



**HAL**  
open science

# Modélisation multi-échelle des matériaux viscoélastiques hétérogènes : application à l'identification et à l'estimation du fluage propre de bétons d'enceintes de centrales nucléaires

Quoc Viet Le

► **To cite this version:**

Quoc Viet Le. Modélisation multi-échelle des matériaux viscoélastiques hétérogènes : application à l'identification et à l'estimation du fluage propre de bétons d'enceintes de centrales nucléaires. Autre. Université Paris-Est, 2008. Français. NNT : 2008PEST0268 . tel-00468616

**HAL Id: tel-00468616**

**<https://theses.hal.science/tel-00468616>**

Submitted on 31 Mar 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# UNIVERSITÉ PARIS-EST

ANNÉE 2008

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS-EST

Discipline : GÉNIE CIVIL

présentée par

Quoc Viet LE

Titre :

**MODÉLISATION MULTI-ÉCHELLE DES MATÉRIAUX VISCOÉLASTIQUES  
HÉTÉROGÈNES.**

**APPLICATION À L'IDENTIFICATION ET À L'ESTIMATION  
DU FLUAGE PROPRE DE BÉTON D'ENCEINTES  
DE CENTRALES NUCLÉAIRES**

soutenue le 15 janvier 2008 devant le jury composé de :

M. Gilles PIJAUDIER-CABOT	Président
M. Noel CHALLAMEL	Rapporteur
M. Issam DOGHRI	Rapporteur
M. Ignacio CAROL	Examineur
M. Yann LE-PAPE	Examineur
M. Fekri MEFTAH	Examineur
M. Jean-Michel TORRENTI	Examineur
M. Qi-Chang HE	Directeur de thèse



# Remerciements

Ce travail de thèse a été effectué au sein du Laboratoire de Mécanique (LAM) de l'Université Paris-Est, en collaboration avec le Département Matériaux et Mécanique des Composants (MMC) de la Division Recherche et Développement du site des Renardières d'EDF.

J'exprime toutes mes profondes reconnaissances à mes encadrants Fékri MEFTAH, Maître de Conférences (HDR) à l'Université Paris-Est, Qi Chang HE, Professeur à l'Université Paris-Est PT, et Yann LE PAPE, Ingénieur de recherche à MMC, pour le temps qu'ils m'ont consacré et les conseils scientifiques qu'ils m'ont fait partager, pendant ces trois années.

Je tiens à remercier Charles TOULEMONDE, le chef du groupe T25 du département MMC, et Guy Bonnet, le directeur du LAM, pour m'avoir bien accueilli dans leurs laboratoires et créé de bonnes conditions pour mon travail de thèse.

Je remercie très chaleureusement Issam DOGHRI, Professeur à l'Université Catholique de Louvain, et Noel CHALLAMEL, Maître de Conférences (HDR) à l'INSA de Rennes, pour avoir accompli la lourde tâche de rapporter ce travail.

Je tiens également à remercier Gilles PIJAUDIER-CABOT, Professeur à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury. Je remercie également Ignacio CAROL, Professeur au Technical University of Catalonia et Jean-Michel TORRENTI, Directeur de recherche d'LCPC, pour avoir examiné ce travail.

Mes remerciements vont également à tous les membres du LAM et du MMC avec qui j'ai eu des souvenirs inoubliables à la fois sur le plan scientifique et sur le plan amical.

Je suis enfin très reconnaissant envers ma famille, en particulier ma mère, qui a su me donner sans cesse son soutien et son amour, et qui m'a encouragé pour finir ce travail de thèse.

Paris, au 1 Décembre 2007



# Résumé

Le béton se présente comme un matériau constitué de granulats, jouant le rôle d'inclusions, enchâssés dans une matrice correspondant à la pâte de ciment hydraté. A l'échelle de la pâte, l'hydratation du ciment génère un milieu multiphasique, constitué d'un squelette solide et de pores remplis ou partiellement remplis d'eau selon leur taille. Le composant principal du squelette solide est le gel de C-S-H, les autres composants étant de nature cristalline. La qualification de gel du composant C-S-H est liée à sa nanostructure dont la schématisation la plus admise consiste en une phase aqueuse adsorbée, en sandwich avec des feuillettes solides de nature cristalline. Il est bien admis que la structure du C-S-H est à l'origine de son comportement viscoélastique et donc de celui du béton. Ce comportement viscoélastique peut s'expliquer par un réarrangement de sa nanostructure sous l'effet des contraintes mécaniques appliquées à l'échelle macroscopique.

La modélisation macroscopique du fluage du béton ne permet pas d'expliquer la variabilité du fluage d'une formulation de béton à une autre. En effet, les paramètres des modèles macroscopiques ne peuvent être identifiés que par l'analyse de résultats expérimentaux obtenus par des essais réalisés sur des éprouvettes de béton. Ces paramètres ne sont valables que pour une formulation donnée. L'identification de ces paramètres conduit donc à des programmes expérimentaux très coûteux et ne fournit pas suffisamment d'informations sur la sensibilité des paramètres macroscopiques à la variabilité des caractéristiques mécaniques et morphologies des constituants.

Dans ce travail, on suppose qu'il existe une échelle microscopique à laquelle les mécanismes moteurs du fluage ne sont pas impactés par la formulation du béton. A cette échelle, celle du C-S-H, les propriétés viscoélastiques peuvent être considérées avoir un caractère intrinsèque. L'influence de la formulation ne concerne alors que les concentrations des différents hydrates.

Trois approches, analytiques, semi-analytiques et numériques sont alors proposées pour estimer, par une homogénéisation multi-échelle, les propriétés viscoélastiques macroscopiques du béton à partir des propriétés de ses constituants ainsi qu'à partir de sa microstructure. Ces approches sont basées sur l'extension des schémas d'homogénéisation élastique au cas viscoélastique au moyen du principe de correspondance qui utilise la transformée de Laplace-Carson. Les propriétés effectives sont alors déterminées directement dans l'espace de Carson. Par la suite, celles dans l'espace temporel sont obtenues par la transformée inverse. Les approches proposées apportent des solutions aussi bien dans un cadre général que sous certaines hypothèses restrictives : coefficient de Poisson viscoélastique microscopique ou macroscopique constant, module de compressibilité constant.

Sur le plan théorique, deux schémas d'homogénéisation ont été étudiés : le schéma de Mori-Tanaka, basé sur le problème de l'inclusion d'Eshelby, et le schéma auto-cohérent généralisé basé sur la neutralité énergétique de l'inclusion. Les résultats obtenus montrent que sous ces hypothèses restrictives, le spectre macroscopique se présente comme une famille de sous ensembles de temps caractéristiques bornés par les temps caractéristiques microscopiques. Par ailleurs, les propriétés thermodynamiques, de croissance monotone et de concavité, des fonctions de retard macroscopiques ne sont préservées par l'homogénéisation que sous certaines conditions de compatibilité des spectres microscopiques.

Sur le plan pratique, les méthodes développées ont été appliquées pour construire la complaisance de fluage propre macroscopique du béton en connaissant les données communes de toutes sortes de bétons et celles correspondant à une formulation donnée. Les résultats expérimentaux disponibles sont alors exploités pour analyser le caractère intrinsèque des propriétés viscoélastiques à l'origine du fluage du béton.

**Mots-clés** : homogénéisation, changement d'échelle, viscoélasticité, transformée de Laplace-Carson, fluage propre, béton,

C-S-H, schéma de Mori-Tanaka, schéma autocohérent généralisé.



# Abstract

Concrete can be considered as a multiscale heterogeneous material in which elastic inclusions, i.e., aggregates, are embedded in a viscoelastic matrix which corresponds to the hardened cement paste. At the cement paste scale, the hydration process leads to a partially saturated porous multiphase medium whose solid skeleton is mainly constituted of the C-S-H gel, the other hydrates being crystalline solids. The gel-like properties of the C-S-H are essentially related to the existence of strongly adsorbed structural water in the interlayer nanospace. It is well admitted that this feature is the microscopic origin of the creep mechanism of C-S-H and therefore of concrete at the macroscale. This viscoelastic behavior can be explained by a rearrangement of the nanostructure of the C-S-H component due to a macroscopically applied loading.

Therefore, the macroscopic modeling of concrete creep does not allow explaining the variability of creep with respect to the concrete mix. Indeed, the identification of the viscoelastic parameters of macroscopic models requires performing creep tests at the concrete scale. Thus, the validity of the identified parameters is limited to the concrete mix under consideration and the identification process does not permit to carry out the influence of the microstructure and the mechanical constituent properties on the macroscopic creep.

In this work, we assume that there exists a microscopic scale at which the driving creep mechanisms are not affected by the concrete mix. At this scale, the C-S-H one, the viscoelastic properties can be considered to be intrinsic. The concrete mix will essentially influence the volume fraction of the hydrates.

Analytical, semi-analytical and numerical approaches are developed in order to derive, by multi-scale homogenization, the macroscopic viscoelastic properties of concrete on the basis of the knowledge of the microscopic properties, of the constituents together with the knowledge of the mix-dependent microstructure. These approaches consist in extending results of elastic homogenization schemes to viscoelasticity with the help of the correspondence principle using the Laplace-Carson transform. Therefore, the effective properties are obtained in a straightforward manner in the Carson transform space, which requires the transform inversion in order to determine the time evolution of these properties. The proposed models permit to answer to this requirement, both under some restrictive assumptions (constant Poisson's ratio at either microscopic or macroscopic scale, constant bulk microscopic modulus) and in a general way.

At the theoretical level, two homogenization schemes are investigated : the Mori-Tanaka scheme based on the Eshelby solution and the Generalized Self Consistent scheme, based on the energetic neutrality condition of the inclusion. The obtained results show that under the aforementioned restrictive conditions, the macroscopic creep spectrum presents as a family of sets of retardation times which are bounded by two successive microscopic characteristic times. Furthermore, the monotonically increasing and concavity features of the macroscopic creep compliance, which derive from thermodynamic considerations, are not always preserved, except if some compatibility conditions are fulfilled by the microscopic spectrums.

From the practical point of view, these methods developed are used to establish the compliance creep function of concrete from the knowledge of the common data of all types of concrete, as well as the other parameters that characterize a given formulation. Hence, by a back-analysis of creep tests obtained on cement paste or on concrete, the intrinsic basic creep properties of the gel C-S-H are estimated.

**Keywords** : homogenization, upscaling technique, viscoelasticity, Laplace-Carson transform, basic creep, concrete,

C-S-H, Mori-Tanaka scheme, generalized self-consistent scheme.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Résumé</b>	<b>5</b>
<b>Abstract</b>	<b>7</b>
<b>Introduction et problématique</b>	<b>15</b>
<b>Notations</b>	<b>19</b>
<b>I Éléments de base de la viscoélasticité linéaire et de la micromécanique</b>	<b>21</b>
<b>Introduction</b>	<b>23</b>
<b>1 Viscoélasticité et principe de correspondance</b>	<b>25</b>
1.1 Introduction . . . . .	25
1.2 Comportement unidimensionnel . . . . .	25
1.2.1 Comportement linéaire . . . . .	25
1.2.2 Comportement linéaire non vieillissant . . . . .	27
1.2.3 Représentation fonctionnelle du comportement . . . . .	28
1.2.4 Principe de correspondance . . . . .	29
1.3 Comportement tridimensionnel . . . . .	30
<b>2 Homogénéisation élastique et viscoélastique</b>	<b>33</b>
2.1 Introduction . . . . .	33
2.2 Moyennes spatiales . . . . .	33
2.2.1 Conditions aux limites homogènes en contrainte et en déformation . . . . .	33
2.2.2 Lemme de Hill-Mandel . . . . .	34
2.3 Comportement élastique homogénéisé . . . . .	34
2.3.1 Approche directe . . . . .	34
2.3.2 Approche énergétique . . . . .	35
2.3.3 Propriétés des tenseurs d'élasticité homogénéisés . . . . .	35
2.3.4 Moyenne par phase . . . . .	36
2.4 Schémas d'homogénéisation . . . . .	36
2.4.1 Approches basées sur l'estimation par phase . . . . .	36
2.4.2 Approches basées sur le concept d'inclusion composite neutre . . . . .	42
2.4.3 Comparaison des schémas d'estimation . . . . .	45
2.5 Encadrement des propriétés homogénéisées . . . . .	48
2.5.1 Bornes de Voigt et de Reuss . . . . .	49
2.5.2 Bornes de Hashin . . . . .	49
2.5.3 Bornes de Hashin-Shtrikman . . . . .	51
2.5.4 Comparaison des bornes . . . . .	53
2.6 Homogénéisation en viscoélasticité . . . . .	54
2.6.1 Comportement viscoélastique homogénéisé . . . . .	54
2.6.2 Principe de correspondance . . . . .	55
2.7 Conclusion . . . . .	57

<b>II</b>	<b>Construction des propriétés viscoélastiques macroscopiques</b>	<b>59</b>
	<b>Introduction</b>	<b>61</b>
<b>3</b>	<b>Méthodes numériques</b>	<b>63</b>
3.1	Introduction . . . . .	63
3.2	Définition de la transformée de Laplace et de Carson . . . . .	63
3.3	Transformée inverse de Laplace et formule de Bromwich . . . . .	64
3.3.1	Unicité de la transformée inverse . . . . .	64
3.3.2	Formule de Bromwich . . . . .	64
3.4	Inverse numérique de la transformée de Laplace . . . . .	69
3.4.1	Séries approchant la formule de Bromwich . . . . .	70
3.4.2	Techniques d'accélération de la convergence d'une série entière . . . . .	71
3.4.3	Méthode de Post-Widder . . . . .	74
3.5	Conclusion . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Méthode semi-analytique</b>	<b>81</b>
4.1	Introduction . . . . .	81
4.2	Comportement viscoélastique microscopique . . . . .	81
4.2.1	Modèle généralisé de Kelvin (ou Maxwell) non borné . . . . .	82
4.2.2	Modèle généralisé de Kelvin (ou Maxwell) borné . . . . .	83
4.3	Comportement viscoélastique macroscopique . . . . .	84
4.3.1	Démarche . . . . .	84
4.3.2	Schéma de Mori-Tanaka . . . . .	87
4.3.3	Schéma autocohérent généralisé . . . . .	102
4.4	Conclusion . . . . .	115
<b>5</b>	<b>Méthode analytique approchée</b>	<b>117</b>
5.1	Introduction . . . . .	117
5.2	Quatre paramètres de la fonction de fluage . . . . .	117
5.2.1	Fonction de fluage microscopique . . . . .	117
5.2.2	Fonction de fluage macroscopique . . . . .	119
5.3	Modèle macroscopique équivalent . . . . .	120
5.4	Schéma de Mori-Tanaka . . . . .	122
5.4.1	Fonction composée . . . . .	122
5.4.2	Limites des fonctions $u(s)$ et $v(s)$ . . . . .	124
5.4.3	Fluage effectif instantané . . . . .	124
5.4.4	Vitesse de fluage instantanée . . . . .	125
5.4.5	Vitesse de fluage à long terme . . . . .	125
5.4.6	Ordonnée à l'origine . . . . .	127
5.5	Schéma autocohérent généralisé . . . . .	129
5.5.1	Vitesse de fluage à long terme . . . . .	129
5.5.2	Ordonnée à l'origine . . . . .	131
5.6	Conclusion . . . . .	134
<b>III</b>	<b>Analyse comparative et application au fluage des bétons</b>	<b>135</b>
	<b>Introduction</b>	<b>137</b>

<b>6</b>	<b>Etude comparative paramétrique</b>	<b>139</b>
6.1	Modèles rhéologiques microscopiques . . . . .	139
6.2	Application à un composite poreux renforcé d'inclusions élastiques . . . . .	141
6.2.1	Coefficient de Poisson constant . . . . .	141
6.2.2	Module de compressibilité constant . . . . .	141
6.2.3	La fonction de fluage microscopique déviatorique décrite par Maxwell et celle sphérique décrite par Zener . . . . .	143
6.2.4	Exemple numérique . . . . .	144
6.3	Composite biphasé comportant une phase inclusionnaire . . . . .	148
6.3.1	Coefficient de Poisson constant . . . . .	148
6.3.2	Comparaison des paramètres de la fonction effective de fluage selon les deux schémas	150
6.4	Conclusion . . . . .	152
<b>7</b>	<b>Identification et simulation du fluage de différentes formulations de bétons</b>	<b>153</b>
7.1	Introduction . . . . .	153
7.2	Les essais de fluage propre disponibles . . . . .	154
7.2.1	Caractéristiques du béton de six centrales . . . . .	154
7.2.2	Essais de fluage propre uniaxial . . . . .	156
7.3	Modélisation multi-échelle du fluage propre du béton . . . . .	157
7.3.1	Microstructure et échelle d'observation . . . . .	157
7.3.2	Stratégie . . . . .	159
7.3.3	Données d'entrée du problème . . . . .	164
7.3.4	Identification des paramètres viscoélastiques du gel C-S-H . . . . .	166
7.3.5	Application pour estimer le fluage propre du béton . . . . .	175
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>185</b>
<b>IV</b>	<b>Annexes</b>	<b>195</b>
<b>A</b>	<b>Les propriétés des fonctions viscoélastiques tridimensionnelles</b>	<b>197</b>
<b>B</b>	<b>Méthodes intégrales en élasticité linéaire</b>	<b>199</b>
B.1	Principe de la méthode de Green . . . . .	199
B.1.1	Problème initial et problèmes auxiliaires . . . . .	199
B.1.2	Problème élémentaire d'une force ponctuelle . . . . .	199
B.1.3	Tenseur et opérateur de Green . . . . .	201
B.1.4	Solution du problème initial . . . . .	201
B.2	Application à l'élasticité des matériaux hétérogènes . . . . .	202
B.2.1	Equation intégrale de l'élasticité hétérogène . . . . .	202
B.2.2	Fonctionnelle de polarisation . . . . .	202
B.2.3	Bornes de Hashin-Shtrikman . . . . .	204
<b>C</b>	<b>Détails des manipulations des schémas d'homogénéisation</b>	<b>207</b>
C.1	Démonstration du schéma dilué d'Eshelby . . . . .	207
C.2	Démonstration du schéma autocohérent classique . . . . .	207

<b>D</b>	<b>Sphère composite</b>	<b>209</b>
D.1	Schéma autocohérent généralisé . . . . .	209
D.2	Problème de cisaillement des sphères composites de Hashin . . . . .	210
<b>E</b>	<b>Modèles de Kelvin et de Maxwell généralisés correspondants</b>	<b>213</b>
E.1	TC de la fonction de fluage gouvernée par le modèle de Kelvin généralisé non borné . . . . .	213
E.2	TC de la fonction de relaxation gouvernée par le modèle de Maxwell généralisé non borné	215
E.3	TC de la fonction de fluage gouvernée par le modèle de Kelvin généralisé borné . . . . .	216
<b>F</b>	<b>Schéma de Mori-Tanaka</b>	<b>219</b>
F.1	TC des fonctions effectives de fluage et leur fonction composée . . . . .	219
F.1.1	Forme simple de la TC de la fonction effective de fluage . . . . .	219
F.1.2	Fonction composée de fluage effectif . . . . .	220
F.2	Dérivée des fonctions composées . . . . .	224
F.2.1	Fonction composée déviatorique . . . . .	224
F.2.2	Fonction composée de fluage sphérique . . . . .	225
F.3	Ordonnée à l'origine . . . . .	225
F.3.1	Démarches de calcul du deuxième terme de l'ordonnée à l'origine . . . . .	225
F.3.2	Expression du deuxième terme de l'ordonnée à l'origine pour 4 cas . . . . .	226
<b>G</b>	<b>Schéma autocohérent généralisé</b>	<b>239</b>
G.1	Coefficients de l'équation quadratique déterminant la fonction de relaxation de cisaillement effective . . . . .	239
G.2	Développement de la fonction $W_4(u, v)$ . . . . .	239
G.2.1	Module de cisaillement et de compressibilité gouverné par le modèle de Kelvin non borné . . . . .	239
G.2.2	Coefficients de la fonction $\underline{W}_4(u, v)$ pour le cas général . . . . .	241
G.2.3	Coefficients de la fonction $\underline{W}_2(u, v)$ pour le cas du Poisson constant . . . . .	244
G.3	Polynôme $D_4(u)$ . . . . .	246
G.4	Racines de l'équation de troisième degré . . . . .	246
<b>H</b>	<b>Algorithme d'accélération des calculs des dérivées</b>	<b>249</b>
H.1	Algorithme pour calculer la $l$ -ième dérivée d'une fonction rationnelle : . . . . .	249
H.2	Algorithme pour calculer la $l$ -ième dérivée d'une fonction irrationnelle . . . . .	250
<b>I</b>	<b>Entrées du problème de modélisation multi-échelle du fluage propre du béton</b>	<b>253</b>
<b>J</b>	<b>Résultats d'identification des paramètres viscoélastiques du modèle Burgers équivalent du gel C-S-H</b>	<b>255</b>
J.1	Coefficient de Poisson ou module de compressibilité du gel C-S-H constant . . . . .	255
J.2	Comparaison entre le schéma de MT et le schéma AG . . . . .	256
J.3	Identification des paramètres viscoélastiques microscopiques à partir du fluage uniaxial de la pâte . . . . .	256
J.4	Coefficient de Poisson du béton constant . . . . .	257

# Introduction et problématique



### Contexte industriel & scientifique

Le parc des Centrales Nucléaires de Production d'Electricité d'EDF se compose de 58 réacteurs à eau sous pression (REP), dont :

- 34 tranches 900 MWe à paroi unique et revêtement métallique intérieur,
- 24 tranches 1300 MWe à double paroi sans revêtement métallique intérieur,
- 4 tranches 1400 MWe à double paroi sans revêtement métallique intérieur.

Les réacteurs REP 900 MWe sont composés principalement d'un bâtiment cylindrique en béton précontraint d'épaisseur 0.55 m, de 37 m de diamètre et de 59 m de hauteur. La face intérieure de l'enceinte est revêtue d'une peau métallique d'étanchéité de 6 mm d'épaisseur. L'enceinte unique en béton précontraint avec peau d'étanchéité est une solution satisfaisante du point de vue de la sûreté, mais présente des sujétions comme la difficulté dans la réalisation de la peau métallique, la faiblesse de l'enceinte unique contre les agressions externes comme la chute d'avion.

Electricité de France a entrepris, dès 1970, l'étude d'un nouveau type d'enceinte de confinement à double paroi sans peau d'étanchéité afin d'augmenter la résistance vis-à-vis des agressions externes. Le REP 1300-1400 MWe est donc composée de deux parois :

- ★ une paroi externe en béton armé d'épaisseur 55 cm protège le réacteur nucléaire des agressions naturelles (séisme, tempête), accidentelles (explosion, chute d'avion).
- ★ une paroi interne en béton biaxialement précontraint d'épaisseur de 90 à 120 cm. Elle est dimensionnée pour résister à une pression interne de 0.5 MPa et à une température voisine de 140 °C, correspondant à l'accident de type rupture du circuit primaire de réfrigération du cœur du réacteur).

Des avantages supplémentaires peuvent être attribués au concept d'enceinte à double paroi :

- ★ Les contraintes thermiques en régime normal sont réduites, la paroi externe assurant une protection thermique de la paroi interne vis-à-vis des conditions atmosphériques.
- ★ L'espace annulaire de 1.80 m entre parois permet d'effectuer les opérations de précontrainte sans interférence sur les bâtiments voisins.
- ★ Les armatures de précontrainte sont mieux protégées puisque la paroi externe les abrite des intempéries.
- ★ La résistance aux agressions externes (chute d'avion, explosion) est améliorée par la paroi externe.

Le Décret d'Autorisation de Création prévoit que le taux de fuite mesuré en épreuve en air à la pression de dimensionnement soit inférieur à 1.5% du volume interne par jour. Il s'agit du taux de fuite relatif à l'enceinte interne qui lorsqu'il transite par l'espace entre-enceinte est collecté par un système de succion (mise en dépression à 150 mbars) pour être réinjecté dans l'enceinte interne. On parle de système dynamique de gestion de fuites.

Le retour d'expérience a, néanmoins, montré lors de certaines épreuves en air, de taux de fuite importants pour les centrales Flamanville 1/2, Civaux 1 et Belleville 1. Il est notable qu'à l'exception de Belleville, il s'agit de centrales dont le fluage est particulièrement marqué. La recouvrance d'un taux d'étanchéité admissible a été obtenue par une stratégie de réparation des zones particulièrement fuyardes (Zone Accès Matériel en particulier). Cependant, afin de mieux maîtriser et d'anticiper le comportement futur des ouvrages dont il a la charge, EDF a entrepris depuis plusieurs années un programme de compréhension, caractérisation et modélisation du comportement différé du béton qui a le moteur de la perte de précontrainte et de la capacité à maintenir la fissuration close.

Cette thèse s'inscrit dans la stratégie générale que l'on peut résumer de la façon suivante : EDF a décidé à la fin des années 90 de lancer un programme de R & D sur le thème du comportement différé du béton avec les principaux objectifs suivants : (i) le développement des modèles macroscopiques tenant compte des mécanismes phénoménologiques physiques de la déformation différée, (ii) montage et réalisation d'un programme expérimental pour étudier le comportement à long terme du fluage afin d'obtenir des données complètes et fiables sous les chargements unidirectionnelle et bidirectionnelle. Le point de départ de ces travaux est la thèse de Granger [43] réalisée au LCPC, dans laquelle est décrite de manière

exhaustive la problématique des études EDF visant à prévoir la déformation différée des enceintes. Cette étude comprend de nombreux essais de retrait et de fluage sur les bétons reconstitués en laboratoire, sur la pâte de ciment et sur les granulats. L’auteur a bien analysé des phénomènes physico-chimiques concernant les différents mécanismes de déformation différée afin de proposer des modèles insérés dans le code d’éléments finis CESAR-LCPC. A bien des égards, cette thèse constitue encore aujourd’hui un document de référence tant pour les nombreux résultats expérimentaux qu’elle comporte que pour les stratégies de modélisation proposés qui sont dans leurs grandes lignes celles utilisées aujourd’hui à EDF. Néanmoins, il avait été identifié des besoins d’amélioration de la modélisation du fluage, notamment vis-à-vis du caractère multiaxial du chargement pour lequel on supposait un coefficient de Poisson constant. La thèse de Benboudjema [9] a donc été lancée afin de développer un nouveau modèle hydromécanique du béton, raffinant la description des phénomènes de séchage, de retrait, de fluage et de fissuration. Dans ce cadre, le modèle de fluage propre proposé est associé à la micro-diffusion de l’eau adsorbée entre la porosité interhydrate et intrahydrate et la porosité capillaire, et au glissement des feuillettes de C-S-H à l’échelle des nanopores. Ce modèle donne des résultats satisfaisants pour caractériser le fluage propre de la pâte, du mortier et du béton. Néanmoins, en pratique, les paramètres de ce modèle ne peuvent être identifiés que par l’analyse de résultats expérimentaux obtenus sur du béton, ce qui ne permet pas de comprendre les différences de comportement observées sur les différents bétons du Parc nucléaire ou hydraulique. L’obtention de ces paramètres conduit à des programmes expérimentaux très coûteux et ne fournit pas suffisamment d’informations sur la sensibilité des paramètres macroscopiques dépendant de la variabilité des caractéristiques mécaniques et morphologies des constituants.

Il est donc apparu pertinent d’essayer de déterminer le comportement de fluage macroscopique par les techniques de changement d’échelle.

### **Description de l’étude**

Ce travail vise à identifier, au moyen d’une approche micromécanique, les propriétés intrinsèques à la base du fluage propre du béton durci. L’idée de base est de décomposer la microstructure du béton, dont les hétérogénéités varient du nanomètre au centimètre, en trois niveaux d’homogénéisation : la pâte, le mortier et le béton.

A l’échelle de la pâte, l’hydratation du ciment génère un milieu multiphasique constitué d’un squelette solide et de pores remplis ou partiellement remplis d’eau selon leur taille. Le composant principal du squelette solide est le gel de C-S-H, les autres composants étant de nature cristalline. La qualification de gel du composant C-S-H est liée à sa nanostructure dont la schématisation la plus admise consiste en une phase aqueuse adsorbée, en sandwich avec des feuillettes solides de nature cristalline. Il est également bien admis que cette structure du C-S-H est à l’origine de son comportement viscoélastique et donc de celui du béton. Ce comportement viscoélastique peut s’expliquer par un réarrangement de sa nanostructure sous l’effet des contraintes mécaniques appliquées à l’échelle macroscopique.

Pour les deux autres échelles, le matériau peut être schématisé comme un milieu constitué de granulats et éventuellement de pores, jouant le rôle d’inclusions, enchâssés dans une matrice viscoélastique dont les propriétés dépendent de l’échelle précédente.

Dans ce travail, on construit le comportement viscoélastique macroscopique du béton par homogénéisations successives (pâte, mortier, béton) sur la base d’un comportement viscoélastique de la phase C-S-H. Les propriétés viscoélastiques du C-S-H et celles élastiques des autres hydrates sont considérées ne pas dépendre de la formulation du béton. Seules les fractions volumiques des phases sont impactées par celle-ci.

Le comportement macroscopique est alors obtenu en utilisant le principe de correspondance qui consiste à étendre les schémas d’homogénéisation élastique au cas viscoélastique en utilisant la transformée de Laplace–Carson. Il est à noter que pour les échelles considérées (pâte, mortier, béton) le milieu se présente comme des inclusions élastiques ou poreuses, noyées dans une matrice viscoélastique. Le comportement du C-S-H est postulé régi par des modèles phénoménologiques (modèles rhéologiques généralisés) de viscoélasticité linéaire non vieillissante.

Le changement d'échelle permet alors d'exprimer les propriétés viscoélastiques macroscopiques en fonctions de celles microscopiques et d'un certain nombre de paramètres dépendant de la formulation.

Une telle démarche a été déjà adoptée avec succès dans de nombreux travaux pour l'estimation des propriétés élastiques du béton en considérant que les propriétés élastiques des hydrates sont intrinsèques. Celles-ci sont directement déterminées par des techniques d'indentation ce qui permet de prédire de façon satisfaisante le comportement élastique macroscopique.

Dans le cas de la viscoélasticité, les propriétés intrinsèques du C-S-H, seule phase viscoélastique, ne sont pas disponibles à ce jour. En plus, l'exploitation de la technique d'indentation donne un module global qui dépend du coefficient de Poisson viscoélastique à l'échelle du C-S-H, dont l'évolution dans le temps n'est a priori pas connue.

Ainsi, c'est à partir de l'échelle du béton que nous analyserons le caractère intrinsèque du comportement viscoélastique du C-S-H. Moyennant dispersion expérimentale et erreur de modèle également à analyser, les valeurs des paramètres viscoélastiques du C-S-H obtenus par analyse inverse à partir de différentes formulations de bétons seront confrontées.

C'est l'objectif du présent mémoire qui s'articule autour de trois parties :

- La première partie est essentiellement une analyse bibliographique constituée de deux chapitres. Dans le premier chapitre on rappelle les résultats fondamentaux de la théorie de la viscoélasticité linéaire isotrope isotherme non vieillissante. On y introduira le principe de correspondance, basé sur la transformée de Laplace-Carson, qui permet de ramener un problème de viscoélasticité en un problème de pseudo élasticité. Dans le deuxième chapitre, une synthèse sur les problèmes d'homogénéisation et des méthodes d'estimation est présentée dans le cas élastique ainsi que son extension à la viscoélasticité.
- La deuxième partie consiste en trois chapitres abordant la construction des propriétés viscoélastiques macroscopiques par des méthodes numériques, semi-analytiques ou analytiques approchées. En effet, le principe de correspondance apporte une facilité indéniable quant à étendre les résultats de l'homogénéisation élastique au cas viscoélastique. Cependant, il pose le problème de devoir inverser la transformée de Laplace-Carson des fonctions effectives pour établir les expressions de celles-ci dans l'espace temporel. Les méthodes proposées dans cette partie apportent des solutions à ce problème.
- La troisième et dernière partie consiste d'abord (chapitre 6) en une validation et en une étude comparative des différentes méthodes développées pour présenter la pertinence et les limites de chacune d'entre elles. Ensuite, dans le chapitre 7, les outils développés sont mis à contribution pour identifier les propriétés viscoélastiques du C-S-H puis analyser leur caractère intrinsèque au vu de l'objectif donné à ce travail.

On terminera la présentation de ce travail par une conclusion et des perspectives.



# Notations

---

## Indices et exposants

$\mu$	relatif à la quantité déviatorique
$\kappa$	relatif à la quantité sphérique
$\pi$	relatif à la quantité déviatorique ou sphérique
$ef$	comme effectif
$i$	relatif à l'échelle d'homogénéisation $i$
$est$	relatif à la quantité estimée

---

## Tenseurs

$\mathbb{C}$	tenseur d'ordre quatre de rigidité homogénéisé
$\mathbb{S}$	tenseur d'ordre quatre de souplesse homogénéisé
$\mathbb{L}$	tenseur d'ordre quatre de localisation de déformation
$\mathbb{M}$	tenseur d'ordre quatre de localisation de contrainte
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur symétrique d'ordre 2 de contrainte de Cauchy
$\boldsymbol{\Sigma}$	tenseur de contrainte macroscopique
$\underline{T}$	vecteur de contrainte sur la frontière
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tenseur symétrique d'ordre 2 de déformation
$\mathbf{E}$	tenseur de déformation macroscopique
$\underline{u}$	vecteur de déplacement
$\underline{n}$	vecteur normale d'une surface
$\mathbb{S}^{esh}$	tenseur d'ordre quatre d'Eshelby
$\mathbb{P}^{hi}$	tenseur d'ordre quatre d'Hill
$\mathbb{I}$	tenseur d'unité symétrique d'ordre quatre
$\mathbf{1}$	tenseur d'unité symétrique d'ordre deux
$\mathbb{I}_{dev}$	tenseur d'unité d'ordre quatre déviatorique
$\mathbb{I}_{sph}$	tenseur d'unité d'ordre quatre sphérique
$(\underline{u} \otimes^s \underline{n})_{ij}$	tenseur symétrisé de deux vecteurs $\underline{u}$ and $\underline{n}$

$$(\underline{u} \otimes^s \underline{n})_{ij} = \frac{1}{2}(u_i n_j + n_i u_j) \quad (1)$$

Propriétés des tenseur d'unité d'ordre quatre :

$$\begin{array}{llll}
 \mathbb{I} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \overline{\otimes} \mathbf{1}) & \mathbb{I}_{sph} = \frac{1}{3}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) & \mathbb{I} = \mathbb{I}_{dev} + \mathbb{I}_{sph} & \mathbb{I} : \mathbb{I} = \mathbb{I} \\
 \mathbb{I}_{dev} : \mathbb{I}_{dev} = \mathbb{I}_{dev} & \mathbb{I}_{sph} : \mathbb{I}_{sph} = \mathbb{I}_{sph} & \mathbb{I}_{dev} : \mathbb{I}_{sph} = 0 & \mathbb{I}_{sph} : \mathbb{I}_{dev} = 0 \\
 \mathbb{I} : \mathbf{1} = \mathbf{1} & \mathbb{I}_{sph} : \mathbf{1} = \mathbf{1} & \mathbb{I}_{dev} : \mathbf{1} = 0 & \mathbf{1} : \mathbf{1} = 3 \\
 \mathbb{I}_{dev} : \mathbf{E} = \mathbf{E}^{dev} & \mathbb{I}_{sph} : \mathbf{E} = \frac{1}{3}tr(\mathbf{E})\mathbf{1} & \mathbf{E}^{dev} : \mathbf{1} = 0 & 
 \end{array} \quad (2)$$

---

## Comportement différé

$\bar{J}$	fonction de retard du matériau viscoélastique linéaire
$\bar{R}$	fonction de relaxation du matériau viscoélastique linéaire
$J$	fonction de retard du matériau viscoélastique linéaire non-vieillissant
$R$	fonction de retard du matériau viscoélastique linéaire non-vieillissant
$S_0$	le fluage instantané
$S_\infty$	l'ordonnée à long terme de l'asymptote de la fonction de fluage
$F_0$	la vitesse de fluage instantanée
$F_\infty$	la vitesse de fluage à long terme
TL	transformée de Laplace
TC	transformée de Carson
$\mathcal{L}$	opérateur de la TL
$\mathcal{C}$	opérateur de la TC
$\otimes$	convolution de Stieltjes
$\hat{f}(s)$	transformée de Laplace de la fonction $f(t)$
$\tilde{f}(s)$	transformée de Carson de la fonction $f(t)$

---

## Autres notations

$\langle \cdot \rangle$	valeur moyenne
MT	Mori-Tanaka
AG	Autocohérent généralisé
$E_i$	raideur du ressort $i$
$\eta_i$	viscosité de l'amortisseur visqueux $i$
$I$	nombre imaginaire
$\mu$	module de cisaillement
$\kappa$	module de compressibilité

## Première partie

# Eléments de base de la viscoélasticité linéaire et de la micromécanique



# Introduction

Dans cette première partie, on passe en revue les principaux résultats de la théorie de la visco-élasticité, les méthodes d'estimations par homogénéisation élastique ainsi que l'extension de celle-ci au comportement viscoélastique sur la base du principe de correspondance.

Dans le premier chapitre, on rappelle l'écriture de la loi de comportement viscoélastique linéaire par l'intégrale de Stieltjes dans le cas de la viscoélasticité linéaire isotherme. Dans le cas non vieillissant, cette intégrale se réduit à une convolution de Riemann que la transformée de Laplace-Carson ramène à une loi pseudo-élastique : c'est le principe de correspondance de Le-Mandel. Ainsi, ce principe de correspondance permet de transformer le problème aux limites de la viscoélasticité en un problème élastique dans l'espace de la transformée de Carson. Après résolution du problème, il convient d'inverser les champs solutions pour déterminer leurs évolutions dans l'espace temporel.

Dans le deuxième chapitre, on rappelle les méthodes d'estimations des propriétés élastiques macroscopiques d'un milieu hétérogène par les schémas d'homogénéisation, basés sur le problème d'Eshelby. On introduit par la suite le principe de correspondance pour étendre ces estimations au cas viscoélastique linéaire.



# Chapitre 1 Viscoélasticité et principe de correspondance

## 1.1 Introduction

Contrairement à un matériau élastique, la réponse d'un matériau viscoélastique dépend de la valeur instantanée de la sollicitation ainsi que de toute son histoire. En outre, le comportement viscoélastique présente une sensibilité à la vitesse de la sollicitation. En effet, l'amplitude de la réponse est d'autant plus petite que la vitesse de la sollicitation est plus grande.

Dans ce qui suit, on présentera les relations fondamentales de la viscoélasticité linéaire isotherme, puis on s'intéressera, en particulier, au comportement non-vieillissant [74, 23, 96].

Par ailleurs, on sous-entend par sollicitation instantanée, une sollicitation appliquée en un temps suffisamment petit par rapport au temps caractéristique de la réponse et suffisamment grand pour ne pas engendrer de phénomènes dynamiques.

## 1.2 Comportement unidimensionnel

### 1.2.1 Comportement linéaire

A l'image du comportement élastique, le comportement viscoélastique est dit linéaire lorsque la réponse est proportionnelle et additive par rapport à la sollicitation. Ceci peut être mis en évidence à partir d'essais de fluage ou de relaxation pour différentes valeurs de la sollicitation [96].

#### 1.2.1.1 Fluage

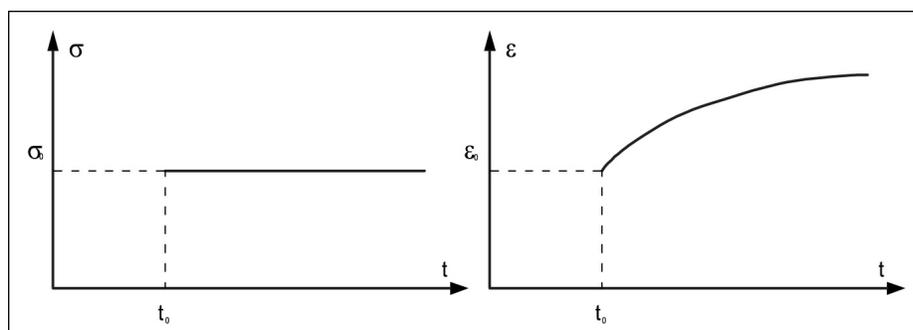


FIG. 1.1 Essai uniaxial de fluage

Dans un essai de fluage, une contrainte constante  $\sigma_0$  est appliquée instantanément au matériau au temps  $t_0$  et puis maintenue constante durant l'essai. On constate alors une déformation instantanée  $\epsilon_0$  puis une augmentation de la déformation  $\epsilon_t$  au cours du temps (Fig. 1.1).

Dans ce cas, on peut écrire l'histoire de la sollicitation sous la forme :

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t - t_0) = \sigma_0 H_{t_0} \quad (1.1)$$

où  $H_{t_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0 \\ 1 & \text{si } t > t_0 \end{cases}$  est la fonction de Heaviside. La réponse viscoélastique, en terme de déformation, se met sous la forme :

$$\varepsilon(t) = \bar{J}(t_0, t)\sigma_0 = \bar{J}_{t_0}\sigma_0 \quad (1.2)$$

où  $\bar{J}(t_0, t)$  est appelée la fonction de retard ou complaisance de fluage. Elle correspond à la réponse dans le cas d'une sollicitation unitaire et possède les propriétés suivantes [96] :

$$\begin{cases} \bar{J}(t_0, t) = 0 & \text{si } t < t_0 \\ \bar{J}(t_0, t_0) = \bar{J}(t_0, t_0^+) \\ \bar{J}(t_0, t) & \text{croissante en fonction de } t \text{ pour } t > t_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

La fonction  $\bar{J}(t_0, t)$  présente, le plus souvent, une discontinuité pour  $t = t_0$ , correspondant à la réponse instantanée du matériau. Par ailleurs, le fait qu'elle ne dépend pas de la contrainte nous place dans le cadre de la viscoélasticité linéaire. Ainsi, à tout instant  $t$ , la déformation est proportionnelle à la contrainte appliquée  $\sigma_0$  (Eq. 1.2). En d'autre terme, la cinétique de fluage n'est pas influencée par l'amplitude de la contrainte. Bien entendu, ces considérations ne restent valables que pour le fluage primaire et secondaire.

### 1.2.1.2 Relaxation

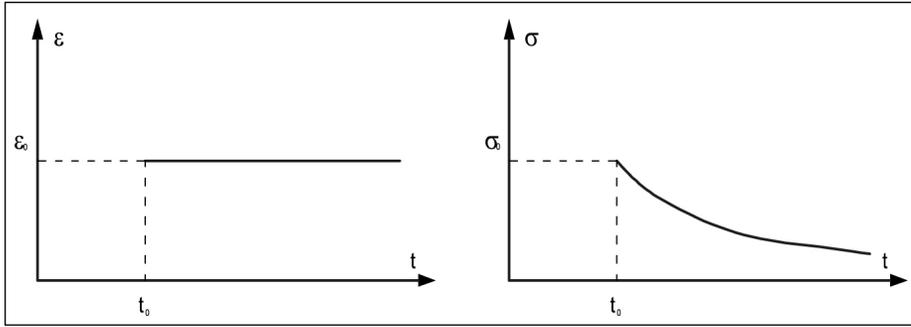


FIG. 1.2 Essai uniaxial de relaxation

Dans l'essai de relaxation, on impose instantanément une déformation d'amplitude  $\varepsilon_0$  à l'instant  $t_0$  qu'on maintient constante par la suite. On observe la réponse en terme de contrainte  $\sigma(t)$  qui varie de façon monotone décroissante en fonction du temps (Fig. 1.2). Dans ce cas, on peut écrire l'histoire de la sollicitation sous la forme :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t - t_0) = \varepsilon_0 H_{t_0} \quad (1.4)$$

La réponse correspondante, en terme de contrainte, est alors :

$$\sigma(t) = \bar{R}(t_0, t)\varepsilon_0 = \bar{R}_{t_0}\varepsilon_0 \quad (1.5)$$

où  $\bar{R}(t_0, t)$  est appelée la fonction de relaxation. De façon similaire au cas du fluage, elle correspond à la réponse dans le cas d'une sollicitation unitaire et possède les propriétés suivantes [96] :

$$\begin{cases} \bar{R}(t_0, t) = 0 & \text{si } t < t_0 \\ \bar{R}(t_0, t_0) = \bar{R}(t_0, t_0^+) \\ \bar{R}(t_0, t) & \text{décroissante en fonction de } t \text{ pour } t > t_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

### 1.2.2 Comportement linéaire non vieillissant

Le matériau est dit non-vieillissant si ses propriétés mécaniques sont stabilisées et n'évoluent pas avec le temps. Dans ce cas, la réponse viscoélastique subit une simple translation lorsqu'on modifie les instants  $t_i$  d'application de la sollicitation (Fig. 1.3).

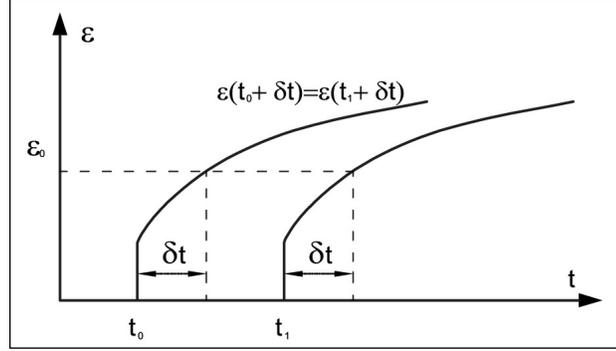


FIG. 1.3 Réponses viscoélastiques non-vieillissantes obtenues par décalage du temps de mise sous sollicitation

On en déduit que les fonctions  $\bar{J}(\tau, t)$  et  $\bar{R}(\tau, t)$  ne dépendent des arguments  $\tau$  et  $t$  que par leur différence  $(t - \tau)$ . Dans ce cas on peut remplacer les fonctions précédentes par les fonctions  $J(t - \tau)$  et  $R(t - \tau)$ , qui sont introduites pour désigner les fonctions de fluage et de relaxation pour le matériau viscoélastique non-vieillissant. L'application du principe de superposition de Boltzmann nous permet de mettre en évidence les propriétés suivantes [96] :

- Fonction de retard du matériau non-vieillissant :

$$\begin{cases} \bar{J}(\tau, t) = J(t - \tau) \\ J(\tau) = 0 \quad \text{si } \tau < 0 \\ J(0) = J(0^+) > 0 \\ J(t - \tau) \text{ croissante en fonction de } t \text{ pour } \tau < t \\ J(t - \tau) \text{ continue et continûment dérivable par rapport à } \tau \text{ et à } t \text{ pour } \tau > 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

- Fonction de relaxation du matériau non-vieillissant :

$$\begin{cases} \bar{R}(\tau, t) = R(t - \tau) \\ R(\tau) = 0 \quad \text{si } \tau < 0 \\ R(0) = R(0^+) > 0 \\ R(t - \tau) \text{ décroissante en fonction de } t \text{ pour } \tau < t \\ R(t - \tau) \text{ continue et continûment dérivable par rapport à } \tau \text{ et à } t \text{ pour } \tau > 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

- Les propriétés des fonctions  $J$  et  $R$  donnent, pour un tel matériau Boltzmannien élastique, un comportement instantané. En effet, le comportement instantané est élastique si la réponse instantanée dans un essai de fluage (avec  $\sigma_0$  appliquée) est non nulle et si la recouvrance instantanée est totale, i.e.,  $\tau_1 \rightarrow \tau_0$  : expérience de charge et décharge instantanée. Dans ce cas, on a :

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow \tau_0} \{ \varepsilon(t) = [J(t - \tau_0) - J(t - \tau_1)] \sigma_0 \} = 0 \quad \forall t > \tau_1 > \tau_0 \quad (1.9)$$

du fait de la continuité de  $J$ .

De la même façon le comportement instantané est élastique si la réponse instantanée dans un essai de relaxation (avec  $\varepsilon_0$  appliquée) est finie et l'effacement instantané est total quand  $\tau_1 \rightarrow \tau_0$ . Dans ce cas, on a :

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow \tau_0} \{ \sigma(t) = [R(t - \tau_0) - R(t - \tau_1)] \varepsilon_0 \} = 0 \quad \forall t > \tau_1 > \tau_0 \quad (1.10)$$

### 1.2.3 Représentation fonctionnelle du comportement

La dépendance de la réponse d'un matériau viscoélastique de la valeur instantanée de la sollicitation et de son histoire s'écrit de façon formelle [23] :

$$\varepsilon(t) = \mathcal{F}_{\tau=0}^{+\infty}(\sigma(t-\tau), \sigma(t)) \quad (1.11)$$

où  $\mathcal{F}$  est la correspondance fonctionnelle permettant de donner la déformation à l'instant  $t$  en fonction de l'histoire de la contrainte dans l'intervalle  $] -\infty, t]$ . De même, on peut écrire la correspondance fonctionnelle  $\mathcal{G}$  qui donne la contrainte en fonction de l'histoire de la déformation :

$$\sigma(t) = \mathcal{G}_{\tau=0}^{+\infty}(\varepsilon(t-\tau), \varepsilon(t)) \quad (1.12)$$

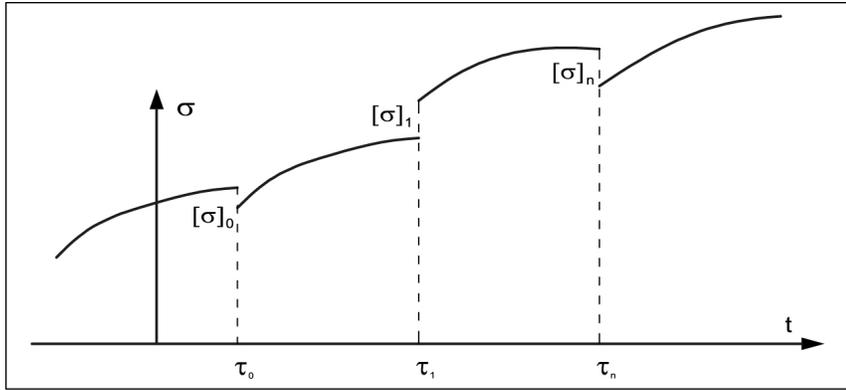


FIG. 1.4 Chemin de sollicitation quelconque en contrainte

Pour expliciter  $\mathcal{F}$ , on considère une sollicitation quelconque en contrainte  $\sigma(t)$ , nulle pour  $(t \rightarrow -\infty)$ , continue et dérivable par morceau par rapport au temps, et présentant des sauts  $[[\sigma]]_i$  aux instants  $\tau_i$ . On peut alors expliciter  $\sigma(t)$  sous la forme [96] :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t H(t-\tau) d\sigma(\tau) + \sum_i H(t-\tau_i) [[\sigma]]_i \quad (1.13)$$

Cette sollicitation peut être considérée comme la somme continue des sollicitations infinitésimales  $d\sigma(\tau)$ , correspondant à des essais élémentaires de fluage à chaque instant courant  $\tau$ , ainsi que la somme discrète des sollicitations d'amplitudes finies  $[[\sigma]]_i$ , correspondant à des essais élémentaires de fluage aux instants  $\tau_i$ .

En vertu du principe de superposition de Boltzmann, la réponse en déformation  $\varepsilon(t)$  à cette sollicitation (Eq. 1.13) peut être obtenue en superposant les réponses à chaque sollicitation élémentaire. Ainsi, on obtient [96] :

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) d\sigma(\tau) + \sum_i J(t-\tau_i) [[\sigma]]_i \quad (1.14)$$

En procédant à une intégration par partie de la relation (1.14), on obtient :

$$\varepsilon(t) = J(0)\sigma(t) + \int_{-\infty}^t \frac{\partial J(t-\tau)}{\partial t} \sigma(\tau) d\tau \quad (1.15)$$

puisque pour  $t \rightarrow -\infty$  on a  $\sigma(t) = 0$ . Dans la relation (1.15), le terme  $J(0)\sigma(t)$  est la réponse instantanée au temps  $t$  due à la contrainte  $\sigma(t)$  appliquée au même instant  $t$ . Par ailleurs, le terme  $\frac{\partial J(t-\tau)}{\partial t}\sigma(\tau)$  correspond à la réponse, observée à l'instant  $t$ , due à l'impulsion  $\sigma(\tau)$  appliquée à l'instant  $\tau$  antérieur. Ainsi,  $\frac{\partial J(t-\tau)}{\partial t}$  traduit la mémoire du matériau.

Par ailleurs, on introduit la dérivée  $\dot{J}(t-\tau)$ , au sens des distributions, de la fonction  $J(t-\tau)$  :

$$\dot{J}(t-\tau) = \frac{\partial J(t-\tau)}{\partial t} + J(0)\delta(t-\tau) \quad (1.16)$$

où  $\delta$  est la fonction Dirac.

En substituant la relation (1.16) dans la relation (1.15) et en étendant le domaine d'intégration à  $\tau \in ]-\infty, +\infty[$ , du fait que  $J(t-\tau) = 0$  si  $\tau > t$ , on obtient la convolution de Stieltjes [23] :

$$\varepsilon(t) = \dot{J} \otimes \sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{J}(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \quad (1.17)$$

avec  $\otimes$  étant le symbole de l'opérateur permettant de construire la correspondance fonctionnelle pour  $\mathcal{F}$ , entre l'histoire de contrainte et la déformation induite.

De façon similaire, pour un chemin quelconque de déformation imposée :

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t H(t-\tau)d\varepsilon(\tau) + \sum_i H(t-\tau_i)[[\varepsilon]]_i \quad (1.18)$$

on construit la correspondance fonctionnelle, permettant d'obtenir la réponse en contrainte, telle que :

$$\sigma(t) = \dot{R} \otimes \varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{R}(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau \quad (1.19)$$

Cette correspondance (Eq. 1.19) s'exprime avec le même opérateur intégrale que pour  $J$ , mais avec la fonction  $R$  dans le cas de la fonctionnelle  $\mathcal{G}$ .

#### 1.2.4 Principe de correspondance

La transformée de Laplace-Carson permet de transformer le comportement viscoélastique linéaire non-vieillissant en un comportement pseudo-élastique [49, 74, 23, 96]. En effet, la transformée de Laplace consiste à transformer une fonction  $F(t)$ , continue par morceau pour  $t \in [0, +\infty[$  et au plus d'ordre exponentiel lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , en une fonction  $\hat{F}(s)$  telle que :

$$\hat{F}(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}F(t)dt \quad (1.20)$$

L'application de cette transformée à la convolution de Stieltjes (Eqs. 1.17-1.19) donne

$$\hat{\varepsilon}(s) = \mathcal{L}\{\varepsilon(s)\} = \mathcal{L}\{\dot{J} \otimes \sigma\} = \mathcal{L}\{\dot{J}\}\mathcal{L}\{\sigma\} = s\hat{J}(s)\hat{\sigma}(s) \quad (1.21)$$

$$\hat{\sigma}(s) = \mathcal{L}\{\sigma(s)\} = \mathcal{L}\{\dot{R} \otimes \varepsilon\} = \mathcal{L}\{\dot{R}\}\mathcal{L}\{\varepsilon\} = s\hat{R}(s)\hat{\varepsilon}(s) \quad (1.22)$$

L'introduction de la transformée de Laplace-Carson, définie par

$$\tilde{J}(s) = \mathcal{C}\{J(t)\} = s\mathcal{L}\{J(t)\}$$

conduit à l'écriture des relations (1.21-1.22) sous la forme suivante

$$\tilde{\varepsilon}(s) = \mathcal{C}\{\dot{J} \otimes \sigma\} = \tilde{J}(s)\tilde{\sigma}(s) \quad (1.23)$$

$$\tilde{\sigma}(s) = \mathcal{C}\{\dot{R} \otimes \varepsilon\} = \tilde{R}(s)\tilde{\varepsilon}(s) \quad (1.24)$$

En effet, les relations (1.23-1.24) signifient que pour une sollicitation quelconque, la transformée de la réponse à cette sollicitation est le produit algébrique de la transformée de la sollicitation et de la transformée de la fonction retard ou relaxation, selon le cas. Ces équations ont alors la même forme que la loi de Hooke en élasticité linéaire. On parle alors de comportement pseudo-élastique où  $\tilde{R}(s)$  joue le rôle de module d'élasticité et  $\tilde{J}(s)$  celui de son inverse :

$$\tilde{J}(s)\tilde{R}(s) = 1 \quad (1.25)$$

Ces résultats (Eqs. 1.23-1.24) présentent une importance fondamentale dans la résolution des problèmes viscoélastiques linéaires non vieillissants. En effet, on montrera, dans ce qui suit, que résoudre un problème viscoélastique revient à résoudre un problème d'élasticité dans l'espace transformé. Il s'agira par la suite de procéder à la transformation inverse, pour construire la solution dans l'espace temporel.

### 1.3 Comportement tridimensionnel

On s'intéresse ici à la généralisation du comportement viscoélastique linéaire non-vieillissant au cas tridimensionnel. Pour cela on considère que le comportement est isotrope. Il est obtenu par la généralisation du comportement élastique linéaire donné par la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} \quad (1.26)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.27)$$

où  $E$  et  $\nu$  sont respectivement les modules d'Young et le coefficient de Poisson et  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé. Ainsi le comportement viscoélastique est donné par :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [(1 + \nu) J] \otimes \boldsymbol{\sigma} - (\nu J) \otimes \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} \quad (1.28)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \otimes \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \otimes \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} \quad (1.29)$$

où  $\nu(t)$  est le coefficient de Poisson viscoélastique sécant, en général dépendant du temps,  $J(t)$  est la fonction de retard uniaxiale,  $\mu(t)$  est la fonction de relaxation en cisaillement et  $\lambda(t)$  est la fonction de relaxation donnée par  $3\kappa(t) = 3\lambda(t) + 2\mu(t)$  où  $\kappa(t)$  est la fonction de relaxation sphérique.

De façon similaire au cas unidimensionnel, on peut établir les propriétés suivantes, dans l'espace transformé, entre les différents paramètres viscoélastiques (Annexe A) :

$$\mathcal{C} \{[(1 + \nu)J]\} 2\tilde{\mu}(s) = 1 \quad (1.30)$$

$$\mathcal{C} \{[(1 - 2\nu)J]\} 3\tilde{\kappa}(s) = 1 \quad (1.31)$$

$$\tilde{J}(s) \tilde{R}(s) = 1 \quad (1.32)$$

$$\mathcal{C} \{\nu J\} \tilde{R}(s) = \tilde{\nu}(s) \quad (1.33)$$

ce qui permet de construire la pseudo loi de Hooke dans le cas tridimensionnel [96] :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(s) = 2\tilde{\mu}(s) \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s) + \tilde{\lambda}(s) \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s)) \mathbf{1} \quad (1.34)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s) = \frac{1 + \tilde{\nu}(s)}{\tilde{E}(s)} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(s) - \frac{\tilde{\nu}(s)}{\tilde{E}(s)} \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(s)) \mathbf{1} \quad (1.35)$$

avec :

$$\tilde{\mu}(s) = \frac{\tilde{E}(s)}{2(1 + \tilde{\nu}(s))} \quad (1.36)$$

$$3\tilde{\kappa}(s) = 3\tilde{\lambda}(s) + 2\tilde{\mu}(s) = \frac{\tilde{E}(s)}{1 - 2\tilde{\nu}(s)} \quad (1.37)$$

où  $\bar{\nu}$  est le coefficient de Poisson obtenu lors d'un essai uniaxial de relaxation (Annexe A).



# Chapitre 2 Homogénéisation élastique et viscoélastique

## 2.1 Introduction

Dans un milieu continu, les champs de contrainte et de déformation, à l'échelle macroscopique, s'interprètent comme des moyennes sur un volume élémentaire représentatif (V.E.R) des champs de contrainte et de déformation à l'échelle microscopique. Ce changement d'échelle permet alors de construire la loi de comportement macroscopique homogénéisée à partir de la connaissance du comportement microscopique et de la microstructure.

Dans cette partie, on présente les résultats classiques des techniques d'homogénéisation [48, 26, 112]. Pour chaque approche, on rappelle ses hypothèses et on donne les relations permettant de calculer les propriétés homogénéisées du matériau. Par ailleurs, on aborde également les approches variationnelles permettant de construire des bornes pour les propriétés homogénéisées.

## 2.2 Moyennes spatiales

On se donne un domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega = S_u \cup S_T$  avec  $S_u \cap S_T = \emptyset$ . La partie  $S_u$  est celle de la frontière où le champ de déplacement  $\underline{u}^d$  est imposé et  $S_T$  est la partie complémentaire où les forces de surface  $\underline{T}^d$  sont connues. Il est à noter que les forces de volume ne sont pas considérées ici.

★ Soit  $\boldsymbol{\sigma}$  un champ de contrainte équilibré ( $div \boldsymbol{\sigma} = \underline{0}$ ). On peut montrer que sa moyenne spatiale dans  $\Omega$  est :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \underline{x} \otimes^s (\boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n}) \, dS \quad (2.1)$$

★ De la même façon, soit  $\boldsymbol{\varepsilon}$  un champ de déformation compatible. Sa moyenne spatiale dans  $\Omega$  est :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \underline{u} \otimes^s \underline{n} \, dS \quad (2.2)$$

où  $\underline{u}$  est le champ de déplacement,  $\underline{n}$  est la normale unitaire sortante à la frontière  $\partial\Omega$  et  $\otimes^s$  est le produit tensoriel symétrique.

Les relations (2.1-2.2) montrent que la moyenne spatiale, sur un domaine régulier, de tout champ de contrainte en équilibre avec des forces de volume nulles et de tout champ de déformation compatible dépende uniquement des valeurs du vecteur contrainte et du vecteur de déplacement sur la frontière du domaine, respectivement.

### 2.2.1 Conditions aux limites homogènes en contrainte et en déformation

Dans le cas où l'on impose un état de contrainte uniforme  $\underline{T}^d = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \underline{n}$  sur la frontière du domaine  $\partial\Omega$ , la moyenne du champ de contrainte, vérifiant à la fois cette condition au contour et l'équilibre dans le domaine  $\Omega$ , est alors donnée par :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \underline{x} \otimes^s (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \underline{n}) \, ds = \boldsymbol{\Sigma} : \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \underline{x} \otimes^s \underline{n} \, ds = \boldsymbol{\Sigma} \quad (2.3)$$

De façon similaire, en imposant un champ de déplacement affine  $\underline{u} = \mathbf{E} \cdot \underline{x}$  sur le contour du domaine, la moyenne spatiale de la déformation, dérivant d'un champ de déplacement qui vérifie la condition

limites homogènes ci-dessus, devient :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{E} \cdot \underline{x}) \otimes^s \underline{n} ds = \mathbf{E} : \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \underline{x} \otimes^s \underline{n} ds = \mathbf{E} \quad (2.4)$$

### 2.2.2 Lemme de Hill-Mandel

Soient  $\boldsymbol{\sigma}(\underline{x})$  un champ de contrainte équilibré ( $div \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  dans  $\Omega$ ) et  $\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x})$  un champ de déformation compatible ( $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u})$ ). Si ces deux champs, non nécessairement associés, vérifient la condition de contrainte homogène au contour ou de déformation homogène au contour, respectivement, alors on a :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (2.5)$$

où  $\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$  est la moyenne du travail des efforts internes microscopiques donnée par :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \underline{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} ds \quad (2.6)$$

## 2.3 Comportement élastique homogénéisé

### 2.3.1 Approche directe

On considère un domaine  $\Omega$  correspondant à un V.E.R d'un matériau hétérogène dont les propriétés élastiques et leurs distributions sont connues. Il est soumis soit aux conditions :

$$\underline{T}^d(\underline{x}) = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \underline{n} \quad (2.7)$$

soit aux conditions :

$$\underline{u}^d(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x} \quad (2.8)$$

sur sa frontière  $\partial\Omega$ .

Pour déterminer les propriétés élastiques homogénéisées, il est nécessaire de connaître les champs de contrainte et de déformation microscopiques dans le V.E.R. Pour cela, il faut résoudre un problème d'élasticité linéaire avec les conditions aux limites (Eq. 2.7) et (Eq. 2.8). La linéarité du problème permet de relier la contrainte et la déformation en chaque point  $\underline{x}$  du V.E.R à la contrainte et à la déformation macroscopiques, respectivement, par les relations linéaires suivantes [112] :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{M}(\underline{x}) : \boldsymbol{\Sigma} \quad (2.9)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbb{L}(\underline{x}) : \mathbf{E} \quad (2.10)$$

où  $\mathbb{M}(\underline{x})$  et  $\mathbb{L}(\underline{x})$  sont des tenseurs d'ordre quatre, appelés respectivement tenseurs de localisation des contraintes et tenseur de localisation des déformations. Ils dépendent du point  $\underline{x}$  et de tout un ensemble de paramètres caractéristiques de la géométrie et des propriétés mécaniques du milieu. Ils possèdent les propriétés de symétrie mineures et leurs moyennes dans tout domaine (V.E.R) sont, du fait des relations (2.3-2.4) données par :

$$\langle \mathbb{M} \rangle = \mathbb{I} \quad (2.11)$$

$$\langle \mathbb{L} \rangle = \mathbb{I} \quad (2.12)$$

Par ailleurs la loi de comportement à l'échelle microscopique permet d'écrire :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbb{S}(\underline{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{S}(\underline{x}) : \mathbb{M}(\underline{x}) : \boldsymbol{\Sigma} \quad (2.13)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{L}(\underline{x}) : \mathbf{E} \quad (2.14)$$

où  $\mathbb{S}(\underline{x})$  et  $\mathbb{C}(\underline{x})$  sont respectivement les tenseurs d'ordre quatre de souplesse et de rigidité microscopiques. Les tenseurs de souplesse  $\mathbb{S}_\sigma^{ef}$  et de rigidité  $\mathbb{C}_\varepsilon^{ef}$  homogénéisés peuvent alors être déterminés en calculant la moyenne de la déformation et de la contrainte microscopique :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle = \mathbf{E} = \mathbb{S}_\sigma^{ef} : \boldsymbol{\Sigma} \quad (2.15)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) \rangle = \boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}_\varepsilon^{ef} : \mathbf{E} \quad (2.16)$$

ce qui donne la loi de comportement macroscopique avec :

$$\mathbb{S}_\sigma^{ef} = \langle \mathbb{S}(\underline{x}) : \mathbb{M}(\underline{x}) \rangle \quad (2.17)$$

$$\mathbb{C}_\varepsilon^{ef} = \langle \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{L}(\underline{x}) \rangle \quad (2.18)$$

Ainsi, la connaissance des propriétés homogénéisées revient à déterminer les seuls tenseurs de localisation pour le V.E.R considéré. Les indice  $(\cdot)_\sigma$  et  $(\cdot)_\varepsilon$  indiquent que les tenseurs  $\mathbb{S}_\sigma^{ef}$  et  $\mathbb{C}_\varepsilon^{ef}$  sont obtenus respectivement à partir des conditions au contour en contrainte et en déplacement.

### 2.3.2 Approche énergétique

On peut également définir les tenseurs d'élasticité homogénéisés en égalisant les densités des potentiels élastiques macroscopiques à la moyenne des densités des potentiels microscopiques associés, obtenus avec des conditions homogènes au contour :

$$\frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \bar{\mathbb{S}}_\sigma^{ef} : \boldsymbol{\Sigma} \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \bar{\mathbb{C}}_\varepsilon^{ef} : \mathbf{E} \quad (2.20)$$

avec :

$$\bar{\mathbb{S}}_\sigma^{ef} = \langle \mathbb{M}^T : \mathbb{S} : \mathbb{M} \rangle \quad (2.21)$$

$$\bar{\mathbb{C}}_\varepsilon^{ef} = \langle \mathbb{L}^T : \mathbb{C} : \mathbb{L} \rangle \quad (2.22)$$

Les égalités (Eq. 2.19) et (Eq. 2.20) sont rendues possibles du fait de l'additivité des potentiels élastiques qui gardent ainsi leur signification par changement d'échelle.

Par ailleurs, on montre, à partir du Lemme de Hill-Mandel [112], que :

$$\langle \mathbb{M}^T : \mathbb{S} : \mathbb{M} \rangle = \langle \mathbb{S} : \mathbb{M} \rangle \quad (2.23)$$

$$\langle \mathbb{L}^T : \mathbb{C} : \mathbb{L} \rangle = \langle \mathbb{C} : \mathbb{L} \rangle \quad (2.24)$$

et donc les tenseurs d'élasticité homogénéisés par la méthode énergétique sont identiques à ceux obtenus par la méthode directe :

$$\bar{\mathbb{S}}_\sigma^{ef} = \mathbb{S}_\sigma^{ef} \quad (2.25)$$

$$\bar{\mathbb{C}}_\varepsilon^{ef} = \mathbb{C}_\varepsilon^{ef} \quad (2.26)$$

### 2.3.3 Propriétés des tenseurs d'élasticité homogénéisés

Même si les problèmes de localisation peuvent être exactement résolus, la détermination du comportement homogénéisé dépend du type considéré de conditions au contour du V.E.R. Ainsi, les tenseurs  $\mathbb{S}_\sigma^{ef}$ , établi en contraintes homogènes au contour, et  $\mathbb{C}_\varepsilon^{ef}$ , établi en déformations homogènes au contour, ne sont pas rigoureusement inverses l'un de l'autre. Cependant, Hill et Mandel [112] ont montré que :

$$\mathbb{S}_\sigma^{ef} : \mathbb{C}_\varepsilon^{ef} = \mathbb{I} + o(d^3/l^3)$$

où  $d$  est la taille caractéristique des microhétérogénéités prises en compte et  $l$  celle du V.E.R.

Dans ce qui est suit, on considère que la condition  $d \ll l$  est vérifiée, ce qui permet de ne plus distinguer la nature de la condition au contour. On utilisera ainsi  $\mathbb{C}^{ef}$  et  $\mathbb{S}^{ef}$  tel que :

$$\mathbb{S}^{ef} = (\mathbb{C}^{ef})^{-1}$$

### 2.3.4 Moyenne par phase

Dans le cas d'un matériau composite constitué de phases dont les propriétés sont constantes dans les domaines  $\Omega_r$  de chaque phase, les tenseurs d'élasticité homogénéisés sont donnés par :

$$\mathbb{S}^{ef} = \sum_r f_r \mathbb{S}_r : \langle \mathbb{M}(\underline{x}) \rangle_r \quad (2.27)$$

$$\mathbb{C}^{ef} = \sum_r f_r \mathbb{C}_r : \langle \mathbb{L}(\underline{x}) \rangle_r \quad (2.28)$$

où  $f_r = \frac{|\Omega|_r}{|\Omega|}$  est la fraction volumique de la phase  $r$ ,  $\langle \mathbb{M}(\underline{x}) \rangle_r$  et  $\langle \mathbb{L}(\underline{x}) \rangle_r$  sont les moyennes, par phase, des tenseurs de localisation de contrainte et de déformation, respectivement :

$$\langle \mathbb{M}(\underline{x}) \rangle_r = \frac{1}{|\Omega_r|} \int_{\Omega_r} \mathbb{M}(\underline{x}) d\Omega \quad (2.29)$$

$$\langle \mathbb{L}(\underline{x}) \rangle_r = \frac{1}{|\Omega_r|} \int_{\Omega_r} \mathbb{L}(\underline{x}) d\Omega \quad (2.30)$$

permettant de relier la moyenne, par phase, de la contrainte et de la déformation à celles imposées au contour :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_r = \langle \mathbb{M}(\underline{x}) \rangle_r : \boldsymbol{\Sigma} \quad (2.31)$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_r = \langle \mathbb{L}(\underline{x}) \rangle_r : \mathbf{E} \quad (2.32)$$

Il est à noter que les propriétés (Eq. 2.11) et (Eq. 2.12) des tenseurs de localisation deviennent dans ce cas :

$$\langle \mathbb{M}(\underline{x}) \rangle = \sum_r f_r \langle \mathbb{M}(\underline{x}) \rangle_r = \mathbb{I} \quad (2.33)$$

$$\langle \mathbb{L}(\underline{x}) \rangle = \sum_r f_r \langle \mathbb{L}(\underline{x}) \rangle_r = \mathbb{I} \quad (2.34)$$

## 2.4 Schémas d'homogénéisation

### 2.4.1 Approches basées sur l'estimation par phase

On s'intéresse dans ce qui suit aux matériaux satisfaisant la condition d'homogénéité par phase permettant de calculer  $\mathbb{S}^{ef}$  et  $\mathbb{C}^{ef}$  à partir des relations (Eq. 2.27) et (Eq. 2.28). Dans ce cas, les schémas d'homogénéisation permettent de construire des estimations des moyennes des tenseurs de localisation par phase :

$$\langle \mathbb{M}(\underline{x}) \rangle_r \simeq \mathbb{M}_r^{est} \quad (2.35)$$

$$\langle \mathbb{L}(\underline{x}) \rangle_r \simeq \mathbb{L}_r^{est} \quad (2.36)$$

Ces schémas consistent à ramener le problème d'hétérogénéité à un problème d'inclusion noyée dans un milieu de référence de propriétés élastiques  $(\mathbb{C}^0, \mathbb{S}^0)$  [112]. L'estimation des moyennes des tenseurs de localisation par phase revient alors à calculer ces moyennes dans l'inclusion. Ces schémas diffèrent donc par la façon dont le modèle inclusionnaire équivalent est construit : choix du milieu de référence et des conditions aux limites équivalentes.

Ainsi, le calcul des moyennes des tenseurs de localisation nécessite de résoudre un problème d'élasticité, dans le milieu inclusionnaire équivalent, pour déterminer le champ de déformation et de contrainte dans les inclusions, avec des conditions données au contour du milieu de référence.

Par ailleurs, résoudre un tel problème d'élasticité (milieu inclusionnaire) revient à résoudre un problème d'élasticité en considérant que le milieu est homogène (milieu de référence seul) et est soumis à un champ de la polarisation  $\mathbf{p}$  agissant dans la partie du domaine  $\Omega_i$  correspondant à l'inclusion (Fig. 2.1). Le champ de polarisation équivalent à l'effet de l'inclusion est donné par [112] :

$$\mathbf{p} = (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.37)$$

où  $\mathbb{C}^i$  est le tenseur de rigidité élastique de l'inclusion,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est le champ de déformation recherché. Ainsi le champ de polarisation est généré par le contraste entre les propriétés élastiques de l'inclusion et celles du milieu de référence dans lequel elle est noyée.

La résolution de ce problème, appelé problème d'inclusion d'Eshelby, permet donc d'estimer les moyennes des tenseurs de localisation pour chaque phase correspondant à l'inclusion en calculant les moyennes de la déformation et de la contrainte dans celles-ci. Cette approche est à la base des schémas d'Eshelby dilué, de Mori-Tanaka, autocohérent classique et de double inclusion.

#### 2.4.1.1 Problème d'inclusion d'Eshelby

On considère une inclusion de domaine  $\Omega_i$ , de rigidité  $\mathbb{C}^i$ , noyée dans un milieu de référence de domaine  $\Omega$ , de frontière  $\partial\Omega$  et de rigidité  $\mathbb{C}^0$ . Il s'agit de déterminer le champ de déformation dans  $\Omega$  lorsque sa frontière est soumise à une condition de déformation homogène  $\mathbf{E}^0$ . Ce problème revient à résoudre le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Omega \\ \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}^d = \mathbf{E}^0 \cdot \underline{\mathbf{x}} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\text{grad}(\underline{\mathbf{u}}) + \text{grad}^T(\underline{\mathbf{u}})) \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{\mathbf{x}}) = \mathbb{C}(\underline{\mathbf{x}}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\mathbf{x}}) \end{array} \right. \quad (2.38)$$

Il est montré [112] que la résolution de ce problème revient à résoudre un problème équivalent correspondant à  $\Omega$  rendu homogène, de même rigidité que le milieu de référence et soumis à un champ de précontrainte (champ de polarisation) agissant sur  $\Omega_i$  et donné par la relation (2.37). Le système d'équations à résoudre devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}) + \text{div}(\delta\mathbb{C}(\underline{\mathbf{x}}) : \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Omega \\ \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}^d = \mathbf{E}^0 \cdot \underline{\mathbf{x}} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\text{grad}(\underline{\mathbf{u}}) + \text{grad}^T(\underline{\mathbf{u}})) \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{\mathbf{x}}) = \mathbb{C}(\underline{\mathbf{x}}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\mathbf{x}}) \end{array} \right. \quad (2.39)$$

où  $\delta\mathbb{C}(\underline{\mathbf{x}}) = \mathbb{C}(\underline{\mathbf{x}}) - \mathbb{C}^0(\underline{\mathbf{x}})$ .

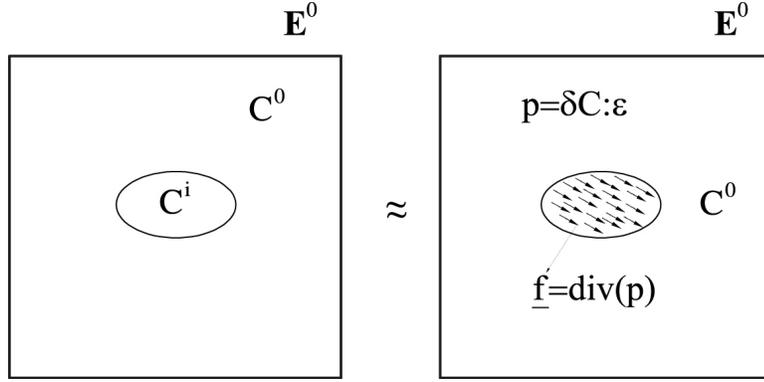


FIG. 2.1 Problème d'inclusion d'Eshelby

En introduisant l'opérateur de Green  $\tilde{\Gamma}^0$ , la solution  $\varepsilon(\underline{x})$  du problème (Eq. 2.39) est alors donnée par (§ B.2.1) :

$$\varepsilon(\underline{x}) + \tilde{\Gamma}^0 \star (\delta\mathbb{C} : \varepsilon) = \mathbf{E}^0 \quad (2.40)$$

où  $\star$  est le symbol de la convolution.

La taille finie de l'inclusion permet de considérer que celle-ci est noyée dans un milieu infini. L'opérateur de Green, dans  $\Omega$ , peut alors être remplacé par celui d'un milieu infini. Le champ de polarisation étant limité à  $\Omega_i$  alors  $\langle \delta\mathbb{C} : \varepsilon \rangle = \mathbf{0}$ . La relation (2.40) devient :

$$\varepsilon + \tilde{\Gamma}_\infty^0 \star (\delta\mathbb{C} : \varepsilon) = \mathbf{E}^0 \quad (2.41)$$

qui peut être explicitée tel que [112] :

$$\varepsilon(\underline{x}) + \mathbb{B}^0 : \delta\mathbb{C}(\underline{x}) : \varepsilon(\underline{x}) + V.P. \int_{\Omega_i} \mathbb{F}_\infty^0(\underline{x}, \underline{x}') : \delta\mathbb{C}(\underline{x}') : \varepsilon(\underline{x}') d\Omega' = \mathbf{E}^0 \quad (2.42)$$

où les tenseurs d'ordre quatre  $\mathbb{B}^0$  et  $\mathbb{F}_\infty^0$  sont donnés par les équations (B.20) et (B.18), respectivement.

En général, il est difficile de résoudre cette équation intégrale dans le cas d'une inclusion de forme quelconque car la valeur principale (V.P) de l'intégrale (B.19) ne peut être calculée analytiquement. Cependant, dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale la valeur principale de l'intégrale de l'opérateur de Green est constante [112]  $\forall \underline{x} \in \Omega_i$ , ce qui permet de construire une solution à partir de :

$$\varepsilon(\underline{x}) + \mathbb{P}^0 : \delta\mathbb{C} : \varepsilon(\underline{x}) = \mathbf{E}^0 \quad (2.43)$$

avec  $\mathbb{P}^0$  étant le tenseur de Hill donné par (§ B.1.3) :

$$\mathbb{P}^0 = \mathbb{B}^0 + V.P. \int_{\Omega_i} \mathbb{F}_\infty^0(\underline{x}, \underline{x}') d\Omega' \quad (2.44)$$

Dans (Eq. 2.44), l'intégrale ne peut être évaluée analytiquement que dans le cas d'un ellipsoïde de révolution [37].

Le problème étant bien posé, la solution ainsi obtenue est la solution du problème. Elle montre notamment que le champ de déformation est constant dans une inclusion ellipsoïdale.

La solution se simplifie d'avantage dans le cas d'une inclusion sphérique, pour laquelle la valeur principale de l'opérateur de Green est nulle. Dans ce cas, le champ de déformation dans l'inclusion est constant et est donné par :

$$\varepsilon^i(\underline{x}) = \langle \varepsilon^i \rangle = (\mathbb{I} + \mathbb{P}^0 : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0))^{-1} : \mathbf{E}^0 \quad (2.45)$$

avec :

$$\mathbb{P}^0 = \mathbb{B}^0 \quad (2.46)$$

Dans le cas d'un comportement isotrope, le tenseur  $\mathbb{B}^0$  est donné par :

$$\mathbb{B}^0 = \frac{\alpha^0}{3\kappa^0} \mathbb{I}_{sph} + \frac{\beta^0}{2\mu^0} \mathbb{I}_{dev} \quad (2.47)$$

où  $\kappa^0$  et  $\mu^0$  sont les modules de compressibilité et de cisaillement, respectivement, et les coefficients  $\alpha^0$  et  $\beta^0$  sont donnés par :

$$\alpha^0 = \frac{3\kappa^0}{3\kappa^0 + 4\mu^0} \quad (2.48)$$

$$\beta^0 = \frac{6}{5} \frac{\kappa^0 + 2\mu^0}{3\kappa^0 + 4\mu^0} \quad (2.49)$$

#### 2.4.1.2 Schéma dilué d'Eshelby

On considère un matériau constitué de  $n_i$  familles d'inclusions, de rigidités  $\mathbb{C}^i$ , dispersées dans une matrice de rigidité  $\mathbb{C}^m$  (Fig. 2.2). Si la fraction volumique de chaque phase inclusionnaire est suffisamment faible soit  $\sum_{i=1}^{n_i} f_i = 1 - f_0 \ll 1$ , typiquement inférieure à 3% [24], alors on peut considérer que la matrice est la phase dominante connectée et qu'il n'y a pas d'interactions entre les inclusions.

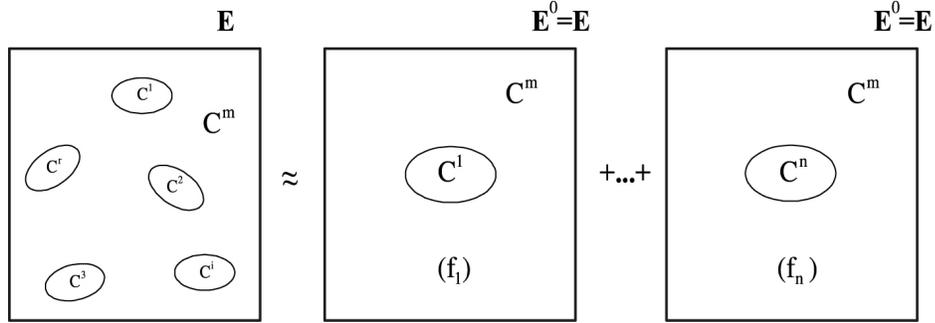


FIG. 2.2 Schéma d'estimation dilué

Ainsi, l'estimation du tenseur de localisation pour chaque famille  $r$  d'inclusions se fait en considérant que celles-ci sont noyées dans un milieu de référence identifié à la matrice ( $\mathbb{C}^0 = \mathbb{C}^m$ ) et dans le cas de l'approche en déformation soumis à la même condition au contour  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0$ . L'estimation pour le milieu initial s'obtient en superposant les estimations obtenues pour chaque famille seule.

Le champ de déformation dans chaque famille d'inclusions, obtenu à partir de la résolution du problème d'Eshelby (Eq. 2.45), est constant et est donné par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r^{est}(\underline{x}) = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{est} \rangle_r = (\mathbb{I} + \mathbb{P}^m : (\mathbb{C}^r - \mathbb{C}^m))^{-1} : \mathbf{E} \quad (2.50)$$

On en déduit le tenseur de localisation de la déformation :

$$\mathbb{L}_r^{est} = (\mathbb{I} + \mathbb{P}^m : (\mathbb{C}^r - \mathbb{C}^m))^{-1} \quad (2.51)$$

où  $\mathbb{P}^m$  est le tenseur de Hill de la matrice donné par les relations (2.46-2.49).

Le tenseur de rigidité homogénéisé s'obtient à partir de la relation d'estimation par phase (Eq. 2.28) :

$$\mathbb{C}^{ef} = \mathbb{C}^m + \sum_r^{n_i} f^r (\mathbb{C}^r - \mathbb{C}^m) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_r^m : (\mathbb{C}_r - \mathbb{C}^m)]^{-1} \quad (2.52)$$

ce qui permet de déterminer les modules de compressibilité et de cisaillement homogénéisés (§ C.1) :

$$\mu^{ef} = \mu_m + \sum_r^{n_i} f_r (\mu_r - \mu_m) \left( 1 + \frac{\beta_m (\mu_r - \mu_m)}{\mu_m} \right)^{-1} \quad (2.53)$$

$$\kappa^{ef} = \kappa_m + \sum_r^{n_i} f_r (\kappa_r - \kappa_m) \left( 1 + \frac{\alpha_m (\kappa_r - \kappa_m)}{\kappa_m} \right)^{-1} \quad (2.54)$$

### 2.4.1.3 Famille d'estimations

Si la fraction volumique de chaque phase inclusionnaire est importante (Fig. 2.3) ou si aucune phase n'est dominante (Fig. 2.4), l'estimation des propriétés homogénéisées peut également se ramener au problème d'inclusion d'Eshelby.

Cependant l'interaction entre les phases doit être prise en compte. Pour cela, on considère que chaque famille d'inclusions, correspondant à une phase, est noyée dans un milieu de référence de rigidité  $\mathbf{C}^0$  à déterminer. En outre, on considère que la condition aux limites  $\mathbf{E}^0$  pour chaque problème élémentaire diffère de la condition  $\mathbf{E}$  du problème initial. Néanmoins, la même condition  $\mathbf{E}^0$  est adoptée pour l'ensemble des familles d'inclusions.

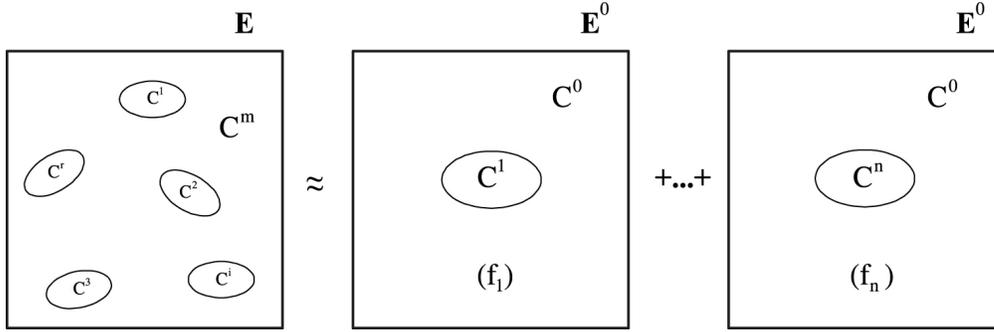


FIG. 2.3 Schéma d'estimation de famille

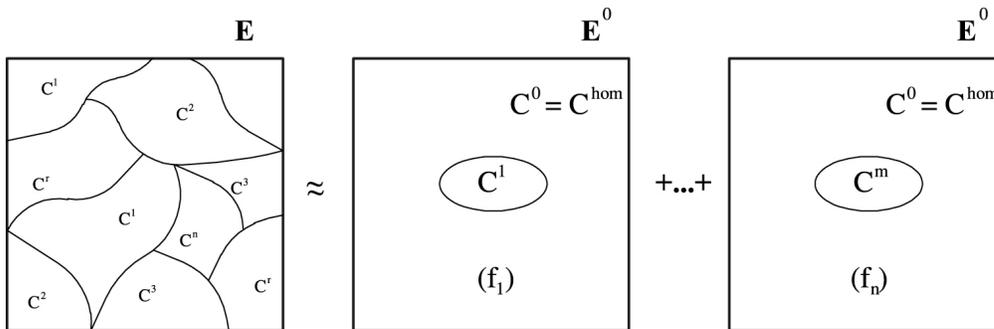


FIG. 2.4 Schéma d'estimation autocohérente classique

Pour chaque problème élémentaire, correspondant à une famille d'inclusions  $r$  noyée dans le milieu de référence soumise à la condition au contour  $\mathbf{E}^0$ , la moyenne du champ de déformation est donnée par :

$$\langle \varepsilon \rangle_r^{est} = (\mathbb{I} + \mathbb{P}^0 : (\mathbf{C}_r - \mathbf{C}^0))^{-1} : \mathbf{E}^0 \quad (2.55)$$

On peut alors établir une relation entre  $\mathbf{E}^0$  et  $\mathbf{E}$  en calculant la moyenne du champ de déformation du

problème initial :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{est} = \sum_r f_r \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_r^{est} = \left\langle (\mathbb{I} + \mathbb{P}^0 : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^0))^{-1} \right\rangle : \mathbf{E}^0 = \mathbf{E} \quad (2.56)$$

ce qui permet de déduire :

$$\mathbf{E}^0 = \left\langle (\mathbb{I} + \mathbb{P}^0 : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^0))^{-1} \right\rangle^{-1} : \mathbf{E} \quad (2.57)$$

Or, la moyenne de la déformation par phase est reliée à la déformation au contour par la moyenne du tenseur de localisation de la phase [112] :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_r^{est} = \mathbb{L}_r^{est} : \mathbf{E} \quad (2.58)$$

ce qui permet d'établir la valeur moyenne du tenseur de localisation pour la phase  $r$  :

$$\mathbb{L}_r^{est} = (\mathbb{I} + \mathbb{P}^0 : (\mathbb{C}_r - \mathbb{C}^0))^{-1} : \left\langle (\mathbb{I} + \mathbb{P}^0 : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^0))^{-1} \right\rangle^{-1} \quad (2.59)$$

A partir de la relation d'estimation par phase (Eq. 2.28), on obtient le tenseur d'élasticité du milieu homogénéisé :

$$\mathbb{C}^{ef} = \left\langle \mathbb{C} : (\mathbb{I} + \mathbb{P}^0 : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^0))^{-1} \right\rangle : \left\langle (\mathbb{I} + \mathbb{P}^0 : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^0))^{-1} \right\rangle^{-1} \quad (2.60)$$

ou bien :

$$\left\langle (\mathbb{C} - \mathbb{C}^{ef}) : (\mathbb{I} + \mathbb{P}^0 : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^0))^{-1} \right\rangle = 0 \quad (2.61)$$

ce qui donne les modules de compressibilité et de cisaillement homogénéisés tels que :

$$\begin{aligned} \mu^{ef} &= \left\langle \mu \left[ 1 + \frac{\beta^0(\mu - \mu^0)}{\mu^0} \right]^{-1} \right\rangle \left\langle \left[ 1 + \frac{\beta^0(\mu - \mu^0)}{\mu^0} \right]^{-1} \right\rangle^{-1} \\ \kappa^{ef} &= \left\langle \kappa \left[ 1 + \frac{\alpha^0(\kappa - \kappa^0)}{\kappa^0} \right]^{-1} \right\rangle \left\langle \left[ 1 + \frac{\alpha^0(\kappa - \kappa^0)}{\kappa^0} \right]^{-1} \right\rangle^{-1} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Deux configurations peuvent alors se présenter selon le milieu de référence considéré :

- Une phase est dominante et connectée jouant le rôle de matrice. Dans ce cas, le milieu de référence est identifié à la matrice. On obtient le schéma de Mori-Tanaka.
- Aucune phase n'est dominante. Dans ce cas, chaque phase est considérée comme noyée dans un milieu de référence identifié au milieu homogénéisé lui même. On obtient le schéma autocohérent classique. Ce schéma est adapté pour estimer le comportement homogénéisé des matériaux polycrystallins.

**Schéma de Mori-Tanaka** Dans ce cas, le milieu de référence est identifié à la matrice qui est la phase dominante, c'est-à-dire  $\mathbb{C}^0 = \mathbb{C}^m$ . Le tenseur de rigidité homogénéisé est alors donné par :

$$\mathbb{C}^{ef} = \left\langle \mathbb{C} : (\mathbb{I} + \mathbb{P}^m : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^m))^{-1} \right\rangle : \left\langle (\mathbb{I} + \mathbb{P}^m : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^m))^{-1} \right\rangle^{-1} \quad (2.63)$$

avec les modules de compressibilité et de cisaillement :

$$\mu^{ef} = \left\langle \mu \left[ 1 + \frac{\beta^m(\mu - \mu^m)}{\mu^m} \right]^{-1} \right\rangle \left\langle \left[ 1 + \frac{\beta^m(\mu - \mu^m)}{\mu^m} \right]^{-1} \right\rangle^{-1} \quad (2.64)$$

$$\kappa^{ef} = \left\langle \kappa \left[ 1 + \frac{\alpha^m(\kappa - \kappa^m)}{\kappa^m} \right]^{-1} \right\rangle \left\langle \left[ 1 + \frac{\alpha^m(\kappa - \kappa^m)}{\kappa^m} \right]^{-1} \right\rangle^{-1} \quad (2.65)$$

Ce schéma diffère du schéma dilué d'Eshelby par le fait que le problème élémentaire correspondant à chaque famille d'inclusion est résolu en modifiant la condition au contour. Ceci permet de prendre en compte partiellement l'interaction entre les inclusions et de rendre le schéma adapté pour les milieux fortement inclusionnaires. Il est à noter que ce schéma permet de retrouver le schéma dilué d'Eshelby lorsque l'on fait tendre vers zéro la fraction de chaque phase inclusionnaire. En effet, on montre que :

$$\lim_{f_r \rightarrow 0} \left\langle \left( \mathbb{I} + \mathbb{P}^0 : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^0) \right)^{-1} \right\rangle^{-1} = \mathbb{I} \quad (2.66)$$

ce qui d'après la relation (2.57) donne :

$$\mathbf{E}^0 = \mathbf{E} \quad (2.67)$$

**Schéma autocohérent classique** Dans ce cas, le milieu de référence est identifié au milieu homogénéisé recherché, c'est-à-dire  $\mathbb{C}^0 = \mathbb{C}^{ef}$ . Le tenseur de rigidité homogénéisé est alors donné par :

$$\mathbb{C}^{ef} = \left\langle \mathbb{C} : \left( \mathbb{I} + \mathbb{P}^{ef} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^{ef}) \right)^{-1} \right\rangle : \left\langle \left( \mathbb{I} + \mathbb{P}^{ef} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^{ef}) \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \quad (2.68)$$

Par ailleurs, on montre facilement que (§ C.2) :

$$\left\langle \left( \mathbb{I} + \mathbb{P}^{ef} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^{ef}) \right)^{-1} \right\rangle = \mathbb{I} \quad (2.69)$$

ce qui revient à :

$$\mathbf{E}^0 = \mathbf{E} \quad (2.70)$$

Ainsi, Ce schéma diffère de celui dilué d'Eshelby uniquement par le fait que le milieu de référence est identifié au milieu homogène recherché ( $\mathbb{C}^0 = \mathbb{C}^{ef}$ ), ce qui permet la prise en compte de l'interaction entre phases. La condition limite est la même ( $\mathbf{E}^0 = \mathbf{E}$ ). Le tenseur de rigidité homogénéisé se simplifie d'avantage :

$$\mathbb{C}^{ef} = \left\langle \mathbb{C} : \left( \mathbb{I} + \mathbb{P}^{ef} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^{ef}) \right)^{-1} \right\rangle \quad (2.71)$$

ce qui revient à résoudre un système de deux équations, chacune de degré  $2(n_p - 1)$  où  $n_p$  est le nombre de phases, pour déterminer les modules  $\mu^{ef}$  et  $\kappa^{ef}$  :

$$\begin{cases} \sum_{r=1}^{n_p} f_r \left[ 1 + \frac{\beta^{ef}(\mu_r - \mu^{ef})}{\mu^{ef}} \right]^{-1} = 1 \\ \sum_{r=1}^{n_p} f_r \left[ 1 + \frac{\alpha^{ef}(\kappa_r - \kappa^{ef})}{\kappa^{ef}} \right]^{-1} = 1 \end{cases} \quad (2.72)$$

Ces deux équations ne sont pas indépendantes car  $\beta^{ef}$  et  $\alpha^{ef}$  dépendent des modules homogénéisés. Il est à noter que dans le cas d'un matériau incompressible, les deux équations deviennent indépendantes. En effet, on peut montrer dans ce cas que  $\alpha^{ef} = 1$  et  $\beta^{ef} = 6/5$

#### 2.4.2 Approches basées sur le concept d'inclusion composite neutre

Cette approche consiste à construire deux représentations du matériau hétérogène permettant de déterminer ses propriétés homogénéisées en rendant ces deux représentations équivalentes.

La première représentation consiste à considérer le milieu comme homogène de rigidité  $\mathbb{C}^{ef}$  à déterminer. Dans ce cas, des conditions aux limites homogènes  $\Sigma$  ou  $\mathbf{E}$  donnent des champs de contrainte et de déformation homogène dans tout le milieu.

Si on isole un domaine  $\Omega_c$  à l'intérieur du milieu homogénéisé, il sera soumis à sa frontière  $\partial\Omega_c$  aux mêmes conditions  $\Sigma$  ou  $\mathbf{E}$  que celles imposées à la frontière du milieu.

La deuxième représentation consiste alors à considérer que le domaine  $\Omega_c$  est une inclusion composite, constituée de l'inclusion réelle et d'une couronne de matrice de sorte à conserver la même proportion volumique d'inclusions que dans le milieu hétérogène.

Les deux représentations sont alors équivalentes si pour la condition  $\Sigma$ , respectivement  $\mathbf{E}$ , les champs de déformation, respectivement, de contrainte sont identiques sur la frontière  $\partial\Omega_c$  dans les deux cas. L'inclusion composite est alors dite neutre. Ainsi, les propriétés homogénéisées peuvent être déterminées à partir des conditions au contour  $\partial\Omega_c$  :

$$\underline{u}(\mathbb{C}^{ef}) = \underline{u}(\mathbb{C}^i, \mathbb{C}^m) \quad (2.73)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{C}^{ef}) \cdot \underline{n} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbb{C}^i, \mathbb{C}^m) \cdot \underline{n} \quad (2.74)$$

où  $\underline{u}(\mathbb{C}^{ef})$  et  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{C}^{ef})$  sont les champs de déplacement et de contrainte dans le cas où le domaine  $\Omega_c$  est considéré comme homogénéisé,  $\underline{u}(\mathbb{C}^i, \mathbb{C}^m)$  et  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{C}^i, \mathbb{C}^m)$  sont les champs de déplacement et de contrainte dans le cas où le domaine  $\Omega_c$  est considéré comme composite et  $\underline{n}$  est la normale sortante à  $\partial\Omega_c$ .

Si les relations (2.73) et (2.74) ne peuvent pas être satisfaites alors l'inclusion composite n'est pas neutre. C'est le cas dans un problème où une condition homogène ( $\Sigma$  ou  $\mathbf{E}$ ) de cisaillement pur au contour  $\partial\Omega_c$  ne conduit pas à un champ solution homogène sur ce contour.

Cette condition de neutralité peut cependant être relaxée en requérant l'égalité de l'énergie de déformation  $\mathcal{W}(\mathbb{C}^{ef})$  de l'ensemble du milieu homogénéisé (de domaine  $\Omega$ ) et de celle  $\mathcal{W}(\mathbb{C}^{ef}, \mathbb{C}^i, \mathbb{C}^m)$  du même milieu dont une partie  $\Omega_c$  est remplacée par l'inclusion composite énergétiquement neutre. Les deux milieux étant soumis aux mêmes conditions homogènes au contour sur  $\partial\Omega$ . Or, ces deux énergies sont reliées par les relations suivantes [36] :

$$\mathcal{W}(\mathbb{C}^{ef}, \mathbb{C}^i, \mathbb{C}^m) = \mathcal{W}(\mathbb{C}^{ef}) - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_c} (\underline{T}^{ef} \cdot \underline{u} - \underline{T} \cdot \underline{u}^{ef}) dS \quad (2.75)$$

lorsque la condition au contour est en déplacement imposé, ou

$$\mathcal{W}(\mathbb{C}^{ef}, \mathbb{C}^i, \mathbb{C}^m) = \mathcal{W}(\mathbb{C}^{ef}) + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_c} (\underline{T}^{ef} \cdot \underline{u} - \underline{T} \cdot \underline{u}^{ef}) dS \quad (2.76)$$

lorsque la condition au contour est en force imposée.

La neutralité énergétique revient donc à annuler le terme donnant la fluctuation de l'énergie sur la frontière  $\partial\Omega_c$  :

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_c} (\underline{T}^{ef} \cdot \underline{u} - \underline{T} \cdot \underline{u}^{ef}) dS = 0 \quad (2.77)$$

où  $\underline{T}^{ef} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbb{C}^{ef}) \cdot \underline{n}$  et  $\underline{u}^{ef} = \underline{u}^{ef}(\mathbb{C}^{ef})$  sont la contrainte et le déplacement sur  $\partial\Omega_c$  dans le cas du milieu homogénéisé et  $\underline{T} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbb{C}^{ef}, \mathbb{C}^i, \mathbb{C}^m) \cdot \underline{n}$  et  $\underline{u} = \underline{u}(\mathbb{C}^{ef}, \mathbb{C}^i, \mathbb{C}^m)$  sont la contrainte et le déplacement sur  $\partial\Omega_c$  dans le cas où l'inclusion composite est noyée dans le milieu homogénéisé.

Cette dernière approche est à la base du modèle autocohérent développé par Christensen et Lo [26]. En effet, la relation (2.77) est la condition de cohérence qui permet de rendre les deux configurations équivalentes.

Par ailleurs, Hervé et al. [53] montre que la condition (Eq.2.77) équivaut à imposer que la déformation moyenne dans le domaine  $\Omega_c$  soit égale à la déformation au contour du milieu :

$$\frac{1}{\Omega_c} \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) d\Omega = \mathbf{E} \quad (2.78)$$

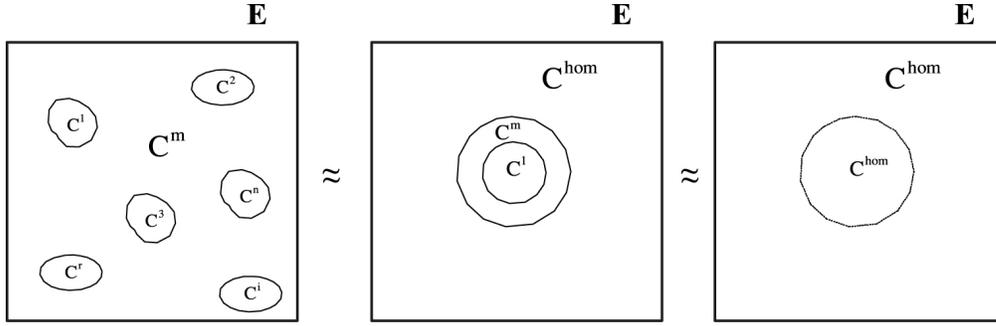


FIG. 2.5 Schéma autocohérent généralisé

### 2.4.2.1 Schéma basé sur le modèle des sphères composites

Dans ce schéma [48], le milieu équivalent est représenté par des sphères composites ayant les mêmes proportions volumiques d'inclusions et de matrice que le milieu hétérogène. Dans le cas d'un chargement isotrope :

$$\Sigma = p \mathbf{1} \quad \text{ou} \quad \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{1} \quad (2.79)$$

où  $p$  et  $\varepsilon$  sont la contrainte et la déformation imposées et  $\mathbf{1}$  est le tenseur unité d'ordre deux, ces sphères composites permettent de satisfaire les conditions de neutralité (Eq. 2.73) et (Eq. 2.74) ce qui permet de déterminer le module de compressibilité volumique :

$$\kappa^{ef} = \kappa_m + (\kappa_i - \kappa_m) \frac{f(4\mu_m + 3\kappa_m)}{4\mu_m + 3\kappa_i + 3f(\kappa_m - \kappa_i)} \quad (2.80)$$

### 2.4.2.2 Schéma autocohérent généralisé

Ce schéma est basé sur la neutralité énergétique de l'inclusion composite noyée dans le milieu homogénéisé dont il faut déterminer les propriétés élastiques. Cette approche permet notamment de déterminer le module de cisaillement homogénéisé qui ne peut l'être à partir de l'approche précédente du fait de la violation de la condition de consistence.

Ainsi, pour une condition homogène au contour de cisaillement pur :

$$\Sigma(\underline{x}) = \tau (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \quad \text{ou} \quad \mathbf{E}(\underline{x}) = \frac{\gamma}{2} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \quad (2.81)$$

imposée sur la frontière  $\partial\Omega$  du domaine, il s'agit de déterminer le champ de contrainte et de déplacement sur la frontière  $\partial\Omega_c$  selon que  $\Omega_c$  soit :

- d'une part constitué du milieu homogénéisé  $(\sigma(\mathbb{C}^{ef}), \underline{u}(\mathbb{C}^{ef}))$
- d'autre part constitué de l'inclusion composite  $(\sigma(\mathbb{C}^{ef}, \mathbb{C}^i, \mathbb{C}^m), \underline{u}(\mathbb{C}^{ef}, \mathbb{C}^i, \mathbb{C}^m))$ .

La connaissance de ces champs de contrainte et de déplacement et l'exploitation de la condition de cohérence (Eq. 2.77) permettent d'aboutir à l'équation quadratique suivante [26, 24, 53] :

$$A \left( \frac{\mu^{ef}}{\mu_m} \right)^2 + 2B \left( \frac{\mu^{ef}}{\mu_m} \right) + C = 0 \quad (2.82)$$

dont la racine positive donne le module de cisaillement homogénéisé. Les constants  $A, B, C$  dépendent des propriétés de la matrice et des phases inclusionnaires, ainsi que la fraction volumique de celles-ci (Annexe § D.1).

	constituant	fraction volumique	module d'Young (GPa)	coefficient de Poisson
1	C-S-H	0.471	25	0.24
2	CH	0.136	38	0.31
3	pores capillaires	0.178	0	0.00
4	clinker anhydre	0.010	130	0.30
5	AFm	0.102	22	0.30
6	fines <100 $\mu\text{m}$	0.060	65	0.25
7	fillers	0.043	60	0.30

TAB. 2.1 Fraction volumique et propriétés élastiques de la pâte de ciment

### 2.4.3 Comparaison des schémas d'estimation

On procède dans ce qui suit à une comparaison des modules homogénéisés obtenus avec les différents schémas présentés plus haut pour le matériau béton. Pour cela, on considère deux cas :

- Les granulats (sables+graviers) ( $E_i = 5 \times 10^4 [MPa]$ ) sont noyés dans la pâte cimentaire ( $E_m = 1.8 \times 10^4 [MPa]$ ) contenant les fines (Tab. 2.1) et jouant le rôle de matrice.
- Les granulats (graviers) ( $E_i = 5 \times 10^4 [MPa]$ ) sont noyés dans le mortier ( $E_m = 3 \times 10^4 [MPa]$ ), jouant le rôle de matrice : association de pâte, de fines et de sable.

Les propriétés élastiques de la matrice et des phases inclusionnaires sont celles correspondant au béton de FP Flamanville [43].

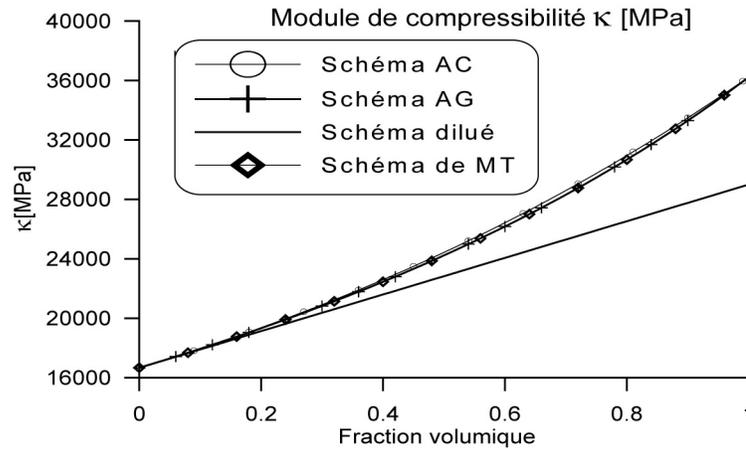


FIG. 2.6 Comparaison du module de compressibilité [MPa] des schémas (granulats et mortier)

Il est à noter que la fraction volumique d'inclusions  $f$  varie entre 0 et 1. Par ailleurs, les modules homogénéisés sont déduits des relations (Eqs. 2.53-2.54) pour le schéma dilué, (Eq. 2.63) pour le schéma de Mori-Tanaka, (Eq. 2.71) pour le schéma autocohérent classique, (Eq. 2.82) pour le schéma autocohérent généralisé.

Pour le module de compressibilité, on constate que l'ensemble des schémas donne les mêmes estimations, excepté le schéma dilué qui s'écarte des autres schémas lorsque la fraction volumique d'inclusions est supérieure à 20 (Figs. 2.6-2.7).

Par ailleurs, les figures 2.8 et 2.9 donnent les modules de cisaillement homogénéisés dans les deux cas considérés et pour les différentes approches d'homogénéisation testées. Les mêmes observations que dans le cas du module de compressibilité peuvent être faites. Cependant, lorsque le contraste entre les inclusions et la matrice est plus important, alors le schéma de Mori-Tanaka et le schéma autocohérent généralisé donnent une estimation légèrement plus souple que celle du schéma autocohérent classique.

