé. Les étages étant identiques, la structure est périodique, ce qui garantit un comportement d'ensemble ou macroscopique du bâtiment. Les raideurs effectives de la poutre macroscopiquement équivalente et les données de localisation associées sont déterminées par le processus d'homogénéisation décrit en III.2 et III.3. Ce modèle mécanique réduit est utilisé dans la seconde partie de ce document afin d'étudier la dynamique du bâtiment. Les caractéristiques du bâtiment qui illustre cette section d'applicative sont présentées en III.5.1. La validité des données de localisation issues du processus d'homogénéisation fait ensuite l'objet de tests similaires à ceux exposés sur les *Figure III.11* et *Figure III.12*. Les grandes lignes de l'algorithme utilisé sont présentées en III.5.2. Les sorties graphiques des résultats de ces tests sont cataloguées en III.5.3.

III.5.1 Caractéristiques structurales

Le bâtiment dont il est question est une tour de 12 étages de type habitation. Ses étages sont tous identiques et un schéma en coupe de l'un d'entre eux est donné par la *Figure III.13*. Les planchers, qui ne sont pas représentés, recouvrent exactement la coupe de l'étage et ont une épaisseur de 0.3 m . La hauteur des murs est de 2.7 m pour une hauteur totale du bâtiment de 32.4 m . Les murs et les planchers sont modélisés par des plaques homogènes constituées d'un matériau élastique isotrope dont les caractéristiques sont récapitulées dans la *Table III.4*. Bien que le comportement élastique ne suive pas la *loi de Hooke*, les caractéristiques du matériau en question, sont calculées à partir des règles du BAEL 91 (voir par exemple [41] et [107]). Un béton standard ayant une résistance caractéristique à la compression $f_{c28} = 20\text{ MPa}$ à l'âge de 28 jours est considéré pour le calcul du module élastique instantané dont la valeur en (MPa) est donnée par [41] chap. 2:

$$E = 10000 f_{c28}^{1/3} \simeq 27.1\text{ MPa}$$

Le fluage du béton est important si bien que la déformation totale atteint environ 3 fois la déformation instantanée. Le module d'élasticité différé est donc égal au tiers du module instantané. Le modèle mécanique réduit du bâtiment étant destiné à son étude dynamique, il est logique d'utiliser la valeur instantanée du module élastique. Le module de cisaillement instantané G est calculé à partir de E pour un coefficient de *Poisson* $\nu = 0.2$.

module d'élasticité	$E = 27.1\text{ GPa}$
module de cisaillement	$G = 11.3\text{ GPa}$
masse volumique	$\rho = 2400\text{ kg.m}^{-3}$

La structure de référence est constituée d'un assemblage de plaques (modèle de *Reissner-Mindlin*) dont le maillage interpole la géométrie du bâtiment et dont les propriétés physiques correspondent aux données de la *Table III.4*. Une représentation du maillage est donnée à la *Figure III.14*.

Le milieu périodique dont l'homogénéisation va permettre la réduction du modèle mécanique de la structure de référence est donc une tour ayant une infinité d'étages. La cellule périodique choisie est constituée de l'ensemble des murs d'un étage surmonté par un plancher (voir *Figure III.15*). La procédure de maillage de la cellule est développée à l'annexe A.2. Les caractéristiques de son maillage sont résumées dans la *Table III.5*.

Les *Figure III.16* à *Figure III.21* montrent les déformations du maillage de la cellule pour les 6 états élémentaires $\mathbf{grad}^s(\check{\mathbf{u}}_n)$ avec $\check{\mathbf{u}}_n \in \mathcal{B}_{\text{red}}$ définis en II.5.3. L'amplitude des déplacements sur ces figures a été amplifiée en vue de mieux apprécier la déformation du maillage. Les déformations du modèle réduit du bâtiment sont donc obtenues par une combinaison linéaire de ces 6 déformations. Les propriétés de raideur effectives du modèle de poutre équivalent sont données par *Table III.6*. Ce dernier ne fait pas intervenir de raideurs de couplage car la structure a une symétrie orthotrope.

L'effet de bord de couche limite est mis en lumière à l'aide des figures *Figure III.22* et *Figure III.23*. Ces figures donnent la répartition des forces internes verticales F_y dans les murs (définies par les *Figure III.4* et *Figure III.5*) pour le 1^{er} et le 6^{ème} étage du bâtiment mis en flexion. On constate que l'effet de couche limite dû à l'encastrement au sol est régularisé à une hauteur du 1^{er} étage. Les bâtiments sont des structures très creuses et la régularisation des efforts (application du principe de *St Venant*) se déroule à l'échelle des murs et non du bâtiment entier.

Nombre de nœuds	9457
Nombre de degrés de liberté maximal (étape 2)	56736
Nombre d'élément de type plaque	9280

Raideur d'élongation	$K_{11} = 72.7.10^{11} N$
Raideur de cisaillement (dir. \mathbf{e}_2)	$K_{22} = 3.2.10^{10} N$
Raideur de cisaillement (dir. \mathbf{e}_3)	$K_{33} = 6.0.10^{10} N$
Raideur de torsion	$K_{44} = 9.71.10^{12} Nm$
Raideur de flexion d'axe $G\mathbf{e}_2$	$K_{55} = 86.4.10^{12} Nm$
Raideur de flexion d'axe $G\mathbf{e}_3$	$K_{66} = 20.2.10^{12} Nm$

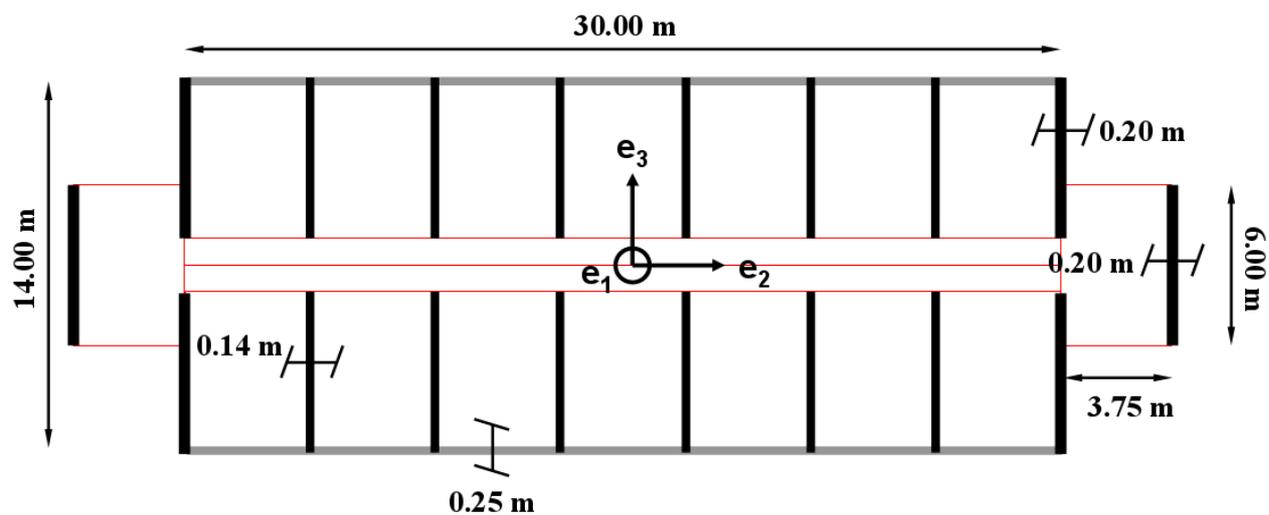


Figure III.13 Vue en coupe d'un étage du bâtiment.

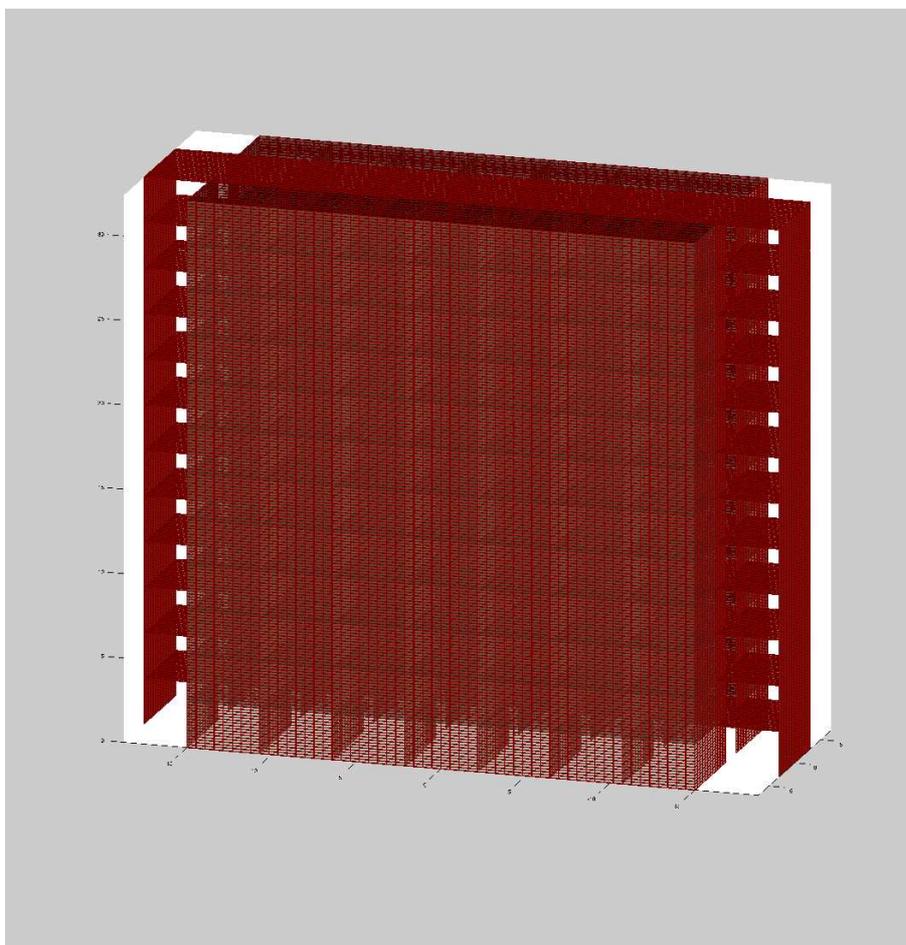


Figure III.14 Maillage complet de la structure de référence du modèle mécanique du bâtiment.

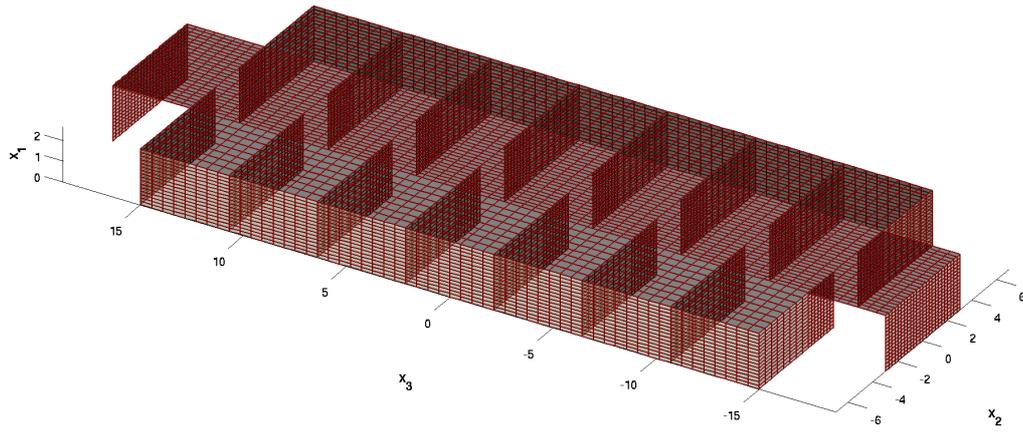


Figure III.15 Maillage d'une cellule du milieu périodique.

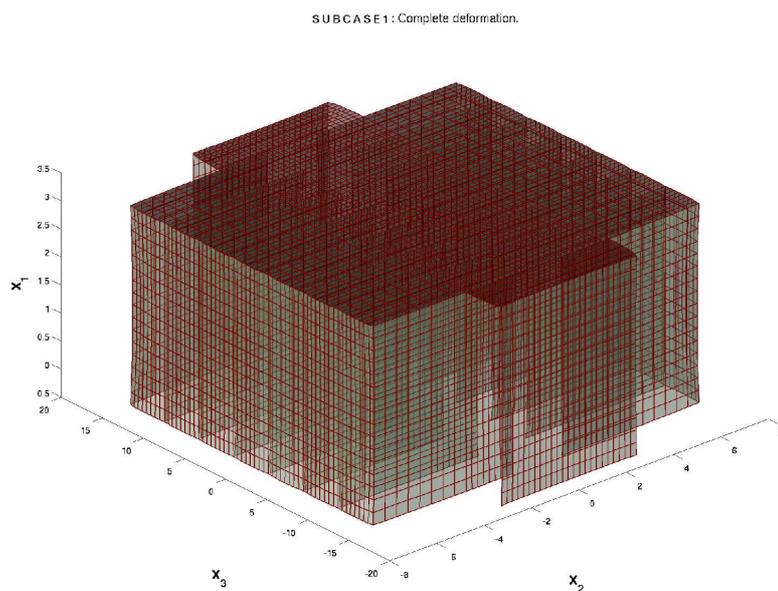


Figure III.16 Cellule en traction suivant la direction longitudinale

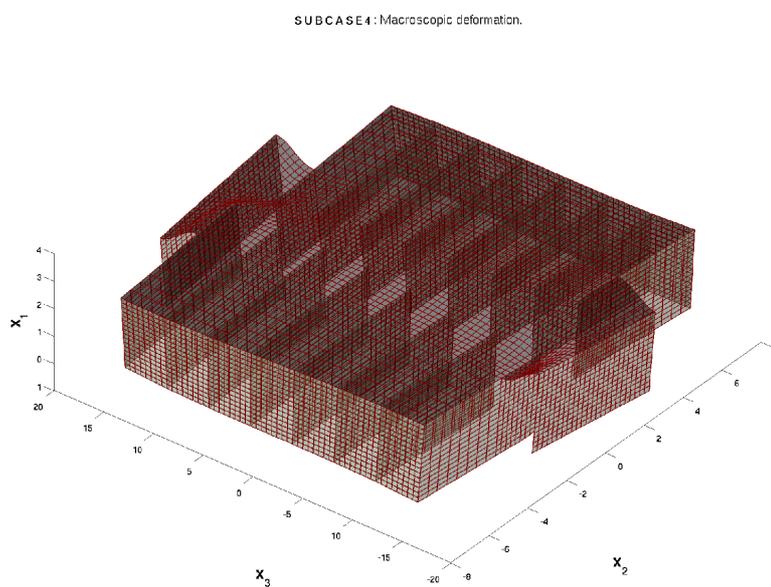


Figure III.17 Cellule en torsion

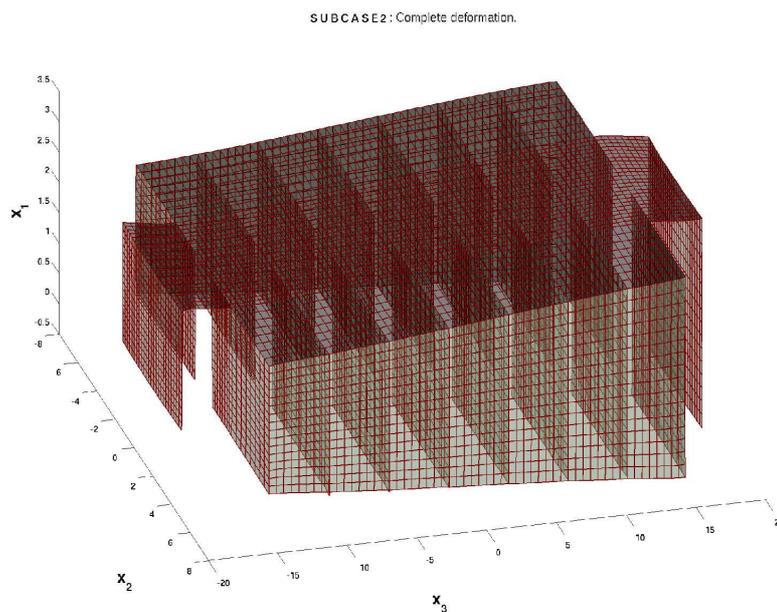


Figure III.18 Cellule en flexion pure suivant Ge_2

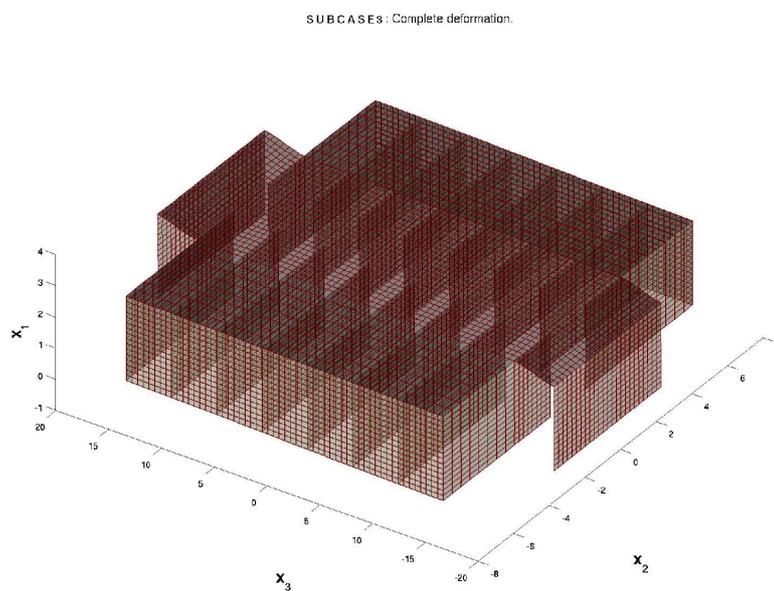


Figure III.19 Cellule en flexion sous effort tranchant V_3

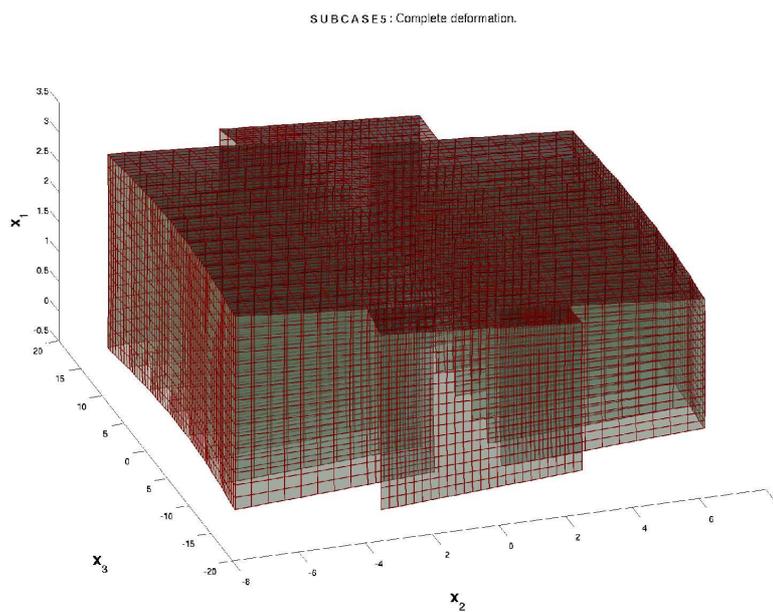


Figure III.20 Cellule en flexion pure suivant Ge_3

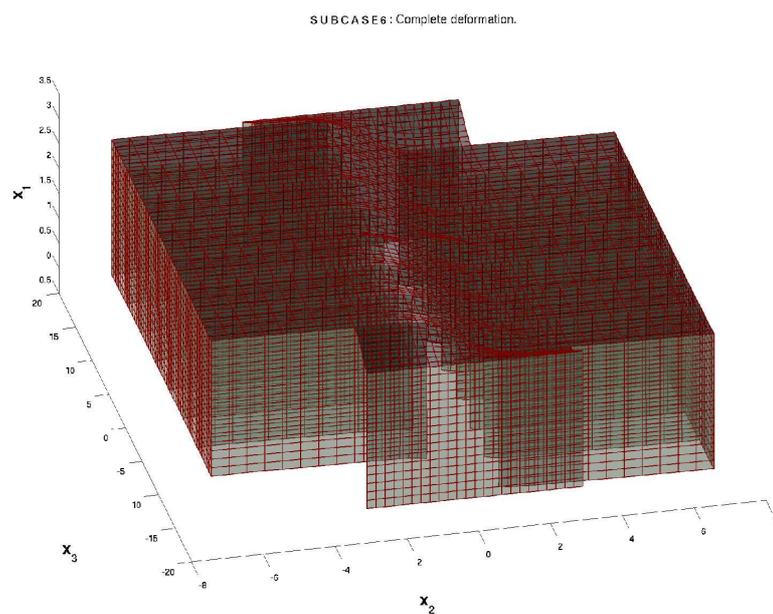


Figure III.21 Cellule en flexion sous effort tranchant V_2

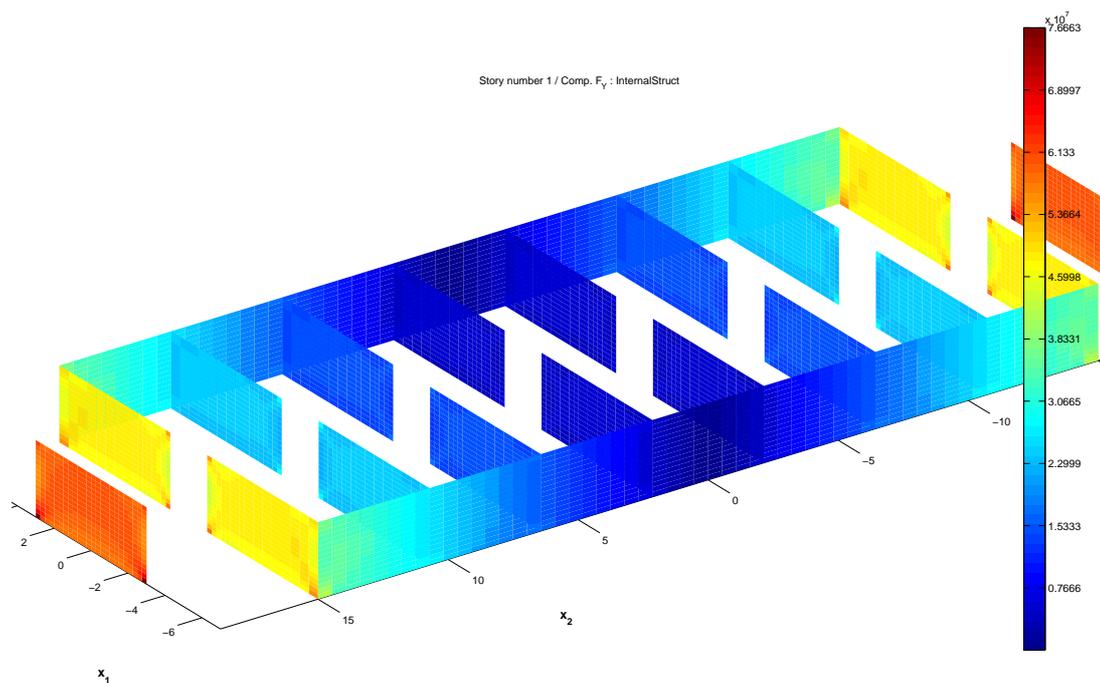


Figure III.22 1^{er} étage: légère perturbation des forces internes verticales aux pieds des murs dues aux effets de bord par encastrement.

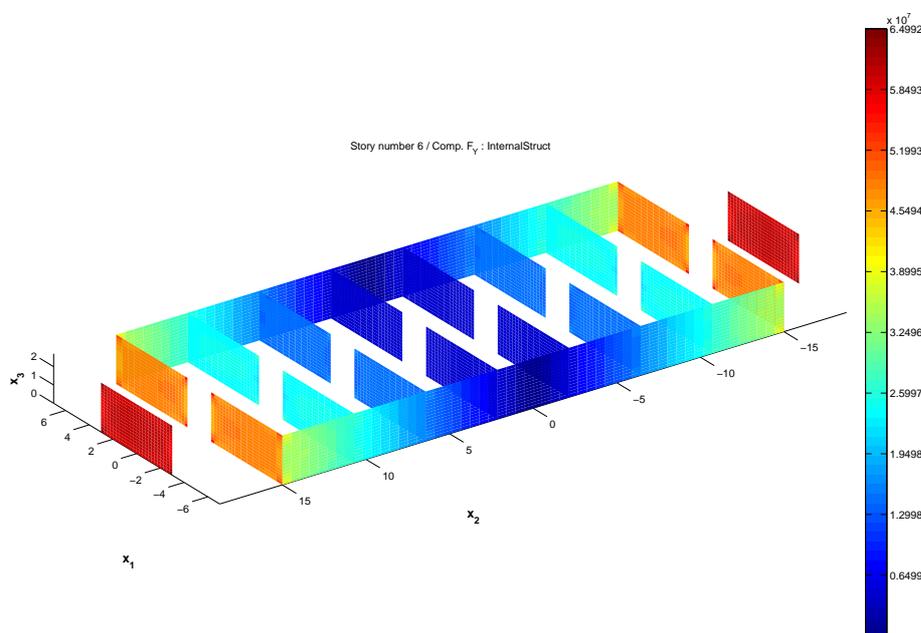


Figure III.23 6^{ème} étage: forces internes verticales dans les murs non perturbée.

III.5.2 Algorithme de validation des données de localisation

L'idée consiste à modéliser des tests sous sollicitation statique sur la structure de référence et à comparer la répartition d'efforts internes dans les éléments d'un de ses étages à celles obtenues par localisation de l'état équivalent du modèle mécanique réduit. Les résultats de ces tests de validation des données de localisation sont présentés en III.5.3. Les sollicitations appliquées à la structure de référence correspondent aux 6 déformations de base de poutre (6 tenseurs de la base \mathcal{B}_E définie en (II.59)). L'extrémité de la poutre équivalente correspond au toit du bâtiment, c'est donc par les nœuds de la partie correspondante du maillage que la structure est sollicitée. Les nœuds se trouvant sur le plan d'altitude minimale sont encastres.

Le test charge en mémoire le maillage de la structure de référence généré à l'aide du mailleur décrit dans l'annexe A.2. La structure est soumise à un des 6 chargements à valider qui sont imposés par des conditions cinématiques aux nœuds. On note $(T_1, T_2, T_3, R_1, R_2, R_3)$ les 6 degrés de liberté des nœuds de la zone de maillage de toit et (X_1, X_2, X_3) leurs coordonnées. Les réels U_0 et θ_0 sont des déplacement et rotation imposés. La Table III.7 récapitule les conditions cinématiques imposées:

Élongation	$T_1 = U_0$
Cisaillement par force suivant \mathbf{e}_2	$T_2 = U_0$
Cisaillement par force suivant \mathbf{e}_3	$T_3 = U_0$
Torsion	$T_2 = -X_3 \times \theta_0$, $T_3 = X_2 \times \theta_0$ $R_1 = \theta_0$
Flexion pure d'axe $G\mathbf{e}_2$	$T_1 = X_3 \times \theta_0$
Flexion pure d'axe $G\mathbf{e}_3$	$T_1 = -X_2 \times \theta_0$

Le calcul par éléments finis est exécuté par *MSC Nastran*. Ce dernier fournit par post-traitement les efforts internes dans les éléments de la structure qui sont stockés en mémoire. Avant de localiser les efforts internes dans un étage donné à partir des résultats issus de l'homogénéisation, des tables de correspondances sont dressées. Cette étape, numériquement assez coûteuse, a pour objectif d'identifier les nœuds et éléments du maillage de cellule utilisé dans la procédure d'homogénéisation avec ceux du maillage de la structure de référence pour un étage donné de géométrie identique à la cellule.

Pour terminer, l'algorithme compare les efforts internes des éléments de plaque dans le maillage de l'étage concerné de la structure de référence avec ceux obtenus par localisation de l'état macroscopique équivalent. Pour ce faire, on calcule le vecteur d'état macroscopique \mathbf{S}_E défini en II.4 pour chacune des sollicitations de la Table III.7. Les données de localisation sont les efforts internes dans les éléments du maillage de la Figure III.15 pour les éléments \mathbf{S}_E unitaires (base canonique de \mathbb{R}^6). Il suffit donc de multiplier ces répartitions d'efforts unitaires par les composantes de \mathbf{S}_E et de les sommer pour localiser

un état macroscopique donné. Le bâtiment a une grandeur $H = N \times h$, h étant la hauteur d'un étage et N leur nombre. Les composantes du vecteur d'état macroscopique \mathbf{S}_E pour les différents cas de chargement sont dans un étage $n \in \mathbb{N} < N$ donné:

Élongation	$E_{11} = U_0/L$
Cisaillement par force suivant \mathbf{e}_2	$\chi'_3 = \frac{3U_0}{L(L^2 + 3K_{66}/K_{22})} \sim \frac{3U_0}{L^3}$ $\chi_3 = \left((n - \frac{1}{2})h - L\right) \chi'_3$
Cisaillement par force suivant \mathbf{e}_3	$\chi'_2 = -\frac{3U_0}{L(L^2 + 3K_{55}/K_{33})} \sim -\frac{3U_0}{L^3}$ $\chi_2 = \left((n - \frac{1}{2})h - L\right) \chi'_2$
Torsion	$\chi_1 = \theta_0/L$
Flexion simple d'axe $G\mathbf{e}_2$	$\chi_2 = \theta_0/L$
Flexion simple d'axe $G\mathbf{e}_3$	$\chi_3 = \theta_0/L$

Les taux de courbure χ'_2 et χ'_3 sont donnés par l'expression (II.28). Ils sont utilisés à la place des distorsions Γ_{13} et Γ_{12} lors de la procédure d'homogénéisation, les données de localisation étant normées pour des dérivées de courbure unitaires.

III.5.3 Affichage des tests de validité

Les planches graphiques qui suivent comparent la répartition des forces et moments internes dans les éléments de plaque d'un étage donné du bâtiment pour les calculs statiques présentés en III.5.2 appliqués à la structure de référence et au modèle de poutre équivalent. Chaque planche contient 3 figures et expose les résultats relatifs à l'une des 5 forces ($F_X, F_Y, F_{XY}, Q_X, Q_Y$) ou des 3 moments (M_X, M_Y, M_{XY}) définis par la *Figure III.5*.

A chaque composante de force et moment interne et à chacun des 6 calculs de la *Table III.7* est associée une planche graphique scindée en 3 zones comme sur la *Figure III.24*.

La figure située en zone (2) expose la répartition de l'effort issu d'un des calculs sur la structure de référence explicités par la *Table III.7*.

La figure située dans la zone (3) présente la répartition de l'effort issu de la localisation de l'état de déformation du modèle de poutre équivalent soumis à un des calculs statiques macroscopiques. Les problèmes mécanique de la *Table III.7* entraînent des états de déformation dont les composantes du vecteur d'état \mathbf{S}_E sont données dans la table *Table III.8*

L'échelle de couleur des efforts indiquée sur la droite des figures des zones (2) et (3) est la même. Ses bornes sont les valeurs extrêmes des deux répartitions d'efforts:

$$\text{Échelle} = \left[\min_k \{R_{kl}, R_{kl}^{\text{LOC}}\}, \max_k \{R_{kl}, R_{kl}^{\text{LOC}}\} \right]$$

La figure dans la zone (1) indique le pourcentage d'erreur de l'effort localisé par rapport à l'intensité de l'effort dans la structure de référence. On note R_{kl} l'intensité de l'effort interne l pour un élément k avec:

$$\{R_{kl}, l \in \mathbb{N} < 8\} = \{F_X, F_Y, F_{XY}, M_X, M_Y, M_{XY}, Q_X, Q_Y\}^{(k)}$$

dans les éléments de l'étage issu de la structure de référence. La table de localisation R_{kl}^{LOC} est donc un tableau ayant 8 colonnes et autant de lignes que d'éléments dans le maillage d'un étage. Le pourcentage d'écart \mathcal{E}_{kl} pour un élément k donné est défini (sans sommation indicielle) par:

$$\mathcal{E}_{kl} = 100 \times \left| \frac{R_{kl} - R_{kl}^{\text{LOC}}}{R_{kl}} \right|$$

Néanmoins, on pourra constater sur les planches qui vont suivre que la précision des données de localisation n'est plus valable pour des intensités d'effort trop faibles. Lorsque les R_{kl} et R_{kl}^{LOC} sont trop faibles par rapport à l'intensité maximale d'effort de l'étage, on considère alors qu'il s'agit de bruit numérique vis-à-vis des données de localisation. Ce filtrage par troncature s'exprime par la condition suivante:

```

POUR k
  SI  $|R_{kl}| < 10^{-4} \max_k |R_{kl}|$  ET  $|R_{kl}^{\text{LOC}}| < 10^{-4} \max_k |R_{kl}|$  ALORS
     $\mathcal{E}_{kl} = 0$ 
  FIN SI
FIN POUR

```

L'échelle de couleur utilisée mesure des niveaux d'erreur de 0 à 100%. Les niveaux d'erreur supérieurs à 100% sont marqués par des zones en noir. Les zones de faibles sollicitations sont donc souvent accompagnées par un niveau d'erreur important et marquée par des zones noires.

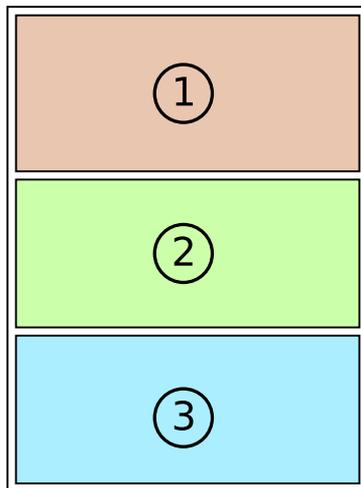


Figure III.24 (1) Erreur – (2) structure de référence – (3) localisation

Les planches graphiques exposées ci-après ne traitent que les efforts internes ayant atteint un seuil significatif. Ainsi certaines composantes ou vues extérieures (vues avec plancher)

ne seront pas présentées. La *Table III.9* jusqu'à la *Table III.14* donnent 4 informations sur la répartition de chacune des forces et moments internes ainsi que sur la répartition du niveau d'erreur dont les planches graphiques font l'objet. La première information est le taux d'erreur moyen tronqué $E_\eta\{\cdot\}$, c'est-à-dire la moyenne ne prenant en compte que les éléments dont la valeur des efforts internes est supérieure à une fraction η de l'effort maximal:

$$E_\eta\{\mathcal{E}_{kl}\} = \frac{1}{N_{\text{elt}}} \sum_k \mathcal{E}_{kl} \times H_\eta(|R_{kl}|)$$

où N_{elt} est le nombre total d'éléments pris en compte et la fonction H_η est définie sur \mathbb{R}^+ par:

$$H_\eta : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq \max_k |R_{kl}| \times \eta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$N_{\text{elt}} = \sum_k H_\eta(|R_{kl}|)$$

L'autre information est \mathcal{E}_l^{\max} le taux d'erreur de localisation au point où la valeur absolue de l'effort $|R_{kl}|$ est maximale:

$$\mathcal{E}_l^{\max} = \mathcal{E}_{Kl} \quad \text{avec} \quad R_{Kl} = \max_k |R_{kl}|$$

Il est finalement donné la moyenne $E(R_{kl})$ de l'effort sur l'ensemble des éléments et sa valeur absolue maximale $\max |R_{kl}|$.

Structure en traction – page 97

Le modèle équivalent réduit de la structure est particulièrement précis lorsque la structure est sollicitée en traction. Ceci est dû à la forme du déplacement macroscopique imposé qui est "proche" du déplacement complet $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{\text{red}}$. Ainsi pour les forces de membrane F_X et F_Y illustrées de la *Figure III.25* à la *Figure III.27*, on observe un niveau d'erreur moyen de moins de 0.5%. Pour les forces de cisaillement de membrane (composante F_{XY}) on observe des niveaux d'erreur faibles (couleur bleu profond) dans les zones sollicitées. Le cisaillement intervient particulièrement aux intersections entre les murs et entre les murs et le plancher.

<i>Table III.9</i> $U_0 = 5.10^{-3} m$								
	F_X	F_Y	F_{XY}	M_X	M_Y	M_{XY}	Q_X	Q_Y
$E_{10\%}\{\mathcal{E}_{kl}\}(\%)$	0.39	0.14	5.99	7.89	1.39	2.58	0.53	1.62
$\mathcal{E}_l^{\max}(\%)$	0.00	0.31	0.02	0.31	1.49	1.83	0.05	1.00
$E(R_{kl})$	5.6e4	5.0e5	1.3e4	10.0e1	8.7e1	2.5e1	2.7e2	3.1e2
$\max R_{kl} $	1.4e5	9.7e5	1.3e5	1.1e3	4.0e3	5.9e2	6.1e3	2.8e4

Structure en flexion – page 102

Le niveau de précision de localisation des forces de membrane F_X , F_Y , F_{XY} est aussi bon en flexion qu'en traction. Il s'agit d'une sollicitation mécanique dont le déplacement macroscopique est également proche du déplacement complet $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{\text{red}}$ dans la cellule. En plus des forces de membrane, on observe du moment fléchissant d'axe vertical dans les murs (moment M_X dans les *Figure III.35*, *Figure III.43*) qui présente une intensité élevée dans les coins des murs extérieurs. Ce moment fléchissant est dû aux efforts tranchants (composante Q_X , *Figure III.37* et *Figure III.46*) généré par les angles extérieurs. On observe un effet similaire plus faible au niveau de l'intersection avec les murs intérieurs. Comme l'illustre la *Figure III.44*, la flexion autour de l'axe (\mathbf{e}_3) crée en outre des moments de flexion dans le plancher au lieu des extrémités des murs internes. Ces moments sont néanmoins largement surestimés par la localisation. Cette même flexion d'ensemble crée des couples de cisaillement en haut et en bas des murs extérieurs (composante M_{XY} représentée sur la *Figure III.45*) sous l'effet local de raidissement des murs intérieurs.

Table III.10 $\chi_2 = \frac{\theta_0}{L} = 5.10^{-4} m^{-1}$								
	F_X	F_Y	F_{XY}	M_X	M_Y	M_{XY}	Q_X	Q_Y
$E_{10\%}\{\mathcal{E}_{kl}\}$	0.13	0.09	1.97	12.55	4.01	3.38	0.80	0.57
\mathcal{E}_l^{\max}	0.09	0.06	0.73	9.55	1.48	4.80	0.08	1.04
$E(R_{kl})$	1.6e6	1.6e7	4.4e5	3.6e3	4.7e3	8.9e2	9.1e3	9.7e3
$\max R_{kl} $	8.2e6	5.4e7	5.9e6	5.8e4	1.9e5	3.1e4	2.8e5	1.3e6

Table III.11 $\chi_3 = \frac{\theta_0}{L} = 5.10^{-4} m^{-1}$								
	F_X	F_Y	F_{XY}	M_X	M_Y	M_{XY}	Q_X	Q_Y
$E_{10\%}\{\mathcal{E}_{kl}\}$	1.56	1.02	6.31	32.6	7.38	59.2	15.2	0.60
\mathcal{E}_l^{\max}	4.73	0.07	0.11	0.12	1.20	2.68	0.15	0.98
$E(R_{kl})$	7.6e5	6.7e6	1.8e5	2.0e3	1.9e3	6.3e2	5.5e3	6.3e3
$\max R_{kl} $	2.1e6	1.9e7	2.5e6	2.5e4	8.4e4	1.2e4	1.3e5	6.0e5

Structure en cisaillement par une flèche imposée

- Cisaillement suivant \mathbf{e}_2 – page 119
- Cisaillement suivant \mathbf{e}_3 – page 127

Les tests de validation de localisation des déformations macroscopiques de flexion par flèche imposée pour le bâtiment mettent en lumière les limites de la méthode pour ce type de sollicitation. L'un des principaux problèmes est l'erreur commise sur le déplacement transverse macroscopique. La partie antipériodique de cette composante du déplacement ne peut être corrigée au cours de l'étape 2 où sont imposées des conditions de périodicité.

Une source d'erreur est par exemple due au fait que les champs de déplacement (II.58) négligent le gauchissement lors de l'étape 1 du processus d'homogénéisation. Une autre vient des conditions d'antipériodicité appliquées sur la composante du déplacement dans la direction de la flèche. Néanmoins, même si ces conditions ne sont vérifiées que pour des cellules ayant un plan de symétrie transverse, ne pas les appliquer mène à des erreurs importantes pour les cellules ayant des profils de coupe transverses non connexes ou "profils ouverts" comme en montre par exemple le plan *Figure III.13* du bâtiment. L'efficacité de la méthode dépend donc beaucoup de la géométrie de cellule. Ainsi pour le milieu périodique à cellules cubiques étudié en III.4.3, l'annexe A.3 donne les tests de validité de localisation ainsi que table donnant un bilan des niveaux d'erreur. Le niveau d'erreur est faible pour les forces internes qui sont les plus sollicitées et assez bas pour les moments. De même, le niveau d'erreur pour le bâtiment mis en flexion par une flèche imposée dans la direction \mathbf{e}_2 présente des niveaux d'erreur très raisonnables. Par contre pour une flèche imposée dans la direction \mathbf{e}_3 le niveau d'erreur est beaucoup plus élevé.

Concernant la répartition des efforts, on observe que le cisaillement par flèche imposée suivant \mathbf{e}_2 est caractérisé par des concentrations d'efforts aux angles des murs intérieurs de plancher. La répartition des forces de membrane F_X , F_Y et F_{XY} (*Figure III.47*, *Figure III.48*, *Figure III.49*) illustre cette répartition. On observe cette concentration dans le plancher sous forme de moments fléchissants (composantes M_X et M_Y dans les *Figure III.50* et *Figure III.51*) et leurs efforts tranchants associés (composantes Q_X et Q_Y dans les *Figure III.53* et *Figure III.54*) ainsi que par des couples de torsion (composante M_{XY} dans la *Figure III.52*). Lorsque la flèche est imposée dans la direction \mathbf{e}_3 , les forces et moments internes sont distribués de façon similaire à un facteur multiplicatif près qui varie suivant les composantes.

Les efforts obtenus par localisation pour le calcul de cisaillement par flèche imposée suivant \mathbf{e}_3 sont très largement sous-évalués. La distribution des forces de membrane présentée dans les *Figure III.55*, *Figure III.56* et *Figure III.57* varie de manière similaire entre les deux modèles avec un facteur de proportionnalité homogène qui se traduit par un niveau d'erreur uniforme. Ce décalage est dû au fait que la structure est très particulière et ne comprend aucun raidisseur dans le plan moyen en dehors des planchers.

<i>Table VIII.2</i> Flèche suivant \mathbf{e}_2 $U_0 = 5.10^{-3} m$								
	F_X	F_Y	F_{XY}	M_X	M_Y	M_{XY}	Q_X	Q_Y
$E_{10\%}\{\mathcal{E}_{kl}\}$	16.2	22.6	15.2	7.09	5.37	9.83	10.3	11.3
\mathcal{E}_l^{\max}	6.88	6.21	5.34	2.72	2.79	2.81	2.66	2.79
$E(R_{kl})$	9.8e3	5.7e4	2.5e4	7.9e2	6.2e2	2.5e2	1.2e3	8.3e2
$\max R_{kl} $	7.7e4	4.2e5	2.0e5	3.5e4	2.3e4	9.5e3	5.1e4	2.3e4

	F_X	F_Y	F_{XY}	M_X	M_Y	M_{XY}	Q_X	Q_Y
$E_{10\%}\{\mathcal{E}_{kl}\}$	40.5	52.2	22.4	150	169	149	103	80.7
\mathcal{E}_l^{\max}	22.9	19.1	27.3	208	191	195	12.3	27.3
$E(R_{kl})$	8.7e3	7.5e4	4.5e4	3.4e2	1.6e3	8.8e1	1.5e2	2.2e3
$\max R_{kl} $	5.6e4	3.0e5	2.1e5	3.8e3	1.9e4	2.5e3	6.4e3	7.6e4

Structure en torsion – page 132

Les forces et moments internes sont très concentrés et principalement localisés dans les angles entre les murs et le plancher. Comme on pouvait s'y attendre, la distribution des efforts est à symétrie polaire en croissant du centre vers l'extérieur. Le niveau d'erreur est assez bas dans l'ensemble. Cependant, il est nécessaire d'avoir un maillage suffisamment raffiné pour obtenir ce taux d'erreur de localisation.

	F_X	F_Y	F_{XY}	M_X	M_Y	M_{XY}	Q_X	Q_Y
$E_{10\%}\{\mathcal{E}_{kl}\}$	13.0	34.5	14.9	7.72	7.33	4.89	7.18	11.5
\mathcal{E}_l^{\max}	4.19	2.02	6.96	7.60	7.38	6.98	7.51	13.4
$E(R_{kl})$	3.1e5	1.0e6	2.8e6	4.2e4	5.4e4	1.9e4	6.0e4	8.7e4
$\max R_{kl} $	7.0e6	4.0e7	1.8e7	3.1e6	2.2e6	8.8e5	4.6e6	2.9e6

III.6 Conclusions

Ce chapitre a présenté la mise en œuvre numérique de la méthode d'homogénéisation établie en II.4 ainsi que son illustration pour un bâtiment à plusieurs étages.

La section III.3 présente notamment de quelle manière les raideurs effectives de poutre sont calculées par équivalence entre l'énergie de déformation élastique d'une cellule périodique du milieu avec cellule du segment de poutre macroscopiquement équivalent. Les raideurs de poutre sont alors obtenues par identification. Cette approche permet d'intégrer l'intégralité de l'état de déformation local dans le comportement mécanique macroscopique.

La structure et les étapes du processus algorithmique présentés en III.4 mettent en lumière une architecture modulaire et souple. L'application du processus à un tube creux fournit d'une part une validation et permet en outre de vérifier dans le cas du cisaillement par force

transverse l'écart entre un calcul élastique tridimensionnel et la théorie de la résistance des matériaux pour les tubes minces.

Les propriétés équivalentes d'un immeuble d'habitation standard de 12 étages sont estimées en III.5. On montre par des tests de validation numériques reposant sur un calcul par éléments finis pour une modélisation tridimensionnelle du bâtiment que le calcul de localisation et les propriétés effectives qui en découlent sont très probants lorsque la structure est sollicitée en traction-compression et en flexion. La géométrie de la structure étant très particulière et finalement assez éloignée de celle d'une poutre, on constate un écart important suivant l'un des axes de cisaillement. Cette méthode permet néanmoins d'identifier au mieux les propriétés de poutre équivalentes, tout en sachant que certains milieux à périodicité unidimensionnelle ont une mécanique interne très éloignée de celle d'une poutre homogène.

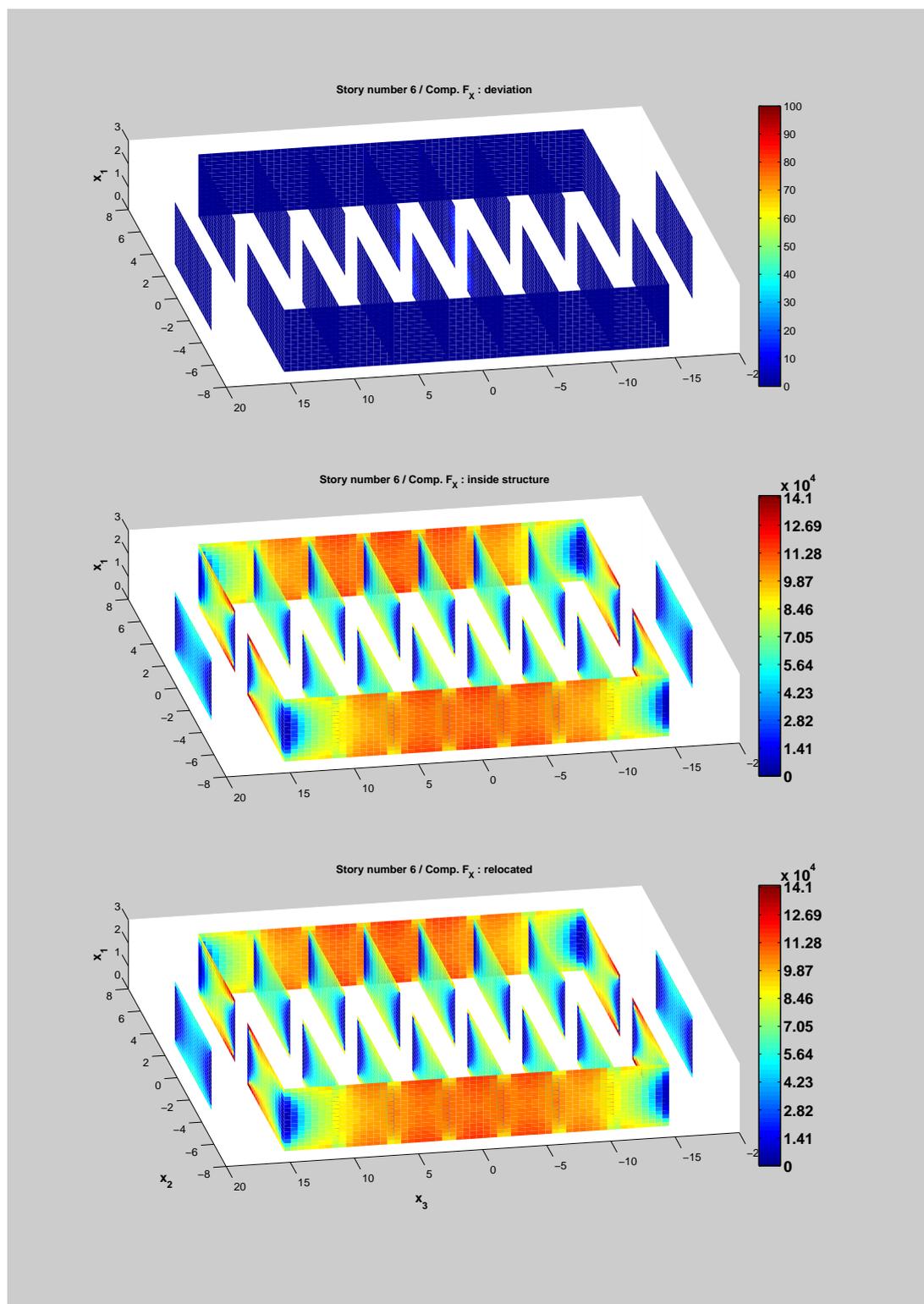


Figure III.25 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante F_x des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité en traction ($\mathbf{E}(x) = E_{11}\hat{\mathbf{E}}_1$).

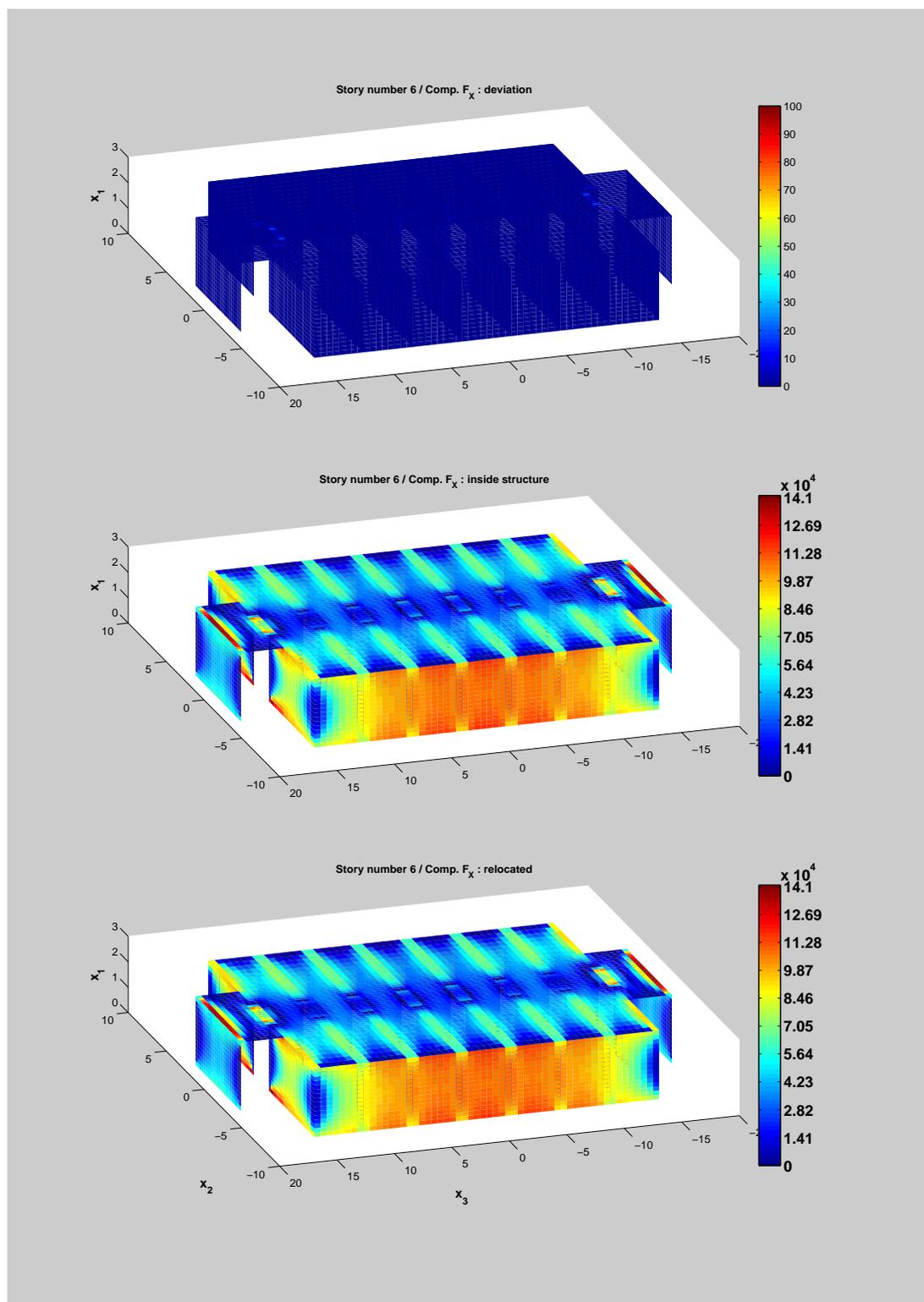


Figure III.26 Planche comparative (vue extérieure) des résultats de localisation de la composante F_x des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité en traction ($\mathbf{E}(x) = E_{11}\hat{\mathbf{E}}_1$).

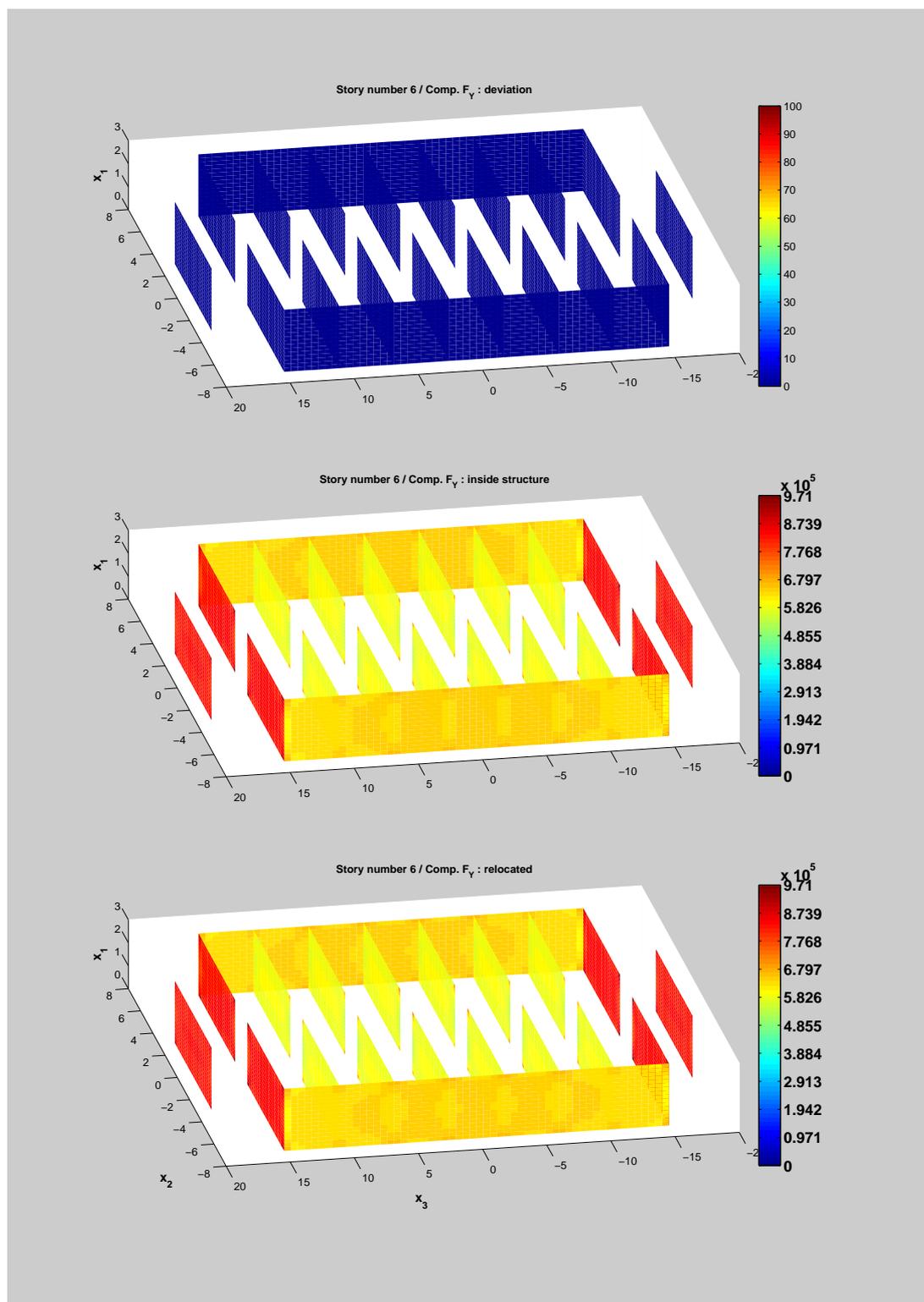


Figure III.27 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante F_Y des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité en traction ($\mathbf{E}(x) = E_{11}\hat{\mathbf{E}}_1$).

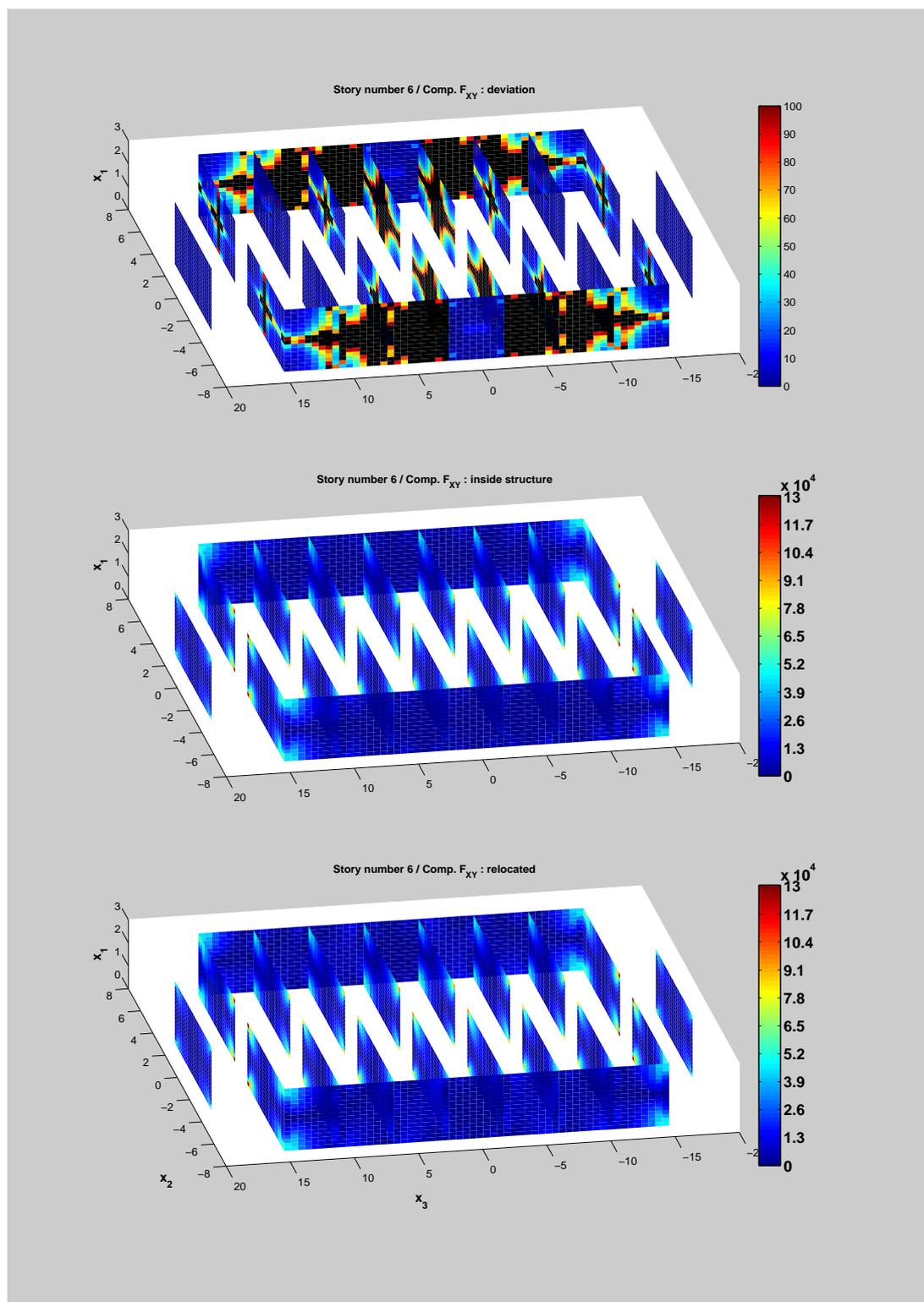


Figure III.28 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante F_{XY} des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité en traction ($\mathbf{E}(x) = E_{11}\hat{\mathbf{E}}_1$).

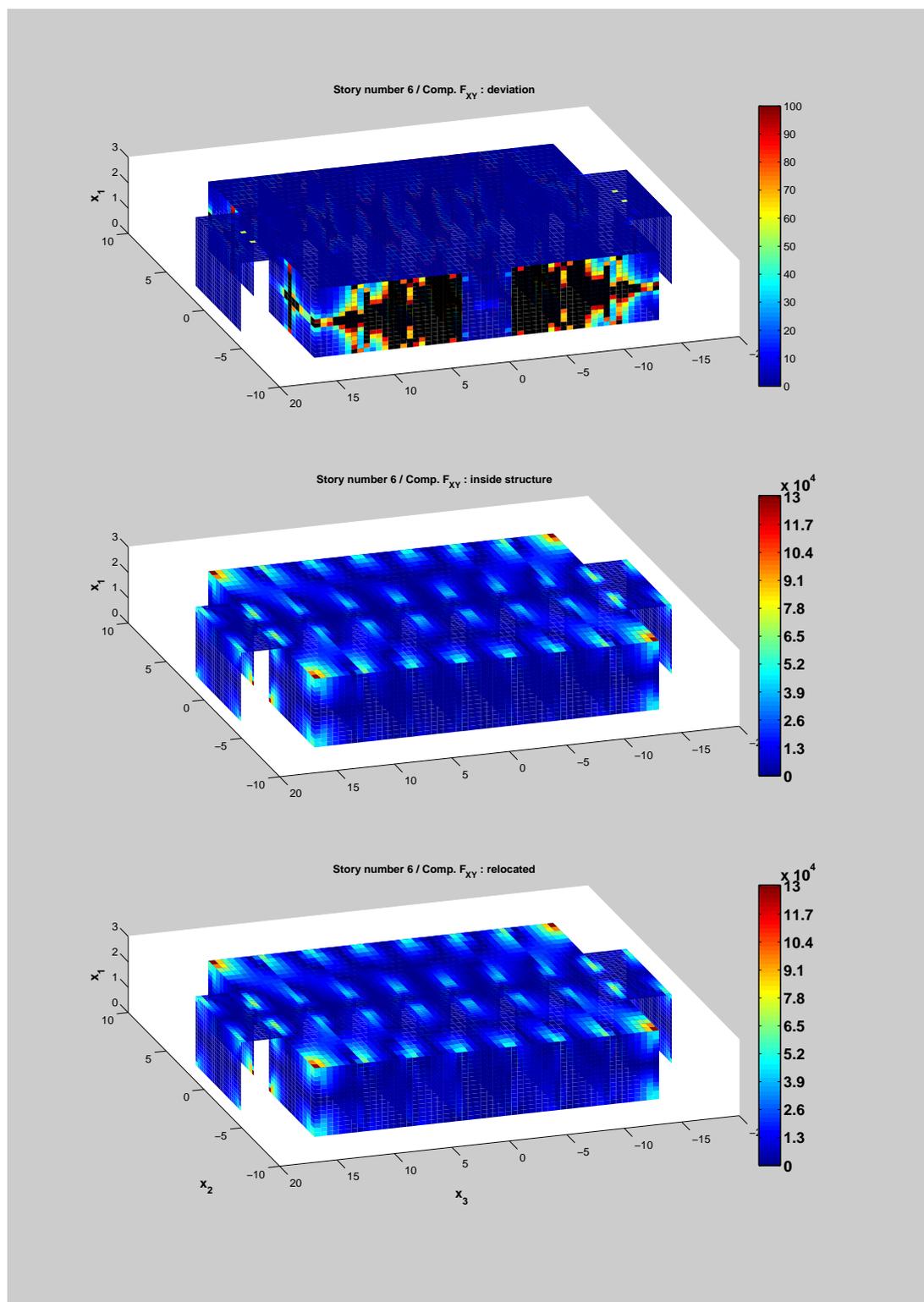


Figure III.29 Planche comparative (vue extérieure) des résultats de localisation de la composante F_{XY} des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité en traction ($\mathbf{E}(x) = E_{11}\hat{\mathbf{E}}_1$).

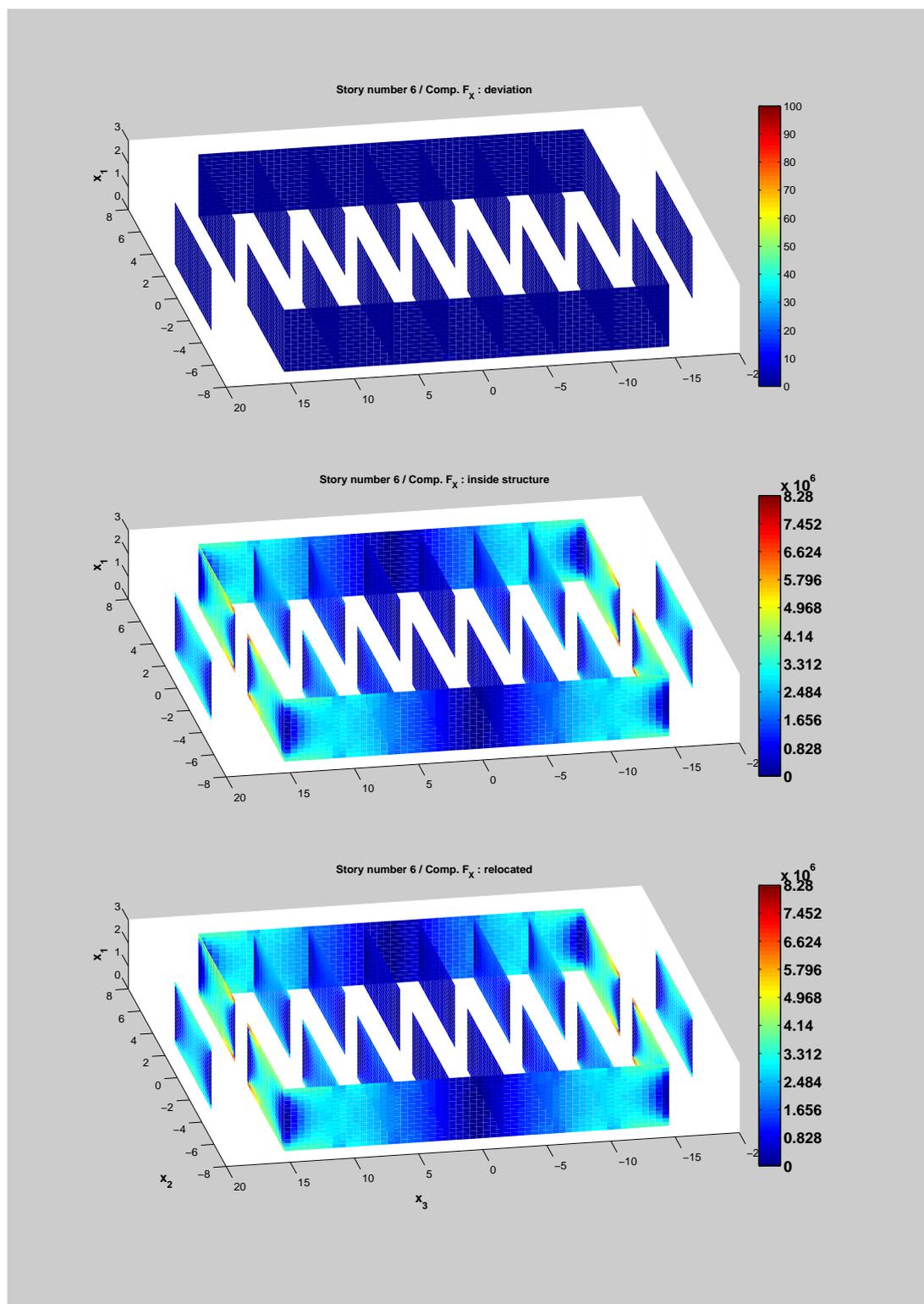


Figure III.30 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante F_x des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité en **flexion** autour de l'axe (Oe_2) ($\tilde{\mathbf{E}}(x) = \chi_2/\chi_0 \tilde{\mathbf{E}}_5$).

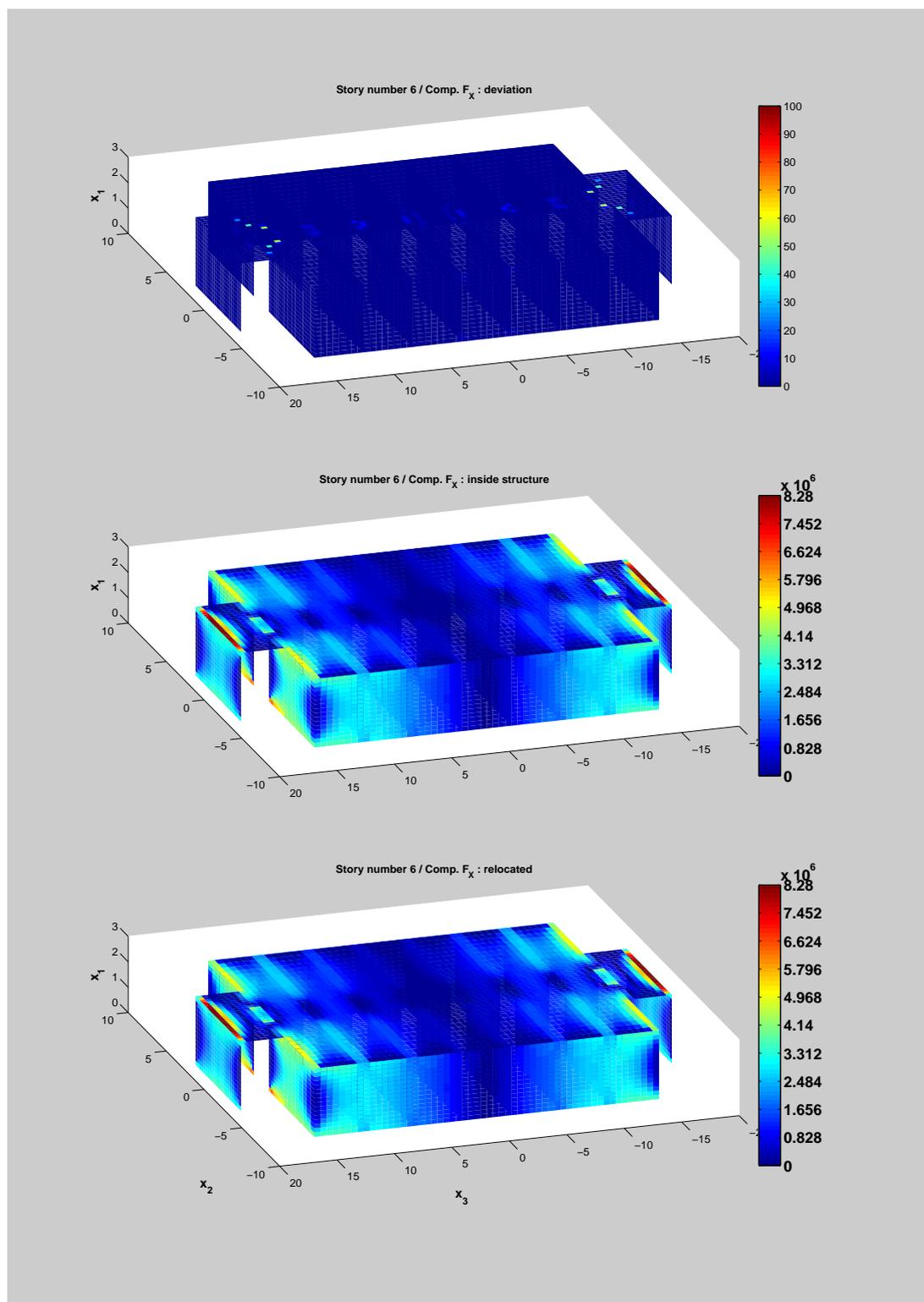


Figure III.31 Planche comparative (vue extérieure) des résultats de localisation de la composante F_x des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité en **flexion** autour de l'axe (Oe_2) ($\mathbf{E}(x) = \chi_2/\chi_0 \tilde{\mathbf{E}}_5$).

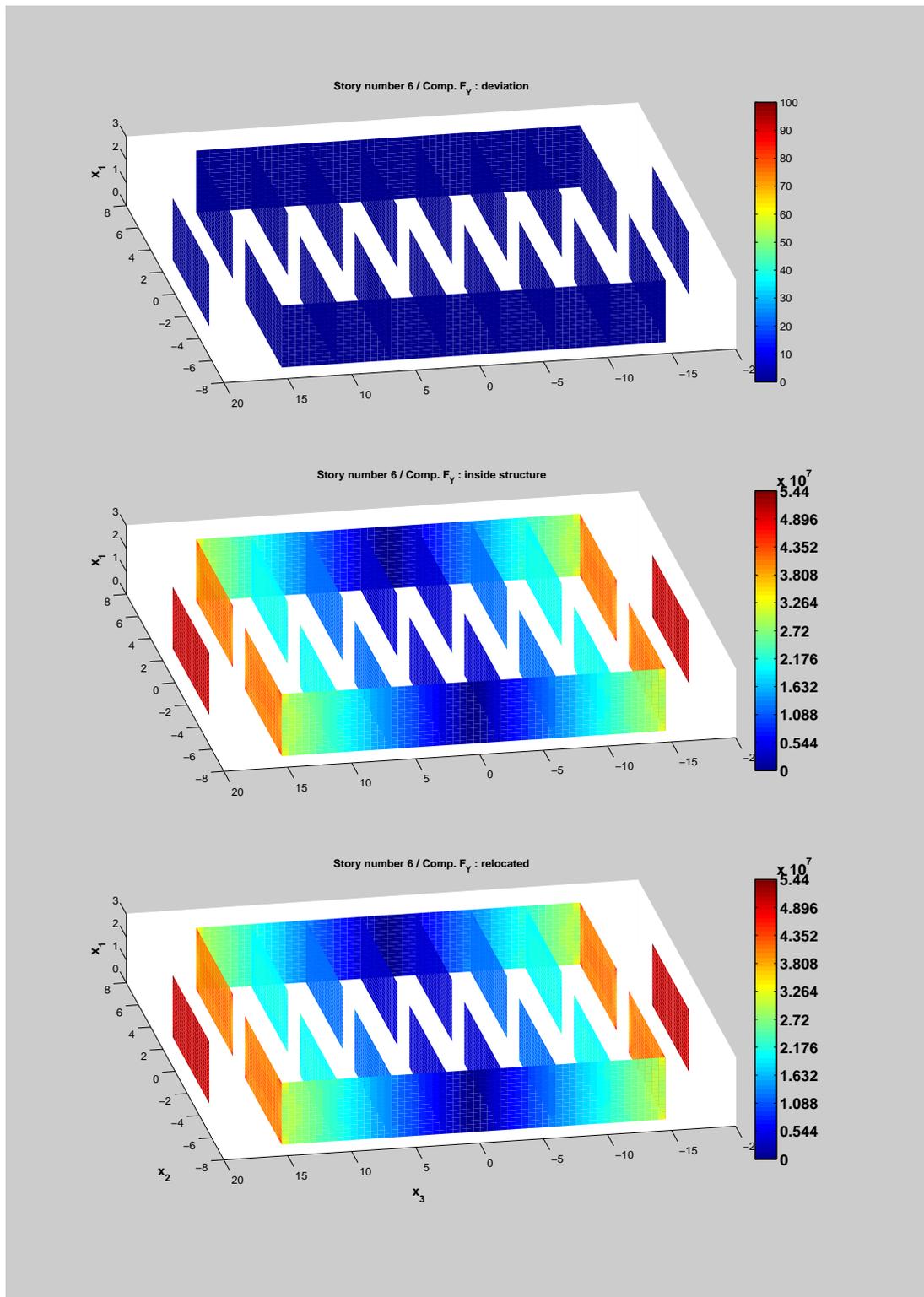


Figure III.32 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante F_Y des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité en **flexion** autour de l'axe (Oe_2) ($\mathbf{E}(x) = \chi_2/\chi_0 \tilde{\mathbf{E}}_5$).

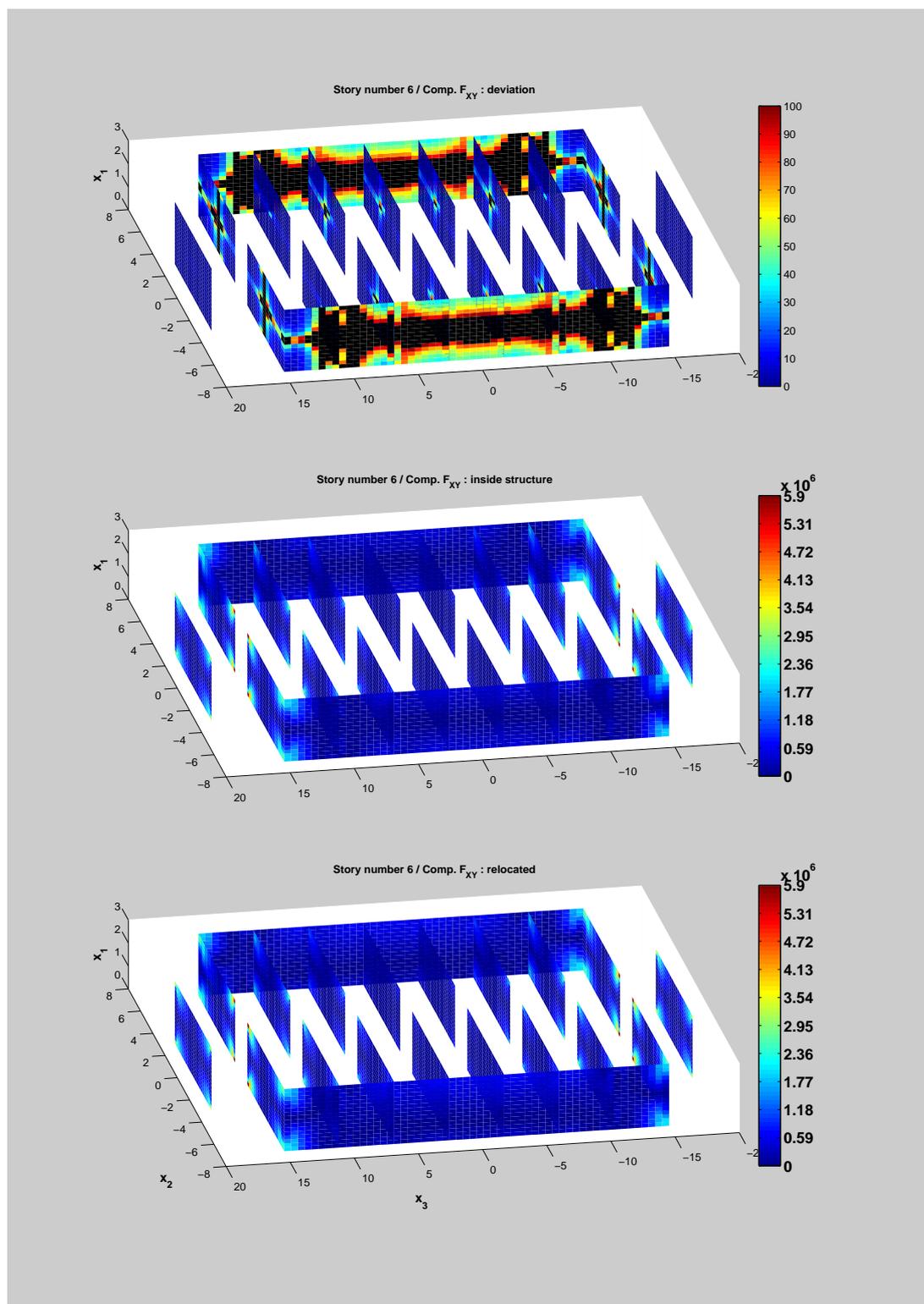


Figure III.33 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante F_{XY} des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité en **flexion** autour de l'axe (Oe_2) ($\mathbf{E}(x) = \chi_2/\chi_0 \tilde{\mathbf{E}}_5$).

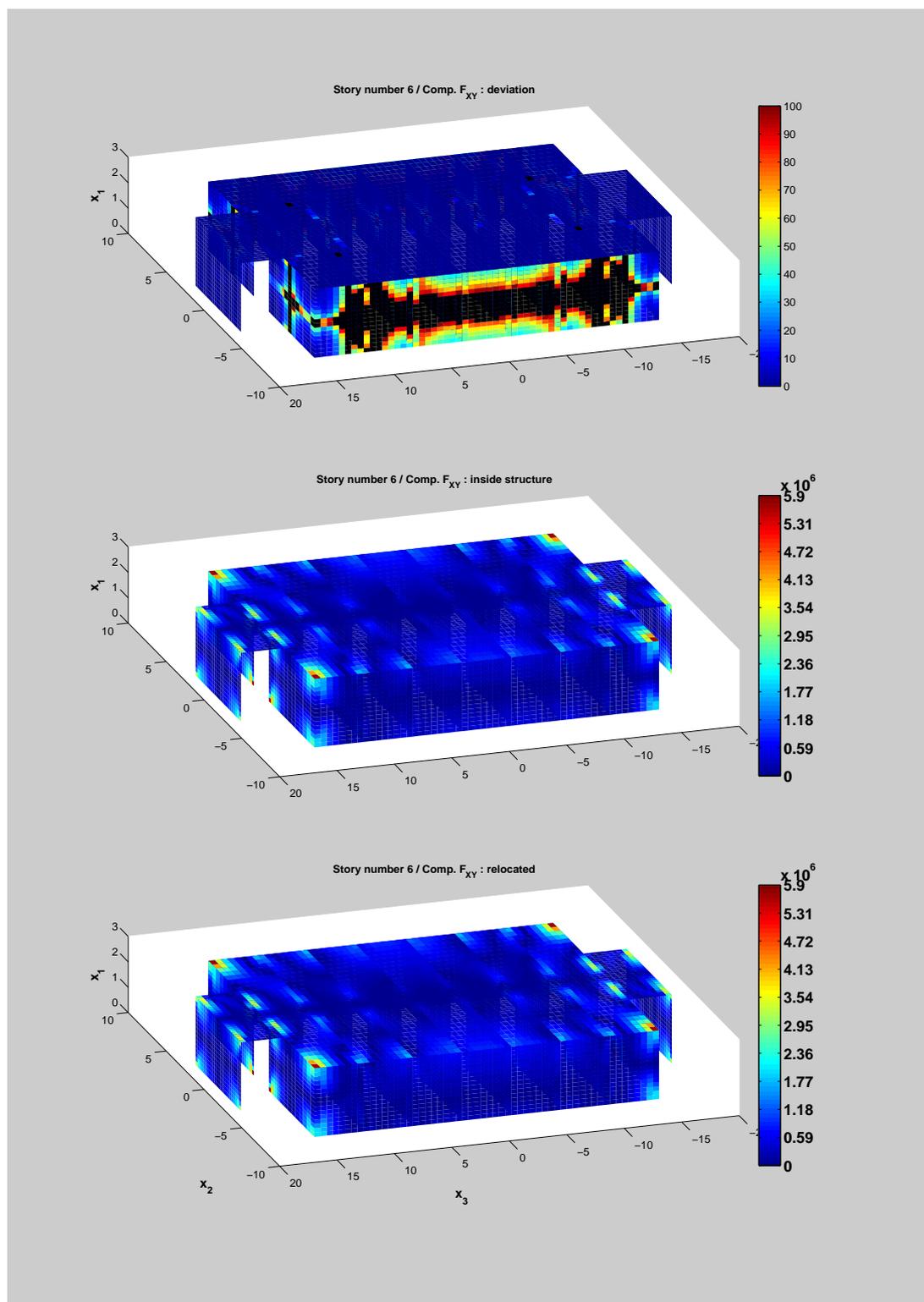


Figure III.34 Planche comparative (vue extérieure) des résultats de localisation de la composante F_{XY} des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité en **flexion** autour de l'axe (Oe_2) ($\mathbf{E}(x) = \chi_2/\chi_0 \tilde{\mathbf{E}}_5$).

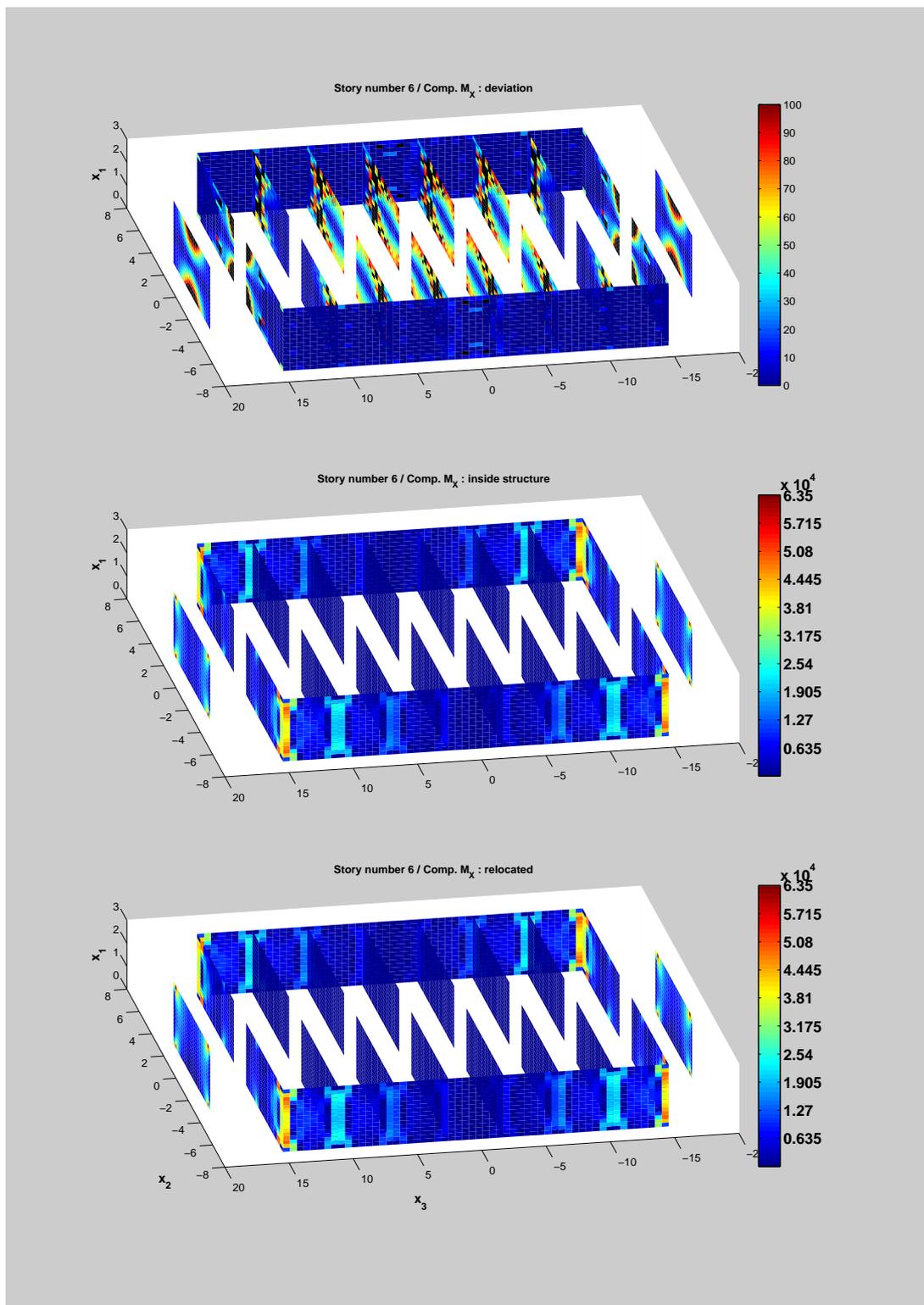


Figure III.35 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante M_x des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité en **flexion** autour de l'axe (Oe_2) ($\mathbf{E}(x) = \chi_2/\chi_0 \tilde{\mathbf{E}}_5$).

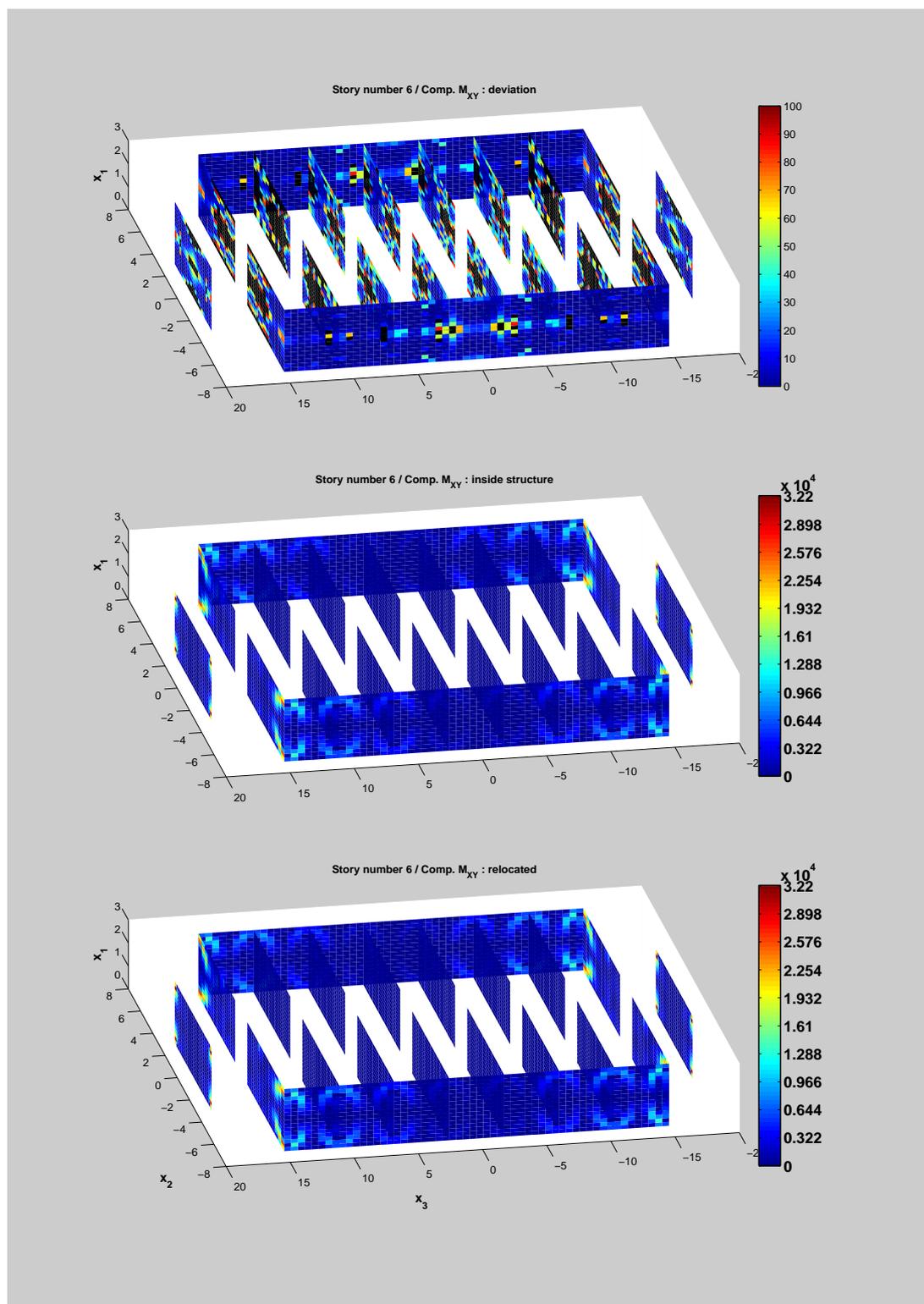


Figure III.36 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante M_{XY} des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité en **flexion** autour de l'axe (Oe_2) ($\mathbf{E}(x) = \chi_2/\chi_0 \tilde{\mathbf{E}}_5$).

