



**HAL**  
open science

# Sur les équations d'ondes amorties dérivées de la modélisation cérébrale

Mouhamad Jradeh

► **To cite this version:**

Mouhamad Jradeh. Sur les équations d'ondes amorties dérivées de la modélisation cérébrale. Mathématiques [math]. Université d'Orléans, 2008. Français. NNT : . tel-00467024

**HAL Id: tel-00467024**

**<https://theses.hal.science/tel-00467024>**

Submitted on 25 Mar 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ D'ORLÉANS



ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS,  
PHYSIQUE MATHÉMATIQUES D'ORLÉANS

**THÈSE** présenté par :  
**Mouhamad JRADEH**

Soutenue le : 15 décembre 2008

pour obtenir le grade de **Docteur de l'université d'Orléans**

Discipline : **Mathématiques Appliquées**

**Sur les équations des ondes amorties  
dérivées de la modélisation cérébrale**

**THÈSE dirigée par :**

Mme Maïtine BERGOUNIOUX

Professeur, Université d'Orléans.

**RAPPORTEURS :**

Mr Olivier BODART

Maître de Conférences-HDR, Université B.Pascal.

Mr Victor JIRSA

Directeur de Recherche, CNRS.

---

**JURY :**

Mme Fatiha ALABAU-BOUSSOIRA

Professeur, Université de Metz et CNRS.

Mme Maïtine BERGOUNIOUX

Professeur, Université d'Orléans.

Mr Olivier BODART

Maître de Conférences-HDR, Université B.Pascal.

Mr François JAMES

Professeur, Université d'Orléans.

Mr Victor JIRSA

Directeur de Recherche, CNRS.



# Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Maïtine Bergounioux, ma directrice de thèse, pour m'avoir guidé, encouragé et conseillé, pendant ces trois années tout en me laissant une grande liberté. Je n'oublierai jamais que c'est grâce à elle j'ai fait mes premiers pas dans le monde de la recherche.

Viktor Jirsa a toujours répondu avec une grande gentillesse à mes mails, il a aussi accepté de rapporter cette thèse et je l'en remercie vivement. Je remercie également Olivier Bodart d'avoir rapporté cette thèse et de m'avoir fait part de ses remarques pertinentes.

Je tiens à remercier François James d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse. Je lui suis très reconnaissant de s'être intéressé à mon travail et de m'avoir fait part de ses remarques durant différentes occasions.

J'exprime également toute ma gratitude à Fatiha Alabau-boussouira d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je voudrais saluer les membres du laboratoire MAPMO qui m'ont accueilli pendant ces trois années. Un grand merci à Jean-Philippe Anker et Stéphane Cordier, pour leur gentillesse et leur écoute. Merci également à Mounir Haddou pour son soutien, les secrétaires et les informaticiens qui ont fait un travail formidable pour simplifier la partie administrative durant toute la période de ma thèse.

Je remercie les doctorants du MAPMO, spécialement mes adorables amis et collègues de bureau pour tous les joyeux moments passés ensemble et tous particulièrement, le chef Guillaume, Bassiro, Roland, Loïc, Pierre, Cristiana, Gilles, Olivier et Chi, je vous remercie pour toute l'aide que vous m'avez donnée. Un grand merci aussi aux docteurs Laurence, Radwan, Mouhamad El-safadi et Ahmad El-hajj.

Je remercie également tous mes compatriotes et « presque-compatriotes », particulièrement mes amis avec qui j'ai passé le plus de temps, sans eux la vie à Orléans n'aurait pas été la même, je n'oublierais jamais Aziz, Mouhamad, Mirvatte et Nizar.

Une mention particulière va à ma famille, ma mère pour ses prières, mon père, mes frères et soeurs, pour leur soutien et leur patience.

Pour finir, je remercie la région Centre et le CNRS pour l'aide financière qu'ils m'ont attribuée pendant ce travail.

*Mouhamad JRADEH*



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Modélisation cérébrale</b>	<b>5</b>
<b>1 Physiologie du cerveau humain</b>	<b>7</b>
1.1 Les structures de l'encéphale . . . . .	7
1.1.1 Cortex cérébral . . . . .	7
1.2 Les neurones . . . . .	10
1.2.1 Neurone simple : variable microscopique . . . . .	10
1.2.2 Population de neurones : variable macroscopique . . . . .	12
1.3 Méthode d'exploration du cerveau . . . . .	13
1.3.1 Électro-encéphalographie . . . . .	14
1.3.2 Magnéto-encéphalographie . . . . .	14
1.3.3 Autres possibilités et technologies complémentaires . . . . .	16
1.3.4 Vers un modèle théorique de l'activité cérébrale . . . . .	18
<b>2 Modélisation de l'activité cérébrale</b>	<b>19</b>
2.1 Comment constituer un réseau neuronal? . . . . .	19
2.1.1 La fonction « taux de décharge instantané » . . . . .	21
2.1.2 Simplification et modèle de Hopfield . . . . .	22
2.2 Connexion, Géométrie et dynamique cérébrale . . . . .	23
2.2.1 Connexion aléatoire . . . . .	23
2.2.2 Synchronisation de la dynamique . . . . .	24
2.2.3 Géométrie et dynamique . . . . .	25
2.3 Modèles spatio-temporels . . . . .	26
2.3.1 Modèle homogène . . . . .	28
2.3.2 Modèle homogène unidimensionnel . . . . .	33
2.3.3 Modèle bidimensionnel . . . . .	34
2.3.4 Inclure l'hétérogénéité de connexion . . . . .	35
<b>II Étude mathématique</b>	<b>41</b>
<b>3 Existence et unicité de la solution d'une équation des ondes amorties</b>	<b>43</b>

<b>4</b>	<b>Approximation numérique</b>	<b>47</b>
4.1	Modèle linéaire . . . . .	47
4.1.1	Solution exacte . . . . .	48
4.1.2	Méthode des différences finies . . . . .	50
4.1.3	Stabilité et analyse de Fourier . . . . .	50
4.2	Modèle non linéaire . . . . .	56
4.2.1	Comportement de la solution . . . . .	57
4.2.2	Schéma numérique . . . . .	59
4.2.3	Traitement du cas d'une EDP raide . . . . .	61
4.2.4	Cas d'une grande coefficient de sensibilité . . . . .	64
4.3	L'influence de l'impulsion thalamique . . . . .	65
4.4	Conditions aux limites de type Neumann . . . . .	72
4.5	Conclusion de l'étude numérique . . . . .	74

### **III Problème inverse** **75**

<b>5</b>	<b>Problème d'identification de l'impulsion thalamique</b>	<b>77</b>
5.1	Introduction . . . . .	77
5.2	Résolution du problème inverse . . . . .	78
5.3	Application . . . . .	79

### **Annexes** **80**

<b>A</b>	<b>On Solutions of a Non linear Wave Equation Derived From Brain Activity Modeling</b>	<b>81</b>
A.1	Introduction . . . . .	81
A.2	Existence of weak global solutions . . . . .	83
A.3	The 1D-case . . . . .	87
A.4	Application to cerebral activity model . . . . .	88
A.5	Conclusion . . . . .	92

# Introduction

Les avancements des techniques d'observation cérébrale comme l'Imagerie par Résonance Magnétique fonctionnelle (IRMf) ou l'Électroencéphalogramme (EEG), n'ont pas permis aux neuroscientifiques d'obtenir une haute résolution spatiale et temporelle de l'activité électrique des populations de neurones dans le cerveau. Ceci a conduit à un regain d'intérêt de la communauté biologique pour les modèles neuronaux à grande échelle, et a impliqué l'intervention de physiciens et de mathématiciens pour développer et étudier le comportement de ces modèles. Toutefois, l'intérêt de ces modèles ne se limite pas à la gestion de l'imprécision de mesure, il existe bien d'autres motivations comme

- la compréhension de la source de l'activité cérébrale,
- la compréhension de la dynamique de régions cérébrales sans mesurer systématiquement,
- le bruit sur les données mesurées.

Plusieurs modèles ont été proposés dont la plupart est présentée dans la première partie de cette thèse. Pour notre part, on s'est intéressé plus particulièrement à l'équation suivante :

$$u_{tt} + (\omega_0^2 - c^2 \Delta)u + 2\omega_0 u_t = (\omega_0^2 + \omega_0 \frac{\partial}{\partial t})S(u + p) \quad (0.0.1)$$

établie par Jirsa et Haken en 1996, avec  $u(x, t)$  décrit la fonction d'activité cérébrale,  $S$  une fonction sigmoïde ( $S(x) = \frac{1}{1 + \exp(-\alpha x)}$ ),  $\alpha$ ,  $\omega_0$ ,  $c$  des constantes et  $p$  une fonction extérieure régulière.

Le travail proposé initialement pour cette thèse, consistait essentiellement à étudier l'EDP (0.0.1) ; plus précisément

1. Comprendre le modèle de l'équation (0.0.1).
2. Faire une étude théorique complète de (0.0.1) : cadre fonctionnel, existence et unicité des solutions, stabilité et sensibilité aux données, comportement en temps long.
3. Mettre en oeuvre la résolution numérique de (0.0.1).

Toutefois, la compréhension du modèle de cette équation a nécessité une compréhension approfondie de la physiologie du cerveau humain, ce qui nous a permis en plus de



- justifier mathématiquement le modèle de l'équation (0.0.1) et le généralisé au cas d'une connexion hétérogène (c'est à dire le poids de la connexion entre les neurones n'est pas proportionnelle à la distance entre eux).
- développer un autre modèle plus simple à étudier mathématiquement, dans le cas d'une géométrie bidimensionnelle, en considérant une norme équivalente à la norme euclidienne.
- démontrer que pour obtenir le modèle de Hopfield [4], la fonction post-synaptique doit être inversement proportionnelle à une constante membranaire.

La première partie de cette thèse décrit tous ces points et comprend deux chapitres :

- **Chapitre 1** : Dans ce chapitre, on présente les éléments anatomiques pour développer les modèles, ainsi que les techniques d'observation cérébrale les plus utilisées.
- **Chapitre 2** : Dans ce chapitre, on rappelle les techniques de modélisation souvent utilisées, en précisant les principales difficultés comme la géométrie cérébrale ou le poids de connexion entre les neurones. En particulier, on justifie le choix des géométries uni et bi-dimensionnelles et des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann. Ensuite, on présente quelques modèles cérébraux avec les simplifications utilisées. Enfin, en s'inspirant des techniques présentées, on développe quelques modèles dans les cas homogène et hétérogène.

Comme des livres de références on s'est appuyé dans cette partie sur Nunez [40, 41], Freeman[24] et différents articles de Jirsa [29, 33, 36].

La deuxième partie est consacrée à l'étude mathématique de l'équation (0.0.1).

Dans le **Chapitre 3** on considère l'équations des ondes faiblement amorties suivante

$$u_{tt} - \Delta u = a(u, p)u_t + b(u, p, p_t)$$

avec  $a$  et  $b$  des fonctions non-linéaires et  $p$  une fonction extérieure régulière. Cette équation généralise (0.0.1).

Avec un amortissement non-linéaire, cette équation, d'après nos connaissances, n'a pas été étudiée et suivant la valeur de  $b$ , l'existence d'une solution globale n'est pas toujours assurée (voir l'annexe A). En utilisant la méthode de Galerkin, on démontre que cette équation admet une unique solution **globale** en temps sans prendre une condition de positivité sur  $a$ .

Le **Chapitre 4** porte sur l'étude numérique et les comportements asymptotiques de l'équation (0.0.1). On construit pour (0.0.1) un schéma numérique dont on démontre sa stabilité au sens de Von-Neumann et on le valide avec une large nombre de tests numériques. On démontre aussi que pour une valeur de  $\alpha$  suffisamment petite l'énergie de la solution (pas forcément la solution) converge exponentiellement vers zéro, alors que la solution prend une forme oscillatoire si  $\alpha$  est grande.

La troisième partie est formée du **Chapitre 5** qui traite le problème inverse ou le problème d'identification de l'impulsion thalamique qui est une fonction générée par les régions périphériques et transmis via le cerveau moyen vers le néocortex. L'idée dans ce chapitre est de supposer qu'on peut calculer  $u$  en utilisant des techniques d'observations cérébrale et d'essayer de récupérer  $p$  en faisant le problème inverse sur l'équation (2.3.16) qui généralise (0.0.1). Connaissant  $u$ , on calcule la valeur explicite de  $p$  en fonction de  $u$ , en résolvant une équation de type Riccati.

Enfin, l'annexe A contient un article écrit pendant ma thèse.



Première partie  
Modélisation cérébrale



# Chapitre 1

## Physiologie du cerveau humain

Le **système nerveux central humain** est composé de l'**encéphale** dans la boîte crânienne, de la **moelle épinière** dans la colonne vertébrale.

Il est constitué de deux types de cellules, les **neurones** et les **cellules glaciales**.

L'encéphale est formé de substances nerveuses **grise** et **blanche** et protégé par les **méninges**.

### 1.1 Les structures de l'encéphale

L'encéphale est formé de trois structures principales : le **cerveau**, le **cervelet** et le **tronc cérébral**.

- Le cerveau constitue la partie essentielle de l'encéphale. il est formé de deux hémisphères cérébraux séparés par un sillon interhémisphérique.

Au fond de ce sillon, une épaisse lame de substance blanche, le corps calleux unit les deux hémisphères cérébraux.

La surface du cerveau ou **cortex cérébral** n'est pas lisse. De nombreux sillons, parfois très profonds le plissent, délimitant des circonvolutions cérébrales, ce qui augmente considérablement sa surface.

- Le cervelet est formé de deux hémisphères cérébelleux reliés par un vermis médian. Il intervient surtout dans l'équilibration et le réglage des mouvements.
- Le tronc cérébral est constitué de trois étages qui sont de haut en bas, le **mésencéphale**, le **pont de varole** et le **bulbe rachidien**. Son rôle principal concerne le sommeil et les fonctions végétatives (fonctionnement du cœur et de la respiration, régulation de la température du corps...).

#### 1.1.1 Cortex cérébral

Le cortex cérébral est la partie superficielle du cerveau. Elle a une épaisseur de 3 à 4 mm et on la divise en régions **motrices**, **sensitives** et **régions du langage**.

La région motrice de chaque hémisphère(ou **cortex moteur**) commande les mouvements volontaires. Elle est située dans la circonvolution frontale ascendante, en **avant** de la scissure de Rolando (Fig 1.2). Le cortex moteur d'un hémisphère commande la motricité de l'hémicorps opposé Chaque portion du corps humain est représentée sur un cortex moteur. Cette représentation

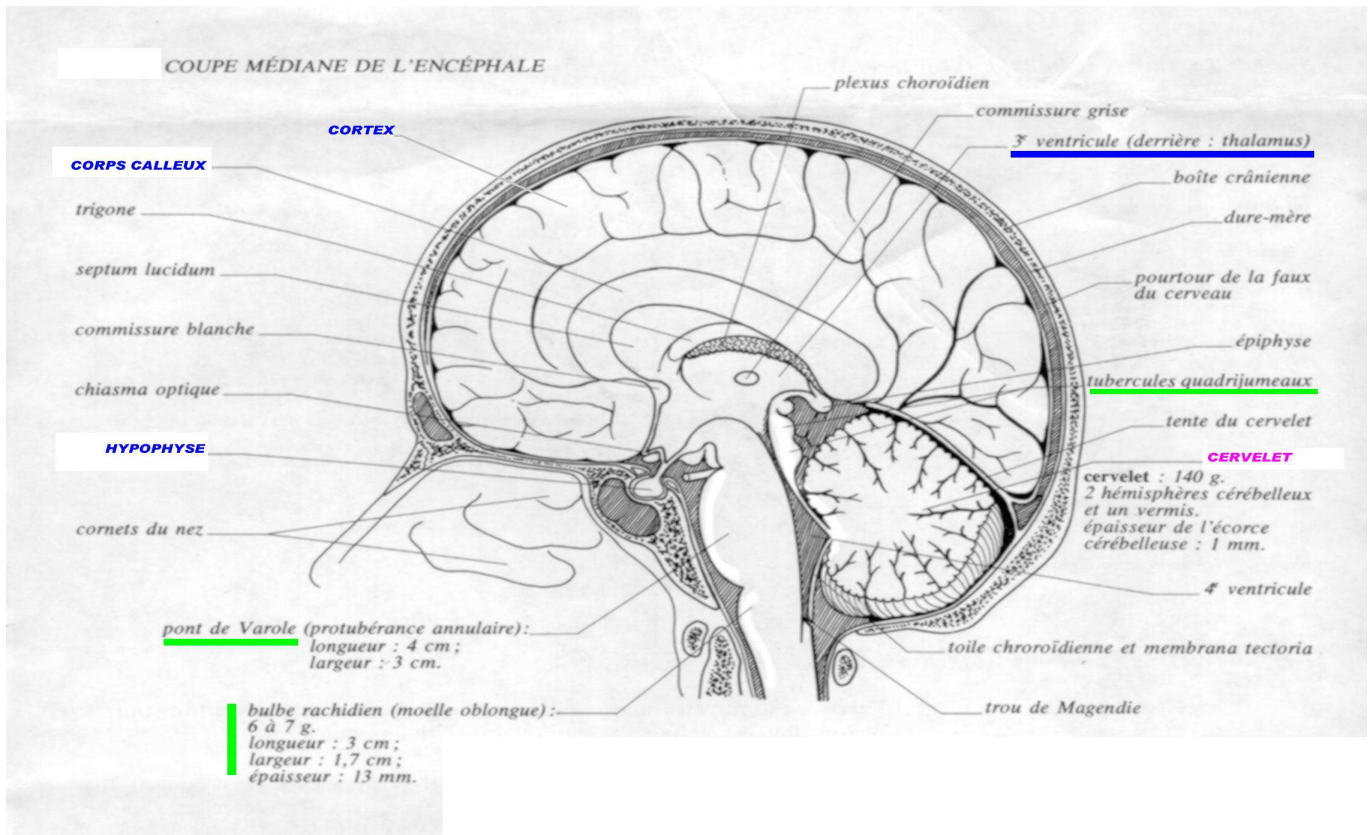


FIGURE 1.1 – Coupe médiane de l'encéphale humain logé dans la boîte crânienne

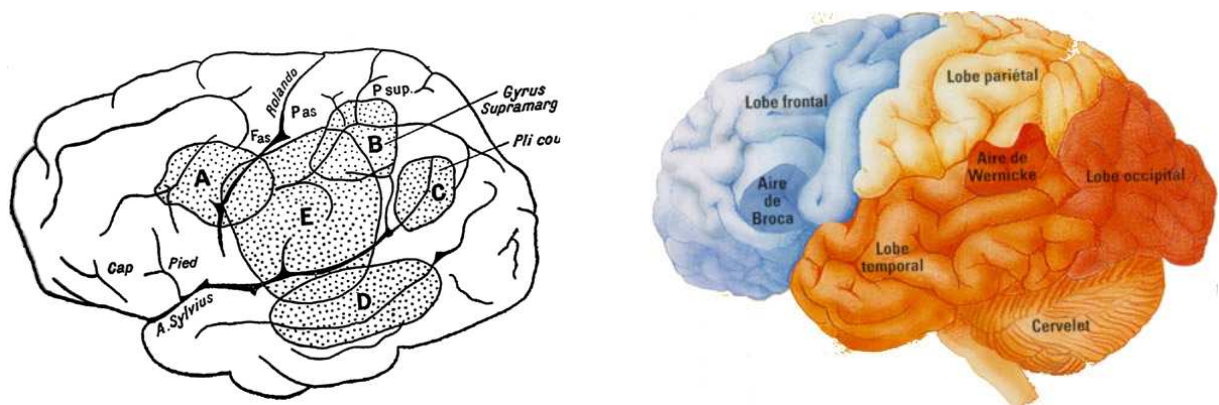


FIGURE 1.2 – Les scissures dans le cerveau(coupe latérale) et les quatre grandes zones du cerveau et l'aire du langage.

tient compte de l'importance de l'activité motrice précise et volontaire de chacune des portions. Le corps humain est inversé sur cette représentation, la tête vers la scissure de Sylvius et les pieds vers la scissure inter-hémisphérique (fig 1.3).

Près de l'aire motrice se trouve l'aire **psychomotrice** qui organise les diverses contractions musculaires issues du cortex moteur en des mouvements adaptés.

Les régions sensibles, reçoivent des messages de sensibilité générale (thermo-algique, tacts fins et grossiers), visuels, auditifs, gustatifs et olfactifs, des différentes parties du corps. La région de sensibilité générale appelée **cortex sensitif** est située dans la circonvolution pariétale ascendante, en **arrière** de la scissure de Rolando. On y retrouve aussi la représentation inversée du corps humain.

Les régions « écriture et parole » sont situées dans l'hémisphère gauche pour les droitiers. On peut identifier des centres de compréhension du langage écrit, du langage parlé, de l'expression écrite et de l'expression parlée.

On individualise, parmi les différents centres l'**aire de Broca** qui contrôle la motricité du langage<sup>1</sup>, et l'**aire de Wernicke** qui contrôle la compréhension du langage.

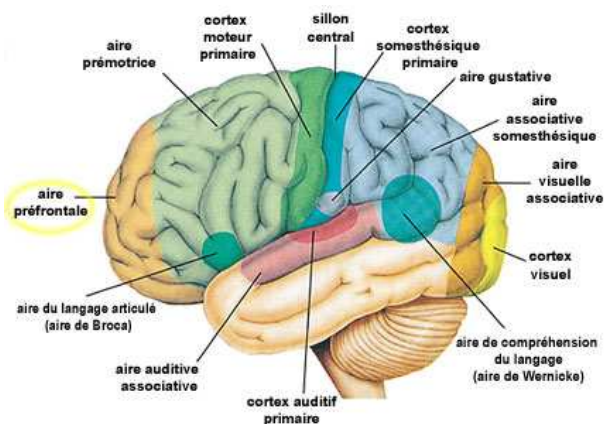


FIGURE 1.3 – Les localisations des aires cérébrales

1. L'aire de Broca fut la première partie identifiée sur la carte du cerveau : Eugène Leborgne, également appelé « monsieur Tan-Tan », comprenait le sens des mots mais était incapable de parler et ne répétait que la syllabe « tan ». À sa mort, en 1861, Broca étudia son cerveau et découvrit qu'une partie située dans le lobe frontal avait été détruite. Il suggéra alors le lien entre cette région et l'articulation de mots.



## 1.2 Les neurones

Notre cerveau comprend un nombre astronomique de cellules nerveuses : il est de l'ordre de cent milliards pour l'ensemble de ce que nous avons dans notre tête, c'est-à-dire notre encéphale. Pour le cortex cérébral, on trouve environ dix à vingt milliards de cellules nerveuses. C'est un chiffre considérable. Le nombre de connexions est encore plus élevé puisque, en moyenne une

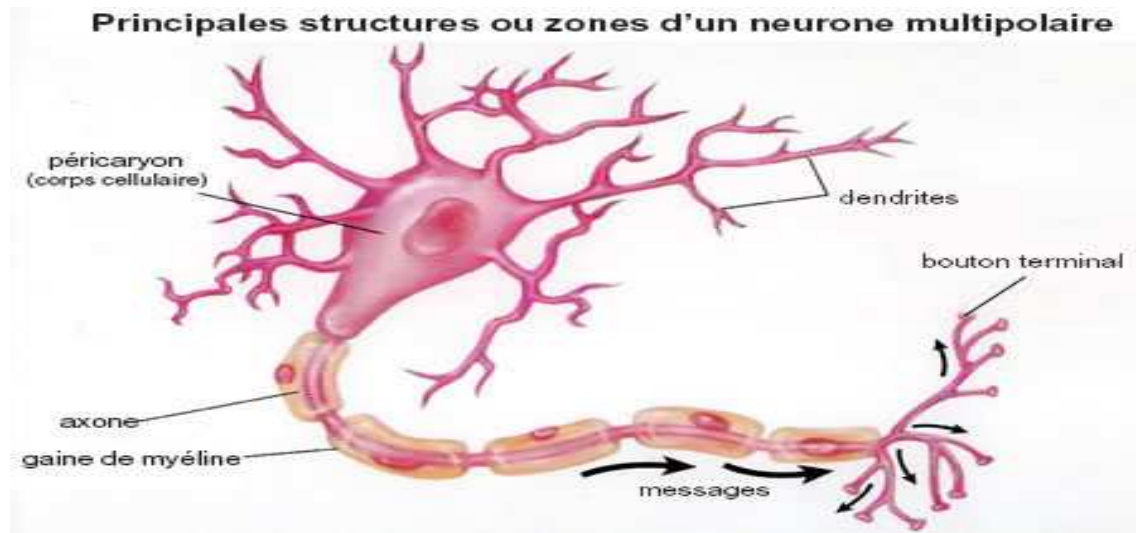


FIGURE 1.4 – Un neurone microscopique.

cellule nerveuse établit dix mille contacts avec d'autres partenaires, ce qui fait, au total, un million de milliard de connexions. Pour donner une idée de la densité des synapses dans le cortex, un millimètre cube de substance grise contient environ cinq cent millions de contacts entre cellules nerveuses ou **synapses**.

### 1.2.1 Neurone simple : variable microscopique

Un neurone typique a trois composants de base : les **dendrites**, le **corps cellulaire**, et l'**axone**. Les **dendrites** servent à recevoir les signaux en provenance des autres neurones, et occupe une grande surface de synapse. En fonction des signaux qui lui parviennent des dendrites, le **corps cellulaire** va déclencher ou non un signal électrique, appelé **potentiel d'action** : c'est un signal binaire qui se déplace le long de l'**axone** jusqu'aux terminaisons axonales, où ce neurone communique avec les suivants à travers des contacts appelés **synapses**.

On distingue habituellement deux types de synapses :

- la synapse chimique, très majoritaire, qui utilise des neurotransmetteurs<sup>2</sup> pour transmettre l'information ;

---

2. L'arrivée du potentiel d'action au niveau de la terminaison nerveuse présynaptique permet l'ouverture de canaux calciques membranaires voltage-dépendants. L'entrée du calcium dans le bouton terminal déclenche la fusion des vésicules qui contiennent un médiateur chimique ou neurotransmetteur. En général un neurone ne libère qu'un seul type de neurotransmetteur

- la synapse électrique où le signal est transmis électriquement par l'intermédiaire d'une jonction communicante (en anglais « gap-junction »).

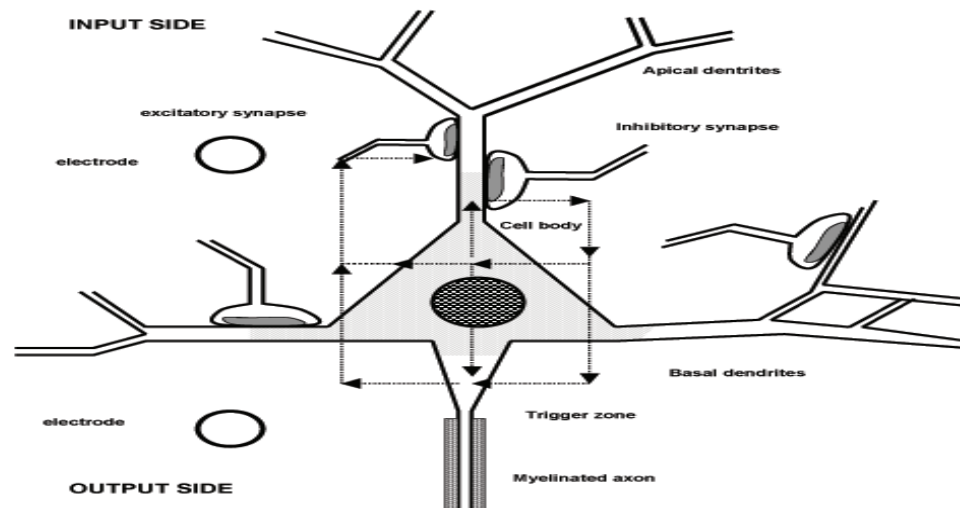


FIGURE 1.5 – Le courant excitateur s'écoule vers l'intérieur dans la dendrite et vers l'extérieur en trigger zone. Le courant inhibiteur s'écoule dans la direction opposée (Freeman 1992a).

Chaque synapse chimique agit comme une batterie : cela veut dire qu'elle implique un courant qui s'écoule dans une boucle fermée. Selon le type de neurotransmetteur, il y a trois genres de synapses chimiques. **Une synapse excitatrice** qui permet au courant de s'écouler tout le long de la dendrite, puis de traverser la membrane avant de revenir (Fig. 1.5). **Une synapse inhibitrice**, qui s'écoulent dans le sens inverse, et une synapse modulante, qui n'induit pas de courant.

Pour une synapse excitatrice le courant augmente dans les dendrites vers un maximum dans une durée qui varie entre 1 et 3 millisecondes, puis décroît exponentiellement dans une période qui varie entre 5 et 10 millisecondes. Ce phénomène est observé comme un **potentiel postsynaptique excitateur**, car il dépolarise la membrane, et **augmente** donc la possibilité de déclencher un potentiel d'action.

Au contraire, le **potentiel postsynaptique inhibiteur** qui est généralement causé par un flux

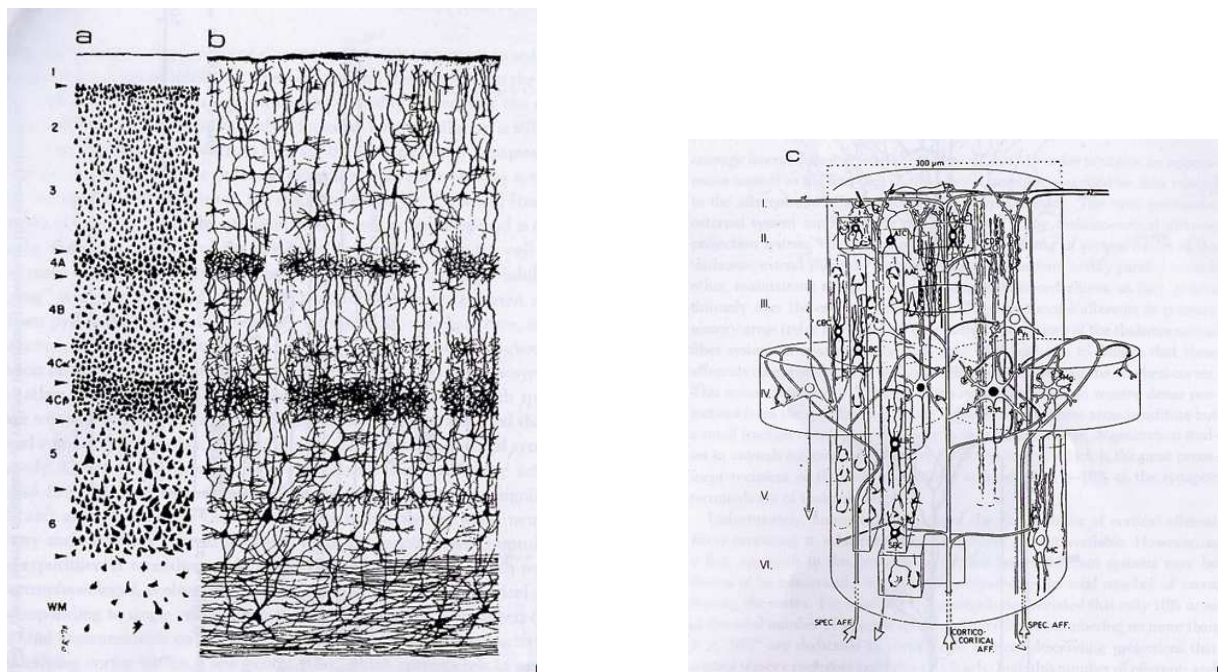


FIGURE 1.6 – L’organisation du cortex en couche et colonne. (a)Méthode de coloration de Nissl. (b) Méthode de coloration de Golgi. (c) L’organisation de colonne en minicolonne(20-50  $\mu m$ , la minicolonne est l’unité de fonctionnement dans la colonne), Nunez, 1995

entrant d’ions négatifs dans la cellule, hyperpolarise la membrane et **diminue** la probabilité de déclencher un potentiel d’action.