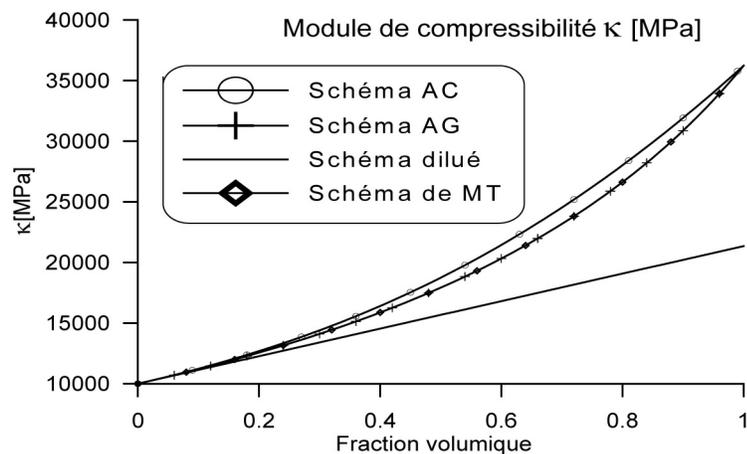


FIG. 2.7 Comparaison du module de compressibilité [MPa] des schémas (granulats et pâte de ciment)

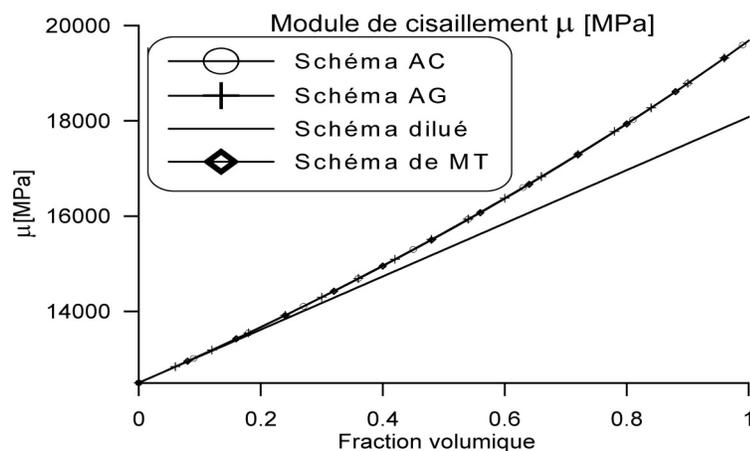


FIG. 2.8 Comparaison du module de cisaillement [MPa] des schémas (granulats et mortier)

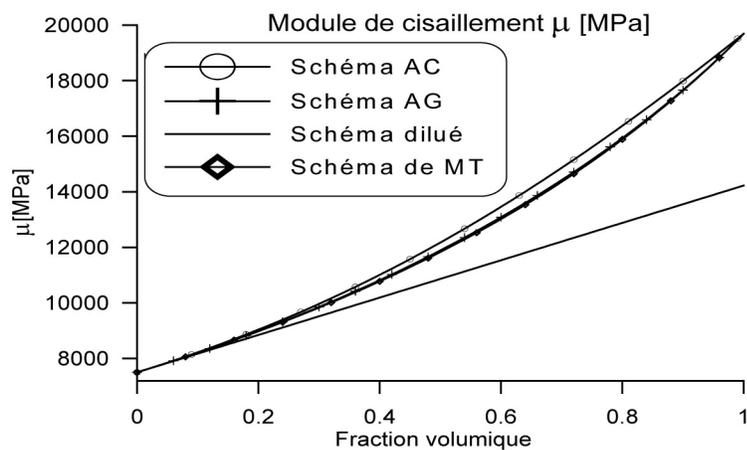


FIG. 2.9 Comparaison du module de cisaillement [MPa] des schémas (granulats et pâte de ciment)

Ainsi, dans le cas du béton où le contraste entre les renforts et la matrice est relativement faible, l'écart entre les différents modèles, excepté le schéma dilué, reste inférieur à la dispersion expérimentale.

## 2.5 Encadrement des propriétés homogénéisées

Les théorèmes de l'énergie, en élasticité linéaire, appliqués aux matériaux hétérogènes, permettent de borner les caractéristiques homogénéisées sur la base d'hypothèses simplificatrices concernant la morphologie du V.E.R. Ces bornes dépendent alors à la fois des hypothèses morphologiques et du choix des champs admissibles permettant d'approcher la solution exacte.

Ainsi, le principe du minimum de l'énergie potentielle énonce que parmi tous les champs de déplacement cinématiquement admissibles  $\underline{u}^*$ , le champ de déplacement solution  $\underline{u}$  minimise la fonctionnelle  $\mathcal{K}$  de l'énergie potentielle :

$$\mathcal{K}(\underline{u}) \leq \mathcal{K}(\underline{u}^*) \quad (2.83)$$

avec, en l'absence de forces de volume,  $\mathcal{K}$  donnée par :

$$\mathcal{K}(\underline{u}^*) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^*(\underline{x}) : \mathbb{C}(\underline{x}) : \varepsilon^*(\underline{x}) d\Omega - \int_{S_T} \underline{T}^d \cdot \underline{u}^* dS \quad (2.84)$$

où  $\partial\Omega = S_u \cup S_T$  avec  $S_u \cap S_T = \emptyset$ . Ici  $S_u$  est la partie de la frontière où le champ de déplacement  $\underline{u}^d$  est imposé et  $S_T$  est la partie complémentaire où les forces de surface  $\underline{T}^d$  sont connues.

Par ailleurs, le principe du minimum de l'énergie complémentaire énonce que parmi tous les champs de contrainte statiquement admissibles  $\sigma^*$ , le champ de contrainte solution  $\sigma$  maximise la fonctionnelle  $\mathcal{H}$  de l'énergie complémentaire :

$$\mathcal{H}(\sigma^*) \leq \mathcal{H}(\sigma) \quad (2.85)$$

avec :

$$\mathcal{H}(\sigma^*) = \int_{S_u} \underline{T}^* \cdot \underline{u}^d dS - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^*(\underline{x}) : \mathbb{S}(\underline{x}) : \sigma^*(\underline{x}) d\Omega \quad (2.86)$$

Dans le cas où la contrainte  $\Sigma$  est homogène sur tout le contour ( $S_T = \partial\Omega$ ), alors  $S_u = \emptyset$ , les relations (2.84) et (2.86) donnent :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\underline{u}^*) &= \frac{\Omega}{2} \langle \varepsilon^*(\underline{x}) : \mathbb{C}(\underline{x}) : \varepsilon^*(\underline{x}) \rangle - \Sigma : \int_{\partial\Omega} (\underline{n} \otimes^s \underline{u}^*) dS \\ &= \frac{\Omega}{2} \langle \varepsilon^*(\underline{x}) : \mathbb{C}(\underline{x}) : \varepsilon^*(\underline{x}) \rangle - \Omega \Sigma : \langle \varepsilon^* \rangle \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\mathcal{H}(\sigma^*) = -\frac{\Omega}{2} \langle \sigma^* : \mathbb{S} : \sigma^* \rangle \quad (2.88)$$

où la relation (2.2), définissant la moyenne de la déformation, a été considérée dans la relation (2.87).

Par ailleurs, dans le cas d'une déformation  $\mathbf{E}$  homogène sur tout le contour ( $S_u = \partial\Omega$ ), alors  $\underline{u}^d = \mathbf{E} \cdot \underline{x}$  et donc  $S_T = \emptyset$ , les relations (2.84) et (2.86) donnent :

$$\mathcal{K}(\underline{u}^*) = \frac{\Omega}{2} \langle \varepsilon^*(\underline{x}) : \mathbb{C}(\underline{x}) : \varepsilon^*(\underline{x}) \rangle \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\sigma^*) &= \mathbf{E} : \int_{\partial\Omega} (\underline{x} \otimes^s \underline{T}^*) dS - \frac{\Omega}{2} \langle \sigma^*(\underline{x}) : \mathbb{S}(\underline{x}) : \sigma^*(\underline{x}) \rangle \\ &= \Omega \mathbf{E} : \langle \sigma^* \rangle - \frac{\Omega}{2} \langle \sigma^*(\underline{x}) : \mathbb{S}(\underline{x}) : \sigma^*(\underline{x}) \rangle \end{aligned} \quad (2.90)$$

où la relation (2.1), définissant la moyenne de la contrainte, a été considérée dans la relation (2.90).

Le théorème de comparaison permet de combiner ces deux principes [112] :

$$\mathcal{H}(\sigma^*) \leq \mathcal{H}(\sigma) = \mathcal{K}(\underline{u}) \leq \mathcal{K}(\underline{u}^*) \quad (2.91)$$

avec par définition :

$$\mathcal{K}(\underline{u}) = \frac{\Omega}{2} \langle \underline{\varepsilon} \rangle : \mathbb{C}^{ef} : \langle \underline{\varepsilon} \rangle - \Omega \underline{\Sigma} : \langle \underline{\varepsilon} \rangle \quad (2.92)$$

$$\mathcal{H}(\underline{\sigma}) = -\frac{\Omega}{2} \underline{\Sigma} : \mathbb{S}^{ef} : \underline{\Sigma} \quad (2.93)$$

dans le cas de la contrainte homogène au contour, et :

$$\mathcal{K}(\underline{u}) = \frac{\Omega}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{ef} : \mathbf{E} \quad (2.94)$$

$$\mathcal{H}(\underline{\sigma}) = \frac{\Omega}{2} \langle \underline{\sigma} \rangle : \mathbb{S}^{ef} : \langle \underline{\sigma} \rangle - \Omega \mathbf{E} : \langle \underline{\sigma} \rangle \quad (2.95)$$

dans le cas de la déformation homogène au contour.

### 2.5.1 Bornes de Voigt et de Reuss

Les bornes élémentaires de Voigt et de Reuss découlent du choix des champs uniformes pour les champs admissibles de contrainte pour la borne de Reuss et de déformation pour la borne de Voigt.

Par commodité, on peut alors rechercher une borne supérieure pour  $\mathbb{C}^{ef}$  avec une condition de déformation homogène au contour ( $\underline{u}^d = \mathbf{E} \cdot \underline{x}$  sur  $\partial\Omega$ ) et une borne supérieure pour  $\mathbb{S}^{ef}$  (et donc inférieure pour  $\mathbb{C}^{ef}$ ) avec une condition de contrainte homogène au contour ( $\underline{T}^d = \underline{\Sigma} \cdot \underline{n}$  sur  $\partial\Omega$ ).

Par conséquent, on choisira dans le premier cas  $\underline{u}^* = \mathbf{E} \cdot \underline{x}$  et dans le deuxième cas  $\underline{\sigma}^* = \underline{\Sigma}$ , dans  $\Omega$ .

A partir des relations (2.87-2.94), on peut établir les formes quadratiques associées aux tenseurs d'élasticité homogénéisés permettant leur encadrement :

$$\underline{\Sigma} : \left( \langle \underline{\mathbb{S}} \rangle - \mathbb{S}^{ef} \right) : \underline{\Sigma} \geq 0 \quad \forall \underline{\Sigma} \quad (Reuss) \quad (2.96)$$

$$\mathbf{E} : \left( \langle \underline{\mathbb{C}} \rangle - \mathbb{C}^{ef} \right) : \mathbf{E} \geq 0 \quad \forall \mathbf{E} \quad (Voigt) \quad (2.97)$$

Il est à noter que ces relations ne nécessitent que la connaissance des caractéristiques élastiques ( $\mathbb{C}_r$  et  $\mathbb{S}_r$ ) et de la fraction volumique de chaque phase  $r$ .

Dans le cas du comportement isotrope, les relations (2.96) et (2.97) donnent les encadrements des modules homogénéisés :

$$\mu_{inf} = \langle \mu^{-1} \rangle^{-1} \leq \mu^{ef} \leq \langle \mu \rangle = \mu_{sup} \quad (2.98)$$

$$\kappa_{inf} = \langle \kappa^{-1} \rangle^{-1} \leq \kappa^{ef} \leq \langle \kappa \rangle = \kappa_{sup} \quad (2.99)$$

### 2.5.2 Bornes de Hashin

On considère un milieu hétérogène de domaine  $\Omega$  soumis à une condition au contour soit purement cinématique ( $S_u = \partial\Omega$ ) soit purement statique ( $S_T = \partial\Omega$ ). Dans ce cas, l'énergie potentielle  $\mathcal{K}$  (Eq. 2.84) et l'énergie complémentaire  $\mathcal{H}$  (Eq. 2.86) se réduisent à l'énergie de déformation  $\mathcal{W}$  :

$$\mathcal{W}(\underline{u}^*) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}^*(\underline{x}) : \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\varepsilon}^*(\underline{x}) d\Omega \quad (2.100)$$

$$\mathcal{W}(\underline{\sigma}^*) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma}^*(\underline{x}) : \mathbb{S}(\underline{x}) : \underline{\sigma}^*(\underline{x}) d\Omega \quad (2.101)$$

pour tout champ cinématiquement admissible  $\underline{u}^*$  et statiquement admissible  $\underline{\sigma}^*$ .

Si le milieu contient  $n_i$  inclusions (pouvant appartenir à différentes familles) noyées dans la matrice, son énergie de déformation est donnée par :

$$\mathcal{W}(\underline{u}^*) = \mathcal{W}_m(\underline{u}^*) - \sum_{i=1}^{i=n_i} \delta\mathcal{W}_i(\underline{u}^*) \quad (2.102)$$

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{\sigma}^*) = \mathcal{W}_m(\boldsymbol{\sigma}^*) + \sum_{i=1}^{i=n_i} \delta\mathcal{W}_i(\boldsymbol{\sigma}^*) \quad (2.103)$$

où  $\mathcal{W}_m$  est l'énergie de déformation du domaine  $\Omega$  constitué complètement de la matrice et  $\delta\mathcal{W}_i$  est la fluctuation de l'énergie de déformation, du fait des inclusions de domaine  $\Omega_i$ , donnée par [36] :

$$\delta\mathcal{W}_i(\boldsymbol{\sigma}^*) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_i} (\underline{T}^m \cdot \underline{u}^* - \underline{T}^* \cdot \underline{u}^m) dS = 0 \quad (2.104)$$

où  $\underline{T}^m = \boldsymbol{\sigma}(\mathbb{C}^m) \cdot \underline{n}$  et  $\underline{u}^m(\mathbb{C}^m)$  sont la contrainte et le déplacement sur  $\partial\Omega_i$  dans le cas où  $\Omega$  est constitué de la matrice seule  $\underline{T}^* = \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^i) \cdot \underline{n}$  et  $\underline{u}^*(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^i)$  sont la contrainte et le déplacement sur  $\partial\Omega_i$  dans le cas où l'inclusion  $\Omega_i$  est noyée dans la matrice.

Le théorème de comparaison (Eq. 2.91) devient dans ce cas :

$$\mathcal{W}_m(\boldsymbol{\sigma}^*) + \sum_{i=1}^{i=n_i} \delta\mathcal{W}_i(\boldsymbol{\sigma}^*) \leq \mathcal{W}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathcal{W}(\underline{u}) \leq \mathcal{W}_m(\underline{u}^*) - \sum_{i=1}^{i=n_i} \delta\mathcal{W}_i(\underline{u}^*) \quad (2.105)$$

Dans le cas de chargement isotrope imposé sur la frontière  $\partial\Omega$  du domaine :

$$\boldsymbol{\Sigma} = p \mathbf{1} \quad \text{ou} \quad \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{1} \quad (2.106)$$

où  $p$  et  $\varepsilon$  sont la contrainte et la déformation imposées et  $\boldsymbol{\delta}$  est tenseur unité d'ordre deux, les inégalités (Eq. 2.105) donnent pour le module de compressibilité homogénéisé, les bornes supérieures et bornes inférieures suivantes :

$$\kappa_{inf} = \kappa_m \left( 1 + \frac{18\kappa_m}{\Omega p^2} \sum_{i=1}^{i=n_i} \delta\mathcal{W}_i(\boldsymbol{\sigma}^*) \right)^{-1} \quad (2.107)$$

$$\kappa_{sup} = \kappa_m \left( 1 + \frac{2}{\Omega \kappa_m \varepsilon^2} \sum_{i=1}^{i=n_i} \delta\mathcal{W}_i(\underline{u}^*) \right) \quad (2.108)$$

De façon similaire, on peut établir les encadrements pour le module de cisaillement homogénéisé en considérant une sollicitation de cisaillement pur, imposée sur la frontière  $\partial\Omega$  du domaine :

$$\boldsymbol{\Sigma}(\underline{x}) = \tau (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \quad \text{ou} \quad \mathbf{E}(\underline{x}) = \frac{\gamma}{2} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \quad (2.109)$$

ce qui donne :

$$\mu_{inf} = \mu_m \left( 1 + \frac{18\mu_m}{\Omega \tau^2} \sum_{i=1}^{i=n_i} \delta\mathcal{W}_i(\boldsymbol{\sigma}^*) \right)^{-1} \quad (2.110)$$

$$\mu_{sup} = \mu_m \left( 1 + \frac{2}{\Omega \mu_m \gamma^2} \sum_{i=1}^{i=n_i} \delta\mathcal{W}_i(\underline{u}^*) \right) \quad (2.111)$$

Il est à noter que ces relations sont obtenues en considérant que les champs de contrainte et de déformation dans le milieu homogénéisé sont uniformes sous des conditions au contour homogènes.

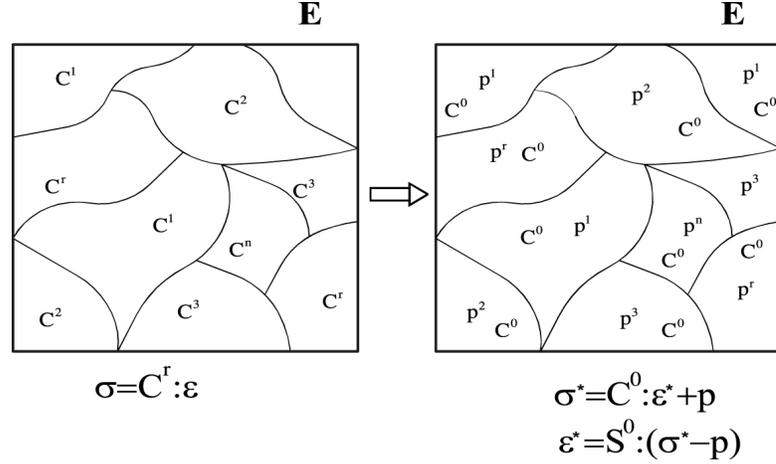


FIG. 2.10 Construction du champ de polarisation

Pour calculer ces bornes, Hashin [48] considère un modèle de sphères composites présentant les mêmes proportions volumiques d'inclusions que le milieu hétérogène et permettant de reproduire celui-ci par remplissage successif. Les champs de contrainte et de déformation sur le contour  $\partial\Omega_c$  des sphères composites  $\Omega_c$  sont alors les champs uniformes du milieu homogénéisé. L'évaluation des fluctuations d'énergie  $\delta\mathcal{W}$  sur la frontière de l'inclusion  $\partial\Omega_i$  revient à résoudre le problème aux limites dans la seule sphère composite soumise aux conditions uniformes au contour précédemment mentionnées.

Dans le cas d'un chargement isotrope, ces sphères satisfont les conditions de neutralité et on peut obtenir la solution exacte ( $\sigma^* = \sigma$  et  $\underline{u}^* = \underline{u}$ ). Ainsi, les deux bornes du module de compressibilité homogénéisé sont confondues et sont données par la relation (2.80).

Dans le cas du cisaillement, la sphère composite n'est pas neutre. Les conditions au contour homogènes imposées sur  $\partial\Omega_c$  sont alors des champs statiquement ou cinématiquement admissibles pour le problème initial. Dans ce cas, on obtient deux bornes distinctes données, dans le cas d'une seule famille d'inclusions :

$$\mu_{inf} = \mu_m \left( 1 + f \zeta_1(\sigma^*) \left( 1 - \frac{\mu_i}{\mu_m} \right) \right)^{-1} \quad (2.112)$$

$$\mu_{sup} = \mu_m \left( 1 + f \zeta_1(\underline{u}^*) \left( \frac{\mu_i}{\mu_m} - 1 \right) \right) \quad (2.113)$$

où les termes  $\zeta_1(\sigma^*)$  et  $\zeta_1(\underline{u}^*)$  sont donnés en (Annexe § D.2).

### 2.5.3 Bornes de Hashin-Shtrikman

Ces bornes sont construites en considérant des champs de déformation cinématiquement admissibles  $\epsilon^*(\underline{x})$  et des champs de contraintes statiquement admissibles  $\sigma^*(\underline{x})$  permettant de mieux prendre en compte la microstructure du milieu hétérogène.

Pour cela, on considère que le milieu initial hétérogène occupe un domaine  $\Omega = \cup_i(\Omega_i)$  où les sous domaines  $\Omega_i$  sont occupés par les différentes phases. Le domaine est alors soumis à sa frontière  $\partial\Omega$  à un champ de déformation homogène  $\mathbb{E}$ .

Par ailleurs, on considère un milieu homogène de même domaine  $\Omega$  que le milieu hétérogène, de propriétés élastiques  $(\mathbb{C}^0, \mathbb{S}^0)$  et soumis à la même condition au contour  $\mathbb{E}$  ainsi qu'à un champ de

polarisation  $\mathbf{p}(\underline{x}) = \mathbf{p}_i(\underline{x} \in \Omega_i)$  (Fig. 2.10). La résolution du problème suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^\circ) + \operatorname{div}(\mathbf{p}) = \underline{0} & \text{sur } \Omega \\ \underline{u} = \underline{u}^d = \mathbf{E} \cdot \underline{x} & \text{sur } \partial\Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon}^\circ = \frac{1}{2} (\operatorname{grad}(\underline{u}) + \operatorname{grad}^T(\underline{u})) \\ \boldsymbol{\sigma}^\circ(\underline{x}) = \mathbb{C}^0(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}^\circ(\underline{x}) + \mathbf{p} \end{cases} \quad (2.114)$$

Il existe alors un champ de polarisation  $\mathbf{p}$  et un milieu de référence pour que ce milieu homogène soit équivalent au milieu hétérogène initial. En effet, on peut construire les champs admissibles  $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\underline{x})$  et  $\boldsymbol{\sigma}^*(\underline{x})$  du milieu hétérogène initial à partir des solutions précédemment établies pour  $\mathbf{p}$  et  $\mathbb{C}^0$  quelconques :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}^\circ = (\mathbb{C} - \delta\mathbb{C}) : \boldsymbol{\varepsilon}^\circ + \mathbf{p} \quad (2.115)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon}^\circ = (\mathbb{S} - \delta\mathbb{S}) : (\boldsymbol{\sigma}^\circ - \mathbf{p}) \quad (2.116)$$

où la rigidité et la souplesse du milieu homogène sont exprimées en fonction de celles du milieu hétérogène et de leurs contrastes  $(\delta\mathbb{C}, \delta\mathbb{S})$  :

$$\delta\mathbb{C}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) - \mathbb{C}^0 \quad (2.117)$$

$$\delta\mathbb{S}(\underline{x}) = \mathbb{S}(\underline{x}) - \mathbb{S}^0 \quad (2.118)$$

Les champs admissibles peuvent alors être substitués dans la relation

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^* \rangle : \mathbf{E} - \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma}^* : \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma}^* \rangle \leq \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{ef} : \mathbf{E} \leq \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle \quad (2.119)$$

donnant le théorème de comparaison dans le cas d'une déformation homogène  $\mathbf{E}$  au contour. Cette relation d'encadrement de l'énergie de déformation du milieu initial homogénéisé peut également s'écrire (Annexe § B.2.2) :

$$\mathcal{U}(\mathbb{C}^0, \mathbf{p}) - \bar{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{ef} : \mathbf{E} \leq \mathcal{U}(\mathbb{C}^0, \mathbf{p}) + \bar{\mathcal{K}} \quad (2.120)$$

où

$$\mathcal{U}(\mathbb{C}^0, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^0 : \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{E} : \langle \mathbf{p} \rangle + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbf{p} \rangle - \frac{1}{2} \langle \mathbf{p} : (\delta\mathbb{C})^{-1} : \mathbf{p} \rangle \quad (2.121)$$

est la fonctionnelle de la polarisation de Hashin-Shtrikman [112] qui dépend, à  $\mathbf{E}$  fixé, du choix de champ  $\mathbf{p}$  et du choix des modules  $(\mathbb{C}^0, \mathbb{S}^0)$  du milieu de référence. Les termes de fluctuation de l'énergie complémentaire  $\bar{\mathcal{H}}$  et de l'énergie potentielle  $\bar{\mathcal{K}}$  sont donnés par :

$$\bar{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \langle (\boldsymbol{\varepsilon}^* - \mathbf{p} : (\delta\mathbb{C})^{-1}) : \delta\mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}^* - (\delta\mathbb{C})^{-1} : \mathbf{p}) \rangle \quad (2.122)$$

$$\bar{\mathcal{K}} = \frac{1}{2} \langle (\boldsymbol{\sigma}^* - \mathbf{p} : \mathbb{S}^0 : (\delta\mathbb{S})^{-1}) : \delta\mathbb{S} : (\boldsymbol{\sigma}^* - (\delta\mathbb{S})^{-1} : \mathbb{S}^0 : \mathbf{p}) \rangle \quad (2.123)$$

Pour les champs solution ( $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}$ ) du problème initial du milieu hétérogène soumis à une déformation homogène au contour, les termes de fluctuations sont nuls :  $\bar{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{K}} = 0$ . Ceci donne alors la forme du champ de polarisation :

$$\mathbf{p} = \delta\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbb{S}^0)^{-1} : \delta\mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.124)$$

permettant de rendre le milieu homogène de référence équivalent au milieu hétérogène.

Ainsi, postuler un champ de polarisation différent de celui donné par la relation (2.124) permet d'encadrer l'énergie de déformation du milieu hétérogène homogénéisé (Eq. 2.120). En outre, si les tenseurs  $\delta\mathbb{C}$  et  $\delta\mathbb{S}$  sont choisis négatifs en tout point du domaine  $\Omega$  au sens des formes quadratiques associées  $\bar{\mathcal{H}}$  et  $\bar{\mathcal{K}}$ , alors la fonctionnelle de polarisation devient directement l'encadrement de l'énergie

élastique du milieu homogénéisé. Ceci se réalise lorsque  $\mathbb{C}^0 \geq \sup\{\mathbb{C}_r\}$  (milieu suffisamment raide) pour la borne supérieure et  $\mathbb{S}^0 \geq \sup\{\mathbb{S}_r\}$  (milieu suffisamment souple) pour la borne inférieure :

$$\frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{ef} : \mathbf{E} \leq \mathcal{U}^{sup}(\mathbf{p}) \quad \text{si } \delta\mathbb{C}(\underline{x}) \text{ négatif } \quad \forall \underline{x} \quad (2.125)$$

$$\mathcal{U}^{inf}(\mathbf{p}) \leq \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{ef} : \mathbf{E} \quad \text{si } \delta\mathbb{S}(\underline{x}) \text{ négatif } \quad \forall \underline{x} \quad (2.126)$$

Il s'agit alors de choisir de façon judicieuse les champs de polarisation  $\mathbf{p}(\underline{x})$  et les propriétés du milieu de référence ( $\mathbb{C}^0, \mathbb{S}^0$ ) pour obtenir un encadrement optimal des propriétés élastiques homogénéisées. En effet, les choix pertinents sont ceux qui permettront de maximiser le minorant  $\mathcal{U}^{inf}$  et de minimiser le majorant  $\mathcal{U}^{sup}$ .

Dans le cas d'une distribution spatiale isotrope et de champs de polarisation uniformes par phase, cette démarche permet d'aboutir aux bornes de Hashin et Shtrikman :

$$\mathbb{C}_{\pm}^{ef} = \left\langle \mathbb{C} : (\mathbb{I} + \mathbb{B}^{\pm} : \delta\mathbb{C}^{\pm})^{-1} \right\rangle : \left\langle (\mathbb{I} + \mathbb{B}^{\pm} : \delta\mathbb{C}^{\pm})^{-1} \right\rangle^{-1} \quad (2.127)$$

avec  $\delta\mathbb{C}^{\pm} = \mathbb{C}^{\pm} - \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}^+ = \sup\{\mathbb{C}_r\}$ ,  $\mathbb{C}^- = \inf\{\mathbb{C}_r\}$  et  $\mathbb{B}^{\pm} = \mathbb{B}(\mathbb{C}^{\pm})$ . Dans le cas isotrope, on obtient alors les bornes sur les modules de compressibilité et de cisaillement :

$$\mu_{\pm}^{ef} = \left\langle \mu \left[ 1 + \frac{\beta^{\pm} \delta\mu^{\pm}}{\mu^{\pm}} \right]^{-1} \right\rangle \left\langle \left[ 1 + \frac{\beta^{\pm} \delta\mu^{\pm}}{\mu^{\pm}} \right]^{-1} \right\rangle^{-1} \quad (2.128)$$

$$\kappa_{\pm}^{ef} = \left\langle \kappa \left[ 1 + \frac{\alpha^{\pm} \delta\kappa^{\pm}}{\kappa^{\pm}} \right]^{-1} \right\rangle \left\langle \left[ 1 + \frac{\alpha^{\pm} \delta\kappa^{\pm}}{\kappa^{\pm}} \right]^{-1} \right\rangle^{-1} \quad (2.129)$$

où  $(\cdot)^+ = \sup\{(\cdot)_r\}$ ,  $(\cdot)^- = \inf\{(\cdot)_r\}$ ,  $\delta(\cdot)^{\pm} = (\cdot)^{\pm} - (\cdot)_r$  et  $\alpha^{\pm}, \beta^{\pm}$  sont définis par les équations (2.48) et (2.49), respectivement.

### 2.5.4 Comparaison des bornes

Il s'agit de comparer les différentes bornes obtenues. Pour cela, on adopte les deux configurations retenues pour la comparaison des schémas (§ 2.4.3).

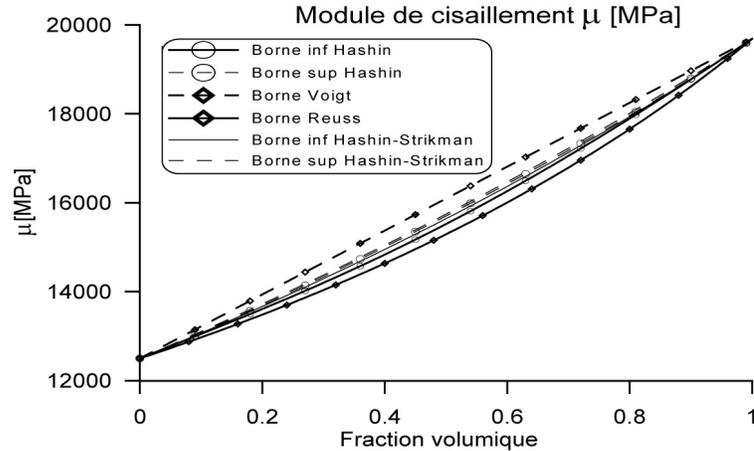


FIG. 2.11 Comparaison du module de cisaillement [MPa] des bornes. En abscisse,  $f$  est la fraction volumique des inclusions (granulats et mortier)

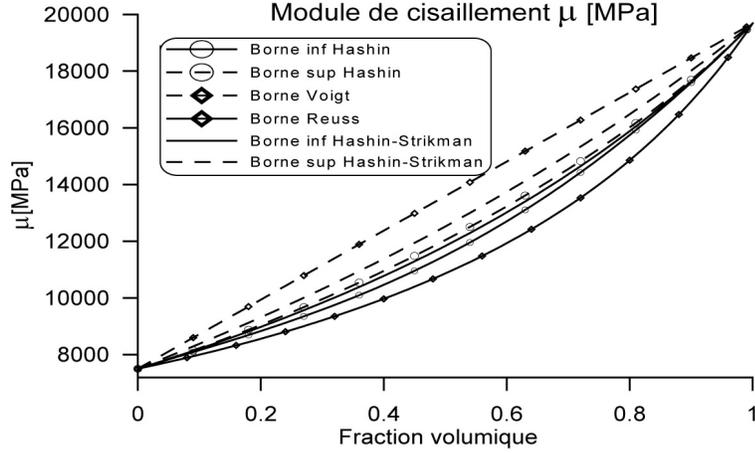


FIG. 2.12 Comparaison du module de cisaillement [MPa] des bornes. En abscisse,  $f$  est la fraction volumique des inclusions (granulats et pâte de ciment)

La fraction volumique d'inclusions  $f$  varie entre 0 et 1. Les bornes d'estimation sont données par les relations (2.98) et (2.99) pour les bornes de Voigt et de Reuss, les relations (2.112) et (2.113) pour les bornes de Hashin et les relations (2.128) et (2.129) pour les bornes de Hashin-Shtrikman.

Il est à noter que ces bornes sont confondues en ce qui concerne le module de compressibilité.

Les figures 2.11 et 2.12 donnent les modules de cisaillement homogénéisés dans les deux cas considérés. On constate qu'un meilleur encadrement est obtenu avec la borne inférieure de Hashin-Shtrikman et la borne supérieure de Hashin [26]. Il est également à noter que l'écart entre les bornes les plus serrées reste relativement faible. Il est également à préciser que la borne inférieure de Hashin-Shtrikman correspond à l'estimation du schéma de Mori-Tanaka.

## 2.6 Homogénéisation en viscoélasticité

### 2.6.1 Comportement viscoélastique homogénéisé

On considère un domaine  $\Omega$  correspondant à un V.E.R d'un matériau hétérogène dont les propriétés viscoélastiques et leurs distributions sont connues. Il est soumis, sur sa frontière  $\partial\Omega$ , soit à un état de contrainte macroscopique homogène  $\Sigma^0$  :

$$\mathbf{T}^d(\underline{x}) = (\Sigma^0 \cdot \underline{n})H(t) \quad (2.130)$$

soit à un état de déformation macroscopique homogène  $\mathbf{E}^0$  :

$$\underline{u}^d(\underline{x}) = (\mathbf{E}^0 \cdot \underline{x})H(t) \quad (2.131)$$

où  $H(t)$  est la fonction de Heaviside.

Pour déterminer les propriétés viscoélastiques homogénéisées, il est nécessaire de connaître les champs de contrainte et de déformation microscopiques dans le V.E.R. Pour cela, il faut résoudre un problème de viscoélasticité linéaire avec les conditions aux limites (Eq. 2.130) et (Eq. 2.131). La linéarité du problème permet de relier la contrainte et la déformation en chaque point  $\underline{x}$  du V.E.R à la

contrainte et à la déformation macroscopique, respectivement, par les relations linéaires suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, t) = \mathbb{M}(\underline{x}, t) : \boldsymbol{\Sigma}^0 H(t) \quad (2.132)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, t) = \mathbb{L}(\underline{x}, t) : \mathbf{E}^0 H(t) \quad (2.133)$$

où  $\mathbb{M}(\underline{x}, t)$  et  $\mathbb{L}(\underline{x}, t)$  sont les tenseurs de localisation.

Par ailleurs la loi de comportement à l'échelle microscopique permet d'écrire :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, t) = \mathbb{S}(\underline{x}, t)(: \otimes) \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, t) = \mathbb{S}(\underline{x}, t)(: \otimes) \mathbb{M}(\underline{x}, t) : \boldsymbol{\Sigma}^0 \quad (2.134)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, t) = \mathbb{C}(\underline{x}, t)(: \otimes) \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, t) = \mathbb{C}(\underline{x}, t)(: \otimes) \mathbb{L}(\underline{x}, t) : \mathbf{E}^0 \quad (2.135)$$

où  $(: \otimes)$  est la convolution de Stieltjes dans le cas tridimensionnel, explicitée par les relations (2.140) et (2.141). Ici  $\mathbb{S}(\underline{x}, t)$  et  $\mathbb{C}(\underline{x}, t)$  sont les tenseurs d'ordre quatre des fonctions de retard et de relaxation microscopiques, respectivement. Leurs contreparties homogénéisées  $\mathbb{S}^{ef}(t)$  et  $\mathbb{C}^{ef}(t)$  peuvent alors être déterminées en calculant la moyenne de la déformation et de la contrainte microscopiques, respectivement :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, t) \rangle = \mathbf{E}(t) = \mathbb{S}^{ef}(t) : \boldsymbol{\Sigma}^0 \quad (2.136)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, t) \rangle = \boldsymbol{\Sigma}(t) = \mathbb{C}^{ef}(t) : \mathbf{E}^0 \quad (2.137)$$

ce qui donne la loi de comportement macroscopique avec :

$$\mathbb{S}^{ef}(t) = \langle \mathbb{S}(\underline{x}, t)(: \otimes) \mathbb{M}(\underline{x}, t) \rangle \quad (2.138)$$

$$\mathbb{C}^{ef}(t) = \langle \mathbb{C}(\underline{x}, t)(: \otimes) \mathbb{L}(\underline{x}, t) \rangle \quad (2.139)$$

Comme dans le cas élastique, la connaissance des propriétés viscoélastiques homogénéisées revient à déterminer les seuls tenseurs de localisation pour le V.E.R considéré.

Le principe de superposition de Boltzmann permet la généralisation de la loi de comportement à une histoire de sollicitation quelconque. Le comportement macroscopique viscoélastique homogénéisé, au sens de la convolution de Stieltjes, est alors donné par :

$$\mathbf{E}(t) = \mathbb{S}_{ef}(: \otimes) \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(t) : \mathbb{S}_{ef}(0) + \int_{-\infty}^t \boldsymbol{\Sigma}(\tau) : \frac{\partial(\mathbb{S}_{ef}(t - \tau))}{\partial \tau} d\tau \quad (2.140)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}(t) = \mathbb{C}_{ef}(: \otimes) \mathbf{E} = \mathbf{E}(t) : \mathbb{C}_{ef}(0) + \int_{-\infty}^t \mathbf{E}(\tau) : \frac{\partial(\mathbb{C}_{ef}(t - \tau))}{\partial \tau} d\tau \quad (2.141)$$

## 2.6.2 Principe de correspondance

Comme il a été démontré dans la partie dédiée à la viscoélasticité, le principe de correspondance permet de transformer un problème de viscoélasticité linéaire non vieillissante en un problème de pseudo-élasticité linéaire (§ 1.2.4). Ce résultat peut être étendu au problème d'homogénéisation viscoélastique pour pouvoir exploiter les méthodes d'homogénéisation développées en élasticité. Ainsi, la transformée de Laplace-Carson de la loi de comportement macroscopique (Eq. 2.140) et (Eq. 2.141) donne dans l'espace transformé :

$$\tilde{\mathbf{E}}(s) = \tilde{\mathbb{S}}_{hom}(s) : \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(s) \quad (2.142)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(s) = \tilde{\mathbb{C}}_{hom}(s) : \tilde{\mathbf{E}}(s) \quad (2.143)$$

où les tenseurs homogénéisés de pseudo-souplesse  $\tilde{\mathbb{S}}_{ef}$  et de pseudo-rigidité  $\tilde{\mathbb{C}}_{ef}$  sont donnés par :

$$\tilde{\mathbb{S}}_{ef}(s) = \mathcal{C} \{ \mathbb{S}(\underline{x}, t)(: \otimes) \mathbb{M}(\underline{x}, t) \} (s) = \left\langle \tilde{\mathbb{S}}(\underline{x}, s) : \tilde{\mathbb{M}}(\underline{x}, s) \right\rangle \quad (2.144)$$

$$\tilde{\mathbb{C}}_{ef}(s) = \mathcal{C} \{ \mathbb{C}(\underline{x}, t)(: \otimes) \mathbb{L}(\underline{x}, t) \} (s) = \left\langle \tilde{\mathbb{C}}(\underline{x}, s) : \tilde{\mathbb{L}}(\underline{x}, s) \right\rangle \quad (2.145)$$

En particulier, les estimations ci-dessus deviennent, dans le cas où les phases sont individuellement homogènes :

$$\tilde{\mathbb{S}}_{ef}(s) = \sum_r f_r \tilde{\mathbb{S}}_r(\underline{x}, s) : \left\langle \tilde{\mathbb{M}}(\underline{x}, s) \right\rangle_r \quad (2.146)$$

$$\tilde{\mathbb{C}}_{ef}(s) = \sum_r f_r \tilde{\mathbb{C}}_r(\underline{x}, s) : \left\langle \tilde{\mathbb{L}}(\underline{x}, s) \right\rangle_r \quad (2.147)$$

et les schémas d'homogénéisation présentés préalablement dans le cas élastique peuvent être directement utilisés pour construire une estimation de la moyenne du tenseur de localisation par phase :

$$\left\langle \tilde{\mathbb{M}}(\underline{x}, s) \right\rangle_r \simeq \tilde{\mathbb{M}}_r^{est}(s) \quad (2.148)$$

$$\left\langle \tilde{\mathbb{L}}(\underline{x}, s) \right\rangle_r \simeq \tilde{\mathbb{L}}_r^{est}(s) \quad (2.149)$$

En effet, il s'agit d'exprimer, par exemple, les relations (2.51) et (2.59) donnant  $\mathbb{L}_r^{est}$  dans l'espace transformé puis de calculer  $\tilde{\mathbb{C}}_{ef}(s)$  à partir de la relation (2.147).

Dans le cas du comportement isotrope, les tenseurs homogénéisés de pseudo-souplesse  $\tilde{\mathbb{S}}_{ef}(s)$  et de pseudo-rigidité  $\tilde{\mathbb{C}}_{ef}(s)$  sont donnés par :

$$\tilde{\mathbb{C}}_{ef}(s) = 3\tilde{\kappa}_{ef}(s) \mathbb{I}_{sph} + 2\tilde{\mu}_{ef}(s) \mathbb{I}_{dev} \quad (2.150)$$

$$\tilde{\mathbb{S}}_{ef}(s) = \frac{1}{3} \tilde{J}_\kappa^{ef}(s) \mathbb{I}_{sph} + \frac{1}{2} \tilde{J}_\mu^{ef}(s) \mathbb{I}_{dev} \quad (2.151)$$

où  $\tilde{\kappa}_{ef}(s)$  et  $\tilde{\mu}_{ef}(s)$  sont donnés par l'estimation des schémas d'homogénéisation dans lesquels les modules sont remplacés par leurs transformées de Laplace-Carson :

$$\tilde{\kappa}_{ef}(s) = \tilde{\kappa}_{ef}(\tilde{\kappa}_r(s), \tilde{\mu}_r(s), f_r) \quad (2.152)$$

$$\tilde{\mu}_{ef}(s) = \tilde{\mu}_{ef}(\tilde{\kappa}_r(s), \tilde{\mu}_r(s), f_r) \quad (2.153)$$

Par ailleurs, on introduit les pseudo-complaisances homogénéisées associées  $\tilde{J}_\kappa^{ef}(s)$  et  $\tilde{J}_\mu^{ef}(s)$  par :

$$\tilde{J}_\kappa^{ef}(s) = \frac{1}{\tilde{\kappa}_{ef}(s)} \quad (2.154)$$

$$\tilde{J}_\mu^{ef}(s) = \frac{1}{\tilde{\mu}_{ef}(s)} \quad (2.155)$$

La transformée inverse de Laplace-Carson (Eq. 3.2) permet alors, à partir des relations (2.146) et (2.147), de construire les tenseurs de relaxation et de retard dans l'espace temporel :

$$\mathbb{C}_{ef}(t) = \mathcal{C}^{-1} \left( \tilde{\mathbb{C}}_{ef}(\tilde{\kappa}_{ef}(s), \tilde{\mu}_{ef}(s)) \right) \quad (2.156)$$

$$\mathbb{S}_{ef}(t) = \mathcal{C}^{-1} \left( \tilde{\mathbb{S}}_{ef}(\tilde{\kappa}_{ef}(s), \tilde{\mu}_{ef}(s)) \right) \quad (2.157)$$

Cette démarche fournit les expressions des fonctions de relaxation et de retard uniaxiales :

$$\tilde{R}_{ef}(s) = \frac{9\tilde{\kappa}_{ef}(s)\tilde{\mu}_{ef}(s)}{3\tilde{\kappa}_{ef}(s) + \tilde{\mu}_{ef}(s)} \quad (2.158)$$

$$\tilde{J}_{ef}(s) = \frac{1}{\tilde{R}_{ef}(s)} = \frac{1}{9} \tilde{J}_\kappa^{ef}(s) + \frac{1}{3} \tilde{J}_\mu^{ef}(s) \quad (2.159)$$

Dans ce qui suit, certains schémas d'homogénéisation présentés précédemment sont étendus au cas du comportement viséoélastique pour étudier le fluage du béton.

---

## 2.7 Conclusion

Dans ce qui suit, certains schémas d'homogénéisation présentés précédemment sont étendus à la modélisation du comportement viscoélastique de matériaux hétérogènes. La clé de cette extension réside dans le principe de correspondance entre l'élasticité linéaire et la viscoélasticité linéaire. Plus précisément, pour estimer le comportement viscoélastique d'un milieu hétérogène, on résout d'abord le problème d'homogénéisation élastique associé et on obtient le tenseur de rigidité  $\mathbb{C}_{ef}$  ou le tenseur de souplesse  $\mathbb{S}_{ef}$  du milieu homogénéisé. Ensuite, on peut obtenir la TC du tenseur de relaxation  $\tilde{\mathbb{R}}_{ef}(s)$  ou du tenseur de retard  $\tilde{\mathbb{J}}_{ef}(s)$  en remplaçant chaque module d'élasticité par leur TC. Finalement, le tenseur de relaxation  $\mathbb{R}_{ef}(t)$  ou de retard  $\mathbb{J}_{ef}(t)$  se déduit dans l'espace temporel par son inverse de la TC.



## Deuxième partie

# Construction des propriétés viscoélastiques macroscopiques



# Introduction

L'homogénéisation des matériaux hétérogènes viscoélastiques peut être étudiée en employant le principe de correspondance qui étend les schémas d'homogénéisation du cas élastique au cas viscoélastique. Le principe de correspondance consiste à utiliser la transformée de Laplace-Carson afin de ramener un problème viscoélastique, dans l'espace des transformées, à un problème pseudo-élastique. L'expression des propriétés viscoélastiques macroscopiques (fonctions de fluage et de relaxation) est donc obtenue dans l'espace transformé. Ensuite, la difficulté consiste à établir ces propriétés dans l'espace temporel en inversant leur transformée de Laplace-Carson. Dans cette partie, on s'intéresse à déterminer la fonction effective de fluage d'un milieu hétérogène isotrope en employant successivement le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka et puis le schéma autocohérent généralisé de Christensen et Lo. Le milieu se compose d'inclusions élastiques et de pores noyés dans une matrice viscoélastique non vieillissante. Les modèles rhéologiques classiques (Maxwell et Kelvin généralisés) sont utilisés pour décrire le comportement microscopique de la phase viscoélastique.

Dans le chapitre 3, on présente deux méthodes numériques permettant d'inverser la transformée de Laplace-Carson de la complaisance de fluage macroscopique pour déterminer leur évolution en fonctions du temps. En préambule aux deux méthodes numériques, quelques aspects fondamentaux de la transformée de Laplace sont abordés.

Le chapitre 4 est consacré à l'élaboration d'une méthode semi-analytique permettant de déterminer les fonctions viscoélastiques macroscopiques dans l'espace temporel pour un nombre paramétrique de phase et une dimension quelconque du spectre microscopique discret. Ainsi des expressions analytiques des fonctions viscoélastiques sont établies. Elles nécessitent la connaissance des temps caractéristiques macroscopiques, lesquels correspondent aux racines de polynômes dont les degrés dépendent du nombre de phases, de la dimension du spectre microscopique et du schéma utilisé. Les coefficients de ces polynômes sont des fonctions des propriétés de chaque phase (fractions volumique et propriétés mécaniques) dont l'évaluation numérique est sujette, du fait de leur complexité, à une accumulation importante d'erreurs d'arrondis. Les racines calculées s'écartent rapidement de leurs valeurs théoriques ce qui se traduit par une détermination erronée du spectre macroscopique. L'objectif de cette partie est d'arriver à dissocier la complexité liée au nombre de phases de celle liée à la dimension du spectre microscopique afin d'apporter une solution en deux étapes au problème évoqué ci-dessus. En effet, sous l'hypothèse d'un coefficient de Poisson ou de celle d'un module de compressibilité constant, il est possible de construire deux niveaux de détermination des racines : le premier niveau consiste à déterminer les racines d'un polynôme dont le degré dépend uniquement du schéma utilisé et du nombre de phase. Puis, chaque racine est substituée dans un deuxième polynôme, assujetti à l'une des deux hypothèses susmentionnées, dont le degré dépend uniquement de la taille du spectre microscopique et dont la résolution donne une famille des temps caractéristiques macroscopiques. Chaque famille de temps caractéristiques macroscopiques s'avère être bornée par deux temps caractéristiques microscopiques successifs. Les racines peuvent alors être cherchées dans des intervalles plus réduits.

A l'issue de l'exploitation des résultats du chapitre 4, le changement d'échelle montre que les fonctions de fluage et relaxation macroscopiques ont une évolution qui se présente en une partie instantanée caractérisée par une amplitude et une vitesse de fluage instantanées, une partie transitoire contrôlée par un spectre macroscopique enrichi par le changement d'échelle et fourni par un ensemble discret de temps caractéristiques augmenté d'une part de spectre continu, puis la phase terminale correspondant au fluage à long terme (borné ou non) caractérisé par son asymptote dont la pente correspond à la vitesse de ce fluage à long terme.

Le comportement macroscopique peut alors être approché par la connaissance de l'amplitude et de la vitesse instantanées, l'amplitude de la phase transitoire et la vitesse de la phase asymptotique. On démontre dans le chapitre 5 que sans aucune hypothèse simplificatrice, ces quatre paramètres macroscopiques peuvent être déterminés de façon exacte sans avoir recours à l'inversion de la transformée

de Laplace-Carson. Cette démarche s'appuie sur les propriétés à l'origine et à l'infini de la transformation de Laplace. L'obtention de ces quatre paramètres permet de construire un modèle macroscopique équivalent dont la réponse initiale et celle à long terme coïncident avec celles du modèle originel. On obtient donc, à moindre coût, une réponse viscoélastique macroscopique qui prend en compte explicitement la microstructure et les propriétés du milieu hétérogène.

# Chapitre 3 Méthodes numériques

---

## 3.1 Introduction

Le calcul de l'inverse de la transformation de Laplace (TL) joue un rôle très important dans la résolution des problèmes en viscoélasticité linéaire non vieillissante. Cependant, ce problème n'est résolu analytiquement que dans quelques cas particuliers. Il est donc nécessaire de recourir à des méthodes approchées numériques.

Dans ce chapitre, on présentera la formule de Bromwich [106] qui permet de calculer la transformée inverse de Laplace d'une fonction, dont les singularités sont connues, par la somme des résidus à ses pôles et la somme des intégrales sur les intervalles encadrées par les points de branchement. On établira analytiquement la transformée inverse de Laplace pour les deux cas particuliers, utilisés souvent dans ce mémoire, d'une fonction rationnelle et de celle irrationnelle. Par la suite, on présente deux méthodes numériques pour l'évaluation de l'intégrale de Bromwich.

La première méthode, désignée par ACSF, consiste en une approximation de l'intégrale par la méthode de Bromwich [32], ce qui revient au calcul de séries de Fourier. Il s'agit par la suite d'accélérer la convergence de ces séries [2, 30]. On adopte ici l'algorithme différence quotient [95] qui permet une accélération optimale de la convergence des séries.

La deuxième méthode est la méthode semi-numérique de Post-Widder. Elle est basée sur le calcul des dérivées successives de la fonction à inverser [58, 59] pour construire une suite différentielle qui converge vers la solution exacte. Le premier terme de la suite permet d'accéder de façon exacte à la partie instantanée et à la partie à long terme de la fonction inconnue. En pratique, on utilise le terme de rang 3 de cette suite pour approcher la transformée inverse avec une précision acceptable [114]. L'inconvénient de cette méthode est le calcul analytique des dérivées de la fonction à inverser, ce qui nécessite le recours à un logiciel de calcul symbolique. Comme cette étude ne concerne que des fonctions rationnelles ou irrationnelles dans l'espace de Laplace-Carson, on a établi un algorithme qui permet, d'une part, de contourner le calcul symbolique et d'autre part de gagner un facteur 100 en terme de temps de calcul par rapport à la commande de dérivation de Maple. Enfin, on analysera la convergence de cette méthode dans le cas des fonctions considérées.

---

## 3.2 Définition de la transformée de Laplace et de Carson

Soit  $f(t)$ , une fonction définie pour  $t > 0$ , la transformée de Laplace de  $f(t)$ , notée  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ , est définie par :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3.1)$$

où le paramètre  $s$  est supposé, dans le premier temps, réel.

La transformée de Laplace de  $f(t)$  existe, si l'intégrale (3.1) converge pour certaines valeurs de  $s$ , autrement, elle n'existe pas.

**Les conditions suffisantes d'existence de la transformée de Laplace sont :**

- Si la fonction  $f(t)$  est continue par morceaux sur tout intervalle  $[0, N]$  fini où  $N$  est un réel positif, i.e. si cet intervalle peut être divisé en un nombre fini d'intervalles dans chacun desquels la fonction est continue et possède des limites à droites et à gauche finies.
- Et si la fonction  $f(t)$  est d'ordre exponentiel  $\gamma$  pour  $t > N$ , i.e. s'il existe des constantes réelles  $M > 0$  et  $\gamma$  telles que  $|f(t)| < Me^{\gamma t}$ , sa transformée de Laplace existe pour tout  $s > \gamma$ .

A partir de la définition de la transformée de Laplace (3.1), on peut définir celle de Carson :

$$\mathcal{C}\{f(t)\} = \tilde{f}(s) = s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3.2)$$

La transformée de Carson joue un rôle très important pour résoudre les problèmes viscoélastiques linéaires non vieillissants, en les transformant en problèmes pseudo-élastiques (§ 2.6.2).

### 3.3 Transformée inverse de Laplace et formule de Bromwich

Dans ce paragraphe, on présentera la formule d'inversion de la TL par l'intégrale de Bromwich et son application pour :

- évaluer analytiquement ou semi-analytiquement l'inverse de la TL des fonctions  $\hat{f}(s)$  dont les singularités sont connues : pôles et points de branchement.
- générer des séries permettant son approximation par la méthode des trapèzes afin de procéder à l'inversion numérique.

#### 3.3.1 Unicité de la transformée inverse

Si  $\hat{f}(s)$  est la transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$ , alors  $f(t)$  est appelée «transformée inverse» de  $\hat{f}(s)$ . On écrit symboliquement  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\}$ , où  $\mathcal{L}^{-1}$  est l'opérateur de la transformée inverse de Laplace.

**Theorem 1** (*Théorème de Lerch*) *Si la fonction  $f(t)$  est continue par morceaux sur tout intervalle  $[0, N]$  fini, et est d'ordre exponentiel  $\gamma$  pour  $t > N$ , alors la transformation inverse de  $\hat{f}(s)$  est unique.*

Si on n'assure pas la propriété de continuité par morceaux de la transformée inverse de  $\hat{f}(s)$ , alors elle n'est pas unique, parce que si  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\}$ , et si l'on définit la fonction zéro  $\mathcal{N}(t)$  de  $t$ , telle que pour tout  $t > 0$  :

$$\int_0^t \mathcal{N}(u) du = 0 \quad (3.3)$$

On en déduit alors que  $f(t) + \mathcal{N}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\}$ , car la transformée de Laplace d'une fonction zéro  $\mathcal{N}(t)$  est zéro [106].

En général, toute fonction, qui vaut zéro partout sauf en un nombre fini de points, est une fonction zéro.

#### 3.3.2 Formule de Bromwich

On étudie ici la formule de Bromwich qui permet de trouver la transformée inverse de Laplace. Si  $\hat{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ , alors :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\} = \frac{1}{2\pi I} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \hat{f}(s) e^{st} ds, \quad t > 0 \quad (3.4)$$

L'intégration de Bromwich est à effectuer le long de la droite  $s = \gamma$  dans le plan complexe où  $s = x + iy$ . Le nombre réel  $\gamma$  est choisi de telle façon que  $s = \gamma$  soit à droite de toutes les singularités.

**Definition 2** *Un point en lequel une fonction  $f(z)$  cesse d'être analytique<sup>1</sup> est une singularité de  $f(z)$ . Il existe plusieurs types de singularités [105].*

1. **Singularités isolées** : Le point  $z = z_0$  est appelé singularité isolée de  $f(z)$ , si l'on peut déterminer  $\delta > 0$  tel que le cercle  $|z - z_0| = \delta$  ne contienne pas de singularité autre que  $z_0$ .
2. **Pôles** : Si l'on peut trouver un entier positif  $n$  tel que  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$ , alors  $z_0$  est appelé un pôle d'ordre  $n$ . Si  $n = 1$ ,  $z_0$  est appelé un pôle simple.
3. **Point de branchement** : C'est est une singularité d'une fonction analytique complexe multiforme, telle que la fonction racine n-ième ou le logarithme complexe. Il se produit quand le principe de prolongement analytique conduit à plusieurs déterminations d'une même fonction multiforme. La singularité est le point autour duquel il faut tourner pour passer d'une détermination à une autre. La notion de surface de Riemann associée à la fonction multiforme permet de ramener ce problème à un problème de singularité pour une application de projection.
4. **Singularités apparentes** : Le point singulier  $z_0$  est appelé singularité apparente de  $f(z)$  si  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  existe. Par exemple  $z = 0$  est la singularité apparente de  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ .
5. **Singularités essentielles** : Une singularité qui n'est ni un pôle, ni un point de branchement, ni une singularité apparente est appelée singularité essentielle.

Il est possible d'effectuer au voisinage de  $z_0$  un développement en série de Laurent, et de décrire la nature de la singularité à partir de celui-ci.

### 3.3.2.1 Cas des singularités de pôles

Dans ce cas, on suppose que les seules singularités de la fonction  $\hat{f}(s)$  sont des pôles, aux points  $P_1, \dots, P_n$ , ce qui convient particulièrement aux cas des fonctions rationnelles concernant la TC des fonctions de fluage de notre problème. Chaque pôle  $P_j$  de  $\hat{f}(s)$  correspond à un nombre complexe  $s_j$ . Pour appliquer le théorème de Cauchy afin d'évaluer l'intégrale de Bromwich (3.4), il faut éviter les pôles par le contour  $C$  défini dans la partie de gauche de la figure 3.1 :

$$C = C_0 + \bigcup_{j=1}^n C_j + \bigcup_{j=1}^n L_{j1} + \bigcup_{j=1}^n L_{j2} \tag{3.5}$$

où  $C_0 = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ ,  $\Gamma_1$  est l'arc  $BGHIA$  du cercle de rayon  $R$  centré à l'origine,  $C_j$  sont les cercles, de rayons quelconques, enfermant les pôles  $P_j$ . Les droites parallèles  $L_{j1}$ ,  $L_{j2}$  joignant les  $C_j$  à  $C_0$ , sont très proches de façon que :

$$\oint_{L_{j1}} \hat{f}(s)e^{st} ds + \oint_{L_{j2}} \hat{f}(s)e^{st} ds = 0 \tag{3.6}$$

Ceci est vrai car la fonction  $\hat{f}(s)e^{st}$  ne change pas de signe quand le chemin d'intégration fait le tour d'un point de singularité de pôle.

Puisque la fonction  $\hat{f}(s)e^{st}$  est analytique sur  $C$  et dans la région délimitée par  $C$ , d'après le théorème de Cauchy, on a :

$$\oint_C \hat{f}(s)e^{st} ds = 0 \tag{3.7}$$

---

<sup>1</sup>Une fonction est analytique si elle est développable en série entière au voisinage de chaque point de son ensemble ouvert de définition

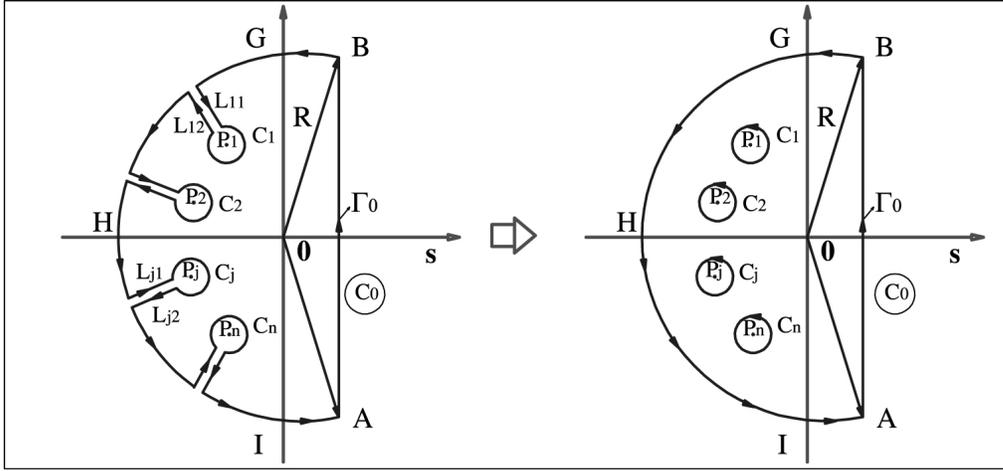


FIG. 3.1 Contour de Bromwich pour calculer la transformation inverse dans le cas des singularités de pôles

La combinaison avec les relations (3.5) et (3.6) donne :

$$\oint_{C_0} \hat{f}(s) e^{st} ds = \sum_{j=1}^n \oint_{C_j} \hat{f}(s) e^{st} ds \quad (3.8)$$

où les intégrales le long des contours  $C_0$  et  $C_j$  (Eq. 3.8) sont dans le sens direct comme indiqué dans la partie de droite de la figure 3.1.

Puisque la limite  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \hat{f}(s)$  tend vers zéro, on peut donc appliquer le lemme de Jordan [89] pour le chemin d'intégration  $\Gamma_1$  :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_1} \hat{f}(s) e^{st} ds = 0 \quad (3.9)$$

D'où

$$f(t) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi I} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \hat{f}(s) e^{st} ds = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi I} \int_{C_0} \hat{f}(s) e^{st} ds \quad (3.10)$$

D'après la relation (3.8), et en appliquant le théorème des résidus, on obtient que  $f(t)$  est la somme des résidus de  $\hat{f}(s)e^{st}$  aux pôles  $s_j$  de  $\hat{f}(s)$  :

$$f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi I} \sum_{j=1}^n \oint_{C_j} \hat{f}(s) e^{st} ds = \sum_{j=1}^n \text{Res} \left( \hat{f}(s) e^{st}, s_j \right) \quad (3.11)$$

Ici,  $\text{Res} \left( \hat{f}(s) e^{st}, s_j \right)$  désigne le résidu de  $\hat{f}(s) e^{st}$  au pôle  $s_j$ .

On présente dans la suite des cas particuliers utilisés fréquemment dans les calculs en viscoélasticité linéaire non vieillissante :

- Dans le cas où  $s = s_0$  est un pôle d'ordre  $k$  de la fonction  $\hat{g}(s)$ . Il existe une formule simple qui donne le résidu au point  $s_0$  de la fonction  $\hat{g}(s)$  :

$$a_{-1} = \lim_{s \rightarrow a} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1} \left( (s-s_0)^k \hat{g}(s) \right)}{ds^{k-1}} \quad (3.12)$$

Si  $s = s_0$  est un point de singularité essentielle, le résidu peut parfois être trouvé en utilisant des développements en séries de Laurent.

- Dans le cas où  $\hat{g}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$  et  $P(s)$  est un polynôme de degré inférieur à celui du polynôme  $Q(s)$ , on peut décomposer  $\hat{g}(s)$  en formes rationnelles simples comme suit [106] :

$$\hat{g}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{i=1}^p \left( \sum_{k=1}^{m^i} \frac{A_k^i}{(s - s_i)^k} \right) \quad (3.13)$$

$$Q(s) = \prod_{i=1}^p (s - s_i)^{m^i}, \quad \sum_{i=1}^p m^i = n, \quad (s - s_i)^{m^i} \hat{f}(s) = L_i(s) \quad (3.14)$$

$$A_k^i = \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{1}{(m^i - k)!} \frac{d^{(m^i - k)}}{ds^{(m^i - k)}} \{L_i(s)\} \quad (3.15)$$

où  $s_i$  sont les racines de degré  $m^i$  du polynôme  $Q(s)$ . Dans ce cas, on obtient une formule très pratique pour l'inverse de la TL de  $\hat{g}(s)$  :

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{g}(s)\} = \sum_{i=1}^p e^{s_i t} \left( \sum_{k=1}^{m^i} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A_k^i \right) \quad (3.16)$$

Dans le cas particulier, où toutes les racines de  $Q(s)$  sont des racines distinctes, on peut obtenir une forme plus simple pour  $g(t)$  :

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{g}(s)\} = \sum_{i=1}^p L_i(s) e^{s_i t} \quad (3.17)$$

Il est à noter que les formules (3.12-3.15) sont évaluées dans le plan complexe. Si la fonction  $\hat{g}(s)$  n'a pas de point de branchement et si tous les points de singularité sont sur l'axe réel, ces relations peuvent être évaluées comme des fonctions de la variable réelle.

### 3.3.2.2 Cas des singularités de pôle coexistant avec des points de branchement

On considère ici le cas où la fonction  $\hat{f}(s)$  a simultanément  $m$  pôles réels, aux points  $P_1, \dots, P_m$ , et  $n$  couples de point de branchement  $\{B_{11}, B_{12}\}, \dots, \{B_{n1}, B_{n2}\}$  qui sont classés comme l'indique la figure 3.2. On suppose que toutes les singularités de pôle  $P_k$  sont à l'extérieur des couples  $\{B_{j1}, B_{j2}\}$  de deux points de branchement successifs. Les points  $P_j$  et  $B_{ji}$  correspondent respectivement aux nombres complexes  $s_j^p$  et  $s_{ji}^b$ .

S'il n'existe aucun point de branchement, comme dans le cas précédent, on a prouvé que l'intégrale le long du contour  $C_0 = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$  est égale à la somme des résidus aux points  $P_1, \dots, P_n$ . Par contre dans le cas présent, on doit modifier le contour  $C_0$  pour assurer l'uniformité de la fonction  $\hat{f}(s)$ . On propose ici le contour  $C_0$  comme illustré dans la partie de gauche de la figure 3.2 :

$$C_0 = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 + \bigcup_{j=1}^n C_j + \bigcup_{j=1}^n L_{j1} + \bigcup_{j=1}^n L_{j2} \quad (3.18)$$

où  $C_j$  sont les lacets, constitués par deux arcs de cercles  $C_{j1}$  et  $C_{j2}$  centrés en  $B_{j1}$  et  $B_{j2}$  de même rayon  $\varepsilon$  tendant vers zéro, que l'on joint à l'aide de deux segments parallèles  $K_j M_j$  et  $N_j L_j$ . Ces deux segments se situent de part et d'autre de la coupure  $B_{j1} B_{j2}$ .  $L_{j1}, L_{j2}$  sont les droites parallèles joignant  $C_j$  à l'arc  $BGHIA$ . Elles sont très proches de telle sorte que la somme de leurs intégrales curvilignes soit égale à zéro comme dans le cas de la relation (3.6). En appliquant le théorème de Cauchy pour ce

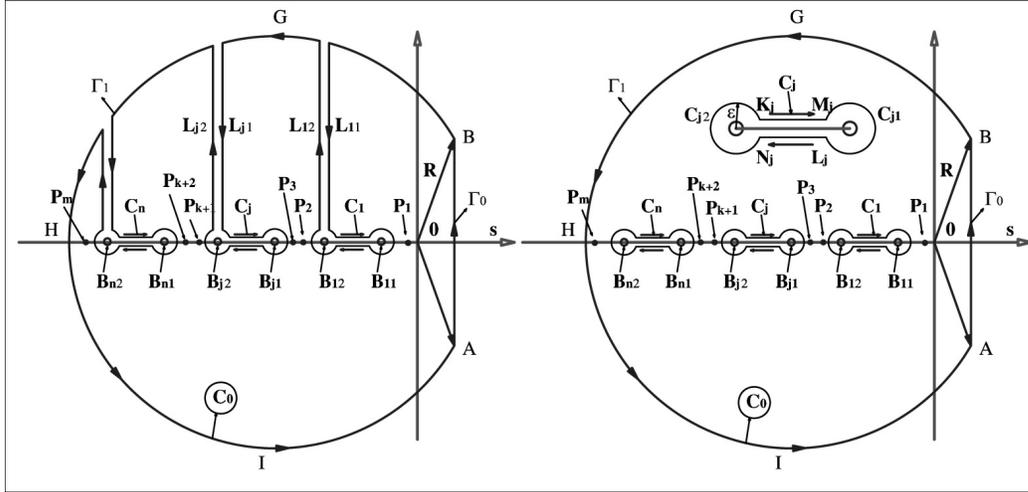


FIG. 3.2 Le contour de Bromwich, fonction avec point de pôle et de branchement

nouveau contour  $C_0$  (3.18), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \text{Res} \left( \hat{f}(s) e^{st}, s_j^p \right) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi I} \int_{\Gamma_0} \hat{f}(s) e^{st} ds + \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi I} \int_{\Gamma_1} \hat{f}(s) e^{st} ds \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi I} \sum_{j=1}^n \oint_{C_j} \hat{f}(s) e^{st} ds + \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi I} \sum_{j=1}^n \oint_{L_{j1} \cup L_{j2}} \hat{f}(s) e^{st} ds \end{aligned} \quad (3.19)$$

où les intégrales le long de  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  correspondent au sens direct, alors que celles le long des lacets  $C_j$  sont dans le sens antitrigonométrique. Comme pour le cas précédent, le deuxième terme et le quatrième terme du second membre de la relation (3.19) sont nuls. On obtient finalement :

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi I} \int_{\Gamma_0} \hat{f}(s) e^{st} ds \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi I} \sum_{j=1}^n \oint_{C_j} \hat{f}(s) e^{st} ds + \sum_{j=1}^m \text{Res} \left( \hat{f}(s) e^{st}, s_j^p \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Les intégrales le long des lacets  $C_j$  sont calculées dans le sens antitrigonométrique comme l'indique la figure 3.2 :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{C_j} \hat{f}(s) e^{st} ds = I_{j1} + I_{j2} + J_{j1} + J_{j2} \quad (3.21)$$

où

$$\begin{aligned} I_{j1} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{C_{j1}} \hat{f}(s) e^{st} ds & I_{j2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{C_{j2}} \hat{f}(s) e^{st} ds \\ J_{j1} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{K_j M_j} \hat{f}(s) e^{st} ds & J_{j2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{L_j N_j} \hat{f}(s) e^{st} ds \end{aligned} \quad (3.22)$$

- Pour l'intégrale le long du contour  $C_{j1}$ , on pose  $s = s_{j1}^b + \varepsilon e^{I\theta}$ , puis  $ds = I\varepsilon e^{I\theta} d\theta$ . Quand on parcourt  $C_{j1}$  selon le sens antitrigonométrique,  $\theta$  varie de  $\pi$  à  $-\pi$ . D'où :

$$I_{j1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( I\varepsilon \int_{\pi}^{-\pi} \hat{f}(s_{j1}^b + \varepsilon e^{I\theta}) e^{(s_{j1}^b + \varepsilon e^{I\theta})t} e^{I\theta} d\theta \right) = 0 \quad (3.23)$$

car la limite  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{f}(s_{j1}^b + \varepsilon e^{I\theta})$  est constante, et la limite  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{(s_{j1}^b + \varepsilon e^{I\theta})t}$  vaut  $e^{s_{j1}^b t}$ . De la même façon, on en déduit que  $I_{j2} = 0$ .

- Pour l'intégrale le long des segments  $K_j M_j$  et  $L_j N_j$ , en remarquant que lorsqu'on contourne un point de branchement la fonction  $\hat{f}(s)$  change de signe, il suit que  $J_{j1} = J_{j2}$ . La relation (3.20) devient alors :

$$f(t) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi I} \sum_{j=1}^n \int_{s_{j2}^b}^{s_{j1}^b} \hat{f}(s) e^{st} ds + \sum_{j=1}^m \text{Res} \left( \hat{f}(s) e^{st}, s_j^p \right) \quad (3.24)$$

Les résidus  $\text{Res}(\hat{f}(s) e^{st}, s_j^p)$  sont calculés comme dans les cas précédents. Mais il faut être attentif au fait que toutes les manipulations sont réalisées dans le plan complexe. Les intégrales  $J_{j1}$  sont également évaluées dans le plan complexe. Si l'on veut les ramener à des calculs simples dans l'ensemble réel, il faut connaître exactement la position relative entre les points de branchement et les points de singularité. On reviendra sur cette question dans le cas du schéma autocohérent généralisé qui fait apparaître un terme en radicale.

### 3.4 Inverse numérique de la transformée de Laplace

Il existe naturellement bien des cas où la fonction  $\hat{f}(s)$ , dans l'espace de Laplace, est trop complexe pour pouvoir procéder à une inversion analytique. On peut notamment citer en exemple :

- L'utilisation du schéma d'homogénéisation d'autocohérent généralisé pour évaluer la TC de la fonction effective de fluage d'un composite à deux phases (4.14) : En général, on ne connaît pas la position relative entre les points de branchement et les pôles, et donc on ne peut pas construire un contour qui a la propriété (Eq. 3.18), à la base de simplifications considérables du calcul de l'intégrale de Bromwich (3.4).
- Pour des problèmes d'homogénéisation multi-échelle impliquant un large spectre microscopique, l'inversion de la TC de la fonction de fluage obtenue par le schéma de Mori-Tanaka nécessite la détermination d'un très grand nombre de pôles. Cette détermination ne peut se faire que numériquement et les erreurs d'arrondis conduisent souvent à des pôles complexes, ce qui fausse l'expression de la fonction à inverser.

Les méthodes d'inversion numérique constituent une alternative sérieuse car elles permettent d'inverser une fonction quelconque  $\hat{f}(s)$  sans avoir besoin de connaître les points de branchement, les pôles et leurs positions relatives.

Dans cette section, on va étudier deux méthodes numériques pour inverser la transformée de Laplace :

- La première se base sur la méthode d'accélération de convergence de la série de Fourier obtenue à partir de l'approche de l'intégrale (3.4) par la méthode des trapèzes [30, 2].
- La deuxième est la suite inverse de Post-Widder obtenue par les dérivées successives de la fonction  $\hat{f}(s)$  [58, 59].

### 3.4.1 Séries approchant la formule de Bromwich

Dans ce paragraphe, on va présenter les séries proposées par Durbin [32] pour calculer numériquement l'intégrale de Bromwich (3.4).

A partir de la définition de la transformée de Laplace (3.2), et en considérant le paramètre  $s = x + Iy$  comme une variable complexe, on obtient :

$$\operatorname{Re} \left\{ \hat{f}(s) \right\} = \int_0^{\infty} e^{-xt} \cos(yt) f(t) dt \quad \operatorname{Im} \left\{ \hat{f}(s) \right\} = - \int_0^{\infty} e^{-xt} \sin(yt) f(t) dt \quad (3.25)$$

On en déduit que  $\operatorname{Re} \left\{ \hat{f}(s) \right\}$  est une fonction paire et  $\operatorname{Im} \left\{ \hat{f}(s) \right\}$  est une fonction impaire de  $y$ . Ensuite, pour décrire le parcours de l'intégrale de Bromwich (3.4), on pose  $s = \gamma + Iw$  et donc  $ds = I dw$ . Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{e^{\gamma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \operatorname{Re} \left\{ \hat{f}(s) \right\} + I \operatorname{Im} \left\{ \hat{f}(s) \right\} \right] [\cos(wt) + I \sin(wt)] dw, \quad t > 0 \quad (3.26) \\ &= \frac{e^{\gamma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \operatorname{Re} \left\{ \hat{f}(s) \right\} \cos(wt) - \operatorname{Im} \left\{ \hat{f}(s) \right\} \sin(wt) \right] dw \\ &\quad + \underbrace{\frac{I e^{\gamma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \operatorname{Re} \left\{ \hat{f}(s) \right\} \sin(wt) + \operatorname{Im} \left\{ \hat{f}(s) \right\} \cos(wt) \right] dw}_0 \\ &= \frac{e^{\gamma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \operatorname{Re} \left\{ \hat{f}(s) \right\} \cos(wt) - \operatorname{Im} \left\{ \hat{f}(s) \right\} \sin(wt) \right] dw \end{aligned}$$

Puisque  $\operatorname{Re} \left\{ \hat{f}(s) \right\} \sin(wt)$  et  $\operatorname{Im} \left\{ \hat{f}(s) \right\} \cos(wt)$  sont des fonctions impaires, le second terme (troisième ligne de (3.26)) s'annule ce qui se traduit par  $f(t)$  réelle. Par ailleurs,  $\operatorname{Re} \left\{ \hat{f}(s) \right\} \cos(wt)$  et  $\operatorname{Im} \left\{ \hat{f}(s) \right\} \sin(wt)$  sont les fonctions paires, ce qui entraîne :

$$f(t) = \frac{e^{\gamma t}}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \operatorname{Re} \left\{ \hat{f}(s) \right\} \cos(wt) - \operatorname{Im} \left\{ \hat{f}(s) \right\} \sin(wt) \right] dw, \quad t > 0 \quad (3.27)$$

En outre, quand  $t < 0$  alors  $f(t) = 0$ . En remplaçant  $t$  par  $-t$  dans la relation (3.27), on obtient :

$$\int_0^{\infty} \left[ \operatorname{Re} \left\{ \hat{f}(s) \right\} \cos(wt) + \operatorname{Im} \left\{ \hat{f}(s) \right\} \sin(wt) \right] dw = 0, \quad t > 0 \quad (3.28)$$

Finalement, on obtient les trois formules suivantes [32] :

$$f(t) = \frac{2e^{\gamma t}}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \hat{f}(s) \right\} \cos(wt) dw \quad (3.29)$$

$$= \frac{-2e^{\gamma t}}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \left\{ \hat{f}(s) \right\} \sin(wt) dw \quad (3.30)$$

$$= \frac{e^{\gamma t}}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \hat{f}(s) \exp(Iwt) \right\} dw \quad (3.31)$$

En discrétisant les intégrales ci-dessus, et en utilisant la règle trapézoïdale avec le pas  $\pi/T$ , on

obtient les approximations correspondant, respectivement, aux formes (3.29), (3.30) et (3.31) :

$$f_1(t) = \frac{2}{T}e^{\gamma t} \left[ \frac{F(\gamma)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \hat{f} \left( \gamma + \frac{Ik\pi}{T} \right) \right\} \cos \left( \frac{k\pi}{T}t \right) \right] \quad (3.32)$$

$$f_2(t) = -\frac{2}{T}e^{\gamma t} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} \left\{ \hat{f} \left( \gamma + \frac{Ik\pi}{T} \right) \right\} \sin \left( \frac{k\pi}{T}t \right) \quad (3.33)$$

$$f_3(t) = \frac{1}{T}e^{\gamma t} \left[ \frac{F(\gamma)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \hat{f} \left( \gamma + \frac{Ik\pi}{T} \right) \exp \left( \frac{Ik\pi}{T}t \right) \right\} \right] \quad (3.34)$$

Bien que les trois expressions (3.29), (3.30) et (3.31) soient mathématiquement équivalentes, les trois formules de discrétisation (3.32), (3.33) et (3.34) ne le sont pas. En effet, les expressions des erreurs de discrétisation d'après Durbin [32] s'écrivent :

$$Er_1(\gamma, t, T) = f(t) - f_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-2\gamma kT) \left[ \hat{f}(2kT + t) + \exp(2\gamma t) \hat{f}(2kT - t) \right] \quad (3.35)$$

$$Er_2(\gamma, t, T) = f(t) - f_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-2\gamma kT) \left[ \hat{f}(2kT + t) - \exp(2\gamma t) \hat{f}(2kT - t) \right] \quad (3.36)$$

$$Er_3(\gamma, t, T) = f(t) - f_3(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-2\gamma kT) \hat{f}(2kT + t) \quad (3.37)$$

En analysant les expressions des erreurs ci-dessus, on trouve que  $f_3(t)$  (considérée comme la moyenne de  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$ ) est la meilleure approche de  $f(t)$  parce que son erreur de discrétisation ne contient pas le terme croissant en  $\exp(2\gamma t)$ . Dans le paragraphe qui suit, on va étudier l'algorithme de différence quotient, établi par Rutishauser [95], appliqué par De Hoog et al [30] et Ahn et al. [2], pour accélérer la convergence de la série  $f_3(t)$ .

### 3.4.2 Techniques d'accélération de la convergence d'une série entière

En posant  $a_0 = \frac{F(\gamma)}{2}$ ,  $a_k = \hat{f} \left( \gamma + \frac{Ik\pi}{T} \right)$ ,  $k = 1, 2, \dots, \infty$ , et  $z = \exp \left( \frac{I\pi t}{T} \right)$ , on peut alors écrire la fonction  $f_3(t)$  sous la forme d'une série entière :

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \frac{F(\gamma)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \hat{f} \left( \gamma + \frac{Ik\pi}{T} \right) \exp \left( \frac{Ik\pi}{T}t \right) \right\} \quad (3.38)$$

Puisque la série (3.38) converge très lentement, il faut donc rechercher des méthodes pour accélérer sa convergence. En désignant la suite tirée de cette série par  $S = \{s_n = \sum_{k=0}^n a_k z^k\}_{n \in \mathbb{N}}$ , on désire trouver une autre suite  $S' = \{s'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dont chaque élément est la transformation linéaire ou non linéaire d'un ensemble fini d'éléments de  $S$  selon :

$$S' = T(S) : (s_n, \dots, s_{n+k}) \rightarrow s'_n, \quad (3.39)$$

et satisfaisant à :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s'_n - g(z)}{s_n - g(z)} = 0, \quad (3.40)$$

ce qui signifie que la suite  $S'$  converge plus rapidement que  $S$ .

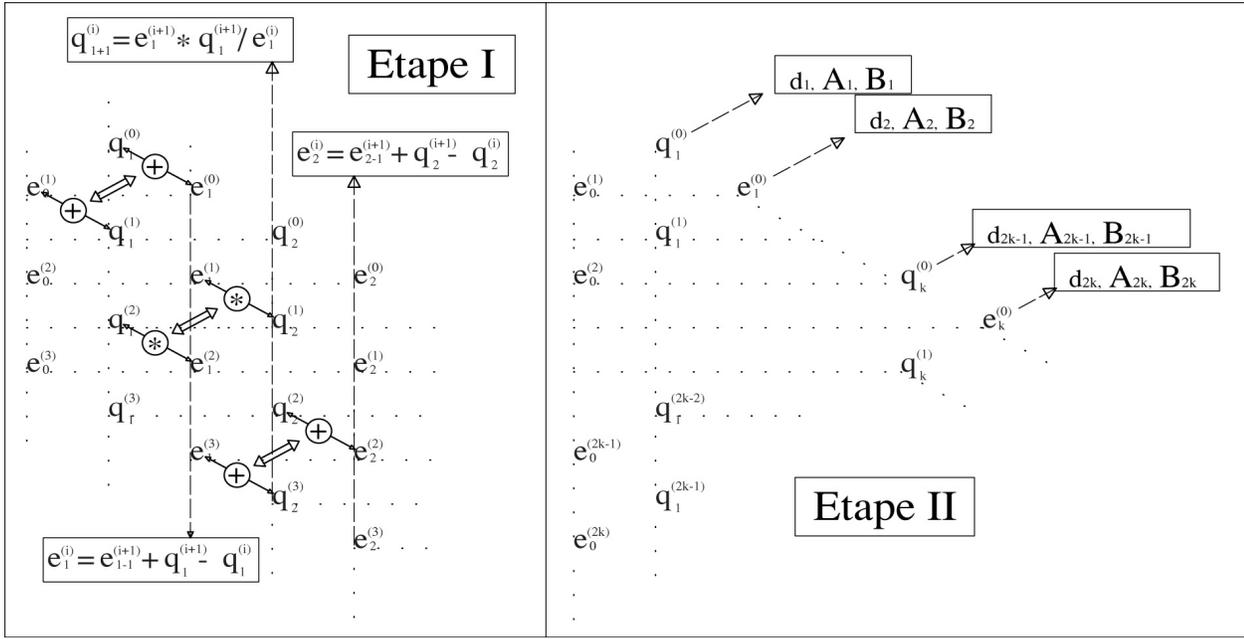


FIG. 3.3 Algorithme pour calculer les coefficients  $d_j, A_j, B_j$  [2]

Une transformation non linéaire consiste en l'approximation de Padé. Cette méthode consiste à trouver des suites  $S'$ , ayant la forme d'une fraction continue, qui donne une excellente approximation de la fonction  $g(z)$  [30]. Il s'agit alors de déterminer les coefficients de cette fraction continue. L'algorithme de différence quotient, établi par Rutishauser [95], peut alors être utilisé pour déterminer ces coefficients. Il est souvent utilisé pour inverser la transformée de Laplace [30, 2].

La fraction continue  $v(z)$  correspondant à la série entière  $g(z)$  peut être définie comme suit :

$$v(z) = \frac{d_0}{1 + \frac{d_1 z}{1 + \frac{d_2 z}{1 + \dots}}} \quad (3.41)$$

L'algorithme de différence quotient permet de calculer les coefficients  $d_i$  à partir des coefficients  $a_j$ . On définit d'abord deux ensembles des paramètres intermédiaires à partir de  $a_j$  :

$$e_0^{(i)} = 0, \quad q_1^{(i)} = \frac{a_{i+1}}{a_i}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (3.42)$$

$$e_k^{(i)} + q_k^{(i)} = e_{k-1}^{(i+1)} + q_k^{(i+1)}, \quad i = 0, 1, \dots, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.43)$$

$$e_k^{(i)} \times q_{k+1}^{(i)} = e_k^{(i+1)} \times q_k^{(i+1)}, \quad i = 0, 1, \dots, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.44)$$

Finalement, les coefficients  $d_k$  sont obtenus par les relations :

$$d_0 = a_0, \quad d_{2k-1} = -q_k^{(0)}, \quad d_{2k} = -e_k^{(0)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.45)$$

On note par  $v(z, M)$  la  $M$ -ième fraction partielle de  $v(z)$  :

$$v(z, M) = d_0 / (1 + d_1 z / (\dots (1 + d_M z))) = A_M / B_M \quad (3.46)$$

où les coefficients  $A_M$  et  $B_M$  sont définis par :

$$A_{-1} = 0, \quad B_{-1} = 1, \quad A_0 = d_0, \quad B_0 = 1 \quad (3.47)$$

$$A_k = A_{k-1} + d_k z A_{k-2}, \quad B_k = B_{k-1} + d_k z B_{k-2} \quad (3.48)$$

Les étapes pour construire la fraction continue  $v(z, M)$ , associée à la série entière  $g(z)$  sont présentées sur le schéma (3.3).

En calculant les  $v(z, M)$ , on obtient l'approximation de  $f(t)$  par :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{T} \exp(\gamma t) \operatorname{Re} \{v(z)\} \\ &= \frac{1}{T} \exp(\gamma t) \operatorname{Re} \{v(z, M) + E^M\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

où  $E^M$  est l'erreur de troncature. Il est très difficile d'estimer cette erreur, mais avec une tolérance  $TOL$  donnée, on peut trouver la valeur optimale  $M^*$  pour laquelle on peut arrêter le procédure de calcul par la condition imposée à  $v(z, M)$  :

$$|\operatorname{Re} \{v(z, M^*) - v(z, M^* - 1)\}| < TOL \quad (3.50)$$

Si la condition de la différence absolue (3.50) entre deux termes successifs de  $v(z, M)$  est satisfaite, l'approximation (3.49) devient :

$$f(t) \approx \frac{1}{T} \exp(\gamma t) \operatorname{Re} \{v(z, M^*)\} \quad (3.51)$$

L'algorithme [30, 2] pour calculer  $f(t)$  (Eq. 3.51) est représenté ci-dessous :

**Algorithm 3** *Etape1* : affecter  $d_0 = a_0$ ,  $A_{-1} = 0$ ,  $B_{-1} = 0$ ,  $A_0 = d_0$ ,  $B_0 = 1$ .

*Etape2* : affecter  $e_0^{(1)} = 0$  et  $q_1^{(0)} = a_1/a_0$ .

*Etape3* : affecter  $d_1 = -q_1^{(0)}$ ,  $A_1 = A_0 + z d_1 A_{-1}$ , et  $B_1 = B_0 + z d_1 B_{-1}$ .

*Etape4* : affecter  $e_0^{(2)} = 0$ ,  $q_1^{(1)} = a_2/a_1$ , et  $e_1^{(0)} = e_0^{(1)} + q_1^{(1)} - q_1^{(0)}$ .

*Etape5* : affecter  $d_2 = -e_1^{(0)}$ ,  $A_2 = A_1 + z d_2 A_0$ , et  $B_2 = B_1 + z d_2 B_0$ .

*Etape6* : affecter  $M = 2$ .

*Etape7* : tantque  $|B_M/A_M - B_{M-1}/A_{M-1}| \geq TOL$ , faire étapes 8 – 21.

*Etape8* : affecter  $M = M + 1$ .

*Etape9* : affecter  $e_0^{(M)} = 0$  et  $q_1^{(M-1)} = a_M/a_{M-1}$ .

*Etape10* : si  $M = 2k - 1 \geq 3$ , do étapes 11 – 14.

*Etape11* : pour  $j = 1, \dots, k - 1$ , faire étapes 12 – 13.

*Etape12* : affecter  $e_j^{(2k-2j-1)} = e_{j-1}^{(2k-2j)} + q_j^{(2k-2j)} - q_j^{(2k-2j-1)}$ .

*Etape13* : affecter  $q_{j+1}^{(2k-2j-2)} = q_j^{(2k-2j-1)} \times e_j^{(2k-2j-1)} / e_j^{(2k-2j-2)}$ .

*Etape14* : affecter  $d_M = -q_k^{(0)}$ .

*Etape15* : si  $M = 2k \geq 4$ , faire Etapes 16 – 20.

*Etape16* : pour  $j = 1, \dots, k - 1$ , faire étapes 17 – 18.

*Etape17* : affecter  $e_j^{(2k-2j)} = e_{j-1}^{(2k-2j+1)} + q_j^{(2k-2j+1)} - q_j^{(2k-2j)}$ .

*Etape18* : affecter  $q_{j+1}^{(2k-2j-1)} = q_j^{(2k-2j)} \times e_j^{(2k-2j)} / e_j^{(2k-2j-1)}$ .

*Etape19* : affecter  $e_k^{(0)} = e_{k-1}^{(1)} + q_k^{(1)} - q_k^{(0)}$ .

*Etape20* : affecter  $d_M = -e_k^{(0)}$ .

*Etape21* : affecter  $A_M = A_{M-1} + z d_M A_{M-2}$ , et  $B_M = B_{M-1} + z d_M B_{M-2}$ .

*Etape22* : affecter  $M^* = M$ .

*Etape23* :  $f(t) \approx \frac{1}{T} \exp(\gamma t) \operatorname{Re} \{v(z, M^*)\}$

### 3.4.3 Méthode de Post-Widder

On étudie, dans ce paragraphe, la suite de Post-Widder pour l'approximation de la transformée inverse de Laplace. Cette suite d'approximation converge uniformément et possède toutes les propriétés essentielles de la fonction originale : positivité, monotonie et convexité [58, 59]. Cette suite semble très convenable pour notre cas, c'est-à-dire pour inverser les fonctions rationnelles et irrationnelles. En pratique, on peut utiliser le terme de rang 3 de cette suite pour approcher la transformée inverse avec une précision acceptable [114]. Mais l'inconvénient de cette méthode est la difficulté de dériver analytiquement plusieurs fois la fonction à inverser. Pour ne pas recourir à un code de calcul symbolique, on propose ici un algorithme pour réaliser cette dérivation.

Cette suite donne l'approximation de la transformée de Laplace, par les dérivées successives de  $\hat{f}(s)$ . On construit la suite  $(L_n)_0^\infty$  dont l'élément  $f_n(t)$  ( $n = 0, \dots, \infty$ ) est obtenu à partir de la dérivée d'ordre  $n$  de  $\hat{f}(s)$  :

$$f_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!} s^{n+1} \frac{d^n \hat{f}(s)}{ds^n} \Big|_{s=\frac{n+1}{t}} \quad (3.52)$$

On obtient donc l'approximation de  $f(t)$  pour une valeur de  $n$  suffisamment grande :

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \quad (3.53)$$

Ainsi, le terme  $f_n(t)$  de la suite  $(L_n)_0^\infty$  est l'approximation de rang  $n$  de  $\mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\}$ .

On recense ci-dessous les propriétés importantes de la suite  $(L_n)_0^\infty$ , valables pour  $t \geq 0$  et  $n \geq 0$  [58, 59] :

- Le comportement instantané et à long terme est conservé :

$$\begin{aligned} f_n(0^+) &= f(0^+), & \dot{f}_n(0^+) &= \dot{f}(0^+) \\ f_n(\infty) &= f(\infty), & \dot{f}_n(\infty) &= \dot{f}(\infty) \end{aligned} \quad (3.54)$$

- Si  $f(t)$  est monotone et convexe, cette propriété est conservée, pour  $f_n(t)$ .
- Si  $f(t)$  est convexe, alors  $f(t) \leq f_n(t)$ . Si  $f(t)$  est concave, alors  $f(t) \geq f_n(t)$ . La complaisance de fluage étant une fonction concave [23, 56], la méthode de Post-Widder en donne une borne inférieure.

Pour calculer le terme de rang  $n$  de la suite  $(L_n)_0^\infty$ , on a deux possibilités :

- On calcule la dérivée  $n$  fois de  $\hat{f}(s)$  et on obtient directement  $f_n(t)$  comme une fonction continue de  $t$ .
- On approche numériquement  $f_n(t)$  par une autre suite proposée par Jagerman [58, 59]. Cette méthode est utile dans le cas général, quand on ne peut pas calculer de façon symbolique la dérivée d'ordre  $n$  d'une fonction quelconque. Cependant, cette méthode ne convient que lorsque la fonction  $f(t)$  est bornée, ce qui n'est pas notre cas. Dans ce travail, on va utiliser principalement la première possibilité, en développant un outil de calcul analytique des dérivées sans recours au calcul symbolique

Pour notre cas, la fonction  $\hat{f}(s)$  est soit une fonction rationnelle, soit une fonction irrationnelle. L'approche de  $f(t)$  revient alors à calculer la dérivée de degré le plus élevé possible de la fonction donnée  $\hat{f}(s)$ . On propose un algorithme pour calculer la dérivée à l'ordre  $n$  de  $\hat{f}(s)$  pour chacun des deux cas particuliers :  $\hat{f}(s)$  est une fonction rationnelle et  $\hat{f}(s)$  est une fonction irrationnelle. L'idée de base est de pré-établir de façon récurrente la relation entre les coefficients de la  $l$ -ième dérivée  $\hat{f}^{(l)}(s)$  de  $\hat{f}(s)$  et ceux de  $\hat{f}^{(l-1)}(s)$ . Le calcul de la dérivée se ramène au calcul du vecteur des coefficients de la dérivée  $\hat{f}^{(l)}(s)$  à partir ceux de  $\hat{f}^{(l-1)}(s)$ . Cette méthode permet de gagner un facteur 100 sur le temps de calcul de la dérivée d'ordre 2 d'une fonction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes de degré très grand (1000 par exemple).

### 3.4.3.1 Algorithme d'accélération des calculs des dérivées

**3.4.3.1.1 Fonction rationnelle** On établit ici l'algorithme pour calculer la  $l$ -ième dérivée de  $\hat{f}(s) = \frac{G_{n_0}(s)}{H_{m_0}(s)}$ , où  $G_{n_0}(s)$  et  $H_{m_0}(s)$  sont deux polynômes de degré  $n_0$  et  $m_0$  avec  $n_0 < m_0$  et se mettant sous la forme :

$$G_{n_0}(s) = \sum_{k=0}^{n_0} g_{0,k} s^k, \quad H_{m_0}(s) = \sum_{k=0}^{m_0} h_{0,k} s^k \quad (3.55)$$

En notant la  $l$ -ième dérivée de la fonction  $\hat{f}(s)$  par  $\hat{f}^{(l)}(s) = \frac{G_{n_l}(s)}{H_{m_l}(s)}$ , on obtient :

$$G_{n_l}(s) = \sum_{k=0}^{n_l} g_{l,k} s^k = \sum_{k=0}^{n_l} (g_{l,k}^a - g_{l,k}^b) s^k, \quad H_{m_l}(s) = \sum_{k=0}^{m_l} h_{l,k} s^k \quad (3.56)$$

On établit en annexe § H.1 les relations entre les coefficients du numérateur et du dénominateur de  $\hat{f}^{(1)}(s)$  et ceux de  $\hat{f}(s)$  (Eqs. H.3-H.10). Ces relations sont récursives et permettent d'établir les relations déterminant la  $l$ -ième dérivée en fonction de celle  $(l-1)$ -ième de la fonction  $\hat{f}(s)$  :

$$n_l = m_{l-1} + n_{l-1} - 1, m_l = 2m_{l-1} \quad (3.57)$$

$$g_{l,k}^a = \sum_{\substack{j-1+i=k \\ 1 \leq j \leq n_{l-1}, 0 \leq i \leq m_{l-1}}} j g_{l-1,j} h_{l-1,i} \quad k = 0, \dots, n_l \quad (3.58)$$

$$g_{l,k}^b = \sum_{\substack{j-1+i=k \\ 0 \leq j \leq n_{l-1}, 1 \leq i \leq m_{l-1}}} i h_{l-1,i} g_{l-1,j} \quad k = 0, \dots, n_l \quad (3.59)$$

$$h_{l,k} = \sum_{\substack{j+i=k \\ 0 \leq j \leq m_{l-1}, 0 \leq i \leq m_{l-1}}} h_{l-1,j} h_{l-1,i} \quad k = 0, \dots, m_l \quad (3.60)$$

Les relations (3.57-3.60) sont détaillées dans l'annexe § H.1.

**3.4.3.1.2 Fonction irrationnelle** Le deuxième cas qu'on considère ici est la  $l$ -ième dérivée d'une fonction irrationnelle  $\hat{f}(s) = \frac{\sqrt{G_{n_0}(s)}}{H_{m_0}(s)}$ , où  $G_{n_0}(s)$  et  $H_{m_0}(s)$  sont deux polynômes de degré  $n_0$  et  $m_0$  avec  $n_0 > m_0$ , et se mettant sous la forme :

$$G_{n_0}(s) = \sum_{k=0}^{n_0} g_{0,k} s^k, \quad H_{m_0}(s) = \sum_{k=0}^{m_0} h_{0,k} s^k \quad (3.61)$$

En posant  $K_l(s) = \frac{G_{n_l}(s)}{H_{m_l}(s)}$  on obtient, d'après l'annexe § H.2 :

$$\hat{f}^{(l)}(s) = \hat{f}(s) K_l(s) \quad (3.62)$$

$$K_{l+1}(s) = K_1(s) K_l(s) + K_l^{(1)}(s) \quad (3.63)$$

où :

$$G_{n_l}(s) = \sum_{k=0}^{n_l} g_{l,k} s^k, \quad H_{m_l}(s) = \sum_{k=0}^{m_l} h_{l,k} s^k \quad (3.64)$$

$$n_{l+1} = n_1 + n_l + m_l, \quad m_{l+1} = m_1 + 2m_l \quad (3.65)$$

$$n_1 = m_1 - 1, \quad m_1 = m_0 + n_0 \quad (3.66)$$

avec les coefficients  $g_{l,k}$  et  $h_{l,k}$  donnés dans l'annexe § H.2.

### 3.4.3.2 Analyse d'erreur dans le cas d'une fonction rationnelle

On s'intéresse à étudier la propriété de convergence de la méthode de Post-Widder dans les cas où la fonction  $\hat{f}(s)$  est rationnelle ce qui correspond à une complaisance de fluage donnée par une chaîne de Kelvin avec  $m$  unités analogiques. Dans l'espace temporel, on a :

$$f(t) = \frac{1}{E_1} + \frac{t}{\eta_1} + \sum_{i=2}^m \frac{1}{E_i} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right) \quad (3.67)$$

où  $\tau_i = \eta_i/E_i$  sont les temps de retard. Dans le cas où  $\eta_1 = \infty$ , la fonction  $f(t)$  est bornée. Sa transformée de Laplace s'écrit :

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{sE_1} + \frac{1}{s^2\eta_1} + \sum_{i=2}^m \frac{1}{s(E_i + s\eta_i)} \quad (3.68)$$

On obtient facilement la dérivée  $n$  fois de  $\hat{f}(s)$  en décomposant partiellement ses termes sous la sommation :

$$\frac{d^n \hat{f}(s)}{ds^n} = \frac{(-1)^n n!}{s^{n+1} E_1} + \frac{(-1)^n (n+1)!}{s^{n+2} \eta_1} + \sum_{i=2}^m \frac{1}{E_i} \left( \frac{(-1)^n n!}{s^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(s + 1/\tau_i)^{n+1}} \right) \quad (3.69)$$

On en déduit aisément, d'après la relation (3.52), l'approximation de  $f(t)$  par le terme  $f_n(t)$  de rang  $n$  de la méthode de Post-Widder :

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{(-1)^n}{n!} s^{n+1} \frac{d^n \hat{f}(s)}{ds^n} \Big|_{s=\frac{n+1}{t}} \\ &= \frac{1}{E_1} + \frac{t}{\eta_1} + \sum_{i=2}^m \frac{1}{E_i} \left( 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{\tau_i(n+1)}\right)^{n+1}} \right) \end{aligned} \quad (3.70)$$

On constate qu'avec une valeur quelconque de  $n$ ,  $f_n(t)$  donne le résultat exact pour le comportement instantané et à long terme de  $f(t)$  (Eq. 3.54). La forme de  $f_n(t)$  (Eq. 3.70) montre que la méthode de Post-Widder donne le terme  $f_n(t)$  avec la même forme que la fonction à rechercher lorsque la TL de celle-ci est rationnelle. En effet, la seule différence entre la fonction exacte (Eq. 3.67) et son approximation (Eq. 3.70) est le dernier terme en exponentiel pour la première et en fraction en puissance pour la seconde. Cependant, on peut prouver que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{\tau_i(n+1)}\right)^{n+1}} = e^{-\frac{t}{\tau_i}} \quad (3.71)$$

Pour cela, on pose  $g(t) = \left(1 + \frac{t}{\tau_i(n+1)}\right)^{-(n+1)}$ , ce qui donne :

$$\ln g(t) = -(n+1) \ln \left(1 + \frac{t}{\tau_i(n+1)}\right) \quad (3.72)$$

$$= -\frac{\ln \left(1 + \frac{t}{\tau_i} x\right)}{x} \quad \text{avec } x = \frac{1}{(n+1)} \quad (3.73)$$

D'où quand  $n$  tend vers l'infini,  $x$  tend vers zéro. Par la règle de l'Hôpital pour une limite de type  $\frac{0}{0}$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln g(t) = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{t}{\tau_i} x\right)}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{t}{\tau_i}}{1 + \frac{t}{\tau_i} x} = -\frac{t}{\tau_i} \quad (3.74)$$

ce qui permet de retrouver (3.71).

A partir des relations (3.67), (3.70) et (3.71), on déduit que l'erreur de la méthode de Post-Widder de rang  $n$  est mesuré par la différence :

$$\text{Erreur}(f_n(t)) = f(t) - f_n t = \sum_{i=2}^m \check{f}_i(t) \quad (3.75)$$

où :

$$\check{f}_i(t) = \frac{1}{E_i} \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{\tau_i(n+1)}\right)^{n+1}} - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \quad (3.76)$$

Dans le cas d'un problème d'homogénéisation, la fonction  $f(t)$  est la complaisance de fluage effective et les temps  $\tau_i$  correspondent aux temps caractéristiques macroscopiques. On montre dans le chapitre 4 que ces temps caractéristiques peuvent être encadrés par les temps microscopiques sans avoir à les connaître. Ainsi, une borne de l'erreur (3.75) peut être établie sur la base de la seule connaissance du spectre microscopique.

### 3.4.3.3 Exemple numérique

On illustre ici les deux méthodes présentées précédemment. On considère deux jeux de paramètres ( $m = 10$  (Tab. 3.1),  $m = 200$  (Tab. 3.2)) pour la fonction rationnelle  $\hat{f}(s)$  associée à un modèle de Kelvin généralisé (Eq. 3.68).

	$m$	$E_1$ [MPa]	$E_2$	$E_{i \geq 3}$	$\eta_1$ [MPa.jour]	$\eta_2$	$\eta_{i \geq 3}$
Matrice	10	$1.5E + 04$	$2.0E + 04$	$E_2/\sqrt{i}$	$3.50E + 07$	$2.0E + 05$	$\eta_2/i$

TAB. 3.1 Un jeu de paramètres pour m=10

	$m$	$E_1$ [MPa]	$E_2$	$E_{i \geq 3}$	$\eta_1$ [MPa.jour]	$\eta_2$	$\eta_{i \geq 3}$
Matrice	200	$3E + 05$	$2.0E + 03$	$E_2/\sqrt{i}$	$3.50E + 08$	$2.0E + 04$	$\eta_2/i$

TAB. 3.2 Un jeu de paramètres pour m=200

Pour la méthode ACSF, on impose une tolérance  $TOL = 10^{-3}$ . Ensuite, pour chaque jeu de paramètres, on calcule l'approximation de  $f(t)$  par 25 pas de temps : 0, 2, ..., 50. Pour la méthode de Post-Widder, on utilise l'algorithme du paragraphe 3.4.3.1.1 pour calculer les termes  $f_n(t)$  avec  $n = 1, 3, 5$ .

Les fonctions approchées sont présentées par la figure 3.4 pour le cas  $m = 10$  et par la figure 3.5 pour le cas  $m = 200$ . Dans ces figures on présente la comparaison entre les deux méthodes numériques d'inversion de la TL ainsi la fonction  $Erreur(f_n(t))$  (Eq. 3.75) de la méthode Post-Widder, avec  $n = 1, 3, 5$ .

On constate que la fonction approchée de la méthode ACSF, dans ce cas coïncide presque avec la fonction exacte. Mais l'inconvénient de cette méthode est qu'on ne dispose que de valeurs de la fonction approchée que de façon discrète. Par ailleurs, on verra (chapter 7) que cette méthode est très sensible aux erreurs d'arrondi du calcul des paramètres des polynômes de  $\hat{f}(s)$  lorsque leur degré est très grand.

Pour la méthode de Post-Widder, comme on a montré dans le paragraphe 3.4.3.2, on obtient immédiatement la partie instantanée et à long terme avec le premier terme  $f_1(t)$ . Pour la partie à moyen terme, on trouve que  $f_n(t)$  converge très vite. L'avantage de cette méthode par rapport à la méthode ACSF est qu'elle n'est pas sensible aux erreurs d'arrondi du calcul des coefficients de  $\hat{f}(s)$  même pour une valeur très grande de  $m$ , par exemple 1000.

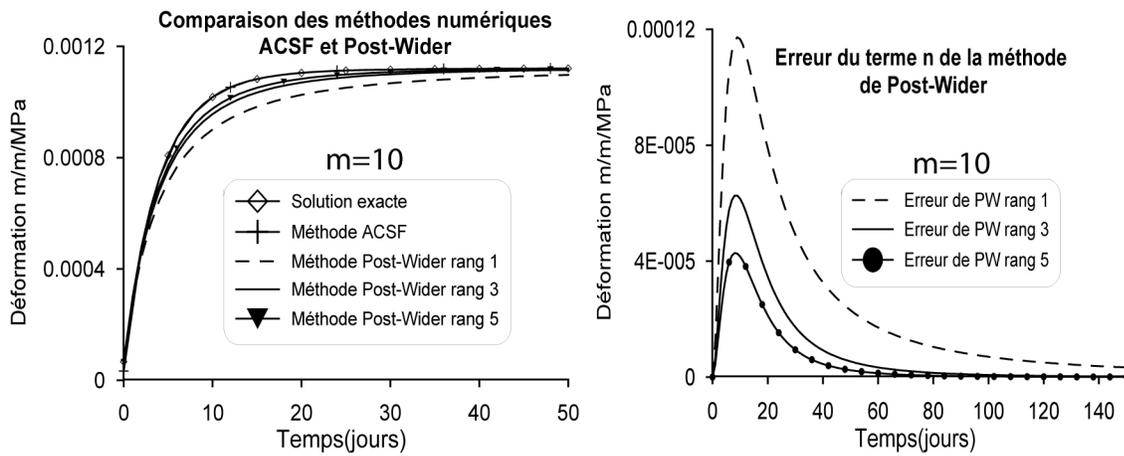


FIG. 3.4 Comparaison entre la méthode ACSF et la méthode de Post-Widder (à gauche). Distribution de l'erreur du terme de rang  $n$  de la méthode de Post-Widder (à droite).

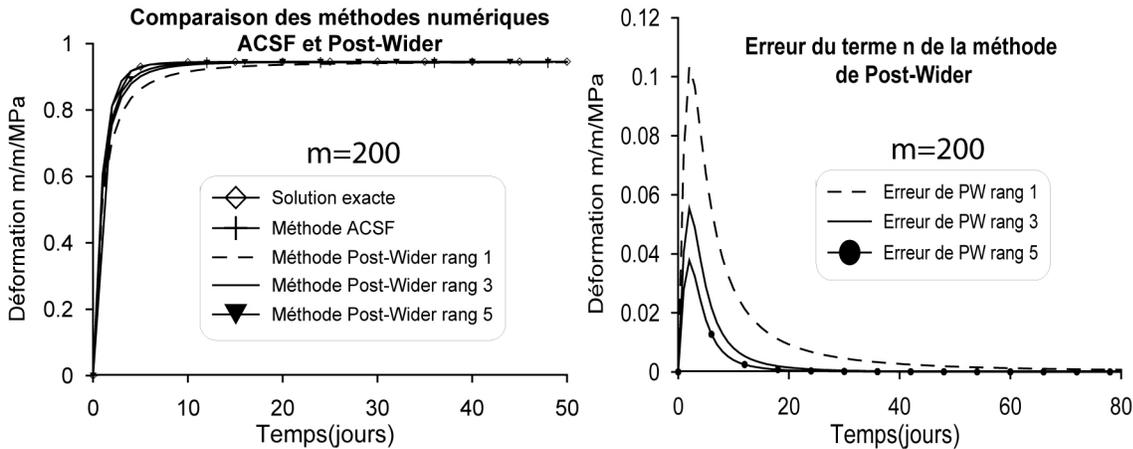


FIG. 3.5 Comparaison entre la méthode ACSF et la méthode de Post-Widder (à gauche). Distribution de l'erreur du terme de rang  $n$  de la méthode de Post-Widder (à droite).

---

## 3.5 Conclusion

La méthode inverse numérique de la TL basée sur l'accélération de la convergence de la série de Fourier donne une bonne approximation dans l'espace temporel. Bien que cette méthode soit très répandue dans la littérature, elle n'est efficace que pour les fonctions rationnelles de bas degré. Avec les fonctions rationnelles de grand degré, cette méthode s'avère instable (chapitre 6 et 7). La méthode inverse de Post-Widder de rang 2 ou 3 s'avère suffisante pour des fonctions rationnelles ou irrationnelles de degré grand (chapitre 6 et 7). La méthode de Post-Widder donne une borne inférieure de la solution exacte (convergence par le bas). Dans le cas où le degré  $m$  des fonctions rationnelle ou irrationnelle est trop grand (1000/1000 par exemple), on peut utiliser les algorithmes (§ 3.4.3.1.1 et 3.4.3.1.2) pour calculer la dérivée  $n$  fois de ces fonctions. Ce calcul implique la détermination de  $m * 2^{n+1}$  coefficients.



# Chapitre 4 Méthode semi-analytique

---

## 4.1 Introduction

On considère ici le problème de l'homogénéisation d'un milieu hétérogène viscoélastique isotrope ayant des phases inclusionnaires élastiques isotrope et éventuellement poreuses noyées dans une matrice viscoélastique isotrope non vieillissante. Le comportement viscoélastique microscopique sphérique et déviatorique de la matrice sont décrits par les modèles rhéologiques de Maxwell ou de Kelvin généralisés.

En pratique, on utilise le modèle de Kelvin pour décrire les fonctions de fluage par un ensemble de temps de retard  $\tau_i$ , et celui de Maxwell pour décrire les fonctions de relaxation par un ensemble de temps de relaxation  $\tilde{\tau}_i$ . On établit ainsi la relation entre les deux modèles (Kelvin et Maxwell) pour les rendre équivalent ce qui permet de construire des relations d'ordre entre les deux ensembles de temps caractéristiques. Cette structuration permettra d'encadrer les temps caractéristiques macroscopiques.

En étendant les schémas d'homogénéisation élastiques (Mori-Tanaka et autocohérent généralisé) au cas viscoélastique par le principe de correspondance, on obtient la première forme des fonctions effectives de fluage dans l'espace de Carson. Il faut d'abord ramener cette forme complexe à une forme irréductible pour procéder à l'inversion de la transformée. Pour trouver cette forme irréductible, on propose une méthode originale qui consiste à définir des fonctions composées, obtenues par un changement de variable adéquat. Ces fonctions composées permettent de :

- simplifier la recherche et la localisation des temps caractéristiques macroscopiques.
- construire analytiquement l'asymptote du fluage à long terme.

La définition de ces fonctions composées est la clef pour résoudre notre problème.