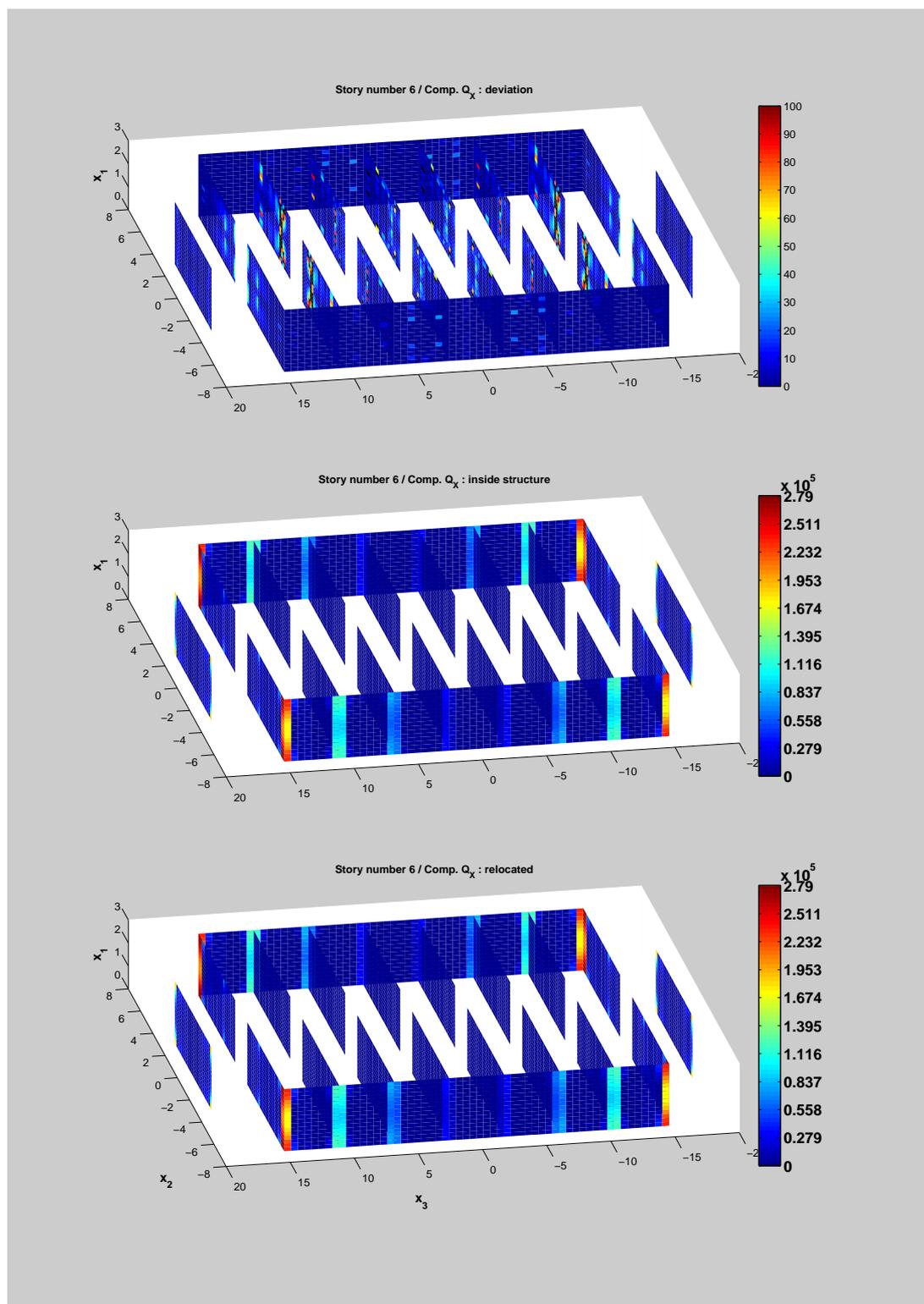


Figure III.37 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante Q_x des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité en flexion autour de l'axe (Oe_2) ($\mathbf{E}(x) = \chi_2/\chi_0 \tilde{\mathbf{E}}_5$).

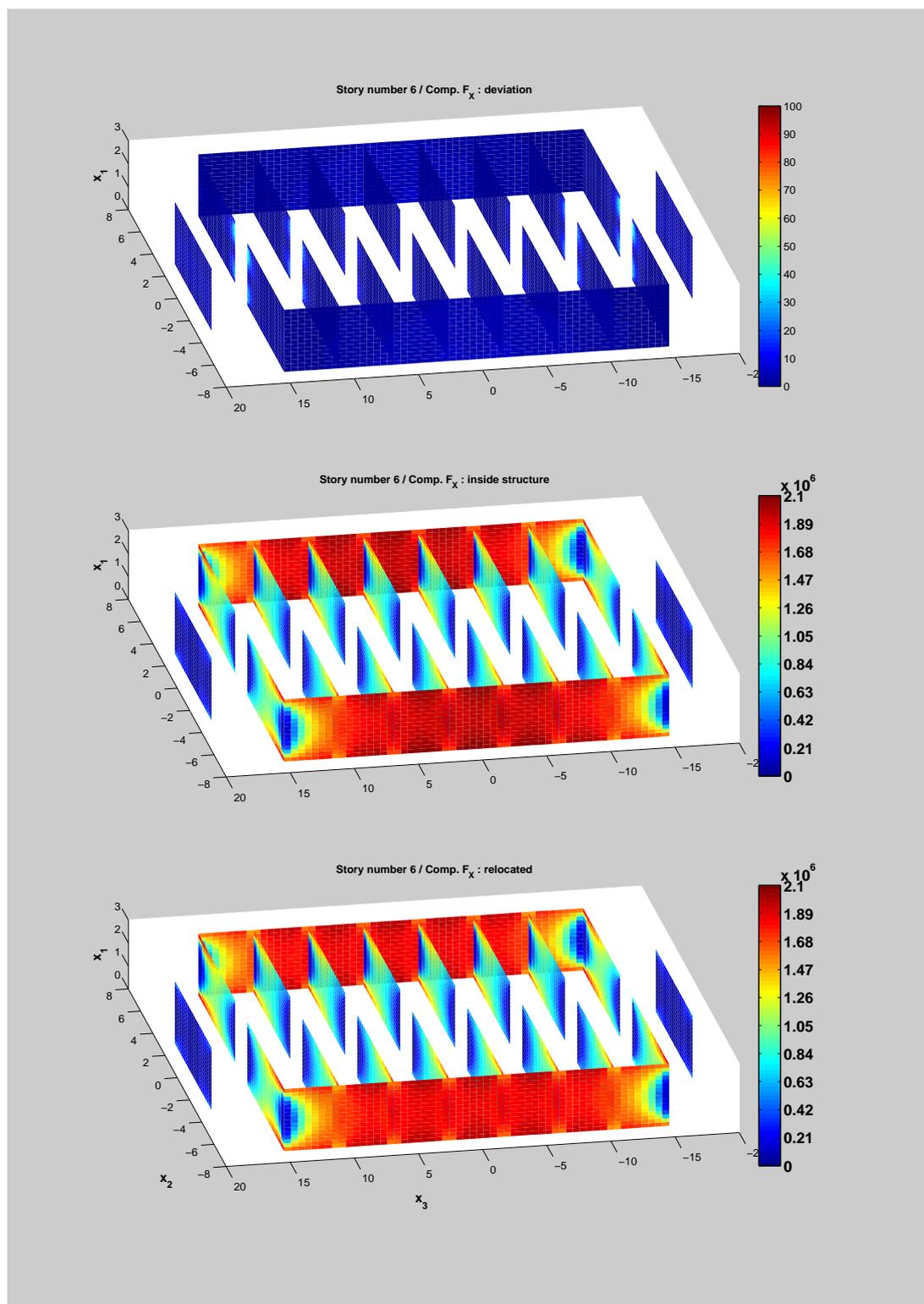


Figure III.38 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante F_x des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité en **flexion** autour de l'axe (Oe_3) ($\mathbf{E}(x) = \chi_3/\chi_0 \tilde{\mathbf{E}}_6$).

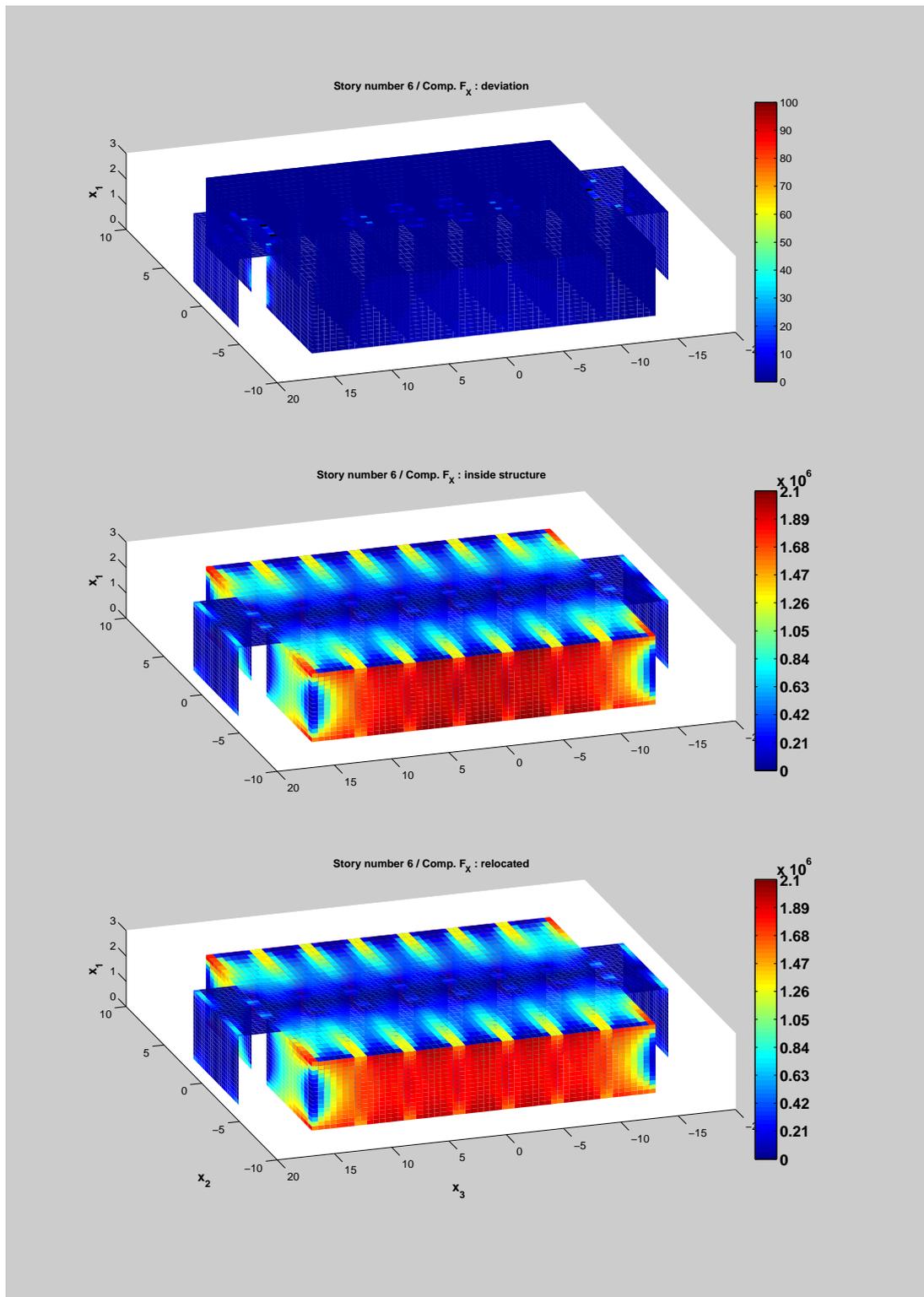


Figure III.39 Planche comparative (vue extérieure) des résultats de localisation de la composante F_x des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité en **flexion** autour de l'axe (Oe_3) ($\mathbf{E}(x) = \chi_3/\chi_0 \tilde{\mathbf{E}}_6$).

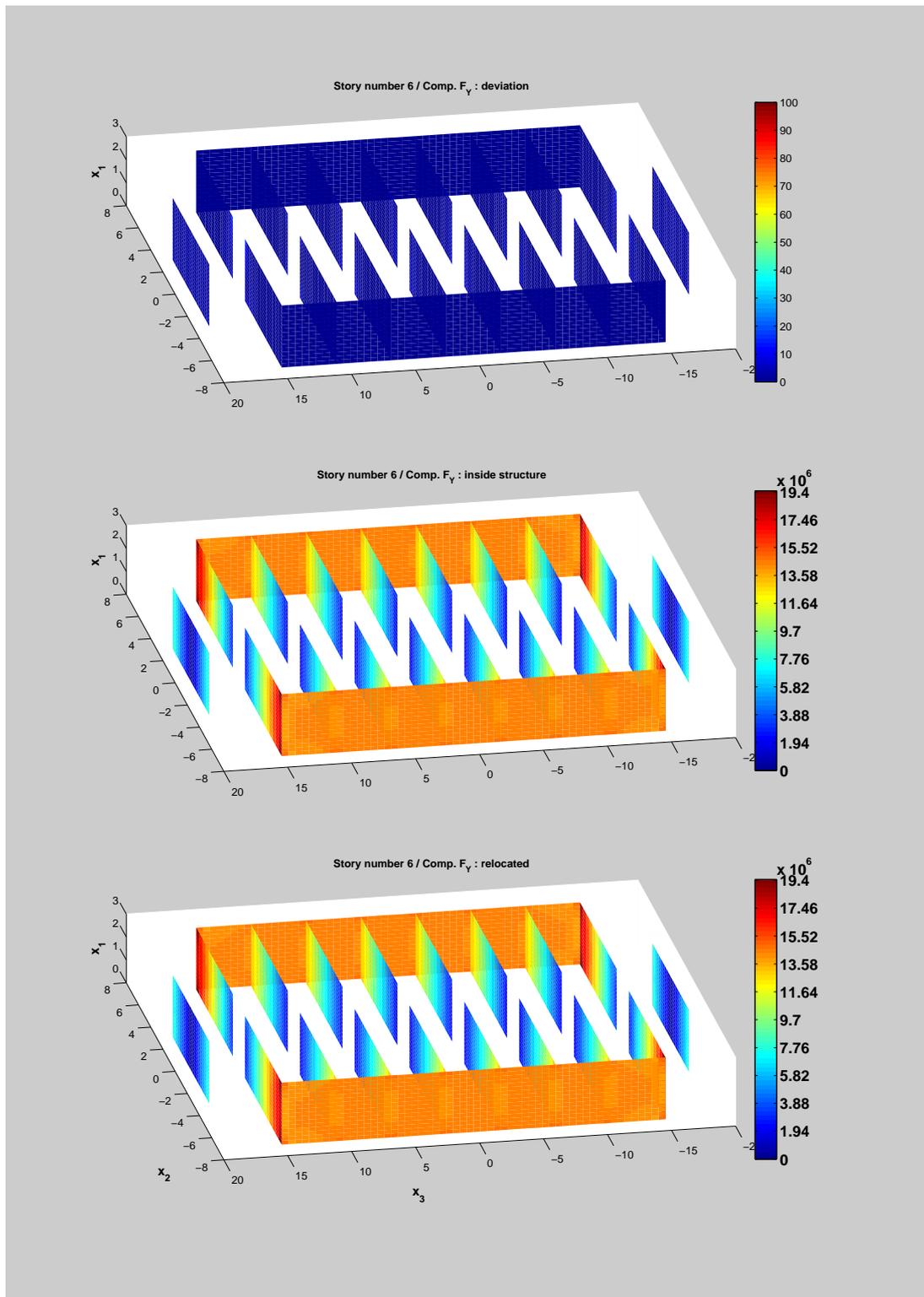


Figure III.40 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante F_Y des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité en **flexion** autour de l'axe (Oe_3) ($\mathbf{E}(x) = \chi_3/\chi_0 \tilde{\mathbf{E}}_6$).

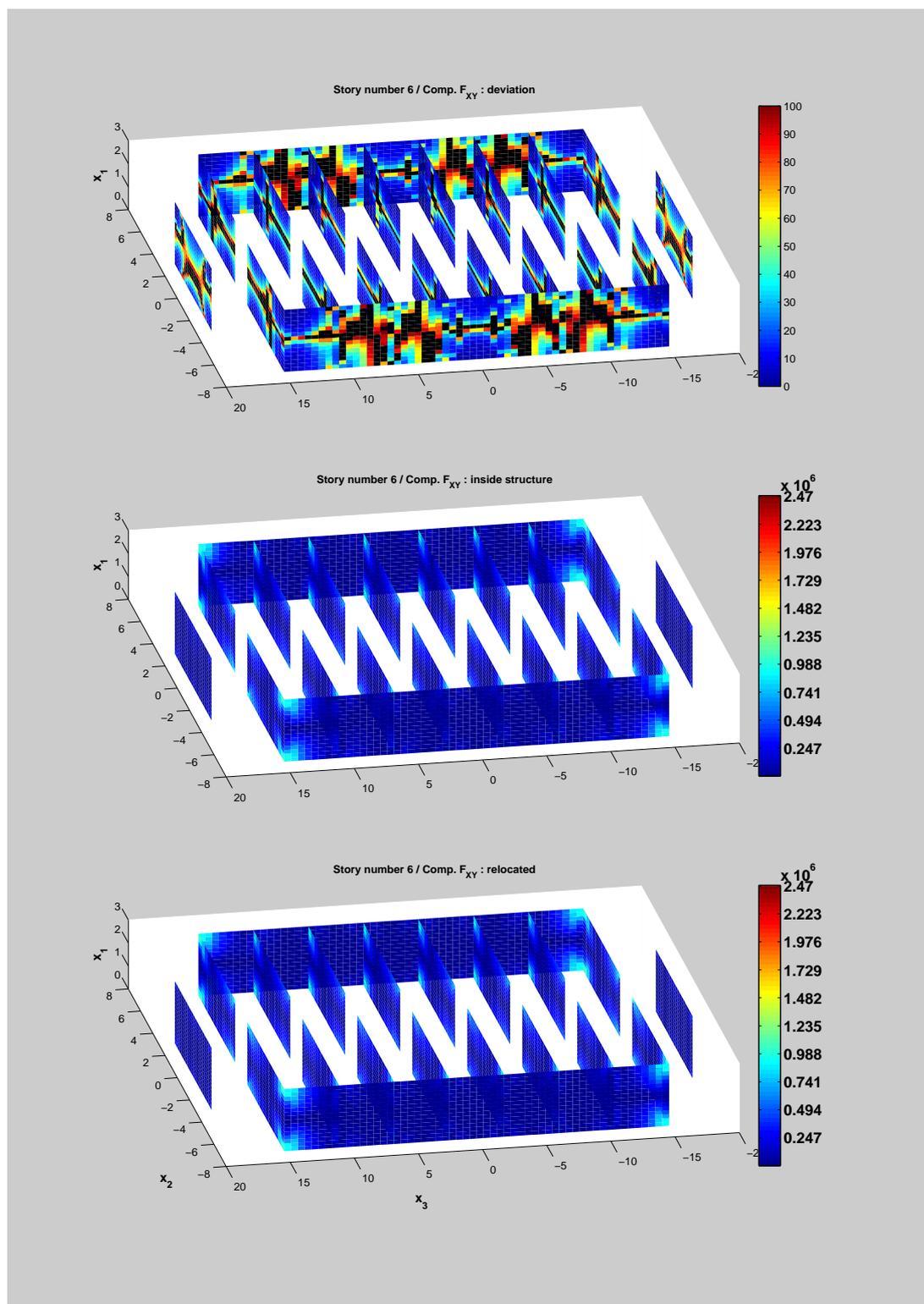


Figure III.41 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante F_{XY} des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité en **flexion** autour de l'axe (Oe_3) ($\mathbf{E}(x) = \chi_3/\chi_0 \tilde{\mathbf{E}}_6$).

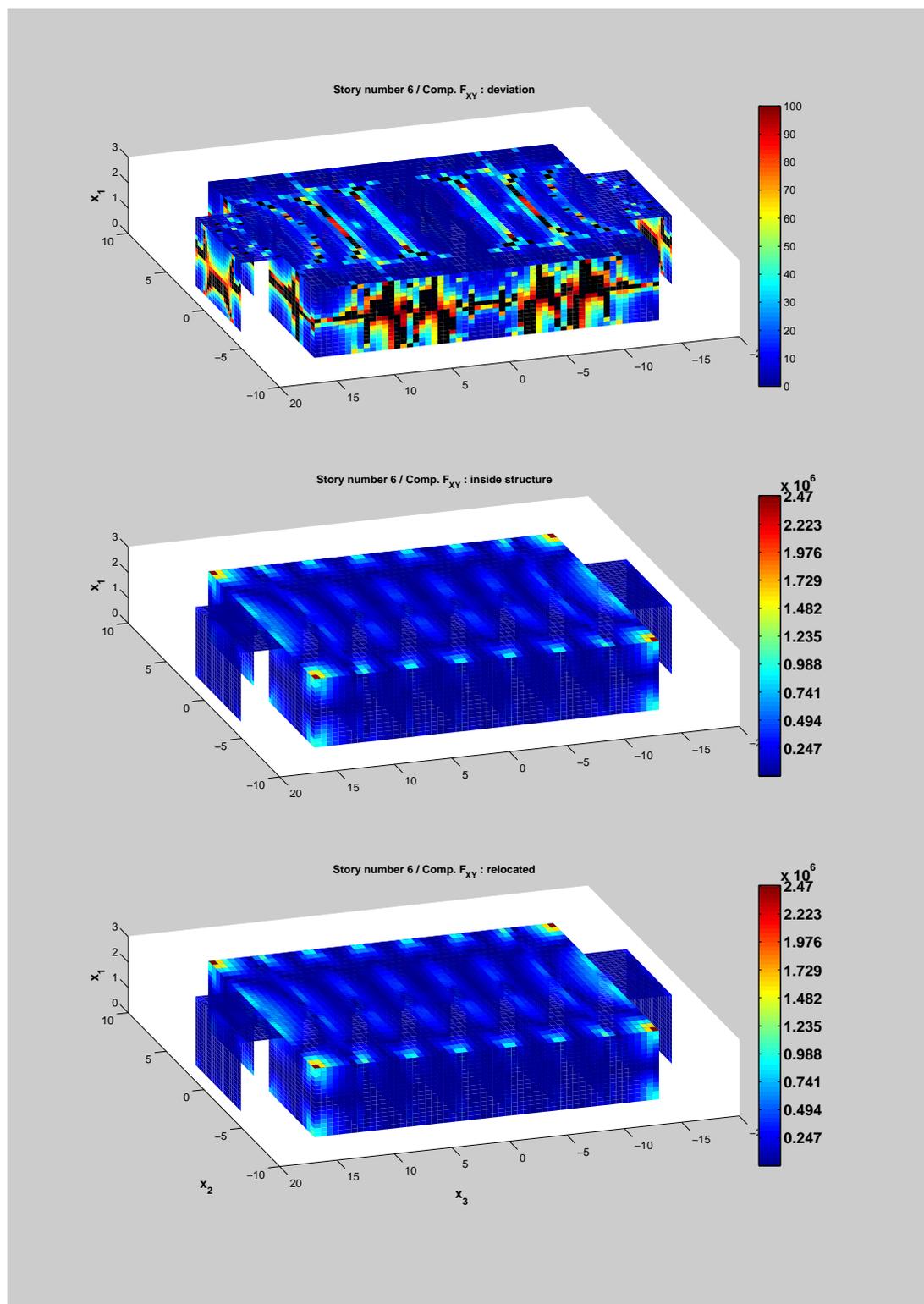


Figure III.42 Planche comparative (vue extérieure) des résultats de localisation de la composante F_{XY} des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité en **flexion** autour de l'axe (Oe_3) ($\mathbf{E}(x) = \chi_3/\chi_0 \tilde{\mathbf{E}}_6$).

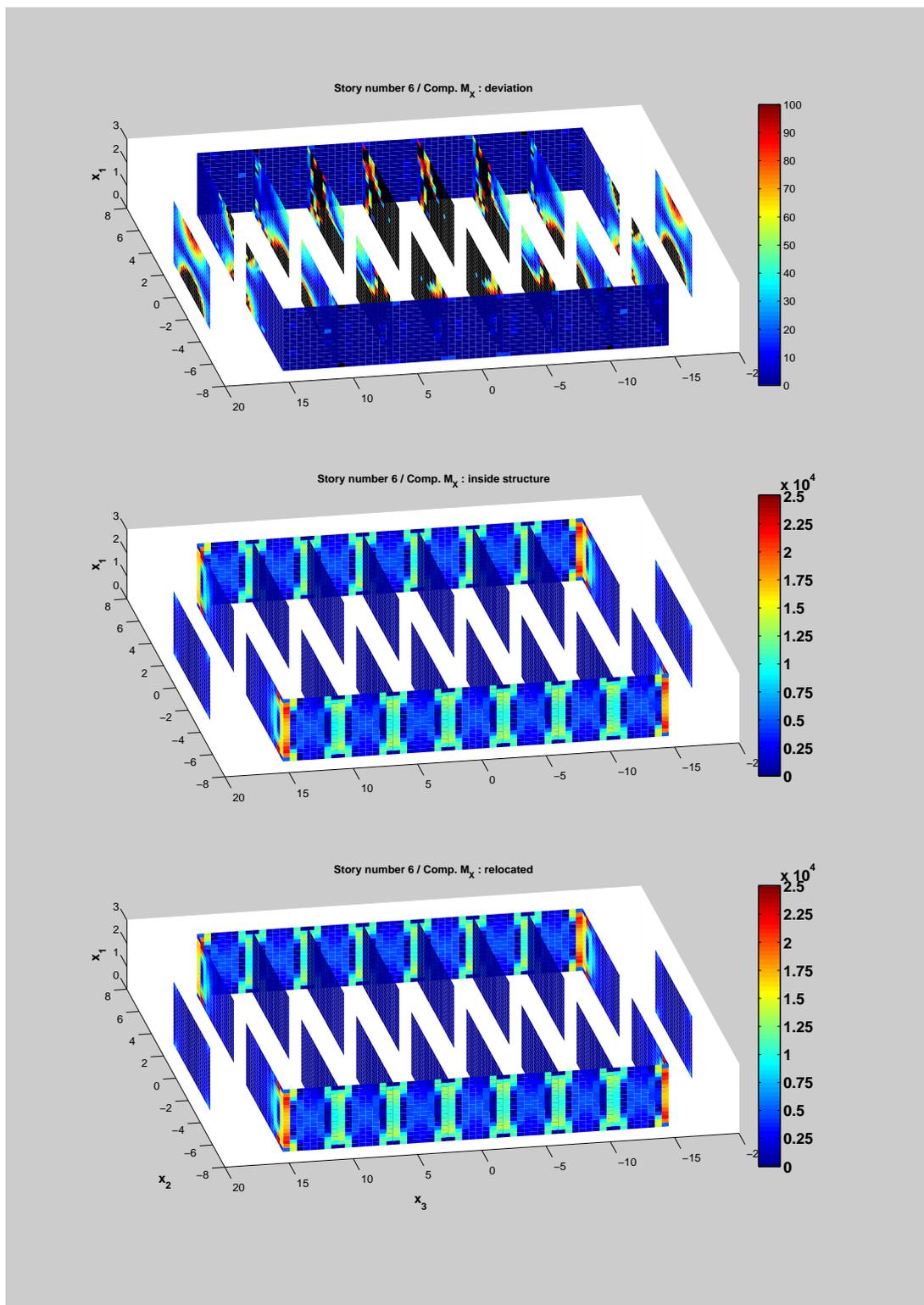


Figure III.43 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante M_x des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité en **flexion** autour de l'axe (Oe_3) ($\mathbf{E}(x) = \chi_3/\chi_0 \tilde{\mathbf{E}}_6$).

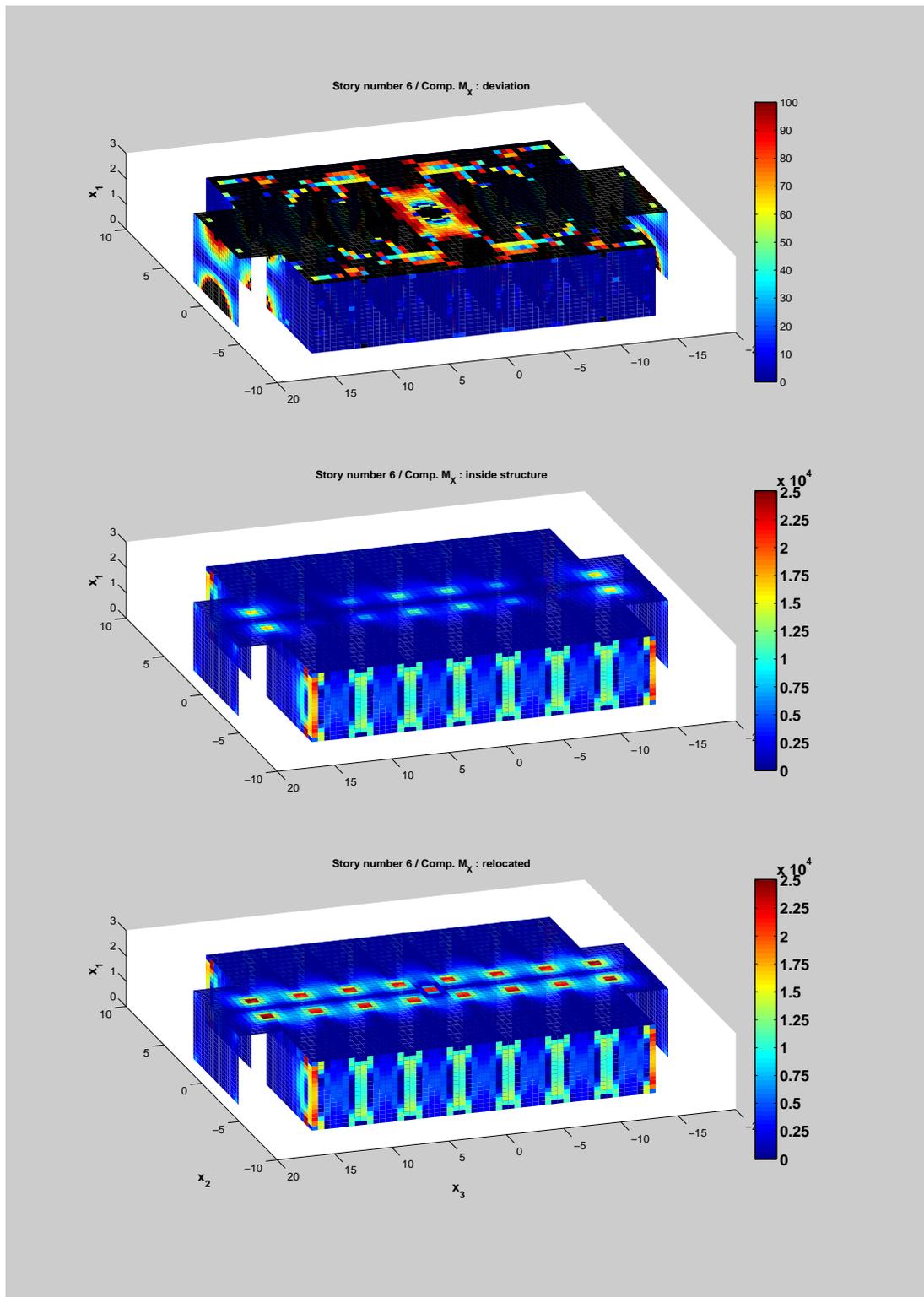


Figure III.44 Planche comparative (vue extérieure) des résultats de localisation de la composante M_x des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité en flexion autour de l'axe (Oe_3) ($\mathbf{E}(x) = \chi_3/\chi_0 \tilde{\mathbf{E}}_6$).

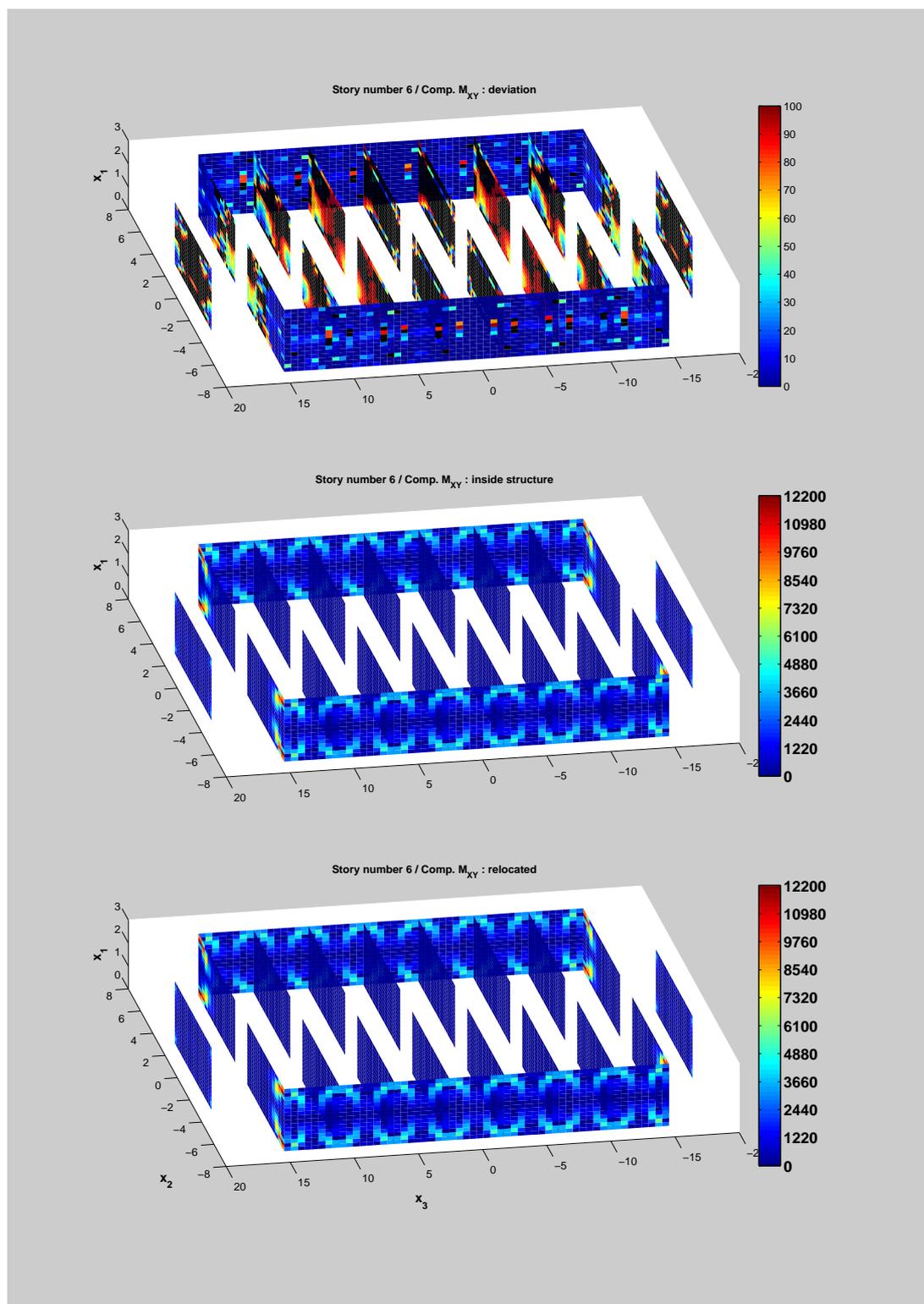


Figure III.45 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante M_{XY} des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité en **flexion** autour de l'axe (Oe_3) ($\mathbf{E}(x) = \chi_3/\chi_0 \tilde{\mathbf{E}}_6$).

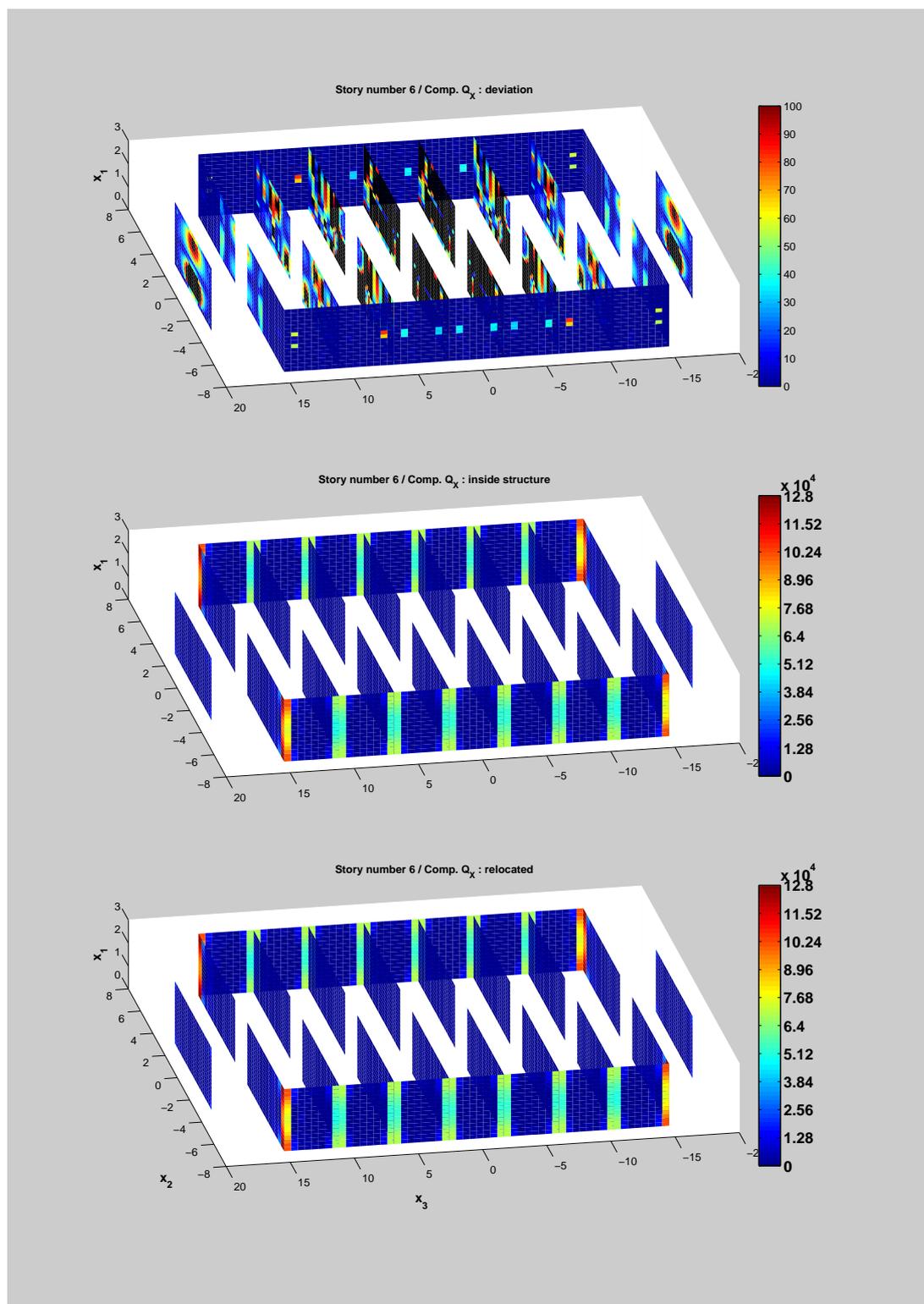


Figure III.46 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante Q_x des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité en **flexion** autour de l'axe (Oe_3) ($\mathbf{E}(x) = \chi_3/\chi_0 \tilde{\mathbf{E}}_6$).

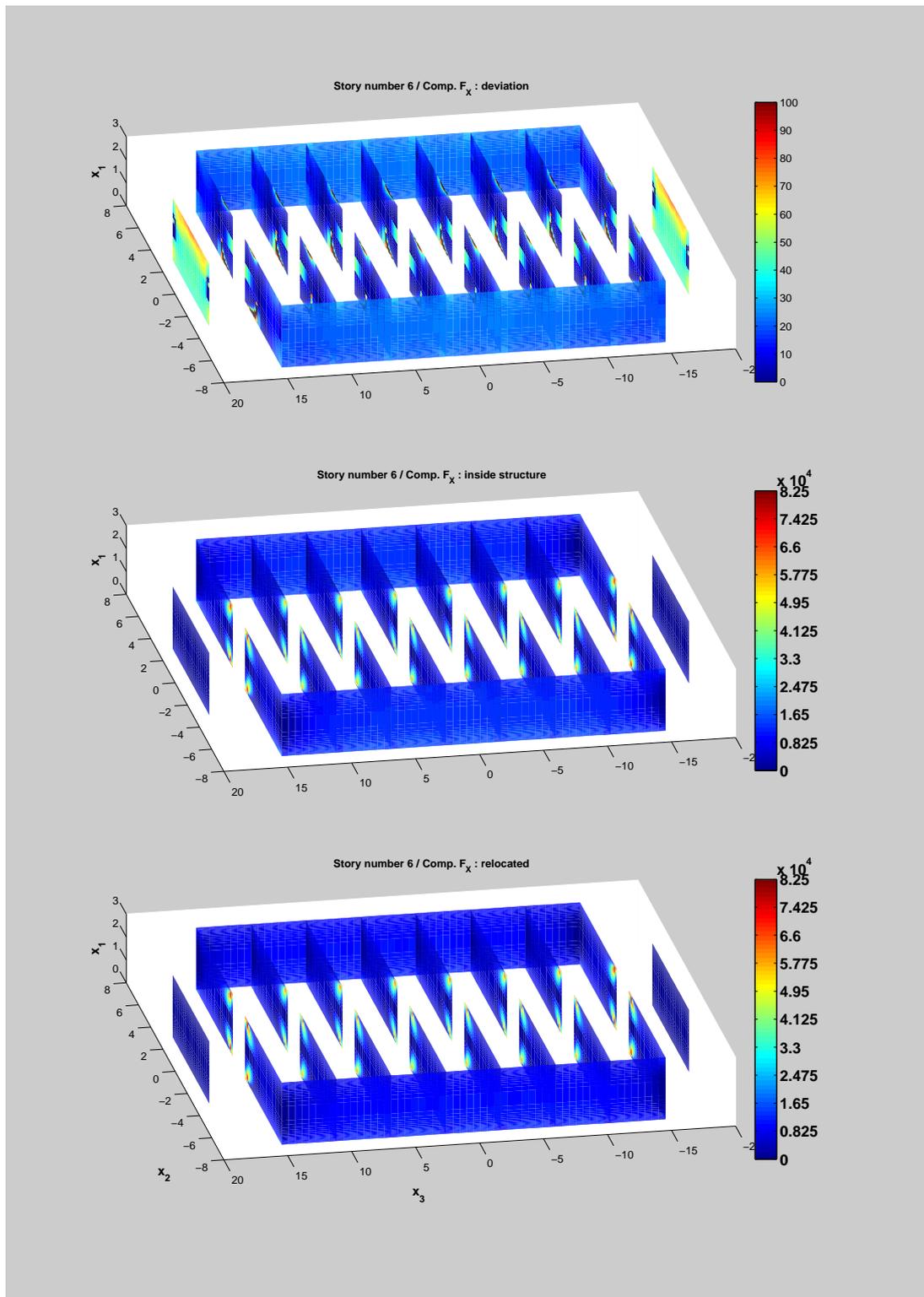


Figure III.47 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante F_x des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité par une flèche imposée suivant \mathbf{e}_2 ($\mathbf{E}(x) = \chi'_3/\chi'_0 \hat{\mathbf{E}}_2$).

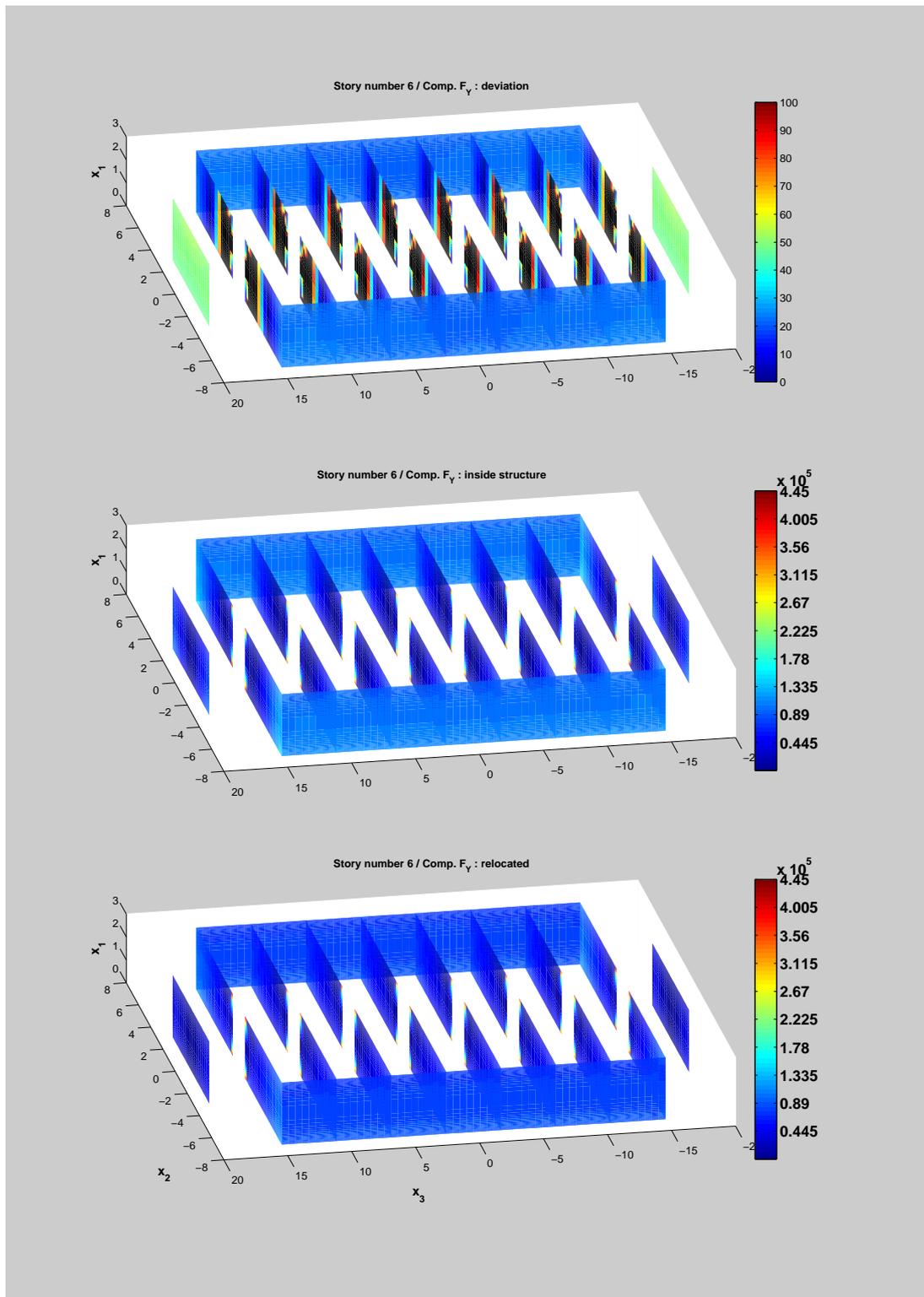


Figure III.48 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante F_y des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité par une flèche imposée suivant e_2 ($\mathbf{E}(x) = \chi_3'/\chi_0' \mathbf{\hat{E}}_2$).

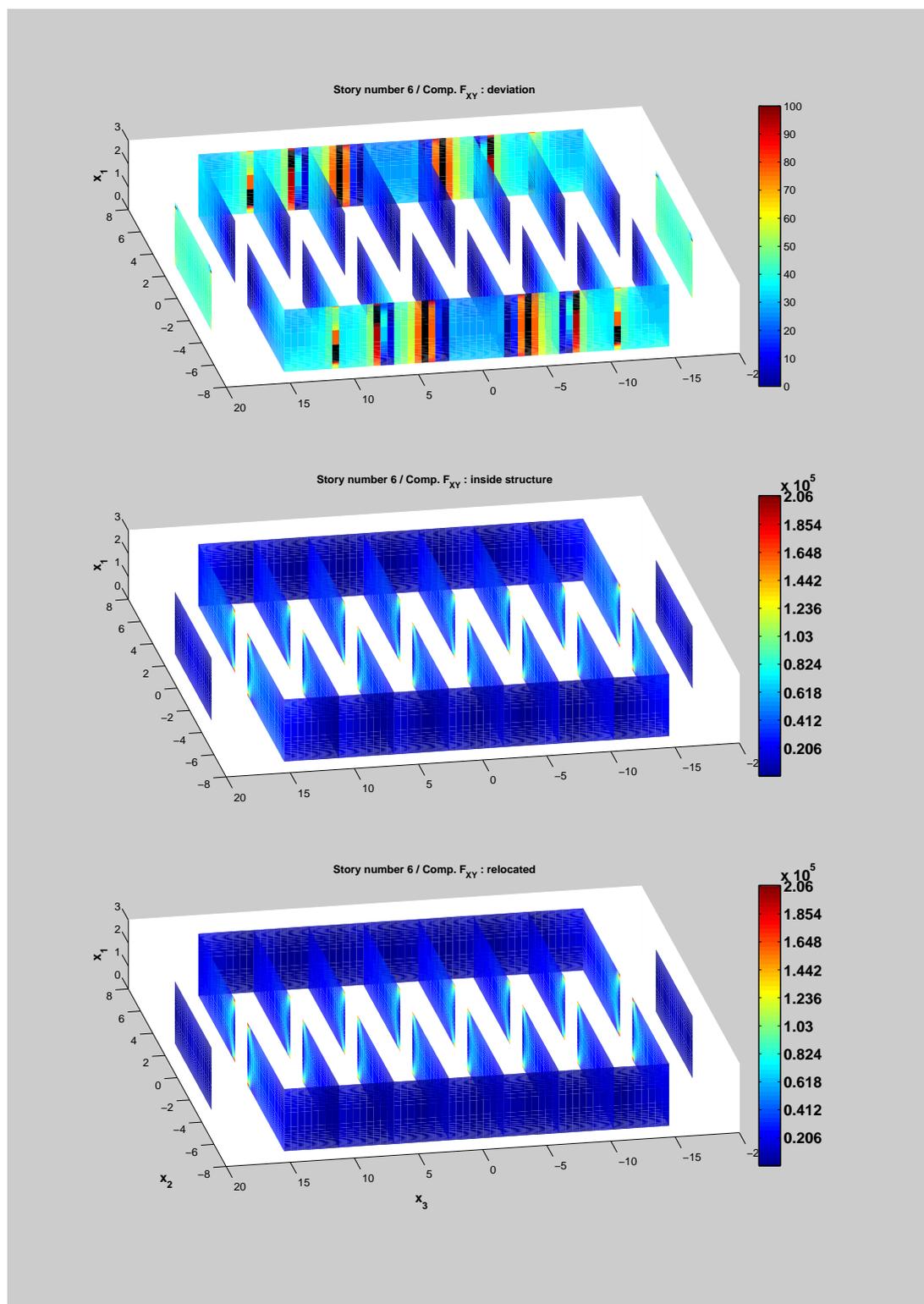


Figure III.49 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante F_{XY} des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité par une flèche imposée suivant e_2 ($\mathbf{E}(x) = \chi'_3/\chi'_0 \mathbf{\bar{E}}_2$).

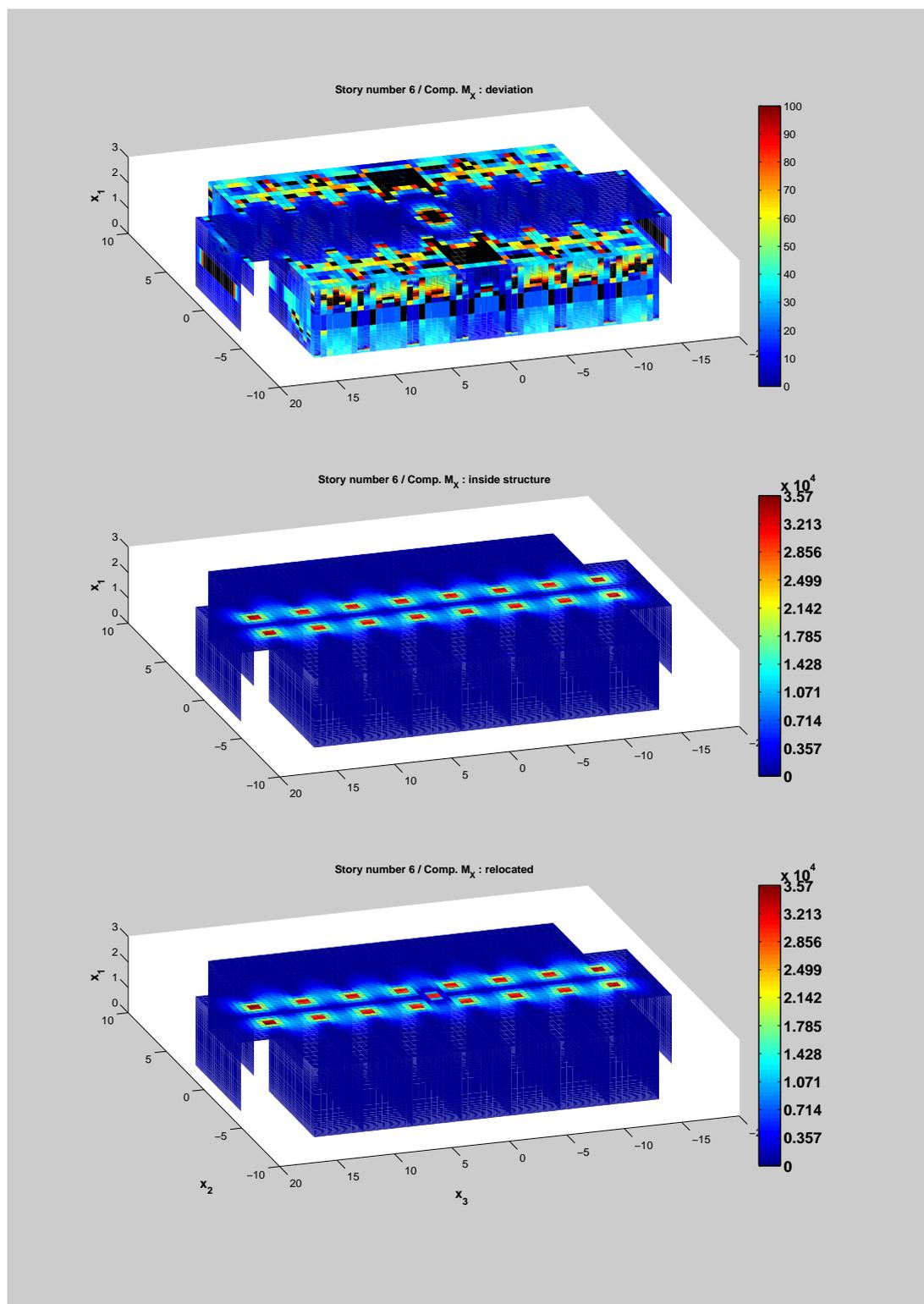


Figure III.50 Planche comparative (vue extérieure) des résultats de localisation de la composante M_x des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité par une flèche imposée suivant \mathbf{e}_2 ($\mathbf{E}(x) = \chi'_3/\chi'_0 \hat{\mathbf{E}}_2$).

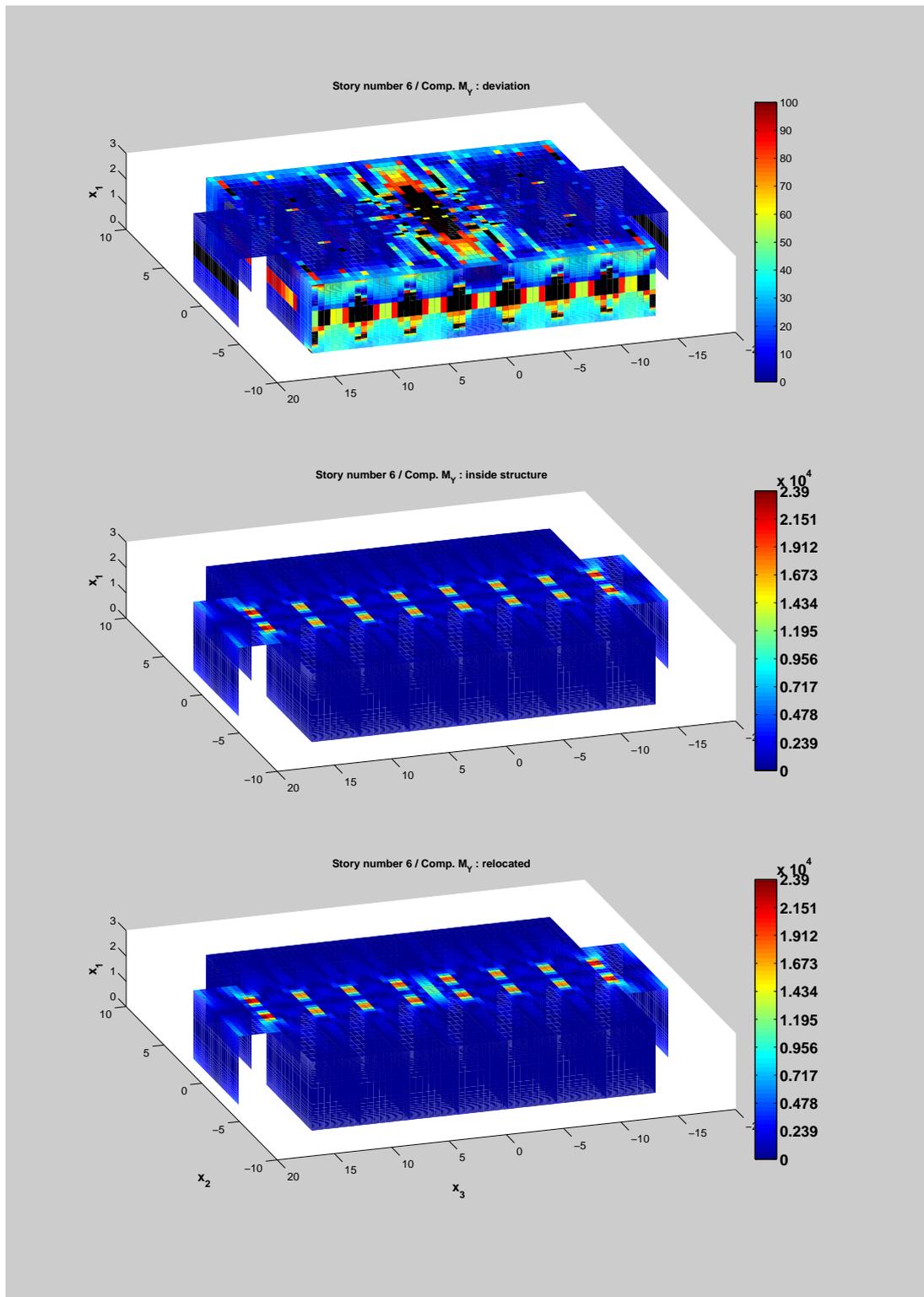


Figure III.51 Planche comparative (vue extérieure) des résultats de localisation de la composante M_Y des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité par une flèche imposée suivant \mathbf{e}_2 ($\mathbf{E}(x) = \chi'_3/\chi'_0 \hat{\mathbf{E}}_2$).

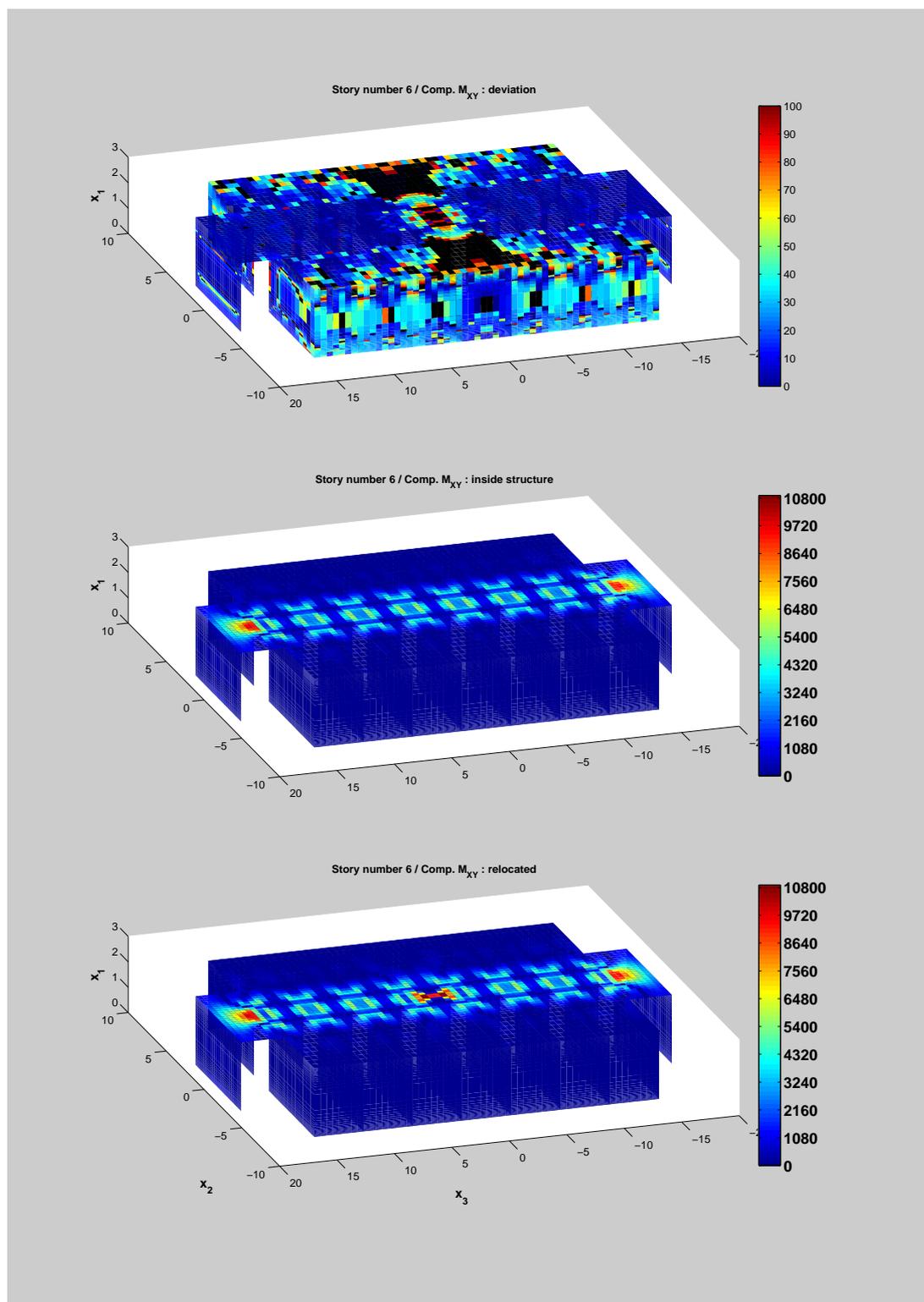


Figure III.52 Planche comparative (vue extérieure) des résultats de localisation de la composante M_{XY} des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité par une flèche imposée suivant \mathbf{e}_2 ($\mathbf{E}(x) = \chi'_3/\chi'_0 \tilde{\mathbf{E}}_2$).

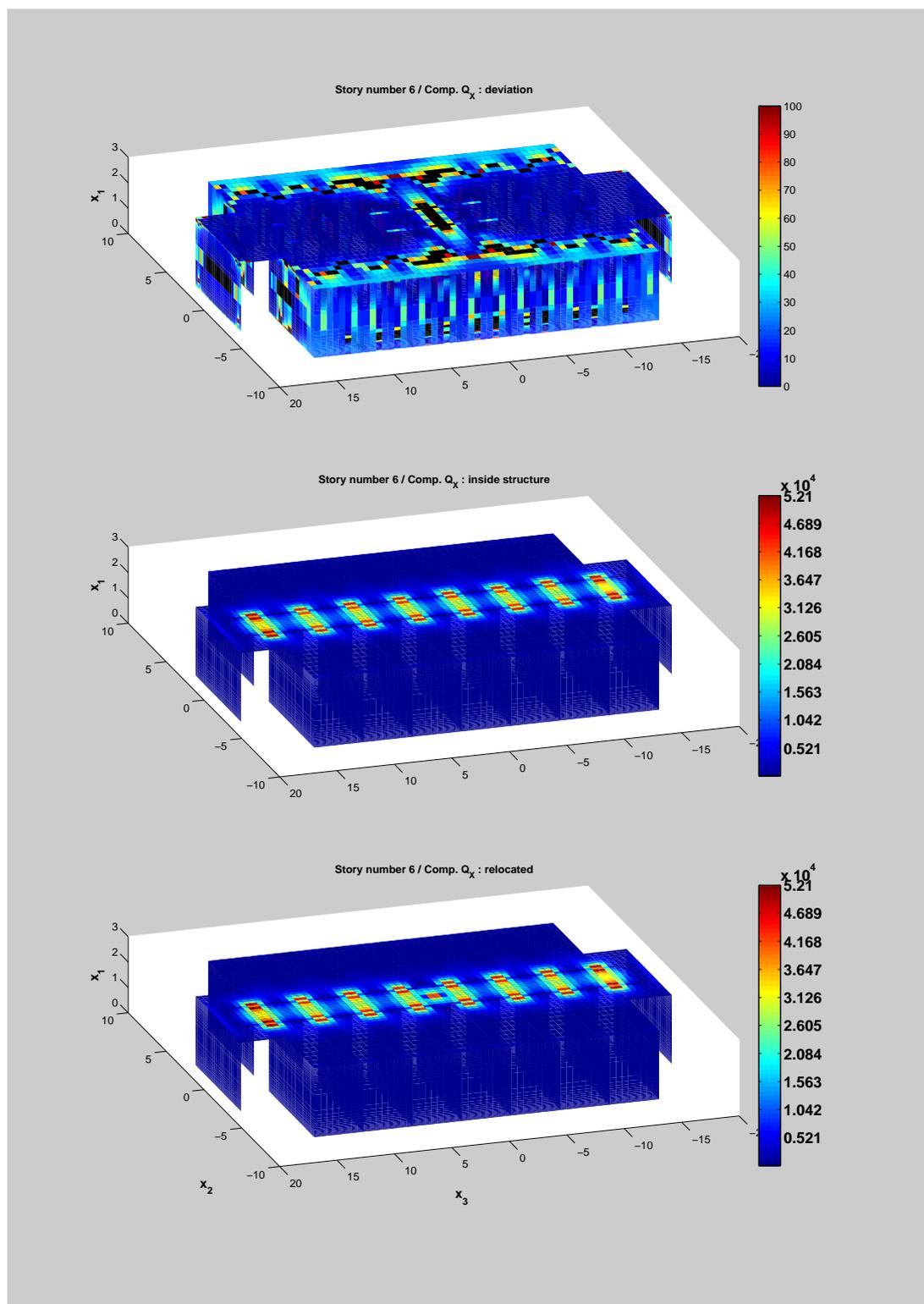


Figure III.53 Planche comparative (vue extérieure) des résultats de localisation de la composante Q_x des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité par une flèche imposée suivant e_2 ($\mathbf{E}(x) = \chi'_3/\chi'_0 \hat{\mathbf{E}}_2$).

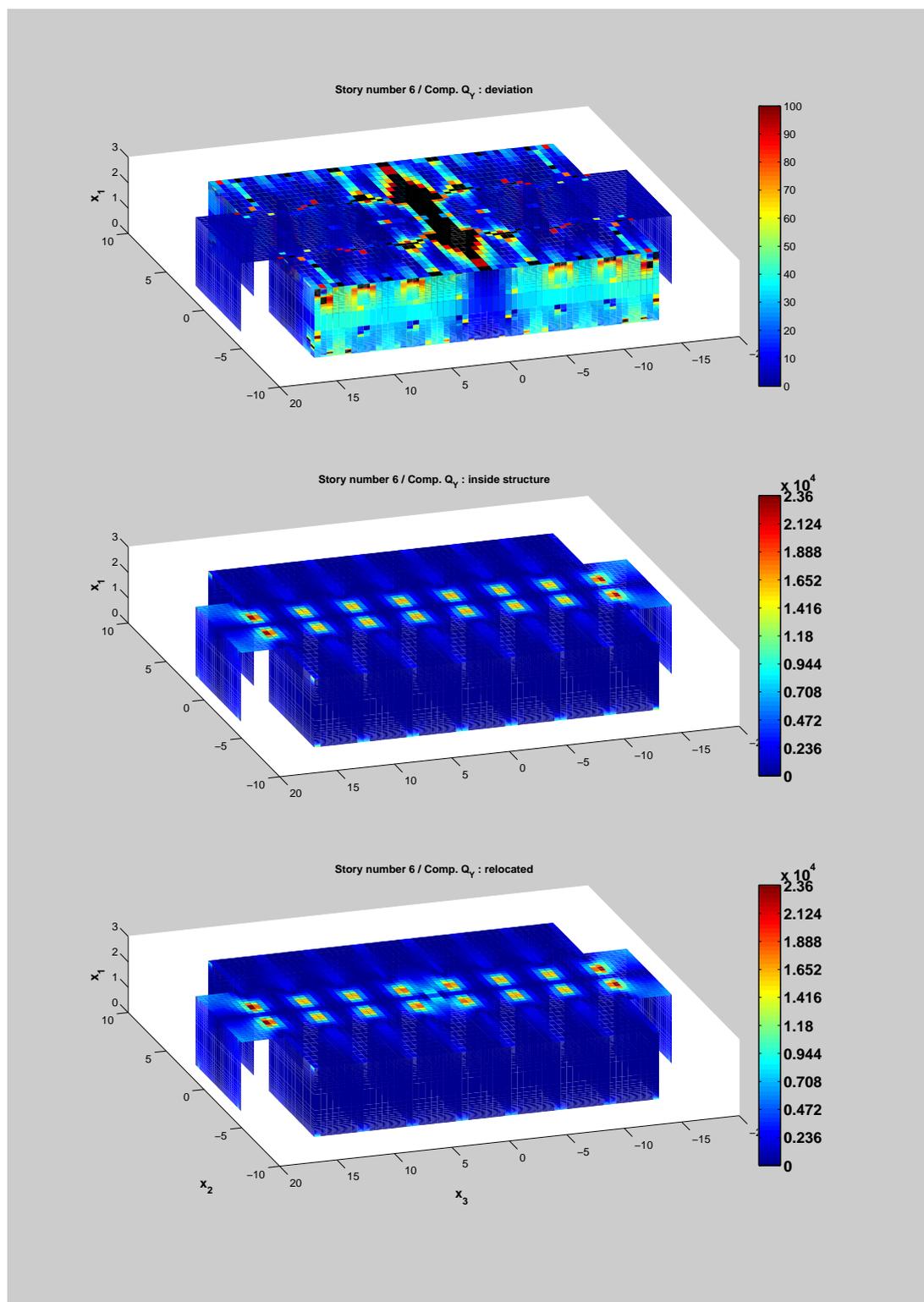


Figure III.54 Planche comparative (vue extérieure) des résultats de localisation de la composante Q_Y des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité par une flèche imposée suivant e_2 ($\mathbf{E}(x) = \chi'_3/\chi'_0 \hat{\mathbf{E}}_2$).

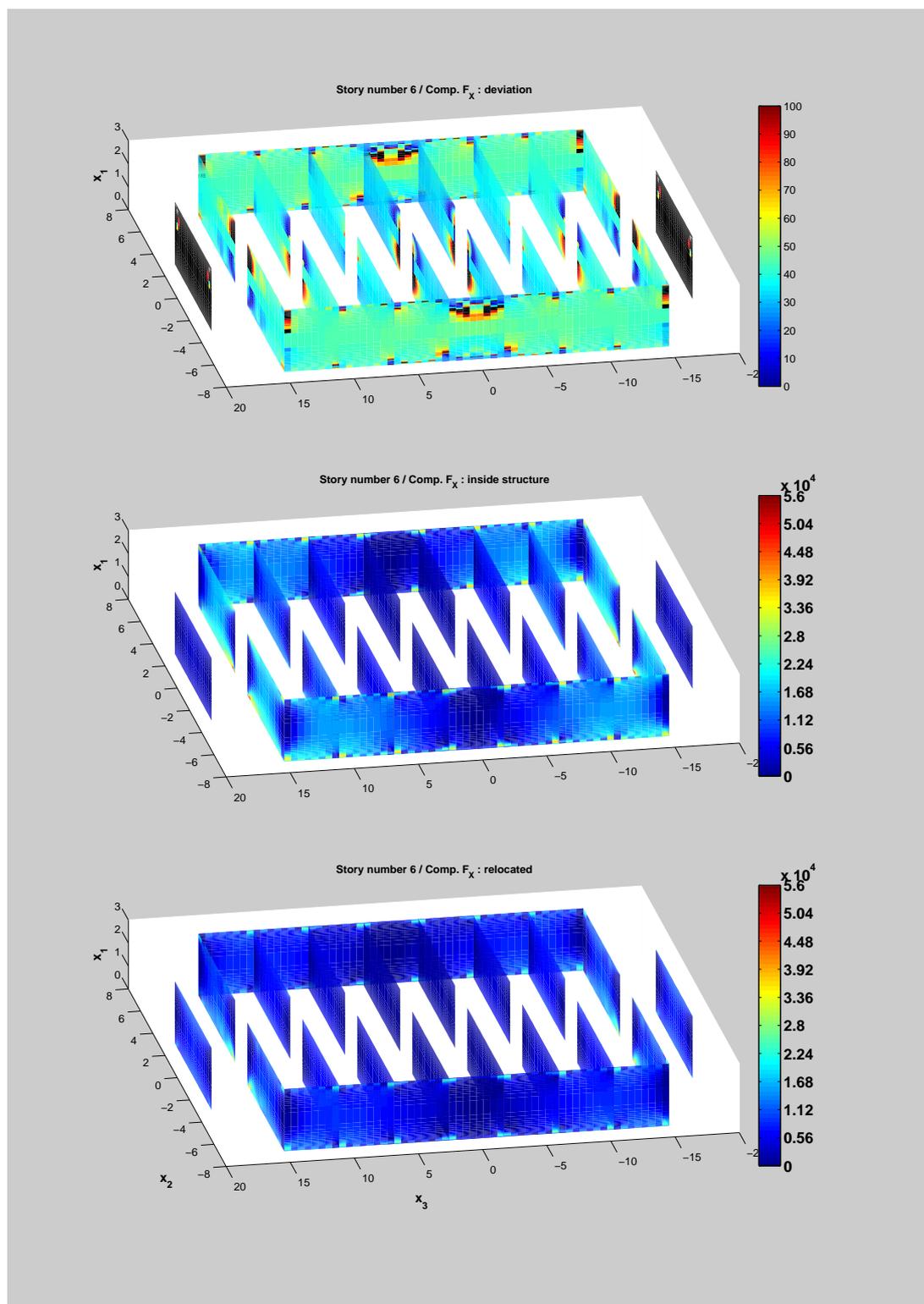


Figure III.55 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante F_x des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité par une flèche imposée suivant e_3 ($\mathbf{E}(x) = \chi'_2/\chi'_0 \hat{\mathbf{E}}_3$).

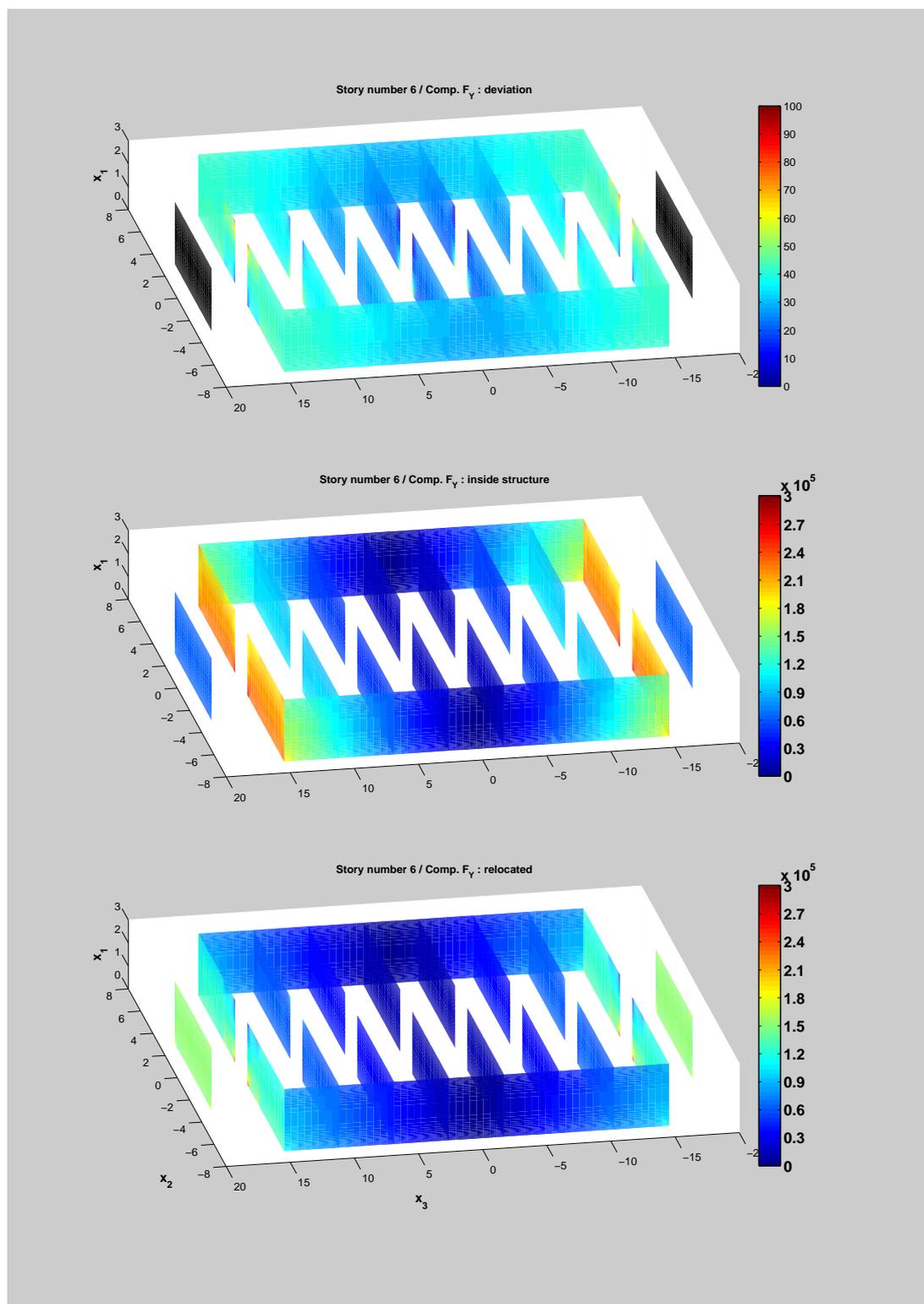


Figure III.56 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante F_Y des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité par une flèche imposée suivant e_3 ($\mathbf{E}(x) = \chi'_2/\chi'_0 \mathbf{\hat{E}}_3$).

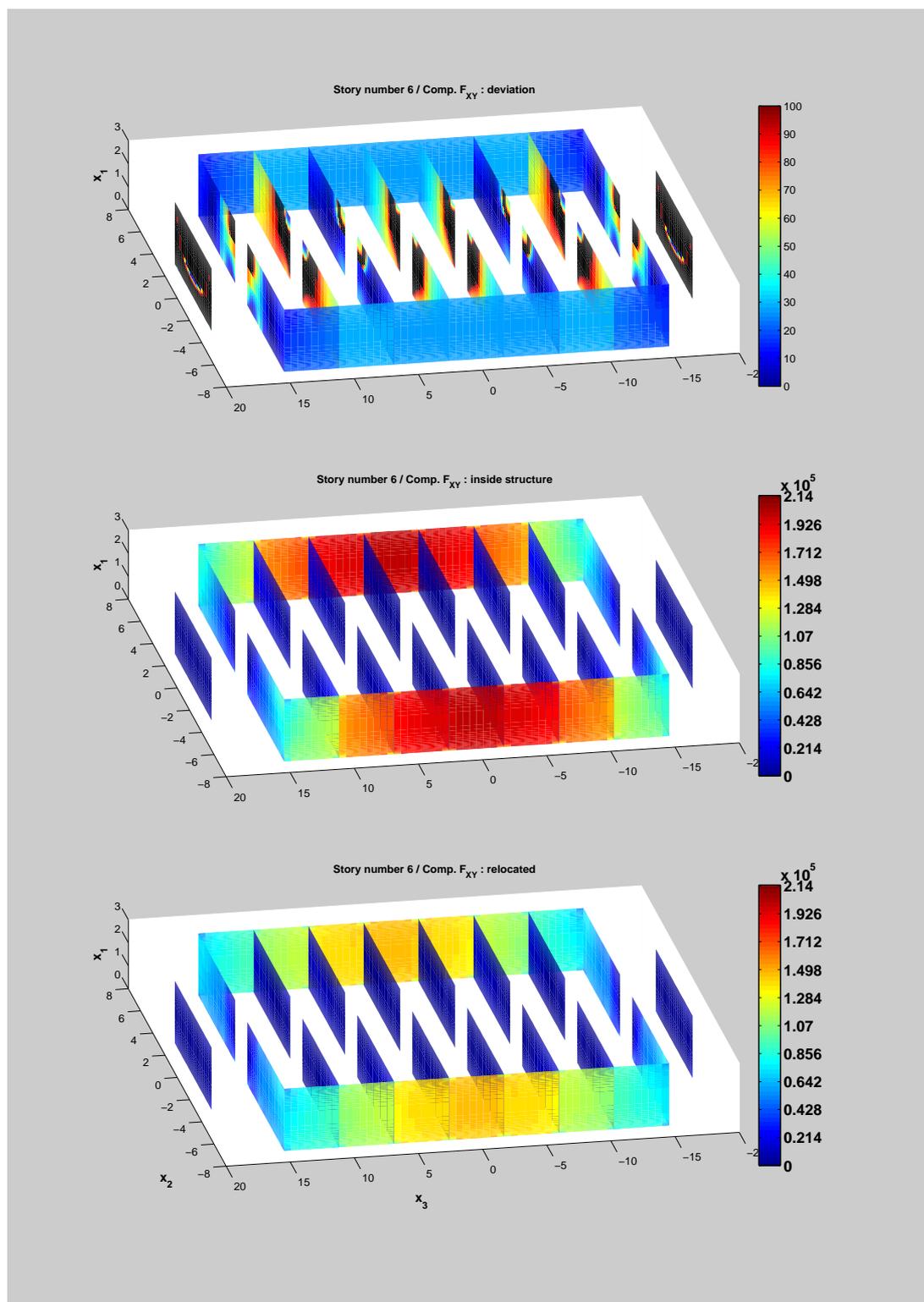


Figure III.57 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante F_{XY} des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité par une flèche imposée suivant e_3 ($\mathbf{E}(x) = \chi'_2/\chi'_0 \mathbf{\hat{E}}_3$).

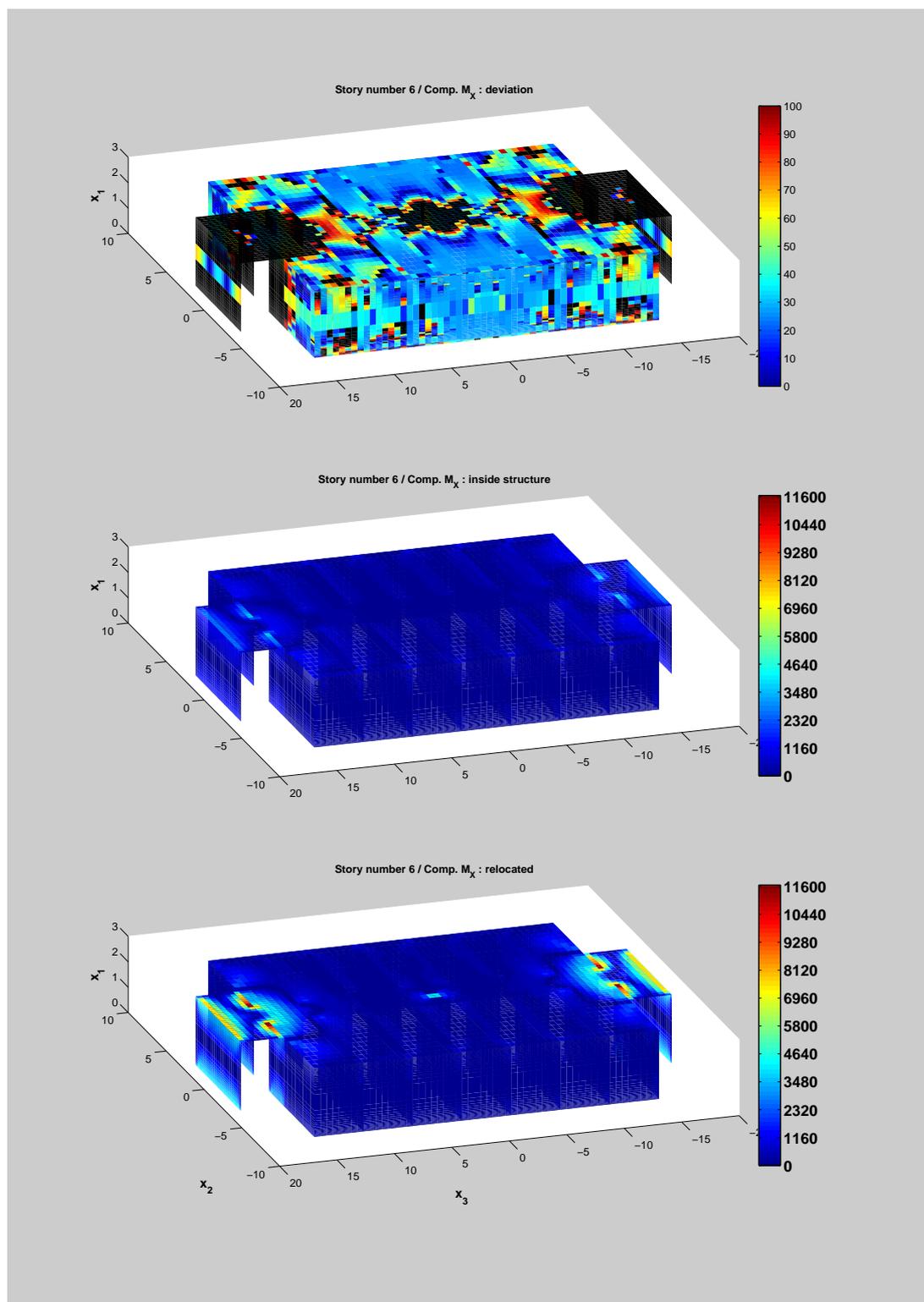


Figure III.58 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante M_x des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité par une flèche imposée suivant e_3 ($\mathbf{E}(x) = \chi'_2/\chi'_0 \hat{\mathbf{E}}_3$).

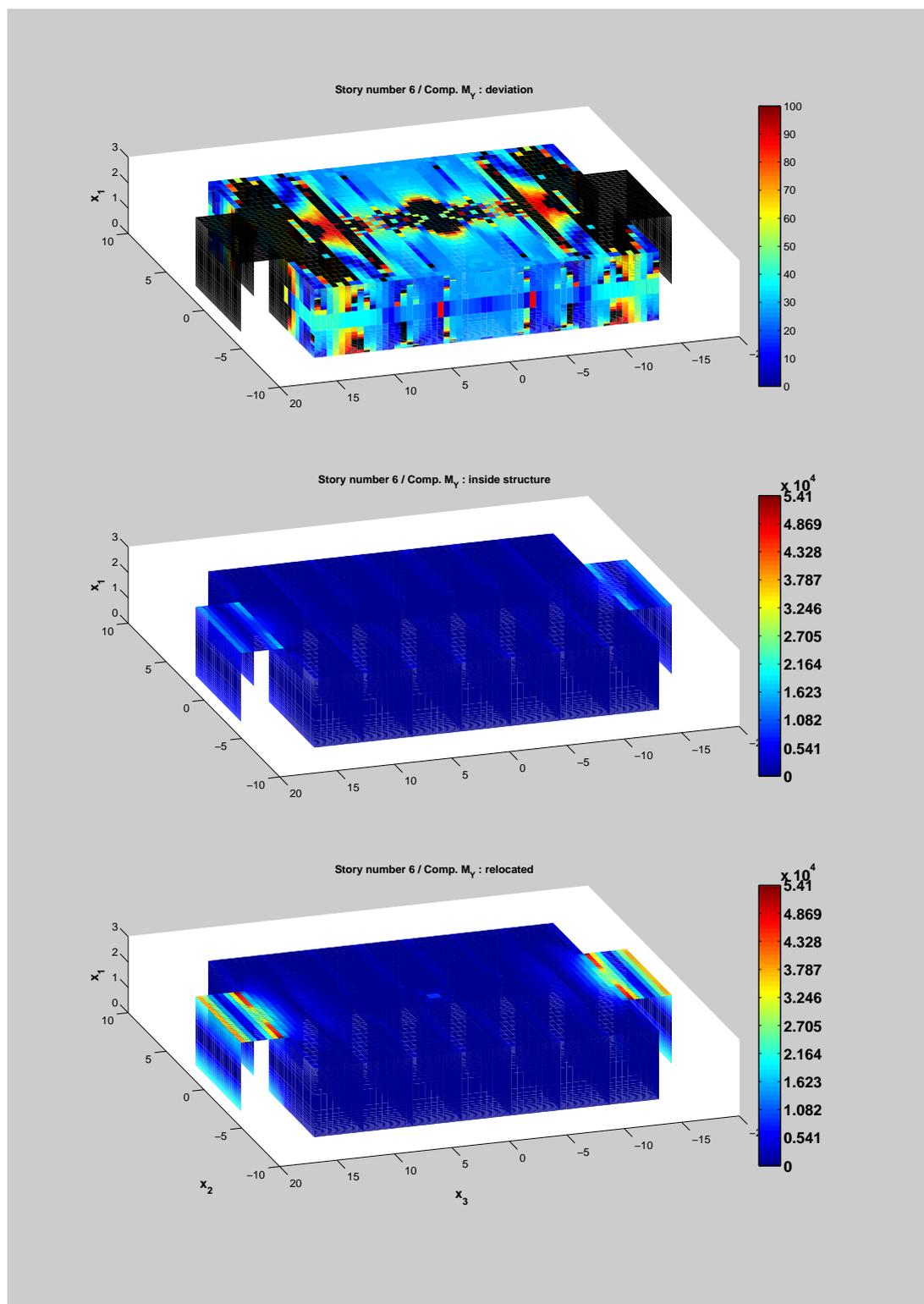


Figure III.59 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante M_Y des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment est sollicité par une flèche imposée suivant e_3 ($\mathbf{E}(x) = \chi'_2/\chi'_0 \hat{\mathbf{E}}_3$).

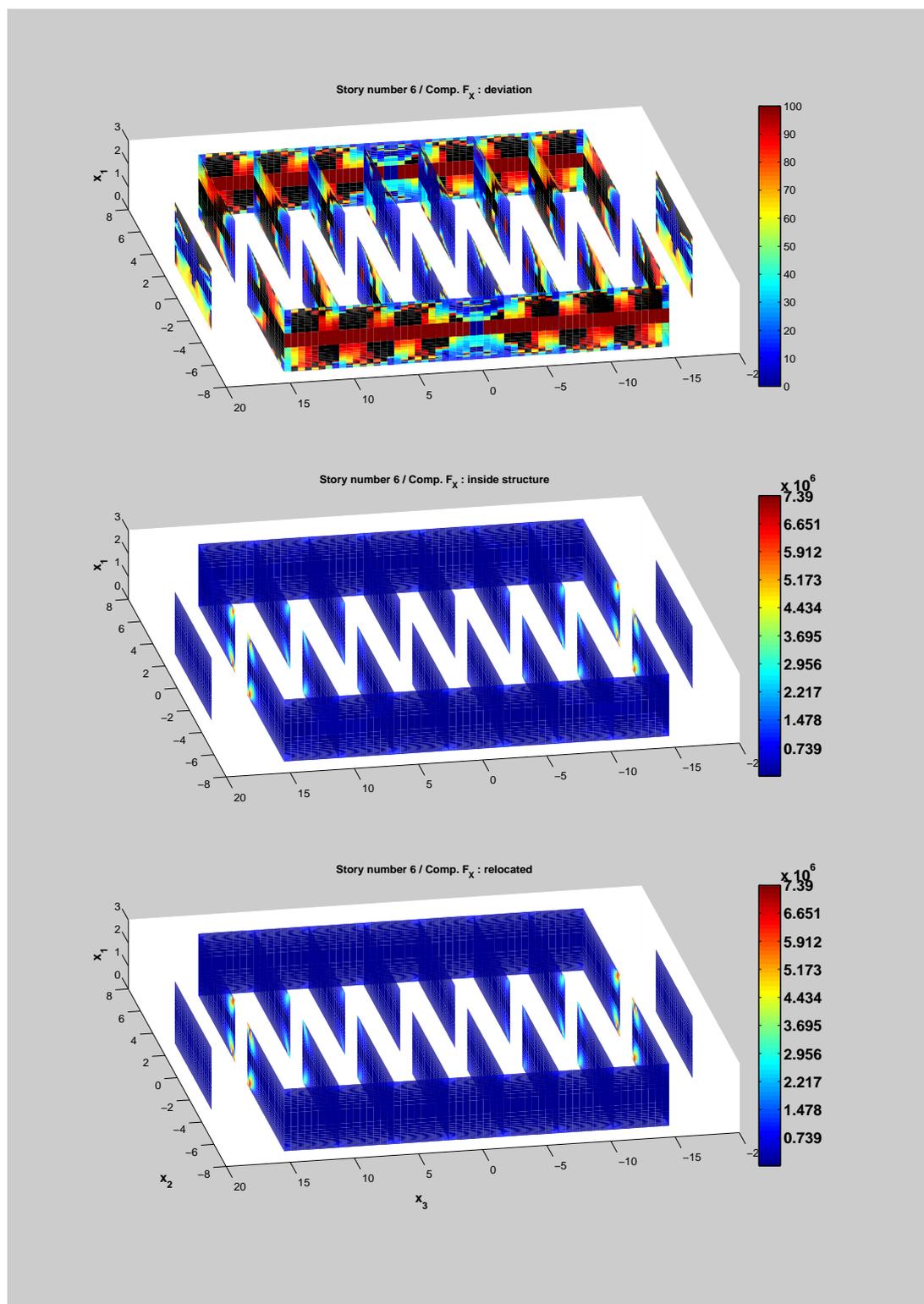


Figure III.60 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante F_x des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment soumis à un couple de torsion ($\mathbf{E}(x) = \chi_1/\chi_0 \mathbf{E}_4$).