### 1.2.2 Population de neurones : variable macroscopique

Le cerveau est formé d’un nombre immense de neurones. Souvent, on regroupe ces neurones dans des populations afin de pouvoir les étudier (voir Haken[25] pour plus de détails). La manière de construire ces populations n’est pas facile, à cause du grand nombre de neurones et de la complexité des connexions. De plus notre connaissance anatomique est encore très limitée (voir [24, 40]). Le nombre de populations neuronales varie suivant les modèles et peut aller de dizaines jusqu’à des milliers voire plus de populations. Dans la Figure 1.6 on montre la méthode de coloration qui consiste à regrouper en population les neurones qui ont la « même couleur ».

#### De Microscopique à Macroscopique : organisation du cortex

Dans ce qui suit on va présenter le cortex, de manière plus approfondie et indiquer une méthodologie pour passer de l’échelle microscopique à l’échelle macroscopique (voir Nunez[40] pour plus de détails) :

1. Le cortex est organisé en unités colonnaires verticalement orientées, de 200 – 300 $\mu m$  de diamètre (Fig 1.6) environ.

2. Le cortex a un aspect stratifié dû à la différence des densités de neurones à différentes profondeurs corticales. Par convention, ces différences sont souvent décrites en termes de six couches corticales [ I jusqu'a VI, (Fig 1.6)].
3. Dans ces six couches, on voit deux grands types de neurones :
  - Les cellules pyramidales : elles occupent un volume cylindrique, avec des axones et dendrites perpendiculaires à la surface du cortex, et dont les axones terminaux sont liés avec une synapse excitatrice. À peu près 70% de neurones corticaux sont de ce type.
  - Les cellules stellaires : elles occupent des volumes plus sphériques, et les axones terminaux sont liés par une synapse inhibitrice.
4. La connexion entre deux neurones corticaux est de deux types :
  - Connexion intracorticale : entre deux neurones voisins (approximativement 0.1 cm) ; cette connexion peut être excitatrice ou inhibitrice.
  - Connexion cortico-corticale : entre deux neurones éloignés (approximativement 10 cm), et à travers la matière blanche du cerveau. Cette connexion est exclusivement excitatrice.
5. Chez l'homme, le nombre de connexions corticocorticales est beaucoup plus grand que le nombre de fibres efférentes (les signaux qui rentrent dans le cortex). D'après Braitenberg [2] le thalamus qui fournit la majorité des signaux du mésencéphale, ne fournit pas plus que 1 % des fibres qui entrent dans une surface corticale.  
Chaque colonne du cortex contient une interaction au niveau des dendrites avec les autres colonnes sur une distance de l'ordre du centimètre. Ceci nous motive pour parler de population de neurones ou **masse neuronale**.
6. la connexion corticocorticale est inhomogène quand on la voit à l'échelle du millimètre. A l'échelle du centimètre la connection peut être en partie homogène dans le sens où le nombre de connexions peut être estimé en fonction de la distance entre deux populations.
7. les signaux d'entrée et de sortie du cortex sont excitatrices.

**Remarque 1.2.1** *Le potentiel synaptique à l'échelle macroscopique peut être le seul élément qui contient l'information sur la dynamique cérébrale. Il est égal à la somme du potentiel de membrane (la différence de potentiel entre les parties extérieure et intérieure de la membrane) de tous les neurones de la population.*

Dans la section suivante nous présentons quelques techniques d'observation cérébrale qui mesurent la valeur de l'activité cérébrale sur une surface de l'ordre du centimètre carré (échelle macroscopique).

### 1.3 Méthode d'exploration du cerveau

Les techniques d'observation cérébrale telles que l'imagerie par résonance magnétique fonctionnelle (IRMf), l'électroencéphalographie (EEG) et la magnétoencéphalographie (MEG) fournissent des support d'étude de la dynamique du cerveau humain dans des buts cliniques, mais aussi pour l'étude du comportement et des mécanismes d'apprentissage.

Les thèmes présentés dans cette section sont loin des mathématiques, mais à cause de sa forte liaison avec notre problématique nous les présentons brièvement.

Dans ce qui suit nous présentons une courte introduction à ces techniques, en nous intéressant principalement à l'EEG et à la MEG puisque l'origine de ces techniques est l'activité neuronale. La première détection est l'électro-encéphalographie (EEG) par Berger en 1929.(voir [40, 41], pour plus de détails).

Les autres méthodes d'imagerie sont beaucoup plus récentes : 1968 pour la magnéto-encéphalographie (MEG), 1975 pour la tomographie par émission de positons (TPE), 1973 pour l'imagerie par résonance magnétique anatomique (IRM), et enfin 1992 pour le premier examen en imagerie par résonance magnétique fonctionnelle (IRMf).

Les méthodes d'imagerie sont de deux types, les méthodes à haute résolution temporelle (EEG,MEG à l'échelle de  $0.001s$  en temps et  $1cm$  d'espace), et les méthodes à haute résolution spatiale (IRMf : échelle de temps  $10s$  et échelle spatiale de  $1mm$ ).

### 1.3.1 Electro-encéphalographie

**Ondes cérébrales :** Le cerveau émet un très faible courant électrique du fait de son activité, même en état de sommeil ou de coma. Pour suivre cette activité, on place des paires d'électrodes à différents endroits du crâne au niveau du scalp. La variation de la différence de potentiel enregistrée entre deux électrodes (exprimée en  $\mu v$  ou millionièmes de volt) est enregistrée et reproduite en courbes EEG. On a ainsi pu dresser différents types de variations correspondant à des oscillations de fréquences et d'états physiologiques particuliers.

**Les ondes alpha :** captées sur la partie postérieure de la tête, correspondent aux courbes EEG d'une personne éveillée mais au repos, les yeux fermés. Le rythme alpha est régulier, ses fréquences sont assez basses (entre 8 à 12 Hz), son amplitude est faible (de 25 à 60  $\mu v$ ).

**Les ondes bêta :** captées sur les aires centrales et frontales du cerveau, correspondent à des oscillations de fréquence plus élevées (de 15 à 40 Hz) mais d'amplitude basse (de 10 à 30  $\mu v$ ). Elles révèlent l'état d'un sujet attentif, yeux ouverts.

**Les ondes delta :** les plus lentes des ondes cérébrales, ont une fréquence faible (2-3 Hz) mais une amplitude forte. Elles sont obtenues chez un sujet en état de sommeil lent.

**Les ondes thêta :** de fréquences assez basses (4-8 Hz), sont produites lors de la première phase du sommeil lent (l'endormissement) ou dans un état de profonde relaxation.

### 1.3.2 Magnéto-encéphalographie

Les systèmes de magnétoencéphalographie (MEG) mesurent les signaux de même source que l'EEG, soit le courant généré dans les neurones. Mais tandis que l'EEG s'intéresse aux champs électriques, la MEG se concentre sur les champs magnétiques accompagnant le courant. L'un des premiers systèmes MEG a été utilisé au MIT pendant plusieurs années, sous la direction de David Cohen, un pionnier dans le domaine de la magnétoencéphalographie. Le Dr Cohen, qui est considéré comme l'inventeur du système MEG, a fait le premier magnétoencéphalogramme en 1968.

Contrairement à l'EEG, la MEG ne nécessite aucun contact direct entre le corps et les électrodes. La MEG utilise plutôt un certain nombre de capteurs placés à proximité de la tête. Ces capteurs sont immergés dans de l'hélium liquide contenu dans une cuvette cryogénique appelée cryostat.

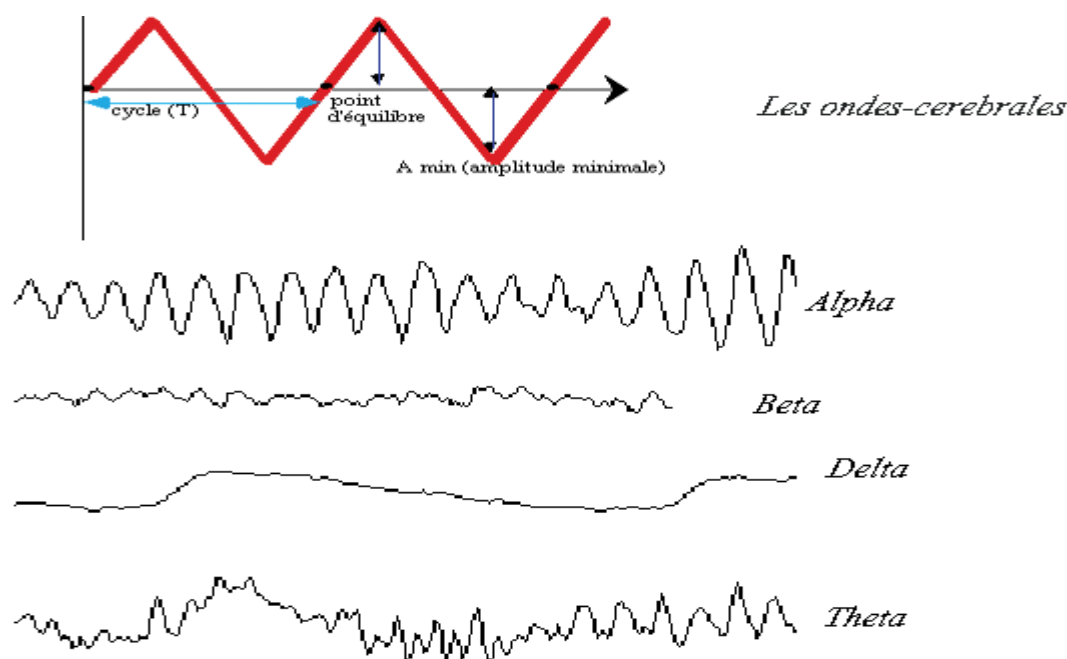


FIGURE 1.7 – les différentes sortes d'ondes cérébrales

La température très froide de l'hélium ( $-273^{\circ}\text{C}$ ) attribue aux capteurs des capacités supraconductrices et, par conséquent, une sensibilité suffisante pour détecter les signaux extrêmement faibles du cerveau.

À l'origine, les systèmes MEG ne se composaient que de quelques capteurs qui, difficilement, devaient être déplacés autour de la surface de la tête pour générer une « carte » de l'activité cérébrale. Avant les années 1990, tous les systèmes offerts possédaient moins de 30 canaux et ne pouvaient couvrir qu'une partie de la tête. Ces systèmes devaient être déplacés en diverses positions, pour ensuite permettre le coenregistrement, assez difficile, afin de créer un montage des positions couvrant l'ensemble du cortex. Bien que la MEG ait alors été jugée puissante en tant qu'outil d'étude du cerveau humain par les chercheurs, elle n'a jamais été considérée comme étant pratique pour le travail de routine en clinique.

Cependant, au cours de la dernière décennie, cette technologie a connu un vif essor. En 1992, deux fabricants de systèmes MEG ont lancé les systèmes **plein cortex**, et un autre a fait de même en 1995. De tels systèmes permettent l'enregistrement simultané de signaux provenant de tout le cerveau, une percée qui a fait chuter le temps d'enregistrement de quelques heures à quelques minutes, tout en augmentant la précision des relevés. Le premier de ces systèmes possédait 64 canaux de détection, mais certains systèmes offerts aujourd'hui en ont plus de 250.

Autre percée importante, le développement des cryostats qui fonctionnent efficacement dans une variété d'angles et permettent ainsi au patient d'être assis ou étendu pour subir l'examen, soit dans la position qui s'avère la plus naturelle pour l'examen en question. Cette nouveauté est particulièrement importante pour les études cliniques où le patient doit demeurer immobile. Les vitesses d'échantillonnage accrues, la détection EEG simultanée et les capacités électroniques

qui permettent un traitement plus rapide sont quelques-unes des autres améliorations de cette technique.

Grâce aux progrès énumérés précédemment, la MEG est maintenant un outil efficace en clinique.

### Différences et similitudes

Les techniques MEG et EEG mesurent toutes deux les signaux provenant des courants du cerveau (le champ magnétique et le champ électrique). Et les deux possèdent une excellente résolution temporelle : ainsi elles peuvent mesurer les changements pendant une milliseconde. Les autres techniques d'imagerie cérébrale, telles que l'IRMf et la TPE, possèdent une résolution temporelle beaucoup moins bonne, puisqu'elles évaluent essentiellement le débit sanguin ou l'oxygénation qui sont des processus beaucoup plus lents que l'activité neuronale.

Actuellement, l'EEG occupe le haut du pavé en clinique, tandis que la MEG est principalement cantonnée dans les activités de recherche, bien que son utilisation clinique connaisse une certaine croissance. La technologie MEG n'est pas perçue comme une solution de remplacement de l'EEG en raison de son coût beaucoup plus élevé et de l'immobilité de la tête requise lors de l'enregistrement ; il s'agit plutôt d'une mesure complémentaire pour les cas complexes et ceux pour lesquels l'EEG s'est révélée insuffisante.

L'efficacité de l'EEG à titre d'outil de recherche est limitée, puisque cette technique n'enregistre qu'une petite portion de l'activité électrique de la surface du cerveau et que les signaux sont déformés par la conductivité de surface du cuir chevelu. L'EEG s'est révélée un outil diagnostique utile en présence de traumatismes crâniens graves, de tumeurs cérébrales, d'infections cérébrales, d'épilepsie et d'autres maladies dégénératives du système nerveux. La MEG, beaucoup plus coûteuse, peut servir à ces mêmes diagnostics ainsi qu'à des mesures cognitives complexes.

Mais en dépit de ces divergences, il existe de nombreuses problématiques communes aux deux techniques.

### 1.3.3 Autres possibilités et technologies complémentaires

Les techniques EEG et MEG sont toutes deux des technologies d'imagerie de la fonction électrophysiologique cérébrale. Elles mesurent l'activité électrique du cerveau sous certaines conditions après un stimulus ou au moment d'un événement pathologique. Certaines autres techniques d'imagerie cérébrale fournissent uniquement des informations structurelles ou anatomiques, et sont complémentaires à l'information fonctionnelle (la MEG et l'EEG ne fournissent aucune information sur la structure du cerveau). D'autres techniques évaluent le débit sanguin ou l'oxygénation (qui sont aussi des mesures de la fonction cérébrale), mais à une résolution temporelle beaucoup plus inférieure. La MEG et l'EEG sont les seules modalités d'imagerie fonctionnelle qui procurent des mesures directes de l'activité neuronale. Puisque les signaux MEG ne sont pas déformés par la conductivité de surface, comme c'est le cas pour l'EEG, ils peuvent être utilisés pour produire des cartes spatiales et de localisation précises de l'activité cérébrale.

La MEG et l'EEG sont des techniques non invasives (sauf lorsque les électrodes d'EEG sont en position sous-durale ou placées profondément dans le cerveau, technique alors très invasive ne convenant qu'à certains cas cliniques) et inoffensives, n'impliquant ni radioactivité ni injection ni champ magnétique.

Le coût d'un électroencéphalogramme est plutôt faible, puisque l'EEG n'utilise que des produits

consommables peu coûteux, comme des radio-isotopes. Le coût d'un examen MEG est comparable, mis à part le coût de l'équipement. En outre, cette dernière technique est dispensée de la longue étape qui consiste à placer et à localiser de nombreuses électrodes.

Voici une liste de quelques techniques d'imagerie du cerveau complémentaires à l'EEG et la MEG :

### **Tomographie par émission de positrons**

- mesure le métabolisme de l'oxygène ou des sucres, plutôt que l'électrophysiologie ;
- possède une résolution temporelle de l'ordre d'une seconde, bien supérieur à celle de la MEG et de l'EEG ; par conséquent, elle ne peut mesurer facilement les phénomènes rapides tels que les rythmes alpha ou les pointes épileptiques ;
- danger possible, notamment pour les enfants et les femmes enceintes, en raison du rayonnement ionisant des radionucléides ingérés ;
- les mesures ne peuvent être répétées une fois que la dose annuelle maximale est atteinte (généralement suite à un seul examen)
- le coût de l'équipement est de beaucoup supérieur à celui de l'EEG ou de la MEG (pour faire un examen de TEP, un cyclotron ou un autre accélérateur est nécessaire) ;
- le coût de l'intervention est de beaucoup supérieur à celui de l'EEG ou de la MEG (personnel nombreux requis pour opérer le cyclotron, s'occuper des produits radiopharmaceutiques et évaluer les patients).

### **Imagerie par résonance magnétique**

- fournit des informations anatomiques et, à ce titre, complète la MEG et l'EEG ;
- aucune information fonctionnelle ;
- danger possible, notamment pour les enfants et les femmes enceintes, en raison de la radiofréquence et des champs magnétiques intenses ;
- le coût de l'équipement est comparable à celui de la MEG, mais supérieur à celui de l'EEG ;
- le coût de l'intervention est comparable à celui de la MEG et de l'EEG.

### **Imagerie par résonance magnétique fonctionnelle**

- évalue le débit sanguin ou le volume sanguin, plutôt que l'électrophysiologie ;
- possède une résolution temporelle de l'ordre d'une seconde, bien supérieure à celle de la MEG et de l'EEG ; par conséquent, elle ne peut mesurer facilement les phénomènes rapides tels que les rythmes alpha ou les pointes épileptiques ;
- danger possible, notamment pour les enfants et les femmes enceintes, en raison de la radiofréquence et des champs magnétiques intenses ;
- le coût de l'équipement est comparable à celui de la MEG, mais supérieur à celui de l'EEG ;
- le coût de l'intervention est comparable à celui de la MEG et de l'EEG.

**Remarque :** certains centres commencent à allier avec succès les informations MEG et EEG à celles de l'IRMf.



### 1.3.4 Vers un modèle théorique de l'activité cérébrale

Les techniques d'analyse des données spatio-temporelles expérimentales présentés dans ce chapitre, comportent typiquement l'identification des centres d'activité. Dans l'état actuel des connaissances neurophysiologiques, la localisation dans le cerveau des fonctions relativement simples est bien connue. Mais malheureusement, pour les fonctions plus complexes (langage, mémoire, attention, ...), la localisation des activités cérébrales correspondantes « reste encore à préciser ». Cela nous a incité à développer des modèles d'activité cérébrale en utilisant l'anatomie du cerveau.

Il y a bien entendu beaucoup d'autres motivations pour une modélisation cérébrale. Par exemple si on comprend bien la dynamique on sera capable de savoir ce qu'un petit changement entraîne sans faire la mesure chaque fois.

Le premier modèle a été présenté par Wilson et Cowan en 1972, 1973[45], Nunez en 1974[42], Freeman[24], 1992, Wright and Liley[46], 1996, Jirsa et Haken [27], 1997, Robinon et al.[43], 1997. Dans le chapitre suivant, nous présenterons ces différents modèles ainsi que celui que nous proposons.

# Chapitre 2

## Modélisation de l'activité cérébrale

Dans le chapitre précédent on a vu un aperçu général des éléments anatomiques du cerveau et les technologies utilisées pour mesurer leur activité. Dans ce chapitre on va utiliser ces éléments afin de développer des modèles physiques dont l'inconnue est la valeur de l'activité cérébrale. Il est important de signaler ici que dans l'état actuel de nos connaissances anatomiques ces modèles ne peuvent en aucun cas remplacer les techniques utilisées dans les hôpitaux. Toutefois ces modèles dont l'étude va se développer dans les années qui viennent visent à entrevoir la dynamique cérébrale.

Tout au long de ce chapitre **un neurone désigne une population neuronale**; la taille de cette population varie suivant le modèle considéré et peut être microscopique, mésoscopique ou macroscopique.

On commence par faire un état de l'art des travaux sur la dynamique cérébrale. En particulier, on va expliquer comment le changement de connexions entre les neurones influence qualitativement la dynamique cérébrale. Les trois critères majeurs qui influencent et caractérisent cette dynamique sont (voir Jirsa [36] pour plus de détails) :

- la dynamique locale du neurone (point fixe, oscillation, chaotique, ...).
- la présence du retard dû à la propagation de l'information dans les axones et principalement dans la matière blanche.
- les propriétés de la matrice de connectivité

Dans un deuxième temps nous dériverons de nouveaux modèles à partir des modèles existants présentés dans la première partie. Enfin nous présenterons une ouverture vers le cas hétérogène.

**Les différents objets manipulés du modèle sont définis là où on les utilise, en outre ils sont regroupés dans le tableau 2.1.**

### 2.1 Comment constituer un réseau neuronal ?

Dans cette partie, on va utiliser des éléments physiologiques pour développer une équation intégro-différentielle. Pour cela, soient  $i$  et  $j$  les indices de deux neurones connectés dans le sens où l'axone du neurone  $j$  se termine dans la dendrite du neurone  $i$  (voir Fig.2.1). Soit  $\psi_j(t)$  le **potentiel** d'un neurone  $j$  au temps  $t$  (le neurone est supposé sans dimension), supposons que ce potentiel converge dans le cône axonique vers un « **taux de décharge instantané** » (« firing

rate » en anglais), cette définition dépend généralement du modèle et qui représente la probabilité du déclenchement d'un flux nerveux ( $u_j = S_j(\psi_j)$ ). Nous précisons la forme de cette fonction dans la section suivante.

Puis, l'information se propage dans l'axone avant de libérer un neurotransmetteur et faire une liaison avec le neurone  $i$  (on utilise le terme « **pike** » pour désigner cela). Cette propagation implique en général un retard qu'on note  $\delta_{ij}$ .

Cette information est vue dans la dendrite du neurone  $i$  comme un **potentiel post-synaptique**  $PSP_{ij}(t - s)$ , où  $s$  est le temps de pike, et  $t$  est le temps qui suit (voir Fig 2.1).

Donc, si on suppose que les pikes se réalisent à l'instant  $t_1, t_2, \dots, t_k$ , on peut voir approxima-

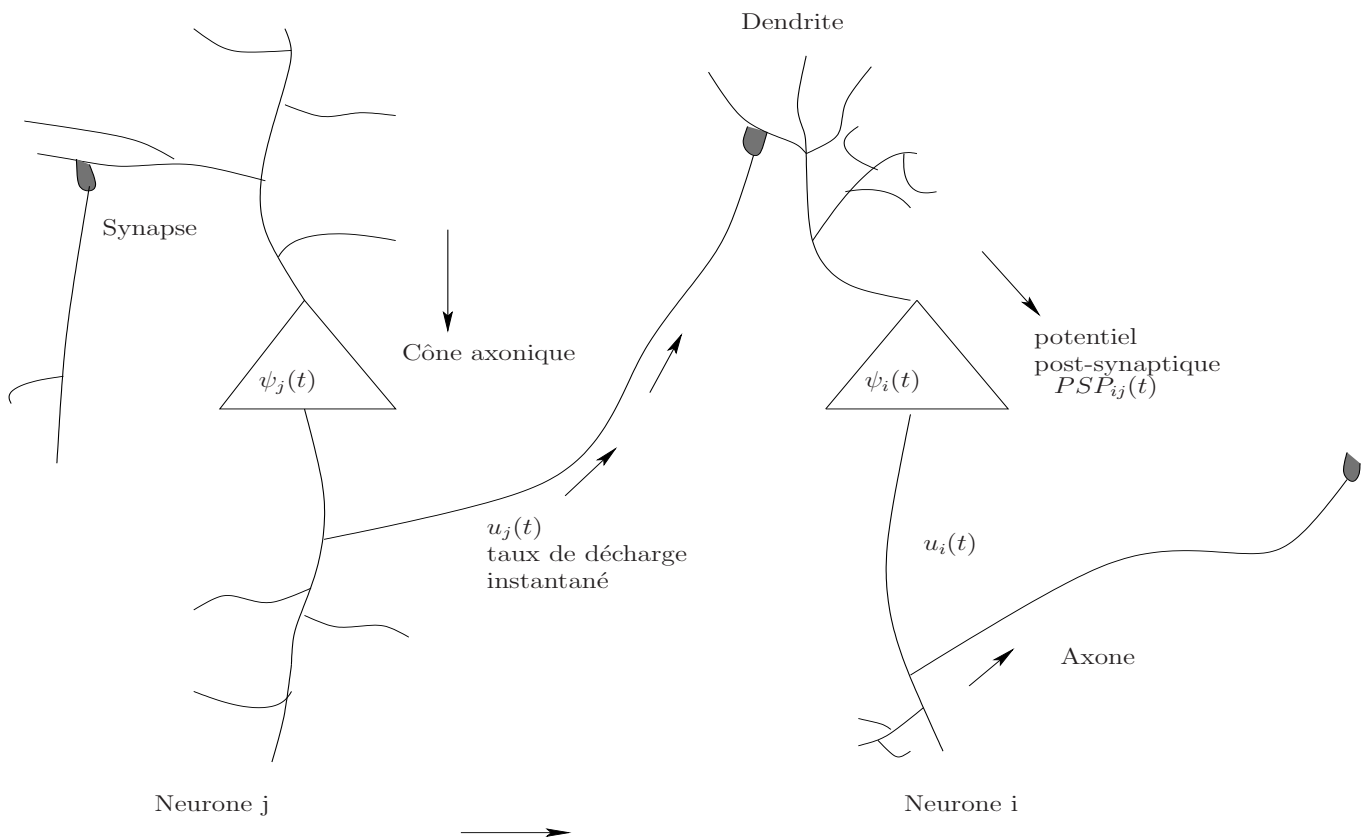


FIGURE 2.1 – Les éléments qui constituent le réseau neural :  $u_i(t)$  est le « taux de décharge instantané » du neurone  $i$ ,  $\psi_i(t)$  est le potentiel de la membrane et  $PSP_{ij}$  le potentiel postsynaptique.

tivement le **potentiel post-synaptique total**  $\phi_{ij}(t)$  comme

$$\phi_{ij}(t) = \sum_k PSP_{ij}(t - t_k)$$

TABLE 2.1 –

Symbole	Signification (page de la première apparition)
$i$ ou $j$	Indice d'un neurone (page 19)
$\psi_i$	potentiel de membrane, c'est l'inconnue principale que l'on cherche (page 19)
$u_i$	taux de décharge instantané (page 19)
$PSP_{ij}$	potentiel post-synaptique dans la dendrite de neurone $i$ (page 20)
$\phi_{ij}$	potentiel post-synaptique total (page 20)
$\delta_{ij}$	temps de propagation de l'information dans l'axone (page 20)
$\alpha_i$ et $\alpha$	paramètre qui représente la sensibilité de la membrane (page 22)
$\omega_{ij}$	pois de connexion entre deux neurones $i$ et $j$ (page 22)
$\omega(x, y)$	la fonction de connectivité (page 27)
$\tau_i$ et $\tau$	constante membranaire (page 22)
$v$	vitesse de propagation de l'information dans l'axone (page 27)
$\sigma$	gamme de connexion locale entre les neurones dans le cortex (page 28)

Or le nombre des pikes qui arrivent entre  $t$  et  $t + dt$  est  $u_j(t)dt$ . Donc

$$\begin{aligned}\phi_{ij}(t) &\approx \sum_k PSP_{ij}(t - t_k) \\ &\rightarrow \int_{t_0}^t PSP_{ij}(t - s)u_j(s - \delta_{ij})ds.\end{aligned}\quad (2.1.1)$$

Si on ignore toutes les structures internes des neurones (comme la forme de la dendrite et le temps de propagation fini dans la dendrite), on peut voir le potentiel de la membrane comme  $\psi_i(t) = \sum_j \phi_{ij}(t)$  et on obtient l'équation intégrale de Volterra suivante :

$$\psi_i(t) = \sum_j \int_{t_0}^t PSP_{ij}(t - s)S_j(\psi_j(s - \delta_{ij}))ds, \quad (2.1.2)$$

Ici le potentiel de la membrane  $\psi_i(t)$  est la variable qui nous intéresse. De façon équivalente, la formulation en taux de décharge instantané de l'équation (2.1.2) peut s'écrire

$$u_i(t) = S_i\left(\sum_j \int_{t_0}^t PSP_{ij}(t - s)u_j((s - \delta_{ij}))ds\right) \quad (2.1.3)$$

Ce changement de variable est appelé «  $S - \sum -$  exchange » par Steven Grossberg(1988). Il consiste à remplacer une somme de signaux non-linéaires par une fonction non linéaire de sommes de signaux.

### 2.1.1 La fonction « taux de décharge instantané »

La première possibilité est de prendre la fonction de Heaviside, cela veut dire que le neurone « fire » au maximum ou non. Tout dépend si le potentiel est au dessus ou au dessous d'un seuil (la

valeur nécessaire pour dépolariser la membrane), Cowand (1968), et Amari (1972), ont optimisé cette relation, pour obtenir la relation suivante (courbe logistique)

$$S_i(\psi_i) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha_i \psi_i}} \quad (2.1.4)$$

qu'on peut voir comme la valeur moyenne de la probabilité qu'un neurone se décharge, et  $\alpha_i$  est une constante de la membrane.

La plupart des modèles de réseaux neuronaux sont composés de l'élément de base qu'on vient de décrire. Dans ce qui suit, on va dériver une équation qui capture la plupart des caractéristiques de la dynamique. Cependant il y a de multiples échelles d'organisation d'un seul neurone vers l'échelle « scalp » (l'échelle de mesure avec EEG et MEG). Comme ces échelles changent le nombre de neurones du modèle change et la connexion change : d'aléatoire elle devient déterministe et hiérarchique, comme l'exprime la **matrice de connectivité**. Cette matrice est **homogène** si la translation est **invariante** dans l'espace physique, sinon elle est dite **hétérogène**.

### 2.1.2 Simplification et modèle de Hopfield

Nous allons maintenant faire la simplification suivante ; le temps de parcours du potentiel post-synaptique  $PSP_{ij} > 0$  dépend seulement du neurone postsynaptique  $i$  que l'on peut capturer par

$$PSP_{ij}(t) = \frac{w_{ij}}{\tau_i} G_i(t) \quad (2.1.5)$$

Ici  $w_{ij}$  un scalaire qui représente la masse synaptique,  $\tau_i$  est une constante positive qui dépend de la propriété de la membrane, et  $G_i(t)$  est identifié au temps de diffusion des neurotransmetteurs dans la fente synaptique. Donc la dynamique de  $\psi_i(t)$  est donnée par

$$\psi_i(t) = \int_{t_0}^t \underbrace{G_i(t-s)}_{\hat{k}} \sum_j \frac{w_{ij}}{\tau_i} S_j(\psi_j(s - \delta_{ij})) ds, \quad (2.1.6)$$

où  $\hat{k}$  est le noyau d'un opérateur intégral.