Par la suite, on considère les deux cas simplifiés, mais couramment utilisés, d'un coefficient de Poisson ou d'un module de compressibilité de la matrice viscoélastique constants. Grâce à la définition des fonctions composées, on montrera que l'ensemble des temps caractéristiques microscopiques appartient à l'ensemble des temps caractéristiques macroscopiques. Une stratégie à deux étapes est alors adoptée pour rechercher la partie complémentaire des temps macroscopiques. Cette procédure permet de séparer la complexité produite par un grand nombre de phases de celle produite par un grand nombre d'unités analogiques. Elle élargit alors le champ de solutions analytiques pouvant être déterminées. Elle permet également de prouver que l'ensemble complémentaire des temps macroscopiques peut être divisé en sous ensembles qui sont encadrés par deux valeurs successives de temps microscopiques de fluage et de relaxation.

---

## 4.2 Comportement viscoélastique microscopique

On considère un composite ayant  $n$  sortes d'inclusions isotropes élastiques noyées dans une matrice viscoélastique isotrope dont le comportement viscoélastique est représenté par les fonctions de relaxation [sphérique  $R_0^\kappa(t)$ , déviatorique  $R_0^\mu(t)$ ] ou par les fonctions de fluage [ $J_0^\kappa(t)$ ,  $J_0^\mu(t)$ ]. Chaque famille d'inclusion est caractérisée par les modules élastiques de compressibilité et de cisaillement ( $R_r^\kappa, R_r^\mu$ ) avec ( $r = 1, \dots, n$ ). S'il existe une phase poreuse, son indice sera  $n$  et ses modules élastiques seront nuls ( $R_n^\kappa = 0, R_n^\mu = 0$ ). Dans ce qui suit, on considère aussi bien des modèles rhéologiques généralisés non bornés que bornés pour décrire les fonctions de fluage  $J_0^\pi(t)$ .

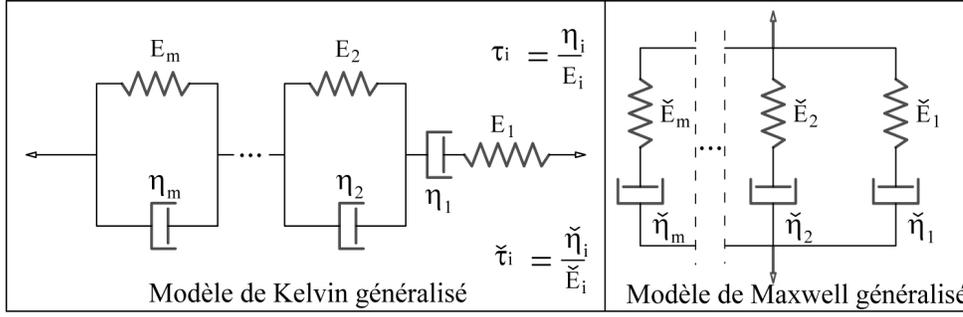


FIG. 4.1 Modèle de Kelvin et de Maxwell généralisé

#### 4.2.1 Modèle généralisé de Kelvin (ou Maxwell) non borné

On suppose que le comportement viscoélastique de la matrice peut être représenté par le modèle généralisé de Kelvin ou de Maxwell non borné (Fig. 4.1) avec  $m$  unités analogiques [74, 23, 96, 8, 114]. Ces deux modèles peuvent être rendus équivalents (Annexe E). Afin d'utiliser le principe de correspondance, on doit d'abord transformer les fonctions de fluage microscopiques, dépendant du temps, par la transformée de Carson. Cette transformation consiste à remplacer un amortisseur de viscosité  $\eta$ , dans l'espace temporel, par un ressort équivalent de raideur  $s\eta$ , dans l'espace transformé [96]. Alors, la transformée de Carson  $\tilde{J}_0(s)$  de la fonction de fluage  $J_0(t)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{J}_0(s) &= \frac{1}{E_1} + \frac{1}{s\eta_1} + \sum_{i=2}^m \frac{1}{E_i + s\eta_i} \\ &= \frac{1}{E_0} + \frac{1}{s\eta_1} - \sum_{i=2}^m \frac{s\tau_i}{1 + s\tau_i} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pour ne pas alourdir les notations, on ajoute l'exposant  $\mu$  pour une quantité déviatorique et l'exposant  $\kappa$  pour une quantité sphérique lorsqu'il y a besoin de le préciser. Par ailleurs, on pose  $\frac{1}{E_0} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{E_i}$ , où  $\{E_i, i = 2 \dots m\}$  sont les modules élastiques différés. Dans l'équation (4.1)  $\{\eta_i, i = 2 \dots m\}$  sont les coefficients de viscosité à court terme,  $\eta_1$  est le coefficient de viscosité à long terme,  $E_1$  est le module élastique instantané et  $\{\tau_i = \eta_i/E_i, i = 2 \dots m\}$  sont les temps de retard correspondants. On considère ici que chaque fonction de fluage est caractérisée par  $m$  temps caractéristiques de retard classés de la façon suivante  $\tau_m < \dots < \tau_i < \dots < \tau_2 < \tau_1 = \infty$ . Il faut noter que le rapport  $\zeta_1 = \eta_1/E_1$  de l'élément Maxwellien ne joue pas le rôle de temps caractéristique de retard. En effet, quand on regarde le terme  $s\eta_1$  de l'élément Maxwellien dans l'équation (4.1) en se référant aux termes  $(1 + s\tau_i)$  des éléments de Voigt, on peut définir le temps de retard représentatif  $\tau_1 = \infty$  de l'amortisseur  $\eta_1$ .

La forme de la fonction  $\tilde{J}_0(s)$  (Eq. 4.1) peut se réduire à une fonction rationnelle :

$$\tilde{J}_0(s) = \frac{Q_m(s)}{sP_{m-1}(s)} = \frac{q_m \prod_{i=1}^m (s + 1/\tilde{\tau}_i)}{s \prod_{i=2}^m (s + 1/\tau_i)} \quad (4.2)$$

où  $Q_m(s)$  et  $P_{m-1}(s)$  sont des polynômes de degré  $m$ ,  $m - 1$  respectivement. Leurs coefficients sont donnés dans l'annexe E.  $\tilde{\tau}_i = \tilde{\eta}_i/\tilde{E}_i$  désignent les temps caractéristiques de relaxation déterminés à partir du modèle de Maxwell généralisé correspondant. Ils sont égaux à l'opposé de l'inverse des racines du polynôme  $Q_m(s)$ . En inversant  $\tilde{J}_0(s)$ , on obtient la TC de la fonction de relaxation correspondante

[96] :

$$\tilde{R}_0(s) = \left( \tilde{J}_0(s) \right)^{-1} = \sum_{i=1}^m \frac{s\check{E}_i}{s+1/\check{\tau}_i} \quad (4.3)$$

En utilisant la table d'inversion de TL (voir par exemple [80]), la fonction de fluage microscopique, dans l'espace temporel, peut s'écrire :

$$\begin{aligned} J_0(t) &= \frac{1}{E_0} + \frac{t}{\eta_1} - \sum_{i=2}^m \frac{1}{E_i} e^{-\frac{t}{\tau_i}} \\ &= \frac{1}{E_0} + \frac{t}{\eta_1} - \sum_{i=2}^m \left( \frac{1}{E_i} \int_0^\infty \delta(\tau - \tau_i) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

La forme en fonction rationnelle de  $\tilde{J}_0(s)$  permet de classer les racines des polynômes  $P_{m-1}(s)$  et  $Q_m(s)$ , puis de classer les temps de retard  $\tau_i$  et de relaxation  $\check{\tau}_i$ . On peut établir (Annexe E) le système de  $2m$  équations permettant de trouver les relations entre ces deux ensembles : rendant équivalent les paramètres  $(\tau_i, E_i, \eta_i)$  du modèle de Kelvin et ceux  $(\check{\tau}_i, \check{E}_i, \check{\eta}_i)$  du modèle de Maxwell.

Par ailleurs,  $\tilde{J}_0(s)$  est une fonction continue monotone décroissante dans chaque intervalle  $\left] -\infty, \frac{-1}{\tau_m} \right[$ ,  $\left] \frac{-1}{\tau_{i+1}}, \frac{-1}{\tau_i} \right[$ ,  $]0, +\infty[$ . Elle a  $m$  asymptotes verticales, situées à l'origine et aux points  $\left\{ \frac{-1}{\tau_i}, i = 2 \dots m \right\}$ , et une asymptote horizontale en  $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \tilde{J}_0(s) = \frac{1}{E_1}$ . En regardant la figure 4.2, on peut prouver que  $Q_m(s)$  a  $m$  racines simples et qu'elles sont encadrées par les couples de racines successives de  $sP_{m-1}(s)$ . Les temps de relaxation et de retard des deux modèles, Maxwell et Kelvin correspondants, sont alors classés de la façon suivante :  $\tau_{i+1} < \check{\tau}_i < \tau_i$ . Ces propriétés seront exploitées dans la suite pour affiner la localisation des temps caractéristiques macroscopiques.

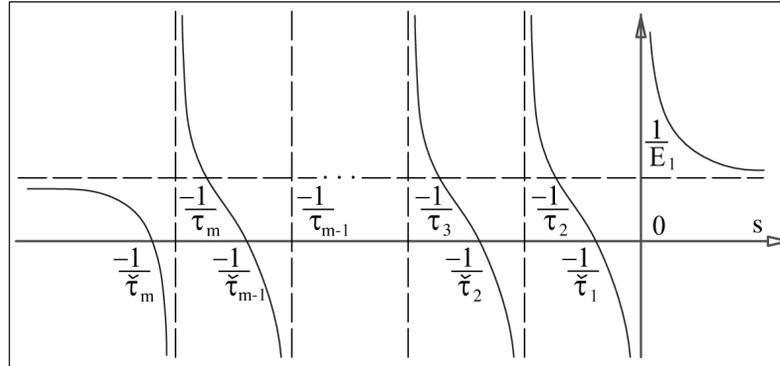


FIG. 4.2 Graphique de la TC de la fonction de fluage gouvernée par le modèle de Kelvin

#### 4.2.2 Modèle généralisé de Kelvin (ou Maxwell) borné

On considère, dans ce cas, le modèle généralisé de Kelvin ou de Maxwell borné (Fig. 4.3). Alors, la transformation de Carson de la fonction  $J_0(t)$  s'écrit :

$$\tilde{J}_0(s) = \frac{1}{E_1} + \sum_{i=2}^m \frac{1}{E_i + s\eta_i} = \frac{1}{E_0} - \sum_{i=2}^m \frac{s\tau_i}{1 + s\tau_i} \quad (4.5)$$

La forme en fonction rationnelle de la fonction  $\tilde{J}_0(s)$ , dans ce cas, s'écrit :

$$\tilde{J}_0(s) = \frac{Q_{m-1}(s)}{P_{m-1}(s)} \quad (4.6)$$

où les coefficients des polynômes  $Q_{m-1}(s)$  et  $P_{m-1}(s)$  sont déterminés dans l'annexe E. De la même façon, on obtient l'inverse de la TL de  $\tilde{J}_0(s)$  :

$$J_0(t) = \frac{1}{E_0} - \sum_{i=2}^m \frac{1}{E_i} e^{\frac{-t}{\tau_i}} \quad (4.7)$$

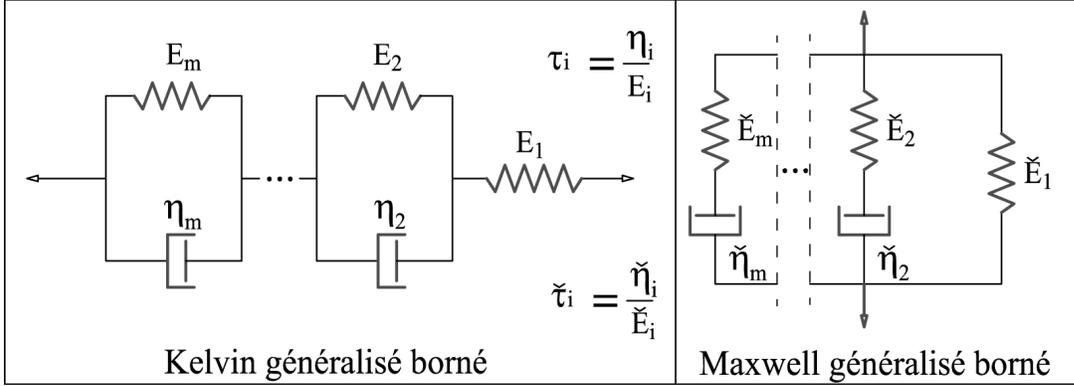


FIG. 4.3 Modèle généralisé de Kelvin et de Maxwell borné

## 4.3 Comportement viscoélastique macroscopique

### 4.3.1 Démarche

En utilisant le principe de correspondance, les schémas d'homogénéisation élastiques sont étendus au cas viscoélastique en remplaçant les propriétés de chaque phase par leur TC dans la formule du cas élastique (§ 2.6.2). Dans ce paragraphe, on va étudier deux schémas d'homogénéisation : le schéma de Mori-Tanaka (MT) et le schéma autocohérent généralisé (AG) pour calculer les fonctions effectives de fluage d'un milieu hétérogène à matrice viscoélastique renforcée par les particules élastiques inclusionnaires (un seul type d'inclusion pour le schéma AG et plusieurs types d'inclusion pour le schéma de MT). Dans ce qui suit, on établira que la TC de la fonction effective de fluage, obtenue par le schéma de MT, se met sous la forme d'une fonction rationnelle, tandis que celle obtenue par le schéma AG présente un terme en radical au numérateur. Ainsi, l'inversion de la transformée des fonctions effectives de fluage, pour le cas du schéma de MT, se ramène à la recherche des singularités associées aux pôles d'une fonction rationnelle (points où le dénominateur est nul). Pour le schéma AG, on doit rechercher en plus des pôles, les points de branchement du terme sous le radical, puis procéder à leur classement. Le recours aux fonctions composées des TCs des fonctions effectives de fluage permet de faciliter ces démarches :

- obtenir la forme irréductible des fonctions rationnelles et irrationnelles.
- déterminer les temps caractéristiques macroscopiques et savoir comment ils sont classés par rapport aux temps microscopiques.
- séparer la complexité produite par un grand nombre de phases de celle produite par un grand nombre d'unités analogiques.

### 4.3.1.1 Définition de la fonction composée

Par application du principe de correspondance, on obtiendra les TCs des fonctions viscoélastiques effectives  $(\tilde{J}_{ef}^\mu(s), \tilde{J}_{ef}^\kappa(s))$  à partir des TCs des propriétés microscopiques (§ 2.6.2) :

$$\tilde{J}_{ef}^\pi(s) = \tilde{J}_{ef}^\pi(\tilde{J}_0^\pi(s), \tilde{R}_r^\pi(s), f_r) \quad , \quad r = 1 \cdots n \quad (4.8)$$

où l'exposant  $\pi$  désigne une quantité sphérique si  $\pi = \kappa$  ou une quantité déviatorique si  $\pi = \mu$ . Pour les inclusions élastiques ( $r = 1 \cdots n$ ), on a  $\tilde{R}_r^\mu(s) = \mu_r$ ,  $\tilde{R}_r^\kappa(s) = \kappa_r$ . Les TCs des fonctions de fluage de la matrice  $\tilde{J}_0^\pi(s)$  sont données par l'équation (4.1). On suppose, dans la suite, que l'indice  $r$  augmente de la phase la plus souple (matrice) à la phase la plus rigide, i.e.  $\kappa_0 < \cdots < \kappa_i < \cdots < \kappa_n$  et  $\mu_0 < \cdots < \mu_i < \cdots < \mu_n$ . Cependant, s'il existe une phase poreuse, elle sera désignée par l'indice  $n$  et  $\mu_n = \kappa_n = 0$ .

Si toutes les propriétés élastiques et les fractions volumiques de chaque phase ( $\mu_r, \kappa_r, f_r$ ) sont considérées comme des données, on peut donc considérer  $\tilde{J}_{ef}^\pi(s)$  comme des fonctions composées  $L^\pi$  de deux fonctions  $(u(s) = \tilde{J}_0^\mu(s), v(s) = \tilde{J}_0^\kappa(s))$  telles que :

$$\tilde{J}_{ef}^\pi(s) = L^\pi(u(s), v(s)) \quad (4.9)$$

La fonction composée  $L^\pi(u, v)$  dépend uniquement du schéma d'homogénéisation et du nombre de phases. La dimension  $m$  du spectre microscopique n'intervient plus dans la relation (4.9) du fait du changement de variable.

### 4.3.1.2 Forme irréductible de la TC des fonctions effectives de fluage et inversion

A partir de l'expression de la fonction composée (4.9), on peut établir la forme en fonction rationnelle irréductible de  $\tilde{J}_{ef}^\pi(s)$ . Cette forme est nécessaire car la forme initiale de  $\tilde{J}_{ef}^\pi(s)$ , obtenue à partir du problème pseudo-élastique, ne peut pas être inversée par la méthode semi-analytique. L'analyse des cas particuliers des schémas MT et AG donne, dans la suite (§ 4.3.2 et § 4.3.3), la forme irréductible de  $\tilde{J}_{ef}^\pi(s)$  comme suit :

- Schéma de Mori-Tanaka :

Les transformations de Laplace de la fonction effective de fluage sphérique et déviatorique ont la même forme, d'après l'équation (3.2) :

$$\hat{J}_{ef}^\pi(s) = \frac{\tilde{J}_{ef}^\pi(s)}{s} = \frac{\bar{Q}_{\bar{m}_\pi}(s)}{s\bar{P}_{\bar{m}_\pi}(s)} \quad (4.10)$$

où  $\bar{Q}_{\bar{m}_\pi}(s)$  et  $\bar{P}_{\bar{m}_\pi}(s)$  sont les deux polynômes de degré  $\bar{m}_\pi$ . En notant  $\bar{s}_i^\pi$  est la racines d'ordre  $\bar{\beta}_i^\pi$  de  $s\bar{P}_{\bar{m}_\pi}(s)$ , on peut alors écrire :

$$s\bar{P}_{\bar{m}_\pi}(s) = \sum_{i=0}^{\bar{m}_\pi+1} \bar{p}_i^\pi s^i = \bar{p}_{\bar{m}_\pi+1}^\pi \prod_{i=1}^{\bar{l}^\pi} (s - \bar{s}_i^\pi)^{\bar{\beta}_i^\pi} \quad , \quad \sum_{i=1}^{\bar{l}^\pi} \bar{\beta}_i^\pi = \bar{m}_\pi + 1 \quad (4.11)$$

Dans le cas où  $(\nu_0(t) \text{ ou } \kappa_0(t))$  est constant), on prouve que toutes les racines de  $\bar{P}_{\bar{m}_\pi}(s)$  sont réelles négatives et distinctes.

En appliquant la relation (3.16), on obtient alors la fonction effective de fluage  $J_{ef}^\pi(t)$  dans l'espace temporel :

$$J_{ef}^\pi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{J}_{ef}^\pi(s)\} = \sum_{i=1}^{\bar{l}^\pi} \left( \sum_{k=1}^{\bar{\beta}_i^\pi} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \bar{A}_{ik} \right) e^{\bar{s}_i^\pi t} \quad (4.12)$$

avec :

$$\bar{A}_{ik} = \lim_{s \rightarrow \bar{s}_i^\pi} \frac{1}{(\bar{\beta}_i^\pi - k)!} \frac{d^{(\bar{\beta}_i^\pi - k)}}{ds^{(\bar{\beta}_i^\pi - k)}} \{ \bar{L}_i(s) \} \quad \text{avec} \quad \bar{L}_i(s) = (s - \bar{s}_i^\pi)^{\bar{\beta}_i^\pi} \hat{J}_{ef}^\pi(s) / s \quad (4.13)$$

• Schéma autocohérent généralisé :

La fonction effective de fluage sphérique a la même forme (4.10) que celle du cas MT. En revanche, la fonction effective de fluage déviatorique présente en plus un terme en racine  $\tilde{J}_b^\mu(s)$  :

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{ef}^\mu(s) &= -\tilde{J}_a^\mu(s) \pm \tilde{J}_b^\mu(s) \\ \tilde{J}_a^\mu(s) &= \tilde{J}_0^\mu(s) \frac{Q_{\underline{m}_\mu}(s)}{P_{\underline{m}_\mu}(s)} \\ \tilde{J}_b^\mu(s) &= \tilde{J}_0^\mu(s) \frac{\sqrt{\Delta_{2\underline{m}_\mu}(s)}}{P_{\underline{m}_\mu}(s)} \end{aligned} \quad (4.14)$$

où  $P_{\underline{m}_\mu}(s)$  et  $Q_{\underline{m}_\mu}(s)$  sont des polynômes de degré  $\underline{m}_\mu$ ,  $\Delta_{2\underline{m}_\mu}(s)$  est un polynôme de degré  $2\underline{m}_\mu$ . Le degré  $\underline{m}_\mu$  dépend du nombre d'unités analogiques du comportement microscopique déviatorique  $m_\mu$  et sphérique  $m_\kappa$ . L'inverse de la TL de  $\tilde{J}_{ef}^\mu(s)$  sera réalisée en traitant séparément les deux termes  $\tilde{J}_a^\mu(s)$  et  $\tilde{J}_b^\mu(s)$  :

$$J_{ef}^\mu(t) = -\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{J}_a^\mu(s)\} \pm \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{J}_b^\mu(s)\} \quad (4.15)$$

– L'inverse de la TL du premier terme est effectuée comme dans le cas du schéma de MT. Celle du deuxième terme n'est obtenue par la formule de Bromwich (Eq. 3.4) que si l'on connaît toutes les racines de  $P_{\underline{m}_\mu}(s)$  (pôles) et de  $\Delta_{2\underline{m}_\mu}(s)$  (points de branchement) et leurs positions relatives [94, 14].

On abordera de manière plus approfondie la question des racines (pôles et points de branchement) dans les sections (§ 4.3.2) et (§ 4.3.3).

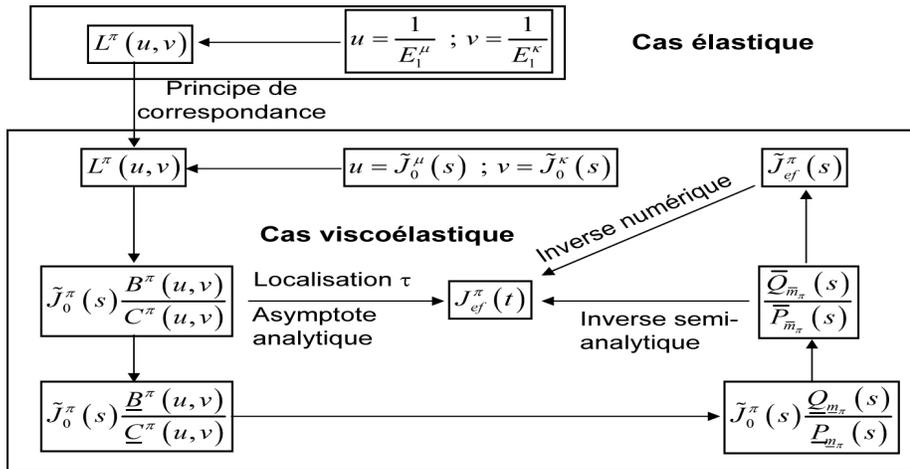


FIG. 4.4 Les démarches pour obtenir  $J_{ef}^\pi(t)$

### 4.3.2 Schéma de Mori-Tanaka

#### 4.3.2.1 Cas général

**4.3.2.1.1 Fonction composée de la TC de la fonction effective de fluage** En utilisant le principe de correspondance, le schéma de Mori-Tanaka (Eq. 2.64-2.65), étendu au cas viscoélastique non vieillissant, permet de calculer la TC de la fonction effective de fluage :

$$\tilde{J}_{ef}^{\pi}(s) = \frac{\tilde{J}_0^{\pi}(s) \left( f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{f_r}{1 + \tilde{\alpha}_0^{\pi}(s) (R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s) - 1)} \right)}{\left( f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{f_r R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s)}{1 + \tilde{\alpha}_0^{\pi}(s) (R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s) - 1)} \right)} \quad (4.16)$$

avec les fonctions  $\tilde{\alpha}_0^{\pi}(s)$  définies par :

$$\tilde{\alpha}_0^{\kappa}(s) = \frac{3\tilde{J}_0^{\mu}(s)}{3\tilde{J}_0^{\mu}(s) + 4\tilde{J}_0^{\kappa}(s)} \quad , \quad \tilde{\alpha}_0^{\mu}(s) = \frac{6\tilde{J}_0^{\mu}(s) + 2\tilde{J}_0^{\kappa}(s)}{5\tilde{J}_0^{\mu}(s) + 4\tilde{J}_0^{\kappa}(s)} \quad (4.17)$$

Après quelques manipulations algébriques, on obtient une autre forme de  $\tilde{J}_{ef}^{\pi}(s)$  (Annexe § F.1.1) :

$$\tilde{J}_{ef}^{\pi}(s) = \frac{\tilde{J}_0^{\pi}(s) (1 - \mathcal{P}^{\pi}(s))}{\tilde{\delta}_0^{\pi}(s) \mathcal{P}^{\pi}(s)} \quad (4.18)$$

où

$$\mathcal{P}^{\pi}(s) = \tilde{\alpha}_0^{\pi}(s) f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{f_r R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s)}{\tilde{\delta}_0^{\pi}(s) + R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s)} \quad , \quad \tilde{\delta}_0^{\pi}(s) = \frac{1 - \tilde{\alpha}_0^{\pi}(s)}{\tilde{\alpha}_0^{\pi}(s)} \quad (4.19)$$

Cette forme de  $\tilde{J}_{ef}^{\pi}(s)$  est très utile pour traiter le cas du coefficient de Poisson microscopique constant (4.3.2.2).

En remplaçant  $u(s) = \tilde{J}_0^{\mu}(s)$ ,  $v(s) = \tilde{J}_0^{\kappa}(s)$  dans les relations (4.16-4.17) et en considérant  $(u(s), v(s))$  comme deux fonctions de la variable  $s$ , on obtient la TC des fonctions effectives de fluage sphérique et déviatorique sous la forme de fonctions composées :

$$\tilde{J}_{ef}^{\pi}(s) = \tilde{J}_0^{\pi}(s) \frac{B^{\pi}(u(s), v(s))}{C^{\pi}(u(s), v(s))} = \tilde{J}_0^{\pi}(s) \frac{\underline{B}^{\pi}(u(s), v(s))}{\underline{C}^{\pi}(u(s), v(s))} \quad (4.20)$$

où  $B^{\pi}(u, v)$  et  $C^{\pi}(u, v)$  sont des fonctions rationnelles.  $\underline{B}^{\pi}(u, v)$  et  $\underline{C}^{\pi}(u, v)$  sont les polynômes de deux variables  $(u, v)$ , obtenues en réduisant au même dénominateur des termes de  $B^{\pi}(u, v)$  et de  $C^{\pi}(u, v)$ . Les fonctions rationnelles  $B^{\pi}(u, v)$  et  $C^{\pi}(u, v)$  sont données par :

$$B^{\kappa}(u, v) = f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{(4v + 3u)f_r}{v(4 + 3u\kappa_r)} \quad , \quad C^{\kappa}(u, v) = f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{(4v + 3u)f_r \kappa_r}{(4 + 3u\kappa_r)} \quad (4.21)$$

$$B^{\mu}(u, v) = f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{5(4v + 3u)f_r}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)} \quad (4.22)$$

$$C^{\mu}(u, v) = f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{5u(4v + 3u)f_r \mu_r}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)}$$

Les polynômes  $\underline{B}^\pi(u, v)$  et  $\underline{C}^\pi(u, v)$ , donnés dans l'annexe § F.1.2, permettent d'obtenir la forme irréductible de la fonction  $\tilde{J}_{ef}^\pi(s)$ . On introduit alors les fonctions rationnelles  $L^\pi$  et  $\underline{L}^\pi$  telles que :

$$\begin{aligned} L^\pi(u(s), v(s)) &= \tilde{J}_0^\pi(s) \underline{L}^\pi(u(s), v(s)) \\ \underline{L}^\pi(u(s), v(s)) &= \frac{\underline{B}^\pi(u(s), v(s))}{\underline{C}^\pi(u(s), v(s))} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Il est nécessaire de définir d'autres fonctions composées notées  $\mathcal{B}^\pi(u, v)$  et  $\mathcal{C}^\pi(u, v)$  telles que :

$$\begin{aligned} \tilde{J}_0^\pi(s) \frac{\underline{B}^\pi(u(s), v(s))}{\underline{C}^\pi(u(s), v(s))} &= \frac{\mathcal{B}^\pi(u(s), v(s))}{\mathcal{C}^\pi(u(s), v(s))} \\ \tilde{J}_0^\pi(s) \frac{\underline{B}^\pi(u(s), v(s))}{\underline{C}^\pi(u(s), v(s))} &= \frac{\underline{\mathcal{B}}^\pi(u(s), v(s))}{\underline{\mathcal{C}}^\pi(u(s), v(s))} \end{aligned} \quad (4.24)$$

La raison d'une telle écriture est notamment liée au fait que  $\tilde{J}_0^\pi(s)$  se simplifie dans l'équation (4.16). Ainsi, ces nouvelles fonctions composées seront exploitées, dans le paragraphe § 5.4, pour calculer la vitesse de fluage effectif instantannée.

En satisfaisant la relation (4.24) on trouve explicitement pour la partie déviatorique :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^\mu(u, v) &= u \underline{B}^\mu(u, v) \quad , \quad \mathcal{C}^\mu(u, v) = C^\mu(u, v) \\ \underline{\mathcal{B}}^\mu(u, v) &= u \underline{\underline{B}}^\mu(u, v) \quad , \quad \underline{\mathcal{C}}^\mu(u, v) = \underline{\underline{C}}^\mu(u, v) \end{aligned} \quad (4.25)$$

et pour la partie sphérique :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^\kappa(u, v) &= v \underline{B}^\kappa(u, v) \quad , \quad \mathcal{C}^\kappa(u, v) = C^\kappa(u, v) \\ \underline{\mathcal{B}}^\kappa(u, v) &= \underline{\underline{B}}^\kappa(u, v) \quad , \quad \underline{\mathcal{C}}^\kappa(u, v) = \underline{\underline{C}}^\kappa(u, v) / v \end{aligned} \quad (4.26)$$

Alors, la relation (4.20) devient :

$$\tilde{J}_{ef}^\pi(s) = \frac{\mathcal{B}^\pi(u(s), v(s))}{\mathcal{C}^\pi(u(s), v(s))} = \frac{\underline{\mathcal{B}}^\pi(u(s), v(s))}{\underline{\mathcal{C}}^\pi(u(s), v(s))} \quad (4.27)$$

La démarche de construction des formes irréductibles est schématiquement représentée par la figure 4.4. En introduisant l'expression de la TC des fonctions de fluage microscopique  $\tilde{J}_0^\pi(s)$  (Eq. 4.1) dans les fonctions  $\underline{B}^\pi(u, v)$  et  $\underline{C}^\pi(u, v)$  (Annexe § F.1.2), on obtient :

$$\tilde{J}_{ef}^\pi(s) = \frac{\bar{Q}_{\bar{m}_\pi}(s)}{\bar{P}_{\bar{m}_\pi}(s)} \quad (4.28)$$

où  $\bar{Q}_{\bar{m}_\pi}(s)$  et  $\bar{P}_{\bar{m}_\pi}(s)$  sont des polynômes de degré  $\bar{m}_\pi$  qui dépendent du nombre  $n$  d'espèces d'inclusions et du nombre  $m_\pi$  d'éléments du modèle rhéologique microscopique, représentant le comportement viscoélastique de la matrice, avec :

- Cas général :

$$\bar{m}_\kappa = n \times m_\mu + m_\kappa, \quad \bar{m}_\mu = (2n + 1) \times m_\mu \quad (4.29)$$

- Cas particuliers :

En l'absence de porosité :

$$\begin{aligned} \nu_0(t) = \nu_0 &\Rightarrow \bar{m}_\pi = (n + 1) \times m_\mu \\ \kappa_0(t) = \kappa_0 &\Rightarrow \bar{m}_\kappa = (n + 1) \times m_\mu \quad , \quad \bar{m}_\mu = (2n + 1) \times m_\mu \end{aligned} \quad (4.30)$$

En présence de porosité :

$$\begin{aligned} \nu_0(t) = \nu_0 &\Rightarrow \bar{m}_\pi = n \times m_\mu \\ \kappa_0(t) = \kappa_0 &\Rightarrow \bar{m}_\kappa = n \times m_\mu \quad , \quad \bar{m}_\mu = 2n \times m_\mu \end{aligned} \quad (4.31)$$

**4.3.2.1.2 Ensembles des temps caractéristiques microscopiques et macroscopiques** Examinant la forme irréductible de la fonction  $L^\mu(u(s), v(s))$  (Eq. F.6), on trouve la forme factorisée des polynômes  $\bar{Q}_{\bar{m}_\mu}(s)$  et  $\bar{P}_{\bar{m}_\mu}(s)$ . Dans le cas d'un fluage microscopique non borné (Eq. 4.1), on obtient :

$$\bar{Q}_{\bar{m}_\mu}(s) = Q_{m_\mu}(s) \underline{Q}_{\underline{m}_\mu}(s) \quad (4.32)$$

$$\bar{P}_{\bar{m}_\mu}(s) = sP_{m_\mu-1}(s) \underline{P}_{\underline{m}_\mu}(s) \quad (4.33)$$

C'est-à-dire que la TC de la fonction effective de fluage déviatorique peut toujours s'écrire sous la forme :

$$\tilde{J}_{ef}^\mu(s) = \frac{\bar{Q}_{\bar{m}_\mu}(s)}{\bar{P}_{\bar{m}_\mu}(s)} = \tilde{J}_0^\mu(s) \frac{Q_{m_\mu}(s)}{\underline{P}_{\underline{m}_\mu}(s)} = \frac{Q_{m_\mu}(s)}{sP_{m_\mu-1}(s)} \frac{Q_{m_\mu}(s)}{\underline{P}_{\underline{m}_\mu}(s)} \quad (4.34)$$

Pour la partie sphérique, d'après la relation (4.26), on a :

$$\frac{v\underline{\mathcal{B}}^\kappa(u, v)}{\underline{\mathcal{C}}^\kappa(u, v)} = \frac{v\underline{\mathcal{B}}^\kappa(u, v)}{v\underline{\mathcal{C}}^\kappa(u, v)} = \frac{\underline{\mathcal{B}}^\kappa(u, v)}{\underline{\mathcal{C}}^\kappa(u, v)} \quad (4.35)$$

Alors, le numérateur et le dénominateur de  $\tilde{J}_{ef}^\kappa(s)$  ne peuvent pas être factorisés comme dans le cas déviatorique (Eqs. 4.32 et 4.33). En effet, on a :

$$\tilde{J}_{ef}^\kappa(s) = \frac{\bar{Q}_{\bar{m}_\kappa}(s)}{\bar{P}_{\bar{m}_\kappa}(s)} = \frac{Q_{m_\kappa}(s)}{\underline{P}_{\underline{m}_\kappa}(s)} \quad (4.36)$$

En général, on ne peut pas factoriser les polynômes  $\bar{P}_{\bar{m}_\kappa}(s)$  et  $\bar{Q}_{\bar{m}_\kappa}(s)$ . Cependant, il y a les deux cas particuliers suivants :

- Lorsque le coefficient de Poisson microscopique est constant, la fonction effective de fluage sphérique prend aussi la forme (Eq. 4.34) :

$$\bar{Q}_{\bar{m}_\kappa}(s) = Q_{m_\kappa}(s) \underline{Q}_{\underline{m}_\kappa}(s) \quad (4.37)$$

$$\bar{P}_{\bar{m}_\kappa}(s) = sP_{m_\kappa-1}(s) \underline{P}_{\underline{m}_\kappa}(s) \quad (4.38)$$

- S'il existe une phase poreuse, on ne peut factoriser que le dénominateur  $\bar{P}_{\bar{m}_\kappa}(s)$  tel que donné par l'équation (4.38).

En désignant les ensembles des racines des polynômes  $\bar{P}_{\bar{m}_\mu}(s)$ ,  $sP_{m_\mu-1}(s)$  et  $\underline{P}_{\underline{m}_\mu}(s)$ , respectivement par :

$$\bar{\mathcal{E}}_s^\mu = \left\{ \bar{s}_i^\mu = -\frac{1}{\bar{\tau}_i^\mu} \right\}, i = 1 \cdots \bar{m}_\mu \quad (4.39)$$

$$\mathcal{E}_s^\mu = \left\{ s_i^\mu = -\frac{1}{\tau_i^\mu} \right\}, i = 1 \cdots m_\mu \quad \text{avec} \quad \tau_1^\mu = \infty \quad (4.40)$$

$$\underline{\mathcal{E}}_s^\mu = \left\{ \underline{s}_i^\mu = -\frac{1}{\underline{\tau}_i^\mu} \right\}, i = 1 \cdots \underline{m}_\mu \quad (4.41)$$

Pour le cas général, on en déduit, d'après la forme factorisée (Eq. 4.33), que :

$$\bar{\mathcal{E}}_s^\mu = \mathcal{E}_s^\mu \cup \underline{\mathcal{E}}_s^\mu \quad (4.42)$$

Cela montre que l'ensemble des temps caractéristiques déviatoriques microscopiques est un sous-ensemble de celui des temps caractéristiques déviatoriques macroscopiques. Dans la suite, on prouve que l'ensemble  $\underline{\mathcal{E}}_s^\mu$  se divise, pour les deux cas particuliers ( $\nu_0$  ou  $\kappa_0$  constant), en  $m_\mu$  sous-ensembles qui sont encadrés par les éléments successifs de  $\mathcal{E}_s^\mu$ .

Pour la partie sphérique, une structure similaire à l'équation (4.42) ne peut être obtenue que dans le cas d'un coefficient de Poisson microscopique constant ou dans le cas de l'existence d'une phase poreuse. Dans ces deux cas, on peut écrire :

$$\overline{\mathcal{E}}_s^\kappa = \mathcal{E}_s^\kappa \cup \underline{\mathcal{E}}_s^\kappa \quad (4.43)$$

où les ensembles  $\overline{\mathcal{E}}_s^\kappa$ ,  $\mathcal{E}_s^\kappa$  et  $\underline{\mathcal{E}}_s^\kappa$  sont déterminés exactement comme pour le cas déviatorique (Eq. 4.39-4.41).

Dans le cas d'un fluage microscopique borné (Eq. 4.5), les équations (4.33) et (4.38), avec les conditions sous-jacentes au cas sphérique, deviennent :

$$\bar{P}_{\bar{m}_\pi}(s) = P_{m_\pi-1}(s) \underline{P}_{\underline{m}_\pi}(s) \quad (4.44)$$

Ainsi :

$$\mathcal{E}_s^\mu = \left\{ s_i^\mu = -\frac{1}{\tau_i^\mu} \right\}, i = 2 \cdots m_\mu \quad (4.45)$$

**4.3.2.1.3 Localisation des temps caractéristiques** Le problème de l'inversion de la TC de la fonction  $\tilde{J}_{ef}^\pi(s)$ , en se basant sur les relations (4.10-4.13), revient à rechercher les racines du dénominateur  $\bar{P}_{\bar{m}_\pi}(s)$ . Ainsi, il s'agit de résoudre les deux équations suivantes ( $\pi = \mu, \kappa$ ) :

$$\bar{P}_{\bar{m}_\pi}(s) = 0 \quad (4.46)$$

pour déterminer les racines  $\bar{s}_j^\pi$  dont  $\bar{s}_1^\pi = 0$  est une solution évidente, selon les équations (4.33) et (4.38), dans le cas non borné. Dans le cas borné, il n'y a aucune racine nulle de l'équation (4.46). En effet, le polynôme  $\underline{P}_{\underline{m}_\pi}(s)$ , issu de  $\underline{C}^\pi(u(s), v(s))$  en y substituant  $u = \tilde{J}_0^\mu(s)$  et  $v = \tilde{J}_0^\kappa(s)$ , a nécessairement des racines non nulles. Par ailleurs,  $P_{m_\pi-1}(s)$  correspond à la partie bornée du spectre microscopique (fluage borné ou non).

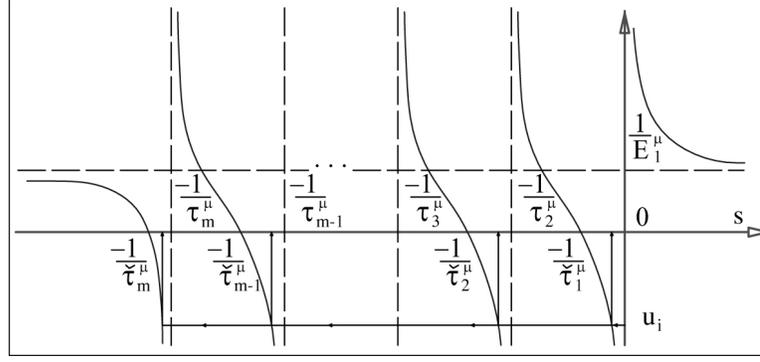
Les racines nécessairement non nulles ( $\bar{s}_j^\pi \neq 0$ ) du polynôme  $\bar{P}_{\bar{m}_\pi}(s)$  peuvent alors être déterminées par la résolution des deux systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{C}^\kappa(u, v) = 0 \\ v(s) = \frac{Q_{m_\kappa}(s)}{sP_{m_\kappa-1}(s)} \\ u(s) = \frac{Q_{m_\mu}(s)}{sP_{m_\mu-1}(s)} \end{array} \right. \quad (4.47)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} sP_{m-1}^\mu(s) \underline{C}^\mu(u, v) = 0 \\ v(s) = \frac{Q_{m_\kappa}(s)}{sP_{m_\kappa-1}(s)} \\ u(s) = \frac{Q_{m_\mu}(s)}{sP_{m_\mu-1}(s)} \end{array} \right. \quad (4.48)$$

Dans la première équation du système (4.48), le terme  $sP_{m-1}^\mu(s)$ , qui multiplie  $\underline{C}^\mu(u, v)$ , vient de l'équation (4.33). Il est à noter que dans le cas du fluage borné, ce terme se réduit à  $P_{m-1}^\mu(s)$ . En outre, on a  $\underline{C}^\mu(u, v) = \underline{C}^\mu(u, v)$  d'après la relation (4.25).

La résolution de la première équation de chaque système donne une relation en  $u$  et  $v$ . Comme les coefficients des polynômes  $\underline{C}^\pi(u, v)$  sont positifs (Eqs. 4.25, 4.26 et Annexe § F.1.2), tout couple  $(u_i^\pi, v_i^\pi)$  satisfaisant  $\underline{C}^\pi(u, v) = 0$  doit avoir au moins un élément négatif, par exemple  $u_i$  (Fig. 4.5). Pour chaque couple  $(u_i^\pi, v_i^\pi)$ , on peut construire l'ensemble des projections  $\zeta_j^\pi$  sur l'axe des abscisses des intersections des droites horizontales passant respectivement par  $(0, u_i^\pi)$  et  $(0, v_i^\pi)$  avec les branches de  $\tilde{J}_0^\pi(s)$ . L'intersection de l'infinité d'ensembles  $\{\zeta_{u_i^\pi}^\pi\}$  et  $\{\zeta_{v_i^\pi}^\pi\}$  donne alors l'ensemble fini des solutions ( $\bar{s}_j^\pi \neq 0$ ) de  $\underline{P}_{\underline{m}_\pi}(s)$ .


 FIG. 4.5 Localisation des racines  $\bar{s}_j^k$  dans le cas général

Pour ces racines, on peut déduire que :

$$\max \left\{ \frac{-1}{\tau_m^\mu}, \frac{-1}{\tau_m^\mu} \right\} < \bar{s}_j^\pi < \min \left\{ \frac{-1}{\tau_1^\mu}, \frac{-1}{\tau_1^\mu} \right\} \quad (4.49)$$

Dans l'espace temporel, cela se traduit par :

$$\max \{ \tau_m^\kappa, \tau_m^\mu \} < \bar{\tau}_j^\pi < \min \{ \tau_1^\kappa, \tau_1^\mu \} \quad (4.50)$$

La relation (4.50) signifie que dans le cas général, la partie complémentaire des temps de retard macroscopiques est encadrée par les valeurs extrêmes des temps caractéristiques microscopiques de fluage et de relaxation. Dans le cas des deux considérations simplificatrices (coefficient de Poisson ou module de compressibilité constant) un meilleur encadrement sera obtenu. De plus, si les deux ensembles  $\mathcal{E}_s^\mu$  et  $\mathcal{E}_s^\kappa$  n'ont pas d'intersection, alors toutes les racines  $\bar{s}_j^\pi$  seront complexes. Dans ce cas, les propriétés de croissance monotone et de concavité [23, 56] de la fonction de fluage  $J_{ef}^\pi(t)$  ne seront plus assurées (§ 5.2.2). Il est à noter que ces propriétés sont les conséquences de la représentation spectrale des fonctions viscoélastiques vérifiant les conditions de symétrie de Onsager [15].

Enfin, les expressions des fonctions effectives de fluage dans l'espace temporel sont obtenues à partir de la relation (4.12) en y substituant les  $\bar{m}_\pi$  (Eq. 4.29) racines des ensembles (4.39-4.41) dont une partie correspond aux temps microscopiques. Cependant, lorsque  $\bar{m}_\pi$  atteint une valeur suffisamment grande, par exemple 200, les erreurs d'arrondi dans le calcul des coefficients du polynôme  $\bar{P}_{\bar{m}_\pi}(s)$  conduisent à de très grandes erreurs dans le calcul de ses racines. Dans ce qui suit une stratégie de résolution à deux étapes est proposée pour pallier à ce problème dans le cas des deux simplifications souvent adoptées : coefficient de Poisson ou module de compressibilité constant.

### 4.3.2.2 Coefficient de Poisson microscopique constant

On suppose ici que le coefficient de Poisson  $\nu_0$  est constant. Le comportement viscoélastique isotrope de la matrice est donc représenté par une unique fonction  $J_0^\mu(t)$ . La fonction  $J_0^\kappa(t)$  lui étant proportionnelle. Cela entraîne que la TC de la fonction effective de fluage dépend d'une seule variable  $u$ . Les cas, avec ou sans porosité, seront analysés. L'indice de la phase poreuse est  $n$  ( $\kappa_n = \mu_n = 0$ ).

**4.3.2.2.1 Fonction composée de fluage effectif** Dans ce cas, les TCs des modules de compressibilité et de cisaillement de la matrice sont proportionnelles, ce qui donne :

$$\tilde{J}_0^\kappa(s) = \varphi_0 \tilde{J}_0^\mu(s) \quad \text{avec} \quad \varphi_0 = \frac{3(1-2\nu_0)}{2(1+\nu_0)} \quad (4.51)$$

On peut donc poser :

$$\tilde{J}_0^\pi(s) = \varphi_0^\pi \tilde{J}_0^\mu(s) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varphi_0^\kappa = \frac{3(1-2\nu_0)}{2(1+\nu_0)} \\ \varphi_0^\mu = 1 \end{cases} \quad (4.52)$$

La relation (4.52) entraîne l'indépendance, par rapport au variable  $s$ , de la TC des coefficients  $\tilde{\alpha}_0^\pi(s)$  et  $\tilde{\delta}_0^\pi(s)$  (Eqs. 4.17-4.19) :

$$\tilde{\alpha}_0^\kappa(s) = \alpha_0^\kappa = \frac{1+\nu_0}{3(1-\nu_0)} \quad , \quad \tilde{\alpha}_0^\mu(s) = \alpha_0^\mu = \frac{2(4-5\nu_0)}{15(1-\nu_0)} \quad (4.53)$$

$$\tilde{\delta}_0^\kappa(s) = \delta_0^\kappa = \frac{2(1-2\nu_0)}{1+\nu_0} \quad , \quad \tilde{\delta}_0^\mu(s) = \delta_0^\mu = \frac{(7-5\nu_0)}{2(4-5\nu_0)} \quad (4.54)$$

L'expression de  $\tilde{J}_{ef}^\pi(s)$ , donnée par la relation (4.18), devient très simple dans ce cas :

$$\tilde{J}_{ef}^\pi(s) = \frac{\varphi_0^\pi \tilde{J}_0^\mu(s) (1 - \mathcal{P}^\pi(s))}{\delta_0^\pi \mathcal{P}^\pi(s)} \quad (4.55)$$

où

$$\mathcal{P}^\pi(s) = \alpha_0^\pi f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{f_r \tilde{J}_0^\pi(s)}{\delta_0^\pi / R_r^\pi + \tilde{J}_0^\pi(s)} = \alpha_0^\pi f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{f_r u(s)}{\underline{u}_r^\pi + u(s)} \quad (4.56)$$

avec, d'après la relation (4.52),  $\underline{u}_r^\pi = \delta_0^\pi / (R_r^\pi \varphi_0^\pi)$ . Enfin, on obtient l'expression de la fonction composée de la variable  $u(s)$  associée à  $\mathcal{P}^\pi(s)$  pour les deux cas considérés :

$$C^\pi(u) = \begin{cases} \delta_0^\pi \left( 1 - f_0 + \alpha_0^\pi f_0 - \sum_{r=1}^n \frac{f_r \underline{u}_r^\pi}{\underline{u}_r^\pi + u} \right) & \text{sans porosité} \\ \delta_0^\pi \left( 1 - f_0 - f_n + \alpha_0^\pi f_0 - \sum_{r=1}^{n-1} \frac{f_r \underline{u}_r^\pi}{\underline{u}_r^\pi + u} \right) & \text{une phase poreuse} \end{cases} \quad (4.57)$$

Les fonctions composées sphérique et déviatorique, définies par l'équation (4.20), ont alors la même forme et se réduisent à une fonction  $L^\pi$  d'une seule variable  $u$  :

$$\tilde{J}_{ef}^\pi(s) = L^\pi(u(s)) = u(s) \underline{L}^\pi(u(s)) \quad (4.58)$$

avec :

$$\underline{L}^\pi(u) = \frac{B^\pi(u)}{C^\pi(u)} = \frac{B_{N_\pi}^\pi(u)}{C_{N_\pi}^\pi(u)} \quad (4.59)$$

où  $B^\pi(u)$ ,  $C^\pi(u)$  peuvent être calculées à partir des relations (4.55-4.57), ce qui donne :

$$B^\pi(u) = b^\pi + \sum_{r=r^\pi}^{n_\pi} \frac{b_r^\pi}{(u + \underline{u}_r^\pi)} \quad (4.60)$$

$$C^\pi(u) = c^\pi + \sum_{r=r^\pi}^{n_\pi} \frac{c_r^\pi}{(u + \underline{u}_r^\pi)} \quad (4.61)$$

Avec les coefficients précédemment définis, on distingue deux cas :

1. Il n'existe pas de phase poreuse,  $n_\pi = n$ ,  $r^\pi = 1$  et les autres termes sont donnés par :

$$b^\pi = \varphi_0^\pi (1 - \alpha_0^\pi) f_0 \quad , \quad b_r^\pi = \varphi_0^\pi f_r \underline{u}_r^\pi \quad (4.62)$$

$$c^\pi = -\delta_0^\pi [(1 - \alpha_0^\pi) f_0 - 1] \quad , \quad c_r^\pi = -\delta_0^\pi f_r \underline{u}_r^\pi \quad (4.63)$$

2. Il existe une phase poreuse,  $n_\pi = n - 1$ ,  $r^\pi = 1$  et les autres termes sont donnés par :

$$b^\pi = \varphi_0^\pi [(1 - \alpha_0^\pi) f_0 + f_n] \quad , \quad b_r^\pi = \varphi_0^\pi f_r \underline{u}_r^\pi \quad (4.64)$$

$$c^\pi = -\delta_0^\pi [(1 - \alpha_0^\pi) f_0 + f_n - 1] \quad , \quad c_r^\pi = -\delta_0^\pi f_r \underline{u}_r^\pi \quad (4.65)$$

En ramenant au même dénominateur les fonctions  $B^\pi(u)$  et  $C^\pi(u)$ , on trouve alors une même forme  $\underline{W}_{N_\pi}^\pi(u)$  pour l'expression des polynômes  $\underline{B}_{N_\pi}^\pi(u)$  et  $\underline{C}_{N_\pi}^\pi(u)$  qui peuvent se mettre sous la forme générique :

$$\underline{W}_{N_\pi}^\pi(u) = w^\pi \prod_{r=r^\pi}^{n_\pi} (u + \underline{u}_r^\pi) + \sum_{r=r^\pi}^{n_\pi} f_r w_r^\pi \prod_{i=r^\pi, i \neq r}^{n_\pi} (u + \underline{u}_i^\pi) = \sum_{i=0}^{N_\pi} \underline{w}_i^\pi u^i \quad (4.66)$$

où  $N_\pi = n_\pi + 1 - r_\pi$  si  $c^\pi \neq 0$ ,  $N_\pi = n_\pi - r_\pi$  si  $c^\pi = 0$ .  $\underline{W}$  peut jouer le rôle de  $\underline{B}$  ou  $\underline{C}$ . Les coefficients  $\underline{w}_i^\pi$  sont donnés dans l'annexe § F.1.2.3.

**4.3.2.2 Localisation des temps caractéristiques et inverse de la TC** Les polynômes  $\bar{Q}_{\bar{m}_\pi}(s)$  et  $\bar{P}_{\bar{m}_\pi}(s)$  sont factorisés pour le cas déviatorique et pour le cas sphérique. D'après la relation (4.58), les relations (4.32-4.34) peuvent alors se réécrire avec l'indice  $\pi$  à la place de  $\mu$  :

$$\tilde{J}_{ef}^\pi(s) = \frac{\bar{Q}_{\bar{m}_\pi}(s)}{\bar{P}_{\bar{m}_\pi}(s)} = u(s) \frac{Q_{m_\pi}(s)}{P_{m_\pi}(s)} = \frac{Q_{m_\mu}(s)}{sP_{m_\mu-1}(s)} \frac{Q_{m_\pi}(s)}{P_{m_\pi}(s)} \quad (4.67)$$

Parce que les racines  $s_i^\mu = \frac{1}{\tau_i^\mu}$  du polynôme  $sP_{m_\mu-1}(s) = \prod_{i=1}^{m_\mu} p_{m_\mu}(s - s_i^\mu)$  sont connues, il reste alors à rechercher les racines  $s_i^\pi$  de  $P_{m_\pi}(s) = \prod_{i=1}^{m_\pi} p_{m_\pi}(s - s_i^\pi)$ .

En combinant (Eq. 4.58) et (Eq. 4.67), on obtient la relation :

$$\frac{\underline{B}_{N_\pi}^\pi(u(s))}{\underline{C}_{N_\pi}^\pi(u(s))} = \frac{Q_{m_\pi}(s)}{P_{m_\pi}(s)} \quad (4.68)$$

Selon la relation (4.66), on identifie aisément  $P_{m_\pi}(s)$  au numérateur de la fonction rationnelle :

$$\underline{C}_{N_\pi}^\pi(u(s)) = \sum_{r=0}^{N_\pi} \underline{c}_r^\pi \left( \frac{Q_{m_\mu}(s)}{sP_{m_\mu-1}(s)} \right)^r \quad (4.69)$$

Cela entraîne que :

$$\underline{P}_{m_\pi}(s) = 0 \iff \sum_{r=0}^{N_\pi} \underline{c}_r^\pi \left( \frac{Q_{m_\mu}(s)}{sP_{m_\mu-1}(s)} \right)^r = 0 \iff \begin{cases} \sum_{r=0}^{N_\pi} \underline{c}_r^\pi u^r = 0 \\ u = \frac{Q_{m_\mu}(s)}{sP_{m_\mu-1}(s)} \end{cases} \quad (4.70)$$

A partir de cette relation, on peut proposer une démarche plus robuste pour la recherche des racines du polynôme  $\underline{P}_{m_\pi}(s)$  de degré  $m_\pi = N_\pi \times m_\mu$  :

- Tout d'abord, on cherche les  $N_\pi$  racines  $\{u_i^\pi, i = 1 \cdots N_\pi\}$  de l'équation :

$$\underline{C}_{N_\pi}^\pi(u) = \sum_{i=0}^{N_\pi} \underline{c}_i^\pi u^i = 0 \quad (4.71)$$

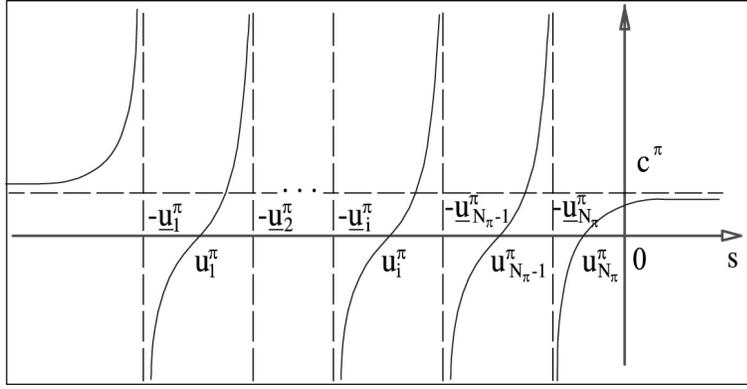


FIG. 4.6 Localisation des racines  $u_i^\pi$  de la fonction  $C^\pi(u)$

Comme  $\underline{C}_{N_\pi}^\pi(u)$  est le numérateur de  $C^\pi(u)$ , on en déduit alors que  $\underline{C}_{N_\pi}^\pi(u) = 0$ , équivaut à  $C^\pi(u) = 0$ . Par ailleurs, la fonction  $C^\pi(u)$  est la somme de fonctions homographiques, ce qui permet de localiser ses racines  $u_i^\pi$ . Comme  $c_i^\pi < 0 \forall i = 1 \dots N_\pi$ , alors  $C^\pi(u)$  est continue monotone croissante sur les intervalles  $] -\infty, -u_1^\pi[$ ,  $] -u_1^\pi, -u_2^\pi[$ , ...,  $] -u_{N_\pi}^\pi, 0[$ . En outre, elle possède  $n_\pi$  asymptotes verticales traversant les points  $(-u_i^\pi, 0)$  et une asymptote horizontale passant  $(0, c^\pi)$  comme indiquées sur la figure 4.6. Selon ce graphique, les racines  $u_i^\pi$  sont toutes négatives et classées comme suit :  $u_i^\pi \in ] -u_i^\pi, -u_{i+1}^\pi[$  et  $u_{N_\pi}^\pi \in ] -u_{N_\pi}^\pi, 0[$ .

- Ensuite, pour chaque racine  $u_i^\pi$ , on cherche les  $m_\mu$  racines  $\left\{ s_{ij}^\pi, j = 1 \dots m_\mu \right\}$  de l'équation :

$$\frac{Q_{m_\mu}(s)}{sP_{m_\mu-1}(s)} = u_i^\pi \iff Q_{m_\mu}(s) - u_i^\pi sP_{m_\mu-1}(s) = 0 \quad (4.72)$$

Cette stratégie permet de ramener la résolution d'une équation de degré  $N_\pi \times m_\mu$  à la résolution d'une équation de degré  $N_\pi$  (qui dépend du nombre de phases seulement) puis de  $N_\pi$  équations de degré  $m_\mu$  (nombre d'éléments analogiques). La forme en fonction rationnelle de  $\tilde{J}_{ef}^\pi(s)$ , définie par la relation (4.67), indique que l'ensemble  $\bar{\mathcal{E}}_s^\pi$  des racines de  $\bar{P}_{\bar{m}_\pi}(s)$  est la réunion de deux sous-ensembles : l'ensemble  $\mathcal{E}_s^\mu$  des racines de  $sP_{m_\mu-1}(s)$  et l'ensemble  $\underline{\mathcal{E}}_s^\pi$  des racines de  $\underline{P}_{m_\pi}(s)$  :

$$\bar{\mathcal{E}}_s^\pi = \left\{ \bar{s}_i^\pi = -\frac{1}{\bar{\tau}_i^\pi}, i = 1 \dots \bar{m}_\pi \right\}, \quad \bar{\tau}_1^\pi = \infty \quad (4.73)$$

$$\mathcal{E}_s^\mu = \left\{ s_i^\mu = -\frac{1}{\tau_i^\mu}, i = 1 \dots m_\mu \right\}, \quad \tau_1^\mu = \infty \quad (4.74)$$

$$\underline{\mathcal{E}}_s^\pi = \left\{ \underline{s}_i^\pi = -\frac{1}{\underline{\tau}_i^\pi}, i = 1 \dots N_\pi \times m_\mu \right\} = \bigcup_{j=1}^{m_\mu} \left\{ \underline{s}_{ij}^\pi, i = 1 \dots N_\pi \right\} \quad (4.75)$$

$$\bar{\mathcal{E}}_s^\pi = \mathcal{E}_s^\mu \cup \underline{\mathcal{E}}_s^\pi \quad (4.76)$$

Dans le cas du fluage microscopique déviatorique borné, la relation (4.74) devient :

$$\mathcal{E}_s^\mu = \left\{ s_i^\mu = -\frac{1}{\tau_i^\mu}, i = 2 \dots m_\mu \right\} \quad (4.77)$$

Les éléments de l'ensemble  $\mathcal{E}_s^\mu$  sont égaux à l'opposé de l'inverse des temps de retard microscopiques. La partie complémentaire  $\underline{\mathcal{E}}_s^\pi$  est la réunion de  $m_\mu$  sous-ensembles  $\left\{ \underline{s}_{ij}^\pi, i = 1 \dots N_\pi \right\}$  correspondant aux projections sur l'axe des abscisses des intersections des droites horizontales

passant par les points  $(0, z_j^\pi)$  avec les branches du graphique de la fonction  $\tilde{J}_0^\mu(s) = \frac{Q_{m_\mu}(s)}{sP_{m_\mu-1}(s)}$  (Fig. 4.7). Pour une valeur donnée de  $j$ , avec  $j = 1 \cdots m_\mu$ , on a :

$$\left\{ \underline{s}_{ij}^\pi, i = 1 \cdots N_\pi \right\} \subset \left[ \underline{s}_j^\mu = -\frac{1}{\tilde{\tau}_j^\mu}, s_j^\mu = -\frac{1}{\tau_j^\mu} \right] \subset \left[ s_{j+1}^\mu = -\frac{1}{\tau_{j+1}^\mu}, s_j^\mu = -\frac{1}{\tau_j^\mu} \right] \quad (4.78)$$

Dans l'espace temporel, les relations (4.78) deviennent, pour une valeur donnée de  $j$  avec  $j = 2 \cdots m_\mu$  :

$$\left\{ \underline{\tau}_{ij}^\pi, i = 1 \cdots N_\pi \right\} \subset \left[ \tilde{\tau}_j^\mu, \tau_j^\mu \right] \subset \left[ \tau_{j+1}^\mu, \tau_j^\mu \right] \quad (4.79)$$

alors que si  $j$  vaut 1 :

$$\left\{ \underline{\tau}_{i1}^\pi, i = 1 \cdots N_\pi \right\} \subset [\tilde{\tau}_1^\mu, \tau_1^\mu = \infty] \subset [\tau_2^\mu, \tau_1^\mu = \infty] \quad (4.80)$$

Il est à noter que dans le cas du fluage borné, le sous-ensemble  $\left\{ \underline{\tau}_{i1}^\pi, i = 1 \cdots N_\pi \right\}$  n'existe plus. En effet, la première branche de la figure (4.5), associée à l'intervalle  $[\tilde{\tau}_1^\mu, \tau_1^\mu = \infty]$ , n'existe plus dans ce cas.

En appliquant la formule d'inversion (Eqs. 4.12-4.13), on obtient :

$$\begin{aligned} J_{ef}^\pi(t) &= \frac{1}{\underline{E}_0^\pi} + \frac{t}{\bar{\eta}_1^\pi} + \sum_{j=2}^{\bar{m}_\pi} \frac{e^{-\frac{t}{\tilde{\tau}_j^\pi}}}{\underline{E}_j^\pi} \\ &= \frac{1}{\underline{E}_0^\pi} + \frac{t}{\bar{\eta}_1^\pi} + \sum_{j=2}^{m_\mu} \frac{e^{-\frac{t}{\tau_j^\mu}}}{\underline{E}_j^\mu} + \sum_{j=1}^{m_\mu} \sum_{i=1}^{N_\pi} \frac{e^{-\frac{t}{\underline{\tau}_{ij}^\pi}}}{\underline{E}_{ij}^\pi} \end{aligned} \quad (4.81)$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{E}_i^\pi} &= \lim_{s \rightarrow \underline{s}_i^\pi} \left\{ (s - \underline{s}_i^\pi) \frac{\tilde{J}_{ef}^\pi(s)}{s} \right\}, \quad i = 2 \cdots \bar{m}_\pi \\ \frac{1}{\underline{E}_0^\pi} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(s \tilde{J}_{ef}^\pi(s))}{ds}, \quad \frac{1}{\bar{\eta}_1^\pi} = \lim_{s \rightarrow 0} (s \tilde{J}_{ef}^\pi(s)) \end{aligned} \quad (4.82)$$

La relation (4.81) montre que la complaisance de fluage macroscopique se présente comme un terme affine, correspondant à un élément de Maxwell, et une série finie de termes exponentiels correspondant à un chaîne d'éléments de Kelvin. Lorsque le temps augmente, les contributions des termes associés aux éléments de Kelvin vont s'atténuer. Le comportement à long terme est donc essentiellement contrôlé par le terme affine. Nous construirons dans le chapitre 5 une relation entre les paramètres macroscopiques  $(\frac{1}{\underline{E}_0^\pi}, \frac{1}{\bar{\eta}_1^\pi})$  et les propriétés microscopiques dans un cadre plus général.

Par ailleurs, plus les valeurs du couple  $(\tau_{j+1}^\mu, \tau_j^\mu)$  sont grandes, plus les éléments de l'ensemble

$\left\{ \underline{\tau}_{ij}^\pi, i = 1 \cdots N_\pi \right\}$  sont grands. Ainsi, la somme  $\sum_{i=1}^{N_\pi} \frac{e^{-\frac{t}{\underline{\tau}_{ij}^\pi}}}{\underline{E}_{ij}^\pi}$  s'annulent lentement, car les temps caractéristiques  $\underline{\tau}_{ij}^\pi$  sont encadrés par les éléments de ce couple (4.79). En analysant les relations (4.79-4.80), on trouve que l'élément de Maxwell (correspondant à  $\tau_1^\mu = \infty$ ) et le premier élément de Kelvin (correspondant, parmi les éléments de Kelvin, au temps caractéristique le plus grand  $\tau_2^\mu$ )

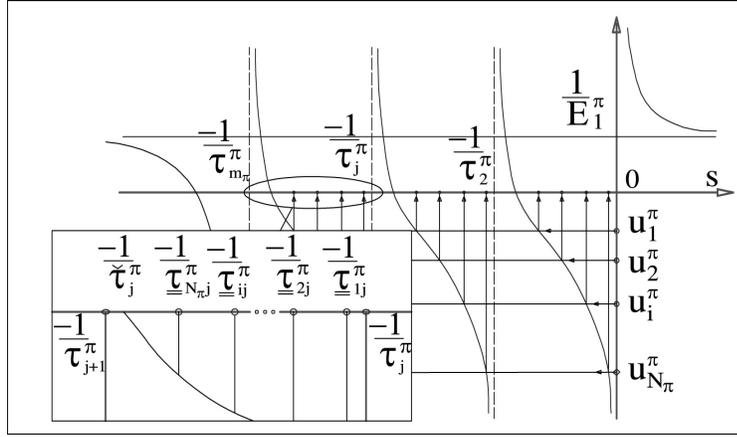


FIG. 4.7 Localisation de l'ensemble complémentaire  $\underline{D}_\pi$

sont les deux éléments microscopiques ayant le plus d'influence sur la valeur de l'abscisse du point limite où l'on considère que la fonction de fluage macroscopique coïncide avec son asymptote. Enfin, la relation (4.76), montre que le degré  $\tilde{m}_\pi$  du polynôme  $\tilde{P}_{\tilde{m}_\pi}(s)$  est  $(N_\pi + 1) \times m_\mu$ . Par exemple, avec l'hypothèse du coefficient de Poisson constant, on peut établir la solution analytique pour un problème avec  $m_\mu = 4$  éléments rhéologiques et  $N_\pi = 4$  phases inclusionnaires. Cela correspond à un comportement viscoélastique macroscopique avec un spectre macroscopique impliquant  $\tilde{m}_\pi = 20$  temps de retard. Cette démarche à deux étapes permet donc d'augmenter significativement le nombre de solutions analytiques accessibles.

#### 4.3.2.3 Cas du module de compressibilité microscopique constant

On considèra ici le cas où le module de compressibilité de la matrice peut être considéré constant ( $\tilde{\kappa}_0(s) = \kappa_0$ ), ce qui donne :

$$v(s) = \tilde{J}_0^\kappa(s) = \frac{1}{\kappa_0} \quad (4.83)$$

On obtient les résultats similaires au cas général (§ 4.3.2.1.2) :

- En absence de porosité,  $\tilde{J}_{ef}^\kappa(s)$  est donnée par l'équation du cas général (4.36). L'ensemble des temps caractéristiques du fluage microscopique sphérique est vide.
- En présence de porosité, on obtient (§ 4.3.2.3.1)  $\tilde{P}_{\tilde{m}_\kappa}(s) = sP_{m_\mu-1}(s)\underline{P}_{\underline{m}_\kappa}(s)$ , ce qui signifie qu'une partie des temps caractéristiques macroscopiques sphériques coïncide avec l'ensemble des temps caractéristiques microscopiques déviatoriques. Ceci diffère du cas général (Eq. 4.38), où ce sont les temps caractéristiques microscopiques sphériques qui interviennent dans l'ensemble des temps macroscopiques sphériques.

##### 4.3.2.3.1 Fonction composée du fluage effectif

**Cas sans porosité** Dans ce cas, les fonctions composées  $L^\pi$  associées au fluage sphérique et déviatorique ne peuvent pas se mettre sous une même forme générique. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{ef}^\kappa(s) &= \frac{\mathcal{B}^\kappa(u(s))}{\mathcal{C}^\kappa(u(s))} = \frac{\underline{\mathcal{B}}^\kappa(u(s))}{\underline{\mathcal{C}}^\kappa(u(s))} \\ &= L^\kappa(u(s)) \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{ef}^\mu(s) &= u(s) \frac{B^\mu(u(s))}{C^\mu(u(s))} = u(s) \frac{\underline{B}^\mu(u(s))}{\underline{C}^\mu(u(s))} \\ &= u(s) \underline{L}^\mu(u(s)) = L^\mu(u(s))\end{aligned}\quad (4.85)$$

La forme (4.84) de la fonction composée sphérique indique que l'ensemble des temps caractéristiques microscopiques sphériques n'appartient pas à celui des temps macroscopique. Dans le cas déviatorique (Eq. 4.85), l'ensemble des temps microscopiques déviatoriques est un sous-ensemble des temps macroscopiques. Il est à rappeler que le sous-ensemble de temps macroscopiques, coïncidant avec les temps microscopiques, provient du terme  $u(s) = J_0^\mu(s)$  qui multiplie la fonction  $\underline{L}^\mu(u(s))$ . Cette dernière donne l'autre sous-ensemble des temps de retard, résultant du changement d'échelle.

Dans ce cas, on utilise les fonctions rationnelles  $B^\mu(u)$ ,  $C^\mu(u)$  pour le cas déviatorique et les fonctions rationnelles  $\mathcal{B}^\mu(u)$ ,  $\mathcal{C}^\mu(u)$  pour le cas sphérique. En les réduisant au même dénominateur, on obtient leur forme irréductible, ce qui permet d'obtenir la forme de la fraction irréductible de  $\tilde{J}_{ef}^\pi(s)$ .

En remplaçant  $v = \frac{1}{\kappa_0}$  dans les relations (4.21-4.22), on obtient :

- Pour le cas sphérique :

$$\tilde{J}_{ef}^\kappa(s) = \frac{\mathcal{B}^\kappa(u(s))}{\mathcal{C}^\kappa(u(s))} = \frac{vf_0 + \sum_{r=1}^n \frac{(4v+3u)f_r}{(4+3u\kappa_r)}}{f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{(4v+3u)f_r\kappa_r}{(4+3u\kappa_r)}} = \frac{\sum_{r=0}^n \frac{f_r}{(4+3u\kappa_r)}}{\sum_{r=0}^n \frac{f_r\kappa_r}{(4+3u\kappa_r)}}\quad (4.86)$$

On en déduit :

$$\mathcal{B}^\kappa(u) = \sum_{r=0}^n \frac{f_r}{(u + \underline{u}_r^\kappa)\kappa_r}\quad (4.87)$$

$$\mathcal{C}^\kappa(u) = \sum_{r=0}^n \frac{f_r}{(u + \underline{u}_r^\kappa)}\quad (4.88)$$

où les  $\underline{u}_r^\kappa = \frac{4}{3\kappa_r}$  sont classé tels que  $\underline{u}_r^\kappa > \underline{u}_{r+1}^\kappa$ , c'est à dire que l'indice  $r$  augmente lorsque l'on passe de la phase la plus souple (matrice) à la phase la plus rigide :  $\kappa_0 < \dots < \kappa_i < \dots < \kappa_n$ .

- Pour le cas déviatorique, on traite d'une somme de fonctions rationnelles de degré deux. En utilisant la technique de décomposition en fractions partielles (Annexe § F.1.2.2), on peut la ramener à une somme de fonctions homographiques :

$$\begin{aligned}B^\mu(u) &= f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{5(4 + 3\kappa_0 u)f_r}{(a_{2r}u^2 + a_{1r}u + a_{0r})} \\ &= f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{5f_r(u + u_0^\mu)}{2\mu_r(u + u_{r,1}^\mu)(u + u_{r,2}^\mu)} \\ &= f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{5f_r}{2\mu_r} \left( \frac{\bar{u}_{r,1}^\mu}{u + u_{r,1}^\mu} + \frac{\bar{u}_{r,2}^\mu}{u + u_{r,2}^\mu} \right)\end{aligned}\quad (4.89)$$

$$\begin{aligned}C^\mu(u) &= f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{5u(4 + 3\kappa_0 u)f_r\mu_r}{(a_{2r}u^2 + a_{1r}u + a_{0r})} \\ &= f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{5f_r(u + u_0^\mu)u}{2(u + u_{r,1}^\mu)(u + u_{r,2}^\mu)} \\ &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}f_0 - \sum_{r=1}^n \frac{5f_r}{2} \left( \frac{\bar{u}_{r,1}^\mu u_{r,1}^\mu}{u + u_{r,1}^\mu} + \frac{\bar{u}_{r,2}^\mu u_{r,2}^\mu}{u + u_{r,2}^\mu} \right)\end{aligned}\quad (4.90)$$

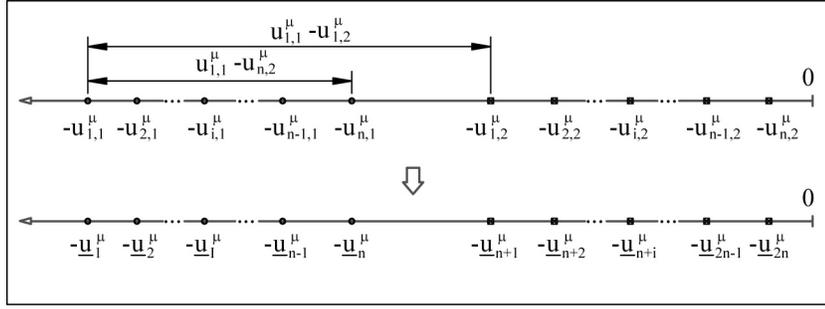


FIG. 4.8 Classement des racines  $u_{r,1}^{\mu}$  et  $u_{r,2}^{\mu}$

où l'on pose :

$$a_{2r} = 6\mu_r\kappa_0, \quad a_{1r} = 9\kappa_0 + 12\mu_r, \quad a_{0r} = 8 \quad (4.91)$$

$$\Delta_r = a_{1r}^2 - 4a_{2r}a_{0r} = 81\kappa_0^2 + 24\kappa_0\mu_r + 144\mu_r^2 \quad (4.92)$$

$$u_{r,1}^{\mu} = \frac{a_{1r} + \sqrt{\Delta_r}}{2a_{2r}}, \quad u_{r,2}^{\mu} = \frac{a_{1r} - \sqrt{\Delta_r}}{2a_{2r}} \quad (4.93)$$

$$\bar{u}_{r,1}^{\mu} = \frac{(u_{r,1}^{\mu} - u_0^{\mu})}{u_{r,1}^{\mu} - u_{r,2}^{\mu}}, \quad \bar{u}_{r,2}^{\mu} = \frac{(u_0^{\mu} - u_{r,2}^{\mu})}{u_{r,1}^{\mu} - u_{r,2}^{\mu}} \quad (4.94)$$

Partant de l'hypothèse que  $\kappa_r < \kappa_{r+1}$  et  $\mu_r < \mu_{r+1}$ , on peut prouver les propriétés suivantes (Annexe § F.1.2.2) :

$$u_{r,1}^{\mu} = \frac{a_{1r} + \sqrt{\Delta_r}}{2a_{2r}} > u_{r+1,1}^{\mu} = \frac{a_{1,r+1} + \sqrt{\Delta_{r+1}}}{2a_{2,r+1}} \quad (4.95)$$

$$u_{r,2}^{\mu} = \frac{a_{1r} - \sqrt{\Delta_r}}{2a_{2r}} > u_{r+1,2}^{\mu} = \frac{a_{1,r+1} - \sqrt{\Delta_{r+1}}}{2a_{2,r+1}} \quad (4.96)$$

$$u_{1,1}^{\mu} - u_{1,2}^{\mu} > u_{1,1}^{\mu} - u_{n,1}^{\mu} \quad (4.97)$$

$$\bar{u}_{r,1}^{\mu} > 0, \quad \bar{u}_{r,2}^{\mu} > 0 \quad (4.98)$$

D'après les inégalités (4.95-4.97), les racines du dénominateur des termes fractionnaires de  $B^{\mu}$  et de  $C^{\mu}$   $\{-u_{r,1}^{\mu}, -u_{r,2}^{\mu}, r = 1 \dots n\}$  sont classées comme indiqué sur la figure 4.8. En effet :

- l'inégalité (4.95) donne  $-u_{1,1}^{\mu} < -u_{2,1}^{\mu} < \dots < -u_{i,1}^{\mu} < \dots < -u_{n,1}^{\mu}$ ,
- l'inégalité (4.96) donne  $-u_{1,2}^{\mu} < -u_{2,2}^{\mu} < \dots < -u_{i,2}^{\mu} < \dots < -u_{n,2}^{\mu}$ ,
- l'inégalité (4.97) donne  $-u_{n,1}^{\mu} < -u_{1,2}^{\mu}$ .

Sur la base de la relation d'ordre entre les racines  $u_{r,1}^{\mu}$  et  $u_{r,2}^{\mu}$ , l'ensemble  $\{-u_{r,1}^{\mu}, -u_{r,2}^{\mu}, r = 1 \dots n\}$  est ensuite restructuré sous la forme  $\{-\underline{u}_i^{\mu}, i = 1 \dots 2n\}$  avec :

$$\underline{u}_i^{\mu} = u_{i,1}^{\mu}, \quad i = 1 \dots n \quad (4.99)$$

$$\underline{u}_{n+i}^{\mu} = u_{i,2}^{\mu}, \quad i = 1 \dots n \quad (4.100)$$

On trouve finalement, comme pour le cas du coefficient de Poisson constant (Eqs. 4.60-4.61), une même forme générique pour les fonctions rationnelles sphériques et déviatoriques  $B^{\pi}(u)$ ,  $C^{\pi}(u)$  :

$$B^{\pi}(u) = b^{\pi} + \sum_{r=r^{\pi}}^{n^{\pi}} \frac{b_r^{\pi}}{(u + \underline{u}_r^{\pi})} \quad (4.101)$$

$$C^{\pi}(u) = c^{\pi} + \sum_{r=r^{\pi}}^{n^{\pi}} \frac{c_r^{\pi}}{(u + \underline{u}_r^{\pi})} \quad (4.102)$$

avec  $n_\kappa = n$  et  $n_\mu = 2n$ .

En particulier, on peut noter que, selon la relation (4.87-4.88), si  $\pi = \kappa$  alors ceci entraîne  $B^\pi(u) = \mathcal{B}^\kappa(u(s))$  et  $C^\pi(u) = \mathcal{C}^\kappa(u(s))$ .

Dans les relations (4.101-4.102), les autres coefficients s'écrivent :

- Pour le cas sphérique,  $r^\kappa = 0$  :

$$b^\kappa = 0 \quad , \quad b_r^\kappa = \frac{f_r}{\kappa_r} \quad , \quad r = 0 \cdots n \quad (4.103)$$

$$c^\kappa = 0 \quad , \quad c_r^\kappa = f_r \quad , \quad r = 0 \cdots n \quad (4.104)$$

- Pour le cas déviatorique,  $r^\mu = 1$  :

$$b^\mu = f_0 \quad , \quad b_r^\mu = \begin{cases} \frac{5f_r \bar{u}_{r,1}^\mu}{2\mu_r} \quad , & r = 1 \cdots n \\ \frac{5f_{r-n} \bar{u}_{r-n,2}^\mu}{2\mu_{r-n}} \quad , & r = (n+1) \cdots 2n \end{cases} \quad (4.105)$$

$$c^\mu = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}f_0 \quad , \quad c_r^\mu = \begin{cases} -\frac{5f_{r-n} \bar{u}_{r-n,1}^\mu u_{r-n,1}^\mu}{2} \quad , & r = 1 \cdots n \\ -\frac{5f_{r-n} \bar{u}_{r-n,1}^\mu 2}{2} \quad , & r = (n+1) \cdots 2n \end{cases} \quad (4.106)$$

Ainsi, les relations (4.101-4.102) montrent que les expressions des polynômes  $\underline{B}_{N_\pi}^\pi(u)$  et  $\underline{C}_{N_\pi}^\pi(u)$  se ramènent également à la forme générique  $\underline{W}_{N_\pi}^\pi(u)$  (Eq. 4.66). Cela permet alors de construire l'expression de  $\tilde{J}_{ef}^\pi(s) = \frac{\bar{Q}_{\bar{m}_\pi}(s)}{P_{\bar{m}_\pi}(s)}$  adoptée lors de la résolution en deux étapes. Le degré  $N_\pi$  du polynôme  $\underline{W}_{N_\pi}^\pi(u)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} N_\mu &= n_\mu - r_\mu + 1 \\ N_\kappa &= n_\kappa - r_\kappa \end{aligned} \quad (4.107)$$

**Cas comportant une phase poreuse** On part du même constat que dans le cas précédent en ce qui concerne les fonctions composées  $L^\pi$  (Eqs. 4.84-4.85), seules les expressions diffèrent.

- Fonction composée sphérique :

D'après les équations (4.21), (4.87) et (4.88) et considérant  $\kappa_n = \mu_n = 0$  (porosité), on a :

$$\mathcal{B}^\kappa(u) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{f_r}{(u + \underline{u}_r^\kappa)\kappa_r} + \frac{3f_n}{4} \quad (4.108)$$

$$\mathcal{C}^\kappa(u) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{f_r}{(u + \underline{u}_r^\kappa)} \quad (4.109)$$

Comme  $c^\kappa = 0$ , on obtient dans ce cas (Annexe § F.1.2.4) :

$$\frac{\mathcal{B}^\kappa(u)}{\mathcal{C}^\kappa(u)} = \frac{\underline{\mathcal{B}}_{N_\kappa+1}^\kappa(u)}{\underline{\mathcal{C}}_{N_\kappa}^\kappa(u)} \quad (4.110)$$

Les relations (4.108-4.110) montrent que si on remplace  $u(s)$  par son expression (Eq. 4.2) alors le polynôme  $\bar{P}_{\bar{m}_\kappa}(s)$ , correspondant au dénominateur de la forme irréductible de la fonction rationnelle  $\tilde{J}_{ef}^\kappa(s)$ , se factorise  $\bar{P}_{\bar{m}_\kappa}(s) = sP_{m_\mu-1}(s)\underline{P}_{\bar{m}_\kappa}(s)$  (Annexe § F.1.2.4). Ainsi, les temps caractéristiques microscopiques déviatoriques coïncident avec une partie (correspondant à  $P_{m_\mu-1}(s)$ ) des temps caractéristiques macroscopiques sphériques.

- Fonction composée déviatorique :

D'après les équations (4.22), (4.89) et (4.90), on a :

$$B^\mu(u) = f_0 + \frac{5}{3}f_n + \frac{20f_n}{27\kappa_0} \frac{1}{u + u_{n,1}^\mu} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{5f_r}{2\mu_r} \left( \frac{\bar{u}_{r,1}^\mu}{u + u_{r,1}^\mu} + \frac{\bar{u}_{r,2}^\mu}{u + u_{r,2}^\mu} \right) \quad (4.111)$$

$$C^\mu(u) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}f_0 - \frac{5}{2}f_n - \sum_{r=1}^{n-1} \frac{5f_r}{2} \left( \frac{\bar{u}_{r,1}^\mu u_{r,1}^\mu}{u + u_{r,1}^\mu} + \frac{\bar{u}_{r,2}^\mu u_{r,2}^\mu}{u + u_{r,2}^\mu} \right) \quad (4.112)$$

où  $u_{n,1}^\mu = \frac{8}{9\kappa_0}$ .

De la même façon qu'en l'absence de porosité, on peut donc restructurer l'ensemble

$\{-u_{r,1}^\mu, -u_{r,2}^\mu, r = 1 \dots n-1\} \cup \{u_{n,1}^\mu\}$ , en un ensemble  $\{-\underline{u}_i^\mu, i = 1 \dots 2(n-1)\} \cup \{u_{2n-1}^\mu\}$  avec les composantes  $\underline{u}_i^\mu$  données par :

$$\underline{u}_i^\mu = u_{i,1}^\mu, \quad i = 1 \dots n-1 \quad (4.113)$$

$$\underline{u}_{n-1+i}^\mu = u_{i,2}^\mu, \quad i = 1 \dots n-1 \quad (4.114)$$

$$u_{2n-1}^\mu = u_{n,1}^\mu \quad (4.115)$$

Finalement, on obtient une même forme que celle donnée par les relations (4.101-4.102) des fonctions rationnelles  $B^\pi(u)$ ,  $C^\pi(u)$ . Les coefficients de ces fonctions rationnelles sont définis par :

- Pour le cas sphérique,  $r^\pi = 0$ ,  $n^\pi = n-1$  :

$$b^\kappa = \frac{3f_n}{4}, \quad b_r^\kappa = \frac{f_r}{\kappa_r}, \quad r = 0, \dots, n-1 \quad (4.116)$$

$$c^\kappa = 0, \quad c_r^\kappa = f_r, \quad r = 0, \dots, n-1 \quad (4.117)$$

- Pour le cas déviatorique,  $r^\pi = 1$ ,  $n^\pi = 2n-1$  :

$$b^\mu = f_0 + \frac{5}{3}f_n, \quad b_r^\mu = \begin{cases} \frac{5f_r \bar{u}_{r,1}^\mu}{2\mu_r}, & r = 1, \dots, n-1 \\ \frac{5f_{r-n+1} \bar{u}_{r-n+1,2}^\mu}{2\mu_{r-n+1}}, & r = n, \dots, 2n-2 \\ \frac{20f_{r-n+1}}{27\kappa_0}, & r = 2n-1 \end{cases} \quad (4.118)$$

$$c^\mu = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}f_0 - \frac{5}{2}f_n, \quad c_r^\mu = \begin{cases} -\frac{5f_1 \bar{u}_{r,1}^\mu u_{r,1}^\mu}{2}, & r = 1, \dots, n-1 \\ -\frac{5f_{r-n+1} \bar{u}_{r-n+1,2}^\mu u_{r-n+1,2}^\mu}{2}, & r = n, \dots, 2n-2 \\ 0, & r = 2n-1 \end{cases} \quad (4.119)$$

**4.3.2.3.2 Localisation des temps caractéristiques et inverse de la TC** Comme dans le cas général (Eqs. 4.34-4.36), on ne peut factoriser que le dénominateur de la fonction effective de fluage déviatorique ( $\bar{P}_{\bar{m}_\mu}(s) = sP_{m_\mu-1}(s)\underline{P}_{\bar{m}_\mu}(s)$ ). Pour la composante sphérique, on a, en l'absence de porosité  $\bar{P}_{\bar{m}_\kappa}(s) = \underline{P}_{\bar{m}_\kappa}(s)$ , alors qu'en présence de porosité, ce polynôme se factorise d'avantage  $\bar{P}_{\bar{m}_\kappa}(s) = sP_{m_\mu-1}(s)\underline{P}_{\bar{m}_\kappa}(s)$ . Par ailleurs, il est nécessaire de chercher les racines  $\underline{s}_i^\pi$  du polynôme

$\underline{P}_{m_\pi}(s)$  de sorte que  $\underline{P}_{m_\pi}(s) = \prod_{i=1}^{m_\pi} \underline{p}_{m_\pi}(s - s_i^\pi)$ . A l'instar du cas du coefficient de Poisson microscopique constant, l'ensemble des racines de  $\underline{P}_{m_\pi}(s)$  se présente comme une famille de  $m_\mu$  sous-ensembles :

$$\underline{\mathcal{E}}_s^\pi = \left\{ s_l^\pi = -\frac{1}{\tau_l^\mu}, l = 1 \cdots N_\pi \times m_\mu \right\} = \bigcup_{j=1}^{m_\mu} \left\{ s_{ij}^\pi, i = 1 \cdots N_\pi \right\} \quad (4.120)$$

Il faut cependant noter que la relation entre l'ensemble des temps caractéristiques microscopique et macroscopique est identique à celle établie dans le cas général :

- Dans le cas sans porosité, l'ensemble des temps macroscopiques sphériques ne contient pas l'ensemble des temps microscopiques sphériques :

$$\bar{\mathcal{E}}_s^\mu = \mathcal{E}_s^\mu \cup \underline{\mathcal{E}}_s^\mu \quad (4.121)$$

$$\bar{\mathcal{E}}_s^\kappa = \underline{\mathcal{E}}_s^\kappa \quad (4.122)$$

- En revanche, s'il existe une phase poreuse, on obtient :

$$\bar{\mathcal{E}}_s^\pi = \mathcal{E}_s^\mu \cup \underline{\mathcal{E}}_s^\pi \quad (4.123)$$

Les ensembles  $\bar{\mathcal{E}}_s^\pi$  et  $\mathcal{E}_s^\mu$  sont définis comme dans le cas général (Eqs. 4.73-4.77). En plus, comme dans le cas du coefficient de Poisson constant (4.78-4.80), les sous-ensembles  $\left\{ s_{ij}^\pi, i = 1 \cdots N_\pi \right\}$  sont encadrés par les quantités microscopiques déviatoriques  $s_j^\mu = \frac{-1}{\tau_j^\mu}$ . On obtient alors les fonctions effectives de fluage dans l'espace temporel :

$$\begin{aligned} J_{ef}^\mu(t) &= \frac{1}{\bar{E}_0^\mu} + \frac{t}{\bar{\eta}_1^\mu} + \sum_{j=2}^{\bar{m}_\mu} e^{\frac{-t}{\bar{\tau}_j^\mu}} \bar{E}_j^\mu \\ &= \frac{1}{\bar{E}_0^\mu} + \frac{t}{\bar{\eta}_1^\mu} + \sum_{j=2}^{m_\mu} e^{\frac{-t}{\tau_j^\mu}} \bar{E}_j^\mu + \sum_{j=1}^{m_\mu} \sum_{i=1}^{N_\mu} e^{\frac{-t}{\tau_{ij}^\mu}} \bar{E}_{ij}^\mu \end{aligned} \quad (4.124)$$

$$\begin{aligned} J_{ef}^\kappa(t) &= \frac{1}{\bar{E}_0^\kappa} + \frac{t}{\bar{\eta}_1^\kappa} + \sum_{j=2}^{\bar{m}_\kappa} e^{\frac{-t}{\bar{\tau}_j^\kappa}} \bar{E}_j^\kappa \\ &= \frac{1}{\bar{E}_0^\kappa} + \frac{t}{\bar{\eta}_1^\kappa} + \sum_{j=1}^{m_\mu} \sum_{i=1}^{N_\kappa} e^{\frac{-t}{\tau_{ij}^\kappa}} \bar{E}_{ij}^\kappa \end{aligned} \quad (4.125)$$

Du fait de la factorisation du polynôme  $\bar{P}_{\bar{m}_\kappa}(s)$ , dans le cas avec porosité, la fonction  $J_{ef}^\kappa(t)$  devient :

$$J_{ef}^\kappa(t) = \frac{1}{\bar{E}_0^\kappa} + \frac{t}{\bar{\eta}_1^\kappa} \sum_{j=2}^{m_\mu} e^{\frac{-t}{\tau_j^\mu}} \bar{E}_j^\kappa + \sum_{j=1}^{m_\mu} \sum_{i=1}^{N_\kappa} e^{\frac{-t}{\tau_{ij}^\kappa}} \bar{E}_{ij}^\kappa \quad (4.126)$$

Ce qui fait apparaître les temps caractéristiques microscopiques de fluage déviatorique comme des temps caractéristiques macroscopiques du fluage sphérique.

Les fonctions de fluage macroscopique (Eqs. 4.124-4.125) ont la même forme que dans le cas du coefficient de Poisson constant (Eq. 4.81). Elles se décomposent en un terme affine (élément de Maxwell macroscopique) et une série de termes associés à des éléments de Kelvin (enrichissement du spectre par homogénéisation [107]). Il faut noter que les paramètres  $\bar{E}_0^\kappa$  et  $\bar{\eta}_1^\kappa$  sont calculés de façon similaire que dans le cas du coefficient de Poisson constant (Eq. 4.82).

### 4.3.3 Schéma autocohérent généralisé

Pour ce schéma, on se limite au cas d'un milieu hétérogène à deux phases : des inclusions élastiques isotropes  $(\mu_1, \kappa_1)$  noyées dans une matrice viscoélastique isotrope  $(\mu_0(t), \kappa_0(t))$ . Puisque l'expression du module de compressibilité effectif est identique au cas du schéma de Mori-Tanaka, on examine seulement, dans ce paragraphe, les quantités effectives déviatoriques. La démarche pour l'analyse du schéma AG généralisé, en viscoélasticité est identique au cas du schéma de MT. Cependant, il apparaît, dans ce cas, des singularités liées aux points de branchement du terme irrationnel. Alors, l'inversion de la TC des fonctions effectives de fluage nécessite de connaître la position relative entre les singularités de pôle et celles de branchement (§ 3.3.2.2). Dans le cas général, i.e. si les fonctions de fluage sphérique et déviatorique de la matrice sont décrites par deux modèles de Kelvin généralisés indépendants (c'est à dire sans aucune hypothèse restrictive), on ne peut déterminer la position relative entre les singularités de pôle et de branchement qu'à l'aide d'outils numériques. En revanche, dans le cas particulier où le coefficient de Poisson est constant, on peut résoudre analytiquement ce problème grâce à la construction, par le changement de variable précédemment adopté, de la fonction composée de fluage effectif déviatorique.

#### 4.3.3.1 Cas général

**4.3.3.1.1 TC de la fonction effective de fluage déviatorique** Pour ce cas, on suppose que les fonctions de fluage de la matrice sont décrites par le modèle généralisé de Kelvin (Eqs. 4.1-4.2) :

$$\tilde{J}_0^\mu(s) = \frac{1}{\tilde{\mu}_0(s)} = \frac{1}{E_1^\mu} + \frac{1}{s\eta_1^\mu} + \sum_{i=2}^{m_\mu} \frac{1}{E_i^\mu + s\eta_i^\mu} \quad (4.127)$$

$$\tilde{J}_0^\kappa(s) = \frac{1}{\tilde{\kappa}_0(s)} = \frac{1}{E_1^\kappa} + \frac{1}{s\eta_1^\kappa} + \sum_{i=2}^{m_\kappa} \frac{1}{E_i^\kappa + s\eta_i^\kappa} \quad (4.128)$$

Pour la composante déviatorique, on ne considère que le cas de la fonction de fluage microscopique déviatorique non borné. Pour la composante sphérique, on considère les deux cas. La fonction de fluage microscopique sphérique borné est obtenue en imposant  $\eta_1^\kappa = \infty$  dans l'expression de  $\tilde{J}_0^\kappa(s)$  (Eq. 4.128), on

Les formes irréductibles des complaisances microscopiques  $\tilde{J}_0^\pi(s)$  s'écrivent :

$$\tilde{J}_0^\mu(s) = \frac{Q_{m_\mu}(s)}{sP_{m_\mu-1}(s)} \quad (4.129)$$

$$\tilde{J}_0^\kappa(s) = \frac{Q_{m_\kappa}(s)}{sP_{m_\kappa-1}(s)} \quad (4.130)$$

En se basant sur le principe de correspondance, la TC du module de cisaillement effectif  $\tilde{\mu}_{ef}(s)$  est obtenue à partir de  $\mu_1$  et  $\tilde{\mu}_0(s)$  par la même relation qui relie, dans le cas élastique,  $\mu_{ef}$  à  $\mu_1$  et  $\mu_0$ . Il s'agit de résoudre l'équation quadratique suivante [94, 14] :

$$\tilde{V}(s) \left( \tilde{X}(s) \right)^2 + 2\tilde{Q}(s)\tilde{X}(s) + \tilde{P}(s) = 0 \quad (4.131)$$

avec  $\tilde{X}(s) = \frac{\tilde{\mu}_{ef}(s)}{\tilde{\mu}_0(s)}$ ,  $\tilde{V}(s)$ ,  $\tilde{Q}(s)$  et  $\tilde{P}(s)$  sont des fonctions rationnelles de la variable  $s$ . Elles dépendent des quantités  $\frac{\mu_1}{\mu_0(s)}$ ,  $f_1$ ,  $\nu_1$  et  $\tilde{\nu}_0(s)$  de la même façon que dans le cas élastique. Leurs expressions sont

données dans l'annexe § G.1. On obtient alors l'expression de  $\tilde{\mu}_{ef}(s)$  :

$$\tilde{\mu}_{ef}(s) = \tilde{\mu}_0(s) \frac{-\tilde{Q}(s) \pm \sqrt{\tilde{\Delta}(s)}}{\tilde{V}(s)} \quad (4.132)$$

$$\tilde{\Delta}(s) = \tilde{Q}^2(s) - \tilde{V}(s)\tilde{P}(s) \quad (4.133)$$

Le signe  $\pm$  dans l'équation (4.132) est choisi de sorte à satisfaire la condition  $\mu_{ef}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_{ef}(s) > 0$ , qui correspond à la raideur élastique instantanée.

En inversant  $\tilde{\mu}_{ef}(s)$ , on obtient l'expression de la fonction effective de fluage déviatorique :

$$\tilde{J}_{ef}^\mu(s) = \frac{1}{\tilde{\mu}_{ef}(s)} = \tilde{J}_0^\mu(s) \frac{-\tilde{Q}(s) \pm \sqrt{\tilde{\Delta}(s)}}{\tilde{P}(s)} \quad (4.134)$$

Puisque  $\tilde{Q}(s)$ ,  $\tilde{P}(s)$  et  $\tilde{\Delta}(s)$  sont des fonctions rationnelles, pour inverser la TC de  $\tilde{J}_{ef}^\mu(s)$ , il faut construire les polynômes associés  $\underline{Q}_{\underline{m}_\mu}(s)$ ,  $\underline{P}_{\underline{m}_\mu}(s)$  et  $\underline{\Delta}_{2\underline{m}_\mu}(s)$  de telle manière que :

$$\tilde{J}_{ef}^\mu(s) = \tilde{J}_0^\mu(s) \frac{-\tilde{Q}(s) \pm \sqrt{\tilde{\Delta}(s)}}{\tilde{P}(s)} = \tilde{J}_0^\mu(s) \frac{-\underline{Q}_{\underline{m}_\mu}(s) \pm \sqrt{\underline{\Delta}_{2\underline{m}_\mu}(s)}}{\underline{P}_{\underline{m}_\mu}(s)} \quad (4.135)$$

**4.3.3.1.2 Fonction composée de  $\tilde{J}_{ef}^\mu(s)$**  En introduisant le changement de variable  $\tilde{\mu}_0(s) = \frac{1}{u(s)}$  et  $\tilde{\kappa}_0(s) = \frac{1}{v(s)}$  dans les fonctions  $\tilde{V}(s)$ ,  $\tilde{Q}(s)$  et  $\tilde{P}(s)$  (Annexe § G.1), on obtient les fonctions composées correspondantes  $A_4(u, v)$ ,  $B_4(u, v)$  et  $C_4(u, v)$  :

$$\tilde{V}(s) = A_4(u(s), v(s)) , \quad \tilde{Q}(s) = B_4(u(s), v(s)) , \quad \tilde{P}(s) = C_4(u(s), v(s)) \quad (4.136)$$

La relation (4.136) peut être réécrite de façon synthétique :

$$W_4(u(s), v(s)) = \tilde{X}(s) \quad (4.137)$$

où  $W = A$  correspond à  $X = V$ ,  $W = B$  correspond à  $X = Q$ ,  $W = C$  correspond à  $X = P$ .

La fonction  $\tilde{J}_{ef}^\mu(s)$  est donc représentée par les fonctions composées, précédemment définies :

$$\tilde{J}_{ef}^\mu(s) = u(s) \frac{-B_4(u(s), v(s)) \pm \sqrt{D_8(u(s), v(s))}}{C_4(u(s), v(s))} \quad (4.138)$$

où  $D_8(u, v) = (B_4(u, v))^2 - A_4(u, v)C_4(u, v)$  d'après la définition de  $\tilde{\Delta}(s)$  (Eq. 4.133). On trouve que les fonctions composées  $A_4(u, v)$ ,  $B_4(u, v)$  et  $C_4(u, v)$  ont le même dénominateur  $(3u(s) + v(s))^2$ . Donc, il est nécessaire de définir les polynômes  $\underline{A}_4(u, v)$ ,  $\underline{B}_4(u, v)$  et  $\underline{C}_4(u, v)$  comme suit :

$$\begin{aligned} \underline{W}_4(u(s), v(s)) &= \underline{W}_4(u(s), v(s)) (3u(s) + v(s))^2 \\ &= \tilde{X}(s) (3u(s) + v(s))^2 \end{aligned} \quad (4.139)$$

où  $\underline{A}_4(u, v)$ ,  $\underline{B}_4(u, v)$ ,  $\underline{C}_4(u, v)$  sont des polynômes de degré 4 des deux variables  $(u, v)$ . Ils ont la même forme :

$$\begin{aligned} \underline{W}_4(u, v) &= \underline{w}_{40}u^4 + \underline{w}_{30}u^3 + \underline{w}_{31}u^3v + \underline{w}_{20}u^2 + \underline{w}_{21}u^2v + \underline{w}_{22}u^2v^2 \\ &\quad + \underline{w}_{11}uv + \underline{w}_{12}uv^2 + \underline{w}_{02}v^2 \end{aligned} \quad (4.140)$$

Les coefficients  $\underline{w}_{ij}$  ne dépendent que des paramètres  $\nu_1$ ,  $f_1$  et  $\mu_1$ . Leurs expressions sont données dans l'annexe § G.2.2.

D'après les relations (4.138-4.139), on obtient la nouvelle forme de la fonction composée de  $\tilde{J}_{ef}^\mu(s)$  :

$$\tilde{J}_{ef}^\mu(s) = L^\mu(u(s), v(s)) = u(s) \underline{L}^\mu(u(s), v(s)) \quad (4.141)$$

où la fonction  $\underline{L}^\mu(u, v)$  est la somme de deux parties :

$$\underline{L}^\mu(u, v) = -\underline{L}_a^\mu(u, v) \pm \underline{L}_b^\mu(u, v) \quad (4.142)$$

avec :

$$\begin{aligned} \underline{L}_a^\mu(u, v) &= \frac{\underline{B}_4(u, v)}{\underline{C}_4(u, v)}, \quad \underline{L}_b^\mu(u, v) = \frac{\sqrt{\underline{D}_8(u, v)}}{\underline{C}_4(u, v)} \\ \underline{D}_8(u, v) &= (\underline{B}_4(u, v))^2 - \underline{A}_4(u, v)\underline{C}_4(u, v) \end{aligned} \quad (4.143)$$

Pour tous les deux cas, où le fluage sphérique microscopique est non borné ou borné, on peut prouver (Annexe § G.2) que :

$$\underline{W}_4(u(s), v(s)) = \frac{\underline{X}_{\underline{m}_\mu}(s)}{s^4 P_{\underline{m}_\mu-1}^4(s) P_{\underline{m}_\kappa-1}^2(s)} \quad (4.144)$$

où  $W$  correspond à  $A$ ,  $B$  ou  $C$  selon que  $X = V$ ,  $X = Q$  ou  $X = P$  respectivement. En tenant compte de l'équation (4.139), on obtient :

$$\tilde{X}(s) = \frac{\underline{W}_4(u(s), v(s))}{(3u(s) + v(s))^2} = \frac{1}{(3u(s) + v(s))^2} \frac{\underline{X}_{\underline{m}_\mu}(s)}{s^4 P_{\underline{m}_\kappa-1}^4(s) P_{\underline{m}_\kappa-1}^2(s)} \quad (4.145)$$

où les polynômes  $\underline{V}_{\underline{m}_\mu}(s)$ ,  $\underline{Q}_{\underline{m}_\mu}(s)$ ,  $\underline{P}_{\underline{m}_\mu}(s)$ , ayant la même forme, peuvent être représentés par le polynôme  $\underline{X}_{\underline{m}_\mu}(s) = \prod_{i=0}^{\underline{m}_\mu} \underline{x}_i s^i$  dont la forme est donnée par la relation (G.12) pour le cas du fluage sphérique microscopique non borné et par la relation (G.19) pour le cas du fluage sphérique microscopique borné.

**4.3.3.1.3 Forme irréductible de  $\tilde{J}_{ef}^\mu(s)$**  En combinant les relations (4.134-4.135) et (4.145), on obtient :

$$\tilde{J}_{ef}^\mu(s) = -\tilde{J}_a^\mu(s) \pm \tilde{J}_b^\mu(s) \quad (4.146)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{J}_a^\mu(s) &= \frac{Q_{\underline{m}_\mu}(s)}{s P_{\underline{m}_\mu-1}(s)} \frac{Q_{\underline{m}_\mu}(s)}{\underline{P}_{\underline{m}_\mu}(s)} = \frac{\bar{Q}_{\underline{m}_\mu}(s)}{\bar{P}_{\underline{m}_\mu}(s)} \\ \tilde{J}_b^\mu(s) &= \frac{Q_{\underline{m}_\mu}(s)}{s P_{\underline{m}_\mu-1}(s)} \frac{\sqrt{\underline{\Delta}_{2\underline{m}_\mu}(s)}}{\underline{P}_{\underline{m}_\mu}(s)} = Q_{\underline{m}_\mu}(s) \frac{\sqrt{\underline{\Delta}_{2\underline{m}_\mu}(s)}}{\bar{P}_{\underline{m}_\mu}(s)} \\ \underline{\Delta}_{2\underline{m}_\mu}(s) &= \underline{Q}_{\underline{m}_\mu}^2(s) - \underline{V}_{\underline{m}_\mu}(s) \underline{P}_{\underline{m}_\mu}(s) \end{aligned} \quad (4.147)$$

On désigne par :

- $\mathcal{E}_s^\mu = \{s_i^\mu = -1/\tau_i^\mu; i: 1 \rightarrow \underline{m}_\mu\}$  l'ensemble des racines associées aux temps caractéristiques microscopiques  $\mathcal{E}_\tau^\mu = \{\tau_i^\mu; i: 1 \rightarrow \underline{m}_\mu\}$ .
- $\mathcal{E}_s^c = \{s_i^c = -1/\tau_i^c; i: 1 \rightarrow \underline{m}_\mu\}$  l'ensemble des racines de  $\underline{P}_{\underline{m}_\mu}(s)$ . Cet ensemble donne la partie complémentaire des temps caractéristiques macroscopiques  $\mathcal{E}_\tau^c = \{\tau_i^c; i: 1 \rightarrow \underline{m}_\mu\}$ .
- $\mathcal{E}_s^\Delta = \{s_i^\Delta = -1/\tau_i^\Delta; i: 1 \rightarrow 2\underline{m}_\mu\}$  l'ensemble des racines de  $\underline{\Delta}_{2\underline{m}_\mu}(s)$ . Ses éléments correspondent aux bornes des intervalles des temps caractéristiques macroscopiques de la partie continue du spectre.

On peut écrire :

$$sP_{m_\mu-1}(s) = \prod_{i=1}^{m_\mu} (s - s_i^\mu) = \prod_{i=1}^{m_\mu} (s + 1/\tau_i^\mu) \quad (4.148)$$

$$\underline{P}_{\underline{m}_\mu}(s) = \underline{p}_{\underline{m}_\mu} \prod_{i=1}^{\underline{m}_\mu} (s - \underline{s}_i^c) = \underline{p}_{\underline{m}_\mu} \prod_{i=1}^{\underline{m}_\mu} (s + 1/\underline{\tau}_i^c) \quad (4.149)$$

$$\underline{\Delta}_{2\underline{m}_\mu}(s) = \underline{\delta}_{2\underline{m}_\mu} \prod_{i=1}^{2\underline{m}_\mu} (s - \underline{s}_i^\Delta) = \underline{\delta}_{2\underline{m}_\mu} \prod_{i=1}^{2\underline{m}_\mu} (s + 1/\underline{\tau}_i^\Delta) \quad (4.150)$$

où  $\tau_1^\mu = \infty$ ,  $s_1^\mu = 0$ .

Enfin, on définit l'ensemble des racines de  $\bar{P}_{\bar{m}_\mu}(s)$  par  $\bar{\mathcal{E}}_s^\mu = \{\bar{s}_i^\mu = -1/\bar{\tau}_i^\mu; i : 1 \rightarrow \bar{m}_\mu\}$  qui est associé à l'ensemble de tous les temps caractéristiques macroscopiques de spectre discret  $\bar{\mathcal{E}}_\tau^\mu = \{\bar{\tau}_i^\mu; i : 1 \rightarrow \bar{m}_\mu\}$ . On obtient finalement, comme pour le cas du schéma de MT, les relations suivantes :

$$\bar{\mathcal{E}}_\tau^\mu = \mathcal{E}_\tau^\mu \cup \underline{\mathcal{E}}_\tau^c \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{E}}_s^\mu = \mathcal{E}_s^\mu \cup \underline{\mathcal{E}}_s^c \quad (4.151)$$

**4.3.3.1.4 La fonction effective de fluage dans l'espace temporel** A partir de la relation (4.146), on peut obtenir l'expression, dans l'espace temporel, de la fonction effective de fluage par la formule de Bromwich (Eq. 3.4) :

$$J_{ef}^\mu(t) = -\frac{1}{2I\pi} \int_{\gamma-I\infty}^{\gamma+I\infty} \frac{\tilde{J}_a^\mu(s)}{s} e^{st} ds \pm \frac{1}{2I\pi} \int_{\gamma-I\infty}^{\gamma+I\infty} \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st} ds \quad (4.152)$$

où  $\gamma$  est un réel choisi tel qu'il soit supérieur à la partie réelle de tous les pôles et points de branchement de  $\tilde{J}_{ef}^\mu(s)$ .