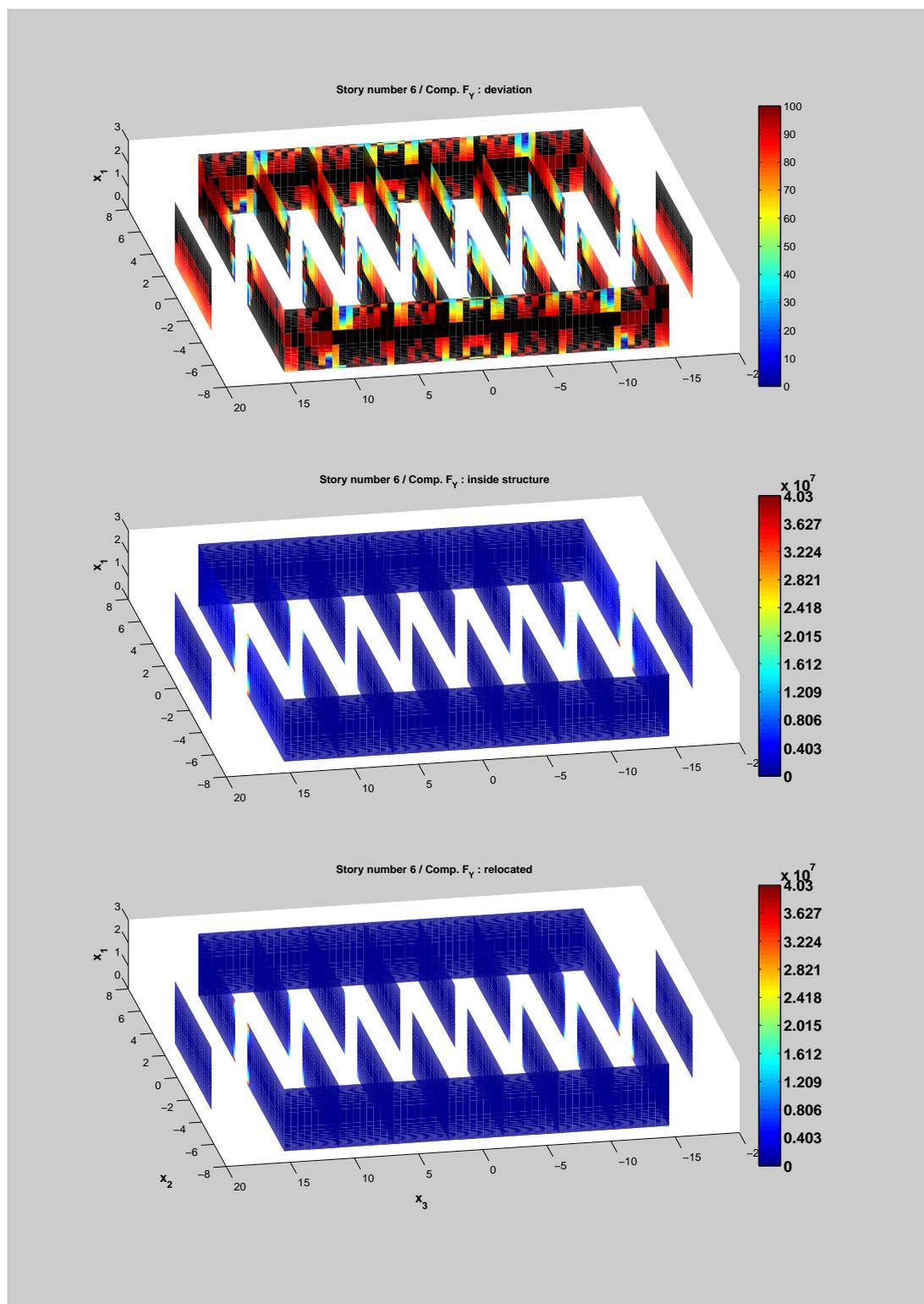


Figure III.61 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante F_Y des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment soumis à un couple de torsion ($\mathbf{E}(x) = \chi_1/\chi_0 \mathbf{\bar{E}}_4$).

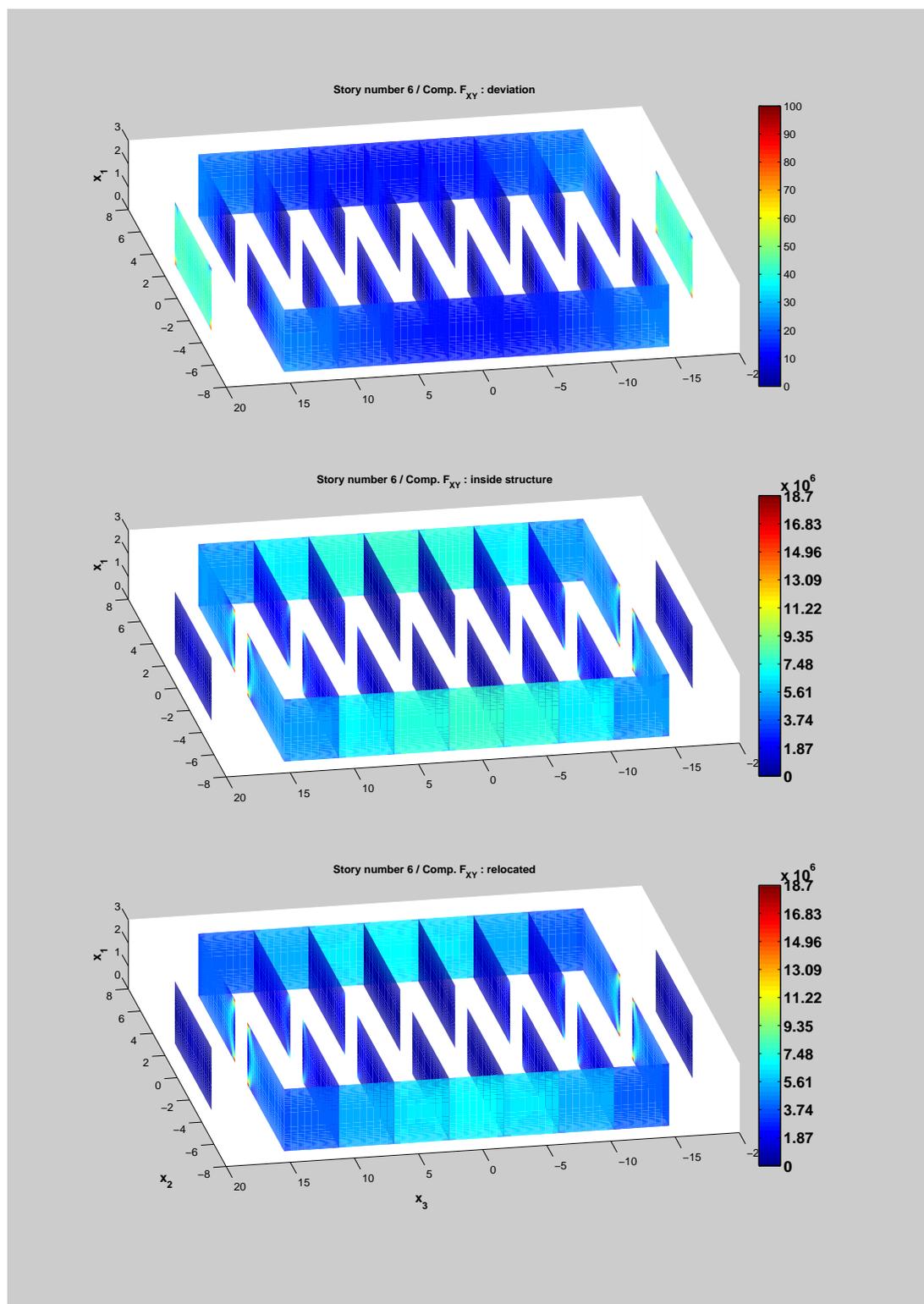


Figure III.62 Planche comparative (vue intérieure) des résultats de localisation de la composante F_{XY} des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment soumis à un couple de torsion ($\mathbf{E}(x) = \chi_1/\chi_0 \tilde{\mathbf{E}}_4$).

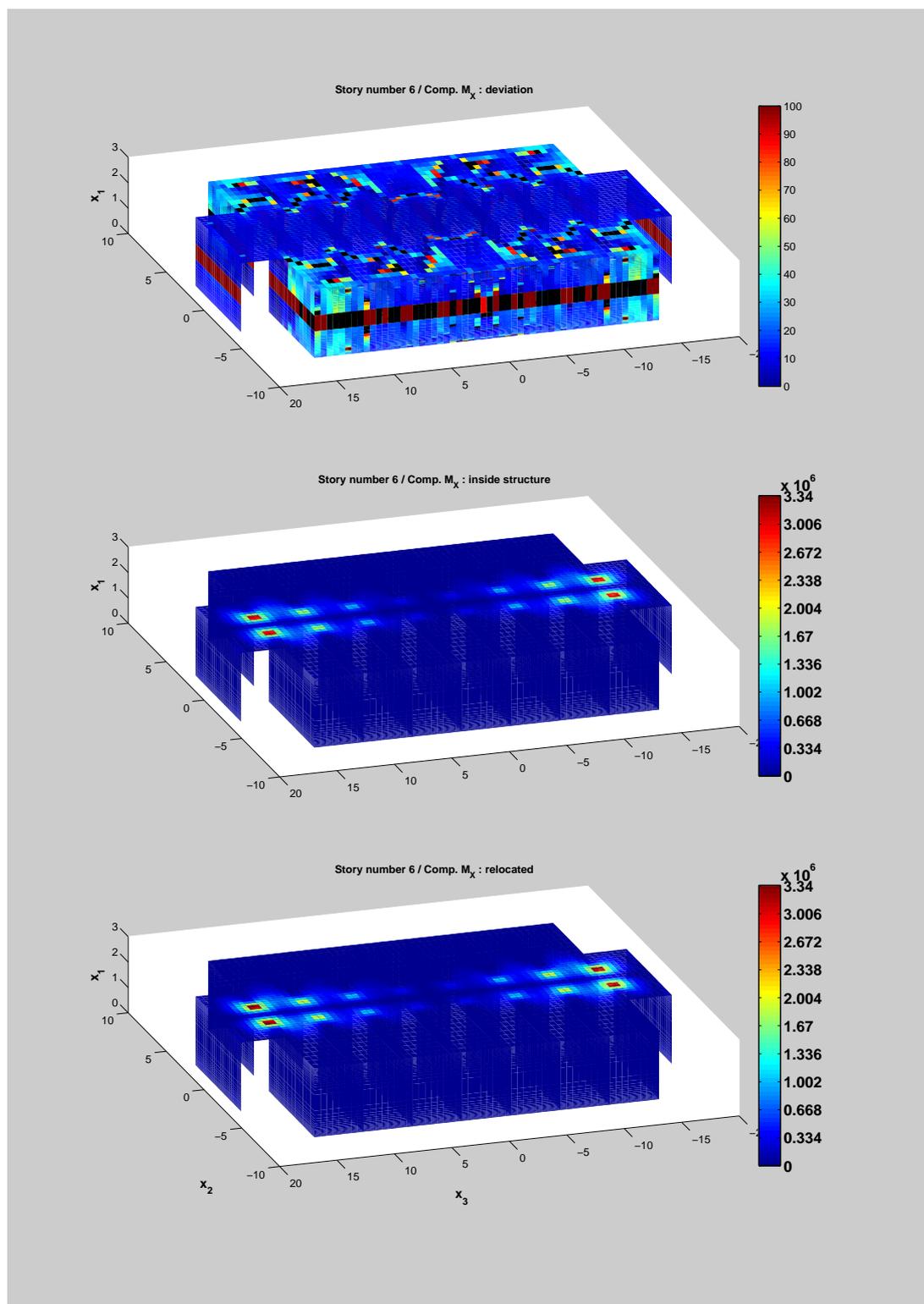


Figure III.63 Planche comparative (vue extérieure) des résultats de localisation de la composante M_x des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment soumis à un couple de torsion ($\mathbf{E}(x) = \chi_1/\chi_0 \tilde{\mathbf{E}}_4$).

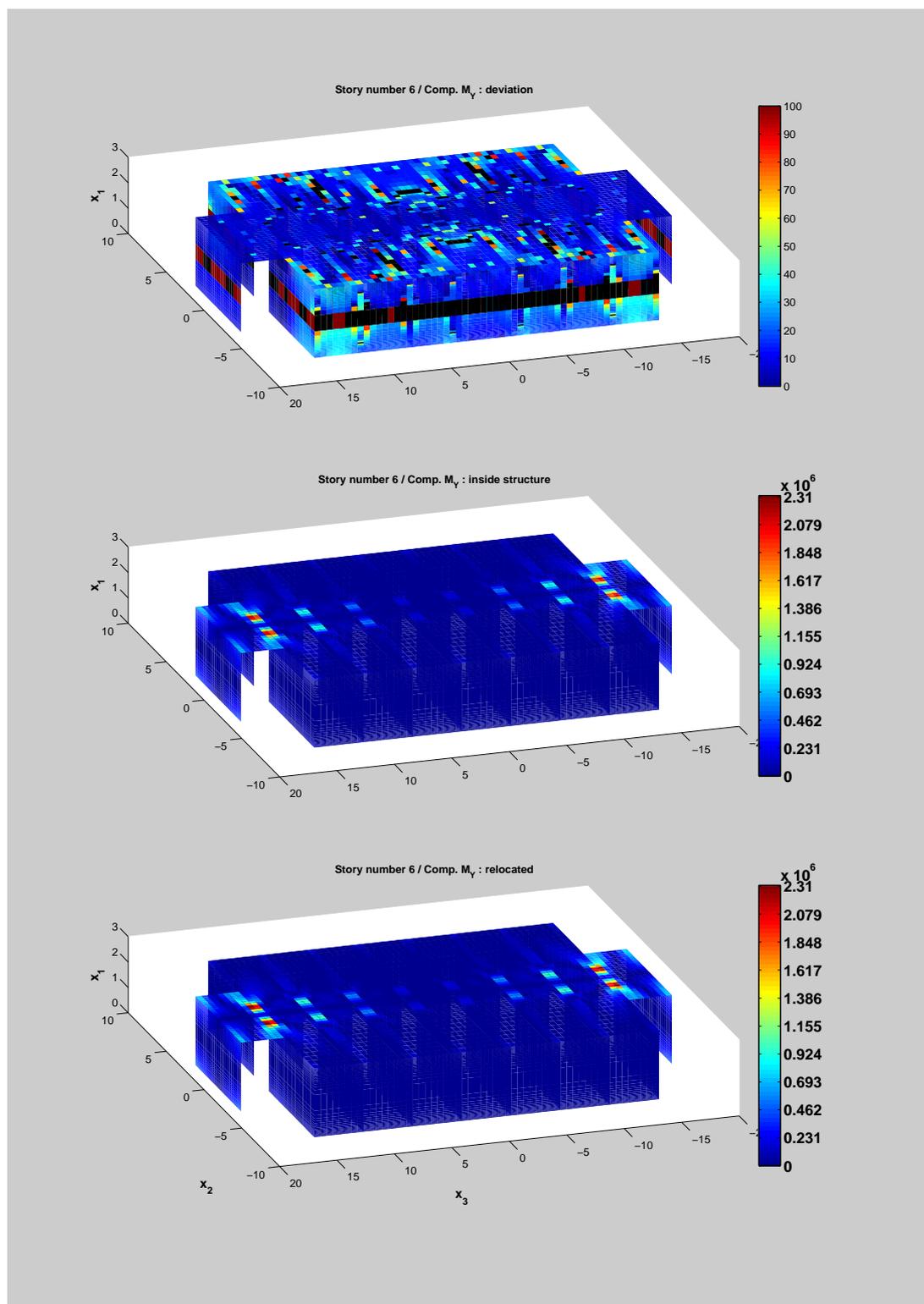


Figure III.64 Planche comparative (vue extérieure) des résultats de localisation de la composante M_Y des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment soumis à un couple de torsion ($\mathbf{E}(x) = \chi_1/\chi_0 \tilde{\mathbf{E}}_4$).

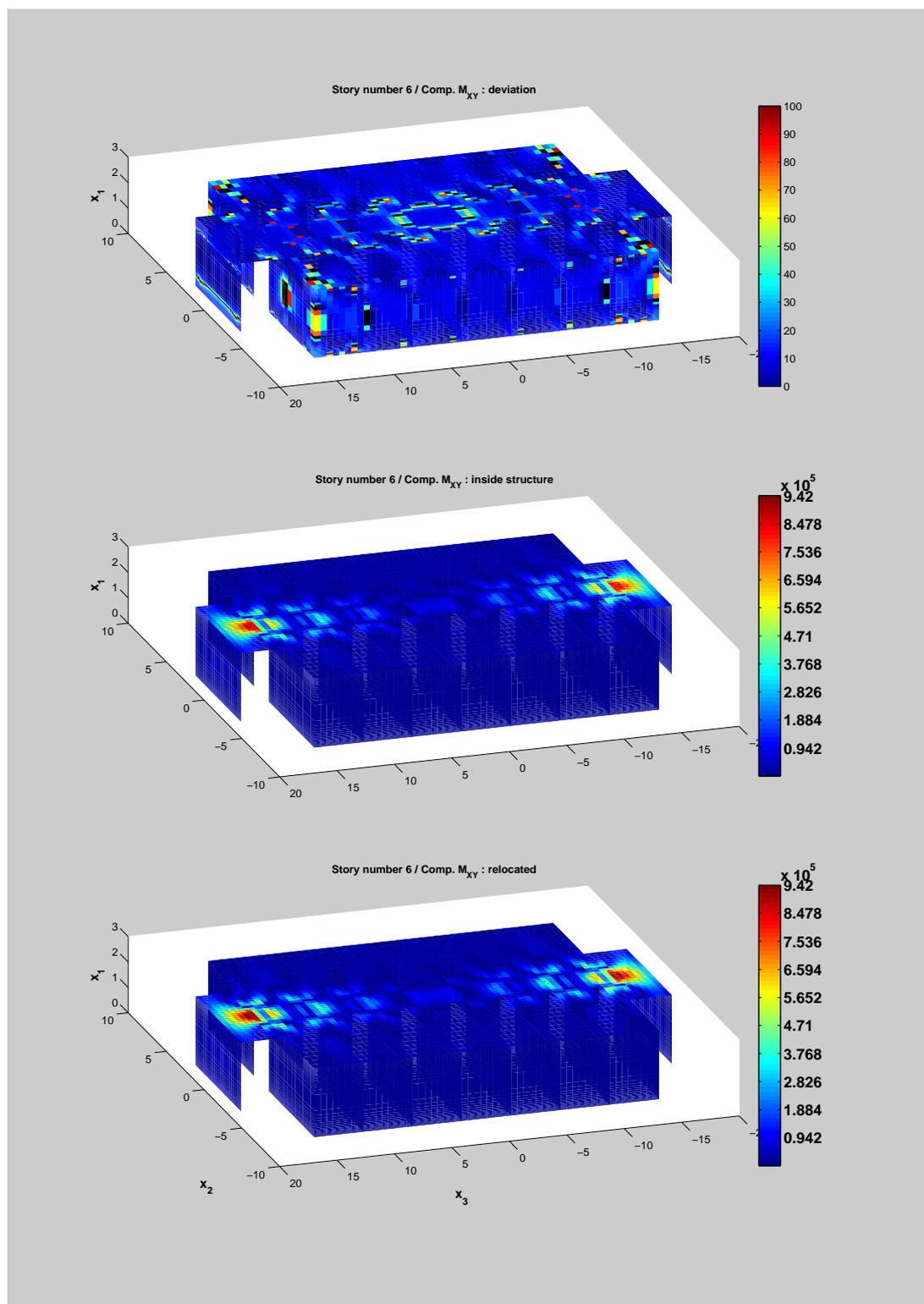


Figure III.65 Planche comparative (vue extérieure) des résultats de localisation de la composante M_{XY} des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment soumis à un couple de torsion ($\mathbf{E}(x) = \chi_1/\chi_0 \mathbf{\bar{E}}_4$).

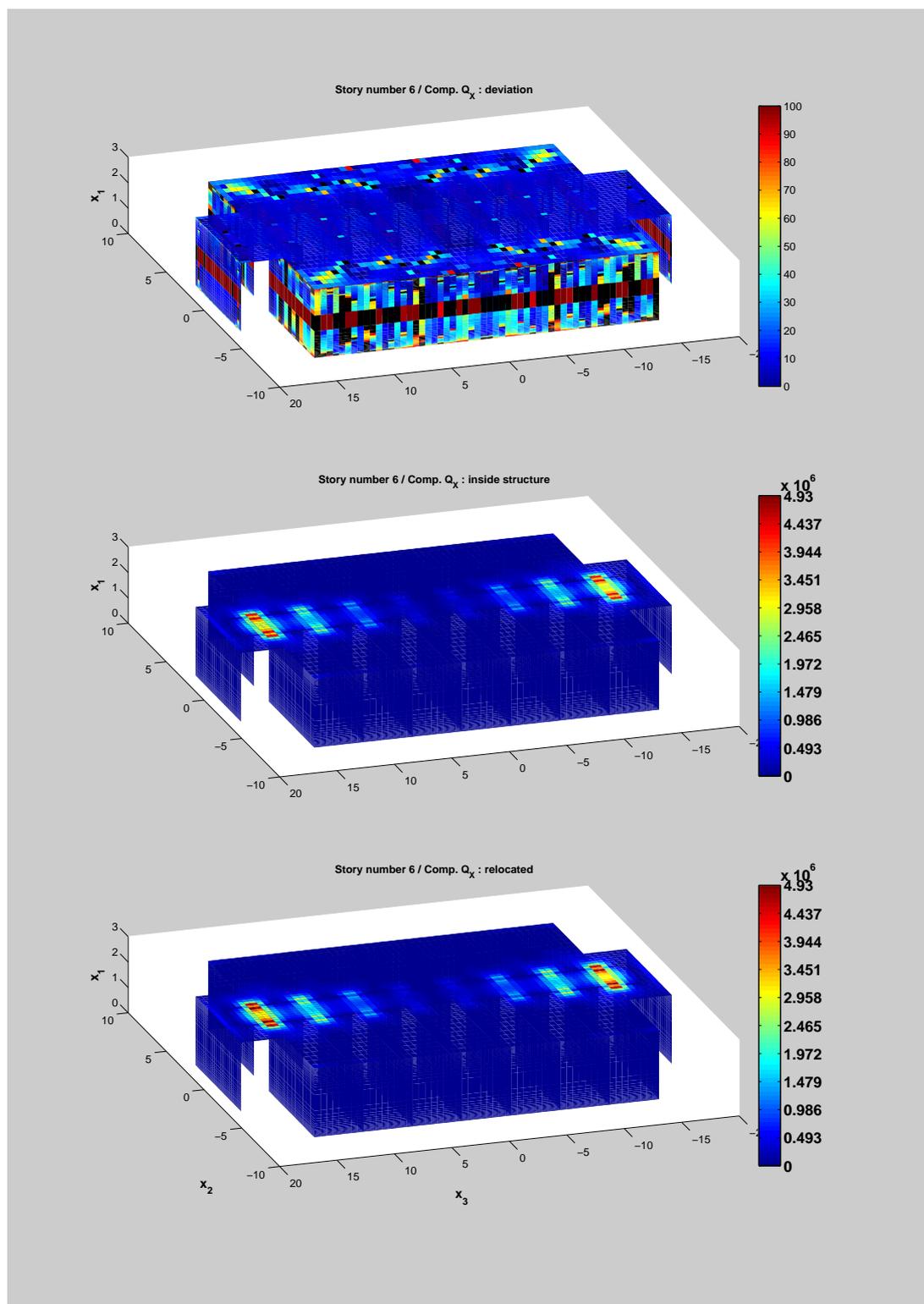


Figure III.66 Planche comparative (vue extérieure) des résultats de localisation de la composante Q_x des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment soumis à un couple de torsion ($\mathbf{E}(x) = \chi_1/\chi_0 \tilde{\mathbf{E}}_4$).

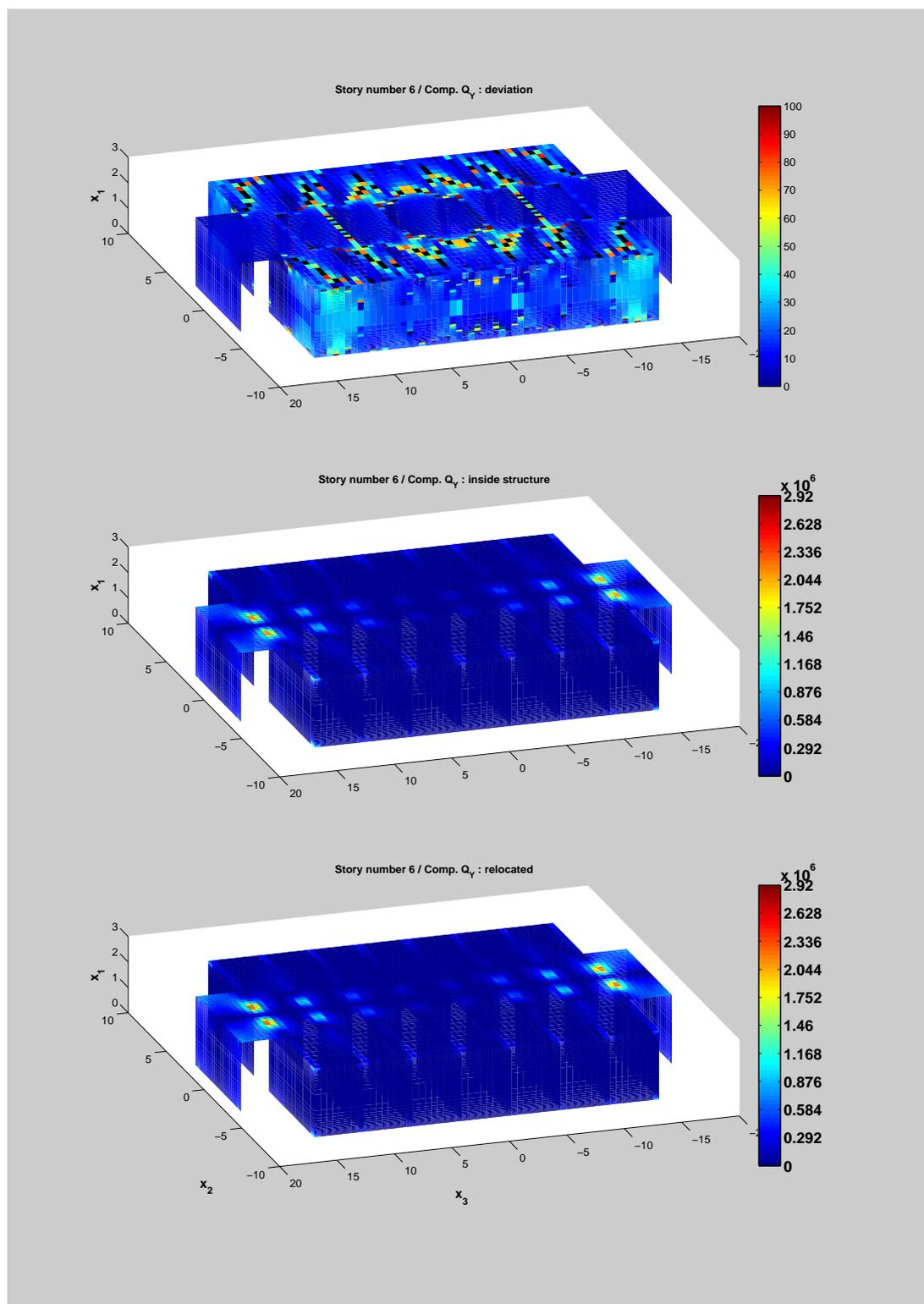


Figure III.67 Planche comparative (vue extérieure) des résultats de localisation de la composante Q_Y des efforts internes dans les éléments pour l'étage 6 dans le cas où le bâtiment soumis à un couple de torsion ($\mathbf{E}(x) = \chi_1/\chi_0 \mathbf{E}_4$).

SECONDE PARTIE :

**DYNAMIQUE DU BÂTIMENT AVEC
INTERACTION SOL-STRUCTURE**

CHAPITRE IV

INTRODUCTION

Le second volet de cette thèse s'attache à l'étude de la réponse dynamique des bâtiments sous séisme. Ces travaux traitent du cas des bâtiments multi-étagés reposant sur des fondations rigides. Les modèles mécaniques mis en œuvre utilisent la modélisation réduite ou "compressée" présentée dans la section précédente pour ce type de bâtiment. L'interaction entre un sol déformable et la fondation rigide est également prise en compte. Cette interaction dite interaction sol-structure (ISS) peut avoir une influence sur la réponse dynamique d'une structure de génie civil. Les déplacements et rotations de la fondation dus à la déformation du sol sont à l'origine d'un mouvement d'ensemble non négligeable du bâtiment. Les forces d'inertie créées par les mouvements de la fondation accentuent la déformation de la structure.

L'interaction sol-structure dépend des propriétés matérielles du sol, de la forme de la fondation et des caractéristiques de la structure qui repose sur elle, ainsi que de la nature de l'excitation sismique. Le problème mécanique de l'interaction sol-structure posé dans son cadre général est illustré par la *Figure IV.1* où un corps élastique borné Ω_f (la fondation) est en contact avec un milieu élastique semi-infini Ω_s par une interface Σ_{sf} . L'interaction sol-structure est alors exprimée par la relation entre le champ de déplacement \mathbf{u}_{sf} de la surface de contact entre le sol et la fondation et le champ de force \mathbf{f}_{sf} appliqué par le sol sur cette même surface. La relation $\mathbf{f}_{sf} = \mathcal{Z}(\mathbf{u}_{sf})$ est donnée par l'application \mathcal{Z} appelée impédance de fondation. Cette application renferme toute la modélisation physique de l'interface sol-fondation. Une interaction viscoélastique linéaire s'exprime par exemple dans le domaine fréquentiel par un opérateur d'impédance linéaire complexe dépendant de ω tel que $\mathbf{f}_{sf}(\omega) = \mathcal{Z}(\omega) \mathbf{u}_{sf}(\omega) = (\mathcal{K} + i\omega\mathcal{D} - \omega^2\mathcal{M}) \mathbf{u}_{sf}(\omega)$ où \mathcal{K} , \mathcal{D} et \mathcal{M} sont respectivement les opérateurs linéaires de rigidité, de viscosité et de masse. Lorsque le champ de déplacement est approximé par la *méthode de Galerkin* sur une base $(\phi_1, \dots, \phi_{N_H})$ d'un espace de Hilbert \mathcal{H} de dimension finie N_H :

$$\mathbf{u}_{sf} = \sum_{n \in \mathbb{N} \leq N_H} a_n \phi_n$$

l'opérateur d'impédance peut s'écrire sous forme matricielle $[\mathbf{Z}(\omega)] = [\mathbf{K}] + i\omega[\mathbf{D}] - \omega^2[\mathbf{M}]$ où $[\mathbf{K}]$, $[\mathbf{D}]$ et $[\mathbf{M}]$ sont des matrices de $\mathbb{M}_{N_H}^+(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques définies

positives. Dans le cas particulier d'une fondation rigide, le champ de déplacement de la surface de fondation est défini sur l'espace des mouvements de corps rigide dont la dimension est $N_H = 6$ et les 6 fonctions ϕ_n correspondent aux 3 rotations et 3 translations.

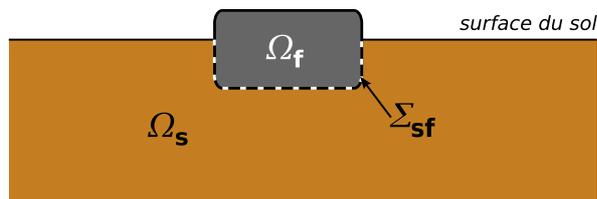


Figure IV.1 Interaction d'un corps élastique borné Ω_f (la fondation) avec un milieu élastique semi-infini Ω_s (le sol) par une interface Σ_{sf} (surface de contact entre le sol et la fondation).

Pour déterminer l'impédance d'interaction avec précision, de nombreuses approches numériques ont été mises en œuvre. La difficulté principale vient de la représentation du domaine Ω_s qui ne peut être réalisée à l'aide d'un simple modèle par éléments finis. Les deux méthodes numériques les plus classiques pour résoudre ce type de problèmes sont la méthode des éléments finis avec parois absorbantes et la méthode des éléments de frontière (*boundary elements method*). Ces méthodes respectent avec plus ou moins de précision, les conditions de *Sommerfeld* qui s'énoncent de la manière suivante: *L'énergie irradiée par une source doit se dissiper à l'infini; aucune énergie ne doit être irradiée en provenance de l'infini.*

La méthode des éléments infinis utilise des éléments "absorbants" aux bords non libres du maillage d'un domaine borné de sol qui suppriment les composantes réflexives des ondes incidentes. Ce principe est appliqué dans [5] pour le cadre de l'acoustique en milieu fluide où des éléments dits *dipolaires* absorbent les contributions radiatives d'un développement asymptotique du champ de pression hydrostatique aux deux premiers ordres. D'autres méthodes de ce type avec un filtrage plus étendu ont été développées par la suite (*e.g.* [38]). Une méthode plus directe consiste encore à utiliser des éléments de bord avec un amortissement progressif où les ondes vont venir "s'absorber" sans être réfléchies. D'autres travaux utilisent une résolution analytique du problème hors du domaine qui est utilisée comme condition aux limites sur les éléments de bord non libres. Harari [68] combine une telle technique avec des éléments infinis. Toutes ces techniques sont particulièrement bien adaptées aux problèmes d'acoustique ou de manière plus générale à l'observation des propagations d'une onde dans un sous-domaine borné d'un domaine infini.

La méthode des éléments de frontière semble néanmoins la plus appropriée pour le problème de l'interaction sol-fondation dans la mesure où elle ne fait intervenir que des maillages d'interfaces et que les conditions de *Sommerfeld* y sont parfaitement respectées. En outre, cette méthode nécessite une résolution analytique exacte qui limite son utilisation au cas d'un sol homogène. Dominguez [40] et Karabalis et Beskos [77] appliquèrent cette méthode au cas d'une fondation rectangulaire enfouie dans un sol élastique homogène. Mita et Luco [100] proposèrent une méthode combinant des éléments de frontière sur l'interface sol fondation et l'utilisation d'éléments finis dans le domaine de sol excavé (domaine de sol déplacé par la fondation) afin de réduire les coûts de calcul. Une méthode de ce type est utilisée dans le code de calcul MISS développé par Clouteau à l'ECP et qui est utilisé par

Cottureau *et al.* [35], [36] pour calculer des impédances avec fondation déformable. Des modèles d'interaction sol-fondation destinés à l'ingénierie ont été élaborés de manière à donner des expressions algébriques des termes de raideur et d'amortissement radiatif intervenant dans l'expression de l'impédance de fondation. De tels modèles (Wolf et Somaini[144] et Jean *et al.* [73]) ont été conçus à partir d'assemblages de raideurs et d'amortisseurs visqueux connectés à une fondation rigide; l'ensemble formant un système mécanique dont les termes de la matrice d'impédance sont recalés sur les valeurs de référence issues de la littérature sur l'interaction de sol. Les résultats sont obtenus pour chaque type de mouvement: pompage, tamis, roulis, basculement, lacet.

Nombre d'études assez anciennes portant sur les problèmes d'interaction d'un solide avec un milieu élastique sont basées sur des modèles de fondation de type *Winkler* [141] (*Figure IV.2*) faisant intervenir un assemblage continu de raideurs: *e.g.* [85], [131], [123], [132]. Parmi les premiers travaux directement appliqués aux études sismiques, on peut citer les publications de Kagawa et Kraft [76], Flores-Berrones et Whitman [49] et Kavvadas et Gazetas [78]. Les fondations de type *Winkler* conduisent à des modèles mécaniques assez simples utilisant des expressions analytiques qui comme dans [132] peuvent être insérées dans une résolution numérique. On trouve de nombreuses variantes de ce type de fondation, Kagawa [76] utilise ainsi une "pile" de ressorts horizontaux où des amortisseurs visqueux sont mis en parallèle des raideurs (modèle rhéologique de *Kelvin-Voigt*) pour modéliser un comportement viscoélastique du sol afin de modéliser le débattement horizontal d'une superstructure. Boulanger étudie dans [17] un problème similaire en utilisant des ressorts non-linéaires pour modéliser des comportements de sols argileux et sablonneux. Le principal défaut des fondations de type *Winkler* est l'absence de couplage entre les ressorts ce qui revient pour une fondation horizontale à négliger la raideur de cisaillement vertical. Pour remédier à ce défaut, des modèles utilisant des ressorts de couplage ont été développés. C'est le cas par exemple du modèle de décollement fondation qui est utilisé dans le *chapitre VIII* sur le décollement de fondation. On peut également mentionner le modèle de fondation de *Kerr* constitué de deux couches de ressorts de compression interconnectées par des ressorts de cisaillement (voir [79]).

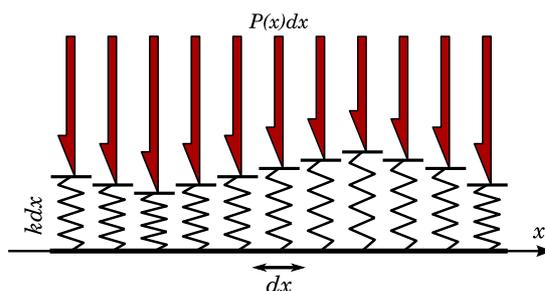


Figure IV.2 Le modèle de fondation de *Winkler* est un tapis de ressorts continu constitué de raideurs (par unité de surface ou de longueur) indépendantes. Sur cette illustration 1D, la fondation a une raideur élastique verticale par unité de longueur k et est soumise à un champ de force par unité de longueur $P(x)$.

Parmi les approches simplifiées pour l'ingénierie figurent les *modèles de cône* originellement développés par Elhers [44] pour l'interaction entre le sol et une fondation en translation transverse (tamis). Meek et Veletsos [95] ont par la suite introduit la rotation couplée

au déplacement transverse (roulis). Ce modèle décrit l'interaction d'une fondation de surface circulaire (disque) rigide reposant sur un demi-espace élastique. Le modèle de cône remplace alors le demi espace élastique par un cône tronqué que l'on peut considérer comme une poutre élastique à section variable. Pour chaque type de mouvement de la fondation, un cône est déterminé par une valeur tabulée de son facteur d'aspect défini comme étant le rapport de la hauteur z_0 de la partie émergée du cône sur le rayon r_0 de la fondation (*Figure IV.3*). Les valeurs tabulées en question dépendent du rapport de la vitesse des ondes de pression sur celle des ondes de cisaillement dans le milieu élastique. Les termes de la matrice d'impédance sont alors déterminés en fonction de z_0 , r_0 et des propriétés physique du milieu élastique. Le modèle a été depuis étendu par Meek et Wolf [96] au cas des fondations circulaires enfouies par l'implication d'une superposition de cônes doubles et par Wolf et Deeks [143] au cas de fondations axisymétriques.

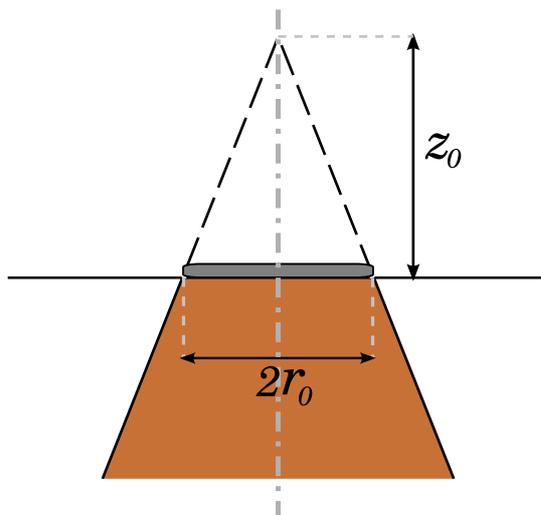


Figure IV.3 Fondation circulaire de surface de rayon r_0 reposant sur un cône de rapport d'aspect $\frac{z_0}{r_0}$.

Gazetas *et al.* [53], [55], [54], [50] ont mené des études sur les réponses statique et dynamique de fondations rigides de formes diverses à la surface du sol ou enfouies. Ces travaux reposent sur des calculs par éléments de frontière croisés avec des expressions analytiques issues de la littérature. Sont obtenues au final des expressions semi-analytiques ainsi que des abaques permettant de calculer aisément les termes de la matrice d'impédance de sol. L'ensemble de ces résultats est synthétisé dans [51] et [52]. Ce sont ces modèles d'interaction de sol pour l'ingénieur qui seront utilisés dans le *chapitre V*.

Toutes les modélisations mentionnées se rapportent à l'interaction entre une fondation et un sol élastique homogène. Néanmoins, les sols sont en général des milieux hautement hétérogènes et présentant de plus un comportement élastoplastique (*e.g.* Pastor [106]). Les variations des propriétés du sol sont toujours difficiles à mesurer et encore plus au voisinage direct de la surface de contact entre le sol et la fondation. On a donc recours à des estimations statistiques et à des approches probabilistes.

Un problème courant pour les structures du génie civil est le différentiel d'affaissement au niveau des appuis au sol qui se traduit par des fissures apparentes voire un effon-

drement. L'estimation de ce différentiel est en pratique menée par une estimation de l'affaissement total calculée à partir d'une estimation des propriétés élastiques moyennes du sol. Le différentiel d'affaissement est ensuite estimé à partir de données de corrélation avec l'affaissement total issues de mesures expérimentales. Diverses études probabilistes dressent des modèles prédictifs de l'affaissement. Gordon et Griffiths dans [47] et [48] estiment les densités de probabilité de l'affaissement d'un appui seul et du différentiel entre deux appuis à l'aide d'un calcul par éléments finis sur un domaine de sol borné élastique isotrope dont le module d'élasticité est un champ stochastique. Dans la même lignée, on peut citer les travaux de Breysse [20]. La densité de probabilité d'un appui seul est obtenue à partir du champ stochastique du module d'élasticité et de la dimension de la semelle d'appui de la fondation. Lorsque les appuis sont multiples, la densité de probabilité du différentiel d'affaissement fait en outre intervenir le rapport entre la distance d'écartement des appuis et la distance de corrélation horizontale du champ de module d'élasticité en surface, ainsi que le rapport entre la dimension des semelles d'appui et cette même distance de corrélation.

Les incertitudes sur les propriétés mécaniques des sols sont le plus fréquemment prises en compte par la modélisation probabiliste de paramètres du modèle. C'est le cas par exemple de Jin *et al.* [75] qui présentent un calcul d'analyse fréquentielle d'un modèle brochette (*lumped mass model*) de bâtiment dont l'interaction sol-fondation est exprimée par un modèle classique de matrice d'impédance de fondation rigide sur sol élastique homogène isotrope dont les termes de raideur et d'amortissement dépendent des propriétés élastiques du sol et des caractéristiques géométriques de la fondation. Le module de cisaillement $G = G_0 (1 + \theta_1)$ et le coefficient de Poisson $\nu = \nu_0 (1 + \theta_2)$ font intervenir les variables aléatoires réelles θ_1 et θ_2 suivant une loi uniforme. L'intégration de paramètres aléatoires dans le modèle mécanique du sol ne changent néanmoins pas la nature physique du modèle. En introduisant par exemple des incertitudes sur le modules de cisaillement G du sol, celui-ci Σ est toujours représenté par un modèle mécanique de milieu homogène isotrope.

Lorsqu'un bâtiment est soumis à une excitation sismique, le caractère hétérogène du sol implique une réponse dynamique de la structure couplant les mouvements de la structure dans toutes les directions de l'espace. Le projet *SMART-2* [91] illustre bien le phénomène. Des tests vibratoires furent menés sur une maquette axisymétrique de centrale atomique à l'échelle 1/4 pour y tester les effets de l'interaction de sol. Un système de deux actionneurs placés au centre du toit (donc sur l'axe d'axisymétrie) permettait d'exciter la structure suivant les directions horizontales orthogonales (N-S) et (E-O). Il est observé un fort couplage de la réponse de la structure dans ces deux directions et étant donné son axisymétrie, ce couplage ne pouvait provenir que de l'axisymétrie du sol. Toubalem *et al.* [136] utilisèrent une interaction sol-fondation de type *Winkler* avec un champ de raideur de surface stochastique pour modéliser les résultats observés lors du projet *SMART-2*. Ils ont montré que pour un champ stochastique homogène en moyenne, la réponse moyenne du système implique des couplages du type observé dans les mesures expérimentales.

L'implication de champs stochastiques dans la description des variations spatiales des propriétés du sol a trouvé toute son ampleur avec la méthode des éléments finis stochastiques (Ghanem [59]). Ghanem et Brzakala [58] utilisent cette méthode pour représenter un sol stratifié à deux couches avec interface aléatoire. La discontinuité de propriétés physiques

est appliquée à l'aide d'une fonction de *Heaviside* et la matrice de raideur stochastique du modèle éléments finis du domaine de sol considéré est exprimée à l'aide d'un développement en chaos polynomiaux. Ghiocel [60] utilise la méthode des éléments finis stochastiques pour estimer la réponse d'un réacteur nucléaire reposant sur un sol aléatoire.

Toutes ces méthodes probabilistes sont dites paramétriques car les incertitudes portent sur les paramètres du modèle mécanique de sol. Ces représentations probabilistes sont néanmoins limitées par la nature du modèle déterministe. Introduire une variabilité spatiale du module de cisaillement du sol ne rendra ainsi pas compte d'une éventuelle anisotropie locale du sol ou de la présence de cavités remplies de fluide. Le modèle probabiliste non-paramétrique élaboré par Soize [126] et [129] donne accès à une représentation introduisant une "classe" d'incertitudes plus large. Les incertitudes vont directement porter sur les matrices de masse, amortissement et raideur issues de la discrétisation du modèle mécanique. Les incertitudes portent alors directement sur la modélisation mécanique, ce qui permet de tenir compte en grande partie des simplifications utilisées dans la construction du modèle. Cette théorie des matrices aléatoires établit des densités de probabilité construites sur le principe du maximum d'entropie (Shanon [119] et Jaynes [72]), l'entropie définie au sens de l'information étant une mesure de l'incertitude. Ayant cependant une certaine information sur les matrices aléatoires, les fonctions de densité de probabilité obtenues sont celles vérifiant cette information avec un niveau d'incertitude maximal. Le modèle non-paramétrique a été appliqué à la construction de matrices d'impédances d'interaction de sol avec une fondation élastique par Cottureau [35] et [36].

Le *chapitre V* qui suit immédiatement cette introduction présente le modèle d'impédance utilisé par la suite pour caractériser l'interaction sol-fondation du bâtiment. Les fonctions de densité de probabilité des matrices aléatoires issues du modèle probabiliste non-paramétrique y sont également exposées ainsi que la mise en œuvre pratique des générateurs de matrices aléatoires. Il est finalement montré comment le modèle non-paramétrique est appliqué à l'impédance de fondation.

La modélisation mécanique du bâtiment reposant sur les propriétés effectives réduites du *chapitre III* est détaillée dans le *chapitre VI*. Cette modélisation intègre l'interaction de sol stochastique présentée au chapitre précédent. Deux types de modèles ayant les mêmes propriétés statiques mais des répartitions inertielles différentes y sont en outre présentés. L'analyse dynamique stochastique des résultats de simulation du bâtiment sous séisme est menée au *chapitre VII*. L'effet de l'interaction de sol sur le comportement déterministe de la structure est examiné dans un premier temps. La répercussion des incertitudes d'impédance d'interaction sol-structure sur la réponse dynamique du bâtiment est étudiée à l'aide de traitement statistiques.

Le *chapitre VIII* qui conclut la seconde partie de ce travail de thèse aborde le problème du décollement de fondation. L'interaction de sol non-linéaire mise en jeu est conçue à l'aide d'un calcul analytique issu d'une modélisation d'interaction sol-fondation de type *Winkler*.

CHAPITRE V

IMPÉDANCE D'INTERACTION SOL - STRUCTURE

Les termes d'impédance de l'interaction sol-fondation issus des travaux de synthèse de Gazetas ([51] et [52]) sont présentés dans ce chapitre et seront utilisés dans le cadre de la modélisation mécanique du bâtiment au *chapitre VI*.

Le modèle d'interaction sol-fondation présenté ici considère une fondation rigide de forme quelconque reposant sur un sol élastique homogène isotrope. L'hypothèse de fondation rigide suppose qu'au sein de l'interaction, l'essentiel des déformations provient du sol. La fondation est supposée de forme constante au cours du temps ce qui implique que la structure reposant sur elle lui impose un niveau de déformation négligeable en comparaison de celui du sol. Cette hypothèse devient caduque pour les structures larges comme un réacteur nucléaire mais se vérifie assez bien pour une construction élancée.

La fondation au repos représentée à la *Figure V.1.b* est orientée par une base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Le point O est défini pour une semelle (fondation de surface) comme étant son centre de masse. Pour une fondation profonde enfouie, le point O est, comme le montre la *Figure V.2*, la projection du centre de masse de la fondation au repos sur la face supérieure de la fondation au repos suivant la direction verticale \mathbf{e}_1 . On note $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ la position par rapport au point O et $\mathcal{R}_O = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, t)$ le référentiel lié à ce point. En tant que corps rigide, le mouvement de la fondation est décrit par le déplacement $\mathbf{U}_f(t) = (U_{f1}(t), U_{f2}(t), U_{f3}(t))$ de son centre de masse et la rotation $\boldsymbol{\theta}_f(t) = (\theta_{f1}(t), \theta_{f2}(t), \theta_{f3}(t))$ autour de son centre de masse. La fondation a une masse m_f ainsi qu'une matrice d'inertie $[\mathbf{I}_f]$. Elle est supposée soumise à une force et à un moment extérieurs $\mathbf{F}_e(t)$ et $\mathbf{M}_e(t)$ ainsi qu'à une force et un couple de réaction élastique du sol $\mathbf{F}_s(t)$ et $\mathbf{M}_s(t)$. L'équation de conservation de la quantité de mouvement de la fondation s'écrit:

$$m_f \frac{d^2 \mathbf{U}_f}{dt^2} = \mathbf{F}_e(t) + \mathbf{F}_s(t) \quad (\text{V.1})$$

$$[\mathbf{I}_f] \frac{d^2 \boldsymbol{\theta}}{dt^2} = \mathbf{M}_e(t) + \mathbf{M}_s(t) \quad (\text{V.2})$$

L'impédance de sol est caractérisée par une raideur et un amortissement visqueux appliqués à chacun des degrés de liberté de la fondation de telle sorte que la force et le moment de réaction du sol soient caractérisés par des matrices de raideur $[\mathbf{K}_s]$ et d'amortissement $[\mathbf{D}_s]$ de sol tels que:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_s(t) \\ \mathbf{M}_s(t) \end{pmatrix} = -[\mathbf{K}_s] \begin{pmatrix} \mathbf{U}_f(t) \\ \boldsymbol{\theta}_f(t) \end{pmatrix} - [\mathbf{D}_s] \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{U}}_f(t) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_f(t) \end{pmatrix} \quad (\text{V.3})$$

où le point " $\dot{}$ " signifie la dérivation par rapport au temps. Les équations (V.1) et (V.2) sont alors des équations différentielles en temps du second ordre, linéaires et à coefficients constants. La matrice de masse de fondation $[\mathbf{M}_f]$ est la matrice diagonale par blocs dont le premier bloc est la matrice diagonale $m_f [\mathbb{1}_6]$ où $[\mathbb{1}_6]$ est la matrice identité d'ordre 6 et le second bloc la matrice d'inertie de fondation $[\mathbf{I}_f]$. On donne l'équation temporelle d'interaction sol-fondation en introduisant $[\mathbf{M}_f]$:

$$[\mathbf{M}_f] \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_f(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_f(t) \end{pmatrix} + [\mathbf{D}_s] \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{U}}_f(t) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_f(t) \end{pmatrix} + [\mathbf{K}_s] \begin{pmatrix} \mathbf{U}_f(t) \\ \boldsymbol{\theta}_f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_e(t) \\ \mathbf{M}_e(t) \end{pmatrix} \quad (\text{V.4})$$

qui dans le domaine fréquentiel se traduit pour une pulsation ω par:

$$(-\omega^2 [\mathbf{M}_f] + i \omega [\mathbf{D}_s] + [\mathbf{K}_s]) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{U}}_f(\omega) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_f(\omega) \end{pmatrix} = [\mathbf{Z}_{sf}] \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{U}}_f(\omega) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_f(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{F}}_e(\omega) \\ \hat{\mathbf{M}}_e(\omega) \end{pmatrix} \quad (\text{V.5})$$

où $i^2 = -1$, le chapeau " $\hat{}$ " désigne la *transformée de Fourier* par rapport au temps. La matrice d'impédance de l'interaction sol-fondation est notée $[\mathbf{Z}_{sf}]$. Les matrices $[\mathbf{K}_s]$, $[\mathbf{D}_s]$, et $[\mathbf{M}_f]$ sont dans $\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles symétriques définies positives. La symétrie découle de la troisième loi de *Newton*. Les matrices doivent en outre être définies positive afin d'assurer la stabilité du système, à savoir que pour une excitation extérieure finie, le système a une réponse bornée.

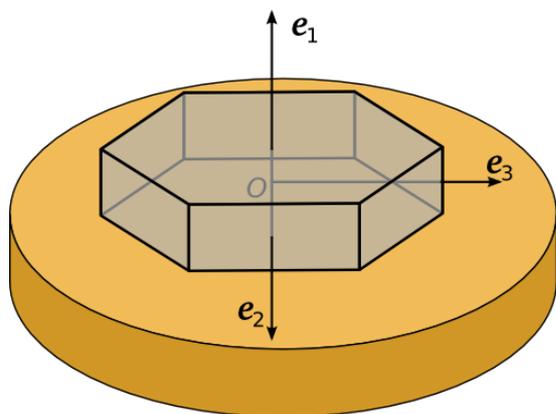


Figure V.1.a

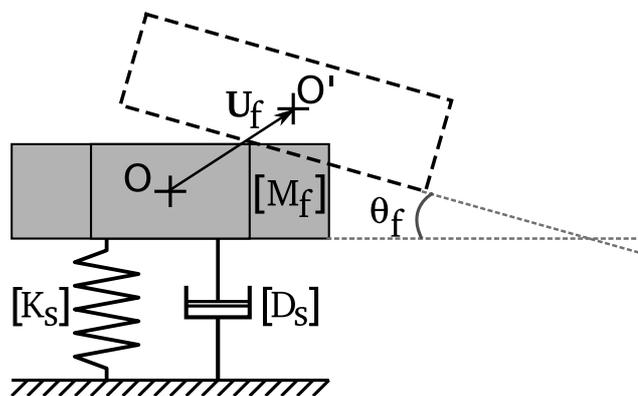


Figure V.1.b

(a) Fondation rigide sur un sol élastique. (b) Modèle rhéologique de l'impédance de fondation pour les composantes du déplacement \mathbf{U}_f et de la rotation $\boldsymbol{\theta}_f$ de la fondation rigide.

Les expressions des termes d'impédance de fondation qui sont présentés sont des formules semi-analytiques reposant sur des résultats issus de certaines des formulations exactes et

approximatives obtenues à l'aide de modèles physiques simples calibrés par des calculs d'éléments de frontières et de données issues de la littérature. Ces formules destinées à l'ingénierie fournissent des expressions algébriques des termes d'impédance en fonction des paramètres physiques du sol et des paramètres physiques et géométriques de la fondation.

V.1 Paramètres du modèle d'impédance

L'ensemble des paramètres intervenant dans la définition des termes d'impédance de sol est inventorié dans la *Table V.1*:

■ Paramètres physiques du sol	
G_s	Module élastique de cisaillement
ν_s	Coefficient de <i>Poisson</i>
ρ_s	Masse volumique du sol
■ Paramètres de la fondation	
L_{f1}, L_{f2}, L_{f3}	Dimensions de l'encadrement de fondation orienté par les directions $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ (voir <i>Figure V.2</i>)
d_f	Profondeur d'enfouissement de la fondation
m_f	Masse de la fondation
$[\mathbf{I}_f]$	Matrice d'inertie de la fondation

En pratique, ces paramètres sont connus avec des degrés de précision très variables. Les propriétés physiques et géométriques de la fondation sont par exemple bien connues dans le cas d'une construction récente (moins de 30 ans). Les propriétés de sol sont le fruit de processus naturels et leur mesure est *in situ* est difficile et imprécise. Les incertitudes sur l'impédance d'interaction sol-fondation prises en compte par le modèle probabiliste décrit en V.3 sont donc *a priori* entièrement dues à la méconnaissance des propriétés du sol.

Les paramètres de la table *Table V.1* servent à calculer diverses grandeurs physiques et géométriques intervenant dans les expressions des termes de raideur et amortissement d'interaction sol-fondation catalogués dans la section V.2.

La géométrie de la fondation intervient dans l'interaction sol-fondation via les dimensions de son parallélépipède circonscrit mais également par les propriétés géométriques de la surface de contact de la fondation avec le sol. On note A_b, J_b, I_{b2}, I_{b3} respectivement la surface et les moments d'inertie par rapport aux directions $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de la surface de contact inférieure ("bottom surface") de la fondation. Pour une fondation rectangulaire

confondue avec son parallélépipède circonscrit, ces caractéristiques valent:

$$A_b = L_{f2} L_{f3} \quad J_b = \frac{L_{f2}^3 L_{f3} + L_{f2} L_{f3}^3}{12} \quad I_{b2} = \frac{L_{f2} L_{f3}^3}{12} \quad I_{b3} = \frac{L_{f2}^3 L_{f3}}{12}$$

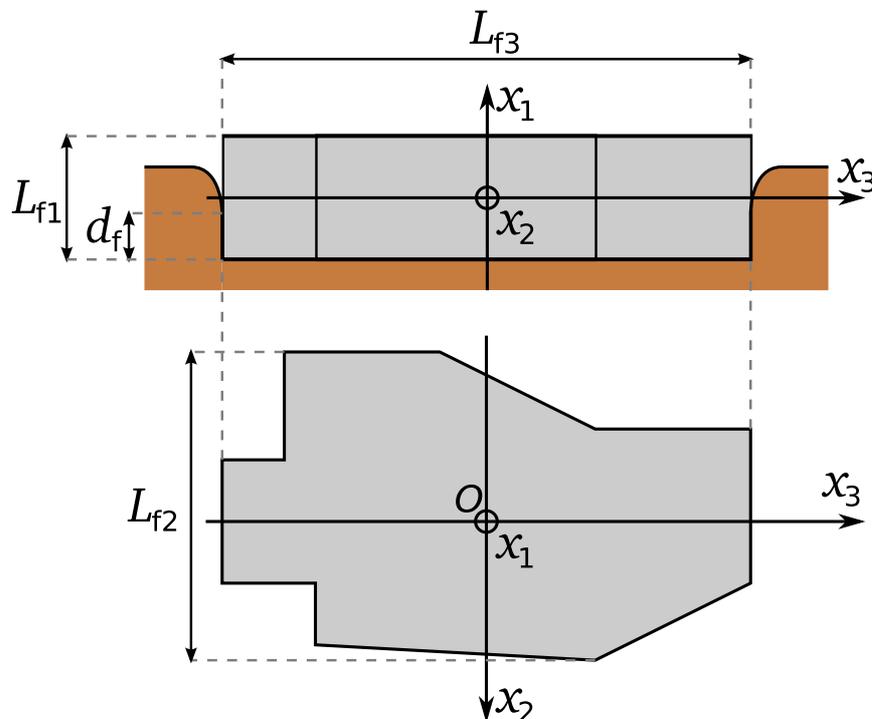


Figure V.2 Les longueurs L_{f1} , L_{f2} , L_{f3} sont les dimensions du parallélépipède qui circonscrit la fondation et dont les directions normales aux faces sont définies par $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. La longueur d_f est la profondeur de contact de la fondation avec le sol.

Lorsque la fondation est enfouie, la surface de contact latérale de la fondation A_w ("sidewall-soil contact surface") intervient. Si la fondation est rectangulaire et confondue avec son parallélépipède circonscrit, et qu'elle est en outre entièrement enfouie dans le sol ($d_f = L_{f1}$), cette surface vaut:

$$A_w = 2 (L_{f1} L_{f2} + L_{f1} L_{f3})$$

Les caractéristiques inertielles de cette fondation parallélépipédique sont calculées de la manière usuelle. La fondation est creuse, d'épaisseur constante t_f , homogène et de masse volumique ρ_f :

$$m_f \simeq 2 \rho_f ((-2 L_{f1} - 2 L_{f2} - 2 L_{f3}) t_f^2 + 2 (L_{f1} L_{f2} + L_{f1} L_{f3} + L_{f2} L_{f3}) t_f)$$

$$I_{f1} \simeq$$

$$\frac{1}{6} \rho_f ((-6 L_{f2}^2 L_{f3} - 6 L_{f1} L_{f2}^2 - 6 L_{f2} L_{f3}^2 - 12 L_{f1} L_{f2} L_{f3} - 2 L_{f2}^3 - 6 L_{f1} L_{f3}^2 - 2 L_{f3}^3) t_f^2 + (L_{f2}^3 L_{f3} + L_{f1} L_{f3}^3 + 3 L_{f1} L_{f2} L_{f3}^2 + L_{f2} L_{f3}^3 + 3 L_{f1} L_{f2}^2 L_{f3} + L_{f1} L_{f2}^3) t_f)$$

$$I_{f2} \simeq \frac{1}{6} \rho_f \left((-6 L_{f3}^2 L_{f1} - 6 L_{f2} L_{f3}^2 - 6 L_{f3} L_{f1}^2 - 12 L_{f2} L_{f3} L_{f1} - 2 L_{f3}^3 - 6 L_{f2} L_{f1}^2 - 2 L_{f1}^3) t_f^2 + (L_{f3}^3 L_{f1} + L_{f2} L_{f1}^3 + 3 L_{f2} L_{f3} L_{f1}^2 + L_{f3} L_{f1}^3 + 3 L_{f2} L_{f3}^2 L_{f1} + L_{f2} L_{f3}^3) t_f \right)$$

$$I_{f3} \simeq \frac{1}{6} \rho_f \left((-6 L_{f1}^2 L_{f2} - 6 L_{f3} L_{f1}^2 - 6 L_{f1} L_{f2}^2 - 12 L_{f3} L_{f1} L_{f2} - 2 L_{f1}^3 - 6 L_{f3} L_{f2}^2 - 2 L_{f2}^3) t_f^2 + (L_{f1}^3 L_{f2} + L_{f3} L_{f2}^3 + 3 L_{f3} L_{f1} L_{f2}^2 + L_{f1} L_{f2}^3 + 3 L_{f3} L_{f1}^2 L_{f2} + L_{f3} L_{f1}^3) t_f \right)$$

De par sa répartition de masse et sa géométrie, la fondation est symétrique par rapport aux plans (Ox_1x_2) , (Ox_1x_3) et (Ox_2x_3) , la matrice d'inertie de la fondation est donc diagonale $[\mathbf{I}_f] = \mathbf{diag}(I_{f1}, I_{f2}, I_{f3})$ et la matrice de masse de la fondation s'écrit:

$$[\mathbf{M}_f] = \begin{pmatrix} m_f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{f1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{f2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{f3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_f [\mathbb{1}_3] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{I}_f] \end{pmatrix} \quad (\text{V.6})$$

Le comportement élastique du sol est défini par son module de cisaillement G et son coefficient de *Poisson* ν mais peut être défini de manière équivalente par les vitesses de propagation des ondes S ("shear"=cisaillement) et des ondes P ("Pressure"=traction-compression) en son sein:

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad V_p = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} V_s$$

Le calcul d'impédance d'interaction sol-fondation fait intervenir la vitesse de propagation apparente des ondes de traction-compression par rapport à la fondation. Cette vitesse notée V_{La} s'exprime en fonction de la vitesse de propagation des ondes S:

$$V_{La} = \frac{3.4}{\pi(1-\nu)} V_s$$

V.2 Raideurs et amortissements d'impédance

Les termes de raideur et d'amortissement sont donnés ici pour l'impédance d'interaction sol-fondation d'une fondation parallélépipédique en surface et totalement enfouie.

Les termes des matrices $[\mathbf{D}_f]$, $[\mathbf{K}_f]$ intervenant dans l'équation d'équilibre fréquentielle (V.5) sont des fonctions de la fréquence:

$$[\mathbf{K}_s]_{ij}(\omega) = [\mathbf{K}_s^{\text{stat}}]_{ij} \times k_{ij}^{\text{dyn}}(\omega) \quad \text{et} \quad [\mathbf{D}_s]_{ij}(\omega)$$

La matrice $[\mathbf{K}_s^{\text{stat}}]$ est la matrice de raideur statique et les $k_{ij}^{\text{dyn}}(\omega)$ sont les coefficients sans dimension de raideur dynamique dont le tracé est donné en VII.1.2. Les termes de raideur $[\mathbf{K}_s]_{ij}(\omega)$ seront approximés par la méthode des moindres carrés à des polynômes du second degré de la forme $[\mathbf{K}_s]_{ij}(\omega) \sim K_0 + K_1\omega^2$. Les termes $K_1\omega^2$ seront intégrés à la matrice de masse sous la forme d'une matrice de masse $[\mathbf{M}_{\text{ad}}]$ caractérisant les perturbations inertielles de la fondation dues à des domaines du sol de fondation déplacés dans son mouvement. Les termes K_0 sont des raideurs effectives constantes qui seront données par une matrice $[\mathbf{K}_{s0}]$.

La dissipation d'énergie mécanique lors de l'interaction dynamique entre le sol et la fondation est issue de deux phénomènes physiques différents. On a d'une part l'amortissement matériel dû aux propriétés de dissipation des matériaux constituant le sol de fondation et qu'on retrouve sous forme de frictions sèches ou visqueuses et de déformations plastiques. D'autre part, une partie de l'énergie vibratoire de la fondation est perdue par radiation. Il s'agit d'un amortissement géométrique où la fondation est la source vibratoire, un peu comme une goutte tombée dans un lac dont on voit l'énergie se dissiper sous forme d'ondes hémisphériques divergentes. Les propriétés de dissipation des matériaux sont dans bien des cas difficiles à modéliser et font l'objet de nombreux travaux de recherche. L'une des caractéristiques que doit posséder un modèle d'amortissement est la causalité, c'est-à-dire que la réponse du système physique ne doit pas précéder l'excitation qui en est la cause. Les relations de *Kramers-Krönig* [82] originellement développées pour des problèmes d'optique ondulatoire sans lien explicite avec la propriété de causalité permettent d'assurer qu'une fonction $f(\omega)$ à valeurs complexes définie dans le domaine fréquentiel est causale dans le domaine temporel. Leur forme standard pour des fréquences positives s'énonce:

$$\Re(f(\omega)) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\zeta \Im(f(\zeta))}{\zeta^2 - \omega^2} d\zeta \quad \text{et} \quad \Im(f(\omega)) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\zeta \Re(f(\zeta))}{\zeta^2 - \omega^2} d\zeta$$

Pour un exemple d'application à un problème d'impédance acoustique, le lecteur peut se reporter à [12]. Le modèle d'amortissement hystérétique de sol consiste à prendre un module de cisaillement complexe $G_0(1 + 2i\eta)$ où G_0 (MPa) et η (sans dimension) sont des paramètres indépendants de la fréquence. Ce modèle fut très utilisé en mécanique des sols car donnant des résultats proches de la physique réelle et pour sa simplicité de mise en œuvre. Ce modèle présente néanmoins un problème théorique car son application directe est non causale contrairement à l'amortissement visqueux faisant intervenir un terme d'amortissement proportionnel à la fréquence. Des modèles mécaniques de sol dont l'amortissement vérifie la propriété de causalité ont été développés pour approcher au mieux l'amortissement hystérétique. Parmi les modèles linéaires, on trouve les modèles rhéologiques linéaires utilisant des assemblages de *Kelvin-Voigt* généralisés (assemblage de cellules de *Kelvin-Voigt* en série) développés par Liu *et al.* [89] ou des assemblages

de *Maxwell* généralisés (assemblage de cellules de *Maxwell* en parallèle) comme dans les travaux de Emmerich et Korn [45]. D'autres stratégies visant à concevoir des modèles mécaniques avec un amortissement causal s'approchant au mieux de l'amortissement hystéretique sont présentes dans la littérature. Cottureau [35], [36] adopte par exemple une stratégie reposant sur les "variables cachées" intervenant dans la construction d'un modèle mécanique d'impédance d'interaction sol-fondation. La matrice d'impédance est un opérateur explicité pour un jeu de variables d'état ne correspondant pas nécessairement aux variables physiques du problème. Sa construction fait intervenir un jeu de variables n'apparaissant pas explicitement (les "variables cachées") et la même impédance peut être définie pour différents jeux. Ainsi pour une matrice d'impédance donnée (avec de l'amortissement hystéretique non causal par exemple), on identifie les variables cachées correspondant à une modélisation causale et interpolant l'impédance cible pour un jeu de fréquence choisi.

Le modèle d'amortissement proposé dans la compilation de Gazetas [51], [52] fait intervenir au sein de la matrice d'impédance d'interaction sol fondation $[\mathbf{Z}_{sf}(\omega)]$ un terme d'amortissement de la forme $i\omega [\mathbf{D}_s(\omega)]$ et donne les variations de ce terme dans le domaine fréquentiel sous forme d'abaques (*charts*). Pour assurer la causalité du modèle de manière simple, on fixe les termes de cette matrice pour des valeurs choisies de la fréquence ce qui nous ramène à une formulation de type lié au modèle d'amortissement visqueux. Ces fréquences radiales de calibrage sont concaténées dans un vecteur $\boldsymbol{\omega}_0 = (\omega_1, \dots, \omega_4)$ et sont choisies comme étant les premières fréquences des modes associés aux 4 types de vibration de l'ensemble *bâtiment + fondation* sans source de dissipation. Suite à cette simplification, la matrice d'impédance s'exprime sous la forme:

$$[\mathbf{Z}_{sf}(\omega)] = -\omega^2([\mathbf{M}_f] + [\mathbf{M}_{ad}]) + i\omega [\mathbf{D}_s(\boldsymbol{\omega}_0)] + [\mathbf{K}_{s0}] \quad (\text{V.7})$$

Le modèle d'impédance d'interaction sol-fondation présenté dans les travaux de synthèse de Gazetas [51], [52] fait intervenir de la dissipation de nature exclusivement radiative. De nombreuses études sur l'interaction sol-structure, aussi bien en ingénierie que dans le monde académique, reposent sur la supposition que l'amortissement radiatif prédomine sur l'amortissement matériel. C'est ce que déclarent par exemple, Richart *et al.* [112] au sujet des ondes de *Rayleigh*. Sienkiewicz [120] arrive quant à lui à la conclusion que les deux types d'amortissement participent de manière égale. Wolf [142] montre en outre que dans le cas d'une fondation reposant sur une strate de faible épaisseur établie sur une couche rocheuse ("*bedrock*"), l'amortissement radiatif devient négligeable face aux effets des propriétés de dissipation du sol. Plus récemment, Ambrosini [2] a montré que dans un cadre général, l'ordre grandeur du partage des effets de dissipation dans le sol est de 70 % pour l'amortissement radiatif et de 30 % pour l'amortissement matériel.

La matrice de masse ajoutée $[\mathbf{M}_{ad}]$ mentionnée plus haut est déterminée à partir des termes de raideur dynamique $k_{ij}^{\text{dyn}}(\omega)$. Ces termes sont déterminés par la méthode des moindres carrés à partir des abaques donnant la variation de ces coefficients dynamiques. Ceci étant fait, on peut déterminer la raideur effective $[\mathbf{K}_{s0}] \in \mathbb{M}_6^+$. La matrice $[\mathbf{M}_{ad}] \in \mathbb{M}_6^S$ est symétrique définie semi positive (valeurs propres positives ou nulles), la matrice de masse totale $[\mathbf{M}_{sf}] = [\mathbf{M}_f] + [\mathbf{M}_{ad}] \in \mathbb{M}_6^+$ est donc une matrice symétrique définie positive. Les équations d'équilibre dynamique (V.4) et (V.5) s'écrivent en conséquence dans le domaine

fréquentiel:

$$(-\omega^2[\mathbf{M}_{sf}] + i\omega[\mathbf{D}_s(\omega_0)] + [\mathbf{K}_{s0}]) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{U}}_f(\omega) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_f(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{F}}_e(\omega) \\ \hat{\mathbf{M}}_e(\omega) \end{pmatrix} \quad (\text{V.8})$$

et temporel:

$$[\mathbf{M}_{sf}] \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_f(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_f(t) \end{pmatrix} + [\mathbf{D}_s(\omega_0)] \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{U}}_f(t) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_f(t) \end{pmatrix} + [\mathbf{K}_{s0}] \begin{pmatrix} \mathbf{U}_f(t) \\ \boldsymbol{\theta}_f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_e(t) \\ \mathbf{M}_e(t) \end{pmatrix} \quad (\text{V.9})$$

Les matrices de raideur et d'amortissement d'impédance telles qu'elles sont décrites en V.2.1 et V.2.2 ne font pas référence à l'expression (V.7) de l'impédance mais à son expression de départ (V.3).

V.2.1 Fondation de surface

Lorsque la fondation est simplement en contact avec la surface du sol, alors les matrices $[\mathbf{D}_s]$, $[\mathbf{K}_s]$ sont diagonales:

$$[\mathbf{K}_s] = \begin{pmatrix} K_{t1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{t2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{t3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{r1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{r2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{r3} \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{D}_s] = \begin{pmatrix} D_{t1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{t2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{t3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{r1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{r2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{r3} \end{pmatrix}$$

La matrice de masse $[\mathbf{M}_f]$ de la fondation parallélépipédique étant également diagonale alors la matrice d'impédance $[\mathbf{Z}_{sf}] = -\omega^2[\mathbf{M}_f] + i\omega[\mathbf{D}_s] + [\mathbf{K}_s]$ l'est aussi et ses termes se rapportent aux mouvements de la fondation explicités dans la *Table V.2*. Les termes de raideur et d'amortissement donnés dans la *Table V.2* reposent sur l'hypothèse $L_{f2} < L_{f3}$.

On introduit le coefficient sans dimension $\chi = \frac{A_b}{L_{f3}^2}$. Les raideurs d'impédance statiques de la matrice $[\mathbf{K}_s^{\text{stat}}]$ sont données dans la *Table V.3*. Chacun de ces termes est multiplié par un coefficient de raideur dynamique qui sera précisé au cours des applications dans le *chapitre VII*.

$[\mathbf{Z}_{sf}]_{11} = -\omega^2 m_f + i\omega D_{t1} + K_{t1}$	Déplacement vertical (pompage)
$[\mathbf{Z}_{sf}]_{22} = -\omega^2 m_f + i\omega D_{t2} + K_{t2}$ $[\mathbf{Z}_{sf}]_{33} = -\omega^2 m_f + i\omega D_{t3} + K_{t3}$	Déplacement horizontal (tamis)
$[\mathbf{Z}_{sf}]_{44} = -\omega^2 I_{f1} + i\omega D_{t\theta_1} + K_{t\theta_1}$	Rotation d'axe vertical (lacet)
$[\mathbf{Z}_{sf}]_{55} = -\omega^2 I_{f2} + i\omega D_{t\theta_2} + K_{t\theta_2}$ $[\mathbf{Z}_{sf}]_{66} = -\omega^2 I_{f3} + i\omega D_{t\theta_3} + K_{t\theta_3}$	Rotations d'axe horizontaux (roulis et tangage)

$K_{t1}^{\text{stat}} = \frac{G_s L_{f3}}{1 - \nu_s} (0.73 + 1.54 \chi^{0.75})$	$K_{r1}^{\text{stat}} = G_s J_b^{0.75} \left(4 + 11 \left(1 - \frac{L_{f2}}{L_{f3}} \right)^{10} \right)$
$K_{t2}^{\text{stat}} = \frac{G_s L_{f3}}{2 - \nu_s} (2 + 2.5 \chi^{0.85})$	$K_{r2}^{\text{stat}} = \frac{3G_s}{1 - \nu_s} I_{b2}^{0.75} \left(\frac{L_{f3}}{L_{f2}} \right)^{0.15}$
$K_{t3}^{\text{stat}} = K_{t2} - \frac{0.1}{0.75 - \nu_s} G_s L_{f3} \left(1 - \frac{L_{f2}}{L_{f3}} \right)$	$K_{r3}^{\text{stat}} = \frac{G_s}{1 - \nu_s} I_{b3}^{0.75} \left(\frac{L_{f3}}{L_{f2}} \right)^{0.25} \left(2.4 + 0.5 \frac{L_{f2}}{L_{f3}} \right)$

Les termes d'amortissement radiatif de la matrice $[\mathbf{D}_s]$ sont donnés dans la *Table V.4* et font intervenir les coefficients dynamiques sans dimension $d_{ij}^{\text{dyn}}(\omega)$ dont le tracé est donné en VII.1.2.

$D_{t1} = \rho V_{La} A_b d_{t1}^{\text{dyn}}(\omega)$	$D_{r1} = \rho V_s J_b d_{r1}^{\text{dyn1}}(\omega)$
$D_{t2} = \rho V_s A_b d_{t2}^{\text{dyn}}(\omega)$	$D_{r2} = \rho V_{La} I_{b2} d_{r2}^{\text{dyn1}}(\omega)$
$D_{t3} \simeq \rho V_s A_b$	$D_{r3} = \rho V_{La} I_{b3} d_{r3}^{\text{dyn1}}(\omega)$

V.2.2 Fondation enfouie

On considère maintenant le cas où la fondation est totalement enfouie dans le sol, sa surface latérale est donc entièrement en contact avec le sol.

Termes de raideur

Les termes de raideur statique pour la fondation enfouie s'expriment en fonction des termes de raideur pour la fondation de surface exposés dans la *Table V.3* et notés ici K_*^{surf} . L'hypothèse $L_{f2} < L_{f3}$ est toujours supposée.

Lorsque la fondation est enfouie, il s'exerce un couplage entre son déplacement horizontal (tamis) et sa rotation d'axe horizontal orthogonal (balancement) par un bras de levier des

forces appliquées sur la face supérieure de la fondation (*Figure V.3*). On note O_{top} le point à la verticale du centre de masse O de la fondation se situant sur sa surface supérieure. Pour une force F_2 appliquée en O_{top} , on a alors un déplacement horizontal u_2 et une rotation (balancement) de fondation θ_3 tels que $F_2 = K_{t2} u_2 + K_{t2r3} \theta_3$. De même pour un moment M_3 appliqué en O_{top} , on a un déplacement horizontal u_2 et une rotation de fondation θ_3 tels que $M_3 = K_{r3} \theta_3 + K_{t2r3} u_2$. Les relations sont similaires pour le déplacement u_3 et la rotation θ_3 . Les matrices de raideur et d'impédance s'écrivent alors:

$$[\mathbf{K}_s] = \begin{pmatrix} K_{t1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{t2} & 0 & 0 & 0 & K_{t2r3} \\ 0 & 0 & K_{t3} & 0 & -K_{t3r2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{r1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_{t3r2} & 0 & K_{r2} & 0 \\ 0 & K_{t2r3} & 0 & 0 & 0 & K_{r3} \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{D}_s] = \begin{pmatrix} D_{t1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{t2} & 0 & 0 & 0 & D_{t2r3} \\ 0 & 0 & D_{t3} & 0 & -D_{t3r2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{r1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D_{t3r2} & 0 & D_{r2} & 0 \\ 0 & D_{t2r3} & 0 & 0 & 0 & D_{r3} \end{pmatrix}$$

où $K_{2\theta_3}$ et $K_{3\theta_2}$ sont des grandeurs positives.

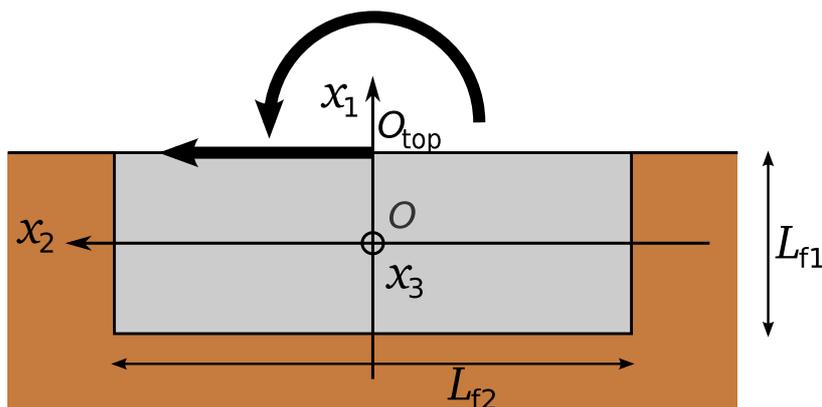


Figure V.3 Fondation enfouie. Les efforts extérieurs sont appliqués à la fondation par sa surface supérieure, l'interaction avec le sol crée un couplage entre le déplacement horizontal et le balancement.

Table V.5	
$K_{t1}^{\text{stat}} = K_{t1}^{\text{surf}} \left(1 + \frac{2}{21} \frac{L_{f1}}{L_{f2}} (1 + 1.3\chi) \right) \times \left(1 + 0.2 \left(\frac{A_w}{A_b} \right)^{2/3} \right)$	$K_{r1}^{\text{stat}} = K_{r1}^{\text{surf}} \left(1 + 1.4 \left(1 + \frac{L_{f2}}{L_{f3}} \right) \times \left(2 \frac{L_{f1}}{L_{f2}} \right)^{0.9} \right)$
$K_{t2}^{\text{stat}} = K_{t2}^{\text{surf}} \left(1 + 0.15 \sqrt{2 \frac{L_{f1}}{L_{f3}}} \right) \times \left(1 + 0.52 \left(4 \frac{L_{f1}}{L_{f3}} \frac{A_w}{L_{f2}^2} \right)^{0.4} \right)$	$K_{r2}^{\text{stat}} = K_{r2}^{\text{surf}} \left(1 + 0.92 \left(2 \frac{L_{f1}}{L_{f3}} \right)^{0.6} \times \left(1.5 + \left(2 \frac{L_{f1}}{L_{f3}} \right)^{1.9} \right) \right)$
$K_{t3}^{\text{stat}} = K_{t3}^{\text{surf}} \left(1 + 0.15 \sqrt{2 \frac{L_{f1}}{L_{f2}}} \right) \times \left(1 + 0.52 \left(4 \frac{L_{f1}}{L_{f2}} \frac{A_w}{L_{f3}^2} \right)^{0.4} \right)$	$K_{r3}^{\text{stat}} = K_{r3}^{\text{surf}} \left(1 + 2.52 \frac{L_{f1}}{L_{f2}} \times \left(1 + 2 \frac{L_{f1}}{L_{f2}} \sqrt{\frac{L_{f2}}{L_{f3}}} \right) \right)$
$K_{t2r3} = \frac{1}{3} L_{f1} K_{t2} \quad K_{t3r2} = \frac{1}{3} L_{f1} K_{t3}$	

Les coefficients dynamiques de raideur sont les mêmes que dans le cas de la fondation de surface. Les effets dynamiques sur les raideurs de couplage sont considérés comme nuls de telle sorte que $K_{t2r3} \simeq K_{t2r3}^{\text{stat}}$ et $K_{t3r2} \simeq K_{t3r2}^{\text{stat}}$.

Table V.6	
$D_{t1} = \rho V_{La} L_{f2} L_{f3} d_{t1}^{\text{dyn}}(\omega) + 2\rho V_s (L_{f2} + L_{f3}) L_{f1}$	$D_{r1} = \frac{1}{12} \rho_s V_s L_{f2} L_{f3} (L_{f2}^2 + L_{f3}^2) d_{r1}^{\text{dyn1}}(\omega) + \frac{1}{12} \rho_s V_{La} L_{f1} (L_{f2}^3 + L_{f3}^3) d_{r1}^{\text{dyn2}}(\omega) + \frac{1}{2} \rho_s V_s L_{f1} L_{f2} L_{f3} (L_{f2} + L_{f3}) d_{r1}^{\text{dyn2}}(\omega)$
$D_{t2} = \rho_s V_s L_{f2} L_{f3} d_{t2}^{\text{dyn}}(\omega) + 2\rho_s V_s L_{f1} L_{f2} + 2\rho_s V_{La} L_{f1} L_{f3}$	$D_{r2} = \frac{1}{12} \rho_s V_{La} L_{f2} L_{f3}^3 d_{r2}^{\text{dyn1}}(\omega) + \frac{4}{3} \rho_s V_{La} L_{f1}^3 L_{f2} d_{r2}^{\text{dyn2}}(\omega) + \frac{1}{6} \rho_s V_s L_{f1} L_{f3} (L_{f2}^2 + 4L_{f1}^2) d_{r2}^{\text{dyn2}}(\omega) + \frac{1}{2} \rho_s V_s L_{f1} L_{f2} L_{f3}^2 d_{r2}^{\text{dyn2}}(\omega)$
$D_{t3} \simeq \rho_s V_s L_{f2} L_{f3} + 2\rho_s V_s L_{f1} L_{f3} + 2\rho_s V_{La} L_{f1} L_{f2}$	$D_{r3} = \frac{1}{12} \rho_s V_{La} L_{f3} L_{f2}^3 d_{r3}^{\text{dyn1}}(\omega) + \frac{4}{3} \rho_s V_{La} L_{f1}^3 L_{f3} d_{r3}^{\text{dyn2}}(\omega) + \frac{1}{6} \rho_s V_s L_{f1} L_{f2} (L_{f2}^2 + 4L_{f1}^2) d_{r3}^{\text{dyn2}}(\omega) + \frac{1}{2} \rho_s V_s L_{f1} L_{f3} L_{f2}^2 d_{r3}^{\text{dyn2}}(\omega)$
$D_{t2r3} = \frac{1}{3} L_{f1} D_{t2} \quad D_{t3r2} = \frac{1}{3} L_{f1} D_{t3}$	

Les coefficients $d_{r1}^{\text{dyn2}}(\omega)$, $d_{r2}^{\text{dyn2}}(\omega)$, $d_{r3}^{\text{dyn2}}(\omega)$, $d_{r3}^{\text{dyn2}}(\omega)$ sont représentés en VII.1.2.

V.3 Modélisation stochastique de l'impédance de sol

Les sections précédentes de ce chapitre ont dressé une méthode de calcul d'impédance d'interaction sol-fondation pour l'ingénierie. Comme évoqué précédemment, les résultats obtenus présentent de nombreuses incertitudes. Les données expérimentales qui fournissent une estimation des paramètres du modèle d'impédance d'interaction subissent une variabilité spatiale importante autour de la fondation. En outre, les modèles physiques utilisés pour calculer l'impédance d'interaction sont eux-mêmes approximatifs. Les modèles probabilistes de variables aléatoires conçu par Soize [126] permettent de prendre en compte l'incertitude sur les paramètres du modèle d'impédance de sol présentés dans la *Table V.1e* ainsi que sur la modélisation physique elle-même.

Les incertitudes sur la matrice d'impédance $[\mathbf{Z}_{sf}]$ sont introduites par une représentation probabiliste des matrices intervenant dans sa décomposition (V.7). Ces matrices caractérisant les propriétés physiques et géométriques du système sol-fondation seront *a priori* décrites par des modèles probabilistes indépendants.

V.3.1 Information sur les matrices aléatoires

Les matrices d'impédance aléatoire $[\tilde{\mathbf{Z}}_{sf}]$ se décomposent de la même manière que la matrice déterministe $[\mathbf{Z}_{sf}]$ en (V.7):

$$[\tilde{\mathbf{Z}}_{sf}] = -\omega^2([\tilde{\mathbf{M}}_f] + [\tilde{\mathbf{M}}_{ad}]) + i\omega[\tilde{\mathbf{D}}_s] + [\tilde{\mathbf{K}}_s]$$

Les matrices aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ (voir par exemple [124]) où \mathcal{A} est l'ensemble des causes, \mathcal{T} la σ -algèbre associée des événements et \mathcal{P} la mesure de probabilité. Les matrices aléatoires sont des applications de \mathcal{A} dans \mathbb{M} un espace matriciel donné. Les matrices $[\tilde{\mathbf{M}}_f]$, $[\tilde{\mathbf{M}}_{ad}]$, $[\tilde{\mathbf{D}}_s]$ et $[\tilde{\mathbf{K}}_f]$ vérifient certaines propriétés qui constituent l'information disponible sur leur modèle probabiliste. En reprenant les notations de [129], on montre que les matrices $[\tilde{\mathbf{M}}_f]$, $[\tilde{\mathbf{D}}_s]$ et $[\tilde{\mathbf{K}}_f]$ sont dans l'espace SE_6^+ de matrices aléatoires symétriques définies positives vérifiant l'information en question et que $[\tilde{\mathbf{M}}_{ad}]$ est dans l'espace SE_6^{+0} de matrices aléatoires à valeurs dans $\mathbb{M}_6^{+0}(\mathbb{R})$ vérifiant également une information donnée. La première information que l'on ait sur les matrices aléatoires est l'ensemble d'arrivée de leurs réalisations pour tout événement $\theta \in \mathcal{A}$:

$$[\tilde{\mathbf{M}}_f(\theta)], [\tilde{\mathbf{D}}_s(\theta)], [\tilde{\mathbf{K}}_s(\theta)] \in \mathbb{M}_6^+(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad [\tilde{\mathbf{M}}_{ad}(\theta)] \in \mathbb{M}_6^{+0}(\mathbb{R}) \quad (\text{V.10})$$

Le modèle d'impédance déterministe défini par les matrices $[\mathbf{M}_f]$, $[\mathbf{M}_{ad}]$, $[\mathbf{D}_s(\omega_0)]$ et $[\mathbf{K}_{s0}]$ fournit en outre une information sur l'espérance mathématique des matrices aléatoires associées:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ [\tilde{\mathbf{M}}_f] \right\} &= [\mathbf{M}_f] \quad , \quad \mathbb{E} \left\{ [\tilde{\mathbf{M}}_{ad}] \right\} = [\mathbf{M}_{ad}] \\ \mathbb{E} \left\{ [\tilde{\mathbf{D}}_s] \right\} &= [\mathbf{D}_s(\omega_0)] \quad , \quad \mathbb{E} \left\{ [\tilde{\mathbf{K}}_s] \right\} = [\mathbf{K}_{s0}] \end{aligned} \quad (\text{V.11})$$

L'équation temporelle stochastique d'équilibre dynamique pour une excitation déterministe extérieure $(\mathbf{F}_e(t), \mathbf{M}_e(t))^T$ donnée s'écrit directement à partir de (V.9)

$$\begin{cases} [\tilde{\mathbf{M}}_{sf}] \begin{pmatrix} \ddot{\tilde{\mathbf{U}}}_f(t) \\ \ddot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_f(t) \end{pmatrix} + [\tilde{\mathbf{D}}_s] \begin{pmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{U}}}_f(t) \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_f(t) \end{pmatrix} + [\tilde{\mathbf{K}}_s] \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_f(t) \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_e(t) \\ \mathbf{M}_e(t) \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbf{U}}_f(0) = 0, \quad \dot{\tilde{\mathbf{U}}}_f(0) = 0, \quad \tilde{\boldsymbol{\theta}}_f(0) = 0, \quad \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_f(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{V.12})$$

Le champ stochastique solution de (V.12) est unique et fait intervenir l'inverse des matrices: $[\tilde{\mathbf{M}}_{sf}] = ([\tilde{\mathbf{M}}_f] + [\tilde{\mathbf{M}}_{ad}])$, $[\tilde{\mathbf{D}}_s]$, $[\tilde{\mathbf{K}}_s]$.