Un choix courant de  $G_i(t-s)$  (voir [36]) est

$$G_i(t-s) = e^{-\frac{(t-s)}{\tau_i}}$$

Ce qui revient à dire qu'il y'a une forte dissipation en temps. Dérivons (2.1.6), cela nous amène pour des petits temps de retard  $\delta_{ij} \approx 0$  à l'équation différentielle suivante :

$$\tau_i \frac{d}{dt} \psi_i(t) = -\psi_i(t) + \sum_j w_{ij} S_j(\psi_j(t)) \quad (2.1.7)$$

Sans aucune entrée il est évident que la dynamique intrinsèque de l'équation (2.1.7) a un point fixe attracteur,  $\psi_i(t) = 0$ , qui peut ou non être déstabilisé par l'interaction avec les neurones

voisins.

Dans une situation plus générale, si on considère une dynamique intrinsèque active avec une source interne d'énergie (par exemple une personne qui court, un poisson qui nage, ...), la dynamique peut être décrite par l'équation suivante :

$$\tau \frac{d}{dt} \psi_i(t) = f(\psi_i(t)) + \sum_j w_{ij} S_j(\psi_i(t)) \quad (2.1.8)$$

où la fonction  $f(\psi_i(t))$  décrit le « temps de parcours » de  $\psi_i$  si les autres connexions sont coupées.

**Remarque 2.1.1** *La nouveauté dans ce qu'on vient de décrire ici est de démontrer que l'équation (2.1.7) est obtenue en donnant la valeur (2.1.5) au potentiel post-synaptique contrairement aux approches classiques (voir [4] par exemple), qui retrouvent (2.1.7) en supposant que  $PSP_{ij}(t) = w_{ij} G_i(t)$ , ce qui n'est pas a priori vrai.*

*Enfin, quand  $\tau$  tend vers zéro,  $PSP_{ij}(t)$  converge vers la distribution de Dirac et l'équation (2.1.7) devient*

$$\psi_i(t) = \sum_j w_{ij} S_j(\psi_i(t)) \quad (2.1.9)$$

## 2.2 Connexion, Géométrie et dynamique cérébrale

Dans la partie précédente, on a présenté un premier modèle en utilisant les éléments anatomiques sans parler de la connexion entre les neurones représentée dans l'équation (2.1.8) par la matrice de connectivité  $[\omega_{ij}]$ . La valeur de cette matrice dépend du modèle choisi ; parmi ces modèles certains utilisent des connexions aléatoires et d'autres considèrent des contraintes sur la connectivité motivée par les éléments anatomiques récoltés.

### 2.2.1 Connexion aléatoire

Soit  $N$  le nombre de neurones (nœuds) d'un modèle et  $k$  le nombre de connexions d'un neurone avec les autres neurones (arêtes), et soit  $p(k)$  la probabilité qu'un neurone sélectionné aléatoirement ait  $k$  connexions. Deux autres mesures introduites par Watts et Strogatz [44] en 1998, caractérisent le réseau neural, la **longueur caractéristique de chemin** («characteristic path length»), et le **coefficient de regroupement** (« clustering coefficient »).

La longueur caractéristique de chemin  $L$  est définie comme la moyenne des longueurs de tous les chemins les plus courts :

$$L = \frac{\sum_{i,j} L_{ij}}{N(N-1)}$$

avec  $L_{ij}$  le nombre d'arêtes dans le chemin le plus court connectant deux neurones  $i$  et  $j$ . Si  $L_{ij} = 1$  on dit que les deux neurones  $i$  et  $j$  sont voisins.

Définissons le coefficient de regroupement  $C_i$ . Supposons que le neurone  $i$  a  $k_i$  voisins. Le nombre maximal de connexions entre ces voisins est  $\frac{k_i(k_i-1)}{2}$ .  $C_i$  est donnée par la fraction des connexions qui existent réellement, c'est-à-dire :

$$C_i = \frac{2E_i}{k_i(k_i-1)}$$

avec  $E_i$  le nombre de connexions réelles entre les voisins de  $i$ .

Dans ce qui suit on va résumer les propriétés basiques des trois principaux types de connexions :

1. **Réseau aléatoire** : il a été étudié par Erdos et Rényi en utilisant la théorie de graphe aléatoire [5]. Un graphe est une paire d'ensembles  $(P, E)$  avec  $P$  l'ensemble des neurones (nœuds) et  $E$  l'ensemble des arêtes. Chaque paire de nœuds est connectée avec la même probabilité et la majorité des nœuds a approximativement un degré (nombre de voisins) proche du degré moyen. En d'autres termes, le degré suit une loi de poisson  $p(k)$ . La théorie des graphes aléatoires étudie la propriété de probabilité de connexions quand  $N \rightarrow \infty$ .
2. **Réseau « scale-free »** : Dans ce réseau, quelques neurones sont fortement connectés, alors que la majorité des autres est faiblement connectée. Le degré de connexion suit la loi de Yule-Simon ( $P(k) = Ak^{-a}$ ), avec  $a$  une constante qui varie généralement entre 2 et 3.
3. **Réseau « small-world »** : ce réseau est caractérisé par une petite valeur de la longueur caractéristique de chemin et une valeur importante du coefficient de regroupement.

Pour l'instant, il n'y a pas beaucoup de travaux qui visent à relier la connexion statistique avec la dynamique cérébrale, parmi eux on peut citer Sporn[47].

### 2.2.2 Synchronisation de la dynamique

Un cas spécifique de transmission synaptique amène à la synchronisation des neurones, c'est-à-dire toutes les populations de neurones montrent la même dynamique

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) = \dots = \psi_N(t).$$

En effet cette synchronisation a été observée chez plusieurs mammifères (Singer et Gray [6]), les amphibiens (Prechtl [7]), les insectes (Macleod et Laurent [8]). Elle a été mesurée sur une distance de 14 mm dans le cortex moteur d'un singe (Murty et Fetz [9]) et dans différents hémisphères du cortex visuel d'un chat (Engel et al [10]).

Étudier le phénomène de synchronisation revient à étudier les  $N$  équations qui régissent le mouvement de chaque neurone. On étudie en général deux cas :

- **Si, on néglige le retard de transmission** ( $\delta_{ij} = 0$ ), Demonte et al [13] ont proposé une méthode couplant des neurones qui suivent une dynamique non-identique. Leur approche est basée sur la variation d'un paramètre de dispersion, pour obtenir un système avec un faible degré de liberté. Cette approche reste valable si les neurones ne se désynchronisent pas trop. De la même façon Kanelo [11] a étudié le couplage global des multi-attracteurs, Ott et al [12] le couplage global des mouvements chaotiques et des oscillations périodiques. Pecorra et Carroll [14] ont développé une approche pour déterminer la stabilité de l'état de synchronisation pour des oscillateurs comme ceux décrits à l'équation (2.1.8). Ils ont utilisé la matrice de connectivité comme une matrice couplant les  $N$  équations. Les  $N - 1$  contraintes sont

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) = \dots = \psi_N(t).$$

Étudier la stabilité de la synchronisation revient à étudier pour une petite variation  $\xi_k$ , l'équation suivante :

$$\frac{d\xi_k}{dt} = [Df + \gamma_k DS]\xi_k$$

où  $Df$  et  $DS$  représentent respectivement la matrice Jacobienne de  $f$  et de  $S$  et  $\gamma_k$  les valeurs propres de la matrice de connectivité.

- **Si on prend le retard en compte**<sup>1</sup>, une bonne introduction sur la dynamique avec retard a été écrite par MacDonald[16]. Bélair [17, 18], Van den Driessche, Jirsa et Ding [35] et Zou [20] ont étudié la dynamique de synchronisation sous la condition que la dynamique de chaque neurone est un point fixe et ils ont choisi une connexion arbitraire. Ces derniers ont donné un critère général pour la stabilité de l'état d'équilibre. De la même façon Earl et Strogatz [19] ont donné une valeur maximale pour la stabilité de l'état de synchronisation des oscillateurs qui ont la même phase.

### 2.2.3 Géométrie et dynamique

La question de la géométrie du cerveau est une question fondamentale et très délicate à traiter ; le cortex cérébral est bien sûr 3D, mais le cadre 3D et même 2D est difficile à appréhender. Ici, **ce qu'on appelle géométrie du cortex est l'ensemble des neurones du cortex**. Comme ce nombre est fini, on peut ranger les neurones sur une même ligne (Géométrie unidimensionnelle), ou sur une grille plane (Géométrie bidimensionnelle), mais dans ce cas, le poids de connexion entre les neurones change, c'est à dire si on suppose que le poids de connexion  $\omega_{ij}$  entre deux neurones dépend de la distance entre eux, ce poids change quand l'emplacement change.

Pour mieux clarifier ce point, on suppose que la matrice de connectivité peut s'écrire sous la forme suivante

$$[\omega_{ij}] = [\omega_{ij}^{hom}] + [\omega_{ij}^{het}],$$

où  $[\omega_{ij}^{hom}]$  représente la partie homogène de la connexion (la connexion dépend uniquement de la distance entre les neurones),  $[\omega_{ij}^{het}]$  représente la partie hétérogène de la connexion.

Une géométrie unidimensionnelle ou bidimensionnelle est pertinente si le rapport de distance entre les neurones dans la géométrie réelle et la géométrie unidimensionnelle (respectivement bidimensionnelle) est approximativement le même. Dans la suite on va discuter des conditions pour que cette situation se réalise.

**Géométrie 1D :** Une géométrie unidimensionnelle, peut être pertinente si le neurone  $i$  avec activité  $\psi_i(t)$  peut être indexé de telle façon que chaque élément de la matrice de connectivité homogène  $[\omega_{ij}^{hom}]$  puisse être ordonné avec une amplitude qui reste approximativement la même tout au long de la diagonale, sous-diagonale et sur-diagonale. Si les éléments de la matrice de connectivité suivent cette distribution, la géométrie unidimensionnelle est effective (voir aussi la figure 2.4 pour une illustration de la fonction de connectivité).

Les conditions aux limites peuvent déterminer si la géométrie unidimensionnelle est fermée ou ouverte partout. Elle peut être fermée pour des conditions périodiques, ou ouverte avec conditions du type Dirichlet

$$\psi_1(t) = \psi_n(t) = 0,$$

---

1. Le retard de transmission peut être négligeable si on étudie la dynamique locale (connexion sur une petite distance), mais certainement pas sur de longues distances où le retard devient plus grand que l'échelle de temps du modèle.



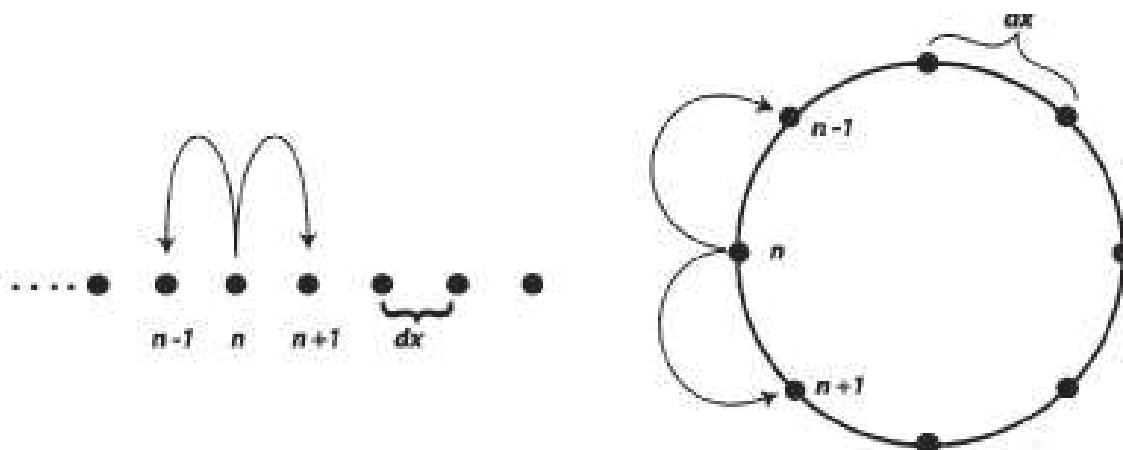


FIGURE 2.2 – Connectivité 1D avec condition ouverte au bord(gauche), et condition périodique (droit), Figure par Jirsa, 2004

ou avec du flux nul aux bords

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) \quad \text{et} \quad \psi_n(t) = \psi_{n-1}(t).$$

Dans l'exemple particulier de la figure 2.2, la connectivité est choisie pour ressembler à un processus de diffusion, les éléments de diagonale sont

$$\omega_{ii} = \frac{-2D}{(dx)^2} \quad \text{et} \quad \omega_{i,i-1} = \omega_{i,i+1} = \frac{-D}{(dx)^2},$$

et tous les autres éléments sont nuls ( $D$  est une constante de diffusion). Ici,  $dx$  désigne la distance uniforme entre les neurones.

D'autre part, si les neurones peuvent être indexés de telle sorte que les valeurs de la matrice de connectivité restent approximativement les mêmes le long des diagonales de la matrice pour chaque dimension de l'espace, c'est à dire que si on suppose que les neurones sont sur une grille de l'espace physique, il faut que ces deux relations soit vérifiées

$$\omega_{(i;y),(j;y)}^{hom} = \omega_{(i+a;y),(j+a;y)}^{hom}$$

$$\omega_{(i;y),(i;z)}^{hom} = \omega_{(i;y+a),(i;z+a)}^{hom}$$

où  $(i, y)$  représente la position d'un neurone en 2D, alors dans ce cas la géométrie bidimensionnelle est pertinente. Si les conditions au bords sont périodiques on obtient une géométrie fermée, par exemple : tore, sphère ou ellipsoïde. En fait il est possible de construire n'importe quelle géométrie fermée mais ces trois là, sont les plus utilisées dans les applications. Avec des conditions nulles ou flux nuls au bord, on obtient une géométrie ouverte (Figure 2.3).

## 2.3 Modèles spatio-temporels

Une géométrie continue, peut être obtenue en faisant tendre la distance  $dx$  entre les neurones vers zéro ( $dx \rightarrow 0$ ), donc  $\psi_i(t) \rightarrow \psi(x, t)$  et la dynamique de l'équation (2.1.7) peut écrire

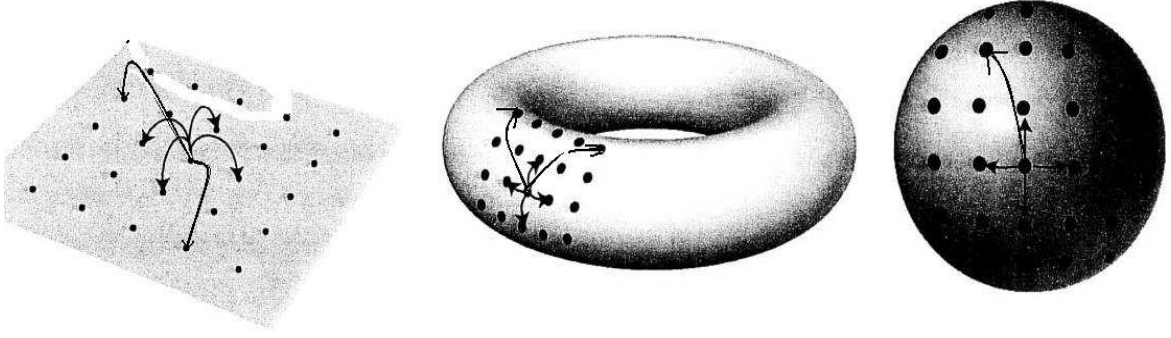


FIGURE 2.3 – connectivité 2D, avec conditions ouvert (gauche), double périodique (tore), et sphérique (droite)

comme<sup>2</sup>

$$\tau \frac{d}{dt} \psi(x, t) + \psi(x, t) = \int_{\Gamma} \omega(x, y) S(\psi(y, t - \frac{|x-y|}{v})) dy \quad (2.3.1)$$

Avec  $\Gamma$  est la géométrie de cortex. Paul Nunez (1974) [40], a été parmi les premiers qui ont dérivé une approche neuronale de la même nature que (2.3.1). Dans ses premiers travaux, il s'est concentré sur le calcul de la relation de dispersion, en linéarisant l'équation (2.3.1), en donnant une distribution spécifique pour les fibres intracorticales et corticocorticales. En même temps, Hugh Wilson and Jack Cowan (1972, 1973) [45] ont donné une description équivalente de l'activité cérébrale, mais en terme de taux de décharge instantané plutôt que potentiel de la membrane. Cette équation peut s'obtenir à partir de l'équation de Nunez par une «  $S - \sum$  » échange. L'équation de la dynamique de taux de décharge instantané pour un neurone est

$$\begin{aligned} \tau u'_e(x, t) = & -u_e(x, t) + S \left[ \int_{\Gamma} \omega_{ee}(x-y) u_e(y, t - \Delta T) \right. \\ & \left. - \omega_{ei}(x-y) u_i(y, t - \Delta T) dy \right] \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

$$\begin{aligned} \tau u'_i(x, t) = & -u_i(x, t) + S \left[ \int_{\Gamma} \omega_{ii}(x-y) u_i(y, t - \Delta T) \right. \\ & \left. - \omega_{ie}(x-y) u_e(y, t - \Delta T) dy \right] \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

avec  $\Delta t = \frac{\|x-y\|}{v}$ . Les indices  $e$  and  $i$  désigne excitateur et inhibiteur respectivement pour l'activité d'un neurone. La matrice de connectivité  $\omega_{ab}$  indique la direction de connectivité entre les deux neurones  $a$  et  $b$ , avec  $a, b = i, e$ . Wilson et Cowan ont discuté la possibilité du phénomène

2. Dans le cas particulier de la figure 2.2, la dynamique peut être décrite par l'équation de réaction-diffusion suivante :  $\tau \frac{d}{dt} \psi(x, t) = -\psi(x, t) + D \Delta S(\psi(x, t))$  avec  $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2}$  est l'opérateur de Laplace unidimensionnel.

d'onde qui peut se produire dans le système (2.3.2) et (2.3.3).

Avec le développement des techniques d'observations depuis les années 90s, comme l'EEG, MEG et IRMf plusieurs auteurs ont utilisé ces modèles spatio-temporels pour confirmer les phénomènes observés pour des dynamiques à grande échelle. Par exemple Jirsa et Haken [27] ont dérivé l'équation des ondes (2.3.12) (qu'on va étudier en détail dans la partie suivante) pour confirmer les phénomènes observés dans la coordination motrice (Fuchs et al., 1992 ; Jirsa et al., 1995, 1998 ; Fuchs et al., 2000). Wright et al [46] ont introduit des détails physiologiques en plus pour aborder le sujet de la génération rythmique, et des aspects cliniques comme les phénomènes d'hystérésis dans l'anesthésie (Steyn-Ross et al., 1999). Frank et al [21, 22] ont approché l'équation (2.3.12) par une équation de Fokker-Planck, qui capture l'évolution temporelle des propriétés stochastiques du modèle neuronal [21, 22].

Dans ce qui suit, on va suivre la démarche de Jirsa [27], pour développer des équations aux dérivées partielles (EDP) dont la variable est la fonction **champs neural**, en utilisant l'équation (2.3.1). Dans un premier temps on suppose qu'on est dans le cas unidimensionnel. On traitera ensuite le cas bidimensionnel, puis on présentera une ouverture vers le cas hétérogène.

### 2.3.1 Modèle homogène

Dans cette partie on prend uniquement la connexion homogène en compte, c'est-à-dire on suppose que la fonction de connectivité  $\omega(x, y)$  (matrice de connectivité dans le cas discret), dépend uniquement de la distance entre les variables d'espace avec une décroissance rapide. Comme une première approximation régulière de  $\omega(x, y)$  on prend

$$\omega(x, y) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{\|x-y\|}{\sigma}}$$

$\sigma$  ici, représente la gamme spatiale (de l'ordre de 1cm pour les fibres intra-corticales, et 10 cm pour les fibres cortico-corticales) et  $\|\cdot\|$  représente la norme dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2$ .

Or,  $x \in \Gamma$ , donc tout  $y \notin \Gamma$  est considéré comme « loin » de  $x$ , on peut donc en première approximation dire que

$$e^{-\frac{\|x-y\|}{\sigma}} \simeq 0, \quad \forall y \notin \Gamma.$$

Eq (2.3.1) devient

$$\psi(x, t) + \tau \psi_t(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|}{\sigma}} . S\left(\psi(y, t - \frac{|x-y|}{v})\right) dy. \quad (2.3.4)$$

Ce qui nous autorise à faire l'analyse de Fourier. Avant de continuer on va rappeler la définition suivante :

**Definition 2.3.1** Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $\mu$  une mesure définie sur  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , on appelle produit de convolution de  $f$  et  $\mu$  et on le note  $\mu * f$ , l'application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$x \longmapsto \mu * f(x) := \langle \mu_{[y]}, f(x-y) \rangle$$

le  $[y]$  en indice signifiant que la mesure  $\mu$  s'applique à la fonction de  $y$ ,  $f(x-y)$ .

Maintenant, on est en mesure d'annoncer et démontrer les deux propositions suivantes :

**Proposition 2.3.1** *Soit  $\rho$  une fonction qui appartient à  $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ ,  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $v$  et  $\sigma$  deux constantes positives, alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $t > 0$  l'égalité suivante est satisfaite*

$$\frac{1}{2\sigma} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|}{\sigma}} \rho\left(y, t - \frac{\|x-y\|}{v}\right) dy = \mu * \rho(x, t)$$

avec  $\mu$  une mesure de Radon définie sur  $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  par

$$\begin{aligned} \mu : L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) &\longmapsto \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \langle \mu, \varphi \rangle = \frac{1}{2\sigma} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x\|}{\sigma}} \varphi\left(x, \frac{\|x\|}{v}\right) dx \end{aligned}$$

*Démonstration* - On a

$$\begin{aligned} \mu * \rho(x, t) &= \langle \mu_{[y, T]}, \rho(x-y, t-T) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|y\|}{\sigma}} \rho\left(x-y, t - \frac{\|y\|}{v}\right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|}{\sigma}} \rho\left(X, t - \frac{\|x-y\|}{v}\right) dy \end{aligned}$$

la dernière égalité est obtenue en faisant le changement de variable

$$y \longmapsto x - y.$$

La proposition 2.3.1 est démontrée.

**Proposition 2.3.2** *La transformée de Fourier de la mesure  $\mu$  ainsi définie est égale à  $T_f$  où*

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{\omega_0^2 + i\omega_0 t}{(\omega_0 + it)^2 + x^2 v^2} \quad \text{si } n = 1 \\ f(x_1, x_2, t) &= \pi\sigma \left[ \frac{it\omega^2 + \omega^3}{i^2 t^2 + \omega^2 + 2it\omega - i^2 v^2 (x_1^2 + x_2^2)} \right]^{\frac{3}{2}} \quad \text{si } n = 2 \quad \text{et } \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ f(x_1, x_2, t) &= \frac{2\sigma\omega^2[\omega^2 + 2i\omega t + i^2 t^2]}{(\omega + it)^4 + v^2(x_1^2 + x_2^2)(\omega + it)^2 + v^4 x_1^2 x_2^2} \quad \text{si } n = 2 \quad \text{et } \|(x, y)\| = |x| + |y| \end{aligned}$$

avec  $\omega_0 = \frac{v}{\sigma}$  ;

*Démonstration* - Soit  $\varphi \in D(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ , alors

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mu}, \varphi \rangle &= \langle \mu, \hat{\varphi} \rangle = \frac{1}{2\sigma} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|X\|}{\sigma}} \hat{\varphi}\left(X, \frac{\|X\|}{v}\right) dX \\ &= \frac{1}{2\sigma} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|X\|}{\sigma}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, t) e^{-i(xX + t\frac{\|X\|}{v})} dx dt \right) dX \\ &= \frac{1}{2\sigma} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|X\|}{\sigma}} e^{-i(xX + t\frac{\|X\|}{v})} dX \right) \varphi(x, t) dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} f(x, t) \varphi(x, t) dx dt \\ &= \langle T_f, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

avec

$$f(x, t) = \frac{1}{2\sigma} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|X\|}{\sigma}} e^{-i(xX + t\frac{\|X\|}{v})} dX.$$

1. Si  $n = 1$ , on a

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{1}{2\sigma} \left[ \int_{-\infty}^0 e^{\frac{x}{\sigma}} e^{-i(xX - t\frac{x}{v})} dX + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\sigma}} e^{-2i\pi(xX + t\frac{x}{v})} dX \right] \\ &= \frac{1}{2\sigma} \left[ \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\sigma}} e^{-i(-xX + t\frac{x}{v})} dX + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\sigma}} e^{-i(xX + t\frac{x}{v})} dX \right] \\ &= \frac{1}{2\sigma} \left[ \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{\sigma} + i\left(\frac{t}{v} - x\right)\right)X} dX + \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{\sigma} + i\left(\frac{t}{v} + x\right)\right)X} dX \right] \end{aligned}$$

Comme :

$$\int_0^{+\infty} e^{-(a+i\alpha)\zeta} d\zeta = \frac{1}{a+i\alpha}, \quad (2.3.5)$$

en supposant  $\omega_0 = \frac{v}{\sigma}$  ; on obtient

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{1}{2\sigma} \left[ \frac{1}{\frac{1}{\sigma} + i\left(\frac{t}{v} - x\right)} + \frac{1}{\frac{1}{\sigma} + i\left(\frac{t}{v} + x\right)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\omega_0}{\omega_0 + i(t - xv)} + \frac{\omega_0}{\omega_0 + i(t + xv)} \right] \\ &= \frac{\omega_0^2 + i\omega_0 t}{(\omega_0 + it)^2 + x^2 v^2} \in L_{loc}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}). \end{aligned}$$

2. Si  $n=2$  et  $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , on a

$$2\sigma f(x_1, x_2, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \frac{t}{v} + k_1 x_1 + k_2 x_2)} e^{-\frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{\sigma}} dk_1 dk_2.$$

Prenons le changement de variable :

$$k_1 = r \cos \theta, \quad k_2 = r \sin \theta,$$

et supposons que

$$x_1 = \rho \cos \phi, \quad x_2 = \rho \sin \phi,$$

on obtient

$$\begin{aligned} 2\sigma f(x_1, x_2, t) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} r e^{-i\left(r\frac{t}{v} + r\rho \cos(\theta - \phi)\right)} e^{-\frac{r}{\sigma}} dr d\theta \\ &= \int_0^{+\infty} r e^{r\left(-i\frac{t}{v} - \frac{1}{\sigma}\right)} \int_0^{2\pi} e^{-ir\rho \cos(\theta - \phi)} dr d\theta. \end{aligned}$$

Soit

$$I = \int_0^{2\pi} e^{-ir\rho \cos(\theta - \phi)} dr, \quad \text{et} \quad \omega = \theta - \phi - \frac{\pi}{2}$$

alors,

$$I = \int_{-\phi - \frac{\pi}{2}}^{-\phi - \frac{3\pi}{2}} e^{i\rho \sin \omega} d\omega = \int_0^{2\pi} e^{i\rho \sin \omega} d\omega$$

I est donc indépendant de  $\phi$ .

Prenons alors  $\phi = 0$ , on obtient

$$2\sigma f(x_1, x_2, t) = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{+\infty} r e^{-r(i\frac{t}{v} + \rho \cos \theta + \frac{1}{\sigma})} dr \right] d\theta.$$

Rappelons que :

$$\int_0^{+\infty} r e^{-ar} dr = \frac{1}{a^2}.$$

On obtient

$$2\sigma f(x_1, x_2, t) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(\frac{it}{v} + \frac{1}{\sigma} + i\rho \cos \theta\right)^2}.$$

Supposons que

$$a = \frac{it}{v} + \frac{1}{\sigma} \quad \text{et} \quad b = i\rho,$$

alors

$$2\sigma f(x_1, x_2, t) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b \cos \theta)^2} = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a + b \cos \theta)^2};$$

soit  $t = \tan \frac{\theta}{2}$ , alors

$$2\sigma f(x_1, x_2, t) = 4 \int_0^{+\infty} \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(a + b \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} = 4 \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{\left(a(1+t^2) + b(1-t^2)\right)^2} dt.$$

Supposons maintenant, que

$$F(a) = \frac{1}{a(1+t^2) + b(1-t^2)}$$

et soit

$$J = \int_0^{+\infty} F(a) dt;$$

un simple calcul nous donne

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{a(1+t^2) + b(1-t^2)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a+b) + (a-b)t^2} \\ &= \frac{1}{a+b} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} t\right)^2} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \end{aligned}$$

Or

$$2\sigma f(x_1, x_2, t) = -4 \int_0^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial a} dt = -4 \frac{\partial J}{\partial a} = \frac{2a\pi}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

On remplace  $a$ , et  $b$ , par ces valeurs et on pose  $\omega = \frac{v}{\sigma}$  pour obtenir

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, t) &= \frac{2\pi\left(\frac{it}{v} + \frac{1}{\sigma}\right)}{2\sigma\left(\frac{i^2t^2}{v^2} + \frac{1}{\sigma^2} + \frac{2it}{v\sigma} + x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \pi\sigma \left[ \frac{it\omega^2 + \omega^3}{i^2t^2 + \omega^2 + 2it\omega - i^2v^2(x_1^2 + x_2^2)} \right]^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

3. Si  $n=2$  et  $\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$ , on a

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, t) &= \frac{1}{2\sigma} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(|k_1|+|k_2|)\frac{t}{v} + k_1x_1 + k_2x_2} e^{-\frac{|k_1|+|k_2|}{\sigma}} dk_1 dk_2 \\ &= \frac{1}{2\sigma} \left[ \int_{\mathbb{R}} e^{-i(|k_1|\frac{t}{v} + k_1x_1)} e^{-\frac{|k_1|}{\sigma}} dk_1 \right] \left[ \int_{\mathbb{R}} e^{-i(|k_2|\frac{t}{v} + k_2x_2)} e^{-\frac{|k_2|}{\sigma}} dk_2 \right] \\ &= 2\sigma \left[ \frac{\omega_0^2 + i\omega_0t}{(\omega_0 + it)^2 + x_1^2v^2} \right] \left[ \frac{\omega_0^2 + i\omega_0t}{(\omega_0 + it)^2 + x_2^2v^2} \right] \\ &= \frac{2\sigma\omega^2[\omega^2 + 2i\omega t + i^2t^2]}{(\omega + it)^4 + v^2(x_1^2 + x_2^2)(\omega + it)^2 + v^4x_1^2x_2^2} \end{aligned}$$

□

Reprenons l'équation (2.3.4) et utilisons la proposition 2.3.1 on obtient

$$\mu * (S \circ \psi)(x, t) = \psi(x, t) + \tau\psi_t(x, t), \quad (2.3.6)$$

### 2.3.2 Modèle homogène unidimensionnel

Pour  $n=1$ , la transformée de Fourier (au sens des distributions) de l'égalité (2.3.6) donne d'après la proposition 2.3.2

$$\widehat{\psi + \tau\psi_t} = \widehat{\mu\hat{\rho}}, \quad (2.3.7)$$

avec

$$\widehat{\mu} = \frac{\omega_0^2 + i\omega_0 t}{(\omega_0 + it)^2 + x^2 v^2} \in L_{loc}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}),$$

ce qui implique

$$\widehat{\psi + \tau\psi_t}(x, t) = \left[ \frac{\omega_0^2 + i\omega_0 t}{(\omega_0 + it)^2 + x^2 v^2} \right] \widehat{\rho}(x, t) \quad (2.3.8)$$

Développons l'équation (2.3.8) et utilisons les propriétés de dérivation de la transformée de Fourier. Puis, appliquant la transformée de Fourier inverse on obtient l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{aligned} \tau\psi_{ttt} + (1 + 2\omega_0\tau)\psi_{tt} + (\tau\omega_0^2 + 2\omega_0)\psi_t - v^2\psi_{xx} + \\ \omega_0^2\psi - c^2\tau\psi_{txx} = (\omega_0^2 + \omega_0\frac{\partial}{\partial t})S(\psi) \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

L'équation (2.3.9), avec les conditions aux limites présentées dans la section précédente gouvernent la dynamique des activités synaptiques si les hypothèses sont réalisées.