Pour obtenir les transformations inverses de  $\tilde{J}_a^\mu(s)$  et de  $\tilde{J}_b^\mu(s)$ , il faut d'abord trouver leurs points de singularité et de branchement. Les deux fonctions  $\tilde{J}_a^\mu(s)$  et  $\tilde{J}_b^\mu(s)$  (Eq. 4.147) ayant le même dénominateur, elles ont alors le même ensemble de points de singularité définis comme la réunion des ensembles des racines de  $sP_{m_\mu-1}(s)$  et de  $\underline{P}_{\underline{m}_\mu}(s)$ . Le premier ensemble, noté  $\mathcal{E}_s^\mu$ , est constitué des opposés des inverses des temps caractéristiques microscopiques qui sont connus. Les éléments du second ensemble, noté  $\underline{\mathcal{E}}_s^c$ , proviennent des racines du polynôme  $\underline{P}_{\underline{m}_\mu}(s)$ . Par ailleurs, l'ensemble des points de branchement  $\underline{\mathcal{E}}_s^\Delta$  correspond aux racines du polynôme  $\underline{\Delta}_{2\underline{m}_\mu}(s)$ .

Pour évaluer l'intégrale (4.152), il faut connaître la position relative des points de branchement et des points de singularité afin de construire un contour de cette intégrale dans le plan complexe qui permet d'exploiter les propriétés des fonctions analytiques [94, 14].

Dans le cas particulier où le coefficient de Poisson est constant, on peut prouver que les points de singularité et de branchement de  $\tilde{J}_{ef}^\mu(s)$  sont des racines réelles simples, négatives et qu'il n'existe pas de points de singularité entre deux points de branchement successifs. Dans le cas général, ces propriétés ne peuvent être prouvées que numériquement et que pour le problème traité [94, 14]. Si ces propriétés sont vérifiées, on peut construire un contour pour l'intégrale (4.152) de sorte à déduire  $J_{ef}^\mu(t)$  par la formule de Bromwich :

$$J_{ef}^\mu(t) = \frac{1}{\bar{E}_0^\mu} + \frac{t}{\bar{\eta}_1^\mu} - \sum_{i=2}^{\bar{m}_\mu} \left( \frac{1}{\bar{E}_i^\mu} \int_0^\infty \delta(\tau - \bar{\tau}_i^\mu) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau \right) + \sum_{i=1}^{\underline{m}_\mu} \left( \int_0^\infty g_i^c(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau \right) \quad (4.153)$$

où

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{E}_0^\mu} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d \left( s \tilde{J}_{ef}^\mu(s) \right)}{ds} & \frac{1}{\bar{E}_i^\mu} &= - \lim_{s \rightarrow \bar{s}_i^\mu} \left\{ (s - \bar{s}_i^\mu) \frac{\tilde{J}_{ef}^\mu(s)}{s} \right\} \\ \frac{1}{\bar{\eta}_1^\mu} &= \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \tilde{J}_{ef}^\mu(s) \right) & \bar{\eta}_i^\mu &= - \frac{\bar{E}_i^\mu}{\bar{s}_i^\mu} \text{ avec } i \geq 2 \end{aligned} \quad (4.154)$$

Comme dans le cas du schéma de MT, le fluage macroscopique déviatorique obtenu par le schéma AG présente un terme affine qui contrôle le fluage à long terme : asymptote d'ordonnée à l'origine  $1/\bar{E}_0^\mu$  et de pente  $1/\bar{\eta}_1^\mu$ . Par ailleurs, les termes exponentiels se décomposent en un spectre discret de temps caractéristiques  $\bar{\tau}_i^\mu$  et un spectre continu. L'expression de la fonction  $g_i^c(\tau)$  sera explicitée dans le cas du coefficient de Poisson constant.

### 4.3.3.2 Cas du coefficient Poisson constant

**4.3.3.2.1 Fonction composée de  $\tilde{J}_{ef}^\mu(s)$**  Il permet d'examiner analytiquement le classement des points de singularité et de branchement de la fonction  $\tilde{J}_{ef}^\mu(s)$ . De plus, on peut prouver que les racines des polynômes  $\underline{P}_{m_\mu}(s)$  et  $\underline{\Delta}_{2m_\mu}(s)$  sont des racines réelles simples et négatives. Cela permet de calculer l'inverse de TL par la formule de Bromwich.

Dans ce cas, les fonctions composées  $L^\mu(u, v)$  et  $\underline{L}^\mu(u, v)$  dépendent seulement de la variable  $u$  :

$$\tilde{J}_{ef}^\mu(s) = L^\mu(u(s)) = u(s) \underline{L}^\mu(u(s)) \quad (4.155)$$

et les relations (4.142-4.143) deviennent :

$$\begin{aligned} \underline{L}^\mu(u) &= -\underline{L}_a^\mu(u) \pm \underline{L}_b^\mu(u) \\ \underline{L}_a^\mu(u) &= \frac{\underline{B}_2(u)}{\underline{C}_2(u)} \quad , \quad \underline{L}_b^\mu(u) = \frac{\sqrt{\underline{D}_4(u)}}{\underline{C}_2(u)} \\ \underline{D}_4(u) &= (\underline{B}_2(u))^2 - \underline{A}_2(u)\underline{C}_2(u) \end{aligned} \quad (4.156)$$

Ainsi, on a ici (Eq. 4.139) :

$$\underline{B}_2(u(s)) = \tilde{B}(s) \quad , \quad \underline{A}_2(u(s)) = \tilde{A}(s) \quad , \quad \underline{C}_2(u(s)) = \tilde{C}(s) \quad (4.157)$$

où  $\underline{A}_2(u)$ ,  $\underline{B}_2(u)$ ,  $\underline{C}_2(u)$  sont des fonctions quadratiques de la variable  $u$ . Elles présentent une forme générique simple :

$$\underline{W}_2(u) = \underline{w}_2 \times (\mu_1 u)^2 + \underline{w}_1 \times (\mu_1 u) + \underline{w}_0 \quad (4.158)$$

avec les coefficients  $\underline{w}_l$   $\{l = 0, 1, 2\}$  qui dépendent seulement des paramètres  $(\nu_0, \nu_1, f_1)$  et qui sont fournis en annexe § G.2.3. Dans la suite, on considère le domaine de variation de ces paramètres défini par  $[0, 0.5] \times [0, 0.5] \times [0, 1.0[$ .

Pour le classement des singularités de pôle et de branchement de  $\tilde{J}_{ef}^\mu(s)$ , il faut d'abord analyser les racines des fonctions composées  $\underline{A}_2(u)$ ,  $\underline{C}_2(u)$ ,  $\underline{D}_4(u)$  :

1. Classement des racines de  $\underline{A}_2(u)$  et de  $\underline{C}_2(u)$  :

En examinant les coefficients  $\underline{a}_l(\nu_0, \nu_1, f_1)$  et  $\underline{c}_l(\nu_0, \nu_1, f_1)$  comme des fonctions des variables  $(\nu_0, \nu_1, f_1)$  dans le domaine  $[0, 0.5] \times [0, 0.5] \times [0, 1.0[$ , on trouve que :

$$\underline{a}_l(\nu_0, \nu_1, f_1) > 0 \quad , \quad \underline{c}_l(\nu_0, \nu_1, f_1) < 0 \text{ avec } l = 0, 1, 2 \quad (4.159)$$

En examinant les discriminants  $\Delta_{a2}$  et  $\Delta_{c2}$  des deux fonctions  $\underline{A}_2(u)$  et  $\underline{C}_2(u)$ , on obtient :

$$\Delta_{a2}(\nu_0, \nu_1, f) > 0 \quad , \quad \Delta_{c2}(\nu_0, \nu_1, f) > 0 \text{ dans } [0, 0.5] \times [0, 0.5] \times [0, 1.0[ \quad (4.160)$$

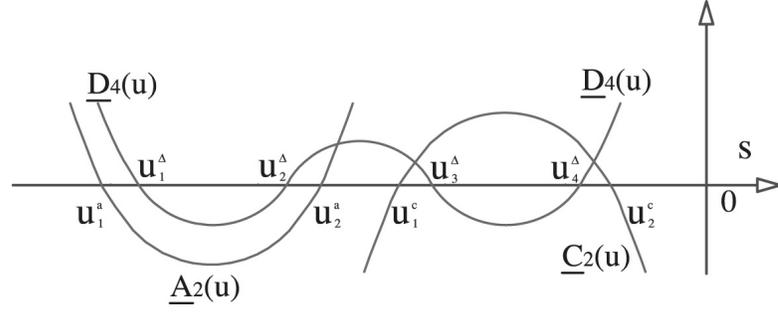


FIG. 4.9 Graphiques des fonctions  $A_2(u)$ ,  $C_2(u)$ ,  $\Delta_2(u)$  :  $u_2^a < u_1^c$

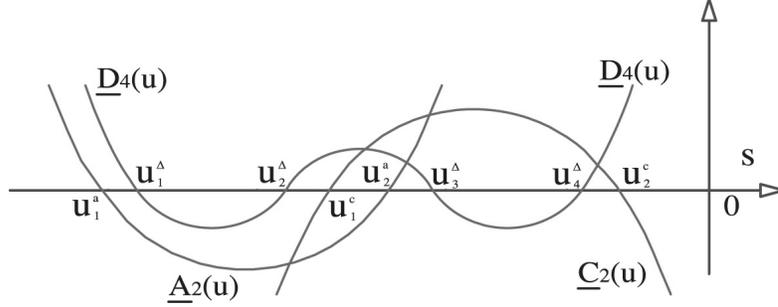


FIG. 4.10 Graphiques des fonctions  $A_2(u)$ ,  $C_2(u)$ ,  $\Delta_2(u)$  :  $u_1^c < u_2^a$

En combinant les relations (4.159-4.160), on déduit que  $\underline{A}_2(u)$  et  $\underline{C}_2(u)$  ont toujours deux racines réelles distinctes négatives.

En posant  $u_1^a < u_2^a$  et  $u_1^c < u_2^c$  les racines de  $\underline{A}_2(u)$ ,  $\underline{C}_2(u)$ , respectivement, et en considérant les différences  $(u_1^c - u_1^a)$  et  $(u_2^c - u_2^a)$  comme des fonctions des variables  $(\nu_0, \nu_1, f_1)$ , on trouve :

$$0 > u_1^c > u_1^a \text{ dans } [0, 0.5] \times [0, 0.5] \times [0, 1.0[ \quad (4.161)$$

$$0 > u_2^c > u_2^a \text{ dans } [0, 0.5] \times [0, 0.5] \times [0, 1.0[ \quad (4.162)$$

Le coefficient quadratique de  $\underline{A}_2(u)$  est positif et celui de  $\underline{C}_2(u)$  est négatif,  $\underline{A}_2(u)$  est alors une fonction convexe et  $\underline{C}_2(u)$  est une fonction concave. On peut tracer les graphes de ces deux fonctions comme présentés sur les figures 4.9 et 4.10.

## 2. Classement des racines de $\underline{D}_4(u)$

A partir de la relation (4.156) et de l'expression (Eq. 4.158) des fonctions  $\underline{A}_2(u)$ ,  $\underline{B}_2(u)$ ,  $\underline{C}_2(u)$ , on peut écrire :

$$\underline{D}_4(u) = \underline{d}_4 (\mu_1 u)^4 + \underline{d}_3 (\mu_1 u)^3 + \underline{d}_2 (\mu_1 u)^2 + \underline{d}_1 (\mu_1 u) + \underline{d}_0 \quad (4.163)$$

où les coefficients  $\underline{d}_i$  sont donnés dans l'annexe § G.3.

En posant  $u_1^\Delta, u_2^\Delta, u_3^\Delta, u_4^\Delta$  les racines de  $\underline{D}_4(u)$ , on va prouver que toutes ces racines sont réelles distinctes. En plus, on cherchera leur position relative par rapport aux racines  $u_1^a, u_2^a, u_1^c, u_2^c$ .

- En transformant le polynôme  $\underline{D}_4(u)$  sous une forme standard :

$$\underline{D}_4^s(u) = (\mu_1 u)^4 + \alpha (\mu_1 u)^2 + \beta (\mu_1 u) + \rho \quad (4.164)$$

et en examinant le discriminant  $\Delta_4^s$  (Annexe § G.3), on peut prouver que  $\underline{D}_4^s(u)$  a quatre racines réelles distinctes, d'après les propriétés des équations quartiques [91, 40]. On en déduit alors que  $\underline{D}_4(u)$  a aussi quatre racines réelles distinctes  $u_1^\Delta < u_2^\Delta < u_3^\Delta < u_4^\Delta$ .

- Maintenant, pour estimer les positions relatives des racines de  $\underline{D}_4(u)$  par rapport à celles des racines de  $\underline{A}_2(u)$  et de  $\underline{C}_2(u)$ , il faut examiner d'abord les racines de  $\underline{D}'_3(u)$  :

$$\underline{D}'_3(u) = \frac{d\underline{D}_4(u)}{du} = \left\{ \underline{d}'_3 (\mu_1 u)^3 + \underline{d}'_2 (\mu_1 u)^2 + \underline{d}'_1 (\mu_1 u) + \underline{d}'_0 \right\} \mu_1 \quad (4.165)$$

où  $\underline{d}'_3 = 4\underline{d}_4$ ,  $\underline{d}'_2 = 3\underline{d}_3$ ,  $\underline{d}'_1 = 2\underline{d}_2$ ,  $\underline{d}'_0 = \underline{d}_1$ .

En examinant le discriminant de  $\underline{D}'_3(u)$ , on trouve, dans le domaine  $[0, 0.5] \times [0, 0.5] \times [0, 1.0[$  :

$$\Delta'_3 = 4 (\underline{d}'_2)^3 \underline{d}'_0 - (\underline{d}'_2)^2 (\underline{d}'_1)^2 + 4\underline{d}'_3 (\underline{d}'_1)^3 - 18\underline{d}'_3 \underline{d}'_2 \underline{d}'_1 \underline{d}'_0 + 27 (\underline{d}'_3)^2 (\underline{d}'_0)^2 < 0 \quad (4.166)$$

On en déduit alors que  $\underline{D}'_3(u)$  a trois racines réelles distinctes  $u_1^{\Delta} < u_2^{\Delta} < u_3^{\Delta}$  qui sont données dans l'annexe § G.4. En comparant les trois racines  $u_1^{\Delta} < u_2^{\Delta} < u_3^{\Delta}$  de  $\underline{D}'_3(u)$  avec les racines  $u_1^a < u_2^a$ ,  $u_1^c < u_2^c$  de  $\underline{A}_2(u)$  et  $\underline{C}_2(u)$ , dans le domaine  $[0, 0.5] \times [0, 0.5] \times [0, 1.0[$ , on trouve :

$$u_1^a < u_1^{\Delta} < u_2^a \quad , \quad u_1^c < u_3^{\Delta} < u_2^c \quad (4.167)$$

En combinant la relation (4.167) avec le fait que :

$$\underline{\Delta}_4(u_1^a) = (\underline{B}_2(u_1^a))^2 - \underline{A}_2(u_1^a)\underline{C}_2(u_1^a) = (\underline{B}_2(u_1^a))^2 > 0 \quad (4.168)$$

$$\underline{\Delta}_4(u_2^a) = (\underline{B}_2(u_2^a))^2 - \underline{A}_2(u_2^a)\underline{C}_2(u_2^a) = (\underline{B}_2(u_2^a))^2 > 0 \quad (4.169)$$

$$\underline{\Delta}_4(u_1^c) = (\underline{B}_2(u_1^c))^2 - \underline{A}_2(u_1^c)\underline{C}_2(u_1^c) = (\underline{B}_2(u_1^c))^2 > 0 \quad (4.170)$$

$$\underline{\Delta}_4(u_2^c) = (\underline{B}_2(u_2^c))^2 - \underline{A}_2(u_2^c)\underline{C}_2(u_2^c) = (\underline{B}_2(u_2^c))^2 > 0 \quad (4.171)$$

on en déduit grâce aux graphiques (Figs. 4.9-4.10) que, dans le domaine  $[0, 0.5] \times [0, 0.5] \times [0, 1.0[$ , on a :

$$u_1^a < u_1^{\Delta} < u_2^{\Delta} < u_2^a < 0 \quad \text{et} \quad u_1^c < u_3^{\Delta} < u_4^{\Delta} < u_2^c < 0 \quad (4.172)$$

Il n'y a donc que deux possibilités pour les positions relatives des graphiques des fonctions  $\underline{A}_2(u)$ ,  $\underline{C}_2(u)$ ,  $\underline{\Delta}_4(u)$  comme indiqué par les figures 4.9 et 4.10.

**4.3.3.2.2 Forme irréductible de  $\tilde{J}_{ef}^\mu(s)$**  A partir de la relation générique (4.158), on peut factoriser  $\underline{C}_2(u)$  :

$$\underline{C}_2(u) = (\mu_1)^2 \underline{c}_2 (u - u_1^c) (u - u_2^c) \quad (4.173)$$

En remplaçant  $u(s) = \frac{Q_{m_\mu}(s)}{sP_{m_\mu-1}(s)}$  dans l'expression de  $\underline{C}_2(u)$  ci-dessus et en tenant compte du fait que  $\left\{ \underline{s}_{ij}^c, i = 1 \cdots m_\mu, j = 1, 2 \right\}$  est l'ensemble des racines des équations :

$$\frac{Q_{m_\mu}(s)}{sP_{m_\mu-1}(s)} - u_j^c = 0 \quad (4.174)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \underline{C}_2(u(s)) &= \frac{(\mu_1)^2 \underline{c}_2}{[sP_{m_\mu-1}(s)]^2} \left[ \prod_{j=1}^2 \left( \frac{1}{E_1^\mu} - u_j^c \right) \prod_{j=1}^2 \prod_{i=1}^{m_\mu} \left( s - \underline{s}_{ij}^c \right) \right] \\ &= \frac{\underline{P}_{\underline{m}_\mu}(s)}{[sP_{m_\mu-1}(s)]^2} \end{aligned} \quad (4.175)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \underline{P}_{m_\mu}(s) &= \underline{C}_2(u(s)) [sP_{m_\mu-1}(s)]^2 \\ &= \underline{p}_{2m_\mu} \left[ \prod_{j=1}^2 \prod_{i=1}^{m_\mu} \left( s - \frac{s^c}{\underline{s}_{ij}} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.176)$$

où  $\underline{p}_{2m_\mu} = (\mu_1)^2 \underline{c}_2 \prod_{j=1}^2 \left( \frac{1}{E_1^\mu} - u_j^c \right)$ .

De la même façon, on obtient :

$$\begin{aligned} \underline{D}_4(u(s)) &= \frac{(\mu_1)^4 \underline{d}_4}{[sP_{m_\mu-1}(s)]^4} \left[ \prod_{j=1}^4 \left( \frac{1}{E_1^\mu} - u_j^\Delta \right) \prod_{j=1}^4 \prod_{i=1}^{m_\mu} \left( s - \frac{s^\Delta}{\underline{s}_{ij}} \right) \right] \\ &= \frac{\underline{\Delta}_{2m_\mu}(s)}{[sP_{m_\mu-1}(s)]^2} \end{aligned} \quad (4.177)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_{2m_\mu}(s) &= \underline{D}_4(u(s)) [sP_{m_\mu-1}(s)]^2 \\ &= \underline{\delta}_{4m_\mu} \left[ \prod_{j=1}^4 \prod_{i=1}^{m_\mu} \left( s - \frac{s^\Delta}{\underline{s}_{ij}} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.178)$$

où  $\underline{\delta}_{4m_\mu} = (\mu_1)^4 \underline{d}_4 \prod_{j=1}^4 \left( \frac{1}{E_1^\mu} - u_j^\Delta \right)$ .

Pour le polynôme  $\underline{Q}_{m_\mu}(s)$ , il n'est pas nécessaire de chercher ses racines, on ne cherche que son expression en fonction de  $u(s)$  à partir de la fonction composée :

$$\underline{Q}_{m_\mu}(s) = \underline{B}_2(u(s)) [sP_{m_\mu-1}(s)]^2 \quad (4.179)$$

En outre, à partir des expressions de  $\underline{C}_2(u)$  et de  $\underline{\Delta}_4(u)$  (Eqs. 4.175-4.177) et en remplaçant  $u(s)$  par son expression  $u(s) = \frac{Q_{m_\mu}(s)}{sP_{m_\mu-1}(s)}$ , on trouve aisément que les ensemble  $\underline{\mathcal{E}}_s^c$  et  $\underline{\mathcal{E}}_s^\Delta$  des racines de  $\underline{P}_{m_\mu}(s)$  et de  $\underline{\Delta}_{2m_\mu}(s)$ , respectivement peuvent être divisés en  $m_\mu$  sous-ensembles :

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{E}}_s^c &= \{ \underline{s}_k^c = -1/\underline{\tau}_k^c; k : 1 \rightarrow m_\mu \} = \bigcup_{i=1}^{m_\mu} \{ \underline{s}_{ij}^c = -1/\underline{\tau}_{ij}^c; j : 1 \rightarrow 2 \} \\ \underline{\mathcal{E}}_s^\Delta &= \{ \underline{s}_k^\Delta = -1/\underline{\tau}_k^\Delta; k : 1 \rightarrow 2m_\mu \} = \bigcup_{i=1}^{m_\mu} \{ \underline{s}_{ij}^\Delta = -1/\underline{\tau}_{ij}^\Delta; j : 1 \rightarrow 4 \} \end{aligned} \quad (4.180)$$

où les racines  $\underline{s}_{ij}^c$  et  $\underline{s}_{ij}^\Delta$  sont respectivement, les racines du système d'équations suivant :

$$u_j^c = \frac{Q_{m_\mu}(s)}{sP_{m_\mu-1}(s)} ; j : 1 \rightarrow 2 \quad (4.181)$$

$$u_j^\Delta = \frac{Q_{m_\mu}(s)}{sP_{m_\mu-1}(s)} ; j : 1 \rightarrow 4 \quad (4.182)$$

En examinant le graphe de la fonction  $u(s)$  (Fig. 4.11) après y avoir reporté les racines  $(u_1^\Delta, u_2^\Delta, u_3^\Delta, u_4^\Delta)$  et  $(u_1^c, u_2^c)$  en tenant compte de la relation d'ordre entre elles (Eq. 4.172), on peut remarquer que les solutions  $\underline{s}_k^c$  et  $\underline{s}_k^\Delta$  sont toutes réelles, négatives et distinctes. Ces solutions correspondent aux

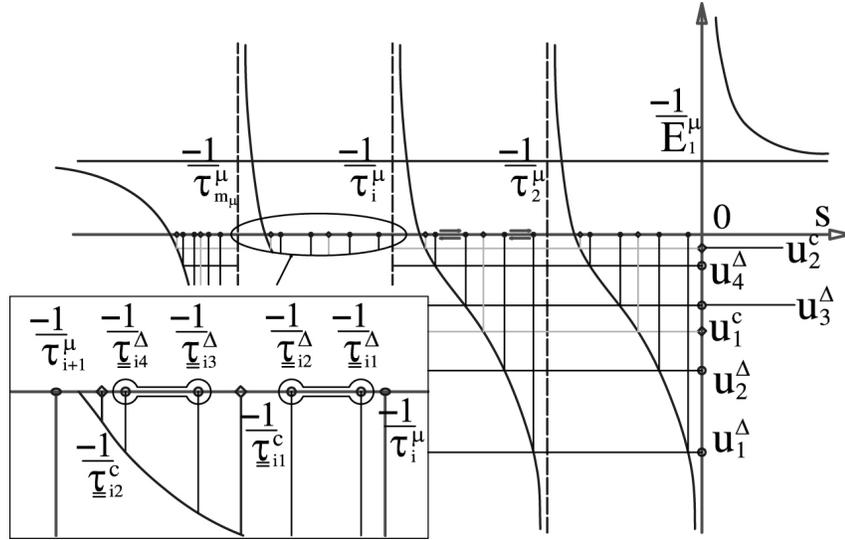


FIG. 4.11 Classement des points de singularité et de branchement

projections des intersections des branches du graphe de  $u(s)$  avec les droites horizontales passant par les racines  $u_j^c$  et  $u_j^\Delta$ . Par ailleurs, les relations d'ordre (Eq. 4.172) et la monotonie (décroissance) des branches impliquent qu'il n'y a aucune racine de  $\bar{P}_{\bar{m}_\mu}$  entre deux racines successives de l'ensemble  $\underline{\mathcal{E}}_s^\Delta$ . En d'autres termes, il n'y a aucun pôle entre deux points de branchement successifs. Cette propriété sera exploitée par la suite pour inverser  $\tilde{J}_{ef}^\mu(s)$  par la formule de Bromwich.

Ainsi, on peut classer les racines de chaque sous-ensemble  $i$  :

$$-1/\tau_{i+1}^\mu < -1/\check{\tau}_i^\mu < -1/\underline{\tau}_{i2}^c < -1/\underline{\tau}_{i4}^\Delta < -1/\underline{\tau}_{i3}^\Delta < -1/\underline{\tau}_{i1}^c < -1/\underline{\tau}_{i2}^\Delta < -1/\underline{\tau}_{i1}^\Delta < -1/\tau_i^\mu \quad (4.183)$$

où  $\{-1/\check{\tau}_i^\mu; i: 1 \rightarrow m_\mu\}$  sont les racines du polynôme  $Q_{m_\mu}(s)$  et  $\check{\tau}_i^\mu$  sont les temps de relaxation du modèle de Maxwell équivalent au modèle de Kelvin considéré ici (Annexe E).

**4.3.3.2.3 Fonction de fluage déviatorique dans l'espace temporel** A partir des relations (4.146), on peut obtenir l'expression, dans l'espace temporel, de la fonction effective de fluage par l'application de la formule de Bromwich :

$$J_{ef}^\mu(t) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\tilde{J}_a^\mu(s)}{s} e^{st} ds \pm \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st} ds \quad (4.184)$$

où  $\gamma$  est un réel choisi tel qu'il soit supérieur à la partie réelle de tous les pôles et des points critiques de  $\tilde{J}_{ef}^\mu(s)$ . Dans ce cas, il peut s'agir d'un réel positif quelconque car tous les pôles et les points critiques sont négatifs.

Le premier terme de  $\tilde{J}_{ef}^\mu(s)$  est une fonction rationnelle comparable au cas du schéma de MT. Puisque toutes les racines de son dénominateur sont des racines distinctes, on obtient alors, d'après les résultats de la section 3.3.2.1, que :

$$J_a^\mu(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s \tilde{J}_a^\mu(s) \right\} \times t + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d \left\{ s \tilde{J}_a^\mu(s) \right\}}{ds} + \sum_{i=2}^{m_\mu} M_{\tau_i^\mu}^a e^{-\frac{t}{\tau_i^\mu}} + \sum_{i=1}^{2m_\mu} M_{\tau_i^c}^a e^{-\frac{t}{\tau_i^c}} \quad (4.185)$$



on obtient :

$$\begin{aligned} & \oint_{C_0} \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st} ds + \sum_{i=1}^{m_\mu} \oint_{C_{i1}} \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st} ds + \sum_{i=1}^{m_\mu} \oint_{C_{i2}} \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st} ds \\ &= 2\pi i \left[ \sum_{i=1}^{m_\mu} \text{Res} \left( \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st}, s_i^\mu \right) + \sum_{i=1}^{m_\mu} \text{Res} \left( \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st}, \underline{s}_{i1}^c \right) + \sum_{i=1}^{m_\mu} \text{Res} \left( \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st}, \underline{s}_{i2}^c \right) \right] \end{aligned} \quad (4.188)$$

Ici,  $\text{Res} \left( \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st}, s_i^\mu \right)$  et  $\text{Res} \left( \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st}, \underline{s}_{ij}^c \right)$  désignent les résidus de  $\frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st}$  aux racines  $s_i^\mu = -1/\tau_i^\mu$  et  $\underline{s}_{ij}^c = -1/\underline{\tau}_{ij}^c$  du dénominateur de  $\frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s}$ . Il est à noter que  $s_1^\mu = 0$  est une racine double de  $\frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s}$ , ce qui correspond à l'asymptote à long terme de la fonction de fluage. En outre, l'intégrale de la fonction  $\frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st}$  en suivant le chemin  $\Gamma_1$  tend vers zéro quand le rayon tend vers l'infini (§ 3.3.2.2). On en déduit alors :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_0} \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st} ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_0} \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st} ds = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st} ds \quad (4.189)$$

De plus, les intégrales sur les lacets  $C_{ij}$  ne dépendent pas du rayon  $\varepsilon$ . En combinant les relations (4.188-4.189) et d'après le paragraphe (§ 3.3.2.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2I\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st} ds &= -\frac{1}{I\pi} \sum_{i=1}^{m_\mu} \int_{\underline{s}_{i2}^\Delta}^{\underline{s}_{i1}^\Delta} \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st} ds - \frac{1}{I\pi} \sum_{i=1}^{m_\mu} \int_{\underline{s}_{i4}^\Delta}^{\underline{s}_{i3}^\Delta} \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st} ds \\ &+ \sum_{i=1}^{m_\mu} \text{Res} \left( \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st}, s_i^\mu \right) + \sum_{i=1}^{m_\mu} \text{Res} \left( \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st}, \underline{s}_{i1}^c \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{m_\mu} \text{Res} \left( \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st}, \underline{s}_{i2}^c \right) \end{aligned} \quad (4.190)$$

Dans l'expression (4.190), l'intégrale sur les lacets  $C_{i1}$  et  $C_{i2}$  se ramène à une série d'intégrales entre deux points de branchement successifs, d'où l'utilité d'avoir montré qu'il n'y a pas de point de singularité entre eux. Pour évaluer l'expression (4.190) on met la variable complexe  $s$  sous la forme  $s = -z \exp(I\pi)$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} J_b^\mu(t) &= \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ z \tilde{J}_b^\mu(z) \right\} \times t + \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d \left\{ z \tilde{J}_b^\mu(z) \right\}}{dz} \\ &+ \sum_{i=2}^{m_\mu} M_{\tau_i^\mu}^b e^{\frac{-t}{\tau_i^\mu}} - \sum_{i=1}^{m_\mu} M_{\underline{\tau}_{i1}^c}^b e^{\frac{-t}{\underline{\tau}_{i1}^c}} + \sum_{i=1}^{m_\mu} M_{\underline{\tau}_{i2}^c}^b e^{\frac{-t}{\underline{\tau}_{i2}^c}} \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{m_\mu} \int_{-1/\underline{\tau}_{i2}^\Delta}^{-1/\underline{\tau}_{i1}^\Delta} \mathfrak{L}_\Delta^b(z) e^{zt} dz + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{m_\mu} \int_{-1/\underline{\tau}_{i4}^\Delta}^{-1/\underline{\tau}_{i3}^\Delta} \mathfrak{L}_\Delta^b(z) e^{zt} dz \end{aligned} \quad (4.191)$$

où l'on pose  $M_{\tau_i^\mu}^b = \mathfrak{L}_{\tau_i^\mu}^b(z) |_{z=-\frac{1}{\tau_i^\mu}}$  et  $M_{\underline{\tau}_{ij}^c}^b = \mathfrak{L}_{\underline{\tau}_{ij}^c}^b(z) |_{z=-\frac{1}{\underline{\tau}_{ij}^c}}$  avec  $\{j = 1, 2\}$ .

Les fonctions de variable réelle  $z$ ,  $\mathfrak{L}_{\tau_i^\mu}^b(z)$  et  $\mathfrak{L}_{\underline{\tau}_{ij}^c}^b(z)$  sont établies lorsqu'on évalue les résidus  $\text{Res} \left( \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st}, s_{res} \right)$  dans le plan complexe aux points  $s_{res} = s_i^\mu$ ,  $s_{res} = \underline{s}_{i1}^c$  et  $s_{res} = \underline{s}_{i2}^c$ , respective-

ment :

$$\begin{aligned} \text{Res} \left( \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st}, s_i^\mu \right) &= L_{\tau_i^\mu}^b(s) \Big|_{s=\frac{e^{I\pi}}{\tau_i^\mu}} \\ \text{Res} \left( \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} e^{st}, \underline{s}_{ij}^c \right) &= L_{\underline{\tau}_{ij}^c}^b(s) \Big|_{s=\frac{e^{I\pi}}{\underline{\tau}_{ij}^c}} \end{aligned} \quad (4.192)$$

avec :

$$\begin{aligned} L_{\tau_i^\mu}^b(s) &= (s+1/\tau_i^\mu) \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} \\ L_{\underline{\tau}_{ij}^c}^b(s) &= \left( s+1/\underline{\tau}_{ij}^c \right) \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} \end{aligned} \quad (4.193)$$

En évaluant la fonction complexe  $L_{\tau_i^\mu}^b(s)$  au point  $s_i^\mu = \frac{1}{\tau_i^\mu} e^{-i\pi}$  (correspondant aux temps microscopiques du spectre macroscopique) et en notant (Fig. 4.12) qu'il y a un nombre pair de couple de points de branchement avant ce point, on obtient que la partie imaginaire est nulle et que la partie réelle vaut :

$$L_{\tau_i^\mu}^b(s) \Big|_{s=\frac{1}{\tau_i^\mu} e^{-i\pi}} = L_{\tau_i^\mu}^b(z) \Big|_{z=\frac{-1}{\tau_i^\mu}} \quad (4.194)$$

En effet, d'après les relations (4.147), (4.148), (4.178) et (4.193), on a :

$$L_{\tau_i^\mu}^b(s) \Big|_{s=\frac{1}{\tau_i^\mu} e^{-i\pi}} = Q_{m_\mu}(s) \frac{\sqrt{\delta_{A m_\mu} \prod_{k=1}^{m_\mu} [(s+1/\underline{\tau}_{k4}^\Delta) (s+1/\underline{\tau}_{k3}^\Delta)] \prod_{k=1}^{m_\mu} [(s+1/\underline{\tau}_{k2}^\Delta) (s+1/\underline{\tau}_{k1}^\Delta)]}}{P_{m_\mu}(s) \prod_{k=1, k \neq i}^{m_\mu} (s+1/\tau_k^\mu)} \Big|_{s=\frac{1}{\tau_i^\mu} e^{-i\pi}}$$

Ainsi, le nombre de couples de points de branchement conditionne le signe du produit des termes sous le radical (Fig. 4.12). Un nombre pair donne un signe (+) et un nombre impair donne un signe (-). Ce constat est également valable pour les racines  $\underline{s}_{ij}^c$ .

Pour la partie complémentaire des temps caractéristiques  $\underline{\tau}_{ij}^c$ , les pôles associés, correspondant aux points  $\underline{s}_{ij}^c = -1/\underline{\tau}_{ij}^c$  sur le plan complexe, ont un nombre impair ou un nombre pair de couples de points de branchement les précédant selon que  $j = 1$  ou  $j = 2$ , respectivement. Dans ce cas également, seule la partie réelle de  $L_{\underline{\tau}_{ij}^c}^b$  subsiste :

$$\begin{aligned} L_{\underline{\tau}_{i1}^c}^b(s) \Big|_{s=\frac{1}{\underline{\tau}_{i1}^c} e^{-i\pi}} &= -L_{\underline{\tau}_{i1}^c}^b(z) \Big|_{z=\frac{-1}{\underline{\tau}_{i1}^c}} \\ L_{\underline{\tau}_{i2}^c}^b(s) \Big|_{s=\frac{1}{\underline{\tau}_{i2}^c} e^{-i\pi}} &= L_{\underline{\tau}_{i2}^c}^b(z) \Big|_{z=\frac{-1}{\underline{\tau}_{i2}^c}} \end{aligned} \quad (4.195)$$

Ainsi, le calcul des résidus se ramène à un calcul dans l'ensemble des réels. On peut alors introduire la fonction  $\mathfrak{L}_x^b(z)$  de la variable réelle  $z$  :

$$\mathfrak{L}_x^b(z) \equiv (z + 1/x) \tilde{J}_b^\mu(z) / z \quad (4.196)$$

avec  $x = \tau_i^\mu, \underline{\tau}_{i1}^c, \underline{\tau}_{i2}^c$  et telle que :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{\tau_i^\mu}^b(z) \Big|_{z=\frac{-1}{\tau_i^\mu}} &= L_{\underline{\tau}_{i1}^c}^b(z) \Big|_{z=\frac{-1}{\tau_i^\mu}} \\ \mathfrak{L}_{\underline{\tau}_{i1}^c}^b(z) \Big|_{z=\frac{-1}{\underline{\tau}_{i1}^c}} &= L_{\underline{\tau}_{i1}^c}^b(z) \Big|_{z=\frac{-1}{\underline{\tau}_{i1}^c}} \\ \mathfrak{L}_{\underline{\tau}_{i2}^c}^b(z) \Big|_{z=\frac{-1}{\underline{\tau}_{i2}^c}} &= L_{\underline{\tau}_{i2}^c}^b(z) \Big|_{z=\frac{-1}{\underline{\tau}_{i2}^c}} \end{aligned} \quad (4.197)$$

Le signe (-) dans (Eq. 4.195) n'apparaît pas dans la relation (4.197)<sub>2</sub> car il est directement porté dans l'équation (4.191).

Dans la relation (4.191), la fonction de la variable réelle  $z$ ,  $\mathfrak{L}_\Delta^b(z)$  est établie lorsqu'on évalue les intégrales curvilignes de la fonction complexe  $L_\Delta^b(s)e^{st}$  dans les intervalles des points de branchement  $[-1/\underline{\tau}_{i2}^\Delta, -1/\underline{\tau}_{i1}^\Delta]$  et  $[-1/\underline{\tau}_{i4}^\Delta, -1/\underline{\tau}_{i3}^\Delta]$ , où :

$$L_\Delta^b(s) = \frac{\tilde{J}_b^\mu(s)}{s} = \frac{Q_{m_\mu}(s)}{s^2 P_{m_\mu-1}(s)} \frac{\sqrt{\Delta_{2m_\mu}(s)}}{\underline{P}_{m_\mu}(s)} \quad (4.198)$$

On distingue ces deux familles d'intervalles car la fonction  $L_\Delta^b(s)$  y a également des propriétés de signe différentes comme il sera explicité dans ce qui suit.

Puisque le coefficient du terme de degré 4 de  $\underline{D}_4(u)$  est positif, alors d'après la relation (4.178) on obtient également que  $\underline{\delta}_{4m_\mu} > 0$ . Lorsque  $s$  varie, par exemple, sur l'intervalle  $[-1/\underline{\tau}_{i4}^\Delta, -1/\underline{\tau}_{i3}^\Delta]$ , on pose  $s = -ze^{I\pi}$  avec  $z < 0$ . En notant qu'il y a un nombre impair de couples de points de l'ensemble  $\underline{\mathcal{E}}_\tau^\Delta$  avant  $s = -ze^{I\pi}$ , on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta_{2m_\mu}(s)} &= \sqrt{\underline{\delta}_{4m_\mu} \prod_{k=1}^{m_\mu} [(-ze^{I\pi} + 1/\underline{\tau}_{k4}^\Delta) (-ze^{I\pi} + 1/\underline{\tau}_{k3}^\Delta)] \prod_{k=1}^{m_\mu} [(-ze^{I\pi} + 1/\underline{\tau}_{k4}^\Delta) (-ze^{I\pi} + 1/\underline{\tau}_{k3}^\Delta)]} \\ &= -I \sqrt{-\underline{\delta}_{4m_\mu} \prod_{k=1}^{m_\mu} [(z + 1/\underline{\tau}_{k4}^\Delta) (z + 1/\underline{\tau}_{k3}^\Delta)] \prod_{k=1}^{m_\mu} [(z + 1/\underline{\tau}_{k4}^\Delta) (z + 1/\underline{\tau}_{k3}^\Delta)]} \end{aligned} \quad (4.199)$$

D'où la partie réelle de  $L_\Delta^b(-ze^{I\pi})$ , lorsque  $s$  varie sur l'intervalle  $[-1/\underline{\tau}_{i4}^\Delta, -1/\underline{\tau}_{i3}^\Delta]$ , est nulle et la partie imaginaire vaut  $-I\mathfrak{L}_\Delta^b(z)$  si l'on pose :

$$\mathfrak{L}_\Delta^b(z) = \frac{Q_{m_\mu}(z)}{z^2 P_{m_\mu-1}(z)} \frac{\sqrt{-\Delta_{2m_\mu}(z)}}{\underline{P}_{m_\mu}(z)} \quad (4.200)$$

De la même façon, la partie réelle de  $L_\Delta^b(-ze^{I\pi})$ , lorsque  $s$  varie sur l'intervalle  $[-1/\underline{\tau}_{i2}^\Delta, -1/\underline{\tau}_{i1}^\Delta]$ , est nulle et la partie imaginaire vaut  $I\mathfrak{L}_\Delta^b(z)$ .

Ayant identifié les fonctions  $\mathfrak{L}_x^b(z)$  et  $\mathfrak{L}_\Delta^b(z)$ , la complaisance de fluage macroscopique  $J_b^\mu(t)$  (Eq. 4.191) est complètement déterminée dans l'espace temporel. Il convient d'introduire le changement de variable  $z = -1/\tau$ , pour la mettre sous la forme spectrale suivante :

$$\begin{aligned} J_b^\mu(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s \tilde{J}_b^\mu(s) \right\} \times t + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d \left\{ s \tilde{J}_b^\mu(s) \right\}}{ds} \\ &+ \sum_{i=2}^{m_\mu} \left( M_{\tau_i^\mu} \int_0^\infty \delta(\tau - \tau_i^\mu) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau \right) - \sum_{i=1}^{m_\mu} \left( M_{\underline{\tau}_{i1}^c} \int_0^\infty \delta(\tau - \underline{\tau}_{i1}^c) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{m_\mu} \left( M_{\underline{\tau}_{i2}^c} \int_0^\infty \delta(\tau - \underline{\tau}_{i2}^c) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau \right) \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{m_\mu} \int_{\underline{\tau}_{i2}^\Delta}^{\underline{\tau}_{i1}^\Delta} \frac{\mathfrak{L}_\Delta^b(-1/\tau)}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{m_\mu} \int_{\underline{\tau}_{i4}^\Delta}^{\underline{\tau}_{i3}^\Delta} \frac{\mathfrak{L}_\Delta^b(-1/\tau)}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau \end{aligned} \quad (4.201)$$

La fonction de fluage macroscopique  $J_b^\mu(t)$  (Eq. 4.201) se décompose en un terme affine (élément de Maxwell macroscopique), en une série de termes associés à des éléments de Kelvin (spectre discret),

et, contrairement au cas du schéma de MT, en une série d'intégrale correspondant au spectre continu. Par la suite, on va établir l'expression analytique de ce terme affine dans le cas général, ce qui permet d'obtenir une solution de référence pour les méthodes d'inversion numérique de la TC. Le spectre discret et continu représentent la phase transitoire de la fonction de fluage dont la contribution s'annule à long terme. Dans le cas où le coefficient de Poisson est constant ou lorsque le module de compressibilité est constant, et en adoptant un modèle de Kelvin généralisé à quatre éléments au plus pour décrire le comportement viscoélastique de la matrice, cette phase transitoire peut être déterminée analytiquement.

---

## 4.4 Conclusion

Les développements précédents ont montré la difficulté de construire le comportement macroscopique d'un matériau hétérogène viscoélastique en utilisant le principe de correspondance. Cette difficulté consiste essentiellement dans l'inversion de la transformée de Laplace–Carson pour établir l'expression de la complaisance de fluage dans l'espace temporel.

L'inversion de la transformée de Laplace s'avère souvent non concluante, notamment lorsque plusieurs niveaux de changements d'échelle sont concernés. En effet, les expressions semi-analytiques de la complaisance de fluage macroscopique, établies dans le cas des schémas d'homogénéisation de MT et AG, nécessitent la détermination des racines de polynômes dont le degré dépend de la dimension du spectre microscopique et du nombre de phases. En plus, chaque niveau d'homogénéisation enrichit d'avantage le spectre ce qui augmente le nombre de racines à déterminer au changement d'échelle suivante. Il est à noter que ces racines donnent les temps caractéristiques macroscopiques. Ainsi, les erreurs d'arrondi intervenant dans le calcul des coefficients de ces polynômes et donc de leurs racines rendent rapidement la méthode inexploitable.

Une stratégie à deux étapes de résolution a cependant été proposée pour lever en partie cette difficulté. Néanmoins, cette stratégie n'est exploitable que dans le cas d'hypothèses simplificatrices, lesquelles confèrent à la transformée de Carson de la complaisance de fluage certaines propriétés de factorisation.

Par ailleurs, les résultats obtenus pour les deux schémas d'homogénéisation montrent que le comportement macroscopique instantané et celui à long terme est, à l'image du comportement microscopique, contrôlé par quatre paramètres : la complaisance de fluage instantané, l'ordonnée à l'origine de l'asymptote de la fonction de fluage, la vitesse de fluage instantanée et la vitesse de fluage à long terme.

Deux questions se posent alors :

- \* Est-il possible d'établir ces quatre paramètres sans avoir recours à des hypothèses simplificatrices et sans avoir à inverser la transformée de Laplace ?
- \* Comment se situerait un modèle macroscopique équivalent, construit sur la base de ces quatre paramètres, par rapport à la solution complète ?

La réponse à ces deux questions permettrait alors de construire un modèle macroscopique approché intégrant explicitement les propriétés viscoélastiques microscopiques et la microstructure du matériau. Ces aspects sont traités dans le chapitre suivant.



# Chapitre 5 Méthode analytique approchée

## 5.1 Introduction

Comme les fonctions de fluage microscopiques (§ 4.2), le fluage macroscopique est caractérisé par quatre paramètres : (i) la complaisance de fluage instantané, (ii) la vitesse de fluage instantané, (iii) l'ordonnée à l'origine de l'asymptote de la fonction de fluage, (iv) la vitesse de fluage à long terme.

Dans ce chapitre, on propose une méthode originale pour établir analytiquement l'expression de ces quatre paramètres pour le fluage effectif en fonction de ceux caractérisant le fluage microscopique. L'analyse est limitée au cas de composites isotropes en considérant les schémas de Mori-Tanaka et auto-cohérent généralisé. L'exigence de l'application pour la modélisation multi-échelle du béton (chapitre 7) nécessite de considérer, pour la composante déviatorique, seulement le cas de la fonction de fluage microscopique non borné. Pour la composante sphérique, on va étudier les deux cas : fluage microscopique borné ou non borné.

Dans ce qui suit, nous n'allons faire aucune hypothèse simplificatrice. Les composantes sphériques et déviatoriques du fluage microscopique sont complètement indépendantes. Elles sont donc représentées par des modèles analogiques généralisés indépendants.

La détermination des expressions analytiques de ces quatre paramètres va permettre de dégager les résultats suivants :

- Construire une solution analytique approchée, un modèle équivalent de Burgers (§ 5.3), pour les fonctions effectives de fluage. Cette solution peut être considérée comme la borne supérieure de la solution exacte.
- Valider les méthodes inverses numériques de la TL en considérant le modèle équivalent de Burgers comme une référence.
- Identifier les paramètres du comportement viscoélastique de la matrice à partir des courbes de fluage macroscopique. Ce résultat sera appliqué dans le chapitre 7 portant sur la modélisation multi-échelle du comportement viscoélastique du béton, pour relier le comportement du C-S-H à celui du béton.

## 5.2 Quatre paramètres de la fonction de fluage

### 5.2.1 Fonction de fluage microscopique

On rappelle la forme de la fonction de fluage microscopique (Eq. 4.4) pour le cas du modèle rhéologique de Kelvin généralisé non borné :

$$J_0^\pi(t) = \frac{1}{E_0^\pi} + \frac{t}{\eta_1^\pi} - \sum_{i=2}^{m_\pi} \frac{1}{E_i^\pi} e^{-\frac{t}{\tau_i^\pi}} \quad (5.1)$$

En posant  $S_\infty^\pi = \frac{1}{E_0^\pi}$  et  $F_\infty^\pi = \frac{1}{\eta_1^\pi}$ , on obtient l'asymptote de  $J_0^\pi(t)$  :

$$A_0^\pi(t) = S_\infty^\pi + F_\infty^\pi t \quad (5.2)$$

Ici  $S_\infty^\pi$  est l'ordonnée à l'origine de l'asymptote  $A_0^\pi(t)$  et  $F_\infty^\pi$  est sa pente correspondant à la vitesse à long terme de la fonction de fluage.

Par ailleurs, on considère (Fig. 5.1) la complaisance instantanée  $S_0^\pi = J_0^\pi(0)$  et la vitesse de fluage instantanée  $F_0^\pi = \frac{dJ_0^\pi(0)}{dt}$ . Enfin, il est à noter que le terme  $\left(-\sum_{i=2}^{m_\pi} \frac{1}{E_i^\pi} e^{\frac{-t}{\tau_i^\pi}}\right)$  est la partie qui contrôle la forme de la courbe de fluage à court et moyen terme (Eq. 5.1). Elle s'annule à la valeur suffisamment grande du temps. Elle correspond à une somme de  $(m_\pi - 1)$  spectres discrets  $\frac{-\delta(\tau - \tau_i^\pi)}{E_i^\pi}$ . Ainsi, plus le temps de retard  $\tau_i^\pi$  est grand plus la fonction  $\frac{1}{E_i^\pi} e^{\frac{-t}{\tau_i^\pi}}$  s'évanouit lentement.

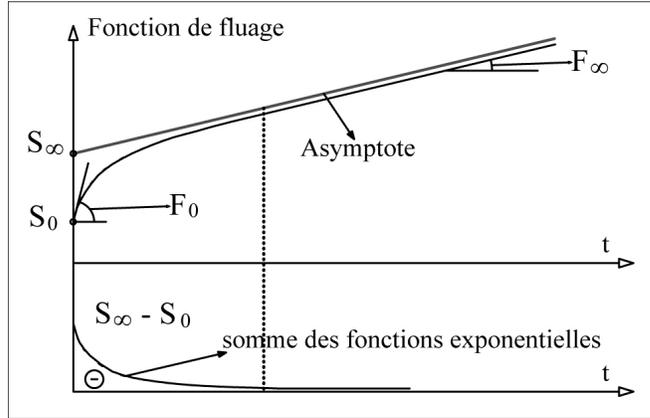


FIG. 5.1 Quatre paramètres importants de la courbe de fluage

A partir de la forme (5.1) de la fonction de fluage microscopique  $J_0^\pi(t)$ , on établit les expressions des quatre paramètres ( $S_0^\pi$ ,  $S_\infty^\pi$ ,  $F_0^\pi$ ,  $F_\infty^\pi$ ) du comportement microscopique :

$$\begin{aligned} F_0^\pi &= F_\infty^\pi + \sum_{i=2}^m \frac{1}{\eta_i^\pi} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\eta_i^\pi} = \frac{1}{\eta_0^\pi} & F_\infty^\pi &= \frac{1}{\eta_1^\pi} \\ S_\infty^\pi &= S_0^\pi + \sum_{i=2}^m \frac{1}{E_i^\pi} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{E_i^\pi} = \frac{1}{E_0^\pi} & S_0^\pi &= \frac{1}{E_1^\pi} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Il convient alors de rechercher une relation directe entre ces quatre paramètres et la TC  $\tilde{J}_0^\pi(s)$ , sans avoir à inverser celle-ci. Le théorème de la valeur initiale et finale de la TL donne :

$$F_0^\pi = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left( \tilde{J}_0^\pi(s) - \frac{1}{E_1^\pi} \right), \quad F_\infty^\pi = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \tilde{J}_0^\pi(s) \right), \quad S_0^\pi = \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{J}_0^\pi(s) \quad (5.4)$$

Par ailleurs, la forme rationnelle de  $\tilde{J}_0^\pi(s)$  (Eq. 4.1) permet d'établir :

$$S_\infty^\pi = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d \left( s \tilde{J}_0^\pi(s) \right)}{ds} = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{J}_0^\pi(s) \quad (5.5)$$

Pour le cas du fluage microscopique borné (Eqs. 4.5 et 4.7), les relations (5.3-5.5), donnant les quatre paramètres de la courbe de  $J_0^\pi(t)$ , restent valables à l'exception de  $F_\infty^\pi$  :

$$F_\infty^\pi = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \tilde{J}_0^\pi(s) \right) = 0 \quad (5.6)$$

C'est-à-dire que l'asymptote, oblique dans le cas non borné, devient horizontale dans ce cas.

### 5.2.2 Fonction de fluage macroscopique

D'après les travaux de Christensen [23] et Huet [56], la dérivée première de la fonction de fluage est monotone et celle du deuxième ordre est définie négative. On en déduit alors que la fonction de fluage est une fonction continue, croissante, positive et convexe. Sur la base des résultats du chapitre précédent (Eqs. 4.81, 4.124 et 4.153), on écrit la fonction de fluage macroscopique sous la forme suivante :

$$J_{ef}^\pi(t) = \bar{S}_\infty^\pi + \bar{F}_\infty^\pi t - g(t) \quad (5.7)$$

où la fonction  $g(t)$  est une fonction continue, décroissante, positive et convexe sur l'intervalle  $[0, \infty)$  et qui tend vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini. Il est à rappeler que le terme affine  $\bar{S}_\infty^\pi + \bar{F}_\infty^\pi t$  correspond à l'asymptote de  $J_{ef}^\pi(t)$  à long terme.

Comme pour le cas de la fonction de fluage microscopique, décrite par un modèle de Kelvin généralisé (§ 4.2), on peut définir les quatre paramètres viscoélastiques macroscopiques suivants :

$$\begin{aligned} \bar{S}_0^\pi &= J_{ef}^\pi(0) \\ \bar{S}_\infty^\pi &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( J_{ef}^\pi(t) - \bar{F}_\infty^\pi t \right) \\ \bar{F}_0^\pi &= \left. \frac{dJ_{ef}^\pi(t)}{dt} \right|_{t=0} \\ \bar{F}_\infty^\pi &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dJ_{ef}^\pi(t)}{dt} \end{aligned} \quad (5.8)$$

En appliquant les théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale, on peut trouver facilement les relations entre les trois paramètres  $\bar{S}_0^\pi$ ,  $\bar{F}_0^\pi$ ,  $\bar{F}_\infty^\pi$  et la transformée de Carson  $\tilde{J}_{ef}^\pi(s)$  comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{S}_0^\pi &= \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{J}_{ef}^\pi(s) \\ \bar{F}_0^\pi &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \left( \tilde{J}_{ef}^\pi(s) - \bar{S}_0^\pi \right) \\ \bar{F}_\infty^\pi &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \tilde{J}_{ef}^\pi(s) - \bar{S}_0^\pi \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Pour l'ordonnée à l'origine de l'asymptote  $\bar{S}_\infty^\pi$ , la relation suivante est établie :

$$\bar{S}_\infty^\pi = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d \left( s \tilde{J}_{ef}^\pi(s) \right)}{ds} \quad (5.10)$$

Cette relation découle du fait que les termes en exponentiels dans l'expression de  $J_{ef}^\pi(t)$  s'annulent lorsque  $t$  est grand et que  $J_{ef}^\pi(t)$  se met toujours sous la forme (5.7) avec  $\bar{F}_\infty^\pi = 0$  ou  $\bar{F}_\infty^\pi \neq 0$  selon que le fluage macroscopique est borné ou non.

Il est à rappeler que le terme affine découle du fait qu'un pôle de  $\tilde{J}_{ef}^\pi(s)$  est la racine  $\bar{s}_1^\pi = 0$ . Si cette racine est simple ( $\bar{\beta}_1^\pi = 1$ ) alors le fluage macroscopique est borné. Dans le cas non borné cette racine est nécessairement double ( $\bar{\beta}_1^\pi = 2$ ).

Dans le cas du schéma de MT, la relation (5.10) peut être établie en explicitant l'expression de  $J_{ef}^\pi(t)$  du cas général (Eqs.4.12-4.13) pour les deux situations de fluage borné ou non :

$$J_{ef}^\pi(t) = \begin{cases} \bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}t + \sum_{i=2}^{\bar{l}^\pi} \left( \sum_{k=1}^{\bar{\beta}_i^\pi} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \bar{A}_{ik} \right) e^{\bar{s}_i^\pi t} & \text{si } \bar{\beta}_1^\pi = 2 \\ \bar{A}_{11} + \sum_{i=2}^{\bar{l}^\pi} \left( \sum_{k=1}^{\bar{\beta}_i^\pi} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \bar{A}_{ik} \right) e^{\bar{s}_i^\pi t} & \text{si } \bar{\beta}_1^\pi = 1 \end{cases} \quad (5.11)$$

Les racines  $\bar{s}_i^\pi$  peuvent être écrites, de façon générale, sous la forme complexe  $\bar{s}_i^{\pi+} = a_i^\pi + Ib_i^\pi$  et  $\bar{s}_i^{\pi-} = a_i^\pi - Ib_i^\pi$  car d'après la théorie des polynômes, tout conjugué d'une racine complexe est une racine du polynôme. En substituant, les expressions de ces racines dans la relation précédente (Eq.5.11), les termes en exponentiel deviennent respectivement :

$$\operatorname{Re} \{ \Phi_i^{\pi+} \} = \sum_{k=1}^{\bar{\beta}_i^\pi} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{a_i^\pi t} [\operatorname{Re} \{ \bar{A}_{ik}^+ \} \cos (tb_i^\pi) - \operatorname{Im} \{ \bar{A}_{ik}^+ \} \sin (tb_i^\pi)] \quad (5.12)$$

$$\operatorname{Re} \{ \Phi_i^{\pi-} \} = \sum_{k=1}^{\bar{\beta}_i^\pi} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{a_i^\pi t} [\operatorname{Re} \{ \bar{A}_{ik}^- \} \cos (tb_i^\pi) + \operatorname{Im} \{ \bar{A}_{ik}^- \} \sin (tb_i^\pi)] \quad (5.13)$$

où  $\bar{A}_{ik}^+$  et  $\bar{A}_{ik}^-$  sont calculés par la relation (4.13), en remplaçant  $s$  par  $\bar{s}_i^{\pi+}$  et par  $\bar{s}_i^{\pi-}$ , respectivement. En remplaçant les coefficients  $\bar{A}_{ik}^+$  et  $\bar{A}_{ik}^-$  dans la relation (5.11) alors on a nécessairement  $\operatorname{Im} \{ \Phi_i^{\pi+} + \Phi_i^{\pi-} \} = 0$  car  $J_{ef}^\pi(t)$  est réelle. Cette dernière ne dépend donc que de  $\operatorname{Re} \{ \Phi_i^{\pi+} + \Phi_i^{\pi-} \}$ .

Ainsi, selon les équations (5.12) et (5.13), on constate facilement que pour assurer les propriétés monotone, croissante et concave de la fonction de fluage  $J_{ef}^\pi(t)$  [23, 56], il faut que  $a_i^\pi < 0$  et  $b_i^\pi = 0$ , c'est à dire que toutes les pôles de  $\tilde{J}_{ef}^\pi(s)$  doivent être réels et négatifs. Dans ce cas,  $\Phi_i^\pi = \Phi_i^{\pi+} + \Phi_i^{\pi-}$  tend vers zéro, quand  $t$  tend vers l'infini. D'après la décomposition (5.7) et la relation (4.13), on obtient l'expression de l'ordonnée à l'origine  $\bar{S}_\infty^\pi$  de l'asymptote :

$$\bar{S}_\infty^\pi = \bar{A}_{11} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d \left( s \tilde{J}_{ef}^\pi(s) \right)}{ds} \quad (5.14)$$

ce qui revient à prouver la relation (5.10). Il est à noter que le coefficient  $\bar{A}_{11}$  est obtenu à partir de (4.13) en y substituant la racine  $\bar{s}_1^\pi = 0$ .

Pour le cas du schéma AG, la même démarche peut être adoptée. En partant de l'expression de  $J_{ef}^\pi(t)$  donnée par (Eq. 4.153), laquelle se met sous la forme (3.24), il suffit que tous les points de singularité (pôles et points de branchement) soit à gauche de l'axe de l'ordonnée dans le plan complexe. Dans ce cas, les termes exponentiels (spectre discret et continu) tendent vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini. Ainsi, l'ordonnée à l'origine de l'asymptote de  $J_{ef}^\pi(t)$  est donnée, comme dans le cas du schéma de MT, par l'équation (5.14).

En conclusion, on a construit quatre paramètres pouvant caractériser le fluage macroscopique sans avoir à inverser la transformée de Carson de la complaisance de fluage effectif. Il s'agit maintenant de les relier aux paramètres microscopiques jouant le même rôle.

### 5.3 Modèle macroscopique équivalent

A partir de la connaissance des quatre paramètres précédemment établis, on peut construire un modèle macroscopique équivalent qui prend en compte explicitement les propriétés viscoélastiques microscopiques et la microstructure du matériau. Ce modèle a un spectre dégénéré par rapport à la solution exacte ce qui se traduit par un nombre réduit d'éléments analogiques macroscopiques (Fig. 5.2-5.3).

Néanmoins, il convient de distinguer le cas de fluage borné de celui non borné :

- Si la fonction effective de fluage est non bornée, c'est-à-dire lorsqu'elle est représentée par un modèle de Kelvin généralisé, on peut l'approcher par le modèle de Burgers (Fig. 5.2). On obtient donc les relations pour déterminer les coefficients du modèle équivalent de Burgers en fonction

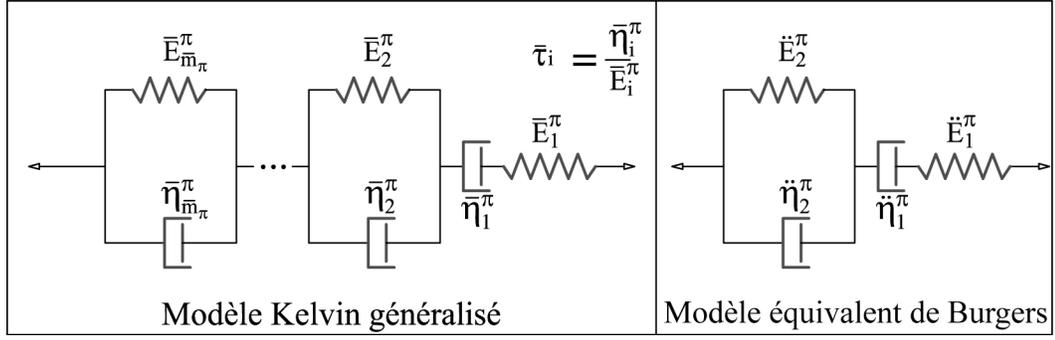


FIG. 5.2 Modèle équivalent de Burgers d'un modèle Kelvin généralisé

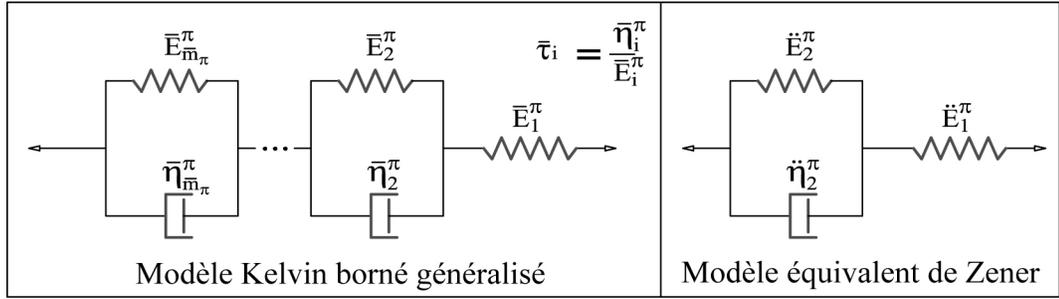


FIG. 5.3 Modèle équivalent de Zener d'un modèle Kelvin-Voigt généralisé

des quatre paramètres de la fonction effective de fluage :

$$\frac{1}{\dot{\bar{\eta}}_1^\pi} + \frac{1}{\dot{\bar{\eta}}_2^\pi} = \bar{F}_0^\pi \quad (5.15)$$

$$\frac{1}{\ddot{\bar{E}}_1^\pi} + \frac{1}{\ddot{\bar{E}}_2^\pi} = \bar{S}_\infty^\pi \quad (5.16)$$

$$\frac{1}{\dot{\bar{\eta}}_1^\pi} = \bar{F}_\infty^\pi \quad (5.17)$$

$$\frac{1}{\ddot{\bar{E}}_1^\pi} = \bar{S}_0^\pi \quad (5.18)$$

- Si la fonction effective de fluage est bornée, c'est-à-dire lorsqu'elle est représentée par un modèle de Kelvin généralisé borné, on peut donc l'approcher par le modèle de Zener (Fig. 5.3). De façon similaire, on obtient dans ce cas trois relations qui permettent de déterminer les coefficients du modèle de Zener équivalent en fonction de ceux du modèle de Kelvin généralisé borné :

$$\frac{1}{\dot{\bar{\eta}}_2^\pi} = \bar{F}_0^\pi \quad (5.19)$$

$$\frac{1}{\ddot{\bar{E}}_1^\pi} + \frac{1}{\ddot{\bar{E}}_2^\pi} = \bar{S}_\infty^\pi \quad (5.20)$$

$$\frac{1}{\ddot{\bar{E}}_1^\pi} = \bar{S}_0^\pi \quad (5.21)$$

Dans ce qui suit, le calcul des paramètres  $(\bar{S}_0^\pi, \bar{S}_\infty^\pi, \bar{F}_0^\pi, \bar{F}_\infty^\pi)$  est explicité pour les deux schémas considérés sans aucune hypothèse simplificatrice sur le comportement viscoélastique microscopique.

Pour le schéma de MT, le changement d'échelle conserve la nature analogique discrète de la fonction de fluage microscopique. En effet, la fonction macroscopique peut également être représentée par une chaîne d'éléments analogiques dont le spectre est cependant plus riche par rapport à la fonction microscopique. Ainsi, les relations entre les paramètres microscopiques  $(S_0^\pi, S_\infty^\pi, F_0^\pi, F_\infty^\pi)$  et ceux macroscopiques  $(\bar{S}_0^\pi, \bar{S}_\infty^\pi, \bar{F}_0^\pi, \bar{F}_\infty^\pi)$  sont récursives lors de changements successifs d'échelle. Ainsi, on peut construire un modèle équivalent pour un nombre paramétrique de changements d'échelle dans le cas d'une homogénéisation multi-échelle. Le calcul de ces paramètres n'est donc détaillé que pour un seul changement d'échelle, la relation de récurrence peut facilement être établie en remplaçant les propriétés microscopiques à une échelle donnée par celles macroscopiques à l'échelle précédente.

Pour le schéma AG, le spectre continu ne permet pas d'établir la nature récursive entre les deux familles de paramètres. Ainsi, les développements présentés dans ce qui suit sont à limiter à un seul changement d'échelle. Une démarche pour généraliser ces développements à plusieurs changements d'échelle, consisterait à approcher la partie irrationnelle  $\Delta_{2m_\mu}(s)$  (terme en radical) de la TC de la fonction de fluage effectif  $\tilde{J}_{ef}(s)$  (Eq. 4.147) par une fonction rationnelle. Ainsi  $J_{ef}(t)$  sera représentée par un spectre discret au même titre que le cas de MT. L'approximation peut être basée sur la méthode de collocation de Schapery [98, 39].

## 5.4 Schéma de Mori-Tanaka

### 5.4.1 Fonction composée

Dans cette section, on va établir les expressions analytiques des quatre paramètres lorsque la fonction de fluage microscopique déviatorique est non bornée. On distinguera le cas du fluage microscopique sphérique borné ou non en plus de la présence ou non de la porosité. En tout, on considère les quatre cas suivants :

- Cas 1** Modèle de Kelvin non borné pour décrire le comportement viscoélastique sphérique  $\kappa_0(t)$  et absence de phase poreuse.
- Cas 2** Modèle de Kelvin borné pour décrire le comportement viscoélastique sphérique  $\kappa_0(t)$  et absence de phase poreuse.
- Cas 3** Modèle de Kelvin non borné pour décrire le comportement viscoélastique sphérique  $\kappa_0(t)$  et présence d'une phase poreuse.
- Cas 4** Modèle de Kelvin borné pour décrire le comportement viscoélastique sphérique  $\kappa_0(t)$  et présence d'une phase poreuse.

On n'a pas jugé nécessaire de considérer le cas utilisant un modèle de Kelvin borné pour la fonction de relaxation déviatorique  $\mu_0(t)$ , parce que le fluage déviatorique semble avoir un comportement à long terme non borné [9]. Ceci n'enlève rien au caractère général de la démarche.

Dans ce qui suit, on commence par rappeler les expressions des fonctions composées des variables  $(u, v)$  selon qu'il existe une phase poreuse ou non.

#### 5.4.1.1 Fonction composée de fluage déviatorique

On rappelle l'expression de  $\tilde{J}_{ef}^\mu(s)$  en distinguant le cas poreux du cas non poreux. D'après les relations (4.20-4.26), on a :

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{ef}^\mu(s) &= L^\mu(u(s), v(s)) = u(s)\underline{L}^\mu(u(s), v(s)) \\ L^\mu(u, v) &= \frac{\mathcal{B}^\mu(u, v)}{C^\mu(u, v)}, \quad \underline{L}^\mu(u, v) = \frac{B^\mu(u, v)}{C^\mu(u, v)} \end{aligned} \quad (5.22)$$

- Pour le cas non poreux, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^\mu(u, v) &= uB^\mu(u, v) \\ B^\mu(u, v) &= f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{5(4v + 3u)f_r}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)} \\ C^\mu(u, v) &= f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{5u(4v + 3u)f_r \mu_r}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)} \end{aligned} \quad (5.23)$$

- Pour le cas poreux, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^\mu(u, v) &= uB^\mu(u, v) \\ B^\mu(u, v) &= f_0 + \frac{5(4v + 3u)f_n}{(9u + 8v)} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{5(4v + 3u)f_r}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)} \\ C^\mu(u, v) &= f_0 + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{5u(4v + 3u)f_r \mu_r}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)} \end{aligned} \quad (5.24)$$

#### 5.4.1.2 Fonction composée de fluage sphérique

De même, on rappelle l'expression de  $\tilde{J}_{ef}^\kappa(s)$ . D'après les relations (4.20-4.26), on a :

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{ef}^\kappa(s) &= L^\kappa(u(s), v(s)) = v(s)\underline{L}^\kappa(u(s), v(s)) \\ L^\kappa(u, v) &= \frac{\mathcal{B}^\kappa(u, v)}{C^\kappa(u, v)}, \quad \underline{L}^\kappa(u, v) = \frac{B^\kappa(u, v)}{C^\kappa(u, v)} \end{aligned} \quad (5.25)$$

- Pour le cas non poreux, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^\kappa(u, v) &= vB^\kappa(u, v) \\ B^\kappa(u, v) &= f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{(4v + 3u)f_r}{v(4 + 3u\kappa_r)} \\ C^\kappa(u, v) &= f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{(4v + 3u)f_r \kappa_r}{(4 + 3u\kappa_r)} \end{aligned} \quad (5.26)$$

- Pour le cas poreux, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^\kappa(u, v) &= vB^\kappa(u, v) \\ B^\kappa(u, v) &= f_0 + \frac{(4v + 3u)f_n}{4v} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(4v + 3u)f_r}{v(4 + 3u\kappa_r)} \\ C^\kappa(u, v) &= f_0 + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(4v + 3u)f_r \kappa_r}{(4 + 3u\kappa_r)} \end{aligned} \quad (5.27)$$

### 5.4.2 Limites des fonctions $u(s)$ et $v(s)$

Le calcul des paramètres macroscopiques ( $\bar{S}_0^\pi, \bar{S}_\infty^\pi, \bar{F}_0^\pi, \bar{F}_\infty^\pi$ ) nécessite le calcul de limites (5.9-5.10). On calcule ces limites en passant par celles des fonctions composées des variables  $(u, v)$ . Il convient donc de déterminer d'abord les limites de  $u(s) = \tilde{J}_0^\mu(s)$  et de  $v(s) = \tilde{J}_0^\kappa(s)$  (Eq. 4.1). Ainsi, on a :

$$\lim_{s \rightarrow 0} u(s) \approx \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{F_\infty^\mu}{s} + S_\infty^\mu \right) \approx F_\infty^\mu s_{\text{lim}} \quad (5.28)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} v(s) \approx \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{F_\infty^\kappa}{s} + S_\infty^\kappa \right) \approx F_\infty^\kappa s_{\text{lim}} \quad (5.29)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{du(s)}{ds} \approx -\lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{F_\infty^\mu}{s^2} + \sum_{i=2}^{m_\mu} \frac{\eta_i^\mu}{(E_i^\mu)^2} \right) \approx -F_\infty^\mu s_{\text{lim}}^2 \quad (5.30)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{dv(s)}{ds} \approx -\lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{F_\infty^\kappa}{s^2} + \sum_{i=2}^{m_\kappa} \frac{\eta_i^\kappa}{(E_i^\kappa)^2} \right) \approx -F_\infty^\kappa s_{\text{lim}}^2 \quad (5.31)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{E_1^\mu} + \frac{1}{s\eta_1^\mu} + \sum_{i=2}^m \frac{1}{E_i^\mu + s\eta_i^\mu} \right) = \frac{1}{E_1^\mu} \quad (5.32)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} v(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{E_1^\kappa} + \frac{1}{s\eta_1^\kappa} + \sum_{i=2}^m \frac{1}{E_i^\kappa + s\eta_i^\kappa} \right) = \frac{1}{E_1^\kappa} \quad (5.33)$$

où l'on pose  $s_{\text{lim}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s}$  à des fins de simplification de l'écriture.

Dans le cas d'un fluage microscopique sphérique borné ( $\eta_1^\kappa \rightarrow \infty$ ), les relations (5.29 et 5.31) deviennent :

$$\lim_{s \rightarrow 0} v(s) = S_\infty^\kappa, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{dv(s)}{ds} = -\sum_{i=2}^{m_\kappa} \frac{\eta_i^\kappa}{(E_i^\kappa)^2} \quad (5.34)$$

### 5.4.3 Fluage effectif instantané

En utilisant le théorème de la valeur initiale de la transformée de Laplace, on obtient :

$$\bar{S}_0^\pi = J_{ef}^\pi(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{J}_{ef}^\pi(s) = L^\pi \left( \lim_{s \rightarrow \infty} u(s), \lim_{s \rightarrow \infty} v(s) \right) = L^\pi \left( \frac{1}{E_1^\mu}, \frac{1}{E_1^\kappa} \right) \quad (5.35)$$

On en déduit que :

$$\bar{S}_0^\pi = \frac{1}{E_1^\pi} = L^\pi \left( \frac{1}{E_1^\mu}, \frac{1}{E_1^\kappa} \right) = L^\pi (S_0^\mu, S_0^\kappa) \quad (5.36)$$

Cette expression est une relation récursive. Elle permet de construire une solution similaire pour le problème de modélisation multi-échelle. De plus, elle ne dépend pas du caractère borné ou pas de  $\kappa_0(t)$ . Pour ces deux cas, qu'il existe ou non une phase poreuse, l'expression de (5.36) reste inchangée. La seule différence relève de l'expression de  $L^\pi(u, v)$ .

Enfin, le fluage effectif instantané  $\bar{S}_0^\pi$  ne dépend que des propriétés élastiques microscopiques ( $S_0^\mu, S_0^\kappa$ ) et des fractions volumiques de toutes les phases :

$$\bar{S}_0^\pi = \bar{S}_0^\pi(S_0^\mu, S_0^\kappa; \kappa_r, \mu_r, f_r) \quad (5.37)$$

#### 5.4.4 Vitesse de fluage instantanée

En appliquant le théorème de la valeur initiale de la transformée de Laplace à la dérivée, on obtient que :

$$\bar{F}_0^\pi = \frac{dJ_{ef}^\pi(0)}{dt} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ s \times \mathcal{TL} \left( \frac{dJ_{ef}^\pi(t)}{dt} \right) \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} s (L^\pi(u(s), v(s)) - J_{ef}^\pi(0)) \quad (5.38)$$

En posant  $\epsilon = \frac{1}{s}$  et en substituant l'expression de  $J_{ef}^\pi(0)$ , à partir de (5.35), dans (5.38), on trouve :

$$\begin{aligned} \bar{F}_0^\pi &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{L^\pi \left( S_0^\mu + \frac{\epsilon}{\eta_0^\mu}, S_0^\kappa + \frac{\epsilon}{\eta_0^\kappa} \right) - L^\pi(S_0^\mu, S_0^\kappa)}{\epsilon} \\ &= F_0^\mu \frac{\partial L^\pi(S_0^\mu, S_0^\kappa)}{\partial u} + F_0^\kappa \frac{\partial L^\pi(S_0^\mu, S_0^\kappa)}{\partial v} \\ &= \nabla(L^\pi(S_0^\mu, S_0^\kappa)) \cdot \vec{\Gamma} \end{aligned} \quad (5.39)$$

où le symbol  $\nabla$  est le gradient par rapport aux variables  $(u, v)$ .

La vitesse instantanée de fluage macroscopique est donc la dérivée directionnelle de  $L^\pi(u, v)$  au point  $(S_0^\mu, S_0^\kappa)$  selon la direction du vecteur  $\vec{\Gamma} = (F_0^\mu, F_0^\kappa)$ .

Dans le cas du fluage sphérique microscopique borné, l'expression (5.39) de  $\bar{F}_0^\pi$  reste valable, il suffit des remplacer la valeur de  $F_0^\kappa$  par  $\sum_{i=2}^{m_\kappa} \frac{1}{\eta_i^\kappa}$  au lieu de  $\sum_{i=1}^{m_\kappa} \frac{1}{\eta_i^\kappa}$  (Eq. 5.34). La différence entre les deux cas relève uniquement de l'expression de  $L^\pi(u, v)$ .

Pour calculer les dérivées partielles de  $L^\pi(u, v)$  par rapport aux variables  $(u, v)$  dans la relation (5.39), on utilise la forme (4.23-4.24) :

$$L^\pi(u, v) = \frac{\mathcal{B}^\pi(u, v)}{\mathcal{C}^\pi(u, v)} \quad (5.40)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^\pi(u, v)}{\partial u} &= \frac{\mathcal{B}_{,u}^\pi(u, v) \mathcal{C}^\pi(u, v) - \mathcal{C}_{,u}^\pi(u, v) \mathcal{B}^\pi(u, v)}{[\mathcal{C}^\pi(u, v)]^2} \\ \frac{\partial L^\pi(u, v)}{\partial v} &= \frac{\mathcal{B}_{,v}^\pi(u, v) \mathcal{C}^\pi(u, v) - \mathcal{C}_{,v}^\pi(u, v) \mathcal{B}^\pi(u, v)}{[\mathcal{C}^\pi(u, v)]^2} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Les expressions complètes des dérivées sont données dans l'annexe § F.2.

Finalement, on trouve que la vitesse instantanée de fluage macroscopique  $\bar{F}_0^\pi$  est une fonction des paramètres viscoélastiques microscopiques  $(F_0^\mu, S_0^\pi)$  et de la microstructure du milieu :

$$\bar{F}_0^\pi = \bar{F}_0^\pi(F_0^\mu, F_0^\kappa, S_0^\mu, S_0^\kappa; \kappa_r, \mu_r, f_r) \quad (5.42)$$

#### 5.4.5 Vitesse de fluage à long terme

En utilisant une nouvelle fois le théorème de la valeur finale de la transformée de Laplace :

$$\bar{F}_\infty^\pi = \frac{dJ_{ef}^\pi(\infty)}{dt} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \times \mathcal{TL} \left( \frac{dJ_{ef}^\pi(t)}{dt} \right) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} [s (L^\pi(u(s), v(s)) - J_{ef}^\pi(0))] \quad (5.43)$$

En se référant à la relation (5.35), on a  $\lim_{s \rightarrow 0} s J_{ef}^\pi(0) = 0$ . En tenant compte de la relation (4.23), on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{F}_\infty^\pi &= \lim_{s \rightarrow 0} [s L^\pi(u(s), v(s))] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \tilde{J}_0^\pi(s) \underline{L}^\pi(u(s), v(s)) \right] \\ &= F_\infty^\pi \lim_{s \rightarrow 0} [\underline{L}^\pi(u(s), v(s))] \end{aligned} \quad (5.44)$$

En effet :

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \times \tilde{J}_0^\pi(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left( \frac{1}{E_1^\pi} + \frac{1}{s \eta_1^\pi} + \sum_{i=2}^m \frac{1}{E_i^\pi + s \eta_i^\pi} \right) = \frac{1}{\eta_1^\pi} = F_\infty^\pi \quad (5.45)$$

La relation (5.44) montre que le calcul de  $\bar{F}_\infty^\pi$  peut être ramené au calcul de la limite  $\lim_{s \rightarrow 0} [\underline{L}^\pi(u(s), v(s))]$ . Dans le cas du fluage microscopique borné, on a  $\lim_{s \rightarrow 0} s \times \tilde{J}_0^\pi(s) = 0$  car  $\frac{1}{\eta_1^\pi} = 0$ . Ainsi, on ne peut pas découpler les deux termes dans le calcul de la limite et il convient de calculer celle-ci directement à partir  $s L^\pi(u(s), v(s))$ . En étudiant l'ordre de grandeur des fonctions  $u(s)$  et  $v(s)$ , quand  $s \rightarrow 0$  par les relations (5.28-5.34), puis en remplaçant ces ordres de grandeur dans les expressions de  $\underline{L}^\pi$  (Eqs. 5.22-5.27), on peut obtenir facilement les limites de celles-ci. Finalement, on aboutit aux expressions suivantes des vitesses de fluage à long-terme :

**Cas 1** Fluage sphérique microscopique non borné et en l'absence de phase poreuse :

$$\bar{F}_\infty^\mu = F_\infty^\mu f_0 \left( f_0 + \frac{5}{6} (1 - f_0) \frac{4F_\infty^\kappa + 3F_\infty^\mu}{2F_\infty^\kappa + F_\infty^\mu} \right)^{-1} \quad (5.46)$$

$$\bar{F}_\infty^\kappa = F_\infty^\kappa f_0 \left( f_0 + (1 - f_0) \frac{4F_\infty^\kappa + 3F_\infty^\mu}{3F_\infty^\mu} \right)^{-1} \quad (5.47)$$

**Cas 2** Fluage sphérique microscopique borné et en l'absence de phase poreuse :

$$\bar{F}_\infty^\mu = F_\infty^\mu \frac{6f_0}{15 - 9f_0} \quad (5.48)$$

$$\bar{F}_\infty^\kappa = 0 \quad (5.49)$$

**Cas 3** Fluage sphérique microscopique non borné et une phase poreuse :

$$\bar{F}_\infty^\mu = F_\infty^\mu \left( f_0 + \frac{20F_\infty^\kappa + 15F_\infty^\mu}{8F_\infty^\kappa + 9F_\infty^\mu} f_n \right) \left( f_0 + (1 - f_0 - f_n) \frac{5}{6} \frac{4F_\infty^\kappa + 3F_\infty^\mu}{2F_\infty^\kappa + F_\infty^\mu} \right)^{-1} \quad (5.50)$$

$$\bar{F}_\infty^\kappa = F_\infty^\kappa \left( f_0 + f_n \frac{4F_\infty^\kappa + 3F_\infty^\mu}{4F_\infty^\kappa} \right) \left( f_0 + (1 - f_0 - f_n) \frac{4F_\infty^\kappa + 3F_\infty^\mu}{3F_\infty^\mu} \right)^{-1} \quad (5.51)$$

**Cas 4** Fluage sphérique microscopique borné et une phase poreuse :

$$\bar{F}_\infty^\mu = F_\infty^\mu \frac{6f_0 + 10f_n}{15 - 9f_0 - 15f_n} \quad (5.52)$$

$$\bar{F}_\infty^\kappa = F_\infty^\kappa \frac{3f_n}{4(1 - f_n)} \quad (5.53)$$

On peut conclure que la vitesse de fluage effectif à long terme  $\bar{F}_\infty^\pi$  ne dépend que de la vitesse à long terme du fluage microscopique, de la fraction volumique de la matrice viscoélastique et de celle de la phase poreuse :

$$\bar{F}_\infty^\pi = \bar{F}_\infty^\pi(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa, f_0, f_n) \quad (5.54)$$

En d'autre terme, les inclusions élastiques n'ont pas influence sur ce paramètre.

Dans le cas d'un fluage microscopique sphérique borné et en l'absence de porosité (Cas 2), le comportement macroscopique sphérique est borné (Eq. 5.49). En présence de porosité, le fluage macroscopique sphérique est non borné même si le fluage microscopique est borné. Dans ce dernier cas (Cas 4), la vitesse de fluage macroscopique sphérique est proportionnelle à celle microscopique déviatorique.

### 5.4.6 Ordonnée à l'origine

Les calculs sont conditionnés uniquement par le fait que le fluage sphérique microscopique est borné ou non. Ainsi, on regroupe d'une part les cas 1 et 3 et d'autre part les cas 2 et 4.

En utilisant les fonctions composées  $L^\pi(u, v)$ , l'ordonnée à l'origine, donnée par la relation (5.10), s'écrit :

$$\bar{S}_\infty^\pi = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(sL^\pi(u(s), v(s)))}{ds} \quad (5.55)$$

#### 5.4.6.1 Fluage sphérique microscopique non borné (cas 1 et 3)

Dans ce cas, la relation (5.55) devient :

$$\begin{aligned} \bar{S}_\infty^\pi &= \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{d(s\tilde{J}_0^\pi(s))}{ds} \underline{L}^\pi(u(s), v(s)) + s\tilde{J}_0^\pi(s) \frac{d(\underline{L}^\pi(u(s), v(s)))}{ds} \right) \\ &= S_\infty^\pi \lim_{s \rightarrow 0} \underline{L}^\pi(u(s), v(s)) + F_\infty^\pi \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(\underline{L}^\pi(u(s), v(s)))}{ds} \end{aligned} \quad (5.56)$$

où  $S_\infty^\pi$  et  $F_\infty^\pi$  sont obtenues à partir des relations (5.3-5.5).

Le premier terme de  $\bar{S}_\infty^\pi$  peut être obtenu par l'expression de  $\lim_{s \rightarrow 0} \underline{L}^\pi(u(s), v(s))$  (5.46-5.53). S'agissant du second terme, on va le décomposer en deux parties en utilisant les dérivées partielles par rapport aux variables  $u$  et  $v$  :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(\underline{L}^\pi(u(s), v(s)))}{ds} = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \Psi_u^\pi(u(s), v(s)) \frac{du(s)}{ds} \right) + \lim_{s \rightarrow 0} \left( \Psi_v^\pi(u(s), v(s)) \frac{dv(s)}{ds} \right) \quad (5.57)$$

avec  $\Psi_u^\pi(u, v) = \frac{\partial(\underline{L}^\pi(u, v))}{\partial u}$  et  $\Psi_v^\pi(u, v) = \frac{\partial(\underline{L}^\pi(u, v))}{\partial v}$ .

On peut écrire alors :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial(\underline{L}^\pi(u(s), v(s)))}{\partial u} = \Psi_u^\pi(\lim_{s \rightarrow 0} u(s), \lim_{s \rightarrow 0} v(s)) \quad (5.58)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial(\underline{L}^\pi(u(s), v(s)))}{\partial v} = \Psi_v^\pi(\lim_{s \rightarrow 0} u(s), \lim_{s \rightarrow 0} v(s)) \quad (5.59)$$

Après manipulations, on trouve que les dérivées partielles peuvent se mettre sous la forme (Annexe § F.2) :

$$\Psi_x^\pi(u(s), v(s)) \frac{dx(s)}{ds} = \frac{Q_{n_x}^\pi(s)}{sP_{l_x}^\pi(s)} \quad (5.60)$$

où  $x$  désigne soit  $u$  soit  $v$ .  $Q_{n_x}^\pi(s)$  et  $P_{l_x}^\pi(s)$  sont deux polynômes dont le degré satisfait l'inégalité

$n_x^\pi < l_x^\pi$ . En factorisant  $P_{l_x}^\pi(s) = s \prod_{i=1}^{l_x^\pi} (s + s_i^{\pi-x})$  et parce que  $n_x^\pi < l_x^\pi + 1$ , on peut réécrire la relation

(5.60) sous la forme :

$$\Psi_x^\pi(u(s), v(s)) \frac{dx(s)}{ds} = \sum_{i=1}^{l_x^\pi} \frac{a_i^{\pi-x}}{(s + s_i^{\pi-x})} + \frac{a_0^{\pi-x}}{s} \quad (5.61)$$

En substituant la relation (5.61) dans la relation (5.57), on trouve :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(\underline{L}^\pi(u(s), v(s)))}{ds} = \sum_{i=1}^{l_u^\pi} \frac{a_i^{\pi-u}}{s_i^{\pi-u}} + \sum_{i=1}^{l_v^\pi} \frac{a_i^{\pi-v}}{s_i^{\pi-v}} + \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{a_0^{\pi-u}}{s} + \frac{a_0^{\pi-v}}{s} \right) \quad (5.62)$$

La difficulté ici est de prouver que :

$$a_0^{\pi-u} + a_0^{\pi-v} = 0 \quad (5.63)$$

Cette difficulté est levée, en construisant (§ F.3) des fonctions qui approchent, lorsque  $s$  tend vers zéro, les termes  $B_{,x}^{\pi}(u, v) C^{\pi}(u, v) x'$ ,  $C_{,x}^{\pi}(u, v) B^{\pi}(u, v) x'$  et  $C^{\pi}(u, v)$ , lesquels interviennent dans l'expression des termes  $\Psi_x^{\pi}(u, v) x'$  (Eq. 5.60). Grâce à ces nouvelles fonctions, qui ont les mêmes limites que les fonctions initiales, on peut prouver la relation (5.63). Par ailleurs, le calcul de la limite (5.62) nécessite de connaître les racines  $s_i^{\pi-x}$  des polynômes  $Q_{n_x}^{\pi}(s)$  et  $P_{l_x}^{\pi}(s)$ . Pour éviter de courir au calcul de ces racines, la méthode des fonctions approchées permet de calculer directement et de façon exacte les termes constants de la limite (5.62) :

$$\sum_{i=1}^{l_u^{\pi}} \frac{a_i^{\pi-u}}{s_i^{\pi-u}} = L_u^{\pi} \quad (5.64)$$

$$\sum_{i=1}^{l_v^{\pi}} \frac{a_i^{\pi-v}}{s_i^{\pi-v}} = L_v^{\pi} \quad (5.65)$$

Les quantités  $L_u^{\pi}$  et  $L_v^{\pi}$  sont données dans l'annexe (§ F.3).

#### 5.4.6.2 Fluage sphérique microscopique borné (cas 2 et 4)

**5.4.6.2.1 Paramètre déviatorique** Pour la partie déviatorique,  $\bar{S}_{\infty}^{\mu}$  est donnée par la relation (5.56). Cependant, la relation (5.61), intervenant dans le calcul du second terme, devient dans ce cas :

$$\Psi_x^{\pi}(u(s), v(s)) \frac{dx(s)}{ds} = \frac{Q_{n_x}^{\pi}(s)}{P_{l_x}^{\pi}(s)} = \sum_{i=1}^{l_x^{\pi}} \frac{a_i^{\pi-x}}{(s + s_i^{\pi-x})} \quad (5.66)$$

Par ailleurs, on obtient (Annexe § F.3) :

$$L_v^{\mu} = 0 \quad (5.67)$$

Ainsi, on aboutit à :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(\underline{L}^{\mu}(u(s), v(s)))}{ds} = \sum_{i=1}^{l_u^{\mu}} \frac{a_i^{\mu-u}}{s_i^{\mu-u}} = L_u^{\mu} \quad (5.68)$$

L'expression de  $L_u^{\mu}$ , établie en utilisant les fonctions approchées, est donnée dans l'annexe § F.3.

**5.4.6.2.2 Paramètre sphérique** Pour ce cas,  $\bar{S}_{\infty}^{\kappa}$  est calculée par la forme initiale (Eq. 5.55) comme suit :

- Fluage sphérique microscopique borné et en l'absence de phase poreuse (Cas 2) :  
D'après la relation (5.49), la vitesse à long-terme du fluage macroscopique sphérique  $\bar{F}_{\infty}^{\kappa}$  est nulle. Le fluage macroscopique est alors borné ( $J_{ef}^{\kappa}(\infty) \ll \infty$ ). Ainsi, on a :

$$\bar{S}_{\infty}^{\kappa} = J_{ef}^{\kappa}(\infty) \quad (5.69)$$

En appliquant le théorème de la valeur finale de la transformée de Laplace, on obtient :

$$\bar{S}_{\infty}^{\kappa} = \lim_{s \rightarrow 0} L^{\pi}(u(s), v(s)) = f_0 S_{\infty}^{\kappa} + \Sigma_{\kappa}$$

où  $\Sigma_{\kappa} = \sum_{r=1}^n \frac{f_r}{\kappa_r}$  ne concerne que les inclusions élastiques.

- Fluage sphérique microscopique borné et une phase poreuse (Cas 4) :  
La relation (5.55) devient :

$$\bar{S}_\infty^\kappa = \lim_{s \rightarrow 0} \left( L^\kappa(u(s), v(s)) + s \frac{d(L^\kappa(u(s), v(s)))}{ds} \right) \quad (5.70)$$

Dans l'équation (5.70), on doit calculer la limite de deux termes ayant un même ordre de grandeur  $s_{\text{lim}}$  mais qui s'opposent (Annexe § F.3). De façon similaire au cas § 5.4.6.1, on introduit des fonctions ayant les mêmes limites que les fonctions initiales, ce qui permet de montrer que ces termes en  $s_{\text{lim}}$  ont la même amplitude  $M$  (Annexe § F.3) :

$$\lim_{s \rightarrow 0} L^\kappa(u(s), v(s)) \approx \Psi_0^\kappa + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{M}{s} \quad (5.71)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{d(L^\kappa(u(s), v(s)))}{ds} \approx \Psi_{s0}^\kappa - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{M}{s} \quad (5.72)$$

Ainsi :

$$\bar{S}_\infty^\kappa = \Psi_0^\kappa + \Psi_{s0}^\kappa \quad (5.73)$$

où  $\Psi_0^\kappa$  et  $\Psi_{s0}^\kappa$  sont des constantes des quatre paramètres viscoélastiques microscopiques  $S_\infty^\mu, S_\infty^\kappa, F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa$ . Elles sont donnés dans l'annexe § F.3.

Finalement, on a pu établir, pour les quatre cas,  $\bar{S}_\infty^\pi$  comme une fonction des paramètres viscoélastiques microscopiques et de la microstructure du milieu :

$$\bar{S}_\infty^\pi = \bar{S}_\infty^\pi(S_\infty^\mu, S_\infty^\kappa, F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa; \kappa_r, \mu_r, f_r, f_0) \quad (5.74)$$

## 5.5 Schéma autocohérent généralisé

Dans cette section, on construit analytiquement l'expression des quatre paramètres  $\bar{S}_\infty^\pi, \bar{F}_\infty^\pi, \bar{S}_0^\pi, \bar{F}_0^\pi$  pour caractériser le fluage d'un milieu hétérogène à deux phases : une phase inclusionnaire élastique  $(\mu_1, \kappa_1)$  noyée dans une matrice viscoélastique isotrope  $(\mu_0(t), \kappa_0(t))$ . On utilise ici le schéma autocohérent généralisé. Pour le module effectif sphérique, la forme de sa TC est identique à celle du cas utilisant le schéma de Mori-Tanaka. On examine donc seulement la composante déviatorique dont la TC est une fonction irrationnelle. Les expressions des quatre paramètres (Eq. 5.36), (Eq. 5.39), (Eq. 5.44), (Eq. 5.55) et (Eq. 5.70) du cas du schéma Mori-Tanaka restent valables pour le cas du schéma autocohérent généralisé. La seule différence entre les deux cas est l'expression des fonctions composées  $L^\mu(u, v)$ . Les deux premiers paramètres  $\bar{S}_0^\mu, \bar{F}_0^\mu$  (Eq. 5.36) et (Eq. 5.39) sont obtenus alors immédiatement parce qu'on connaît l'expression de  $L^\mu(u, v)$  à partir des équations (4.141-4.143). Par conséquent, on ne doit calculer, par la suite, que les deux paramètres  $\bar{S}_\infty^\mu, \bar{F}_\infty^\mu$  en distinguant le cas du fluage sphérique microscopique non borné de celui borné.

### 5.5.1 Vitesse de fluage à long terme

#### 5.5.1.1 Fluage sphérique microscopique non borné

Conformément aux arguments développés pour le schéma de Mori-Tanaka (Eq. 5.44), on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{F}_\infty^\mu &= \lim_{s \rightarrow 0} [s L^\mu(u(s), v(s))] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \tilde{J}_0^\mu(s) \underline{L}^\mu(u(s), v(s)) \right] \\ &= \frac{1}{\eta_1^\mu} \lim_{s \rightarrow 0} [\underline{L}^\mu(u(s), v(s))] \end{aligned} \quad (5.75)$$

En remarquant que l'ordre de grandeur des fonctions  $u(s)$  et  $v(s)$ , lorsque  $s$  tend vers zéro, est donné par les relations (5.28-5.29), on peut obtenir facilement la limite  $\lim_{s \rightarrow 0} [\underline{L}^\mu(u(s), v(s))]$  compte tenu que l'expression de  $\underline{L}^\mu$  est donnée par les relations (4.142-4.143) :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \underline{L}^\mu(u(s), v(s)) = -\underline{L}_a^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, F_\infty^\kappa s_{\text{lim}}) \pm \underline{L}_b^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, F_\infty^\kappa s_{\text{lim}}) \quad (5.76)$$

avec :

$$\begin{aligned} \underline{L}_a^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, F_\infty^\kappa s_{\text{lim}}) &= \frac{\underline{B}_4(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, F_\infty^\kappa s_{\text{lim}})}{\underline{C}_4(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, F_\infty^\kappa s_{\text{lim}})} \\ \underline{L}_b^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, F_\infty^\kappa s_{\text{lim}}) &= \frac{\sqrt{\underline{D}_8(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, F_\infty^\kappa s_{\text{lim}})}}{\underline{C}_4(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, F_\infty^\kappa s_{\text{lim}})} \\ \underline{D}_8(u, v) &= (\underline{B}_4(u, v))^2 - 4\underline{A}_4(u, v)\underline{C}_4(u, v) \end{aligned} \quad (5.77)$$

On rappelle ici l'expression des fonctions  $\underline{A}_4(u, v)$ ,  $\underline{B}_4(u, v)$ ,  $\underline{C}_4(u, v)$  donnée par la relation générique (4.140) :

$$\begin{aligned} \underline{W}_4(u, v) &= \underline{w}_{40}u^4 + \underline{w}_{30}u^3 + \underline{w}_{31}u^3v + \underline{w}_{20}u^2 + \underline{w}_{21}u^2v + \underline{w}_{22}u^2v^2 \\ &\quad + \underline{w}_{11}uv + \underline{w}_{12}uv^2 + \underline{w}_{02}v^2 \end{aligned} \quad (5.78)$$

où la lettre  $W$  peut jouer le rôle de  $A$  ou  $B$  ou  $C$ . On obtient alors facilement la valeur de la limite  $\lim_{s \rightarrow 0} \underline{L}^\mu(u(s), v(s))$  (Eq. 5.76), en conservant uniquement les coefficients  $\underline{w}_{(4uv)}$  de degré 4 (le plus élevé) de la fonction  $\underline{W}_4(u, v)$ , i.e. les coefficients  $\underline{w}_{ij}$  dont les indices satisfont la relation  $i + j = 4$  :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \underline{L}^\mu(u(s), v(s)) = -\frac{\underline{b}_{(4uv)}}{\underline{c}_{(4uv)}} \pm \frac{\sqrt{(\underline{b}_{(4uv)})^2 - \underline{a}_{(4uv)}\underline{c}_{(4uv)}}}{\underline{c}_{(4uv)}} \quad (5.79)$$

où :

$$\begin{aligned} \underline{w}_{(4uv)} &= \underline{w}_{40} [F_\infty^\mu]^4 + \underline{w}_{31} [F_\infty^\mu]^3 F_\infty^\kappa + \underline{w}_{22} [F_\infty^\mu]^2 [F_\infty^\kappa]^2 \\ &= \underline{w}_{40} \frac{1}{(\eta_1^\mu)^4} + \underline{w}_{31} \frac{1}{(\eta_1^\mu)^3 \eta_1^\kappa} + \underline{w}_{22} \frac{1}{(\eta_1^\mu)^2 (\eta_1^\kappa)^2} \end{aligned} \quad (5.80)$$

La lettre  $w$  se substitue à  $a$ ,  $b$  ou  $c$ , qui sont les coefficients du polynôme  $\underline{W}_4(u, v)$  correspondant respectivement à  $\underline{A}_4$ ,  $\underline{B}_4$ ,  $\underline{C}_4$  (Eq. 4.143). Il est à rappeler que les coefficients  $\underline{w}_{40}$ ,  $\underline{w}_{31}$ ,  $\underline{w}_{22}$  sont des fonctions de  $\nu_1$ ,  $f_1$  et  $\mu_1$ . Leurs expressions sont données dans l'annexe § G.2.2.

### 5.5.1.2 Fluage sphérique microscopique borné

Quand la fonction de fluage sphérique de la matrice est décrite par un modèle de Kelvin borné (4.5), la limite  $\lim_{s \rightarrow 0} v(s) = S_\infty^\kappa$  est constante, d'après la relation (5.34). Alors la relation (5.79) reste valable, mais l'expression de  $\underline{w}_{(4uv)}$  devient plus simple :

$$\underline{w}_{(4uv)} = \underline{w}_{40} [F_\infty^\mu]^4 = \underline{w}_{40} \frac{1}{(\eta_1^\mu)^4} \quad (5.81)$$

On peut conclure que la vitesse de fluage effectif à long terme  $\bar{F}_\infty^\pi$  ne dépend que de la vitesse à long terme microscopique, de la fraction volumique et des propriétés élastiques de la matrice viscoélastique :

$$\bar{F}_\infty^\pi = \bar{F}_\infty^\pi(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa; \nu_1, \mu_1, f_1) \quad (5.82)$$

### 5.5.2 Ordonnée à l'origine

De façon identique au cas du schéma de Mori-Tanaka, on obtient :

$$\bar{S}_\infty^\mu = S_\infty^\mu \lim_{s \rightarrow 0} \underline{L}^\mu(u(s), v(s)) + F_\infty^\mu \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(\underline{L}^\mu(u(s), v(s)))}{ds} \quad (5.83)$$

La limite  $\lim_{s \rightarrow 0} \underline{L}^\mu(u(s), v(s))$  du premier terme de  $\bar{S}_\infty^\mu$  est obtenue par la relation (5.79). Pour la seconde limite  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(\underline{L}^\mu(u(s), v(s)))}{ds}$ , la procédure de calcul est différente de celle du schéma de Mori-Tanaka. Ici, on n'utilise pas les ordres de grandeurs de  $u$  et  $v$  dans le calcul de cette limite. Ce dernier est effectué en explicitant l'expression de la dérivée de  $\underline{L}^\mu$  en fonction de  $s$  en faisant apparaître les polynômes  $\underline{P}_{m_\mu}(s)$ ,  $\underline{Q}_{m_\mu}(s)$ ,  $\underline{V}_{m_\mu}(s)$ . Ainsi, le calcul de cette limite, lorsque  $s$  tend vers zéro, se ramène à calculer leurs coefficients de degrés 0 et 1. En effet, d'après les relations (4.142-4.143), on sait que :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(\underline{L}^\mu(u(s), v(s)))}{ds} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(\underline{L}_a^\mu(u(s), v(s)))}{ds} \pm \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(\underline{L}_b^\mu(u(s), v(s)))}{ds} \quad (5.84)$$

et d'après les relations (4.141) et (4.146-4.147), on obtient :

$$\underline{L}_a^\mu(u(s), v(s)) = \frac{\underline{Q}_{m_\mu}(s)}{\underline{P}_{m_\mu}(s)}, \quad \underline{L}_b^\mu(u, v) = \frac{\sqrt{\underline{\Delta}_{2m_\mu}(s)}}{\underline{P}_{m_\mu}(s)} \quad (5.85)$$

$$\underline{\Delta}_{2m_\mu}(s) = \underline{Q}_{m_\mu}^2(s) - \underline{V}_{m_\mu}(s)\underline{P}_{m_\mu}(s) \quad (5.86)$$

On en déduit alors :

$$\frac{d(\underline{L}_a^\mu(u(s), v(s)))}{ds} = \frac{\underline{Q}'_{m_\mu}(s)\underline{P}_{m_\mu}(s) - \underline{P}'_{m_\mu}(s)\underline{Q}_{m_\mu}(s)}{\underline{P}_{m_\mu}^2(s)} \quad (5.87)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\underline{L}_b^\mu(u(s), v(s)))}{ds} &= \frac{\underline{P}_{m_\mu}(s)\underline{Q}'_{m_\mu}(s)\underline{Q}_{m_\mu}(s) - \underline{P}'_{m_\mu}(s)\underline{Q}_{m_\mu}^2(s)}{\underline{P}_{m_\mu}^2(s)\sqrt{\underline{Q}_{m_\mu}^2(s) - \underline{V}_{m_\mu}(s)\underline{P}_{m_\mu}(s)}} \\ &+ \frac{\underline{V}_{m_\mu}(s)\underline{P}'_{m_\mu}(s)\underline{P}_{m_\mu}(s) - \underline{V}'_{m_\mu}(s)\underline{P}_{m_\mu}^2(s)}{2\underline{P}_{m_\mu}^2(s)\sqrt{\underline{Q}_{m_\mu}^2(s) - \underline{V}_{m_\mu}(s)\underline{P}_{m_\mu}(s)}} \end{aligned} \quad (5.88)$$

On rappelle ici que les polynômes  $\underline{P}_{m_\mu}(s)$ ,  $\underline{Q}_{m_\mu}(s)$ ,  $\underline{V}_{m_\mu}(s)$  peuvent être représentés de façon générique par  $\underline{X}_{m_\mu}(s) = \prod_{i=0}^{m_\mu} \underline{x}_i s^i$  dont la forme est donnée dans l'annexe § G.2. On trouve facilement que  $\lim_{s \rightarrow 0} \underline{X}_{m_\mu}(s) = \underline{x}_0$  et  $\lim_{s \rightarrow 0} \underline{X}'_{m_\mu}(s) = \underline{x}_1$ . Donc, on en déduit que :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(\underline{L}_a^\mu(u(s), v(s)))}{ds} = \frac{\underline{q}_1 \underline{p}_0 - \underline{p}_1 \underline{q}_0}{(\underline{p}_0)^2} \quad (5.89)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(\underline{L}_b^\mu(u(s), v(s)))}{ds} = \frac{\underline{p}_0 \underline{q}_1 \underline{q}_0 - \underline{p}_1 (\underline{q}_0)^2}{(\underline{p}_0)^2 \sqrt{(\underline{q}_0)^2 - \underline{v}_0 \underline{p}_0}} + \frac{\underline{v}_0 \underline{p}_1 \underline{p}_0 - \underline{v}_1 (\underline{p}_0)^2}{2 (\underline{p}_0)^2 \sqrt{(\underline{q}_0)^2 - \underline{v}_0 \underline{p}_0}} \quad (5.90)$$

où les coefficients macroscopiques  $\underline{p}_0$ ,  $\underline{q}_0$ ,  $\underline{v}_0$ ,  $\underline{p}_1$ ,  $\underline{q}_1$ ,  $\underline{v}_1$  sont données dans l'annexe § G.2 par les relations (G.14-G.15) dans le cas du fluage sphérique microscopique non borné et par les relations (G.20-G.21) dans le cas du fluage sphérique microscopique borné. Nous reportons leurs expressions dans les deux cas considérés pour discuter les simplifications qui peuvent être adoptées lors de leur calcul.

### 5.5.2.1 Fluage sphérique macroscopique non borné

D'après les relations (G.20-G.21), les coefficients  $\underline{x}_0$  et  $\underline{x}_1$  des termes de degrés 0 et 1 du polynôme générique  $\underline{X}_{m_\mu}(s)$  (représentant  $\underline{P}_{m_\mu}(s)$ ,  $\underline{Q}_{m_\mu}(s)$  et  $\underline{V}_{m_\mu}(s)$ ) sont donnés, en fonction des coefficients du polynôme générique  $\underline{W}_4(u, v)$  (Eq. 4.140), par :

$$\underline{x}_0 = \underline{w}_{40} (q_0^\mu)^4 (p_0^\kappa)^2 + \underline{w}_{31} (q_0^\mu)^3 q_0^\kappa p_0^\mu p_0^\kappa + \underline{w}_{22} (q_0^\mu q_0^\kappa p_0^\mu)^2 \quad (5.91)$$

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 = & \underline{w}_{40} \left( 4q_1^\mu (q_0^\mu)^3 (p_0^\kappa)^2 + 2p_1^\kappa p_0^\kappa (q_0^\mu)^4 \right) + \underline{w}_{30} (q_0^\mu)^3 p_0^\mu (p_0^\kappa)^2 \\ & + \underline{w}_{31} \left( 3q_1^\mu (q_0^\mu)^2 q_0^\kappa p_0^\mu p_0^\kappa + (q_0^\mu)^3 q_1^\kappa p_0^\mu p_0^\kappa + (q_0^\mu)^3 q_0^\kappa p_1^\mu p_0^\kappa + (q_0^\mu)^3 q_0^\kappa p_0^\mu p_1^\kappa \right) \\ & + \underline{w}_{22} \left( 2q_1^\mu q_0^\mu (q_0^\kappa)^2 (p_0^\mu)^2 + 2q_1^\kappa q_0^\kappa (q_0^\mu)^2 (p_0^\mu)^2 + 2p_1^\mu p_0^\mu (q_0^\mu)^2 (q_0^\kappa)^2 \right) \\ & + \underline{w}_{21} (q_0^\mu)^2 q_0^\kappa (p_0^\mu)^2 p_0^\kappa + \underline{w}_{12} q_0^\mu (q_0^\kappa)^2 (p_0^\mu)^3 \end{aligned} \quad (5.92)$$

où  $x = v$  correspond à  $w = a$ ,  $x = q$  correspond à  $w = b$ ,  $x = p$  correspond à  $w = c$ . Les coefficients  $p_0^\pi, q_0^\pi, p_1^\pi, q_1^\pi$  sont respectivement les coefficients de degré 0 et 1 des polynômes  $P_{m_\pi}(s)$  et  $Q_{m_\pi}(s)$  des fonctions de fluage microscopiques (Eqs. E.4-E.5). Les expressions de ces coefficients sont fournies par les relations (E.12-E.13) :

$$q_0^\pi = \frac{1}{\eta_1^\pi} = F_\infty^\pi \quad (5.93)$$

$$\begin{aligned} q_1^\pi &= \frac{1}{\eta_1^\pi} \sum_{i=1}^m \tau_i^\pi + \left( \sum_{i=1}^m \frac{1}{E_i^\pi} - \frac{1}{E_1^\pi} \right) \\ &= F_\infty^\pi \sum_{i=1}^m \tau_i^\pi + (S_\infty^\pi - S_0^\pi) \end{aligned} \quad (5.94)$$

$$p_0^\pi = 1 \quad , \quad p_1^\pi = \sum_{i=1}^m \tau_i^\pi - \tau_1^\pi = \sum_{i=1}^m \tau_i^\pi - \frac{S_0^\pi}{F_\infty^\pi} \quad (5.95)$$

Les relations (5.93-5.95) montrent qu'à ce niveau des calculs, l'ordonnée à l'origine  $\bar{S}_\infty^\pi$  dépend de l'ensemble du spectre microscopique du fait des relations (5.89-5.92). Dans ce qui suit, nous allons montrer que ce paramètre ne va dépend que des paramètres microscopiques  $F_\infty^\pi$  et  $S_\infty^\pi$ . En effet, on rappelle que  $\tilde{J}_0^\pi(s) = \frac{Q_{m_\pi}(s)}{P_{m_\pi}(s)}$  et que les relations (5.28-5.29) donnent :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \tilde{J}_0^\mu(s) = \lim_{s \rightarrow 0} u(s) \approx \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{F_\infty^\mu}{s} + S_\infty^\mu \right) \quad (5.96)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \tilde{J}_0^\kappa(s) = \lim_{s \rightarrow 0} v(s) \approx \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{F_\infty^\kappa}{s} + S_\infty^\kappa \right) \quad (5.97)$$

Ainsi, les relations ci-dessus montre que lorsque  $t$  tend vers l'infini (équivalent à  $s$  tend vers zéro), le modèle de Kelvin généralisé se ramène à un modèle de Maxwell dont les paramètres de viscosité et de raideur sont respectivement  $1/F_\infty^\pi$  et  $1/S_\infty^\pi$ . On peut alors déduire que le fluage microscopique à long terme n'intervient qu'à travers ces deux paramètres, ce qui permet de ne retenir que les termes contenant  $F_\infty^\pi$  et  $S_\infty^\pi$  dans les expressions des coefficients  $p_0^\pi, q_0^\pi, p_1^\pi, q_1^\pi$ .