Pour garantir que ce processus est du second ordre, *i.e.* $\mathbb{E} \left\{ \|(\tilde{\mathbf{U}}_f(t), \tilde{\boldsymbol{\theta}}_f(t))\|^2 \right\} < +\infty$ (espérance mathématique de la norme 2 sur \mathbb{R}^6), l'inverse des matrices doit également être du second ordre:

$$\mathbb{E} \left\{ \|[\tilde{\mathbf{M}}_{sf}]^{-1}\|_F^2 \right\} < +\infty \quad , \quad \mathbb{E} \left\{ \|[\tilde{\mathbf{D}}_s]^{-1}\|_F^2 \right\} < +\infty \quad , \quad \mathbb{E} \left\{ \|[\tilde{\mathbf{K}}_s]^{-1}\|_F^2 \right\} < +\infty \quad (\text{V.13})$$

où $\|[\mathbf{M}]\|_F$ est la norme de *Frobenius* (ou encore norme de *Hilbert-Schmidt*) de la matrice $[\mathbf{M}]$. Cette norme est définie pour une matrice réelle $[\mathbf{M}]$ par $\|[\mathbf{M}]\|_F = \text{tr}([\mathbf{M}][\mathbf{M}]^T)^{1/2}$ et son carré correspond donc à la somme des carrés des valeurs propres. On va montrer que la condition suffisante pour que $[\tilde{\mathbf{M}}_{sf}]^{-1}$ soit du second ordre est que $[\tilde{\mathbf{M}}_f]^{-1}$ le soit.

preuve : Soient $[\tilde{\mathbf{M}}_+]$ une matrice aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_n^+(\mathbb{R})$ (définie positive) avec $n \in \mathbb{N} < \infty$ et $[\tilde{\mathbf{M}}_{+0}]$ une matrice aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_n^{+0}(\mathbb{R})$ (valeurs propres positives ou nulles). Soit $\lambda_1 = \inf(\text{Sp}([\tilde{\mathbf{M}}_+]))$ la plus petite valeur propre de $[\tilde{\mathbf{M}}_+]$ alors la norme d'opérateur de $[\tilde{\mathbf{M}}_+]^{-1}$ est:

$$\|[\tilde{\mathbf{M}}_+]^{-1}\| = \sup(\text{Sp}([\tilde{\mathbf{M}}_+]^{-1})) = [\inf(\text{Sp}([\tilde{\mathbf{M}}_+]))]^{-1} = \frac{1}{\lambda_1}$$

et

$$\mathbb{E} \left\{ \|[\tilde{\mathbf{M}}_+]^{-1}\|^2 \right\} = \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{\lambda_1^2} \right\}$$

On note $\mu_1 = \inf(\text{Sp}([\tilde{\mathbf{M}}_+] + [\tilde{\mathbf{M}}_{+0}]))$, les valeurs propres de $[\tilde{\mathbf{M}}_{+0}]$ étant dans \mathbb{R}_+ p.s., on en déduit que $\mu_1 \geq \lambda_1$ p.s. On en déduit que la norme d'opérateur de $([\tilde{\mathbf{M}}_+] + [\tilde{\mathbf{M}}_{+0}])^{-1}$ vérifie les relations suivantes:

$$\|([\tilde{\mathbf{M}}_+] + [\tilde{\mathbf{M}}_{+0}])^{-1}\|^2 = \frac{1}{\mu_1^2}$$

et

$$\mathbb{E} \left\{ \|([\tilde{\mathbf{M}}_+] + [\tilde{\mathbf{M}}_{+0}])^{-1}\|^2 \right\} = \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{\mu_1^2} \right\} \leq \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{\lambda_1^2} \right\} = \mathbb{E} \left\{ \|[\tilde{\mathbf{M}}_+]^{-1}\|^2 \right\} \quad (\text{V.14})$$

Il découle de (V.14) que si $\mathbb{E} \left\{ \|[\tilde{\mathbf{M}}_+]^{-1}\|^2 \right\} < +\infty$, *i.e.* $[\tilde{\mathbf{M}}_+]^{-1}$ est une matrice aléatoire du second ordre, alors $([\tilde{\mathbf{M}}_+] + [\tilde{\mathbf{M}}_{+0}])^{-1}$ est également une matrice du second ordre pour la

norme d'opérateur. Cette implication reste valable pour la norme de *Frobenius*. Si la norme d'opérateur de $[\tilde{\mathbf{M}}_+]^{-1}$ est finie alors le carré de sa norme de *Frobenius* qui est la somme (finie car en dimension finie) des carrés de ses valeurs propres est une grandeur finie car λ_1^{-1} majore son spectre. Le même raisonnement est valable pour la matrice $([\tilde{\mathbf{M}}_+] + [\tilde{\mathbf{M}}_{+0}])^{-1}$ avec sa valeur propre μ_1^{-1} qui majore son spectre. On en déduit finalement que:

$$\mathbb{E} \left\{ \|[\tilde{\mathbf{M}}_+]^{-1}\|_F^2 \right\} < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E} \left\{ \|([\tilde{\mathbf{M}}_+] + [\tilde{\mathbf{M}}_{+0}])^{-1}\|_F^2 \right\} < +\infty \quad (\text{V.15})$$

Les matrices aléatoires à valeurs dans $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ dont l'espérance est connue (condition du type (V.11)) et dont la matrice inverse est une matrice du second ordre (condition (V.13)) forment l'espace $SE_6^+(\mathbb{R})$.

Outre les informations vérifiées par les éléments de $SE_6^+(\mathbb{R})$, la matrice $[\tilde{\mathbf{M}}_f]$ vérifie des informations supplémentaires. La matrice déterministe associée $[\mathbf{M}_f]$ qui caractérise une fondation parallélépipédique creuse et homogène est donnée en (V.6). Les réalisations des matrices de $SE_6^+(\mathbb{R})$ sont presque sûrement pleines, si la matrice $[\tilde{\mathbf{M}}_f]$ était construite sur la seule information de cet espace alors les réalisations $[\tilde{\mathbf{M}}_f(\theta)]$, $\theta \in \mathcal{A}$ conduiraient à des caractéristiques inertielles de fondation couplant les composantes de l'accélération entre elles ou avec les accélérations de rotation. Ce type de couplage étant physiquement impossible, la matrice $[\tilde{\mathbf{M}}_f]$ doit conserver la structure suivante:

$$[\tilde{\mathbf{M}}_f] = \begin{pmatrix} \tilde{m}_f [\mathbb{1}_3] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\tilde{\mathbf{I}}_f] \end{pmatrix}$$

où \tilde{m}_f est une variable aléatoire scalaire positive dont l'information est la suivante:

$$\tilde{m}_f(\theta) \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall \theta \in \mathcal{A} \quad , \quad \mathbb{E} \{ \tilde{m}_f \} = m_f \quad , \quad \mathbb{E} \{ \tilde{m}_f^{-2} \} < +\infty \quad (\text{V.16})$$

On peut montrer que pour une masse donnée, l'ensemble des morphologies d'un corps solide engendre des matrices d'inertie dans l'ensemble des matrices symétriques définies positives d'ordre 3. La matrice d'inertie aléatoire $[\tilde{\mathbf{I}}_f]$ est donc une matrice de $SE_3^+(\mathbb{R})$ vérifiant l'information suivante:

$$[\tilde{\mathbf{I}}_f](\theta) \in \mathbb{M}_3^+(\mathbb{R}) \quad \forall \theta \in \mathcal{A} \quad , \quad \mathbb{E} \left\{ [\tilde{\mathbf{I}}_f] \right\} = \begin{pmatrix} I_{f1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{f2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{f3} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbb{E} \left\{ \|[\tilde{\mathbf{I}}_f]^{-1}\|_F^2 \right\} < +\infty \quad (\text{V.17})$$

La variable aléatoire scalaire \tilde{m}_f est supposée indépendante de la matrice aléatoire $[\tilde{\mathbf{I}}_f]$. On part du principe que pour une masse totale donnée, on peut trouver une répartition de masse dont le solide associé a une matrice d'inertie pouvant être n'importe quelle matrice symétrique définie positive d'ordre 3.

V.3.2 Normalisation des matrices aléatoires

Les matrices déterministes $[\mathbf{I}_f]$, $[\mathbf{D}_s]$ et $[\mathbf{K}_s]$ sont symétriques définies positives. Il est donc possible de leur appliquer la décomposition de *Cholesky*:

$$[\mathbf{I}_f] = [\mathbf{L}_{If}]^T [\mathbf{L}_{If}] \quad , \quad [\mathbf{D}_s(\omega_0)] = [\mathbf{L}_D]^T [\mathbf{L}_D] \quad , \quad [\mathbf{K}_{s0}] = [\mathbf{L}_K]^T [\mathbf{L}_K] \quad (\text{V.18})$$

où $[\mathbf{L}_{If}]$, $[\mathbf{L}_D]$ et $[\mathbf{L}_K]$ sont des matrices réelles triangulaires supérieures d'ordres 3, 6 et 6. Les matrices aléatoires $[\tilde{\mathbf{I}}_f]$, $[\tilde{\mathbf{D}}_s]$ et $[\tilde{\mathbf{K}}_s]$ peuvent alors s'écrire:

$$[\tilde{\mathbf{I}}_f] = [\mathbf{L}_{If}]^T [\tilde{\mathbf{G}}_{If}] [\mathbf{L}_{If}] \quad , \quad [\tilde{\mathbf{D}}_s] = [\mathbf{L}_D]^T [\tilde{\mathbf{G}}_D] [\mathbf{L}_D] \quad , \quad [\tilde{\mathbf{K}}_s] = [\mathbf{L}_K]^T [\tilde{\mathbf{G}}_K] [\mathbf{L}_K] \quad (\text{V.19})$$

Les matrices $[\tilde{\mathbf{G}}_{If}]$, $[\tilde{\mathbf{G}}_D]$ et $[\tilde{\mathbf{G}}_K]$ sont des matrices aléatoires indépendantes. On définit alors $SG_n^+ \subset SE_n^+$ l'espace des matrices aléatoires du second ordre normalisées, c'est-à-dire l'ensemble des matrices aléatoires $[\tilde{\mathbf{G}}]$ vérifiant l'information suivante:

$$[\tilde{\mathbf{G}}](\theta) \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \quad \forall \theta \in \mathcal{A} \quad , \quad \mathbb{E} \left\{ [\tilde{\mathbf{G}}] \right\} = [\mathbb{1}_n] \quad , \quad \mathbb{E} \left\{ \|[\tilde{\mathbf{G}}]^{-1} \|_F^2 \right\} < +\infty \quad (\text{V.20})$$

Étant donnée l'information sur les matrices $[\tilde{\mathbf{G}}]$, la décomposition (V.19) implique directement l'information (V.11). Connaissant la décomposition de *Cholesky* d'une matrice de SE_n^+ , cette dernière peut ainsi être engendrée par une matrice de SG_n^+ .

La matrice de masse ajoutée $[\mathbf{M}_{ad}]$ est quant à elle symétrique réelle définie semi-positive, elle possède *a priori* des valeurs propres nulles, on ne peut donc pas lui appliquer de décomposition de *Cholesky*. L'ensemble SE_n^{+0} des matrices aléatoires à valeur dans $\mathbb{M}_n^{+0}(\mathbb{R})$ est examiné dans [125]. Soit $r < 6$ le rang de la matrice déterministe $[\mathbf{M}_{ad}]$ avec son spectre:

$$\text{Sp}([\mathbf{M}_{ad}]) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0 \dots, 0\}$$

et

$$[\Phi] = [\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_r, \mathbf{V}_{r+1}, \dots, \mathbf{V}_6]$$

la matrice concaténant ses vecteurs propres \mathbf{V}_k associés aux valeurs propres λ_k . On introduit la matrice rectangulaire $[\mathbf{S}_M]$ de dimension $r \times 6$ définie par:

$$[\mathbf{S}_M] = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ [0] & & \sqrt{\lambda_r} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} [\Phi]^T \quad (\text{V.21})$$

qui permet de décomposer la matrice $[\mathbf{M}_{ad}]$:

$$[\mathbf{M}_{ad}] = [\mathbf{S}_M]^T [\mathbf{S}_M]$$

La matrice aléatoire $[\tilde{\mathbf{M}}_{ad}]$ est alors engendrée par une matrice normalisée $[\tilde{\mathbf{G}}_{Mad}] \in SG_r^+$ telle que:

$$[\mathbf{M}_{ad}] = [\mathbf{S}_M]^T [\tilde{\mathbf{G}}_{Mad}] [\mathbf{S}_M] \quad (\text{V.22})$$

L'espace SE_6^{+0} auquel elle appartient est l'espace des matrices aléatoires à valeur dans \mathbb{M}_6^{+0} dont l'espérance est connue (information (V.11)) et étant engendrées par une matrice $[\tilde{\mathbf{G}}] \in SG_r^+$, $r \leq 6$ à partir de la décomposition (V.22). Comme on a pu le voir dans la démonstration en V.3.1, aucune condition probabiliste n'est requise sur $[\mathbf{M}_{ad}]$ pour garantir l'existence du moment d'ordre 2 de la matrice $[\tilde{\mathbf{M}}_{sf}]^{-1}$ intervenant dans l'expression du processus stochastique solution de l'équation temporelle (V.12). Par conséquent, l'existence du moment d'ordre 2 de l'inverse de la matrice $[\tilde{\mathbf{G}}_{Mad}]$, n'est pas une condition nécessaire. Néanmoins, on conservera par souci de simplicité cette information superflue.

En ce qui concerne la variable aléatoire \tilde{m}_f , on la normalise également à l'aide d'une variable aléatoire \tilde{g} telle que

$$\tilde{m}_f = m_f \tilde{g}, \quad \tilde{g}(\theta) \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall \theta \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{E}\{\tilde{g}\} = 1, \quad \mathbb{E}\{\tilde{g}^{-2}\} < +\infty \quad (\text{V.23})$$

V.3.3 Modèles probabilistes et générateurs aléatoires

Les paragraphes V.3.2 et V.3.1 ont montré que les matrices aléatoires des espaces SE_n^+ et SE_n^{+0} étaient toutes engendrées respectivement par une matrice normalisée des espaces SG_n^+ et SG_r^+ avec $r \leq n$. La construction d'un modèle probabiliste des matrices des espaces SE_n^+ et SE_n^{+0} s'obtient directement de la construction probabiliste des matrices de SG_n^+ par les relations (V.19) (V.22). Dans ce paragraphe, on va exposer les fonctions de densité de probabilité des matrices de SG_n^+ construites à partir du principe du maximum d'entropie ainsi que de l'information (V.20) et présenter la construction de leurs générateurs aléatoires associés. On fera de même pour la variable aléatoire normalisée \tilde{g} définie en (V.23).

■ Matrices de SG_n^+

Soit $[\tilde{\mathbf{G}}]$ une matrice normalisée de SG_n^+ dont la fonction de densité de probabilité (FDP) est $p_G : [\mathbf{G}] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \mapsto p_G([\mathbf{G}]) \in [0, 1]$. Les matrices de SG_n^+ sont à valeurs dans $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ ce qui précise le support de p_G :

$$[\tilde{\mathbf{G}}] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})} p_G([\mathbf{G}]) dG = 1 \quad (\text{V.24})$$

où dG est la mesure sur l'espace $\mathbb{M}_n^S(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles. Les matrices de SG_n^+ sont d'espérance unité:

$$\mathbb{E}\{[\tilde{\mathbf{G}}]\} = [\mathbb{1}_n] \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})} [\mathbf{G}] p_G([\mathbf{G}]) dG = [\mathbb{1}_n] \quad (\text{V.25})$$

Les matrices inverses $[\tilde{\mathbf{G}}]^{-1}$ sont du second ordre, *i.e.* $\mathbb{E}\{\|[\tilde{\mathbf{G}}]^{-1}\|_F^2\} < +\infty$. Dans [126], il

est montré que cette relation est équivalente à:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \ln(\det([\tilde{\mathbf{G}}])) \right\} &= \nu \quad \text{avec } \nu \in \mathbb{R} \text{ et } |\nu| < +\infty \\ \iff \int_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})} \ln(\det([\tilde{\mathbf{G}}])) p_G([\mathbf{G}]) dG &= \nu \in \mathbb{R} < +\infty \end{aligned} \quad (\text{V.26})$$

La fonction de densité de probabilité p_G est construite à l'aide du principe du maximum d'entropie (maximisation de l'incertitude sur la loi) et des informations (V.24), (V.25), (V.26) qui vont contraindre ce principe et restreindre l'incertitude. Soize montre dans [127] que les FDP des matrices $[\tilde{\mathbf{G}}] \in SG_n^+$ sont de la forme:

$$p_G([\mathbf{G}]) = \mathbb{1}_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})}([\mathbf{G}]) \times C_G \times (\det([\mathbf{G}]))^{\frac{1-\delta^2}{2\delta^2}(n+1)} \times \exp\left(-\frac{(n+1)\text{tr}([\mathbf{G}])}{2\delta^2}\right) \quad (\text{V.27})$$

avec

$$C_G = \frac{(2\pi)^{-n(n-1)/4} \left(\frac{n+1}{2\delta^2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2\delta^2}}}{\prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2\delta^2} + \frac{1-j}{2}\right)}$$

où $\mathbb{1}_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})}$ est la fonction support de $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ définie par $\mathbb{1}_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})}([\mathbf{G}]) = 1$ si $[\mathbf{G}] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ et 0 sinon, et où $\Gamma(z)$ est la fonction Gamma définie pour $z > 0$ par $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$. Le paramètre δ provient de la contrainte (V.26) qui fait intervenir le paramètre indéterminé ν . Ce paramètre δ qui permet de fixer le niveau de dispersion du modèle probabiliste d'une matrice $[\tilde{\mathbf{G}}] \in SG_n^+$, est défini par:

$$\delta = \left(\frac{\mathbb{E} \left\{ \|[\tilde{\mathbf{G}}] - [\mathbb{1}_n]\|_F^2 \right\}}{\|[\mathbb{1}_n]\|_F^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{n} \mathbb{E} \left\{ \|[\tilde{\mathbf{G}}] - [\mathbb{1}_n]\|_F^2 \right\} \right)^{1/2} \quad (\text{V.28})$$

La valeur de ce paramètre pour une matrice de SG_n^+ doit être encadrée par:

$$0 < \delta < \sqrt{\frac{n+1}{n+5}} \quad (\text{V.29})$$

Le générateur de matrices aléatoires normalisées élaboré dans [126] utilise une expression algébrique des matrices $[\tilde{\mathbf{G}}]$ dépendant de variables aléatoires scalaires standards (variables gaussiennes, variables gamma). Ces matrices étant symétriques définies positives, on peut leur appliquer une décomposition de *Cholesky*:

$$[\tilde{\mathbf{G}}] = [\tilde{\mathbf{L}}]^T [\tilde{\mathbf{L}}]$$

où $[\tilde{\mathbf{L}}]$ est une matrice aléatoire triangulaire supérieure dont les termes sont des variables aléatoires scalaires indépendantes.

Les variables diagonales sont données par $[\tilde{\mathbf{L}}]_{kk} = \delta(n+1)^{-1/2} \sqrt{2V_k}$ où V_k est une variable aléatoire gamma à valeur dans \mathbb{R}_+ dont la fonction de densité de probabilité est p_{V_k} :

$$p_{V_k}(v) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(V) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2\delta^2} + \frac{1-k}{2}\right)} V^{\frac{n+1}{2\delta^2} - \frac{1+k}{2}} \exp(-V)$$

Les variables au dessus de la diagonale de $[\tilde{\mathbf{G}}]$ sont données par $[\tilde{\mathbf{L}}]_{kl} = \delta(n+1)^{-1/2} U_{kl}$, $k < l$ où $U_{kk'}$ est une variable réelle gaussienne centrée de variance unitaire.

■ Variable aléatoire scalaire \tilde{g}

Le principe du maximum d'entropie appliqué à l'information (V.23) conduit à une loi gamma sur \mathbb{R}_+^* de moyenne 1 et d'écart type δ (voir [128]), la fdp de la variable \tilde{g} s'écrit :

$$p_g(g) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(g) (\delta^{-2})^{\delta-2} \frac{g^{\delta-2-1}}{\Gamma(\delta-2)} \exp\left(-\frac{g}{\delta^2}\right) \quad (\text{V.30})$$

L'écart type dont la valeur devra être fixée est tel que: $0 < \delta < 1/\sqrt{2}$. Pour fixer ce paramètre, on utilise une information du type: "la masse a η % de chance d'être comprise entre m_a et m_b ", ce qui en termes de probabilités s'énonce :

$$P(m_a \leq \tilde{m}_f(\theta) \leq m_b) = P(g_a \leq \tilde{g}(\theta) \leq g_b) = \frac{\eta}{100} \quad , \quad \theta \in \mathcal{A} \quad (\text{V.31})$$

avec $g_a \in]0, 1[$ et $g_b \in]1, +\infty[$. L'information (V.31) fait intervenir l'écart type δ à travers l'expression

$$P(g_a \leq \tilde{g}(\theta) \leq g_b) = \int_{g_a}^{g_b} p_g(g) dg = \int_0^{g_b} p_g(g) dg - \int_0^{g_a} p_g(g) dg \quad (\text{V.32})$$

On pose $x = 1/\delta^2$, ce qui en utilisant (V.32) et l'expression (V.30) de la fonction de densité de probabilité p_g , mène à :

$$F(x) = \mathcal{P}(x, g_b x) - \mathcal{P}(x, g_a x) = P(g_a \leq \tilde{g}(\theta) \leq g_b)$$

avec la fonction gamma normalisée inférieure

$$\mathcal{P}(x, a) = \frac{\int_0^a \xi^{x-1} e^{-\xi} d\xi}{\Gamma(x)} = \frac{\gamma(x, a)}{\Gamma(x)}$$

Étant donné la définition de x , l'encadrement sur δ implique que $x \in]2, +\infty[$. La fonction F est positive sur cet intervalle et on observe numériquement qu'elle est croissante pour $(g_a, g_b) \in]0, 1[\times]1, +\infty[$. On va donc pouvoir déterminer numériquement la valeur $x_0 = 1/\delta_0^2$ telle que $F(x_0) = \eta/100$.

La génération de variables aléatoires de loi gamma est une procédure standard implémentée dans la plupart des bibliothèques de routines mathématiques pour le développement. La forme standard de loi gamma à deux paramètres (α, β) d'une variable X est :

$$p_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{b^\alpha \Gamma(\alpha)} \exp\left(-\frac{x}{b}\right) \quad (\text{V.33})$$

on identifie $a = 1/\delta^2$ et $b = \delta^2$ pour p_g .

V.4 Estimation du paramètre de dispersion

Dans la pratique des constructions usuelles de génie civil, les données expérimentales concernant les propriétés des sols de fondations présentent une grande incertitude et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord, que les tests soient statiques ou dynamiques, ils sont biaisés par l'hétérogénéité du sol. La majeure partie des tests dynamiques (*crosshole seismic survey*, *cone penetration test*) consistent à mesurer la vitesse de propagation des ondes P et S dans le sol. Ces équipements consistent en une source vibratoire en surface ou enfouie dans le sol et d'un ou de plusieurs capteurs (géophones) de géométrie tubulaire enfouis. L'analyse des profils (vitesse ou accélération instantanée) permet de déterminer la vitesse moyenne de l'onde pendant son trajet entre la source vibratoire et le capteur. Les sols étant des milieux anisotropes et la mesure dépendant du trajet de l'onde, ces méthodes ne donnent pas accès à une mesure des propriétés isotropes moyennes. En outre, le comportement du sol est en général significativement non linéaire de telle sorte que les propriétés élastiques linéaires équivalentes mesurées à faible niveau de déformation cyclique sont très différentes de celles du sol soumis à une sollicitation sismique naturelle de forte intensité.

La détermination expérimentale du paramètre de dispersion δ défini en (V.28) ne peut en pratique pas être réalisée. Ce type de paramètre pourrait par exemple être identifié à l'aide d'une estimation statistique par la méthode du maximum de vraisemblance (*MLE = Maximum Likelihood Estimation*, voir par exemple [118]) ou encore via une identification par moindres carrés (voir [130]). Concernant les méthodes dédiées à l'identification expérimentale du paramètre δ caractérisant la dispersion des modèles probabilistes de matrices aléatoires on peut citer [129] (paragraphe 5.) ainsi que les travaux de Chen *et al.* [33].

Pour appliquer ces méthodes à une structure industrielle, il est nécessaire d'en posséder plusieurs exemplaires (au moins une dizaine afin de pouvoir estimer une moyenne) issus du même processus de production, *e.g.* des véhicules issus de la même chaîne de production. On conçoit immédiatement l'impossibilité d'appliquer ces méthodes à un bâtiment dans la mesure où ces derniers sont généralement construits en un nombre limité voire unique et que de surcroît le sol au pied du bâtiment n'est pas de facture industrielle. Des mesures sur des modèles réduits nécessiteraient en outre une quantité de travail importante de mise à l'échelle (choix des matériaux et usinage) et n'apporteraient aucune information dans la mesure où la reconstitution d'un sol hétérogène d'échelle réduite présentant des propriétés identiques au sol de fondation *in situ* reviendrait à connaître ces dernières.

V.4.1 Estimation probabiliste du facteur de dispersion

La seule alternative possible est par conséquent une estimation du paramètre δ par une modélisation probabiliste des paramètres du modèle d'impédance d'interaction sol-fondation intégrant les incertitudes sur leurs mesures. Les paramètres de sol sont modélisés par des variables aléatoires \tilde{G}_s , $\tilde{\nu}_s$, $\tilde{\rho}_s$ et les caractéristiques de la fondation \tilde{L}_{f1} , \tilde{L}_{f2} , \tilde{L}_{f3} et $\tilde{\rho}_f$ (masse volumique moyenne de la fondation) toutes définies sur un espace probabilisé $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, \mathcal{P})$. Ces paramètres sont connus en moyenne et on donne une incertitude sur cette valeur à l'aide d'un encadrement. Pour les variables aléatoires associées, ces deux données se traduisent par le fait que leur espérance est connue et que leur support est compact et connu. Cette dernière information est basée sur une hypothèse forte qui pour le module de cisaillement \tilde{G}_s et la masse volumique $\tilde{\rho}_s$ est restrictive du point de vue physique. Une meilleure forme d'information sur ces variables serait d'avoir en plus de l'espérance un encadrement lié à une probabilité (deux valeurs de la fonction quantile) qui mènerait à des variables aléatoires à support non borné.

Pour une variable scalaire \tilde{X} à valeurs dans \mathbb{R} d'espérance $E\{\tilde{X}\} = m_X$ et de support compact $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, le principe du maximum d'entropie donne une fonction de densité de probabilité p_X définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par (voir [128]):

$$p_X(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \exp(-\lambda_0(a, b, m_X) - x\lambda_1(a, b, m_X)) \quad (\text{V.34})$$

où λ_0 et λ_1 sont les valeurs qui minimisent la fonction convexe:

$$H(\lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 + \lambda_1 m_X + \frac{e^{-\lambda_0}}{\lambda_1} (e^{-\lambda_1 a} - e^{-\lambda_1 b}) \quad (\text{V.35})$$

La condition de minimisation de la fonction $H(\lambda_0, \lambda_1)$ est une expression de la contrainte imposée par l'information disponible sur X à sa fdp. Le couple (λ_0, λ_1) qui vérifie l'information disponible est donc unique. Le caractère unitaire de la fdp donne une première relation entre λ_0 et λ_1 :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} p_X(x) dx &= \int_a^b e^{-\lambda_0} e^{-\lambda_1 x} dx = \frac{e^{-\lambda_0}}{\lambda_1} (e^{-\lambda_1 a} - e^{-\lambda_1 b}) = 1 \\ \implies \lambda_0 &= -\ln \left(\frac{\lambda_1}{e^{-\lambda_1 a} - e^{-\lambda_1 b}} \right) \end{aligned} \quad (\text{V.36})$$

La connaissance de l'espérance m_X de X donne une information supplémentaire:

$$\int_{\mathbb{R}} x p_X(x) dx = \frac{e^{-\lambda_0}}{\lambda_1^2} (e^{-\lambda_1 a} (1 + \lambda_1 a) - e^{-\lambda_1 b} (1 + \lambda_1 b)) = m_X \quad (\text{V.37})$$

En injectant la relation (V.36) dans (V.37), on exprime le terme $e^{-\lambda_0}$ en fonction de λ_1 ce qui mène à une relation entre l'espérance m_X et λ_1 :

$$F(\lambda_1) = \frac{e^{-\lambda_1 a} (1 + \lambda_1 a) - e^{-\lambda_1 b} (1 + \lambda_1 b)}{\lambda_1 (e^{-\lambda_1 a} - e^{-\lambda_1 b})} = m_X \quad (\text{V.38})$$

La fonction F est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$, on va étudier le signe de sa dérivée seconde afin de prouver sa convexité:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F}{d\lambda_1^2} &= \left(\lambda_1^3 (b-a)^3 \left(e^{-\lambda_1(b-a)} - e^{-2\lambda_1(b-a)} \right) - 6 \left(e^{-\lambda_1(b-a)} - e^{-2\lambda_1(b-a)} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(1 - e^{-3\lambda_1(b-a)} \right) \right) \left(\lambda_1 \left(1 - e^{-\lambda_1(b-a)} \right) \right)^{-3} = \frac{\lambda_1^3 A_1(\lambda_1) - 6A_2(\lambda_1) + 2A_3(\lambda_1)}{(A_4(\lambda_1))^3} \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que $|a| < |b|$, le terme $A_4(\lambda_1)$ est toujours positif pour $\lambda_1 \in \mathbb{R}_+^*$. Le terme $\lambda_1^3 A_1(\lambda_1)$ est positif pour $\lambda_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et domine $-6A_2(\lambda_1) + 2A_3(\lambda_1)$ sauf au voisinage de 0. En faisant un développement limité à l'ordre $O(\lambda_1^2)$ des termes en exponentielles, on montre que

$$-6A_2(\lambda_1) + 2A_3(\lambda_1) \underset{0}{\sim} \frac{9}{2}(b-a)^2 \lambda_1^2 + o(\lambda_1^2) > 0$$

La dérivée seconde de $F(\lambda_1)$ étant positive sur $\lambda_1 \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction est donc convexe sur cet intervalle. On calcule maintenant la limite de F en $\lambda_1 = 0$. Le développement limité à l'ordre $O(\lambda_1^2)$ du numérateur de l'expression (V.38) est

$$e^{-\lambda_1 a}(1 + \lambda_1 a) - e^{-\lambda_1 b}(1 + \lambda_1 b) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + o(\lambda_1^2)$$

et le développement limité à l'ordre $O(\lambda_1^2)$ du dénominateur:

$$\lambda_1(e^{-\lambda_1 a} - e^{-\lambda_1 b}) \underset{0}{\sim} b - a + o(\lambda_1^2)$$

par conséquent le développement limité de $F(\lambda_1)$ est

$$F(\lambda_1) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}(a+b)$$

La limite de $F(\lambda_1)$ en $\lambda_1 = 0$ est donc égale à $1/2(a+b)$. Cette fonction peut être complétée par continuité sur \mathbb{R} en une fonction F_c . On regarde maintenant quelle est la limite de cette fonction quand λ_1 tend vers $+\infty$:

$$F(\lambda_1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{ae^{-\lambda_1 a} - be^{-\lambda_1 b}}{e^{-\lambda_1 a} - e^{-\lambda_1 b}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{ae^{-\lambda_1 a}}{e^{-\lambda_1 a}} = a$$

$F(\lambda_1)$ tend vers a quand λ_1 tend vers $+\infty$.

On peut montrer de manière similaire que F est concave sur \mathbb{R}^-* et que sa limite quand λ_1 tend vers $-\infty$, est b . On peut finalement en déduire que l'intervalle $[a, b]$ a un unique antécédent par F_c noté $[\lambda_1^-, \lambda_1^+]$. Comme m_X est l'espérance de la variable aléatoire X à valeur dans $[a, b]$, on a alors nécessairement $m_X \in [a, b]$. Le problème $F_c(\lambda_1) = m_X$ a donc une solution unique sur $[\lambda_1^-, \lambda_1^+]$. La fonction F_c étant décroissante sur cet intervalle, la solution en question peut être facilement déterminée par dichotomie ou n'importe quelle autre méthode usuelle. Lorsque $m_X = 1/2(a+b)$, la variable λ_1 est fixée à 0 et la fdp p_X dégénère en celle d'une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$:

$$p_X(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \frac{1}{|b-a|} \tag{V.39}$$

V.4.2 Calcul numérique du facteur de dispersion

Le modèle probabiliste des différents paramètres étant fixé, on a besoin du générateur de variable aléatoire associé à chacun d'entre eux. Dans le cas où l'espérance m_X est centrée dans le support $[a, b]$ de p_X alors les variables aléatoires associées à la fdp (V.39) sont générées à partir d'un générateur standard de loi uniforme de densité de probabilité $p_U : x \mapsto \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$. Pour un tirage $U(\theta)$, $\theta \in \mathcal{A}$ le tirage correspondant de la variable X est:

$$X(\theta) = (b - a)U(\theta) + a \quad (b > a) \quad (\text{V.40})$$

Pour démontrer cette relation, il faut partir des valeurs $x \in [a, b]$ et $u \in [0, 1]$ telles que pour les fonctions de répartition de F_X et F_U des variables X et U , on ait $F_X(x) = F_U(u)$. La fonction de répartition de la loi uniforme étant l'identité, on a $F_U(u) = u$ et donc $F_X(x) = u$. La fonction de répartition d'une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} étant bijective, on a $x = F_X^{-1}(u)$ où F_X^{-1} est la fonction réciproque de F_X . La relation entre les variables aléatoires U et X est donc donnée par $X = F_X^{-1}(U)$. On calcule F_X^{-1} :

$$F_X(x) = F_X(F_X^{-1}(u)) = u$$

ce qui en d'autres termes s'écrit

$$\int_a^{F_X^{-1}(u)} \mathbb{1}_{[a,b]}(\xi) \frac{1}{b-a} d\xi = \frac{F_X^{-1}(u) - a}{b-a} = u$$

on en déduit la fonction réciproque F_X^{-1} :

$$F_X^{-1}(u) = (b - a)u + a \quad \text{comme } 0 < u < 1 \text{ on vérifie bien } a < F_X^{-1}(u) < b$$

ce qui démontre la relation (V.40).

On va maintenant montrer que les variables aléatoires associées à la fdp (V.34) peuvent aussi être générées à partir d'une variable uniforme. On applique le même principe:

$$F_X(x) = F_X(F_X^{-1}(u)) = u$$

ce qui ici s'écrit

$$\int_a^{F_X^{-1}(u)} \mathbb{1}_{[a,b]}(\xi) e^{-\lambda_0} e^{-\lambda_1 \xi} d\xi = \frac{e^{-\lambda_0}}{\lambda_1} \left(e^{-\lambda_1 a} - e^{-\lambda_1 F_X^{-1}(u)} \right) = u$$

on en déduit la fonction réciproque F_X^{-1} :

$$F_X^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda_1} \ln \left(e^{-\lambda_1 a} - \lambda_1 e^{\lambda_0} u \right)$$

Pour obtenir un tirage d'une variable aléatoire X dont la FDP est donnée par l'expression (V.34), on applique au tirage d'une variable aléatoire uniforme $U(\theta)$ ($\theta \in \mathcal{A}$) la transformation suivante:

$$X(\theta) = -\frac{1}{\lambda_1} \ln (e^{-\lambda_1 a} - \lambda_1 e^{\lambda_0} U(\theta)) \quad (\text{V.41})$$

Une fois que les paramètres du modèle d'impédance sont munis d'une modélisation probabiliste et du générateur aléatoire associé, il est alors possible de générer des réalisations aléatoires des matrices définissant la matrice d'impédance, ces dernières résultant des réalisations aléatoires des paramètres du modèle d'impédance. De manière plus formelle, on a un vecteur des paramètres:

$$\mathbf{V}_{\text{par}} = (G_s, \nu_s, \rho_s, L_{f1}, L_{f2}, L_{f3}, \rho_f)$$

tel que d'après (V.7), l'impédance de fondation moyenne exprimée dans le domaine fréquentiel s'écrit:

$$[\mathbf{Z}_{\text{sf}}(\mathbf{V}_{\text{par}})] = -\omega^2([\mathbf{M}_f(\mathbf{V}_{\text{par}})] + [\mathbf{M}_{\text{ad}}(\mathbf{V}_{\text{par}})]) + i\omega[\mathbf{D}_s(\mathbf{V}_{\text{par}}, \boldsymbol{\omega}_0)] + [\mathbf{K}_{s0}(\mathbf{V}_{\text{par}})]$$

Les paramètres du vecteur \mathbf{V}_{par} sont donc ensuite représentés par des variables aléatoires scalaires. Pour une réalisation de chacun de ces paramètres, on a une réalisation $\tilde{\mathbf{V}}_{\text{par}}(\theta)$ ($\theta \in \mathcal{A}$) du vecteur des paramètres et on en déduit les réalisations

$$[\mathbf{I}_f(\tilde{\mathbf{V}}_{\text{par}}(\theta))], [\mathbf{M}_{\text{ad}}(\tilde{\mathbf{V}}_{\text{par}}(\theta))], [\mathbf{D}_s(\tilde{\mathbf{V}}_{\text{par}}(\theta), \boldsymbol{\omega}_0)] \text{ et } [\mathbf{K}_{s0}(\tilde{\mathbf{V}}_{\text{par}}(\theta))]$$

A partir de ces réalisations obtenues par les modélisations stochastiques des paramètres du modèle moyen, on va calculer les réalisations correspondantes des paramètres de dispersion du modèle probabiliste de SG_n^+ . Il est donc nécessaire de commencer par déterminer les réalisations des matrices normalisées associées pour pouvoir calculer la réalisation du paramètre de dispersion à l'aide de l'expression (V.28). Pour cela, on utilise les matrices triangulaires supérieures des décompositions de Cholesky (V.18) et la matrice rectangulaire quasi triangulaire supérieure issue de la décomposition (V.22). Les matrices triangulaires $[\mathbf{L}_{If}]$, $[\mathbf{L}_D]$ et $[\mathbf{L}_K]$ sont inversibles et la matrice rectangulaire $[\mathbf{S}_M]$ définie en (V.21) est pseudo-inversible et une matrice pseudo-inverse ou matrice inverse généralisée est donnée par:

$$[\mathbf{S}_M]^+ = [\Phi] \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & & [0] \\ & \ddots & \\ \vdots & \ddots & 1/\sqrt{\lambda_r} \\ \vdots & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

cette matrice est telle que $[\mathbf{S}_M][\mathbf{S}_M]^+ = [\mathbf{I}_r]$ et $[\mathbf{S}_M]^+[\mathbf{S}_M] = [\mathbf{I}_n]$ et vérifie toutes les propriétés qui font d'elle la matrice inverse de Moore-Penrose de $[\mathbf{S}_M]$.

Les réalisations des matrices normalisées sont déterminées par les produits matriciels suivants pour une réalisation $\theta \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
[\tilde{\mathbf{G}}_{If}(\theta)] &= [\mathbf{L}_{If}]^{-T} [\mathbf{I}_f(\tilde{\mathbf{V}}_{\text{par}}(\theta))] [\mathbf{L}_{If}]^{-1} \\
[\tilde{\mathbf{G}}_D(\theta)] &= [\mathbf{L}_D]^{-T} [\mathbf{D}_s(\tilde{\mathbf{V}}_{\text{par}}(\theta), \boldsymbol{\omega}_0)] [\mathbf{L}_D]^{-1} \\
[\tilde{\mathbf{G}}_K(\theta)] &= [\mathbf{L}_K]^{-T} [\mathbf{K}_s(\tilde{\mathbf{V}}_{\text{par}}(\theta), \boldsymbol{\omega}_0)] [\mathbf{L}_K]^{-1} \\
[\tilde{\mathbf{G}}_{Mad}(\theta)] &= [\mathbf{S}_M]^{+T} [\mathbf{M}_{\text{ad}}(\tilde{\mathbf{V}}_{\text{par}}(\theta))] [\mathbf{S}_M]^+
\end{aligned} \tag{V.42}$$

Le paramètre δ dont on cherche à estimer l'ordre de grandeur est défini en (V.28) et nécessite le calcul de l'espérance $\mathbb{E}\{\|[\tilde{\mathbf{G}}] - [\mathbb{1}_n]\|_F^2\}$. On introduit les variables aléatoires

$$\tilde{d}_G = \|[\tilde{\mathbf{G}}] - [\mathbb{1}_n]\|_F^2$$

dont on construit un échantillonnage \mathcal{S}_d à partir des réalisations des matrices normalisées:

$$\mathcal{S}_d = \{\tilde{d}_G(\theta_k), k \in \mathbb{N} \leq N_S, \theta_k \in \mathcal{A}\}$$

A partir de cet échantillonnage, on utilise l'estimateur statistique standard de la moyenne pour estimer $\mathbb{E}\{\tilde{d}_G\}$:

$$\mathbb{E}\{\tilde{d}_G\} = \mathbb{E}\{\|[\tilde{\mathbf{G}}] - [\mathbb{1}_n]\|_F^2\} \simeq \frac{1}{N_S} \sum_{k=1}^{N_S} \tilde{d}_G(\theta_k)$$

On en déduit l'estimation correspondante du paramètre δ :

$$\delta = \left(\frac{1}{n} \mathbb{E}\|[\tilde{\mathbf{G}}] - [\mathbb{1}_n]\|_F^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{n} \mathbb{E}\{\tilde{d}_G\} \right)^{\frac{1}{2}}$$

V.5 Conclusions

Dans ce chapitre on a introduit des incertitudes dans un modèle mécanique d'interaction sol fondation issu de la littérature des sciences appliquées à l'ingénierie afin de prendre en compte le caractère hétérogène du sol. Cette incertitude est introduite au niveau des différentes matrices constituant la matrice d'impédance décrivant l'interaction entre le sol et la fondation à l'aide de matrices aléatoires. Les densités de probabilités de ces matrices maximisent l'entropie définie au sens de l'information, tout en vérifiant la seule information disponible à propos des propriétés physiques et topologiques de l'interaction entre le sol et la fondation.

L'avantage de cette approche est que la simplicité du modèle moyen (modélisation déterministe) d'interaction sol-fondation est conservée tout en prenant en compte la majeure partie des incertitudes sur sa modélisation physique. Les seules données probabilistes que l'utilisateur du modèle a besoin de fournir sont des intervalles d'incertitude autour des valeurs moyennes des paramètres du modèle.

CHAPITRE VI

MODÉLISATION MÉCANIQUE DES BÂTIMENTS SOUMIS AUX SÉISMES

La modélisation du comportement mécanique du sol présentée au *chapitre V* va être intégrée dans des représentations du comportement dynamique d'un bâtiment soumis à une excitation mécanique provenant du sol. Les modèles mécaniques dynamiques du bâtiment reposent sur les maquettes réduites à l'aide de l'algorithme de "compression" par homogénéisation présenté en première partie. Les modèles élaborés seront mis en œuvre dans les simulations présentées au *chapitre VII*.

Les bâtiments sont des structures au comportement dynamique complexe. La plupart des études en sismique du bâtiment ont pour finalité de pouvoir avancer quelques prédictions sur sa vulnérabilité. On cherche donc à estimer avec le plus de précision possible la répartition des charges dynamiques dans le bâtiment et leur amplitude pour un type de séisme donné. D'un autre côté, on cherche à développer des outils d'ingénierie simples et rapides à mettre en œuvre. Le *modèle brochette* a été développé dans cet état d'esprit. Néanmoins, les hypothèses simplificatrices sur la modélisation du bâtiment et de l'interaction de sol ainsi que le manque d'information précise sur cette dernière entraînent un niveau d'erreur important sur les prédictions. Les modèles simplifiés de bâtiment construits à partir d'éléments de poutre ne sont valables que pour les fréquences les plus basses où la dynamique du bâtiment est caractérisée par des mouvements d'ensemble. Au delà, les éléments structuraux internes tels que les murs sont directement excités, la réponse dynamique du bâtiment n'est donc plus descriptible par le modèle simplifié.

La modélisation probabiliste introduite dans le comportement mécanique de l'interaction sol-fondation introduit des aléas dans le comportement dynamique de l'ensemble {sol + fondation + bâtiment}. La réponse dynamique de cet ensemble est donc un processus stochastique indexé en temps dont il faudra caractériser les propriétés. Les modèles mécaniques de bâtiment présentés ici sont néanmoins déterministes. Ce choix repose sur l'hypothèse que les structures concernées sont suffisamment récentes pour que leur état soit connu avec une précision suffisante, et sur la motivation de cette étude qui vise à caractériser l'effet de l'interaction de sol sur la dynamique de l'ouvrage.

Les bâtiments à plusieurs étages ont généralement une fondation enfouie, et c'est ce type de fondation décrit au *chapitre V* que l'on adoptera ici. La réduction de la maquette virtuelle du bâtiment par homogénéisation étant une procédure purement statique, seules les propriétés élastiques sont concernées par l'algorithme de "compression". En outre, comme on pu le voir en II.7, la répartition de la masse joue un rôle important sur la raideur dynamique apparente de la structure réduite. L'approche classique en génie parasismique est, comme on l'a rappelé au *chapitre I*, l'utilisation de modèles brochette (*lumped mass models*) où la masse des étages est concentrée au niveau des planchers. La représentation obtenue est discrète et assez proche d'une modélisation par la méthode des différences finies d'un domaine prismatique par des éléments de type poutre. L'expérience montre que cette répartition inertielle donne des résultats corrects pour les premières fréquences de résonance de la structure. Afin d'observer l'effet de cette distribution inertielle du bâtiment, on construit un second modèle mécanique où la masse est disposée de façon parfaitement homogène le long du bâtiment. Ces deux situations extrêmes n'ont néanmoins *a priori* pas valeur de "bornes" mais sont cependant supposées caractériser le sensibilité de la représentation mécanique à sa répartition de masse.

Le problème dynamique étant formulé de différentes manières, la section VI.1 énonce un bilan général des transferts de puissance mécanique. Ce bilan exposé par le théorème de l'énergie cinétique procure une expression commune qui est déclinée suivant les différents cas abordés. Un *modèle brochette* à masse concentrée de bâtiment est construit en VI.2. Un autre modèle de poutre est exposé en VI.3. Contrairement au modèle *modèle brochette*, celui-ci a une répartition de masse homogène.

VI.1 Bilan énergétique

Avant d'entrer dans le détail des différents modèles de bâtiment, on aborde la description mécanique de l'ensemble {sol + fondation + bâtiment} par un bilan énergétique. Cette approche donne un exposé général à partir duquel des descriptions spécifiques pourront être déployées au cas par cas.

Les trois éléments mis en jeu sont le bâtiment qui occupe un domaine Ω_b , la fondation rigide occupant un domaine Ω_f et le sol de fondation qui est le domaine Ω_s situé au voisinage de la fondation et en contact avec cette dernière. La position relative de ces domaines est exposée sur la *Figure VI.1*. Le domaine de sol est borné mais il ne sera pas nécessaire de préciser ses limites dans la mesure où celles-ci sont liées au calcul des impédances de fondation. On définit en outre le domaine Ω_{s0} qui correspond à un domaine de sol éloigné de Ω_s et supposé au repos donc non déformé. Ce domaine est donc le domaine infiniment éloigné de Ω_s où les conditions de *Sommerfeld* sont vérifiées.

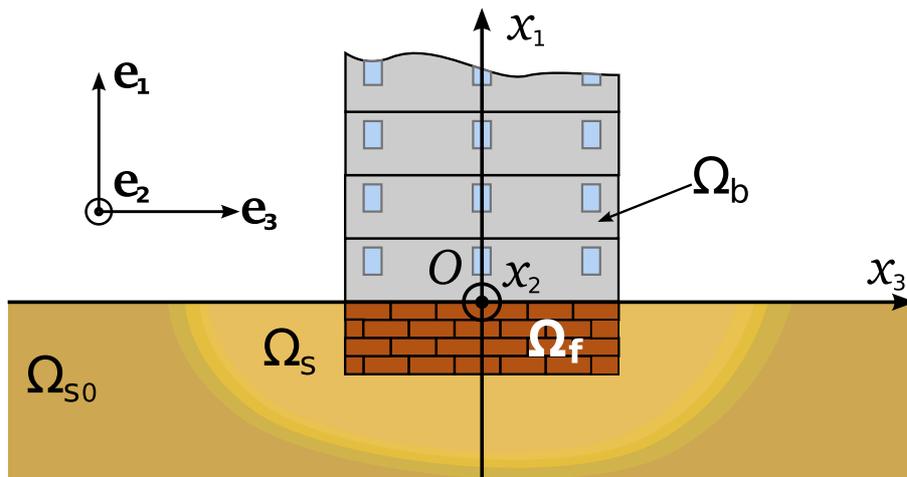


Figure VI.1

Le vecteur position $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ est défini par rapport au point O qui est le point de l'axe moyen du bâtiment au repos coïncidant avec la face supérieure de la fondation, et par rapport à la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ dont le vecteur \mathbf{e}_1 donne la direction verticale et les vecteurs \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 les directions horizontales telles que les plans verticaux $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ soient des plans de symétrie du bâtiment. Le référentiel \mathcal{R}_0 est lié au domaine de sol non déformé Ω_{s0} . Le référentiel \mathcal{R}_{sf} est lié au sol de fondation et est mis en mouvement en présence d'une excitation sismique. C'est donc *a priori* un référentiel non inertiel.

La description du mouvement des corps Ω_b et Ω_f est donnée dans le cadre des petites déformations où les descriptions *eulériennes* et *lagrangiennes* sont confondues. La description des grandeurs physiques fait intervenir le vecteur position \mathbf{x} valable aussi bien pour l'état de référence donné par l'assemblage {bâtiment+fondation} que pour la structure dans toute autre configuration respectant l'hypothèse des petites déformations (pour de plus amples détails se reporter par exemple à [69]). La désignation des corps sera confondue avec leur domaine de référence et leur configuration instantanée.

On considère un corps Ω dont le champ de vitesse instantanée est $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. L'opérateur $(\Omega, t) \mapsto \mathcal{H}(\Omega, t)$ donne l'énergie cinétique du corps à la date t :

$$\mathcal{H}(\Omega, t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\|^2 dv$$

où $\rho(\mathbf{x})$ est la densité du corps, dv est l'élément de volume et $\|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\|$ est la norme euclidienne dans \mathbb{R}^3 définie par $\|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\|^2 = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. La puissance instantanée transmise par les forces extérieures au corps Ω est donnée par l'opérateur $(\Omega, t) \mapsto \mathcal{L}_e(\Omega, t)$:

$$\mathcal{L}_e(\Omega, t) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) ds + \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv$$

où $\partial\Omega$ désigne le bord du corps Ω , ds est l'élément de surface sur $\partial\Omega$, $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ est le champ des forces de surface extérieures appliquées à $\partial\Omega$ et $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ une densité de force de volume.

On ne considère dans cette étude que la partie de l'énergie interne due aux forces internes élastiques. La puissance instantanée de ces forces élastiques est donnée par l'opérateur $(\Omega, t) \mapsto \mathcal{L}_i(\Omega, t)$:

$$\mathcal{L}_i(\Omega, t) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{e}(\mathbf{v})(\mathbf{x}, t) dv$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de *Cauchy*, et $\mathbf{e}(\mathbf{v})$ la vitesse de déformation linéarisée dans le cadre des petites perturbations mécaniques. On énonce le théorème de l'énergie cinétique dans le référentiel \mathcal{R}_{sf} :

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt}(\Omega, t) = \mathcal{L}_e(\Omega, t) - \mathcal{L}_i(\Omega, t) \quad (\text{VI.1})$$

On considère maintenant que le corps Ω est l'ensemble $\Omega = \Omega_b \cup \Omega_f$, on décompose en conséquence l'expression (VI.1) en utilisant le fait que les opérateurs \mathcal{K} , \mathcal{L}_e et \mathcal{L}_i sont linéaires par rapport au domaine d'application:

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt}(\Omega_b, t) + \frac{d\mathcal{K}}{dt}(\Omega_f, t) = \mathcal{L}_e(\Omega_b, t) + \mathcal{L}_e(\Omega_f, t) - \mathcal{L}_i(\Omega_b, t) - \mathcal{L}_i(\Omega_f, t) \quad (\text{VI.2})$$

Quelques commentaires sont à faire sur la nature des différents termes de ce bilan de puissance. La dérivée de l'opérateur d'énergie cinétique appliquée au domaine Ω_f fait intervenir l'inertie de la fondation mais également celle de la masse additionnelle de sol emportée par la fondation dans son mouvement. Cette masse est décrite par la masse additionnelle de l'équation (V.7) et son déplacement est solidaire de celui de la fondation. Les efforts extérieurs appliqués à Ω_b sont d'une part des forces de volume inertielles dues à l'accélération $\mathbf{a}_e = (a_{e1}, a_{e2}, a_{e3})$ du référentiel \mathcal{R}_{sf} (qui est supposé se translater sans tourner) et d'autre part les forces $\mathbf{t}_{f \rightarrow b}$ transmises par la fondation:

$$\mathcal{L}_e(\Omega_b, t) = \int_{\partial\Omega_b \cap \partial\Omega_f} \mathbf{t}_{f \rightarrow b}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) ds - \int_{\Omega_b} \rho_b(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}_e(t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv \quad (\text{VI.3})$$

où ρ_b est la densité sur le domaine Ω_b . Les efforts extérieurs appliqués à la fondation se décomposent de manière similaire. Les forces extérieures de surfaces sont $\mathbf{t}_{b \rightarrow f} = -\mathbf{t}_{f \rightarrow b}$ la force appliquée par le bâtiment et $\mathbf{t}_{s \rightarrow f}$ les forces appliquées par le sol de fondation Ω_s . La fondation est également soumise aux forces de volume inertielles dues au mouvement du référentiel \mathcal{R}_{sf} .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e(\Omega_f, t) = & \int_{\partial\Omega_f \cap \partial\Omega_b} \mathbf{t}_{b \rightarrow f}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) ds + \int_{\partial\Omega_f \cap \partial\Omega_s} \mathbf{t}_{s \rightarrow f}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) ds \\ & - \frac{m_f}{|\Omega_f|} \int_{\Omega_f} \mathbf{a}_e(t) \cdot (\mathbf{v}_0(t) + \dot{\boldsymbol{\theta}}_0(t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) dv \end{aligned} \quad (\text{VI.4})$$

où \mathbf{v}_0 , $\boldsymbol{\theta}_0$, \mathbf{x}_0 et $|\Omega_f|$ sont respectivement la vitesse du centre de masse de la fondation, son vecteur vitesse de rotation instantanée, la position de son centre et son volume. Le

couple (torseur cinématique) $\{\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\theta}_0\}$ caractérise son champ de vitesse mouvement de corps rigide. On notera que la masse volumique de la fondation est supposée homogène de masse volumique $\rho_f = m_f/|\Omega_f|$. La distribution surfacique de force $\mathbf{t}_{s \rightarrow f}$ est la force de réaction du sol au mouvement de la fondation. Cette force est caractérisée par les matrices de raideur et d'amortissement de sol définies au *chapitre V* de telle sorte que l'on ait la relation suivante:

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt}(\Omega_f, t) - \int_{\partial\Omega_f \cap \partial\Omega_s} \mathbf{t}_{s \rightarrow f}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) ds = \left([\mathbf{Z}(t)] * \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0(t) \\ \boldsymbol{\theta}_0(t) \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 \end{pmatrix}$$

où $t \mapsto [\mathbf{Z}(t)]$ est l'opérateur d'impédance sol-fondation dans le domaine temporel et $(\mathbf{u}_0(t), \boldsymbol{\theta}_0(t))$ le couple déplacement / rotation de corps rigide (torseur cinématique) de la fondation.

En dernier commentaire sur le bilan de puissance (VI.2), on remarque que le terme $\mathcal{L}_i(\Omega_f, t)$ est nul dans la mesure où la fondation est un corps non déformable.

VI.2 Modèle brochette

Le modèle de type brochette (LMM=*lumped mass model*) est le plus couramment utilisé en génie parasismique. De nombreux travaux utilise ce type de modélisation pour des études de problèmes dynamiques appliqués au génie civil. Gupta et Trifunac [64] utilisent par exemple un modèle brochette avec fondation mobile pour estimer l'amplitude des réponses maximales (*maximal peak responses*) d'un bâtiment à multiples étages en tenant compte de son interaction avec le sol. Jin *et al.* [75] et Lutes *et al.* [93] mettent en jeu un modèle de bâtiment similaire et introduisent le comportement mécanique du sol par une impédance d'interaction sol-fondation de type *Wolf*. Les auteurs étudient en outre les effets de l'incertitude de comportement du sol en modélisant les paramètres moyens de sol (densité, module de cisaillement, coefficient de Poisson) par des variables aléatoires uniformes. De manière similaire à la modélisation probabiliste employée en V.4 pour déterminer les paramètres de dispersion δ , ces aléas sur les paramètres moyens insèrent des incertitudes sur les termes d'impédance d'interaction sol-fondation. On peut néanmoins remarquer que cette modélisation probabiliste n'assure pas que le processus stochastique solution des équations dynamiques du bâtiment soit du second ordre. On peut également citer Alame *et al.* [1] qui ont conçu un modèle à masse concentrées excentrées pour les structures asymétriques non périodiques à multiples étages. L'attrait pour le modèle brochette au sein des sciences pour l'ingénieur appliquées à la dynamique du bâtiment est que la mise en œuvre de ce modèle est de formulation simple et mène directement à un système d'équations linéaires de type différences finies en discrétisant une poutre par des éléments de type poutre de *Timoshenko*.

Les modèles brochette sont constitués d'inerties (masse et matrice d'inertie) ponctuelles reliées par des poutre de *Timoshenko* sans masse. Les propriétés de ces poutres sont

habituellement calculées comme étant celles d'une poutre droite prismatique dont la section est constituée d'une coupe horizontale des murs sans prendre en compte les planchers. La précision de cette approche est limitée par celle de la théorie de la résistance des matériaux, l'un des objectifs de la méthode de réduction de modèle présentée en première partie de ce mémoire de thèse est de conserver la simplicité de l'élément de poutre comme outil de modélisation du bâtiment tout en optimisant sa précision de représentation. Les propriétés des poutres utilisées dans le modèle brochette présenté dans cette section sont donc issues de cette dernière approche.

Le bâtiment considéré a un nombre d'étages N_{sto} de hauteur h , chaque étage est représenté par un élément de poutre de *Timoshenko* sans masse surmonté d'un corps rigide dont on néglige les dimensions et ayant les mêmes propriétés inertielles qu'un étage du bâtiment. L'ensemble du modèle mécanique est représenté à la *Figure VI.2*. Les corps rigides sont positionnés aux points $M^{(n)}$. Ainsi, l'élément de poutre de l'étage n est paramétré par le segment $[M^{(n-1)}M^{(n)}]$ concourant à l'axe (O, x_1) . Les raideurs de poutres utilisées sont celles introduites par la matrice de comportement (II.67) et déterminées numériquement à l'aide des expressions (III.7). La fondation est donc une masse supplémentaire reliée à l'extrémité inférieure de l'élément de poutre du premier étage (étage $n=1$ au niveau du sol). La fondation est également liée au sol par l'impédance d'interaction sol-fondation.

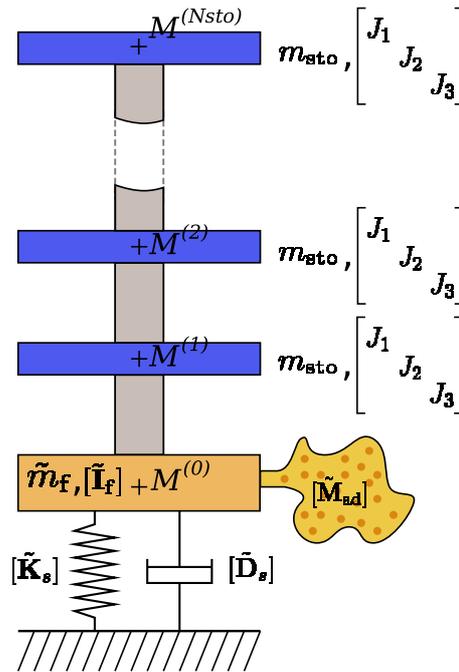


Figure VI.2 Modèle brochette d'un bâtiment à N_{sto} étages. Les corps rigides de centres $M^{(n)}$ ont les propriétés inertielles des étages (en bleu) et de la fondation ($M^{(0)}$). Ils sont reliés par des éléments de poutre de *Timoshenko* (en gris).

VI.2.1 Equation dynamique de la structure moyenne

Dans ce qui suit, on détermine le système d'équations d'équilibre dynamique du *modèle brochette* avec l'impédance d'interaction sol-fondation déterministe. A cette fin, on exprime les relations de comportement élastique des différents éléments du modèle, puis on applique les relations fondamentales de la dynamique aux parties inertielles de la structure.

Les éléments de poutre étant sans masse, leur champ de déplacement et donc de déformation est conditionné par les mouvements de leurs extrémités. Les mouvements en question sont ceux des corps rigides qu'ils connectent. En comptant la fondation, le modèle emploie $N_{\text{sto}} + 1$ masses, son état est donc défini par leurs $6(N_{\text{sto}} + 1)$ degrés de liberté (DDLs) de déplacements et rotations. On note $(U_1^{(n)}, U_2^{(n)}, U_3^{(n)})$ et $(\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)}, \theta_3^{(n)})$ les déplacements et les rotations à l'extrémité supérieure de l'étage n . Les équations de comportement des éléments de poutre s'écrivent à l'aide des 10 raideurs $k_{t1}, k_{t2}, k_{t3}, k_{r1}, k_{r2}, k'_{r2}, k_{r3}, k'_{r3}, k_{t2r3}, k_{t3r2}$ qui s'expriment en fonction des 6 raideurs de la matrice $[\mathbf{K}_b]$ donnée en (II.67) et de la longueur h de l'élément de poutre:

$$\begin{aligned}
k_{t1} &= \frac{K_{11}}{h} & k_{r1} &= \frac{K_{44}}{h} \\
k_{t2} &= \frac{12K_{66}}{h(h^2 + 12K_{66}/K_{22})} & k_{r2} &= \frac{4K_{66}(h^2 + 3K_{66}/K_{22})}{h(h^2 + 12K_{66}/K_{22})} \\
k_{t3} &= \frac{12K_{55}}{h(h^2 + 12K_{55}/K_{33})} & k'_{r2} &= \frac{2K_{66}(h^2 - 6K_{66}/K_{22})}{h(h^2 + 12K_{66}/K_{22})} \\
k_{t2r3} &= \frac{6K_{66}}{h^2 + 12K_{66}/K_{22}} & k_{r3} &= \frac{4K_{55}(h^2 + 3K_{55}/K_{33})}{h(h^2 + 12K_{55}/K_{33})} \\
k_{t3r2} &= \frac{6K_{55}}{h^2 + 12K_{55}/K_{33}} & k'_{r3} &= \frac{2K_{55}(h^2 - 6K_{55}/K_{33})}{h(h^2 + 12K_{55}/K_{33})}
\end{aligned} \tag{VI.5}$$

Les équations de comportement des éléments de poutre relient les degrés de liberté des extrémités d'un élément de poutre n (étage $n \in \mathbb{N} \leq N_{\text{sto}}$) à ses forces et à ses moments internes $(V_1^{(n)}, V_2^{(n)}, V_3^{(n)})$ et $(M_1^{(n)}, M_2^{(n)}, M_3^{(n)})$:

$$\begin{aligned}
V_1 &= k_{t1} (U_1^{(n)} - U_1^{(n-1)}) \\
V_2 &= k_{t2} (U_2^{(n)} - U_2^{(n-1)}) - k_{t2r3} (\theta_3^{(n)} + \theta_3^{(n-1)}) \\
V_3 &= k_{t2} (U_3^{(n)} - U_3^{(n-1)}) + k_{t3r2} (\theta_2^{(n)} + \theta_2^{(n-1)})
\end{aligned} \tag{VI.6}$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= k_{r1} \left(\theta_1^{(n)} - \theta_1^{(n-1)} \right) \\
M_2 &= \left(\frac{k_{r2} + k'_{r2}}{h} \left(\theta_2^{(n)} + \theta_2^{(n-1)} \right) + \frac{2k_{t3r2}}{h} \left(U_2^{(n)} - U_2^{(n-1)} \right) \right) (x_1 - (n-1)h) \\
&\quad - k'_{r2} \theta_2^{(n)} - k_{r2} \theta_2^{(n-1)} - k_{t3r2} \left(U_2^{(n)} - U_2^{(n-1)} \right) \\
M_3 &= \left(\frac{k_{r3} + k'_{r3}}{h} \left(\theta_3^{(n)} + \theta_3^{(n-1)} \right) - \frac{2k_{t2r3}}{h} \left(U_3^{(n)} - U_3^{(n-1)} \right) \right) (x_1 - (n-1)h) \\
&\quad - k'_{r3} \theta_3^{(n)} - k_{r3} \theta_3^{(n-1)} + k_{t2r3} \left(U_3^{(n)} - U_3^{(n-1)} \right)
\end{aligned} \tag{VI.7}$$

Les forces et moments internes sont orientés en une section donnée $x_1 = X_0$ par la convention consistant à compter positivement les efforts appliqués par le segment supérieur ($x_1 > X_0$) et négativement les autres ($x_1 < X_0$).

Il faut maintenant écrire la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel \mathcal{R}_{sf} pour chacun des corps rigides du modèle. Ceux-ci sont soumis aux forces et moments transmis par les éléments de poutre adjacents ainsi qu'aux forces d'entraînement dues au déplacement du référentiel \mathcal{R}_{sf} . Les étages ont une masse totale m_{sto} et sont supposés avoir les plans verticaux $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ comme plans de symétrie ce qui implique que leur matrice d'inertie est diagonale dans le repère $(M^{(n)}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Les termes diagonaux de la matrice d'inertie des étages sont notés J_1, J_2, J_3 . Dans les équations qui suivent, on note d'un point "·" la dérivée par rapport au temps et d'un double point "··" la dérivée seconde. Les relations (VI.8) et (VI.9) formulent les relations d'équilibre dynamique des moments et des forces pour l'étage n ($0 < n < N_{sto}$) en **omettant les termes d'amortissement structural** du bâtiment qui seront précisés plus loin. Le bilan des forces appliquées au point $M^{(n)}$ s'écrit:

$$\begin{aligned}
m_{sto} \ddot{U}_1^{(n)} &= V_1(U_1^{(n+1)}, U_1^{(n)}) - V_1(U_1^{(n)}, U_1^{(n-1)}) - m_{sto} a_{e1} \\
&= k_{t1} \left(U_1^{(n+1)} - 2U_1^{(n)} + U_1^{(n-1)} \right) - m_{sto} a_{e1} \\
m_{sto} \ddot{U}_2^{(n)} &= V_2(U_2^{(n+1)}, U_2^{(n)}, \theta_3^{(n+1)}, \theta_3^{(n)}) - V_2(U_2^{(n)}, U_2^{(n-1)}, \theta_3^{(n)}, \theta_3^{(n-1)}) - m_{sto} a_{e2} \\
&= k_{t2} \left(U_2^{(n+1)} - 2U_2^{(n)} + U_2^{(n-1)} \right) - k_{t2r3} \left(\theta_3^{(n+1)} - \theta_3^{(n-1)} \right) - m_{sto} a_{e2} \\
m_{sto} \ddot{U}_3^{(n)} &= V_3(U_3^{(n+1)}, U_3^{(n)}, \theta_2^{(n+1)}, \theta_2^{(n)}) - V_3(U_3^{(n)}, U_3^{(n-1)}, \theta_2^{(n)}, \theta_2^{(n-1)}) - m_{sto} a_{e3} \\
&= k_{t3} \left(U_3^{(n+1)} - 2U_3^{(n)} + U_3^{(n-1)} \right) + k_{t3r2} \left(\theta_2^{(n+1)} - \theta_2^{(n-1)} \right) - m_{sto} a_{e3}
\end{aligned} \tag{VI.8}$$

Le bilan des moments au point $M^{(n)}$ donne:

$$\begin{aligned}
J_1 \ddot{\theta}_1^{(n)} &= M_1(\theta_1^{(n+1)}, \theta_1^{(n)}) - M_1(\theta_1^{(n)}, \theta_1^{(n-1)}) \\
&= k_{r1} \left(\theta_1^{(n+1)} - 2\theta_1^{(n)} + \theta_1^{(n-1)} \right) \\
J_2 \ddot{\theta}_2^{(n)} &= M_2(U_3^{(n+1)}, U_3^{(n)}, \theta_2^{(n+1)}, \theta_2^{(n)}, x_1 = nh) - M_2(U_3^{(n)}, U_3^{(n-1)}, \theta_2^{(n)}, \theta_2^{(n-1)}, x_1 = nh) \\
&= -k'_{r2} \left(\theta_2^{(n+1)} + \theta_2^{(n-1)} \right) - 2k_{r2} \theta_2^{(n)} - k_{t3r2} \left(U_3^{(n+1)} - U_3^{(n-1)} \right) \\
J_3 \ddot{\theta}_3^{(n)} &= M_3(U_2^{(n+1)}, U_2^{(n)}, \theta_3^{(n+1)}, \theta_3^{(n)}, x_1 = nh) - M_3(U_2^{(n)}, U_2^{(n-1)}, \theta_3^{(n)}, \theta_3^{(n-1)}, x_1 = nh) \\
&= -k'_{r3} \left(\theta_3^{(n+1)} + \theta_3^{(n-1)} \right) - 2k_{r3} \theta_3^{(n)} + k_{t2r3} \left(U_2^{(n+1)} - U_2^{(n-1)} \right)
\end{aligned} \tag{VI.9}$$

On doit cependant aborder séparément le cas des masses aux extrémités, à savoir le dernier étage et la fondation. Le dernier étage $n = N_{\text{sto}}$ n'est soumis à aucun effort d'étage supérieur. Le bilan des forces s'écrit:

$$\begin{aligned}
m_{\text{sto}} \ddot{U}_1^{(N_{\text{sto}})} &= -V_1(U_1^{(N_{\text{sto}})}, U_1^{(N_{\text{sto}}-1)}) - m_{\text{sto}} a_{e1} \\
&= -k_{t1} \left(U_1^{(N_{\text{sto}})} - U_1^{(N_{\text{sto}}-1)} \right) - m_{\text{sto}} a_{e1} \\
m_{\text{sto}} \ddot{U}_2^{(N_{\text{sto}})} &= -V_2(U_2^{(N_{\text{sto}})}, U_2^{(N_{\text{sto}}-1)}, \theta_3^{(N_{\text{sto}})}, \theta_3^{(N_{\text{sto}}-1)}) - m_{\text{sto}} a_{e2} \\
&= -k_{t2} \left(U_2^{(N_{\text{sto}})} - U_2^{(N_{\text{sto}}-1)} \right) + k_{t2r3} \left(\theta_3^{(N_{\text{sto}})} + \theta_3^{(N_{\text{sto}}-1)} \right) - m_{\text{sto}} a_{e2} \\
m_{\text{sto}} \ddot{U}_3^{(N_{\text{sto}})} &= -V_3(U_3^{(N_{\text{sto}})}, U_3^{(N_{\text{sto}}-1)}, \theta_2^{(N_{\text{sto}})}, \theta_2^{(N_{\text{sto}}-1)}) - m_{\text{sto}} a_{e3} \\
&= -k_{t3} \left(U_3^{(N_{\text{sto}})} - U_3^{(N_{\text{sto}}-1)} \right) - k_{t3r2} \left(\theta_2^{(N_{\text{sto}})} + \theta_2^{(N_{\text{sto}}-1)} \right) - m_{\text{sto}} a_{e3}
\end{aligned} \tag{VI.10}$$

et celui des moments:

$$\begin{aligned}
J_1 \ddot{\theta}_1^{(N_{\text{sto}})} &= -M_1(\theta_1^{(N_{\text{sto}})}, \theta_1^{(N_{\text{sto}}-1)}) \\
&= -k_{r1} \left(\theta_1^{(N_{\text{sto}})} - \theta_1^{(N_{\text{sto}}-1)} \right) \\
J_2 \ddot{\theta}_2^{(N_{\text{sto}})} &= -M_2(U_3^{(N_{\text{sto}})}, U_3^{(N_{\text{sto}}-1)}, \theta_2^{(N_{\text{sto}})}, \theta_2^{(N_{\text{sto}}-1)}, x_1 = nh) \\
&= -k_{r2} \theta_2^{(N_{\text{sto}})} - k'_{r2} \theta_2^{(N_{\text{sto}}-1)} - k_{t3r2} \left(U_3^{(N_{\text{sto}})} - U_3^{(N_{\text{sto}}-1)} \right) \\
J_3 \ddot{\theta}_3^{(N_{\text{sto}})} &= -M_3(U_2^{(N_{\text{sto}})}, U_2^{(N_{\text{sto}}-1)}, \theta_3^{(N_{\text{sto}})}, \theta_3^{(N_{\text{sto}}-1)}, x_1 = nh) \\
&= -k_{r3} \theta_3^{(N_{\text{sto}})} - k'_{r3} \theta_3^{(N_{\text{sto}}-1)} + k_{t2r3} \left(U_2^{(N_{\text{sto}})} - U_2^{(N_{\text{sto}}-1)} \right)
\end{aligned} \tag{VI.11}$$

La fondation est comme on l'a spécifié en (VI.4), soumise à des efforts transmis par le premier étage ainsi qu'aux efforts de réaction du sol et à la force d'inertie. On écrit les bilans de forces et moments pour l'impédance d'interaction sol-fondation **moyenne** (sans aléas) d'une fondation enfouie en **omettant volontairement les termes de masse ajoutée** introduits par la matrice $[M_{\text{ad}}]$. Par souci de lisibilité, ces derniers seront ajoutés

ultérieurement.

$$\begin{aligned}
m_f \ddot{U}_1^{(0)} &= V_1(U_1^{(1)}, U_1^{(0)}) - K_{t1} U_1^{(0)} - D_{t1} \dot{U}_1^{(0)} - m_f a_{e1} \\
&= k_{t1} (U_1^{(1)} - U_1^{(0)}) - K_{t1} U_1^{(0)} - D_{t1} \dot{U}_1^{(0)} - m_f a_{e1} \\
m_f \ddot{U}_2^{(0)} &= V_2(U_2^{(1)}, U_2^{(0)}, \theta_3^{(1)}, \theta_3^{(0)}) - K_{t2} U_2^{(0)} - K_{t2r3} \theta_3^{(0)} \\
&\quad - D_{t2} \dot{U}_2^{(0)} - D_{t2r3} \dot{\theta}_3^{(0)} - m_f a_{e2} \\
&= k_{t2} (U_2^{(1)} - U_2^{(0)}) - k_{t2r3} (\theta_3^{(1)} + \theta_3^{(0)}) - K_{t2} U_2^{(0)} - K_{t2r3} \theta_3^{(0)} \\
&\quad - D_{t2} \dot{U}_2^{(0)} - D_{t2r3} \dot{\theta}_3^{(0)} - m_f a_{e2} \\
m_f \ddot{U}_3^{(0)} &= V_3(U_3^{(1)}, U_3^{(0)}, \theta_2^{(1)}, \theta_2^{(0)}) - K_{t3} U_3^{(0)} - K_{t3r2} \theta_2^{(0)} \\
&\quad - D_{t3} \dot{U}_3^{(0)} - D_{t3r2} \dot{\theta}_2^{(0)} - m_f a_{e3} \\
&= k_{t3} (U_3^{(1)} - U_3^{(0)}) + k_{t3r2} (\theta_2^{(1)} + \theta_2^{(0)}) - K_{t3} U_3^{(0)} - K_{t3r2} \theta_2^{(0)} \\
&\quad - D_{t3} \dot{U}_3^{(0)} - D_{t3r2} \dot{\theta}_2^{(0)} - m_f a_{e3}
\end{aligned} \tag{VI.12}$$

$$\begin{aligned}
J_1 \ddot{\theta}_1^{(0)} &= M_1(U_1^{(1)}, U_1^{(0)}) - K_{t1} U_1^{(0)} - D_{t1} \dot{U}_1^{(0)} = k_{r1} (\theta_1^{(1)} - \theta_1^{(0)}) - K_{r1} \theta_1^{(0)} - D_{r1} \dot{\theta}_1^{(0)} \\
J_2 \ddot{\theta}_2^{(0)} &= M_2(U_3^{(1)}, U_3^{(0)}, \theta_2^{(1)}, \theta_2^{(0)}) - K_{r2} \theta_2^{(0)} + K_{t3r2} U_3^{(0)} - D_{r2} \dot{\theta}_2^{(0)} + D_{t3r2} \dot{U}_3^{(0)} \\
&= -k'_{r2} \theta_2^{(1)} - k_{r2} \theta_2^{(0)} - k_{t3r2} (U_3^{(1)} - U_3^{(0)}) - K_{r2} \theta_2^{(0)} + K_{t3r2} U_3^{(0)} - D_{r2} \dot{\theta}_2^{(0)} \\
&\quad + D_{t3r2} \dot{U}_3^{(0)} \\
J_3 \ddot{\theta}_3^{(0)} &= M_3(U_2^{(1)}, U_2^{(0)}, \theta_3^{(1)}, \theta_3^{(0)}) - K_{r3} \theta_3^{(0)} + K_{t2r3} U_2^{(0)} - D_{r3} \dot{\theta}_3^{(0)} + D_{t2r3} \dot{U}_2^{(0)} \\
&= -k'_{r3} \theta_3^{(1)} - k_{r3} \theta_3^{(0)} + k_{t2r3} (U_2^{(1)} - U_2^{(0)}) - K_{r3} \theta_3^{(0)} + K_{t2r3} U_2^{(0)} - D_{r3} \dot{\theta}_3^{(0)} \\
&\quad + D_{t2r3} \dot{U}_2^{(0)}
\end{aligned} \tag{VI.13}$$

Toutes ces équations peuvent être écrites sous forme matricielle pour un vecteur d'état $\mathbf{X}(t)$ dont on choisit de concaténer les degrés de liberté de la manière suivante:

$$\mathbf{X}^T = \left(U_1^{(1)} \dots U_1^{(N_{sto})} U_2^{(1)} \dots U_2^{(N_{sto})} U_3^{(1)} \dots U_3^{(N_{sto})} \theta_1^{(1)} \dots \theta_1^{(N_{sto})} \right. \\
\left. \theta_2^{(1)} \dots \theta_2^{(N_{sto})} \theta_3^{(1)} \dots \theta_3^{(N_{sto})} U_1^{(0)} U_2^{(0)} U_3^{(0)} \theta_1^{(0)} \theta_2^{(0)} \theta_3^{(0)} \right)$$

Le théorème de l'énergie cinétique (VI.1) s'écrit:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) [\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{X}}(t) = \dot{\mathbf{X}}(t) \mathbf{F}_e(t) - \dot{\mathbf{X}}(t) [\mathbf{D}] \dot{\mathbf{X}}(t) - \dot{\mathbf{X}}(t) [\mathbf{K}] \mathbf{X}(t)$$

L'équation d'équilibre dynamique correspondante s'écrit:

$$[\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{X}}(t) + [\mathbf{D}] \dot{\mathbf{X}}(t) + [\mathbf{K}] \mathbf{X}(t) = \mathbf{F}_e(t) \quad (\text{VI.14})$$

avec les conditions initiales:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right|_{t=0} = \mathbf{0}$$

où $[\mathbf{M}]$ est la matrice de masse de l'ensemble $\Omega = \Omega_b \cup \Omega_f$, $[\mathbf{D}]$ sa matrice d'amortissement, $[\mathbf{K}]$ sa matrice de raideur et $\mathbf{F}_e(t)$ le vecteur des efforts extérieurs. La matrice de masse $[\mathbf{M}]$ est diagonale par bloc et en incluant cette fois les termes de masses ajoutées, omis dans (VI.12) et (VI.13) elle s'écrit sous la forme:

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} [\mathbf{M}_U] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{M}_J] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{M}_f] + [\mathbf{M}_{ad}] \end{pmatrix} \quad (\text{VI.15})$$

Les matrices $[\mathbf{M}_U]$ et $[\mathbf{M}_J]$ sont des matrices diagonales d'ordre $3N_{sto}$ qui s'écrivent: $[\mathbf{M}_U] = m_{sto} [\mathbb{1}_{3N_{sto}}]$ et $[\mathbf{M}_J] = \mathbf{diag}(J_1 [\mathbb{1}_{N_{sto}}], J_2 [\mathbb{1}_{N_{sto}}], J_3 [\mathbb{1}_{N_{sto}}])$. La matrice de masse de la fondation $[\mathbf{M}_f]$ est définie en (V.4) et la matrice de masse ajoutée $[\mathbf{M}_{ad}]$ en (V.7).

La matrice de raideur $[\mathbf{K}]$ est symétrique définie positive et sa structure est la suivante:

$$[\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} [\mathbf{K}_b] & [\mathbf{K}_{fb}] \\ [\mathbf{K}_{fb}]^T & [\mathbf{K}_{b0}] + [\mathbf{K}_{s0}] \end{pmatrix} \quad (\text{VI.16})$$

avec

$$[\mathbf{K}_b] = \begin{pmatrix} [\mathbf{K}_{t1}^{sto}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{t2}^{sto}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{t2r3}^{sto}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{t3}^{sto}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{t3r2}^{sto}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{r1}^{sto}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{t3r2}^{sto}]^T & [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{r2}^{sto}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{t2r3}^{sto}]^T & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{r3}^{sto}] \end{pmatrix}$$

On définit les matrices tridiagonales $[\mathbf{T}_1]$, $[\mathbf{T}_2]$ et $[\mathbf{T}_3]$ par:

$$[\mathbf{T}_1] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{T}_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{T}_3] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les blocs constituant $[\mathbf{K}_b]$ s'écrivent à l'aide de ces deux matrices. Les blocs diagonaux s'écrivent:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{t1}^{\text{sto}}] &= k_{t1} [\mathbf{T}_1] & [\mathbf{K}_{r1}^{\text{sto}}] &= k_{r1} [\mathbf{T}_1] \\ [\mathbf{K}_{t2}^{\text{sto}}] &= k_{t2} [\mathbf{T}_1] & [\mathbf{K}_{r2}^{\text{sto}}] &= k'_{r2} [\mathbf{T}_3] + k_{r2}([\mathbf{T}_1] + [\mathbf{T}_3]) \\ [\mathbf{K}_{t3}^{\text{sto}}] &= k_{t3} [\mathbf{T}_1] & [\mathbf{K}_{r3}^{\text{sto}}] &= k'_{r3} [\mathbf{T}_3] + k_{r3}([\mathbf{T}_1] + [\mathbf{T}_3]) \end{aligned}$$

et les blocs extra-diagonaux:

$$[\mathbf{K}_{t2r3}^{\text{sto}}] = k_{t2r3} [\mathbf{T}_2] \quad [\mathbf{K}_{t3r2}^{\text{sto}}] = -k_{t3r2} [\mathbf{T}_2]$$

Finalement le bloc matriciel rectangulaire $[\mathbf{K}_{fb}]$ de dimension $N_{\text{sto}} \times 6$ s'écrit:

$$[\mathbf{K}_{fb}] = \begin{pmatrix} -k_{t1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{t2} & [\mathbf{0}_{(N_{\text{sto}}-1),6}] & 0 & 0 & -k_{t2r3} \\ 0 & 0 & [\mathbf{0}_{(N_{\text{sto}}-1),6}] & 0 & k_{t3r2} & 0 \\ 0 & 0 & [\mathbf{0}_{(N_{\text{sto}}-1),6}] & -k_{r1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\mathbf{0}_{(N_{\text{sto}}-1),6}] & 0 & k'_{r2} & 0 \\ 0 & k_{t2r3} & [\mathbf{0}_{(N_{\text{sto}}-1),6}] & 0 & 0 & k'_{r3} \end{pmatrix}$$

où $[\mathbf{0}_{(N_{\text{sto}}-1),6}]$ désigne la matrice nulle rectangulaire de dimension $(N_{\text{sto}} - 1) \times 6$. Le dernier bloc matriciel intervenant dans l'expression concaténée (VI.16) de la matrice de

raideur $[\mathbf{K}]$ est la matrice $[\mathbf{K}_{b0}] \in \mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})$:

$$[\mathbf{K}_{b0}] = \begin{pmatrix} k_{t1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{t2} & 0 & 0 & 0 & k_{t2r3} \\ 0 & 0 & k_{t3} & 0 & -k_{t2r3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{r1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{t3r2} & 0 & k_{r2} & 0 \\ 0 & k_{t2r3} & 0 & 0 & 0 & k_{r3} \end{pmatrix}$$

La matrice d'amortissement $[\mathbf{D}]$ est constituée de termes dûs à l'amortissement de sol faisant intervenir les termes de la matrice $[\mathbf{D}_s(\boldsymbol{\omega}_0)]$ et de termes d'amortissement structural du bâtiment (omis dans les équations d'équilibre (VI.8) à (VI.13)). La répartition de l'amortissement est mal connue dans la structure et l'amortissement effectif des éléments de poutre équivalents utilisés pour modéliser le bâtiment est difficilement estimable. Le taux d'amortissement des éléments structuraux du bâtiment est néanmoins supposé faible, ce qui justifie l'hypothèse qui consiste à utiliser un amortissement de type *Rayleigh* (voir par exemple [57] chapitre 3), c'est-à-dire un amortissement s'écrivant comme une combinaison linéaire des matrices de masse et de raideur. On choisit ici un amortissement structural du bâtiment proportionnel à la raideur et on donne un coefficient d'amortissement structural β_0 tel que la matrice d'amortissement $[\mathbf{D}]$ soit disposée de la manière suivante:

$$[\mathbf{D}] = \begin{pmatrix} 2\beta_0[\mathbf{K}_b] & 2\beta_0[\mathbf{K}_{fb}] \\ 2\beta_0[\mathbf{K}_{fb}]^T & 2\beta_0[\mathbf{K}_{b0}] + [\mathbf{D}_s(\boldsymbol{\omega}_0)] \end{pmatrix} \quad (\text{VI.17})$$

Si la structure n'interagissait pas avec le sol (bâtiment encasté), la restriction des matrices aux degrés de liberté du bâtiment donnerait la relation de proportionnalité $[\mathbf{D}] = \beta_0[\mathbf{K}]$ entre la matrice de raideur et celle d'amortissement. Cependant, l'amortissement radiatif dû à l'interaction sol-fondation brise cette proportionnalité.

Les forces extérieures appliquées à la structure sont de nature purement inertielles, elles sont introduites par le déplacement du référentiel \mathcal{R}_{sf} et sont donc réparties suivant la distribution de masse dans la structure. Le référentiel \mathcal{R}_{sf} étant supposé avoir un mouvement de translation d'accélération \mathbf{a}_e , les efforts extérieurs ne s'appliquent pas aux degrés de liberté de rotation qui ne seront excités qu'à travers le couplage avec les DDLs de déplacement. On pose la matrice rectangulaire $[\mathbf{\Pi}]$ de dimension $(6N_{sto} + 6 \times 3)$ définie par:

$$[\mathbf{\Pi}] = \begin{pmatrix} [\mathbf{1}_{N_{sto},1}] [\mathbf{0}_{N_{sto},1}] [\mathbf{0}_{N_{sto},1}] \\ [\mathbf{0}_{N_{sto},1}] [\mathbf{1}_{N_{sto},1}] [\mathbf{0}_{N_{sto},1}] \\ [\mathbf{0}_{N_{sto},1}] [\mathbf{0}_{N_{sto},1}] [\mathbf{1}_{N_{sto},1}] \\ \quad [\mathbf{0}_{3N_{sto},3}] \\ \quad [\mathbb{1}_3] \\ \quad [\mathbf{0}_{3,3}] \end{pmatrix} \quad (\text{VI.18})$$

Le vecteur $\mathbf{F}_e(t)$ des forces extérieures peut être décomposé suivant le produit matriciel ci-dessous:

$$\mathbf{F}_e(t) = -[\mathbf{M}] [\mathbf{\Pi}] \mathbf{a}_e(t) \quad (\text{VI.19})$$

VI.2.2 Réduction du système dynamique

Le système d'équations linéaires (VI.14) fait intervenir $6(N_{\text{sto}} + 1)$ inconnues, ce qui en soit n'est pas énorme. On peut néanmoins le réduire en projetant le vecteur des degrés de liberté $\mathbf{X}(t)$ sur la base des N_r premiers modes de la **structure moyenne non amortie**. Ces modes sont calculés à partir de l'équation d'équilibre dynamique sans second membre (équation homogène correspondant aux oscillations libres), *i.e.* $\mathbf{F}_e(t) = \mathbf{0}$ et en prenant $[\mathbf{D}] = [\mathbf{0}]$.

$$[\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{X}}(t) + [\mathbf{K}] \mathbf{X}(t) = \mathbf{0} \quad (\text{VI.20})$$

Les modes de vibration issus de cette équation sont des fonctions harmoniques de la forme $\phi e^{i\omega t}$, ce qui implique la relation suivante:

$$(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]) \phi = \mathbf{0} \quad (\text{VI.21})$$

Les fréquences propres ω_k de la structure sont les $6(N_{\text{sto}} + 1)$ solutions de l'équation polynomiale $\det(-\omega_k^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]) = 0$ et on note les vecteurs propres associés $\phi_k \in \mathbb{R}^{6(N_{\text{sto}} + 1)}$ qui vérifient $\omega_k^2[\mathbf{M}]\phi_k = [\mathbf{K}]\phi_k$. En d'autres termes, les ϕ_k sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres ω_k^2 de la matrice $[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}]$. On note $[\Phi]$ la matrice modale contenant les ϕ_k et telle que les ω_k^2 se succèdent par ordre croissant ($\omega_k^2 < \omega_{k+1}^2$).

Le vecteur $\mathbf{X}(t)$ des degrés de liberté réels peut être exprimé sur la base modale des ϕ_k à l'aide du vecteur des coordonnées généralisées $\mathbf{Q}(t)$ tel que

$$\mathbf{X}(t) = [\Phi] \mathbf{Q}(t) \quad \text{et} \quad \mathbf{Q}(t) = [\Phi]^T \mathbf{X}(t) \quad (\text{VI.22})$$

La réduction de la description du mouvement aux $1 \leq N_r \leq 6(N_{\text{sto}} + 1)$ fait intervenir la matrice modale réduite $[\Phi^{(r)}]$ qui ne contient que les vecteurs modaux des N_r premières fréquences propres, *i.e.* $[\Phi^{(r)}] = [\phi_1 \cdots \phi_{N_r}]$. Cette matrice rectangulaire de dimension $(6(N_{\text{sto}} + 1) \times N_r)$ vérifie également les relations (VI.22) avec le vecteur de coordonnées généralisées réduit $\mathbf{Q}^{(r)}(t) \in \mathbb{R}^{N_r}$. L'équation (VI.14) est alors réduite en étant multipliée à gauche par $[\Phi^{(r)}]^T$ et introduisant le vecteur de coordonnées généralisées réduit $\mathbf{Q}^{(r)}(t)$ à l'aide de la relation (VI.22).

$$\begin{aligned} [\Phi^{(r)}]^T [\mathbf{M}] [\Phi^{(r)}] \ddot{\mathbf{Q}}^{(r)}(t) + [\Phi^{(r)}]^T [\mathbf{D}] [\Phi^{(r)}] \dot{\mathbf{Q}}^{(r)}(t) + [\Phi^{(r)}]^T [\mathbf{K}] [\Phi^{(r)}] \mathbf{Q}^{(r)}(t) \\ = [\Phi^{(r)}]^T \mathbf{F}_e(t) \end{aligned}$$

Cette équation introduit les matrices généralisées réduites $[\mathcal{M}]$, $[\mathcal{D}]$, $[\mathcal{K}]$ et le vecteur des efforts extérieurs généralisés réduit $\mathcal{F}(t)$ tels que le problème dynamique en temps soit:

$$[\mathcal{M}]\ddot{\mathbf{Q}}^{(r)}(t) + [\mathcal{D}]\dot{\mathbf{Q}}^{(r)}(t) + [\mathcal{K}]\mathbf{Q}^{(r)}(t) = \mathcal{F}(t) \quad (\text{VI.23})$$

avec les conditions initiales héritées de (VI.14):

$$\mathbf{Q}(0) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right|_{t=0} = \mathbf{0}$$

Les matrices carrées $[\mathcal{M}]$, $[\mathcal{D}]$ et $[\mathcal{K}]$ sont symétriques définies positives et d'ordre N_r . La matrice $[\mathcal{M}]$ est une matrice diagonale dont les termes sont les masses modales. Les modes étant définis à leur norme près, on les normalise de manière à ce que les masses modales soient égales à 1, faisant de la matrice de masse modale la matrice identité. Suite à cette normalisation, la relation (VI.21) implique que la matrice de raideur modale soit la matrice diagonale dont les termes sont les carrés des pulsations propres (*circular eigenfrequencies*).

$$[\mathcal{M}] = [\mathbb{1}_{N_r}] \quad [\mathcal{K}] = \mathbf{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_{N_r}^2) \quad (\text{VI.24})$$

Lorsque l'amortissement est proportionnel, c'est-à-dire quand la matrice d'amortissement $[\mathbf{D}]$ s'écrit comme une combinaison linéaire des matrices de masse et raideur, la matrice d'amortissement est diagonalisée par les vecteurs de la base modale calculée à partir de l'équation d'équilibre dynamique homogène non amortie (VI.20). Le système d'équations linéaires est alors découplé, ce qui réduit considérablement le nombre d'opérations nécessaires à la résolution du système. La matrice d'amortissement $[\mathbf{D}]$ ne possède cependant pas cette propriété car la matrice $[\mathbf{D}_s(\omega_0)]$ n'est pas une combinaison linéaire des matrices $[\mathbf{M}_{sf}] = [\mathbf{M}_f] + [\mathbf{M}_{ad}]$ et $[\mathbf{K}_{s0}]$ ce qui implique que $[\mathbf{D}]$ **ne vérifie pas** la relation de proportionnalité de *Basile* (Caughey [29]):

$$([\mathbf{M}_{sf}]^{-1}[\mathbf{D}])([\mathbf{M}_{sf}]^{-1}[\mathbf{K}]) = ([\mathbf{M}_{sf}]^{-1}[\mathbf{K}])([\mathbf{M}_{sf}]^{-1}[\mathbf{D}])$$

En outre, la modélisation probabiliste de la matrice $[\mathbf{D}_s(\omega_0)]$ par la matrice aléatoire $[\tilde{\mathbf{D}}_s]$ est décorrélée des matrices aléatoires $[\tilde{\mathbf{M}}_f] + [\tilde{\mathbf{M}}_{ad}]$ et $[\tilde{\mathbf{K}}_s]$, par conséquent l'amortissement est presque sûrement non proportionnel pour une réalisation donnée de l'impédance d'interaction sol-fondation. Des méthodes ont été développées pour diagonaliser des systèmes avec amortissement non proportionnel (voir [46]), cette diagonalisation serait cependant à recommencer pour chaque réalisation de l'impédance de sol ce qui anéantirait le gain de temps de calcul obtenu par le découplage du système d'équations.