Le signal de sortie (efférent)  $s_{sortie}(t)$  ou le signal qui sort de cortex vers les différentes parties de corps humain, est défini par :

$$s_{sortie}(t) = \int_{\Gamma} \beta_{sortie}(x)\psi(x, t)dx \quad (2.3.10)$$

où  $\beta_{sortie}(x)$  est la localisation du cortex moteur, qui est la partie du cerveau qui commande les mouvements. Autrement dit,  $\beta_{sortie} = 1_{\Gamma_m}$ , où  $\Gamma_m \subset \Gamma$  est le cortex moteur.

**Remarque 2.3.1** *En suivant la même procédure, mais en incluant l'impulsion thalamique  $p(x, t)$  (voir la troisième partie), on obtient l'équation suivante :*

$$\tau\psi_{ttt} + (1 + 2\omega_0\tau)\psi_{tt} + (\tau\omega_0^2 + 2\omega_0)\psi_t + \omega_0^2\psi - c^2\psi_{xx} - c^2\tau\psi_{txx} = (\omega_0^2 + \omega_0\frac{\partial}{\partial t})S(\psi + p) \quad (2.3.11)$$

*D'autre part, quand  $\tau$  tend vers zéro la fonction post-synaptique tend vers la distribution de Dirac (voir remarque 2.1.1) et l'équation (2.3.11) tend vers une équation d'onde amortie non linéaire de la forme*

$$\psi_{tt} + (\omega_0^2 - c^2\Delta)\psi + 2\omega_0\psi_t = (\omega_0^2 + \omega_0\frac{\partial}{\partial t})S(\psi + p) \quad (2.3.12)$$

*qui a été proposée par Jirsa [27] en 1996. Une autre façon de modéliser qui amène à cette équation sera présenté dans l'Annexe A.*

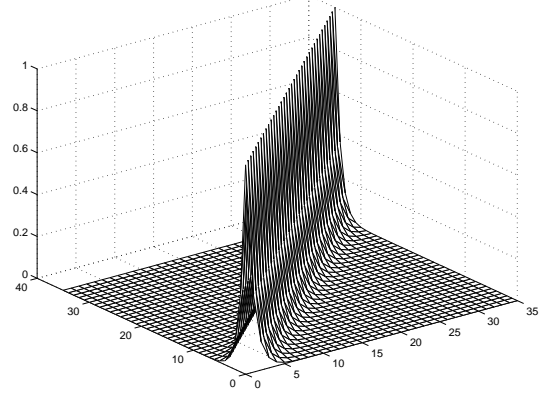


FIGURE 2.4 – la valeur normalisée de la fonction de connectivité dans un modèle unidimensionnel homogène.



### 2.3.3 Modèle bidimensionnel

Dans cette partie on va présenter un modèle de Jirsa [26] dans le cadre d'une géométrie bidimensionnelle, et en développer un autre : le premier en utilisant la norme euclidienne, et la deuxième en utilisant la norme  $l^1$ .

#### Distance euclidienne

L'équation (2.3.7) donne pour  $\tau = 0$

$$\widehat{\psi}(x_1, x_2, t) = \widehat{G}(x_1, x_2, t)\widehat{\rho},$$

avec

$$\widehat{G}(x_1, x_2, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\sqrt{k_1^2+k_2^2}\frac{t}{v}+k_1x_1+k_2x_2)} e^{-\frac{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}{\sigma}} dk_1 dk_2$$

On obtient, d'après 2.3.1

$$\widehat{G}(x_1, x_2, t) = \pi\sigma \left[ \frac{i\omega^2 + \omega^3}{i^2t^2 + \omega^2 + 2it\omega - i^2v^2(x_1^2 + x_2^2)} \right]^{\frac{3}{2}}$$

ce qui nous donne **formellement** :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\omega \frac{\partial}{\partial t} + \omega^2 - v^2\Delta \right)^{\frac{3}{2}} = \pi\sigma(\omega^3 + \omega^2 \frac{\partial}{\partial t})S(\psi + p) \quad (2.3.13)$$

Notre résultat contient des dérivées fractionnaires et nécessite un cadre fonctionnel complexe qui rend la résolution de l'équation très difficile, d'où l'intérêt de chercher un modèle équivalent dans le cas bidimensionnel.

#### Utilisation de la norme $l^1$

Physiquement, on sait qu'une partie de la connexion entre les neurones est homogène, et donc le poids de la connexion entre les neurones diminue si la distance entre les neurones augmente, on modélise ça par

$$\omega(x, y) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{\|x-y\|}{\sigma}},$$

$\|\cdot\|$  peut être la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$  présentée dans le paragraphe précédent, mais on peut aussi prendre la norme  $\|\cdot\|_1$  définie par :

$$\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$$

qui représente la même phénomène physique. Avec cette norme, on a d'après la proposition 2.3.1

$$\widehat{G}(x_1, x_2, t) = \frac{2\sigma\omega^2[\omega^2 + 2i\omega t + i^2t^2]}{(\omega + it)^4 + v^2(x_1^2 + x_2^2)(\omega + it)^2 + v^4x_1^2x_2^2}$$

On obtient donc :

$$\left( \omega + \frac{\partial}{\partial t} \right)^4 \psi + v^2\Delta \left[ \left( \omega + \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi \right] + v^4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = 2\sigma\omega^2 \left[ \omega^2 + 2\omega \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t^2} \right] S[\psi + p], \quad (2.3.14)$$

avec  $\left( \omega + \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 = \omega^2 + 2\omega \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

**Remarque 2.3.2** *Les approches citées plus haut, ne prennent en compte que la connexion homogène, alors qu'il est connu d'après le travail de Braitenberg et Schuz [1], que les fibres cortico-corticales sont exclusivement hétérogènes. C'est pour cela que la majorité des modèles qu'on rencontre sont unidimensionnels (les éléments non-nuls de la matrice de connectivité sont autour de la diagonale, ce qui justifie le choix d'une géométrie 1D).*

*Donc on peut conclure que dans des dynamiques à grande échelle l'hypothèse d'homogénéité n'est pas a priori justifiée. Dans des cas spéciaux la connectivité homogène peut toutefois nous donner une bonne idée de la dynamique, c'est-à-dire quand on cherche les caractéristiques globales de l'activité comme les propriétés dispersives du cortex, où quand on a une matrice de connectivité très symétrique (activations localisées dans une seule région).*

### 2.3.4 Inclure l'hétérogénéité de connexion

Comme on l'a déjà dit la fonction de connectivité n'est pas a priori homogène. Des travaux récents [37] visent à ajouter un terme de connexion à double points hétérogène :

$$\begin{aligned}\omega(x, y) &= \omega_h(x, y) + \omega_{ab}\delta(x - a)\delta(y - b) \\ &+ f_{ab}\delta(x - b)\delta(y - a)\end{aligned}\quad (2.3.15)$$

avec  $\omega_h(x, y)$  est la partie homogène,  $\omega_{ab}$  et  $f_{ab}$  est le poids de la connexion hétérogène. L'équation (2.3.4) devient

$$\begin{aligned}\psi(x, t) + \tau\psi_t(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} \omega_h(x, y) \cdot S\left(\psi(y, t - \frac{|x - y|}{c})\right) dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \left(\omega_{ab}\delta(x - a)\delta(y - b) + f_{ab}\delta(x - b)\delta(y - a)\right) S\left(\psi(y, t - \frac{|x - y|}{c})\right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \omega(x, y) \cdot S\left(\psi(y, t - \frac{|x - y|}{c})\right) dy + het(x, t)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}het(x, t) &= \omega_{ab}\delta(x - a) \int_{\mathbb{R}} \delta(y - b) S\left(\psi(y, t - \frac{|x - y|}{c})\right) dy \\ &+ f_{ab}\delta(x - b) \int_{\mathbb{R}} \delta(y - a) S\left(\psi(y, t - \frac{|x - y|}{c})\right) dy \\ &= \omega_{ab}\delta(x - a) S\left(\psi(b, t - \frac{|x - b|}{c})\right) + f_{ab}\delta(x - b) S\left(\psi(a, t - \frac{|x - a|}{c})\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq a \text{ et } x \neq b \\ \omega_{ab} S\left(\psi(b, t - \frac{|a-b|}{c})\right) & \text{si } x = a \\ f_{ab} S\left(\psi(b, t - \frac{|a-b|}{c})\right) & \text{si } x = b \end{cases}.\end{aligned}$$

On suivant les mêmes procédures que les parties précédentes, on obtient

$$\phi_{tt} + (\omega_0^2 - c^2\Delta)\phi + 2\omega_0\phi_t = (\omega_0^2 + \omega_0\frac{\partial}{\partial t})S(\psi + p) \quad (2.3.16)$$

avec

$$\phi(x, t) = \tau\psi_t(x, t) + \psi(x, t) + het(x, t).$$

Cette dernière équation généralise l'équation (2.3.12) au cas d'une connexion hétérogène à double points, et peut se généralisé facilement au cas d'une connexion à multiple points.

# Bibliographie

- [1] V Braitenberg, A Schuz : Anatomy of the cortex. Springer-Verlag New York-1991.
- [2] V. Braitenberg, Cortical architectonics : general and areal. In Architectonics of the Cerebral Cortex, eds. M. A. B Brazier and H. Petsche, pp. 47-143. Raven Press, New York (1978).
- [3] Hodgkin, A., and Huxley, A. (1952) : A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.* **117**,500-544.
- [4] Hopfield 1984 PNAS USA **81** 3088-92.
- [5] Erdos, P. and Rényi, A. (1959) *Publ. Math. (Debrecen)* **6**, 290.
- [6] Singer, W. and Gray, C. (1995) : Visual feature integration and the temporal correlation hypothesis. *Ann. Rev. Neurosci.* **18**, 555-586.
- [7] Prechtl, H. (1994). The sensory-motor function of the external nucleus of the inferior colliculus in the bat, *Rhinolophus rouxi*. *Neurobiology Conference*. Stuttgart, New York : Georg Thieme Verlag, p. 380.
- [8] Katrina MacLeod and Gilles Laurent, Distinct Mechanisms for Synchronization and Temporal Patterning of Odor-Encoding Neural Assemblies. *Science*, 1996 - [sciencemag.org](http://sciencemag.org)
- [9] Venkatesh N. Murthy, Eberhard E. Fetz, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol. 89, No. 12 (Jun. 15, 1992), pp. 5670-5674.
- [10] AK Engel, P Konig, AK Kreiter, W Singer - *Science*, 1991 - [sciencemag.org](http://sciencemag.org).
- [11] Kaneko, K (1997) Dominance of Milnor Attractors and Noise-Induced Selection in a Multiattractor System. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2736-2739.
- [12] Ott, E., So, P., Barreto, E., and Antonsen, T. (2002) The onset of synchronization in systems of globally coupled chaotic and periodic oscillators. *Physica D* **173**, 29-51.
- [13] De Monte, S., d'Ovidio, F., and Mosekilde, E. (2003) Coherent regimes of globally coupled dynamical systems. *Phys. Rev. Let.* **90**, 054102.
- [14] Pecora, L.M., and Carroll, T.L. (1998) Master stability functions for synchronized coupled systems. *Phys. Rev. Let.* **80**, 2109-2112.
- [15] Chen, Y., Rangarajan, G., and Ding, M. (2003) General stability analysis of synchronized dynamics in coupled systems. *Phys. Rev. E* **67**,026209.
- [16] MacDonald, N. (1989) *Biological delay systems : linear stability theory*. Cambridge University Press.
- [17] Bélair, J. (1992) Stability in delayed networks. In : *Stability in delayed neural networks, Ordinary and delay differential equations*. Hale J., Ver J. and Longnan (eds.), **6**, 1-4.

- 
- [18] Bélair, J. (1993) Stability in a model of a delayed neural network. *J. Dynamics Differential Equations*. 5, 607-623.
- [19] Earl, M.G. and Strogatz, S.H. (2003) Synchronization in oscillator networks with delayed coupling : A stability criterion. *Phys. Rev. E* 67, 036204.k
- [20] Van den Driessche, P. and Zou, X. (1998) Global attractivity in delayed Hopfield neural network models. *SIAM J. Appl. Math.* 58 (6) 1878-1890.
- [21] Frank, T.D., Daffertshofer, A., Beek, P.J., and Haken, H. (1999). Impacts of noise on a field theoretical model of the human brain. *Physica D*, 127, 233-249.
- [22] Frank, T. D., Daffertshofer, A., Peper, C. E., Beek, P. J., and Haken, H. (2000). Towards a comprehensive theory of brain activity : coupled oscillator systems under external forces. *Physica D*, 144, 62-86.
- [23] Dale, A., Fischl, B., Sereno, M.I. : Cortical Surface-Based Analysis I. *Neuroimage* 9 (1999) 179194.
- [24] Freeman, W.J. : Tutorial on neurobiology : From single neurons to brain chaos, *Int. J. Bifurcation and chaos*, vol. 2, pp.451-482, 1992.
- [25] Hermann Haken : *Synergetics-Introduction and Advanced Topics*, Springer, 2004.
- [26] Fuchs, A., Jirsa, V.K., Kelso, J.A.S. : Theory of the relation between human brain activity (MEG) and Hand Movements, *NeuroImage* 11, 359-369, 2000.
- [27] Jirsa, V.K. and Haken, H. : Field theory of electromagnetic brain activity, *Phys. Rev. Let.*, vol. 77, 960-963, 1996.
- [28] Jirsa, V.K. and Haken, H. : Derivation of a Field Equation of Brain Activity, *Journal of Biological physics* 22 : 101-112, 1996.
- [29] Jirsa, V.K. and Haken, H. : A derivation of a macroscopic field theory of the brain from the quasi-microscopic neural dynamics, *Physica D*, vol. 99, 503-526, 1997.
- [30] Jirsa, V.K., Fuchs, A., Kelso, J.A.S. : Connecting cortical and behavioral dynamics : bimanual Coordination. *Neur. Comp.* 10, 2019-2045, 1998.
- [31] V.K. Jirsa, K.J. Jantzen, A. Fuchs, J.A.S. Kelso : Neural field dynamics on the folded three-dimensional cortical sheet and its forward EEG and MEG, *Information Processing in Medical Imaging*, Springer Lecture Notes in Computer Science, 286-299, 2001.
- [32] Armin Fuchs, Viktor K. Jirsa and J. A. Scott Kelso : Theory of the Relation between Human Brain Activity (MEG) and Hand Movements, **NeuroImage** Volume 11, Issue 5, May 2000, Pages 359-369.
- [33] Jirsa, V.K., Jantzen, K.J., Fuchs, A., Kelso, J.A.S. : Spatiotemporal forward solution of the EEG and MEG using network modelling, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 21, 5, 493-504, 2002.
- [34] Jirsa, V.K., Connectivity and Dynamics of Neural Information Processing. *Neuroinformatics* 2, 183-204, 2004.
- [35] Jirsa, V.K. and Ding, M. : Will a large complex system with time delays be stable ? *PRL*93, 070602 ( 2004).
- [36] Jirsa, V.K. :Connectivity and Dynamics of Neural Information Processing. *Neuroinformatics* 2, 183-204 (2004) [large review paper]

- 
- [37] Murad R. Qubbaj and Viktor K. Jirsa. Neural Field Dynamics with Heterogeneous Connection Topology. *Phys. Rev. Lett.* 98, 238102 (2007).
  - [38] Hubel D. H. and Wiesel, T. N. (1962), Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat's visual cortex. *J. Physiol. (Lond.)*, 160 :106-154.
  - [39] Kandel, E. C. and Schwartz, J. H. (1991). *Principles of Neural Science*. Elsevier, New York, 3rd edition.
  - [40] Nunez, P.L. : *Electric Fields of the brain*, Oxford University Press, 1981.
  - [41] Nunez, P.L. : *Neocortical Dynamics and Human EEG Rhythms*, Oxford University Press, 1995.
  - [42] Nunez, P.L. : The brain wave equation(1974) : A model for the EEG. *Mathematical Biosciences* 21, 297-297.
  - [43] Robinson, P.A., Rennie, C.J., and Wright, J.J. (1997) :Propagation and stability of waves of electrical activity in the cerebral cortex. *Phys. Rev. E* 56, 826.
  - [44] Watts, D.J. and Strogatz, S.H. (1998) Collective dynamics of small-world' networks. *Nature* 393, 440-442.
  - [45] Wilson, H.R. and Cowan, J.D. (1972) Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons. *Biophysical Journal* 12, 1-24.
  - [46] Wright, J.J. and Liley, D.T.J. (1996) Dynamics of the brain at global and microscopic scales : Neural networks and the EEG. *Behav. Brain. Sci.* 19, 285.
  - [47] Sporns, O. (2004) Complex Neural Dynamics. In : *Coordination Dynamics : Issues and Trends*. Jirsa V.K., Kelso J.A.S. (eds.) Springer Berlin.



Deuxième partie  
Étude mathématique





# Chapitre 3

## Existence et unicité de la solution d'une équation des ondes amorties

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'équation des ondes amorties suivante :

$$u_{tt} - \alpha \Delta u = a(u, p)u_t + b(u, p, p_t), \quad \text{dans } [0, +\infty) \times \Omega \quad (3.0.1)$$

$$u(0, \cdot) = u_0 \quad u_t(0, \cdot) = u_1. \quad (3.0.2)$$

$$u = 0, \quad \text{sur } [0, +\infty) \times \partial\Omega, \quad (3.0.3)$$

qui généralise l'équation (2.3.12). Il est constitué principalement de deux résultats, l'un porte sur l'existence d'une solution globale en temps et l'autre sur la dépendance continue de la solution par rapport aux données initiales en dimension un. Une des nouveautés de ce travail est que la fonction  $a(u, p)$  est non-linéaire et n'est pas forcément positive (voir Annexe A, pour une comparaison détaillée avec les travaux récents).

Dans ce chapitre on donne uniquement les éléments de la preuve des théorèmes, la démonstration détaillée sera présentée dans l'annexe A.

### Notations

Les notations et terminologies introduites dans l'annexe A seront utilisées ici.

- $\Omega$  est un domaine ouvert dans  $\mathbb{R}^n (n \leq 4)$  avec une frontière régulière  $\partial\Omega$ .
- $u_t$  et  $u_{tt}$  désignent respectivement la première et la deuxième dérivée de  $u$  par rapport au temps  $t$ .
- $\Delta$  est l'opérateur de Laplace et  $p$  est une entrée extérieure.
- $\|\cdot\|$ ,  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_1$  désignent respectivement les normes dans  $L^2(\Omega)$ ,  $L^\infty$  et  $H^1(\Omega)$ .
- $(\cdot, \cdot)$  désigne le produit scalaire dans  $L^2$ .

### Principaux résultats

**Théorème 3.0.1** *soit  $T > 0$ , supposons que*

*(A<sub>1</sub>)  $a \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ,  $b \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  respectivement.  $a$ ,  $\nabla a$  et  $\nabla b$  sont des fonctions uniformément*

bornées.

(A<sub>2</sub>)  $|b(u, p, q)(t, x)| \leq C_1 |u(t, x)| + C_2$  p.p. sur  $[0, T] \times \Omega$  avec  $C_1$  et  $C_2$  des constantes positives.

(A<sub>3</sub>)  $p \in H^2([0, T], L^\infty(\Omega))$ .

(A<sub>4</sub>)  $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ ,

Alors le problème (3.0.1), (3.0.2), (3.0.3) admet (au moins) une solution faible (voir l'Annexe A pour la définition d'une solution faible)  $u$  sur  $[0, T]$  et

$$u \in H^2([0, T], L^2(\Omega)) \cap H^1([0, T], H_0^1(\Omega))$$

*Idée de la démonstration* - En utilisant la méthode de Galerkin, soit  $\{\omega_k\}_k^\infty$  une base orthonormale de  $L^2(\Omega)$ .

- On construit une solution  $u^n$  approchée sous la forme

$$u^n(t) = \sum_{k=1}^n d^{n,k}(t) \omega_k,$$

avec  $d^{n,k}$  vérifiant certaines équations différentielles ordinaires.

- La suite  $u_n$  vérifie

1.  $u^n$  est bornée dans  $L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega)) \cap L^2([0, T], H_0^1(\Omega))$ .

2.  $u_t^n$  est bornée dans  $L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega)) \cap L^2([0, T], H_0^1(\Omega))$ .

3.  $u_{tt}^n$  est bornée dans  $L^\infty([0, T], L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T], L^2(\Omega))$ .

- Ce qui nous permet de démontrer l'existence d'une sous-suite  $u^n$  telle que

$$\begin{aligned} u^n &\longrightarrow u && \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega) \\ u_{tt}^n &\longrightarrow u_{tt} && \text{faiblement dans } L^2(\Omega) \\ a(u^n, p) u_t^n &\longrightarrow a(u) u_t && \text{faiblement dans } L^2(\Omega) \\ b(u^n, p, p_t) &\longrightarrow b(u, p, p_t) && \text{faiblement dans } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

- Faisons tendre  $n$  vers l'infini, on obtient le résultat demandé. □

**Corollaire 3.0.1** *Supposons que les hypothèses du théorème (3.0.1) sont vérifiées, pour toute  $T > 0$ . Alors  $u$  est une solution faible globale du problème (3.0.1), (3.0.2), (3.0.3).*

**Théorème 3.0.2** *Supposons  $n = 1$  et les hypothèses du théorème (3.0.1) vérifiées pour une certaine  $T > 0$ . Soit  $u, v$  deux solutions du problème (3.0.1), (3.0.2), (3.0.3) qui correspondent (respectivement) aux données initiales  $(u_0, u_1)$  et  $(v_0, v_1) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ . Donc pour presque tout  $t \in [0, T]$  on a*

$$\|u_t(t) - v_t(t)\|^2 + \|u(t) - v(t)\|_1^2 \leq M(T)(\|u_1 - v_1\|^2 + \|u_0 - v_0\|_1^2),$$

avec,  $M(T)$  une constante positive qui dépend uniquement de  $T$ .

*Idée de la démonstration* - Soit  $\omega = u - v$ , on démontre que  $\omega$  vérifie

$$\frac{d}{dt}(\|\omega_t(t)\|^2 + \|\omega(t)\|_1^2) \leq M(\|\omega_t(t)\|^2 + \|\omega(t)\|_1^2), \quad \text{p.p. } t \in [0, T]. \quad (3.0.1)$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall on obtient

$$\|\omega_t(t)\|^2 + \|\omega(t)\|_1^2 \leq M(T)(\|\omega_t(0, x)\|^2 + \|\omega(0, x)\|_1^2), \quad \text{p.p. } t \in [0, T] \quad (3.0.2)$$

D'où le résultat. □

**Corollaire 3.0.2** *l'EDP (2.3.12) est un cas particulier de l'EDP (3.0.1) avec*

$$a(u, p) = \omega_0 \dot{S}(u + p) - 2\omega_0,$$

et

$$b(u, p, p_t) = -\omega_0^2 u + \omega_0^2 S(u + p) + \omega_0 \dot{S}(u + p) p_t.$$

*D'où l'existence et l'unicité d'une solution faible globale en temps pour cette équation. Les comportements asymptotiques seront étudiés dans le chapitre suivant.*



# Chapitre 4

## Approximation numérique

Ce chapitre porte sur l'étude numérique et asymptotique de l'équation de Jirsa (2.3.12) qu'on va la développer et rappeler ces conditions initiales présenter dans le chapitre 2 ici (pour simplifier on va supposer que  $\Omega = ]0, 1[$ ) :

$$\begin{aligned} u_{tt} + \omega_0(2 - \dot{S}(u + p))u_t &= c^2 u_{xx} + \omega_0^2(-u + S(u + p)) + \omega_0 p_t \dot{S}(u + p) \\ &\text{dans } [0, +\infty) \times ]0, 1[ \\ u(0, \cdot) &= u_0, \quad u_t(0, \cdot) = u_1 \\ u(1) &= 0, \quad u(1) = 0 \end{aligned} \tag{4.0.1}$$

On va traiter notre problème en plusieurs étape :

Dans un premier temps, on négligera le terme source  $S$ . On obtient alors une équation aux dérivées partielles linéaire dont on calcule la solution exacte. On développe ensuite un schéma explicite dont on démontre la stabilité, et à la fin de cette partie, on compare les deux solutions approchée et exacte.

Dans un deuxième temps, on ajoute la fonction non linéaire  $S$ . On étudie le comportement asymptotique de la solution unique de l'équation trouvée. On discute l'influence de ce terme sur le schéma développer dans la première partie, particulièrement le cas où  $S$  est une source raide, et à la fin de cette partie, on compare les comportements de deux solutions approchée et exacte. Finalement, on ajoute la fonction d'impulsion extérieure  $p$  et on présente quelques résultats d'expériences numériques.

### 4.1 Modèle linéaire

En supposant que la fonction non-linéaire  $S$  est nulle, l'équation (4.0.1) devient un cas particulier de l'EDP suivante

$$u_{tt} + au_t = c^2 u_{xx} - \lambda u \tag{4.1.1}$$

avec  $a$  et  $\lambda$  deux constantes quelconques.

Dans cette partie, on va calculer la solution explicite de (4.1.1), avant de la reconstruire numériquement avec un schéma aux différences finies dont on démontre la stabilité. En s'inspirant de ce schéma, on développera dans la suite un schéma explicite-implicite dans le cas non-linéaire.

### 4.1.1 Solution exacte

L'EDP (4.1.1) est linéaire donc la solution est formée d'une combinaison linéaire de toutes les solutions à variable séparée, c'est à dire

$$u(t, x) = \sum_n a_n u^n(t, x) \quad \text{avec} \quad u^n(t, x) = F_n(x)G_n(t).$$

Pour chercher les solutions à variables séparées, on remplace  $u(t, x)$  par  $F(x)G(t)$  dans (4.1.1). On obtient formellement

$$F(x)G_{tt}(t) + aF(x)G_t(t) = c^2 F_{xx}(x)G(t) - \lambda F(x)G(t),$$

donc

$$\frac{c^2 F_{xx}(x) - \lambda F(x)}{F(x)} = \frac{G_{tt}(t) + aG_t(t)}{G(t)} = k$$

avec  $k$  une constante. On obtient donc deux EDOs distinctes, une pour  $G(t)$  et une autre pour  $F(x)$ . Les deux EDOs sont

$$G_{tt} + aG_t - kG(t) = 0 \quad \text{et} \quad F_{xx}(x) - \frac{\lambda + k}{c^2} F(x) = 0 \quad \text{avec} \quad F(0) = F(1) = 0.$$

L'équation en  $F$  est de type Sturm-Liouville (EDO homogène avec conditions aux bords homogènes). On sait que si on prend  $\lambda + k > 0$  on obtient la solution triviale  $u(t, x) = 0$ . On choisit alors  $k$  tel que  $\lambda + k$  soit négatif, soit  $k = -(c\delta)^2 - \lambda$ , ce qui donne

$$F_{xx}(x) + \delta^2 F(x) = 0 \quad \text{avec solution} \quad F(x) = C_1 \sin(\delta x) + C_2 \cos(\delta x)$$

En appliquant les conditions aux bords, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{en } x = 0, \quad F(0) = 0 &= C_1(0) + C_2(1); \\ \text{en } x = 1, \quad F(1) = 0 &= C_1 \sin(\delta) \end{aligned} \quad \text{donc } \delta = n\pi \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

On obtient donc l'ensemble des solutions suivantes

$$F_n(x) = C \sin(\delta_n x), \quad \text{avec} \quad \delta_n = n\pi.$$

L'équation en  $G$  qui correspond à chaque  $n$  est donc

$$G_{tt} + aG_t + ((cn\pi)^2 + \lambda)G(t) = 0$$

qui a la solution suivante :

$$G_n(t) = \exp\left(\frac{-a}{2}t\right) \left[ C_1^n \exp\left(\frac{\sqrt{-\Delta_n}}{2}t\right) + C_2^n \exp\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{2}t\right) \right]$$

avec  $\Delta_n = a^2 - 4((cn\pi)^2 + \lambda)$ .

La solution générale est alors

$$u(t, x) = \sum_{n \geq 1} \sin(n\pi x) \exp\left(\frac{-a}{2}t\right) \left[ C_1^n \exp\left(\frac{\sqrt{-\Delta_n}}{2}t\right) + C_2^n \exp\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{2}t\right) \right]. \quad (4.1.2)$$

**Cas particulier**

Si on considère les conditions initiales suivantes

$$u(0, x) = \sin(\pi x), \quad u_t(0, x) = 0. \quad (4.1.3)$$

En remplaçant dans (4.1.2), on obtient

$$\begin{aligned} u(0, x) &= \sum_{n \geq 1} \sin(n\pi x) [C_1^n + C_2^n] = \sin(\pi x), \\ u_t(0, x) &= \sum_{n \geq 1} \sin(n\pi x) \left( \frac{-a}{2} [C_1^n + C_2^n] - \sqrt{-\Delta_n} 2 [C_1^n - C_2^n] \right) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{-a}{2} [C_1^n + C_2^n] - \sqrt{-\Delta_n} 2 [C_1^n - C_2^n] = 0 \quad \forall n \geq 1$$

et

$$C_1^n + C_2^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

La solution est alors

$$u(t, x) = \sin(\pi x) \exp\left(\frac{-a}{2}t\right) \begin{cases} \cosh(Wt) + \frac{a}{2W} \sinh(Wt) & \text{si } a^2 > 4((c\pi)^2 + \lambda) \\ 1 + \frac{a}{2}t & \text{si } a^2 = 4((c\pi)^2 + \lambda) \\ \cos(Wt) + \frac{a}{2W} \sin(Wt) & \text{si } a^2 < 4((c\pi)^2 + \lambda) \end{cases}$$

$$\text{avec } W = \frac{\sqrt{|a^2 - 4((c\pi)^2 + \lambda)|}}{2}$$

**Remarque 4.1.1** Si on considère l'équation suivante

$$u_{tt} + au_t = c^2 u_{xx} - \lambda u + \beta, \quad (4.1.4)$$

la solution générale est sous la forme

$$v(t, x) = u(t, x) + \gamma(x),$$

avec  $u$  vérifiant (4.1.1), et  $\gamma$  vérifiant l'équation suivante

$$c^2 \gamma_{xx} - \lambda \gamma = -\beta.$$

La solution est donc donnée par

$$u(t, x) = \sum_{n \geq 1} \sin(n\pi x) \exp\left(\frac{-a}{2}t\right) \left[ C_1^n \exp\left(\frac{\sqrt{-\Delta_n}}{2}t\right) + C_2^n \exp\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{2}t\right) \right] + \gamma(x), \quad (4.1.5)$$

avec

$$\gamma(x) = \frac{-\beta}{\lambda} \left[ \frac{e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x}}{1 + e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x}} + \frac{e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x}}{1 + e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x}} - 1 \right].$$



### 4.1.2 Méthode des différences finies

Pour des conditions initiales quelconques, le calcul de la solution exacte (4.1.2) revient à calculer la somme d'une série numérique en chaque point (voir (4.1.2)), ce qui est pas toujours facile à évaluer.