En substituant les formes réduites de ces coefficients dans les expressions des coefficients  $\underline{x}_0$  et de  $\underline{x}_1$  (Eqs. 5.91-5.92), ces derniers deviennent :

$$\underline{x}_0 = \underline{w}_{40} (F_\infty^\mu)^4 + \underline{w}_{31} (F_\infty^\mu)^3 F_\infty^\kappa + \underline{w}_{22} (F_\infty^\mu F_\infty^\kappa)^2 \quad (5.98)$$

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 = & \underline{w}_{40} 4S_\infty^\mu (F_\infty^\mu)^3 + \underline{w}_{30} (F_\infty^\mu)^3 + \underline{w}_{31} \left( 3S_\infty^\mu (F_\infty^\mu)^2 F_\infty^\kappa + (F_\infty^\mu)^3 S_\infty^\kappa \right) \\ & + \underline{w}_{22} \left( 2S_\infty^\mu F_\infty^\mu (F_\infty^\kappa)^2 + 2S_\infty^\kappa F_\infty^\kappa (F_\infty^\mu)^2 \right) + \underline{w}_{21} (F_\infty^\mu)^2 F_\infty^\kappa + \underline{w}_{12} F_\infty^\mu (F_\infty^\kappa)^2 \end{aligned} \quad (5.99)$$

La limite  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(\underline{L}^\mu(u(s), v(s)))}{ds}$  ne dépend alors que de  $F_\infty^\pi, S_\infty^\pi$  :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(\underline{L}^\mu(u(s), v(s)))}{ds} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d\left(\underline{L}^\mu\left(\frac{F_\infty^\mu}{s} + S_\infty^\mu, \frac{F_\infty^\kappa}{s} + S_\infty^\kappa\right)\right)}{ds} \quad (5.100)$$

De ce fait le coefficient à long terme  $\bar{S}_\infty^\pi$  des fonctions effectives de fluage ne dépendent que de ceux  $F_\infty^\pi$  et  $S_\infty^\pi$  des fonctions de fluage microscopique.

### 5.5.2.2 Fluage sphérique macroscopique borné

D'après les relations (G.20-G.21), on a dans ce cas :

$$\underline{x}_0 = \underline{w}_{40} (q_0^\mu)^4 (p_0^\kappa)^2 \quad (5.101)$$

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 = & \underline{w}_{40} \left( 4q_1^\mu (q_0^\mu)^3 (p_0^\kappa)^2 + 2p_1^\kappa p_0^\kappa (q_0^\mu)^4 \right) + \underline{w}_{30} (q_0^\mu)^3 p_0^\mu (p_0^\kappa)^2 \\ & + \underline{w}_{31} (q_0^\mu)^3 q_0^\kappa p_0^\mu p_0^\kappa \end{aligned} \quad (5.102)$$

Les expressions des coefficients de la fonction de fluage microscopique déviatorique  $p_0^\mu, q_0^\mu, p_1^\mu, q_1^\mu$  sont donnés par les relations (5.93-5.95).

Pour la fonction de fluage sphérique (ici bornée), les expressions des coefficients  $p_0^\kappa, q_0^\kappa, p_1^\kappa, q_1^\kappa$  sont issues des relations (E.30) et (E.31) :

$$q_0^\kappa = \sum_{i=1}^{m_\kappa} \frac{1}{E_i^\kappa} = S_\infty^\kappa \quad (5.103)$$

$$q_1^\kappa = S_\infty^\kappa \sum_{i=2}^{m_\kappa} \tau_i^\kappa - \sum_{i=2}^{m_\kappa} \frac{\tau_i^\kappa}{E_i^\kappa} \quad (5.104)$$

$$p_0^\kappa = 1 \quad , \quad p_1^\kappa = \sum_{i=2}^{m_\kappa} \tau_i^\kappa \quad (5.105)$$

En utilisant un argument similaire au cas précédent, les expressions de  $\underline{x}_0$  et de  $\underline{x}_1$  (Eqs. 5.101-5.102) se simplifient, en ne conservant que les termes dépendants uniquement de  $F_\infty^\pi$  et  $S_\infty^\pi$  dans les expressions des coefficients  $p_0^\pi, q_0^\pi, p_1^\pi, q_1^\pi$  :

$$\underline{x}_0 = \underline{w}_{40} (F_\infty^\mu)^4 \quad (5.106)$$

$$\underline{x}_1 = \underline{w}_{40} 4S_\infty^\mu (F_\infty^\mu)^3 + \underline{w}_{30} (F_\infty^\mu)^3 + \underline{w}_{31} (F_\infty^\mu)^3 S_\infty^\kappa \quad (5.107)$$

Pour le cas  $\pi = \kappa$ , il convient de préciser que seuls les coefficients  $q_0^\kappa$  et  $p_0^\kappa$  sont conservés. En effet, dans l'expression de  $q_1^\kappa$  le terme contenant  $S_\infty^\kappa$  fait également intervenir la partie évanouissante du spectre.

Finalement, on obtient, comme le cas du schéma de MT que l'ordonnée à l'origine  $\bar{S}_\infty^\pi$  est une fonction des paramètres microscopiques  $(S_\infty^\pi, F_\infty^\pi)$ , de la fraction volumique et des propriétés élastiques de la matrice :

$$\bar{S}_\infty^\pi = \bar{S}_\infty^\pi (S_\infty^\mu, S_\infty^\kappa, F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa; \nu_1, \mu_1, f_1) \quad (5.108)$$

---

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons caractérisé le fluage microscopique par quatre paramètres  $(S_0^\pi, S_\infty^\pi, F_0^\pi, F_\infty^\pi)$  contrôlant son évolution instantanée et à long terme. Nous avons alors étendu cette caractérisation au fluage macroscopique en définissant quatre paramètres  $(\bar{S}_0^\pi, \bar{S}_\infty^\pi, \bar{F}_0^\pi, \bar{F}_\infty^\pi)$  jouant le même rôle que ceux microscopiques. Ensuite, la démarche a consisté à établir des relations entre ces deux familles de paramètres sans avoir à inverser la TL des fonctions effectives de fluage. Ces relations jouissent de propriétés de récursivité dans le cas du schéma de MT, ce qui permet de déterminer les paramètres macroscopiques pour un nombre donné de changement d'échelle.

Enfin, nous avons établi les relations permettant de construire un modèle macroscopique analytique sur la base de ces quatre paramètres. Cette démarche permet de construire de façon approchée les fonctions de fluage macroscopique lorsque la richesse du spectre macroscopique ne permet plus de construire des solutions exactes. La solution approchée se présente comme une enveloppe supérieure de la solution exacte. Elle constitue également une solution de référence pour valider les méthodes d'inversion numérique.

## Troisième partie

# Analyse comparative et application au fluage des bétons



# Introduction

Cette dernière partie consiste en une validation et en une étude comparative des différentes méthodes développées pour présenter la pertinence et les limites de chacune d'entre elles. Ensuite, les outils développés sont mis à contribution pour identifier les propriétés viscoélastiques à l'origine du fluage du béton.

Le chapitre 6 est dédié à l'illustration des résultats obtenus dans la partie II du mémoire. On y montre notamment que le gain apporté par la méthode approchée est significatif : construction directe d'une réponse approchée sur la base des quatre paramètres avec un écart relativement faible par rapport aux solutions qui nécessitent l'inversion de la transformée de Laplace-Carson (semi-analytiques du chapitre 4 dans le cas des hypothèses simplificatrices ou bien celles complètement numériques). Ces méthodes seront appliquées par la suite à la modélisation multi-échelle du fluage de la pâte de ciment et de celui du béton.

L'objectif du chapitre 7 est d'appliquer les techniques de changement d'échelle présentées dans la partie II du mémoire, pour construire la complaisance de fluage propre macroscopique du béton en connaissant les données communes de toutes sortes de béton et celles correspondant à une formulation donnée. L'idée de base de cette approche est de décomposer la microstructure du béton en trois échelles : pâte de ciment, mortier et béton. À chaque échelle, le milieu hétérogène est considéré comme un composite de type inclusion-matrice pour lequel les approches développées sont applicables. Les résultats expérimentaux disponibles sont alors exploités pour analyser le caractère intrinsèque des propriétés viscoélastiques à l'origine du fluage du béton.



# Chapitre 6 Etude comparative paramétrique

Dans ce chapitre, nous allons procéder à une étude comparative entre les trois méthodes présentées précédemment. Cette confrontation permettra notamment de mesurer l'écart entre la solution exacte et celle donnée par le modèle macroscopique équivalent. Nous comparerons également les deux schémas d'homogénéisation entre eux.

## 6.1 Modèles rhéologiques microscopiques

Les méthodes analytiques, semi-analytiques et numériques présentées précédemment, pour résoudre le problème de viscoélasticité, sont illustrées ici par quelques exemples. Pour chaque exemple, les fonctions de fluage sphérique et déviatorique de la matrice peuvent être décrites par des modèles rhéologiques simples : modèle de Maxwell, de Zener, de Burgers ou de Kelvin généralisé avec  $m_\mu = 4$  (Fig. 6.1). Ce dernier présente une équation quadratique dont la résolution analytique est encore possible. Après avoir établie les expressions analytiques des fonctions de fluage, on procèdera à l'étude de l'influence d'un certain nombre de paramètres.

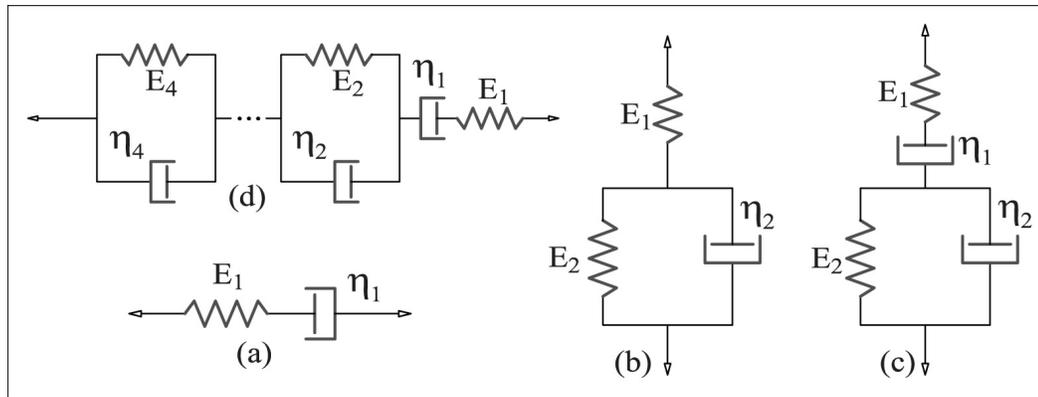


FIG. 6.1 Modèles rhéologiques : a) Maxwell ; b) Zener ; c) Burgers ; d) Kelvin ( $m_\mu = 4$ )

Pour chaque exemple, on étudiera le cas général et les cas particuliers où le coefficient de Poisson ou le module de compressibilité de la matrice est constant. Pour ces cas particuliers, le comportement viscoélastique de la matrice est décrit par une unique fonction de fluage, ici on choisit la fonction déviatorique  $J_0^\mu(t)$ .

Dans le cas de la méthode semi-analytique, la stratégie à deux étapes sera utilisée pour les deux cas particuliers. Les racines  $\{u_i^\pi, i = 1, \dots, N_\pi\}$  de l'équation  $\underline{C}^\pi(u) = 0$ , pour le cas du schéma de MT (Eq. 4.71) ou de l'équation  $\underline{C}_2(u) = 0$ , pour le cas du schéma AG (Eq. 4.173), seront précisées dans chaque exemple. Ensuite, on cherchera l'ensemble  $\left\{s_{ij}^\pi, j : 1 \rightarrow m_\mu\right\}$  des racines du polynôme  $\underline{P}_{m_\pi}$ , d'après la relation (4.72), solutions de l'équation suivante :

$$u_i^\pi = \frac{1}{E_1^\mu} + \frac{1}{s\eta_1^\mu} + \sum_{i=2}^{m_\mu} \frac{1}{E_i^\mu + s\eta_i^\mu} \quad (6.1)$$

En réduisant les fractions au même dénominateur, on peut ramener l'égalité (6.1) à l'équation

équivalente de degré  $m_\mu$  :

$$\sum_{k=0}^{m_\mu} \lambda_k(u_i^\pi) s^k = 0 \quad (6.2)$$

où les coefficients  $\lambda_k$ , fonction des racines  $u_i^\pi$ , seront explicités dans les quatre cas suivants, correspondant aux quatre modèles rhéologiques de la figure 6.1 :

- Modèle de Maxwell :

$$\begin{aligned} m_\mu &= 1 \quad , \quad j = 1 \\ \underline{s}_{i1}^\pi &= \frac{1}{\eta_1^\mu u_i^\pi - \tau_1^\mu} \end{aligned} \quad (6.3)$$

- Modèle de Zener :

$$\begin{aligned} m_\mu &= 2 \quad , \quad \eta_1^\mu = \infty \quad , \quad j = 1 \\ \underline{s}_{i1}^\pi &= \frac{1}{\eta_2^\mu \left(u_i^\pi - \frac{1}{E_1^\mu}\right)} - \frac{1}{\tau_2^\mu} \end{aligned} \quad (6.4)$$

- Modèle de Burgers :

$$\begin{aligned} m_\mu &= 2 \quad , \quad j = 2 \\ \lambda_1(u) &= \eta_1^\mu E_1^\mu + \eta_1^\mu E_2^\mu + \eta_2 E_1^\mu - u \eta_1^\mu E_1^\mu E_2^\mu \\ \lambda_0(u) &= E_1^\mu E_2^\mu \quad , \quad \lambda_2(u) = \eta_1^\mu \eta_2^\mu (1 - u E_1^\mu) \end{aligned} \quad (6.5)$$

- Modèle de Kelvin généralisé à quatre unités :

$$m_\mu = 4 \quad , \quad j = 4 \quad (6.6)$$

$$\lambda_4(u) = \eta_2^\mu \eta_3^\mu \eta_4^\mu \left( \frac{1}{E_1^\mu} - u \right) \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \lambda_3(u) &= \eta_2^\mu \eta_3^\mu + \eta_2^\mu \eta_4^\mu + \eta_3^\mu \eta_4^\mu + \frac{1}{\eta_1^\mu} \eta_2^\mu \eta_3^\mu \eta_4^\mu + \eta_2^\mu \frac{\eta_3^\mu}{E_1^\mu} E_4^\mu + \eta_2^\mu \frac{\eta_4^\mu}{E_1^\mu} E_3^\mu + \eta_3^\mu \frac{\eta_4^\mu}{E_1^\mu} E_2^\mu \\ &\quad - u (\eta_4^\mu (\eta_2^\mu E_3^\mu + \eta_3^\mu E_2^\mu) + \eta_2^\mu \eta_3^\mu E_4^\mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2(u) &= \eta_2^\mu E_3^\mu + \eta_3^\mu E_2^\mu + \eta_2^\mu E_4^\mu + \eta_4^\mu E_2^\mu + \eta_3^\mu E_4^\mu + \eta_4^\mu E_3^\mu + \frac{1}{\eta_1^\mu} \eta_2^\mu \eta_3^\mu E_4^\mu + \frac{1}{\eta_1^\mu} \eta_2^\mu \eta_4^\mu E_3^\mu \\ &\quad + \frac{1}{\eta_1^\mu} \eta_3^\mu \eta_4^\mu E_2^\mu + \frac{\eta_2^\mu}{E_1^\mu} E_3^\mu E_4^\mu + \frac{\eta_3^\mu}{E_1^\mu} E_2^\mu E_4^\mu + \frac{\eta_4^\mu}{E_1^\mu} E_2^\mu E_3^\mu - u (E_4^\mu (\eta_2^\mu E_3^\mu + \eta_3^\mu E_2^\mu) + \eta_4^\mu E_2^\mu E_3^\mu) \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1(u) &= E_2^\mu E_3^\mu + E_2^\mu E_4^\mu + E_3^\mu E_4^\mu + \frac{1}{\eta_1^\mu} \eta_2^\mu E_3^\mu E_4^\mu + \frac{1}{\eta_1^\mu} \eta_3^\mu E_2^\mu E_4^\mu + \frac{1}{\eta_1^\mu} \eta_4^\mu E_2^\mu E_3^\mu \\ &\quad + \frac{1}{E_1^\mu} E_2^\mu E_3^\mu E_4^\mu - u E_2^\mu E_3^\mu E_4^\mu \\ \lambda_0(u) &= \frac{1}{\eta_1^\mu} E_2^\mu E_3^\mu E_4^\mu \end{aligned} \quad (6.9)$$

Dans ce cas, les racines  $\underline{s}_{ij}^\pi$  peuvent être déterminées analytiquement par la résolution de de l'équation quartique. Cependant, pour des raisons de concision, on ne donnera pas leurs expressions.

## 6.2 Application à un composite poreux renforcé d'inclusions élastiques

Dans cet exemple, on considère un composite ayant une phase inclusionnaire élastique  $(\kappa_1, \mu_1)$  et une phase poreuse  $(\kappa_2 = \mu_2 = 0)$ . Ces inclusions sont noyées dans une matrice viscoélastique  $(\kappa_0(t), \mu_0(t))$  dont les fonctions de retard sont décrites par un des quatre modèles rhéologiques mentionnés dans la section précédente. On examinera trois cas particuliers : (i) coefficient de Poisson de la matrice constant, (ii) module de compressibilité de la matrice constant, (iii)  $J_0^\mu(t)$  décrite par le modèle de Maxwell (fluage microscopique non borné) et  $J_0^\kappa(t)$  décrite par le modèle de Zener (fluage microscopique borné).

### 6.2.1 Coefficient de Poisson constant

On considère le premier cas où le coefficient de Poisson de la matrice est supposé constant. Selon les relations (4.60-4.63), on obtient les fonctions composées :

$$B^\pi(u) = b^\pi + \frac{b_1^\pi}{(u + \underline{u}_1^\pi)} \quad (6.10)$$

$$C^\pi(u) = c^\pi + \frac{c_1^\pi}{(u + \underline{u}_1^\pi)} \quad (6.11)$$

dont les coefficients sont donnés par :

$$b^\pi = \varphi_0 [(1 - \alpha_0^\pi) f_0 + f_2] \quad , \quad b_1^\pi = \varphi_0 f_1 \underline{u}_1^\pi \quad (6.12)$$

$$c^\pi = -\delta_0^\pi [(1 - \alpha_0^\pi) f_0 + f_2 - 1] \quad , \quad c_1^\pi = -\delta_0^\pi f_1 \underline{u}_1^\pi \quad (6.13)$$

avec  $\varphi_0, \alpha_0^\pi, \delta_0^\pi$  obtenus à l'aide de (4.52-4.54). On en déduit l'expression des fonctions composées irréductibles  $\underline{B}_1^\pi(u)$  et  $\underline{C}_1^\pi(u)$  :

$$\underline{B}_1^\pi(u) = b^\pi(u - \check{u}_1^\pi) \quad (6.14)$$

$$\underline{C}_1^\pi(u) = c^\pi(u - u_1^\pi) \quad (6.15)$$

où  $\check{u}_1^\pi = -\frac{b^\pi \underline{u}_1^\pi + b_1^\pi}{b^\pi}$  et  $u_1^\pi = -\frac{c^\pi \underline{u}_1^\pi + c_1^\pi}{c^\pi}$ .

Puis, on trouve l'ensemble  $\{\underline{s}_{1j}^\pi; j = 1, \dots, m^\mu\}$  des racines de la partie complémentaire par la résolution de l'équation (6.2) pour l'unique racine  $u_1^\pi$ . Les racines  $\underline{s}_{1j}^\pi$  sont explicitées par les relations (6.3-6.9).

Finalement, on peut établir :

- les fonctions effectives de fluage  $J_{ef}^\pi(t)$  déterminées par les relations (4.81-4.82),
- les quatre paramètres  $(\bar{S}_0^\pi, \bar{S}_\infty^\pi, \bar{F}_0^\pi, \bar{F}_\infty^\pi)$  du fluage effectif, déterminés par les relations (5.35), (5.55), (5.38) et (5.43),
- les quatre paramètres du modèle macroscopique équivalent (modèle de Burgers à quatre paramètres), identifiés à partir des quatre paramètres  $(\bar{S}_0^\pi, \bar{S}_\infty^\pi, \bar{F}_0^\pi, \bar{F}_\infty^\pi)$  par les relations (5.15-5.18).

### 6.2.2 Module de compressibilité constant

On considère le cas où la fonction de retard sphérique de la matrice est supposée constante. La fonction de retard déviatorique est décrite par un des quatre modèles rhéologiques (Fig. 6.1). Selon les relations (4.101-4.102), on obtient les fonctions rationnelles  $B^\pi(u)$ ,  $C^\pi(u)$  pour la partie déviatorique et sphérique comme suit :

### 6.2.2.1 Partie sphérique

D'après les relations (4.116) et (4.117), on a :

$$\mathcal{B}^\kappa(u) = b^\kappa + \frac{b_0^\kappa}{(u + \underline{u}_0^\pi)} + \frac{b_1^\kappa}{(u + \underline{u}_1^\pi)} \quad (6.16)$$

$$\mathcal{C}^\kappa(u) = \frac{c_0^\kappa}{(u + \underline{u}_0^\pi)} + \frac{c_1^\kappa}{(u + \underline{u}_1^\pi)} \quad (6.17)$$

où les coefficients de ces fonctions rationnelles sont définies par :

$$b^\kappa = \frac{3f_2}{4}, \quad b_r^\kappa = \frac{f_r}{\kappa_r}, \quad c_r^\kappa = f_r, \quad r = 0, 1 \quad (6.18)$$

On en déduit alors la forme irréductible des fonctions composées de  $\tilde{J}_{ef}^\kappa(s)$  :

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{B}}_2^\kappa(u) &= b^\kappa (u - \check{u}_1^\kappa) (u - \check{u}_2^\kappa) \\ \underline{\mathcal{C}}_1^\kappa(u) &= (c_0^\kappa + c_1^\kappa) (u - u_1^\kappa) \end{aligned} \quad (6.19)$$

De façon similaire au cas précédent, les racines  $\frac{s^\pi}{s-1j}$  de la partie complémentaire sont déterminées pour la seule racine  $u_1^\kappa$  en résolvant l'équation (6.2).

Par ailleurs, en introduisant  $u = \tilde{J}_0^\mu(s) = \frac{Q_{m_\mu}(s)}{sP_{m_\mu-1}(s)}$  dans l'expression de  $\tilde{J}_{ef}^\kappa(s)$ , on obtient :

$$\tilde{J}_{ef}^\kappa(s) = \frac{\underline{\mathcal{B}}_2^\kappa(u(s))}{\underline{\mathcal{C}}_1^\kappa(u(s))} \quad (6.20)$$

$$= \frac{b^\kappa}{(c_0^\kappa + c_1^\kappa)} \frac{(Q_{m_\mu}(s) - sP_{m_\mu-1}(s)\check{u}_1^\kappa)(Q_{m_\mu}(s) - sP_{m_\mu-1}(s)\check{u}_2^\kappa)}{sP_{m_\mu-1}(s)(Q_{m_\mu}(s) - sP_{m_\mu-1}(s)u_1^\kappa)} \quad (6.21)$$

Ce qui montre que les temps caractéristiques microscopiques déviatoriques (correspondant aux racines de  $P_{m_\mu-1}(s) = 0$ ) constituent un sous-ensemble des temps caractéristiques macroscopiques sphériques.

### 6.2.2.2 Partie déviatorique

D'après les relations (4.118) et (4.119), on sait que :

$$B^\mu(u) = b^\mu + \frac{b_1^\mu}{(u + \underline{u}_1^\mu)} + \frac{b_2^\mu}{(u + \underline{u}_2^\mu)} + \frac{b_3^\mu}{(u + \underline{u}_3^\mu)} \quad (6.22)$$

$$C^\mu(u) = c^\mu + \frac{c_1^\mu}{(u + \underline{u}_1^\mu)} + \frac{c_2^\mu}{(u + \underline{u}_2^\mu)} \quad (6.23)$$

où :

$$b^\mu = f_0 + \frac{5}{3}f_2, \quad b_1^\mu = \frac{5f_1\bar{u}_{1,1}^\mu}{2\mu_1}, \quad b_2^\mu = \frac{5f_1\bar{u}_{1,2}^\mu}{2\mu_1}, \quad b_3^\mu = \frac{20f_2}{27\kappa_0} \quad (6.24)$$

$$c^\mu = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}f_0 - \frac{5}{2}f_2, \quad c_1^\mu = -\frac{5f_1\bar{u}_{1,1}^\mu u_{1,1}^\mu}{2}, \quad c_2^\mu = -\frac{5f_1\bar{u}_{1,1}^\mu u_{1,2}^\mu}{2} \quad (6.25)$$

De la même façon, on obtient la forme irréductible de la fonction composée déviatorique  $L_{ef}^\mu(u)$  :

$$L_{ef}^\mu(u) = u \frac{\underline{B}_3^\mu(u)}{\underline{C}_3^\mu(u)} = u \frac{b^\mu (u - \check{u}_1^\mu) (u - \check{u}_2^\mu) (u - \check{u}_3^\mu)}{c^\mu (u - u_1^\mu) (u - u_2^\mu) (u - u_3^\mu)} \quad (6.26)$$

où  $u_1^\mu = -\underline{u}_3^\mu$ ,  $u_2^\mu$  et  $u_3^\mu$  sont les racines de l'équation :

$$\zeta_2 u^2 + \zeta_1 u + \zeta_0 = 0 \quad (6.27)$$

avec :

$$\zeta_0 = c_1^\mu \underline{u}_2^\mu + c_2^\mu \underline{u}_1^\mu + c^\mu \underline{u}_1^\mu \underline{u}_2^\mu, \quad \zeta_1 = c_1^\mu + c_2^\mu + c^\mu \underline{u}_1^\mu + c^\mu \underline{u}_2^\mu, \quad \zeta_2 = c^\mu \quad (6.28)$$

Le calcul des racines  $u_1^\mu$ ,  $u_2^\mu$  et  $u_3^\mu$  permet de déterminer l'ensemble des racines complémentaires  $\left\{ \underline{s}_{ij}^\mu; j = 1, \dots, m^\mu; i = 1, 2, 3 \right\}$  par la résolution de l'équation (6.2).

### 6.2.3 La fonction de fluage microscopique déviatorique décrite par Maxwell et celle sphérique décrite par Zener

On considère le cas où  $u(s) = \tilde{J}_0^\mu(s) = \frac{1}{E_1^\mu} + \frac{1}{s\eta_1^\mu}$  et  $v(s) = \tilde{J}_0^\kappa(s) = \frac{1}{E_1^\kappa} + \frac{1}{s\eta_2^\kappa + E_2^\kappa}$ . Dans ce cas, les fonctions composées ont la forme donnée par la relation (4.20). Ici, la stratégie à deux étapes ne peut être appliquée. La solution semi-analytique nécessitera donc le calcul direct des racines du polynôme  $\tilde{P}_{\tilde{m}_\pi}(s)$ .

#### 6.2.3.1 Partie sphérique

A partir de la relation (4.21) et (4.24), on obtient les fonctions composées sphériques :

$$\mathcal{B}^\kappa(u, v) = v f_0 + \frac{(4v + 3u)f_1}{(4 + 3u\kappa_1)} + \frac{(4v + 3u)f_2}{4} \quad (6.29)$$

$$\mathcal{C}^\kappa(u, v) = f_0 + \frac{(4v + 3u)f_1\kappa_1}{(4 + 3u\kappa_1)} \quad (6.30)$$

Il est à noter que  $\mathcal{B}^\kappa(u, v) = v\mathcal{B}^\kappa(u, v)$  quand cette factorisation est possible. Ce n'est pas le cas ici. Puis, on en déduit la forme irréductible de  $\underline{\mathcal{B}}^\kappa(u, v)$  et  $\underline{\mathcal{C}}^\kappa(u, v)$  :

$$\underline{\mathcal{B}}^\kappa(u, v) = 9\kappa_1 f_2 u^2 + 12(f_1 + f_2 + v\kappa_1(f_0 + f_2))u + 16v \quad (6.31)$$

$$\underline{\mathcal{C}}^\kappa(u, v) = 12\kappa_1(f_0 + f_1)u + 16(f_0 + v\kappa_1 f_1) \quad (6.32)$$

En introduisant  $u(s)$  et  $v(s)$  dans les expressions de  $\underline{\mathcal{B}}^\kappa(u, v)$  et  $\underline{\mathcal{C}}^\kappa(u, v)$  ci-dessus, on obtient la forme irréductible de  $\tilde{J}_{ef}^\kappa(s) = \frac{\tilde{Q}_{\tilde{m}_\kappa}(s)}{\tilde{P}_{\tilde{m}_\kappa}(s)}$ .

#### 6.2.3.2 Partie déviatorique

A partir de la relation (4.22), on obtient les fonctions composées déviatoriques :

$$B^\mu(u, v) = f_0 + \frac{5(4v + 3u)f_1}{(6\mu_1 u^2 + (9 + 12v\mu_1)u + 8v)} + \frac{5(4v + 3u)f_2}{(9u + 8v)} \quad (6.33)$$

$$C^\mu(u, v) = f_0 + \frac{5u(4v + 3u)f_1\mu_1}{(6\mu_1 u^2 + (9 + 12v\mu_1)u + 8v)} \quad (6.34)$$

Puis, on en déduit la forme irréductible de  $\underline{B}^\mu(u, v)$  et  $\underline{C}^\mu(u, v)$  :

$$\underline{B}^\mu(u, v) = (54f_0 + 90f_2)\mu_1 u^3 + (156f_0 + 300f_2)\mu_1 v u^2 + (81f_0 + 135f_1 + 135f_2)u^2 + (96f_0 + 240f_2)\mu_1 v^2 u + (144 + 156f_1 + 156f_2)vu + (64 + 96f_1 + 96f_2)v^2 \quad (6.35)$$

$$\underline{C}^\mu(u, v) = (9u + 8v) [(6f_0 + 15f_1)\mu_1 u^2 + (12f_0 + 20f_1)\mu_1 v u + 9f_0 u + 8v f_0] \quad (6.36)$$

En introduisant  $u(s)$  et  $v(s)$  dans les expressions de  $\underline{B}^\mu(u, v)$  et  $\underline{C}^\mu(u, v)$  ci-dessus, on obtient la forme irréductible de  $\tilde{J}_{ef}^\mu(s) = \frac{Q_{m\mu}(s)}{P_{m\mu}(s)}$ .

Finalement, on doit chercher les racines  $\bar{s}_i^\pi$  du dénominateur de  $\tilde{J}_{ef}^\pi(s)$ . En connaissant ces racines, on obtiendra les fonctions effectives de fluage, déterminées par la relation (4.12).

Indépendamment, les quatre paramètres des courbes de fluage effectif sont déterminés par les relations (5.35), (5.38), (5.43) et (5.55). Par conséquent, les quatre paramètres du modèle équivalent de Burgers sont identifiés (Eqs. 5.15-5.18).

## 6.2.4 Exemple numérique

Dans ce qui a précédé, on a établi les expressions des fonctions de fluage effectif ainsi que les paramètres du modèle macroscopique équivalent. Nous allons, dans ce qui suit, discuter ces résultats à travers des exemples numériques.

### 6.2.4.1 Coefficient de Poisson constant

A titre d'illustration, on trace la fonction effective de fluage déviatorique  $J_{ef}^\mu(t)$ , dans le cas où le coefficient de Poisson est constant et où la fonction de fluage déviatorique de la matrice est représentée par le modèle de Burgers. Les propriétés mécaniques et les fractions volumiques du problème sont données dans le tableau (6.1).

	$f$	$\nu$	$E_1^\mu [MPa]$	$\eta_1^\mu [MPa.jour]$	$\eta_2^\mu$	$E_2^\mu$
Matrice	0.5	0.256	13909	$3.96 * 10^6$	$\rho\eta_1^\mu$	$\beta E_1^\mu$
Inclusion	0.4	0.28	23984			
Porosité	0.1	0	0			

TAB. 6.1 Fraction volumique et propriétés mécaniques du composite

**6.2.4.1.1 Influence du contraste des paramètres viscoélastiques microscopiques** On analyse ici l'influence de la variation du rapport entre le coefficient de viscosité à court terme et celui à long terme, noté  $\rho = \eta_2^\mu/\eta_1^\mu$  et celle du rapport entre le module élastique différé et le module élastique instantané de la matrice, noté  $\beta = E_2^\mu/E_1^\mu$ , sur la fonction effective de fluage déviatorique  $J_{ef}^\mu(t)$  :

- Cas (a) : En fixant le module élastique différé  $E_2^\mu = 0.5E_1^\mu$ , on étudie l'influence du rapport  $\rho = \eta_2^\mu/\eta_1^\mu$ . La fonction  $J_{ef}^\mu(t)$  est représentée par la figure 6.2.a pour des valeurs différentes du rapport  $\rho$ . La figure montre que la vitesse de fluage effectif déviatorique instantanée  $\bar{F}_0^\mu$  est inversement proportionnelle au rapport  $\rho$ . En effet, le résultat théorique (Eq. 5.39) aboutit dans ce cas à :

$$\bar{F}_0^\mu = C * F_0^\mu = C * \left( \frac{1}{\eta_1^\mu} + \frac{1}{\eta_2^\mu} \right) = \frac{C}{\eta_1^\mu} \left( 1 + \frac{1}{\rho} \right) \quad (6.37)$$

où  $C$  est une constante qui ne dépend que des propriétés et fractions volumiques des phases élastiques.

- Cas (b) : La viscosité à court terme  $\eta_2^\mu = 0.1\eta_1^\mu$  est fixée, alors que le rapport  $\beta = E_2^\mu/E_1^\mu$  varie. La figure 6.2.b représente la fonction  $J_{ef}^\mu(t)$  et montre que l'ordonnée à l'origine  $S_\infty^\mu$  de l'asymptote de  $J_{ef}^\mu(t)$  est inversement proportionnelle au rapport  $\beta$ . En effet, l'application du résultat théorique (Eq. 5.55) donne dans ce cas :

$$\begin{aligned} \bar{S}_\infty^\mu &= C_1 * S_\infty^\mu + C_2 = C_1 * \left( \frac{1}{E_1^\mu} + \frac{1}{E_2^\mu} \right) + C_2 \\ &= \frac{C_1}{E_1^\mu} * \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) + C_2 \end{aligned} \quad (6.38)$$

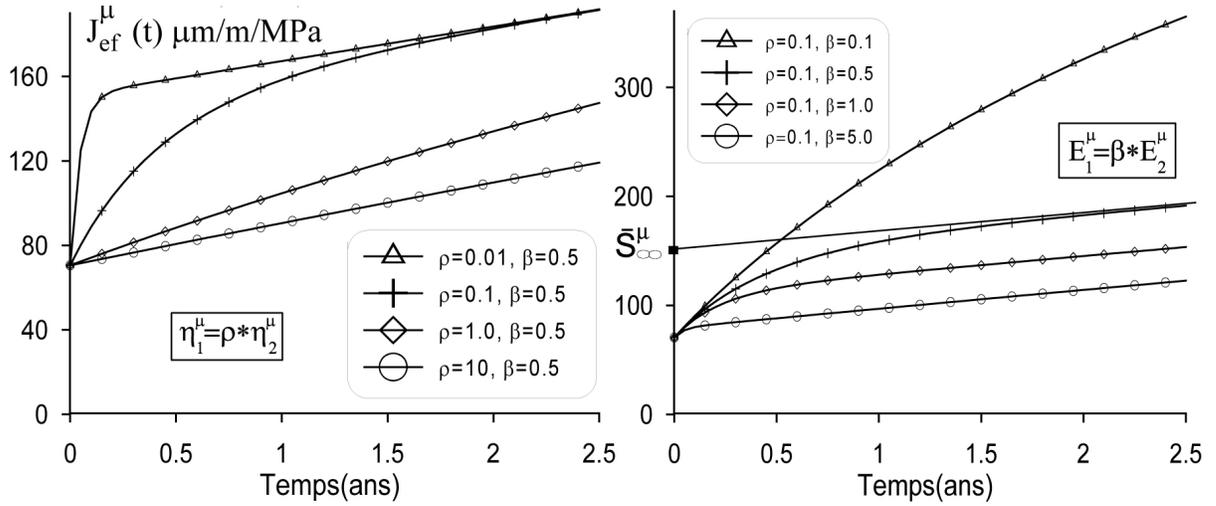


FIG. 6.2 Fonction de fluage  $J_{ef}^{\mu}$  pour des valeurs différentes de  $\rho = \eta_2^{\mu}/\eta_1^{\mu}$  (cas a) et de  $\beta = E_2^{\mu}/E_1^{\mu}$  (cas b).

**6.2.4.1.2 Comparaison des résultats des méthodes analytiques et numériques** On compare ici la courbe de la fonction de fluage déviatorique effective obtenue par différentes méthodes (Figs. 6.3-6.4) : méthode analytique, méthode semi-numérique de Post-Widder de rang 1, modèle équivalent de Burgers, méthode numérique (ACSF) basée sur l'accélération de la convergence de la série de Fourier.

D'après les relations (3.54) et le paragraphe (§ 5.3), le modèle équivalent de Burgers et la méthode de Post-Widder donnent la solution exacte pour la partie instantanée et pour le comportement à long terme de la fonction effective de fluage. Pour la partie à court terme, l'approximation obtenue par la méthode de Post-Widder est une borne inférieure (§ 3.4.3), alors que l'approximation obtenue par le modèle équivalent de Burgers est une borne supérieure de la solution exacte. Ainsi, on ne représente dans cet exemple que la partie à court terme des courbes approchées.

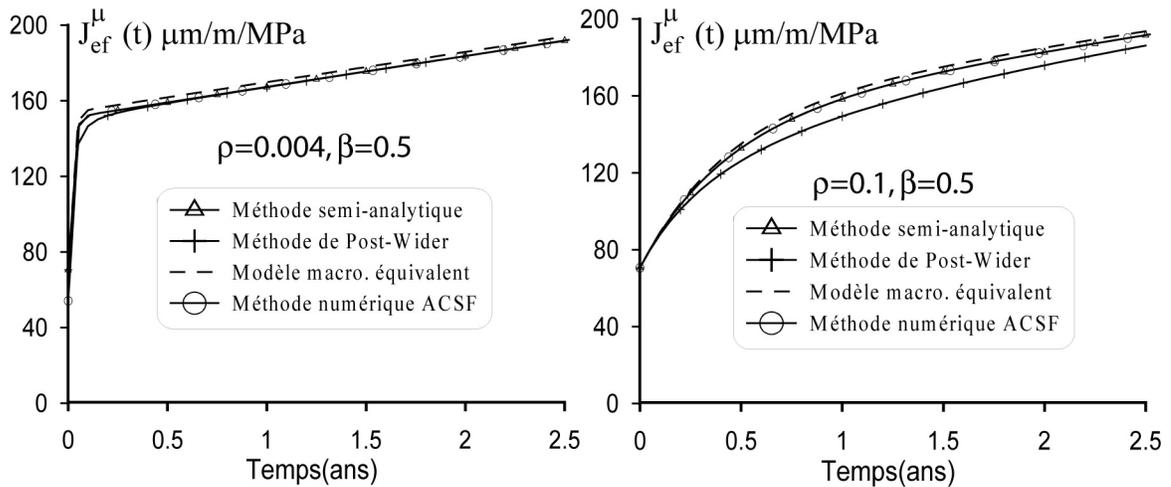


FIG. 6.3 Fonction de fluage  $J_{ef}^{\mu}$ , en utilisant le schéma MT, obtenue par différentes méthodes.

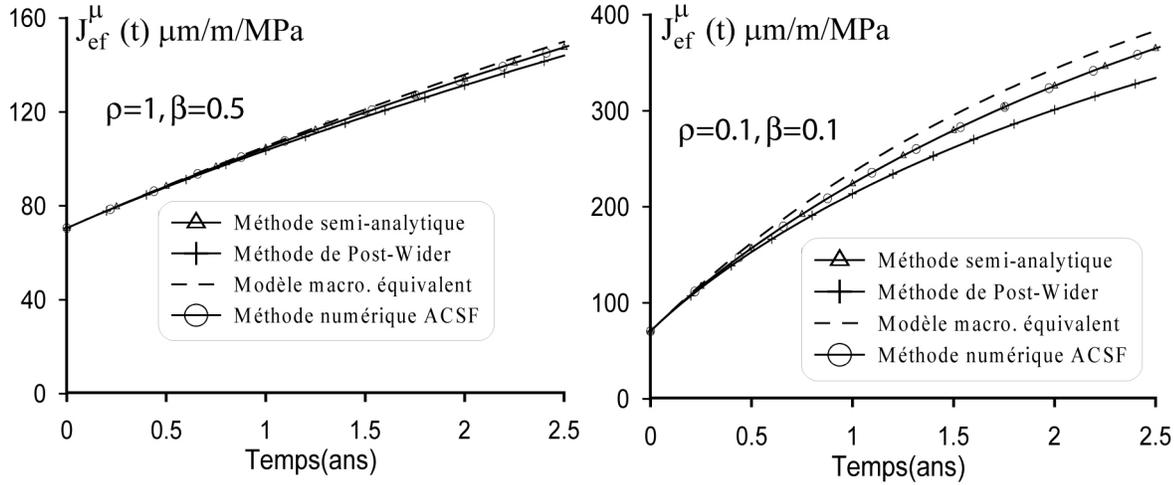


FIG. 6.4 Fonction de fluage  $J_{ef}^{\mu}$ , en utilisant le schéma MT, obtenue par différentes méthodes.

Pour ce cas, avec le choix d'une tolérance fixée à  $10^{-3}$  (Eq. 3.50), la fonction effective de fluage obtenue par la méthode ACSF coïncide presque avec la fonction exacte obtenue par la méthode semi-analytique. Cependant, le temps de calcul de la méthode ACSF est environ 10 fois supérieur à celui de la méthode de Post-Widder.

Comme  $\rho = \eta_2^{\mu}/\eta_1^{\mu}$  et  $\beta = E_2^{\mu}/E_1^{\mu}$ , on en déduit que  $\tau_2^{\mu} = \frac{\rho}{\beta} \frac{\eta_1^{\mu}}{E_1^{\mu}}$ . Donc,  $\tau_2^{\mu}$  est proportionnel au rapport  $\frac{\rho}{\beta}$  lorsqu'on fixe le rapport  $\frac{\eta_1^{\mu}}{E_1^{\mu}}$ . Selon les figures 6.3 et 6.4, on constate que plus le rapport  $\frac{\rho}{\beta}$  est petit, plus la courbe obtenue par le modèle équivalent de Burgers est proche de la courbe exacte à court terme. Ce constat s'explique par le fait que le temps microscopique  $\tau_2^{\mu}$  est aussi un élément de l'ensemble des temps macroscopiques (Eq. 4.76). Aussi, selon l'équation (4.81), la fonction  $J_{ef}^{\mu}(t)$  est contrôlée par une exponentielle  $e^{-\frac{t}{\tau_2^{\mu}}}$ . Ainsi, plus  $\tau_2^{\mu}$  est petit, plus la fonction  $J_{ef}^{\mu}(t)$  atteint son asymptote rapidement. Or, l'asymptote du modèle de Burgers est exacte.

On constate ici que la solution simplifiée par le modèle de Burgers donne la même approximation que la méthode inverse numérique de Post-Widder de rang 1 (dérivée une fois).

#### 6.2.4.2 La fonction de fluage microscopique déviatorique décrite par Maxwell et celle sphérique décrite par Zener

On trace, dans ce cas, la fonction de fluage déviatorique effective  $J_{ef}^{\mu}(t)$  du problème dont les données sont représentées dans le tableau (6.2).

	$f$	$\nu$	$E_1 [MPa]$	$\eta_1 [MPa.jour]$	$\eta_2$	$E_2$
Matrice	0.5	0.256	$E_1^{\mu} : 13909$ $E_1^{\kappa} : 23866$	$\eta_1^{\mu} : 3.96 * 10^6$ $\eta_1^{\kappa} : \infty$	$\eta_2^{\mu} : \infty$ $\eta_2^{\kappa} : \rho\eta_1^{\mu}$	$E_2^{\mu} : \infty$ $E_2^{\kappa} : \beta E_1^{\kappa}$
Inclusion	0.4	0.28	$E_1^{\mu} : 23984$			
Pores	0.1	0	0			

TAB. 6.2 Fraction volumique et propriétés mécaniques du composite

On fixe ici les propriétés élastiques, les fractions volumiques de toutes les phases et la viscosité  $\eta_1^{\mu}$  à long terme. On fait varier les propriétés différées  $\eta_2^{\kappa}$ ,  $E_2^{\kappa}$  de  $J_0^{\kappa}(t)$  par rapport aux paramètres  $\eta_1^{\mu}$ ,  $E_1^{\mu}$  de  $J_0^{\mu}(t)$ , respectivement. En posant  $\rho = \eta_2^{\kappa}/\eta_1^{\mu}$ ,  $\beta = E_2^{\kappa}/E_1^{\mu}$ , on trace la courbe de fluage effectif déviatorique pour quatre valeurs différentes du couple  $(\rho, \beta)$  (Figs. 6.5-6.6). On trouve que lorsque la fonction

de fluage microscopique sphérique est bornée, la courbe approchée par le modèle de Burgers s'éloigne de la courbe exacte à court terme selon les valeurs des rapports  $(\rho, \beta)$ . Lorsque le fluage sphérique à court terme a une cinétique comparable à celle du fluage déviatorique à long-terme ( $\rho \simeq 1, \beta \simeq 1$ ), le modèle de Burgers converge vers la solution exacte. A contrario, lorsque les cinétiques sont contrastées, l'écart devient significatif. Par ailleurs, la méthode de Post-Widder de rang 1 et la méthode numérique ACSF fournissent des approximations très proches de la solution exacte.

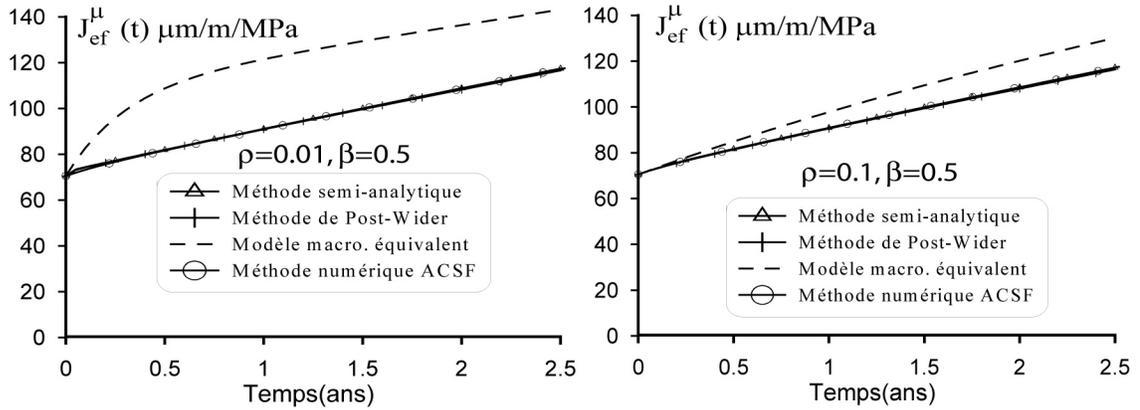


FIG. 6.5 Fonction de fluage  $J_{ef}^{\mu}$ , en utilisant le schéma MT, obtenue par différentes méthodes

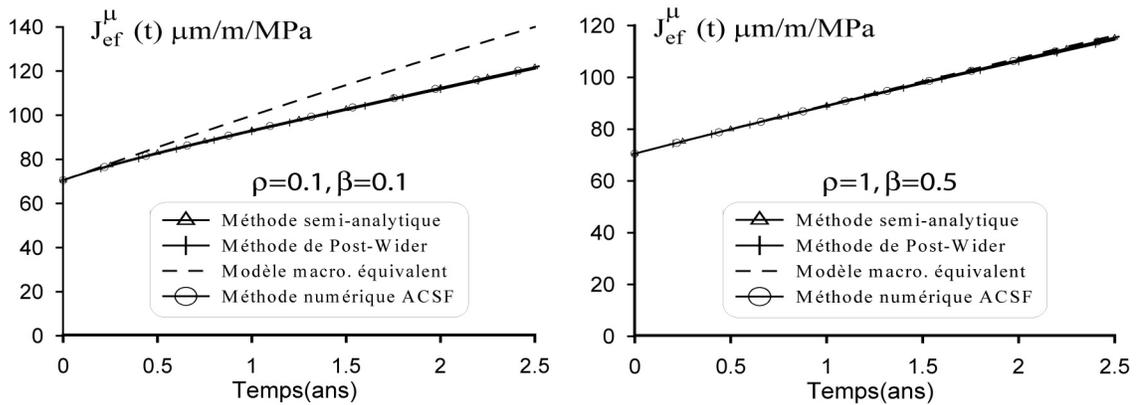


FIG. 6.6 Fonction de fluage  $J_{ef}^{\mu}$ , en utilisant le schéma MT, obtenue par différentes méthodes.

### 6.3 Composite biphasé comportant une phase inclusionnaire

L'objectif ici est notamment de comparer les solutions obtenues avec les deux schémas d'homogénéisation.

Dans cet exemple, on considère un composite biphasé ayant une inclusion élastique isotrope  $(\kappa_1, \mu_1)$  noyée dans une matrice viscoélastique isotrope  $(\kappa_0(t), \mu_0(t))$ . On va examiner les deux cas suivants :

- Le coefficient de Poisson de la matrice est constant. En utilisant le schéma AG, on va comparer les courbes de la fonction effective de fluage déviatorique obtenues par différentes méthodes : analytique, méthode de Post-Widder de rang 1 et approchée par le modèle équivalent de Burgers. Ensuite, on va comparer ces courbes obtenues par le schéma AG à celles obtenues par le schéma de MT.
- Les fonctions de fluage sphérique et déviatorique de la matrice sont décrites par le modèle rhéologique de Kelvin généralisé. On va comparer les quatre paramètres viscoélastiques effectifs  $(\bar{S}_0^\pi, \bar{S}_\infty^\pi, \bar{F}_0^\pi, \bar{F}_\infty^\pi)$  obtenus par le schéma AG et par celui de MT.

#### 6.3.1 Coefficient de Poisson constant

Lorsque le coefficient de Poisson est constant et  $\tilde{J}_0^\mu(s)$  est décrite par le modèle de Burgers microscopique, alors le comportement viscoélastique de la matrice est décrit par une seule variable  $u(s)$  :

$$u(s) = \tilde{J}_0^\mu(s) = \frac{1}{E_1^\mu} + \frac{1}{s\eta_1^\mu} + \frac{1}{s\eta_2^\mu + E_2^\mu} = \frac{Q_2(s)}{sP_1(s)} \quad (6.39)$$

où

$$\begin{aligned} P_1(s) &= s + 1/\tau_2^\mu \\ Q_2(s) &= \frac{s(s + 1/\tau_2^\mu)}{E_1^\mu} + \frac{(s + 1/\tau_2^\mu)}{\eta_1^\mu} + \frac{s}{\eta_2^\mu} \end{aligned} \quad (6.40)$$

En utilisant le schéma de MT, la TC  $\tilde{J}_{ef}^\mu(s)$  est construite exactement comme dans le premier exemple (§ 6.2.1).

Pour le cas du schéma AG, il faut d'abord chercher les racines  $u_1^c, u_2^c$  de  $\underline{C}_2(u)$  (Eq. 4.158), ainsi que les racines  $u_1^\Delta, u_2^\Delta, u_3^\Delta, u_4^\Delta$  de  $\underline{D}_4(u)$  (Eq. 4.156). Puis, on cherche l'ensemble  $\underline{E}_\tau^c = \bigcup_{i=1}^2 \{ \underline{s}_{ij}^c, j : 1 \rightarrow 2 \}$  par la résolution de l'équation (6.2) dont les coefficients sont évalués par l'équation (6.5) en remplaçant  $u = u_j^c, j : 1 \rightarrow 2$ . La même démarche est suivie pour l'ensemble des racines  $\underline{E}_\tau^\Delta = \bigcup_{i=1}^2 \{ \underline{s}_{ij}^\Delta, j : 1 \rightarrow 4 \}$  associé aux racines  $u_j^\Delta, j : 1 \rightarrow 4$ .

Enfin, la forme irréductible de  $\tilde{J}_{ef}^\mu(s)$  est obtenue par les relations (4.146), (4.176), (4.178) et (4.179). La fonction effective de fluage déviatorique est ensuite établie à partir des relations (4.184), (4.185) et (4.191).

A des fins d'illustration, on trace la fonction effective de fluage déviatorique  $J_{ef}^\mu(t)$  du problème dont les propriétés mécaniques et les fractions volumiques sont données dans le tableau (6.3) :

	$f$	$\nu$	$E_1^\mu [MPa]$	$\eta_1^\mu [MPa \cdot jour]$	$\eta_2^\mu$	$E_2^\mu$
Matrice	0.6	0.256	13909	$3.96 * 10^6$	$\rho\eta_1^\mu$	$\beta E_1^\mu$
Inclusion	0.4	0.28	23984			

TAB. 6.3 Fraction volumique et propriétés mécaniques du composite

En ce qui concerne la comparaison des différentes méthodes entre elles, les figures 6.7 et 6.8 montrent des résultats similaires à ceux du cas utilisant le schéma de MT (Figs. 6.3 et 6.4). Cependant, pour ce dernier une phase poreuse existe, ce qui n'est pas le cas ici.

Par ailleurs, on compare, à configuration identique (Tab. 6.3), le schéma de MT et celui AG pour différentes valeurs du couple  $(\rho, \beta)$ . Les résultats sont présentés dans la figure 6.9. Avec un coefficient de Poisson constant, on trouve un écart relatif maximum de 2% dans l'intervalle  $[0, 2.5 \text{ ans}]$  entre ces deux schémas.

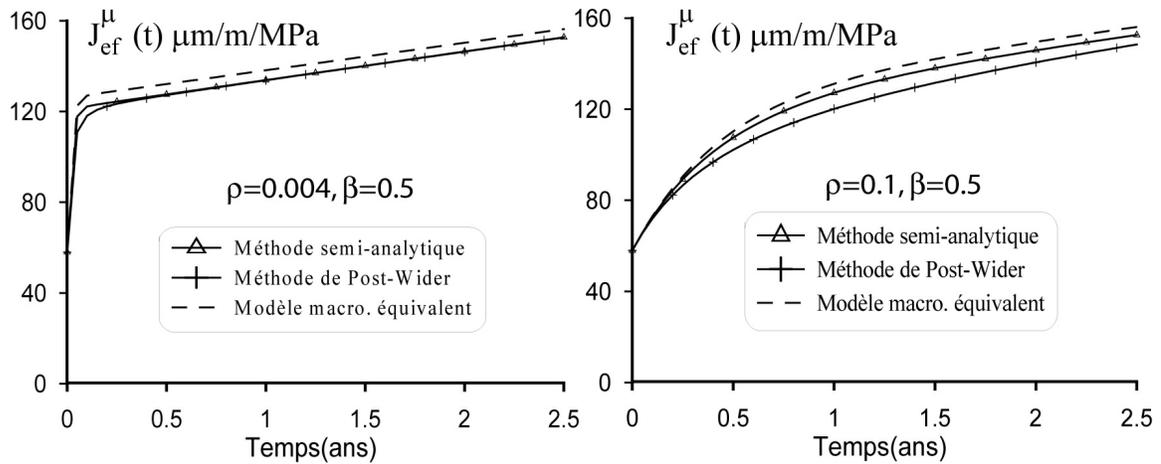


FIG. 6.7 Fonction de fluage  $J_{ef}^{\mu}$ , en utilisant le schéma AG, obtenue par différentes méthodes.

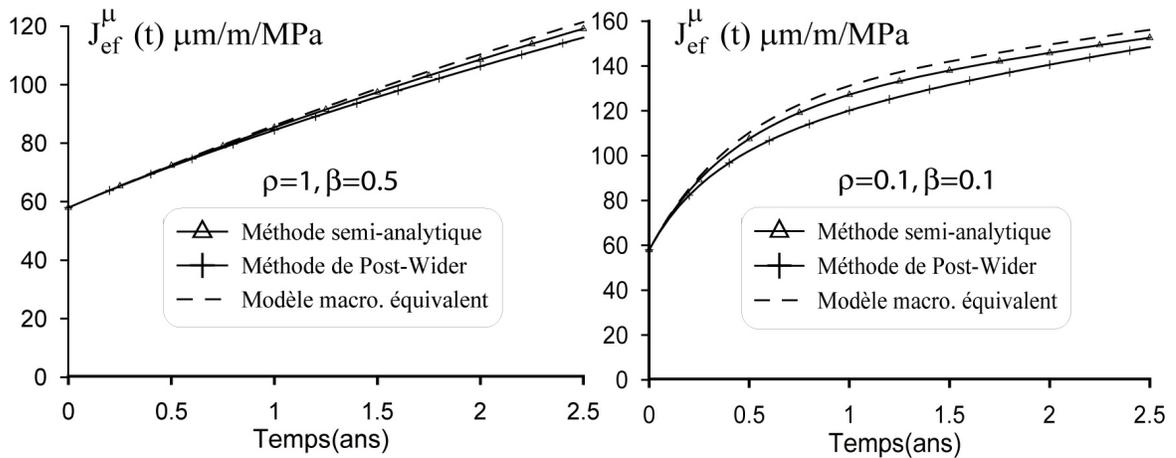


FIG. 6.8 Fonction de fluage  $J_{ef}^{\mu}$ , en utilisant le schéma AG, obtenue par différentes méthodes.

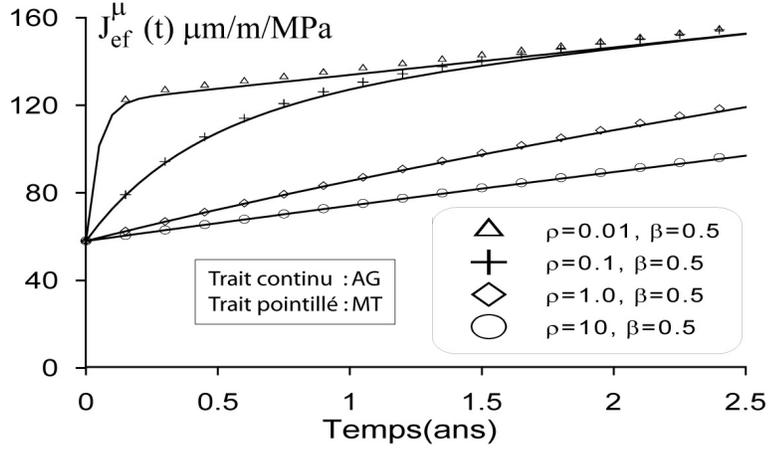


FIG. 6.9 Comparaison des courbes de fluage obtenues par le schéma MT et par le schéma AG.

### 6.3.2 Comparaison des paramètres de la fonction effective de fluage selon les deux schémas

Pour ce cas, on considère des modèles rhéologiques de Kelvin généralisés (4.1) pour les fonctions de fluage de la matrice aussi bien pour sa partie sphérique ( $\pi = \kappa$ ) que sa partie déviatorique ( $\pi = \mu$ ) :

$$\tilde{J}_0^\pi(s) = \frac{1}{E_1^\pi} + \frac{1}{s\eta_1^\pi} + \sum_{i=2}^m \frac{1}{E_i^\pi + s\eta_i^\pi} \quad (6.41)$$

L'ensemble des quatre paramètres viscoélastiques microscopiques sont donnés par la relation (5.3) :

$$\begin{aligned} F_0^\pi &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{\eta_i^\pi} & F_\infty^\pi &= \frac{1}{\eta_1^\pi} \\ S_\infty^\pi &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{E_i^\pi} & S_0^\pi &= \frac{1}{E_1^\pi} \end{aligned} \quad (6.42)$$

On va comparer dans cet exemple les quatre paramètres viscoélastiques effectifs obtenus par le schéma de Mori-Tanaka :  $\bar{S}_0^{\pi-MT}$ ,  $\bar{S}_\infty^{\pi-MT}$ ,  $\bar{F}_0^{\pi-MT}$ ,  $\bar{F}_\infty^{\pi-MT}$  et ceux obtenus par le schéma autocohérent généralisé  $\bar{S}_0^{\pi-AG}$ ,  $\bar{S}_\infty^{\pi-AG}$ ,  $\bar{F}_0^{\pi-AG}$ ,  $\bar{F}_\infty^{\pi-AG}$ , en étudiant la différence relative entre ces quantités lorsque la fraction volumique  $f$  des inclusions varie entre 0 et 1.

Il est à rappeler que ces paramètres macroscopiques dépendent de paramètres microscopiques indépendants de la façon précise dont sont obtenus ces paramètres microscopiques à partir des relations (6.41-6.42). Pour l'étude comparative, on effectuera des valeurs à  $(S_0^\pi, S_\infty^\pi, F_0^\pi, F_\infty^\pi)$  sans expliciter celles de  $E_i^\pi$  et  $\eta_i^\pi$ .

Les propriétés élastiques de la matrice et de la phase inclusionnaire sont données par le tableau (6.4).

	fraction volumique	$\mu_r$ [MPa]	$\kappa_r$ [MPa]
Matrice	$1 - f$	12766	20804
Inclusion	$f$	23984	46515

TAB. 6.4 Fractions volumiques et propriétés mécaniques du composite

Les quatre paramètres viscoélastiques effectifs dépendent donc des fractions volumiques, des propriétés élastiques, et des quatre paramètres viscoélastiques microscopiques de fluage :

- Le fluage effectif déviatorique instantané  $\bar{S}_0^\mu(S_0^\pi; f_r, \mu_r, \kappa_r)$  est donné par la relation (5.36) pour les deux cas, utilisant le schéma de MT ou le schéma AG.
- L'ordonnée à l'origine  $\bar{S}_\infty^\mu(S_\infty^\pi, F_\infty^\pi; f_r, \mu_r, \kappa_r)$  de l'asymptote de la fonction effective de fluage déviatorique est donnée par la relation (5.55) pour le cas utilisant le schéma de MT et par la relation (5.83) pour le cas utilisant le schéma AG.
- La vitesse instantanée de la fonction effective de fluage déviatorique  $\bar{F}_0^\mu(S_0^\pi, F_0^\pi; f_r, \mu_r, \kappa_r)$  est donnée par la relation (5.38) pour les deux cas.
- La vitesse de fluage effectif déviatorique à long terme  $\bar{F}_\infty^\mu(F_\infty^\pi; f_r, \mu_r, \kappa_r)$  est donnée par la relation (5.43) pour le cas utilisant le schéma de MT et par la relation (5.75) pour le cas utilisant le schéma AG.

Les propriétés élastiques de la matrice et de l'inclusion sont prises égales à celles d'un mortier et des granulats d'un béton courant, respectivement. Dans cet exemple  $S_\infty^\pi = 3S_0^\pi$  avec :  $S_0^\mu = 1/12766[MPa^{-1}]$ ,  $S_0^\kappa = 1/20804[MPa^{-1}]$ . Pour les vitesses de déformation instantanée  $F_0^\mu[MPa \cdot J]^{-1}$  et à long terme  $F_\infty^\mu[MPa \cdot J]^{-1}$ , elles sont considérées correspondre aux valeurs moyennes de celles ( $F_0^\mu = 10^{-6}[MPa \cdot J]^{-1}$ ,  $F_\infty^\mu = 10^{-6}[MPa \cdot J]^{-1}$ ) estimées pour le mortier lors de l'analyse du chapitre 7. L'étude paramétrique sur les écarts relatifs est effectuée en considérant que  $F_0^\mu$  et  $F_0^\kappa$  varient dans un intervalle dont les valeurs extrêmes correspondent à trois ordre de grandeur des valeurs moyennes :

$$F_\infty^\mu \in ]10^{-11}, 10^{-5}[, F_\infty^\kappa \in ]10^{-11}, 10^{-5}[ \quad (6.43)$$

$$F_0^\mu \in ]10^{-9}, 10^{-3}[, F_0^\kappa \in ]10^{-9}, 10^{-3}[ \quad (6.44)$$

Les figures (6.10-6.11) représentent les valeurs absolues maximales des contrastes relatifs des quatre paramètres viscoélastiques effectifs dans les intervalles (6.43-6.44), en fonction de la fraction volumique de l'inclusion. Ainsi, pour une fraction volumique donnée de la phase élastique, on trouve que les écarts entre les propriétés effectives instantannées obtenues à partir des deux schémas varient peu, tandis que la propriété effective à long terme  $\bar{S}_\infty^\mu$  et  $\bar{F}_\infty^\mu$  évolue de façon relative plus importante lorsque les paramètres microscopiques  $F_0^\mu$  et  $F_0^\kappa$  varient dans les intervalles (6.43-6.44).

Cependant, la variation de  $\bar{S}_\infty^\mu$  reste peu sensible au vu de l'intervalle de variation  $(F_0^\pi, F_\infty^\pi)_{\min} \rightarrow (F_0^\pi, F_\infty^\pi)_{\max}$ . Ce n'est pas le cas du paramètre  $\bar{F}_\infty^\mu$  qui présente une variation sensible lorsque la phase élastique devient dominante. Le schéma de MT donne une valeur plus grande de  $\bar{F}_\infty^\mu$ .

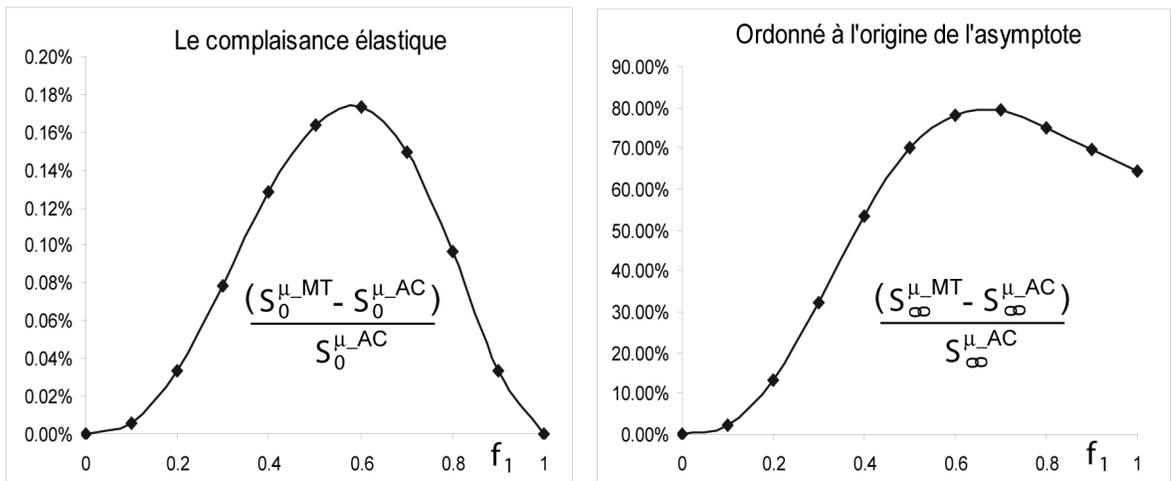


FIG. 6.10 Différences relatives de la complaisance élastique et de l'ordonnée à l'origine de l'asymptote, obtenues par les schémas MT et AG

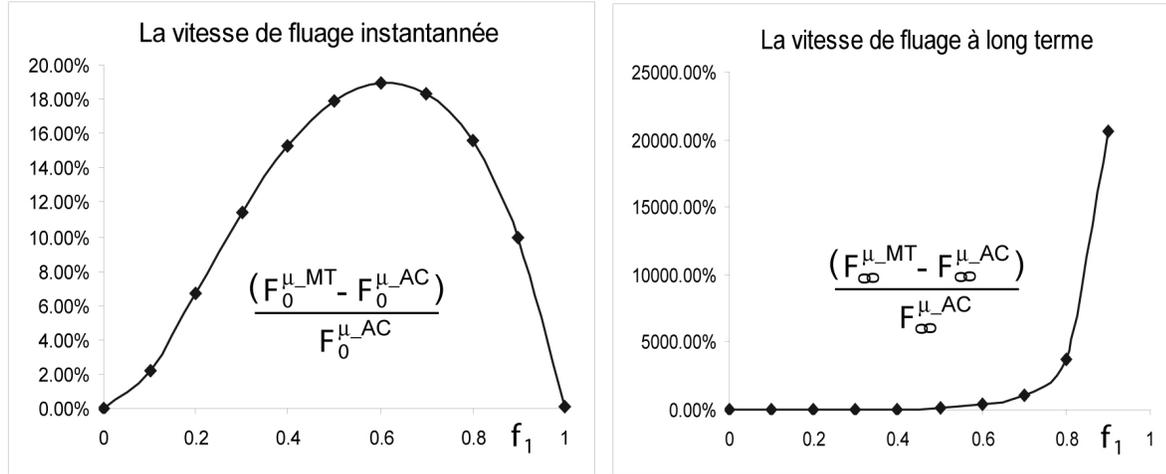


FIG. 6.11 Différences relatives de la complaisance élastique et de l'ordonnée à l'origine de l'asymptote, obtenues par les schémas MT et AG

## 6.4 Conclusion

A l'aide des exemples simples présentés, on peut mettre en évidence les constatations suivantes :

1. La méthode inverse numérique ACSF donne de très bonnes approximations de la fonction de fluage effectif, avec des tolérances  $TOL \leq 10^{-3}$ . Cependant, le temps de calcul reste très lent, dix fois supérieur à celui de la méthode de Post-Widder. Par ailleurs, la méthode ACSF ne convient que pour des fonctions rationnelles de degré relativement faible. Cette méthode n'est donc pas adaptée à des problèmes viscoélastiques avec des spectres riches, notamment lors d'une homogénéisation multi-échelle.
2. Le modèle macroscopique équivalent et la méthode de Post-Widder donnent la solution exacte pour la partie instantanée et la partie à long terme des inversions de la TL. Pour la partie à court terme, ils donnent respectivement une borne supérieure et une borne inférieure de la solution exacte. Plus le temps caractéristique macroscopique maximal est petit, plus l'approximation par le modèle macroscopique équivalent est proche de la solution exacte à court terme. Le modèle équivalent converge rapidement vers l'asymptote.

# Chapitre 7 Identification et simulation du fluage de différentes formulations de bétons

---

## 7.1 Introduction

Dans le cadre du suivi des enceintes des réacteurs nucléaires (EDF), l'étude des déformations de fluage propre, dues aux précontraintes longitudinales et transversales de l'ouvrage, a montré le besoin de recourir à une modélisation multiaxiale de ce phénomène en tenant compte de son échelle d'occurrence. A cet effet, un cadre de modélisation a été proposé par Benboudjema [9] pour modéliser le fluage propre de la pâte de ciment. Un modèle hydromécanique du béton est développé, dans lequel le fluage propre est lié à la micro-diffusion de l'eau adsorbée entre la porosité interhydrate et intrahydrate et la porosité capillaire, et au glissement des feuillettes de C-S-H à l'échelle de nanopores. Ce cadre de modélisation a permis de construire un modèle macroscopique viscoélastique de fluage de la pâte. L'inconvénient de ce modèle macroscopique est que ses paramètres doivent être identifiés à partir d'essais de fluage propre correspondant à chaque formulation de béton étudié. Cela peut s'avérer très coûteux et nécessite des essais sur une durée très longue, immobilisant, de fait, des bâtis expérimentaux.

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer les techniques de changement d'échelle présentées dans la partie II du mémoire, pour construire la complaisance de fluage propre macroscopique du béton en connaissant les données communes de toutes sortes de béton et celles correspondant à une formulation donnée : la composition Bogue du ciment, les propriétés mécaniques intrinsèques des différents hydrates, la formulation du béton, les propriétés élastiques des granulats.

Cette démarche a déjà fait l'objet de travaux antérieurs dans le cas élastique [13, 29, 69]. Ces travaux concernent l'approche micromécanique qui commence de l'échelle nanométrique de gel C-S-H pour atteindre l'échelle macroscopique du béton. L'idée de base de cette approche est de décomposer la microstructure du béton, dont l'hétérogénéité varie du nanomètre au centimètre, en quatre niveaux dont le choix du V.E.R respectif satisfait le principe de séparation des échelles, c'est-à-dire que chaque échelle est séparée de la prochaine par au moins un ordre de grandeur d'amplitude de taille d'hétérogénéité [112, 29]. En pratique, cette séparation est difficile à affirmer compte tenu de la continuité du fuseau granulaire rendu nécessaire par la recherche d'une bonne compacité du squelette granulaire. On peut cependant, raisonnablement réaliser une coupure artificielle correspondant au passage sable-granat là où la fonction de probabilité de densité est la plus faible.

La démarche est donc étendue au cas viscoélastique sur la base des résultats établis dans la partie II. A chaque échelle d'homogénéisation, le milieu hétérogène est considéré comme un composite de type inclusion-matrice ayant  $n$  inclusions élastiques isotropes noyées dans une matrice viscoélastique isotrope non vieillissante. A la première échelle, c'est la phase C-S-H qui a un comportement viscoélastique. Aux échelles suivantes, les propriétés viscoélastiques de la matrice sont construites par homogénéisation. Les propriétés effectives sont alors calculées en utilisant les schémas d'homogénéisation élastiques de Mori-Tanaka et celui Autocoherent généralisé et des modèles rhéologiques classiques (Modèle de Kelvin ou de Maxwell généralisé) pour le comportement du C-S-H.

Cette approche permet de mieux comprendre la contribution de chacun des constituants au comportement en fluage du béton.

Le comportement viscoélastique macroscopique est alors reconstitué par changement d'échelle à partir des propriétés intrinsèques ainsi que des autres paramètres qui caractérisent une formulation donnée. L'identification des propriétés intrinsèques à l'échelle des hydrates peut s'appuyer sur les progrès effectués en termes d'identifications à des échelles micrométriques voire nanométriques. La nonindentation, par exemple, semble être une méthode d'identification des propriétés élastiques des hydrates tout à fait probante [1, 29, 111]. Cependant, son extension au cas viscoélastique pose le problème de l'identification du coefficient de Poisson viscoélastique [22, 110]. En outre, l'exploitation des mesures de

nanoindentation est basée sur la résolution d'un problème de contact. Une erreur de modèle vient donc s'ajouter à l'incertitude dans la détermination des propriétés viscoélastiques. Une démarche alternative consiste alors à identifier, moyennant une erreur de modèle également, le comportement viscoélastique du composant C-S-H (seul hydrate ayant un comportement viscoélastique) à partir du comportement macroscopique. Dans ce cas l'erreur de modèle consisterait, sans être exhaustif, en :

- le choix du modèle viscoélastique microscopique pour le C-S-H,
- l'écart de la microstructure idéalisée par rapport à la microstructure réelle (interfaces, morphologie des inclusions...). Ceci impacte notamment le choix de la méthode d'homogénéisation.

C'est cette deuxième démarche qui est adoptée ici. Les propriétés viscoélastiques du C-S-H, considérées être intrinsèques, sont déterminées à partir de différentes formulations de bétons.

Dans ce qui suit on va utiliser dans un premier temps la méthode analytique du modèle macroscopique équivalent pour identifier les propriétés viscoélastiques instantanées et à long terme du C-S-H à partir des complaisances de fluage de différentes formulations de bétons. Ces complaisances étant uniaxiales, on discutera les ordres de grandeur et la dispersion des valeurs de ces paramètres au vu :

- de certaines considérations additionnelles, introduites pour pouvoir exploiter les complaisances uniaxiales.
- du choix du schéma d'homogénéisation.

Pour chaque formulation, enfin, nous utiliserons les différentes méthodes développées pour confronter la complaisance de fluage du béton, obtenue avec les propriétés extrêmes du C-S-H, avec celle mesurée expérimentalement et nous discuterons l'incidence de la variabilité de ces paramètres.

Dans cette étude, on exploite les données et les résultats d'essais rassemblés dans la thèse de Granger [43]. Ils concernent six formulations de béton utilisées pour la construction des enceintes internes des REP 1300-1400 MWe des sites de Chooz, Civaux (2 formulations), Flamanville, Paluel et Penly. Ces centrales ont été construites entre le début des années 80 et le milieu des années 90. Les essais datent de la première moitié des années 90. Ils ont été réalisés au LCPC, au LMDC et à la division CEMETE d'EDF. Ces bétons ont fait l'objet de plusieurs études concernant les techniques de changement d'échelles dans un cadre élastique [43, 13, 69].

## 7.2 Les essais de fluage propre disponibles

### 7.2.1 Caractéristiques du béton de six centrales

#### 7.2.1.1 Formulation du béton des centrales

Les compositions des bétons sont fournies dans le tableau (7.1). Ces six bétons présentent des comportements très différents vis-à-vis du comportement mécanique à court et à long terme (Fig. 7.1). Les formulations présentées correspondent aux essais de laboratoire, elles se veulent proches des formulations de la construction dans la mesure où les ciments et les granulats ont été extraits des cimenteries et carrières d'origine. Ces bétons sont assez fortement dosés en eau ( $e/c$  varie de 0,48 à 0,60), y compris pour la formulation BHP de Civaux.

#### 7.2.1.2 Composition Bogue des ciments

Trois ciments ont été utilisés : (*i*) le CPA HP PM de Saint-Vigor a été utilisé pour les trois sites en bord de Manche (Flamanville, Paluel et Penly), (*ii*) le CPJ 45 d'Airvault pour les deux tranches de Civaux (Vienne) et (*iii*) le CPJ 55 d'Origny pour la centrale de Chooz (Ardennes). Les compositions Bogue de ces trois ciments sont présentés dans le tableau 7.2. Les ajouts correspondent à des fillers calcaires et du gypse comme retardateur de prise.

Caractéristiques	Chooz	Civaux B11	Civaux BHP	Flamanville	Paluel	Penly
$G : 12,5/D_{max}$	840	784	815	700	700	682
$g : 5/12,5$	290	316	318	340	348	330
$s_1 : 0/0,8$				170		
$s_2 : 0,1/5$	450			485		
$s_3 : 0/5$	300	772	782	140	722	702
Filler Piketty			57		50	50
FS						40
ciment	350	350	266	375	375	350
eau	190	195	161	180	180	202
adjuvant		1,225 <sup>(4)</sup>	9,040 <sup>(2)</sup> 0,940 <sup>(3)</sup>	1.500 <sup>(1)</sup>	1.560 <sup>(1)</sup>	1.150 <sup>(1)</sup>
$e/c$	0,543	0,557	0,605	0,480	0,480	0,577
FS/c			0,152			
densité	2,40	2,33	2,38	2,41	2,31	2,28
type de ciment	CPA55	CPJ55		CPA HP PM		
origine	Origny	Airvault		Saint-Vigor		
type de granulat	CN	CJ		G	SC	SC
	C	C		C	semi-C	semi-C

TAB. 7.1 Formulation des bétons. Les données correspondent à des masses pour  $1 \text{ m}^3$  de béton (d'après thèse de Granger [43], p. 53). Légende :  $D_{max}$  : taille du plus gros granulat,  $s$  : sable,  $g$  gravier,  $G$  gros gravier, FS : fumée de silice. Les adjuvants sont référencés comme suit : <sup>(1)</sup> BV40, <sup>(2)</sup> Rheobuild 1000, <sup>(3)</sup> Pozzolith 100XR, <sup>(4)</sup> Plastiment HP. Les types de granulats sont référencés : CN : calcaire noir, CJ : calcaire jaune, G : granite, SC : silico-calcaire. C et semi-C correspondent au concassage ou au semi-concassage.

ciment	$C_3S$	$C_2S$	$C_3A$	$C_4AF$	ajouts
CPA HP PM Saint-Vigor	56,0	18,0	5,2	11,0	9,8*
CPA 55 Origny	64,5	13,0	6,0	11,5	5,0
CPJ 45 Airvault	68,6	5,0	6,8	8,7	10,9

TAB. 7.2 Composition Bogue des ciments (d'après [43], p. 57). \* Cette quantité d'ajout de filler semble particulièrement élevée dans la mesure où le label Prise Mer requiert que le pourcentage de filler soit inférieur à 3%.

### 7.2.1.3 Granulat

Les granulats sont très variables d'un site à un autre, tant en termes de compositions minéralogiques, qu'en termes de caractéristiques mécaniques. Selon le cas, il s'agit de granulats concassés (calcaire) ou semi-concassés (silico-calcaire).

Caractéristiques	Chooz	Civaux B11/BHP	Flamanville	Paluel	Penly
nature	calcaire	calcaire	graniodorite	alluvion	grave
	dolomitique	fossilifère			de mer
origine	Givet	Airvault	falaise	Seine	Manche
concassage	100%	100%	100%	50%	50%
carottage	oui	oui	oui	non	non

TAB. 7.3 Nature et origine des granulats.

Selon la nature des granulats (cf. tab. 7.3), des essais de caractérisations mécaniques ont été réalisés sur des carottes prélevées dans les carrières. Les propriétés mécaniques et physiques des granulats sont récapitulées dans le tableau 7.4. La carrière de Flamanville présente quatre faciès de granodiorites, allant du granite sain au granite très altéré (formation progressive d'arène granitique). En fonction du niveau d'altération, les propriétés physiques et mécaniques des granulats utilisés pour la réalisation des essais varient dans les intervalles indiqués dans le tableau 7.4.

Caractéristiques	Chooz	Civaux B11/BHP	Flamanville	Paluel	Penly
densité [-]	2,68	2,68	2,69	2,57	2,64
porosité [%]	1,3	3,7	1,2–2,7	4,0	4,4
absorption [%]	1,6	1,6	1,5	1,5	2,4
résistance [MPa]	160,0	111,0	136,0–168,0	n.c.	
module moyen [GPa]	72,0	61,4	51,7–65,1	n.c.	
coefficient de Poisson	0,27	0,28	0,18–0,22	n.c.	

TAB. 7.4 Propriétés physiques et mécaniques des granulats.

## 7.2.2 Essais de fluage propre uniaxial

### 7.2.2.1 Essais de fluage propre uniaxial sur béton

Les courbes de fluage propre uniaxial (Fig. 7.1) sont obtenues en chargeant les éprouvettes des bétons reconstitués en laboratoire par application d'une contrainte de 12 MPa à 28 jours<sup>1</sup> jusqu'à 3 ans.

Pour les essais de fluage propre, il s'avère difficile en pratique de conserver le spécimen sans échange hydrique avec le milieu extérieur sur une durée supérieure à 3 ans. Les bétons de type Civaux BHP et Paluel présentent une cinétique relativement lente à l'inverse des autres bétons choisis dans l'étude. Toutes les courbes de fluage propre exhibent une asymptote oblique à long terme, en tout cas, les déformations n'atteignent pas de valeur plateau à 3 ans. On notera en particulier, que le béton de type Flamanville présente une vitesse de fluage très vive et semble atteindre un régime asymptotique autour de l'âge 500 jours.

Comme Granger l'a mentionné dans sa thèse ([43], p. 52), le béton de Flamanville a été choisi parce qu'il présente typiquement de très fortes déformations différées par rapport au règlement BPEL, à l'inverse de celui de Paluel.

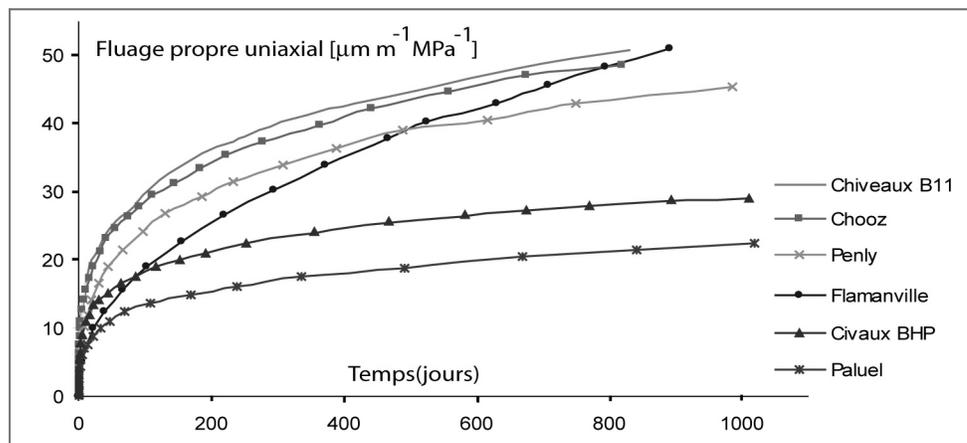


FIG. 7.1 Essais de fluage propre uniaxial des bétons reconstitués en laboratoire de six centrales (d'après la thèse de Granger [43], p. 275).

<sup>1</sup> A 28 jours, l'hydratation est bien avancée mais n'est pas terminée. On ne peut donc pas exclure totalement un effet de couplage avec le processus de fluage sur une morphologie évolutive, ou dit de manière différente, un effet de vieillissement qui conduirait à une déformation différée plus importante que si le béton était chargé plus tard [108, 79, 83].

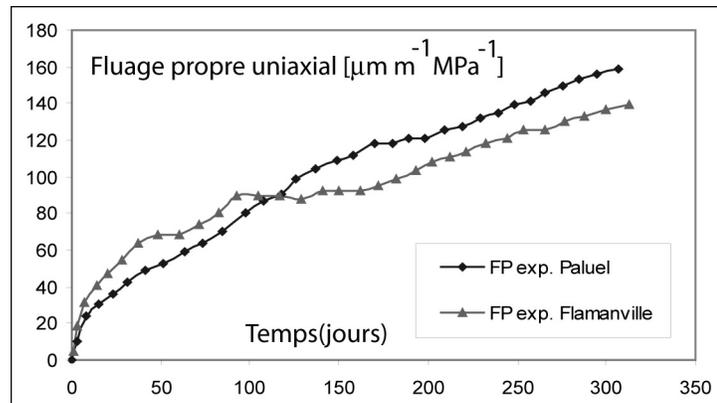


FIG. 7.2 Essais de fluage propre uniaxial des pâtes de ciment reconstituées en laboratoire de deux centrales (d'après la thèse de Granger [43], p. 68).

Caractéristiques	Chooz	Civaux B11	Civaux BHP	Flamanville	Paluel	Penly
ciment	350	350	266	375	375	350
eau	172 (190)	171 (195)	144 (161)	164 (180)	164 (180)	161 (202)
filler piketty			57		50	50
FS			40			
fine	43	143	145	52	13	11

TAB. 7.5 Formulation des matrices cimentaires. Les quantités d'eau indiquées entre parenthèses correspondent aux volumes des formulations des bétons.

### 7.2.2.2 Essais de fluage propre uniaxial sur matrice cimentaire

La matrice cimentaire correspond à la pâte de ciment hydratée dans laquelle on ajoute les fines passant un tamis de  $100 \mu\text{m}$ , les fillers calcaires et les fumées de silice lorsqu'il y en a. Pour rendre compte de l'absorption granulaire, la quantité d'eau de gâchage a été corrigée de manière à ce que le rapport  $e/c$  effectif pour l'hydratation de la pâte soit représentatif de celui du béton correspondant. Les formulations de matrices cimentaires ainsi réalisées sont détaillées dans le tableau 7.5.

Toutes les formulations ont fait l'objet de caractérisation élastique. Cependant, seules les formulations de Flamanville et de Paluel ont été testées pour évaluer leurs déformations différées (retrait et fluage). On présente ici les deux courbes de fluage propre uniaxial de ces deux formulations mesurées sur des éprouvettes chargées à 12 MPa à 28 jours jusqu'à environ 300 jours. On constate que ces deux compositions très voisines (Tab. 7.1) donnent deux courbes de fluage propre quasiment similaires. Cet aspect souligne l'importance du rôle des granulats et de sa liaison avec pâte de ciment dans le comportement macroscopique du béton.

## 7.3 Modélisation multi-échelle du fluage propre du béton

### 7.3.1 Microstructure et échelle d'observation

Le béton est un matériau hétérogène constitué d'inclusions granulaires enchâssées dans une pâte de ciment hydraté. À une échelle inférieure, la pâte de ciment peut également être considérée comme un matériau hétérogène où le gel de C-S-H joue le rôle de matrice et les autres phases jouent le rôle de phases inclusionnaires. Ainsi, les propriétés homogénéisées du béton peuvent être déterminées par des

changements d'échelles successifs. Cependant, la variabilité (Fig. 7.4) de la taille des hétérogénéités (du nanomètre au centimètre) impose un choix de V.E.R pour chaque échelle, devant satisfaire les conditions de séparation des échelles. En conséquence, chaque échelle doit être séparée de celle successive par au moins un ordre de grandeur d'amplitude de taille d'hétérogénéité [112, 29]. En se basant sur ce principe, Constantinides et Ulm ont proposé un schéma de microstructure multi-échelle de la pâte de ciment (Fig. 7.3) pour trouver les propriétés élastiques macroscopiques du béton avec une précision acceptable. En se référant aux données de la taille des hétérogénéités des constituants du béton (Fig. 7.4), leur microstructure peut être divisé comme suit :

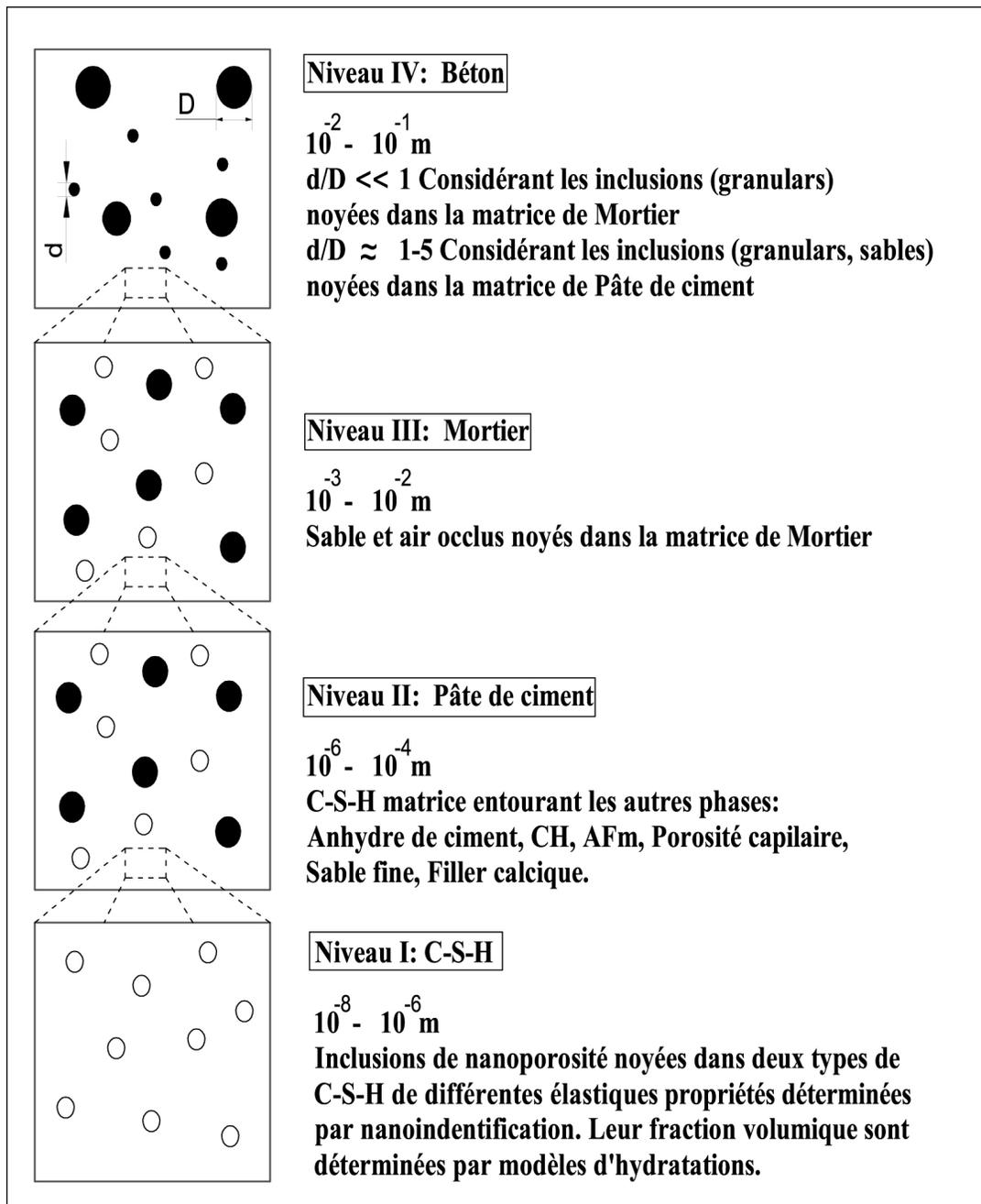


FIG. 7.3 Quatre niveaux d'homogénéisation du béton d'après Bernard et al. [13]

1. Niveau I : L'échelle la plus petite du béton concerne les deux types de C-S-H, l'un appelé C-S-H intérieur (ou haute densité), l'autre appelé C-S-H extérieur (ou faible densité) dont les fractions volumiques et les propriétés élastiques sont données dans les travaux de Bernard et al. [13], ainsi que Constantinides et Ulm [29]. La taille caractéristique de cette échelle est de l'ordre du micromètre.
2. Niveau II : L'échelle suivante est celle de la pâte de ciment dont l'hétérogénéité a une taille typiquement inférieure à  $100 \mu m$ . Elle peut être considérée comme une matrice homogène de C-S-H dans laquelle sont noyées 6 familles d'inclusions : Grains de ciment anhydre (clinker : silicate tricalcique  $C_3S$ , silicate bicalcique  $C_2S$ , aluminat tricalcique  $C_3A$  et alumino-ferrite  $C_4AF$ ), gros cristaux de portlandite C-H, alluminat ferrite AFm, porosité capillaire, sable fin (diamètre  $< 100$  micromètre) et filler calcique.
3. Niveau III : Cette échelle concerne le mortier qui est constitué des inclusions de sable et d'air occlus noyées dans la pâte de ciment. La taille caractéristique de cette échelle est de l'ordre du millimètre.
4. Niveau IV : De taille caractéristique le centimètre, cette échelle correspond aux granulats noyés dans le mortier.

Dans notre cas, on ne distingue pas les deux types du gel C-S-H. On commence par l'échelle de la pâte de ciment. On a donc trois niveaux d'homogénéisation comme l'indique la figure 7.4 :

1. Niveau 1 : L'échelle de la pâte de ciment, l'hétérogénéité a une taille typiquement inférieure à  $100 \mu m$ . Elle peut être considérée comme une matrice homogène de C-S-H dans laquelle sont noyées 6 familles d'inclusions : Grains de ciment anhydre (clinker : silicate tricalcique  $C_3S$ , silicate bicalcique  $C_2S$ , aluminat tricalcique  $C_3A$  et alumino-ferrite  $C_4AF$ ), gros cristaux de portlandite C-H, alluminat ferrite AFm, porosité capillaire, sable fin (taille  $< 100$  micromètre) et filler calcique.
2. Niveau 2 : Cette échelle concerne le mortier qui est constitué des inclusions de sable et d'air occlus noyées dans la pâte de ciment. La taille caractéristique de cette échelle est de l'ordre du millimètre.
3. Niveau 3 : De taille caractéristique le centimètre, cette échelle correspond aux granulats noyés dans le mortier.

### 7.3.2 Stratégie

On présente ici la stratégie pour calculer les propriétés viscoélastiques macroscopiques du béton à partir de la connaissance de la composition du ciment (Tab. 7.2), des propriétés mécaniques des hydrates, de la formulation du béton (Tab. 7.1), des propriétés élastiques des granulats (Tab. 7.4) et leur absorption.

Pour la modélisation multi-échelle du comportement viscoélastique du béton, on doit simplifier le problème par les hypothèses suivantes :

1. On se place dans le cadre d'un comportement isotherme et sans échange d'humidité.
2. On ne prend pas en compte de l'auréole de transition autour des granulats, i.e. l'interface entre les granulats et la pâte de ciment est parfaite. La distribution des tous les constituants du béton est isotrope. Chaque échelle d'homogénéisation est caractérisée par un composite de type inclusion-matrice [29].
3. Les porosités sont caractérisées par les propriétés élastiques nulles : condition drainée ( $\mu_n = \kappa_n = 0$ ).
4. A l'échelle du gel de C-S-H, on ne distingue pas les deux formes plus ou moins denses de C-S-H (formes interne et externe). On assimile les C-S-H à un unique milieu homogène viscoélastique

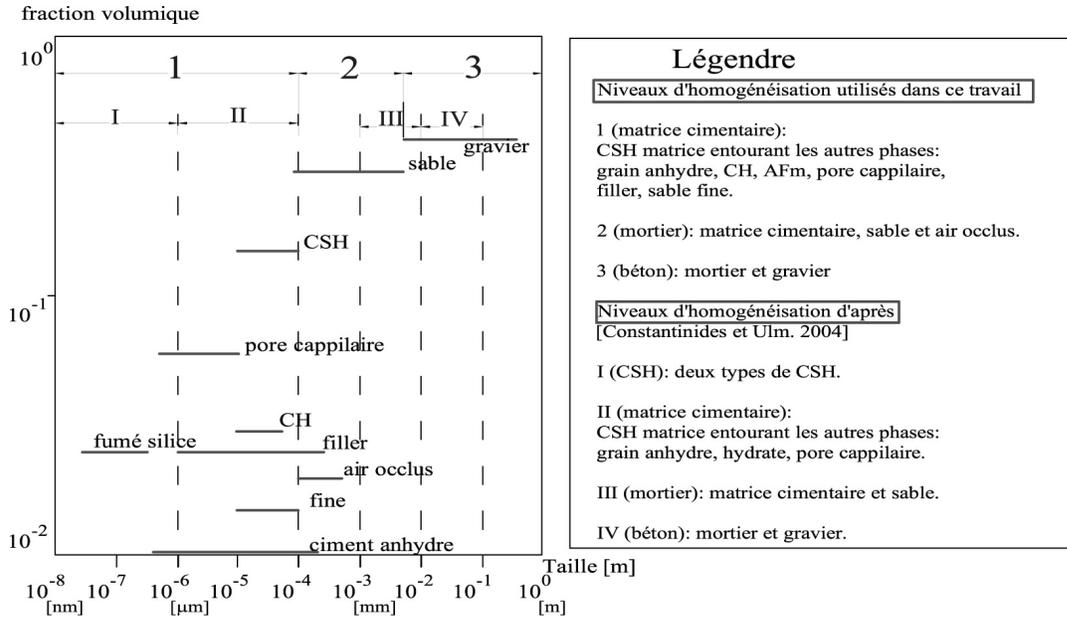


FIG. 7.4 Taille des hétérogénéités du béton de l'échelle nanomètre du gel C-S-H à l'échelle centimètre du béton

isotrope linéaire non vieillissant et ayant des propriétés viscoélastique *intrinsèques*. Le fluage du béton est donc dû uniquement à celui du C-S-H.

Ainsi, dans ce travail, les propriétés homogénéisées du béton sont déterminées en effectuant des passages micro-macro (Fig. 7.3) de l'échelle de pâte de ciment (indice 1) à l'échelle macroscopique du béton (indice 3). Pour chaque échelle, la matrice est considérée comme un milieu viscoélastique homogénéisé obtenu par l'homogénéisation du milieu de l'échelle précédente (Fig. 7.5). En utilisant l'hypothèse 2 et en adoptant comme point de vue morphologique que le béton comme un matériau composite inclusionnaire à matrice connectée, le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka semble en premier abord approprié pour tous les niveaux d'homogénéisation. Cependant, pour le passage mortier-béton, les grands granulats peuvent mettre à défaut cette connectivité de la matrice (mortier). Pour cette échelle, on va examiner les deux schémas d'homogénéisation : Mori-Tanaka et autocohérent généralisé.

### 7.3.2.1 Construction de la TC des fonctions de fluage effectif du béton

On considère une succession passages micro-macro avec  $M$  échelles d'homogénéisation. L'indice (1) correspond à l'échelle de pâte de ciment et l'indice ( $M$ ) à celle du béton. A l'échelle ( $i$ ), on examine un problème d'homogénéisation d'un composite ayant  $n_i$  inclusions élastiques (indice 1  $\rightarrow n_i$ ) noyées dans une matrice viscoélastique (indice 0). S'il y a des inclusions poreuses, on leur réservera l'indice  $r = n_i$ . Les propriétés élastiques et la fraction volumique de chaque phase inclusionnaire sont notées par  $\mu_r^{(i)}$ ,  $\kappa_r^{(i)}$ ,  $f_r^{(i)}$ , où l'indice ( $i$ ) ( $i : 1 \rightarrow M$ ) désigne le niveau considéré, l'indice  $r$  ( $r : 1 \rightarrow n_i$ ) les inclusions. La matrice de l'échelle  $i$  est donc caractérisée par  $\tilde{\mu}_0^{(i)}(s)$ ,  $\tilde{\kappa}_0^{(i)}(s)$ ,  $f_0^{(i)}$  ou encore par les fonctions de fluage déviatorique et sphérique :

$$\tilde{J}_{(i)}^{\mu}(s) = \frac{1}{\tilde{\mu}_0^{(i)}(s)} \quad (7.1)$$

$$\tilde{J}_{(i)}^{\kappa}(s) = \frac{1}{\tilde{\kappa}_0^{(i)}(s)} \quad (7.2)$$

Selon Benboudjema [9], le fluage propre sphérique du béton est lié à la micro-diffusion de l'eau adsorbée entre les nanoporosités (interhydrate, intrahydrate du gel C-S-H) et la porosité capillaire, alors que le fluage déviatorique concerne le glissement des feuilletts de C-S-H. Dans ce cas, le fluage déviatorique du gel C-S-H peut être supposé non borné et donc être représenté par un modèle rhéologique de Kelvin généralisé (Fig 4.1, Eq. 4.1). Cette hypothèse est étayée par des résultats expérimentaux obtenues sur des mortiers lixiviés [12]. Dans ce travail, on suppose que le fluage sphérique du gel C-S-H est décrit aussi par un modèle de Kelvin généralisé, avec deux possibilités : soit le fluage sphérique est non borné ( $\eta_{1(1)}^\kappa \neq \infty$ ), soit le fluage sphérique est borné ( $\eta_{1(1)}^\kappa = \infty$ ). D'après la relation (4.1), on peut écrire la TC des fonctions de fluage du gel C-S-H :

$$\tilde{J}_{(1)}^\pi(s) = \frac{1}{E_{1(1)}^\pi} + \frac{1}{s\eta_{1(1)}^\pi} + \sum_{j=2}^{m^\pi(1)} \frac{1}{E_{j(1)}^\pi + s\eta_{j(1)}^\pi} = \frac{Q_{m^\pi(1)}(s)}{P_{m^\pi(1)}(s)} \quad (7.3)$$

où  $E_{1(1)}^\pi$  est le module de cisaillement ( $\pi = \mu$ ) ou de compressibilité ( $\pi = \kappa$ ) du gel C-S-H.

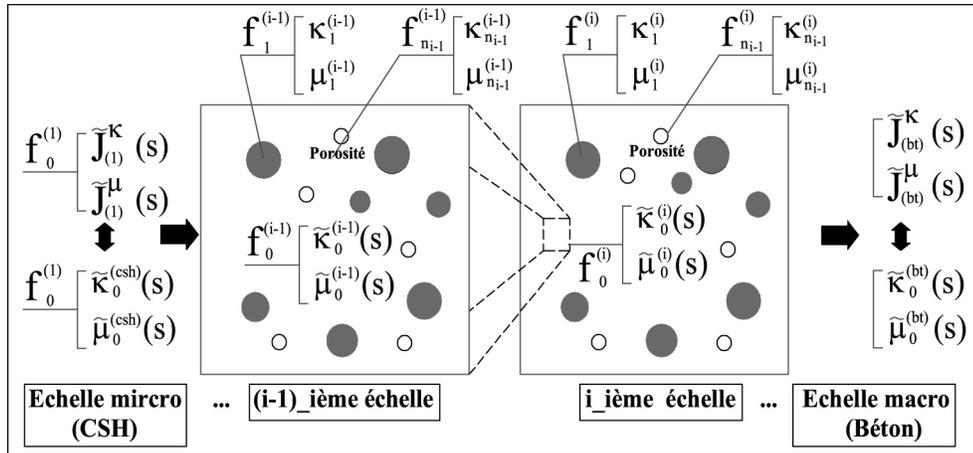


FIG. 7.5 Modélisation multi-échelles du fluage propre du béton

La clef du problème de modélisation multi-échelle est que les propriétés viscoélastiques  $\tilde{J}_{(i+1)}^\pi(s)$ , de la matrice de l'échelle  $(i+1)$ , sont les propriétés effectives  $\tilde{J}_{(i)}^{\pi-ef}(s)$  du milieu de l'échelle  $i$  précédente :

$$\tilde{J}_{(i+1)}^\pi(s) = \tilde{J}_{(i)}^{\pi-ef}(s) = L_{(i)}^\pi \left( \tilde{J}_{(i)}^\mu(s), \tilde{J}_{(i)}^\kappa(s) \right) \quad (7.4)$$

où  $L_{(i)}^\pi(u, v)$  est la fonction composée des fonctions de fluage déviatorique et sphérique de la matrice de l'échelle  $i$  :

- Si l'on utilise le schéma de Mori-Tanaka à l'échelle  $(i)$ , la fonction composée  $L_{(i)}^\pi(u, v)$  sera donnée par la relation (4.20). Ses coefficients ne dépendent que des propriétés élastiques et fractions volumiques des phases inclusionnaires  $(\mu_r^{(i)}, \kappa_r^{(i)}, f_r^{(i)}, r : 1 \rightarrow n_i)$ .
- Si l'on utilise le schéma autocohérent généralisé à l'échelle  $(i)$ , la fonction composée  $L_{(i)}^\pi(u, v)$  sera donnée par la relation (4.141) et celle  $L_{(i)}^\mu(u, v)$  par la relation (2.80), dans laquelle on remplace  $\mu_m$  par  $1/u$  et  $\kappa_m$  par  $1/v$ . Il faut noter que, dans le cadre de cette étude, ce schéma n'est utilisé que pour le cas  $n_i = 1$ , i.e. les coefficients de  $L_{(i)}^\pi(u, v)$  ne dépendent que des propriétés élastiques et fractions volumiques de l'inclusion  $(\mu_1^{(i)}, \kappa_1^{(i)}, f_1^{(i)})$ .

Dans notre cas, pour la dernière échelle du béton ( $M$ ), on utilisera les deux schémas étudiés (MT et AG) à titre de comparaison. De la première échelle jusqu'à la dernière ( $M-1$ ), on n'utilisera que le schéma de MT.

Récursivement,  $\tilde{J}_{(i)}^{\pi-ef}(s)$  dépend des propriétés viscoélastique de la matrice de l'échelle  $k$  par la fonction composée  $L_{(k \rightarrow i)}^{\pi}(u, v)$  :

$$\tilde{J}_{(i)}^{\pi-ef}(s) = L_{(k \rightarrow i)}^{\pi} \left( \tilde{J}_{(k)}^{\mu}(s), \tilde{J}_{(k)}^{\kappa}(s) \right) \quad \text{avec } 1 \leq k \leq i \quad (7.5)$$

où les coefficients de la fonction  $L_{(k \rightarrow i)}^{\pi}(u, v)$  dépendent de toutes les propriétés élastiques et des fractions volumiques des phases inclusionnaires de l'échelle  $k$  jusqu'à l'échelle  $i$  ( $\mu_r^{(j)}$ ,  $\kappa_r^{(j)}$ ,  $f_r^{(j)}$ ,  $j : k \rightarrow i$ ,  $r : 1 \rightarrow n_j$ ). La fonction  $L_{(k \rightarrow i)}^{\pi}(u, v)$  est déterminée par :

$$\begin{aligned} L_{(i)}^{\pi} \left( \tilde{J}_{(i)}^{\mu}(s), \tilde{J}_{(i)}^{\kappa}(s) \right) &= L_{(k \rightarrow i)}^{\pi} \left( \tilde{J}_{(k)}^{\mu}(s), \tilde{J}_{(k)}^{\kappa}(s) \right) \quad \forall k \in [1, i] \\ &= L_{(i \rightarrow i)}^{\pi} \left( \tilde{J}_{(i)}^{\mu}(s), \tilde{J}_{(i)}^{\kappa}(s) \right) \end{aligned} \quad (7.6)$$

On en déduit que :

$$L_{(i \rightarrow i)}^{\pi}(u, v) = L_{(i)}^{\pi}(u, v) \quad (7.7)$$

$$L_{(i-1 \rightarrow i)}^{\pi}(u, v) = L_{(i \rightarrow i)}^{\pi} \left( L_{(i-1)}^{\mu}(u, v), L_{(i-1)}^{\kappa}(u, v) \right) \quad (7.8)$$

$$L_{(k \rightarrow i)}^{\pi}(u, v) = L_{(k+1 \rightarrow i)}^{\pi} \left( L_{(k)}^{\mu}(u, v), L_{(k)}^{\kappa}(u, v) \right) \quad (7.9)$$

A partir des relations (7.7), (7.8) et (7.9), on peut établir l'expression de la fonction  $L_{(k \rightarrow i)}^{\pi}(u, v)$   $\forall k \in [1, i]$ . Enfin, on explicitera la dépendance de  $\tilde{J}_{(i)}^{\pi-ef}(s)$  des fonctions de fluage  $\tilde{J}_{(1)}^{\pi}(s)$  du C-S-H :

$$\tilde{J}_{(i)}^{\pi-ef}(s) = L_{(1 \rightarrow i)}^{\pi} \left( \tilde{J}_{(1)}^{\mu}(s), \tilde{J}_{(1)}^{\kappa}(s) \right) \quad (7.10)$$

Si jusqu'à l'échelle  $i$ , on n'utilise que le schéma de MT, on trouve facilement la forme de  $\tilde{J}_{(i)}^{\pi-ef}(s)$  :

$$\tilde{J}_{(i)}^{\pi-ef}(s) = \frac{\bar{Q}_{\bar{m}_{(i)}^{\pi}}(s)}{\bar{P}_{\bar{m}_{(i)}^{\pi}}(s)} = \frac{1}{E_{1(i)}^{\pi}} + \frac{1}{s\eta_{1(i)}^{\pi}} + \sum_{j=2}^{\bar{m}_{(i)}^{\pi}} \frac{1}{E_{j(i)}^{\pi} + s\eta_{j(i)}^{\pi}} \quad (7.11)$$

Pour l'échelle  $(i+1)$ , on a alors l'affectation suivante :

$$\tilde{J}_{(i+1)}^{\pi}(s) = \frac{Q_{m_{(i+1)}^{\pi}}(s)}{P_{m_{(i+1)}^{\pi}}(s)} = \frac{1}{E_{1(i+1)}^{\pi}} + \frac{1}{s\eta_{1(i+1)}^{\pi}} + \sum_{j=2}^{m_{(i+1)}^{\pi}} \frac{1}{E_{j(i+1)}^{\pi} + s\eta_{j(i+1)}^{\pi}} = \tilde{J}_{(i)}^{\pi-ef}(s) \quad (7.12)$$

où le degré  $\bar{m}_{(i)}^{\pi}$  du numérateur et du dénominateur de  $\tilde{J}_{(i)}^{\pi-ef}(s)$  est calculé par la relation (4.29) :

$$\bar{m}_{(i)}^{\kappa} = n_i \times \bar{m}_{(i-1)}^{\mu} + \bar{m}_{(i-1)}^{\kappa} \quad , \quad \bar{m}_{(i)}^{\mu} = (2n_i + 1) \times \bar{m}_{(i-1)}^{\mu} \quad (7.13)$$

$$m_{(i)}^{\mu} = \bar{m}_{(i-1)}^{\mu} \quad , \quad m_{(i)}^{\kappa} = \bar{m}_{(i-1)}^{\kappa} \quad (7.14)$$

Enfin, la fonction de fluage effectif  $\tilde{J}_{(i)}^{\pi-ef}(t)$  sera obtenue par la relation (4.12) si l'on connaît toutes les racines de  $\bar{P}_{\bar{m}_{(i)}^{\pi}}(s)$ .