Du fait de la localisation des termes d'amortissement non proportionnel au niveau des degrés de liberté de fondation, la proportionnalité des termes liés aux ddls structuraux peut tout de même être mise à profit. On partitionne la matrice modale réduite $[\Phi^{(r)}]$ suivant les ddls associés au bâtiment et ceux associés à la fondation:

$$[\Phi^{(r)}] = \begin{pmatrix} [\Phi_b^{(r)}] \\ [\Phi_f^{(r)}] \end{pmatrix}$$

D'après la relation de diagonalisation (VI.24) sur $[\mathbf{K}]$ et son partitionnement (VI.16), on aboutit à la relation

$$\mathbf{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_{N_r}^2) =$$

$$[\Phi_b^{(r)}]^T [\mathbf{K}_b] [\Phi_b^{(r)}] + [\Phi_f^{(r)}]^T [\mathbf{K}_{bf}]^T [\Phi_b^{(r)}] + [\Phi_b^{(r)}]^T [\mathbf{K}_{bf}] [\Phi_f^{(r)}] + [\Phi_f^{(r)}]^T [\mathbf{K}_{s0}] [\Phi_f^{(r)}]$$

Connaissant le partitionnement (VI.17) de la matrice d'amortissement, on en déduit la relation suivante

$$[\mathcal{D}] = [\Phi^{(r)}]^T [\mathbf{D}] [\Phi^{(r)}] = 2\beta_0 [\mathcal{K}] + [\Phi_f^{(r)}]^T ([\mathbf{D}_s] - 2\beta_0[\mathbf{K}_{s0}]) [\Phi_f^{(r)}] \quad (\text{VI.25})$$

Le vecteur des forces nodales s'exprime en utilisant l'expression (VI.19) de la matrice de projection $[\mathbf{\Pi}]$ (VI.18):

$$\mathcal{F}(t) = -[\Phi^{(r)}]^T [\mathbf{M}] [\mathbf{\Pi}] \mathbf{a}_e(t) \quad (\text{VI.26})$$

VI.2.3 Equation dynamique stochastique

La structure du bâtiment étant supposée connue, sa modélisation est déterministe. L'unique source d'aléas provient de la modélisation de l'impédance d'interaction sol-fondation. A cette fin, on substitue respectivement aux matrices moyennes $[\mathbf{M}_f]$, $[\mathbf{M}_{ad}]$, $[\mathbf{D}_s(\omega_0)]$ et $[\mathbf{K}_{s0}]$ les matrices aléatoires $[\tilde{\mathbf{M}}_f]$, $[\tilde{\mathbf{M}}_{ad}]$, $[\tilde{\mathbf{D}}_s]$ et $[\tilde{\mathbf{K}}_s]$ dans les expressions (VI.15), (VI.16), (VI.17) et (VI.19) des matrices $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{D}]$, $[\mathbf{K}]$ et du vecteur $\mathbf{F}_e(t)$. Les matrices et vecteurs aléatoires associés sont notés $[\tilde{\mathbf{M}}]$, $[\tilde{\mathbf{D}}]$, $[\tilde{\mathbf{K}}]$ et $\tilde{\mathbf{F}}_e(t)$. L'équation temporelle stochastique associée s'écrit:

$$[\tilde{\mathbf{M}}] \ddot{\tilde{\mathbf{X}}}(t) + [\tilde{\mathbf{D}}] \dot{\tilde{\mathbf{X}}}(t) + [\tilde{\mathbf{K}}] \tilde{\mathbf{X}}(t) = \tilde{\mathbf{F}}_e(t) \quad (\text{VI.27})$$

Pour un jeu de conditions initiales donné, la solution de cette équation est un processus stochastique $(\theta, t) \mapsto \tilde{\mathbf{X}}(\theta, t)$ indexé par le temps, défini sur $\mathcal{A} \times \mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{6(N_{sto}+1)}$.

Pour des réalisations $[\tilde{\mathbf{M}}_f(\theta)]$, $[\tilde{\mathbf{M}}_{ad}(\theta)]$, $[\tilde{\mathbf{D}}_s(\theta)]$, $[\tilde{\mathbf{K}}_s(\theta)]$ avec $\theta \in \mathcal{A}$, les matrices $[\tilde{\mathbf{M}}(\theta)]$ et $[\tilde{\mathbf{K}}(\theta)]$ ne sont plus diagonales dans l'espace modal des ϕ_k . On note $[\Delta\tilde{\mathbf{M}}]$ et $[\Delta\tilde{\mathbf{K}}]$ les matrices aléatoires donnant la différence

$$[\Delta\tilde{\mathbf{M}}] = [\tilde{\mathbf{M}}] - [\mathbf{M}] \quad [\Delta\tilde{\mathbf{K}}] = [\tilde{\mathbf{K}}] - [\mathbf{K}]$$

En suivant le raisonnement qui a permis d'exprimer $[\mathcal{D}]$ à l'aide de la relation (VI.25), on exprime les matrices réduites aléatoires $[\tilde{\mathcal{M}}]$ et $[\tilde{\mathcal{K}}]$:

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathcal{M}}] &= [\Phi^{(r)}]^T [\tilde{\mathbf{M}}] [\Phi^{(r)}] = [\mathcal{M}] + [\Phi^{(r)}]^T [\Delta\tilde{\mathbf{M}}] [\Phi^{(r)}] \\ &= [\mathcal{M}] + [\Phi_f^{(r)}]^T \left([\tilde{\mathbf{M}}_f] + [\tilde{\mathbf{M}}_{ad}] - [\mathbf{M}_f] - [\mathbf{M}_{ad}] \right) [\Phi_f^{(r)}] \\ [\tilde{\mathcal{K}}] &= [\Phi^{(r)}]^T [\tilde{\mathbf{K}}] [\Phi^{(r)}] = [\mathcal{K}] + [\Phi^{(r)}]^T [\Delta\tilde{\mathbf{K}}] [\Phi^{(r)}] \\ &= [\mathcal{K}] + [\Phi_f^{(r)}]^T \left([\tilde{\mathbf{K}}_s] - [\mathbf{K}_{s0}] \right) [\Phi_f^{(r)}] \end{aligned}$$

En ce qui concerne la matrice d'amortissement réduite aléatoire $[\tilde{\mathcal{D}}]$, elle s'écrit de la même manière qu'en (VI.25):

$$[\tilde{\mathcal{D}}] = [\Phi^{(r)}]^T [\tilde{\mathbf{D}}] [\Phi^{(r)}] = 2\beta_0 [\mathcal{K}] + [\Phi_f^{(r)}]^T \left([\tilde{\mathbf{D}}_s] - 2\beta_0[\mathbf{K}_{s0}] \right) [\Phi_f^{(r)}]$$

De manière similaire aux décompositions des matrices $[\tilde{\mathcal{M}}]$, $[\tilde{\mathcal{D}}]$ et $[\tilde{\mathcal{K}}]$, on exprime le vecteur aléatoire $\tilde{\mathcal{F}}(t)$ en fonction de $\mathcal{F}(t)$ le vecteur des forces modales calculé pour les modes qui, on le rappelle, sont obtenus pour le modèle d'interaction sol-fondation moyen (déterministe) sans amortissement:

$$\tilde{\mathcal{F}}(t) = \mathcal{F}(t) - [\Phi_f^{(r)}]^T ([\tilde{\mathbf{M}}_f] + [\tilde{\mathbf{M}}_{ad}] - [\mathbf{M}_f] - [\mathbf{M}_{ad}]) [\mathbf{\Pi}_f] \mathbf{a}_e(t)$$

où la matrice $[\mathbf{\Pi}_f]^T = [[\mathbb{1}_3] [\mathbf{0}_{3,3}]]$ est la restriction de la matrice de projection $[\mathbf{\Pi}]$ définie en (VI.18) aux degrés de liberté de la fondation.

L'équation stochastique réduite met donc en jeu les trois matrices aléatoires $[\tilde{\mathcal{M}}]$, $[\tilde{\mathcal{D}}]$ et $[\tilde{\mathcal{K}}]$ et le vecteur aléatoire $\tilde{\mathcal{F}}(t)$:

$$[\tilde{\mathcal{M}}] \ddot{\tilde{\mathbf{Q}}^{(r)}}(t) + [\tilde{\mathcal{D}}] \dot{\tilde{\mathbf{Q}}^{(r)}}(t) + [\tilde{\mathcal{K}}] \tilde{\mathbf{Q}}^{(r)}(t) = \tilde{\mathcal{F}}(t) \quad (\text{VI.28})$$

avec les conditions initiales:

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{(r)}(0) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\tilde{\mathbf{Q}}^{(r)}}{dt} \right|_{t=0} = \mathbf{0}$$

Le vecteur des coordonnées généralisées réduit $\tilde{\mathbf{Q}}^{(r)}(t)$ est un processus stochastique indexé sur le temps à valeurs dans \mathbb{R}^{N_r} et qui est lié au processus $\tilde{\mathbf{X}}(t)$ par les relations:

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = [\Phi^{(r)}] \tilde{\mathbf{Q}}^{(r)}(t) \quad \tilde{\mathbf{Q}}^{(r)}(t) = [\Phi^{(r)}]^T \tilde{\mathbf{X}}(t)$$

VI.3 Modèle avec répartition de masse homogène

Sur le plan inertiel, l'approche opposée au modèle brochette décrit au cours de la section VI.2 est la modélisation du bâtiment à l'aide d'une poutre avec répartition de masse homogène (CMM = *Continuous Mass Model*). L'analyse modale de ce milieu continu nécessite une approche ondulatoire. Les modes de vibration de la poutre sont obtenus par la conjonction des conditions aux limites avec la forme générale du champ de déplacement des ondes dans le milieu. Ce problème a fait l'objet de travaux déjà anciens tels que ceux de Huang [70]. Ce papier considère les vibrations transverses d'une poutre de *Timoshenko* avec différentes conditions aux limites à ses extrémités (combinaison de bords libres et de liaisons inélastiques) en prenant en compte les effets d'inertie de rotation. L'auteur détermine tout d'abord la forme générale du champ de déplacement des ondes dans la poutre, il écrit ensuite les équations fréquentielles découlant des conditions imposées aux extrémités de la poutre. Les fréquences propres de la poutre sont les solutions de ces

équations. En les intégrant dans la forme générale des champs de déplacement et de rotation des ondes, on obtient les déformées des modes de vibration correspondant. C'est cette démarche que l'on adoptera pour l'analyse modale du modèle mécanique de bâtiment présenté dans cette section. Geist et Mc Laughlin établissent dans [56] des formules asymptotiques pour les fréquences propres d'une poutre de *Timoshenko* en vibrations libres. Ces formules permettent de calibrer les fréquences modales de la poutre en fonction de ses différents paramètres physiques. Il n'existe néanmoins aucune formule algébrique exacte exprimant les fréquences propres en fonction des paramètres physiques de la poutre. Celles-ci sont en pratique déterminées numériquement. L'analyse vibratoire des poutres de *Timoshenko* fait toujours l'objet de travaux de recherche, on peut par exemple citer ceux de Vu *et al.* [140] dans le domaine des mathématiques appliquées pour leur étude spectrale des vibrations de la poutre de *Timoshenko*.

La décomposition modale de la cinématique de poutre présente deux avantages pratiques. Elle permet d'une part d'utiliser une description continue réduite. La décomposition sur un nombre fini de mode est une forme d'application de la méthode de *Galerkin* qui permet une mise en œuvre numérique.

La fondation qui dans le modèle brochette était une masse parmi les inerties concentrées est quant à elle toujours représentée par un corps rigide dont l'interaction avec le sol est introduite à l'aide de l'impédance décrite au *chapitre V*. Le problème des vibrations transverses d'une poutre de *Timoshenko* avec une inertie concentrée à l'une de ses extrémités a par ailleurs été étudié par Grant [62].

La modélisation mécanique réduite d'un bâtiment multi étagé peut, comme on l'a montré dans la première partie de ce document, être obtenue par homogénéisation. Les poutres considérées ici sont donc définies à partir des propriétés effectives du modèle de poutre macroscopiquement équivalent au bâtiment.

La poutre continue est caractérisée par sa longueur qui est donnée par la hauteur H du bâtiment, par ses paramètres inertiels et sa matrice de raideur $[\mathbf{K}_b]$. Les variables cinématiques sont le champ de déplacement $\mathbf{U}(x_1, t)$ de fibre moyenne et le champ de rotation moyen $\boldsymbol{\theta}(x_1, t)$, soit 6 composantes qui sont réunies dans un vecteur cinématique $\mathbf{X}(x_1, t)$.

Les 4 paramètres inertiels sont la masse par unité de longueur ρ_l et $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ les moments d'inertie par unité de longueur. Pour un milieu à périodicité unidimensionnelle dont le domaine \mathcal{C} est une cellule périodique, les paramètres d'inertie sont définis à partir de la densité $\rho(\mathbf{x})$ dans le milieu:

$$\begin{aligned} \rho_l &= \frac{1}{h} \int_{\mathcal{C}} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \equiv kg.m^{-1} & , & & \varrho_1 &= \frac{1}{h} \int_{\mathcal{C}} \rho(\mathbf{x}) (x_2^2 + x_3^2) d\mathbf{x} \equiv kg.m \\ \varrho_2 &= \frac{1}{h} \int_{\mathcal{C}} \rho(\mathbf{x}) x_3^2 d\mathbf{x} \equiv kg.m & , & & \varrho_3 &= \frac{1}{h} \int_{\mathcal{C}} \rho(\mathbf{x}) x_2^2 d\mathbf{x} \equiv kg.m \end{aligned}$$

La matrice de raideur effective de poutre $[\mathbf{K}_b]$ d'un milieu à périodicité unidimensionnelle est définie en (II.67). Le milieu périodique considéré est à symétrie orthotrope, sa matrice de raideur effective est par conséquent diagonale.

VI.3.1 Équation des ondes dans une poutre de Timoshenko

L'équation des ondes dans une poutre est définie comme étant l'équation dynamique homogène des poutres sans amortissement. On exprime cette équation aux dérivées partielles à l'aide de la matrice d'inertie par unité de longueur $[\mathbf{M}_l]$ ainsi que l'opérateur différentiel linéaire de raideur $[\mathbf{K}_{\partial x_1}]$ pour le champ cinématique $\mathbf{X}(x_1, t)$ inconnu:

$$[\mathbf{M}_l] \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2} + [\mathbf{K}_{\partial x_1}] \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (\text{VI.29})$$

L'expression du théorème de l'énergie cinétique énoncé en (VI.1) avec le travail des forces extérieures nul ($\mathcal{L}_e(\Omega, t) = 0$) s'écrit:

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt}(\Omega, t) + \mathcal{L}_i(\Omega, t) = \frac{\partial \mathbf{X}^T}{\partial t} [\mathbf{M}_l] \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathbf{X}^T}{\partial t} [\mathbf{K}_{\partial x_1}] \mathbf{X} = 0$$

La matrice de masse $[\mathbf{M}_l]$ et l'opérateur de raideur $[\mathbf{K}_{\partial x_1}]$ sont définis par:

$$[\mathbf{M}_l] = \mathbf{diag}(\rho_l, \rho_l, \rho_l, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3) \in \mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})$$

$$[\mathbf{K}_{\partial x_1}] = \begin{pmatrix} -K_{11}\partial_{x_1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_{22}\partial_{x_1}^2 & 0 & 0 & 0 & K_{22}\partial_{x_1} \\ 0 & 0 & -K_{33}\partial_{x_1}^2 & 0 & -K_{33}\partial_{x_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_{44}\partial_{x_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33}\partial_{x_1} & 0 & K_{33} - K_{55}\partial_{x_1}^2 & 0 \\ 0 & -K_{22}\partial_{x_1} & 0 & 0 & 0 & K_{22} - K_{66}\partial_{x_1}^2 \end{pmatrix}$$

Les solutions de l'équation des ondes (VI.29) sont de la forme:

$$X_n = \hat{X}_n \exp(rx_1 + i\omega t) \quad n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad (\text{VI.30})$$

avec ω la fréquence radiale (pulsation) de l'onde et r_i des nombres d'onde, si bien que l'équation peut être réécrite de la manière suivante:

$$\left(-\omega^2 [\mathbf{M}_l] + [\hat{\mathbf{K}}(r, \omega)] \right) \hat{\mathbf{X}} = [\hat{\mathbf{H}}(r, \omega)] \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{0} \quad (\text{VI.31})$$

Les solutions non triviales de cette équation correspondent aux ondes pouvant se propager dans la poutre et impliquent la nullité du déterminant de la matrice $[\hat{\mathbf{H}}(r, \omega)]$:

$$\begin{aligned} \det([\hat{\mathbf{H}}(r, \omega)]) = & \begin{vmatrix} K_{22}r^2 + \rho_l\omega^2 & -K_{22}r \\ K_{22}r & -K_{22} + K_{66}r^2 + \varrho_3\omega^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K_{33}r^2 + \rho_l\omega^2 & K_{33}r \\ -K_{33}r & -K_{33} + K_{55}r^2 + \varrho_2\omega^2 \end{vmatrix} \\ & (K_{11}r^2 + \rho_l\omega^2) (K_{44}r^2 + \varrho_1\omega^2) = D_{26}(r, \omega) D_{35}(r, \omega) D_1(r, \omega) D_4(r, \omega) = 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.32})$$

Les déterminants D_{26} et D_{35} caractérisent les ondes de flexion/cisaillement respectivement dans les directions \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 . Le déterminant D_1 est associé aux ondes d'élongation et D_4 aux ondes de torsion. L'équation (VI.32) est la relation entre les nombres d'onde r_i et la pulsation ω qui caractérise les ondes dans la poutre.

Ondes de flexion et cisaillement couplées

Les équations $D_{26}(r, \omega) = 0$ et $D_{35}(r, \omega) = 0$ sont des équations polynomiales bicarrées de degré 4 :

$$r^4 + \alpha_1(\omega)r^2 + \alpha_0(\omega) = 0 \quad , \quad r^4 + \beta_1(\omega)r^2 + \beta_0(\omega) = 0 \quad (\text{VI.33})$$

dont les coefficients sont :

$$\alpha_1(\omega) = \left(\frac{\rho_l}{K_{22}} + \frac{\varrho_3}{K_{66}} \right) \omega^2 \quad , \quad \beta_1(\omega) = \left(\frac{\rho_l}{K_{33}} + \frac{\varrho_2}{K_{66}} \right) \omega^2 \quad (\text{VI.34})$$

$$\alpha_0(\omega) = -\frac{\rho_l}{K_{66}} \omega^2 + \frac{\varrho_3 \rho_l}{K_{22} K_{66}} \omega^4 \quad , \quad \beta_0(\omega) = -\frac{\rho_l}{K_{55}} \omega^2 + \frac{\varrho_2 \rho_l}{K_{33} K_{55}} \omega^4 \quad (\text{VI.35})$$

On pose le changement de variable $R = r^2$. Les équations bicarrées en r s'écrivent comme des équations du second ordre en R :

$$R^2 + \alpha_1(\omega)R + \alpha_0(\omega) = 0 \quad , \quad R^2 + \beta_1(\omega)R + \beta_0(\omega) = 0 \quad (\text{VI.36})$$

dont les discriminants sont :

$$\Delta_\alpha(\omega) = \left(\frac{\rho_l}{K_{22}} - \frac{\varrho_3}{K_{66}} \right)^2 \omega^4 + 4 \frac{\rho_l}{K_{66}} \omega^2 \quad , \quad \Delta_\beta(\omega) = \left(\frac{\rho_l}{K_{33}} - \frac{\varrho_2}{K_{55}} \right)^2 \omega^4 + 4 \frac{\rho_l}{K_{55}} \omega^2$$

Les fonctions $\omega \mapsto \Delta_\alpha(\omega)$ et $\omega \mapsto \Delta_\beta(\omega)$ sont strictement positives pour toute pulsation $\omega \in \mathbb{R}^+$. Par conséquent, les deux ensembles de solutions des équations (VI.36) sont :

$$R \in \left\{ \frac{1}{2} \left(-\alpha_1(\omega) \pm \sqrt{\alpha_1^2(\omega) - 4\alpha_0} \right) \right\} \quad , \quad R \in \left\{ \frac{1}{2} \left(-\beta_1(\omega) \pm \sqrt{\beta_1^2(\omega) - 4\beta_0} \right) \right\}$$

Les fonctions $\omega \mapsto \alpha_0(\omega)$ et $\omega \mapsto \beta_0(\omega)$ sont négatives, sur l'intervalle $\omega \in [0, \omega_{\text{thr}}[$ et positives pour $\omega > \omega_{\text{thr}}$ où ω_{thr} est une fréquence seuil respectivement donnée par :

$$\omega_{\text{thr}} = \sqrt{\frac{K_{22}}{\varrho_3}} \quad \text{ou} \quad \omega_{\text{thr}} = \sqrt{\frac{K_{33}}{\varrho_2}}$$

Lorsque $\omega < \omega_{\text{thr}}$, on a les relations $\Delta_\alpha(\omega) > \alpha_1(\omega)$ et $\Delta_\beta(\omega) > \beta_1(\omega)$ les ensembles solutions de (VI.33) sont pour $n \in \mathbb{N} \leq 4$:

$$r_{2n} \in \left\{ \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(-\alpha_1(\omega) + \sqrt{\alpha_1^2(\omega) - 4\alpha_0(\omega)} \right)} ; \pm i \sqrt{\frac{1}{2} \left(\alpha_1(\omega) + \sqrt{\alpha_1^2(\omega) - 4\alpha_0(\omega)} \right)} \right\}$$

ou

$$r_{3n} \in \left\{ \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(-\beta_1(\omega) + \sqrt{\beta_1^2(\omega) - 4\beta_0(\omega)} \right)} ; \pm i \sqrt{\frac{1}{2} \left(\beta_1(\omega) + \sqrt{\beta_1^2(\omega) - 4\beta_0(\omega)} \right)} \right\}$$

Les nombres d'onde réels correspondent à des ondes évanescentes qui s'atténuent exponentiellement. Lorsque $\omega > \omega_{\text{thr}}$, on a les relations $\Delta_\alpha(\omega) < \alpha_1(\omega)$ et $\Delta_\beta(\omega) < \beta_1(\omega)$; les ensembles solutions de (VI.33) sont alors :

$$r_{2n} \in \left\{ \pm i \sqrt{\frac{1}{2} \left(\alpha_1(\omega) - \sqrt{\alpha_1^2(\omega) - 4\alpha_0(\omega)} \right)} ; \pm i \sqrt{\frac{1}{2} \left(\alpha_1(\omega) + \sqrt{\alpha_1^2(\omega) - 4\alpha_0(\omega)} \right)} \right\}$$

ou

$$r_{3n} \in \left\{ \pm i \sqrt{\frac{1}{2} \left(\beta_1(\omega) - \sqrt{\beta_1^2(\omega) - 4\beta_0(\omega)} \right)} ; \pm i \sqrt{\frac{1}{2} \left(\beta_1(\omega) + \sqrt{\beta_1^2(\omega) - 4\beta_0(\omega)} \right)} \right\}$$

Les champs de déflexion et de rotation s'écrivent en fonction des 4 nombres d'onde solutions:

$$U_2(x_1, t) = (\phi_{21} e^{r_{21}x_1} + \phi_{22} e^{r_{22}x_1} + \phi_{23} e^{r_{23}x_1} + \phi_{24} e^{r_{24}x_1}) e^{i\omega t} \quad (\text{VI.37}).1$$

$$\theta_3(x_1, t) = (\phi_{61} e^{r_{21}x_1} + \phi_{62} e^{r_{22}x_1} + \phi_{63} e^{r_{23}x_1} + \phi_{64} e^{r_{24}x_1}) e^{i\omega t} \quad (\text{VI.37}).2$$

et

$$U_3(x_1, t) = (\phi_{31} e^{r_{31}x_1} + \phi_{32} e^{r_{32}x_1} + \phi_{33} e^{r_{33}x_1} + \phi_{34} e^{r_{34}x_1}) e^{i\omega t} \quad (\text{VI.38}).1$$

$$\theta_2(x_1, t) = (\phi_{51} e^{r_{31}x_1} + \phi_{52} e^{r_{32}x_1} + \phi_{53} e^{r_{33}x_1} + \phi_{54} e^{r_{34}x_1}) e^{i\omega t} \quad (\text{VI.38}).2$$

Au delà de la fréquence seuil ω_{thr} , les ondes évanescentes cessent de se propager. La vitesse de phase $v_\varphi = r(\omega)/\omega$ dépend de la fréquence; toutes ces ondes sont donc dispersives.

Ondes de traction-compression longitudinales

L'ensemble des solutions de l'équation $D_1(r, \omega) = K_{11}r^2 + \rho_l\omega^2 = 0$ est pour $n \in \mathbb{N} \leq 2$:

$$r_{1n} \in \left\{ \pm i \omega \sqrt{\frac{\rho_l}{K_{11}}} \right\}$$

Le champ de déplacement des ondes longitudinales s'écrit en fonction des deux nombres d'onde:

$$U_1(x_1, t) = (\phi_{11} e^{r_{11}x_1} + \phi_{12} e^{r_{12}x_1}) e^{i\omega t} \quad (\text{VI.39})$$

Le nombre d'onde est un imaginaire pur, il n'y a par conséquent pas de propagation d'ondes évanescentes de traction-compression. La vitesse de phase $v_\varphi = r(\omega)/\omega$ est constante, la propagation des ondes est donc non dispersive.

Ondes de torsion

Les ondes de torsion se propagent de façon similaire aux ondes de traction compression. L'ensemble de solutions de l'équation $D_4(r, \omega) = K_{44}r^2 + \varrho_1\omega^2 = 0$ est pour $n \in \mathbb{N} \leq 2$:

$$r_{4n} \in \left\{ \pm i \omega \sqrt{\frac{\varrho_1}{K_{44}}} \right\}$$

Le champ de rotation des ondes de torsion s'écrit en fonction des deux nombres d'onde:

$$\theta_1(x_1, t) = (\phi_{41} e^{r_{41}x_1} + \phi_{42} e^{r_{42}x_1}) e^{i\omega t} \quad (\text{VI.40})$$

Comme pour les ondes de traction compression, aucune onde évanescence de torsion ne se propage. De même, la propagation des ondes de torsion est non dispersive.

VI.3.2 Modes de vibration de poutre

Les modes de vibrations de poutre sont déterminés pour une extrémité supérieure du bâtiment libre d'efforts et deux type de conditions au niveau du sol. On considère d'une part un encastrement rigide du pied de bâtiment et d'autre part l'interaction sol-fondation présentée au *chapitre V*. Ces conditions de bord qui portent sur les composantes du vecteur \mathbf{X} en $x_1 = 0$ et $x_1 = H$ sont de type cinématique imposée ou force et moment interne imposé. Pour les 16 coefficients ϕ_{2n} , ϕ_{6n} , ϕ_{3n} et ϕ_{5n} des ondes de flexion, il y a 8 relations données par les conditions de bord. Le fait est, que pour les ondes de flexion, il y a une dépendance spatiale entre les champs de rotation et leur champ de déflexion associé. Pour une fréquence ω donnée, les composantes 2,6,3,5 de l'équation des ondes (VI.29) s'écrivent:

$$\begin{cases} \omega^2 \rho_l U_2 + K_{22} \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \theta_3}{\partial x_1} \right) = 0 & \omega^2 \rho_l U_3 + K_{33} \left(\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \omega^2 \rho_3 \theta_3 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \theta_3 \right) + K_{66} \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial x_1^2} = 0 & \omega^2 \rho_2 \theta_2 - \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \theta_2 \right) + K_{55} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x_1^2} = 0 \end{cases}$$

On en déduit les deux relations de couplage spatial:

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \frac{1}{K_{22} - \rho_3 \omega^2} \left(K_{66} \frac{\partial^3 U_2}{\partial x_1^3} + \left(K_{22} + K_{66} \frac{\rho_l}{K_{22}} \omega^2 \right) \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) \\ \theta_2 &= -\frac{1}{K_{33} - \rho_2 \omega^2} \left(K_{55} \frac{\partial^3 U_3}{\partial x_1^3} + \left(K_{33} + K_{55} \frac{\rho_l}{K_{33}} \omega^2 \right) \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \quad (\text{VI.41})$$

Étant données ces relations, le nombre d'inconnues est ramené aux 8 coefficients ϕ_{2n} et ϕ_{3n} . On remarquera qu'à la fréquence seuil ω_{thr} , les relations de couplage s'écrivent:

$$\begin{aligned} U_2 &= -\frac{1}{\rho_l \omega_{\text{thr}}^2} \left(K_{66} \frac{\partial^3 \theta_3}{\partial x_1^3} + K_{22} \frac{\partial \theta_3}{\partial x_1} \right) \\ U_3 &= -\frac{1}{\rho_l \omega_{\text{thr}}^2} \left(K_{55} \frac{\partial^3 \theta_2}{\partial x_1^3} + K_{33} \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \quad (\text{VI.42})$$

Condition de bord libre

La condition de bord libre à l'extrémité $x_1 = H$ de la poutre se traduit par la nullité des forces et des moments internes:

$$(1) V_1 = 0 \quad (2) V_2 = 0 \quad (3) V_3 = 0 \quad (4) M_1 = 0 \quad (5) M_2 = 0 \quad (6) M_3 = 0$$

Ces relations font intervenir les champs U_1 , U_2 , U_3 et θ_1 (et leurs dérivées) en $x_1 = H$ et

sont obtenues à l'aide des relations de couplage (VI.41) pour $\omega \neq \omega_{\text{thr}}$:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = 0 \\
(2) \quad & \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \theta_3 = 0 \implies K_{66} \frac{\partial^3 U_2}{\partial x_1^3} + \left(\varrho_3 \omega^2 + \frac{K_{66}}{K_{22}} \rho_l \omega^2 \right) \frac{\partial U_2}{\partial x_1} = 0 \\
(3) \quad & \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \theta_3 = 0 \implies K_{55} \frac{\partial^3 U_3}{\partial x_1^3} + \left(\varrho_5 \omega^2 + \frac{K_{55}}{K_{33}} \rho_l \omega^2 \right) \frac{\partial U_3}{\partial x_1} = 0 \\
(4) \quad & \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} = 0 \\
(5) \quad & \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} = 0 \implies K_{55} \frac{\partial^4 U_3}{\partial x_1^4} + \left(K_{33} + \frac{K_{55}}{K_{33}} \rho_l \omega^2 \right) \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2} = 0 \\
(6) \quad & \frac{\partial \theta_3}{\partial x_1} = 0 \implies K_{66} \frac{\partial^4 U_2}{\partial x_1^4} + \left(K_{22} + \frac{K_{66}}{K_{22}} \rho_l \omega^2 \right) \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} = 0
\end{aligned} \tag{VI.43}$$

Condition d'encastrement

On l'a précisé plus haut, deux types de conditions aux limites sont considérées pour le pied du bâtiment situé en $x_1 = 0$. La condition d'encastrement est une relation cinématique se traduisant par la nullité du déplacement et de la rotation en $x_1 = 0$. En appliquant les relations de couplage (VI.41) pour $\omega \neq \omega_{\text{thr}}$, cette condition s'écrit:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & U_1 = 0 \quad , \quad (2) \quad U_2 = 0 \quad , \quad (3) \quad U_3 = 0 \quad , \quad (4) \quad \theta_1 = 0 \\
(5) \quad & \theta_2 = 0 \implies K_{66} \frac{\partial^3 U_2}{\partial x_1^3} + \left(K_{22} + K_{66} \frac{\rho_l}{K_{22}} \omega^2 \right) \frac{\partial U_2}{\partial x_1} = 0 \\
(6) \quad & \theta_3 = 0 \implies K_{55} \frac{\partial^3 U_3}{\partial x_1^3} + \left(K_{33} + K_{55} \frac{\rho_l}{K_{33}} \omega^2 \right) \frac{\partial U_3}{\partial x_1} = 0
\end{aligned} \tag{VI.44}$$

Condition d'interaction sol-fondation

De manière similaire à la représentation du bâtiment par un modèle brochette, la condition d'interaction sol fondation est donnée par un bilan des forces et des moments appliqués à la fondation. Ces efforts sont d'une part composés des forces et moments appliqués par le sol qui sont introduits par l'impédance de fondation et d'autre part des sollicitations provenant du bâtiment qui sont données par les forces et moments internes en $x_1 = 0$. L'équation dynamique (V.9) correspondant à ce bilan s'écrit dans le cas présent:

$$[\mathbf{M}_{\text{sf}}] \ddot{\mathbf{X}}(x_1 = 0, t) + [\mathbf{D}_s(\omega_0)] \dot{\mathbf{X}}(x_1 = 0, t) + [\mathbf{K}_{s0}] \mathbf{X}(x_1 = 0, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{V}(x_1 = 0, t) \\ \mathbf{M}(x_1 = 0, t) \end{pmatrix} \tag{VI.45}$$

avec $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^3$ les vecteurs force et moment internes. Ces vecteurs s'expriment eux-mêmes en fonction du vecteur \mathbf{X} et de l'opérateur différentiel linéaire $[\mathbf{L}_{\text{int}}]$ défini par:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}(x_1, t) \\ \mathbf{M}(x_1, t) \end{pmatrix} = ([\mathbf{L}_{\text{int}}] \mathbf{X})(x_1, t)$$

avec

$$[\mathbf{L}_{\text{int}}] = \begin{pmatrix} K_{11}\partial_{x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}\partial_{x_1} & 0 & 0 & 0 & -K_{22} \\ 0 & 0 & K_{33}\partial_{x_1} & 0 & K_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{44}\partial_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{55}\partial_{x_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{66}\partial_{x_1} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.46})$$

La condition d'interaction sol fondation utilisée pour le calcul des modes de vibration est écrite pour l'impédance **moyenne** (pas d'incertitude) d'une fondation enfouie en **excluant les termes de dissipation** afin de calculer des modes réels. En reprenant l'équation (VI.45), la condition de d'interaction sol fondation en $x_1 = 0$ appliquée aux ondes s'écrit:

$$(-\omega^2([\mathbf{M}_f] + [\mathbf{M}_{\text{ad}}]) + [\mathbf{K}_{s0}] - [\mathbf{L}_{\text{int}}]) \mathbf{X} = 0 \quad (\text{VI.47})$$

On introduit alors la relation de couplage (VI.41) dans le système (VI.47) en **omettant les termes de masse ajoutée** par souci de lisibilité, les 6 équations s'écrivent:

$$\begin{aligned} (1) \quad & (K_{t1} - m_f \omega^2) U_1 - K_{11} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = 0 \\ (2) \quad & (K_{t2} - m_f \omega^2) U_2 - K_{22} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \\ & + \frac{K_{22} + K_{t2r3}}{K_{22} - \varrho_3 \omega^2} \left(K_{66} \frac{\partial^3 U_2}{\partial x_1^3} + \left(K_{22} + \frac{K_{66}}{K_{22}} \rho_l \omega^2 \right) \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) = 0 \\ (3) \quad & (K_{t3} - m_f \omega^2) U_3 - K_{33} \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \\ & + \frac{K_{33} + K_{t3r2}}{K_{33} - \varrho_2 \omega^2} \left(K_{55} \frac{\partial^3 U_3}{\partial x_1^3} + \left(K_{33} + \frac{K_{55}}{K_{33}} \rho_l \omega^2 \right) \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) = 0 \\ (4) \quad & (K_{r1} - I_{f1}) \theta_1 - K_{44} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{VI.48}) \\ (5) \quad & -K_{t3r2} U_3 + \frac{1}{K_{33} - \varrho_2 \omega^2} \left(K_{55} \left(K_{55} \frac{\partial^4 U_3}{\partial x_1^4} - (K_{r2} - I_{f2} \omega^2) \frac{\partial^3 U_3}{\partial x_1^3} \right) \right. \\ & \left. + \left(K_{33} + \frac{K_{55}}{K_{33}} \rho_l \omega^2 \right) \left(K_{55} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2} - (K_{r2} - I_{f2} \omega^2) \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) \right) = 0 \\ (6) \quad & K_{t2r3} U_2 - \frac{1}{K_{22} - \varrho_3 \omega^2} \left(K_{66} \left(K_{66} \frac{\partial^4 U_2}{\partial x_1^4} - (K_{r3} - I_{f3} \omega^2) \frac{\partial^3 U_2}{\partial x_1^3} \right) \right. \\ & \left. + \left(K_{22} + \frac{K_{66}}{K_{22}} \rho_l \omega^2 \right) \left(K_{66} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} - (K_{r3} - I_{f3} \omega^2) \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

Déformées modales de poutre

Les 12 coefficients de déformée modale $\phi_{11}, \phi_{12}, \phi_{21}, \dots, \phi_{24}, \phi_{31}, \dots, \phi_{34}$, et ϕ_{41}, ϕ_{42} sont déterminés par le système à 12 équations formé par les 6 équations de conditions de bord libre (VI.43) et par les 6 équations de condition de bord au pied du bâtiment, que ce soit pour un encastrement (VI.44) ou l'interaction sol fondation (VI.47). Étant donné la forme harmonique (VI.30) des ondes et la dépendance en fréquence des nombres d'onde, ces 12 équations forment un système linéaire dépendant de la fréquence. On note $\phi \in \mathbb{R}^{12}$ le vecteur des coefficients de déformée modale et on écrit le système d'équations donné par les conditions de bord:

$$[\mathbf{L}_{BC}(\omega)] \phi = \mathbf{0} \quad (\text{VI.49})$$

Les équations linéaires des conditions aux limites pour les modes de traction-compression, de flexion et de torsion sont découplées si bien que le système (VI.49) peut être décomposé en 4 sous systèmes indépendants. L'espace des modes vibratoires est donné par les solutions non triviales de l'équation (VI.49) et correspond à l'espace propre associé à la valeur propre nulle de $[\mathbf{L}_{BC}(\omega)]$. Les fréquences modales associées sont donc les fréquences ω_n , $n \in \mathbb{N} \geq 1$ indicées par ordre croissant telles que le rang du système $[\mathbf{L}_{BC}(\omega)]$ soit inférieur à 12, *i.e.* $\det([\mathbf{L}_{BC}(\omega)]) = 0$.

Dans un premier temps, on cherche les fréquences propres en calculant numériquement les racines de l'application $\omega \mapsto \det([\mathbf{L}_{BC}(\omega)])$. Pour chaque fréquence propre ω_n , on détermine l'espace propre associé aux valeurs propres nulles de $[\mathbf{L}_{BC}(\omega_n)]$. On note:

$$\phi^{(n)} = \left(\phi_{11}^{(n)}, \phi_{12}^{(n)}, \phi_{21}^{(n)}, \dots, \phi_{24}^{(n)}, \phi_{31}^{(n)}, \dots, \phi_{34}^{(n)}, \phi_{41}^{(n)}, \phi_{42}^{(n)} \right)$$

le vecteur de déformée modale associée au mode n de fréquence ω_n . Les composantes modales de rotation de flexion $\phi_{5k}^{(n)}$ et $\phi_{6k}^{(n)}$ ($k = 1, \dots, 4$) sont déterminées à l'aide des relations de couplage (VI.41) et des expressions de dépendance en fréquence des nombres d'onde r_{21}, \dots, r_{24} et r_{31}, \dots, r_{34} associés:

$$\begin{aligned} \phi_{6k}^{(n)} &= \frac{1}{K_{22} - \rho_3 \omega_n^2} \left(K_{66} r_{2k}^3(\omega_n) + \left(K_{22} + \frac{K_{66}}{K_{22}} \rho_l \omega_n^2 \right) r_{2k}(\omega_n) \right) \phi_{2k}^{(n)} \\ \phi_{5k}^{(n)} &= -\frac{1}{K_{33} - \rho_2 \omega_n^2} \left(K_{55} r_{2k}^3(\omega_n) + \left(K_{33} + \frac{K_{55}}{K_{33}} \rho_l \omega_n^2 \right) r_{3k}(\omega_n) \right) \phi_{3k}^{(n)} \end{aligned}$$

les sommations implicites d'indices n'étant pas répétées. Connaissant tous les coefficients de déformées modales pour un mode donné, les fonctions de déformées modales se déduisent directement des expressions (VI.37), (VI.38), (VI.39) et (VI.40) des ondes dans le milieu,

on les note de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
\phi_{U_1}^{(n)}(x_1) &= \phi_{11}^{(n)} \exp(r_{11}(\omega_n)x_1) + \phi_{12}^{(n)} \exp(r_{12}(\omega_n)x_1) \\
\phi_{U_2}^{(n)}(x_1) &= \phi_{21}^{(n)} \exp(r_{21}(\omega_n)x_1) + \phi_{22}^{(n)} \exp(r_{22}(\omega_n)x_1) \\
&\quad + \phi_{23}^{(n)} \exp(r_{23}(\omega_n)x_1) + \phi_{24}^{(n)} \exp(r_{24}(\omega_n)x_1) \\
\phi_{U_3}^{(n)}(x_1) &= \phi_{31}^{(n)} \exp(r_{31}(\omega_n)x_1) + \phi_{32}^{(n)} \exp(r_{32}(\omega_n)x_1) \\
&\quad + \phi_{33}^{(n)} \exp(r_{33}(\omega_n)x_1) + \phi_{34}^{(n)} \exp(r_{34}(\omega_n)x_1) \\
\phi_{\theta_1}^{(n)}(x_1) &= \phi_{41}^{(n)} \exp(r_{41}(\omega_n)x_1) + \phi_{42}^{(n)} \exp(r_{42}(\omega_n)x_1) \\
\phi_{\theta_2}^{(n)}(x_1) &= \phi_{51}^{(n)} \exp(r_{51}(\omega_n)x_1) + \phi_{52}^{(n)} \exp(r_{52}(\omega_n)x_1) \\
&\quad + \phi_{53}^{(n)} \exp(r_{53}(\omega_n)x_1) + \phi_{54}^{(n)} \exp(r_{54}(\omega_n)x_1) \\
\phi_{\theta_3}^{(n)}(x_1) &= \phi_{61}^{(n)} \exp(r_{61}(\omega_n)x_1) + \phi_{62}^{(n)} \exp(r_{62}(\omega_n)x_1) \\
&\quad + \phi_{63}^{(n)} \exp(r_{63}(\omega_n)x_1) + \phi_{64}^{(n)} \exp(r_{64}(\omega_n)x_1)
\end{aligned}$$

La déformée modale associée au mode n est alors notée:

$$\Phi^{(n)}(x_1) = \left(\phi_{U_1}^{(n)}(x_1), \phi_{U_2}^{(n)}(x_1), \phi_{U_3}^{(n)}(x_1), \phi_{\theta_1}^{(n)}(x_1), \phi_{\theta_2}^{(n)}(x_1), \phi_{\theta_3}^{(n)}(x_1) \right) \quad (\text{VI.50})$$

Remarque : lorsque $\omega = \omega_{\text{thr}}$, les relations de couplage des ondes de flexion sont données par (VI.42). L'introduction de ces relations dans l'expression des conditions aux limites mène à un système d'équations homogènes dont le rang est maximal. Sa solution est par conséquent triviale et aucun mode n'est associé à la fréquence ω_{thr} .

VI.3.3 Equation dynamique du bâtiment sous séisme

Le problème est posé dans le référentiel non inertiel \mathcal{R}_{sf} en translation lié au sol de fondation (voir *Figure VI.1*). L'accélération $\mathbf{a}_e(t)$ de ce référentiel, introduite en (VI.3), est la seule source de travail extérieur pour l'ensemble $\Omega = \{\text{bâtiment} + \text{fondation} + \text{sol de fondation}\}$.

Le bâtiment est supposé avoir un amortissement proportionnel à la raideur à l'instar de celui introduit en (VI.46) pour le modèle brochette. On note β_0 le coefficient d'amortissement structural du bâtiment. En reprenant l'équation dynamique (VI.29), le problème se pose de la manière suivante:

$$[\mathbf{M}_l] \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2} + 2\beta_0 [\mathbf{K}_{\partial x_1}] \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + [\mathbf{K}_{\partial x_1}] \mathbf{X} = -[\mathbf{M}_l] [\mathbf{\Pi}] \mathbf{a}_e \quad (\text{VI.51})$$

- Conditions de bord libre $([L_{\text{int}}] \mathbf{X})(x_1 = H, t) = \mathbf{0}$.
- Interaction sol fondation:

$$\left([\mathbf{M}_{\text{sf}}] \ddot{\mathbf{X}} + [\mathbf{D}_s(\omega_0)] \dot{\mathbf{X}} + [\mathbf{K}_{s0}] \mathbf{X} - [L_{\text{int}}] \mathbf{X} \right) (x_1 = 0, t) = -[\mathbf{M}_{\text{sf}}] [\mathbf{\Pi}] \mathbf{a}_e(t)$$

- Conditions initiales: $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ et $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \mathbf{0}$ pour $t = 0$ et pour tout $x_1 \in [0, H]$.

L'opérateur de projection $[\mathbf{\Pi}]$ défini sur \mathbb{R}^3 à valeurs dans \mathbb{R}^6 est défini par la représentation matricielle suivante:

$$[\mathbf{\Pi}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_3] \\ [\mathbf{0}_{3,3}] \end{bmatrix} \quad (\text{VI.52})$$

VI.3.4 Equation dynamique réduite

Le problème dynamique posé en VI.3.3 est un problème différentiel continu en espace sur $[0, H]$ et en temps pour $t \in \mathbb{R}_+$. Sa résolution analytique est difficile, c'est pourquoi on s'oriente vers une méthode numérique, d'autant plus que l'accélérogramme sismique $\mathbf{a}_e(t)$ est en pratique un signal échantillonné au format numérique.

Le problème différentiel en espace peut être traité par diverses approches. Un schéma aux différences mènerait à une formulation similaire à celle du modèle brochette décrit en VI.2. On pourrait également utiliser une formulation par éléments finis à l'aide d'élément de poutre épaisse. On dispose cependant d'une base modale de la poutre qui comme on l'a montré en VI.3.2, est formulée à l'aide d'expressions semi-analytiques:

$$\left(\omega_n, \Phi^{(n)} \right) \in \mathbb{R}_+^* \times \left(H^1([0, H]) \right)^6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

L'espace \mathcal{E}_ϕ des déformées modales est donc constitué de l'ensemble des applications de $\left(H^1([0, H]) \right)^6$ vérifiant l'équation des ondes (VI.29) et les conditions de bord libre (VI.43) et d'interaction de sol non dissipative (VI.47). Pour utiliser cet espace à des fins numériques, on va le restreindre à un sous espace \mathcal{E}_ϕ^r engendré par les déformées modales d'un nombre fini de modes tel que $\dim(\mathcal{E}_\phi^r) = N \in \mathbb{N}$. En général, on choisit les modes associés aux N premières fréquences propres $\omega_n < \omega_N$.

On va écrire une formulation faible du problème (VI.51) dans l'espace \mathcal{E}_ϕ^r . Soient Φ^* une application de l'espace \mathcal{E}_ϕ^r , on multiplie alors l'équation dynamique (VI.51) par Φ^{*T}

à gauche puis on intègre par rapport à x_1 sur l'intervalle $[0, H]$:

$$\begin{aligned} & \int_0^H \Phi^{*T} [\mathbf{M}_l] \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2} dx_1 + 2\beta_0 \int_0^H \Phi^{*T} [\mathbf{K}_{\partial x_1}] \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} dx_1 + \int_0^H \Phi^{*T} [\mathbf{K}_{\partial x_1}] \mathbf{X} dx_1 \\ & = - \int_0^H \Phi^{*T} dx_1 [\mathbf{M}_l] [\mathbf{\Pi}] \mathbf{a}_e \quad \forall \Phi^{*T} \in \mathcal{E}_\phi^r \end{aligned} \quad (\text{VI.53})$$

On introduit les opérateurs de masse $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ et de raideur $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$ définis pour $\Phi^{(p)}$ et $\Phi^{(q)}$ dans l'espace \mathcal{E}_ϕ .

$$\begin{aligned} \langle \Phi^{(p)}, \Phi^{(q)} \rangle_M &= \Phi^{(p)T}(0) [\mathbf{M}_{sf}] \Phi^{(q)}(0) + \int_0^H \Phi^{(p)T}(x_1) [\mathbf{M}_l] \Phi^{(q)}(x_1) dx_1 \\ \langle \Phi^{(p)}, \Phi^{(q)} \rangle_K &= \Phi^{(p)T}(0) [\mathbf{K}_{s0}] \Phi^{(q)}(0) + \int_0^H \left(\frac{\partial \Phi^{(p)}}{\partial x_1} \right)^T [\mathbf{K}_b] \frac{\partial \Phi^{(q)}}{\partial x_1} dx_1 \\ &+ \int_0^H \Phi^{(p)T}(x_1) (K_{33} \mathbf{e}_5 \otimes \mathbf{e}_5 + K_{22} \mathbf{e}_6 \otimes \mathbf{e}_6) \Phi^{(q)}(x_1) dx_1 \\ &+ \int_0^H \Phi^{(p)T}(x_1) (-K_{22} \mathbf{e}_6 \otimes \mathbf{e}_2 + K_{33} \mathbf{e}_5 \otimes \mathbf{e}_3) \frac{\partial \Phi^{(q)}}{\partial x_1} dx_1 \\ &+ \int_0^H \left(\frac{\partial \Phi^{(p)}}{\partial x_1} \right)^T (-K_{22} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_6 + K_{33} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_5) \Phi^{(q)}(x_1) dx_1 \end{aligned} \quad (\text{VI.54})$$

L'intégration par parties de la forme faible (VI.53) fait intervenir les conditions de bord et on démontre en B.1 qu'elle s'écrit à l'aide des opérateurs de masse et de raideur:

$$\begin{aligned} & \langle \Phi^*, \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2} \rangle_M + 2\beta_0 \langle \Phi^*, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \rangle_K + \langle \Phi^*, \mathbf{X} \rangle_K + \Phi^{*T}(0) [\mathbf{D}_s(\omega_0)] \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \Big|_{x_1=0} \\ & = \langle \Phi^*, [\mathbf{\Pi}] \mathbf{a}_e \rangle_M \quad \forall \Phi^* \in \mathcal{E}_\phi^r \end{aligned} \quad (\text{VI.55})$$

La matrice de dissipation $[\mathbf{D}_s(\omega_0)]$ introduite en (V.7) est symétrique définie positive et les opérateurs de masse $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ et de raideur $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$ le sont également. Pour une date t donnée, la formulation (VI.55) est de la forme:

$$b(\Phi^*, \mathbf{X}) = l(\Phi^*) \quad \forall \Phi^{*T} \in \mathcal{E}_\phi^r$$

où, compte tenu des propriétés de $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$, la forme bilinéaire $b(\cdot, \cdot)$ est continue et coercive et la forme linéaire $l(\cdot)$ est continue. Le théorème de *Lax-Milgram* garantit alors que le problème faible a une unique solution dans l'espace \mathcal{E}_ϕ^r .

La décomposition du champ \mathbf{X} sur la base modale génératrice de cet espace se fait à l'aide de l'opérateur modal réduit $[\Phi^r(x_1)]$ construit par concaténation des N déformées modales $\Phi^{(n)}$, $1 \leq n \leq N$ et du vecteur $\mathbf{Q}(t)$ des coordonnées généralisées:

$$\mathbf{X}(x_1, t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{Q}_n \Phi^{(n)}(x_1) = [\Phi^r(x_1)] \mathbf{Q}(t) \quad (\text{VI.56})$$

De même, on décompose le champ test Φ^* à l'aide de l'opérateur $[\Phi^r(x_1)]$ et du vecteur de coordonnées généralisées \mathbf{Q}^* indépendant du temps:

$$\Phi^*(x_1) = \sum_{n=1}^N Q_n^*(t) \Phi^{(n)}(x_1) = [\Phi^r(x_1)] \mathbf{Q}^* \quad (\text{VI.57})$$

On démontre en B.1 que l'ensemble des déformées modales forme une base orthonormale de l'espace \mathcal{E}_ϕ pour le produit scalaire défini par l'opérateur de masse. L'orthogonalité et les relations de normalisation (B.7) et (B.8) impliquent que pour deux déformées modales $\Phi^{(p)}$ et $\Phi^{(q)}$, on écrit sans sommation implicite:

$$\omega_p^2 \langle \Phi^{(p)}, \Phi^{(q)} \rangle_M = \delta_{pq} \langle \Phi^{(p)}, \Phi^{(q)} \rangle_K \quad \text{et} \quad \langle \Phi^{(p)}, \Phi^{(p)} \rangle_M = 1 \quad (\text{VI.58})$$

On introduit les expressions (VI.56) et (VI.57) dans la formulation (VI.55). Étant donné la propriété (VI.58), on aboutit à l'expression matricielle suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{*T} [\mathbb{1}_N] \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial t^2} + 2\beta_0 \mathbf{Q}^{*T} [\omega_N^2] \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{Q}^{*T} [\Phi^r(0)]^T [\mathbf{D}_s(\omega_0)] [\Phi^r(0)] \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \\ + \mathbf{Q}^{*T} [\omega_N^2] \mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}^{*T} \mathcal{F}(t) \quad \forall \mathbf{Q}^* \in \mathbb{R}^N \end{aligned} \quad (\text{VI.59})$$

avec $[\omega_N^2] = \mathbf{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_N^2)$ la matrice diagonale des pulsations modales au carré.

L'équation dynamique matricielle réduite sur l'espace modal \mathcal{E}_ϕ^r s'écrit:

$$[\mathcal{M}] \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial t^2} + [\mathcal{D}] \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + [\mathcal{K}] \mathbf{Q}(t) = \mathcal{F}(t) \quad (\text{VI.60})$$

avec les conditions initiales héritées de (VI.51) :

$$\mathbf{Q}(0) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \right|_{t=0} = \mathbf{0}$$

Les modes étant orthonormés, la matrice de masse modale est l'identité:

$$[\mathcal{M}]_{pq} = \langle \Phi^{(p)}, \Phi^{(q)} \rangle_M = \delta_{pq}$$

La matrice de raideur est la matrice diagonale dont les termes sont les carrés des fréquences radiales par ordre de croissant

$$[\mathcal{K}]_{pq} = \langle \Phi^{(p)}, \Phi^{(q)} \rangle_K = \delta_{pq} \omega_p^2$$

La matrice d'amortissement est proportionnelle à la matrice de raideur pour un coefficient d'amortissement structural β_0 :

$$[\mathcal{D}] = 2\beta_0 [\mathcal{K}] + [\Phi^r(0)]^T ([\mathbf{D}_s(\omega_0)] - 2\beta_0 [\mathbf{K}_{s0}]) [\Phi^r(0)]$$

Le vecteur des forces nodales issues de l'accélération du sol de fondation est donné par:

$$\mathcal{F}_n(t) = \langle \Phi^{(n)}, [\mathbf{\Pi}] \mathbf{a}_e(t) \rangle_M$$

La résolution du problème temporel (VI.60) est menée à l'aide du schéma aux différences de *Newmark* dont le principe est présenté en B.2.

VI.3.5 Equation dynamique stochastique

La modélisation probabiliste du problème dynamique a pour but de prendre en compte les incertitudes sur le comportement mécanique du sol. Les aléas sont par conséquent introduits à travers la condition d'interaction sol fondation du problème (VI.51) à l'aide des matrices aléatoires définies en (V.3) (marquées d'un tilde):

$$\left([\tilde{\mathbf{M}}_{sf}] \ddot{\mathbf{X}} + [\tilde{\mathbf{D}}_s] \dot{\mathbf{X}} + [\tilde{\mathbf{K}}_s] \mathbf{X} - [L_{int}] \mathbf{X} \right) (x_1 = 0, t) = -[\tilde{\mathbf{M}}_{sf}] [\mathbf{\Pi}] \mathbf{a}_e(t) \quad (\text{VI.61})$$

La forme faible (VI.53) de l'équation dynamique (VI.51) est toujours valable. Comme précédemment, cette formulation est intégrée par partie, ce qui fait intervenir les conditions de bord du problème dont la condition stochastique (VI.61).

En introduisant les décompositions modales (VI.56) et (VI.57), on aboutit à l'équation modale réduite (VI.60) plus des termes de perturbation aléatoires. L'équation stochastique réduite s'écrit:

$$[\tilde{\mathcal{M}}] \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial t^2} + [\tilde{\mathcal{D}}] \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + [\tilde{\mathcal{K}}] \mathbf{Q}(t) = \tilde{\mathcal{F}}(t) \quad (\text{VI.62})$$

avec les perturbations $[\Delta \tilde{\mathcal{M}}]$, $[\Delta \tilde{\mathcal{D}}]$ et $[\Delta \tilde{\mathcal{K}}]$ telles que:

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathcal{M}}] &= [\mathcal{M}] + [\Phi^r(0)]^T ([\tilde{\mathbf{M}}_{sf}] - [\mathbf{M}_{sf}]) [\Phi^r(0)] \\ [\tilde{\mathcal{D}}] &= [\mathcal{D}] + [\Phi^r(0)]^T ([\tilde{\mathbf{D}}_s] - [\mathbf{D}_s(\omega_0)]) [\Phi^r(0)] \\ [\tilde{\mathcal{K}}] &= [\mathcal{K}] + [\Phi^r(0)]^T ([\tilde{\mathbf{K}}_s] - [\mathbf{K}_{s0}]) [\Phi^r(0)] \\ \tilde{\mathcal{F}}(t) &= \mathcal{F}(t) - [\Phi^r(0)]^T ([\tilde{\mathbf{M}}_{sf}] - [\mathbf{M}_{sf}]) [\mathbf{\Pi}] \mathbf{a}_e(t) \end{aligned}$$

Pour chaque réalisation des matrices aléatoires $[\tilde{\mathbf{M}}_{ad}(\theta)]$, $[\tilde{\mathbf{M}}_f(\theta)]$, $[\tilde{\mathbf{D}}_s(\theta)]$ et $[\tilde{\mathbf{K}}_s(\theta)]$ pour un évènement θ de l'ensemble des causes de l'espace probabilisé $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ défini en V.3.1, on résout le problème temporel (VI.62) à l'aide du schéma aux différences de *Newmark*.

VI.4 Conclusions

Dans ce chapitre, une modélisation tridimensionnelle de bâtiments à plusieurs étages est établie à l'aide de modèles mécaniques de poutre: l'un à inerties concentrées et l'autre dont l'inertie est distribuée de façon homogène. L'interaction sol fondation est introduite comme faisant partie intégrante de la structure si bien que les modes structuraux calculés pour le bâtiment la prennent en compte. Ceci aboutit en pratique à une meilleure convergence modale lors des calculs dynamiques.

La modélisation stochastique de l'interaction sol-fondation est intégrée via l'écart entre la réalisation des matrices aléatoires d'impédance de sol et leur valeur moyenne. Lors d'une simulation de Monte Carlo, seule la partie des matrices de masse, raideur et amortissement liée à l'impédance de sol est recalculée ce qui réduit considérablement la quantité d'opérations.

CHAPITRE VII

ÉTUDE NUMÉRIQUE D'UN PROBLÈME SISMIQUE

L'objet de ce chapitre est la mise en œuvre de l'ensemble des méthodes numériques présentées dans ce document pour l'étude de la réponse dynamique d'un bâtiment sous séisme. La construction utilisée pour illustrer cette application est la structure multi étagée présentée en III.5. Cette structure est soumise à un séisme dont les caractéristiques sont exposées en VII.1. Les propriétés du sol sur lequel repose la construction sont données dans la même section.

L'étude des propriétés dynamiques de la structure seule et avec interaction de sol sans aléa (modèle moyen) fait l'objet de la section VII.2.

L'étude dynamique stochastique dont l'objet est l'influence des incertitudes du comportement mécanique du sol sur la réponse sismique d'un bâtiment est présentée en VII.3.

VII.1 Caractéristiques sismiques et propriétés mécaniques de sol

Les séismes sont des phénomènes difficiles à observer dans leur ensemble. On se borne en général à mesurer le mouvement du sol sous leur action. A cette fin, on utilise des sismomètres. Ces appareils sont utilisés pour mesurer l'accélération du sol dans les 3 directions de l'espace au point de mesure. Il s'agit de l'accélération $\mathbf{a}_e(t)$ dont il est question au *chapitre VI* et qui en pratique, est disponible sous la forme de 3 signaux échantillonnés pour un pas de temps Δt :

$$a_{e1}(t_n) = a_{e1}(n\Delta t) \quad , \quad a_{e2}(t_n) = a_{e2}(n\Delta t) \quad , \quad a_{e3}(t_n) = a_{e3}(n\Delta t) \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Les deux composantes horizontales orthogonales $a_{e2}(t_n)$, $a_{e3}(t_n)$ et la composante verticale $a_{e1}(t_n)$ définissent le mouvement de translation d'ensemble du sol. Le séisme qui va illustrer l'ensemble des résultats numériques qui vont suivre est le tremblement de terre de *Parkfield* du 28 septembre 2004. L'épicentre de ce séisme de magnitude 6.0 se situait dans les environs de *Parkfield* près de *Joaquin Canyon* dans la région de la faille de *San Andreas* en Californie et l'accélérogramme tracé sur la *Figure VII.1* provient de la station de sismologie *Donna Lee* à 14.5 km de là. Davantage d'informations sont disponibles dans le rapport de Borchardt *et al.* [15].

Dans cette région, le sol est de nature rocheuse avec des vitesses de propagation homogènes des ondes P et S qui sont respectivement de l'ordre de grandeur de 5 km.s^{-1} et 3 km.s^{-1} pour une masse volumique $\rho_s = 2500 \text{ kg.m}^{-3}$. L'objet de cet étude étant entre autre d'observer l'effet de l'interaction du bâtiment avec un sol meuble, on va considérer que le bâtiment est construit sur un dépôt de silt et d'argile. L'ordre de grandeur des ondes P et S est respectivement de 700 m.s^{-1} et 350 m.s^{-1} avec une masse volumique $\rho_s = 1700 \text{ kg.m}^{-3}$. Connaissant les vitesses moyennes de propagation des ondes P et S ainsi que la masse volumique, on est en mesure de calculer un module de cisaillement moyen G_s ainsi qu'un coefficient de *Poisson* moyen ν_s . La *Table VII.1* expose les 3 propriétés mécaniques de sol homogène du dépôt.

<i>Table VII.1</i> Propriétés de sol
$G_s = 208 \text{ MPa}$
$\nu_s = 0.33$
$\rho_s = 1700 \text{ kg.m}^{-3}$

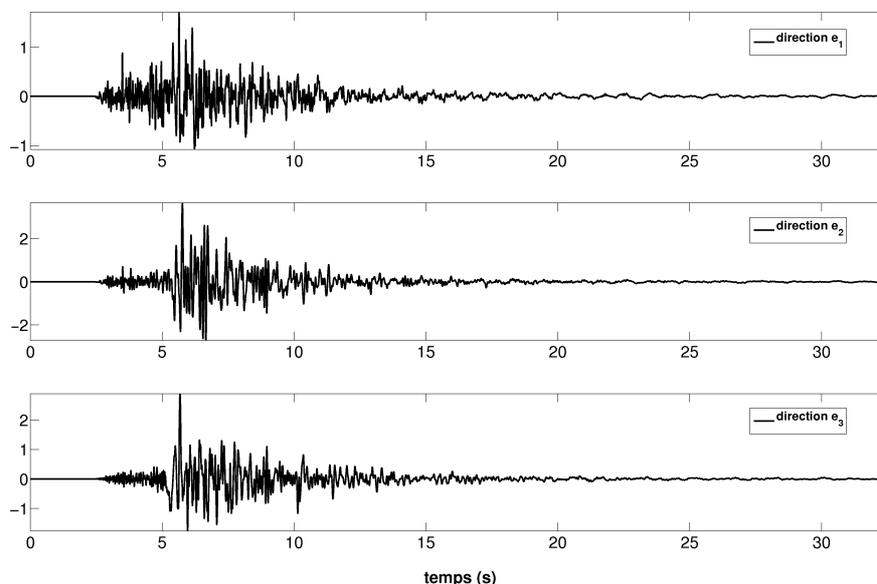


Figure VII.1 Accélérogramme du séisme *Parkfield* 2004 mesuré par la station *Donna Lee* [109].

VII.1.1 Présentation du signal sismique

Les spectres de réponse élastique des 3 composantes du signal sismique sont tracés sur la figure *Figure VII.2*. La construction de ces spectres est expliquée en B.3. Ces spectres donnent une information concernant le niveau d'excitation des fréquences propres d'une structure mise en mouvement par le séisme. La *Figure VII.2.a* montre par exemple que la composante verticale du séisme entraîne un niveau de réponse structural important dans la bande de fréquence [4, 20] Hz. Le spectre de la composante nord-sud représentée sur la *Figure VII.2.b* met en lumière une réponse élastique principalement localisée à l'intérieur [7, 11] Hz. Les spectres(*Figure VII.2.c*) de la composante est-ouest présentent une zone de l'intervalle de réponse moins restreinte dont l'essentiel se situe dans le domaine [3, 12] Hz.

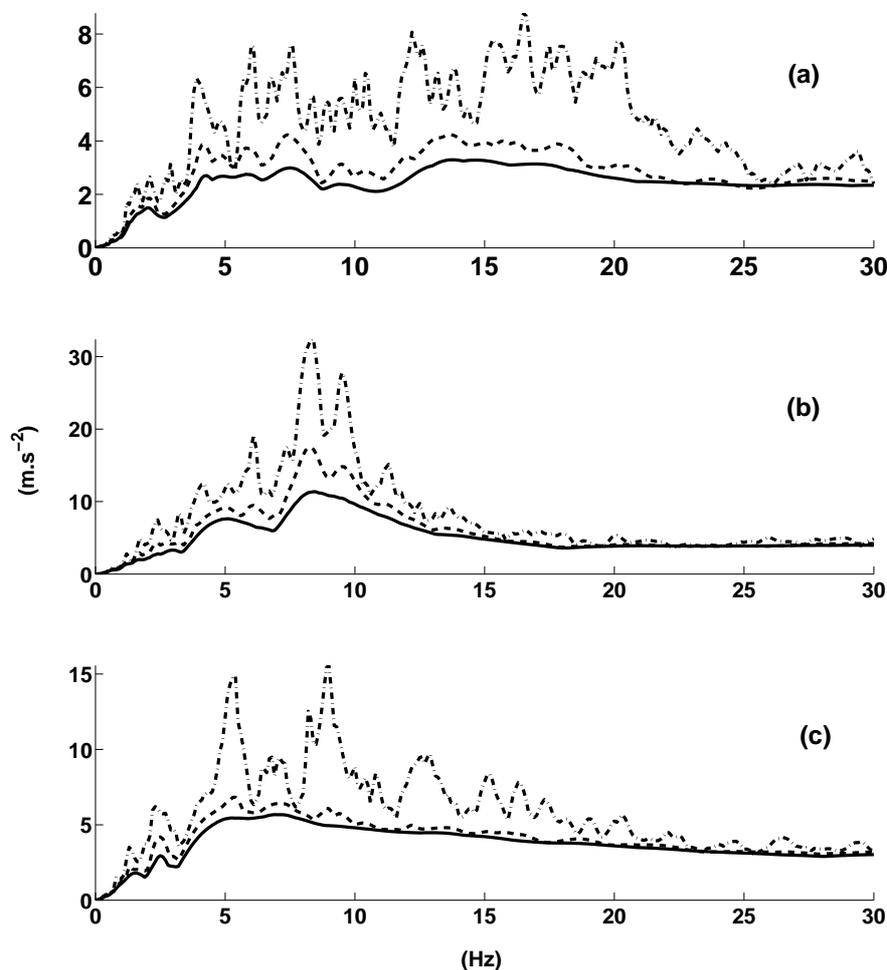


Figure VII.2 Spectre élastique — (a) composante verticale e_1 , (b) composante Nord-Sud e_2 , (c) composante Est-Ouest e_3 — Taux d'amortissement de 1% (tirets-points), 5% (tirets), 10% (trait plein).

Les spectres de puissance des composantes du signal sismique sont représentées sur la figure *Figure VII.3*. La construction des spectres est expliquée en B.3. Ce spectre donne la répartition fréquentielle de la puissance du signal. Le spectre de puissance de la composante verticale (*Figure VII.3.a*) est étalé sur $[0, 20]$ Hz à l'instar de la réponse élastique donnée par la *Figure VII.2.a*. L'essentiel de la puissance se situe néanmoins pour les fréquences $[0, 11]$ Hz. La répartition fréquentielle de la puissance de la composante nord-sud représentée par la *Figure VII.3.b* présente une puissance essentiellement contenue dans le domaine $[0, 10]$ Hz. Celle de la composante est-ouest (*Figure VII.3.c*) se situe elle dans $[0, 12]$ Hz.

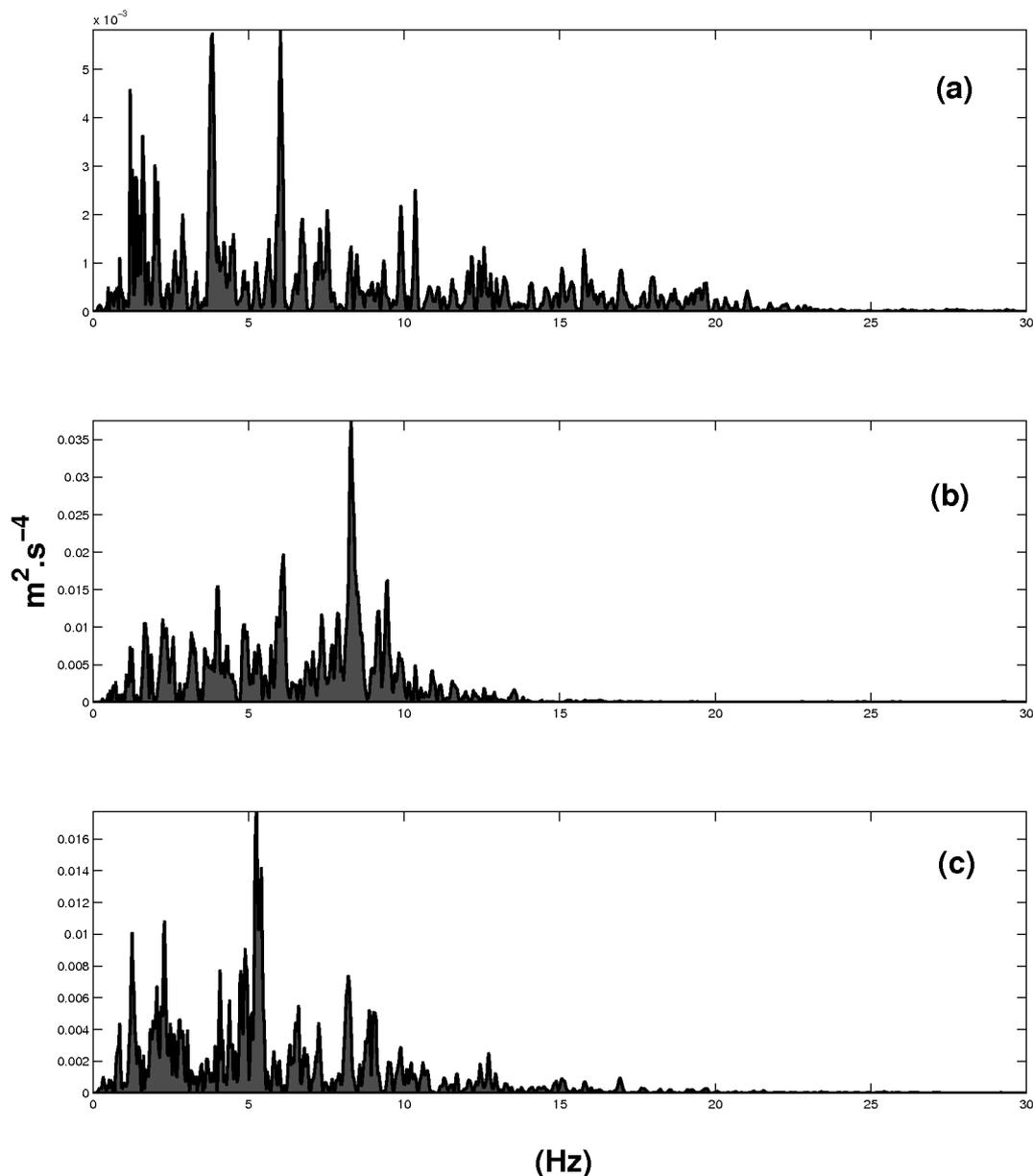


Figure VII.3 Spectre de puissance — (a) composante verticale e_1 , (b) composante Nord-Sud e_2 , (c) composante Est-Ouest e_3 .

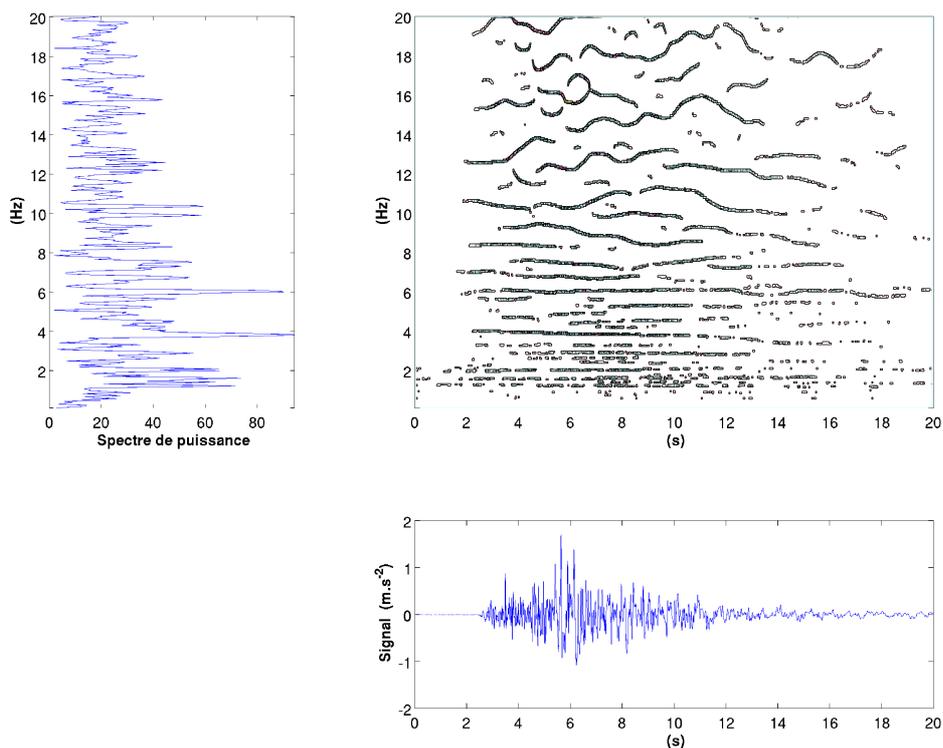


Figure VII.4 Crête de transformée en ondelettes de la composante verticale e_1 .

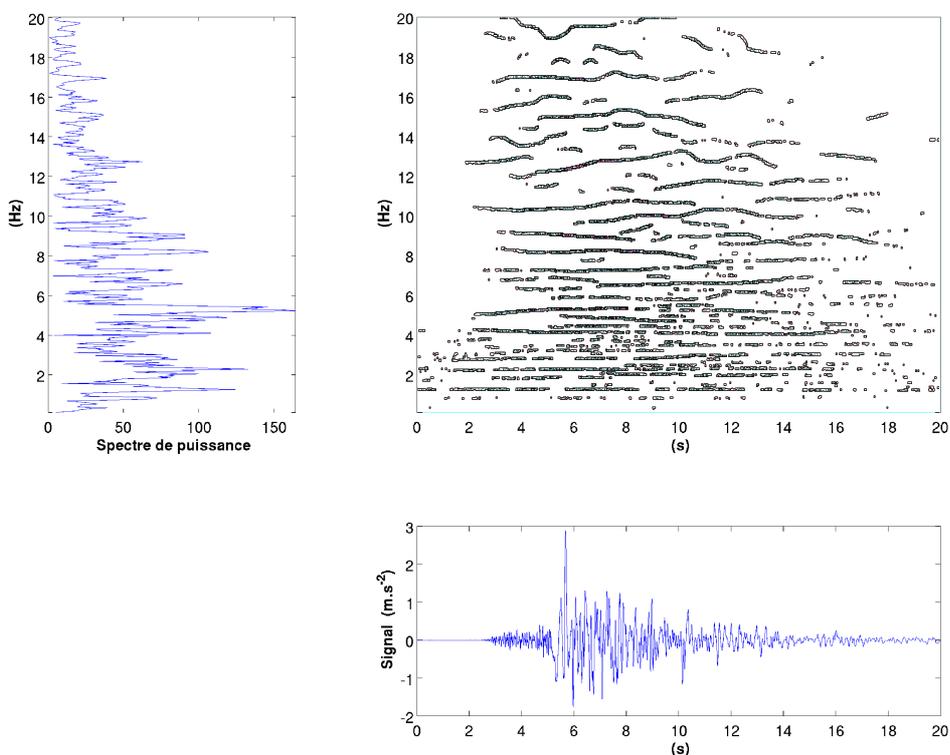


Figure VII.5 Crête de transformée en ondelettes de la composante Nord-Sud e_2 .

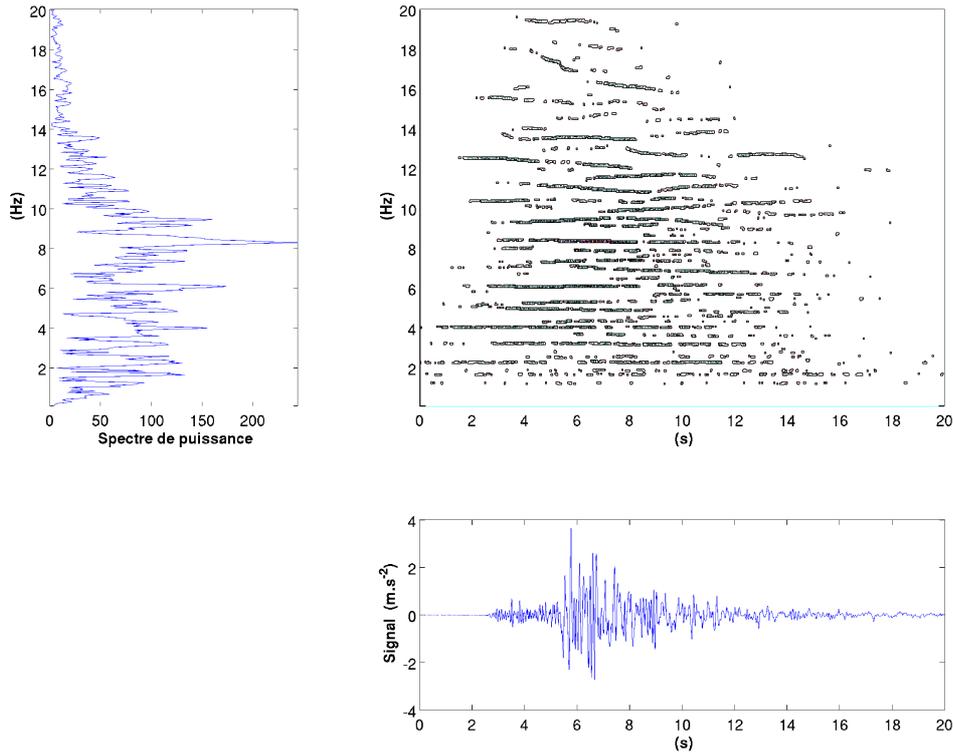


Figure VII.6 Crête de transformée en ondelettes de la composante Est-ouest e_3 .

Les arêtes (*ridges*) des transformées en ondelettes des composantes du signal sont données par la *Figure VII.4*, la *Figure VII.5* et la *Figure VII.6*. Ce sont des courbes dans le plan temps / fréquence où l'énergie du signal se concentre, c'est-à-dire les arêtes du module de la transformée en ondelette complexe pour un seuil donné. Ces transformées en ondelettes sont obtenues à l'aide d'une méthode dite de "recuit simulé" ("*simulated annealing*"). Une autre application de cette technique est proposée dans les travaux de Le *et al.* [83]. La puissance du signal est assez faible et se situe principalement dans les basses fréquences pour $t \in [0, 3]$ s. On remarque ensuite des contributions fréquentielles régulières (crêtes à fréquence constante) pour les trois composantes du signal. La *Figure VII.4* montre que la composante verticale présente une contribution fréquentielle stable de 4 Hz à 8 Hz sur la plage de temps $t \in [3, 13]$ s. Le signal faiblit et devient diffus au delà de cette limite. La *Figure VII.5* correspondant à la composante nord-sud montre un contenu fréquentiel stable du signal de 1.5 Hz à 11 Hz pour $t \in [3, 15]$ s, le signal faiblissant au delà. La *Figure VII.6* présente un contenu fréquentiel stable de 2 Hz à 14 Hz pour $t \in [3, 13]$ s et des composantes stables autour de 10 Hz et 13 Hz pour $t \in [13, 16]$ s. Au delà, on constate un affaiblissement du signal.

La distribution spectrale de puissance du signal de la *Figure VII.3* est donc dans l'ensemble assez stable sur la période $t \in [3, 13]$ s. Les zones de réponse importantes du spectre élastique sont donc excitées avec constance pendant la durée du séisme.

VII.1.2 Impédance moyenne d'interaction sol fondation

Connaissant les propriétés élastiques et inertielles moyennes du sol, on est à même de représenter le comportement mécanique de l'interaction sol fondation à l'aide du modèle exposé au *chapitre V*. Les coefficients de l'impédance dynamique moyenne associée à ce modèle sont déterminés à partir des expressions cataloguées en V.2.

La fondation est un parallélépipède dont les dimensions et les propriétés physiques sont données par la *Table VII.2* et sont proches de celles d'un étage. Cette fondation est enfouie et est en contact avec le sol sur toute sa hauteur.

Table VII.2 – Propriétés de fondation	
géométriques	inertielles
$L_{f1} = 2.7 \text{ m}$	$\rho_f = 2400 \text{ kg.m}^{-3}$
$L_{f2} = 14 \text{ m}$	$m_{sto} = 6.19.10^5 \text{ kg}$
$L_{f3} = 30 \text{ m}$	$I_{f1} = 6.40.10^7 \text{ kg.m}^2$
$t_f = 0.3 \text{ m}$	$I_{f2} = 5.23.10^7 \text{ kg.m}^2$
	$I_{f2} = 1.33.10^7 \text{ kg.m}^2$

Termes d'impédance élastiques

Les termes de la matrice d'impédance de fondation sont comme expliqué en V.2 le produit $[\mathbf{K}_s^{\text{stat}}]_{ij} \times k_{ij}^{\text{dyn}}(\omega)$ d'un terme statique et d'un terme dynamique dépendant de la fréquence. Les abaques exposées par Gazetas [52], donnent des courbes de variation des coefficients de raideur dynamique. Par minimisation au sens des moindres carrés, on détermine les fonctions paraboliques de la forme $k_{ij}^{\text{dyn}}(\omega) \sim \kappa_{ij} - \mu_{ij}\omega^2$ les plus proches des coefficients de raideur dynamique. Les raideurs statiques effectives de la matrice $[\mathbf{K}_{s0}]$ sont donnés par les produits $[\mathbf{K}_s^{\text{stat}}]_{ij}\kappa_{ij}$ et les termes de masse ajoutée constituant la matrice $[\mathbf{M}_{ad}]$ sont obtenus par les produit $[\mathbf{K}_s^{\text{stat}}]_{ij}\mu_{ij}$. Les termes de la matrice d'impédance élastique $[\mathbf{K}_s^{\text{stat}}]$ sont calculés à l'aide des *Table V.3* et *Table V.5* et l'identification des coefficients κ_{ij} et μ_{ij} est représentée par les *Figure VII.7* et *Figure VII.8*. Les termes des matrices $[\mathbf{K}_{s0}]$ et $[\mathbf{M}_{ad}]$ sont exposés dans la *Table VII.3* et la *Table VII.4*.

Table VII.3 – Termes de $[\mathbf{K}_{s0}]$	
$K_{t1} = 1.715.10^{10} \text{ N.m}^{-1}$	$K_{r1} = 4.082.10^{12} \text{ N.m.rad}^{-1}$
$K_{t2} = 1.723.10^{10} \text{ N.m}^{-1}$	$K_{r2} = 1.063.10^{12} \text{ N.m.rad}^{-1}$
$K_{t3} = 1.669.10^{10} \text{ N.m}^{-1}$	$K_{r3} = 1.079.10^{12} \text{ N.m.rad}^{-1}$
$K_{t2r3} = 1.551.10^{10} \text{ N}$	$K_{t3r2} = 1.521.10^{10} \text{ N}$

Table VII.4 – Termes de $[M_{ad}]$	
$[M_{ad}]_{11} = 8.46 \cdot 10^5 \text{ kg}$	$[M_{ad}]_{44} = 11.13 \cdot 10^7 \text{ kg.m}^2$
$[M_{ad}]_{33} = 3.59 \cdot 10^5 \text{ kg}$	$[M_{ad}]_{55} = 6.59 \cdot 10^7 \text{ kg.m}^2$
	$[M_{ad}]_{66} = 6.69 \cdot 10^7 \text{ kg.m}^2$

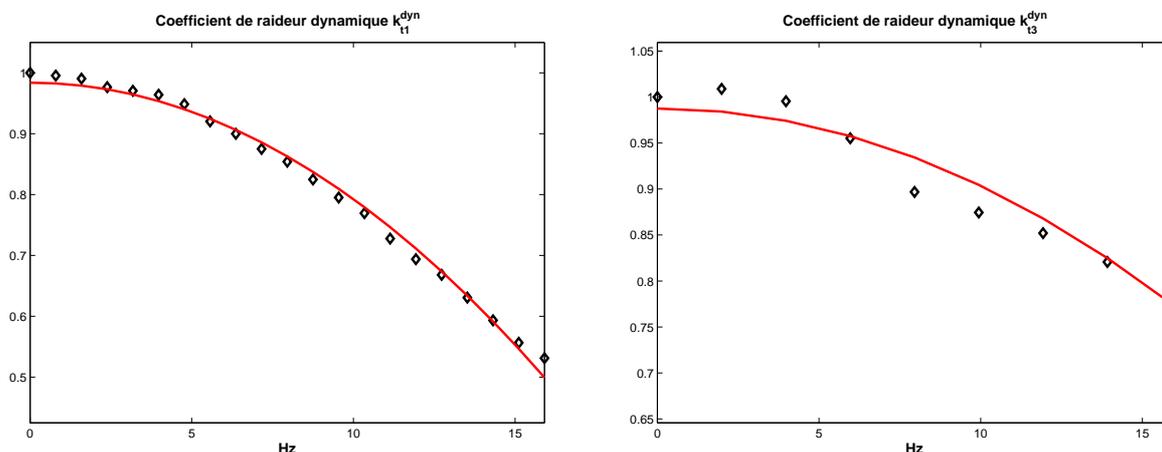


Figure VII.7 (De gauche à droite) Coefficients dynamiques k_{t1}^{dyn} , k_{t3}^{dyn} . (\diamond) – Points tirés des abaques de [52]. (trait plein) – approximation parabolique.

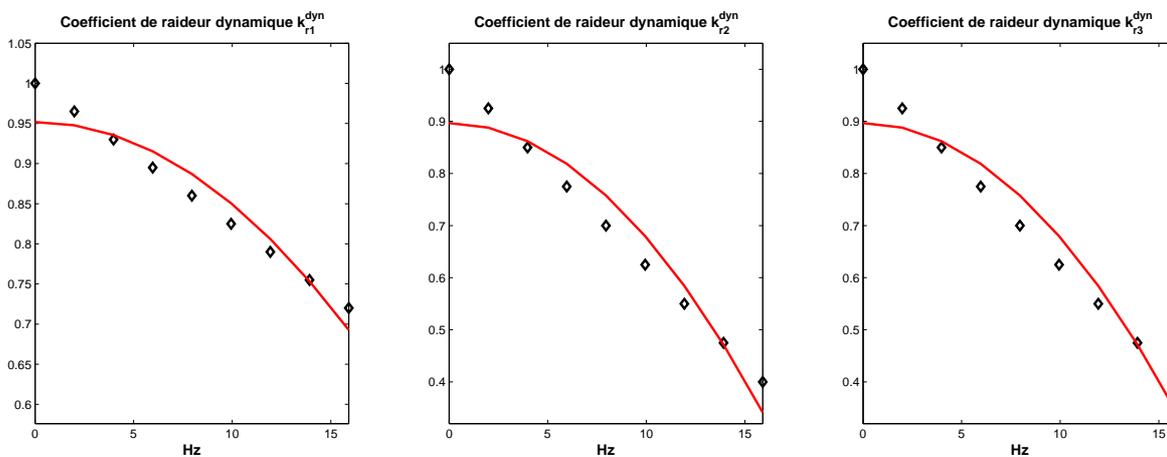


Figure VII.8 (De gauche à droite) Coefficients dynamiques k_{r1}^{dyn} , k_{r2}^{dyn} et k_{r3}^{dyn} . (\diamond) – Points tirés des abaques de [52]. (trait plein) – approximation parabolique.

Termes d'impédance en dissipation

Les termes de dissipation sont calculés à partir de la Table V.6 pour la première fréquence propre des modes associés à chacun des 4 types de vibration de l'ensemble *bâtiment + fondation* sans source de dissipation. La Table VII.5 donne ces fréquences

pour chaque modèle réduit du bâtiment. Les termes d'impédance dissipatifs de la matrice $[\mathbf{D}(\omega_0)]$ sont donnés par la *Table VII.7*.

Les coefficients dynamiques de dissipation sont issus des abaques données dans [52]. Les valeurs de ces coefficients sont données par la *Table VII.6* pour une fondation rectangulaire de rapport $L_{f3}/L_{f2} \simeq 2$. Pour une telle fondation, certains de ces coefficients sont constants, e.g. $d_{t1}^{\text{dyn}}(\omega)$, $d_{t2}^{\text{dyn}}(\omega)$, $d_{t3}^{\text{dyn}}(\omega)$. La valeur des autres est fixée pour les fréquences de la *Table VII.5* par les courbes des *Figure VII.9*, *Figure VII.10*, *Figure VII.11* issues des abaques données en [52] pour les coefficients d_{r1}^{dyn1} , d_{r2}^{dyn1} et d_{r3}^{dyn1} et par les formules suivantes:

$$d_{r1}^{\text{dyn2}}(\omega) = \frac{a_0^2(\omega)}{a_0^2(\omega) + \frac{1}{2}(L_{f3}/L_{f2})^{-1.5}}$$

$$d_{r2}^{\text{dyn2}}(\omega) = 0.25 + 0.65\sqrt{a_0(\omega)} \left(\frac{2L_{f1}}{L_{f2}} \right)^{-1/4}$$

$$d_{r3}^{\text{dyn2}}(\omega) = 0.25 + 0.65\sqrt{a_0(\omega)} \left(\frac{2L_{f1}}{L_{f3}} \right)^{-1/4}$$

avec $a_0(\omega) = \frac{L_{f2}}{2V_s}\omega$

Les fréquences modales de la *Table VII.5* présentant des valeurs proches pour les deux modèles réduits du bâtiment, les valeurs des coefficients dynamiques données par la *Table VII.6* sont valables pour les deux modèles.

Mode	Modèle brochette	Mod. masse continue
Élongation	6.94 Hz	7.00 Hz
Torsion	4.49 Hz	4.66 Hz
Flexion d'axe \mathbf{e}_2	2.02 Hz	2.16 Hz
Flexion d'axe \mathbf{e}_3	2.41 Hz	2.53 Hz

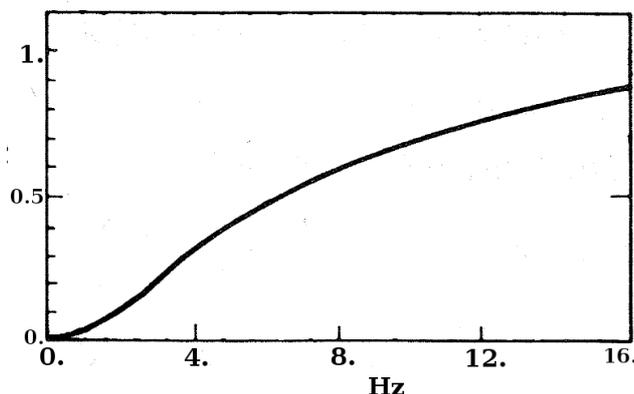


Figure VII.9 Abaque représentant les variations du coefficient dynamique d_{r1}^{dyn} en fonction de la fréquence.

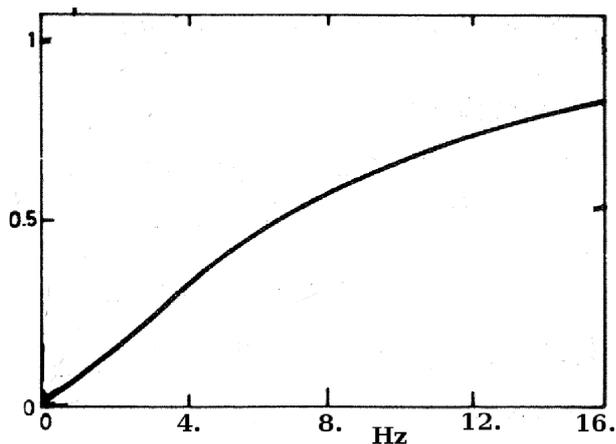


Figure VII.10 Abaque représentant les variations du coefficient dynamique d_{r2}^{dyn} en fonction de la fréquence.

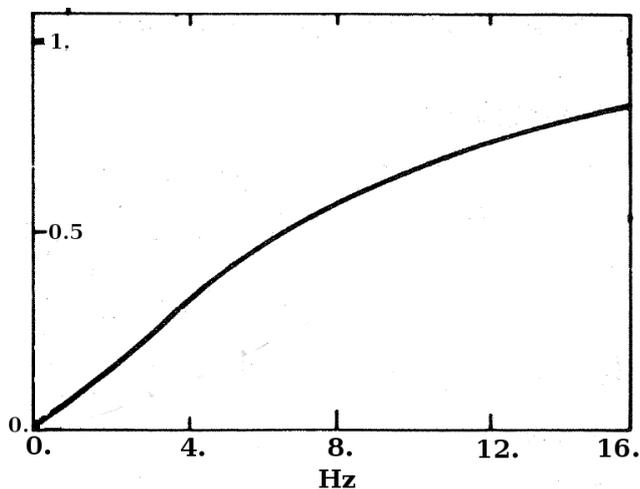


Figure VII.11 Abaque représentant les variations du coefficient dynamique d_{r3}^{dyn} en fonction de la fréquence.