Dans cette partie, on va développer un schéma numérique qui nous permet de trouver facilement une valeur approchée de la solution de l'équation (4.1.1) pour des conditions initiales quelconques. La valeur approchée sera comparée avec la solution exacte dans le cas particulier des conditions initiales (4.1.3).

L'équation (4.1.1) peut être discrétisée comme suit :

$$\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{(\Delta t)^2} + \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\Delta t} - c^2 \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{(\Delta x)^2} + \lambda u_m^n = 0 \quad (4.1.6)$$

où  $u_m^n$  désigne l'approximation de  $u$  au point  $(x_m, t_n)$ , avec  $(x_m, t_n) = (m\Delta x, (n - \frac{1}{2})\Delta t)$  et  $m = 0, 1 \dots N$ ;  $n = 0, \dots$

$\Delta t$  désigne le pas de discrétisation temporelle uniforme;  $\Delta x$  le pas spatial et  $N$  est un entier donné tel que  $\Delta x = \frac{1}{N}$  (remarquons que  $(x_0, t_0) = (0, 0)$  et  $x_N = 1$ ).

Il est clair que (4.1.6) est un schéma de différences finies consistant (voir[9], pour la définition d'un schéma consistant) et précis à l'ordre 2 en espace et en temps. Dans la suite, on va étudier sa stabilité (on rappelle qu'un schéma est convergent si et seulement si il est consistant et stable (voir[9], par exemple).

### 4.1.3 Stabilité et analyse de Fourier

Numériquement, l'instabilité d'un schéma se manifeste par des oscillations non bornées de la solution approchée. Cette définition n'est pas très précise mathématiquement. Afin de donner une définition plus précise de la stabilité, nous avons besoin de définir une norme pour la solution numérique  $u^n = (u_m^n)_{0 \leq m \leq N}$ .

Nous reprenons les normes classiques sur  $\mathbb{R}^n$  que nous pondérons simplement par le pas d'espace  $\Delta x$  :

$$\|u^n\|_p = \left( \sum_{m=1}^N \Delta x |u_m^n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.1.7)$$

où le cas limite  $p = \infty$  doit être compris dans le sens  $\|\cdot\|_\infty = \max_{1 \leq m \leq N} |u_m^n|$ .

Remarquons que la norme ainsi définie dépend de  $\Delta x$  à travers la pondération mais aussi à travers l'entier naturel  $N$  car  $\Delta x = \frac{1}{N}$ . Grâce à la pondération par  $\Delta x$ , la norme  $\|u^n\|_p$  est identique à la norme  $L^p(0, 1)$  pour les fonctions constantes par morceaux sur les sous-intervalles  $[x_i, x_{i+1}[$  de  $[0, 1]$ . Souvent on l'appellera donc norme «  $L^p$  ».

En pratique, on utilise surtout les normes correspondant aux valeurs  $p = 2, \infty$ .

**Definition 4.1.1** *Un schéma numérique aux différences finies est dit stable pour la norme  $\|\cdot\|$  définie par (4.1.7), s'il existe une constante  $K > 0$  indépendante de  $\Delta t$  et  $\Delta x$  (lorsque ces valeurs tendent vers zéro) telle que*

$$\|u^n\|_p \leq K \|u^0\|_p \quad \text{pour tout } n > 0,$$

quelle que soit la donnée initiale  $u^0$ .

### Stabilité en norme $L^2$

Pour les équations hyperboliques du second ordre, il est courant d'étudier la stabilité au sens  $L^2$  plutôt que de l'étudier au sens  $L^\infty$ . cette stratégie est due au fait qu'en générale ces équations ne vérifient pas le principe de maximum qui est la version continue de la stabilité sous la norme  $L^\infty$ . Par contre on a en général une conservation de l'énergie (équation des ondes classique) ou dissipation de l'énergie (l'équation (4.1.1)). Ce qui motive l'étude de stabilité au sens  $L^2$ . Pour ce faire, on suppose que les conditions aux limites sont **périodiques**, qui s'écrivent ( $u(x, t) = u(x + 1, t)$ ) pour tout  $x \in [0, 1]$  et tout  $t \geq 0$ , ou **Dirichlet homogène** ( $u(0, t) = u(1, t) = 0$ ). A chaque vecteur  $u^n = (u_m^n)_{0 \leq m \leq N}$ , on associe une fonction  $u^n(x)$  constante par morceaux, définie sur  $[0, 1]$  par

$$u^n(x) = u_m^n \quad \text{si} \quad x_m \leq x \leq x_{m+1}$$

Ainsi définie, la fonction  $u^n(x) \in L^2(0, 1)$  peut se décomposer en une somme de Fourier. Plus précisément, on a

$$u^n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}^n(k) \exp(ikx)$$

avec  $\hat{u}^n(k) = \int_0^1 u^n(x) \exp(-ikx) dx$  et la formule de Plancherel

$$\int_0^1 |u^n(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}^n(k)|^2.$$

On note  $v^n(x) = u^n(x + \Delta x)$ , alors  $\hat{v}^n(k) = \hat{u}^n(k) \exp(ik\Delta x)$ .

Expliquons maintenant la méthode sur le schéma (4.1.6). Avec nos notation, on peut réécrire ce schéma, pour  $0 \leq x \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{u^{n+1}(x) - 2u^n(x) + u^{n-1}(x)}{(\Delta t)^2} + a \frac{u^{n+1}(x) - u^{n-1}(x)}{2\Delta t} \\ & - c^2 \frac{u^n(x + \Delta x) - 2u^n(x) + u^n(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} + \lambda u_m^n = 0. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Par application de la transformée de Fourier, il vient

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{u}^{n+1}(k) - 2\hat{u}^n(k) + \hat{u}^{n-1}(k)}{(\Delta t)^2} - c^2 \frac{\hat{u}^n(k)(e^{ik\Delta x} - 2 + e^{-ik\Delta x})}{(\Delta x)^2} + \\ & a \frac{\hat{u}^{n+1}(k) - \hat{u}^{n-1}(k)}{2\Delta t} + \lambda \hat{u}^n(k) = 0 \end{aligned}$$

on multiplie par  $(\Delta t)^2$  et on suppose que  $R = \frac{c(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \hat{u}^{n+1}(k) - 2\hat{u}^n(k) + \hat{u}^{n-1}(k) - R\hat{u}^n(k) \left[ e^{ik\Delta x} - 2 + e^{-ik\Delta x} \right] + \frac{a\Delta t}{2} (\hat{u}^{n+1}(k) - \hat{u}^{n-1}(k)) \\ & + \lambda(\Delta t)^2 \hat{u}^n(k) = 0 \end{aligned}$$

Alors,

$$\hat{u}^{n+1}(k) + \frac{2 \left[ 2R \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) - 1 + (\Delta t)^2 \frac{\lambda}{2} \right]}{1 + \frac{a\Delta t}{2}} \hat{u}^n(k) + \frac{1 - \frac{a\Delta t}{2}}{1 + \frac{a\Delta t}{2}} = 0 \quad (4.1.9)$$

Autrement dit,

$$\hat{U}^{n+1}(k) = \begin{pmatrix} \hat{u}^{n+1}(k) \\ \hat{u}^n(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2 \left[ 2R \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) - 1 + (\Delta t)^2 \frac{\lambda}{2} \right]}{1 + \frac{a\Delta t}{2}} & -\frac{1 - \frac{a\Delta t}{2}}{1 + \frac{a\Delta t}{2}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}^n(k) \\ \hat{u}^{n-1}(k) \end{pmatrix} = A(k) \hat{U}^n(k).$$

et donc

$$\hat{U}^{n+1}(k) = A(k)^n \hat{U}^1(k) \quad (4.1.10)$$

Avant de continuer rappelons la définition suivante

**Definition 4.1.2** Soit  $\|\cdot\|$  une norme vectorielle sur  $\mathbb{R}^N$ . On lui associe une norme matricielle, dite subordonnée à cette norme vectorielle, définie par

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0} \frac{\|AU\|}{\|U\|} \leq M \quad (4.1.11)$$

Soit alors,  $\|A\|_2$  la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^2$ , on en déduit donc de (4.1.10) que le coefficient de Fourier  $\hat{u}^n(k)$  est borné lorsque  $n$  tend vers l'infini si et seulement si

$$\|A(k)^n\|_2 \leq M \quad \forall n \geq 1 \quad (4.1.12)$$

Par conséquence si l'inégalité (4.1.12) est vraie quelque soit le mode de Fourier  $k \in \mathbb{Z}$ , par la formule de Plancherel on en déduit

$$\|u^n\|_2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}^n(k)|^2 \leq K \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\|\hat{u}^0(k)\|^2 + \|\hat{u}^1(k)\|^2) = \|u^0\|_2^2 + \|u^1\|_2^2,$$

c'est à dire la stabilité  $L^2$  du schéma.

### Stabilité au sens de von Neumann

L'inégalité (4.1.12) est vérifiée si et seulement si

$$\|A(k)\|_2 \leq 1. \quad (4.1.13)$$

Avant de continuer on va rappeler les propriétés suivantes (voir [9] pour plus de de détails)

**Proposition 4.1.1** Soit  $\|\cdot\|$  une norme matricielle subordonnée sur  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ .

- si  $\rho(A)$  désigne le rayon spectral de  $A$ , alors  $\rho(A) \leq \|A\|$ , de plus si la matrice  $A$  est normale (réelle, symétrique) on a  $\rho(A) = \|A\|_2$ , où  $\|\cdot\|_2$  est la norme subordonnée à la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^N$ .
- $\rho(A) < 1$  si et seulement si, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que  $\|A\| < 1$ .

- soient  $A$  et  $B$  deux matrices. On a  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ .

On appelle **condition de stabilité de Von Neumann** la condition

$$\rho(A(k)) \leq 1 \quad \text{pour tout mode } k \in \mathbb{Z}, \quad (4.1.14)$$

Il est clair que la condition de stabilité de Von Neumann est une **condition nécessaire** de stabilité  $L^2$  (donc de convergence), mais pas suffisante. Toutefois, vue la proposition (4.1.1), on peut prétendre que la stabilité au sens de von Neumann « n'est pas loin » de la stabilité  $L^2$ , grâce à l'existence d'une norme matricielle subordonnée inférieure à un et parce que  $\rho(A) = \|A\|_2$  si la matrice  $A$  est normale. Ici la matrice  $A(k)$  n'étant pas normale, on se contente d'étudier la stabilité au sens de Von Neumann.

Les valeurs propres de  $A(k)$  sont les racines du polynôme du deuxième degré

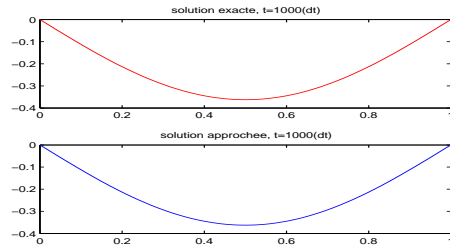
$$r^2 + \frac{2 \left[ 2R \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) - 1 + \frac{\lambda}{2}(\Delta t)^2 \right]}{1 + \frac{a\Delta t}{2}} r + \frac{1 - \frac{a\Delta t}{2}}{1 + \frac{a\Delta t}{2}} = 0.$$

Le produit de deux racines est égal à  $\frac{1 - \frac{a\Delta t}{2}}{1 + \frac{a\Delta t}{2}}$ , donc  $\rho(A(k)) \leq 1$  si la somme de deux racines est inférieure à 1. Autrement dit,

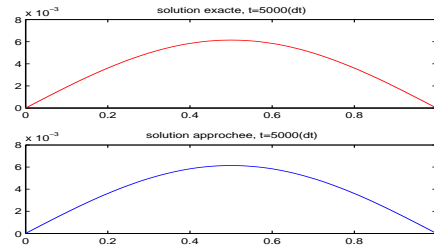
$$2R \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) - 1 + \frac{\lambda}{2}(\Delta t)^2 \leq 1 + \frac{a\Delta t}{2}$$

et donc le schéma est stable au sens de von Neumann sous la condition (C.F.L),  $R \leq 1$  et  $\lambda\Delta t \leq a$ .

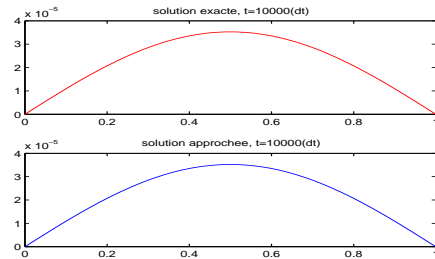
Résultats des tests numériques



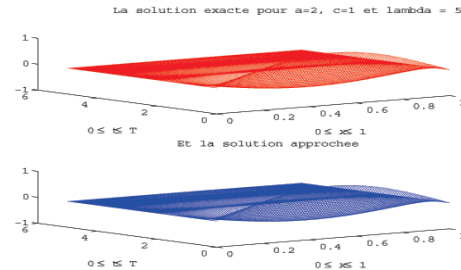
(A)  $T = 1$



(B)  $T = 5$

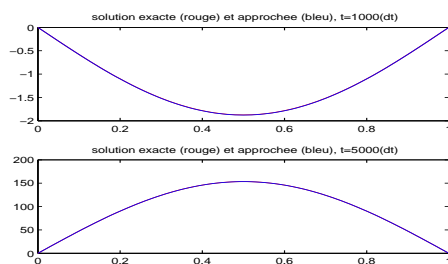


(c)  $T = 10$

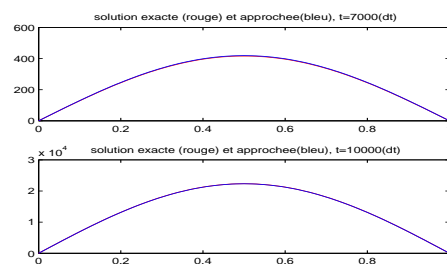


(D) Comparaison entre les deux solutions en 3 dimensions

FIGURE 4.1 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée dans le cas d'un amortissement positif ( $a = 2$ ),  $\lambda = 2$



(A) En haut  $T = 1$ , En bas  $T = 5$



(B) En haut  $T = 7$ , En bas  $T = 10$

FIGURE 4.2 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée dans le cas d'un amortissement négatif ( $a = -2$ ),  $\lambda = 2$

Les Figures (4.1) et (4.2) représentent les résultats obtenus avec le schéma (4.1.6). L'algorithme utilisé est implementé dans le logiciel *Matlab* (Version 7.04), les calculs sont effectués sur un intervalle de longueur 1 avec un pas d'espace  $\Delta x = 0.1$ , un pas de temps  $\Delta t = 0.01$  et un temps final  $T = 10$ . La condition initiale  $u_0$  est un sinus, tandis que  $u_1$  est nulle. Les conditions aux limites sont de type Dirichlet.

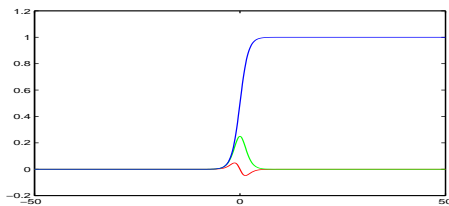
On peut s'apercevoir que si  $a$  est positive la solution tend vers zéro à l'infini, alors qu'elle explose dans le cas contraire ce qui est en accord avec l'instabilité du schéma dans le cas d'un coefficient d'amortissement négatif.

## 4.2 Modèle non linéaire

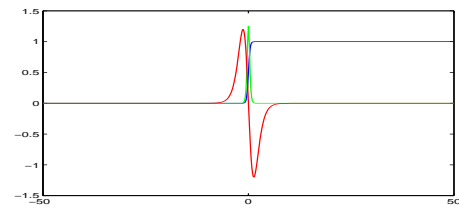
Dans cette partie, on va spécifier la fonction non-linéaire  $S$ ,

$$S(x) = \frac{1}{1 + \exp(-\alpha x)}$$

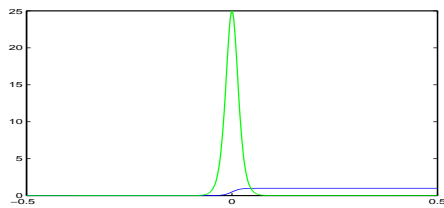
qui représente la probabilité du déclenchement d'un flux nerveux (voir chapitre 2), la valeur de la fonction et de ses dérivées dépend du paramètre  $\alpha$ , qui représente un coefficient qui dépend du neurone. Dans cette partie, On va négliger l'impulsion extérieure  $p$ , l'équation (4.0.1), devient



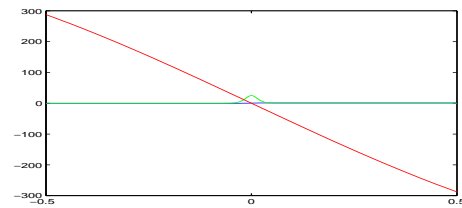
(A)  $\alpha = 1$



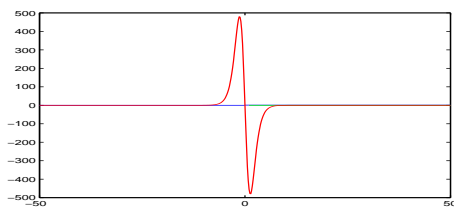
(B)  $\alpha = 5$



(C)  $S$  et  $\dot{S}$ , quand  $\alpha = 50$ .



(D)  $S$ ,  $\dot{S}$  et  $\ddot{S}$ , quand  $\alpha = 50$



(E) Représentation de  $S$ ,  $\dot{S}$  et  $\ddot{S}$ , quand  $\alpha = 50$  sur un grand intervalle.

FIGURE 4.3 – Les fonctions  $S$  [en bleu], sa dérivée  $\dot{S}(x) = \frac{\alpha \exp(-\alpha x)}{(1 + \exp(-\alpha x))^2}$  [en vert] et sa dérivée seconde  $\ddot{S}(x) = \frac{\alpha^2 \exp(-\alpha x)(1 - \exp(-\alpha x))}{(1 + \exp(-\alpha x))^3}$  [en rouge], pour des différentes valeurs de  $\alpha$ .

$$u_{tt} + \omega_0(2 - \dot{\mathbf{S}}(\mathbf{u}))u_t - c^2u_{xx} + \omega_0^2u = \omega_0^2\mathbf{S}(\mathbf{u}). \quad (4.2.1)$$

Les termes en gras désignent les termes non linéaires ajoutés à l'équation (4.1.1).

### 4.2.1 Comportement de la solution

Soit  $E(t)$  l'énergie de la solution définie par

$$E(t) = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 |u_t|^2 + \int_0^1 c^2 |u_x|^2 + \omega_0^2 \int_0^1 |u|^2 \right)$$

alors,

**Proposition 4.2.1** *Sous des conditions initiales de type Dirichlet homogène, et pour une valeur de  $\alpha$  suffisamment petite, l'énergie de la solution de l'équation (4.2.1) converge exponentiellement vers zéro à l'infini.*

*Démonstration* - on multiplie (4.2.1) par  $u_t$  on obtient

$$u_{tt}u_t + \omega_0(2 - \dot{S}(u))u_t^2 - c^2u_tu_{xx} + \omega_0^2uu_t = \omega_0^2S(u)u_t,$$

en intégrant sur  $[0, 1]$ , on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_0^1 (u_t^2 + c^2u_x^2 + \omega_0^2u^2) dx \right) - [u_tu_x]_0^1 \leq -\omega_0 \int_0^1 (2 - \dot{S}(u) - \omega_0)|u_t|^2$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|u_t\|^2 + c^2\|u_x\|^2 + \omega_0^2\|u\|^2 \right) \leq -N\|u_t\|^2$$

pour une valeur de  $\alpha$  suffisamment petite (voir Figure 4.3, prenons  $\alpha = 4$  et  $\omega_0 = 1$  par exemple). Donc  $E(t)$  est une fonction décroissante en temps vérifie

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -N\|u_t\|^2. \quad (4.2.2)$$

Maintenant multiplions (4.2.1) par  $u$ , on obtient

$$u_{tt}u + \omega_0(2 - \dot{S}(u))u_tu - c^2uu_{xx} + \omega_0^2u^2 = \omega_0^2S(u)u,$$

intégrant sur  $[0, 1] \times [S, T]$ , on obtient

$$\int_0^1 \int_S^T u_{tt}u + \omega_0(2 - \dot{S}(u))u_tu + c^2u_x^2 + \omega_0^2u^2 = \omega_0^2 \int_0^1 \int_S^T S(u)u.$$

En intégrant par parties par rapport à  $t$ , on obtient

$$\int_S^T \int_0^1 -u_t^2 + c^2u_x^2 + \omega_0^2u^2 = - \int_0^1 [uu_t]_S^T dx - \int_0^1 \int_S^T \omega_0(2 - \dot{S}(u))u_tu + \omega_0^2 \int_0^1 \int_S^T S(u)u$$



ce qui nous donne

$$2 \int_S^T E(t) dt = 2 \int_0^1 \int_S^T u_t^2 - \int_0^1 [uu_t]_S^T dx - \int_0^1 \int_S^T \omega_0(2 - \dot{S}(u))u_t u + \omega_0^2 \int_0^1 \int_S^T S(u)u. \quad (4.2.3)$$

Le but maintenant est de majorer le terme de droite par  $E(S)$  et  $\epsilon \int_S^T E(t)$ , avec  $\epsilon < 2$  strictement.

En intégrant (4.2.2), on a

$$\int_S^T \frac{d}{dt} E(t) \leq -N \int_S^T \int_0^1 u_t^2$$

et par conséquence,

$$\int_S^T \int_0^1 u_t^2 \leq C(E(S) - E(T)) \leq CE(S),$$

avec  $C$  une constante générique. D'autre part, pour tout  $t \in [S, T]$  on a

$$\left| \int_0^1 uu_t \right| \leq \|u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2 \leq CE(t)$$

par les inégalités de Poincaré et Young. Ceci donne

$$- \int_0^1 [uu_t]_S^T dx \leq CE(S) + CE(T) \leq CE(S)$$

car  $E$  est décroissante.

Utilisant (4.2.3), on obtient

$$2 \int_S^T E(t) dt \leq CE(S) - \omega_0 \int_S^T \int_0^1 u(2 - \dot{S}(u))u_t + \omega_0^2 \int_0^1 \int_S^T S(u)u \quad (4.2.4)$$

or

$$\left| \omega_0 \int_0^1 u(2 - \dot{S}(u))u_t \right| \leq C \|u_x\| \|u_t\|$$

D'après les inégalités de Hölder et Poincaré. En utilisant l'inégalité de Young et (4.2.2) on obtient pour tout  $t \in [S, T]$

$$\left| \omega_0 \int_0^1 u(2 - \dot{S}(u))u_t dx \right| \leq \epsilon (\|u_x\|^2 + \|u_t\|^2) - C(\epsilon) \frac{d}{dt} E(t)$$

donc

$$\left| \omega_0 \int_S^T \int_0^1 u(2 - \dot{S}(u))u_t \right| \leq \epsilon \int_S^T E(t) dt + C(\epsilon)(E(S) - E(T)).$$

En utilisant (4.2.4), on obtient

$$2 \int_S^T E(t) dt \leq C(\epsilon)E(S) + \epsilon \int_S^T E(t) dt + \omega_0^2 \int_0^1 \int_S^T S(u)u \quad (4.2.5)$$

D'autre part, comme  $S(u) \leq 1$ , on a

$$\omega_0^2 \int_0^1 S(u) u dx \leq \omega_0^2 \|u\|^2$$

Or d'après par la définition de l'énergie et l'inégalité de Poincaré on a

$$\omega_0^2 \|u\|^2 \leq (2 - \kappa) E(t)$$

avec  $\kappa$  une constante non nulle.

Prenons  $\epsilon$  suffisamment petit et utilisons (4.2.5), on obtient

$$\int_S^\infty E(t) dt \leq AE(S), \quad \forall S \geq 0. \quad (4.2.6)$$

Maintenant on va utiliser le lemme de Komornik [25] suivant

**Lemme 4.2.1** *Soit  $E : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction décroissante qui vérifie pour une constante  $A$  l'inégalité*

$$\int_S^\infty E(t) dt \leq AE(S), \quad \forall S \geq 0. \quad (4.2.7)$$

Alors on a

$$E(t) \leq \exp\left(1 - \frac{t}{A}\right) E(0), \quad \forall t \geq 0.$$

en appliquant ce lemme sur l'inégalité (4.2.6) on obtient le résultat demandé.

## 4.2.2 Schéma numérique

Le terme source  $S(u)$  est majoré par **un** et par suite il ne va pas poser de problème numériquement, on le discrétise donc explicitement et on se contente d'étudier la stabilité du schéma numérique de l'équation homogène suivante :

$$u_{tt} + \omega_0(2 - \dot{\mathbf{S}}(\mathbf{u}))u_t - c^2 u_{xx} + \omega_0^2 u = 0, \quad (4.2.8)$$

Pour cette équation on propose le schéma suivant :

$$\begin{aligned} \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{(\Delta t)^2} + \frac{\omega_0(2 - \dot{S}(\theta u_m^{n+1} + (1 - \theta)u_m^n))}{2\Delta t} (u_m^{n+1} - u_m^{n-1}) \\ = c^2 \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{(\Delta x)^2} - \omega_0^2 u_m^n \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

avec  $0 \leq \theta \leq 1$  un paramètre d'implicité. Si  $\theta = 0$  le schéma est alors explicite.

Le schéma pour l'équation (4.2.1) est donc

$$\begin{aligned} \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{(\Delta t)^2} + \frac{\omega_0(2 - \dot{S}(\theta u_m^{n+1} + (1 - \theta)u_m^n))}{2\Delta t} (u_m^{n+1} - u_m^{n-1}) \\ = c^2 \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{(\Delta x)^2} - \omega_0^2 (u_m^n - S(u_m^n)) \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

### Consistance du schéma

On définit l'erreur de troncature du schéma (4.2.9) par

$$\begin{aligned} \aleph(\Delta t, \Delta x) &= \frac{u(t + \Delta t, x) - 2u(t, x) + u(t - \Delta t, x)}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{(\Delta x)^2} \left[ u(t, x + \Delta x) - 2u(t, x) \right. \\ &+ \left. u(t, x - \Delta x) \right] + \frac{\omega_0 \left( 2 - \dot{S}(\theta u(t + \Delta t, x) + (1 - \theta)u(t, x)) \right)}{2\Delta t} \left[ u(t + \Delta t, x) \right. \\ &- \left. u(t - \Delta t, x) \right] + \omega_0^2 u(t, x). \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Il est clair que pour une solution  $u$  suffisamment régulière

$$\aleph(\Delta t, \Delta x) \rightarrow 0, \quad \text{quand } (\Delta t, \Delta x) \rightarrow 0,$$

et donc le schéma est consistant.

### Stabilité au sens de Von Neumann

**Lemme 4.2.2** *Si  $\alpha \leq 8$ , alors le schéma (4.2.9) est stable (et donc convergent) pour tout  $\theta$ .*

*Démonstration - Soit*

$$a(u) = 2 - \dot{S}(\theta u_m^{n+1} + (1 - \theta)u_m^n)$$

*D'après la section précédente, le schéma (4.2.9) est stable au sens de von-Neumann si*

$$R \leq 1, \quad \text{et } 0 \leq \Delta t \leq \frac{a}{\omega_0}. \quad (4.2.12)$$

*Si  $\alpha \leq 8$  alors  $a$  est positif et donc (4.2.9) est stable sous la condition (4.2.12).*

### Tests numériques

#### a) Test numérique 1

Quand  $\alpha$  est nul, l'équation (4.0.1) devient

$$u_{tt} + 2\omega_0 u_t = c^2 u_{xx} + \omega_0^2 \left( -u + \frac{1}{2} \right),$$

sous les conditions initiales suivantes

$$u(0, x) = \sin(\pi x) + \gamma(x), \quad u_t(0, x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1]$$

avec

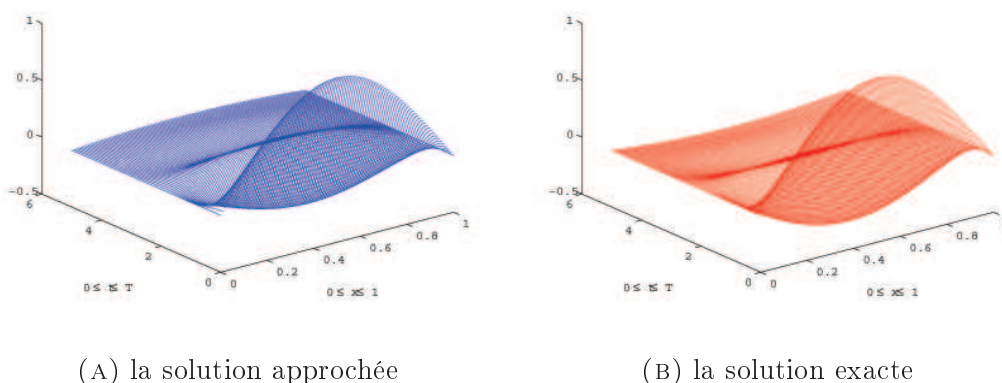
$$\gamma(x) = \frac{-1}{2} \left[ \frac{e^{-\frac{\omega_0 x}{c}}}{1 + e^{-\frac{\omega_0}{c}}} + \frac{e^{-\frac{\omega_0 x}{c}}}{1 + e^{-\frac{\omega_0}{c}}} - 1 \right]$$

la solution est (voir la remarque 4.1.1)

$$u(t, x) = u_1(t, x) + \gamma(x)$$

avec  $u_1$  la solution du problème linéaire (4.1.1) sous les conditions initiales (4.1.3).

La figure 4.2.2, montre la différence entre la solution approchée calculée avec l'algorithme du schéma (4.2.10) et la solution exacte.

FIGURE 4.4 – Comparaison entre la solution exacte et approchée quand  $\alpha$  est nulle

### b) Test numérique 2

La figure 4.5 représente la solution approchée du problème (4.2.1) avec une valeur de  $\alpha = 4$  et les données initiales suivantes :

$$u(0, x) = \cos(\pi x), \quad u_t(0, x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1], \quad (4.2.13)$$

$$u(0, x) = x, \quad u_t(0, x) = 1, \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (4.2.14)$$

On voit bien que la solution oscille de moins en moins quand le temps augmente jusqu'à tendre vers zéro à l'infini, ce qui est en accord avec la proposition 4.2.1.

### 4.2.3 Traitement du cas d'une EDP raide

Si la valeur de  $\alpha$  est proche du seuil (la valeur maximum qui assure la stabilité), dans ce cas l'EDP (4.2.1) peut être raide (changement important de la valeur de  $S$  dans un petit intervalle, voir Figure 4.3). Donc le schéma explicite dans ce cas est **moins précis**. Généralement, les schémas implicites sont plus précis dans ce genre de problème, d'où l'intérêt d'inclure le coefficient implicite  $\theta$ .