Pour notre cas, si l'on impose pour les fonctions de fluage du gel de C-S-H un modèle de Burgers ( $m_{(1)}^{\mu} = m_{(1)}^{\kappa} = 2$ ), on trouve que :

$$\bar{m}_{(3)}^{\kappa} = 196 \quad , \quad \bar{m}_{(3)}^{\mu} = 390 \quad (7.15)$$

A l'échelle du béton, on obtiendra alors des fonctions rationnelles de degré 196 et 390 pour les TCs des fonctions de fluage sphérique et déviatorique, respectivement. On trouvera dans la suite qu'avec une fonction rationnelle de degré très grand, les méthodes d'inversion semi-analytique et d'inversion numérique ACSF donnent des très mauvais résultats du fait des erreurs d'arrondis des coefficients de cette fonction. On a constaté que lorsque le degré du polynôme avoisine la centaine, une petite erreur d'arrondi des coefficients de ce polynôme provoque de très larges erreurs sur le calcul des racines. C'est la raison pour laquelle, la méthode semi-analytique donne des résultats médiocres. En revanche, la méthode de Post-Widder et l'approche du modèle macroscopique équivalent présentent des résultats tout à fait satisfaisants.

A la dernière échelle, si l'on utilise le schéma autocohérent généralisé, la seule solution que l'on peut obtenir dans ce cas dérive de l'approche simplifiée exploitant le modèle de Burgers (chapitre 5) ou les algorithmes de dérivée (§ 3.4.3.1.1 et § 3.4.3.1.2) pour accélérer la vitesse de calcul de la méthode de Post-Widder.

Dans les cas particuliers ( $\nu_0^{(1)}(t)$  constant ou  $\kappa_0^{(1)}(t)$  constant), la fonction  $L_{(1 \rightarrow i)}^\pi$  ne dépend que d'une seule variable  $u$ . On doit donc construire d'abord la forme irréductible de la fonction  $L_{(1 \rightarrow i)}^\pi(u)$ . Ensuite, les deux étapes seront appliquées pour chercher les temps caractéristiques macroscopiques, comme dans les paragraphes (§ 4.3.2.2 et § 4.3.2.3) pour le cas utilisant le schéma de MT ou le paragraphe (§ 4.3.3.2) dans le cas du schéma autocohérent généralisé pour la dernière échelle.

### 7.3.2.2 Les quatre paramètres des fonctions de fluage effectif

On construit ici la relation récursive donnant les quatre paramètres ( $S_{0(i)}^\pi, S_{\infty(i)}^\pi, F_{0(i)}^\pi, F_{\infty(i)}^\pi$ ) caractérisant le comportement effectif à une échelle ( $i$ ) en fonction des mêmes paramètres ( $S_{0(1)}^\pi, S_{\infty(1)}^\pi, F_{0(1)}^\pi, F_{\infty(1)}^\pi$ ) caractérisant le comportement viscoélastique du C-S-H.

D'après les relations (5.3) et (7.3), on en déduit les quatre paramètres des fonctions de fluage du gel de C-S-H :

$$\begin{aligned} F_{0(1)}^\pi &= \sum_{k=1}^{m_{(1)}^\pi} \frac{1}{\eta_{k(1)}^\pi} & F_{\infty(1)}^\pi &= \frac{1}{\eta_{1(1)}^\pi} \\ S_{\infty(1)}^\pi &= \sum_{k=1}^{m_{(1)}^\pi} \frac{1}{E_{k(1)}^\pi} & S_{0(1)}^\pi &= \frac{1}{E_{1(1)}^\pi} \end{aligned} \quad (7.16)$$

Par définition, les quatre paramètres de la matrice de l'échelle  $i$  sont ceux effectifs de l'échelle inférieure ( $i-1$ ) :

$$\begin{aligned} F_{0(i)}^\pi &= \bar{F}_{0(i-1)}^\pi & F_{\infty(i)}^\pi &= \bar{F}_{\infty(i-1)}^\pi \\ S_{0(i)}^\pi &= \bar{S}_{0(i-1)}^\pi & S_{\infty(i)}^\pi &= \bar{S}_{\infty(i-1)}^\pi \end{aligned} \quad (7.17)$$

De plus, selon les résultats obtenus dans les sections (§ 5.4) et (§ 5.5), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \bar{F}_{0(i)}^\pi &= \bar{\mathcal{F}}_{0(i)}^\pi \left( F_{0(i)}^\mu, F_{0(i)}^\kappa, S_{0(i)}^\mu, S_{0(i)}^\kappa \right) & \bar{F}_{\infty(i)}^\pi &= \bar{\mathcal{F}}_{\infty(i)}^\pi \left( F_{\infty(i)}^\mu, F_{\infty(i)}^\kappa \right) \\ \bar{S}_{\infty(i)}^\pi &= \bar{\mathcal{S}}_{\infty(i)}^\pi \left( F_{\infty(i)}^\mu, F_{\infty(i)}^\kappa, S_{\infty(i)}^\mu, S_{\infty(i)}^\kappa \right) & \bar{S}_{0(i)}^\pi &= \bar{\mathcal{S}}_{0(i)}^\pi \left( S_{0(i)}^\mu, S_{0(i)}^\kappa \right) \end{aligned} \quad (7.18)$$

On distingue alors deux cas pour déterminer les fonctions  $\bar{\mathcal{F}}_{0(i)}^\pi, \bar{\mathcal{F}}_{\infty(i)}^\pi, \bar{\mathcal{S}}_{\infty(i)}^\pi, \bar{\mathcal{S}}_{0(i)}^\pi$  :

- ★ Si l'on utilise le schéma de Mori-Tanaka à l'échelle  $i$ ,  $\bar{S}_{0(i)}^\pi$  sera donné par la relation (5.4.3),  $\bar{S}_{\infty(i)}^\pi$  sera donné par la relation (5.4.6),  $\bar{F}_{0(i)}^\pi$  sera donné par la relation (5.4.4),  $\bar{F}_{\infty(i)}^\pi$  sera donné par la relation (5.4.5). Une nouvelle fois, les coefficients de ces fonctions ne dépendent que des propriétés élastiques et des fractions volumiques des phases inclusionnaires ( $\mu_r^{(i)}, \kappa_r^{(i)}, f_r^{(i)}, r : 1 \rightarrow n_i$ ). Cette remarque s'applique également au cas du schéma autocohérent généralisé.

★ Si l'on utilise le schéma autocohérent généralisé à l'échelle  $i$ ,  $\bar{S}_{0(i)}^\pi$  sera donné par la relation (5.4.3),  $\bar{S}_{\infty(i)}^\pi$  sera fourni par la relation (5.5.2), ensuite,  $\bar{F}_{0(i)}^\pi$  sera donné par la relation (5.4.4), enfin,  $\bar{F}_{\infty(i)}^\pi$  sera obtenu à l'aide de la relation (5.5.1).

Ces relations sont récursives. On peut donc écrire, comme pour le cas de la fonction  $L_{(k \rightarrow i)}^\pi(u, v)$  :

$$\begin{aligned} \bar{F}_{0(i)}^\pi &= \bar{\mathcal{F}}_{0(1 \rightarrow i)}^\pi \left( F_{0(1)}^\mu, F_{0(1)}^\kappa, S_{0(1)}^\mu, S_{0(1)}^\kappa \right) & \bar{F}_{\infty(i)}^\pi &= \bar{\mathcal{F}}_{\infty(1 \rightarrow i)}^\pi \left( F_{\infty(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\kappa \right) \\ \bar{S}_{\infty(i)}^\pi &= \bar{\mathcal{S}}_{\infty(1 \rightarrow i)}^\pi \left( F_{\infty(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\kappa, S_{\infty(1)}^\mu, S_{\infty(1)}^\kappa \right) & \bar{S}_{0(i)}^\pi &= \bar{\mathcal{S}}_{0(1 \rightarrow i)}^\pi \left( S_{0(1)}^\mu, S_{0(1)}^\kappa \right) \end{aligned} \quad (7.19)$$

où les fonctions  $\bar{\mathcal{F}}_{0(1 \rightarrow i)}^\pi$ ,  $\bar{\mathcal{F}}_{\infty(1 \rightarrow i)}^\pi$ ,  $\bar{\mathcal{S}}_{\infty(1 \rightarrow i)}^\pi$ ,  $\bar{\mathcal{S}}_{0(1 \rightarrow i)}^\pi$  ont des propriétés identiques à celle de la fonction  $L_{(k \rightarrow i)}^\pi(u, v)$  définie par la relation (7.5). En conséquence, les quatre paramètres viscoélastiques asymptotiques de l'échelle ( $i$ ) ne dépendent que des paramètres viscoélastiques microscopiques (du gel C-S-H), des propriétés élastiques et des fractions volumiques de la première échelle jusqu'à l'échelle  $i$  ( $\mu_r^{(j)}$ ,  $\kappa_r^{(j)}$ ,  $f_r^{(j)}$ ,  $j : 1 \rightarrow i$ ,  $r : 1 \rightarrow n_j$ ). En d'autres termes, il n'y a pas d'influence du spectre viscoélastique généralisé par l'homogénéisation.

### 7.3.3 Données d'entrée du problème

Les données pour calculer les fonctions de fluage effectif du béton sont les propriétés élastiques et les fractions volumiques de toutes les constituants du béton ( $\mu_r^{(j)}$ ,  $\kappa_r^{(j)}$ ,  $f_r^{(j)}$ ,  $j : 1 \rightarrow 3$ ,  $r : 1 \rightarrow n_j$ ), et les fonctions de fluage du gel C-S-H  $\tilde{J}_{(1)}^\mu(s) = \frac{1}{\tilde{\mu}_0^{(1)}(s)}$  et  $\tilde{J}_{(1)}^\kappa(s) = \frac{1}{\tilde{\kappa}_0^{(1)}(s)}$ . Les étapes pour déterminer ces données sont présentées sur la figure 7.6.

La première étape du processus consiste à estimer les fractions volumiques des différentes phases (anhydres ou hydratées) de la pâte de ciment, à partir de la composition du ciment et du rapport  $e/c$ . Cette estimation requiert, à défaut de données expérimentales longues et coûteuses, de faire appel à la simulation. La modélisation de l'hydratation peut s'effectuer à l'aide de modèles chimiques [60], [62], de modèles physiques [90], ou d'automates numériques [10]. Les modèles chimiques nécessitent de connaître la composition du ciment en oxydes élémentaires. Ils reposent sur une approximation pseudo-stœchiométrique des réactions d'hydratation. Les hypothèses sont assez simplificatrices mais présentent l'avantage de fournir rapidement des estimations réalistes des volumes de phases en présence.

On peut penser que l'utilisation de l'automate d'hydratation développé par le NIST est une méthode plus fiable. Cependant, il nécessite notamment comme données d'entrée la granulométrie et la morphologie des grains de clinker, qui ne sont pas nécessairement très accessibles lorsqu'on s'intéresse à des ciments "anciens".

Il a semblé plus direct et plus cohérent avec le type d'approche développé dans ce travail cherchant à construire une approche 0D, de se limiter aux modèles physiques plus faciles d'accès et qui nécessitent un minimum d'informations initiales, ce qui les rend davantage abordable dans une approche d'ingénierie. Dans le cadre de cette étude, on a retenu le modèle de Tennis et Jennings [60, 61] qui présente quelques améliorations par rapport au modèle de Powers [90].

Ces modèles sont destinés aux ciments Portland. Leurs utilisations à des ciments composés nécessitent donc de prendre quelques précautions pour tenir compte des ajouts (fillers, cendres volantes, fumées de silice) :

★ Les fillers calcaires sont issus du broyage de la roche à une finesse ( $2900 \pm 650 \text{ cm}^2/\text{g}$  [34] de l'ordre de grandeur de celle du ciment. Le fuseau granulométrique se situe entre  $1 \mu\text{m}$  et  $100 \mu\text{m}$ . Selon [17], Les fillers calcaires produisent les effets suivants : (*i*) au jeune âge, ils accélèrent l'hydratation du clinker (en particulier du  $\text{C}_3\text{S}$ ), (*ii*) ils améliorent la compacité du mélange, (*iii*) ils fournissent des sites favorables à la nucléation de la chaux et (*iv*) ils produisent la formation de carboaluminates de calcium ( $3\text{Ca} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{CaCO}_3 \cdot 11\text{H}_2\text{O}$  [115]) issus de la réaction entre le

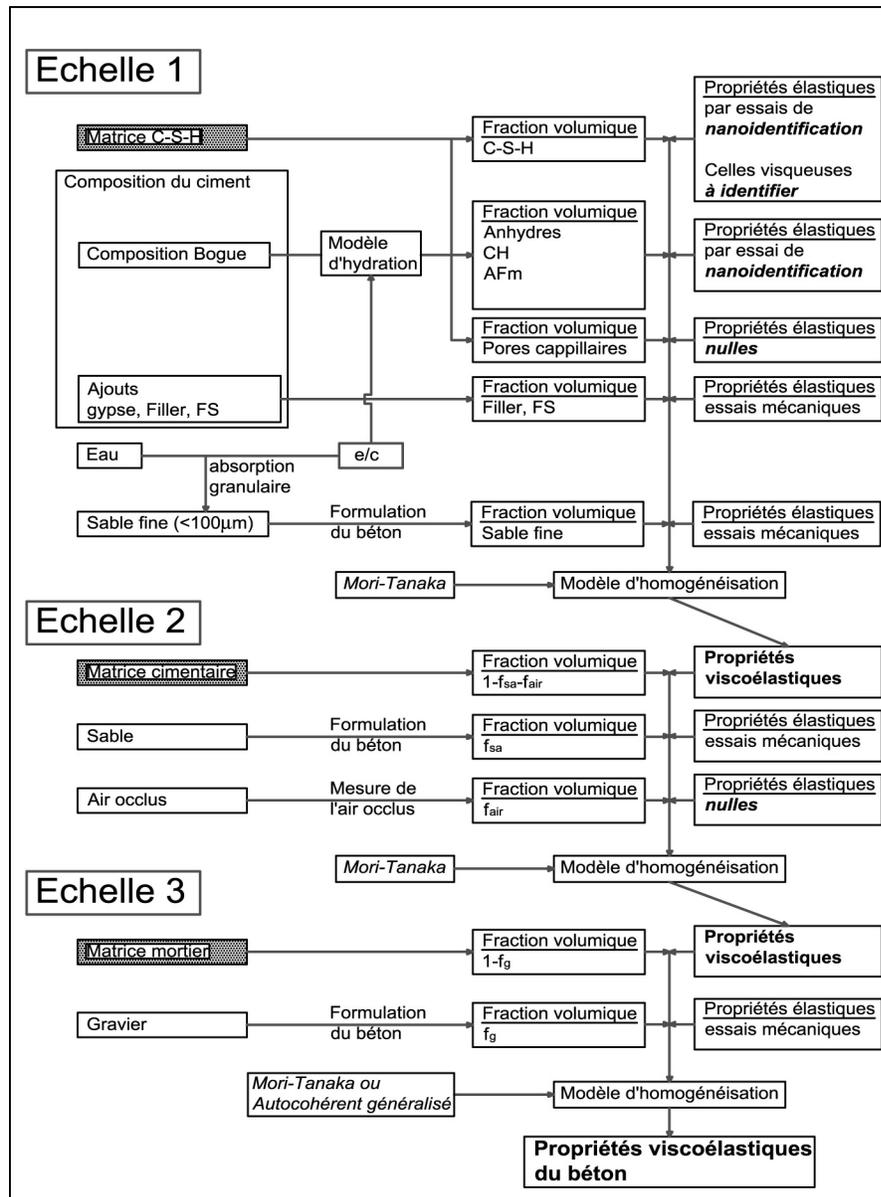


FIG. 7.6 Entrées et sorties du problème modélisation multi-échelle du fluage du béton

calcaire du filler ( $\text{CaCO}_3$ ) et l'aluminat tricalcique du ciment ( $\text{C}_3\text{A}$ ). Dans la suite, on admettra néanmoins que les fillers ont un rôle inerte chimiquement en ayant conscience des limitations que cette hypothèse peut avoir sur l'hydratation au jeune âge du matériau.

- ★ La fumée de silice présente un effet pouzzolanique qui n'est pas décrit dans le modèle de [60]. Il est donc clair que l'on va négliger l'effet pouzzolanique et surestimer la cinétique d'hydratation du ciment.

Il est donc clair que l'utilisation du modèle de Tennis et Jennings reste très limité et que des travaux sont nécessaires pour l'améliorer et le rendre exploitable pour des ciments composés.

Les données du problème modélisation multi-échelle sont présentées finalement pour chaque formulation du béton dans les tableaux (I.1), (I.2), (I.3), (I.4), (I.5), (I.6) donnés dans l'annexe § I.

On peut naturellement s'interroger sur la pertinence des estimations proposées. En modifiant la pseud-stoechiométrie des équations d'hydratation retenues et en intégrant la finesse du ciment comme

paramètre pertinent de la cinétique d'hydratation, il est clair que l'on obtiendrait des résultats différents. Cependant, cet effet est limité par deux facteurs : (i) les équations qui pilotent la création des C-S-H sont communes à tous les auteurs de la littérature, (ii) on s'intéresse à une pâte de ciment mature correspondant à un moment où la cinétique d'hydratation est fortement ralentie.

Par ailleurs, il apparaîtra assez clairement dans la suite que le facteur primordial dans la cinétique du fluage du béton provient des granulats davantage que de la pâte de ciment elle-même.

### 7.3.4 Identification des paramètres viscoélastiques du gel C-S-H

#### 7.3.4.1 Equations pour identifier les paramètres viscoélastiques microscopiques

On rappelle ici que les résultats de l'homogénéisation viscoélastique précédemment établis sont utilisés pour identifier le comportement en fluage du béton. On commence par présenter la procédure d'identification des paramètres viscoélastiques dans le cas général. Cette procédure aboutit à un système de 6 équations impliquant 6 paramètres à identifier. Pour déterminer ces six paramètres, il est nécessaire pour une formulation de béton donnée, de disposer soit des complaisances de fluage sphérique et déviatorique à une échelle donnée (par exemple l'échelle béton) soit des complaisances uniaxiales à deux échelles différentes. De tels résultats expérimentaux ne sont pas disponibles. Ainsi, on construit des complaisances sphérique et déviatorique à partir de la seule complaisance uniaxiale en faisant une hypothèse sur le coefficient de Poisson viscoélastique macroscopique.

Par ailleurs, l'identification est également effectuée sur la base des hypothèses simplificatrices à l'échelle du C-S-H : coefficient de Poisson ou module de compressibilité constant. Dans ces cas, seuls trois paramètres sont à identifier et la seule complaisance uniaxiale est suffisante. Ainsi, on sera en mesure d'évaluer les écarts relatifs générés par de telles hypothèses.

**7.3.4.1.1 Cas général** Pour déterminer le comportement viscoélastique du gel C-S-H, il faut chercher  $2 \left( m_{(1)}^\mu + m_{(1)}^\kappa - 1 \right)$  paramètres inconnus :

$$\begin{aligned} \eta_{j(1)}^\pi & \text{ avec } j : 1 \rightarrow m_{(1)}^\pi \\ E_{j(1)}^\pi & \text{ avec } j : 2 \rightarrow m_{(1)}^\pi \end{aligned} \quad (7.20)$$

Les modules élastiques  $E_{1(1)}^\pi$  sont tirées de la littérature. Comme on a supposé que les paramètres viscoélastiques microscopiques sont intrinsèques, leurs valeurs, identifiées à partir des différentes formulations de béton, doivent être identiques, sinon du même ordre de grandeur.

Malheureusement, l'identification des valeurs de tous ces paramètres à partir des courbes de fluage des bétons s'avère extrêmement compliquée compte tenu de la difficulté qui existe pour établir analytiquement les relations entre les temps caractéristiques macroscopiques et microscopiques.

On a donc développé une approche plus simple. En effet, à partir des courbes de fluage déviatorique et sphérique macroscopiques, on peut toujours déterminer graphiquement leurs 8 paramètres viscoélastiques macroscopiques asymptotiques comme indiqué sur la figure 7.7. Si on s'intéresse uniquement à l'estimation du fluage instantané et à long terme du béton, la connaissance de ces 8 paramètres est suffisante. D'après la relation (7.19), on connaît la relation entre les 8 paramètres des fonctions de fluage effectif déviatorique et sphérique du béton :  $\left( \bar{S}_{0(3)}^\pi, \bar{S}_{\infty(3)}^\pi, \bar{F}_{0(3)}^\pi, \bar{F}_{\infty(3)}^\pi \right)$  et ceux du gel C-S-H :  $\left( S_{0(1)}^\pi, S_{\infty(1)}^\pi, F_{0(1)}^\pi, F_{\infty(1)}^\pi \right)$ . Or, on connaît déjà les deux paramètres  $S_{0(1)}^\pi = \frac{1}{E_{1(1)}^\pi}$ . Il reste donc 6 paramètres à identifier (Fig. 7.7). Les 6 équations pour déterminer ces 6 paramètres viscoélastiques

microscopiques sont données à partir de la relation (7.19) :

$$\begin{aligned}\bar{F}_{0(3)}^\pi &= \bar{\mathcal{F}}_{0(1\rightarrow3)}^\pi \left( F_{0(1)}^\mu, F_{0(1)}^\kappa \right) \\ \bar{F}_{\infty(3)}^\pi &= \bar{\mathcal{F}}_{\infty(1\rightarrow3)}^\pi \left( F_{\infty(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\kappa \right) \\ \bar{S}_{\infty(3)}^\pi &= \bar{\mathcal{S}}_{\infty(1\rightarrow3)}^\pi \left( F_{\infty(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\kappa, S_{\infty(1)}^\mu, S_{\infty(1)}^\kappa \right)\end{aligned}\quad (7.21)$$

L'identification des paramètres microscopiques  $\left( S_{\infty(1)}^\pi, F_{0(1)}^\pi, F_{\infty(1)}^\pi \right)$  nécessite de résoudre le système (7.21) numériquement. A ce propos, on a utilisé des algorithmes de Newton [81]. Une fois ces paramètres microscopiques identifiés, quatre paramètres viscoélastiques du C-S-H, dont le comportement est supposé décrit par un modèle de Kelvin généralisé, sont déterminés :

$$\begin{aligned}F_{0(1)}^\pi &= \frac{1}{\ddot{\eta}_{1(1)}^\pi} + \frac{1}{\ddot{\eta}_{2(1)}^\pi} \quad , \quad F_{\infty(1)}^\pi = \frac{1}{\ddot{\eta}_{1(1)}^\pi} \\ S_{\infty(1)}^\pi &= \frac{1}{\ddot{E}_{1(1)}^\pi} + \frac{1}{\ddot{E}_{2(1)}^\pi} \quad , \quad S_{0(1)}^\pi = \frac{1}{\ddot{E}_{1(1)}^\pi}\end{aligned}\quad (7.22)$$

Ces quatre paramètres caractérisent le comportement instantané et asymptote à long terme du C-S-H.

Par ailleurs, les paramètres macroscopiques, identifiés expérimentalement, permettent de construire les paramètres du modèle macroscopique équivalent :

$$\begin{aligned}\bar{F}_{0(3)}^\pi &= \frac{1}{\ddot{\eta}_{1(3)}^\pi} + \frac{1}{\ddot{\eta}_{2(3)}^\pi} \quad , \quad \bar{F}_{\infty(3)}^\pi = \frac{1}{\ddot{\eta}_{1(3)}^\pi} \\ \bar{S}_{\infty(3)}^\pi &= \frac{1}{\ddot{E}_{1(3)}^\pi} + \frac{1}{\ddot{E}_{2(3)}^\pi} \quad , \quad \bar{S}_{0(3)}^\pi = \frac{1}{\ddot{E}_{1(3)}^\pi}\end{aligned}\quad (7.23)$$

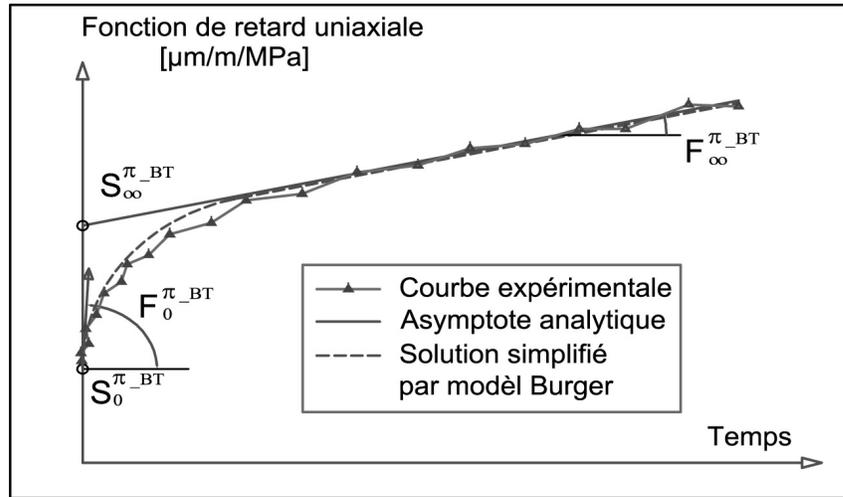


FIG. 7.7 Identification des 8 paramètres visqueux du gel C-S-H à partir des 8 paramètres visqueux du béton

dont les fonctions de fluage effectif (Fig. 7.7) s'obtiennent :

$$J_{(3)\_Bg}^{\pi\_ef}(t) = \frac{1}{\ddot{E}_{1(3)}^\pi} + \frac{t}{\ddot{\eta}_{1(3)}^\pi} + \frac{1}{\ddot{E}_{2(3)}^\pi} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\ddot{\tau}_{2(3)}^\pi}} \right)\quad (7.24)$$

où le temps caractéristique  $\bar{\tau}_{2(3)}^\pi$  vaut  $\bar{\eta}_{2(3)}^\pi/\bar{E}_{2(3)}^\pi$ . Dans le cas particulier où sa valeur serait proche du plus haut temps caractéristique macroscopique de la solution exacte  $J_{(3)}^{\pi-ef}(t)$ , alors  $J_{(3)-Bg}^{\pi-ef}(t) \approx J_{(3)}^{\pi-ef}(t)$  à court terme.

De la même façon, si l'on veut identifier les paramètres viscoélastiques du gel C-S-H à partir des courbes de fluage propre d'une échelle ( $i$ ) autre que celle du béton ( $i = 1$  pour l'échelle de la pâte,  $i = 2$  pour l'échelle du mortier), on doit résoudre le système d'équation (7.21), dans lequel, on remplace  $\bar{\mathcal{F}}_{0(1\rightarrow 3)}^\pi$  par  $\bar{\mathcal{F}}_{0(1\rightarrow i)}^\pi$ ,  $\bar{\mathcal{F}}_{\infty(1\rightarrow 3)}^\pi$  par  $\bar{\mathcal{F}}_{\infty(1\rightarrow i)}^\pi$  et  $\bar{\mathcal{S}}_{\infty(1\rightarrow 3)}^\pi$  par  $\bar{\mathcal{S}}_{\infty(1\rightarrow i)}^\pi$ .

Si notre modèle est pertinent, les 6 paramètres viscoélastiques microscopiques identifiés, à partir de deux échelles différentes ( $i$  et  $k$ ), pour une formulation de béton donnée, doivent être identiques, ou tout au moins, proches.

En général, pour les essais de fluage propre du béton, on réalise des essais de fluage uniaxial à l'échelle du béton, et plus rarement, à l'échelle de la pâte de ciment.

Supposons qu'on dispose de ces deux types d'essais, on peut alors déterminer 3 paramètres viscoélastiques, en condition uniaxiale, à partir de l'échelle  $i$  ( $\bar{S}_{\infty(i)}^{uni}$ ,  $\bar{F}_{0(i)}^{uni}$ ,  $\bar{F}_{\infty(i)}^{uni}$ ) et 3 paramètres viscoélastiques de l'autre échelle  $k$ .

Par conséquent, l'identification des 6 paramètres viscoélastiques microscopiques du gel C-S-H peut être faite à partir de 6 paramètres viscoélastiques effectifs uniaxiaux, 3 à l'échelle ( $i$ ) et 3 à l'échelle ( $k$ ), selon les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{F}_{0(i)}^{uni} &= \frac{1}{3}\bar{\mathcal{F}}_{0(1\rightarrow i)}^\mu \left( F_{0(1)}^\mu, F_{0(1)}^\kappa \right) + \frac{1}{9}\bar{\mathcal{F}}_{0(1\rightarrow i)}^\kappa \left( F_{0(1)}^\mu, F_{0(1)}^\kappa \right) \\ \bar{F}_{\infty(i)}^{uni} &= \frac{1}{3}\bar{\mathcal{F}}_{\infty(1\rightarrow i)}^\mu \left( F_{\infty(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\kappa \right) + \frac{1}{9}\bar{\mathcal{F}}_{\infty(1\rightarrow i)}^\kappa \left( F_{\infty(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\kappa \right) \\ \bar{S}_{\infty(i)}^{uni} &= \frac{1}{3}\bar{\mathcal{S}}_{\infty(1\rightarrow i)}^\mu \left( F_{\infty(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\kappa, S_{\infty(1)}^\mu, S_{\infty(1)}^\kappa \right) + \frac{1}{9}\bar{\mathcal{S}}_{\infty(1\rightarrow i)}^\kappa \left( F_{\infty(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\kappa, S_{\infty(1)}^\mu, S_{\infty(1)}^\kappa \right)\end{aligned}\quad (7.25)$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_{0(k)}^{uni} &= \frac{1}{3}\bar{\mathcal{F}}_{0(1\rightarrow k)}^\mu \left( F_{0(1)}^\mu, F_{0(1)}^\kappa \right) + \frac{1}{9}\bar{\mathcal{F}}_{0(1\rightarrow k)}^\kappa \left( F_{0(1)}^\mu, F_{0(1)}^\kappa \right) \\ \bar{F}_{\infty(k)}^{uni} &= \frac{1}{3}\bar{\mathcal{F}}_{\infty(1\rightarrow k)}^\mu \left( F_{\infty(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\kappa \right) + \frac{1}{9}\bar{\mathcal{F}}_{\infty(1\rightarrow k)}^\kappa \left( F_{\infty(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\kappa \right) \\ \bar{S}_{\infty(k)}^{uni} &= \frac{1}{3}\bar{\mathcal{S}}_{\infty(1\rightarrow k)}^\mu \left( F_{\infty(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\kappa, S_{\infty(1)}^\mu, S_{\infty(1)}^\kappa \right) + \frac{1}{9}\bar{\mathcal{S}}_{\infty(1\rightarrow k)}^\kappa \left( F_{\infty(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\kappa, S_{\infty(1)}^\mu, S_{\infty(1)}^\kappa \right)\end{aligned}\quad (7.26)$$

Egalement, si notre modèle est pertinent, les deux systèmes (7.25) et (7.26) peuvent être combinés en un unique système de 6 équations à 6 inconnues. Ce système doit avoir au moins une solution satisfaisant :

$$S_{\infty(1)}^\pi > 0 \quad \text{et} \quad F_{0(1)}^\pi > 0 \quad \text{et} \quad F_{\infty(1)}^\pi > 0 \quad (7.27)$$

En pratique, on n'a pas trouvé dans littérature des essais de fluage propre de béton et de pâte de ciment avec toutes les données nécessaires : fluage longitudinale et transversale (ou sphérique et déviatorique) pour un béton, fluage de pâte de ciment de même formulation.

Pour le cas particulier de l'étude des bétons d'EDF exploitant les résultats de la thèse de L. Granger, on ne dispose que de deux bétons (Paluel et Flamanville) pour lesquels on connaît les courbes de fluage uniaxial à l'échelle du béton et à l'échelle de la pâte. Cependant, le béton de Flamanville présente un comportement singulier (faible module d'Young et vitesse de fluage rapide à court terme) qui laisse penser que cette formulation ne cadre pas avec les hypothèses retenues dans ce travail (cf. [69] pour une étude sur le rôle de l'altération granitique et l'effet de la décohésion pâte-granulat sur les propriétés élastiques des bétons).

Cette singularité restreint l'analyse au seul cas du béton Paluel. Il est clair que, statistiquement, une seule formulation n'est pas toujours suffisante pour que les paramètres microscopiques identifiés puissent représenter correctement le comportement viscoélastique du gel C-S-H. Néanmoins, il est intéressant de réaliser l'analyse, a minima, à des fins méthodologiques.

Dans la suite, on impose des hypothèses simplificatrices pour évaluer le comportement viscoélastique du gel C-S-H dans 3 cas particuliers :

- CI1 Le coefficient de Poisson  $\nu_0^{(1)}(t)$  du gel C-S-H est supposé constant. Il reste alors 3 paramètres viscoélastiques microscopiques déviatoriques qu'il faut identifier :  $S_{\infty(1)}^\mu, F_{0(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\mu$ .
- CI2 Le module de compressibilité  $\kappa_0^{(1)}(t)$  du gel C-S-H est supposé constant. Il reste alors 3 paramètres viscoélastiques microscopiques déviatoriques qu'il faut identifier :  $S_{\infty(1)}^\mu, F_{0(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\mu$ .
- CI3 Le coefficient de Poisson  $\nu_0^{(3)}(t)$  du béton est supposé constant. On aura donc 6 équations pour déterminer les 6 paramètres microscopiques du gel C-S-H.

Finalement, avec les données disponibles de la thèse de Granger [43], on peut identifier les paramètres viscoélastiques du gel C-S-H pour les 3 cas particuliers précédents et le quatrième cas suivant :

- CI4 Les paramètres viscoélastiques microscopiques sont identifiés en résolvant les 6 équations des deux systèmes (7.25) et (7.26), dans lesquels  $i = 1$  (échelle de la pâte) et  $k = 3$  (échelle du béton) pour la formulation de Paluel et Flamanville.

Pour chaque cas, on considère les deux possibilités correspondant, d'une part, à l'utilisation du schéma de MT pour toutes échelles et, d'autre part, à l'utilisation du schéma autocohérent généralisé à l'échelle du béton. On repère ces deux sous-cas respectivement par les indices 1 et 2. En définitive, il existe 8 cas notés CI1\_1, CI1\_2, CI2\_1, CI2\_2, CI3\_1, CI3\_2, CI4\_1 et CI4\_2.

### 7.3.4.1.2 Etude de cas particuliers

**Coefficient de Poisson ou module de compressibilité du gel C-S-H constant** Pour les essais de fluage propre du béton des centrales (Thèse de Granger [43]), ou dans la littérature, on ne mesure que la déformation longitudinale et pas la partie transversale. Alors, on ne peut déterminer que trois paramètres viscoélastiques macroscopiques : la vitesse de fluage uniaxial macroscopique  $\bar{F}_{0(3)}^{uni}$ , celle à long terme  $\bar{F}_{\infty(3)}^{uni}$  et l'ordonnée à l'origine de l'asymptote  $\bar{S}_{\infty(3)}^{uni}$ . Mais on a 6 inconnues  $F_{0(1)}^\pi, F_{\infty(1)}^\pi, S_{\infty(1)}^\pi$  dont les relations avec les 3 paramètres uniaxiaux macroscopiques sont données d'après la relation (7.25), dans lesquelles,  $i$  est remplacé par 3.

Si l'on suppose que soit le coefficient de Poisson soit le module de compressibilité du gel C-S-H est constant, le comportement viscoélastique du gel C-S-H est représenté par la seule fonction de fluage déviatorique. On aura alors à déterminer seulement 3 inconnues  $F_{0(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\mu, S_{\infty(1)}^\mu$  avec les trois équations :

$$\begin{aligned}\bar{F}_{0(3)}^{uni} &= \frac{1}{3}\bar{\mathcal{F}}_{0(1\rightarrow 3)}^\mu \left( F_{0(1)}^\mu \right) + \frac{1}{9}\bar{\mathcal{F}}_{0(1\rightarrow 3)}^\kappa \left( F_{0(1)}^\mu \right) \\ \bar{F}_{\infty(3)}^{uni} &= \frac{1}{3}\bar{\mathcal{F}}_{\infty(1\rightarrow 3)}^\mu \left( F_{\infty(1)}^\mu \right) + \frac{1}{9}\bar{\mathcal{F}}_{\infty(1\rightarrow 3)}^\kappa \left( F_{\infty(1)}^\mu \right) \\ \bar{S}_{\infty(3)}^{uni} &= \frac{1}{3}\bar{\mathcal{S}}_{\infty(1\rightarrow 3)}^\mu \left( F_{\infty(1)}^\mu, S_{\infty(1)}^\mu \right) + \frac{1}{9}\bar{\mathcal{S}}_{\infty(1\rightarrow 3)}^\kappa \left( F_{\infty(1)}^\mu, S_{\infty(1)}^\mu \right)\end{aligned}\quad (7.28)$$

De la même façon, si l'on veut identifier les paramètres du gel C-S-H à partir de la courbe de fluage uniaxial de la pâte de ciment, on doit résoudre le système d'équation (7.28), dans lequel, on remplace  $\bar{\mathcal{F}}_{0(1\rightarrow 3)}^\pi$  par  $\bar{\mathcal{F}}_{0(1\rightarrow 1)}^\pi$ ,  $\bar{\mathcal{F}}_{\infty(1\rightarrow 3)}^\pi$  par  $\bar{\mathcal{F}}_{\infty(1\rightarrow 1)}^\pi$  et  $\bar{\mathcal{S}}_{\infty(1\rightarrow 3)}^\pi$  par  $\bar{\mathcal{S}}_{\infty(1\rightarrow 1)}^\pi$ .

**Coefficient de Poisson du béton constant** On suppose que le coefficient de Poisson du béton est constant, on aura donc 3 équations supplémentaires d'après la relation (4.52). Finalement, on doit

résoudre le système des 6 équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{0(3)}^{uni} &= \frac{1}{3}\bar{\mathcal{F}}_{0(1\rightarrow3)}^\mu \left( F_{0(1)}^\mu, F_{0(1)}^\kappa \right) + \frac{1}{9}\bar{\mathcal{F}}_{0(1\rightarrow3)}^\kappa \left( F_{0(1)}^\mu, F_{0(1)}^\kappa \right) \\
\bar{F}_{\infty(3)}^{uni} &= \frac{1}{3}\bar{\mathcal{F}}_{\infty(1\rightarrow3)}^\mu \left( F_{\infty(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\kappa \right) + \frac{1}{9}\bar{\mathcal{F}}_{\infty(1\rightarrow3)}^\kappa \left( F_{\infty(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\kappa \right) \\
\bar{S}_{\infty(3)}^{uni} &= \frac{1}{3}\bar{\mathcal{S}}_{\infty(1\rightarrow3)}^\mu \left( F_{\infty(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\kappa, S_{\infty(1)}^\mu, S_{\infty(1)}^\kappa \right) + \frac{1}{9}\bar{\mathcal{S}}_{\infty(1\rightarrow3)}^\kappa \left( F_{\infty(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\kappa, S_{\infty(1)}^\mu, S_{\infty(1)}^\kappa \right) \\
\bar{\mathcal{F}}_{0(1\rightarrow3)}^\kappa \left( F_{0(1)}^\mu, F_{0(1)}^\kappa \right) &= \varphi_0^{(3)} \bar{\mathcal{F}}_{0(1\rightarrow3)}^\mu \left( F_{0(1)}^\mu, F_{0(1)}^\kappa \right) \\
\bar{\mathcal{F}}_{\infty(1\rightarrow3)}^\kappa \left( F_{\infty(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\kappa \right) &= \varphi_0^{(3)} \bar{\mathcal{F}}_{\infty(1\rightarrow3)}^\mu \left( F_{\infty(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\kappa \right) \\
\bar{\mathcal{S}}_{\infty(1\rightarrow3)}^\kappa \left( F_{\infty(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\kappa, S_{\infty(1)}^\mu, S_{\infty(1)}^\kappa \right) &= \varphi_0^{(3)} \bar{\mathcal{S}}_{\infty(1\rightarrow3)}^\mu \left( F_{\infty(1)}^\mu, F_{\infty(1)}^\kappa, S_{\infty(1)}^\mu, S_{\infty(1)}^\kappa \right)
\end{aligned} \tag{7.29}$$

$$\text{où } \varphi_0^{(3)} = \frac{3 \left( 1 - 2\nu_0^{(3)} \right)}{2 \left( 1 + \nu_0^{(3)} \right)}.$$

### 7.3.4.2 Résultats

**7.3.4.2.1 Coefficient de Poisson du gel de C-S-H constant (CI1)** A partir des courbes de fluage propre uniaxial (Fig. 7.1) des bétons des centrales Civaux BHP, Civaux B11, Paluel, Penly, Chooz, Flamanville, on peut déterminer trois paramètres viscoélastiques macroscopiques  $\bar{F}_{0(3)}^{uni}$ ,  $\bar{F}_{\infty(3)}^{uni}$ ,  $\bar{S}_{\infty(3)}^{uni}$ . Ensuite, on détermine les fonctions  $\bar{\mathcal{F}}_{0(1\rightarrow3)}^\pi(u)$ ,  $\bar{\mathcal{F}}_{\infty(1\rightarrow3)}^\pi(u)$ ,  $\bar{\mathcal{S}}_{\infty(1\rightarrow3)}^\pi(u)$  pour les deux cas : (CI1\_1) on utilise le schéma de Mori-Tanaka pour toutes les échelles, (CI1\_2) à l'échelle du béton on utilise le schéma autocohérent généralisé. En résolvant l'équation (7.28), on trouve les trois paramètres viscoélastiques du gel C-S-H :  $F_{0(1)}^\mu$ ,  $F_{\infty(1)}^\mu$ ,  $S_{\infty(1)}^\mu$ . Enfin, selon la relation (7.23) on trouve les paramètres du modèle de Burgers associés  $\ddot{\eta}_{1(1)}^\mu$ ,  $\ddot{\eta}_{2(1)}^\mu$ ,  $\ddot{E}_{2(1)}^\mu$ . Ces paramètres sont présentés dans le tableau (J.1) pour le cas sans schéma autocohérent et dans le tableau (J.2) pour le cas avec le schéma autocohérent à la dernière échelle.

De la même manière, en déterminant les trois paramètres viscoélastiques uniaxiaux macroscopiques  $\bar{F}_{0(1)}^{uni}$ ,  $\bar{F}_{\infty(1)}^{uni}$ ,  $\bar{S}_{\infty(1)}^{uni}$  à partir des courbes de fluage propre uniaxial des pâtes de ciment Flamanville et Paluel (Fig. 7.2) ainsi que les fonctions  $\bar{\mathcal{F}}_{0(1\rightarrow1)}^\pi(u)$ ,  $\bar{\mathcal{F}}_{\infty(1\rightarrow1)}^\pi(u)$ ,  $\bar{\mathcal{S}}_{\infty(1\rightarrow1)}^\pi(u)$ , les paramètres  $\ddot{\eta}_{1(1)}^\mu$ ,  $\ddot{\eta}_{2(1)}^\mu$ ,  $\ddot{E}_{2(1)}^\mu$  sont identifiés et présentés dans le tableau (J.6).

**7.3.4.2.2 Module de compressibilité du gel C-S-H constant (CI2)** De la même façon, les paramètres  $\ddot{\eta}_{1(1)}^\mu$ ,  $\ddot{\eta}_{2(1)}^\mu$ ,  $\ddot{E}_{2(1)}^\mu$ , identifiés à partir des courbes de fluage uniaxial des bétons, sont calculés et donnés dans le tableau (J.3) pour le cas sans schéma autocohérent et dans le tableau (J.4) pour le cas avec schéma autocohérent à la dernière échelle. Ces mêmes paramètres  $\ddot{\eta}_{1(1)}^\mu$ ,  $\ddot{\eta}_{2(1)}^\mu$ ,  $\ddot{E}_{2(1)}^\mu$ , mais identifiés à partir des courbes de fluage uniaxial des pâtes de ciment, sont présentés dans le tableau (J.6).

**7.3.4.2.3 Coefficient de Poisson du béton constant (CI3)** En supposant que le coefficient de Poisson du béton est constant, les 6 paramètres inconnus  $\ddot{\eta}_{1(1)}^\pi$ ,  $\ddot{\eta}_{2(1)}^\pi$ ,  $\ddot{E}_{2(1)}^\pi$  sont déterminés par la résolution d'un système de 6 équations (Eq. 7.29) de degré 90. En utilisant la méthode de Newton-Raphson avec les points de départ étant ceux du cas CI1, on obtient les solutions après 6 itérations. Cependant, la solution ne converge pas pour le cas du béton Civaux BHP dans les deux cas CI3\_1 et CI3\_2. Pour le béton Civaux B11, la solution ne converge que dans le cas CI3\_2. Les paramètres viscoélastiques sphériques identifiés  $\ddot{\eta}_{1(1)}^\kappa$ ,  $\ddot{\eta}_{2(1)}^\kappa$ ,  $\ddot{E}_{2(1)}^\kappa$  sont présentés dans le tableau (J.8) pour le cas CI3\_1 et dans le tableau (J.10) pour le cas CI3\_2. Les paramètres viscoélastiques déviatoriques identifiés  $\ddot{\eta}_{1(1)}^\mu$ ,  $\ddot{\eta}_{2(1)}^\mu$ ,  $\ddot{E}_{2(1)}^\mu$  sont présentés dans le tableau (J.7) pour le cas sans schéma AG et dans le tableau (J.9) pour le cas avec schéma AG à l'échelle du béton.

**7.3.4.2.4 Identification à partir des courbes de fluage uniaxial du béton et de la pâte (CI4)** On essaye d'utiliser quelques méthodes numériques comme la méthode de Gauss-Seidel, la méthode de gradient conjugué, la méthode de Newton-Raphson et la méthode quasi-Newton pour résoudre le système de 6 équations (7.25) et (7.26), dans lequel  $i = 1$  et  $k = 3$ , mais la solution ne converge pas pour les deux bétons (Flamanville et Paluel) avec lesquels on dispose des courbes de fluage uniaxial de la pâte de ciment.

**7.3.4.2.5 Conclusions** A des fins d'illustration, les valeurs de trois paramètres viscoélastiques déviatoriques identifiés, pour quatre cas CI1\_1, CI1\_2, CI2\_1, CI2\_2, sont représentés par les figures 7.8, 7.9 et 7.10. Les six points correspondent, respectivement aux valeurs des paramètres identifiés pour les bétons de type Civaux BHP, Civaux B11, Paluel, Penly, Chooz, Flamanville. Sur chaque graphe, les droites horizontales présentent la moyenne des paramètres identifiés pour 5 bétons (Civaux BHP, Civaux B11, Paluel, Penly, Chooz).

Pour le cas où le coefficient de Poisson du béton est choisi constant (CI3\_1, CI3\_2), les valeurs des paramètres identifiés pour quatre formulations (Paluel, Penly, Chooz, Flamanville) sont présentées par les figures 7.11, 7.12, 7.13. Pour les formulations (Civaux BHP et Civaux B11), les points manquants sont liés à la divergence (§ 7.3.4.2.3) du processus de résolution du système d'équations (7.29).

1. Premièrement, en regardant le tableau (J.5) et les figures 7.8, 7.9 et 7.10, on constate que l'écart entre les paramètres identifiés en utilisant le schéma de MT et ceux identifiés en utilisant le schéma AG est réduit pour les cas (CI1, CI2). Particulièrement, pour le paramètre  $\ddot{\eta}_{2(1)}^\mu$ , cet écart est particulièrement faible. Avec l'hypothèse du coefficient de Poisson constant, cet écart est plus homogène qu'avec l'hypothèse du module de compressibilité constant : les valeurs diffèrent de façon quasi-identique pour les différentes formulations. A l'image des conclusions dressées dans l'exemple d'un composite biphasé comportant une phase inclusionnaire (§ 6.3), lorsque la fraction volumique de la phase inclusionnaire est inférieure à 0.5, les deux schémas (MT et AG) fournissent quatre paramètres macroscopiques très proches. Cependant, pour le cas du coefficient de Poisson du béton constant (CI3), l'écart entre les paramètres identifiés en utilisant le schéma de MT et ceux identifiés en utilisant le schéma AG est très important et diversifié.
2. La valeur moyenne des paramètres viscoélastiques microscopiques identifiés est différente en fonction de l'hypothèse imposée. On notera cependant qu'on obtient, en comparant deux à deux les différentes hypothèses de calcul, presque le même écart type en pourcentage des paramètres microscopiques identifiés. De plus, on constate que la variation des paramètres déviatoriques identifiés pour chaque béton est similaire pour les trois cas (CI1, CI2, CI3).
3. La courbe de fluage propre uniaxial du béton Flamanville (Fig. 7.1) a une pente très grande par rapport aux autres bétons. D'après une étude d'EDF [33], ce comportement peut être imputée à une interface mécaniquement faible entre les granulats et la pâte de ciment. Par les résultats d'identification des paramètres viscoélastiques microscopiques, on a constaté que la viscosité à long terme du gel C-S-H  $\ddot{\eta}_{1(1)}^\mu$ , identifiée à partir du béton Flamanville a une valeur très différente par rapport aux autres bétons. Donc, on va utiliser la valeur moyenne de 5 bétons (Civaux BHP, Civaux B11, Paluel, Penly, Chooz) comme valeur de référence de la propriété visqueuse du gel C-S-H. Il est à noter que la valeur moyenne de  $\ddot{\eta}_{1(1)}^\mu$  a un ordre de grandeur comparable aux valeurs estimées par Benboudjema [9], lorsqu'il a identifié les propriétés viscoélastiques du gel C-S-H à partir des temps caractéristiques de micro-diffusion de l'eau intrahydrate.
4. Pour les deux paramètres  $\ddot{\eta}_{2(1)}^\mu$ ,  $\ddot{E}_{2(1)}^\mu$ , on obtient un même ordre de grandeur, quand on les identifie à partir des courbes de fluage propre uniaxial des bétons et des pâtes. A l'inverse, pour la viscosité à long terme  $\ddot{\eta}_{1(1)}^\mu$ , les valeurs identifiées à partir des bétons sont de 3 à 6 fois plus grandes que celles identifiées à partir des pâtes. Mais, le problème posé ici est qu'on ne dispose que de 2 courbes de fluage propre uniaxial de pâte Paluel et Flamanville. De plus, on doit imposer

les hypothèses simplificatrices pour pallier à l'absence de mesures permettant de décomposer le comportement sphérique du comportement déviatorique. Dans ces conditions, il est difficile de dresser des conclusions définitives.

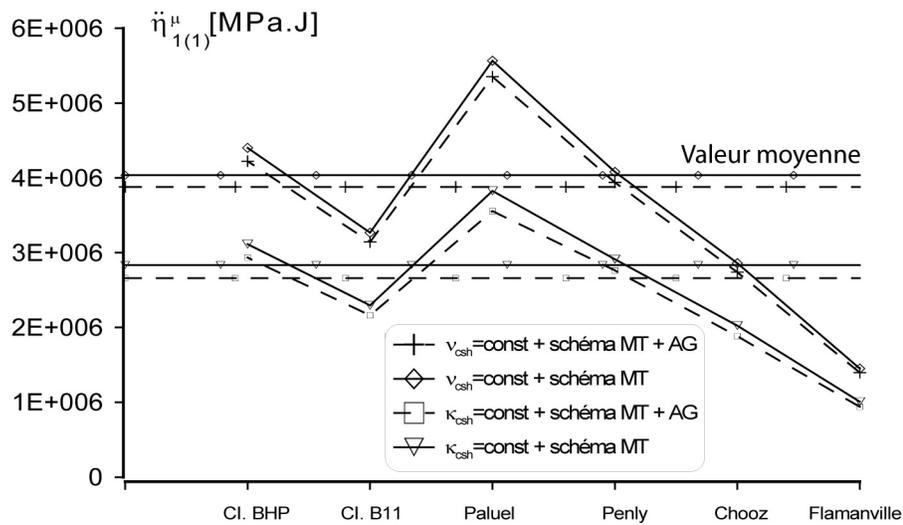


FIG. 7.8 Viscosité à long terme  $\ddot{\eta}_{1(1)}^\mu$  identifiée à partir du fluage uniaxial du béton avec l'hypothèse du coefficient de Poisson ou du module de compressibilité du gel C-S-H constant et l'utilisation du schéma de MT ou du schéma AG à l'échelle du béton.

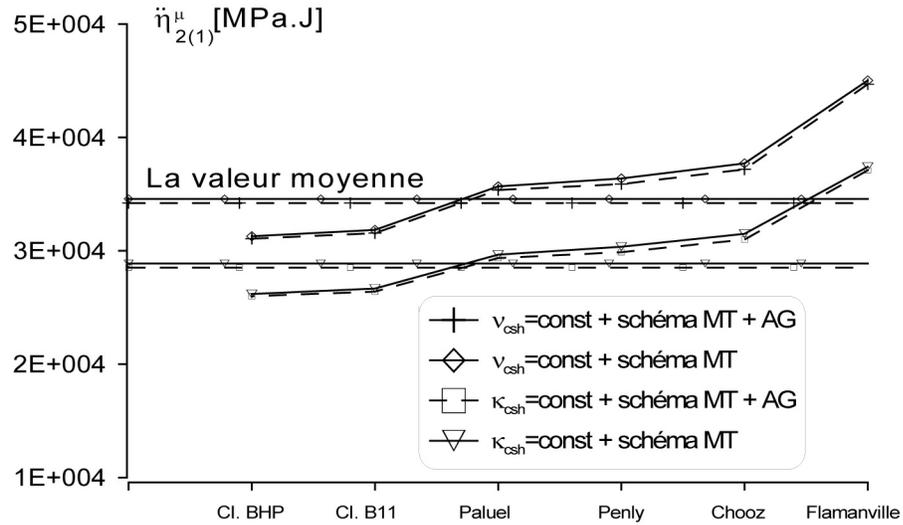


FIG. 7.9 Viscosité  $\ddot{\eta}_{2(1)}^\mu$  identifiée à partir du fluage uniaxial du béton avec l'hypothèse du coefficient de Poisson ou du module de compressibilité du gel C-S-H constant et l'utilisation du schéma de MT ou du schéma AG à l'échelle du béton.

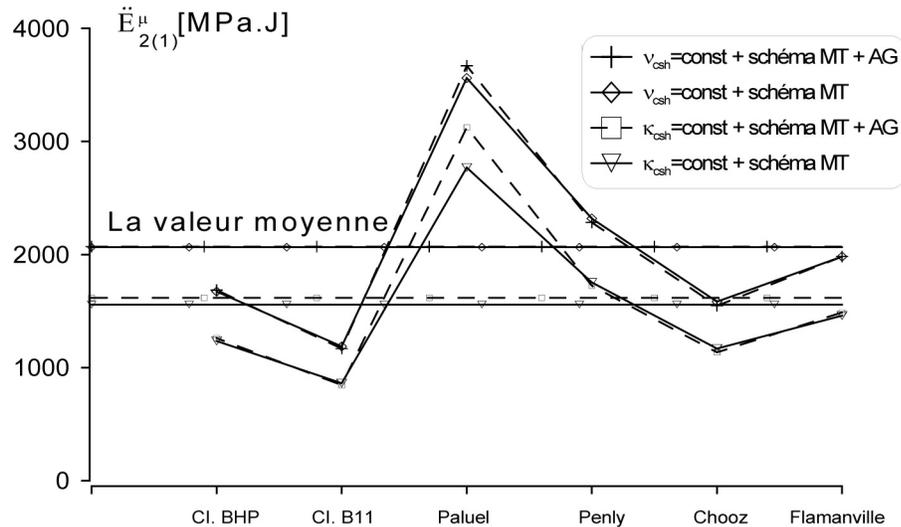


FIG. 7.10 Module élastique différencié  $\ddot{E}_{2(1)}^\mu$  identifié à partir du fluage uniaxial du béton avec l'hypothèse du coefficient de Poisson ou du module de compressibilité du gel C-S-H constant et l'utilisation du schéma de MT ou du schéma AG à l'échelle du béton.

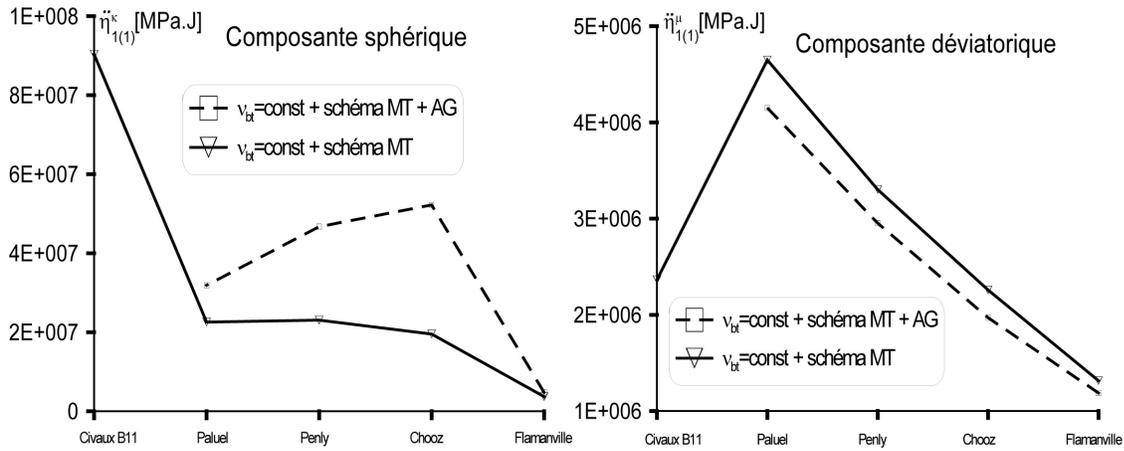


FIG. 7.11 Viscosité à long terme  $\dot{\eta}_{1(1)}^{\pi}$  identifiée à partir du fluage uniaxial du béton avec l'hypothèse du coefficient de Poisson du béton constant et l'utilisation du schéma de MT ou du schéma AG à l'échelle du béton.

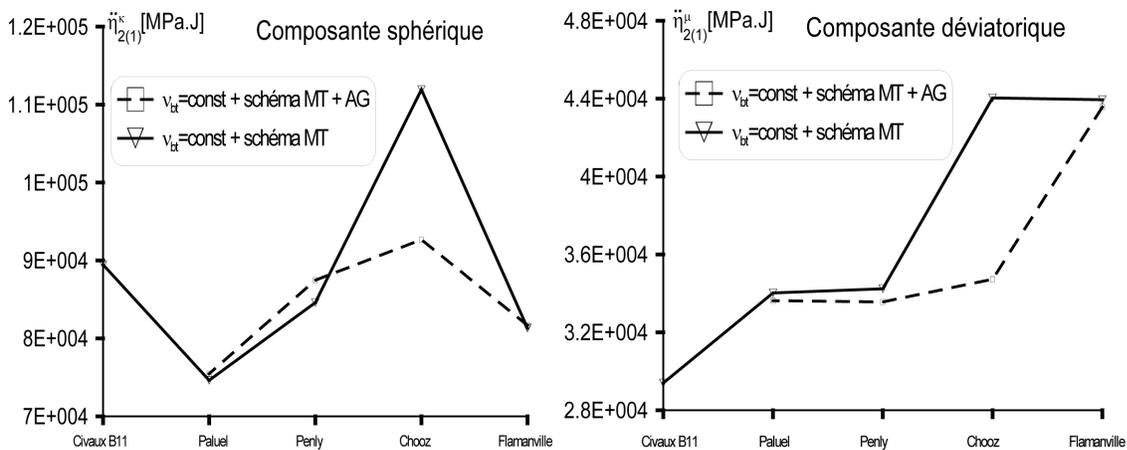


FIG. 7.12 Viscosité à long terme  $\dot{\eta}_{2(1)}^{\pi}$  identifiée à partir du fluage uniaxial du béton avec l'hypothèse du coefficient de Poisson du béton constant et l'utilisation du schéma de MT ou du schéma AG à l'échelle du béton.

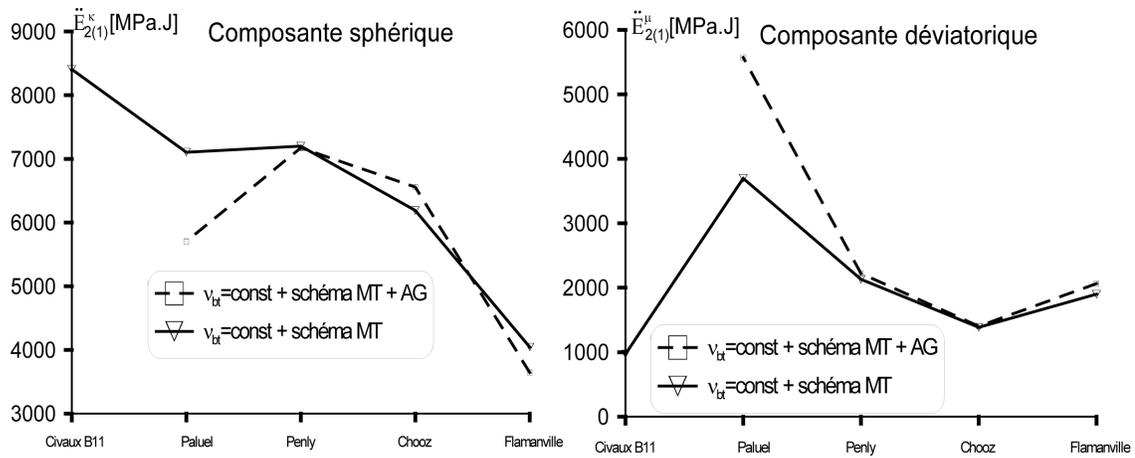


FIG. 7.13 Module élastique différé  $\ddot{E}_{2(1)}^\pi$  identifié à partir du fluage uniaxial du béton avec l'hypothèse du coefficient de Poisson du béton constant et l'utilisation du schéma de MT ou du schéma AG à l'échelle du béton.

### 7.3.5 Application pour estimer le fluage propre du béton

#### 7.3.5.1 Reproductibilité des courbes de fluage uniaxial des bétons

Dans cette section, on détermine l'évolution en fonction du temps de la fonction effective de fluage uniaxial par une formulation donnée, à partir des paramètres viscoélastiques du C-S-H déterminés à partir de la même formulation. L'objectif est de confronter la réponse de l'ensemble du spectre macroscopique à la mesure expérimentale qui a permis de l'identifier. Ce travail permet aussi de valider les méthodes d'inversion de la transformée de Laplace-Carson.

A titre d'exemple, on considère le cas CII\_1, où les paramètres viscoélastiques du gel C-S-H sont identifiés à partir des courbes de fluage uniaxial des bétons avec l'hypothèse du coefficient de Poisson constant et l'utilisation du schéma de MT pour toutes échelles (cas CII\_1). On évalue alors les courbes de fluage uniaxial des 5 bétons suivant Chooz, Paluel, Penly, Civaux B11, Civaux BHP, en utilisant la méthode d'inversion de Post-Widder de rang 2 et le modèle équivalent de Burgers. Les résultats sont présentés sur les figures 7.14, 7.15, 7.16, 7.17, 7.18. On constate qu'avec des dérivées d'ordre deux, la méthode d'inversion semi-analytique de Post-Widder donne déjà des courbes de fluage effectif très proches des courbes expérimentales. Il faut noter que pour ce cas, les transformations de Carson des fonctions de fluage effectif sont des fonctions rationnelles de degré 200 sur 200. La méthode d'inversion numérique ASCSF et la méthode d'inversion semi-analytique ne fonctionnent pas dans ce cas. On constate également que la solution simplifiée par le modèle de Burgers représente correctement le comportement asymptotique du fluage effectif des bétons.

#### 7.3.5.2 Simulation de fluage propre uniaxial des bétons par les valeurs moyennes des paramètres viscoélastiques microscopiques identifiés

On a vu précédemment que la détermination des paramètres microscopiques relatifs au comportement du gel de C-S-H a fourni des résultats avec une certaine dispersion. Dans cette section, on évalue l'impact de considérer les valeurs moyennes de ces paramètres sur le comportement macroscopique du béton.

On utilise les valeurs moyennes des paramètres viscoélastiques microscopiques identifiés (Tab. J.1) à partir de 5 bétons (Chooz, Paluel, Penly, Civaux B11, Civaux BHP) pour le cas du coefficient de Poisson constant (CII). On évalue ensuite le comportement de fluage des bétons comme l'indiquent les

figures 7.19, 7.20, 7.21, 7.22, 7.23, en utilisant la méthode d'inversion de Post-Widder de rang 2 et 4, et le modèle équivalent de Burgers. On constate que la méthode d'inversion de Post-Widder converge très vite, dès les premiers termes.

On obtient les mêmes résultats avec le cas du module de compressibilité du gel C-S-H constant. Car, pour ces deux cas (CI1 et CI2), les paramètres viscoélastiques macroscopiques (Eq. 5.39), avec une valeur fixée de  $E_{1(1)}^\mu$ , deviennent proportionnelle linéaire à ceux microscopiques par les relations :

$$\bar{F}_{0(3)}^\pi = C \times F_{0(1)}^\mu = C \times \left( \frac{1}{\eta_{1(1)}^\mu} + \frac{1}{\eta_{2(1)}^\mu} \right) \quad (7.30)$$

$$\bar{F}_{\infty(3)}^\pi = C_1 \times F_{\infty(1)}^\mu = C_1 \times \frac{1}{\eta_{1(1)}^\mu} \quad (7.31)$$

$$\bar{S}_{\infty(3)}^\pi = C_2 \times \frac{1}{E_{2(1)}^\mu} + C_3 \quad (7.32)$$

où  $C$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  sont des constantes. A partir de ces relations, on obtient aisément que malgré que la différence sur les valeurs moyennes des paramètres identifiés  $\eta_{1(1)}^\mu$ ,  $\eta_{2(1)}^\mu$ ,  $E_{2(1)}^\mu$  pour les deux cas considérés, on obtient les mêmes courbes de prédiction pour ces cas.

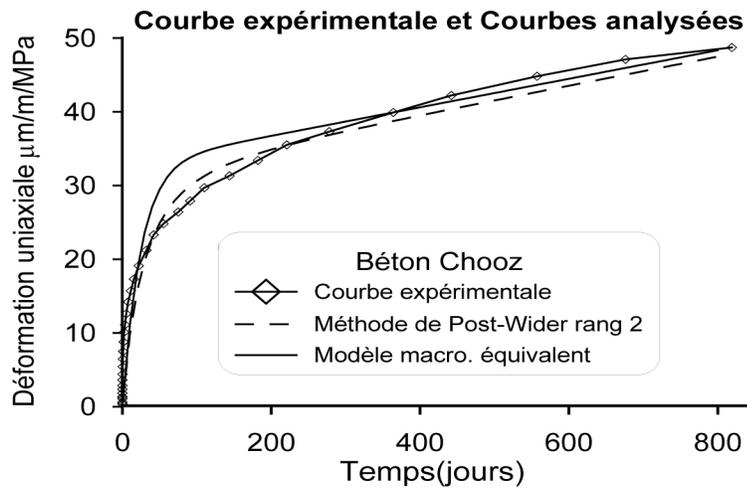


FIG. 7.14 Courbe expérimentale et courbes analysées du fluage uniaxial du béton Chooz

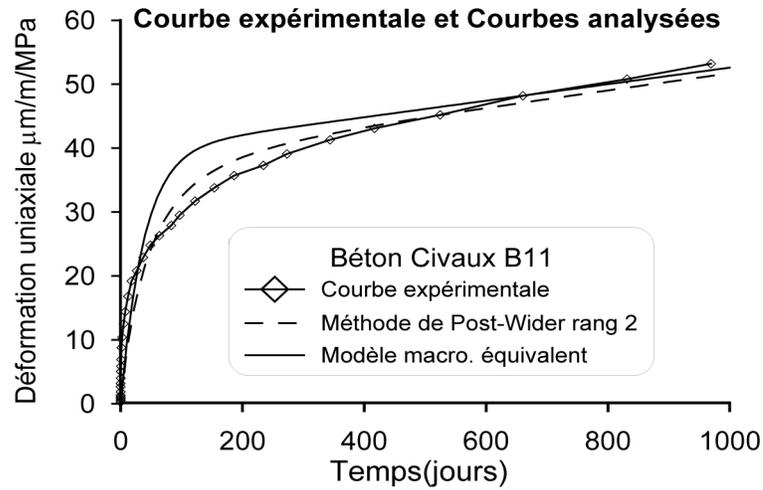


FIG. 7.15 Courbe expérimentale et courbes analysées du fluage uniaxial du béton Civaux B11

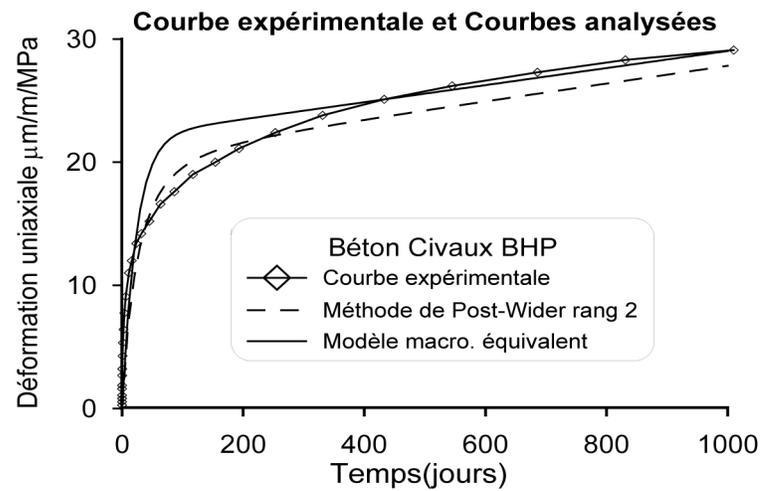


FIG. 7.16 Courbe expérimentale et courbes analysées du fluage uniaxial du béton Civaux BHP

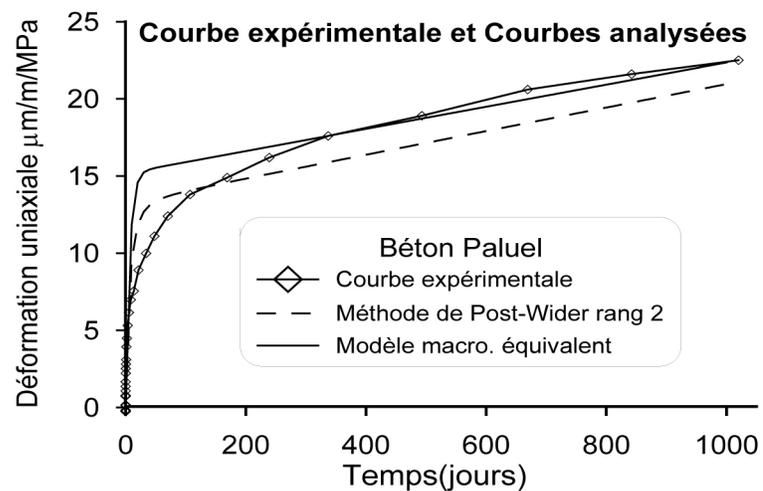


FIG. 7.17 Courbe expérimentale et courbes analysées du fluage uniaxial du béton Paluel

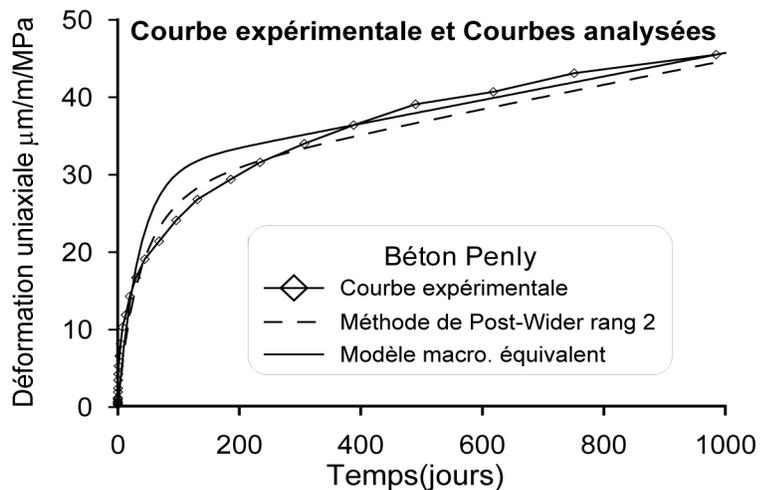


FIG. 7.18 Courbe expérimentale et courbes analysées du fluage uniaxial du béton Penly

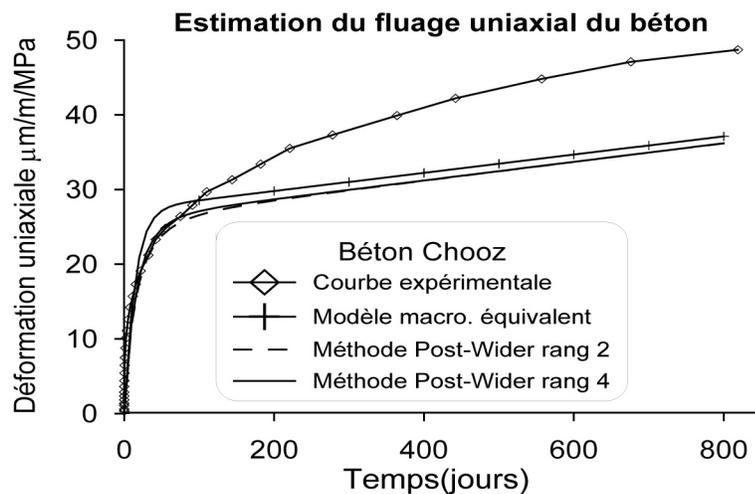


FIG. 7.19 Prédiction du fluage uniaxial du béton Chooz par : (i) le modèle équivalent de Burgers, (ii) les valeurs moyennes des paramètres microscopiques identifiés, (iii) l'hypothèse du coefficient de Poisson du gel C-S-H constant, (iv) l'utilisation du schéma de MT pour toutes échelles.

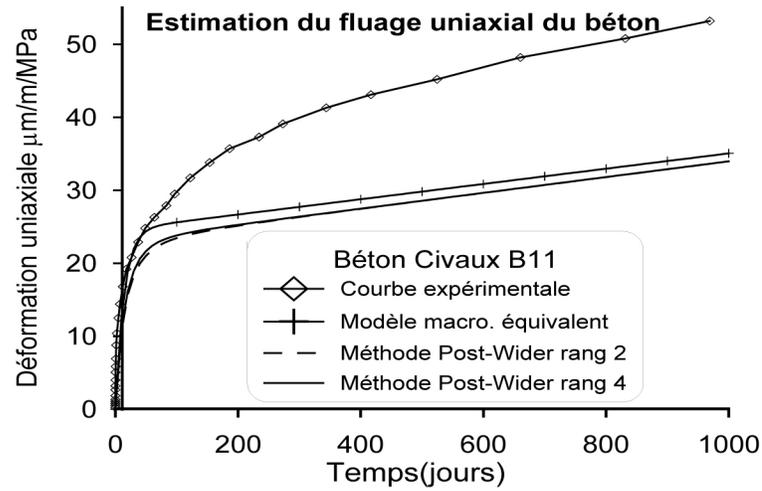


FIG. 7.20 Prédiction du fluage uniaxial du béton Civaux B11 par : (i) le modèle équivalent de Burgers, (ii) les valeurs moyennes des paramètres microscopiques identifiés, (iii) l'hypothèse du coefficient de Poisson du gel C-S-H constant, (iv) l'utilisation du schéma de MT pour toutes échelles.

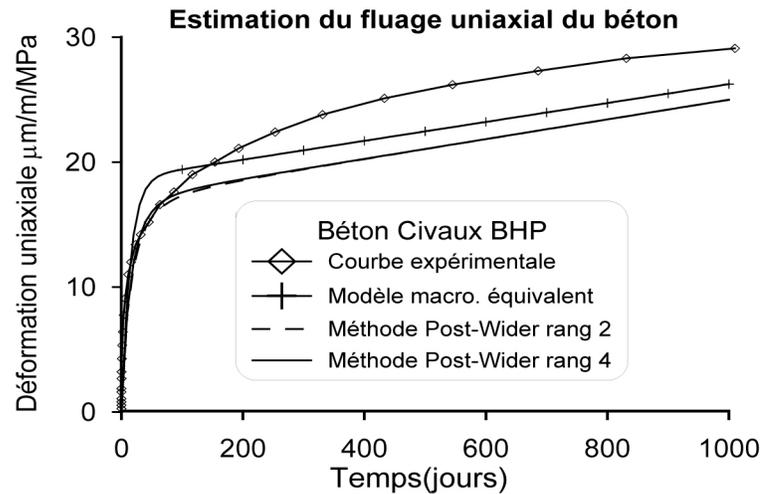


FIG. 7.21 Prédiction du fluage uniaxial du béton Civaux BHP par : (i) le modèle équivalent de Burgers, (ii) les valeurs moyennes des paramètres microscopiques identifiés, (iii) l'hypothèse du coefficient de Poisson du gel C-S-H constant, (iv) l'utilisation du schéma de MT pour toutes échelles.

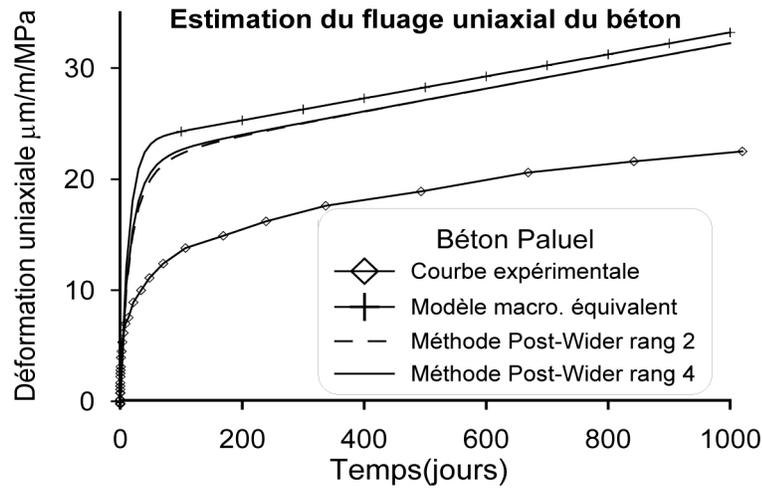


FIG. 7.22 Prédiction du fluage uniaxial du béton Paluel par : (i) le modèle équivalent de Burgers, (ii) les valeurs moyennes des paramètres microscopiques identifiés, (iii) l'hypothèse du coefficient de Poisson du gel C-S-H constant, (iv) l'utilisation du schéma de MT pour toutes échelles.

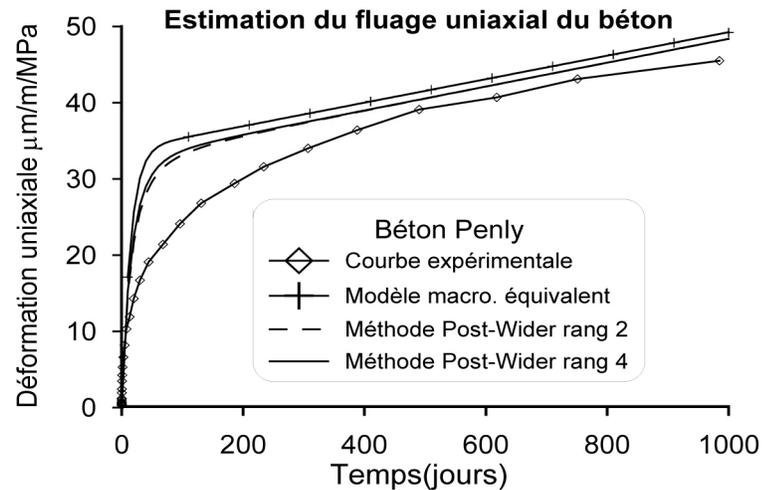


FIG. 7.23 Prédiction du fluage uniaxial du béton Penly par : (i) le modèle équivalent de Burgers, (ii) les valeurs moyennes des paramètres microscopiques identifiés, (iii) l'hypothèse du coefficient de Poisson du gel C-S-H constant, (iv) l'utilisation du schéma de MT pour toutes échelles.

### 7.3.5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons procédé à une homogénéisation viscoélastique multiéchelle pour caractériser le processus de fluage du béton à son échelle d'occurrence. La première échelle est donc celle du C-S-H qui est à l'origine du fluage microscopique et dont les propriétés viscoélastiques, supposées être intrinsèques, sont identifiées en utilisant la méthode analytique du modèle macroscopique équivalent. Ainsi, pour les différentes formulations de bétons, on a pu déterminer les valeurs des paramètres viscoélastiques instantanés et à long terme du C-S-H. Cependant, cette identification est entachée par des hypothèses restrictives liées au fait que pour chaque formulation, seule la complaisance uniaxiale de fluage macroscopique est donnée.

Nous avons alors analysé les résultats de cette identification en quantifiant l'impacte du choix de ces hypothèses restrictives. Nous avons également analysé l'influence du choix du schéma d'homogénéisation.

Les résultats montrent une dispersion relativement importante, entre les formulations, des valeurs de ces paramètres, supposés intrinsèques. Néanmoins, les mêmes ordres de grandeur sont préservés. Ces ordres de grandeur correspondent à ceux identifiés par Benboudjema [9] lorsqu'il les a déterminés à partir des temps caractéristiques des processus de microdiffusion de l'eau adsorbée inter-foliaire et inter-lamellaire.

La dispersion ne semble pas être affectée par le choix de l'hypothèse restrictive à l'échelle microscopique : coefficient de Poisson constant ou fluage isochore. Seules les amplitudes des paramètres changent de façon quasi-identique pour les différentes formulations lorsqu'on change d'une hypothèse à l'autre. Sous ces mêmes hypothèses, le schéma d'homogénéisation ne semble pas impacté cette dispersion lorsqu'il change lors du dernier niveau d'homogénéisation (passage mortier-béton).

Lorsqu'on considère que le coefficient de fluage macroscopique est constant, ces constatations semblent rester valables pour les paramètres déviatoriques à l'exception du paramètre  $1/\dot{\eta}_2^\mu$ . D'autre part, la dispersion des paramètres sphériques présente une différence notable lorsqu'on change de schéma.

La complaisance de fluage de chaque formulation construite à partir des seuls paramètres instantanés et à long terme du C-S-H de la même formulation coïncide quasiment avec la complaisance expérimentale ayant servi à l'identification de ces paramètres. La démarche semble donc relativement pertinente : la connaissance des valeurs adéquates des paramètres caractérisant le comportement viscoélastique instantané et à long terme du C-S-H suffit pour générer la totalité du spectre macroscopique expérimental. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'homogénéisation multi-échelle augmente considérablement le spectre macroscopique, la contribution du spectre microscopique devient secondaire. Cependant, cette homogénéisation n'est pas capable d'atténuer l'effet, à l'échelle macroscopique, de la dispersion des valeurs des paramètres microscopiques.

Globalement, la dispersion entre formulations peut s'expliquer par le caractère arbitraire des hypothèses restrictives ayant été utilisées lors de l'identification en plus du fait que l'asymptote du fluage macroscopique est estimée avoir été atteinte au même temps pour les différentes formulations. Les essais en cours de fluage biaxial sur une plus longue durée et avec la mesure du coefficient de Poisson permettront de lever en partie les verrous mentionnés plus haut en matière d'identification expérimentale, ce qui permettra de mieux appréhender la part modèle de l'erreur.



## **Conclusion et perspectives**



---

## Conclusion générale

Dans ce travail, on a présenté une approche multi-échelle permettant de construire le comportement macroscopique d'un matériau viscoélastique hétérogène à partir de la connaissance de sa microstructure et du comportement de ses constituants. Le milieu à homogénéiser consiste en un composite viscoélastique comportant un nombre paramétrique d'inclusions élastiques ou poreuses noyées dans une matrice viscoélastique isotrope dont le comportement est représenté par un modèle généralisé de Kelvin ou de Maxwell. On s'est limité au cas de la viscoélasticité isotherme isotrope linéaire non vieillissante et de l'interface parfaite entre les phases.

Cette approche est basée sur l'extension des schémas d'homogénéisation élastique au cas de la viscoélasticité en s'appuyant sur le principe de correspondance de Lee-Mandel. Ce principe consiste à utiliser les transformées de Laplace-Carson pour ramener un problème viscoélastique à un problème élastique équivalent. Il s'agit alors de construire des estimations des propriétés macroscopiques pour ce problème équivalent à l'image des estimations en homogénéisation élastique. Les propriétés viscoélastiques homogénéisées sont alors obtenues dans l'espace de la transformée de Laplace-Carson. Il s'agit par la suite de procéder à l'inversion de cette transformée afin de déterminer l'expression des propriétés viscoélastiques homogénéisées dans l'espace temporel.

Cependant, les expressions des propriétés homogénéisées dans l'espace transformé ne permettent pas de construire systématiquement leurs transformées inverses de façon analytique. Il faut alors avoir recours à des méthodes numériques d'inversion. A ce propos, on a adopté deux méthodes proposées dans littérature :

- la première utilise une technique d'accélération de la convergence des séries de Fourier (ACSF), ces dernières permettent d'approcher l'intégrale de Bromwich par la méthode des trapèzes,
- la seconde correspond à une méthode différentielle basée sur la suite inverse de Post-Widder.

On a alors procédé à la mise en oeuvre d'un outil numérique basé sur ces deux méthodes. En plus, on a développé un algorithme permettant d'accélérer le calcul des dérivées de degré quelconque de fonctions rationnelles ou irrationnelles pour la méthode de Post-Widder. Pour cette méthode, lorsque la transformée de Laplace-Carson de la fonction viscoélastique effective correspond à une chaîne de Kelvin, on a également explicité les propriétés de convergence, ce qui permet de déterminer un ordre de dérivation pour avoir une solution approchée satisfaisante. Les calculs effectués avec ces méthodes montrent une meilleure stabilité et convergence de la méthode de Post-Widder améliorée. En effet, la méthode ACSF est très coûteuse en temps de calcul et semble instable dès lors que la fonction rationnelle à inverser à un degré très grand.

Par ailleurs, les méthodes numériques ne permettent pas de bien appréhender l'influence des propriétés microscopiques et de la microstructure sur le comportement macroscopique, notamment dans le cas d'homogénéisation à échelles multiples. On a alors développé une méthode semi-analytique, basée sur une stratégie de résolution à deux étapes. Cependant, cette méthode se limite aux cas où le fluage microscopique n'est décrit que par une seule fonction viscoélastique : c'est notamment le cas du coefficient de Poisson ou du module de compressibilité microscopiques constants. Dans ces cas, les expressions des fonctions viscoélastiques macroscopiques sont pré-établies analytiquement dans l'espace temporel pour les deux schémas considérés dans cette étude : le schéma de Mori-Tanaka et celui auto-cohérent généralisé. Ces expressions analytiques nécessitent de déterminer les temps caractéristiques macroscopiques, donnés par les racines de polynômes dont les degrés dépendent du nombre de phase et de la dimension du spectre viscoélastique microscopique. La stratégie à deux étapes de résolution a permis d'analyser la structure du spectre macroscopique vis à vis des temps microscopiques et de mettre en évidence l'existence de critères de compatibilité du spectre microscopique pour préserver les propriétés monotone, croissante et convexe des fonctions effectives. Elle a également permis d'augmenter le nombre de solutions pouvant être déterminées analytiquement, en découplant la complexité liée à

un grand nombre de phases de celle liée à une grande dimension du spectre microscopique. Néanmoins, cette méthode reste tributaire des hypothèses simplificatrices sous-jacentes et au calcul numérique des racines de polynômes. Cette méthode atteint ses limites du fait des erreurs d'arrondi lorsque les degrés de ces polynômes deviennent importants.

Enfin, une solution analytique approchée a été développée sans avoir à inverser la transformée de Laplace-Carson des fonctions effectives. Cette méthode consiste à relier quatre paramètres, caractérisant le fluage microscopique instantané et à long terme, à quatre paramètres caractérisant, de façon similaire, le fluage macroscopique. Les relations entre ces deux familles de paramètres jouissent de propriétés récursives ce qui permet de généraliser naturellement la démarche à une homogénéisation multi-échelle. Sur la base de ces quatre paramètres, un modèle macroscopique équivalent est construit. On a alors montré que cette approche donne des solutions très satisfaisantes tout en permettant de disposer de solutions analytiques quelque soit la complexité du problème. En plus cette méthode réduit considérablement les temps de calculs.

Les différentes méthodes développées sont par la suite appliquées à l'étude multi-échelle du comportement de fluage propre du béton. La microstructure du béton est décomposée en trois niveaux : la pâte, le mortier et le béton. A chaque niveau, on considère que le milieu se présente comme un composite constitué d'inclusions élastiques ou poreuses noyées dans une matrice viscoélastique. Plusieurs formulations de bétons sont étudiées. On part d'une échelle que l'on considère non impactée par la formulation et on construit la fonction de fluage macroscopique sur la base de la connaissance des fractions volumiques des phases et des propriétés intrinsèques de celles-ci.

La première échelle est celle du C-S-H qui est à l'origine du fluage microscopique et dont les propriétés viscoélastiques, supposées être intrinsèques, sont identifiées en utilisant la méthode analytique du modèle macroscopique équivalent. Ainsi, pour les différentes formulations de bétons, on a pu déterminer les valeurs des paramètres viscoélastiques instantanés et à long terme du C-S-H. Cependant, cette identification est entachée par des hypothèses restrictives liées au fait que pour chaque formulation, seule la complaisance uniaxiale de fluage macroscopique est donnée.

L'analyse des ces résultats, montrent une dispersion relativement importante des ces paramètres tout en préservant, néanmoins, les mêmes ordres de grandeur. Ces ordres de grandeur semblent être corroborés par l'analyse des temps caractéristiques des processus de microdiffusion de l'eau adsorbée interhydrates. Cette dispersion, peut s'expliquer par le caractère arbitraire des hypothèses restrictives ayant été utilisées lors de l'identification en plus du fait que l'asymptote du fluage macroscopique est estimée avoir été atteinte au même temps pour les différentes formulations.

La complaisance de fluage de chaque formulation construite à partir des seuls paramètres instantanés et à long terme du C-S-H de la même formulation coïncide quasiment avec la complaisance expérimentale ayant servi à l'identification des ces paramètres. La démarche semble donc relativement pertinente : la connaissance des valeurs adéquates des paramètres caractérisant le comportement viscoélastique instantané et à long terme du C-S-H suffit pour générer le bon spectre macroscopique. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'homogénéisation multi-échelle augmente considérablement le spectre macroscopique, la contribution du spectre microscopique devient secondaire. Cependant, cette homogénéisation n'est pas capable d'atténuer l'effet, à l'échelle macroscopique, de la dispersion des valeurs des paramètres microscopiques.

En somme, ce travail a permis, sur la base d'une approche originale en homogénéisation viscoélastique, d'élaborer une procédure d'identification du comportement viscoélastique intrinsèque du C-S-H à partir du comportement macroscopique du béton. Cette identification est alors sujette, d'une part, à la dispersion expérimentale et d'autre part à une erreur de modèle qu'il convient d'évaluer. Les essais en cours de fluage biaxial sur une plus longue durée et avec la mesure du coefficient de Poisson permettront de lever en partie les verrous mentionnés plus haut en matière d'identification expérimentale. Les autres éléments de réflexion sont présentés en perspectives.

---

## Perspectives

Au-delà des résultats encourageants que nous avons obtenus, il convient de préciser les perspectives futures, qui permettront de mieux comprendre le comportement différé du béton. Les perspectives se situent, à la fois au niveau de la modélisation qu'au niveau de l'expérimentation.

### **Du point de vue de la modélisation :**

Lorsqu'on recale la viscosité du gel de C-S-H à partir d'un essai de fluage sur pâte de ciment et qu'on estime le comportement en fluage à long terme du béton, on constate qu'on sous-estime la viscosité du matériau que l'on utilise le schéma de Mori-Tanaka ou le schéma autocohérent généralisé pour le passage du mortier au béton. Pour ce qui est des déformations instantanées, l'un et l'autre schémas donnent des résultats satisfaisants. Il semble donc légitime de s'interroger sur la pertinence du schéma utilisé. Les chemins de sollicitations dans un béton suivent le squelette granulaire, les zones de matrice sollicitées sont assez limitées tant en épaisseur que peut être en volume. Il y a donc un effet de localisation prononcé qui semble nécessiter de recourir à une modélisation qui intègre explicitement les interactions granulaires et les zones de pâte « non ou peu active ». Une approche de type trois-phases comme celle développée par Le Roy [70] peut s'avérer une piste d'étude intéressante qui permettrait d'intégrer comme nouveau facteur morphologique la compacité initiale du mélange granulaire.

Au delà, il semble nécessaire pour mieux saisir le comportement du matériau de faire appel à la modélisation numérique tridimensionnelle pour avoir des éléments de comparaisons tangibles avec les approches analytiques développées dans le cadre de ce travail. La simulation numérique permettra de mieux évaluer le rôle de la morphologie granulaire. Il s'agit d'un travail de longue haleine nécessitant des développements numériques adaptés et des moyens de caractérisation de la morphologie du squelette granulaire.

### **Du point de vue de l'expérimentation :**

D'une manière générale, ce travail s'est heurté au manque de données expérimentales qui satisfassent tous les critères suivants : essais avec un même ciment et un même rapport eau sur ciment aux échelles de la pâte, du mortier et du béton pour lesquels on dispose de données permettant une décomposition des composantes isotropes et déviatoriques. Il y a donc matière à développer un programme expérimental qui permette d'acquérir de tels résultats.

Par ailleurs, il est difficile de conclure sur le caractère asymptotique du fluage en laboratoire mesuré même après trois ans d'essais.



# Bibliographie

- [1] P. Acker. Micromechanical analysis of creep and shrinkage mechanisms. In F. J. Ulm, Z. P. Bazant, and F. Wittmann, editors, *Creep, Shrinkage and Durability Mechanics of Concrete and other Quasi-Brittle Materials*, pages 15–25. Elsevier, Oxford UK, 2001.
- [2] J. Ahn, S. Kang, and Y. H. Kwon. A flexible inverse Laplace transform algorithm and its application. *Computing*, 71(2) :115–131, 2003.
- [3] S. Baweja, G. J. Dvorak, and Z. P. Bazant. Triaxial composite model for basic creep of concrete. *Journal of engineering mechanics*, 124(9) :959–965, 1998.
- [4] Z. P. Bazant. *Mathematical Modeling of Creep and Shrinkage of Concrete*. John Wiley & Sons, Chichester and New York, 1988.
- [5] Z. P. Bazant and A. Asghari. Computation of Kelvin chain retardation spectra of aging concrete. *Cement and Concrete Research*, 4 :797–806, 1974.
- [6] Z. P. Bazant and E. Osman. Double power law for basic creep of concrete. *Materials and Structures*, 9 :3–11, 1976.
- [7] Z. P. Bazant and F. H. Wittmann. *Creep and Shrinkage in Concrete Structures*. John Wiley & Sons, London, 1982.
- [8] Z. P. Bazant and Y. Xi. Continuous retardation spectrum for solidification theory of concrete creep. *Journal of Engineering Mechanics*, 121 :281–288, 1995.
- [9] F. Benboudjema. *Modélisation des déformations différées du béton sous sollicitations biaxiales. Application aux enceintes de confinement de bâtiments réacteurs des centrales nucléaires*. PhD thesis, Université de Marne la Vallée, 2002.
- [10] D. P. Bentz. CEMHYD3D : A Three-Dimensional Cement Hydration and Microstructure Development Modelling Package. Version 2.0. Technical report, 2000.
- [11] Y. Benveniste. New approach to the application of Mori-Tanaka’s theory in composites materials. *Mechanics of Materials*, 6(2) :147–157, 1987.
- [12] O. Bernard, F. J. Ulm, and J. T. Germaine. Volume and deviator creep of calcium-leached cement-based materials. *Cement and Concrete Research*, 33(8) :1127–1136, 2003.
- [13] O. Bernard, F. J. Ulm, and E. Lemarchand. A multiscale micromechanics-hydration model for the early-age elastic properties of cement-based materials. *Cement and Concrete Research*, 33 :1293–1309, 2003.
- [14] S. Beurthey and A. Zaoui. Structural morphology and relaxation spectra of viscoelastic heterogeneous materials. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 19(1) :1–16, 2000.
- [15] M. A. Biot. Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena. *Journal of Applied Physics*, 25 :1385–1391, 1954.
- [16] D. R. Bland. *Theory of Linear Viscoelasticity*. Pergamon Press, New York, 1960.
- [17] V. L. Bonavetti, V. F. Rahhal, and E. F. Irassar. Studies on the carboaluminate formation in limestone filler-blended cements. *Cement and Concrete Research*, 31(6) :853–859, 2001.
- [18] M. Bornert, T. Bretheau, and P. Gilormini. *Homogénéisation en mécanique des matériaux, 1. Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*. HERMES Science, Paris, 2002.
- [19] M. Bornert, T. Bretheau, and P. Gilormini. *Homogénéisation en mécanique des matériaux, 2. Comportements non linéaires et problèmes ouverts*. HERMES Science, Paris, 2002.
- [20] S. Breuer and E. T. Onat. On the determination of free energy in linear viscoelastic solids. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 15(2) :184–191, 1964.

- [21] L. C. Brinson and W. S. Lin. Comparison of micromechanics methods for effective properties of multiphase viscoelastic composites. *Composite Structures*, 41 :353–367, 1998.
- [22] L. Cheng, X. Xia, L. E. Scriven, and W. W. Gerbelich. Spherical-tip indentation of viscoelastic material. *Mechanics of Materials*, 37(1) :213–226, 2005.
- [23] R. M. Christensen. *Theory of viscoelasticity*. Dover Publications, New York, 1982.
- [24] R. M. Christensen. A critical evaluation for a class of micro-mechanics models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 38(3) :379–404, 1990.
- [25] R. M. Christensen. Two theoretical elasticity micromechanics models. *Journal of Elasticity*, 50 :15–25, 1998.
- [26] R. M. Christensen and K. H. Lo. Solutions for effective shear properties in three-phases sphere and cylinder models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 27(4), 1979.
- [27] A. M. Cohen. *Numerical methods for Laplace transform inversion*, volume 5. Springer, New York, 2007.
- [28] B. D. Coleman and W. Noll. Foundation of linear viscoelasticity. *Journal Review of Modern Physics*, 33(2) :239–249, 1961.
- [29] G. Constantinides and F. J. Ulm. The effect of two types of C-S-H on the elasticity of cement-based materials : Results from nanoindentation and micromechanical modeling. *Cement and Concrete Research*, 34 :67–80, 2004.
- [30] F. R. de Hoog, J. H. Knight, and A. N. Stokes. An improved method for numerical inversion of Laplace transforms. *Journal on Scientific and Statistical Computing*, 3(3) :357–366, 1982.
- [31] C. Donolato. Analytical and numerical inversion of the Laplace-carson transform by a differential method. *Computer Physics Communications*, 145 :298–309, 2002.
- [32] F. Durbin. Numerical inversion of Laplace transforms : an efficient improvement to Dubner and Abate’s method. *Computer Journal*, 17(4) :371–376, 1974.
- [33] EDF. Rapport interne. Note confidentielle. Technical report, EDF R&D.
- [34] EDF. Filler A-BB. Technical report, EDF R&D, 2000.
- [35] G. L. England. Method of estimating creep and shrinkage strains in concrete from properties of constituent materials. *Journal of the American Concrete Institute*, 62(11) :1411–1420, 1965.
- [36] J. D. Eshelby. The continuum theory of lattice defects. *Solid State Physics*, 3 :79–144, 1956.
- [37] J. D. Eshelby. The determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and related problem. *Proceedings Royal Society London A(241)*, pages 376–396, 1957.
- [38] F.T. Fisher and L. C. Brinson. Viscoelastic interphases in polymer matrix composites : theoretical models and finite-element analysis. *Composites Science and Technology*, 61 :731–748, 2001.
- [39] C. Friebel, I. Doghri, and V. Legat. General mean-field homogenization schemes for viscoelastic composites containing multiple phases of coated inclusions. *International Journal of Solids and Structures*, 43 :2513–2541, 2006.
- [40] R. Garver. On the nature of the roots of a quartic equation. *Mathematics News Letter*, 7(4) :6–8, 1933.
- [41] S. Gerlach and A. Matzenmiller. Micromechanical modelling of viscoelastic fiber-matrix bond in composites. In H. A. Mang, F. G. Rammerstorfer, and J. Eberhardsteiner, editors, *Proceeding of the 5th World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*, pages 15–25, Vienna University of Technology, Austria, July 7-12, 2002.
- [42] K. S. Gopalakrishnan, A. M. Neville, and A. Ghali. Elastic and time-dependent effects of aggregate-matrix interaction. *Materials and Structures*, 3(16) :225–236, 1970.

- [43] L. P. Granger. *Comportement différé du béton dans les enceintes de confinement de centrales nucléaires, analyse et modélisation*. ouvrages d'art - OA21, 2-7208-2500 X. LCPC, Paris, 1996.
- [44] L. P. Granger and Z. P. Bazant. Effect of composition on basic creep of concrete and cement paste. *Journal of engineering mechanics*, 121(11) :1261–1270, 1995.
- [45] B. Gross. On creep and relaxation. *Journal of Applied Physics*, 19 :257–264, 1946.
- [46] M. E. Gurtin and E. Sternberg. On the linear theory of viscoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11(1), 1962.
- [47] T. C. Hansen. Theories of multi-phase materials applied to concrete, cement mortar and cement paste. In *International Conference on the Structure of Concrete*, pages 16–23. Cement and concrete association, London, 1966.
- [48] Z. Hashin. The elastic moduli of heterogeneous materials. *Journal of Applied Mechanics*, 29, 1962.
- [49] Z. Hashin. Viscoelastic behaviour of heterogeneous media. *Journal of Applied Mechanics*, 32, 1965.
- [50] Z. Hashin and S. Shtrikman. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10(4) :335–342, 1962.
- [51] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(2) :127–140, 1963.
- [52] Q. C. He. 3D elastic neutral inclusions with imperfect interfaces. *Comptes Rendus Mécanique*, 330(10) :691–696, 2002.
- [53] E. Hervé and A. Zaoui. Modelling the effective behavior of nonlinear matrix-inclusion composites. *European Journal of the Mechanics and Solids*, 4(6), 1990.
- [54] R. Hill. A self consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(4) :213–222, 1965.
- [55] D. W. Hobbs. The dependence of the bulk modulus, young's modulus, creep, shrinkage and thermal expansion of concrete upon aggregate volume concentration. *Materials and Structures*, 4(2) :107–114, 1971.
- [56] C. Huet. Bounds for the overall properties of viscoelastic heterogeneous and composite materials. *Archives of Mechanics*, 47 :1125–1155, 1995.
- [57] J. M. Illston. The components of strain in concrete under sustained compressive stress. *Magazine of Concrete Research*, 17(50) :21–28, 1965.
- [58] D. L. Jagerman. An inversion technique for the Laplace transform with application to approximation. *The Bell System Technical Journal*, 57(3) :669–710, 1978.
- [59] D. L. Jagerman. An inversion technique for the Laplace transform. *The Bell System Technical Journal*, 61(8) :1995–2002, 1982.
- [60] H. M. Jennings and P. D. Tennis. Model for the developing microstructure in Portland cement pastes. *Journal of the American Ceramic Society*, 77(12) :3161–3172, 1994.
- [61] H. M. Jennings and P. D. Tennis. Correction : Model for the developing microstructure in Portland cement pastes. *Journal of the American Ceramic Society*, 78(9) :2575, 1995.
- [62] S. Kamali. *Comportement et simulation des matériaux cimentaires en environnements agressifs : lixiviation et température*. PhD thesis, LMT-ENS de Cachan, France, 2003.
- [63] P. Kumar Mehta and P. J. M. Monteiro. *Concrete*. Prentice Hall, London, 1993.
- [64] Q. V. Le, Y. Le-Pape, F. Meftah, and Q. C. He. Upscaling techniques for modeling the basic creep of cement paste (CD-ROM). In *WCCMVII, 7th World Congress on Computational Mechanics*, 16-22/07/2006, Los Angeles, USA, 2006.

- [65] Q. V. Le, Y. Le-Pape, F. Meftah, and Q. C. He. Upscaling techniques for modeling the basic creep of cement paste. In G. Pijaudier-Cabot, B. Gérard, and P. Acker, editors, *Creep, shrinkage and durability of concrete and concrete structures*, pages 113–118. Hermes Science, 2005.
- [66] Q. V. Le, F. Meftah, Q. C. He, and Y. Le-Pape. Analytical derivation of the asymptotic creep behavior of concrete by multiscale. In M. Jirasek, Z. Bittnar, and H. Mang, editors, *Modelling of Heterogeneous Materials with Application in Construction and Biomedical Engineering*, pages 320–321, 2007.
- [67] Q. V. Le, F. Meftah, Q. C. He, and Y. Le-Pape. Creep and relaxation functions of a heterogeneous viscoelastic porous medium using the Mori-Tanaka homogenization scheme and a discrete microscopic retardation spectrum. *Mechanics of Time Dependent Materials*, 11(3-4) :309–331, 2007.
- [68] Y. Le Pape. Utilisation des techniques de changement d'échelle pour l'expertise du comportement mécanique des bétons dans le contexte de l'industrie électronucléaire et hydroélectrique. In L. Dormieux, editor, *Colloque Microstructure et Propriétés des Matériaux*, pages 83–88, ENPC, Marne-la-Vallée, France, 2005.
- [69] Y. Le Pape. What can be learnt from the use of homogenization techniques to derive the mechanical properties of concrete in an industrial context? In G.Z. Voyiadis and R. Dorgan, editors, *Proceedings of the Joint ASME/ASCE/SES Conference on Mechanics and Materials*, Baton Rouge, Louisiana, USA, 2005.
- [70] R. Le Roy. *Déformations instantanées et différées des bétons à hautes performances*. PhD thesis, ENPC, 1996.
- [71] R. Le Roy and L. Granger. Calcul des déformations instantanées et de fluage du béton à partir de celles de la pâte de ciment. Technical report, 1995.
- [72] J. Lemaître and J. L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1985.
- [73] A. E. H. Love. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Dover Publications, New York, 1927.
- [74] J. Mandel. *Mécanique des milieux continus*. Gauthier Villars, Paris, 1966.
- [75] R. Masson, M. Bornert, P. Suquet, and A. Zaoui. An affine formulation for the prediction of the effective properties of nonlinear composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48 :120–122, 2000.
- [76] T. Mori and K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21(5) :571–574, 1973.
- [77] T. Mura. *Micromechanics of Defects in Solids*. Martinus Nijhoff, Dordrecht, The Netherlands, 1987.
- [78] S. Nemat-Nasser and Hori M. *Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials*, volume second edition. Elsevier Science, Amsterdam, 1999.
- [79] A. K. Nigoyi, P. Hsu, and B. L. Meyers. The influence of age at time of loading on basic and drying creep. *Cement and Concrete Research*, 3 :633–644, 1973.
- [80] F. E. Nixon. *Handbook of Laplace Transformation*. Prentice Hall, 1965.
- [81] J. P. Nougier. *Méthodes de calcul numérique*. Hermes Science, Paris, 2001.
- [82] S. W. Park and Y. R. Kim. Interconversion between relaxation modulus and creep compliance for viscoelastic solid. *Journal of materials in civil engineering*, 11(1) :76–82, 1999.
- [83] L. J. Parrott. An examination of the effects of age at loading upon the creep of hardened cement paste. *Magazine of Concrete Research*, 25(85) :197–200, 1973.

- [84] C. Pichler, R. Lackner, and H. A. Mang. Multiscale model for early-age creep of cementitious materials. In G. Pijaudier-Cabot, B. Gérard, and P. Acker, editors, *Creep, shrinkage and durability of concrete and concrete structures*, pages 361–367. Hermes Science, 2005.
- [85] P. Ponte Castaneda. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39 :45–71, 1991.
- [86] P. Ponte Castaneda. New variational principles in plasticity and their application to composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40 :1757–1788, 1992.
- [87] P. Ponte Castaneda. Exact second-order estimates for the effective mechanical properties of nonlinear composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(6) :827–862, 1996.
- [88] S. Popovics. Quantitative deformation model for two-phase composites including concrete. *Materials and Structures*, 20(3) :171–179, 1987.
- [89] A. D. Poularikas. *The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing*. CRC Press LLC, 1999.
- [90] T. C. Powers and T. L. Brownyard. Studies of physical properties of hardened portland cement paste (nine parts). *Journal of the American Concrete Institute*, 43, 1946.
- [91] E. L. Rees. Graphical discussion of the roots of a quartic equation. *The American Mathematical Monthly*, 29(2) :51–55, 1922.
- [92] J. M. Reynouard and G. Pijaudier-Cabot. *Comportement mécanique du béton*. Hermes Science, Paris, 2005.
- [93] R. Roscoe. Mechanical models for the representation of viscoelastic properties. *British Journal of Applied Physics*, 1(7) :171–173, 1950.
- [94] Y. Rougier, C. Stolz, and A. Zaoui. Spectral analysis of linear viscoelastic inhomogeneous materials. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 316 :1517–1522, 1993.
- [95] H. Rutishauser. Der quotienten-differenzen-algorithmus. *Mathematik und Physik*, 5 :233–251, 1954.
- [96] J. Salençon. *Viscoélasticité linéaire appliquée au calcul des structures*. Presse de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1983.
- [97] J. Sanchez-Hubert and E. Sanchez-Palencia. *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l’homogénéisation : application à la mécanique des milieux continus*. Masson, Paris, 1992.
- [98] R. A. Schapery. Approximate methods of transform inversion in viscoelastic stress analysis. In *Proceeding of the Fourth US National Congress on Applied Mechanics*, volume 2, pages 1075–1085, ASME, New York, 1962.
- [99] R. A. Schapery. On the time dependence of viscoelastic variational solutions. *Quarterly Applied Mathematics*, 33(3) :207–215, 1964.
- [100] R. A. Schapery. A method of viscoelastic stress analysis using elastic solutions. *Franklin institute*, 279 :268–289, 1965.
- [101] R. A. Schapery. Stress analysis of viscoelastic composite materials. *Journal of Composite Materials*, 1(3) :228–267, 1967.
- [102] R. A. Schapery. Viscoelastic behavior and analysis of composite materials. In G. P. Sendekyj, editor, *Composite materials*, volume 2, pages 85–168. New York, Academic Press, 1974.
- [103] R. A. Schapery and S. W. Park. Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part I numerical method. *International Journal of Solids and Structures*, 36 :1653–1675, 1998.