Table VII.6 – Coefficients d’amortissement dynamiques	
$d_{t1}^{dyn} = 1, d_{t2}^{dyn} = 1, d_{t3}^{dyn} = 1$	
$d_{r1}^{dyn1} = 0.36$	$d_{r1}^{dyn2} = 0.67$
$d_{r2}^{dyn1} = 0.13$	$d_{r2}^{dyn2} = 0.70$
$d_{r3}^{dyn1} = 0.15$	$d_{r3}^{dyn2} = 0.75$

$D_{t1} = 4.04.10^8 N.m^{-1}.s$	$D_{r1} = 1.83.10^{10} N.m.s$
$D_{t2} = 4.05.10^8 N.m^{-1}.s$	$D_{r2} = 1.67.10^{10} N.m.s$
$D_{t3} = 3.23.10^8 N.m^{-1}.s$	$D_{r3} = 0.58.10^{10} N.m.s$
$D_{t2r3} = 3.65.10^8 N.s$	$D_{t3r2} = 2.90.10^8 N.s$

VII.2 Etude dynamique déterministe

La structure $\Omega = \{\text{bâtiment} + \text{fondation} + \text{sol de fondation}\}$ est, comme on l'a expliqué en VI.1, constituée d'une partie déterministe $\Omega_b = \{\text{bâtiment}\}$ et d'une partie avec incertitudes $\Omega_f \cup \Omega_s = \{\text{fondation} + \text{sol de fondation}\}$. Dans un premier temps, on va étudier la dynamique de la partie $\{\text{bâtiment}\}$ seule, *i.e.* l'analyse modale du corps élastique Ω_b avec encastrement sur son interface $\partial\Omega_b \cap \partial\Omega_f$, pour les différentes modélisations réduites de poutre présentées au *chapitre VI* ainsi que pour la modélisation par éléments finis (MEF) non réduite. Dans un second temps, on étudiera le comportement dynamique de l'ensemble Ω pour la modélisation moyenne de l'interaction sol fondation.

Les propriétés élastiques des différents modèles sont données dans les *Figure III.4* et *Figure III.6*. La *Table VII.8* présente les paramètres inertiels des deux modèles réduits.

M. brochette	M. masse continue
$m_{sto} = 5.05.10^5 kg$	$\rho_l = 1.87.10^5 kg.m^{-1}$
$J_1 = 6.20.10^7 kg.m^2$	$\rho_1 = 2.30.10^7 kg.m$
$J_2 = 6.42.10^7 kg.m^2$	$\rho_2 = 2.38.10^7 kg.m$
$J_3 = 6.24.10^7 kg.m^2$	$\rho_3 = 2.31.10^7 kg.m$

VII.2.1 Analyse modale du bâtiment

Ce que l'on souhaite faire ici est établir une comparaison entre les modes vibratoires des deux modèles réduits du bâtiment et de la modélisation non réduite par éléments finis (voir *Figure III.14*) pour des conditions de bord équivalentes.

Le modèle brochette (LMM) et le modèle de poutre à masse continue (CMM) sont **encastrés** à leur extrémité inférieure ($x_1 = 0$) et **libres** de l'autre ($x_1 = H$). La modélisation

non réduite du bâtiment par la méthode des éléments finis est soumise à des conditions de bord équivalentes, à savoir le blocage des 6 degrés de liberté (3 translations et 3 rotations) de chacun des nœuds correspondant à l'interface du bâtiment avec la fondation et absence de conditions cinématiques et de forces ou couples appliqués aux nœuds de la toiture.

La comparaison des modes issus de différentes modélisations d'un même corps nécessite l'identification des modes entre les modèles en question. Cette identification ne peut se faire que par le biais des déformées modales. Or, les trois modèles concernés n'utilisent pas les mêmes variables cinématiques, il est donc nécessaire d'établir une description commune. Le seul choix pertinent est d'adopter la description cinématique du modèle brochette qui est le plus "concis" des trois. On va donc "projeter" la cinématique des deux autres modèles sur celle du modèle brochette.

Projection de la modélisation non réduite

La cinématique de cette modélisation est constituée par les 3 composantes de déplacement et les 3 composantes de rotation associées à chaque nœud. Le modèle brochette décrit quant à lui les mouvements des étages de façon rigide, si bien qu'à chaque étage sont associés les 6 degrés de liberté de corps rigide.

On note $(U_p^{(n)}, p = 1, \dots, 6)$ les 6 degrés de liberté du nœud n du maillage complet du bâtiment et $\mathcal{N}_k^{\text{sto}}$ l'ensemble des nœuds constituant le maillage du $k^{\text{ième}}$ étage. Pour obtenir le mouvement de corps rigide équivalent de l'étage k , on utilise une simple opération de moyenne telle que celle définie en (II.45) pour chaque degré de liberté p :

$$\langle U_p \rangle_{(k)} = \frac{1}{\text{card}(\mathcal{N}_k^{\text{sto}})} \sum_{n \in \mathcal{N}_k^{\text{sto}}} U_p^{(n)} \quad (\text{VII.1})$$

avec $\text{card}(\)$ qui désigne le nombre cardinal.

Projection du modèle de poutre à masse continue

La description cinématique de ce modèle est assez proche de celle du modèle brochette et est définie par les champs correspondant aux 6 degrés de liberté de section droite. Ainsi la restriction de ces champs à l'intervalle $[(k-1)h, kh]$ est associée à la cinématique de l'étage k , h étant la hauteur d'un étage. Pour obtenir le mouvement de corps rigide de l'étage, il suffit donc de calculer les moyennes des ces 6 champs formant le champ vectoriel \mathbf{X} défini en VI.3 sur l'intervalle concerné:

$$\langle X_p(x_1, t) \rangle_{(k)} = \frac{1}{h} \int_{(k-1)h}^{kh} X_p(x_1, t) dx_1 \quad \forall p = 1, \dots, 6 \quad (\text{VII.2})$$

La forme analytique des ondes dans la poutre est déterminée en VI.3.1, étant donnée celle-ci, on a:

$$\langle X_p(x_1, t) \rangle_{(k)} = \frac{1}{h} \int_{(k-1)h}^{kh} \sum_n \phi_n e^{r_n x_1} dx_1 = \sum_n \frac{\phi_n}{hr_n} e^{r_n kh} (1 - e^{-r_n h}) \quad (\text{VII.3})$$

Identification des déformées modales

Les déformées modales des trois modèles ont maintenant une description cinématique commune par des vecteurs de $\mathbb{R}^{N_{\text{sto}}}$ avec N_{sto} le nombre d'étages du bâtiment. On note $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire euclidien usuel sur $\mathbb{R}^{N_{\text{sto}}}$ et $\|.\|$ sa norme associée. On utilise la matrice [MAC] (*Modal Assurance Criterion*) élaborée par Allemang et Brown [108] pour mesurer la corrélation entre les déformées modales $\Phi_p^{(a)} \in \mathbb{R}^{N_{\text{sto}}}$ d'un modèle (a) et $\Phi_q^{(b)} \in \mathbb{R}^{N_{\text{sto}}}$ d'un modèle (b). La matrice [MAC] est définie par:

$$[\text{MAC}]_{pq} = \frac{\langle \Phi_p^{(a)}, \Phi_q^{(b)} \rangle^2}{\langle \Phi_p^{(a)}, \Phi_p^{(a)} \rangle \langle \Phi_q^{(b)}, \Phi_q^{(b)} \rangle} \quad (\text{VII.4})$$

où les $\Phi_p^{(a)}$ et $\Phi_q^{(b)}$ sont classées par ordre de fréquence croissante.

En observant de manière brute les résultats obtenus pour la matrice de MAC entre la modélisation complète du bâtiment par éléments finis et les modélisations réduites, on observe tantôt une absence de corrélation de certains modes de la représentation par MEF avec les modes des LMM et CMM et tantôt des corrélations multiples pour un mode donné des modèles réduits. Certains modes issus du modèle complet mettent en jeu d'importantes vibrations des éléments internes de la structure tels que les planchers et les murs. Ces vibrations des éléments structuraux internes s'accompagnent généralement d'un mouvement macroscopique. Seul ce mouvement peut être caractérisé par la représentation réduite issue de l'opération de moyenne (VII.1). On peut par conséquent parler de modes d'ensemble ou modes macroscopiques et de "modes internes". Deux situations se produisent alors: soit le mouvement moyen du mode interne est proportionnellement proche d'un mode macroscopique, on observe à ce moment des corrélations multiples ou ce n'est pas le cas et le mode interne corrèle peu avec les modes des modèles réduits. La *Figure VII.12* représente graphiquement la matrice de [MAC] entre les modes de torsion de la représentation MEF et du LMM et illustre les remarques précédentes concernant les "modes internes". Les modes de torsions 1, 2 et 3 de la MEF corrèlent avec le LMM et correspondent à des modes macroscopiques. Le mode 4 issu de la MEF est un mode interne dont le mouvement moyen corrèle bien avec le mode 3 du LMM. Les *Figure VII.13* et *Figure VII.14* donnent une représentation tridimensionnelle des modes 3 et 4 issus de la MEF. Le mode 5 est un mode interne ne corrélant avec aucun mode du LMM.

Un critère permettant de faire le tri entre les modes macroscopiques et les modes internes est l'indicateur énergétique donnant la fraction de la puissance maximale de déformation locale. On note \mathcal{E}_Φ l'énergie de déformation de la déformée modale pour un mode donné issu de la MEF et Φ la déformée modale macroscopique associée déterminée à l'aide de l'opération de moyenne (VII.1). L'énergie de déformation macroscopique $\mathcal{E}_\Phi^{\text{macro}}(\Phi)$ se calcule à l'aide de l'expression (II.71). La fraction de puissance de déformation interne $0 < \eta_{\text{int}} < 1$ caractérise un mode macroscopique pour une valeur proche de 0 et un mode à vibration interne pour une valeur 1:

$$\eta_{\text{int}} = \frac{\mathcal{E}_\Phi - \mathcal{E}_\Phi^{\text{macro}}(\Phi)}{\mathcal{E}_\Phi}$$

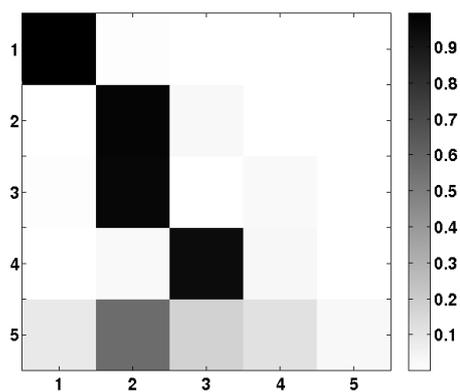


Figure VII.12 MAC entre les modes de torsions de la représentation MEF et du LMM.

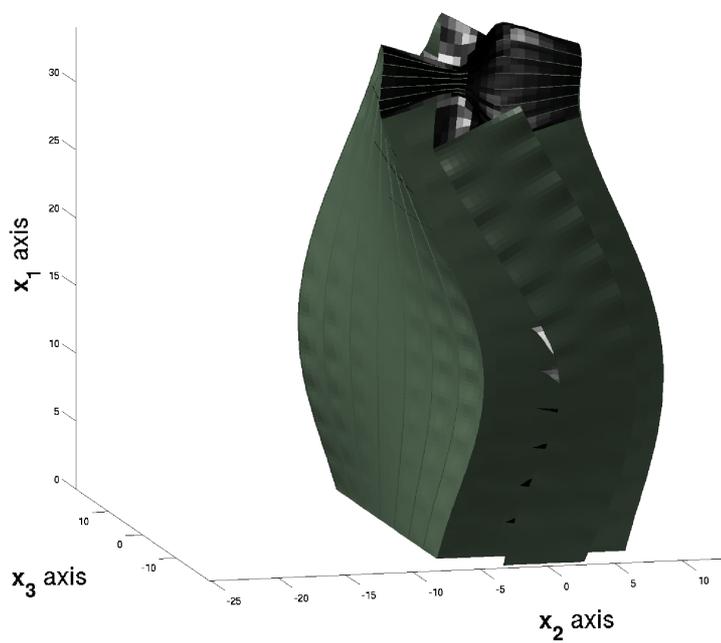


Figure VII.13 Le 3^{ème} mode de torsion est macroscopique.

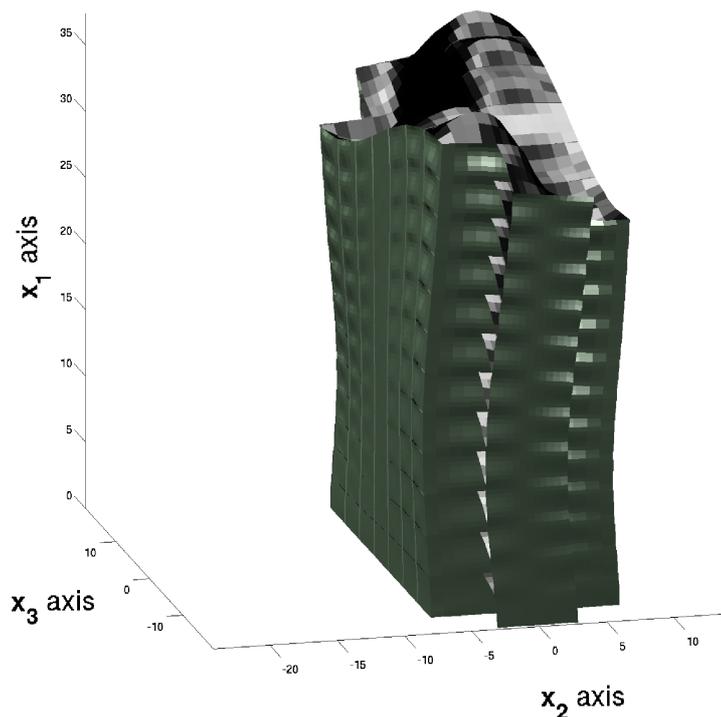


Figure VII.14 Le 4^{ème} est une vibration de planchers accompagnée d'un mouvement de torsion proche de celui du mode 3.

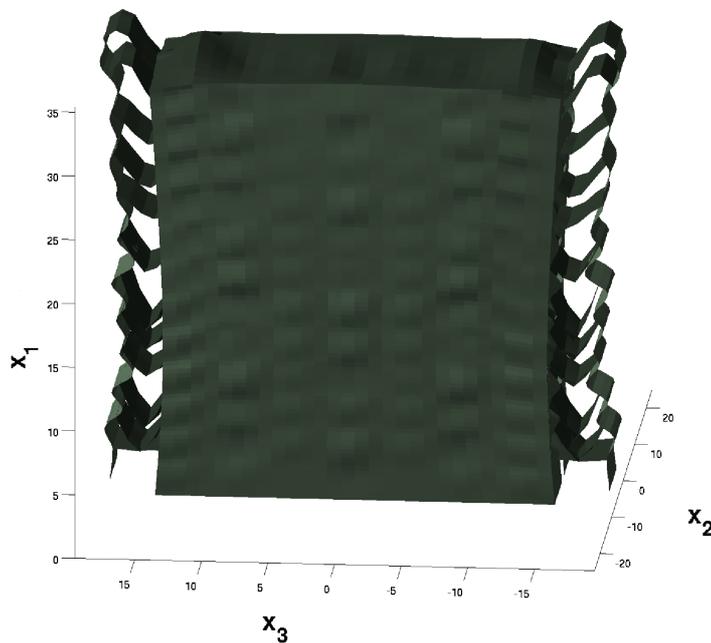


Figure VII.15 L'essentiel des déformations élastiques de ce mode interne provient des éléments d'accès latéraux.

Les résultats de corrélation entre les modes des différents modèles à l'aide de matrices de MAC sont représentés graphiquement par les Figure VII.16, Figure VII.17 et Figure

VII.18 pour la corrélation entre les modes issus de la représentation du bâtiment par la MEF et ceux issus du modèle brochette (LMM). Les résultats de corrélation entre la modélisation par MEF et le modèle réduit à masse continue (CMM) sont similaires. Les autoMAC, *i.e.* la matrice de MAC des modes d'un modèle avec lui-même, sont présentés afin de donner une information sur le niveau de corrélation entre les déformées modales issues d'un même modèle. On voit ainsi que les déformées des composantes de rotation des 3 premiers modes de flexion ont une forte autocorrélation que l'on retrouve dans les matrices de MAC.

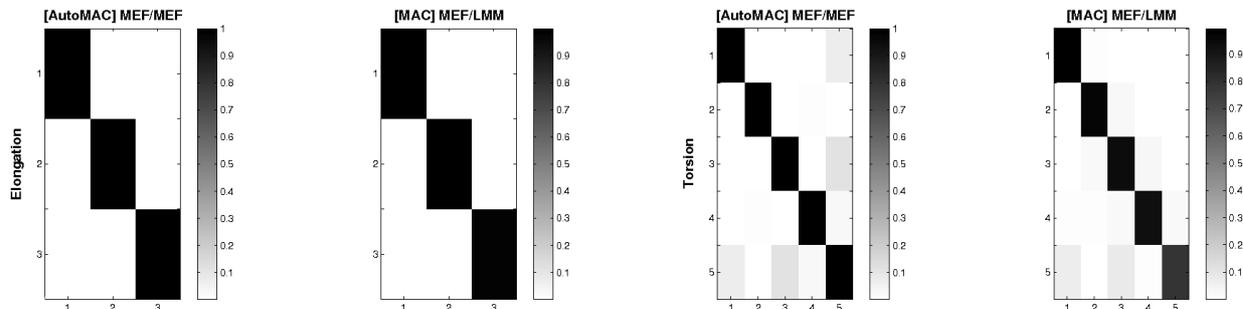


Figure VII.16

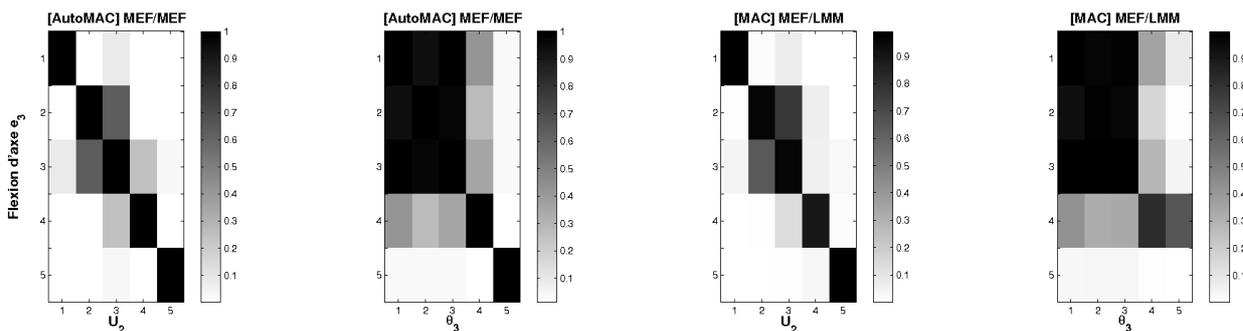


Figure VII.17

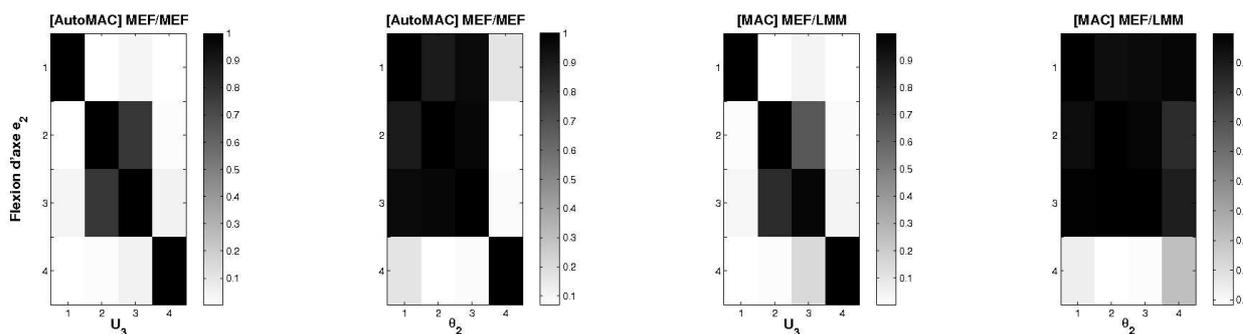


Figure VII.18

Les fréquences propres des modes corrélés sont rassemblées dans le tableau *Table VII.9*. De manière générale, le modèle CMM avec distribution de masse continue, donne une meilleure approximation des fréquence propres du modèle complet. On peut en déduire

qu'une distribution optimale de la masse pourrait être obtenue en construisant un modèle mixte CMM/LMM dont l'inertie par unité de longueur serait associée à celle des murs et auquel on adjoindrait des inerties concentrées pour les planchers.

L'estimation par les modèles réduits LMM et CMM de la fréquence propre du premier mode d'élongation de la modélisation complète est bonne (1.3% et 6% d'écart). Par contre, elle se dégrade rapidement pour les modes supérieurs en raison des vibrations internes, dont on a parlé plus haut, accompagnant les modes macroscopiques. Ces vibrations étant principalement des vibrations de membrane des planchers et des vibrations des rampes d'accès du bâtiment sur les côtés.

Le niveau d'erreur de l'estimation des fréquences propres de torsion est en revanche plus stable. Il est de 10 à 15% pour les 3 premiers modes et entre 20 et 25% pour les modes 4 et 5. On peut penser que cet écart est en bonne partie dû à une sous estimation de la raideur de torsion du bâtiment durant la phase d'homogénéisation du processus de réduction du modèle MEF.

Les fréquences propres des modes de flexion d'axe bfe_2 sont bien estimées avec un niveau d'erreur inférieur à 7% pour le LMM et inférieur à 3% pour le CMM, et ce, malgré la sous estimation de la raideur K_{33} indiquée par les tests de localisation pratiqués en III.5.3.

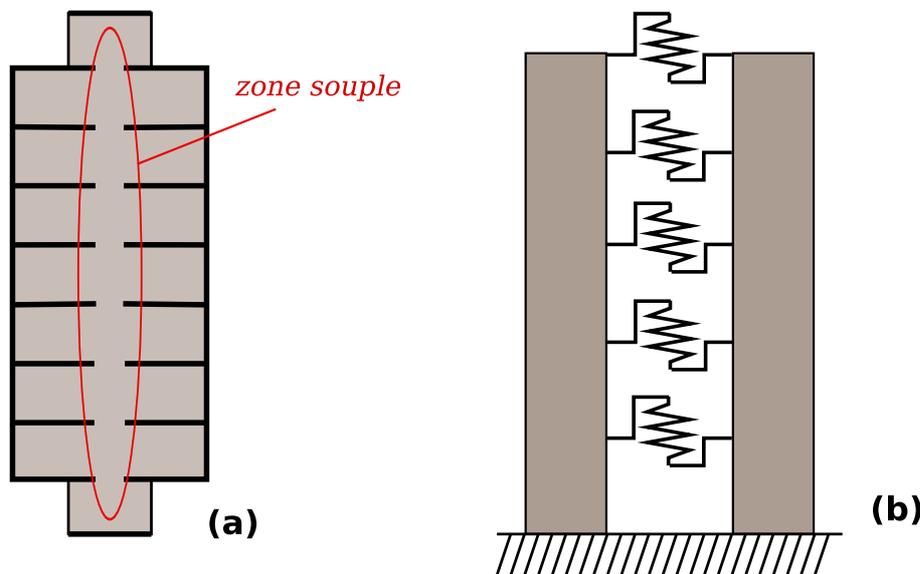


Figure VII.19 (a) zone souple associée aux ressorts de cisaillement du modèle à deux poutres (b).

Ces mêmes tests des données de localisation indiquent une bien meilleure estimation de la raideur équivalente de poutre K_{22} . Pourtant, les fréquences propres des modes de flexion d'axe e_3 sont mal évaluées. La fréquence du premier mode est donnée par les modèles LMM et CMM avec une erreur respective de 9% et 6%. Cependant, on observe dès le second mode un important écart au alentours de 35% que l'on retrouve pour les modes suivants. Ce saut brutal est dû à la topologie particulière du bâtiment choisi. Comme le montre la Table III.13, les étages du bâtiment sont constitués de deux blocs de murs reliés par les planchers. On a donc au centre de la structure une zone souple dont la rigidité est exclusivement assurée par les planchers. Les deux blocs de murs tendent alors

à avoir des mouvements indépendants. Comme l'illustre la *Figure VII.19*, le comportement mécanique d'ensemble de la structure correspond donc davantage à deux poutres parallèles reliées par des ressorts de cisaillement (milieu des planchers). La *Figure VII.20* est une représentation tridimensionnelle du second mode de flexion d'axe \mathbf{e}_3 où l'on voit très nettement le gauchissement brutal au centre des planchers. On observait déjà ce gauchissement sur la *Figure III.21*. Néanmoins ce problème de modélisation dynamique n'en est pas un en statique. Conformément aux remarques faites en II.7 sur l'homogénéisation dynamique, les limitations des modèles réduits par homogénéisation ne sont pas les mêmes en statique et en dynamique.

Les normes sismiques PS92 donnent une estimation du mode fondamental de vibration transverse d'un bâtiment multi étagé avec sol rigide. Cette estimation est basée sur une modélisation de type LMM et donne une fréquence fondamentale f_1 par la formule extrinsèque suivante:

$$f_1 = \frac{\sqrt{L}}{0.06 H} \sqrt{\frac{2L + H}{H}}$$

avec L (en m) la dimension du bâtiment dans la direction d'excitation et H (en m) la hauteur de la construction. Cette formule donne des fréquences fondamentales de 4.76 Hz et 2.63 Hz pour les premiers modes de flexion respectivement d'axe \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 . Cette estimation est bonne pour les modes de flexion d'axe \mathbf{e}_2 mais mauvaise pour les modes de flexion d'axe \mathbf{e}_3 en raison de la structure particulière de la construction évoquée par la *Figure VII.19*.

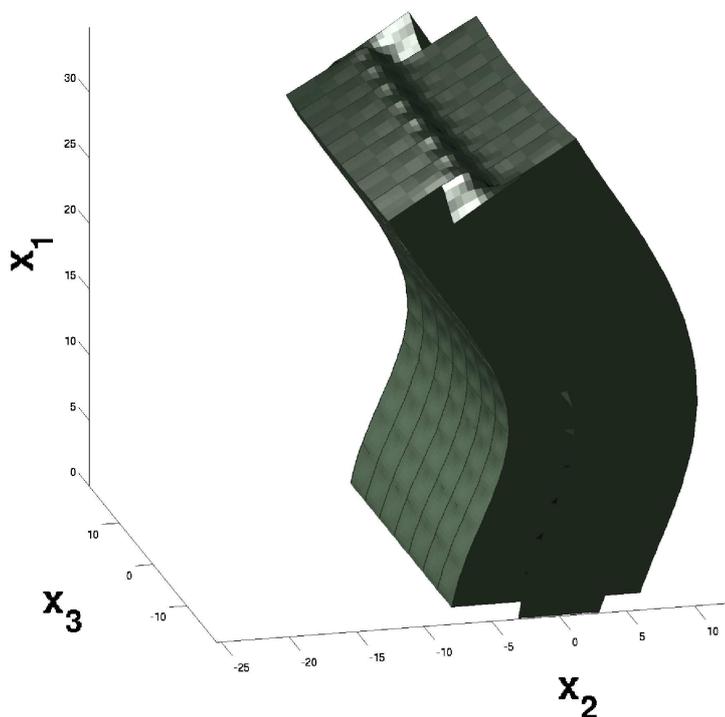


Figure VII.20

Table VII.9 – Fréquences propres des modes impliqués par les MAC.		
■ Modes d'élongation		
MEF (Hz)	LMM (Hz)	CMM (Hz)
14.3	14.5	15.2
34.4	43.6	45.6
43.3	71.8	76.1
■ Modes de torsion		
5.6	4.8	5.0
17.1	14.4	15.0
30.1	23.7	25.1
43.2	32.6	35.1
56.1	41.1	45.1
■ Modes de flexion d'axe \mathbf{e}_2		
4.7	4.3	4.6
13.0	12.1	12.7
19.0	17.8	18.4
24.1	23.3	24.7
■ Modes de flexion d'axe \mathbf{e}_3		
3.2	2.9	3.0
11.7	7.3	7.6
19.5	12.1	12.6
24.0	16.8	17.8
37.0	22.2	23.2

VII.2.2 Analyse modale avec interaction sol fondation

La *Table VII.5* donne un premier résultat sur le comportement vibratoire du bâtiment avec interaction sol fondation. Ces premiers modes sont ceux où l'essentiel des déformations est situé au niveau du sol. Plus le sol est souple vis-à-vis de la construction et plus les modes en question tendent vers les modes de vibration d'un corps rigide interagissant avec le sol. Le corps rigide en question a une masse totale M_b correspondant à celle de l'ensemble $\Omega_b \cup \Omega_f = \{\text{bâtiment} + \text{fondation}\}$ (voir *Figure VI.1*) et une matrice d'inertie $[\mathbf{J}_b] = \mathbf{diag}(J_{b1}, J_{b2}, J_{b3})$ par rapport aux axes du référentiel \mathcal{R}_O défini au début du *chapitre V*. Les fréquences propres d'oscillations du corps rigide en interaction avec le sol

sont solutions de l'équation:

$$\left| -\omega^2 \left(\begin{pmatrix} M_b[\mathbb{1}_3] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{J}_b] \end{pmatrix} + [\mathbf{M}_{ad}] \right) - [\mathbf{K}_{s0}] \right| = 0$$

Il y a deux fréquences propres pour chaque mode de balancement, on ne conservera que la première. Les 4 premières fréquences propres sont données dans le tableau *Table VII.10*. On note immédiatement que ces fréquences sont bien supérieures à celles des premiers modes de la *Table VII.5*. Cet écart implique que les premiers modes de vibrations de la construction en interaction avec le sol mettent en jeu une déformation non négligeable de celle-ci. Plus l'écart est faible et moins le bâtiment se déforme. On peut par exemple en déduire que le bâtiment se déforme peu dans son premier mode vertical avec interaction de sol.

Mode	Fréquence (Hz)
Élongation	7.60
Torsion	10.6
Flexion d'axe \mathbf{e}_2	2.99
Flexion d'axe \mathbf{e}_3	3.04

La fonction de réponse en fréquence normalisée d'un système dynamique linéaire caractérisé par une matrice de masse $[\mathbf{M}] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$, une matrice d'amortissement $[\mathbf{D}] \in \mathbb{M}_n^{0+}(\mathbb{R})$ et une matrice de raideur $[\mathbf{K}] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ est définie par:

$$\text{FRF} : \omega \mapsto \| [\mathbf{K}] (-\omega^2[\mathbf{M}] + i\omega[\mathbf{D}] + [\mathbf{K}])^{-1} \| \quad (\text{VII.5})$$

Cette fonction peut être définie pour différentes normes matricielles. La norme d'opérateur qui est égale au plus grand module des valeurs singulières fait particulièrement ressortir les pics de résonance. La norme de *Frobénius* qui est égale à la somme des modules des valeurs singulières caractérise l'énergie du système dans son ensemble. Pour la norme de *Frobénius* il faut néanmoins renormer l'application par rapport à la norme de l'unité $\|[\mathbb{1}_n]\|_F = \sqrt{n}$. La *Figure VII.22* donne la fonction FRF du LMM définie à partir de la norme d'opérateur pour différents taux d'amortissement structural. Le cas $\beta_0 = 0$ en trait plein correspond à la réponse en fréquence pour le seul amortissement d'impédance de fondation. On observe une importante atténuation de la réponse en fréquence entre 0% et 1%. Le taux d'amortissement structural pour une construction étant de l'ordre du pourcent, on en déduit que la plus grande partie de l'énergie mécanique est dissipée dans la structure plutôt qu'irradiée par le sol.

Les fonctions FRF pour le CMM et le LMM sont très proches. La *Figure VII.22* présente les FRF du LMM et du CMM en absence d'amortissement structural. Les réponses de la structure pour chaque modélisation s'écartent à partir de 20 Hz à cause de la différence de distribution inertielle de ces deux derniers.

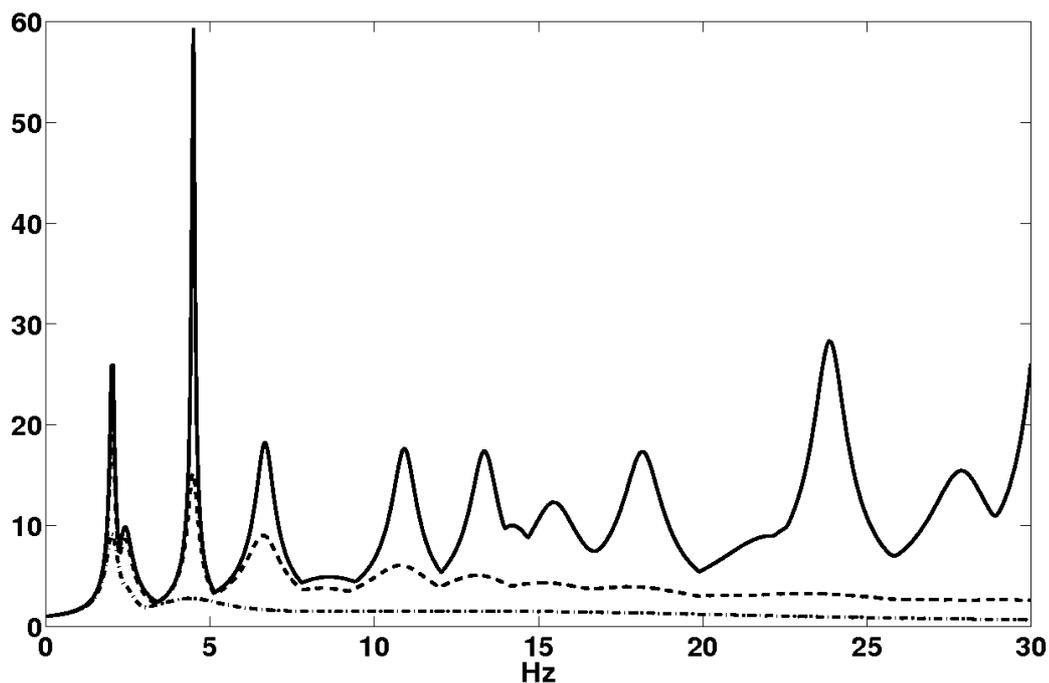


Figure VII.21 Fonctions de réponse en fréquence FRF du LMM en échelle logarithmique pour différents taux d'amortissement structural: (trait plein) $\beta_0 = 0$ – (tirets) $\beta_0 = 0.011$ (0.1 % sur le 1^{er} mode) – (tiret point) $\beta_0 = 0.11$ (1 % sur le 1^{er} mode).

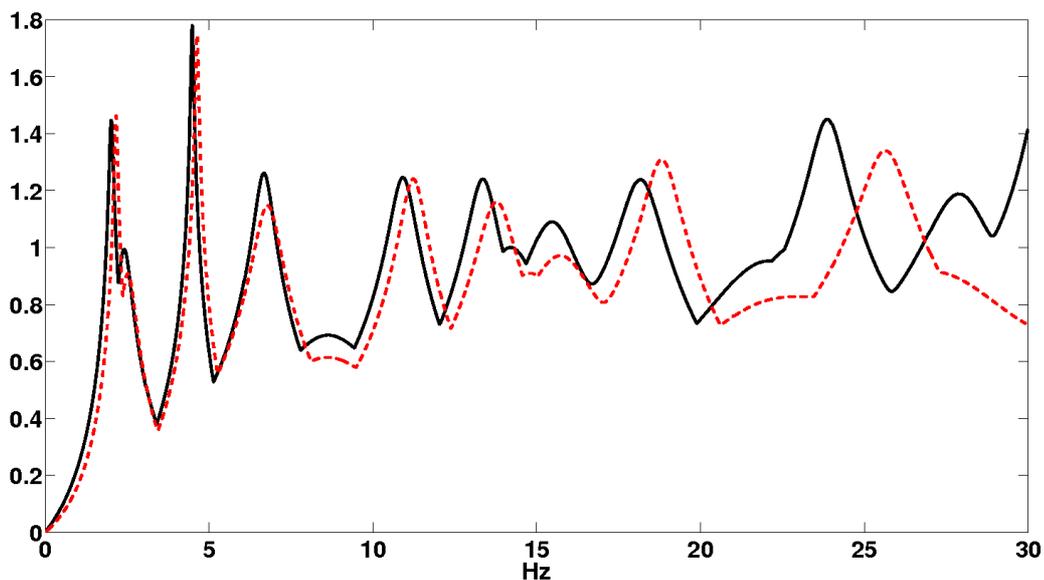


Figure VII.22 Fonctions de réponse en fréquence FRF du LMM (trait plein) et du CMM (tirets) en échelle logarithmique en absence d'amortissement structural ($\beta_0 = 0$).

Les systèmes d'équations linéaires dynamiques en temps (VI.23) et (VI.60) sont résolus à l'aide du schéma aux différences de *Newmark* dont le détail est donné en annexe B.2. La Figure VII.23 et la Figure VII.24 donnent la réponse en accélération pour les deux modèles réduits du bâtiment. Le séisme est l'évènement de *Parkfield* du 28 septembre 2004 et la

structure est munie d'un amortissement structural de Rayleigh proportionnel à la raideur et calibré à 3% sur la première fréquence modale. La valeur de ce taux d'amortissement s'appuie sur l'ordre de grandeur des mesures expérimentales réalisées par Hans *et al.* dans [67], en particulier celles se rapportant au bâtiment C dont la morphologie est proche du bâtiment de la *Figure III.13*. Les modèles sont réduits sur les modes de fréquence propre inférieure à 200 Hz, à savoir 71 modes pour le LMM et 97 pour le CMM.

Le déplacement de l'étage n du bâtiment est défini par:

$$\mathbf{U}^{(n)}(t) = \left(X_n(t), X_{n+N_{\text{sto}}}(t), X_{n+2N_{\text{sto}}}(t) \right) \quad (\text{LMM})$$

$$\mathbf{U}^{(n)}(t) = \left(\ddot{X}_1(x_1 = nh, t), \ddot{X}_2(x_1 = nh, t), \ddot{X}_3(x_1 = nh, t) \right) \quad (\text{CMM})$$

Les pics maximaux d'accélération (PA), de vitesse (PV) et de déplacement (PD) en un étage n du bâtiment sont définis par

$$PA = \max_t \left\| \ddot{\mathbf{U}}^{(n)}(t) \right\|, \quad PV = \max_t \left\| \dot{\mathbf{U}}^{(n)}(t) \right\|, \quad PD = \max_t \left\| \mathbf{U}^{(n)}(t) \right\| \quad (\text{VII.6})$$

Leur valeurs au sommet du bâtiment sont exposées pour chaque modèle dans la *Table VII.11*. La réponse des deux modèles concorde bien (environ 1% d'écart) pour le taux d'amortissement structural de 3%.

<i>Table VII.11</i>		
	LMM	CMM
PA ($m.s^{-2}$)	5.87	5.94
PV ($m.s^{-1}$)	2.49	2.27
PD (m)	1.39	1.24

Les courbes de convergence *Figure VII.25* montrent que la réduction modale aux modes de fréquences propres inférieures à 200 Hz peut être restreinte. Deux indicateurs de convergence modale basés sur la réponse en accélération sont employés. Celle est très prisée par l'ingénierie sismique car elle est liée aux forces d'inertie. L'indicateur $\text{Conv}_{L_2}^{\text{mod}}(p)$ donne le carré de la norme L_2 de la réponse en accélération pour une réduction aux modes 1 à p sur la durée complète du signal ($0 \leq t \leq T$):

$$\text{Conv}_{L_2}^{\text{mod}}(p) = \|\ddot{\mathbf{U}}^{(n),p}(t)\|_{L_2}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \langle \mathbf{U}^{(n)}(t), \mathbf{U}^{(n),p}(t) \rangle dt$$

où $\langle ., . \rangle$ est le produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^3 et $\mathbf{U}^{(n),p}(t)$ le déplacement de l'étage pour la réduction au mode p . Cet indicateur donne une mesure globale du signal qui garantit une convergence de l'énergie du signal de réponse.

Le second indicateur noté $\text{Conv}_{PA}^{\text{mod}}(p)$ est tout simplement le pic d'accélération PA défini en (VII.6). Cet indicateur s'avère utile si on dimensionne la structure par rapport à son pic d'accélération au sommet.

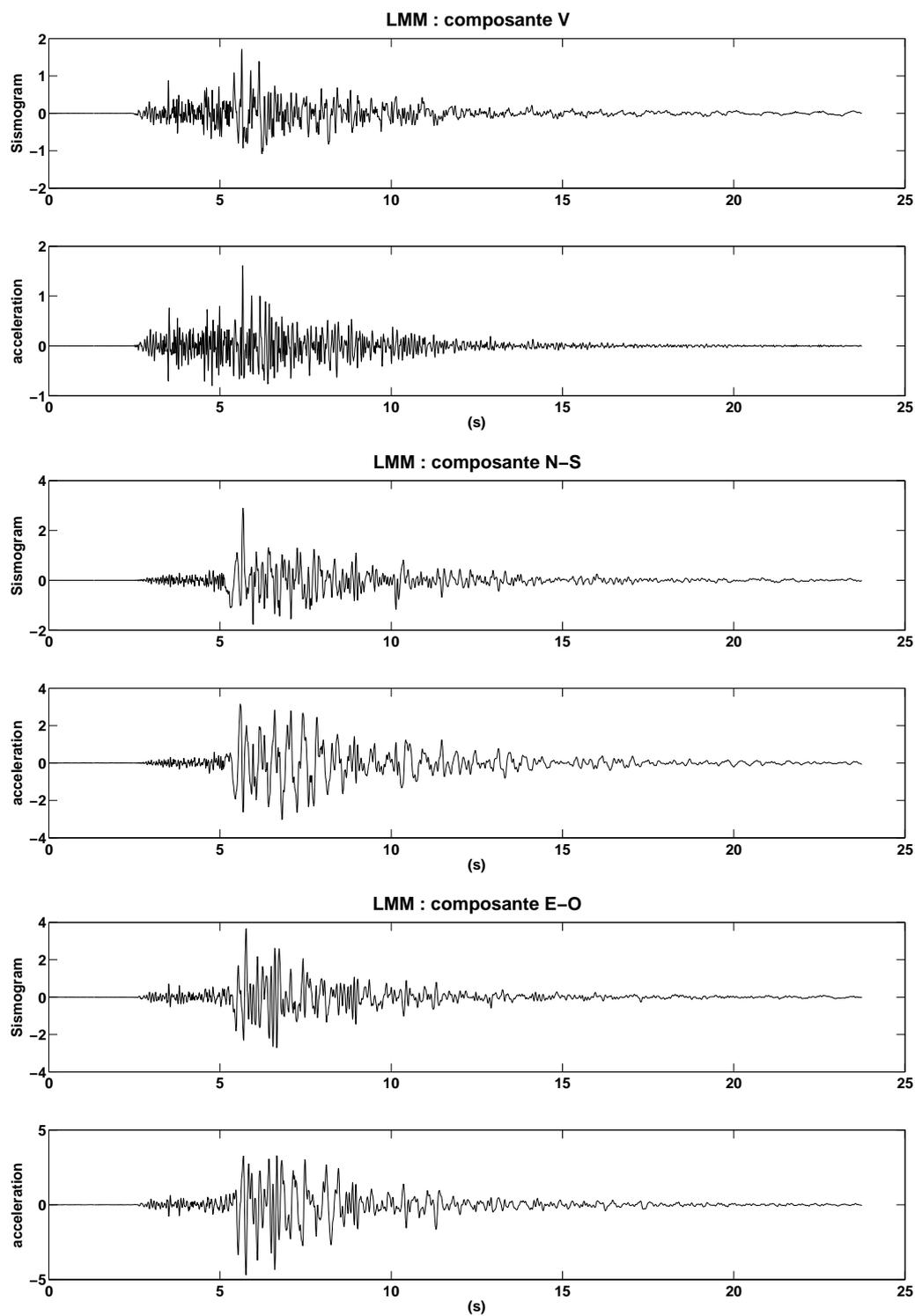


Figure VII.23 Réponse temporelle du LMM pour $\beta_0 = 3\%$.

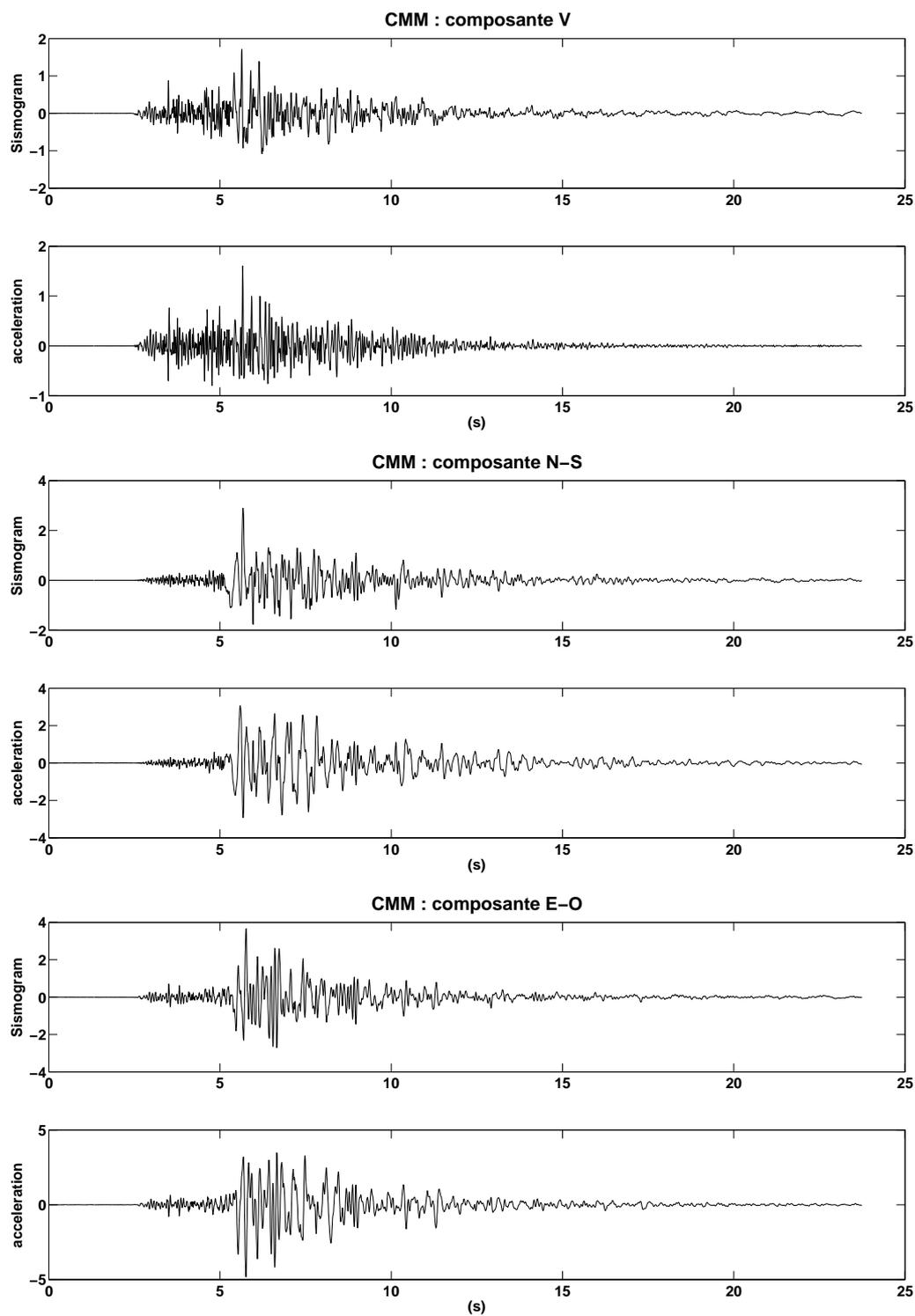


Figure VII.24 Réponse temporelle du CMM pour $\beta_0 = 3\%$.

La Table VII.12 indique le nombre de modes nécessaires pour que les indicateurs soient à moins de 1% de la valeur limite ainsi que les fréquences de troncature associées. L'indicateur $\text{Conv}_{L_2}^{\text{mod}}(p)$ converge moins vite que l'indicateur $\text{Conv}_{PA}^{\text{mod}}(p)$, ce qui est dû au pic de la composante verticale de réponse en accélération à 5.7 s. On peut montrer par une étude de convergence sur la composante verticale que l'indicateur $\text{Conv}_{PA}^{\text{mod}}(p)$ dépend principalement des 3 premiers modes d'élongation. On constate en outre qu ces indicateurs convergent plus rapidement pour le CMM que pour le LMM.

<i>Table VII.12</i>		
	nomb. de modes	fréq. de coupure
$\text{Conv}_{L_2}^{\text{mod}}$ (LMM)	35	52.1 Hz
$\text{Conv}_{PA}^{\text{mod}}$ (LMM)	32	50.6 Hz
$\text{Conv}_{L_2}^{\text{mod}}$ (CMM)	25	49.8 Hz
$\text{Conv}_{PA}^{\text{mod}}$ (CMM)	20	36.9 Hz

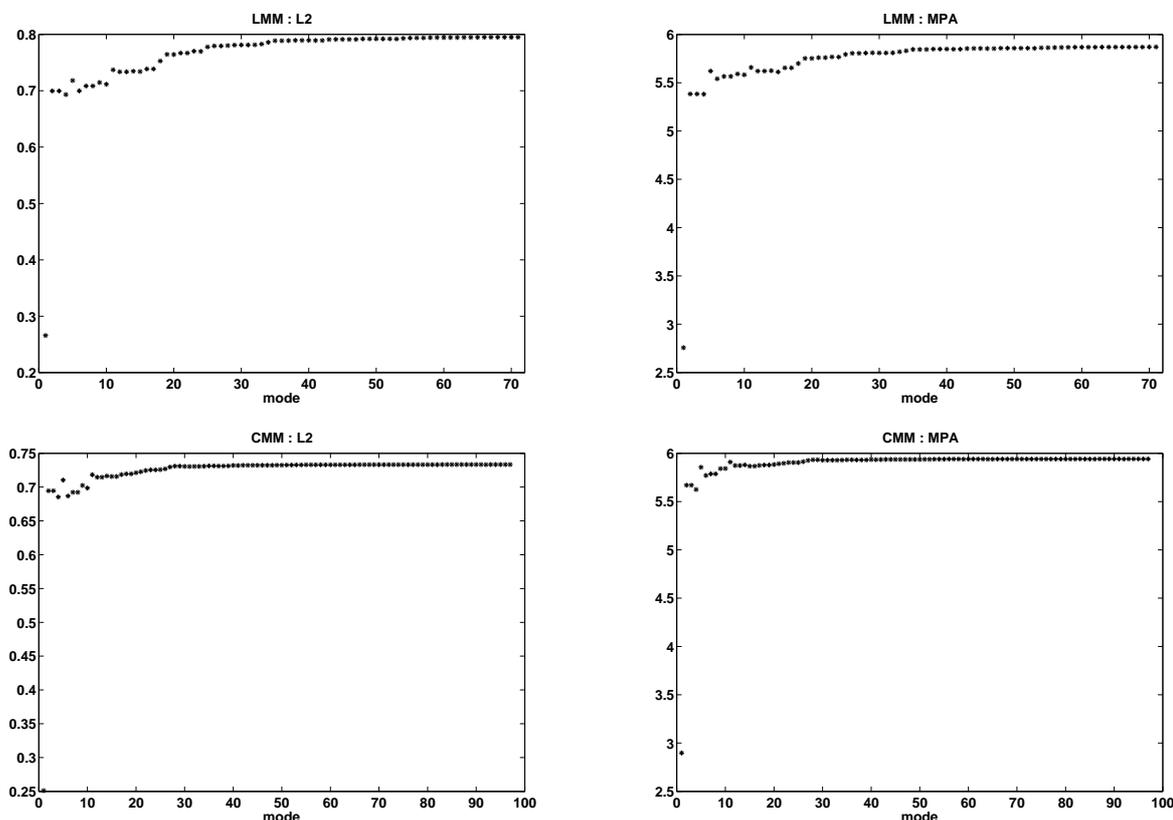


Figure VII.25 Indicateurs de convergence modale $\text{Conv}_{L_2}^{\text{mod}}(p)$ et $\text{Conv}_{PA}^{\text{mod}}(n)$ pour un calcul dynamique avec un taux d'amortissement $\beta_0 = 3\%$.

VII.3 Etude dynamique stochastique

On va étudier ici l'influence des incertitudes dans le comportement mécanique du sol sur le comportement dynamique du bâtiment. La mise en œuvre numérique de la modélisation probabiliste présentée en V.3 est réalisée à l'aide de simulations de *Monte Carlo* (voir par exemple [113]).

Les simulations de *Monte Carlo* s'articulent en 3 étapes:

- Générer des réalisations indépendantes de l'ensemble des variables et matrices aléatoires paramétrant le modèle conformément à leurs lois de probabilités.
- Calculer la réponse du système pour chaque réalisation des variables et matrices aléatoires.
- Étudier les propriétés statistiques des échantillons obtenus pour la réponse du système.

Cette méthode s'applique à n'importe quel type de problème dont on sait calculer la solution pour une réalisation donnée des paramètres le définissant.

VII.3.1 Calcul des paramètres de dispersion

Les paramètres stochastiques du modèle d'interaction sol fondation défini en V.3 sont:

$$\tilde{m}_f \quad , \quad [\tilde{\mathbf{I}}_f] \quad , \quad [\tilde{\mathbf{M}}_{\text{ad}}] \quad , \quad [\tilde{\mathbf{D}}_s] \quad , \quad [\tilde{\mathbf{K}}_s]$$

Les paramètres de dispersion et les références des fonctions de densités de probabilité (FDP) dans lesquelles ils interviennent sont exposés dans la *Table VII.13*. Deux remarques sont à faire concernant les paramètres de dispersion de la masse de fondation \tilde{m}_f et de la matrice $[\tilde{\mathbf{D}}_s]$ d'amortissement radiatif de fondation. Le paramètre de dispersion de la variable \tilde{m}_f ne pouvant être estimé, on le suppose égal à celui de la matrice d'inertie de fondation $[\tilde{\mathbf{I}}_f]$. Le paramètre de dispersion de la matrice d'amortissement radiatif $[\tilde{\mathbf{D}}_s]$ est sous estimé car ne faisant pas porter d'aléas sur les coefficients dynamiques de dissipation. La valeur obtenue est $\delta = 0.3$. Or, on sait que l'incertitude sur l'amortissement intrinsèque n'est pas pris en compte, on adoptera alors la valeur $\delta = 0.5$.

Le calcul de ces paramètres a été mené par une simulation de *Monte Carlo* pour leurs modélisations paramétriques présentées en V.4. Ces modélisations sont basées sur deux informations: le support et la moyenne. On donne ci-dessous ces informations pour la modélisation stochastique des paramètres de sol et de fondation concernés:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_s &\in [0.5G_s, 1.5G_s] = [104, 312] \text{ MPa} \quad , \quad \tilde{\nu}_s \in [0.2, 0.5] \\ \tilde{\rho}_s &\in [0.5\rho_s, 1.5\rho_s] = [850, 2250] \text{ kg.m}^{-3} \\ \tilde{L}_{fi} &\in [0.95, 1.05] L_{fi} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad \tilde{t}_f \in [0.95, 1.05] t_f \quad , \quad \tilde{\rho}_f \in [0.9\rho_f, 1.1\rho_f] \end{aligned}$$

	Table VII.13	
	δ	FDP
$[\tilde{\mathbf{I}}_f]$	0.10	SE_6^+ (V.27)
\tilde{m}_f	0.10	Gamma (V.33)
$[\tilde{\mathbf{M}}_{ad}]$	0.33	SE_6^{0+} (V.27)
$[\tilde{\mathbf{D}}_s]$	0.5	SE_6^+ (V.27)
$[\tilde{\mathbf{K}}_s]$	0.32	SE_6^+ (V.27)

VII.3.2 Évolution de l'énergie mécanique du système

L'énergie mécanique des modèles réduits de bâtiments s'exprime en coordonnées généralisées réduites à partir des matrices modales réduites aléatoires $[\tilde{\mathbf{M}}]$, $[\tilde{\mathbf{D}}]$ et $[\tilde{\mathbf{K}}]$ définies en VI.2.3 pour le modèle à masses concentrées (LMM) et en VI.3.5 pour le modèle à masse continue (CMM):

$$\tilde{\mathcal{E}}(t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}(t)^T [\tilde{\mathbf{M}}] \dot{\mathbf{Q}}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{Q}(t)^T [\tilde{\mathbf{M}}] \mathbf{Q}(t)$$

L'énergie $\tilde{\mathcal{E}}(t)$ est donc un processus stochastique indicé sur le temps. On va estimer certaines propriétés de ce processus par une simulation de *Monte Carlo* à 20000 tirages. La *Figure VII.26* représente le tracé de l'énergie pour le modèle d'interaction sol fondation moyen (représentation déterministe) et celui de la moyenne du processus $\tilde{\mathcal{E}}(t)$ pour la modélisation réduite CMM. Ces deux réponses sont très proches. Leurs normes L_2 diffèrent d'à peine 1 % pour le CMM et le LMM.

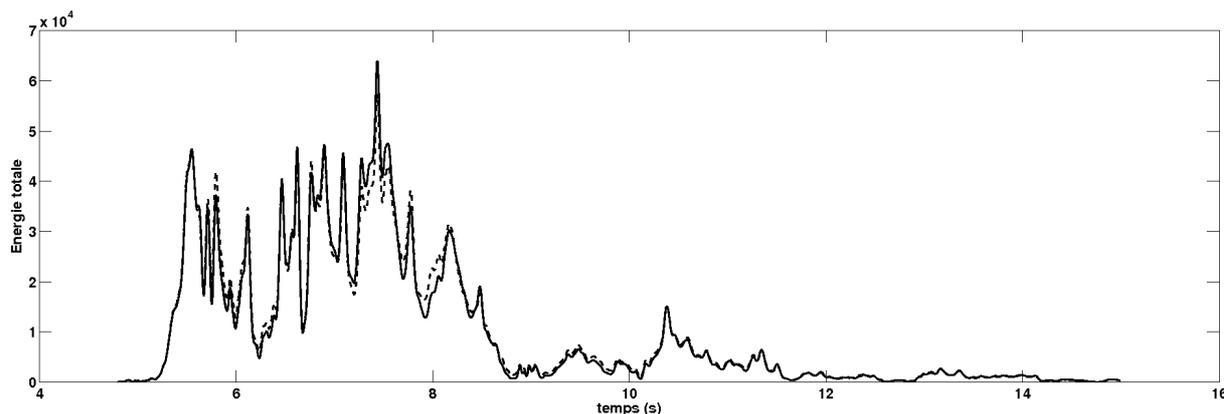


Figure VII.26 (Trait plein) – Énergie mécanique pour le modèle d'interaction sol fondation moyen. (tirets) – Moyenne du processus stochastique $\tilde{\mathcal{E}}(t)$.

On note $Q_{\tilde{X}}(P_0)$ la fonction quantile d'une variable aléatoire \tilde{X} pour une probabilité P_0

donnée. On rappelle que $Q_{\tilde{X}}(P_0)$ est la valeur de la variable aléatoire X telle que sa probabilité d'être inférieure à $Q_{\tilde{X}}(P_0)$ est égale à P_0 . La fonction quantile $Q_{\tilde{\mathcal{E}}}(P_0, t)$ du processus stochastique $\tilde{\mathcal{E}}(t)$ indicé par le temps pour une probabilité P_0 est définie par:

$$Q_{\tilde{\mathcal{E}}} : \begin{cases} [0, 1] \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ P_0, t \mapsto Q_{\tilde{\mathcal{E}}}(P_0, t) = Q_{\tilde{\mathcal{E}}(t)}(P_0) \end{cases}$$

La *Figure VII.27* et la *Figure VII.28* représentent le tracé de la moyenne du processus $\tilde{\mathcal{E}}(t)$ ainsi que ses quantiles à 5 % et 95 % pour chaque date t , *i.e.* le tracé des fonctions $t \mapsto Q_{\tilde{\mathcal{E}}}(0.05, t)$ et $t \mapsto Q_{\tilde{\mathcal{E}}}(0.95, t)$. Ces deux dernières courbes délimitent approximativement l'intervalle de confiance à 90 %:

$$P \left(Q_{\tilde{\mathcal{E}}}(0.05, t) < \tilde{\mathcal{E}}(t) < Q_{\tilde{\mathcal{E}}}(0.95, t) \right) = 0.95 \times (1 - 0.05) \simeq 0.90$$

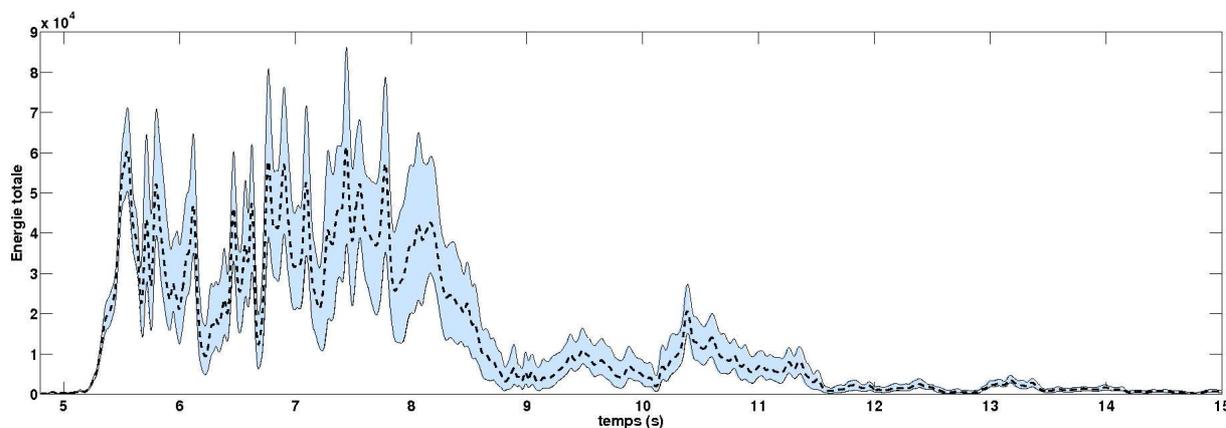


Figure VII.27 [LMM] : (tirets) – Moyenne du processus stochastique $\tilde{\mathcal{E}}(t)$. (zone bleue) – Intervalle de confiance à 90 % encadré par les courbes $Q_{\tilde{\mathcal{E}}}(0.05, t)$ et $Q_{\tilde{\mathcal{E}}}(0.95, t)$.

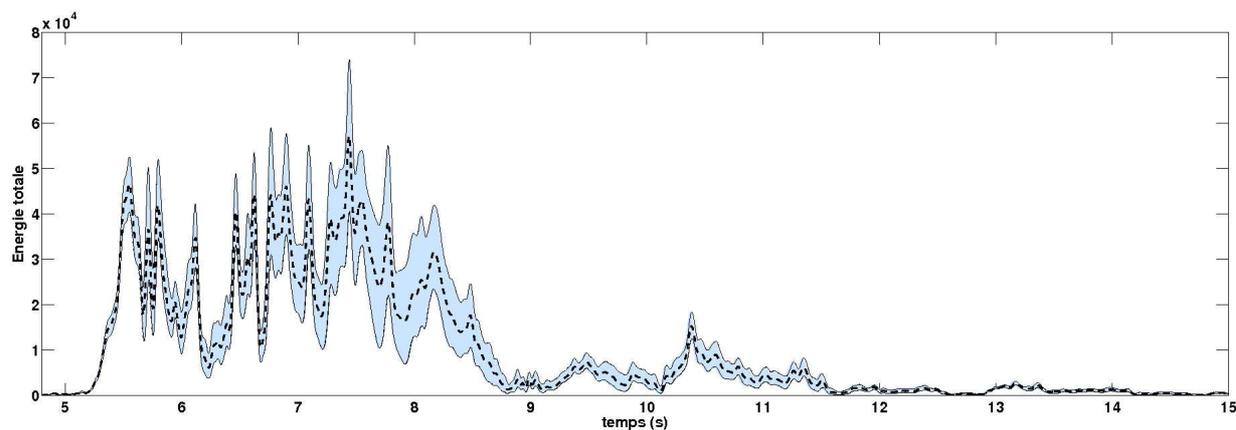


Figure VII.28 [CMM] : (tirets) – Moyenne du processus stochastique $\tilde{\mathcal{E}}(t)$. (zone bleue) – Intervalle de confiance à 90 % encadré par les courbes $Q_{\tilde{\mathcal{E}}}(0.05, t)$ et $Q_{\tilde{\mathcal{E}}}(0.95, t)$.

Les normes L_2 des quantiles à 95 % sont supérieures à celle de l'énergie pour le modèle d'interaction sol fondation moyen de 28 % et 23 % pour le LMM et le CMM respectivement. Les normes L_2 des quantiles à 5 % sont inférieures à celle de l'énergie pour le modèle moyen de 52 % et 38 % pour le LMM et le CMM respectivement. Le modèle à masses concentrées LMM est donc plus sensible à l'incertitude que le modèle à masse continue CMM.

Les moyennes du processus $\tilde{\mathcal{E}}(t)$ pour les modèles LMM et CMM sont tracées sur la *Figure VII.29*. On observe un signal plus amorti pour le CMM, ce qui est logique puisque le CMM est plus raide (fréquences modales plus élevées) que le LMM et que l'amortissement structural est proportionnel à la raideur.

Pour vérifier la convergence de la simulation de *Monte Carlo*, on définit l'estimateur $\text{Conv}_{\mathcal{Q}_{\tilde{\mathcal{E}}}}(N_s)$ donnant le carré de la norme L_2 du quantile $t \mapsto \mathcal{Q}_{\tilde{\mathcal{E}}}(0.95, t)$ pour un nombre de tirage N_s :

$$\text{Conv}_{\mathcal{Q}_{\tilde{\mathcal{E}}}}(N_s) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{Q}_{\tilde{\mathcal{E}}}(N_s, 0.95, t)^2 dt$$

où $t \mapsto \mathcal{Q}_{\tilde{\mathcal{E}}}(N_s, 0.95, t)$ est le quantile approché par simulation de *Monte Carlo* pour N_s tirages. Le graphique de convergence pour cet estimateur est donné par la *Figure VII.30* de 1 à 20000 tirages. La simulation converge à partir de 3500 tirages environ.

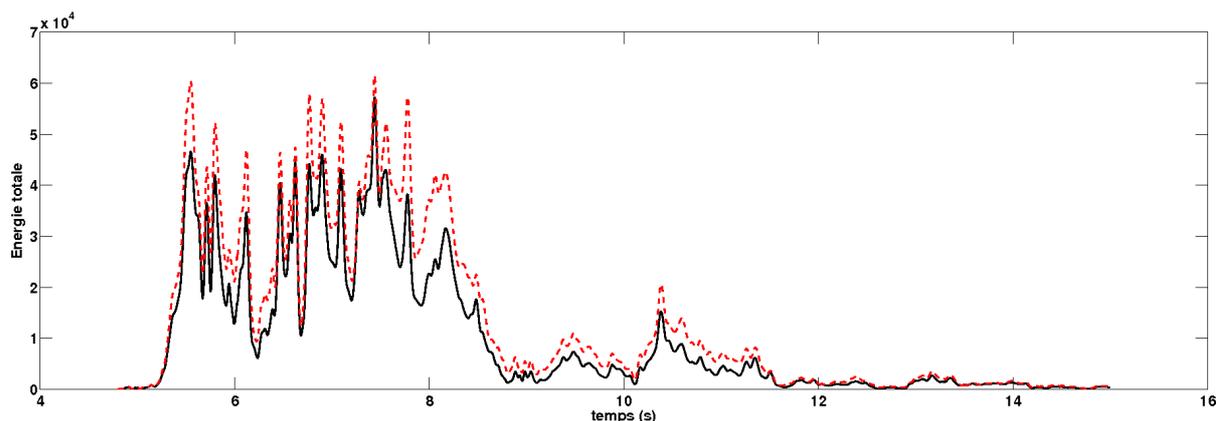


Figure VII.29 Moyennes du processus stochastique $\tilde{\mathcal{E}}(t)$ pour le LMM (tirets) et le CMM (trait plein).

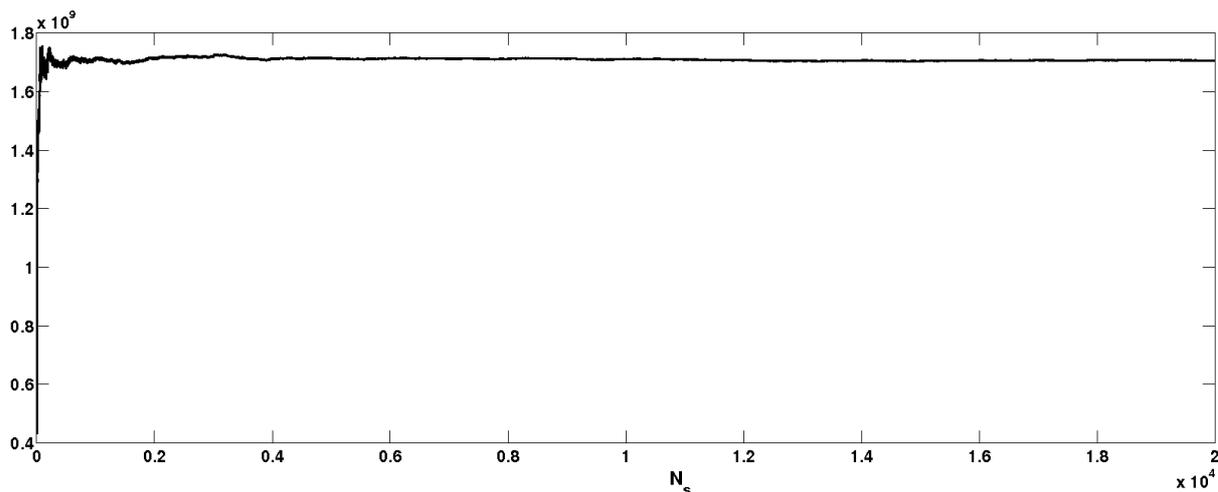


Figure VII.30 Convergence de la norme L_2 du quantile $t \mapsto Q_{\tilde{\mathcal{E}}}(0.05, t)$ par l'estimateur $\text{Conv}_{Q_{\tilde{\mathcal{E}}}}(N_s)$.

VII.3.3 Forces et moments internes macroscopiques

Les forces et moments internes macroscopiques du bâtiment sont définis en (II.45) et reliés aux déformations macroscopiques, *i.e.* les déformations d'ensemble du bâtiment, par la relation (II.67).

On va observer les valeurs maximales de ces forces et moments au niveau du plancher supérieur de chaque étage. A cette fin, on définit les 6 variables aléatoires $\tilde{\mathbf{V}}_1^{\max}$, $\tilde{\mathbf{V}}_2^{\max}$, $\tilde{\mathbf{V}}_3^{\max}$, $\tilde{\mathbf{M}}_1^{\max}$, $\tilde{\mathbf{M}}_2^{\max}$ et $\tilde{\mathbf{M}}_3^{\max}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{N_{\text{sto}}}$, en l'occurrence \mathbb{R}^{12} , associées à chaque force et moment interne. Pour chaque étage $1 \leq n \leq N_{\text{sto}} = 12$, on a:

$$\begin{aligned}
 \{\tilde{\mathbf{V}}_1^{\max}\}_n &= \max_t V_1(x_1 = nh, t) & \{\tilde{\mathbf{M}}_1^{\max}\}_n &= \max_t M_1(x_1 = nh, t) \\
 \{\tilde{\mathbf{V}}_2^{\max}\}_n &= \max_t V_2(x_1 = nh, t) & \{\tilde{\mathbf{M}}_2^{\max}\}_n &= \max_t M_2(x_1 = nh, t) \\
 \{\tilde{\mathbf{V}}_3^{\max}\}_n &= \max_t V_3(x_1 = nh, t) & \{\tilde{\mathbf{V}}_3^{\max}\}_n &= \max_t M_3(x_1 = nh, t)
 \end{aligned} \tag{VII.7}$$

Les Figure VII.31 et Figure VII.32 représentent graphiquement les valeurs maximales des forces et moments internes pour le modèle d'interaction sol fondation moyen, la moyenne des variables aléatoires (VII.7) et leurs quantiles à 5 % et 95 %.

La moyenne des variables aléatoires (VII.7) est légèrement inférieure aux valeurs maximales des forces et moments internes calculées pour le modèle d'interaction sol fondation moyen. Seuls le couple de torsion M_1 et le moment fléchissant M_2 présentent le résultat inverse. Les symétries du bâtiment étant telles que son mouvement de torsion est découplé des autres, le couple de torsion est issu des couplages d'interaction sol fondation introduits par la modélisation probabiliste.

On remarquera que les forces et moments internes au dernier étage ($n=12$) ne sont pas nulles dans le cas du LMM car les efforts du dernier élément de poutre correspondent à une valeur moyenne sur cet élément.

Les densités de probabilité des variables (VII.7) peuvent être calculées à partir des échantillonnages issus de la simulation de *Monte Carlo* grâce à un estimateur $p_X(N_I, N_s)$ qui estime la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire scalaire X en N_I points à partir d'une statistique $X(\theta_n)$ de N_s échantillons. Les tirages θ_n sont donc dans un sous ensemble $\mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}$ de l'ensemble des causes de l'espace probabilisé associé à la modélisation probabiliste. Le support de la FDP de la variable X est approché par l'intervalle:

$$\text{supp}(p_X)(N_I, N_s) = \left[\min_{\theta_n \in \mathcal{A}_s} X(\theta_n), \max_{\theta_n \in \mathcal{A}_s} X(\theta_n) \right] = [s_-, s_+]$$

Les points d'estimation successifs sont tous écartés d'une distance

$$\Delta X = |\text{supp}(p_X)(N_I, N_s)|/N_I$$

et l'estimateur de sa FDP en un point $x_k = (k - 1)\Delta X + s_-$ avec $1 < k < N_I$ s'écrit:

$$p_X(N_I, N_s)(x_k) = \frac{1}{N_s \Delta X} \sum_{n=1}^{N_s} \mathbb{1}_{I_k}(X(\theta_n)) \quad \text{avec} \quad I_k = [x_k, x_k + \Delta X]$$

Les graphiques *Figure VII.33* et *Figure VII.34* représentent les estimations des FDP des variables $\{\tilde{\mathbf{V}}_1^{\max}\}_1, \{\tilde{\mathbf{V}}_2^{\max}\}_1, \{\tilde{\mathbf{V}}_3^{\max}\}_1, \{\tilde{\mathbf{M}}_1^{\max}\}_1, \{\tilde{\mathbf{M}}_2^{\max}\}_1, \{\tilde{\mathbf{M}}_3^{\max}\}_1$, *i.e.* les forces et moments internes au niveau du premier étage du bâtiment, là où ils sont les plus importants.

Les courbes de convergence des normes L_2 de ces estimations de FDP par rapport au nombre d'échantillons N_s sont données par les *Figure VII.35* et *Figure VII.36*. On constate que la simulation de *Monte Carlo* converge pour toutes les variables aléatoires à partir de $N_s = 12000$ échantillons environ.

Les moyennes et les quantiles à 5 % et 95 % des variables aléatoires sont exposés en *Table VII.14* et *Table VII.15*. Les efforts issus du calcul avec le modèle à masses concentrées (LMM) sont supérieurs de 10 % en moyenne à ceux issus du calcul avec le modèle à masse homogène (CMM) sauf dans le cas du couple de torsion.

<i>Table VII.14 – LMM</i>				
	Q(5%)	moy.	mod. moy.	Q(95%)
$\{\tilde{\mathbf{V}}_1^{\max}\}_1$	$4.28.10^6 N$	$5.43.10^6 N$	$5.09.10^6 N$	$6.92.10^6 N$
$\{\tilde{\mathbf{V}}_2^{\max}\}_1$	$5.45.10^6 N$	$6.55.10^6 N$	$7.13.10^6 N$	$7.49.10^6 N$
$\{\tilde{\mathbf{V}}_3^{\max}\}_1$	$5.65.10^6 N$	$6.90.10^6 N$	$6.93.10^6 N$	$8.20.10^6 N$
$\{\tilde{\mathbf{M}}_1^{\max}\}_1$	$2.86.10^6 N.m$	$6.04.10^6 N.m$	$0 N.m$	$10.39.10^6 N.m$
$\{\tilde{\mathbf{M}}_2^{\max}\}_1$	$1.22.10^8 N.m$	$1.54.10^8 N.m$	$1.37.10^8 N.m$	$1.93.10^8 N.m$
$\{\tilde{\mathbf{M}}_3^{\max}\}_1$	$1.39.10^8 N.m$	$1.74.10^8 N.m$	$1.73.10^8 N.m$	$2.09.10^8 N.m$

<i>Table VII.15 – CMM</i>				
	$Q(5\%)$	moy.	mod. moy.	$Q(95\%)$
$\{\tilde{\mathbf{V}}_1^{\max}\}_1$	$4.06.10^6 N$	$5.09.10^6 N$	$4.83.10^6 N$	$6.39.10^6 N$
$\{\tilde{\mathbf{V}}_2^{\max}\}_1$	$4.99.10^6 N$	$5.88.10^6 N$	$6.03.10^6 N$	$6.65.10^6 N$
$\{\tilde{\mathbf{V}}_3^{\max}\}_1$	$4.96.10^6 N$	$6.25.10^6 N$	$6.59.10^6 N$	$7.59.10^6 N$
$\{\tilde{\mathbf{M}}_1^{\max}\}_1$	$3.97.10^6 N.m$	$8.16.10^6 N.m$	$0 N.m$	$13.94.10^6 N.m$
$\{\tilde{\mathbf{M}}_2^{\max}\}_1$	$1.11.10^8 N.m$	$1.38.10^8 N.m$	$1.32.10^8 N.m$	$1.71.10^8 N.m$
$\{\tilde{\mathbf{M}}_3^{\max}\}_1$	$0.97.10^8 N.m$	$1.18.10^8 N.m$	$1.21.10^8 N.m$	$1.39.10^8 N.m$

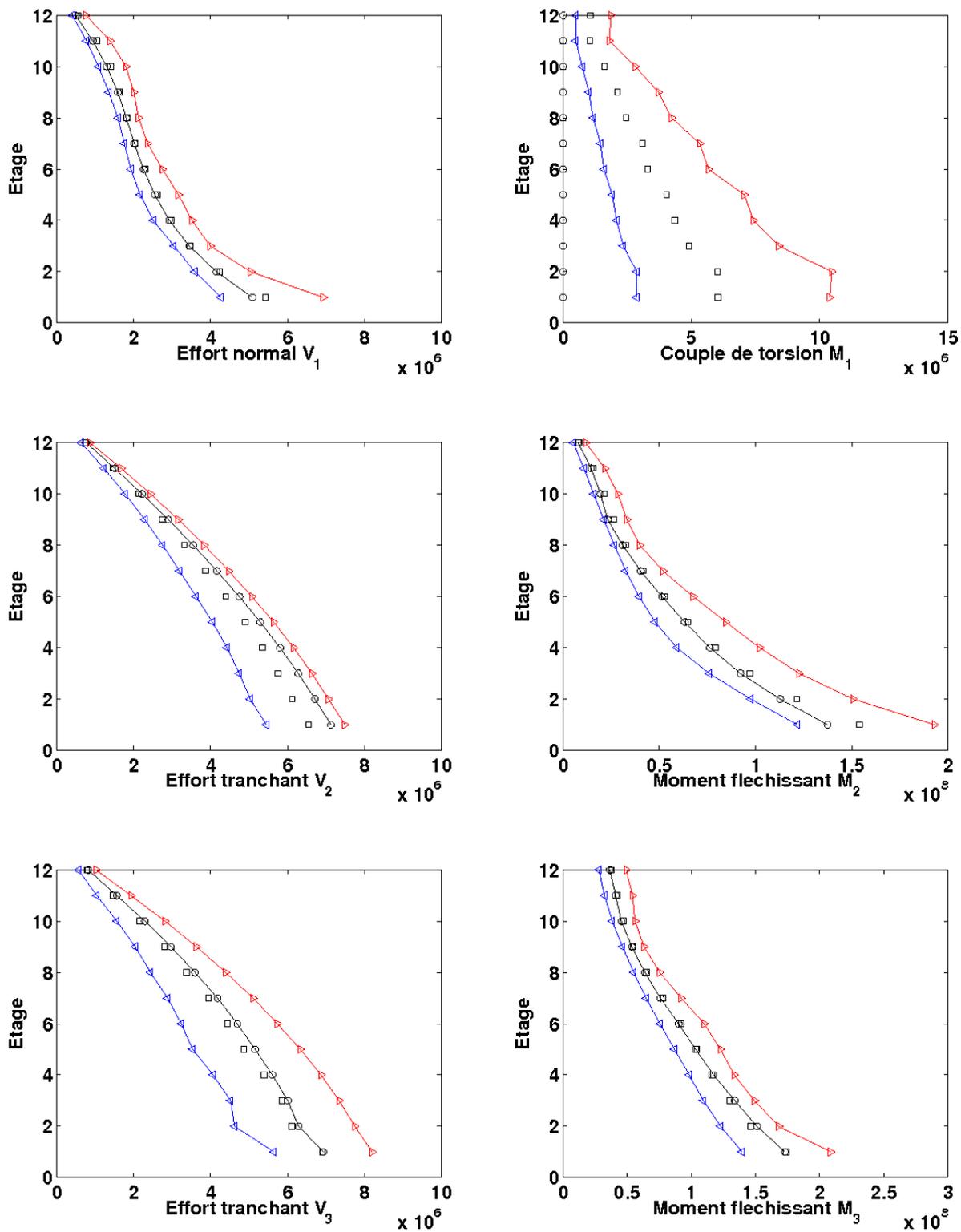


Figure VII.31 [LMM] : (cercles) – Modèle de sol moyen. (carré) – Moyenne des variables aléatoires. (triangles gauche et droite) – Quantiles à 5 % et 95 %.

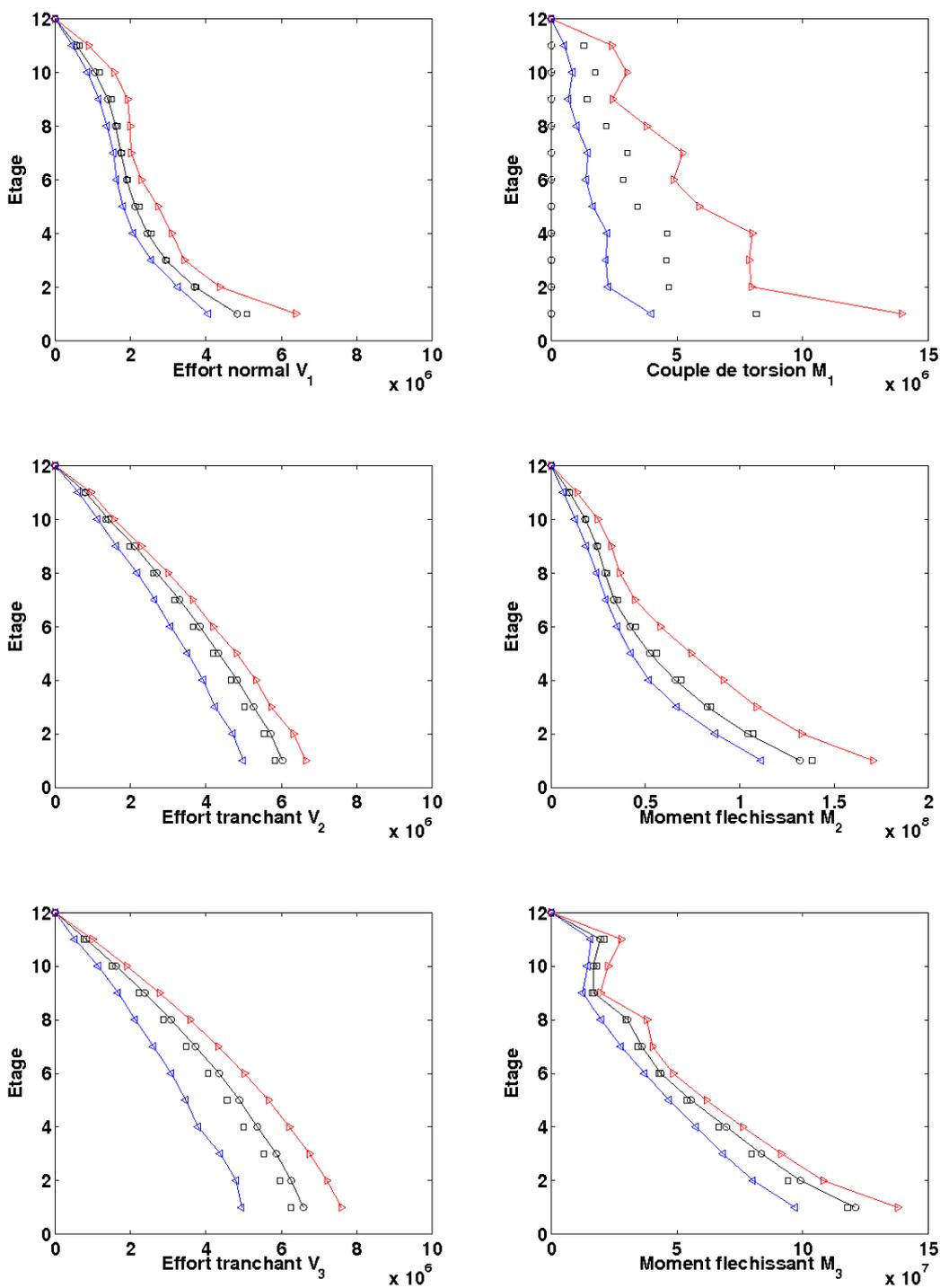


Figure VII.32 [CMM] : (cercles) – Modèle de sol moyen. (carré) – Moyenne des variables aléatoires. (triangles gauche et droite) – Quantiles à 5 % et 95 %.

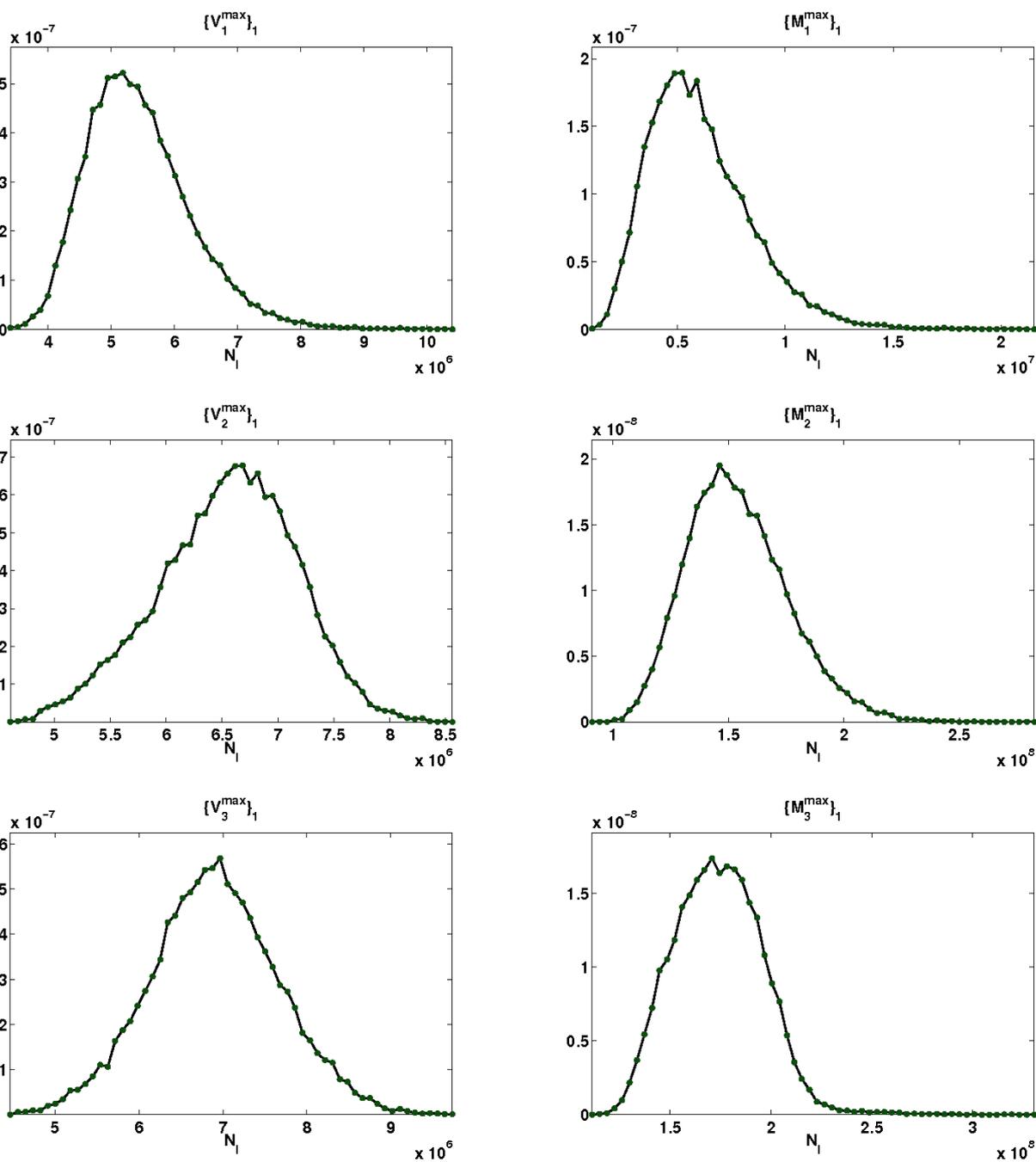


Figure VII.33 [LMM] : fonctions de densité de probabilité des forces et moments internes maximaux au premier étage: $\{\tilde{V}_1^{\max}\}_1, \{\tilde{V}_2^{\max}\}_1, \{\tilde{V}_3^{\max}\}_3, \{\tilde{M}_1^{\max}\}_1, \{\tilde{M}_2^{\max}\}_1, \{\tilde{M}_3^{\max}\}_1$

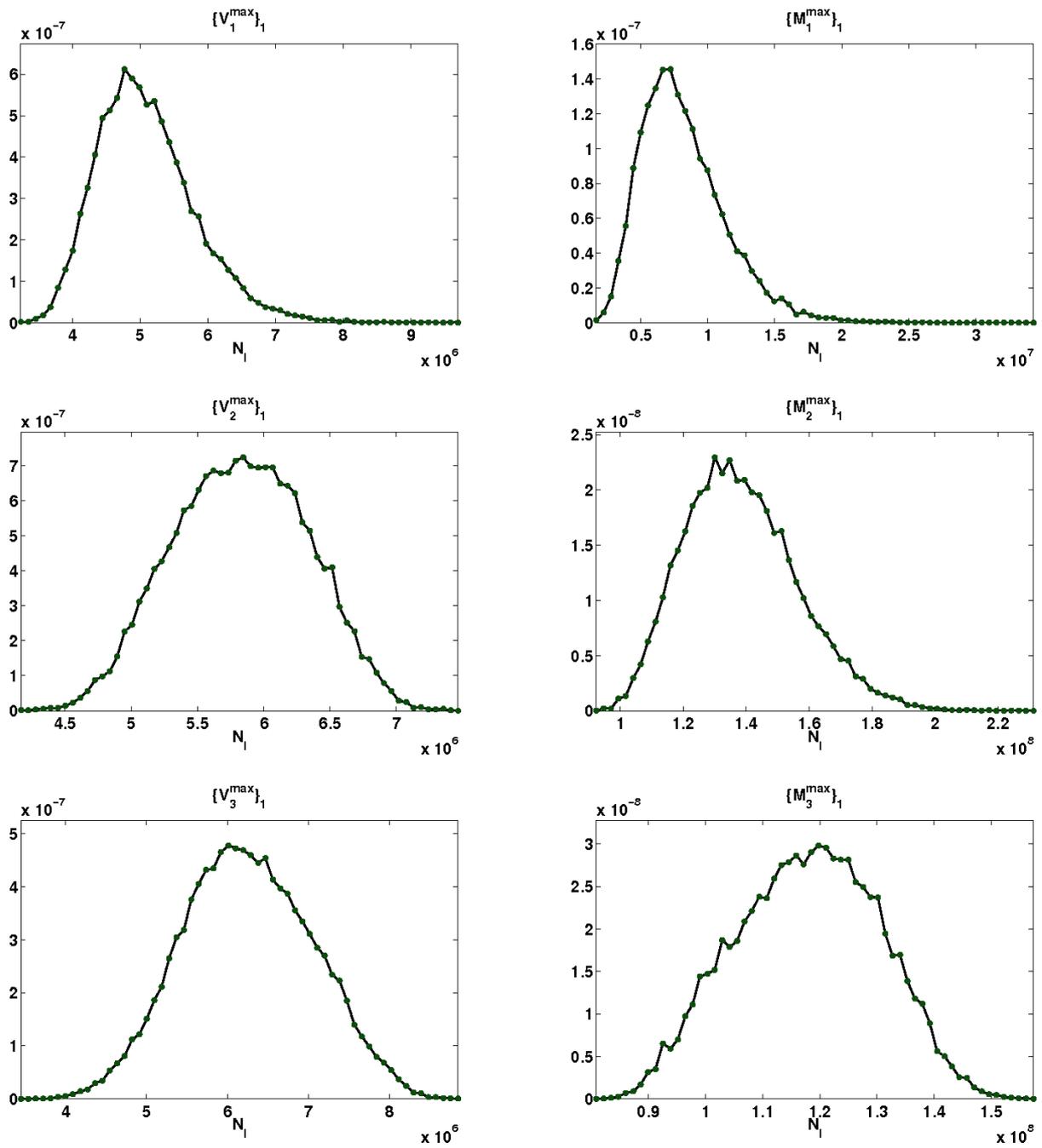


Figure VII.34 [CMM] : fonctions de densité de probabilité des forces et moments internes maximaux au premier étage: $\{\tilde{V}_1^{\max}\}_1$, $\{\tilde{V}_2^{\max}\}_1$, $\{\tilde{V}_3^{\max}\}_3$, $\{\tilde{M}_1^{\max}\}_1$, $\{\tilde{M}_2^{\max}\}_1$, $\{\tilde{M}_3^{\max}\}_1$

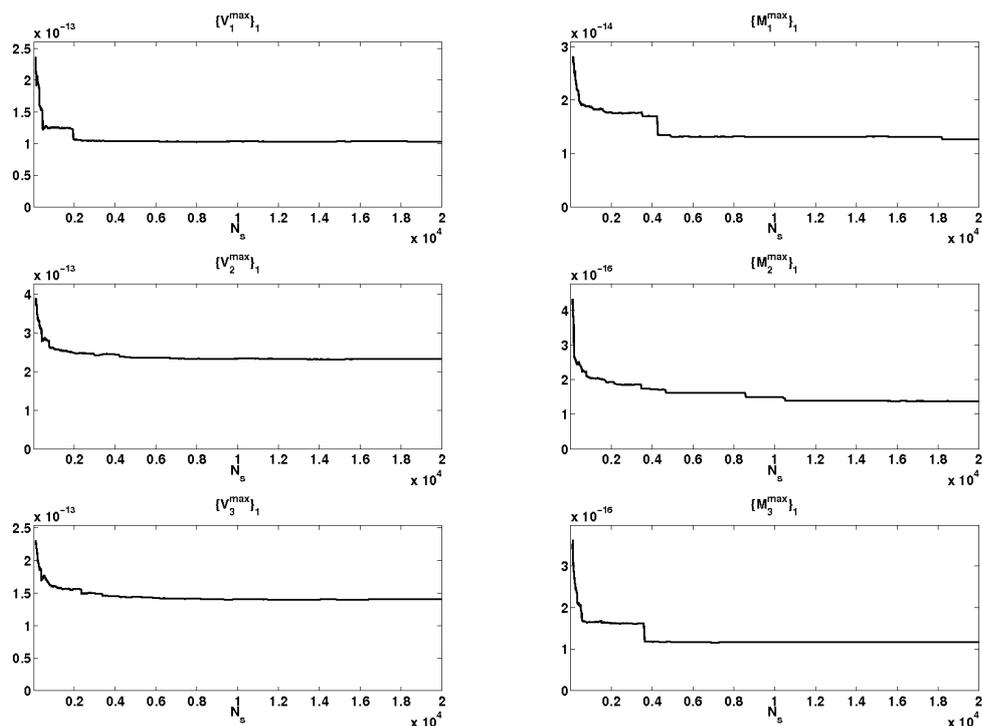


Figure VII.35 [LMM] : Convergence du carré de la norme L_2 des estimations de FDP de la Figure VII.33.