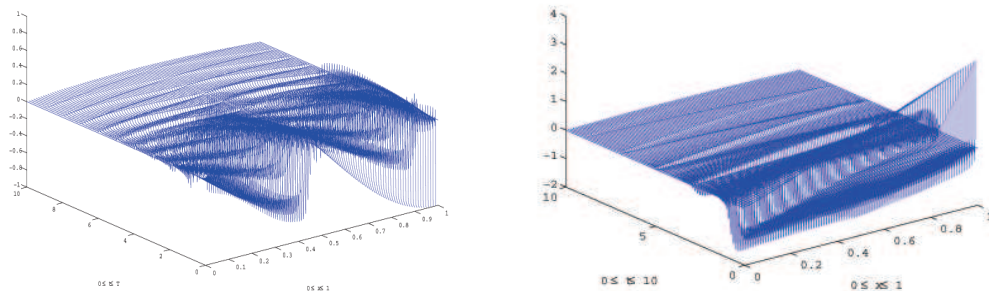
#### Linéarisation

le terme implicite  $\dot{S}(\theta u_m^{n+1} + (1 - \theta)u_m^n)(u_m^{n+1} - u_m^{n-1})$  dans (4.2.10) peut être linéarisé en temps de la manière suivante :

$$\dot{S}(\theta u_m^{n+1} + (1 - \theta)u_m^n)u_m^{n+1} = \dot{S}(u_m^n)u_m^{n+1} + \theta^2 \ddot{S}(u_m^n)u_m^n (u_m^{n+1} - u_m^n) + O((\Delta t)^2)$$

et

$$\dot{S}(\theta u_m^{n+1} + (1 - \theta)u_m^n)u_m^{n-1} = \dot{S}(u_m^n)u_m^{n-1} + \theta^2 \ddot{S}(u_m^n)u_m^{n-1} (u_m^{n+1} - u_m^n) + O((\Delta t)^2)$$



(A) la solution approchée sous (4.2.13)      (B) la solution approchée sous (4.2.14).

FIGURE 4.5 – La solution approchée de l'équation (4.2.1) pour une valeur de  $\alpha = 4$  et sous les conditions initiales (4.2.13) et (4.2.14).

donc

$$\dot{S}(\theta u_m^{n+1} + (1-\theta)u_m^n)(u_m^{n+1} - u_m^{n-1}) = \dot{S}(u_m^n)(u_m^{n+1} - u_m^{n-1}) + \theta^2 \ddot{S}(u_m^n)(u_m^{n+1} - u_m^n)(u_m^n - u_m^{n-1}) + O((\Delta t)^2)$$

et on obtient alors, le schéma suivant

$$\begin{aligned} \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{(\Delta t)^2} + \frac{\omega_0(2 - \dot{S}(u_m^n))}{2\Delta t}(u_m^{n+1} - u_m^{n-1}) - \frac{\omega_0\theta^2 \ddot{S}(u_m^n)}{2\Delta t}(u_m^{n+1} - u_m^n)(u_m^n - u_m^{n-1}) \\ = c \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{(\Delta x)^2} - \omega_0^2(u_m^n - S(u_m^n)) \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Si  $\theta = 0$  on réobtient le schéma (4.2.10) dans le cas explicite.

**Remarque 4.2.1** *Si le terme non-linéaire est traité explicitement sans linéarisation temporelle, on obtient un système d'équations algébriques à chaque instant, qu'on peut résoudre en utilisant la méthode de Newton-Raphson.*

**Remarque 4.2.2** *L'étude de la stabilité du schéma linéarisé (4.2.15) est délicate, on se contente ici de dire que c'est une version linéarisée d'un schéma stable.*

**Remarque 4.2.3** *Le schéma (4.2.15), peut être généralisé sans difficulté à plusieurs autres variétés de fonction  $S$ .*

La figure 4.6 montre que la norme infinie de la différence entre la solution explicite et implicite est négligeable ici. Ce qui montre que le schéma (4.2.10) est très précis pour ce type de nonlinéarité.

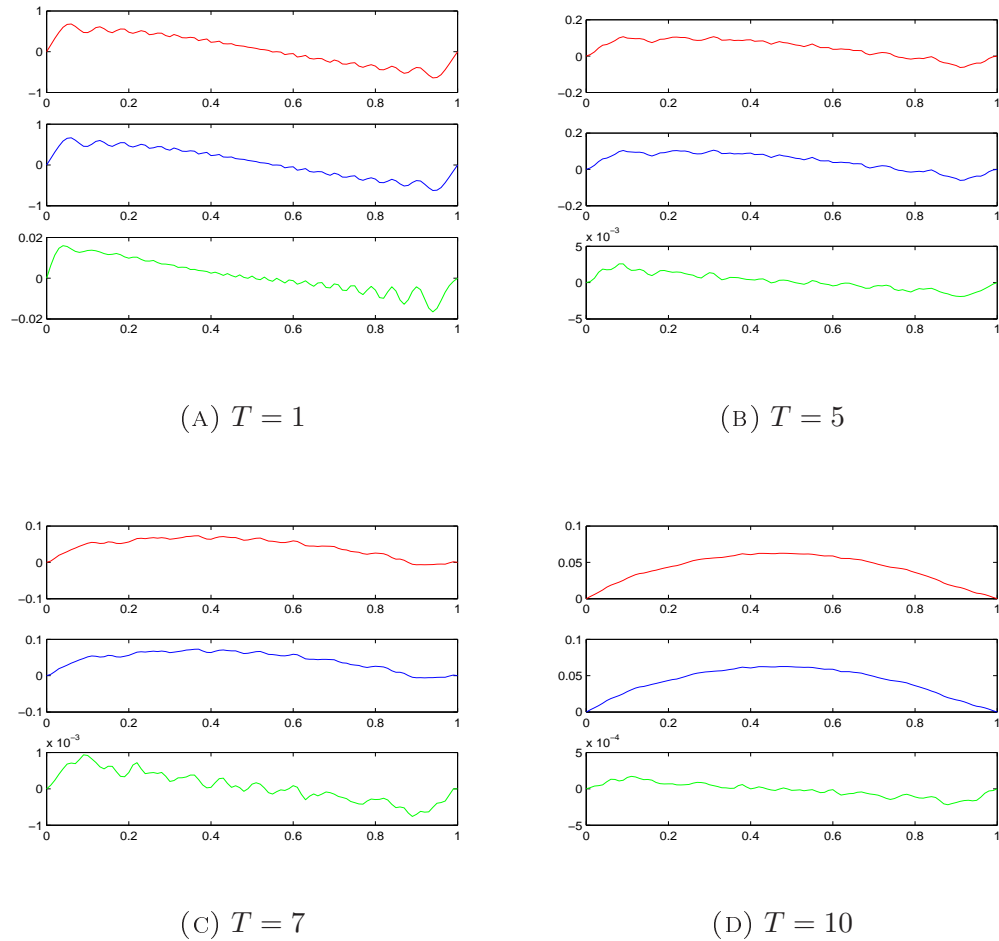


FIGURE 4.6 – La solution avec le schéma explicite ( $\theta = 0$ ) [en bleu] et implicite ( $\theta = 1$ ), et la différence entre les deux solutions pour une valeur de  $\alpha = 4$  sous les conditions initiales (4.2.13).

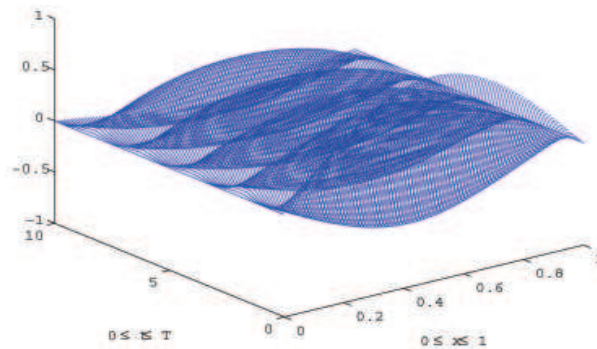


FIGURE 4.7 – la solution approchée de l'équation (4.2.1) sous les conditions initiales (4.1.3) quand  $\alpha = 20$ .

#### 4.2.4 Cas d'une grande coefficient de sensibilité

Si  $\alpha$  est grand (dans un sens à définir), le comportement asymptotique de la solution devient plus délicat. Toutefois, on peut s'inspirer du travail de Freitas [8] dans le cadre de l'équation suivante

$$u_{tt} + b(x)u_t = c^2u_{xx}, \quad (4.2.16)$$

pour prédire que la solution devient instable à l'infini. En fait, Freitas a démontré que la solution de (4.2.16) devient instable si le terme d'amortissement change de signe et a une norme infinie  $\|\cdot\|_\infty$  suffisamment grande, ce qui est le cas ici. Cette prédiction on va la confirmer numériquement. En effet, quand la solution  $u_m^n$  s'approche de zéro,  $u_m^{n+1}$  va augmenter à l'itération suivante et donc  $\dot{S}(u_m^{n+1})$  devient grand et par suite  $u_m^{n+2}$  décroît à nouveau et ainsi de suite, et la solution va alors osciller indéfiniment avec une amplitude proportionnelle à  $\alpha$  comme le montre la figure 4.7 tracée pour une valeur de  $\alpha = 20$ .

### 4.3 L'influence de l'impulsion thalamique

Maintenant on va reprendre l'équation initiale (4.0.1), c'est à dire on prend l'impulsion thalamique en considération. Pour ce problème, plusieurs schémas stables peuvent être utilisés. On va prendre le plus simple parmi eux, c'est à dire, le schéma explicite suivant

$$\begin{aligned} \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{(\Delta t)^2} + \frac{\omega_0(2 - \dot{S}(u_m^n + p_m^n))}{2\Delta t}(u_m^{n+1} - u_m^{n-1}) \\ = c^2 \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{(\Delta x)^2} - \omega_0^2 \left( u_m^n - S(u_m^n + p_m^n) \right) + (p_t)_m^n \dot{S}(u_m^n + p_m^n) \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

avec  $p_m^n$  désigne la valeur de  $p$  au point  $(x_m, t_n)$ .

Les figures suivantes montrent les résultats obtenus pour différents type d'impulsion  $p$ . La solution avec impulsion est tracée en couleur **rouge**, sans impulsion avec la couleur **bleu** et la différence entre les deux solutions en **vert**. La troisième sous-figure représente  $p$ . On peut vite remarquer que si la valeur de  $p$  est initialement concentré sur un intervalle, il influencera au cours du temps toutes les valeurs de la solution (effet non local).



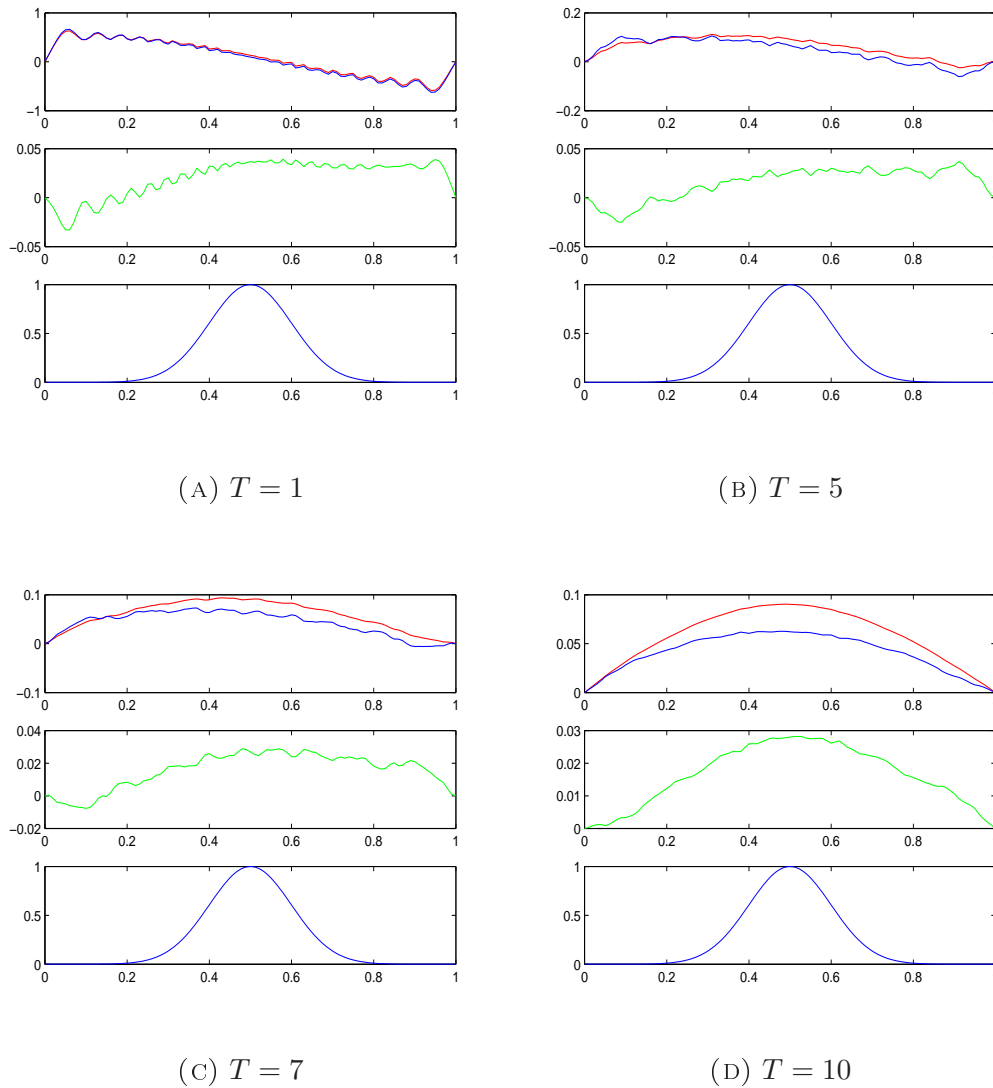


FIGURE 4.8 – la valeur de l'activité sous les conditions initiales (4.2.13) et avec une impulsion  $p(t, x) = \exp(-50(x - \frac{1}{2})^2)$ .

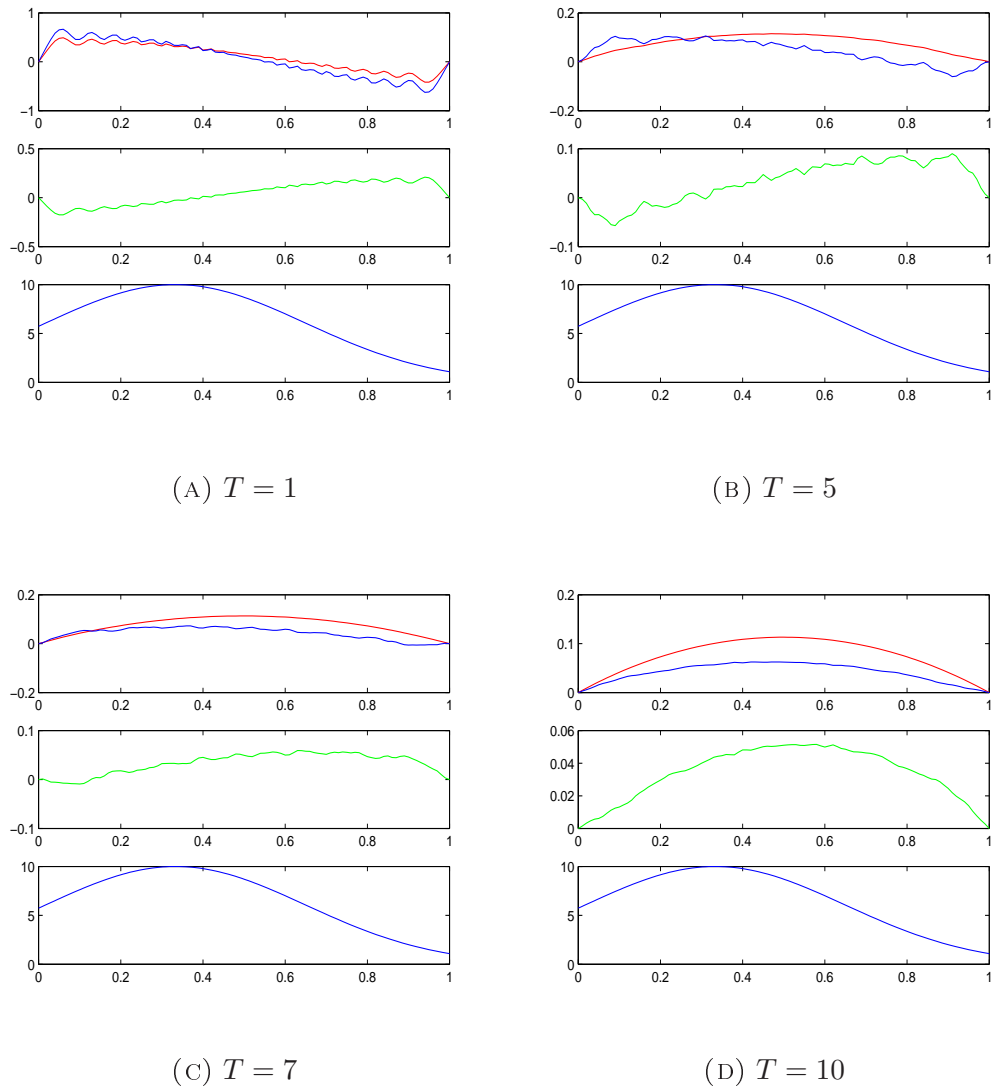


FIGURE 4.9 – la valeur de l'activité sous les conditions initiales (4.2.13) et avec une impulsion  $p(t, x) = 10 \exp(-5(x - \frac{1}{3})^2)$ .

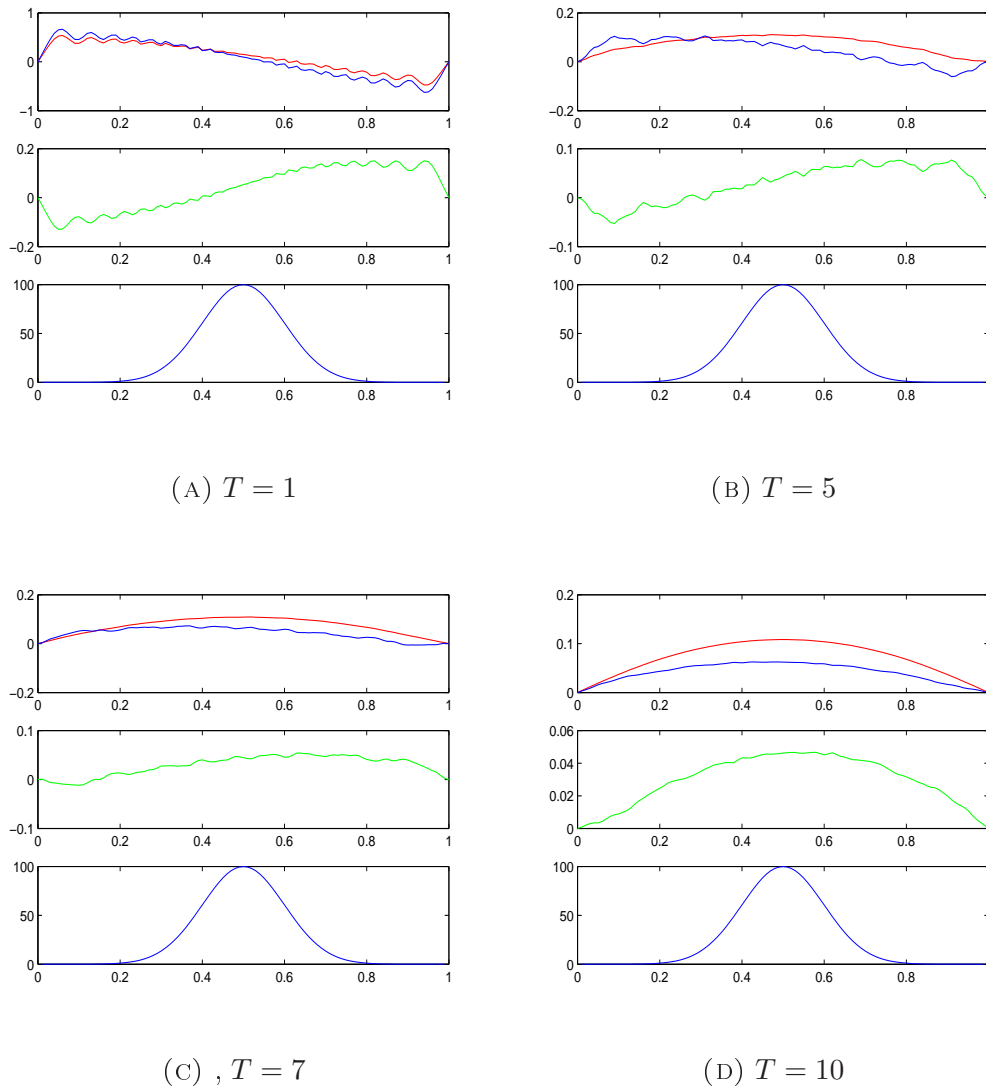


FIGURE 4.10 – la valeur de l’activité sous les conditions initiales (4.2.13) et avec une impulsion qui rapproche la distribution du dirac  $p(t, x) = 100\exp(-50(x - \frac{1}{2})^2)$ .

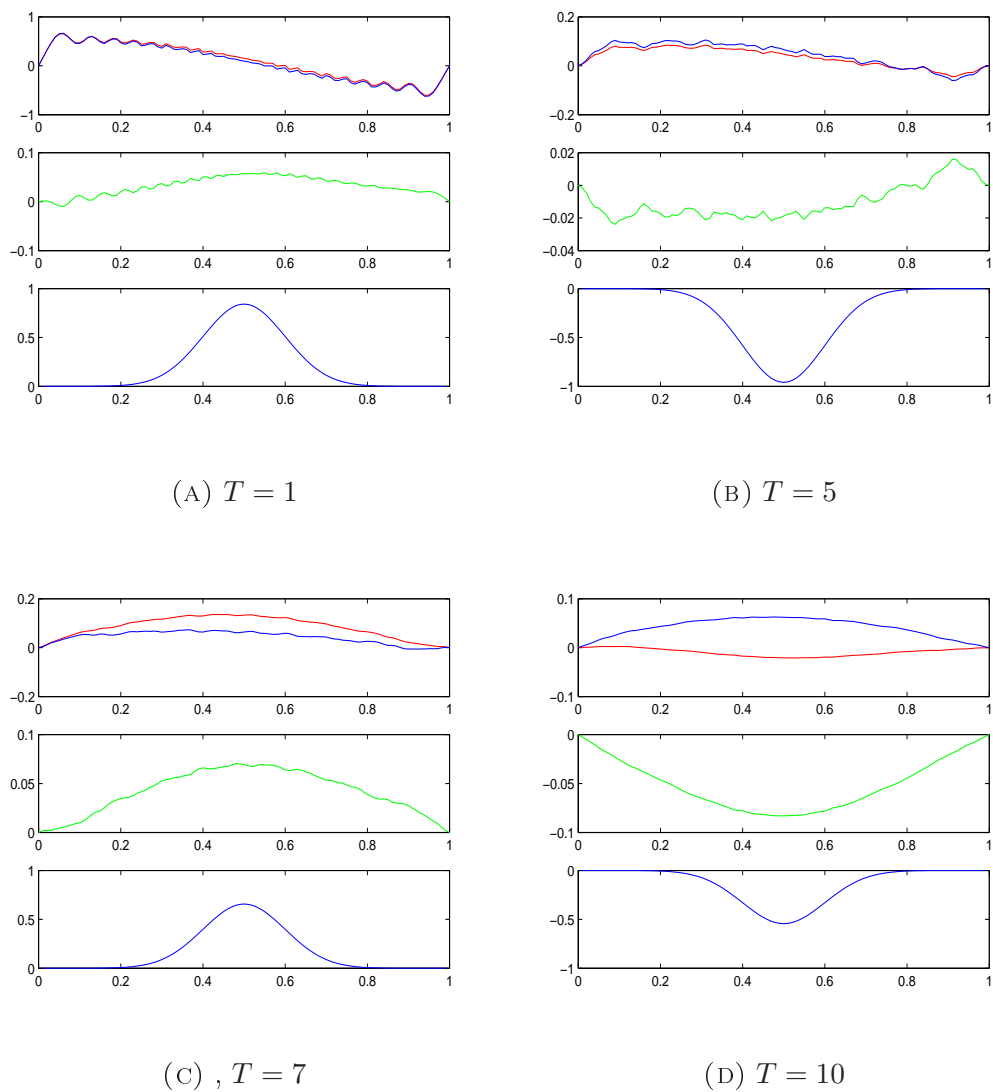


FIGURE 4.11 – la valeur de l'activité sous les conditions initiales (4.2.13) et avec une impulsion qui dépend du temps,  $p(t, x) = \sin(t)\exp(-50(x - \frac{1}{2})^2)$ .

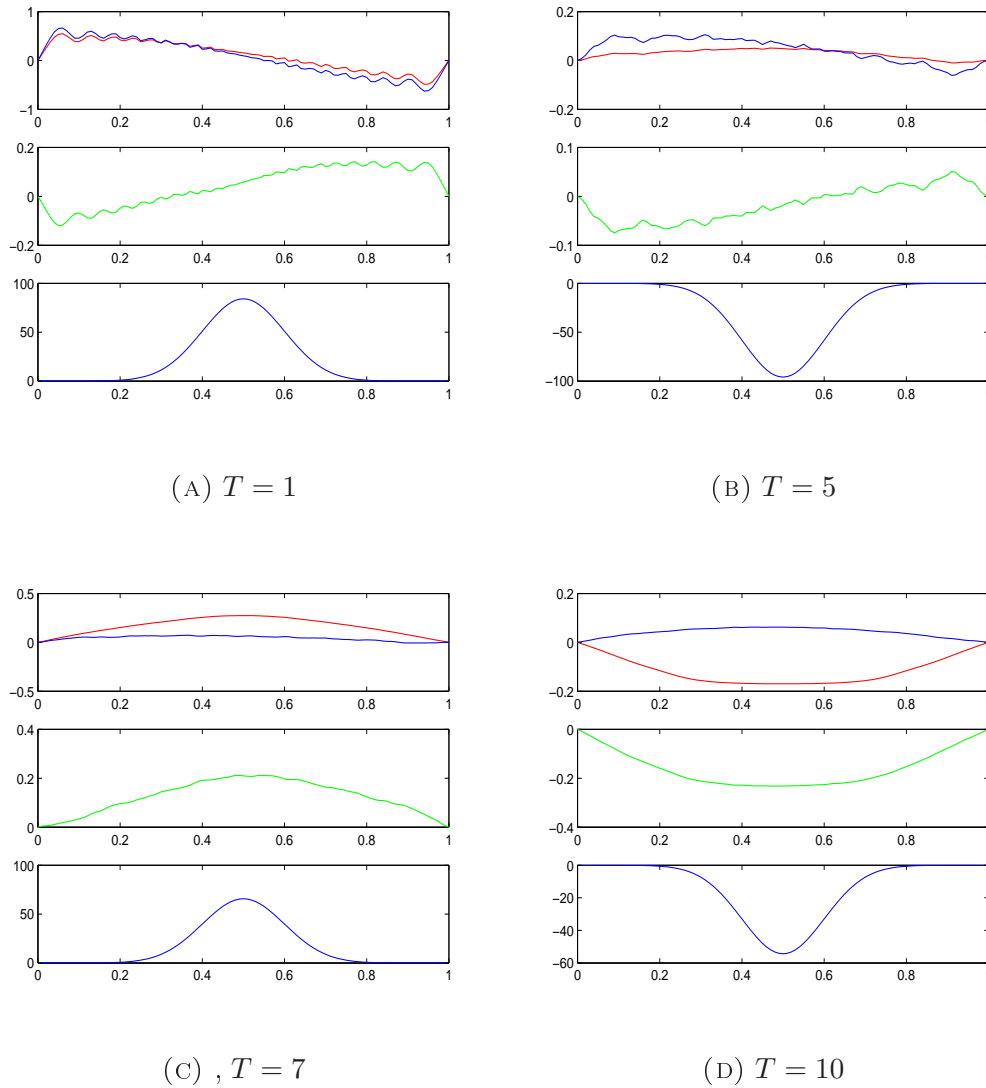


FIGURE 4.12 – la valeur de l'activité sous les conditions initiales (4.2.13) et avec une impulsion qui dépend du temps et qui rapproche la distribution du dirac  $p(t, x) = 100 \sin(t) \exp(-50(x - \frac{1}{2})^2)$ .

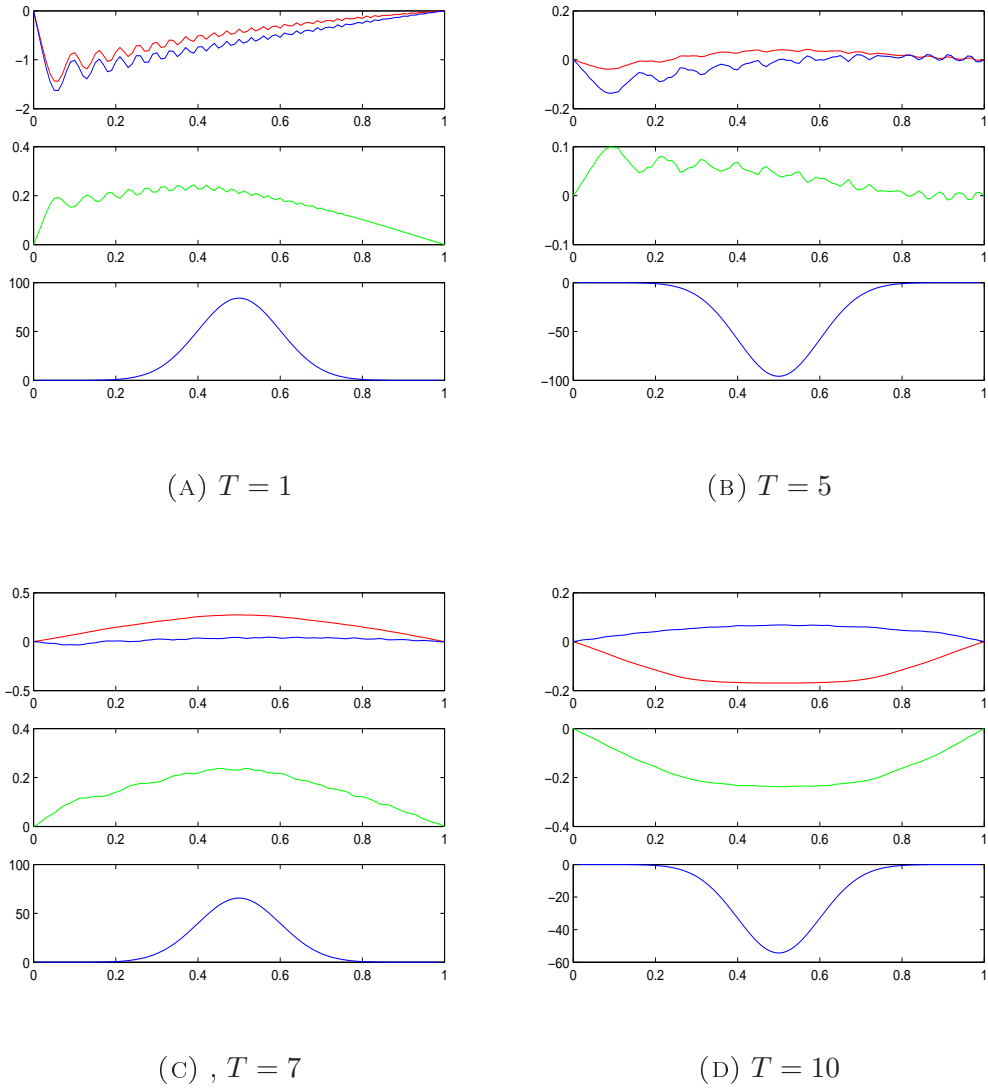


FIGURE 4.13 – la valeur de l'activité sous des conditions initiales non périodiques  $u(0, x) = x$  et  $u_t(0, x) = 0$ , avec une impulsion  $p(t, x) = 100 \sin(t) \exp(-50(x - \frac{1}{2})^2)$ .