- [104] R. A. Schapery and S. W. Park. Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part II an approximate analytical method. *International Journal of Solids and Structures*, 36 :1677–1699, 1999.
- [105] M. R. Spiegel. *Variables complexes*. McGraw-Hill, New York, 1973.
- [106] M. R. Spiegel. *Laplace transforms*. McGraw-Hill, New York, 1991.
- [107] P. Suquet. Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. In A. Zaoui E. Sanchez-Palencia, editor, *Homogenization Techniques for Composite Media*, Lecture Notes in Physics N°272, pages 193–278. Springer-Verlag, 1985.
- [108] G. E. Troxell, J. M. Raphael, and R. E. Davis. Long-term creep and shrinkage tests of plain and reinforced concrete. In *Proceedings of the Annual Meeting*, volume 58, pages 1101–1120. American Society for Testing Materials, 1958.
- [109] J. Van-Iseghem. Laplace transform inversion and padé-type approximants. *Applied Numerical Mathematics*, 3(6) :529–538, 1987.
- [110] M. Vandamme and F.J. Ulm. Viscoelastic solutions for conical indentation. *International Journal of Solids and Structures*, 43(10) :3142–3165, 2006.
- [111] K. Velez, S. Maximilien, D. Damidot, G. Fantozzi, and F. Sorrentino. Determination by nanoindentation of elastic modulus and hardness of pure constituents of Portland cement clinker. *Cement and Concrete Research*, 31(4) :555–561, 2001.
- [112] A. Zaoui. *Matériaux hétérogènes et composites*. Ecole Polytechnique, Paris, 1997.
- [113] A. Zaoui. Continuum micromechanics : Survey. *Journal of Engineering Mechanics*, 128 :808–816, 2002.
- [114] G. Zi and Z. P. Bazant. Continuous relaxation spectrum for concrete creep and its incorporation into microplane model M4. *Journal of Engineering Mechanics*, 12 :1331–1336, 2002.
- [115] E. Zielinska. The influence of calcium carbonate on the hydration process in some portland cement constituents ( $3\text{CaAl}_2\text{O}_3$  and  $4\text{CaOAl}_2\text{O}_3\text{Fe}_2\text{O}_3$ ). *Prace Instytutu Technologii Organizacji Produkcji Budowlanej*, 3, 1972.

## Quatrième partie

# Annexes



# Annexe A Les propriétés des fonctions visco-élastiques tridimensionnelles

Dans le cas isotrope, la loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant peut être construite de la même façon qu'en élasticité linéaire. On décompose les tenseurs de déformation et de contrainte en une partie sphérique et une partie déviatorique. Le comportement viscoélastique sous une sollicitation constante peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{sph}(t) = [(1 - 2\nu(t))J(t)] \boldsymbol{\sigma}_{sph}^0 \quad (\text{A.1})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{dev}(t) = [(1 + \nu(t))J(t)] \boldsymbol{\sigma}_{dev}^0 \quad (\text{A.2})$$

dans le cas d'une contrainte imposée, où :

$$\boldsymbol{\sigma}_{sph}(t) = 3\kappa(t)\boldsymbol{\varepsilon}_{sph}^0 \quad (\text{A.3})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{dev}(t) = 2\mu(t)\boldsymbol{\varepsilon}_{dev}^0 \quad (\text{A.4})$$

dans le cas d'une déformation imposée. Dans les relations (A.1-A.4) :

- $\nu(t) = -(\varepsilon_{22}(t)/\varepsilon_{11}(t))H(t)$  est le coefficient de Poisson sécant dans l'expérience de fluage uniaxial.
- $J(t) = \varepsilon_{11}(t)/\sigma_0$  est la fonction de retard ou complaisance de fluage uniaxial.
- $\mu(t)$  est la fonction de relaxation en cisaillement simple.
- $\kappa(t)$  est la fonction de relaxation en compression isotrope.
- $2(1 + \nu(t))J(t)$  est la fonction de retard en cisaillement simple. Elle est l'inverse opérationnelle de la fonction de relaxation en cisaillement simple.
- $(1 - 2\nu(t))J(t)$  est la fonction de retard en compression isotrope. Elle est l'inverse opérationnelle de la fonction de relaxation en compression isotrope.

L'application du principe de superposition de Boltzmann dans le cas du matériau viscoélastique linéaire non vieillissant nous donne la correspondance entre une sollicitation quelconque et la réponse sous la forme de la convolution de Stieljes :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{sph} = [(1 - 2\nu)J] \otimes \boldsymbol{\sigma}_{sph} \quad (\text{A.5})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{dev} = [(1 + \nu)J] \otimes \boldsymbol{\sigma}_{dev} \quad (\text{A.6})$$

où :

$$\boldsymbol{\sigma}_{sph} = 3\kappa \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{sph} \quad (\text{A.7})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{dev} = 2\mu \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{dev} \quad (\text{A.8})$$

On en déduit aisément les relations entre les fonctions viscoélastiques comme suit :

$$[(1 + \nu)J] \otimes 2\mu = H(t) \quad (\text{A.9})$$

$$[(1 - 2\nu)J] \otimes 2\kappa = H(t) \quad (\text{A.10})$$

$$J \otimes R = H(t) \quad (\text{A.11})$$

$$(\nu J) \otimes R = \bar{\nu} \quad (\text{A.12})$$

où  $\bar{\nu}(t) = -(\varepsilon_{22}(t)/\varepsilon^0)$  est le coefficient de Poisson dans l'expérience de relaxation uniaxiale.

Dans l'espace de la transformée de Laplace-Carson, les relations précédentes deviennent :

$$\mathcal{C} \{ (1 + \nu)J \} 2\tilde{\mu}(s) = 1 \quad (\text{A.13})$$

$$\mathcal{C} \{ (1 - 2\nu)J \} 3\tilde{\kappa}(s) = 1 \quad (\text{A.14})$$

$$\tilde{J}(s) \tilde{R}(s) = 1 \quad (\text{A.15})$$

$$\mathcal{C} \{ \nu J \} \tilde{R}(s) = \tilde{\bar{\nu}}(s) \quad (\text{A.16})$$

les fonctions de retard sont alors les inverses opérationnelles des fonctions de relaxation.

# Annexe B Méthodes intégrales en élasticité linéaire

La notion de déformation initiale ou celle dérivée de la précontrainte ou de la contrainte de polarisation peut être utilisée pour construire des familles de champs de déformations et de contraintes admissibles dans un V.E.R d'un matériau hétérogène, par la résolution du problème classique d'élasticité homogène à l'état initial non naturel. A l'aide de la méthode de Green, on peut aussi construire "l'équation de la polarisation" qui nous permet au travers d'une grande variété de champs admissibles d'améliorer l'encadrement des caractéristiques élastiques homogénéisées du V.E.R dans le cadre d'une approche variationnelle permettant de retrouver les solutions du problème d'Eshelby.

## B.1 Principe de la méthode de Green

### B.1.1 Problème initial et problèmes auxiliaires

On considère un milieu élastique homogène de modules  $\mathbb{C}^0$ , occupant le domaine fini  $\Omega$ . Il est soumis à l'intérieur à une distribution  $\underline{f}(\underline{x})$  de forces réparties, dérivant d'un champ de tenseur symétrique de polarisation  $\mathbf{p}$ , et sur son bord ( $\partial\Omega$ ) aux déplacements imposés  $\underline{u}^d$ . Autrement dit, on pose le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbb{C}^0 : \operatorname{grad}(\underline{u})) + \underline{f} = \underline{0} \\ \underline{f} = \operatorname{div}(\mathbf{p}) \\ \underline{u} = \underline{u}^d \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Pour résoudre ce problème, on applique le principe de superposition. La solution  $\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}(\underline{u}^d, \mathbf{p})$  est déterminée à partir de deux problèmes élémentaires :  $\{\underline{u}^d, \mathbf{p}\} = \{\underline{u}^d = \underline{0}, \mathbf{p}\} + \{\underline{u}^d, \mathbf{p} = \mathbf{0}\}$  :

- (P<sub>1</sub>)  $\{\underline{u}^d, \mathbf{p} = \mathbf{0}\}$  : On résout d'abord le problème (B.1) en l'absence de forces de volume réparties, c'est-à-dire  $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{0}$ . Dans ce cas la solution est le champ  $\underline{u}_o(\underline{x})$  s'établissant dans le milieu homogène  $\Omega$  soumis uniquement aux déplacements  $\underline{u}^d$  sur  $\partial\Omega$ .
- (P<sub>2</sub>)  $\{\underline{u}^d = \underline{0}, \mathbf{p}\}$  : C'est le problème complémentaire du premier, c'est-à-dire le problème à  $\underline{f}(\underline{x})$  fixé et en l'absence de déplacement imposés  $\underline{u}^d(\underline{x}) = \underline{0}$  au contour  $\partial\Omega$ . Ce problème est également décomposé en plusieurs problèmes élémentaires avec une force ponctuelle unitaire appliquée en un point quelconque de  $\Omega$ , et avec la condition de déplacement nul sur le contour  $\partial\Omega$ . On obtient finalement la solution par superposition des solutions des problèmes élémentaires.

### B.1.2 Problème élémentaire d'une force ponctuelle

On résout le problème élémentaire d'une force ponctuelle prise unitaire  $\tilde{\underline{f}}(\underline{x}')$  agissant au point  $\underline{x}'$  quelconque du domaine  $\Omega$ . Le champ solution  $\tilde{\underline{u}}(\underline{x})$ , compte tenu du fait de la linéarité, s'écrit sous la forme :

$$\tilde{\underline{u}}(\underline{x}) = \mathbf{G}^0(\underline{x}, \underline{x}') \cdot \tilde{\underline{f}}(\underline{x}') \quad (\text{B.2})$$

où  $\mathbf{G}^0(\underline{x}, \underline{x}')$  est la fonction tensorielle d'ordre deux de Green du problème considéré. Dans ce cas, on peut présenter le champ de forces de volume réparties dans tout domaine  $\Omega$  en introduisant la fonction de Dirac  $\delta(\underline{x})$  :

$$\underline{f}(\underline{x}) = \tilde{\underline{f}}(\underline{x}')\delta(\underline{x} - \underline{x}') \quad (\text{B.3})$$

De cette façon, les équations du problème élémentaire deviennent :

$$\begin{cases} C_{ijkl}^0 G_{km,lj}^0(\underline{x}, \underline{x}') \tilde{f}_m(\underline{x}') + \delta(\underline{x} - \underline{x}') \tilde{f}_i(\underline{x}') = 0 & \underline{x}, \underline{x}' \in \Omega \\ G_{im}^0(\underline{x}, \underline{x}') \tilde{f}_m(\underline{x}') = 0 & \underline{x} \in \partial\Omega, \underline{x}' \in \Omega \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

On obtient alors une forme simplifiée de la relation (B.4) :

$$\begin{cases} C_{ijkl}^0 G_{km,lj}^0(\underline{x}, \underline{x}') + \delta(\underline{x} - \underline{x}') \delta_{im} = 0 & \underline{x}, \underline{x}' \in \Omega \\ G_{im}^0(\underline{x}, \underline{x}') = 0 & \underline{x} \in \partial\Omega, \underline{x}' \in \Omega \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

où  $\delta_{im}$  est le tenseur d'ordre deux unité.

Avec ce système d'équations, on trouve le champ  $\mathbf{G}^0(\underline{x}, \underline{x}')$  permettant de construire la solution du problème élémentaire pour une force unitaire. En appliquant le principe de superposition à l'ensemble de la solution élémentaire, on obtient la solution du problème ( $P_2$ ) :

$$\underline{u}_i(\underline{x}) = \int_{\Omega} G_{ij}^0(\underline{x}, \underline{x}') f_j(\underline{x}') d\Omega' \quad (\text{B.6})$$

Dans notre cas, les forces réparties  $\underline{f}(\underline{x})$  dérivent du champ de tenseur symétrique de polarisation  $\mathbf{p}(\underline{x})$ . On en déduit :

$$f_j(\underline{x}') = \frac{\partial p_{jk}(\underline{x}')}{\partial x'_k} = p_{jk,k'}(\underline{x}') \quad (\text{B.7})$$

En intégrant par partie, en utilisant du théorème de Gauss et compte tenu de la deuxième équation du système d'équation (B.5), on établit :

$$u_i(\underline{x}) = \int_{\Omega} G_{ij}^0(\underline{x}, \underline{x}') p_{jk,k'}(\underline{x}') d\Omega' \quad (\text{B.8})$$

$$= \int_{\Omega} (G_{ij}^0(\underline{x}, \underline{x}') p_{jk}(\underline{x}'))_{,k'} d\Omega' - \int_{\Omega} G_{ij,k'}^0(\underline{x}, \underline{x}') p_{jk}(\underline{x}') d\Omega' \quad (\text{B.9})$$

$$= \underbrace{\int_{\partial\Omega} G_{ij}^0(\underline{x}, \underline{x}') p_{jk}(\underline{x}') n_{k'} ds'}_0 - \int_{\Omega} G_{ij,k'}^0(\underline{x}, \underline{x}') p_{jk}(\underline{x}') d\Omega' \quad (\text{B.10})$$

$$= - \int_{\Omega} G_{ij,k'}^0(\underline{x}, \underline{x}') p_{jk}(\underline{x}') d\Omega' \quad (\text{B.11})$$

Il est à noter qu'en utilisant le théorème de réciprocité entre la cause et l'effet, on a :

$$G_{ij}^0(\underline{x}, \underline{x}') = G_{ji}^0(\underline{x}', \underline{x}) \quad \forall \underline{x}, \underline{x}' \quad (\text{B.12})$$

et compte tenu de la deuxième relation du système d'équations (B.5), on déduit la nullité de la première intégrale de la relation (B.10). On obtient finalement la solution en terme de déformation comme suit :

$$\varepsilon_{in}(\underline{x}) = - \int_{\Omega} G_{ij,k'n}^0(\underline{x}, \underline{x}') p_{jk}(\underline{x}') d\Omega' \quad (\text{B.13})$$

En effet, si on remplace le champ du tenseur de polarisation par un champ de déformation libre  $\boldsymbol{\varepsilon}^L$  avec leur relation :

$$\mathbf{p} := -\mathbb{S}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^L \quad (\text{B.14})$$

on obtient :

$$\varepsilon_{in}(\underline{x}) = \int_{\Omega} G_{ij,k'n}^0(\underline{x}, \underline{x}') S_{jkpq}^0(\underline{x}') \varepsilon_{pq}^L d\Omega' \quad (\text{B.15})$$

### B.1.3 Tenseur et opérateur de Green

Les propriétés du tenseur de Green  $\mathbf{G}^0(\underline{x}, \underline{x}')$  peuvent être explicitées à partir de la forme générale du tenseur de Green  $\mathbf{G}_\infty^0(\underline{x}, \underline{x}')$  du milieu infini. En effet, on a :

$$\begin{cases} \mathbf{G}_\infty^0(\underline{x}, \underline{x}') = \mathbf{G}_\infty^0(\underline{x} - \underline{x}') = \frac{1}{r} \mathbf{G}_\infty^0(\underline{e}) = \frac{1}{r} \mathbf{G}_\infty^0(-\underline{e}) \\ r = |\underline{x} - \underline{x}'| \quad \underline{e} = \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{r} \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

Il est à noter que dans le cas où le point  $\underline{x}$ , dont on cherche la déformation, se situe dans la zone occupée par le champ de la force répartie, c'est-à-dire les points du domaine d'intégration  $\underline{x}'$  entourent  $\underline{x}$ , il faut éviter le point de singularité dans l'intégration (B.13) en remplaçant le domaine  $\Omega$  d'intégration par le sous-domaine  $\{\Omega - S(\underline{x}, r)\}$ , où  $S(\underline{x}, r)$  désigne la sphère de centre  $\underline{x}$  et de rayon  $r \rightarrow 0$ . La relation (B.13) devient la limite d'une somme d'une intégration volumique dans  $\{\Omega - S(\underline{x}, r)\}$  et d'un terme convectif sur la surface  $\partial S$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{in}(\underline{x}) = & - \lim_{r \rightarrow 0^+} \left( \int_{\Omega - S(\underline{x}, r)} F_{injk}^0(\underline{x}, \underline{x}') p_{jk}(\underline{x}') d\Omega' \right. \\ & \left. + \int_{\partial S(\underline{x}, r)} [G_{ij,k'}^0(\underline{x}, \underline{x}') p_{jk}(\underline{x}') n_n]_{(in)(jk)} ds' \right) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

où

$$F_{injk}^0(\underline{x}, \underline{x}') = G_{ij,k'n}^0(\underline{x}, \underline{x}')_{(in)(jk)} \quad (\text{B.18})$$

On appelle la première intégrale dans la relation (B.17) l'intégrale en valeur principale (*V.P.*) au sens de Cauchy :

$$V.P. \int_{\Omega} \mathbb{F}(\underline{x}, \underline{x}') : \mathbf{p}(\underline{x}') d\Omega' = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\Omega - S(\underline{x}, r)} \mathbb{F}(\underline{x}, \underline{x}') : \mathbf{p}(\underline{x}') d\Omega' \quad (\text{B.19})$$

en remplaçant  $\mathbf{G}^0$  par  $\mathbf{G}_\infty^0$ , en prenant pour  $\mathbf{p}(\underline{x}')$  sa valeur en  $\underline{x}$  et en notant que  $\underline{n} = \underline{e}$  on obtient une forme simplifiée de la deuxième intégrale dans la relation (B.17) :

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\partial S(\underline{x}, r)} [G_{ij,k'}^0(\underline{x}, \underline{x}') p_{jk}(\underline{x}') n_n]_{(in)(jk)} ds' = B_{injk}^0 p_{jk}(\underline{x}) \\ B_{injk}^0 = \int_{|\underline{e}|=1} g_{injk}(\underline{e}) ds' = \int_{|\underline{e}|=1} [G_{\infty ij,k'}^0(\underline{e}) e_n]_{(in)(jk)} ds' \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

Elle est indépendante du rayon  $r$  de la sphère avec  $g(\underline{e})$ , c'est une fonction paire en  $\underline{e}$ , indépendante de la géométrie de  $\Omega$ , et liée aux seuls modules  $\mathbb{C}^0$  [112].

### B.1.4 Solution du problème initial

On trouve finalement la solution pour le problème initial comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon(\underline{x}) + V.P. \int_{\Omega} \mathbb{F}^0(\underline{x}, \underline{x}') : \mathbf{p}(\underline{x}') d\Omega' + \mathbb{B}^0 : \mathbf{p}(\underline{x}) = \varepsilon^0(\underline{x}) \\ \tilde{\Gamma}^0 \star \mathbf{p} = \tilde{\mathbb{F}}^0 \star \mathbf{p} + \mathbb{B}^0 : \mathbf{p} = V.P. \int_{\Omega} \mathbb{F}^0 : \mathbf{p} d\Omega' + \mathbb{B}^0 : \mathbf{p} \\ \tilde{\Gamma}^0 = \tilde{\mathbb{F}}^0 + \mathbb{B}^0 \tilde{\delta} \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

Ici on décompose l'opérateur de Green  $\tilde{\Gamma}^0$  en deux termes. Le premier  $\tilde{\mathbb{F}}^0$  est dit "terme principal ou terme à distance", le deuxième  $\mathbb{B}^0 \tilde{\delta}$  est dit "pic de Dirac" qui présente la partie locale singulière.

Dans le cas du milieu infini, on doit ajouter un terme  $\mathbb{B}^0 : \langle \mathbf{p} \rangle$  pour tenir en compte des conditions d'évanescences à l'infini [112] :

$$\begin{cases} \varepsilon(\underline{x}) + \tilde{\Gamma}_\infty^0 \star \mathbf{p} = \varepsilon^0 + \mathbb{B}^0 : \langle \mathbf{p} \rangle \\ \tilde{\Gamma}_\infty^0 \star \mathbf{p} = V.P. \int_{R^3} \mathbb{F}_\infty^0 : \mathbf{p} \, d\Omega' + \mathbb{B}^0 : \mathbf{p} \\ \tilde{\Gamma}_\infty^0 = \tilde{\mathbb{F}}_\infty^0 + \mathbb{B}^0 \check{\delta} \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

## B.2 Application à l'élasticité des matériaux hétérogènes

### B.2.1 Equation intégrale de l'élasticité hétérogène

Considérons un milieu hétérogène  $\Omega$ , de module microscopique  $\mathbb{C}(\underline{x})$ , soumis sur son bord  $\partial\Omega$  à des déplacements imposés  $\underline{u}^d$  en l'absence de forces de volume. On choisit un milieu homogène de référence de même géométrie, de modules uniformes  $\mathbb{C}^0$ , soumis aux mêmes conditions à la frontière. Le système d'équations à résoudre pour le problème d'élasticité du milieu hétérogène peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \left. \begin{aligned} \text{div}(\mathbb{C}^0 : \varepsilon) + \text{div}(\delta\mathbb{C}(\underline{x}) : \varepsilon) &= \underline{0} & \text{sur} & \Omega & \underline{u} &= \underline{u}^d & \text{sur} & \partial\Omega \\ \underline{u} &= \underline{u}^d & \text{sur} & \partial\Omega & \varepsilon &= \frac{1}{2}(\text{grad}(\underline{u}) + \text{grad}^T(\underline{u})) \\ \varepsilon &= \frac{1}{2}(\text{grad}(\underline{u}) + \text{grad}^T(\underline{u})) & \sigma(\underline{x}) &= \mathbb{C}(\underline{x}) : \varepsilon(\underline{x}) \\ \sigma(\underline{x}) &= \mathbb{C}(\underline{x}) : \varepsilon(\underline{x}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.23})$$

où  $\delta\mathbb{C}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) - \mathbb{C}^0(\underline{x})$ .

Le problème auxiliaire (B.1) nous permet de ramener un problème d'élasticité d'un milieu hétérogène à un problème d'élasticité d'un milieu homogène de référence, mentionné précédemment, mais soumis à une distribution des forces réparties de densité volumique  $\underline{f}(\underline{x})$  et dérivant d'un champ de polarisation :

$$\begin{cases} \underline{f} = \text{div}(\delta\mathbb{C}^0 : \varepsilon) \\ \mathbf{p} = \delta\mathbb{C}^0 : \varepsilon \end{cases} \quad (\text{B.24})$$

A partir de la relation (B.21), on obtient :

$$\varepsilon + \tilde{\Gamma}^0 \star (\delta\mathbb{C}^0 : \varepsilon) = \varepsilon^0 \quad (\text{B.25})$$

ou pour un milieu infini :

$$\varepsilon + \tilde{\Gamma}_\infty^0 \star (\delta\mathbb{C}^0 : \varepsilon) = \varepsilon^0 + \mathbb{B}^0 : \langle \delta\mathbb{C}^0 : \varepsilon \rangle \quad (\text{B.26})$$

### B.2.2 Fonctionnelle de polarisation

On s'intéresse ici à établir la fonctionnelle de polarisation du problème d'un milieu hétérogène occupant le domaine  $\Omega = \cup_i(\Omega_i)$  avec un milieu de référence schématisé sur la figure 2.10.

On définit la fonction de polarisation  $\mathcal{U}(\mathbb{C}^0, \mathbf{p})$  de la façon suivante :

Le théorème de comparaison nous permet d'écrire :

$$\langle \sigma^* \rangle : \mathbf{E} - \frac{1}{2} \langle \sigma^* : \mathbb{S} : \sigma^* \rangle \leq \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{ef} : \mathbf{E} \leq \frac{1}{2} \langle \varepsilon^* : \mathbb{C} : \varepsilon^* \rangle \quad (\text{B.27})$$

On substitue les champs admissibles  $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\underline{x})$  et  $\boldsymbol{\sigma}^*(\underline{x})$  du milieu hétérogène initial, à partir des solutions établies par le système d'équations (2.114) pour  $\mathbf{p}$  et  $\mathbb{C}^0$  quelconques :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^* &= \boldsymbol{\sigma}^\circ = (\mathbb{C} - \delta\mathbb{C}) : \boldsymbol{\varepsilon}^\circ + \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^* &= \boldsymbol{\varepsilon}^\circ = (\mathbb{S} - \delta\mathbb{S}) : (\boldsymbol{\sigma}^\circ - \mathbf{p})\end{aligned}\quad (\text{B.28})$$

Dans les inégalités (B.27), on peut encadrer l'énergie de déformation du milieu initial hétérogène par les fonctions de polarisation. D'abord, il est commode de noter :

$$\mathbb{C}(\underline{x}) = \mathbb{C}^0 + \delta\mathbb{C}(\underline{x}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{m}^0 = (\delta\mathbb{C})^{-1} \quad (\text{B.29})$$

$$\mathbb{S}(\underline{x}) = \mathbb{S}^0 + \delta\mathbb{S}(\underline{x}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{l}^0 = (\delta\mathbb{S})^{-1} \quad (\text{B.30})$$

$$\bar{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \langle (\boldsymbol{\varepsilon}^* - \mathbf{p} : \mathbf{m}^0) : \delta\mathbb{C}^0 : (\boldsymbol{\varepsilon}^* - \mathbf{m}^0 : \mathbf{p}) \rangle \quad (\text{B.31})$$

$$= \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* : \delta\mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle - \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbf{p} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{p} : \mathbf{m}^0 : \mathbf{p} \rangle \quad (\text{B.32})$$

$$\bar{\mathcal{K}} = \frac{1}{2} \langle (\boldsymbol{\sigma}^* - \mathbf{p} : \mathbb{S}^0 : \mathbf{l}^0) : \delta\mathbb{S}^0 : (\boldsymbol{\sigma}^* - \mathbf{l}^0 : \mathbb{S}^0 : \mathbf{p}) \rangle \quad (\text{B.33})$$

En appliquant le lemme de Hill aux champs admissibles  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  et  $\boldsymbol{\sigma}^*$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\sigma}^* : \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle &= \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* : (\mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^* + \mathbf{p}) \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle + \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbf{p} \rangle \\ &= \mathbf{E} : \langle \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^* + \mathbf{p} \rangle = \mathbf{E} : \mathbb{C}^0 : \mathbf{E} + \mathbf{E} : \langle \mathbf{p} \rangle\end{aligned}\quad (\text{B.34})$$

On en déduit les relations suivantes :

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle = \mathbf{E} : \mathbb{C}^0 : \mathbf{E} + \mathbf{E} : \langle \mathbf{p} \rangle - \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbf{p} \rangle \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle \neq \mathbf{E} : \mathbb{C}^0 : \mathbf{E} \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbf{p} \rangle \neq \mathbf{E} : \langle \mathbf{p} \rangle \end{cases} \quad (\text{B.35})$$

En utilisant les relations (B.29) et (B.35), on a alors :

$$\frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* : \delta\mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle \quad (\text{B.36})$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^0 : \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{E} : \langle \mathbf{p} \rangle - \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbf{p} \rangle + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* : \delta\mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle \quad (\text{B.37})$$

A partir de (B.32) et (B.37), il découle que

$$\frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle = \mathcal{U}(\mathbb{C}^0, \mathbf{p}) + \bar{\mathcal{H}} \quad (\text{B.38})$$

où l'on a posé

$$\mathcal{U}(\mathbb{C}^0, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^0 : \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{E} : \langle \mathbf{p} \rangle + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbf{p} \rangle - \frac{1}{2} \langle \mathbf{p} : \mathbf{m}^0 : \mathbf{p} \rangle \quad (\text{B.39})$$

Ici  $\mathcal{U}(\mathbb{C}^0, \mathbf{p})$  est la fonctionnelle de polarisation qui dépend, à  $\mathbf{E}$  fixé, du champ  $\mathbf{p}$  et du choix de  $\mathbb{C}^0$ . De la même façon, on trouve que

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^* \rangle : \mathbf{E} - \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma}^* : \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma}^* \rangle = \mathcal{U}(\mathbb{C}^0, \mathbf{p}) - \bar{\mathcal{K}} \quad (\text{B.40})$$

En associant les relations (B.27), (B.38) et (B.40), on trouve donc, quel que soient  $\mathbf{E}, \mathbf{p}(\underline{x})$  et  $\mathbb{C}^0$ , l'encadrement

$$\mathcal{U}(\mathbb{C}^0, \mathbf{p}) - \bar{\mathcal{K}} \leq \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{ef} : \mathbf{E} \leq \mathcal{U}(\mathbb{C}^0, \mathbf{p}) + \bar{\mathcal{H}} \quad (\text{B.41})$$

Les calculs des bornes revient maintenant à expliciter le troisième terme  $\frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbf{p} \rangle$ . C'est le terme le plus complexe dans la relation (B.39) de la fonctionnelle  $\mathcal{U}(\mathbb{C}^0, \mathbf{p})$ , puisque  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  en un point  $\underline{x}$  dépend de la valeur de  $\mathbf{p}(\underline{x}')$  en tout autre point  $\underline{x}'$  du milieu. Dans ce cas, la méthode de Green permet d'établir la solution en terme de la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  d'un milieu élastique homogène infini, de modules  $\mathbb{C}^0$ , soumis à la condition aux limites homogènes en déformation  $\mathbf{E}$  à l'infini, et à un champ de polarisation  $\mathbf{p}(\underline{x}')$ . D'après la relation (B.22), la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}^* = -\tilde{\Gamma}_\infty^0 \star \mathbf{p} + \mathbf{E} + \mathbb{B}^0 : \langle \mathbf{p} \rangle \quad , \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle = \mathbf{E} \\ \tilde{\Gamma}_\infty^0(\underline{x} - \underline{x}') \star \mathbf{p}(\underline{x}') = V.P. \int_{R^3} \mathbb{F}_\infty^0(\underline{x} - \underline{x}') : \mathbf{p}(\underline{x}') d\Omega' + \mathbb{B}^0 : \mathbf{p}(\underline{x}') \\ \tilde{\Gamma}_\infty^0 = \tilde{\mathbb{F}}_\infty^0 + \mathbb{B}^0 \tilde{\delta} \\ \mathbb{F}_\infty^0{}_{injk}(\underline{x} - \underline{x}'^0_{ij, kn}(\underline{x} - \underline{x}')_{(in)(jk)} \quad \text{pour} \quad \underline{x} \neq \underline{x}' \end{array} \right. \quad (\text{B.42})$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{2} \left\langle -\mathbf{p} : \tilde{\Gamma}_\infty^0 \star \mathbf{p} + \mathbf{p} : \mathbf{E} + \mathbf{p} : \mathbb{B}^0 : \langle \mathbf{p} \rangle \right\rangle \quad (\text{B.43})$$

On obtient finalement l'expression de la fonctionnelle de polarisation en fonction de l'opérateur de Green  $\Gamma_\infty^0$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\mathbb{C}^0, \mathbf{p}) = & \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^0 : \mathbf{E} + \mathbf{E} : \langle \mathbf{p} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{p} \rangle : \mathbb{B}^0 : \langle \mathbf{p} \rangle - \frac{1}{2} \langle \mathbf{p} : \mathbf{m}^0 : \mathbf{p} \rangle \\ & - \frac{1}{2} \left\langle \mathbf{p} : \tilde{\Gamma}_\infty^0 \star \mathbf{p} \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

### B.2.3 Bornes de Hashin-Shtrikman

#### B.2.3.1 Isotropie et choix des champs de polarisation

On estime ici les bornes de l'inégalité (B.41) dans le cas d'un matériau hétérogène dont la distribution spatiale des constituants est isotrope : chaque phase  $r$  est distribuée spatialement de manière isotrope par rapport à toute phase  $s$  (y compris par rapport à elle-même, pour  $r = s$ ). Pour décrire mathématiquement cette propriété, on définit la fonction caractéristique de chaque phase  $r$  comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_r(\underline{x}) = 1 \quad \forall \underline{x} \in \text{phase}(r) \\ \varphi_r(\underline{x}) = 0 \quad \text{si non} \end{array} \right. \quad (\text{B.45})$$

On peut définir alors une autre fonction qui introduit le volume relatif de la phase  $r$

$$\varphi_{rs}(\underline{w}) = \frac{1}{|\Omega_r|} \int_{\Omega} \varphi_r(\underline{x}) \varphi_s(\underline{x} + \underline{w}) d\Omega \quad (\text{B.46})$$

La propriété d'isotropie de la distribution spatiale des phases, c'est-à-dire d'indépendance par rapport à l'orientation, implique alors que  $\varphi_{rs}(\underline{w})$  ne dépend en fait que de  $|\underline{w}|$ , on en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{rs}(\underline{w}) = \varphi_{rs}(|\underline{w}|) \quad \forall r, s \\ \varphi_{rs}(\underline{0}) = \delta_{rs} \end{array} \right. \quad (\text{B.47})$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\left\langle \varphi_r \tilde{\Gamma}_\infty^0 \star \varphi_s \right\rangle = f_r \mathbb{B}^0 \delta_{rs} \quad (\text{B.48})$$

Le résultat (B.48) permet de calculer facilement le dernier terme  $\frac{1}{2} \langle \mathbf{p} : \tilde{\Gamma}_\infty^0 \star \mathbf{p} \rangle$  de la fonction de polarisation, quand on choisit des champs de polarisation uniformes par phase, c'est-à-dire  $\mathbf{p}(\underline{x}) = \sum_r \mathbf{p}_r \varphi_r(\underline{x})$ . On obtient :

$$\langle \mathbf{p} : \tilde{\Gamma}_\infty^0 \star \mathbf{p} \rangle = \sum_{r,s} \mathbf{p}_r : \langle \varphi_r \tilde{\Gamma}_\infty^0 \star \varphi_s \rangle : \mathbf{p}_s = \sum_r f_r \mathbf{p}_r : \mathbb{B}^0 : \mathbf{p}_r \quad (\text{B.49})$$

En combinant (B.44) et (B.49), on se ramène à

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\mathbb{C}^0, \mathbf{p}_r) &= \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^0 : \mathbf{E} + \sum_r f_r \mathbf{E} : \mathbf{p}_r + \frac{1}{2} \left( \sum_r f_r \mathbf{p}_r \right) : \mathbb{B}^0 : \left( \sum_s f_s \mathbf{p}_s \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_r f_r \mathbf{p}_r : (\mathbf{m}_r^0 + \mathbb{B}^0) : \mathbf{p}_r \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

Pour trouver les meilleures bornes, il faut optimiser cette fonctionnelle par rapport aux paramètres  $\mathbf{p}_r$  et  $\mathbb{C}^0$ .

### B.2.3.2 Optimisation des bornes de Hashin-Shtrikman

Pour obtenir l'encadrement optimal de l'inégalité (B.41), on cherche le majorant le plus élevé et le minorant le plus faible possible de la fonctionnelle  $\mathcal{U}(\mathbb{C}^0, \mathbf{p}_r)$ . On commence par examiner d'abord cette fonctionnelle par rapport aux paramètres  $\mathbf{p}_r$  et en considérant  $\mathbb{C}^0$  comme constant. Comme l'expression (B.50) est quadratique en  $\mathbf{p}_r$ , de la forme :

$$\begin{cases} \mathcal{U}(\mathbb{C}^0, \mathbf{p}_r) = \frac{1}{2} \sum_{r,s} \mathbf{p}_r : \mathbb{X}_{rs} : \mathbf{p}_s + \sum_r \mathbf{Y}_r : \mathbf{p}_r + Z \\ \mathbb{X}_{rs} = f_s f_r \mathbb{B}^0 - f_r \delta_{rs} (\mathbf{m}_r^0 + \mathbb{B}^0) \\ \mathbf{Y}_r = f_r \mathbf{E} \\ Z = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^0 : \mathbf{E} \end{cases} \quad (\text{B.51})$$

avec  $\mathbb{X}_{rs} = \mathbb{X}_{sr}$ ,  $\mathbb{X}$  et  $\mathbf{Y}$  symétriques, l'optimum sera obtenu quand

$$\sum_r \mathbb{X}_{sr} : \mathbf{p}_s^{opt} + \mathbf{Y}_r = \underline{\underline{0}} \quad (\text{B.52})$$

En combinant les relations (B.51) et (B.52), on obtient

$$\sum_s (f_s f_r \mathbb{B}^0 - f_r \delta_{rs} (\mathbf{m}_r^0 + \mathbb{B}^0)) : \mathbf{p}_s^{opt} + f_r \mathbf{E} = \underline{\underline{0}} \quad (\text{B.53})$$

ce qui donne

$$f_r \mathbb{B}^0 : \sum_s f_s \mathbf{p}_s^{opt} - f_r (\mathbf{m}_r^0 + \mathbb{B}^0) : \mathbf{p}_r^{opt} + f_r \mathbf{E} = \underline{\underline{0}} \quad (\text{B.54})$$

ou encore :

$$(\mathbf{m}_r^0 + \mathbb{B}^0) : \mathbf{p}_r^{opt} = \mathbb{B}^0 : \langle \mathbf{p}^{opt} \rangle + \mathbf{E} \quad (\text{B.55})$$

En posant  $\mathbf{a}_r^0 = (\mathbb{I} + \mathbb{B}^0 : \delta \mathbb{C}_r^0)^{-1}$ , on trouve que  $\mathbb{B}^0 : \delta \mathbb{C}_r^0 : \mathbf{a}_r^0 = \mathbb{I} - \mathbf{a}_r^0$ .

D'après la relation (B.55), on obtient :

$$\mathbf{p}_r^{opt} = \delta \mathbb{C}_r^0 : \mathbf{a}_r^0 : (\mathbb{B}^0 : \langle \mathbf{p}^{opt} \rangle + \mathbf{E}) \quad (\text{B.56})$$

On trouve alors aisément :

$$\begin{cases} \langle \mathbf{p}^{opt} \rangle = \langle \delta \mathbf{C}^0 : \mathbf{a}^0 \rangle : \langle \mathbf{a}^0 \rangle^{-1} : \mathbf{E} \\ \mathbf{p}_r^{opt} = \delta \mathbf{C}_r^0 : \mathbf{a}_r^0 : \langle \mathbf{a}^0 \rangle^{-1} : \mathbf{E} \end{cases} \quad (\text{B.57})$$

En prenant en compte les relations (B.51) , (B.52) et (B.57), on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{opt}(\mathbf{C}^0, \mathbf{p}_r^{opt}) &= \frac{1}{2} \sum_r \mathbf{Y} : \mathbf{p}_r^{opt} + Z & (\text{B.58}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E} : \left( \mathbf{C}^0 + \langle \delta \mathbf{C}^0 : \mathbf{a}^0 \rangle : \langle \mathbf{a}^0 \rangle^{-1} \right) : \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E} : \langle \mathbf{C} : \mathbf{a}^0 \rangle : \langle \mathbf{a}^0 \rangle^{-1} : \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C}^{H^0} : \mathbf{E} \end{aligned}$$

où

$$\mathbf{a}_r^0 = (\mathbb{I} + \mathbb{B}^0 : \delta \mathbf{C}_r^0)^{-1} \quad (\text{B.59})$$

$$\mathbf{C}^{H^0} = \langle \mathbf{C} : \mathbf{a}^0 \rangle : \langle \mathbf{a}^0 \rangle^{-1} \quad (\text{B.60})$$

On montre que le tenseur  $\mathcal{C}^{\mathcal{U}}$  est une fonction croissante de  $\mathbf{C}^0$ , c'est-à-dire qu'on peut obtenir la borne supérieure ( $\mathcal{U}^+$ ) ou inférieure ( $\mathcal{U}^-$ ) avec  $\mathbf{C}^{sup}$  ou  $\mathbf{C}^{inf}$  pris pour  $\mathbf{C}^0$  du milieu de référence.

# Annexe C Détails des manipulations des schémas d'homogénéisation

## C.1 Démonstration du schéma dilué d'Eshelby

On doit évaluer la relation suivante dans le cas d'un milieu isotrope global :

$$\mathbb{C}^{ef} = \mathbb{C}^m + \sum_r^{n_i} f^r (\mathbb{C}^r - \mathbb{C}^m) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_r^m : (\mathbb{C}^r - \mathbb{C}^m)]^{-1} \quad (\text{C.1})$$

Les modules d'élasticité de la matrice et des phases inclusionnaires s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbb{C}_m = 2\mu_m \mathbb{I}_{dev} + 3\kappa_m \mathbb{I}_{sph} \\ \mathbb{C}_i = 2\mu_i \mathbb{I}_{dev} + 3\kappa_i \mathbb{I}_{sph} \\ \mathbb{P}_i^m = \frac{\alpha_m}{3\kappa_m} \mathbb{I}_{sph} + \frac{\beta_m}{2\mu_m} \mathbb{I}_{dev} \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

En explicitant les propriétés des tenseurs d'unité  $\mathbb{I}_{dev}$  et  $\mathbb{I}_{sph}$  définis par les équations (2), on écrit :

$$\mathbb{P}_{isp}^m : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) = \left( \frac{\alpha_m}{3\kappa_m} \mathbb{I}_{sph} + \frac{\beta_m}{2\mu_m} \mathbb{I}_{dev} \right) : ((2\mu_i - 2\mu_m) \mathbb{I}_{dev} + (3\kappa_i - 3\kappa_m) \mathbb{I}_{sph}) \quad (\text{C.3})$$

$$= \left( \frac{\beta_m(\mu_i - \mu_m)}{\mu_m} \mathbb{I}_{dev} + \frac{\alpha_m(\kappa_i - \kappa_m)}{\kappa_m} \mathbb{I}_{sph} \right) \quad (\text{C.4})$$

En posant :

$$\begin{cases} \mathbb{D}_i = (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^m : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)]^{-1} \\ \mathbb{D}_i = 2\mu_i^d \mathbb{I}_{dev} + 3\kappa_i^d \mathbb{I}_{sph} \\ \mathbb{D}_i : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^m : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)] = (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

on en déduit

$$\begin{cases} \mu_i^d = (\mu_i - \mu_m) \left( 1 + \frac{\beta_m(\mu_i - \mu_m)}{\mu_m} \right)^{-1} \\ \kappa_i^d = (\kappa_i - \kappa_m) \left( 1 + \frac{\alpha_m(\kappa_i - \kappa_m)}{\kappa_m} \right)^{-1} \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

Il en découle finalement les propriétés homogénéisées suivantes :

$$\mu^{ef} = \mu_m + \sum_i f_i (\mu_i - \mu_m) \left( 1 + \frac{\beta_m(\mu_i - \mu_m)}{\mu_m} \right)^{-1} \quad (\text{C.7})$$

$$\kappa^{ef} = \kappa_m + \sum_i f_i (\kappa_i - \kappa_m) \left( 1 + \frac{\alpha_m(\kappa_i - \kappa_m)}{\kappa_m} \right)^{-1} \quad (\text{C.8})$$

## C.2 Démonstration du schéma autocohérent classique

A partir de la définition du tenseur de rigidité homogénéisé :

$$\mathbb{C}^{ef} = \left\langle \mathbb{C} : \left( \mathbb{I} + \mathbb{P}^{ef} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^{ef}) \right)^{-1} \right\rangle : \left\langle \left( \mathbb{I} + \mathbb{P}^{ef} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^{ef}) \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \quad (\text{C.9})$$

On déduit aisément que :

$$\mathbb{C}^{ef} : \left\langle \left( \mathbb{I} + \mathbb{P}^{ef} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^{ef}) \right)^{-1} \right\rangle = \left\langle \mathbb{C} : \left( \mathbb{I} + \mathbb{P}^{ef} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^{ef}) \right)^{-1} \right\rangle \quad (\text{C.10})$$

En multipliant la relation (C.10) par  $\mathbb{P}^{ef}$ , on obtient :

$$\left\langle \mathbb{C}^{ef} : \mathbb{P}^{ef} : \left( \mathbb{I} + \mathbb{P}^{ef} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^{ef}) \right)^{-1} \right\rangle = \left\langle \mathbb{C} : \mathbb{P}^{ef} : \left( \mathbb{I} + \mathbb{P}^{ef} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^{ef}) \right)^{-1} \right\rangle \quad (\text{C.11})$$

De façon similaire aux manipulations des relations (C.2-C.6), on obtient à partir de (C.11)

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\beta^{ef}(\mu_i - \mu^{ef})}{\mu^{ef}} \left( 1 + \frac{\beta^{ef}(\mu_i - \mu^{ef})}{\mu^{ef}} \right)^{-1} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \frac{\alpha^{ef}(\kappa_i - \kappa^{ef})}{\kappa^{ef}} \left( 1 + \frac{\alpha^{ef}(\kappa_i - \kappa^{ef})}{\kappa^{ef}} \right)^{-1} \right\rangle = 0 \end{array} \right. \quad (\text{C.12})$$

ce qui est équivalent à :

$$\left. \begin{array}{l} \left\langle \left[ 1 + \frac{\beta^{ef}(\mu - \mu^{ef})}{\mu^{ef}} \right]^{-1} \right\rangle = 1 \\ \left\langle \left[ 1 + \frac{\alpha^{ef}(\kappa - \kappa^{ef})}{\kappa^{ef}} \right]^{-1} \right\rangle = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\langle \left( \mathbb{I} + \mathbb{P}^{ef} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^{ef}) \right)^{-1} \right\rangle \quad (\text{C.13})$$

On en déduit facilement que  $\mathbf{E}^0 = \mathbf{E}$ , d'où le résultat :

$$\mathbb{C}^{ef} = \left\langle \mathbb{C} : \left( \mathbb{I} + \mathbb{P}^{ef} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}^{ef}) \right)^{-1} \right\rangle \quad (\text{C.14})$$

# Annexe D Sphère composite

## D.1 Schéma autocohérent généralisé

Ce schéma introduit la notion d'inclusion composite neutre. L'inclusion composite neutre est constituée d'une inclusion entourée d'une couronne ayant les propriétés de la matrice. L'ensemble est noyé dans le milieu de référence qui est le milieu effectif recherché. La fraction volumique de chaque phase dans l'inclusion composite neutre est la même que celle du milieu initial (Fig. 2.5).

En imposant la condition aux limites en cisaillement à l'infini, on obtient la forme du déplacement solution du problème :

$$\begin{aligned} u_r &= U_r \sin^2 \theta \cos 2\phi \\ u_\theta &= U_\theta \sin \theta \cos \theta \cos 2\phi \\ u_\phi &= U_\phi \sin \theta \sin 2\phi \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

avec  $U_\theta = -U_\phi$  où  $r, \theta, \phi$  sont les coordonnées sphériques,  $U_r, U_\theta, U_\phi$  sont des fonctions de  $r$ . On obtient le champ de déplacement dans les trois zones du milieu :

- Zone extérieure de la sphère composite  $r \geq b$  :

$$\begin{aligned} U_{re} &= D_1 r + \frac{3D_3}{r^4} + \frac{5-4\nu}{1-2\nu} \frac{D_4}{r^2} \\ U_{\theta e} &= D_1 r - \frac{2D_3}{r^4} + \frac{2D_4}{r^2} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

- Zone de la couronne dans la sphère composite  $a \leq r \leq b$  :

$$\begin{aligned} U_{rm} &= B_1 r - \frac{6\nu_m}{1-2\nu_m} B_2 r^3 + \frac{3B_3}{r^4} + \frac{5-4\nu_m}{1-2\nu_m} \frac{B_4}{r^2} \\ U_{\theta m} &= B_1 r - \frac{7-4\nu_m}{1-2\nu_m} B_2 r^3 - \frac{2B_3}{r^4} + \frac{2B_4}{r^2} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

- Zone de l'inclusion dans la sphère composite  $r \leq a$  :

$$\begin{aligned} U_{ri} &= A_1 r - \frac{6\nu_i}{1-2\nu_m} A_2 r^3 \\ U_{\theta i} &= A_1 r - \frac{7-4\nu_i}{1-2\nu_i} A_2 r^3 \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

où  $\nu_i$  et  $\nu_m$  désignent respectivement les coefficients de Poisson de l'inclusion et de la matrice.  $D_1, D_3, D_4, B_1, B_2, B_3, B_4, A_1, A_2$  sont des constantes à déterminer par les conditions de continuité aux deux interfaces.

La condition de cohérence (ou consistance) consiste à demander que l'énergie totale reste invariante, lorsqu'on remplace le milieu homogénéisé par une inclusion composite neutre correspondant. En outre, si on désigne par  $W_0$  l'énergie de déformation du milieu effectif, on obtient l'énergie de déformation  $W_i$  du milieu effectif dans laquelle la sphère composite neutre est noyée :

$$W_i = W_0 - \frac{1}{2} \int_{\partial S} (T_i^0 u_{ie} - T_{ie} u_i^0) dS \quad (\text{D.5})$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{2} \int_{\partial S} (T_i^0 u_{ie} - T_{ie} u_i^0) dS = 0 \quad (\text{D.6})$$

Partant de cette condition de consistance, le module de cisaillement effectif se trouve par la résolution de l'équation quadratique suivante [26] :

$$A \left( \frac{\mu^{ef}}{\mu_m} \right)^2 + 2B \left( \frac{\mu^{ef}}{\mu_m} \right) + C = 0 \quad (\text{D.7})$$

avec :

$$\begin{aligned}
d &= \frac{\mu_i}{\mu_m} - 1 \\
g_1 &= (49 - 50 \nu_m \nu_i) d + 35 (1 + d) (\nu_i - 2 \nu_m) + 70 \nu_i - 35 \nu_m \\
g_2 &= (7 + 5 \nu_i) (1 + d) + 28 - 40 \nu_i \\
g_3 &= 2 (1 + d) (4 - 5 \nu_m) + 7 - 5 \nu_m \\
A &= -4 (g_3 - 2 d (4 - 5 \nu_m) f) (g_1 f^{(7/3)} - g_2 (7 - 10 \nu_m)) - 126 d g_2 f (1 - f^{(2/3)})^2 \\
B &= -\frac{1}{2} C - \frac{1}{2} A - \frac{525}{2} d g_2 f (1 - \nu_m)^2 \\
C &= -(g_3 + d f (7 - 5 \nu_m)) (4 g_1 f^{(7/3)} + g_2 (7 + 5 \nu_m)) - 126 d g_2 f (1 - f^{(2/3)})^2
\end{aligned} \tag{D.8}$$

---

## D.2 Problème de cisaillement des sphères composites de Hashin

De la même façon que pour les bornes du module de compressibilité, on peut établir les encadrements pour le module de cisaillement homogénéisé en considérant une sollicitation de cisaillement pur :

$$\boldsymbol{\Sigma}(\underline{x}) = \tau (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \tag{D.9}$$

$$\mathbf{E}(\underline{x}) = \frac{\gamma}{2} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \tag{D.10}$$

imposée sur la frontière  $\partial\Omega$  du domaine.

Dans ce cas, la sphère composite n'est pas neutre. Les conditions homogènes imposées au contour  $\partial\Omega_c$  sont alors des champs statiquement ou cinématiquement admissibles pour le problème initial. La borne inférieure est obtenue par l'approche en contrainte en imposant la condition aux limites (Eq. D.9) sur  $\partial\Omega_c$  de la sphère composite et la borne supérieure est obtenue par l'approche en déformation en imposant la condition au contour (Eq. D.10) sur  $\partial\Omega_c$ . Le champ solution de déplacement est obtenu en résolvant le système d'équation suivant :

$$\begin{aligned}
(\lambda_i + \mu_i) u_{k,kj}^{(i)} + \mu_i u_{j,kk}^{(i)} &= 0 \\
(\lambda_m + \mu_m) u_{k,kj}^{(m)} + \mu_m u_{j,kk}^{(m)} &= 0
\end{aligned} \tag{D.11}$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \begin{aligned}
u_j^{(i)} &= 0 & (r = 0) \\
u_j^{(i)} &= u_j^{(m)} \\
\sigma_j^{(i)} &= \sigma_j^{(m)}
\end{aligned} \right\} (r = a) \tag{D.12}$$

Dans le cas de l'approche en contrainte :

$$\sigma_j^{(m)} = \Sigma_j^{(0)} \quad (r = b) \tag{D.13}$$

où  $\Sigma_j^{(0)}$  est obtenu par la relation (D.9). Dans le cas de l'approche en déformation :

$$u_j^{(m)} = u_j^{(0)} \quad (r = b) \tag{D.14}$$

où  $u_j^{(0)}$  est obtenu par la relation (D.10).

En utilisant la solution générale de la sphère composite, on obtient le champ de déplacement dans la couronne ( $a \leq r \leq b$ ) :

$$\underline{u}^{(m)} = A_1 \underline{u}_1^{(m)} + a^5 A_2 \underline{u}_2^{(m)} + \frac{1}{a^2} A_3 \underline{u}_3^{(m)} + a^3 A_4 \underline{u}_4^{(m)} \tag{D.15}$$

où

$$\begin{aligned}\underline{u}_1^{(m)} &= \text{grad}(x_1 x_2) \\ \underline{u}_2^{(m)} &= \text{grad}\left(\frac{x_1 x_2}{r^5}\right) \\ \underline{u}_3^{(m)} &= r^2 \text{grad}(x_1 x_2) + \alpha_2^{(m)} x_1 x_2 \underline{r} \\ \underline{u}_4^{(m)} &= r^2 \text{grad}\left(\frac{x_1 x_2}{r}\right) + \alpha_{(-3)}^{(m)} \frac{x_1 x_2}{r^5} \underline{r}\end{aligned}\tag{D.16}$$

et

$$\begin{aligned}\alpha_2^{(m)} &= -2 \frac{2\lambda_m + 7\mu_m}{5\lambda_m + 7\mu_m} \\ \alpha_{(-3)}^{(m)} &= \frac{3\lambda_m + 8\mu_m}{\mu_m}\end{aligned}\tag{D.17}$$

et le champ de déplacement dans l'inclusion de la sphère composite ( $0 \leq r \leq a$ ) :

$$\underline{u}^{(i)} = B_1 \underline{u}_1^{(i)} + \frac{1}{a^2} B_3 \underline{u}_3^{(i)}\tag{D.18}$$

où

$$\begin{aligned}\underline{u}_1^{(i)} &= \text{grad}(x_1 x_2) \\ \underline{u}_3^{(i)} &= r^2 \text{grad}(x_1 x_2) + \alpha_2^{(i)} x_1 x_2 \underline{r}\end{aligned}\tag{D.19}$$

et

$$\alpha_2^{(i)} = -2 \frac{2\lambda_i + 7\mu_i}{5\lambda_i + 7\mu_i}\tag{D.20}$$

Les constantes d'intégration  $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_3$  sont à déterminer à partir des conditions aux limites en introduisant les champs de déplacement ci-dessus dans les équations (D.9) et (D.10).

Les deux bornes distinctes, dans le cas d'une seule famille d'inclusions [48] :

$$\mu_{inf} = \mu_m \left( 1 + f \zeta_1(\underline{\sigma}^*) \left( 1 - \frac{\mu_i}{\mu_m} \right) \right)^{-1}\tag{D.21}$$

$$\mu_{sup} = \mu_m \left( 1 + f \zeta_1(\underline{u}^*) \left( \frac{\mu_i}{\mu_m} - 1 \right) \right)\tag{D.22}$$

peuvent être calculées en cherchant les coefficients  $\zeta_1(\underline{\sigma}^*)$  et  $\zeta_1(\underline{u}^*)$  par la résolution du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}\zeta_1(\underline{\sigma}^*) \frac{2}{5} \frac{(1-\eta)(\rho^7 - \rho^5)}{1-\nu_m} + \zeta_2(\underline{\sigma}^*) (4\rho^7 [7-10\nu_i - (7-10\nu_m)\theta] - (7+5\nu_m)\theta) &= 0 \\ \zeta_1(\underline{\sigma}^*) \left( \eta + \frac{(7-5\nu_m)(1-\eta)(1-\rho^3)}{15(1-\nu_m)} \right) + 21 \zeta_2(\underline{\sigma}^*) \theta \left( \frac{1}{\rho^2} - 1 \right) - 1 &= 0 \\ \zeta_1(\underline{u}^*) \frac{2}{5} \frac{(1-\eta)(\rho^7 - \rho^5)}{1-\nu_m} + \zeta_2(\underline{u}^*) (4\rho^7 [7-10\nu_i - (7-10\nu_m)\theta] + 4(7-10\nu_m)\theta) &= 0 \\ \zeta_1(\underline{u}^*) \left( \eta + \frac{(7-5\nu_m)(1-\eta)}{15(1-\nu_m)} + \frac{2(4-5\nu_m)(1-\eta)\rho^3}{15(1-\nu_m)} \right) + 21 \zeta_2(\underline{u}^*) \theta \left( \frac{1}{\rho^2} - 1 \right) - 1 &= 0\end{aligned}\tag{D.23}$$

où

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{1}{35} \frac{28 - 40\nu_i + \eta(7 + 5\nu_i)}{1 - \nu_i} \\ \rho &= f^{(1/3)} \\ \eta &= \frac{\mu_i}{\mu_m}\end{aligned}\tag{D.24}$$



# Annexe E Modèles de Kelvin et de Maxwell généralisés correspondants

Dans ce qui suit, on va analyser les transformées des fonctions de fluage et de relaxation associées aux modèles de Kelvin et de Maxwell généralisés. Cette analyse a pour objectif de construire les formes irréductibles de ces transformées en fonction des paramètres de raideur et de viscosité. Ces formes irréductibles permettent de mettre en évidence l'équivalence des modèles de Kelvin et de Maxwell généralisés.

---

## E.1 TC de la fonction de fluage gouvernée par le modèle de Kelvin généralisé non borné

On construit ici le numérateur et le dénominateur de la TC de la fonction de fluage gouvernée par le modèle de Kelvin généralisé en fonction de ses coefficients de raideur et de viscosité, et puis ceux de la fonction de relaxation gouvernée par le modèle de Maxwell généralisé correspondant (4.1). Ensuite, en appliquant la propriété  $\tilde{J}_m(s)\tilde{R}_m(s) = 1$  dans l'espace de TC, on peut déduire le système de  $2m$  d'équations qui relient les coefficients de raideur et de viscosité de ces deux modèles ( Kelvin et Maxwell généralisé).

En réécrivant l'équation (4.1), on obtient :

$$\tilde{J}_0(s) = \frac{s+1/\zeta_1}{E_1 s} + \sum_{i=2}^m \frac{1}{s+1/\tau_i} \frac{1}{\eta_i} \quad (\text{E.1})$$

où  $\zeta_1 = \eta_1/E_1$  et  $\tau_i = \eta_i/E_i$  avec  $i = 2, \dots, m$ . il faut noter que d'après le paragraphe (4.2.1),  $\tau_1$  est défini par la valeur valant l'infini. Mais pour la facilité dans les manipulations, dans cette annexe, on impose localement  $\tau_1 = \zeta_1 = \eta_1/E_1$ . Alors, l'équation (E.1) devient :

$$\tilde{J}_0(s) = \frac{s+1/\tau_1}{E_1 s} + \sum_{i=2}^m \frac{1}{s+1/\tau_i} \frac{1}{\eta_i} \quad (\text{E.2})$$

En réduisant tous les termes au même dénominateur,  $\tilde{J}_0(s)$  devient alors :

$$\tilde{J}_0(s) = \frac{Q_m(s)}{sP_{m-1}(s)} \quad (\text{E.3})$$

où  $Q_m(s)$  et  $P_{m-1}(s)$ , étant les polynômes de degré  $m$ ,  $m-1$  respectivement, sont donnés par :

$$P_{m-1}(s) = \prod_{i=2}^m (s+1/\tau_i) = p_{m-1}s^{m-1} + \dots + p_1s + p_0 \quad (\text{E.4})$$

$$\begin{aligned} Q_m(s) &= \frac{1}{E_1} \prod_{i=1}^m (s+1/\tau_i) + s \sum_{i=2}^m \left( \frac{1}{\eta_i} \prod_{k \neq i, k \geq 2}^m (s+1/\tau_k) \right) \\ &= q_m s^m + \dots + q_1 s + q_0 \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

avec les coefficients  $p_l$  et  $q_l$  sont donnés par le règlement de Vieta :

$$p_{m-1-k} = \sum_{2 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_l < \dots < \alpha_k \leq m} \left( \prod_{l=1}^k \frac{1}{\tau_{\alpha_l}} \right) \quad (\text{E.6})$$

$$q_{m-k} = \frac{1}{E_1} \left( \sum_{1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_l < \dots < \alpha_k \leq m} \left( \prod_{l=1}^k \frac{1}{\tau_{\alpha_l}} \right) \right) + \sum_{i=2}^m \frac{1}{\eta_i} \left( \sum_{\substack{2 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_l < \dots < \alpha_{k-1} \leq m \\ \alpha_l \neq i}} \left( \prod_{l=1}^{k-1} \frac{1}{\tau_{\alpha_l}} \right) \right) \quad (\text{E.7})$$

avec  $k = 1, \dots, m-1$ , pendant que :

$$q_0 = \frac{1}{E_1} \prod_{i=1}^m \frac{1}{\tau_i}, \quad q_m = \frac{1}{E_1}, \quad p_{m-1} = 1 \quad (\text{E.8})$$

A partir des équations (E.6) et (E.7), on obtient  $q_1, p_0, p_1$  qui serviront pour calculer les asymptotes du cas utilisant le schéma autocohérent généralisé (Annexe G.2) :

$$q_1 = \frac{1}{E_1} \left( \sum_{1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_l < \dots < \alpha_{m-1} \leq m} \left( \prod_{l=1}^{m-1} \frac{1}{\tau_{\alpha_l}} \right) \right) \quad (\text{E.9})$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{i=2}^m \frac{1}{\eta_i} \left( \sum_{\substack{2 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_l < \dots < \alpha_{m-2} \leq m \\ \alpha_l \neq i}} \left( \prod_{l=1}^{m-2} \frac{1}{\tau_{\alpha_l}} \right) \right) \\ & = \frac{1}{E_1} \left( \prod_{i=1}^m \frac{1}{\tau_i} \right) \sum_{i=1}^m \tau_i + \left( \sum_{i=2}^m \frac{\tau_1}{E_i} \right) \left( \prod_{i=1}^m \frac{1}{\tau_i} \right) \\ & = \left\{ \frac{1}{E_1} \sum_{i=1}^m \tau_i + \tau_1 (S_\infty - S_0) \right\} \left( \prod_{i=1}^m \frac{1}{\tau_i} \right) \end{aligned}$$

$$p_0 = \prod_{i=2}^m \frac{1}{\tau_i} = \tau_1 \prod_{i=1}^m \frac{1}{\tau_i} \quad (\text{E.10})$$

$$p_1 = \sum_{2 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_l < \dots < \alpha_{m-2} \leq m} \left( \prod_{l=1}^{m-2} \frac{1}{\tau_{\alpha_l}} \right) = \tau_1 \left( \prod_{i=1}^m \frac{1}{\tau_i} \right) \left( \sum_{i=1}^m \tau_i - \tau_1 \right) \quad (\text{E.11})$$

Du fait que le comportement de la fonction rationnelle  $\tilde{J}_0(s) = \frac{Q_m(s)}{sP_{m-1}(s)}$  ne change pas quand on divise son numérateur et son dénominateur par une constante. De plus, l'expression de  $q_0, q_1, p_0, p_1$  a le même facteur  $\tau_1 \left( \prod_{i=1}^m \frac{1}{\tau_i} \right)$ , en divisant  $q_0, q_1, p_0, p_1$  donnés par la relation (E.8-E.11) par  $\tau_1 \left( \prod_{i=1}^m \frac{1}{\tau_i} \right)$ , on peut donc considérer que :

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{\eta_1} = F_\infty \\ q_1 &= \frac{1}{\eta_1} \sum_{i=1}^m \tau_i + \left( \sum_{i=1}^m \frac{1}{E_i} - \frac{1}{E_1} \right) = F_\infty \sum_{i=1}^m \tau_i + (S_\infty - S_0) \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

$$p_0 = 1, \quad p_1 = \sum_{i=1}^m \tau_i - \tau_1 = \sum_{i=1}^m \tau_i - \frac{S_0}{F_\infty} \quad (\text{E.13})$$

## E.2 TC de la fonction de relaxation gouvernée par le modèle de Maxwell généralisé non borné

En désignant les coefficients de raideur  $\check{E}_i$  et de viscosité  $\check{\eta}_i$  pour le modèle de Maxwell généralisé correspondant comme indiqué la figure 4.1, on obtient la fonction de relaxation dans l'espace de transformée :

$$\tilde{R}_0(s) = \sum_{i=1}^m \frac{s\check{E}_i}{s+1/\check{\tau}_i} = \frac{s \sum_{i=1}^m \left( \check{E}_i \prod_{\substack{k \neq i, k=1 \\ k=1}}^m (s+1/\check{\tau}_i) \right)}{\prod_{i=1}^m (s+1/\check{\tau}_i)} \quad (\text{E.14})$$

En réduisant tous les termes au même dénominateur,  $\tilde{R}_0(s)$  devient alors :

$$\tilde{R}_0(s) = \frac{1}{\tilde{J}_0(s)} = \frac{s\check{P}_{m-1}(s)}{\check{Q}_m(s)} \quad (\text{E.15})$$

La combinaison des deux relations précédentes nous donne :

$$\check{P}_{m-1}(s) = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \check{E}_i} \sum_{i=1}^m \left( \check{E}_i \prod_{\substack{k \neq i, k=1 \\ k=1}}^m (s+1/\check{\tau}_i) \right) \quad (\text{E.16})$$

$$\check{Q}_m(s) = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \check{E}_i} \prod_{i=1}^m (s+1/\check{\tau}_i) \quad (\text{E.17})$$

On doit diviser le numérateur et le dénominateur de l'équation (E.14) par  $\sum_{i=1}^m \check{E}_i$  pour assurer que le coefficient de degré  $(m-1)$  du polynôme  $\check{P}_{m-1}(s)$  soit égale à l'unité  $\check{p}_{m-1} = 1$  comme celui  $p_{m-1} = 1$  de  $P_{m-1}(s)$  dans (Eq. E.8). Les coefficients de  $\check{P}_{m-1}(s)$  et de  $\check{Q}_m(s)$  sont aussi donnés par le règlement de Vieta :

$$\check{p}_{m-1-k} = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \check{E}_i} \sum_{i=1}^m \left( \check{E}_i \sum_{\substack{1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_l < \dots < \alpha_k \leq m \\ \alpha_l \neq i}} \left( \prod_{l=1}^k \frac{1}{\tau_{\alpha_l}} \right) \right) \quad \text{avec } k = 0, \dots, m-1 \quad (\text{E.18})$$

$$\check{q}_{m-k} = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \check{E}_i} \sum_{1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_l < \dots < \alpha_k \leq m} \left( \prod_{l=1}^k \frac{1}{\tau_{\alpha_l}} \right) \quad \text{avec } k = 0, \dots, m \quad (\text{E.19})$$

Compte tenu de l'équation (E.15), on obtient un système de  $(2m+1)$  équations :

$$p_{m-1-k} = \check{p}_{m-1-k} \quad (\text{E.20})$$

$$q_{m-k} = \check{q}_{m-k} \quad (\text{E.21})$$

Mais, l'équation  $p_{m-1} = \check{p}_{m-1} = 1$  est évidente, on a finalement un système de  $(2m)$  équations avec  $2m$  inconnues qui relient l'ensemble des paramètres  $\{\eta_i, E_i, \tau_i\}$  du modèle de Kelvin et ceux  $\{\check{\eta}_i, \check{E}_i, \check{\tau}_i\}$  du modèle de Maxwell correspondant.

### E.3 TC de la fonction de fluage gouvernée par le modèle de Kelvin généralisé borné

On considère dans ce cas un modèle de Kelvin généralisé sans avoir le premier amortisseur  $\frac{1}{\eta_1}$ , on obtient alors la TC de la fonction de fluage dans ce cas :

$$\tilde{J}_0(s) = \frac{1}{E_1} + \sum_{i=2}^m \frac{1}{s+1/\tau_i} \frac{1}{\eta_i} \quad (\text{E.22})$$

En réduisant tous les termes au même dénominateur,  $\tilde{J}_0(s)$  devient alors :

$$\tilde{J}_0(s) = \frac{Q_{m-1}(s)}{P_{m-1}(s)} \quad (\text{E.23})$$

$P_{m-1}(s)$  est identique au cas du modèle de Kelvin généralisé non borné, pendant que  $Q_{m-1}(s)$  est donné par :

$$\begin{aligned} Q_{m-1}(s) &= \frac{1}{E_1} \prod_{i=2}^m (s+1/\tau_i) + \sum_{i=2}^m \left( \frac{1}{\eta_i} \prod_{\substack{k \neq i, k \geq 2}}^m (s+1/\tau_k) \right) \\ &= q_{m-1} s^{m-1} + \dots + q_1 s + q_0 \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

avec les coefficients  $q_i$  donnés par le règlement de Vieta :

$$q_{m-1-k} = \frac{1}{E_1} \left( \sum_{2 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_l < \dots < \alpha_k \leq m} \left( \prod_{l=1}^k \frac{1}{\tau_{\alpha_l}} \right) \right) + \sum_{i=2}^m \frac{1}{\eta_i} \left( \sum_{\substack{2 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_l < \dots < \alpha_{k-1} \leq m \\ \alpha_l \neq i}} \left( \prod_{l=1}^{k-1} \frac{1}{\tau_{\alpha_l}} \right) \right) \quad (\text{E.25})$$

De la même façon comme pour le cas du modèle de Kelvin généralisé non borné, on en déduit que :

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{E_1} \prod_{i=2}^m \frac{1}{\tau_i} + \sum_{i=2}^m \frac{1}{\eta_i} \left( \sum_{\substack{2 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_l < \dots < \alpha_{m-2} \leq m \\ \alpha_l \neq i}} \left( \prod_{l=1}^{m-2} \frac{1}{\tau_{\alpha_l}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{E_1} \prod_{i=2}^m \frac{1}{\tau_i} + \sum_{i=2}^m \frac{1}{E_i} \prod_{i=2}^m \frac{1}{\tau_i} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{E_i} \prod_{i=2}^m \frac{1}{\tau_i} \end{aligned} \quad (\text{E.26})$$

$$q_1 = \frac{1}{E_1} \left( \sum_{2 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_l < \dots < \alpha_{m-2} \leq m} \left( \prod_{l=1}^{m-2} \frac{1}{\tau_{\alpha_l}} \right) \right) \quad (\text{E.27})$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{i=2}^m \frac{1}{\eta_i} \left( \sum_{\substack{2 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_l < \dots < \alpha_{m-3} \leq m \\ \alpha_l \neq i}} \left( \prod_{l=1}^{m-3} \frac{1}{\tau_{\alpha_l}} \right) \right) \\ & = \frac{1}{E_1} \sum_{i=2}^m \tau_i \left( \prod_{i=2}^m \frac{1}{\tau_i} \right) + \sum_{i=2}^m \frac{\tau_i}{\eta_i} \left( \sum_{k=2}^m \tau_k - \tau_i \right) \left( \prod_{i=2}^m \frac{1}{\tau_i} \right) \\ & = \left\{ \frac{1}{E_1} \sum_{i=2}^m \tau_i + \sum_{i=2}^m \frac{1}{E_i} \left( \sum_{k=2}^m \tau_k - \tau_i \right) \right\} \left( \prod_{i=2}^m \frac{1}{\tau_i} \right) \\ & = \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{1}{E_i} \sum_{i=2}^m \tau_i - \sum_{i=2}^m \frac{\tau_i}{E_i} \right\} \left( \prod_{i=2}^m \frac{1}{\tau_i} \right) \end{aligned}$$

$$p_0 = \prod_{i=2}^m \frac{1}{\tau_i} \quad (\text{E.28})$$

$$p_1 = \sum_{2 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_l < \dots < \alpha_{m-2} \leq m} \left( \prod_{l=1}^{m-2} \frac{1}{\tau_{\alpha_l}} \right) = \left( \prod_{i=2}^m \frac{1}{\tau_i} \right) \left( \sum_{i=2}^m \tau_i \right) \quad (\text{E.29})$$

Finalement, comme pour le cas précédent, l'expression de  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $p_0$ ,  $p_1$  a le même facteur  $\left( \prod_{i=2}^m \frac{1}{\tau_i} \right)$ , en divisant  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $p_0$ ,  $p_1$  donnés par les relations (E.8-E.11) par  $\left( \prod_{i=1}^m \frac{1}{\tau_i} \right)$ , on peut donc considérer que :

$$q_0 = \sum_{i=1}^m \frac{1}{E_i} = S_\infty \quad , \quad q_1 = S_\infty \sum_{i=2}^m \tau_i - \sum_{i=2}^m \frac{\tau_i}{E_i} \quad (\text{E.30})$$

$$p_0 = 1 \quad , \quad p_1 = \sum_{i=2}^m \tau_i \quad (\text{E.31})$$



# Annexe F Schéma de Mori-Tanaka

Cette annexe détaille les calculs relatifs :

- à la recherche d'une forme simple de la TC d'une fonction effective de fluage obtenue par le schéma de Mori-Tanaka (§F.1) ;
- à la détermination de la vitesse effective de fluage instantanée (§F.2) ;
- à la détermination de l'ordonnée à l'origine d'une fonction effective de fluage (§ F.3).

## F.1 TC des fonctions effectives de fluage et leur fonction composée

### F.1.1 Forme simple de la TC de la fonction effective de fluage

$$\tilde{J}_{ef}^{\pi}(s) = \tilde{J}_0^{\pi}(s) \frac{\left( f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{f_r}{1 + \tilde{\alpha}_0^{\pi}(s) (R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s) - 1)} \right)}{\left( f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{f_r R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s)}{1 + \tilde{\alpha}_0^{\pi}(s) (R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s) - 1)} \right)} \quad (\text{F.1})$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur de  $\tilde{J}_{ef}^{\pi}(s)$  par  $\tilde{\alpha}_0^{\pi}(s)$  et le nommant respectivement par  $\mathcal{P}^{\pi}(s)$ ,  $\mathcal{Q}^{\pi}(s)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\pi}(s) &= \tilde{\alpha}_0^{\pi}(s) f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{f_r R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s) \tilde{\alpha}_0^{\pi}(s)}{1 - \tilde{\alpha}_0^{\pi}(s) + \tilde{\alpha}_0^{\pi}(s) R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s)} \\ &= \tilde{\alpha}_0^{\pi}(s) f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{f_r R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s)}{\delta_0^{\pi}(s) + R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s)} \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

et :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{\pi}(s) &= \tilde{\alpha}_0^{\pi}(s) f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{f_r}{\delta_0^{\pi}(s) + R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s)} \\ &= \tilde{\alpha}_0^{\pi}(s) f_0 + \frac{1}{\delta_0^{\pi}(s)} \sum_{r=1}^n \frac{f_r (\delta_0^{\pi}(s) + R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s))}{\delta_0^{\pi}(s) + R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s)} - \frac{1}{\delta_0^{\pi}(s)} \sum_{r=1}^n \frac{f_r R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s)}{\delta_0^{\pi}(s) + R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s)} \\ &= \tilde{\alpha}_0^{\pi}(s) f_0 + \frac{1}{\delta_0^{\pi}(s)} (1 - f_0) - \frac{1}{\delta_0^{\pi}(s)} \sum_{r=1}^n \frac{f_r R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s)}{\delta_0^{\pi}(s) + R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s)} \\ &= -\frac{\tilde{\alpha}_0^{\pi}(s)}{\delta_0^{\pi}(s)} f_0 + \frac{1}{\delta_0^{\pi}(s)} - \frac{1}{\delta_0^{\pi}(s)} \sum_{r=1}^n \frac{f_r R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s)}{\delta_0^{\pi}(s) + R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s)} \\ &= \frac{1}{\delta_0^{\pi}(s)} \left( 1 - \tilde{\alpha}_0^{\pi}(s) f_0 - \sum_{r=1}^n \frac{f_r R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s)}{\delta_0^{\pi}(s) + R_r^{\pi} \tilde{J}_0^{\pi}(s)} \right) \\ &= \frac{1}{\delta_0^{\pi}(s)} (1 - \mathcal{P}^{\pi}(s)) \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

avec  $\delta_0^\pi(s) = \frac{1 - \tilde{\alpha}_0^\pi(s)}{\tilde{\alpha}_0^\pi(s)}$ . On obtient finalement :

$$\tilde{J}_{ef}^\pi(s) = \tilde{J}_0^\pi(s) \frac{(1 - \mathcal{P}^\pi(s))}{\delta_0^\pi(s) \mathcal{P}^\pi(s)} \quad (\text{F.4})$$

## F.1.2 Fonction composée de fluage effectif

### F.1.2.1 Cas général

Réduisant au même dénominateur des expressions des fonctions composées  $L^\pi(u, v)$  (Eqs. 4.21-4.22), on obtient leur expression réduisante :

$$\begin{aligned} L^\kappa(u, v) &= v \frac{\underline{B}^\kappa(u, v)}{\underline{C}^\kappa(u, v)} \\ \underline{B}^\kappa(u, v) &= v f_0 \prod_{r=1}^n (3\kappa_r u + 4) + (4v + 3u) \sum_{r=1}^n f_r \prod_{i=1, i \neq r}^n (3\kappa_i u + 4) \\ \underline{C}^\kappa(u, v) &= v f_0 \prod_{r=1}^n (3\kappa_r u + 4) + v(4v + 3u) \sum_{r=1}^n \kappa_r f_r \prod_{i=1, i \neq r}^n (3\kappa_i u + 4) \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

$$\begin{aligned} L^\mu(u, v) &= u \frac{\underline{B}^\mu(u, v)}{\underline{C}^\mu(u, v)} \\ \underline{B}^\mu(u, v) &= f_0 \prod_{r=1}^n (6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v) \\ &\quad + 5(4v + 3u) \sum_{r=1}^n f_r \prod_{i=1, i \neq r}^n (6\mu_i u^2 + (9 + 12v\mu_i)u + 8v) \\ \underline{C}^\mu(u, v) &= f_0 \prod_{r=1}^n (6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v) \\ &\quad + 5u(4v + 3u) \sum_{r=1}^n f_r \mu_r \prod_{i=1, i \neq r}^n (6\mu_i u^2 + (9 + 12v\mu_i)u + 8v) \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

### F.1.2.2 Module de compressibilité de matrice constant

**F.1.2.2.1 Cas sans porosité** Pour la fonction composée de fluage déviatorique, on utilise ici la technique de décomposition en fractions partielles pour ramener les fraction rationnelles de deux degrés à la forme de fonction homographique :

$$\begin{aligned} B^\mu(u) &= f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{5(4 + 3\kappa_0 u) f_r}{(6\mu_r \kappa_0 u^2 + (9\kappa_0 + 12\mu_r)u + 8)} \\ &= f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{5f_r(u + u_0^\kappa)}{2\mu_r(u + u_{r,1}^\mu)(u + u_{r,2}^\mu)} \\ &= f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{5f_r}{2\mu_r} \left( \bar{u}_{r,1}^\mu \frac{1}{u + u_{r,1}^\mu} + \bar{u}_{r,2}^\mu \frac{1}{u + u_{r,2}^\mu} \right) \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

$$\begin{aligned}
C^\mu(u) &= f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{5u(4 + 3\kappa_0 u) f_r \mu_r}{(6\mu_r \kappa_0 u^2 + (9\kappa_0 + 12\mu_r)u + 8)} \quad (\text{F.8}) \\
&= f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{5f_r(u + u_0^\kappa)u}{2(u + u_{r,1}^\mu)(u + u_{r,2}^\mu)} \\
&= f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{5f_r}{2} \left( 1 - \frac{u_{r,1}^\mu - u_0^\kappa}{u_{r,1}^\mu - u_{r,2}^\mu} \frac{u_{r,1}^\mu}{u + u_{r,1}^\mu} - \frac{u_0^\kappa - u_{r,2}^\mu}{u_{r,1}^\mu - u_{r,2}^\mu} \frac{u_{r,2}^\mu}{u + u_{r,2}^\mu} \right) \\
&= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}f_0 - \sum_{r=1}^n \frac{5f_r}{2} \left( \bar{u}_{r,1}^\mu \frac{u_{r,1}^\mu}{u + u_{r,1}^\mu} + \bar{u}_{r,2}^\mu \frac{u_{r,2}^\mu}{u + u_{r,2}^\mu} \right)
\end{aligned}$$

où on pose :

$$a_{2r} = 6\mu_r \kappa_0, \quad a_{1r} = 9\kappa_0 + 12\mu_r, \quad a_{0r} = 8 \quad (\text{F.9})$$

$$\Delta_r = a_{1r}^2 - 4a_{2r}a_{0r} = 81\kappa_0^2 + 24\kappa_0\mu_r + 144\mu_r^2 \quad (\text{F.10})$$

$$u_{r,1}^\mu = \frac{a_{1r} + \sqrt{\Delta_r}}{2a_{2r}}, \quad u_{r,2}^\mu = \frac{a_{1r} - \sqrt{\Delta_r}}{2a_{2r}} \quad (\text{F.11})$$

$$\bar{u}_{r,1}^\mu = \frac{(u_{r,1}^\mu - u_0^\kappa)}{u_{r,1}^\mu - u_{r,2}^\mu}, \quad \bar{u}_{r,2}^\mu = \frac{(u_0^\kappa - u_{r,2}^\mu)}{u_{r,1}^\mu - u_{r,2}^\mu} \quad (\text{F.12})$$

Partant de l'hypothèse  $\kappa_r < \kappa_{r+1}$  et  $\mu_r < \mu_{r+1}$  et du fait que :

$$\frac{\partial \left( \frac{\sqrt{\Delta_r}}{2a_{2,r}} \right)}{\partial \mu_r} = -\frac{4\mu_r + 27\kappa_0}{4\sqrt{\Delta_r}} < 0 \implies \frac{\sqrt{\Delta_r}}{2a_{2,r}} > \frac{\sqrt{\Delta_{r+1}}}{2a_{2,r+1}} \quad (\text{F.13})$$

$$\frac{a_{1,r}}{2a_{2,r}} = \frac{3}{4\mu_r} + \frac{1}{\kappa_0} > \frac{a_{1,r+1}}{2a_{2,r+1}} = \frac{3}{4\mu_{r+1}} + \frac{1}{\kappa_0} \quad (\text{F.14})$$

on en déduit que :

$$u_{r,1}^\mu = \frac{a_{1,r} + \sqrt{\Delta_r}}{2a_{2,r}} > u_{r+1,1}^\mu = \frac{a_{1,r+1} + \sqrt{\Delta_{r+1}}}{2a_{2,r+1}} \quad (\text{F.15})$$

En posant  $\theta_r = \frac{1}{\mu_r}$ , on obtient :

$$\frac{\sqrt{\Delta_r}}{2a_{2,r}} = \frac{\sqrt{(9\kappa_0\theta_r)^2 + 24\kappa_0\theta_r + 144}}{12\kappa_0} \quad (\text{F.16})$$

$$\frac{\partial \left( \frac{\sqrt{\Delta_r}}{2a_{2,r}} \right)}{\partial \theta_r} = \frac{27\kappa_0\theta_r + 4}{4\sqrt{(9\kappa_0\theta_r)^2 + 24\kappa_0\theta_r + 144}} < \frac{3}{4} \quad (\text{F.17})$$

Puis on a :

$$\frac{\sqrt{\Delta_r}}{2a_{2,r}} - \frac{\sqrt{\Delta_{r+1}}}{2a_{2,r+1}} < \frac{3}{4}(\theta_r - \theta_{r+1}) = \frac{a_{1,r}}{2a_{2,r}} - \frac{a_{1,r+1}}{2a_{2,r+1}} \quad (\text{F.18})$$

On déduit finalement :

$$u_{r+1,2}^\mu = \frac{a_{1,r+1} - \sqrt{\Delta_{r+1}}}{2a_{2,r+1}} < u_{r,2}^\mu = \frac{a_{1,r} - \sqrt{\Delta_r}}{2a_{2,r}} \quad (\text{F.19})$$

Ensuite, on prouve que :

$$u_{1,1}^\mu - u_{1,2}^\mu > u_{1,1}^\mu - u_{n,1}^\mu \quad (\text{F.20})$$

Cette inégalité équivaut à :

$$\frac{\sqrt{\Delta_1}}{a_{2,1}} > \frac{a_{1,1} + \sqrt{\Delta_1}}{2 a_{2,1}} - \frac{a_{1,n} + \sqrt{\Delta_n}}{2 a_{2,n}} \quad (\text{F.21})$$

$$\iff \frac{\sqrt{\Delta_1}}{a_{2,1}} + \frac{\sqrt{\Delta_n}}{a_{2,n}} > \frac{a_{1,1}}{a_{2,1}} - \frac{a_{1,n}}{a_{2,n}} = \frac{3}{2\mu_1} - \frac{3}{2\mu_n} \quad (\text{F.22})$$

On peut prouver facilement la dernière inégalité grâce à l'inégalité suivante :

$$\frac{\sqrt{\Delta_r}}{a_{2,r}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2\mu_r}\right)^2 + \frac{2}{3} \frac{1}{\kappa_0 \mu_r} + \left(\frac{2}{\kappa_0}\right)^2} > \left|\frac{3}{2\mu_r}\right| \quad ; \quad \forall r = 1 \dots n \quad (\text{F.23})$$

De la même façon, on peut montrer que :

$$\bar{u}_{r,1}^\mu = \frac{(u_{r,1}^\mu - u_0^\kappa)}{u_{r,1}^\mu - u_{r,2}^\mu} > 0 \quad , \quad \bar{u}_{r,2}^\mu = \frac{(u_0^\kappa - u_{r,2}^\mu)}{u_{r,1}^\mu - u_{r,2}^\mu} > 0 \quad (\text{F.24})$$

parce que :

$$\sqrt{\Delta_r} = \sqrt{(9\kappa_0 - 4\mu_r)^2 + 96\mu_r\kappa_0 + 128(\mu_r)^2} > |9\kappa_0 - 4\mu_r| \quad (\text{F.25})$$

et :

$$u_{r,1}^\mu - u_0^\kappa = \frac{9\kappa_0 - 4\mu_r + \sqrt{\Delta_r}}{12\mu_r\kappa_0} > 0 \quad (\text{F.26})$$

$$u_0^\kappa - u_{r,2}^\mu = \frac{-9\kappa_0 + 4\mu_r + \sqrt{\Delta_r}}{12\mu_r\kappa_0} > 0 \quad (\text{F.27})$$

Combinant avec le fait que  $u_{r,1}^\mu - u_{r,2}^\mu = \frac{\sqrt{\Delta_r}}{a_{2,r}} > 0$ , on termine la preuve pour les inégalités (F.24).

**F.1.2.2.2 Cas avec une phase poreuse** On suppose que la phase poreuse est la phase  $n$ , d'où  $\kappa_n = 0$  et  $\mu_n = 0$ .

**Fonction composée sphérique** D'après les relations (4.21-4.87), on obtient :

$$\begin{aligned} B^\kappa(u) &= \frac{1}{u} \left( f_0 + f_n + \frac{3f_n\kappa_0}{4}u + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{f_r\kappa_0}{\kappa_r} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{f_r\kappa_0}{\kappa_r} \frac{u_0^\kappa - u_r^\kappa}{(u + u_r^\kappa)} \right) \quad (\text{F.28}) \\ &= \frac{3f_n\kappa_0}{4} + \frac{1}{u} \left( f_0 + f_n + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{f_r\kappa_0}{\kappa_r} \right) + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{f_r\kappa_0}{\kappa_r} \frac{u_0^\kappa - u_r^\kappa}{u(u + u_r^\kappa)} \\ &= \frac{3f_n\kappa_0}{4} + \left( f_0 + f_n + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{f_r\kappa_0}{\kappa_r} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{f_r\kappa_0}{\kappa_r} \frac{u_0^\kappa - u_r^\kappa}{u_r^\kappa} \right) \frac{1}{u} \\ &\quad + \sum_{r=2}^n \frac{f_r\kappa_0 (u_r^\kappa - u_0^\kappa)}{\kappa_r u_r^\kappa} \frac{1}{(u + u_r^\kappa)} \end{aligned}$$

D'après les relations (4.21-4.88), on obtient :

$$C^\kappa(u) = f_0 + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{f_r(u + u_0^\kappa)}{(u + u_r^\kappa)} = 1 - f_n + \sum_{r=1}^{n-1} f_r \frac{u_0^\kappa - u_r^\kappa}{(u + u_r^\kappa)} \quad (\text{F.29})$$

### F.1.2.3 Expression de $\underline{W}_{n_\pi}^\pi(u)$

On établit ici les coefficients des polynômes  $\underline{B}_{N_\pi}^\pi(u)$  et  $\underline{C}_{N_\pi}^\pi(u)$ . Rappelant les fonctions rationnelles  $B^\pi(u)$  et  $C^\pi(u)$  pour les deux cas du module de compressibilité constant ou du coefficient de Poisson :

$$\begin{aligned} B^\pi(u) &= b^\pi + \sum_{r=r^\pi}^{n_\pi} \frac{b_r^\pi}{(u + \underline{u}_r^\pi)} \\ C^\pi(u) &= c^\pi + \sum_{r=r^\pi}^{n_\pi} \frac{c_r^\pi}{(u + \underline{u}_r^\pi)} \end{aligned} \quad (\text{F.30})$$

Cela donne une même forme  $\underline{W}_{N_\pi}^\pi(u)$  pour les expressions des polynômes  $\underline{B}_{N_\pi}^\pi(u)$  et  $\underline{C}_{N_\pi}^\pi(u)$  :

$$\underline{W}_{N_\pi}^\pi(u) = w^\pi \prod_{r=r^\pi}^{n_\pi} (u + \underline{u}_r^\pi) + \sum_{r=r^\pi}^{n_\pi} f_r w_r^\pi \prod_{i=r^\pi, i \neq r}^{n_\pi} (u + \underline{u}_i^\pi) = \sum_{i=0}^{N_\pi} \underline{w}_i^\pi u^i \quad (\text{F.31})$$

où  $N_\pi = n_\pi + 1 - r_\pi$  si  $c^\pi \neq 0$ ,  $N_\pi = n_\pi - r_\pi$  si  $c^\pi = 0$  et les coefficients  $\underline{w}_i^\pi$  sont donnés par :

$$\underline{w}_{N_\pi}^\pi = w^\pi \prod_{r=r^\pi}^{n_\pi} \underline{u}_r^\pi \quad (\text{F.32})$$

$$\underline{w}_{N_\pi - k}^\pi = w^\pi \left( \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_l < \dots < j_k \\ j_l \geq r^\pi}}^{n_\pi} \left( \prod_{l=1}^k \underline{u}_{j_l}^\pi \right) \right) + \sum_{r=r^\pi}^{n_\pi} w_r^\pi \left( \sum_{\substack{m \\ j_1 < \dots < j_l < \dots < j_{k-1} \\ j_l \neq r, j_l \geq r^\pi}}^m \left( \prod_{l=1}^{k-1} \underline{u}_{j_l}^\pi \right) \right) \quad (\text{F.33})$$

### F.1.2.4 Expression de $\underline{W}_{n_\pi}^\pi(u)$ lorsque $c^\pi = 0$

Dans le cas où  $c^\pi = 0$ , d'après les relations (4.84), (4.108-4.109) et (F.30-F.31), la fonction composée sphérique, dans le cas du module de compressibilité constant et en présence de porosité est :

$$\frac{\mathcal{B}^\kappa(u)}{\mathcal{C}^\kappa(u)} = \frac{\underline{\mathcal{B}}_{N_\kappa+1}^\kappa(u)}{\underline{\mathcal{C}}_{N_\kappa}^\kappa(u)} = \frac{\sum_{i=0}^{N_\kappa+1} \underline{b}_i^\kappa u^i}{\sum_{i=0}^{N_\kappa} \underline{c}_i^\kappa u^i} \quad (\text{F.34})$$

où  $N_\kappa = n_\kappa - r^\kappa$ . En introduisant l'expression de  $u(s) = \frac{Q_{m_\mu}(s)}{sP_{m_\mu-1}(s)} = \frac{Q_{m_\mu}(s)}{P_{m_\mu}(s)}$  dans la relation (F.34), on obtient :

$$J_{ef}^\kappa(s) = \frac{\bar{Q}_{\bar{m}_\kappa}(s)}{\bar{P}_{\bar{m}_\kappa}(s)} = \frac{\bar{Q}_{\bar{m}_\kappa}(s)}{sP_{m_\mu-1}(s) \underline{P}_{\underline{m}_\kappa}(s)} \quad (\text{F.35})$$

où

$$\bar{Q}_{\bar{m}_\kappa}(s) = \sum_{i=0}^{N_\kappa+1} \underline{b}_i^\kappa (Q_{m_\mu}(s))^i (P_{m_\mu}(s))^{N_\kappa+1-i} \quad (\text{F.36})$$

$$\underline{P}_{\underline{m}_\kappa}(s) = \sum_{i=0}^{N_\kappa} \underline{c}_i^\kappa (Q_{m_\mu}(s))^i (P_{m_\mu}(s))^{N_\kappa-i} \quad (\text{F.37})$$

## F.2 Dérivée des fonctions composées

On établit ici l'expression des dérivées de  $L^\pi(u, v)$  par rapport aux variables  $(u, v)$ , d'après les relations (4.23) et (4.24) :

$$\frac{\partial L^\pi(u, v)}{\partial u} = \frac{\mathcal{B}_{,u}^\pi(u, v) C^\pi(u, v) - C_{,u}^\pi(u, v) \mathcal{B}^\pi(u, v)}{[C^\pi(u, v)]^2} \quad (\text{F.38})$$

$$\frac{\partial L^\pi(u, v)}{\partial v} = \frac{\mathcal{B}_{,v}^\pi(u, v) C^\pi(u, v) - C_{,v}^\pi(u, v) \mathcal{B}^\pi(u, v)}{[C^\pi(u, v)]^2} \quad (\text{F.39})$$

$$\frac{\partial \underline{L}^\pi(u, v)}{\partial u} = \frac{B_{,u}^\pi(u, v) C^\pi(u, v) - C_{,u}^\pi(u, v) B^\pi(u, v)}{[C^\pi(u, v)]^2} \quad (\text{F.40})$$

$$\frac{\partial \underline{L}^\pi(u, v)}{\partial v} = \frac{B_{,v}^\pi(u, v) C^\pi(u, v) - C_{,v}^\pi(u, v) B^\pi(u, v)}{[C^\pi(u, v)]^2} \quad (\text{F.41})$$

### F.2.1 Fonction composée déviatorique

- Il n'existe pas de phase poreuse parmi les inclusions :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{,u}^\mu(u, v) &= f_0 + \sum_{r=1}^n 5f_r \frac{(12v\mu_r + 27)u^2 + 48vu + 32v^2}{(6\mu_r u^2 + (12v\mu_r + 9)u + 8v)^2} \\ \mathcal{B}_{,v}^\mu(u, v) &= -\sum_{r=1}^n \frac{30f_r(3\mu_r u^2 + 8vu\mu_r + 8v^2\mu_r + 2v)}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)^2} \\ C_{,u}^\mu(u, v) &= \sum_{r=1}^n 5\mu_r f_r \frac{(12v\mu_r + 27)u^2 + 48vu + 32v^2}{(6\mu_r u^2 + (12v\mu_r + 9)u + 8v)^2} \end{aligned} \quad (\text{F.42})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{,v}^\mu(u, v) &= \sum_{r=1}^n \frac{60f_r u^2 (1 - u\mu_r)}{(6\mu_r u^2 + (12v\mu_r + 9)u + 8v)^2} \\ \mathcal{B}_{,u}^\mu(u, v) &= -\sum_{r=1}^n \frac{60f_r u (\mu_r u - 1)}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)^2} \\ C_{,v}^\mu(u, v) &= \sum_{r=1}^n \frac{60\mu_r f_r u^2 (1 - u\mu_r)}{(6\mu_r u^2 + (12v\mu_r + 9)u + 8v)^2} \end{aligned} \quad (\text{F.43})$$

- Il existe une phase poreuse parmi les inclusions :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{,u}^\mu(u, v) &= f_0 + 5 \frac{f_n (27u^2 + 48uv + 32v^2)}{(9u + 8v)^2} + \sum_{r=1}^{n-1} 5f_r \frac{(12v\mu_r + 27)u^2 + 48vu + 32v^2}{(6\mu_r u^2 + (12v\mu_r + 9)u + 8v)^2} \\ \mathcal{B}_{,v}^\mu(u, v) &= -\frac{60f_n v}{(9u + 8v)^2} - \sum_{r=1}^{n-1} \frac{30f_r(3\mu_r u^2 + 8vu\mu_r + 8v^2\mu_r + 2v)}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)^2} \\ C_{,u}^\mu(u, v) &= \sum_{r=1}^{n-1} 5\mu_r f_r \frac{(12v\mu_r + 27)u^2 + 48vu + 32v^2}{(6\mu_r u^2 + (12v\mu_r + 9)u + 8v)^2} \end{aligned} \quad (\text{F.44})$$

$$\begin{aligned}
B_{,v}^\mu(u, v) &= \frac{60u^2 f_n}{(9u + 8v)^2} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{60f_r u^2 (1 - u\mu_r)}{(6\mu_r u^2 + (12v\mu_r + 9)u + 8v)^2} \\
B_{,v}^\mu(u, v) &= \frac{60f_n u}{(9u + 8v)^2} - \sum_{r=1}^{n-1} \frac{60f_r u (\mu_r u - 1)}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)^2} \\
C_{,v}^\mu(u, v) &= \sum_{r=1}^{n-1} \frac{60\mu_r f_r u^2 (1 - u\mu_r)}{(6\mu_r u^2 + (12v\mu_r + 9)u + 8v)^2}
\end{aligned} \tag{F.45}$$

## F.2.2 Fonction composée de fluage sphérique

- Il n'existe pas de phase poreuse parmi les inclusions :

$$\begin{aligned}
B_{,u}^\kappa(u, v) &= \sum_{r=1}^n \frac{12f_r (1 - v\kappa_r)}{(3u\kappa_r + 4)^2} , \quad B_{,v}^\kappa(u, v) = f_0 + \sum_{r=1}^n \frac{4f_r}{3u\kappa_r + 4} \\
B_{,u}^\kappa(u, v) &= -\sum_{r=1}^n \frac{12f_r (\kappa_r v - 1)}{v(3u\kappa_r + 4)^2} , \quad B_{,v}^\kappa(u, v) = -\sum_{r=1}^n \frac{3f_r u}{v^2(3u\kappa_r + 4)} \\
C_{,u}^\kappa(u, v) &= \sum_{r=1}^n \frac{12\kappa_r f_r (1 - v\kappa_r)}{(3u\kappa_r + 4)^2} , \quad C_{,v}^\kappa(u, v) = \sum_{r=1}^n \frac{4\kappa_r f_r}{3u\kappa_r + 4}
\end{aligned} \tag{F.46}$$

- Il existe une phase poreuse parmi les inclusions :

$$\begin{aligned}
B_{,u}^\kappa(u, v) &= \frac{3}{4}f_n + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{12f_r (1 - v\kappa_r)}{(3u\kappa_r + 4)^2} , \quad B_{,v}^\kappa(u, v) = f_0 + f_n + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{4f_r}{3u\kappa_r + 4} \\
B_{,u}^\kappa(u, v) &= \frac{3f_n}{4v} - \sum_{r=1}^{n-1} \frac{12f_r (\kappa_r v - 1)}{v(3u\kappa_r + 4)^2} , \quad B_{,v}^\kappa(u, v) = -\frac{3f_n u}{4v^2} - \sum_{r=1}^{n-1} \frac{3f_r u}{v^2(3u\kappa_r + 4)} \\
C_{,u}^\kappa(u, v) &= \sum_{r=1}^{n-1} \frac{12\kappa_r f_r (1 - v\kappa_r)}{(3u\kappa_r + 4)^2} , \quad C_{,v}^\kappa(u, v) = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{4\kappa_r f_r}{3u\kappa_r + 4}
\end{aligned} \tag{F.47}$$

## F.3 Ordonnée à l'origine

### F.3.1 Démarches de calcul du deuxième terme de l'ordonné à l'origine

Dans cette annexe, on va calculer la limite  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(L^\pi(u(s), v(s)))}{ds}$  pour 4 cas indiqués dans (§ 5.4.1).

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(\underline{L}^\pi(u(s), v(s)))}{ds} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial(\underline{L}^\pi(u(s), v(s)))}{\partial u} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{du(s)}{ds} \\
&\quad + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial(\underline{L}^\pi(u(s), v(s)))}{\partial v} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{dv(s)}{ds}
\end{aligned} \tag{F.48}$$

Pour calculer cette limite, il faut d'abord calculer les dérivées partielles de  $\underline{L}^\pi(u, v)$  selon les expressions (4.20), (4.21) et (4.22) :

$$\frac{\partial(\underline{L}^\pi(u, v))}{\partial u} = \frac{B_{,u}^\pi(u, v) C^\pi(u, v) - C_{,u}^\pi(u, v) B^\pi(u, v)}{[C^\pi(u, v)]^2} \tag{F.49}$$

$$\frac{\partial(\underline{L}^\pi(u, v))}{\partial v} = \frac{B_{,v}^\pi(u, v) C^\pi(u, v) - C_{,v}^\pi(u, v) B^\pi(u, v)}{[C^\pi(u, v)]^2} \tag{F.50}$$

Les dérivées partielles du numérateur  $B^\pi(u, v)$  et du dénominateur  $C^\pi(u, v)$  sont données par Eqs.(F.42-F.47), pour les deux cas : il existe une phase poreuse parmi les inclusions, et il n'existe pas de phase poreuse parmi les inclusions.

Dans les calculs dans la suite, on désigne :

$$\Sigma_\mu = \sum_{r=1}^n \frac{f_r}{\mu_r} \quad \text{et} \quad \Sigma_\kappa = \sum_{r=1}^n \frac{f_r}{\kappa_r} \quad \text{pour le cas sans phase poreuse} \quad (\text{F.51})$$

$$\Sigma_\mu^{po} = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{f_r}{\mu_r} \quad \text{et} \quad \Sigma_\kappa^{po} = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{f_r}{\kappa_r} \quad \text{pour le cas avec une phase poreuse} \quad (\text{F.52})$$

### F.3.2 Expression du deuxième terme de l'ordonné à l'origine pour 4 cas

#### F.3.2.1 Cas 1 : Fluage sphérique microscopique non borné et en l'absence de phase poreuse

##### F.3.2.1.1 Partie déviatorique

**Dérivée partielle de  $\underline{L}^\mu(u, v)$  par rapport à  $u$  :** D'après la relation (F.49), on obtient :

$$\frac{\partial(\underline{L}^\mu(u, v))}{\partial u} = \frac{B_{,u}^\mu(u, v) C^\mu(u, v) - C_{,u}^\mu(u, v) B^\mu(u, v)}{[C^\mu(u, v)]^2} \quad (\text{F.53})$$

où  $B^\mu(u, v)$  et  $C^\mu(u, v)$  sont donnés par l'équation (5.23),  $B_{,u}^\mu(u, v)$  et  $C_{,u}^\mu(u, v)$  sont donnés par l'équation (F.42). Il est nécessaire de décomposer  $C_{,u}^\mu(u, v)$  en deux parties concernant leur différence d'ordre de grandeur quand  $s \rightarrow 0$  :

$$\begin{aligned} C_{,u}^\mu(u, v) &= C_{1,u}^\mu(u, v) + C_{2,u}^\mu(u, v) \quad (\text{F.54}) \\ C_{1,u}^\mu(u, v) &= \sum_{r=1}^n \frac{60f_r(\mu_r u)^2 v}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)^2} \\ C_{2,u}^\mu(u, v) &= \sum_{r=1}^n \frac{5f_r \mu_r (27u^2 + 48vu + 32v^2)}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)^2} \end{aligned}$$

Ensuite, on calcule la limite  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial(\underline{L}^\mu(u(s), v(s)))}{\partial u} \frac{du(s)}{ds}$  terme à terme. On commence d'abord la limite de son dénominateur :

$$\lim_{s \rightarrow 0} C^\mu(u(s), v(s)) = C^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, F_\infty^\kappa s_{\text{lim}}) = \mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \quad (\text{F.55})$$

où

$$\mathfrak{C}^\mu(u, v) = f_0 + \frac{5(4v + 3u)}{(6u + 12v)} (1 - f_0) \quad (\text{F.56})$$

Puis le premier terme de son numérateur :

$$\begin{aligned} &\lim_{s \rightarrow 0} \left[ B_{,u}^\mu(u(s), v(s)) C^\mu(u(s), v(s)) \frac{du(s)}{ds} \right] \quad (\text{F.57}) \\ &= - \left[ B_{,u}^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, F_\infty^\kappa s_{\text{lim}}) F_\infty^\mu s_{\text{lim}}^2 \right] C^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, F_\infty^\kappa s_{\text{lim}}) \\ &= -F_\infty^\mu \mathfrak{B}_{,u}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \end{aligned}$$

où

$$\mathfrak{B}_{,u}^\mu(u, v) = -\frac{30(3u^2 + 8uv + 8v^2)}{(6u^2 + 12uv)^2} \Sigma_\mu \quad (\text{F.58})$$

Selon la relation (F.54), le calcul du dernier terme peut se diviser en deux parties :

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0} \left[ C_{,u}^\mu (u(s), v(s)) B^\mu (u(s), v(s)) \frac{du(s)}{ds} \right] \\ = & \lim_{s \rightarrow 0} \left[ C_{2,u}^\mu (u(s), v(s)) B^\mu (u(s), v(s)) \frac{du(s)}{ds} \right] + \lim_{s \rightarrow 0} \left[ C_{1,u}^\mu (u(s), v(s)) B^\mu (u(s), v(s)) \frac{du(s)}{ds} \right] \end{aligned} \quad (\text{F.59})$$

On obtient facilement :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[ C_{2,u}^\mu (u(s), v(s)) B^\mu (u(s), v(s)) \frac{du(s)}{ds} \right] = -F_\infty^\mu \mathfrak{C}_{2,u}^\mu (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) f_0 \quad (\text{F.60})$$

où

$$\mathfrak{C}_{2,u}^\mu (u, v) = \frac{5(27u^2 + 48uv + 32v^2)}{(6u^2 + 12uv)^2} \Sigma_\mu \quad (\text{F.61})$$

Dans tous les calculs ci-dessus, on remplace la limite  $\lim_{s \rightarrow 0} u(s)$  par  $F_\infty^\mu s_{\text{lim}}$  et  $\lim_{s \rightarrow 0} v(s)$  par  $F_\infty^\kappa s_{\text{lim}}$ . Mais, le dernier terme est calculé de façon différente, on définit d'abord :

$$C_3^\mu (u, v) = C_1^\mu (u, v) / v \quad B_1^\mu (u, v) = B^\mu (u, v) - f_0 \quad (\text{F.62})$$

Puis, on doit remplacer d'abord  $\lim_{s \rightarrow 0} u(s) \approx \frac{F_\infty^\mu}{s} + S_\infty^\mu$  et  $\lim_{s \rightarrow 0} v(s) \approx \frac{F_\infty^\kappa}{s} + S_\infty^\kappa$  :

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0} \left[ C_{1,u}^\mu (u(s), v(s)) B^\mu (u(s), v(s)) \frac{du(s)}{ds} \right] \\ = & -F_\infty^\mu s_{\text{lim}}^2 \times C_{3,u}^\mu (F_\infty^\mu s_{\text{lim}} + S_\infty^\mu, F_\infty^\kappa s_{\text{lim}} + S_\infty^\kappa) \times (F_\infty^\kappa s_{\text{lim}} + S_\infty^\kappa) \\ & \times (f_0 + B_1^\mu (F_\infty^\mu s_{\text{lim}} + S_\infty^\mu, F_\infty^\kappa s_{\text{lim}} + S_\infty^\kappa)) \\ = & -F_\infty^\mu s_{\text{lim}}^2 \times C_{3,u}^\mu (F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, F_\infty^\kappa s_{\text{lim}}) \times (F_\infty^\kappa s_{\text{lim}} + S_\infty^\kappa) \times (f_0 + B_1^\mu (F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, F_\infty^\kappa s_{\text{lim}})) \\ = & -F_\infty^\mu s_{\text{lim}}^2 \left[ C_{3,u}^\mu (F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, F_\infty^\kappa s_{\text{lim}}) \times (F_\infty^\kappa s_{\text{lim}}) \times B_1^\mu (F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, F_\infty^\kappa s_{\text{lim}}) \right. \\ & \left. + C_{3,u}^\mu (F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, F_\infty^\kappa s_{\text{lim}}) \times (F_\infty^\kappa s_{\text{lim}} + S_\infty^\kappa) \times f_0 \right] \\ = & -F_\infty^\mu \left[ \mathfrak{C}_{1,u}^\mu (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{B}_1^\mu (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + f_0 \mathfrak{C}_{3,u}^\mu (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) (S_\infty^\kappa + F_\infty^\kappa s_{\text{lim}}) \right] \end{aligned} \quad (\text{F.63})$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1^\mu (u, v) &= \frac{5(4v + 3u)}{(6u^2 + 12uv)} \Sigma_\mu \\ \mathfrak{C}_{1,u}^\mu (u, v) &= v \mathfrak{C}_{3,u}^\mu (u, v) = \frac{60v}{(6u + 12v)^2} (1 - f_0) \end{aligned} \quad (\text{F.64})$$

On obtient finalement à partir des relations (F.53-F.63) :

$$\begin{aligned} L_u^\mu &= F_\infty^\mu \left[ -\mathfrak{B}_{,u}^\mu (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\mu (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + \mathfrak{C}_{2,u}^\mu (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) f_0 \right. \\ & \left. + \mathfrak{C}_{1,u}^\mu (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{B}_1^\mu (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + f_0 \mathfrak{C}_{3,u}^\mu (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) S_\infty^\kappa \right] \times [\mathfrak{C}^\mu (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa)]^{-2} \end{aligned} \quad (\text{F.65})$$

**Dérivée partielle de  $\underline{L}^\mu (u, v)$  par rapport à  $v$  :** D'après la relation (F.50), on obtient :

$$\frac{\partial (\underline{L}^\mu (u, v))}{\partial v} = \frac{B_{,v}^\mu (u, v) C^\mu (u, v) - C_{,v}^\mu (u, v) B^\mu (u, v)}{[C^\mu (u, v)]^2} \quad (\text{F.66})$$

où  $B_{,v}^\mu(u, v)$  et  $C_{,v}^\mu(u, v)$  sont donnés par l'équation (F.43). Il est nécessaire de décomposer  $C_{,v}^\mu(u, v)$  en deux parties concernant leur différence d'ordre de grandeur quand  $s \rightarrow 0$  :

$$\begin{aligned} C_{,v}^\mu(u, v) &= C_{1,v}^\mu(u, v) + C_{2,v}^\mu(u, v) \tag{F.67} \\ C_{1,v}^\mu(u, v) &= -\sum_{r=1}^n \frac{60f_r(\mu_r u)^2 u}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)^2} \\ C_{2,v}^\mu(u, v) &= \sum_{r=1}^n \frac{60f_r \mu_r u^2}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)^2} \end{aligned}$$

De façon identique du cas précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} &\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial(\underline{L}^\mu(u(s), v(s)))}{\partial v} \times \lim_{s \rightarrow 0} \frac{dv(s)}{ds} \tag{F.68} \\ &= F_\infty^\kappa \left[ -\mathfrak{B}_{,v}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + \mathfrak{C}_{2,v}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) f_0 \right. \\ &\quad \left. + \mathfrak{C}_{1,v}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{B}_1^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + f_0 \mathfrak{C}_{3,v}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) S_\infty^\mu \right] \times [\mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa)]^{-2} \\ &\quad + F_\infty^\kappa f_0 \mathfrak{C}_{3,v}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) F_\infty^\mu s_{\lim} [\mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa)]^{-2} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{,v}^\mu(u, v) &= -\frac{60}{(6u + 12v)^2} \Sigma_\mu & \mathfrak{B}_1^\mu(u, v) &= \frac{5(4v + 3u)}{(6u^2 + 12uv)} \Sigma_\mu \tag{F.69} \\ \mathfrak{C}_{1,v}^\mu(u, v) &= -\frac{60u}{(6u + 12v)^2} (1 - f_0) & \mathfrak{C}_{2,v}^\mu(u, v) &= \frac{60}{(6u + 12v)^2} \Sigma_\mu \\ \mathfrak{C}_{3,v}^\mu(u, v) &= -\frac{60}{(6u + 12v)^2} (1 - f_0) \end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} L_v^\mu &= F_\infty^\kappa \left[ -\mathfrak{B}_{,v}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + \mathfrak{C}_{2,v}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) f_0 \right. \tag{F.70} \\ &\quad \left. + \mathfrak{C}_{1,v}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{B}_1^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + f_0 \mathfrak{C}_{3,v}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) S_\infty^\mu \right] \times [\mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa)]^{-2} \end{aligned}$$

Selon les relations (5.64-5.65), (F.63) et (F.68), on retrouve :

$$\begin{aligned} &F_\infty^\mu f_0 \mathfrak{C}_{3,u}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) F_\infty^\kappa s_{\lim} [\mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa)]^{-2} + F_\infty^\kappa f_0 \mathfrak{C}_{3,v}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) F_\infty^\mu s_{\lim} [\mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa)]^{-2} \\ &= s_{\lim} F_\infty^\mu f_0 F_\infty^\kappa [\mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa)]^{-2} \left( \mathfrak{C}_{3,u}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + \mathfrak{C}_{3,v}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \right) = 0 \tag{F.71} \end{aligned}$$

Car d'après les équations (F.64) et (F.69), on a  $\mathfrak{C}_{3,u}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + \mathfrak{C}_{3,v}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) = 0$ .