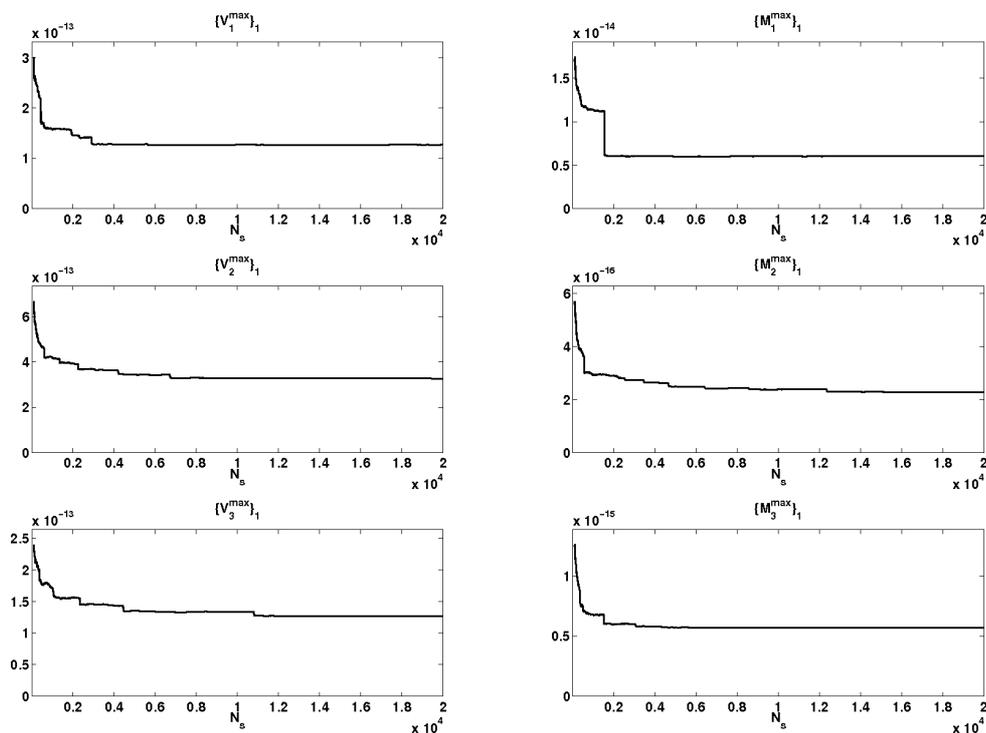


Figure VII.36 [CMM] : Convergence du carré de la norme L_2 des estimations de FDP de la Figure VII.34.

VII.3.4 Dimensionnement du bâtiment

Les données de localisation stockées lors de la procédure d'homogénéisation (voir III.4) permettent à l'aide des estimations statistiques des forces et moments macroscopiques des *Table VII.14* et *Table VII.15* de calculer le niveau de sollicitation au sein de la structure. Bien que les forces et moments macroscopiques au niveau du premier étage n'atteignent pas simultanément leur niveau maximal au cours du séisme, on considère la situation extrême où cela se produit. La localisation des forces et moments macroscopiques donne l'amplitude des efforts au sein de la structure si bien que ces efforts seront sommés en valeur absolue pour chaque déformation macroscopique. En reprenant la notation introduite en III.4.1, on note $[\mathbf{Int}_i]$ avec $i = 1 \dots 6$ les matrices de localisation liées aux 6 composantes du vecteur d'état macroscopique \mathbf{S}_E défini en (II.61). Chaque ligne de ces matrices est associée à un élément de la modélisation par éléments finis d'un étage de la construction et leurs 8 colonnes sont associées aux 8 forces et moments internes définis par les *Figure III.4* et *Figure III.5*. Pour un état macroscopique donné, la matrice des efforts internes est donnée par:

$$[\mathbf{Int}] = E_{11} [\mathbf{Int}_1] + \chi'_3 [\mathbf{Int}_2] + \chi'_2 [\mathbf{Int}_3] + \chi_1 [\mathbf{Int}_4] + \chi_2 [\mathbf{Int}_5] + \chi_3 [\mathbf{Int}_6]$$

Étant donnée la loi de comportement macroscopique (II.67), le niveau de dimensionnement des efforts internes locaux est, pour des forces et moments macroscopiques donnés, calculé par:

$$[\mathbf{Int}^d] = \left| \frac{V_1}{K_{11}} [\mathbf{Int}_1] \right| + \left| -\frac{V_2}{K_{66}} [\mathbf{Int}_2] \right| + \left| \frac{V_3}{K_{55}} [\mathbf{Int}_3] \right| + \left| \frac{M_1}{K_{44}} [\mathbf{Int}_4] \right| + \left| \frac{M_2}{K_{55}} [\mathbf{Int}_5] \right| + \left| \frac{M_3}{K_{66}} [\mathbf{Int}_6] \right| \quad (\text{VII.8})$$

Les planches graphiques de la *Figure VII.37* exposent la répartition des forces de membrane pour les moyennes des forces et moments macroscopiques maximaux calculés à l'aide du modèle à répartition de masse continue (CMM) et dont les valeurs sont données par la *Table VII.15*. Les répartitions obtenues pour le modèle brochette (LMM) sont similaires. Les *Table VII.16* et *Table VII.17* donnent la valeur maximale dans l'étage, et en l'occurrence dans le bâtiment tout entier, des forces de membrane calculées à partir de la moyenne et du quantile à 95 % des variables $\{\tilde{\mathbf{V}}_1^{\max}\}_1$, $\{\tilde{\mathbf{V}}_2^{\max}\}_1$, $\{\tilde{\mathbf{V}}_3^{\max}\}_1$, $\{\tilde{\mathbf{M}}_1^{\max}\}_1$, $\{\tilde{\mathbf{M}}_2^{\max}\}_1$, $\{\tilde{\mathbf{M}}_3^{\max}\}_1$, ainsi que celle calculée à partir des forces et moments internes issus de la simulation avec le modèle moyen (déterministe) d'interaction sol fondation.

La moyenne du niveau maximal des forces de membrane, obtenu à partir du modèle brochette (LMM) et de la modélisation stochastique d'interaction sol fondation, est inférieure d'environ 1 % au niveau maximal des forces de membrane calculé avec le modèle moyen d'interaction sol-fondation. Ce qui tout compte fait, est un écart assez faible. La moyenne du niveau maximal des forces de membrane obtenu à partir du modèle CMM et de la modélisation stochastique d'interaction sol fondation est par contre supérieure d'environ 4 % au niveau maximal des forces de membrane calculé avec le modèle moyen d'interaction sol-fondation.

Que ce soit pour le modèle brochette ou à masse homogène, on vérifie que les efforts de torsion contribuent à environ 4 %. Au vu de la *Figure VII.27* et de la *Figure VII.28*, qui montrent que la variation moyenne de l'énergie est sensiblement la même que la variation de l'énergie du bâtiment avec le modèle d'interaction sol fondation moyen, et compte tenu du faible écart entre le niveau d'effort issu de ces deux mêmes approches, on peut en déduire que, sous l'effet des hétérogénéités du sol, l'énergie mécanique est répartie de façon uniforme sur la structure.

Le quantile à 95 % des variables (VII.7) permet d'estimer l'incertitude sur la valeur maximale des forces au sein de la structure. Les forces de membrane ont ainsi au moins 95 % de chance d'être inférieures aux valeurs indiquées dans la colonne "quant. 95%" des *Table VII.16* et *Table VII.17*. Le coefficient de sécurité correspondant est d'environ 1.2 pour chacun des modèles réduits. La contribution des efforts de torsion augmente jusqu'à 5-6 % pour le modèle brochette et 8-9 % pour le modèle à distribution de masse continue qui est plus sensible au couplage.

<i>Table VII.16 – LMM</i>			
force	mod. moyen	moyenne	quant. 95%
F_X	$2.308 \cdot 10^5 N$	$2.305 \cdot 10^5 N$	$2.751 \cdot 10^5 N$
F_Y	$1.301 \cdot 10^6 N$	$1.296 \cdot 10^6 N$	$1.544 \cdot 10^6 N$
F_{XY}	$5.358 \cdot 10^5 N$	$5.269 \cdot 10^5 N$	$6.233 \cdot 10^5 N$

<i>Table VII.17 – CMM</i>			
force	mod. moyen	moyenne	quant. 95%
F_X	$1.986 \cdot 10^5 N$	$2.072 \cdot 10^5 N$	$2.469 \cdot 10^5 N$
F_Y	$1.122 \cdot 10^6 N$	$1.172 \cdot 10^6 N$	$1.395 \cdot 10^6 N$
F_{XY}	$4.580 \cdot 10^5 N$	$4.797 \cdot 10^5 N$	$5.680 \cdot 10^5 N$

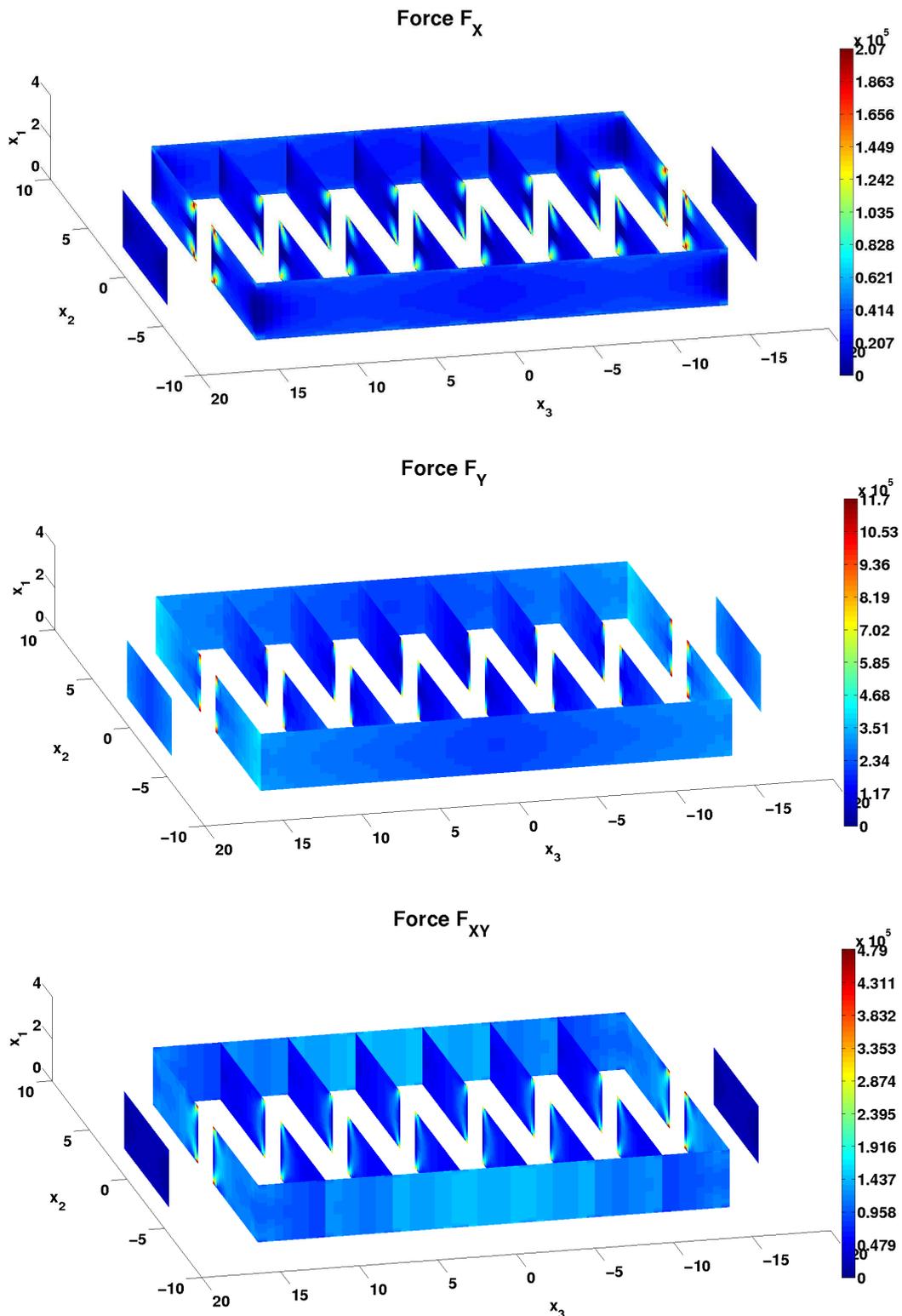


Figure VII.37 Répartition des forces F_X (horizontale), F_Y (verticale), F_{XY} (cisaillement dans le plan) de dimensionnement issues des colonnes 1,2,3 de la matrice $[\mathbf{Int}^d]$ pour la moyenne du niveau maximal des forces et moments macroscopiques.

VII.4 Conclusions

Ce chapitre met en application la modélisation réduite du bâtiment construite en première de ce mémoire ainsi que les modèles dynamiques établis au chapitre précédents. L'influence sur le comportement dynamique du bâtiment de l'incertitude sur le comportement mécanique du sol est étudiée pour le tremblement de terre de *Parkfield* du 28 septembre 2004. Le bâtiment est supposé construit sur dépôt de silt et d'argile aux propriétés standards.

Après avoir déterminé numériquement tous les paramètres des modèles dynamiques de bâtiment avec interaction de sol, une analyse modale de la construction est menée. On identifie et compare les modes issus de la modélisation tridimensionnelle du bâtiment par éléments finis avec ceux donnés par les modèles de poutre. On constate que les modes d'ensemble du bâtiment sont identifiés pour les basses fréquences et les modes à caractère interne c'est-à-dire les modes impliquant des vibrations d'éléments structuraux de petite taille devant celle du bâtiment ne le sont pas. On met également en lumière certaines limites de la modélisation équivalente statique proposée en première partie vis-à-vis du comportement dynamique de la structure très particulière du bâtiment.

La littérature concernant les propriétés dissipatives du sol montrent que l'amortissement radiatif est généralement prédominant face à l'amortissement matériel du sol et qu'au mieux il est du même ordre de grandeur. Or, les simulations réalisées montrent que toute façon ces deux sources de dissipations sont secondaires par rapport à un amortissement structural de 3% qui est un ordre de grandeur standard pour le type de constructions étudiées. La répartition inertielle des modèles de poutre joue également un rôle dans la mesure où l'on observe un amortissement plus important du modèle à distribution de masse homogène, l'effet allant en s'accroissant avec la fréquence.

L'étude stochastique de l'effet des incertitudes dues au comportement mécanique du sol aboutit à une réponse de la structure qui, en moyenne, est assez proche de la réponse du modèle moyen (modélisation déterministe). On observe cependant un écart significatif entre les réponses moyennes obtenues pour chacun des modèles de poutre. Cette étude montre également comment obtenir une majoration des efforts subis à l'échelle locale des murs et planchers de la construction lors du séisme avec une fiabilité qui en l'occurrence est de 95%.

Une conclusion de ces simulations est que ce type d'étude est fortement lié à la structure étudiée, à la classe de sol pris en compte ainsi qu'au séisme. Ces résultats ne permettent *a priori* aucune extrapolation concernant le comportement dynamique du même bâtiment construit sur un autre type de sol ou soumis à un autre séisme. L'introduction d'incertitudes sur le signal sismique mettrait très certainement en lumière d'autres effets de l'incertitude de comportement mécanique du sol.

CHAPITRE VIII

DÉCOLLEMENT DE FONDATION

Les mouvements sismiques du sol excitant latéralement une structure sont susceptibles, au delà d'une certaine intensité, d'induire des moments créant une décohésion partielle entre la structure et le sol, voire de la faire totalement basculer avec les conséquences que l'on peut imaginer. De tels phénomènes ont été observés pour des structures basses telles que des réservoirs et plus rarement pour des bâtiments à multiples étages. Les premières observations sismiques se rapportant au décollement proviennent des travaux expérimentaux de Milne au Japon [98] à la fin du XIX^e siècle. Milne constate que les balancements de faible amplitude d'un prisme sur le sol ont un retour élastique similaire à celui d'une balle qu'on fait rebondir mais que pour de plus grandes amplitudes, il observe un retard du retour élastique.

La performance des structures face au décollement varie beaucoup suivant leur géométrie. On a ainsi pu observer une stabilité au renversement inattendue de la part de châteaux d'eau dont la forme élancée chapeauté d'un réservoir présupposait le contraire.

La modélisation mécanique du décollement présentée dans ce chapitre repose sur quelques approximations. Il s'agit tout d'abord d'une modélisation quasi statique: le caractère inertiel du sol n'est donc pas pris en compte. Les mouvements de glissement sont négligés et seuls les déplacements latéraux associés à une déformation du sol sont pris en compte. Jennings et Bielak [74] ont par exemple montré que ce mouvement était de faible importance en comparaison de celui de rotation pour les structures hautes, ce qui n'est néanmoins pas le cas pour les structures courtes. Trois phénomènes de dissipations amortissent le mouvement de la structure: la dissipation matérielle, l'amortissement radiatif et la perte d'énergie par impact de la fondation sur le sol. Les deux premiers ont déjà été abordés au *chapitre V*, le dernier est, lui, spécifique au décollement. L'impact est pris en compte par une restitution partielle de la vitesse de la structure après impact. Psycharis et Jennings [111] proposent une modélisation mécanique de ce type. Aucun de ces phénomènes de dissipation n'est cependant inclus dans le modèle proposé ici car on souhaite dans un premier temps observer des oscillations libres non amorties d'un bloc rigide et dans un second temps, on simule la réponse dynamique d'un bâtiment dont l'amortissement structural est supposé prépondérant.

Comme pour la plupart des modélisations mécaniques récentes du décollement de fon-

dition, on utilise ici un modèle de *Winkler*. Néanmoins, afin de prendre en compte les effets de cisaillement vertical du sol en bord de fondation, un modèle de *Winkler* à ressorts couplés est utilisé. L'effet du décollement sur la réponse élastique horizontale du sol est en outre prise en compte. Le mouvement dynamique vertical de la structure est également pris en compte. On peut citer les travaux de Psycharis [110] qui a récemment abordé le sujet. En fin de ce chapitre sont menées des simulations d'une structure déformable (un immeuble) à plusieurs degrés de liberté avec décollement du sol. Yim et Chopra [145] présentèrent de telles simulations pour une structure à 1 degré de liberté. A propos du renversement, on se bornera à déterminer l'intensité limite du signal applicable à une construction pour un profil de signal donné. Apostolou *et al.* [4] ont assez récemment proposé une étude paramétrique de sûreté sur le renversement vis-à-vis des propriétés géométriques des structures.

VIII.1 Modélisation mécanique du décollement de fondation

Les principes sur lesquels repose ce modèle mécanique de décollement de fondation sont exposés dans la communication [13] de Betbeder-Matibet. Ce modèle est élaboré pour un radier rigide de forme quelconque. On se bornera néanmoins au cas d'une géométrie parallépipédique.

VIII.1.1 Profil d'écrasement du sol

Le sol est représenté par un demi espace élastique homogène isotrope. L'interaction sol fondation est décrite par un modèle de *Winkler* à ressorts couplés représenté par la *Figure VIII.1.a*. Chaque élément de surface $dS = dx_2 dx_3$ de la surface de contact $\partial\Omega_{sf}$ entre le sol et le radier repose sur un ressort vertical de raideur $k_1 dS$, qui est couplé aux éléments voisins par des raideurs de cisaillement K , et sur un ressort de cisaillement de raideur $k_3 dS$. La fondation est orientée de manière identique aux *chapitre V* et *chapitre VI*. Comme le montre la *Figure VIII.1.b* la position $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ est définie par les directions $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ et la position de référence du radier définie par le point O , centre de masse de la fondation au repos et sans enfoncement dans le sol. La fondation est excitée suivant la direction \mathbf{e}_3 , a une largeur $2a$ dans cette direction et une épaisseur $2d$ avec d petit par rapport à a . Les composantes du déplacement du centre de masse G de la fondation sont notées U_1, U_2, U_3 , avec U_2 supposée nulle, et l'angle de roulis de la fondation par rapport à la verticale est noté θ_2 .

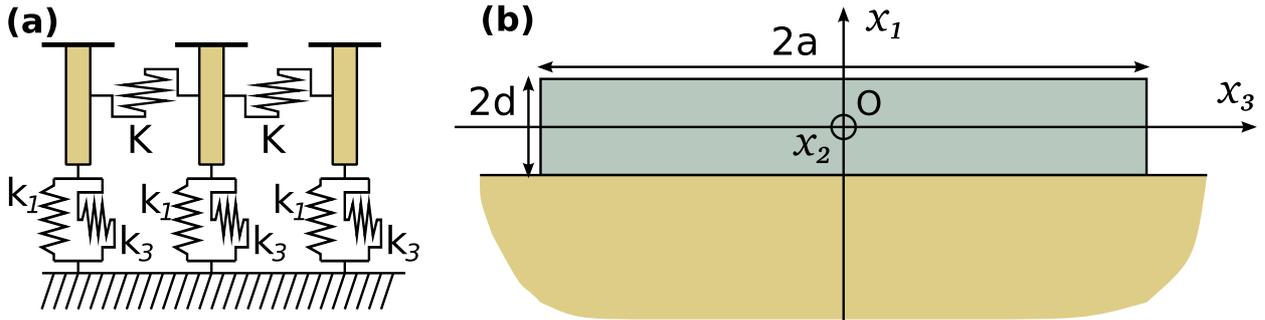


Figure VIII.1 (a) Modèle de Winkler à ressorts couplés. – (b) Radier parallélépipédique de demi épaisseur d et demi largeur a .

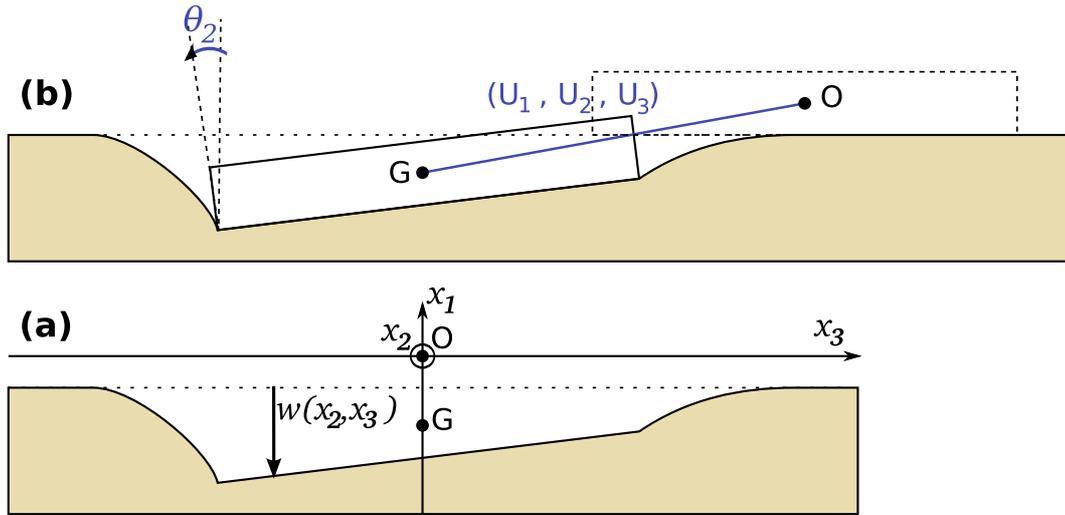


Figure VIII.2 (a) Le centre de masse de la fondation a un déplacement $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ et une rotation $\theta_2 \mathbf{e}_2$ – (b) $w(x_2, x_3)$ est l'écrasement par rapport à la position de référence centrée en O .

On note $w(x_2, x_3)$ l'écrasement du sol par la fondation. En faisant un bilan des forces appliquées à un élément de surface rectangulaire, on aboutit à une équation différentielle du second ordre pour l'écrasement $w(x_2, x_3)$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} - \frac{w}{c^2} = -\frac{p(x_2, x_3)}{k_1 c^2} \tag{VIII.1}$$

où $p(x_2, x_3)$ est la pression d'écrasement du sol (orientée vers le bas) et $c = \sqrt{K/k_1}$ est la longueur de couplage du modèle. Cette équation va permettre d'exprimer la réaction élastique du sol en prenant en compte la contribution des ressorts de couplage au bord Γ_{sf} de la surface de contact $\partial\Omega_{sf}$.

On multiplie l'équation (VIII.1) par un champ de déplacement virtuel $w^* \in H^1(\mathbb{R}^2)$ et on l'intègre sur \mathbb{R}^2 ce qui mène à sa formulation faible suivante:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Delta w w^* dS - \frac{1}{c^2} \int_{\mathbb{R}^2} w w^* dS = -\frac{1}{k_1 c^2} \int_{\mathbb{R}^2} p w^* dS$$

En décomposant cette formulation sur $\partial\Omega_{\text{sf}}$ et son complémentaire dans \mathbb{R}^2 et en intégrant par parties, on obtient:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega_{\text{sf}}} \mathbf{grad}(w) \mathbf{grad}(w^*) dS + \int_{\partial\Omega_{\text{sf}}} \mathbf{grad}(w) \mathbf{grad}(w^*) dS + \frac{1}{c^2} \int_{\mathbb{R}^2} w w^* dS \\ &= \int_{\Gamma_{\text{sf}}} \mathbf{grad}(w) \mathbf{n}_e w^* dl + \int_{\Gamma_{\text{sf}}} \mathbf{grad}(w) \mathbf{n}_i w^* dl + \frac{1}{kc^2} \int_{\mathbb{R}^2} p w^* dS \end{aligned}$$

avec dl l'élément de contour sur Γ_{sf} et \mathbf{n}_e , \mathbf{n}_i respectivement les vecteurs unitaires de direction normale extérieure et intérieure au contour fermé Γ_{sf} . Les forces appliquées par le sol sur un élément de contour dl sont par conséquent:

$$d\mathbf{F}_\Gamma = -K \left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}_e} + \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}_i} \right) dl \quad (\text{VIII.2})$$

La résultante $\mathbf{F}_{\text{sol}} = -\|\mathbf{F}_{\text{sol}}\| \mathbf{e}_1$ des forces de réaction du sol écrasé par la fondation est alors:

$$\mathbf{F}_{\text{sol}} = \int_{\partial\Omega_{\text{sf}}} p(x_2, x_3) dS \mathbf{e}_1 + \int_{\Gamma_{\text{sf}}} d\mathbf{F}_\Gamma$$

L'écrasement sous le radier est $w(x_3) = -U_1 - \theta_2 x_3$ si bien que la force de réaction sous un élément de surface du radier est $p = -kdS(U_1 + \theta_2 x_3) \mathbf{e}_1$. Etant donnée l'expression (VIII.2) des forces de contour, on a:

$$\mathbf{F}_{\text{sol}} = -k_1 S \left(U_1 + \theta_2 X_G + \frac{c^2}{S} \int_{\Gamma_{\text{sf}}} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}_e} dl \right) \mathbf{e}_1 - k_3 S U_3 \mathbf{e}_3 \quad (\text{VIII.3})$$

Le gradient de w dans la direction \mathbf{n}_i s'obtient à partir de l'expression $w(x_3) = -U_1 - \theta_2 x_3$ de l'écrasement, si bien que son intégrale sur le contour du radier est nulle. Le gradient suivant \mathbf{n}_e se calcule à partir de la solution de l'équation (VIII.1) à l'extérieur de la surface de contact $\partial\Omega_{\text{sf}}$. L'abscisse X_G est la coordonnée x_3 de l'isobarycentre de la surface de contact $\partial\Omega_{\text{sf}}$ dans la position de référence. On a par conséquent $X_G = 0$ lorsque la fondation est entièrement en contact avec le sol. Cette abscisse varie en cas de décollement comme on le verra plus loin.

On calcule maintenant le moment $\mathbf{M}_{\text{sol}} = -\|\mathbf{M}_{\text{sol}}\| \mathbf{e}_2$ résultant des forces de réaction du sol:

$$\mathbf{M}_{\text{sol}} = \int_{\partial\Omega_{\text{sf}}} x_3 p(x_2, x_3) dS \mathbf{e}_1 + \int_{\Gamma_{\text{sf}}} x_3 d\mathbf{F}_\Gamma$$

En développant cette expression de la même façon que pour le calcul de la force de réaction \mathbf{F}_{sol} , on trouve que:

$$\mathbf{M}_{\text{sol}} = -k_1 S \left(U_1 X_G + \theta_2 (R^2 + c^2) + \frac{c^2}{S} \int_{\Gamma_{\text{sf}}} x_3 \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}_e} dl \right) \mathbf{e}_2 \quad (\text{VIII.4})$$

où R est le rayon de giration du radier par rapport à l'axe de rotation (Ox_2):

$$R^2 = \frac{1}{S} \int_{\Omega_{\text{sf}}} x_3^2 dx_2 dx_3$$

VIII.1.2 Approximation des ressorts périphériques

L'approximation des ressorts périphériques consiste à supposer que chaque élément de contour du bord Γ_{sf} se comporte comme une semelle filante pour laquelle une solution analytique de l'équation (VIII.1) existe. Une semelle filante suivant \mathbf{x}_2 est invariante dans cette direction et l'équation d'écrasement est réduite à une dimension. On l'écrit dans le domaine libre $\mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega_{\text{sf}}$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} = \frac{w}{c^2}$$

Les conditions de bord vérifiées par $w(x_3)$ sont:

$$\begin{aligned} \lim_{x_3 \rightarrow -\infty} w(x_3) = 0 \quad , \quad w(-a) = -U_1 + \theta_2 a \\ w(a) = -U_1 - \theta_2 a \quad , \quad \lim_{x_3 \rightarrow +\infty} w(x_3) = 0 \end{aligned} \quad (\text{VIII.5})$$

Les solutions de chaque côté du radier sont:

$$\begin{aligned} w(x_3) &= (-U_1 + \theta_2 a) \exp((x_3 + a)/c) \quad \forall x_3 \in]-\infty, -a] \\ w(x_3) &= (-U_1 - \theta_2 a) \exp(-(x_3 + a)/c) \quad \forall x_3 \in [a, +\infty] \end{aligned}$$

Le gradient suivant la direction extérieure \mathbf{n}_e en $x_3 = -a$ et $x_3 = a$ est:

$$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}_e} = -\frac{w}{c} = \frac{U_1 + \theta_2 x_3}{c} \quad (\text{VIII.6})$$

On suppose cette relation vraie sur tout le contour Γ_{sf} si bien que les expressions (VIII.3) et (VIII.4) de la force et du moment de réaction \mathbf{F}_{sol} et \mathbf{M}_{sol} s'écrivent:

$$\mathbf{F}_{\text{sol}} = -kS \left(\left(1 + \frac{c|\Gamma_{\text{sf}}|}{S}\right) U_1 + \left(X_G + \frac{c|\Gamma_{\text{sf}}|}{S} x_g\right) \theta_2 \right) \mathbf{e}_1 - k_3 S U_3 \mathbf{e}_3 \quad (\text{VIII.7})$$

$$\mathbf{M}_{\text{sol}} = -kS \left(\left(X_G + \frac{c|\Gamma_{\text{sf}}|}{S}\right) U_1 + \left(R^2 + c^2 + \frac{r^2 c |\Gamma_{\text{sf}}|}{S}\right) \theta_2 \right) \mathbf{e}_2 \quad (\text{VIII.8})$$

L'abscisse x_g est la coordonnée x_3 de l'isobarycentre du contour de la surface de contact. La longueur $|\Gamma_{\text{sf}}|$ est le périmètre de ce même contour et r est son rayon de giration par rapport à l'axe de rotation Ox_2 :

$$r^2 = \frac{1}{|\Gamma_{\text{sf}}|} \int_{\Gamma_{\text{sf}}} x_3^2 dl$$

où dl est l'élément d'intégration du contour, *i.e.* $\pm dx_2$ ou $\pm dx_3$ pour la section rectangulaire.

VIII.1.3 Situation de décollement

Le décollement de la fondation se produit lorsque les contraintes s'annulent au bord de sa surface de contact. Pour le modèle *Winkler* classique, cela se produit lorsque le bord de la fondation atteint la surface du sol. Pour le modèle *Winkler* avec ressorts de couplage, le décollement intervient lorsqu'on a égalité entre la pente du radier et celle du sol. La *Figure VIII.3* illustre la situation de début de décollement pour ces deux modèles et fait apparaître la longueur de couplage c .

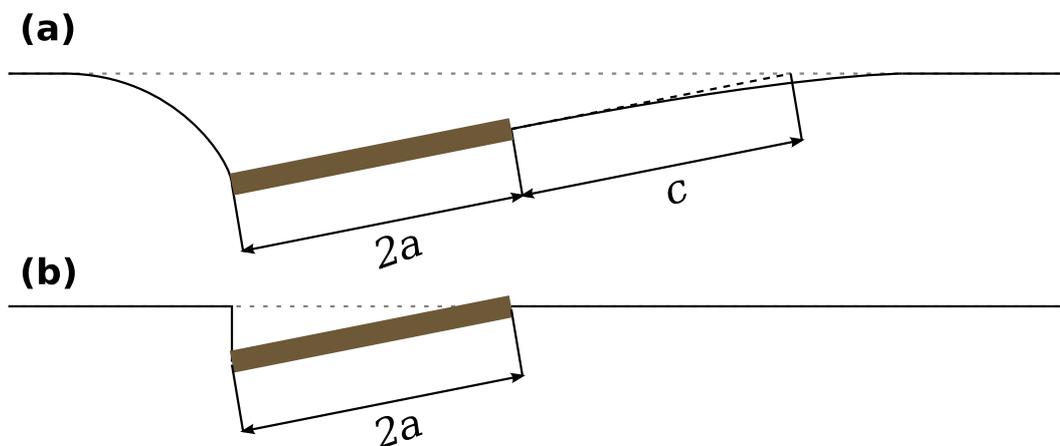


Figure VIII.3 Apparition du décollement de fondation pour (a) le modèle de Winkler avec ressorts de couplage et (b) le modèle de Winkler classique.

Compte tenu de la relation (VIII.6) de l'approximation des ressorts périphériques, l'égalité entre la pente du radier et la pente du sol s'écrit en fonction du front de décollement $x_3 = x_d \in [-a, a]$:

$$\begin{aligned} (\theta_2 > 0) : \quad -\theta_2 &= \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}_e} \quad \Longrightarrow \quad -\theta_2 = -\frac{w}{c} = \frac{U_1 + \theta_2 x_d}{c} \\ (\theta_2 < 0) : \quad \theta_2 &= \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}_e} \quad \Longrightarrow \quad \theta_2 = -\frac{w}{c} = \frac{U_1 + \theta_2 x_d}{c} \end{aligned}$$

Cette relation permet de déduire l'angle θ_{up} de début de décollement:

$$\theta_{\text{up}}(t) = -\frac{U_1(t)}{c + a}$$

Pour $|\theta_2| < \theta_{\text{up}}$, on a décollement de la fondation, le front de décollement x_d est alors:

$$x_d = -\frac{U_1}{\theta} - c \geq 0 \quad (\theta_2 > 0) \quad , \quad x_d = -\frac{U_1}{\theta} + c \leq 0 \quad (\theta_2 < 0)$$

La fraction d'adhérence ξ est définie comme la fraction de la surface du radier toujours en contact avec le sol:

$$\xi = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{U_1}{a|\theta_2|} - \frac{c}{a} \right) \mathbb{1}_{\mathcal{I}_{\text{up}}}(\theta_2) + \mathbb{1}_{\mathcal{I}_{\text{co}}}(\theta_2) \quad (\text{VIII.9})$$

avec $\mathcal{I}_{\text{up}}(U_1) =]-\infty, -\theta_{\text{up}}(U_1)[\cup]\theta_{\text{up}}(U_1), +\infty[$ le domaine de décollement de la fondation, $\mathcal{I}_{\text{co}}(U_1) = [-\theta_{\text{up}}(U_1), \theta_{\text{up}}(U_1)]$ le domaine de contact. Pour des rotations extrêmes, la fondation est susceptible de se retourner. Définir un critère de renversement dynamique est assez complexe et met en jeu deux contributions : on a d'une part le couple engendré par le poids de la fondation appliqué en son centre de gravité et d'autre part son moment d'inertie. Yim et Chopra [34] et Betbeder-Matibet [13] proposent par exemple le critère statique définissant un moment

$$M_{\text{ovt}} = F_{\text{sol}} a \quad (\text{VIII.10})$$

appliqué à la fondation au delà duquel un renversement est possible. Ce critère est donc *a priori* une limite inférieure à l'occurrence dynamique du renversement.

On note $\Omega_{\text{sf}}(\xi)$ la surface de contact entre le sol et la fondation pour une fraction d'adhérence ξ donnée. La *Figure VIII.4* présente la fondation rectangulaire partiellement décollée. Les grandeurs $S(\xi)$, $X_G(\xi)$, $R(\xi)$, $x_g(\xi)$, $|\Gamma_{\text{sf}}(\xi)|$ et $r(\xi)$ qui entrent dans les expressions (VIII.7) et (VIII.8) de la force et du moment de réaction du sol dépendent de la fraction ξ . On donne leur expression:

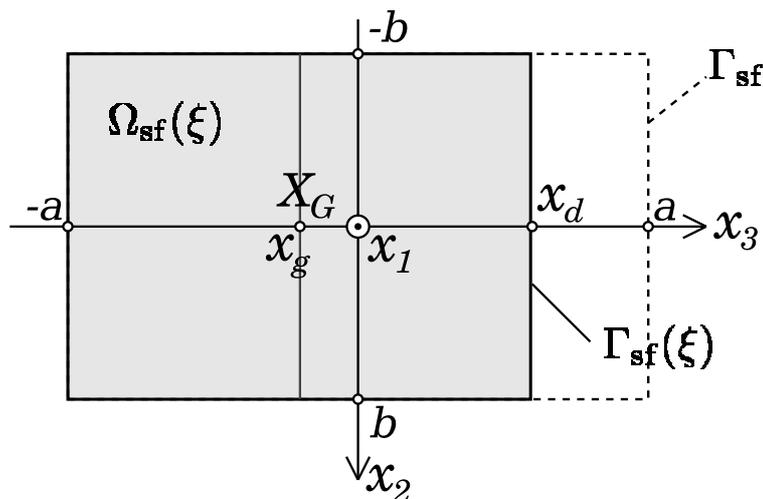


Figure VIII.4 Surface de contact $\Omega_{\text{sf}}(\xi)$ pour une fraction d'adhérence ξ et un angle de rotation $\theta_2 > \theta_{\text{up}}$.

$$S(\xi) = 4ab\xi$$

$$X_G(\xi) = a(\xi - 1) \text{sign}(\theta_2) \quad \text{avec} \quad \text{sign}(z) = \frac{z}{|z|}$$

$$R^2(\xi) = a^2 \left(\frac{4}{3}\xi^2 - 2\xi + 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
x_g(\xi) &= X_G(\xi) = a(\xi - 1) \operatorname{sign}(\theta_2) \\
|\Gamma_{\text{sf}}(\xi)| &= 4(a\xi + b) \\
r^2(\xi) &= \frac{1}{a\xi + b} \left(ba^2(2\xi^2 - 2\xi + 1) + \frac{1}{3}a^3\xi(4\xi^2 - 6\xi + 3) \right)
\end{aligned}$$

VIII.2 Dynamique du bâtiment avec décollement

La fondation est maintenant surmontée d'un bâtiment multi-étagé du type de ceux modélisés au *chapitre VI*. Le bâtiment a une masse m_b , si bien que l'enfoncement au repos de l'ensemble $\{\text{fondation} + \text{bâtiment}\}$ est pour $\xi = 1$:

$$U_{10} = -\frac{(m_f + m_b)g}{k(S(1) + c|\Gamma_{\text{sf}}(1)|)} \simeq -\frac{m_b g}{k(S(1) + c|\Gamma_{\text{sf}}(1)|)}$$

La fondation est excitée par un mouvement du sol dans la direction \mathbf{e}_3 uniquement et est soumise à la gravité $-g\mathbf{e}_1$, l'accélération du sol est $a_e(t)\mathbf{e}_3$. On écrit le principe fondamental de la dynamique appliqué à la fondation au point $O(0, 0, 0)$ dans le référentiel \mathcal{R}_{sf} lié au sol de fondation Ω_s défini en VI.1:

$$\begin{cases}
m_f \ddot{U}_1(x_1 = 0) + m_f g = F_{1,\text{sol}}(U_1(x_1 = 0), \theta_2(x_1 = 0)) + F_{1,\text{b}\rightarrow\text{f}} = 0 \\
m_f \ddot{U}_3(x_1 = 0) = F_{3,\text{sol}}(U_1(x_1 = 0), \theta_2(x_1 = 0)) + F_{3,\text{b}\rightarrow\text{f}} - m_f a_e(t) \\
I_{f2} \ddot{\theta}_2(x_1 = 0) = M_{\text{sol}}(U_1(x_1 = 0), \theta_2(x_1 = 0)) + M_{2,\text{b}\rightarrow\text{f}} - m_f d a_e(t)
\end{cases} \quad (\text{VIII.11})$$

où m_f est la masse de la fondation, I_{f2} est le moment d'inertie de la fondation par rapport à son axe de rotation (Ox_2), g l'accélération de la gravité. Les forces et moments $F_{i,\text{b}\rightarrow\text{f}}$ et $M_{i,\text{b}\rightarrow\text{f}}$ sont les efforts transmis par le bâtiment à la fondation.

On utilise le modèle de poutre à masse continue (CMM) présenté en VI.3 pour représenter le bâtiment. L'ensemble $\{\text{fondation} + \text{bâtiment}\}$ est modélisé par sous-structuration à l'aide de la méthode de *Craig Bampton* [37]. La fondation étant un corps rigide, les 6 degrés de liberté de son mouvement sont également ceux du mouvement de son interface rigide avec le bâtiment. Soit $[\Phi^r(x_1)]$ l'opérateur modal réduit défini en (VI.56) pour les N premiers modes avec conditions d'encastrement (VI.44) en $x_1 = 0$. La cinématique de la structure avec interaction de sol est donnée par:

$$\mathbf{X}(x_1, t) = \begin{pmatrix} U_1(x_1, t) \\ U_3(x_1, t) \\ \theta_2(x_1, t) \end{pmatrix} = [\Phi^r(x_1)] \mathbf{Q}(t) + [S(x_1)] \begin{pmatrix} U_1(0, t) \\ U_3(0, t) \\ \theta_2(0, t) \end{pmatrix} \quad (\text{VIII.12})$$

avec $\mathbf{Q}(t)$ le vecteur des coordonnées généralisées associées aux déformées des modes avec encastrement et $[S(x_1)]$ la matrice de relèvement statique:

$$[S(x_1)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On choisit une fonction test \mathbf{X}^* de la forme:

$$\mathbf{X}^*(x_1, t) = [\Phi^r(x_1)] \mathbf{Q}^*(t) + [S(x_1)] \begin{pmatrix} U_1^*(0, t) \\ U_3^*(0, t) \\ \theta_2^*(0, t) \end{pmatrix}$$

Pour une fonction test \mathbf{X}^* , l'équation (VI.55) s'écrit de la manière suivante:

$$\langle \mathbf{X}^*, \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2} \rangle_M + 2\beta_0 \langle \mathbf{X}^*, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \rangle_K + \langle \mathbf{X}^*, \mathbf{X} \rangle_K = -\langle \mathbf{X}^*, [\mathbf{\Pi}] (g, a_e(t), 0)^T \rangle_M \quad \forall \mathbf{X}^*$$

avec l'opérateur de projection $[\mathbf{\Pi}]$ défini en (VI.52) qui se restreint ici à:

$$[\mathbf{\Pi}] = \mathbf{diag}(1, 1, 0)$$

En omettant les termes d'impédance de sol des expressions (VI.54) dans les opérateurs de masse et de raideur, on aboutit à l'équation dynamique de la sous-structure Ω_b restreinte au bâtiment:

$$[\mathbf{M}_b] \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2} + [\mathbf{D}_b] \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + [\mathbf{K}_b] \mathbf{X} = \mathbf{F}_b \quad (\text{VIII.13})$$

avec le vecteur d'état :

$$\mathbf{X}^T(t) = (\mathbf{Q}^T(t), U_1(0, t), U_3(0, t), \theta_2(0, t))$$

La matrice de masse $[\mathbf{M}_b]$ de la sous structure $\{\text{bâtiment}\}$ s'écrit:

$$[\mathbf{M}_b] = \int_0^H \begin{pmatrix} [\Phi^r(x_1)]^T [\mathbf{M}_l] [\Phi^r(x_1)] & [\Phi^r(x_1)]^T [\mathbf{M}_l] [S(x_1)] \\ [S(x_1)]^T [\mathbf{M}_l] [\Phi^r(x_1)] & [S(x_1)]^T [\mathbf{M}_l] [S(x_1)] \end{pmatrix} dx_1 = \begin{pmatrix} [\mathbf{M}_{\phi\phi}] & [\mathbf{M}_{\phi s}] \\ [\mathbf{M}_{\phi s}]^T & [\mathbf{M}_{ss}] \end{pmatrix}$$

avec l'opérateur de masse de la poutre :

$$[\mathbf{M}_l] = \mathbf{diag}(\rho_l, \rho_l, \varrho_2)$$

Les blocs de la matrice de masse du bâtiment se développent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_{\phi\phi}] &= [\mathbb{1}_N] \\ [\mathbf{M}_{\phi s}] &= \int_0^H \begin{pmatrix} \rho_l \phi_{U_1}^{(1)} & \rho_l \phi_{U_3}^{(1)} & \varrho_2 \phi_{\theta_2}^{(1)} - \rho_l x_1 \phi_{U_3}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_l \phi_{U_1}^{(N)} & \rho_l \phi_{U_3}^{(N)} & \varrho_2 \phi_{\theta_2}^{(N)} - \rho_l x_1 \phi_{U_3}^{(N)} \end{pmatrix} dx_1 \\ [\mathbf{M}_{ss}] &= \begin{pmatrix} \rho_l H & 0 & 0 \\ 0 & \rho_l H & -\frac{1}{2} \rho_l H^2 \\ 0 & -\frac{1}{2} \rho_l H^2 & \varrho_2 H + \frac{1}{3} \rho_l H^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice de raideur de la sous structure $\{\text{bâtiment}\}$ se décompose aussi en 4 blocs:

$$[\mathbf{K}_b] = \begin{pmatrix} [\mathbf{K}_{\phi\phi}] & [\mathbf{K}_{\phi s}] \\ [\mathbf{K}_{\phi s}]^T & [\mathbf{K}_{ss}] \end{pmatrix}$$

avec

$$[\mathbf{K}_{\phi\phi}] = [\boldsymbol{\omega}_N^2] = \mathbf{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_N^2)$$

où les pulsations ω_i sont les pulsations propres des modes du bâtiment avec encastrement au sol. La matrice de raideur de couplage entre l'interface et le bâtiment est:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{\phi s}] &= \int_0^H \frac{\partial[\boldsymbol{\Phi}^r(x_1)]^T}{\partial x_1} [\mathbf{K}_b] \frac{\partial[\mathbf{S}(x_1)]}{\partial x_1} dx_1 + K_{33} \int_0^H [\boldsymbol{\Phi}^r(x_1)]^T \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 [\mathbf{S}(x_1)] dx_1 \\ &+ K_{33} \int_0^H [\boldsymbol{\Phi}^r(x_1)]^T \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 \frac{\partial[\mathbf{S}(x_1)]}{\partial x_1} dx_1 + K_{33} \int_0^H \frac{\partial[\boldsymbol{\Phi}^r(x_1)]^T}{\partial x_1} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 [\mathbf{S}(x_1)] dx_1 \\ &= [\mathbf{0}] \end{aligned}$$

Le couplage entre le bâtiment et la fondation est de nature purement inertielle. La matrice de raideur d'interface s'écrit:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{ss}] &= \int_0^H \frac{\partial[\mathbf{S}(x_1)]^T}{\partial x_1} [\mathbf{K}_b] \frac{\partial[\mathbf{S}(x_1)]}{\partial x_1} dx_1 + K_{33} \int_0^H [\mathbf{S}(x_1)]^T \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 [\mathbf{S}(x_1)] dx_1 \\ &+ K_{33} \int_0^H [\mathbf{S}(x_1)]^T \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 \frac{\partial[\mathbf{S}(x_1)]}{\partial x_1} dx_1 + K_{33} \int_0^H \frac{\partial[\mathbf{S}(x_1)]^T}{\partial x_1} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 [\mathbf{S}(x_1)] dx_1 \\ &= [\mathbf{0}] \end{aligned}$$

L'amortissement structural introduit par la matrice $[\mathbf{D}_b]$ s'écrit pour un taux d'amortissement β_0 donné :

$$[\mathbf{D}_b] = 2\beta_0 [\mathbf{K}_b]$$

On développe également l'expression du vecteur des forces extérieures \mathbf{F}_b :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_b &= \begin{pmatrix} \mathbf{F}_\phi \\ \mathbf{F}_s \end{pmatrix} = - \int_0^H \begin{pmatrix} [\boldsymbol{\Phi}^r(x_1)] \\ [\mathbf{S}(x_1)] \end{pmatrix}^T dx_1 [\mathbf{M}_l] \begin{pmatrix} g \\ a_e(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\rho_l \int_0^H \left(g \left(\phi_{U_1}^{(1)} \dots \phi_{U_1}^{(N)} \ 1 \ 0 \ 0 \right)^T + a_e(t) \left(\phi_{U_3}^{(1)} \dots \phi_{U_3}^{(N)} \ 0 \ 1 \ 0 \right)^T \right) dx_1 \end{aligned}$$

Les termes en $\phi_{U_1}^{(n)}$ n'ont en pratique pas d'influence sur le comportement dynamique du bâtiment car ils correspondent à la compression statique du bâtiment sous l'effet de son propre poids. On récupère le poids total du bâtiment sur le degré de liberté $N + 1$.

On assemble finalement l'équation dynamique (VIII.13) de la sous structure $\{\text{bâtiment}\}$ avec l'équation non linéaire (VIII.11) de la sous structure $\{\text{fondation}\}$, ce qui mène à :

Equation complète de la structure $\{\text{fondation} + \text{bâtiment}\}$:

$$[\mathbf{M}] \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2} + [\mathbf{D}] \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + [\mathbf{K}] \mathbf{X} = \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}) \quad (\text{VIII.14})$$

La matrice de masse complète s'écrit:

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} [\mathbf{M}_{\phi\phi}] & [\mathbf{M}_{\phi s}] \\ [\mathbf{M}_{\phi s}]^T & [\mathbf{M}_{ss}] + [\mathbf{M}'_{ss}] \end{pmatrix}$$

avec :

$$[\mathbf{M}'_{ss}] = \mathbf{diag}(m_f, m_f, I_{f2})$$

La matrice d'amortissement $[\mathbf{D}] = [\mathbf{D}_b]$ est de nature purement structurale. La matrice de raideur $[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_b] \in \mathbb{M}_{N+3}^{+0}(\mathbb{R})$ est symétrique définie semi-positive. Elle a N valeurs propres positives correspondant au carré des fréquences radiales des N modes de structure et 3 valeurs propres nulles. Néanmoins, on peut montrer que l'application $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{X}^T [\mathbf{K}] \mathbf{X} - \mathbf{X}^T \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X})$ définit une norme pour tout vecteur d'état \mathbf{X} correspondant à une situation de contact partiel.

Le vecteur des forces extérieures \mathbf{F}_L s'écrit :

$$\mathbf{F}_L = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_\phi \\ \mathbf{F}_s + \mathbf{F}'_s \end{pmatrix}$$

avec :

$$\mathbf{F}'_s = \begin{pmatrix} 0 & -m_f a_e(t) & -m_f d a_e(t) \end{pmatrix}^T$$

Les efforts non linéaires de réaction du sol sont donnés par:

$$\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} F_{1,\text{sol}}(U_1(0,t), \theta_2(0,t)) \\ F_{3,\text{sol}}(U_1(0,t), \theta_2(0,t)) \\ M_{2,\text{sol}}(U_1(0,t), \theta_2(0,t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1,\text{sol}}(\{\mathbf{X}\}_{N+1}(t), \{\mathbf{X}\}_{N+3}(t)) \\ F_{3,\text{sol}}(\{\mathbf{X}\}_{N+1}(t), \{\mathbf{X}\}_{N+3}(t)) \\ M_{2,\text{sol}}(\{\mathbf{X}\}_{N+1}(t), \{\mathbf{X}\}_{N+3}(t)) \end{pmatrix}$$

La partie linéaire de l'équation dynamique (VIII.14) est intégrée à l'aide du schéma de *Newmark* (voir annexe B.2) et la partie non linéaire est traitée de manière explicite, c'est-à-dire que pour le calcul du vecteur $\mathbf{X}(t_{n+1})$ au rang $n+1$, on utilise $\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}(t_n))$ la force de réaction non linéaire au rang n .

VIII.3 Etude numérique du décollement

Il faut avant toute chose, déterminer les paramètres du modèle de *Winkler* à ressorts couplés. Ce modèle est défini par les densités de surface de raideur k_1 et k_3 ainsi que par la distance de couplage c . Ce modèle de *Winkler* ne concorde pas avec le modèle d'interaction sol fondation présenté en V.2 pour toutes les géométries de fondation. Sachant qu'il concorde avec les impédances élastiques de la *Table V.3* dans le cas d'une fonction carrée, on va identifier ses 3 paramètres avec les raideurs K_{t1} , K_{t3} et K_{r2} . Lorsque la fondation est totalement en contact avec le sol ($\xi = 1$), on a d'après les expressions (VIII.7) et (VIII.8):

$$F_{\text{sol}} = -kS \left(1 + \frac{c |\Gamma_{\text{sf}}|}{S} \right) U_1 = -K_{t1} U_1$$

$$M_{\text{sol}} = -kS \left(R^2 + c^2 + \frac{r^2 c |\Gamma_{\text{sf}}|}{S} \right) \theta_2 = -K_{r2} \theta_2$$

ce qui implique les relations suivantes:

$$4 a b k \left(1 + \frac{c(a+b)}{ab} \right) = K_{t1}$$

$$\frac{4}{3} a^3 b k \left(1 + \frac{a+3b}{b} \frac{c}{a} + 3 \left(\frac{c}{a} \right)^2 \right) = K_{r2}$$

Sachant que les inconnues k et c sont positives, ce système d'équations a pour solution:

$$c = -\frac{a^2}{6b} - \frac{a}{2} + \frac{1}{K_{t1}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) K_{r2} + \frac{1}{6ab} \left((a^6 + 6a^5b - 3a^4b^2) K_{t1}^2 \right. \right. \\ \left. \left. - 6(a^4 + 4a^3b - 3a^2b^2) K_{t1}K_{r2} + 9(a^2 + 2ab + b^2) K_{r2}^2 \right)^{1/2} \right]$$

$$k = \left(4ab \left(1 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) c \right) \right)^{-1} K_{t1}$$

La solution positive pour c implique la solution positive pour k . On considère un sol ayant les mêmes caractéristiques que celui adopté au *chapitre VII* et dont les propriétés mécaniques sont données dans la *Table VII.1*. On calcule les impédances élastiques d'interaction pour une fondation parallépipédique dont la surface de contact a pour dimensions $L_{f2} = L_{f3} = 2m$. La *Table VIII.1* donne les valeurs des impédances élastiques ainsi que des paramètres du modèle de *Winkler* à ressorts couplés.

Table VIII.1 Propriétés de sol	
Impédances (<i>Table V.3</i>)	mod. de <i>Winkler</i>
$K_{t1} = 1.409 \cdot 10^9 \text{ N.m}^{-1}$	$k_1 = 1.288 \cdot 10^8 \text{ N.m}^{-3}$
$K_{t3} = 1.121 \cdot 10^9 \text{ N.m}^{-1}$	$k_3 = 2.802 \cdot 10^8 \text{ N.m}^{-3}$
$K_{r2} = 1.156 \cdot 10^9 \text{ N.m}$	$c = 0.867$

VIII.3.1 Oscillations libres

Dans un premier temps, on va étudier l'oscillation libre d'un bloc rigide avec décollement puis celle d'un bâtiment reposant sur une semelle rigide. A cette fin, on utilise une onde de choc transverse:

$$a_e : t \mapsto \begin{cases} A \sin(2\pi \cdot B \cdot t) & t \in [0, 0.25/B[\\ A \cos(2\pi \cdot 10 \cdot B \cdot (t - 2.5 \cdot 10^{-3})) & t \in [0.25/B, 0.25 \cdot (1/B + 1/(10 \cdot B)) [\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{VIII.15})$$

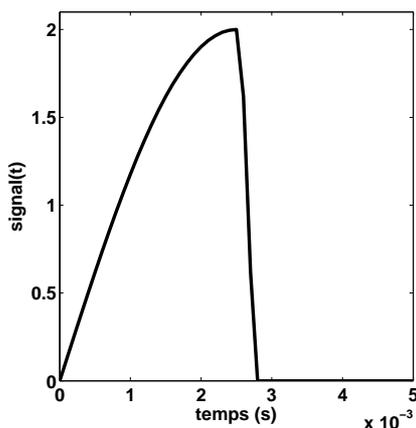


Figure VIII.5 Onde de choc dont le signal est défini par l'expression (VIII.15) pour une amplitude $A = 2$.

On considère un bloc rigide creux de dimensions $L_{f1} = 1\text{ m}$, $L_{f2} = 2\text{ m}$ et $L_{f3} = 2\text{ m}$, d'épaisseur $t_f = 0.2\text{ m}$, de masse $m_f = 5760\text{ kg}$ et de moment d'inertie par rapport à son axe ($O\mathbf{e}_2$) $I_{f2} = 2528\text{ kg}\cdot\text{m}^2$. La Figure VIII.6 illustre ses oscillations pour l'onde de choc de la Figure VIII.5. Le signal et les composantes $U_1(t)$, $U_3(t)$ et $\theta_2(t)$ y sont tracés, ainsi que la fraction algébrique de décollement $(1 - \xi(t)) \text{sign}(\theta_2(t))$ et l'énergie mécanique:

$$E(t) = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial t} [\mathbf{M}] \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \frac{1}{2} (\mathbf{x}^T(t) - (U_{10}, 0, 0)) [\mathbf{K}] (\mathbf{x}(t) - (U_{10}, 0, 0)^T)$$

on note que la position du système au repos est: $\mathbf{x}(0) = (U_{10}, 0, 0)^T$ avec U_{10} le déplacement vertical du centre de masse de la fondation au repos en équilibre élastique avec son propre poids:

$$U_{10} = -\frac{m_f g}{k_1(S + c|\Gamma_{sf}|)}$$

Après la montée en vitesse due à l'onde de choc, le bloc oscille librement avec des décollements intermittents. Le système étant conservatif, l'énergie mécanique devrait donc devenir constante après l'onde de choc. Or, on observe des fluctuations importantes qui coïncident exactement avec les phases de décollement. Le modèle de décollement est construit dans un cadre quasi statique alors que la fondation est soumise aux forces d'inertie.

La conséquence est que lorsque l'angle θ_2 entre dans le domaine de décollement, le sol se décolle de la fondation et atteint instantanément sa position d'équilibre élastique alors que la fondation se déplace progressivement sous l'effet de l'inertie et de la gravité. La diminution de la surface de contact entraîne une perte de raideur de l'interaction sol fondation qui n'est pas instantanément compensée par le mouvement de la fondation, ce qui explique le profil "morcelé" des fluctuations de l'énergie mécanique. Finalement, c'est l'énergie cinétique du sol qui est manquante. La fluctuations de la fraction de décollement $(1 - \xi(t)) \text{sign}(\theta_2(t))$ sont ainsi contiguës à celles de l'angle de rotation $\theta_2(t)$ alors que le déplacement vertical $U_1(t)$ varie peu de sa position d'équilibre.

Les variations non linéaires dues au décollement de la structure sont comme on l'a dit, abordées de manière explicite. Cependant l'instabilité du schéma a un effet minime pour le pas de temps $\Delta t = 10^{-5} s$ choisi, car on constate un accroissement de l'ordre de $10^{-6} \%$ sur une durée de $0.1 s$. Cet effet sera en outre totalement "absorbé" en présence d'amortissement comme c'est le cas pour le bâtiment.

Le bâtiment illustrant les applications numériques en III.5 et au *chapitre VII* et dont le schéma d'un étage est exposé sur la *Figure III.13* est soumis à une onde de choc de paramètres $A = 40 m.s^{-2}$ et $B = 20 s^{-1}$. Sa modélisation établie en VIII.2 est réduite à 11 degrés de liberté généralisés pour la sous-structure $\{\text{bâtiment}\}$ à savoir ses 3 premiers modes d'élongation et ses 8 premiers modes de flexion. Avec les 3 DDLs de fondation, cela porte le nombre de DDLs de la structure complète $\{\text{fondation} + \text{bâtiment}\}$ à 14. Ce nombre de modes est plus que suffisant étant donné que la plupart des études expérimentales et numériques montrent qu'en général seuls les deux premiers modes sont excités pour les ondes sismiques. On a néanmoins souhaité étendre la description modale par rapport à la simulation de vibration libre par onde de choc de la structure. Sa réponse est donnée par la *Figure VIII.7*. L'énergie mécanique de la sous-structure $\{\text{bâtiment}\}$ définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial t} [\mathbf{G}] [\mathbf{M}] [\mathbf{G}] \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) [\mathbf{G}] [\mathbf{K}] [\mathbf{G}] \mathbf{x}(t)$$

avec :

$$[\mathbf{G}] = \begin{pmatrix} [\mathbb{1}_N] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}_{3,3}] \end{pmatrix}$$

Elle est tracée sur la *Figure VIII.7* en trait plein. En pointillé est tracée l'énergie de la même sous-structure mais pour une réponse sans décollement. On observe un léger "effet de détente" du bâtiment lors des phases de décollement. Cependant, comme le montrent Yim et Chopra [145], le décollement accentue la part de mouvement de corps rigide dans le déplacement de la structure.

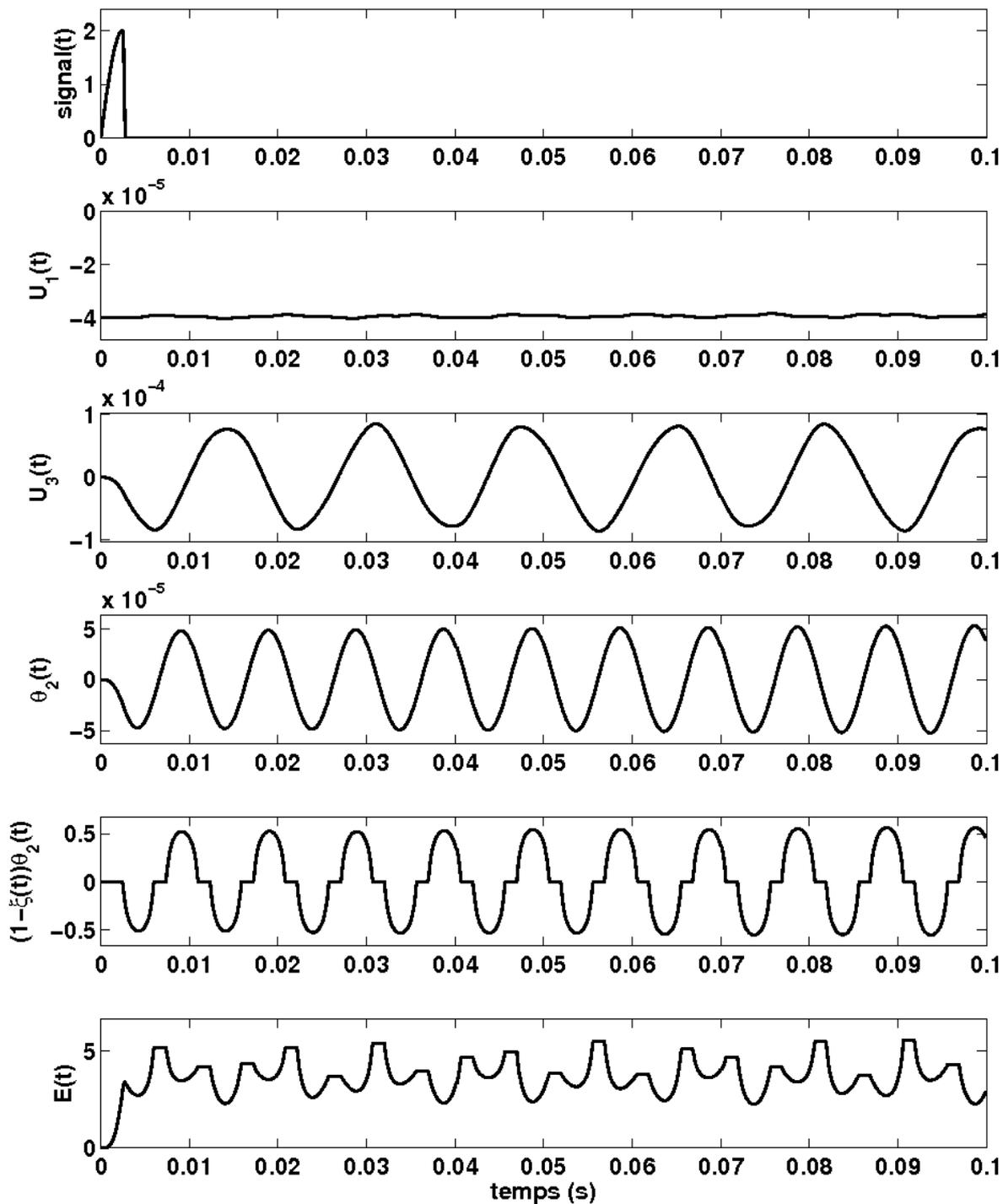


Figure VIII.6 Réponse d'un bloc rigide pour l'onde de choc (VIII.15) avec une amplitude $A = 2 \text{ m.s}^{-2}$ et $B = 100 \text{ s}^{-1}$.

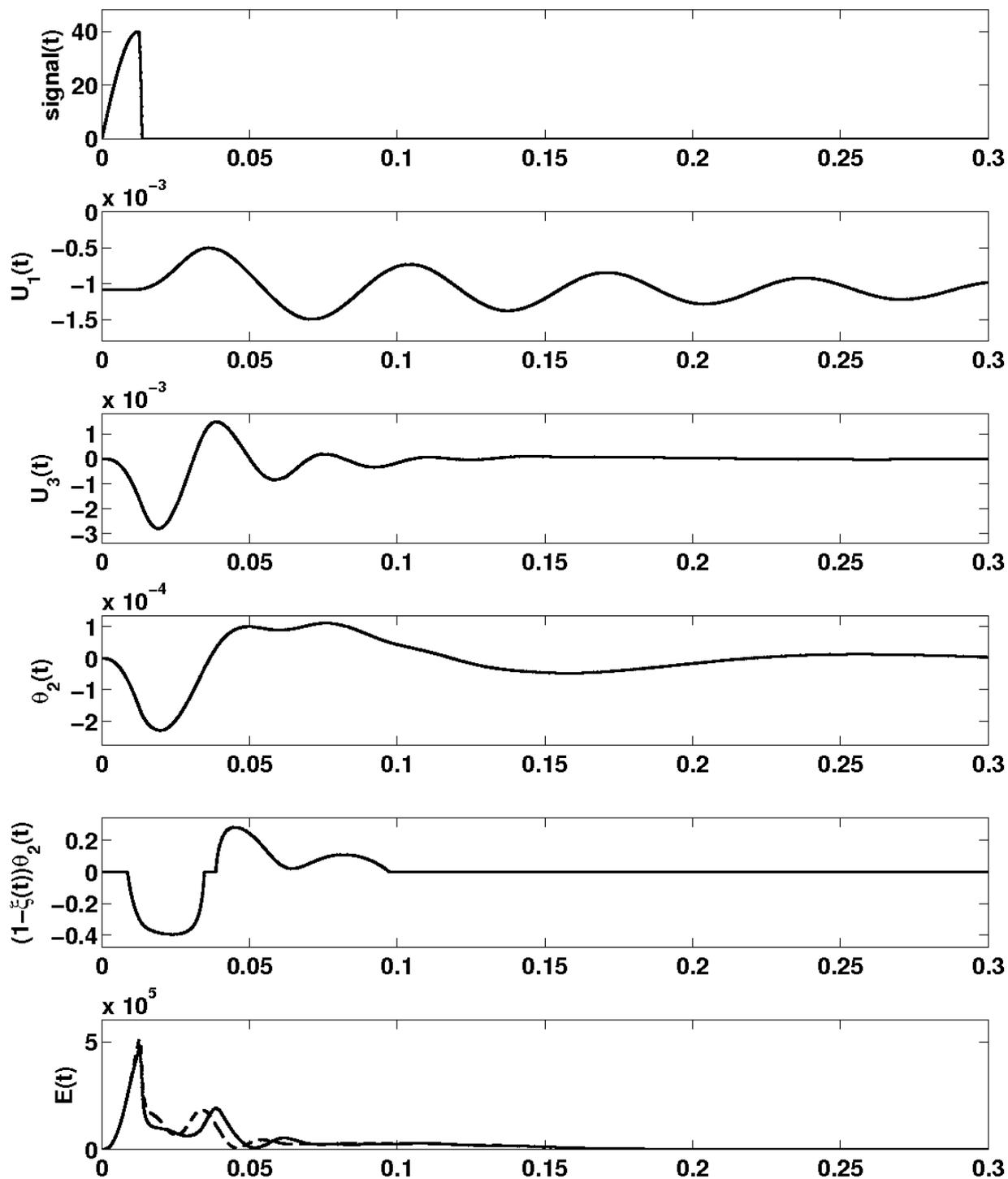


Figure VIII.7 Réponse de l'immeuble à l'onde de choc (VIII.15) avec une amplitude $A = 40 \text{ m.s}^{-2}$ et $B = 20 \text{ s}^{-1}$.

VIII.3.2 Réponse à un séisme

Le bâtiment est maintenant mis en mouvement par la composante Est-Ouest de la mesure de l'événement sismique de *Parkfield* du 28 septembre 2004 mesuré à la station *Donna Lee* à 14.5 km de l'épicentre (voir VII.1).

On remarque que le bâtiment est à la limite du décollement 10 ms après le pic maximal d'accélération du séisme à $t = 5.755$ s dont l'amplitude est 3.656 m.s⁻². On excite la construction avec un signal de profil identique mais avec un pic maximal d'accélération à 10 m.s⁻². La réponse donnée par la *Figure VIII.9* montre que la fondation se décolle à plus de 60 %. L'énergie de déformation du bâtiment est tracée en trait pointillé pour une réponse sans décollement du sol et en trait plein avec décollement. Encore une fois, l'effet de détente du bâtiment est assez faible. On peut déterminer la limite de renversement par dichotomie aux alentours de 12.3 m.s⁻², soit environ 3.37 fois l'amplitude du séisme d'origine.

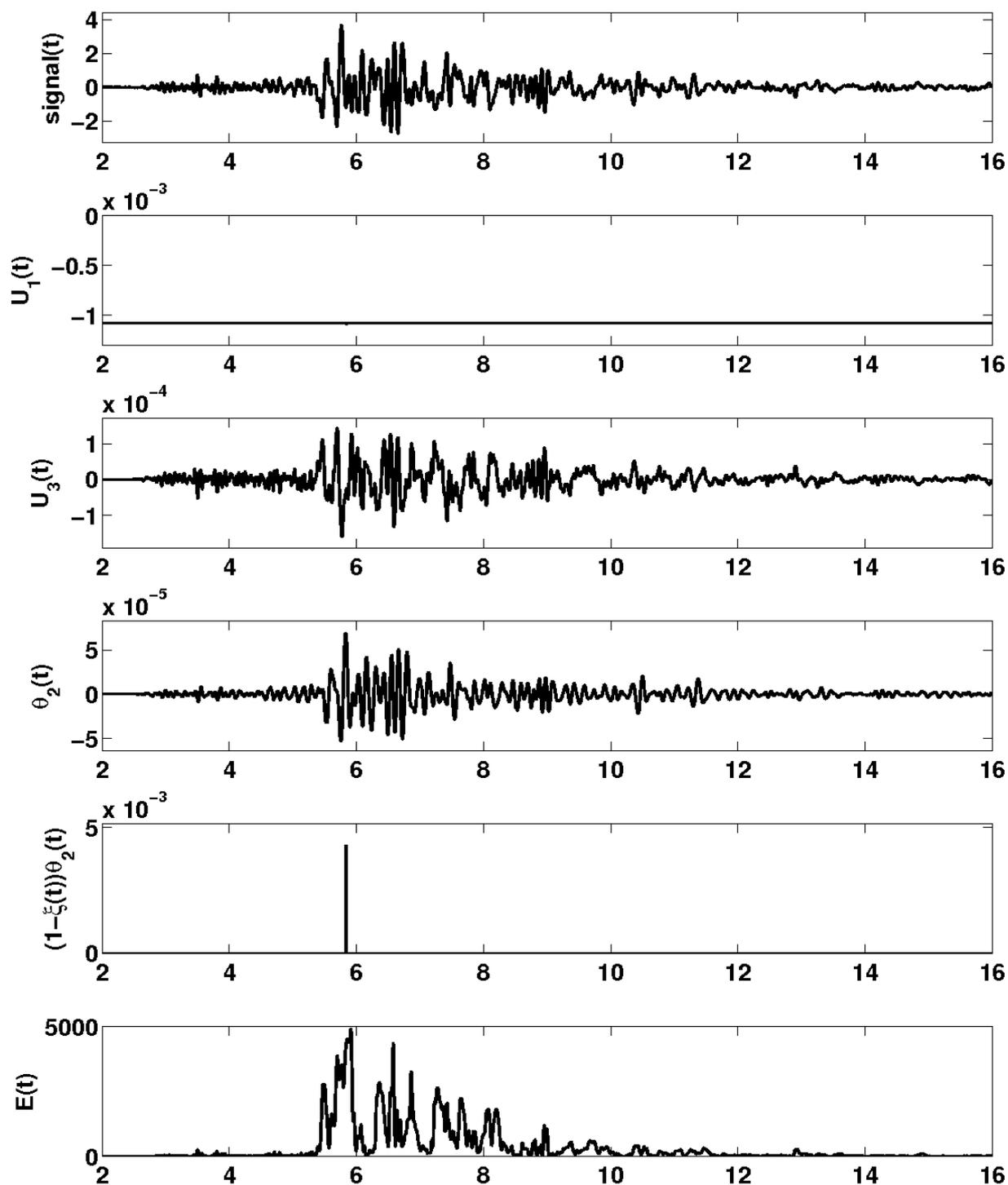


Figure VIII.8 Réponse de l'immeuble soumis à la composante Est-Ouest d'une mesure de l'événement sismique de Parkfield du 28 septembre 2004 (voir VII.1)

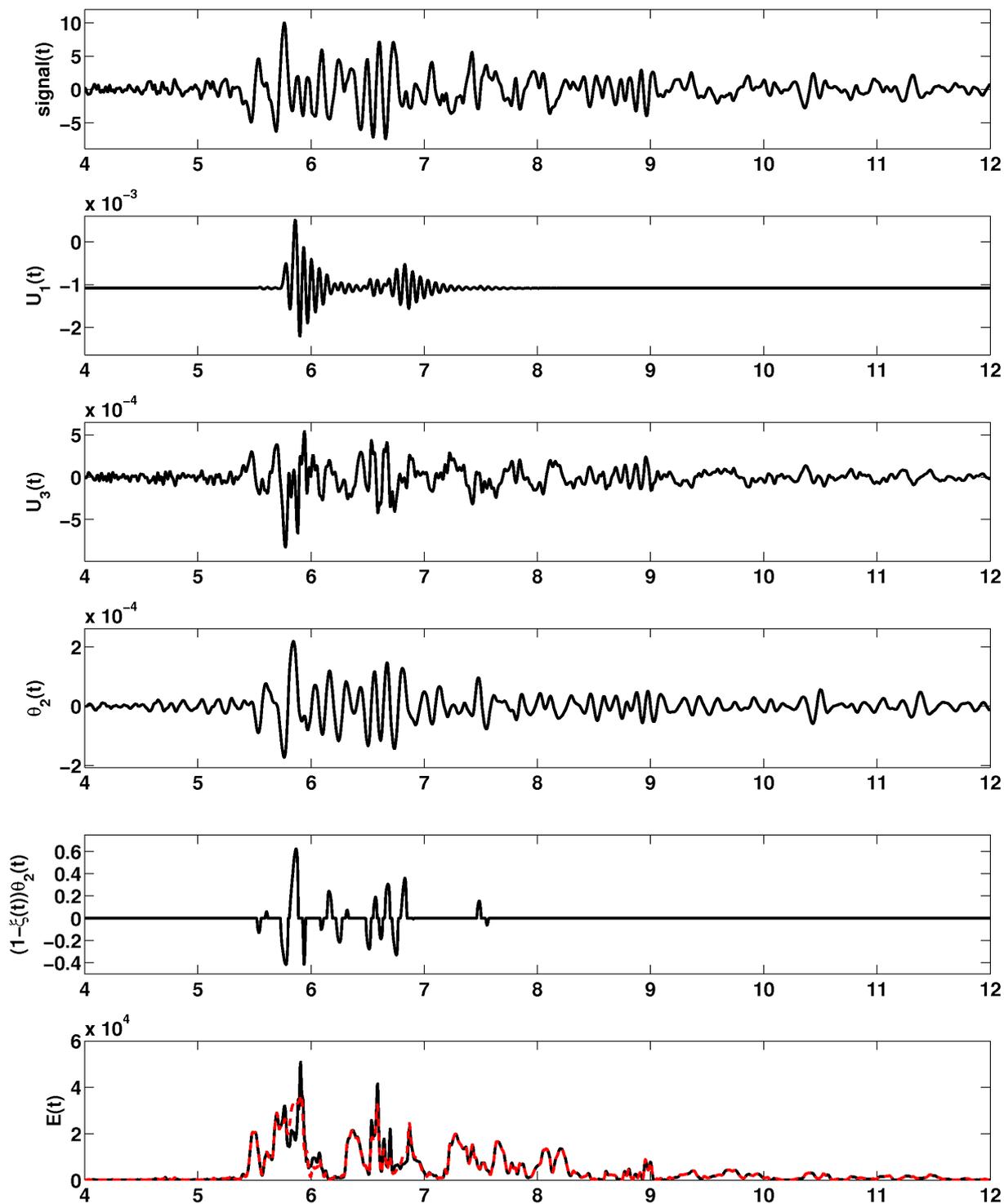


Figure VIII.9 Réponse de l'immeuble soumis à la composante l'événement sismique de Parkfield avec un pic d'accélération à 10 m.s^{-2}

VIII.4 Conclusions

Contrairement aux approches linéaires présentées jusqu'ici, les non-linéarités liées au décollement ont nécessité de sous-structurer le bâtiment et son interaction avec le sol. La méthode de *Craig-Bampton* est alors mise en œuvre dans un cadre particulier qui permet de coupler un modèle de poutre du bâtiment avec un modèle de *Winkler* à ressorts couplés.

L'étude des oscillations libres avec décollement d'un bloc rigide et d'un bâtiment soumis à une onde de choc met en lumière l'effet du couplage entre la flexibilité de la structure et le décollement au sol. Les mouvements dynamiques verticaux et horizontaux de la fondation sont de plus pris en compte. On s'aperçoit que les premiers jouent un rôle important dans l'initiation du décollement.

Les "creux" observés pour les variations de l'énergie mécanique du bloc rigide démontrent la nécessité de prendre en compte le caractère inertiel du sol dans le modèle mécanique du décollement.

On estime la limite de renversement du bâtiment dans le cas d'un signal sismique proportionnel à celui du tremblement de terre de Parkfield déjà étudié dans le précédent chapitre, dont on fait croître l'amplitude de manière itérative. Ce type d'approche s'avère utile pour des structures élancées sujette au renversement.

CONCLUSION

Les différents apports de ce mémoire se situent dans le cadre de la mécanique des structures avec application au génie parasismique. D'une façon générale, les structures de génie civil de hauteur moyenne à haute sont caractérisées par une structure périodique, la structure étant reproductible d'un étage à l'autre.

La **première partie** de ce mémoire porte sur l'utilisation de la méthode d'homogénéisation de structures périodiques de type "poutre". Cette méthode permet de formaliser la méthode d'ingénierie construisant une poutre équivalente à un bâtiment élancé ou "modèle brochette". Les principaux apports dans ce domaine sont:

- la mise au point d'une technique numérique **non-intrusive**, par comparaison avec les méthodes mises au point antérieurement, grâce à l'utilisation d'une technique originale en "deux étapes". La première étape permet d'appliquer la déformation macroscopique à la période et fait apparaître des déséquilibres locaux. La deuxième étape permet de rétablir l'équilibre et de finaliser l'homogénéisation.

- l'extension de la méthode afin de calculer les raideurs de cisaillement d'une poutre de *Timoshenko*.

- l'utilisation de la technique d'homogénéisation et sa validation pour des structures de génie civil pour lesquelles l'hypothèse des poutres (dimensions transversales faibles devant la longueur) n'est pas vérifiée. Les résultats montrent en particulier que la méthode se trouve en limite d'utilisation: d'une part, le rapport entre la longueur d'une période est petite mais non négligeable devant la longueur de la structure, d'autre part les dimensions transversales de la structure ne sont pas faibles devant la hauteur.

La **deuxième partie** du mémoire porte sur l'application de la méthode en génie parasismique.

Le modèle de "poutre équivalente" calculé en première partie est utilisé systématiquement pour représenter la raideur de la structure et deux hypothèses simplificatrices sont adoptées pour la répartition des masses.

La **représentation de l'interaction sol-structure** est en général effectuée en utilisant un modèle de sol déterministe, dont on fait varier les propriétés dans une fourchette donnée. L'application d'une méthode de modélisation stochastique de l'impédance du sol a permis de prendre en compte l'incertitude sur la modélisation de l'impédance. L'utilisation d'un modèle moyen fondé sur une modélisation simplifiée de l'impédance a permis de déterminer l'effet de la prise en compte des incertitudes de sol sur la réponse de la structure. Il est possible ainsi de retrouver que la prise en compte de cette incertitude met en torsion le bâtiment, même si le bâtiment est symétrique. Ce résultat est important car il est connu que les bâtiments conventionnels résistent mal à la mise en torsion.

Le mémoire se termine sur la **modélisation des effets non-linéaires dus au décollement** de la fondation. Le traitement de ce problème non linéaire est traité par la méthode de sous structuration de Craig et Bampton, qui permet de traiter le problème en couplant

le traitement modal de la structure avec la réponse non linéaire de la fondation.

Les **perspectives** de ce travail sont nombreuses.

Concernant la technique d'homogénéisation, les résultats obtenus dans le cas des poutres épaisses peuvent s'étendre de façon simple aux plaques épaisses périodiques et même, en ce qui concerne la méthode d'homogénéisation numérique non intrusive, aux matériaux composites tridimensionnels. Par ailleurs, l'étude a montré que dans certains cas extrêmes, la raideur en cisaillement de la structure n'est pas convenablement obtenue par la méthode d'homogénéisation adoptée. L'étude plus approfondie de tels cas pathologiques et leur traitement reste un problème ouvert.

La partie portant sur l'application au génie parasismique a été développée dans le cadre de la méthode de la "poutre équivalente". La méthode de réduction modale adoptée pour prendre les effets aléatoires et les effets non linéaires sur l'interaction sol-structure peut s'étendre au cas de la structure complète, permettant ainsi d'étendre le domaine d'application de la méthode d'analyse modale.

ANNEXES



ANNEXE A

A.1 Correction de cisaillement pour poutres rectangulaires

Cette annexe présente le calcul du facteur de correction de cisaillement pour une section rectangulaire (voir par exemple [26]). On considère une section rectangulaire homogène de côtés b et h et d'épaisseur e .

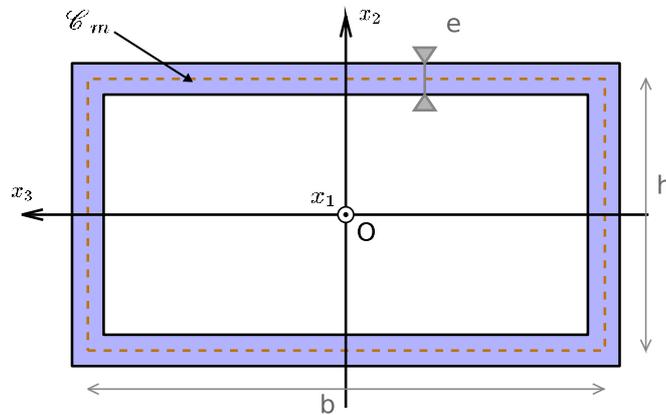


Figure A.1

Le point O est le centre de masse de section et (Ox_2) , (Ox_3) ses axes transverse. La courbe médiane est notée \mathcal{C}_m . On considère la situation où la section est soumise à un effort tranchant V_2 . On ouvre la section au point $A(x_2 = h/2, x_3 = 0)$ de l'axe (Ox_2) . Soit M un point de la courbe médiane \mathcal{C}_m , la surface $\Sigma(M)$ est alors le domaine délimité par le segment $\Gamma(M)$ normal à \mathcal{C}_m (Figure A.2). Le moment statique $S_2^*(M)$ est défini par:

$$S_2^*(M) = \int_{\Sigma(M)} x_2 dS$$

où dS est l'élément de surface sur $\Sigma(M)$.

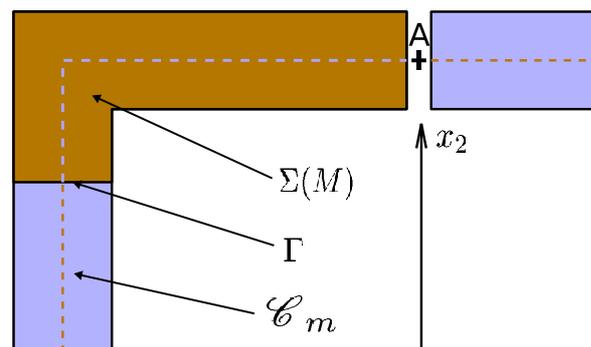


Figure A.2

Calcul du moment statique

La section ayant (Ox_2) pour axe de symétrie, on donne l'expression des moments statiques sur le circuit $[A, B, C, D]$, l'expression sur le reste de la courbe \mathcal{C}_m pouvant en être déduit. L'abscisse curviligne s_1 ayant pour origine le point $A(s_1 = 0)$ décrit le segment $[AB]$, l'abscisse curviligne s_2 ayant pour origine le point $B(s_2 = 0)$ décrit le segment $[BC]$ et l'abscisse curviligne s_3 ayant pour origine le point $C(s_3 = 0)$ décrit le segment $[CD]$ (Figure A.3).

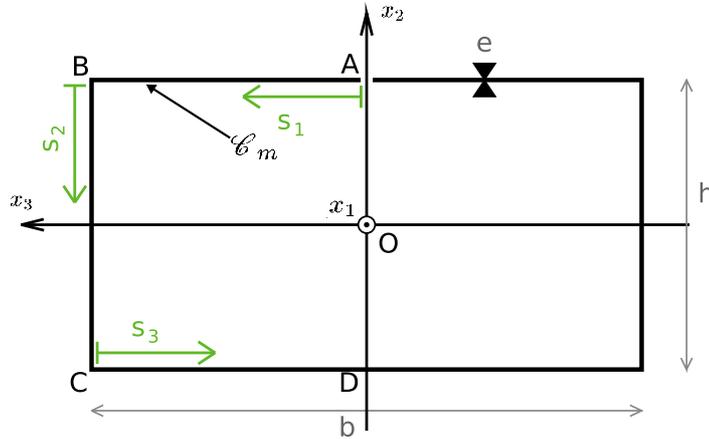


Figure A.3

Moment statique sur le segment $[AB]$

Ce segment est décrit par l'abscisse curviligne s_1 de sorte que $[AB] = \{M(s_1), 0 \leq s_1 \leq b/2\}$.

$$S_2^*(M) = S_2^*(s_1) = \int_0^{s_1} \int_{(h-e)/2}^{(h+e)/2} x_2 dx_2 dx_3 = \frac{he}{2} s_1 \quad (\text{A.1})$$

Moment statique sur le segment $[BC]$

Ce segment est décrit par l'abscisse curviligne s_2 de sorte que $[BC] = \{M(s_2), 0 \leq s_2 \leq h\}$.

$$S_2^*(M) = S_2^*(s_2) = S_2^*(B) + \int_{(b-e)/2}^{(b+e)/2} \int_{h/2-s_2}^{h/2} x_2 dx_2 dx_3 = \frac{bhe}{4} + \frac{e}{2} (h - s_2) s_2 \quad (\text{A.2})$$

Moment statique sur le segment $[CD]$

Ce segment est décrit par l'abscisse curviligne s_3 de sorte que $[CD] = \{M(s_3), 0 \leq s_3 \leq b/2\}$.

$$S_2^*(M) = S_2^*(s_3) = S_2^*(C) + \int_{b/2-s_3}^{b/2} \int_{-(h+e)/2}^{-(h-e)/2} x_2 dx_2 dx_3 = \frac{bhe}{4} - \frac{he}{2} s_3 \quad (\text{A.3})$$

Dans une section à paroi mince, les contraintes sont approximativement orientées dans le plan de la section et constantes dans l'épaisseur. Le flux de contrainte Φ à travers la

portion de section $\Sigma(M)$ est donné par:

$$\Phi(M) = \int_{\partial\Sigma(M)} (\sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3) ds = \int_{\Gamma(M)} (\sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3) ds \quad (\text{A.4})$$

Le bord $\partial\Sigma(M) \setminus \Gamma$ est un bord libre. La section étant soumise à un effort tranchant V_2 , le flux de contrainte $\Phi(M)$ est donné par la relation:

$$\Phi(M) = -\frac{V_2}{I_3} S_2^*(M) + \Phi_0$$

Le flux constant Φ_0 est dû au fait que la section soit une paroi fermée. Le moment statique est calculé avec une ouverture du profil en A , alors le flux constant correspond à la valeur du flux au point A : $\Phi_0 = \Phi(A)$. Le segment $\Gamma(A)$ a pour direction normale $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$. Or, sous l'effet de l'effort tranchant V_2 la contrainte en A est $\boldsymbol{\sigma}(A) = \sigma_{12} \mathbf{e}_1 \otimes^S \mathbf{e}_2$. Par conséquent l'expression (A.4) donne:

$$\Phi(A) = \int_{\Gamma(A)} (\sigma_{12} \times 0 + 0 \times n_3) ds = 0$$

Le coefficient de correction de cisaillement s'exprime en fonction du flux de cisaillement par la relation suivante:

$$k_2 = \frac{V_2^2}{S \oint_{\mathcal{C}_m} (\Phi(M))^2 \frac{ds}{e(M)}} = \frac{e I_3^2}{S \oint_{\mathcal{C}_m} (S_2^*(M))^2 ds} \quad (\text{A.5})$$

La surface de section est $S = 2e(h + b)$, le moment d'inertie de section $I_3 = \frac{1}{6} h^3 e + \frac{1}{2} b h^2 e + \frac{1}{2} h e^3 + \frac{1}{6} b e^3$, l'intégrale sur le contour fermé \mathcal{C}_m se développe à l'aide des expressions (A.1), (A.2) et (A.3) de S_2^* :

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}_m} (S_2^*(M))^2 ds &= 2 \times \left(\int_0^{b/2} (S_2^*(s_1))^2 ds_1 + \int_0^h (S_2^*(s_2))^2 ds_2 + \int_0^{b/2} (S_2^*(s_3))^2 ds_3 \right) \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{96} h^2 e^2 b^3 + \frac{1}{120} e^2 h^5 + 1/24 b h^4 e^2 + 1/16 b^2 h^3 e^2 + \frac{1}{96} h^2 e^2 b^3 \right) \\ &= \frac{1}{120} h^2 e^2 (5 b^3 + 2 h^3 + 10 b h^2 + 15 h b^2) \end{aligned}$$

En posant $\alpha = b/h$, l'expression (A.5) du facteur de correction de cisaillement donne:

$$k_2 = \frac{5}{3} \frac{(h^2 + 3 \alpha h^2 + 3 e^2 + \alpha e^2)^2}{h^4 (1 + \alpha) (5 \alpha^3 + 2 + 10 \alpha + 15 \alpha^2)}$$

Ainsi pour une section carrée ($\alpha = 1$) de paroi mince ($e^2 \sim 0$), le facteur de correction de cisaillement vaut approximativement 5/12 soit la moitié de celui d'une section pleine.