## 4.4 Conditions aux limites de type Neumann

Dans ce qui précède, on a pris des conditions de type Dirichlet, mais ça peut se généraliser facilement aux conditions périodiques ou de type Neumann.

La figure 4.14 montre le résultat obtenu avec des conditions de Neumann homogène

$$\dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0 \tag{4.4.1}$$

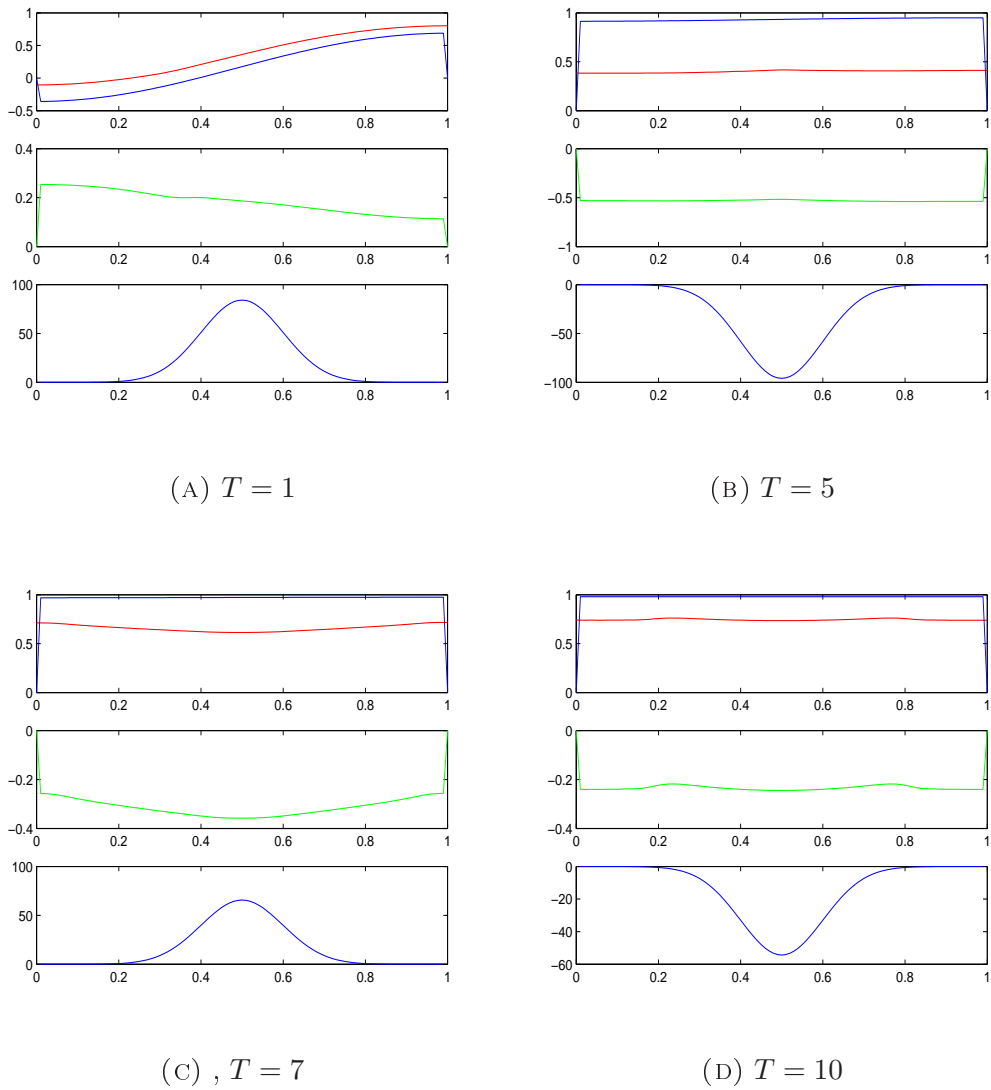


FIGURE 4.14 – la valeur de l'activité sous des conditions aux limites de types (4.4.1) avec une impulsion  $p(t, x) = 100 \sin(t) \exp(-50(x - \frac{1}{2})^2)$ .



## 4.5 Conclusion de l'étude numérique

Dans ce chapitre, nous avons développé un schéma numérique stable pour l'équation (4.1.1), puis on l'a généralisé au cas de l'EDP non-linéaire (4.2.1).

Quand la fonction non linéaire  $S$  est nulle, ce qui veut dire physiquement, le non-déclenchement d'un flux nerveux (voir chapitre 1), l'équation (4.1.1) est la même que (4.2.1).

Dans ce cas, on a calculé la valeur explicite de la solution, et on la retrouver numériquement avec notre schéma.

Dans le cas contraire (quand le coefficient de sensibilité  $\alpha$  est grand), on a montré que la solution devient instable en temps long. Ainsi on a développé une méthode numérique qui permet de trouver le paramètre de bifurcation  $\alpha$  (changement de stabilité) de notre EDP.

Notre schéma numérique est stable au sens de Von-Neumann et précis à l'ordre 2 en temps et en espace. Enfin, nous présentons une large nombre des expériences numériques pour des conditions aux limites de type Neumann et Dirichlet.

Troisième partie  
Problème inverse



# Chapitre 5

## Problème d'identification de l'impulsion thalamique

### 5.1 Introduction

Les signaux périphériques comme la proprioception<sup>1</sup> ou la résistance cutanée génèrent une activité qui se transporte via le cerveau moyen vers le néocortex. L'identification de la valeur de ces signaux n'est pas une question simple [32].

Toutefois si on connaît les régions responsables de cette mouvement on peut donner une valeur plus importante à la fonction thalamique dans ces régions. Par exemple s'il s'agit de la mouvement de flexion d'un doigt on peut prendre une gaussienne qui est concentrée dans le cortex moteur. Pour les fonctions dont la localisation est plus compliquée on propose de résoudre un problème inverse :

**on suppose qu'on peut estimer la valeur de l'activité  $\psi$  en utilisant une des techniques d'observation cérébrale, puis retrouver la valeur thalamique après « inversion » de l'EDP (2.3.16), qu'on rappelle ici :**

$$\phi_{tt} + (\omega_0^2 - c^2 \Delta)\phi + 2\omega_0 \phi_t = (\omega_0^2 + \omega_0 \frac{\partial}{\partial t})S(\psi + p)$$

avec

$$\phi(x, t) = \tau \psi_t(x, t) + \psi(x, t) + het(x, t).$$

Le plan de ce chapitre est le suivant :

- On démontre un résultat général (le théorème 5.2.1).
- On applique ce résultat à l'EDP (2.3.16).

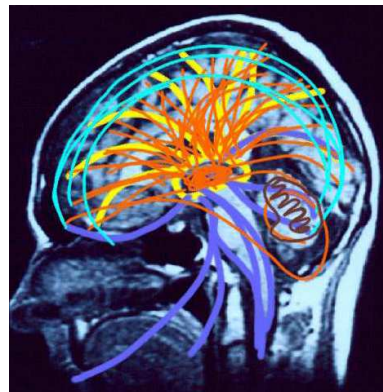


FIGURE 5.1 – Coupe médiane de l'encéphale : le Thalamus ici est représenté par le petit ellipse orange, où se rencontrent tous les signaux périphériques (en bleu).

---

1. En physiologie, la proprioception désigne l'ensemble des récepteurs, voies et centres nerveux impliqués dans la perception, consciente ou non, de la position relative des parties du corps les unes par rapport aux autres (Sherrington, 1906 ; Delmas, 1981).

## 5.2 Résolution du problème inverse

**Théorème 5.2.1** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions suffisamment régulières. Considérons l'équation suivante

$$f(x, t) = (a + b \frac{\partial}{\partial t}) S(g(x, t)). \quad (5.2.1)$$

avec  $a, b$  des constantes non nulles, et  $S$  la fonction sigmoïde définie par

$$S(y) = \frac{1}{1 + \exp\{-\alpha y\}}, \quad (\alpha \neq 0)$$

alors,

$$g(x, t) = \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{-K(x) + I(x, t)}{K(x) - I(x, t) + \exp\{\frac{a}{b}t\}} \right)$$

avec,

$$I(x, t) = \frac{1}{b} \int f(x, t) \exp\{\frac{a}{b}t\} dt$$

où  $K(x)$  est une fonction constante en temps, vérifie

$$I(x, t) - \exp\{\frac{a}{b}t\} < K(x) < I(x, t) \quad \forall t > 0.$$

**Lemme 5.2.1** Considérons l'équation de Riccati suivante

$$y_t = f_2(t)y^2 + f_1(t)y + f_0(t)$$

Soit  $y_0 = y_0(t)$  une solution particulière de cette équation alors la solution générale est donnée par

$$y(t) = y_0(t) + \varphi(t) \left[ C - \int \varphi(t) f_2(t) dt \right]^{-1},$$

avec

$$\varphi(t) = \exp \left\{ \int \left[ 2f_2(t)y_0(t) + f_1(t) \right] dt \right\}$$

et  $\int$  désigne une primitive par rapport au temps.

*Démonstration du lemme-* En posant  $y = z + y_0$ , on est conduit à :

$$z_t = f_2(t)z^2 + A(t)z \quad \text{avec} \quad A(t) = 2f_2(t)y_0 + f_1(t).$$

C'est une équation de Bernoulli que l'on intègre formellement par le nouveau changement de variables

$$u = \frac{1}{z},$$

ramenant la résolution à celle d'une équation linéaire.

*Démonstration du théorème-* Développons (5.2.1) on obtient

$$f(x, t) = aS(g(x, t)) + bg_t(x, t)\dot{S}(g(x, t)),$$

qui est équivalente à

$$\begin{aligned} g_t(x, t) &= \frac{f(x, t)}{b} \frac{1}{\dot{S}(g(x, t))} - \frac{aS(g(x, t))}{b\dot{S}(g(x, t))} \\ &= \frac{f(x, t)}{\alpha b} (\exp\{\alpha g(x, t)\} + \exp\{-\alpha g(x, t)\} + 2) - \frac{a}{\alpha b} (1 + \exp\{\alpha g(x, t)\}) \\ &= \left( \frac{f(x, t) - a}{\alpha b} \right) \exp\{\alpha g(x, t)\} + \frac{f(x, t)}{\alpha b} \exp\{-\alpha g(x, t)\} + \frac{2f(x, t) - a}{\alpha b} \end{aligned}$$

Notons

$$z(x, t) = \exp\{\alpha g(x, t)\} > 0$$

On obtient l'équation de Riccati suivante :

$$z_t(x, t) = \left( \frac{f(x, t) - a}{b} \right) z^2(x, t) + \left( \frac{2f(x, t) - a}{b} \right) z(x, t) + \frac{f(x, t)}{b} \quad (5.2.2)$$

clairement,  $z(x, t) = -1$  est une solution particulière de l'équation (5.2.2), alors en utilisant le lemme 5.2.1 la solution générale est donnée par

$$z(x, t) = -1 + \frac{\exp\{\frac{a}{b}t\}}{K(x) - \frac{1}{b} \int (f(x, t) - a) \exp\{\frac{a}{b}t\} dt},$$

qui est équivalente à

$$\begin{aligned} z(x, t) &= \frac{-K(x) + \frac{1}{b} \int f(x, t) \exp\{\frac{a}{b}t\} dt}{K(x) + \exp\{\frac{a}{b}t\} - \frac{1}{b} \int f(x, t) \exp\{\frac{a}{b}t\} dt} \\ &= \frac{-K(x) + I(x, t)}{K(x) + \exp\{\frac{a}{b}t\} - I(x, t)} \end{aligned}$$

avec  $I(x, t) = \frac{1}{b} \int f(x, t) \exp\{\frac{a}{b}t\} dt$ .

$z(x, t)$  est positive si et seulement si

$$I(x, t) - \exp\{\frac{a}{b}t\} < K(x) < I(x, t) \quad \forall t > 0.$$

Cela montre la proposition 5.2.1.

### 5.3 Application

On considère l'équation (2.3.16), si on suppose que

$$f(x, t) = \phi_{tt} + (\omega_0^2 - c^2 \Delta) \phi + 2\omega_0 \phi_t,$$

$$g(x, t) = \psi(x, t) + p(x, t), \quad a = \omega_0^2 \quad \text{et} \quad b = \omega_0,$$

avec  $\phi$  et  $\psi$  des données mesurées. En utilisant la proposition 5.2.1, on obtient

$$\psi(x, t) + p(x, t) = \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{-K(x) + I(x, t)}{K(x) - I(x, t) + \exp\{\frac{\alpha}{b}t\}} \right)$$

avec

$$I(x, t) = \frac{1}{b} \int_0^t \left( \phi_{ss} + (\omega_0^2 - c^2 \Delta) \phi + 2\omega_0 \phi_s \right) \exp\{\omega_0 s\} ds,$$

et  $k(x)$  est donnée par les conditions initiales sur  $p$ . L'intégration par parties nous donne

$$bI(x, t) = \left[ \phi_t + \omega_0 \phi \right] \exp\{\omega_0 t\} - c^2 \int_0^t \phi_{xx} \exp\{\omega_0 s\} ds$$

On obtient donc finalement la relation suivante entre  $p$  et  $\psi$

$$p(x, t) = \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{-K(x) + \frac{1}{b} \left[ (\phi_t + \omega_0 \phi) \exp\{\omega_0 t\} - c^2 \int_0^t \phi_{xx} \exp\{\omega_0 s\} ds \right]}{K(x) - \frac{1}{b} \left[ (\phi_t + \omega_0 \phi) \exp\{\omega_0 t\} - c^2 \int_0^t \phi_{xx} \exp\{\omega_0 s\} ds \right] + \exp\{\frac{\alpha}{b}t\}} \right) - \psi(x, t).$$

**Remarque 5.3.1** Pour calculer  $K(x)$ , on peut logiquement supposer  $p(0, x) = 0$ , une petite calcul nous donne

$$K(x) = \frac{-\exp\{\alpha\psi(0, x)\}}{1 + \exp\{\alpha\psi(0, x)\}} + \frac{1}{b} (\phi_t + \omega_0 \phi)(0, x)$$

**Remarque 5.3.2** Si on suppose de plus qu'on a un retard  $\tau$  [43] on obtient

$$p(x, t - \tau) = \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{-K(x) + \frac{1}{b} \left[ (\phi_t + \omega_0 \phi) \exp\{\omega_0 t\} - c^2 \int \phi_{xx} \exp\{\omega_0 t\} dt \right]}{K(x) - \frac{1}{b} \left[ (\phi_t + \omega_0 \phi) \exp\{\omega_0 t\} - c^2 \int \phi_{xx} \exp\{\omega_0 t\} dt \right] + \exp\{\frac{\alpha}{b}t\}} \right) - \psi(x, t).$$

**Remarque 5.3.3** si on suppose  $p = 0$  (on peut imaginer le cas du sommeil profond) on obtient

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{-K(x) + \frac{1}{b} \left[ (\phi_t + \omega_0 \phi) \exp\{\omega_0 t\} - c^2 \int \phi_{xx} \exp\{\omega_0 t\} dt \right]}{K(x) - \frac{1}{b} \left[ (\phi_t + \omega_0 \phi) \exp\{\omega_0 t\} - c^2 \int \phi_{xx} \exp\{\omega_0 t\} dt \right] + \exp\{\frac{\alpha}{b}t\}} \right).$$

# Annexe A

## On Solutions of a Non linear Wave Equation Derived From Brain Activity Modeling

The paper deals with a boundary value problem governed by a damped non-linear wave equation. It generalizes the equation modelling cerebral activity that has been proposed by Jirsa and Haken [11]. Using a Galerkin approximation scheme, we prove existence of global solutions. In the 1D case, we show the continuous dependence of solutions with respect to initial data and derive uniqueness.

**keyword** : Neural fields, wave equation, Galerkin method, boundary value problem

### A.1 Introduction

Non-invasive techniques such as functional Magnetic Resonance Imaging, ElectroEncephaloGraphy (EEG) and MagnetoEncephaloGraphy (MEG) provide entry points to human brain dynamics for clinical purposes, as well as the study of human behavior and cognition. Each of these observation technologies provides spatiotemporal information about the on-going neural activity in the cortex. Unfortunately measures are generally noisy, and it is difficult to identify the equation which governs the dynamics of neural activity. Several physicists [26, 18, 11, 7] have formulated continuous models called neural fields to predict neural activity, using brain anatomy.

Jirsa and Haken's model [11], that we will analyze in section 4 of this paper, generalizes the models [26, 18], and leads to the following evolution problem that we investigate in this work :

$$u_{tt} - \alpha \Delta u = a(u, p)u_t + b(u, p, p_t), \quad \text{in } [0, +\infty) \times \Omega \quad (\text{A.1.1})$$

$$u(0, \cdot) = u_0 \quad u_t(0, \cdot) = u_1. \quad (\text{A.1.2})$$

$$u = 0, \quad \text{on } [0, +\infty) \times \partial\Omega \quad (\text{A.1.3})$$

where  $\Omega$  is an open bounded domain in  $\mathbb{R}^n (n \leq 4)$  with sufficiently smooth boundary  $\partial\Omega$ . The notation  $u_t$  (respectively  $u_{tt}$ ) stands for the first (respectively second) partial derivative of  $u$  with



respect to time variable  $t$ ,  $\Delta$  is the Laplace operator and  $p$  is a smooth given function modelling the external stimulus (input). For simplicity, we assume that  $\alpha = 1$ .

Although the equation (A.1.1) has a simple form, the existence and uniqueness of the solution problem is (to our knowledge) still an open problem, if we do not assume additional conditions on  $a, b$  or  $u_0, u_1$ . In addition, the existence of **global** solution is not always ensured (see for example [5, 31, 28]).

Equation (A.1.1) belongs to a class of non-linear damped wave equations that have been widely studied by many mathematicians and engineers. Existence and uniqueness with (A.1.2), (A.1.3) condition has been considered using various methods, semi-group theory [19, 16, 30, 3], or fixed point method [12, 2]. In [6, 4, 20, 21, 29] the authors prove existence and uniqueness of global solutions with conditions (A.1.2), (A.1.3) using Galerkin methods.

Zhou [31], has studied a particular case of equation (A.1.1), without external input  $p$ . The function  $a$  is assumed to be constant and  $b$  is defined by

$$b(u) = |u|^{m-1}u$$

with condition (A.1.2) and  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ; he proved that, if  $1 < m < \frac{n+2}{n}$  the solution blows-up in finite time. Similarly authors in [19, 27, 31, 32, 13, 14, 23, 24, 5, 17, 28] discussed the case when the solution blows-up in finite time.

The closest equation to the one we investigate here, has been studied by Zhijian [29] who considered :

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_i(u_{x_i}) + \beta_i(u_{x_{it}})) + F(u, u_t, \nabla u, \nabla u_t) \quad \text{on } [0, \infty) \times \Omega \quad (\text{A.1.4})$$

with initial and boundary conditions (A.1.2) (A.1.3). He proved that this problem has a unique classical solution, assuming what follows on the initial data :

$$\left\| \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_i(u_{x_i}(0)) + \beta_i(v_{x_i}(0))) + F(u(0), v(0), \nabla u(0), \nabla v(0)) \right\|_{H^k} < \delta \quad (\text{A.1.5})$$

$$\|v(0)\|_{H^{k+1}}^2 + \|v(0)\|_{H^k} + \frac{3}{2} \|u(0)\|_{H^k} + \langle u(0), v(0) \rangle_{H^k} < \gamma \quad (\text{A.1.6})$$

where  $\delta$  and  $\gamma$  are two real numbers. In the present section,  $H^k$  stands for the usual Sobolev space and  $\|\cdot\|_{H^k}$  denotes the  $H^k$ -norm. This notation will be changed in the sequel where we shall use  $H^1$  and  $H^2$ . In addition, it was supposed that

$$|D^\beta F| \leq B(|\lambda_1|^{\gamma_1} + |\lambda_2|^{\gamma_2} + |\tilde{\lambda}_1|^{\gamma_3} + |\tilde{\lambda}_2|^{\gamma_4} + 1) \text{ and } F(0) = 0 \quad (\text{A.1.7})$$

The RHS of (A.1.1) is a particular case of RHS in (A.1.4) : it involves an additional (parameter) function  $p$  that we call external input. This function physically describes a signal generated at brain surface and transmitted to to the neocortex. We have to mention here that the term  $\Delta u_t$  in the LHS of equation (A.1.4), is crucial in the proof estimates : the solution is bounded with respect to  $H^2$  norm.

Now, the question is : if the initial data does not satisfy (A.1.5), (A.1.6) or (A.1.7) and if no

“regularizing” term  $\Delta u_t$  appears, does problem (A.1.1)-(A.1.3) admit a global solution? If yes, is the problem mathematically well posed : is the solution unique and continuous with respect to initial data?

In this paper, we prove that under “realistic” assumptions problem (A.1.1)-(A.1.3) has global weak solutions. Moreover, if the problem is a unidimensional one solutions continuously depends on initial data ; therefore we get uniqueness. Required assumptions are motivated by the underlying physical cerebral activity model that leads to a particular case of equation (A.1.1).

The outline of the paper is the following : existence results are stated in Section 2. Uniqueness and stability are discussed in Section 3. Finally in Section 4, we present and analyze the cerebral activity model, and apply the general result.

## A.2 Existence of weak global solutions

We denote  $\|\cdot\|$  the  $L^2(\Omega)$  norm ,  $\|\cdot\|_\infty$  the  $L^\infty$ -norm,  $\|\cdot\|_1$  the  $H^1(\Omega)$  norm, and  $(\cdot, \cdot)$  the  $L^2$ -inner product.

**Definition A.2.1** *Let  $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , and  $T > 0$  be given. We shall say that  $u$  is a weak solution to problem (A.1.1), (A.1.3) if*

$$u \in L^2(]0, T), H_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(]0, T), H^1(\Omega)), u_{tt} \in L^2(]0, T), L^2(\Omega))$$

and for almost every  $t \geq 0$ ,  $\forall \omega \in H_0^1(\Omega)$

$$(u_{tt}(t), \omega) + (\nabla u(t), \nabla \omega) = (a(u, p)(t)u_t(t) + b(u, p, p_t)(t), \omega) \quad (\text{A.2.1})$$

and

$$u(0, \cdot) = u_0, \quad u_t(0, \cdot) = u_1 \quad (\text{A.2.2})$$

From now, we do not indicate the dependence with respect to  $t$  to make the paper more readable. First we give an existence result of weak solutions to problem (A.1.1)-(A.1.3).

**Theorem A.2.1** *Assume that for some  $T > 0$*

(A<sub>1</sub>)  $a \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ,  $b \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  respectively,  $a$ ,  $\nabla a$  and  $\nabla b$  are (uniformly) bounded functions.  
(A<sub>2</sub>)  $|b(u, p, q)(t, x)| \leq C_1|u(t, x)| + C_2$  a.e. on  $]0, T) \times \Omega$  where  $C_1$  and  $C_2$  are nonnegative constants.

(A<sub>3</sub>)  $p \in H^2(]0, T), L^\infty(\Omega))$ .

(A<sub>4</sub>)  $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

Then the problem (A.1.1)-(A.1.3) admits (at least) a weak solution  $u$  on  $]0, T)$  and

$$u \in H^2(]0, T), L^2(\Omega)) \cap H^1(]0, T), H_0^1(\Omega))$$

*Proof* - We need several steps to prove this result. We use the Galerkin method to construct a solution. Let  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  be a sequence of eigenvalues of  $-\Delta$  in  $\Omega$ . Let  $\{\omega_k\}_{k=1}^\infty \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  be the associated eigenfunction such that  $\{\omega_k\}_{k=1}^\infty$  is a complete orthonormal system of  $L^2(\Omega)$ . We construct approximate solutions  $u^n$  as following

$$u^n(t) = \sum_{k=1}^n d^{n,k}(t)\omega_k$$

where  $d^{n,k}$  functions are determined by the ordinary differential equations system

$$(u_{tt}^n, \omega_k) + (\nabla u^n, \nabla \omega_k) = (a(u^n, p)u_t^n + b(u^n, p, p_t), \omega_k) \quad k = 1, \dots, n. \quad (\text{A.2.3})$$

$$d^{n,k}(0) = u_0^k, \quad d_t^{n,k}(0) = u_1^k \quad (\text{A.2.4})$$

with  $u_0^k, u_1^k \in \mathcal{D}(\Omega)$ , such that  $(u_0^k, u_1^k) \rightarrow (u_0, u_1)$  in  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Here  $\mathcal{D}(\Omega)$  denotes the space of  $\mathcal{C}^\infty$  functions with compact support in  $\Omega$ .

Now, (A.2.3) and (A.2.4) are equivalent to :

$$d_{tt}^{n,k} + \lambda_k d^{n,k} = f(d^{n,k}, d_t^{n,k}, t) \quad k = 1, \dots, n, \quad (\text{A.2.5})$$

$$d^{n,k}(0) = u_0^k, \quad d_t^{n,k}(0) = u_1^k \quad (\text{A.2.6})$$

where,

$$f(d^{n,k}, d_t^{n,k}, t) := (a(u^n, p)u_t^n + b(u^n, p, p_t), \omega_k) \quad \text{a.e. } t \geq 0. \quad (\text{A.2.7})$$

For every  $n \geq 1$ , (A.2.5), (A.2.6) is a second order  $n \times n$  Cauchy system of differential equations with continuous nonlinearities. So, it follows from the Cauchy-Peano Theorem [22], that the system has at least one solution  $d^{n,k}$  defined on  $]0, T_n]$ , for some  $T_n > 0$ . Moreover, for every  $k$  such that  $1 \leq k \leq n$  we get  $d^{n,k} \in C^2(]0, T_n])$ .

**Lemma A.2.1** *Functions  $(u_n)$  satisfy*

$$\|u_t^n(t)\| + \|u^n(t)\|_1 \leq M(T)$$

where  $M(T)$  only depends on  $T$ . In particular  $u^n(t)$  can be extended to  $]0, T)$ .

*Proof* - We multiply equation (A.2.3) by  $d_t^{m,k}$ , and sum over  $k=1, \dots, n$ . By assumption  $A_1$  and  $A_2$  we obtain, for every  $t \in ]0, T)$

$$\begin{aligned} (u_{tt}^n, u_t^n) + (\nabla u^n, \nabla u_t^n) &= (a(u^n, p)u_t^n + b(u^n, p, p_t), u_t^n) \\ &\leq C(|u_t^n| + C_1|u^n| + C_2, |u_t^n|) \end{aligned}$$

Using Cauchy-Schwartz inequality we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|u_t^n(t)\|^2 + \|\nabla u^n(t)\|^2) &\leq C(\|u_t^n(t)\|^2 + \|u^n(t)\| \|u_t^n(t)\| + \|u_t^n(t)\|) \\ &\leq C(\|u_t^n(t)\|^2 + \|u^n(t)\|^2 + \|u_t^n(t)\|^2 + \|u_t^n(t)\|^2 + 1) \\ &\leq C(\|u_t^n(t)\|^2 + \|u^n(t)\|^2 + 1) \\ &\leq C(\|u_t^n(t)\|^2 + \|\nabla u^n(t)\|^2 + 1) \end{aligned}$$

by Poincaré inequality, where  $C$  denotes (here and in the sequel) a generic constant. Applying Gronwall inequality yields :

$$\|u_t^n(t)\| + \|\nabla u^n(t)\| \leq M(T) ; \quad (\text{A.2.8})$$

then by Poincaré inequality

$$\|u_t^n(t)\| + \|u^n(t)\|_1 \leq M(T) \quad (\text{A.2.9})$$

and

$$\begin{aligned} |f(d^{n,k}, d_t^{n,k}, t)| &= |(a(u^n, p)u_t^n + b(u^n, p, p_t), \omega_k)| \quad \text{a.e. } t \geq 0 \\ &\leq C(\|u_t^n(t)\|^2 + \|u^n(t)\|^2) \leq C \end{aligned}$$

So  $f(d^{n,k}, d_t^{n,k}, \cdot)$  is a bounded function, and the solution can be extended to  $]0, T)$  [22] .  $\square$

**Lemma A.2.2** *The sequence of approximated solutions  $u^n$  satisfies the following :*

1.  $u^n$  is bounded in  $L^\infty(]0, T), H_0^1(\Omega))$  (and in  $L^2(]0, T), H_0^1(\Omega))$ ).
2.  $u_t^n$  is bounded in  $L^\infty(]0, T), H_0^1(\Omega))$  (and in  $L^2(]0, T), H_0^1(\Omega))$ ).
3.  $u_{tt}^n$  is bounded in  $L^\infty(]0, T), L^2(\Omega))$  (and in  $L^2(]0, T), L^2(\Omega))$ ).

*Proof* - The first item is an immediate consequence of Lemma A.2.1. Differentiating (A.2.3) with respect to  $t$  gives for  $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} (u_{ttt}^n, \omega_k) + (\nabla u_t^n, \nabla \omega_k) &= (a_u(u^n, p)(u_t^n)^2 + a_p(u^n, p)p_t u_t^n \\ &\quad + a(u^n, p)u_{tt}^n + b_u(u^n, p, p_t)u_t^n + b_p(u^n, p, p_t)p_t \\ &\quad + b_q(u^n, p, p_t)p_{tt}, \omega_k) \quad k = 1, \dots, n \\ &\leq C((u_t^n)^2 + |u_t^n| + |u_{tt}^n| + |u_t^n| + M, |\omega_k|), \end{aligned}$$

with assumptions  $A_1, A_2$  and  $A_3$ . Here  $a_u$  and  $a_p$  denote the partial derivatives of  $a : (u, p) \mapsto a(u, p)$ . Similarly,  $b_u, b_p$  and  $b_q$  are the partial derivatives of  $b : (u, p, q) \mapsto b(u, p, q)$ .