### F.3.2.1.2 Partie sphérique

**Dérivée partielle de  $\underline{L}^\kappa(u, v)$  par rapport à  $u$  :** D'après la relation (F.49), on obtient :

$$\frac{\partial(\underline{L}^\kappa(u, v))}{\partial u} = \frac{B_{,u}^\kappa(u, v) C^\kappa(u, v) - C_{,u}^\kappa(u, v) B^\kappa(u, v)}{[C^\kappa(u, v)]^2} \tag{F.72}$$

où  $B^\kappa(u, v)$  et  $C^\kappa(u, v)$  sont donnés par l'équation (5.26),  $B_{,u}^\kappa(u, v)$  et  $C_{,u}^\kappa(u, v)$  sont donnés par l'équation (F.46). Il est nécessaire de décomposer  $C_{,u}^\kappa(u, v)$  en deux parties concernant leur différence

d'ordre de grandeur quand  $s \rightarrow 0$  :

$$C_{,u}^\kappa(u, v) = C_{1,u}^\kappa(u, v) + C_{2,u}^\kappa(u, v)$$

$$C_{1,u}^\kappa(u, v) = -\sum_{i=1}^n \frac{12f_r \kappa_r^2 v}{(3u\kappa_r + 4)^2} \quad C_{2,u}^\kappa(u, v) = \sum_{i=1}^n \frac{12f_r \kappa_r}{(3u\kappa_r + 4)^2}$$

De façon identique du cas précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial(\underline{L}^\kappa(u(s), v(s)))}{\partial u} \times \lim_{s \rightarrow 0} \frac{du(s)}{ds} \\ &= F_\infty^\mu \left[ -\mathfrak{B}_{,u}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{E}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + \mathfrak{E}_{2,u}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) f_0 \right. \\ & \quad \left. + \mathfrak{E}_{1,u}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{B}_1^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + f_0 \mathfrak{E}_{3,u}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) S_\infty^\kappa \right] \times [\mathfrak{E}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa)]^{-2} \\ & \quad + F_\infty^\mu f_0 \mathfrak{E}_{3,u}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) F_\infty^\mu \text{s\lim} [\mathfrak{E}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa)]^{-2} \end{aligned} \quad (\text{F.73})$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{,u}^\kappa(u, v) &= -\frac{4}{3u^2} \Sigma_\kappa, \quad \mathfrak{B}_1^\kappa(u, v) = \frac{(4v + 3u)}{3uv} \Sigma_\kappa, \quad \mathfrak{E}^\kappa(u, v) = f_0 + \frac{4v + 3u}{3u} (1 - f_0) \\ \mathfrak{E}_{1,u}^\kappa(u, v) &= -\frac{4v}{3u^2} (1 - f_0), \quad \mathfrak{E}_{2,u}^\kappa(u, v) = \frac{4}{3u^2} \Sigma_\kappa, \quad \mathfrak{E}_{3,u}^\kappa(u, v) = -\frac{4}{3u^2} (1 - f_0) \end{aligned} \quad (\text{F.74})$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} L_u^\kappa &= F_\infty^\mu \left[ -\mathfrak{B}_{,u}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{E}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + \mathfrak{E}_{2,u}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) f_0 \right. \\ & \quad \left. + \mathfrak{E}_{1,u}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{B}_1^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + f_0 \mathfrak{E}_{3,u}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) S_\infty^\kappa \right] \times [\mathfrak{E}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa)]^{-2} \end{aligned} \quad (\text{F.75})$$

**Dérivée partielle de  $\underline{L}^\kappa(u, v)$  par rapport à  $v$  :** D'après la relation (F.50), on obtient :

$$\frac{\partial(\underline{L}^\kappa(u, v))}{\partial v} = \frac{B_{,v}^\kappa(u, v) C^\kappa(u, v) - C_{,v}^\kappa(u, v) B^\kappa(u, v)}{[C^\kappa(u, v)]^2} \quad (\text{F.76})$$

où  $B^\kappa(u, v)$  et  $C^\kappa(u, v)$  sont donnés par l'équation (5.26),  $B_{,v}^\kappa(u, v)$  et  $C_{,v}^\kappa(u, v)$  sont donnés par l'équation (F.46). Il est nécessaire de décomposer  $C_{,v}^\kappa(u, v)$  en deux parties concernant leur différence d'ordre de grandeur quand  $s \rightarrow 0$  :

$$C_{,v}^\kappa(u, v) = C_{1,v}^\kappa(u, v) + C_{2,v}^\kappa(u, v) \quad (\text{F.77})$$

$$C_{1,v}^\kappa(u, v) = \sum_{r=1}^n \frac{12f_r \kappa_r^2 u}{(3u\kappa_r + 4)^2} \quad C_{2,v}^\kappa(u, v) = \sum_{r=1}^n \frac{16f_r \kappa_r}{(3u\kappa_r + 4)^2}$$

De façon identique du cas précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial(\underline{L}^\mu(u(s), v(s)))}{\partial v} \times \lim_{s \rightarrow 0} \frac{dv(s)}{ds} \\ &= F_\infty^\mu \left[ -\mathfrak{B}_{,v}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{E}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + \mathfrak{E}_{2,v}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) f_0 \right. \\ & \quad \left. + \mathfrak{E}_{1,v}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{B}_1^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + f_0 \mathfrak{E}_{3,v}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) S_\infty^\mu \right] \times [\mathfrak{E}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa)]^{-2} \\ & \quad + F_\infty^\mu f_0 \mathfrak{E}_{3,v}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) F_\infty^\mu \text{s\lim} [\mathfrak{E}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa)]^{-2} \end{aligned} \quad (\text{F.78})$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{,v}^\kappa(u, v) &= -\frac{\Sigma_\kappa}{v^2}, \quad \mathfrak{B}_1^\kappa(u, v) = \frac{(4v + 3u)}{3uv} \Sigma_\kappa \\ \mathfrak{E}_{1,v}^\kappa(u, v) &= \frac{4}{3u} (1 - f_0) \quad \mathfrak{E}_{2,v}^\kappa(u, v) = \frac{16}{9u^2} \Sigma_\kappa \quad \mathfrak{E}_{3,v}^\kappa(u, v) = \frac{4}{3u^2} (1 - f_0) \end{aligned} \quad (\text{F.79})$$

On en déduit alors :

$$L_v^\kappa = F_\infty^\kappa \left[ -\mathfrak{B}_{,v}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + \mathfrak{C}_{2,v}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{B}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \right. \\ \left. + \mathfrak{C}_{1,v}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{B}_1^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + f_0 \mathfrak{C}_{3,v}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) S_\infty^\mu \right] \times [\mathfrak{C}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa)]^{-2} \quad (\text{F.80})$$

### F.3.2.2 Cas 2 : Fluage sphérique microscopique borné et en l'absence de phase poreuse

#### F.3.2.2.1 Partie déviatorique

**Dérivée partielle de  $\underline{L}^\mu(u, v)$  par rapport à  $u$  :** D'après la relation (F.49), on obtient :

$$\frac{\partial (\underline{L}^\mu(u, v))}{\partial u} = \frac{B_{,u}^\mu(u, v) C^\mu(u, v) - C_{,u}^\mu(u, v) B^\mu(u, v)}{[C^\mu(u, v)]^2} \quad (\text{F.81})$$

où  $B^\mu(u, v)$  et  $C^\mu(u, v)$  sont donnés par l'équation (5.23),  $B_{,u}^\mu(u, v)$  et  $C_{,u}^\mu(u, v)$  sont donnés par l'équation (F.42). Dans ce cas, en remplaçant directement  $\lim_{s \rightarrow 0} u(s)$  par  $F_\infty^\mu s_{\text{lim}}$ ,  $\lim_{s \rightarrow 0} v(s)$  par  $S_\infty^\kappa$  et  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{du(s)}{ds}$  par  $-F_\infty^\mu s_{\text{lim}}^2$ , on obtient :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial (\underline{L}^\mu(u(s), v(s)))}{\partial u} \times \lim_{s \rightarrow 0} \frac{du(s)}{ds} \\ = \frac{-F_\infty^\mu s_{\text{lim}}^2 [B_{,u}^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, S_\infty^\kappa) C^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, S_\infty^\kappa) - C_{,u}^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, S_\infty^\kappa) B^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, S_\infty^\kappa)]}{[C^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, S_\infty^\kappa)]^2} \\ = \frac{-F_\infty^\mu [\mathfrak{B}_{,u}^\mu(F_\infty^\mu, S_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, S_\infty^\kappa) - \mathfrak{C}_{,u}^\mu(F_\infty^\mu, S_\infty^\kappa) f_0]}{[\mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, S_\infty^\kappa)]^2} \quad (\text{F.82})$$

où

$$\mathfrak{B}_{,u}^\mu(u, v) = -\frac{5}{2u^2} \Sigma_\mu \quad (\text{F.83})$$

$$\mathfrak{C}_{,u}^\mu(u, v) = \frac{5(12(1-f_0)v + 27\Sigma_\mu)}{36u^2}, \quad \mathfrak{C}^\mu(u, v) = \frac{5-3f_0}{2} \quad (\text{F.84})$$

On en déduit :

$$L_u^\mu = \frac{-F_\infty^\mu [\mathfrak{B}_{,u}^\mu(F_\infty^\mu, S_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, S_\infty^\kappa) - \mathfrak{C}_{,u}^\mu(F_\infty^\mu, S_\infty^\kappa) f_0]}{[\mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, S_\infty^\kappa)]^2} \quad (\text{F.85})$$

**Dérivée partielle de  $\underline{L}^\mu(u, v)$  par rapport à  $v$  :** D'après la relation (F.50), on obtient :

$$\frac{\partial (\underline{L}^\mu(u, v))}{\partial v} = \frac{B_{,v}^\mu(u, v) C^\mu(u, v) - C_{,v}^\mu(u, v) B^\mu(u, v)}{[C^\mu(u, v)]^2} \quad (\text{F.86})$$

$$B_{,v}^\mu(u, v) = -\sum_{r=1}^n \frac{60f_r u (\mu_r u - 1)}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)^2}$$

$$C_{,v}^\mu(u, v) = -\sum_{r=1}^n \frac{60f_r \mu_r u^2 (\mu_r u - 1)}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)^2}$$

où  $B^\mu(u, v)$  et  $C^\mu(u, v)$  sont donnés par l'équation (5.23),  $B_{,v}^\mu(u, v)$  et  $C_{,v}^\mu(u, v)$  sont donnés par l'équation (F.43). Dans ce cas, en remplaçant directement  $\lim_{s \rightarrow 0} u(s)$  par  $F_\infty^\mu s_{\text{lim}}$ ,  $\lim_{s \rightarrow 0} v(s)$  par  $S_\infty^\kappa$  et

$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{dv(s)}{ds}$  par  $-\sum_{i=2}^{m_\kappa} \frac{\eta_i^\kappa}{(E_i^\kappa)^2}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial(\underline{L}^\mu(u(s), v(s)))}{\partial v} \times \lim_{s \rightarrow 0} \frac{dv(s)}{ds} \\ &= - \left[ \sum_{i=2}^{m_\kappa} \frac{\eta_i^\kappa}{(E_i^\kappa)^2} \right] \frac{[B_{,v}^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, S_\infty^\kappa) C^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, S_\infty^\kappa) - C_{,v}^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, S_\infty^\kappa) B^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, S_\infty^\kappa)]}{[C^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, S_\infty^\kappa)]^2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{F.87})$$

On trouve que :

$$L_v^\mu = 0 \quad (\text{F.88})$$

**F.3.2.2 Partie sphérique** D'après l'équation (5.49), d'où  $\bar{F}_\infty^\kappa = 0$ . En appliquant le théorème de la valeur finale de la transformée de Laplace, on obtient directement :

$$\begin{aligned} \bar{S}_\infty^\kappa &= J_0^\kappa(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} L^\pi(u(s), v(s)) \\ &= f_0 S_\infty^\kappa + \Sigma_\kappa \end{aligned} \quad (\text{F.89})$$

### F.3.2.3 Cas 3 : Fluage sphérique microscopique non borné et une phase poreuse

#### F.3.2.3.1 Partie déviatorique

**Dérivée partielle de  $\underline{L}^\mu(u, v)$  par rapport à  $u$  :** D'après la relation (F.49), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\underline{L}^\mu(u, v))}{\partial u} &= \frac{B_{,u}^\mu(u, v) C^\mu(u, v) - C_{,u}^\mu(u, v) B^\mu(u, v)}{[C^\mu(u, v)]^2} \\ B_{,u}^\mu(u, v) &= B_{1,u}^\mu(u, v) + v B_{2,u}^\mu(u, v) \\ B^\mu(u, v) &= B_1^\mu(u, v) + B_2^\mu(u, v) \\ C_{,u}^\mu(u, v) &= C_{1,u}^\mu(u, v) + C_{2,u}^\mu(u, v) \quad C_{1,u}^\mu(u, v) = v C_{3,u}^\mu(u, v) \end{aligned} \quad (\text{F.90})$$

où  $B^\mu(u, v)$  et  $C^\mu(u, v)$  sont donnés par l'équation (5.24),  $B_{,u}^\mu(u, v)$  et  $C_{,u}^\mu(u, v)$  sont données par l'équation (F.44). Ici, on a divisé  $B^\mu(u, v)$  en deux parties :  $B_1^\mu(u, v)$  qui a la limite constante quand  $s \rightarrow 0$ , et  $B_2^\mu(u, v)$  qui a la limite zéro. Pendant qu'on doit diviser  $B_{,u}^\mu(u, v)$  en deux parties parce que :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( B_{1,u}^\mu(u, v) \frac{du(s)}{ds} \right) = \text{const} \quad \text{et} \quad \lim_{s \rightarrow 0} \left( v B_{2,u}^\mu(u, v) \frac{du(s)}{ds} \right) = \infty \quad (\text{F.91})$$

La même raison pour laquelle on doit décomposer  $C_{,u}^\mu(u, v)$  en deux parties. Par contre, il n'est pas nécessaire de diviser  $C^\mu(u, v)$  grâce à l'homogénéité d'ordre de grandeur parmi ses termes. Enfin, on a l'expression des termes décomposés :

$$\begin{aligned} B_1^\mu(u, v) &= f_0 + \frac{5(4v + 3u)f_n}{(9u + 8v)} & B_2^\mu(u, v) &= \sum_{r=1}^{n-1} \frac{5(4v + 3u)f_r}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)} \\ B_{1,u}^\mu(u, v) &= - \sum_{r=1}^{n-1} \frac{30f_r(3\mu_r u^2 + 8v\mu_r + 8v^2\mu_r + 2v)}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)^2} & B_{2,u}^\mu(u, v) &= - \frac{60f_n}{(9u + 8v)^2} \\ C_{3,u}^\mu(u, v) &= \sum_{r=1}^{n-1} \frac{60f_r(\mu_r u)^2}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)^2} & C_{2,u}^\mu(u, v) &= \sum_{r=1}^{n-1} \frac{5f_r\mu_r(27u^2 + 48vu + 32v^2)}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)^2} \end{aligned} \quad (\text{F.92})$$

$$\quad (\text{F.93})$$

Puis, on doit remplacer d'abord  $\lim_{s \rightarrow 0} u(s) \approx F_\infty^\mu s_{\text{lim}} + S_\infty^\mu$ ,  $\lim_{s \rightarrow 0} v(s) \approx F_\infty^\kappa s_{\text{lim}} + S_\infty^\kappa$  et  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{du(s)}{ds} \approx -F_\infty^\mu s_{\text{lim}}^2$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial (\underline{L}^\mu(u(s), v(s)))}{\partial u} \times \lim_{s \rightarrow 0} \frac{du(s)}{ds} \\ &= - \left[ \mathfrak{B}_{1,u}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + B_{2,u}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) (S_\infty^\kappa + F_\infty^\kappa s_{\text{lim}}) \right. \\ & \quad - \mathfrak{C}_{1,u}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{B}_2^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) - \mathfrak{C}_{2,u}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) B_1^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \\ & \quad \left. - \mathfrak{C}_{3,u}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) B_1^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) (S_\infty^\kappa + F_\infty^\kappa s_{\text{lim}}) \right] \times [\mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa)]^{-2} \times F_\infty^\mu \end{aligned} \quad (\text{F.94})$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_2^\mu(u, v) &= \frac{5(4v + 3u)}{(6u^2 + 12vu)} \Sigma_\mu^{po} \quad \mathfrak{B}_{1,u}^\mu(u, v) = -\frac{30(3u^2 + 8vu + 8v^2)}{(6u^2 + 12vu)^2} \Sigma_\mu^{po} \\ \mathfrak{C}^\mu(u, v) &= f_0 + \frac{5(4v + 3u)}{(6u + 12v)} (1 - f_0 - f_n) \quad \mathfrak{C}_{1,u}^\mu(u, v) = v \mathfrak{C}_{3,u}^\mu(u, v) \\ \mathfrak{C}_{2,u}^\mu(u, v) &= \frac{5(27u^2 + 48vu + 32v^2)}{(6u^2 + 12vu)^2} \Sigma_\mu^{po} \quad \mathfrak{C}_{3,u}^\mu(u, v) = \frac{60}{(6u + 12v)^2} (1 - f_0 - f_n) \end{aligned} \quad (\text{F.95})$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} L_u^\mu &= - \left[ \mathfrak{B}_{1,u}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + S_\infty^\kappa B_{2,u}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \right. \\ & \quad - \mathfrak{C}_{1,u}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{B}_2^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) - \mathfrak{C}_{2,u}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) B_1^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \\ & \quad \left. - S_\infty^\kappa \mathfrak{C}_{3,u}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) B_1^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \right] \times [\mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa)]^{-2} \times F_\infty^\mu \end{aligned} \quad (\text{F.96})$$

**Dérivée partielle de  $\underline{L}^\mu(u, v)$  par rapport à  $v$  :** D'après la relation (F.50), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\underline{L}^\mu(u, v))}{\partial v} &= \frac{B_{,v}^\mu(u, v) C^\mu(u, v) - C_{,v}^\mu(u, v) B^\mu(u, v)}{[C^\mu(u, v)]^2} \\ B_{,v}^\mu(u, v) &= B_{1,v}^\mu(u, v) + u B_{2,v}^\mu(u, v) \\ B^\mu(u, v) &= B_1^\mu(u, v) + B_2^\mu(u, v) \\ C_{,v}^\mu(u, v) &= C_{1,v}^\mu(u, v) + C_{2,v}^\mu(u, v) \quad C_{1,v}^\mu(u, v) = u C_{3,v}^\mu(u, v) \end{aligned} \quad (\text{F.97})$$

où  $B^\mu(u, v)$  et  $C^\mu(u, v)$  sont donnés par l'équation (5.24),  $B_{,v}^\mu(u, v)$  et  $C_{,v}^\mu(u, v)$  sont données par l'équation (F.45).  $B_1^\mu(u, v)$  et  $B_2^\mu(u, v)$  sont donnés par la relation (F.92) et les autres fonctions s'écrivent :

$$\begin{aligned} B_{1,v}^\mu(u, v) &= - \sum_{r=1}^{n-1} \frac{60 f_r u (\mu_r u - 1)}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)^2} \quad B_{2,v}^\mu(u, v) = \frac{60 f_n}{(9u + 8v)^2} \\ C_{3,v}^\mu(u, v) &= - \sum_{r=1}^{n-1} \frac{60 f_r (\mu_r u)^2}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)^2} \quad C_{2,v}^\mu(u, v) = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{60 f_r \mu_r u^2}{(6\mu_r u^2 + (9 + 12v\mu_r)u + 8v)^2} \end{aligned} \quad (\text{F.98})$$

Puis, on doit remplacer  $\lim_{s \rightarrow 0} u(s) \approx F_\infty^\mu s_{\text{lim}} + S_\infty^\mu$ ,  $\lim_{s \rightarrow 0} v(s) \approx F_\infty^\kappa s_{\text{lim}} + S_\infty^\kappa$  et  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{dv(s)}{ds} \approx$

$-F_\infty^\kappa s_{\text{lim}}^2$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial(\underline{L}^\mu(u(s), v(s)))}{\partial v} \times \lim_{s \rightarrow 0} \frac{dv(s)}{ds} \\ = & - \left[ \mathfrak{B}_{1,v}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + B_{2,v}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) (S_\infty^\mu + F_\infty^\mu s_{\text{lim}}) \right. \\ & - \mathfrak{C}_{1,v}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{B}_2^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) - \mathfrak{C}_{2,v}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) B_1^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \\ & \left. - \mathfrak{C}_{3,v}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) B_1^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) (S_\infty^\mu + F_\infty^\mu s_{\text{lim}}) \right] \times [\mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa)]^{-2} \times F_\infty^\kappa \end{aligned} \quad (\text{F.99})$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_2^\mu(u, v) &= \frac{5(4v + 3u)}{(6u^2 + 12vu)} \Sigma_\mu^{po} & \mathfrak{B}_{1,v}^\mu(u, v) &= -\frac{60}{(6u + 12v)^2} \Sigma_\mu^{po} \\ \mathfrak{C}^\mu(u, v) &= f_0 + \frac{5u(4v + 3u)}{(6u^2 + 12uv)} (1 - f_0 - f_n) & \mathfrak{C}_{1,v}^\mu(u, v) &= u \mathfrak{C}_{3,v}^\mu(u, v) \\ \mathfrak{C}_{2,v}^\mu(u, v) &= \frac{60}{(6u + 12v)^2} \Sigma_\mu^{po} & \mathfrak{C}_{3,v}^\mu(u, v) &= -\frac{60}{(6u + 12v)^2} (1 - f_0 - f_n) \end{aligned} \quad (\text{F.100})$$

Enfin, on déduit :

$$\begin{aligned} L_v^\mu &= - \left[ \mathfrak{B}_{1,v}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + S_\infty^\mu B_{2,v}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \right. \\ & - \mathfrak{C}_{1,v}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{B}_2^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) - \mathfrak{C}_{2,v}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) B_1^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \\ & \left. - S_\infty^\mu \mathfrak{C}_{3,v}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) B_1^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \right] \times [\mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa)]^{-2} \times F_\infty^\kappa \end{aligned} \quad (\text{F.101})$$

### F.3.2.3.2 Partie sphérique

**Dérivée partielle de  $\underline{L}^\kappa(u, v)$  par rapport à  $u$  :** D'après la relation (F.49), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\underline{L}^\kappa(u, v))}{\partial u} &= \frac{B_{,u}^\kappa(u, v) C^\kappa(u, v) - C_{,u}^\kappa(u, v) B^\kappa(u, v)}{[C^\kappa(u, v)]^2} \\ B_{,u}^\kappa(u, v) &= B_{1,u}^\kappa(u, v) + v B_{2,u}^\kappa(u, v) \\ B^\kappa(u, v) &= B_1^\kappa(u, v) + B_2^\kappa(u, v) \\ C_{,u}^\kappa(u, v) &= C_{1,u}^\kappa(u, v) + C_{2,u}^\kappa(u, v) & C_{1,u}^\kappa(u, v) &= v C_{3,u}^\kappa(u, v) \end{aligned} \quad (\text{F.102})$$

où  $B^\kappa(u, v)$  et  $C^\kappa(u, v)$  sont donnés par l'équation (5.26),  $B_{,u}^\kappa(u, v)$  et  $C_{,u}^\kappa(u, v)$  sont données par l'équation (F.47) et les autres fonctions s'écrivent :

$$\begin{aligned} B_1^\kappa(u, v) &= f_0 + \frac{(4v + 3u)f_n}{4v} & B_2^\kappa(u, v) &= \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(3u + 4v)f_r}{v(3u\kappa_r + 4)} \\ B_{1,u}^\kappa(u, v) &= -\sum_{r=1}^{n-1} \frac{12f_r(\kappa_r v - 1)}{v(3u\kappa_r + 4)^2} & B_{2,u}^\kappa(u, v) &= \frac{3f_n}{4v^2} \\ C_{3,u}^\kappa(u, v) &= -\sum_{r=1}^{n-1} \frac{12f_r \kappa_r^2}{(3u\kappa_r + 4)^2} & C_{2,u}^\kappa(u, v) &= \sum_{r=1}^{n-1} \frac{12f_r \kappa_r}{(3u\kappa_r + 4)^2} \end{aligned} \quad (\text{F.103})$$

Puis, on obtient :

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial (\underline{L}^\kappa (u(s), v(s)))}{\partial u} \times \lim_{s \rightarrow 0} \frac{du(s)}{ds} \\ = & - [\mathfrak{B}_{1,u}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + B_{2,u}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) (S_\infty^\kappa + F_\infty^\kappa s_{\text{lim}}) \\ & - \mathfrak{C}_{1,u}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{B}_2^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) - \mathfrak{C}_{2,u}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) B_1^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \\ & - \mathfrak{C}_{3,u}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) B_1^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) (S_\infty^\kappa + F_\infty^\kappa s_{\text{lim}})] \times [\mathfrak{C}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa)]^{-2} \times F_\infty^\mu \end{aligned} \quad (\text{F.104})$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_2^\kappa (u, v) &= \frac{(3u + 4v)}{3vu} \Sigma_\kappa^{po}, & \mathfrak{B}_{1,u}^\kappa (u, v) &= -\frac{4}{3u^2} \Sigma_\kappa^{po} \\ \mathfrak{C}^\kappa (u, v) &= f_0 + \frac{(4v + 3u)}{3u} (1 - f_0 - f_n), & \mathfrak{C}_{1,u}^\kappa (u, v) &= v \mathfrak{C}_{3,u}^\kappa (u, v) \\ \mathfrak{C}_{2,u}^\kappa (u, v) &= \frac{4}{3u^2} \Sigma_\kappa^{po}, & \mathfrak{C}_{3,u}^\kappa (u, v) &= -\frac{4}{3u^2} (1 - f_0 - f_n) \end{aligned} \quad (\text{F.105})$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} L_u^\kappa &= - [\mathfrak{B}_{1,u}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + S_\infty^\kappa B_{2,u}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \\ & - \mathfrak{C}_{1,u}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{B}_2^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) - \mathfrak{C}_{2,u}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) B_1^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \\ & - S_\infty^\kappa \mathfrak{C}_{3,u}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) B_1^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa)] \times [\mathfrak{C}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa)]^{-2} \times F_\infty^\mu \end{aligned} \quad (\text{F.106})$$

**Dérivée partielle de  $\underline{L}^\kappa (u, v)$  par rapport à  $v$  :** D'après la relation (F.50), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\underline{L}^\kappa (u, v))}{\partial v} &= \frac{B_{,v}^\kappa (u, v) C^\kappa (u, v) - C_{,v}^\kappa (u, v) B^\kappa (u, v)}{[C^\mu (u, v)]^2} \\ B_{,v}^\kappa (u, v) &= B_{1,v}^\kappa (u, v) + u B_{2,v}^\kappa (u, v) \\ B^\kappa (u, v) &= B_1^\kappa (u, v) + B_2^\kappa (u, v) \\ C_{,v}^\kappa (u, v) &= C_{1,v}^\kappa (u, v) + C_{2,v}^\kappa (u, v) & C_{1,v}^\kappa (u, v) &= u C_{3,v}^\kappa (u, v) \end{aligned} \quad (\text{F.107})$$

où on a posé :

$$B_1^\kappa (u, v) = f_0 + \frac{(4v + 3u)f_n}{4v} \quad B_2^\kappa (u, v) = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(3u + 4v)f_r}{v(3u\kappa_r + 4)} \quad (\text{F.108})$$

$$B_{1,v}^\kappa (u, v) = -\sum_{r=1}^{n-1} \frac{3f_r u}{v^2(3u\kappa_r + 4)} \quad B_{2,v}^\kappa (u, v) = -\frac{3f_n}{4v^2} \quad (\text{F.109})$$

$$C_{3,v}^\kappa (u, v) = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{12f_r \kappa_r^2}{(3u\kappa_r + 4)^2} \quad C_{2,v}^\kappa (u, v) = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{16f_r \kappa_r}{(3u\kappa_r + 4)^2}$$

comme pour le cas déviatorique, on obtient :

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial (\underline{L}^\kappa (u(s), v(s)))}{\partial v} \times \lim_{s \rightarrow 0} \frac{dv(s)}{ds} \\ = & - [\mathfrak{B}_{1,v}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + B_{2,v}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) (S_\infty^\mu + F_\infty^\mu s_{\text{lim}}) \\ & - \mathfrak{C}_{1,v}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{B}_2^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) - \mathfrak{C}_{2,v}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) B_1^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \\ & - \mathfrak{C}_{3,v}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) B_1^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) (S_\infty^\mu + F_\infty^\mu s_{\text{lim}})] \times [\mathfrak{C}^\kappa (F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa)]^{-2} \times F_\infty^\kappa \end{aligned} \quad (\text{F.110})$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_2^\kappa(u, v) &= \frac{(3u+4v)f_r}{3vu} \Sigma_\kappa^{po} & \mathfrak{B}_{1,v}^\kappa(u, v) &= -\frac{1}{v^2} \Sigma_\kappa^{po} \\
\mathfrak{C}^\kappa(u, v) &= f_0 + \frac{(4v+3u)}{3u} (1-f_0-f_n) & \mathfrak{C}_{1,v}^\kappa(u, v) &= u \mathfrak{C}_{3,v}^\kappa(u, v) \\
\mathfrak{C}_{2,v}^\kappa(u, v) &= \frac{16}{9u^2} \Sigma_\kappa^{po} & \mathfrak{C}_{3,v}^\kappa(u, v) &= \frac{4}{3u^2} (1-f_0-f_n)
\end{aligned} \tag{F.111}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned}
L_v^\kappa &= - \left[ \mathfrak{B}_{1,v}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) + S_\infty^\mu B_{2,v}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \right. \\
&\quad - \mathfrak{C}_{1,v}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \mathfrak{B}_2^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) - \mathfrak{C}_{2,v}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) B_1^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \\
&\quad \left. - S_\infty^\mu \mathfrak{C}_{3,v}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) B_1^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa) \right] \times [\mathfrak{C}^\kappa(F_\infty^\mu, F_\infty^\kappa)]^{-2} \times F_\infty^\kappa
\end{aligned} \tag{F.112}$$

### F.3.2.4 Cas 4 : Fluage sphérique microscopique borné et une phase poreuse

#### F.3.2.4.1 Partie déviatorique

**Dérivée partielle de  $\underline{L}^\mu(u, v)$  par rapport à  $u$  :** D'après la relation (F.49), on obtient :

$$\frac{\partial(\underline{L}^\mu(u, v))}{\partial u} = \frac{B_{,u}^\mu(u, v) C^\mu(u, v) - C_{,u}^\mu(u, v) B^\mu(u, v)}{[C^\mu(u, v)]^2} \tag{F.113}$$

où  $B^\mu(u, v)$  et  $C^\mu(u, v)$  sont donnés par la relation (5.24),  $B_{,u}^\mu(u, v)$  et  $C_{,u}^\mu(u, v)$  sont donnés par l'équation (F.44). En remplaçant  $\lim_{s \rightarrow 0} u(s)$  par  $F_\infty^\mu s_{\text{lim}}$ ,  $\lim_{s \rightarrow 0} v(s)$  par  $S_\infty^\kappa$  et  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{du(s)}{ds}$  par  $-F_\infty^\mu s_{\text{lim}}^2$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
&\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial(\underline{L}^\mu(u(s), v(s)))}{\partial u} \times \lim_{s \rightarrow 0} \frac{du(s)}{ds} \\
&= \frac{-F_\infty^\mu s_{\text{lim}}^2 [B_{,u}^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, S_\infty^\kappa) C^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, S_\infty^\kappa) - C_{,u}^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, S_\infty^\kappa) B^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, S_\infty^\kappa)]}{[C^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, S_\infty^\kappa)]^2} \\
&= \frac{-F_\infty^\mu [\mathfrak{B}_{,u}^\mu(F_\infty^\mu, S_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, S_\infty^\kappa) - \mathfrak{C}_{,u}^\mu(F_\infty^\mu, S_\infty^\kappa) \mathfrak{B}^\mu(F_\infty^\mu, S_\infty^\kappa)]}{[\mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, S_\infty^\kappa)]^2}
\end{aligned} \tag{F.114}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_{,u}^\mu(u, v) &= -\frac{5}{2u^2} \Sigma_\mu^{po} - \frac{20f_n v}{27u^2} & \mathfrak{B}^\mu(u, v) &= f_0 + \frac{5f_n}{3} \\
\mathfrak{C}_{,u}^\mu(u, v) &= \frac{5v}{3u^2} (1-f_0-f_n) + \frac{15}{4u^2} \Sigma_\mu^{po} & \mathfrak{C}^\mu(u, v) &= \frac{5-3f_0-5f_n}{2}
\end{aligned} \tag{F.115}$$

On obtient finalement :

$$L_u^\mu = \frac{-F_\infty^\mu [\mathfrak{B}_{,u}^\mu(F_\infty^\mu, S_\infty^\kappa) \mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, S_\infty^\kappa) - \mathfrak{C}_{,u}^\mu(F_\infty^\mu, S_\infty^\kappa) \mathfrak{B}^\mu(F_\infty^\mu, S_\infty^\kappa)]}{[\mathfrak{C}^\mu(F_\infty^\mu, S_\infty^\kappa)]^2} \tag{F.116}$$

**Dérivée partielle de  $\underline{L}^\mu(u, v)$  par rapport à  $v$  :** D'après la relation (F.50), on obtient :

$$\frac{\partial(\underline{L}^\mu(u, v))}{\partial v} = \frac{B_{,v}^\mu(u, v) C^\mu(u, v) - C_{,v}^\mu(u, v) B^\mu(u, v)}{[C^\mu(u, v)]^2} \tag{F.117}$$

où  $B^\mu(u, v)$  et  $C^\mu(u, v)$  sont donnés par la relation (5.24),  $B_{,v}^\mu(u, v)$  et  $C_{,v}^\mu(u, v)$  sont donnés par l'équation (F.45). En remplaçant  $\lim_{s \rightarrow 0} u(s)$  par  $F_\infty^\mu s_{\text{lim}}$ ,  $\lim_{s \rightarrow 0} v(s)$  par  $S_\infty^\kappa$  et  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{dv(s)}{ds}$  par  $-\sum_{i=2}^{m_\kappa} \frac{\eta_i^\kappa}{(E_i^\kappa)^2}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial (\underline{L}^\mu(u(s), v(s)))}{\partial u} \times \lim_{s \rightarrow 0} \frac{du(s)}{ds} \\ &= -\sum_{i=2}^{m_\kappa} \frac{\eta_i^\kappa}{(E_i^\kappa)^2} \frac{[B_{,u}^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, S_\infty^\kappa) C^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, S_\infty^\kappa) - C_{,u}^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, S_\infty^\kappa) B^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, S_\infty^\kappa)]}{[C^\mu(F_\infty^\mu s_{\text{lim}}, S_\infty^\kappa)]^2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{F.118})$$

On trouve aussi :

$$L_v^\mu = 0 \quad (\text{F.119})$$

**F.3.2.4.2 Partie sphérique** Ce cas est particulier par rapport aux autres cas, on rappelle ici l'expression de l'ordonnée à l'origine (5.70) :

$$\bar{S}_\infty^\kappa = \lim_{s \rightarrow 0} \left( L^\kappa(u(s), v(s)) + s \frac{d(L^\kappa(u(s), v(s)))}{ds} \right) \quad (\text{F.120})$$

Pour ce cas, on doit calculer les limites  $\lim_{s \rightarrow 0} L^\kappa(u(s), v(s))$  et  $\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{d(L^\kappa(u(s), v(s)))}{ds}$ . La première limite est obtenue facilement d'après les relations (4.24-4.27) et (Eq. 5.27) :

$$\lim_{s \rightarrow 0} L^\kappa(u(s), v(s)) = \frac{\mathcal{B}^\kappa(u(s), v(s))}{C^\kappa(u(s), v(s))} \quad (\text{F.121})$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^\kappa(u, v) &= \left( v f_0 + \frac{(4v + 3u) f_n}{4} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(4v + 3u) f_r}{(4 + 3u \kappa_r)} \right) \\ \mathcal{C}^\kappa(u, v) &= \left( f_0 + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(4v + 3u) f_r \kappa_r}{(4 + 3u \kappa_r)} \right) \end{aligned} \quad (\text{F.122})$$

On en déduit alors :

$$\lim_{s \rightarrow 0} L^\kappa(u(s), v(s)) = \frac{(f_0 + f_n) S_\infty^\kappa + \Sigma_\kappa^{p_0}}{(1 - f_n)} + \frac{3f_n S_\infty^\mu}{4(1 - f_n)} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3f_n}{4C^\kappa(u(s), v(s))} \frac{F_\infty^\mu}{s} \quad (\text{F.123})$$

**Dérivée partielle de  $L^\kappa(u, v)$  par rapport à  $u$  :** D'après la relation (F.49), on obtient :

$$\frac{\partial (L^\kappa(u, v))}{\partial u} = \frac{\mathcal{B}_{,u}^\kappa(u, v) C^\kappa(u, v) - C_{,u}^\kappa(u, v) \mathcal{B}^\kappa(u, v)}{[C^\kappa(u, v)]^2} \quad (\text{F.124})$$

où  $\mathcal{B}^\kappa(u, v)$  et  $C^\kappa(u, v)$  sont donnés par la relation (5.27),  $\mathcal{B}_{,u}^\kappa(u, v)$  et  $C_{,u}^\kappa(u, v)$  sont données par l'équation (F.47). En remplaçant  $\lim_{s \rightarrow 0} u(s)$  par  $F_\infty^\mu s_{\text{lim}}$ ,  $\lim_{s \rightarrow 0} v(s)$  par  $S_\infty^\kappa$  et  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{du(s)}{ds}$  par  $-F_\infty^\mu s_{\text{lim}}^2$ , on obtient :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{du(s)}{ds} \frac{\mathcal{B}_{,u}^\kappa(u, v)}{C^\kappa(u, v)} \right] = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{3f_n}{4C^\kappa(u(s), v(s))} \frac{F_\infty^\mu}{s} \quad (\text{F.125})$$

$$-\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{du(s)}{ds} \frac{C_{,u}^\kappa(u, v) \mathcal{B}^\kappa(u, v)}{[C^\kappa(u, v)]^2} = \frac{f_n}{(1-f_n)^2} [\Sigma_\kappa^{po} - S_\infty^\kappa (1-f_0-f_n)] \quad (\text{F.126})$$

on en déduit alors :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{du(s)}{ds} \frac{\partial(L^\kappa(u, v))}{\partial u} \right] = \frac{f_n}{(1-f_n)^2} [\Sigma_\kappa^{po} - S_\infty^\kappa (1-f_0-f_n)] + -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{3f_n}{4C^\kappa(u(s), v(s))} \frac{F_\infty^\mu}{s} \quad (\text{F.127})$$

**Dérivée partielle de  $L^\kappa(u, v)$  par rapport à  $v$  :** D'après la relation (F.50), on obtient :

$$\frac{\partial(L^\kappa(u, v))}{\partial v} = \frac{\mathcal{B}_{,v}^\kappa(u, v) C^\kappa(u, v) - C_{,v}^\kappa(u, v) \mathcal{B}^\kappa(u, v)}{[C^\kappa(u, v)]^2} \quad (\text{F.128})$$

Dans ce cas on trouve facilement la limite en remplaçant  $\lim_{s \rightarrow 0} u(s)$  par  $F_\infty^\mu s_{\text{lim}}$ ,  $\lim_{s \rightarrow 0} v(s)$  par  $S_\infty^\kappa$  et  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{dv(s)}{ds}$  par  $-\sum_{i=2}^{m_\kappa} \frac{\eta_i^\kappa}{(E_i^\kappa)^2}$  :

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\partial(\underline{L}^\kappa(u(s), v(s)))}{\partial v} \times \lim_{s \rightarrow 0} \frac{dv(s)}{ds} = 0 \quad (\text{F.129})$$

Finalement, on obtient  $\bar{S}_\infty^\kappa$  selon les relations (F.120), (F.123), (F.127) et (F.129), en notant que les termes d'ordre  $s_{\text{lim}}$  dans  $\lim_{s \rightarrow 0} L^\kappa(u(s), v(s))$  et  $\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{du(s)}{ds} \frac{\partial(L^\kappa(u(s), v(s)))}{\partial u}$  s'annulent :

$$\bar{S}_\infty^\kappa = \frac{(f_0 + f_n) S_\infty^\kappa + \Sigma_\kappa^{po}}{(1-f_n)} + \frac{3f_n S_\infty^\mu}{4(1-f_n)} + \frac{f_n}{(1-f_n)^2} [\Sigma_\kappa^{po} - S_\infty^\kappa (1-f_0-f_n)] \quad (\text{F.130})$$



# Annexe G Schéma autocohérent généralisé

## G.1 Coefficients de l'équation quadratique déterminant la fonction de relaxation de cisaillement effective

Les coefficients du schéma autocohérent généralisé (D.8) dans le cas élastique, se réécrivent dans le cas viscoélastique dans l'espace transformé :

$$\tilde{\nu}_m(s) = \frac{(3\tilde{\kappa}_0(s) - 2\tilde{\mu}_0(s))}{2(3\tilde{\kappa}_0(s) + \tilde{\mu}_0(s))} \quad , \quad d = \frac{\mu_1}{\tilde{\mu}_0(s)} - 1 \quad (\text{G.1})$$

$$g_1 = (49 - 50\tilde{\nu}_0(s)\nu_1)d + 35(1+d)(\nu_1 - 2\tilde{\nu}_0(s)) + 70\nu_1 - 35\tilde{\nu}_0(s) \quad (\text{G.2})$$

$$g_2 = (7 + 5\nu_1)(1+d) + 28 - 40\nu_1 \quad (\text{G.3})$$

$$g_3 = 2(1+d)(4 - 5\tilde{\nu}_0(s)) + 7 - 5\tilde{\nu}_0(s) \quad (\text{G.4})$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}(s) = & 4(2d(4 - 5\tilde{\nu}_0(s))f - g_3) \left( g_1 f^{7/3} + g_2(10\tilde{\nu}_0(s) - 7) \right) \\ & - 126 d g_2 f \left( 1 - f^{2/3} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}(s) = & -(g_3 + d f (7 - 5\tilde{\nu}_m(s))) \left( 4g_1 f^{7/3} + g_2(7 + 5\tilde{\nu}_0(s)) \right) \\ & - 126 d g_2 f \left( 1 - f^{2/3} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

$$\tilde{Q}(s) = -\frac{1}{2} \left( \tilde{V}(s) + \tilde{P}(s) + \tilde{D}(s) \right) \quad , \quad \tilde{D}(s) = 525 d g_2 f (1 - \tilde{\nu}_0(s))^2 \quad (\text{G.7})$$

## G.2 Développement de la fonction $W_4(u, v)$

### G.2.1 Module de cisaillement et de compressibilité gouverné par le modèle de Kelvin non borné

D'après la relation (4.140), on a :

$$\underline{W}_4(u(s), v(s)) = \frac{w_{40}}{s^4} \frac{Q_{m_\mu}^4(s)}{P_{m_\mu-1}^4(s)} + \frac{w_{30}}{s^3} \frac{Q_{m_\mu}^3(s)}{P_{m_\mu-1}^3(s)} + \frac{w_{31}}{s^4} \frac{Q_{m_\mu}^3(s)}{P_{m_\mu-1}^3(s)} \frac{Q_{m_\kappa}(s)}{P_{m_\kappa-1}(s)} \quad (\text{G.8})$$

$$\begin{aligned} & + \frac{w_{20}}{s^2} \frac{Q_{m_\mu}^2(s)}{P_{m_\mu-1}^2(s)} + \frac{w_{21}}{s^3} \frac{Q_{m_\mu}^2(s)}{P_{m_\mu-1}^2(s)} \frac{Q_{m_\kappa}(s)}{P_{m_\kappa-1}(s)} + \frac{w_{22}}{s^4} \frac{Q_{m_\mu}^2(s)}{P_{m_\mu-1}^2(s)} \frac{Q_{m_\kappa}^2(s)}{P_{m_\kappa-1}^2(s)} \\ & + \frac{w_{11}}{s^2} \frac{Q_{m_\mu}(s)}{P_{m_\mu-1}(s)} \frac{Q_{m_\kappa}(s)}{P_{m_\kappa-1}(s)} + \frac{w_{12}}{s^3} \frac{Q_{m_\mu}(s)}{P_{m_\mu-1}(s)} \frac{Q_{m_\kappa}^2(s)}{P_{m_\kappa-1}^2(s)} + \frac{w_{02}}{s^2} \frac{Q_{m_\kappa}^2(s)}{P_{m_\kappa-1}^2(s)} \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

Réduisant au même dénominateur de tous les termes de  $\underline{W}_4(u(s), v(s))$ , on obtient :

$$\underline{W}_4(u(s), v(s)) = \frac{\underline{X}_{m_\mu}(s)}{s^4 P_{m_\mu-1}^4(s) P_{m_\kappa-1}^2(s)} \quad (\text{G.10})$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned}\tilde{X}(s) &= \frac{\underline{X}_{m_\mu}(s)}{s^4 P_{m_\mu-1}^4(s) P_{m_\kappa-1}^2(s)} \\ \underline{L}^\mu(u, v) &= \frac{-\tilde{Q}(s) \pm \sqrt{\tilde{Q}^2(s) - \tilde{V}(s)\tilde{P}(s)}}{\tilde{P}(s)} \\ &= \frac{-\underline{Q}_{m_\mu}(s) \pm \sqrt{\underline{Q}_{m_\mu}^2(s) - \underline{V}_{m_\mu}(s)\underline{P}_{m_\mu}(s)}}{\underline{P}_{m_\mu}(s)}\end{aligned}\quad (\text{G.11})$$

où

$$\begin{aligned}\underline{X}_{m_\mu}(s) &= \left[ \underline{w}_{40} Q_{m_\mu}^4(s) P_{m_\kappa-1}^2(s) + \underline{w}_{30} Q_{m_\mu}^3(s) P_{m_\mu-1}(s) P_{m_\kappa-1}^2(s) s \right. \\ &\quad + \underline{w}_{31} Q_{m_\mu}^3(s) Q_{m_\kappa}(s) P_{m_\mu-1}(s) P_{m_\kappa-1}(s) + \underline{w}_{20} Q_{m_\mu}^2(s) P_{m_\mu-1}^2(s) P_{m_\kappa-1}^2(s) s^2 \\ &\quad + \underline{w}_{21} Q_{m_\mu}^2(s) Q_{m_\kappa}(s) P_{m_\mu-1}^2(s) P_{m_\kappa-1}(s) s + \underline{w}_{22} Q_{m_\mu}^2(s) Q_{m_\kappa}^2(s) P_{m_\mu-1}^2(s) \\ &\quad + \underline{w}_{11} Q_{m_\mu}(s) Q_{m_\kappa}(s) P_{m_\mu-1}^3(s) P_{m_\kappa-1}(s) s^2 + \underline{w}_{12} Q_{m_\mu}(s) Q_{m_\kappa}^2(s) P_{m_\mu-1}^3(s) s \\ &\quad \left. + \underline{w}_{02} Q_{m_\kappa}^2(s) P_{m_\mu-1}^4(s) s^2 \right]\end{aligned}\quad (\text{G.12})$$

On en déduit le degré de  $\underline{X}_{m_\mu}(s)$  étant  $\underline{m}_\mu = 4m_\mu + 2m_\kappa - 2$  :

$$\underline{X}_{m_\mu}(s) = \sum_{i=0}^{\underline{m}_\mu} \underline{x}_i s^i \quad (\text{G.13})$$

Pour obtenir les limites  $\lim_{s \rightarrow 0} \underline{X}_{m_\mu}(s)$  et  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d\underline{X}_{m_\mu}(s)}{ds}$ , il est nécessaire de calculer  $\underline{x}_0$  et  $\underline{x}_1$  :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \underline{X}_{m_\mu}(s) = \underline{x}_0 = \underline{w}_{40} (q_0^\mu)^4 (p_0^\kappa)^2 + \underline{w}_{31} (q_0^\mu)^3 q_0^\kappa p_0^\mu p_0^\kappa + \underline{w}_{22} (q_0^\mu q_0^\kappa p_0^\mu)^2 \quad (\text{G.14})$$

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d\underline{X}_{m_\mu}(s)}{ds} &= \underline{x}_1 = \underline{w}_{40} \left( 4q_1^\mu (q_0^\mu)^3 (p_0^\kappa)^2 + 2p_1^\kappa p_0^\kappa (q_0^\mu)^4 \right) + \underline{w}_{30} (q_0^\mu)^3 p_0^\mu (p_0^\kappa)^2 \\ &\quad + \underline{w}_{31} \left( 3q_1^\mu (q_0^\mu)^2 q_0^\kappa p_0^\mu p_0^\kappa + (q_0^\mu)^3 q_1^\kappa p_0^\mu p_0^\kappa + (q_0^\mu)^3 q_0^\kappa p_1^\mu p_0^\kappa + (q_0^\mu)^3 q_0^\kappa p_0^\mu p_1^\kappa \right) \\ &\quad + \underline{w}_{22} \left( 2q_1^\mu q_0^\mu (q_0^\kappa)^2 (p_0^\mu)^2 + 2q_1^\kappa q_0^\kappa (q_0^\mu)^2 (p_0^\mu)^2 + 2p_1^\mu p_0^\mu (q_0^\mu)^2 (q_0^\kappa)^2 \right) \\ &\quad + \underline{w}_{21} (q_0^\mu)^2 q_0^\kappa (p_0^\mu)^2 p_0^\kappa + \underline{w}_{12} q_0^\mu (q_0^\kappa)^2 (p_0^\mu)^3\end{aligned}\quad (\text{G.15})$$

### G.2.1.1 Module de compressibilité gouverné par le modèle de Kelvin borné

$$W_4(u, v) = \frac{\underline{w}_{40}}{s^4} \frac{Q_{m_\mu}^4(s)}{P_{m_\mu-1}^4(s)} + \frac{\underline{w}_{30}}{s^3} \frac{Q_{m_\mu}^3(s)}{P_{m_\mu-1}^3(s)} + \frac{\underline{w}_{31}}{s^3} \frac{Q_{m_\mu}^3(s)}{P_{m_\mu-1}^3(s)} \frac{Q_{m_\kappa-1}(s)}{P_{m_\kappa-1}(s)} \quad (\text{G.16})$$

$$+ \frac{\underline{w}_{20}}{s^2} \frac{Q_{m_\mu}^2(s)}{P_{m_\mu-1}^2(s)} + \frac{\underline{w}_{21}}{s^2} \frac{Q_{m_\mu}^2(s)}{P_{m_\mu-1}^2(s)} \frac{Q_{m_\kappa-1}(s)}{P_{m_\kappa-1}(s)} + \frac{\underline{w}_{22}}{s^2} \frac{Q_{m_\mu}^2(s)}{P_{m_\mu-1}^2(s)} \frac{Q_{m_\kappa-1}^2(s)}{P_{m_\kappa-1}^2(s)} \quad (\text{G.17})$$

$$+ \frac{\underline{w}_{11}}{s} \frac{Q_{m_\mu}(s)}{P_{m_\mu-1}(s)} \frac{Q_{m_\kappa-1}(s)}{P_{m_\kappa-1}(s)} + \frac{\underline{w}_{12}}{s} \frac{Q_{m_\mu}(s)}{P_{m_\mu-1}(s)} \frac{Q_{m_\kappa-1}^2(s)}{P_{m_\kappa-1}^2(s)} + \underline{w}_{02} \frac{Q_{m_\kappa-1}^2(s)}{P_{m_\kappa-1}^2(s)}$$

En réduisant au même dénominateur de tous les termes de  $\underline{W}_4(u, v)$ , on obtient :

$$\underline{W}_4(u, v) = \frac{\underline{X}_{m_\mu}(s)}{s^4 P_{m_\mu-1}^4(s) P_{m_\kappa-1}^2(s)} \quad (\text{G.18})$$

où

$$\begin{aligned} \underline{X}_{m_\mu}(s) = & \left[ \underline{w}_{40} Q_{m_\mu}^4(s) P_{m_\kappa-1}^2(s) + \underline{w}_{30} Q_{m_\mu}^3(s) P_{m_\mu-1}(s) P_{m_\kappa-1}^2(s) s \right. \\ & + \underline{w}_{31} Q_{m_\mu}^3(s) Q_{m_\kappa-1}(s) P_{m_\mu-1}(s) P_{m_\kappa-1}(s) s + \underline{w}_{20} Q_{m_\mu}^2(s) P_{m_\mu-1}^2(s) P_{m_\kappa-1}^2(s) s^2 \\ & + \underline{w}_{21} Q_{m_\mu}^2(s) Q_{m_\kappa-1}(s) P_{m_\mu-1}^2(s) P_{m_\kappa-1}(s) s^2 + \underline{w}_{22} Q_{m_\mu}^2(s) Q_{m_\kappa-1}^2(s) P_{m_\mu-1}^2(s) s^2 \\ & + \underline{w}_{11} Q_{m_\mu}(s) Q_{m_\kappa-1}(s) P_{m_\mu-1}^3(s) P_{m_\kappa-1}(s) s^3 + \underline{w}_{12} Q_{m_\mu}(s) Q_{m_\kappa-1}^2(s) P_{m_\mu-1}^3(s) s^3 \\ & \left. + \underline{w}_{02} Q_{m_\kappa-1}^2(s) P_{m_\mu-1}^4(s) s^4 \right] \quad (\text{G.19}) \end{aligned}$$

En supposant que  $m_\mu > m_\kappa$ , on en déduit le degré de  $\underline{X}_{m_\mu}(s)$  étant  $\underline{m}_\mu = 4m_\mu + 2m_\kappa - 2$ . De la même façon, on obtient :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \underline{X}_{m_\mu}(s) = \underline{x}_0 = \underline{w}_{40} (q_0^\mu)^4 (p_0^\kappa)^2 \quad (\text{G.20})$$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d\underline{X}_{m_\mu}(s)}{ds} = \underline{x}_1 = & \underline{w}_{40} \left( 4q_1^\mu (q_0^\mu)^3 (p_0^\kappa)^2 + 2p_1^\kappa p_0^\kappa (q_0^\mu)^4 \right) + \underline{w}_{30} (q_0^\mu)^3 p_0^\mu (p_0^\kappa)^2 \\ & + \underline{w}_{31} (q_0^\mu)^3 q_0^\kappa p_0^\mu p_0^\kappa \quad (\text{G.21}) \end{aligned}$$

## G.2.2 Coefficients de la fonction $\underline{W}_4(u, v)$ pour le cas général

$$\begin{aligned} \frac{\underline{a}_{40}}{\mu_i^2} = & \left( -6750 f + 1080 f^{10/3} + 1080 + 11340 f^{5/3} - 6750 f^{7/3} \right) \nu_i \\ & - 9450 f^{7/3} - 9450 f + 15876 f^{5/3} + 1512 f^{10/3} + 1512 \quad (\text{G.22}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\underline{a}_{30}}{\mu_i} = & \left( 60750 f + 39150 f^{7/3} - 102060 f^{5/3} + 9180 f^{10/3} - 7020 \right) \nu_i \\ & + 47628 f^{5/3} + 8316 - 8694 f^{10/3} - 28350 f - 18900 f^{7/3} \quad (\text{G.23}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\underline{a}_{31}}{\mu_i^2} = & \left( 5220 f^{10/3} + 5220 - 9000 f^{7/3} + 7560 f^{5/3} - 9000 f \right) \nu_i \\ & + 7308 f^{10/3} - 12600 f^{7/3} - 12600 f + 7308 + 10584 f^{5/3} \quad (\text{G.24}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{a}_{20} = & \left( -54000 f - 12960 - 60750 f^{7/3} - 10260 f^{10/3} + 90720 f^{5/3} \right) \nu_i \\ & + 9072 + 37800 f - 63504 f^{5/3} + 42525 f^{7/3} + 7182 f^{10/3} \quad (\text{G.25}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\underline{a}_{21}}{\mu_i} = & \left( 81000 f - 35730 + 6750 f^{7/3} + 16020 f^{10/3} - 68040 f^{5/3} \right) \nu_i \\ & - 22176 f^{10/3} + 37674 + 31752 f^{5/3} - 9450 f^{7/3} - 37800 f \quad (\text{G.26}) \end{aligned}$$

$$\frac{a_{22}}{\mu_i^2} = \left( 6120 - 6750 f^{7/3} + 6120 f^{10/3} + 1260 f^{5/3} - 6750 f \right) \nu_i \quad (\text{G.27})$$

$$- 9450 f - 9450 f^{7/3} + 8568 + 1764 f^{5/3} + 8568 f^{10/3}$$

$$\underline{a}_{11} = \left( -72000 f - 21240 f^{10/3} - 45000 f^{7/3} - 48240 + 60480 f^{5/3} \right) \nu_i \quad (\text{G.28})$$

$$+ 33768 + 50400 f + 31500 f^{7/3} - 42336 f^{5/3} + 14868 f^{10/3}$$

$$\frac{a_{12}}{\mu_i} = \left( 60750 f + 150 f^{7/3} - 11340 f^{5/3} - 4680 f^{10/3} - 44880 \right) \nu_i \quad (\text{G.29})$$

$$+ 39984 - 28350 f + 5292 f^{5/3} - 7350 f^{7/3} - 9576 f^{10/3}$$

$$\underline{a}_{02} = \left( -32640 - 1440 f^{10/3} - 54000 f + 10080 f^{5/3} - 6000 f^{7/3} \right) \nu_i \quad (\text{G.30})$$

$$+ 22848 + 4200 f^{7/3} + 37800 f - 7056 f^{5/3} + 1008 f^{10/3}$$

$$\frac{b_{40}}{\mu_i^2} = \left( \frac{16875}{4} f + \frac{405}{4} - 11340 f^{5/3} + 6750 f^{7/3} + 270 f^{10/3} \right) \nu_i \quad (\text{G.31})$$

$$+ \frac{567}{4} + \frac{23625}{4} f - 15876 f^{5/3} + 9450 f^{7/3} + 378 f^{10/3}$$

$$\frac{b_{30}}{\mu_i} = \left( -\frac{5265}{8} - \frac{151875}{4} f + 2295 f^{10/3} + 102060 f^{5/3} - 39150 f^{7/3} \right) \nu_i \quad (\text{G.32})$$

$$+ 18900 f^{7/3} - 47628 f^{5/3} + \frac{6237}{8} - \frac{4347}{2} f^{10/3} + \frac{70875}{4} f$$

$$\frac{b_{31}}{\mu_i^2} = \left( 405 f^{10/3} - 7560 f^{5/3} - \frac{1125}{2} f - \frac{2565}{2} + 9000 f^{7/3} \right) \nu_i \quad (\text{G.33})$$

$$- \frac{3591}{2} + 567 f^{10/3} - 10584 f^{5/3} + 12600 f^{7/3} - \frac{1575}{2} f$$

$$\underline{b}_{20} = \left( 33750 f + 60750 f^{7/3} - 2565 f^{10/3} - 90720 f^{5/3} - 1215 \right) \nu_i \quad (\text{G.34})$$

$$- 23625 f + 63504 f^{5/3} - 42525 f^{7/3} + \frac{3591}{2} f^{10/3} + \frac{1701}{2}$$

$$\frac{b_{21}}{\mu_i} = \left( \frac{10125}{2} f + \frac{16335}{2} - 6750 f^{7/3} - 3645 f^{10/3} + 68040 f^{5/3} \right) \nu_i \quad (\text{G.35})$$

$$+ 1701 f^{10/3} - \frac{20223}{2} - 31752 f^{5/3} + 9450 f^{7/3} - \frac{4725}{2} f$$

$$\begin{aligned} \frac{b_{22}}{\mu_i^2} &= \left( -2970 + 6750 f^{7/3} - 1020 f^{10/3} - 1260 f^{5/3} - 1500 f \right) \nu_i \\ &\quad - 2100 f + 9450 f^{7/3} - 4158 - 1764 f^{5/3} - 1428 f^{10/3} \end{aligned} \quad (\text{G.36})$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= \left( 16740 - 60480 f^{5/3} + 45000 f^{7/3} - 4500 f + 3240 f^{10/3} \right) \nu_i \\ &\quad - 31500 f^{7/3} + 42336 f^{5/3} - 11718 - 2268 f^{10/3} + 3150 f \end{aligned} \quad (\text{G.37})$$

$$\begin{aligned} \frac{b_{12}}{\mu_i} &= \left( 21780 + 13500 f - 150 f^{7/3} + 11340 f^{5/3} + 780 f^{10/3} \right) \nu_i \\ &\quad + 7350 f^{7/3} - 19404 - 5292 f^{5/3} - 6300 f + 1596 f^{10/3} \end{aligned} \quad (\text{G.38})$$

$$\begin{aligned} b_{02} &= \left( 6000 f^{7/3} - 10080 f^{5/3} + 240 f^{10/3} - 12000 f + 15840 \right) \nu_i \\ &\quad - 168 f^{10/3} - 11088 + 8400 f - 4200 f^{7/3} + 7056 f^{5/3} \end{aligned} \quad (\text{G.39})$$

$$\begin{aligned} \frac{c_{40}}{\mu_i^2} &= \left( -6750 f^{7/3} - \frac{30375}{4} f + 11340 f^{5/3} - \frac{2565}{2} - 1620 f^{10/3} \right) \nu_i \\ &\quad - 2268 f^{10/3} - \frac{42525}{4} f - \frac{3591}{2} - 9450 f^{7/3} + 15876 f^{5/3} \end{aligned} \quad (\text{G.40})$$

$$\begin{aligned} \frac{c_{30}}{\mu_i} &= \left( \frac{33345}{4} + \frac{273375}{4} f - 13770 f^{10/3} - 102060 f^{5/3} + 39150 f^{7/3} \right) \nu_i \\ &\quad - 18900 f^{7/3} + 47628 f^{5/3} - \frac{39501}{4} + 13041 f^{10/3} - \frac{127575}{4} f \end{aligned} \quad (\text{G.41})$$

$$\begin{aligned} \frac{c_{31}}{\mu_i^2} &= \left( -9000 f^{7/3} - 5625 f - 2655 + 7560 f^{5/3} - 6030 f^{10/3} \right) \nu_i \\ &\quad - 3717 - 7875 f + 10584 f^{5/3} - 12600 f^{7/3} - 8442 f^{10/3} \end{aligned} \quad (\text{G.42})$$

$$\begin{aligned} c_{20} &= \left( -60750 f + 15390 - 60750 f^{7/3} + 15390 f^{10/3} + 90720 f^{5/3} \right) \nu_i \\ &\quad - 10773 + 42525 f - 63504 f^{5/3} + 42525 f^{7/3} - 10773 f^{10/3} \end{aligned} \quad (\text{G.43})$$

$$\begin{aligned} \frac{c_{21}}{\mu_i} &= \left( 50625 f + 19395 + 6750 f^{7/3} - 8730 f^{10/3} - 68040 f^{5/3} \right) \nu_i \\ &\quad + 18774 f^{10/3} - 17451 + 31752 f^{5/3} - 9450 f^{7/3} - 23625 f \end{aligned} \quad (\text{G.44})$$

$$\begin{aligned} \frac{c_{22}}{\mu_i^2} &= \left( -180 - 4080 f^{10/3} - 6750 f^{7/3} + 1260 f^{5/3} - 750 f \right) \nu_i \\ &\quad - 252 - 9450 f^{7/3} - 1050 f - 5712 f^{10/3} + 1764 f^{5/3} \end{aligned} \quad (\text{G.45})$$

$$\begin{aligned} \underline{c}_{11} = & \left( 14760 + 60480 f^{5/3} - 45000 f^{7/3} + 14760 f^{10/3} - 45000 f \right) \nu_i \\ & + 31500 f^{7/3} - 42336 f^{5/3} - 10332 - 10332 f^{10/3} + 31500 f \end{aligned} \quad (\text{G.46})$$

$$\begin{aligned} \frac{\underline{c}_{12}}{\mu_i} = & \left( 150 f^{7/3} - 11340 f^{5/3} + 1320 + 6750 f + 3120 f^{10/3} \right) \nu_i \\ & - 3150 f + 6384 f^{10/3} - 7350 f^{7/3} + 5292 f^{5/3} - 1176 \end{aligned} \quad (\text{G.47})$$

$$\begin{aligned} \underline{c}_{02} = & \left( -6000 f^{7/3} + 10080 f^{5/3} + 960 f^{10/3} - 6000 f + 960 \right) \nu_i \\ & - 672 f^{10/3} - 672 + 4200 f + 4200 f^{7/3} - 7056 f^{5/3} \end{aligned} \quad (\text{G.48})$$

### G.2.3 Coefficients de la fonction $\underline{W}_2(u, v)$ pour le cas du Poisson constant

$$\begin{aligned} \underline{a}_2 = & (14 + 10\nu_i) \left\{ 200(1-f) \left( 1 - f^{7/3} \right) \nu_m^2 - 300(1-f) \left( 1 - f^{7/3} \right) \nu_m \right. \\ & \left. + 112 + 112 f^{10/3} + 126 f^{5/3} - 175 f \left( f^{4/3} + 1 \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{G.49})$$

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 = & \left[ \left( -4000 f^{10/3} + 1000 f^{7/3} + 18000 f - 15000 \right) \nu_i \right. \\ & \left. - 1400 f^{10/3} - 2800 f^{7/3} - 8400 f + 12600 \right] \nu_m^2 \\ & + \left[ \left( 1800 f^{10/3} + 3300 f^{7/3} - 27000 f + 21900 \right) \nu_i \right. \\ & \left. + 5040 f^{10/3} + 2100 f^{7/3} + 12600 f - 19740 \right] \nu_m \\ & + \left( 1120 f^{10/3} + 2450 f^{7/3} - 11340 f^{5/3} + 15750 f - 7980 \right) \nu_i \\ & + 7644 + 5292 f^{5/3} - 7350 f - 2450 f^{7/3} - 3136 f^{10/3} \end{aligned} \quad (\text{G.50})$$

$$\begin{aligned} \underline{a}_0 = & \left[ \left( 2000 f^{10/3} + 1000 f^{7/3} - 16000 f - 8000 \right) \nu_i \right. \\ & \left. - 1400 f^{10/3} - 700 f^{7/3} + 11200 f + 5600 \right] \nu_m^2 \\ & + \left[ \left( 1200 f^{10/3} + 24000 f + 16800 \right) \nu_i \right. \\ & \left. - 840 f^{10/3} - 16800 f - 11760 \right] \nu_m \\ & \left( -2240 f^{10/3} - 7000 f^{7/3} + 10080 f^{5/3} - 14000 f - 7840 \right) \nu_i \\ & + 1568 f^{10/3} + 4900 f^{7/3} - 7056 f^{5/3} + 9800 f + 5488 \end{aligned} \quad (\text{G.51})$$

$$\begin{aligned} \underline{b}_2 = & \left( -\frac{75}{2} f + 200 f^{7/3} - 50 f^{10/3} - \frac{225}{2} \right) \nu_m^2 \\ & + \left( \frac{225}{2} f + 45 f^{10/3} - 300 f^{7/3} + \frac{285}{2} \right) \nu_m \\ & - 126 f^{5/3} - 42 - 7 f^{10/3} + 175 f^{7/3} \end{aligned} \quad (\text{G.52})$$

$$\begin{aligned}
\underline{b}_1 = & \left( -\frac{14175}{2} + 350f^{10/3} - 1575f + 1000f^{10/3}\nu_i + 2800f^{7/3} \right. \\
& \left. + \frac{16875}{2}\nu_i + 3375f\nu_i - 1000f^{7/3}\nu_i \right) \nu_m^2 \\
& + \left( 9450 - 1050f^{10/3} + 4725f - 3300f^{7/3}\nu_i + 150f^{10/3}\nu_i \right. \\
& \left. - 2100f^{7/3} - 10125f\nu_i - 10350\nu_i \right) \nu_m \\
& - \frac{5733}{2} + 2450f^{7/3} - 5292f^{5/3} + 11340f^{5/3}\nu_i + \frac{5985}{2}\nu_i \\
& + 196f^{10/3} - 2450f^{7/3}\nu_i - 70f^{10/3}\nu_i
\end{aligned} \tag{G.53}$$

$$\begin{aligned}
\underline{b}_0 = & \left( -3150 + 700f^{7/3} - 1000f^{7/3}\nu_i - 500f^{10/3}\nu_i + 4500\nu_i - 3000f\nu_i \right. \\
& \left. + 350f^{10/3} + 2100f \right) \nu_m^2 \\
& + \left( -600f^{10/3}\nu_i + 5880 - 8400\nu_i + 9000f\nu_i + 420f^{10/3} - 6300f \right) \nu_m \\
& - 2058 + 7056f^{5/3} - 4900f^{7/3} + 2940\nu_i + 140f^{10/3}\nu_i + 7000f^{7/3}\nu_i \\
& - 98f^{10/3} - 10080f^{5/3}\nu_i
\end{aligned} \tag{G.54}$$

$$\begin{aligned}
\underline{c}_2 = & \left( -200f^{7/3} - 100f^{10/3} + 25 + \frac{25}{2}f \right) \nu_m^2 + \left( 15 + 300f^{7/3} + 210f^{10/3} \right) \nu_m \\
& - 175f^{7/3} - \frac{175}{2}f + 126f^{5/3} - 28 - 98f^{10/3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{c}_1 = & \left( -2800f^{7/3} - 1875\nu_i + 2000f^{10/3}\nu_i + 1575 + 1000f^{7/3}\nu_i \right. \\
& \left. - 1125f\nu_i + 525f + 700f^{10/3} \right) \nu_m^2 \\
& + \left( 2100f^{7/3} - 2940f^{10/3} - 2100f^{10/3}\nu_i + 840 - 1200\nu_i + 3300f^{7/3}\nu_i \right) \nu_m \\
& - 1911 - 11340f^{5/3}\nu_i + 5292f^{5/3} + 2450f^{7/3}\nu_i + 7875f\nu_i + 1995\nu_i \\
& - 2450f^{7/3} + 2744f^{10/3} - 980f^{10/3}\nu_i - 3675f
\end{aligned} \tag{G.55}$$

$$\begin{aligned}
\underline{c}_0 = & \left( -1000f^{10/3}\nu_i + 1000f^{7/3}\nu_i + 1000f\nu_i - 1000\nu_i - 700f \right. \\
& \left. + 700f^{10/3} - 700f^{7/3} + 700 \right) \nu_m^2 - 1372 + 1960\nu_i + 4900f \\
& - 7056f^{5/3} + 1960f^{10/3}\nu_i + 4900f^{7/3} - 1372f^{10/3} - 7000f^{7/3}\nu_i \\
& - 7000f\nu_i + 10080f^{5/3}\nu_i
\end{aligned} \tag{G.56}$$

### G.3 Polynôme $D_4(u)$

Les coefficients  $\underline{d}_i$  du polynôme  $\underline{D}_4(u)$  sont donnés par :

$$\underline{d}_4 = \underline{b}_2^2 - \underline{a}_2 \underline{c}_2 \quad (\text{G.57})$$

$$\underline{d}_3 = 2\underline{b}_1 \underline{b}_2 - \underline{a}_2 \underline{c}_1 - \underline{a}_1 \underline{c}_2 \quad (\text{G.58})$$

$$\underline{d}_2 = \underline{b}_1^2 - \underline{a}_0 \underline{c}_2 - \underline{a}_1 \underline{c}_1 - \underline{a}_2 \underline{c}_0 + 2\underline{b}_0 \underline{b}_2 \quad (\text{G.59})$$

$$\underline{d}_1 = 2\underline{b}_0 \underline{b}_1 - \underline{a}_1 \underline{c}_0 - \underline{a}_0 \underline{c}_1 \quad (\text{G.60})$$

$$\underline{d}_0 = \underline{b}_0^2 - \underline{a}_0 \underline{c}_0 \quad (\text{G.61})$$

où les coefficients  $\underline{a}_i, \underline{b}_i, \underline{c}_i$  étant en fonctions des paramètres  $(\nu_0, \nu_1, f_1)$  sont donnés dans (G.2.3).

En transformant le polynôme  $\underline{D}_4(u)$  en forme standard :

$$\underline{D}_4^s(u) = (\mu_1 u)^4 + \alpha (\mu_1 u)^2 + \beta (\mu_1 u) + \rho \quad (\text{G.62})$$

où

$$\alpha = \frac{-3(\underline{d}_3)^2}{8(\underline{d}_4)^2} + \frac{\underline{d}_2}{\underline{d}_4} \quad (\text{G.63})$$

$$\beta = \frac{(\underline{d}_3)^3}{8(\underline{d}_4)^3} - \frac{\underline{d}_3 \underline{d}_2}{2(\underline{d}_4)^2} + \frac{\underline{d}_1}{\underline{d}_4} \quad (\text{G.64})$$

$$\rho = \frac{-3(\underline{d}_3)^4}{256(\underline{d}_4)^4} + \frac{\underline{d}_2(\underline{d}_3)^2}{16(\underline{d}_4)^3} - \frac{\underline{d}_3 \underline{d}_1}{4(\underline{d}_4)^2} + \frac{\underline{d}_0}{\underline{d}_4} \quad (\text{G.65})$$

Puis, on pose :

$$F = \alpha^2 - 4\rho \quad (\text{G.66})$$

$$\Delta_4^s = -4\beta^2 \alpha^3 - 27\beta^4 + 256\rho^3 + \rho(16\alpha^4 + 144\beta^2 \alpha) - 128\rho^2 \alpha^2 \quad (\text{G.67})$$

En considérant  $\Delta_4^s, F$  et  $\alpha$  comme fonctions des trois variables  $(\nu_0, \nu_1, f_1)$  dans le domaine  $[0, 0.5] \times [0, 0.5] \times [0, 1.0]$ , on trouve que :

$$\Delta_4^s > 0 \quad , \quad F > 0 \quad , \quad \alpha < 0 \quad \text{dans le domaine } [0, 0.5] \times [0, 0.5] \times [0, 1.0] \quad (\text{G.68})$$

On en déduit alors que  $\underline{D}_4^s(u)$  a quatre racines distinctes, d'après la théorie d'équation quartique [91, 40].

### G.4 Racines de l'équation de troisième degré

D'après la relation (4.165), on réécrit  $\underline{D}'_3(u)$  :

$$\underline{D}'_3(u) = \underline{d}'_3 (\mu_1 u)^3 + \underline{d}'_2 (\mu_1 u)^2 + \underline{d}'_1 (\mu_1 u) + \underline{d}'_0 \quad (\text{G.69})$$

En posant :

$$\delta_2 = \underline{d}'_2 / \underline{d}'_3 \quad , \quad \delta_1 = \underline{d}'_1 / \underline{d}'_3 \quad , \quad \delta_0 = \underline{d}'_0 / \underline{d}'_3 \quad (\text{G.70})$$

$$q = 2(\delta_2)^3 - 9\delta_2 \delta_1 + 27\delta_0 \quad , \quad p = 3\delta_1 - (\delta_2)^2 \quad (\text{G.71})$$

$$\Delta_{pq} = q^2 + 4p^3 \quad , \quad r = \sqrt{-\Delta_{pq}} \quad , \quad \theta = (\pi - \arctan(r/q)) / 3 \quad (\text{G.72})$$

En considérant  $\Delta_{pq}$ ,  $q$  comme les fonctions de trois variable  $(\nu_0, \nu_1, f_1)$ , on trouve que :

$$\Delta_{pq} < 0 \text{ et } q > 0 \text{ dans le domaine } [0, 0.5] \times [0, 0.5] \times [0, 1.0[ \quad (\text{G.73})$$

On en déduit alors les trois racines distinctes de  $D'_3(u)$  :

$$u_1^{\Delta} = -\frac{\delta_2}{3} - \frac{\sqrt[6]{(r^2 + q^2)}}{\sqrt[3]{54}} \left( \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta \right) \quad (\text{G.74})$$

$$u_2^{\Delta} = -\frac{\delta_2}{3} + \frac{\sqrt[6]{(r^2 + q^2)}}{\sqrt[3]{54}} \left( \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta \right) \quad (\text{G.75})$$

$$u_3^{\Delta} = -\frac{\delta_2}{3} + 2 \frac{\sqrt[6]{(r^2 + q^2)}}{\sqrt[3]{54}} \cos \theta \quad (\text{G.76})$$

avec l'ordre  $u_1^{\Delta} < u_2^{\Delta} < u_3^{\Delta}$  qu'il est facile de prouver.



# Annexe H Algorithme d'accélération des calculs des dérivées

## H.1 Algorithme pour calculer la $l$ -ième dérivée d'une fonction rationnelle :

On établit ici l'algorithme pour calculer la  $l$ -ième dérivée de la fonction rationnelle  $\hat{f}(s) = \frac{G_{n_0}(s)}{H_{m_0}(s)}$ , où  $G_{n_0}(s)$  et  $H_{m_0}(s)$  sont deux polynômes de degrés  $n_0$  et  $m_0$  avec  $n_0 < m_0$ , et admettent les développements

$$G_{n_0}(s) = \sum_{k=0}^{n_0} g_{0,k} s^k, \quad H_{m_0}(s) = \sum_{k=0}^{m_0} h_{0,k} s^k \quad (\text{H.1})$$

On obtient facilement la dérivée du premier ordre de  $\hat{f}(s)$  :

$$\hat{f}^{(1)}(s) = \frac{G_{n_0}^{(1)}(s) H_{m_0}(s) - H_{m_0}^{(1)}(s) G_{n_0}(s)}{H_{m_0}^2(s)} = \frac{G_{n_1}(s)}{H_{m_1}(s)} \quad (\text{H.2})$$

On trouve aisément que :

$$n_1 = m_0 + n_0 - 1, m_1 = 2m_0 \quad (\text{H.3})$$

et que :

$$G_{n_1}(s) = \sum_{k=0}^{n_1} g_{1,k} s^k = \left[ \sum_{j=1}^{n_0} j g_{0,j} s^{j-1} \right] \left[ \sum_{i=0}^{m_0} h_{0,i} s^i \right] - \left[ \sum_{j=0}^{n_0} g_{0,j} s^j \right] \left[ \sum_{i=1}^{m_0} i h_{0,i} s^{i-1} \right] \quad (\text{H.4})$$

$$H_{m_1}(s) = \sum_{k=0}^{m_1} h_{1,k} s^k = \left[ \sum_{j=0}^{m_0} h_{0,j} s^j \right]^2 \quad (\text{H.5})$$

A partir de (H.4), en posant  $g_{1,k} = g_{1,k}^a - g_{1,k}^b$ ,  $k = 0, \dots, n_1$ , on obtient

$$g_{1,k}^a = \sum_{\substack{j-1+i=k \\ 1 \leq j \leq n_0, 0 \leq i \leq m_0}} j g_{0,j} h_{0,i} = \sum_{\substack{j=1 \\ 0 \leq k+1-j \leq m_0}}^{n_0} j g_{0,j} h_{0,k+1-j} \quad (\text{H.6})$$

$$g_{1,k}^b = \sum_{\substack{j+i-1=k \\ 0 \leq j \leq n_0, 1 \leq i \leq m_0}} i h_{0,i} g_{0,j} = \sum_{\substack{j=0 \\ 1 \leq k+1-j \leq m_0}}^{n_0} (k+1-j) h_{0,k+1-j} g_{0,j} \quad (\text{H.7})$$

D'une autre façon, on peut écrire :

$$g_{1,k}^a = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k+1} j g_{0,j} h_{0,k+1-j} & \text{Si } k+1 \leq n_0 \\ \sum_{j=1}^{n_0} j g_{0,j} h_{0,k+1-j} & \text{Si } n_0 < k+1 \leq m_0 \\ \sum_{j=k+1-m_0}^{n_0} j g_{0,j} h_{0,k+1-j} & \text{Si } m_0 < k+1 \leq m_0 + n_0 \end{cases} \quad (\text{H.8})$$

$$g_{1,k}^b = \begin{cases} \sum_{j=0}^k (k+1-j) h_{0,k+1-j} g_{0,j} & \text{Si } k < n_0 \\ \sum_{j=0}^{n_0} (k+1-j) h_{0,k+1-j} g_{0,j} & \text{Si } n_0 \leq k \leq m_0 - 1 \\ \sum_{j=k+1-m_0}^{n_0} (k+1-j) h_{0,k+1-j} g_{0,j} & \text{Si } m_0 - 1 < k \leq m_0 + n_0 - 1 \end{cases} \quad (\text{H.9})$$

De la même façon, d'après la relation (H.5), on obtient

$$h_{1,k} = \begin{cases} \sum_{j=0}^k h_{0,k-j} h_{0,j} & \text{Si } k \leq m_0 \\ \sum_{j=k-m_0}^{m_0} h_{0,k-j} h_{0,j} & \text{Si } m_0 < k \end{cases} \quad (\text{H.10})$$

Les expressions (H.3-H.10) permettent d'établir les relations récursives déterminant la  $l$ -ième dérivée en fonction de celle de la  $(l-1)$ -ième de la fonction  $\hat{f}(s)$  :

$$n_l = m_{l-1} + n_{l-1} - 1, m_l = 2m_{l-1} \quad (\text{H.11})$$

$$g_{l,k}^a = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k+1} j g_{l-1,j} h_{l-1,k+1-j} & \text{Si } k+1 \leq n_{l-1} \\ \sum_{j=1}^{n_{l-1}} j g_{l-1,j} h_{l-1,k+1-j} & \text{Si } n_{l-1} < k+1 \leq m_{l-1} \\ \sum_{j=k+1-m_{l-1}}^{n_{l-1}} j g_{l-1,j} h_{l-1,k+1-j} & \text{Si } m_{l-1} < k+1 \leq m_{l-1} + n_{l-1} \end{cases} \quad (\text{H.12})$$

$$g_{l,k}^b = \begin{cases} \sum_{j=0}^k (k+1-j) h_{l-1,k+1-j} g_{l-1,j} & \text{Si } k \leq n_{l-1} \\ \sum_{j=0}^{n_{l-1}} (k+1-j) h_{l-1,k+1-j} g_{l-1,j} & \text{Si } n_{l-1} < k \leq m_{l-1} - 1 \\ \sum_{j=k+1-m_{l-1}}^{n_{l-1}} (k+1-j) h_{l-1,k+1-j} g_{l-1,j} & \text{Si } m_{l-1} - 1 < k \leq m_{l-1} + n_{l-1} - 1 \end{cases} \quad (\text{H.13})$$

$$h_{l,k} = \begin{cases} \sum_{j=0}^k h_{l-1,k-j} h_{l-1,j} & \text{Si } k \leq m_{l-1} \\ \sum_{j=k-m_{l-1}}^{m_{l-1}} h_{l-1,k-j} h_{l-1,j} & \text{Si } m_{l-1} < k \leq 2m_{l-1} \end{cases} \quad (\text{H.14})$$

---

## H.2 Algorithme pour calculer la $l$ -ième dérivée d'une fonction irrationnelle

Le deuxième cas qu'on considère ici est la  $l$ -ième dérivée d'une fonction irrationnelle  $\hat{f}(s) = \frac{\sqrt{G_{n_0}(s)}}{H_{m_0}(s)}$ , où  $G_{n_0}(s)$  et  $H_{m_0}(s)$  sont deux polynômes de degré  $n_0$  et  $m_0$  avec  $n_0 > m_0$ , et ont les développements :

$$G_{n_0}(s) = \sum_{k=0}^{n_0} g_{0,k} s^k, \quad H_{m_0}(s) = \sum_{k=0}^{m_0} h_{0,k} s^k \quad (\text{H.15})$$

On trouve facilement, dans ce cas, la dérivée du premier ordre de  $\hat{f}(s)$  :

$$\hat{f}^{(1)}(s) = \frac{G_{n_0}^{(1)}(s) H_{m_0}(s) - 2H_{m_0}^{(1)}(s) G_{n_0}(s)}{2G_{n_0}(s) H_{m_0}(s)} \hat{f}(s) = \frac{G_{n_1}(s)}{H_{m_1}(s)} \hat{f}(s) \quad (\text{H.16})$$

et que :

$$m_1 = m_0 + n_0, \quad n_1 = m_1 - 1 = m_0 + n_0 - 1 \quad (\text{H.17})$$

$$G_{n_1}(s) = \sum_{k=0}^{n_1} g_{1,k} s^k = \left[ \sum_{j=1}^{n_0} j g_{0,j} s^{j-1} \right] \left[ \sum_{i=0}^{m_0} h_{0,i} s^i \right] - 2 \left[ \sum_{j=0}^{n_0} g_{0,j} s^j \right] \left[ \sum_{i=1}^{m_0} i h_{0,i} s^{i-1} \right] \quad (\text{H.18})$$

$$H_{m_1}(s) = \sum_{k=0}^{m_1} h_{1,k} s^k = 2 \left[ \sum_{j=0}^{n_0} g_{0,j} s^j \right] \left[ \sum_{i=0}^{m_0} h_{0,i} s^i \right] \quad (\text{H.19})$$

De la même façon que dans le cas précédent (H.4-H.5), en posant  $g_{1,k} = g_{1,k}^a - g_{1,k}^b$ , on obtient :

$$g_{1,k}^a = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k+1} j g_{0,j} h_{0,k+1-j} & \text{Si } k+1 \leq m_0 \\ \sum_{j=k+1-m_0}^{k+1} j g_{0,j} h_{0,k+1-j} & \text{Si } m_0 < k+1 \leq n_0 \\ \sum_{j=k+1-m_0}^{n_0} j g_{0,j} h_{0,k+1-j} & \text{Si } n_0 < k+1 \leq m_0 + n_0 \end{cases} \quad (\text{H.20})$$

$$g_{1,k}^b = \begin{cases} 2 \sum_{j=0}^k (k+1-j) h_{0,k+1-j} g_{0,j} & \text{Si } k \leq m_0 - 1 \\ 2 \sum_{j=k+1-m_0}^k (k+1-j) h_{0,k+1-j} g_{0,j} & \text{Si } m_0 - 1 < k \leq n_0 \\ 2 \sum_{j=k+1-m_0}^{n_0} (k+1-j) h_{0,k+1-j} g_{0,j} & \text{Si } n_0 < k \end{cases} \quad (\text{H.21})$$

$$h_{1,k} = \begin{cases} 2 \sum_{j=0}^k g_{0,k-j} h_{0,j} & \text{Si } k \leq m_0 \\ 2 \sum_{j=k-m_0}^k g_{0,k-j} h_{0,j} & \text{Si } m_0 < k < n_0 \\ 2 \sum_{j=k-m_0}^{n_0} g_{0,k-j} h_{0,j} & \text{Si } n_0 \leq k \end{cases} \quad (\text{H.22})$$

En posant  $K_1(s) = \frac{G_{n_1}(s)}{H_{m_1}(s)}$ , d'après la relation (H.16) on obtient la dérivée du deuxième ordre de  $\hat{f}(s)$  :

$$\hat{f}^{(2)}(s) = K_1^{(1)}(s) \hat{f}(s) + K_1(s) \hat{f}^{(1)}(s) = \hat{f}(s) \left\{ K_1^2(s) + K_1^{(1)}(s) \right\} = \hat{f}(s) K_2(s) \quad (\text{H.23})$$

Récursivement, on peut déduire que :

$$\hat{f}^{(l)}(s) = \hat{f}(s) K_l(s) \quad (\text{H.24})$$

$$K_{l+1}(s) = K_1(s) K_l(s) + K_1^{(1)}(s) \quad (\text{H.25})$$

avec  $K_l(s) = \frac{G_{n_{l+1}}(s)}{H_{m_{l+1}}(s)}$  et  $n_{l+1} < m_{l+1}$ . Plus explicitement, on a

$$\frac{G_{n_{l+1}}(s)}{H_{m_{l+1}}(s)} = \frac{G_{n_1}(s)}{H_{m_1}(s)} \frac{G_{n_l}(s)}{H_{m_l}^2(s)} + \frac{H_{m_1}(s) \left[ G_{n_l}^{(1)}(s) H_{m_l}(s) - H_{m_l}^{(1)}(s) G_{n_l}(s) \right]}{H_{m_1}(s) H_{m_l}^2(s)} \quad (\text{H.26})$$

On en déduit que  $n_{l+1} = n_1 + n_l + m_l$ ,  $m_{l+1} = m_1 + 2m_l$  et que :

$$G_{n_{l+1}}(s) = \sum_{t=0}^{n_{l+1}} g_{l+1,t}^a s^t = \sum_{t=0}^{n_{l+1}} \left( g_{l+1,t}^a + g_{l+1,t}^b - g_{l+1,t}^c \right) s^t \quad (\text{H.27})$$

$$H_{m_{l+1}}(s) = \sum_{t=0}^{m_{l+1}} h_{l+1,t} s^t \quad (\text{H.28})$$

où

$$\sum_{t=0}^{n_{l+1}} g_{l+1,t}^a s^t = \left[ \sum_{i=0}^{n_1} g_{1,i} s^i \right] \left[ \sum_{j=0}^{n_l} g_{l,j} s^j \right] \left[ \sum_{k=0}^{m_l} h_{l,k} s^k \right] \quad (\text{H.29})$$

$$\sum_{t=0}^{n_{l+1}} g_{l+1,t}^b s^t = \left[ \sum_{i=0}^{m_1} h_{1,i} s^i \right] \left[ \sum_{j=1}^{n_l} j g_{l,j} s^{j-1} \right] \left[ \sum_{k=0}^{m_l} h_{l,k} s^k \right] \quad (\text{H.30})$$

$$\sum_{t=0}^{n_{l+1}} g_{l+1,t}^c s^t = \left[ \sum_{i=0}^{m_1} h_{1,i} s^i \right] \left[ \sum_{j=0}^{n_l} g_{l,j} s^j \right] \left[ \sum_{k=1}^{m_l} k h_{l,k} s^{k-1} \right] \quad (\text{H.31})$$

$$\sum_{t=0}^{m_{l+1}} h_{l+1,t} s^t = \left[ \sum_{i=0}^{m_1} h_{1,i} s^i \right] \left[ \sum_{j=0}^{m_l} h_{l,j} s^j \right] \left[ \sum_{k=0}^{m_l} h_{l,k} s^k \right] \quad (\text{H.32})$$

On obtient finalement

$$g_{l+1,t}^a = \sum_{i+j+k=t} g_{1,i} g_{l,j} h_{l,k}, \quad 0 \leq t \leq n_{l+1} \quad (\text{H.33})$$

$$0 \leq i \leq n_1, 0 \leq j \leq n_l, 0 \leq k \leq m_l$$

$$g_{l+1,t}^b = \sum_{i+j-1+k=t} h_{1,i} j g_{l,j} h_{l,k}, \quad 0 \leq t \leq n_{l+1} \quad (\text{H.34})$$

$$0 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_l, 0 \leq k \leq m_l$$

$$g_{l+1,t}^c = \sum_{i+j-1+k=t} h_{1,i} g_{l,j} k h_{l,k}, \quad 0 \leq t \leq n_{l+1} \quad (\text{H.35})$$

$$0 \leq i \leq n_1, 0 \leq j \leq n_l, 1 \leq k \leq m_l$$

$$h_{l+1,t} = \sum_{i+j+k=t} h_{1,i} h_{l,j} h_{l,k}, \quad 0 \leq t \leq m_{l+1} \quad (\text{H.36})$$

$$0 \leq i \leq m_1, 0 \leq j \leq m_l, 1 \leq k \leq m_l$$

# Annexe I Entrées du problème de modélisation multi-échelle du fluage propre du béton

Constituants du béton	Fraction volumique	Module d'Young [ $MPa$ ]	Coefficient de Poisson
CSH	0.454	$E_{csh}^Y(0) = 23800$	$\nu_{csh}(0) = 0.24$
CH	0.138	38000	0.325
AFm	0.11	22400	0.25
Sable fine ( $<100 \mu m$ )	0.051	72000	0.27
Filler ( $<100 \mu m$ )	0.021	70000	0.3
Porosité capillaires	0.226	0	0
Pâte de ciment	0.498	$\tilde{E}_{pate}^Y(s)$	$\tilde{\nu}_{pate}(s)$
Sable	0.478	72000	0.27
Filler	0.011	70000	0.3
Air-occlus	0.015	0	0
Mortier	0.582	$\tilde{E}_{mortier}^Y(s)$	$\tilde{\nu}_{mortier}(s)$
Gravier	0.418	72000	0.27

TAB. I.1 Entrées du problème de modélisation multi-échelle du fluage propre du béton Chooz

Constituants du béton	Fraction volumique	Module d'Young [ $MPa$ ]	Coefficient de Poisson
CSH	0.408	$E_{csh}^Y(0) = 23800$	$\nu_{csh}(0) = 0.24$
CH	0.132	38000	0.325
AFm	0.097	22400	0.25
Sable fine ( $<100 \mu m$ )	0.148	61400	0.28
Filler ( $<100 \mu m$ )	0.039	70000	0.3
Porosité capillaires	0.175	0	0
Pâte de ciment	0.467	$\tilde{E}_{pate}^Y(s)$	$\tilde{\nu}_{pate}(s)$
Sable	0.461	61400	0.28
Filler	0.023	70000	0.3
Air-occlus	0.05	0	0
Mortier	0.604	$\tilde{E}_{mortier}^Y(s)$	$\tilde{\nu}_{mortier}(s)$
Gravier	0.396	61400	0.28

TAB. I.2 Entrées du problème de modélisation multi-échelle du fluage propre du béton Civaux B11

Constituants du béton	Fraction volumique	Module d'Young [ $MPa$ ]	Coefficient de Poisson
CSH	0.359	$E_{csh}^Y(0) = 23800$	$\nu_{csh}(0) = 0.24$
CH	0.108	38000	0.325
AFm	0.089	22400	0.25
Sable fine ( $<100 \mu m$ )	0.167	61400	0.28
Filler ( $<100 \mu m$ )	0.093	70000	0.3
Porosité capillaires	0.185	0	0
Pâte de ciment	0.413	$\tilde{E}_{pate}^Y(s)$	$\tilde{\nu}_{pate}(s)$
Sable	0.501	61400	0.28
Filler	0.052	70000	0.3
Air-occlus	0.034	0	0
Mortier	0.587	$\tilde{E}_{mortier}^Y(s)$	$\tilde{\nu}_{mortier}(s)$
Gravier	0.413	61400	0.28

TAB. I.3 Entrées du problème de modélisation multi-échelle du fluage propre du béton Civaux BHP

Constituants du béton	Fraction volumique	Module d'Young [ $MPa$ ]	Coefficient de Poisson
CSH	0.475	$E_{csh}^Y(0) = 23800$	$\nu_{csh}(0) = 0.24$
CH	0.137	38000	0.325
AFm	0.113	22400	0.25
Sable fine ( $<100 \mu m$ )	0.06	64400	0.22
Filler ( $<100 \mu m$ )	0.043	70000	0.3
Porosité capillaires	0.172	0	0
Pâte de ciment	0.472	$E_{pate}^Y(s)$	$\tilde{\nu}_{pate}(s)$
Sable	0.487	64400	0.22
Filler	0.023	70000	0.3
Air-occlus	0.018	0	0
Mortier	0.611	$E_{mortier}^Y(s)$	$\tilde{\nu}_{mortier}(s)$
Gravier	0.389	64400	0.22

TAB. I.4 Entrées du problème de modélisation multi-échelle du fluage propre du béton Flamanville

Constituants du béton	Fraction volumique	Module d'Young [ $MPa$ ]	Coefficient de Poisson
CSH	0.487	$E_{csh}^Y(0) = 23800$	$\nu_{csh}(0) = 0.24$
CH	0.14	38000	0.325
AFm	0.115	22400	0.25
Sable fine ( $<100 \mu m$ )	0.016	65000	0.25
Filler ( $<100 \mu m$ )	0.099	70000	0.3
Porosité capillaires	0.143	0	0
Pâte de ciment	0.46	$E_{pate}^Y(s)$	$\tilde{\nu}_{pate}(s)$
Sable	0.452	65000	0.25
Filler	0.051	70000	0.3
Air-occlus	0.036	0	0
Mortier	0.604	$E_{mortier}^Y(s)$	$\tilde{\nu}_{mortier}(s)$
Gravier	0.396	65000	0.25

TAB. I.5 Entrées du problème de modélisation multi-échelle du fluage propre du béton Paluel

Constituants du béton	Fraction volumique	Module d'Young [ $MPa$ ]	Coefficient de Poisson
CSH	0.434	$E_{csh}^Y(0) = 23800$	$\nu_{csh}(0) = 0.24$
CH	0.125	38000	0.325
AFm	0.103	22400	0.25
Sable fine ( $<100 \mu m$ )	0.012	71500	0.25
Filler ( $<100 \mu m$ )	0.091	70000	0.3
Porosité capillaires	0.236	0	0
Pâte de ciment	0.482	$E_{pate}^Y(s)$	$\tilde{\nu}_{pate}(s)$
Sable	0.419	71500	0.25
Filler	0.049	70000	0.3
Air-occlus	0.05	0	0
Mortier	0.623	$E_{mortier}^Y(s)$	$\tilde{\nu}_{mortier}(s)$
Gravier	0.377	71500	0.25

TAB. I.6 Entrées du problème de modélisation multi-échelle du fluage propre du béton Penly

# Annexe J Résultats d'identification des paramètres viscoélastiques du modèle Burgers équivalent du gel C-S-H

## J.1 Coefficient de Poisson ou module de compressibilité du gel C-S-H constant

	Civ. BHP	Civ. B11	Paluel	Penly	Chooz	Flamanville
$\eta_{1(1)}^\mu$ [MPa.j]	4.40E+06	3.27E+06	5.57E+06	4.08E+06	2.86E+06	1.45E+06
$\eta_{2(1)}^\mu$ [MPa.j]	3.13E+04	3.18E+04	3.57E+04	3.64E+04	3.77E+04	4.50E+04
$E_{2(1)}^\mu$ [MPa]	1.67E+03	1.19E+03	3.56E+03	2.32E+03	1.58E+03	1.98E+03
	5 Bétons (sans Flamanville)			6 Bétons (compris Flamanville)		
	Moyenne	Ecart type	Ecart type (%)	Moyenne	Ecart type	Ecart type (%)
$\eta_{1(1)}^\mu$ [MPa.j]	4.03E+06	9.44E+05	23.39%	3.60E+06	1.29E+06	35.86%
$\eta_{2(1)}^\mu$ [MPa.j]	3.46E+04	2.55E+03	7.38%	3.63E+04	4.54E+03	12.50%
$E_{2(1)}^\mu$ [MPa]	2.07E+03	8.32E+02	40.28%	2.05E+03	7.60E+02	37.04%

TAB. J.1 Composantes déviatoriques du cas du coefficient de Poisson du gel C-S-H constant + Schéma de MT à toutes échelles

	Civ. BHP	Civ. B11	Paluel	Penly	Chooz	Flamanville
$\eta_{1(1)}^\mu$ [MPa.j]	4.22E+06	3.14E+06	5.35E+06	3.94E+06	2.74E+06	1.40E+06
$\eta_{2(1)}^\mu$ [MPa.j]	3.11E+04	3.16E+04	3.54E+04	3.59E+04	3.72E+04	4.47E+04
$E_{2(1)}^\mu$ [MPa]	1.69E+03	1.17E+03	3.67E+03	2.28E+03	1.55E+03	1.98E+03
	5 Bétons (sans Flamanville)			6 Bétons (compris Flamanville)		
	Moyenne	Ecart type	Ecart type (%)	Moyenne	Ecart type	Ecart type (%)
$\eta_{1(1)}^\mu$ [MPa.j]	3.88E+06	9.09E+05	23.45%	3.47E+06	1.24E+06	35.88%
$\eta_{2(1)}^\mu$ [MPa.j]	3.42E+04	2.44E+03	7.14%	3.60E+04	4.50E+03	12.51%
$E_{2(1)}^\mu$ [MPa]	2.07E+03	8.76E+02	42.30%	2.06E+03	8.00E+02	38.92%

TAB. J.2 Composantes déviatoriques du cas du coefficient de Poisson du gel C-S-H constant + Schéma AG à la dernière échelle

	Civ. BHP	Civ. B11	Paluel	Penly	Chooz	Flamanville
$\eta_{1(1)}^\mu$ [MPa.j]	3.11E+06	2.30E+06	3.83E+06	2.91E+06	2.02E+06	1.01E+06
$\eta_{2(1)}^\mu$ [MPa.j]	2.62E+04	2.67E+04	2.97E+04	3.04E+04	3.15E+04	3.74E+04
$E_{2(1)}^\mu$ [MPa]	1.24E+03	8.63E+02	2.77E+03	1.75E+03	1.17E+03	1.46E+03
	5 Bétons (sans Flamanville)			6 Bétons (compris Flamanville)		
	Moyenne	Ecart type	Ecart type (%)	Moyenne	Ecart type	Ecart type (%)
$\eta_{1(1)}^\mu$ [MPa.j]	2.83E+06	6.35E+05	22.39%	2.53E+06	8.94E+05	35.34%
$\eta_{2(1)}^\mu$ [MPa.j]	2.89E+04	2.09E+03	7.23%	3.03E+04	3.71E+03	12.23%
$E_{2(1)}^\mu$ [MPa]	1.56E+03	6.70E+02	43.00%	1.54E+03	6.13E+02	39.73%

TAB. J.3 Composantes déviatoriques du cas du module de compressibilité du gel C-S-H constant + Schéma de MT à toutes échelles

	Civ. BHP	Civ. B11	Paluel	Penly	Chooz	Flamanville
$\eta_{1(1)}^\mu [MPa.j]$	2.93E+06	2.16E+06	3.56E+06	2.76E+06	1.88E+06	9.40E+05
$\eta_{2(1)}^\mu [MPa.j]$	2.60E+04	2.64E+04	2.94E+04	2.99E+04	3.10E+04	3.71E+04
$E_{2(1)}^\mu [MPa]$	1.26E+03	8.46E+02	3.12E+03	1.72E+03	1.14E+03	1.49E+03
	5 Bétons (sans Flamanville)			6 Bétons (compris Flamanville)		
	Moyenne	Ecart type	Ecart type (%)	Moyenne	Ecart type	Ecart type (%)
$\eta_{1(1)}^\mu [MPa.j]$	2.66E+06	5.90E+05	22.17%	2.37E+06	8.37E+05	35.27%
$\eta_{2(1)}^\mu [MPa.j]$	2.85E+04	1.98E+03	6.93%	3.00E+04	3.67E+03	12.26%
$E_{2(1)}^\mu [MPa]$	1.62E+03	8.04E+02	49.71%	1.60E+03	7.36E+02	46.10%

TAB. J.4 Composantes déviatoriques du cas du module de compressibilité du gel C-S-H constant + Schéma AG à la dernière échelle

## J.2 Comparaison entre le schéma de MT et le schéma AG

	Civ. BHP	Civ. B11	Paluel	Penly	Chooz	Flamanville
	Coefficient de Poisson constant					
$\eta_{1(1)}^\mu [MPa.j]$	-4.07%	-3.79%	-3.83%	-3.45%	-4.22%	-3.70%
$\eta_{2(1)}^\mu [MPa.j]$	-0.67%	-0.90%	-0.87%	-1.35%	-1.39%	-0.75%
$E_{2(1)}^\mu [MPa]$	0.76%	-1.65%	3.02%	-1.52%	-2.26%	0.00%
	Module de compressibilité constant					
$\eta_{1(1)}^\mu [MPa.j]$	-5.76%	-5.80%	-7.06%	-5.13%	-6.96%	-6.69%
$\eta_{2(1)}^\mu [MPa.j]$	-0.74%	-1.02%	-1.02%	-1.58%	-1.63%	-0.80%
$E_{2(1)}^\mu [MPa]$	2.06%	-1.96%	12.82%	-1.64%	-2.86%	1.92%

TAB. J.5 Composantes déviatoriques. Comparaison entre le schéma de MT et le schéma AG

## J.3 Identification des paramètres viscoélastiques microscopiques à partir du fluage uniaxial de la pâte

	Flamanville	Paluel	Moyenne	Ecart type(%)
	Coefficient de Poisson constant			
$\eta_{1(1)}^\mu [MPa.j]$	7.07E+05	5.43E+05	6.25E+05	13.11%
$\eta_{2(1)}^\mu [MPa.j]$	4.69E+04	7.90E+04	6.29E+04	25.50%
$E_{2(1)}^\mu [MPa]$	5.89E+03	4.54E+03	5.22E+03	12.97%
	Module de compressibilité constant			
$\eta_{1(1)}^\mu [MPa.j]$	9.69E+05	7.47E+05	8.58E+05	12.99%
$\eta_{2(1)}^\mu [MPa.j]$	5.56E+04	9.26E+04	7.41E+04	24.95%
$E_{2(1)}^\mu [MPa]$	6.74E+03	5.39E+03	6.06E+03	11.14%

TAB. J.6 Composantes déviatoriques

## J.4 Coefficient de Poisson du béton constant

	Civ. BHP	Civ. B11	Paluel	Penly	Chooz	Flamanville
$\eta_{1(1)}^\mu [MPa.j]$	divergence	2.37E+06	4.65E+06	3.30E+06	2.26E+06	1.32E+06
$\eta_{2(1)}^\mu [MPa.j]$	divergence	2.94E+04	3.40E+04	3.42E+04	3.54E+04	4.39E+04
$E_{2(1)}^\mu [MPa]$	divergence	9.70E+02	3.70E+03	2.13E+03	1.39E+03	1.90E+03
	4 Bétons (sans Flamanville)			5 Bétons (compris Flamanville)		
	Moyenne	Ecart type	Ecart type (%)	Moyenne	Ecart type	Ecart type (%)
$\eta_{1(1)}^\mu [MPa.j]$	3.1435E+06	9.59E+05	30.50%	2.78E+06	1.13E+06	40.56%
$\eta_{2(1)}^\mu [MPa.j]$	3.3260E+04	2.29E+03	6.89%	3.54E+04	4.74E+03	13.39%
$E_{2(1)}^\mu [MPa]$	2.0461E+03	1.04E+03	50.83%	2.02E+03	9.32E+02	46.21%

TAB. J.7 Composantes déviatoriques du cas du schéma de MT à toutes échelles

	Civ. BHP	Civ. B11	Paluel	Penly	Chooz	Flamanville
$\eta_{1(1)}^\kappa [MPa.j]$	divergence	9.03E+07	2.26E+07	2.31E+07	1.95E+07	3.71E+06
$\eta_{2(1)}^\kappa [MPa.j]$	divergence	8.95E+04	7.46E+04	8.46E+04	9.02E+04	8.13E+04
$E_{2(1)}^\kappa [MPa]$	divergence	8.41E+03	7.10E+03	7.20E+03	6.19E+03	4.04E+03
	4 Bétons (sans Flamanville)			5 Bétons (compris Flamanville)		
	Moyenne	Ecart type	Ecart type (%)	Moyenne	Ecart type	Ecart type (%)
$\eta_{1(1)}^\kappa [MPa.j]$	3.8868E+07	2.97E+07	76.50%	3.18E+07	3.01E+07	94.50%
$\eta_{2(1)}^\kappa [MPa.j]$	8.4715E+04	6.21E+03	7.33%	8.40E+04	5.72E+03	6.81%
$E_{2(1)}^\kappa [MPa]$	7.2250E+03	7.88E+02	10.91%	6.59E+03	1.45E+03	22.08%

TAB. J.8 Composantes sphériques du cas du schéma de MT à toutes échelles

	Civ. BHP	Civ. B11	Paluel	Penly	Chooz	Flamanville
$\eta_{1(1)}^\mu [MPa.j]$	divergence	divergence	4.15E+06	2.95E+06	1.97E+06	1.19E+06
$\eta_{2(1)}^\mu [MPa.j]$	divergence	divergence	3.36E+04	3.36E+04	3.47E+04	4.36E+04
$E_{2(1)}^\mu [MPa]$	divergence	divergence	5.57E+03	2.22E+03	1.40E+03	2.06E+03
	3 Bétons (sans Flamanville)			4 Bétons (compris Flamanville)		
	Moyenne	Ecart type	Ecart type (%)	Moyenne	Ecart type	Ecart type (%)
$\eta_{1(1)}^\mu [MPa.j]$	3.0249E+06	8.92E+05	29.48%	2.57E+06	1.11E+06	43.21%
$\eta_{2(1)}^\mu [MPa.j]$	3.3969E+04	5.35E+02	1.57%	3.64E+04	4.18E+03	11.50%
$E_{2(1)}^\mu [MPa]$	3.0650E+03	1.80E+03	58.83%	2.81E+03	1.62E+03	57.57%

TAB. J.9 Composantes déviatoriques du cas du schéma AG à la dernière échelle

	Civ. BHP	Civ. B11	Paluel	Penly	Chooz	Flamanville
$\eta_{1(1)}^\kappa [MPa.j]$	divergence	divergence	3.19E+07	4.67E+07	5.22E+07	4.79E+06
$\eta_{2(1)}^\kappa [MPa.j]$	divergence	divergence	7.55E+04	8.75E+04	9.27E+04	8.17E+04
$E_{2(1)}^\kappa [MPa]$	divergence	divergence	5.70E+03	7.17E+03	6.56E+03	3.64E+03
	3 Bétons (sans Flamanville)			4 Bétons (compris Flamanville)		
	Moyenne	Ecart type	Ecart type (%)	Moyenne	Ecart type	Ecart type (%)
$\eta_{1(1)}^\kappa [MPa.j]$	4.3602E+07	8.59E+06	19.69%	3.39E+07	1.84E+07	54.22%
$\eta_{2(1)}^\kappa [MPa.j]$	8.5204E+04	7.20E+03	8.46%	8.43E+04	6.42E+03	7.62%
$E_{2(1)}^\kappa [MPa]$	6.4776E+03	6.03E+02	9.31%	5.77E+03	1.33E+03	23.11%

TAB. J.10 Composantes sphériques du cas du schéma AG à la dernière échelle