A.2 Algorithme de maillage périodique

Cette annexe expose le principe de fonctionnement du mailleur développé pour construire le maillage associé à la structure de référence du bâtiment présentée en III.5.1. Ce mailleur est dédié aux structures prismatiques entrecoupées de planchers, ce qui est le cas d'un bâtiment à plusieurs étages identiques. A partir d'un fichier de données formaté, le mailleur génère un maillage constitué d'éléments de type plaque pour un nombre quelconque d'étages.

La description des données dont se sert le mailleur pour construire un étage se fait en deux étapes:

- Description du plancher.

Il s'agit de découper le plancher en domaines rectangulaires correspondants à ses interconnexions avec les murs. Pour chaque sous-domaine rectangulaire est précisé le raffinement du maillage ainsi que l'épaisseur de la plaque.

- Extrusion des murs.

Après avoir découpé le plancher, on indique le tracé d'extrusion des murs. Ces segments doivent coïncider avec le découpage du plancher pour assurer la connexion. On précise la hauteur d'extrusion des murs, le raffinement de leur maillage ainsi que leur épaisseur.

Toutes ses données sont écrites dans un fichier ASCII destiné à être lu par le mailleur. Le fichier ayant servi à l'élaboration de la maquette virtuelle du bâtiment est donné à titre d'exemple à la *Figure A.5*. Chaque ligne fournit la description d'un sous-domaine rectangulaire et est composée de 7 groupes de données. Le premier est une étiquette arbitraire ici indiquée 'plate ##'. Les groupes 2-5 sont des triplets de nombres décimaux indiquant les coordonnées des sommets du domaine rectangulaire. Le groupe 6 indique l'épaisseur de la plaque. Le groupe 7 indique le nombre d'éléments que le mailleur doit créer dans le domaine suivant chacun de ses axes locaux.

A partir de ces données, le mailleur va traiter chaque domaine rectangulaire en le quadrillant de nœuds et en raccordant les nœuds par des éléments plaques. Le mailleur répète cette opération pour tous les étages. Reste ensuite à connecter les nœuds des éléments en contact. Pour cela, un algorithme de tri teste l'écart entre les nœuds. En dessous d'une tolérance les nœuds sont considérés comme confondus. Une partie des nœuds est alors supprimée de la table de coordonnées nodale et est remplacée par une autre dans la table de connectivité des éléments.

Cet algorithme permet d'obtenir des maillages de bâtiments avec un coût de temps de conception assez faible et des fiabilités de connectivité et de régularité du maillage élevées. Le raffinement du maillage est en outre facilement modifiable. Néanmoins, l'étape consistant à "souder" les éléments adjacents peut prendre un temps de l'ordre d'une à trois heures pour des grandes structures comme le bâtiment étudié en III.5.

LABEL	POINT1	POINT2	POINT3	POINT4	thick.	mesh. prec.
@floor: 41						
plate 1	0,7,-15	0,3,-15	0,3,-10.714	0,7,-10.714	0,3	8,8
plate 2	0,7,-10.714	0,3,-10.714	0,3,-6.429	0,7,-6.429	0,3	8,8
plate 3	0,7,-6.429	0,3,-6.429	0,3,-2.143	0,7,-2.143	0,3	8,8
plate 4	0,7,-2.143	0,3,-2.143	0,3,2.143	0,7,2.143	0,3	8,8
plate 5	0,7,2.143	0,3,2.143	0,3,6.429	0,7,6.429	0,3	8,8
plate 6	0,7,6.429	0,3,6.429	0,3,10.714	0,7,10.714	0,3	8,8
plate 7	0,7,10.714	0,3,10.714	0,3,15	0,7,15	0,3	8,8
plate 8	0,3,-18.75	0,1,-18.75	0,1,-15	0,3,-15	0,3	8,8
plate 9	0,3,-15	0,1,-15	0,1,-10.714	0,3,-10.714	0,3	8,8
plate 10	0,3,-10.714	0,1,-10.714	0,1,-6.429	0,3,-6.429	0,3	8,8
plate 11	0,3,-6.429	0,1,-6.429	0,1,-2.143	0,3,-2.143	0,3	8,8
plate 12	0,3,-2.143	0,1,-2.143	0,1,2.143	0,3,2.143	0,3	8,8
plate 13	0,3,2.143	0,1,2.143	0,1,6.429	0,3,6.429	0,3	8,8
plate 14	0,3,6.429	0,1,6.429	0,1,10.714	0,3,10.714	0,3	8,8
plate 15	0,3,10.714	0,1,10.714	0,1,15	0,3,15	0,3	8,8
plate 16	0,3,15	0,1,15	0,1,18.75	0,3,18.75	0,3	8,8
plate 17	0,1,-18.75	0,-1,-18.75	0,-1,-15	0,1,-15	0,3	8,8
plate 18	0,1,-15	0,-1,-15	0,-1,-10.714	0,1,-10.714	0,3	8,8
plate 19	0,1,-10.714	0,-1,-10.714	0,-1,-6.429	0,1,-6.429	0,3	8,8
plate 20	0,1,-6.429	0,-1,-6.429	0,-1,-2.143	0,1,-2.143	0,3	8,8
plate 21	0,1,-2.143	0,-1,-2.143	0,-1,2.143	0,1,2.143	0,3	8,8
plate 22	0,1,2.143	0,-1,2.143	0,-1,6.429	0,1,6.429	0,3	8,8
plate 23	0,1,6.429	0,-1,6.429	0,-1,10.714	0,1,10.714	0,3	8,8
plate 24	0,1,10.714	0,-1,10.714	0,-1,15	0,1,15	0,3	8,8
plate 25	0,1,15	0,-1,15	0,-1,18.75	0,1,18.75	0,3	8,8
plate 26	0,-1,-18.75	0,-3,-18.75	0,-3,-15	0,-1,-15	0,3	8,8
plate 27	0,-1,-15	0,-3,-15	0,-3,-10.714	0,-1,-10.714	0,3	8,8
plate 28	0,-1,-10.714	0,-3,-10.714	0,-3,-6.429	0,-1,-6.429	0,3	8,8
plate 29	0,-1,-6.429	0,-3,-6.429	0,-3,-2.143	0,-1,-2.143	0,3	8,8
plate 30	0,-1,-2.143	0,-3,-2.143	0,-3,2.143	0,-1,2.143	0,3	8,8
plate 31	0,-1,2.143	0,-3,2.143	0,-3,6.429	0,-1,6.429	0,3	8,8
plate 32	0,-1,6.429	0,-3,6.429	0,-3,10.714	0,-1,10.714	0,3	8,8
plate 33	0,-1,10.714	0,-3,10.714	0,-3,15	0,-1,15	0,3	8,8
plate 34	0,-1,15	0,-3,15	0,-3,18.75	0,-1,18.75	0,3	8,8
plate 35	0,-3,-15	0,-7,-15	0,-7,-10.714	0,-3,-10.714	0,3	8,8
plate 36	0,-3,-10.714	0,-7,-10.714	0,-7,-6.429	0,-3,-6.429	0,3	8,8
plate 37	0,-3,-6.429	0,-7,-6.429	0,-7,-2.143	0,-3,-2.143	0,3	8,8
plate 38	0,-3,-2.143	0,-7,-2.143	0,-7,2.143	0,-3,2.143	0,3	8,8
plate 39	0,-3,2.143	0,-7,2.143	0,-7,6.429	0,-3,6.429	0,3	8,8
plate 40	0,-3,6.429	0,-7,6.429	0,-7,10.714	0,-3,10.714	0,3	8,8
plate 41	0,-3,10.714	0,-7,10.714	0,-7,15	0,-3,15	0,3	8,8
@walls: 36 height-> 2.7						
plate 42	0,3,-18.75	0,-3,-18.75	2,7,-3,-18.75	2,7,3,-18.75	0,2	24,16
plate 43	0,3,-15	0,3,-15	2,7,3,-15	2,7,7,-15	0,2	8,16
plate 44	0,7,-10.714	0,3,-10.714	2,7,3,-10.714	2,7,7,-10.714	0,14	8,16
plate 45	0,7,-6.429	0,3,-6.429	2,7,3,-6.429	2,7,7,-6.429	0,14	8,16
plate 46	0,7,-2.143	0,3,-2.143	2,7,3,-2.143	2,7,7,-2.143	0,14	8,16
plate 47	0,7,2.143	0,3,2.143	2,7,3,2.143	2,7,7,2.143	0,14	8,16
plate 48	0,7,6.429	0,3,6.429	2,7,3,6.429	2,7,7,6.429	0,14	8,16
plate 49	0,7,10.714	0,3,10.714	2,7,3,10.714	2,7,7,10.714	0,14	8,16
plate 50	0,7,15	0,3,15	2,7,3,15	2,7,7,15	0,2	8,16
plate 51	0,3,-15	0,1,-15	2,7,1,-15	2,7,3,-15	0,2	8,16
plate 52	0,3,-10.714	0,1,-10.714	2,7,1,-10.714	2,7,3,-10.714	0,14	8,16
plate 53	0,3,-6.429	0,1,-6.429	2,7,1,-6.429	2,7,3,-6.429	0,14	8,16
plate 54	0,3,-2.143	0,1,-2.143	2,7,1,-2.143	2,7,3,-2.143	0,14	8,16
plate 55	0,3,2.143	0,1,2.143	2,7,1,2.143	2,7,3,2.143	0,14	8,16
plate 56	0,3,6.429	0,1,6.429	2,7,1,6.429	2,7,3,6.429	0,14	8,16
plate 57	0,3,10.714	0,1,10.714	2,7,1,10.714	2,7,3,10.714	0,14	8,16
plate 58	0,3,15	0,1,15	2,7,1,15	2,7,3,15	0,2	8,16
plate 59	0,-3,-15	0,-1,-15	2,7,-1,-15	2,7,-3,-15	0,2	8,16
plate 60	0,-3,-10.714	0,-1,-10.714	2,7,-1,-10.714	2,7,-3,-10.714	0,14	8,16
plate 61	0,-3,-6.429	0,-1,-6.429	2,7,-1,-6.429	2,7,-3,-6.429	0,14	8,16
plate 62	0,-3,-2.143	0,-1,-2.143	2,7,-1,-2.143	2,7,-3,-2.143	0,14	8,16
plate 63	0,-3,2.143	0,-1,2.143	2,7,-1,2.143	2,7,-3,2.143	0,14	8,16
plate 64	0,-3,6.429	0,-1,6.429	2,7,-1,6.429	2,7,-3,6.429	0,14	8,16
plate 65	0,-3,10.714	0,-1,10.714	2,7,-1,10.714	2,7,-3,10.714	0,14	8,16
plate 66	0,-3,15	0,-1,15	2,7,-1,15	2,7,-3,15	0,2	8,16
plate 67	0,-7,-15	0,-3,-15	2,7,-3,-15	2,7,-7,-15	0,2	8,16
plate 68	0,-7,-10.714	0,-3,-10.714	2,7,-3,-10.714	2,7,-7,-10.714	0,14	8,16
plate 69	0,-7,-6.429	0,-3,-6.429	2,7,-3,-6.429	2,7,-7,-6.429	0,14	8,16
plate 70	0,-7,-2.143	0,-3,-2.143	2,7,-3,-2.143	2,7,-7,-2.143	0,14	8,16
plate 71	0,-7,2.143	0,-3,2.143	2,7,-3,2.143	2,7,-7,2.143	0,14	8,16
plate 72	0,-7,6.429	0,-3,6.429	2,7,-3,6.429	2,7,-7,6.429	0,14	8,16
plate 73	0,-7,10.714	0,-3,10.714	2,7,-3,10.714	2,7,-7,10.714	0,14	8,16
plate 74	0,-7,15	0,-3,15	2,7,-3,15	2,7,-7,15	0,2	8,16
plate 75	0,3,18.75	0,-3,18.75	2,7,-3,18.75	2,7,3,18.75	0,2	24,16
plate 76	0,7,-15	0,7,15	2,7,7,15	2,7,7,-15	0,15	56,16
plate 77	0,-7,-15	0,-7,15	2,7,-7,15	2,7,-7,-15	0,15	56,16

Figure A.4 Données de maillage pour la structure présentée en III.5.1.

A.3 Milieu périodique mis en flexion par une force transverse

Cette annexe expose les planches graphiques des tests de validation des données de localisation issues de l'application de la procédure d'homogénéisation présentée en III.4.3 à la structure périodique à cellule cubique décrite en III.4.3.

Pour les forces et moments internes dont la répartition présente des niveaux peu élevés (*e.g.* Q_X , Q_Y , M_{XY}), on observe un bruitage numérique important.

De même il arrive qu'on observe un niveau d'erreur important au centre de la plaque horizontale (les *Figure A.8* et *Figure A.10* en particulier) qui est dû à une concentration des efforts dans cette zone pour les données de localisation. Cette concentration d'efforts provient de l'étape 2 (voir III.4.1) du processus d'homogénéisation où la cellule est soumise à un système de forces qui est théoriquement à l'équilibre. Cependant d'un point de vue numérique, ce champ subit des troncatures en chaque nœud où il s'applique. Le déséquilibre numérique créé se répercute donc au niveau du nœud d'encastrement. Cette concentration d'effort est en général peu visible, sauf quand l'intensité des forces et moments atteint des niveaux faibles.

La table ci-dessous donne d'une part les niveaux d'erreur moyen sur l'intensité des forces et moment internes dans les éléments ainsi que l'erreur sur l'intensité maximale et d'autre part le niveau moyen d'effort et sa valeur maximale. La méthode de calcul des données de ce tableau est détaillée en III.5.3.

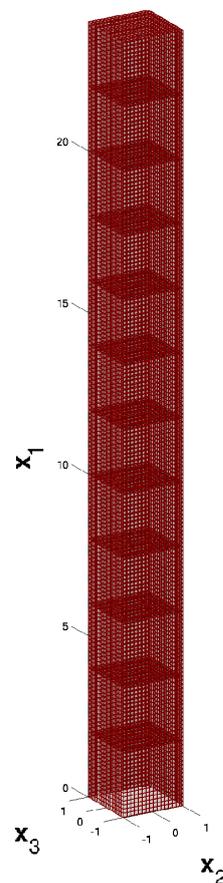


Figure A.5 Maillage de la structure périodique à 12 cellules.

Table VIII.2 Flèche suivant \mathbf{e}_2 $U_0 = 5.10^{-3} m$								
	F_X	F_Y	F_{XY}	M_X	M_Y	M_{XY}	Q_X	Q_Y
$E_{10\%}\{\mathcal{E}_{kl}\}$	5.08	0.56	2.78	5.46	2.79	18.1	1.74	3.14
\mathcal{E}_l^{\max}	3.12	0.92	2.29	1.21	5.03	8.11	1.24	6.01
$E(R_{kl})$	3.3e2	8.6e3	8.4e2	4.2	7.0	1.1	25	23
$\max R_{kl} $	2.1e3	1.6e4	2.0e3	26	44	3.8	3.8e2	4.3e2

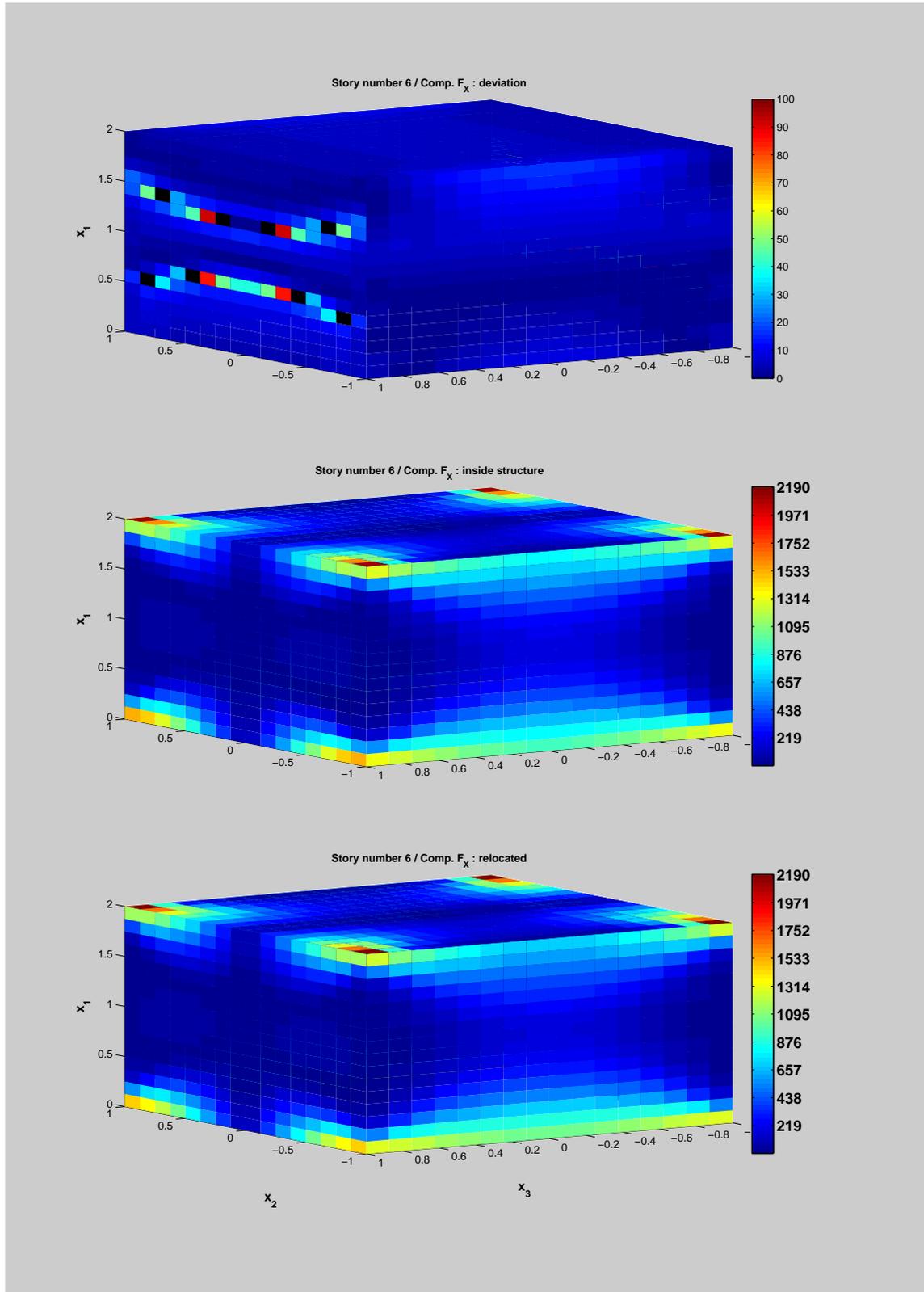


Figure A.5 Planche comparative des résultats de localisation de la composante F_X des efforts internes dans les éléments pour la 6^{ème} cellule du milieu sollicité par une flèche imposée suivant e_2 ($\mathbf{E}(x) = \gamma_{12}\tilde{\mathbf{E}}_2 + \chi_3\tilde{\mathbf{E}}_6$).

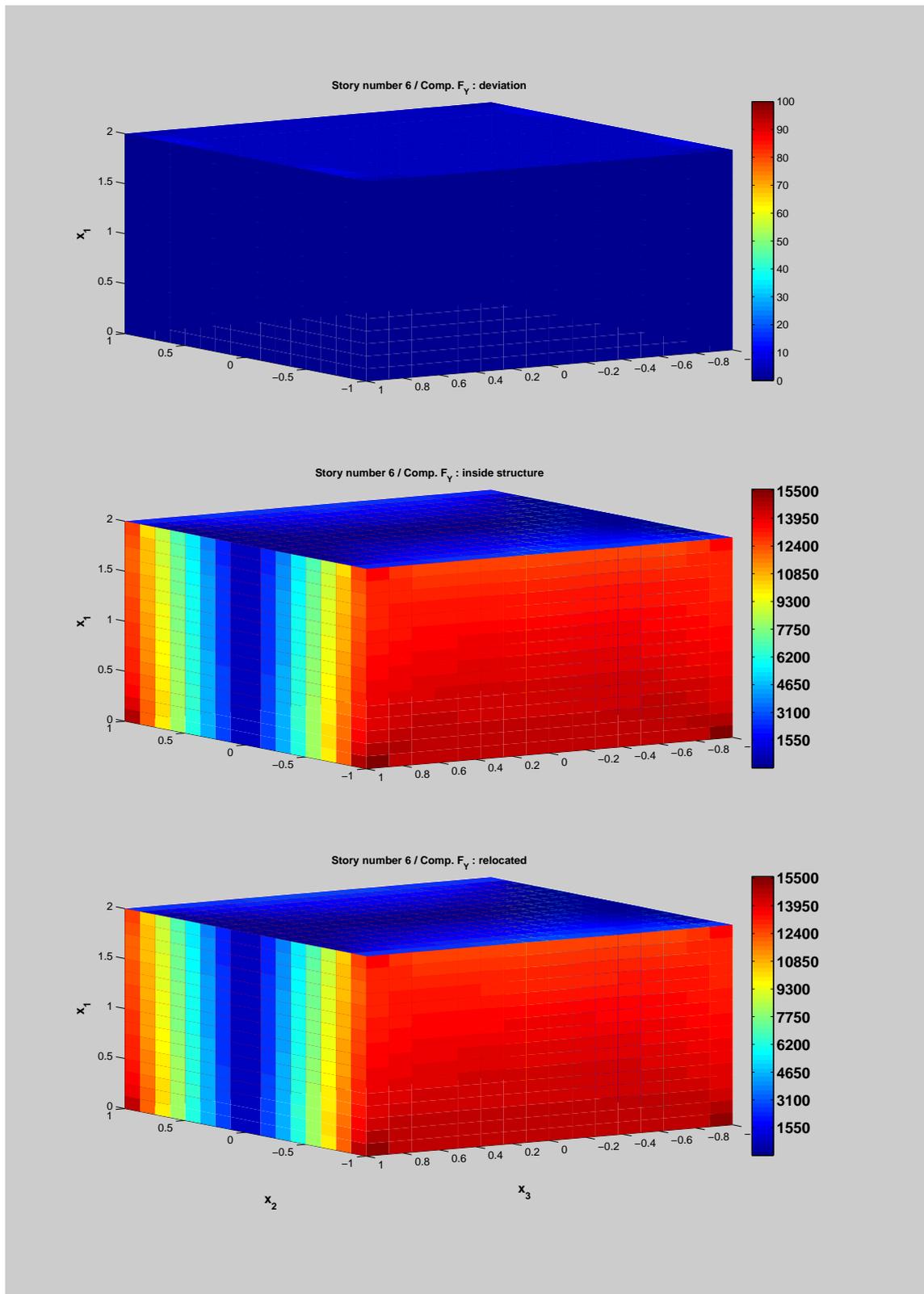


Figure A.6 Planche comparative des résultats de localisation de la composante F_Y des efforts internes dans les éléments pour la 6^{ème} cellule du milieu sollicité par une flèche imposée suivant e_2 ($\mathbf{E}(x) = \gamma_{12}\tilde{\mathbf{E}}_2 + \chi_3\tilde{\mathbf{E}}_6$).

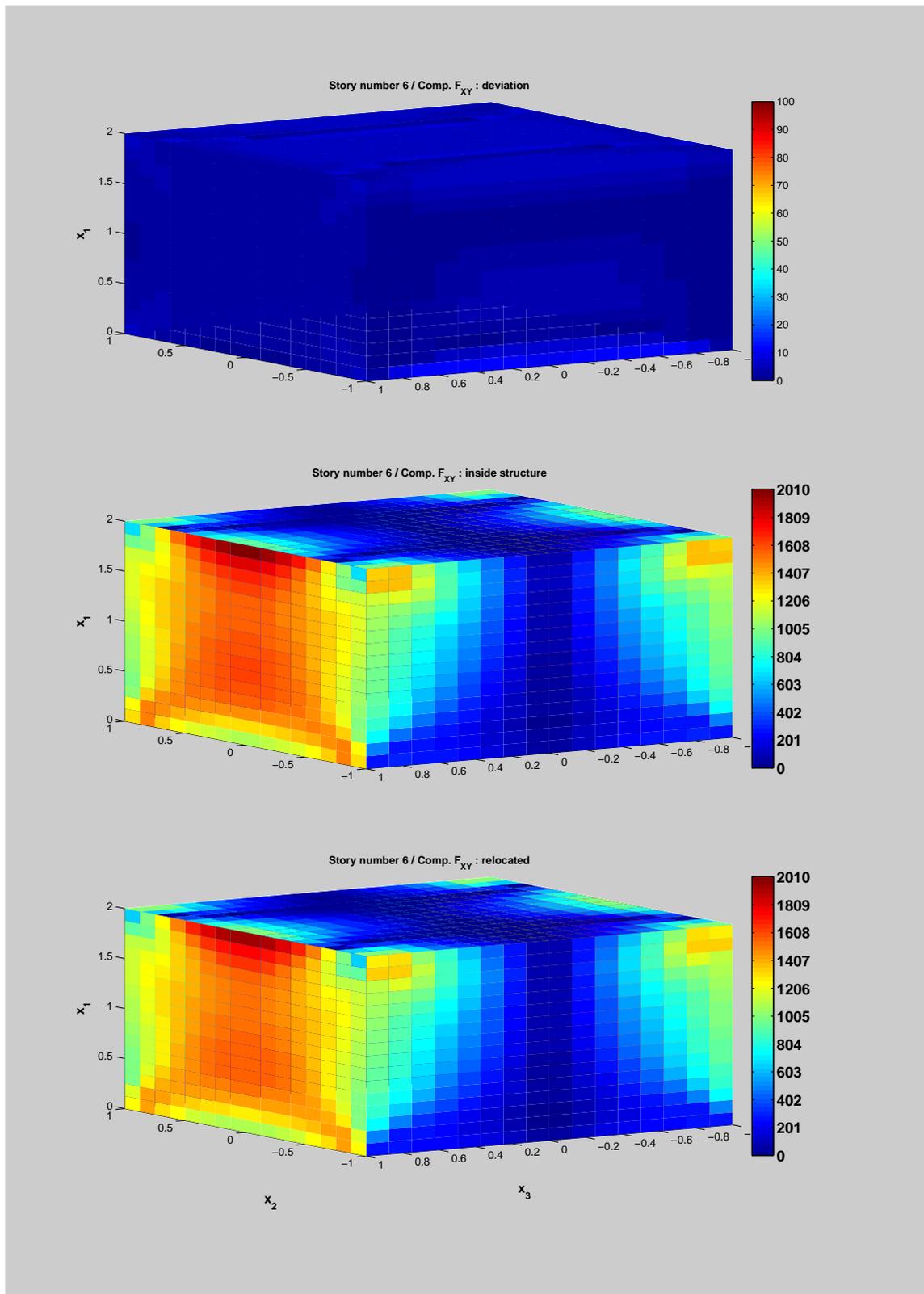


Figure A.7 Planche comparative des résultats de localisation de la composante F_{XY} des efforts internes dans les éléments pour la 6^{ème} cellule du milieu sollicité par une flèche imposée suivant e_2 ($\mathbf{E}(x) = \gamma_{12}\tilde{\mathbf{E}}_2 + \chi_3\tilde{\mathbf{E}}_6$).

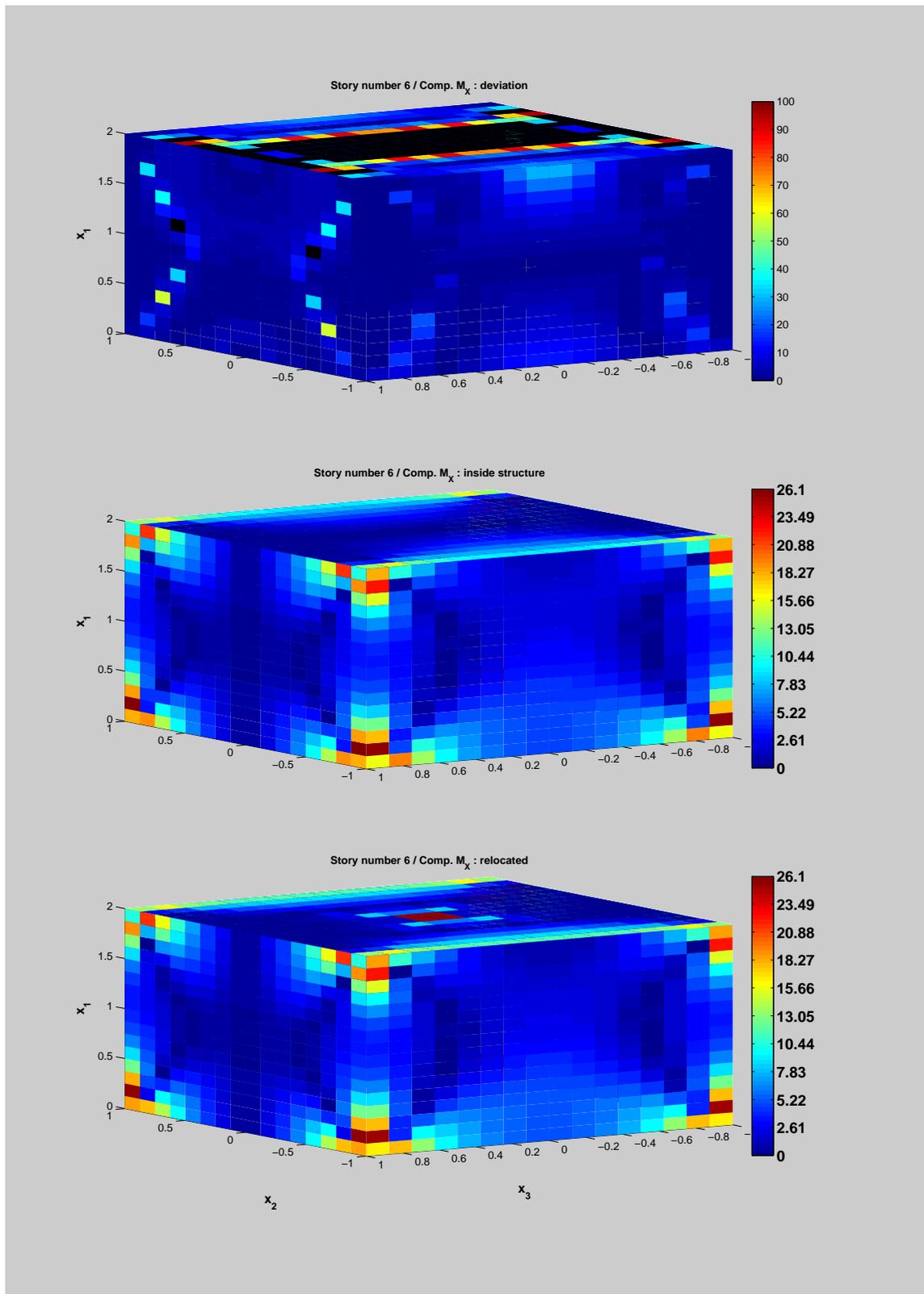


Figure A.8 Planche comparative des résultats de localisation de la composante M_X des efforts internes dans les éléments pour la 6^{ème} cellule du milieu sollicité par une flèche imposée suivant e_2 ($\mathbf{E}(x) = \gamma_{12}\tilde{\mathbf{E}}_2 + \chi_3\tilde{\mathbf{E}}_6$).

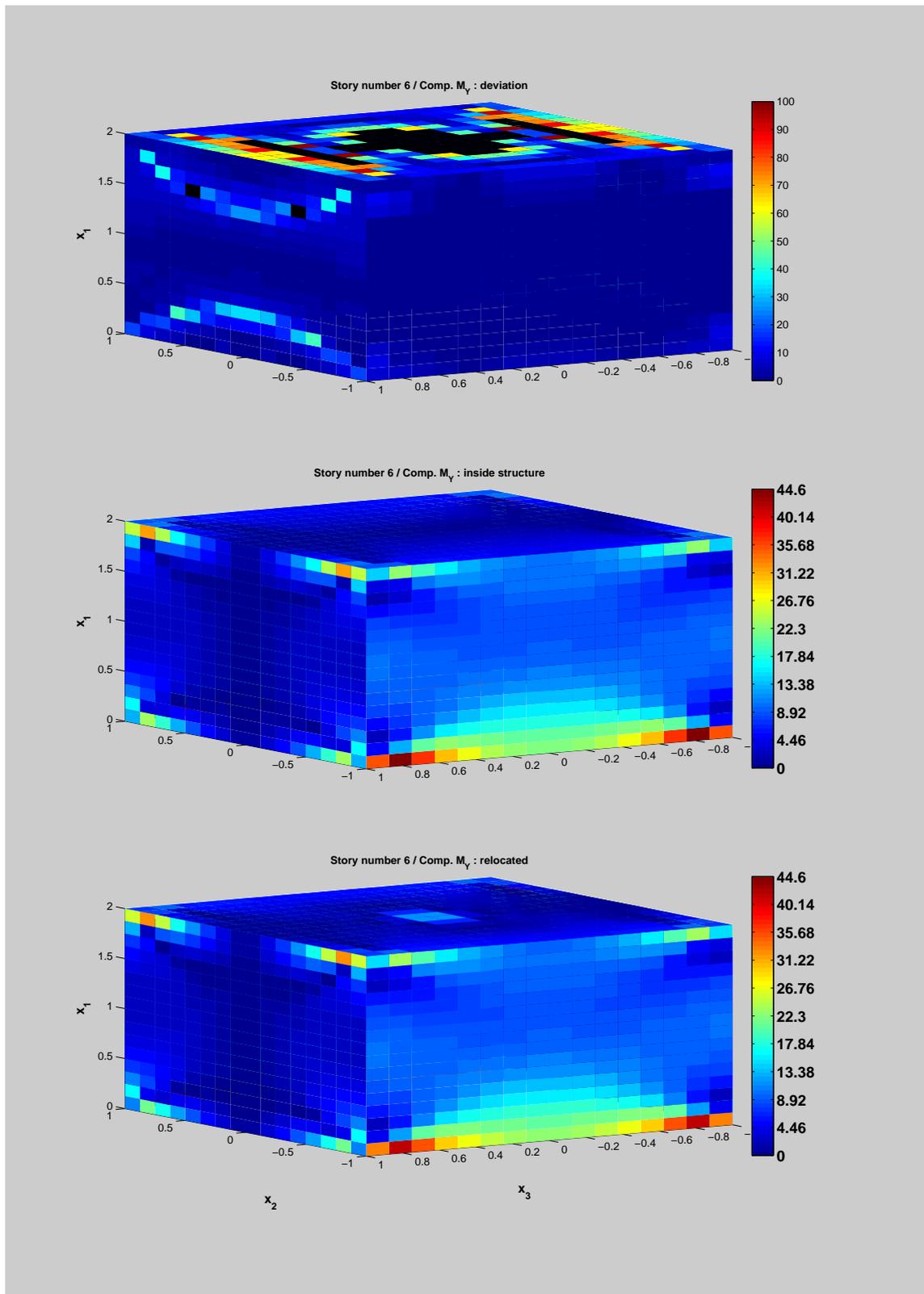


Figure A.9 Planche comparative des résultats de localisation de la composante M_y des efforts internes dans les éléments pour la 6^{ème} cellule du milieu sollicité par une flèche imposée suivant e_2 ($\mathbf{E}(x) = \gamma_{12}\tilde{\mathbf{E}}_2 + \chi_3\tilde{\mathbf{E}}_6$).

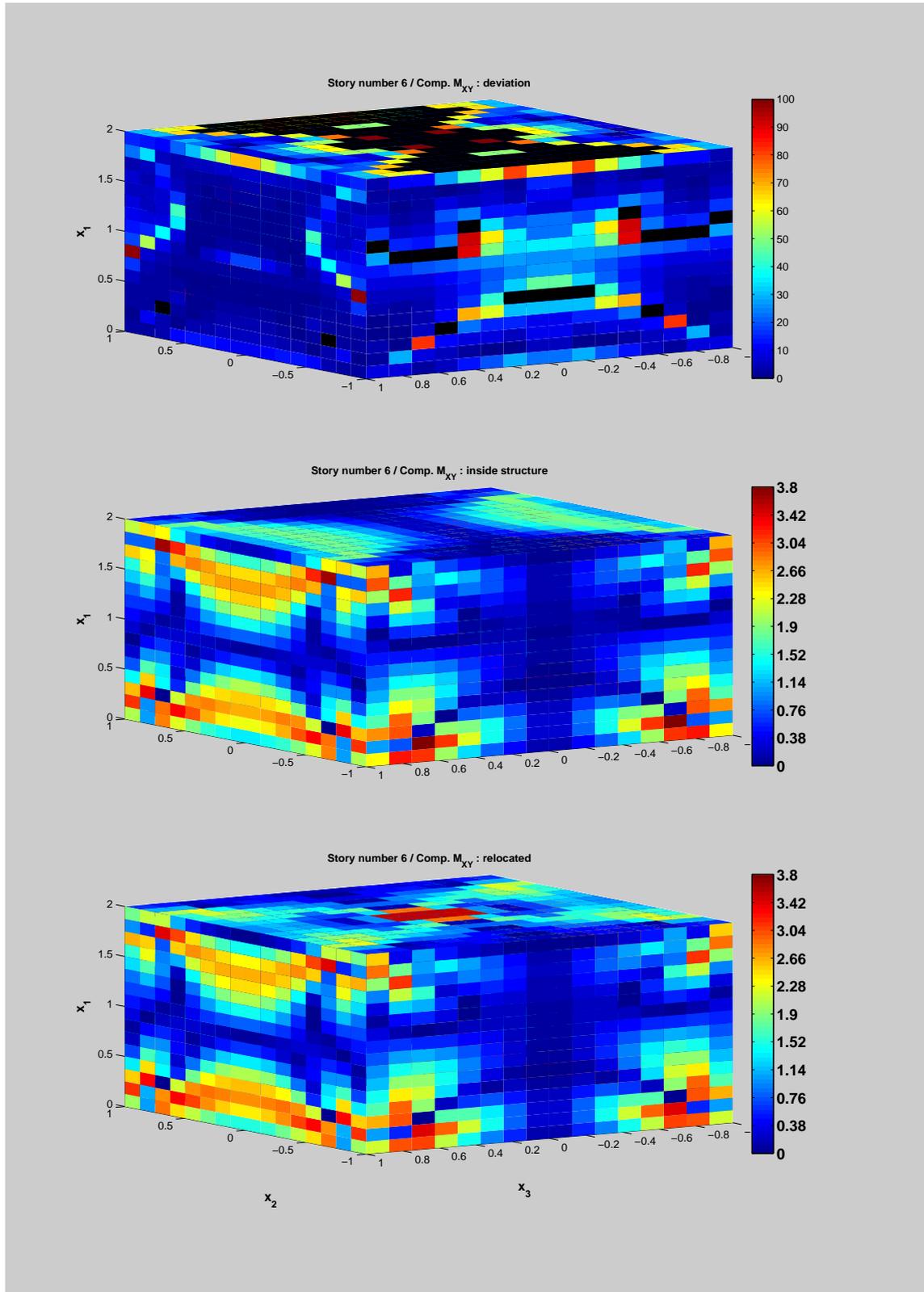


Figure A.10 Planche comparative des résultats de localisation de la composante M_{XY} des efforts internes dans les éléments pour la 6^{ème} cellule du milieu sollicité par une flèche imposée suivant e_2 ($\mathbf{E}(x) = \gamma_{12}\tilde{\mathbf{E}}_2 + \chi_3\tilde{\mathbf{E}}_6$).

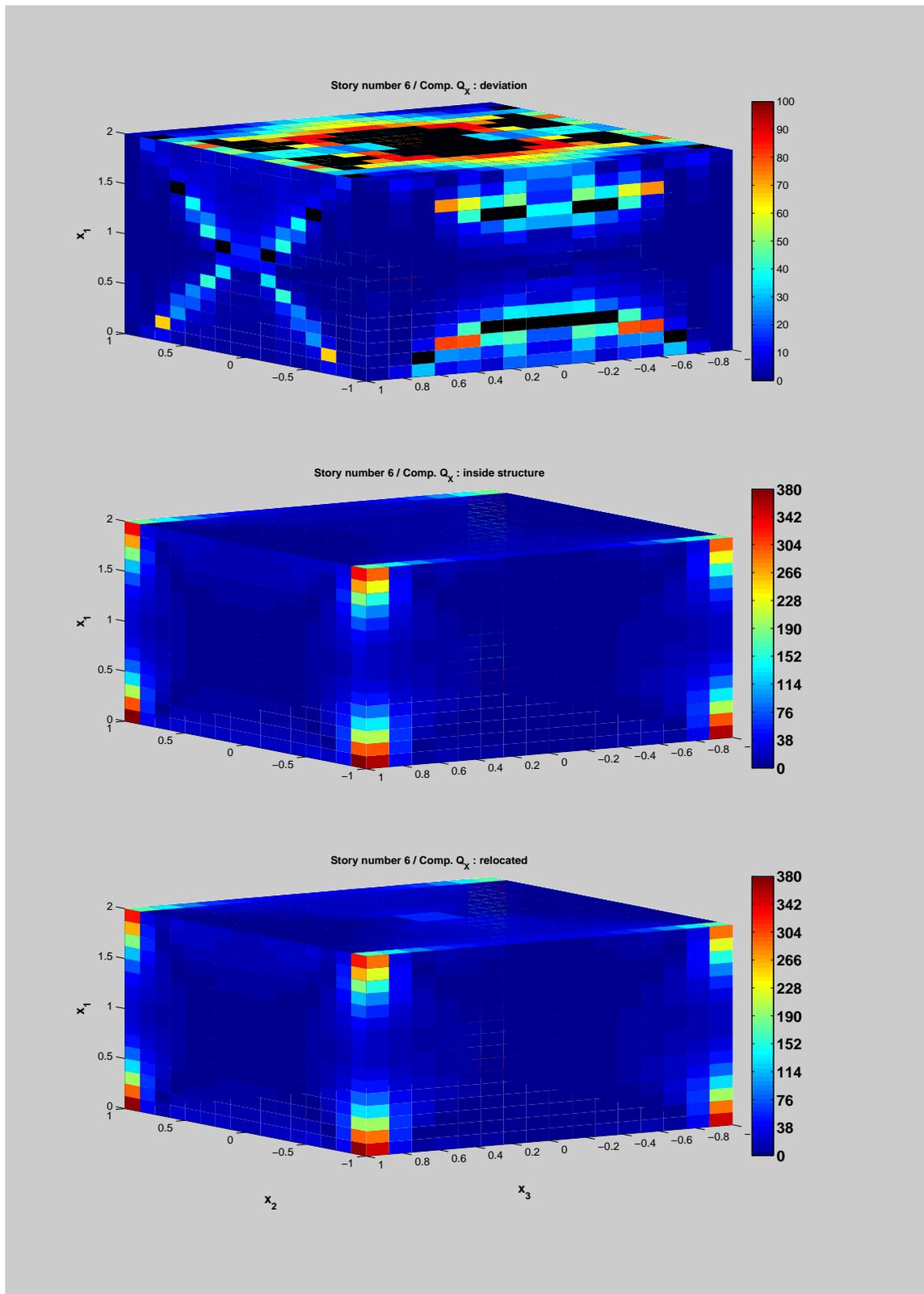


Figure A.11 Planche comparative des résultats de localisation de la composante Q_x des efforts internes dans les éléments pour la 6^{ème} cellule du milieu sollicité par une flèche imposée suivant e_2 ($\mathbf{E}(x) = \gamma_{12}\tilde{\mathbf{E}}_2 + \chi_3\tilde{\mathbf{E}}_6$).

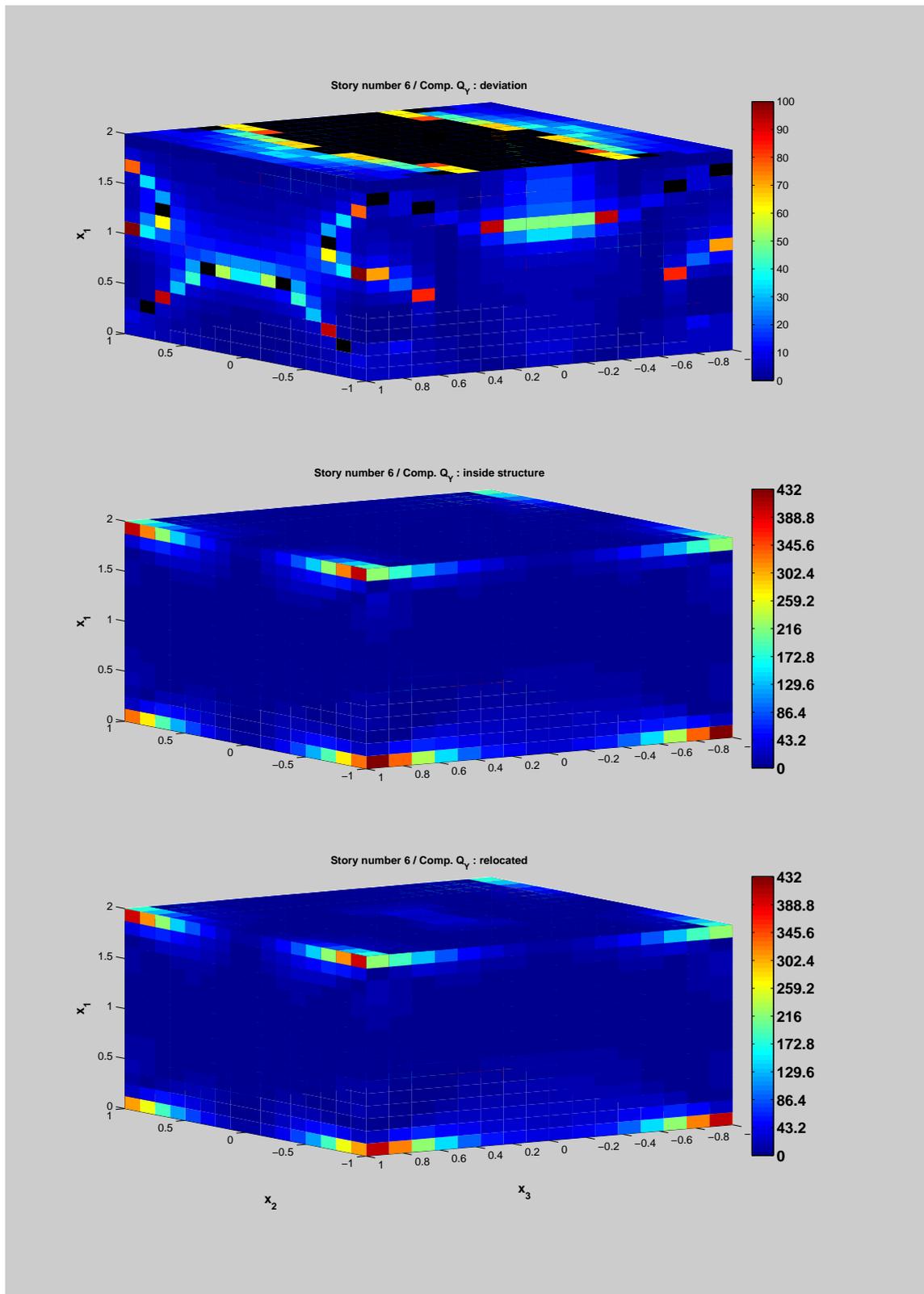


Figure A.12 Planche comparative des résultats de localisation de la composante Q_Y des efforts internes dans les éléments pour la 6^{ème} cellule du milieu sollicité par une flèche imposée suivant e_2 ($\mathbf{E}(x) = \gamma_{12}\tilde{\mathbf{E}}_2 + \chi_3\tilde{\mathbf{E}}_6$).

ANNEXE B

B.1 Opérateurs de masse et rigidité pour la poutre de Timoshenko

Les opérateurs de masse et de rigidité intervenant en VI.3.4 dans la réduction de l'équation dynamique de poutre sont déterminés à partir de l'équation des ondes (VI.29). Les solutions considérées pour cette équation sont à variation harmonique en temps et l'équation des ondes s'écrit pour une fréquence radiale ω donnée:

$$-\omega^2 [\mathbf{M}_l] \hat{\mathbf{X}} + [\mathbf{K}_{\partial x_1}] \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{0} \quad (\text{B.1})$$

avec $\mathbf{X}(x_1, t) = \hat{\mathbf{X}}(x_1) e^{\omega t}$ et $\hat{\mathbf{X}}(x_1)$ une application de l'espace $(H^1([0, H]))^6$. On multiplie à gauche (B.1) par une fonction test $\hat{\mathbf{X}}^*(x_1)$ de l'espace $(H^1([0, H]))^6$ et on intègre sur $[0, H]$ par rapport à x_1 ce qui mène à sa forme faible sur l'espace $(H^1([0, H]))^6$:

$$-\omega^2 \int_0^H \hat{\mathbf{X}}^{*T} [\mathbf{M}_l] \hat{\mathbf{X}} dx_1 + \int_0^H \hat{\mathbf{X}}^{*T} [\mathbf{K}_{\partial x_1}] \hat{\mathbf{X}} dx_1 = 0 \quad (\text{B.2})$$

Le terme de raideur de la formulation (B.2) est ensuite intégré par partie de manière à faire intervenir les conditions aux limites du problème en $x_1 = 0$ et $x_1 = H$. Si les conditions de bords ne font pas intervenir de termes inertiels dépendant de ω^2 , *e.g.* masse concentrée, alors l'opérateur de masse $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ est défini pour $\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}} \in (L^2([0, H]))^6$ par:

$$\langle \hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}} \rangle_M = \int_0^H \hat{\mathbf{X}}^T(x_1) [\mathbf{M}_l] \hat{\mathbf{Y}}(x_1) dx_1 \quad (\text{B.3})$$

Comme la matrice $[\mathbf{M}_l]$ est dans l'ensemble $\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})$ alors l'opérateur de masse $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ est une application **bilinéaire, symétrique, définie positive**.

L'opérateur de raideur s'obtient à partir du terme de raideur de la formulation faible (B.2):

$$\begin{aligned} \int_0^H \hat{\mathbf{X}}^{*T} [\mathbf{K}_{\partial x_1}] \hat{\mathbf{X}} dx_1 = & - \int_0^H \left(K_{11} \hat{X}_1^* \frac{\partial^2 \hat{X}_1}{\partial x_1^2} + K_{44} \hat{X}_4^* \frac{\partial^2 \hat{X}_4}{\partial x_1^2} + K_{22} \hat{X}_2^* \frac{\partial^2 \hat{X}_2}{\partial x_1^2} \right. \\ & - K_{22} \left(X_2^* \frac{\partial \hat{X}_6}{\partial x_1} - X_6^* \frac{\partial \hat{X}_2}{\partial x_1} \right) - K_{22} \hat{X}_6^* \hat{X}_6 + K_{66} \hat{X}_6^* \frac{\partial^2 \hat{X}_6}{\partial x_1^2} + K_{33} \hat{X}_3^* \frac{\partial^2 \hat{X}_3}{\partial x_1^2} \\ & \left. + K_{33} \left(X_3^* \frac{\partial \hat{X}_5}{\partial x_1} - X_5^* \frac{\partial \hat{X}_3}{\partial x_1} \right) - K_{33} \hat{X}_5^* \hat{X}_5 + K_{55} \hat{X}_5^* \frac{\partial^2 \hat{X}_5}{\partial x_1^2} \right) dx_1 \end{aligned}$$

On intègre par parties les termes en dérivée seconde de cette formulation et on fait ap-

paraître des termes de bord:

$$\begin{aligned}
& \int_0^H \left(K_{11} \frac{\partial \hat{X}_1^*}{\partial x_1^2} \frac{\partial \hat{X}_1}{\partial x_1^2} + K_{44} \frac{\partial \hat{X}_4^*}{\partial x_1^2} \frac{\partial \hat{X}_4}{\partial x_1^2} + K_{22} \frac{\partial \hat{X}_2^*}{\partial x_1^2} \frac{\partial \hat{X}_2}{\partial x_1^2} - K_{22} \left(X_6 \frac{\partial \hat{X}_2^*}{\partial x_1} + X_6^* \frac{\partial \hat{X}_2}{\partial x_1} \right) \right. \\
& + K_{22} \hat{X}_6^* \hat{X}_6 + K_{66} \frac{\partial \hat{X}_6^*}{\partial x_1^2} \frac{\partial \hat{X}_6}{\partial x_1^2} + K_{33} \frac{\partial \hat{X}_3^*}{\partial x_1^2} \frac{\partial \hat{X}_3}{\partial x_1^2} + K_{33} \left(X_5 \frac{\partial \hat{X}_3^*}{\partial x_1} + X_5^* \frac{\partial \hat{X}_3}{\partial x_1} \right) \\
& + K_{33} \hat{X}_5^* \hat{X}_5 + K_{55} \frac{\partial \hat{X}_5^*}{\partial x_1^2} \frac{\partial \hat{X}_5}{\partial x_1^2} \left. \right) dx_1 - \left[\hat{X}_1^* V_1(\hat{\mathbf{X}}) \right]_0^H - \left[\hat{X}_4^* M_1(\hat{\mathbf{X}}) \right]_0^H \\
& - \left[\hat{X}_2^* V_2(\hat{\mathbf{X}}) \right]_0^H - \left[\hat{X}_6^* M_3(\hat{\mathbf{X}}) \right]_0^H - \left[\hat{X}_3^* V_3(\hat{\mathbf{X}}) \right]_0^H - \left[\hat{X}_5^* M_2(\hat{\mathbf{X}}) \right]_0^H
\end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Avec pour $i = 1, 2, 3$, les forces internes $V_i(\hat{\mathbf{X}})$ et moments internes $M_i(\hat{\mathbf{X}})$ de poutre obtenus par l'application à $\hat{\mathbf{X}}$ de l'opérateur $[\mathbf{L}_{\text{int}}]$ défini en (VI.46). Les termes de bord sont le travail virtuel des forces et moments appliqués aux extrémités de la poutre et s'écrivent:

$$\left[\hat{\mathbf{X}}^{*T} [\mathbf{L}_{\text{int}}] \hat{\mathbf{X}} \right]_0^H$$

Les conditions de bord dans le cadre du calcul modal sont nécessairement homogènes. Trois cas de figure sont envisagés et sont énoncés ci-dessous.

Si on impose des conditions de *Dirichlet* à une extrémité de la poutre alors la solution au sens faible de (B.1) est recherchée dans l'espace des applications de $(H^1([0, H]))^6$ dont les composantes sont nulles à cette extrémité. Par conséquent les termes de bord correspondants s'annulent.

Le cas d'un bord libre est associé à des conditions de *Neumann* (effort normal, couple de torsion et moments fléchissant) et des conditions mixtes (effort tranchants) qui impliquent la nullité des forces et moments internes.

Si on impose des conditions de bord élastiques, les forces et moments internes aux extrémités correspondent, comme on le verra plus bas, à des conditions mixtes associées à une valeur imposée des forces et moments internes donnés par un opérateur linéaire dont la représentation matricielle est dans un ensemble de matrices symétriques définies positives. Moyennant ces trois types de conditions de bord, les termes de raideurs (B.4) s'écrivent sous la forme d'un opérateur de raideur $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$ **bilinéaire, symétrique, défini positif** appliqué à $\hat{\mathbf{X}}^*$ et $\hat{\mathbf{X}}$. La forme faible (B.2) se traduit par une relation entre l'opérateur de masse et l'opérateur de raideur:

$$\omega^2 \langle \hat{\mathbf{X}}^*, \hat{\mathbf{X}} \rangle_M = \langle \hat{\mathbf{X}}^*, \hat{\mathbf{X}} \rangle_K \quad (\text{B.5})$$

Application de la condition de bord libre

Dans le problème sismique faisant l'objet de VI.3, la condition de bord libre au sommet du bâtiment (appliquée en $x_1 = H$) se traduit par la nullité des forces et moments internes du modèle équivalent de poutre. Les termes restants parmi les termes de bord de (B.4) sont:

$$\begin{aligned} & \left[\hat{X}_1^* V_1(\hat{\mathbf{X}}) \right] (x_1 = 0) + \left[\hat{X}_4^* M_1(\hat{\mathbf{X}}) \right] (x_1 = 0) + \left[\hat{X}_2^* V_2(\hat{\mathbf{X}}) \right] (x_1 = 0) \\ & + \left[\hat{X}_6^* M_3(\hat{\mathbf{X}}) \right] (x_1 = 0) + \left[\hat{X}_3^* V_3(\hat{\mathbf{X}}) \right] (x_1 = 0) + \left[\hat{X}_5^* M_2(\hat{\mathbf{X}}) \right] (x_1 = 0) \end{aligned}$$

ou encore

$$\left(\hat{\mathbf{X}}^{*T} [\mathbf{L}_{\text{int}}] \hat{\mathbf{X}} \right) (x_1 = 0)$$

Condition d'encastrement au sol

Il s'agit d'une condition de *Dirichlet* qui impose la nullité de $\hat{\mathbf{X}}$ et par conséquent celle de $\hat{\mathbf{X}}^*$ en $x_1 = 0$. La condition de bord libre conjuguée à la condition d'encastrement amène la nullité de tous les termes de bord. L'opérateur de raideur est alors réduit pour tous $\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}} \in (L^2([0, H]))^6$ à:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}} \rangle_K &= \int_0^H \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial x_1} \right)^T [\mathbf{K}_b] \frac{\partial \hat{\mathbf{Y}}}{\partial x_1} dx_1 \\ &+ \int_0^H \hat{\mathbf{X}}^T(x_1) (K_{33} \mathbf{e}_5 \otimes \mathbf{e}_5 + K_{22} \mathbf{e}_6 \otimes \mathbf{e}_6) \hat{\mathbf{Y}}(x_1) dx_1 \\ &+ \int_0^H \hat{\mathbf{X}}^T(x_1) (-K_{22} \mathbf{e}_6 \otimes \mathbf{e}_2 + K_{33} \mathbf{e}_5 \otimes \mathbf{e}_3) \frac{\partial \hat{\mathbf{Y}}}{\partial x_1} dx_1 \\ &+ \int_0^H \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial x_1} \right)^T (-K_{22} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_6 + K_{33} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_5) \hat{\mathbf{Y}}(x_1) dx_1 \end{aligned} \tag{B.6}$$

Aucune condition de bord inertielle n'étant appliquée, l'expression de l'opérateur de masse est donnée par (B.3).

Condition d'interaction sol fondation

Cette condition est exprimée à l'aide de l'impédance d'interaction sol fondation présentée au *chapitre V*. Les modes de vibrations réels (dissipation nulle) et déterministes étant recherchés, la condition de bord d'interaction de sol est donnée par la relation (VI.47). Les termes de bord en $x_1 = 0$ s'écrivent donc:

$$\left(\hat{\mathbf{X}}^{*T} [\mathbf{L}_{\text{int}}] \hat{\mathbf{X}} \right) (x_1 = 0) = \left(\hat{\mathbf{X}}^{*T} (-\omega^2([\mathbf{M}_f] + [\mathbf{M}_{\text{ad}}]) + [\mathbf{K}_{s0}]) \hat{\mathbf{X}} \right) (x_1 = 0)$$

Les termes inertiels de fondation en ω^2 sont directement intégrés à l'inertie de la structure par l'opérateur de masse, le terme élastique de sol:

$$\left(\hat{\mathbf{X}}^{*T} [\mathbf{K}_{s0}] \mathbf{X} \right) (x_1 = 0)$$

faisant donc partie de l'opérateur de raideur. Les expressions des opérateurs de masse et de raideur sont données en (VI.54). Les matrices $[\mathbf{M}_{sf}] = [\mathbf{M}_f] + [\mathbf{M}_{ad}]$ et $[\mathbf{K}_{s0}]$ étant symétriques définies positives, on en déduit aisément que les opérateurs de masse et de raideur le sont également.

Orthogonalité des modes

Les déformées modales (VI.50) sont les solutions de l'équation des ondes (B.1) vérifiant les conditions de bord $\{Bord\ libre + Encastrement\}$ ou $\{Bord\ libre + interaction\ sol\ fondation\}$. Ces déformées vérifient la relation (B.5) de sorte que pour deux modes p et q on aie d'une part:

$$\omega_q^2 \langle \Phi^{(p)}, \Phi^{(q)} \rangle_M = \langle \Phi^{(p)}, \Phi^{(q)} \rangle_K$$

en prenant la déformée $\Phi^{(p)}$ comme fonction test. Et en prenant $\Phi^{(q)}$ comme fonction test, on aboutit d'autre part à:

$$\omega_p^2 \langle \Phi^{(p)}, \Phi^{(q)} \rangle_M = \langle \Phi^{(p)}, \Phi^{(q)} \rangle_K$$

de par la propriété de symétrie des opérateurs. On écrit alors la différence de ces deux relations:

$$(\omega_q^2 - \omega_p^2) \langle \Phi^{(p)}, \Phi^{(q)} \rangle_M = 0$$

Si $p \neq q$ alors $\omega_q^2 - \omega_p^2 \neq 0$, deux modes distincts sont par conséquent orthogonaux pour le produit scalaire défini par l'opérateur de masse. Etant donnée la relation (B.5), il en est de même pour l'opérateur de raideur.

La déformée modale pour un mode donné étant définie à un facteur multiplicatif non nul près, on la choisie de sorte à ce que la valeur de sa norme soit égale à 1 pour la norme héritée du produit scalaire défini par l'opérateur de masse:

$$\|\Phi^{(n)}\|_M = \langle \Phi^{(n)}, \Phi^{(n)} \rangle_M = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (\text{B.7})$$

On déduit de cette normalisation et de la relation (VI.55) que la norme des modes pour la norme associée à l'opérateur de raideur est égale au carré de la fréquence radiale du mode:

$$\|\Phi^{(n)}\|_K = \langle \Phi^{(n)}, \Phi^{(n)} \rangle_K = \omega_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (\text{B.8})$$

B.2 Schéma de Newmark

Le schéma aux différences de *Newmark* est utilisé dans ce document pour intégrer des problèmes différentiels de la forme:

$$\begin{cases} [\mathbf{M}] \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2} + [\mathbf{D}] \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + [\mathbf{K}] \mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(t) \\ \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

où $[\mathbf{M}] \in \mathbb{M}_N^+(\mathbb{R})$, $[\mathbf{D}] \in \mathbb{M}_N^{+0}(\mathbb{R})$, $[\mathbf{K}] \in \mathbb{M}_N^+(\mathbb{R})$ sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité du problème, et où $\mathbf{F}(t)$ est le vecteur des forces extérieures. L'application $t \mapsto \mathbf{X}(t)$ solution du problème est à valeur dans \mathbb{R}^N avec $N \in \mathbb{N}^*$.

Le temps est échantillonné pour un pas Δt et on note $t_n = n \Delta t$ avec $n \in \mathbb{N}$. Par commodité, on note $\ddot{\mathbf{X}}(t_n)$ et $\dot{\mathbf{X}}(t_n)$ les dérivées seconde et première approchées de \mathbf{X} au pas de temps n , et $\mathbf{X}(t_n)$ la valeur approchée de \mathbf{X} . Le schéma de *Newmark* s'écrit de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t_{n+1}) &= \dot{\mathbf{X}}(t_n) + \left((1 - \beta) \ddot{\mathbf{X}}(t_n) + \beta \ddot{\mathbf{X}}(t_{n+1}) \right) \Delta t \\ \mathbf{X}(t_{n+1}) &= \mathbf{X}(t_n) + \dot{\mathbf{X}}(t_n) \Delta t + \left(\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{X}}(t_n) + \alpha \ddot{\mathbf{X}}(t_{n+1}) \right) \Delta t^2 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Les paramètres réels α et β déterminent la précision et la stabilité de l'intégration numérique. Pour que le schéma converge, ces paramètres doivent vérifier les relations suivantes:

$$\beta \geq 0.5 \quad \text{et} \quad \alpha \geq 0.25(0.5 + \beta)^2$$

Les valeurs optimales sont $\alpha = 0.25$ et $\beta = 0.5$.

En supposant $\ddot{\mathbf{X}}(t_n)$, $\dot{\mathbf{X}}(t_n)$ et $\mathbf{X}(t_n)$ connus au rang n , on considère l'équation (B.9) au rang $n + 1$ et on remplace \mathbf{X} et sa dérivée première par les expressions de $\dot{\mathbf{X}}(t_{n+1})$ et $\mathbf{X}(t_{n+1})$ données par les relations de récurrence (B.10). On aboutit alors à un algorithme d'intégration en 3 étapes dont les calculs préliminaires sont les suivants:

Préliminaire

(1) Calcul de la dérivée seconde initiale

$$\ddot{\mathbf{X}}(0) = [\mathbf{M}]^{-1} (\mathbf{F}(0) - [\mathbf{D}]\mathbf{v}_0 - [\mathbf{K}]\mathbf{u}_0)$$

(2) Calcul des coefficients constants d'intégration:

$$a_0 = \frac{1}{\alpha\Delta t^2} \quad , \quad a_1 = \frac{\beta}{\alpha\Delta t} \quad , \quad a_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t} \quad , \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$$
$$a_4 = \frac{\beta}{\alpha} - 1 \quad , \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \quad , \quad a_6 = \Delta t(1 - \beta) \quad , \quad a_7 = \beta\Delta t$$

(3) Calcul de la matrice de raideur effective:

$$[\mathbf{K}_{\text{eff}}] = [\mathbf{K}] + a_0[\mathbf{M}] + a_1[\mathbf{D}]$$

Les calculs préliminaires étant achevés, l'algorithme itératif ci-dessous donne des valeurs approchées de \mathbf{X} et ses dérivées première et seconde aux rangs $n > 0$.

Algorithme

(1) Calcul de la force extérieure effective \mathbf{F}_{eff} au rang $n + 1$:

$$\mathbf{F}_{\text{eff}}(t_{n+1}) = \mathbf{F}(t_{n+1}) + [\mathbf{M}] \left(a_0\mathbf{X}(t_n) + a_2\dot{\mathbf{X}}(t_n) + a_3\ddot{\mathbf{X}}(t_n) \right) \\ + [\mathbf{D}] \left(a_1\mathbf{X}(t_n) + a_4\dot{\mathbf{X}}(t_n) + a_5\ddot{\mathbf{X}}(t_n) \right)$$

(2) Calcul de \mathbf{X} au rang $n + 1$ par inversion du système d'équation effectif:

$$[\mathbf{K}_{\text{eff}}] \mathbf{X}(t_{n+1}) = \mathbf{F}_{\text{eff}}(t_{n+1})$$

(3) Calcul approché des dérivées de \mathbf{X} au rang $n + 1$:

$$\ddot{\mathbf{X}}(t_{n+1}) = a_0 (\mathbf{X}(t_{n+1}) - \mathbf{X}(t_n)) - a_2\dot{\mathbf{X}}(t_n) - a_3\ddot{\mathbf{X}}(t_n)$$
$$\dot{\mathbf{X}}(t_{n+1}) = \dot{\mathbf{X}}(t_n) + a_6\ddot{\mathbf{X}}(t_n) + a_7\ddot{\mathbf{X}}(t_{n+1})$$

B.3 Spectres élastiques

Spectre de réponse élastique

Le spectre de réponse élastique est construit en considérant un oscillateur à 1 degré de liberté excité par le signal sismique. On trace alors l'amplitude maximale de l'accélération absolue de cet oscillateur pour une plage de fréquences propres de ce dernier. Le spectre de réponse élastique peut être tracé pour différents taux d'amortissement de l'oscillateur. Soit ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur et ξ son taux d'amortissement. Le degré de liberté de l'oscillateur est noté $t \mapsto u(t)$, le signal sismique est noté $t \mapsto s(t)$ et son équation dynamique s'écrit:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u(t) = s(t) \quad (\text{B.11})$$

Le signal sismique étant échantillonné, on intègre (B.11) à l'aide du schéma aux différences de *Newmark* décrit en B.2. Une fois le signal $u(t)$ et ses dérivées calculés pour une pulsation propre ω_0 donnée, on calcule l'accélération absolue $\ddot{u}_a(\omega_0, t)$ de l'oscillateur:

$$\ddot{u}_a(t) = \frac{d^2u}{dt^2} + s(t)$$

Le spectre de réponse élastique $\omega_0 \mapsto \mathcal{S}_{el}(\omega_0)$ est alors donné par:

$$\mathcal{S}_{el}(\omega_0) = \max_t |\ddot{u}_a(\omega_0, t)|$$

Spectre de puissance

Le spectre de puissance caractérise la distribution de l'intensité du signal sur un domaine de fréquence. Il s'agit du module au carré de la transformée de *Fourier* du signal. On note $\mathcal{F}()$ la transformée de *Fourier* par rapport à la variable temps t avec la fréquence radiale ω sa variable duale et $\omega \mapsto \mathcal{S}_p(\omega)$ le spectre de puissance du signal $t \mapsto s(t)$:

$$\mathcal{S}_p(\omega) = \mathcal{F}(s(t))(\omega) \overline{\mathcal{F}(s(t))(\omega)} = |\mathcal{F}(s(t))(\omega)|^2$$

En pratique, la transformée de *Fourier* du signal échantillonné $s_n = s(n\Delta t)$ est calculée à l'aide de l'algorithme de transformée de *Fourier* rapide ou encore `fft`.

REFERENCES

- [1] I. Alame, P. Argoul, and J.-P. Touret. Dynamic models for elastic coupled lateral and torsional response of asymmetric multistorey buildings. In *10th European Conference on Earthquake Engineering*, Balkema, Rotterdam, 1995. ISBN 90 5410 528 3.
- [2] R. D. Ambrosini. Material damping vs. radiation damping in soil-structure interaction analysis. *Computers and Geotechnics*, 33(2):86–92, 2006.
- [3] A. Anthoine. Derivation of the in-plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory. *International Journal of Solids and Structures*, 32(2):137–163, 1995.
- [4] M. Apostolou, G. Gazetas, and E. Garini. Seismic response of slender rigid structures with foundation uplifting. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 27:642–654, 2007.
- [5] J. Assaad, J.-N. Decarpigny, C. Bruneel, R. Bossut, and B. Hamonic. Application of the finite element method to two-dimensional radiation problems. *Journal of the Acoustical Society of America*, 94(1):562–573, 1993.
- [6] J. L. Auriault. Heterogeneous medium. Is an equivalent macroscopic description possible? *International Journal of Engineering Science*, 29(7):785–195, 1991.
- [7] J. L. Auriault and G. Bonnet. Dynamique des composites élastiques périodiques. *Archives of Mechanics*, 37(4–5):269–284, 1985.
- [8] J. L. Auriault and G. Bonnet. Surface effects in composite materials: two simple examples. *International Journal of Engineering Science*, 25(3):307–323, 1987.
- [9] H. Ben Dhia. Multiscale mechanical problems: the arlequin method. *C.R.Acad.Sci. Serie IIB*, 326:899–904, 1998.
- [10] W. A. Benfield and R. F. Hruda. Vibration analysis of structures by component mode substitution. *AIAA Journal*, 9(7):1255–1261, 1971.
- [11] M. J. Beran and J. J. McCoy. Mean field variations in a statistical sample of heterogeneous linearly elastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 6(8):1035–1054, 1970.
- [12] Y. H. Berthelot. Surface acoustic impedance and causality. *Journal of Acoustical Society of America*, 109(4):1736–1739, 2001.
- [13] J. Betbeder-Matibet. L’approximation des ressorts périphériques pour l’étude du décollement avec un modèle de sol à ressorts couplés. Association Française du Génie parasismique (AFPS), 2003.
- [14] G. Bonnet. Effective properties of elastic periodic composite media with fibers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(5):881–899, 2007.

- [15] R. D. Borcherdt, M. J. S. Johnston, G. Glassmoyer, and C. Dietel. Recordings of the 2004 parkfield earthquake on the general earthquake observation system array: implications for the earthquake precursors. Fault rupture and coseismic strain changes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 96(4B):S73–S89, 2006.
- [16] M. Bornert, T. Bretheau, and P. Gilormini. *Homogénéisation en mécanique des matériaux*, volume 1 of *Mécanique et Ingénierie des Matériaux*. Hermes Science, Paris, 2001.
- [17] R. W. Boulanger, C. J. Curras, B. L. Kutter, D. W. Wilson, and A. Abghari. Seismic soil-pile-structure interaction experiments and analyses. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 125(9):750–759, 1999.
- [18] C. Boutin. Microstructural effects in elastic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 33(7):1023–1051, 1996.
- [19] C. Boutin and S. Hans. Homogenisation of periodic discrete medium: Application to dynamics of framed structures. *Computers and Geotechnics*, 30(4):303–320, 2003.
- [20] D. Breyse, H. Niandou, S. Elachachi, and L. Houy. A generic approach to soil-structure interaction considering the effects of soil heterogeneity. *Géotechnique*, 54(2):143–150, 2004.
- [21] N. Buannic. *Analyse asymptotique de poutres élastiques hétérogènes*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2000.
- [22] N. Buannic and P. Cartraud. Higher-order effective modeling of periodic heterogeneous beams. Asymptotic expansion method. *International Journal of Solids and Structures*, 38(40–41):7139–7161, 2001.
- [23] N. Buannic and P. Cartraud. Higher-order effective modelling of periodic heterogeneous beams - part 2 : Derivation of the proper boundary conditions for the interior asymptotic solution. *International Journal of Solids and Structures*, 38:7163–7180, 2001.
- [24] B. Burgardt and P. Cartraud. Continuum modeling of beamlike lattice trusses using averaging methods. *Computers and Structures*, 73(1):267–279, 1999.
- [25] D. Caillerie. Thin elastic and periodic plates. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 6(2):159–191, 1984.
- [26] J. A. Calgaro. *Poutres à parois minces - Etude du cisaillement*. Hermes, Paris, 1998.
- [27] P. Cartraud. *Contribution à l'Analyse Asymptotique et à l'Homogénéisation de Structures Périodiques*. Habilitation à Diriger des Recherches, Ecole Centrale de Nantes, 2003.
- [28] P. Cartraud and T. Messenger. Computational homogenization of periodic beam-like structures. *International Journal of Solids and Structures*, 43(3–4):686–696, 2006.
- [29] T. K. Caughey. Classical normal modes in damped linear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 27:269–271, 1960.

- [30] A. Cecchi and K. Sab. Out of plane model for heterogeneous periodic materials: the case of masonry. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 21(5):715–746, 2002.
- [31] A. Cecchi and K. Sab. A comparison between a 3D discrete model and two homogenised plate models for periodic elastic brickwork. *International Journal of Solids and Structures*, 41(9–10):2229–2276, 2004.
- [32] A. Cecchi and K. Sab. A homogenized Reissner-Mindlin model for orthotropic periodic plates: Application to brick work panels. *Solids and Structures*, 44(18–19):6055–6079, 2007.
- [33] C. Chen, D. Duhamel, and C. Soize. Probabilistic approach for model and data uncertainties and its experimental identification in structural dynamics: Case of composite sandwich panels. *Journal of Sound and Vibration*, 294(1–2):64–81, 2006.
- [34] A. K. Chopra and S. C.-S. Yim. Simplified earthquake analysis of structures with foundation uplift. *Journal of Structural Engineering*, 111(4):906–930, 1985.
- [35] R. Cottureau. *Probabilistic models of impedance matrices*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale Paris, 2006.
- [36] R. Cottureau, D. Clouteau, and C. Soize. Construction of a probabilistic model for impedance matrices. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(17–20):2252–2268, 2007.
- [37] R. R. Craig and M. C. C. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6(7):1313–1319, 1968.
- [38] L. Cremers and K. R. Fyfe. On the use of variable order infinite wave envelope elements for acoustic radiation and scattering. *Journal of the Acoustical Society of America*, 97(4):2028–2040, 1995.
- [39] P. Destuynder. *Une théorie asymptotique des plaques minces en élasticité linéaire*. Masson, Paris, 1986.
- [40] J. Dominguez. Dynamic stiffness of rectangular foundations. Technical Report Research Report R78-20, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1978.
- [41] G. Dreux and J. Festa. *Nouveau guide du béton*. Eyrolles, Paris, sixième édition, 1995.
- [42] H. Dumontet. *Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1990.
- [43] J. Duva and J. Simmonds. The usefulness of elementary theory for the linear vibrations of layered, orthotropic elastic beams and corrections due to two-dimensional end effects. *Journal of Applied Mechanics*, 58:175–180, 1991.
- [44] G. Ehlers. The effect of soil flexibility on vibration systems. *Beton und Eisen*, 41(21–22):197–203, 1942.

- [45] H. Emmerich and M. Korn. Incorporation of attenuation into time-domain computations of seismic wave fields. *Geophysics*, 52(9):1252–1264, 1987.
- [46] S. Erlicher and P. Argoul. Modal identification of linear non-proportionally damped systems by wavelet transform. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(3):1386–1421, 2007.
- [47] G. A. Fenton and D. V. Griffiths. Probabilistic foundation settlement on spatially random soil. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 128(5):381–390, 2002.
- [48] G. A. Fenton and D. V. Griffiths. Three-dimensional probabilistic foundation settlement. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 131(2):232–239, 2005.
- [49] R. Flores-Berrones and R. V. Whitman. Seismic response of end-bearing piles. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 108(4):554–569, 1982.
- [50] M. Fotopoulou, P. Kotsanopoulos, G. Gazetas, and J. L. Tassoulas. Rocking damping of arbitrarily-shaped embedded foundations. *Journal of Geotechnical Engineering*, 115(4):473–489, 1989.
- [51] G. Gazetas. Formulas and charts for impedances of surface and embedded foundations. *Journal of Geotechnical Engineering*, 117(9):1363–1381, 1991.
- [52] G. Gazetas. *Foundation Engineering Handbook*, chapter 15. Van Nostrand Reinholds, New York, second edition, 1991.
- [53] G. Gazetas, R. Dobry, and J. L. Tassoulas. Vertical response of arbitrarily shaped embedded foundations. *Journal of Geotechnical Engineering*, 111(6):750–771, 1985.
- [54] G. Gazetas and J. Tassoulas. Horizontal damping of arbitrarily shaped embedded foundations. *Journal of Geotechnical Engineering*, 113(5):458–475, 1987.
- [55] G. Gazetas and J. Tassoulas. Horizontal stiffness of arbitrarily shaped embedded foundations. *Journal of Geotechnical Engineering*, 113(5):440–457, 1987.
- [56] B. Geist and J. R. McLaughlin. Asymptotic formulas for the eigenvalues of the Timoshenko beam. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 253(2):341–380, 2001.
- [57] M. Géradin and D. Rixen. *Théorie des Vibrations - Application à la dynamique des structures*. Masson, Paris, Milan, Barcelone, second edition, 1996.
- [58] R. Ghanem and W. Brzakala. Stochastic finite-element analysis of soil layers with random interface. *Journal of Engineering Mechanics*, 122(4):361–369, 1996.
- [59] R. G. Ghanem and P. D. Spanos. *Stochastic finite elements: A spectral approach*. Dover, revised edition, 2003. Original edition 1991.
- [60] D. M. Ghiocel and R. Ghanem. Stochastic finite-element analysis of seismic soil-structure interaction. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(1):66–77, 2002.

- [61] A. Gjelsvik. *The theory of thin walled beams*. Wiley, New York, 1981.
- [62] D. A. Grant. The effect of rotatory inertia and shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams carrying a concentrated mass. *Journal of Sound and Vibration*, 57(3):357–365, 1978.
- [63] R. D. Gregory and F. Y. M. Wan. Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory. *Journal of Elasticity*, 14:27–64, 1984.
- [64] I. D. Gupta and M. D. Trifunac. Probabilistic spectrum superposition for response analysis including the effects of soil-structure interaction. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 5(1):9–18, 1990.
- [65] A. A. Gusev. Representative volume element size for elastic composites: a numerical study. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(9):1449–1459, 1997.
- [66] S. Hans. *Auscultation des bâtiments existants*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Travaux Publics de l’Etat, Lyon, 2002.
- [67] S. Hans, C. Boutin, E. Ibrahim, and P. Roussillon. In situ experiments and seismic analysis of existing buildings. Part I: Experimental investigation. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 34(12):1513–1529, 2005.
- [68] I. Harari. A unified variational approach to domain-based computation of exterior problems of time-harmonic acoustics. *Applied Numerical Mathematics*, 27(4):417–441, 1998.
- [69] P. Haupt. *Continuum mechanics and theory of materials*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, second edition, 2002.
- [70] T. C. Huang. The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions. *Journal of Applied Mechanics*, 28:579–584, 1961.
- [71] Y. Z. Huo and G. Del Piero. On the completeness of the crystallographic symmetries in the description of the symmetries of the elastic tensor. *Journal of Elasticity*, 25(3):203–246, 1991.
- [72] E. T. Jaynes. Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, 106(4):620–630, 1957.
- [73] W. Y. Jean, T. W. Lin, and J. Penzien. System parameters of soil foundations for time domain dynamic analysis. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 19(4):541–553, 1990.
- [74] P. C. Jennings and J. Bielak. Dynamics of building-soil interaction. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 63:9–48, 1973.
- [75] S. Jin, L. D. Lutes, and S. Sarkani. Response variability for a structure with soil-structure interactions and uncertain soil properties. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(2):175–183, 2000.

- [76] T. Kagawa and L. M. Kraft Jr. Seismic response of flexible piles. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 106(8):899–918, 1980.
- [77] D. L. Karabalis and D. E. Beskos. Dynamic response of 3-D embedded foundations by the boundary element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 56(1):91–119, 1986.
- [78] M. Kavvadas and G. Gazetas. Kinematic seismic response and bending of free-head piles in layered soil. *Geotechnique*, 43(2):207–222, 1993.
- [79] M. C. Kneifati. Analysis of plates on a Kerr foundation model. *Journal of Engineering Mechanics*, 111(11):1325–1342, 1985.
- [80] A. G. Kolpakov. Calculation of the characteristics of thin elastic rods with a periodic structure. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 55(3):358–365, 1991.
- [81] A. G. Kolpakov. Variational principles for stiffnesses of a non-homogeneous beam. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 46(6):1039–1053, 1998.
- [82] R. Krönig and H. A. Kramers. Absorption and dispersion in x-ray spectra. *Zeitschrift für Physik*, 48(3–4):174–179, 1928.
- [83] T. P. Le, P. Argoul, and O. Abraham. Apport de l’analyse continue en ondelettes pour la méthode impact écho. *Etudes et recherches des Laboratoires des ponts et chaussées. Série sciences de l’ingénieur – Champs physiques et propagation dans les sols et les structures du génie civil*, 11:99–114, 2006. LPC-ER-SI - 06-11.
- [84] L. P. Lebedev, I. I. Vorovich, and G. M. L. Gladwell. *Functional analysis - Applications in Mechanics and inverse problems*. Solid mechanics and its applications. Kluwer academic publishers, Dordrecht,Boston,London, second edition, 2002.
- [85] I. K. Lee and P. T. Brown. Structure-foundation analysis. *ASCE Journal of Structure Division*, 98(11):2413–2431, 1972.
- [86] U. Lee. Dynamic continuum modeling of beamlike space structures using finite-element matrices. *AIAA Journal*, 28(4):725–731, 1990.
- [87] M. Lefik and B. Schrefler. FE modelling of a boundary layer corrector for composites using the homogenization theory. *Engineering Computations*, 13(6):31–42, 1996.
- [88] S. G. Lekhnitskii, S. W. Tsai, and T. Cheron. *Anisotropic plates*. Gordon and Breach Science Publishers, New York,London,Paris,Montreux,Tokyo,Melbourne, third edition, 1968.
- [89] H. P. Liu, D. L. Anderson, and H. Kanamori. Velocity dispersion due to anelasticity: implications for seismology and mantle composition. *Geophysical Journal of Royal Astronomy Society*, 47(1):41–58, 1976.
- [90] R. Luciano and J. R. Willis. Bounds on non-local effective relations for random composites loaded by configuration-dependent body force. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(9):1827–1849, 2000.

- [91] J. E. Luco and F. C. P. De Barros. Identification of structural and soil properties from forced vibration tests of the Hualien containment model prior to backfill. Research rep., Dept. of Applied Mechanics and Engineering Science, University of California, San Diego, 1994.
- [92] H. R. Lusti, P. J. Hine, and A. A. Gusev. Direct numerical predictions for the elastic and thermoelastic properties of short fibre composites. *Composites Science and Technology*, 62(15):1927–1934, 2002.
- [93] L. D. Lutes, S. Sarkani, and S. Jin. Response variability of an SSI system with uncertain structural and soil properties. *Engineering Structures*, 22(6):605–620, 2000.
- [94] L. I. Manevitch, I. V. Andrianov, and V. G. Oshmyan. *Mechanics of periodically heterogeneous structures*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002.
- [95] J. W. Meek and A. S. Veletsos. Simple models for foundations in lateral and rocking motion. In *5th World Conference on Earthquake Engineering, vol. 2*, pages 2610–2613, Rome, Italy, 1974. International Association of Earthquake Engineering.
- [96] J. W. Meek and J. P. Wolf. Cone models for embedded foundations. *Journal of Geotechnical Engineering*, 120(1):60–80, 1994.
- [97] J.-C. Michel, H. Moulinec, and P. Suquet. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172(1–4):109–143, 1999.
- [98] John Milne. Experiments in observational seismology. *Transaction of Seismological Society of Japan*, 3:12–64, 1881.
- [99] G. W. Milton and J. R. Willis. On modification of Newton’s second law and linear continuum elastodynamics. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2079):855–880, 2007.
- [100] A. Mita and J. E. Luco. Dynamic response of embedded foundations: a hybrid approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 63(3):233–259, 1987.
- [101] G. Moreau and D. Caillerie. Continuum modeling of lattice structures in large displacement. Applications to buckling analysis. *Computers and Structures*, 68(1–3):181–189, 1998.
- [102] P. M. Morse and H. Feshbach. *Methods of theoretical physics*, volume Part I. McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1953.
- [103] N. I. Muskhelishvili. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Noordhoff international publishing, Leyden, reprint of the second english edition edition, 1977.
- [104] S. Nemat-Nasser and M. Hori. *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*. North Holland, second revised edition, 1998.

- [105] A. K. Noor. Continuum modeling for repetitive lattice structures. *Applied Mechanics Reviews*, 41(7):285–296, 1988.
- [106] M. Pastor, O. C. Zienkiewicz, and A. H. C. Chan. Generalized plasticity and the modelling of soil behaviour. *International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics*, 14(3):151–190, 1990.
- [107] J. Perchat. Béton armé. Règles BAEL - Caractère des matériaux. Actions et sollicitations. *Techniques de l'ingénieur*, C2304, 1992.
- [108] Proceedings of the International Modal Analysis Conference & Exhibit. *Correlation coefficient for modal analysis*, 1982. Pages 110–116.
- [109] United States National Strong-Motion Project. Data sets. Technical report, <http://nsmmp.wr.usgs.gov/>.
- [110] I. N. Psycharis. Investigation of the dynamic response of rigid footings on tensionless Winkler foundation. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 28(7):577–591, 2008.
- [111] I. N. Psycharis and P. Jennings. Rocking of slender rigid bodies allowed to uplift. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 11(1):57–76, 1983.
- [112] F. Richart, J. Hall, and R. Woods. *Vibrations of soils and foundations*. Englewood Cliffs (N.J.): Prentice-Hall, second edition, 1970.
- [113] R. Y. Rubinstein. *Simulation and the Monte Carlo Method*. Wiley, New York, 1981.
- [114] J. Sanchez-Hubert and E. Sanchez-Palencia. *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*. Masson, Paris, 1992.
- [115] E. Sanchez-Palencia. *Non-homogeneous media and vibration theory*. Springer, Berlin, 1980.
- [116] E. Sanchez-Palencia. Boundary layers and edge effects in composites. In *Homogenization Techniques for Composite Media*, volume 272 of *Lecture Notes in Physics*, pages 121–192. Springer-Verlag, 1987.
- [117] B. V. Sankar and R. V. Marrey. A unit-cell model of textile composite beams for predicting stiffness properties. *Composites Science and Technology*, 49(1):61–69, 1993.
- [118] R. J. Serfling. *Approximation theorems of mathematical statistics*. Wiley-Interscience, 2002. First edition 1980.
- [119] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27:379–423, 623–659, 1948.
- [120] Z. Sienkiewicz. Structural damping analysis of a weakly anelastic medium. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 22(11):1009–1014, 1993.
- [121] N. Silvestre and D. Camotim. First-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials. *Thin-Walled Structures*, 40(9):755–789, 2002.

- [122] N. Silvestre and D. Camotim. Second-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials. *Thin-Walled Structures*, 40(9):791–820, 2002.
- [123] I. N. Sneddon, G. M. L. Gladwell, and S. Coen. Bounded contact of an infinite plate and an elastic foundation. *Letter in Applied Engineering Science*, 3(1):1–13, 1975.
- [124] C. Soize. *Fundamentals of random signal analysis*. Springer, Berlin, 1999.
- [125] C. Soize. A nonparametric model of random uncertainties in linear structural dynamics. *Publications du LMA-CNRS*, pages 109–138, 1999. ISBN 2-909669-16-5,152,.
- [126] C. Soize. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3):277–294, 2000.
- [127] C. Soize. Nonlinear dynamical systems with nonparametric model of random uncertainties. *Uncertainties in Engineering Mechanics*, 1(1):1–38, 2001.
- [128] C. Soize. Probabilités et modélisation des incertitudes - Éléments de base et concepts fondamentaux. Université Paris-Est Marne-la-vallée, Mai 2003.
- [129] C. Soize. Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12–16):1333–1366, 2005.
- [130] C. Soize, C. Chen, J.-F. Durand, D. Duhamel, and L. Gagliardini. Computational elastoacoustics of uncertain complex systems and experimental validation. In *EC-COMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineerings*, 2007.
- [131] C. Sundararajan. Stability of columns on elastic foundations subjected to conservative and non-conservative forces. *Journal of Sound and Vibration*, 37(1):79–85, 1974.
- [132] O. J. Svec. Thick plates on elastic foundations by finite elements. *ASCE Journal of Engineering Mechanics Division*, 102(3):461–477, 1976.
- [133] S. Timoshenko. *Résistance des matériaux, 1ère partie Théorie élémentaire et problèmes*. Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris, Liège, 1953.
- [134] S. Timoshenko and J. N. Goodier. *Theory of elasticity*. McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1951.
- [135] H. Tollenaere and D. Caillerie. Continuous modeling of lattice structures by homogenization. *Advances in Engineering Software*, 29(7–9):699–705, 1998.
- [136] F. Toubalem, B. Zeldin, F. Thouverez, and P. Labbe. Vertical excitation of stochastic soil-structure interaction systems. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 125(5):349–355, 1997.
- [137] L. Trabucho and J. M. Via no. Mathematical modeling of rods. In P. G. Ciarlet and J. L. Lions, editors, *Handbook of numerical analysis*, volume vol. 4, pages 487–974. Elsevier, 2005.

- [138] V. Z. Vlasov. Thin-walled elastic beams. Technical report, Office of technical services, U.S. department of commerce, Washington 25, DC, 1961.
- [139] V. V. Volovoi, D. H. Hodges, V. L. Berdichevsky, and V. G. Sutyrin. Asymptotic theory for static behavior of elastic anisotropic i-beams. *International Journal of Solids and Structures*, 36(7):1017–1043, 1999.
- [140] Q.-P. Vu, J.-M. Wang, G.-Q. Xu, and S.-P. Yung. Spectral analysis and system of fundamental solutions for Timoshenko beams. *Applied Mathematics Letters*, 18(2):127–134, 2005.
- [141] E. Winkler. Die lehre von der elasticitaet und festigkeit. *Prag. Dominicus*, 1867.
- [142] J. P. Wolf. *Dynamic soil-structure interaction*. Englewood Cliffs (N.J.): Prentice-Hall, 1985.
- [143] J. P. Wolf and A. J. Deeks. Cones to model foundation vibrations: incompressible soil and axi-symmetric embedment of arbitrary shape. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 24(12):963–978, 2004.
- [144] J. P. Wolf and D. R. Somaini. Approximate dynamic model of embedded foundation in time domain. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 14(5):683–703, 1986.
- [145] C.-S. Yim and A. K. Chopra. Earthquake response of structures with partial uplift on Winkler foundation. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 12:263–281, 1984.
- [146] A. Zaoui. Matériaux hétérogènes et composites. Ecole polytechnique, 1997.
- [147] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite element method, fifth edition, volume 1*. Butterworth Heinemann, Oxford, 2000.