The method is similar to the one used in the previous Lemma. Replace now  $\omega_k$  by  $u_{tt}^n(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|u_{tt}^n(t)\|^2 + \|\nabla u_t^n(t)\|^2) &\leq C\left(\|(u_t^n(t))^2\| + \|u_t^n(t)\| + \|u_{tt}^n(t)\| + M\right)\|u_{tt}^n(t)\| \\ &\leq C(\|(u_t^n(t))^2\|\|u_{tt}^n(t)\| + \|u_t^n(t)\|\|u_{tt}^n(t)\| + \\ &\quad \|u_{tt}^n(t)\|^2 + \|u_{tt}^n(t)\|) \\ &\leq C(\|(u_t^n(t))^2\|^2 + \|u_{tt}^n(t)\|^2 + \|u_t^n(t)\|^2 + \\ &\quad \|u_{tt}^n(t)\|^2 + \|u_{tt}^n(t)\|^2 + \|u_{tt}^n(t)\|^2 + 1) \\ &\leq C(\|(u_t^n(t))^2\|^2 + \|u_{tt}^n(t)\|^2 + \|u_t^n(t)\|^2 + 1) \end{aligned}$$

Using Sobolev-Poincaré inequality [1],

$$\|u_t^n(t)\|_{L^4} \leq C\|u_t^n(t)\|_1$$

and Poincaré inequality, we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|u_{tt}^n(t)\|^2 + \|\nabla u_t^n(t)\|^2) &\leq C(\|u_{tt}^n(t)\|^2 + \|u_t^n(t)\|_1^2 + 1) \\ &\leq C(\|u_{tt}^n(t)\|^2 + \|\nabla u_t^n(t)\|^2 + 1) . \end{aligned}$$

Then by Gronwall inequality we obtain

$$\|u_t^n(t)\|_1 + \|u_{tt}^n(t)\| \leq M(T) \quad \text{a.e. } t \in ]0, T[ , \quad (\text{A.2.10})$$

and the lemma is proved.  $\square$

Thanks to estimations (A.2.9) and (A.2.10), we may extract subsequences of  $\{u^n\}$  (denoted similarly in the sequel) such that

$$\begin{aligned} u^n &\rightharpoonup u \quad \text{weakly star in } L^\infty(]0, T), H_0^1(\Omega)) \text{ and weakly in } L^2(]0, T), H_0^1(\Omega)) , \\ u_t^n &\rightharpoonup u_t \quad \text{weakly star in } L^\infty(]0, T), H_0^1(\Omega)) \text{ and weakly in } L^2(]0, T), H_0^1(\Omega)) , \\ u_{tt}^n &\rightharpoonup u_{tt} \quad \text{weakly star in } L^\infty(]0, T), L^2(\Omega)) \text{ and weakly in } L^2(]0, T), L^2(\Omega)) . \end{aligned}$$

With classical compactness results [15]

$$u^n \rightarrow u \quad \text{strongly in } L^2(]0, T), L^2(\Omega)) \tag{A.2.11}$$

With the above convergence results, we can extract subsequences  $\{u^n\}$  such that

$$u^n(t, x) \rightarrow u(t, x) \quad \text{a.e. } (t, x) \in ]0, T) \times \Omega \tag{A.2.12}$$

$$u^n(t, x) \leq g(t, x) \quad \text{a.e. } (t, x) \in ]0, T) \times \Omega \tag{A.2.13}$$

$$u_t^n(t) \rightarrow u_t(t) \quad \text{weakly in } H_0^1(\Omega), \quad \text{a.e. } t \in ]0, T) \tag{A.2.14}$$

Now, by continuity of a and b, (A1), and (A.2.12) we obtain

$$a^4(u^n(t, x), p(t, x)) \rightarrow a^4(u(t, x), p(t, x)) \tag{A.2.15}$$

$$b(u^n(t, x), p(t, x), p_t(t, x)) \rightarrow b(u(t, x), p(t, x), p_t(t, x)) \tag{A.2.16}$$

for almost every  $(t, x) \in ]0, T) \times \Omega$ . Using Lebesgue theorem by (A.2.15) and (A1) we obtain

$$a(u^n(t), p(t)) \rightarrow a(u(t), p(t)) \quad \text{in } L^4(\Omega) \quad \text{a.e. } t \in ]0, T) \tag{A.2.17}$$

and by (A.2.16), (A.2.13) and (A2) we obtain

$$b(u^n(t), p(t), p_t(t)) \rightarrow b(u(t), p(t), p_t(t)) \quad \text{in } L^2(\Omega) \quad \text{a.e. } t \in ]0, T) \tag{A.2.18}$$

On the other hand, for all  $v \in L^2$ , we have

$$\begin{aligned} |(a(u^n, p)u_t^n - a(u, p)u_t, v)| &= |(a(u^n, p)u_t^n - a(u, p)u_t^n + a(u, p)u_t^n - a(u, p)u_t, v)| \\ &\leq |(a(u^n, p) - a(u, p))u_t^n, v| + |(a(u, p)(u_t^n - u_t), v)| \\ &\leq \|a(u^n, p) - a(u, p)\|_{L^4} \|u_t^n\|_{L^4} \|v\| + |(u_t^n - u_t, a(u, p)v)| \\ &\leq C \|a(u^n, p) - a(u, p)\|_{L^4} \|u_t^n\|_1 \|v\| + |(u_t^n - u_t, a(u, p)v)| \end{aligned}$$

Using (A.2.17), (A.2.10) and (A.2.14) we obtain for almost every  $t \in ]0, T)$

$$a(u^n(t), p(t))u_t^n(t) \rightarrow a(u(t), p(t))u_t(t) \quad \text{weakly in } L^2(\Omega) \tag{A.2.19}$$

Then, using (A.2.18) and (A.2.19), and letting  $n \rightarrow \infty$  in (A.2.3) we obtain that the limiting function  $u \in H^2(]0, T), L^2(\Omega)) \cap H^1(]0, T), H_0^1(\Omega))$  and for almost every  $t \in ]0, T)$ ,

$$(u_{tt}, \omega) + (\nabla u, \nabla \omega) = (a(u, p)u_t + b(u, p, p_t), \omega) \quad \forall \omega \text{ in } H_0^1(\Omega) \tag{A.2.20}$$

$$u(0) = u_0 \text{ in } H_0^1(\Omega), \quad u_t(0) = u_1 \text{ in } L^2(\Omega) \tag{A.2.21}$$

$\square$

**Corollary A.2.1** *Assume that conditions of theorem A.2.1 are fulfilled, for every  $T > 0$ . Then  $u$  is a global weak solution of problem (A.1.1), (A.1.2), (A.1.3).*

### A.3 The 1D-case

In this part we suppose  $n = 1$  and give additional properties of solutions that we are not able to prove if  $n \geq 2$ . Indeed, we use the Sobolev inclusion  $H_0^1(\Omega) \subset C_0(\Omega)$  (space of bounded continuous functions) which is valid only if the space dimension is 1. The main result is a uniqueness result which is a direct consequence of a “local stability” result, namely the continuous dependence of weak solutions with respect to initial data.

**Theorem A.3.1** *Assume that  $n = 1$  and that Theorem A.2.1 assumptions are satisfied for some  $T > 0$ . Let  $u, v$  be two solutions of problem (A.1.1)-(A.1.3) corresponding (respectively) to initial data  $(u_0, u_1)$  and  $(v_0, v_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Then for almost every  $t \in [0, T]$*

$$\|u_t(t) - v_t(t)\|^2 + \|u(t) - v(t)\|_1^2 \leq M(T)(\|u_1 - v_1\|^2 + \|u_0 - v_0\|_1^2),$$

where,  $M(T)$  is a positive constant depending on  $T$ .

*Proof* - Let  $u$  and  $v$  be two solutions of problem (A.1.1), (A.1.2) (A.1.3) corresponding to initial data  $(u_0, u_1)$  and  $(v_0, v_1)$  respectively. We set  $\omega = u - v$  and  $\omega_i = u_i - v_i$ ,  $i = 0, 1$ . Then, for every  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  we get

$$\begin{aligned} (\omega_{tt}, \varphi) + (\nabla\omega, \nabla\varphi) &= (a(u, p)u_t - a(v, p)v_t + b(u, p, p_t) - b(v, p, p_t), \varphi) \\ \omega &= 0, \text{ on } [0, T] \times \partial\Omega \\ \omega(0, x) &= \omega_0, \quad \omega_t(0, x) = \omega_1, \text{ in } \Omega \end{aligned}$$

Replacing  $\varphi$  by  $2\omega_t$  ( $u_t$  and  $v_t \in H_0^1(\Omega)$ ) gives

$$2(\omega_{tt}, \omega_t) + 2(\nabla\omega, \nabla\omega_t) = (a(u, p)u_t - a(v, p)v_t + b(u, p, p_t) - b(v, p, p_t), 2\omega_t)$$

and

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|\omega_t(t)\|^2 + \|\nabla\omega(t)\|^2) = \\ \left(\frac{\partial(a(u, p)u_t)}{\partial u}(\beta)\omega + \frac{\partial(a(u, p)u_t)}{\partial u_t}(\beta)\omega_t, 2\omega_t\right) + \left(\frac{\partial b}{\partial u}(\gamma)\omega, 2\omega_t\right), \end{aligned}$$

where  $\beta(t, x) \mapsto (\beta_1(t, x), \beta_2(t, x), p(t, x))$  and  $\gamma$  are vector functions between  $(u, u_t, p)$ ,  $(v, v_t, p)$  and  $(u, p, p_t)$ ,  $(v, p, p_t)$  respectively. By  $(A_1)$ ,  $(A_2)$  and Cauchy-Schwartz inequality

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|\omega_t(t)\|^2 + \|\omega(t)\|_1^2) &\leq C(\|\omega_t(t)\|^2 + \|\omega_t(t)\|\|\omega(t)\|) + |(\beta_2\omega, 2\omega_t)| \\ &\leq C(\|\omega_t(t)\|^2 + \|\omega_t(t)\|\|\omega(t)\| + \|\beta_2(t)\|\|\omega_t(t)\|\|\omega(t)\|_\infty) \end{aligned}$$

On the other hand, as in the proof of (A.2.10) we have

$$\|u_t(t)\|_1 \quad \text{and} \quad \|v_t(t)\|_1 \leq M \quad \text{a.e. on } ]0, T]. \quad (\text{A.3.1})$$

Therefore, as  $\beta_2(t, x)$  is between  $u_t(t, x)$  and  $v_t(t, x)$  then  $\|\beta_2(t)\| \leq M$ . Using the Sobolev embedding theorem [1], we get

$$\|\omega(t)\|_\infty \leq C\|\omega(t)\|_1,$$

since we have supposed  $n = 1$ . So

$$\frac{d}{dt}(\|\omega_t(t)\|^2 + \|\omega(t)\|_1^2) \leq M(\|\omega_t(t)\|^2 + \|\omega(t)\|_1^2), \quad \text{a.e. } t \in ]0, T) . \quad (\text{A.3.2})$$

Applying Gronwall inequality to (A.3.2) we get

$$\|\omega_t(t)\|^2 + \|\omega(t)\|_1^2 \leq M(T)(\|\omega_t(0, x)\|^2 + \|\omega(0, x)\|_1^2), \quad \text{a.e. } t \in ]0, T) \quad (\text{A.3.3})$$

This achieves the proof. □

**Corollary A.3.1** *Assume theorem A.2.1 assumptions are fulfilled and  $n = 1$ , problem (A.1.1)-(A.1.3) admits a unique weak solution*

$$u \in H^2(]0, T), L^2(\Omega)) \cap H^1(]0, T), H_0^1(\Omega)) .$$

## A.4 Application to cerebral activity model

We now quickly present a cerebral activity model stated by Jirsa and Haken [11], that we mathematically justify . This model equation is a particular case of equation (A.1.1).

The elementary unit of the nervous system is the neuron (Fig. D.1), which is divided into three basic components [7] : dendrites, cell body and axons. A neuron communicates with others at synapses and there are mainly two kinds of synapses [7] : excitatory or inhibitory types. The information transfer between two neurones A and B can be described as follows

- a pulse (electrical signal) arrives to dendrite of neuron A (under potential action) and acquires neurotransmitters (chemical substances) so that it is transformed as a wave. According to [7] this conversion is a linear operation between neural sheets.
- then the waves reaches the so-called “trigger zone” (Fig. 1) and is converted to pulse again. Now the conversion law is sigmoïdal .

The analysis of the conversion operations at the synapses and the trigger zone of neural ensembles allows to derive a nonlinear partial differential field equation describing the spatio-temporal behavior of brain activity.

The pulse and wave variables are classified as two sub-variables according to their excitatory or inhibitory characters : excitatory pulse  $E(x, t)$  and inhibitory pulse  $I(x, t)$ , excitatory wave  $\psi_e(x, t)$  and inhibitory wave  $\psi_i(x, t)$ . We can view the wave as :

$$\psi_k(x, t) = \int_{\Omega} f_k(x, X) H_k(x, X, t) dX \quad (\text{A.4.1})$$

Functions  $H_k(x, X, t)$ ,  $k = i, e$  are conversion operations outputs and functions  $f_k(x, X)$  are the corresponding spatial connectivity distributions.  $\Omega$  denotes the neural sheet set ( at the brain surface which is supposed to be continuous). In what follows  $\Omega \subset \mathbb{R}$  : we have chosen a 1D model for the brain geometry as in [10]. We assume that these connectivity functions have the following form :

$$f_k(x, X) = \frac{1}{2\sigma_k} e^{-\frac{|x-X|}{\sigma_k}} \quad (\text{A.4.2})$$

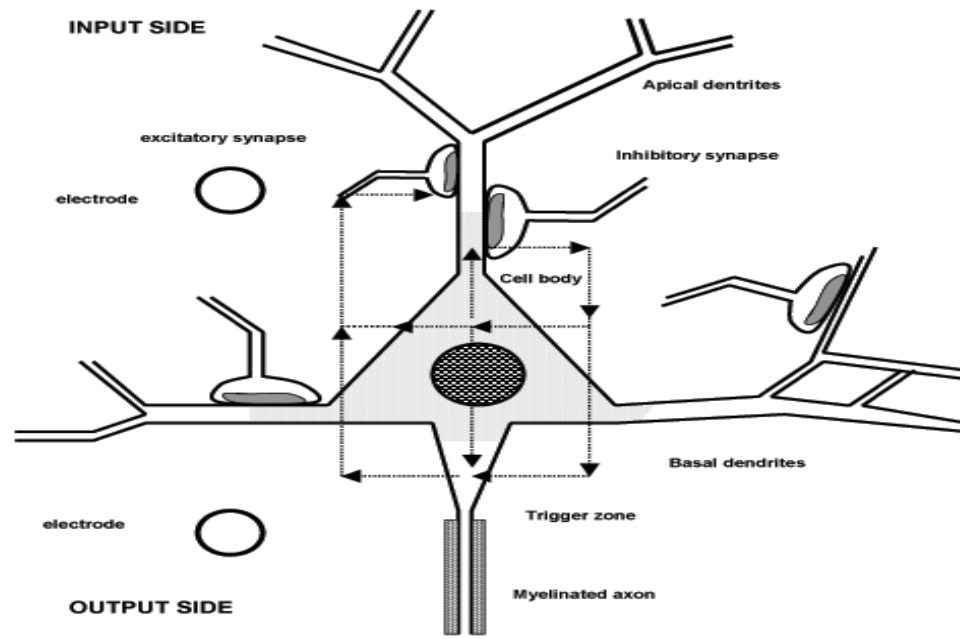


FIGURE A.1 – Dendritic trees form thousands of synapses, excitatory current flows inwardly at excitatory synapses and outwardly at the trigger zone. Inhibitory loop current flows in the opposite direction.

where  $k = e, i$ ,  $\sigma_e$  and  $\sigma_i$  are excitatory and inhibitory connectivity parameters (respectively). Moreover  $\sigma_i \ll 1$ , since the corticocortical connections (between two distant neurons via corticocortical fibers) are only excitatory.

On the other hand, the information propagation along corticocortical fibers, implies a delay  $t = \frac{|x - X|}{v_j}$ , where  $v_e$  and  $v_i$  are the propagation speed excitatory and inhibitory respectively



so that we obtain

$$H_k(x, X, t) = a_k E\left(X, t - \frac{|x - X|}{v_k}\right) \quad (\text{A.4.3})$$

where  $k = e, i$ ,  $a_e$  and  $a_i$  are real constants. Replacing equations (A.4.3) in (A.4.1) and suppose  $v = v_e$ , we obtain :

$$\psi_e(x, t) = a_e \int_{\Omega} f_e(x, X) E\left(X, t - \frac{|x - X|}{v}\right) dX \quad (\text{A.4.4})$$

$$\begin{aligned} \psi_i(x, t) &= \int_{\Omega} f_i(x, X) H_i(x, X, t) dX \\ &\approx f_i(x, x) H_i(x, x, t) = a_i I(x, t) \quad (\text{because } \sigma_i \ll 1) \end{aligned} \quad (\text{A.4.5})$$

The pulse value is calculated from the wave value and the external input in the neural tissue (Fig 1) ; it has a sigmoidal form :

$$E(x, t) = S_e[\psi_e(x, t) - \psi_i(x, t) + p_e(x, t)] , \quad I(x, t) = S_i[\psi_e(x, t) - \psi_i(x, t) + p_i(x, t)] \quad (\text{A.4.6})$$

where  $p_k(x, t)$  is the external input. The sigmoid function  $S_j$  is the following

$$S_j(n_j) = \frac{1}{1 + \exp(-v_j n_j)} - \frac{1}{2}$$

When  $n_j$  is small enough, we have a third order approximation of  $S_j$  :

$$S_j(n_j) \approx n_j - \frac{v_j^3 n_j^3}{48} \quad (\text{A.4.7})$$

Because  $\frac{v_e}{v_i} \approx 100$ , we take only the linear part of (A.4.7) in consideration to obtain :

$$\psi_i(x, t) \approx \frac{a_i v_i}{4 + a_i v_i} (\psi_e(x, t) + p_i(x, t)) \quad (\text{A.4.8})$$

We finally obtain the following equation for the dynamics of the excitatory synaptic activity :

$$\psi_e(x, t) = a_e \int_{\Omega} f_e(x, X) . S_e \left[ \tilde{\rho} \psi_e \left( X, t - \frac{|x - X|}{v} \right) + p \left( X, t - \frac{|x - X|}{v} \right) \right] dX$$

where  $p(x, t) = p_e(x, t) - \frac{a_i v_i}{4 + a_i v_i} . p_i(x, t)$ , and  $\tilde{\rho} = 1 - \frac{a_i v_i}{4 + a_i v_i}$ .

We suppose hereafter that  $\Omega := (0, L)$  is one-dimensional, that is we connect all neuron sheets by a line (see [10]),  $\psi_e(0, t) = \psi_e(L, t) = 0$  as in [10], and  $f_e(x, X)$  is an exponential function depending only on the distance between two neural sheets. Therefore

$$\psi_e(x, t) = a_e \int_{\Omega} f_e(x, X) . S_e \left[ \tilde{\rho} \psi_e \left( X, t - \frac{|x - X|}{v} \right) + p \left( X, t - \frac{|x - X|}{v} \right) \right] dX .$$

Let us mathematically justify the computation of [11].

We set  $\rho(X, T) = a_e S_e \left( \tilde{\rho} \psi(X, T) + p(X, T) \right)$  and

$$\begin{aligned} \mu : L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \langle \mu, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} h(x) \varphi(x, \frac{|x|}{v}) dx \end{aligned}$$

with  $h(x) = 1_{(0,L)} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$  and  $1_{(0,L)}$  is the indicatrix function of  $(0, T)$ .

$$\begin{aligned}\mu * \rho(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} h(X)g(X, \frac{|X|}{v})dX \quad \text{with } g(X, T) = \rho(x - X, t - T) \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(X)\rho(x - X, t - \frac{|x|}{v})dX \\ &= \int_{\Omega} f_e(x, X)\rho(X, t - \frac{|x - X|}{v})dX\end{aligned}$$

and

$$\mu * \rho(x, t) = \psi_e(x, t).$$

The extended Fourier transform gives :  $\widehat{\psi}_e = \widehat{\mu}\widehat{\rho}$ .

Now, we prove that  $\widehat{\mu} = T_f, f \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ . Let  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned}\langle \widehat{\mu}, \varphi \rangle &= \langle \mu, \widehat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} h(X)\widehat{\varphi}(X, \frac{|X|}{v})dX \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(X) \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, t) e^{-2i\pi(xX + t\frac{|X|}{v})} dx dt \right) dX \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} h(X) e^{-2i\pi(xX + t\frac{|X|}{v})} dX \right) \varphi(x, t) dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, t) \varphi(x, t) dx dt\end{aligned}$$

with  $f(x, t) = \frac{1}{2\sigma_e} \int_{\Omega} e^{-\frac{|X|}{\sigma}} e^{-2i\pi(xX + t\frac{|X|}{v})} dX$ .

Then :

$$\widehat{\psi}_e(x, t) = f(x, t)\widehat{\rho}(x, t) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{A.4.9}$$

As :

$$\int_0^{+\infty} e^{-(a+i\alpha)\zeta} d\zeta = \frac{1}{a+i\alpha} \tag{A.4.10}$$

supposing  $\omega_0 = \frac{v}{\sigma}$ ; we obtain

$$\begin{aligned}f(x, t) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\frac{1}{\sigma_e} + i\left(\frac{t}{v} - x\right)} + \frac{1}{\frac{1}{\sigma_e} + i\left(\frac{t}{v} + x\right)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\omega_0}{\omega_0 + i(t - xv)} + \frac{\omega_0}{\omega_0 + i(t + xv)} \right] \\ &= \left[ \frac{\omega_0^2 + i\omega_0 t}{(\omega_0 + it)^2 + x^2 v^2} \right] \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})\end{aligned}$$

Equation (A.4.9) becomes

$$\widehat{\psi}_e(x, t) = \left[ \frac{\omega_0^2 + i\omega_0 t}{(\omega_0 + it)^2 + x^2 v^2} \right] \widehat{\rho}(x, t) \tag{A.4.11}$$

Developing equation (A.4.11), we obtain

$$\omega_0^2 \widehat{\psi}_e(x, t) + 2\omega_0 \frac{\partial \widehat{\psi}_e}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial^2 \widehat{\psi}_e}{\partial t^2}(x, t) - v^2 \frac{\partial^2 \widehat{\psi}_e}{\partial x^2}(x, t) = \widehat{\omega_0^2 + \omega_0 \frac{\partial}{\partial t}} \cdot \rho(x, t)$$

Applying the inverse Fourier Transform, we formally obtain the following partial derivative equation :

$$\frac{\partial^2 \psi_e}{\partial t^2} + (\omega_0^2 - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \psi_e + 2\omega_0 \frac{\partial \psi_e}{\partial t} = (\omega_0^2 + \omega_0 \frac{\partial}{\partial t}) \cdot \rho \quad (\text{A.4.12})$$

with

$$\rho(x, t) = a_e S_e \left( \tilde{\rho} \psi_e(x, t) + p(x, t) \right) .$$

Developing (A.4.12) and summing the similar terms gives

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial x^2} &= \left( a_e \omega_0 \tilde{\rho} S_e'(\tilde{\rho} \psi_e + p) - 2\omega_0 \right) \frac{\partial \psi_e}{\partial t} \\ &- \omega_0^2 \psi_e + a_e \omega_0^2 S_e(\tilde{\rho} \psi_e + p) + a_e \omega_0 S_e'(\tilde{\rho} \psi_e + p) p_t . \end{aligned} \quad (\text{A.4.13})$$

We complete this equation with  $\psi_e(t, 0) = \psi_e(t, L) = 0$ , and Cauchy initial condition. Thanks to the previous sections results we have the following :

**Theorem A.4.1** *Assume  $p \in H^2([0, T], L^\infty(0, L))$ . Then equation (A.4.13) with  $\psi_e(t, 0) = \psi_e(t, L) = 0$ , and Cauchy initial condition with  $(\psi_{e,0}, \psi_{e,1}) \in H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$  has a unique weak solution in  $H^2([0, T], L^2(0, L)) \cap H^1([0, T], H_0^1(0, L))$ .*

*Proof* - Equation (A.4.13) is a particular case from equation (A.1.1), with

$$a(u, p) = a_e \omega_0 \tilde{\rho} S_e'(\tilde{\rho} u + p) - 2\omega_0,$$

and

$$b(u, p, p_t) = -\omega_0^2 u + a_e \omega_0^2 S_e(\tilde{\rho} u + p) + a_e \omega_0 S_e'(\tilde{\rho} u + p) p_t.$$

If we suppose  $p \in H^2([0, T], L^\infty(0, L))$ , it is easy to view that  $a$  and  $b$  functions verify Theorem A.2.1 conditions and consequently by (A.2.20), (A.3.3) the above equation has a unique weak solution.  $\square$

## A.5 Conclusion

In this paper, we prove existence of solutions to a new class of wave equations, which is motivated by brain activity modeling. In the 1D spatial dimension case, the solution depends Lipschitz continuously on the initial data, and so it is unique. This means that the responses to small perturbations are small as well, which is coherent from a physical point of view. We have simplified the model assuming that :

- the geometry of brain area is 1D. The 2D geometry is more consistent but introduces additional difficulties,
- the connectivity functions (A.4.2) between the neural sheet are homogeneous. In fact more than 50 % of neural sheet have heterogeneous connections, so we should add another term representing the heterogeneity,

- the external input  $p$  belongs to  $H^2([0, T], L^\infty(\Omega))$ . In reality  $p$  maybe less smooth or non local.

In our future work, we will try to generalize our model in order to satisfy the general constraints which are introduced above.



# Bibliographie

- [1] Robert A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York-London, pure and applied mathematics, vol. 65 edition, 1975.
- [2] Nikolaos Bournaveas. Low regularity solutions for a class of nonlinear wave equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(9) :2721–2727 (electronic), 2005.
- [3] J. W. Cholewa and Tomasz Dlotko. Strongly damped wave equation in uniform spaces. *Nonlinear Anal.*, 64(1) :174–187, 2006.
- [4] Yuki Yoshi Ebihara. On some nonlinear evolution equations with the strong dissipation. *J. Differential Equations*, 30(2) :149–164, 1978.
- [5] Jorge A. Esquivel-Avila. The dynamics of a nonlinear wave equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 279(1) :135–150, 2003.
- [6] Eduard Feireisl. Global attractors for semilinear damped wave equations with supercritical exponent. *J. Differential Equations*, 116(2) :431–447, 1995.
- [7] W.J Freeman. Tutorial on neurobiology : From single neurons to brain chaos. *J. Int. J. Bifurcation and chaos*, 2 :451–482, 1992.
- [8] P. Freitas. On some eigenvalue problems related to the wave equation with indefinite damping. *J. Differential Equations*, 127 :320–335, 1996.
- [9] ALLAIRE Grégoire. *Analyse numérique et optimisation*. éditions de l' école polytechnique edition, 2005.
- [10] V.K Jirsa. Connectivity and dynamics of neural information processing. *neuroinformatics*. *Neuroinformatics*, 2 :183–204, 2004.
- [11] V.K. Jirsa and H Haken. Field theory of electromagnetic brain activity. *Phys, Rev. Let.*, 77 :960–963, 1996.
- [12] Tarel Kiguradze. On bounded and time-periodic solutions of nonlinear wave equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 259(1) :253–276, 2001.
- [13] Howard A. Levine, Sang Ro Park, and James Serrin. Global existence and global nonexistence of solutions of the Cauchy problem for a nonlinearly damped wave equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 228(1) :181–205, 1998.
- [14] Howard A. Levine and Grozdena Todorova. Blow up of solutions of the Cauchy problem for a wave equation with nonlinear damping and source terms and positive initial energy. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129(3) :793–805 (electronic), 2001.
- [15] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, 1969.

- [16] Julián López-Gómez. On the linear damped wave equation. *J. Differential Equations*, 134(1) :26–45, 1997.
- [17] Kenji Nishihara and Huijiang Zhao. Existence and nonexistence of time-global solutions to damped wave equation on half-line. *Nonlinear Anal.*, 61(6) :931–960, 2005.
- [18] P.L. Nunez. The brain wave equation : A model for the eeg. *Mathematical Biosciences*, 21 :279–297, 1974.
- [19] Rafael Orive and Enrique Zuazua. Long-time behavior of solutions to a nonlinear hyperbolic relaxation system. *J. Differential Equations*, 228(1) :17–38, 2006.
- [20] Jong Yeoul Park and Jeong Ja Bae. On solutions of quasilinear wave equations with nonlinear damping terms. *Czechoslovak Math. J.*, 50(125)(3) :565–585, 2000.
- [21] David R. Pitts and Mohammad A. Rammaha. Global existence and non-existence theorems for nonlinear wave equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 51(6) :1479–1509, 2002.
- [22] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Éléments d'analyse*. Dunod, Paris, second edition, 2002.
- [23] Grozdna Todorova. Cauchy problem for a nonlinear wave equation with nonlinear damping and source terms. *Nonlinear Anal.*, 41(7-8, Ser. A : Theory Methods) :891–905, 2000.
- [24] Grozdna Todorova and Borislav Yordanov. Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(7) :557–562, 2000.
- [25] Komornik V. *Exact Controllability and Stabilisation. The Multiplier Method*. Masson-John Wiley, paris, 1994.
- [26] H.R. Wilson and J.D. Cowan. Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons. *Biophysical Journal*, 12 :1–24, 1972.
- [27] Karen Yagdjian. Global existence in the Cauchy problem for nonlinear wave equations with variable speed of propagation. In *New trends in the theory of hyperbolic equations*, volume 159 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 301–385. Birkhäuser, Basel, 2005.
- [28] Qi S. Zhang. A blow-up result for a nonlinear wave equation with damping : the critical case. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 333(2) :109–114, 2001.
- [29] Yang Zhijian. Initial boundary value problem for a class of non-linear strongly damped wave equations. *Math. Methods Appl. Sci.*, 26(12) :1047–1066, 2003.
- [30] Shengfan Zhou and Xiaoming Fan. Kernel sections for non-autonomous strongly damped wave equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 275(2) :850–869, 2002.
- [31] Yong Zhou. A blow-up result for a nonlinear wave equation with damping and vanishing initial energy in  $\mathbb{R}^n$ . *Appl. Math. Lett.*, 18(3) :281–286, 2005.
- [32] Yong Zhou. Global existence and nonexistence for a nonlinear wave equation with damping and source terms. *Math. Nachr.*, 278(11) :1341–1358, 2005.

# Mouhamad JRADEH

## SUR LES ÉQUATIONS DES ONDES AMORTIES DÉRIVÉES DE LA MODÉLISATION CÉRÉBRALE

**Résumé :** Dans ce travail, on s'est intéressé à une équation des ondes amorties intervenant dans un modèle de l'activité cérébrale :

$$\psi_{tt} + (\omega_0^2 - c^2 \Delta)\psi + 2\omega_0 \psi_t = (\omega_0^2 + \omega_0 \frac{\partial}{\partial t})S(\psi + p)$$

Elle a été établie par Jirsa et Haken en 1996. Ici  $\psi(x, t)$  représente la valeur de l'onde provenant de l'activité cérébrale au point  $x$  à l'instant  $t$ . La fonction  $p$  est un stimulus externe se propageant à travers le thalamus. Nous nous sommes attachés à

1. justifier l'origine physiologique de cette équation et affiner le modèle pour des cas plus réalistes.
2. démontrer l'existence et l'unicité d'une solution et discuter le cas où l'énergie de la solution décroît exponentiellement vers zéro à l'infini.
3. construire un schéma numérique stable, et le valider avec des simulations numériques.
4. étudier un problème d'identification de l'impulsion thalamique (la fonction  $p(t, x)$ ).

**Mots-clés :** Neurosciences, impulsion thalamique, équation d'onde, schéma aux différences finies.

## ON A DAMPED WAVE EQUATION DERIVED FROM BRAIN MODELLING

**Abstract :** In this work, we are interested in the following damped wave equation derived from brain modelling :

$$\psi_{tt} + (\omega_0^2 - c^2 \Delta)\psi + 2\omega_0 \psi_t = (\omega_0^2 + \omega_0 \frac{\partial}{\partial t})S(\psi + p)$$

This equation has been set by Jirsa and Haken in 1996. Here  $\psi(x, t)$  denotes the value of the wave generated by cerebral activity at the point  $x$  at time  $t$ . The function  $p$  is an external input which is transmitted to the cortex via the thalamus. For this equation, we have

1. justified it from the physiological point of view and generalised it to a more realistic cases.
2. proved existence and uniqueness of a solution and discussed the case where the energy decreases exponentially to zero.
3. constructed a stable numerical scheme and validated it with numerical simulations.
4. finally, we have studied an inverse problem of thalamic input identification (the function  $p(t, x)$ ).

**Key words :** Computational neuroscience, thalamic input, wave equation, finite difference scheme.

MAPMO, Université d'Orléans  
UFR Sciences Btiment de mathématiques  
Route de Chartres B.P. 6759, 45067 Orléans cedex 2 FRANCE